



**HAL**  
open science

# Ondes magnéto-gravito-inertielles dans les étoiles et les planètes géantes gazeuses à l'heure des missions spatiales : de la sismologie stellaire à la dissipation de marée planétaire

Hachem Dhouib

► **To cite this version:**

Hachem Dhouib. Ondes magnéto-gravito-inertielles dans les étoiles et les planètes géantes gazeuses à l'heure des missions spatiales : de la sismologie stellaire à la dissipation de marée planétaire. Astrophysique [astro-ph]. Université Paris Cité, 2023. Français. NNT : 2023UNIP7154 . tel-04606839

**HAL Id: tel-04606839**

**<https://theses.hal.science/tel-04606839>**

Submitted on 10 Jun 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS CITÉ  
ÉCOLE DOCTORALE 127 : ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE D'ÎLE-DE-FRANCE  
CEA PARIS-SACLAY, AIM - DÉPARTEMENT D'ASTROPHYSIQUE

---

# Ondes magnéto-gravito-inertielles dans les étoiles et les planètes géantes gazeuses à l'heure des missions spatiales

De la sismologie stellaire à la dissipation de marée planétaire

---

par

Hachem DHOUIB

THÈSE DE DOCTORAT D'ASTRONOMIE ET D'ASTROPHYSIQUE

Dirigée par Dr. Stéphane MATHIS

Présentée et soutenue publiquement le 22 septembre 2023

Devant un jury composé de :

Pr. Sébastien CHARNOZ, Professeur, *Université Paris Cité - ICGP* ..... Président du jury  
Pr. Marc-Antoine DUPRET, Professeur, *Université de Liège* ..... Rapporteur  
Dr. Patrice LE GAL, Directeur de recherche CNRS, *IRPHE Marseille* ..... Rapporteur  
Pr. Conny AERTS, Professeure, *KU Leuven* ..... Examinatrice  
Pr. Corinne CHARBONNEL, Professeure, *Université de Genève* ..... Examinatrice  
Dr. Stéphane MATHIS, Directeur de recherche, *CEA Paris-Saclay* ..... Directeur de thèse  
Dr. Clément BARUTEAU, Chargé de recherche CNRS, *IRAP Toulouse* ..... Invité



*"Contrairement aux idées reçues, il est tout à fait possible  
d'avoir un échange passionnant à propos d'un livre  
que l'on n'a pas lu, y compris, et peut-être  
surtout, avec quelqu'un qui ne  
l'a pas lu non plus."*

P. Bayard



# Remerciements

Au cours des trois dernières années, j'ai rencontré et travaillé avec de nombreuses personnes qui m'ont soutenu tout au long de mon parcours et que je tiens à remercier.

Commençons par le commencement, une thèse ne peut être couronnée de succès sans la contribution de son directeur de thèse, et j'ai eu la chance d'être supervisé par une personne qui m'a fait confiance dès le début et m'ont mis le pied à l'étrier à chaque fois que j'en ai eu besoin. C'est la raison pour laquelle, je souhaite en premier lieu formuler ma profonde reconnaissance envers Stéphane. Je te remercie pour ton aide constante et précieuse, depuis que nous nous sommes rencontrés à l'ENSTA Paris, puis de m'avoir fait confiance pour intégrer ton équipe de recherche. Merci de m'avoir guidé avec un mélange si bien équilibré de rigueur, de passion et de bienveillance. Merci de ton écoute attentive et des discussions que nous avons partagées au-delà du champ de la recherche qui ont fait de ces années une si riche aventure humaine.

Je remercie Monsieur Marc-Antoine Dupret et Monsieur Patrice Le Gal pour avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Je remercie également leur soutien et retours très positifs sur mes travaux. Je remercie Monsieur Sébastien Charnoz d'avoir présidé mon jury, ainsi que Conny Aerts et Corinne Charbonnel pour leur présence et relecture en tant qu'examinatrices. J'ai été très honoré de l'intérêt qu'ils ont témoigné pour mon travail, de discuter leurs commentaires, de répondre à leurs questions pertinentes, mais aussi de recevoir leurs félicitations. J'ai aussi à cœur de remercier Clément Baruteau, qui a fait partie de ce même jury en tant qu'invité, mais fait avant tout partie des personnes sans qui ce travail n'aurait pu être ce qu'il est. Une bonne partie de ce travail est le fruit de discussions scientifiques passionnantes et des échanges que nous avons développés et entretenus. Je le remercie pour son encadrement bienveillant et encourageant.

Mon doctorat n'aurait pas pu se dérouler dans de meilleures conditions grâce au Département d'Astrophysique du CEA Paris-Saclay. Je souhaite sincèrement remercier mes collègues : Louis, Adam, Leïla, Valeria, Dinil, Antonio, Valentin, Sylvain, Camille, Barbara, Maxime, Zoubair, Jérémy, Quentin, Elsa, Rafa, Alexandre, Achrène, Antoine, Sacha, qui ont non seulement partagé leurs connaissances scientifiques, mais aussi de nombreux repas au cours de ces trois années. Merci également à mes collaborateurs, en particulier Vincent Prat, Timothy Van Reeth, Florian Debras, Michel Rieutord, Aurélie Astoul et Lisa Bugnet. Je remercie aussi Corinne Charbonnel, Philippe Stee, Jérôme Guilet, Thierry Fouchet et Jérôme Rodriguez d'avoir prêté une oreille attentive et un regard bienveillant sur le déroulement et l'avancement de mon travail de thèse. Je tiens également à remercier Conny pour m'avoir si chaleureusement accueilli à Leuven. Sa générosité et sa gentillesse ont grandement contribué à rendre mon expérience dans cette ville mémorable. Je remercie aussi Corinne pour son invitation et son chaleureux accueil à Genève. Son hospitalité et sa gentillesse ont rendu mon séjour des plus agréables, et je suis reconnaissant de l'opportunité qui m'a été offerte de donner mon premier séminaire dans cet environnement accueillant.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui me sont chères. Ma famille a toujours été d'un soutien inébranlable. Je suis débordant de gratitude envers mes parents. Merci papa, merci maman de m'avoir épaulé en toutes circonstances et avec tant d'amour. Merci de m'avoir guidé, en m'indiquant



les voies mais en me laissant prendre le chemin. Merci de m'avoir toujours procuré les moyens de vivre mes passions. Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers mon grand frère Hedi pour sa présence constante dans ma vie. Je suis reconnaissant de pouvoir compter sur lui et je lui envoie tout mon amour. Je tiens également à remercier chaleureusement ma belle-sœur Wafa pour sa présence constante et ses encouragements. Je tiens aussi à exprimer ma gratitude envers ma belle-famille pour leur soutien continu, leurs encouragements sincères et leur précieuse présence à mes côtés.

Il est impossible de ne pas exprimer ma gratitude envers ma chère sœur (ma "petite maman") Hana et mon beau-frère (je dirais plutôt mon cher frère) Dali, pour leur soutien inconditionnel dans tout ce que j'entreprends. Leur présence et leur encouragement constants ont été un véritable pilier dans ma vie, et je ne saurais jamais assez les remercier pour tout ce qu'ils ont fait pour moi. Les week-ends que je passe en votre compagnie constitue un véritable refuge, un moment précieux où je parviens à échapper complètement aux pressions incessantes de mon travail. C'est un moment de détente et de déconnexion où je peux me ressourcer, me recentrer sur l'essentiel, et oublier temporairement les soucis professionnels qui pèsent sur mes épaules. Votre présence et l'atmosphère apaisante que nous créons ensemble me permettent de recharger mes batteries mentales et émotionnelles, me donnant la force nécessaire pour affronter la semaine à venir avec sérénité. Les soirées inoubliables passées à jouer à des jeux de société et à FIFA resteront à jamais gravées dans ma mémoire, tout comme nos conversations variées et enrichissantes. Chacune de ces occasions a rendu notre relation encore plus spéciale.

Enfin et surtout, je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers ma chérie Chahinez pour sa patience infinie, que ce soit dans les moments de doute ou d'euphorie. Supporter un fiancé-thésard dans une relation à distance n'est certainement pas une tâche facile. J'espère sincèrement pouvoir te rendre tout le soutien, l'amour et les moments de rire que tu m'as offerts pour le reste de notre vie ensemble. Ta compréhension inébranlable, ton encouragement constant et ta présence rassurante ont été des piliers essentiels dans ma vie, et je ne saurais jamais assez te remercier pour tout cela. Tu as été mon roc, ma confidente et mon plus grand soutien, et je suis reconnaissant chaque jour de t'avoir à mes côtés. Je suis impatient de passer le reste de ma vie avec toi, de créer de précieux souvenirs ensemble, et de continuer à construire notre avenir main dans la main. Ton amour est ma plus grande source de bonheur, et je ferai de mon mieux pour que chaque jour à tes côtés soit aussi merveilleux que toi.





# Résumé

## Ondes magnéto-gravito-inertielles dans les étoiles et les planètes géantes gazeuses à l'heure des missions spatiales : de la sismologie stellaire à la dissipation de marée planétaire

Les ondes magnéto-gravito-inertielles se propagent au sein des régions stablement stratifiées magnétisées en rotation en ayant pour forces de rappel la force de Lorentz, la poussée d'Archimède et l'accélération de Coriolis. Ces ondes jouent un rôle essentiel pour sonder l'intérieur des étoiles et des planètes et y redistribuer le moment cinétique. Cette thèse se focalise sur deux domaines d'études pour lesquels ces ondes sont essentielles : la magnéto-astérosismologie théorique dans les étoiles de masses intermédiaires et massives et la dissipation de marée dans les planètes géantes gazeuses.

Tout d'abord, les pulsateurs en modes gravito-inertiels constituent une mine d'or pour notre compréhension globale de la rotation stellaire. Pour exploiter les informations fournies par l'observation de ces modes, il est crucial d'améliorer notre compréhension de la façon dont la rotation stellaire, potentiellement rapide et différentielle, les influence en prenant en compte l'action des accélérations de Coriolis et centrifuge ainsi que celle d'un possible champ magnétique. Dans ce cadre, l'approximation traditionnelle de la rotation (TAR) fournit un traitement flexible de la propagation adiabatique des modes de gravité modifiés par la rotation, qui est utilisé pour la modélisation sismique intensive des étoiles. Cependant, il a été construit sur les hypothèses d'étoiles sphériques en rotation uniforme sans champ magnétique. En premier lieu, nous généralisons donc la TAR pour prendre en compte simultanément la déformation centrifuge et la rotation différentielle. Nous identifions son domaine d'applicabilité et nous examinons leurs signatures observationnelles et leur détectabilité. Ensuite, nous nous concentrons sur l'effet d'un champ magnétique azimutal qui est l'un des mécanismes clés pour potentiellement expliquer le fort transport du moment cinétique observé dans les étoiles. Pour cela, nous généralisons la TAR en prenant en compte simultanément un tel champ magnétique et la rotation différentielle. Nous dérivons les propriétés asymptotiques des modes magnéto-gravito-inertiels et nous explorons la détectabilité de différentes configurations de champ possibles. Nous démontrons que ce sont les champs équatoriaux qui seront les plus favorables en exploitant les observations provenant des missions *Kepler* et *TESS* et *PLATO* dans le futur.

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous nous concentrons sur les planètes géantes gazeuses qui sont aussi des rotateurs rapides et qui ont de fortes interactions avec leur environnement dans notre système solaire et dans les systèmes exoplanétaires. La dissipation des ondes excitées par les marées façonne leur architecture orbitale et leur dynamique rotationnelle. Récemment, les observations astrométriques des systèmes de Jupiter et de Saturne ont remis en question notre compréhension de leur formation et de leur évolution avec une dissipation des marées plus forte dans ces planètes que ce qui avait été prédit auparavant qui contraste avec celles des exoplanètes géantes gazeuses qui semble plus faible. Ces nouvelles contraintes motivent le développement de modélisations réalistes de la dissipation de marée à l'intérieur de ces planètes. Simultanément, les missions spatiales Juno et Cassini ont révolutionné notre connaissance des intérieurs de Jupiter et de Saturne dont la structure est une combinaison de zones stablement stratifiées et de régions convectives. Nous développons donc de nouvelles simulations numériques d'ondes de marée linéaires à l'intérieur de Jupiter en utilisant des modèles de structure interne qui satisfont les contraintes observationnelles de Juno en prenant en compte les diffusions visqueuses, thermiques et chimiques. Nous explorons les propriétés de la dissipation de marée en fonction des paramètres clés hydrodynamiques et structurels et nous démontrons l'importance des régions stablement stratifiées pour atteindre les valeurs de dissipation observées pour Jupiter.

**Mots-clés :** Ondes – Étoiles – Planètes géantes – Astérosismologie – Marées – Rotation – Champ magnétique – Magnétohydrodynamique – Simulations numériques

# Abstract

## **Magneto-gravito-inertial waves in stars and gas giant planets at the time of space missions : from stellar seismology to planetary tidal dissipation**

Magneto-gravito-inertial waves propagate within rotating magnetised stably stratified regions, with the Lorentz force, the Archimedean force and the Coriolis acceleration acting as restoring forces. These waves play an essential role in probing the interior of stars and planets and redistributing angular momentum. This thesis focuses on two fields of study for which these waves are essential : theoretical magneto-asteroseismology in intermediate-mass and massive stars, and tidal dissipation in gas giant planets.

First of all, gravito-inertial modes pulsators represent a goldmine for our overall understanding of stellar rotation. To exploit the information provided by the observations of these modes, it is crucial to improve our understanding of how the potentially rapid and differential rotation influences them, by taking into account the action of Coriolis and centrifugal accelerations, as well as that of a possible magnetic field. Within this framework, the traditional approximation of rotation (TAR) provides a flexible treatment of the adiabatic propagation of rotationally modified gravity modes, which is used for intensive seismic modelling of stars. However, it has been built on the assumptions of uniformly rotating spherical stars without magnetic field. Firstly, we generalise the TAR to take into account centrifugal deformation and differential rotation simultaneously. We identify its range of applicability and examine their observational signatures and detectability. Next, we focus on the effect of a general azimuthal magnetic field, which is one of the key mechanisms that could potentially explain the strong angular momentum transport observed in stars. To this end, we generalize the TAR by simultaneously taking into account such a magnetic field and the differential rotation. We derive the asymptotic properties of magneto-gravito-inertial modes and explore the detectability of different possible field configurations. We demonstrate that equatorial fields will be the most favourable using observations from the *Kepler* and TESS missions and PLATO in the future.

In the second part of this thesis, we focus on gas giant planets, which are also fast rotators and have strong interactions with their environment in our solar system and in exoplanetary systems. The dissipation of tidally excited waves shapes their orbital architecture and rotational dynamics. Recently, astrometric observations of Jupiter and Saturn systems have challenged our understanding of their formation and evolution, with stronger tidal dissipation in these planets than previously predicted, in contrast to what appears to be weaker in gas giant exoplanets. These new constraints are motivating the development of realistic models of tidal dissipation inside these planets. At the same time, the Juno and Cassini space missions have revolutionised our knowledge of the interiors of Jupiter and Saturn, whose structure is a combination of stably stratified zones and convective regions. We have therefore developed new numerical simulations of linear tidal waves in Jupiter's interior, using internal structure models that satisfy Juno's observational constraints by taking into account viscous, thermal and chemical diffusions. We explore the properties of tidal dissipation as a function of key hydrodynamic and structural parameters, and demonstrate the importance of stably stratified regions in reaching the dissipation values observed for Jupiter.

**Keywords :** Waves – Stars – Giant planets – Asteroseismology – Tides – Rotation – Magnetic field – Magneto-hydrodynamics – Numerical simulations



# Table des matières

<b>Introduction et contexte général</b>	<b>1</b>
1 Systèmes planétaires : les étoiles hôtes et leurs cortèges de planètes	1
1.1 Les étoiles : une variété de types et de caractéristiques	2
1.2 Taxonomie des planètes	4
2 Oscillations stellaires et planétaires	6
3 Contraintes observationnelles à l’heure des missions spatiales	10
3.1 Structure et dynamique interne stellaire	10
3.2 Structure interne et dynamique des planètes géantes gazeuses	13
4 Rôle central des oscillations dans l’évolution des systèmes stellaires et planétaires	16
4.1 Évolution rotationnelle et chimique des étoiles	16
4.2 Évolution séculaire : interaction de marée	18
5 Enjeux de la thèse	20
6 Organisation du manuscrit	20
<b>1 Propriétés générales des ondes magnéto-gravito-inertielles</b>	<b>21</b>
1.1 Brève histoire des ondes dans les régions magnétisées en rotation	21
1.2 Théorie linéaire des ondes magnéto-gravito-inertielles (MGI)	23
1.2.1 Système d’équations de la magnétohydrodynamique (MHD) idéale	23
1.2.2 Linéarisation des équations de la magnétohydrodynamique	23
1.2.3 Approximation JWKB	24
1.2.4 Système d’équations MHD linéarisé	24
1.3 Relation de dispersion	24
1.4 Vitesse de phase et vitesse de groupe	27
1.5 Aspects énergétiques	28
<b>I Sismologie stellaire</b>	<b>31</b>
<b>2 Introduction à l’astérosismologie</b>	<b>33</b>
2.1 Oscillations stellaires à travers le diagramme de Hertzsprung-Russell	34
2.1.1 Étoiles de type solaire	34
2.1.2 Étoiles de type $\gamma$ Doradus	35



2.1.3	Étoiles de type B à pulsation lente . . . . .	36
2.2	Équations des oscillations non-radiales . . . . .	37
2.3	Fréquences asymptotiques des modes g . . . . .	40
2.3.1	Équation de Schrödinger radiale et méthode JWKB . . . . .	41
2.3.2	Relation de quantification . . . . .	41
2.3.3	Espacement en période des modes g . . . . .	41
2.4	Astérosismologie et rotation . . . . .	42
2.4.1	Approche perturbative . . . . .	42
2.4.2	Calcul bidimensionnel complet . . . . .	43
2.4.3	Approximation traditionnelle de la rotation . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Approximation traditionnelle de la rotation dans les étoiles déformées en rotation différentielle rapide</b> . . . . .	<b>53</b>
3.1	Géométrie sphéroïdale . . . . .	55
3.2	Équations hydrodynamiques dans les objets déformés en rotation . . . . .	55
3.3	TAR centrifuge : une nouvelle généralisation de la TAR standard . . . . .	57
3.3.1	Première hypothèse : $N^2$ dépend majoritairement du pseudo-rayon . . . . .	57
3.3.2	TAR centrifuge . . . . .	58
3.4	Dynamique des ondes gravito-inertielles à basse fréquence . . . . .	59
3.4.1	Approximation JWKB . . . . .	59
3.4.2	Deuxième et troisième hypothèses : $\Omega$ et $\mathcal{A}$ dépendent majoritairement du pseudo-rayon . . . . .	59
3.4.3	Équation de marée de Laplace généralisée . . . . .	59
3.4.4	Fréquences asymptotiques des modes gravito-inertiels dans une étoile déformée en rotation . . . . .	60
3.5	Application aux étoiles de masse intermédiaire en rotation rapide . . . . .	60
3.5.1	Modèles ESTER . . . . .	60
3.5.2	Domaine de validité de la TAR centrifuge . . . . .	61
3.5.3	Valeurs propres et fonctions de Hough . . . . .	63
3.5.4	Détectabilité de l'effet de déformation centrifuge et de la rotation différentielle . . . . .	66
3.6	Conclusions et perspectives . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Approximation traditionnelle de la rotation magnétique</b> . . . . .	<b>99</b>
4.1	Limites de l'approche perturbative . . . . .	101
4.1.1	Approche perturbative généralisée . . . . .	101
4.1.2	Application à une étoile de masse intermédiaire . . . . .	103
4.2	Système d'équations MHD dans les étoiles magnétisées en rotation différentielle . . . . .	106
4.2.1	Topologie magnétique . . . . .	106
4.2.2	Système d'équations MHD linéarisées . . . . .	106
4.3	TAR magnétique avec rotation différentielle . . . . .	108
4.4	Dynamique des ondes MGI . . . . .	110
4.4.1	Approximation JWKB . . . . .	110
4.4.2	Équation de marée de Laplace magnétique . . . . .	110
4.4.3	Diagnostic sismique asymptotique des modes MGI . . . . .	111
4.5	Application aux étoiles de masse intermédiaire de la séquence principale . . . . .	112
4.5.1	Modèle MESA de l'étoile $\gamma$ Dor étudiée . . . . .	112

---

◆◆◆

4.5.2	Configurations du champ magnétique toroïdal . . . . .	112
4.5.3	Valeurs propres et fonctions de Hough . . . . .	115
4.5.4	DéTECTABILITÉ de la signature magnétique . . . . .	116
4.6	Conclusions et perspectives . . . . .	118
<b>II</b>	<b>Dissipation de marée planétaire</b>	<b>141</b>
<b>5</b>	<b>Interactions de marée dans les systèmes de planètes géantes gazeuses</b>	<b>143</b>
5.1	Théorie linéaire des marées . . . . .	144
5.1.1	Potentiel de marée . . . . .	146
5.1.2	Nombre de Love et facteur de qualité . . . . .	147
5.1.3	Couple et dissipation de marée . . . . .	148
5.1.4	Évolution dynamique . . . . .	148
5.2	Marée d'équilibre et marée dynamique . . . . .	149
5.2.1	Marée d'équilibre (non-ondulatoire) . . . . .	149
5.2.2	Marée dynamique (ondulatoire) . . . . .	153
5.3	Dissipation de l'énergie de marée . . . . .	153
5.4	Nouvelle vision de la structure et de la dynamique interne des planètes géantes gazeuses	156
5.4.1	Structure interne . . . . .	156
5.4.2	Dynamique interne . . . . .	157
5.5	État de l'art sur la dissipation de marée . . . . .	159
5.5.1	Dans le noyau solide et l'enveloppe convective . . . . .	159
5.5.2	Dans les zones stablement stratifiées . . . . .	160
<b>6</b>	<b>Étude de la dissipation de la marée dynamique dans les planètes géantes gazeuses depuis le cœur jusqu'à la surface</b>	<b>161</b>
6.1	Formulation du problème forcé . . . . .	163
6.1.1	Terme de forçage . . . . .	164
6.1.2	Système d'équations de la marée dynamique . . . . .	164
6.1.3	Adimensionnement des équations . . . . .	165
6.1.4	Bilan énergétique . . . . .	166
6.2	Modèle d'intérieur de Jupiter . . . . .	167
6.2.1	Modèle de structure . . . . .	167
6.2.2	Propriétés de transport . . . . .	168
6.3	Résolution numérique . . . . .	170
6.3.1	Marée d'équilibre . . . . .	170
6.3.2	Marée dynamique : Simulations hydrodynamiques 2D avec le code LSB . . . . .	171
6.3.3	Coupe méridienne de l'énergie cinétique . . . . .	173
6.3.4	Conservation d'énergie . . . . .	173
6.3.5	Spectre de dissipation . . . . .	174
6.3.6	Lien avec les observations : facteur de qualité et nombre de Love . . . . .	175
6.4	Conclusions et perspectives . . . . .	178
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>201</b>



<b>Autres contributions : modes de gravité dans les étoiles de type solaire</b>	<b>207</b>
<b>Annexes</b>	<b>249</b>
<b>A Harmoniques sphériques</b>	<b>249</b>
1 Harmoniques sphériques scalaires . . . . .	249
2 Harmoniques sphériques vectorielles . . . . .	250
3 Formulaire . . . . .	250
<b>B Méthode JWKB</b>	<b>253</b>
<b>C Relations utiles en géométrie sphéroïdale</b>	<b>255</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>275</b>

# Table des figures

1	Classification des étoiles de la séquence principale selon leur température de surface avec une seule lettre de l’alphabet : O (la plus froide), B, A, F, G et M (la plus chaude). Crédits : Wikipédia Commons. . . . .	3
2	Diagramme de masse (en masses terrestres $M_{\oplus}$ ) des exoplanètes détectées à ce jour, en fonction de leur demi-grand axe orbital (exprimé en fonction du rayon de leur étoile hôte $R_{*}$ ). Les étoiles hôtes sont représentées en couleurs selon leur type spectral. À titre de comparaison, les masses de la Terre et de Jupiter sont également indiquées. Crédits : Antoine Strugarek. . . . .	6
3	Différents types d’ondes en fonction de leurs fréquences $\omega$ dans une zone stablement stratifiée magnétisée en rotation, suivant les fréquences caractéristiques associées. Crédits : Aerts et al. (2019). . . . .	7
4	<b>Haut</b> : Tracé de rayon d’une onde gravito-inertielle dans le cas super-inertiel ( $\omega > 2\Omega$ ) (Gauche) et sub-inertiel ( $\omega < 2\Omega$ ) (Droite) en présence de rotation différentielle décroissante (le cœur tourne plus vite que l’enveloppe). Crédits : Prat et al. (2018). <b>Bas</b> : Schéma de la région de propagation des ondes magnéto-gravito-inertielles dans le cas d’une propagation dans toute la sphère (Gauche) et dans le cas d’une propagation piégée à l’équateur (Droite). $\theta_c$ représente la latitude critique de propagation. Crédits : Mathis & de Brye (2011). . . . .	9
5	Profil de rotation du Soleil en fonction du rayon normalisé à plusieurs latitudes inversé grâce à l’héliosismologie. Crédits : Thompson et al. (2003). . . . .	11
6	45 étoiles pour lesquelles une estimation du taux de rotation de l’enveloppe et du cœur a été obtenue en fonction de $\log g$ qui est un paramètre permettant d’identifier le stade évolutif de l’étoile pour la plage de masse et de vitesse angulaire spécifiée ( $\Omega_{\text{crit}}$ représente le taux de rotation critique). Crédits : Aerts et al. (2019). . . . .	12
7	Image des anneaux de Saturne prise par la caméra infrarouge de l’ISS (station spatiale internationale). La kronoséismologie est réalisée à partir des ondes dans l’anneau C. Crédits : Stähler & Knapmeyer (2022). . . . .	14
8	Taux de dissipation de marée (exprimé avec l’indicateur $k_2/Q$ avec $k_2$ le nombre de Love du mode quadripolaire, dominant dans les interactions de marée, et $Q$ le facteur de qualité de la marée (voir la section 5.1.2 pour une définition détaillée de ces deux quantités)) dans Saturne pour quatre satellites en fonction de leurs fréquences de marée associées $2(\Omega - n)$ (avec $\Omega$ est le taux de rotation de Saturne et $n$ est la fréquence orbitale des satellites). Crédits : Lainey et al. (2017). . . . .	15





9	<p><b>Gauche</b> : Profils de rotation en fonction de la masse intégrée dans une sphère de rayon <math>r</math> calculés avec un code d'évolution stellaire 1D pour une étoile de masse <math>1.2 M_{\odot}</math> et de métallicité <math>Z = 0.02</math> aux âges 0.2 (en noir), 0.5, and 0.7 (en orange) milliards d'années sans (gauche) et avec (droite) la prise en compte du transport par les ondes de gravité générées par la turbulence de l'enveloppe convective. Crédits : Talon &amp; Charbonnel (2005). <b>Droite</b> : Profil de rotation d'une étoile de masse <math>3 M_{\odot}</math> en fonction du rayon normalisé mesurée par Triana et al. (2015) représenté par des diamants avec les lignes verticales indiquant les barres d'erreur. La ligne continue représente le profil de rotation, qui reproduit le profil de rotation observé, calculé à partir d'une simulation numérique 2D qui prend en compte le transport du moment par des ondes gravito-inertielles générées par la turbulence du cœur convectif. Crédits : Rogers (2015).</p>	17
10	<p>Mécanismes des interactions de marée et leurs effets séculaires qui mènent à l'évolution des systèmes gravitationnellement liés. Crédits : André (2019).</p>	18
11	<p>Schéma de l'interaction de marée dans un système à deux corps. Le corps B exerce une force de marée sur le corps A, qui s'ajuste avec un retard de phase <math>\delta</math>, à cause de la dissipation interne. Cet ajustement peut être divisé en une composante adiabatique, qui est en phase avec la marée, et une composante dissipative, qui est en quadrature. Crédits : Remus et al. (2012).</p>	19
2.1	<p>Vue d'ensemble des différentes classes d'étoiles pulsantes dans le diagramme de Hertzsprung-Russell (HR). Les trajectoires d'évolution sont tirées de Schaller et al. (1992) et de Driebe et al. (1998). Les masses initiales et les échelles de temps d'évolution sont ajoutées en gris. Les hachures correspondent au caractère dominant des modes de pulsation, les inclinaisons vers l'avant (/ /) et vers l'arrière (\ \) représentant respectivement les modes acoustiques (modes p) et de gravité (modes g). La couleur indique le type spectral. Les deux lignes verticales en pointillés marquent la position de la bande d'instabilité classique, tandis que la séquence principale d'âge zéro (ZAMS) est représentée par la ligne en pointillés gris clair. Crédits : Papics (2013).</p>	35
2.2	<p>Spectre solaire représentant les fréquences des modes (dans cette figure <math>\omega \equiv \nu</math>) en fonction de leur degré <math>\ell</math>. Les lignes relient les modes de même ordre radial <math>n</math>. Quelques valeurs de l'ordre radial <math>n</math> sont données pour les lignes des modes p dans la partie supérieure droite de la figure. Par convention, <math>n</math> est négatif pour les modes g. Notez que si les lignes continues sont représentées pour plus de clarté, les modes individuels sont des points discrets, correspondant à un nombre entier <math>\ell</math>. Crédits : Aerts et al. (2010).</p>	39
2.3	<p>Splittings rotationnels pour une rotation uniforme <math>\Omega = 0.4 \mu\text{Hz}</math> et un mode <math>\ell = 3</math>. Les composantes du mode sont représentées en différentes couleurs : le bleu pour <math>m = -3</math>, l'orange pour <math>m = -1</math>, le rouge pour <math>m = 1</math>, et le jaune pour <math>m = 3</math>. Les autres composantes ne sont pas visibles à cause de l'inclinaison <math>\mathcal{I} = 90^\circ</math> (le plan d'observation est perpendiculaire à l'axe de rotation). Le cas sans rotation est représenté par les tirets gris. Crédits : Breton (2022)</p>	44



2.4	Énergie cinétique dans le plan méridien pour trois modes de pulsation. <b>Gauche</b> : (zoom sur la région centrale) Un mode gravito-inertiel de basse fréquence piégé dans la région où il y a une forte variation de la stratification chimique. <b>Mileu</b> : Un mode mixte (gravito-acoustique). <b>Droite</b> : Un mode acoustique. Le modèle stellaire est une étoile de masse $2M_{\odot}$ avec une fraction centrale en hydrogène $X_c = 0.35$ en rotation rapide ( $\Omega/\Omega_K = 0.8$ à la surface) différentielle ( $\Omega_{\text{centre}} = 3\Omega_{\text{surface}}$ ) déformée par l'accélération centrifuge. Crédits : (Ouazzani et al. 2012b). . . . .	45
2.5	Valeurs propres $\lambda_{km}$ de l'équation de marée de Laplace en fonction du paramètre de spin $\nu$ pour $m = 2$ . Les points bleus (respectivement orange) correspondent aux fonctions propres paires (respectivement impaires). . . . .	50
2.6	Les fonctions de Hough $w_{\nu km}$ normalisée en fonction de $x = \cos \theta$ pour une solution de type onde de gravité avec $m = 2$ et $k = 2$ où les lignes pleines bleues correspondent à $\nu = 0$ , les lignes orange en tirets à $\nu = 3$ , et les lignes vertes en pointillés et tirets à $\nu = 10$ . . . . .	51
2.7	<b>Gauche</b> : Espacement de période en fonction de la période dans le repère en rotation du mode ( $k = 0, m = 1$ ) pour trois vitesses de rotation différentes $\Omega/\Omega_K = 0$ (noir), 0.1 (gris foncé) et 0.25 (gris clair) pour un modèle d'étoile de $1.6M_{\odot}$ . La pente des espacements de période donne le taux de rotation près de l'interface avec le cœur convectif et les creux sont la signature du mélange chimique ( $N_{\mu}^2$ ). Crédits : Bouabid et al. (2013). <b>Droite</b> : Espacement de période moyen en fonction de la vitesse de rotation de l'étoile ( $\nu_{\text{rot}}$ ) pour des modes avec des ordres radiaux allant de $n = -20$ à $n = -50$ , calculé avec ACOR (noir), la TAR (bleu), et la formule asymptotique dérivée avec la TAR (rouge), pour un modèle d'étoile de $1.4M_{\odot}$ ( <b>Haut</b> ). Écarts relatifs par rapport aux calculs 2D pour la TAR (bleu) et pour l'approche asymptotique (rouge). Les lignes pleines correspondent aux modes rétrogrades, les lignes traitillées/pointillées, aux modes zonaux et les lignes pointillées aux modes progrades ( <b>Bas</b> ). Crédits : Ouazzani et al. (2017). . . . .	52
3.1	Profil de la température de l'étoile Achernar qui a une masse de $6.7M_{\odot}$ . Il s'agit d'une étoile binaire composée d'une étoile de type B et d'une étoile de type A. Elle tourne à une vitesse de plus de $250 \text{ km s}^{-1}$ . Elle est donc très aplatie, son rayon équatorial étant 40% plus grand que son rayon polaire. Crédits : Yves Frémat. . . . .	54
3.2	Système de coordonnées sphéroïdales avec $n = 13$ sous-domaines utilisé pour calculer le modèle d'équilibre d'une étoile tournant à 60% de sa vitesse de rupture, avec un modèle ESTER (voir section 3.5.1) de $3M_{\odot}$ avec une fraction centrale en hydrogène $X_c = 0.7$ à titre d'exemple. . . . .	56
3.3	Profil de la fréquence de Brunt-Väisälä $N^2(\zeta, \theta)$ ( <b>Gauche</b> ) et de la vitesse angulaire $\Omega(\zeta, \theta)$ ( <b>Droite</b> ) d'un modèle ESTER ( $3M_{\odot}$ , $X_c = 0.7$ ) tournant à l'équateur à la vitesse angulaire $\Omega/\Omega_K = 20\%$ . . . . .	61
3.4	Profils du carré de la fréquence de Brunt-Väisälä $N^2$ et de l'erreur relative $\delta N_{\theta_f}^2$ ( <b>Gauche</b> ) et profils de la vitesse angulaire $\Omega$ et de l'erreur relative $\delta \Omega_{\theta_f}$ ( <b>Droite</b> ) en fonction de $\zeta$ à différentes colatitudes $\theta_f$ en utilisant un modèle ESTER tournant à 20% du taux de rotation critique. La zone orange clair indique la marge d'erreur autorisée (10%) et la zone hachurée rouge représente la région convective de l'étoile. . . . .	62



3.5	Domaine de validité des approximations faites pour la dérivation de la TAR centrifuge en fonction du taux de rotation $\Omega/\Omega_K$ et du pseudo-rayon $\zeta$ (avec un degré de confiance de 90%) pour un modèle ESTER ( $3 M_\odot$ , $X_c = 0.7$ ). . . . .	63
3.6	Valeurs propres de l'équation de Laplace généralisée en fonction de la fréquence du mode dans le repère inertiel $\omega^{\text{in}}$ pour $\zeta = 1$ et $m = 1$ dans le cas d'une étoile en rotation uniforme non déformée (en haut à gauche) et d'une étoile déformée avec $\Omega/\Omega_K = 0.2$ en rotation uniforme (en haut à droite), en rotation différentielle radiale (en bas à gauche), et en rotation différentielle générale (en bas à droite). Les points bleus (respectivement orange) correspondent aux fonctions de Hough paires (respectivement impaires). . . . .	64
3.7	Valeurs propres de l'équation de Laplace généralisée en fonction du pseudo-rayon pour $m = 1$ et $\omega^{\text{in}} = 1.5 \times 10^{-4} \text{ rad s}^{-1}$ dans le cas d'une étoile en rotation uniforme non déformée (gauche) et d'une étoile en rotation différentielle $\Omega/\Omega_K = 0.2$ (droite). Les points bleus (respectivement orange) correspondent aux fonctions de Hough paires (respectivement impaires). . . . .	65
3.8	Fonctions de Hough généralisées (normalisées) en fonction de la coordonnée horizontale $x$ à différents pseudo-rayons allant de $\zeta = 0.153$ (bleu) à $\zeta = 1$ (jaune) à $\Omega/\Omega_K = 0.2$ pour les solutions de type gravité $\{k = 0, m = 1\}$ avec $\omega^{\text{in}} = 10^{-4} \text{ rad s}^{-1}$ correspondant à $\bar{\nu} = 10.62$ (les lignes continues) et les solutions de type Rossby $\{k = -2, m = -1\}$ avec $\omega^{\text{in}} = -5.5 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$ correspondant à $\bar{\nu} = 6.48$ (les lignes pointillées) dans le cas d'une étoile : <b>(a)</b> en rotation uniforme, <b>(b)</b> en rotation différentielle radiale, <b>(c)</b> en rotation différentielle latitudinale et <b>(d)</b> en rotation différentielle générale. . . . .	66
3.9	<b>Gauche</b> : Espacement des périodes dans le repère inertiel calculé pour le mode $\{k = 0, m = 1\}$ à $\Omega/\Omega_K = 20\%$ dans une étoile sphérique (rouge) et une étoile déformée (bleu) en rotation uniforme et dans une étoile déformée en rotation différentielle (jaune). <b>Droite</b> : Diagramme de détectabilité de l'effet centrifuge (points bleus), l'effet de la rotation différentielle (points jaunes) et la somme des deux (points rouges) en fonction de l'ordre radial $n$ pour le même mode basé sur la fréquence de résolution de PLATO. . . . .	67
4.1	<b>Gauche</b> : Configuration d'un champ magnétique mixte (dipolaire et quadripolaire) pour un degré de confinement $r_c = 0.2$ . Les valeurs sont normalisées par l'amplitude maximale du champ. <b>Droite en haut</b> : Espacement des périodes dans le repère inertiel pour les modes g $\{\ell = 1, m = 0\}$ calculés en utilisant l'approche standard (ligne noire) et l'approche perturbative (ligne brune) à l'intérieur d'une étoile de $3 M_\odot$ près de la TAMS pour une amplitude de champ $B_0 = 5 \times 10^3 \text{ G}$ . <b>Droite en bas</b> : Détectabilité de l'effet du champ magnétique considéré sur ce mode en fonction de l'ordre radial $n$ basé sur la résolution en fréquence de <i>Kepler</i> (ligne indigo), PLATO (ligne bleue), et TESS CVZ (ligne magenta). . . . .	105
4.2	<b>Gauche</b> : Champ magnétique dipolaire axisymétrique normalisée <b>Droite</b> : Espacement des périodes dans le repère inertiel pour les modes g $\{\ell = 1, m = 0\}$ calculés en utilisant l'approche standard et l'approche perturbative avec le modèle $3 M_\odot$ $\gamma$ Dor près de la TAMS et une configuration de champ magnétique mixte avec une amplitude $B_0 = 10^6 \text{ G}$ . Crédits : Van Beeck et al. (2020). . . . .	106

---

◆◆◆

4.3	Esquisse de la configuration que l'on utilise pour étudier la dynamique des ondes MGI dans les zones radiatives stellaires magnétisées en rotation différentielle. . . . .	107
4.4	Deux configurations du champ magnétique toroïdal à l'intérieur de l'étoile $1.6 M_{\odot}$ $\gamma$ Dor près de la ZAMS : équatoriale ( <b>Gauche</b> ) et hémisphérique ( <b>Droite</b> ). . . . .	113
4.5	<b>Gauche</b> : la vitesse angulaire non axisymétrique dans le plan équatorial. <b>Milieu</b> : le champ magnétique azimuthal dans le plan équatorial. <b>Droite</b> : la même quantité dans le plan méridien. Les résultats sont présentés pour les temps [t1] (la première ligne) et [t2] (la deuxième ligne), avant et après l'apparition de l'instabilité de Tayler. Crédits : Petitdemange et al. (2023). . . . .	114
4.6	<b>Gauche</b> : Valeurs propres de l'équation de marée de Laplace magnétique pour un champ magnétique équatorial en fonction du rayon $r$ pour $m = -1$ , $\nu = 10$ et $\Omega = 22.19 \Omega_{\odot}$ en utilisant le modèle d'une étoile $\gamma$ Dor de $1.6 M_{\odot}$ à la ZAMS. Les points bleus (respectivement, orange) correspondent aux modes avec des fonctions de Hough paires (respectivement, impaires). <b>Droite</b> : Fonctions de Hough magnétique (normalisées à l'unité) en fonction de la coordonnée horizontale $x$ à différents rayons depuis l'interface radiative/convective (bleu foncé) jusqu'à la surface (orange). Les lignes pleines correspondent aux solutions de type ondes de gravité (MGI) ( $k = 0$ ) et les lignes pointillées aux solutions de type ondes de Rossby (magnéto-Rossby) ( $k = -2$ ). . . . .	116
4.7	Identique à la figure 4.6, mais pour un champ magnétique hémisphérique avec $B_0 = 10^5$ G, $r_0 = 0.15$ , $d = 0.2$ , et $n_t = 2$ . . . . .	117
4.8	<b>Gauche</b> : Espacement de périodes dans le repère inertiel pour les modes g $\{k = 0, m = 1\}$ calculés en utilisant la TAR standard (en rouge) et la TAR magnétique (en bleue) avec le modèle d'une étoile $\gamma$ Dor de $1.6 M_{\odot}$ à la ZAMS. <b>Droite</b> : Déteçtabilité de l'effet de ce champ magnétique sur ces modes en fonction de l'ordre radial $n$ basé sur la fréquence de résolution de <i>Kepler</i> (en indigo), <i>PLATO</i> (en bleu), et <i>TESS CVZ</i> (en marron). . . . .	117
4.9	Identique à la figure 4.8, mais pour un champ magnétique hémisphérique avec $B_0 = 10^5$ G, $r_0 = 0.15$ , $d = 0.2$ , et $n_t = 2$ . . . . .	118
5.1	Schéma d'un système binaire pour mettre en évidence la signification physique des différentes quantités utilisées pour étudier les interactions de marée induites dans le corps 1 (primaire) par le corps 2 (secondaire). $\Omega_s$ et $\Omega_o$ sont respectivement les vecteurs de vitesse du spin et de l'orbite. La figure représente le bourrelet de marée, en négligeant l'aplatissement centrifuge. Crédits : Ogilvie (2014). . . . .	145
5.2	<b>Gauche</b> : Vue tridimensionnelle du champ de vitesse adiabatique total (poloïdal et toroïdal) de la marée d'équilibre (flèches blanches) dans le corps perturbé lorsqu'il est purement convectif. Les vecteurs rouge et orange représentent respectivement l'axe de rotation du corps primaire et l'axe reliant les centres de masse des deux corps en interaction. <b>Droite</b> : Représentation de ce champ de vitesse à la surface (indiquée par des flèches noires). Le gradient de couleur est utilisé pour représenter l'amplitude normalisée du potentiel de marée, allant du rouge pour une amplitude forte vers le bleu pour une amplitude plus faible. Crédits : Remus et al. (2012). . . . .	151



5.3	Comparaison du déplacement radial (à gauche) et horizontal (à droite) de la marée d'équilibre dérivée par Zahn (1966, 1989); Remus et al. (2012) (lignes pointillées bleues) et de la marée d'équilibre dérivée par Terquem et al. (1998); Goodman & Dickson (1998) (lignes pleines noires) pour un modèle d'une étoile d'une masse solaire. Crédits : Barker (2020).	152
5.4	Exemple de marée dynamique dans un modèle d'étoile de type solaire qui montre simultanément des ondes inertielles de marée dans l'enveloppe convective et des ondes gravito-inertielles de marée dans la zone radiative interne. La coordonnée radiale est exprimée en cm. Crédits : Chernov et al. (2013).	154
5.5	Structure interne de Jupiter. Crédits : Guillot et al. (1994). <b>Gauche</b> : Modèle standard à trois couches. <b>Droite</b> : Nouveau modèle à cinq zones. Crédits : Debras & Chabrier (2019).	157
5.6	Analyse comparative des moments de gravité $J_n$ observés par les missions Juno et Cassini pour Jupiter et Saturne, respectivement, par rapport aux prédictions des modèles supposant une rotation uniforme à l'intérieur de ces planètes. Crédits : Militzer et al. (2019).	158
5.7	Champs magnétiques, rotation profonde, vents zonaux et bandes nuageuses sur Jupiter et Saturne. Les panneaux supérieurs montrent les champs magnétiques radiaux non dipolaires, pour Jupiter à $0.9R_J$ et pour Saturne à $0.75R_J$ . Les profils de vent montrent des jets zonaux équatoriaux progrades atteignant $200 - 400\text{m s}^{-1}$ . Crédits : Guillot et al. (2022).	159
6.1	<b>Gauche</b> : Profils de la fréquence de Brunt-Väisälä chimique ( $N_\mu$ ), thermique ( $N_t$ ) et totale ( $N$ ) normalisée par la fréquence inertielle ( $2\Omega$ ) en fonction du rayon normalisé. <b>Droite</b> : Schéma du modèle choisi de l'intérieur de Jupiter utilisé dans cette étude en nous basant sur les travaux de Debras & Chabrier (2019).	168
6.2	Profils des nombres de Prandtl, Schmidt et Ekman en fonction du rayon normalisé d'après Stevenson & Salpeter (1977b).	169
6.3	Potentiel gravitationnel induit par la marée d'équilibre (à gauche) et déplacements radial et horizontal correspondants (à droite) en fonction du rayon normalisé pour $A = 1$ et $\ell = 2$ .	170
6.4	<b>Gauche</b> : Coefficients spectraux maximum du champ de vitesse, des fluctuations de pression, de température et de poids moléculaire moyen en fonction de l'indice $k$ sur la base des polynômes de Tchebychev (Haut) et de l'indice $\ell$ sur la base des harmoniques sphériques (Bas). <b>Droite</b> : Coupe méridienne de l'énergie cinétique pour le mode forcé $\tilde{\omega} = -0.76$ , correspondant à la fréquence de marée excitée par Io, pour $m = 2$ , $E = 10^{-7}$ , $\text{Pr} = \text{Sc} = 1$ avec une résolution spatiale $(N_r, N_\ell) = (300, 301)$ .	174
6.5	Erreur relative de la conservation d'énergie en fonction de la fréquence de marée pour $m = 2$ , $\text{Pr} = \text{Sc} = 1$ , et $E = 10^{-7}$ avec une résolution spatiale $(N_r, N_\ell) = (300, 301)$ .	175
6.6	Spectres de dissipation pour $m = 2$ , $\text{Pr} = \text{Sc} = 1$ , et $E = 10^{-7}$ (en haut) et $E = 10^{-8}$ (en bas) avec une résolution spatiale $(N_r, N_\ell) = (300, 301)$ . La dissipation totale est représentée par des croix noires, et ses contributions visqueuse, thermique et moléculaire sont représentées par des points verts, des étoiles rouges et des signes plus bleus, respectivement. La ligne pointillée magenta indique la dissipation visqueuse (totale) dans le cas d'un intérieur purement convectif ( $N_\mu^2 = N_t^2 = 0$ ).	176



- 6.7 Partie imaginaire du nombre de Love en fonction de la fréquence de marée pour  $m = 2$ ,  $\text{Pr} = \text{Sc} = 1$ , et  $E = 10^{-7}$  (en haut) et  $E = 10^{-8}$  (en bas) avec une résolution spatiale  $(N_r, N_\ell) = (300, 301)$ . La ligne magenta en tirets indique les valeurs de cette quantité dans le cas d'un intérieur purement convectif ( $N_\mu^2 = N_t^2 = 0$ ). La ligne orange en tirets/pointillés représente la valeur observée de cette quantité due à Io. . 177



# Introduction et contexte général

Sans les ondes, il n'y aurait rien. Pas de lumière, pas de son, pas de chaleur, pas de mouvement. Elles sont omniprésentes, partout, tout le temps. Elles constituent l'un des phénomènes physiques fondamentaux de notre univers.

Les ondes sont bien plus qu'un concept abstrait. Elles sont la clé de nombreux phénomènes physiques que nous expérimentons au quotidien. Elles permettent le transfert d'énergie d'un endroit à l'autre, sans transporter de matière<sup>1</sup>. Ce concept peut être difficile à comprendre, mais leur impact est tangible et réel. Les ondes électromagnétiques, telles que la lumière, ou les ondes mécaniques, comme les vagues de l'océan ou la vibration d'une corde de guitare, sont des exemples de ce que les ondes peuvent produire.

Lorsque je mentionne que les ondes sont omniprésentes, je veux souligner qu'elles ne sont pas limitées à notre planète, mais qu'elles existent dans tout l'univers. En effet, les ondes se propagent dans les objets célestes (Tong & García 2015), notamment dans les étoiles et les planètes. Leur rôle est important pour comprendre ces objets dans leur ensemble.

Ainsi, la compréhension de ces objets complexes ne serait pas possible sans les ondes, qui nous permettent notamment de sonder leur structure et leur dynamique interne et de comprendre leur évolution au cours du temps qu'elles influencent au travers des processus de transport et de mélange dont elles sont à l'origine. En résumé, les ondes sont donc essentielles pour décrypter les mystères de l'univers et pour comprendre le fonctionnement des objets qui le constituent.

## 1 Systèmes planétaires : les étoiles hôtes et leurs cortèges de planètes

Un système planétaire est un ensemble d'objets non stellaires en orbite autour d'une étoile ou d'un système stellaire (ensemble d'étoiles), maintenus ensemble par la force de la gravité. Bien que les systèmes planétaires soient principalement constitués de planètes<sup>2</sup>, ils peuvent également inclure

---

1. Dans le cas idéal adiabatique, on suppose qu'il n'y est aucune forces dont le travail dissipe de l'énergie sous forme de chaleur. Cependant, dans le cas général, il peut y avoir un transport de matière, de chaleur et de quantité de mouvement.

2. La définition la plus récente d'une planète a été adoptée par l'Union astronomique internationale (IAU) en 2006. Elle stipule qu'une planète doit remplir trois critères. Le corps doit : 1) orbiter autour d'une étoile ; 2) être suffisamment massif pour s'auto-graviter et prendre une forme sphérique ; et 3) dominer dynamiquement, c'est-à-dire «nettoyer» sa zone orbitale de tout autre objet de taille similaire.





d'autres corps tels que des planètes naines, des astéroïdes, des satellites naturels, des météorites et des comètes. Ces corps sont en interaction permanente les uns avec les autres, affectant leurs orbites et leur évolution au fil du temps.

Ces systèmes planétaires peuvent varier considérablement en termes de nombre, de taille et de nature des corps qui les composent. Certains systèmes peuvent avoir une dizaine de planètes et des milliers d'astéroïdes, tandis que d'autres peuvent n'avoir qu'une seule planète et quelques petits satellites. En outre, les systèmes planétaires peuvent être formés de différentes manières, allant de la formation en même temps que leur étoile hôte, à la capture de corps extérieurs après la formation initiale du système (e.g. [Deeg & Belmonte 2018](#)).

Le Soleil et le système planétaire qui tourne autour de lui, dont la Terre, forment le système solaire. Le terme système exoplanétaire est utilisé en référence aux systèmes orbitant d'autres étoiles que notre Soleil. Les systèmes planétaires connus à ce jour comportent une large diversité dans la structure des objets qui les composent, tant pour les étoiles hôtes que pour les planètes (e.g. [Fabrycky et al. 2012](#)).

À ce jour, plus de 5000 exoplanètes ont été découvertes dans environ 4000 systèmes planétaires<sup>3</sup>. Parmi ces systèmes, on a découvert 853 systèmes qui ont plus d'une planète en orbite autour de leur étoile hôte. Ces étoiles hôtes peuvent être de différentes tailles, de différentes masses et de différentes températures, et les planètes peuvent varier en termes de taille, de composition, d'atmosphère et d'orbite. Ces découvertes ont été possibles grâce à l'imagerie directe d'exoplanètes à l'aide de télescopes spécialisés et à des méthodes de détection indirecte ([Perryman 2011](#); [Deeg & Belmonte 2018](#)). La première d'entre elles est la méthode des vitesses radiales qui repose sur la détection des variations de la vitesse projetée le long de la ligne de visée d'une étoile par effet Doppler, à l'aide d'un spectromètre de haute précision. Lorsqu'un compagnon, qui peut être suffisamment proche et/ou massif, orbite autour de l'étoile, le mouvement combiné de l'étoile et du compagnon autour du centre de masse commun provoque une modulation de la vitesse radiale de l'étoile. Avec cette méthode, il est possible de déterminer une borne inférieure pour le rapport entre la masse du compagnon et la masse de l'étoile, ainsi que de caractériser leurs orbites respectives. Nous avons ensuite la méthode des transits qui repose sur l'utilisation d'instruments de photométrie de haute précision afin de détecter les variations temporaires et périodiques de luminosité émises par une étoile. Ces variations sont provoquées par le passage d'une planète devant l'étoile, lorsqu'elles se trouvent alignées avec l'observateur. Grâce à cette méthode, il est possible de caractériser avec précision le rapport entre le rayon de la planète et celui de son étoile hôte. C'est le principe des missions spatiales CoRoT (Convection, Rotation et Transits planétaires; [Auvergne et al. 2009](#); [Baglin et al. 2009](#)), *Kepler* ([Koch et al. 2010](#); [Borucki et al. 2011](#)), TESS (Transiting Exoplanet Survey Satellite; [Ricker et al. 2014](#)) et dans le futur PLATO (PLANetary Transits and Oscillations of stars; [Rauer et al. 2014, 2016](#)).

## 1.1 Les étoiles : une variété de types et de caractéristiques

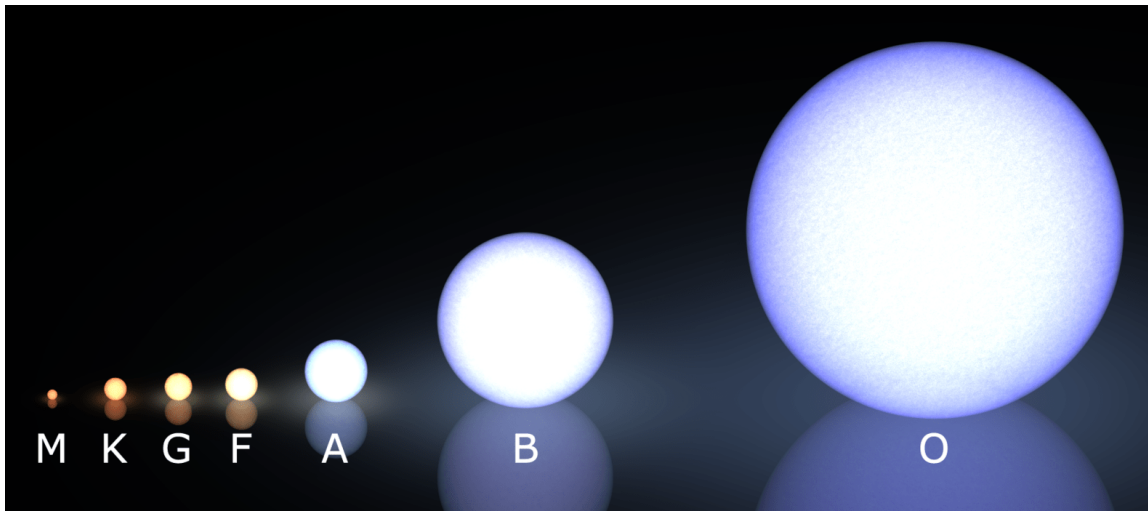
Les étoiles sont les éléments de base de l'univers, les sources de lumière et de chaleur qui permettent la vie telle que nous la connaissons. Une étoile est une gigantesque boule de plasma auto-gravitante magnétisée en rotation qui produit de la lumière et de la chaleur par des réactions de fusion nucléaire. Les étoiles sont maintenues en équilibre par leur propre gravité et produisent une quantité considérable d'énergie, qui est libérée sous forme de radiation électromagnétique. À mesure que l'énergie est produite par les réactions de fusion successives, elle est transportée vers

3. Source : [The Extrasolar Planets Encyclopaedia](#)



l'extérieur de l'étoile ou par le rayonnement ou par convection. Cependant, toutes les étoiles ne sont pas identiques : il en existe ainsi une grande variété de types, chacun ayant des caractéristiques différentes qui influencent leur apparence, leur comportement et leur durée de vie.

La séquence principale est la phase la plus longue de la vie d'une étoile, qui dure la majeure partie de sa vie, et au cours de laquelle elle transforme l'hydrogène en hélium par fusion nucléaire dans son cœur. Cette phase se caractérise par une stabilité de la taille, de la luminosité et de la température de surface de l'étoile. On peut classer ces étoiles en fonction de leur température (Kippenhahn & Weigert 1994; Maeder 2009), allant des naines rouges aux géantes bleues suivant l'échelle de classification spectrale de Harvard utilisée pour classer les étoiles en fonction de leur spectre d'émission et de leur température effective en associant une lettre (O, B, A, F, G, K, M) à chaque type spectral (voir la figure 1 et la table 1) :



**FIGURE 1** – Classification des étoiles de la séquence principale selon leur température de surface avec une seule lettre de l'alphabet : O (la plus froide), B, A, F, G et M (la plus chaude). Crédits : Wikipédia Commons.

Classe	Température effective (K)	Masse ( $M_{\odot}$ )	Rayon ( $R_{\odot}$ )	Luminosité ( $L_{\odot}$ )
O	$\geq 30\,000$	$\geq 16$	$\geq 6.6$	$\geq 30\,000$
B	10 000 – 30 000	2.1 – 16	1.8 – 6.6	25 – 30 000
A	7500 – 10 000	1.4 – 2.1	1.4 – 1.8	5 – 25
F	6000 – 7500	1.04 – 1.4	1.15 – 1.4	1.5 – 5
G	5200 – 6000	0.8 – 1.04	0.96 – 1.15	0.6 – 1.5
K	3700 – 5200	0.45 – 0.8	0.7 – 0.96	0.08 – 0.6
M	2400 – 3700	0.08 – 0.45	$\leq 0.7$	$\leq 0.08$

**TABLE 1** – Différents types d'étoiles de la classification spectrale de Harvard en fonction de leur température effective, de leur masse, de leur rayon et de leur luminosité.  $M_{\odot}$ ,  $R_{\odot}$  et  $L_{\odot}$  sont respectivement la masse, le rayon et la luminosité du Soleil. Crédits : Wikipédia Commons d'après Habets & Heintze (1981); Baraffe et al. (2003); Weidner & Vink (2010).



- Les étoiles de très faibles masses, qui ont un type spectral M, ont une masse inférieure à 0.45 fois celle du Soleil. Elles sont caractérisées par une structure interne entièrement convective, où l'énergie est transportée par les mouvements turbulents de matière. Elles sont également très froides et leur température superficielle est comprise entre environ 2400 K et 3700 K, ce qui donne à leur lumière une teinte rouge caractéristique. En raison de leur faible masse, elles ont également une luminosité faible et leur émission de lumière est principalement dans le domaine des infrarouges.
- Les étoiles de faibles masses, qui ont un type spectral K, G ou F, ont une masse qui varie approximativement de 0.45 à 1.4 fois celle du Soleil. À l'intérieur de ces étoiles, un cœur radiatif stablement stratifié est présent, où l'énergie est transportée par la radiation. Cette zone est entourée d'une enveloppe convective où les transferts convectifs sont dû à l'opacité du plasma. La profondeur de cette enveloppe convective diminue lorsque la masse de l'étoile croît. Leur température de surface varie de 3700 K pour les étoiles de type spectral K à environ 7500 K pour les étoiles de type spectral F-tardif<sup>4</sup>. Il faut noter que les étoiles ayant une masse supérieure à 1.1 masses solaires ont un petit cœur convectif (nous renvoyons le lecteur au paragraphe suivant pour l'explication de son apparition).
- Les étoiles de masses intermédiaires et les étoiles massives, qui ont un type spectral A, B ou O, possèdent un cœur convectif et une enveloppe radiative. Cette inversion de la structure interne est due au fait que la production d'énergie nucléaire est majoritairement assurée par le cycle CNO (carbone-azote-oxygène), qui est beaucoup plus exothermique que le cycle des chaînes pp (proton-proton) qui prédomine dans les étoiles de faible masse. Ces étoiles sont plus lumineuses que les étoiles de faibles masses et ont des températures de surface plus élevées. Les étoiles de type O, les plus massives, ont des températures de surface supérieures à 30 000 K et sont les plus brillantes et les plus chaudes de toutes les étoiles.

À mesure qu'une étoile de la séquence principale consomme son hydrogène, la fusion nucléaire ralentit progressivement. Son noyau commence alors à se contracter sous l'effet de la gravité, ce qui provoque une augmentation de sa pression et de sa température. Cela conduit à l'enclenchement de la fusion de l'hélium en carbone et en oxygène, formant ainsi un cœur plus dense. Pendant ce processus, l'enveloppe externe de l'étoile commence à gonfler, ce qui augmente considérablement son rayon. L'étoile bifurque alors vers la branche des géantes rouges, en passant par la phase des sous-géantes. Si la masse l'étoile est inférieure à huit masses solaires, elle devient donc une géante rouge, une étoile beaucoup plus grande et plus lumineuse. Finalement, l'étoile épuise complètement son combustible nucléaire et ne peut plus maintenir la fusion. À ce stade, l'étoile subit une série de transformations pour devenir une naine blanche composée principalement de carbone et d'oxygène. Par contre, si l'étoile est suffisamment massive ( $M > 8 M_{\odot}$ ), elle peut évoluer encore plus loin pour devenir une supergéante. Ces étoiles évoluent jusqu'à la formation d'un cœur de fer qui finira par s'effondrer sur lui-même, déclenchant ainsi une supernova gravitationnelle, ce qui donnera naissance soit à un trou noir stellaire, soit à une étoile à neutrons suivant la masse du rémanent.

## 1.2 Taxonomie des planètes

Il est possible de classer les planètes en fonction de plusieurs critères : structure, masse ou température. Si on s'intéresse à la classification structurelle, on peut définir trois grandes familles :

---

4. Les étoiles de type F les plus chaudes.



- les planètes telluriques, également appelées planètes rocheuses, sont principalement composées de roches, de métaux, et de silicates et ont une densité élevée (entre 4 et 5 g/cm<sup>3</sup>). On retrouve dans cette catégorie les planètes internes du système solaire, telles que Mercure, Venus, la Terre et Mars ;
- les planètes géantes gazeuses, telles que Jupiter et Saturne, sont beaucoup plus grandes et massives que les planètes telluriques (par exemple, la masse de Jupiter est approximativement de 317 fois la masse de la terre pour un rayon de 11 rayons terrestres), mais elles sont beaucoup moins denses, avec une densité d'environ 1 g/cm<sup>3</sup>, car elles sont en grande partie composées d'hydrogène et d'hélium ;
- les planètes géantes de glaces (également appelées planètes géantes glacées), comme Uranus et Neptune, ont une densité moyenne d'environ 1.5 g/cm<sup>3</sup>. Elles possèdent des faibles proportions d'hydrogène et d'hélium, mais une large proportion d'éléments volatils (souvent appelés «glaces»), telles que l'eau, le méthane et l'ammoniac.

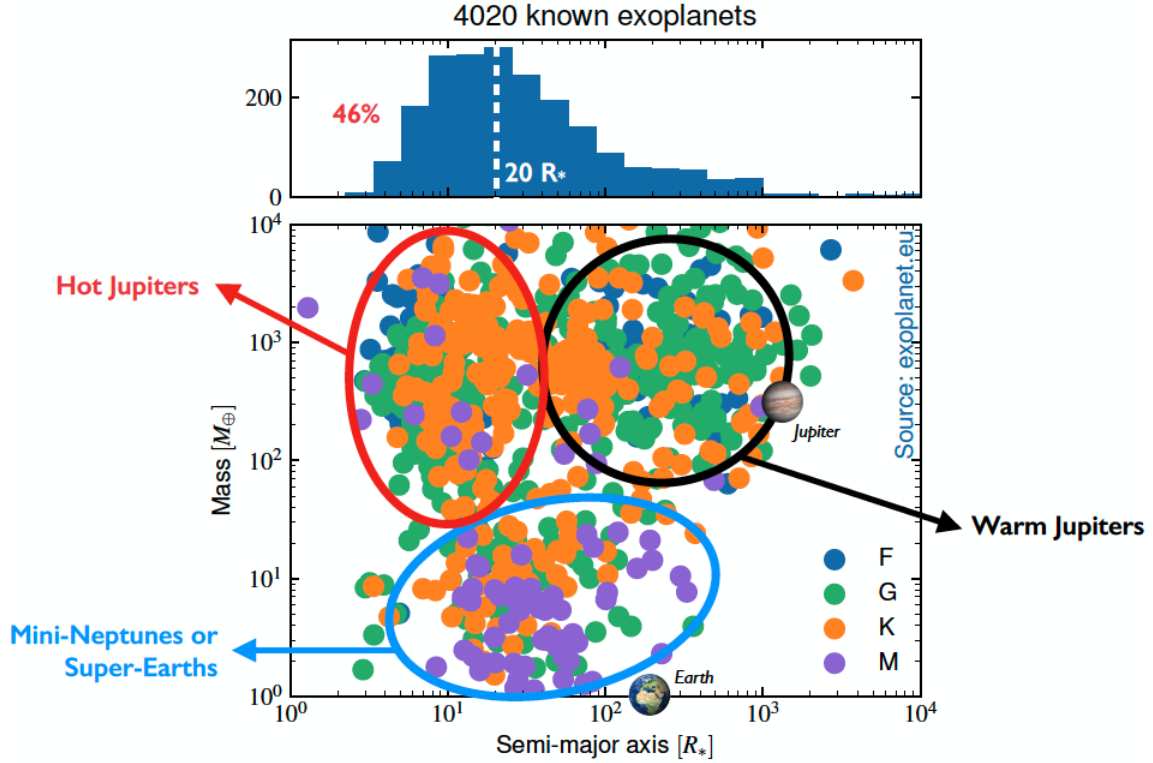
Cependant, les nombreuses exoplanètes détectées au cours des deux dernières décennies remettent en question les certitudes acquises grâce à l'étude du Système Solaire et de son architecture. Ces détéctions ont révélé une grande diversité de structures internes (Marcy et al. 2014). Par conséquent, de nouveaux types de planètes ont été identifiés, parmi lesquels :

- les super-Terres, qui sont des planètes telluriques ayant une masse comprise entre 1 et 10 fois celle de la Terre ;
- les mini-Neptunes, qui sont moins massives qu'Uranus et Neptune, mais qui possèdent une composition similaire à celle des géantes de glace ;
- les super-Jupiters, qui sont des géantes gazeuses ayant une masse supérieure à celle de Jupiter.

De plus, les systèmes exoplanétaires découverts présentent des architectures très diverses. Par exemple, Fabrycky et al. (2012) présente différents exemples de systèmes multiplanétaires détectés par le télescope *Kepler*. Ils trouvent que toutes les planètes sont plus proches de leur étoile que Vénus ne l'est du Soleil. On constate donc que les planètes telluriques ne sont pas nécessairement les plus proches de leur étoile, et que les géantes gazeuses ne sont pas forcément les plus éloignées. Dans la figure 2, on représente la masse des exoplanètes détectées en fonction du demi-grand axe de leur orbite, exprimé en rayons stellaires. Trois populations distinctes se dégagent alors :

- les Jupiter chauds ont une masse similaire à celle de Jupiter et sont situés à proximité de leur étoile. Leur période orbitale est généralement inférieure à dix jours. La proximité de leur étoile et les températures élevées de la surface et de l'atmosphère leur ont valu le nom de «chaud». L'une des exoplanètes de type Jupiter chaud les plus connues est 51 Pegasi b, première exoplanète découverte autour d'une étoile de type solaire (Mayor & Queloz 1995),
- les Jupiters tièdes se distinguent des Jupiter chauds par une distance plus importante les séparant de leur étoile,
- les super-Terres ou mini-Neptunes ont déjà été présentés précédemment. Il s'agit de planètes de taille intermédiaire, plus grandes que la Terre, mais plus petites que Neptune.

L'exploration des intérieurs stellaires et planétaires repose alors sur l'utilisation de toutes les formes d'oscillations observables.



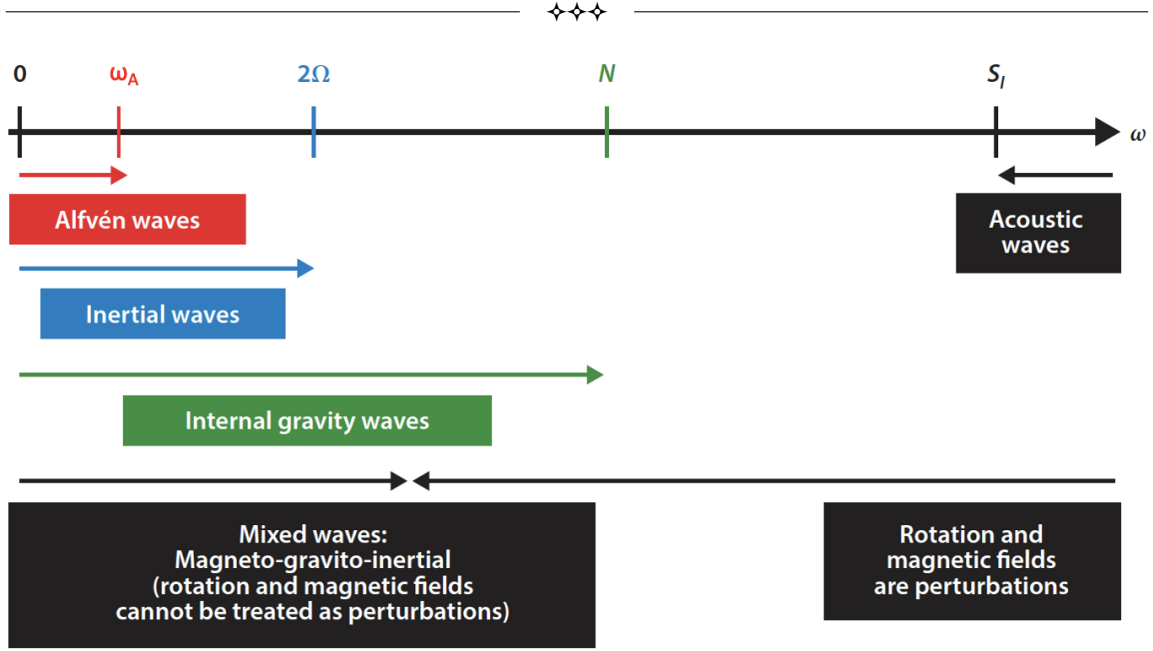
**FIGURE 2** – Diagramme de masse (en masses terrestres  $M_{\oplus}$ ) des exoplanètes détectées à ce jour, en fonction de leur demi-grand axe orbital (exprimé en fonction du rayon de leur étoile hôte  $R_{*}$ ). Les étoiles hôtes sont représentées en couleurs selon leur type spectral. À titre de comparaison, les masses de la Terre et de Jupiter sont également indiquées. Crédits : Antoine Strugarek.

## 2 Oscillations stellaires et planétaires

Les objets célestes, notamment les étoiles et les planètes, se comportent comme une cavité résonante, de la même manière qu'un instrument de musique dont les vibrations produisent des notes qui sont de plusieurs natures, en fonction de la région qui résonne : chaque note donne ainsi des informations sur une zone différente de l'astre. On peut distinguer plusieurs types d'oscillation suivant les forces dominantes appliquées sur les parcelles du fluide (e.g. [Christensen-Dalsgaard 2003](#); [Aerts et al. 2010](#); [Rieutord 2015](#); [Tong & García 2015](#); [Gaulme et al. 2015](#)) (voir la figure 3) :

- **Les ondes acoustiques** (modes de pression ou modes p) sont des ondes à hautes fréquences qui résultent de la compressibilité du fluide. Pour ces modes, les gradients de pression agissent comme une force de rappel. Ces ondes sont générées stochastiquement par la turbulence de la zone convective ou des variations d'opacité. Elles sont caractérisées par la fréquence de Lamb

$$S_{\ell} = \frac{\sqrt{\ell(\ell+1)}c_s}{r}, \quad (1)$$



**FIGURE 3** – Différents types d'ondes en fonction de leurs fréquences  $\omega$  dans une zone stablement stratifiée magnétisée en rotation, suivant les fréquences caractéristiques associées. Crédits : [Aerts et al. \(2019\)](#).

où  $\ell$  est le degré de l'harmonique sphérique<sup>5</sup> du mode acoustique,  $r$  est le rayon, et  $c_s = \sqrt{\Gamma_1 P / \rho}$  est la vitesse du son avec  $\rho$  et  $P$  sont la densité et la pression du milieu, et  $\Gamma_1 = (\partial \ln P / \partial \ln \rho)_S$  ( $S$  est l'entropie macroscopique) est le premier exposant adiabatique. Les modes p se propagent depuis la surface jusqu'au point de retournement interne tel que  $\omega = S_\ell$  avec  $\omega$  la fréquence de l'onde, donc plus  $\ell$  est petit plus l'onde pénètre profondément.

- **Les ondes de gravité** (modes de gravité ou modes g) se propagent dans un fluide stablement stratifié dû à la stratification thermique et/ou chimique. Lorsque cette zone est perturbée, la force de gravité (la poussée d'Archimède ou encore la flottabilité) ramène l'élément fluide vers sa position d'équilibre. Ces ondes sont dites internes pour les distinguer des ondes de gravité de surface qui apparaissent à l'interface entre deux fluides différents. Elles sont caractérisées par la fréquence de Brunt-Väisälä

$$N = \sqrt{-g \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{1}{\Gamma_1 P} \frac{\partial P}{\partial r} \right)}, \quad (2)$$

où  $g$  est la gravité.  $N^2 > 0$  correspond au cas d'une région stable vis-à-vis de la convection où la poussée d'Archimède se comporte comme une force de rappel. Dans le cas contraire, elle est déstabilisatrice et mène au phénomène d'instabilité convective.

- **Les ondes inertielles** se propagent dans les fluides en rotation et elles sont entraînées par l'accélération de Coriolis qui agit perpendiculairement à la vitesse du fluide et déplace les éléments du fluide sur une trajectoire circulaire. Les ondes de Rossby, les courants géostrophiques

5. Voir définition dans l'annexe A.



et les vents géostrophiques sont des exemples d’ondes inertielles. Elles sont caractérisées par la fréquence inertielle  $2\Omega$ , où  $\Omega$  est la vitesse angulaire du corps considéré.

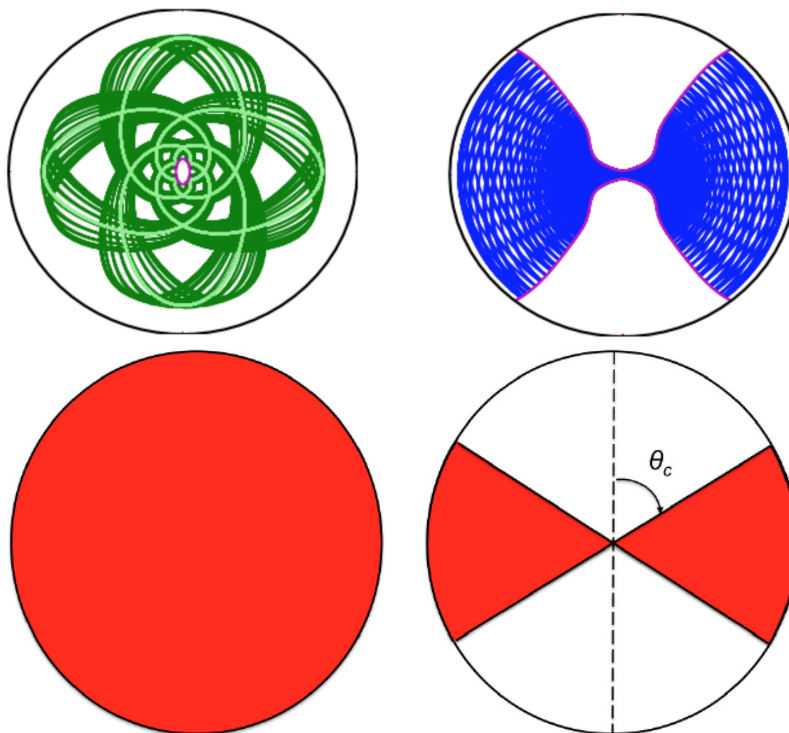
- **Les ondes d’Alfvén** sont des ondes électromagnétiques qui se propagent dans les régions magnétisées sous l’effet de la force de Lorentz (la tension magnétique). Elles ont été découvertes par [Alfvén \(1942\)](#). Elles sont caractérisées par la fréquence d’Alfvén

$$\omega_A = \mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}, \quad (3)$$

où  $\mathbf{V}_A = \mathbf{B}/\sqrt{\mu\rho}$  est la vitesse d’Alfvén,  $\mathbf{B}$  est le champ magnétique,  $\mu$  est la perméabilité magnétique du milieu et  $\mathbf{k}$  est le vecteur d’onde.

Chacune de ces forces de rappel entraîne l’apparition d’une onde ayant son propre domaine de fréquences. Lorsque les domaines de fréquence de divers types d’ondes se chevauchent, cela peut donner naissance à des ondes mixtes pour lesquelles plusieurs forces de rappel jouent un rôle important. Par exemple, les ondes gravito-inertielles sont influencées à la fois par la force d’Archimède et par l’accélération de Coriolis ([Berthomieu et al. 1978](#); [Lee & Saio 1987, 1989, 1997](#); [Dintrans et al. 1999](#); [Dintrans & Rieutord 2000](#); [Townsend 2003](#); [Ogilvie & Lin 2004](#); [Mathis 2009](#)). De même, les ondes magnéto-gravito-inertielles sont soumises à la force de Lorentz, en plus des deux forces de rappel mentionnées précédemment ([Braginsky 1964, 1967](#); [Friedlander 1987, 1989](#); [Schatzman 1993](#); [Barnes et al. 1998](#); [Kumar et al. 1999](#); [Schechter et al. 2001](#); [Rogers & MacGregor 2010](#); [Mathis & de Brye 2011, 2012](#)). Dans les étoiles de la séquence principale et l’intérieur des planètes géantes gazeuses, les fréquences des modes d’oscillation respectent généralement la hiérarchie suivante  $\omega_A < 2\Omega < N < S_\ell$ . Il convient de noter que pour les étoiles de faibles masses évoluées, les cavités des modes de gravité et des modes acoustiques se couplent, ce qui donne lieu à des ondes mixtes gravito-acoustiques ([Dziembowski 1971](#); [Dziembowski et al. 2001](#); [Shibahashi 1979](#); [Bedding et al. 2011](#); [Beck et al. 2012](#)).

Lorsque les étoiles tournent sur elles-mêmes, l’effet Doppler provoque une différence systématique de fréquence entre les ondes se propageant dans le sens de la rotation et celles se propageant dans le sens opposé. Les ondes dont les fréquences sont proches de  $2\Omega$  sont soumises à l’influence de l’accélération de Coriolis qui va venir modifier leur spectre et leur domaine de propagation. En effet, comme on peut le voir dans le panneau du haut de la figure 4, le domaine de propagation des ondes sub-inertielles ( $\omega < 2\Omega$ ) est limité à la région équatoriale. En revanche, les ondes super-inertielles ( $\omega > 2\Omega$ ) continuent de se propager dans toute la sphère, comme dans le cas sans rotation, car elles sont moins affectées par l’accélération de Coriolis ([Lee & Saio 1987](#); [Dintrans et al. 1999](#); [Dintrans & Rieutord 2000](#)). En présence d’une rotation différentielle, les ondes se comportent de manière similaire, mais les cavités de propagation sont beaucoup plus complexes (e.g. [Prat et al. 2018](#)). En présence d’un champ magnétique, la propagation et la dissipation des ondes de gravité sont modifiées si le champ est suffisamment intense ( $\omega_A \sim \omega$ ). Donc suivant les fréquences d’excitation des ondes de gravité et l’amplitude et la topologie du champ magnétique, ces ondes seront plus ou moins modifiées. Dans le cas des hautes fréquences ou d’un champ de faible amplitude, les ondes seront faiblement perturbées par le champ magnétique. À très basses fréquences ou pour un champ fort, elles seront fortement modifiées par le champ magnétique. L’effet du champ magnétique sur la région de propagation des ondes est schématisé dans le panneau du bas de la figure 4 où on voit dans le premier cas que les ondes sont régulières pour chaque latitude et se propagent dans toute la sphère, tandis que dans le deuxième les ondes sont piégées dans la ceinture équatoriale ([Friedlander 1987, 1989](#); [Rogers & MacGregor 2010](#); [Mathis & de Brye 2011](#); [Fuller et al. 2015](#); [Lecoanet et al. 2017, 2022](#)). Cette complexité peut avoir des répercussions significatives sur la transmission de



**FIGURE 4** – **Haut** : Tracé de rayon d’une onde gravito-inertielle dans le cas super-inertiel ( $\omega > 2\Omega$ ) (Gauche) et sub-inertiel ( $\omega < 2\Omega$ ) (Droite) en présence de rotation différentielle décroissante (le cœur tourne plus vite que l’enveloppe). Crédits : [Prat et al. \(2018\)](#). **Bas** : Schéma de la région de propagation des ondes magnéto-gravito-inertielles dans le cas d’une propagation dans toute la sphère (Gauche) et dans le cas d’une propagation piégée à l’équateur (Droite).  $\theta_c$  représente la latitude critique de propagation. Crédits : [Mathis & de Brye \(2011\)](#).

l’énergie entre les régions convectives et radiatives, ainsi que sur le transport du moment cinétique (e.g. [Pantillon et al. 2007](#); [Mathis et al. 2008](#); [Mathis 2009](#); [Mathis & de Brye 2011, 2012](#)).

L’étude des ondes magnéto-gravito-inertielles permet ainsi d’explorer les caractéristiques physiques internes des systèmes géophysiques et astrophysiques, qui ne peuvent être accessibles qu’à travers la sismologie (e.g. [Bugnet et al. 2021](#); [Loi 2021](#); [Li et al. 2022](#); [Bugnet 2022](#); [Deheuvels et al. 2023](#)). Elles jouent aussi un rôle crucial dans le transport de l’énergie, des éléments chimiques, et de la quantité de mouvement (e.g. [Schatzman 1993](#); [Zahn et al. 1997](#); [Rogers 2015](#); [Rogers & McElwaine 2017](#)). Ces ondes nous offrent ainsi une opportunité unique d’approfondir notre compréhension du fonctionnement et de l’évolution de ces systèmes en nous permettant d’explorer les stratifications thermiques et chimiques, la rotation, ainsi que le magnétisme qui les caractérisent.



## 3 Contraintes observationnelles à l’heure des missions spatiales

### 3.1 Structure et dynamique interne stellaire

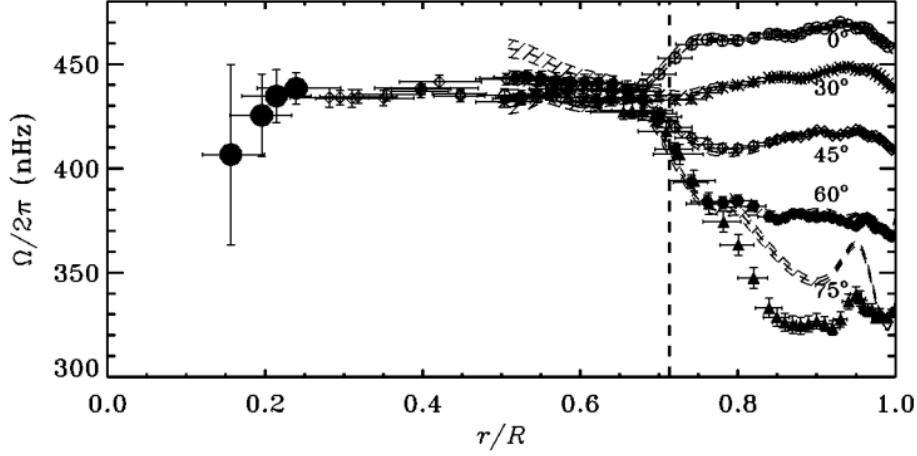
#### 3.1.1 Héliosismologie et astérosismologie

L’héliosismologie est une technique d’analyse sismique qui permet de mieux comprendre les propriétés internes du Soleil. Elle se base sur l’observation des modes de vibrations du Soleil générés à leur intérieur. Les modes de pression sont les plus simples à détecter, car ils sont générés par des ondes sonores qui sont piégées dans l’enveloppe externe du Soleil. Ces modes sont à l’origine d’oscillations d’une période de cinq minutes à la surface du Soleil (Ulrich 1970).

L’analyse des modes p du Soleil a permis de sonder sa structure interne avec une précision inégalée (Christensen-Dalsgaard 2021) et de déterminer son profil de rotation par des techniques d’inversion (Thompson et al. (2003), figure 5). Ils ont trouvé que la rotation du Soleil est marquée par une rotation différentielle latitudinale, avec un équateur tournant plus rapidement que les pôles (équateur tourne en 28 jours et les pôles en 25 jours). Cependant, au niveau de la tachocline, qui est la zone de transition entre la zone convective et la zone radiative, la rotation s’uniformise en latitude et en rayon jusqu’à 20% de son rayon solaire (Couvidat et al. 2003). Le résultat devient beaucoup plus incertain dans l’intérieur profond. Cela est dû au fait que les modes de pression ne peuvent pas atteindre des profondeurs aussi importantes. Certaines études suggèrent qu’il pourrait tourner jusqu’à quatre fois plus vite que la zone radiative (García et al. 2007; Fossat et al. 2017).

Pour aller plus dans la profondeur (au-dessous de 20% du rayon solaire), les modes de gravité sont considérés comme d’excellents candidats pour fournir des informations complémentaires (Mathur et al. 2008) sur la structure et la dynamique profonde du Soleil. Cependant, leur détection à la surface du Soleil est difficile en raison de leur faible amplitude, causée par leur comportement évanescent en zone convective. Néanmoins, en mesurant l’espacement régulier des périodes des modes de gravité dipolaires de degré angulaire  $\ell = 1$ , García et al. (2007) ont pu détecter la signature des modes de gravité asymptotiques, confirmant ainsi les prédictions de Mathur et al. (2008). Néanmoins, les travaux sur la détection des modes g dans le Soleil (e.g. García et al. 2007; Fossat et al. 2017) sont toujours discutés et leur détection reste à ce jour sujet à débat (e.g. Appourchaux & Corbard 2019).

L’application des techniques d’héliosismologie à l’étude d’étoiles autres que le Soleil a permis de créer le domaine de l’astérosismologie. Concernant les étoiles similaires au Soleil (étoiles de type solaire), on observe une rotation différentielle latitudinale similaire à celle que l’on observe à la surface du Soleil. Néanmoins, certaines d’entre elles affichent un gradient de surface plus accentué par rapport à celui du Soleil (e.g. Benomar et al. 2018). Pour les étoiles de masses intermédiaires et massives, cette approche a permis de détecter des modes gravito-inertiels. Ces modes présentent des propriétés sismiques caractéristiques qui ont permis notamment de sonder le mélange chimique et la rotation au niveau de la limite entre le cœur convectif et l’enveloppe radiative (e.g. Van Reeth et al. 2015a,b, 2016; Ouazzani et al. 2017; Van Reeth et al. 2018; Christophe et al. 2018; Pedersen et al. 2018; Li et al. 2019, 2020; Takata et al. 2020; Michielsen et al. 2021; Mombarg et al. 2021; Vanlaer et al. 2023).



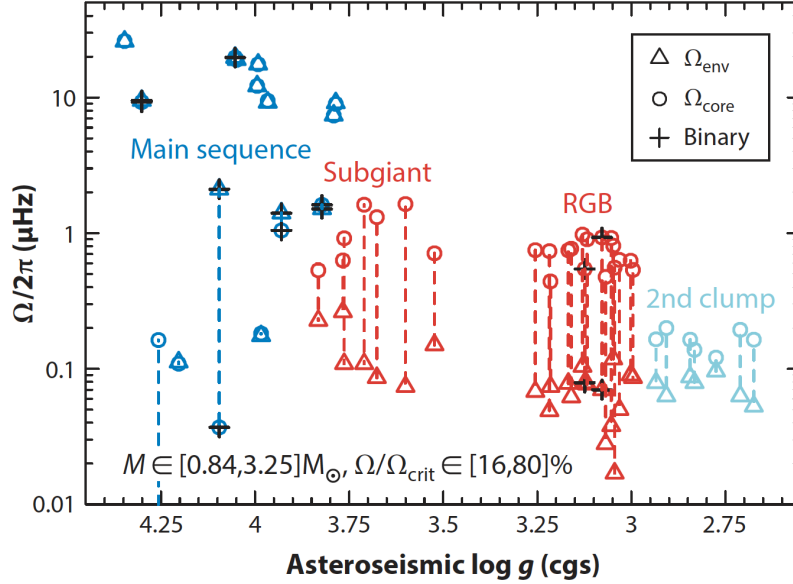
**FIGURE 5** – Profil de rotation du Soleil en fonction du rayon normalisé à plusieurs latitudes inversé grâce à l'héliosismologie. Crédits : [Thompson et al. \(2003\)](#).

### 3.1.2 Profils de rotation et transport du moment cinétique

Il existe aujourd'hui de nombreuses observations de taux de rotation d'étoiles, couvrant une large gamme de masses et de stades évolutifs. Dans la figure 6, on peut observer les 45 étoiles pour lesquelles une estimation du taux de rotation du cœur et de l'enveloppe a été obtenue. Les étoiles de la séquence principale ont majoritairement un profil de rotation uniforme, tandis que les étoiles de la branche des géantes rouges présentent un cœur tournant plus rapidement que l'enveloppe, mais moins rapidement que ce à quoi on pourrait s'attendre en se basant sur la conservation du moment cinétique lors de la contraction du cœur ou sur une modélisation hydrodynamique impliquant vents stellaire, turbulence de cisaillement et flots méridiens associés des processus de transport (e.g. [Eggenberger et al. 2012](#); [Marques et al. 2013](#); [Ouazzani et al. 2019](#)). Les observations effectuées grâce à l'astérosismologie ont révélé des taux de rotation différentielle faibles au sein des étoiles de masse intermédiaire et des étoiles massives ([Kurtz et al. 2014](#); [Saio et al. 2015](#); [Triana et al. 2015](#); [Murphy et al. 2016](#); [Van Reeth et al. 2016](#); [Aerts et al. 2017, 2018](#); [Ouazzani et al. 2019](#); [Li et al. 2019, 2020, 2021](#)). De manière similaire, des résultats comparables ont été obtenus pour les étoiles sous-géantes et les géantes rouges ([Beck et al. 2012](#); [Mosser et al. 2012](#); [Deheuvels et al. 2012, 2014, 2015](#); [Spada et al. 2016](#); [Gehan et al. 2018](#); [Deheuvels et al. 2020](#)). Ces observations mettent en évidence l'existence de mécanismes d'extraction de moment cinétique efficaces qui permettent d'expliquer ces profils de rotation.

### 3.1.3 Observations spectropolarimétriques et champs magnétiques

En utilisant la spectropolarimétrie à haute résolution, nous avons pu caractériser les propriétés des champs à la surface stellaire ([Donati & Landstreet 2009](#); [Morel et al. 2014](#); [Neiner et al. 2015](#); [Wade et al. 2016](#)). Deux types de champs ont été détectés. D'une part, 10% des étoiles de masses intermédiaires et massives abritent des champs stables à grande échelle, généralement de forte amplitude. Ces champs magnétiques sont supposés avoir une origine fossile, c.-à-d. résultent de la relaxation des champs générés par une dynamo pendant les phases convectives de la pré-séquence



**FIGURE 6** – 45 étoiles pour lesquelles une estimation du taux de rotation de l’enveloppe et du cœur a été obtenue en fonction de  $\log g$  qui est un paramètre permettant d’identifier le stade évolutif de l’étoile pour la plage de masse et de vitesse angulaire spécifiée ( $\Omega_{\text{crit}}$  représente le taux de rotation critique). Crédits : [Aerts et al. \(2019\)](#).

principale (PMS) lorsque les couches convectives se transforment en couches stratifiées stables ([Braithwaite & Spruit 2004](#); [Duez & Mathis 2010](#); [Arlt 2014](#); [Emeriau-Viard & Brun 2017](#)). D’autre part, les 90% restants d’étoiles de masses intermédiaires et massives peuvent héberger d’autres types de champs détectés comme des champs faibles à petite échelle à la surface stellaire ([Lignières et al. 2009](#); [Petit et al. 2011](#); [Blazère et al. 2016a,b](#)). Mais si un fort champ magnétique est présent dans l’enveloppe radiative, mais n’émerge pas à la surface stellaire, la spectropolarimétrie ne pourra pas le détecter et le caractériser. La question clé est donc de savoir comment on peut être en mesure de les détecter et de les caractériser. L’astérosismologie est la clé pour répondre à ce problème. Plus précisément, la magnéto-astérosismologie (e.g. [Neiner et al. 2015](#); [Mathis et al. 2021](#)) est le meilleur outil de diagnostic. Elle consiste à rechercher les signatures caractéristiques des intensités et des configurations du champ magnétique dans les spectres de fréquence observés des oscillations stellaires. Bien que cette méthode en soit encore à ses débuts, avec seulement quelques études pour le Soleil (e.g. [Goode & Thompson 1992](#); [Kiefer & Roth 2018](#)), les géantes rouges (e.g. [Bugnet et al. 2021](#); [Bugnet 2022](#); [Mathis et al. 2021](#); [Loi 2021](#); [Li et al. 2022](#)) et les étoiles de masse intermédiaire (e.g. [Takata & Shibahashi 1994](#); [Shibahashi & Aerts 2000](#); [Lecoanet et al. 2022](#)), elle a récemment connu un fort développement motivé par l’utilisation simultanée de l’astérosismologie spatiale et de la spectropolarimétrie au sol ([Briquet et al. 2012, 2013](#); [Neiner & Lampens 2015](#); [Neiner et al. 2017](#); [Buysschaert et al. 2018](#)).

Dans la partie I de cette thèse, nous étudierons donc les effets rotationnels et magnétiques sur les ondes de gravité dans les étoiles, en mettant l’accent sur leurs impacts, leurs signatures et leur détectabilité en exploitant les observations astérosismiques.



## 3.2 Structure interne et dynamique des planètes géantes gazeuses

### 3.2.1 Sismologie planétaire

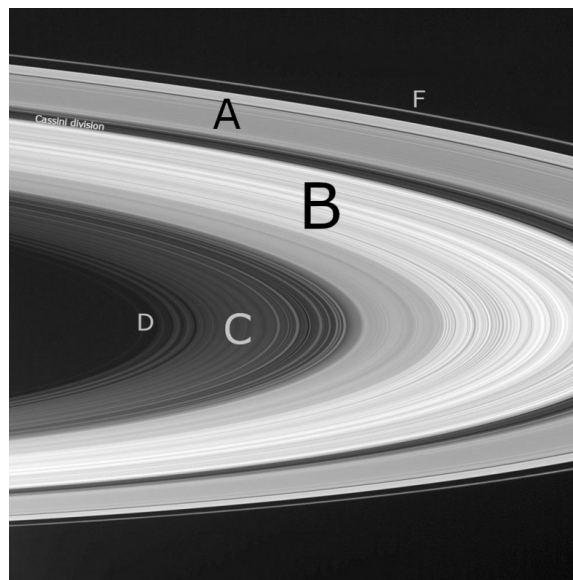
L'étude des ondes se propageant dans les planètes peut s'avérer être un outil puissant pour inférer leur structure interne (Gaulme et al. 2015), en particulier dans le cas de Jupiter (e.g. Jackiewicz et al. 2012). Cette approche constitue une extension naturelle de l'héliosismologie et de l'astérosismologie, avec l'objectif de détecter des modes d'oscillation globaux des planètes géantes gazeuses. L'application de la sismologie à l'étude de ces planètes est une tâche complexe et difficile. En effet, les deux principaux défis pour réaliser des observations sismiques de Jupiter sont la rotation rapide de la planète qui diminue la sensibilité de l'instrument et la faiblesse du signal sismique.

Bien que la première étude théorique des oscillations joviennes ait été réalisée par Vorontsov et al. (1976) et que de nombreuses tentatives d'observation aient été effectuées depuis les travaux de Deming et al. (1989) et Schmider et al. (1991), elles n'ont malheureusement pas abouti. Le signal sismique le plus clair de modes acoustiques piégés dans Jupiter a été trouvé par Gaulme et al. (2011). Ils ont détecté des modes d'oscillation qui ont les propriétés des modes de pression. Les paramètres sismiques obtenus sont globalement cohérents avec les prédictions théoriques (e.g. Vorontsov et al. 1976; Bercovici & Schubert 1987). Toutefois, les amplitudes observées des modes normaux sur Jupiter dépassent largement ce que l'on pourrait attendre sur la base de la théorie de la convection turbulente, des impacts de météorites et des tempêtes d'eau (Dederick & Jackiewicz 2017; Dederick et al. 2018; Markham & Stevenson 2018). Le seul candidat viable est la tempête de poussière (Markham & Stevenson 2018). La source d'excitation de ces modes globaux reste donc un sujet de recherche encore ouvert.

Les planètes géantes gazeuses peuvent aussi posséder des anneaux qui offrent une sonde sismique inégalée de leur intérieur, on parle de Kronoséismologie. C'est le cas de Saturne par exemple. En effet, Les modes d'oscillation de Saturne ont une amplitude trop faible à sa surface pour être observés directement. Cependant, grâce à ses anneaux, Saturne offre une occasion unique d'observer indirectement les modes d'oscillations globaux de la planète. En effet, des ondes ont été observées en utilisant des données de la sonde Cassini (ESA/NASA) (Hedman & Nicholson 2013) dans tous les anneaux, spécifiquement dans l'anneau C le plus interne (voir la figure 7). L'excitation des modes dans les anneaux est induite par les perturbations gravifiques causées par les modes g internes (Fuller 2014), ce qui indique qu'une partie de l'intérieur de Saturne est stablement stratifiée par des gradients de composition (Mankovich & Fuller 2021).

Dans un contexte plus large, Le Bihan & Burrows (2013) ont examiné la possibilité de faire de la sismologie sur une géante exoplanète gazeuse. Celle-ci est hors de portée de toute installation d'observation actuelle. Cependant, des observations telles que le suivi des bandes moléculaires du côté jour d'un Jupiter chaud le long de son orbite (Brogi et al. 2013) nous permettent de penser que certains des Jupiters chauds les plus brillants pourraient être observables avec un rapport signal sur bruit suffisant pour détecter des oscillations, lorsque des télescopes extrêmement grands équipés de spectromètres infrarouges à haute résolution seront disponibles (Gaulme et al. 2015).

Bien que les résultats obtenus jusqu'à présent ne soient pas concluants, la sismologie des planètes géantes gazeuses est un domaine de recherche en constante évolution et elle reste un moyen unique pour sonder leur structure interne. Cela étant dit, cette approche n'en est encore qu'à ses débuts par rapport à la sismologie des étoiles.



**FIGURE 7** – Image des anneaux de Saturne prise par la caméra infrarouge de l’ISS (station spatiale internationale). La kronoséismologie est réalisée à partir des ondes dans l’anneau C. Crédits : [Stähler & Knapmeyer \(2022\)](#).

### 3.2.2 Gravimétrie de haute précision

Les missions spatiales Juno (NASA) et le grand finale de la sonde Cassini ont permis une révolution dans notre compréhension de l’intérieur des planètes géantes. Les observations ont montré que les vents intenses observés à la surface de ces planètes sont confinés dans les régions externes (3000 km sur  $R_J = 71\,492$  km pour Jupiter ([Guillot et al. 2018](#)) et 8800 km sur  $R_S = 60\,268$  km pour Saturne ([Galanti et al. 2019](#)). Les régions internes, où le champ magnétique est généré par effet dynamo, connaissent une rotation différentielle moins intense en raison de la rétroaction de la force de Lorentz ([Cao & Stevenson 2017](#)). Les images à haute résolution ont révélé des structures tourbillonnaires puissantes, dont les échelles spatiales sont similaires à celles des ondes de marée, suggérant une possible interaction ([Dandoy et al. 2023](#)). Les contraintes sur les propriétés du champ de gravité de ces planètes ont également montré que leur cœur constitué d’éléments lourds pourrait être instable, entraînant le mélange de ces éléments dans leur profonde enveloppe gazeuse ([Wahl et al. 2017](#)) en raison d’instabilités dites double diffusives et de l’alternance de régions stables et de régions convectives turbulentes (e.g. [Leconte & Chabrier 2012](#); [Debras & Chabrier 2019](#)).

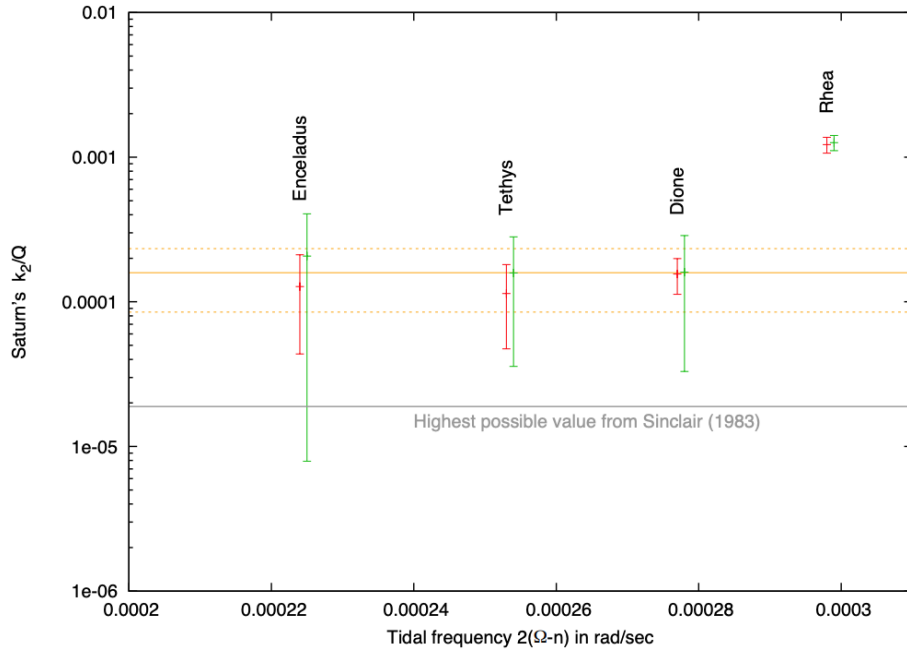
Afin d’améliorer notre compréhension de la dissipation des marées dans les planètes géantes, il est crucial de revoir les modèles précédemment proposés qui faisaient l’hypothèse d’une structure interne simplifiée.

### 3.2.3 Dissipation de marée

Ces dix dernières années, notre compréhension de la dissipation des marées dans les planètes géantes a connu plusieurs révolutions. D’une part, des taux de dissipation dix fois plus élevés que prévus ont été mesurés pour Jupiter et Saturne, remettant en question notre compréhension



de la formation et de l'évolution de leur système (Lainey et al. 2009, 2012, 2017, 2020; Charnoz et al. 2011). Par exemple, la figure 8 illustre un résultat de telles observations pour Saturne. En rassemblant des données astrométriques recueillies sur une période de plus d'un siècle, Lainey et al. (2017) ont réussi à mesurer les taux de migration des satellites Encelade, Thetys, Dione et Rhéa et de Titan par Lainey et al. (2020). Pour quatre fréquences orbitales différentes, et donc pour quatre fréquences de marée correspondantes, ils ont été en mesure de calculer le taux de dissipation de marée dans Saturne. Les modèles de marée simplifiés de Goldreich & Soter (1966) qui font l'hypothèse d'une formation des satellites en même temps que le système solaire et qui calibre la dissipation de marée pour amener les satellites à leur position actuelle à l'âge du système solaire ne permettent pas d'expliquer ces taux de dissipation, ce qui souligne l'importance de rechercher des sources de dissipation supplémentaires dans les planètes géantes et d'étudier des scénarios de formation alternatifs (Charnoz et al. 2011; Crida & Charnoz 2012). D'autre part, dans le cas des



**FIGURE 8** – Taux de dissipation de marée (exprimé avec l'indicateur  $k_2/Q$  avec  $k_2$  le nombre de Love du mode quadripolaire, dominant dans les interactions de marée, et  $Q$  le facteur de qualité de la marée (voir la section 5.1.2 pour une définition détaillée de ces deux quantités)) dans Saturne pour quatre satellites en fonction de leurs fréquences de marée associées  $2(\Omega - n)$  (avec  $\Omega$  est le taux de rotation de Saturne et  $n$  est la fréquence orbitale des satellites). Crédits : Lainey et al. (2017).

systèmes exoplanétaires, il est nécessaire d'expliquer la grande diversité des architectures orbitales observées et le rayon anormalement grand de certains Jupiters chauds, pour lesquels les marées jouent un rôle crucial (e.g. Tremblin et al. 2017). De plus, les contraintes obtenues grâce aux grands relevés photométriques de haute précision tels que *Kepler*/K2 et TESS indiquent que la dissipation des marées dans les planètes géantes gazeuses extrasolaires est moins intense que dans Jupiter et Saturne (Van Eylen et al. 2018; Huber et al. 2019).

Les modèles de marée simplifiés qui sont couramment utilisés ne prennent pas encore en compte



la structure interne des planètes géantes et sont basés sur une vision standard tricouche de leur intérieur avec un cœur de roche et de glace (Remus et al. 2012, 2015) et une profonde enveloppe convective entourée d’une fine atmosphère stablement stratifiée (Ogilvie & Lin 2004). Par conséquent, il est crucial d’établir une quantification de cette dissipation en utilisant des modèles physiques cohérents.

Dans la partie II de cette thèse, nous proposons donc un nouveau modèle global qui intègre de manière cohérente la structure de ces planètes dans son ensemble, ses interactions avec les ondes de marée. Nous nous concentrerons particulièrement sur l’interaction des marées avec les structures alternées régions convectives/régions stables issues du mélange des éléments lourds.

## 4 Rôle central des oscillations dans l’évolution des systèmes stellaires et planétaires

### 4.1 Évolution rotationnelle et chimique des étoiles

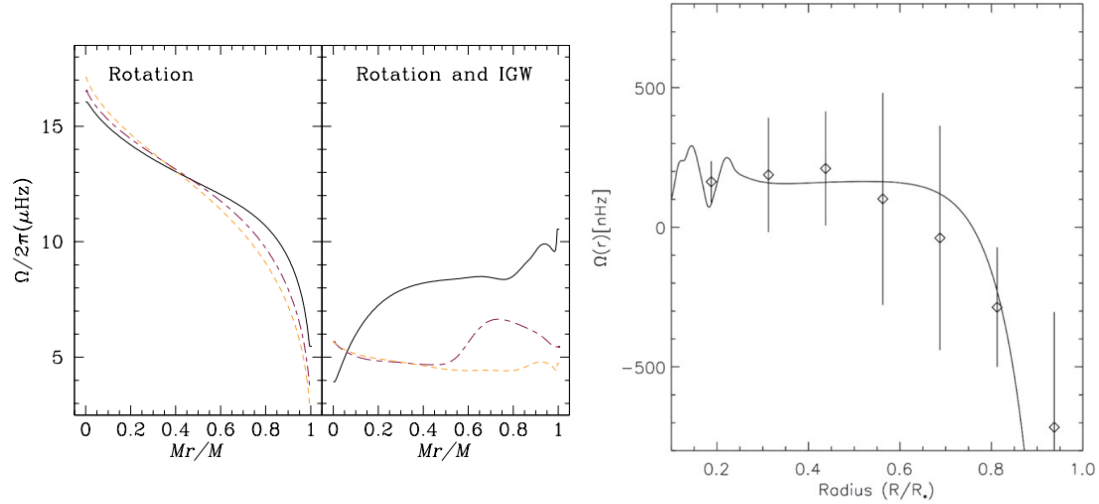
Les ondes sont en mesure d’expliquer, entre autres, les profils de rotation des étoiles notamment la rotation uniforme observée dans la zone radiative solaire représenté dans la figure 5 (e.g. Kumar et al. 1999; Charbonnel & Talon 2005; Talon & Charbonnel 2005). Elles ont pour effet d’extraire du moment cinétique du cœur radiatif de l’étoile sur une échelle de temps d’environ plusieurs centaines de millions d’années. En conséquence, les ondes diminuent efficacement l’amplitude de la rotation différentielle. Elles permettent aussi d’expliquer les propriétés de mélange des éléments légers tels que le lithium dans les étoiles de faibles masses (Charbonnel & Talon 2005; Talon & Charbonnel 2005) ou le mélange dans les étoiles plus massives (Pedersen et al. 2021). Les ondes jouent donc un rôle crucial dans la formation des profils de rotation des étoiles au cours de leur évolution (Talon & Charbonnel 2005, 2008; Charbonnel et al. 2013; Mathis et al. 2013; Fuller 2014; Rogers 2015; Pinçon et al. 2017). Elles sont aussi d’excellentes candidates pour expliquer les faibles rotations différentielles mises en évidence par l’astérosismologie dans les étoiles massives (Rogers 2015; Neiner et al. 2020) et les sous-géantes (Belkacem et al. 2015; Pinçon et al. 2017).

Les ondes ont la capacité à redistribuer le moment cinétique grâce à leur interaction avec la rotation différentielle et le champ magnétique. Ce phénomène se produit selon trois mécanismes : la diffusion thermique linéaire (Press 1981; Schatzman 1993; Zahn et al. 1997), la rencontre de couches critiques : couches critiques de corotation qui se forment lorsqu’il y a annulation de la fréquence de l’onde dans le référentiel en rotation (Booker & Bretherton 1967; Watts et al. 2003; Alvan et al. 2013; Astoul et al. 2021) et couches critiques magnétiques qui se forment lorsque la fréquence de l’onde dans le référentiel en rotation est un multiple de la fréquence d’Alfvén (Rudraiah & Venkatachalappa 1972b; Barnes et al. 1998), et le déferlement non-linéaire des ondes (e.g. Rogers et al. 2013). Le déferlement non-linéaire des ondes se produit, lorsque l’amplitude du déplacement créé par l’onde devient de l’ordre de sa longueur d’onde. Les fronts d’onde se raidissent et le paquet d’onde se transforme en turbulence, déposant du moment cinétique localement. Ce mécanisme de dissipation est important dans les étoiles de faibles masses (Barker & Ogilvie 2010) et pourrait être important près de la surface des étoiles de masse intermédiaire et massive (Rogers et al. 2013; Ratnasingam et al. 2019).

Un exemple concret de l’impact des ondes internes sur l’évolution stellaire est présenté dans Talon & Charbonnel (2005). Elles ont démontré, comme on peut le voir dans le panneau gauche de la figure 9 pour une étoile de  $1.2M_{\odot}$ , que l’évolution du taux de rotation de l’étoile variait



considérablement en fonction de l'inclusion ou non de l'effet des ondes internes dans les modèles. En effet, la prise en compte de l'action de ces ondes entraînerait une évolution très différente de celle observée lorsque seulement les processus de transport liés à la rotation différentielle, la circulation méridienne et la turbulence de cisaillement (Zahn 1992; Mathis & Zahn 2004), sont considérés. Dans le panneau droit de la figure 9 on peut aussi illustrer l'efficacité de ce mécanisme pour les étoiles de masses intermédiaires et massives ayant une enveloppe radiative grâce aux travaux de (Rogers 2015) qui démontrent que le transport du moment angulaire par les ondes gravito-inertielles peut expliquer avec précision les profils de rotation observés par la mission *Kepler* (KIC 10526294).



**FIGURE 9 – Gauche :** Profils de rotation en fonction de la masse intégrée dans une sphère de rayon  $r$  calculés avec un code d'évolution stellaire 1D pour une étoile de masse  $1.2 M_\odot$  et de métallicité  $Z = 0.02$  aux âges 0.2 (en noir), 0.5, and 0.7 (en orange) milliards d'années sans (gauche) et avec (droite) la prise en compte du transport par les ondes de gravité générées par la turbulence de l'enveloppe convective. Crédits : Talon & Charbonnel (2005). **Droite :** Profil de rotation d'une étoile de masse  $3 M_\odot$  en fonction du rayon normalisé mesurée par Triana et al. (2015) représenté par des diamants avec les lignes verticales indiquant les barres d'erreur. La ligne continue représente le profil de rotation, qui reproduit le profil de rotation observé, calculé à partir d'une simulation numérique 2D qui prend en compte le transport du moment par des ondes gravito-inertielles générées par la turbulence du cœur convectif. Crédits : Rogers (2015).

La partie I de cette thèse sera donc dédiée à la (magnéto-)astérosismologie et aux modèles théoriques utilisés pour interpréter les données observationnelles en vue de détecter les ondes (magnéto-)gravito-inertielles. Nous développerons des diagnostics sismiques qui permettent de caractériser les effets de la déformation centrifuge, de la rotation différentielle et du champ magnétique.

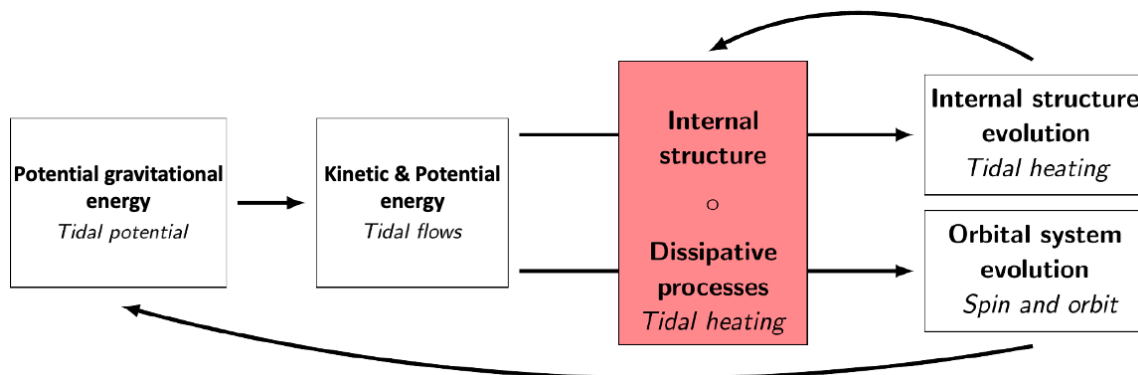
Si les ondes (magnéto-)gravito-inertielles jouent ainsi un rôle important dans le transport de moment cinétique dans les zones radiatives des étoiles, impactant donc la dynamique de ces régions, elles sont aussi l'un des mécanismes le plus efficace pour les échanges de moment cinétique entre une planète et son(ses) compagnon(s), contribuant ainsi à l'évolution à long terme de leur système.



## 4.2 Évolution séculaire : interaction de marée

Lorsqu'un compagnon proche (satellite ou étoile hôte) exerce une force gravitationnelle sur une planète, toute déformation ou écoulement fluide qui en résulte est appelé marée. La dissipation de l'énergie associée à ces déformations ou à ces écoulements entraîne une évolution couplée de la rotation et de l'orbite de la planète et de son compagnon. Dans tous les systèmes gravitationnellement liés, les interactions de marée sont donc l'un des processus déterminants pour leur évolution à long terme. Comme on peut voir dans la figure 10, les différents mécanismes des interactions de marée mènent à l'évolution séculaire des systèmes en interaction gravitationnelle.

En effet, le potentiel de marée dû au forçage gravitationnel (causé par un satellite sur la structure étendue de la planète par exemple) génère des écoulements de marée à travers l'ensemble du corps perturbé, transformant l'énergie potentielle gravitationnelle en énergie cinétique et en énergie potentielle. Les processus de friction propres à cet objet, tels que la diffusion visqueuse moléculaire ou turbulente, thermique, chimique, ou ohmique, permettent de dissiper ces énergies cinétiques et potentielles et de générer un couple de marée moyen non nul sur une période orbitale du compagnon, ce qui influence l'architecture du système. La quantité d'énergie dissipée dépend de la structure et de la dynamique internes de la planète (Mathis & Remus 2013; Ogilvie 2014; Mathis 2018, 2019). En outre, le chauffage de marée induit affecte également la structure interne de l'astre (e.g. Leconte et al. 2010). Les paramètres structurels, rotationnels et orbitaux du système sont alors modifiés, ce qui entraîne une évolution du potentiel de marée jusqu'à ce que le couple de marée moyen s'annule si une configuration d'équilibre est atteinte.



**FIGURE 10** – Mécanismes des interactions de marée et leurs effets séculaires qui mènent à l'évolution des systèmes gravitationnellement liés. Crédits : André (2019).

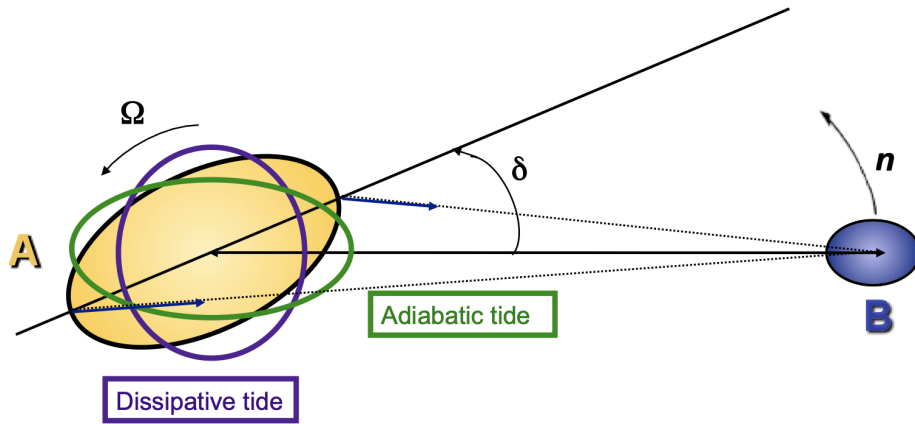
Si on considère un système isolé à deux corps de manière simplifiée, il existe deux scénarios d'évolution de marée possibles. En général, le système tend à évoluer vers un état d'énergie minimale où les orbites sont circulaires, la rotation des corps est synchronisée avec l'orbite et les spins sont alignés. Cependant, si le moment cinétique associé au mouvement orbital est inférieur à trois fois le moment cinétique associé à la rotation du corps central, le perturbateur va spiraler vers le corps central (Hut 1981) et sera disloqué dès qu'il dépasse la limite de Roche<sup>6</sup> de ce dernier (c'est le destin de certains Jupiters chauds (e.g. Yee et al. 2020)).

6. Il s'agit de la distance théorique en dessous de laquelle le compagnon subirait des forces différentielles de marée du corps primaire suffisamment importantes pour entraîner sa dislocation.



Les écoulements de marée sont généralement décomposés en deux composantes distinctes :

- la marée d'équilibre qui est un écoulement de grande échelle induit par l'ajustement hydrostatique de l'enveloppe fluide en réponse au potentiel de marée (Zahn 1966, 1989). Ces écoulements ont pour effet de redistribuer la matière pour rétablir l'équilibre hydrostatique. Si l'on ne tient pas compte de la rhéologie et de la viscosité des matériaux qui composent le corps perturbé (ajustement adiabatique), ces flots de marée créent un bourrelet ellipsoïdal dirigé vers le compagnon. Sur une période orbitale moyennée du compagnon, le couple exercé par ce bourrelet est nul dans le cas où on néglige les processus de friction. Toutefois, lorsque l'on prend en compte ces processus de dissipation, la réponse du corps perturbé n'est plus immédiate, mais retardée (ajustement dissipatif), comme illustré dans la figure 11. En outre,



**FIGURE 11** – Schéma de l'interaction de marée dans un système à deux corps. Le corps B exerce une force de marée sur le corps A, qui s'ajuste avec un retard de phase  $\delta$ , à cause de la dissipation interne. Cet ajustement peut être divisé en une composante adiabatique, qui est en phase avec la marée, et une composante dissipative, qui est en quadrature. Crédits : Remus et al. (2012).

la marée d'équilibre n'est pas la seule réponse à la force de marée. La force de marée excite différentes familles d'ondes au sein du corps primaire perturbé, dont la nature dépend du milieu et des forces en présence.

- la marée dynamique induite par l'écoulement de la marée d'équilibre (Zahn 1975; Ogilvie & Lin 2004) entraînant la génération d'ondes internes, qui peuvent être (magnéto-)inertielles dans les zones convectives et (magnéto-)gravito-inertielles dans les zones stablement stratifiées. La dissipation de ces ondes par les couches critiques, le déferlement non-linéaire ou les différents mécanismes de diffusion (visqueuse, thermique, chimique) peut conduire à un échange efficace de moment cinétique entre l'orbite du compagnon et la planète.

Afin de prédire l'évolution des systèmes étoile-planète géante ou des systèmes comprenant des planètes géantes et leurs satellites, il est donc essentiel de créer des modèles réalistes pour décrire la dissipation des ondes (magnéto-)gravito-inertielles de marée. Pour cela, il est nécessaire de tenir compte des derniers développements de notre compréhension de la structure interne de ces planètes obtenus grâce aux missions spatiales et les différents mécanismes de dissipation qui peuvent avoir lieu. La partie II de cette thèse s'inscrit dans cette perspective.



## 5 Enjeux de la thèse

La rotation et le magnétisme ont des implications importantes sur l'excitation, la propagation et la dissipation des ondes magnéto-gravito-inertielles dans les étoiles et les planètes géantes gazeuses. Les processus de transport et de mélange induits par ces deux effets ont un impact profond sur l'évolution à long terme de ces objets en affectant les ondes de gravité via l'accélération de Coriolis, l'accélération centrifuge et la force de Lorentz. L'étude des signatures sismiques de ces effets fournit des informations précieuses qui nous permettent de déchiffrer les détails complexes de leurs structures et de leurs dynamiques internes. Les données sismiques permettent d'identifier les différents modes d'ondes et leurs fréquences, ce qui permet de déduire les propriétés des champs magnétiques internes et des profils de rotation. De plus, l'étude approfondie de la dissipation de ces ondes nous permet de mieux comprendre l'échange du moment cinétique et l'évolution séculaire de ces objets et de leurs systèmes. Le principal objectif de cette thèse est de répondre à deux problématiques fondamentales :

- Quel est l'impact et les signatures sismiques des effets rotationnels et magnétiques sur les ondes de gravité dans les étoiles ?
- Comment la dissipation des ondes gravito-inertielles induites par les marées influence-t-elle l'évolution des systèmes de planètes géantes gazeuses ?

## 6 Organisation du manuscrit

Cette thèse se concentre donc sur l'étude des ondes (magnéto-)gravito-inertielles dans les intérieurs stellaires et planétaires. Deux grandes applications seront abordées : la (magnéto-)astérosismologie théorique dans les étoiles de masses intermédiaires et massives et la dissipation de marée dans les planètes géantes gazeuses. Le point commun de ces objets est la rotation rapide et le potentiel champ magnétique.

Dans le chapitre 1, une introduction générale présentera le formalisme analytique permettant de décrire les propriétés physiques fondamentales de ces ondes dans le cadre de la mécanique des fluides. Le manuscrit est ensuite divisé en deux parties :

- La partie I se concentrera sur la (magnéto-)astérosismologie, où nous aborderons dans le chapitre 2 en détail les modèles théoriques utilisées pour interpréter les données observationnelles afin de détecter les ondes (magnéto-)gravito-inertielles. Les chapitres 3 et 4 généraliseront l'approximation traditionnelle de la rotation largement utilisée en astérosismologie des étoiles en rotation pour prendre en compte les effets de la déformation centrifuge due à la rotation rapide, de la rotation différentielle et du champ magnétique. Des diagnostics sismiques pour ces processus seront développés et discutés au regard des observations les plus récentes.
- La partie II abordera la dissipation de marée dans les planètes géantes gazeuses. Il s'agira au chapitre 5 de détailler les interactions de marée dans ces planètes et de présenter l'état de l'art de leur structure et de leur dynamique internes en donnant une vue d'ensemble sur les processus de dissipation associés. Dans le chapitre 6, on se concentrera sur l'étude de la dissipation de marée dynamique dans Jupiter et l'influence de la structure interne sur celle-ci.

Enfin, nous présenterons un résumé des résultats obtenus, ainsi qu'une discussion sur les perspectives envisagées.

## CHAPITRE 1

# Propriétés générales des ondes magnéto-gravito-inertielles

Les ondes magnéto-gravito-inertielles (MGI) se propagent sous l'effet simultané de la force de Lorentz, la force d'Archimède et l'accélération de Coriolis. La combinaison unique de ces trois effets conduit à une variété d'ondes qui peuvent avoir des propriétés différentes. Ces ondes peuvent jouer un rôle important dans de nombreux systèmes de plasma astrophysiques et de laboratoire, comme dans le noyau terrestre liquide, la magnétosphère terrestre, le vent solaire et les réacteurs de fusion. L'étude des ondes MGI peut nous aider à mieux comprendre le comportement des plasmas et les processus qui s'y déroulent.

On peut se demander ce que peut apporter l'étude des ondes. Un coup d'œil sur les progrès réalisés en sismologie, en héliosismologie et en océanographie donne une illustration vivante de ce qui peut être réalisé. Les propriétés des ondes, en particulier leur dispersion, et la façon dont elles varient en fonction de la localisation et du temps dépendent de la nature du système qui les supporte. L'étude des ondes permet donc d'étudier les propriétés physiques internes des systèmes géophysiques et astrophysiques qui ne sont accessibles que par la sismologie. En outre, les ondes sont un mécanisme par lequel l'énergie, les éléments chimiques, et la quantité de mouvement peuvent être transportées (e.g. [Schatzman 1993](#); [Zahn et al. 1997](#); [Rogers 2015](#); [Rogers & McElwaine 2017](#)). Les observations des ondes MGI peuvent donc nous en apprendre beaucoup sur la façon dont ces systèmes fonctionnent et évoluent en nous permettant de sonder les stratifications thermique et chimique, la rotation, et le magnétisme.

### 1.1 Brève histoire des ondes dans les régions magnétisées en rotation

Le sujet des ondes en présence de rotation, de champs magnétiques et de la stratification a une longue et riche histoire. Avant de se lancer dans un exposé détaillé de la physique de ces ondes, il est utile d'esquisser l'historique des recherches sur ces phénomènes.

Les premiers travaux sur les oscillations résultant de la stabilité intrinsèque d'un fluide en rotation ont été réalisés par [Kelvin \(1880\)](#) dans une géométrie cylindrique. Ensuite, [Poincaré \(1885\)](#), [Bryan \(1889\)](#) et [Cartan \(1922\)](#) ont étudié des mouvements similaires dans des sphéroïdes en rotation. Récemment, des progrès théoriques considérables ont été réalisés pour trouver des solutions



explicitites pour les modes inertielles dans les géométries sphériques (Zhang et al. 2001), sphéroïdales (Zhang et al. 2004) et cylindriques (Zhang et al. 2007), et dans les coquilles sphériques (Rieutord & Valdettaro 1997; Rieutord et al. 2001).

L'étude des ondes dans les fluides magnétisés a connu un tournant décisif grâce aux travaux d'Alfvén (1942), qui ont permis de comprendre le mécanisme fondamental à leur origine. En effet, la combinaison de la tension magnétique et des effets d'inertie donne naissance à des oscillations, qui ont été baptisées ondes d'Alfvén en son honneur. Dans ce contexte, toute onde qui met en jeu à la fois un champ magnétique et les effets mécaniques d'un fluide sera qualifiée d'onde hydromagnétique. Les ondes d'Alfvén représentent ainsi le cas le plus simple et le plus emblématique des ondes hydromagnétiques (Rincon & Rieutord 2003; Reese et al. 2004).

Par la suite, Lehnert (1954) a déduit que la rotation rapide d'une zone magnétisée conduirait à la division des ondes d'Alfvén planes en deux ondes transversales à polarisation circulaire. Il s'est rendu compte que celles-ci auraient des échelles de temps très différentes si la fréquence des ondes inertielles était beaucoup plus grande que celle des ondes d'Alfvén pures, ce qui les a conduites à être nommées ondes MC (Magnétique-Coriolis) ou encore ondes magnéto-inertielles (Schmitt 2010).

Chandrasekhar (1961) s'est penché sur les effets de la flottabilité sur les régions magnétisées en rotation, en se concentrant principalement sur les mouvements axisymétriques. D'autres chercheurs, tels que Braginsky (1964, 1967) et Friedlander (1987, 1989), ont ensuite examiné les ondes non-axisymétriques étudiées en géophysique pour le noyau liquide de la Terre, en les désignant sous le nom d'ondes magnétique-Archimède-Coriolis (MAC) équivalentes aux ondes MGI. Des études plus récentes, menées par Eltayeb & Roberts (1970) et Roberts & Stewartson (1974), ont exploré les ondes MGI qui sont déclenchées par l'instabilité thermique dans une couche plane tournante imprégnée d'un champ magnétique fort et uniforme. Ils ont démontré l'importance d'inclure la diffusion magnétique et thermique dans de telles régions. De plus, Eltayeb & Kumar (1977) et Fearn & Proctor (1983) ont réalisé les premières études numériques sur les ondes hydromagnétiques d'origine thermique, en prenant en compte les effets de flottabilité et de diffusion dans une géométrie de sphère pleine en rotation rapide. Étant donné que les régions radiatives stellaires tournent de manière différentielle et sont magnétisées, la dynamique des ondes internes est modifiée par l'accélération de Coriolis et par la force de Lorentz, devenant ainsi des ondes MGI qui ont été étudiés par Schatzman (1993); Barnes et al. (1998); Kumar et al. (1999); Schecter et al. (2001); Rogers & MacGregor (2010). Ensuite, Mathis & de Brye (2011, 2012) ont réalisé une étude globale des ondes MGI et du transport du moment cinétique qu'elles induisent dans les régions radiatives stellaires en prenant en compte d'une manière non perturbative un champ magnétique toroïdal axisymétrique pour une fréquence d'Alfvén uniforme et avec une faible rotation différentielle radiale dans des coquilles sphériques. D'autres travaux ont également été réalisés pour étudier les ondes MGI dans le contexte des couches minces (e.g. Zaqarashvili et al. 2009; Heng & Spitkovsky 2009). Enfin, Prat et al. (2019, 2020) et Van Beeck et al. (2020) ont étudié la modification du spectre de fréquence des modes gravito-inertiels en présence de champs fossiles dipolaires mixtes (c'est-à-dire à la fois polaires et toroïdaux) axisymétriques et inclinés mais suffisamment faibles pour être traités comme une perturbation.



## 1.2 Théorie linéaire des ondes magnéto-gravito-inertielles (MGI)

### 1.2.1 Système d'équations de la magnétohydrodynamique (MHD) idéale

Pour étudier la dynamique des ondes MGI dans les étoiles magnétiques en rotation différentielle, nous devons résoudre le système des équations de la MHD non dissipative formé par :

- L'équation de continuité :

$$D_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{V}$  est le champ de vitesse macroscopique,  $\rho$  est la densité et  $D_t = \partial_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla)$  est la dérivée lagrangienne.

- L'équation de la quantité de mouvement (où le frottement visqueux est négligé) :

$$\rho D_t \mathbf{V} = -\nabla P - \rho \nabla \Phi + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (1.2)$$

avec  $P$  est la pression,  $\Phi$  est le potentiel gravitationnel,  $\mathbf{B}$  est le champ magnétique macroscopique et  $\mu_0$  la perméabilité magnétique du vide.

- L'équation de l'induction (où on néglige la diffusion ohmique) :

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}), \quad (1.3)$$

avec  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ .

- L'équation de transport de l'énergie dans la limite adiabatique (c'est-à-dire sans diffusion de la chaleur et sans chauffage visqueux et ohmique) :

$$\frac{1}{\Gamma_1} D_t \ln P - D_t \ln \rho = 0, \quad (1.4)$$

où  $\Gamma_1 = (\partial \ln P / \partial \ln \rho)_S$  est l'exposant adiabatique ( $S$  étant l'entropie macroscopique).

- L'équation de Poisson :

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (1.5)$$

où  $G$  est la constante gravitationnelle universelle.

### 1.2.2 Linéarisation des équations de la magnétohydrodynamique

Nous examinons ici le régime linéaire de propagation des ondes MGI de basses fréquences. Nous écrivons tout d'abord le champ de vitesse comme la somme de la vitesse azimutale à grande échelle, associée à la rotation  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$ , et de la vitesse des ondes  $\mathbf{v}$  :

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = r \sin \theta \Omega \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \quad (1.6)$$

où  $t$  est le temps,  $\mathbf{r}$  est le vecteur position, et  $(r, \theta, \varphi)$  sont les coordonnées sphériques avec leur base de vecteur unitaire associée  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ . Ensuite, on note par  $\square_1$  les perturbations eulériennes associées à l'onde et par  $\square_0$  la valeur hydrostatique. Pour simplifier, nous supposons que le champ magnétique non perturbé  $B_0$  et la vitesse de rotation  $\Omega$  varient lentement par rapport aux variations des ondes (approximation JWKB).

### 1.2.3 Approximation JWKB

Lorsque la stratification stable est suffisamment forte ( $\omega \ll N$ ), chaque champ scalaire et chaque composante de  $\mathbf{v}$  peuvent être développés en utilisant l'approximation bidimensionnelle de Jeffreys-Wentzel-Kramers-Brillouin (JWKB). Dans ce cas, le nombre d'onde vertical  $k_V$  est supposé être très grand, et la longueur d'onde associée est donc très petite. Par conséquent, la variation spatiale de l'onde dans la direction radiale est très rapide par rapport à celle de l'arrière-plan hydrostatique. Voir la section 2.3.1 pour plus de détails sur cette approximation.

### 1.2.4 Système d'équations MHD linéarisé

Étant donné que les ondes MGI se propagent à basses fréquences de manière quasi-incompressible, nous adoptons l'approximation de Boussinesq (Spiegel & Veronis 1960) pour décrire leur propagation, dans laquelle les ondes magnéto-acoustiques sont filtrées. Dans le cadre de cette approximation, nous négligeons les fluctuations de densité  $\rho_1$ , sauf celles intervenant dans la force de flottabilité d'Archimède  $\rho_1 \mathbf{g}_0 = -\rho_1 g_0 \mathbf{e}_r$  dans l'équation de la quantité de mouvement. En introduisant le déplacement lagrangien de l'onde,  $\boldsymbol{\xi}$  ( $\partial_t \boldsymbol{\xi} = \mathbf{v}$ ), et en linéarisant les équations de la magnétohydrodynamique (Eqs. 1.1-1.4) dans le repère tournant, on obtient le système MHD linéarisé suivant

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0, \quad (1.7)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} + 2\rho_0 \boldsymbol{\Omega} \times \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = -\nabla \left( p_1 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1 \right) + \rho_1 \mathbf{g}_0 + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_1 + \underbrace{\frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_1 \cdot \nabla) \mathbf{B}_0}_{=0}, \quad (1.8)$$

$$\mathbf{B}_1 = (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi} - \underbrace{(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0}_{=0}, \quad (1.9)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{N^2}{g_0} \xi_r, \quad (1.10)$$

où on a négligé le caractère non sphérique de la partie moyenne hydrostatique induit par les déformations associées à l'accélération centrifuge et la force de Lorentz à l'ordre zéro. Les termes  $(\mathbf{B}_1 \cdot \nabla) \mathbf{B}_0$  et  $(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0$  sont négligés puisqu'on adopte l'approximation JWKB. En plus, on a adopté l'approximation de Cowling (Cowling 1941), qui néglige les perturbations du potentiel gravitationnel, permettant de simplifier la résolution du système. Dans ce cas, l'équation de Poisson se découple du système des équations et on n'a plus besoin de la résoudre.

## 1.3 Relation de dispersion

Dans la limite des courtes longueurs d'onde (approximation JWKB), on fait l'approximation d'une onde plane monochromatique. Nous pouvons donc considérer que la dépendance spatiale et temporelle de toutes les quantités perturbées est proportionnelle à  $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$ , avec  $\mathbf{k}$  le vecteur d'onde et  $\omega$  la pulsation.

Le but de cette section est de dériver la relation de dispersion entre la pulsation  $\omega$  et le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  pour les ondes MGI en suivant la méthode utilisée par Kumar et al. (1999). Tout d'abord,



on commence par réécrire le système MHD linéarisé (Eqs. (1.7)-(1.9)) dans le cadre de l'hypothèse d'onde plane, on obtient :

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi} = 0, \quad (1.11)$$

$$-\rho_0 \omega^2 \boldsymbol{\xi} - 2\rho_0 i \omega \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\xi} = -i \mathbf{k} \left( p_1 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1 \right) - \rho_0 N^2 \xi_r \mathbf{e}_r + i \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) \mathbf{B}_1, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{B}_1 = i (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) \boldsymbol{\xi}. \quad (1.13)$$

En remplaçant  $\mathbf{B}_1$  par son expression dans l'équation (1.12) et en effectuant le produit vectoriel de cette équation avec le vecteur  $\mathbf{k}$ , on obtient :

$$\left( \omega^2 - V_A^2 (\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{k})^2 \right) (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\xi}) - 2i \omega (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}) \boldsymbol{\xi} - N^2 \xi_r (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_r) = 0, \quad (1.14)$$

avec  $V_A^2 = B_0^2 / (\mu_0 \rho_0)$  la vitesse d'Alfvén et  $\mathbf{B}_0^* = \mathbf{B}_0 / B_0$  le champ magnétique normalisé par son amplitude  $B_0 = \|\mathbf{B}_0\|$ .

Cherchons maintenant à exprimer  $\mathbf{k} \times \boldsymbol{\xi}$  en fonction de  $\boldsymbol{\xi}$ . Pour cela, on fait le produit vectoriel de l'équation précédente avec  $\mathbf{k}$ . On trouve :

$$\mathbf{k} \times \boldsymbol{\xi} = \frac{- \left( \omega^2 - V_A^2 (\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{k})^2 \right) k^2 \boldsymbol{\xi} - N^2 \xi_r \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_r)}{2i \omega (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})}, \quad (1.15)$$

avec  $k = \|\mathbf{k}\| = \sqrt{k_r^2 + k_\theta^2 + k_\varphi^2}$  la norme du vecteur d'onde. Ensuite, en substituant cette expression dans l'équation (1.14) on obtient :

$$\left[ \left( \omega^2 - V_A^2 (\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{k})^2 \right)^2 k^2 - 4\omega^2 (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})^2 \right] \boldsymbol{\xi} + N^2 \left[ \left( \omega^2 - V_A^2 (\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{k})^2 \right) \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_r) + 2i \omega (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}) (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_r) \right] \xi_r = 0. \quad (1.16)$$

Les trois composantes de cette équation peuvent être écrites sous la forme d'un système linéaire  $\mathbb{M} \boldsymbol{\xi} = 0$  avec

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 \\ m_{31} & 0 & m_{33} \end{bmatrix}, \quad (1.17)$$

où

$$m_{11} = \left( \omega^2 - V_A^2 (\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{k})^2 \right)^2 k^2 - 4\omega^2 (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})^2 - N^2 (k_\theta^2 + k_\varphi^2) \left( \omega^2 - V_A^2 (\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{k})^2 \right), \quad (1.18)$$

$$m_{22} = m_{33} = \left( \omega^2 - V_A^2 (\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{k})^2 \right)^2 k^2 - 4\omega^2 (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})^2, \quad (1.19)$$

$$m_{21} = \left( \omega^2 - V_A^2 (\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{k})^2 \right) k_r k_\theta + 2i \omega (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}) k_\varphi, \quad (1.20)$$

$$m_{31} = \left( \omega^2 - V_A^2 (\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{k})^2 \right) k_r k_\varphi - 2i \omega (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}) k_\theta. \quad (1.21)$$

Pour trouver la relation de dispersion, on cherche où le déterminant de cette matrice s'annule :

$$\det A = m_{11} m_{22}^2 = 0. \quad (1.22)$$

Analysons maintenant les solutions de cette relation de dispersion :





- Dans le cas où  $m_{11} = 0$ , on obtient :

$$k^2 \omega^4 - \left[ 2V_A^2 (\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{k})^2 k^2 + 4(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})^2 + N^2 k_h^2 \right] \omega^2 + V_A^2 (\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{k})^2 \left( V_A^2 (\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{k})^2 k^2 + N^2 k_h^2 \right) = 0, \quad (1.23)$$

avec  $k_h^2 = k_\theta^2 + k_\varphi^2$  le nombre d'onde horizontal. Cette équation peut être résolue pour déterminer la fréquence de l'onde

$$\omega^2 = \frac{1}{2k^2} \left( 2V_A^2 (\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{k})^2 k^2 + 4(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})^2 + N^2 k_h^2 \pm \sqrt{\left( 4(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})^2 + N^2 k_h^2 \right)^2 + 16V_A^2 (\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{k})^2 (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})^2 k^2} \right). \quad (1.24)$$

Cette relation de dispersion comporte deux branches :

1. La branche de basse fréquence correspond aux ondes d'Alfvén modifiées par la rotation et la stratification (puisque dans le cas où  $B_0 = 0$ ,  $\omega = 0$ ). En faisant un développement limité à l'ordre zéro, on obtient :

$$\omega_0^2 \approx V_A^2 (\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{k})^2, \quad (1.25)$$

On peut remarquer qu'à l'ordre zéro, on trouve une onde d'Alfvén non modifiée par la rotation et la stratification. En faisant un développement limité à l'ordre un, on obtient :

$$\omega_1^2 \approx V_A^2 (\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{k})^2 \frac{N^2 k_h^2}{4(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})^2 + N^2 k_h^2}, \quad (1.26)$$

où l'on peut voir que la rotation et la stratification modifient la fréquence de l'onde d'Alfvén. On peut remarquer aussi que cette fréquence s'annule lorsque  $N^2 = 0$  et que lorsque  $\boldsymbol{\Omega} = 0$  on retrouve une onde d'Alfvén pure  $\omega_0$ .

2. La branche de haute fréquence correspond aux ondes MGI. À l'ordre zéro, la relation de dispersion pour cette branche peut être écrite comme suit [Kumar et al. \(1999\)](#)

$$\omega_0^2 \approx V_A^2 (\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{k})^2 + \frac{4(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})^2}{k^2} + N^2 \frac{k_h^2}{k^2}. \quad (1.27)$$

On identifie ici les trois forces régissant la dynamique des ondes MGI : la force de tension magnétique, l'accélération de Coriolis et la poussée d'Archimède.

À l'ordre un, on trouve :

$$\omega_1^2 \approx V_A^2 (\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{k})^2 \left( 1 + \frac{4(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})^2}{4(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})^2 + N^2 \frac{k_h^2}{k^2}} \right) + \frac{4(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})^2}{k^2} + N^2 \frac{k_h^2}{k^2}. \quad (1.28)$$

On peut remarquer ici que dans le cas non rotatif ( $\boldsymbol{\Omega} = 0$ ), on trouve la relation de dispersion pour les ondes magnéto-gravifique, pour lesquelles les forces de rappel sont les forces d'Archimède et de Lorentz (e.g. [Schecter et al. 2001](#); [Rui & Fuller 2023](#)).



- Dans le cas où  $m_{22} = 0$ , on obtient :

$$k^2 \omega^4 - \left[ 2V_A^2 (\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{k})^2 k^2 + 4(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})^2 \right] \omega^2 + V_A^4 (\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{k})^4 k^2 = 0. \quad (1.29)$$

On retrouve l'équation (1.23) dans le cas où la stratification est nulle ( $N^2 = 0$ ) et dans ce cas la relation de dispersion peut donc être écrite comme

$$\omega^2 = \frac{1}{2k^2} \left( 2V_A^2 (\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{k})^2 k^2 + 4(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})^2 \pm \sqrt{16(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})^4 + 16V_A^2 (\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{k})^2 (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})^2 k^2} \right). \quad (1.30)$$

Dans ce cas aussi, on peut distinguer deux branches :

1. La branche de basse fréquence correspond aux ondes d'Alfvén (modifiée par la rotation), on obtient à l'ordre zéro

$$\omega_0^2 \approx V_A^2 (\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{k})^2, \quad (1.31)$$

à l'ordre un

$$\omega_1^2 \approx 0, \quad (1.32)$$

à l'ordre deux

$$\omega_2^2 \approx \frac{V_A^4 (\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{k})^4 k^2}{4(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})^2}. \quad (1.33)$$

2. La branche de haute fréquence correspond aux ondes magnéto-inertielles. À l'ordre zéro, la relation de dispersion pour cette branche peut être écrite comme

$$\omega_0^2 \approx V_A^2 (\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{k})^2 + \frac{4(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})^2}{k^2}, \quad (1.34)$$

et à l'ordre un, on obtient :

$$\omega_1^2 \approx 2V_A^2 (\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{k})^2 + \frac{4(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})^2}{k^2}. \quad (1.35)$$

En conclusion, la forme exacte de la relation de dispersion des ondes MGI peut varier en fonction des modèles et des approximations utilisées pour décrire le milieu. Elle inclut plusieurs branches de solutions, qui correspondent à différents types d'ondes. On a trouvé ici que la relation de dispersion qui décrit la branche des ondes MGI est donné par :

$$\omega^2 \approx V_A^2 (\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{k})^2 + \frac{4(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})^2}{k^2} + N^2 \frac{k_h^2}{k^2}. \quad (1.36)$$

## 1.4 Vitesse de phase et vitesse de groupe

Grâce à la relation de dispersion, on peut calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe des ondes MGI. En effet, La vitesse de phase  $\mathbf{v}_p$  correspond à la vitesse à laquelle se propagent les surfaces équiphases. La vitesse de groupe, quant à elle, représente la vitesse à laquelle l'énergie du paquet d'onde est transporté.



En utilisant la relation de dispersion des ondes MGI (Eq. (1.36)), on peut dériver leur vitesse de phase

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_p &= \frac{\omega}{k^2} \mathbf{k} \\ &= \frac{\text{sgn}(\omega)}{k^2} \left( V_A^2 (\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{k})^2 k^2 + 4 (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})^2 + N^2 k_h^2 \right)^{1/2} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

On peut remarquer que les ondes MGI sont dispersives, puisque leur vitesse de phase dépend du nombre d'onde  $k$ . Cela implique que chaque onde correspondant à un mode d'oscillation se propage à une vitesse différente. Ensuite, on dérive leur vitesse de groupe :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_g &= \nabla_{\mathbf{k}} \omega \\ &= \frac{\text{sgn}(\omega)}{\omega} \left[ V_A (\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{k}) \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{B}_0^* \times \mathbf{k})}{k} + \left( \frac{2\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}}{k} \right) \frac{\mathbf{k} \times (2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k})}{k^3} - N^2 \left( \frac{k_r}{k} \right) \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{e}_r \times \mathbf{k})}{k^3} \right]. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Comme pour les ondes internes de gravité et les ondes inertielles, nous voyons que la vitesse de groupe des ondes MGI est perpendiculaire à leur vitesse de phase ( $\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_g = 0$ ), indiquant que l'énergie de l'onde se propage perpendiculairement à la vitesse de phase, créant ainsi une anisotropie dans la propagation.

## 1.5 Aspects énergétiques

Pour compléter la description des ondes MGI, nous utilisons le système d'équations linéarisé (Eqs. (1.7)-(1.10)) pour dériver l'équation de l'énergie de ces ondes. Pour ce faire, nous remplaçons d'abord  $\rho_1$  par son expression (1.10) puis nous prenons le produit scalaire de l'équation de la quantité de mouvement (1.8) avec  $\mathbf{v}$  :

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} + \rho_0 N^2 \xi_r (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{v}) + \nabla \cdot \left( p_1 + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1) \right) \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1.39)$$

Ensuite, nous prenons d'abord la dérivée puis le produit scalaire de l'équation de l'induction (1.9) avec  $\mathbf{B}_1$ , ce qui conduit à :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial B_1^2}{\partial t} = (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}_1) - (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{v}. \quad (1.40)$$

avec  $B_1 = \|\mathbf{B}_1\|$ . Enfin, en remplaçant, à partir de l'équation (1.40),  $(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{v}$  par son expression dans l'équation (1.39) et en utilisant l'approximation de Boussinesq ( $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ), on dérive l'équation complète pour le bilan énergétique

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \underbrace{\frac{1}{2} \rho_0 v^2}_{E_k} + \underbrace{\frac{1}{2} \rho_0 N^2 \xi_r^2}_{E_p} + \underbrace{\frac{B_1^2}{2\mu_0}}_{E_m} \right) + \nabla \cdot \left( \underbrace{p_1 \mathbf{v} + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1) \mathbf{v}}_F \right) - \underbrace{(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}_1)}_T = 0, \quad (1.41)$$

avec  $v = \|\mathbf{v}\|$ .  $E_k$ ,  $E_p$ , et  $E_m$  sont respectivement les densités d'énergie (énergie par unité de volume) cinétique, potentielle associée à la poussée d'Archimède, et magnétique.  $\mathbf{F}$  représente la



densité de flux acoustique et magnétique d'énergie transportée par l'onde MGI et  $\mathcal{T}$  est le taux de transfert d'énergie du flux de fond à grande échelle vers les ondes, ou vice versa, sous l'action de la contrainte totale des ondes (Kim & MacGregor 2003).

Dans la première partie de cette thèse, nous focaliserons sur la (magnéto-)astérosismologie. Nous examinerons en détail les modèles théoriques utilisés pour interpréter les données observationnelles dans le but de détecter les ondes (magnéto-)gravito-inertielles. Par la suite, nous étendrons l'approximation traditionnelle de la rotation, couramment employée en astérosismologie pour les étoiles en rotation, afin de prendre en compte les effets de la déformation centrifuge résultant d'une rotation rapide, de la rotation différentielle et du champ magnétique.



Première partie  
Sismologie stellaire



## CHAPITRE 2

# Introduction à l'astérosismologie

L'exploration de l'intérieur des étoiles demeure l'un des défis les plus complexes de l'Univers. Toutefois, grâce à l'astérosismologie, il devient possible de sonder cette région en étudiant les oscillations stellaires. Les propriétés de la structure globale d'une étoile se reflètent en effet dans le comportement de ses modes d'oscillation qui pénètrent à différentes profondeurs à l'intérieur de l'étoile, ce qui permet de déduire leurs propriétés internes à partir des différents modes d'oscillation.

L'astérosismologie est ainsi sans conteste la méthode la plus précise et la plus directe pour étudier la structure interne des étoiles. Cette discipline consiste à interpréter les spectres de fréquence d'oscillation des étoiles pour en déduire leur composition interne. Ce terme a été introduit pour la première fois dans la communauté scientifique par [Christensen-Dalsgaard \(1984\)](#), mais depuis, ce domaine a connu un développement fulgurant grâce aux missions spatiales : MOST<sup>1</sup>, CoRoT, et *Kepler* et à l'amélioration des techniques de modélisation numérique. En pratique, les astérosismologues utilisent les oscillations stellaires pour sonder les régions internes des étoiles, qui ne sont pas directement observables. Les principes fondamentaux de l'astérosismologie sont similaires à ceux utilisés en sismologie terrestre (e.g. [Tong & García 2015](#)), adaptés à la complexité de la structure stellaire. Les descriptions mathématiques sophistiquées des oscillations et les modèles numériques permettent aux astérosismologues d'analyser les spectres de fréquence des étoiles pour en extraire des informations sur leur composition, leur structure, leur évolution et leur dynamique ([Aerts et al. 2010](#)).

L'un des buts principaux de l'astérosismologie est d'améliorer les modèles d'évolution des étoiles. La théorie de l'évolution stellaire est raisonnablement bien établie dans un sens global. Nous savons que les étoiles naissent à partir de nuages géants de poussière et qu'elles brûlent de l'hydrogène en hélium dans leur noyau pendant 95% de leur vie. Dès que le combustible central est épuisé, elles deviennent des géantes rouges et expulsent leurs couches externes. En fonction de leur masse, elles finissent leur vie sous forme de naines blanches ou de supernovae gravitationnelles ([Kippenhahn & Weigert 1994](#); [Maeder 2009](#)). Cette image générale est dérivée et en accord avec les observations de nombreux types d'étoiles d'âges différents. L'astérosismologie permet donc une confrontation détaillée entre les modèles théoriques et les propriétés physiques réelles des étoiles dans les couches internes les plus profondes.

Dans ce chapitre, nous présentons un résumé des principaux aspects de l'astérosismologie. Pour les lecteurs intéressés par des informations plus approfondies, nous recommandons de consulter les ouvrages de référence tels que [Unno et al. \(1989\)](#) et [Aerts et al. \(2010\)](#).

---

1. Microvariabilité et Oscillations STellaires ([Walker et al. 2003](#)).



## 2.1 Oscillations stellaires à travers le diagramme de Hertzsprung-Russell

Les oscillations stellaires se produisent durant presque toutes les phases de l'évolution stellaire. La figure 2.1 montre une vue d'ensemble des classes les plus importantes de pulsations stellaires dans le diagramme de Hertzsprung-Russell<sup>2</sup> (HR). Étant donné la multitude de classes de pulsateurs existantes, une discussion exhaustive dépasserait le cadre de notre propos. Nous nous référons à [Aerts et al. \(2010\)](#) pour une vue d'ensemble des types d'étoiles pulsantes les plus connues. Nous allons nous concentrer ici sur la description de trois types d'étoiles pulsantes.

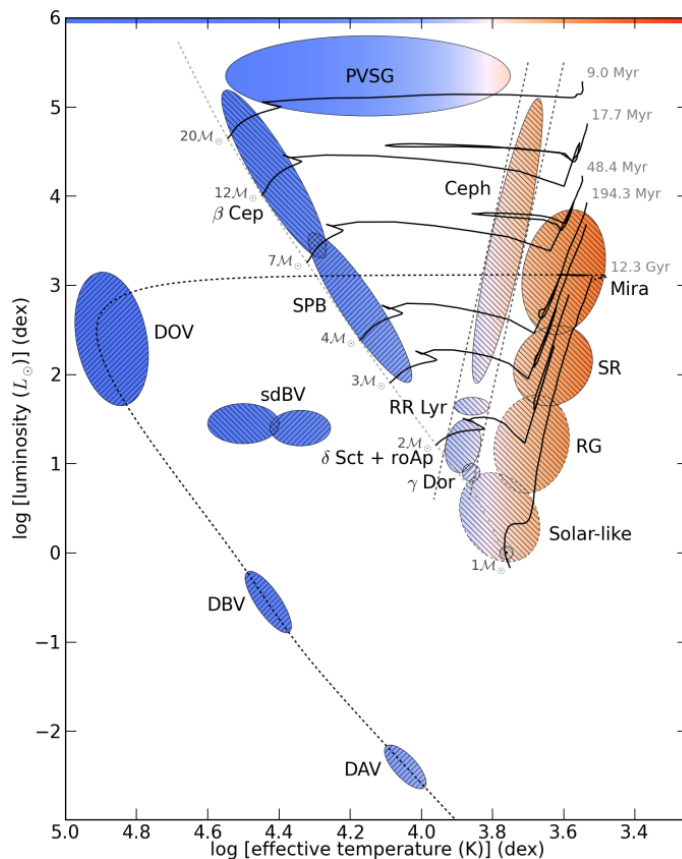
### 2.1.1 Étoiles de type solaire

Les étoiles de type solaire, regroupant les étoiles de type F, G, voire K de la séquence principale, présentent des oscillations excitées par la turbulence de leur enveloppe convective. Le meilleur exemple d'une étoile de type solaire pulsante est bien sûr le Soleil. La mesure des fréquences propres des oscillations du Soleil a été une révolution pour la compréhension de la physique interne de notre étoile. [Ulrich \(1970\)](#) et [Leibacher & Stein \(1971\)](#) ont apporté une preuve théorique que les vibrations observées par [Leighton et al. \(1962\)](#) peuvent correspondre à des modes d'oscillation du Soleil. De nombreux efforts ont été déployés pour détecter avec précision les modes d'oscillation stellaires similaires à ceux du Soleil (oscillations de type solaire). Ces efforts visent à améliorer les mesures globales et à obtenir des informations détaillées sur la dynamique interne des étoiles, ce qui permet de mieux contraindre les modèles théoriques d'évolution stellaire. La première détection des modes d'oscillation extrasolaires a été réalisée par [Martić et al. \(1999\)](#).

Dans une étoile de type solaire, les modes sont excités par les tenseurs de Reynolds turbulents, issus des cellules de convection qui remontent des profondeurs ([Samadi & Goupil 2001](#); [Samadi et al. 2005](#)). Pour les modes g, les deux mécanismes stochastiques principaux responsables de leur excitation sont la pénétration convective (e.g. [Press 1981](#); [Hurlburt et al. 1986](#); [Brun et al. 2011](#)) et l'excitation due aux fluctuations turbulentes juste au-dessus de la zone radiative (e.g. [Goldreich & Kumar 1990](#); [Lecoanet & Quataert 2013](#)). Les mécanismes stochastiques engendrent des oscillations qui se caractérisent par des spectres riches, c'est-à-dire une excitation d'un grand nombre de modes, mais avec de faibles amplitudes ([Christensen-Dalsgaard & Frandsen 1983](#); [Houdek et al. 1999](#)). Les modes de pression sont observés. Cependant, l'efficacité de l'excitation des ondes de gravité par ce processus fait l'objet de nombreuses discussions (e.g. [Appourchaux et al. 2010](#); [Lecoanet & Quataert 2013](#)). L'analyse des modes p des étoiles de type solaire s'est avérée être un outil très puissant permettant de mieux caractériser les étoiles en termes de masse, de rayon et d'âge ([Metcalf et al. 2010](#); [Mathur et al. 2012](#); [Silva Aguirre et al. 2017](#)), ainsi qu'en termes de rotation et d'activité magnétique ([Thompson et al. 2003](#); [Couvidat et al. 2003](#); [García et al. 2007](#); [Fossat et al. 2017](#); [Benomar et al. 2015, 2018](#); [Ceillier et al. 2017](#); [Kiefer et al. 2017](#); [Mathur et al. 2019](#); [Santos et al. 2021](#)). En ce qui concerne les modes g, ils sont considérés comme d'excellents candidats pour obtenir des informations supplémentaires sur la structure interne de ces étoiles. Cependant, leur détection à la surface est difficile en raison de leur faible amplitude, qui est causée par leur comportement évanescents en zone convective. Malgré cela, les efforts visant à les détecter sont toujours sujets à

---

2. Le diagramme de Hertzsprung-Russell (abrégé diagramme HR) est un outil fondamental en astrophysique qui permet de visualiser la relation entre la température effective et la luminosité des étoiles. Il a été créé indépendamment en 1911 par Ejnar Hertzsprung et par Henry Norris Russell en 1913. Ce diagramme a permis d'étudier les populations d'étoiles et d'établir la théorie de l'évolution stellaire.



**FIGURE 2.1** – Vue d’ensemble des différentes classes d’étoiles pulsantes dans le diagramme de Hertzsprung-Russell (HR). Les trajectoires d’évolution sont tirées de Schaller et al. (1992) et de Driebe et al. (1998). Les masses initiales et les échelles de temps d’évolution sont ajoutées en gris. Les hachures correspondent au caractère dominant des modes de pulsation, les inclinaisons vers l’avant (/ /) et vers l’arrière (\ \) représentant respectivement les modes acoustiques (modes p) et de gravité (modes g). La couleur indique le type spectral. Les deux lignes verticales en pointillés marquent la position de la bande d’instabilité classique, tandis que la séquence principale d’âge zéro (ZAMS) est représentée par la ligne en pointillés gris clair. Crédits : Papis (2013).

controverse et leur détection n’a pas encore été confirmée à ce jour (cf. [Autres contributions : modes de gravité dans les étoiles de type solaire](#)).

Nous allons maintenant nous focaliser sur la description des étoiles où les modes g sont observables à la surface des étoiles de la séquence principale, en mettant en lumière deux types d’étoiles en particulier : les étoiles de type  $\gamma$  Doradus et de type B à pulsation lente.

### 2.1.2 Étoiles de type $\gamma$ Doradus

La variabilité de l’étoile  $\gamma$  Doradus ( $\gamma$  Dor) a été observée pour la première fois par Cousins et al. (1989). Après une tentative infructueuse d’expliquer les observations par des taches stellaires



(Balona et al. 1994) et la découverte d'une variabilité similaire dans d'autres étoiles (Krisciunas et al. 1993), il s'est avéré qu'il s'agissait d'une classe d'étoiles pulsantes inconnue jusqu'alors. Par la suite, l'intérêt scientifique pour ces étoiles s'est accru, et elles ont été caractérisées par Kaye et al. (1999).

À ce jour, on connaît environ 1000 pulsateurs  $\gamma$  Dor, avec des masses comprises entre  $1.4 M_{\odot}$  et  $2 M_{\odot}$ . Cela les place directement dans la région de transition entre les étoiles de faibles masses avec une enveloppe convective et les étoiles de masse intermédiaire avec un cœur convectif.

Ces étoiles présentent des pulsations en mode g avec des périodes de plusieurs heures à quelques jours. Ces modes sont excités par le mécanisme de blocage du flux convectif au fond de l'enveloppe convective (Guzik et al. 2000; Dupret et al. 2005), et sont très sensibles aux propriétés des régions proches du cœur en raison de la forte stratification chimique ( $N_{\mu}^2$ ) à l'extérieur du cœur convectif causée par un gradient abrupt d'abondance d'hydrogène (Miglio et al. 2008) qui modifie la cavité de résonance des modes g. Ainsi, l'analyse des modes g nous permet de contraindre directement la structure et la dynamique de l'intérieur stellaire profond dans cette gamme de masse stellaire. Ces modes sont souvent observés dans de longues séries d'ordres radiaux<sup>3</sup> consécutifs avec des longueurs variant entre quelques modes jusqu'à environ 70 (Li et al. 2020). La plupart des étoiles  $\gamma$  Dor oscillent dans des modes dipolaires progrades, mais aussi dans des modes quadripolaires et des modes r<sup>4</sup> (Van Reeth et al. 2015b; Saio et al. 2018; Li et al. 2020). Une étude astérosismique détaillée des pulsateurs  $\gamma$  Dor constitue un bon moyen de calibrer et d'améliorer les théories existantes sur la structure et l'évolution stellaires dans cette gamme de masse en nous permettant de sonder avec succès les processus de mélange, la rotation et éventuellement le champ magnétique (Van Reeth et al. 2016, 2018; Ouazzani et al. 2017; Prat et al. 2019, 2020; Van Beeck et al. 2020). Récemment, Ouazzani et al. (2020) et Saio et al. (2021) ont découvert des traces de couplage entre les modes inertiels dans le cœur convectif et les modes g, ce qui permet de déduire aussi son taux de rotation, en plus du taux de rotation proche à l'interface radiation/convection sondé par les modes gravito-inertiels.

### 2.1.3 Étoiles de type B à pulsation lente

Les étoiles de type B à pulsation lente (SPB) sont les étoiles les plus massives ( $3 M_{\odot} < M < 9 M_{\odot}$ ) de la séquence principale qui présentent des pulsations en modes g. Cette classe des étoiles peut être considérée comme l'analogue pour des masses plus élevées de la classe des pulsateurs  $\gamma$  Dor, sauf que le blocage du flux n'est plus le mécanisme d'excitation dans ces étoiles plus chaudes. Dans ces étoiles, l'excitation des pulsations en mode g est liée au mécanisme  $\kappa$  qui se manifeste lorsque les régions de l'étoile présentent simultanément une augmentation de leur opacité et de leur température. Dans ce cas, les oscillations se produisant à l'intérieur de l'étoile assurent la relaxation de l'étoile (Pamyatnykh 1999).

Elles ont été initialement définies comme une classe distincte de pulsateurs par Waelkens (1991). Avec ce terme, il a mis l'accent sur un groupe de sept jeunes étoiles variables de type B avec un type spectral entre B3 et B9, pour lesquelles il a détecté des variations multipériodiques de luminosité et de couleur dans des données photométriques étalées sur une dizaine d'années. Avec des périodes de pulsation de l'ordre de quelques jours, l'étude astérosismique détaillée des étoiles SPB a dû attendre les données photométriques de haute précision, de haute cadence et de longue durée fournies

---

3. L'ordre radial indique le nombre de nœuds dans la direction radiale.

4. Les ondes de Rossby (modes r) sont un type particulier d'ondes inertiels qui se produisent naturellement dans les fluides en rotation du fait de la variation de la vorticité (Rossby 1939).



par des missions spatiales telles que CoRoT, qui a permis la première détection d'espacement de période<sup>5</sup> dans une étoile de la séquence principale, qui s'est avérée être une étoile SPB nouvellement découverte (Degroote et al. 2010). Depuis, des analyses sismiques détaillées sur la base des courbes de lumière du télescope spatial *Kepler* ont été réalisés afin de mesurer le mélange et la rotation internes de ces étoiles (Moravjeji et al. 2015, 2016; Pápics et al. 2017; Szweczuk & Daszyńska-Daszkiewicz 2018; Pedersen et al. 2021; Michielsen et al. 2021). Ces modélisations astérosismiques ont révélé une nette préférence pour les modèles où les profils de mélange de l'enveloppe présentent une structure issue soit des ondes de gravité interne, soit du mélange par cisaillement, tandis qu'un profil de mélange plat ou celui attendu de la circulation méridienne sont largement moins favorisés. De plus, ils ont révélé que ces étoiles sont des rotateurs quasi-rigides dès la séquence principale, ce qui implique qu'un transport efficace du moment cinétique fonctionne déjà à ce stade de l'évolution.

Ces courbes de lumière sont une mine d'informations sur la physique interne de ces objets, qui servent donc de fondations sur lesquelles nous pouvons construire une théorie moderne de l'évolution stellaire en prenant en compte les processus dynamiques de transport de moment cinétique et de mélange des éléments chimiques.

## 2.2 Équations des oscillations non-radiales

On va dériver l'équation des oscillations non radiales dans le cas sans rotation non magnétisé en adoptant l'approximation de Cowling (Cowling 1941) qui néglige les perturbations du potentiel gravitationnel induites par les ondes. Cette approximation est valable lorsque le degré  $\ell$  (défini dans (2.5)) ou l'ordre  $n$  du mode est élevé. Dans ce cas, le système hydrodynamique linéarisé dans la limite adiabatique s'écrit :

$$\rho' + \nabla \cdot (\rho_0 \boldsymbol{\xi}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = -\nabla P' - \rho' g_0 \mathbf{e}_r \quad (2.2)$$

$$\frac{\rho'}{\rho_0} - \frac{1}{\Gamma_1} \frac{P'}{P_0} - \frac{N^2}{g_0} \xi_r = 0. \quad (2.3)$$

Ce système d'équations étant homogène, linéaire et à coefficients indépendants du temps, il admet des solutions séparables en temps et en espace :

$$X'(\mathbf{r}, t) = \Re \left[ \tilde{X}'(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \right], \quad (2.4)$$

avec  $\omega$  la pulsation de l'oscillation étudiée,  $\mathbf{r}$  le vecteur position, et  $\Re$  la partie réelle. Pour la partie spatiale, la symétrie sphérique du problème nous permet de projeter le vecteur déplacement  $\boldsymbol{\xi}$  sur la base des harmoniques sphériques vectorielles ( $\mathbf{R}_\ell^m, \mathbf{S}_\ell^m, \mathbf{T}_\ell^m$ ) (voir l'annexe A2) définie par

$$\begin{cases} \mathbf{R}_\ell^m(\theta, \varphi) = Y_\ell^m(\theta, \varphi) \mathbf{e}_r \\ \mathbf{S}_\ell^m(\theta, \varphi) = \partial_\theta Y_\ell^m(\theta, \varphi) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi Y_\ell^m(\theta, \varphi) \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{T}_\ell^m(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi Y_\ell^m(\theta, \varphi) \mathbf{e}_\theta - \partial_\theta Y_\ell^m(\theta, \varphi) \mathbf{e}_\varphi \end{cases}, \quad (2.5)$$

avec :

5. L'espacement de période est défini comme la différence de période entre les modes d'ordres radiaux consécutifs  $n$ . Il est utilisé pour interpréter les spectres d'oscillations des modes g et r.



- $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$  les harmoniques sphériques définies dans l'annexe A1,
- le degré  $\ell$ , positif ou nul, venant de la projection des quantités physiques scalaires et des composantes des vecteurs sur la base des polynômes de Legendre pour décrire leur variation latitudinale,
- l'ordre azimutal  $m$ , compris entre  $-\ell$  et  $+\ell$  qui quantifie la décomposition de la composante en série de Fourier suivant  $\varphi$ .

Ensuite, on décompose le vecteur déplacement et les champs scalaires en utilisant les harmoniques sphériques définies ci-dessus

$$\boldsymbol{\xi}(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left\{ \hat{\xi}_{R;\ell,m}(r) \mathbf{R}_\ell^m(\theta, \varphi) + \hat{\xi}_{H;\ell,m}(r) \mathbf{S}_\ell^m(\theta, \varphi) + \hat{\xi}_{T;\ell,m}(r) \mathbf{T}_\ell^m(\theta, \varphi) \right\} e^{-i\omega t}, \quad (2.6)$$

$$X'(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left\{ \hat{X}'_{\ell,m}(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi) \right\} e^{-i\omega t}. \quad (2.7)$$

Ainsi, on transforme le système des équations aux dérivés partielles (2.1-2.3) en un système d'équations différentielles radiales ordinaires :

$$\hat{\rho}'_{\ell,m} + \frac{1}{r^2} \partial_r \left( r^2 \rho_0 \hat{\xi}_{R;\ell,m} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r} \rho_0 \hat{\xi}_{H;\ell,m} = 0, \quad (2.8)$$

$$-\rho_0 \omega^2 \hat{\xi}_{R;\ell,m} = -\partial_r \hat{P}'_{\ell,m} - \hat{\rho}'_{\ell,m} g_0, \quad (2.9)$$

$$-\rho_0 \omega^2 \hat{\xi}_{H;\ell,m} = -\frac{\hat{P}'_{\ell,m}}{r}, \quad (2.10)$$

$$-\rho_0 \omega^2 \hat{\xi}_{T;\ell,m} = 0, \quad (2.11)$$

$$\frac{\hat{\rho}'_{\ell,m}}{\rho_0} = \frac{\hat{P}'_{\ell,m}}{\Gamma_1 P_0} + \frac{N^2}{g_0} \hat{\xi}_{R;\ell,m}. \quad (2.12)$$

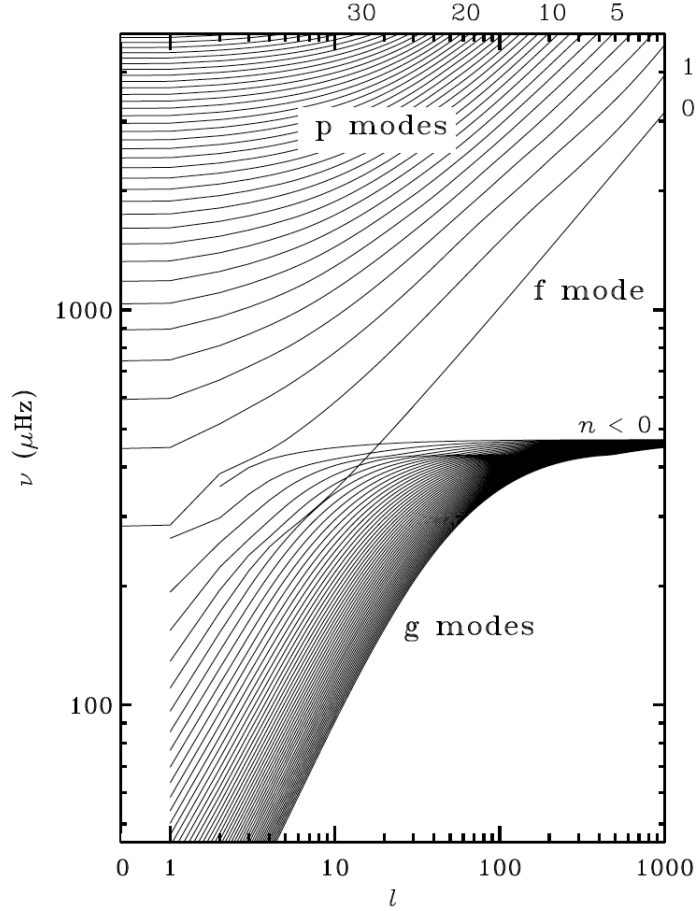
En éliminant maintenant  $\hat{\xi}_{H;\ell,m}$  et  $\hat{\rho}'_{\ell,m}$  et en considérant que les échelles spatiales de variation des quantités perturbées sont beaucoup plus petites que celles des grandeurs d'équilibre (voir l'approximation JWKB définie dans la section 1.2.3), on obtient

$$\begin{cases} \frac{d}{dr} \hat{P}'_{\ell,m} = \rho_0 (\omega^2 - N^2) \hat{\xi}_{R;\ell,m} \\ \frac{d}{dr} \hat{\xi}_{R;\ell,m} = \frac{1}{\rho_0 c_s^2} \left( \frac{S_\ell^2}{\omega^2} - 1 \right) \hat{P}'_{\ell,m}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Enfin, on combine ces deux équations pour obtenir :

$$\frac{d^2}{dr^2} \hat{\xi}_{R;\ell,m} = \underbrace{\frac{\omega^2}{c_s^2} \left( 1 - \frac{N^2}{\omega^2} \right) \left( \frac{S_\ell^2}{\omega^2} - 1 \right)}_{-\kappa^2(r)} \hat{\xi}_{R;\ell,m}. \quad (2.14)$$

Cette équation, similaire à l'équation de Schrödinger radiale en mécanique quantique, nous permet de définir les modes d'oscillation des étoiles sans rotation. Comme on peut voir par exemple pour un cas solaire dans la figure 2.2, il existe deux ensembles de solutions à cette équation, qui conduisent



**FIGURE 2.2** – Spectre solaire représentant les fréquences des modes (dans cette figure  $\omega \equiv \nu$ ) en fonction de leur degré  $\ell$ . Les lignes relient les modes de même ordre radial  $n$ . Quelques valeurs de l'ordre radial  $n$  sont données pour les lignes des modes p dans la partie supérieure droite de la figure. Par convention,  $n$  est négatif pour les modes g. Notez que si les lignes continues sont représentées pour plus de clarté, les modes individuels sont des points discrets, correspondant à un nombre entier  $\ell$ . Crédits : [Aerts et al. \(2010\)](#).

à deux types de modes de pulsation : les modes p et les modes g. Il existe également des modes f situé entre les modes p d'ordre radial 1 et les modes g d'ordre radial 1 pour tout  $\ell \geq 2$ . Ces modes correspondent à des ondes de gravité de surface, qui se forment dans les régions d'interface où la densité est discontinue. Les conditions limites radiales imposent une quantification qui se traduit par l'ordre radial  $n$  (voir section 2.3.2). On constate aussi que la fréquence des modes ne dépend pas de  $m$ , ce qui est dû à l'absence de rotation et de magnétisme. Quand l'étoile tourne ou est magnétisée, les modes sont soumis à un effet similaire à l'effet Zeeman, qui lève la dégénérescence en  $m$  (voir section 2.4).



**Les modes acoustiques (modes p) :** le gradient de pression est la force de rappel et les mouvements du plasma sont principalement verticaux à hautes fréquences. Ils sont caractérisés par une fréquence  $\omega$  qui vérifie  $\omega \gg N$ . Dans ce cas-là, on peut simplifier l'expression de  $\kappa^2(r)$  en :

$$\kappa^2(r) \approx \frac{1}{c_s^2} (\omega^2 - S_\ell^2), \quad (2.15)$$

$\kappa^2$  s'identifiant au carré de la norme du vecteur d'onde radial  $k_r^2$ . En notant  $k_h^2 = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$  le carré de la norme du vecteur d'onde horizontal, on retrouve la relation de dispersion des modes acoustiques :

$$k^2 = k_r^2 + k_h^2 = \frac{\omega^2}{c_s^2}. \quad (2.16)$$

**Les modes de gravité (modes g) :** la flottabilité est la force de rappel et les mouvements du plasma sont principalement horizontaux à basses fréquences. Ils sont caractérisés par une fréquence  $\omega$  qui vérifie  $\omega \ll S_\ell$ , ce qui mène à :

$$\kappa^2(r) \approx \left( \frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}. \quad (2.17)$$

Cette relation montre que les modes g existent ( $k_r^2 > 0$ ) si et seulement si

- $N^2 > 0$  donc seulement dans la zone radiative.
- $\omega < N$  donc chaque mode g est piégé entre deux points de retournement  $r_i^t$  (avec  $i = \{1, 2\}$ ) définis par  $N(r_i^t) = \omega$ . Au-delà des points de retournement, les ondes de gravité sont évanescentes, c'est-à-dire que leur amplitude décroît exponentiellement en fonction de la distance aux points de retournement.

Ainsi, on obtient la relation de dispersion des modes g :

$$k^2 = \frac{N^2}{\omega^2} k_h^2. \quad (2.18)$$

La figure 2.2 illustre le spectre solaire de ces modes, c'est-à-dire les fréquences des modes en fonction du degré  $\ell$  et de l'ordre radial  $n$ . Les lignes continues relient les modes de même ordre radial  $n$ . Nous utilisons la convention selon laquelle  $n$  est négatif (positif) pour les modes g (p). Lorsqu'on examine le spectre des modes g (représenté dans la partie inférieure de cette figure), on constate en effet que les lignes reliant les modes de même ordre radial  $n$  tendent à se rapprocher de la valeur maximale de la fréquence de Brunt-Väisälä  $N$  ( $\approx 450 \mu\text{Hz}$ ) lorsque  $\ell$  tend vers l'infini. Cela vient du fait du piégeage des modes g dans la zone radiative.

## 2.3 Fréquences asymptotiques des modes g

Nous introduisons maintenant la méthode asymptotique de résolution de l'équation (2.14), similaire à l'équation de Schrödinger radiale en mécanique quantique, qui va nous être utile tout le long de cette thèse.



### 2.3.1 Équation de Schrödinger radiale et méthode JWKB

L'équation de Schrödinger radiale est de la forme :

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + K(r)\psi = 0. \quad (2.19)$$

Pour résoudre cette équation, on va utiliser la méthode JWKB (Fröman & Fröman 1965). Cette méthode fait l'hypothèse que la longueur de l'onde est courte devant les longueurs caractéristiques de variation des quantités d'équilibre. Dans ce cas, la solution de l'équation (2.19) varie rapidement par rapport aux quantités d'équilibre, c'est-à-dire par rapport au coefficient  $K$ . Elle peut alors s'écrire sous la forme :

$$\psi(r) = A(r)e^{i\Psi(r)}, \quad (2.20)$$

où l'amplitude  $A(r)$  varie lentement devant la phase  $\Psi(r)$ , définie par  $\frac{d\Psi}{dr} = k_r$  avec  $k_r^2 = K$ . En injectant (2.20) dans (2.19), on arrive à obtenir les relations qui nous permettent de réécrire la solution complète (Vallée & Soares 2004) (les étapes de calcul figurent dans l'annexe B) :

$$\psi(r) = \frac{\mathcal{A}_+}{\sqrt{k_r}} e^{i \int k_r(r') dr'} + \frac{\mathcal{A}_-}{\sqrt{k_r}} e^{-i \int k_r(r') dr'}, \quad (2.21)$$

où  $\mathcal{A}_+$  et  $\mathcal{A}_-$  sont des constantes d'intégration.

### 2.3.2 Relation de quantification

En résolvant l'équation (2.19), on peut donc décrire le comportement de  $\psi$  dans les cas où  $k_r^2 > 0$  (comportement oscillant) et où  $k_r^2 < 0$  (comportement évanescent). En revanche, à l'approche des points de retournement ( $r_1^t$  et  $r_2^t$ ), c'est-à-dire des points d'annulation de  $k_r^2$ , on ne peut pas appliquer la méthode JWKB. En résolvant l'équation (2.19) au voisinage de ces deux points à l'aide des fonctions d'Airy une relation de quantification apparaît (voir l'annexe B) :

$$\int_{r_1^t}^{r_2^t} k_r(r') dr' = \pi \left( n - \frac{1}{2} \right), \quad (2.22)$$

où  $n$  est l'ordre radial.

### 2.3.3 Espacement en période des modes g

La composante radiale du vecteur d'onde des modes g est donnée par (2.17). En remplaçant cette expression dans la relation de quantification (2.22) et en faisant un développement asymptotique (Tassoul 1980) où on suppose que  $\omega \ll N$ , on obtient les fréquences asymptotiques des modes g

$$\omega_{n,\ell} = \frac{\sqrt{\ell(\ell+1)}}{\pi \left( n - \frac{1}{2} \right)} \int_{r_1}^{r_2} \frac{N(r')}{r'} dr'. \quad (2.23)$$

Ces fréquences nous renseignent donc sur la stratification thermique (en entropie) et chimique de l'étoile. À partir de cette expression, on peut calculer l'espacement de période ( $P_{n,\ell} = 2\pi/\omega_{n,\ell}$ ) entre deux modes avec le même degré  $\ell$  et d'ordres radiaux consécutifs ( $n$  et  $n+1$ ) :

$$\Delta P_\ell = P_{n,\ell} - P_{n-1,\ell} = \frac{2\pi^2}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left( \int_{r_1}^{r_2} \frac{N(r')}{r'} dr' \right)^{-1}. \quad (2.24)$$





On peut remarquer que le résultat ne dépend plus de  $n$ , donc l'espacement en période des modes  $g$  est régulier. Le spectre des modes  $g$  est souvent présenté sous la forme d'une courbe montrant l'espacement de période ( $\Delta P_\ell$ ) en fonction de la période ( $P_{n,\ell}$ ). L'effet de piégeage des modes se manifeste dans l'espacement de période sous la forme de creux caractéristiques (voir la courbe noire du panneau gauche de la figure 2.7), où la profondeur des creux est liée à l'efficacité de mélange (Miglio et al. 2008).

Jusqu'à présent, nous avons présenté les équations fondamentales des oscillations stellaires en supposant que la rotation soit négligeable. Cependant, dans la réalité, les étoiles sont des objets qui tournent sur elles-mêmes. Il est donc essentiel de prendre en compte la rotation des étoiles pour mieux comprendre leurs propriétés.

## 2.4 Astérosismologie et rotation

Dans cette section, nous allons explorer trois méthodes largement utilisées pour étudier le comportement des oscillations stellaires sous l'influence de la rotation : la méthode perturbative, le calcul 2D complet et l'approximation traditionnelle de la rotation.

### 2.4.1 Approche perturbative

Dans le cas où  $\omega \gg 2\Omega$ , la force de Coriolis peut alors être introduite et traitée comme une perturbation linéaire du problème que nous avons résolu dans la section précédente (2.1-2.3) (Lynden-Bell & Ostriker 1967; Cox 1980; Aerts et al. 2010). Dans ce cadre, on peut écrire le déplacement et la fréquence de l'onde comme suit :

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0 + \epsilon_\Omega \boldsymbol{\xi}_1, \quad (2.25)$$

$$\omega = \omega_0 + \epsilon_\Omega \omega_1, \quad (2.26)$$

avec  $\epsilon_\Omega \ll 1$  un paramètre sans dimension qui représente le rapport entre la vitesse angulaire de l'étoile  $\Omega$  et la vitesse angulaire critique  $\Omega_K := \sqrt{GM/R^3}$  pour laquelle la gravité de surface et l'accélération centrifuge sont égales. On peut d'abord récrire l'équation d'Euler linéarisée (2.2) en utilisant la séparation du terme temporel en  $\exp(-i\omega t)$  pour avoir une équation à l'ordre zéro

$$\omega_0^2 \boldsymbol{\xi}_0 = \mathcal{F}(\boldsymbol{\xi}_0), \quad (2.27)$$

où l'opérateur  $\mathcal{F}$  est donné par :

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\rho_0} \nabla P' + \frac{\rho'}{\rho_0} g_0 \mathbf{e}_r, \quad (2.28)$$

où l'on reconnaît le terme de compressibilité et de poussée d'Archimède. Jusque-là, le champ de vitesse à l'équilibre était nul et on avait  $\mathbf{v} = \partial \boldsymbol{\xi} / \partial t$ . Pour prendre en compte l'effet de la rotation, on introduit un champ de vitesse à l'équilibre  $\mathbf{v}_0$  tel que (voir Eq. (1.6)) :

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \underbrace{r \sin \theta \Omega \mathbf{e}_\varphi}_{\mathbf{v}_0} + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t). \quad (2.29)$$

Dans ce cas, en négligeant le terme quadratique en  $v_0$  on trouve

$$D_t^2 \boldsymbol{\xi} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} + 2(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (2.30)$$



À l'ordre un, l'équation de la quantité de mouvement s'écrit comme

$$\omega_0^2 \xi_1 + 2\omega_0 \omega_1 \xi_0 = \mathcal{F}(\xi_1) - 2\omega_0 \delta\mathcal{F}(\xi_0), \quad (2.31)$$

avec, la dépendance longitudinale des harmoniques sphériques étant exprimée en  $\exp(im\varphi)$ ,

$$\delta\mathcal{F}(\xi) = i(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \xi = \underbrace{i\Omega \times \xi}_{\delta\mathcal{F}_c(\xi)} - \underbrace{m\Omega \xi}_{\delta\mathcal{F}_a(\xi)}, \quad (2.32)$$

où  $\delta\mathcal{F}_c$  est l'opérateur d'accélération de Coriolis et  $\delta\mathcal{F}_a$  est l'opérateur d'advection dû au changement de référentiel. Nous appliquons ensuite le produit scalaire  $\langle \xi_0, \square \rangle = \int_V \rho \bar{\xi}_0 \cdot \square dV$  (où  $V$  le volume et  $\square$  le conjugué complexe) à l'équation (2.31). Comme  $\mathcal{F}$  est hermitien, cette équation se simplifie et conduit à l'expression du shift de la fréquence

$$\omega_1 = - \frac{\langle \xi_0, \delta\mathcal{F}_c(\xi_0) \rangle + \langle \xi_0, \delta\mathcal{F}_a(\xi_0) \rangle}{\langle \xi_0, \xi_0 \rangle}, \quad (2.33)$$

avec

$$\langle \xi_0, \xi_0 \rangle = \int_0^R \rho r^2 \left( |\xi_r|^2 + \ell(\ell+1) |\xi_h|^2 \right) dr, \quad (2.34)$$

l'inertie des modes qui est indépendante de l'ordre azimutal  $m$  et

$$\langle \xi_0, \delta\mathcal{F}_c(\xi_0) \rangle = 2m\Omega \int_0^R \rho r^2 \left( |\xi_h|^2 + 2\bar{\xi}_r \xi_h \right) dr, \quad (2.35)$$

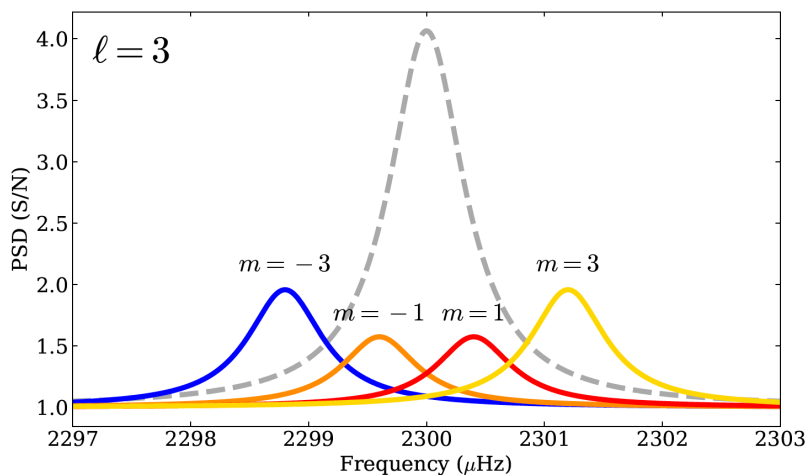
$$\langle \xi_0, \delta\mathcal{F}_a(\xi_0) \rangle = -m\Omega \int_0^R \rho r^2 \left( |\xi_r|^2 + \ell(\ell+1) |\xi_h|^2 \right) dr, \quad (2.36)$$

la contribution de l'accélération de Coriolis et du terme d'advection. On peut remarquer que  $\omega_1$  est proportionnel à  $m$ , ce qui conduit à des séparations de fréquence de rotation opposées pour les modes prograde et rétrograde (voir la figure 2.3).

Lorsque des modes de fréquence  $\omega$  comparable à la vitesse de la rotation  $\Omega$  sont considérés, une approche perturbative n'est plus valable. Ainsi, il devient nécessaire de résoudre le système hydrodynamique linéarisé en incluant l'accélération de Coriolis et l'accélération centrifuge d'une manière non-perturbative. On obtient alors un système couplé que l'on peut le résoudre avec des calculs bidimensionnels complets (voir aussi le chapitre 6).

### 2.4.2 Calcul bidimensionnel complet

Une première approche consiste à considérer intégralement la force de Coriolis tout en négligeant la distorsion centrifuge (Dintrans & Rieutord 2000), ou à prendre en compte cette distorsion d'une manière perturbative comme c'était fait avec le code d'oscillation de Tohoku (Lee & Saio 1987; Lee & Baraffe 1995). Une approche plus complète consiste à prendre en compte à la fois la force de Coriolis et l'effet complet de la force centrifuge en utilisant une méthode 2D non-perturbative. Cette approche a été initialement développée par Reese et al. (2006) pour les polytropes avec le code TOP (Toulouse Oscillation Program), puis étendue aux modèles non-polytropiques par Reese et al. (2009). Ce code a ensuite été utilisé pour étudier des modèles d'étoiles déformées (Ballot et al. 2010, 2012; Reese et al. 2021). Ouazzani et al. (2012a, 2015, 2017) ont aussi développé un code non-perturbatif bidimensionnel appelé ACOR (Adiabatic Code of Oscillation including



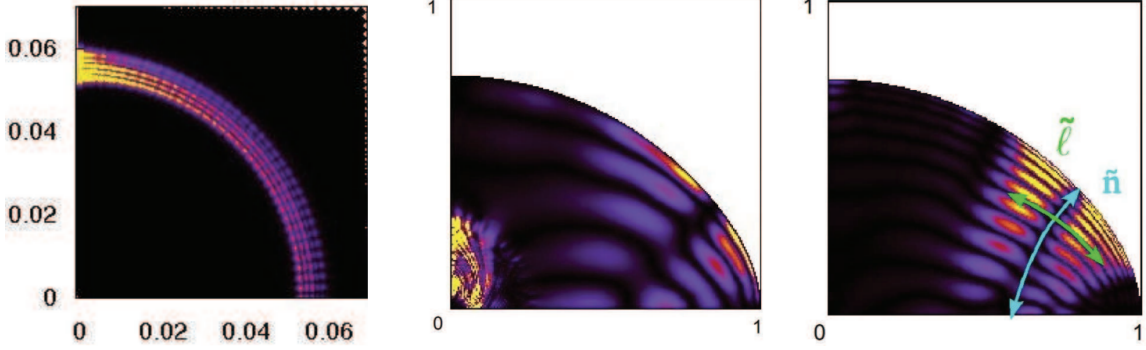
**FIGURE 2.3** – Splittings rotationnels pour une rotation uniforme  $\Omega = 0.4 \mu\text{Hz}$  et un mode  $\ell = 3$ . Les composantes du mode sont représentées en différentes couleurs : le bleu pour  $m = -3$ , l’orange pour  $m = -1$ , le rouge pour  $m = 1$ , et le jaune pour  $m = 3$ . Les autres composantes ne sont pas visibles à cause de l’inclinaison  $\mathcal{I} = 90^\circ$  (le plan d’observation est perpendiculaire à l’axe de rotation). Le cas sans rotation est représenté par les tirets gris. Crédits : [Breton \(2022\)](#)

Rotation) qui permet de calculer les pulsations non-radiales adiabatiques d’étoiles en rotation sans faire d’hypothèses sur la sphéricité de l’étoile, les propriétés du fluide (c’est-à-dire la baroclinicité) ou le profil de rotation. La figure 2.4 montre des exemples de modes calculés par ce code pour une étoile évoluée de masse  $2 M_\odot$ .

Cependant, la dérivation de diagnostics sismiques puissants et flexibles pour un grand nombre d’étoiles devient rapidement coûteuse en termes de ressources de calcul avec l’utilisation du calcul bidimensionnel complet, et sa mise en œuvre devient difficile, empêchant une approche sismique globale. Par conséquent, il est nécessaire de recourir à des approximations pour simplifier le problème.

### 2.4.3 Approximation traditionnelle de la rotation

L’approximation traditionnelle de la rotation (TAR) a été introduite pour la première fois en géophysique par [Eckart \(1960\)](#) pour étudier la dynamique de l’atmosphère et des océans terrestres qui sont des couches fluides peu profondes. Ensuite, [Berthomieu et al. \(1978\)](#) l’ont utilisée pour la première fois dans un contexte astrophysique. Après, [Bildsten et al. \(1996\)](#) et [Lee & Saio \(1997\)](#) l’ont appliqué aux pulsations stellaires pour étudier les oscillations non-radiales de basses fréquences dans les étoiles en rotation. La TAR est applicable aux ondes de basse fréquence se propageant dans des zones fortement stratifiées. Dans ce cas, la force d’Archimède domine l’accélération de Coriolis dans la direction de la stratification en entropie ou en composition chimique ( $2\Omega \ll N$ ) et la composante radiale de l’accélération des ondes ( $\omega \ll N$ ). Compte tenu de ces deux hypothèses, nous pouvons négliger la projection horizontale du vecteur de rotation  $\Omega_H = \Omega \sin \theta$  dans les équations hydrodynamiques linéarisées comme démontré et détaillé dans [Mathis \(2009\)](#). Dans ce cadre, le système hydrodynamique linéarisé, qui est couplé dans le cas général ([Dintrans et al. 1999](#); [Dintrans](#)



**FIGURE 2.4** – Énergie cinétique dans le plan méridien pour trois modes de pulsation. **Gauche** : (zoom sur la région centrale) Un mode gravito-inertiel de basse fréquence piégé dans la région où il y a une forte variation de la stratification chimique. **Milieu** : Un mode mixte (gravito-acoustique). **Droite** : Un mode acoustique. Le modèle stellaire est une étoile de masse  $2M_{\odot}$  avec une fraction centrale en hydrogène  $X_c = 0.35$  en rotation rapide ( $\Omega/\Omega_K = 0.8$  à la surface) différentielle ( $\Omega_{\text{centre}} = 3\Omega_{\text{surface}}$ ) déformée par l'accélération centrifuge. Crédits : (Ouazzani et al. 2012b).

& Rieutord 2000), devient séparable comme dans le cas non rotatif et peut être réécrit sous la forme de l'équation de marée de Laplace (Laplace 1799).

### 2.4.3.1 Équations hydrodynamiques dans les étoiles en rotation uniforme

Comme dans le cas d'une étoile sans rotation, on va travailler avec un fluide non visqueux et non conducteur de chaleur. Cependant, nous allons donc maintenant prendre en compte l'accélération de Coriolis dans la dérivation des équations linéarisées de l'hydrodynamique. En appliquant l'approximation anélastique (Spiegel & Veronis 1960) pour filtrer les ondes acoustiques de hautes fréquences et en exprimant la dépendance temporelle des perturbations par  $e^{i\omega t}$ , on obtient

$$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \rho_0 \xi_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_{\theta} (\sin \theta \rho_0 \xi_{\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_{\varphi} (\rho_0 \xi_{\varphi}) = 0, \quad (2.37)$$

$$-\rho_0 \omega^2 \xi_r - 2i \rho_0 \omega \Omega \sin \theta \xi_{\varphi} = -\partial_r P' - \rho' g_0, \quad (2.38)$$

$$-\rho_0 \omega^2 \xi_{\theta} - 2i \rho_0 \omega \Omega \cos \theta \xi_{\varphi} = -\frac{1}{r} \partial_{\theta} P', \quad (2.39)$$

$$-\rho_0 \omega^2 \xi_{\varphi} + 2i \rho_0 \omega \Omega \cos \theta \xi_{\theta} + 2i \rho_0 \omega \Omega \sin \theta \xi_r = -\frac{1}{r \sin \theta} \partial_{\varphi} P', \quad (2.40)$$

$$\frac{\rho'}{\rho_0} - \frac{N^2}{g_0} \xi_r = 0. \quad (2.41)$$

Dans le cadre de la TAR, nous nous concentrons sur les ondes de basses fréquences se propageant dans des régions fortement stratifiées. Dans ce cas, nous pouvons négliger la composante verticale de l'accélération de Coriolis car elle est dominée par la force de flottabilité et le déplacement vertical de l'onde puisque  $|\xi_r| \ll \{|\xi_{\theta}|, |\xi_{\varphi}|\}$  en raison de la forte stratification. Alors, les trois composantes

de l'équation de la quantité de mouvement ((2.38)-(2.40)) se simplifient comme suit :

$$\partial_r W' + N^2 \xi_r = 0, \quad (2.42)$$

$$-\omega^2 \xi_\theta - 2i\omega\Omega \cos \theta \xi_\varphi = -\frac{1}{r} \partial_\theta W', \quad (2.43)$$

$$-\omega^2 \xi_\varphi + 2i\omega\Omega \cos \theta \xi_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi W', \quad (2.44)$$

avec  $W' = P'/\rho_0$  la pression normalisée. Le terme  $(W'/\rho_0)\partial_r \rho_0$  a été négligé du fait de l'approximation anélastique. On peut remarquer que les dynamiques des composantes verticales et horizontales du déplacement ne sont plus couplées par l'accélération de Coriolis, ce qui va nous permettre d'obtenir un problème séparable.

### 2.4.3.2 Structure horizontale des ondes : équation de marée de Laplace

En utilisant les équations (2.43) et (2.44), on obtient donc la relation explicite entre la pression normalisée  $W'$  et les composantes du déplacement horizontal :

$$\xi_\theta = \frac{1}{r\omega^2} \frac{1}{1 - \nu^2 \cos^2 \theta} \left[ \partial_\theta W' - i\nu \cos \theta \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi W' \right], \quad (2.45)$$

$$\xi_\varphi = \frac{1}{r\omega^2} \frac{1}{1 - \nu^2 \cos^2 \theta} \left[ i\nu \cos \theta \partial_\theta W' + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi W' \right], \quad (2.46)$$

avec  $\nu = 2\Omega/\omega$  le paramètre de spin qui compare l'accélération de Coriolis à l'accélération des modes. Ensuite, nous développons le déplacement induit par l'onde et les fluctuations des quantités scalaires ( $X' \equiv \{\rho', W'\}$ ) sur des séries de Fourier discrètes à la fois dans le temps et dans l'azimut :

$$\xi(r, \theta, \varphi, t) \equiv \sum_{\omega, m} \{ \xi(r, \theta) \exp[i(\omega t - m\varphi)] \}, \quad (2.47)$$

$$X'(r, \theta, \varphi, t) \equiv \sum_{\omega, m} \{ X'(r, \theta) \exp[i(\omega t - m\varphi)] \}. \quad (2.48)$$

**Approximation JWKB** Dans le cas où  $\omega \ll N$ , chaque champ scalaire et chaque composante de  $\xi$  peuvent être développés en utilisant l'approximation bidimensionnelle JWKB introduite par Ogilvie & Lin (2004) et Mathis (2009). Dans ce cas, le nombre d'onde vertical  $k_V$  ( $\equiv k_r$ ) est supposé être très grand, et la longueur d'onde associée est donc très petite. Par conséquent, la variation spatiale de l'onde dans la direction radiale est très rapide comparée à celle du fond hydrostatique donnée par  $\rho_0$ ,  $P_0$ , et  $g_0$ . La structure spatiale des ondes peut donc être décrite par le produit d'une fonction d'onde plane à oscillation rapide dans la direction pseudo-radiale multipliée par une enveloppe bidimensionnelle à variation lente :

$$W'(r, \theta) = \sum_k \left\{ w_{\nu km}(r, \theta) \frac{A_{\nu km}}{k_{V;\nu km}^{1/2}} \exp \left[ i \int^r k_{V;\nu km} dr \right] \right\}, \quad (2.49)$$

$$\xi_j(r, \theta) = \sum_k \left\{ \xi_{j;\nu km}(r, \theta) \frac{A_{\nu km}}{k_{V;\nu km}^{1/2}} \exp \left[ i \int^r k_{V;\nu km} dr \right] \right\}, \quad (2.50)$$



avec  $k$  est l'indice d'un mode propre latitudinal (qui permet d'ordonner les modes propres) et  $A_{\nu km}$  est l'amplitude de l'onde. Dans le cas d'une rotation uniforme, l'approximation JWKB 2D n'est pas requise pour dériver l'équation décrivant la structure horizontale des ondes. Toutefois, elle est présentée dès maintenant afin de se préparer aux cas plus complexes abordés ultérieurement dans les chapitres 3 et 4.

Cette approximation nous permet de réécrire le déplacement radial (Eq. (2.42)) comme suit

$$\xi_{r;\nu km}(r, \theta) = -i \frac{k_{V;\nu km}}{N^2} w_{\nu km}(r, \theta). \quad (2.51)$$

En substituant cette équation et en introduisant la coordonnée latitudinale réduite  $x = \cos \theta$  dans l'équation de continuité (Eq. 2.37), nous obtenons

$$\frac{r^2 \omega_{km}^2 k_{V;\nu km}^2}{N^2} w_{\nu km} - r \omega_{km}^2 \underbrace{\left( \partial_x (\sqrt{1-x^2} \xi_{\theta;\nu km}) + \frac{im}{\sqrt{1-x^2}} \xi_{\varphi;\nu km} \right)}_{=\mathcal{L}_{\nu m}[w_{\nu km}]} = 0. \quad (2.52)$$

On identifie alors l'équation de marée de Laplace (Laplace 1799) pour la structure horizontale des ondes :

$$\mathcal{L}_{\nu m}[w_{\nu km}] \equiv \frac{d}{dx} \left[ \frac{1-x^2}{1-\nu^2 x^2} \frac{d}{dx} w_{\nu km} \right] - \frac{1}{1-\nu^2 x^2} \left( \frac{m^2}{1-x^2} - m\nu \frac{1+\nu^2 x^2}{1-\nu^2 x^2} \right) w_{\nu km} \quad (2.53)$$

$$= -\lambda_{km}(\nu) w_{\nu km}(x), \quad (2.54)$$

qui constitue un problème aux valeurs propres ( $\lambda_{km}$ ) pour des paramètres donnés  $m$  et  $\nu$ . Les fonctions propres  $w_{\nu km}$  sont appelées fonctions de Hough (Hough 1898). On peut remarquer que dans le cas de la rotation uniforme, les fonctions de Hough ne dépendent que de la colatitude  $\theta$ , tandis que les valeurs propres qui leur sont associées restent indépendantes à la fois de  $r$  et de  $\theta$ . On peut lier ces valeurs propres au vecteur d'onde radial par la relation de dispersion suivante :

$$\lambda_{km} = \frac{r^2 \omega_{km}^2 k_{V;\nu km}^2}{N^2}. \quad (2.55)$$

Avec cette relation de dispersion, nous différencions deux régimes d'ondes. Le premier est le régime de propagation ( $k_{V;\nu km}^2 > 0$ ) obtenu dans la région stratifiée stable ( $N^2 > 0$ ) lorsque  $\lambda_{\nu km} > 0$  ou dans la région convective ( $N^2 < 0$ ) lorsque  $\lambda_{\nu km} < 0$ . Le second régime est le régime évanescents ( $k_{V;\nu km}^2 < 0$ ) obtenu dans la région à stratification stable lorsque  $\lambda_{\nu km} < 0$  ou dans la zone convective lorsque  $\lambda_{\nu km} > 0$ .

On note qu'à la limite de  $\nu = 0$  qui correspond au cas sans rotation, l'équation (2.53) se réduit à l'équation différentielle pour les polynômes associés de Legendre avec  $\lambda_{km}(0) = \ell(\ell+1)$ . Par conséquent, dans cette limite, on a  $w_{0km}(x) = N_{\ell,m} \mathcal{P}_{\ell,m}(x)$  avec  $\ell = |m| + k$  et on retrouve bien la limite de l'étoile sans rotation. Cependant, lorsque  $\nu \neq 0$ , il n'est plus possible de résoudre analytiquement l'équation de Laplace (Eq. 2.53) (voir Longuet-Higgins 1968; Townsend 2003, 2020, pour les régimes asymptotiques). Par conséquent, une méthode de résolution numérique est requise.

### 2.4.3.3 Résolution numérique : valeurs et fonctions propres

**Conditions aux limites :** Les solutions sont soit paires, soit impaires par rapport au plan équatorial  $x = 0$ . Les solutions paires satisfont l'équation  $w_{\nu km}(-x) = w_{\nu km}(x)$ , tandis que les



solutions impaires satisfont l'équation  $w_{\nu km}(-x) = -w_{\nu km}(x)$ . L'indice  $k$  est choisi d'une manière à ce que sa parité corresponde à la parité de la fonction associée. Les solutions appartenant à l'une de ces deux familles sont toutes définies par la condition limite appliquée à  $x = 0$  :  $dw_{\nu km}/dx = 0$  pour les solutions paires et  $w_{\nu km} = 0$  pour les solutions impaires (Longuet-Higgins 1968; Lee & Saio 1997).

**Méthode de résolution** Afin de résoudre l'équation de marée de Laplace, on va utiliser la méthode de collocation de Tchebychev qui est une méthode spectrale efficace pour résoudre un problème aux valeurs propres. En développant les fonctions propres  $\Theta$  en termes de séries de polynômes de Tchebychev  $T_n(x)$  :

$$\Theta(x) = \sin^l \theta \sum_{n=0}^N b_n T_n(x), \quad (2.56)$$

avec  $l = \text{mod}(m, 2)$  et  $\sin \theta$  le facteur de parité pour un nombre d'onde azimutal  $m$  impair pour garantir la différentiabilité aux pôles. La méthode de collocation de Tchebychev utilise des séries de Fourier ayant des cosinus de la colatitude pour fonctions de base. Les points de collocation de Tchebychev peuvent être définis de différentes façons, par exemple :

$$x_i = \cos \left( \frac{(2i-1)\pi}{2N} \right) \text{ avec } i = \{1, \dots, N\}. \quad (2.57)$$

Ensuite, en utilisant les matrices différentielles (Wang et al. 2016), on applique la méthode de collocation de Tchebychev à l'opérateur différentiel  $C_1 \partial_x^2 + C_2 \partial_x + C_3$  pour obtenir trois matrices de taille  $N \times N$  :

- Une matrice  $\mathbf{M}_0$  qui discrétise la fonction elle-même :

$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} \left(\sqrt{1-x_0^2}\right)^l T_0(x_0) & \left(\sqrt{1-x_0^2}\right)^l T_1(x_0) & \cdots & \left(\sqrt{1-x_0^2}\right)^l T_N(x_0) \\ \left(\sqrt{1-x_1^2}\right)^l T_0(x_1) & \left(\sqrt{1-x_1^2}\right)^l T_1(x_1) & \cdots & \left(\sqrt{1-x_1^2}\right)^l T_N(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(\sqrt{1-x_N^2}\right)^l T_0(x_N) & \left(\sqrt{1-x_N^2}\right)^l T_1(x_N) & \cdots & \left(\sqrt{1-x_N^2}\right)^l T_N(x_N) \end{bmatrix},$$

avec  $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ .

- Une matrice  $\mathbf{M}_1$  qui discrétise la dérivée d'ordre 1 obtenue en dérivant les éléments  $(m_{i,j}^0)$  de la matrice  $\mathbf{M}_0$  par rapport à  $x_i$ .
- Une matrice  $\mathbf{M}_2$  qui discrétise la dérivée d'ordre 2 obtenue en dérivant les éléments  $(m_{i,j}^1)$  de la matrice  $\mathbf{M}_1$  par rapport à  $x_i$ .

Lorsque nous utilisons les matrices différentielles de Tchebychev, le problème aux valeurs propres que nous résolvons peut être considéré comme une discrétisation de l'opérateur d'origine. En effet, en utilisant cette méthode de discrétisation, nous approximons les fonctions propres de l'opérateur continu par des polynômes de Tchebychev, ce qui nous permet de travailler avec des matrices. Ainsi, nous obtenons une solution approchée du problème aux valeurs propres qui converge vers la solution exacte lorsque la discrétisation devient plus fine. La méthode de collocation de Tchebychev présente plusieurs avantages par rapport aux autres méthodes possibles. Tout d'abord, les polynômes de



Tchebychev sont beaucoup plus simples que les polynômes associés de Legendre, qui dépendent du nombre azimutal  $m$  et sont donc plus complexes. Ensuite, la méthode de collocation est plus facile à programmer que la méthode Galerkin, qui nécessite l'intégration et la résolution d'équations différentielles. En effet, la méthode de collocation consiste simplement à évaluer et à interpoler les fonctions inconnues aux points de collocation, tandis que la méthode Galerkin nécessite la résolution d'un système d'équations intégrales. Enfin, la méthode de collocation a des propriétés de convergence rapides, ce qui en fait une méthode efficace pour résoudre des problèmes de grande taille (Wang et al. 2016).

**Valeurs propres** La figure 2.5 montre les valeurs propres  $\lambda_{km}$  en fonction du paramètre de spin  $\nu$  pour  $m = 2$ . Puisque l'on suppose que  $\Omega$  pointe vers la direction de  $\theta = 0$  et que les oscillations sont proportionnelles à  $e^{i(\omega t - m\varphi)}$ , une oscillation prograde (rétrograde) a une valeur positive (négative) du produit  $m\nu$ . Donc dans la figure 2.5 puisque  $m = 2$ , les modes progrades et rétrogrades correspondent respectivement aux valeurs positives et négatives de  $\nu$ . Comme prévu, les résultats sont cohérents avec ceux obtenus par Lee & Saio (1997), puisque nous résolvons le même problème mais avec une méthode de résolution numérique différente (une méthode de relaxation<sup>6</sup>). On peut distinguer deux familles de valeurs propres :

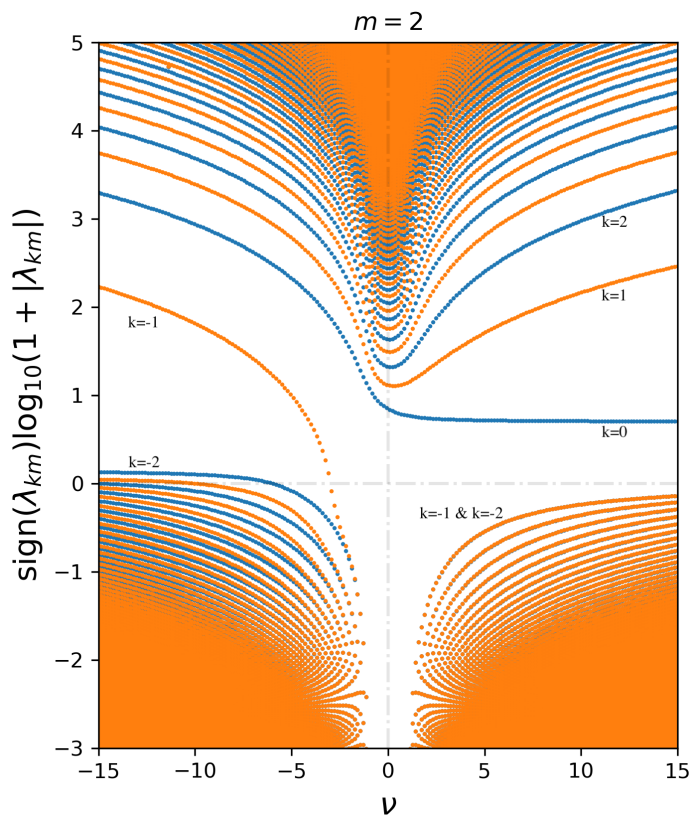
- Les solutions de type ondes de gravité : elles existent pour n'importe quelle valeur de  $\nu$  et on y attache des  $k$  positifs qui correspondent aux modes de gravité (modes g) modifiées par la rotation.
- Les solutions de type ondes de Rossby : elles n'existent que lorsque  $|\nu| > 1$  et on y attache des  $k$  négatifs qui n'apparaissent que dans une étoile en rotation. Ces solutions peuvent également être divisées en deux sous-types distincts :
  - les modes de Rossby (modes r) qui sont les solutions rétrogrades dont les valeurs propres  $\lambda_{km}$  sont positives (Saio et al. 2018).
  - les modes convectifs qui sont stabilisés par la force de Coriolis dont les valeurs propres  $\lambda_{km}$  sont négatives qui correspondent aux ondes progressives en milieu convectif tel que  $N^2 < 0$  (Lee 2019; Lee & Saio 2020). Même si la TAR n'est pas une approximation valide dans les zones convectives (Ogilvie & Lin 2004), nous trouvons de tels modes de propagation comme solutions de l'équation de marée de Laplace.

**Fonctions de Hough** La figure 2.6 montre les fonctions de Hough d'une solution de type gravité pour  $m = k = 2$  pour trois valeurs de paramètre de spin différentes. Une propriété essentielle des ondes gravito-inertielle est la modification de leur propagation latitudinale. Pour les ondes dans le régime super-inertiel ( $\omega > 2\Omega$ ,  $\nu < 1$ ), les ondes se propagent dans toute la sphère. Dans le régime sub-inertiel ( $\omega < 2\Omega$ ,  $\nu > 1$ ), un confinement équatorial apparaît. En effet, lorsque la valeur du paramètre de spin augmente, nous constatons un confinement de plus en plus marqué de la fonction de Hough dans la région équatoriale, ce qui correspond au piégeage équatorial (e.g Dintrans et al. 1999; Dintrans & Rieutord 2000). Donc, les fonctions de Hough sont quasi-nulles au-delà d'une latitude critique  $x_c = \nu^{-1}$ .

---

6. Les méthodes de relaxation sont des méthodes itératives pour résoudre des systèmes d'équations, y compris des systèmes non linéaires. Elles sont utilisées pour résoudre de grands systèmes linéaires peu denses, issus de la discrétisation d'équations différentielles par différences finies, et sont particulièrement importantes dans la résolution des équations aux dérivées partielles elliptiques (Press et al. 1986; Unno et al. 1989).





**FIGURE 2.5** – Valeurs propres  $\lambda_{km}$  de l'équation de marée de Laplace en fonction du paramètre de spin  $\nu$  pour  $m = 2$ . Les points bleus (respectivement orange) correspondent aux fonctions propres paires (respectivement impaires).

#### 2.4.3.4 Fréquences asymptotiques des ondes gravito-inertielles de basses fréquences

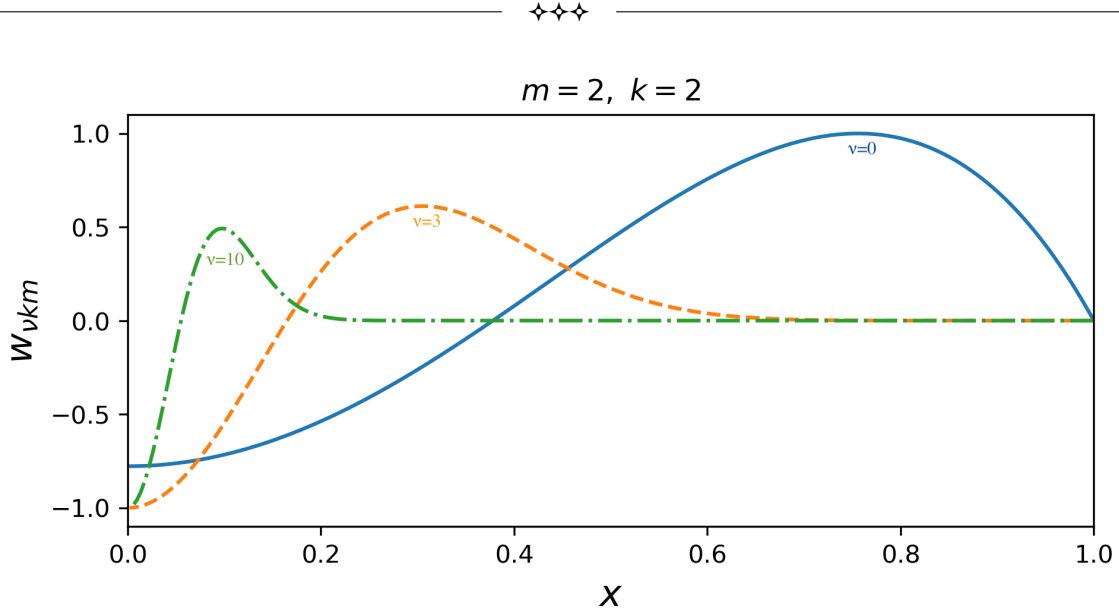
En utilisant la condition de quantification (2.22) et la relation de dispersion (2.55), nous pouvons déduire une expression asymptotique pour les fréquences des ondes gravito-inertielles de basses fréquences :

$$\omega_{nkm} = \frac{\lambda_{km}^{1/2}(\nu_n)}{(n + 1/2)\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{N(r')}{r'} dr'. \quad (2.58)$$

En utilisant cette expression, il est possible de calculer l'espacement de période entre deux modes d'ordres radiaux consécutifs en appliquant un développement de Taylor du premier ordre (Bouabid et al. 2013)

$$\Delta P_{nkm} \approx \frac{2\pi^2}{\sqrt{\lambda_{km}(\nu_{n+1})} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d \ln \lambda_{km}(\nu_n)}{d \ln \nu}\right)} \left( \int_{r_1}^{r_2} \frac{N(r')}{r'} dr' \right)^{-1}. \quad (2.59)$$

Cette quantité fournit des informations précieuses sur la stratification en entropie de l'étoile ainsi que sur sa rotation, car  $\lambda_{km}$  est une fonction de  $\nu$  et donc de  $\Omega$ . Le panneau gauche de la figure

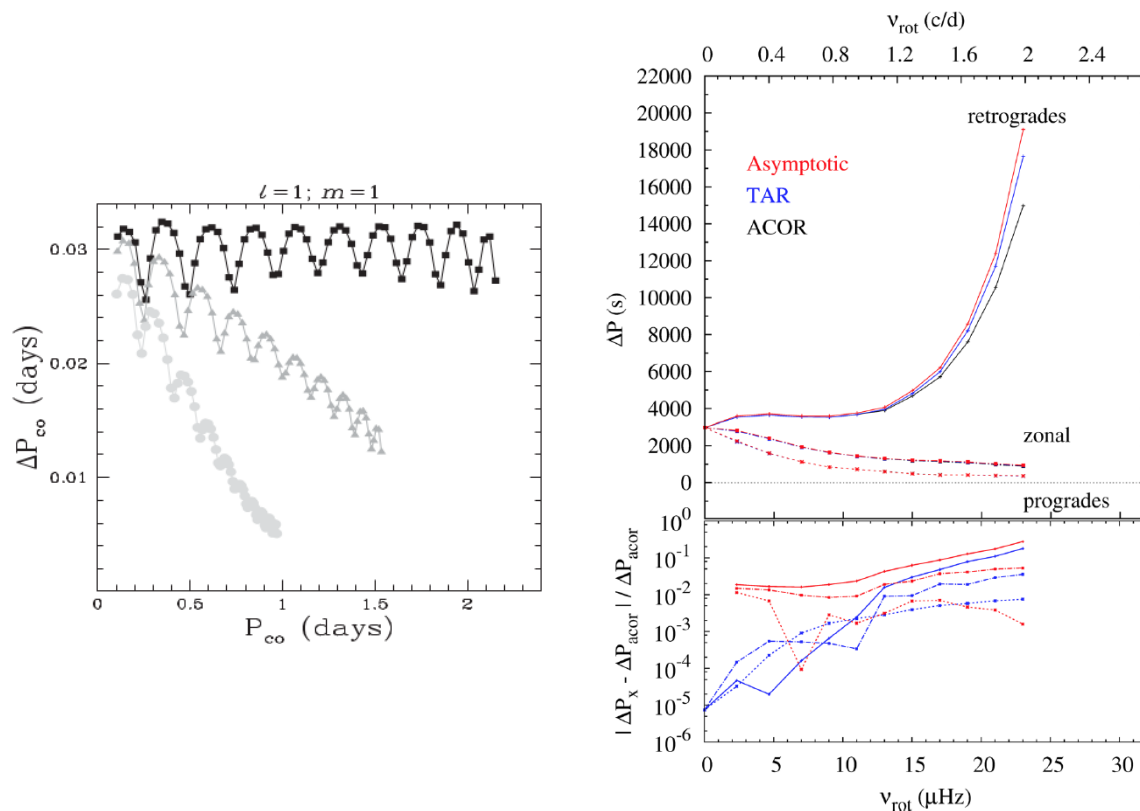


**FIGURE 2.6** – Les fonctions de Hough  $w_{\nu km}$  normalisée en fonction de  $x = \cos \theta$  pour une solution de type onde de gravité avec  $m = 2$  et  $k = 2$  où les lignes pleines bleues correspondent à  $\nu = 0$ , les lignes orange en tirets à  $\nu = 3$ , et les lignes vertes en pointillés et tirets à  $\nu = 10$ .

2.7 montre l’impact de la rotation sur l’espace de période. On voit que leur comportement est fortement influencé par l’accélération de Coriolis. En effet, l’oscillation périodique autour d’une valeur moyenne constante observée dans le cas sans rotation n’existe plus lorsque l’étoile tourne. On remarque aussi que plus l’étoile tourne vite, plus la pente est importante. La mesure de la pente donne donc une mesure de la rotation près de l’interface avec le cœur convectif, ce qui en fait une sonde précieuse de la dynamique interne des étoiles (Van Reeth et al. 2016, 2018).

On représente dans le panneau droit de la figure 2.7 tiré de Ouazzani et al. (2017), l’espace moyen des périodes des modes propres d’ordres radiaux entre  $-50$  et  $-20$  en fonction de la fréquence de rotation calculée avec trois méthodes (calcul complet, TAR, approche asymptotique). Dans le panneau inférieur, nous indiquons l’écart de la TAR et de l’approche asymptotique par rapport à ACOR. Les écarts les plus importants concernent les modes rétrogrades, alors que les modes zonaux et progrades s’accordent bien. Donc, la TAR et l’approche asymptotique donnent des résultats satisfaisants par rapport au calcul 2D complet en présentant l’avantage de nécessiter moins de ressources numériques (Ballot et al. 2012; Ouazzani et al. 2017).

Les étoiles magnétisées en rotation rapide différentielle nécessitent une approche plus sophistiquée que la TAR standard pour étudier leurs oscillations. En effet, la géométrie sphérique traditionnellement utilisée dans la TAR standard n’est pas adaptée à ces étoiles en raison de l’effet de l’accélération centrifuge, qui aplatit la forme de l’étoile, ce qui rend la description sphérique inadéquate. De plus, en présence d’un champ magnétique, la force de Lorentz influence les ondes et modifie leur propagation. Il est donc impératif de prendre en compte l’impact de la rotation différentielle, de la déformation centrifuge et du champ magnétique sur les ondes gravito-inertielles dans les zones radiatives des étoiles. Pour répondre à cette problématique, nous proposons deux nouvelles généralisations de la TAR standard : la TAR centrifuge et la TAR magnétique, qui seront



**FIGURE 2.7 – Gauche :** Espacement de période en fonction de la période dans le repère en rotation du mode ( $k = 0, m = 1$ ) pour trois vitesses de rotation différentes  $\Omega/\Omega_K = 0$  (noir), 0.1 (gris foncé) et 0.25 (gris clair) pour un modèle d'étoile de  $1.6 M_\odot$ . La pente des espacements de période donne le taux de rotation près de l'interface avec le cœur convectif et les creux sont la signature du mélange chimique ( $N_\mu^2$ ). Crédits : [Bouabid et al. \(2013\)](#). **Droite :** Espacement de période moyen en fonction de la vitesse de rotation de l'étoile ( $\nu_{rot}$ ) pour des modes avec des ordres radiaux allant de  $n = -20$  à  $n = -50$ , calculé avec ACOR (noir), la TAR (bleu), et la formule asymptotique dérivée avec la TAR (rouge), pour un modèle d'étoile de  $1.4 M_\odot$  (**Haut**). Écarts relatifs par rapport aux calculs 2D pour la TAR (bleu) et pour l'approche asymptotique (rouge). Les lignes pleines correspondent aux modes rétrogrades, les lignes traitillées/pointillées, aux modes zonaux et les lignes pointillées aux modes progrades (**Bas**). Crédits : [Ouazzani et al. \(2017\)](#).

détaillées dans les deux chapitres suivants.

## CHAPITRE 3

# Approximation traditionnelle de la rotation dans les étoiles déformées en rotation différentielle rapide

*Le travail présenté dans ce chapitre fait l'objet de deux publications dans la revue A&A.*

La rotation rapide ou modérée d'une étoile entraîne une accélération centrifuge qui rompt la symétrie sphérique. Cette caractéristique est observée chez un nombre considérable d'étoiles de masses intermédiaires et massives à rotation élevée (e.g. [Kervella et al. 2008](#); [Mérand et al. 2011](#); [Domiciano de Souza et al. 2012](#)). Parmi celles-ci, on connaît plusieurs catégories d'étoiles pulsantes : les étoiles du type  $\gamma$  Dor ( $1.4 M_{\odot} < M < 2 M_{\odot}$ ) ou les étoiles SPB ( $3 M_{\odot} < M < 9 M_{\odot}$ ). On peut également citer le cas extrême des étoiles Be (par exemple l'étoile Achernar représentée dans la figure 3.1), qui tournent à une vitesse proche de leur vitesse de rotation critique.

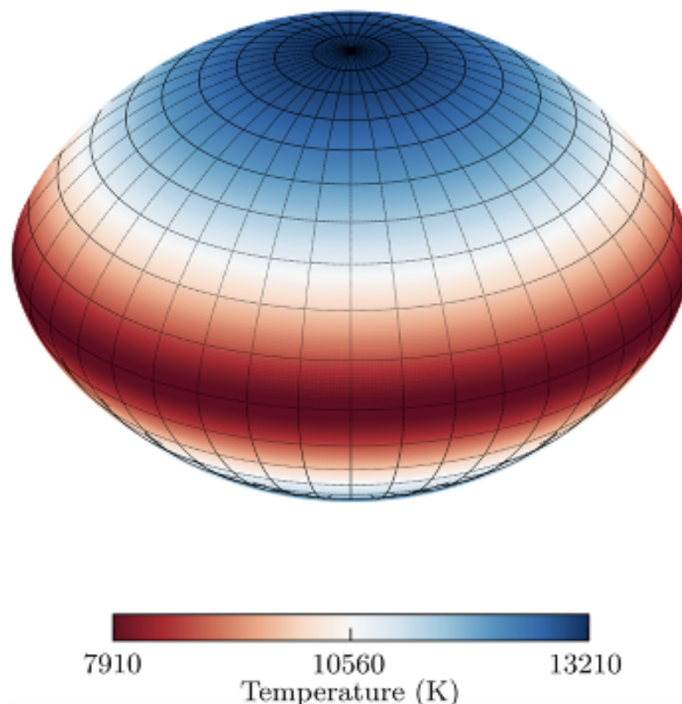
Comme on a vu dans le chapitre précédent, l'approximation traditionnelle de la rotation (TAR) nous permet de dériver des diagnostics sismiques basés sur les périodes entre les modes g d'ordre radiaux consécutifs dans les étoiles sphériques en rotation uniforme ([Bouabid et al. 2013](#); [Ouazzani et al. 2017](#)). Cela nous permet de déterminer les propriétés de la stratification chimique et le taux de rotation près du cœur convectif des étoiles de masses intermédiaires, qui contraignent notre modélisation de la structure stellaire, de l'évolution et du transport du moment cinétique interne (e.g. [Pedersen et al. 2018](#); [Aerts et al. 2018, 2019](#); [Ouazzani et al. 2019](#)).

Outre la hiérarchie de fréquences imposées pour pouvoir appliquer la TAR, cinq autres hypothèses sont adoptées lors de la dérivation de la TAR. Premièrement, la rotation est supposée uniforme. Deuxièmement, l'étoile est supposée sphérique, en d'autres termes, la déformation centrifuge de l'étoile est négligée (c'est-à-dire  $\Omega \ll \Omega_K := \sqrt{GM/R^3}$ , où  $\Omega_K$  est la vitesse angulaire critique (de rupture) pour laquelle la gravité de surface et l'accélération centrifuge sont égales). Troisièmement, l'approximation de Cowling, où les fluctuations du potentiel gravitationnel causées par la redistribution de la masse par le mouvement des ondes sont négligées, est adoptée. Quatrièmement, les modes acoustiques à hautes fréquences peuvent être filtrés en adoptant l'approximation anélastique. Cinquièmement, on adopte l'approximation JWKB pour les modes asymptotiques à basses fréquences qui oscillent rapidement dans la direction verticale.

L'hypothèse d'une rotation uniforme a été abandonnée par [Ogilvie & Lin \(2004\)](#) et [Mathis \(2009\)](#), qui ont pris en compte les effets d'une rotation différentielle générale (à la fois en rayon et en latitude dans une étoile sphérique) sur les ondes gravito-inertielles de basses fréquences dans le



cadre de la TAR. Les résultats de ce nouveau formalisme ont été appliqués avec succès dans [Van Reeth et al. \(2018\)](#) pour dériver l'espace des périodes asymptotiques dans le cas d'une rotation différentielle radiale faible et évaluer la sensibilité des ondes gravito-inertielles à l'effet de la rotation différentielle.



**FIGURE 3.1** – Profil de la température de l'étoile Achernar qui a une masse de  $6.7 M_{\odot}$ . Il s'agit d'une étoile binaire composée d'une étoile de type B et d'une étoile de type A. Elle tourne à une vitesse de plus de  $250 \text{ km s}^{-1}$ . Elle est donc très aplatie, son rayon équatorial étant 40% plus grand que son rayon polaire. Crédits : [Yves Frémat](#).

L'hypothèse de symétrie sphérique a été partiellement abandonnée par [Mathis & Prat \(2019\)](#), qui a généralisé la TAR pour les étoiles légèrement déformées en rotation modérée en considérant les effets de l'accélération centrifuge à l'aide d'une approche perturbative. Tout d'abord, ils ont dérivé la perturbation centrifuge de l'équilibre hydrostatique sphérique en déterminant la déformation d'un isobare dans le cas d'une rotation uniforme modérée (suivant [Mathis & Zahn 2004](#)). Ensuite, en utilisant cette déformation, ils ont défini une correspondance entre le système de coordonnées sphériques et un système de coordonnées sphéroïdales qui prend en compte cette faible perturbation centrifuge de l'étoile. Ensuite, en ne conservant que les termes du premier ordre dans la déformation, ils ont redérivé les équations hydrodynamiques linéarisées semblables à celles établies par [Saio \(1981\)](#); [Lee & Baraffe \(1995\)](#) et ils en ont déduit l'équation de marée de Laplace perturbée dans ce nouveau système de coordonnées. Ils ont ensuite effectué une exploration numérique des valeurs propres et des fonctions propres horizontales (les fonctions de Hough généralisées) de l'équation de marée de Laplace perturbée. Enfin, ils ont dérivé l'expression asymptotique pour les fréquences des ondes gravito-inertielles. Ce cadre perturbatif a ensuite été appliqué pour la modélisation sismique



intense pratique (Aerts 2021) à l'aide de modèles de structure stellaire unidimensionnels par Henneco et al. (2021). Ils trouvent que l'effet de l'accélération centrifuge sur les modes gravito-inertiels peut être théoriquement détecté à l'aide de la photométrie spatiale moderne.

Comme les deux effets de la déformation centrifuge et de la rotation différentielle sont potentiellement importants, nous généralisons ici ces travaux antérieurs, en traitant le cas d'une rotation différentielle générale dans les étoiles possiblement déformées. Nous considérons donc dans ce chapitre, le cas général d'étoiles en rotation différentielle rapide dont la forme devient un sphéroïde fortement déformé en raison de l'action de l'accélération centrifuge.

### 3.1 Géométrie sphéroïdale

En raison de la forme aplatie de l'étoile en rotation rapide, on introduit un nouveau système de coordonnées  $(\zeta, \theta, \varphi)$  qui a été conçu à la fois pour s'adapter à la forme de l'étoile à la surface mais aussi pour se rapprocher du système sphérique au centre (voir figure 3.2) et qui peut être relié au système des coordonnées sphériques usuelles  $(r, \theta, \varphi)$  via la transformation suivante (Bonazzola et al. 1998; Espinosa Lara & Rieutord 2013) :

$$r(\zeta, \theta) = a_i \xi \Delta \eta_i + R_i(\theta) + A_i(\xi) (\Delta R_i(\theta) - a_i \Delta \eta_i), \text{ pour } \zeta \in [\eta_i, \eta_{i+1}], \quad (3.1)$$

dans le  $i$ -ème sous-domaine  $\mathcal{D}_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} \in [R_i(\theta), R_{i+1}(\theta)]$  du domaine sphéroïdal  $\mathcal{D}$  où :

- $R_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}(\theta)$  sont des séries de fonctions, telles que  $R_n(\theta) = R_s(\theta)$  est la limite extérieure (avec  $R_s(\theta)$  le rayon de l'étoile en fonction de la latitude) et  $R_0(\theta) = 0$  est le centre,
- $\eta_i = R_i(\theta = 0)$  sont les rayons polaires des interfaces entre les sous-domaines,
- $\Delta \eta_i = \eta_{i+1} - \eta_i$ ,  $\Delta R_i(\theta) = R_{i+1}(\theta) - R_i(\theta)$  et  $\xi = (\zeta - \eta_i) / \Delta \eta_i$ ,
- les fonctions  $A_{i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket}(\xi) = -2\xi^3 + 3\xi^2$ ,  $A_0(\xi) = -1.5\xi^5 + 2.5\xi^3$ , et les constantes  $a_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} = 1$  sont choisies pour satisfaire les conditions aux limites qui assurent la continuité et la dérivabilité de la transformation entre les différents sous-domaines.

À partir de cette transformation, on définit la base sphéroïdale  $(\mathbf{a}_\zeta, \mathbf{a}_\theta, \mathbf{a}_\varphi)$  qui présente l'avantage de se réduire à la base sphérique habituelle quand on se rapproche d'une géométrie sphérique :

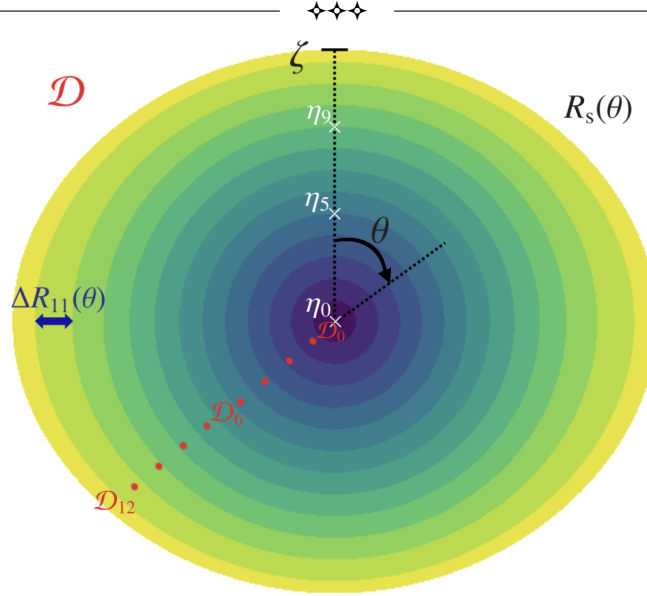
$$\begin{cases} \mathbf{a}_\zeta = \frac{\zeta^2}{r^2} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{a}_\theta = \frac{\zeta}{r^2 r_\zeta} (r_\theta \mathbf{e}_r + r \mathbf{e}_\theta) \\ \mathbf{a}_\varphi = \frac{\zeta}{r r_\zeta} \mathbf{e}_\varphi \end{cases}, \quad (3.2)$$

avec  $r_\zeta \equiv \partial_\zeta r$  et  $r_\theta \equiv \partial_\theta r$ .

### 3.2 Équations hydrodynamiques dans les objets déformés en rotation

Les différentes composantes de la vitesse et les fluctuations de l'onde sont développées comme suit :

$$X(r, \theta, \varphi, t) = X_0(r, \theta) + X'(r, \theta, \varphi, t), \quad (3.3)$$



**FIGURE 3.2** – Système de coordonnées sphéroïdales avec  $n = 13$  sous-domaines utilisé pour calculer le modèle d'équilibre d'une étoile tournant à 60% de sa vitesse de rupture, avec un modèle ESTER (voir section 3.5.1) de  $3 M_{\odot}$  avec une fraction centrale en hydrogène  $X_c = 0.7$  à titre d'exemple.

où  $X_0$  est la composante hydrostatique de  $X$  et  $X'$  est la fluctuation linéaire associée à l'onde. On développe aussi les fluctuations  $X'$  et le vecteur vitesse  $\mathbf{v}$  en une série de Fourier en  $\varphi$  et en  $t$  comme suit :

$$\mathbf{v}(\zeta, \theta, \varphi, t) \equiv \sum_{\omega^{\text{in}}, m} \{ \mathbf{v}(\zeta, \theta) \exp[i(\omega^{\text{in}} t - m\varphi)] \}, \quad (3.4)$$

$$X'(\zeta, \theta, \varphi, t) \equiv \sum_{\omega^{\text{in}}, m} \{ X'(\zeta, \theta) \exp[i(\omega^{\text{in}} t - m\varphi)] \}. \quad (3.5)$$

La fréquence des ondes étant décalée par effet Doppler en raison de la rotation différentielle, nous pouvons alors définir la fréquence des ondes  $\omega$  dans le référentiel en rotation comme suit :

$$\omega(\zeta, \theta) = \omega^{\text{in}} - m\Omega(\zeta, \theta), \quad (3.6)$$

avec  $\omega^{\text{in}}$  est la fréquence propre de l'onde dans un référentiel inertiel. En prenant en compte l'accélération centrifuge et la rotation différentielle  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega(\zeta, \theta)(\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_{\theta})$ , les équations hydrodynamiques linéarisées peuvent s'écrire comme :

$$i\omega \rho' = -\mathbf{v} \cdot \nabla \rho_0 - \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (3.7)$$

$$i\omega \rho_0 \mathbf{v} + 2\rho_0 \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} + \rho_0 r \sin \theta (\mathbf{v} \cdot \nabla \Omega) \mathbf{e}_{\varphi} = -\nabla P' + \rho' \mathbf{g}_{\text{eff}} - \rho_0 \nabla \Phi', \quad (3.8)$$

$$i\omega (P' - c_s^2 \rho') = -[\nabla P_0 - c_s^2 \nabla \rho_0] \cdot \mathbf{v}, \quad (3.9)$$

$$\nabla^2 \Phi' = 4\pi G \rho', \quad (3.10)$$



où  $\mathbf{g}_{\text{eff}} = -\nabla\Phi_0 + \frac{1}{2}\Omega\nabla(r^2 \sin^2 \theta)$  est la gravité effective de la structure hydrostatique qui prend en compte l'accélération centrifuge de manière non-perturbative (Reese et al. 2006, 2009). En décomposant ensuite le champ de vitesse sur la base sphéroïdale (3.2)

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{a}_i, \quad (3.11)$$

où les  $v^i$  sont les composantes contravariantes (voir l'annexe C) de la vitesse, on obtient :

$$i\omega\rho' = -\frac{\zeta^2\partial_\zeta\rho_0}{r^2r_\zeta}v^\zeta - \frac{\zeta\partial_\theta\rho_0}{r^2r_\zeta}v^\theta - \frac{\zeta^2\rho_0}{r^2r_\zeta}\left[\frac{\partial_\zeta(\zeta^2v^\zeta)}{\zeta^2} + \frac{\partial_\theta(\sin\theta v^\theta)}{\zeta\sin\theta} + \frac{\partial_\varphi v^\varphi}{\zeta\sin\theta}\right], \quad (3.12)$$

$$i\omega\left[\frac{\zeta^2r_\zeta v^\zeta}{r^2} + \frac{\zeta r_\theta v^\theta}{r^2}\right] = \frac{2\Omega\zeta\sin\theta v^\varphi}{r} - \frac{1}{\rho_0}\partial_\zeta P' + \frac{\partial_\zeta P_0}{\rho_0^2}\rho' - \partial_\zeta\phi', \quad (3.13)$$

$$i\omega\left[\frac{\zeta^2r_\theta v^\zeta}{r^2} + \frac{\zeta(r^2 + r_\theta^2)v^\theta}{r^2r_\zeta}\right] = \frac{2\Omega\zeta(r_\theta\sin\theta + r\cos\theta)v^\varphi}{rr_\zeta} - \frac{1}{\rho_0}\partial_\theta P' + \frac{\partial_\theta P_0}{\rho_0^2}\rho' - \partial_\theta\phi', \quad (3.14)$$

$$i\omega\frac{\zeta v^\varphi}{r_\zeta} = -\frac{2\Omega\zeta^2\sin\theta v^\zeta}{r} - \frac{2\Omega\zeta(r_\theta\sin\theta + r\cos\theta)v^\theta}{rr_\zeta} - \frac{\zeta\sin\theta}{r_\zeta}(\zeta\partial_\zeta\Omega u^\zeta + \partial_\theta\Omega u^\theta) - \frac{\rho_0}{\sin\theta}\partial_\varphi P' - \frac{\partial_\varphi\phi'}{\sin\theta}, \quad (3.15)$$

$$i\omega(P' - c_s^2\rho') = \frac{\zeta^2}{r^2r_\zeta}(-\partial_\zeta P_0 + c_s^2\partial_\zeta\rho_0)v^\zeta + \frac{\zeta}{r^2r_\zeta}(-\partial_\theta P_0 + c_s^2\partial_\theta\rho_0)v^\theta, \quad (3.16)$$

$$\frac{r^2 + r_\theta^2}{r^2r_\zeta^2}\partial_{\zeta\zeta}^2\phi' + c_\zeta\partial_\zeta\phi' - \frac{2r_\theta}{r^2r_\zeta}\partial_{\zeta\theta}^2\phi' + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta\varphi}\phi' = \Lambda\rho', \quad (3.17)$$

avec :

$$c_\zeta = \frac{1}{r^2r_\zeta^3}(2r_\zeta r_\theta r_{\zeta\theta} - r^2 r_{\zeta\zeta} - r_\zeta^2 r_{\theta\theta} + 2rr_\zeta^2 - r_\theta^2 r_{\zeta\zeta} - r_\zeta^2 r_\theta \cot\theta), \quad (3.18)$$

$$\Delta_{\theta\varphi} = \partial_{\theta\theta}^2 + \cot\theta\partial_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_{\varphi\varphi}^2. \quad (3.19)$$

### 3.3 TAR centrifuge : une nouvelle généralisation de la TAR standard

#### 3.3.1 Première hypothèse : $N^2$ dépend majoritairement du pseudo-rayon

Pour aboutir à un système d'équations séparables en appliquant la TAR, il faut supposer que la fréquence de Brunt-Väisälä  $N^2$  dépend essentiellement de  $\zeta$ , c'est-à-dire qu'elle ait une faible variation par rapport à  $\theta$ , ce qui implique aussi que la pression hydrostatique  $P_0$  et la densité hydrostatique  $\rho_0$  dépendent principalement de  $\zeta$ .

Afin de définir le domaine de validité de cette approximation et l'erreur relative commise en l'adoptant, on va comparer la fréquence de Brunt-Väisälä  $N^2$  dans le cas non déformé (dépendance en  $\zeta$  uniquement dans ce cas) à celle dans le cas en rotation en fixant la valeur de  $\theta$  et en variant le rapport de la vitesse angulaire de rotation de l'étoile et de sa vitesse angulaire de rotation critique  $\Omega_K = \sqrt{GM/R^3}$  dans le cas de modèles stellaires bi-dimensionnels en section 3.5.2.





**TABLE 3.1** – Coefficients intervenant dans l'équation de marée de Laplace généralisée dans le cas général de la géométrie sphéroïdale et dans le cas particulier de la géométrie sphérique.

Coefficient	Géométrie sphéroïdale	Géométrie sphérique
$\mathcal{A}$	$\frac{1}{r^2 r_\zeta}$	$\frac{1}{\zeta^2}$
$\mathcal{B}$	$\frac{r^2 + (1-x^2)r_x^2}{r^2 r_\zeta}$	1
$\mathcal{C}$	$\frac{-(1-x^2)r_x + rx}{r r_\zeta}$	$x$
$\mathcal{D}$	$\frac{1}{r_\zeta}$	1
$\mathcal{E}$	$\mathcal{D} - \nu^2 \frac{\mathcal{C}^2}{\mathcal{B}} = \frac{1}{r_\zeta} - \nu^2 \frac{(-(1-x^2)r_x + rx)^2}{r^2 + (1-x^2)r_x^2}$	$1 - \nu^2 x^2$
$\mathcal{F}$	$-\frac{\nu \mathcal{C} \mathcal{D}}{\omega \mathcal{B}} (1-x^2) \partial_x \Omega$	$-\frac{\nu x}{\omega} (1-x^2) \partial_x \Omega$
$\partial_x \mathcal{B}$	$\frac{2rr_x - 2xr_x^2 + 2(1-x^2)r_x r_{xx} - \mathcal{B}(2rr_x r_\zeta + r^2 r_{\zeta x})}{r^2 r_\zeta}$	0
$\partial_x \mathcal{C}$	$\frac{2xr_x - (1-x^2)r_{xx} + r + xr_x - \mathcal{C}(r_x r_\zeta + r r_{\zeta x})}{r r_\zeta}$	1
$\partial_x \mathcal{D}$	$-\mathcal{D}^2 r_{\zeta x}$	0

### 3.3.2 TAR centrifuge

En appliquant cette première hypothèse, l'approximation anélastique, l'approximation de Cowling et la hiérarchie des termes imposée par la TAR dans le système (3.13-3.15) on obtient :

$$i\omega \partial_\zeta W' + N^2 \zeta^2 \mathcal{A} v^\zeta = 0, \quad (3.20)$$

$$i\omega \zeta \mathcal{B} v^\theta - 2\Omega \zeta \mathcal{C} v^\varphi + \partial_\theta W' = 0, \quad (3.21)$$

$$i\omega \zeta \mathcal{D} v^\varphi + \left( 2\Omega \zeta \mathcal{C} + \frac{\sin \theta}{r_\zeta} \partial_\theta \Omega \right) v^\theta - \frac{im}{\sin \theta} W' = 0, \quad (3.22)$$

avec les coefficients  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ , et  $\mathcal{D}$  sont définis dans le tableau 3.1 et  $W' = P'/\rho_0$  est la pression normalisée. Nous parvenons donc encore à découpler partiellement les composantes verticale et horizontales de la vitesse. On peut ainsi résoudre le système formé par (3.21) et (3.22) et exprimer  $v^\theta$  et  $v^\varphi$  en fonction de la pression normalisée  $W'$

$$v^\theta(\zeta, x) = -i \frac{1}{\zeta} \frac{1}{\omega} \frac{1}{\mathcal{B}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[ (1-x^2) \left( 1 + \frac{\nu^2 \mathcal{C}^2 / \mathcal{B} + \mathcal{F}}{\mathcal{E} \mathcal{B} - \mathcal{F}} \right) \partial_x + m \frac{\nu \mathcal{C}}{\mathcal{E} - \mathcal{F}} \right] W', \quad (3.23)$$

$$v^\varphi(\zeta, x) = \frac{1}{\zeta} \frac{1}{\omega} \frac{1}{\mathcal{E} - \mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[ (1-x^2) \left( \frac{\nu \mathcal{C}}{\mathcal{B}} + \frac{\mathcal{F}}{\nu \mathcal{C}} \right) \partial_x + m \right] W'. \quad (3.24)$$

Nous obtenons ainsi un problème qui a la même forme mathématique que dans le cas :

- Des étoiles à symétrie sphérique en rotation uniforme (Bildsten et al. 1996; Lee & Saio 1997) et différentielle (Mathis 2009).
- Des étoiles faiblement déformées en rotation uniforme (Mathis & Prat 2019).



## 3.4 Dynamique des ondes gravito-inertielles à basse fréquence

### 3.4.1 Approximation JWKB

Dans le cas où  $\omega \ll N$ , chaque champ scalaire et chaque composante de la vitesse peuvent être développés en utilisant l'approximation JWKB puisque la variation spatiale de l'onde dans la direction radiale est très rapide comparée à celle du fond hydrostatique (cf. la section 2.4.3.2)

$$W^j(\zeta, \theta) = \sum_k \left\{ w_{\omega^{\text{in}km}}(\zeta, \theta) \frac{A_{\omega^{\text{in}km}}}{k_{V;\omega^{\text{in}km}}^{1/2}} \exp \left[ i \int^\zeta k_{V;\omega^{\text{in}km}} d\zeta \right] \right\}, \quad (3.25)$$

$$v^j(\zeta, \theta) = \sum_k \left\{ \hat{w}_{\omega^{\text{in}km}}^j(\zeta, \theta) \frac{A_{\omega^{\text{in}km}}}{k_{V;\omega^{\text{in}km}}^{1/2}} \exp \left[ i \int^\zeta k_{V;\omega^{\text{in}km}} d\zeta \right] \right\}. \quad (3.26)$$

Dans ce cas, on peut dériver, à partir de l'équation (3.20), l'expression de la composante pseudo-radiale de la vitesse :

$$\hat{u}_{\omega^{\text{in}km}}^\zeta(\zeta, x) = \frac{k_{V;\omega^{\text{in}km}}(\zeta)}{N^2(\zeta)} \frac{\omega_{km}(\zeta, x)}{\zeta^2 \mathcal{A}(\zeta, x)} w_{\omega^{\text{in}km}}(\zeta, x). \quad (3.27)$$

### 3.4.2 Deuxième et troisième hypothèses : $\Omega$ et $\mathcal{A}$ dépendent majoritairement du pseudo-rayon

Pour pouvoir introduire les valeurs propres  $\Lambda_{\omega^{\text{in}km}}$  qui ne dépendent que de  $\zeta$  et dériver l'équation de marée de Laplace généralisée, nous devons effectuer une séparation partielle entre les variables pseudo-radiales et latitudinales dans la composante pseudo-radiale de la vitesse (Eq. 3.27). En effet, la fréquence du mode dans le repère en rotation (Eq. 3.6) dépend de  $\zeta$  et  $\theta$ . Cette dépendance provient de la rotation différentielle  $\Omega(\zeta, \theta)$ . Par conséquent, pour réaliser la séparation partielle des variables, la vitesse angulaire  $\Omega$  ne devrait dépendre que du pseudo-rayon  $\zeta$ . De plus, nous devons donc supposer que le coefficient  $\mathcal{A}$  dépend principalement de  $\zeta$ . Nous examinerons en détail la validité de ces deux approximations dans la section 3.5.2.

### 3.4.3 Équation de marée de Laplace généralisée

En appliquant l'approximation anélastique et de l'approximation  $N^2(\zeta, \theta) \approx N^2(\zeta)$ , l'équation de continuité (Eq. 3.12) se simplifie en

$$\zeta \partial_\zeta \rho_0 v^\zeta + \rho_0 \left[ \frac{\partial_\zeta (\zeta^2 v^\zeta)}{\zeta} + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta v^\theta) - \frac{im}{\sin \theta} v^\varphi \right] = 0. \quad (3.28)$$

En substituant le développement donné dans les équations (3.25) et (3.26) dans les équations (3.23) et (3.24), puis en les remplaçant dans l'équation de continuité (Eq. 3.28), nous obtenons l'équation de marée de Laplace généralisée :

$$\mathcal{L}_{\omega^{\text{in}m}} [w_{\omega^{\text{in}km}}] = -\Lambda_{\omega^{\text{in}km}}(\zeta) w_{\omega^{\text{in}km}}, \quad (3.29)$$



avec

$$\mathcal{L}_{\omega^{\text{in}m}} = \omega \partial_x \left[ \frac{1}{\omega} \frac{1}{\mathcal{B}(\mathcal{E} - \mathcal{F})} \left( \mathcal{E} + \frac{\nu^2 \mathcal{C}^2}{\mathcal{B}} \right) (1 - x^2) \partial_x \right] - \frac{m\mathcal{F}}{\nu\mathcal{C}(\mathcal{E} - \mathcal{F})} \partial_x + m\omega \partial_x \left( \frac{\nu\mathcal{C}}{\omega\mathcal{B}(\mathcal{E} - \mathcal{F})} \right) - \frac{m^2}{(\mathcal{E} - \mathcal{F})(1 - x^2)}, \quad (3.30)$$

avec les coefficients  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  sont définis dans le tableau 3.1. Les conditions aux limites utilisées pour l'équation de Laplace standard (cf. la section 2.4.3.3) restent valables dans le cas déformé.

### 3.4.4 Fréquences asymptotiques des modes gravito-inertiels dans une étoile déformée en rotation

À partir de l'équation (3.27) et de l'équation de marée de Laplace généralisée (3.29), on peut exprimer la relation de dispersion des modes gravito-inertiels dans le cas d'une étoile déformée en rotation différentielle en fonction des valeurs propres généralisées  $\Lambda_{\omega^{\text{in}km}}$  qui dépendent du pseudo-rayon :

$$k_{V;\omega^{\text{in}km}}^2(\zeta) = \frac{N^2(\zeta)\mathcal{A}(\zeta)}{\omega_{km}^2(\zeta)} \Lambda_{\omega^{\text{in}km}}(\zeta). \quad (3.31)$$

Puis on substitue cette relation de dispersion dans la condition de quantification dans la direction verticale, donc ici pseudo-radiale, définie dans le chapitre précédent (Eq. 2.22). L'expression analytique des fréquences des modes ne peut pas être dérivée analytiquement comme dans le cas standard du fait de la dépendance spatiale de  $w_{\omega^{\text{in}km}}$ . Au lieu de cela, il est nécessaire de résoudre numériquement l'expression

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{N\sqrt{\mathcal{A}\Lambda_{\omega^{\text{in}km}}}}{\omega_{km}} d\zeta = (n + 1/2)\pi, \quad (3.32)$$

pour obtenir les fréquences des modes correspondantes.

## 3.5 Application aux étoiles de masse intermédiaire en rotation rapide

Afin d'implémenter nos équations et de résoudre l'équation de marée de Laplace généralisée, nous devons d'abord calculer un modèle d'équilibre qui donne la structure de l'étoile déformée en rotation. Le modèle de structure et d'évolution stellaire le plus avancé dont nous disposons et qui est adapté au formalisme que nous avons développé ici est le code Evolution STEllaire en Rotation (ESTER [Espinosa Lara & Rieutord 2013](#); [Rieutord & Espinosa Lara 2013](#)). Il est unique puisqu'il calcule l'effet de l'accélération centrifuge de manière non-perturbative et auto-consistante à n'importe quel taux de rotation.

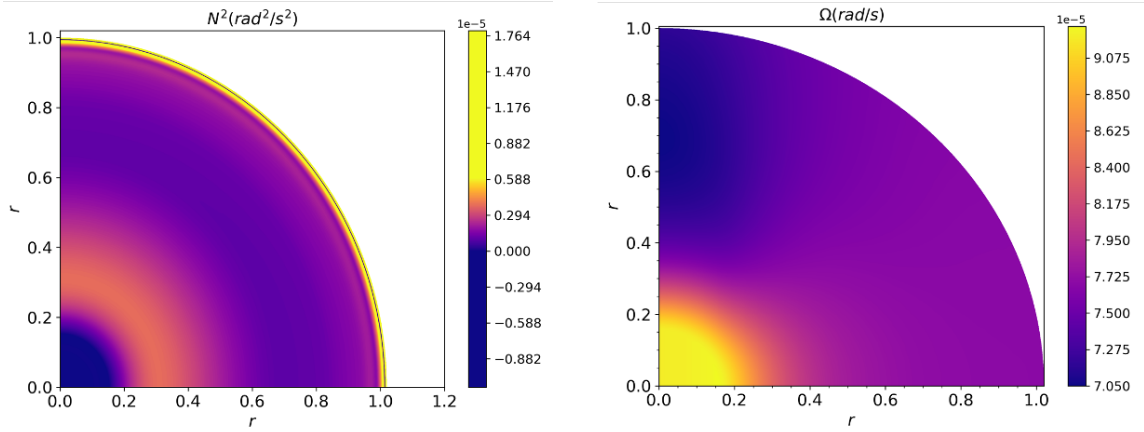
### 3.5.1 Modèles ESTER

Le code ESTER est un code de structure stellaire 2D qui prend en compte les effets de la rotation de manière non-perturbative et cohérente. Il permet de calculer l'état d'équilibre d'une étoile de



masse supérieure à  $2M_{\odot}$  en résolvant les équations stationnaires de l'hydrodynamique pour la pression, la densité, la température, les flots méridiens et la vitesse angulaire pour l'ensemble du volume. Ces modèles bi-dimensionnels réalistes d'étoiles en rotation rapide sont calculés pour les étoiles de masses intermédiaires et les étoiles massives. Le code utilise des méthodes spectrales dans les directions radiale et latitudinale pour transformer le système original d'équations aux dérivées partielles non linéaires en un système d'équations algébriques non linéaires avec l'utilisation des polynômes de Chebyshev dans la direction pseudo-radiale et des harmoniques sphériques dans les directions horizontales.

Ici, nous utilisons des modèles stellaires de  $3M_{\odot}$  avec une fraction de masse d'hydrogène dans le cœur  $X_c = 0.7$  tournant entre 0% à 90% du taux de rotation de rupture  $\Omega_K$ . La figure 3.3 montre le profil de la fréquence de Brunt-Väisälä et de la vitesse angulaire pour ce modèle tournant à  $\Omega/\Omega_K = 20\%$ . Un tel modèle est représentatif des étoiles SPB observées près de la séquence principale d'âge zéro avec des sondes astérosismiques de leur vitesse de rotation (e.g. Pápics et al. 2015, 2017).



**FIGURE 3.3** – Profil de la fréquence de Brunt-Väisälä  $N^2(\zeta, \theta)$  (**Gauche**) et de la vitesse angulaire  $\Omega(\zeta, \theta)$  (**Droite**) d'un modèle ESTER ( $3M_{\odot}$ ,  $X_c = 0.7$ ) tournant à l'équateur à la vitesse angulaire  $\Omega/\Omega_K = 20\%$ .

Avant de résoudre l'équation de Laplace généralisée en utilisant le modèle ESTER considéré ici, on va examiner tout d'abord le domaine de validité de la TAR centrifuge. Cette étape préliminaire est cruciale pour garantir l'exactitude et définir les limites de notre nouveau formalisme.

### 3.5.2 Domaine de validité de la TAR centrifuge

Nous étudions le domaine de validité des trois approximations (3.3.1 et 3.4.2) qui sont nécessaires pour construire la TAR pour les corps déformés en rotation différentielle rapide que l'on rappelle :

$$N^2(\zeta, \theta) \approx N^2(\zeta), \quad (3.33)$$

$$\mathcal{A}(\zeta, \theta) \approx \mathcal{A}(\zeta), \quad (3.34)$$

$$\Omega(\zeta, \theta) \approx \Omega(\zeta). \quad (3.35)$$

On détermine le domaine de validité de ces trois approximations en fonction du taux de rotation et du pseudo-rayon en faisant varier systématiquement le taux de rotation normalisé de l'étoile,



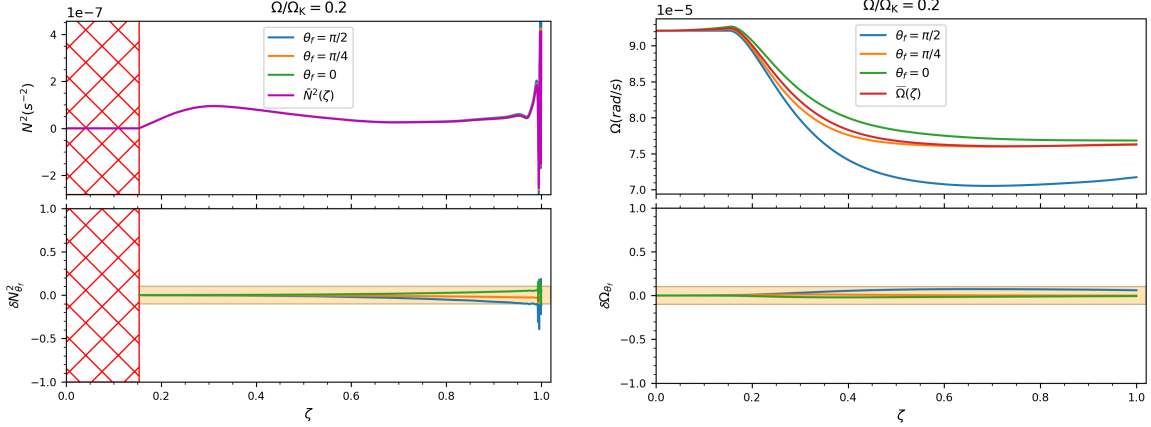
$\Omega/\Omega_K$ , et en calculant pour chaque cas l'erreur relative associée

$$\delta X_{\theta_f}(\zeta) = \frac{X_{\text{approx}}(\zeta) - X(\zeta, \theta_f)}{X(\zeta, \theta_f)} \quad (3.36)$$

entre la valeur exacte  $X(\zeta, \theta_f)$  donnée par le modèle 2D et la valeur approchée  $X_{\text{approx}}(\zeta)$  donné par la moyenne pondérée de la valeur exacte sur la colatitude  $\theta$ .

$$X_{\text{approx}}(\zeta) = \bar{X}(\zeta) = \int_0^{\pi/2} X(\zeta, \theta) \sin \theta d\theta, \quad (3.37)$$

avec  $X \equiv \{N^2, \Omega, \mathcal{A}\}$  et  $\theta_f$  est une valeur fixe de la colatitude  $\theta$ . Ensuite, nous fixons un taux d'erreur maximal égal à 10% et nous déduisons la limite du pseudo-rayon  $\zeta_{\text{limit}}$  où l'erreur relative maximale dépasse ce seuil et les approximations deviennent invalides. Nous représentons sur la figure 3.4 les profils de la fréquence de Brunt-Väisälä, de la vitesse angulaire de rotation et de l'erreur relative associés en fonction du pseudo-rayon  $\zeta$  pour différentes valeurs de la colatitude  $\theta_f$ , à un taux de rotation fixe à l'équateur  $\Omega = 0.2\Omega_K$ . Physiquement, cela signifie que la variation des propriétés structurales et du profil de rotation est faible dans la direction latitudinale et varie principalement avec le pseudo-rayon, ce qui nous permet de construire la TAR centrifuge.

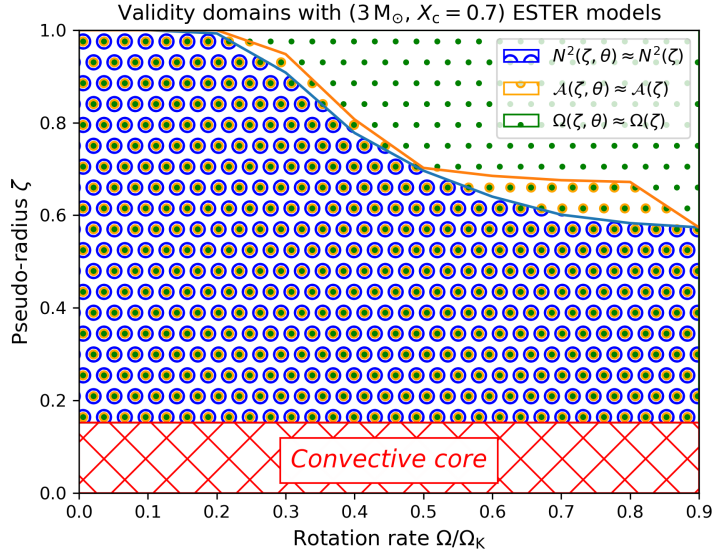


**FIGURE 3.4** – Profils du carré de la fréquence de Brunt-Väisälä  $N^2$  et de l'erreur relative  $\delta N_{\theta_f}^2$  (**Gauche**) et profils de la vitesse angulaire  $\Omega$  et de l'erreur relative  $\delta \Omega_{\theta_f}$  (**Droite**) en fonction de  $\zeta$  à différentes colatitudes  $\theta_f$  en utilisant un modèle ESTER tournant à 20% du taux de rotation critique. La zone orange clair indique la marge d'erreur autorisée (10%) et la zone hachurée rouge représente la région convective de l'étoile.

Dans la figure 3.5, nous montrons la variation du pseudo-rayon  $\zeta_{\text{limit}}$  en fonction du taux de rotation  $\Omega/\Omega_K$  pour les modèles ESTER à trois masses solaires avec  $X_c = 0.7$ . Cette courbe définit les domaines de validité des approximations (3.33), (3.34), et (3.35) qui définissent par conséquent le domaine de validité de la TAR centrifuge. On trouve qu'il est donc possible d'appliquer la TAR généralisée à ce modèle d'étoile tournant jusqu'à 20% de la vitesse angulaire critique. De plus, on peut remarquer que la rotation différentielle n'a pas d'influence sur le domaine de validité de la TAR centrifuge. Cette limite est inférieure à celle proposée par Mathis & Prat (2019), qui était



$\Omega/\Omega_K = 40\%$ . La limite proposée ici devrait être plus réaliste, car elle est dérivée d'un modèle bidimensionnel qui prend en compte l'accélération centrifuge de manière non perturbative, tandis que Mathis & Prat (2019) l'ont traitée de manière perturbative. Il convient de noter que l'influence de la fraction de masse d'hydrogène dans le noyau  $X_c$  sur le domaine de validité de la TAR centrifuge est très faible (Dhouib et al. 2021b).



**FIGURE 3.5** – Domaine de validité des approximations faites pour la dérivation de la TAR centrifuge en fonction du taux de rotation  $\Omega/\Omega_K$  et du pseudo-rayon  $\zeta$  (avec un degré de confiance de 90%) pour un modèle ESTER ( $3M_\odot$ ,  $X_c = 0.7$ ).

Une fois que le domaine de validité de la TAR centrifuge est défini, on peut alors passer à la résolution numérique de l'équation de Laplace généralisée.

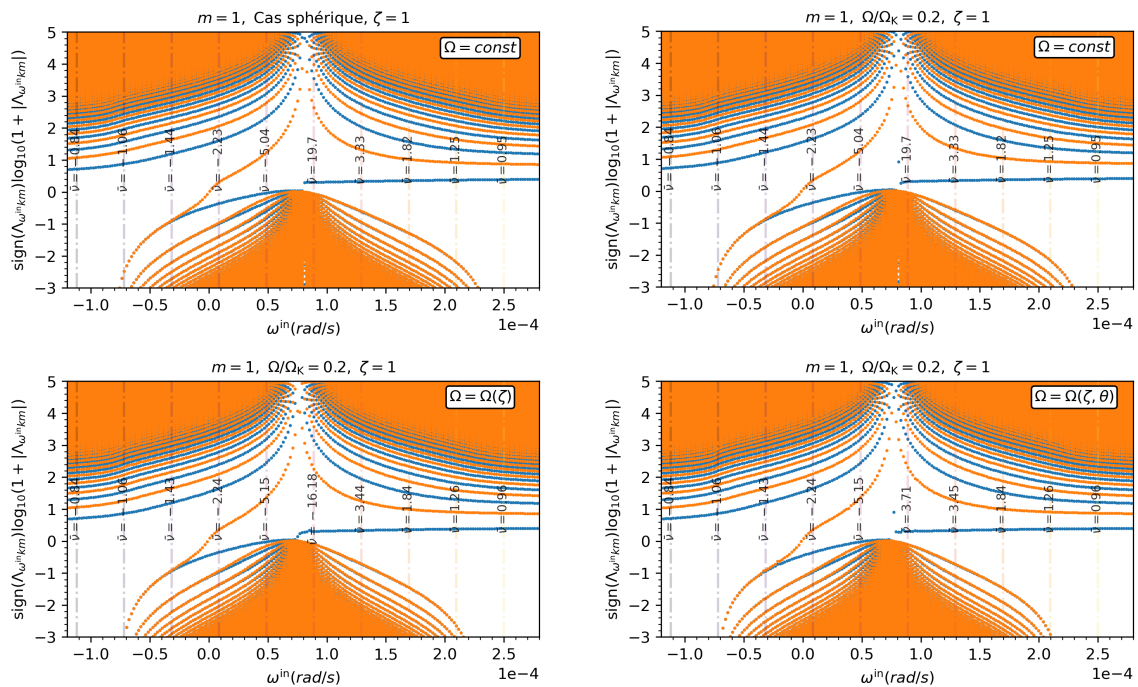
### 3.5.3 Valeurs propres et fonctions de Hough

En utilisant une implémentation basée sur les polynômes de Chebyshev (Wang et al. 2016) comme dans la section 2.4.3.3, on résout numériquement l'équation de marée de Laplace généralisée (3.29) pour différents pseudo-rayons et différentes fréquences de mode dans le repère inertiel avec un taux de rotation de  $\Omega/\Omega_K = 20\%$ . Ici, nous ne sommes plus en mesure de calculer le spectre de l'équation de Laplace généralisée en fonction du paramètre de spin  $\nu$  car dans le cas de la rotation différentielle,  $\nu$  n'est plus une constante, mais devient une fonction de  $\zeta$  et  $\theta$ . Ainsi, pour que la comparaison entre nos nouveaux résultats et les résultats précédents où  $\nu$  était constante (cf. la section 2.4.3.3) soit claire, nous définissons la moyenne pondérée du paramètre de spin

$$\bar{\nu} = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \nu(\zeta, \theta) \sin \theta d\theta d\zeta. \quad (3.38)$$



La figure 3.6 montre les valeurs propres  $\Lambda_{\omega^{\text{in}} km}$  en fonction de  $\omega^{\text{in}}$  pour  $m = 1$ ,  $\zeta = \zeta_{\text{limit}} = 1$ , et  $\Omega/\Omega_K = 0.2$  dans le cas non déformé et dans le cas déformé en rotation uniforme, différentielle radiale et différentielle générale. Nous rappelons ici les deux principales familles de solutions. La première est celle des solutions de type gravité ( $\Lambda_{\omega^{\text{in}} km} \geq 0$ ). Elles existent pour toute valeur de  $\omega^{\text{in}}$  et nous leur attachons des  $k$  positifs. Elles correspondent aux modes de gravité (modes g) modifiés par la rotation. La seconde correspond aux solutions de type Rossby. Elles n’existent que pour des valeurs spécifiques de la fréquence des modes dans le repère inertiel ( $\omega^{\text{in}} \in [\omega^{\text{in}}_-, \omega^{\text{in}}_+]$ ) et nous leur attribuons des  $k$  négatifs. Cette figure révèle que la rotation différentielle de l’étoile provoque à  $\zeta = 1$  un déplacement progressif des valeurs propres. En effet,  $\omega^{\text{in}}_+$  passe de  $2.3 \times 10^{-4} \text{ rad s}^{-1}$  dans le cas d’une rotation uniforme à  $2.15 \times 10^{-4} \text{ rad s}^{-1}$  dans le cas d’une rotation différentielle radiale et à  $2.1 \times 10^{-4} \text{ rad s}^{-1}$  dans le cas d’une rotation différentielle générale. Par contre, l’impacte de la déformation centrifuge sur les valeurs propres, pour  $\Omega/\Omega_K = 0.2$ , est presque indiscernable.

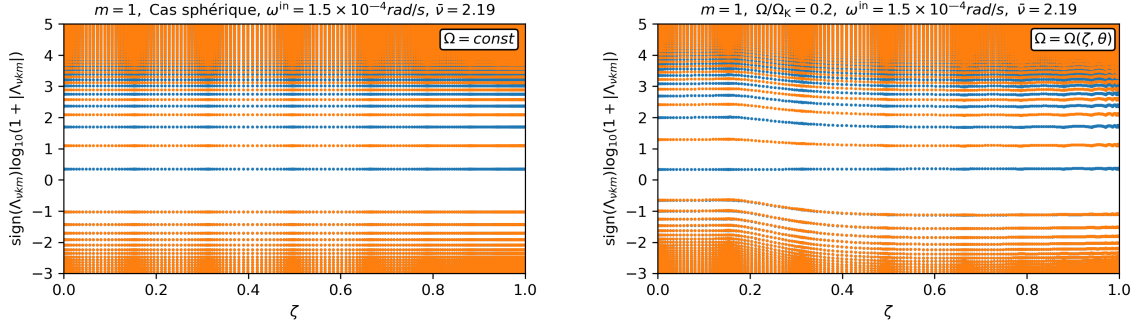


**FIGURE 3.6** – Valeurs propres de l’équation de Laplace généralisée en fonction de la fréquence du mode dans le repère inertiel  $\omega^{\text{in}}$  pour  $\zeta = 1$  et  $m = 1$  dans le cas d’une étoile en rotation uniforme non déformée (en haut à gauche) et d’une étoile déformée avec  $\Omega/\Omega_K = 0.2$  en rotation uniforme (en haut à droite), en rotation différentielle radiale (en bas à gauche), et en rotation différentielle générale (en bas à droite). Les points bleus (respectivement orange) correspondent aux fonctions de Hough paires (respectivement impaires).

Contrairement au cas non déformé en rotation uniforme, nous obtenons ici des valeurs propres qui dépendent considérablement du pseudo-rayon  $\zeta$  comme le montre la figure 3.7 où nous représentons le spectre de l’équation de marée de Laplace généralisée en fonction du pseudo-rayon à  $\Omega/\Omega_K = 0, 2$ ,  $m = 1$  et  $\omega^{\text{in}} = 1.15 \times 10^{-4} \text{ rad s}^{-1}$ . Plus précisément, on peut voir que la rotation différentielle



influence particulièrement la région proche du cœur convectif ( $0.153 \leq \zeta \leq 0.35$ ) où la rotation est maximale et le gradient radial de la vitesse angulaire est le plus élevé (voir figure 3.3). Nous pouvons constater que cette dépendance devient très faible dans la région externe  $0.5 \leq \zeta \leq 1$  où nous obtenons des valeurs propres très proches de celles du cas non déformé en rotation uniforme.

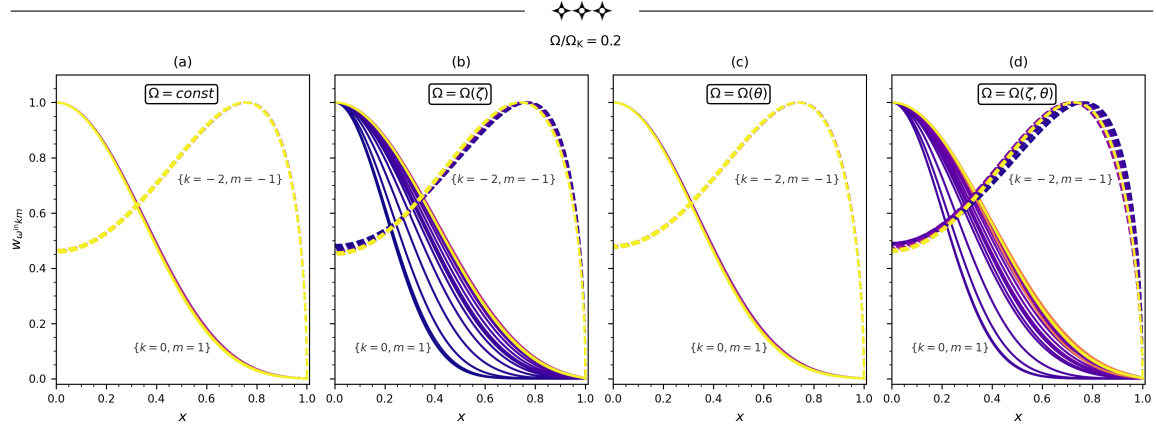


**FIGURE 3.7** – Valeurs propres de l’équation de Laplace généralisée en fonction du pseudo-rayon pour  $m = 1$  et  $\omega^{\text{in}} = 1.5 \times 10^{-4} \text{ rad s}^{-1}$  dans le cas d’une étoile en rotation uniforme non déformée (gauche) et d’une étoile en rotation différentielle  $\Omega/\Omega_K = 0.2$  (droite). Les points bleus (respectivement orange) correspondent aux fonctions de Hough paires (respectivement impaires).

On se concentre maintenant sur l’influence de la déformation centrifuge et de la rotation différentielle sur les fonctions de Hough généralisées  $w_{km}$  qui varient avec le pseudo-rayon  $\zeta$  et la coordonnée horizontale  $x$ . Cette dépendance est illustrée sur la figure 3.8 à  $\Omega/\Omega_K = 20\%$  pour les modes dipolaires progrades  $\{k = 0, m = 1\}$  avec  $\omega^{\text{in}} = 10^{-4} \text{ rad s}^{-1}$  et les modes de Rossby rétrogrades  $\{k = -2, m = -1\}$  avec  $\omega^{\text{in}} = -5.5 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$  pour quatre cas différents : rotation uniforme, rotation différentielle pseudo-radiale, rotation différentielle latitudinale, et profil complet de rotation différentielle. Lorsque le pseudo-rayon diminue depuis la surface ( $\zeta = 1$ ) jusqu’au bord de la zone radiative ( $\zeta = 0.153$ ), les solutions de type Rossby sont légèrement modifiées, tandis que les solutions de type gravité changent considérablement avec l’introduction d’une forte dépendance au pseudo-rayon  $\zeta$  surtout dans le cas d’une rotation différentielle pseudo-radiale ou générale. Plus précisément, nous observons que les solutions de type gravité migrent près de l’équateur ( $x = 0$ ), provoquant un rétrécissement de sa forme dans la partie interne de l’étoile. Ceci correspond à la modification de la région de propagation des ondes gravito-inertielles par la rotation différentielle (Mathis 2009; Mirouh et al. 2016; Prat et al. 2018).

Nous pouvons également constater que la principale modification provient du gradient de rotation différentielle le long du pseudo-rayon  $\zeta$  tandis que la rotation différentielle en fonction de la colatitude  $\theta$  modifie marginalement les solutions de type gravité et n’a pratiquement aucun impact sur la solution de type Rossby. En outre, nous pouvons voir que les fonctions de Hough à la surface sont peu affectées dans tous les cas et que les variations les plus fortes se produisent à l’intérieur de l’étoile où le gradient pseudo-radial de la rotation est élevé. De plus, il est important de noter que la rotation différentielle a un effet bien plus prononcé que la déformation centrifuge à  $\Omega/\Omega_K = 0.2$ . En conclusion, nous pouvons donc voir que la déformation centrifuge et la rotation différentielle modifie les fonctions de Hough généralisées en introduisant une nouvelle dépendance à la coordonnée pseudo-radiale  $\zeta$ , alors que dans le cas sphérique en rotation uniforme, elles ne dépendaient que de la latitude  $\theta$ .





**FIGURE 3.8** – Fonctions de Hough généralisées (normalisées) en fonction de la coordonnée horizontale  $x$  à différents pseudo-rayons allant de  $\zeta = 0.153$  (bleu) à  $\zeta = 1$  (jaune) à  $\Omega/\Omega_K = 0.2$  pour les solutions de type gravité  $\{k = 0, m = 1\}$  avec  $\omega^{\text{in}} = 10^{-4} \text{ rad s}^{-1}$  correspondant à  $\bar{\nu} = 10.62$  (les lignes continues) et les solutions de type Rossby  $\{k = -2, m = -1\}$  avec  $\omega^{\text{in}} = -5.5 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$  correspondant à  $\bar{\nu} = 6.48$  (les lignes pointillées) dans le cas d’une étoile : (a) en rotation uniforme, (b) en rotation différentielle latitudinale, (c) en rotation différentielle latitudinale et (d) en rotation différentielle générale.

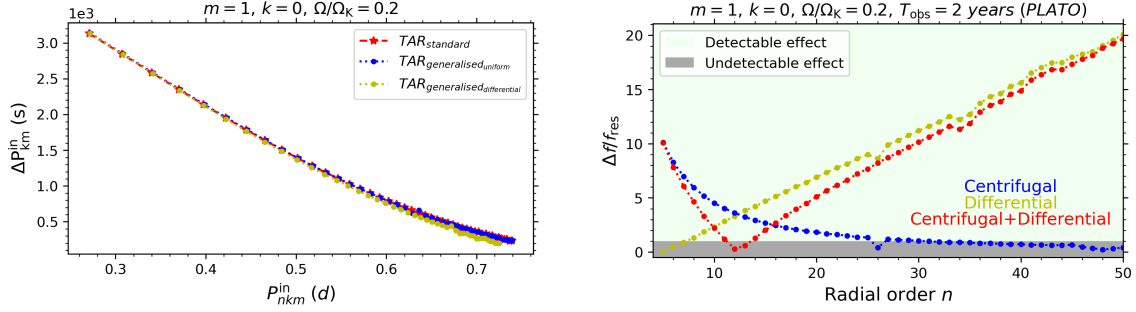
Afin de quantifier l’effet résultant de la déformation centrifuge et de la rotation différentielle, nous procéderons au calcul des différences de fréquence des modes gravito-inertiels avec le formalisme standard et celui dérivé ici. Ensuite, nous évaluerons la possibilité de détecter ces effets à l’aide des observations photométriques spatiales.

### 3.5.4 Détectabilité de l’effet de déformation centrifuge et de la rotation différentielle

Afin de calculer l’espacement des périodes des modes, nous adaptons la méthode développée dans [Henneco et al. \(2021\)](#). Tout d’abord, nous calculons pour chaque ordre radial  $n$  d’un mode donné  $(k, m)$ , les fréquences asymptotiques correspondantes dans le repère inertiel  $\omega_{nk m}^{r m i n}$  en utilisant les équations (3.6) et (3.32). Nous calculons ensuite les périodes asymptotiques dans le repère inertiel ( $P_{nk m}^{\text{in}} = 2\pi/\omega_{nk m}^{\text{in}}$ ) et l’espacement des périodes correspondant, comme le montre la figure 3.9 pour le mode  $\{k = 0, m = 1\}$ . Les périodes représentées ici sont calculées pour des ordres radiaux compris entre  $n = 5$  et  $n = 50$ . Nous constatons une diminution nette de l’espacement des périodes  $\Delta P_{nk m}^{\text{in}}$  causée par la rotation différentielle.

Les effets de la déformation centrifuge et de la rotation différentielle sont modérément significatifs lorsqu’ils sont évalués dans le domaine de validité de la TAR généralisée, néanmoins, les caractéristiques globales du modèle d’espacement des périodes sont conservées. Ces résultats sont en accord avec ceux obtenus par [Ouazzani et al. \(2017\)](#). Les auteurs y ont calculé les modes gravito-inertiels et leur espacement des périodes en utilisant le code d’oscillation 2D ACOR (code adiabatique d’oscillation incluant la rotation) avec des modèles stellaires déformés, qui prennent en compte l’accélération centrifuge.

Pour évaluer la détectabilité de l’effet de la déformation centrifuge et de la rotation différentielle



**FIGURE 3.9 – Gauche :** Espacement des périodes dans le repère inertiel calculé pour le mode  $\{k = 0, m = 1\}$  à  $\Omega/\Omega_K = 20\%$  dans une étoile sphérique (rouge) et une étoile déformée (bleu) en rotation uniforme et dans une étoile déformée en rotation différentielle (jaune). **Droite :** Diagramme de détectabilité de l’effet centrifuge (points bleus), l’effet de la rotation différentielle (points jaunes) et la somme des deux (points rouges) en fonction de l’ordre radial  $n$  pour le même mode basé sur la fréquence de résolution de PLATO.

avec des observations photométriques telle que celles des missions *Kepler*, TESS CVZ<sup>1</sup> et PLATO dans le futur, nous calculons d’abord les différences de fréquence  $\Delta f_{centrifuge}$  entre les fréquences asymptotiques calculées dans la TAR sphérique et celles calculées dans la TAR centrifuge avec une rotation uniforme et avec une rotation différentielle. Ensuite, en comparant les différences de fréquence obtenues avec la fréquence de résolution ( $f_{res} = 1/T_{obs}$ ) des futures courbes de lumière de PLATO couvrant des temps d’observation quasi-continus de  $T_{obs} = 2$  ans, nous pouvons déduire les ordres radiaux  $n$  pour lesquels les différences de fréquence devraient être théoriquement détectables. Sur la figure 3.9, nous présentons ces résultats pour le mode  $\{k = 0, m = 1\}$ . Nous montrons la détectabilité de l’effet centrifuge, de l’effet de rotation différentielle et des deux effets pris en compte simultanément. L’effet centrifuge n’est pas significatif lorsqu’il est évalué dans le domaine de validité de la TAR généralisée, ce qui est conforme aux résultats de [Ouazzani et al. \(2017\)](#) et de [Henneco et al. \(2021\)](#). Contrairement à l’effet centrifuge, nous voyons clairement que l’effet de la rotation différentielle pour ces modes est, en théorie, largement détectable pour tous les ordres radiaux supérieurs à 15 en utilisant les observations de PLATO. La détectabilité reste présente lorsqu’on utilise les courbes de lumière de *Kepler*, étant donné que son temps d’observation est deux fois plus long que celui de PLATO. Cependant, la détectabilité devient légèrement limitée ( $\Delta f_{centrifuge}/f_{res} \approx 1$ ) avec TESS CVZ en raison de son temps d’observation de seulement 351 jours. Nos résultats de détectabilité sont des comparaisons formelles dans le sens où les effets astrophysiques non calibrés se produisant dans les modèles stellaires (par exemple, la présence de mélange rotationnel et d’effets de diffusion atomique) impliquent généralement des incertitudes au moins aussi importantes dans la prédiction des valeurs d’espacement de période que les différences montrées dans ces figures. Pour cette raison, nos résultats théoriques dans le présent travail offrent un résultat clé en termes de fiabilité des futures analyses astérosismiques des pulsateurs observés.

1. Transiting Exoplanet Survey Satellite Continuous Viewing Zone.



## 3.6 Conclusions et perspectives

Nous avons développé une nouvelle généralisation de la TAR dans le cas déformé en différentielle rapide. Avec ce nouveau formalisme, nous pouvons étudier les ondes gravito-inertielles dans les zones fortement stablement stratifiées des objets déformés. Nous avons appliqué ce formalisme général à une étoile de masse intermédiaire en rotation rapide et différentielle en utilisant le modèle 2D ESTER pour étudier l'impact et la détectabilité de l'effet de la déformation centrifuge et de la rotation différentielle sur les ondes gravito-inertielles. Nous avons trouvé que la signature de l'effet de la rotation différentielle sur les fréquences des modes gravito-inertielles est plus prononcée que celle de l'effet centrifuge pour  $\Omega/\Omega_K = 20\%$  (la limite de validité de la TAR centrifuge). En revanche, les deux effets restent théoriquement détectables en exploitant les observations provenant des missions *Kepler* et PLATO dans le futur.

Cette nouvelle généralisation du TAR peut également être utilisée pour étudier la dissipation de marée induite par les ondes gravito-inertielles à basse fréquence dans des étoiles et des planètes déformées en rotation rapide (Braviner & Ogilvie 2014), ainsi que le transport du moment cinétique avec un formalisme directement implémentable dans le code ESTER. De plus, nous pouvons appliquer notre formalisme à différentes grilles de modèles ESTER, puis comparer les résultats obtenus avec des calculs directs utilisant les codes d'oscillation 2D TOP (Toulouse Oscillation Program, Reese et al. 2021) et ACOR (adiabatic code of oscillation including rotation, Ouazzani et al. 2017).

La prochaine étape consistera à inclure le champ magnétique de manière non perturbative dans le formalisme TAR généralisé. Jusqu'à présent, les études de Prat et al. (2019, 2020) et Van Beeck et al. (2020) se sont concentrées sur le cas où les champs magnétiques étaient suffisamment faibles pour être traités de manière perturbative, afin d'étudier les effets d'un champ magnétique sur les paramètres sismiques des modes gravito-inertielles, qui deviennent des modes magnéto-gravito-inertiels (Mathis & de Brye 2011, 2012). Nous dérivons alors dans le chapitre suivant une nouvelle généralisation de la TAR standard en prenant en compte un champ magnétique toroïdal général de manière non-perturbative afin d'étudier les ondes magnéto-gravito-inertielles dans les étoiles magnétisées en rotation différentielle.

### Articles publiés :

- « The traditional approximation of rotation for rapidly rotating stars and planets : I. The impact of strong deformation » par H. Dhouib, V. Prat, T. Van Reeth, et S. Mathis, *A&A* 652, A154 (2021)
- « The traditional approximation of rotation for rapidly rotating stars and planets : II. Deformation and differential rotation » par H. Dhouib, V. Prat, T. Van Reeth, et S. Mathis, *A&A* 656, A122 (2021)

# The traditional approximation of rotation for rapidly rotating stars and planets

## I. The impact of strong deformation

H. Dhouib<sup>1</sup>, V. Prat<sup>1</sup>, T. Van Reeth<sup>2</sup>, and S. Mathis<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Département d'Astrophysique-AIM, CEA/DRF/IRFU, CNRS/INSU, Université Paris-Saclay, Université Paris-Diderot, Universitéde Paris, 91191 Gif-sur-Yvette, France  
e-mail: hachem.dhouib@cea.fr

<sup>2</sup> Institute of Astronomy, KU Leuven, Celestijnenlaan 200D, 3001 Leuven, Belgium

Received 19 February 2021 / Accepted 17 May 2021

### ABSTRACT

**Context.** The traditional approximation of rotation (TAR) is a treatment of the hydrodynamic equations of rotating and stably stratified fluids in which the action of the Coriolis acceleration along the direction of the entropy and chemical stratifications is neglected because it is weak in comparison with the buoyancy Archimedean force. This leads to the neglect of the horizontal projection of the rotation vector in the equations for the dynamics of gravito-inertial waves (GIWs). The dependent variables in those equations then become separable into radial and horizontal parts as in the non-rotating case. The TAR is built on the assumptions that the star is spherical (i.e., its centrifugal deformation is neglected) and uniformly rotating. However, it has recently been generalised to include the effects of a moderate centrifugal deformation using a perturbative approach.

**Aims.** We study the feasibility of carrying out a new generalisation to account for the centrifugal acceleration in the case of strongly deformed uniformly and rapidly rotating stars (and planets), and to identify the validity domain of this approximation.

**Methods.** We built a complete formalism analytically that allows the study of the dynamics of GIWs in spheroidal coordinates which take the flattening of uniformly and rapidly rotating stars into account by assuming the hierarchies of frequencies adopted within the TAR in the spherical case.

**Results.** Using 2D stellar models, we determine the validity domain of the generalised TAR as a function of the rotation rate of the star normalised by its critical angular velocity and its pseudo-radius. Assuming the anelastic and the two-dimensional Jeffreys-Wentzel-Kramers-Brillouin approximations, we derive a generalised Laplace tidal equation for the horizontal eigenfunctions of the GIWs and their asymptotic wave periods, which can be used to probe the structure and dynamics of rotating deformed stars with asteroseismology. The generalised TAR where the centrifugal deformation of a star (or planet) is taken into account non-perturbatively allows us to identify, within the framework of 2D Evolution STEllaire en Rotation models, the validity domain of this approximation which is reduced by increasing the rate of rotation. We can affirm with a level of confidence of 90% that the TAR remains applicable in all the space domain of deformed stars rotating at a rotation rate lower than 20% of the critical rotation rate.

**Conclusions.** A new generalisation of the TAR, which takes the centrifugal acceleration into account in a non-perturbative way, is derived. This generalisation allows us to study the detectability and the signature of the centrifugal effects on GIWs in rapidly rotating deformed stars (and planets). We found that the effects of the centrifugal acceleration in rapidly rotating early-type stars on GIWs are theoretically detectable in modern space photometry using observations from *Kepler*. We found also, by comparing the period spacing pattern computed with the standard and the generalised TAR, that the centrifugal acceleration affects the period spacing by increasing its values for low radial orders and by decreasing them slightly for high radial orders.

**Key words.** hydrodynamics – waves – stars: rotation – stars: oscillations – methods: analytical – methods: numerical

## 1. Introduction

The traditional approximation of rotation (TAR) was introduced for the first time in geophysics by Eckart (1960) to study the dynamics of the shallow Earth atmosphere and oceans. Then, Berthomieu et al. (1978) used it for the first time in an astrophysical context. Afterwards, Bildsten et al. (1996) and Lee & Saio (1997) applied it to stellar pulsations to study low-frequency nonradial oscillations in rotating stars, more precisely the gravito-inertial waves (GIWs). These waves (often called  $g$  modes) propagate under the combined action of the buoyancy force and the Coriolis acceleration. A subclass of these waves are the Rossby waves (often called  $r$  modes) whose dynamics are driven by the conservation of the vorticity of the fluid.

The TAR is applicable for low-frequency waves propagating in strongly stratified zones. In this case, a hierarchy of frequencies is verified. Namely, the buoyancy force is stronger than the Coriolis force (i.e.,  $2\Omega \ll N$ , where  $\Omega$  is the angular velocity and  $N$  is the Brunt-Väisälä frequency) in the direction of stable entropy or chemical stratification and the Brunt-Väisälä frequency is larger than the frequency of the waves in the co-rotating frame  $\omega$  (i.e.,  $\omega \ll N$ ). Considering these two assumptions, we can neglect the horizontal projection of the rotation vector  $\Omega_H = \Omega \sin \theta$  in the linearised hydrodynamic equations, where  $\theta$  is the colatitude. Then, the vertical component of the Coriolis acceleration can be neglected and the wave velocity is almost horizontal within the description of the dynamics of GIWs. In this framework, the linearised hydrodynamic

system, which is coupled in the general case (Dintrans et al. 1999; Dintrans & Rieutord 2000), becomes separable as in the non-rotating case and can be rewritten in the form of the Laplace tidal equation (Laplace 1799).

When the GIWs are observed with high-precision photometry, they allow us to study the internal structure and dynamics of stars with asteroseismology (Aerts et al. 2010; Aerts 2021). GIWs also trigger transport of angular momentum and mixing inside the stars, modifying their evolution (e.g., Mathis et al. 2008; Mathis 2009; Rogers et al. 2013; Rogers 2015; Aerts et al. 2019; Neiner et al. 2020). In this context, GIWs which propagate in stably stratified stellar radiation regions are of major interest. First, they are detected and analysed with asteroseismology in intermediate- and high-mass stars (e.g., Neiner et al. 2012; Van Reeth et al. 2015) allowing the characterisation of the internal stellar rotation (Van Reeth et al. 2016, 2018). In addition, GIWs are one of the candidates to explain the small rotation contrast observed between the stellar surface and core (Mathis 2009; Rogers 2015; Aerts et al. 2019). So, the TAR and its flexibility allow us to derive powerful seismic diagnostics, based on the period spacings between consecutive radial order  $g$  modes in uniformly and differentially rotating spherical stars (Bouabid et al. 2013; Ouazzani et al. 2017; Van Reeth et al. 2018). This enables us to determine the properties of the chemical stratification and the rotation rate near the convective core of early-type stars, which constrain our modelling of stellar structure, evolution and internal angular momentum transport (e.g., Pedersen et al. 2018; Aerts et al. 2018, 2019; Ouazzani et al. 2019).

In addition to the two conditions described above, three other assumptions are made when applying the TAR. First, the rotation is assumed to be uniform. Second, the star is assumed to be spherical, in other words, the centrifugal deformation of the star is neglected (i.e.,  $\Omega \ll \Omega_K \equiv \sqrt{GM/R^3}$ , where  $\Omega_K$  is the Keplerian critical (breakup) angular velocity, and  $G$ ,  $M$ , and  $R$  are the universal constant of gravity, the mass of the star, and the stellar radius, respectively). Third, the Cowling approximation (Cowling 1941) is assumed where the fluctuations of the gravitational potential caused by the redistribution of mass by waves motion is neglected.

In addition, the anelastic approximation (Spiegel & Veronis 1960) is assumed where the high-frequency acoustic modes can be filtered out. Finally, for asymptotic low frequency modes which are rapidly oscillating in the vertical direction, we can assume the Jeffreys, Wentzel, Kramers, Brillouin (JWKB) approximation (e.g., Fröman & Fröman 1965).

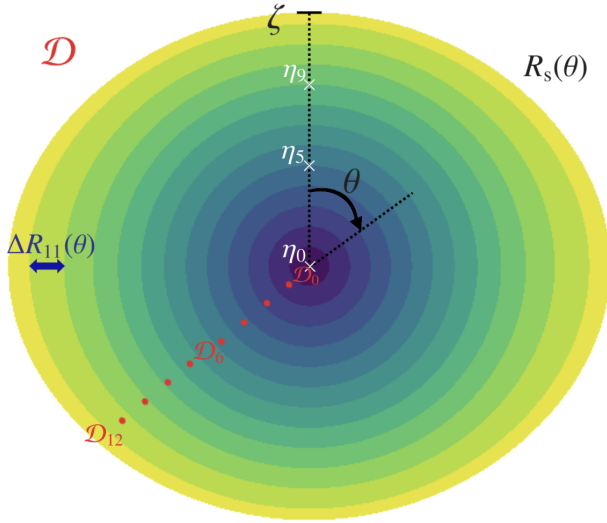
The assumption of uniform rotation was abandoned by Ogilvie & Lin (2004) and Mathis (2009), who took into account the effects of general differential rotation (both in radius and latitude in a spherical star) on low-frequency GIWs within the framework of the TAR. The results of this new formalism have been successfully applied in Van Reeth et al. (2018) to derive the variation of the asymptotic period spacing in the case of a weak radial differential rotation and evaluate the sensitivity of GIWs to the effect of differential rotation.

The assumption of spherical symmetry was partially abandoned by Mathis & Prat (2019), who generalised the TAR for slightly deformed moderately rotating stars by considering the effects of the centrifugal acceleration using a perturbative approach. First, they derived the centrifugal perturbation of the spherical hydrostatic balance by determining the deformation of an isobar in the case of moderate uniform rotation. Afterwards, using this deformation they defined a mapping between the

spherical coordinates system and a spheroidal coordinates system which takes into account this weak centrifugal perturbation of the star. Then, by keeping only first-order terms in the deformation, they re-derived the linearised hydrodynamic equations (Saio 1981; Lee & Baraffe 1995) and deduced the perturbed Laplace tidal equation within this new coordinates system. Then, they carried out a numerical exploration of the eigenvalues and horizontal eigenfunctions (the so-called Hough functions; Hough 1898) of the perturbed Laplace tidal equation. Finally, they derived the asymptotic expression for the frequencies of GIWs, including the effect of the centrifugal acceleration. This perturbative framework was then optimised for practical intense seismic forward modelling (Aerts 2021) using one-dimensional stellar structure models by Henneco et al. (2021).

In this work, we consider the general case of rapidly and uniformly rotating stars and planets which will generalise for the first time the previous work of Lee & Saio (1997) and Mathis & Prat (2019). The shape of such objects becomes a strongly deformed spheroid because of the action of the centrifugal acceleration which cannot be modelled as a perturbation in this case. We study if the TAR could be generalised to include the effects of this deformation for any stellar (planetary) rotation including those close to their break-up velocity. The derived formalism could have several key applications. For instance, it could be used to build new seismic diagnostic and to study angular momentum transport (e.g., Lee & Saio 1993; Mathis et al. 2008; Mathis 2009; Lee et al. 2014) and tidal dissipation (e.g., Ogilvie & Lin 2004, 2007; Braviner & Ogilvie 2014) induced by low-frequency GIWs in deformed stars and planets.

To do so, we first introduce in Sect. 2 a new spheroidal coordinate system which follows the shape of a deformed star for any rotation. It is based on the work by Bonazzola et al. (1998) and was first used by Rieutord et al. (2005) to develop rotating polytropic models. Then Lignières et al. (2006) employed it to study acoustic oscillations in strongly deformed rotating stars. Afterwards, Reese et al. (2006, 2009) and Ouazzani et al. (2012) make use of it to develop the two-dimensional oscillation program (TOP) and the adiabatic code of oscillation including rotation (ACOR), respectively. They compute non-radial pulsations of rotating stars. Finally, Espinosa Lara & Rieutord (2013) utilised it to develop the Evolution STEllaire en Rotation (ESTER) code which computes the structure of an early-type star including its differential rotation and the associated meridional circulation. Here, we first consider the case of uniform rotation to distinguish the effects of the deformation from those of differential rotation associated to the centrifugal and Coriolis accelerations, respectively. From there, we derive the system of linearised hydrodynamic equations in spheroidal coordinates. In Sect. 3, we apply the TAR in this new coordinate system by adopting the adequate assumptions. In Sect. 4, we can then rewrite the oscillation equations in the form of a new generalised Laplace tidal equation (GLTE) and deduce the asymptotic frequencies of low-frequency GIWs. In Sect. 5, we identify the validity domain of the TAR when using ESTER models and carry out a numerical exploration of the eigenvalues and the eigenfunctions of the GLTE. In Sect. 6, we quantify the centrifugal deformation effect of the star on the asymptotic period spacing pattern and we discuss its detectability. In Sect. 7, we verify the validity of the hierarchy of the terms in the linearised hydrodynamics equations imposed by the TAR in deformed stars. Finally, we discuss and summarise our work and results in Sect. 8.



**Fig. 1.** Spheroidal coordinate system with  $n = 13$  subdomains used to compute the equilibrium model of a star rotating at 60% of its break-up velocity corresponding to the case of the  $3M_{\odot}$  ESTER model (with the central fraction in Hydrogen  $X_c = 0.7$ ) studied in Sect. 5.  $\zeta$  and  $\theta$  are the pseudo-radius and the colatitude, respectively.  $\eta_i$  and  $\Delta R_i(\theta)$  are defined in our mapping (Eq. (1)).

## 2. Hydrodynamic equations in uniformly rotating deformed stars and planets

### 2.1. Spheroidal geometry

Because of the flattened shape of a rapidly rotating star, we use the spheroidal coordinate system  $(\zeta, \theta, \varphi)$  proposed by Bonazzola et al. (1998), where  $\zeta$  is the radial coordinate (the pseudo-radius),  $\theta$  the colatitude and  $\varphi$  the azimuth. It was designed not only to fit the shape of the star at the surface but also to get closer to the spherical shape at the centre as illustrated in Fig. 1. Following Rieutord et al. (2013), this new coordinate system can be linked to the usual spherical one  $(r, \theta, \varphi)$  via the following mapping

$$r(\zeta, \theta) = a_i \xi \Delta \eta_i + R_i(\theta) + A_i(\xi) (\Delta R_i(\theta) - a_i \Delta \eta_i), \text{ for } \zeta \in [\eta_i, \eta_{i+1}], \quad (1)$$

where we split the spheroidal domain  $\mathcal{D}$  in  $n$  subdomains  $\mathcal{D}_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} \in [R_i(\theta), R_{i+1}(\theta)]$  where  $R_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}(\theta)$  are series of functions, such that  $R_n(\theta) = R_s(\theta)$  is the outer boundary and  $R_0(\theta) = 0$  is the centre. Additionally,  $\eta_i = R_i(\theta = 0)$  are the polar radii of the interfaces between the subdomains,  $\Delta \eta_i = \eta_{i+1} - \eta_i$ ,  $\Delta R_i(\theta) = R_{i+1}(\theta) - R_i(\theta)$  and  $\xi = (\zeta - \eta_i) / \Delta \eta_i$ . The functions  $A_{i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket}(\xi) = -2\xi^3 + 3\xi^2$  and  $A_0(\xi) = -1.5\xi^5 + 2.5\xi^3$  and the constants  $a_i$  (in practice  $a_i = 1$ ) are chosen to satisfy the boundary conditions between the different subdomains so that the mapping is continuous and derivable. The other coordinates ( $\theta$  and  $\varphi$ ) remain unchanged. Since we choose the polar radius as the unit length  $R_s(\theta = 0) = 1$ ,  $\zeta = 1$  coincides with the surface (i.e.,  $r(\zeta = 1, \theta) = R_s(\theta)$ ), while  $r = 0$  is obtained at the centre when  $\zeta = 0$  (i.e.,  $r(\zeta = 0, \theta) = 0$ ). Along the rotation axis ( $\theta = 0$ ), the deformed radial coordinate  $\zeta$  is the distance from the centre normalised by the polar radius and when the centrifugal deformation is zero,  $\zeta$  is equivalent to the radius, hence the name pseudo-radius.

Once the spheroidal coordinate system is established, it is mandatory to specify the corresponding basis. To do so, we

define the spheroidal basis  $(\mathbf{a}_{\zeta}, \mathbf{a}_{\theta}, \mathbf{a}_{\varphi})$  from the natural covariant basis  $(\mathbf{E}_{\zeta}, \mathbf{E}_{\theta}, \mathbf{E}_{\varphi})$  defined as  $\mathbf{E}_i = \partial_i(r\mathbf{e}_r)$

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{\zeta} = \frac{\zeta^2}{r^2 r_{\zeta}} \mathbf{E}_{\zeta} = \frac{\zeta^2}{r^2} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{a}_{\theta} = \frac{\zeta}{r^2 r_{\zeta}} \mathbf{E}_{\theta} = \frac{\zeta}{r^2 r_{\zeta}} (r_{\theta} \mathbf{e}_r + r \mathbf{e}_{\theta}) \\ \mathbf{a}_{\varphi} = \frac{\zeta}{r^2 r_{\zeta} \sin \theta} \mathbf{E}_{\varphi} = \frac{\zeta}{r r_{\zeta}} \mathbf{e}_{\varphi} \end{cases}, \quad (2)$$

where  $r_{\zeta} \equiv \partial_{\zeta} r$ ,  $r_{\theta} \equiv \partial_{\theta} r$  and  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{\theta}, \mathbf{e}_{\varphi})$  is the usual spherical unit-vector basis. This basis has the advantage of being reduced to the usual spherical unit-vector basis when we approach the spherical geometry ( $R_s(\theta)$  tends to the constant function 1).

### 2.2. Linearised hydrodynamic equations in spheroidal coordinates

Once the geometry is fixed, we can derive the complete adiabatic inviscid system of linearised equations to treat the wave dynamics in a uniformly rotating, strongly deformed star or planet. First, the linearised momentum equation for an inviscid fluid is written as (we refer the reader to Appendix A.1 for a detailed derivation)

$$\begin{aligned} (\partial_t + \Omega \partial_{\varphi}) \left[ \frac{\zeta^2 r_{\zeta}}{r^2} v^{\zeta} + \frac{\zeta r_{\theta}}{r^2} v^{\theta} \right] \\ = 2\Omega \frac{\zeta \sin \theta}{r} v^{\varphi} - \frac{1}{\rho_0} \partial_{\zeta} P' + \frac{\rho'}{\rho_0^2} \partial_{\zeta} P_0 - \partial_{\zeta} \Phi', \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (\partial_t + \Omega \partial_{\varphi}) \left[ \frac{\zeta^2 r_{\theta}}{r^2} v^{\zeta} + \frac{\zeta (r^2 + r_{\theta}^2)}{r^2 r_{\zeta}} v^{\theta} \right] \\ = 2\Omega \frac{\zeta (r_{\theta} \sin \theta + r \cos \theta)}{r r_{\zeta}} v^{\varphi} - \frac{1}{\rho_0} \partial_{\theta} P' + \frac{\rho'}{\rho_0^2} \partial_{\theta} P_0 - \partial_{\theta} \Phi', \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\zeta}{r_{\zeta}} (\partial_t + \Omega \partial_{\varphi}) v^{\varphi} = -2\Omega \frac{\zeta^2 \sin \theta}{r} v^{\zeta} \\ - 2\Omega \frac{\zeta (r_{\theta} \sin \theta + r \cos \theta)}{r r_{\zeta}} v^{\theta} - \frac{1}{\rho_0 \sin \theta} \partial_{\varphi} P' - \frac{1}{\sin \theta} \partial_{\varphi} \Phi', \end{aligned} \quad (5)$$

where  $v^{\zeta}$ ,  $v^{\theta}$  and  $v^{\varphi}$  are the contravariant components of the velocity field  $\mathbf{v} = v^i \mathbf{a}_i$  and  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega (\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_{\theta})$  is the uniform angular velocity.  $\rho$ ,  $\Phi$  and  $P$  are the fluid density, gravitational potential and pressure, respectively. Each of these scalar quantities has been expanded as

$$X(\zeta, \theta, \varphi, t) = X_0(\zeta, \theta) + X'(\zeta, \theta, \varphi, t),$$

where  $X_0$  is the hydrostatic component of  $X$  and  $X'$  the wave's associated linear fluctuation. When assuming the Cowling (1941) approximation, the fluctuation of the gravitational potential is neglected ( $\Phi' = 0$ ).

Subsequently, the linearised continuity equation is obtained (we refer the reader to Appendix A.2 for a detailed derivation)

$$\begin{aligned} (\partial_t + \Omega \partial_{\varphi}) \rho' = - \frac{\zeta^2 \partial_{\zeta} \rho_0}{r^2 r_{\zeta}} v^{\zeta} - \frac{\zeta \partial_{\theta} \rho_0}{r^2 r_{\zeta}} v^{\theta} \\ - \frac{\zeta^2 \rho_0}{r^2 r_{\zeta}} \left[ \frac{\partial_{\zeta} (\zeta^2 v^{\zeta})}{\zeta^2} + \frac{\partial_{\theta} (\sin \theta v^{\theta})}{\zeta \sin \theta} + \frac{\partial_{\varphi} v^{\varphi}}{\zeta \sin \theta} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Then, the linearised energy equation in the adiabatic limit is derived (we focus in this work on adiabatic oscillations as in studies of the TAR in spherical stars)

$$(\partial_t + \Omega \partial_\varphi) \left( \frac{1}{\Gamma_1} \frac{P'}{P_0} - \frac{\rho'}{\rho_0} \right) = \frac{N^2}{\|\mathbf{g}_{\text{eff}}\|^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}_{\text{eff}}, \quad (7)$$

where  $\Gamma_1 = (\partial \ln P_0 / \partial \ln \rho_0)_S$  ( $S$  being the macroscopic entropy) is the adiabatic exponent,  $\mathbf{g}_{\text{eff}} = -\nabla \Phi_0 + \frac{1}{2} \Omega^2 \nabla(r^2 \sin^2 \theta) = \nabla P_0 / \rho_0$  is the background effective gravity which includes the centrifugal acceleration and  $N^2$  is the squared Brunt–Väisälä frequency given by

$$N^2(\zeta, \theta) = \mathbf{g}_{\text{eff}} \cdot \left( -\frac{1}{\Gamma_1} \frac{\nabla P_0}{P_0} + \frac{\nabla \rho_0}{\rho_0} \right). \quad (8)$$

Finally, since in this work we are interested in studying standing eigenmodes of oscillation we consider a discrete spectrum of eigenfrequencies rather than an integral over a continuous spectrum. So, we expand the wave's velocity and scalar quantities fluctuations ( $X' \equiv \{\rho', P'\}$ ) on discrete Fourier series both in time and in azimuth

$$\mathbf{v}(\zeta, \theta, \varphi, t) \equiv \sum_{\omega^{\text{in}}, m} \left\{ \mathbf{u}(\zeta, \theta) \exp[i(\omega^{\text{in}} t - m\varphi)] \right\}, \quad (9)$$

$$X'(\zeta, \theta, \varphi, t) \equiv \sum_{\omega^{\text{in}}, m} \left\{ \tilde{X}(\zeta, \theta) \exp[i(\omega^{\text{in}} t - m\varphi)] \right\}, \quad (10)$$

where  $m$  is the azimuthal order ( $m$  is an integer because we are looking for a linear solution of a wave problem whose axisymmetric background depends only on  $\zeta$  and  $\theta$ ) and  $\omega^{\text{in}}$  is the wave eigenfrequency in an inertial reference frame (we don't put an index for the eigenfrequencies in order to make the notations simpler). In a uniformly rotating region, the waves are Doppler shifted due to the rotation. We can define the wave eigenfrequency  $\omega$  in the co-rotating reference frame as

$$\omega = \omega^{\text{in}} - m\Omega. \quad (11)$$

### 3. Generalised TAR

#### 3.1. Approximation on the stratification profile:

$$N^2(\zeta, \theta) \approx N^2(\zeta)$$

To obtain a separable system of equations by applying the TAR, a first necessary condition is that the Brunt–Väisälä frequency  $N^2$  depends mainly on the pseudo-radius  $\zeta$ , that is to say it has a small variation with respect to the colatitude  $\theta$ . This also implies that the hydrostatic pressure  $P_0$  and the hydrostatic density  $\rho_0$  depend mainly on  $\zeta$  so the linearised energy equation simplifies into

$$\frac{1}{\Gamma_1} \frac{\tilde{P}}{P_0} - \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} = \frac{1}{i\omega} \frac{N^2}{g_{\text{eff}}} \frac{\zeta^2}{r^2 r_\zeta} u^\zeta. \quad (12)$$

In order to compute the relative error made by adopting this approximation and to define its validity domain, we compare in Sect. 5.2 an approximate value of  $N^2$  where it depends only on  $\zeta$  to the exact one depending on  $\zeta$  and  $\theta$  by fixing the value of  $\theta$  and varying the angular velocity of the star using two-dimensional ESTER stellar models.

#### 3.2. The TAR with centrifugal acceleration

Using this first approximation, and assuming the same hierarchies of frequencies ( $2\Omega \ll N$  and  $\omega \ll N$ ) and velocity scales ( $|v^\zeta| \ll \{|v^\theta|, |v^\varphi|\}$ ) that in the spherical and in the weakly deformed cases (this will be discussed in details in Sect. 7), we now built the generalised framework for the TAR in the case of a uniformly and rapidly rotating strongly deformed star (planet).

By adopting the approximation  $N^2(\zeta, \theta) \approx N^2(\zeta)$  and the Cowling approximation, we can rewrite the radial momentum Eq. (3) as

$$\begin{aligned} i\omega \left[ \frac{\zeta^2 r_\zeta}{r^2} u^\zeta + \frac{\zeta r_\theta}{r^2} u^\theta \right] \\ = 2\Omega \frac{\zeta \sin \theta}{r} u^\varphi - \partial_\zeta \tilde{W} - \frac{\tilde{P}}{\rho_0^2} \partial_\zeta \rho_0 - \frac{N^2}{i\omega} \frac{\zeta^2}{r^2 r_\zeta} u^\zeta, \end{aligned} \quad (13)$$

where  $\tilde{W} = \tilde{P}/\rho_0$  is the normalised pressure. The propagation of low-frequency GIWs can be studied within the anelastic approximation in which acoustic waves are filtered out (Dintrans & Rieutord 2000; Mathis 2009). Therefore, Eqs. (13) and (12) can be simplified accordingly by neglecting the terms  $(\tilde{P}/\rho_0^2) \partial_\zeta \rho_0$  and  $(1/\Gamma_1) \tilde{P}/P_0$ . Within the TAR, we focus on low-frequency waves (i.e.,  $\omega \ll N$ ) propagating in strongly stratified regions (i.e.,  $2\Omega \ll N$ ). In this case, we can neglect the vertical component of the Coriolis acceleration because it is dominated by the buoyancy force and the vertical wave velocity since  $|v^\zeta| \ll \{|v^\theta|, |v^\varphi|\}$  because of the strong stable stratification. Thus, the radial momentum equation can be simplified into

$$i\omega \partial_\zeta \tilde{W} + N^2 \zeta^2 \mathcal{A} u^\zeta = 0, \quad (14)$$

where

$$\mathcal{A}(\zeta, \theta) = \frac{1}{r^2 r_\zeta}. \quad (15)$$

Subsequently, we examine the latitudinal component of the momentum equation (Eq. (4)), which reduces, for the same reasons, to

$$i\omega \zeta \mathcal{B} u^\theta - 2\Omega \zeta C u^\varphi + \partial_\theta \tilde{W} = 0, \quad (16)$$

where

$$\mathcal{B}(\zeta, \theta) = \frac{r^2 + r_\theta^2}{r^2 r_\zeta}, \quad (17)$$

$$C(\zeta, \theta) = \frac{r_\theta \sin \theta + r \cos \theta}{r r_\zeta}. \quad (18)$$

Finally, the azimuthal component of the momentum equation (Eq. (5)) simplifies onto

$$i\omega \zeta \mathcal{D} u^\varphi + 2\Omega \zeta C u^\theta - \frac{im}{\sin \theta} \tilde{W} = 0, \quad (19)$$

where

$$\mathcal{D}(\zeta, \theta) = \frac{1}{r_\zeta}. \quad (20)$$

We thus obtain a system of equations for strongly deformed rotating stars which has the same mathematical form that in the case of spherically symmetric stars (Lee & Saio 1997) and weakly deformed stars (Mathis & Prat 2019), and where we thus still manage to partially decouple the vertical and horizontal

components of the velocity. By solving the system formed by Eqs. (16) and (19) we can express  $u^\theta$  and  $u^\varphi$  as a function of  $\widetilde{W}$  as follows

$$u^\theta(\zeta, \theta) = i \frac{1}{\omega} \frac{1}{\zeta} \frac{1}{\mathcal{B}(\zeta, \theta)} \left[ \left( 1 + \nu^2 \frac{\mathcal{C}^2(\zeta, \theta)}{\mathcal{E}(\zeta, \theta) \mathcal{B}(\zeta, \theta)} \right) \partial_\theta \widetilde{W} - \frac{m\nu}{\sin \theta} \frac{\mathcal{C}(\zeta, \theta)}{\mathcal{E}(\zeta, \theta)} \widetilde{W} \right], \quad (21)$$

$$u^\varphi(\zeta, \theta) = -\frac{1}{\omega} \frac{1}{\zeta} \frac{1}{\mathcal{E}(\zeta, \theta)} \left[ \nu \frac{\mathcal{C}(\zeta, \theta)}{\mathcal{B}(\zeta, \theta)} \partial_\theta \widetilde{W} - \frac{m}{\sin \theta} \widetilde{W} \right], \quad (22)$$

where we introduce

$$\mathcal{E}(\zeta, \theta) = \mathcal{D}(\zeta, \theta) - \nu^2 \frac{\mathcal{C}^2(\zeta, \theta)}{\mathcal{B}(\zeta, \theta)}, \quad (23)$$

and the spin parameter

$$\nu = \frac{2\Omega}{\omega}. \quad (24)$$

The structure of the new equations that we obtain in the spheroidal case is similar to the one in the usual spherical case (e.g., Lee & Saio 1997; Townsend 2003; Pantillon et al. 2007). The most important difference is that the coefficients  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$  and  $\mathcal{E}$  are function of  $\zeta$  and  $\theta$  through  $r(\zeta, \theta)$  and their derivatives. As this is done in Lee & Saio (1997) and Mathis & Prat (2019), we introduce the reduced latitudinal coordinate  $x = \cos \theta$ , so that Eqs. (21) and (22) transform to

$$\begin{aligned} u^\theta(\zeta, x) &= \mathcal{L}_{vm}^\theta [\widetilde{W}(\zeta, x)] \\ &= -i \frac{1}{\omega} \frac{1}{\zeta} \frac{1}{\mathcal{B}(\zeta, x)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &\quad \left[ (1-x^2) \left( 1 + \nu^2 \frac{\mathcal{C}^2(\zeta, x)}{\mathcal{E}(\zeta, x) \mathcal{B}(\zeta, x)} \right) \partial_x + m\nu \frac{\mathcal{C}(\zeta, x)}{\mathcal{E}(\zeta, x)} \right] \widetilde{W}, \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^\varphi(\zeta, x) &= \mathcal{L}_{vm}^\varphi [\widetilde{W}(\zeta, x)] \\ &= \frac{1}{\omega} \frac{1}{\zeta} \frac{1}{\mathcal{E}(\zeta, x)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[ (1-x^2) \nu \frac{\mathcal{C}(\zeta, x)}{\mathcal{B}(\zeta, x)} \partial_x + m \right] \widetilde{W}. \quad (26) \end{aligned}$$

#### 4. Dynamics of low-frequency gravito-inertial waves

Our goal in this section is to derive the generalised Laplace tidal equation (GLTE) for the normalised pressure  $\widetilde{W}$ , which allows us to compute the frequencies and periods of low-frequency GIWs and to build the corresponding seismic diagnostics following the method by Bouabid et al. (2013), Van Reeth et al. (2018), and Mathis & Prat (2019). Applying the anelastic approximation and the approximation  $N^2(\zeta, \theta) \approx N^2(\zeta)$  in the continuity equation (Eq. (6)) allows us to neglect the terms  $\partial_r \rho'$  and  $\partial_\theta \rho_0$  respectively, so it simplifies into

$$\zeta \partial_\zeta \rho_0 u^\zeta + \rho_0 \left[ \frac{\partial_\zeta (\zeta^2 u^\zeta)}{\zeta} + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta u^\theta) - \frac{im}{\sin \theta} u^\varphi \right] = 0. \quad (27)$$

#### 4.1. JWKB approximation

Assuming that  $\omega \ll N$ , each scalar field and each component of  $\mathbf{u}$  can be expanded using the two-dimensional Jeffreys-Wentzel-Kramers-Brillouin (JWKB) approximation which was introduced for strongly stratified differentially rotating fluids by Mathis (2009). In this case, the vertical wave number  $k_V$  ( $\equiv k_\zeta$ ) is assumed to be very large, and the associated wavelength is thus very small. Therefore, the spatial variation of the wave in the pseudo-radial direction is very fast compared to that of the hydrostatic background given by  $\rho_0$ ,  $P_0$  and  $g_{\text{eff}}$ . So the spatial structure of the waves can be described by the product of a rapidly oscillating plane-like wave function in the pseudo-radial direction multiplied by a bi-dimensional slowly varying envelope:

$$\widetilde{W}(\zeta, \theta) = \sum_k \left\{ w_{vkm}(\zeta, \theta) \frac{A_{vkm}}{k_{V,vkm}^{1/2}} \exp \left[ i \int^\zeta k_{V,vkm} d\zeta \right] \right\}, \quad (28)$$

$$u^j(\zeta, \theta) = \sum_k \left\{ \hat{u}_{vkm}^j(\zeta, \theta) \frac{A_{vkm}}{k_{V,vkm}^{1/2}} \exp \left[ i \int^\zeta k_{V,vkm} d\zeta \right] \right\}, \quad (29)$$

with  $j \equiv \{\zeta, \theta, \varphi\}$ ,  $k$  is the index of a latitudinal eigenmode (cf. Sect. 4.3) and  $A_{vkm}$  is the amplitude of the wave. Substituting the expansion given in Eqs. (28) and (29) into Eqs. (14), (25) and (26), the final pseudo-radial, latitudinal and azimuthal components of the velocity are obtained:

$$\hat{u}_{vkm}^\zeta(\zeta, x) = \frac{k_{V,vkm}(\zeta)}{N^2(\zeta)} \frac{\omega}{\zeta^2 \mathcal{A}(\zeta, x)} w_{vkm}(\zeta, x), \quad (30)$$

$$\hat{u}_{vkm}^\theta(\zeta, x) = \mathcal{L}_{vm}^\theta [w_{vkm}(\zeta, x)], \quad (31)$$

$$\hat{u}_{vkm}^\varphi(\zeta, x) = \mathcal{L}_{vm}^\varphi [w_{vkm}(\zeta, x)]. \quad (32)$$

#### 4.2. Approximation: $\mathcal{A}(\zeta, \theta) \approx \mathcal{A}(\zeta)$

To be able to derive a generalised Laplace tidal equation as in the case of slightly deformed spheres (Mathis & Prat 2019) and to introduce its horizontal eigenvalues  $\Lambda_{vkm}$ , which should depend only on  $\zeta$ , we have to do a partial separation between the pseudo-radial and latitudinal variables in the pseudo-radial component of the velocity  $\hat{u}^\zeta$ . In other words, we have to write Eq. (30) as the product of a function which depends only on  $\zeta$  and the normalised pressure  $w_{vkm}$ . To do so, we have to assume that the coefficient  $\mathcal{A}(\zeta, \theta)$  depends mainly on  $\zeta$ . To evaluate the relative error made by adopting this approximation and to define its validity domain, we compare in Sect. 5.2 an approximate value of  $\mathcal{A}$  where it depends only on  $\zeta$  to the exact one depending on  $\zeta$  and  $\theta$  by fixing the value of  $\theta$  and varying the angular velocity of the star using two-dimensional ESTER stellar models.

#### 4.3. Generalised Laplace tidal equation (GLTE)

Substituting the radial component of the velocity (Eq. (30)) into the continuity equation (Eq. (27)) we get:

$$\frac{\omega_{km}^2 k_{V,vkm}^2}{\mathcal{A} N^2} w_{vkm} + \omega_{km} \zeta \underbrace{\left( i \partial_x (\sqrt{1-x^2} \hat{u}^\theta) - \frac{m}{\sqrt{1-x^2}} \hat{u}^\varphi \right)}_{=\mathcal{L}_m[w_{vkm}]} = 0, \quad (33)$$

where the JWKB approximation allows us to neglect  $\zeta \partial_\zeta \rho_0 / \rho_0 u^\zeta$  and  $2u^\zeta$  in front of the dominant term  $\zeta \partial_\zeta u^\zeta$ . Using Eqs. (31) and



**Table 1.** Terms involved in the derivation of the GLTE in the general case of spheroidal geometry and in the particular case of spherical geometry (we refer the reader to Appendix B for a visual presentation of these terms).

Terms	Spheroidal geometry	Spherical geometry
$\mathcal{A}$	$\frac{1}{r^2 r_\zeta}$	$\frac{1}{\zeta^2}$
$\mathcal{B}$	$\frac{r^2 + (1-x^2)r_x^2}{r^2 r_\zeta}$	1
$\mathcal{C}$	$\frac{-(1-x^2)r_x + rx}{r r_\zeta}$	$x$
$\mathcal{D}$	$\frac{1}{r_\zeta}$	1
$\mathcal{E}$	$\mathcal{D} - \nu^2 \frac{\mathcal{C}^2}{\mathcal{B}} = \frac{1}{r_\zeta} - \nu^2 \frac{(-(1-x^2)r_x + rx)^2}{r^2 + (1-x^2)r_x^2}$	$1 - \nu^2 x^2$
$\partial_x \mathcal{B}$	$\frac{2rr_x - 2xr_x^2 + 2(1-x^2)r_x r_{xx} - \mathcal{B}(2rr_x r_\zeta + r^2 r_{\zeta x})}{r^2 r_\zeta}$	0
$\partial_x \mathcal{C}$	$\frac{2xr_x - (1-x^2)r_{xx} + r + xr_x - \mathcal{C}(r_x r_\zeta + r r_{\zeta x})}{r r_\zeta}$	1
$\partial_x \mathcal{D}$	$-\mathcal{D}^2 r_{\zeta x}$	0
$\partial_x \left( \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{E}\mathcal{B}} \right)$	$\frac{\partial_x \mathcal{C} (\mathcal{D}\mathcal{B} - \nu^2 r_\zeta \mathcal{C}^2) - \mathcal{C} (\mathcal{B} \partial_x \mathcal{D} + \mathcal{D} \partial_x \mathcal{B} - \nu^2 r_{\zeta x} \mathcal{C}^2 - 2\nu^2 r_\zeta \mathcal{C} \partial_x \mathcal{C})}{(\mathcal{D}\mathcal{B} - \nu^2 r_\zeta \mathcal{C}^2)^2}$	$\frac{1 + \nu^2 x^2}{(1 - \nu^2 x^2)^2}$

**Notes.**  $r_{\zeta x}$  and  $r_{xx}$  denote  $\partial_{\zeta x}^2 r$  and  $\partial_{xx}^2 r$ , respectively and  $f$  is a function of  $x$  given by the stellar model.

(32), we obtain the GLTE for the normalised pressure  $w_{vkm}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{vm} [w_{vkm}] &= \partial_x \left[ \frac{1}{\mathcal{B}} \left( 1 + \frac{\nu^2 \mathcal{C}^2}{\mathcal{E}\mathcal{B}} \right) (1-x^2) \partial_x w_{vkm} \right] \\ &+ \left[ m\nu \partial_x \left( \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{E}\mathcal{B}} \right) - \frac{m^2}{\mathcal{E}(1-x^2)} \right] w_{vkm} \\ &= -\Lambda_{vkm}(\zeta) w_{vkm}. \end{aligned} \quad (34)$$

When the centrifugal acceleration is taken into account, the eigenvalues  $\Lambda_{vkm}$  and the generalised Hough functions (eigenfunctions)  $w_{vkm}$  of the GLTE vary with the pseudo-radius  $\zeta$ . We choose to define our latitudinal ordering number  $k$  to enumerate, for each  $(\nu, m)$ , the infinite set of solutions as in Lee & Saio (1997) and Mathis & Prat (2019) by considering the eigenvalues and eigenfunctions at the centre where they are not affected by the centrifugal acceleration since our mapping (Eq. (1)) is such that  $r(\zeta \rightarrow 0, \theta) \rightarrow 0$ .

We can check the validity of our model analytically by calculating the coefficients of the GLTE (Eq. (34)) in the spherical case (cf. Table 1) and by substituting these values into the GLTE. We then recover the standard Laplace tidal equation (SLTE) of Lee & Saio (1997):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{vm}^{\text{stand.}} [w_{vkm}^{\text{stand.}}] &= \partial_x \left[ \frac{1-x^2}{1-\nu^2 x^2} \partial_x w_{vkm}^{\text{stand.}} \right] \\ &+ \left[ m\nu \frac{1+\nu^2 x^2}{(1-\nu^2 x^2)^2} - \frac{m^2}{(1-x^2)(1-\nu^2 x^2)} \right] w_{vkm}^{\text{stand.}} \\ &= -\Lambda_{vkm}^{\text{stand.}} w_{vkm}^{\text{stand.}}. \end{aligned} \quad (35)$$

In this case, the eigenvalues  $\Lambda_{vkm}^{\text{stand.}}$  are independent of the pseudo-radius  $\zeta$ . We note that at the limit  $\nu = 0$ , which corresponds to the non-rotating case, the SLTE reduces to the differential equation for the associated Legendre polynomials  $P_{\ell, m}$  of

degree  $\ell$  and order  $m$  with  $\Lambda_{0km}^{\text{stand.}} = \ell(\ell+1)$  and  $w_{0km}(x) = a_{\ell, m} P_{\ell, m}(x)$  where  $\ell = |m| + k$  and

$$a_{\ell, m} = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}},$$

is the normalisation coefficient.

In our work, we solve for each spheroid only one linear ordinary differential equation (the generalised Laplace tidal equation) which depends on the colatitude and in a parametric way on the pseudo-radius. Indeed, since we focus on low-frequency gravito-inertial waves, which are rapidly oscillating along the pseudo-radial direction, we adopt the JWKB approximation. It allows us to describe the spatial structure of the waves by the product of a rapidly oscillating plane-like wave function in the pseudo-radial direction multiplied by a bi-dimensional slowly varying envelope (Eqs. (28) and (29)) which is obtained by solving the GLTE (Eq. (34)) for each spheroidal shell for the normalised pressure and polarisation relationships for the different components of the velocity (Eqs. (30)–(32)). Therefore, we avoid having an ordinary differential equation to solve in the pseudo-radial direction. This method has been introduced and used by Mathis (2009) and Van Reeth et al. (2018) in the case of the generalisation of the TAR to the case of spherical differentially rotating stars and by Mathis & Prat (2019) and Henneco et al. (2021) in the case of the generalisation of the TAR for slightly deformed rotating stars. Finally, solving the GLTE allows us to compute the horizontal eigenvalues and the corresponding eigenfrequencies.

#### 4.4. Asymptotic frequency and period spacing of low-frequency GIWs

From Eqs. (33) and (34), we can identify the dispersion relation for low-frequency GIWs within the TAR for strongly deformed

stars

$$k_{v;vkm}^2(\zeta) = \frac{N^2(\zeta)\mathcal{A}(\zeta)}{\omega_{km}^2} \Lambda_{vkm}(\zeta). \quad (36)$$

To be able to derive the eigenfrequencies of low-frequency GIWs, we applied the quantisation relation in the vertical (pseudo-radial) direction used by Mathis (2009) and Mathis & Prat (2019) and introduced by Unno et al. (1989), Gough et al. (1993), and Christensen-Dalsgaard (1997)

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} k_{v;vkm} d\zeta = (n + 1/2)\pi, \quad (37)$$

where  $\zeta_1$  and  $\zeta_2$  are the turning points of the Brunt–Väisälä frequency  $N$  and  $n$  is the radial order.

So, by substituting the dispersion relation (Eq. (36)) into the vertical quantisation one (Eq. (37)), we get the asymptotic expression for the frequencies of low-frequency GIWs

$$\omega_{nkm} = \frac{\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} N(\zeta) \sqrt{\mathcal{A}(\zeta)\Lambda_{vkm}(\zeta)} d\zeta}{(n + 1/2)\pi}, \quad (38)$$

and the corresponding period

$$P_{nkm} = \frac{2(n + 1/2)\pi^2}{\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} N(\zeta) \sqrt{\mathcal{A}(\zeta)\Lambda_{vkm}(\zeta)} d\zeta}, \quad (39)$$

with

$$v_n = v_{nkm} = \frac{2\Omega}{\omega_{nkm}}. \quad (40)$$

We can thus compute the period spacing  $\Delta P_{km} = P_{n+1km} - P_{nkm}$ . We note that by applying a first-order Taylor development we can generalise the result obtained by Bouabid et al. (2013) in the spherical case

$$\Delta P_{km} \approx \frac{2\pi^2}{\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} N \sqrt{\mathcal{A}\Lambda_{v_{n+1}km}} d\zeta \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} N \sqrt{\mathcal{A}\Lambda_{v_{n+1}km} \frac{d \ln \Lambda_{v_{n+1}km}}{d \ln v}} d\zeta}{\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} N \sqrt{\mathcal{A}\Lambda_{v_{n+1}km}} d\zeta} \right)}, \quad (41)$$

which will potentially allow us to probe the internal rotation of a large number of rapidly rotating stars taking into account their possibly strong flattening by the centrifugal acceleration and perform their detailed seismic modelling.

This result generalises and is very similar to the one obtained in the spherical case (Lee & Saio 1997; Bouabid et al. 2013) and in the weakly deformed case using a perturbative approach (Mathis & Prat 2019). The major interest of the eigenfrequencies, periods and periods spacing (Eqs. (38)–(41)) is that they can be easily evaluated for a large number of rapidly rotating stars and compared to observations which is a great asset to perform detailed seismic modelling. This flexibility is what makes the TAR a very interesting treatment.

## 5. Application to rapidly rotating early-type stars

In order to implement our equations and solve the GLTE, we must first compute an equilibrium model which gives the structure of the rotating star. The most advanced model of stellar evolution that we have and which is adapted to the formalism that we developed here is the ESTER model (Espinosa Lara & Rieutord 2013). It is unique of its kind because it calculates the effect of the centrifugal acceleration in a non-perturbative and a self-consistent way at any rotation rate.

### 5.1. ESTER models

The ESTER code is a 2D stellar structure code which takes into account the effects of rotation in a non-perturbative and coherent manner. The ESTER code makes it possible to calculate the equilibrium state of a star with a mass greater than  $2 M_\odot$  by solving the stationary equations of hydrodynamics for pressure, density, temperature and angular velocity for the entire volume. These realistic two-dimensional models of rapidly rotating stars are computed with the actual baroclinic meridional flows and differential rotation for intermediate-mass and massive stars. In this work, as a first step we work only with a uniform rotation (the mean value of the differential rotation over the pseudo-radius and the colatitude). The inclusion of differential rotation in the TAR formalism will be done in Paper II. The code uses spectral methods in the radial and latitudinal directions to transform the original system of non-linear partial differential equations in a system of non-linear algebraic equations (Chebyshev polynomials in the pseudo-radial direction and with spherical harmonics in the horizontal direction) (Rieutord et al. 2013).

In this study, we use  $3M_\odot$  stellar models with a hydrogen mass fraction in the core  $X_c = 0.7$  at [0%, 90%] of the Keplerian break-up rotation rate  $\Omega_K$ . Such a model is representative of observed stars near the zero-age main-sequence with asteroseismic probes of their angular velocity (Van Reeth et al. 2015, 2016, 2018; Pápics et al. 2015, 2017; Li et al. 2019a,b).

### 5.2. Domain of validity of the TAR

In this section, we study the validity domain of the two approximations (3.1 and 4.2) that are necessary to build the TAR in the case of rapidly rotating deformed bodies:

$$N^2(\zeta, \theta) \approx N^2(\zeta), \quad (42)$$

$$\mathcal{A}(\zeta, \theta) \approx \mathcal{A}(\zeta). \quad (43)$$

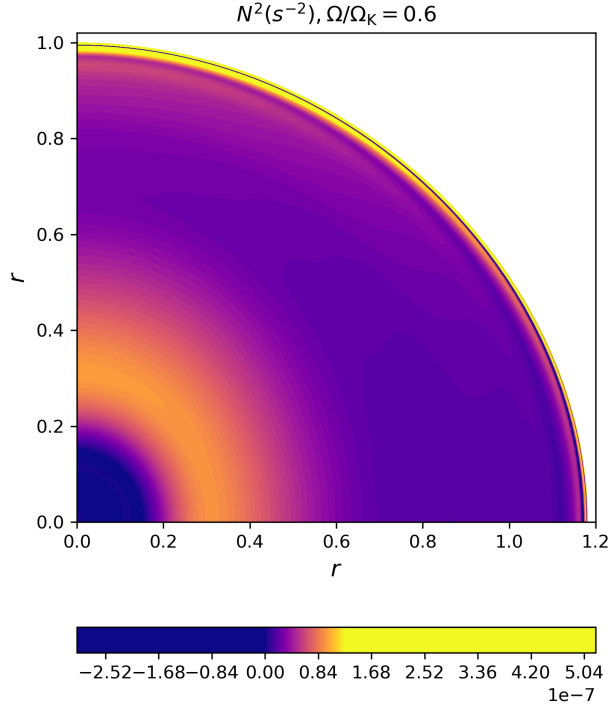
To visualise the problem, we first illustrate in Figs. 2 and 3 the functions  $N^2(\zeta, \theta)$  and  $\mathcal{A}(\zeta, \theta)$  computed with an ESTER model rotating at  $\Omega/\Omega_K = 60\%$  (we use  $r$  instead of  $\zeta$  in these figures so we can show the spheroidal shape of the star caused by the centrifugal deformation). We can see from Fig. 2 that the convective region of the star is located between  $\zeta = 0$  and  $\zeta = 0.153$  and that the pseudo-radial variation of the Brunt–Väisälä frequency is the highest at the surface. From Fig. 3 we can see that the coefficient  $\mathcal{A}$  varies the most, according to the pseudo-radius, at the centre of the star where we approach its singularity. In order to be able to apply our approximations (Eqs. (42) and (43)), we are interested in quantifying the latitudinal variation of these two quantities.

So to evaluate the committed error by adopting Eqs. (42) and (43) we represent in Figs. 4 and 5 the Brunt–Väisälä frequency and the coefficient  $\mathcal{A}$  pseudo-radial profiles for different values of the colatitude  $\theta_f$ , at a fixed rotation rate  $\Omega = 0.6\Omega_K$ . In the bottom panels, we show the corresponding relative error

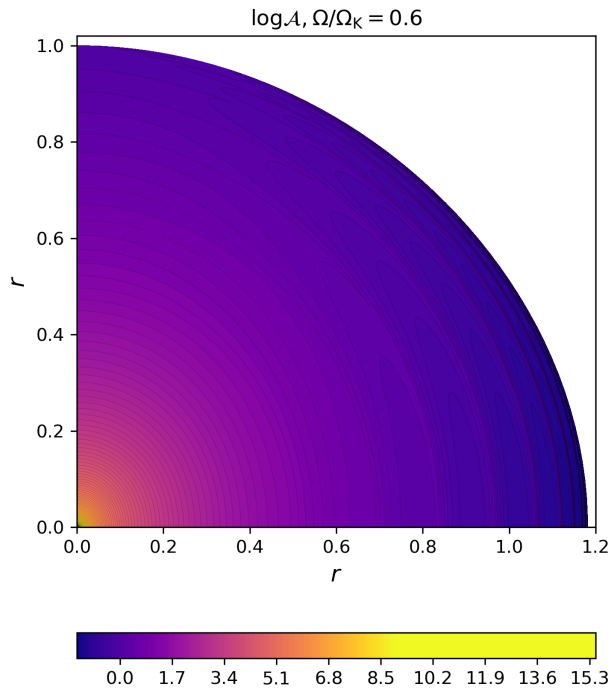
$$\delta X_{\theta_f}(\zeta) = \frac{X_{\text{approx}}(\zeta) - X(\zeta, \theta_f)}{X(\zeta, \theta_f)}, \quad (44)$$

between the exact value  $X(\zeta, \theta_f)$  given by the model and the approximated model  $X_{\text{approx}}(\zeta)$  given by the weighted average of the exact value over the colatitude  $\theta$

$$X_{\text{approx}}(\zeta) = \bar{X}(\zeta) = \int_0^{\pi/2} X(\zeta, \theta) \sin \theta d\theta, \quad (45)$$



**Fig. 2.** Squared Brunt–Väisälä frequency  $N^2(\zeta, \theta)$  profile for  $\Omega/\Omega_K = 60\%$ .



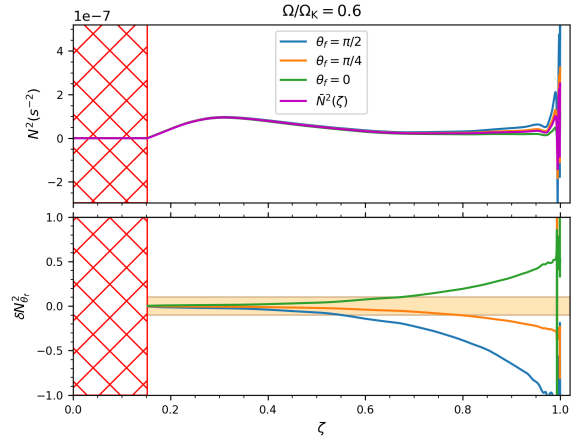
**Fig. 3.** Coefficient  $\mathcal{A}(\zeta, \theta)$  profile for  $\Omega/\Omega_K = 60\%$ .

with

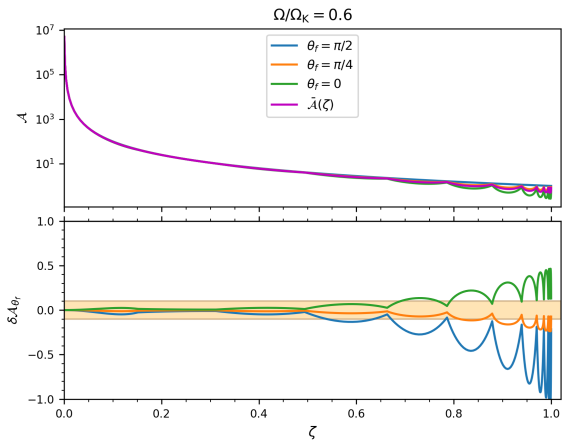
$$X \equiv \{N^2, \mathcal{A}\},$$

where  $\theta_f$  is a fixed value of the colatitude  $\theta$ .

Then, in order to determine the validity domain of these approximations as a function of the rotation rate and the



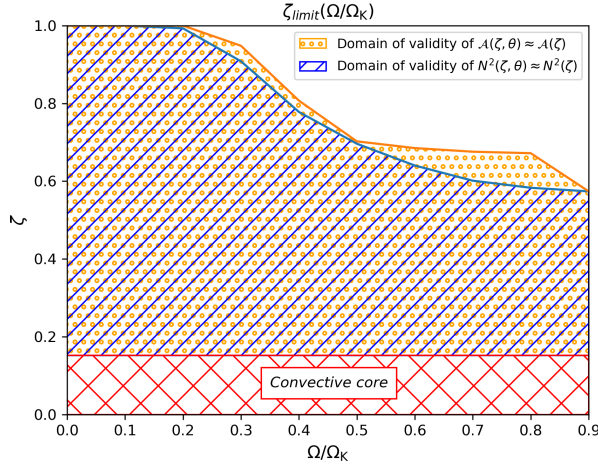
**Fig. 4.** Profile of the squared Brunt–Väisälä frequency  $N^2$  and the relative error  $\delta N_{\theta_f}^2$  of the adopted approximation (Eq. (42)) as a function of  $\zeta$  at different colatitudes  $\theta_f$  using an ESTER model rotating at 60% of the Keplerian breakup rotation rate (The light orange area indicates the margin of error which we allow and the red hatched area represents the convective region of the star).



**Fig. 5.** Profile of the coefficient  $\mathcal{A}$  and the relative error  $\delta \mathcal{A}_{\theta_f}$  of the adopted approximation (Eq. (43)) as a function of  $\zeta$  at different colatitudes  $\theta_f$  using an ESTER model rotating at 60% of the Keplerian breakup rotation rate (The light orange area indicates the margin of error which we allow).

pseudo-radius, we vary the rotation rate of the star  $\Omega/\Omega_K$  (we use here 10 sample points for the rotation rate) and we calculate for each case the associate maximum relative error  $\max_i \delta X_{\theta_i}(\zeta)$ . Afterwards, we fix a maximum error rate equal to 10% and we deduce the pseudo-radius limit  $\zeta_{\text{limit}}$  where the maximum relative error exceeds this threshold and we decide that the approximations become invalid. In Fig. 6, we display the pseudo-radius limit  $\zeta_{\text{limit}}$  as a function of the rotation rate  $\Omega/\Omega_K$ . This curve defines the validity domains of the two approximations (Eqs. (42) and (43)) which consequently define the validity domain of the TAR.

We notice that the validity domains of the two approximations are more and more restricted (the pseudo-radius limit  $\zeta_{\text{limit}}$  decrease) by increasing the rate of rotation and approaching the critical angular velocity. The tendency of the reduction of the pseudo-radius limit with the increasing of the rotation rate is expected since the action of the centrifugal acceleration is stronger further away from the axis of rotation. Thus, to be



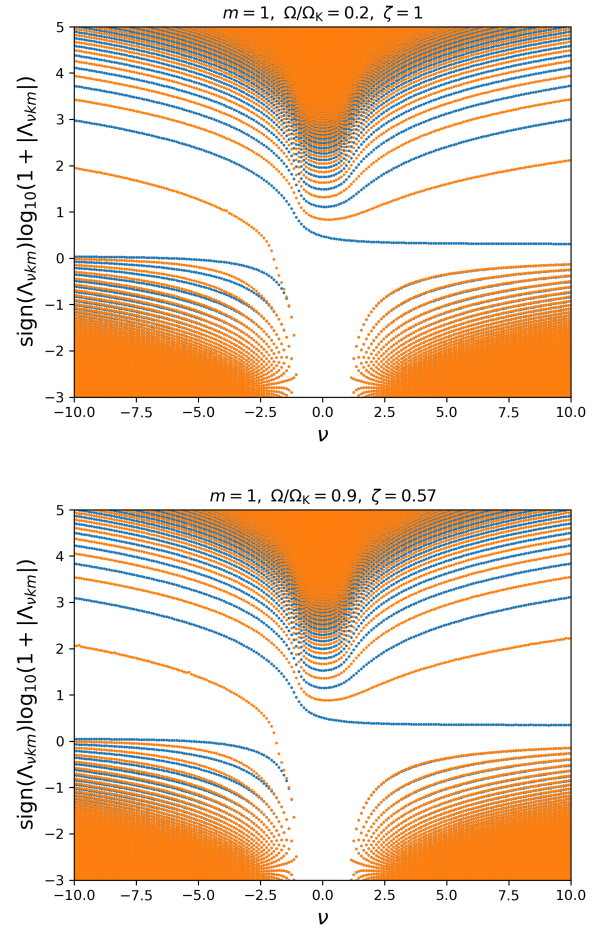
**Fig. 6.** Validity domain of the TAR within the framework of ESTER models ( $3 M_{\odot}$ ,  $X_c = 0.7$ ) as a function of the rotation rate  $\Omega/\Omega_K$  and the pseudo-radius  $\zeta$  (with 90% degree of confidence).

able to apply the TAR in the whole space domain, we shouldn't exceed a rotation rate  $\Omega = 0.2\Omega_K$ . It is therefore possible to apply the generalised TAR to early-type stars ( $3 M_{\odot}$ ,  $X_c = 0.7$ ) with an external radiative zone rotating up to 20% of the Keplerian critical angular velocity. This limit is lower than the one proposed by Mathis & Prat (2019) which was  $\Omega = 0.4\Omega_K$ . The limit proposed here should be more realistic since it is derived from a two-dimensional model which takes into account the centrifugal acceleration in a non-perturbative way whereas Mathis & Prat (2019) treated it in a perturbative manner. In the case where  $\zeta_{\text{limit}} < 1$ , generalised TAR should also be applicable to the radiative core of rapidly rotating (young) solar-type stars for which  $\zeta_{\text{rad}} < \zeta_{\text{limit}}$ , where  $\zeta_{\text{rad}}$  is the pseudo radius of the radiation-convection interface. So, this formalism can be applied to all rapidly rotating bodies (stars of all types and planets) as long as we have a 2D model with access to the quantities that we used to derive our equations.

### 5.3. Eigenvalues and Hough functions

We solve the GLTE for different pseudo-radii, spin parameters, and rotation rates within the defined validity domain using the implementation based on Chebyshev polynomials presented and discussed by Wang et al. (2016) and then used by Mathis & Prat (2019) and Henneco et al. (2021).

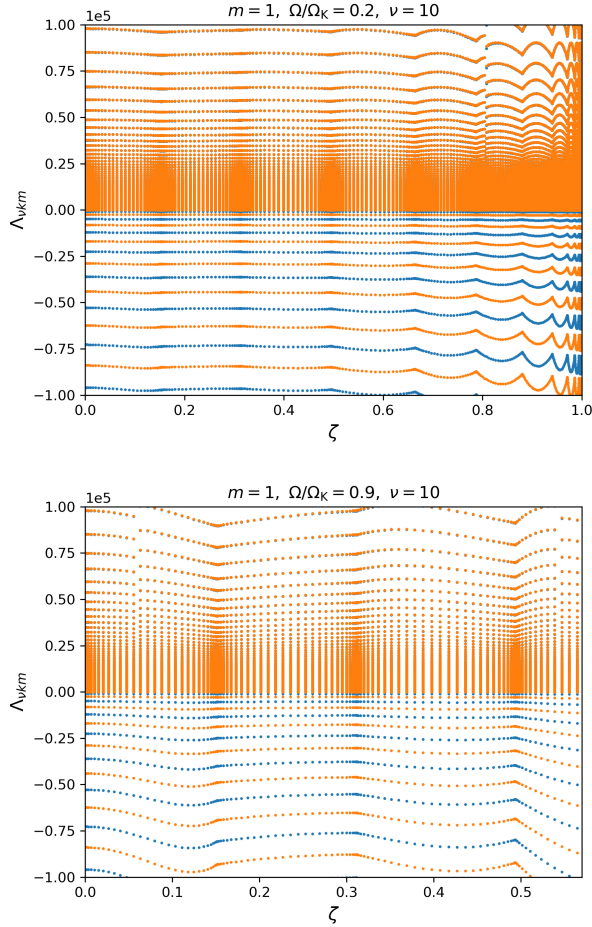
Figure 7 shows the eigenvalues  $\Lambda_{vkm}$  of the GLTE at  $\zeta = \zeta_{\text{limit}}$  as a function of the spin parameter  $\nu$  for  $m = 1$  at two different rotation rates:  $\Omega = 0.2\Omega_K$  the maximum rotation rate for which the generalised TAR is valid in all the radiative region ( $\zeta_{\text{limit}} = 1$ ) and  $\Omega = 0.9\Omega_K$  the highest rotation rate that we consider in this study for which the generalised TAR is valid in a restricted space domain ( $\zeta_{\text{limit}} = 0.57$ ). Since  $\Omega$  points in the direction of  $\theta = 0$  and the oscillations are proportional to  $e^{i(\omega t - m\varphi)}$ , a prograde (retrograde) oscillation has a positive (negative) value of the product  $m\nu$ . Therefore, since  $m = 1$  the prograde and retrograde modes correspond respectively to the positive and negative values of  $\nu$ . We see here that the centrifugal deformation of the star causes a modest gradual shift in the eigenvalues as already identified in previous studies where the centrifugal acceleration has been treated in a perturbative way (Mathis & Prat 2019; Henneco et al. 2021).



**Fig. 7.** Spectrum of the GLTE as a function of the spin parameter  $\nu$  at  $\zeta = \zeta_{\text{limit}}$  and  $m = 1$  for  $\Omega = 0.2\Omega_K$  (above) and  $\Omega = 0.9\Omega_K$  (below). Blue (respectively, orange) dots correspond to even (respectively, odd) eigenfunctions.

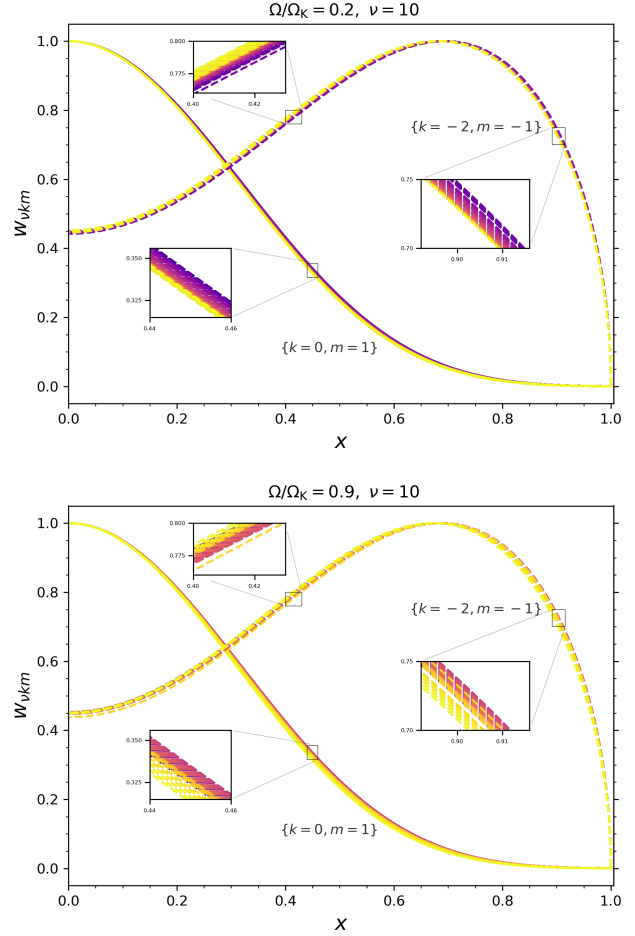
We can distinguish two families of eigenvalues. Namely, the first one is gravity-like solutions ( $\Lambda_{vkm} \geq 0$ ) which exist for any value of  $\nu$  and we attach positive  $k$ 's to them. They correspond to gravity waves ( $g$  modes) modified by rotation. The second one is Rossby-like solutions which exist only when  $|\nu| > 1$  and we attach negative  $k$ 's to them. They only propagate in rotating stars. They correspond to Rossby modes ( $r$  modes) if they are retrograde and have positive eigenvalues ( $\Lambda_{vkm} > 0$ ) (Saio et al. 2018) and have negative eigenvalues ( $\Lambda_{vkm} < 0$ ). These modes are able to propagate in convective regions stabilised by the rotation under the action of the Coriolis acceleration (Lee & Saio 1997, 2020; Lee 2019). Even though the TAR is not a valid approximation in convective zones (Ogilvie & Lin 2004), we do find such propagative modes as solutions from our approach. Contrary to the spherical case we obtain here eigenvalues which depend slightly on the pseudo-radius  $\zeta$  as shown in Fig. 8 where we represent the spectrum of the GLTE as a function of the pseudo-radius at two different rotation rates  $\Omega/\Omega_K = \{20\%, 90\%\}$  for  $m = 1$  and  $\nu = 10$ .

We focus now on the generalised Hough functions  $w_{vkm}$  (normalised to unity) which vary with the pseudo-radius  $\zeta$  and the horizontal coordinate  $x$ . This dependence is illustrated at  $\nu = 10$  in Fig. 9 at two different rotation rates  $\Omega/\Omega_K = \{20\%, 90\%\}$



**Fig. 8.** Spectrum of the GLTE as a function of the pseudo-radius for  $m = 1$  and  $\nu = 10$  at  $\Omega/\Omega_K = 0.2$  (above) and  $\Omega/\Omega_K = 0.9$  (below). Blue (respectively, orange) dots correspond to even (respectively, odd) Hough functions.

for gravity like-solutions (prograde dipole  $\{k = 0, m = 1\}$  modes) and Rossby like-solutions (retrograde Rossby modes with  $\{k = -2, m = -1\}$ ). We can see that increasing the rotation rate from 20% to 90% of the critical angular velocity does hardly affect the Hough functions. This is caused by the fact that increasing the rotation rate implies decreasing the pseudo-radius limit ( $\zeta_{\text{limit}}$ ) so we can no longer trust the computed Hough functions near the surface where the centrifugal effect is maximal. We can see clearly in this figure that the centrifugal acceleration slightly influences and modifies the eigenfunctions of the GLTE by introducing a new dependency on the pseudo-radial coordinate  $\zeta$ , whereas in the spherically symmetric case they were only dependant on the latitudinal coordinate  $\theta$ . In fact, the gravity-like solutions and the Rossby-like solutions shift as the distance from the border of the radiative zone of the star ( $\zeta = 0.153$ ) to its surface ( $\zeta = 1$ ) increases. More specifically, we observe a non-monotonous behaviour in Rossby-like solutions: these solutions migrate at first onwards, away from the equator ( $x = 0$ ), causing a broadening of its shape. Next, by increasing the reduced latitudinal coordinate  $x$  this behaviour becomes less and less visible until it changes to the opposite one where these solutions migrate inwards, towards the equator, causing a narrowing of its shape. However, in gravity-like solutions we found a monotonous behaviour for which these



**Fig. 9.** Generalised Hough functions (normalised to unity) as a function of the horizontal coordinate  $x$  at different pseudo-radii from  $\zeta = 0.153$  (blue) to  $\zeta = \zeta_{\text{limit}}$  (yellow) for  $\nu = 10$ ,  $\Omega/\Omega_K = 0.2$  (above), and  $\Omega/\Omega_K = 0.9$  (below). The solid lines correspond to gravity-like solutions with  $\{k = 1, m = 1\}$ , while the dotted lines correspond to Rossby-like solutions with  $\{k = -2, m = -1\}$ .

solutions migrate inwards, towards the equator, causing a narrowing of its shape. Contrary to the non-monotonous behaviour found in Rossby-like solutions, Henneco et al. (2021) found using the perturbative TAR a monotonous one with a migration towards the equator in the two types of solutions.

## 6. Asymptotic seismic diagnosis

### 6.1. Asymptotic period spacing pattern

To compute the period spacing patterns, we first calculated the asymptotic frequencies by following the method developed by Henneco et al. (2021) (the detailed steps of this computation can be found in their Appendix B). First, we compute for each radial order  $n$  of a given mode  $(k, m)$ , the corresponding  $\nu_{nkm} = 2\Omega/\omega_{nkm}$  using the implicit equation of the asymptotic frequencies of low-frequency GIWs (Eq. (38)). Then, by taking their inverse and multiplying them with  $2\Omega$ , we retrieve the asymptotic frequencies  $\omega_{nkm}$ . The corresponding asymptotic frequencies in the inertial (observer's) frame  $\omega_{nkm}^{\text{in}}$  are then found using

the angular Doppler shift (Eq. (11))

$$\omega_{nkm}^{\text{in}} = m\Omega + \underbrace{\omega_{nkm}}_{=2\Omega/v_{nkm}}. \quad (46)$$

Now, we can easily calculate the asymptotic periods in the inertial frame ( $P_{nkm}^{\text{in}} = 2\pi/\omega_{nkm}^{\text{in}}$ ) and the corresponding period spacing which is shown in Fig. 10 for the prograde dipole sectoral ( $k = 0, m = 1$ ) and the retrograde Rossby ( $k = -2, m = -1$ ) modes using the standard TAR (in spherical geometry) and the generalised TAR. The asymptotic periods within the standard TAR are computed using the following asymptotic frequencies deduced from the SLTE (Eq. (35))

$$\omega_{nkm}^{\text{stand}} = \frac{\Lambda_{ykm}^{1/2}}{(n+1/2)\pi} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{N(\zeta)}{\zeta} d\zeta. \quad (47)$$

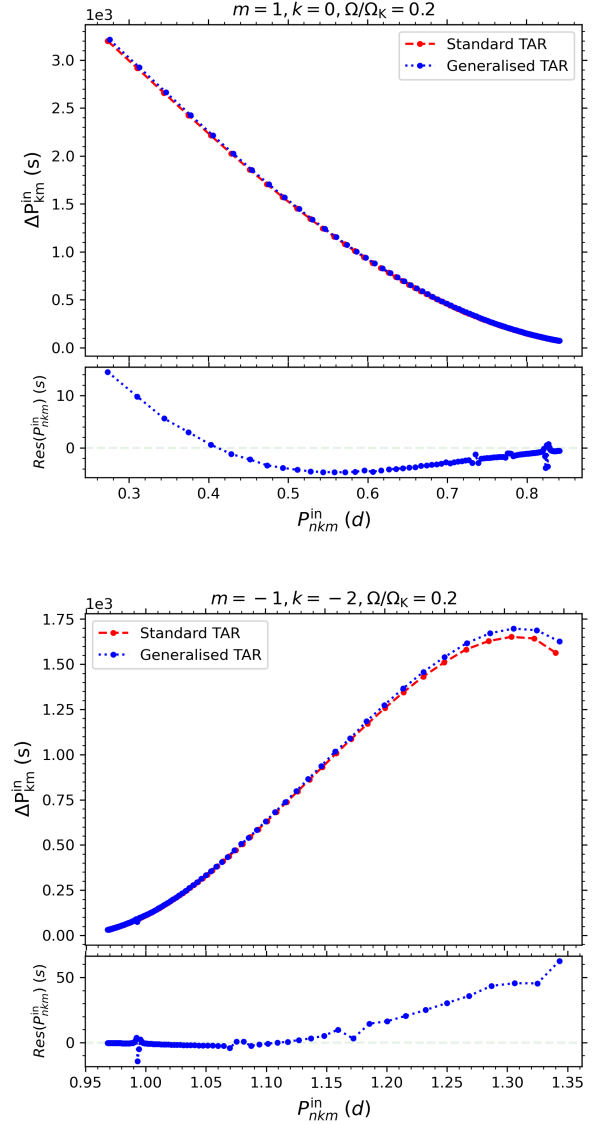
By comparing the period spacing pattern computed using the standard TAR and the generalised TAR in each of bottom panels of Fig. 10, we find that the spacing values of the  $\{k = 0, m = 1\}$  and  $\{k = -2, m = -1\}$  modes increase with the decrease in radial orders (low (high) radial orders equivalent to short (long) pulsation periods for  $g$  modes and long (short) pulsation periods for  $r$  modes) under the influence of the centrifugal deformation. The effect of the centrifugal acceleration on the period spacing that we found here is different from the one discussed in Henneco et al. (2021) who found an increase in the period spacing of the two modes. Another notable difference between the generalised TAR and the standard (Lee & Saio 1997) and the perturbative (Henneco et al. 2021) TAR is in the domain of validity and applicability, where the general treatment adopted in this work should be more reliable than the standard and the perturbative ones. Figure 10 reveals the difference in the period spacing values computed with the standard and the generalised formalisms and also offers a comparison of this difference with typical observational uncertainties of measured period spacing values from modern space photometric observations. In fact, Van Reeth et al. (2015) shows that for a sample of 40  $\gamma$  Dor stars the error margins of the period spacings have values up to 25 seconds for the prograde dipole modes (larger than our period spacing differences) and between 20 and 50 seconds for the retrograde Rossby modes (smaller than our period spacing differences).

## 6.2. Detectability of the centrifugal deformation effect

To evaluate the detectability of the centrifugal effect with space-based photometric observations, we first compute the frequency differences  $\Delta f_{\text{centrifugal}}$  between asymptotic frequencies calculated in the standard TAR ( $\text{TAR}_s$ ) and those computed in the generalised TAR ( $\text{TAR}_g$ ) through Eq. (38):

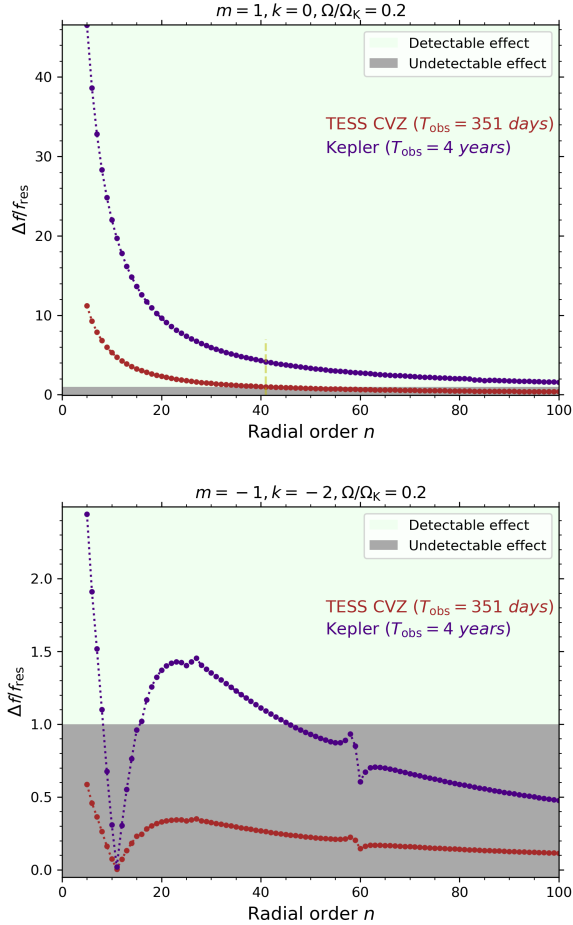
$$\Delta f_{\text{centrifugal}}(n) = |f_{\text{TAR}_g}(n) - f_{\text{TAR}_s}(n)|. \quad (48)$$

Then, by comparing the obtained frequency differences with the frequency resolutions ( $f_{\text{res}} = 1/T_{\text{obs}}$ ) of nominal 4-year *Kepler* (Borucki et al. 2009) and TESS CVZ (Transiting Exoplanet Survey Satellite Continuous Viewing Zone; Ricker et al. 2014) light curves covering quasi-continuously observation times of  $T_{\text{obs}} = 4$  yrs and  $T_{\text{obs}} = 351$  d, respectively, we can deduce the radial orders  $n$  for which the frequency differences are, at least in principle, expected to be detectable. In Fig. 11, we display these results for the  $\{k = 0, m = 1\}$  and  $\{k = -2, m = -1\}$  modes for a stellar model rotating at  $0.2\Omega_K$ . We can see that the centrifugal effect for the  $\{k = 0, m = 1\}$  mode is detectable for all radial



**Fig. 10.** Period spacing pattern in the inertial frame for  $\{k = 0, m = 1\}$  (above) and  $\{k = -2, m = -1\}$  (below) modes at  $\Omega/\Omega_K = 20\%$  within the standard (red line) and the generalised (blue line) TAR frameworks. The bottom panel for each mode shows the differences with respect to the standard TAR period spacing pattern (the sudden fluctuations in the period spacing pattern are caused by the numerical noise which is introduced by the numerical derivatives of the mapping with respect to  $\zeta$  and  $\theta$  used in the resolution of the GLTE).

orders using *Kepler* observations, but detectable only for  $n < 41$  using TESS observations (yellow dashed line in Fig. 11). Indeed even if for  $n \in [20, 40]$  using nominal TESS CVZ light curves and  $n \in [75, 100]$  using nominal *Kepler* light curves we have  $\Delta f_{\text{centrifugal}}/f_{\text{res}} \gtrsim 1$ , so we would expect that the detectability of the centrifugal effect for these radial orders is in principle guaranteed. However, since the frequency differences is nearly equal to the resolution one ( $\Delta f_{\text{centrifugal}} \approx f_{\text{res}}$ ), this effect become difficult to detect in this case. Regarding the  $\{k = -2, m = -1\}$  mode, we can see that the centrifugal effect is less detectable in comparison with the  $\{k = 0, m = 1\}$  mode but remains in principle observable (yet difficult to observe because  $\Delta f_{\text{centrifugal}} \approx f_{\text{res}}$ )



**Fig. 11.** Detectability of  $\{k = 0, m = 1\}$  (above) and  $\{k = -2, m = -1\}$  (below) modes as a function of the radial order  $n$  at a rotation rate  $\Omega/\Omega_K = 20\%$  based on the frequency resolution of TESS (brown line) and *Kepler* (indigo line).

using *Kepler* observations for small radial orders ( $n \in [5, 8]$ ) and for  $n \in [16, 45]$ .

Our results in Figs. 10 and 11 are formal comparisons in the sense that uncalibrated astrophysical effects occurring in stellar models (e.g., the presence of rotational mixing and atomic diffusion effects) usually imply larger uncertainties in the prediction of the period spacing values than the differences shown in these figures, as outlined in Aerts et al. (2018). For this reason, our theoretical findings in the current work offer a key result in terms of reliability of future asteroseismic analyses of observed pulsators. The centrifugal effect is not significant when assessed within the validity domain of the generalised TAR which is consistent with the results of Ouazzani et al. (2017) and Henneco et al. (2021).

## 7. Evaluation of the terms hierarchy imposed by the TAR within uniformly rotating deformed stars

The hierarchy of terms imposed by the TAR can be summarised by the following frequency hierarchy:

$$2\Omega \ll N, \quad (49)$$

$$\omega \ll N, \quad (50)$$

which ensures the other hierarchies. In fact, the vertical wave vector is larger than the horizontal one ( $|k_H| \ll |k_V|$ ) which comes from the dispersion relation of GIWs (Lee & Saio 1997)

$$\omega^2 \approx \frac{N^2 k_H^2 + (2\Omega \cdot \mathbf{k})^2}{k^2}. \quad (51)$$

In addition, the latitudinal component of the rotation vector in the momentum equation  $\Omega_H = \Omega \sin \theta$  is neglected for all colatitudes because  $(2\Omega \cdot \mathbf{k}) \approx 2\Omega_V k_V$ . And finally, the wave velocity is almost horizontal ( $|v^c| \ll \{|v^\theta|, |v^\phi|\}$ ). Indeed, by adopting the anelastic approximation we obtain

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \approx 0 &\Rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = k_V v_V + \mathbf{k}_H \cdot \mathbf{v}_H \approx 0 \\ &\Rightarrow \frac{v_V}{v_H} \approx -\frac{k_H}{k_V} \ll 1. \end{aligned} \quad (52)$$

The anelastic approximation filters out acoustic waves which have higher frequencies, and is justified by the fact that we study only low frequency waves (Eq. (50)) within the framework of the TAR treatment.

So in order to verify whether the TAR is still valid in uniformly rotating deformed stars, we discuss the frequency hierarchy (Eqs. (49) and (50)) using the Brunt–Väisälä frequency and rotation profiles from ESTER models and using the asymptotic frequencies calculated in Sect. 6.

### 7.1. The strong stratification assumption: $2\Omega \ll N$

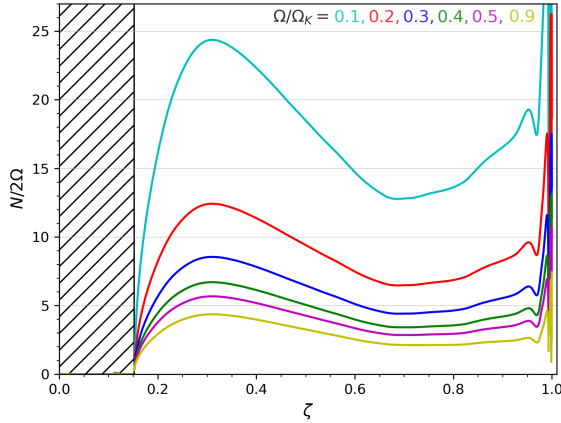
We evaluate the term  $N/2\Omega$  using the Brunt–Väisälä frequency and the angular velocity computed with ESTER models ( $3 M_\odot$ ,  $X_c = 0.7$ ) for rotation rates  $\Omega/\Omega_K \in [0.1, 0.9]$ . As shown in Fig. 12, the strong stratification assumption is valid only in the radiative zone far from the border between convection and radiation ( $\zeta \geq 0.2$  at  $\Omega/\Omega_K \leq 0.2$ ). Beyond this critical value, the Brunt–Väisälä frequency and the frequency of rotation have a very close order of magnitude so we can no longer adopt the strong stratification approximation for stars close to the zero-age main-sequence. As stars evolve, however, they build up a strong gradient of molecular weight, increasing the value of  $N(\zeta)$  in the region near their convective core. Therefore, the strong stratification assumption becomes better fulfilled as stars evolve along the main sequence because the spin-up of their core remains modest (Li et al. 2020; Aerts 2021), while  $N(\zeta)$  increases.

### 7.2. The low frequency assumption: $\omega \ll N$

We evaluate the term  $N/\omega$  using the Brunt–Väisälä frequency computed by ESTER models and the asymptotic frequencies for  $\{k = 0, m = 1\}$  and  $\{k = -2, m = -1\}$  modes calculated in Sect. 6. As shown in Fig. 13, the low frequency assumption is valid for  $\{k = -2, m = -1\}$  mode for all radial orders and pseudo-radii while for  $\{k = 0, m = 1\}$  mode this assumption is valid for all radial orders only if we are far from the transition layer between the convective core and the radiative envelope. If this is not the case, we have to work with high radial orders ( $n > 20$ ). Below this critical value, the Brunt–Väisälä frequency and the wave frequency have a very close order of magnitude so we can no longer adopt the low frequency approximation.

## 8. Discussion and conclusions

The aim of this work was to study the possibility of carrying out a new generalisation of the TAR that takes into account the



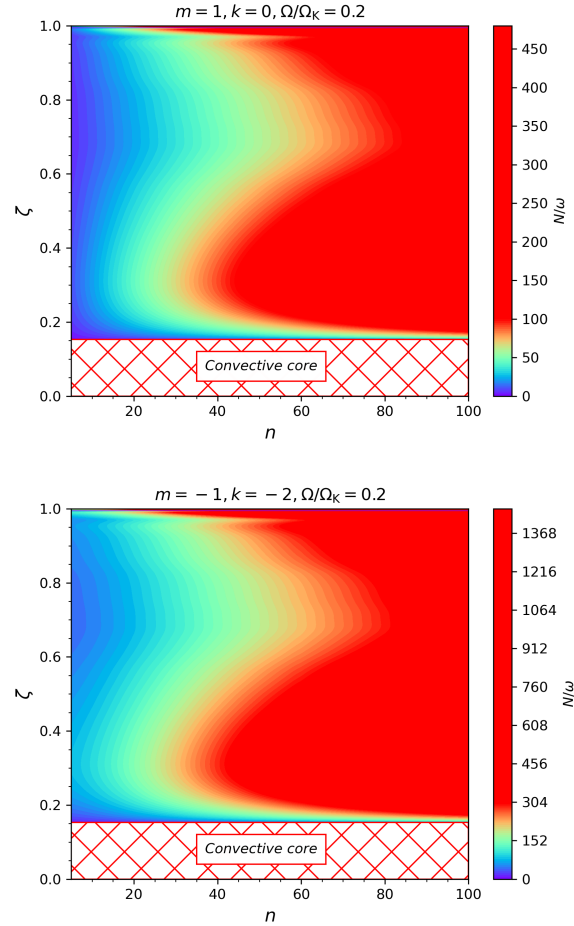
**Fig. 12.**  $N/2\Omega$  term as a function of the pseudo-radius  $\zeta$  at different rotation rates  $\Omega/\Omega_K$  (the hatched area represents the convective region of the star).

centrifugal acceleration in the case of strongly deformed, rapidly rotating stars and planets. We approached this issue by deriving the generalised Laplace Tidal equation in a general spheroidal coordinate system. We relied on two necessary assumptions (described by Eqs. (42) and (43)) that are applicable in a specific domain, which will then define the validity domain of the generalised TAR. The equation that we derive has a similar form to the one obtained when the TAR is applied to weakly rotating spherical stars (Lee & Saio 1997), differentially rotating spherical stars (Mathis 2009; Van Reeth et al. 2018) and moderately rotating, weakly deformed stars (Mathis & Prat 2019). This new formalism can be applied in the radiative region of all types of stars and planets.

Using this theoretical framework with 2D ESTER models we can define the validity domain of the TAR with a chosen confidence level as a function of the rotation rate and the pseudo-radius. We apply this general formalism to rapidly rotating early-type stars ( $M = 3M_\odot$ ,  $X_c = 0.7$ ), where we found that the generalised TAR is only applicable for all rotation rates for values of the pseudo-radius smaller than 0.57 ( $\zeta_{\text{limit}} < 0.57$ ). To calculate the asymptotic pulsation frequencies we then have to integrate the dispersion relation on the pulsation mode cavity (the radiative zone) (Eq. (37)) where  $\zeta \in [\zeta_1, \zeta_2]$  (in our considered case  $\zeta_1 = 0.153$  and  $\zeta_2 = 1$ ). This condition will limit the rotation rates where the TAR is valid. We can therefore deduce a rotation rate limit ( $\Omega_{\text{limit}} = 0.2\Omega_K$  in our case) where the TAR ceases to be applicable with a fixed level of confidence (90% in our study).

We found a difference between the limit of the TAR applicability defined in Mathis & Prat (2019) which was  $\Omega_{\text{limit}} = 0.4\Omega_K$  and the one defined here. The current new limit should be more realistic and accurate since it is first derived from a 2D model which takes the impact of the centrifugal acceleration into account in a non-perturbative way. Next, the validity domain of the adopted approximations is studied carefully in more details and with a level of confidence of 90%.

The centrifugal acceleration affects two aspects within our new generalised theoretical formalism compared to the standard application of the TAR (Lee & Saio 1997). On the one hand, the stellar structure as a whole becomes deformed which causes the usual radial coordinate  $r$ , the hydrostatic background and thus the Brunt-Väisälä frequency to have a dependency not only on the pseudo-radius  $\zeta$  but also on the colatitude  $\theta$ . This introduces



**Fig. 13.**  $N/\omega$  term as a function of the pseudo-radius  $\zeta$  and the radial order  $n$  for  $\{k = 0, m = 1\}$  (top panel) and  $\{k = -2, m = -1\}$  (bottom panel) modes at  $\Omega/\Omega_K = 20\%$ .

a new challenge in the decoupling of the vertical and the horizontal dynamics and the applicability of the quantisation relation unless we adopt adequate approximations which will restrict the validity domain of our formalism. On the other hand, the dynamics of the GIWs represented by the GLTE, is altered and get a radial dependence compared to the one in the spherical case represented by the SLTE. Then, we apply our new formalism to a rapidly rotating early-type star ( $M = 3M_\odot$ ,  $X_c = 0.7$ ,  $\Omega/\Omega_K = 20\%$ ). In this case, we observe a non-monotonous geometrical behaviour in the Rossby-like solutions and a monotonous one (only an inward migration) in the gravity-like solutions. In fact, near the equator the Rossby-like solutions migrate onwards, causing a broadening of its shape. But far from the equator this behaviour becomes less and less visible until it changes to the opposite one where these solutions migrate inwards, causing a narrowing of its shape. We found also that the centrifugal acceleration increases the period spacing values for low radial orders (equivalent to short pulsation periods for  $g$  modes and long pulsation periods for  $r$  modes) and decrease slightly for high radial orders (equivalent to long pulsation periods for  $g$  modes and short pulsation periods for  $r$  modes). But yet the effects of the centrifugal acceleration (within the validity domain of the generalised TAR) are of the order of or smaller than the effects of other missing stellar physical processes in our models (e.g., accurate rotational mixing, atomic diffusion,



etc.). This can mask the effect of the centrifugal acceleration in forward asteroseismic modelling analyses, even when it is theoretically detectable.

This new generalisation of the TAR can also be used to study the tidal dissipation induced by low-frequency GIWs in rapidly rotating deformed stars and planets (Braviner & Ogilvie 2014) and the angular momentum transport with a formalism directly implantable in ESTER models. In addition, we can apply our formalism to different 2D ESTER model grids and then compare the obtained results with direct computations using 2D oscillation codes TOP (Reese et al. 2021) and ACOR (Ouazzani et al. 2017).

The next steps will be first to take into account the general differential rotation in the deformed case. So far, Ogilvie & Lin (2004) and Mathis (2009) included the effects of general differential rotation on low-frequency GIWs within the framework of the TAR for spherical stars. Then, their formalism has been successfully applied in Van Reeth et al. (2018) to derive the variation of the asymptotic period spacing in the case of a weak radial differential rotation and evaluate the sensitivity of GIWs to the effect of differential rotation in spherical stars. Next, we will take into account the magnetic field in a non-perturbative way (Mathis & de Brye 2011, 2012). So far, Prat et al. (2019, 2020) and Van Beeck et al. (2020) have focused on the case where magnetic fields are weak enough to be treated within a perturbative treatment to study the effects of a magnetic field on the seismic parameters of  $g$  modes which become magneto-gravito inertial modes.

So in the near future, magneto-gravito inertial waves have to be studied in the general case of rapidly and differentially rotating stars and planets. As a first step, in a forthcoming paper (Dhouib et al. 2021, Paper II) we will examine if the TAR can be generalised to the case of strongly deformed differentially rotating stars and planets.

*Acknowledgements.* We thank the referee, Pr. H. Shibahashi, for his constructive report that allowed us to improve the quality of our work and of the article. We thank the ESTER code developers for their efforts and for making their codes publicly available. We are also grateful to Pr. C. Aerts who kindly commented on the manuscript and suggested improvements. H.D., V.P. and S.M. acknowledge support from the European Research Council through ERC grant SPIRE 647383. H.D. and S.M. acknowledge support from the CNES PLATO grant at CEA/Dap. T.V.R. gratefully acknowledges support from the Research Foundation Flanders (FWO) under grant agreement No. 12ZB620N.

## References

- Aerts, C. 2021, *Rev. Mod. Phys.*, **93**, 015001
- Aerts, C., Christensen-Dalsgaard, J., & Kurtz, D. W. 2010, *Asteroseismology* (Berlin: Springer)
- Aerts, C., Molenberghs, G., Michielsen, M., et al. 2018, *ApJS*, **237**, 15
- Aerts, C., Mathis, S., & Rogers, T. M. 2019, *ARA&A*, **57**, 35
- Berthomieu, G., Gonczi, G., Graff, P., Provost, J., & Rocca, A. 1978, *A&A*, **70**, 597
- Bildsten, L., Ushomirsky, G., & Cutler, C. 1996, *ApJ*, **460**, 827
- Bonazzola, S., Gourgoulhon, E., & Marck, J.-A. 1998, *Phys. Rev. D*, **58**, 104020
- Borucki, W., Koch, D., Batalha, N., et al. 2009, in *Transiting Planets*, eds. F. Pont, D. Sasselov, M. J. Holman, et al., *IAU Symp.*, **253**, 289
- Bouabid, M. P., Dupret, M. A., Salmon, S., et al. 2013, *MNRAS*, **429**, 2500
- Braviner, H. J., & Ogilvie, G. I. 2014, *MNRAS*, **441**, 2321
- Christensen-Dalsgaard, J. 1997, *Stellar Oscillations*
- Cowling, T. G. 1941, *MNRAS*, **101**, 367
- Dhouib, H., Prat, V., Van Reeth, T., & Mathis, S. 2021, *A&A*, submitted (Paper II)
- Dintrans, B., & Rieutord, M. 2000, *A&A*, **354**, 86
- Dintrans, B., Rieutord, M., & Valdettaro, L. 1999, *J. Fluid Mech.*, **398**, 271
- Eckart, C. 1960, *Hydrodynamics of Oceans and Atmospheres* (Oxford: Pergamon Press)
- Espinosa Lara, F., & Rieutord, M. 2013, *A&A*, **552**, A35
- Fröman, N., & Fröman, P. O. 1965, *JWKB approximation: contributions to the theory* (Amsterdam: North-Holland Publishing Company)
- Gough, D. 1993, in *Les Houches Session XLVII*, eds. J. P. Zahn, & J. Zinn-Justin (Amsterdam: Elsevier), 399
- Henneco, J., Van Reeth, T., Prat, V., et al. 2021, *A&A*, **648**, A97
- Hough, S. S. 1898, *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, **191**, 139
- Laplace, P. S. 1799, *Traité de Mécanique Céleste* (Paris: Imprimerie de Crapelet)
- Lee, U. 2019, *MNRAS*, **484**, 5845
- Lee, U., & Baraffe, I. 1995, *A&A*, **301**, 419
- Lee, U., & Saio, H. 1993, *MNRAS*, **261**, 415
- Lee, U., & Saio, H. 1997, *ApJ*, **491**, 839
- Lee, U., & Saio, H. 2020, *MNRAS*, **497**, 4117
- Lee, U., Neiner, C., & Mathis, S. 2014, *MNRAS*, **443**, 1515
- Li, G., Bedding, T. R., Murphy, S. J., et al. 2019a, *MNRAS*, **482**, 1757
- Li, G., Van Reeth, T., Bedding, T. R., Murphy, S. J., & Antoci, V. 2019b, *MNRAS*, **487**, 782
- Li, G., Van Reeth, T., Bedding, T. R., et al. 2020, *MNRAS*, **491**, 3586
- Lignières, F., Rieutord, M., & Reese, D. 2006, *A&A*, **455**, 607
- Mathis, S. 2009, *A&A*, **506**, 811
- Mathis, S., & de Brye, N. 2011, *A&A*, **526**, A65
- Mathis, S., & de Brye, N. 2012, *A&A*, **540**, A37
- Mathis, S., & Prat, V. 2019, *A&A*, **631**, A26
- Mathis, S., Talon, S., Pantillon, F. P., & Zahn, J. P. 2008, *Sol. Phys.*, **251**, 101
- Neiner, C., Floquet, M., Samadi, R., et al. 2012, *A&A*, **546**, A47
- Neiner, C., Lee, U., Mathis, S., et al. 2020, *A&A*, **644**, A9
- Ogilvie, G. I., & Lin, D. N. C. 2004, *ApJ*, **610**, 477
- Ogilvie, G. I., & Lin, D. N. C. 2007, *ApJ*, **661**, 1180
- Ouazzani, R. M., Dupret, M. A., & Reese, D. R. 2012, *A&A*, **547**, A75
- Ouazzani, R.-M., Salmon, S. J. A. J., Antoci, V., et al. 2017, *MNRAS*, **465**, 2294
- Ouazzani, R. M., Marques, J. P., Goupil, M. J., et al. 2019, *A&A*, **626**, A121
- Pantillon, F. P., Talon, S., & Charbonnel, C. 2007, *A&A*, **474**, 155
- Pápics, P. I., Tkachenko, A., Aerts, C., et al. 2015, *ApJ*, **803**, L25
- Pápics, P. I., Tkachenko, A., Van Reeth, T., et al. 2017, *A&A*, **598**, A74
- Pedersen, M. G., Aerts, C., Pápics, P. I., & Rogers, T. M. 2018, *A&A*, **614**, A128
- Prat, V., Mathis, S., Buyschaert, B., et al. 2019, *A&A*, **627**, A64
- Prat, V., Mathis, S., Neiner, C., et al. 2020, *A&A*, **636**, A100
- Reese, D., Lignières, F., & Rieutord, M. 2006, *A&A*, **455**, 621
- Reese, D. R., MacGregor, K. B., Jackson, S., Skumanich, A., & Metcalfe, T. S. 2009, *A&A*, **506**, 189
- Reese, D. R., Mirouh, G. M., Espinosa Lara, F., Rieutord, M., & Putigny, B. 2021, *A&A*, **645**, A46
- Ricker, G. R., Winn, J. N., Vanderspek, R., et al. 2014, in *Space Telescopes and Instrumentation 2014: Optical, Infrared, and Millimeter Wave*, eds. J. Oschmann, M. Jacobus, M. Clampin, G. G. Fazio, H. A. MacEwen, et al., *SPIE Confer. Ser.*, **9143**, 914320
- Rieutord, M., & Espinosa Lara, F. 2013, in *Ab Initio Modelling of Steady Rotating Stars*, eds. M. Goupil, K. Belkacem, C. Neiner, F. Lignières, & J. J. Green, **865**, 49
- Rieutord, M., Dintrans, B., Lignières, F., Corbard, T., & Pichon, B. 2005, in *Semaine de l'Astrophysique Française*, eds. F. Casoli, T. Contini, J. M. Hameury, & L. Pagani SF2A-2005, **759**
- Rogers, T. M. 2015, *AJ*, **815**, L30
- Rogers, T. M., Lin, D. N. C., McElwaine, J. N., & Lau, H. H. B. 2013, *ApJ*, **772**, 21
- Saio, H. 1981, *ApJ*, **244**, 299
- Saio, H., Kurtz, D. W., Murphy, S. J., Antoci, V. L., & Lee, U. 2018, *MNRAS*, **474**, 2774
- Spiegel, E. A., & Veronis, G. 1960, *ApJ*, **131**, 442
- Townsend, R. H. D. 2003, *MNRAS*, **340**, 1020
- Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H., & Shibahashi, H. 1989, *Nonradial oscillations of stars* (Tokyo: University of Tokyo Press)
- Van Beeck, J., Prat, V., Van Reeth, T., et al. 2020, *A&A*, **638**, A149
- Van Reeth, T., Tkachenko, A., Aerts, C., et al. 2015, *A&A*, **574**, A17
- Van Reeth, T., Tkachenko, A., & Aerts, C. 2016, *A&A*, **593**, A120
- Van Reeth, T., Mombarg, J. S. G., Mathis, S., et al. 2018, *A&A*, **618**, A24
- Wang, H., Boyd, J. P., & Akmaev, R. A. 2016, *Geosci. Model Dev.*, **9**, 1477

## Appendix A: Derivation of the linearised momentum and continuity equations in the spheroidal basis

### A.1. The momentum equation

The linearised momentum equation for an inviscid uniformly rotating fluid is written as

$$(\partial_t + \Omega \partial_\varphi) \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P' + \frac{\rho'}{\rho_0^2} \nabla P_0 - \nabla \Phi'. \quad (\text{A.1})$$

Using the spheroidal basis  $(\mathbf{a}_\zeta, \mathbf{a}_\theta, \mathbf{a}_\varphi)$  defined in Eq. (2) we can express the velocity field as follows

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{a}_i = v^i \alpha_i \mathbf{E}_i = v^i \alpha_i g_{ij} \mathbf{E}^j, \quad (\text{A.2})$$

with  $\alpha_\zeta = \frac{\zeta^2}{r^2 r_\zeta}$ ,  $\alpha_\theta = \frac{\zeta}{r^2 r_\zeta}$ ,  $\alpha_\varphi = \frac{\zeta}{r^2 r_\zeta \sin \theta}$ ,  $(\mathbf{E}^\zeta, \mathbf{E}^\theta, \mathbf{E}^\varphi)$  is the dual basis (the contravariant basis) and  $g_{ij}$  is the covariant metric tensor defined as follows

$$g_{ij} = \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j = \begin{pmatrix} r_\zeta^2 & r_\zeta r_\theta & 0 \\ r_\zeta r_\theta & r^2 + r_\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

We write also the uniform angular velocity in the natural covariant basis as

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega (\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \quad (\text{A.4})$$

$$= \underbrace{\Omega \left( \frac{\cos \theta}{r_\zeta} + \frac{\sin \theta r_\theta}{r r_\zeta} \right)}_{=\Omega^\zeta} \mathbf{E}_\zeta + \underbrace{\left( -\frac{\Omega \sin \theta}{r} \right)}_{=\Omega^\theta} \mathbf{E}_\theta. \quad (\text{A.5})$$

We then express the Coriolis acceleration in the spheroidal basis as follows

$$2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} = 2\varepsilon_{ilk} \Omega^l \alpha_k v^k \mathbf{E}^i, \quad (\text{A.6})$$

where  $\varepsilon^{ilk}$  is the Levi-Civita tensor

$$\varepsilon_{ilk} = \sqrt{|g|} [i, l, k], \quad (\text{A.7})$$

with  $|g| = \det(g_{ij}) = r^4 r_\zeta^2 \sin^2 \theta$  and

$$[i, l, k] = \begin{cases} +1 & \text{if } (i, l, k) \text{ is an even permutation of } (\zeta, \theta, \varphi) \\ -1 & \text{if } (i, l, k) \text{ is an odd permutation of } (\zeta, \theta, \varphi) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}. \quad (\text{A.8})$$

Finally, we express the gradient of the scalar function  $f = \{P', P_0, \Phi'\}$  in the spheroidal basis as

$$\nabla f = \partial_i f \mathbf{E}^i. \quad (\text{A.9})$$

With these definitions, it is now possible to give an explicit expression of the momentum equation (Eq. (A.1)) in the spheroidal basis

$$\begin{aligned} & (\partial_t + \Omega \partial_\varphi) \alpha_j v^j g_{ji} + 2\varepsilon_{ilk} \Omega^l \alpha_k v^k \\ &= -\frac{1}{\rho_0} \partial_i P' + \frac{\rho'}{\rho_0^2} \partial_i P_0 - \partial_i \Phi', \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

for  $i = \zeta$ ,  $i = \theta$  and  $i = \varphi$  we get the pseudo-radial (Eq. (3)), the latitudinal (Eq. (4)), and the azimuthal (Eq. (5)) components of the momentum equation, respectively.

### A.2. The continuity equation

The linearised continuity equation is given by

$$(\partial_t + \Omega \partial_\varphi) \rho' + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) = 0, \quad (\text{A.11})$$

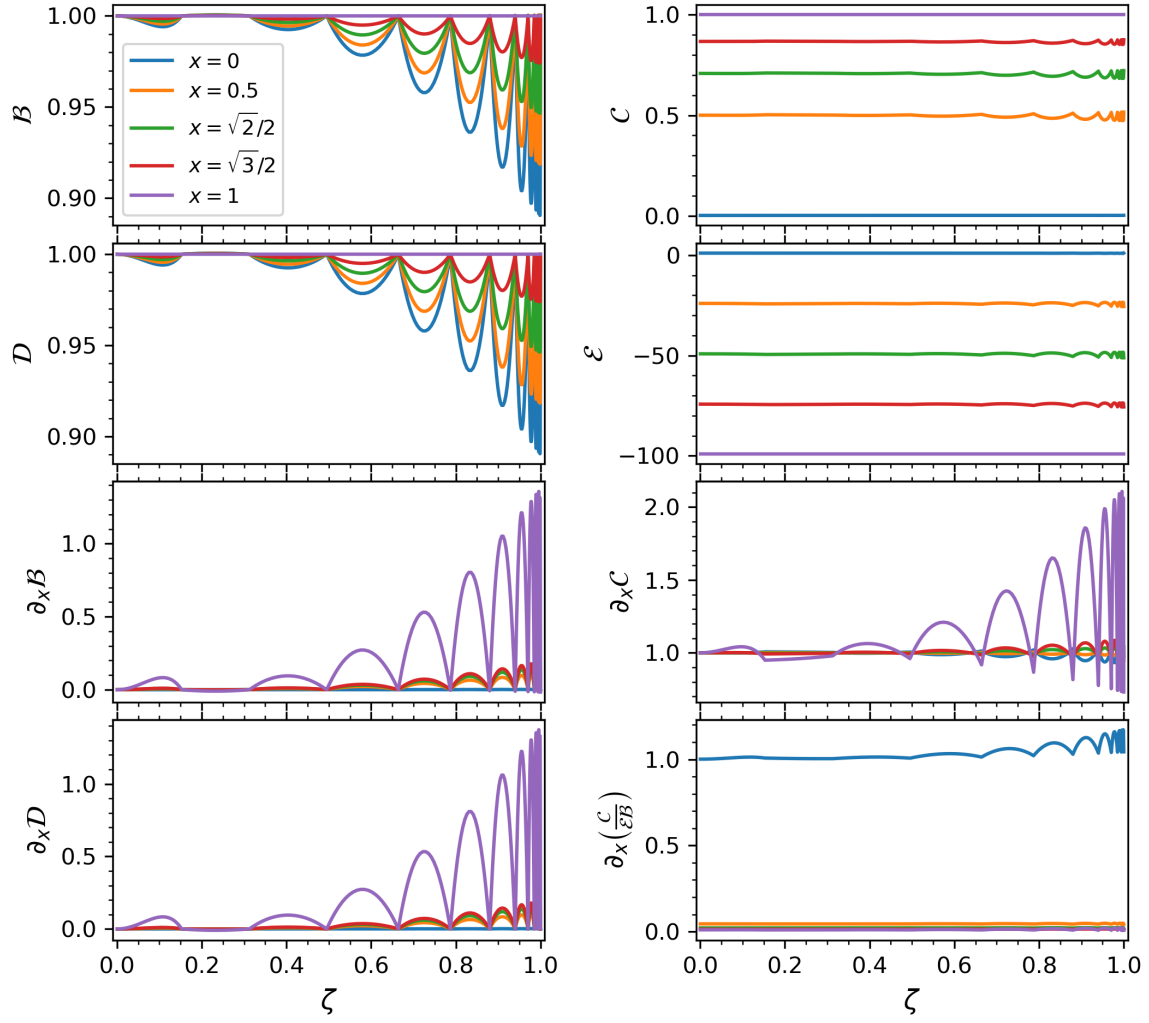
then by expressing the divergence in the spheroidal basis as

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_j (\sqrt{|g|} \rho_0 \alpha_j v^j), \quad (\text{A.12})$$

we get the Eq. (6).

## Appendix B: Visual presentation of the terms involved in the derivation of the GLTE

We represent in Fig. B.1 the profiles of the 8 terms ( $\mathcal{A}$  is already represented in the top panel of Fig. 5) involved in the derivation of the GLTE (Eq. (34)) in the general case of spheroidal geometry presented in the Table 1 as a function of the pseudo-radius  $\zeta$  at different reduced colatitudes  $x$ . In the main text (Sect. 5.2), we mainly focused on the coefficient  $\mathcal{A}$  and the Brunt-Väisälä frequency  $N$  because they are the important quantities to be able to build the generalised TAR formalism. The oscillating behaviour of some terms is caused by the fact that the mapping (Eq. (1)) is different in each subdomain of the model which is continuous and derivable, but not twice differentiable with respect to  $\zeta$  between subdomains.



**Fig. B.1.** Profiles of the coefficients  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\partial_x \mathcal{B}$ ,  $\partial_x \mathcal{C}$ ,  $\partial_x \mathcal{D}$  and  $\partial_x \left( \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{E}\mathcal{B}} \right)$  involved in the derivation of the GLTE (Eq. (34)) as a function of  $\zeta$  at different reduced colatitudes  $x$  using an ESTER model ( $M = 3M_\odot$ ,  $X_c = 0.7$ ) rotating at 20% of the Keplerian break-up rotation rate for a spin parameter  $\nu = 10$ .

# The traditional approximation of rotation for rapidly rotating stars and planets

## II. Deformation and differential rotation

H. Dhouib<sup>1</sup>, V. Prat<sup>1</sup>, T. Van Reeth<sup>2</sup>, and S. Mathis<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Département d'Astrophysique-AIM, CEA/DRF/IRFU, CNRS/INSU, Université Paris-Saclay, Université Paris-Diderot, Université de Paris, 91191 Gif-sur-Yvette, France  
e-mail: hachem.dhouib@cea.fr

<sup>2</sup> Institute of Astronomy, KU Leuven, Celestijnenlaan 200D, 3001 Leuven, Belgium

Received 22 April 2021 / Accepted 5 October 2021

### ABSTRACT

**Context.** We examine the dynamics of low-frequency gravito-inertial waves (GIWs) in differentially rotating deformed radiation zones in stars and planets by generalising the traditional approximation of rotation (TAR). The TAR treatment was built on the assumptions that the star is spherical (i.e. its centrifugal deformation is neglected) and uniformly rotating. However, it has been generalised in our previous work by including the effects of the centrifugal deformation using a non-perturbative approach. In the meantime, TAR has been generalised in spherical geometry to take the differential rotation into account.

**Aims.** We aim to carry out a new generalisation of the TAR treatment to account for the differential rotation and the strong centrifugal deformation simultaneously.

**Methods.** We generalise our previous work by taking into account the differential rotation in the derivation of our complete analytical formalism that allows the study of the dynamics of GIWs in differentially and rapidly rotating stars.

**Results.** We derived the complete set of equations that generalises the TAR, simultaneously taking the full centrifugal acceleration and the differential rotation into account. Within the validity domain of the TAR, we derived a generalised Laplace tidal equation for the horizontal eigenfunctions and asymptotic wave periods of the GIWs, which can be used to probe the structure and dynamics of differentially rotating deformed stars with asteroseismology.

**Conclusions.** A new generalisation of the TAR, which simultaneously takes into account the differential rotation and the centrifugal acceleration in a non-perturbative way, was derived. This generalisation allowed us to study the detectability and the signature of the differential rotation on GIWs in rapidly rotating deformed stars and planets. We found that the effects of the differential rotation in early-type deformed stars on GIWs is theoretically largely detectable in modern space photometry using observations from *Kepler* and *TESS*.

**Key words.** hydrodynamics – waves – stars: rotation – stars: oscillations – methods: analytical – methods: numerical

## 1. Introduction

Understanding how angular momentum and chemicals are transported in the interiors of stars (and planets) along their evolution is one of the key challenges of modern stellar (and planetary) astrophysics. Indeed, rotation modifies their structure, their chemical stratification, their internal flows and magnetism, and their mass losses and winds (e.g. Maeder 2009; Mathis et al. 2013; Aerts et al. 2019, and references therein). In this quest, asteroseismology has bought a fundamental breakthrough by demonstrating that all stars are the seat of a strong extraction of angular momentum during their evolution in comparison with the predictions by stellar models taking the rotation into account following the standard rotational transport and mixing theory (Eggenberger et al. 2012; Marques et al. 2013; Ceillier et al. 2013; Cantiello et al. 2014; Ouazzani et al. 2019). This was first obtained thanks to mixed pulsation modes splitted by rotation propagating in evolved low- and intermediate-mass stars (Beck et al. 2012, 2014, 2018; Mosser et al. 2012; Deheuvels et al. 2012, 2014, 2015, 2020; Di Mauro et al. 2016; Triana et al. 2017; Gehan et al. 2018; Tayar et al. 2019). Then, observations of oscillation

modes in F- and A-type stars (Kurtz et al. 2014; Saio et al. 2015; Bedding et al. 2015; Keen et al. 2015; Van Reeth et al. 2015, 2016, 2018; Schmid & Aerts 2016; Murphy et al. 2016; Sowicka et al. 2017; Guo et al. 2017; Saio et al. 2018, 2021; Mombarg et al. 2019; Li et al. 2019, 2020; Ouazzani et al. 2020) and in B-type stars (Pápics et al. 2015, 2017; Triana et al. 2015; Moravveji et al. 2016; Kallinger et al. 2017; Buyschaert et al. 2018; Szweczk & Daszyńska-Daszkiewicz 2018; Pedersen et al. 2021; Szweczk et al. 2021) provided us new Rosetta stones to constrain the transport of angular momentum in the whole Hertzsprung-Russell diagram. More particularly, this pushes gravity- and gravito-inertial mode pulsators such as  $\gamma$ -Doradus and SPB stars at the forefront of this research. For instance, recent theoretical developments have demonstrated how it is possible to probe stellar internal rotation in  $\gamma$ -Doradus stars from their surface to their convective core (Ouazzani et al. 2020; Saio et al. 2021). These stars are rapid rotators for a large proportion of them. Therefore, it is necessary to study gravito-inertial modes. These modes are gravity modes, which propagate only in stably stratified stellar radiation zones under the action of the restoring buoyancy force in the absence of rotation, which are modified by rotation. If their

frequency is super-inertial (i.e. above the inertial frequency  $2\Omega$ ,  $\Omega$  being the stellar angular velocity), they are propagating in stellar radiation zones and evanescent in convective regions. If their frequency is sub-inertial (below  $2\Omega$ ) they propagate in an equatorial belt in radiation zones and they become propagative inertial waves in convective regions (e.g. [Dintrans & Rieutord 2000](#); [Mathis et al. 2014](#)). The challenge of studying these waves is that the equation describing their dynamics are intrinsically bi-dimensional and non-separable ([Dintrans et al. 1999](#); [Prat et al. 2016, 2018](#); [Mirouh et al. 2016](#)). This makes the development of seismic diagnosis difficult analytically ([Prat et al. 2017](#)) or expensive in computation time when using 2D oscillation and stellar structure codes (e.g. [Ouazzani et al. 2017](#); [Reese et al. 2021](#)) in the general case.

In this framework, the traditional approximation of rotation (TAR), which has been first introduced in geophysics ([Eckart 1960](#)) to treat the propagation of gravito-inertial waves (GIWs) in the case where the Coriolis acceleration can be neglected in front of the buoyancy force in the direction of the entropy and chemical stable stratifications, is very useful. Indeed, it allows one to consider that the velocity of gravito-inertial waves are mostly horizontal and to neglect the latitudinal component of the rotation vector in the momentum equation. That leads to decoupling the vertical and horizontal directions by keeping the non-perturbative action of the Coriolis acceleration in the latitudinal and azimuthal directions and neglecting it along the vertical one. Propagation equations become separable as in the non-rotating case (e.g. [Bildsten et al. 1996](#); [Lee & Saio 1997](#)). In addition, the derivation of powerful and flexible seismic diagnostics using the period spacing between consecutive high radial order gravito-inertial modes becomes possible in uniformly rotating spherical stars ([Bouabid et al. 2013](#)). These period spacing provide constrains on properties of the chemical stratification and the rotation rate (through their slope) near the interface between the convective core and the radiative envelope in rapidly rotating intermediate-mass  $\gamma$ -Doradus (e.g. [Van Reeth et al. 2015, 2016, 2018](#); [Ouazzani et al. 2017](#); [Christophe et al. 2018](#); [Li et al. 2019, 2020](#); [Saio et al. 2021](#)) and SPB stars (e.g. [Pápics et al. 2015, 2017](#); [Moravceji et al. 2016](#); [Szweczk & Daszyńska-Daszkiewicz 2018](#); [Pedersen et al. 2021](#)), thanks to the high precision of space-based photometric observations (e.g. [Aerts et al. 2019](#); [Aerts 2021](#), and references therein). This allows us to build intensive forward modelling of g-mode pulsating stars to constrain their internal structural and dynamical properties.

This approximation, in its standard version, is only applicable for low-frequency GIWs propagating in strongly stably stratified zones of uniformly rotating spherical stars. In this case a set of assumptions should be verified: (i) the buoyancy force is stronger than the Coriolis acceleration (i.e.  $2\Omega \ll N$ , where  $N$  is the Brunt-Väisälä frequency) in the direction of stable entropy or chemical stratification, (ii) the Brunt-Väisälä frequency is larger than the frequency of the waves in the rotating frame  $\omega$  ( $\omega \ll N$ ), (iii) the rotation is assumed to be uniform and (iv) the star is assumed to be spherical, in other words, the centrifugal deformation of the star is neglected (i.e.  $\Omega \ll \Omega_K \equiv \sqrt{GM/R^3}$ , where  $\Omega_K$  is the Keplerian critical (breakup) angular velocity, and  $G$ ,  $M$ , and  $R$  are the universal constant of gravity, the mass of the star, and the stellar radius, respectively).

Recently, the TAR has been examined in deformed stars. First, [Mathis & Prat \(2019\)](#) have included the centrifugal acceleration for slightly deformed stars using a first-order perturbative approach. Then, this perturbative framework has been optimised for practical applications to one-dimensional stellar

structure models by [Henneco et al. \(2021\)](#). Second, in [Dhouib et al. \(2021, hereafter Paper I\)](#), we have used a non-perturbative approach to include the centrifugal acceleration for strongly deformed stars and planets by studying the dynamics of low-frequency GIWs in a general spheroidal coordinate system defined by [Bonazzola et al. \(1998\)](#) which follows the shape of a deformed star. It is important to note that in these studies the rotation was assumed to be uniform. These semi-analytical studies demonstrated that centrifugal effects' signatures are potentially detectable. Moreover, their results are in good qualitative agreement with direct computations of gravito-inertial modes in centrifugally deformed stellar models using 2D oscillation codes that take into account the full Coriolis and centrifugal accelerations such as the Toulouse Oscillation Program (TOP) ([Ballot et al. 2010, 2012](#)) and the adiabatic code of oscillation including rotation (ACOR) code ([Ouazzani et al. 2012, 2015, 2017](#)). In the case where the centrifugal acceleration is treated as a perturbation, but where the full Coriolis acceleration was taken into account, we can refer to the Tohoku oscillation code ([Lee & Saio 1987](#); [Lee & Baraffe 1995](#)). The chosen coordinate system is used in ACOR, TOP and in the Evolution STEllaire en Rotation (ESTER) code ([Espinosa Lara & Rieutord 2013](#)) that computes the structure and the stationary internal hydrodynamics of (differentially-)rotating early-type stars such as the observed gravito-inertial modes pulsators we are studying.

However, the solid-body rotation assumption has to be potentially abandoned along the evolution of real stars (and planets) where gradients of angular velocity can develop, both in the radial and in the latitudinal directions. They can be triggered by the redistribution of angular momentum induced by stellar winds (e.g. [Zahn 1992](#)), structural adjustments ([Maeder & Meynet 2000](#); [Decressin et al. 2009](#)), and by transport processes ([Mathis et al. 2013](#)). First, as shown in [Charbonnel et al. \(2013\)](#) and [Gallet & Bouvier \(2015\)](#), early main sequence low-mass stars are potentially subject to a strong differential rotation. Moreover, [Aerts et al. \(2019\)](#) and references therein (we refer the reader to those provided in the first paragraph for F, A, and B-type stars) pointed out that the radiative envelope of intermediate-mass stars are the seat of a weak differential rotation for those observed with a small difference of rotation between the stellar surface and the core. This is also predicted by numerical simulations and models of different transport mechanisms like internal gravity waves ([Rogers et al. 2013](#); [Rogers 2015](#)) or meridional flows ([Maeder & Meynet 2000](#); [Decressin et al. 2009](#); [Rieutord et al. 2016](#); [Ouazzani et al. 2019](#)). In this framework, [Ogilvie & Lin \(2004\)](#) and [Mathis \(2009\)](#) have generalised the TAR by including the effects of general differential rotation on low-frequency GIWs propagating in spherical stars (and planets). This new formalism has been successfully applied to gravito-inertial mode pulsators observed by the *Kepler* ([Borucki et al. 2009](#)) space telescope. Indeed, [Van Reeth et al. \(2018\)](#) have applied it to derive the variation of the asymptotic period spacing in the case of a weak radial differential rotation. They evaluated the sensitivity of GIWs period spacing to the effect of such a radial shear in spherical stars and they demonstrated that they can be potentially detected if observing several modes.

Since both effects of the centrifugal deformation and differential rotation are potentially observable, we generalise here these previous works, treating the case of a general differential rotation in deformed stars (and planets). We begin in Sect. 2 with the derivation of the system of linearised hydrodynamic equations for GIWs in spheroidal coordinates which follows the shape of a differentially rotating deformed body. We choose again the coordinate system that was introduced by

Bonazzola et al. (1998) which is used in 2D numerical models of rotating stars and pulsation codes. In Sect. 3, we build the generalised TAR in this set of equations by adopting the adequate assumptions. In Sect. 4, we rewrite the oscillation equations in the form of a generalised Laplace tidal equation and deduce the asymptotic frequencies of low-frequency GIWs. In Sect. 5, we carry out a numerical exploration of the eigenvalues and Hough eigenfunctions of the generalised Laplace tidal equation within the domain of validity of the TAR. We model early-type stars with 2D ESTER models (Espinosa Lara & Rieutord 2013). In Sect. 6, we quantify the differential rotation and the centrifugal deformation combined effects on the asymptotic period spacing pattern and we discuss their detectability. Finally, we discuss and summarise our work and results in Sect. 8.

## 2. Hydrodynamic equations in differentially rotating deformed stars

### 2.1. Spheroidal geometry

As in Paper I, here, we use the spheroidal coordinate system  $(\zeta, \theta, \varphi)$  proposed by Bonazzola et al. (1998), where  $\zeta$  is the pseudo-radial coordinate,  $\theta$  the colatitude and  $\varphi$  the azimuth. Following Espinosa Lara & Rieutord (2013), this new coordinate system, illustrated in Fig. 1, can be linked to the usual spherical one  $(r, \theta, \varphi)$  via the following mapping

$$r(\zeta, \theta) = a_i \xi \Delta \eta_i + R_i(\theta) + A_i(\xi) (\Delta R_i(\theta) - a_i \Delta \eta_i), \quad \eta_i \leq \zeta \leq \eta_{i+1}, \quad (1)$$

in the  $i$ th subdomain  $\mathcal{D}_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} \in [R_i(\theta), R_{i+1}(\theta)]$  of the spheroidal domain  $\mathcal{D}$  where  $R_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}(\theta)$  are series of functions, such that  $R_n(\theta) = R_s(\theta)$  is the outer boundary and  $R_0(\theta) = 0$  is the centre. Additionally,  $\eta_i = R_i(\theta = 0)$  are the polar radii of the interfaces between the subdomains,  $\Delta \eta_i = \eta_{i+1} - \eta_i$ ,  $\Delta R_i(\theta) = R_{i+1}(\theta) - R_i(\theta)$  and  $\xi = (\zeta - \eta_i) / \Delta \eta_i$ . The functions  $A_{i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket}(\xi) = -2\xi^3 + 3\xi^2$  and  $A_0(\xi) = -1.5\xi^5 + 2.5\xi^3$  and the constants  $a_i = 1$  are chosen to satisfy the boundary conditions between the different subdomains. We recall also the spheroidal base  $(\mathbf{a}_\zeta, \mathbf{a}_\theta, \mathbf{a}_\varphi)$  defined using the mapping (Eq. (1)) (Rieutord et al. 2005; Lignières et al. 2006; Reese et al. 2006)

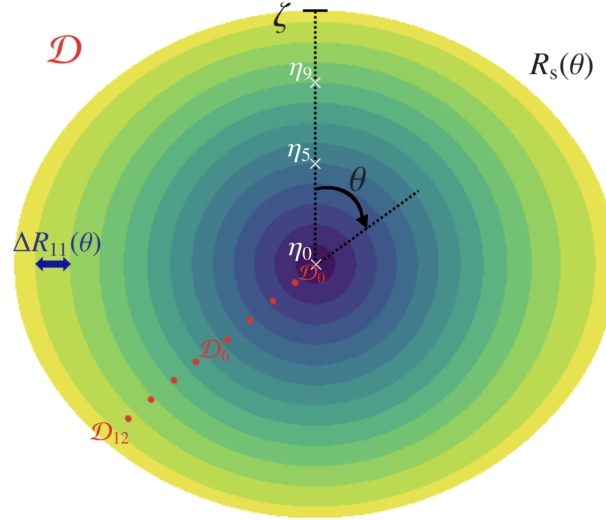
$$\begin{cases} \mathbf{a}_\zeta = \frac{\zeta^2}{r^2} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{a}_\theta = \frac{\zeta}{r^2 r_\zeta} (r_\theta \mathbf{e}_r + r \mathbf{e}_\theta), \\ \mathbf{a}_\varphi = \frac{\zeta}{r r_\zeta} \mathbf{e}_\varphi \end{cases} \quad (2)$$

where  $r_\zeta \equiv \partial_\zeta r$ ,  $r_\theta \equiv \partial_\theta r$ ,  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$  is the usual spherical base,  $\varepsilon = 1 - R_{\text{pol}} / R_{\text{eq}}$  is the flatness,  $R_s(\theta)$ ,  $R_{\text{eq}}$  and  $R_{\text{pol}}$  are the surface, the equatorial and the polar radii, respectively.

### 2.2. Linearised hydrodynamic equations in spheroidal coordinates

To treat the wave dynamics in differentially rotating, strongly deformed stars and planets, we derive the complete adiabatic inviscid system of equations in spheroidal coordinates. First, the linearised momentum equation for an inviscid fluid is written as

$$(\partial_t + \Omega \partial_\varphi) \left[ \frac{\zeta^2 r_\zeta}{r^2} v^\zeta + \frac{\zeta r_\theta}{r^2} v^\theta \right] = 2\Omega \frac{\zeta \sin \theta}{r} v^\varphi - \frac{1}{\rho_0} \partial_\zeta P' + \frac{\rho'}{\rho_0^2} \partial_\zeta P_0 - \partial_\zeta \Phi', \quad (3)$$



**Fig. 1.** Spheroidal coordinate system with  $n = 13$  subdomains used to compute the equilibrium model of a star rotating at 60% of its break-up velocity corresponding to the case of the  $3 M_\odot$  ESTER model (with the central fraction in hydrogen  $X_c = 0.7$ ) studied in Sect. 5.  $\zeta$  and  $\theta$  are the pseudo-radius and the colatitude, respectively.  $\eta_i$  and  $\Delta R_i(\theta)$  are defined in our mapping (Eq. (1)).

$$(\partial_t + \Omega \partial_\varphi) \left[ \frac{\zeta^2 r_\theta}{r^2} v^\zeta + \frac{\zeta (r^2 + r_\theta^2)}{r^2 r_\zeta} v^\theta \right] = 2\Omega \frac{\zeta (r_\theta \sin \theta + r \cos \theta)}{r r_\zeta} v^\varphi - \frac{1}{\rho_0} \partial_\theta P' + \frac{\rho'}{\rho_0^2} \partial_\theta P_0 - \partial_\theta \Phi', \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\zeta}{r_\zeta} (\partial_t + \Omega \partial_\varphi) v^\varphi &= -2\Omega \frac{\zeta^2 \sin \theta}{r} v^\zeta - 2\Omega \frac{\zeta (r_\theta \sin \theta + r \cos \theta)}{r r_\zeta} v^\theta \\ &\quad - \frac{1}{\rho_0 \sin \theta} \partial_\varphi P' - \frac{\zeta \sin \theta}{r_\zeta} (\zeta \partial_\zeta \Omega u^\zeta + \partial_\theta \Omega u^\theta) \\ &\quad - \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi \Phi', \end{aligned} \quad (5)$$

where  $v^\zeta$ ,  $v^\theta$ , and  $v^\varphi$  are the contravariant components of the velocity field  $\mathbf{v} = v^i \mathbf{a}_i$  and  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega(\zeta, \theta)(\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta)$  is the differential angular velocity of the star.  $\rho$ ,  $\Phi$  and  $P$  are the fluid density, gravitational potential and pressure, respectively. Each of these scalar quantities has been expanded as

$$X(r, \theta, \varphi, t) = X_0(r, \theta) + X'(r, \theta, \varphi, t),$$

where  $X_0$  is the hydrostatic component of  $X$  and  $X'$  the wave's associated linear fluctuation. Following Cowling (1941), we neglect the fluctuation of the gravitational potential.

Next, the linearised continuity equation is obtained

$$(\partial_t + \Omega \partial_\varphi) \rho' = - \frac{\zeta^2 \partial_\zeta \rho_0}{r^2 r_\zeta} v^\zeta - \frac{\zeta \partial_\theta \rho_0}{r^2 r_\zeta} v^\theta - \frac{\zeta^2 \rho_0}{r^2 r_\zeta} \left[ \frac{\partial_\zeta (\zeta^2 v^\zeta)}{\zeta^2} + \frac{\partial_\theta (\sin \theta v^\theta)}{\zeta \sin \theta} + \frac{\partial_\varphi v^\varphi}{\zeta \sin \theta} \right]. \quad (6)$$

Then, the linearised energy equation in the adiabatic limit is derived

$$(\partial_t + \Omega \partial_\varphi) \left( \frac{1}{\Gamma_1} \frac{P'}{P_0} - \frac{\rho'}{\rho_0} \right) = \frac{N^2}{\|\mathbf{g}_{\text{eff}}\|^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}_{\text{eff}}, \quad (7)$$

where  $\Gamma_1 = (\partial \ln P_0 / \partial \ln \rho_0)_S$  ( $S$  being the macroscopic entropy) is the adiabatic exponent,  $\mathbf{g}_{\text{eff}} = -\nabla\Phi_0 + \frac{1}{2}\Omega^2\nabla(r^2 \sin^2 \theta) = \nabla P_0 / \rho_0$  is the background effective gravity which includes the centrifugal acceleration and  $N^2$  the squared Brunt–Väisälä frequency (or buoyancy frequency) given by

$$N^2(\zeta, \theta) = \mathbf{g}_{\text{eff}} \cdot \left( -\frac{1}{\Gamma_1} \frac{\nabla P_0}{P_0} + \frac{\nabla \rho_0}{\rho_0} \right). \quad (8)$$

Finally, we expand the wave's velocity and fluctuations on Fourier series both in time and in azimuth

$$\mathbf{v}(\zeta, \theta, \varphi, t) \equiv \sum_{\omega^{\text{in}}, m} \left\{ \mathbf{u}(\zeta, \theta) \exp[i(\omega^{\text{in}} t - m\varphi)] \right\}, \quad (9)$$

$$X'(\zeta, \theta, \varphi, t) \equiv \sum_{\omega^{\text{in}}, m} \left\{ \tilde{X}(\zeta, \theta) \exp[i(\omega^{\text{in}} t - m\varphi)] \right\}, \quad (10)$$

where  $m$  is the azimuthal order and  $\omega^{\text{in}}$  is the wave frequency in an inertial reference frame. In a differentially rotating region, the waves are Doppler-shifted due to the differential rotation so we can define the wave frequency  $\omega$  in the rotating reference frame as

$$\omega(\zeta, \theta) = \omega^{\text{in}} - m\Omega(\zeta, \theta). \quad (11)$$

### 3. Generalised TAR

#### 3.1. Approximation on the stratification profile:

$$N^2(\zeta, \theta) \approx N^2(\zeta)$$

As in Paper I, in order to obtain a separable system of equations when applying the TAR, we assume here that the Brunt–Väisälä frequency  $N^2$  depends mainly on the pseudo-radius  $\zeta$ . This implies also that the hydrostatic pressure  $P_0$  and the hydrostatic density  $\rho_0$  depend mainly on  $\zeta$ . We present the validity domain of this approximation in Sect. 5.1 using two-dimensional ESTER stellar models.

#### 3.2. The TAR with centrifugal acceleration in differentially rotating stars

By assuming the following frequencies hierarchy imposed by the TAR:  $\omega \ll N$  and  $2\Omega \ll N$  (we verify this hierarchy in Sect. 7) which leads to a mostly horizontal velocity equation because of the strong buoyancy restoring force action in the vertical direction ( $|u^r| \ll \{|u^\theta|, |u^\varphi|\}$ ), the approximation  $N^2(\zeta, \theta) \approx N^2(\zeta)$ , the Cowling approximation ( $\Phi' = 0$ ), and the anelastic approximation (acoustic waves are filtered out), we can rewrite accordingly the energy equation (Eq. (7)) and the three components of the momentum equation (Eqs. (3)–(5)). First, we rewrite the energy equation as

$$\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} = \frac{1}{i\omega} \frac{N^2}{g_{\text{eff}}} \frac{\zeta^2}{r^2 r_\zeta} u^r, \quad (12)$$

where we neglect the term  $(1/\Gamma_1)P'/P_0$  in Eq. (7) using the anelastic approximation and we simplify the expression of the squared Brunt–Väisälä frequency (Eq. (8)) using the approximation (3.1). Then, we simplify the radial momentum equation (Eq. (3)) to

$$i\omega \partial_\zeta \tilde{W} + N^2 \zeta^2 \mathcal{A} u^r = 0, \quad (13)$$

where we neglect the term  $(P'/\rho_0^2)\partial_\zeta \rho_0$  thanks to the anelastic approximation and the vertical component of the acceleration

and of the Coriolis acceleration, which are dominated by the buoyancy term since we assume that  $\omega \ll N$  and  $2\Omega \ll N$  within the TAR. Subsequently, the latitudinal component of the momentum equation (Eq. (4)) reduces to

$$i\omega \zeta \mathcal{B} u^\theta - 2\Omega \zeta C u^\varphi + \partial_\theta \tilde{W} = 0, \quad (14)$$

where we neglect the terms involving the vertical wave velocity since  $|u^r| \ll \{|u^\theta|, |u^\varphi|\}$  because of the strong stable stratification. Finally, the azimuthal component of the momentum equation (Eq. (5)) simplifies, for the same reasons, into

$$i\omega \zeta \mathcal{D} u^\varphi + \left( 2\Omega \zeta C + \frac{\sin \theta}{r_\zeta} \partial_\theta \Omega \right) u^\theta - \frac{im}{\sin \theta} \tilde{W} = 0. \quad (15)$$

The coefficients  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ , and  $\mathcal{D}$  are defined in Table 1 and  $\tilde{W} = \tilde{P}/\rho_0$  is the normalised pressure. We thus obtain a system of equations which has the same mathematical form as in the case of: (i) spherically symmetric uniformly rotating (Bildsten et al. 1996; Lee & Saio 1997) and differentially rotating (Mathis 2009) stars, (ii) weakly deformed uniformly rotating (Mathis & Prat 2019) stars and (iii) strongly deformed uniformly rotating (Paper I) stars. We thus still manage to partially decouple the vertical and horizontal components of the velocity. By solving the system formed by Eqs. (14) and (15) we can express  $u^\theta$  and  $u^\varphi$  as a function of  $\tilde{W}$  as follows

$$\begin{aligned} u^\theta(\zeta, x) &= \mathcal{L}_{\omega^{\text{in}}, m}^\theta \left[ \tilde{W}(\zeta, x) \right] \\ &= -i \frac{1}{\zeta} \frac{1}{\omega(\zeta, x)} \frac{1}{\mathcal{B}(\zeta, x)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &\quad \times \left[ \left( 1-x^2 \right) \left( 1 + \frac{\nu^2(\zeta, x) \mathcal{C}^2(\zeta, x) / \mathcal{B}(\zeta, x) + \mathcal{F}(\zeta, x)}{\mathcal{E}(\zeta, x) \mathcal{B}(\zeta, x) - \mathcal{F}(\zeta, x)} \right) \partial_x \right. \\ &\quad \left. + m \frac{\nu(\zeta, x) \mathcal{C}(\zeta, x)}{\mathcal{E}(\zeta, x) - \mathcal{F}(\zeta, x)} \right] \tilde{W}, \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^\varphi(\zeta, x) &= \mathcal{L}_{\omega^{\text{in}}, m}^\varphi \left[ \tilde{W}(\zeta, x) \right] \\ &= \frac{1}{\zeta} \frac{1}{\omega(\zeta, x)} \frac{1}{\mathcal{E}(\zeta, x) - \mathcal{F}(\zeta, x)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &\quad \times \left[ \left( 1-x^2 \right) \left( \frac{\nu(\zeta, x) \mathcal{C}(\zeta, x)}{\mathcal{B}(\zeta, x)} + \frac{\mathcal{F}(\zeta, x)}{\nu(\zeta, x) \mathcal{C}(\zeta, x)} \right) \partial_x + m \right] \tilde{W}, \quad (17) \end{aligned}$$

where  $\mathcal{E}$  and  $\mathcal{F}$  are defined in Table 1,  $x = \cos \theta$  is the reduced latitudinal coordinate and

$$\nu(\zeta, \theta) = \frac{2\Omega(\zeta, \theta)}{\omega(\zeta, \theta)}, \quad (18)$$

is the spin parameter.

The structure of the new equations that we obtain in the spheroidal differentially rotating case is similar to the one with uniform rotation (Paper I). But we can point out two major differences. First, the wave frequency  $\omega$  and the spin parameter  $\nu$  are no longer uniform but they now depend on the pseudo-radius  $\zeta$  and the reduced latitudinal coordinate  $x$ . That is why it is more convenient to index the operators and the variables by  $\omega^{\text{in}}$  (independent of  $\zeta$  and  $\theta$ ) instead of using the spin parameter  $\nu$  as in Paper I. Second, a new coefficient  $\mathcal{F}$  is involved in the derivation of the dynamics of GIWs that models the action of differential rotation.

**Table 1.** Terms involved in the derivation of the generalised Laplace tidal equation in the general case of spheroidal geometry and in the particular case of spherical geometry with differential rotation.

Terms	Spheroidal	Spherical
$\mathcal{A}$	$\frac{1}{r^2 r_\zeta}$	$\frac{1}{\zeta^2}$
$\mathcal{B}$	$\frac{r^2 + (1 - x^2)r_x^2}{r^2 r_\zeta}$	1
$\mathcal{C}$	$\frac{-(1 - x^2)r_x + rx}{rr_\zeta}$	$x$
$\mathcal{D}$	$\frac{1}{r_\zeta}$	1
$\mathcal{E}$	$\mathcal{D} - \frac{v^2 C^2}{\mathcal{B}}$	$1 - v^2 x^2$
$\mathcal{F}$	$-\frac{v}{\omega} \frac{C\mathcal{D}}{\mathcal{B}} (1 - x^2) \partial_x \Omega$	$-\frac{vx}{\omega} (1 - x^2) \partial_x \Omega$

#### 4. Dynamics of low-frequency gravito-inertial waves

We now derive the generalised Laplace tidal equation for the normalised pressure  $\bar{W}$ , which allows us to compute the frequencies and periods of low-frequency GIWs and to build the corresponding seismic diagnostics. Applying the anelastic approximation and the approximation  $N^2(\zeta, \theta) \approx N^2(\zeta)$  in the continuity equation (Eq. (6)) simplifies it into

$$\zeta \partial_\zeta \rho_0 u^\zeta + \rho_0 \left[ \frac{\partial_\zeta (\zeta^2 u^\zeta)}{\zeta} + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta u^\theta) - \frac{im}{\sin \theta} u^\varphi \right] = 0. \quad (19)$$

##### 4.1. JWKB approximation

Under the assumption that  $\omega \ll N$ , each scalar field and each component of  $\mathbf{u}$  can be expanded using the two-dimensional Jeffreys-Wentzel-Kramers-Brillouin JWKB approximation (Fröman & Fröman 1965). In this case, the spatial structure of the waves can be described by the product of a rapidly oscillating plane-like wave function in the pseudo-radial direction multiplied by a slowly varying envelope:

$$\bar{W}(\zeta, \theta) = \sum_k \left\{ w_{\omega^{\text{in}} km}(\zeta, \theta) \frac{A_{\omega^{\text{in}} km}}{k_{V; \omega^{\text{in}} km}^{1/2}} \exp \left[ i \int^\zeta k_{V; \omega^{\text{in}} km} d\zeta \right] \right\}, \quad (20)$$

$$u^j(\zeta, \theta) = \sum_k \left\{ \hat{u}_{\omega^{\text{in}} km}^j(\zeta, \theta) \frac{A_{\omega^{\text{in}} km}}{k_{V; \omega^{\text{in}} km}^{1/2}} \exp \left[ i \int^\zeta k_{V; \omega^{\text{in}} km} d\zeta \right] \right\}, \quad (21)$$

with  $j \equiv \{\zeta, \theta, \varphi\}$ ,  $k$  is the index of a latitudinal eigenmode (cf. Sect. 4.4) and  $A_{\omega^{\text{in}} km}$  is the amplitude of the wave. Substituting the expansion given in Eqs. (20) and (21) into Eqs. (13), (16) and (17), the final pseudo-radial, latitudinal and azimuthal components of the velocity are obtained:

$$\hat{u}_{\omega^{\text{in}} km}^\zeta(\zeta, x) = \frac{k_{V; \omega^{\text{in}} km}(\zeta)}{N^2(\zeta)} \frac{\omega_{km}(\zeta, x)}{\zeta^2 \mathcal{A}(\zeta, x)} w_{\omega^{\text{in}} km}(\zeta, x), \quad (22)$$

$$\hat{u}_{\omega^{\text{in}} km}^\theta(\zeta, x) = \mathcal{L}_{\omega^{\text{in}} m}^\theta [w_{\omega^{\text{in}} km}(\zeta, x)], \quad (23)$$

$$\hat{u}_{\omega^{\text{in}} km}^\varphi(\zeta, x) = \mathcal{L}_{\omega^{\text{in}} m}^\varphi [w_{\omega^{\text{in}} km}(\zeta, x)]. \quad (24)$$

##### 4.2. Approximation: $\mathcal{A}(\zeta, \theta) \approx \mathcal{A}(\zeta)$

As in Paper I, to be able to introduce the eigenvalues  $\Lambda_{\omega^{\text{in}} km}$  which depends only on  $\zeta$  and derive the generalised Laplace tidal equation, we have to do a partial separation between the pseudo-radial and latitudinal variables in the pseudo-radial component of the velocity (Eq. (22)). So, we have to assume that the coefficient  $\mathcal{A}$  depends mainly on the pseudo-radius  $\zeta$ . The validity domain of this approximation is presented in Sect. 5.1 using two-dimensional ESTER stellar models. Unlike the uniformly rotating case (Paper I), this assumption alone is insufficient to partially separate the variables in Eq. (22) in the differentially rotating case, so it is mandatory to assume a third approximation.

##### 4.3. Approximation: $\Omega(\zeta, \theta) \approx \Omega(\zeta)$

The wave frequency in the rotating frame (Eq. (11)) depends on  $\zeta$  and  $\theta$ . This dependency comes from the differential rotation  $\Omega(\zeta, \theta)$ . Therefore, in order to preform the partial separation of variables in Eq. (22), the angular velocity  $\Omega$  should have a dependency only on  $\zeta$ . We examine in detail the validity of this approximation for two-dimensional ESTER stellar models in Sect. 5.1.1.

##### 4.4. Generalised Laplace tidal equation

Substituting the expansion given in Eqs. (20) and (21) into Eqs. (13), (16) and (17), then replacing them into the continuity equation (Eq. (19)) we obtain the generalised Laplace tidal operator (GLTO)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\omega^{\text{in}} m} = \omega \partial_x \left[ \frac{1}{\omega} \frac{1}{\mathcal{B}(\mathcal{E} - \mathcal{F})} \left( \mathcal{E} + \frac{v^2 C^2}{\mathcal{B}} \right) (1 - x^2) \partial_x \right] \\ - \frac{m\mathcal{F}}{vC(\mathcal{E} - \mathcal{F})} \partial_x + m\omega \partial_x \left( \frac{vC}{\omega \mathcal{B}(\mathcal{E} - \mathcal{F})} \right) - \frac{m^2}{(\mathcal{E} - \mathcal{F})(1 - x^2)}, \end{aligned} \quad (25)$$

thus the generalised Laplace tidal equation (GLTE) for the normalised pressure  $w_{\omega^{\text{in}} km}$  is written as

$$\mathcal{L}_{\omega^{\text{in}} m} [w_{\omega^{\text{in}} km}] = -\Lambda_{\omega^{\text{in}} km}(\zeta) w_{\omega^{\text{in}} km}, \quad (26)$$

where  $\Lambda_{\omega^{\text{in}} km}$  are the eigenvalues deduced from the following dispersion relation:

$$k_{V; \omega^{\text{in}} km}^2(\zeta) = \frac{N^2(\zeta) \mathcal{A}(\zeta)}{\omega_{km}^2(\zeta)} \Lambda_{\omega^{\text{in}} km}(\zeta), \quad (27)$$

and  $w_{\omega^{\text{in}} km}$  the generalised Hough functions (eigenfunctions) of the GLTE. We choose to define our latitudinal ordering number  $k$  to enumerate, for each  $(\omega^{\text{in}}, m)$ , the infinite set of solutions as in Lee & Saio (1997), Mathis (2009) and Mathis & Prat (2019).

The GLTO (Eq. (25)) reduces to the Laplace tidal operator in the case of a uniformly rotating deformed star (Paper I). In this case,  $\omega$  and  $v$  are constants so we can take them out of the derivatives and  $\mathcal{F} = 0$ ; thus we obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{vm} = \partial_x \left[ \frac{1}{\mathcal{B}} \left( 1 + \frac{v^2 C^2}{\mathcal{E} \mathcal{B}} \right) (1 - x^2) \partial_x \right] \\ + \left( mv \partial_x \left( \frac{C}{\mathcal{E} \mathcal{B}} \right) - \frac{m^2}{\mathcal{E}(1 - x^2)} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Furthermore, the GLTO (Eq. (25)) reduces to the Laplace tidal operator derived by Mathis (2009) in the case of a spherically differentially rotating star. In this case, we can replace coefficients



$\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$ , and  $\mathcal{E}$  by their analytical expressions in the particular case of a spherical geometry presented in Table 1 of Paper I, so the new coefficient  $\mathcal{F}$  defined here can be written in this particular case as

$$\mathcal{F}(\zeta, x) = -\frac{v x}{\omega}(1-x^2)\partial_x \Omega, \quad (29)$$

thus we obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\omega^{in}m} = \omega \partial_x \left[ \frac{1-x^2}{\omega \mathcal{G}} \partial_x \right] - \frac{m \partial_x \Omega}{\omega \mathcal{G}} (1-x^2) \partial_x \\ + \left( m \omega \partial_x \left( \frac{v x}{\omega \mathcal{G}} \right) - \frac{m^2}{\mathcal{G}(1-x^2)} \right), \end{aligned} \quad (30)$$

with

$$\mathcal{G}(\zeta, x) = \mathcal{E}(\zeta, x) - \mathcal{F}(\zeta, x) = 1 - v^2 x^2 + \frac{v x}{\omega}(1-x^2)\partial_x \Omega. \quad (31)$$

#### 4.5. Asymptotic frequency and period spacing of low-frequency GIWs

By substituting the dispersion relation (Eq. (27)) into the following quantisation condition in the vertical direction defined by [Unno et al. \(1989\)](#), [Gough \(1993\)](#), and [Christensen-Dalsgaard \(1997\)](#) and used in Paper I

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} k_{V;\omega^{in}nkm} d\zeta = (n + 1/2)\pi, \quad (32)$$

where  $\zeta_1$  and  $\zeta_2$  are the turning points of the Brunt–Väisälä frequency  $N$  and  $n$  is the radial order, we compute numerically the asymptotic frequencies of low-frequency GIWs in deformed differentially rotating stars in the inertial frame. We describe in detail the used numerical method in Sect. 6. In the case of a weak differential rotation, we can extract, analytically, the expression of the asymptotic frequencies in the rotating frame

$$\omega_{nkm} = \frac{\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} N(\zeta) \sqrt{\mathcal{A}(\zeta) \Lambda_{\omega^{in}km}(\zeta)} d\zeta}{(n + 1/2)\pi}, \quad (33)$$

with

$$\omega_n^{in} = \omega_{nkm}^{in} = \omega_{nkm} + m\Omega_{av}, \quad (34)$$

where  $\Omega_{av}$  is here the averaged rotation. Then by applying a first-order Taylor development following [Bouabid et al. \(2013\)](#), we can generalise his expression of the corresponding period spacing obtained in the spherical case

$$\Delta P_{km} = P_{nkm} - P_{n-1km} \approx \frac{2\pi^2}{\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} N \sqrt{\mathcal{A} \Lambda_{\omega_{n+1,km}^{in}} d\zeta} (1 + \alpha)}, \quad (35)$$

with

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} N \sqrt{\mathcal{A} \Lambda_{\omega_{n,km}^{in}} \frac{d \ln \Lambda_{\omega_{n,km}^{in}}}{d \ln \omega_{n,km}^{in}} d\zeta}}{\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} N \sqrt{\mathcal{A} \Lambda_{\omega_{n,km}^{in}} d\zeta}}. \quad (36)$$

## 5. Application to rapidly and differentially rotating early-type stars

As in Paper I, we use here also ESTER models ([Espinosa Lara & Rieutord 2013](#)) to implement our equations. We use  $3 M_{\odot}$  stellar models with a hydrogen mass fraction in the core  $X_c = 0.7$  rotating at the equator at [0%, 90%] of the Keplerian break-up rotation rate.

### 5.1. Domain of validity of the generalised TAR

We study, within the framework of ESTER models, the validity domain of the three approximations (3.1), (4.2) and (4.3) that are necessary to build the TAR in the case of rapidly differentially rotating deformed bodies:

$$N^2(\zeta, \theta) \approx N^2(\zeta), \quad (37)$$

$$\mathcal{A}(\zeta, \theta) \approx \mathcal{A}(\zeta), \quad (38)$$

$$\Omega(\zeta, \theta) \approx \Omega(\zeta). \quad (39)$$

The validity of the approximations (37) and (38) is well discussed in Paper I (the  $N^2$  and  $\mathcal{A}$  profiles are the same in the uniformly and differentially rotating cases). Here, we focus on determining the validity domain of the approximation (39) by applying the same method used to evaluate the other two assumptions that we recall here.

#### 5.1.1. Validity of $\Omega(\zeta, \theta) \approx \Omega(\zeta)$

To visualise the problem, first we illustrate in Fig. 2 the function  $\Omega(\zeta, \theta)$  computed with an ESTER model ( $3 M_{\odot}$ ,  $X_c = 0.7$ ) rotating at the equator at  $\Omega/\Omega_K = 20\%$ . We can see that the angular velocity is equal to 14.66  $\mu\text{Hz}$  at the core, and at the surface we get 11.41  $\mu\text{Hz}$  at the pole and 12.22  $\mu\text{Hz}$  at the equator. Then, to evaluate the committed error by adopting the approximation

$$\Omega(\zeta, \theta) \approx \Omega(\zeta), \quad (40)$$

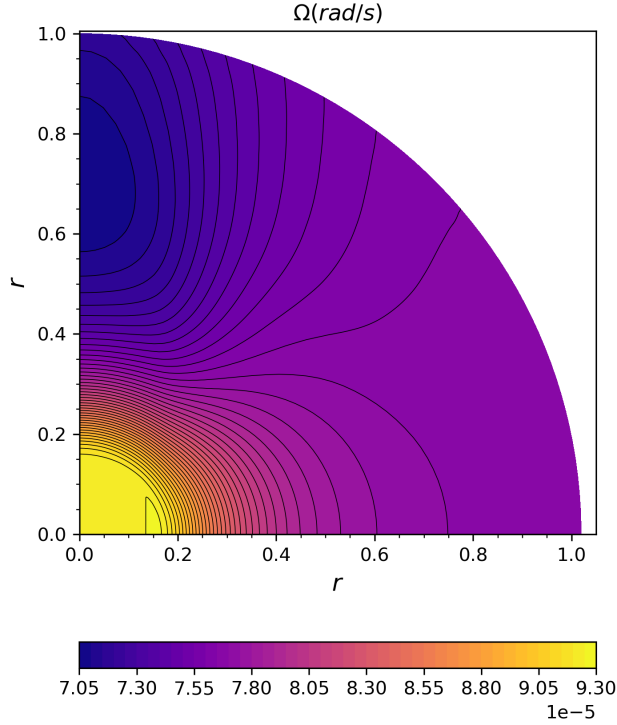
we represent in Fig. 3 the angular velocity profile as a function of the pseudo-radius  $\zeta$  for different values of the colatitude  $\theta_f$ , at a fixed rotation rate at the equator  $\Omega = 0.2\Omega_K$ . Visually, we can notice that the latitudinal gradient of the angular velocity is less important than the radial gradient. In order to confirm this observation, we show, in the bottom panels, the corresponding relative error  $\delta\Omega_{\theta_f}(\zeta)$  between the exact value  $\Omega(\zeta, \theta_f)$  given by the model and the approximated model  $\Omega_{\text{approx}}(\zeta)$  (the weighted average of the exact value over the colatitude  $\theta$ ,  $\bar{\Omega}(\zeta)$ ). We define these quantities as follows:

$$\delta\Omega_{\theta_f}(\zeta) = \frac{\Omega_{\text{approx}}(\zeta) - \Omega(\zeta, \theta_f)}{\Omega(\zeta, \theta_f)}, \quad (41)$$

with

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{approx}}(\zeta) = \bar{\Omega}(\zeta) &= \frac{\int_0^{\pi/2} \Omega(\zeta, \theta) \sin \theta d\theta}{\int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta} \\ &= \int_0^{\pi/2} \Omega(\zeta, \theta) \sin \theta d\theta, \end{aligned} \quad (42)$$

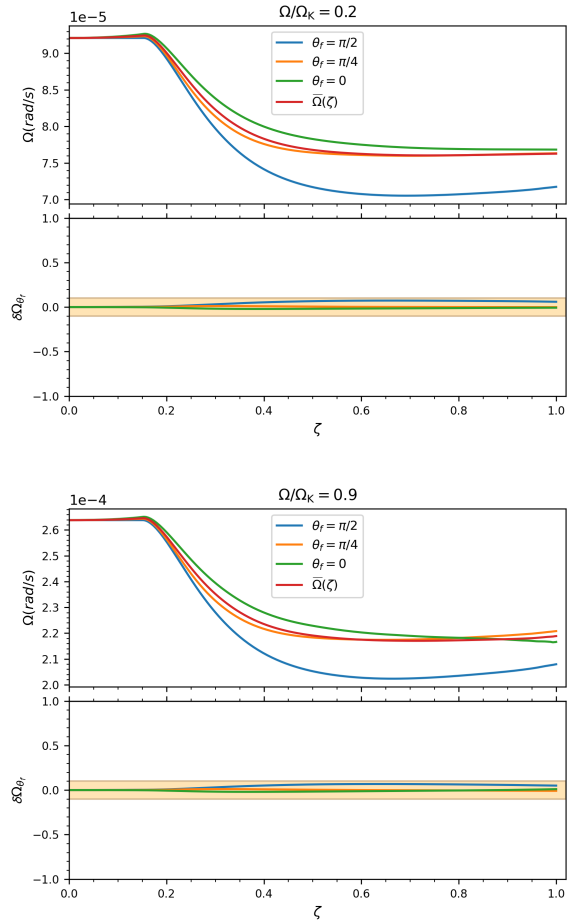
where  $\theta_f$  is a fixed value of the colatitude  $\theta$  and we used the symmetry propriety of  $\Omega$  with respect to the equator. We can conclude that this approximation is valid with a level of confidence of 90% for all pseudo-radii  $\zeta$  and for all rotation rates  $\Omega/\Omega_K \in [0\%, 90\%]$  since the error rate is always lower than the maximal error rate fixed to 10%. We also recall here that within the physics treated in the ESTER code the differential rotation results from the baroclinic meridional circulation ([Zahn 1992](#); [Maeder & Zahn 1998](#); [Mathis & Zahn 2004](#); [Rieutord 2006](#)) and an isotropic viscous transport. A weaker dependence of  $\Omega$  on  $\theta$  can be enforced by horizontal turbulent transport ([Zahn 1992](#); [Maeder 2003](#); [Mathis et al. 2004, 2018](#); [Park et al. 2021](#)) or magnetic fields ([Mestel & Weiss 1987](#)).



**Fig. 2.** Angular velocity profile  $\Omega(\zeta, \theta)$  of an ESTER model ( $3 M_{\odot}$ ,  $X_c = 0.7$ ) rotating at the equator at  $\Omega/\Omega_K = 20\%$  (the isolines are represented in black).

### 5.1.2. Validity domain of the TAR

We determine the validity domain of the three approximations (37)–(39) as a function of the rotation rate and the pseudo-radius by varying systematically the normalised rotation rate of the star  $\Omega/\Omega_K$  and by calculating for each case the associated maximum relative error. Afterwards, we fix a maximum error rate equal to 10% and we deduce the pseudo-radius limit  $\zeta_{\text{limit}}$  where the maximum relative error exceeds this threshold and we decide that the approximations become invalid. Physically, it means that the variation of the structural properties and rotation profile are weak in the latitudinal direction and vary mostly with the pseudo-radius that allows us to build the TAR. The best method in the future to improve the control of the adopted assumptions would be to compute asymptotic frequencies using the latitudinally averaged quantities within the TAR and to compare them to frequencies computed using 2D oscillation codes applied to deformed models (e.g. Ouazzani et al. 2015, 2017; Reese et al. 2021). In Fig. 4, we display the pseudo-radius limit  $\zeta_{\text{limit}}$  as a function of the rotation rate  $\Omega/\Omega_K$  for 3 solar masses ESTER models with  $X_c = 0.7$  and  $X_c = 0.2$ . This curve defines the validity domains of the approximations (37)–(39) which consequently define the validity domain of the TAR. We note that the influence of the hydrogen mass fraction in the core  $X_c$  on the validity domain of the TAR is very weak. It is therefore possible to apply the generalised TAR to differentially rotating early-type stars rotating up to 20% of the Keplerian critical angular velocity. This limit is the same as the one found in Paper I, so the differential rotation have no influence on the validity domain of the TAR. Chemical gradients created near the core along the evolution are not treated in 2D ESTER models yet. Their treatment can be foreseen by adding them ‘by hand’ to explore their effects



**Fig. 3.** Profile of the angular velocity  $\Omega$  and the relative error  $\delta\Omega_{\theta_i}$  of the approximation  $\Omega(\zeta, \theta) \approx \Omega(\zeta)$  as a function of  $\zeta$  at different colatitudes  $\theta_i$  using an ESTER model rotating at the equator at 20% (above) and 90% (below) of the Keplerian break-up rotation rate (the light orange area indicate the margin of error which we allow).

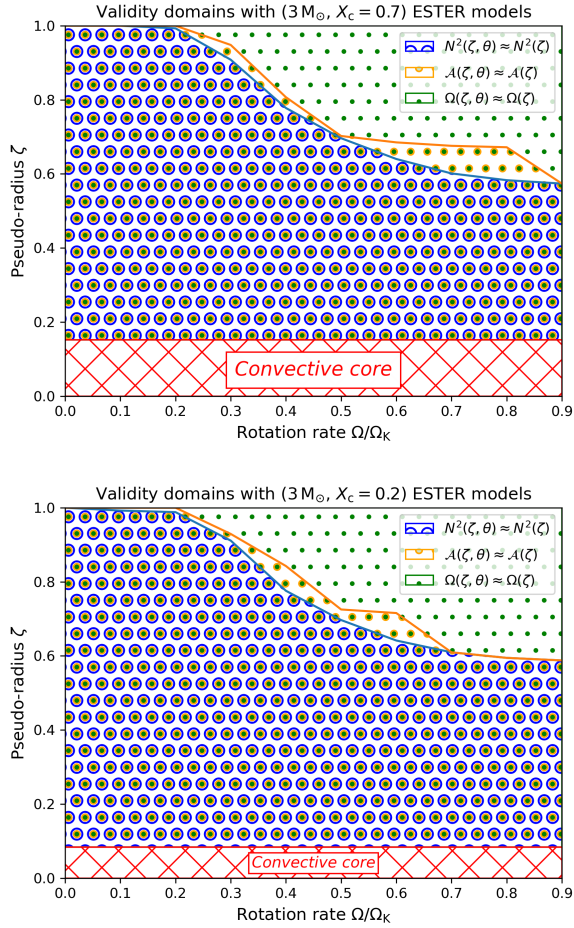
as this has been done for instance for acoustic glitches by Reese et al. (2014, 2021).

### 5.2. Eigenvalues and Hough functions

We solve the GLTE for different pseudo-radii, wave frequency in the inertial frame, and rotation rates within the scope of the defined validity domain using an implementation based on Chebyshev polynomials (Wang et al. 2016) as in Paper I. Here, we are no longer able to calculate the spectrum of the GLTE as a function of the spin parameter  $\nu$  because in the differentially rotating case,  $\nu$  is no longer a constant value but it becomes a function of  $\zeta$  and  $\theta$ . So to make the comparison between the new results and our previous results clear, we define the weighted average of the spin parameter

$$\bar{\nu} = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \nu(\zeta, \theta) \sin \theta d\theta d\zeta. \quad (43)$$

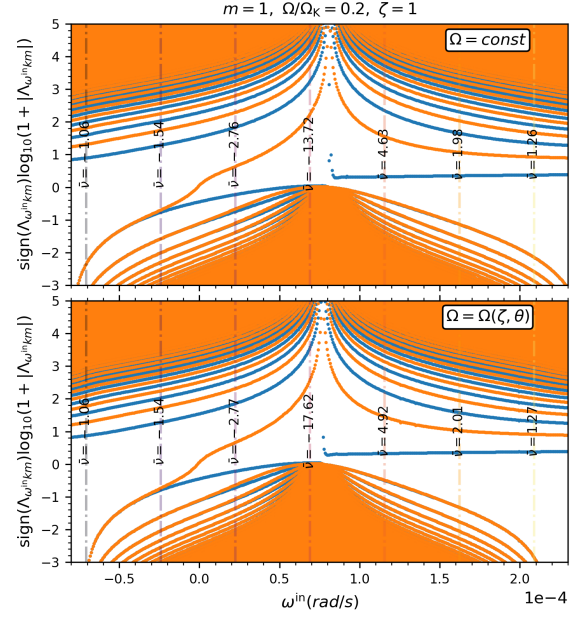
Figure 5 shows the eigenvalues  $\Lambda_{\omega^{in} km}$  as a function of  $\omega^{in}$  for  $m = 1$  and  $\zeta = \zeta_{\text{limit}} = 1$  at  $\Omega/\Omega_K = 0.2$ . Since  $\Omega$  points in the direction of  $\theta = 0$  and the oscillations are proportional to  $e^{i(\omega t - m\varphi)}$ , a prograde (retrograde) oscillation correspond to a



**Fig. 4.** Validity domain of the TAR within the framework of  $3 M_{\odot}$ ,  $X_c = 0.7$  (above) and  $3 M_{\odot}$ ,  $X_c = 0.2$  (below) ESTER models as a function of the rotation rate  $\Omega/\Omega_K$  and the pseudo-radius  $\zeta$  (with 90% degree of confidence).

positive (negative) value of the product  $m\nu$  which depends on the spatial coordinates. This figure reveals that the differential rotation of the star causes at  $\zeta = 1$  a modest gradual shift in the eigenvalues. We recall here the two main families of eigenvalues. The first one being gravity-like solutions ( $\Lambda_{\omega^{in}km} \geq 0$ ). They exist for any value of  $\omega^{in}$  and we attach positive  $k$ 's to them. They correspond to gravity waves ( $g$  modes) modified by rotation. The second one is Rossby-like solutions. They exist only for specific values of wave frequency in the inertial reference frame ( $\omega^{in} \in [\omega_-^{in}, \omega_+^{in}]$ ) and we attach negative  $k$ 's to them. They appear only in rotating stars and they correspond to Rossby modes ( $r$  modes) if they are retrograde and have positive eigenvalues ( $\Lambda_{\omega^{in}km} > 0$ ) and to overstable convective modes if they are prograde and have negative eigenvalues ( $\Lambda_{\omega^{in}km} < 0$ ).

Contrary to the uniformly rotating case we obtain here eigenvalues which depend considerably on the pseudo-radius  $\zeta$  as shown in Fig. 6 where we represent the spectrum of the GLTE as a function of the pseudo-radius at  $\Omega/\Omega_K = 0.2$ ,  $m = 1$  and  $\omega^{in} = 1.12 \times 10^{-4} \text{ rad s}^{-1}$ . More precisely we can see that the differential rotation influence especially the region close to the convective core ( $0.153 \leq \zeta \leq 0.35$ ) where the rotation is maximal and the radial gradient of the angular velocity is the highest (cf. Fig. 2). We can see that this dependency becomes very low

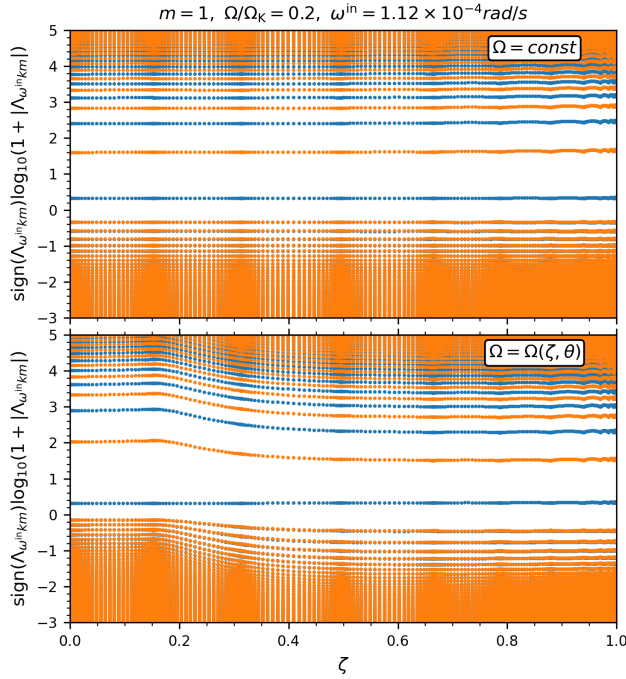


**Fig. 5.** Spectrum of the GLTE as a function of the wave frequency in the inertial frame  $\omega^{in}$  at  $\zeta = 1$  and  $m = 1$  for  $\Omega = 0.2\Omega_K$  in the case of a uniformly rotating star (above) and of a differentially rotating star (below). Blue (respectively, orange) dots correspond to even (respectively, odd) eigenfunctions. The vertical lines correspond to the mean values of the spin parameter  $\bar{\nu}$ .

in the external region  $0.5 \leq \zeta \leq 1$  where we obtain eigenvalues very close to the ones in the uniformly rotating case.

We focus now on the influence of the differential rotation on the generalised Hough functions  $w_{km}$  which varies with the pseudo-radius  $\zeta$  and the horizontal coordinate  $x$ . This dependence is illustrated in Fig. 7 at  $\Omega/\Omega_K = 20\%$  for prograde dipole  $\{k = 0, m = 1\}$  modes with  $\omega^{in} = 10^{-4} \text{ rad s}^{-1}$  and retrograde Rossby  $\{k = -2, m = -1\}$  modes with  $\omega^{in} = -5.5 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$  for four different cases: Fig. 7a represents our starting point where the rotation is uniform (Paper I); in Fig. 7b, we take into account the pseudo-radial differential rotation; in Fig. 7c, we take into account the latitudinal differential rotation and Fig. 7d represents our final point where we take into account the full differential rotation profile. As the pseudo-radius decreases from the surface ( $\zeta = 1$ ) to the edge of the radiative zone ( $\zeta = 0.153$ ), Rossby-like solutions are slightly modified, whereas gravity-like solutions considerably change. We can also see that the major modification comes from the differential rotation gradient along the pseudo-radius  $\zeta$  (Fig. 7b) while the differential rotation according to the colatitude  $\theta$  modifies marginally the gravity-like solutions and has almost no impact on the Rossby-like solution (Fig. 7c). On top of that, we can see that the Hough functions at the surface are not too affected in all the cases and that the strongest variation occur in the interior of the star where the pseudo-radial gradient of the rotation is high.

Overall, we can see clearly in Fig. 7 that the differential rotation strongly influences and modifies the eigenfunctions of the GLTE by introducing a new dependency on the pseudo-radial coordinate  $\zeta$ , whereas in the spherically symmetric uniformly rotating case they were only dependant on the latitudinal coordinate  $\theta$  while they were also slightly dependent on  $\zeta$  in the uniformly rotating deformed case. In fact, the gravity-like and the Rossby-like solutions shift as the distance from the border of



**Fig. 6.** Spectrum of the GLTE as a function of the pseudo-radius for  $m = 1$  and  $\omega^{\text{in}} = 1.12 \times 10^{-4} \text{ rad s}^{-1}$  at  $\Omega/\Omega_K = 0.2$  in the case of a uniformly rotating star (above) and of a differentially rotating star (below). Blue (respectively, orange) dots correspond to even (respectively, odd) Hough functions.

the radiative zone of the star ( $\zeta = 0.153$ ) to its surface ( $\zeta = 1$ ) increases. More specifically, we observe that the gravity-like solutions migrate onwards, away from the equator ( $x = 0$ ), causing a broadening of its shape. This corresponds to the modification of the region of propagation of gravito-inertial waves by the differential rotation (Mathis 2009; Mirouh et al. 2016; Prat et al. 2018). Indeed, since the angular velocity  $\bar{\Omega}(\zeta)$  decreases with the distance to the centre, the equatorial trapping of sub-inertial ( $\bar{\nu} > 1$ ) gravito-inertial modes become less and less important.

## 6. Asymptotic seismic diagnosis

### 6.1. Asymptotic period spacing pattern

In order to compute the period spacing patterns, we adapt the method developed in Henneco et al. (2021) and used in Paper I. First, we calculate for each radial order  $n$  of a given mode ( $k, m$ ), the corresponding asymptotic frequencies in the inertial frame  $\omega_{nkm}^{\text{in}}$  using Eqs. (11) and (33). Then, we can calculate the asymptotic periods in the inertial frame ( $P_{nkm}^{\text{in}} = 2\pi/\omega_{nkm}^{\text{in}}$ ) and the corresponding period spacing which is shown in Fig. 8 for  $\{k = 0, m = 1\}$ ,  $\{k = 1, m = 0\}$ , and  $\{k = 0, m = -1\}$  modes. The periods represented here are calculated for radial orders between  $n = 5$  and  $n = 50$  but the Cowling approximation that we adopted here to develop our formalism is valid only for high radial orders (Bouabid et al. 2013; Ouazzani et al. 2017). That is why we hatched the region with low radial order ( $n < 20$ ), so we can identify where the Cowling approximation is potentially invalid. We find a net decrease in the period spacing  $\Delta P_{nkm}^{\text{in}}$  caused by the differential rotation. The centrifugal and the differential rotation effects are moderately significant when assessed within the validity domain of the generalised TAR nonetheless the global

characteristics of the period spacing pattern are conserved. This is in good agreement with the results obtained by Ouazzani et al. (2017). They computed gravito-inertial modes and their period spacing (represented in Fig. 6 of their article) using the ACOR 2D oscillation code with deformed stellar models (see Ouazzani et al. 2015 for details on their method), which take the centrifugal acceleration into account following the method of deformation of acoustic models by Roxburgh (2006). Ballot et al. (2012) also studied the effect of the centrifugal acceleration on the period spacing. They found, for a sectoral mode ( $k = 0$ ), a discrepancy between the period spacing (represented in Fig. 2 of their article) computed using the spherical TAR and the complete computations using TOP with spheroidal models. They demonstrate that this discrepancy originates in the centrifugal distortion of the 2D models. But for other modes, they do not see a considerable effect of the centrifugal deformation on the period spacing in agreement with our results.

Even though the centrifugal deformation effects predicted by the TAR are weak in intermediate-mass stars, they are theoretically detectable for some radial orders of several modes using observations from TESS (Transiting Exoplanet Survey Satellite; Ricker et al. 2014) and *Kepler* (Paper I). This is why we do not neglect them and we study the differential rotation and the deformation effects simultaneously. To quantify the induced variation and evaluate its detectability, we compute the frequency differences.

### 6.2. Detectability of the differential rotation effect

To evaluate the detectability of the differential rotation effect with space-based photometric observations, we compute first the frequency differences  $\Delta f_{\text{centrifugal}}$  between asymptotic frequencies calculated in the standard TAR ( $\text{TAR}_s$ ) and those calculated in the generalised TAR with a uniform rotation ( $\text{TAR}_{g_u}$ ) and a differential rotation ( $\text{TAR}_{g_d}$ ) through Eq. (33):

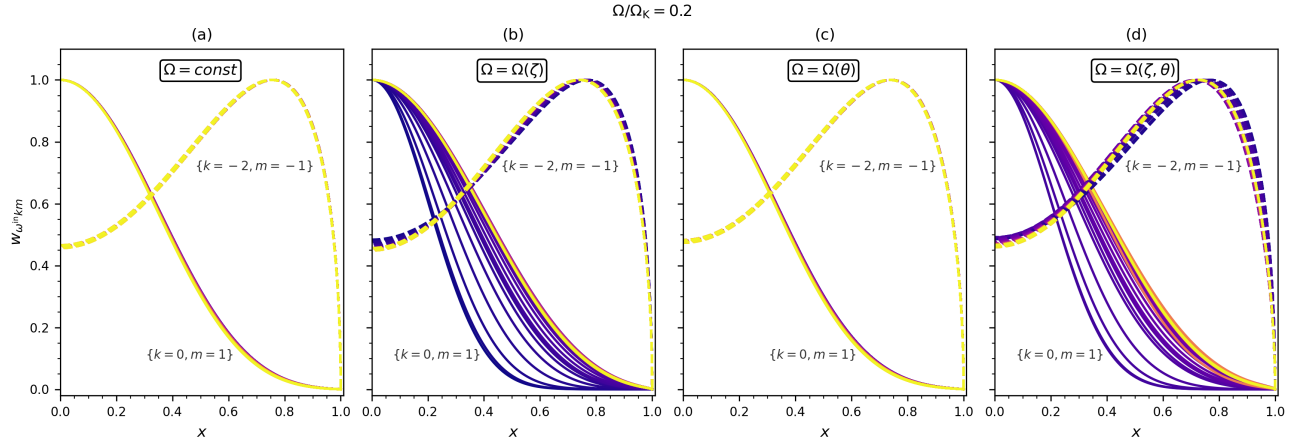
$$\Delta f(n) = |f_{\text{TAR}_s}(n) - f_{\text{TAR}_{g_d}}(n)|, \quad (44)$$

with  $x$  and  $y$  two parameters that allow us to choose the effect to be evaluated:

$$(x, y) \equiv \begin{cases} (g_u, s) & \text{for the effect of the centrifugal acceleration;} \\ (g_u, g_d) & \text{for the effect of the differential rotation;} \\ (g_d, s) & \text{for the two effects simultaneously.} \end{cases}$$

Then, by comparing the obtained frequency differences with the frequency resolutions ( $f_{\text{res}} = 1/T_{\text{obs}}$ ) of *Kepler* and TESS light curves covering quasi-continuously observation times of  $T_{\text{obs}} = 4$  years and  $T_{\text{obs}} = 351$  days, respectively, we can deduce the radial orders  $n$ 's for which the frequency differences are expected to be theoretically detectable. In Fig. 9, we display these results for  $\{k = 0, m = 1\}$ ,  $\{k = 1, m = 0\}$ , and  $\{k = 0, m = -1\}$  modes rotating at  $0.2\Omega_K$ . In this figure, we show the detectability of the centrifugal effect, the differential rotation effect and of the two effects taken simultaneously into account. Unlike the centrifugal effect, we can see clearly that the effect of the differential rotation for these modes is, theoretically, largely detectable for all radial order higher than 15 using TESS and *Kepler* observations (not represented here because its observation time is larger than the one of TESS so the detectability using *Kepler* is guaranteed). The detectability of the centrifugal effect is discussed in details in Paper I.

As we pointed out in Paper I, this is a formal evaluation due to the presence of large correlations between the different parameters of our stellar models. This will mask the effect of the



**Fig. 7.** Generalised Hough functions (normalised) as a function of the horizontal coordinate  $x$  at different pseudo-radii from  $\zeta = 0.153$  (blue) to  $\zeta = 1$  (yellow) at  $\Omega/\Omega_K = 0.2$  for gravity-like solutions  $\{k = 0, m = 1\}$  with  $\omega^{\text{in}} = 10^{-4} \text{ rad s}^{-1}$  corresponding to  $\bar{\nu} = 10.62$  (the solid lines) and Rossby-like solutions  $\{k = -2, m = -1\}$  with  $\omega^{\text{in}} = -5.5 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$  corresponding to  $\bar{\nu} = 6.48$  (the dotted lines) in the case of a star: (a) uniformly rotating, (b) differentially rotating according to the pseudo-radius, (c) differentially rotating according to the colatitude and (d) differentially rotating according to the pseudo-radius and the colatitude.

centrifugal acceleration and the differential rotation in forward asteroseismic modelling analyses, even when it is theoretically detectable:

$$\Delta f_i > f_{\text{res}}, \quad i \equiv \{\text{centrifugal, differential}\}. \quad (45)$$

## 7. Evaluation of the terms hierarchy imposed by the TAR within differentially rotating deformed stars

The hierarchy of terms imposed by the TAR can be summarised by the following frequency hierarchy:

$$2\Omega \ll N, \quad (46)$$

$$\omega \ll N, \quad (47)$$

which ensures the other hierarchies. Using the Brunt–Väisälä frequency and rotation profiles from ESTER models and using the asymptotic frequencies calculated in Sect. 6, we compare these frequencies and we discuss whether the TAR is still valid in differentially rotating deformed stars as in Paper I.

### 7.1. The strong stratification assumption: $2\Omega \ll N$

We evaluate the term  $N/2\Omega$  using  $3 M_\odot$ ,  $X_c = 0.7$  ESTER models for rotation rates  $\Omega/\Omega_K \in [0.1, 0.9]$ . As shown in Fig. 10, the strong stratification assumption is valid only in the radiative zone away from the border between the convective core and the radiative envelope ( $\zeta \geq 0.2$ ) at  $\Omega/\Omega_K \leq 0.2$ . Beyond this critical value, the Brunt–Väisälä frequency and the frequency of rotation have a close order of magnitude so the strong stratification approximation is no longer valid.

### 7.2. The low frequency assumption: $\omega \ll N$

We evaluate the term  $N/\omega$  using the asymptotic frequencies for  $\{k = 0, m = 1\}$ ,  $\{k = 1, m = 0\}$ , and  $\{k = 0, m = -1\}$  modes calculated in Sect. 6. As shown in Fig. 11, the low frequency assumption is valid in all the space domain for the  $\{k = 0, m = 1\}$  mode only for high radial orders ( $n > 20$ ). Below this critical value, the Brunt–Väisälä frequency and the wave frequency can

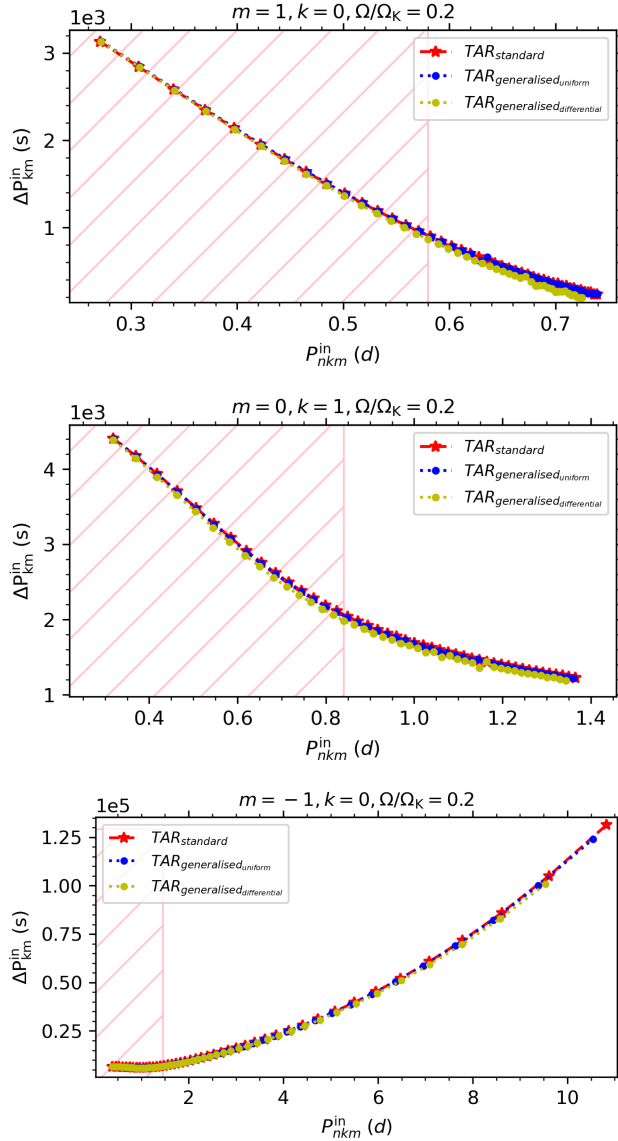
have a very close order of magnitude near the transition layer between the convective core and the radiative envelope. But far from this interface, the low frequency approximation is valid for all the modes.

## 8. Discussion and conclusions

This work is a continuation of our previous study where we generalised the TAR in the case of strongly deformed, rapidly and uniformly rotating stars and planets. In this perspective, we study the possibility of carrying out a new generalisation of the TAR that abandons the assumption of uniform rotation and takes into account the radial and latitudinal differential rotation. We approached this exploration by deriving the generalised Laplace Tidal equation in a spheroidal coordinate system. We relied mainly on two assumptions that will define the validity domain of the generalised TAR (Paper I). The equation that we derive has a similar form to the one that is obtained when the TAR is applied to weakly rotating spherical stars (Lee & Saio 1997), differentially rotating spherical stars (Mathis 2009; Van Reeth et al. 2018), moderately rotating weakly deformed stars (Mathis & Prat 2019; Henneco et al. 2021) and uniformly rotating strongly deformed stars (Paper I). So with this new formalism, we can study GIWs in the radiative region of all types of stars and planets.

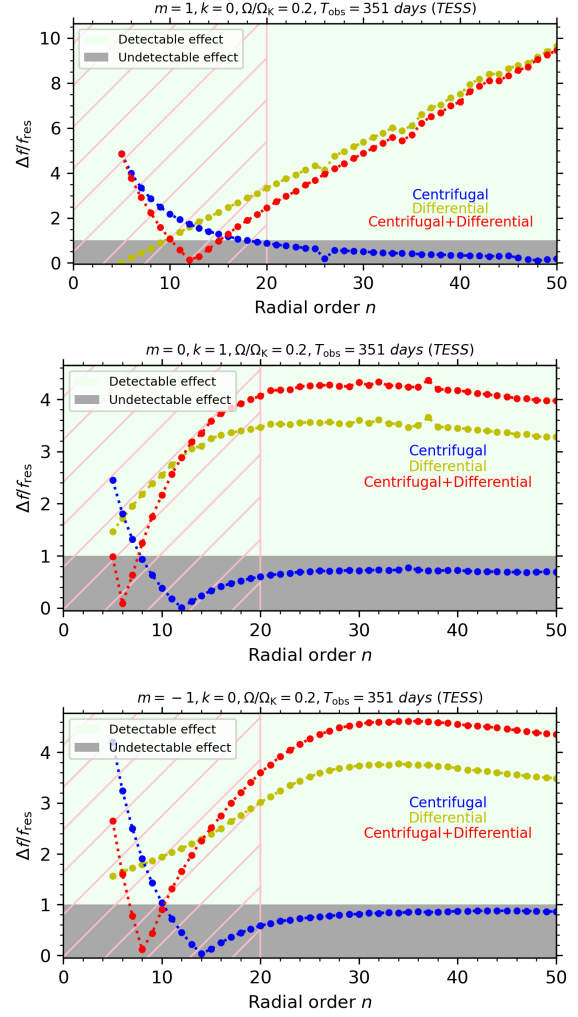
We apply this general formalism to rapidly and differentially rotating early-type stars using 2D ESTER models ( $M = 3 M_\odot$ ,  $X_c = 0.7$ ) where we found that the signature of the differential rotation effect in the period spacing patterns is stronger than the signature of the centrifugal effect for the  $\{k = 0, m = 1\}$  mode at  $\Omega/\Omega_K = 20\%$ , typically up to a factor twenty. This is caused essentially by the presence of a strong pseudo-radial  $\Omega$ -gradients in stellar interior of early-type stars. This new generalisation of the TAR can be used to study the dissipation of stellar and planetary tides induced by low-frequency GIWs in rapidly and differentially rotating deformed stars and planets and the angular momentum transport with a formalism that can be directly implemented in ESTER models.

The next step will be the inclusion of the magnetic field in a non-perturbative way within the generalised TAR formalism.

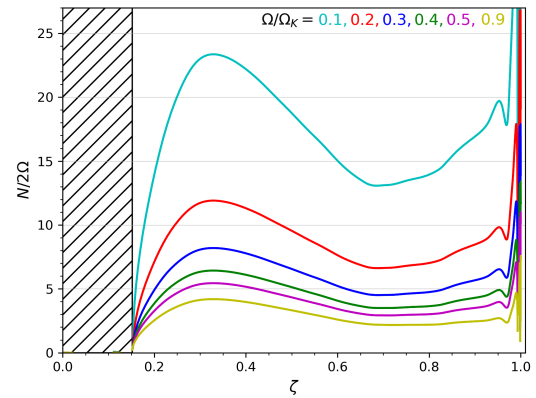


**Fig. 8.** Period spacing pattern in the inertial frame computed for  $\{k = 0, m = 1\}$  (top)  $\{k = 1, m = 0\}$  (middle),  $\{k = 0, m = -1\}$  (bottom) modes at  $\Omega/\Omega_K = 20\%$  in a spherical (red) and a deformed (blue) star uniformly rotating (at the weighted mean of the rotation rate  $\bar{\Omega} = 12.86 \mu\text{Hz}$ ) and in a deformed star differentially rotating (yellow). The hatched pink area indicates where the Cowling approximation is potentially invalid. (The fluctuations in the period spacing pattern are caused by the numerical noise which is introduced by the numerical derivatives of the mapping with respect to  $\zeta$  and  $\theta$  used in the resolution of the GLTE.)

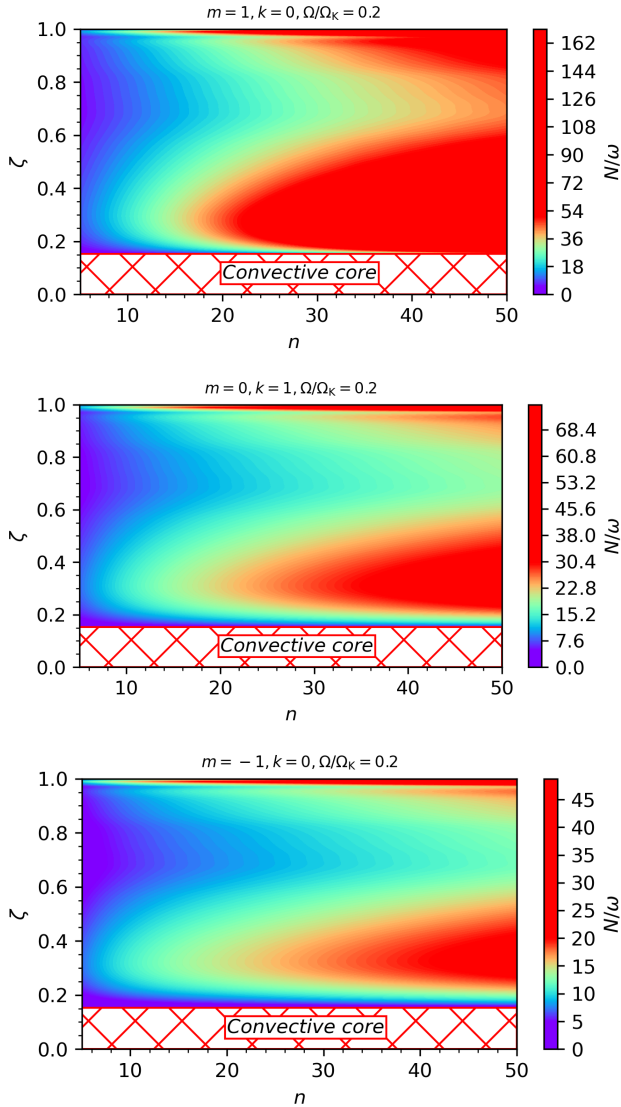
So far, [Prat et al. \(2019, 2020\)](#) and [Van Beeck et al. \(2020\)](#) have focused on the case where magnetic fields are weak enough to be treated within a perturbative treatment to study the effects of a magnetic field on the seismic parameters of  $g$  modes which become magneto-gravito inertial modes ([Mathis & de Brye 2011, 2012](#)). So a possible follow-up of this work (Paper III) is to take into account the stellar magnetic fields and generalise the TAR framework to the case of differentially rotating strongly deformed magnetic stars.



**Fig. 9.** Detectable radial orders  $n$  for  $\{k = 0, m = 1\}$  (top)  $\{k = 1, m = 0\}$  (middle),  $\{k = 0, m = -1\}$  (bottom) modes at a rotation rate  $\Omega/\Omega_K = 20\%$  based on the frequency resolution of TESS. Blue, yellow and red dots represent respectively the centrifugal effect, the differential rotation effect and the sum of the two effects (the hatched pink area indicates where the Cowling approximation is potentially invalid).



**Fig. 10.**  $N/2\Omega$  term as a function of the pseudo-radius  $\zeta$  at different rotation rates  $\Omega/\Omega_K$  (the hatched area represents the convective region of the star).



**Fig. 11.**  $N/\omega$  term as a function of the pseudo-radius  $\zeta$  and the radial order  $n$  for the  $\{k = 0, m = 1\}$  (top),  $\{k = 1, m = 0\}$  (middle) and  $\{k = 0, m = -1\}$  (bottom) modes at  $\Omega/\Omega_K = 20\%$ .

**Acknowledgements.** We thank the referee for their constructive comments and suggestions that allow us to improve our article. We thank the ESTER code developers for their efforts and for making their codes publicly available. We are also grateful to Pr. C. Aerts who kindly commented on the manuscript and suggested improvements. H.D., V.P. and S.M. acknowledge support from the European Research Council through ERC grant SPIRE 647383. H.D. and S.M. acknowledge support from the CNES PLATO grant at CEA/DAP. TVR gratefully acknowledges support from the Research Foundation Flanders (FWO) under grant agreement No. 12ZB620N.

## References

Aerts, C. 2021, *Rev. Mod. Phys.*, **93**, 015001  
Aerts, C., Mathis, S., & Rogers, T. M. 2019, *ARA&A*, **57**, 35  
Ballot, J., Lignières, F., Reese, D. R., & Rieutord, M. 2010, *A&A*, **518**, A30  
Ballot, J., Lignières, F., Prat, V., Reese, D. R., & Rieutord, M. 2012, in *Progress in Solar/Stellar Physics with Helio- and Asteroseismology*, eds. H. Shibahashi, M. Takata, & A. E. Lynas-Gray, *ASP Conf. Ser.*, **462**, 389  
Beck, P. G., Montalbán, J., Kallinger, T., et al. 2012, *Nature*, **481**, 55  
Beck, P. G., Hambleton, K., Vos, J., et al. 2014, *A&A*, **564**, A36  
Beck, P. G., Kallinger, T., Pavlovski, K., et al. 2018, *A&A*, **612**, A22

Bedding, T. R., Murphy, S. J., Colman, I. L., & Kurtz, D. W. 2015, *Eur. Phys. J. Web Conf.*, **101**, 01005  
Bildsten, L., Ushomirsky, G., & Cutler, C. 1996, *ApJ*, **460**, 827  
Bonazzola, S., Gourgoulhon, E., & Marck, J.-A. 1998, *Phys. Rev. D*, **58**, 104020  
Borucki, W., Koch, D., Batalha, N., et al. 2009, in *Transiting Planets*, eds. F. Pont, D. Sasselov, & M. J. Holman, *IAU Symp.*, **253**, 289  
Bouabid, M. P., Dupret, M. A., Salmon, S., et al. 2013, *MNRAS*, **429**, 2500  
Buysschaert, B., Aerts, C., Bowman, D. M., et al. 2018, *A&A*, **616**, A148  
Cantiello, M., Mankovich, C., Bildsten, L., Christensen-Dalsgaard, J., & Paxton, B. 2014, *ApJ*, **788**, 93  
Ceillier, T., Eggenberger, P., García, R. A., & Mathis, S. 2013, *A&A*, **555**, A54  
Charbonnel, C., Decressin, T., Amard, L., Palacios, A., & Talon, S. 2013, *A&A*, **554**, A40  
Christensen-Dalsgaard, J. 1997, *Stellar Oscillations* (CiteSeerX)  
Christophe, S., Ouazzani, R. M., Ballot, J., et al. 2018, in *SF2A-2018: Proceedings of the Annual Meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics*, eds. P. Di Matteo, F. Billebaud, F. Herpin, et al., 129  
Cowling, T. G. 1941, *MNRAS*, **101**, 367  
Decressin, T., Mathis, S., Palacios, A., et al. 2009, *A&A*, **495**, 271  
Deheuvels, S., García, R. A., Chaplin, W. J., et al. 2012, *ApJ*, **756**, 19  
Deheuvels, S., Doğan, G., Goupil, M. J., et al. 2014, *A&A*, **564**, A27  
Deheuvels, S., Ballot, J., Beck, P. G., et al. 2015, *A&A*, **580**, A96  
Deheuvels, S., Ballot, J., Eggenberger, P., et al. 2020, *A&A*, **641**, A117  
Dhouib, H., Prat, V., Van Reeth, T., & Mathis, S. 2021, *A&A*, **652**, A154  
Di Mauro, M. P., Ventura, R., Cardini, D., et al. 2016, *ApJ*, **817**, 65  
Dintrans, B., & Rieutord, M. 2000, *A&A*, **354**, 86  
Dintrans, B., Rieutord, M., & Valdetarro, L. 1999, *J. Fluid Mech.*, **398**, 271  
Eckart, C. 1960, *Hydrodynamics of Oceans and Atmospheres* (Oxford: Pergamon Press)  
Eggenberger, P., Montalbán, J., & Miglio, A. 2012, *A&A*, **544**, L4  
Espinosa Lara, F., & Rieutord, M. 2013, *A&A*, **552**, A35  
Fröman, N., & Fröman, P. O. 1965, *JWKB Approximation: Contributions to the Theory* (Amsterdam: North-Holland Publishing Company)  
Gallet, F., & Bouvier, J. 2015, *A&A*, **577**, A98  
Gehan, C., Mosser, B., Michel, E., Samadi, R., & Kallinger, T. 2018, *A&A*, **616**, A24  
Gough, D. 1993, in *Les Houches Session XLVII*, eds. J. P. Zahn, & J. Zinn-Justin (Amsterdam: Elsevier), 399  
Guo, Z., Gies, D. R., & Matson, R. A. 2017, *ApJ*, **851**, 39  
Henneco, J., Van Reeth, T., Prat, V., et al. 2021, *A&A*, **648**, A97  
Kallinger, T., Weiss, W. W., Beck, P. G., et al. 2017, *A&A*, **603**, A13  
Keen, M. A., Bedding, T. R., Murphy, S. J., et al. 2015, *MNRAS*, **454**, 1792  
Kurtz, D. W., Saio, H., Takata, M., et al. 2014, *MNRAS*, **444**, 102  
Lee, U., & Baraffe, I. 1995, *A&A*, **301**, 419  
Lee, U., & Saio, H. 1987, *MNRAS*, **225**, 643  
Lee, U., & Saio, H. 1997, *ApJ*, **491**, 839  
Li, G., Van Reeth, T., Bedding, T. R., Murphy, S. J., & Antoci, V. 2019, *MNRAS*, **487**, 782  
Li, G., Van Reeth, T., Bedding, T. R., et al. 2020, *MNRAS*, **491**, 3586  
Lignières, F., Rieutord, M., & Reese, D. 2006, *A&A*, **455**, 607  
Maeder, A. 2003, *A&A*, **399**, 263  
Maeder, A. 2009, *Physics, Formation and Evolution of Rotating Stars* (Springer), 827  
Maeder, A., & Meynet, G. 2000, *A&A*, **361**, 159  
Maeder, A., & Zahn, J.-P. 1998, *A&A*, **334**, 1000  
Marques, J. P., Goupil, M. J., Lebreton, Y., et al. 2013, *A&A*, **549**, A74  
Mathis, S. 2009, *A&A*, **506**, 811  
Mathis, S. 2013, in *Transport Processes in Stellar Interiors*, eds. M. Goupil, K. Belkacem, C. Neiner, F. Lignières, & J. J. Green, 865, 23  
Mathis, S., & de Brye, N. 2011, *A&A*, **526**, A65  
Mathis, S., & de Brye, N. 2012, *A&A*, **540**, A37  
Mathis, S., & Prat, V. 2019, *A&A*, **631**, A26  
Mathis, S., & Zahn, J. P. 2004, *A&A*, **425**, 229  
Mathis, S., Palacios, A., & Zahn, J. P. 2004, *A&A*, **425**, 243  
Mathis, S., Neiner, C., & Tran Minh, N. 2014, *A&A*, **565**, A47  
Mathis, S., Prat, V., Amard, L., et al. 2018, *A&A*, **620**, A22  
Mestel, L., & Weiss, N. O. 1987, *MNRAS*, **226**, 123  
Mirouh, G. M., Baruteau, C., Rieutord, M., & Ballot, J. 2016, *J. Fluid Mech.*, **800**, 213  
Mombarg, J. S. G., Van Reeth, T., Pedersen, M. G., et al. 2019, *MNRAS*, **485**, 3248  
Moravveji, E., Townsend, R. H. D., Aerts, C., & Mathis, S. 2016, *ApJ*, **823**, 130  
Mosser, B., Goupil, M. J., Belkacem, K., et al. 2012, *A&A*, **548**, A10  
Murphy, S. J., Fossati, L., Bedding, T. R., et al. 2016, *MNRAS*, **459**, 1201  
Ogilvie, G. I., & Lin, D. N. C. 2004, *ApJ*, **610**, 477  
Ouazzani, R. M., Dupret, M. A., & Reese, D. R. 2012, *A&A*, **547**, A75  
Ouazzani, R. M., Roxburgh, I. W., & Dupret, M. A. 2015, *A&A*, **579**, A116  
Ouazzani, R.-M., Salmon, S. J. A. J., Antoci, V., et al. 2017, *MNRAS*, **465**, 2294

- Ouazzani, R. M., Marques, J. P., Goupil, M. J., et al. 2019, *A&A*, **626**, A121
- Ouazzani, R. M., Lignières, F., Dupret, M. A., et al. 2020, *A&A*, **640**, A49
- Pápics, P. I., Tkachenko, A., Aerts, C., et al. 2015, *ApJ*, **803**, L25
- Pápics, P. I., Tkachenko, A., Van Reeth, T., et al. 2017, *A&A*, **598**, A74
- Park, J., Prat, V., Mathis, S., & Bugnet, L. 2021, *A&A*, **646**, A64
- Pedersen, M. G., Aerts, C., Pápics, P. I., et al. 2021, *Nat. Astron.*, **5**, 715
- Prat, V., Lignières, F., & Ballot, J. 2016, *A&A*, **587**, A110
- Prat, V., Mathis, S., Lignières, F., Ballot, J., & Culpin, P. M. 2017, *A&A*, **598**, A105
- Prat, V., Mathis, S., Augustson, K., et al. 2018, *A&A*, **615**, A106
- Prat, V., Mathis, S., Buysschaert, B., et al. 2019, *A&A*, **627**, A64
- Prat, V., Mathis, S., Neiner, C., et al. 2020, *A&A*, **636**, A100
- Reese, D., Lignières, F., & Rieutord, M. 2006, *A&A*, **455**, 621
- Reese, D. R., Lara, F. E., & Rieutord, M. 2014, in *Precision Asteroseismology*, eds. J. A. Guzik, W. J. Chaplin, G. Handler, & A. Pigulski, 301, 169
- Reese, D. R., Mirouh, G. M., Espinosa Lara, F., Rieutord, M., & Putigny, B. 2021, *A&A*, **645**, A46
- Ricker, G. R., Winn, J. N., Vanderspek, R., et al. 2014, in *Space Telescopes and Instrumentation 2014: Optical, Infrared, and Millimeter Wave*, eds. J. M. Oschmann, Jr., M. Clampin, G. G. Fazio, & H. A. MacEwen, *SPIE Conf. Ser.*, **9143**, 914320
- Rieutord, M. 2006, *A&A*, **451**, 1025
- Rieutord, M., Dintrans, B., Lignières, F., Corbard, T., & Pichon, B. 2005, in *SF2A-2005: Semaine de l'Astrophysique Française*, eds. F. Casoli, T. Contini, J. M. Hameury, & L. Pagani, 759
- Rieutord, M., Espinosa Lara, F., & Putigny, B. 2016, *J. Comput. Phys.*, **318**, 277
- Rogers, T. M. 2015, *ApJ*, **815**, L30
- Rogers, T. M., Lin, D. N. C., McElwaine, J. N., & Lau, H. H. B. 2013, *ApJ*, **772**, 21
- Roxburgh, I. W. 2006, *A&A*, **454**, 883
- Saio, H., Kurtz, D. W., Takata, M., et al. 2015, *MNRAS*, **447**, 3264
- Saio, H., Bedding, T. R., Kurtz, D. W., et al. 2018, *MNRAS*, **477**, 2183
- Saio, H., Takata, M., Lee, U., Li, G., & Van Reeth, T. 2021, *MNRAS*, **502**, 5856
- Schmid, V. S., & Aerts, C. 2016, *A&A*, **592**, A116
- Sowicka, P., Handler, G., Dębski, B., et al. 2017, *MNRAS*, **467**, 4663
- Szewczuk, W., & Daszyńska-Daszkiewicz, J. 2018, *MNRAS*, **478**, 2243
- Szewczuk, W., Walczak, P., & Daszyńska-Daszkiewicz, J. 2021, *MNRAS*, **503**, 5894
- Tayar, J., Beck, P. G., Pinsonneault, M. H., García, R. A., & Mathur, S. 2019, *ApJ*, **887**, 203
- Triana, S. A., Moravveji, E., Pápics, P. I., et al. 2015, *ApJ*, **810**, 16
- Triana, S. A., Corsaro, E., De Ridder, J., et al. 2017, *A&A*, **602**, A62
- Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H., & Shibahashi, H. 1989, *Nonradial Oscillations of Stars* (Tokyo: University of Tokyo Press)
- Van Beeck, J., Prat, V., Van Reeth, T., et al. 2020, *A&A*, **638**, A149
- Van Reeth, T., Tkachenko, A., Aerts, C., et al. 2015, *A&A*, **574**, A17
- Van Reeth, T., Tkachenko, A., & Aerts, C. 2016, *A&A*, **593**, A120
- Van Reeth, T., Mombarg, J. S. G., Mathis, S., et al. 2018, *A&A*, **618**, A24
- Wang, H., Boyd, J. P., & Akmaev, R. A. 2016, *Geosci. Model Dev.*, **9**, 1477
- Zahn, J. P. 1992, *A&A*, **265**, 115





## CHAPITRE 4

# Approximation traditionnelle de la rotation magnétique

*Le travail présenté dans ce chapitre fait l'objet d'une publication dans la revue A&A.*

Le champ magnétique des étoiles est essentiel pour construire une vision globale de leur structure, de leur évolution, de leur dynamique et de leurs interactions avec leur environnement (e.g. [Mestel & Weiss 1987](#); [Brun & Browning 2017](#); [Braithwaite & Spruit 2017](#); [García & Ballot 2019](#)). Ce processus physique est notamment l'un des mécanismes les plus importants pour expliquer la forte extraction de moment cinétique dans les régions radiatives (voir la section 4.1 de l'introduction) et pour organiser la redistribution de moment cinétique dans les régions convectives (e.g. [Brun et al. 2022](#)) pour toutes les masses stellaires et tous les stades évolutifs. Il pourrait ainsi permettre d'expliquer les vitesses angulaires observées grâce à l'astérosismologie (e.g. [Marques et al. 2013](#); [Ouazzani et al. 2020](#); [Aerts 2021](#)). L'un des objectifs clés de ce chapitre est d'approfondir notre compréhension du magnétisme des régions radiatives stellaires. Dans ce cadre, les étoiles de masses intermédiaires et massives sont particulièrement importantes pour atteindre cet objectif, car leur enveloppe externe est radiative, contrairement aux étoiles de faibles masses où l'enveloppe convective écrante le cœur radiatif et les processus qui s'y déroulent (e.g. [Gough & Thompson 1990](#); [Goode & Thompson 1992](#)).

Les grands programmes d'observations spectropolarimétriques (e.g. [Briquet et al. 2012, 2013](#); [Morel et al. 2014](#); [Neiner & Lampens 2015](#); [Wade et al. 2016](#); [Neiner et al. 2017](#); [Buysschaert et al. 2018](#); [Shultz et al. 2019](#)) ont permis d'explorer et de caractériser le magnétisme des étoiles de masses intermédiaires et massives en obtenant des contraintes de surface sur l'amplitude et la configuration du champ magnétique. Deux types de champs magnétiques ont été détectés. D'une part, 10% des étoiles de masses intermédiaires ou massives abritent des champs stables à grande échelle, généralement de grande amplitude. Étant donné qu'il ne semble y avoir aucune corrélation entre leurs propriétés et la masse stellaire, l'âge et la rotation ([Shultz et al. 2019](#)), on suppose que ces champs magnétiques ont une origine fossile. Cela signifie qu'ils résultent de la relaxation des champs générés par une dynamo pendant les phases convectives de la pré-séquence principale lorsque les couches convectives se transforment en couches stratifiées de manière stable ([Braithwaite & Spruit 2004](#); [Duez & Mathis 2010](#); [Arlt 2014](#); [Emeriau-Viard & Brun 2017](#)). D'autre part, les 90% restants peuvent abriter d'autres types de champs détectés sous forme de champs faibles à petite échelle à la surface stellaire ([Lignières et al. 2009](#); [Petit et al. 2011](#); [Blazère et al. 2016a,b](#)). Trois possibilités ont



été suggérées pour expliquer leur origine. Premièrement, ils pourraient être générés par une action de dynamo dans la fine couche convective de sous-surface (Cantiello & Braithwaite 2019; Jermyn & Cantiello 2020). Deuxièmement, ils pourraient résulter d’une relaxation non aboutie (car le temps de relaxation devient plus long que le temps d’évolution sur la séquence principale due à la rotation rapide) (Braithwaite & Cantiello 2013). Enfin, ils peuvent être la signature de champs résultant d’instabilités dues à des champs magnétiques toroïdaux axisymétriques profondément enracinés sous la surface stellaire (Aurière et al. 2007; Gaurat et al. 2015). Comme le montrent Tayler (1980), Braithwaite (2009) et Duez et al. (2010a), les champs axisymétriques sont uniquement stables sur de longues périodes lorsqu’ils sont composés d’une composante poloïdale et d’une composante toroïdale dans le plan méridien et dans la direction azimutale, respectivement. En effet, les champs purement toroïdaux ou poloïdaux sont instables dans les zones radiatives des étoiles (Tayler 1973; Markey & Tayler 1973).

Cependant, depuis les travaux fondamentaux de Spruit (2002), un grand intérêt a été porté aux champs magnétiques résultant de l’instabilité de Tayler d’un champ magnétique toroïdal axisymétrique (Tayler 1973; Markey & Tayler 1973). Il a suggéré qu’un tel champ pourrait déclencher une action dynamo dans les couches radiatives tandis que le couple magnétique résultant permet de transporter très efficacement le moment cinétique (e.g. Maeder & Meynet 2003; Heger et al. 2005; Eggenberger et al. 2005, 2022; Moyano et al. 2023). Le scénario d’une boucle dynamo efficace dans les zones radiatives stellaires a été fortement débattu dans la littérature (Braithwaite 2006; Zahn et al. 2007; Gellert et al. 2008, 2011; Fuller et al. 2019). Les récentes simulations numériques 3D globales, réalisées par Petitdemange et al. (2023), fournissent la première preuve convaincante de la façon dont une telle dynamo peut être entraînée par une combinaison de l’action de la rotation différentielle et de l’instabilité de cisaillement qui lui est associée, ainsi que de l’instabilité de Tayler.

Dans ce chapitre, nous considérons qu’un fort champ toroïdal axisymétrique est présent dans l’enveloppe radiative alors qu’il n’émerge pas à la surface stellaire. La spectropolarimétrie restera donc aveugle pour le détecter et le caractériser. La question clé à laquelle nous voulons répondre est donc la suivante : étant donné l’importance des champs toroïdaux axisymétriques potentiellement instables, comment pouvons-nous les détecter et les caractériser ? La magnéto-astérosismologie (Neiner et al. 2015; Mathis et al. 2021) est le meilleur outil de diagnostic. Elle consiste à rechercher les signatures caractéristiques de l’intensité et de la configuration des champs magnétiques dans les spectres de fréquence observés des oscillations stellaires.

Tout d’abord, Prat et al. (2019) et Prat et al. (2020) se sont intéressés à la modification du spectre de fréquence des modes gravito-inertiels par des champs fossiles dipolaires mixtes (c’est-à-dire poloïdal et toroïdal) axisymétriques et inclinés. Les auteurs ont considéré le champ comme une perturbation dans un premier temps. Ils ont montré comment le comportement de l’espacement périodique est modifié par la présence du champ. Ils ont identifié des motifs en forme de dents de scie qui ne peuvent pas être produits par une stratification chimique ou par une rotation différentielle (Miglio et al. 2008; Van Reeth et al. 2018). Ensuite, Van Beeck et al. (2020) ont réalisé une exploration systématique de cette signature magnétique tout au long de l’évolution des étoiles pulsantes de type  $\gamma$  Dor et de type SPB. Ils ont montré que les signatures magnétiques diffèrent de celles dues à la rotation seule. Ils ont découvert que ces signatures sont détectables lorsque le champ magnétique atteint une intensité près du cœur supérieure à  $10^5$  G. Ensuite, Bugnet et al. (2021) et Loi (2021) ont étudié la perturbation des modes gravito-acoustiques mixtes se propageant dans les étoiles de faible et moyenne masse évoluées respectivement par des champs fossiles dipolaires mixtes axisymétriques et non-axisymétriques inclinés. Ils ont identifié des asymétries dans les séparations de fréquences induites par le champ. Mathis et al. (2021) ont dérivé la théorie asymptotique pour



la perturbation des modes gravito-acoustiques et gravito-inertiels de basses fréquences par un tel champ axisymétrique. Cette théorie est en excellent accord avec les calculs numériques directs couplés à des codes d'oscillation stellaire de pointe. Finalement, le cas de configurations magnétiques tridimensionnelles a été traité par [Li et al. \(2022\)](#).

Toutes ces études antérieures ont supposé que le champ magnétique était une perturbation. Cette hypothèse devient discutable pour les fortes amplitudes liées à des champs toroïdaux axisymétriques puissants, initialement fossiles, qui déclenchent l'instabilité de Tayler et des dynamos potentielles de type Tayler-Spruit. Il devient donc nécessaire d'étudier l'impact des champs d'amplitude modérée à forte sur les modes de pulsation stellaire. Pour cela, il nous faut un formalisme qui nous permet d'étudier les ondes gravito-inertielles en présence d'un champ magnétique intense, donc des ondes magnéto-gravito-inertielle (MGI). Comme on a vu dans les deux chapitres précédents, l'approximation traditionnelle de la rotation (TAR) est intensivement utilisée en astérosismologie pour l'étude des ondes de basses fréquences se propageant dans des zones fortement stratifiées. Mais, cette approximation dans sa version classique néglige le champ magnétique. Pour introduire les effets magnétiques dans la TAR dans un premier temps, [Mathis & de Brye \(2011, 2012\)](#) ont pris en compte un champ magnétique toroïdal axisymétrique pour une fréquence d'Alfvén uniforme de manière non perturbative et avec une faible rotation différentielle radiale dans des coquilles sphériques pour réaliser une étude globale des ondes MGI et du transport du moment cinétique qu'elles déclenchent dans les régions radiatives stellaires. Ensuite, [Rui & Fuller \(2023\)](#) ont proposé une amélioration en prenant en compte de manière non-perturbative un champ magnétique mixte, cependant, ils ont négligé la rotation dans leur approche.

Notre objectif est de parvenir à une nouvelle généralisation de la TAR, allant au-delà de l'approximation de la rotation différentielle faible et de la configuration la plus simple du champ magnétique azimutal correspondant à une fréquence d'Alfvén uniforme. Pour ce faire, nous examinons de manière préliminaire les limites de l'approche perturbative, puis nous dérivons la TAR magnétique qui inclut un champ magnétique toroïdal axisymétrique général (avec une fréquence d'Alfvén générale) de manière non perturbative et une rotation différentielle générale.

## 4.1 Limites de l'approche perturbative

### 4.1.1 Approche perturbative généralisée

Pour généraliser l'approche perturbative proposée par [Prat et al. \(2019\)](#), où ils ont pris en compte un champ magnétique fossile dipolaire mixte axisymétrique, nous allons considérer le cas d'une topologie magnétique générale. Notre étude se concentrera donc sur des champs qui sont suffisamment faibles pour que la force de Lorentz non perturbée ait un effet négligeable sur l'état d'équilibre hydrostatique. La perturbation de premier ordre des oscillations par la force de Lorentz est obtenue en écrivant le déplacement lagrangien comme suit :

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0 + \epsilon \boldsymbol{\xi}_1, \quad \text{avec } \epsilon \ll 1, \quad (4.1)$$

où  $\boldsymbol{\xi}_0$  est le déplacement non perturbé (hydrodynamique) et  $\boldsymbol{\xi}_1$  le déplacement perturbé causé par le champ magnétique. En outre, nous supposons que  $\boldsymbol{\xi}$  a une dépendance en temps  $t$  de la forme  $\exp(-i\omega t)$  où  $\omega$  est la fréquence du mode dans le repère en rotation, qui peut être écrite comme suit

$$\omega = \omega_0 + \epsilon \omega_1, \quad \text{avec } \epsilon \ll 1, \quad (4.2)$$



où  $\omega_0$  est la fréquence du mode dans le cas hydrodynamique et  $\omega_1$  est le décalage de fréquence induit par le champ magnétique.

Dans ce cas, en écrivant l'équation d'induction linéarisée idéale, nous pouvons déduire les fluctuations du champ magnétique dues au déplacement de l'oscillation :

$$\delta \mathbf{B} = \nabla \wedge (\boldsymbol{\xi}_0 \wedge \mathbf{B}), \quad (4.3)$$

et la force de Lorentz perturbée comme suit :

$$\delta \mathbf{F}_L = \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \wedge \mathbf{B}) \wedge \delta \mathbf{B} + (\nabla \wedge \delta \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B}]. \quad (4.4)$$

À l'ordre zéro de  $\epsilon$ , l'équation de la quantité de mouvement est la suivante :

$$\omega_0^2 \boldsymbol{\xi}_0 + i\omega_0 \mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}_0) + \mathcal{P}(\boldsymbol{\xi}_0) = 0, \quad (4.5)$$

et au premier ordre dans  $\epsilon$  nous pouvons l'écrire comme suit :

$$-\omega_1 [2\omega_0 \boldsymbol{\xi}_0 + i\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}_0)] = \frac{\delta \mathbf{F}_L}{\rho_0} + \omega_0^2 \boldsymbol{\xi}_1 + i\omega_0 \mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}_1) + \mathcal{P}(\boldsymbol{\xi}_1) \quad (4.6)$$

avec

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\xi}) = -\nabla \delta P / \rho_0 + \delta \rho \nabla P_0 / \rho_0^2, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) = 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\xi}. \quad (4.8)$$

Puisque  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  sont tous deux des opérateurs hermitiens, l'Eq. (4.6) donne

$$\delta \omega = \epsilon \omega_1 = -\frac{\langle \boldsymbol{\xi}_0, \delta \mathbf{F}_L / \rho_0 \rangle}{2\omega_0 \langle \boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_0 \rangle + \langle \boldsymbol{\xi}_0, i\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}_0) \rangle}, \quad (4.9)$$

où  $\langle \boldsymbol{\xi}_0, \square \rangle = \int_V \rho \bar{\boldsymbol{\xi}}_0 \cdot \square dV$  le produit scalaire,  $V$  le volume, et  $\bar{\square}$  le conjugué complexe.

En utilisant la TAR standard (définie dans la section 2.4.3), nous pouvons négliger la composante verticale de l'accélération de Coriolis le long de la direction de stratification car elle est dominée par la force de flottabilité. Cela conduit à négliger la composante horizontale de la rotation, simplifiant l'opérateur de Coriolis à  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}_0) = 2\boldsymbol{\Omega} \cos \theta \mathbf{e}_r \wedge \boldsymbol{\xi}_0$ . Sous cette approximation, nous pouvons également écrire les modes propres non perturbés pour les ondes gravito-inertielles comme suit :

$$\boldsymbol{\xi}_0 = [\xi_r(r) H^r(\theta), \xi_h(r) H^\theta(\theta), i\xi_h(r) H^\varphi(\theta)] e^{i(-\omega_0 t + m\varphi)} \quad (4.10)$$

où  $H^r$  est la fonction de Hough radiale (Hough 1898) obtenue en résolvant l'équation de marée de Laplace (Eq. 2.53) :

$$\mathcal{L}_\nu [H_{k,m}^r(x; \nu)] = -\Lambda_{k,m}(\nu) H_{k,m}^r(x; \nu), \quad (4.11)$$

où  $\nu = 2\boldsymbol{\Omega} / \omega_0$  est le facteur de spin,  $x = \cos \theta$  est la coordonnée latitudinale réduite,  $\Lambda_{k,m}$  est la valeur propre du mode,  $k$  est l'indice d'un mode propre latitudinal, et

$$\mathcal{L}_\nu = \frac{d}{dx} \left( \frac{1-x^2}{1-\nu^2 x^2} \frac{d}{dx} \right) - \frac{1}{1-\nu^2 x^2} \left( \frac{m^2}{1-x^2} - m\nu \frac{1+\nu^2 x^2}{1-\nu^2 x^2} \right) \quad (4.12)$$



l'opérateur de Laplace (Laplace 1799). Nous introduisons également la fonction de Hough latitudinale

$$\mathcal{H}_{k,m}^\theta(x; \nu) = \frac{-1}{(1-x^2\nu^2)\sqrt{1-x^2}} \left[ (1-x^2) \frac{d}{dx} + m\nu x \right] H_{k,m}^r, \quad (4.13)$$

et azimutale

$$\mathcal{H}_{k,m}^\varphi(x; \nu) = \frac{-1}{(1-x^2\nu^2)\sqrt{1-x^2}} \left[ \nu x (1-x^2) \frac{d}{dx} + m \right] H_{k,m}^r. \quad (4.14)$$

Prat et al. (2019) ont pris en compte un champ magnétique axisymétrique et dipolaire. Nous allons ici généraliser leur formalisme en considérant un champ magnétique général :

$$\mathbf{B} = B_0 [b_r(r, \theta, \varphi), b_\theta(r, \theta, \varphi), b_\varphi(r, \theta, \varphi)]. \quad (4.15)$$

Le calcul des décalages de fréquence magnétique implique un grand nombre de termes. Pour les ordres radiaux élevés  $|n| > 5$  et si la composante poloidale du champ magnétique a une magnitude similaire ou supérieure à la composante toroidale, un seul terme est dominant. Dans ce cas, nous pouvons écrire le décalage de fréquence causé par le champ magnétique comme suit :

$$\frac{\delta\omega^{nkm}}{\omega_0^{nkm}} = \frac{B_0^2}{2\mu_0\omega_0^{nkm^2}\rho_c R^2} \frac{\mathcal{I}_1}{\mathcal{I}_2}, \quad (4.16)$$

où  $\rho_c$  est la densité centrale de l'étoile, et

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^1 \left[ r^2 |\xi'_h|^2 \int_{-1}^1 \langle b_r^2 \rangle_\varphi \left( \mathcal{H}_{k,m}^{\theta^2} + \mathcal{H}_{k,m}^{\varphi^2} \right) dx \right] dr, \quad (4.17)$$

$$\mathcal{I}_2 = \int_0^1 |\xi_h|^2 \rho r^2 dr \int_{-1}^1 \left( \mathcal{H}_{k,m}^{\theta^2} + \mathcal{H}_{k,m}^{\varphi^2} + x\nu_n \mathcal{H}_{k,m}^\theta \mathcal{H}_{k,m}^\varphi \right) dx. \quad (4.18)$$

## 4.1.2 Application à une étoile de masse intermédiaire

### 4.1.2.1 Modèle de l'étoile et calcul des fréquences propres

Nous utilisons le code d'évolution stellaire MESA (Modules for Experiments in Stellar Astrophysics, Paxton et al. 2011, 2013, 2015, 2018, 2019) pour calculer des modèles stellaires sans rotation et sans champ magnétique. Nous choisissons un modèle de  $3 M_\odot$  proche de la séquence principale d'âge terminal (TAMS). Ce modèle est l'un des plus susceptibles d'avoir une signature magnétique, comme l'a démontré Van Beeck et al. (2020) avec leur approche perturbative.

En utilisant ce modèle stellaire en entrée, nous calculons les fréquences et les fonctions propres pour les modes d'oscillation en utilisant le code d'oscillation stellaire GYRE (Townsend & Teitler 2013; Townsend et al. 2018). Nous calculons les fréquences des modes de gravité dipolaires dans le cadre de l'approximation adiabatique et en tenant compte de la rotation avec la TAR. Les ordres radiaux  $n$  sont compris entre  $-10$  et  $-50$ , ce qui est cohérent avec les ordres radiaux observés des modes dipolaires  $g$  dans les étoiles  $\gamma$  Dor (Li et al. 2020).



### 4.1.2.2 Configuration du champ magnétique

On considère un champ magnétique radiale générale que l'on peut l'écrire sous la forme :

$$b_r(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=L_{\min}}^{L_{\max}} \sum_{p=-l}^l D_l^p(r) C_l^p P_l^p(\cos \theta) e^{ip\varphi}, \quad (4.19)$$

avec

$$C_l^p = (-1)^{\frac{p+|p|}{2}} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-p)!}{4\pi(l+p)!}}. \quad (4.20)$$

Donc on peut exprimer la moyenne azimutale du carré de ce champ comme :

$$\langle b_r^2 \rangle_\varphi = \sum_{l_1=L_{\min}}^{L_{\max}} \sum_{l_2=L_{\min}}^{L_{\max}} \sum_{p=-\min(l_1, l_2)}^{\min(l_1, l_2)} C_{l_1}^p C_{l_2}^{-p} D_{l_1}^p(r) D_{l_2}^{-p}(r) P_{l_1}^p(\cos \theta) P_{l_2}^{-p}(\cos \theta). \quad (4.21)$$

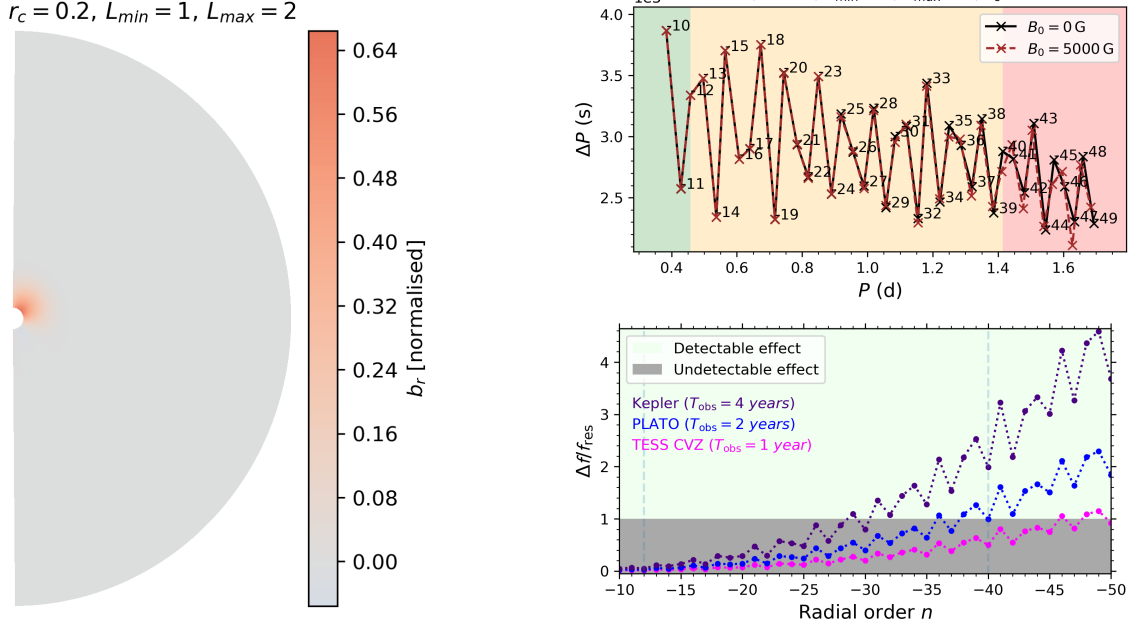
Pour un champ magnétique confiné à l'intérieur de la zone radiative, nous définissons le paramètre  $r_c$  qui contrôle le degré de confinement du champ magnétique et nous prenons

$$D_l^p(r) = \begin{cases} (r_c - r)^2 & \text{si } r \leq r_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad (4.22)$$

qui confine le champ dans une sphère de rayon  $r_c$ . On peut voir dans le panneau gauche de la figure 4.1, un exemple de configuration magnétique composé d'une composante dipolaire et d'une composante quadripolaire.

### 4.1.2.3 Espacement des périodes et validité de l'approche perturbative

Dans le panneau droit de la figure 4.1, on montre l'espacement des périodes des modes gravito-inertiels  $\{\ell = 1, m = 0\}$  à l'intérieur d'une étoile de  $3M_\odot$  près de la TAMS dans les cas magnétiques (avec une configuration mixte : dipolaire et quadripolaire) pour une amplitude de champ  $B_0 = 5 \times 10^3$  G et dans le cas non magnétique (panneau en haut) et le digramme de la détectabilité théorique de l'effet magnétique en utilisant les observations photométriques (panneau en bas). Nous constatons que les valeurs d'espacement des périodes se décalent sous l'influence du champ magnétique, surtout pour les ordres radiaux les plus élevés (les périodes les plus longues) pour lesquels l'action de la force de Lorentz est la plus forte puisque la fréquence de l'onde se rapproche de la fréquence d'Alfvén. Nous constatons également que le champ magnétique n'a pas une signature distincte sur l'espacement des périodes, mais qu'il introduit plutôt un décalage. Un tel effet peut également être introduit par d'autres effets physiques, tels que l'accélération centrifuge ou la rotation différentielle. [Prat et al. \(2019, 2020\)](#) et [Van Beeck et al. \(2020\)](#) ont trouvé que la signature d'un champ magnétique mixte fossile dans la morphologie de l'espacement des périodes des modes g diffère sensiblement de la signature due à la rotation. Ils ont trouvé des caractéristiques magnétiques en dents de scie pour les modes d'ordre radial élevé (voir la figure 4.2). Ces signatures observées se manifestent lorsque l'approche perturbative est utilisée en dehors de son domaine de validité. En effet, nous déterminons le domaine de validité de l'approche perturbative dans lequel le champ magnétique exerce une influence perturbative sur la fréquence en comparant la fréquence d'Alfvén



**FIGURE 4.1 – Gauche :** Configuration d'un champ magnétique mixte (dipolaire et quadripolaire) pour un degré de confinement  $r_c = 0.2$ . Les valeurs sont normalisées par l'amplitude maximale du champ. **Droite en haut :** Espacement des périodes dans le repère inertiel pour les modes  $g$   $\{\ell = 1, m = 0\}$  calculés en utilisant l'approche standard (ligne noire) et l'approche perturbative (ligne brune) à l'intérieur d'une étoile de  $3 M_\odot$  près de la TAMS pour une amplitude de champ  $B_0 = 5 \times 10^3$  G. **Droite en bas :** Détectabilité de l'effet du champ magnétique considéré sur ce mode en fonction de l'ordre radial  $n$  basé sur la résolution en fréquence de *Kepler* (ligne indigo), *PLATO* (ligne bleue), et *TESS CVZ* (ligne magenta).

$\omega_A$  avec la fréquence du mode dans le repère en rotation. Pour que l'approche perturbative soit valide, il faut que

$$\frac{\omega_A}{\omega} \ll 1. \quad (4.23)$$

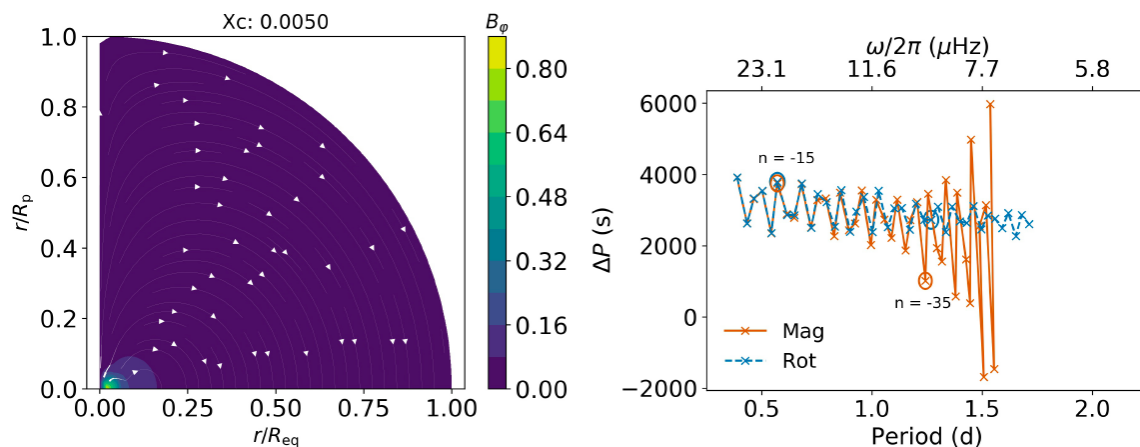
Le panneau de droite de la figure 4.1 montre les ordres radiaux (ou les périodes) des modes  $g$  pour lesquels l'application de l'approche perturbative est :

- justifiée : la zone verte indique que l'on a  $\omega_A/\omega < 0.1$ ,
- limite : la zone orange avec  $0.1 < \omega_A/\omega < 1$ ,
- injustifiée : la zone rouge avec  $\omega_A/\omega > 1$ .

On peut voir que dans la zone d'applicabilité, le décalage de fréquence induit par le champ magnétique est faible au point qu'il est indétectable avec les observations photométriques.

Si le critère (4.23) n'est pas vérifié, alors la force de Lorentz est dynamiquement significative et des traitements non perturbatifs de la force de Lorentz sont nécessaires pour évaluer l'influence du champ magnétique interne sur les fréquences des modes gravito-inertiels. C'est ce que nous allons donc maintenant étudier dans le cas d'un champ magnétique toroïdal général et une rotation différentielle générale.





**FIGURE 4.2** – **Gauche** : Champ magnétique dipolaire axisymétrique normalisée **Droite** : Espacement des périodes dans le repère inertiel pour les modes  $g$   $\{\ell = 1, m = 0\}$  calculés en utilisant l’approche standard et l’approche perturbative avec le modèle  $3M_\odot$   $\gamma$  Dor près de la TAMS et une configuration de champ magnétique mixte avec une amplitude  $B_0 = 10^6$  G. Crédits : Van Beeck et al. (2020).

## 4.2 Système d’équations MHD dans les étoiles magnétisées en rotation différentielle

### 4.2.1 Topologie magnétique

En généralisant Mathis & de Brye (2011, 2012), nous écrivons le champ magnétique macroscopique comme suit

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0^T(r, \theta) + \mathbf{b}'(\mathbf{r}, t), \quad (4.24)$$

avec

$$\mathbf{B}_0^T(r, \theta) = \sqrt{\mu_0 \rho_0} r \sin \theta \omega_A(r, \theta) \mathbf{e}_\varphi, \quad (4.25)$$

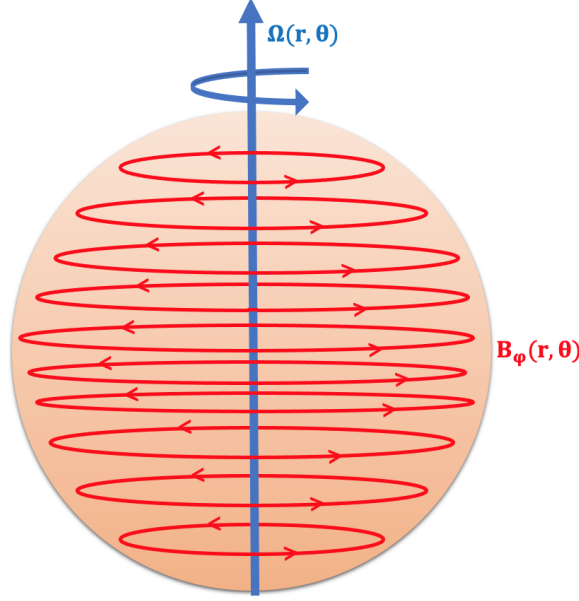
un champ toroïdal (azimutal) axisymétrique général à grande échelle associé à la fréquence d’Alfvén générale  $\omega_A(r, \theta)$  et

$$\mathbf{b}'(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\mu_0 \rho_0} \left[ \omega_A \partial_\varphi \boldsymbol{\xi} - \frac{r \sin \theta}{\sqrt{\rho_0}} (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla (\sqrt{\rho_0} \omega_A)) \mathbf{e}_\varphi \right] - (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) \mathbf{B}_0^T, \quad (4.26)$$

le champ magnétique induit par l’onde calculé à l’aide de l’équation d’induction linéarisée (Eq. 1.3).

### 4.2.2 Système d’équations MHD linéarisées

Nous linéarisons le système MHD idéal (1.1)-(1.4) autour d’un état d’équilibre magnétique en rotation différentielle (figure 4.3). On adopte ici l’approximation de Cowling où les fluctuations du potentiel gravitationnel de l’onde sont négligées, donc on ne résout pas l’équation de Poisson (Eq. 1.5). De plus, comme nous étudions la dynamique des ondes MGI de basses fréquences, nous



**FIGURE 4.3** – Esquisse de la configuration que l'on utilise pour étudier la dynamique des ondes MGI dans les zones radiatives stellaires magnétisées en rotation différentielle.

adoptons l'approximation anélastique dans laquelle les ondes magnéto-acoustiques sont filtrées. Dans ce cas, le système d'équations MHD linéarisé s'écrit comme

$$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \rho_0 u_r) + \frac{\rho_0}{r \sin \theta} [\partial_\theta (\sin \theta u_\theta) - i m u_\varphi] = 0, \quad (4.27)$$

$$i \frac{\mathcal{A}}{\omega} \mathbf{u} + \frac{\mathcal{B}}{\omega} \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} + \frac{r \sin \theta}{\omega} \left[ i m \Lambda_E (\mathbf{u} \cdot \nabla \Omega^2) + \frac{i}{\rho_0} (\mathbf{u} \cdot \nabla (\rho_0 \omega_A^2)) + 2i \omega_A^2 \left( \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{i m}{r \sin \theta} u_\varphi \right) \right] \mathbf{e}_s + \frac{r \sin \theta}{\omega^2} \left[ \mathcal{A} (\mathbf{u} \cdot \nabla \Omega) + m \omega_A^2 \omega \left( \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{i m}{r \sin \theta} u_\varphi \right) \right] \mathbf{e}_\varphi = -\nabla W' + \frac{\rho'}{\rho_0} \mathbf{g}_0, \quad (4.28)$$

$$i \omega \frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{N^2}{g_0} u_r, \quad (4.29)$$

avec

$$\mathbf{g}_0 = \nabla P_0 / \rho_0 = -\nabla \Phi_0, \quad (4.30)$$

la gravité. Dans ce chapitre, nous négligeons le caractère non sphérique du fond hydrostatique dû à la déformation associée à l'accélération centrifuge ( $\frac{1}{2} \Omega^2 \nabla (r^2 \sin^2 \theta)$ ) puisque son impact sur les ondes gravito-inertielles est faible (Ballot et al. 2010; Dhouib et al. 2021a,b) et à la partie d'ordre zéro de la force de Lorentz ( $1/\mu_0 (\nabla \times \mathbf{B}_0^T) \times \mathbf{B}_0^T$ ) puisqu'elle est faible sauf sous la surface de l'étoile (Duez et al. 2010b). On introduit

$$\Lambda_E(r, \theta) = \frac{\omega_A^2}{\Omega \omega}, \quad (4.31)$$



le nombre d'Elsasser qui caractérise l'importance relative de la force de Lorentz par rapport à l'accélération de Coriolis,

$$W'(r, \theta) = \frac{P' + P'_m}{\rho_0}, \quad (4.32)$$

la somme des fluctuations normalisées de la pression totale, composée de la fluctuation de la pression du gaz  $P'$  ainsi que de la fluctuation de la pression magnétique :

$$P'_m = \frac{\mathbf{B}_0^T \cdot \mathbf{b}'}{\mu_0}, \quad (4.33)$$

$$\mathcal{A}(r, \theta) = \omega^2 - m^2 \omega_A^2, \quad (4.34)$$

$$\mathcal{B}(r, \theta) = 2(\Omega\omega + m\omega_A^2), \quad (4.35)$$

deux coefficients que l'on introduit dans le système d'équations,

$$\mathbf{e}_s = \sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta, \quad (4.36)$$

le vecteur unitaire radial des coordonnées cylindriques. On peut remarquer, d'après l'équation (4.28), que dans le cas d'un champ magnétique toroïdal pur, la force de la force de tension de Lorentz linéarisée a la même forme mathématique que l'accélération de Coriolis.

Une fois la topologie magnétique est spécifiée et le système d'équations MHD est dérivé, on peut procéder maintenant à la dérivation de la TAR magnétique.

### 4.3 TAR magnétique avec rotation différentielle

Comme on l'a vu dans les chapitres précédents, la TAR standard impose principalement deux hiérarchies des fréquences. La première  $2\Omega \ll N$  vient du fait que nous travaillons dans des régions fortement stratifiées. La seconde  $\omega \ll N$  provient du fait que nous nous concentrons sur le régime des basses fréquences. Nous construisons maintenant le cadre généralisé pour la TAR dans les étoiles magnétisées en rotation différentielle. Dans ce cas, en plus des deux hiérarchies mentionnées ci-dessus, nous avons également  $\mathcal{A} \ll N^2$  et  $\mathcal{B} \ll N^2$  puisqu'on considère les ondes telles que  $\omega_A \ll N$ . Donc, la forte stratification implique que les composantes radiales de la force de Coriolis et de la force de Lorentz sont dominées par la force de flottabilité. Nous obtenons ainsi un champ de vitesse essentiellement horizontal ( $|u_r| \ll \{|u_\theta|, |u_\varphi|\}$ ). Par conséquent, les trois composantes de l'équation de la quantité de mouvement (Eq. 4.28) peuvent être simplifiées comme suit

$$N^2 u_r + i\omega \partial_r W' = 0, \quad (4.37)$$

$$i\mathcal{A} + i \sin \theta \cos \theta (\Lambda_E m \partial_\theta \Omega^2 + \partial_\theta \omega_A^2) u_\theta - \mathcal{B} \cos \theta u_\varphi = -\frac{\omega}{r} \partial_\theta W', \quad (4.38)$$

$$\left( \mathcal{B} \cos \theta + \frac{\mathcal{A}}{\omega} \sin \theta \partial_\theta \Omega \right) u_\theta + i\mathcal{A} u_\varphi = \frac{im\omega}{r \sin \theta} W'. \quad (4.39)$$

Comme dans le cas non magnétique (Lee & Saio 1997; Mathis 2009; Dhouib et al. 2021a,b), nous parvenons à découpler les dynamiques radiale et horizontale. Dans la direction radiale, la force de flottabilité équilibre le gradient des fluctuations de la pression totale, tandis que dans la direction horizontale, l'accélération de Coriolis et la force de tension magnétique contrebalancent le gradient



horizontal de la pression totale. Par conséquent, en résolvant le système (4.37)-(4.39), nous pouvons exprimer le champ de vitesse en fonction de la pression totale normalisée

$$u_r = -i \frac{\omega}{N^2} \partial_r W', \quad (4.40)$$

$$u_\theta = -i \frac{\omega}{\mathcal{A}} \frac{1}{D_M} \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} [(1-x^2) \partial_x + m\nu_M x] W', \quad (4.41)$$

$$u_\varphi = \frac{\omega}{\mathcal{A}} \frac{1}{D_M} \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[ (1-x^2) \left( \nu_M x - (1-x^2) \frac{\partial_x \Omega}{\omega} \right) \partial_x + m - m \frac{1-x^2}{x} \frac{1}{\mathcal{A}} (m\Lambda_E \partial_x \Omega^2 + \partial_x \omega_A^2) \right] W'. \quad (4.42)$$

On a introduit le paramètre de spin magnétique

$$\nu_M(r, x) = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} = \nu \frac{\omega^2}{\mathcal{A}} + 2m \frac{\omega_A^2}{\mathcal{A}}, \quad (4.43)$$

et un coefficient qui dépend du taux de rotation, de la fréquence d'Alfvén et de leur gradient latitudinal

$$D_M(r, x) = 1 - \nu_M^2 x^2 + (1-x^2) \frac{x}{\mathcal{A}} [\partial_x \Omega^2 - \partial_x \omega_A^2]. \quad (4.44)$$

On rappelle ici que  $x = \cos \theta$  est la coordonnée latitudinale réduite et  $\nu = 2\Omega/\omega$  est le paramètre de spin standard. Nous notons que ces équations sont singulières lorsque  $\omega = 0$ ,  $\mathcal{A} = 0$ ,  $x = \{\pm 1, 0\}$  et  $D_M = 0$ . Les deux premières singularités sont potentiellement les couches critiques hydrodynamiques et hydromagnétiques, où les ondes peuvent être amorties (Booker & Bretherton 1967; Rudraiah & Venkatachalappa 1972a). La première singularité  $\omega = 0$  correspond à une résonance de corotation, présente dans le cas hydrodynamique (Booker & Bretherton 1967; Watts et al. 2003; Alvan et al. 2013; Astoul et al. 2021). La deuxième singularité, qui n'apparaît que dans le cas magnétique, ajoute deux couches critiques supplémentaires,  $\omega = \pm m\omega_A$ , appelées par la suite couches critiques magnétiques. Elles peuvent entraîner un piégeage vertical des ondes MGI (Rudraiah & Venkatachalappa 1972a; Schatzman 1993; Barnes et al. 1998; Rogers & MacGregor 2010; MacGregor & Rogers 2011; Mathis & de Brye 2011). Il s'agit d'une situation similaire à celle étudiée par Fuller et al. (2015); Lecoanet et al. (2017); Rui & Fuller (2023), où les ondes MGI se transforment en ondes d'Alfvén au-dessus d'une certaine intensité de champ critique les empêchant de former un mode d'oscillation stationnaire. La différence est que nous ne prenons pas en compte de champ magnétique vertical (poloïdal) dans notre travail. La troisième singularité se produit aux pôles et à l'équateur. Enfin,  $D_M = 0$  est équivalent à une résonance de Lindblad dans les disques en rotation différentielle (e.g. Goldreich & Tremaine 1979), mais il s'agit seulement d'une singularité apparente (Ogilvie & Lin 2004). Plus de détails sur ce point de retournement pour la propagation des ondes peuvent être trouvés dans la section 4.5.3.

Nos dérivations complètent les travaux généraux pionniers de Friedlander (1987, 1989) en géophysique, qui ont étudié les ondes MGI avec  $(\omega_A(r, \theta), \Omega_s)$  et  $(\omega_A(r, \theta), \Omega(r, \theta))$ , respectivement. Par rapport à ces deux études antérieures, nous nous sommes spécifiquement concentrés sur le régime dominé par la stratification qui est pertinent pour les intérieurs stellaires où le TAR peut être construit et appliqué. Il est également important de noter que nous avons traité le cas des

enveloppes sphériques profondes, tandis que de nombreuses études précédentes se sont concentrées sur le cas de couches minces (e.g. [Zaqarashvili et al. 2009](#); [Heng & Spitkovsky 2009](#)).

Grâce à ce nouveau formalisme, nous sommes désormais en mesure d'étudier la dynamique des ondes MGI.

## 4.4 Dynamique des ondes MGI

### 4.4.1 Approximation JWKB

Comme on a fait dans le chapitre précédent (voir la section 3.4.1), on adopte ici aussi l'approximation JWKB puisque nous nous concentrons sur les ondes oscillant rapidement le long de la direction radiale. Dans ce cas, nous écrivons la structure spatiale des ondes comme suit

$$W'(r, \theta) = \sum_k \left\{ w_{\omega^{\text{in}km}}(r, \theta) \frac{A_{\omega^{\text{in}km}}}{k_{V;\omega^{\text{in}km}}^{1/2}} \exp \left[ i \int^r k_{V;\omega^{\text{in}km}} dr \right] \right\}, \quad (4.45)$$

$$u_j(r, \theta) = \sum_k \left\{ \hat{u}_{\omega^{\text{in}km}}^j(r, \theta) \frac{A_{\omega^{\text{in}km}}}{k_{V;\omega^{\text{in}km}}^{1/2}} \exp \left[ i \int^r k_{V;\omega^{\text{in}km}} dr \right] \right\}, \quad j \equiv \{r, \theta, \varphi\}. \quad (4.46)$$

L'approximation JWKB a également été utilisée par [Lecoanet et al. \(2017\)](#) et [Rui & Fuller \(2023\)](#) dans leur étude sur les ondes MGI.

Cette approximation nous permet de réécrire la vitesse radiale (Eq. 4.40) comme

$$\hat{u}_{\omega^{\text{in}km}}^r(r, x) = \frac{r^2 k_{V;\omega^{\text{in}km}}(r) \omega_{km}(r, x)}{N^2(r)} w_{\omega^{\text{in}km}}(r, x), \quad (4.47)$$

et l'équation de continuité (Eq. 4.27) comme

$$\frac{1}{\omega_{km}} \frac{i}{r \sin \theta} \left[ \partial_\theta (\sin \theta \hat{u}_{\omega^{\text{in}km}}^\theta) - im \hat{u}_{\omega^{\text{in}km}}^\varphi \right] = \frac{r^2 k_{V;\omega^{\text{in}km}}^2}{N^2} w_{\omega^{\text{in}km}}(r, x). \quad (4.48)$$

### 4.4.2 Équation de marée de Laplace magnétique

En insérant les composantes horizontales de la vitesse (Eqs. (4.41) & (4.42)) dans le membre de gauche de l'équation de continuité (Eq. 4.48), nous obtenons l'équation de marée de Laplace magnétique

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\omega^{\text{in}m}}^{\text{magn.}} [w_{\omega^{\text{in}km}}^{\text{magn.}}] = -\lambda_{\omega^{\text{in}km}}^{\text{magn.}}(r) w_{\omega^{\text{in}km}}^{\text{magn.}}(r, x), \quad (4.49)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_{\omega^{\text{in}m}}^{\text{magn.}} = \frac{1}{\omega} \partial_x \left[ \frac{\omega}{\mathcal{A}} \frac{1-x^2}{D_M} \partial_x \right] + \frac{m}{\omega \mathcal{A}} \partial_x \Omega \frac{1-x^2}{D_M} \partial_x + \frac{m}{\omega} \partial_x \left( \frac{\omega \nu_M x}{\mathcal{A} D_M} \right) - m^2 \frac{1}{\mathcal{A} D_M (1-x^2)} + \\ \frac{m^2}{\mathcal{A}^2} \frac{x}{D_M} (m \Lambda_E \partial_x \Omega^2 + \partial_x \omega_A^2), \end{aligned} \quad (4.50)$$



où  $w_{\omega^{\text{in}}km}$  sont les fonctions de Hough magnétiques généralisées et  $\lambda_{\omega^{\text{in}}km}$  sont les valeurs propres associées (de dimension  $T^2$ ) liées au vecteur d'onde radial via la relation de dispersion suivante, déduite du membre de droite de l'équation (4.48)

$$k_{V;\omega^{\text{in}}km}^2(r) = \frac{N^2(r)\lambda_{\omega^{\text{in}}km}^{\text{magn.}}(r)}{r^2}. \quad (4.51)$$

Contrairement au cas standard où nous considérons des étoiles non magnétisées en rotation uniforme, les valeurs propres et les fonctions de Hough ne sont plus indépendantes du rayon. Nous remarquons également que l'équation de marée de Laplace magnétique est invariante par rapport au signe de la fréquence d'Alfvén  $\omega_A$ .

À partir de cette relation de dispersion, on va dériver maintenant des diagnostics sismiques asymptotiques des modes MGI.

### 4.4.3 Diagnostic sismique asymptotique des modes MGI

#### 4.4.3.1 Approximation sur le profil de rotation différentielle

La relation de dispersion (Eq. 4.51) n'est pas encore adaptée au diagnostic astérosismique, car le nombre d'ondes radiales n'est pas explicitement exprimé en fonction de la fréquence des modes. Cependant, les valeurs propres  $\lambda_{\omega^{\text{in}}km}$  peuvent être exprimées en fonction de la fréquence des modes et des valeurs propres sans dimension. Dans ce cas, il est nécessaire de supposer que la fréquence locale du mode décalée par effet Doppler  $\omega$  ne dépend que du rayon. Par conséquent, nous supposons que le taux de rotation  $\Omega$  dépend principalement du rayon ( $\Omega(r, \theta) \approx \Omega(r)$ ) pour obtenir une fréquence propre qui ne dépend que de la coordonnée radiale ( $\omega(r, \theta) \approx \omega(r)$ ). En effet, selon les contraintes sismiques, la rotation interne de nombreuses étoiles de la séquence principale de masses intermédiaires présente un faible contraste de rotation entre le cœur et la surface. Par conséquent, dans ce cas, on peut supposer que la rotation est (quasi-)uniforme dans leur zone radiative (Kurtz et al. 2014; Saio et al. 2015; Murphy et al. 2016; Aerts et al. 2017, 2019). Cette rotation (quasi-)uniforme est en accord avec les profils de rotation résultant de l'effet des contraintes de Maxwell sur les champs toroïdaux instables/régénérés par dynamo (Maeder & Meynet 2003; Heger et al. 2005; Eggenberger et al. 2005; Fuller et al. 2019; Eggenberger et al. 2022; Petitdemange et al. 2023).

#### 4.4.3.2 Équation de marée de Laplace magnétique sans dimension

En adoptant cette approximation, l'équation de marée de Laplace magnétique sans dimension peut être exprimée comme suit

$$\mathcal{L}_{\omega^{\text{in}}m}^{\text{magn.}} [w_{\omega^{\text{in}}km}^{\text{magn.}}(r, x)] = \omega^2(r)\tilde{\mathcal{L}}_{\omega^{\text{in}}m}^{\text{magn.}} [w_{\omega^{\text{in}}km}^{\text{magn.}}(r, x)] = -\Lambda_{\omega^{\text{in}}km}^{\text{magn.}}(r)w_{\omega^{\text{in}}km}^{\text{magn.}}(r, x), \quad (4.52)$$

avec

$$\mathcal{L}_{\omega^{\text{in}}m}^{\text{magn.}} = \omega^2 \partial_x \left[ \frac{1}{\mathcal{A}} \frac{1-x^2}{D_M} \partial_x \right] + m\omega^2 \partial_x \left( \frac{\nu_M x}{\mathcal{A} D_M} \right) - m^2 \frac{\omega^2}{\mathcal{A} D_M (1-x^2)} + m^2 \frac{\omega^2}{\mathcal{A}^2} \frac{x}{D_M} \partial_x \omega_A^2, \quad (4.53)$$

et

$$\Lambda_{\omega^{\text{in}}km}^{\text{magn.}}(r) = \omega^2(r)\lambda_{\omega^{\text{in}}km}^{\text{magn.}}(r). \quad (4.54)$$

De cette manière, la relation de dispersion (4.51) peut être réécrite comme suit :

$$k_{V;\omega^{\text{in}}km}^2(r) = \frac{N^2 \Lambda_{\omega^{\text{in}}km}^{\text{magn.}}}{r^2 \omega^2}. \quad (4.55)$$

### 4.4.3.3 Fréquence asymptotique des ondes MGI à basse fréquence

On peut substituer la relation de dispersion (4.55) dans la condition de quantification verticale décrite dans le chapitre 2 (Eq. 2.22). Cependant, contrairement au cas standard, il n'est pas possible de dériver analytiquement l'expression des fréquences des modes. Par conséquent, la résolution numérique de l'équation implicite

$$\int_{r_1}^{r_2} N \frac{\sqrt{\Lambda_{\omega^{in}km}^{\text{magn.}}}}{r\omega} dr = (n + 1/2)\pi, \quad (4.56)$$

est nécessaire pour obtenir les fréquences des modes MGI correspondantes.

En tant que preuve de concept, nous appliquerons la TAR magnétique à des modèles stellaires représentatifs d'étoiles  $\gamma$  Dor typiques près de la séquence principale d'âge zéro (ZAMS).

## 4.5 Application aux étoiles de masse intermédiaire de la séquence principale

À partir de maintenant, nous nous concentrons spécifiquement sur le cas où la rotation est uniforme pour isoler l'effet du champ magnétique sur les modes MGI et sa signature observationnelle pour diagnostiquer sa présence.

### 4.5.1 Modèle MESA de l'étoile $\gamma$ Dor étudiée

Comme dans la section 4.1.2.1, nous utilisons le code d'évolution stellaire MESA pour calculer des modèles stellaires sans rotation et sans champ magnétique pour les paramètres typiques utilisés dans la modélisation astérosismique des étoiles  $\gamma$  Dor (e.g. [Van Reeth et al. 2016](#)). Nous sélectionnons un modèle de  $1.6 M_{\odot}$  près de la ZAMS pour modéliser une étoile  $\gamma$  Dor prototype.

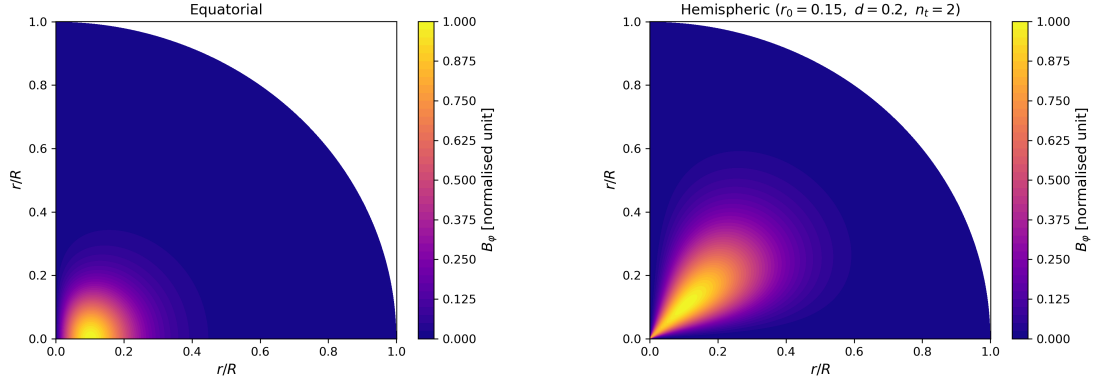
Une étude similaire, mais pour des états évolutifs plus avancés (milieu de la séquence principale et l'âge terminal de la séquence principale) et pour un modèle d'étoile SPB ( $5 M_{\odot}$ ) a été faite dans [Dhouib et al. \(2022\)](#).

### 4.5.2 Configurations du champ magnétique toroïdal

Afin d'évaluer l'effet du champ magnétique toroïdal sur les modes d'oscillations, deux configurations sont examinées : un champ magnétique équatorial et un champ magnétique hémisphérique (voir la figure 4.4).

#### 4.5.2.1 Champ magnétique équatorial

Comme l'ensemble des étoiles, les étoiles de masses intermédiaires descendent des étoiles de la pré-séquence principale (PMS) entièrement convectives. Un tel corps convectif est connu pour générer et héberger des champs générés par l'action de la dynamo convective, qui pourraient relaxer sous forme de configuration magnétique fossile dans l'enveloppe radiative une fois la convection terminée (e.g. [Duez & Mathis 2010](#); [Mathis et al. 2011](#); [Arlt 2014](#); [Neiner et al. 2015](#); [Emeriau-Viard & Brun 2017](#)). La topologie et la stabilité d'un tel champ mixte a été étudiée numériquement



**FIGURE 4.4** – Deux configurations du champ magnétique toroïdal à l’intérieur de l’étoile  $1.6 M_{\odot}$   $\gamma$  Dor près de la ZAMS : équatoriale (**Gauche**) et hémisphérique (**Droite**).

par Braithwaite & Spruit (2004); Braithwaite & Nordlund (2006); Braithwaite (2008, 2009); Duez et al. (2010a); Duez (2011), et semi-analytiquement par Duez & Mathis (2010); Akgün et al. (2013); Fuller & Mathis (2023).

Duez & Mathis (2010) ont dérivé une description semi-analytique de ces champs mixtes stables dans le cas axisymétrique sans rotation :

$$\mathbf{B}(r, \theta) = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \nabla \psi(r, \theta) \wedge \mathbf{e}_{\varphi} + \lambda \frac{\psi(r, \theta)}{R} \mathbf{e}_{\varphi} \right), \quad (4.57)$$

où

$$\psi(r, \theta) = \mu_0 \alpha \lambda \frac{A(r)}{R} \sin^2 \theta, \quad (4.58)$$

la fonction de flux magnétique,  $\alpha$  une constante de normalisation fixée par l’amplitude du champ magnétique choisi,  $\lambda$  une valeur propre déterminée par les conditions aux limites imposée à la configuration magnétique (confinée avec ou sans couche de courant), et

$$A(r) = -r j_1 \left( \lambda \frac{r}{R} \right) \int_r^R y_1 \left( \lambda \frac{x}{R} \right) \rho_0 x^3 dx - r y_1 \left( \lambda \frac{r}{R} \right) \int_0^r j_1 \left( \lambda \frac{x}{R} \right) \rho_0 x^3 dx, \quad (4.59)$$

avec  $j_1$  ( $y_1$ ) les fonctions de Bessel sphériques du premier (deuxième) ordre (Abramowitz & Stegun 1972).

Si la rotation différentielle reste faible, le champ restera stable et fossile. Cependant, si une rotation différentielle radiale suffisante se développe, son cisaillement transforme la composante poloïdale initiale du champ en un champ toroïdal supplémentaire (Aurière et al. 2007; Gaurat et al. 2015; Jouve et al. 2020) qui peut devenir instable en raison de l’instabilité de Tayler. Si une boucle dynamo efficace a lieu, comme c’était proposé pour la première fois par Spruit (2002) et identifié par Petitdemange et al. (2023), le champ toroïdal initial peut être régénéré.

Ici, nous nous concentrons sur l’effet non perturbatif des champs toroïdaux axisymétriques sur les modes MGI. Donc, nous choisissons à titre d’exemple d’extraire la configuration toroïdale de la configuration mixte définie à partir de l’équation (4.57) tel que

$$\mathbf{B} = B_0 \left[ 0, 0, \tilde{b}_{\varphi}(r) \sin \theta \right], \quad (4.60)$$





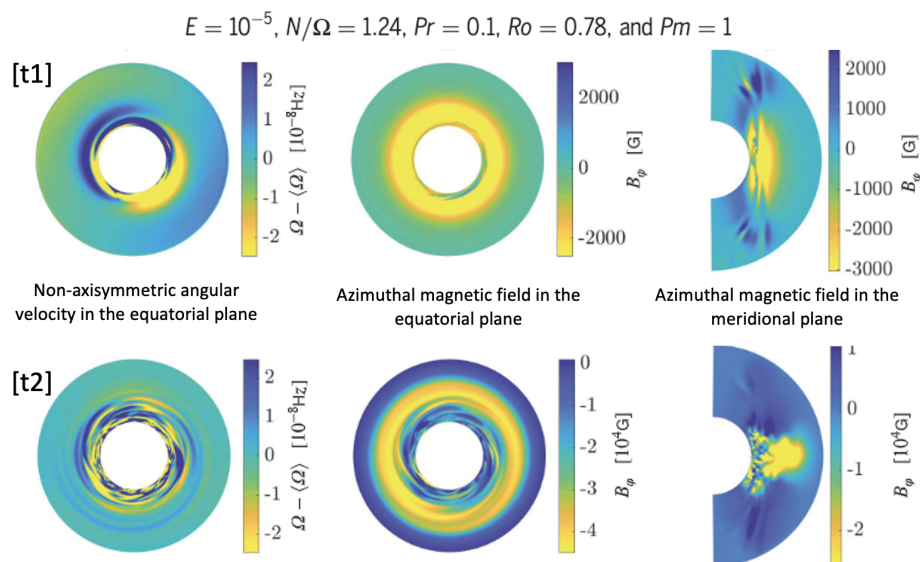
avec

$$B_0 = \frac{\mu_0 \alpha \lambda}{R} \quad \text{et} \quad \tilde{b}_\varphi(r) = \frac{\lambda A}{rR}. \quad (4.61)$$

Petitdemange et al. (2023) ont trouvé un champ toroïdal profond confiné à l'équateur (voir la figure 4.5) qui peut être reproduit en première approximation par l'équation (4.60) même si  $\tilde{b}_\varphi(r)$  sera différent dans ce cas parce qu'il est régi par la physique de la dynamo et non par la relaxation MHD initiale formant le champ fossile de départ. Ce champ est représenté dans la figure 4.4. En utilisant les équations (4.25) & (4.60), nous obtenons l'expression de la fréquence d'Alfvén, qui devient indépendante de  $\theta$

$$\omega_A(r) = \frac{\tilde{b}_\varphi(r)}{\sqrt{\mu_0 \rho_0(r)r}}, \quad (4.62)$$

dans ce cas-là.



**FIGURE 4.5 – Gauche :** la vitesse angulaire non axisymétrique dans le plan équatorial. **Milieu :** le champ magnétique azimuthal dans le plan équatorial. **Droite :** la même quantité dans le plan méridien. Les résultats sont présentés pour les temps [t1] (la première ligne) et [t2] (la deuxième ligne), avant et après l'apparition de l'instabilité de Tayler. Crédits : Petitdemange et al. (2023).

#### 4.5.2.2 Champ magnétique hémisphérique

Selon l'historique de la rotation différentielle de l'étoile, des configurations magnétiques différentes de la configuration équatoriale peuvent se développer dans la zone radiative. Par exemple, une rotation différentielle radiale peut générer un champ toroïdal puissant dans la région interne de la zone radiative, tandis qu'une rotation différentielle cylindrique peut le produire dans la région externe (Jouve et al. 2020). Zahn et al. (2007) ont considéré un champ toroïdal résultant de l'interaction entre la rotation différentielle d'une tachocline de type solaire et un champ magnétique



fossile poloïdal dipolaire initial. Le profond champ magnétique résultant se compose de deux distributions magnétiques localisées dans les hémisphères nord et sud et s'atténuant à l'équateur. On peut modéliser de telles configurations magnétiques à l'aide de la distribution du champ suivante :

$$B_\varphi(r, \theta) = B_0 \exp \left[ -\frac{(r - r_0)^2}{2d^2} \right] \sin^{n_t} (2\theta), \quad (4.63)$$

où  $B_0$  est l'amplitude du champ magnétique,  $r_0$  est la position radiale du centre de la distribution,  $d$  est son extension radiale, et  $n_t$  est un paramètre pour faire varier son extension latitudinale. Ce champ (normalisé par  $B_0$ ) est représenté dans la figure 4.4 pour  $r_0 = 0.15$ ,  $d = 0.2$  et  $n_t = 2$ . En utilisant l'équation (4.25), on extrait la fréquence d'Alfvén, qui dépend, dans ce cas, de  $r$  et  $\theta$  :

$$\omega_A(r, \theta) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{B_\varphi(r, \theta)}{\sqrt{\mu_0 \rho_0(r)}}. \quad (4.64)$$

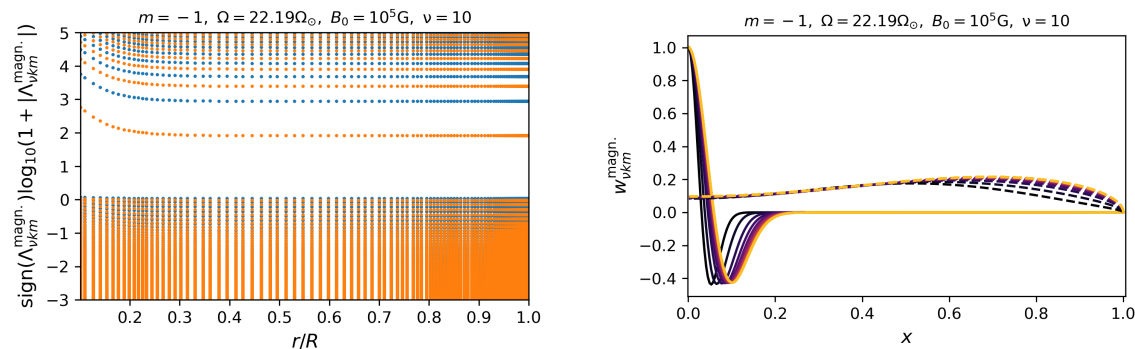
### 4.5.3 Valeurs propres et fonctions de Hough

L'équation de marée de Laplace magnétique (4.52) est un problème aux valeurs propres. Pour le résoudre numériquement, nous utilisons la méthode de collocation de Chebyshev (Wang et al. 2016) définie dans la section 2.4.3.3. Nous résolvons cette équation pour différents rayons  $r$ , paramètres de spin  $\nu$ , taux de rotation  $\Omega$  et amplitude du champ magnétique  $B_0$ . Nous nous concentrons sur l'impact du champ magnétique toroïdal sur les fonctions de Hough magnétique et les valeurs propres associées.

Sur le panneau gauche de la figure 4.6 on trace les valeurs propres de l'équation de marée de Laplace magnétique pour un champ magnétique équatorial (figure 4.4) avec une amplitude  $10^5$  G en fonction du rayon pour  $m = -1$ ,  $\nu = 10$  et  $\Omega = 22.19 \Omega_\odot$ <sup>1</sup> en utilisant le modèle d'une étoile  $\gamma$  Dor de  $1.6 M_\odot$  à la ZAMS. On voit que les valeurs propres sont modifiées par le champ magnétique, qui introduit une forte dépendance radiale dans la région interne de l'étoile (près de l'interface entre l'enveloppe radiative et le cœur convectif). Près de la surface, l'influence du champ magnétique sur les valeurs propres est très faible, presque inexistante. Ceci est attendu, car le champ magnétique toroïdal est faible loin de l'interface radiative/convective.

Sur le panneau droit de la figure 4.6, nous montrons les fonctions de Hough magnétiques en fonction de la coordonnée horizontale  $x$  à différents rayons pour les solutions de type gravité (mode g sectoriel rétrograde  $\{k = 0, m = -1\}$ ) et les solutions de type Rossby (mode r  $\{k = -2, m = -1\}$ ). La courbe jaune représente les fonctions de Hough à la surface de l'étoile, qui est presque la même que dans le cas non magnétique en raison du faible champ magnétique de surface. Le comportement des fonctions propres change le plus dans les régions intérieures (courbe bleue). Plus précisément, les fonctions de Hough magnétiques migrent vers l'intérieur, en direction de l'équateur ( $x = 0$ ), ce qui entraîne un rétrécissement de leur forme générale. De plus, on observe que les solutions de type ondes de Rossby, présentes dans tout le domaine, sont principalement influencées par le champ magnétique dans les régions polaires. Contrairement aux solutions de type ondes de Rossby, les solutions de type gravité sont piégées près du plan équatorial dans le régime  $\nu_M > 1$ . En fait, les régions où  $D_M \geq 0$  correspondent aux régions où les solutions de type gravité sont propagatives, alors qu'elles deviennent évanescentes lorsque  $D_M < 0$ . Par conséquent, lorsque  $\nu_M > 1$ , les solutions de type gravité sont piégées dans une ceinture équatoriale (Mathis 2009; Mathis & de Brye 2011).

1.  $\Omega_\odot$  : la vitesse de rotation du Soleil.



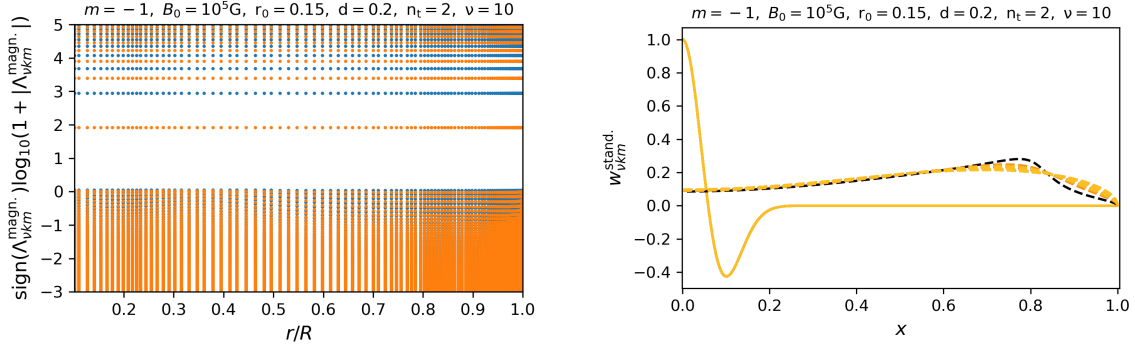
**FIGURE 4.6 – Gauche :** Valeurs propres de l'équation de marée de Laplace magnétique pour un champ magnétique équatorial en fonction du rayon  $r$  pour  $m = -1$ ,  $\nu = 10$  et  $\Omega = 22.19\Omega_{\odot}$  en utilisant le modèle d'une étoile  $\gamma$  Dor de  $1.6M_{\odot}$  à la ZAMS. Les points bleus (respectivement, orange) correspondent aux modes avec des fonctions de Hough paires (respectivement, impaires). **Droite :** Fonctions de Hough magnétique (normalisées à l'unité) en fonction de la coordonnée horizontale  $x$  à différents rayons depuis l'interface radiative/convective (bleu foncé) jusqu'à la surface (orange). Les lignes pleines correspondent aux solutions de type ondes de gravité (MGI) ( $k = 0$ ) et les lignes pointillées aux solutions de type ondes de Rossby (magnéto-Rossby) ( $k = -2$ ).

Donc sous l'effet du champ magnétique, le piégeage des modes  $g$  devient plus efficace lorsque la colatitude réduite critique  $x_c = \cos\theta_c = |\nu_M|^{-1}$  (Mathis & de Brye 2011), qui correspond au point d'inflexion de  $D_M$ , diminue. Ainsi, lorsque le paramètre de spin magnétique  $\nu_M$  augmente, ces modes ont tendance à être plus confinés autour de l'équateur.

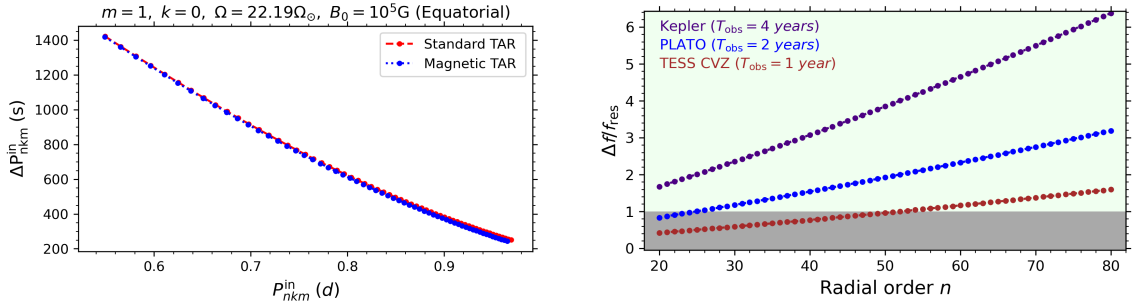
Dans un second temps, on représente sur la figure 4.7 ces mêmes quantités (valeurs propres et fonctions propres) pour un champ magnétique hémisphérique ( $B_0 = 10^5$  G,  $r_0 = 0.15$ ,  $d = 0.2$ , et  $n_t = 2$ , représenté dans la figure 4.4). Pour ce type de champ, nous constatons que les valeurs propres et les fonctions de Hough sont à peine modifiées par rapport aux valeurs non magnétiques. L'interprétation physique simple est qu'un champ équatorial se trouve toujours dans la région de propagation des modes MGI qui peuvent être piégés équatorialement. Cependant, ce n'est pas le cas pour le champ hémisphérique fortement localisé à des latitudes données.

#### 4.5.4 Détectabilité de la signature magnétique

Le panneau gauche des figures 4.8 & 4.9 montre l'espacement des périodes des modes MGI dans les cas magnétiques (équatorial et hémisphérique) et dans le cas non magnétique. Nous constatons que les valeurs d'espacement diminuent sous l'influence du champ magnétique toroïdal. Cette diminution est la plus importante aux ordres radiaux les plus élevés (périodes de mode les plus longues) pour lesquels l'action de la force de Lorentz est la plus forte. Nous constatons également que le champ magnétique toroïdal n'a pas de signature distincte sur l'espacement des périodes, mais qu'il introduit plutôt un décalage. Un tel effet peut également être introduit par d'autres effets physiques, tels que l'accélération centrifuge ou la rotation différentielle. En utilisant une approche perturbative, Prat et al. (2019, 2020) et Van Beeck et al. (2020) ont trouvé que la signature d'un champ magnétique mixte fossile dans la morphologie de l'espacement des périodes des modes  $g$  diffère sensiblement de la signature due à la rotation. Ils ont trouvé des caractéristiques magnétiques



**FIGURE 4.7** – Identique à la figure 4.6, mais pour un champ magnétique hémisphérique avec  $B_0 = 10^5$  G,  $r_0 = 0.15$ ,  $d = 0.2$ , et  $n_t = 2$ .

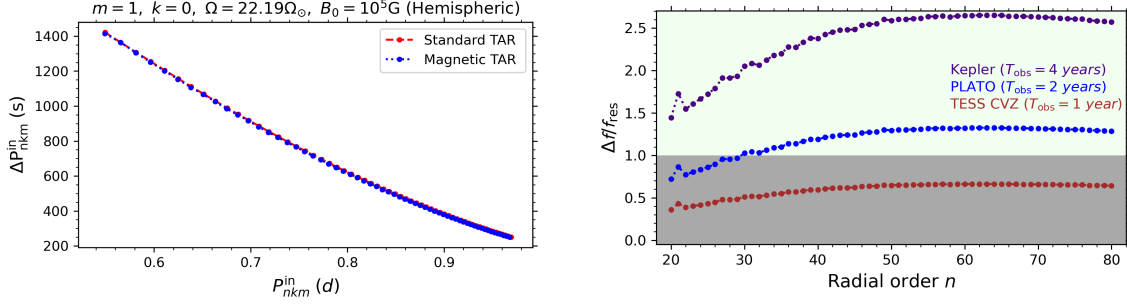


**FIGURE 4.8** – **Gauche** : Espacement de périodes dans le repère inertiel pour les modes g  $\{k = 0, m = 1\}$  calculés en utilisant la TAR standard (en rouge) et la TAR magnétique (en bleue) avec le modèle d’une étoile  $\gamma$  Dor de  $1.6 M_\odot$  à la ZAMS. **Droite** : Détectabilité de l’effet de ce champ magnétique sur ces modes en fonction de l’ordre radial  $n$  basé sur la fréquence de résolution de *Kepler* (en indigo), *PLATO* (en bleu), et *TESS CVZ* (en marron).

en dents de scie pour les modes d’ordre radial élevé. Ces signatures sont des artefacts introduits par l’approche perturbative lorsqu’elle est appliquée en dehors de son domaine de validité (voir la section 4.1).

Pour quantifier ce décalage et la détectabilité théorique du champ magnétique toroïdal, nous comparons les différences de fréquence entre les fréquences asymptotiques calculées avec la TAR standard et celles calculées avec la TAR magnétique pour chaque ordre radial à la fréquence de résolution  $f_{\text{res}} = 1/T_{\text{obs}}$  (avec  $T_{\text{obs}}$  le temps d’observation) de *TESS CVZ*, *PLATO* et *Kepler*.

Nous présentons ces résultats sur le panneau droit des figures 4.8 & 4.9 pour les modes g  $\{k = 0, m = 1\}$ . Nous pouvons voir que dans ce cas, l’effet du champ magnétique équatorial est en principe détectable pour la plupart des ordres radiaux en utilisant les courbes de lumière nominales de *Kepler* et *PLATO*. De plus, on voit que la signature de l’effet magnétique augmente fortement avec l’ordre radial du mode. Par contre, pour le champ magnétique hémisphérique, la détectabilité devient plus faible et on trouve une faible augmentation de la détectabilité lorsque l’ordre radial augmente. La configuration équatoriale est plus favorable en termes de détectabilité, car, dans ce



**FIGURE 4.9** – Identique à la figure 4.8, mais pour un champ magnétique hémisphérique avec  $B_0 = 10^5$  G,  $r_0 = 0.15$ ,  $d = 0.2$ , et  $n_t = 2$ .

cas, la fréquence d’Alfvén  $\omega_A$  est distribuée à toutes les latitudes (indépendamment de  $\theta$ ) alors que pour le champ hémisphérique, elle est localisée en latitude. De plus, on trouve que plus les champs magnétiques sont intenses, plus ses signatures devraient être détectables dans les observations, mais des valeurs élevées de  $B_0$  peuvent produire une couche magnétique critique pour laquelle  $\mathcal{A} = 0$ , ce qui limite la formation des modes (Fuller et al. 2015; Lecoanet et al. 2017; Rui & Fuller 2023).

Les amplitudes des champs magnétiques dont nous nous attendons à ce que la signature soit détectable à l’aide de la TAR magnétique sont en accord avec celles trouvées par Heger et al. (2005); Maeder & Meynet (2005); Fuller et al. (2019); Petitdemange et al. (2023). Ils ont trouvé que les configurations magnétiques toroïdales dans les étoiles de masse intermédiaire avaient des intensités comprises entre  $10^4$  G et  $10^6$  G dans leur modélisation et leurs simulations numériques. Par conséquent, nous nous attendons à ce que ces champs puissent être détectés et étudiés en profondeur en utilisant la TAR magnétique théorique développé dans ce travail, avec le potentiel de démêler le magnétisme interne des étoiles tout au long de leur vie sur la séquence principale. Cependant, le défi observationnel consiste à distinguer l’influence magnétique d’autres effets astrophysiques non calibrés dans les modèles d’intérieurs stellaires, tels que la présence d’un mélange (magnéto-)rotationnel et d’une diffusion atomique, qui induisent également des signatures dans les valeurs prédites de l’espacement des périodes (e.g. Aerts 2021; Mombarg et al. 2022).

## 4.6 Conclusions et perspectives

La TAR magnétique dérivée ici généralise Mathis (2009) en prenant en compte les champs magnétiques toroïdaux axisymétriques et Mathis & de Brye (2011) en tenant compte des distributions générales des fréquences d’Alfvén et de rotation axisymétriques  $\omega_A(r, \theta)$  et  $\Omega(r, \theta)$  au lieu d’une valeur uniforme  $\omega_A$  et d’une rotation à corps solide  $\Omega_s$ .

Avec ce nouveau modèle, on a réalisé une application astérosismique où nous avons étudié l’impact et la détectabilité du champ magnétique sur les ondes MGI. On a trouvé que le décalage de fréquence des modes MGI induit par le champ magnétique équatorial peut être détecté en utilisant la photométrie spatiale de haute précision pour la plupart des modes lorsque le champ magnétique est suffisamment fort dans la région radiative interne (d’environ  $10^5$  G). Des effets similaires ont été observés pour une configuration magnétique plus complexe et générale. Nos résultats indiquent que plus le champ magnétique est localisé, notamment aux latitudes éloignées de l’équateur, moins



il impacte les ondes gravito-inertielles. Les amplitudes que nous avons testées ici, dans le domaine de validité du TAR magnétique, sont en accord avec les derniers modèles et simulations des champs magnétiques dans les zones radiatives des étoiles de masses intermédiaires (e.g. [Fuller et al. 2019](#); [Petitdemange et al. 2023](#)).

Outre l'application astérosismique, notre nouvelle théorie TAR magnétique ouvre la voie à diverses applications dans les étoiles et les planètes. L'un des exemples importants est l'étude du transport du moment cinétique induit par les ondes MGI de basses fréquences dans des étoiles et des planètes en rotation différentielle. Cela nous permettra de généraliser la méthode développée par [Mathis \(2009\)](#), qui a étudié l'action de la rotation différentielle sur les ondes gravito-inertielles dans les zones radiatives non magnétisées et son impact sur le transport du moment cinétique. De plus, le TAR magnétique peut être utilisé pour étudier la dissipation des marées stellaires et planétaires dans les régions stables stratifiées et magnétisées. Ainsi, nous pouvons dépasser le formalisme développé par [Ahuir et al. \(2021\)](#), qui a abordé ce sujet en supposant un corps non tournant et non magnétisé. Une autre perspective intéressante de notre travail consiste à dériver une nouvelle généralisation de la TAR avec l'inclusion d'un champ magnétique poloïdal. Cela conduirait à une TAR magnétique générale prenant en compte toutes les configurations magnétiques mixtes de manière non-perturbative.

## Article publié :

« **Detecting deep axisymmetric toroidal magnetic fields in stars : the traditional approximation of rotation for differentially rotating deep spherical shells with a general azimuthal magnetic field** » par H. Dhouib, S. Mathis, L. Bugnet, T. Van Reeth, et C. Aerts, *A&A* **661**, A133 (2022)

# Detecting deep axisymmetric toroidal magnetic fields in stars

## The traditional approximation of rotation for differentially rotating deep spherical shells with a general azimuthal magnetic field

H. Dhouib<sup>1</sup>, S. Mathis<sup>1</sup>, L. Bugnet<sup>2</sup>, T. Van Reeth<sup>3</sup>, and C. Aerts<sup>3,4,5</sup>

<sup>1</sup> Université Paris Cité, Université Paris-Saclay, CEA, CNRS, Astrophysique, Instrumentation et Modélisation Paris-Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette, France  
e-mail: hachem.dhouib@cea.fr

<sup>2</sup> Flatiron Institute, Simons Foundation, 162 Fifth Avenue, New York, NY 10010, USA

<sup>3</sup> Institute of Astronomy, KU Leuven, Celestijnenlaan 200D, 3001 Leuven, Belgium

<sup>4</sup> Department of Astrophysics, IMAPP, Radboud University Nijmegen, PO Box 9010, 6500 GL Nijmegen, The Netherlands

<sup>5</sup> Max Planck Institute for Astronomy, Königstuhl 17, 69117 Heidelberg, Germany

Received 20 December 2021 / Accepted 17 February 2022

### ABSTRACT

**Context.** Asteroseismology has revealed small core-to-surface rotation contrasts in stars in the whole Hertzsprung–Russell diagram. This is the signature of strong transport of angular momentum (AM) in stellar interiors. One of the plausible candidates to efficiently carry AM is magnetic fields with various topologies that could be present in stellar radiative zones. Among them, strong axisymmetric azimuthal (toroidal) magnetic fields have received a lot of interest. Indeed, if they are subject to the so-called Tayler instability, the accompanying triggered *Maxwell* stresses can transport AM efficiently. In addition, the electromotive force induced by the fluctuations of magnetic and velocity fields could potentially sustain a dynamo action that leads to the regeneration of the initial strong axisymmetric azimuthal magnetic field.

**Aims.** The key question we aim to answer is whether we can detect signatures of these deep strong azimuthal magnetic fields. The only way to answer this question is asteroseismology, and the best laboratories of study are intermediate-mass and massive stars with external radiative envelopes. Most of these are rapid rotators during their main sequence. Therefore, we have to study stellar pulsations propagating in stably stratified, rotating, and potentially strongly magnetised radiative zones, namely magneto-gravito-inertial (MGI) waves.

**Methods.** We generalise the traditional approximation of rotation (TAR) by simultaneously taking general axisymmetric differential rotation and azimuthal magnetic fields into account. Both the Coriolis acceleration and the Lorentz force are therefore treated in a non-perturbative way. Using this new formalism, we derive the asymptotic properties of MGI waves and their period spacings.

**Results.** We find that toroidal magnetic fields induce a shift in the period spacings of gravity ( $g$ ) and Rossby ( $r$ ) modes. An equatorial azimuthal magnetic field with an amplitude of the order of  $10^5$  G leads to signatures that are detectable in period spacings for high-radial-order  $g$  and  $r$  modes in  $\gamma$  Doradus ( $\gamma$  Dor) and slowly pulsating B (SPB) stars. More complex hemispheric configurations are more difficult to observe, particularly when they are localised out of the propagation region of MGI modes, which can be localised in an equatorial belt.

**Conclusions.** The magnetic TAR, which takes into account toroidal magnetic fields in a non-perturbative way, is derived. This new formalism allows us to assess the effects of the magnetic field in  $\gamma$  Dor and SPB stars on  $g$  and  $r$  modes. We find that these effects should be detectable for equatorial fields thanks to modern space photometry using observations from *Kepler*, *TESS* CVZ, and *PLATO*.

**Key words.** magnetohydrodynamics (MHD) – waves – stars: rotation – stars: magnetic field – stars: oscillations – methods: analytical

## 1. Introduction

Space-based asteroseismology has made Eddington’s dream ‘to see’ inside stars a reality (e.g. García & Ballot 2019; Aerts 2021). One of the major discoveries of the *Kepler* space mission (Borucki et al. 2010; Howell et al. 2014) is the signature of a strong extraction of angular momentum (AM) operating in the radiative zones of stars of all types throughout their evolution, leading to weak core-to-surface rotation contrasts (e.g. Beck et al. 2012; Deheuvels et al. 2014; Kurtz et al. 2014; Triana et al. 2015; Aerts et al. 2017; Van Reeth et al. 2018;

Li et al. 2020; Saio et al. 2021). Understanding such efficient transport of momentum in stellar interiors, and the related chemical mixing, is one of the major unsolved questions of modern stellar astrophysics (Dumont et al. 2021; Pedersen et al. 2021). These mechanisms must be taken into account to get a complete and coherent understanding of stars, their evolution, age, and remnants, and the impact on their galactic environment (e.g. Meynet & Maeder 2000; Heger et al. 2005; Suijs et al. 2008; Maeder 2009; Bouchaud et al. 2020). State-of-the-art stellar structure and evolution codes that take rotation and the meridional flows into account, as well as the shear instabilities they

trigger, predict internal AM that is two orders of magnitude too high compared to asteroseismic observations (Eggenberger et al. 2012; Marques et al. 2013; Cantiello et al. 2014; Ouazzani et al. 2019).

Magnetic fields in stellar radiative zones are one of the plausible candidates to efficiently carry AM. The best laboratory to study these fields are early-type stars, which have an outer radiative envelope. This allows us to characterise the properties of the fields at the stellar surface (Morel et al. 2014; Neiner et al. 2015; Wade et al. 2016) using ground-based high-resolution spectropolarimetric surveys. Two types of fields have been detected. On the one hand, 10% of early-type stars host large-scale, generally high-amplitude, stable fields. Since they seem to present no correlations between their properties and stellar mass, age, and rotation (Shultz et al. 2019), these magnetic fields are supposed to have a fossil origin. This means that they result from the relaxation of fields generated by a dynamo during pre-main-sequence (PMS) convective phases when convective layers convert into stably stratified ones (Braithwaite & Spruit 2004; Duez & Mathis 2010; Arlt 2014; Emeriau-Viard & Brun 2017). As shown by Tayler (1980), Braithwaite (2009), and Duez et al. (2010a), axisymmetric fields are only stable over long periods when they consist of a poloidal and toroidal component in the meridional plane and azimuthal direction, respectively, since pure toroidal or poloidal fields are unstable in stellar radiative zones (Tayler 1973; Markey & Tayler 1973). On the other hand, the remaining 90% of intermediate-mass and massive stars can host other types of fields detected as small-scale weak fields at the stellar surface (Lignières et al. 2009; Petit et al. 2011; Blazère et al. 2016a,b). Three possibilities have been suggested to explain their origin. First, they could be generated by a dynamo action in the thin sub-surface convective layer (Cantiello & Braithwaite 2019; Jermyn & Cantiello 2020). Second, they might result from a failed relaxation due to the action of the rapid rotation (Braithwaite & Cantiello 2013). Finally, they can be the signature of fields resulting from instabilities due to deep-seated axisymmetric toroidal magnetic fields at the stellar surface (Aurière et al. 2007; Gaurat et al. 2015).

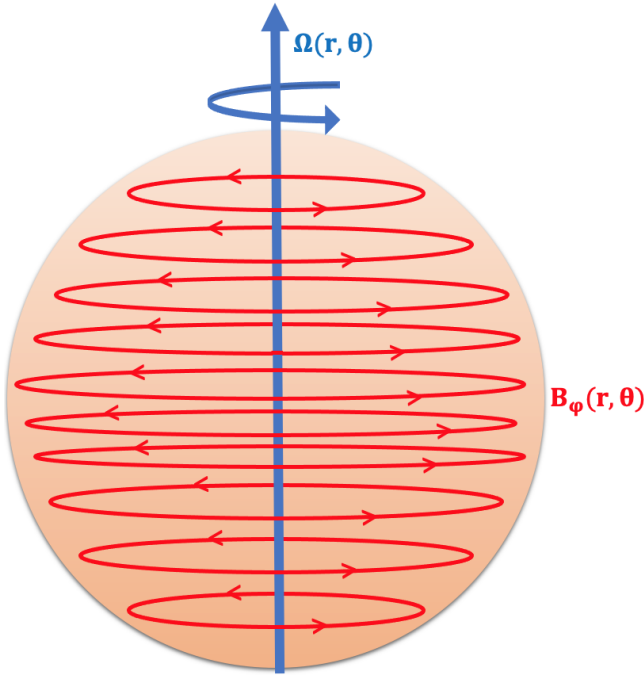
Both types of fields are able to transport AM very efficiently (e.g. Mestel & Weiss 1987; Charbonneau & MacGregor 1993; Gough & McIntyre 1998; Spruit 1999, 2002; Garaud 2002; Mathis & Zahn 2005; Strugarek et al. 2011; Fuller et al. 2019; Petitdemange et al. 2022). However, since the seminal work by Spruit (2002), a strong interest has been devoted to magnetic fields resulting from the Tayler instability of an axisymmetric toroidal magnetic field. Spruit (2002) indeed suggested that such a field could trigger a dynamo action in radiative convectively stable layers and that the resulting magnetic torque allows a very efficient transport of AM (e.g. Maeder & Meynet 2003; Heger et al. 2005; Eggenberger et al. 2019). The scenario of an efficient dynamo loop in stellar radiative zones has been strongly debated in the literature Braithwaite (2006), Zahn et al. (2007), Gellert et al. (2008, 2011), Fuller et al. (2019). Recent global 3D numerical simulations by Petitdemange et al. (2022) provide the first convincing proof of how such a dynamo can be driven by a combination of the action of differential rotation and its related shear instability and the action of the Tayler instability. In this work, we consider that a strong axisymmetric toroidal field is present in the radiative envelope but does not emerge at the stellar surface, implying that spectropolarimetry will not be able to detect and characterise it. The key question to answer is thus, given the importance of potentially unstable strong axisymmetric toroidal fields for stellar magnetism and rotation, how they can be detected and characterised.

Asteroseismology is the key to addressing this problem. More specifically, magneto-asteroseismology (Neiner et al. 2015; Mathis et al. 2021) is the best diagnostic tool. As it stands, magneto-asteroseismology consists in searching for the characteristic signatures of magnetic field strengths and configurations in the observed frequency spectra of stellar oscillations. Although this method is still in its infancy, with only a few studies for the Sun (Goode & Thompson 1992; Kiefer & Roth 2018) and early-type stars (Takata & Shibahashi 1994; Shibahashi & Aerts 2000), it has recently seen a strong development motivated by the simultaneous use of space-based asteroseismology and ground-based spectropolarimetry (Briquet et al. 2012, 2013; Neiner & Lampens 2015; Neiner et al. 2017; Buyschaert et al. 2018). First, Prat et al. (2019, 2020) studied the modification of the frequency spectrum of gravito-inertial modes by axisymmetric and inclined mixed (i.e. poloidal plus toroidal) dipolar fossil fields. Gravito-inertial modes are the oscillation modes that propagate in rotating stellar radiative zones under the combined action of the buoyancy and the restoring Coriolis forces. The authors treated the field as a perturbation as a first step. They showed how the behaviour of the so-called period spacing (i.e. the difference in period between two modes of the same degree and azimuthal order but of consecutive radial order as a function of the period of these modes) is modified by the presence of the field. They identified sawtooth patterns that cannot be produced by chemical stratification or by differential rotation (Miglio et al. 2008; Van Reeth et al. 2018). Van Beeck et al. (2020) made a systematic exploration of this magnetic signature along the evolution of intermediate-mass pulsating  $\gamma$  Doradus ( $\gamma$  Dor hereafter) and slowly pulsating B (SPB) stars and showed that the magnetic signatures differ appreciably from those due to rotation alone. They found that these signatures are measurable for dipolar gravity mode oscillations in terminal-age main-sequence (TAMS) stars for a magnetic field with a near-core strength larger than  $10^5$  G. Next, Bugnet et al. (2021) and Loi (2021) studied the perturbation of mixed gravito-acoustic modes propagating in evolved low- and intermediate-mass stars by axisymmetric and non-axisymmetric inclined mixed dipolar fossil fields, respectively. They identified asymmetries in the frequency splittings induced by the field. Finally, Mathis et al. (2021) derived the asymptotic theory for the perturbation of low-frequency gravito-acoustic and gravito-inertial modes by such an axisymmetric field. This theory is in excellent agreement with direct numerical computations coupled to state-of-the-art stellar oscillation codes. The asymptotic expressions obtained for frequency splittings open the path to the potential inversion of the internal distribution of magnetic fields in stellar radiative zones.

All these previous studies have assumed that the magnetic field is a perturbation. This assumption becomes questionable for the high amplitudes connected with strong axisymmetric toroidal, initially fossil, fields that trigger Tayler instability and potential Tayler-Spruit-like dynamos. It thus becomes necessary to study the impact of moderate to strong amplitude fields on stellar pulsation modes. Predictions of this impact can then be used to detect and characterise the field. A first step has been achieved by Loi (2020a,b) and Loi & Papaloizou (2020) in the case of gravity modes (see also Schatzman 1993; Rudraiah & Venkatachalappa 1972; Barnes et al. 1998; MacGregor & Rogers 2011; Asai et al. 2016; Lee 2018).

In this work, we study the case of gravito-inertial waves. In the presence of a strong magnetic field, these waves are driven by the buoyancy force, the Coriolis acceleration, and the Lorentz force. Therefore, they become magneto-gravito-inertial (MGI)





**Fig. 1.** Sketch of the set-up that we use to study the dynamics of MGI waves in rotating, magnetic, stably stratified stellar radiative zones.

waves (e.g. Braginskii 1967; Friedlander 1987, 1989). For this purpose, we propose generalising the traditional approximation of rotation (TAR) that was first introduced in geophysics (Eckart 1960) to study the dynamics of the shallow Earth atmosphere and oceans. This formalism is intensively used in asteroseismology for the study of low-frequency waves propagating in strongly stratified zones (e.g. Bouabid et al. 2013; Van Reeth et al. 2016; Aerts 2021). In the hydrodynamical case, the vertical component of the Coriolis acceleration along the stratification direction can be neglected because it is dominated by the buoyancy force. This leads to velocities that are mostly horizontal. Therefore, the 2D non-separable wave propagation equation in the general case (e.g. Dintrans et al. 1999) becomes separable (e.g. Bildsten et al. 1996; Lee & Saio 1997), as in the non-rotating case. It can be written as a combination of one equation that describes the wave’s horizontal structure, named the Laplace tidal equation (Laplace 1799), and one radial Schrödinger-like equation for the radial propagation when assuming the Cowling approximation (Cowling 1941), in which the Eulerian perturbation of the gravitational potential is neglected.

The TAR, in its standard version, relies mainly on three assumptions. First, the rotation is assumed to be uniform. Second, the star is assumed to be spherical, so the centrifugal acceleration is neglected, namely  $\Omega \ll \Omega_K$ , where  $\Omega_K \equiv \sqrt{GM/R^3}$  is the Keplerian critical (breakup) angular velocity, and  $G$ ,  $M$ , and  $R$  are the universal constant of gravity, the mass of the star, and the stellar radius, respectively. Finally, the magnetic field is not taken into account. However, given recent findings and observations, new theoretical developments of the standard TAR have emerged. The uniform rotation assumption was abandoned by Ogilvie & Lin (2004) and Mathis (2009), who took the effects of general differential rotation into account. Moreover, the centrifugal acceleration was taken into account first for slightly deformed stars (Mathis & Prat 2019; Henneco et al. 2021) using a perturbative approach and then in the presence

of strong deformation with uniform (Dhouib et al. 2021a) and differential (Dhouib et al. 2021b) rotation in a non-perturbative way. These recent papers on the generalised TAR formulations also treated the detectability and the signature of the centrifugal acceleration and differential rotation on gravito-inertial modes from modern space photometric data.

To introduce magnetic effects, Mathis & de Brye (2011, 2012) took into account an axisymmetric toroidal magnetic field for a uniform Alfvén frequency (the so-called Malkus 1967 field) in a non-perturbative way and weak radial differential rotation in deep spherical shells to perform a global study of MGI waves and the AM transport they trigger in stellar radiative regions (a similar study was done by Asai et al. 2015). This approach allows for a comparison between the effects of rotation and magnetism. Heng & Spitkovsky (2009) and Zaqarashvili et al. (2009) studied the cases of radial and azimuthal fields in shallow layers, respectively. Motivated by the observation of complex axisymmetric toroidal fields from numerical simulations (Zahn et al. 2007; Jouve et al. 2020; Petitdemange et al. 2022), our goal is to achieve a new generalisation of the TAR, going beyond the weak differential rotation approximation and the simplest magnetic azimuthal field configuration that corresponds to a uniform Alfvén frequency. To do so, we derive the magnetic TAR, which includes a general axisymmetric toroidal magnetic field (with a general Alfvén frequency), in a non-perturbative way and general differential rotation (cf. Fig. 1). The objective is to study the dynamics of MGI modes in the best asteroseismic targets available to detect them and characterise their frequency spectrum, namely  $\gamma$  Dor and SPB stars. In Sect. 2 we present the linearised magnetohydrodynamics (MHD) system in differentially rotating fluids in the presence of a general toroidal axisymmetric magnetic field and the set of the adopted approximations.

Section 3 treats the derivation of the magnetic TAR in this general configuration. Subsequently, we rewrite the MHD system in the form of a new magnetic Laplace tidal equation (MLTE) and deduce the asymptotic seismic diagnosis of MGI oscillation modes (Sect. 4). As a proof of concept, we apply our formalism to typical models of  $\gamma$  Dor and SPB stars that host general axisymmetric toroidal magnetic fields as those observed in numerical simulations to study their seismic signature and their detectability (Sects. 5 and 6). Finally, we discuss our results, draw conclusions, and present perspectives and future applications of this work (Sect. 7).

## 2. Propagation equation for MGI in differentially rotating magnetic stars

### 2.1. Ideal MHD equations system

To study the dynamics of MGI waves in differentially rotating magnetic stars, we have to solve the ideal MHD non-dissipative dynamical equations system formed by the induction equation,

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}), \quad (1)$$

with  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , where we neglect the ohmic diffusion, the continuity equation,

$$D_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (2)$$

the momentum equation,

$$D_t \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi + \frac{1}{\rho} \mathbf{F}_L, \quad (3)$$

where the viscous friction is neglected, the energy transport equation in the adiabatic limit (i.e. without heat diffusion and viscous and ohmic heatings),

$$\frac{1}{\Gamma_1} D_t \ln P - D_t \ln \rho = 0, \quad (4)$$

and Poisson's equation for the gravitational potential,  $\Phi$ ,

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (5)$$

with  $\rho$  the density,  $P$  the pressure, and  $G$  the universal gravitational constant. We introduce the notations for the macroscopic velocity field,  $\mathbf{V}$ , the macroscopic magnetic field,  $\mathbf{B}$ , the Lagrangian derivative,  $D_t = \partial_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla)$  and consider the Lorentz force,

$$\mathbf{F}_{\mathcal{L}} = \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}. \quad (6)$$

Further, we denote the magnetic permeability of the medium as  $\mu$ , while  $\Gamma_1 = (\partial \ln P / \partial \ln \rho)_S$  ( $S$  being the macroscopic entropy) is the adiabatic exponent. We can write the macroscopic velocity field,  $\mathbf{V}$ , as the sum of the large-scale azimuthal velocity,  $\mathbf{V}_0$ , associated with the differential rotation,  $\Omega(r, \theta)$ , and of the wave velocity,  $\mathbf{u}'$ :

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V}_0(r, \theta) + \mathbf{u}'(\mathbf{r}, t), \quad (7)$$

with  $\mathbf{V}_0(r, \theta) = r \sin \theta \Omega(r, \theta) \mathbf{e}_\varphi$ , where  $t$  is the time,  $\mathbf{r}$  is the position vector, and  $(r, \theta, \varphi)$  are the usual spherical coordinates with their associated unit vector basis  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ .

## 2.2. Magnetic field topology

Generalising Mathis & de Brye (2011, 2012), we write the macroscopic magnetic field as

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0^T(r, \theta) + \mathbf{b}'(\mathbf{r}, t), \quad (8)$$

with

$$\mathbf{B}_0^T(r, \theta) = \sqrt{\mu \rho_0} r \sin \theta \omega_A(r, \theta) \mathbf{e}_\varphi, \quad (9)$$

a large-scale general axisymmetric toroidal (i.e. azimuthal) field associated with the general Alfvén frequency  $\omega_A r, \theta$ ,  $\rho_0$  the background hydrostatic density, and

$$\mathbf{b}'(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\mu \rho_0} \left[ \omega_A \partial_\varphi \boldsymbol{\xi} - \frac{r \sin \theta}{\sqrt{\rho_0}} (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla (\sqrt{\rho_0} \omega_A)) \mathbf{e}_\varphi \right] - (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) \mathbf{B}_0^T, \quad (10)$$

the wave-induced magnetic field. It is calculated using the induction equation (Eq. (1)), where we introduced the Lagrangian displacement of the wave,  $\boldsymbol{\xi}$ , defined as (Unno et al. 1989)

$$\mathbf{u}' = (\partial_t + \Omega \partial_\varphi) \boldsymbol{\xi} - r \sin \theta (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \Omega) \mathbf{e}_\varphi. \quad (11)$$

Using Eq. (6), we retrieve the expression of the Lorentz force,

$$\mathbf{F}_{\mathcal{L}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{F}_{\mathcal{L}0}(r, \theta) + \mathbf{f}^T_{\mathcal{L}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{f}^{P'}_{\mathcal{L}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{f}'_{\mathcal{L}2}(\mathbf{r}, t), \quad (12)$$

with

$$\mathbf{F}_{\mathcal{L}0}(r, \theta) = \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{B}_0^T) \times \mathbf{B}_0^T, \quad (13)$$

the zero-order part of the Lorentz force that perturbs the stellar hydrostatic balance,

$$\mathbf{f}^T_{\mathcal{L}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu} \left[ (\mathbf{B}_0^T \cdot \nabla) \mathbf{b}' + (\mathbf{b}' \cdot \nabla) \mathbf{B}_0^T \right], \quad (14)$$

the wave magnetic tension force,

$$\mathbf{f}^{P'}_{\mathcal{L}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\mu} \nabla (\mathbf{B}_0^T \cdot \mathbf{b}'), \quad (15)$$

the wave magnetic pressure force, and

$$\mathbf{f}'_{\mathcal{L}2}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu} (\mathbf{b}' \cdot \nabla) \mathbf{b}', \quad (16)$$

the second-order part of the Lorentz force.

## 2.3. Linearised MHD equations

We linearise the MHD system around the rotating magnetic steady-state. Each scalar field  $X \equiv \{P, \rho, \Phi\}$  is expanded as the sum of its hydrostatic value  $X_0$  and of the wave's associated fluctuation  $X'$ :

$$X(\mathbf{r}, t) = X_0(r, \theta) + X'(\mathbf{r}, t). \quad (17)$$

We focus on first-order terms, implying that we neglect Eq. (16). In addition, we neglect the non-spherical character of the hydrostatic background due to the deformation associated with the centrifugal acceleration and the zero-order part of the Lorentz force (Eq. (13)) following Duez et al. (2010b). This implies that the background is independent of  $\theta$ , so  $X_0 = X_0(r)$ . This approximation is well justified for MGI waves propagating close to the convective core boundary in intermediate-mass stars (Henneco et al. 2021; Dhouib et al. 2021a; Duez et al. 2010b).

We expand each vectorial field ( $\mathbf{x}' \equiv \{\mathbf{u}', \mathbf{b}'\}$ ) and fluctuations of scalar quantities ( $X' \equiv \{\rho', P', \Phi'\}$ ) into discrete Fourier series both in time and in azimuth

$$\mathbf{x}'(\mathbf{r}, t) \equiv \sum_{\omega^{\text{in}}, m} \left\{ \mathbf{x}(r, \theta) \exp(i\omega^{\text{in}} t) \exp(-im\varphi) \right\}, \quad (18)$$

$$X'(\mathbf{r}, t) \equiv \sum_{\omega^{\text{in}}, m} \left\{ \bar{X}(r, \theta) \exp(i\omega^{\text{in}} t) \exp(-im\varphi) \right\}, \quad (19)$$

where  $m$  is the azimuthal order and  $\omega^{\text{in}}$  is the wave eigenfrequency in an inertial reference frame. In a differentially rotating region, the waves are Doppler shifted so we can define the wave frequency  $\omega$  in the rotating reference frame as

$$\omega(r, \theta) = \omega^{\text{in}} - m\Omega(r, \theta). \quad (20)$$

This allows us to write the wave-induced magnetic field (Eq. (10)) as

$$\mathbf{b}(r, \theta) = \frac{\sqrt{\mu \rho_0}}{\omega} \left[ -m\omega_A \mathbf{u} + ir \sin \theta \left( \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} (\mathbf{u} \cdot \nabla (\sqrt{\rho_0} \omega_A)) \right) + m \frac{\omega_A}{\omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \Omega) + \omega_A \left( \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{im}{r \sin \theta} u_\varphi \right) \right] \mathbf{e}_\varphi, \quad (21)$$

and the wave magnetic tension force (Eq. (14)) as

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^T_{\mathcal{L}}(\mathbf{r}, \theta) = & \rho_0 m \frac{\omega_A^2}{\omega} [imu - 2\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}] \\ & + mr \sin \theta \rho_0 \frac{\omega_A^2}{\omega} \left[ \left( \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{im}{r \sin \theta} u_\varphi \right) + \frac{m}{\omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \Omega) \right] \mathbf{e}_\varphi \\ & - \frac{ir \sin \theta \rho_0}{\omega} \left[ m\Lambda_E (\mathbf{u} \cdot \nabla \Omega^2) + \frac{1}{\rho_0} (\mathbf{u} \cdot \nabla (\rho_0 \omega_A^2)) \right] \\ & + 2\omega_A^2 \left( \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{im}{r \sin \theta} u_\varphi \right) \mathbf{e}_s, \end{aligned} \quad (22)$$

where  $\mathbf{e}_z = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta$  is the unit vector along the rotation axis,  $\mathbf{e}_s = \sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta$  is the radial unit vector of the cylindrical coordinates and  $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_\varphi)$ . With this, we derive the linearised MHD system, where the continuity equation (Eq. (2)) becomes

$$i\omega\bar{\rho} + \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\rho_0u_r) + \frac{\rho_0}{r\sin\theta}[\partial_\theta(\sin\theta u_\theta) - imu_\varphi] = 0. \quad (23)$$

We write the momentum equation (Eq. (3)) as

$$\begin{aligned} i\frac{\mathcal{A}}{\omega}\mathbf{u} + \frac{\mathcal{B}}{\omega}\mathbf{e}_z \times \mathbf{u} + \frac{r\sin\theta}{\omega} \left[ im\Lambda_E(\mathbf{u} \cdot \nabla\Omega^2) \right. \\ \left. + \frac{i}{\rho_0}(\mathbf{u} \cdot \nabla(\rho_0\omega_A^2)) + 2i\omega_A^2(\nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{im}{r\sin\theta}u_\varphi) \right] \mathbf{e}_s \\ \left. + \frac{r\sin\theta}{\omega^2} \left[ \mathcal{A}(\mathbf{u} \cdot \nabla\Omega) + m\omega_A^2(\nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{im}{r\sin\theta}u_\varphi) \right] \mathbf{e}_\varphi \right. \\ \left. = -\nabla\bar{W} - \frac{\nabla\rho_0}{\rho_0}\bar{W} + \frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\mathbf{g}_0 - \nabla\bar{\Phi}, \right. \end{aligned} \quad (24)$$

with

$$\mathbf{g}_0 = \nabla P_0/\rho_0 = -\nabla\Phi_0 + \gamma_{\mathbf{c}} \quad (25)$$

the background effective gravity. We recover  $\gamma_{\mathbf{c}} = \frac{1}{2}\Omega^2\nabla(r^2\sin^2\theta)$  the centrifugal acceleration, introducing non-spherical perturbations of the hydrostatic background. They are neglected here as already argued before. We introduce

$$\Lambda_E(r, \theta) = \frac{\omega_A^2}{\Omega\omega}, \quad (26)$$

the wave's Elsasser number, and

$$\bar{W}(r, \theta) = \frac{\bar{P} + \bar{P}_m}{\rho_0} + \bar{\Phi}, \quad (27)$$

the sum of the normalised total pressure fluctuations (gas pressure fluctuation  $\bar{P}$  and magnetic pressure fluctuation  $\bar{P}_m = (\mathbf{B}_0^T \cdot \mathbf{b})/\mu_0$ ) and the gravitational potential fluctuation. We introduce the coefficients

$$\mathcal{A}(r, \theta) = \omega^2 - m^2\omega_A^2 \quad (28)$$

and

$$\mathcal{B}(r, \theta) = 2(\Omega\omega + m\omega_A^2). \quad (29)$$

We rewrite the equation of energy (Eq. (4)) in the adiabatic limit as

$$i\omega\left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_0} - \frac{\bar{P}}{\Gamma_1 P_0}\right) = \frac{N^2}{g_0}u_r, \quad (30)$$

where

$$N^2(r) = g_0\left(\frac{1}{\Gamma_1}\frac{d\ln P_0}{dr} - \frac{d\ln\rho_0}{dr}\right), \quad (31)$$

is the squared Brunt-Väisälä frequency. Finally, the Poisson equation (Eq. (5)) becomes

$$\nabla^2\bar{\Phi} = 4\pi G\bar{\rho}. \quad (32)$$

From now on, we adopt the Cowling (1941) approximation in which the wave's gravitational potential fluctuation  $\bar{\Phi}$  is neglected. Thus, we do not solve Eq. (32) and neglect the term  $\nabla\bar{\Phi}$  in the momentum equation (Eq. (24)). Furthermore, because we study the dynamics of low-frequency MGI waves, we adopt the anelastic approximation in which magneto-acoustic waves are filtered out. This means that the term  $i\omega\bar{\rho}$  can be neglected in the continuity equation (Eq. (23)) and Eqs. (24) and (30) can be simplified by neglecting the terms  $(\nabla\rho_0/\rho_0)\bar{W}$  and  $(1/\Gamma_1)\bar{P}/P_0$ , respectively.

### 3. Magnetic TAR in the differentially rotating case

By adopting the approximations introduced in the previous section, we write the three components of the momentum equation (Eq. (24)) as

$$\begin{aligned} i\mathcal{A}u_r - \mathcal{B}\sin\theta u_\varphi + ir\sin^2\theta \left[ m\Lambda_E(\mathbf{u} \cdot \nabla\Omega^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho_0}(\mathbf{u} \cdot \nabla(\rho_0\omega_A^2)) \right] = -\omega\partial_r\bar{W} + iN^2u_r, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} i\mathcal{A}u_\theta - \mathcal{B}\cos\theta u_\varphi + ir\sin\theta\cos\theta \left[ m\Lambda_E(\mathbf{u} \cdot \nabla\Omega^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho_0}(\mathbf{u} \cdot \nabla(\rho_0\omega_A^2)) \right] = -\frac{\omega}{r}\partial_\theta\bar{W}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} i\mathcal{A}u_\varphi + \mathcal{B}\cos\theta u_\theta + \mathcal{B}\sin\theta u_r + \frac{\mathcal{A}}{\omega}r\sin\theta(\mathbf{u} \cdot \nabla\Omega) \\ = \frac{im\omega}{r\sin\theta}\bar{W}. \end{aligned} \quad (35)$$

The standard TAR imposes mainly two frequency hierarchies. The first one  $2\Omega \ll N$  comes from the fact that we work in strongly stratified regions, which is the case for many stellar radiative zones. The second  $\omega \ll N$  comes from focusing on the low-frequency regime. We now build the generalised framework for the TAR in magnetic differentially rotating stars. In this case, in addition to the two abovementioned hierarchies, we also have  $\mathcal{A} \ll N^2$  and  $\mathcal{B} \ll N^2$  since  $\omega_A \ll N$ . Therefore, the radial momentum equation (Eq. (33)) can be simplified to

$$N^2u_r + i\omega\partial_r\bar{W} = 0. \quad (36)$$

Moreover, the strong stratification implies that the radial components of the Coriolis force and the Lorentz force are dominated by the buoyancy force. From this, we obtain a mostly horizontal velocity field ( $|u_r| \ll \{|u_\theta|, |u_\varphi|\}$ ). Therefore, the latitudinal momentum equation (Eq. (34)) can be reduced to

$$\begin{aligned} i\left(\mathcal{A} + \sin\theta\cos\theta(\Lambda_E m\partial_\theta\Omega^2 + \partial_\theta\omega_A^2)\right)u_\theta - \mathcal{B}\cos\theta u_\varphi = \\ -\frac{\omega}{r}\partial_\theta\bar{W}. \end{aligned} \quad (37)$$

Finally, the azimuthal momentum equation (Eq. (35)) can be rewritten, for the same reasons, as

$$\left(\mathcal{B}\cos\theta + \frac{\mathcal{A}}{\omega}\sin\theta\partial_\theta\Omega\right)u_\varphi + i\mathcal{A}u_\varphi = \frac{im\omega}{r\sin\theta}\bar{W}. \quad (38)$$

As in the non-magnetic case (Lee & Saio 1997; Mathis 2009; Dhouib et al. 2021a,b), we manage to decouple the radial and the horizontal dynamics. In the radial direction the buoyancy force balances the gradient of the total pressure fluctuations, while in the horizontal direction, the Coriolis acceleration and the Lorentz force tension counterbalance the horizontal gradient of the total pressure. Therefore, by solving the system (36)–(38), we can express the velocity field as a function of the normalised pressure,

$$u_r(r, x) = -i\frac{\omega}{N^2}\partial_r\bar{W}(r, x), \quad (39)$$

$$u_\theta(r, x) = -i\frac{\omega}{\mathcal{A}}\frac{1}{D_M r} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[ (1-x^2)\partial_x + mv_M x \right] \bar{W}(r, x), \quad (40)$$

$$u_\varphi(r, x) = \frac{\omega}{\mathcal{A}} \frac{1}{D_M} \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[ (1-x^2) \left( v_M x - (1-x^2) \frac{\partial_x \Omega}{\omega} \right) \partial_x \right. \\ \left. + m - m \frac{1-x^2}{x} \frac{1}{\mathcal{A}} \left( m \Lambda_E \partial_x \Omega^2 + \partial_x \omega_A^2 \right) \right] \tilde{W}(r, x), \quad (41)$$

where  $x = \cos \theta$  is the reduced latitudinal coordinate,

$$v_M(r, x) = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} = v \frac{\omega^2}{\mathcal{A}} + 2m \frac{\omega_A^2}{\mathcal{A}} \quad (42)$$

is the magnetic spin parameter,

$$v(r, x) = \frac{2\Omega}{\omega} \quad (43)$$

is the standard rotation spin parameter, and

$$D_M(r, x) = 1 - v_M^2 x^2 + (1-x^2) \frac{x}{\mathcal{A}} \left[ \partial_x \Omega^2 - \partial_x \omega_A^2 \right] \quad (44)$$

is a coefficient depending on the rotation rate, on the Alfvén frequency, and on their latitudinal gradient. We note that these equations are singular at  $\omega = 0$ ,  $\mathcal{A} = 0$ ,  $x = \{\pm 1, 0\}$ , and  $D_M = 0$ . The first two singularities are potentially the hydrodynamic and hydromagnetic critical layers, where the waves can be damped (Booker & Bretherton 1967; Rudraiah & Venkatachalappa 1972). The first singularity  $\omega = 0$  corresponds to a corotation resonance, which is present in the hydrodynamic case (Booker & Bretherton 1967; Watts et al. 2003; Alvan et al. 2013; Astoul et al. 2021). The second singularity, which appears only in the magnetic case, adds two supplementary critical layers,  $\omega = \pm m \omega_A$ , thus called hereafter magnetic critical layers. They can lead to MGI vertical trapping (Rudraiah & Venkatachalappa 1972; Schatzman 1993; Barnes et al. 1998; Rogers & MacGregor 2010; MacGregor & Rogers 2011; Mathis & de Brye 2011). This is a situation similar to those studied by Fuller et al. (2015) and Lecoanet et al. (2017) in which MGI waves are converted into Alfvén waves above a given critical field strength, preventing them from forming a standing oscillation mode. The difference is that we do not take into account any vertical (poloidal) magnetic field in our work. The third singularity arises at the poles and at the equator. Finally,  $D_M = 0$  is equivalent to a Lindblad resonance in differentially rotating disks (e.g. Goldreich & Tremaine 1979) but it is only an apparent singularity (Ogilvie & Lin 2004). More details on this turning point for the propagation of waves can be found in Sect. 5.5.

The above new theory generalises Mathis (2009) by taking into account axisymmetric toroidal magnetic fields and Mathis & de Brye (2011) by accounting for general axisymmetric Alfvén and rotation frequency distributions  $\omega_A(r, \theta)$  and  $\Omega(r, \theta)$  instead of a uniform  $\omega_A$  and a solid-body rotation  $\Omega_s$ . Our derivations complete the pioneering general work by Friedlander (1987, 1989) in geophysics, who studied MGI waves with  $(\omega_A(r, \theta), \Omega_s)$  and  $(\omega_A(r, \theta), \Omega(r, \theta))$ , respectively. Compared to these two earlier studies, we focused specifically on the stratification-dominated regime relevant in stellar interiors for which the TAR can be built and applied. It is also noteworthy that we treated the case of deep spherical shells, while many previous studies focused on the case of thin layers (e.g. Zaqarashvili et al. 2009; Heng & Spitkovsky 2009).

## 4. Dynamics of low-frequency MGI waves

In order to study the dynamics of low-frequency MGI waves, we derive the MLTE for the normalised pressure. This equation allows us to build seismic diagnostics of MGI waves by computing the asymptotic frequencies as in Van Reeth et al. (2018), Henneco et al. (2021), and Dhouib et al. (2021a,b).

### 4.1. JWKB approximation

Following Mathis (2009), we use the 2D Jeffreys-Wentzel-Kramers-Brillouin (JWKB) approximation (Fröman & Fröman 1965) since we focus on rapidly oscillating waves along the radial direction. In this case, we write the spatial structure of the waves as

$$\tilde{W}(r, \theta) = \sum_k \left\{ w_{\omega^{\text{in}} km}(r, \theta) \frac{A_{\omega^{\text{in}} km}}{k_{V; \omega^{\text{in}} km}^{1/2}} \exp \left[ i \int^r k_{V; \omega^{\text{in}} km} dr \right] \right\}, \quad (45)$$

$$u_j(r, \theta) = \sum_k \left\{ \hat{u}_{\omega^{\text{in}} km}^j(r, \theta) \frac{A_{\omega^{\text{in}} km}}{k_{V; \omega^{\text{in}} km}^{1/2}} \exp \left[ i \int^r k_{V; \omega^{\text{in}} km} dr \right] \right\}, \quad (46)$$

with  $j \equiv \{r, \theta, \varphi\}$ ,  $k$  the index of a latitudinal eigenmode, and  $A_{\omega^{\text{in}} km}$  the amplitude of the wave. This approximation allows us to rewrite the radial velocity (Eq. (39)) as

$$\hat{u}_{\omega^{\text{in}} km}^r(r, x) = \frac{r^2 k_{V; \omega^{\text{in}} km}(r) \omega_{km}(r, x)}{N^2(r)} w_{\omega^{\text{in}} km}(r, x), \quad (47)$$

so, the continuity equation (Eq. (23)) can be written as

$$\frac{1}{\omega_{km}} \frac{i}{r \sin \theta} \left[ \partial_\theta (\sin \theta \hat{u}_{\omega^{\text{in}} km}^\theta) - i m \hat{u}_{\omega^{\text{in}} km}^\varphi \right] = \\ \frac{r^2 k_{V; \omega^{\text{in}} km}^2}{N^2} w_{\omega^{\text{in}} km}(r, x), \quad (48)$$

where we neglect the terms  $2 \frac{\rho_0}{r} u_r$  and  $d_r \rho_0 u_r$  in front of the dominant term  $\rho_0 \partial_r u_r$  since within the JWKB approximation the highest order derivative term in the radial direction is the dominant one.

### 4.2. Magnetic Laplace tidal equation (MLTE)

By inserting the horizontal components of the velocity (Eqs. (40) and (41)) in the left-hand side of the continuity equation (Eq. (48)), we get the magnetic Laplace tidal operator (MLTO),

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\omega^{\text{in}} m}^{\text{magn.}} = \frac{1}{\omega} \partial_x \left[ \frac{\omega}{\mathcal{A}} \frac{1-x^2}{D_M} \partial_x \right] + \frac{m}{\omega \mathcal{A}} \partial_x \Omega \frac{1-x^2}{D_M} \partial_x + \frac{m}{\omega} \partial_x \left( \frac{\omega v_M x}{\mathcal{A} D_M} \right) \\ - m^2 \frac{1}{\mathcal{A} D_M (1-x^2)} + \frac{m^2}{\mathcal{A}^2} \frac{x}{D_M} \left( m \Lambda_E \partial_x \Omega^2 + \partial_x \omega_A^2 \right), \quad (49)$$

such that

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\omega^{\text{in}} m}^{\text{magn.}} \left[ w_{\omega^{\text{in}} km}^{\text{magn.}} \right] = -\lambda_{\omega^{\text{in}} km}^{\text{magn.}}(r) w_{\omega^{\text{in}} km}^{\text{magn.}}(r, \theta), \quad (50)$$

where  $w_{\omega^{\text{in}} km}$  are the magnetic generalised Hough functions and  $\lambda_{\omega^{\text{in}} km}$  are the eigenvalues with dimension  $s^2$  linked to the radial wave vector via the following dispersion relation deduced from the left-hand side of Eq. (48),

$$k_{V; \omega^{\text{in}} km}^2(r) = \frac{N^2(r) \lambda_{\omega^{\text{in}} km}^{\text{magn.}}(r)}{r^2}. \quad (51)$$

Contrary to the standard case where we consider uniformly rotating non-magnetic stars, the eigenvalues and the Hough functions are no longer independent of the radius. We also remark that the MLTO is invariant with respect to the sign of the Alfvén frequency  $\omega_A$ . With the dispersion relation (Eq. (51)), we differentiate two wave regimes. The first one is the propagative one ( $k_{V;\omega^{in}km}^2 > 0$ ) obtained in the stably stratified region ( $N^2 > 0$ ) when  $\lambda_{\omega^{in}km} > 0$  or in the convective region ( $N^2 < 0$ ) when  $\lambda_{\omega^{in}km} < 0$ . The second regime is the evanescent one ( $k_{V;\omega^{in}km}^2 < 0$ ) obtained in the stably stratified region when  $\lambda_{\omega^{in}km} < 0$  or in the convective zone when  $\lambda_{\omega^{in}km} > 0$ . The magnetic TAR developed here is only applicable in stably stratified regions and it assumes adiabatic oscillations, that is, we suppose that  $N^2 = 0$  in convective zones. Thus, we focus only on propagative waves in stably stratified regions. In the non-magnetic case ( $\omega_A = 0$ ), the MLTO (Eq. (49)) reduces to the hydrodynamic generalised Laplace tidal operator in the case of differential rotation derived by Mathis (2009),

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_{\omega^{in}m} = & \frac{1}{\omega} \partial_x \left[ \frac{1}{\omega} \frac{1-x^2}{\tilde{D}} \partial_x \right] + \frac{m}{\omega^3} \partial_x \Omega \frac{1-x^2}{\tilde{D}} \partial_x \\ & + \frac{m}{\omega} \partial_x \left( \frac{vx}{\omega \tilde{D}} \right) - \frac{m^2}{\tilde{D} \omega^2 (1-x^2)}, \end{aligned} \quad (52)$$

with

$$\tilde{D} = D_M|_{\omega_A=0} = 1 - v^2 x^2 + vx(1-x^2) \frac{\partial_x \Omega}{\omega}. \quad (53)$$

### 4.3. Asymptotic seismic diagnosis

The dispersion relation (Eq. (51)) is not yet suitable for asteroseismic diagnosis because the radial wave number is not explicitly expressed as a function of the wave frequency. However, the eigenvalues  $\lambda_{\omega^{in}km}$  can be expressed as a function of the wave frequency and the dimensionless eigenvalues. In this case, it is necessary to assume that the local Doppler-shifted wave frequency  $\omega$  only depends on the radius.

#### 4.3.1. Approximation on the differential rotation profile

As in Dhouib et al. (2021b), we have to perform a partial separation between the radial and latitudinal variables in the radial velocity (Eq. (47)) to be able to derive the dimensionless MLTO. In fact, the wave frequency in the rotating frame (Eq. (20)) depends on  $r$  and  $\theta$ . This dependence comes from the differential rotation  $\Omega(r, \theta)$ . Therefore, we assume that the rotation rate  $\Omega$  depends mainly on the radius  $\Omega(r, \theta) \approx \Omega(r)$  to obtain a wave frequency that only depends on the radial coordinate  $\omega(r, \theta) \approx \omega(r)$ . In that case, the dimensionless MLTE can be expressed as

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\omega^{in}m}^{\text{magn.}} \left[ w_{\omega^{in}km}^{\text{magn.}}(r, \theta) \right] &= \omega^2(r) \tilde{\mathcal{L}}_{\omega^{in}m}^{\text{magn.}} \left[ w_{\omega^{in}km}^{\text{magn.}}(r, \theta) \right] \\ &= -\Lambda_{\omega^{in}km}^{\text{magn.}}(r) w_{\omega^{in}km}^{\text{magn.}}(r, \theta), \end{aligned} \quad (54)$$

with

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\omega^{in}m}^{\text{magn.}} = & \omega^2 \partial_x \left[ \frac{1}{\mathcal{A}} \frac{1-x^2}{D_M} \partial_x \right] + m \omega^2 \partial_x \left( \frac{v_M x}{\mathcal{A} D_M} \right) \\ & - m^2 \frac{\omega^2}{\mathcal{A} D_M (1-x^2)} + m^2 \frac{\omega^2}{\mathcal{A}^2} \frac{x}{D_M} \partial_x \omega_A^2 \end{aligned} \quad (55)$$

and

$$\Lambda_{\omega^{in}km}^{\text{magn.}}(r) = \omega^2(r) \lambda_{\omega^{in}km}^{\text{magn.}}(r). \quad (56)$$

In this way, the dispersion relation can be rewritten as

$$k_{V;\omega^{in}km}^2 = \frac{N^2 \Lambda_{\omega^{in}km}^{\text{magn.}}}{r^2 \omega^2}. \quad (57)$$

The normalisation used here to obtain the dimensionless MLTE is different from the one used in Mathis & de Brye (2011). These authors normalise their tidal operator with  $\mathcal{A}$  instead of  $\omega^2$ , since  $\mathcal{A}$  is independent of  $\theta$  in their study (uniform angular velocity and Alfvén frequency). Here,  $\mathcal{A}$  depends on  $r$  and  $\theta$ , so we design a new normalisation to be as general as possible in the derivation of the dispersion relation (Eq. (57)). We achieve this by performing an adequate partial variable separation. In this way, no constraints need to be placed on the 2D Alfvén frequency profile and on the corresponding field configuration to derive seismic diagnosis.

#### 4.3.2. Asymptotic frequency of low-frequency MGI waves

Following Van Reeth et al. (2018), Mathis & Prat (2019), and Dhouib et al. (2021a,b), we derive the eigenfrequencies of low-frequency MGI waves by applying the radial quantisation (Unno et al. 1989; Gough 1993; Christensen-Dalsgaard 1997),

$$\int_{r_1}^{r_2} k_{V;\omega^{in}km} dr = (n + 1/2)\pi, \quad (58)$$

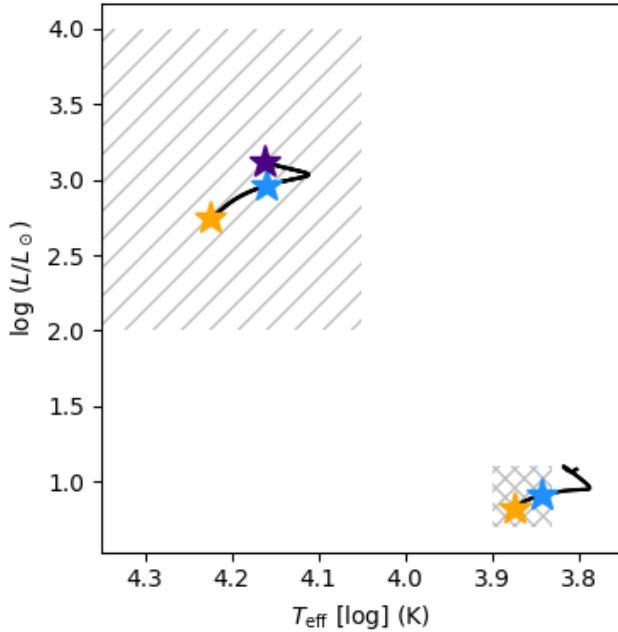
where  $r_1$  and  $r_2$  are the turning points of the Brunt-Väisälä frequency  $N$  and  $n$  is the radial order. At this point, no further analytical work can be done without further assumptions. Therefore, we have to solve Eq. (58) numerically in order to retrieve the asymptotic frequency values.

## 5. Axisymmetric azimuthal magnetic field in rotating intermediate-mass main-sequence stars

As a proof of concept, we apply the magnetic TAR to representative stellar models of typical  $\gamma$  Dor and SPB stars during their main-sequence (MS) evolution because they are gravity or gravito-inertial wave pulsators allowing us to probe successfully mixing processes (Degroote et al. 2010; Pedersen et al. 2021), rotation (Van Reeth et al. 2016, 2018; Ouazzani et al. 2017, 2020; Pápics et al. 2017; Aerts et al. 2017, 2019; Saio et al. 2021) including centrifugal effects (Henneco et al. 2021; Dhouib et al. 2021a), and potentially magnetic fields (Prat et al. 2019, 2020; Van Beeck et al. 2020).

### 5.1. Studied $\gamma$ Dor and SPB stars

We use the stellar evolution code Modules for Experiments in Stellar Astrophysics (MESA; Paxton et al. 2011, 2013, 2015, 2018, 2019) to compute non-rotating, non-magnetic stellar models for typical parameters used in asteroseismic modelling of  $\gamma$  Dor and SPB stars, following Van Reeth et al. (2016), Pápics et al. (2017), Buyschaert et al. (2018). We refer to the controls section of the MESA inlist in Appendix A. We select 1.6  $M_{\odot}$  ( $\gamma$  Dor star) and 5  $M_{\odot}$  (SPB star) models near the zero-age main sequence (ZAMS), near the middle of the main sequence (mid-MS), and for the SPB model also near the TAMS. With this choice, we ensure that the models occur in areas in the Hertzsprung–Russell diagram where gravity modes are expected to occur. We schematically show this region in Fig. 2, following Appendix A in Aerts et al. (2010).



**Fig. 2.** Main-sequence tracks of a  $M = 1.6 M_{\odot}$   $\gamma$ Dor star and a  $M = 5 M_{\odot}$  SPB star in the Hertzsprung–Russell diagram. The crossed (respectively hatched) area roughly indicates the region where  $\gamma$  Dor (respectively SPB) stars are expected to host gravity modes (Aerts et al. 2010, Appendix A). Yellow, blue, and purple stars indicate the chosen models at ZAMS, mid-MS, and TAMS, respectively.

## 5.2. Studied magnetic topology

Intermediate-mass stars are descended from fully convective PMS stars. Such a convective body is known to generate and host dynamo-generated fields that might remain in the radiative envelope once the convection ends (e.g. Mathis et al. 2011; Arlt 2014; Neiner et al. 2015; Emeriau-Viard & Brun 2017). Braithwaite & Spruit (2004) simulated the relaxation of stochastic seed fields in a non-rotating radiative sphere. This can be used to study the relaxation of dynamo-generated fields once the plasma becomes stably stratified along the PMS (Alecian et al. 2013). From these simulations, we deduce that stochastic dynamo fields placed into a stably stratified region might relax into large-scale, mixed poloidal and toroidal magnetic field configurations. The stability of such mixed poloidal and toroidal fields has also been investigated. Purely toroidal and purely poloidal magnetic configurations are highly unstable (e.g. Tayler 1973; Markey & Tayler 1973; Braithwaite 2006, 2007). However, the combination of toroidal and poloidal components ensures the stability of the field (Tayler 1980). The topology and energy of such a mixed (poloidal and toroidal) field has been investigated numerically (Braithwaite 2008; Duez et al. 2010a), and semi-analytically by Akgün et al. (2013). Duez & Mathis (2010) provided a semi-analytic description of such stable mixed toroidal and poloidal fields in the non-rotating axisymmetric case:

$$\mathbf{B}(r, \theta) = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \nabla \psi(r, \theta) \wedge \mathbf{e}_{\varphi} + \lambda \frac{\psi(r, \theta)}{R} \mathbf{e}_{\varphi} \right), \quad (59)$$

where  $\psi$  is the magnetic stream function satisfying

$$\psi(r, \theta) = \mu_0 \alpha \lambda \frac{A(r)}{R} \sin^2 \theta, \quad (60)$$

with  $\mu_0$  the vacuum magnetic permeability,  $\alpha$  a normalisation constant fixed by the chosen magnetic-field amplitude,  $\lambda$  the eigenvalue of the problem to be determined,  $R$  the radius of the star, and

$$A(r) = -r j_1 \left( \lambda \frac{r}{R} \right) \int_r^R y_1 \left( \lambda \frac{x}{R} \right) \rho_0 x^3 dx - r y_1 \left( \lambda \frac{r}{R} \right) \int_0^r j_1 \left( \lambda \frac{x}{R} \right) \rho_0 x^3 dx, \quad (61)$$

with  $j_1$  ( $y_1$ ) the first-order spherical Bessel functions of the first (second) kind (Abramowitz & Stegun 1972). Duez & Mathis (2010) derived lowest energy confined equilibrium states with  $\lambda$  the smallest positive eigenvalue such that  $\mathbf{B} = 0$  at the stellar surface. Following Prat et al. (2019, 2020), Van Beeck et al. (2020), Bugnet et al. (2021), and Mathis et al. (2021), we use them to study the ability of asteroseismology to probe deep magnetic fields in stars. The resulting magnetic field configurations along the evolution of  $\gamma$  Dor and SPB stars are represented in Fig. 3.

In our study, we focus on the non-perturbative effect of axisymmetric toroidal fields on MGI waves computed within the TAR. We therefore chose here to extract the toroidal configuration from the mixed configuration defined from Eq. (59) with the following correspondences to match the Duez & Mathis (2010) formalism:

$$\mathbf{B} = B_0 \left[ 0, 0, \tilde{b}_{\varphi}(r) \sin \theta \right], \quad (62)$$

with

$$B_0 = \frac{\mu_0 \alpha \lambda}{R} \quad (63)$$

and

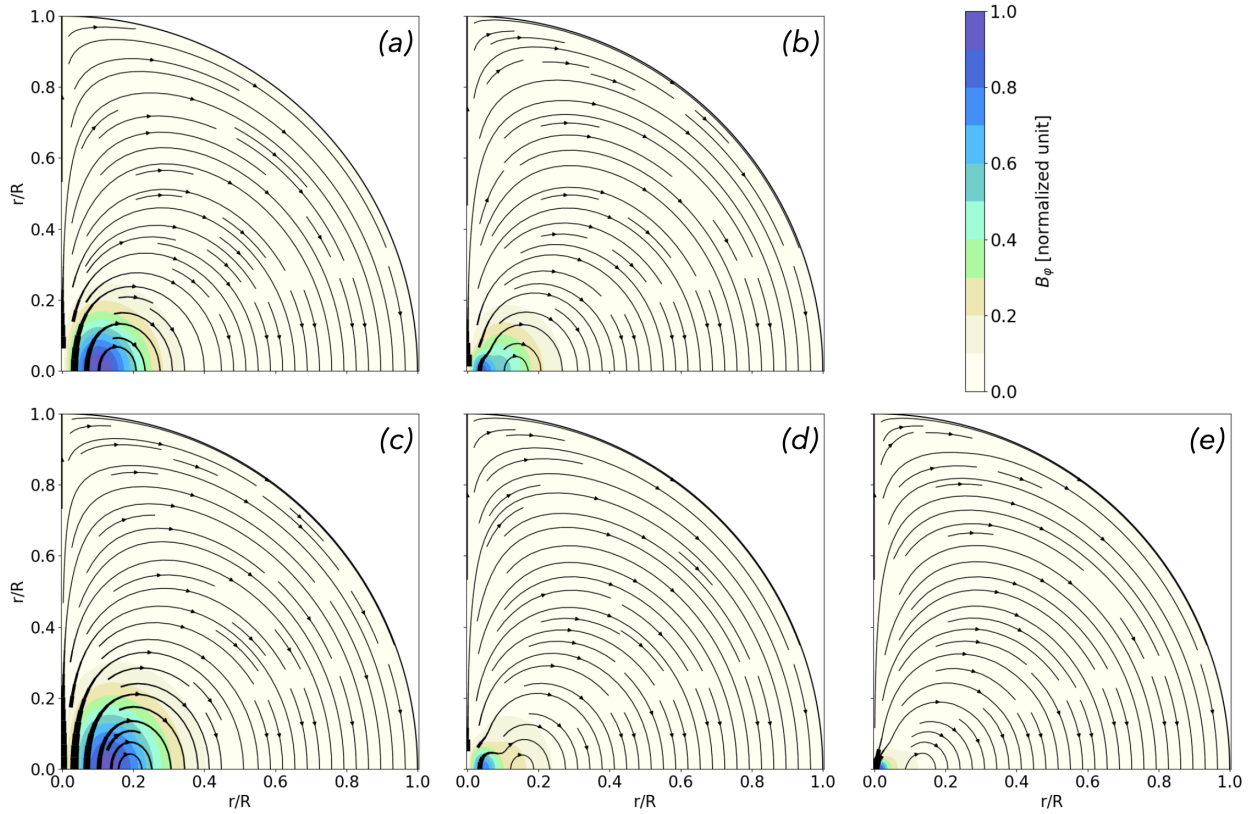
$$\tilde{b}_{\varphi}(r) = \frac{\lambda A}{r R}. \quad (64)$$

If the differential rotation remains weak the field will remain stable and fossil-like. However, if a sufficient radial differential rotation builds up, its shear will wind up the poloidal component of the field into a supplementary toroidal field (Aurière et al. 2007; Gaurat et al. 2015; Jouve et al. 2020) that can become unstable because of the Tayler instability. If an efficient dynamo loop takes place, as first proposed by Spruit (2002) and identified by Petitdemange et al. (2022), the initial toroidal field can be regenerated. In Petitdemange et al. (2022), this leads to a deep confined equatorial toroidal field that can be mimicked as a first rough approximation by Eq. (62) even if  $\tilde{b}_{\varphi}(r)$  will be different in this case because it is driven by the physics of the dynamo and not of the initial MHD relaxation forming the seed fossil field. More complex latitudinal dependences will be studied specifically in Sect. 6.

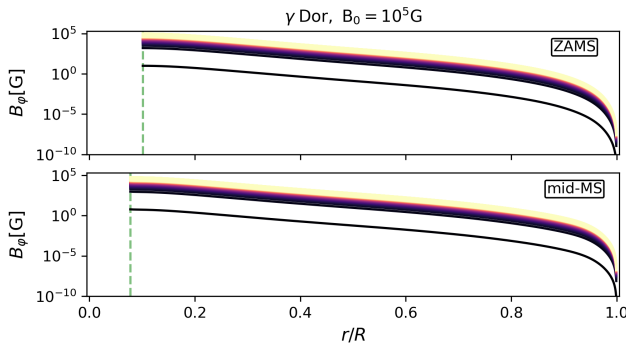
In Figs. 4 and 5, we represent the toroidal magnetic field along the evolution of  $\gamma$  Dor and SPB stars with a chosen amplitude  $B_0 = 10^5$  G. We can see that the magnetic field is the strongest in the inner region of the radiative zone, whereas near the surface it becomes very weak. Using Eqs. (9) and (62), we derive the Alfvén frequency, which becomes independent of  $\theta$ ,

$$\omega_{\Lambda}(r) = \frac{\tilde{b}_{\varphi}}{\sqrt{\mu_0 \rho_0 r}}, \quad (65)$$

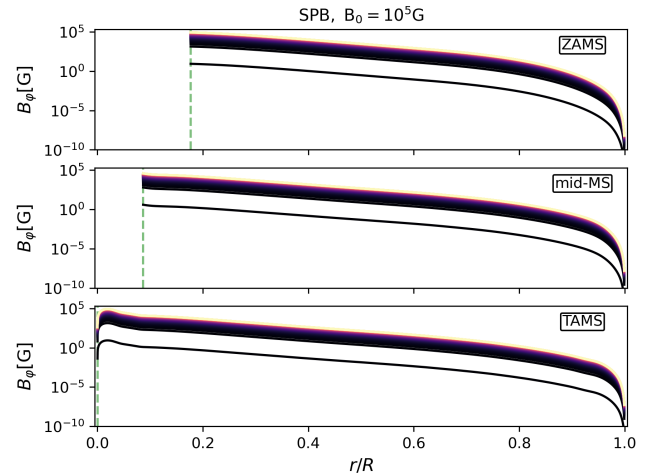
because of the  $\sin \theta$  dependence of the toroidal field. Here, we assume that the magnetic permeability of the medium is equal to the one in vacuum.



**Fig. 3.** Magnetic field configurations: inside the  $1.6 M_{\odot}$   $\gamma$  Dor star near ZAMS (a), at mid-MS (b), inside the  $5 M_{\odot}$  SPB near ZAMS (c), at mid-MS (d), and near TAMS (e). Values are normalised by the maximum field amplitude, and mixed poloidal (black lines) and toroidal (colour scale) magnetic fields are modelled using the formalism of [Duez & Mathis \(2010\)](#) (see our Eq. (59)). We focus here on the effects of the toroidal component as discussed in the text.



**Fig. 4.** Fossil toroidal magnetic field profile at  $B_0 = 10^5$  G in the radiative zone as a function of the normalised radius at different colatitudes from near the pole (black) to the equator (yellow) for the  $1.6 M_{\odot}$   $\gamma$  Dor star model at ZAMS (top) and mid-MS (bottom). The dashed green line indicates the radiative-convective interface.



**Fig. 5.** Same as Fig. 4, but for the  $5 M_{\odot}$  SPB model at ZAMS (top), mid-MS (middle), and TAMS (bottom).

### 5.3. Equations to solve: Uniform rotation case

Based on seismic constraints, the internal rotation of most intermediate-mass MS stars highlights a weak core-to-surface rotation contrast. Therefore, in this case, we can assume that the rotation is (quasi-)rigid in their radiative zone ([Kurtz et al. 2014](#); [Saio et al. 2015](#); [Murphy et al. 2016](#); [Aerts et al. 2017, 2019](#)). Such a (quasi-)rigid rotation state is coherent with the rotation profiles resulting from the action of *Maxwell* stresses of unstable

or dynamo-regenerated toroidal fields ([Maeder & Meynet 2003](#); [Heger et al. 2005](#); [Eggenberger et al. 2005](#); [Fuller et al. 2019](#); [Petitdemange et al. 2022](#)). In addition, given the topology of the magnetic field that we consider here, the Alfvén frequency is independent of the latitude (see Sect. 5.2). From now on, we specifically focus on the case where the rotation is uniform and the Alfvén frequency only depends on the radius. Thus, the

MLTO simplifies to

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{vm}^{\text{magn.}} = & \frac{\omega^2}{\mathcal{A}} \partial_x \left[ \frac{1-x^2}{1-\nu_M^2 x^2} \partial_x \right] \\ & + \frac{\omega^2}{\mathcal{A}} \left[ mv_M \frac{1+\nu_M^2 x^2}{(1-\nu_M^2 x^2)^2} - \frac{m^2}{(1-x^2)(1-\nu_M^2 x^2)} \right]. \end{aligned} \quad (66)$$

In the non-magnetic case, this operator reduces to the standard Laplace tidal operator derived by [Lee & Saio \(1997\)](#)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{vm}^{\text{stand.}} = & \partial_x \left[ \frac{1-x^2}{1-\nu^2 x^2} \partial_x \right] + mv \frac{1+\nu^2 x^2}{(1-\nu^2 x^2)^2} \\ & - \frac{m^2}{(1-x^2)(1-\nu^2 x^2)}. \end{aligned} \quad (67)$$

In the general case and specifically because of the differential rotation, we indexed the operator and the variables by the wave frequency in the inertial frame  $\omega^{\text{in}}$  because it is the only constant frequency in that case. However, in the uniformly rotating case, it is more convenient to use the spin parameter  $\nu$  for the indexation. In this specific case, we can derive the analytical expression of the asymptotic frequencies in the rotating frame. Hence, from Eq. (58)) we recover

$$\omega_{nkm} = \frac{1}{(n+1/2)\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{N(r)}{r} \sqrt{\Lambda_{\nu,km}^{\text{magn.}}(r)} dr, \quad (68)$$

with

$$\nu_n = \nu_{nkm} = \frac{2\Omega}{\omega_{nkm}}. \quad (69)$$

We obtain here the same expression as in the non-magnetic case. The only difference is that the eigenvalues are modified due to the magnetic field so they are no longer constant but depend on the radius. This expression is implicit because  $\Lambda_{\nu,km}^{\text{magn.}}$  depends on  $\nu_n$ , which in turn depends on  $\omega_{nkm}$ . Therefore, Eq. (68) must be solved numerically as explained in Sect. 5.6.

#### 5.4. Frequency hierarchy

In order to ensure that we work within the validity domain of the magnetic TAR, a set of frequency hierarchies must be verified. The most constraining one is  $N \gg 2\Omega$ . In this perspective, we determine the maximal rotation rate that complies with  $\min(N/2\Omega_{\text{max}}^{\text{TAR}}) = \beta$ , with  $\beta$  a chosen threshold such that the stratification dominates over the rotation. We found that the age of the star and the maximal allowed rotation rate are inversely proportional. We summarise the values of  $\Omega_{\text{max}}^{\text{TAR}}$  for the  $\gamma$  Dor and SPB models at different life phases and for  $\beta = 10$  in Table 1.

The spherical background assumption is fulfilled since  $\Omega/\Omega_K < 3\%$ . In Fig. 6, we show the characteristic frequency profiles in the case where these criteria are met. As is well known, the radiative envelope gets bigger and the convective core shrinks considerably as the star evolves. We find that the Alfvén frequency is always lower or has the same order of magnitude as the characteristic frequency of rotation  $2\Omega$  when the amplitude  $B_0$  is smaller or around  $10^5$  G. This ensures that the other hierarchies are also met if the low-frequency hierarchy ( $\omega \ll N$ ) is fulfilled, which we check a posteriori.

**Table 1.** Maximal values of the rotation rate in which the (magnetic) TAR is applicable,  $\Omega_{\text{max}}^{\text{TAR}}$ .

Phase	Star	
	$\gamma$ Dor	SPB
near-ZAMS	$22.19\Omega_{\odot}$	$11.38\Omega_{\odot}$
mid-MS	$15.56\Omega_{\odot}$	$3.94\Omega_{\odot}$
near-TAMS	...	$1.18\Omega_{\odot}$

**Notes.**  $\Omega_{\odot} \approx 4.14 \times 10^{-7}$  hz denotes the solar rotation.

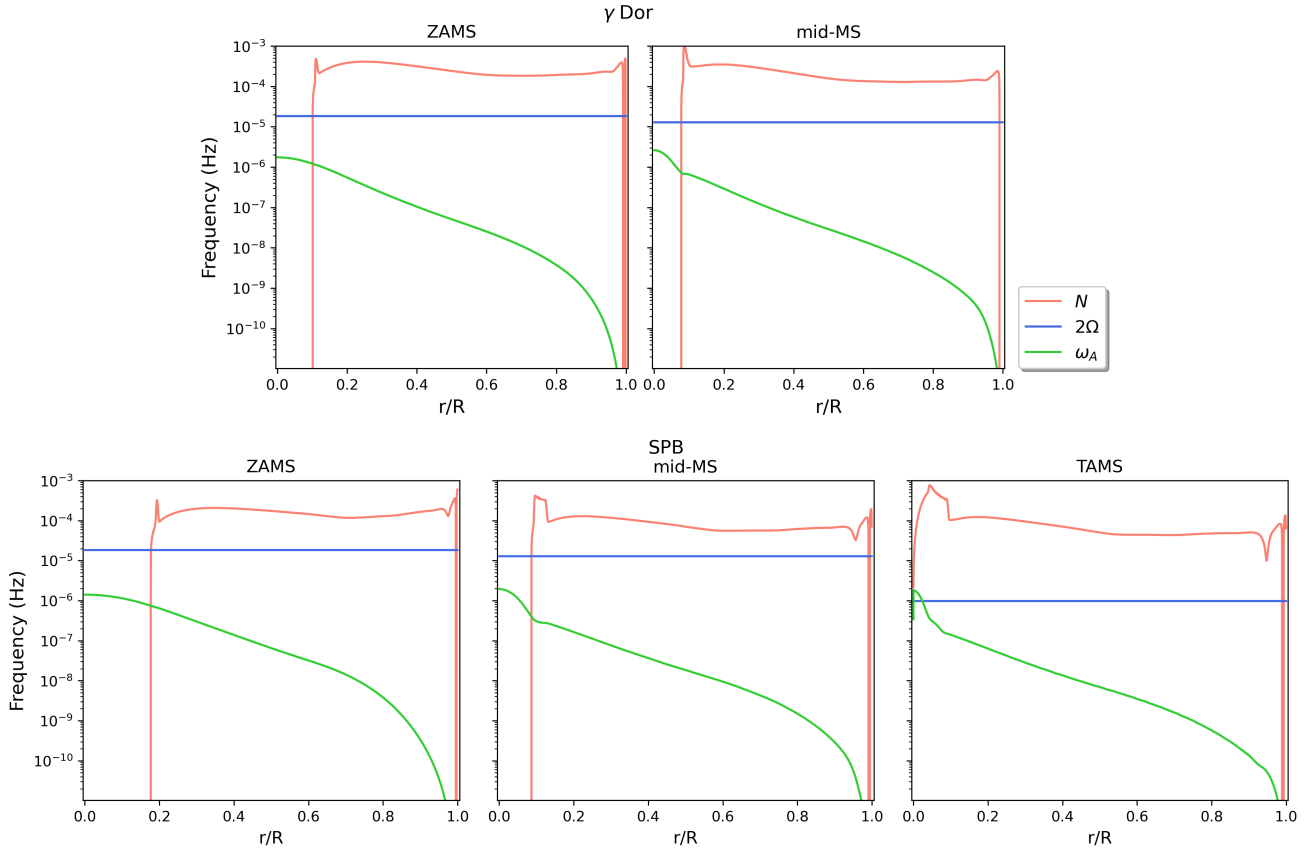
#### 5.5. Eigenvalues and Hough functions

The MLTE is an eigenvalue problem. To solve it numerically, we use the Chebyshev collocation method, which was first applied to solve the standard Laplace tidal equation by [Boyd \(1976\)](#). As in [Mathis & Prat \(2019\)](#), [Henneco et al. \(2021\)](#), and [Dhouib et al. \(2021a,b\)](#), we use an implementation similar to the one used by [Wang et al. \(2016\)](#). We solve the MLTE for different radii  $r$ , spin parameters  $\nu$ , rotation rates  $\Omega$  and magnetic field amplitude scaling factors  $B_0$ . We focus on the impact of the toroidal magnetic field on the eigenvalues and Hough functions. As a representative example, we use the  $1.6 M_{\odot}$   $\gamma$  Dor model at the ZAMS to show these quantities in Figs. 7 and 8. We obtain similar results with the other models. In these figures, we can see the influence of the magnetic field when  $B_0 = 10^5$  G. Figure 7 reveals that the eigenvalues are modified by the magnetic field, which introduces a strong radial dependence in the inner region of the star (close to the interface between the radiative envelope and the convective core). Close to the surface, the influence of the magnetic field on the eigenvalues is very weak, almost nonexistent. This is expected since the toroidal magnetic field is weak far from the radiative-convection interface because  $\bar{b}_{\varphi}(r) \rightarrow 0$  when  $r \rightarrow R$  (Figs. 4 and 5).

We use the convention  $mv > 0$  (resp.  $mv < 0$ ) for prograde (resp. retrograde) modes. We can distinguish mainly two types of solutions. The first ones are gravity-like solutions ( $k \geq 0$ ), which exist in the non-rotating non-magnetic case. They correspond to internal gravity modes ( $g$  modes) modified by the Coriolis acceleration and the Lorentz force (MGI modes). The second type of solutions are Rossby-like ones ( $k < 0$ ), which exist only in the rotating case when  $|\nu| > 1$ . If they are retrograde and have positive eigenvalues, these solutions correspond to Rossby (quasi-inertial) modes ( $r$  modes) modified by the Lorentz force and the buoyancy ([Saio et al. 2018](#)). The third family of solutions are those with negative eigenvalues. They correspond to evanescent modes or rotationally stabilised convective modes. These modes are out of the scope of this work since we focus here on the stably stratified regions only. We refer the reader to [Lee \(2019\)](#), [Lee & Saio \(2020\)](#), and references therein for detailed discussions of this third family of solutions.

In Fig. 8, we show the magnetic Hough functions for gravity like-solutions (retrograde sectoral  $g$  mode with  $\{k=0, m=-1\}$ ) and Rossby like-solutions ( $r$  mode with  $\{k=-2, m=-1\}$ ). The yellow curve represents the Hough functions at the surface of the star, which is nearly the same as in the non-magnetic case due to the weak surface magnetic field. The behaviour of these eigenfunctions changes the most in the inner regions (blue curve). More specifically, the magnetic Hough functions migrate inwards, towards the equator ( $x=0$ ), causing a narrowing of their overall shape. Furthermore, the gravity like-solutions are trapped near the equatorial plane in the regime ( $\nu_M > 1$ ). In fact, regions where  $D_M \geq 0$  correspond to regions where the gravity





**Fig. 6.** Profiles of the Brunt-Väisälä ( $N$ ), inertial ( $2\Omega$ ), and Alfvén ( $\omega_A$ ) frequencies for the  $1.6 M_\odot$   $\gamma$  Dor (top) and  $5 M_\odot$  SPB (bottom) models at different evolutionary stages at the rotation rates specified in Table 1 for  $B_0 = 10^5$  G.

like-solutions are propagative, whereas they become evanescent where  $D_M < 0$ . Therefore, when  $\nu_M > 1$ , the gravity-like solutions become trapped in an equatorial belt (Mathis 2009; Mathis & de Brye 2011). In contrast to gravity-like solutions, Rossby-like solutions are found in the whole spherical domain and they have in general no tendency to be trapped in the equator but rather become concentrated towards mid-latitudes. The Rossby-like solution  $\{k = -1, m = -1\}$ , however, is trapped at equator due to its large eigenvalue (Saio et al. 2018; Saio 2018). Under the effect of the magnetic field, the trapping of the  $g$  modes becomes more efficient as the critical reduced colatitude  $x_c = \cos \theta_c = |\nu_M|^{-1}$  (Mathis & de Brye 2011), which corresponds to the turning point of  $D_M$ , decreases. Thus, as the magnetic spin parameter  $\nu_M$  increases, these modes tend to be more confined around the equator.

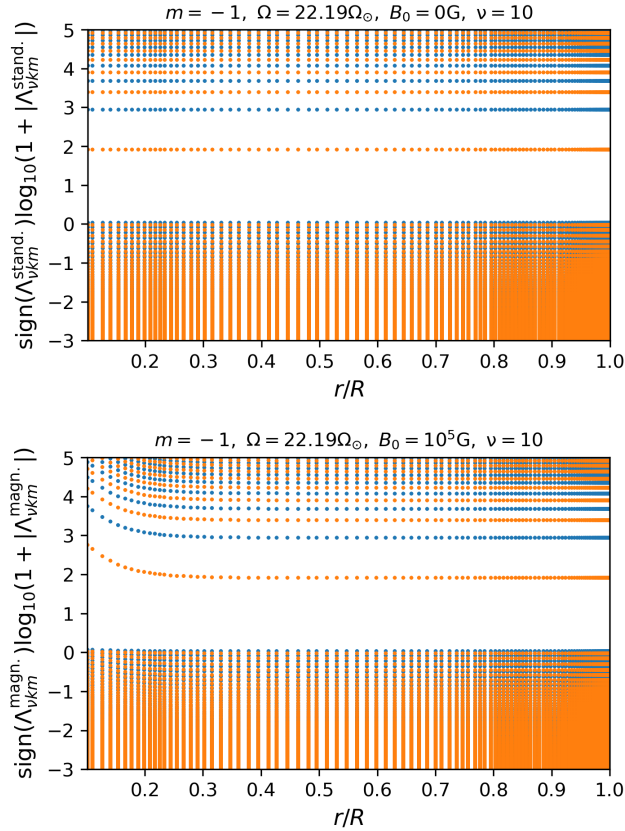
### 5.6. Asymptotic period spacing pattern

The goal of this section is to assess the asymptotic period spacing of the modes as a function of their period, which is a standard tool used to interpret oscillations spectra, of  $g$  and  $r$  modes (Miglio et al. 2008; Bouabid et al. 2013; Van Reeth et al. 2015; Aerts 2021). The period spacing is defined as the period differences between modes of consecutive radial orders  $n$  with the same azimuthal order  $m$  and latitudinal index  $k$  (linked to the latitudinal order  $\ell = |m| + k$  (Lee & Saio 1997), which is used in the non-rotating non-magnetic case),

$$\Delta P_{nkm} = P_{n+1km} - P_{nkm}. \quad (70)$$

To evaluate this quantity, we first compute the asymptotic frequencies by solving the Eq. (68) numerically as we discussed in Sect. 5.3. To do so, we use the method developed by Henneco et al. (2021, more details on this method can be found in their Appendix B) as in Dhouib et al. (2021a,b). We focus our attention on three modes that are most often observed in  $\gamma$  Dor and SPB stars (Pápics et al. 2017; Saio et al. 2018; Li et al. 2020):  $g$  modes with  $\{k = 0, m = 1\}$  and  $\{k = 0, m = 2\}$ , and  $r$  modes with  $\{k = -2, m = -1\}$ . The modes that we compute here have radial orders between 20 and 80. The minimum order is chosen to make sure that the Cowling approximation is met since this approximation is only valid for high radial orders (see for instance Dhouib et al. 2021b). Li et al. (2020) found that the majority (more than 68%) of the observed modes in  $\gamma$  Dor stars have radial orders between 20 and 70 (their Fig. 17).

Figures 9 and 10 show the magnetic period spacing pattern with their standard non-magnetic counterpart. We find that, for  $g$  modes, the spacing values decrease under the influence of the toroidal magnetic field. This decrease is largest at the highest radial orders (longest mode periods) for which the action of the Lorentz force is strongest. For the  $r$  modes, the spacing values decrease for short periods (high radial orders) and increase for long periods (low radial orders). We also find that the toroidal magnetic field does not have a distinctive signature on the period spacing pattern, rather that it introduces a shift. Such an effect can also be introduced by other physical effects, such as the centrifugal acceleration or differential rotation. Using a perturbative approach, Prat et al. (2019, 2020) and Van Beeck et al. (2020)

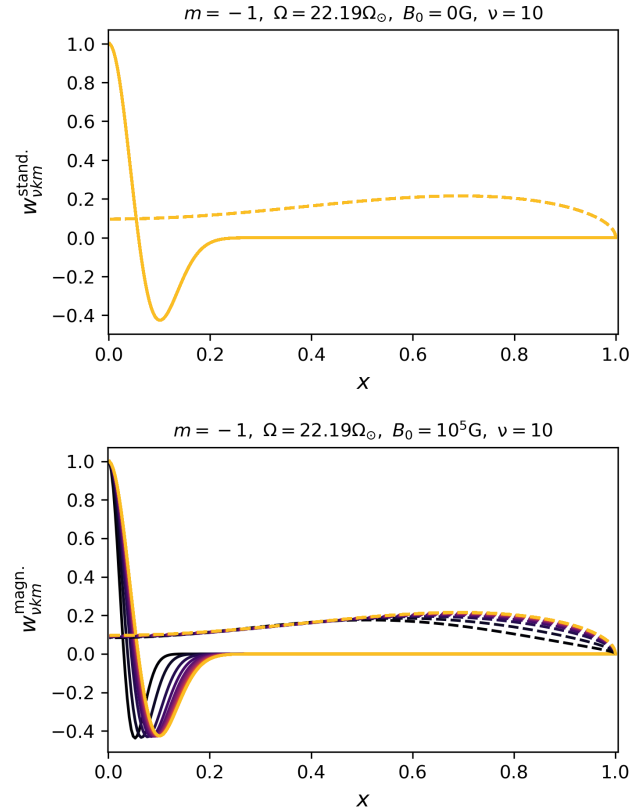


**Fig. 7.** Spectrum of the Laplace tidal equation in the non-magnetic (*top*) and magnetic (*bottom*) cases as a function of the horizontal coordinate  $x$  and magnetic (*bottom*) cases as a function of the radius for  $m = -1$ ,  $\nu = 10$ , and  $\Omega = 22.19\Omega_{\odot}$  using the  $1.6 M_{\odot}$   $\gamma$  Dor model at ZAMS. Blue (respectively, orange) dots correspond to modes with even (respectively, odd) Hough functions.

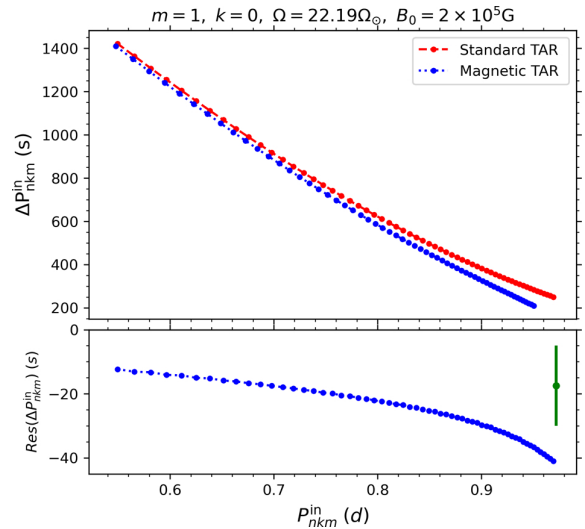
found that the signature of a fossil poloidal-toroidal magnetic field in the period spacing morphology of  $g$  modes differs appreciably from the signature due to rotation. In addition to the frequency shifts that increase with increasing the radial order, they found characteristic magnetic sawtooth-like features for high-radial-order modes. We provide a few plausible explanations for the absence of such features in the period spacings for the few stellar models considered in this work. The features may be the signature of the poloidal component of the magnetic field. On the other hand, the features may have been introduced by the limitation of the perturbative approach. Finally, and most plausibly, the difference in saw-tooth features could be related to dips in the period spacing patterns due to mode trapping caused by chemical gradients left behind by the shrinking convective core, as predicted theoretically by Miglio et al. (2008) and Bouabid et al. (2013), found numerically by Pedersen et al. (2018) and Michielsen et al. (2019), and observed in many  $\gamma$  Dor (Mombarg et al. 2021) and SPB (Pedersen et al. 2021) stars. Future dedicated analyses are planned to unravel these hypotheses as follow-up studies of the current theoretical work.

### 5.7. Detectability of the magnetic signature

To quantify the theoretical detectability of the toroidal magnetic field, we compare the frequency differences between asymptotic frequencies calculated with the standard TAR and those calcu-



**Fig. 8.** Hough functions (normalised to unity) in the non-magnetic (*top*) and magnetic (*bottom*) cases as a function of the horizontal coordinate  $x$  at different radii from the radiative-convective interface (dark blue) to the surface (orange) for  $m = -1$ ,  $\nu = 10$ , and  $\Omega = 22.19\Omega_{\odot}$  at  $B_0 = 10^5$  G using the  $1.6 M_{\odot}$   $\gamma$  Dor model at ZAMS. Solid lines correspond to gravity-like solutions ( $k = 0$ ), and dotted lines correspond to Rossby-like solutions ( $k = -2$ ).



**Fig. 9.** Period spacing pattern in the inertial frame for  $g$  modes ( $k = 0, m = 1$ ) computed using the standard TAR (red line) and the magnetic TAR (blue line) with the  $1.6 M_{\odot}$   $\gamma$  Dor model at ZAMS. *Bottom panel:* the differences with respect to the standard TAR period spacing pattern. The vertical green bar represents an average error of measured period spacings for a sample of 40  $\gamma$  Dor stars (Van Reeth et al. 2015).

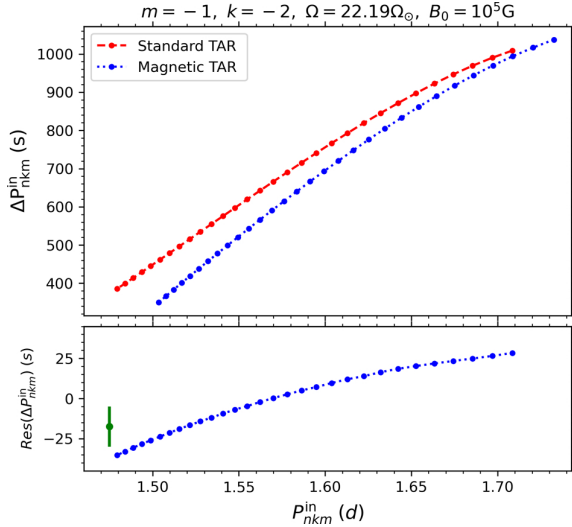


Fig. 10. Same as Fig. 9, bust for  $r$  modes  $\{k = -2, m = -1\}$ .

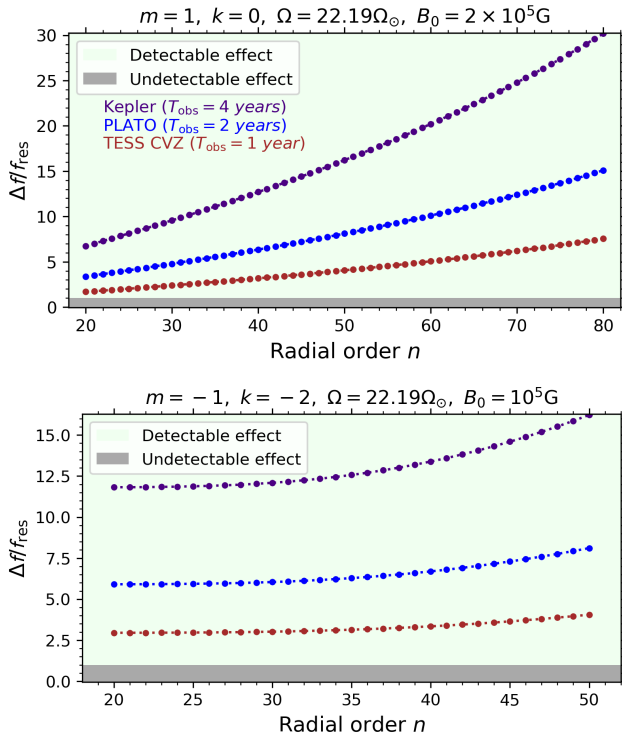


Fig. 11. Detectability of the toroidal magnetic field effect on the  $g$  modes  $\{k = 0, m = 1\}$  (top) and the  $r$  modes  $\{k = -2, m = -1\}$  (bottom) as a function of the radial order  $n$  using the  $1.6 M_{\odot}$   $\gamma$  Dor model at the ZAMS based on the frequency resolution of *Kepler* (indigo line), *PLATO* (blue line), and *TESS CVZ* (brown line).

lated with the magnetic TAR for each radial order,

$$\Delta f(n) = |f_{\text{magn.}}(n) - f_{\text{stand.}}(n)|, \quad (71)$$

to the one-year Transiting Exoplanet Survey Satellite Continuous Viewing Zone (TESS CVZ; Ricker et al. 2015), the two-year PLAnetary Transits and Oscillations of stars (PLATO; Rauer et al. 2014, 2016), and the four-year *Kepler* (Borucki et al. 2010; Howell et al. 2014) frequency resolutions  $f_{\text{res}} = 1/T_{\text{obs}}$ ,

with  $T_{\text{obs}}$  the observation time. In this way, we are able to deduce the range in radial orders  $n_{\text{detect, min}}$  for which the frequency differences are expected to be detectable:

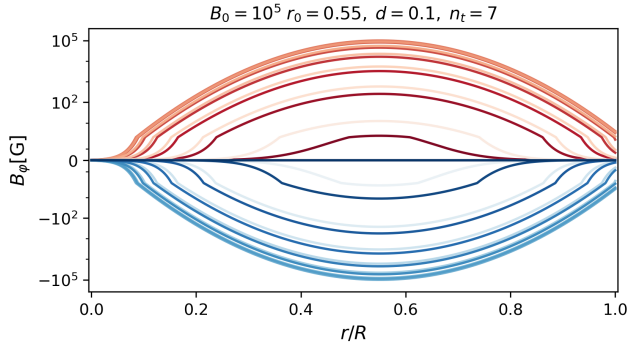
$$\Delta f(n) > f_{\text{res}}. \quad (72)$$

We show these results in Fig. 11 for  $g$   $\{k = 0, m = 1\}$  and  $r$   $\{k = -2, m = -1\}$  modes using the  $1.6 M_{\odot}$   $\gamma$  Dor model with  $B_0 = 2 \times 10^5$  G located at the ZAMS. We can see that in this case the magnetic effect is in principle detectable for all radial orders using nominal TESS CVZ, *Kepler* and PLATO light curves. The signature of the magnetic effect increases as the radial order of the mode increases. To get a consistent idea on the magnetic signature, we explore a wide range of parameters within the validity domain of the magnetic TAR using our equilibrium models. This exploration is summarised in Tables B.1 and B.2. We find that magnetic fields with amplitudes up to about  $10^4$  G have no detectable signature on  $g$  and  $r$  modes. A most important conclusion of our work is that, for all stronger magnetic fields, its signatures are predicted to be detectable in observations.

High values of  $B_0$  can produce a magnetic critical layer for which  $\mathcal{A} = 0$ , which limits the formation of the modes. The  $r$  modes undergo this resonance for lower  $B_0$  values than the  $g$  modes ( $B_0 \sim 5 \times 10^5$  G for  $g$  modes while for  $r$  modes  $B_0 \sim 10^5$  G). Nevertheless, Rossby modes can still be detectable for some radial orders at these amplitudes. For low rotation rates ( $\Omega/\Omega_{\odot} = 1.18$ ), no resonant  $r$  modes were found. This translates into the opportunity to deduce strong constraints on the free parameters of the field and the rotation to avoid a magnetic critical layer. In particular, we find that an increase in the amplitude of the magnetic field limits the propagation of some modes because of the presence of the resonance ( $n_{\text{max}}$  decreases with increasing  $B_0$ ). In addition, increasing the rotation rate of the star allows us to increase the magnetic field amplitude, but the rotation rates listed in Table 1 cannot be exceeded. We emphasise that the validity of the theory at low frequency decreases for advanced evolutionary stages (TAMS) for some  $g$  modes, where the wave frequency gets closer to the Brunt-Väisälä frequency such that the TAR is no longer reliable. This is potentially caused by the fact that the radiative zone expands, leading to higher values of  $N$  as shown in Fig. 6. In the earlier evolutionary stages, the validity tends to be fulfilled for the high radial orders ( $N/\omega > 10$ ) but less so for low radial orders ( $n \sim 20$ ) since ( $N/\omega \sim 10$ ) of some  $g$  modes. However, the TAR is still reliable in these cases. We found it to be fulfilled ( $N/\omega \gg 10$ ) for  $r$  modes in all the cases.

If strong fossil toroidal fields ( $B_0 \geq 10^5$  G) exist in MS stars, they should readily be detectable from current TESS CVZ and *Kepler* and future PLATO photometric light curves of  $g$ -mode pulsators. For  $r$  modes, this is even the case for weaker magnetic fields ( $B_0 \sim 6 \times 10^4$ ) since at higher amplitudes we encounter magnetic critical layers ( $\omega = \omega_{\Lambda}$ ). The observational challenge is to unravel the magnetic influence from other uncalibrated astrophysical effects occurring in stellar interiors models, such as the presence of rotational mixing and atomic diffusion, which also induce signatures in predicted period spacing values (Aerts 2021; Mombarg et al. 2022).

The amplitudes of the magnetic fields whose signatures we expect to be detectable using our magnetic TAR formalism are in agreement with the ones found by Heger et al. (2005), Maeder & Meynet (2005), Fuller et al. (2019), and Petitdemange et al. (2022). These authors found the toroidal magnetic configurations in rotating early-type stars to have strengths between  $10^4$  to  $10^6$  G in their numerical simulations.



**Fig. 12.** Hemispheric toroidal magnetic field profile at  $B_0 = 10^5$  G with  $r_0 = 0.55$ ,  $d = 0.1$ , and  $n_t = 7$  as a function of the normalised radius at different colatitudes from the north pole (dark red) to the south pole (dark blue).

Therefore, we expect that these fields can be detected and thoroughly investigated using the theoretical magnetic TAR formalism developed in this work, with the potential to unravel the internal magnetism of stars throughout their MS lifetime.

## 6. More general magnetic configuration: Hemispheric field

Depending on the history of the differential rotation of the star, other magnetic topologies than the configuration adopted in the previous section could emerge in the radiative zone. For instance, a radial differential rotation is likely to produce a strong toroidal field in the inner region of the radiative zone, whereas cylindrical differential rotation is expected to produce a strong toroidal field at the upper region of the stably stratified zone (Jouve et al. 2020). Zahn et al. (2007) found a toroidal field resulting from the interaction of the differential rotation of a solar-like tachocline and an initial dipolar poloidal fossil magnetic field. The resulting field will be composed of two magnetic distributions localised in the northern and southern hemispheres and vanishing at the equator. Such magnetic configurations can be modelled by the following field distribution:

$$B_\varphi(r, \theta) = B_0 \exp\left[-\frac{(r-r_0)^2}{2d^2}\right] \sin^{n_t}(\theta), \quad (73)$$

where  $B_0$  is the magnetic field amplitude,  $r_0$  is the radial position of the centre of distribution,  $d$  is its radial extension, and  $n_t$  parametrises its latitudinal extension. Figure 12 shows the radial profile of such a field at different colatitudes for  $B_0 = 10^5$  G,  $r_0 = 0.55$ ,  $d = 0.1$ , and  $n_t = 7$ . To get a sense of each of these parameters, Fig. 13 represents the hemispheric field configurations for different sets of parameters to assess their influence. We can see that for odd values of  $n_t$  we obtain an antisymmetric field with respect to the equator (positive in the northern hemisphere and negative in the southern one) whereas for even values of  $n_t$  the field is symmetric (positive in the two hemispheres). Increasing  $n_t$  allows us to obtain two well-separated distributions in latitude.

Using Eq. (9), we extract the Alfvén frequency, which depends on  $r$  and  $\theta$  in this case:

$$\omega_A(r, \theta) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{B_\varphi(r, \theta)}{\sqrt{\mu_0 \rho_0(r)}}. \quad (74)$$

For antisymmetric fields,  $\omega_A$  is negative in the southern hemisphere, but this has no impact on the MLTO (Eq. (49)) since it is

invariant with respect to the sign of the Alfvén frequency, as we discussed it in Sect. 4.2.

To perform seismic diagnosis or any other applications such as AM transport or tidal dissipation by MGI waves in this more general case, we have to solve the general MLTE (Eq. (54)). We use the representative stellar model of the typical  $1.6 M_\odot$   $\gamma$  Dor star rotating uniformly at the ZAMS as presented in Sect. 5.1. To apply the magnetic TAR using this hemispheric configuration, we have to choose carefully the parameters that define the field and its amplitude because we have to verify the hierarchy of the frequencies imposed by the magnetic TAR for the entire domain of parameters, as well as avoid the magnetic critical layers (singularity when  $\mathcal{A}(r, \theta) = 0$ ). The magnetic field that we take should have an amplitude  $B_0$  that does not exceed  $10^5$  G with a radial position  $r_0$  smaller than 0.35, a maximal radial extension of 0.2, and a latitudinal extension sufficiently far from the equator ( $n_t \geq 2$ ).

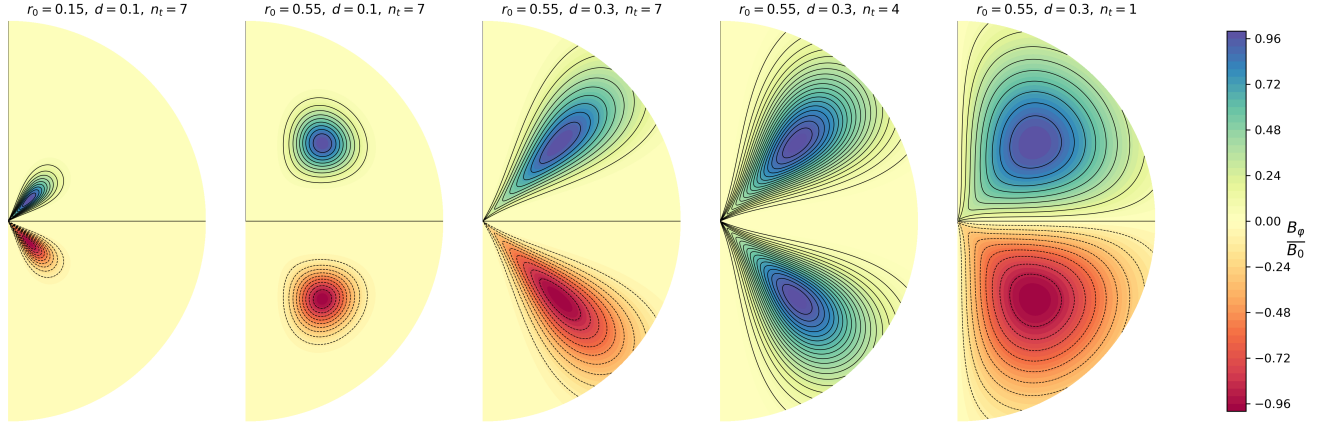
By solving the MLTE using the method described in Sect. 5.5 within the validity of our formalism, we find that the eigenvalues and the Hough functions are hardly modified compared to the non-magnetic ones (Fig. 14). As a consequence, the detectability of such a field is limited (within our validity domain). An important first conclusion is that the detectability is intrinsically linked to the magnetic configuration. We show in Fig. 15 the effect of the magnetic distribution on the detectability of the hemispheric magnetic field’s signature on the  $g$  modes  $\{k = 0, m = 1\}$  for different sets of parameters. We find that the detectability increases with the radial position  $r_0$  (third and fourth panels in Fig. 15) and extension  $d$  (first and second panels in Fig. 15) of the distribution. This is caused by the fact that the Alfvén frequency reaches a higher maximum far from the centre because it is inversely proportional to the density which decreases rapidly towards the stellar surface. Moreover, increasing the parameter  $n_t$  implies decreasing (second and third panels in Fig. 15) the latitudinal extension and reduces the detectability. Hence, the more the Alfvén frequency is localised, the less detectable it becomes.

So even if hemispheric fields are present in intermediate-mass stars, the detectability of such complex magnetic fields is low, even in the most favourable cases. The magnetic topology considered in Sect. 5.2 ( $\tilde{b}_\varphi(r) \sin \theta$ ) is more favourable in terms of detectability because, in that case, the Alfvén frequency,  $\omega_A$ , is distributed in all latitudes (independent of  $\theta$ ), whereas here it is latitudinally localised. A simple physical interpretation follows: an equatorial field is always in the propagation region of MGI modes that can be equatorially trapped; this is not the case of hemispheric fields, which are potentially strongly localised at given latitudes. This conclusion is only valid within the scope of our validity domain.

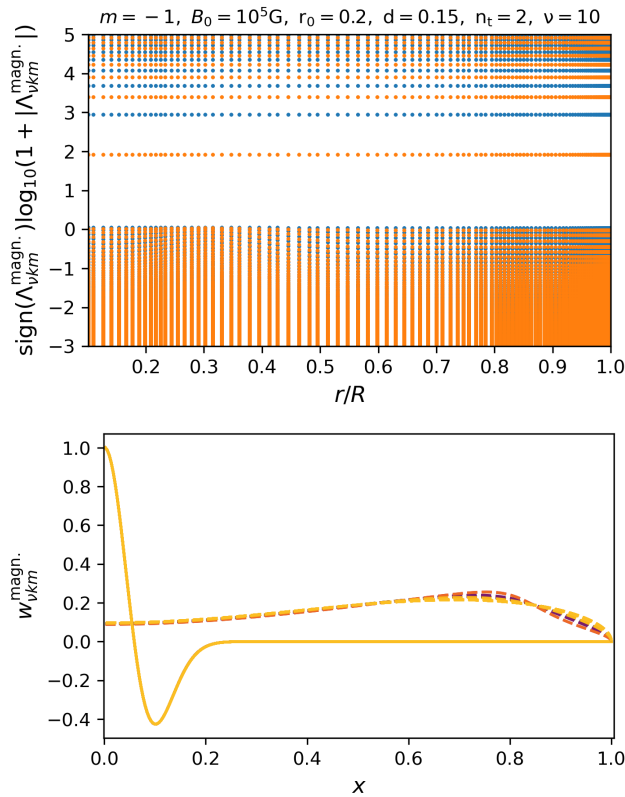
To examine more extended and stronger magnetic fields we should go beyond the magnetic TAR, in order not to limit to its restricted domain of validity. Other than the limitation of the TAR, another point to consider in future work is the role of the magnetic critical layers, resulting in dissipated waves. An adequate formalism and technique should be developed and adopted to tackle such a resonant phenomenon because it prevents the modes from occurring.

## 7. Discussion and conclusions

In this work we investigate the effects of an axisymmetric, purely toroidal deep internal large-scale magnetic field of fossil origin or generated by a dynamo action on the oscillation frequencies of gravito-inertial modes. We carry out a new generalisation



**Fig. 13.** Hemispheric toroidal magnetic configuration (normalised by its amplitude) for different sets of parameters (the isolines are represented in black).



**Fig. 14.** Same as Fig. 7 (top) and Fig. 8 (bottom) but for a magnetic hemispheric field with  $B_0 = 10^5$  G,  $r_0 = 0.2$ ,  $d = 0.15$ , and  $n_t = 2$ .

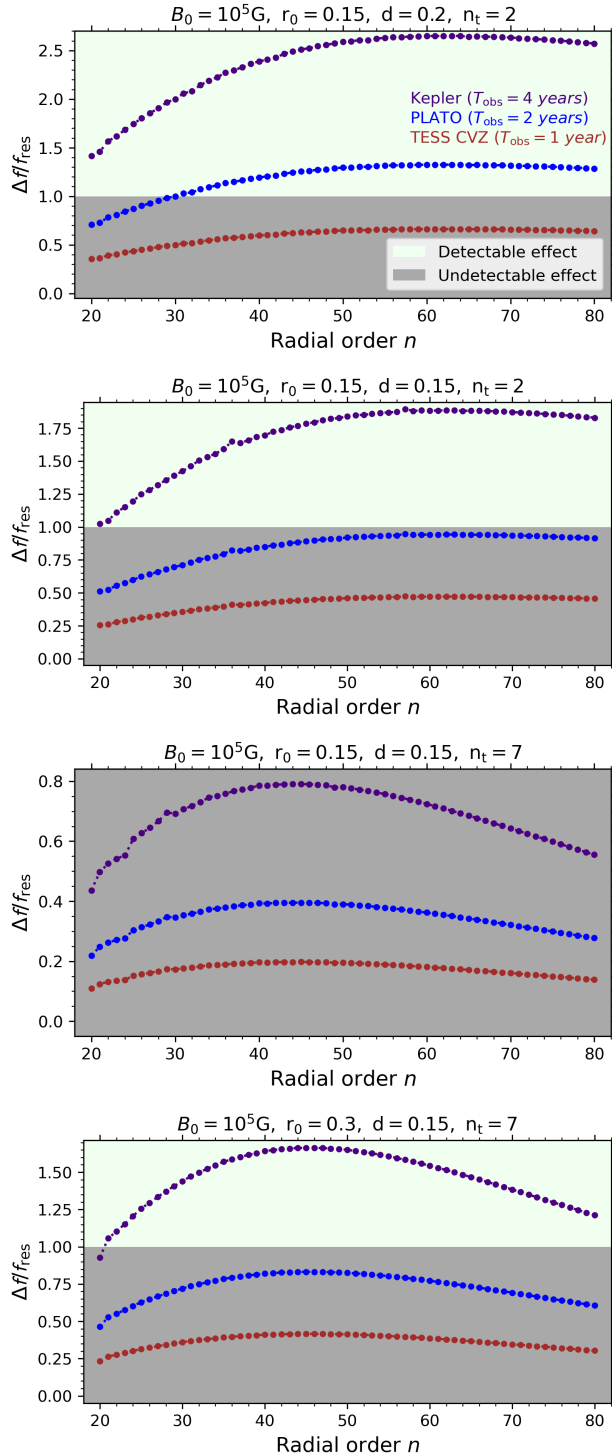
of the standard TAR that abandons the non-magnetic and the uniformly rotating assumptions. The magnetic TAR developed here takes the general differential rotation,  $\Omega(r, \theta)$ , and axisymmetric toroidal magnetic field,  $B_\phi(r, \theta)$ , into account in a non-perturbative way.

As a first asteroseismic application of this general formalism, we apply the magnetic TAR to representative stellar models of typical  $\gamma$  Dor and SPB stars during their MS evolution. These gravity or gravito-inertial wave pulsators hold to potential to probe mixing processes (Degroote et al. 2010; Pedersen et al.

2021), rotation (Van Reeth et al. 2016, 2018; Ouazzani et al. 2017, 2020; Pápics et al. 2017; Aerts et al. 2017, 2019; Saio et al. 2021; Henneco et al. 2021; Dhouib et al. 2021a,b), and magnetic fields (Prat et al. 2019, 2020; Van Beeck et al. 2020). We find that the toroidal magnetic field affects the theoretical description of gravito-inertial modes, forming MGI modes. The Laplace tidal equation is altered and gets a radial dependence, propagating into solutions that are modified relative to those of the standard TAR. More precisely, the magnetic field implies a shift in the extrema of the Hough functions towards the equator of the star. For equatorial, initially fossil azimuthal magnetic fields, which can be regenerated through potential dynamo action, this effect becomes more apparent towards the inner radiative region since the magnetic field is the strongest at the convective–radiative interface and the weakest near the surface. The effect is much less discernible for the hemispheric fields since the Alfvén frequency is latitudinally localised. Indeed, since most  $g$  modes are trapped in the equatorial belt, the modes are only weakly impacted by a hemispheric field because it is localised far from the equator.

We find that a fossil magnetic field reduces the period spacing values for  $g$  modes for all radial orders. For  $r$  modes, the magnetic field increases the period spacings for low radial orders (long pulsation periods) and decreases for high radial orders (short pulsation periods). The mode frequency shifts are potentially detectable using high-precision space-based photometry for most of the modes when the magnetic field is sufficiently strong at the inner radiative region (of order  $10^5$  G). The detectability of the toroidal magnetic effects using observations from modern space photometry decreases with increasing stellar age (decreasing  $X_c$ ) for  $\gamma$  Dor and SPB stars. Similar effects were found for a more general and complex magnetic configuration with an amplitude of the order of  $10^5$  G. We find that the more the field is localised, especially at latitudes far from the equator, the smaller the signature of the magnetic field on the waves. The amplitudes that we test here, within the validity domain of the magnetic TAR, are in agreement with the latest modelling and simulations of magnetic fields in the radiative zones of early-type stars (e.g. Fuller et al. 2019; Petitdemange et al. 2022).

Even though a toroidal magnetic field is in principle detectable, it does not have a distinctive signature in the period spacing pattern. Rather, it introduces mode period shifts that occur simultaneously with those produced by other physical effects, such as the centrifugal acceleration or differential



**Fig. 15.** Effect of the magnetic distribution on the detectability of the hemispheric magnetic field signature on the  $g$  modes  $\{k = 0, m = 1\}$  as a function of the radial order  $n$  using the  $1.6 M_{\odot}$   $\gamma$  Dor model at ZAMS rotating at  $\Omega = 22.19 \Omega_{\odot}$  and  $B_0 = 10^5$  G.

rotation. In addition, these effects are of the order of (or smaller than) the effects of other stellar physical processes in stellar models (e.g. rotational mixing, atomic diffusion, etc.). The degener-

acy among these astrophysical phenomena can mask the magnetic effect in forward asteroseismic modelling analyses. In order to tackle this problem, work is being (Van Reeth et al. 2018; Dhoubib et al. 2021a,b; Mombarg et al. 2022) and will be done to improve the modelling of these processes, with the aim to unravel and discern the different signatures. The inclusion of magnetic effects deduced from oscillation frequencies will provide important observational constraints on the theory of stellar interiors for early-type stars, which will subsequently lead to better magneto-asteroseismic modelling.

In addition to the asteroseismic application, our new magnetic TAR theory opens the way to various applications in stars and planets. One prominent example is the study of AM transport induced by low-frequency MGI waves in differentially rotating magnetic stars and planets. This allows us to generalise the prescription developed by Mathis (2009), who studied the action of the differential rotation on gravito-inertial waves in non-magnetised radiative zones and its feedback on the AM transport. Furthermore, the magnetic TAR can be used to study the dissipation of stellar and planetary tides in rotating, magnetised, stably stratified regions. Stably stratified zones in giant planets can be magnetised (Debras & Chabrier 2019; Mankovich & Fuller 2021), and as such the magnetic TAR now allows for the development of a new prescription of the dynamical tide in non-convective zones. In this way, we can go beyond the formalism developed by Ahuir et al. (2021), who tackled this topic by assuming a non-rotating non-magnetised body. An additional possible next step of our work is to apply the magnetic TAR to simulated toroidal magnetic configurations (Zahn et al. 2007; Jouve et al. 2020; Petitdemange et al. 2022) and compare its signature and detectability with respect to the distribution of the field.

Even though the toroidal configurations studied here are unstable, we chose not to consider a complex helical field geometry as a first step in constructing the magnetic TAR to unravel the signature of magnetic fields on MGI waves. This is the best road as we have shown that observational constraints on the strength of the toroidal field can be deduced from modern space data. Such an inference can then naturally guide theoretical follow-up work via the study of the feasibility of carrying out a new TAR generalisation with the inclusion of a poloidal magnetic field. This would lead to a general magnetic TAR that takes any mixed magnetic configurations into account in a non-perturbative way while adhering to observed asteroseismic signals of stars.

Finally, another interesting perspective of this work is to go beyond the magnetic TAR as was done by Valade et al. (2018), who used a Hamiltonian ray-tracing method, and Asai et al. (2015) (see also Asai et al. 2016; Lee 2018), who used general series expansion on spherical harmonics to explore the impact of different general magnetic field topologies on gravito-inertial waves. Their formalism can be adapted to perform asteroseismic modelling of observed stars.

*Acknowledgements.* We thank the referee for her/his positive and constructive report, which has allowed us to improve the quality of our article. H.D. and S.M. acknowledge support from the CNES PLATO grant at CEA/Dap. T.V.R. gratefully acknowledges support from the Research Foundation Flanders (FWO) under grant agreement No. 122B620N and V414021N. This research was supported in part by the National Science Foundation under Grant No. NSF PHY-1748958. C.A. is supported by the KU Leuven Research Council (grant C16/18/005: PARADISE) as well as from the BELgian federal Science Policy Office (BELSPO) through a PLATO PRODEX grant.

## References

- Abramowitz, M., & Stegun, I. A. 1972, *Handbook of Mathematical Functions* (New York: Dover)
- Aerts, C. 2021, *Rev. Mod. Phys.*, **93**, 015001
- Aerts, C., Christensen-Dalsgaard, J., & Kurtz, D. W. 2010, *Asteroseismology* (Springer)
- Aerts, C., Van Reeth, T., & Tkachenko, A. 2017, *ApJ*, **847**, L7
- Aerts, C., Mathis, S., & Rogers, T. M. 2019, *ARA&A*, **57**, 35
- Ahuir, J., Mathis, S., & Amard, L. 2021, *A&A*, **651**, A3
- Akgün, T., Reisenegger, A., Mastrano, A., & Marchant, P. 2013, *MNRAS*, **433**, 2445
- Alecian, E., Neiner, C., Mathis, S., et al. 2013, *A&A*, **549**, L8
- Alvan, L., Mathis, S., & Decressin, T. 2013, *A&A*, **553**, A86
- Arlt, R. 2014, in *Putting A Stars into Context: Evolution, Environment, and Related Stars*, eds. G. Mathys, E. R. Griffin, O. Kochukhov, R. Monier, & G. M. Wahlgren, 93
- Asai, H., Lee, U., & Yoshida, S. 2015, *MNRAS*, **449**, 3620
- Asai, H., Lee, U., & Yoshida, S. 2016, *MNRAS*, **455**, 2228
- Astoul, A., Park, J., Mathis, S., Baruteau, C., & Gallet, F. 2021, *A&A*, **647**, A144
- Aurière, M., Wade, G. A., Silvester, J., et al. 2007, *A&A*, **475**, 1053
- Barnes, G., MacGregor, K. B., & Charbonneau, P. 1998, *ApJ*, **498**, L169
- Beck, P. G., Montalbán, J., Kallinger, T., et al. 2012, *Nature*, **481**, 55
- Bildsten, L., Ushomirsky, G., & Cutler, C. 1996, *ApJ*, **460**, 827
- Blazère, A., Neiner, C., & Petit, P. 2016a, *MNRAS*, **459**, L81
- Blazère, A., Petit, P., Lignières, F., et al. 2016b, *A&A*, **586**, A97
- Booker, J. R., & Bretherton, F. P. 1967, *J. Fluid Mech.*, **27**, 513
- Borucki, W. J., Koch, D., Basri, G., et al. 2010, *Science*, **327**, 977
- Bouabid, M. P., Dupret, M. A., Salmon, S., et al. 2013, *MNRAS*, **429**, 2500
- Bouchaud, K., Domiciano de Souza, A., Rieutord, M., Reese, D. R., & Kervella, P. 2020, *A&A*, **633**, A78
- Boyd, J. P. 1976, Ph.D. Thesis, Harvard University
- Braginskiy, S. I. 1967, *Geomagn. Aeron.*, **7**, 851
- Braithwaite, J. 2006, *A&A*, **453**, 687
- Braithwaite, J. 2007, *A&A*, **469**, 275
- Braithwaite, J. 2008, *MNRAS*, **386**, 1947
- Braithwaite, J. 2009, *MNRAS*, **397**, 763
- Braithwaite, J., & Cantiello, M. 2013, *MNRAS*, **428**, 2789
- Braithwaite, J., & Spruit, H. C. 2004, *Nature*, **431**, 819
- Briquet, M., Neiner, C., Aerts, C., et al. 2012, *MNRAS*, **427**, 483
- Briquet, M., Neiner, C., Leroy, B., Pápics, P. I., & MiMeS Collaboration 2013, *A&A*, **557**, L16
- Bugnet, L., Prat, V., Mathis, S., et al. 2021, *A&A*, **650**, A53
- Buysschaert, B., Aerts, C., Bowman, D. M., et al. 2018, *A&A*, **616**, A148
- Cantiello, M., & Braithwaite, J. 2019, *ApJ*, **883**, 106
- Cantiello, M., Mankovich, C., Bildsten, L., Christensen-Dalsgaard, J., & Paxton, B. 2014, *ApJ*, **788**, 93
- Charbonneau, P., & MacGregor, K. B. 1993, *ApJ*, **417**, 762
- Christensen-Dalsgaard, J. 1997, *Lecture Notes on Stellar Oscillations*
- Cowling, T. G. 1941, *MNRAS*, **101**, 367
- Debras, F., & Chabrier, G. 2019, *ApJ*, **872**, 100
- Degroote, P., Aerts, C., Baglin, A., et al. 2010, *Nature*, **464**, 259
- Deheuvels, S., Doğan, G., Goupil, M. J., et al. 2014, *A&A*, **564**, A27
- Dhouib, H., Prat, V., Van Reeth, T., & Mathis, S. 2021a, *A&A*, **652**, A154
- Dhouib, H., Prat, V., Van Reeth, T., & Mathis, S. 2021b, *A&A*, **656**, A122
- Dintrans, B., Rieutord, M., & Valdetaro, L. 1999, *J. Fluid Mech.*, **398**, 271
- Duez, V., & Mathis, S. 2010, *A&A*, **517**, A58
- Duez, V., Braithwaite, J., & Mathis, S. 2010a, *ApJ*, **724**, L34
- Duez, V., Mathis, S., & Turck-Chièze, S. 2010b, *MNRAS*, **402**, 271
- Dumont, T., Palacios, A., Charbonnel, C., et al. 2021, *A&A*, **646**, A48
- Eckart, C. 1960, *Hydrodynamics of Oceans and Atmospheres* (Oxford: Pergamon Press)
- Eggenberger, P., Maeder, A., & Meynet, G. 2005, *A&A*, **440**, L9
- Eggenberger, P., Montalbán, J., & Miglio, A. 2012, *A&A*, **544**, L4
- Eggenberger, P., Buldgen, G., & Salmon, S. J. A. J. 2019, *A&A*, **626**, L1
- Emeriau-Viard, C., & Brun, A. S. 2017, *ApJ*, **846**, 8
- Friedlander, S. 1987, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **39**, 315
- Friedlander, S. 1989, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **48**, 53
- Fröman, N., & Fröman, P. O. 1965, *JWKB Approximation: Contributions to the Theory* (Amsterdam: North-Holland Publishing Company)
- Fuller, J., Cantiello, M., Stello, D., Garcia, R. A., & Bildsten, L. 2015, *Science*, **350**, 423
- Fuller, J., Piro, A. L., & Jermyn, A. S. 2019, *MNRAS*, **485**, 3661
- Garaud, P. 2002, *MNRAS*, **329**, 1
- García, R. A., & Ballot, J. 2019, *Liv. Rev. Solar Phys.*, **16**, 4
- Gaurat, M., Jouve, L., Lignières, F., & Gastine, T. 2015, *A&A*, **580**, A103
- Gellert, M., Rüdiger, G., & Elstner, D. 2008, *A&A*, **479**, L33
- Gellert, M., Rüdiger, G., & Hollerbach, R. 2011, *MNRAS*, **414**, 2696
- Goldreich, P., & Tremaine, S. 1979, *ApJ*, **233**, 857
- Goode, P. R., & Thompson, M. J. 1992, *ApJ*, **395**, 307
- Gough, D. 1993, in *Les Houches Session XLVII*, eds. J.-P. Zahn, & J. Zinn-Justin (Amsterdam: Elsevier), 399
- Gough, D. O., & McIntyre, M. E. 1998, *Nature*, **394**, 755
- Heger, A., Woosley, S. E., & Spruit, H. C. 2005, *ApJ*, **626**, 350
- Heng, K., & Spitkovsky, A. 2009, *ApJ*, **703**, 1819
- Henneco, J., Van Reeth, T., Prat, V., et al. 2021, *A&A*, **648**, A97
- Howell, S. B., Sobeck, C., Haas, M., et al. 2014, *PASP*, **126**, 398
- Jermyn, A. S., & Cantiello, M. 2020, *ApJ*, **900**, 113
- Jouve, L., Lignières, F., & Gaurat, M. 2020, *A&A*, **641**, A13
- Kiefer, R., & Roth, M. 2018, *ApJ*, **854**, 74
- Kurtz, D. W., Saio, H., Takata, M., et al. 2014, *MNRAS*, **444**, 102
- Laplace, P. S. 1799, *Traité de Mécanique Céleste* (Paris: Imprimerie de Crapelet)
- Lecoanet, D., Vasil, G. M., Fuller, J., Cantiello, M., & Burns, K. J. 2017, *MNRAS*, **466**, 2181
- Lee, U. 2018, *MNRAS*, **476**, 3399
- Lee, U. 2019, *MNRAS*, **484**, 5845
- Lee, U., & Saio, H. 1997, *ApJ*, **491**, 839
- Lee, U., & Saio, H. 2020, *MNRAS*, **497**, 4117
- Li, G., Van Reeth, T., Bedding, T. R., et al. 2020, *MNRAS*, **491**, 3586
- Lignières, F., Petit, P., Böhm, T., & Aurière, M. 2009, *A&A*, **500**, L41
- Loi, S. T. 2020a, *MNRAS*, **496**, 3829
- Loi, S. T. 2020b, *MNRAS*, **493**, 5726
- Loi, S. T. 2021, *MNRAS*, **504**, 3711
- Loi, S. T., & Papaloizou, J. C. B. 2020, *MNRAS*, **491**, 708
- MacGregor, K. B., & Rogers, T. M. 2011, *Sol. Phys.*, **270**, 417
- Maeder, A. 2009, *Physics, Formation and Evolution of Rotating Stars* (Berlin Heidelberg: Springer)
- Maeder, A., & Meynet, G. 2003, *A&A*, **411**, 543
- Maeder, A., & Meynet, G. 2005, *A&A*, **440**, 1041
- Malkus, W. V. R. 1967, *J. Fluid Mech.*, **28**, 793
- Mankovich, C. R., & Fuller, J. 2021, *Nat. Astron.*, **5**, 1103
- Markey, P., & Tayler, R. J. 1973, *MNRAS*, **163**, 77
- Marques, J. P., Goupil, M. J., Lebreton, Y., et al. 2013, *A&A*, **549**, A74
- Mathis, S. 2009, *A&A*, **506**, 811
- Mathis, S., & de Brye, N. 2011, *A&A*, **526**, A65
- Mathis, S., & de Brye, N. 2012, *A&A*, **540**, A37
- Mathis, S., & Prat, V. 2019, *A&A*, **631**, A26
- Mathis, S., & Zahn, J. P. 2005, *A&A*, **440**, 653
- Mathis, S., Duez, V., & Braithwaite, J. 2011, in *Astrophysical Dynamics: From Stars to Galaxies*, eds. N. H. Brummell, A. S. Brun, M. S. Miesch, & Y. Ponty, 271, 270
- Mathis, S., Bugnet, L., Prat, V., et al. 2021, *A&A*, **647**, A122
- Mestel, L., & Weiss, N. O. 1987, *MNRAS*, **226**, 123
- Meynet, G., & Maeder, A. 2000, *A&A*, **361**, 101
- Michielsen, M., Pedersen, M. G., Augustson, K. C., Mathis, S., & Aerts, C. 2019, *A&A*, **628**, A76
- Miglio, A., Montalbán, J., Noels, A., & Eggenberger, P. 2008, *MNRAS*, **386**, 1487
- Mombarg, J. S. G., Van Reeth, T., & Aerts, C. 2021, *A&A*, **650**, A58
- Mombarg, J. S. G., Dotter, A., Rieutord, M., et al. 2022, *ApJ*, **895**, 51
- Morel, T., Castro, N., Fossati, L., et al. 2014, *The Messenger*, **157**, 27
- Murphy, S. J., Fossati, L., Bedding, T. R., et al. 2016, *MNRAS*, **459**, 1201
- Neiner, C., & Lampens, P. 2015, *MNRAS*, **454**, L86
- Neiner, C., Mathis, S., Alecian, E., et al. 2015, in *Polarimetry*, eds. K. N. Nagendra, S. Bagnulo, R. Centeno, & M. Jesús Martínez González, 305, 61
- Neiner, C., Wade, G. A., & Sikora, J. 2017, *MNRAS*, **468**, L46
- Ogilvie, G. I., & Lin, D. N. C. 2004, *ApJ*, **610**, 477
- Ouazzani, R.-M., Salmon, S. J. A. J., Antoci, V., et al. 2017, *MNRAS*, **465**, 2294
- Ouazzani, R. M., Marques, J. P., Goupil, M. J., et al. 2019, *A&A*, **626**, A121
- Ouazzani, R. M., Lignières, F., Dupret, M. A., et al. 2020, *A&A*, **640**, A49
- Pápics, P. I., Tkachenko, A., Van Reeth, T., et al. 2017, *A&A*, **598**, A74
- Paxton, B., Bildsten, L., Dotter, A., et al. 2011, *ApJS*, **192**, 3
- Paxton, B., Cantiello, M., Arras, P., et al. 2013, *ApJS*, **208**, 4
- Paxton, B., Marchant, P., Schwab, J., et al. 2015, *ApJS*, **220**, 15
- Paxton, B., Schwab, J., Bauer, E. B., et al. 2019, *ApJS*, **243**, 10
- Paxton, B., Smolec, R., Schwab, J., et al. 2019, *ApJS*, **243**, 10
- Pedersen, M. G., Aerts, C., Pápics, P. I., & Rogers, T. M. 2018, *A&A*, **614**, A128
- Pedersen, M. G., Aerts, C., Pápics, P. I., et al. 2021, *Nat. Astron.*, **5**, 715
- Petit, P., Lignières, F., Aurière, M., et al. 2011, *A&A*, **532**, L13
- Petitdémange, L., Christophe, G., & Florence, M. 2022, *Science*, submitted
- Prat, V., Mathis, S., Buysschaert, B., et al. 2019, *A&A*, **627**, A64
- Prat, V., Mathis, S., Neiner, C., et al. 2020, *A&A*, **636**, A100
- Rauer, H., Catala, C., Aerts, C., et al. 2014, *Exp. Astron.*, **38**, 249
- Rauer, H., Aerts, C., Cabrera, J., & PLATO Team. 2016, *Astron. Nachr.*, **337**, 961

- Ricker, G. R., Winn, J. N., Vanderspek, R., et al. 2015, *J. Astron. Telesc. Instr. Syst.*, **1**, 014003
- Rogers, T. M., & MacGregor, K. B. 2010, *MNRAS*, **401**, 191
- Rudraiah, N., & Venkatachalappa, M. 1972, *J. Fluid Mech.*, **54**, 217
- Saio, H. 2018, <https://doi.org/10.5281/zenodo.1912055>
- Saio, H., Kurtz, D. W., Murphy, S. J., Antoci, V. L., & Lee, U. 2018, *MNRAS*, **474**, 2774
- Saio, H., Kurtz, D. W., Takata, M., et al. 2015, *MNRAS*, **447**, 3264
- Saio, H., Takata, M., Lee, U., Li, G., & Van Reeth, T. 2021, *MNRAS*, **502**, 5856
- Schatzman, E. 1993, *A&A*, **271**, L29
- Shibahashi, H., & Aerts, C. 2000, *ApJ*, **531**, L143
- Shultz, M. E., Wade, G. A., Rivinius, T., et al. 2019, *MNRAS*, **490**, 274
- Spruit, H. C. 1999, *A&A*, **349**, 189
- Spruit, H. C. 2002, *A&A*, **381**, 923
- Strugarek, A., Brun, A. S., & Zahn, J. P. 2011, *A&A*, **532**, A34
- Suijs, M. P. L., Langer, N., Poelarends, A. J., et al. 2008, *A&A*, **481**, L87
- Takata, M., & Shibahashi, H. 1994, *PASJ*, **46**, 301
- Tayler, R. J. 1973, *MNRAS*, **161**, 365
- Tayler, R. J. 1980, *MNRAS*, **191**, 151
- Triana, S. A., Moravveji, E., Pápics, P. I., et al. 2015, *ApJ*, **810**, 16
- Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H., & Shibahashi, H. 1989, *Nonradial Oscillations of Stars* (University of Tokyo Press)
- Valade, A., Prat, V., Mathis, S., & Augustson, K. 2018, in *Waves in the Radiative Zones of Rotating, Magnetized Stars*, eds. P. Di Matteo, F. Billebaud, F. Herpin et al., SF2A-2018: Proc. Ann. Meeting French Soc. Astron. Astrophys., 109
- Van Beeck, J., Prat, V., Van Reeth, T., et al. 2020, *A&A*, **638**, A149
- Van Reeth, T., Tkachenko, A., Aerts, C., et al. 2015, *A&A*, **574**, A17
- Van Reeth, T., Tkachenko, A., & Aerts, C. 2016, *A&A*, **593**, A120
- Van Reeth, T., Mombarg, J. S. G., Mathis, S., et al. 2018, *A&A*, **618**, A24
- Wade, G. A., Neiner, C., Alecian, E., et al. 2016, *MNRAS*, **456**, 2
- Wang, H., Boyd, J. P., & Akmaev, R. A. 2016, *Geosci. Model Dev.*, **9**, 1477
- Watts, A. L., Andersson, N., Beyer, H., & Schutz, B. F. 2003, *MNRAS*, **342**, 1156
- Zahn, J. P., Brun, A. S., & Mathis, S. 2007, *A&A*, **474**, 145
- Zaqarashvili, T. V., Oliver, R., & Ballester, J. L. 2009, *ApJ*, **691**, L41



**Appendix A: MESA controls inlist**

In this appendix we report the control section of the MESA inlist used to compute the stellar evolution models of the  $1.6 M_{\odot}$  and  $5 M_{\odot}$ ,  $Z = 0.02$  stars:

&controls

```

! starting specifications
  initial_mass = 1.6 (GammaDor) and 5 (SPB) ! in Msun units
  initial_z    = 0.02
  use_Type2_opacities = .true.
  Zbase       = 0.02

! stop criteria
  xa_central_lower_limit_species(1) = 'h1'
  xa_central_lower_limit(1) = 0.000001

!----- WIND
cool_wind_RGB_scheme = 'Reimers'
cool_wind_AGB_scheme = 'Blocker'
RGB_to_AGB_wind_switch = 1d-4
Reimers_scaling_factor = 0.2
Blocker_scaling_factor = 0.5
use_accreted_material_j = .true.
accreted_material_j = 0

!----- OVERSHOOTING
overshoot_scheme(1) = 'exponential'
overshoot_zone_type(1) = 'any'
overshoot_zone_loc(1) = 'any'
overshoot_bdy_loc(1) = 'any'
overshoot_f(1) = 0.015
overshoot_f0(1) = 0.004

!----- MESH
mesh_delta_coeff = 0.7
varcontrol_target = 0.7d-3
predictive_mix(1) = .true.
predictive_superad_thresh(1) = 0.005
predictive_avoid_reversal(1) = 'he4'
predictive_zone_type(1) = 'any'
predictive_zone_loc(1) = 'core'
predictive_bdy_loc(1) = 'top'
dX_div_X_limit_min_X = 1d-4
dX_div_X_limit = 5d-1
dX_nuc_drop_min_X_limit = 1d-4
dX_nuc_drop_limit = 1d-2

/ ! end of controls namelist

```

## Appendix B: Additional tables

**Table B.1.** Detectability of the signature of toroidal magnetic fields in the modelled  $1.6 M_{\odot}$   $\gamma$  Dor star model during MS evolution for three modes at different rotation rates,  $\Omega$ , and magnetic field amplitude,  $B_0$ . We also list the ranges of radial orders,  $n$ , and spin parameters,  $\nu$ .

mode	Evolution phase	$\Omega$		$B_0$	$n$		$\nu$		$\Delta f_{\max}$	$n_{\text{detect},\min}$	$\Delta f_{\max}/f_{\text{res}}$	$n_{\text{detect},\min}$	$\Delta f_{\max}/f_{\text{res}}$	$n_{\text{detect},\min}$	$\Delta f_{\max}/f_{\text{res}}$	
$k$	$m$	$[\Omega_{\odot}]$	[c/d]	[G]	(min)	(max)	(min)	(max)	[c/d]	(TESS)		(PLATO)		(Kepler)		
0	1	near ZAMS	22.19	0.79	$6 \times 10^4$	20	80	1.54	6.7	0.0015	...	0.57	73	1.11	37	2.23
					$2 \times 10^5$	20	80	1.54	6.2	0.02	20	7.54	20	15.1	20	30.19
					$6 \times 10^5$	20	37	1.48	2.49	0.11	20	39.2	20	78.43	20	156.87
	mid-MS	15.56	0.56	$6 \times 10^4$	20	80	1.04	4.62	0.0015	...	0.55	73	1.1	35	2.21	
				$2 \times 10^5$	20	80	1.04	4.29	0.02	20	7.39	20	14.78	20	29.57	
				$6 \times 10^5$	20	37	0.99	1.69	0.11	20	41.35	20	82.72	20	165.44	
		mid-MS	15.56	0.56	$6 \times 10^4$	20	80	0.97	4.32	0.0009	...	0.34	...	0.67	60	1.34
					$2 \times 10^5$	20	80	0.96	4.16	0.01	20	3.87	20	7.74	20	15.48
					$6 \times 10^5$	20	76	0.94	2.89	0.11	20	41.72	20	83.44	20	166.88
0	2	near ZAMS	22.19	0.79	$6 \times 10^4$	20	80	0.8	3.35	0.003	73	1.12	37	2.23	20	4.46
					$2 \times 10^5$	20	80	0.79	3.1	0.04	20	15.12	20	30.23	20	60.47
					$6 \times 10^5$	20	37	0.76	1.25	0.21	20	79.6	20	159.2	20	318.41
	mid-MS	15.56	0.56	$6 \times 10^4$	20	80	0.55	2.32	0.003	73	1.1	36	2.21	20	4.43	
				$2 \times 10^5$	20	80	0.54	2.15	0.04	20	14.84	20	29.67	20	59.35	
				$6 \times 10^5$	20	36	0.52	0.85	0.21	20	76.36	20	152.73	20	305.45	
		mid-MS	15.56	0.56	$6 \times 10^4$	20	80	0.51	2.17	0.0018	...	0.67	60	1.35	29	2.69
					$2 \times 10^5$	20	80	0.51	2.09	0.02	20	7.77	20	15.54	20	31.08
					$6 \times 10^5$	20	78	0.5	1.46	0.24	20	86.81	20	173.62	20	347.24
-2	-1	near ZAMS	22.19	0.79	$6 \times 10^4$	20	80	7.51	19.75	0.006	20	2.15	20	4.29	20	8.58
					$2 \times 10^5$	20	80	6.66	14.03	0.006	20	2.23	20	4.47	20	8.93
					$6 \times 10^5$	20	80	6.61	13.71	0.003	20	1.25	20	2.51	20	5.02
mid-MS	15.56	0.56	$6 \times 10^4$	20	80	6.61	13.71	0.003	20	1.25	20	2.51	20	5.02		
			$2 \times 10^5$	22	45	6.06	7.51	0.027	22	9.99	22	19.98	20	39.96		

**Table B.2.** Same as Table B.1, but for the modelled  $5 M_{\odot}$  SPB star.

mode	Evolution phase	$\Omega$		$B_0$	$n$		$\nu$		$\Delta f_{\max}$	$n_{\text{detect},\min}$	$\Delta f_{\max}/f_{\text{res}}$	$n_{\text{detect},\min}$	$\Delta f_{\max}/f_{\text{res}}$	$n_{\text{detect},\min}$	$\Delta f_{\max}/f_{\text{res}}$		
$k$	$m$	$[\Omega_{\odot}]$	[c/d]	[G]	(min)	(max)	(min)	(max)	[c/d]		(TESS)	(PLATO)	(Kepler)				
0	1	near ZAMS	11.38	0.41	$4 \times 10^4$	20	80	1.91	8.18	0.0005	...	0.18	...	0.35	...	0.71	
					$10^5$	20	80	1.91	7.95	0.003	69	1.22	37	2.43	20	4.86	
					$5 \times 10^5$	20	27	1.81	2.36	0.036	20	13.05	20	26.1	20	52.2	
	1	mid-MS	3.94	0.14	$10^5$	20	80	0.59	2.6	0.003	68	1.19	31	2.39	20	4.77	
					$5 \times 10^5$	20	24	0.56	0.65	0.042	20	15.29	20	30.59	20	61.17	
			1.18	0.04	$10^5$	20	80	0.16	0.68	0.004	54	1.51	26	3.02	20	6.05	
					$5 \times 10^5$	20	23	0.15	0.17	0.047	2	17.17	20	34.35	20	68.69	
			3.94	0.14	$10^5$	20	80	0.54	2.41	0.0015	...	0.55	73	1.09	31	2.18	
					$5 \times 10^5$	20	59	0.53	1.45	0.033	20	11.95	20	23.89	20	47.78	
	1.18	0.04	$10^5$	20	80	0.15	0.63	0.0019	...	0.68	57	1.36	27	2.71			
			$5 \times 10^5$	20	50	0.15	0.33	0.036	20	13.33	20	26.67	20	53.34			
	0	2	near TAMS	1.18	0.04	$10^5$	20	80	0.04	0.17	0.008	27	3.07	20	6.14	20	12.3
$5 \times 10^5$						20	44	0.04	0.07	0.23	20	85.96	20	171.91	20	343.82	
0	2	near ZAMS	11.38	0.41	$10^5$	20	80	0.97	3.98	0.007	37	2.44	20	4.88	20	9.75	
					$5 \times 10^5$	20	28	0.93	1.22	0.079	20	28.75	20	57.51	20	115.01	
					$10^5$	20	80	0.32	1.31	0.0065	35	2.39	20	4.77	20	9.54	
	2	mid-MS	3.94	0.14	$10^5$	20	80	0.32	1.31	0.0065	35	2.39	20	4.77	20	9.54	
					$5 \times 10^5$	20	24	0.3	0.35	0.066	20	24.19	20	48.38	20	96.75	
			1.18	0.04	$10^5$	20	80	0.09	0.37	0.007	33	2.6	20	5.19	20	10.38	
					$5 \times 10^5$	20	25	0.09	0.1	0.078	20	28.6	20	57.2	20	114.42	
			3.94	0.14	$10^5$	20	80	0.29	1.22	0.0031	74	1.08	36	2.17	20	4.33	
					$5 \times 10^5$	20	62	0.29	0.77	0.066	20	24.13	20	48.27	20	96.55	
	1.18	0.04	$10^5$	20	80	0.09	0.34	0.0032	69	1.17	34	2.34	20	4.68			
			$5 \times 10^5$	20	53	0.08	0.19	0.061	20	22.4	20	44.79	20	89.58			
	0	2	near TAMS	1.18	0.04	$10^5$	20	80	0.02	0.09	0.013	20	4.82	20	9.64	20	19.27
$5 \times 10^5$						20	52	0.02	0.05	0.459	20	167.5	20	335	20	670.02	
-2	-1	near ZAMS	11.38	0.41	$4 \times 10^4$	20	80	8.24	24.28	0.0018	...	0.67	64	1.34	20	2.68	
					$10^5$	20	31	7.93	10.18	0.005	20	1.97	20	3.94	20	7.88	
					$4 \times 10^4$	20	79	6.08	9.15	0.0023	...	0.86	20	1.71	20	3.43	
	-1	mid-MS	3.94	0.14	$4 \times 10^4$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
					$10^5$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
			1.18	0.04	$4 \times 10^4$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
					$10^5$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
			3.94	0.14	$4 \times 10^4$	20	80	6.1	9	0.0012	...	0.45	...	0.9	...	1.8	
					$10^5$	40	63	6.1	6.98	0.006	20	2.28	20	4.55	20	9.1	
	1.18	0.04	$4 \times 10^4$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...		
			$10^5$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...		
	-2	-1	near TAMS	1.18	0.04	$4 \times 10^4$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
$10^5$						...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	

Deuxième partie

Dissipation de marée planétaire



## CHAPITRE 5

# Interactions de marée dans les systèmes de planètes géantes gazeuses

Les interactions de marée jouent un rôle crucial pour l'évolution rotationnelle et orbitale des objets astrophysiques tels que les étoiles, les planètes et les satellites. Lorsque des objets célestes se trouvent suffisamment proches les uns des autres, ils subissent des effets de marée en raison de leur étendue spatiale qui induit une force différentielle du fait des variations du potentiel gravitationnel entre les différents points du corps. La théorie des marées trouve son application dans divers contextes, tels que les systèmes d'étoiles binaires, les planètes en orbite autour d'une étoile hôte ou encore les satellites orbitant autour d'une planète (e.g. [Zahn 2013](#); [Ogilvie 2014](#); [Mathis 2018, 2019](#)). Dans tous ces cas, les marées peuvent influencer la période et l'excentricité et l'inclinaison de l'orbite. Bien que ces changements se produisent généralement de manière très lente, sur des échelles de temps séculaires, ils peuvent avoir un impact significatif sur la vie de ces objets célestes.

Les effets des interactions de marée dans notre système solaire sont particulièrement observables dans les systèmes des planètes géantes gazeuses Jupiter et Saturne et de leurs satellites naturels. Ces planètes rassemblent plusieurs dizaines de satellites qui sont soumis simultanément aux effets du champ gravitationnel différentiel de la planète (créant des marées à l'intérieur des satellites) et à la rétroaction de leur propre champ gravitationnel différentiel, provoquant ainsi des marées à l'intérieur des géantes gazeuses. Il est important de souligner en premier lieu que les périodes de révolution et de rotation propre des satellites sont en synchronisation ([Rambaux & Castillo-Rogez 2013](#)). Cette synchronisation, également appelée résonance spin/orbite, est due aux effets des marées, similaires à ceux observés sur la Lune. De plus, les orbites des satellites présentent des excentricités pratiquement nulles. Tout comme c'est le cas pour la Lune, les satellites ne parviennent pas à atteindre complètement un état de coplanarité mais les inclinaisons résiduelles restent très faibles dans le plan de Laplace<sup>1</sup> ([Peale et al. 1979b](#)). Les excentricités et inclinaisons résiduelles des satellites sont maintenues grâce aux interactions gravitationnelles entre eux. L'état d'équilibre stable de ces satellites n'est donc plus caractérisé par une obliquité et une excentricité nulles, mais est déterminé par la résonance orbitale de Laplace. Cette résonance, également appelée résonance de moyen mouvement, a pour conséquence de rendre les périodes orbitales des satellites commen-

---

1. Le plan de Laplace est défini comme le plan moyen occupé par l'orbite d'un satellite pendant une période de précession nodale. En d'autres termes, il s'agit du plan perpendiculaire à l'axe de précession orbitale du satellite. Il se situe entre le plan équatorial de la planète et le plan orbital. En général, le plan de Laplace correspond au plan équatorial de la planète pour les satellites qui sont très proches, puis il se rapproche progressivement du plan orbital de la planète pour les satellites plus éloignés ([Laplace 1799](#)).



surables entre elles, c'est-à-dire que leur rapport est un nombre relatif. Le maintien d'une faible excentricité et d'une faible inclinaison a des répercussions significatives sur la structure des satellites. Les marées créent des bourrelets qui se forment dans ces satellites, atteignant une amplitude d'environ 3 km pour des lunes telles que Mimas et Io (Rambaux & Castillo-Rogez 2013). Cependant, ces bourrelets étant en déphasage, ils exercent des contraintes sur les matériaux constitutifs de ces satellites, entraînant ainsi une dissipation considérable des forces de marée. Dans le cas d'Io, cette dissipation de marée génère une quantité de chaleur si importante qu'elle est capable de déclencher du volcanisme (Peale et al. 1979a; Moore et al. 2007). Dans le cas des lunes glacées telles qu'Europe et Encelade, elle provoque des fractures qui s'étendent sur toute leur surface, ainsi que des geysers détectés par la sonde spatiale Cassini, ce qui a ouvert la voie à l'étude de la tectonique des marées (Poirier 1982).

Au cours de la dernière décennie, de nouvelles découvertes sur Jupiter, Saturne et leurs systèmes ont remis en question les estimations précédentes de la dissipation des marées dans les planètes géantes gazeuses de notre système solaire. Les études réalisées par Lainey et al. (2009, 2012, 2017, 2020) et Polycarpe et al. (2018) en utilisant l'astrométrie de haute précision appliquée aux données sol et de la mission Cassini ont démontré que la dissipation des marées dans Jupiter et Saturne est environ un ordre de grandeur plus élevée que ce qui avait été initialement calculé par Goldreich & Soter (1966) et Sinclair (1983) en supposant que les satellites se soient formés simultanément à la planète avant de migrer vers leur position actuelle. Cette dissipation intense est essentielle pour expliquer leur migration orbitale rapide, un phénomène qui a été mis en évidence par les observations astrométriques (Lainey et al. 2009, 2012, 2017, 2020). La constatation d'une dissipation variable suggère donc aussi la nécessité potentielle de revoir notre compréhension de la formation et de l'évolution des systèmes de planètes géantes (Charnoz et al. 2011; Crida & Charnoz 2012), tant dans notre système solaire que dans les systèmes exoplanétaires. Cependant, ce qui s'applique à Jupiter et Saturne ne s'applique pas nécessairement aux exoplanètes géantes gazeuses. En effet, les systèmes de Jupiter/Saturne chauds ont révélé une dissipation de marée plus faible (Van Eylen et al. 2018; Huber et al. 2019). Par conséquent, la structure, la composition, la dynamique interne et, de manière générale, les processus de dissipation dans ces géantes sont très probablement très différents de ceux que nous connaissons dans notre système solaire. D'un côté, lorsque nous avons connaissance de la structure interne d'une planète (ce qui est rare), cela nous permet de contraindre l'efficacité de la dissipation de marée et ainsi de reconstruire le scénario de sa formation et de celle de son système. D'un autre côté, en acquérant une bonne compréhension des processus de dissipation qui se produisent dans différents environnements, nous pouvons en déduire des informations sur la structure interne de la planète.

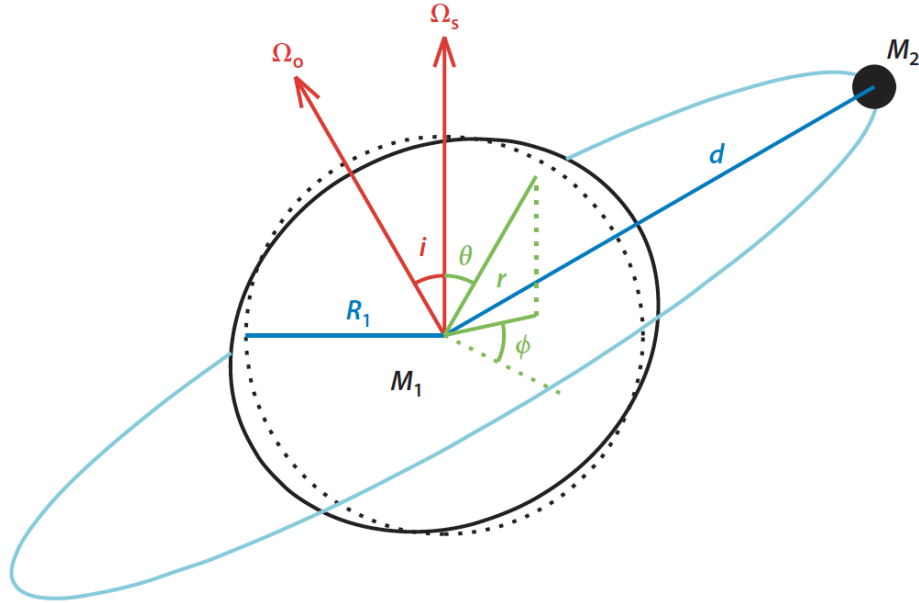
Une introduction générale sur le problème des interactions de marée dans les systèmes des planètes géantes gazeuses a été présentée dans la section 4.2 de l'introduction. Cependant, avant de présenter nos nouveaux modèles de dissipation de marée dans les planètes géantes gazeuses, il est nécessaire d'introduire les éléments physiques et mathématiques essentiels pour modéliser les marées et notre nouvelle vision de la structure et de la dynamique interne de ces planètes.

## 5.1 Théorie linéaire des marées

Dans cette section, nous présentons la théorie linéaire des marées qui a été développée par Kaula (1961, 1964) et Polfiet & Smeyers (1990) et reprise par Ogilvie (2014). Nous examinons la réponse linéaire des corps célestes, tels que les étoiles ou les planètes, à la marée provoquée par



un compagnon en orbite. On considère la configuration présentée dans la figure 5.1, où le corps principal de rayon  $R_1$ , défini comme l'objet le plus massif d'une masse  $M_1$ , et le corps secondaire traité comme une masse ponctuelle d'une masse  $M_2 \ll M_1$ , orbitent mutuellement autour du centre de masse commun (barycentre). Le vecteur de séparation  $\mathbf{d}$  pointe du centre du corps principal vers le corps secondaire. Dans le cas où l'orbite est circulaire, la magnitude de ce vecteur est le demi-grand axe  $a$  ( $|\mathbf{d}| = a$ ). Le premier paramètre adimensionnel important estime la déformation de



**FIGURE 5.1** – Schéma d'un système binaire pour mettre en évidence la signification physique des différentes quantités utilisées pour étudier les interactions de marée induites dans le corps 1 (primaire) par le corps 2 (secondaire).  $\Omega_s$  et  $\Omega_o$  sont respectivement les vecteurs de vitesse du spin et de l'orbite. La figure représente le bourrelet de marée, en négligeant l'aplatissement centrifuge. Crédits : [Ogilvie \(2014\)](#).

marée d'un corps par un autre. C'est le paramètre d'amplitude de marée que l'on définit comme le rapport, à la surface du corps primaire, de la gravité de marée due au corps secondaire à la gravité du corps primaire lui-même

$$\epsilon = (M_2/M_1)(R_1/d)^3. \quad (5.1)$$

Les interactions de marée dépendent donc fortement de la séparation des corps par rapport à leur taille. Dans le cas où le paramètre d'amplitude de marée est suffisamment faible ( $\epsilon \ll 1$ ) ou, dit autrement, que le rapport des masses  $M_2/M_1$  soit faible et/ou que les deux corps soient suffisamment bien séparés ( $R_1 \ll |\mathbf{d}|$ ), on peut alors adopter la théorie linéaire. Dans cette approche, la perturbation due à la marée est traitée comme une petite perturbation d'un état de base, qui est généralement supposé stable et axisymétrique. À chaque composante du potentiel de marée correspond une réponse linéaire indépendante. Par exemple, pour les planètes géantes gazeuses du système solaire, les valeurs les plus élevées de  $\epsilon$  sont approximativement  $2 \times 10^{-7}$  (pour Jupiter, due à Io),  $3 \times 10^{-8}$  (pour Saturne, due à Titan).





### 5.1.1 Potentiel de marée

Le potentiel gravitationnel à l'intérieur du corps primaire résultant de la présence du corps secondaire en un point arbitraire décrit par le vecteur  $\mathbf{x}$  (son origine est le centre du corps primaire) peut être décrit par :

$$\Phi(\mathbf{d}, \mathbf{x}) = -\frac{GM_2}{|\mathbf{d} - \mathbf{x}|} \quad (5.2)$$

$$= -\frac{GM_2}{|\mathbf{d}|} \left( 1 - \frac{2\mathbf{d} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{d}|} + \frac{|\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{d}|^2} \right)^{-1/2} \quad (5.3)$$

$$\stackrel{(|\mathbf{x}| \ll |\mathbf{d}|)}{\approx} -\frac{GM_2}{|\mathbf{d}|} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \frac{|\mathbf{x}|}{|\mathbf{d}|} \right)^{\ell} P_{\ell} \left( \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{d}||\mathbf{x}|} \right). \quad (5.4)$$

Nous notons que cette dérivation est effectuée dans le référentiel inertiel, ce qui évite la nécessité d'introduire la force centrifuge. La force qui résulte de ce potentiel peut être obtenue en évaluant son gradient. Le premier terme de cette série est constant, donc ne peut donc pas contribuer à la force de marée, tandis que le second terme donne lieu à une accélération uniforme, qui provoque le mouvement orbital képlérien de base du corps primaire. La partie restante du développement définit le potentiel de marée, qui donne lieu à une accélération non uniforme qui déforme le corps primaire et qui peut être représenté à l'aide des harmoniques sphériques du deuxième degré et plus :

$$\Psi(r, \theta, \varphi, t) = \Re \left( \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{A}_{\ell mn} \left( \frac{r}{R_1} \right)^{\ell} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega^{\text{in}} t} \right) \quad (5.5)$$

avec

$$\mathcal{A}_{\ell mn} = \frac{GM_2 R_1^{\ell}}{a^{\ell+1}} A_{\ell, m, n}(e, i), \quad (5.6)$$

l'amplitude de marée,  $\Omega_o$  et  $\Omega_s$  sont respectivement la vitesse orbitale et la vitesse de rotation du primaire,  $e$  l'excentricité de l'orbite, et  $i$  son inclinaison (c.-à-d. l'angle entre les vecteurs  $\mathbf{\Omega}_o$  et  $\mathbf{\Omega}_s$ ). Le coefficient  $A_{\ell, m, n}$  est une fonction à valeurs complexes, sans dimension (Kaula 1961, 1964) et l'entier  $n$  désigne les harmoniques temporelles du mouvement orbital. La fréquence d'excitation des ondes dans le repère inertiel est  $\omega^{\text{in}} = n\Omega_o$ , tandis que la fréquence d'excitation des ondes décalée par l'effet Doppler dans un référentiel tournant en corotation est  $\omega = n\Omega_o - m\Omega_s$ .

**Approximation quadripolaire** Dans la plupart des applications, les corps sont suffisamment bien séparés pour que les composantes quadripolaires ( $\ell = 2$ ) soient fortement dominantes (Mathis & Le Poncin-Lafitte 2009). Dans le cas particulier d'une orbite circulaire coplanaire ( $e = i = 0$ ), les seuls termes présents sont les termes dans lesquels  $n = m$  et  $\ell - m$  est pair. Dans ce cas, le potentiel de marée quadripolaire non statique est écrit comme suit

$$\Psi_{222}(r, \theta, \varphi, t) = \Re \left\{ \mathcal{A}_{222} \left( \frac{r}{R_1} \right)^2 Y_2^2(\theta, \varphi) e^{-2i\Omega_o t} \right\}, \quad (5.7)$$

avec

$$\mathcal{A}_{222} = \sqrt{\frac{6\pi}{5}} \frac{GM_2 R_1^2}{a^3}. \quad (5.8)$$

Examinons maintenant la façon dont le corps primaire va répondre à la présence de ce potentiel de marée.



### 5.1.2 Nombre de Love et facteur de qualité

Le potentiel de marée induit par le secondaire provoque des déformations dans le primaire, ce qui perturbe la répartition des masses à l'intérieur de celui-ci par rapport à leur répartition sphérique par l'autogravité. Par conséquent, le potentiel gravitationnel sphérique non déformé est perturbé, et une contribution due à la réponse à la marée s'y ajoute. Cette perturbation agit ensuite en retour sur le secondaire. Étant donné que nous considérons ici le secondaire comme une masse ponctuelle, cette interaction mutuelle modifie uniquement le spin du primaire et les orbites des deux corps autour du centre de masse. Le désalignement de la déformation excitée par la marée due à la friction interne dans le primaire exerce un couple sur le mouvement orbital du secondaire.

Chaque composante de marée  $A_{\ell,m,n}$  excitée déclenche une réponse qui lui est propre dans le corps perturbé. Ce dernier va ainsi réorganiser la distribution de sa masse, car son potentiel gravitationnel est modifié par le potentiel de marée  $\Psi$ . Ainsi, la perturbation du potentiel gravitationnel externe peut être exprimée comme (Ogilvie 2014) :

$$\Phi'_{\text{ext}}(r, \theta, \varphi, t) = \Re \left( \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{B}_{\ell mn} \left( \frac{R_1}{r} \right)^{\ell+1} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega \text{in}t} \right), \quad (5.9)$$

où  $\mathcal{B}_{\ell mn}$  modélise l'ensemble des paramètres inconnus qui décrivent la manière dont le corps réagit au potentiel de marée. Ainsi, on peut introduire le nombre de Love (Love 1909, 1911) qui est une fonction de réponse linéaire à valeur complexe, sans dimension et dépendant de la fréquence, qui relie la perturbation gravitationnelle due à la réponse au potentiel de marée appliqué à ce dernier :

$$k_{\ell m}(\omega) = \frac{\mathcal{B}_{\ell mn}}{\mathcal{A}_{\ell mn}}. \quad (5.10)$$

Le nombre de Love quantifie ainsi la réponse fréquentielle du corps primaire au forçage de marée. Tout d'abord, la partie réelle du nombre de Love  $\Re(k_{\ell m})$  décrit la réponse adiabatique (sans processus dissipatifs dans le cas d'un fluide) du corps perturbé qui est en phase avec le potentiel imposé. Ensuite, sa partie imaginaire  $\Im(k_{\ell m})$ , déphasé par rapport au potentiel de marée imposé, permet d'évaluer le couple de marée séculaire exercé sur le corps perturbé ainsi que la dissipation d'énergie interne associée (Zahn 1966). Dans la plupart des applications, c'est  $k_{2m}$  qui est le plus important, car il est lié à la réponse dominante de la marée (approximation quadripolaire).

Nous pouvons également introduire le facteur de qualité de marée  $Q_{\ell m}$  qui décrit la capacité d'un objet à dissiper l'énergie de marée. Le nombre de Love et le facteur de qualité peuvent être reliés grâce à la nature complexe de  $k_{\ell m}$ . Ainsi, en analogie avec l'oscillateur harmonique forcé, où le facteur de qualité décrit la réponse déphasée, nous avons la relation suivante entre le nombre de Love et le facteur de qualité de marée (Ogilvie 2014) :

$$\Im[k_{\ell m}(\omega)] = \text{sign}(\omega) \frac{\Re(k_{\ell m})}{Q_{\ell m}} = \text{sign}(\omega) \frac{3}{2Q'_{\ell m}}, \quad (5.11)$$

où  $Q'_{\ell m}$  est le facteur de qualité de marée modifié<sup>2</sup> (e.g. Ogilvie & Lin 2007), qui consiste simplement à fusionner  $\Re(k_{\ell m})$  et  $Q_{\ell m}$  en un seul paramètre, ce qui nous permet d'éviter de calculer explicitement  $\Re(k_{\ell m})$  qui requiert l'utilisation d'un modèle structurel détaillé. À partir du facteur qualité de marée, on peut de calculer le décalage temporel dans la réponse à la marée (e.g. Hut 1981; Bolmont & Mathis 2016) :

$$\tau_{\ell}^m = \frac{1}{Q_{\ell m}|\omega|}. \quad (5.12)$$

---

2. Pour un corps fluide homogène,  $\Re(k_{\ell m}) = 3/2$  et  $Q'_{\ell m} = Q_{\ell m}$ .



### 5.1.3 Couple et dissipation de marée

Bien que ce soit la gravité qui provoque les marées, sans dissipation de leur énergie, il ne peut y avoir d'échange d'énergie rotationnelle et orbitale et de moment cinétique entre les corps. Par conséquent, afin de comprendre les implications des marées sur l'évolution de l'orbite et du spin des systèmes astrophysiques, il est essentiel d'identifier et d'évaluer l'intensité des mécanismes qui régissent la dissipation de l'énergie des marées. En effet, la partie imaginaire du nombre de Love nous permet d'évaluer le couple de marée séculaire exercé sur le corps perturbé. Pour cela, on définit le couple de marée (e.g. [Ogilvie 2013](#))

$$T(\omega) = \frac{R_1 |\mathcal{A}|^2}{8\pi G} m(2\ell + 1) \Im [k_{\ell m}(\omega)], \quad (5.13)$$

ainsi que la dissipation d'énergie des flots de marée (si le corps primaire tourne uniformément  $\Omega_s = \text{const}$ )

$$D(\omega) = \omega \frac{T}{m} = \frac{R_1 |\mathcal{A}|^2}{8\pi G} \omega(2\ell + 1) \Im [k_{\ell m}(\omega)], \quad (5.14)$$

induite par les mécanismes internes de friction qui permettent donc les transferts de moment cinétique. Bien que le couple et la dissipation de marée soient des quantités du second ordre en  $\epsilon$ , ils peuvent être calculés dans le cadre d'une analyse linéaire et sont linéairement proportionnels à la partie imaginaire du nombre de Love.

Nous pouvons maintenant introduire les équations qui régissent l'évolution dynamique de ces systèmes en fonction de  $\Im [k_{\ell m}(n\Omega_o)] = \kappa_{\ell, m, n}$ .

### 5.1.4 Évolution dynamique

Au plus petit ordre de  $e$  et  $i$ , les taux de variation du demi-grand axe orbital, de la vitesse angulaire de rotation du corps primaire, de l'excentricité orbitale et de l'inclinaison spin/orbite du primaire, dus à la dissipation de marée dans le corps primaire, sont donnés par ([Ogilvie 2014](#)) :

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = -3\kappa_{2,2,2} \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{R_1}{a}\right)^5 \Omega_o, \quad (5.15)$$

$$\frac{1}{\Omega_s} \frac{d\Omega_s}{dt} = \frac{3}{2} \kappa_{2,2,2} \frac{L_o}{L_s} \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{R_1}{a}\right)^5 \Omega_o, \quad (5.16)$$

$$\frac{1}{e} \frac{de}{dt} = \frac{3}{16} (4\kappa_{2,2,2} - 6\kappa_{2,0,1} + \kappa_{2,2,1} - 49\kappa_{2,2,3}) \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{R_1}{a}\right)^5 \Omega_o, \quad (5.17)$$

$$\frac{1}{i} \frac{di}{dt} = \frac{3}{4} \left[ \kappa_{2,2,2} \left(1 - \frac{L_o}{L_s}\right) + (\kappa_{2,1,0} - \kappa_{2,1,2}) \left(1 + \frac{L_o}{L_s}\right) \right] \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{R_1}{a}\right)^5 \Omega_o. \quad (5.18)$$

Ces différents taux font intervenir le rapport des moments cinétiques orbital  $L_o$  du corps secondaire, et rotationnel  $L_s$  du corps primaire, qui peut s'écrire comme

$$\frac{L_o}{L_s} = \frac{GM_1 M_2 \sqrt{1-e^2}}{I_1 \Omega_s \Omega_o a}, \quad (5.19)$$

où  $I_1$  est le moment d'inertie du primaire, supposé constant. Un équilibre stable est atteint lorsque ce rapport est supérieur à trois ([Hut 1980](#)). À partir de ces taux de variations, on peut définir les temps caractéristiques (e.g. [Mathis & Le Poncin-Lafitte 2009](#); [Remus et al. 2012](#)) de



- synchronisation  $t_{\text{sync}} = |\omega/d_t \Omega_s|$ ,
- circularisation  $t_{\text{circu}} = e/|d_t e|$ ,
- coplanarité  $t_{\text{copl}} = |i/d_t i|$ .

Nous sommes maintenant confrontés à la question de savoir comment calculer les quantités que nous avons précédemment définies, à savoir le nombre de Love et le facteur de qualité, qui ont une importance cruciale pour la modélisation et la compréhension de l'évolution dynamique des systèmes binaires. À cette fin, il est essentiel de garder à l'esprit que la dissipation des marées dans le corps primaire dépend intrinsèquement de sa structure interne, qui peut évoluer avec le temps, que ce soit à cause de son évolution nucléaire pour une étoile ou de son refroidissement ou des chauffages de marée pour une planète (ou un satellite naturel). En revanche, l'architecture orbitale, également sujette à des variations temporelles, ne fait que modifier le forçage auquel cette structure interne est soumise. Dans les sections suivantes de ce chapitre, nous examinerons ces différents aspects.

## 5.2 Marée d'équilibre et marée dynamique

L'étude de la réponse linéaire d'un corps primaire à la présence d'un potentiel perturbateur de marée créé par le secondaire est historiquement abordée en séparant cette réponse en deux composantes distinctes : la marée d'équilibre et la marée dynamique. En effet, comme on l'a vu dans la section 4.2 de l'introduction, la marée d'équilibre est une approximation hydrostatique de la réponse à la marée d'un corps fluide. Elle consiste en une déformation à grande échelle du corps qui, dans le cas d'une marée quadripolaire ( $\ell = 2$ ), est un renflement ellipsoïdal dirigé suivant la direction des centres de masses du primaire et du secondaire. La densité et la pression s'ajustent afin d'atteindre l'équilibre hydrostatique dans le potentiel total instantané, constitué du potentiel d'auto-gravitation déformé du corps et du potentiel de marée appliqué. De ce fait, un déplacement à grande échelle est induit. En d'autres termes, la marée d'équilibre est la composante de la réponse de la marée pour laquelle la fréquence dans le repère tournant  $\omega$  est nulle. Cependant, la fréquence de marée n'est pas nulle. Ainsi, la marée d'équilibre ne satisfait pas l'équation du mouvement, car l'accélération du fluide est négligée, de même que l'effet des forces de rappel et d'amortissement. Les corrections apportées à la marée d'équilibre incluent généralement les ondes MGI. Ces corrections sont appelées marée dynamique ou marée ondulatoire.

### 5.2.1 Marée d'équilibre (non-ondulatoire)

La notion de marée d'équilibre fluide a été introduite pour la première fois par Zahn (1966) dans son étude des étoiles binaires serrées. Il s'agit d'une approximation de la réponse de marée du corps fluide associée à un déplacement à grande échelle. En premier lieu, les perturbations de pression et de densité associées à la marée d'équilibre ( $P'$  et  $\rho'$ ) doivent satisfaire l'équilibre hydrostatique associé à la perturbation totale du potentiel gravitationnel

$$-\nabla \left( \frac{P'}{\rho_0} + \Phi' + \Psi \right) + \left( \rho' - \frac{d\rho_0}{dP_0} P' \right) \frac{\nabla P_0}{\rho_0^2} = 0. \quad (5.20)$$



Par conséquent, on dérive les perturbations de pression et de densité associées à la marée d'équilibre comme (Zahn 1966; Ogilvie 2014)

$$P' = -\rho_0 (\Phi' + \Psi), \quad (5.21)$$

$$\rho' = \frac{d\rho_0}{dP_0} P'. \quad (5.22)$$

De ce fait, l'équation de Poisson linéarisée  $\nabla^2 \Phi' = 4\pi G \rho'$  implique alors

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi'_\ell}{dr} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \Phi'_\ell + 4\pi G \frac{d\rho_0}{dP_0} \rho_0 (\Phi'_\ell + \Psi_\ell) = 0, \quad (5.23)$$

avec les conditions limites associées pour s'assurer de la régularité du potentiel gravitationnel en  $r = 0$  et de sa continuité à la surface ( $r = 1$ ) :

$$\frac{d \ln \Phi'_\ell}{d \ln r} = \ell \quad \text{pour } r = 0, \quad (5.24)$$

$$\frac{d \ln \Phi'_\ell}{d \ln r} = -(\ell + 1) \quad \text{pour } r = R. \quad (5.25)$$

Ensuite, en supposant des perturbations adiabatiques et en utilisant (5.21) et (5.22) dans l'équation de transport de l'énergie

$$\frac{1}{\Gamma_1} \frac{P'}{P_0} - \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{N^2}{g_0} \xi_r^{\text{eq}} = 0, \quad (5.26)$$

on obtient

$$N^2 \left( \xi_{r,\ell}^{\text{eq}} + \frac{\Phi'_\ell + \Psi_\ell}{g_0} \right) = 0. \quad (5.27)$$

Ainsi, lorsque  $N^2 \neq 0$  nous obtenons le déplacement radial induit par la marée d'équilibre

$$\xi_{r,\ell}^{\text{eq}} = -\frac{\Phi'_\ell + \Psi_\ell}{g_0}. \quad (5.28)$$

Ensuite, à partir de l'équation de continuité

$$\rho' + \nabla \cdot (\rho_0 \boldsymbol{\xi}^{\text{eq}}) = 0, \quad (5.29)$$

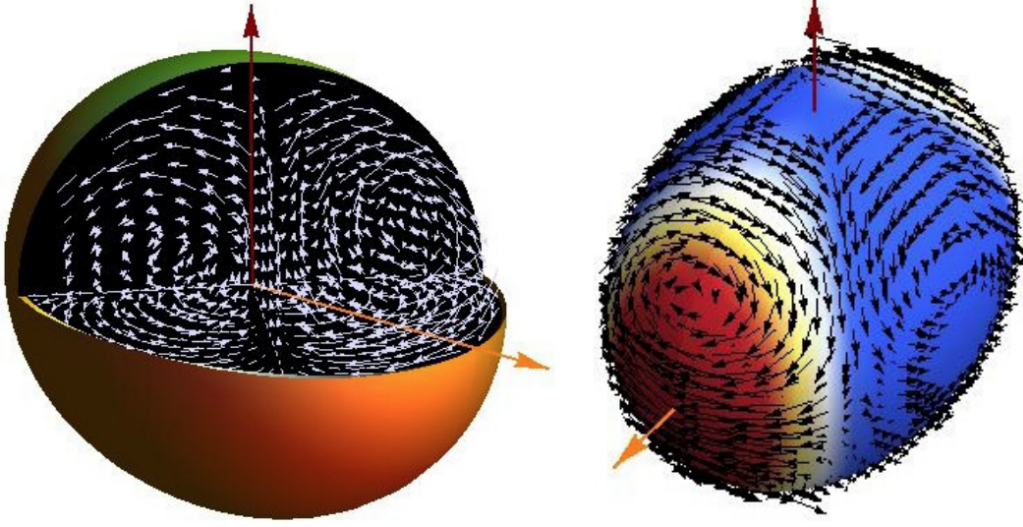
nous pouvons déduire le déplacement horizontal

$$\xi_{h,\ell}^{\text{eq}} = \frac{1}{\ell(\ell+1)} \left( 2\xi_{r,\ell}^{\text{eq}} + r \frac{d\xi_{r,\ell}^{\text{eq}}}{dr} \right), \quad (5.30)$$

et nous en déduisons que

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}^{\text{eq}} = 0. \quad (5.31)$$

On représente dans la figure 5.2 le champ de vitesse des flots induits par la marée d'équilibre pour un corps entièrement convectif. Ces flots sont à grande échelle, avec des variations spatiales de l'ordre de grandeur du rayon du corps primaire (Remus et al. 2012). On trouve alors la marée d'équilibre conventionnelle dérivée par Zahn (1966, 1989) et Remus et al. (2012).



**FIGURE 5.2 – Gauche :** Vue tridimensionnelle du champ de vitesse adiabatique total (poloïdal et toroïdal) de la marée d'équilibre (flèches blanches) dans le corps perturbé lorsqu'il est purement convectif. Les vecteurs rouge et orange représentent respectivement l'axe de rotation du corps primaire et l'axe reliant les centres de masse des deux corps en interaction. **Droite :** Représentation de ce champ de vitesse à la surface (indiquée par des flèches noires). Le gradient de couleur est utilisé pour représenter l'amplitude normalisée du potentiel de marée, allant du rouge pour une amplitude forte vers le bleu pour une amplitude plus faible. Crédits : [Remus et al. \(2012\)](#).

Dans la littérature, cette marée d'équilibre n'est pas toujours définie de façon univoque et certaines de ses propriétés peuvent varier selon les cas étudiés. En effet, [Terquem et al. \(1998\)](#) et [Goodman & Dickson \(1998\)](#) ont argumenté que cette solution de marée d'équilibre ne s'applique pas aux régions convectives, car ils ont supposé que la zone convective est stratifiée adiabatiquement ( $N^2 = 0$ ). Dans ce cas, l'équation de la quantité de mouvement non visqueuse linéarisée dans le repère en rotation est donnée par :

$$-i\omega \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega}_s \times \mathbf{v} = -\nabla \left( \frac{P'}{\rho_0} + \Phi' + \Psi \right), \quad (5.32)$$

où  $\mathbf{v} = -i\omega \boldsymbol{\xi}$  est la perturbation de la vitesse. Dans le cas où on néglige l'accélération de Coriolis ( $\omega^2 \gg 4\Omega_s^2$ ), cette équation implique que le flux et le déplacement de la marée sont irrotationnels :  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$  et  $\nabla \times \boldsymbol{\xi} = 0$  ([Terquem et al. 1998](#); [Goodman & Dickson 1998](#)). Nous nous référons à cette composante de la marée d'équilibre en utilisant l'indice nwl (pour « non-wavelike»). Le déplacement  $\boldsymbol{\xi}^{\text{nwl}}$  dérive donc d'un potentiel  $U$  :

$$\boldsymbol{\xi}^{\text{nwl}} = \nabla U. \quad (5.33)$$

En substituant les équations (5.21), (5.22) et (5.33) dans l'équation de continuité linéarisée

$$\rho' + \nabla \cdot (\rho_0 \boldsymbol{\xi}^{\text{nwl}}) = 0, \quad (5.34)$$

on obtient :

$$\nabla \cdot (\rho_0 \nabla U) = \rho_0 \frac{d\rho_0}{d\rho_0} (\Phi' + \Psi). \quad (5.35)$$



Après avoir développé  $U$  en termes d'harmoniques sphériques, on peut écrire cette équation comme suit :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \rho_0 \frac{dU_\ell}{dr} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \rho_0 U_\ell = \rho_0 \frac{d\rho_0}{dP_0} (\Phi'_\ell + \Psi_\ell). \quad (5.36)$$

S'il y a un cœur convectif, la condition limite au centre est la suivante

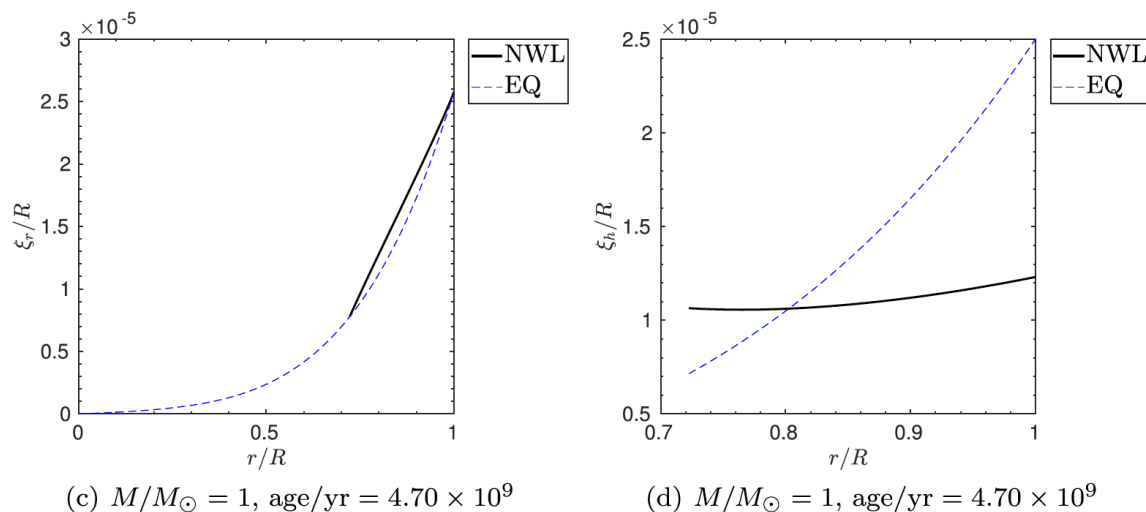
$$\xi_{r,\ell}^{\text{nwl}} = \frac{dU_\ell}{dr} = 0 \quad \text{pour } r = 0, \quad (5.37)$$

et pour toutes les autres limites de la zone convective

$$\xi_{r,\ell}^{\text{nwl}} = \frac{dU_\ell}{dr} = \xi_{r,\ell}^{\text{eq}}, \quad (5.38)$$

qui s'applique également à  $r = R$  pour une enveloppe convective.

On représente, dans la figure 5.3, la comparaison entre le déplacement induit par la marée d'équilibre ( $\xi^{\text{eq}}$ ) dérivée par Zahn (1966, 1989) et Remus et al. (2012) et celui dérivé par Terquem et al. (1998) et Goodman & Dickson (1998) ( $\xi^{\text{nwl}}$ ) pour un modèle d'une étoile d'une masse solaire. Cette comparaison met en évidence le fait qu'en utilisant deux définitions différentes de marée d'équilibre dans les zones convectives et dans les zones stablement stratifiées, une discontinuité se forme dans la composante horizontale du déplacement. Cette situation pose un problème à la fois sur le plan physique et numérique lors du traitement des problèmes multizones. Par conséquent,



**FIGURE 5.3** – Comparaison du déplacement radial (à gauche) et horizontal (à droite) de la marée d'équilibre dérivée par Zahn (1966, 1989); Remus et al. (2012) (lignes pointillées bleues) et de la marée d'équilibre dérivée par Terquem et al. (1998); Goodman & Dickson (1998) (lignes pleines noires) pour un modèle d'une étoile d'une masse solaire. Crédits : Barker (2020).

nous pouvons utiliser la solution dérivée par Zahn (1966, 1989) et Remus et al. (2012) qui s'applique dans les zones stablement stratifiées, mais aussi dans les régions convectives, puisque  $N^2$  n'est pas strictement égal à zéro, mais légèrement négatif.



L'ajustement hydrostatique de la marée d'équilibre ne constitue pas une solution complète de l'équation de Navier-Stokes. Il doit donc être complété par une partie ondulatoire : la marée dynamique.

### 5.2.2 Marée dynamique (ondulatoire)

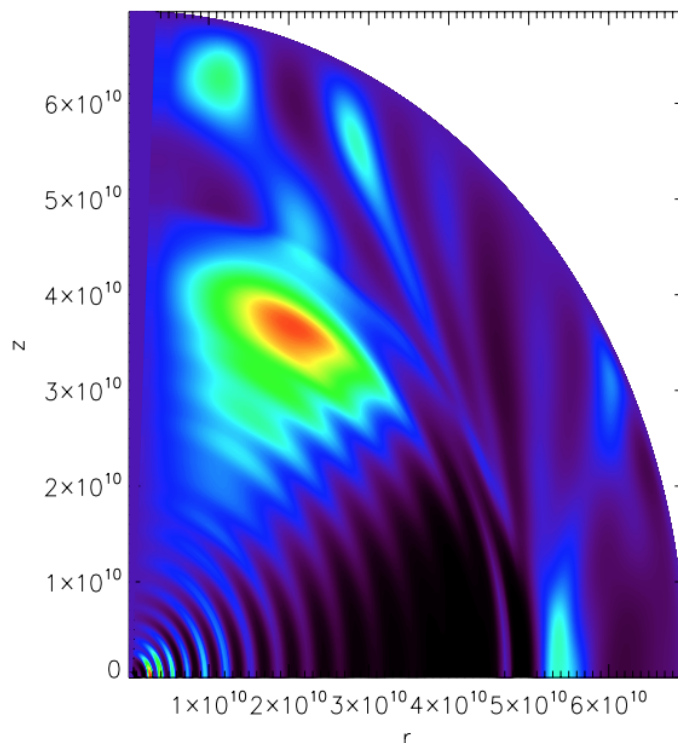
La marée dynamique correspond aux ondes progressives ou aux modes stationnaires d'oscillation excités par la marée d'équilibre (Zahn 1975) et entretenues par une ou plusieurs forces de rappel qui peuvent agir simultanément. Ces forces, et donc la nature des ondes, diffèrent selon le milieu dans lequel les ondes se propagent et la valeur de la fréquence de marée (voir la section 2 de l'introduction pour les différents types d'ondes). Par exemple, dans un milieu stablement stratifié (magnétisé) en rotation, des ondes (magnéto-)gravito-inertielles vont se propager (e.g. Zahn 1975; Witte & Savonije 2002; Ogilvie & Lin 2007), alors que dans un milieu convectif (magnétisé) en rotation ce sont les ondes (magnéto-)inertielles qui se propagent (e.g. Ogilvie & Lin 2004; Goodman & Lackner 2009; Favier et al. 2014; Lin & Ogilvie 2018; Astoul & Barker 2022). La figure 5.4 représente un exemple illustrant la marée dynamique dans un modèle d'une étoile de type solaire qui met en évidence simultanément les ondes inertielles de marée se propageant dans la zone convective externe et les ondes gravito-inertielles de marée présentes dans la zone stablement stratifiée interne. Ces ondes vont efficacement transporter et transférer le moment cinétique induit par l'action de la marée (Goldreich & Nicholson 1989; Astoul et al. 2021; Astoul & Barker 2022). En outre, le couplage de deux ondes (gravito-)inertielles de marée du fait de l'ellipticité du corps peut déclencher ladite instabilité et la dissipation d'énergie par la turbulence induite (Le Bars et al. 2015). En ce qui concerne les ondes acoustiques, elles ne sont généralement pas excitées par le potentiel de marée puisque les fréquences de marée sont faibles. Le prochain chapitre de cette thèse (le chapitre 6) se focalise sur une étude approfondie de la réponse de la marée à l'intérieur des planètes géantes gazeuses, avec une attention particulière portée sur Jupiter. Notre recherche se concentrera spécifiquement sur les ondes inertielles et gravito-inertielles qui se propagent à travers une structure interne complexe en dissipant de l'énergie.

## 5.3 Dissipation de l'énergie de marée

Dans la section précédente, nous avons présenté la méthode de séparation de la réponse de marée du corps primaire en fonction de la prise en compte ou non des forces de rappel. De plus, dans le cas de la marée dynamique, nous avons identifié les familles d'ondes de marée les plus susceptibles d'être excitées par le potentiel de marée. Pour mieux comprendre la dissipation d'énergie générée par les écoulements de marée, il est essentiel de recenser les processus dissipatifs prédominants en fonction de la stratification stable ou convective de la région étudiée.

En effet, les zones convectives se distinguent des zones stablement stratifiées par leur nature intrinsèquement turbulente et instable. Par conséquent, modéliser de manière satisfaisante l'interaction entre les différents types d'écoulements qui se développent dans ces zones, tels que la marée d'équilibre à grande échelle et les ondes inertielles, avec les écoulements turbulents, s'avère généralement difficile. En effet, les échelles spatiales et temporelles des écoulements turbulents peuvent varier de manière significative, parfois de plusieurs ordres de grandeur, à l'intérieur d'un même objet. Cette complexité rend la tâche de modélisation de ces interactions particulièrement délicate, étant donné la nature non linéaire de la turbulence prévalente dans les zones convectives. Afin de résoudre cette problématique, il est souvent proposé que les effets des écoulements convectifs sur





**FIGURE 5.4** – Exemple de marée dynamique dans un modèle d'étoile de type solaire qui montre simultanément des ondes inertielles de marée dans l'enveloppe convective et des ondes gravito-inertielles de marée dans la zone radiative interne. La coordonnée radiale est exprimée en cm. Crédits : [Chernov et al. \(2013\)](#).

les écoulements de marée peuvent être assimilés en première approximation à ceux d'une diffusion visqueuse. Toutefois, il est important de noter que le coefficient de diffusion utilisé n'est pas basé sur la viscosité moléculaire du fluide, qui est extrêmement faible, mais sur un coefficient de «viscosité effective» ( $\nu$ ) également connu sous le nom de «viscosité turbulente» qui peut être estimée en utilisant la théorie de la longueur de mélange ([Spiegel 1963](#)) pour décrire le flux de chaleur convectif. Ce coefficient permet de prendre en compte les effets de la turbulence sur les écoulements de marée, et il est utilisé pour modéliser l'interaction entre les mouvements convectifs et les écoulements de marée ([Zahn 1966, 1989](#)). La viscosité effective devrait être réduite d'un certain facteur lorsque la période de marée est courte par rapport à l'échelle de temps typique de convection, ce qui est souvent le cas. Par exemple, dans le Soleil, cette échelle de temps varie d'un mois ou plus près de la base de la zone convective à quelques minutes près de la photosphère. Dans les planètes géantes, l'échelle de temps de convection est généralement plus longue en raison du flux de chaleur beaucoup plus faible, bien que l'applicabilité de la théorie de la longueur de mélange soit incertaine en raison de la rotation rapide. Pour évaluer la viscosité effective, différents régimes doivent être distingués en fonction de la fréquence de marée. Lorsque les marées sont lentes, cela signifie que la fréquence de marée dans le référentiel inertiel  $\omega^{\text{in}}$  est inférieure à celle des mouvements convectifs  $\omega_c$  ( $\omega^{\text{in}} < \omega_c$ ), la viscosité effective est indépendante de la fréquence de marée. En revanche, dans le



régime opposé ( $\omega^{\text{in}} \gg \omega_c$ ), l'action de la convection sur les flots de marée est moins efficace. C'est la raison pour laquelle différents facteurs de réduction ont été proposés : le facteur de réduction de Zahn (1966) est de  $\nu \propto |\omega^{\text{in}}|^{-1}$ , ce qui est favorisé par les simulations de Penev et al. (2007). Par contre, le facteur de réduction de Goldreich & Nicholson (1977) et Goldreich & Keeley (1977) est plus fort, avec  $\nu \propto |\omega^{\text{in}}|^{-2}$ , ce qui est favorisé dans les simulations de Ogilvie & Lesur (2012). Ces deux lois d'échelle impliquent des temps d'évolution très différents pour les systèmes planétaires. Duguid et al. (2020) et Vidal & Barker (2020) ont utilisé des simulations 3D de flux convectifs dans une boîte locale et un modèle global sphérique respectivement, en étudiant les régimes laminaires et turbulents. Dans ces études, ces deux lois d'échelle sont identifiées suivant le régime considéré : pour  $\omega^{\text{in}} > 10 \omega_c$  la prescription de Goldreich & Nicholson (1977) et Goldreich & Keeley (1977) est vérifiée et pour  $\omega_c < \omega^{\text{in}} < 10 \omega_c$  c'est la prescription de Zahn (1966) qui est vérifiée. Cependant, le débat concernant l'expression de la viscosité effective est loin d'être clos (Terquem 2021; Barker & Astoul 2021). De plus, certaines interactions ne sont pas prises en compte dans ces lois d'échelle et pourraient potentiellement les modifier. Ces interactions comprennent l'effet de la rotation (Barker et al. 2014; Mathis et al. 2016; de Vries et al. 2023), la présence d'un champ magnétique (Barker & Lithwick 2014) et la rotation différentielle (Baruteau & Rieutord 2013; Favier et al. 2014). Pour que cette approximation soit valide, il est nécessaire que l'échelle spatiale de l'écoulement de marée considéré, soit significativement plus grande que celle de la convection. Par conséquent, l'approximation de la viscosité turbulente semble être plus adaptée a priori pour décrire les écoulements de marée à grande échelle, tels que les marées d'équilibre, plutôt que les écoulements ondulatoires de la marée dynamique (Dandoy et al. 2023). Ces derniers peuvent avoir des échelles spatiales beaucoup plus petites, notamment au niveau des couches de cisaillement des ondes inertielles. Il convient de noter que malgré cette limitation, l'approximation de la viscosité turbulente reste largement utilisée, faute de mieux dans la plupart des études portant sur la marée dynamique.

Dans les régions stablement stratifiées, la dissipation d'énergie est le résultat de la compétition entre l'amortissement radiatif, caractérisé par le coefficient de diffusivité thermique  $\kappa$ , la diffusivité moléculaire  $D_\mu$ , et la dissipation visqueuse caractérisée par la viscosité cinématique du fluide  $\nu$ . Pour comparer ces différentes diffusivités et les dissipations induites, on introduit deux nombres sans dimension :

- Le nombre de Prandtl est le rapport entre la diffusivité de la quantité de mouvement (viscosité cinématique) et celle de la chaleur (diffusivité thermique)

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}. \quad (5.39)$$

- Le nombre de Schmidt est le rapport entre la viscosité cinématique et la diffusivité moléculaire

$$\text{Sc} = \frac{\nu}{D_\mu}, \quad (5.40)$$

Il est utilisé pour caractériser les écoulements de fluides dans lesquels interviennent simultanément viscosité et transferts de matière.

Un autre nombre sans dimension important est le nombre d'Ekman qui compare le rapport entre la force visqueuse et la force de Coriolis

$$\text{E} = \frac{\nu}{2\Omega L^2}, \quad (5.41)$$



avec  $L$  l'échelle caractéristique de longueur. Puisque nous nous intéressons au cas des écoulements dominés par la rotation, nous nous placerons donc toujours dans des cas où  $E \ll 1$ .

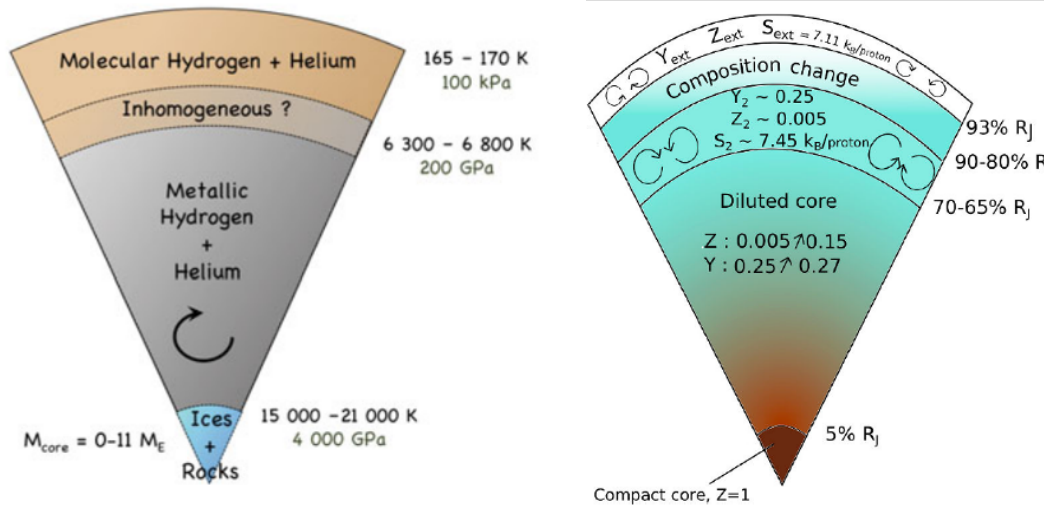
Avant de procéder au calcul de la dissipation des marées, il est essentiel de définir précisément la structure interne et la dynamique qui doivent être prises en compte.

## 5.4 Nouvelle vision de la structure et de la dynamique interne des planètes géantes gazeuses

### 5.4.1 Structure interne

Le scénario standard de formation d'une planète géante est le scénario d'accrétion de noyau, qui postule qu'un cœur solide atteignant une masse critique (environ de 10 à 15 masses terrestres) accrete une enveloppe convective gazeuse autour de lui (Pollack et al. 1996). Les avancées récentes dans la modélisation des structures internes ont cependant considérablement transformé notre compréhension des planètes géantes gazeuses. Ces progrès ont conduit à une évolution drastique du modèle à deux couches proposé par Dermott (1979), composé d'un cœur solide et d'une enveloppe convective, et du modèle tri-couche proposé par Guillot et al. (1994), comprenant un cœur solide, une enveloppe convective et une atmosphère stablement stratifiée (voir le panneau de gauche de la figure 5.5). Au sein de cette enveloppe convective, des régions internes de stratification stable sont maintenant prédites théoriquement en raison de gradients de composition stabilisateurs (Leconte & Chabrier 2012, 2013). Ces gradients pourraient être générés par la dissolution des éléments lourds présents dans le cœur attribuée à l'instabilité thermodynamique des silicates qui le composent, en raison des conditions de température et de pression élevées qui y règnent (Wilson & Militzer 2012b,a; Wahl et al. 2013; González-Cataldo et al. 2014; Mazevet et al. 2015). Les éléments lourds constituant le cœur se dissolvent alors et se dispersent dans l'enveloppe gazeuse. Ces gradients pourraient être générés aussi par les collisions entre les planétésimaux et la planète géante qui peuvent se produire avant la dispersion du disque protoplanétaire (Stevenson 1985). De plus, dans la région de transition entre l'état moléculaire et métallique de l'hydrogène et de l'hélium, connue sous le nom de région des pluies d'hélium (Salpeter 1973; Stevenson 1975), la séparation de phase entre l'hydrogène et l'hélium pourrait créer un gradient de composition stabilisateur (Stevenson & Salpeter 1977a), ce qui à son tour pourrait déclencher une convection doublement diffusive (Nettelmann et al. 2015). Par conséquent, les modèles les plus récents prédisent désormais la présence de 4 ou 5 couches distinctes (Debras & Chabrier 2019; Militzer et al. 2019). Par exemple, pour Jupiter (voir le panneau de droite de la figure 5.5), en partant de la surface vers l'intérieur, on identifie une enveloppe gazeuse convective en rotation différentielle, une zone de transition, potentiellement double-diffusive (également appelée semi-convective), une zone convective interne magnétisée en rotation solide site de la génération du champ magnétique de la planète par action dynamo (e.g. Gastine & Wicht 2021), une autre zone potentiellement semi-convective (ou un noyau dilué) est envisagée, suivie d'un noyau solide potentiel composé de roches et de glaces.

Comme nous l'avons constaté, les planètes géantes gazeuses sont également des objets magnétisés en rotation. Par conséquent, il est crucial d'obtenir une vision détaillée de leur dynamique.

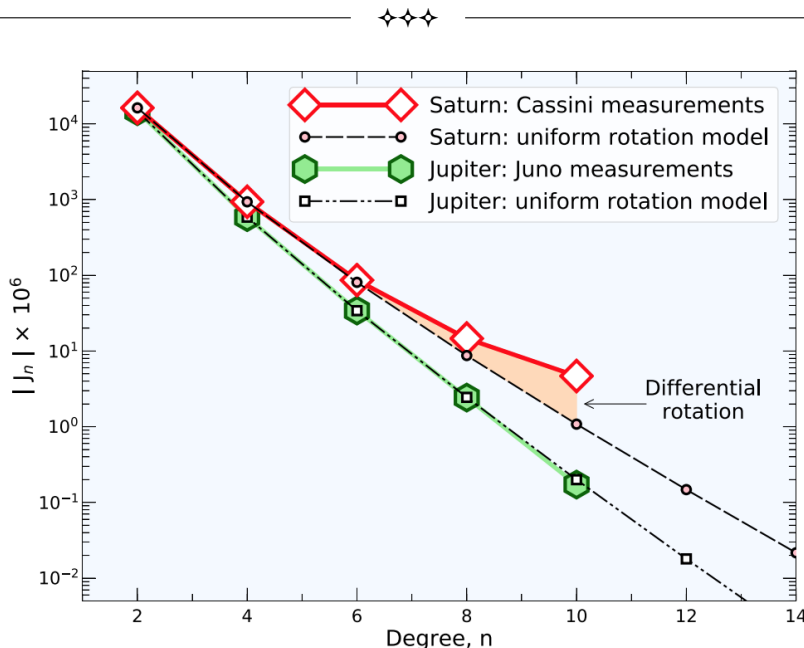


**FIGURE 5.5** — Structure interne de Jupiter. Crédits : Guillot et al. (1994). **Gauche** : Modèle standard à trois couches. **Droite** : Nouveau modèle à cinq zones. Crédits : Debras & Chabrier (2019).

### 5.4.2 Dynamique interne

Jupiter et Saturne sont des rotateurs rapides tournant respectivement à 30% et 40% de leur vitesse de rotation critique. Les récents progrès dans la détermination précise des moments multipolaires de gravité  $J_n$ , également connus sous le nom d'harmoniques gravitationnelles, de faible degré  $n$ , ont permis de contraindre de manière significative leur profil de rotation. En effet, comme on peut le voir dans la figure 5.6 de Militzer et al. (2019), des moments multipolaires de gravité  $J_n$  pour des modèles en rotation uniforme ont été comparés avec ceux déduits à partir des mesures effectuées par les missions Juno et Cassini. Pour ce qui est de Jupiter, les écarts entre les moments de gravité mesurés par Juno et celle prédite par un modèle supposant une rotation uniforme sont relativement modérés. Cela suggère que la rotation de Jupiter puisse être approximée par un modèle de rotation uniforme avec une certaine précision. Toutefois, ces écarts soulignent également que des variations non négligeables de la rotation existent à travers la planète, bien que dans une mesure relativement modérée. En revanche, pour Saturne, ces écarts sont significatifs. Cela indique que la rotation de Saturne ne peut pas être décrite de manière satisfaisante par un modèle de rotation uniforme. Les observations de Cassini révèlent des variations substantielles de la rotation à travers Saturne, impliquant une rotation différentielle plus complexe que ce qui était initialement supposé.

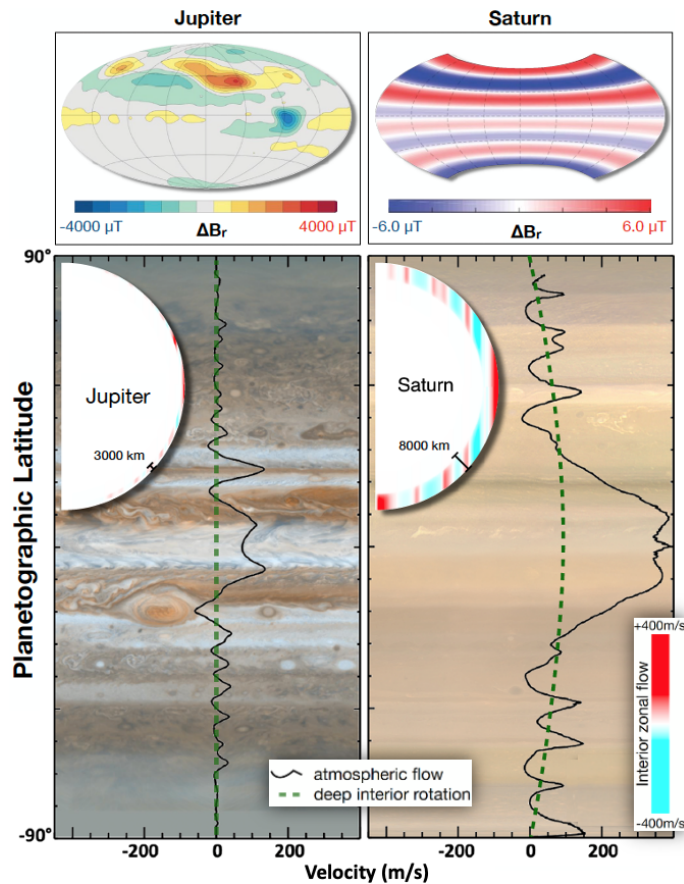
La présence de rotation différentielle dans une zone convective n'est pas systématique, mais dépend fortement de la conductivité électrique (e.g. Guillot et al. 2018; Galanti et al. 2019). Lorsque la conductivité est élevée, elle empêche l'existence de forts vents zonaux (Cao & Stevenson 2017), car la force de Lorentz, qui est alors élevée, s'oppose aux gradients de vitesse. Les courants zonaux se trouvent alors confinés dans les régions externes de faible conductivité (e.g. Guillot et al. 2018). C'est pourquoi on ne s'attend pas à observer un important gradient de rotation dans les régions convectives internes de Jupiter et Saturne. En effet, entre l'intérieur conducteur où la dynamo prend naissance et l'atmosphère, la rotation doit passer d'un état proche de l'uniformité (Cao & Stevenson 2017) à un état fortement dépendant de la latitude. Comme le montre la figure 5.7,



**FIGURE 5.6** – Analyse comparative des moments de gravité  $J_n$  observés par les missions Juno et Cassini pour Jupiter et Saturne, respectivement, par rapport aux prédictions des modèles supposant une rotation uniforme à l’intérieur de ces planètes. Crédits : [Militzer et al. \(2019\)](#).

les mesures du champ de gravité de Juno et Cassini ont permis de déterminer la profondeur de la région de transition, à environ 3000 km sous le sommet des nuages ( $R = 0.96 R_J$ ) dans Jupiter ([Kaspi et al. 2018](#); [Guillot et al. 2018](#)) et à environ 8800 km ( $R = 0.86 R_S$ ) dans Saturne ([Iess et al. 2019](#); [Galanti et al. 2019](#)). Le champ de Jupiter est dominé par un dipôle avec une inclinaison de  $10^\circ$  entre l’axe magnétique et l’axe de rotation, avec une partie non dipolaire du champ qui est presque entièrement confinée à l’hémisphère nord et qui atteint un pic de 3 mT (voir la figure 5.7), presque trois fois plus que le pic du champ dipolaire ([Connerney et al. 2017](#); [Moore et al. 2018](#)). Le champ magnétique de Saturne est également dominé par un dipôle, avec un champ presque axisymétrique et un axe magnétique aligné avec l’axe de rotation à  $0.007^\circ$  ([Dougherty et al. 2018](#); [Cao et al. 2020](#)). Les simulations numériques effectuées sans l’inclusion d’une couche stablement stratifiée externe (e.g. [Jones 2014](#); [Gastine et al. 2014](#)) ont conduit à des champs trop complexes, qui diffèrent de l’action dynamo dominée par le dipôle observée. [Christensen et al. \(2020\)](#) et [Gastine & Wicht \(2021\)](#) ont démontré qu’une telle couche sépare efficacement la dynamique des régions inférieures et supérieures. En effet, cette couche permet aux jets zonaux de se développer dans l’enveloppe externe sans contribuer à l’action dynamo dans la région métallique plus profonde et de maintenir un champ magnétique dominé par le dipôle et des vents zonaux confinés.

En résumé, les connaissances actuelles sur les planètes géantes suggèrent qu’elles possèdent une structure interne complexe, constituée de plusieurs couches distinctes, chacune ayant des propriétés physiques et dynamiques spécifiques. Il est donc essentiel de quantifier avec précision la dissipation des marées en utilisant des modèles réalistes de la structure interne de ces planètes qui prennent en compte les nouvelles contraintes observationnelles.



**FIGURE 5.7** – Champs magnétiques, rotation profonde, vents zonaux et bandes nuageuses sur Jupiter et Saturne. Les panneaux supérieurs montrent les champs magnétiques radiaux non dipolaires, pour Jupiter à  $0.9R_J$  et pour Saturne à  $0.75R_J$ . Les profils de vent montrent des jets zonaux équatoriaux progrades atteignant  $200 - 400\text{m s}^{-1}$ . Crédits : [Guillot et al. \(2022\)](#).

## 5.5 État de l'art sur la dissipation de marée

### 5.5.1 Dans le noyau solide et l'enveloppe convective

La marée dynamique dans un milieu convectif en rotation uniforme et la dissipation des ondes inertielles du fait d'une viscosité turbulente ont fait l'objet d'études approfondies, notamment par [Ogilvie & Lin \(2004\)](#) et [Mathis et al. \(2016\)](#). Une autre forme de dissipation présente dans les noyaux rocheux ou glacés stables est la dissipation viscoélastique. [Remus et al. \(2012, 2015\)](#); [Storch & Lai \(2014, 2015\)](#) et [Lainey et al. \(2017\)](#) se sont penchés cette dissipation dans le cas d'un éventuel cœur solide. La principale inconnue dans ces modèles sont les valeurs des modules d'élasticité et de viscosité qui doivent être adoptés pour ces régions, autrement dit leur rhéologie. Par ailleurs, les travaux de [Guenel et al. \(2014\)](#) ont révélé que cette source de dissipation peut être d'une magnitude



comparable à celle de la marée dynamique, ce qui souligne la nécessité de la prendre en considération. Il convient également de mentionner l'impact de la rotation différentielle sur la dissipation des ondes inertielles de marée. Les études menées par [Baruteau & Rieutord \(2013\)](#) et [Guenel et al. \(2016a,b\)](#) ont montré que la rotation différentielle affecte la propagation et la dissipation de ces ondes. Lorsque la vitesse de rotation varie à travers l'enveloppe, des couches critiques de corotation apparaissent, ce qui entraîne une dissipation accrue des ondes inertielles ([Favier et al. 2014](#); [Astoul et al. 2021](#); [Astoul & Barker 2022](#)). Enfin, la dissipation des ondes magnéto-inertielles dans les enveloppes convectives est un autre aspect à considérer. [Wei \(2016, 2018\)](#); [Lin & Ogilvie \(2018\)](#) et [Astoul et al. \(2019\)](#) ont examiné l'influence du champ magnétique sur la dissipation de ces ondes. Ils ont trouvé que les interactions entre les ondes inertielles et le champ magnétique peuvent entraîner une dissipation plus importante de l'énergie du fait du chauffage ohmique induit.

### 5.5.2 Dans les zones stablement stratifiées

Depuis la découverte de la présence d'un gradient de composition stabilisant en présence d'un gradient d'entropie déstabilisant qui déclenche une convection stratifiée dans les planètes géantes gazeuses ([Leconte & Chabrier 2012](#)), il était impératif de prendre en compte ces couches stablement stratifiées dans l'étude de la dissipation de marée dans les planètes géantes gazeuses. Ainsi, [Auclair Desrotour et al. \(2015\)](#) ont étudié la dissipation des ondes gravito-inertielles dans un milieu stablement stratifié en rotation uniforme par la viscosité et la diffusion thermique. Ensuite, [André et al. \(2017, 2019\)](#) et [Pontin et al. \(2020, 2023\)](#) ont traité la dissipation des marées dans les régions semi-convectives qui se caractérisent par une alternance de zones stablement stratifiées et de zones convectives, respectivement dans des modèles locaux cartésiens prenant en compte la stratification et la rotation et dans des modèles sphériques sans rotation. Ils ont mis en évidence l'importance de la dissipation simultanée des ondes inertielles et des ondes gravito-inertielles qui induisent une extension du domaine des fréquences des ondes de marée. En ce qui concerne Jupiter, des scénarios simplifiés de son intérieur avec différentes distributions spatiales des régions stablement stratifiées ont été étudiés pour évaluer la réponse aux forces de marée. [Lin \(2023\)](#) et [Dewberry \(2023\)](#) ont examiné la dissipation de marée dans Jupiter avec de tels modèles en ne prenant en premier lieu que la viscosité comme mécanisme de dissipation.

Il est donc crucial de déterminer comment la structure multicouche et l'ensemble des processus de dissipation (visqueux, thermique et moléculaire) affecte la dissipation des marées dans les planètes géantes et l'évolution orbitale et rotationnelle de leurs systèmes.

## CHAPITRE 6

# Étude de la dissipation de la marée dynamique dans les planètes géantes gazeuses depuis le cœur jusqu'à la surface

*Le travail présenté dans ce chapitre fait l'objet d'une publication soumise à la revue A&A.*

Les interactions de marée entre les planètes géantes gazeuses et ses compagnons sont reconnues comme des facteurs qui influencent simultanément l'évolution orbitale de leurs systèmes et la dynamique de la rotation de leurs composantes. Au cours de la dernière décennie, de nouvelles découvertes concernant Jupiter, Saturne et leurs systèmes ont remis en question les estimations de la dissipation des marées dans les géantes gazeuses de notre système solaire. En effet, [Lainey et al. \(2009, 2012, 2017, 2020\)](#) ont utilisé l'astrométrie de haute précision pour démontrer que la dissipation des marées dans Jupiter et Saturne est environ dix fois plus élevée que ce qui avait été initialement calculé par [Goldreich & Soter \(1966\)](#) qui avaient résolu l'équation d'évolution pour le demi-grand axe des satellites. Ces estimations ont été faites en supposant que les satellites se sont formés au moment de la naissance du système solaire, puis en calibrant la dissipation de marée (indépendante de la fréquence et constante au cours de l'évolution) pour les amener à leur position actuelle. Cette dissipation intense est essentielle pour expliquer leur migration orbitale rapide, un phénomène révélé par des mesures astrométriques précises. Cette observation d'une dissipation plus intense remet en question notre compréhension de la formation et de l'évolution des systèmes de planètes géantes non seulement dans notre système solaire, mais également dans les systèmes exoplanétaires ([Charnoz et al. 2011](#); [Crida & Charnoz 2012](#)). Elle soulève également des interrogations sur la dissipation des forces de marée à l'intérieur de ces planètes.

Traditionnellement, la réponse de marée d'un corps gazeux est traitée en utilisant le concept de marée d'équilibre (e.g. [Zahn 1966](#); [Remus et al. 2012](#); [Ogilvie 2013](#)), où la déformation hydrostatique ellipsoïdale dans la direction de la ligne des centres de masse causée par les forces de marée présente un léger décalage de phase du fait de la friction, le plus souvent turbulente, qui lui est appliquée dans les régions convectives. Cependant, la forte dissipation de marée observée dans Jupiter ([Lainey et al. 2009](#)) et les perturbations gravitationnelles récemment mesurées par la sonde Juno ([Durante et al. 2020](#)) ne peuvent pas être expliquées par la marée d'équilibre seule. Juno a obtenu des mesures précises des nombres de Love de marée,  $k_{\ell m}$ , de Jupiter, qui caractérisent quantitativement la réponse de la planète à la force de marée représentée par des harmoniques sphériques de degré





$\ell$  et d'ordre  $m$  (voir la section 5.1.2). Elle a révélé la valeur mesurée du nombre de Love pour la composante de marée dominante  $k_{22} = 0.565 \pm 0,018$  (Durante et al. 2020). Cela est inférieur à la valeur hydrostatique théorique de  $k_{22}^{(\text{eq})} = 0.589$  (Wahl et al. 2020), indiquant une différence d'environ  $\Delta k_{22} \approx -4\%$ . Cette observation intrigante pourrait être attribuée à l'influence de la marée dynamique (e.g. Zahn 1975; Ogilvie & Lin 2004, pour les ondes de gravité et les ondes inertielles de marée, respectivement). La marée dynamique (ondulatoire) offre des canaux supplémentaires de dissipation de marée et génère des perturbations gravitationnelles supplémentaires, dépassant les effets uniquement attribués à la déformation hydrostatique (Idini & Stevenson 2021; Lai 2021; Lin 2023). La dissipation de la marée dynamique s'effectue par le biais de différents mécanismes de friction, notamment la friction turbulente dans les couches convectives et la diffusion thermique dans les régions stablement stratifiées (e.g. Ogilvie 2014; Mathis 2019). Le taux de dissipation de la marée dynamique dans les régions convectives et stratifiées de manière stable des planètes a des implications majeures pour l'évolution des systèmes planète-satellite. Dans ce cadre, les observations de Lainey et al. (2009, 2012, 2017, 2020) justifient simultanément et pleinement l'étude de la marée dynamique. Tout d'abord, la dissipation moyenne mesurée pour Jupiter et Saturne sont d'un ordre de grandeur plus importante que les valeurs historiques. De plus, la variation en fréquence pour la dissipation de Saturne mesurée pour Mimas, Encelade, Thetys, Dione, Rhéa et Titan exclut la seule contribution de marée d'équilibre fluide ou solide (Lainey et al. 2017, 2020) et nécessite l'étude la plus détaillée possible de la marée dynamique fluide et des mécanismes de dissipation agissant sur elle.

Un autre point crucial concerne la structure interne des planètes géantes. En effet, elle joue un rôle majeur dans les mécanismes dissipatifs qui affectent les ondes de marée dans les couches gazeuses, ainsi que dans les déformations induites par les marées dans les régions solides composées de roches ou de glaces. Cela revêt une importance cruciale pour les corps différenciés en plusieurs couches tels que les planètes, où une connaissance approfondie et précise de la structure interne serait idéale. La structure interne des planètes géantes a été traditionnellement modélisée comme étant composée d'un noyau dense constitué de roches et de glaces, entouré d'une enveloppe fluide convective profonde, et au-dessus de laquelle se trouve une atmosphère potentiellement stratifiée de manière stable du fait de l'irradiation de la planète (Stevenson 1982; Guillot et al. 1994).

Ces modèles ne fournissent pas d'explication globale pour tous les phénomènes observés grâce aux missions spatiales Juno et Cassini dans notre système solaire et les missions de découverte et d'exploration d'exoplanètes (voir la section 5.4). Des études récentes s'éloignent donc du modèle standard conventionnel et explorent des structures internes alternatives plus complexes pour tenter de reproduire l'ensemble des contraintes observationnelles (e.g. Baraffe et al. 2014; Guillot et al. 2022). Plus précisément, Leconte & Chabrier (2012) ont étudié la possibilité d'incorporer une stratification stable dans leurs modèles. Par exemple, l'analyse du champ de gravité de Jupiter, en particulier à partir des données obtenues par la mission Juno, indique que la masse de Jupiter est répartie dans l'ensemble de son intérieur. Cette répartition prend la forme d'un noyau substantiel mais diffus qui s'étend au-delà de la zone convective précédemment supposée (Wahl et al. 2017; Debras & Chabrier 2019). Par conséquent, on s'attend à ce que des parties importantes de l'intérieur des planètes géantes présentent un gradient d'entropie instable, qui entre en compétition avec des gradients de composition stables. Cette compétition peut entraîner l'émergence d'une convection à double diffusion (e.g. Garaud 2018). Ces couches se composent de régions convectives bien mélangées et sont séparées par de fines interfaces présentant une stratification stable, créant une structure en escalier dans le profil d'entropie. Bien que ces couches ne puissent être observées qu'indirectement par la sismologie (e.g. André et al. 2017), leur formation introduit une nouvelle



physique distincte par rapport aux modèles tri-couches standards qui a changé notre vision de la dissipation de marée dans ces planètes (voir la section 5.5.2). Par conséquent, elles ont un impact profond sur la dynamique et l'évolution du système (e.g. Debras & Chabrier 2019).

Dans ce chapitre, nous développons donc une méthode permettant de calculer la réponse d'un corps fluide autogravitant en rotation composé de couches convectives et de couches stablement stratifiées à un forçage de marée, en tenant compte de trois processus de dissipation différents : visqueux, thermique et chimique. Cette méthode nous permet de calculer la partie imaginaire du nombre de Love de marée pour un modèle intérieur planétaire donné. Nous mettons particulièrement l'accent sur l'utilisation des modèles de structures internes de Jupiter développés par Debras & Chabrier (2019).

## 6.1 Formulation du problème forcé

Nous linéarisons le système hydrodynamique dissipatif autour de l'état d'équilibre hydrostatique où l'on néglige en première étape l'aplatissement induit par l'accélération centrifuge. Chaque champ scalaire est développé comme la somme de sa valeur hydrostatique  $X_0$  et de la fluctuation associée à l'onde  $X'$ . On obtient donc :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) = 0, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -\nabla W' - \frac{\nabla \rho_0}{\rho_0} W' + \frac{\rho'}{\rho_0} \mathbf{g}_0 - \nabla \Phi' + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{F}_{\text{forçing}}, \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T_0 - \nabla_{\text{ad}} \frac{T_0}{P_0} \left( \frac{\partial P'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla P_0 \right) = \kappa \nabla^2 T', \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial \mu'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mu_0 = D_\mu \nabla^2 \mu', \quad (6.4)$$

$$\nabla^2 \Phi' = 4\pi G \rho', \quad (6.5)$$

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \alpha \frac{P'}{P_0} - \delta \frac{T'}{T_0} + \phi \frac{\mu'}{\mu_0}, \quad (6.6)$$

où  $\nu$  est la viscosité cinématique supposée constante (nous adoptons ici l'hypothèse de Stokes où la viscosité de volume est négligée),  $\mathbf{F}_{\text{forçing}} = -\nabla \Psi$  est le forçage de marée.  $\kappa$  est la diffusivité thermique supposée constante,  $s$  est l'entropie spécifique telle que  $ds = c_p \left( \frac{dT_0}{T_0} - \nabla_{\text{ad}} \frac{dP_0}{P_0} \right)$  avec  $\nabla_{\text{ad}} := \left( \frac{d \ln T_0}{d \ln P_0} \right)_s$  le gradient de température adiabatique et  $c_p$  la capacité thermique spécifique (nous négligeons dans l'équation de l'énergie les termes de chauffage visqueux),  $\mu$  est la composition chimique,  $D_\mu$  est la diffusion moléculaire supposée constante et

$$\alpha := \left( \frac{\partial \ln \rho_0}{\partial \ln P_0} \right)_{T_0, \mu_0}, \quad \delta := - \left( \frac{\partial \ln \rho_0}{\partial \ln T_0} \right)_{P_0, \mu_0}, \quad \phi := \left( \frac{\partial \ln \rho_0}{\partial \ln \mu_0} \right)_{P_0, T_0}. \quad (6.7)$$

Ensuite, nous décomposons la solution en deux parties, l'une non-ondulatoire associée à la marée d'équilibre et l'autre ondulatoire associée à la marée dynamique (voir la section 5.2)

$$X = X^{\text{eq}} + X^{\text{w}}, \quad (6.8)$$



avec  $X \equiv \{v_r, v_\theta, v_\varphi, W', \rho', \Phi', T', \mu'\}$  où  $X^{\text{eq}}$  est la marée d'équilibre qui satisfait l'équilibre hydrostatique (section 5.2.1) et  $X^{\text{w}}$  la marée dynamique qui décrit la propagation des ondes (Zahn 1975; Ogilvie & Lin 2004).

### 6.1.1 Terme de forçage

La force de marée  $\mathbf{F}_{\text{forcing}}$ , qui découle d'un potentiel gravitationnel perturbateur  $\Psi$ , induit un ajustement hydrostatique (un bourrelet de marée) connu sous le nom de marée d'équilibre. Le mouvement du bourrelet donne lieu à un déplacement non nul  $\xi^{\text{eq}}$  associé à la marée d'équilibre, qui a été dérivé dans le chapitre précédent (section 5.2.1) et dont on rappelle ici son expression :

$$\xi_{r,\ell}^{\text{eq}} = -\frac{\Phi_\ell^{\text{eq}} + \Psi_\ell}{g_0}, \quad (6.9)$$

$$\xi_{h,\ell}^{\text{eq}} = \frac{1}{\ell(\ell+1)} \left( 2\xi_{r,\ell}^{\text{eq}} + r \frac{d\xi_{r,\ell}^{\text{eq}}}{dr} \right). \quad (6.10)$$

L'existence de forces d'inertie associées à cet écoulement signifie que la marée d'équilibre ne satisfait pas l'équation du mouvement et qu'une force résiduelle apparaît :

$$\mathbf{f}^{\text{eq}} = -\frac{\partial \mathbf{v}^{\text{eq}}}{\partial t} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}^{\text{eq}}. \quad (6.11)$$

Cette force, composée de l'accélération de la marée d'équilibre et de l'accélération de Coriolis appliquée à la marée d'équilibre (Ogilvie 2005), va forcer les ondes gravito-inertielles de marée (la marée dynamique). Le premier terme de  $\mathbf{f}^{\text{eq}}$  dépend de la fréquence dans le repère tournant au carré ( $\omega^2$ ), tandis que le second terme dépend de  $\omega$ . Cette propriété garantit également que la dissipation tend vers 0 lorsque la fréquence de marée s'annule, comme lors de la synchronisation spin-orbite.

### 6.1.2 Système d'équations de la marée dynamique

Pour modéliser la marée dynamique, nous adoptons l'approximation de Boussinesq (Spiegel & Veronis 1960), afin de comparer notre nouveau modèle aux modèles incompressibles des zones convectives utilisés dans la plupart des autres études (e.g. Ogilvie 2005; Mathis et al. 2016; Guenel et al. 2016a,b; Astoul et al. 2019). Une option plus appropriée consisterait à utiliser l'approximation anélastique, qui permet de prendre en compte les fortes variations de densité possibles (e.g. Ogilvie & Lin 2004, 2007). Toutefois, étant donné que c'est la première fois que nous prenons en compte des structures internes aussi complexes pour modéliser les réponses aux marées, nous avons préféré ne pas compliquer davantage le problème dans un premier temps. De plus, nous adoptons l'approximation de Cowling (Cowling 1941) puisqu'on suppose que la perturbation du potentiel gravitationnel induite par la marée d'équilibre est dominante par rapport à celle induite par la marée dynamique.



Dans ce cas, le système d'équations qui décrit la marée ondulatoire peut être écrit comme suit :

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^w = 0, \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}^w}{\partial t} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}^w = -\nabla W^w + g_0 \left( \delta \frac{T^w}{T_0} - \phi \frac{\mu^w}{\mu_0} \right) \mathbf{e}_r + \nu \nabla^2 \mathbf{v}^w + \mathbf{f}^{\text{eq}}, \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial T^w}{\partial t} + v_r T_0 \frac{N_T^2}{g_0 \delta} = \kappa \nabla^2 T^w, \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial \mu^w}{\partial t} - v_r \mu_0 \frac{N_\mu^2}{g_0 \phi} = D_\mu \nabla^2 \mu^w, \quad (6.15)$$

$$\frac{\rho^w}{\rho_0} = -\delta \frac{T^w}{T_0} + \phi \frac{\mu^w}{\mu_0}. \quad (6.16)$$

À partir de ce système d'équations, on peut dériver un système adimensionné afin de faciliter l'analyse mathématique et numérique, et de permettre l'analyse des résultats obtenus durant l'exploration du domaine des paramètres des nombres sans dimensions caractéristiques (voir la section 5.3).

### 6.1.3 Adimensionnement des équations

Nous adimensionnons donc maintenant le système (6.12-6.16) en choisissant des échelles pour le temps, la longueur, la température et le poids moléculaire moyen. Nous pouvons imposer une échelle de temps naturelle en utilisant l'inverse de la fréquence de Coriolis, soit  $(2\Omega)^{-1}$ . Le rayon  $R$  correspondant à la surface de la planète sera utilisé comme échelle de longueur, ce qui donnera une échelle de vitesse égale à  $2R\Omega$ . Enfin, les échelles de température et de poids moléculaire seront respectivement données par la température et le poids moléculaire à la frontière intérieure ( $T_i$  et  $\mu_i$ ). Les correspondances obtenues sont les suivantes :

$$\mathbf{v}^w = 2\Omega R \mathbf{u}, \quad W^w = 4\Omega^2 R^2 \Pi, \quad g_0 = 4\Omega^2 R g_0^*, \quad \mathbf{f}^{\text{eq}} = 4\Omega^2 R \mathbf{f}^*, \quad (6.17)$$

$$T^w = T_i \Theta, \quad \mu^w = \mu_i M, \quad T_0 = T_i T_0^*, \quad \mu_0 = \mu_i \mu_0^*. \quad (6.18)$$

Nous pouvons donc écrire le système adimensionné comme suit :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (6.19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = -\nabla \Pi + \left( \frac{\delta}{T_0^*} \Theta - \frac{\phi}{\mu_0^*} M \right) g_0^* \mathbf{e}_r + E \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}^*, \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{T_0^* N_T^{*2}}{g_0^* \delta} u_r = \frac{E}{\text{Pr}} \nabla^2 \Theta, \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\mu_0^* N_\mu^{*2}}{g_0^* \phi} u_r = \frac{E}{\text{Sc}} \nabla^2 M, \quad (6.22)$$

où nous avons défini les fréquences normalisées de Brunt-Väisälä

$$N_t^{*2} = \frac{N_t^2}{4\Omega^2} \text{ et } N_\mu^{*2} = \frac{N_\mu^2}{4\Omega^2}. \quad (6.23)$$



Ces équations sont régies par trois nombres sans dimension que nous avons identifiés et définis au chapitre précédent (cf. section 5.3) : le nombre d'Ekman défini comme le rapport entre la force visqueuse et la force de Coriolis

$$E = \frac{\nu}{2\Omega R^2}, \quad (6.24)$$

le nombre de Prandtl défini comme le rapport entre la viscosité cinématique et la diffusivité thermique

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}, \quad (6.25)$$

et le nombre de Schmidt défini comme le rapport entre la viscosité cinématique et la diffusivité moléculaire

$$\text{Sc} = \frac{\nu}{D_\mu}. \quad (6.26)$$

### 6.1.4 Bilan énergétique

À partir du produit scalaire entre le conjugué complexe du champ de vitesse normalisé  $\bar{\mathbf{u}}$  ( $\bar{\square}$  désigne le conjugué complexe) et l'équation de la quantité de mouvement adimensionnée (6.20) et en substituant les équations (6.21) & (6.22), nous obtenons l'équation d'évolution de l'énergie (voir aussi Auclair Desrotour et al. 2015; André 2019) :

$$\partial_t (E_k + E_{p,\text{th}} + E_{p,\mu}) = P_{\text{acou}} + D_{\text{th}} + D_{\text{ch}} + D_{\text{visc}} + P_{\text{tide}}, \quad (6.27)$$

avec

$$E_k = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2, \quad (6.28)$$

l'énergie cinétique spécifique,

$$E_{p,\text{th}} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \frac{\delta g_0^*}{T_0^* N_t^*} \right)^2 |\Theta|^2 & \text{si } N_t^2 \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.29)$$

l'énergie potentielle spécifique associée à la stratification thermique,

$$E_{p,\mu} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \frac{\phi g_0^*}{\mu_0^* N_\mu^*} \right)^2 |M|^2 & \text{si } N_\mu^2 \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.30)$$

l'énergie potentielle spécifique associée à la stratification chimique,

$$P_{\text{acou}} = -\nabla \Pi \cdot \bar{\mathbf{u}} \quad (6.31)$$

la puissance spécifique du flux acoustique,

$$D_{\text{th}} = \begin{cases} \frac{E}{\text{Pr}} \left( \frac{\delta g_0^*}{T_0^* N_t^*} \right)^2 \bar{\Theta} \nabla^2 \Theta & \text{si } N_t^2 \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.32)$$



la puissance spécifique dissipée par diffusion thermique,

$$D_{\text{ch}} = \begin{cases} \frac{E}{\text{Sc}} \left( \frac{\phi g_0^*}{\mu_0^* N_\mu^*} \right)^2 \bar{M} \nabla^2 M & \text{si } N_\mu^2 \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.33)$$

la puissance spécifique dissipée par la diffusion chimique,

$$D_{\text{visc}} = E \nabla^2 \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{u}} \quad (6.34)$$

la puissance spécifique dissipée par le frottement visqueux,

$$P_{\text{tide}} = \mathbf{f}^* \cdot \bar{\mathbf{u}} \quad (6.35)$$

la puissance spécifique des marées.

Puis, après intégration spatiale sur le volume  $V$ , on obtient

$$\partial_t \left( \tilde{E}_k + \tilde{E}_{\text{p,th}} + \tilde{E}_{\text{p},\mu} \right) = \tilde{P}_{\text{acou}} + \tilde{D}_{\text{th}} + \tilde{D}_{\text{ch}} + \tilde{D}_{\text{visc}} + \tilde{P}_{\text{tide}}, \quad (6.36)$$

où  $\tilde{\square} = \frac{1}{2} \Re \left[ \int_V \square dV \right]$ . Ici, nous supposons que la densité est constante, ce qui nous permet de la simplifier dans cette équation de chaque côté.

## 6.2 Modèle d'intérieur de Jupiter

### 6.2.1 Modèle de structure

Pour résoudre le problème de dissipation des marées, il est nécessaire de prescrire les profils d'équilibre des quantités thermodynamiques et de la gravité et de la fréquence de Brunt-Väisälä. Des observations récentes ont permis de faire progresser considérablement notre compréhension de la structure interne des géantes gazeuses, mais il subsiste encore plusieurs degrés d'incertitude (e.g. [Guillot et al. 2022](#)).

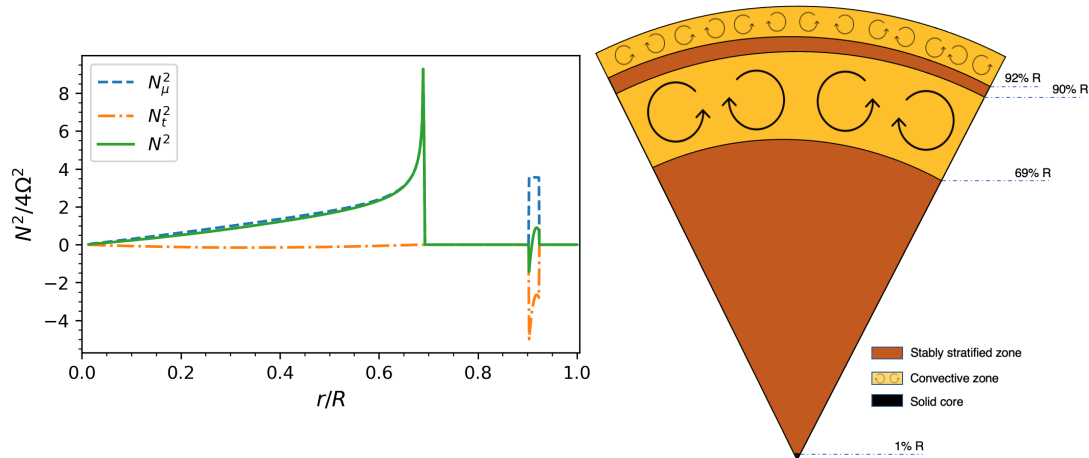
Pour Jupiter, le modèle calculé par [Debras & Chabrier \(2019\)](#) prédit désormais la présence de 4 ou 5 couches distinctes à l'intérieur de Jupiter. Comme le montre la Figure 6.1, en partant de sa surface et en se dirigeant vers le cœur, Jupiter présente les couches suivantes :

- Enveloppe gazeuse de la surface jusqu'à 92% du rayon : cette couche externe est caractérisée par des mouvements convectifs et une rotation différentielle.
- Zone de transition stratifiée de manière stable entre 92% et 90% du rayon : région de convection double diffusion résultant de l'immiscibilité de l'hydrogène et de l'hélium [Leconte & Chabrier \(2012\)](#).
- Zone convective interne entre 90% et 69% du rayon : cette couche magnétisée composée d'hydrogène métallique et d'hélium est en rotation quasi-uniforme en raison de la rétroaction de la force de Lorentz sur le cisaillement (e.g. [Guillot et al. 2018](#); [Galanti et al. 2019](#)).
- Zone stratifiée de manière stable (ou cœur dilué) : cette couche se situe plus près du cœur et peut présenter une convection double diffusion ou une structure de cœur dilué en raison de



gradients de composition stabilisateurs (Leconte & Chabrier 2012, 2013) générés par la dissolution des éléments lourds présents dans le cœur attribuée à l'instabilité thermodynamique des silicates qui le composent, en raison des conditions de température et de pression élevées qui y règnent (Wilson & Militzer 2012b,a; Wahl et al. 2013; González-Cataldo et al. 2014; Mazevet et al. 2015; Wahl et al. 2017). Une zone de ce type est probablement présente aussi dans Saturne (Mankovich & Fuller 2021).

- Cœur solide instable potentiel de taille 1.4% du rayon : constitué de roche ou de glace.



**FIGURE 6.1** – **Gauche** : Profils de la fréquence de Brunt-Väisälä chimique ( $N_\mu$ ), thermique ( $N_t$ ) et totale ( $N$ ) normalisée par la fréquence inertielle ( $2\Omega$ ) en fonction du rayon normalisé. **Droite** : Schéma du modèle choisi de l'intérieur de Jupiter utilisé dans cette étude en nous basant sur les travaux de Debras & Chabrier (2019).

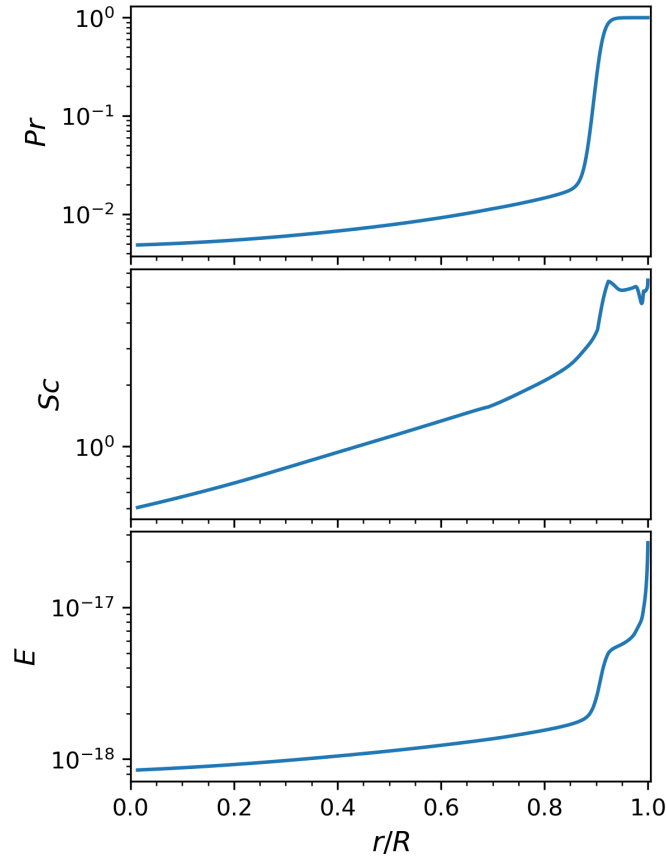
On peut observer dans le panneau de gauche de la figure 6.1 que dans les zones stablement stratifiées, la présence d'une stratification chimique stable ( $N_\mu^2 > 0$ ) stabilise la stratification instable en entropie ( $N_t^2 < 0$ ). L'interaction entre le gradient thermique instable, qui génère la convection, et le gradient compositionnel stable conduit à l'émergence d'une instabilité double-diffusive (e.g. Garaud 2018). De plus, on remarque que le rapport  $N/2\Omega$  est de l'ordre de 2. Cela indique l'inexistence de zones où la stratification est très forte, ce qui rend la TAR (section 2.4.3) inapplicable dans l'intérieur de Jupiter.

## 6.2.2 Propriétés de transport

En utilisant les propriétés de transport décrites dans Stevenson & Salpeter (1977b), nous effectuons des calculs afin de déterminer les différentes diffusivités présentes au sein de Jupiter ainsi que les nombres sans dimension qui leur sont associés. Les profils de ces nombres sont illustrés dans la figure 6.2. Nous remarquons que l'influence des forces visqueuses est généralement faible par rapport à l'accélération de Coriolis. Par conséquent, le nombre d'Ekman, qui caractérise le rapport entre la force visqueuse et la force de Coriolis, devient extrêmement faible, typiquement de l'ordre de  $10^{-17}$ . Cependant, on ne peut atteindre numériquement les régimes de tels nombres d'Ekman. La stratégie numérique adoptée est donc d'atteindre les valeurs les plus basses possibles en espérant



avoir atteint un régime où les lois d'échelles obtenues s'appliqueront aux valeurs plus faibles. Par ailleurs, cette valeur du nombre d'Ekman est calculée avec une valeur moléculaire de la viscosité, tandis que les ondes inertielles de marée pourraient être soumises en réalité à une viscosité effective turbulente (Ogilvie & Lin 2004, 2007; Mathis et al. 2016; de Vries et al. 2023) dont les plus grandes valeurs conduiraient à un nombre d'Ekman plus grand. D'autre part, le nombre de Prandtl, qui mesure le rapport entre la viscosité et la diffusivité thermique, est faible à l'intérieur de la planète, d'environ  $10^{-2}$ , mais il augmente jusqu'à environ 1 près de la surface (pour un rayon supérieur à  $0.9R$ ). La diffusion thermique au centre domine donc, et son influence s'affaiblit vers la surface. En ce qui concerne le nombre de Schmidt, qui caractérise le rapport entre la viscosité et la diffusivité moléculaire, il reste proche de l'unité dans toute la planète géante gazeuse. Dans un premier temps, nous supposons, dans nos simulations, que ces nombres adimensionnés sont constants. Ensuite, nous pourrions étudier l'impact de leurs variations en explorant le domaine des paramètres.



**FIGURE 6.2** – Profils des nombres de Prandtl, Schmidt et Ekman en fonction du rayon normalisé d'après Stevenson & Salpeter (1977b).

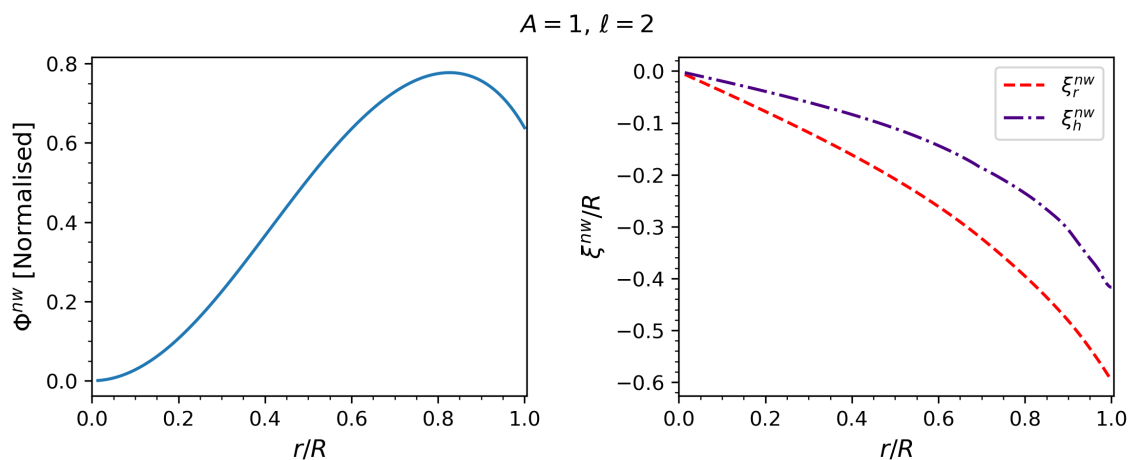




## 6.3 Résolution numérique

### 6.3.1 Marée d'équilibre

Pour calculer le déplacement induit par la marée d'équilibre  $\xi^{\text{eq}}$ , nous devons d'abord résoudre numériquement l'équation de Poisson (Eq.5.23), tout en tenant compte des conditions aux limites spécifiées dans les équations (5.24) et (5.25). Nous pouvons alors facilement calculer les déplacements verticaux et horizontaux associés à l'aide des équations (6.9) et (6.10). Nous pouvons voir sur la figure 6.3 ces quantités en fonction du rayon normalisé pour  $A = 1$  et  $\ell = 2$ . Nous soulignons ici que le fait de fixer la valeur de forçage à  $A = 1$  donne des valeurs très élevées et qu'une valeur de forçage réaliste (voir l'équation (5.8)) donnerait des valeurs beaucoup plus faibles. Étant donné que nous traitons ici le cas linéaire, le choix de  $A$  n'a aucun impact sur nos résultats.



**FIGURE 6.3** – Potentiel gravitationnel induit par la marée d'équilibre (à gauche) et déplacements radial et horizontal correspondants (à droite) en fonction du rayon normalisé pour  $A = 1$  et  $\ell = 2$ .

Une fois la solution de l'équation de Poisson obtenue numériquement, le nombre de Love (section 5.1.2) est calculé à partir de la relation

$$k_\ell^{\text{eq}} = \frac{\Phi_\ell^{\text{eq}}(r = R)}{\Psi_\ell(r = R)}. \quad (6.37)$$

On note que cela n'inclut que la marée d'équilibre et que c'est un réel puisqu'il n'y a pas de dissipation. Pour  $\ell = 2$  nous trouvons que  $k_2^{\text{eq}} = 0.638$ . On note une différence avec les valeurs calculées par [Wahl et al. \(2020\)](#) qui ont étudié le cas sans rotation et ont trouvé une valeur de  $k_2^{\text{eq}} = 0.536$ . Cependant, en tenant compte de la rotation de la planète, ils ont déterminé que la valeur passe à  $k_2^{\text{eq}} = 0.589$  pour  $m = 2$ . Il est important de reconnaître que l'hypothèse d'une planète sphérique ne s'applique pas réellement à Jupiter car sa rotation rapide le rend aplati et dans ce cas le nombre de Love devient dépendant de l'ordre azimutal  $m$ . En comparant la valeur théorique avec la valeur observée de  $k_{22}$ , qui est rapportée dans [Durante et al. \(2020\)](#) comme étant égale à 0.565, on constate un écart significatif. Cette différence suggère qu'il existe une contribution dynamique aux marées qui n'a pas encore été pleinement caractérisée.



### 6.3.2 Marée dynamique : Simulations hydrodynamiques 2D avec le code LSB

#### 6.3.2.1 Projection sur la base des harmoniques sphériques

Nous allons maintenant projeter le champ de vitesse  $\mathbf{u}$  sur la base des harmoniques sphériques vectorielles et la pression  $\Pi$ , la température  $\Theta$  et le poids moléculaire moyen  $M$  sur la base ortho-normale des harmoniques sphériques (voir l'annexe A)

$$\mathbf{u} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (u_{\ell}^m(r)\mathbf{R}_{\ell}^m(\theta, \varphi) + v_{\ell}^m(r)\mathbf{S}_{\ell}^m(\theta, \varphi) + w_{\ell}^m(r)\mathbf{T}_{\ell}^m(\theta, \varphi)) e^{-i\tilde{\omega}^{\text{in}}t}, \quad (6.38)$$

$$\Theta = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} t_{\ell}^m(r)Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) e^{-i\tilde{\omega}^{\text{in}}t}, \quad (6.39)$$

$$M = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \mu_{\ell}^m(r)Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) e^{-i\tilde{\omega}^{\text{in}}t}, \quad (6.40)$$

$$\Pi = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} p_{\ell}^m(r)Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) e^{-i\tilde{\omega}^{\text{in}}t}, \quad (6.41)$$

avec  $\tilde{\omega}^{\text{in}} = \omega^{\text{in}}/2\Omega$  la fréquence de marée normalisée dans le repère inertiel, et nous introduisons  $\tilde{\omega} = \omega/2\Omega = \tilde{\omega}^{\text{in}} - m/2$  la fréquence normalisée imposée par le forçage de marée dans le repère en rotation.

La projection sur les harmoniques sphériques du système (6.19)-(6.22), via les relations de l'annexe A3, nous donnent les équations radiales couplées vérifiées par  $u_{\ell}^m$ ,  $v_{\ell}^m$ ,  $w_{\ell}^m$ ,  $p_{\ell}^m$ ,  $t_{\ell}^m$ , et  $\mu_{\ell}^m$  :

$$\partial_r u_{\ell}^m + \frac{2}{r} u_{\ell}^m - \ell(\ell+1) \frac{v_{\ell}^m}{r} = 0, \quad (6.42)$$

$$E\Delta_{\ell} u_{\ell}^m - \left(\frac{2E}{r^2} - i\tilde{\omega}\right) u_{\ell}^m + \left(im + \frac{2E}{r^2} \ell(\ell+1)\right) v_{\ell}^m - \beta_{\ell-1}^{\ell} w_{\ell-1}^m - \beta_{\ell+1}^{\ell} w_{\ell+1}^m - \partial_r p_{\ell}^m + \frac{\delta g_0^*}{T_0^*} t_{\ell}^m - \frac{\phi g_0^*}{\mu_0^*} \mu_{\ell}^m = -f_{\text{R}}^{\ell,m}, \quad (6.43)$$

$$E\Delta_{\ell} v_{\ell}^m + \left(i\tilde{\omega} + \frac{im}{\ell(\ell+1)}\right) v_{\ell}^m + \left(\frac{2E}{r^2} + \frac{im}{\ell(\ell+1)}\right) u_{\ell}^m - \gamma_{\ell-1}^{\ell} w_{\ell-1}^m - \gamma_{\ell+1}^{\ell} w_{\ell+1}^m - \frac{p_{\ell}^m}{r} = -f_{\text{S}}^{\ell,m}, \quad (6.44)$$

$$E\Delta_{\ell} w_{\ell}^m + \left(i\tilde{\omega} + \frac{im}{\ell(\ell+1)}\right) w_{\ell}^m + \gamma_{\ell-1}^{\ell} v_{\ell-1}^m + \gamma_{\ell+1}^{\ell} v_{\ell+1}^m - \frac{\alpha_{\ell-1}^{\ell}}{\ell} u_{\ell-1}^m + \frac{\alpha_{\ell+1}^{\ell}}{\ell+1} u_{\ell+1}^m = -f_{\text{T}}^{\ell,m}, \quad (6.45)$$

---


$$\frac{E}{\text{Pr}} \Delta_\ell t_\ell^m - u_\ell^m \frac{T_0^* N_T^{*2}}{g_0^* \delta} + i\tilde{\omega} t_\ell^m = 0, \quad (6.46)$$

$$\frac{E}{\text{Sc}} \Delta_\ell \mu_\ell^m + u_\ell^m \frac{\mu_0^* N_\mu^{*2}}{g_0^* \phi} + i\tilde{\omega} \mu_\ell^m = 0, \quad (6.47)$$

avec

$$\Delta_\ell = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}. \quad (6.48)$$

Dans ce système, les couplages  $(\ell-1, \ell, \ell+1)$  sont dus à la force de Coriolis, leurs coefficients sont donnés dans l'annexe A3.

### 6.3.2.2 Conditions aux limites

On choisit pour la vitesse une condition de type surface libre sur les sphères interne ( $r = \eta$ , où  $\eta$  est le rapport d'aspect) et externe ( $r = 1$ ), soit

$$u_\ell^m = 0, \quad (6.49)$$

$$\frac{dv_\ell^m}{dr} + \frac{u_m^\ell - v_m^\ell}{r} = 0, \quad (6.50)$$

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{w_\ell^m}{r} \right) = 0. \quad (6.51)$$

De plus, on suppose que les sphères limitant le domaine fluide peuvent absorber un flux de chaleur ou d'éléments chimiques quelconque tout en restant à température et poids moléculaire constants, soit :

$$t_\ell^m = 0, \quad (6.52)$$

$$\mu_\ell^m = 0. \quad (6.53)$$

### 6.3.2.3 Code de résolution numérique

La projection du système linéaire adimensionné sur la base des harmoniques sphériques et les conditions aux limites associées sont résolues à l'aide du code pseudo-spectral linéaire 2D LSB (Linear Solver Builder, [Valdettaro et al. \(2007\)](#)). Ces équations sont discrétisées dans la direction radiale sur les nœuds de collocation de Gauss-Lobatto associés aux polynômes de Chebyshev. Elles sont tronquées à l'ordre  $N_r$  pour la base de Chebyshev et à l'ordre  $N_\ell$  pour la base des harmoniques sphériques. Ceci transforme le problème de départ en un système linéaire de la forme  $\mathcal{M}X = F$ . Nous recherchons le vecteur inconnu de ce système linéaire en chaque point de la grille radiale, étant donné la valeur de la fréquence de forçage  $\tilde{\omega}$  et l'ordre azimutal  $m$ .

Afin d'assurer l'obtention d'une convergence numérique, nous utilisons une résolution spatiale de  $(N_r, N_\ell) = (300, 301)$ . Cette convergence est représentée visuellement dans le panneau gauche de la figure 6.4, où nous représentons le contenu spectral des composantes du champ de vitesse, des fluctuations de pression, de la température et du poids moléculaire moyen pour un mode forcé donné ( $\tilde{\omega} = -0.76$ ). Dans le panneau supérieur, nous présentons les coefficients de Chebyshev maximum  $C_k$  en fonction de l'ordre de Chebyshev  $k$ , en sélectionnant la valeur la plus élevée parmi tous les coefficients des harmoniques sphériques correspondant à un certain  $k$ . De même, le panneau inférieur affiche les coefficients des harmoniques sphériques  $C_\ell$  en fonction du degré de l'harmonique sphérique  $\ell$ , en considérant la valeur la plus élevée parmi tous les coefficients de Chebyshev.



### 6.3.3 Coupe méridienne de l'énergie cinétique

Nous présentons nos résultats numériques concernant l'énergie cinétique, en nous concentrant plus particulièrement sur le mode forcé  $\tilde{\omega} = -0.76$  (la fréquence excitée dans Jupiter par Io pour  $m = n = 2$ , le comportement des ondes est similaire aux fréquences des autres satellites). Nous adoptons les valeurs les plus basses qu'on peut atteindre numériquement du nombre d'Ekman et des valeurs des nombres de Prandtl et de Schmidt pour laquelle  $\nu = \kappa = D_\mu$ , à savoir  $E = 10^{-7}$ ,  $Pr = Sc = 1$ . En outre, nous avons fixé le rapport d'aspect à  $\eta = 0.014$  (taille du cœur solide). Le panneau de droite de la figure 6.6 illustre la distribution spatiale de l'énergie cinétique de ce mode dans un quart de plan méridien. Nous pouvons notamment observer deux types de modes distincts. Tout d'abord, il y a les modes gravito-inertiels qui existent dans les régions intérieures stablement stratifiées (et théoriquement dans la fine couche extérieure stablement stratifiée, même si elle est très fine). Comme prévu, nous trouvons le piégeage équatorial des modes gravito-inertiels sub-inertiels ( $\tilde{\omega} < 1$ ) (Lee & Saio 1997; Dintrans et al. 1999; Dintrans & Rieutord 2000; Mathis 2009). Deuxièmement, nous avons les modes inertiels présents dans les deux zones convectives, qui sont séparées par la fine couche stratifiée stable. Ces modes présentent des multiples réflexions aux limites de leurs zones de propagation, suivant des trajectoires spécifiques connues sous le nom d'attracteurs (Maas & Lam 1995). Ces attracteurs sont associés à l'apparition de couches de cisaillement (e.g. Rieutord et al. 2001; Ogilvie & Lin 2004; Ogilvie 2005; Rieutord & Valdetaro 2010). L'amplitude du mode atteint sa valeur maximale à proximité de l'axe de rotation. Cette propriété rappelle le comportement observé dans les modes inertiels à l'intérieur d'une coquille de fluide en rotation uniforme (Rieutord & Valdetaro 1997).

Dans cette figure, nous représentons également les trajectoires des caractéristiques avec des courbes blanches, tandis que les surfaces de retournement sur lesquelles elles subissent une réflexion sont représentées par des courbes bordeaux. Ces trajectoires des caractéristiques représentées ici sont calculées en se basant sur l'approximation des petites longueurs d'onde (Dintrans et al. 1999; Mirouh et al. 2016). L'inclusion de ces courbes constitue un moyen précieux pour comprendre les solutions des problèmes non dissipatifs, ainsi que pour la validation des calculs numériques dans le cas dissipatif. Nous avons ainsi constaté que les motifs formés par les caractéristiques correspondent très bien au calcul numérique, notamment dans les couches internes stablement stratifiées. Dans les zones de convection, les trajectoires des caractéristiques présentent une caractéristique de suivre des lignes droites maintenant un angle constant par rapport à l'axe de rotation (l'axe  $z$ ) afin de respecter la relation de dispersion des ondes inertielles  $\omega^2 \approx 4(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})^2 / k^2$ . En revanche, les régions stratifiées de manière stable présentent un comportement distinct où les caractéristiques deviennent courbées, en raison de la distorsion causée par la présence de stratification.

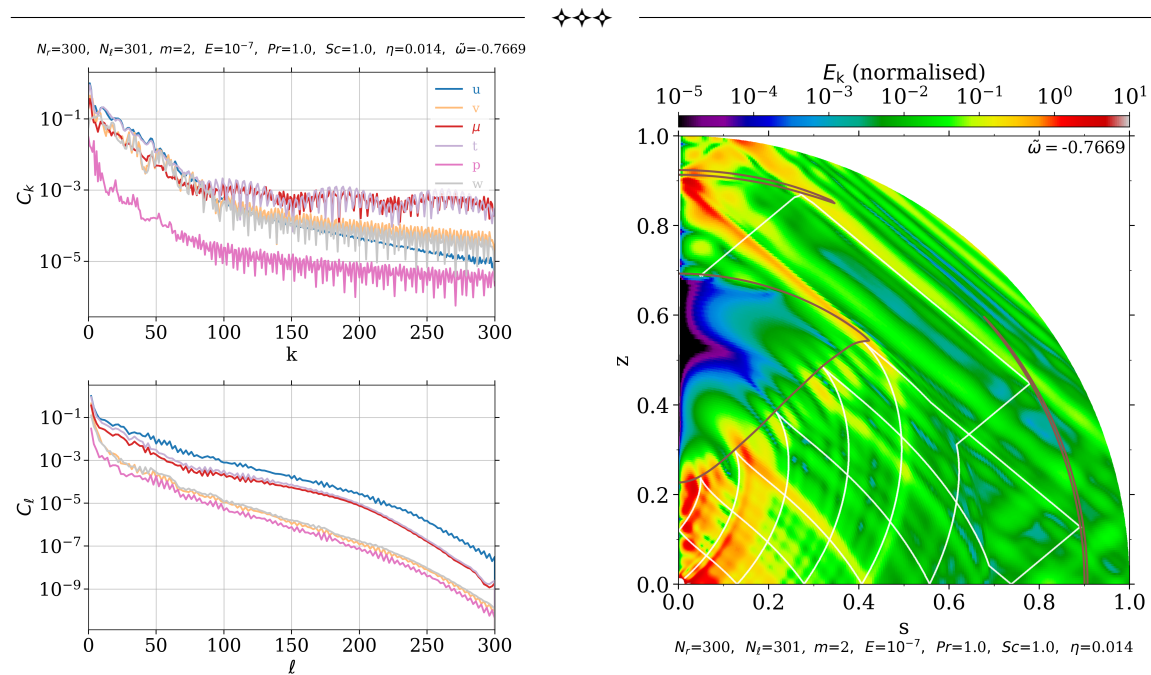
### 6.3.4 Conservation d'énergie

Nous analysons trois formes distinctes de dissipation : visqueuse, thermique et chimique. Afin d'englober l'ensemble de la dissipation, la dissipation totale est définie comme suit :

$$\mathcal{D}(\tilde{\omega}) = \tilde{D}_{\text{th}} + \tilde{D}_{\text{ch}} + \tilde{D}_{\text{visc}}. \quad (6.54)$$

Nous veillons à ce que l'énergie soit conservée  $\mathcal{D} \approx \tilde{P}_{\text{tide}}$  avec un niveau de confiance acceptable, avec une marge d'erreur relative maximale de 5% (voir la figure 6.5). En utilisant les conditions aux limites spécifiées dans la section 6.3.2.2, nous obtenons  $P_{\text{acou}} \approx 0$ .

En fait, lors des premières simulations que nous avons effectuées, nous avons constaté un problème majeur de conservation d'énergie (erreur relative très élevée) en utilisant une fréquence de

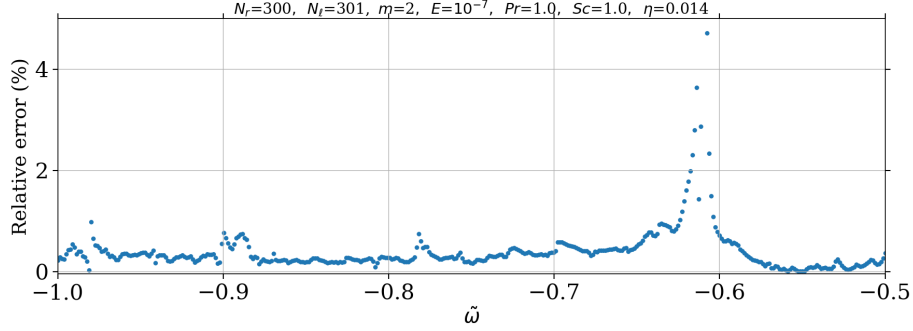


**FIGURE 6.4** – **Gauche** : Coefficients spectraux maximum du champ de vitesse, des fluctuations de pression, de température et de poids moléculaire moyen en fonction de l'indice  $k$  sur la base des polynômes de Tchebychev (Haut) et de l'indice  $l$  sur la base des harmoniques sphériques (Bas). **Droite** : Coupe méridienne de l'énergie cinétique pour le mode forcé  $\tilde{\omega} = -0.76$ , correspondant à la fréquence de marée excitée par Io, pour  $m = 2$ ,  $E = 10^{-7}$ ,  $Pr = Sc = 1$  avec une résolution spatiale  $(N_r, N_l) = (300, 301)$ .

Brunt-Väisälä thermique et chimique exactement nulle dans la zone convective. Cependant, nous avons trouvé une solution en supposant une fréquence très proche de zéro, mais pas exactement égale à zéro. Nous avons donc fixé dans nos simulations ces valeurs à  $N_t^{*2} = N_\mu^{*2} = -10^{-4}$  dans les régions convectives. Cette approche a permis de résoudre les problèmes de conservation de l'énergie que nous avons rencontrés précédemment, sans influencer les coupes méridiennes des énergies.

### 6.3.5 Spectre de dissipation

La figure 6.6 présente les taux de dissipation visqueuse ( $\tilde{D}_{\text{visc}}$ ), thermique ( $\tilde{D}_{\text{th}}$ ), moléculaire ( $\tilde{D}_{\text{ch}}$ ) et totale ( $\tilde{D}$ ) intégrés sur le volume en fonction de la fréquence de forçage normalisée ( $\tilde{\omega}$ ) ou  $\tilde{\omega} = -0.76$ ,  $m = 2$ ,  $E = \{10^{-7}, 10^{-8}\}$ , et  $Pr = Sc = 1$ . Nous observons une dépendance significative de la fréquence, ce qui indique une forte relation entre la dissipation et la fréquence de forçage. De plus, notre analyse révèle que le facteur dominant contribuant à la dissipation est la viscosité, surpassant à la fois les dissipations thermique et chimique en termes d'amplitude. Nous avons également calculé les spectres de dissipation pour l'ancien modèle de structure interne de Jupiter, où il existe une seule zone purement convective s'étendant sur tout le domaine, suivant en cela la méthode de comparaison qui avait été adoptée par André et al. (2019) en coordonnées cartésiennes. Dans ce scénario, la seule forme de dissipation présente est la dissipation visqueuse, car



**FIGURE 6.5** – Erreur relative de la conservation d’énergie en fonction de la fréquence de marée pour  $m = 2$ ,  $Pr = Sc = 1$ , et  $E = 10^{-7}$  avec une résolution spatiale  $(N_r, N_l) = (300, 301)$ .

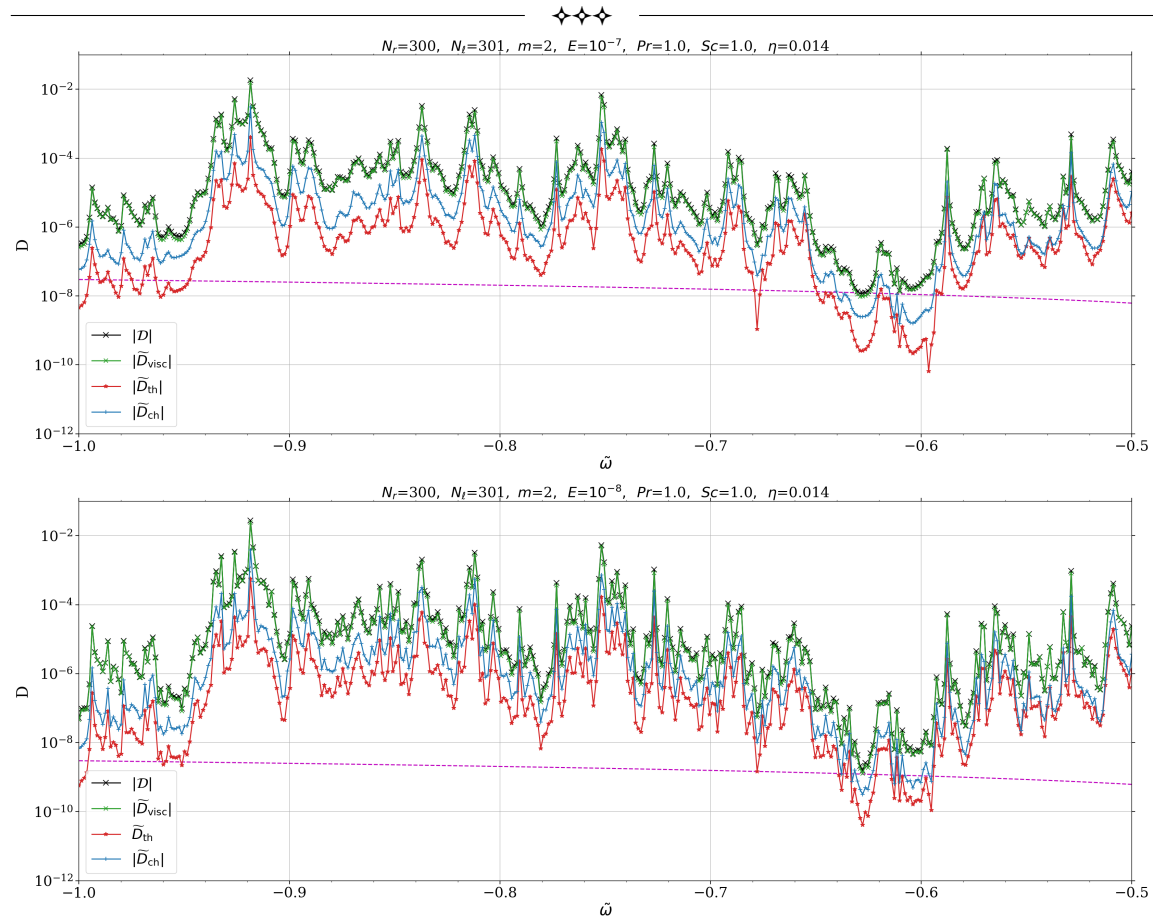
la dissipation thermique et chimique sont négligeables puisque  $N_\mu^2 = N_t^2 = 0$ . La dissipation due à la viscosité est représentée par la ligne en pointillés magenta sur la figure 6.6. On peut constater que les spectres dans ce cas présentent un profil régulier, dépourvu de pics prononcés à des fréquences spécifiques, contrairement au modèle à quatre couches. De plus, il est intéressant de noter que la dissipation dans ce cas est significativement plus faible, avec une réduction de deux à quatre ordres de grandeur.

Nous nous penchons sur l’influence de la variation du nombre d’Ekman sur les spectres de dissipation. Le nombre d’Ekman est un paramètre qui caractérise le rapport entre les forces de rotation et les forces de viscosité dans un fluide en mouvement. En modifiant ce nombre, nous sommes en mesure d’observer les effets de ces changements sur la dissipation de l’énergie dans le système. Nos résultats révèlent que la diminution du nombre d’Ekman a un impact significatif sur la dissipation. En effet, nous constatons une augmentation du nombre de pics dans les spectres de dissipation lorsque le nombre d’Ekman diminue. Ce résultat est cohérent avec les prédictions d’[Auclair Desrotour et al. \(2015\)](#) qui ont étudié dans une boîte cartésienne la dissipation des ondes gravito-inertielles par la viscosité et de la diffusion thermique dans un milieu stablement stratifié. Cela indique une plus grande complexité du processus de dissipation d’énergie. Plus précisément, la diminution du nombre d’Ekman entraîne une diminution de l’efficacité des forces de viscosité par rapport aux forces de rotation. En conséquence, les fluctuations de l’énergie cinétique deviennent plus importantes, ce qui se traduit par une augmentation du nombre de pics dans les spectres de dissipation.

Afin d’établir un lien entre nos calculs numériques et les observations, il est nécessaire de calculer la composante imaginaire du nombre de Love à partir de la dissipation totale. Ce calcul nous permet d’effectuer une analyse complète en comparant notre modèle numérique aux observations réelles, en réalisant des comparaisons quantitatives et qualitatives.

### 6.3.6 Lien avec les observations : facteur de qualité et nombre de Love

La partie imaginaire du nombre de Love,  $\Im[k_{\ell m}]$ , joue un rôle crucial dans la caractérisation de la réponse d’un corps céleste aux forces de marée. Elle représente le transfert d’énergie et de moment cinétique au sein du système. En établissant une relation entre la dissipation totale et la



**FIGURE 6.6** – Spectres de dissipation pour  $m = 2$ ,  $Pr = Sc = 1$ , et  $E = 10^{-7}$  (en haut) et  $E = 10^{-8}$  (en bas) avec une résolution spatiale  $(N_r, N_\ell) = (300, 301)$ . La dissipation totale est représentée par des croix noires, et ses contributions visqueuse, thermique et moléculaire sont représentées par des points verts, des étoiles rouges et des signes plus bleus, respectivement. La ligne pointillée magenta indique la dissipation visqueuse (totale) dans le cas d'un intérieur purement convectif ( $N_\mu^2 = N_t^2 = 0$ ).

partie imaginaire du nombre de Love, nous obtenons des informations précieuses sur l'évolution du système. En utilisant la relation 5.14 cette relation peut être exprimée en fonction des quantités normalisées comme suit :

$$\Im[k_{\ell m}(\tilde{\omega})] = \frac{GM}{4R^3\Omega^2} \frac{8\pi}{(2\ell + 1)\tilde{\omega}} \mathcal{D}. \quad (6.55)$$

Nous pouvons ensuite définir le facteur de qualité modifié de la marée avec la relation 5.11.

Lainey et al. (2009) ont ajusté un modèle dynamique comprenant une dissipation des marées paramétrisée, à partir des observations astrométriques de 1891 à 2007 des satellites galiléens. Ils ont découvert que  $\Im[k_{22}] = 1.1 \times 10^{-5}$  pour la marée asynchrone ( $\ell = m = n = 2$ ) due à Io ( $\tilde{\omega} = -0.76$ ). Comme on peut le voir sur la figure 6.7, nous trouvons un écart significatif entre les valeurs calculées de la partie imaginaire du nombre de Love dû à Io et les valeurs observées, différant d'environ deux



**FIGURE 6.7** – Partie imaginaire du nombre de Love en fonction de la fréquence de marée pour  $m = 2$ ,  $Pr = Sc = 1$ , et  $E = 10^{-7}$  (en haut) et  $E = 10^{-8}$  (en bas) avec une résolution spatiale  $(N_r, N_\ell) = (300, 301)$ . La ligne magenta en tirets indique les valeurs de cette quantité dans le cas d’un intérieur purement convectif ( $N_\mu^2 = N_t^2 = 0$ ). La ligne orange en tirets/pointillés représente la valeur observée de cette quantité due à Io.

ordres de grandeur. Par conséquent, nos calculs tendent à surestimer l’amplitude de la dissipation de la marée. Inversement, en examinant le modèle purement convectif, nous observons une sous-estimation de la dissipation de marée d’environ un ordre et demi de grandeur. On trouve ici que la stratification stable joue un rôle crucial dans l’explication de la forte dissipation. Cette conclusion a été également mise en évidence par une étude menée par [André et al. \(2019\)](#), qui se sont penchée sur la dissipation des marées dans une région semi-convective en rotation avec un modèle de boîte cartésienne. De plus, [Lin \(2023\)](#) et [Dewberry \(2023\)](#) ont également étudié les réponses aux marées dans certains scénarios simplifiés envisageables pour l’intérieur de Jupiter, en prenant en compte la diffusion visqueuse. En résumé, les modèles globaux utilisés dans notre étude confirment les résultats obtenus précédemment et apportent des éléments de confirmation supplémentaires à notre compréhension. Cette cohérence entre différentes études montre qu’une vision globale et cohérente





émerge.

## 6.4 Conclusions et perspectives

Nous avons développé une méthode numérique qui permet le calcul de la réponse dynamique forcée des marées d'un corps fluide incompressible, non magnétisé en rotation uniforme. La force de Coriolis est entièrement prise en compte dans nos calculs. Cependant, nous ne tenons pas compte de la distorsion centrifuge, ce qui nous permet de résoudre le problème en géométrie sphérique. Nous prenons en considération divers types de dissipations telles que la viscosité du fluide, la dissipation thermique et la diffusivité moléculaire. En incorporant ces mécanismes de dissipation, nous pouvons calculer la dissipation totale et déterminer la partie imaginaire du nombre de Love de marée pour un modèle intérieur planétaire donné. Pour effectuer ces calculs, nous utilisons une méthode pseudo-spectrale. Cette méthode est basée sur les harmoniques sphériques dans les directions angulaires et utilise la collocation de Chebyshev dans la direction radiale. Cette approche garantit une grande précision et efficacité dans nos calculs. Dans ce chapitre, nous avons examiné la marée dynamique dans Jupiter en utilisant des modèles de structure interne qui respectent les contraintes de Juno. Nous avons spécifiquement étudié les composantes de marée quadripolaires ( $\ell = m = 2$ ). Notre attention s'est portée sur la plage de fréquences de  $-1 < \tilde{\omega} < -0.5$ , qui correspond aux fréquences de marée associées aux satellites galiléens de Jupiter. Nous avons pris en compte un modèle multicouche impliquant des zones convectives et stablement stratifiées en alternance. En intégrant ces deux processus en interaction dans un modèle unifié, nous pouvons obtenir une représentation plus complète et réaliste des phénomènes qui se produisent dans l'intérieur des planètes géantes gazeuses, notamment la dissipation de marée dynamique. Nous avons constaté que la présence des zones stablement stratifiées joue un rôle important dans l'explication de la forte dissipation observée dans Jupiter. Enfin, il est important de noter que notre modèle n'est pas uniquement applicable à Jupiter, mais peut également s'appliquer à d'autres planètes géantes telles que Saturne, ainsi qu'aux exoplanètes. De plus, il peut même être utilisé pour étudier les étoiles où les zones radiative et convective ont été généralement traitées de manière séparée.

Il y a plusieurs mises en garde importantes qui doivent être soigneusement prises en compte dans les études futures afin d'assurer des comparaisons quantitatives précises avec les observations de haute précision. Il est crucial d'incorporer de manière auto-cohérente les processus physiques manquants. Premièrement, négliger l'influence des effets centrifuges peut limiter la précision de nos solutions. En particulier pour les composantes de marée de haut degré, l'impact des forces centrifuges devient de plus en plus significatif (Dewberry 2023). Deuxièmement, bien que l'utilisation de l'approximation de Boussinesq pour étudier la marée dynamique simplifie le système d'équations à résoudre, il est important de reconnaître ses limites. Ces limites sont particulièrement importantes lorsque la fréquence de Lamb, qui caractérise les modes acoustiques, approche près de la surface une magnitude comparable aux fréquences des modes excités. Troisièmement, la rotation différentielle pourra jouer un rôle important dans la dynamique des régions externes des planètes géantes gazeuses. De plus, la région interne ionisée, caractérisée par la présence d'un gaz magnétisé, peut présenter des effets significatifs en raison de la dissipation ohmique et des couples magnétiques induits. Enfin, nous savons que la présence de rotation différentielle dans une zone convective dépend fortement de la conductivité électrique (e.g. Guillot et al. 2018; Galanti et al. 2019). En fait, lorsque la conductivité est élevée, elle empêche l'existence de forts vents zonaux (Cao & Stevenson 2017), car la force de Lorentz, qui est alors élevée, s'oppose aux gradients de vitesse. Les courants zonaux sont



alors confinés aux régions externes de faible conductivité (e.g. [Guillot et al. 2018](#)). C'est pourquoi nous ne nous attendons pas à observer un grand gradient de rotation dans les régions convectives internes de Jupiter et Saturne. Par conséquent, une perspective intéressante de ce travail consiste à entreprendre une étude pour comprendre l'impact profond de la rotation différentielle ([Mathis 2009](#); [Baruteau & Rieutord 2013](#); [Mirouh et al. 2016](#); [Guenel et al. 2016a,b](#); [Dewberry et al. 2021](#)) et des champs magnétiques ([Rogers & MacGregor 2010](#); [Mathis & de Brye 2011](#); [Barker & Lithwick 2014](#); [Wei 2016, 2018](#); [Lin & Ogilvie 2018](#)) sur la propagation et la dissipation des ondes dans les planètes géantes gazeuses.

### Article soumis :

« Hydrodynamic modelling of dynamical tides dissipation in Jupiter's interior as revealed by Juno » par H. Dhouib, C. Baruteau, S. Mathis, F. Debras, A. Astoul, et M. Rieutord, *Soumis à A&A*

# Hydrodynamic modelling of dynamical tides dissipation in Jupiter's interior as revealed by Juno

H. Dhouib<sup>1</sup>, C. Baruteau<sup>2</sup>, S. Mathis<sup>3</sup>, F. Debras<sup>2</sup>, A. Astoul<sup>4</sup>, and M. Rieutord<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Université Paris Cité, Université Paris-Saclay, CEA, CNRS, AIM, F-91191, Gif-sur-Yvette, France  
e-mail: hachem.dhouib@cea.fr

<sup>2</sup> IRAP, Université de Toulouse, CNRS UMR 5277, UPS, F-31400 Toulouse, France

<sup>3</sup> Université Paris-Saclay, Université Paris Cité, CEA, CNRS, AIM, F-91191, Gif-sur-Yvette, France

<sup>4</sup> Department of Applied Mathematics, School of Mathematics, University of Leeds, Leeds LS2 9JT, UK

October 16, 2023

## ABSTRACT

**Context.** The Juno spacecraft has acquired exceptionally precise data on Jupiter's gravity field, offering invaluable insights into Jupiter's tidal response, interior structure, and dynamics, establishing crucial constraints.

**Aims.** We develop a new model for calculating Jupiter's tidal response based on its latest interior model, while also examining the significance of different dissipation processes for the evolution of its system. We study the dissipation of dynamical tides in Jupiter by thermal, viscous and molecular diffusivities acting on gravito-inertial waves in stably stratified zones and inertial waves in convection ones.

**Methods.** We solve the linearised equations for the equilibrium tide. Next, we compute the dynamical tides using linear hydrodynamical simulations based on a spectral method. The Coriolis force is fully taken into account, but the centrifugal effect is neglected. We study the dynamical tides occurring in Jupiter using internal structure models that respect Juno's constraints. We study specifically the dominant quadrupolar tidal components and our focus is on the frequency range that corresponds to the tidal frequencies associated with Jupiter's Galilean satellites.

**Results.** By incorporating the different dissipation mechanisms, we calculate the total dissipation and determine the imaginary part of the tidal Love number. We find a significant frequency dependence in dissipation spectra, indicating a strong relationship between dissipation and forcing frequency. Furthermore, our analysis reveals that, in the chosen parameter regime in which kinematic viscosity, thermal and molecular diffusivities are equal, the dominant mechanism contributing to dissipation is viscosity, exceeding in magnitude both thermal and chemical dissipation. We find that the presence of stably stratified zones plays an important role in explaining the high dissipation observed in Jupiter.

**Key words.** Planets and satellites: gaseous planets – Hydrodynamics – Waves – Methods: numerical

## 1. Introduction

Tidal interactions between Jupiter and its Galilean satellites are recognised as influential factors in both the system's orbital evolution and the internal dynamics (e.g. [Lainey et al. 2009](#)). Traditionally, the tidal response of a gaseous star or planet like Jupiter is treated using the concept of equilibrium tide ([Zahn 1966a, 1989](#); [Remus et al. 2012](#)), where hydrostatic deformation exhibits a minor phase lag in response to the dissipative processes caused by tidal forcing. However, the observed strong tidal dissipation in Jupiter ([Lainey et al. 2009](#)) and the gravitational perturbations recently measured by the Juno spacecraft ([Durante et al. 2020](#)) cannot be fully explained by the equilibrium tide alone. In fact, the Juno spacecraft has not only enhanced our understanding of Jupiter's tidal dynamics but has also allowed us to delve deeper into the gravitational perturbation and tidal dissipation phenomena associated with the planet. On the one hand, it has acquired precise measurements of Jupiter's tidal Love numbers,  $k_{\ell m}$ , which quantitatively characterize the planet's response to tidal forcing represented by spherical harmonics of degree  $\ell$  and order  $m$ . By analysing the real part of these Love numbers, we gain valuable information about the gravitational perturbations experienced by Jupiter. On the other hand, the imaginary part of the Love numbers provides us with insights into the processes of

tidal dissipation occurring within the planet. Recently, [Durante et al. \(2020\)](#) measured the Love number value for the dominant tidal component  $k_{22} = 0.565 \pm 0.018$  ( $3\sigma$  uncertainty). This is lower than the theoretical hydrostatic value of  $k_{22}^{(eq)} = 0.589$  as stated by [Wahl et al. \(2020\)](#), indicating a difference of approximately  $\Delta k_{22} \approx -4\%$ . [Wahl et al. \(2020\)](#) noted that the influence of the interior structure on  $k_{\ell m}$  is negligible when considering models that accurately reproduce the zonal harmonics  $J_2$ ,  $J_4$ , and  $J_6$ , which have already been measured with high precision by Juno. This discrepancy between the observed and the computed values of  $k_{22}$  could potentially be attributed to the influence of dynamical tides ([Zahn 1975](#); [Ogilvie & Lin 2004](#)). Indeed, the conventional concept of the equilibrium tide, does not satisfy the full equation of motion because the acceleration of the fluid is neglected ([Zahn 1966b](#)). Hence, a comprehensive understanding of the planet's tidal response requires the inclusion of corrections. These corrections introduce wavelike motions within the planet and depend on both the tidal frequency and the internal structure ([Ogilvie 2014](#)). The dynamical (wave-like) tide offers additional channels for tidal dissipation and generates supplementary gravitational perturbations, surpassing the effects solely attributed to the hydrostatic deformation ([Idimi & Stevenson 2021](#); [Lai 2021](#); [Lin 2023](#)).

The detection of gravitational signatures from dynamical tides can provide valuable insights into the interior structure of Jupiter, as it is influenced by both the tidal frequency and the internal structure. [Idini & Stevenson \(2021\)](#); [Lai \(2021\)](#); [Idini & Stevenson \(2022a,b\)](#); [Dewberry & Lai \(2022\)](#); [Dewberry \(2023\)](#); [Lin \(2023\)](#) have found that  $\Delta k_{22}$  can be largely attributed to the Coriolis effect on the fundamental modes (f-modes). Additionally, [Idini & Stevenson \(2022a\)](#) have proposed that resonant locking with a gravity mode in an extended diluted core could explain a  $\Delta k_{42} \approx -11\%$  difference between the observed and computed values of  $k_{42}$ . This finding supports the existence of a diluted core in Jupiter, a possibility also suggested by [Stevenson \(1985\)](#) and by Juno’s measurements of gravitational moments ([Wahl et al. 2017](#); [Militzer et al. 2022](#)). The Coriolis force plays a crucial role in Jupiter’s tidal responses because tidal frequencies of its Galilean satellites are comparable with the planet’s spin frequency. Including the Coriolis force introduces inertial waves in (magnetised) convective regions ([Rieutord & Valdetaro 1997](#); [Ogilvie & Lin 2004](#); [Ogilvie 2009, 2013](#); [Rieutord & Valdetaro 2010](#); [Baruteau & Rieutord 2013](#); [Guenel et al. 2016a,b](#); [Mathis et al. 2016](#); [Wei 2016, 2018](#); [Lin & Ogilvie 2018](#); [Astoul et al. 2019](#)) and a combination of gravity waves and inertial waves, known as gravito-inertial waves, in stably stratified regions ([Dintrans et al. 1999](#); [Dintrans & Rieutord 2000](#); [Mathis 2009](#); [Aucclair Desrotour et al. 2015](#); [André et al. 2019](#); [Pontin et al. 2023](#)).

The dissipation of dynamical tides occurs through various friction mechanisms, including turbulent friction in convective layers and heat diffusion in stably stratified regions (e.g. [Ogilvie 2014](#); [Mathis 2019](#); [Duguid et al. 2020](#); [Vidal & Barker 2020](#); [de Vries et al. 2023](#)). The rate of tidal dissipation in convective and stably stratified regions of planets has significant implications for the evolution of planet-moon systems. In the context of Jupiter and Saturn systems, our understanding of tidal evolution has undergone a remarkable transformation. Both planets exhibit tidal dissipation that is one or several orders of magnitude stronger than previous predictions based on moon formation scenarios ([Goldreich & Soter 1966](#)). This intense dissipation is essential to explain their rapid orbital migration, a phenomenon that came to light through precise astrometric measurements ([Lainey et al. 2009, 2012, 2017, 2020](#)). For instance, [Lainey et al. \(2009\)](#) have fitted a dynamical model, including parameterised tidal dissipation, to astrometric observations from 1891 to 2007 of the Galilean satellites. They found that the tidal dissipation is  $k_{22}/Q = (1.1 \pm 0.2) \times 10^{-5}$  (where  $Q$  is the quality factor which evaluates the ratio between the maximum energy stored in the tidal distortion and the energy dissipated during an orbital period), for the asynchronous tide due to Io.

Giant gas planets have traditionally been modelled by a three-layer model. This model entails a central rocky/icy core enveloped by a convective layer comprising metallic hydrogen and helium, which is further encompassed by an outer layer consisting of molecular hydrogen and helium ([Stevenson 1982](#); [Guillot et al. 1994](#)). While this model serves as a reference for gas giant planets, uncertainties persist regarding the specific size of each region and the precise characteristics of the transitions between them. Recent studies have been diverging from the conventional standard model and delving into alternative interior structures. Specifically, [Leconte & Chabrier \(2012\)](#) proposed a model with a gradient of entropy and heavy elements throughout a whole semi-convective (convective regions that are well-mixed and separated by thin interfaces with stable stratification, creating a staircase-like structure in the entropy profile) planet, suppressing the need for a compact core in Jupiter. [Stevenson \(1985\)](#); [Wahl et al. \(2017\)](#); [Debras & Chabrier \(2019\)](#) inves-

tigated the possibility of incorporating stable stratification into their models that takes the form of a substantial but diffuse core that extends beyond the previously believed convective zone. Therefore, significant portions of giant planet interiors are expected to exhibit an unstable entropy gradient, which competes with stable composition gradients. This competition can result in the emergence of double-diffusive convection, leading to the formation of semi-convective layers (e.g. [Garaud 2018](#)). Although these layers cannot be directly observed, their formation introduces distinct physics compared to traditional adiabatic models. Consequently, they have a profound impact on the behaviour and subsequent evolution of the system (e.g. [Debras & Chabrier 2019](#)). We will thus go beyond the classical models of tides that invoke inertial waves in the deep convective envelope ([Ogilvie & Lin 2004](#)), viscoelastic tides in the rocky/icy core ([Remus et al. 2012, 2015](#)), or the combination of both ([Guenel et al. 2014](#)), and instead move towards models that consider gravito-inertial waves propagating in giant planets’ interiors where both convective and stably stratified layers co-exist ([André et al. 2017, 2019](#); [Pontin et al. 2020, 2023](#); [Lin 2023](#); [Dewberry 2023](#)).

In this study, we develop a method to calculate the dissipation of the dynamical tidal response of a self-gravitating, rotating fluid body composed of alternating convective layers and stably stratified layers and which takes into account the viscous, thermal and chemical dissipation processes. This is the first time that global models incorporate the consideration of all three dissipation mechanisms, as opposed to solely focusing on viscosity in previous models. The Coriolis force is fully taken into account, but the centrifugal force is neglected as a first step. This method allows us to compute the imaginary part of the tidal Love number for a given planetary interior model. We will focus specially on the latest Jupiter interior model constrained by Juno data and calculated by [Debras & Chabrier \(2019\)](#).

The paper is structured as follows: In Section 2, we derive the model that allows us to study the dissipation of tidally forced waves. We provide a detailed explanation for the separation of equilibrium tides and dynamical tides. Additionally, we derive the energy equation of tidal flows within this framework. In Section 3, we present the Jupiter’s interior model used in this study. Moving on to Section 4, we outline our methodology for calculating the equilibrium tide in the adiabatic case. Then, we focus on computing the dynamical (wave-like) tide from 2D linear pseudo-spectral numerical simulations, which allow us to derive the associated dissipation. We then present, in Section 5, the novel results obtained of tidal waves in Jupiter. Specifically, we cover the simultaneous inclusion of inertial waves in convection zones and gravito-inertial waves in stably stratified zones along with the evaluation of the dissipation resulting from the different dissipative processes. Finally, we summarise, in Section 6, the key findings and implications of our study.

## 2. Modelling tidally forced waves in giant planet interiors

We study the linear excitation of (gravito-)inertial waves by an external tidal body forcing  $\mathbf{F}_{\text{forcing}}$ . These waves are subject to dissipative processes, namely viscosity, thermal diffusion, and molecular diffusion (we assume that these diffusivities are uniform (cf. 3.2)).

## 2.1. Governing equations

We begin by writing the system of dynamical equations formed by the following set of equations. First, we write the continuity equation :

$$D_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (1)$$

where  $\rho$  is the density,  $\mathbf{V}$  is the velocity field, and  $D_t = \partial_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla)$  is the Lagrangian derivative. Then, we introduce the momentum equation :

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla P - \rho \nabla \Phi + \rho \nu \left( \nabla^2 \mathbf{V} + \frac{1}{3} \nabla \nabla \cdot \mathbf{V} \right) + \mathbf{F}_{\text{forcing}}, \quad (2)$$

where  $P$  is the pressure,  $\Phi$  the gravitational potential,  $\nu$  is the kinematic viscosity assumed to be constant, and  $\mathbf{F}_{\text{forcing}}$  the tidal forcing. We adopt here the Stokes hypothesis, where the bulk viscosity is neglected. We introduce also the heat (energy) equation :

$$\rho T D_t s = k \nabla^2 T, \quad (3)$$

where  $T$  is the temperature,  $k$  is the thermal conductivity, and  $s$  is the specific entropy such as  $ds := c_p \left( \frac{dT}{T} - \nabla_{\text{ad}} \frac{dP}{P} \right)$  with  $\nabla_{\text{ad}} := \left( \frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_s$  the adiabatic temperature gradient and  $c_p$  the specific heat capacity. We neglect here the viscous heating term and suppose  $k$  is constant. The chemical composition equation can be written as :

$$D_t \mu = D_\mu \nabla^2 \mu, \quad (4)$$

where  $\mu$  is the molecular weight and  $D_\mu$  is the molecular diffusion supposed constant. The Poisson equation reads :

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (5)$$

where  $G$  the universal gravitational constant. Finally, the general differential form of the equation of state (Kippenhahn & Weigert 1994) is defined by :

$$\frac{\partial \rho}{\rho} = \alpha \frac{\partial P}{P} - \delta \frac{\partial T}{T} + \phi \frac{\partial \mu}{\mu}, \quad (6)$$

with

$$\alpha := \left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln P} \right)_{T, \mu}, \quad \delta := - \left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_{P, \mu}, \quad \phi := \left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln \mu} \right)_{P, T}. \quad (7)$$

## 2.2. Linearisation

We linearise the hydrodynamic system (Eqs. 1-6) around the hydrostatic steady-state. Each scalar field  $X := \{P, \rho, \Phi, T, \mu\}$  is expanded as the sum of its hydrostatic value  $X_0$  and of the Eulerian perturbations associated with the tides  $X'$ :

$$X(r, \theta, \varphi, t) = X_0(r) + X'(r, \theta, \varphi, t). \quad (8)$$

We neglect here the non-spherical character of the hydrostatic background due to the deformation associated with the centrifugal acceleration and the associated perturbation of the gravitational potential since gravito-inertial waves are only slightly affected by the deformation (e.g. Ballot et al. 2010; Dhouib et al. 2021). This implies that the background is independent of  $\theta$ , so  $X_0 = X_0(r)$ . We can write the velocity field,  $\mathbf{V}$ , as the sum of the large-scale azimuthal velocity associated with the uniform

rotation (as a first step we neglect the differential rotation, since Jupiter's relative differential rotation is 4%, Guillot et al. 2018),  $\Omega$ , and of the wave velocity,  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{V}(r, \theta, \varphi, t) = r \sin \theta \Omega \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{v}(r, \theta, \varphi, t), \quad (9)$$

where  $t$  is time and  $(r, \theta, \varphi)$  are the usual spherical coordinates with their associated unit vector basis  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ . In this case, the linearised system ((1)-(6)) can be rewritten in the rotating frame as

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2\Omega \times \mathbf{v} = -\nabla W - \frac{\nabla \rho_0}{\rho_0} W' + \frac{\rho'}{\rho_0} \mathbf{g}_0 - \nabla \Phi' + \nu \left( \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla \nabla \cdot \mathbf{v} \right) + \mathbf{F}_{\text{forcing}}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T_0 - \nabla_{\text{ad}} \frac{T_0}{P_0} \left( \frac{\partial P'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla P_0 \right) = \kappa \nabla^2 T', \quad (12)$$

$$\frac{\partial \mu'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mu_0 = D_\mu \nabla^2 \mu', \quad (13)$$

$$\nabla^2 \Phi' = 4\pi G \rho', \quad (14)$$

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \alpha \frac{P'}{P_0} - \delta \frac{T'}{T_0} + \phi \frac{\mu'}{\mu_0}, \quad (15)$$

where  $W' = P'/\rho_0$  is the normalised pressure,  $\kappa = k/\rho_0 c_p$  is the thermal diffusivity supposed constant, and  $\mathbf{g}_0 = -\nabla \Phi_0 = \nabla P_0/\rho_0 = -g_0 \mathbf{e}_r$  is the gravitational acceleration.

## 2.3. Non-wavelike and wavelike tides

We decompose the fluctuations associated with the tides into non-wavelike and wavelike parts

$$Y = Y^{\text{nw}} + Y^{\text{w}}, \quad (16)$$

with  $Y := \{v_r, v_\theta, v_\varphi, X'\}$  where  $Y^{\text{nw}}$  is the non-wavelike (equilibrium) tide that satisfies the hydrostatic equilibrium (Zahn 1966a, 1989) and  $Y^{\text{w}}$  the wavelike (dynamical) tide that describes the propagation of waves (Zahn 1975; Ogilvie & Lin 2004).

### 2.3.1. Non-wavelike part

We assume that the non-wavelike part is adiabatic ( $\alpha \approx 1/\Gamma_1$  and  $\kappa = 0$ ), where  $\Gamma_1 = (\partial \ln P_0 / \partial \ln \rho_0)_s$  is the first adiabatic exponent, and non-dissipative ( $\nu = D_\mu = 0$ ). The planet is assumed to be tidally forced by a single potential component  $\mathbf{F}_{\text{forcing}} = -\nabla \Psi$  where

$$\Psi(r, \theta, \varphi, t) = \Psi_\ell(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega_0 t}, \quad \text{with } \Psi_\ell(r) = A \left( \frac{r}{R} \right)^\ell, \quad (17)$$

where

$$A \propto \frac{GR^\ell M_{\text{satellite}}}{a^{\ell+1}} \quad (18)$$

is the forcing amplitude where  $M_{\text{satellite}}$  is the mass of the satellite and  $a$  is the semi-major axis. In our linear numerical calculations, we use a normalised value of  $A$  so we will set  $A = 1$ .  $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$  is an orthonormalised spherical harmonic of degree  $\ell$

and order  $m$  and  $\omega_0 = n\Omega_{\text{orbital}}$  the tidal frequency in the inertial frame centred on the planet ( $n$  labels temporal harmonics of the orbital motion and  $\Omega_{\text{orbital}}$  denotes the orbital frequency). We will only consider the dominant quadrupolar tidal component  $\ell = m = 2$ .

If we suppose that the adiabatic equilibrium tide is stationary in the frame rotating with the fluid inside the planet (Remus et al. 2012), we simplify the linearised heat (Eq. 12) and chemical composition (Eq. 13) equations by neglecting  $\partial P^{\text{nw}}/\partial t$ . In that case, the system of equations that describes the non-wavelike tides can be written as

$$\rho^{\text{nw}} + \nabla \cdot (\rho_0 \xi^{\text{nw}}) = 0, \quad (19)$$

$$-\nabla W^{\text{nw}} - \frac{\nabla \rho_0}{\rho_0} W^{\text{nw}} + \frac{\rho^{\text{nw}}}{\rho_0} g_0 - \nabla \Phi^{\text{nw}} - \nabla \Psi = 0, \quad (20)$$

$$T^{\text{nw}} + \xi_r^{\text{nw}} T_0 \frac{N_t^2}{g_0 \delta} = 0, \quad (21)$$

$$\mu^{\text{nw}} - \xi_r^{\text{nw}} \mu_0 \frac{N_\mu^2}{g_0 \phi} = 0, \quad (22)$$

$$\nabla^2 \Phi^{\text{nw}} = 4\pi G \rho^{\text{nw}}, \quad (23)$$

$$\frac{\rho^{\text{nw}}}{\rho_0} = \frac{1}{\Gamma_1} \frac{P^{\text{nw}}}{P_0} - \delta \frac{T^{\text{nw}}}{T_0} + \phi \frac{\mu^{\text{nw}}}{\mu_0}, \quad (24)$$

where  $\xi^{\text{nw}}$  is the displacement defined as  $\mathbf{v}^{\text{nw}} = \partial \xi^{\text{nw}}/\partial t$  (it is customary to consider the displacement  $\xi^{\text{nw}}$  instead of the velocity  $\mathbf{v}^{\text{nw}}$  in the calculation of the non-wavelike tide since it is a deformation induced by mass redistribution),

$$N_t^2 = -g_0 \delta \frac{d \ln P_0}{dr} \left( \nabla_{\text{ad}} - \frac{d \ln T_0}{d \ln P_0} \right), \quad (25)$$

is the thermal Brunt-Väisälä frequency squared and

$$N_\mu^2 = -g_0 \phi \frac{d \ln \mu_0}{dr}, \quad (26)$$

is the compositional Brunt-Väisälä frequency squared. The sum of these two quantities gives us the total Brunt-Väisälä frequency squared:

$$N^2 = N_t^2 + N_\mu^2 = -g_0 \left( \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} - \frac{1}{\Gamma_1 P_0} \frac{dP_0}{dr} \right). \quad (27)$$

If we write the Eq. (20) as:

$$-\nabla (W^{\text{nw}} + \Phi^{\text{nw}} + \Psi) + \left( \rho^{\text{nw}} - \frac{d\rho_0}{dP_0} P^{\text{nw}} \right) \frac{\nabla P_0}{\rho_0^2} = 0, \quad (28)$$

we deduce that (Ogilvie 2014)

$$P^{\text{nw}} = -\rho_0 (\Phi^{\text{nw}} + \Psi), \quad (29)$$

$$\rho^{\text{nw}} = \frac{d\rho_0}{dP_0} P^{\text{nw}}. \quad (30)$$

The non-wavelike gravitational potential is obtained by solving the Poisson's equation (Eq. 23) which can be rewritten as

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi_\ell^{\text{nw}}}{dr} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \Phi_\ell^{\text{nw}} + 4\pi G \frac{d\rho_0}{dP_0} \rho_0 (\Phi_\ell^{\text{nw}} + \Psi_\ell) = 0, \quad (31)$$

where

$$\Phi^{\text{nw}}(r, \theta, \varphi, t) = \Phi_\ell^{\text{nw}}(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega_0 t}, \quad (32)$$

and with the following boundary conditions to ensure its regularity near the centre ( $r = \eta$ , where  $\eta$  is the aspect ratio) and its continuity at the surface ( $r = 1$ ) (e.g. Ogilvie 2009):

$$\frac{d \ln \Phi_\ell^{\text{nw}}}{d \ln r} = \ell \text{ at } r = \eta R, \quad (33)$$

$$\frac{d \ln \Phi_\ell^{\text{nw}}}{d \ln r} = -(\ell + 1) \text{ at } r = R. \quad (34)$$

By using Eqs. (21) & (22) in Eq. (24) we obtain

$$\frac{1}{\Gamma_1} \frac{P^{\text{nw}}}{P_0} - \frac{\rho^{\text{nw}}}{\rho_0} + \frac{N^2}{g_0} \xi_r^{\text{nw}} = 0, \quad (35)$$

where  $\xi^{\text{nw}} = \xi_r^{\text{nw}} \mathbf{e}_r + \xi_h^{\text{nw}}$  such that  $\xi_h^{\text{nw}} \cdot \mathbf{e}_r = 0$ . From this equation we can derive the expression for the non-wavelike radial displacement

$$N^2 \left( \xi_{r,\ell}^{\text{nw}} + \frac{\Phi_\ell^{\text{nw}} + \Psi_\ell}{g_0} \right) = 0, \quad (36)$$

so when  $N^2 \neq 0$  we obtain

$$\xi_{r,\ell}^{\text{nw}} = -\frac{\Phi_\ell^{\text{nw}} + \Psi_\ell}{g_0}. \quad (37)$$

Subsequently, from Eq. (19) we can derive the non-wavelike horizontal displacement

$$\xi_{h,\ell}^{\text{nw}} = \frac{1}{\ell(\ell+1)} \left( 2\xi_{r,\ell}^{\text{nw}} + r \frac{d\xi_{r,\ell}^{\text{nw}}}{dr} \right), \quad (38)$$

therefore we can deduce that

$$\text{div} \xi^{\text{nw}} = 0. \quad (39)$$

This is the conventional equilibrium tide (Zahn 1966a, 1989; Remus et al. 2012). This solution applies not only to stably stratified zones but also to convective regions since  $N^2$  is not equal to zero but slightly negative and the fact that we generally set  $N^2$  in these zones to zero is only an approximation. Thus, Eqs. (37) & (38) may be applied to the whole fluid domain inside the planet. Terquem et al. (1998) and Goodman & Dickson (1998) argued that this equilibrium tide solution does not apply to convective regions, as they assumed that the convective zone is adiabatically stratified ( $N^2 = 0$ ). A comparison between these two definitions of the non-wavelike tides performed by Barker (2020) highlights the fact that in the interface between convective zones and stably stratified zones, a discontinuity arises in the horizontal component of displacement. This situation poses a problem both physically, since the ellipsoidal deformation and the related displacement has no reason to be discontinuous at convective-radiative boundaries, and numerically when dealing with multi-zone problems. We can therefore use the solution derived by Zahn (1966a, 1989) and Remus et al. (2012) which applies in stably stratified zones, but also in convective regions, since  $N^2$  is not strictly equal to zero, but slightly negative.

### 2.3.2. Wavelike part

To derive the wavelike part, we assume first the Boussinesq approximation (Spiegel & Veronis 1960) which neglects the density variations except where they appear in the buoyancy term, so the acoustic waves are filtered out. This approximation is an essential first step for addressing such a complex problem where the eigenmodes at these low frequencies are generally singular

and are regularised by diffusion processes (see Sec. 6 for the discussion on the use of the anelastic approximation instead of the Boussinesq one). Then, we assume the Cowling approximation (Cowling 1941) which neglects the perturbations of the gravitational potential induced by the waves since the perturbations induced by the non-wavelike tides are dominant (e.g. Ogilvie & Lin 2004). The system of equations that describes the wavelike tides can thus be written as

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^w = 0, \quad (40)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}^w}{\partial t} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}^w = -\nabla W^w + g_0 \left( \delta \frac{T^w}{T_0} - \phi \frac{\mu^w}{\mu_0} \right) \mathbf{e}_r + \nu \nabla^2 \mathbf{v}^w + \mathbf{f}^{nw}, \quad (41)$$

$$\frac{\partial T^w}{\partial t} + v_r^w T_0 \frac{N_t^2}{g_0 \delta} = \kappa \nabla^2 T^w, \quad (42)$$

$$\frac{\partial \mu^w}{\partial t} - v_r^w \mu_0 \frac{N_\mu^2}{g_0 \phi} = D_\mu \nabla^2 \mu^w, \quad (43)$$

$$\frac{\rho^w}{\rho_0} = -\delta \frac{T^w}{T_0} + \phi \frac{\mu^w}{\mu_0}, \quad (44)$$

with

$$\mathbf{f}^{nw} = -\frac{\partial \mathbf{v}^{nw}}{\partial t} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}^{nw}, \quad (45)$$

the forcing term which arises when solving the non-wavelike tides as a residual force, as the non-wavelike does not satisfy the equation of motion due to the omission of inertial forces associated with this flow. This force encompasses the acceleration of the non-wavelike tide and the Coriolis acceleration applied to it, and will force the gravito-inertial tidal waves (see also Ogilvie 2005; André et al. 2019).

**Non-dimensional system:** We choose the planet's radius  $R$  for the length scale and  $(2\Omega)^{-1}$  for the timescale ( $t = \tau/2\Omega$ ). Therefore, we can define the normalised quantities as follows  $\mathbf{v}^w = 2\Omega R \mathbf{u}$ ,  $W^w = 4\Omega^2 R^2 \Pi$ ,  $g_0 = 4\Omega^2 R g_0^*$ ,  $\mathbf{f}^{nw} = 4\Omega^2 R \mathbf{f}^*$ , and the normalised differential operator as  $R\nabla = \nabla^*$ . We write the normalised temperature and chemical composition as  $T^w = T_i \Theta$ ,  $\mu^w = \mu_i M$ ,  $T_0 = T_i T_0^*$  and  $\mu_0 = \mu_i \mu_0^*$ , where  $T_i$  and  $\mu_i$  are the temperature and the molecular weight respectively at the inner boundary. So, we can write the normalised system as

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (46)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} + \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = -\nabla \Pi + \left( \frac{\delta}{T_0^*} \Theta - \frac{\phi}{\mu_0^*} M \right) g_0^* \mathbf{e}_r + E \nabla^{*2} \mathbf{u} + \mathbf{f}^*, \quad (47)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \frac{T_0^* N_t^{*2}}{g_0^* \delta} u_r = \frac{E}{\text{Pr}} \nabla^{*2} \Theta, \quad (48)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \tau} - \frac{\mu_0^* N_\mu^{*2}}{g_0^* \phi} u_r = \frac{E}{\text{Sc}} \nabla^{*2} M, \quad (49)$$

where we have defined the normalised Brunt–Väisälä frequencies

$$N_t^{*2} = \frac{N_t^2}{4\Omega^2} \text{ and } N_\mu^{*2} = \frac{N_\mu^2}{4\Omega^2}. \quad (50)$$

These equations are governed by three dimensionless numbers : the Prandtl number defined as the ratio of the kinematic viscosity ( $\nu$ ) to the thermal diffusivity ( $\kappa$ ) :

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}, \quad (51)$$

the Schmidt number defined as the ratio of the kinematic viscosity ( $\nu$ ) to the molecular diffusivity ( $D_\mu$ ) :

$$\text{Sc} = \frac{\nu}{D_\mu}, \quad (52)$$

and the Ekman number which compares the ratio between the viscous force and the Coriolis force :

$$E = \frac{\nu}{2\Omega R^2}. \quad (53)$$

#### 2.4. Energy equation

From the scalar product between  $\bar{\mathbf{u}}$  (where  $\bar{\square}$  denotes the complex conjugate) and the momentum equation (47) and by using Eqs. (48) & (49), we obtain the energy equation

$$\partial_\tau (E_k + E_{p,\text{th}} + E_{p,\mu}) = P_{\text{acou}} + D_{\text{th}} + D_{\text{ch}} + D_{\text{visc}} + P_{\text{tide}}, \quad (54)$$

with

$$E_k = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 \quad (55)$$

the specific kinetic energy,

$$E_{p,\text{th}} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \frac{\delta g_0^*}{T_0^* N_t^*} \right)^2 |\Theta|^2 & \text{if } N_t^2 \neq 0 \\ 0 & \text{if not} \end{cases} \quad (56)$$

the specific potential energy associated with thermal stratification,

$$E_{p,\mu} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \frac{\phi g_0^*}{\mu_0^* N_\mu^*} \right)^2 |M|^2 & \text{if } N_\mu^2 \neq 0 \\ 0 & \text{if not} \end{cases} \quad (57)$$

the specific potential energy associated with chemical stratification,

$$P_{\text{acou}} = -\nabla^* \Pi \cdot \bar{\mathbf{u}} \quad (58)$$

the specific work of pressure forces which can be related to the acoustic flux  $\nabla \cdot (P^* \mathbf{u})$ ,

$$D_{\text{th}} = \begin{cases} \frac{E}{\text{Pr}} \left( \frac{\delta g_0^*}{T_0^* N_t^*} \right)^2 \bar{\Theta} \nabla^{*2} \Theta & \text{if } N_t^2 \neq 0 \\ 0 & \text{if not} \end{cases} \quad (59)$$

the specific power dissipated by thermal diffusion,

$$D_{\text{ch}} = \begin{cases} \frac{E}{\text{Sc}} \left( \frac{\phi g_0^*}{\mu_0^* N_\mu^*} \right)^2 \bar{M} \nabla^{*2} M & \text{if } N_\mu^2 \neq 0 \\ 0 & \text{if not} \end{cases} \quad (60)$$

the specific power dissipated by chemical diffusion,

$$D_{\text{visc}} = E \nabla^{*2} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{u}} \quad (61)$$

the specific power dissipated by viscous friction,

$$P_{\text{tide}} = \mathbf{f}^* \cdot \bar{\mathbf{u}} \quad (62)$$

the specific tidal power. Then after spatial integration over the volume  $V$ , we obtain

$$\partial_t (\bar{E}_k + \bar{E}_{p,\text{th}} + \bar{E}_{p,\mu}) = \bar{P}_{\text{acou}} + \bar{D}_{\text{th}} + \bar{D}_{\text{ch}} + \bar{D}_{\text{visc}} + \bar{P}_{\text{tide}}, \quad (63)$$

where  $\bar{\square} = \frac{1}{2} \Re \left[ \int_V \square dV \right]$ . Here, we assume that the density is constant by adopting the Boussinesq approximation, allowing us to simplify it in this equation on both sides.

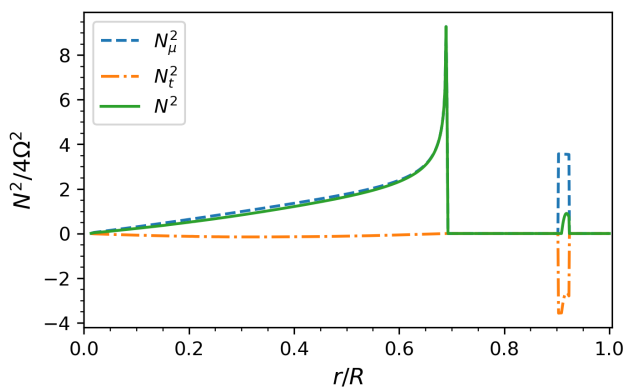


Fig. 1: Profiles of the compositional ( $N_\mu^2$ ), thermal ( $N_c^2$ ), and total ( $N^2$ ) Brunt–Väisälä frequencies squared normalized by the inertial frequencies squared ( $4\Omega^2$ ) as a function of the normalised radius  $r/R$ .

### 3. Interior model of Jupiter as revealed by Juno

#### 3.1. Five-layer model

In order to assess the dissipation of dynamical tides in Jupiter, we need to prescribe the background state profiles of the different quantities and the Brunt–Väisälä frequencies. Recent observations have made significant advancements in understanding the internal structure of gas giant planets, such as Jupiter and Saturn, yet some degrees of uncertainties remains. As we can see in Fig. 1, the internal structure model computed by [Debras & Chabrier \(2019\)](#) to reproduce Jupiter’s multipolar moments as measured by Juno, assumes an extended diluted core of radius  $0.69R$  treated as a stably stratified fluid layer (a similar zone is probably also present in Saturn; [Mankovich & Fuller 2021](#)) and a convective envelope that features a small stably stratified layer between  $0.9R$  and  $0.92R$ , possibly resulting from H-He immiscibility ([Debras & Chabrier 2019](#)). The equation of state used to compute this model is the one derived in [Chabrier & Debras \(2021\)](#). As illustrated in Fig. 2, starting from its surface and moving towards the core, Jupiter is thought to exhibit the following layers:

- Gaseous envelope: this outermost layer is characterized by convective motion and differential rotation.
- Transitional stably stratified zone: this region is considered to be potentially semi-convective. It is also known as a double-diffusive zone, as proposed by [Leconte & Chabrier \(2012\)](#).
- Internal convective zone: this layer is magnetised and composed of metallic hydrogen and helium, and it is rotating quasi-uniformly since if the rotation were significantly different from solid rotation, the ohmic dissipation would become inexplicable (e.g. [Liu et al. 2008](#); [Guillot et al. 2018](#)).
- Stably stratified zone : this layer is located closer to the core and may exhibit double diffusion convection or a diluted core structure due to stabilizing composition gradients ([Leconte & Chabrier 2012, 2013](#); [Wilson & Militzer 2012b,a](#); [Wahl et al. 2013](#); [González-Cataldo et al. 2014](#); [Mazevet et al. 2015](#); [Wahl et al. 2017](#)).
- Potential unstable solid core of size 1.4% of radius: made up of rock or ice. While this size may slightly vary based on different models, we are unable to construct a model with a

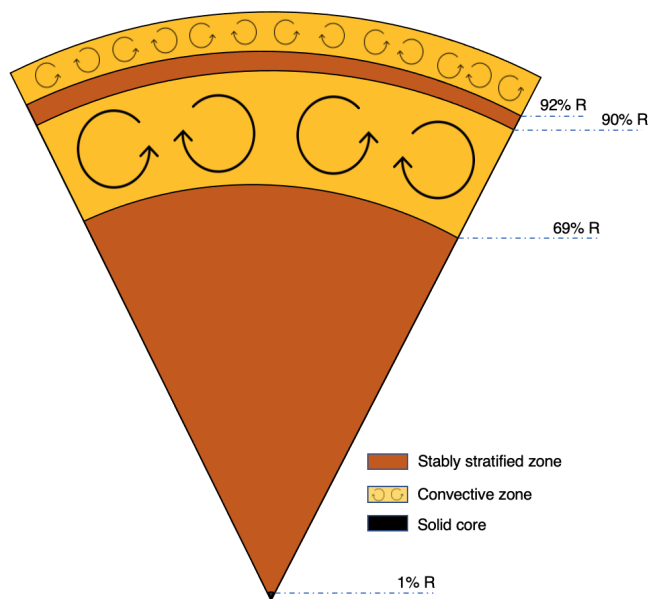


Fig. 2: Schematic of the model of Jupiter’s interior used in this study.

substantial core, bigger than  $\sim 10\%$ , that respect the Juno’s constraints (e.g. [Debras & Chabrier 2019](#)).

Note that as a first step, we will not take into account in this study the differential rotation and magnetism.

#### 3.2. Transport properties

Using the transport properties outlined in [Stevenson & Salpeter \(1977\)](#), we perform calculations to determine the various molecular diffusivities within Jupiter and the associated dimensionless numbers (the expressions of these numbers are given in Appendix A). The radial profile of these dimensionless numbers (Prandtl, Schmidt and Ekman) is displayed in Fig. 3. We can see that the influence of viscous forces is generally small compared to the Coriolis acceleration. Consequently, the Ekman number, which characterizes the ratio of viscous to Coriolis forces, becomes extremely low, typically on the order of  $10^{-17}$  when assuming molecular viscosity. However, due to the challenges in accurately resolving shear layers at very low diffusivity levels, such Ekman number regimes cannot be reached numerically. The numerical strategy adopted is therefore to reach the lowest possible Ekman number values, hoping to have reached a regime where the scaling laws obtained will apply to the lower astrophysical values. Moreover, this Ekman number value is calculated with a molecular viscosity value, whereas inertial tidal waves could in reality be subject to a turbulent effective viscosity ([Ogilvie & Lin 2004, 2007](#); [Mathis et al. 2016](#); [Duguid et al. 2020](#); [Vidal & Barker 2020](#); [de Vries et al. 2023](#)) whose larger values would lead to a larger Ekman number. Indeed, by employing the mixing-length theory, we can make a rough estimation of the turbulent effective viscosity in convective regions for a simple model of convective viscosity, resulting in an Ekman number of approximately  $10^{-7}$  ([Guillot et al. 2004](#)). On the other hand, the Prandtl number, which measures the ratio of viscosity to thermal diffusivity, is low within the planet, approximately  $10^{-2}$ , but increases to around 1 near the surface (at  $r > 0.9R$ ). Regarding the Schmidt number, which characterizes the ratio of viscosity



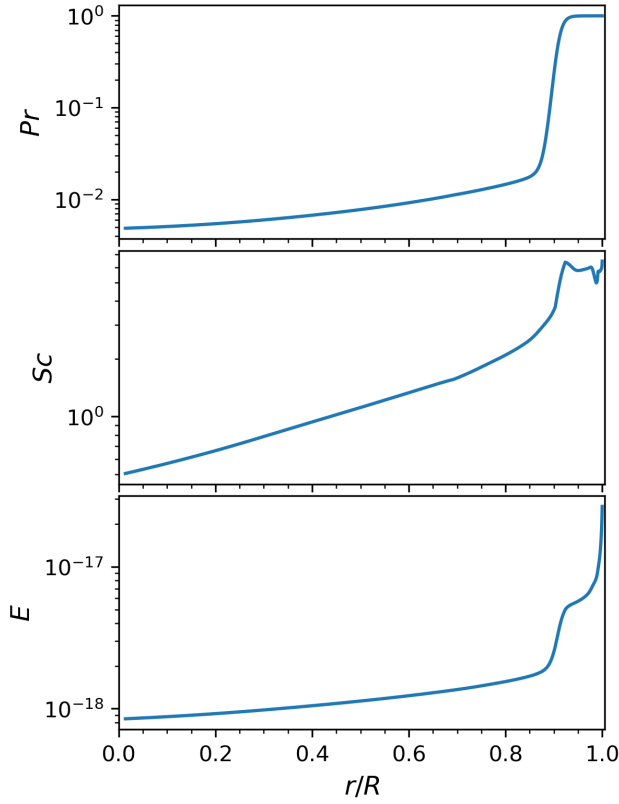


Fig. 3: Prandtl, Schmidt, and Ekman number profiles as a function of the normalised radius based on [Stevenson & Salpeter \(1977\)](#).

to molecular diffusivity, it remains close to unity throughout the planet. As a first step, we will assume in our simulations that these dimensionless numbers are constant. Then, we can study the impact of their variations by exploring the parameter domain.

#### 4. Numerical resolution

Our attention in this paper will be directed towards the  $\ell = m = 2$  component of the tide, as it is commonly considered to be the most prominent for quasi-circular and coplanar two-body system ([Mathis & Le Poncin-Lafitte 2009](#); [Ogilvie 2014](#)).

##### 4.1. Solving the non-wavelike part

Our goal here is to find the non-wavelike displacement  $\xi^{\text{nw}}$  as it is needed in the expression for the effective forcing driving dynamical tides (Eq. 45). Therefore, we must first solve Poisson’s equation (Eq. 31) numerically with boundary conditions (33) and (34) using the density and pressure background profiles ( $\rho_0$  and  $P_0$ ) that we compute using the structure model defined in Sec. (3.1). Then we can easily compute the vertical and horizontal non-wavelike displacement using Eqs. (37) & (38). We can see in Fig. 4 these quantities as a function of the normalised radius for  $A = 1$  and  $\ell = 2$ . We emphasize here that setting the forcing value to  $A = 1$  gives very high displacement values, while a realistic forcing value (Eq. 18) would give much lower values. Since we are dealing here with the linear case, the choice of  $A$  has no impact on our results (ultimately, we want to cal-

culate the Love number defined just after in Eq. (64), which is a ratio where  $A$  will be simplified).

Once the solution to Poisson’s equation (Eq. 31) is obtained numerically, the Love number ([Love 1911](#)) is readily given by

$$k_\ell^{\text{nw}} = \frac{\Phi_\ell^{\text{nw}}(r = R)}{\Psi_\ell(r = R)}. \quad (64)$$

Note that this includes only non-wavelike tides, and it is real since we do not take into account its dissipation. For  $\ell = 2$  we find that  $k_2^{\text{nw}} = 0.638$ . However, it is important to acknowledge that our assumption of a spherical planet does not hold true for Jupiter, as its rapid rotation causes it to be flattened, leading to a discrepancy between our value and the calculated values by [Wahl et al. \(2020\)](#). In fact, they investigated the non-rotating case and found a value of  $k_2^{\text{nw}} = 0.536$ . However, when accounting for the planet’s rotation, they determined that the value changes to  $k_2^{\text{nw}} = 0.589$  for  $m = 2$ . It is worth noting that the Love number becomes dependent on the azimuthal order  $m$  when considering the effects of rotation. Our approach takes into account rotation while neglecting flattening, whereas the method of [Wahl et al. \(2020\)](#) takes into account both rotation and induced deformation simultaneously. Since our main objective in this study is to understand wavelike tides, we compute the non-wavelike tides only to calculate the forcing term. Therefore, we can omit the flattening as a first step, considering that the forcing term will be only slightly modified. The discrepancy of the calculated equilibrium Love number in comparison to the observed value ( $k_{22} = 0.565$ , [Durante et al. 2020](#)) suggests uncharacterised dynamical (wavelike) contribution due to tidal waves.

##### 4.2. Solving the wavelike part

We expand the velocity, temperature, molecular weight and reduced pressure on spherical harmonics ([Rieutord 1987](#)) as

$$\mathbf{u} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left( u_\ell^m(r) \mathbf{R}_\ell^m(\theta, \varphi) + v_\ell^m(r) \mathbf{S}_\ell^m(\theta, \varphi) + w_\ell^m(r) \mathbf{T}_\ell^m(\theta, \varphi) \right) e^{-i\tilde{\omega}\tau}, \quad (65)$$

$$\Theta = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} t_\ell^m(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi) e^{-i\tilde{\omega}\tau}, \quad (66)$$

$$M = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \mu_\ell^m(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi) e^{-i\tilde{\omega}\tau}, \quad (67)$$

$$\Pi = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} p_\ell^m(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi) e^{-i\tilde{\omega}\tau}, \quad (68)$$

with  $\mathbf{R}_\ell^m = Y_\ell^m \mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{S}_\ell^m = \nabla Y_\ell^m$ ,  $\mathbf{T}_\ell^m = \nabla \times \mathbf{R}_\ell^m$  and  $\tilde{\omega} = \omega/2\Omega$  the normalised frequency associated with the tidal forcing in the rotating frame. Then, the projection of the linearised dimensionless system (Sect. 4.2.1) and the associated boundary conditions (Sect. 4.2.2) are solved using the linear 2D pseudo-spectral code LSB (Linear Solver Builder, [Valdettaro et al. 2007](#)). These equations are discretised in the radial direction on the Gauss-Lobatto collocation nodes associated with Chebyshev polynomials. They are truncated at order  $N_r$  for the Chebyshev basis and at order  $N_\ell$  for the spherical harmonics basis. The governing equations (69) to (74) and adopted boundary conditions (4.2.2) form a linear system of the form  $\mathcal{M}X = F$  which is solved on each point of the radial grid, given the value of the forcing frequency  $\tilde{\omega}$  and azimuthal order  $m$ .

$$A = 1, \ell = 2$$

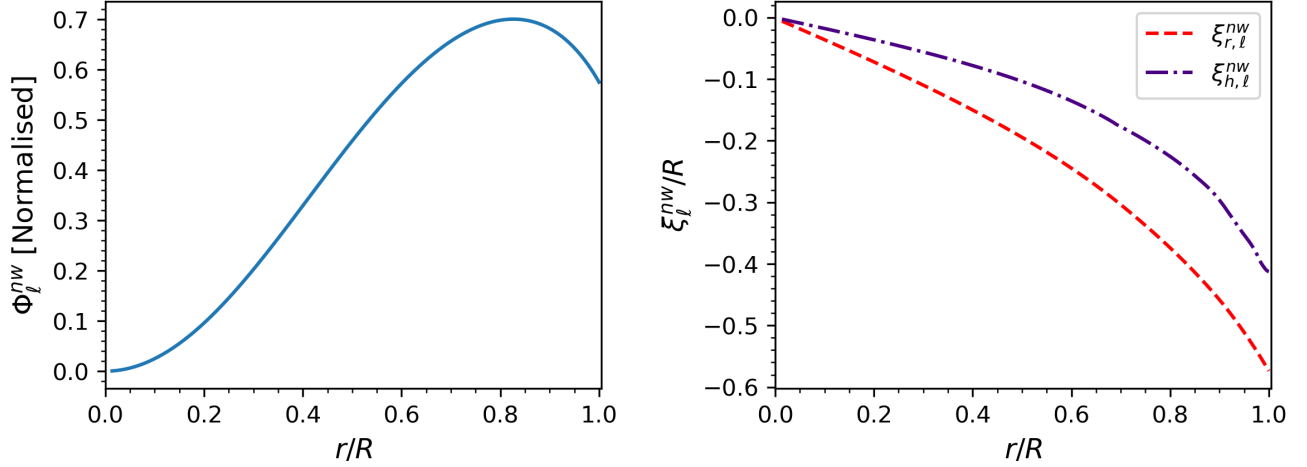


Fig. 4: Non-wavelike (equilibrium) gravitational potential (left) and the corresponding radial and horizontal displacements (right) as a function of the normalised radius for  $A = 1$  and  $\ell = 2$ .

#### 4.2.1. System of equations to solve

Using equations (65-68) and the expressions of the operators in the spherical harmonics basis specified in Appendix B, we can rewrite the system (46)-(49) as

$$d_r u_\ell^m + \frac{2}{r} u_\ell^m - \ell(\ell+1) \frac{v_\ell^m}{r} = 0, \quad (69)$$

$$E \Delta_\ell u_\ell^m - \left( \frac{2E}{r^2} - i\tilde{\omega} \right) u_\ell^m + \left( im + \frac{2E}{r^2} \ell(\ell+1) \right) v_\ell^m - \beta_{\ell-1}^\ell w_{\ell-1}^m - \beta_{\ell+1}^\ell w_{\ell+1}^m - d_r p_\ell^m + \frac{\delta g_0^*}{T_0^*} u_\ell^m - \frac{\phi g_0^*}{\mu_0^*} \mu_\ell^m = -f_R^{\ell,m}, \quad (70)$$

$$E \Delta_\ell v_\ell^m + \left( i\tilde{\omega} + \frac{im}{\ell(\ell+1)} \right) v_\ell^m + \left( \frac{2E}{r^2} + \frac{im}{\ell(\ell+1)} \right) u_\ell^m - \gamma_{\ell-1}^\ell w_{\ell-1}^m - \gamma_{\ell+1}^\ell w_{\ell+1}^m - \frac{p_\ell^m}{r} = -f_S^{\ell,m}, \quad (71)$$

$$E \Delta_\ell w_\ell^m + \left( i\tilde{\omega} + \frac{im}{\ell(\ell+1)} \right) w_\ell^m + \gamma_{\ell-1}^\ell v_{\ell-1}^m + \gamma_{\ell+1}^\ell v_{\ell+1}^m - \frac{\alpha_{\ell-1}^\ell}{\ell} u_{\ell-1}^m + \frac{\alpha_{\ell+1}^\ell}{\ell+1} u_{\ell+1}^m = -f_T^{\ell,m}, \quad (72)$$

$$\frac{E}{Pr} \Delta_\ell t_\ell^m - u_\ell^m \frac{T_0^* N_t^{*2}}{g_0^* \delta} + i\tilde{\omega} t_\ell^m = 0, \quad (73)$$

$$\frac{E}{Sc} \Delta_\ell \mu_\ell^m + u_\ell^m \frac{\mu_0^* N_\mu^{*2}}{g_0^* \phi} + i\tilde{\omega} \mu_\ell^m = 0, \quad (74)$$

where

$$d_r \square = \frac{d\square}{dr}, \quad (75)$$

$$d_{r^2}^2 \square = \frac{d^2 \square}{dr^2}, \quad (76)$$

$$\Delta_\ell \square = d_{r^2}^2 \square + \frac{2}{r} d_r \square - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \square, \quad (77)$$

and the coupling coefficients, which all depend on  $m$ , are given by

$$\alpha_{\ell-1}^\ell = \alpha_{\ell-1}^{\ell-1} = \sqrt{\frac{\ell^2 - m^2}{(2\ell-1)(2\ell+1)}}, \quad (78)$$

$$\beta_{\ell-1}^\ell = (\ell-1)\alpha_{\ell-1}^\ell, \quad \beta_{\ell+1}^\ell = -(\ell+2)\alpha_{\ell+1}^\ell, \quad (79)$$

$$\gamma_{\ell-1}^\ell = \frac{\ell-1}{\ell} \alpha_{\ell-1}^\ell, \quad \gamma_{\ell+1}^\ell = \frac{\ell+2}{\ell+1} \alpha_{\ell+1}^\ell. \quad (80)$$

Since we only consider the dominant quadrupolar tidal component  $\ell = m = 2$ , the forcing term can be written as

$$f^* = f_R^{\ell,m}(r) \mathbf{R}_\ell^m + f_S^{\ell,m}(r) \mathbf{S}_\ell^m + f_T^{\ell,m}(r) \mathbf{T}_\ell^m, \quad (81)$$

with

$$f_R^{\ell,m} = \left[ \tilde{\omega}^2 \xi_{r,\ell}^{\text{nw}} + \frac{m\tilde{\omega}}{\ell(\ell+1)} (2\xi_{r,\ell}^{\text{nw}} + rd_r \xi_{r,\ell}^{\text{nw}}) \right] \delta(\ell-2) \delta(m-2), \quad (82)$$

$$f_S^{\ell,m} = \left[ \frac{m\tilde{\omega}}{\ell^2(\ell+1)^2} ((\ell(\ell+1)+2)\xi_{r,\ell}^{\text{nw}} + rd_r \xi_{r,\ell}^{\text{nw}}) + \frac{\tilde{\omega}^2}{\ell(\ell+1)} (2\xi_{r,\ell}^{\text{nw}} + rd_r \xi_{r,\ell}^{\text{nw}}) \right] \delta(\ell-2) \delta(m-2), \quad (83)$$

$$f_T^{\ell,m} = -i\tilde{\omega} \frac{\alpha_{\ell-1}^\ell}{\ell^2} (-(\ell-2)\xi_{r,\ell-1}^{\text{nw}} + rd_r \xi_{r,\ell-1}^{\text{nw}}) \delta(\ell-3) \delta(m-2), \quad (84)$$

obtained by projecting Eq. (45) on the spherical harmonics basis.

#### 4.2.2. Boundary conditions

Given our specific emphasis on (gravito-)inertial modes while excluding surface gravity modes, we can adopt the classical boundary conditions established in pioneering studies by [Dintrans et al. \(1999\)](#); [Dintrans & Rieutord \(2000\)](#); [Valdettaro et al. \(2007\)](#); [Ogilvie & Lin \(2004\)](#); [Ogilvie \(2005\)](#); [Ogilvie & Lin \(2007\)](#); [Ogilvie \(2009\)](#). Namely, we employ impenetrable and

stress-free boundary conditions, while assuming that the spheres bounding the fluid domain can absorb any flux of heat or chemical elements while remaining at constant temperature and molecular weight. Namely, the radial functions must satisfy the following inner ( $r = \eta$ ) and outer ( $r = 1$ ) boundary conditions

$$u_\ell^m = 0, \quad (85)$$

$$\frac{dv_\ell^m}{dr} + \frac{u_\ell^m - v_\ell^m}{r} = 0, \quad (86)$$

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{w_\ell^m}{r} \right) = 0, \quad (87)$$

$$t_\ell^m = 0, \quad (88)$$

$$\mu_\ell^m = 0. \quad (89)$$

## 5. Results

Having established the framework for our numerical work, we now present the numerical results. We will discuss the basic properties of the forced waves before considering how the dissipative properties depend on the model’s key parameters, and discuss the implications for astrophysical tidal evolution. Our calculations are focused on the frequency range of  $-1 < \tilde{\omega} < -0.5$ , which is directly relevant to the tidal frequencies of the Galilean moons. It is worth noting that the negative tidal frequency indicates that the tidal forcing is retrograde in the co-rotating frame with the planet, based on our convention.

### 5.1. Energies

In this section, we present our numerical results for the different types of energy examined in our study, with a specific focus on the forced mode  $\tilde{\omega} = -0.76$  (the frequency excited in Jupiter by Io for  $m = n = 2$ ). We adopt typical values for various dimensionless numbers, namely  $E = 10^{-7}$ ,  $Pr = Sc = 1$ . Furthermore, we set the aspect ratio to  $\eta = 0.014$  (because of the solid core of size 1.4% of radius, see Sec. 3.1). The left panel of Fig. 5 illustrates the spatial distribution of the kinetic energy of this mode in a meridional quarter-plane since it is symmetrical with respect to the equator. Notably, we can observe two distinct types of modes. Firstly, there are gravito-inertial modes that exist within the inner stably stratified regions (and theoretically within the thin outer stably stratified layer, but it is very thin so it is not clear here). As expected, we find equatorial trapping of sub-inertial ( $\tilde{\omega} < 1$ ) gravito-inertial modes (e.g. Dintrans et al. 1999; Dintrans & Rieutord 2000; Mathis 2009). Secondly, we have inertial modes present in the two convective zones, which are separated by the thin stably stratified layer. These modes exhibit multiple reflections at the boundaries of their propagation zones, following specific trajectories known as attractors (Maas & Lam 1995). We note that the attractor starting from the critical latitude (e.g. Rieutord et al. 2001; Rieutord & Valdetaro 2018) in the inner convective zone and reflected at the pole, at the surface, at the equator and at the interface with the innermost stably-stratified zone seems to appear as well, regardless of the thin intermediate stably stratified region.

We represent also in this figure the trajectories of characteristics with white curves, while the surfaces at which they undergo reflections are depicted by brown curves. These paths of characteristics are calculated based on the second-order partial differential equation satisfied by the pressure perturbation in the inviscid and short-wavelength approximations (see Mirouh et al. (2016) for the detailed derivation). The inclusion of these curves

provides a valuable means of understanding the solutions to non-dissipative problems and validation of numerical calculations. We find that the patterns formed by the characteristics are in very good agreement with the numerical calculation, especially in the inner stably stratified layers. In convective zones, the paths of characteristics follow straight lines that maintain a constant angle relative to the rotation axis (z-axis) in order to respect the inertial wave dispersion relation. In contrast, stably stratified regions introduce a distinct behaviour where the characteristics become curved, owing to the distortion caused by the presence of the stable stratification.

The middle and right panels of Fig. 5 reveal that the chemical and thermal energies primarily concentrate within the stably stratified regions, as the thermal and chemical Brunt-Väisälä frequencies approach zero within convective zones. Consequently, at the interfaces of the convective zones, both potential energies have a finite transition to zero.

To ensure the numerical convergence for this mode, we employ a spatial resolution of  $(N_r, N_\ell) = (300, 301)$ . This convergence can be appreciated by inspection at Fig. 6, where we display the spectral content of the velocity field components, pressure, temperature, and molecular weight for the same forced mode. In the top panel, we show the maximum Chebyshev coefficients  $C_k$  as a function of the Chebyshev order  $k$ , selecting the highest value among all the spherical harmonics coefficients corresponding to a given  $k$ . Likewise, the bottom panel displays the maximum spherical harmonics coefficients  $C_\ell$  as a function of the spherical harmonic degree  $\ell$ , considering the highest value among all Chebyshev coefficients. This spatial resolution  $(N_r, N_\ell) = (300, 301)$  has proved to be sufficient up to values of  $E \approx 10^{-8}$ .

### 5.2. Dissipation spectra

We analyse three distinct forms of dissipation: viscous, thermal, and chemical. The total dissipation is defined as follows:

$$\mathcal{D}(\tilde{\omega}) = \tilde{D}_{\text{th}} + \tilde{D}_{\text{ch}} + \tilde{D}_{\text{visc}}. \quad (90)$$

Fig. 7 shows the viscous ( $\tilde{D}_{\text{visc}}$ ), thermal ( $\tilde{D}_{\text{th}}$ ), molecular ( $\tilde{D}_{\text{ch}}$ ) and total ( $\mathcal{D}$ ) dissipation rates integrated over the volume as a function of the normalised forcing frequency ( $\tilde{\omega}$ ) for  $m = 2$ ,  $E = \{10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}\}$ , and  $Pr = Sc = 1$ . We observe a significant frequency dependence, indicating a strong relationship between dissipation and the forcing frequency. Moreover, our analysis reveals that the dominant mechanism contributing to dissipation is viscosity, surpassing both thermal and chemical dissipations in magnitude. We ensure that the total energy is conserved  $\mathcal{D} \approx \tilde{P}_{\text{tide}}$  to a given degree of confidence (maximum relative error of 5%). Note that given our boundary conditions (Sec. 4.2.2),  $P_{\text{acou}} \approx 0$ .

Following the comparison method adopted by André et al. (2019) in Cartesian coordinates, we also computed the dissipation spectra for the old vision of Jupiter’s interior, where there is a single purely convective zone extending from  $r = \eta = 0.014$  to  $r = 1$ . In this scenario, the only form of dissipation present is viscous dissipation, as thermal and chemical dissipation are negligible due to  $N_\mu^2 = N_t^2 = 0$ . The dissipation due to viscosity is represented by the magenta dashed line in Fig. 7. We can see that the spectra in this case exhibit a smooth profile, devoid of any pronounced peaks at specific frequencies, unlike the four-layer model. Additionally, it is worth noting that the dissipation in this case is significantly weaker, ranging from two to four orders of magnitude lower.

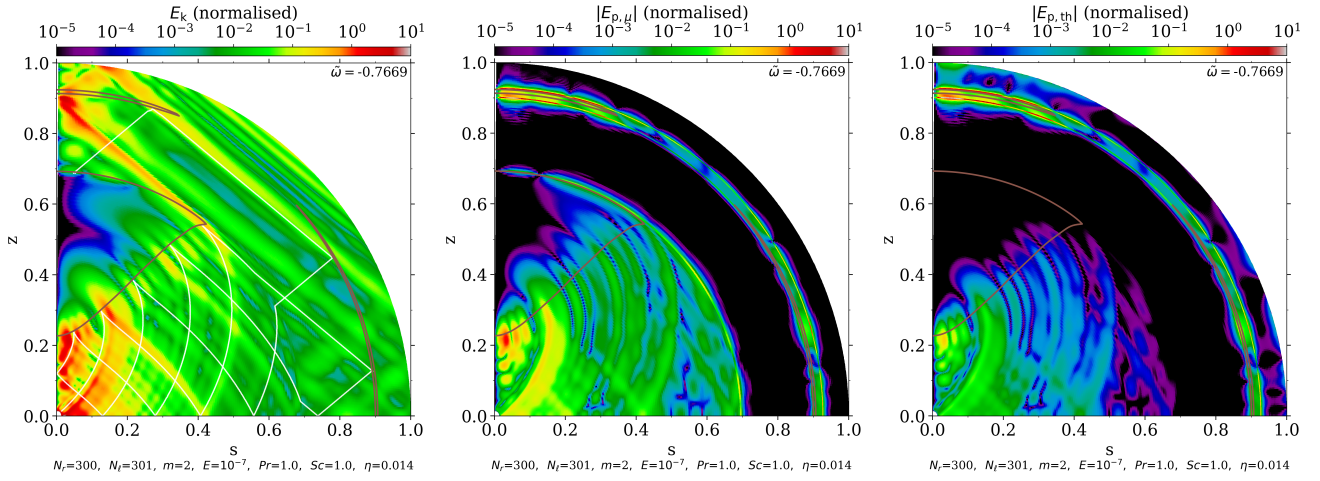


Fig. 5: Meridional cut ( $z = r \cos \theta$  and  $s = r \sin \theta$ ) of the dimensionless kinetic energy (left), potential energy associated with chemical (middle), and potential energy associated thermal stratification (right) of the forced mode  $\bar{\omega} = -0.76$  for  $m = 2$ ,  $E = 10^{-7}$ ,  $Pr = Sc = 1$  with a spatial resolution  $(N_r, N_\ell) = (300, 301)$ . The trajectories of characteristics are represented with white curves, while the surfaces at which they undergo reflections with brown curves.

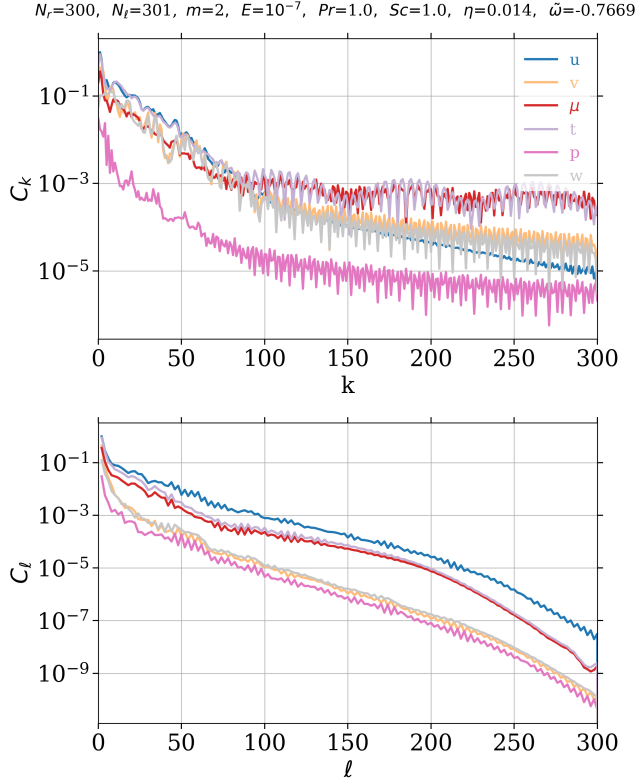


Fig. 6: Spectral content of the velocity field components ( $u, v, w$ ), pressure ( $p$ ), temperature ( $t$ ), and molecular weight ( $\mu$ ) of the forced mode  $\bar{\omega} = -0.76$  for  $m = 2$ ,  $E = 10^{-7}$ ,  $Pr = Sc = 1$ . Chebyshev and spherical harmonics coefficients are shown in the top and bottom panels, respectively.

We focus also on the influence of Ekman number variations on dissipation spectra. Our results reveal that varying the Ekman number has a significant impact on the energy dissipation.

Indeed, we find an increase in the number of peaks in the dissipation spectra as the Ekman number decreases. More specifically, the decrease in the Ekman number leads to lower viscosity which results in higher and narrower resonance peaks associated with gravito-inertial waves, making the spectrum more complex, whereas all peaks are smoothed when a higher viscosity is used. This result is consistent with the predictions of [Auclair Desrotour et al. \(2015\)](#) who studied in a Cartesian box the dissipation of gravito-inertial waves by viscosity and thermal diffusion in a stably stratified medium. We also explore the impact of the Schmidt ( $Sc = \{0.5, 6\}$ ) and Prandtl ( $Pr = \{0.5, 2\}$ ) numbers in Figs. 8 and 9, respectively. We find that decreasing the Schmidt (Prandtl) number increases the molecular (thermal) dissipation. However, the total dissipation is not modified, since the viscous dissipation is dominant in this parameter regime.

### 5.3. Quality factor and Love number

To establish a connection between our numerical computations and observations, it is necessary to calculate the imaginary component of the Love number from the total dissipation. This calculation enables us to conduct a comprehensive analysis by comparing our numerical models with actual observations by performing quantitative and qualitative comparisons.

The imaginary part of the Love number  $\Im [k_{\ell m}]$  plays a crucial role in characterising the response of a celestial body to tidal forces, capturing the phase difference between the applied tidal forcing and the resulting response. It represents the transfer of energy and angular momentum within the system. By establishing a relation between the overall dissipation and the imaginary part of the Love number, we gain valuable insights into the evolution of the system. This relation can be expressed as in [Ogilvie \(2013\)](#)

$$\Im [k_{\ell m}(\bar{\omega})] = \frac{GM}{4R^3\Omega^2} \frac{8\pi}{(2\ell + 1)\bar{\omega}} \mathcal{D}, \quad (91)$$

then we can define the modified tidal quality factor as

$$Q'_{\ell m}(\bar{\omega}) = \text{sign}(\bar{\omega}) \frac{3}{2\Im [k_{\ell m}(\bar{\omega})]}, \quad (92)$$

which has the advantage of combining the tidal quality factor  $Q$  with the real part of the Love number  $\Re[k_{\ell m}]$

$$\Im[k_{\ell m}(\tilde{\omega})] = \text{sign}(\tilde{\omega}) \frac{\Re[k_{\ell m}(\tilde{\omega})]}{Q_{\ell m}(\tilde{\omega})}. \quad (93)$$

Lainey et al. (2009) have fitted a dynamical model including parameterised tidal dissipation, to astrometric observations from 1891 to 2007 of the Galilean satellites. They found that  $\Im[k_{22}] = 1.1 \times 10^{-5}$  ( $Q'_{22} = -1.4 \times 10^5$ ), for the asynchronous tide ( $\ell = m = n = 2$ ) due to Io ( $\tilde{\omega} = -0.76$ ).

Using Eqs. (91) & (92) we compute the imaginary part of the Love number and the modified tidal quality factor, and we represent them as a function of the normalized forcing frequency in Fig. 10 and the middle panel of Fig. 11 for  $m = 2$ ,  $E = 10^{-7}$ , and  $\text{Pr} = \text{Sc} = 1$ . We find a significant discrepancy between computed values of the imaginary part of the Love number (the modified tidal quality factor) due to Io and the observed ones, differing by roughly two order of magnitude (the computed imaginary part of the Love number is  $8.8 \times 10^{-4}$  whereas the observed one is  $1.1 \times 10^{-5}$ ). Consequently, our calculations tend to overestimate the amplitude of tidal dissipation. Conversely, when examining the purely convective model, we observe an underestimation of tidal dissipation by approximately one and a half orders of magnitude.

We investigate the influence of varying Ekman number on the imaginary part of the Love number. The outcomes are illustrated in Fig. 11 for  $E = \{10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}\}$ . We find that decreasing the Ekman number impacts the imaginary part of the Love number (the dissipation) by increasing the number of peaks. But for the frequency associated with the forcing imposed by Io, the impact is small because we are not on a resonance (a peak), and the imaginary part of the Love number does not vary significantly. We find the same result for the Schmidt and Prandtl numbers. Their impact on the total dissipation is very weak, therefore they do not influence the imaginary part of the Love number.

Eventually, we find that stable stratification plays a crucial role in explaining the high dissipation. This conclusion was also highlighted by André et al. (2019), who investigated tidal dissipation in a rotating semi-convective region with a Cartesian box model. In addition, Lin (2023) and Dewberry (2023) have also studied tidal responses in some simplified scenarios conceivable for Jupiter’s interior with stably stratified layers, taking only the viscous diffusion into account. Our results confirm their results with taking into account the three possible diffusion mechanisms, which are dominated by the viscous one, and more realistic internal structure models for Jupiter.

#### 5.4. Impact of the external stably stratified layer: four zones vs two zones models

In Fig. 12, we observe the distribution of kinetic energy in a two-zone interior model. We can see that the internal part of the model follows a gravito-inertial pattern, while the external zone exhibits a single inertial mode. This discrepancy, in comparison to the left panel of Fig. 5, arises due to the absence of the external stably stratified layers, which theoretically facilitate wave reflection and the formation of two distinct inertial modes. Nevertheless, we can see that the attractor’s presence remains consistent, independent of the presence of the narrow intermediate stably stratified region. Furthermore, we find that the impact of this zone on the dissipation is very weak.

#### 5.5. Impact of the size of solid and diluted cores

In order to study the impact of the size of the diluted and solid cores on the total dissipation, we first carry out a test with the five-layer model (Sec. 3.1), but with a bigger solid core (smaller diluted core) of size 10% instead of 1.4%. As we can see in Fig. 13, we find that the magnitude of imaginary part has slightly decreased (the imaginary part of the Love number due to Io is  $5.4 \times 10^{-4}$ ) and that the position of the peaks is only slightly modified. We perform another test with the two-layer model, but this time with a solid core of size 15% instead of 1.4%. We find that the position of the peaks changes and the dissipation due to Io increases by less than half an order of magnitude (with this model, the imaginary part of the love number due to Io is  $2.5 \times 10^{-3}$ ). Afterwards, we use another structure model that satisfies also Juno constraints and uses the equation of state of Chabrier & Debras (2021) where we reduce the size of the internal stably stratified layer (diluted core). As we can see in Fig. 14, the size of the diluted is reduced, and it is now localised between 48% and 56% of the radius (the outer stably stratified layer is in the same position). We can see also that the stratification in this model is stronger ( $N^2/(2\Omega)^2 \approx 10$  instead of  $\approx 4$ ). With this model, we find, as we can see in Fig. 15, that the imaginary part of the love number due to Io is closer to the observed value (with this model the imaginary part of the Love number due to Io is  $1.4 \times 10^{-4}$ ), but the gap remains significant (approximately one order of magnitude).

## 6. Discussion and conclusions

We develop a numerical method that enables the calculation of the forced dynamic tidal response of an incompressible, non-magnetised, uniformly rotating fluid body. The Coriolis force is fully accounted for in our calculations. However, we do not consider centrifugal distortion, which allows us to solve the problem using spherical geometry. We take into consideration various types of dissipations such as fluid viscosity, thermal dissipation, and molecular diffusivity. By incorporating these dissipation mechanisms, we compute, using 2D numerical simulations, the total dissipation and determine the imaginary part of the tidal Love numbers for a given complex planetary interior model. In this study, we examine the dynamical tides in the latest Jupiter interior model (Sec. 3) and specifically investigate the quadrupolar tidal components ( $\ell = m = 2$ ). Our focus is on the frequency range that corresponds to the tidal frequencies associated with Jupiter’s Galilean moons. We consider a multi-layer model with alternating convective and stably stratified regions, which enables a more comprehensive and realistic representation of the physical processes occurring within giant gaseous planets’ interiors, in particular the dissipation of dynamical tides. We find that the presence of stably stratified regions plays a significant role in explaining the strong dissipation observed in Jupiter when compared to the case of a sole convective envelope. In this framework, we find that the dissipation depends on the chosen internal structure, in particular the size of the diluted core. In fact, with a large diluted core (around 68% of the radius) we find a two-order-of-magnitude discrepancy between the calculated and observed dissipation due to Io, whereas with a smaller stably stratified inner layer (around 8% of the radius), the discrepancy becomes smaller (one order of magnitude). This may provide in the future constrains on the size of the diluted core. Our analysis reveals also that, in the chosen parameter regime in which the kinematic viscosity, thermal and molecular diffusivities are uniform and equal, the dominant mechanism con-

tributing to dissipation is viscosity, surpassing both thermal and chemical dissipations in magnitude. Furthermore, it is important to note that our model is not limited to Jupiter but can also be applied to other giant planets such as Saturn, as well as exoplanets.

There are several caveats that should be carefully considered in future studies in order to ensure accurate quantitative comparisons with high-precision observations, it is crucial to incorporate the relevant missing physical processes in a self-consistent manner. First, neglecting the influence of centrifugal effects may limit the accuracy of our solutions. Particularly for high-degree tidal components, the impact of centrifugal forces becomes increasingly significant (Dewberry 2023). Second, while adopting the Boussinesq approximation to investigate dynamical tides simplifies the system of equations to solve, it is important to acknowledge its limitations. These limitations are particularly significant when the Lamb frequency, which characterizes the acoustic modes, approaches near the surface a comparable magnitude to the excited modes frequencies. Clearly an interesting follow-up of this work would be to go from the Boussinesq approximation to the anelastic approximation and take into account density stratification. The outcomes of using the more realistic anelastic approximation are not expected to completely deviate from those obtained with the Boussinesq approximation; in fact, both approximations yield the same attractors of characteristics. This comes about because in the anelastic approximation the velocity  $\boldsymbol{v}$  is replaced by the specific linear momentum  $\rho\boldsymbol{v}$  in the system of equations. Said differently, the momentum vector satisfies the same set of equations as the velocity vector does in the Boussinesq case (Dintrans & Rieutord 2000). In this respect, using simple polytropic models, the work of Ogilvie (2013) gives a first exploration of the effects of density variations of the background on tidal dissipation. However, this work uses many simplifications, which also call for new investigations.

Finally, differential rotation can play a crucial role in the dynamics of the outer regions of gas giant planets. In addition, the ionized inner region, characterized by the presence of a magnetized gas, can exhibit significant effects due to ohmic dissipation and induced magnetic torques. We know that the presence of differential rotation in a convective zone is strongly dependent on electrical conductivity (e.g. Guillot et al. 2018; Galanti et al. 2019). Therefore, an interesting perspective of this work is to undertake a study to understand the profound impact of both differential rotation (Mathis 2009; Baruteau & Rieutord 2013; Mirouh et al. 2016; Guenel et al. 2016a,b; Dewberry et al. 2021) and magnetic fields (Rogers & MacGregor 2010; Mathis & de Brye 2011; Barker & Lithwick 2014; Wei 2016, 2018; Lin & Ogilvie 2018) on wave propagation and dissipation in gas giant planets.

*Acknowledgements.* We thank the referee for her/his positive and constructive report, which has allowed us to improve the quality of our article. H. Dhoubib and S. Mathis acknowledge support from the CNES PLATO grant at CEA/DAP and from PNP (CNRS/INSU). A. Astoul acknowledges support from the Science and Technology Facilities Council (STFC) grant ST/S000275/1, as well as the Leverhulme Trust for early career grant. We are also very grateful to Lorenzo Valdetarro for his kind help and support with the LSB code. Some preliminary calculations have been performed thanks to HPC resources from CALMIP supercomputing centre (Grants P16024 and 2022-P0107).

## References

- André, Q., Barker, A. J., & Mathis, S. 2017, A&A, 605, A117 2  
 André, Q., Mathis, S., & Barker, A. J. 2019, A&A, 626, A82 2, 5, 9, 11  
 Astoul, A., Mathis, S., Baruteau, C., et al. 2019, A&A, 631, A111 2  
 Auclair-Desrotour, P., Mathis, S., & Le Poncin-Lafitte, C. 2015, A&A, 581, A118 2, 10  
 Ballot, J., Lignières, F., Reese, D. R., & Rieutord, M. 2010, A&A, 518, A30 3  
 Barker, A. J. 2020, MNRAS, 498, 2270 4  
 Barker, A. J. & Lithwick, Y. 2014, MNRAS, 437, 305 12  
 Baruteau, C. & Rieutord, M. 2013, Journal of Fluid Mechanics, 719, 47 2, 12  
 Chabrier, G. & Debras, F. 2021, ApJ, 917, 4 6, 11  
 Cowling, T. G. 1941, MNRAS, 101, 367 5  
 de Vries, N. B., Barker, A. J., & Hollerbach, R. 2023, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, stad1990 2, 6  
 Debras, F. & Chabrier, G. 2019, ApJ, 872, 100 2, 6  
 Dewberry, J. W. 2023, MNRAS, 521, 5991 2, 11, 12  
 Dewberry, J. W. & Lai, D. 2022, ApJ, 925, 124 2  
 Dewberry, J. W., Mankovich, C. R., Fuller, J., Lai, D., & Xu, W. 2021, Planetary Science Journal, 2, 198 12  
 Dhoubib, H., Prat, V., Van Reeth, T., & Mathis, S. 2021, A&A, 652, A154 3  
 Dintrans, B. & Rieutord, M. 2000, A&A, 354, 86 2, 8, 9, 12  
 Dintrans, B., Rieutord, M., & Valdetarro, L. 1999, Journal of Fluid Mechanics, 398, 271 2, 8, 9  
 Duguid, C. D., Barker, A. J., & Jones, C. A. 2020, MNRAS, 491, 923 2, 6  
 Durante, D., Parisi, M., Serra, D., et al. 2020, Geophys. Res. Lett., 47, e86572 1, 7  
 Galanti, E., Kaspi, Y., Miguel, Y., et al. 2019, Geophys. Res. Lett., 46, 616 12  
 Garaud, P. 2018, Annual Review of Fluid Mechanics, 50, 275 2  
 Goldreich, P. & Soter, S. 1966, Icarus, 5, 375 2  
 González-Cataldo, F., Wilson, H. F., & Militzer, B. 2014, ApJ, 787, 79 6  
 Goodman, J. & Dickson, E. S. 1998, ApJ, 507, 938 4  
 Guenel, M., Baruteau, C., Mathis, S., & Rieutord, M. 2016a, A&A, 589, A22 2, 12  
 Guenel, M., Mathis, S., Baruteau, C., & Rieutord, M. 2016b, arXiv e-prints, arXiv:1612.05071 2, 12  
 Guenel, M., Mathis, S., & Remus, F. 2014, A&A, 566, L9 2  
 Guillot, T., Chabrier, G., Morel, P., & Gautier, D. 1994, Icarus, 112, 354 2  
 Guillot, T., Miguel, Y., Militzer, B., et al. 2018, Nature, 555, 227 3, 6, 12  
 Guillot, T., Stevenson, D. J., Hubbard, W. B., & Saumon, D. 2004, in Jupiter: The Planet, Satellites and Magnetosphere, ed. F. Bagenal, T. E. Dowling, & W. B. McKinnon, Vol. 1, 35–57 6  
 Idini, B. & Stevenson, D. J. 2021, PSJ, 2, 69 1, 2  
 Idini, B. & Stevenson, D. J. 2022a, PSJ, 3, 89 2  
 Idini, B. & Stevenson, D. J. 2022b, PSJ, 3, 11 2  
 Kippenhahn, R. & Weigert, A. 1994, Stellar Structure and Evolution (Springer) 3  
 Lai, D. 2021, PSJ, 2, 122 1, 2  
 Lainey, V., Arlot, J.-E., Karatekin, Ö., & van Hoolst, T. 2009, Nature, 459, 957 1, 2, 11  
 Lainey, V., Casajus, L. G., Fuller, J., et al. 2020, Nature Astronomy, 4, 1053 2  
 Lainey, V., Jacobson, R. A., Tajeddine, R., et al. 2017, Icarus, 281, 286 2  
 Lainey, V., Karatekin, Ö., Desmars, J., et al. 2012, ApJ, 752, 14 2  
 Lecointe, J. & Chabrier, G. 2012, A&A, 540, A20 2, 6  
 Lecointe, J. & Chabrier, G. 2013, Nature Geoscience, 6, 347 6  
 Lin, Y. 2023, A&A, 671, A37 1, 2, 11  
 Lin, Y. & Ogilvie, G. I. 2018, MNRAS, 474, 1644 2, 12  
 Liu, J., Goldreich, P. M., & Stevenson, D. J. 2008, Icarus, 196, 653 6  
 Love, A. E. H. 1911, Some Problems of Geodynamics (Cambridge University Press) 7  
 Maas, L. R. M. & Lam, F. P. A. 1995, Journal of Fluid Mechanics, 300, 1 9  
 Mankovich, C. R. & Fuller, J. 2021, Nature Astronomy, 5, 1103 6  
 Mathis, S. 2009, A&A, 506, 811 2, 9, 12  
 Mathis, S. 2019, in EAS Publications Series, Vol. 82, EAS Publications Series, 5–33 2  
 Mathis, S., Auclair-Desrotour, P., Guenel, M., Gallet, F., & Le Poncin-Lafitte, C. 2016, A&A, 592, A33 2, 6  
 Mathis, S. & de Brye, N. 2011, A&A, 526, A65 12  
 Mathis, S. & Le Poncin-Lafitte, C. 2009, A&A, 497, 889 7  
 Mazevet, S., Tsuchiya, T., Taniuchi, T., Benuzzi-Mounaix, A., & Guyot, F. 2015, Phys. Rev. B, 92, 014105 6  
 Militzer, B., Hubbard, W. B., Wahl, S., et al. 2022, PSJ, 3, 185 2  
 Mirouh, G. M., Baruteau, C., Rieutord, M., & Ballot, J. 2016, Journal of Fluid Mechanics, 800, 213 9, 12  
 Ogilvie, G. I. 2005, Journal of Fluid Mechanics, 543, 19 5, 8  
 Ogilvie, G. I. 2009, MNRAS, 396, 794 2, 4, 8  
 Ogilvie, G. I. 2013, MNRAS, 429, 613 2, 10, 12  
 Ogilvie, G. I. 2014, ARA&A, 52, 171 1, 2, 4, 7  
 Ogilvie, G. I. & Lin, D. N. C. 2004, ApJ, 610, 477 1, 2, 3, 5, 6, 8  
 Ogilvie, G. I. & Lin, D. N. C. 2007, ApJ, 661, 1180 6, 8  
 Pontin, C. M., Barker, A. J., & Hollerbach, R. 2023, arXiv e-prints, arXiv:2304.11898 2  
 Pontin, C. M., Barker, A. J., Hollerbach, R., André, Q., & Mathis, S. 2020, MNRAS, 493, 5788 2  
 Remus, F., Mathis, S., & Zahn, J. P. 2012, A&A, 544, A132 1, 2, 4

- Remus, F., Mathis, S., Zahn, J. P., & Lainey, V. 2015, *A&A*, 573, A23 [2](#)
- Rieutord, M. 1987, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 39, 163 [7](#), [21](#)
- Rieutord, M., Georgeot, B., & Valdetarro, L. 2001, *Journal of Fluid Mechanics*, 435, 103 [9](#)
- Rieutord, M. & Valdetarro, L. 1997, *Journal of Fluid Mechanics*, 341, 77 [2](#)
- Rieutord, M. & Valdetarro, L. 2010, *Journal of Fluid Mechanics*, 643, 363 [2](#)
- Rieutord, M. & Valdetarro, L. 2018, *Journal of Fluid Mechanics*, 844, 597 [9](#)
- Rogers, T. M. & MacGregor, K. B. 2010, *MNRAS*, 401, 191 [12](#)
- Spiegel, E. A. & Veronis, G. 1960, *ApJ*, 131, 442 [4](#)
- Stevenson, D. J. 1982, *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 10, 257 [2](#)
- Stevenson, D. J. 1985, *Icarus*, 62, 4 [2](#)
- Stevenson, D. J. & Salpeter, E. E. 1977, *ApJS*, 35, 221 [6](#), [7](#), [21](#)
- Terquem, C., Papaloizou, J. C. B., Nelson, R. P., & Lin, D. N. C. 1998, *ApJ*, 502, 788 [4](#)
- Valdetarro, L., Rieutord, M., Braconnier, T., & Fraysse, V. 2007, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 205, 382 [7](#), [8](#)
- Vidal, J. & Barker, A. J. 2020, *ApJ*, 888, L31 [2](#), [6](#)
- Wahl, S. M., Hubbard, W. B., Militzer, B., et al. 2017, *Geophys. Res. Lett.*, 44, 4649 [2](#), [6](#)
- Wahl, S. M., Parisi, M., Folkner, W. M., Hubbard, W. B., & Militzer, B. 2020, *ApJ*, 891, 42 [1](#), [7](#)
- Wahl, S. M., Wilson, H. F., & Militzer, B. 2013, *ApJ*, 773, 95 [6](#)
- Wei, X. 2016, *ApJ*, 828, 30 [2](#), [12](#)
- Wei, X. 2018, *ApJ*, 854, 34 [2](#), [12](#)
- Wilson, H. F. & Militzer, B. 2012a, *Phys. Rev. Lett.*, 108, 111101 [6](#)
- Wilson, H. F. & Militzer, B. 2012b, *ApJ*, 745, 54 [6](#)
- Zahn, J. P. 1966a, *Annales d'Astrophysique*, 29, 313 [1](#), [3](#), [4](#)
- Zahn, J. P. 1966b, *Annales d'Astrophysique*, 29, 489 [1](#)
- Zahn, J. P. 1975, *A&A*, 41, 329 [1](#), [3](#)
- Zahn, J. P. 1989, *A&A*, 220, 112 [1](#), [3](#), [4](#)

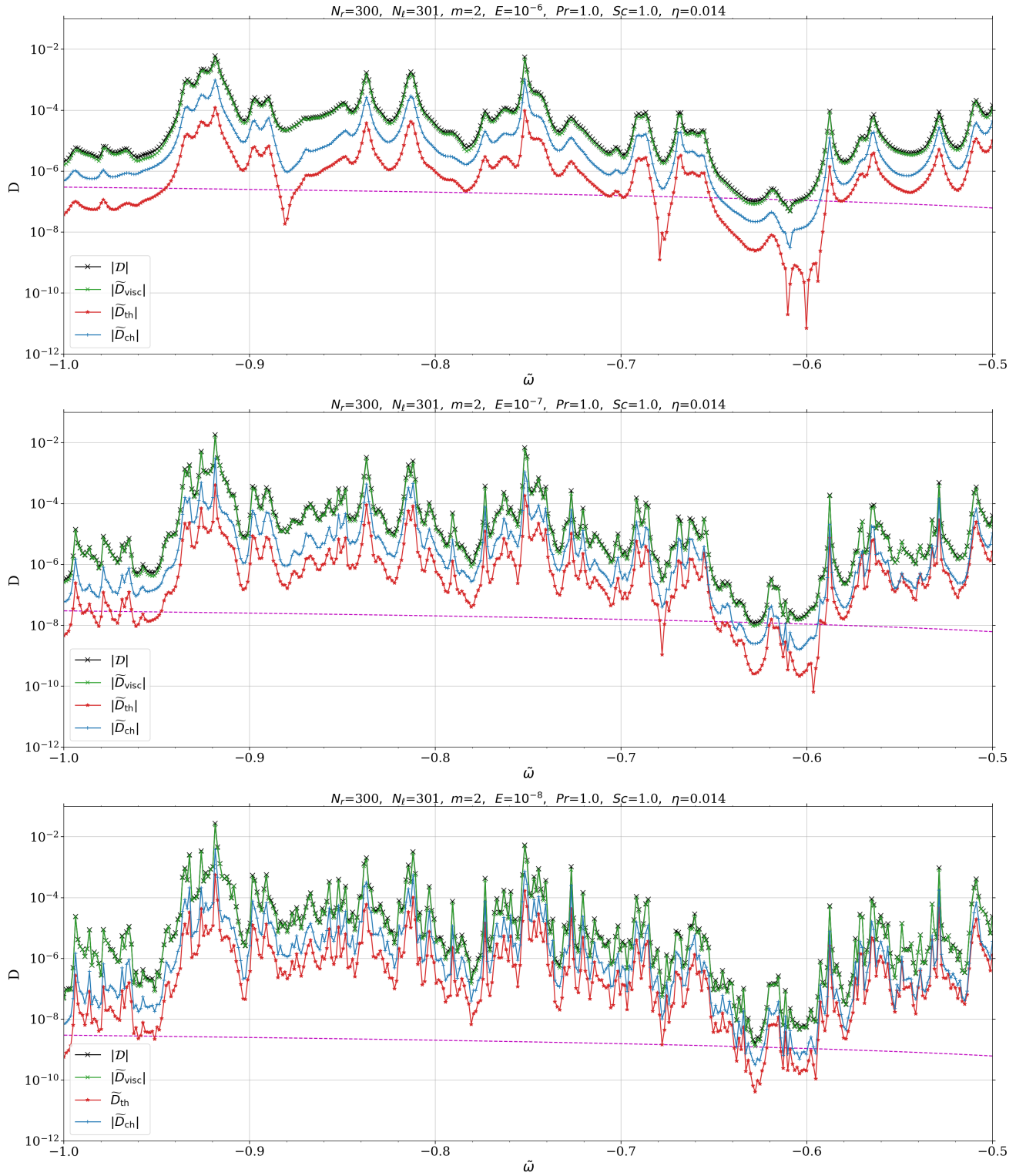


Fig. 7: Dissipation spectra for  $m = 2$ ,  $Pr = Sc = 1$ , and  $E = 10^{-6}$  (Top),  $E = 10^{-7}$  (middle) and  $E = 10^{-8}$  (Bottom) with a spatial resolution  $(N_r, N_\ell) = (300, 301)$ . The total dissipation is represented in black crosses, and its viscous, thermal, and molecular contributions are represented in green points, red stars, and blue plus signs, respectively. The magenta dashed line indicate the viscous (total) dissipation in the case of purely convective interior ( $N_\mu^2 = N_\xi^2 = 0$ ).



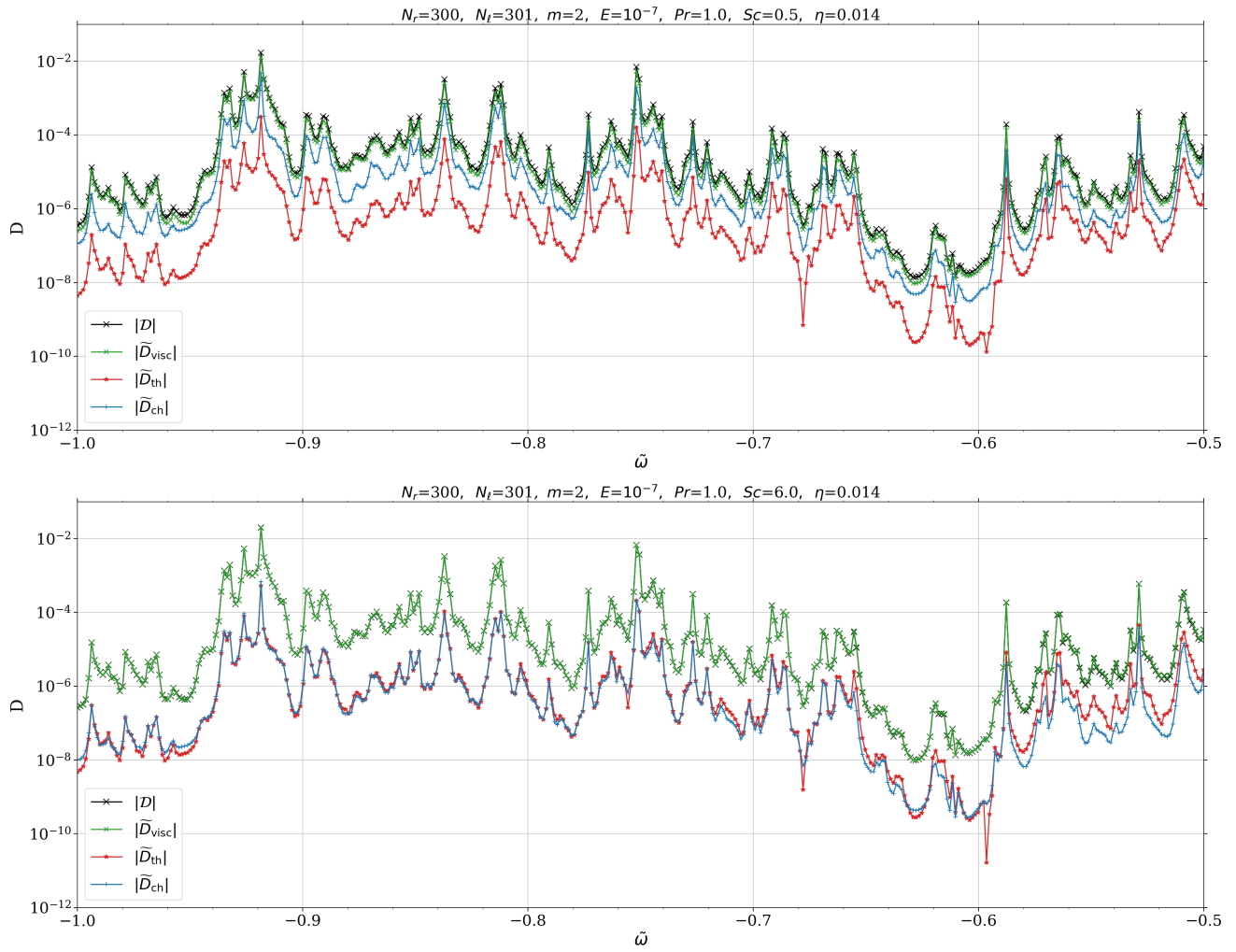


Fig. 8: Same as the middle panel of Fig. 7 but for  $Sc = 0.5$  (Top) and  $Sc = 6$  (Bottom).

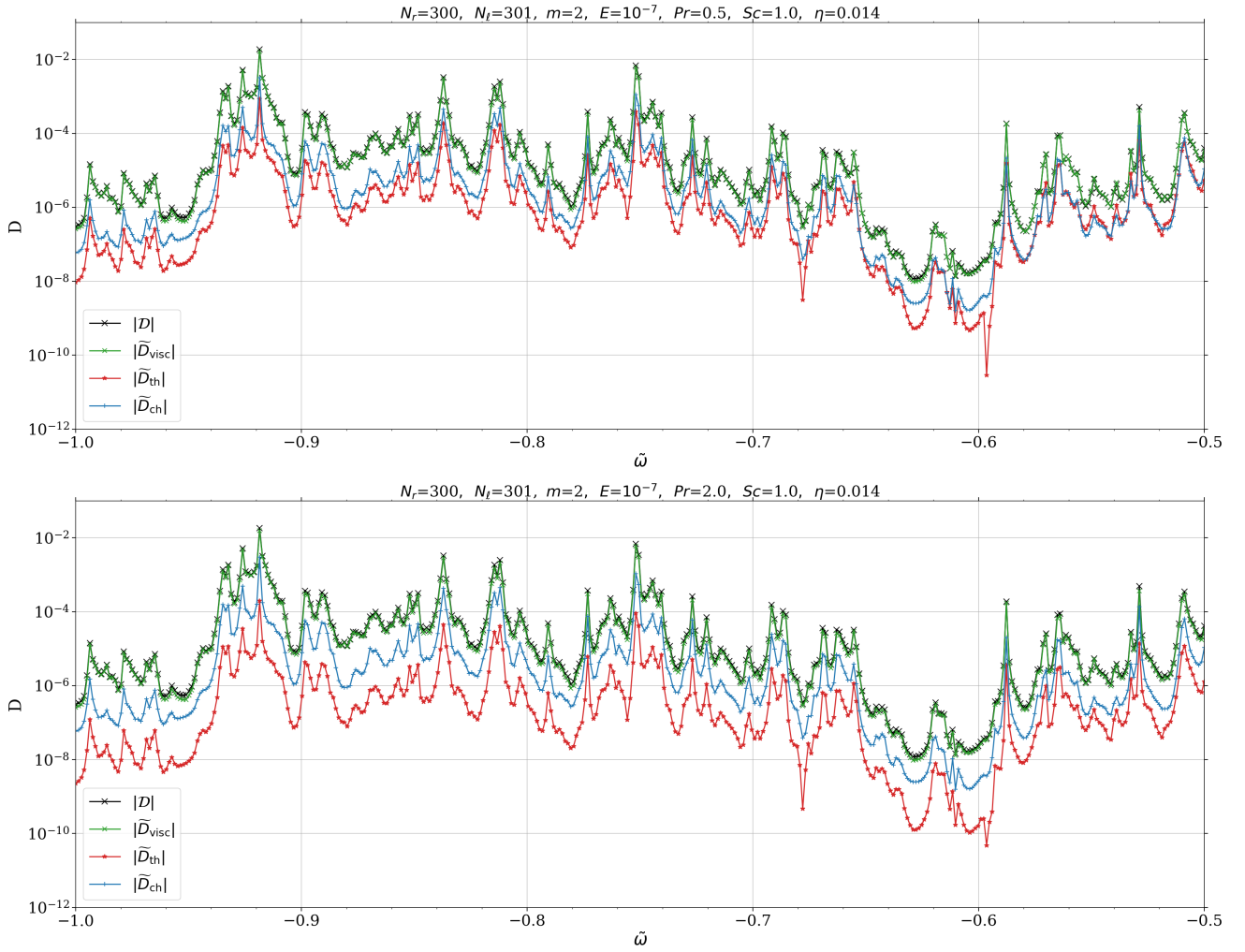


Fig. 9: Same as the middle panel of Fig. 7 but for  $Pr = 0.5$  (Top) and  $Pr = 2$  (Bottom).

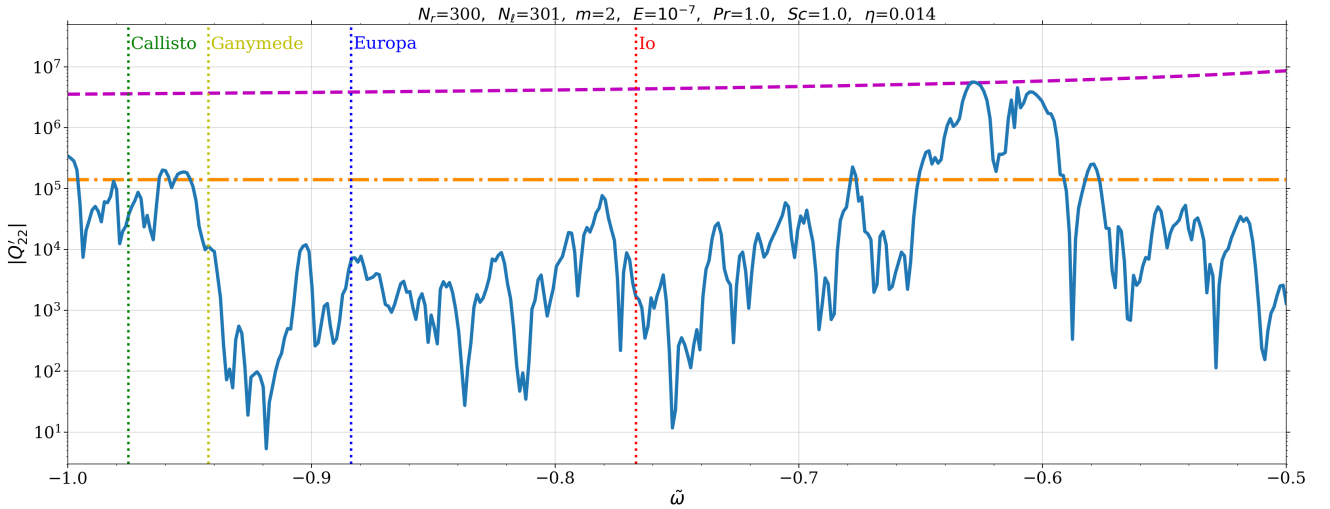


Fig. 10: Modified tidal quality factor as a function of the tidal frequency for  $m = 2$ ,  $E = 10^{-7}$ , and  $Pr = Sc = 1$ . Vertical dotted lines indicate the tidal frequencies for the four Galilean Moons of Jupiter (from right to left: Io, Europa, Ganymede, Callisto). The magenta dashed line indicates the values of these quantities in the case of a purely convective interior ( $N_\mu^2 = N_t^2 = 0$ ). The dash-dotted orange line marks the observed value of this quantity due to Io.

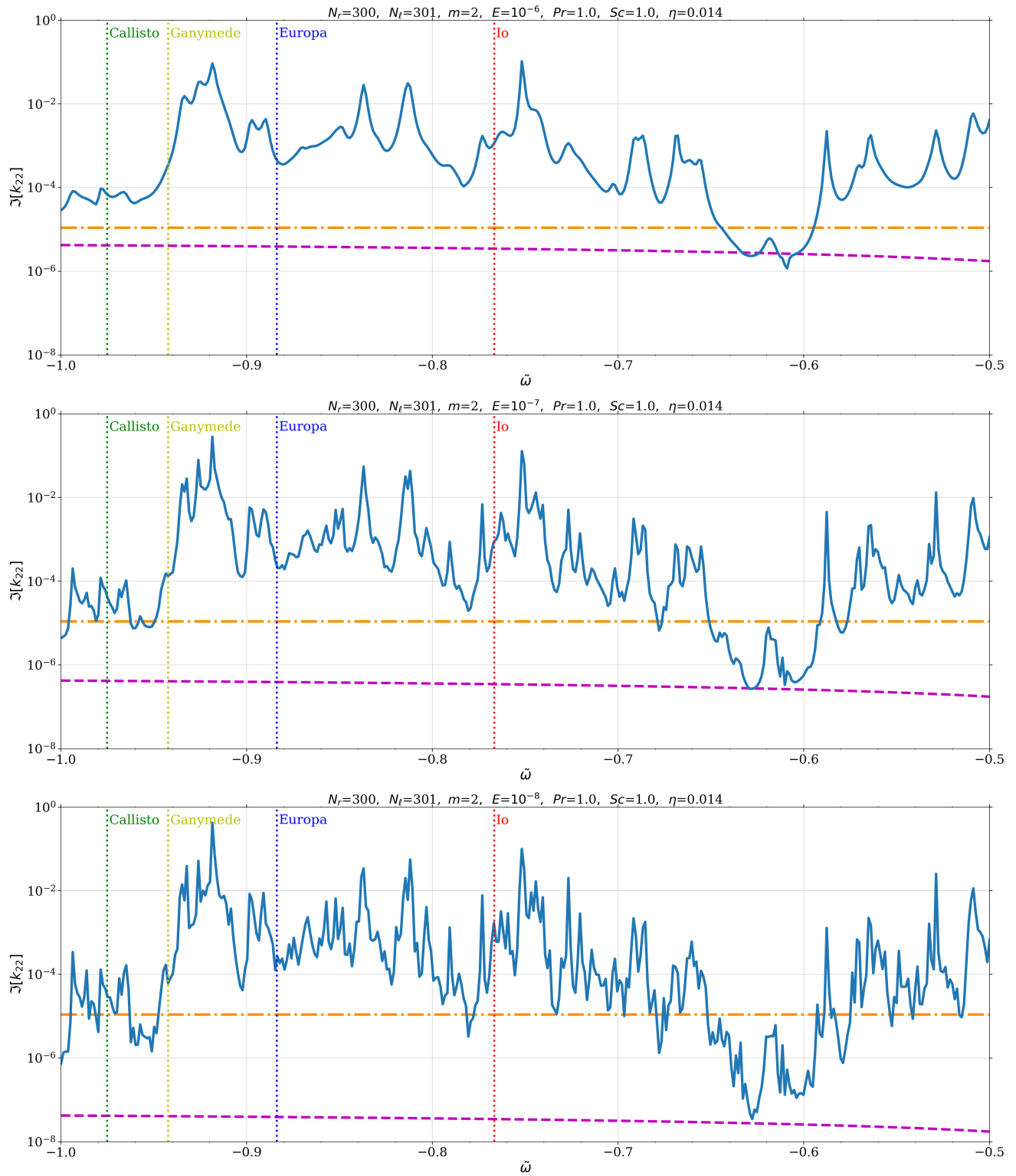


Fig. 11: Imaginary part of the Love number as a function of the tidal frequency for  $m = 2$ ,  $Pr = Sc = 1$ , and  $E = 10^{-6}$  (Top),  $E = 10^{-7}$  (middle) and  $E = 10^{-8}$  (Bottom). Vertical dotted lines indicate the tidal frequencies for the four Galilean Moons of Jupiter (from right to left: Io, Europa, Ganymede, Callisto). The magenta dashed line indicates the values of these quantities in the case of a purely convective interior ( $N_\mu^2 = N_t^2 = 0$ ). The dash-dotted orange line marks the observed value of this quantity due to Io.

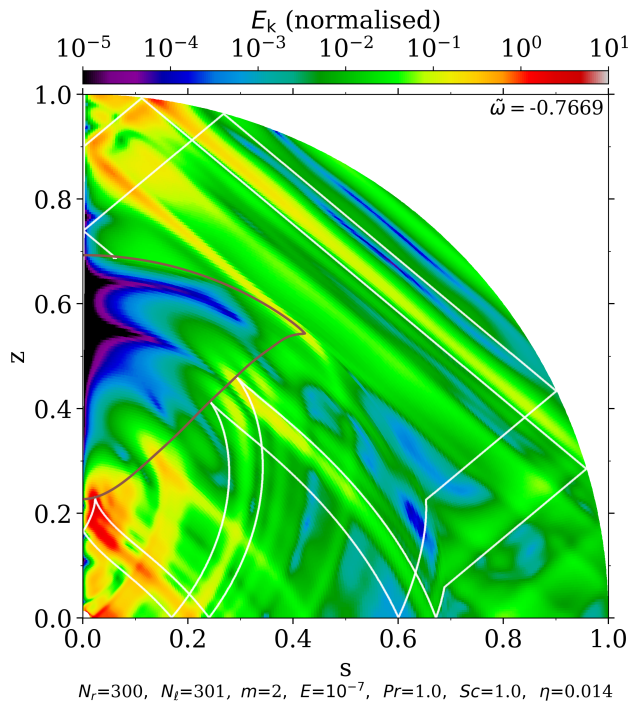


Fig. 12: Same as the left panel of Fig. 5, but for an interior model without the thin external stably stratified layer (two zones model).

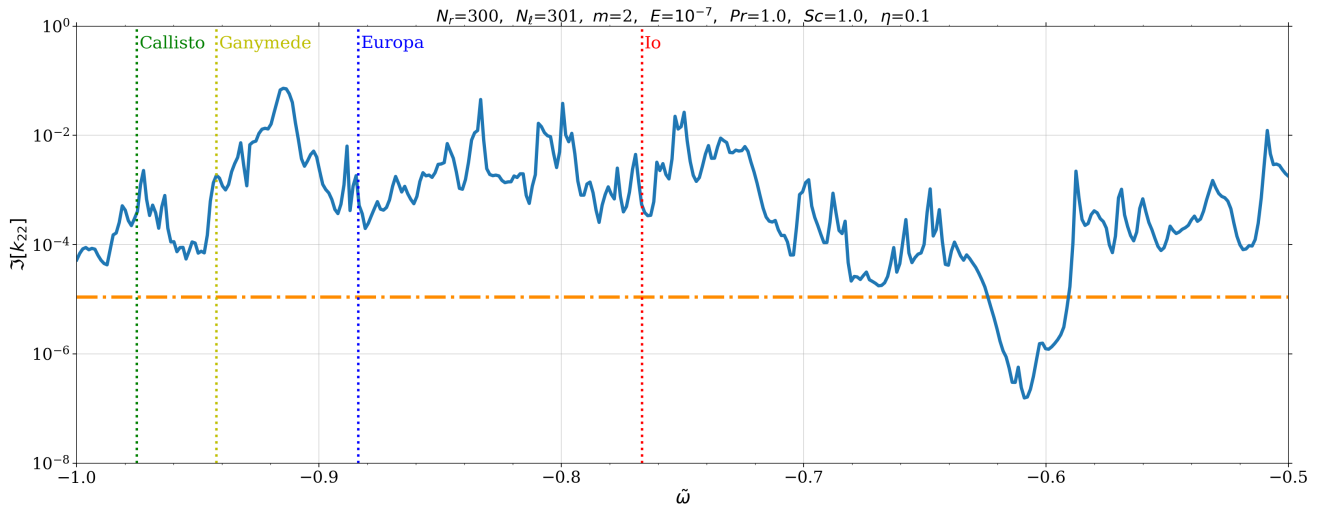


Fig. 13: Same as the middle panel of the Fig. 11 but for  $\eta = 0.1$ .

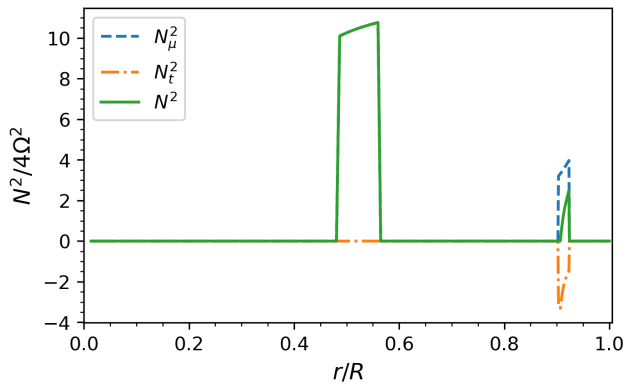


Fig. 14: Same as Fig. 1 but for a structure model with a smaller internal stably stratified layer.

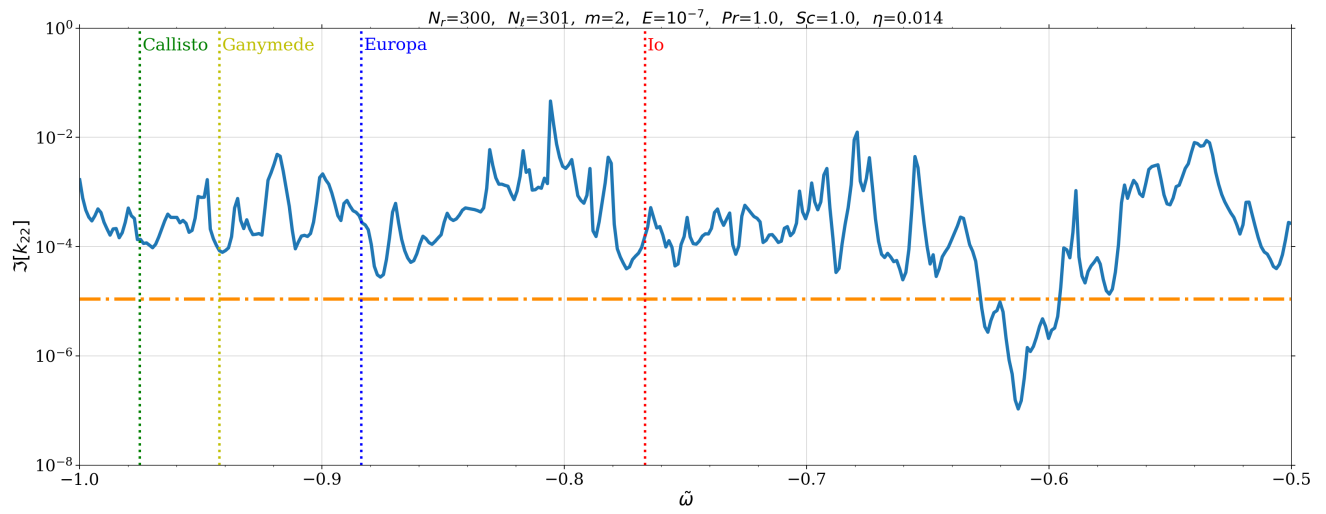


Fig. 15: Same as the middle panel of the Fig. 11 but for the structure model represented in Fig. 14.

## Appendix A: Dimensionless number expressions in Jupiter

The expressions for the different diffusivities and associated dimensionless numbers are derived in [Stevenson & Salpeter \(1977\)](#) for metallic and molecular phases. The region with  $R < 0.9$  exhibits a metallic phase, whereas the region with  $R > 0.9$  is characterized by a molecular phase. We add a smooth transition between both zones. We recall here the expression for these numbers

$$\text{Pr} = \begin{cases} \frac{4}{0.3} T^{-1/2} \rho^{-1/3} & \text{if } R < 0.9 \\ 1 & \text{if not} \end{cases}, \quad (\text{A.1})$$

$$\text{Sc} = \begin{cases} \frac{4}{3} 10^6 T^{-2} \rho^{2/3} & \text{if } R < 0.9 \\ \frac{1}{4} 10^{6.5} T^{-2} \rho^{5/6} & \text{if not} \end{cases}, \quad (\text{A.2})$$

$$\text{E} = \begin{cases} 2 \times 10^{-5} \frac{T^{-1/2}}{\Omega R^2} & \text{if } R < 0.9 \\ 5 \times 10^{-5} \frac{T^{-1/2}}{\Omega R^2} & \text{if not} \end{cases}. \quad (\text{A.3})$$

All quantities must be expressed in SI units.

## Appendix B: Expression of some operators in the spherical harmonics basis

The spherical vector harmonics form a complete family and the orthogonality relations ensure that any sufficiently regular vector field  $\mathbf{u}$  can be uniquely expanded over the spherical vector harmonics ([Rieutord 1987](#)):

$$\mathbf{u} = [u_\ell^m, v_\ell^m, w_\ell^m]. \quad (\text{B.1})$$

The divergence of the vector field  $\mathbf{u}$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 u_\ell^m) - \frac{\ell(\ell+1)}{r} v_\ell^m. \quad (\text{B.2})$$

The curl of the vector field  $\mathbf{u}$  is expressed as follows

$$\nabla \times \mathbf{u} = \left[ \ell(\ell+1) \frac{w_\ell^m}{r}, \frac{1}{r} \partial_r (r w_\ell^m), \frac{u_\ell^m}{r} - \frac{1}{r} \partial_r (r v_\ell^m) \right]. \quad (\text{B.3})$$

*Particular case:*  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$

The curl of the vector field  $\mathbf{u}$  can be rewritten as

$$\nabla \times \mathbf{u} = \left[ \ell(\ell+1) \frac{w_\ell^m}{r}, \frac{1}{r} \partial_r (r w_\ell^m), -\frac{\Delta_\ell (r u_\ell^m)}{\ell(\ell+1)} \right], \quad (\text{B.4})$$

with  $\Delta_\ell \square = \partial_{r^2}^2 \square + \frac{2}{r} \partial_r \square - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \square$ .

The Laplacian of the vector field  $\mathbf{u}$  is expressed as follows

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \left[ \frac{1}{r} \Delta_\ell (r u_\ell^m), \frac{1}{r} \partial_r \left( \frac{D_\ell u_\ell^m}{\ell(\ell+1)} \right), \Delta_\ell w_\ell^m \right], \quad (\text{B.5})$$

with  $D_\ell \square = \partial_r^2 (r^2 \square) - \ell(\ell+1) \square$ .

The vector product between the unit vector  $\mathbf{e}_z$  and the vector field  $\mathbf{u}$  is given by

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = & \left[ (\ell-1) \alpha_{\ell-1}^\ell w_{\ell-1}^m - (\ell+2) \alpha_{\ell+1}^\ell w_{\ell+1}^m - i m v_\ell^m, \right. \\ & \frac{\ell-1}{\ell} \alpha_{\ell-1}^\ell w_{\ell-1}^m + \frac{\ell+2}{\ell+1} \alpha_{\ell+1}^\ell w_{\ell+1}^m - \frac{i m}{\ell(\ell+1)} (u_\ell^m + v_\ell^m), \\ & \left. - \frac{\alpha_{\ell-1}^\ell}{\ell^2} r^{\ell-1} \partial_r \left( \frac{u_{\ell-1}^m}{r^{\ell-2}} \right) - \frac{\alpha_{\ell+1}^\ell}{(\ell+1)^2} r^{-\ell-2} \partial_r (r^{\ell+3} u_{\ell+1}^m) - \frac{i m}{\ell(\ell+1)} w_\ell^m \right]. \quad (\text{B.6}) \end{aligned}$$

# Conclusions et perspectives

Nous avons étudié les ondes magnéto-gravito-inertielles en nous concentrant sur leur propagation et leur dissipation, ainsi que sur le transport et les échanges de moment cinétique qu’elles induisent dans des milieux complexes tels que les zones radiatives des étoiles et les intérieurs des planètes géantes gazeuses. Ce manuscrit est divisé en deux parties, chacune contribuant à la physique stellaire et la physique planétaire et des interactions planète-étoile. La première partie se concentre sur la sismologie stellaire des étoiles de masses intermédiaires, en analysant spécifiquement l’impact de la rotation différentielle, de la déformation centrifuge et du magnétisme sur les ondes gravito-inertielles. Dans la seconde partie, nous nous intéressons à l’étude de la marée au sein des planètes géantes gazeuses et de sa dissipation par la viscosité, la diffusivité thermique et la diffusivité chimique. Nous nous sommes intéressés spécifiquement aux ondes générées par les interactions de marée résultant de l’attraction gravitationnelle exercée par les satellites naturels pour Jupiter mais la physique développée a le potentiel de s’appliquer à Saturne et aux exoplanètes géantes gazeuses. Ces ondes gravito-inertielles de marée transportent du moment cinétique dans la planète, qui est ensuite transféré à l’orbite des satellites, contribuant ainsi à l’évolution à long terme du système. Nous présentons ici une synthèse des résultats majeurs obtenus et formulons nos conclusions quant à ces deux grandes thématiques.

## Sismologie stellaire

Les pulsateurs en modes gravito-inertiels sont d’une importance cruciale pour notre compréhension globale de la rotation stellaire (e.g. [Aerts 2021](#)). Afin d’exploiter au maximum les informations fournies par l’observation de ces modes, il est essentiel d’améliorer notre compréhension de la façon dont la rotation stellaire, potentiellement rapide et différentielle, les influence. Cela nécessite de prendre en compte l’action des accélérations de Coriolis et centrifuge, ainsi que celle d’un éventuel champ magnétique. Dans ce contexte, l’approximation traditionnelle de la rotation (TAR) est une approche flexible qui a été largement utilisée dans la modélisation sismique intensive des étoiles (e.g. [Bouabid et al. 2013](#); [Van Reeth et al. 2016](#); [Aerts et al. 2021](#); [Pedersen et al. 2021](#)) qui permet d’étudier la propagation adiabatique des modes de gravité modifiés par la rotation. Cependant, la TAR repose sur des hypothèses simplificatrices telles que la sphéricité, la rotation uniforme et l’absence de champ magnétique (e.g. [Lee & Saio 1997](#)), ce qui limite sa capacité à rendre compte de la réalité complexe des étoiles. Afin de progresser dans notre compréhension de la rotation et du magnétisme stellaire, il est nécessaire de développer de nouvelles approches qui tiennent compte





de manière plus réaliste de ses effets. Cela implique de développer des modèles qui prennent en compte la rotation rapide et différentielle, ainsi que l'influence du champ magnétique. Pour cela, nous avons élaboré dans la première partie de cette thèse deux nouveaux modèles. Le premier est un modèle hydrodynamique qui prend en compte l'impact de la rotation différentielle et de la déformation centrifuge sur les ondes gravito-inertielles dans les zones radiatives des étoiles (ou les zones fortement stratifiées d'une manière générale) de manière non-perturbative (Dhouib et al. 2021a,b). Le deuxième modèle que nous avons développé est un modèle magnétohydrodynamique qui intègre l'incidence d'un champ magnétique toroïdal général sur les modes gravito-inertiels de manière non-perturbative (Dhouib et al. 2022). Cette approche nous a permis d'identifier l'ensemble des modifications des modes propres gravito-inertiels déjà observés dans le cas hydrodynamique, qui se transforment en ondes magnéto-gravito-inertielles.

Dans un premier temps, nous avons développé donc une nouvelle généralisation de la TAR dans le cas déformé en raison de l'accélération centrifuge, en prenant en compte la rotation différentielle rapide. Ce nouveau formalisme nous a permis d'étudier les ondes gravito-inertielles dans les zones radiatives des étoiles déformées. Nous avons appliqué cette approche à une étoile de masse intermédiaire en rotation rapide et différentielle en utilisant le modèle 2D ESTER (Evolution STEllaire en Rotation, Espinosa Lara & Rieutord 2013; Rieutord & Espinosa Lara 2013). On a ensuite étudié l'impact et la détectabilité de l'effet de la déformation centrifuge et de la rotation différentielle sur les ondes gravito-inertielles. Nos résultats ont montré que la signature de l'effet de la rotation différentielle sur les fréquences des modes gravito-inertielles est plus prononcée que celle de l'effet centrifuge pour  $\Omega/\Omega_K = 20\%$  (la limite de validité de la TAR centrifuge). Cette différence s'explique principalement par le fait que les modes gravito-inertiels sont moins modifiés par l'accélération de Coriolis que par la centrifuge (e.g. Ballot et al. 2010). Nos résultats sont cohérents avec les calculs 2D complets de (Ouazzani et al. 2017). Cependant, nos analyses théoriques suggèrent que les deux effets restent détectables en exploitant les observations provenant des missions *Kepler* et TESS (CVZ) et PLATO dans le futur.

Dans la suite de nos travaux, nous avons étendu ce formalisme en incluant de manière non-perturbative le champ magnétique. Jusqu'à présent, les études existantes ont principalement considéré des champs magnétiques suffisamment faibles pour être traités de manière perturbative (e.g. Prat et al. 2019, 2020; Van Beeck et al. 2020; Bugnet et al. 2021; Loi 2021; Mathis et al. 2021). Cela a permis d'étudier les effets des champs magnétiques sur les paramètres sismiques des modes gravito-inertiels, qui deviennent des modes magnéto-gravito-inertiels. Nous avons donc développé une nouvelle version de la TAR magnétique qui généralise les travaux antérieurs de Mathis (2009) et Mathis & de Brye (2011) en prenant en compte d'une manière non-perturbative des champs magnétiques toroïdaux axisymétriques avec des distributions générales de la fréquence d'Alfvén  $\omega_A(r, \theta)$  et de la rotation différentielle  $\Omega(r, \theta)$  au lieu d'une fréquence d'Alfvén constante et une rotation uniforme. Notre travail s'inscrit dans la lignée des travaux pionniers de Friedlander (1987, 1989) en géophysique, qui ont étudié les ondes magnéto-gravito-inertielles en utilisant des profils de fréquence d'Alfvén et de rotation généraux. Par rapport à ces travaux, nous nous sommes spécifiquement concentrés sur le régime dominé par la stratification, qui est pertinent pour les intérieurs stellaires où la TAR peut être construite et appliquée. De plus, nous avons considéré le cas des enveloppes sphériques profondes, contrairement à de nombreuses études précédentes qui se sont concentrées sur des couches minces (e.g. Zaqarashvili et al. 2009; Heng & Spitkovsky 2009). Nous avons utilisé ce nouveau modèle pour mener une application astérosismique, où nous avons dérivé les propriétés asymptotiques des modes magnéto-gravito-inertiels et étudié l'impact et la détecta-



bilité du champ magnétique. Nous avons constaté que les décalages de fréquence induits par un champ magnétique localisé à l'équateur peuvent être détectés en utilisant la photométrie spatiale de haute précision en exploitant les observations provenant des missions *Kepler* et TESS (CVZ) et PLATO dans le futur pour la plupart des modes, lorsque le champ magnétique est suffisamment fort dans la région radiative interne (d'environ  $10^5$  G). Des effets similaires mais moins prononcés ont été observés pour des configurations magnétiques plus complexes et générales telles que la configuration hémisphérique. En effet, nos résultats suggèrent que plus le champ magnétique est localisé, notamment aux latitudes éloignées de l'équateur, moins il a d'impact sur les ondes gravito-inertielles puisqu'elles peuvent être piégées dans une ceinture équatoriale. Les amplitudes des champs magnétiques testées dans le cadre de la TAR magnétique sont en accord avec les derniers modèles et simulations des champs magnétiques toroïdaux dans les zones radiatives des étoiles de masses intermédiaires (e.g. Spruit 2002; Fuller et al. 2019; Petitdemange et al. 2023) qui sont invoqués pour expliquer le fort transport de moment cinétique mis en évidence par l'astérosismologie spatiale (Eggenberger et al. 2022) et qui ne peut être expliqué par les processus hydrodynamiques liés à la seule rotation (Marques et al. 2013; Ouazzani et al. 2019).

Ces nouvelles généralisations de la TAR offre offrent diverses perspectives intéressantes. En effet, la TAR centrifuge peut être directement implémenté dans le code ESTER pour étudier le transport du moment cinétique. De plus, une comparaison avec d'autres codes d'oscillation, tels que TOP (Toulouse Oscillation Program, Reese et al. 2006, 2009, 2021) et ACOR (adiabatic code of oscillation including rotation, Ouazzani et al. 2012a, 2015, 2017), pourra être réalisée en utilisant différentes grilles de modèles ESTER afin de valider nos résultats. Outre l'application astérosismique, notre nouvelle théorie TAR magnétique ouvre la voie à diverses applications dans les étoiles et les planètes. Par exemple, elle peut être utilisée pour étudier le transport du moment cinétique induit par les ondes magnéto-gravito-inertielles de basses fréquences dans des étoiles et des planètes en rotation différentielle. Cela généralise la méthode précédente développée par (Mathis 2009) pour les zones radiatives non magnétisées. De plus, le TAR magnétique peut être appliqué à l'étude de la dissipation des marées stellaires et planétaires dans les régions stratifiées et magnétisées, dépassant ainsi les modèles antérieurs qui ne prenaient pas en compte la rotation et le magnétisme (e.g. Ahuir et al. 2021). Une autre perspective intéressante de notre travail futur consistera à dériver une généralisation supplémentaire de la TAR en incluant un champ magnétique poloïdal (Rui, Ong & Mathis, in prep.).

## Dissipation de marée planétaire

Dans la seconde partie de cette thèse, nous avons étudié les planètes géantes gazeuses qui présentent à la fois une rotation rapide et des interactions intenses avec leur environnement, tant dans notre système solaire que dans les systèmes exoplanétaires. La dissipation des ondes de marée joue un rôle essentiel dans la configuration orbitale et la dynamique rotationnelle de ces planètes. Des observations récentes des systèmes de Jupiter et de Saturne (Lainey et al. 2009, 2012, 2017, 2020) et d'exoplanètes (Ogilvie 2014; Van Eylen et al. 2018; Huber et al. 2019) ont remis en question notre compréhension de leur formation et de leur évolution. Ces nouvelles contraintes incitent à développer des modèles de dissipation des marées réalistes pour l'intérieur de ces planètes. Parallèlement, les missions spatiales Juno et Cassini ont révolutionné notre connaissance des structures internes de Jupiter et de Saturne, révélant une combinaison de zones stratifiées de manière stable et de régions



convectives (Leconte & Chabrier 2012; Nettelmann et al. 2015; Wahl et al. 2017; Militzer et al. 2019; Debras & Chabrier 2019). Dans ce contexte, nous avons élaboré des nouvelles simulations numériques des ondes de marée linéaires à l’intérieur de Jupiter. Pour ce faire, nous utilisons des modèles de structure interne qui respectent les contraintes observationnelles établies par la mission Juno, en prenant en compte les processus de diffusion visqueuse, thermique et chimique pour la dissipation des ondes de marée (Dhouib et al. in preparation). Notre approche prend entièrement en compte la force de Coriolis. Cependant, nous négligeons la distorsion centrifuge, ce qui nous permet de résoudre le problème en utilisant une géométrie sphérique. Nous nous sommes concentrés sur l’étude des composantes de marée quadripolaires ( $\ell = m = 2$ ) spécifiquement puisqu’elle est dominante. Nous avons examiné la plage de fréquences  $\omega/2\Omega \in [-1, -0, 5]$ , qui correspond aux fréquences de marée associées aux satellites galiléens de Jupiter. Pour effectuer ces calculs, nous avons utilisé le code spectral linéaire 2D LSB (Linear Solver Builder, Valdetaro et al. (2007)). En incorporant ces mécanismes de dissipation, nous avons calculé la dissipation totale et déterminé la partie imaginaire du nombre de Love de marée pour un modèle interne planétaire donné. Nous avons exploité les caractéristiques de la dissipation des marées en fonction des paramètres hydrodynamiques et structuraux clés. Nous avons donc démontré l’importance des zones stablement stratifiées pour expliquer les fortes valeurs de dissipation observées pour Jupiter. Nos travaux permettent aussi d’envisager la production de spectres de dissipation de marée par les ondes gravito-inertielles pour d’autres modèles planétaire comme Saturne ou les exoplanètes ou encore pour les étoiles où la dissipation dans les régions radiatives et convectives est traitée actuellement de manière séparée.

Afin de garantir des comparaisons quantitatives précises avec les observations de haute précision, les études futures devraient prendre en compte les processus physiques qui n’ont pas été pris en compte jusqu’à présent. Premièrement, il est essentiel de ne pas négliger l’influence des effets centrifuges, car cela peut limiter la précision de nos solutions pour les composantes de marée de haut degré où l’impact des forces centrifuges devient de plus en plus significatif (e.g. Braviner & Ogilvie 2014, 2015; Dewberry 2023). Deuxièmement, bien que l’utilisation de l’approximation de Boussinesq simplifie le système d’équations pour étudier la marée dynamique, il est important de reconnaître ses limites puisqu’elle néglige les gradients de densité qui sont importants, en particulier près de la surface. Il faut donc prendre en compte ces variations d’abord dans le cadre de l’approximation anélastique si la fréquence de Lamb (qui caractérise les modes acoustiques) est plus grande que les fréquences des modes excités, sinon il faut passer à des modèles totalement compressible. Troisièmement, il convient de noter que la rotation différentielle joue un rôle crucial dans la dynamique des régions externes des planètes géantes gazeuses (Cao & Stevenson 2017). De plus, la région interne ionisée, caractérisée par la présence d’un gaz magnétisé, peut présenter des effets significatifs en raison de la dissipation ohmique et des couples magnétiques induits (Guillot et al. 2018; Galanti et al. 2019). Ainsi, une perspective intéressante consisterait à entreprendre une étude approfondie de l’impact de la rotation différentielle et des champs magnétiques sur la propagation et la dissipation des ondes de marée dans les planètes géantes gazeuses.

Les missions spatiales (telles que Juno, Cassini, SOHO, *Kepler*/K2, TESS, ainsi que les futures missions PLATO et ARIEL) ont révolutionné et révolutionnent encore notre compréhension de la structure, de la dynamique et du magnétisme des étoiles et des planètes. Elles ont permis de résoudre des énigmes longtemps débattues et ont ouvert de nouveaux horizons pour la recherche future. Cependant, ces découvertes ont également posé de nouveaux défis théoriques qui exigent le



développement de modèles plus sophistiqués, notamment pour le transport de moment cinétique et la dissipation de marée, pour expliquer les observations et calibrer les données. L'étendue des perspectives est alors importante, offrant ainsi un avenir passionnant pour la physique stellaire et la physique planétaire.



# Autres contributions : modes de gravité dans les étoiles de type solaire

*Le travail présenté ici fait l'objet de deux articles en cours de publication dans la revue A&A pour lesquelles je suis deuxième auteur.*

Comme on l'a vu dans la section 3.1.1 de l'[Introduction et contexte général](#), la détection des modes de gravité dans les étoiles de type solaire de la séquence principale reste un défi non résolu de l'astérosismologie moderne. En effet, si nous nous concentrons sur le cas le plus simple des modes de gravité purs, ils se propagent dans une partie du cœur radiatif mais sont évanescents dans l'enveloppe convective. Dans ce contexte, toutes les propositions de détection des modes de gravité individuels ou des paquets d'ondes dans le régime asymptotique ([Turck-Chièze et al. 2004](#); [García et al. 2007](#); [Fossat et al. 2017](#)) ont été largement débattues (e.g. [Fossat et al. 2017](#); [Schunker et al. 2018](#); [Appourchaux & Corbard 2019](#); [Scherrer & Gough 2019](#); [Böning et al. 2019](#)). Par conséquent, nous sommes capables de sonder la rotation des régions radiatives externes des étoiles de type solaire grâce aux modes acoustiques mais nous n'avons toujours pas accès à la rotation du cœur du Soleil au-dessous de 20% du rayon solaire ([Thompson et al. 2003](#); [Couvidat et al. 2003](#); [García et al. 2007](#)) et à la rotation des cœurs radiatifs des étoiles de type solaire ([Benomar et al. 2015](#)). Ce défi observationnel a suscité des études théoriques ([Andersen 1996](#); [Kumar et al. 1996](#); [Belkacem et al. 2009](#); [Lecoanet & Quataert 2013](#); [Pinçon et al. 2021](#)) et des simulations numériques ([Rogers & Glatzmaier 2006](#); [Alvan et al. 2014](#); [Breton et al. 2022](#)) pour prédire l'amplitude des modes de gravité dans ces étoiles.

## Étude observationnelle : la recherche de signatures de modes de gravité

Les outils statistiques et théoriques développés au fil des années pour étudier les propriétés des modes de gravité dans les étoiles de type solaire ont été, jusqu'à présent, presque exclusivement appliqués au cas solaire. Puisqu'il existe une forte excitation stochastique des modes de gravité dans les étoiles de type F-tardives<sup>1</sup> (e.g. [Shibahashi 1979](#); [Breton et al. 2022](#)), nous proposons donc d'appliquer certains de ces outils à des cibles observées par le satellite *Kepler* présentant une

---

1. Voir la section 1.1 de l'[Introduction et contexte général](#).



variabilité stochastique liée aux oscillations des modes  $p$  de type solaire. En approchant la limite inférieure de la bande d’instabilité  $\gamma$  Dor dans le diagramme de Hertzsprung-Russell (voir la figure 2.1), la détection de modes  $p$  stochastiques est cruciale pour nous permettre de sélectionner des étoiles de type F-tardif, qui conservent encore des propriétés de type solaire tout en ayant des vitesses de convection plus élevées et une enveloppe plus fine. On sélectionne donc un échantillon composé des 34 étoiles de type solaire de la séquence principale les plus prometteuses. Après avoir détecté des pics individuels dans 12 cibles, nous sélectionnons dans quatre d’entre elles des motifs de pics environnants qui ont une faible probabilité d’être le produit du bruit. En les comparant aux prédictions des modèles de référence, nous montrons que les fréquences où nous obtenons des pics sont compatibles avec la présence de modes de gravité purs non asymptotiques de faible ordre radial, de modes  $p$  purs et de modes mixtes (gravito-acoustiques). Étant donné leur sensibilité à la fois à la stratification de l’interface du cœur convectif et au couplage entre les cavités résonantes des modes acoustique et de gravité, ces modes sont capables de fournir des contraintes fortes sur la structure et les états évolutifs des cibles concernées. En utilisant l’approximation adiabatique pour la description des modes, nous avons démontré ensuite que les amplitudes des modes de gravité dans les étoiles de type F-tardives ne dépassent pas quelques dizaines de centimètres par seconde pour les modes de gravité de fréquence élevée, et quelques centimètres par seconde pour les modes de gravité de basse fréquence. Si les amplitudes étaient plus élevées, nous aurions pu détecter clairement les fluctuations de luminosité induites. Les modes candidats que nous avons identifiés dans ce travail devraient donc avoir des vitesses de surface d’environ  $10 \text{ cm s}^{-1}$ . Ces résultats sont extrêmement prometteurs en termes de caractérisation des étoiles de type solaire de la séquence principale à l’aide de la mission PLATO, puisque la taille de notre échantillon sera considérablement élargie.

## Étude théorique : effet tunnel des modes de gravité à travers les enveloppes convectives en rotation

La plupart des études de recherche des modes de gravité n’ont pas tenu compte d’un processus physique clé dans les étoiles : la rotation. Dans ce contexte, il est donc extrêmement intéressant de réexaminer l’effet tunnel des modes de gravité dans l’enveloppe convective des étoiles en rotation, allant des types K aux types F, afin d’identifier les cibles les plus prometteuses pour détecter ces modes et ainsi potentiellement ouvrir la voie à l’exploration de leur rotation interne. Nous examinons alors la dynamique des modes gravito-inertiels en utilisant un modèle équatorial ( $\theta \approx \pi/2$ ) (Ando 1985), ce qui nous permet de prendre en compte de manière adéquate les couplages entre les cavités de propagation des modes de gravité et les modes inertiels puisque par construction, nous sommes hors du cadre de l’approximation traditionnelle de la rotation (à l’équateur, la projection radiale du vecteur rotation est nulle, tandis que sa projection horizontale est maximale). Ce modèle nous permet aussi de prendre en compte la sphéricité, ce qui n’était pas le cas dans Mathis et al. (2014) où l’on considérait un modèle local cartésien. On trouve que, dans le régime sub-inertiel ( $\omega < 2\Omega$ ), les modes gravito-inertiels qui se propagent dans le cœur radiatif deviennent des modes inertiels propagatifs dans l’enveloppe convective et l’évanescence disparaît. Ces modes inertiels peuvent être potentiellement détectés comme dans le Soleil (Gizon et al. 2021) ce qui permet de caractériser non seulement l’enveloppe convective où ils se propagent, mais aussi le cœur radiatif où ils sont convertis en modes gravito-inertiels sub-inertiels piégés équatorialement (Dintrans & Rieutord 2000; Mathis et al. 2014; Cai et al. 2021). Par ailleurs, dans le régime super-inertiel ( $\omega > 2\Omega$ ), les modes gravito-inertiels sont évanescents dans l’enveloppe convective comme les modes de gravité dans le cas sans



rotation mais avec un taux de décroissance potentiellement plus faible (Mathis et al. 2014). Pour les modes gravito-inertiels super-inertiels à haut degré horizontal, qui sont faiblement affectés par les gradients de densité, nous montrons que l'effet tunnel devrait être favorisé pour les modes avec des fréquences inférieures à  $\sim 10\Omega$  dans les étoiles en rotation rapide. De plus, on trouve que pour un taux de rotation donné, la transmission augmente lorsqu'on diminue l'épaisseur de l'enveloppe convective. Malheureusement, dans le cas des modes gravito-inertiels super-inertiels à faible degré horizontal, qui peuvent être potentiellement observés par l'astérosismologie, les avantages induits par l'accélération de Coriolis sont annulés par les effets des forts gradients de densité. En outre, la convection turbulente peut affecter leur survie à basse fréquence. Pour surmonter cela, une excitation stochastique plus efficace de ces modes dans les étoiles en rotation rapide avec une enveloppe convective mince, comme observé dans les simulations numériques calculées par Breton et al. (2022) et prédit théoriquement par Augustson et al. (2020), pourrait nous aider dans notre quête pour les détecter.

## Articles en cours de publication :

- « In search of gravity mode signatures in main-sequence solar-type stars observed by *Kepler* » par S.N. Breton, H. Dhouib, R.A. García, A.S Brun, S. Mathis, F. Pérez Hernández, S. Mathur, A. Dyrek, A.R.G. Santos, et P.L. Pallé, *Accepté dans A&A*
- « The complex tunnelling of gravity modes through rotating convective envelopes of low-mass stars » par S. Mathis, H. Dhouib, Z. Tazakkati, S. N. Breton, L. Bugnet, et R. A. García, *Soumis à A&A*



# In search of gravity mode signatures in main-sequence solar-type stars observed by *Kepler*

S.N. Breton<sup>1,2</sup>, H. Dhouib<sup>2</sup>, R.A. García<sup>3</sup>, A.S. Brun<sup>3</sup>, S. Mathis<sup>3</sup>, F. Pérez Hernández<sup>4,5</sup>, S. Mathur<sup>4,5</sup>, A. Dyrek<sup>2</sup>,  
A.R.G. Santos<sup>6</sup>, and P.L. Pallé<sup>4,5</sup>

<sup>1</sup> INAF – Osservatorio Astrofisico di Catania, Via S. Sofia, 78, 95123 Catania, Italy

<sup>2</sup> Université Paris Cité, Université Paris-Saclay, CEA, CNRS, AIM, F-91191, Gif-sur-Yvette, France  
e-mail: sylvain.breton@inaf.it

<sup>3</sup> Université Paris-Saclay, Université Paris Cité, CEA, CNRS, AIM, F-91191, Gif-sur-Yvette, France

<sup>4</sup> Instituto de Astrofísica de Canarias, 38205 La Laguna, Tenerife, Spain

<sup>5</sup> Departamento de Astrofísica, Universidad de La Laguna (ULL), 38206 La Laguna, Tenerife, Spain

<sup>6</sup> Instituto de Astrofísica e Ciências do Espaço, Universidade do Porto, CAUP, Rua das Estrelas, PT4150-762 Porto, Portugal

## ABSTRACT

Gravity modes (g modes), mixed gravito-acoustic modes (mixed modes), and gravito-inertial modes (gi modes) possess unmatched probing properties for stars with radiative interiors. The structural and dynamical constraints that they are able to provide cannot be accessed by other means. While they provide precious insights on the internal dynamics of evolved stars as well as massive and intermediate-mass stars, their non-detection in main-sequence solar-type stars make them a crucial missing piece in our understanding of angular momentum transport in radiative zones and stellar rotational evolution. In this work, we aim at applying some analysis tools originally developed for helioseismology in order to look for g-mode signatures in main-sequence solar-type stars. We select a sample of the 34 most promising main-sequence solar-type stars with *Kepler* four-year long photometric time series. All these stars are well-characterised late F-type stars with thin convective envelopes, fast convective flows, and stochastically excited acoustic modes (p modes). For each star, we compute the background noise level of the Fourier power spectrum to identify significant peaks at low frequency. After successfully detecting individual peaks in 12 targets, we further analyse four of them and observe distinct patterns of surrounding peaks with a low probability of being noise artifacts. Comparisons with the predictions from reference models suggest that these patterns are compatible with the presence of non-asymptotic low-order pure g modes, pure p modes, and mixed modes. Given their sensitivity to both the convective core interface stratification and the coupling between p- and g-mode resonant cavities, such modes are able to provide strong constraints on the structure and evolutionary states of the related targets. Considering the granulation and activity background of the stars in our sample, we compute afterwards the corresponding mode velocity necessary to trigger a detectable luminosity fluctuation. We use it to estimate the surface velocity,  $\langle v_r \rangle$ , of the candidate modes we have detected. In this case, we find  $\langle v_r \rangle \sim 10$  cm/s. These results are extremely promising in order to characterise the deep interior of main-sequence solar-type stars, as the upcoming PLATO mission will considerably expand the size of the available working sample.

**Key words.** Asteroseismology – Stars: rotation – Stars: solar-type

## 1. Introduction

Manifestations of gravity modes (g modes) are observed in numerous regions of the Hertzsprung-Russell (HR) diagram. In main-sequence massive stars (e.g. Waelkens 1991) and intermediate-mass stars (e.g. Kaye et al. 1999), they are most often detected under the form of gravito-inertial modes (gi-modes) as these objects are fast rotators with large Coriolis frequencies (that is twice the rotation frequency that characterises the importance of rotation for the dynamics of waves). In particular, these gi-modes allowed probing mixing (e.g. Degroote et al. 2010; Pedersen 2022) and rotation (e.g. Van Reeth et al. 2015b, 2016, 2018; Ouazzani et al. 2017; Li et al. 2020) at the convective core boundary. At more evolved stages, in subgiant (e.g. Kjeldsen & Bedding 1995) and red giant (e.g. Beck et al. 2011) stars, they are observed as mixed gravito-acoustic modes with coupled resonant cavities, providing informations on the evolutionary stage (e.g. Bedding et al. 2011), the core-to-surface (e.g. Beck et al. 2012; Deheuvels et al. 2015) and core (e.g. Mosser et al. 2012; Gehan et al. 2018) rotation as well as on the deep-layer magnetism of the star (Li et al. 2022; Deheuvels et al.

2023). Finally, after the loss of the envelope, g modes are detected in white dwarfs (e.g. Winget et al. 1991). However, on the main sequence, below the  $\gamma$  Dor instability strip (e.g. Guzik et al. 2000), no star has been found yet to exhibit an observable g-mode signature, the exception being the Sun itself, with detection claims from e.g. García et al. (2007) and Fossat et al. (2017)<sup>1</sup>. This is due to the large convective envelope surrounding the radiative zone in such stars, a medium where internal gravity waves (IGW) are evanescent because of the imaginary character of the Brunt-Väisälä frequency in convective layers (e.g. Kippenhahn et al. 2012; Christensen-Dalsgaard 2014). The task of detecting these low-amplitude surface-evanescent modes is made even more difficult by the fact that the dominant signal in the frequency intervals where g modes are expected results from convective granulation (e.g. Harvey 1985; Mathur et al. 2011; Kallinger et al. 2014). In order to characterise at the same time

<sup>1</sup> For an extensive review and discussion of these two claims and the history of the search of solar g modes, we refer the reader to Appourchaux & Pallé (2013), Sect. 1 from Breton et al. (2022c), and Belkacem et al. (2022).

the non-linear interplay between IGWs and convection, the g-mode power spectrum and the mode surface visibility, 2D and 3D deep-layer numerical simulations of the Sun have been performed (e.g. Brun et al. 2011; Alvan et al. 2014, 2015; Le Saux et al. 2022).

Stellar internal rotation can be seismically characterised by measuring the rotational splittings between  $m$ -components of a given mode of radial order  $n$  and degree  $\ell$ , as rotation lifts the frequency degeneracy between azimuthal number  $m$  (e.g. Christensen-Dalsgaard 2014). Specifically with gi modes, another way is to measure the evolution with frequency of the period spacing  $\Delta P_{\ell,m}$ , that is the period difference of two modes of same  $\ell$  and  $m$ , but consecutive radial orders  $n$  and  $n+1$ . The characterised properties of gi-modes (for intermediate mass stars) and mixed modes (for low- and intermediate-mass evolved stars) suggest radiative zone rotation profiles compatible with weak radial differential rotation (see e.g. Aerts et al. 2019, and references therein). Insights of the same behaviour for solar-type stars were provided by the pressure-mode (p-mode) analysis performed by Benomar et al. (2015). Hence, detecting and characterising gi-mode  $\Delta P_{\ell}$  or g/gi/mixed rotational splittings in main-sequence solar-type pulsators would be of utter importance in order to put constraints on the structure and the rotation profile of their innermost internal regions.

Late F-type stars have thin convective envelopes and exhibit p modes stochastically excited by turbulent motions in the upper layer of the convective envelope. Stochastic excitation should also be at stake for g modes in these stars, via convective pummeling at the radiative/convective zone interface (e.g. Press 1981; Pinçon et al. 2016) and bulk turbulence at the bottom of the convective envelope (e.g. Goldreich & Kumar 1990; Belkacem et al. 2009). Convective velocity in the envelope of solar-type stars is expected to scale as the cube of the stellar mass (e.g. Brun et al. 2017). As pointed out by the 3D deep-shell hydrodynamical simulations of rotating  $1.3 M_{\odot}$  stars performed by Breton et al. (2022a, hereafter B22a), faster convective flows and reduced tunneling distance should therefore both favour a surface g-mode amplitude significantly increased compared to the solar case (e.g. Shibahashi 1979; Mathis et al. 2014; Pinçon et al. 2016; Mathis et al. 2023). Late F-type stars could therefore represent our best candidates to accurately characterise the deep radiative interior rotation of main-sequence solar-type stars, as well as their internal mixing and deep magnetism. In addition, these stars have recently raised the interest of the community relatively to their magnetic activity properties (Mathur et al. 2014a), the specific challenge they represent concerning the modelling of angular momentum transport along their life on the main sequence (Bétrisey et al. 2023) or of penetrative convection at the top of the radiative interior (Deal et al. 2023).

The practical, statistical, and theoretical tools developed over the years to study g-mode properties in solar-type stars have been, until now, almost exclusively applied to the solar case. Having described above the properties that would favour strong stochastic excitation of g modes in higher-mass solar-type stars, we therefore propose to apply some of these tools to targets observed almost continuously during four years by the *Kepler* satellite (Borucki et al. 2010) and exhibiting the stochastic variability related with solar-type p-mode oscillations. Approaching the lower boundary of the  $\gamma$  Dor instability strip in the HR diagram, the detection of stochastic p modes is crucial for us to select late F-type stars, which still have solar-type properties while having the larger convective velocities and the thinner envelope. Indeed, the mode stochasticity constitutes an undeniable evidence that the star possesses a convective envelope with charac-

teristics similar to the solar convection zone. Moreover, through modelling works (e.g. Deheuvels et al. 2016; Silva Aguirre et al. 2017; Creevey et al. 2017), p modes provide us the best available insights concerning the internal structure of the stars we want to consider. Fortunately, the *Kepler* short cadence mode allowed characterising solar-type p modes in several hundreds of main-sequence stars (e.g. Chaplin et al. 2011b; Mathur et al. 2022).

The layout of the paper is as follows. In Sect. 2, we present the selection rules we followed to obtain our working sample and we describe the important properties of the stars that compose it. In Sect. 3, we describe the method we use to obtain an approximation of the background profile and we perform a homogeneous statistical analysis to search for significant individual peaks. Using the corresponding detections, we select peak patterns with a low-probability to be noise-induced. By comparing the observations with predictions from reference models computed for this work, we identify four stars of interest. In Sect. 4, we discuss the case of KIC 3733735, for which we emphasise that the detected pattern is compatible with a series of non-asymptotic pure g modes followed by the  $n = 1$  pure p modes. In Sect. 5, we study the cases of KIC 6679371, KIC 7103006, and KIC 9206432, where we expect from the models to witness a coupling between cavities, which should result in decreased inertia for the g-dominated mixed modes. We connect in Sect. 6 the luminosity fluctuations observed in *Kepler* to maximal radial displacement and velocity at the surface of the considered stars for modes of different frequencies and degrees. We draw the conclusion of this work and suggest some perspectives in Sect. 7.

## 2. Sample selection

Our targets of interest were selected among the stars observed in short cadence by *Kepler* and exhibiting stochastically-excited p modes. We summarise in Table 1 the global properties of the selected targets. When available, we consider effective temperature  $T_{\text{eff}}$ , logarithm of the surface gravity,  $\log g$ , mass  $M_{\star}$ , and metallicity index [Fe/H] from Silva Aguirre et al. (2017), using the outputs from the ASTFIT modelling. Otherwise, we consider values from the *Kepler* Data Release 25 (DR25 Mathur et al. 2017). We therefore considered stars from Mathur et al. (2014a), Lund et al. (2017), and Hall et al. (2021), with  $6200 < T_{\text{eff}} < 6900$  K and  $\log g > 3.9$ . No additional target was recovered by inspecting the Mathur et al. (2022) sample, which is so far the more complete catalog of *Kepler* main-sequence solar-type pulsators. We note that KIC 9226926 is the only member of our sample with  $T_{\text{eff}} = 6887$  K above 6700 K, which positions it very close to the lower edge of the  $\gamma$ -Dor instability strip. However, KIC 9226926 is clearly a solar-type star, with signatures of spot-activity modulations and stochastic p modes in its Fourier spectrum. For these reasons, we tend to think that its  $T_{\text{eff}}$  value available in DR25, however consistent with the  $T_{\text{eff}} = 6853$  K value provided in the *Gaia-Kepler* catalog from Berger et al. (2020), might be overestimated. We note that Mathur et al. (2014a) used a  $T_{\text{eff}} = 7149$  K value which is even higher. We finally underline that the  $T_{\text{eff}}$ ,  $\log g$ ,  $M_{\star}$ , [Fe/H] values we compiled for this work are mainly indicative and their accuracy barely affects our subsequent analysis, which is focused on the stellar light curves acquired by *Kepler*. Combining fast convective flows and relatively thin convective envelope, this is the most promising sample that can possibly be built from *Kepler* observations in order to make an attempt of stochastic g-mode detections in main-sequence solar-type stars.

The light curves that we use<sup>2</sup> in what follows are calibrated with an improved version of the KEPSEISMIC method (García et al. 2011, 2014; Pires et al. 2015) and filtered with a high-pass filter with a cutoff at 55 days. They differ from the KEPSEISMIC light curves previously made accessible on the Mikulski Archive from Space Telescopes (MAST) in the sense that they are produced from a more recent version of the raw data available on MAST<sup>3</sup>

To analyse frequency regions below  $283.2 \mu\text{Hz}$  (that is, the Nyquist frequency,  $\nu_N$ , of the long cadence sampling of *Kepler*), we prefer the long-cadence data over the short-cadence data considering their longer extent in time. Indeed, *Kepler* quasi-continuous short cadence light curves are available only starting *Kepler* Quarter 5. The long cadence sampling may result in loss of power in the stellar signal close to the Nyquist frequency (e.g. Chaplin et al. 2011a; Kallinger et al. 2014), proportionally to a factor  $\eta^2$  given by

$$\eta^2 = \text{sinc}^2\left(\frac{\pi\nu}{2\nu_N}\right), \quad (1)$$

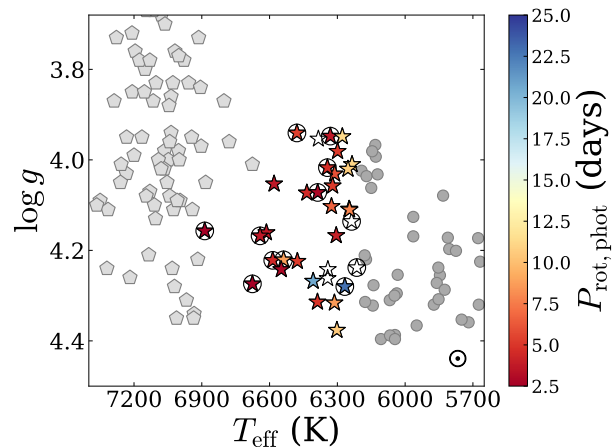
where  $\nu$  is the frequency. For  $\nu_N = 283.2 \mu\text{Hz}$ , this corresponds to a loss in the power spectral density (PSD) of about 10% at  $\nu = 100 \mu\text{Hz}$ , and about 35% at  $\nu = 200 \mu\text{Hz}$ , which may have consequences on the detectability of low-order (high-frequency) g modes. In amplitude, this corresponds to losses of  $\sim 5\%$  and  $\sim 19\%$ , respectively. Nevertheless, we consider it as an acceptable trade-off given the significant extension of resolution offered by the long-cadence time series. For our sample, the frequency of maximal oscillation amplitude,  $\nu_{\text{max}}$ , is significantly beyond the Nyquist frequency of the long cadence observations. Their contribution is therefore averaged out during signal integration, and we do not expect any aliasing related to the high-order p modes in the PSD, as it can be observed for red giants with  $\nu_{\text{max}} \sim \nu_N$  (Chaplin et al. 2014).

We note that one of the stars selected with the rules stated above is the exoplanet host star HAT-P7a (KIC 10666592, see e.g. Pál et al. 2008). We decide to exclude it from our sample as, even if our calibration remove the major contribution of the transit events, the HAT-P7b planetary-induced modulation (see e.g. Shporer 2017) is contaminating in a broad extent the low-frequency region of the PSD for this target. KIC 3425851, KIC 4349452, KIC 7670943, KIC 8292840, KIC 8866102, and KIC 11807274 are also planet-host stars (e.g. Davies et al. 2016). KIC 886102 is also known to have a K-type companion in its vicinity (Van Eylen et al. 2014). However, we keep these stars in our sample as we do not find evidence of PSD contamination by the planetary out-of-transit light modulation. It should be noted that, from *Gaia* (Gaia Collaboration et al. 2016) astrometric measurements (Holl et al. 2023) and *Kepler* seismic rotational splittings (Hall et al. 2021), KIC 7206837 is a candidate synchronised binary (Ball et al. 2023), as well as KIC 10355856.

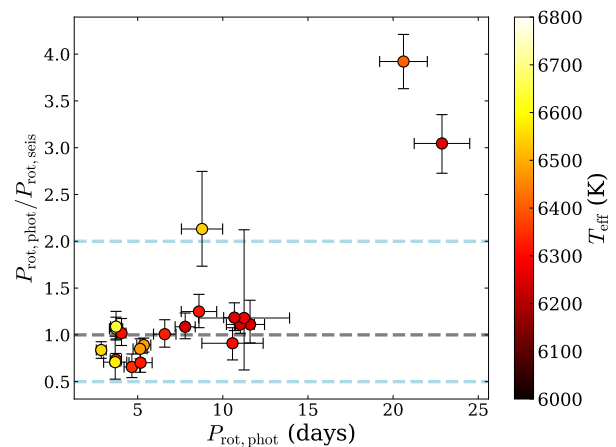
<sup>2</sup> The light curves can be downloaded from the following repository: [gitlab.com/sybreton/f-type-stars-gravity-modes](https://gitlab.com/sybreton/f-type-stars-gravity-modes).

<sup>3</sup> The pixel files were downloaded from [archive.stsci.edu/kepler/data\\_search/search.php](https://archive.stsci.edu/kepler/data_search/search.php) in May 2022 and correspond to *Kepler* DR25., and that an additional correction step to reduce the effect of the *Kepler* annual modulation has been added prior to the filtering. This additional correction step is the following: the auto-correlation function of the light curve is computed and the maximum in the interval  $372.5 \pm 30$  days is identified, 372.5 days corresponding to the period of the *Kepler* orbit. The light curve is phase-folded over the corresponding period and a wavelet filtering is applied (Starck et al. 2010). The light curves produced with this new procedure are significantly less perturbed by *Kepler* orbital modulations.

Finally, light curves of two targets also exhibit stable modulations with a period of about one day. These modulations cannot be related to spot activity and are evidence of the presence of a close-orbiting non-transiting companion. We also remove them from our working sample as the tidal interactions leading to possible g-mode excitation and resonance are complex (see e.g. Fuller 2017; Bunting et al. 2019) and we reserve the corresponding analysis and discussion for a future work (Breton, Dyrek et al., in prep). We finally consider 34 stars in our working sample.



**Fig. 1.**  $T_{\text{eff}}$  versus  $\log g$  diagram for the selected sample (stars), the remaining solar-type pulsators from Lund et al. (2017, grey circles) and the  $\gamma$  Dor sample from Van Reeth et al. (2015a) and Gebruers et al. (2021, grey pentagons). The Sun is represented by its usual symbol,  $\odot$ . The photometric rotation period is color-coded for the selected sample when available, otherwise the target symbol remains unfilled. The stars for which we obtain a detection with the ensemble analysis described in Sect. 3 are encircled in black.



**Fig. 2.** Comparison between  $P_{\text{rot,phot}}$  measured by Santos et al. (2021) and  $P_{\text{rot,seis}}$  measured by Hall et al. (2021) for the selected sample, with the corresponding error bars. The  $T_{\text{eff}}$  values are colour coded.

In Fig. 1, we show the  $T_{\text{eff}}$  versus  $\log g$  diagram for the selected sample. When available, we also colour code on the diagram the photometric average surface rotation period of the star,  $P_{\text{rot,phot}}$ , as measured by Santos et al. (2021). In order to illustrate

the location of the selected sample, we show on the diagram the Sun, the stars from Lund et al. (2017) that were not included in our sample, as well as the  $\gamma$  Dor from Van Reeth et al. (2015a) and Gebruers et al. (2021) which have been spectroscopically characterised. It is remarkable to note that, excluding the case of KIC 9226926 that we discussed above, there is no overlap on the diagram between the solar-type pulsators and the  $\gamma$  Dor stars. In particular, a thin depleted band without pulsators is visible between the two populations. Given the uncertainties on the location of the red edge of the  $\gamma$  Dor instability strip (Guzik et al. 2000; Dupret et al. 2004, 2005; Xiong et al. 2016), this separation raises questions about the existence of  $\gamma$  Dor/solar-type hybrid pulsators in the transition region between the two populations. Before presenting in more detail our analysis strategy in Sect. 3, we already underline here that none of the stars of our sample exhibit  $\gamma$ -Dor-like large amplitude gravito-inertial modes. With almost no short cadence *Kepler* data available for the  $\gamma$  Dor sample, it is however unclear if stochastic excitation from the thin convective layer of these stars is still able to excite detectable p modes in the coolest of them (e.g. Belkacem et al. 2010).

We compare in Fig. 2 the  $P_{\text{rot,phot}}$  with the seismic rotation periods measured by Hall et al. (2021),  $P_{\text{rot,seis}}$ . As expected, the hottest and most massive stars of the sample tend to be the fastest rotators (see e.g. van Saders & Pinsonneault 2013; Matt et al. 2015). For these stars, the corresponding fundamental rotation frequency is of the order of a few  $\mu\text{Hz}$ , which means that their PSD is likely to exhibit power contribution from the rotation harmonics up to a few tens of  $\mu\text{Hz}$ . We note discrepancies between  $P_{\text{rot,phot}}$  and  $P_{\text{rot,seis}}$  for several targets. For the fastest rotators, with  $P_{\text{rot,phot}}$  below  $\sim 5$ -6 days, several photometric measurements seem below the seismic values. We expect that stars in this range have low Rossby numbers and therefore exhibit solar-type latitudinal differential rotation (e.g. Brun et al. 2017; Noraz et al. 2022). In principle, when considering only low-degree modes, the seismically-inferred rotation period is sensitive to the stellar rotation at low-latitudes (relative to the stellar equator), and is able to probe different layers of the star (see e.g. Benomar et al. 2015). The photometrically-inferred rotation period is influenced by the inclination of the rotation axis of the star with respect to the observer, as well as the latitude of active regions (e.g. Santos et al. 2017). This alone could create significant discrepancies between photometric and seismic techniques, as latitudinal differential rotation can reach ratios up to 140% between the equatorial rotation frequency and the rotation frequency at latitude 45 degrees (Benomar et al. 2018). We also underline that the correlation between inclination angle and rotational splittings makes it particularly difficult to obtain an accurate measurements of these two parameters for stars with wide modes such as late F-type stars (e.g. Ballot et al. 2006, 2008; Benomar et al. 2009). This means that the uncertainties on seismic parameters could be underestimated. Some uncertainties on  $P_{\text{rot,phot}}$  might as well be underestimated. Comparing the bias between the photometric and seismic measurements would finally require a careful examination of the 2D-kernels of the modes used by Hall et al. (2021) to measure the average rotation period, in order to estimate the latitudinal and radial extent over which this average is sensitive. Explaining the exact origin of the discrepancy between photometric and seismic rotation period measurements is therefore out of the scope of this paper. We finally simply underline that the specific case of KIC 8866102 might be explained by the system binarity, with the 20.6-day photometric modulation being actually the rotational modulation of the K-type companion.

We provide in this work new stellar models for four targets of the sample, KIC 3733735, KIC 6679371, KIC 7103006, and KIC 9206432. The modelling was performed using the IACgrid, generated with the Module for Experiments in Stellar Astrophysics (MESA, Paxton et al. 2011, 2013, 2015, 2018, 2019). The modelling procedure is extensively described in González-Cuesta et al. (2023), we outline its main details in Appendix B. An important uncertainty for the modelling of stars with  $M_{\star} \geq 1.2 M_{\odot}$  is related to the choices concerning convective core overshooting and processes driving chemical mixing close to the core (e.g. Silva Aguirre et al. 2011; Claret & Torres 2016; Pratt et al. 2017; Deal et al. 2020; Johnston 2021; Baraffe et al. 2023; Varghese et al. 2023). For sake of simplicity concerning this aspect, our modelling is restricted in this regard to the standard MESA input physics, which does not include overshooting. We will discuss in the following sections how this might affect the comparison between models and observations.  $M_{\star}$  and  $R_{\star}$  corresponding to our modelling are used in Table 1. For these four stars as well as the ones for which the ASTFIT modelling is available, we include in Table 1 the corresponding radius at the base of the convective envelope,  $R_{\text{CZ}}$ . We note that, except for KIC 9139151, all the stars in our sample have  $R_{\text{CZ}} > 0.8 R_{\star}$ , and six of them have  $R_{\text{CZ}} > 0.9 R_{\star}$  (KIC 2837475, KIC 3733735, KIC 6679371, KIC 9206432, KIC 11253226, and KIC 12317678). When available, we also provide the value of the photometric magnetic activity index  $S_{\text{ph}}$  (García et al. 2010; Mathur et al. 2014b) computed by Santos et al. (2021). This index is expected to be low (at most a few hundreds of ppm) for stars where p modes are observed (see Mathur et al. 2019). We remind that, depending on the activity cycle epoch, the solar  $S_{\text{ph}}$  varies between  $\sim 90$  and  $\sim 260$  ppm (see Mathur et al. 2014a). Therefore, even if the  $S_{\text{ph}}$  is only a lower-limit indicator for photospheric activity (it can be biased by stellar inclination and spot latitude), the  $S_{\text{ph}}$  values of the stars in our sample correspond to low to moderate level of solar activity. This is interesting, as high  $S_{\text{ph}}$  values would be associated to high level of power at low frequency in the PSD, making the detection of g modes more difficult. Finally, we also include in Table 1 an estimate of the metallicity  $[\text{Fe}/\text{H}]$ , as this parameter, is correlated with the thickness of the convective envelope: for a given mass and radius, a star with low metallicity will have a thinner convective envelope than a star with high metallicity (e.g. van Saders & Pinsonneault 2013; Amard et al. 2019), due to the increase of opacity with metallicity. In Table 2, we provide for each star the global seismic parameters  $\Delta\nu$  and the frequency at maximum amplitude of the p modes, as measured by Huber et al. (2013), Mathur et al. (2014a), and Lund et al. (2017).

### 3. Ensemble analysis

#### 3.1. Estimating the background power level

In the frequency range where g modes are expected for the considered stars, the PSD is dominated by stellar magnetic activity, granulation, and surface rotation peaks due to dark spots and faculae (see e.g. García & Ballot 2019, and references therein). Before looking for significant peaks in the spectrum, it is hence necessary to remove the background contribution (e.g. Mathur et al. 2011; Kallinger et al. 2014) in the PSD while limiting the bias introduced by the presence of rotational harmonics.

Extreme low-frequency regions of the PSD can be dominated by long-term activity variations, such as magnetic cycles, and/or still be polluted by instrumental modulations even after applying the 55-day high-pass filtering. Low-frequency regions exhibit a

**Table 1.** Parameters of the selected targets

KIC	$T_{\text{eff}}$ (K)	$\log g$ (dex)	$M_{\star}$ ( $M_{\odot}$ )	$R_{\star}$ ( $R_{\odot}$ )	$R_{\text{CZ}}$ ( $R_{\star}$ )	$P_{\text{rot,phot}}$ (days)	$P_{\text{rot,seis}}$ (days)	$S_{\text{ph}}$ (ppm)	[Fe/H] (dex)
1430163	6586 ± 85	4.222 ± 0.015	1.29 ± 0.08	1.46 ± 0.06	-	4.4 ± 0.8	-	208 ± 14	-0.02 ± 0.15
1435467	6326 ± 77	4.103 ± 0.005	1.34 ± 0.05	1.70 ± 0.02	0.84 ± 0.02	6.6 ± 0.7	6.5 <sup>+0.8</sup> <sub>-0.6</sub>	196 ± 10	0.01 ± 0.10
2837475	6614 ± 77	4.161 ± 0.005	1.39 ± 0.05	1.62 ± 0.02	0.92 ± 0.01	3.7 ± 0.4	3.5 <sup>+0.2</sup> <sub>-0.2</sub>	71 ± 5	0.01 ± 0.10
3425851	6342 ± 86	4.242 ± 0.033	1.18 ± 0.07	1.36 ± 0.07	-	-	8.1 <sup>+8.6</sup> <sub>-2.7</sub>	-	-0.06 ± 0.10
3456181	6384 ± 77	3.954 ± 0.002	1.56 ± 0.03	2.18 ± 0.02	0.88 ± 0.01	-	10.7 <sup>+2.0</sup> <sub>-2.8</sub>	-	-0.15 ± 0.10
3733735	6676 ± 80	4.274 ± 0.015	1.26 ± 0.06	1.38 ± 0.03	0.94 ± 0.01	2.6 ± 0.2	-	239 ± 20	-0.02 ± 0.15
4349452	6267 ± 81	4.280 ± 0.033	1.10 ± 0.09	1.26 ± 0.07	-	22.9 ± 1.6	7.5 <sup>+0.5</sup> <sub>-0.6</sub>	360 ± 10	-0.06 ± 0.15
4638884	6312 ± 82	4.031 ± 0.012	1.38 ± 0.13	1.88 ± 0.10	-	6.0 ± 0.7	-	114 ± 7	0.10 ± 0.15
5371516	6299 ± 88	3.981 ± 0.011	1.31 ± 0.11	1.94 ± 0.09	-	5.2 ± 0.5	-	318 ± 19	0.04 ± 0.15
6225718	6313 ± 77	4.316 ± 0.003	1.15 ± 0.03	1.23 ± 0.01	0.81 ± 0.01	8.6 ± 1.0	6.9 <sup>+0.6</sup> <sub>-0.5</sub>	24 ± 1	-0.07 ± 0.10
6508366	6331 ± 77	3.947 ± 0.002	1.58 ± 0.03	2.21 ± 0.02	0.87 ± 0.01	3.7 ± 0.3	5.1 <sup>+0.1</sup> <sub>-0.1</sub>	231 ± 16	-0.05 ± 0.10
6679371	6479 ± 77	3.941 ± 0.003	1.50 ± 0.01	2.18 ± 0.01	0.91 ± 0.01	5.4 ± 0.4	6.0 <sup>+0.2</sup> <sub>-0.2</sub>	108 ± 7	0.01 ± 0.10
7103006	6344 ± 77	4.017 ± 0.004	1.47 ± 0.02	1.96 ± 0.01	0.87 ± 0.01	4.7 ± 0.5	7.1 <sup>+1.3</sup> <sub>-1.0</sub>	377 ± 23	0.02 ± 0.10
7206837	6305 ± 77	4.167 ± 0.005	1.33 ± 0.04	1.57 ± 0.02	0.84 ± 0.02	4.1 ± 0.3	4.0 <sup>+0.6</sup> <sub>-0.4</sub>	234 ± 16	0.10 ± 0.10
7670943	6477 ± 116	4.224 ± 0.033	1.30 ± 0.07	1.46 ± 0.09	-	5.1 ± 0.4	6.0 <sup>+0.6</sup> <sub>-0.6</sub>	13 ± 3	0.10 ± 0.15
7771282	6248 ± 77	4.109 ± 0.007	1.25 ± 0.06	1.63 ± 0.03	0.83 ± 0.02	11.6 ± 0.9	10.4 <sup>+2.8</sup> <sub>-1.7</sub>	81 ± 4	-0.02 ± 0.10
7940546	6235 ± 77	4.010 ± 0.002	1.48 ± 0.03	1.99 ± 0.01	0.84 ± 0.01	11.0 ± 0.8	9.9 <sup>+0.3</sup> <sub>-0.4</sub>	52 ± 2	-0.20 ± 0.10
8179536	6343 ± 77	4.262 ± 0.006	1.20 ± 0.04	1.34 ± 0.02	0.84 ± 0.02	-	6.5 <sup>+1.2</sup> <sub>-0.8</sub>	-	-0.03 ± 0.10
8292840	6214 ± 113	4.238 ± 0.033	1.06 ± 0.09	1.30 ± 0.07	-	-	7.7 <sup>+0.8</sup> <sub>-0.5</sub>	-	-0.16 ± 0.10
8694723	6246 ± 77	4.110 ± 0.002	1.11 ± 0.02	1.53 ± 0.01	0.82 ± 0.01	7.8 ± 0.6	7.2 <sup>+0.8</sup> <sub>-0.6</sub>	29 ± 2	-0.42 ± 0.10
8866102	6407 ± 83	4.268 ± 0.030	1.21 ± 0.09	1.34 ± 0.07	-	20.6 ± 1.4	5.3 <sup>+0.2</sup> <sub>-0.2</sub>	274 ± 8	0.00 ± 0.15
9139151	6302 ± 77	4.376 ± 0.004	1.15 ± 0.03	1.15 ± 0.01	0.78 ± 0.01	10.6 ± 1.8	11.6 <sup>+0.8</sup> <sub>-1.1</sub>	170 ± 7	0.10 ± 0.10
9206432	6538 ± 77	4.221 ± 0.005	1.32 ± 0.04	1.47 ± 0.02	0.92 ± 0.01	8.8 ± 1.2	4.1 <sup>+1.0</sup> <sub>-0.5</sub>	53 ± 3	0.16 ± 0.10
9226926	6887 ± 89	4.157 ± 0.065	1.34 ± 0.07	1.60 ± 0.14	-	2.17 ± 0.14	-	103.7 ± 5.4	-0.22 ± 0.10
9353712	6278 ± 77	3.948 ± 0.003	1.56 ± 0.04	2.19 ± 0.03	0.87 ± 0.02	11.2 ± 2.7	9.5 <sup>+7.3</sup> <sub>-3.9</sub>	47 ± 3	-0.05 ± 0.10
9414417	6253 ± 75	4.020 ± 0.002	1.45 ± 0.03	1.95 ± 0.02	0.84 ± 0.01	10.7 ± 0.6	9.0 <sup>+1.1</sup> <sub>-0.9</sub>	89 ± 4	-0.13 ± 0.10
9812850	6321 ± 77	4.057 ± 0.003	1.37 ± 0.04	1.81 ± 0.02	0.85 ± 0.01	5.2 ± 0.7	7.4 <sup>+0.4</sup> <sub>-0.5</sub>	196 ± 12	-0.07 ± 0.10
10016239	6388 ± 89	4.314 ± 0.010	1.18 ± 0.08	1.25 ± 0.04	-	4.9 ± 0.5	-	65 ± 5	-0.02 ± 0.15
10355856	6435 ± 83	4.073 ± 0.010	1.21 ± 0.12	1.67 ± 0.09	-	4.5 ± 0.3	-	300 ± 20	-0.10 ± 0.15
11070918	6387 ± 192	4.072 ± 0.023	1.16 ± 0.20	1.64 ± 0.15	-	2.9 ± 0.2	-	136 ± 12	-0.20 ± 0.25
11081729	6548 ± 83	4.242 ± 0.006	1.32 ± 0.05	1.44 ± 0.02	0.86 ± 0.02	2.9 ± 0.3	3.4 <sup>+0.1</sup> <sub>-0.1</sub>	271 ± 22	0.11 ± 0.10
11253226	6642 ± 77	4.168 ± 0.005	1.37 ± 0.05	1.59 ± 0.02	0.92 ± 0.01	3.7 ± 0.3	3.4 <sup>+0.4</sup> <sub>-0.3</sub>	67 ± 5	-0.08 ± 0.10
11807274	6237 ± 74	4.136 ± 0.033	1.19 ± 0.08	1.54 ± 0.08	-	-	7.9 <sup>+0.3</sup> <sub>-0.5</sub>	-	0.00 ± 0.10
12317678	6580 ± 77	4.053 ± 0.003	1.37 ± 0.03	1.82 ± 0.02	0.91 ± 0.01	3.7 ± 0.7	5.2 <sup>+1.8</sup> <sub>-0.9</sub>	51 ± 4	-0.28 ± 0.10

**Notes.**  $T_{\text{eff}}$ ,  $\log g$ ,  $M_{\star}$ , and  $R_{\star}$  values are from the DR25 catalog (Mathur et al. 2017). When possible,  $\log g$ ,  $M_{\star}$ , and  $R_{\star}$  values are replaced by the values from the IACGrid (Pérez Hernández et al. 2016, 2019; González-Cuesta et al. 2023) modelling (KIC 3733735, KIC 6679371, KIC 7103006, and KIC 9206432) or the ASTFIT modelling from Silva Aguirre et al. (2017). In this case  $T_{\text{eff}}$  and [Fe/H] values are replaced by those from Lund et al. (2017). For these stars,  $R_{\text{CZ}}$  the radius at the base of the convective zone is provided.  $P_{\text{rot,phot}}$  and  $S_{\text{ph}}$  are taken from Santos et al. (2019, 2021), with the exception of KIC 9226926, for which we use the value from Mathur et al. (2014a).  $P_{\text{rot,seis}}$  are taken from Hall et al. (2021).

significant contribution from rotational-modulation harmonics. Therefore, we consider for our fit only frequency peaks above 20  $\mu\text{Hz}$ . The following background model is used

$$B(\nu) = a\nu^{-b} + h, \quad (2)$$

where  $a$  and  $b$  are the parameters of the power law modelling the low-frequency trend of the PSD. The parameter  $h$  accounts for the noise component close to the Nyquist frequency, which, for long-cadence data, is dominated by stellar convective granulation. We emphasise that this low-frequency background model corresponds to the modelling choice of Mathur et al. (2010) and that, in order to model the lowest-frequency region of the PSD, Aigrain et al. (2004) or Kallinger et al. (2014) preferred the use of a Harvey profile (Harvey 1985) with a low-frequency cutoff rather than a power law. It is indeed yet unclear which is the optimal way to model this low-frequency area that corresponds to the magnetic activity signature in the Fourier spectrum. Nevertheless, as we use a 20  $\mu\text{Hz}$  low frequency cutoff, which excludes a significant part of the low-frequency power slope, the power-

law parameterisation of our model provides more flexibility for the fit.

The Markov Chains Monte Carlo (MCMC) exploration of the parameter distribution is performed with the *apollinaire* module<sup>4</sup> (see Breton et al. 2022b, for a complete description of the module), assuming that the probability distribution of the likelihood  $\mathcal{L}$  follows a  $\chi^2$  with two degrees of freedom

$$\mathcal{L}(\text{PSD}, \theta) = \prod_k \frac{1}{B(\nu_k, \theta)} \exp\left[-\frac{\text{PSD}(\nu_k)}{B(\nu_k, \theta)}\right]. \quad (3)$$

The posterior probability distribution we want to sample is therefore

$$p(\theta, \text{PSD}) = \mathcal{L}(\text{PSD}, \theta)p(\theta), \quad (4)$$

where  $p(\theta)$  is the prior distribution assumed for the set of parameters  $\theta$ . Here, we choose to sample  $\theta = (\ln a, \ln b, \ln h)$ . The

<sup>4</sup> The module documentation is available at [apollinaire.readthedocs.io/en/latest](https://readthedocs.io/en/latest).

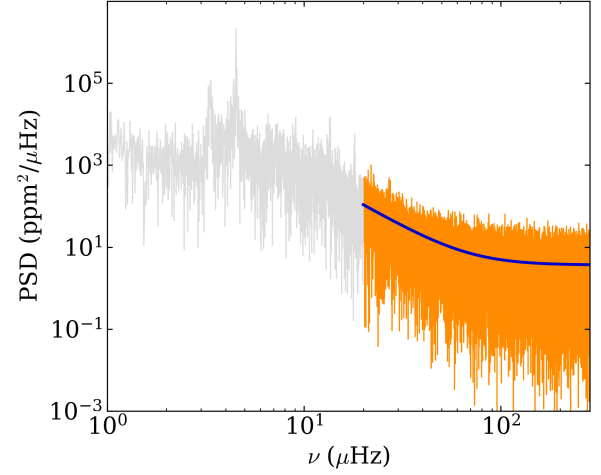
**Table 2.** Frequency of maximum amplitude  $\nu_{\max}$  and large frequency separation  $\Delta\nu$  for the stars in the sample.

KIC	$\nu_{\max}$ ( $\mu\text{Hz}$ )	$\Delta\nu$ ( $\mu\text{Hz}$ )	Origin
1430163	$1805.07 \pm 29.66$	$85.66 \pm 1.80$	M14
1435467	$1406.7 \pm 8.4$	$70.369 \pm 0.034$	L17
2837475	$1557.6 \pm 9.2$	$75.729 \pm 0.042$	L17
3425851	$2038 \pm 60$	$92.6 \pm 1.5$	H13
3456181	$970.0 \pm 8.3$	$52.264 \pm 0.041$	L17
3733735	$2132.61 \pm 84.44$	$92.37 \pm 1.72$	M14
4349452	$2106 \pm 50$	$98.27 \pm 0.57$	H13
4638884	$1192.28 \pm 75.82$	$60.83 \pm 1.15$	M14
5371516	$1018.62 \pm 59.84$	$55.46 \pm 1.06$	M14
6225718	$2364.2 \pm 4.9$	$105.695 \pm 0.018$	L17
6508366	$958.3 \pm 4.6$	$51.553 \pm 0.047$	L17
6679371	$941.8 \pm 5.1$	$50.601 \pm 0.029$	L17
7103006	$1167.9 \pm 7.2$	$59.658 \pm 0.030$	L17
7206837	$1652.5 \pm 11.7$	$79.131 \pm 0.039$	L17
7670943	$1895 \pm 73$	$88.6 \pm 1.3$	H13
7771282	$1465.1 \pm 27.0$	$72.463 \pm 0.079$	L17
7940546	$1116.6 \pm 3.6$	$58.762 \pm 0.029$	L17
8179536	$2074.9 \pm 13.8$	$95.090 \pm 0.058$	L17
8292840	$1983 \pm 37$	$92.85 \pm 0.35$	H13
8694723	$1470.5 \pm 4.1$	$75.112 \pm 0.021$	L17
8866102	$2014 \pm 32$	$94.50 \pm 0.60$	H13
9139151	$2690.4 \pm 14.5$	$117.294 \pm 0.032$	L17
9206432	$1866.4 \pm 14.9$	$84.926 \pm 0.051$	L17
9226926	$1411.43 \pm 0.99$	$73.77 \pm 1.26$	M14
9353712	$934.3 \pm 11.1$	$51.467 \pm 0.104$	L17
9414417	$1155 \pm 32$	$60.05 \pm 0.27$	H13
9812850	$1255.2 \pm 9.1$	$64.746 \pm 0.068$	L17
10016239	$2087.74 \pm 22.83$	$101.60 \pm 2.59$	M14
10355856	$1298.44 \pm 64.19$	$67.47 \pm 1.43$	M14
11070918	$1093.64 \pm 20.03$	$66.89 \pm 1.61$	M14
11081729	$1968.3 \pm 12.6$	$90.116 \pm 0.048$	L17
11253226	$1590.6 \pm 10.6$	$76.858 \pm 0.030$	L17
11807274	$1496 \pm 56$	$75.71 \pm 0.31$	H13
12317678	$1212.4 \pm 5.5$	$63.464 \pm 0.025$	L17

**Notes.** The seismic parameter are taken from, in this order of priority for stars presents in several lists, [Lund et al. \(2017, L17\)](#), [Mathur et al. \(2014a, M14\)](#), and [Huber et al. \(2013, H13\)](#). For stars for which lower and upper uncertainties are provided, we retain only the largest value.

choice to sample the logarithm of the parameter allows us to use uniform distributions as non-informative priors ([Benomar et al. 2009](#)), ensuring with an a posteriori inspection of the sampled distributions that the chosen bounds are wide enough to avoid introducing a bias in the inferred posterior probability distribution. We sample the posterior probability with 32 walkers and 10000 steps, among which we discard the 5000 first steps, in order to ensure that the sampled posterior is not biased by the presence of a tail resulting from the exploration walk from the initial position of the walker to the high-probability regions. We illustrate our method in [Fig. 3](#) with the case of KIC 3733735, which exhibits a rotational modulation of particularly large amplitude and an important number of harmonics. It is possible to see that, by setting the 20  $\mu\text{Hz}$  low-frequency cutoff, no apparent bias related to the power excess of the rotational modulation affects the background profile we obtain from our MCMC sampling.

In order to perform the statistical analysis we will describe in [Sect. 3.2](#), we can now use the background model to obtain the



**Fig. 3.** Background model computed for KIC 3733735. Only the high-frequency bins in dark orange are considered for the fit. The low-frequency area of the PSD (in grey) is not considered when computing the likelihood. In blue, we show the background profile  $B$  we obtain from the posterior probability MCMC sampling.

signal-to-noise (S/N) spectrum,  $P_{S/N}$

$$P_{S/N}(\nu) = \frac{\text{PSD}(\nu)}{B(\nu)}. \quad (5)$$

### 3.2. Statistical analysis

Given an oscillation mode of frequency  $\nu$  and unknown lifetime, it is not trivial to define its S/N detection threshold. This matter has been discussed for example by [Appourchaux et al. \(2000\)](#) who, under the assumption of a  $\chi^2$  with two degrees of freedom distribution, suggested the following formula for the detection threshold of a signal of power  $s_{\text{det}}$  in continuous disc-integrated observations

$$\frac{s_{\text{det}}}{B(\nu)} \approx \ln t_{\text{obs}} + \ln \delta\nu - \ln p_{\text{det}}, \quad (6)$$

where  $t_{\text{obs}}$  is the observing time,  $\delta\nu$  is the considered frequency interval, and  $p_{\text{det}} \ll 1$  is the probability that at least one peak in the  $\delta\nu$  window is above  $s_{\text{det}}$  in the null hypothesis,  $H_0$ . For  $p_{\text{det}} = 0.1$ , the value adopted by [Appourchaux et al. \(2000\)](#) and [Belkacem et al. \(2009\)](#), a four-year time series and a  $\delta\nu$  window of  $\sim 263 \mu\text{Hz}$  (that is the width of the band that we are exploring between the low-frequency cutoff and the Nyquist frequency), this formula yields a detection threshold  $s_{\text{det}} \approx 12.7 B(\nu)$ . In other words, this means that, if the power peaks in the  $\delta\nu$  window are exactly distributed following a  $\chi^2$  distribution, there is just a 10% probability that a peak appears above the threshold as a pure noise feature.

We emphasise that what is interpreted here as probable signal is a deviation to the assumed  $\chi^2$  distribution, which may have different possible origins, including instrumental artefacts. A detection of significant peaks needs to be strengthened by the characterisation of intrinsic properties of the phenomenon that we try to detect. In the case of g modes, the  $\Delta P_\ell$  asymptotic regular period spacing derived by [Tassoul \(1980\)](#) seems an obvious perspective for this characterisation. However, when looking for

individual significant peaks, this requires to detect at least several significant peaks in order to reconstruct the pattern and assess its regularity, a complex task in the case of low S/N oscillation modes. An alternative solution is to look for the global contribution to the pattern of regularly-spaced non-individually-significant peaks, as chosen by [García et al. \(2007\)](#) in order to highlight evidence of the solar g-mode signature. However, transposed to a stellar case, this method has a large degeneracy that needs to be examined carefully (stellar inclination angle, influence of rotational splittings, degree-dependence of the pattern), and it is therefore beyond the scope of this paper to apply it on our sample.

High-order (low-frequency) g modes period spacing may also deviate from the Tassoul asymptotic relation under the effect of rotation (e.g. [Bouabid et al. 2013](#)) or because of the steep profile of the Brunt-Väisälä frequency,  $N$  at the boundary between the convective core and the radiative interior (e.g. [Berthomieu & Provost 1988](#)). We remind that  $N$  is given by

$$N^2 = g \left( \frac{1}{\Gamma_1 P} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right), \quad (7)$$

where  $g$ ,  $P$  and  $\rho$  are the gravity acceleration, pressure and density of the medium, respectively, while  $\Gamma_1 = (\partial \ln P / \partial \ln \rho)_{\text{ad}}$  is the adiabatic exponent.  $N$  can be written as

$$N^2 = N_T^2 + N_\mu^2, \quad (8)$$

that is the sum of an entropy-stratification component,  $N_T$ , and a chemical-stratification component,  $N_\mu$ , ([Aerts et al. 2019](#)). In more massive stars exhibiting unstable g modes with large amplitude, the peak significance validation is only a marginal issue and it is therefore more straightforward to reconstruct the observed pattern and its deviation to the asymptotic formula. Due to fast rotation, the main challenge in this case is the correct attribution of the azimuthal number  $m$  of the observed components (e.g. [Van Reeth et al. 2015a](#); [Christophe et al. 2018](#)). Finally, given the respective profiles of  $N$  and the Lamb frequency,  $S_\ell$ , in the frequency region we are exploring in this work, we can expect modes to exhibit a mixed gravito-acoustic behaviour ([Shibahashi 1979](#)). This is particularly interesting as these modes have demonstrated their ability to probe structure and chemical mixing (e.g. [Deheuvels & Michel 2010](#); [Cunha et al. 2015](#); [Vrard et al. 2022](#)), rotation (e.g. [Deheuvels et al. 2014](#)), and magnetism (e.g. [Loi 2020](#); [Bugnet et al. 2021](#)) in stellar deep layers of evolved stars.

We remind that  $S_\ell$  is connected to the sound speed  $c_s = \sqrt{\Gamma_1 P / \rho}$  through the relation

$$S_\ell^2 = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} c_s^2. \quad (9)$$

Given all these considerations, we propose to start by identifying peaks of interest, and, secondly, to interpret the pattern of peaks we observe with respect to the frequency range where they are detected. We will be able to compute the probability that  $k$  peaks, having all their S/N height  $s/B \geq z$ , are a product of noise, by considering the probability  $p_0$  that, in absence of signal, there are at least  $k$  peaks above  $z$

$$p_0(k|s/B(v) \geq z) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n_{\text{bin}}}{k} \exp(-iz) [1 - \exp(-z)]^{n_{\text{bin}}-i}, \quad (10)$$

where  $n_{\text{bin}} \sim \delta v t_{\text{obs}}$  is the number of frequency bins in the considered interval. Therefore, a small  $p_0$  value means that it is unlikely that the observed signal is a product of noise following a

$\chi^2$  with two degrees of freedom. It should be noted that, setting  $k = 1$  and assuming  $\exp(-z) \ll 1$ , Eq. (10) yields the detection threshold provided in Eq. (6).

Considering the S/N spectra computed from the  $B$  profile as described in Sect. 3.1, from 20  $\mu\text{Hz}$  to the long-cadence Nyquist frequency, 283.2  $\mu\text{Hz}$ , we use Eq. (6) to list, for each of our targets, the peaks located above the detection threshold. The impact of rotation on the period spacing of the mode we are looking for should be limited. Indeed, the shortest rotation period of our sample (see Table 1) is 2.17 days for KIC 9226926, which corresponds to a frequency  $\Omega/2\pi \sim 5.33 \mu\text{Hz}$ . [Aerts et al. \(2019\)](#) underlined that a treatment of rotation going beyond the perturbative approach (for example the traditional approximation of rotation, see e.g. [Lee & Saio 1997](#)) has to be considered when  $\omega < 4\Omega$ , where  $\omega = 2\pi\nu$  (see also [Ballot et al. 2010](#), for the limit of perturbative approach in uniformly-rotating polytropes). In B22a, departures from the mode frequencies yielded by perturbative predictions were observed in the 3D simulations for  $\omega < 10\Omega$ . Using an equatorial model, [Mathis et al. \(2023\)](#) showed that the mode behaviour started to be modified with respect to the asymptotic non-rotating approximation below this same threshold.

Of course, we assume here that the resonant cavity of the mode in the radiative interior has a rotation rate that is of the same order of magnitude to the one of the convective envelope. This is a reasonable assumption if we consider that the seismic measurements in early F-type stars provide core-to-surface rotation ratio close to one (see in particular Fig. 6 from [Aerts 2021](#), and references therein), meaning that strong angular momentum transport mechanisms are at work in the radiative layers of these stars ([Ouazzani et al. 2019](#)). Concerning solar-type pulsators, [Benomar et al. \(2015\)](#) compared the convective envelope and upper layers of the radiative interior rotation rates, showing that there was no evidence either for the existence of a significant amount of differential radial rotation. It should also be noted that F-type stars with convective envelope are expected to have a very short radiative interior-convective envelope coupling timescale compared to cooler stars ([Spada & Lanzafame 2020](#)).

We find at least one significant peak in 12 stars among the 34 of our sample. Given the  $p_{\text{det}} = 0.1$  value we set, we would expect to have about  $3.4 \pm 1.8$  false detections, which means that finding such a signal in 12 stars constitutes a significant detection. We also underline that this however signifies that between a quarter and a half of the sample may be false positives.

The list of peaks of interest we detect is provided in Table 3, with corresponding KIC, frequency and periods. The stars where there is a detection are encircled in Fig. 1. We note that they are not concentrated in a specific subdivision of the  $T_{\text{eff}}$  versus  $\log g$  diagram inside our working sample. We visually inspect the S/N spectra of the 12 stars where a significant peak is found with the aim to identify regular patterns surrounding these peaks. Following our visual inspection, we find four targets of interest. We discuss the case of KIC 3733735 in Sect. 4, where we argue that we see both the signature of the  $\ell = 1, n = 1$  p mode and a pattern of pure g modes. In Sect. 5, we discuss the cases of KIC 6679371, KIC 7103006, and KIC 9206432, where the signature we observe can be explained by invoking a coupling between p- and g-mode resonant cavities.

#### 4. Decoupled cavities: the case of KIC 3733735

KIC 3733735 exhibits, around the 158.7 min peak detected from Eq. (6), five peaks with S/N above 10. Using Eq. (10), we compute the  $p_0$  probability to observe these six peaks in a  $\chi^2$  distri-

**Table 3.** Individual peaks detected with the  $p_{\text{det}} = 0.1$  threshold.

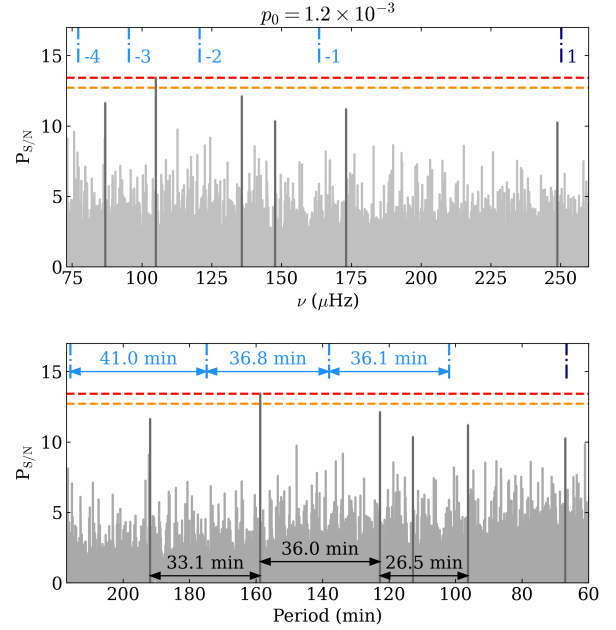
KIC	$\nu$ ( $\mu\text{Hz}$ )	Period (min)
1430163	68.7	242.8
3733735	105.0	158.7
4349452	181.3	91.9
4349452	269.6	61.8
6508366	79.2	210.5
6679371	191.9	86.8
7103006	160.0	104.1
8292840	239.3	69.6
9206432	258.6	64.5
9226926	26.3	633.0
11070918	35.2	473.3
11253226	280.9	59.3
11807274	132.5	125.7

bution, setting the height of the lowest amplitude peak of the pattern for  $z$ , and still considering a wide frequency window of  $263.2 \mu\text{Hz}$ . We could of course restrict the frequency window around the frequency interval where we observe the pattern, but keeping the initial window on which we performed the homogeneous search of individual peaks allows us to estimate more conservative values to compute the  $p_0$  values. We find  $p_0 = 1.2 \times 10^{-3}$ . It should also be noted that the  $158.7$  min peak is above the  $p_{\text{det}} = 0.05$  threshold.

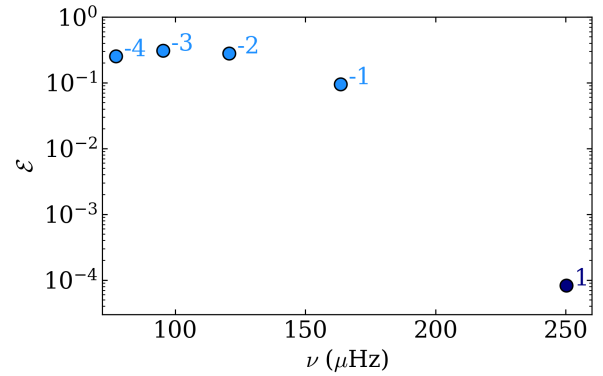
Using our reference stellar model for KIC 3733735, we use the GYRE oscillation code (Townsend & Teitler 2013; Townsend et al. 2018; Goldstein & Townsend 2020) to compute the expected oscillations frequencies for  $\ell = 1$  modes with low absolute order,  $|n|$ , following the usual convention to label p modes with  $n > 0$  and g modes with  $n < 0$ . As illustrated in Fig. 4, the highest frequency peak, at  $248.8 \mu\text{Hz}$ , matches closely the frequency predicted by GYRE for the  $\ell = 1, n = 1$  p mode of the stellar model we compute for KIC 3733735 ( $250.2 \mu\text{Hz}$ ). At lower frequency, three of the peaks are distributed following a period spacing close to  $30$  min. There is one additional peak with S/N above 10 that is not included in this regular pattern.

We note that the period spacing we observe in the signal is significantly different from what is predicted by our model. To discuss this point, we have to remind that, as already stated in Sect. 2, the reference models were computed using a grid of stellar model with standard input physics that do not account for core overshooting. The discrepancies between the observed and modelled frequencies can be explained by the fact that the asymptotic period spacing from Tassoul (1980) is a function of the  $\int N/r dr$  integral. It is therefore extremely sensitive to the extent of the convective core and to the chemical buoyancy term,  $N_\mu$  (see Eq. (8)), at the interface between the convective core and the radiative interior. Given the uncertainties on the overshooting and internal mixing processes at stake, accurately model the  $N$  profile at the convective core interface in late F-type stars represents an additional difficulty compared to lower-mass solar-type stars with radiative core. This interface is supposed to build a strong chemical-composition gradient, as Varghese et al. (2023) found that the mixing efficiency close to the convective core decreased with stellar mass. We therefore underline that i) the mode identification we report in the present work is done within the hypothesis assumed for the grid of stellar models we use for our seismic modelling, ii) it can be used to calibrate core overshooting and mixing in a range of masses where observational evidence are still lacking (e.g. Neiner et al. 2012; Mombarg et al. 2020; Pedersen et al. 2021, for the case of more massive stars).

In what follows, we present in more detail the properties of the identified modes.



**Fig. 4.**  $P_{S/N}$  (grey) for KIC 3733735, with the x-axis scaled in frequency (top) and in period (bottom). The  $p_0$  probability of the pattern is shown in the top panel. The dashed horizontal orange and red lines correspond to the  $p_{\text{det}} = 0.1$  and  $0.05$  detection thresholds computed from Eq. (6), respectively. The peaks included when computing the pattern probability  $p_0$  are shown in darker grey. The black arrows show the period spacing between some peaks of the pattern. The mode frequencies computed for  $\ell = 1, m = 0$  modes with GYRE are shown for (from right to left,  $n = -1, -2, -3$  and  $-4$ ) g modes (light blue) and the  $n = 1$  p mode (dark blue). The period spacing between consecutive g modes is shown.



**Fig. 5.** Normalised inertia  $\mathcal{E}$  for the mode computed with GYRE with the KIC 3733735 reference model. The g modes are shown in light blue and the p mode in dark blue. The corresponding radial order  $n$  is indicated for each mode.

The normalised inertia of an oscillation mode is computed as (e.g. Christensen-Dalsgaard 2014)

$$\mathcal{E} = \frac{4\pi \int_0^{R_\star} [|\xi_r(r)|^2 + \ell(\ell+1)|\xi_h(r)|^2] \rho r^2 dr}{M_\star [|\xi_r(R_\star)|^2 + \ell(\ell+1)|\xi_h(R_\star)|^2]}, \quad (11)$$



where  $\xi_r$  and  $\xi_h$  are the mode vertical and horizontal displacements, respectively. Assuming equipartition of energy, modes with lower normalised inertia will have a larger surface amplitude. In Fig. 5, we compare  $\mathcal{E}$  for the g and p modes shown in Fig. 4. The normalised inertia for the  $n = 1$  p mode is significantly lower than the ones of the g modes as the resonant cavity of this mode is located closer to the surface. To illustrate this further, we show in Fig. 6 the normalised kinetic energy density profile,  $\tilde{E}_{\text{kin}}$ , of the modes computed as

$$\tilde{E}_{\text{kin}}(r) = \frac{\rho r^2 [|\xi_r(r)|^2 + \ell(\ell + 1)|\xi_h(r)|^2]}{\int_0^1 \rho r^2 [|\xi_r(r)|^2 + \ell(\ell + 1)|\xi_h(r)|^2] dx}, \quad (12)$$

where  $x = r/R_\star$  is the dimensionless radius. The normalisation factor  $\int_0^1 \rho r^2 [|\xi_r(r)|^2 + \ell(\ell + 1)|\xi_h(r)|^2] dx$  is chosen such as the integral over  $x$  is unity. It appears that the g and p cavities are completely decoupled: for g modes, the kinetic energy density distribution is concentrated in the inner regions of the stars while the opposite phenomenon is seen for the  $n = 1$  p mode. For g modes, it can be noted that the behaviour of the mode changes when it enters the convective core. The  $\tilde{E}_{\text{kin}}$  profile suggests that the evanescence of these non-asymptotic g modes in the core is much more limited than in the  $n \gg 1$  case. This is also related to the fact that the age yielded by our reference model,  $4.2 \times 10^8$  years, suggests that KIC 3733735 is a young star and the barrier of potential formed by the chemical gradient contribution to  $N$  is still limited in this case, allowing g modes to penetrate deeper into the core. Finally, while we will discuss in Sect. 5.5 possible physical explanations for such a behaviour, we already underline that the g modes and the p mode appear in the S/N spectrum with similar amplitude while their inertia is different by several orders of magnitude. This suggests that the power injection from the convection to the modes is a strongly frequency-dependent function and increases as frequency decreases.

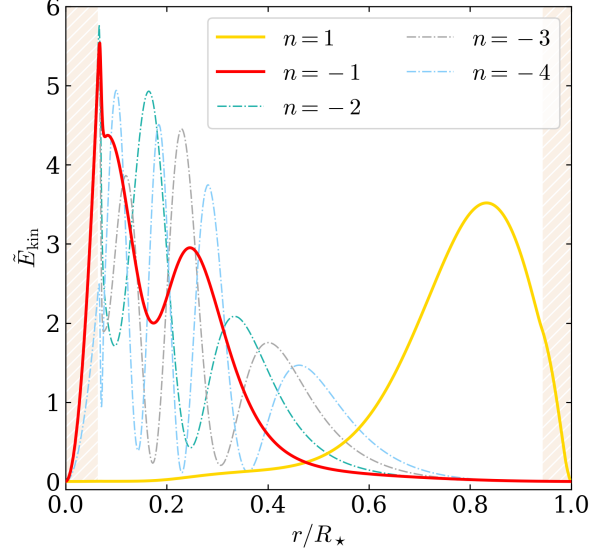
In the next section, we discuss the case of stars where, unlike what we predict with the reference model of KIC 3733735, the g- and p-mode resonant cavities are coupled. This last phenomenon is responsible for the existence of mixed modes with probing abilities both in deep radiative regions and external layers.

## 5. Coupled cavities: exploring the mixed mode hypothesis

In this section, we study in more detail the case of three stars of our sample, KIC 6679371, KIC 7103006, and KIC 9206432, that exhibit a pattern of peaks that can be interpreted as the manifestation of mixed gravito-acoustic modes.

### 5.1. Mixed modes expected properties

In a large extent of the frequency range we are probing in this analysis, we expect to have, at some depth of the stellar interior,  $S_\ell < N$ . Due to the respective profiles of  $N$  and  $S_\ell$ , the cavities of some low order g modes should be able to couple with the low-order p-mode resonant cavities, through the phenomenon of avoided crossing (see e.g. Christensen-Dalsgaard 2014), where g and p modes exchange properties in their respective resonant cavities when their frequencies are close enough (but never actually cross, hence the name). This means that modes with characteristic frequencies close to the eigenfrequencies of both p- and g-mode resonant cavities may have a small normalised inertia while probing the properties of the deepest layers of the star. As reminded for example by Ong & Basu (2020), characterising the



**Fig. 6.** Normalised kinetic energy density profile  $\tilde{E}_{\text{kin}}$  profiles for the  $\ell = 1$ ,  $m = 0$ ,  $n = 1$  (yellow),  $-1$  (red),  $-2$  (cyan),  $-3$  (grey), and  $-4$  (blue) modes computed with GYRE for our KIC 3733735 reference model. The hatched areas correspond to convective regions. The  $n \leq -2$  modes are shown by the dash-dotted lines for readability.

behaviour of mixed modes close to an avoided crossing is a very powerful probe of the evolutionary state of the star. Indeed, it should be emphasised that, considering the structural evolution of the cavities along time, the efficiency of the coupling may significantly change as the star goes through the main sequence. While this suggests that only a fraction of stars might exhibit such mixed modes, their detection would provide precious insights on the target where they are observed.

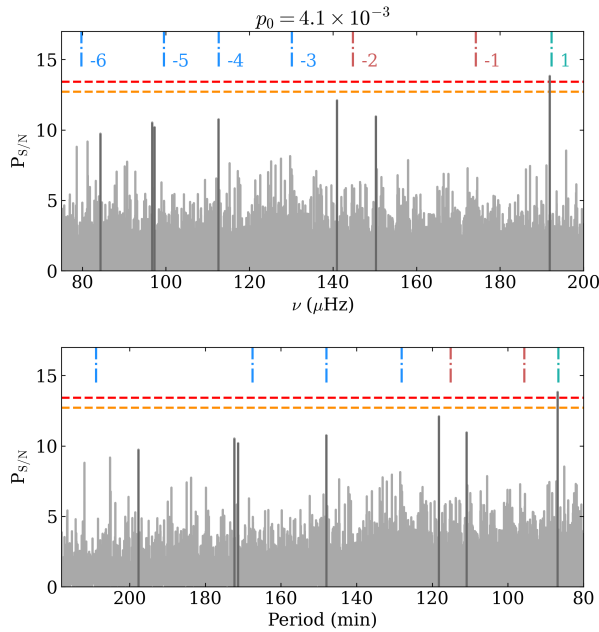
In main-sequence stars, we expect to see a coupling between non-asymptotic modes of both cavities. By comparison, in red giant stars, the asymptotic modes of both cavities are coupled while in subgiant stars, non-asymptotic g modes are coupled to asymptotic p modes (e.g. Ong & Basu 2020). Contrary to these two latter cases, we therefore expect to have a sparse distribution of both g- and p-dominated modes in the main-sequence targets we are studying. The properties of the modes laying in this interval have been explored in the solar case by e.g. Provost et al. (2000), but, lacking actual observations, low attention has been paid to this configuration until now. Ong & Basu (2020) for example focused on evolved solar oscillators while Kosovichev & Kitiashvili (2020) and Bellinger et al. (2021) studied the probing capabilities of mixed modes in young subgiant stars. Nevertheless, for any  $n$ , we expect to observe a drop in  $\mathcal{E}$  for g-dominated mixed modes compared to pure g modes. In what follows, we compare the observation to the pattern of  $\ell = 1$ ,  $m = 0$  modes computed with GYRE to attempt identifying the composition of the patterns we are observing. In addition to the uncertainties introduced by the exact buoyancy profile at the core interface, we expect that our computation will be extremely sensitive to the coupling between p- and g- cavities.

We adopt the following nomenclature in what follows. Using GYRE computations, modes with nodes located only in one of the two cavities are referred as pure g or p modes while modes with nodes in both cavities are referred as p- or g-dominated

mixed modes, depending on their radial order  $n$ . We will show in what follows that the mode identification scheme implemented by GYRE (Takata 2006) provides surprising results in some cases.

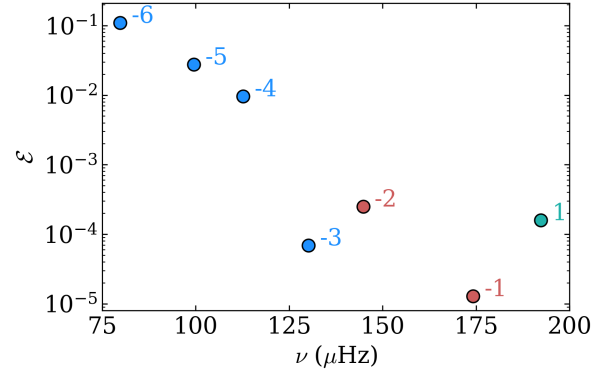
## 5.2. KIC 6679371

The first star with potential mixed modes we consider is KIC 6679371. We show in Fig. 7 the pattern we analyse and compare with the frequency computed with our reference model. The noise probability of the selected pattern is  $p_0 = 4.1 \times 10^{-3}$ . The highest amplitude peak at  $191.9 \mu\text{Hz}$  was detected by the homogeneous analysis from Sect. 3 and is above the  $p_{\text{det}} = 0.05$  detection threshold. We identify it to the  $n = 1$  p-dominated mixed modes of the reference model. No observed peak can be identified to the  $n = -1$  g-dominated mixed mode, while the remaining peaks could correspond to a  $n = -2$  to  $n = -6$  pattern, although we have a discrepancy between the observed and modelled frequencies in some cases. The predicted frequencies of the  $n = -4$  and  $n = -5$  modes are nevertheless in good agreement with the observed peaks.

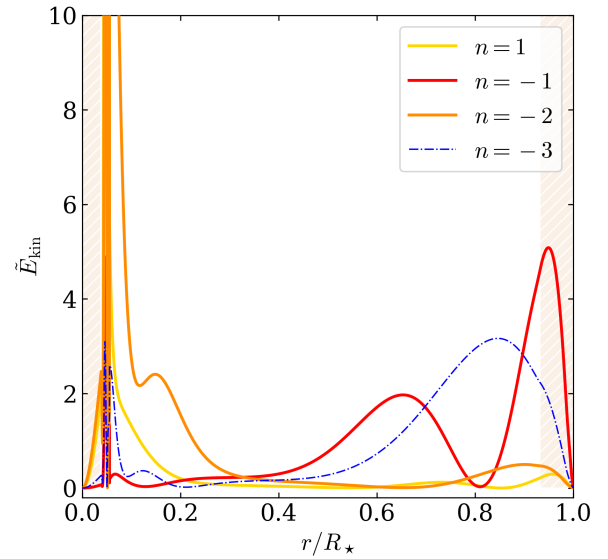


**Fig. 7.**  $P_{S/N}$  (grey) obtained for KIC 6679371, with the x-axis scaled in frequency (top) and in period (bottom). The dashed horizontal orange and red lines correspond to the  $p_{\text{det}} = 0.1$  and  $0.05$  detection thresholds computed from Eq. (6), respectively. The peaks included when computing the pattern probability  $p_0$  are shown in darker grey. The mode frequencies computed with GYRE for  $\ell = 1$ ,  $m = 0$  modes are shown for pure g modes (light blue), g-dominated mixed modes (red), and g-dominated mixed modes (green). The order  $n$  of each mode is shown on the figure.

The normalised mode inertia values are represented in Fig. 8. As expected, the g-dominated mixed modes have significantly lower inertia than the pure g modes. The case of the  $n = -3$  mode is interesting as it is labelled as a pure g mode and has no node in the p-mode cavity according to GYRE. When we represent the kinetic energy density in Fig. 9, we observe that a significant fraction of the kinetic energy is located for this mode in the upper layer of the star, which is not expected for a pure g mode. We suggest, that, even if the mode has no p-mode cav-



**Fig. 8.** Normalised inertia  $\mathcal{E}$  for the modes computed with GYRE with the KIC 6679371 reference model. The pure g modes are shown in light blue, the g-dominated mixed modes in red, and the p-dominated mixed mode in green. The corresponding radial order  $n$  is indicated for each mode.



**Fig. 9.** Normalised kinetic energy density  $\tilde{E}_{\text{kin}}$  profiles for mixed modes computed with GYRE for our KIC 6679371 reference model. We show with the dash-dotted blue line the  $\tilde{E}_{\text{kin}}$  profile for the  $n = -3$  mode, which has no node in the p-mode cavity according to GYRE but exhibit a quasi-mixed mode behaviour. The hatched areas correspond to convective regions.

ity node, its own g-mode resonant cavity is sufficiently affected by the proximity of the p-mode resonant cavity so that it is a quasi-mixed mode. We also highlight that the  $n = 1$  p-dominated mixed mode computed by GYRE has an  $\tilde{E}_{\text{kin}}$  profile peaked at the bottom of the radiative zone, while we would have expected it to be located much closer to the surface. Consequently, it has lower inertia than the  $n = -1$  g-dominated mode (that we do not identify in the observed pattern). We believe that this behaviour is strongly related to the profile of  $N$  close to the convective core interface, meaning that the mode is sensitive to the chemical-composition gradient at the interface. We remind that asymptotic modes are less affected by the exact profile of the res-

onant cavities boundary, which allows studying their properties using the Wentzel-Kramers-Brillouin-Jeffreys (WKBJ, Fröman & Fröman 1965) approximation. We suggest that a careful examination of the impact of stellar modelling choices (especially concerning the way core overshooting is accounted for, e.g. Deheuvels et al. 2016) would allow a better understanding of the behaviour of non-asymptotic modes but constitutes an independent work that is out of the scope of this paper. Nevertheless, this suggests that such non-asymptotic modes could be fruitfully used to probe overshoot and induced mixing at the convective core interface (see e.g. Mombarg et al. 2019, 2021; Aerts et al. 2021).

### 5.3. KIC 7103006

The second star on which we identify a possible pattern is KIC 7103006, with  $p_0 = 3.0 \times 10^{-4}$ . As we can see in Fig. 10, we are able to identify, in this case also, the peak at highest frequency (209.9  $\mu\text{Hz}$ ) to the  $n = 1$  p-dominated mixed mode of the reference model, although with a larger frequency discrepancy than the previous case. The 160.0  $\mu\text{Hz}$  peak detected by the analysis from Sect. 3 can correspond to the  $n = -1$  g-dominated mode. It is more difficult to proceed to a formal identification for the following peaks, which are located in an area where GYRE predicts pure g modes. We show in Fig. 11 the normalised inertia of the modes where we are again able to verify that the normalised inertia of the g modes increase as frequency decreases. Figure 12 shows the kinetic energy density of the  $n = -2$ ,  $-1$  and  $1$  modes. As in the previous case, the  $n = -2$  mode does not have any node in the p-mode cavity but exhibits a quasi-mixed behaviour, very similar to the  $n = -1$  g-dominated mixed mode. The sensitivity of the  $n = 1$  p-dominated mixed modes is concentrated in the upper half of the star.

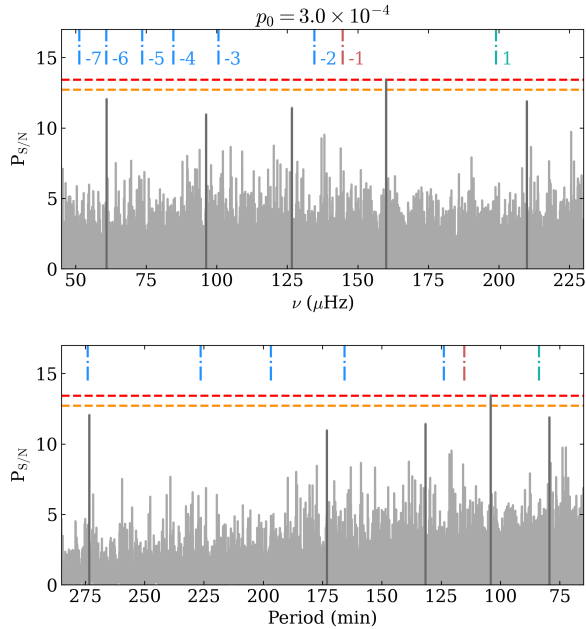


Fig. 10. Same as Fig. 7 for KIC 7103006.

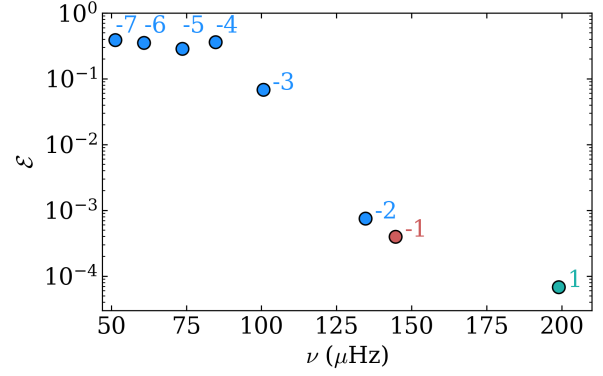


Fig. 11. Same as Fig. 8 for KIC 7103006.

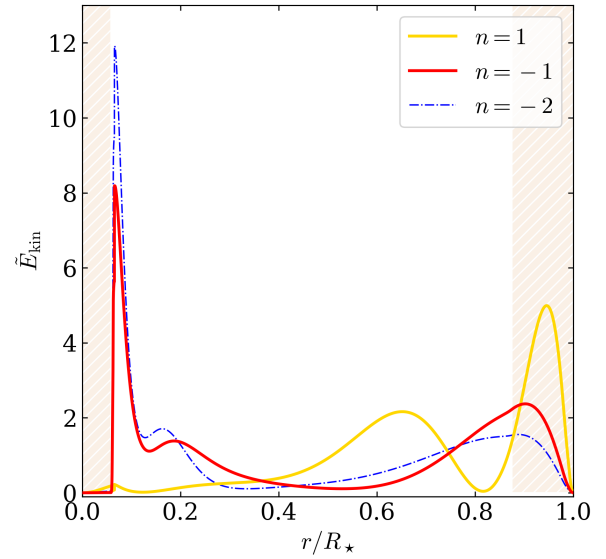


Fig. 12. Normalised kinetic energy density  $\tilde{E}_{\text{kin}}$  profiles for mixed modes computed with GYRE for our KIC 7103006 reference model. We show with the dash-dotted blue line the  $\tilde{E}_{\text{kin}}$  profile for the  $n = -2$  mode, which has no node in the p-mode cavity according to GYRE but has a  $\tilde{E}_{\text{kin}}$  similar to the  $n = -1$  and  $n = 1$  mixed modes.

### 5.4. KIC 9206432

Finally, we take a look at KIC 9206432, where the pattern we select has  $p_0 = 3.6 \times 10^{-4}$ . As visible in Fig. 13, the highest amplitude peak is located at 258.6  $\mu\text{Hz}$ , quite far from the  $n = 1$  p-dominated mixed modes predicted by GYRE at 233.3  $\mu\text{Hz}$ , which could be explained by a significant difference in the way cavities are coupled in the reference model with respect to the actual  $N$  profile. We identify the three other detected peaks to the  $n = -3$ ,  $-2$  and  $-1$  pure g modes of the reference model, all with a good agreement between the GYRE predicted frequencies and the position of the detected peaks.

The corresponding mode inertia are shown in Fig. 14, where we can see that  $n = -1$  and  $1$  modes have lower computed inertia than their lower-frequency counterparts. The  $\tilde{E}_{\text{kin}}$  profile obtained for the  $n = -1$  and  $1$  modes (Fig. 15) is puzzling (close to what we observed in the case of KIC 6679371). In fact, the  $n = 1$

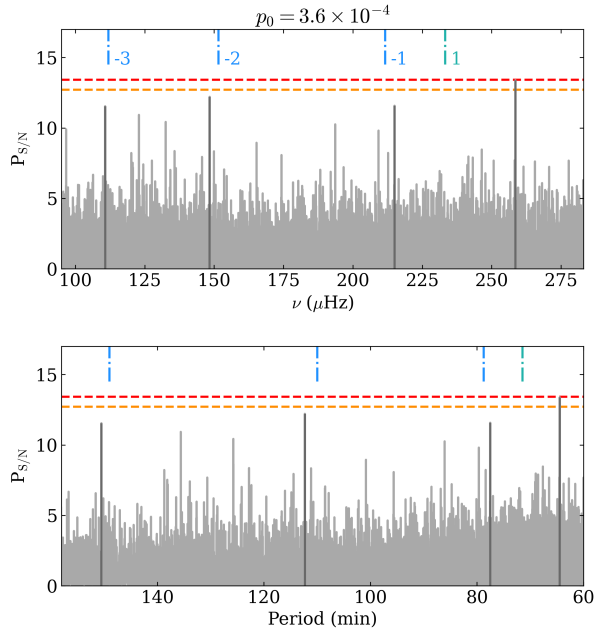


Fig. 13. Same as Fig. 7 for KIC 9206432.

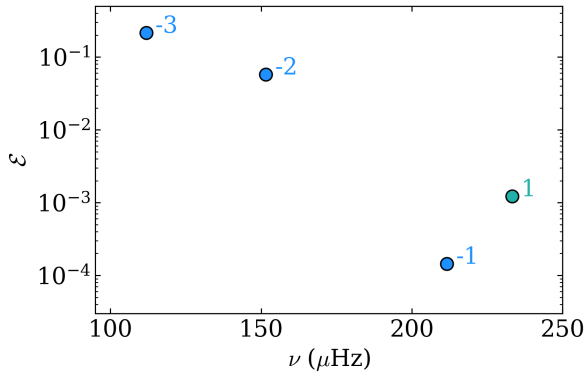


Fig. 14. Same as Fig. 8 for KIC 9206432.

p-dominated mixed mode energy density is located close to the convective core interface while the  $n = -1$  pure g mode kinetic energy density is distributed much higher in the star, having at the same time no node in the p-mode cavity.

### 5.5. Mode inertia and power injection

We finally emphasise that, with regards to the similar S/N ratios observed for the peaks of the patterns discussed above, the difference in inertia predicted by GYRE between pure g modes and mixed modes suggests that the mode excitation is more efficient in the frequency range where we identified peaks as pure g modes than in the frequency interval where the cavity coupling occurs. As stated above, a similar behaviour was noted in the case of KIC 3733735 where no cavity coupling is expected. This is nevertheless consistent with the trend predicted by semi-analytical predictions (e.g. Pinçon et al. 2016) and numerical simulations (e.g. Rogers et al. 2013), especially when the action of rotation is taken into account. Augustson et al. (2020) indeed predicted that, accounting for rotation, the power injection

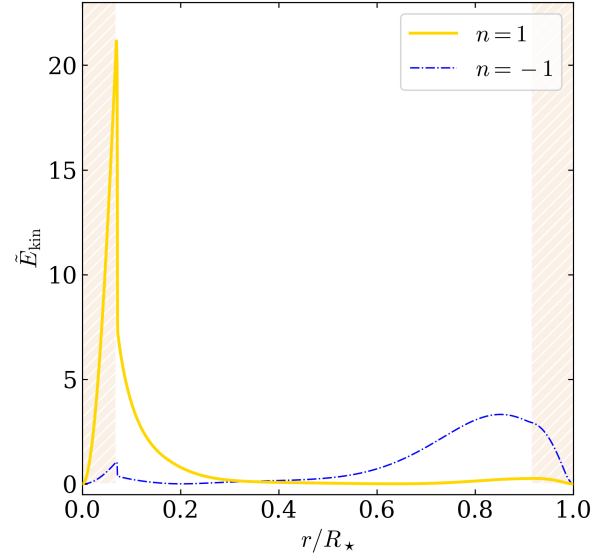


Fig. 15. Normalised kinetic energy density  $\tilde{E}_{\text{kin}}$  profiles for mixed modes computed with GYRE for our KIC 9206432 reference model. We show with the dash-dotted blue line the  $\tilde{E}_{\text{kin}}$  profile for the  $n = -1$  mode, which has no node in the p-mode cavity according to GYRE but has a  $\tilde{E}_{\text{kin}}$  similar to the  $n = -1$  and  $n = 1$  mixed modes.

tion from convection to the waves could significantly increase in the lowest frequency intervals of the super inertial regime. Additionally B22a were able to show that rotation significantly affects the shape of the mode power injection (see for example their Fig. 20 where mode amplitude below 50  $\mu\text{Hz}$  changes by several orders of magnitude as the rotation frequency increases).

## 6. Surface velocity

Having discussed pattern of interests, we propose in this section to use our analysed sample to provide an estimate of the equivalent mode velocity related to the significant peaks we detected in Sect. 3.2 and to derive an upper threshold of the g- and/or mixed-mode surface velocity in this population of stars.

### 6.1. From observed luminosity variation to mode equivalent velocity

In B22a, the root mean square (r.m.s) luminosity perturbation,  $\delta L_{\star}$ , related to the action of a single oscillation mode of degree  $\ell$  was linked to the mode temporal r.m.s radial velocity  $\langle v_r \rangle$  through the following relation:

$$\frac{\delta L_{\star}}{L_{\star}} \Big|_{\text{mode}} = \left[ 4 \nabla_{\text{ad}} \left| \frac{\ell(\ell+1)}{\bar{\omega}^2} - 4 - \bar{\omega}^2 \right| + 2 \right] \frac{\langle v_r \rangle}{\omega R_{\star}}, \quad (13)$$

with  $\nabla_{\text{ad}}$  the adiabatic gradient. The brackets  $\langle \rangle$  denote the r.m.s value of the corresponding quantity. The reduced frequency  $\bar{\omega}$ , which is the frequency normalised by the dynamical frequency, is given by

$$\bar{\omega}^2 = \frac{\omega^2 R_{\star}^3}{GM_{\star}}, \quad (14)$$

where  $G$  is the gravitational constant. This relation is obtained by considering the adiabatic Lagrangian pressure perturbation

at the surface of the star arising by the action of a single mode of degree  $\ell$  (Dziembowski 1971; Buta & Smith 1979), in the Cowling (1941) approximation. However, this quantity corresponds to a bolometric perturbation which needs to be integrated on the stellar disc accounting for the spherical harmonic structure of the mode to predict the actual luminosity perturbation in disc-integrated observations. It also does not account for limb-darkening, instrumental bandwidth and transfer function.

To account for these effects, we consider a spherical system of coordinates  $(r, \theta, \phi)$  and we follow the prescription from Berthomieu & Provost (1990, hereafter BP90) to write the luminosity fluctuation arising from the action of a single mode of degree  $\ell$  and azimuthal number  $m$ , in the adiabatic approximation

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta L_\star}{L_\star}(t, \theta_0, \phi_0) \right|_{\ell, m} &= \left\langle \frac{|\delta r|^2}{R_\star^2} \right\rangle^{1/2} \left( \frac{(2\ell + 1)(\ell - m)!}{4\pi(\ell + m)!} \right)^{1/2} \\ &\times \frac{1}{b_0} \left[ 4\nabla_{\text{ad}} \left( \frac{\ell(\ell + 1)}{\bar{\omega}^2} - 4 - \bar{\omega}^2 \right) b_\ell + 2b_\ell - c_\ell \right] \\ &\times P_\ell^m(\cos \theta_0) \cos(\omega t + m\phi_0), \end{aligned} \quad (15)$$

where  $\theta_0$  and  $\phi_0$  denote the co-latitude and the longitude of the observer line of sight with respect to the stellar equatorial plane. The function  $P_\ell^m$  is the associated Legendre polynomial of degree  $\ell$  and azimuthal number  $m$ . The relation that we are discussing here is not affected by the nature of the mode, the considered mode can be a pure p mode, a pure g mode or a mixed mode. The mean relative displacement  $\langle |\delta r|^2 / R_\star^2 \rangle$  is related to the radial component of the mode eigenfunction  $\xi_r$  through

$$\left\langle \frac{|\delta r|^2}{R_\star^2} \right\rangle = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \sin \theta |\xi_r|^2 d\theta, \quad (16)$$

and can be connected to  $\langle v_r \rangle$  through the simple relation

$$\langle v_r \rangle^2 = \langle |\delta r|^2 \rangle \omega^2. \quad (17)$$

The integral  $b_\ell$  and  $c_\ell$  have been defined by Dziembowski (1977) and are written as

$$\begin{aligned} b_\ell(\mu) &= \int_0^1 \mu P_\ell(\mu) W(\mu) d\mu \\ c_\ell(\mu) &= \ell \int_0^1 \left( W(\mu) - \mu \frac{\partial W}{\partial \mu} \right) (P_{\ell-1}(\mu) - \mu P_\ell(\mu)) d\mu, \end{aligned} \quad (18)$$

where  $\mu = \cos \theta$ . The function  $P_\ell$  is the Legendre polynomial of degree  $\ell$ .  $W$  is a weighting function which depends both on the stellar atmospheric properties and on the instrumental transfer function. Given the specific intensity  $I_K(\mu)$ , we compute  $W(\mu)$  as the  $I_K(\mu)/I_K(1)$  ratio, using the four-coefficient non-linear relation provided for *Kepler* by Sing (2010).

We can rewrite Eq. (15) under the following form

$$\left. \frac{\delta L_\star}{L_\star}(t, \theta_0, \phi_0) \right|_{\ell, m} = \langle v_r \rangle A_{\ell, m}(\theta_0) \cos(\omega t + m\phi_0) \quad (19)$$

where

$$\begin{aligned} A_{\ell, m}(\theta_0) &= \frac{1}{\omega R_\star} \left( \frac{(2\ell + 1)(\ell - m)!}{4\pi(\ell + m)!} \right)^{1/2} \\ &\times \frac{1}{b_0} \left[ 4\nabla_{\text{ad}} \left( \frac{\ell(\ell + 1)}{\bar{\omega}^2} - 4 - \bar{\omega}^2 \right) b_\ell + 2b_\ell - c_\ell \right] \\ &\times P_\ell^m(\cos \theta_0), \end{aligned} \quad (20)$$

and we are able to connect the r.m.s luminosity fluctuation  $\langle \delta L_\star / L_\star \rangle$  to  $\langle v_r \rangle$  by writing

$$\left\langle \frac{\delta L_\star}{L_\star} \right\rangle (\theta_0) \Big|_{\ell, m} = \langle v_r \rangle |A_{\ell, m}(\theta_0)|. \quad (21)$$

This formula is valid as long as the stellar rotational frequency is small with regards to the oscillation frequency. For sub-inertial modes, that is modes with angular frequency below  $2\Omega_\star$ , a modified formalism has to be applied (see Townsend 2003). However, the sub-inertial frequency range of solar-type stars PSDs hosts complex quasi-harmonic patterns related with surface rotation (through the apparition and evolution of active regions in the photosphere). Some of these modulations might also possibly be connected with the modulations from r modes (e.g. Löptien et al. 2018; Saio et al. 2018; Gizon et al. 2021) or thermal Rossby waves (e.g. Hindman & Jain 2022). Deriving an upper amplitude threshold for gravito-inertial modes in this frequency range is therefore beyond the scope of this paper. It should also be noted that the accuracy of the luminosity fluctuation defined by Eq. (15) relies on the adiabatic approximation we made. We will discuss in Sect. 6.3 the limitations of this approach.

## 6.2. Cancellation frequency

In the solar case, BP90 already emphasised the existence, for each degree  $\ell$  of a cancellation frequency  $\nu_{c, \ell}$ , where, notwithstanding the mode r.m.s velocity, no luminosity fluctuation will be observable. From Eq. (15), it is straightforward to check that this cancellation phenomenon happens when

$$\bar{\omega}^4 + \left[ 4 + \frac{1}{4\nabla_{\text{ad}} b_\ell} (c_\ell - 2b_\ell) \right] \bar{\omega}^2 - \ell(\ell + 1) = 0. \quad (22)$$

Real solutions  $\bar{\omega}_c$  for this equation verify

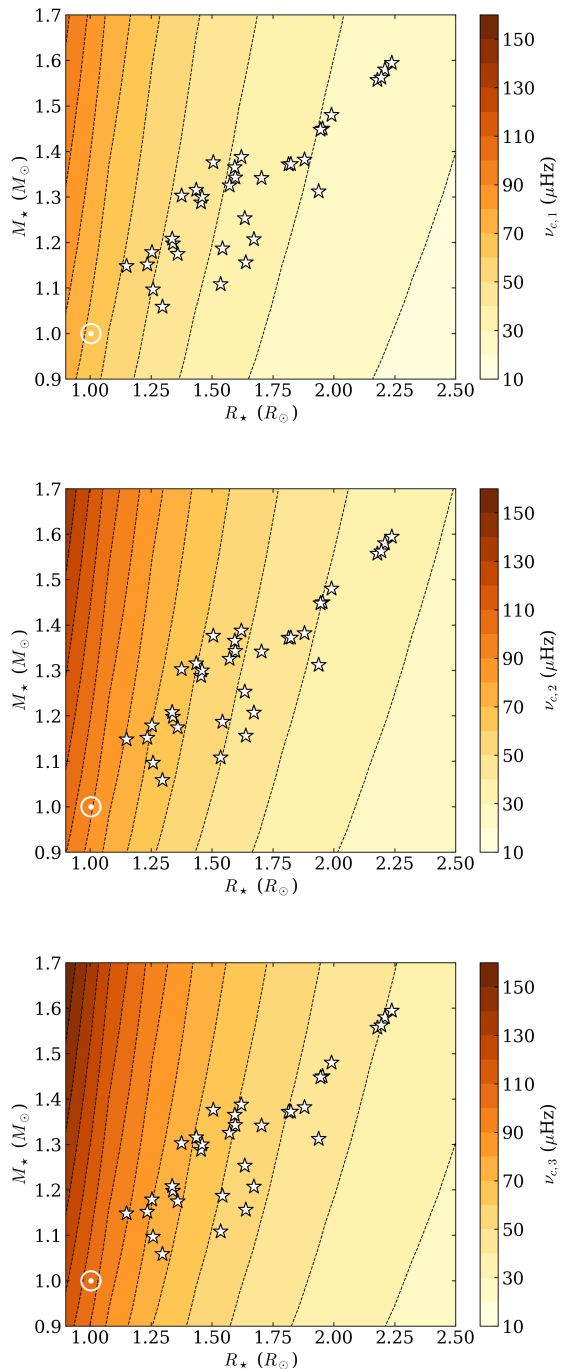
$$\begin{aligned} \bar{\omega}_c^2(\ell) &= \frac{1}{2} \left\{ -4 - \frac{1}{4\nabla_{\text{ad}} b_\ell} (c_\ell - 2b_\ell) \right. \\ &\quad \left. + \left[ \left( 4 + \frac{1}{4\nabla_{\text{ad}} b_\ell} (c_\ell - 2b_\ell) \right)^2 + 4\ell(\ell + 1) \right]^{1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

It is interesting to note that, from the relation between  $\bar{\omega}$  and  $\nu$ , the cancellation frequency  $\nu_{c, \ell}$  scales like  $M_\star / R_\star^3$ . We illustrate this in Fig. 16 by showing the evolution of  $\nu_{c, \ell}$  with  $R_\star$  and  $M_\star$ , for  $\ell = 1, 2$ , and 3. We can see that, given the extent of our sample,  $\nu_{c, \ell}$  may significantly differ between the targets we consider. Contrary to the solar case, we can also note that it remains important for late F-type stars to take into account the cancellation effect on  $\ell = 2$  and 3 modes when studying frequency regions below 100  $\mu\text{Hz}$ .

The main issue with this  $\nu_{c, \ell}$  quantity is that it strongly relies on the adiabatic assumption that we made above. Non-adiabatic surface effects can indeed have a significant influence on the value of the cancellation frequency, which prevent us from using this value as an accurate tool to select regions that should be privileged when searching for g-mode signatures.

## 6.3. Non-adiabatic effects

To obtain Eq. (21) and 23, we neglected the non-adiabatic surface effects that should be included in the energy equation of the stellar oscillation and we considered the simple case of adiabatic



**Fig. 16.** Cancellation frequency  $\nu_{c,1}$  (top),  $\nu_{c,2}$  (middle), and  $\nu_{c,3}$  (bottom) in the adiabatic case as a function of radius  $R_*$  and mass  $M_*$ . The stars of our sample are shown by white stars, the Sun is represented for comparison with its usual symbol, in white.

oscillations. This approach presents the substantial advantage to connect the mean intensity fluctuation to the surface displacement through an analytical relation which avoid solving numerically the oscillation equations (BP90). From the computations performed by BP90 for the non-adiabatic solar case, it appears that  $\delta L_*/L_*$  may vary by a factor with an order of magnitude of

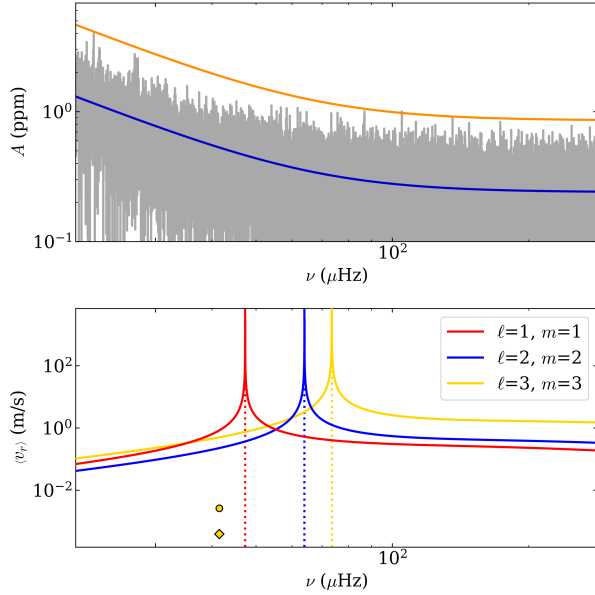
unity depending on the assumptions chosen when performing the non-adiabatic computations. It is therefore expected that variations of the same order should occur in the late-F-type star case. The interplay between oscillations and convection, neglected by BP90, might also be of importance in order to obtain an accurate result (e.g. Bunting et al. 2019). However, we find that the adiabatic approximation is enough to provide us with an idea of the mode-velocity order of magnitude necessary to induce a detectable luminosity fluctuation. This quantity is strongly model dependent, but our goal in this work is not to provide the most accurate value of the cancellation frequency, but to illustrate that this is an effect that cannot be ignored. It has to be emphasised that g-mode detection in solar-type stars could provide additional constraints on mode surface effects and improve the modelling of p modes (e.g. Kjeldsen et al. 2008; Ball & Gizon 2017; Houdek et al. 2017).

#### 6.4. Velocity levels

We now turn to the computation of the velocity levels required for adiabatic oscillation modes to induce a luminosity fluctuation detectable among the background stellar signal. To simplify our analysis, we consider the case  $\theta_0 = 90^\circ$ , where the observer line of sight belongs to the stellar equatorial plane. In the presence of rotation, assuming that the mode lifetime is significantly larger than the stellar rotation period, a power peak detected in the PSD should correspond to an individual mode component of degree  $\ell$  and azimuthal number  $m$ . Following BP90, we consider the  $m = 0$  component for even  $\ell$  and the  $m = 1$  component for odd  $\ell$ . We remind that, for  $\theta_0 = 90^\circ$ , components with odd  $\ell - m$  are not visible for disk-integrated observations. We also underline that our analysis does not lack generality in the sense where, for any  $\theta_0$ , it is possible for a given degree  $\ell$  to select the  $m$ -component with largest amplitude by considering the profile of the  $P_\ell^m$  polynomial as a function of  $\cos \theta_0$ . However, doing this would add an unnecessary complexity to the analysis we present here.

By renormalising the PSD, we obtain the background amplitude level in ppm (and not in  $\text{ppm}^2/\mu\text{Hz}$  as most commonly used in seismology of solar-type stars and shown for example in Fig. 3). This amplitude level therefore provides us with a measurements of  $\langle \delta L_*/L_* \rangle$  as a function of the frequency, that we can use to deduce, through Eq. (21), the  $\langle v_r \rangle$  amplitude necessary for an oscillation mode to induce a detectable luminosity fluctuation at a given frequency, accounting for the background signal, provided that we are able to estimate the detection level, which we compute here through Eq. (6). We therefore show in Fig. 17 the peak significance level  $s_{\text{det}}$  computed with Eq. (6) as well as the corresponding  $\langle v_r \rangle$  values necessary for a mode of given frequency to induce a luminosity fluctuation corresponding to this significance level, in the case of KIC 3733735. We find very similar behaviours for the other stars of our sample. We obtain this  $\langle v_r \rangle$  profile from Eq. (21). Because of visibility effects related to the integrals defined in Eq. (18),  $\ell = 3$  modes require large amplitude in order to be detected in disk-integrated observations. For any given  $\ell$ , in the neighbourhood of the vertical asymptote of the cancellation frequency, even a low-amplitude luminosity fluctuation requires an unrealistically large g-mode r.m.s velocity to be detectable.

Above the cancellation frequency,  $\ell = 1$  modes are the one that require the less amplitude to be detectable in photometric data, justifying our attempt to identify the patterns shown in Sect. 4 and 5 with  $\ell = 1$  frequencies computed with GYRE. It is interesting to note that below the cancellation frequency,



**Fig. 17.** Example of stellar background and corresponding mode velocity levels required to induce a detectable luminosity fluctuation. *Top:* Power spectrum (grey) of KIC 3733735. The solid blue line corresponds to the  $B$  profile. The corresponding significance level computed with Eq. (6) for  $p_{\text{det}} = 0.1$  is shown by the solid orange line. The power spectrum was re-scaled from a power spectral density to an amplitude in ppm to simplify the comparison with the luminosity fluctuation level. *Bottom:*  $\langle v_r \rangle$  levels necessary to produce a detectable luminosity fluctuation, assuming the background profiles computed for KIC 3733735, for  $\ell = 1, m = 1$  (red),  $\ell = 2, m = 0$  (blue), and  $\ell = 3, m = 1$  (yellow) modes. In each case, the position of the cancellation frequency  $\nu_{c,\ell}$  is emphasised by a vertical dotted line of the proper colour. The two yellow symbols correspond to the  $\langle v_r \rangle$  obtained for the  $\ell = 3$  mode with highest amplitude in the 3D-hydrodynamical simulations from B22a, at the top of the radiative zone (circle) and close to the top of the simulation domain (diamond), respectively.

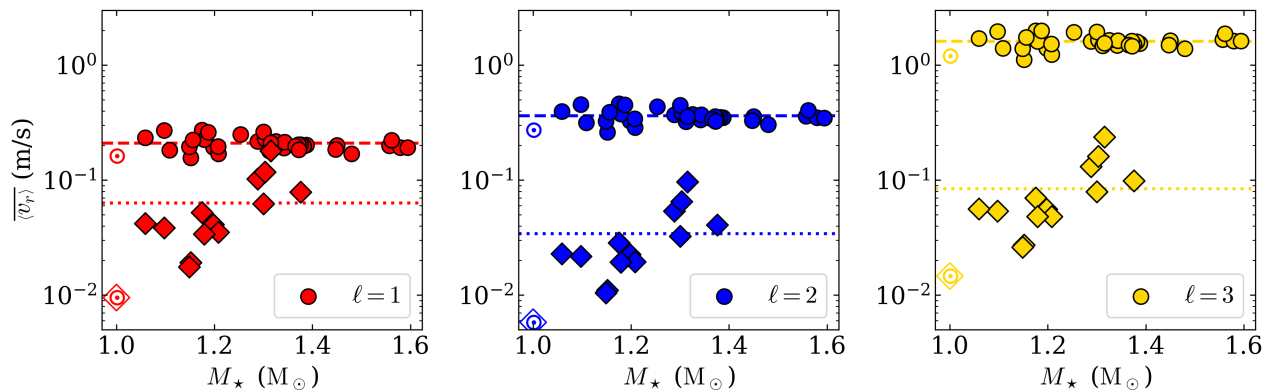
the photometric significance level corresponds to lower  $\langle v_r \rangle$  levels, around  $\sim 0.1$  m/s, for  $\ell = 2$  modes than for  $\ell = 1$  modes, for which we have  $\langle v_r \rangle \sim 0.2$  m/s. This can be explained through the role the non-radial term  $\ell(\ell + 1)/\bar{\omega}^2$  is playing in the relation between velocity and luminosity fluctuation. Indeed, for low frequency modes,  $\bar{\omega}$  is smaller than unity. Therefore, this non-radial contribution dominates asymptotically and, for a given  $\langle v_r \rangle$ , the resultant local luminosity fluctuation, given in Eq. (13), increases with  $\ell$ . For  $\ell \geq 3$ , this effect is counterbalanced by the integration on the disc and the small ratios  $b_\ell/b_1$ . For  $\ell = 2$ , in the case of KIC 3733735, we have  $b_2/b_1 \sim 0.455$  while the ratio between the non-radial terms is 3. The  $\sqrt{(2\ell + 1)(\ell - m)!/(\ell + m)!|P_\ell^m(0)|}$  prefactors ratio should also be considered, and is  $\sqrt{5}/2$  in this case. Finally, we expect to have, asymptotically,  $\langle v_r \rangle_{\ell=1} / \langle v_r \rangle_{\ell=2} \sim 1.53$ , consistently with what we obtain in Fig 17. We remind that in a scenario assuming equipartition of energy, the  $\langle v_r \rangle$  level would be lower for  $\ell = 2$  (see BP90). However, this is particularly interesting in the perspective of forced tidal oscillations, where equipartition is not respected and  $\ell = 2$  modes should be excited more efficiently than  $\ell = 1$  modes. For comparison, using the scaling relation provided by Kjeldsen & Bedding (1995), the p modes in a star with  $M_\star = 1.3 M_\odot$  and luminosity  $L_\star = 3.8 L_\odot$  are expected to have an average amplitude around 0.7 m/s.

Below the cancellation frequency, a mode with a given  $\langle v_r \rangle$  produces a larger radial displacement than its higher-frequency counterparts of same  $\langle v_r \rangle$ , and therefore induces a larger luminosity fluctuation. For example, a  $\ell = 2$  mode with frequency  $\nu = 25 \mu\text{Hz}$  would only need a  $6 \times 10^{-2}$  m/s velocity to produce a detectable fluctuation in the power spectrum. The  $\langle v_r \rangle$  threshold to produce a detectable signal is therefore lower for low-frequency modes. In particular, theoretical considerations from Augustson et al. (2020) and 3D simulations performed in B22a suggested that low-frequency modes were more efficiently excited for a fast rotating star, and may also possibly tunnel more efficiently through the convective envelope (Mathis et al. 2023). However, considering the highest amplitude  $\ell = 3$  mode (we remind that no signature was detected at the top of the simulation domain for  $\ell = 1$  and 2 modes) reported by B22a, we note that, considering the background level obtained from *Kepler* observations, the mode amplitudes obtained from simulations are two to three orders of magnitude below the level necessary to induce a detectable luminosity fluctuation. It is important to remember that, due to numerical constraints, the radiative diffusivity responsible for the mode damping (Zahn et al. 1997; Alvan et al. 2014) is significantly larger in 3D numerical simulations than in actual stellar interiors (e.g. Garaud 2021). 3D-simulations are nevertheless precious tools to understand the non-linear behaviour of oscillation modes in stellar interiors. In particular, they allow us to study the transfer function from the convection spectrum to the wave spectrum. Comparing their predictions to actual observations would therefore allow us to reach a better understanding of the efficiency of the complex interactions between convective motions and internal waves.

While it is unlikely that stellar fluid regimes can soon be reached in global spherical simulations of the dynamics of stars, some possibilities exist to get closer to these regimes. A first option to reduce the computing cost (and therefore increase the turbulence of the simulations) is to work in a 2D configuration with polar coordinates (e.g. Rogers et al. 2013; Le Saux et al. 2022) or to study more localised phenomena using 2 or 3D cartesian boxes (e.g. Kiraga et al. 2005; Lecoanet et al. 2015). However, choosing such options means losing the spherical geometry of the problem and the straightforward comparison that it allows with mode properties computed by linear oscillation codes. A promising perspective is offered by adaptive mesh refinement (AMR) grids (Berger & Olinger 1984; Berger & Colella 1989), which allows, integration-step-wise, increasing the grid resolution in turbulent areas while keeping large mesh grids in quiescent regions. Efforts are currently dedicated to develop MHD AMR codes aimed at studying stellar dynamics (Delorme et al. 2022).

Finally, in order to provide a summary diagnostic for our analysis, we represent in Fig. 18 the frequency-averaged velocity level  $\overline{\langle v_r \rangle}$  above 125  $\mu\text{Hz}$  and below 30  $\mu\text{Hz}$ , as a function of the stellar mass,  $M_\star$ . We denote these two values  $\overline{\langle v_r \rangle}_+$  and  $\overline{\langle v_r \rangle}_-$ , respectively. The bounds on which the averages are computed are chosen to avoid the bias that the asymptotic behaviour around the cancellation frequency would introduce. It should be noted that, for the same reason, we do not compute  $\overline{\langle v_r \rangle}_-$  for stars where  $\nu_{c,1} < 40 \mu\text{Hz}$ .

Below 30  $\mu\text{Hz}$ , the mean value for  $\overline{\langle v_r \rangle}$  is  $6.3 \times 10^{-2}$  m/s for  $\ell = 1$  modes,  $3.4 \times 10^{-2}$  m/s for  $\ell = 2$  modes, and  $8.4 \times 10^{-2}$  m/s for  $\ell = 3$ . Above 125  $\mu\text{Hz}$ , the mean value for  $\overline{\langle v_r \rangle}_+$  is  $2.1 \times 10^{-1}$  m/s for  $\ell = 1$  modes,  $3.6 \times 10^{-1}$  m/s for  $\ell = 2$  modes, and 1.6 m/s for  $\ell = 3$ . A clear trend is visible in this case, as the velocity level required to induce a detectable fluctuation



**Fig. 18.** Frequency-averaged velocity level  $\overline{\langle v_r \rangle}$  as a function of  $M_\star$ , measured above 125  $\mu\text{Hz}$  (circles,  $\overline{\langle v_r \rangle}_+$ ) and below 30  $\mu\text{Hz}$  (diamonds,  $\overline{\langle v_r \rangle}_-$ ), for the stars in our sample and for  $\ell = 1$  (left),  $\ell = 2$  (centre), and  $\ell = 3$  (right) modes. To avoid biases in the comparison, we do not consider  $\overline{\langle v_r \rangle}_-$  for stars with  $\nu_{c,1} < 40 \mu\text{Hz}$ . In each panel, the mean values of the  $\overline{\langle v_r \rangle}_+$  and  $\overline{\langle v_r \rangle}_-$  distributions are shown by the dashed and dotted lines, respectively. In each panel, the mean velocity levels computed with the VIRGO/SPM solar time series  $\overline{\langle v_r \rangle}$  are shown using the usual solar symbol. The one enclosed by a square corresponds to  $\overline{\langle v_r \rangle}_+$ , while the other to  $\overline{\langle v_r \rangle}_-$ .

**Table 4.** Mean  $\overline{\langle v_r \rangle}_-$  and  $\overline{\langle v_r \rangle}_+$  as a function of  $\ell$ .

$\ell$	1	2	3
$\overline{\langle v_r \rangle}_-$ (m/s)	$6.3 \times 10^{-2}$	$3.4 \times 10^{-2}$	$8.4 \times 10^{-2}$
$\overline{\langle v_r \rangle}_+$ (m/s)	$2.1 \times 10^{-1}$	$3.6 \times 10^{-1}$	1.6

increases with the mass. These values are summarised in Table 4. As already underlined with the specific case of KIC 3733735, below the cancellation frequency, a lower value of  $\langle v_r \rangle$  is required to induce a detectable luminosity fluctuation, which also puts more stringent constraints on the upper limit of the actual surface g mode velocity for this ranges of frequency. In order to provide a comparison with the solar case, we perform the same analysis with a four-year time series from the Sunphotometers of the Variability of Solar Irradiance and Gravity Oscillations (VIRGO/SPM, Fröhlich et al. 1995, see Appendix A for more details). Using again the formalism from Eq. (21), we find that the velocity level necessary to generate a detectable luminosity fluctuation at the surface of the Sun is below the mean values measured for the F-type sample, both above and below the cancellation frequency. This is expected as the granulation power level in the PSD increases as  $\nu_{\text{max}}$  decreases (see e.g. Kallinger et al. 2014), that is, on the main sequence, roughly as  $M_\star$  increases.

As a final comment, we underline that the comparison we provide here should be interpreted as being in favour of g-mode detectability in late F-type stars. Indeed, the  $\langle v_r \rangle$  threshold that we obtain here for the Sun remains of the same order of magnitude than their late F-type stars counterparts. From analytical predictions Pinçon et al. (e.g. 2016), we nevertheless expect the power injection from pummeling and turbulent convection to the modes to be several order of magnitudes larger in late F-type stars than in the Sun. This last point is observed in 3D simulations, and was discussed in Sect. 6 of B22a.

## 7. Conclusion

In this work, we attempted to detect stochastically-excited g modes in main-sequence solar-type stars. For this purpose, we

selected and analysed the most promising sample of stars for which 4-year long *Kepler* time series are available. These stars are late F-type stars with thin convective envelopes and fast convective flows. They all exhibit the signature of stochastically excited p modes in the *Kepler* short cadence time series. Having underlined the difficulties to accurately measure the level of background noise (dominated by stellar granulation in this range of frequency) in the presence of rotational power modulation, we have performed a statistical analysis to detect significant peaks and we provided a list of stars where individual peaks were detected with a 90 % probability not to be the product of noise, a threshold that was used to attempt detecting g mode signatures in solar observations. Visually inspecting the S/N spectra of the stars with detected individual peaks, we selected patterns of peaks with low probability to be the product of noise (below 0.5 %) and we compared the configuration of these patterns to the GYRE-predicted frequencies of  $\ell = 1$  modes, using a reference stellar model for each star where we observed such a pattern. We first discussed the case of KIC 3733735, where the detected signal was compatible with the presence of the  $n = 1$ ,  $\ell = 1$  p mode, and, at lower frequency, a pattern of low-order non-asymptotic  $\ell = 1$  g modes. We underlined that the differences between the model and the observations could be explained by the fact that g-mode period spacing are strongly sensitive to the actual extent of the convective core of the star and thus to the physical modelling of core overshoot and chemical mixing, opening the possibility to reach in the future a better calibration of these processes in stellar evolution models. Considering the possibility of a coupling between the p- and g- modes resonant cavities, we then discussed the case of three additional targets, KIC 6679371, KIC 7103006, and KIC 9206432, using again GYRE-computed frequency for comparison. We used our reference models to show that non-asymptotic modes laying in this range of frequency were indeed expected to have mixed characters. Their properties should therefore be strongly affected by the coupling between the p- and g-mode resonant cavities. Characterising mixed modes in main-sequence solar-type stars would therefore allow us to probe layers yet-unexplored in main sequence solar-type stars and to bring strong structural and evolutionary constraints in this range of mass. In particular, we underlined that the properties of non-asymptotic of both pure g and



mixed modes should be studied in more details in the case of late F-type stars, as it appeared that their properties are strongly influenced by the stratification profile at the convective core interface. We also noted that GYRE predicted the existence of non-asymptotic pure g modes (that is, modes without node in the p-mode resonant cavity) with low normalised inertia and a significant proportion of their energy concentrated in the upper layer of the star, suggesting that these mode properties were still affected by the vicinity of the p-mode resonant cavity.

Considering the detection levels obtained from our statistical analysis, we used the formalism from BP90 in order to compute an equivalent r.m.s velocity level necessary to trigger a detectable luminosity fluctuation as a function of the frequency. The objective of this analysis was to derive an upper threshold for g-mode velocity in late F-type stars as well as obtaining an estimate of the mode velocity in the frequency windows where we suggested that the signal we detected was related to mixed modes. We emphasised the existence of a photometric cancellation frequency. Combined with the detection of oscillation modes in the same frequency window, this could help to characterise non-adiabatic effects in the convective envelope. Using an adiabatic approximation, we showed that g-mode oscillations in late F-type stars should have a maximal amplitude of about a few tens of cm/s for g modes with the highest frequency, and a few cm/s for low-frequency g modes. The candidate modes we identified in this work should therefore have surface velocities of  $\sim 10$  cm/s, a result that can be used in order to bring constraints on the efficiency of power injection from convection to stochastic oscillation modes.

While these results are promising, further analysis of a larger sample is necessary to confirm their validity. Fortunately, the upcoming PLANetary Transits and Oscillations of stars (PLATO, Rauer et al. 2014) mission, designed to characterise oscillations in main-sequence solar-type stars, will enable us to increase our sample size by at least one order of magnitude.

*Acknowledgements.* The authors thank the anonymous referee for constructive suggestions and comments that allowed significant improvement of the manuscript. They also thank A. Jiménez for providing the VIRGO timeseries used for the solar comparison and S. Gebruers for providing the machine-readable table used to represent the  $\gamma$  Dor sample on Fig. 1. They also acknowledge L. Amard, L. Bugnet, S. Sulis, and L. Bigot for fruitful discussions. S.N.B, HD, R.A.G, St.M, and A.S.B acknowledge support from PLATO and GOLF CNES grants. S.N.B, and A.S.B acknowledge support from ERC Whole Sun Synergy grant #810218. S.N.B acknowledges support from PLATO ASI-INAF agreement no. 2015-019-R.1-2018. Sa.M. acknowledges support from the Spanish Ministry of Science and Innovation (MICINN) with the Ramón y Cajal fellowship no. RYC-2015-17697, grant no. PID2019-107187GB-I00 and PID2019-107061GB-C66, and through AEI under the Severo Ochoa Centres of Excellence Programme 2020–2023 (CEX2019-000920-S). A.R.G.S. acknowledges the support by FCT through national funds and by FEDER through COMPETE2020 by these grants: UIDB/04434/2020 & UIDP/04434/2020. A.R.G.S. is supported by FCT through the work contract No. 2020.02480.CEECIND/CP1631/CT0001. This paper includes data collected by the *Kepler* mission, and obtained from the MAST data archive at the Space Telescope Science Institute (STScI). Funding for the *Kepler* mission is provided by the NASA Science Mission Directorate. STScI is operated by the Association of Universities for Research in Astronomy, Inc., under NASA contract NAS 5-26555.

*Software:* MESA (Paxton et al. 2011, 2013, 2015, 2018, 2019), GYRE (Townsend & Teitler 2013; Townsend et al. 2018; Goldstein & Townsend 2020), numpy (Harris et al. 2020), matplotlib (Hunter 2007), scipy (Virtanen et al. 2020), emcee (Foreman-Mackey et al. 2013), corner (Foreman-Mackey 2016), astropy (Astropy Collaboration et al. 2022), apollinaire (Breton et al. 2022b).

## References

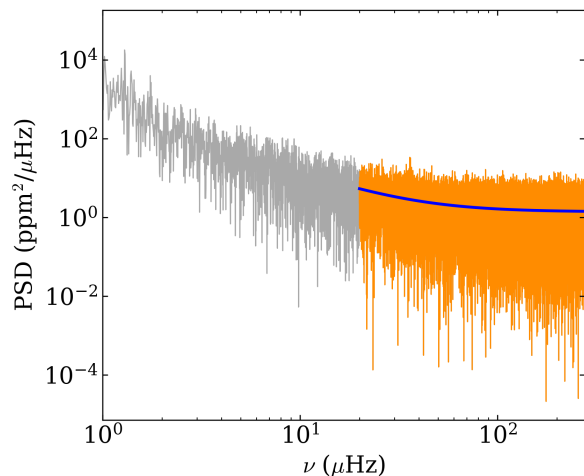
- Aerts, C. 2021, *Reviews of Modern Physics*, 93, 015001  
Aerts, C., Augustson, K., Mathis, S., et al. 2021, *A&A*, 656, A121  
Aerts, C., Mathis, S., & Rogers, T. M. 2019, *ARA&A*, 57, 35  
Aigrain, S., Favata, F., & Gilmore, G. 2004, *A&A*, 414, 1139  
Alvan, L., Brun, A. S., & Mathis, S. 2014, *A&A*, 565, A42  
Alvan, L., Strugarek, A., Brun, A. S., Mathis, S., & García, R. A. 2015, *A&A*, 581, A112  
Amard, L., Palacios, A., Charbonnel, C., et al. 2019, *A&A*, 631, A77  
Appourchaux, T., Fröhlich, C., Andersen, B., et al. 2000, *ApJ*, 538, 401  
Appourchaux, T. & Pallé, P. L. 2013, in *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Vol. 478, *Fifty Years of Seismology of the Sun and Stars*, ed. K. Jain, S. C. Tripathy, F. Hill, J. W. Leibacher, & A. A. Pevtsov, 125  
Astropy Collaboration, Price-Whelan, A. M., Lim, P. L., et al. 2022, *apj*, 935, 167  
Augustson, K. C., Mathis, S., & Astoul, A. 2020, *ApJ*, 903, 90  
Ball, W. H. & Gizon, L. 2017, *A&A*, 600, A128  
Ball, W. H., Triaud, A. H. M. J., Hatt, E., Nielsen, M. B., & Chaplin, W. J. 2023, *MNRAS*, 521, L1  
Ballot, J., Appourchaux, T., Toutain, T., & Guittet, M. 2008, *A&A*, 486, 867  
Ballot, J., García, R. A., & Lambert, P. 2006, *MNRAS*, 369, 1281  
Ballot, J., Lignières, F., Reese, D. R., & Rieutord, M. 2010, *A&A*, 518, A30  
Baraffe, I., Clarke, J., Morison, A., et al. 2023, *MNRAS*, 519, 5333  
Basri, G., Walkowicz, L. M., Batalha, N., et al. 2010, *ApJ*, 713, L155  
Beck, P. G., Bedding, T. R., Mosser, B., et al. 2011, *Science*, 332, 205  
Beck, P. G., Montalbán, J., Kallinger, T., et al. 2012, *Nature*, 481, 55  
Bedding, T. R., Mosser, B., Huber, D., et al. 2011, *Nature*, 471, 608  
Belkacem, K., Dupret, M. A., & Noels, A. 2010, *A&A*, 510, A6  
Belkacem, K., Pinçon, C., & Buldgen, G. 2022, *Sol. Phys.*, 297, 147  
Belkacem, K., Samadi, R., Goupil, M. J., et al. 2009, *A&A*, 494, 191  
Bellinger, E. P., Basu, S., Hekker, S., Christensen-Dalsgaard, J., & Ball, W. H. 2021, *ApJ*, 915, 100  
Benomar, O., Appourchaux, T., & Baudin, F. 2009, *A&A*, 506, 15  
Benomar, O., Bazot, M., Nielsen, M. B., et al. 2018, *Science*, 361, 1231  
Benomar, O., Takata, M., Shibahashi, H., Ceillier, T., & García, R. A. 2015, *MNRAS*, 452, 2654  
Berger, M. J. & Colella, P. 1989, *Journal of Computational Physics*, 82, 64  
Berger, M. J. & Olinger, J. 1984, *Journal of Computational Physics*, 53, 484  
Berger, T. A., Huber, D., van Saders, J. L., et al. 2020, *AJ*, 159, 280  
Berthomieu, G. & Provost, J. 1988, in *Advances in Helio- and Asteroseismology*, ed. J. Christensen-Dalsgaard & S. Frandsen, Vol. 123, 121  
Berthomieu, G. & Provost, J. 1990, *A&A*, 227, 563  
Bétrisey, J., Eggenberger, P., Buldgen, G., Benomar, O., & Bazot, M. 2023, *A&A*, 673, L11  
Borucki, W. J., Koch, D., Basri, G., et al. 2010, *Science*, 327, 977  
Bouabid, M. P., Dupret, M. A., Salmon, S., et al. 2013, *MNRAS*, 429, 2500  
Breton, S. N., Brun, A. S., & García, R. A. 2022a, *A&A*, 667, A43  
Breton, S. N., García, R. A., Ballot, J., Delsanti, V., & Salabert, D. 2022b, *A&A*, 663, A118  
Breton, S. N., Pallé, P. L., García, R. A., et al. 2022c, *A&A*, 658, A27  
Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2011, *ApJ*, 742, 79  
Brun, A. S., Strugarek, A., Varela, J., et al. 2017, *ApJ*, 836, 192  
Bugnet, L., Prat, V., Mathis, S., et al. 2021, *A&A*, 650, A53  
Bunting, A., Papaloizou, J. C. B., & Terquem, C. 2019, *MNRAS*, 490, 1784  
Buta, R. J. & Smith, M. A. 1979, *ApJ*, 232, 213  
Chaplin, W. J., Elsworth, Y., Davies, G. R., et al. 2014, *MNRAS*, 445, 946  
Chaplin, W. J., Kjeldsen, H., Bedding, T. R., et al. 2011a, *ApJ*, 732, 54  
Chaplin, W. J., Kjeldsen, H., Christensen-Dalsgaard, J., et al. 2011b, *Science*, 332, 213  
Christensen-Dalsgaard, J. 2014, *Lecture Notes on Stellar Oscillations*, fifth edition  
Christophe, S., Ballot, J., Ouazzani, R. M., Antoci, V., & Salmon, S. J. A. J. 2018, *A&A*, 618, A47  
Claret, A. & Torres, G. 2016, *A&A*, 592, A15  
Cowling, T. G. 1941, *MNRAS*, 101, 367  
Creevey, O. L., Metcalfe, T. S., Schultheis, M., et al. 2017, *A&A*, 601, A67  
Cunha, M. S., Stello, D., Avelino, P. P., Christensen-Dalsgaard, J., & Townsend, R. H. D. 2015, *ApJ*, 805, 127  
Davies, G. R., Silva Aguirre, V., Bedding, T. R., et al. 2016, *MNRAS*, 456, 2183  
Deal, M., Goupil, M. J., Cunha, M. S., et al. 2023, *A&A*, 673, A49  
Deal, M., Goupil, M. J., Marques, J. P., Reese, D. R., & Lebreton, Y. 2020, *A&A*, 633, A23  
Degroote, P., Aerts, C., Baglin, A., et al. 2010, *Nature*, 464, 259  
Deheuvels, S., Ballot, J., Beck, P. G., et al. 2015, *A&A*, 580, A96  
Deheuvels, S., Brandão, I., Silva Aguirre, V., et al. 2016, *A&A*, 589, A93  
Deheuvels, S., Doğan, G., Goupil, M. J., et al. 2014, *A&A*, 564, A27  
Deheuvels, S., Li, G., Ballot, J., & Lignières, F. 2023, *A&A*, 670, L16  
Deheuvels, S. & Michel, E. 2010, *Astronomische Nachrichten*, 331, 929

- Delorme, M., Durocher, A., Brun, A. S., & Strugarek, A. 2022, in SF2A-2022: Proceedings of the Annual meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics. Eds.: J. Richard, ed. J. Richard, A. Siebert, E. Lagadec, N. Lagarde, O. Venot, J. Malzac, J. B. Marquette, M. N'Diaye, & B. Briot, 209–213
- Dupret, M. A., Grigahcène, A., Garrido, R., Gabriel, M., & Scufflaire, R. 2004, *A&A*, 414, L17
- Dupret, M. A., Grigahcène, A., Garrido, R., Gabriel, M., & Scufflaire, R. 2005, *A&A*, 435, 927
- Dziembowski, W. 1977, *Acta Astron.*, 27, 203
- Dziembowski, W. A. 1971, *Acta Astron.*, 21, 289
- Foreman-Mackey, D. 2016, *The Journal of Open Source Software*, 1, 24
- Foreman-Mackey, D., Hogg, D. W., Lang, D., & Goodman, J. 2013, *PASP*, 125, 306
- Fossat, E., Boumier, P., Corbard, T., et al. 2017, *A&A*, 604, A40
- Fröhlich, C., Romero, J., Roth, H., et al. 1995, *Sol. Phys.*, 162, 101
- Fröman, N. & Fröman, P. O. 1965, *JWKB approximation : contributions to the theory* (Amsterdam: North-Holland Publishing Company)
- Fuller, J. 2017, *MNRAS*, 472, 1538
- Gaia Collaboration, Prusti, T., de Bruijne, J. H. J., et al. 2016, *A&A*, 595, A1
- Garaud, P. 2021, *Physical Review Fluids*, 6, 030501
- García, R. A. & Ballot, J. 2019, *Living Reviews in Solar Physics*, 16, 4
- García, R. A., Hekker, S., Stello, D., et al. 2011, *MNRAS*, 414, L6
- García, R. A., Mathur, S., Pires, S., et al. 2014, *A&A*, 568, A10
- García, R. A., Mathur, S., Salabert, D., et al. 2010, *Science*, 329, 1032
- García, R. A., Turck-Chièze, S., Jiménez-Reyes, S. J., et al. 2007, *Science*, 316, 1591
- Gebruers, S., Straumit, I., Tkachenko, A., et al. 2021, *A&A*, 650, A151
- Gehan, C., Mosser, B., Michel, E., Samadi, R., & Kallinger, T. 2018, *A&A*, 616, A24
- Gizon, L., Cameron, R. H., Bekki, Y., et al. 2021, *A&A*, 652, L6
- Goldreich, P. & Kumar, P. 1990, *ApJ*, 363, 694
- Goldstein, J. & Townsend, R. H. D. 2020, *ApJ*, 899, 116
- González-Cuesta, L., Mathur, S., García, R. A., et al. 2023, *A&A*, 674, A106
- Grevesse, N. & Sauval, A. J. 1998, *Space Sci. Rev.*, 85, 161
- Guzik, J. A., Kaye, A. B., Bradley, P. A., Cox, A. N., & Neuforge, C. 2000, *ApJ*, 542, L57
- Hall, O. J., Davies, G. R., van Saders, J., et al. 2021, *Nature Astronomy*, 5, 707
- Harris, C. R., Millman, K. J., van der Walt, S. J., et al. 2020, *Nature*, 585, 357
- Harvey, J. 1985, in *ESA Special Publication*, Vol. 235, *Future Missions in Solar, Heliospheric & Space Plasma Physics*, ed. E. Rolfe & B. Battrock, 199
- Hindman, B. W. & Jain, R. 2022, *ApJ*, 932, 68
- Holl, B., Sozzetti, A., Sahlmann, J., et al. 2023, *A&A*, 674, A10
- Houdek, G., Trampedach, R., Aarslev, M. J., & Christensen-Dalsgaard, J. 2017, *MNRAS*, 464, L124
- Huber, D., Chaplin, W. J., Christensen-Dalsgaard, J., et al. 2013, *ApJ*, 767, 127
- Hunter, J. D. 2007, *Computing in Science & Engineering*, 9, 90
- Iglesias, C. A. & Rogers, F. J. 1996, *ApJ*, 464, 943
- Johnston, C. 2021, *A&A*, 655, A29
- Kallinger, T., De Ridder, J., Hekker, S., et al. 2014, *A&A*, 570, A41
- Kaye, A. B., Handler, G., Krisciunas, K., Poretti, E., & Zerbi, F. M. 1999, *PASP*, 111, 840
- Kippenhahn, R., Weigert, A., & Weiss, A. 2012, *Stellar Structure and Evolution* (Springer)
- Kiraga, M., Stepien, K., & Jahn, K. 2005, *Acta Astron.*, 55, 205
- Kjeldsen, H. & Bedding, T. R. 1995, *A&A*, 293, 87
- Kjeldsen, H., Bedding, T. R., & Christensen-Dalsgaard, J. 2008, *ApJ*, 683, L175
- Kosovichev, A. G. & Kitiashvili, I. N. 2020, in *Solar and Stellar Magnetic Fields: Origins and Manifestations*, ed. A. Kosovichev, S. Strassmeier, & M. Jardine, Vol. 354, 107–115
- Le Saux, A., Guillet, T., Baraffe, I., et al. 2022, *A&A*, 660, A51
- Lecoanet, D., Le Bars, M., Burns, K. J., et al. 2015, *Phys. Rev. E*, 91, 063016
- Lee, U. & Saio, H. 1997, *ApJ*, 491, 839
- Li, G., Deheuvels, S., Ballot, J., & Lignières, F. 2022, *Nature*, 610, 43
- Li, G., Van Reeth, T., Bedding, T. R., et al. 2020, *MNRAS*, 491, 3586
- Loi, S. T. 2020, *MNRAS*, 496, 3829
- Lóptien, B., Gizon, L., Birch, A. C., et al. 2018, *Nature Astronomy*, 2, 568
- Lund, M. N., Silva Aguirre, V., Davies, G. R., et al. 2017, *ApJ*, 835, 172
- Mathis, S., Dhoub, H., Tazakatti, Z., et al. 2023, *A&A*, submitted
- Mathis, S., Neiner, C., & Tran Minh, N. 2014, *A&A*, 565, A47
- Mathur, S., García, R. A., Ballot, J., et al. 2014a, *A&A*, 562, A124
- Mathur, S., García, R. A., Breton, S., et al. 2022, *A&A*, 657, A31
- Mathur, S., García, R. A., Bugnet, L., et al. 2019, *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*, 6, 46
- Mathur, S., García, R. A., Régulo, C., et al. 2010, *A&A*, 511, A46
- Mathur, S., Hekker, S., Trampedach, R., et al. 2011, *ApJ*, 741, 119
- Mathur, S., Huber, D., Batalha, N. M., et al. 2017, *ApJS*, 229, 30
- Mathur, S., Salabert, D., García, R. A., & Ceillier, T. 2014b, *Journal of Space Weather and Space Climate*, 4, A15
- Matt, S. P., Brun, A. S., Baraffe, I., Bouvier, J., & Chabrier, G. 2015, *ApJ*, 799, L23
- Mombarg, J. S. G., Dotter, A., Van Reeth, T., et al. 2020, *ApJ*, 895, 51
- Mombarg, J. S. G., Van Reeth, T., & Aerts, C. 2021, *A&A*, 650, A58
- Mombarg, J. S. G., Van Reeth, T., Pedersen, M. G., et al. 2019, *MNRAS*, 485, 3248
- Mosser, B., Goupil, M. J., Belkacem, K., et al. 2012, *A&A*, 548, A10
- Neiner, C., Floquet, M., Samadi, R., et al. 2012, *A&A*, 546, A47
- Noraz, Q., Breton, S. N., Brun, A. S., et al. 2022, *A&A*, 667, A50
- Onag, J. M. J. & Basu, S. 2020, *ApJ*, 898, 127
- Ouazzani, R. M., Marques, J. P., Goupil, M. J., et al. 2019, *A&A*, 626, A121
- Ouazzani, R.-M., Salmon, S. J. A. J., Antoci, V., et al. 2017, *MNRAS*, 465, 2294
- Pál, A., Bakos, G. Á., Torres, G., et al. 2008, *ApJ*, 680, 1450
- Paxton, B., Bildsten, L., Dotter, A., et al. 2011, *ApJS*, 192, 3
- Paxton, B., Cantiello, M., Arras, P., et al. 2013, *ApJS*, 208, 4
- Paxton, B., Marchant, P., Schwab, J., et al. 2015, *ApJS*, 220, 15
- Paxton, B., Schwab, J., Bauer, E. B., et al. 2018, *ApJS*, 234, 34
- Paxton, B., Smolec, R., Schwab, J., et al. 2019, *ApJS*, 243, 10
- Pedersen, M. G. 2022, *ApJ*, 930, 94
- Pedersen, M. G., Aerts, C., Pápics, P. I., et al. 2021, *Nature Astronomy*, 5, 715
- Pérez Hernández, F., García, R. A., Corsaro, E., Triana, S. A., & De Ridder, J. 2016, *A&A*, 591, A99
- Pérez Hernández, F., García, R. A., Mathur, S., Santos, A. R. G., & Régulo, C. 2019, *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*, 6, 41
- Pinçon, C., Belkacem, K., & Goupil, M. J. 2016, *A&A*, 588, A122
- Pires, S., Mathur, S., García, R. A., et al. 2015, *A&A*, 574, A18
- Pratt, J., Baraffe, I., Goffrey, T., et al. 2017, *A&A*, 604, A125
- Press, W. H. 1981, *ApJ*, 245, 286
- Provost, J., Berthomieu, G., & Morel, P. 2000, *A&A*, 353, 775
- Rauer, H., Catala, C., Aerts, C., et al. 2014, *Experimental Astronomy*, 38, 249
- Rogers, T. M., Lin, D. N. C., McElwaine, J. N., & Lau, H. H. B. 2013, *ApJ*, 772, 21
- Saio, H., Kurtz, D. W., Murphy, S. J., Antoci, V. L., & Lee, U. 2018, *MNRAS*, 474, 2774
- Salabert, D., García, R. A., Jiménez, A., et al. 2017, *A&A*, 608, A87
- Santos, A. R. G., Breton, S. N., Mathur, S., & García, R. A. 2021, *ApJS*, 255, 17
- Santos, A. R. G., Cunha, M. S., Avelino, P. P., García, R. A., & Mathur, S. 2017, *A&A*, 599, A1
- Santos, A. R. G., García, R. A., Mathur, S., et al. 2019, *ApJS*, 244, 21
- Shibahashi, H. 1979, *PASJ*, 31, 87
- Shporer, A. 2017, *PASP*, 129, 072001
- Silva Aguirre, V., Ballot, J., Serenelli, A. M., & Weiss, A. 2011, *A&A*, 529, A63
- Silva Aguirre, V., Lund, M. N., Antia, H. M., et al. 2017, *ApJ*, 835, 173
- Sing, D. K. 2010, *A&A*, 510, A21
- Spada, F. & Lanzafame, A. C. 2020, *A&A*, 636, A76
- Starck, J.-L., Murtagh, F., & Fadili, J. M. 2010, *Sparse Image and Signal Processing: Wavelets, Curvelets, Morphological Diversity* (Cambridge University Press)
- Takata, M. 2006, *PASJ*, 58, 893
- Tassoul, M. 1980, *ApJS*, 43, 469
- Townsend, R. H. D. 2003, *MNRAS*, 343, 125
- Townsend, R. H. D., Goldstein, J., & Zweibel, E. G. 2018, *MNRAS*, 475, 879
- Townsend, R. H. D. & Teitler, S. A. 2013, *MNRAS*, 435, 3406
- Van Eylen, V., Lund, M. N., Silva Aguirre, V., et al. 2014, *ApJ*, 782, 14
- Van Reeth, T., Mombarg, J. S. G., Mathis, S., et al. 2018, *A&A*, 618, A24
- Van Reeth, T., Tkachenko, A., & Aerts, C. 2016, *A&A*, 593, A120
- Van Reeth, T., Tkachenko, A., Aerts, C., et al. 2015a, *A&A*, 574, A17
- Van Reeth, T., Tkachenko, A., Aerts, C., et al. 2015b, *ApJS*, 218, 27
- van Saders, J. L. & Pinsonneault, M. H. 2013, *ApJ*, 776, 67
- Varghese, A., Ratnasingam, R. P., Vanon, R., Edelmann, P. V. F., & Rogers, T. M. 2023, *ApJ*, 942, 53
- Virtanen, P., Gommers, R., Oliphant, T. E., et al. 2020, *Nature Methods*, 17, 261
- Vrard, M., Cunha, M. S., Bossini, D., et al. 2022, *Nature Communications*, 13, 7553
- Waelkens, C. 1991, *A&A*, 246, 453
- Winget, D. E., Nather, R. E., Clemens, J. C., et al. 1991, *ApJ*, 378, 326
- Xiong, D. R., Deng, L., Zhang, C., & Wang, K. 2016, *MNRAS*, 457, 3163
- Zahn, J. P., Talon, S., & Matias, J. 1997, *A&A*, 322, 320

## Appendix A: VIRGO/SPM solar photometric timeseries

In order to provide a comparison with the late F-type stars data acquired by *Kepler*, we consider the observations from VIRGO/SPM. To match the observing bandwidth of the *Kepler* satellite, we use the combination of the time series acquired by the red and green channels of VIRGO/SPM (Basri et al. 2010; Salabert et al. 2017). We consider a four-year time series during a minimum of the solar cycle, between 2006 and 2010. The parametric and non-parametric background profiles are then obtained following the procedure described in Sect. 3.

We show in Fig. A.1 the PSD computed from the VIRGO/SPM time series and the corresponding background profile we compute with the 20  $\mu\text{Hz}$  low-frequency cutoff.



**Fig. A.1.** Background model for the Sun using the combination of the green and red channels from VIRGO/SPM. Only the frequency bins of the PSD shown in dark orange are considered to obtain the background. The low-frequency area of the PSD (in grey) is not considered.

## Appendix B: Stellar modelling

The reference models for KIC 3733735, KIC 6679371, KIC 7103006, and KIC 9206432 used in this work were computed using the IACgrid, that was described in details in González-Cuesta et al. (2023). The grid was generated with MESA, version 15140 and cover the mass range from 0.8 to 1.5  $M_{\odot}$ . Apart from the OPAL opacities (Iglesias & Rogers 1996) and the GS98 metallicity mixtures (Grevesse & Sauval 1998), standard MESA input physics are used. The models therefore do not include core overshooting. Input observables used for the modelling include spectroscopic  $T_{\text{eff}}$ ,  $\log g$ , and  $[\text{Fe}/\text{H}]$  (see Table 1), *Gaia* luminosity computed by Berger et al. (2020), global asteroseismic parameters  $\nu_{\text{max}}$  (see Table 2), and p-mode frequencies, for which we use the values provided by Lund et al. (2017) except for KIC 3733735 for which no published table of frequency is available. For this star, we fit the p mode frequency in the PSD of the short cadence data with the *apollinaire* module (Breton et al. 2022b). In Table B.1, we provide the orders  $n$ , the degree  $\ell$ , and the frequency  $\nu$  of the modes used for the modelling. Observables are fitted on the grid following a  $\chi^2$  minimisation as described in Pérez Hernández et al. (2016,

2019). The p-mode frequencies are accounted for with a surface term correction following the procedure detailed in Pérez Hernández et al. (2019). We underline that the model we obtain for KIC 6679371 is located at the edge of the modelling grid, and that the uncertainties we provide for it in Table 1 are probably underestimated. Nevertheless, the reference model that we consider is compatible with the input observables.

**Table B.1.** Mode frequencies fitted with *apollinaire* for KIC 3733735.

$n$	$\ell$	$\nu$ ( $\mu\text{Hz}$ )
13	2	1422.27 $\pm$ 1.55
14	0	1428.10 $\pm$ 1.63
14	1	1473.52 $\pm$ 0.59
14	2	1512.21 $\pm$ 1.48
15	0	1517.03 $\pm$ 1.15
15	1	1562.33 $\pm$ 0.60
15	2	1601.27 $\pm$ 1.96
16	0	1606.88 $\pm$ 0.81
16	1	1652.60 $\pm$ 0.50
16	2	1693.21 $\pm$ 1.31
17	0	1698.77 $\pm$ 0.67
17	1	1745.19 $\pm$ 0.56
17	2	1786.41 $\pm$ 1.18
18	0	1792.29 $\pm$ 0.68
18	1	1839.02 $\pm$ 0.49
18	2	1878.04 $\pm$ 0.75
19	0	1886.43 $\pm$ 0.70
19	1	1933.03 $\pm$ 0.71
19	2	1975.22 $\pm$ 2.37
20	0	1977.78 $\pm$ 1.18
20	1	2024.30 $\pm$ 0.57
20	2	2065.47 $\pm$ 1.64
21	0	2070.34 $\pm$ 1.37
21	1	2116.11 $\pm$ 0.48
21	2	2159.85 $\pm$ 2.08
22	0	2161.39 $\pm$ 0.98
22	1	2208.94 $\pm$ 0.63
23	0	2253.18 $\pm$ 0.97
23	1	2299.99 $\pm$ 0.58
24	0	2344.64 $\pm$ 1.25
24	1	2392.03 $\pm$ 0.68

# The complex tunnelling of gravity modes through rotating convective envelopes of low-mass stars

S. Mathis<sup>1</sup>, H. Dhouib<sup>2</sup>, Z. Tazakkati<sup>1,3</sup>, S. N. Breton<sup>4,2</sup>, L. Bugnet<sup>5</sup>, and R. A. García<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Université Paris-Saclay, Université Paris Cité, CEA, CNRS, AIM, F-91191, Gif-sur-Yvette, France  
e-mail: [stephane.mathis@cea.fr](mailto:stephane.mathis@cea.fr)

<sup>2</sup> Université Paris Cité, Université Paris-Saclay, CEA, CNRS, AIM, F-91191, Gif-sur-Yvette, France

<sup>3</sup> ENSTA Paris, Institut Polytechnique de Paris, 828 Boulevard des Maréchaux, 91120 Palaiseau, France

<sup>4</sup> INAF – Osservatorio Astrofisico di Catania, Via S. Sofia, 78, 95123 Catania, Italy

<sup>5</sup> Institute of Science and Technology Austria, Am Campus 1, Klosterneuburg, Austria

October 16, 2023

## ABSTRACT

*Context.* Stellar gravity oscillation modes are the most powerful probe of stellar radiative zones. When they are detected in the radiative envelope of intermediate-mass and massive stars, they allow us to characterise their structural and chemical properties, as well as to measure their internal rotation profile. In the case of main sequence low-mass stars, the quest for gravity modes (hereafter *g* modes) detection is still one of the major challenges because they propagate in the internal radiative core while they become evanescent in the external convective envelope and are potentially affected by the strong turbulence occurring there.

*Aims.* To help lifting this bottleneck, it seems necessary to identify and exploit all the properties of *g* modes' propagation, excitation, and damping that can help to detect the modes' signal at the stellar surface. In this context, one should consider rotation and magnetic effects, which are most of the time neglected in the study of *g* modes in low-mass stars.

*Methods.* In this work, we first focus on the action of rotation through the Coriolis acceleration on *g* modes. They become gravito-inertial modes (hereafter *gi* modes), driven simultaneously by the buoyancy and Coriolis forces. We here study their dynamics using an equatorial model. It allows us to treat properly the couplings between the propagation cavities of *g* modes and inertial modes, while taking into account the key effects of sphericity, such as the thickness of a convective envelope, and the density gradients.

*Results.* We characterise, semi-analytically, the tunnelling of *gi* modes as a function of their frequency, their horizontal degree, the rotation rate, the thickness of the convective envelope, and the density variations. The tunnelling of *gi* modes strongly depends on their frequencies. In the sub-inertial regime (i.e. frequencies below twice the angular velocity of the star,  $\Omega$ ), they propagate in the convective envelope as inertial modes. In the super-inertial regime (i.e. frequencies above  $2\Omega$ ), they are evanescent, as in the non-rotating case, but with a transmission coefficient that increases as the frequency approaches the inertial frequency  $2\Omega$ . We define a gain as the ratio between the transmission in a rotating star and the one in the corresponding non-rotating star. We show how the tunnelling of high horizontal-degree super-inertial *gi* modes, which are weakly affected by density gradients, should be favoured in rapidly rotating stars for a fixed stellar mass and age and frequencies below  $\sim 10\Omega$ . On the one hand, for a fixed rotation, the transmission increases as expected when decreasing the thickness of the convective envelope. On the other hand, the gain increases with the thickness of the convective envelope. Unfortunately, in the case of low horizontal-degree super-inertial *gi* modes, which may be potentially observed by current global asteroseismology, the benefits induced by the Coriolis acceleration are cancelled by the dominant effects of the strong density gradients. In addition, the sweeping of waves by turbulent convection in the envelope may affect their survival. To overcome this challenging situation, a more efficient stochastic excitation of *gi* modes in rapidly rotating stars may be the key to detect them.

**Key words.** asteroseismology – waves – hydrodynamics – stars: oscillations – stars: rotation – methods: analytical

## 1. Introduction

Stellar radiative zones, where energy is carried by photons, are of capital importance. They are the seat of a strong efficient internal transport of angular momentum revealed by asteroseismology (Aerts et al. 2019, and references therein). In combination with the extraction of angular momentum by stellar winds (e.g. Matt et al. 2015) and the interactions of stars with their environment (Gallet 2020; Ahuir et al. 2021), it drives the secular evolution of the rotation of stars (Maeder 2009). It has major consequences for their chemical evolution and those of their planetary and galactic environments (e.g. Huber et al. 2013; Miglio et al. 2013). In this framework, it is of major importance to be able to probe in details the internal structure and the rotation of stellar radiative layers. The best way to reach this objective is to

study the properties of standing modes that are excited and propagate in these regions, i.e. gravity/gravito-inertial modes (hereafter *g/gi* modes) on the main-sequence (MS) and mixed gravito-acoustic modes during evolved phases of the evolution of low-mass and intermediate-mass stars. On the one hand, *g/gi* mode seismology (Aerts 2021) allowed us to probe the rotation and the chemical stratification at the interface between the convective core and the radiative envelope of MS intermediate-mass stars (e.g. Van Reeth et al. 2016, 2018; Christophe et al. 2018; Li et al. 2020; Pedersen et al. 2021) and the rotation of the convective core (Ouazzani et al. 2020; Saio et al. 2021). On the other hand, mixed modes allowed us to probe the chemical stratification, the rotation of the core, and the core-to-surface rotation

contrast in subgiant and red giant stars (e.g. [Bedding et al. 2011](#); [Beck et al. 2012](#); [Mosser et al. 2012](#); [Deheuvels et al. 2014](#)).

However, detecting g modes in pre-main-sequence (PMS) and MS late-type stars remains an unsolved challenge of modern asteroseismology ([Appourchaux et al. 2010](#)). Indeed, if we focus our attention to the simplest case of pure g modes, which have the buoyancy as a restoring force, they are propagative in part of the radiative core but evanescent in the deep convective envelope. In this context, all the propositions of detection of individual g modes or asymptotic wave packets ([Turck-Chièze et al. 2004](#); [García et al. 2007](#); [Fossat et al. 2017](#)) have been highly debated (e.g. [Schunker et al. 2018](#); [Appourchaux & Corbard 2019](#); [Scherrer & Gough 2019](#); [Böning et al. 2019](#), for the method proposed by [Fossat et al. \(2017\)](#)). As a consequence, we still have no firm access to the core rotation of the Sun ([Mathur et al. 2008](#)) and of PMS and MS solar-type stars and we are restricted to the knowledge of the rotation of their external radiative regions thanks to acoustic modes ([Thompson et al. 2003](#); [García et al. 2007](#); [Benomar et al. 2015](#)). This observational challenge triggered theoretical studies ([Andersen 1996](#); [Kumar et al. 1996](#); [Belkacem et al. 2009](#); [Lecoanet & Quataert 2013](#); [Pinçon et al. 2021](#)) and numerical simulations ([Rogers & Glatzmaier 2006](#); [Alvan et al. 2014](#); [Breton et al. 2022](#)) to predict the amplitude of the g modes that are stochastically excited in these stars by the turbulent convective motions.

However, most of these studies have ignored one of the key physical processes in stars: rotation. Stellar rotation introduces a new restoring force in the dynamics of g modes: the Coriolis acceleration. This latter is of major importance since it deeply modifies the dynamics of g modes in the convective regions where they are evanescent in the non-rotating case. On the one hand, in the sub-inertial regime where their frequency ( $\omega$ ) is below the inertial frequency  $2\Omega$  ( $\Omega$  being the angular rotation frequency of the star), g modes become propagative inertial modes that potentially can be observed at the stellar surface ([Saio et al. 2021](#); [Gizon et al. 2021](#); [Hanson et al. 2022](#)). On the other hand, in the super-inertial regime for which  $\omega > 2\Omega$ , the evanescence rate decreases when diminishing the wave frequency towards the inertial frequency as this has been demonstrated by [Mathis et al. \(2014\)](#) in a local Cartesian model that neglects the sphericity of the problem. These important modifications of the propagation of g modes deeply modifies their couplings with turbulent convective Reynolds stresses. This triggers potentially an amplification of the stochastic excitation of g modes in the sub-inertial frequency range. This possible amplification has been predicted semi-analytically both in Cartesian ([Mathis et al. 2014](#); [Augustson et al. 2020](#)) and in spherical ([Neiner et al. 2020](#)) geometries and observed in F- to B-type stars that host a convective core by space-borne asteroseismology ([Neiner et al. 2012, 2020](#); [Aerts 2021](#)).

In this framework, it is thus of great interest to revisit the problem of the tunnelling of g modes in the convective envelope of rotating K- to F-type stars to identify the best potential targets to detect g modes and thus potentially open the path to probe their internal rotation. In Sect. 2, we present the equatorial model we use in this work. We show its strength to model properly the couplings between the g modes and the inertial modes cavities. In Sect. 3, we examine the potential benefits induced by the Coriolis acceleration for the tunnelling of g modes as a function of the thickness of the convective envelope (and thus of the stellar mass and age with taking the sphericity of the problem into account), its rotation rate, and the mode frequency for a given excitation. In Sect. 4, we carefully study the effects of turbulence and strong density variations that may challenge the

propagation of gi modes in the convective envelope of low-mass stars. We finally give our conclusions in Sect. 5.

## 2. Using an equatorial model

### 2.1. State-of-the-art

Our objective is to understand and quantify the impact of rotation on the propagation of g modes through the convective envelopes of low-mass stars because of the action of the Coriolis acceleration. As already identified in [Dintrans & Rieutord \(2000\)](#) and [Mathis et al. \(2014\)](#), a crucial aspect of this problem is to properly model the coupling between the propagation cavities of g modes and inertial modes, which propagate in the radiative core and convective envelope, respectively.

In this context, one can consider to use the Traditional Approximation of Rotation (hereafter TAR) ([Eckart 1960](#)), which has been broadly and successfully used to study the seismology of rotating stably stratified stellar radiation zones (e.g. [Bildsten et al. 1996](#); [Lee & Saio 1997](#); [Van Reeth et al. 2016](#); [Christophe et al. 2018](#)). In the case where the buoyancy force dominates the radial component of the Coriolis acceleration, it allows us to simplify the intrinsically 2D propagation equation of gi waves. In this regime, this latter becomes separable as in the non-rotating case and provides an estimate of adiabatic frequencies that are in rather good agreement with direct 2D complete computations ([Ouazzani et al. 2017](#)). However, the TAR cannot be applied in stellar convection zones (e.g. [Ogilvie & Lin 2004](#); [Mathis et al. 2014](#); [Ouazzani et al. 2020](#)) where the only restoring force is the Coriolis acceleration. Therefore, using the TAR here must be excluded for the problem we intend to solve.

Therefore, one should turn to another approach. The first one is to come back on the work by [Mathis et al. \(2014\)](#) that already examined this problem with taking the complete Coriolis acceleration into account both in radiative and convective regions (see also [Cai et al. 2021](#)). However, this was in a f-plane Cartesian set-up that limits its application to local studies and filters out the effects of sphericity, which should be taken into account when examining the tunnelling of g modes through a potentially deep convective region. One can also consider the possibility of using asymptotic multi-dimensional theories such as ray theories ([Prat et al. 2016, 2018](#)). However, these latter theories apply only to propagative short wavelength waves. In addition, semi-analytical studies of corresponding quantization relations are still in their infancy ([Lignières & Georgeot 2009](#); [Prat et al. 2017](#)).

Before running 2D oscillation codes ([Dintrans & Rieutord 2000](#); [Ballot et al. 2010](#); [Ouazzani et al. 2017](#)), an interesting laboratory to get a physical qualitative understanding of the problem is to study an equatorial model as in [Ando \(1985\)](#). This simplified model allows us to study the dynamics of waves under the combined action of the buoyancy force, the Coriolis acceleration (including differential rotation), and the compressibility. Its principal weakness is to filter out the possible complex latitudinal behaviour of gi waves ([Prat et al. 2018](#)). At the same time, it allows us to model properly the coupling between the propagation cavities of g modes and inertial modes. Indeed, these are the non-traditional terms that are acting close to the equator since the traditional radial projection of the rotation vector vanishes there (the vertical projection of the rotation vector is  $\Omega \cos \theta \approx 0$ , where  $\Omega$  and  $\theta$  are the angular velocity and the co-latitude, respectively, while the horizontal one is  $\Omega \sin \theta \approx \Omega$ ). At the same time, 2D numerical simulations in the stellar equatorial plane of the stochastic excitation by turbulent convection of gi waves and of the transport of angular momentum they trigger ([Rogers et al.](#)

2013) have provided us interesting and key results when compared to asteroseismic observations (Rogers 2015).

## 2.2. *gi waves in the sphere*

The objective is to study the equatorial hydrodynamics of waves, which propagate in a differentially rotating star. Since, we are considering standing oscillation modes, we focus on the adiabatic dynamical equations system, i.e. the inviscid momentum equation

$$D_t \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi, \quad (1)$$

the continuity equation

$$D_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (2)$$

the equation for the energy in the adiabatic limit

$$\frac{1}{\Gamma_1} D_t \ln P - D_t \ln \rho = 0, \quad (3)$$

and the Poisson's equation  $\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$ . We introduce the density  $\rho$ , the pressure  $P$ , the adiabatic exponent  $\Gamma_1 = (\partial \ln P / \partial \ln \rho)_S$ , where the derivative is considered at fixed macroscopic entropy  $S$ , the gravitational potential  $\Phi$ , the macroscopic velocity  $\mathbf{V}$ , and the Lagrangian derivative  $D_t = \partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla$ . The velocity is expanded as the sum of the azimuthal velocity of the differential rotation and of the wave velocity field,  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{V}(r, \theta, \varphi, t) = r \sin \theta \Omega(r, \theta) \widehat{\mathbf{e}}_\varphi + \mathbf{u}(r, \theta, \varphi, t), \quad (4)$$

where  $r, \theta, \varphi$  are the spherical coordinates with their unit vector basis  $\{\widehat{\mathbf{e}}_j\}_{j=\{r,\theta,\varphi\}}$ ,  $t$  the time, and  $\Omega(r, \theta)$  the angular velocity.

The system (Eqs. 1-2-3) is linearised around the differentially rotating equilibrium state. Each thermodynamic quantity ( $\rho, P, S$ ) or the gravitational potential ( $\Phi$ ) are expanded as:

$$X(r, \theta, \varphi, t) = \bar{X}(r, \theta) + \tilde{X}(r, \theta, \varphi, t), \quad (5)$$

where  $\bar{X}$  is its hydrostatic value and  $\tilde{X}$  its fluctuation associated to the waves.

Since we focus in this work on low-mass stars, we neglect the centrifugal acceleration  $\gamma_c = 1/2 \times \Omega^2 \nabla (r^2 \sin^2 \theta)$ . It means that  $\Omega \ll \Omega_c$ , where  $\Omega_c = \sqrt{GM}/R^3$  is the critical angular velocity of the star with  $R$  and  $M$  its radius and mass, respectively, and  $G$  the universal gravity constant. This does not constitute a strong approximation because *gi* modes are only weakly influenced by centrifugal terms (e.g. Ballot et al. 2010; Ouazzani et al. 2017; Dhouib et al. 2021a,b). As a consequence, the hydrostatic background is spherical and  $\bar{X} \equiv \bar{X}(r)$ .

Finally, we assume the Cowling approximation (Cowling 1941). This is justified in the case of low-frequency high-radial order *g* modes that we consider in this work. This allows us to simplify the problem by neglecting the perturbation of the gravitational potential associated to the wave  $\Phi$ .

We thus obtain the linearised momentum equation

$$\begin{aligned} (\partial_t + \Omega \partial_\varphi) \mathbf{u} + 2\Omega \widehat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{u} + r \sin \theta (\mathbf{u} \cdot \nabla \Omega) \widehat{\mathbf{e}}_\varphi = \\ -\frac{1}{\rho} \nabla \tilde{P} + \frac{\tilde{\rho}}{\rho^2} \nabla \bar{P} \end{aligned} \quad (6)$$

with  $\widehat{\mathbf{e}}_z = \cos \theta \widehat{\mathbf{e}}_r - \sin \theta \widehat{\mathbf{e}}_\theta$  the unit vector along the rotation axis, combined with the linearised continuity and energy equations

$$(\partial_t + \Omega \partial_\varphi) \tilde{\rho} + \nabla \cdot (\tilde{\rho} \mathbf{u}) = 0, \quad (7)$$

$$(\partial_t + \Omega \partial_\varphi) \left( \frac{\tilde{P}}{\Gamma_1 \bar{P}} - \frac{\tilde{\rho}}{\bar{\rho}} \right) + \mathbf{u} \cdot \left( \frac{1}{\Gamma_1} \nabla \ln \bar{P} - \nabla \ln \bar{\rho} \right) = 0. \quad (8)$$

Next, we expand  $\tilde{X}$  and  $\mathbf{u}$  as Fourier's series in  $\varphi$  and  $t$ :

$$\tilde{X} = \sum_{\omega_{\text{in}}, m} \left\{ X' (r, \theta) \exp [i(-m\varphi + \omega_{\text{in}} t)] \right\}, \quad (9)$$

$$\mathbf{u} = \sum_{\omega_{\text{in}}, m} \left\{ \mathbf{u}' (r, \theta) \exp [i(-m\varphi + \omega_{\text{in}} t)] \right\}, \quad (10)$$

where  $\omega_{\text{in}}$  is the wave frequency in an inertial frame,  $m$  is the azimuthal order, and  $X'$  and  $\mathbf{u}'$  are the Fourier coefficients of  $X$  and the velocity, respectively.

Inserting Eqs. (9-10) in Eq. (6), the linearized momentum equation components are obtained:

$$i \omega u'_r - 2\Omega \sin \theta u'_\theta = -\partial_r W + \frac{1}{\bar{\rho}^2} (\rho' \partial_r \bar{P} - P' \partial_r \bar{\rho}), \quad (11)$$

$$i \omega u'_\theta - 2\Omega \cos \theta u'_\varphi = -\frac{1}{r} \partial_\theta W, \quad (12)$$

$$i \omega u'_\varphi + \frac{1}{r \sin \theta} \left( u'_r \partial_r + \frac{u'_\theta}{r} \partial_\theta \right) (r^2 \sin^2 \theta \Omega) = \frac{imW}{r \sin \theta} \quad (13)$$

with the reduced pressure fluctuation  $W(r, \theta) = P'/\bar{\rho}$ , the Doppler-shifted frequency  $\omega(r, \theta) = \omega_{\text{in}} - m\Omega(r, \theta)$ , and the radial  $u'_r$ , latitudinal  $u'_\theta$ , and azimuthal  $u'_\varphi$  components of  $\mathbf{u}'$ , respectively. Finally, the linearised continuity (Eq. 7) and energy equations (Eq. 8) become

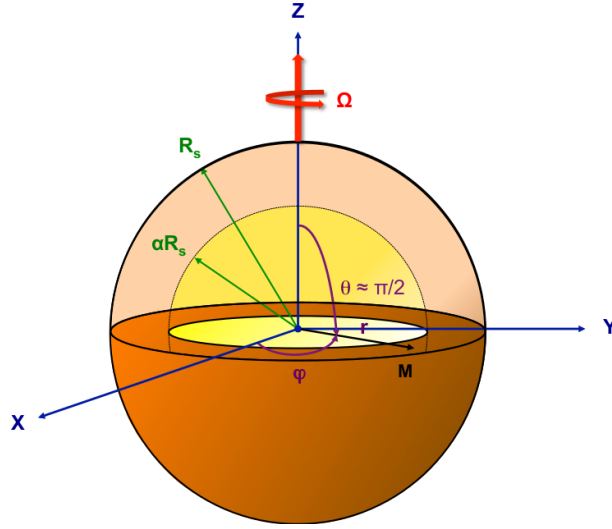
$$i \omega \rho' + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \tilde{\rho} u'_r) + \tilde{\rho} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta u'_\theta) - \frac{im u'_\varphi}{r \sin \theta} \right] = 0, \quad (14)$$

$$i \omega \left( \frac{P'}{\Gamma_1 \bar{P}} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right) + \frac{N^2(r)}{\bar{g}(r)} u'_r = 0, \quad (15)$$

where we have introduced the Brunt-Väisälä frequency

$$N^2 = -\bar{g} \left( \frac{d \ln \bar{\rho}}{dr} - \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln \bar{P}}{dr} \right) \quad (16)$$

and the gravity  $\bar{g} = -d\bar{\Phi}/dr = -1/\bar{\rho} d\bar{P}/dr$ . The dynamical equations for waves in a differentially rotating spherical star being now derived, we focus from now on their dynamics close to the equatorial plane as this has been done theoretically by Ando (1985) and numerically by Rogers et al. (2013) and Rogers (2015).



**Fig. 1.** Studied equatorial set-up.  $\Omega$  is the angular velocity of the star and  $\alpha$  the radius aspect ratio of the base of the convective envelope.  $(r, \theta, \varphi)$  are the usual spherical coordinates.

### 2.3. Equatorial dynamics

Following Ando (1985), we consider the previously derived equations around the equatorial plane of the stars, i.e.  $\theta \approx \pi/2$ , as represented in Fig. 1. Thermodynamical quantities and the components of the wave velocity are expanded as

$$X' = \sum_k \{X(r) \exp(ik\theta)\} \quad (17)$$

with  $k$  the latitudinal wave number in the equatorial plane. We point out that  $k$  should not be confused with the degree of the Hough eigenfunctions used to describe the latitudinal structure of  $g$  modes modified by the Coriolis acceleration within the TAR (e.g. Lee & Saio 1997).

The components of the momentum equation (eqs. 11-13) become

$$i\omega u_r - 2\Omega u_\varphi = -\frac{dW}{dr} - \frac{d \ln \bar{\rho}}{dr} W - \frac{\rho}{\bar{\rho}} \bar{g}, \quad (18)$$

$$i\omega u_\theta = -\frac{ik}{r} W, \quad (19)$$

$$i\omega u_\varphi + \zeta(r) u_r + (\partial_\theta \Omega)_{\theta=\pi/2} u_\theta = \frac{im}{r} W, \quad (20)$$

where  $\zeta(r) = 2\Omega(r, \pi/2) + r(\partial_r \Omega)_{\theta=\pi/2}$ . Thanks to numerical simulations (Brun et al. 2017, 2022), a systematic understanding of the differential rotation in the convective envelope of low-mass stars has been drawn. The key physical control parameter is the fluid convective Rossby number,  $R_{o,f}$ . Brun et al. (2017) have defined it as the ratio between the vorticity of the convective flow and  $2\Omega$ . It compares the strength of the inertia of convective flows to the Coriolis acceleration. First, in rapidly rotating stars in which the Coriolis acceleration dominates the dynamics when  $R_{o,f} \leq 0.3$  (Brun et al. 2017), the differential rotation is mostly cylindrical because of the Taylor-Proudman theorem. Therefore, the angular velocity depends mainly on the distance from the rotation axis  $s = r \sin \theta$  and the term  $r \sin \theta (\mathbf{u} \cdot \nabla \Omega)$  simplifies

to  $r(\partial_r \Omega)_{\theta=\pi/2}$ . In the case of more moderate rotation as in the Sun for instance, the differential rotation becomes conical with an equatorial acceleration (the solar regime) if  $0.3 \leq R_{o,f} \leq 1$  or deceleration (the anti-solar regime) if  $R_{o,f} \geq 1$  (Brun et al. 2017). This corresponds to an equatorial extrema for the angular velocity, i.e.  $(\partial_\theta \Omega)_{\theta=\pi/2} \approx 0$ . Finally, the rotation can even become shellular, i.e. with a very weak dependence on the latitude, in the case of very slow rotators (Brun & Palacios 2009) and  $(\partial_\theta \Omega)_{\theta=\pi/2} \approx 0$  again.

In the same way, the continuity and energy equations become

$$i\omega \frac{\rho}{\bar{\rho}} + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u_r) + \frac{d \ln \bar{\rho}}{dr} u_r + \frac{i}{r} [k u_\theta - m u_\varphi] = 0 \quad (21)$$

and

$$i\omega \left( \frac{W}{c_s^2} - \frac{\rho}{\bar{\rho}} \right) + \frac{N^2}{\bar{g}} u_r = 0, \quad (22)$$

where  $c_s = \sqrt{\Gamma_1 \bar{P} / \bar{\rho}}$  is the sound speed.

This system can be reduced to a system of two ordinary differential equations for the vertical velocity and the reduced pressure only

$$\frac{d}{dr} (r^2 u_r) = - \left( \frac{m\zeta}{\omega r} + \frac{N^2}{\bar{g}} + \frac{d \ln \bar{\rho}}{dr} \right) (r^2 u_r) + \frac{L^2}{\omega} \left( 1 - \frac{\omega^2}{S_L^2} \right) (iW), \quad (23)$$

$$\frac{d}{dr} (iW) = \frac{1}{r^2 \omega} (\omega^2 - 2\Omega\zeta - N^2) (r^2 u_r) + \left( \frac{N^2}{\bar{g}} + m \frac{2\Omega}{\omega r} \right) (iW), \quad (24)$$

where we have introduced the global horizontal degree  $L = \sqrt{k^2 + m^2}$  and the Lamb frequency  $S_L = L c_s / r$ . After some algebra, this system can be reduced to a single linear second-order ordinary differential equation for  $r^2 u_r$ :

$$\frac{d^2}{dr^2} (r^2 u_r) + A(r) \frac{d}{dr} (r^2 u_r) + B(r) (r^2 u_r) = 0, \quad (25)$$

where

$$A(r) = \frac{d}{dr} \left[ \ln \left( \frac{\bar{\rho}}{1 - \frac{\omega^2}{S_L^2}} \right) \right] \quad (26)$$

and

$$B(r) = \left( 1 - \frac{\omega^2}{S_L^2} \right) \left( \frac{N^2}{\omega^2} + \frac{2\Omega\zeta}{\omega^2} - 1 \right) \frac{L^2}{r^2} + \frac{d}{dr} \left( \frac{m\zeta}{r\omega} + \frac{N^2}{\bar{g}} + \frac{d \ln \bar{\rho}}{dr} \right) - \left( \frac{m\zeta}{r\omega} + \frac{N^2}{\bar{g}} + \frac{d \ln \bar{\rho}}{dr} \right) \left( \frac{N^2}{\bar{g}} + \frac{m}{r} \frac{2\Omega}{\omega} + \frac{d}{dr} \left[ \ln \left( \frac{\omega}{S_L^2} - \frac{1}{\omega} \right) \right] \right). \quad (27)$$

Following the method introduced by Press (1981), we make the following change of variable:

$$r^2 u_r = C(r) \Psi(r) \quad (28)$$

with

$$C(r) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int A(r) dr\right) = \left(\frac{\bar{\rho}}{1 - \frac{\omega^2}{S_L^2}}\right)^{-1/2}. \quad (29)$$

It allows us to get a Schrödinger type equation for  $\Psi$

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} + p^2(r)\Psi = 0, \quad (30)$$

where

$$p^2 = B(r) + A(r) \frac{d \ln C}{dr} + \frac{1}{C} \frac{d^2 C}{dr^2}. \quad (31)$$

If we consider asymptotic waves, which have wavelengths smallest than the characteristic length of variation of the equilibrium quantities, we can make a Jeffreys-Wentzel-Kramers-Brillouin (JWKB) analysis of this equation (Fröman & Fröman 2005). This leads to neglect the terms in  $r^2 u_r$  in the right-hand side of Eq. (23) and in  $iW$  in the right-hand side of Eq. (24). We obtain:

$$\Psi(r) = A_\Psi \frac{1}{(k_r(r))^{1/2}} \exp\left[i \int_{r'} k_r(r') dr'\right], \quad (32)$$

where the vertical wave number is given by:

$$k_r^2 \simeq \left(1 - \frac{\omega^2}{S_L^2}\right) \left(\frac{N^2}{\omega^2} + \frac{2\Omega\zeta}{\omega^2} - 1\right) k_h^2 \quad (33)$$

with  $k_h \equiv L/r$  the horizontal wave number and  $A_\Psi$  the amplitude. As in Ando (1985), we recognise the different types of oscillation modes. The first bracket corresponds to the compressibility and associated high-frequencies acoustic modes for which  $\sqrt{N^2 + 2\Omega\zeta} < S_L < \omega$ . The second one corresponds to the buoyancy and the Coriolis acceleration and corresponding low-frequency gi modes for which  $\omega < \sqrt{N^2 + 2\Omega\zeta} < S_L$  in the equatorial plane. In the case where  $\omega \ll S_L$  and  $N^2 \equiv 0$ , we recognise the propagation equation for pure inertial waves. This would have not been possible if using a spherical model assuming the traditional approximation. The equatorial model thus provides us an optimal laboratory allowing us to study acoustic, inertial, and gravito-inertial modes and their couplings since we are in a purely non-traditional configuration.

In the present work, we focus on g modes modified by rotation. We thus consider modes for which the impact of stable stratification dominates over the variation of the vorticity. As discussed in Ando (1985) (we refer the reader to eqs. 18 & 19 of this work), we thus filter out the branch of Rossby waves (also called r-modes), which have been detected recently in the Sun (Löptien et al. 2018; Gizon et al. 2021).

As illustrated in Alvan et al. (2015) (see also Fuller et al. 2014; Ahuir et al. 2021), internal gravity waves split into two categories: low-frequency progressive waves, which are damped by dissipative processes before their reflection at the domain boundaries, and higher frequencies standing modes, which could be more likely detected. In appendix A, we study the propagation of gi waves damped by heat diffusion and viscosity. This allows us to derive the analytical expression of the critical frequency at which the transition between the two regimes happens:

$$\omega_c = L^{3/4} \left[ \frac{1}{2} \int_0^{\alpha R_s} (N^2 + 4\Omega^2)^{1/2} \left[ (\kappa + \nu) N^2 + 2\nu 4\Omega^2 \right] \frac{dr'}{r'^3} \right]^{1/4}. \quad (34)$$

### 3. The potential help of rotation

#### 3.1. Propagation equation

From now on, we focus on the convective envelope for which we assume isentropy, i.e.  $N^2 \equiv 0$ . We focus on the low-frequency branch for which  $\omega \ll S_L$ . In addition, we assume that the angular velocity ( $\Omega$ ) varies slowly along the radius in the equatorial plane to simplify the problem. This is for instance the case of the models of the conical rotation in the convective envelope of the Sun (Thompson et al. 2003; García et al. 2007) and of solar-type stars (Benomar et al. 2015, 2018), which have been probed by helio- and asteroseismology, respectively. These rotation profiles have a stronger variation with the co-latitude than with the radius. Finally, as a first step, we neglect the impact of density gradients, which will be examined in §4.2. In this case, Eq. (30) simplifies into:

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} + \left(\frac{4\Omega^2}{\omega^2} - 1\right) \frac{L^2}{r^2} \Psi = 0. \quad (35)$$

This equation is now written in the form of an Euler ordinary differential equation

$$r^2 \frac{d^2\Psi}{dr^2} + (P_{L;c})^2 \Psi = 0, \quad \text{where} \quad (P_{L;c})^2 = \left[ \left(\frac{2\Omega}{\omega}\right)^2 - 1 \right] L^2. \quad (36)$$

All the coefficients in Eq. (36) are constant. This allows us to search for a power-law solution

$$\Psi(r) = A_\Psi r^\delta, \quad (37)$$

where

$$\delta(\delta - 1) + (P_{L;c})^2 = 0. \quad (38)$$

The roots of this polynomial equation allows us to derive explicit solutions both in the sub-inertial and in the super-inertial regimes.

##### 3.1.1. Sub-inertial regime: $\omega < 2\Omega$

In this regime,  $(P_{L;c})^2 > 0$ ; waves are thus propagative inertial waves. We define

$$K_{L;c} = \sqrt{(P_{L;c})^2} = L \sqrt{\left(\frac{2\Omega}{\omega}\right)^2 - 1} \quad (39)$$

that allows us to identify the radial wave number

$$k_r = \frac{K_{L;c}}{r}. \quad (40)$$

Eq. (38) becomes

$$\delta^2 - \delta + (K_{L;c})^2 = 0 \quad (41)$$

with the discriminant  $\Delta_{L;c} = 1 - 4(K_{L;c})^2$ , which can be positive or negative. Therefore, we obtain two potentially complex roots:

$$\delta_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(K_{L;c})^2}}{2} \quad (42)$$



and the solution:

$$\Psi = A_1 r \frac{1 + \sqrt{1 - 4(K_{L;c})^2}}{2} + A_2 r \frac{1 - \sqrt{1 - 4(K_{L;c})^2}}{2}, \quad (43)$$

where  $A_i$  with  $i \equiv \{1, 2\}$  are amplitude coefficients, which should be determined using the boundary conditions following [Shibahashi \(1979\)](#). In the low-frequency asymptotic regime where  $\omega \ll 2\Omega$  ( $K_{L;c} \gg 1$ ), it simplifies into:

$$\begin{aligned} \Psi &= A_1 \sqrt{r} \times r^{iK_{L;c}} + A_2 \sqrt{r} \times r^{-iK_{L;c}} \\ &= A_1 \sqrt{r} \exp[iK_{L;c} \ln(r)] + A_2 \sqrt{r} \exp[-iK_{L;c} \ln(r)]. \end{aligned} \quad (44)$$

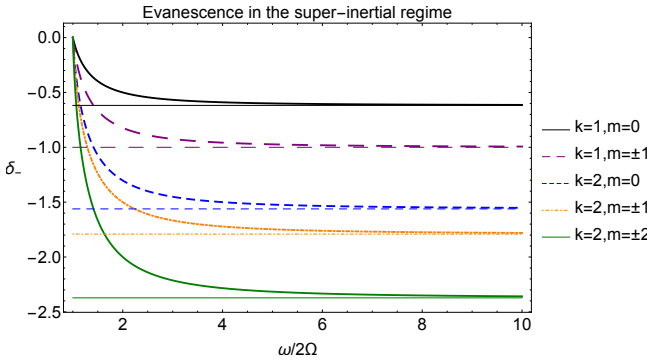
We recover the usual JWKB solution for propagative waves:

$$\Psi = \frac{A'_1}{\sqrt{k_r}} \exp\left(i \int_{\gamma}^r k_r dr'\right) + \frac{A'_2}{\sqrt{k_r}} \exp\left(-i \int_{\gamma}^r k_r dr'\right), \quad (45)$$

where  $A'_i = \sqrt{K_{L;c}} A_i$ .

In the sub-inertial regime ( $\omega < 2\Omega$ ), gi modes propagating in the radiative core become propagative inertial modes, which can be potentially detected as in the Sun ([Gizon et al. 2021](#); [Hanson et al. 2022](#); [Triana et al. 2022](#)), and the evanescence disappears. These inertial modes are of high interest to characterize the convective envelope where they propagate but also the radiative core where they are converted into equatorially-trapped sub-inertial gi modes ([Dintrans & Rieutord 2000](#); [Mathis et al. 2014](#); [Cai et al. 2021](#)).

### 3.1.2. Super-inertial regime: $\omega > 2\Omega$



**Fig. 2.** Variation of the evanescence rate  $\delta_-$  as a function of  $\omega/2\Omega$  for low-degrees  $k$  and  $m$ . The thin horizontal asymptotes correspond to the non-rotating regime.

In this regime ( $P_{L;c}^2 < 0$ ); gi waves are thus evanescent. We define

$$\Lambda_{L;c} = \sqrt{-(P_{L;c})^2} = L \sqrt{1 - \left(\frac{2\Omega}{\omega}\right)^2} \quad (46)$$

that allows us to describe the radial evanescence of the wave. Eq. (38) becomes:

$$\delta^2 - \delta - (\Lambda_{L;c})^2 = 0 \quad (47)$$

with the positive discriminant  $\Delta_{L;c} = 1 + 4(\Lambda_{L;c})^2$ . Therefore, we obtain two real roots:

$$\delta_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4(\Lambda_{L;c})^2}}{2} \quad (48)$$

and the solution:

$$\Psi = B_1 r \frac{1 + \sqrt{1 + 4(\Lambda_{L;c})^2}}{2} + B_2 r \frac{1 - \sqrt{1 + 4(\Lambda_{L;c})^2}}{2}. \quad (49)$$

If we consider the case where  $\Lambda_{L;c} \gg 1$  (when  $L \gg 1$ ), this solution becomes:

$$\Psi = B_1 \sqrt{r} \times r^{\Lambda_{L;c}} + B_2 \sqrt{r} \times r^{-\Lambda_{L;c}}. \quad (50)$$

Applying the same algebra that in Eq. (44), we recover the JWKB solution for evanescent waves:

$$\Psi = \frac{B'_1}{\sqrt{\kappa_r}} \exp\left(\int^r \kappa_r dr'\right) + \frac{B'_2}{\sqrt{\kappa_r}} \exp\left(-\int^r \kappa_r dr'\right), \quad (51)$$

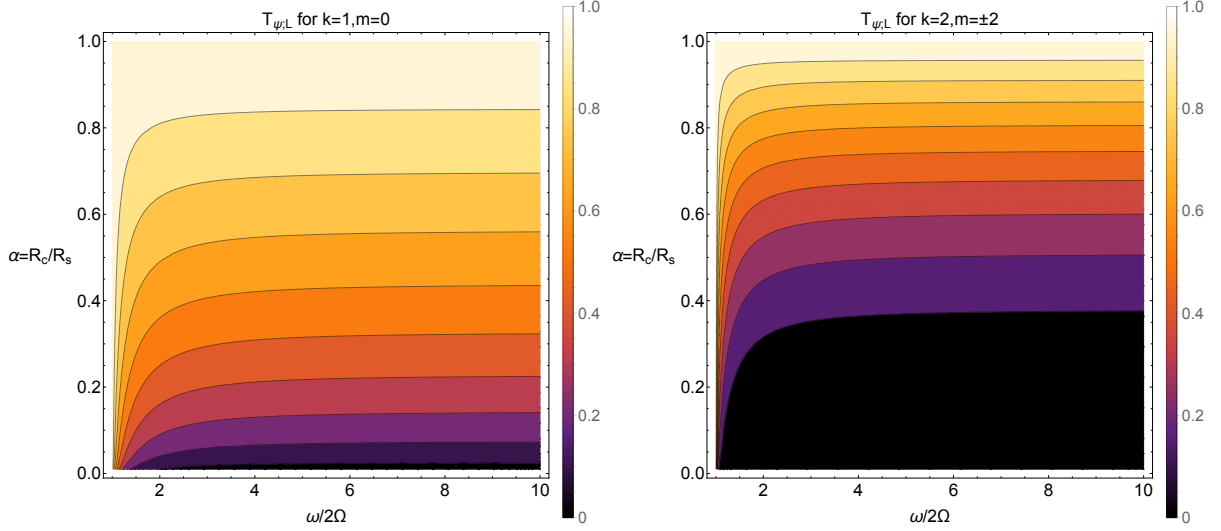
where  $\kappa_r = \Lambda_{L;c}/r$  and  $B'_i = \sqrt{\Lambda_{L;c}} B_i$  with  $i \equiv \{1, 2\}$ . Since, we consider here the tail of the evanescent super-inertial modes, we set  $B'_1 = 0$  following [Shibahashi \(1979\)](#).

In Fig. 2, we represent the variation of the evanescence rate  $\delta_-$  as a function of  $\omega/2\Omega$  for low-degrees  $k$  and  $m$ . As expected, the highest  $L = \sqrt{k^2 + m^2}$ , the strongest the evanescence (e.g. [Unno et al. 1989](#)).

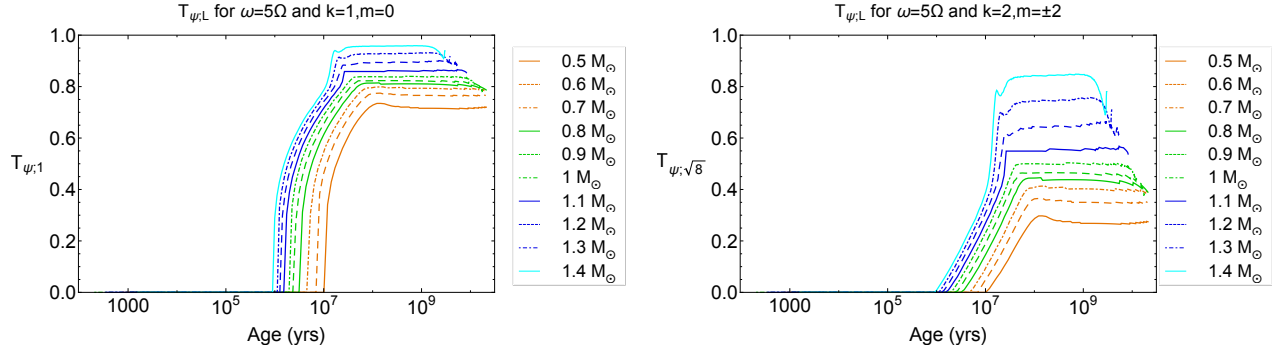
On the one hand, when  $\omega/2\Omega \rightarrow 1$ ,  $\delta_-$  vanishes for every  $k$  and  $m$ . This corresponds to the transition between evanescent gi waves in the super-inertial regime and propagative inertial waves in the sub-inertial regime.

On the other hand,  $\delta_-$  tends towards the non-rotating evanescence rate  $(1 - \sqrt{1 + 4L^2})/2$  when  $\omega/2\Omega \rightarrow \infty$ ; this latter tends to  $-L$  when  $L \gg 1$ . In Fig. 2, we can see that we enter in the asymptotic non-rotating regime, represented by the thin horizontal asymptotes, when  $\omega \approx 10\Omega$ . Below this limit, the Coriolis acceleration weakens the evanescence of the wave. At a fixed amplitude, this shows how the Coriolis acceleration helps a super-inertial gravity mode to tunnel more efficiently than in the non-rotating case in the convective envelope. This favours the transmission of the kinetic energy of the modes to the surface and may help their detection and characterisation.

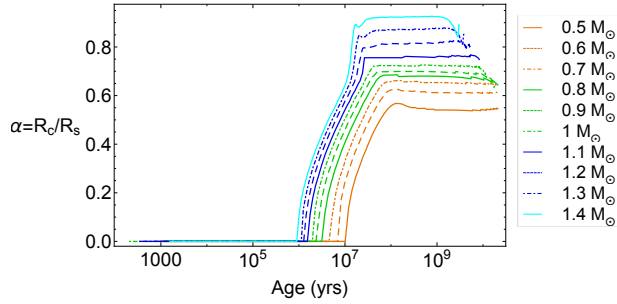
In this framework, [Nosan et al. \(2021\)](#) studied both theoretically and experimentally the smooth transition between propagating sub-inertial gi modes and evanescent super-inertial gi modes. The decay of their evanescence observed in their cylindrical experimental set-up when  $\omega \rightarrow 2\Omega$  is illustrated in their figure 2. This provides an experimental confirmation of our prediction for asteroseismology.



**Fig. 3.** Variations of the transmission coefficient  $T_{\Psi,L}$  as a function of  $\omega/2\Omega$  and the radial aspect ratio of the base of the convective envelope ( $\alpha$ ) for  $\{k = 1, m = 0\}$  (left panel) and  $\{k = 2, m = \pm 2\}$  (right panel) modes.



**Fig. 4.** Variations of  $T_{\Psi,L}$  as a function of stellar age for stellar masses varying from 0.5 to  $1.4M_{\odot}$  for  $\omega = 5\Omega$  and  $\{k = 1, m = 0\}$  (left panel) and  $\{k = 2, m = \pm 2\}$  (right panel) modes.



**Fig. 5.** Evolution of the aspect ratio in radius of the base of the convective envelope ( $\alpha$ ) as a function of stellar age for stellar masses between 0.5 and  $1.4M_{\odot}$  with the metallicity  $Z = 0.02$ .

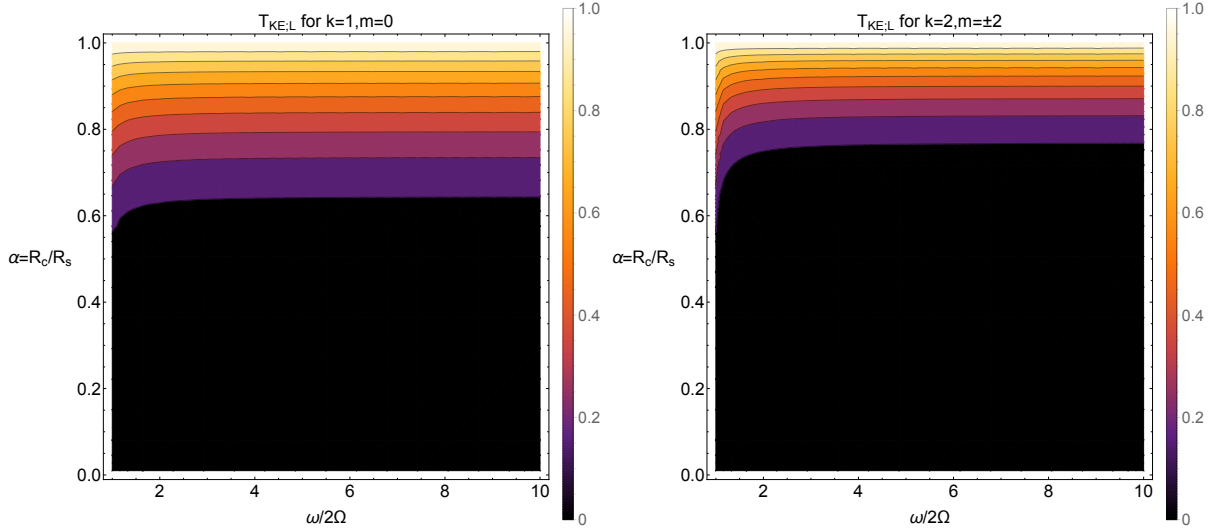
### 3.2. Transmission coefficient

Using Eq. 49, we can define the transmission coefficient for  $\Psi$  across the convective envelope:

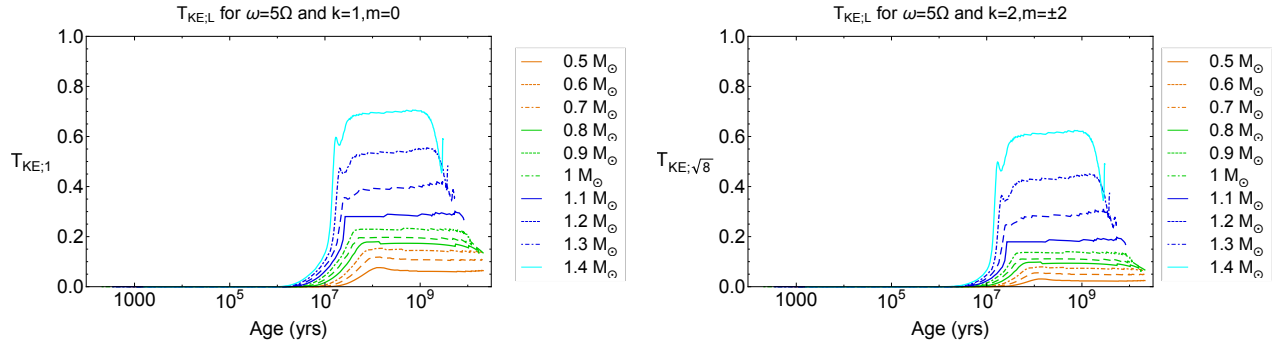
$$T_{\Psi,L}(\alpha, \Omega, \omega) = \frac{\Psi(r=r_t)}{\Psi(r=r_b)} = \frac{(\bar{\rho}^{-1/2} r^2 u_r)_{r=r_t}}{(\bar{\rho}^{-1/2} r^2 u_r)_{r=r_b}}$$

$$\approx \begin{cases} 1 & \text{if } \omega = 2\Omega \\ \frac{\sqrt{1 + 4L^2 \left[1 - \left(\frac{2\Omega}{\omega}\right)^2\right]} - 1}{\alpha} & \text{if } \omega > 2\Omega, \end{cases} \quad (52)$$

where  $r_b$  and  $r_t$  are the bottom and top radii of the convective envelope, respectively. Here, we consider that  $r_t \approx R_s$ , where  $R_s$  is the radius of the star, while  $r_b = \alpha R_s$ , with  $\alpha$  the radius aspect ratio of its base as represented in Fig. 1. In Fig. 3, we represent the variation of  $T_{\Psi}$  as a function of  $\omega/2\Omega$ ,  $\alpha$ , and the effective horizontal wave number  $L = \sqrt{k^2 + m^2}$  (for  $\{k = 1, m = 0\}$  and  $k = \{2, m = \pm 2\}$  modes). As in Fig. 2, we recover that  $T_{\Psi} \rightarrow 1$  for  $\omega \rightarrow 2\Omega$  while at fixed  $\omega/2\Omega$  and  $\alpha$ ,  $T_{\Psi}$  decreases with



**Fig. 6.** Variations of the kinetic energy transmission coefficient  $T_{\text{KE},L}$  as a function of  $\omega/2\Omega$  and the radial aspect ratio of the base of the convective envelope ( $\alpha$ ) for  $\{k = 1, m = 0\}$  (left panel) and  $\{k = 2, m = \pm 2\}$  (right panel) modes.



**Fig. 7.** Variations of the kinetic energy transmission coefficient  $T_{\text{KE},L}$  as a function of stellar age for stellar masses varying from 0.5 to  $1.4M_{\odot}$  for  $\omega = 5\Omega$  and  $\{k = 1, m = 0\}$  (left panel) and  $\{k = 2, m = \pm 2\}$  (right panel) modes.

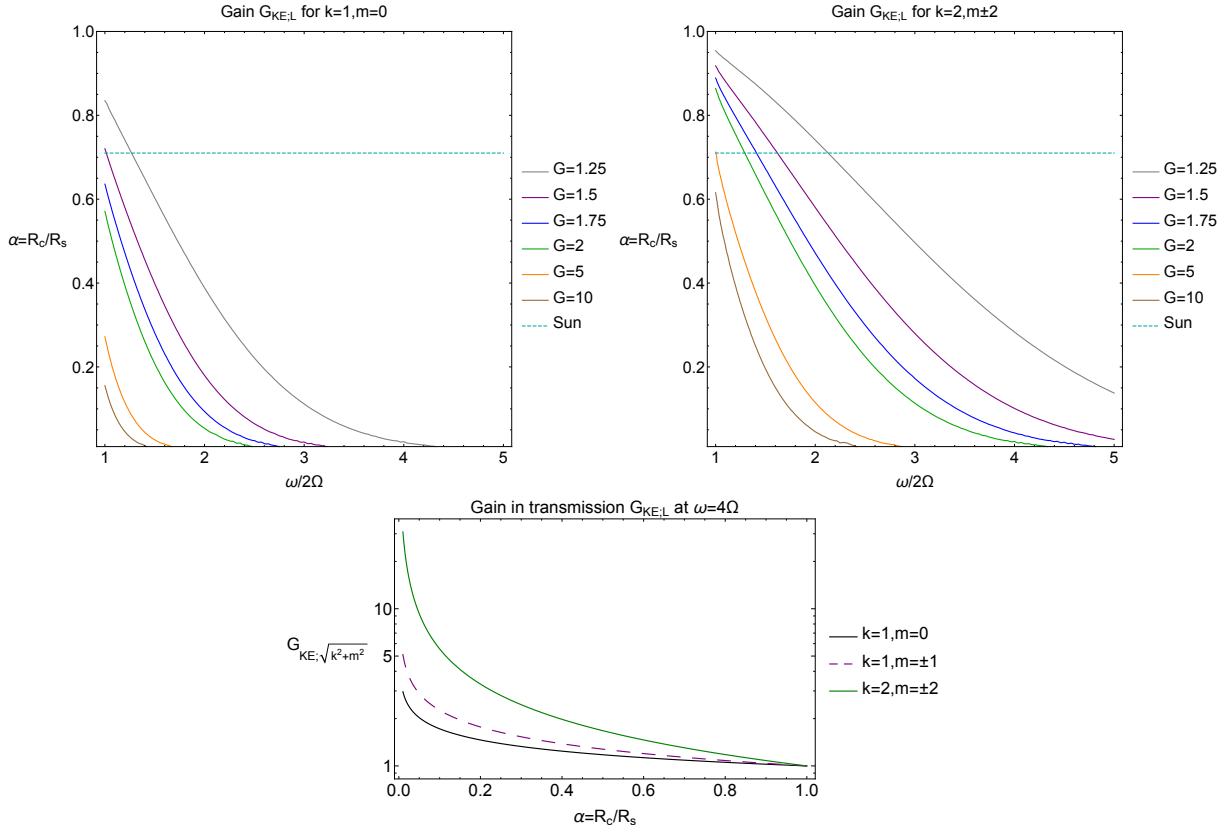
increasing  $L$ . Finally, we naturally observe that  $T_{\Psi}$  increases with  $\alpha$ . Indeed, the decrease of  $\Psi$  is stronger in the case of a thicker convective envelope. It is also interesting to examine the variation of  $T_{\Psi}$  along the evolution of low-mass stars for stellar masses between 0.5 and  $1.4M_{\odot}$ , where  $M_{\odot}$  is the Solar mass. We use the grids of stellar models computed by [Siess et al. \(2000\)](#) using the STAREVOL code as in [Mathis \(2015\)](#). In Fig. 5, we represent the variation of  $\alpha$  with the stellar age at fixed masses between 0.5 and  $1.4M_{\odot}$  for the metallicity  $Z = 0.02$ . It increases during the PMS since the base of the convective envelope moves towards the surface. During the MS, the stellar structure is less evolving and the higher the stellar mass, the thinner the convective envelope and the higher the value of  $\alpha$ . Therefore, we see in Fig. 4, where we represent the variations of  $T_{\Psi}$  as a function of time, that it increases during the PMS for all stellar masses because the thickness of the convective envelope  $(1 - \alpha)R_*$  decreases. On the MS, we recover that  $T_{\Psi}$  increases with  $\alpha$  and thus the stellar mass. This makes rapidly rotating MS F-type stars the best candidates to observe stochastically-excited gi modes. These modes excited by the  $\kappa$ -mechanism and convective flux blocking ([Guzik et al. 2000](#); [Dupret et al. 2005](#)) are intensively observed at the surface of  $\gamma$  Doradus stars, which are for part of them early F-type stars

([Gebruers et al. 2021](#)).

We can deduce the transmission for the kinetic energy volumetric density

$$T_{\text{KE},L}(\alpha, \Omega, \omega) = \frac{\left(\frac{1}{2}\bar{\rho}u_r^2\right)_{r=r_t}}{\left(\frac{1}{2}\bar{\rho}u_r^2\right)_{r=r_b}} = \alpha^4 (T_{\Psi,L})^2. \quad (53)$$

In Fig. 6, we plot its variation as a function of  $\omega/2\Omega$ ,  $\alpha$ , and  $L$  (for  $\{k = 1, m = 0\}$  and  $\{k = 2, m = \pm 2\}$  modes). We recover the same trends as for  $T_{\Psi,L}$  but with weaker values at fixed  $\omega/2\Omega$  and  $L$  for a given  $\alpha$ . This can be easily understood given that  $\alpha^{(4+\delta-1)} < \alpha^{(\delta-1)}$  for  $\alpha \in [0, 1]$ . This leads to a sharper domain in  $\alpha$  values where the transmission is important. Finally, in Fig. 7, we report the evolution of  $T_{\text{KE},L}$  along the evolution of low-mass stars as we have done it in Fig. 4. We recover the increase of  $T_{\text{KE},L}$  during the PMS because of the recession of the external convective envelope towards the stellar surface and its growth with stellar mass on the MS because the largest the mass the thinner the convective envelope. However, because of the stronger variations of  $T_{\text{KE},L}$  with  $\alpha$ , its values are smaller than those of



**Fig. 8.** Top: variation of the gain  $G_{KE;L}$  as a function of  $\omega/2\Omega$  and the radial aspect ratio of the base of the convective envelope ( $\alpha$ ). Contours for  $G = \{1.25, 1.5, 1.75, 2, 5, 10\}$  are reported for  $\{k = 1, m = 0\}$  (left panel) and  $\{k = 2, m = \pm 2\}$  (right panel) modes. The Solar aspect ratio is represented by the horizontal dashed cyan line. Bottom: Variation of  $G_{KE;L}$  at  $\omega = 4\Omega$  for different values of  $\{k, m\}$  as a function of  $\alpha$ .

$T_{\Psi;L}$ . Furthermore, the contrast between values obtained for F-type stars and G/(K/M)-type stars is larger. This strengthens our previous conclusions and the high interest to consider rapidly rotating F-type solar-like pulsators for the quest of stochastically-excited gi modes.

### 3.3. Relative gain in transmission

We define the relative gain in transmission that compares its value in a rotating star and in a non-rotating star:

$$G_{KE;L}(\alpha, \Omega, \omega) = \frac{T_{KE;L}(\alpha, \Omega, \omega)}{T_{KE;L}(\alpha, \Omega = 0, \omega)} = \left( \frac{T_{\Psi;L}(\alpha, \Omega, \omega)}{T_{\Psi;L}(\alpha, \Omega = 0, \omega)} \right)^2. \quad (54)$$

This ratio allows us to evaluate the improvement of the tunnelling of super-inertial gravity modes through a convective envelope for a fixed amplitude thanks to the Coriolis acceleration. We represent  $G_{KE;L}$  in Fig. 8 for different low-degree modes as a function of  $\omega/2\Omega$  and of the radius aspect ratio  $\alpha$ . We plot contours for favourable values of the relative gain:  $\{1.25, 1.5, 1.75, 2, 5, 10\}$ . As expected, the large values of  $G_{KE;L}$  are obtained for frequencies close to the transition with the sub-inertial regime where gi modes become propagative inertial modes. The relative gain is highest for low values of  $\alpha$  and high effective horizontal degrees  $L$ . This can be explained using Figs. 2 and 3. On the one hand, one can see in Fig. 2 that the highest the value of  $L$ , the highest the contrast between the

evanescence rates in the rotating and the non-rotating case. On the other hand, the deeper the convective shell is, the highest the thickness along which the weaker evanescence for frequencies  $2\Omega < \omega < 10\Omega$  contrasts with the strongest evanescence rate obtained in the non-rotating case. The relative gain therefore increases with the depth of the convective envelope and thus decreases with  $\alpha$  as showed in the bottom-right panel in Fig. 8. For a fixed stellar mass and rotation, the relative gain is thus more important in young stars where gravity modes are excited efficiently because of their thick external convection zones. For the same reason, the relative gain in the tunnelling for fixed power injected in the modes and rotation rate is strongest for G-type stars than in F-type stars on the MS. At a fixed stellar mass, the relative gain between the early MS and the middle of the MS (mid-MS) is also higher in G-type stars than in F-type stars because of the larger difference between their rotation rate at the ZAMS (Zero Age Main Sequence) and at mid-MS due to the decreasing efficiency of the braking by stellar winds with increasing stellar mass (e.g. Gallet & Bouvier 2015; Matt et al. 2015).

However, one should remember that we only here evaluate the relative gain in tunnelling at fixed mode amplitude and chosen stellar parameters. The visibility of a mode results from the combination of an efficient excitation and tunnelling. We should thus focus on the more rapidly rotating massive F-type solar-like pulsators, which have the thinnest convective envelope and the strongest convective r.m.s. velocities that scale as  $M_*^3$  (we refer

the reader to [Brun et al. 2017](#), for the derivation of this scaling using the mixing length theory and numerical simulations).

In the sub-inertial regime ( $\omega < 2\Omega$ ), gi modes propagating in the radiative core becomes propagative inertial modes and the evanescence disappears. In the super-inertial regime ( $\omega > 2\Omega$ ), gi modes are evanescent as g modes in the non-rotating case but with a decay rate which is weaker than the one in the non-rotating case.

At a fixed convective envelope thickness (and the corresponding stellar mass and age), rapid rotators are therefore of high interest for the quest of gi modes in late-type MS stars. At fixed rotation, the transmission of course increases when the thickness of the convective envelope diminishes. This point towards rapidly rotating F-type stars as interesting candidates.

### 3.4. A confrontation to observations

The distribution of the  $10\Omega$  values for solar-type stars can be assessed for large observed populations using for example the *Kepler* rotation catalog from [Santos et al. \(2019\)](#) and [Santos et al. \(2021\)](#), hereafter S19-21 catalog. The S19-21 catalog provides rotation periods for 55,232 F, G, K, and M-type MS stars and subgiants. It has been built using a combination of light curve analysis methods (e.g. [García et al. 2011](#); [Ceillier et al. 2017](#)), machine learning analysis ([Breton et al. 2021](#)), and visual inspections. The effective temperatures  $T_{\text{eff}}$  and logarithms of surface gravity  $\log g$  we consider are the one from [Mathur et al. \(2017\)](#) and [Berger et al. \(2020\)](#), who derived an homogeneous set of stellar parameters from the *Gaia* Data Release 2 ([Gaia Collaboration et al. 2018](#)). We consider here only stars with  $\log g > 4$  and we attribute stars with  $3900 \leq T_{\text{eff}} \leq 5200$  K to the K-type sample, stars with  $5200 \leq T_{\text{eff}} \leq 6000$  K to the G-type sample, and stars with  $6000 \leq T_{\text{eff}} \leq 6600$  K to the F-type sample. We restrict ourselves to this upper threshold of 6600 K in order to ensure that we consider stars with convective envelope of a significant thickness (more than  $\sim 5\%$  of the stellar radius). We show in [Figure 9](#) the  $10\Omega$  distribution for the three selected samples. It appears that the  $10\Omega$  distribution in F-type stars is significantly shifted towards high frequency compared to the other spectral types. Indeed, for F-type stars, the median of the distribution (represented by the vertical blue dashed line) is  $12.4 \mu\text{Hz}$ , versus  $6.1 \mu\text{Hz}$  for G-type stars and  $5.0 \mu\text{Hz}$  for K-type stars. This is not surprising in the sense that stars above  $T_{\text{eff}} \sim 6250$  K endure a significantly weakened magnetic braking ([Kraft 1967](#)). All the frequency ranges outlined in the figure are significantly below the long cadence *Kepler* Nyquist frequency of  $\sim 277 \mu\text{Hz}$ , and are therefore accessible to *Kepler* ([Borucki et al. 2010](#)), TESS ([Ricker et al. 2015](#)), and PLATO ([Rauer et al. 2014](#)).

This larger value of the median of the  $10\Omega$  distribution for F-type stars is particularly interesting when looking at the frequencies of g modes that can be stochastically excited by turbulent convection in this potentially rapidly-rotating stars. This is illustrated for instance by the 3D nonlinear numerical simulations computed by [Breton et al. \(2022\)](#) of the case of a  $1.3M_{\odot}$  star rotating at  $5\Omega_{\odot}$  ( $M_{\odot}$  and  $\Omega_{\odot}$  being the Solar mass and mean angular velocity, respectively). Indeed, a more stronger tunnelling is observed in this case while the excitation of low-frequency modes becomes more efficient in agreement with the trends found by [Augustson et al. \(2020\)](#). This is a more favourable situation for a potential detection of g modes at the stellar surface than those of G-type stars where the median value of  $10\Omega$  is lower and the values of the excited frequencies is higher (we refer the reader to the numerical simulations by [Alvan et al. 2014, 2015](#)).

### 3.5. The impact of rotation on stochastic excitation

The exploration of the parameter space showed us that gi modes with frequencies  $\omega < 10\Omega$  are potentially of high interest since their tunneling is improved in the case of super-inertial waves ( $\omega > 2\Omega$ ) while sub-inertial waves ( $\omega < 2\Omega$ ) are simply propagative inertial waves. This put the light on "quasi-inertial" gi modes for which  $\omega \sim 2\Omega$ . In this context, recent theoretical studies of their stochastic excitation by turbulent convective motions in Cartesian ([Augustson et al. 2020](#)) and in spherical ([Neiner et al. 2020](#)) geometries, are of high interest. Indeed, they demonstrated how the excitation of these waves can become very efficient because turbulent convective motions now couple to less evanescent or to propagative oscillation modes. This predicted trend seems to be observed in early-type stars ([Neiner et al. 2012, 2020](#); [Aerts et al. 2021](#)) and should apply to solar-type stars ([Breton et al. 2022](#)).

Therefore, rapid rotation potentially shifts the spectrum of stochastically-excited g modes towards low-frequency. This can be predicted by combining the simple approach by [Press \(1981\)](#) and the mixing-length theory for rotating convection developed in [Stevenson \(1979\)](#) and [Augustson & Mathis \(2019\)](#) (see also [Augustson et al. 2020](#)). If we introduce the convective turnover time  $T_c = l_c/V_c$ , where  $l_c$  and  $V_c$  are the characteristic length and r.m.s. velocity of the convection, respectively, we can define the associated angular frequency  $\omega_c = 2\pi/T_c$ . We introduce  $X^0$  and  $X^\Omega$  (where  $X \equiv \{l_c, V_c, T_c, \omega_c\}$ ) the mixing-length quantities corresponding to a theory that does not take rotation into account ([Böhm-Vitense 1958](#)) and a theory that takes it into account ([Stevenson 1979](#); [Augustson & Mathis 2019](#)). The key physical parameter, which provides a measure of the impact of the rotation (through the Coriolis acceleration) on convective flows, is the convective Rossby number as defined by [Stevenson \(1979\)](#):

$$R_o^c = \frac{V_c^0}{2\Omega l_c^0}. \quad (55)$$

In the case of a convection influenced by rotation, [Stevenson \(1979\)](#) proposed that

$$\frac{V_c^\Omega}{V_c^0} = 1.5 R_o^{c1/5} \quad \text{and} \quad \frac{l_c^\Omega}{l_c^0} = 2 R_o^{c3/5}. \quad (56)$$

These scalings are of high interest since they have been confirmed by high-resolution nonlinear numerical simulations in Cartesian ([Barker et al. 2014](#); [Currie et al. 2020](#)) and in spherical ([Vasil et al. 2021](#); [Fuentes et al. 2023](#)) coordinates. This leads to

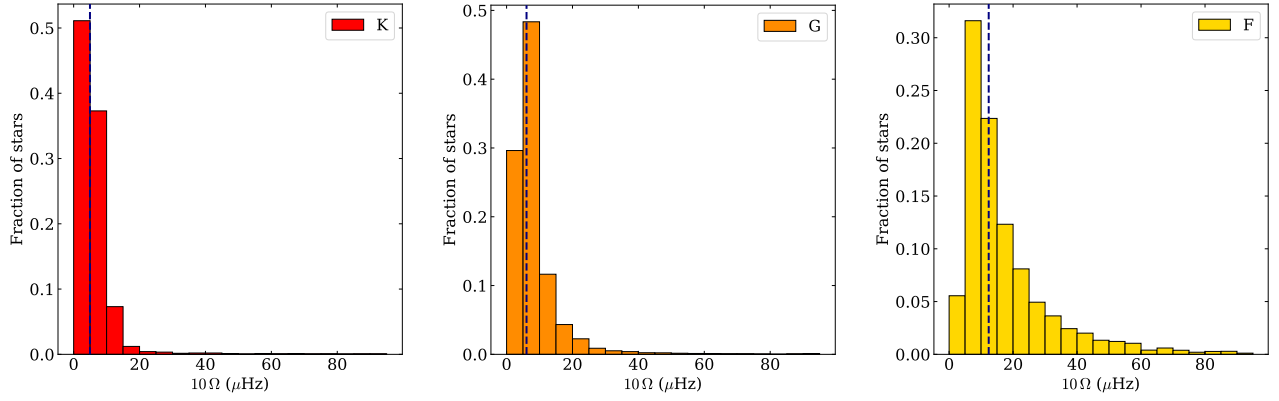
$$\frac{T_c^\Omega}{T_c^0} = \frac{L_c^\Omega}{L_c^0} \frac{V_c^0}{V_c^\Omega} = \frac{4}{3} R_o^{c2/5} \quad (57)$$

and

$$\frac{\omega_c^\Omega}{\omega_c^0} = \left(\frac{T_c^\Omega}{T_c^0}\right)^{-1} \approx \frac{3}{4} (2\pi)^{2/5} \left(\frac{\omega_c^0}{2\Omega}\right)^{-2/5}. \quad (58)$$

Following [Press \(1981\)](#), if we assume that  $\omega \approx \omega_c$ , this means that  $\omega^\Omega \leq \omega^0$  for  $\omega^0 \gtrsim 6\Omega$ . Therefore, this may favour the shift of super-inertial gi modes to lowest frequencies where their tunnelling is more efficient.

The fundamental question we have to address is how linear waves could propagate and conserve their identity within highly turbulent stellar convective regions where strong density variations occur.



**Fig. 9.** Distribution of  $10\Omega$  values for K (left), G (middle), and F-type (right) stars. The  $10\Omega$  values are computed with the photometric surface rotation periods measured by Santos et al. (2019, 2021). In each panel, the vertical blue dashed line corresponds to the median of the distribution.

## 4. Tunelling through turbulence and strong density gradients

### 4.1. The interaction between turbulent convection and inertial waves

The existence of inertial waves as described in their linear regime in turbulent (convective) regions has been studied by Clark di Leoni et al. (2014) (see also Yarom & Sharon 2014; Campagne et al. 2015). The important mechanism to study is the so-called wave sweeping, in other words, the potential advection of the wave velocity field that can distort and even destroy it. To quantify this process, one should compare the wave acceleration to the amplitude of the wave velocity field by the background one ( $\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u}_{\text{wave}}$ ). In the case we are interested in here we consider that the background velocity is composed by the azimuthal one associated with differential rotation and the r.m.s. convective turbulent velocity field:

$$\mathbf{U} = r \sin \theta \Omega(r, \theta) \widehat{\mathbf{e}}_{\varphi} + \mathbf{U}_c^{\text{r.m.s.}}. \quad (59)$$

In the case where we can consider that waves behave as quasi-plane waves, we have  $(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\text{wave}} \approx i(\mathbf{k}_{\text{wave}} \cdot \mathbf{U}) \mathbf{u}_{\text{wave}}$  and we can introduce the frequency:

$$\tilde{\omega} = \omega + \omega_{\text{sw}} \quad \text{where} \quad \omega_{\text{sw}} = \mathbf{k}_{\text{wave}} \cdot \mathbf{U}_c^{\text{r.m.s.}} \quad (60)$$

is the sweeping (advection) frequency. In that framework, the Doppler shifts by the (differential) rotation and the r.m.s. turbulent velocity field are taken into account. We introduce the associated wave period in the co-rotating frame (assuming a uniform rotation)  $T = 2\pi/\omega$  and the sweeping (advection) time  $T_{\text{sw}} = 2\pi/\omega_{\text{sw}}$ .

As identified in the numerical simulations by Clark di Leoni et al. (2014), the wave conserves its identity within the turbulent flow if  $\omega > \omega_{\text{sw}}$  ( $T < T_{\text{sw}}$ ) while it is distorted if  $\omega < \omega_{\text{sw}}$  ( $T > T_{\text{sw}}$ ). To be more quantitative, we can compute  $\omega_{\text{sweeping}}$  within our equatorial model. In the case of low-frequency waves, we have:

$$\omega_{\text{sw}} = k_r U_{c;r}^{\text{r.m.s.}} + k_{\theta} U_{c;\theta}^{\text{r.m.s.}} + k_{\varphi} U_{c;\varphi}^{\text{r.m.s.}}, \quad (61)$$

where the  $\{U_{c;j}^{\text{r.m.s.}}\}_{j=\{r,\theta,\varphi\}}$  are the components of  $\mathbf{U}_c^{\text{r.m.s.}}$ . Making the hypothesis of isotropy for  $\mathbf{U}_c^{\text{r.m.s.}}$ , we have

$$U_{c;j}^{\text{r.m.s.}} \equiv 1/\sqrt{3} \|\mathbf{U}_c^{\text{r.m.s.}}\| = U_c^{\text{r.m.s.}}. \quad (62)$$

This leads to:

$$\omega_{\text{sw}} \approx \frac{U_c^{\text{r.m.s.}}}{\sqrt{3}} \left( \sqrt{\left(\frac{2\Omega}{\omega}\right)^2} - 1 \frac{L}{r} + \frac{k}{r} + \frac{m}{r} \right) \quad (63)$$

that simplifies into

$$\omega_{\text{sw}} \approx \frac{L}{\sqrt{3}} \frac{U_c^{\text{r.m.s.}}}{r} \left(\frac{2\Omega}{\omega}\right) \quad (64)$$

for low-frequencies inertial waves for which  $k_r$  is large. This allows us to determine the frequency threshold  $\omega^{\text{crit}} = \omega_{\text{sweeping}}$  below which turbulence destroys linear inertial waves:

$$\frac{\omega^{\text{crit}}}{2\Omega} \approx \sqrt{\frac{L}{\sqrt{3}}} \sqrt{\frac{U_c^{\text{r.m.s.}}}{2\Omega r}}. \quad (65)$$

If we consider the middle of the convective envelope as a typical radius to evaluate  $\omega^{\text{crit}}$ , we recognise the structural fluid convective Rossby number as defined in Brun et al. (2017) and Noraz et al. (2022) and we finally get:

$$\frac{\omega^{\text{crit}}}{2\Omega} \approx \sqrt{\frac{L}{\sqrt{3}}} \sqrt{Ro_f}. \quad (66)$$

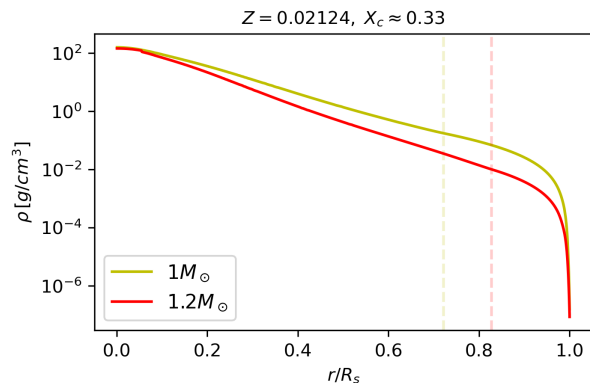
This scaling is of particular interest since that means that the faster the star rotates, the broader the frequency-spectrum of potentially observable propagative sub-inertial modes and vice-versa. It shows us how their lowest observed frequency (Gizon et al. 2021; Hanson et al. 2022, in the Sun) could inform us on the properties of convection. This would be particularly true if we have high-precision constrains on the rotation of the surface of the convective envelope (e.g. García et al. 2014; Breton et al. 2021; Santos et al. 2021) and if we assume that the radial gradient of angular velocity in this latter is weak.

### 4.2. Fighting against density gradients

In addition to the interactions between waves and turbulence described above, we also have to examine the impact of density gradients, which we have neglected in §3. Indeed, the density is varying by several orders of magnitude in the convective envelope where gi modes are tunnelling. To examine the validity of neglecting density gradients, we compute models of  $1M_{\odot}$  and

1.2 $M_{\odot}$  stars near the mid-MS using the stellar structure and evolution code Modules for Experiments in Stellar Astrophysics (MESA Paxton et al. 2011, 2013, 2015, 2018, 2019). In Fig. 10, we show the strong variation of the density in their convective envelope. In Fig. 11, we compare the function  $p(r)$  of the Schrödinger equation derived for  $\Psi$  in Eq. (30), which takes into account the density variations, to the asymptotic vertical wave number  $k_r$  which neglects them. We choose to vary the spherical degree  $\ell$  and the corresponding value of  $k$  derived from the following correspondence relation

$$S_{\ell}^2 = S_L^2 \longrightarrow k \equiv \pm \sqrt{\ell^2 + \ell - m^2}. \quad (67)$$



**Fig. 10.** The radial density profiles of the 1 $M_{\odot}$  and 1.2 $M_{\odot}$  stellar models near the mid-MS (the yellow and red solid lines, respectively). The basis of their convective envelope is materialised by the yellow and red vertical dashed lines, respectively.

First, we see that in the radiative core we verify that  $k_r \approx p$ . Therefore, the asymptotic description of gi waves can be applied in these regions.

However, this is not anymore the case in the convective envelope for low-degrees evanescent super-inertial gi-waves for which we find that  $|p| \gg |k_r|$ . This means that in this case, their dynamics is mainly driven by the density gradient terms, which dominate the Coriolis one. Therefore, the weakening of the evanescence by the Coriolis acceleration for these waves, which are those potentially observed by global asteroseismology until  $\ell = 3$ , is unfortunately negligible. The solution may come in the future thanks to the development of seismic stellar imaging, as this has been proposed in Christensen-Dalsgaard et al. (2011) that may allow us to have access to higher  $l$  modes for stars. This negative result is very important to interpret the results of the 3D spherical nonlinear simulations of internal gravity/gi waves propagating in rotating F-type stars computed by Breton et al. (2022) using the Anelastic Spherical Harmonics (ASH) code (Clune et al. 1999; Brun et al. 2004, 2011) set up to compute simultaneously the dynamics of the radiative interior, the convective envelope, and their couplings (see also Brun et al. 2011; Alvan et al. 2014, for the case of the Sun). In these simulations, the authors have found a more stronger kinetic energy of the waves in the convective envelope of the studied 1.3 $M_{\odot}$  star rotating at  $5\Omega_{\odot}$  than in the one rotating at  $1\Omega_{\odot}$ . Two possible explanations can be proposed. On the one hand, the wave's tunnelling is improved by the action of the Coriolis acceleration because of the more rapid rotation. This hypothesis seems excluded given our results presented above. On the other hand, their stochastic excitation by turbulent convection is stronger in

the case of the more rapidly rotating star. This could also explain the observed highest amplitude of the waves in the radiative interior in this case. This scenario is in agreement with the one proposed in Neiner et al. (2012); Mathis et al. (2014) and Neiner et al. (2020) to explain the observed stochastic excitation of sub-inertial gi modes in rapidly-rotating early-type stars.

In the case of high degree modes, we see that for both studied stars, we have  $|p| \rightarrow |k_r|$ . We developed a numerical code solving Eq. (30) with the finite-difference method assuming stress-free boundary condition at the stellar surface and  $u_r = 0$  at the stellar centre. We recover numerically the analytical predictions derived in Eq. (53). The results derived in §3 thus apply to high-degree modes, which unfortunately cannot be observed with current global asteroseismology.

#### 4.3. The potential action of magnetism

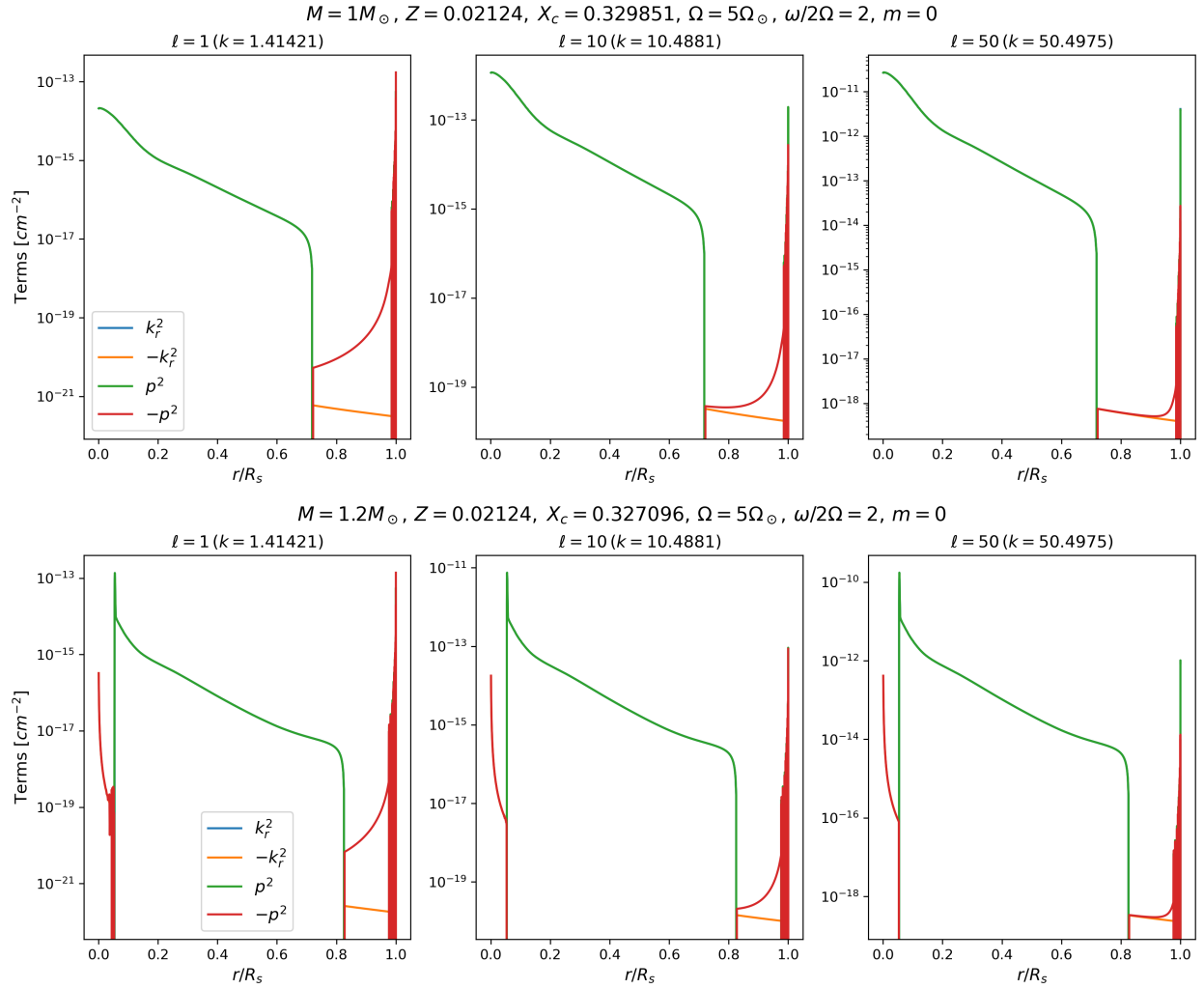
The last mechanism to examine is the magnetic field. First, magnetic fields can potentially influence the propagation of gravito-inertial waves that become magneto-gravito-inertial waves (e.g. Mathis & de Brye 2011; Dhouib et al. 2022; Rui & Fuller 2023). However, we have in most cases  $\omega_A < 2\Omega$ , where  $\omega_A$  is the Alfvén frequency. Therefore, as a first step, we can neglect the influence of magnetic field on the wave propagation. Besides, magnetic field and rotation can influence the stochastic excitation of waves by turbulent convection. A proof is provided by observations of solar-like oscillators presented in García et al. (2010) and Mathur et al. (2019) (see also Chaplin et al. 2011; Gaulme et al. 2014) where the authors show how the efficiency of this excitation mechanism is a function of stellar rotation and magnetic activity, which is triggered by dynamo action in their convective envelope (e.g. Brun & Browning 2017; Brun et al. 2022). Solar-like acoustic modes are less observed in magnetically-active stars. This should also apply to gi/gravity and Rossby waves. The physical hypothesis behind this is that magnetic field are able to diminish the convection efficiency (Gough & Tayler 1966) that seems in agreement with most recent numerical simulations (we refer the reader to Fig. 5 (d) in Hotta 2018).

## 5. Conclusions

In this work, we examine the tunnelling of gravity modes in the convective envelope of low-mass stars taking into account its rotation. In the simplest configuration, in which the impact of the Coriolis acceleration is ignored, g modes are evanescent in the convective region. This constitutes one of the challenge of their detection in solar-type stars. This dynamics contrasts with rapidly rotating hotter pulsating  $\gamma$  Doradus and slowly pulsating B-type (SPB) stars, which have a radiative envelope and for some of them a very thin sub-surface convective envelope, where g and gi modes are intensively detected and characterized (e.g. Aerts et al. 2021), along with inertial modes that propagate in their convective core (Ouazzani et al. 2020; Saio et al. 2021).

Following Mathis et al. (2014), we consider the impact of rotation on the tunnelling of these modes through convective envelopes thanks to the action of the Coriolis acceleration. The use of an equatorial model based on Ando (1985) allows us to take into account the effects of sphericity and to capture the couplings between gravity and inertial modes, simultaneously.

In the sub-inertial regime ( $\omega < 2\Omega$ ), gi modes propagating in the radiative core become propagative inertial modes in the



**Fig. 11.** Comparison between  $|p^2|$  in the radiative core and in the convective envelope (in green and red solid lines, respectively) of the computed  $1M_{\odot}$  (top row) and  $1.2M_{\odot}$  (bottom row) mid-MS stellar models and  $k_r^2$  and  $\kappa_r^2$  (in blue and orange solid lines, respectively). We have fixed the angular velocity  $\Omega = 5\Omega_{\odot}$ , the equivalent horizontal and azimuthal degrees ( $\ell, m = 0$ ) and the wave frequency  $\omega = 4\Omega$ .

convective envelope, which can be potentially detected as in the Sun (Gizon et al. 2021), and the evanescence disappears. When they are able to propagate in the convective envelope without being distorted by turbulence (i.e., for frequencies  $\omega^{\text{crit}} < \omega < 2\Omega$ ,  $\omega^{\text{crit}}$  being the critical sweeping frequency), these inertial modes are of high interest to characterize the convective envelope where they propagate but also the radiative core where they are converted into equatorially-trapped sub-inertial gi modes (Dintrans & Rieutord 2000; Mathis et al. 2014; Cai et al. 2021).

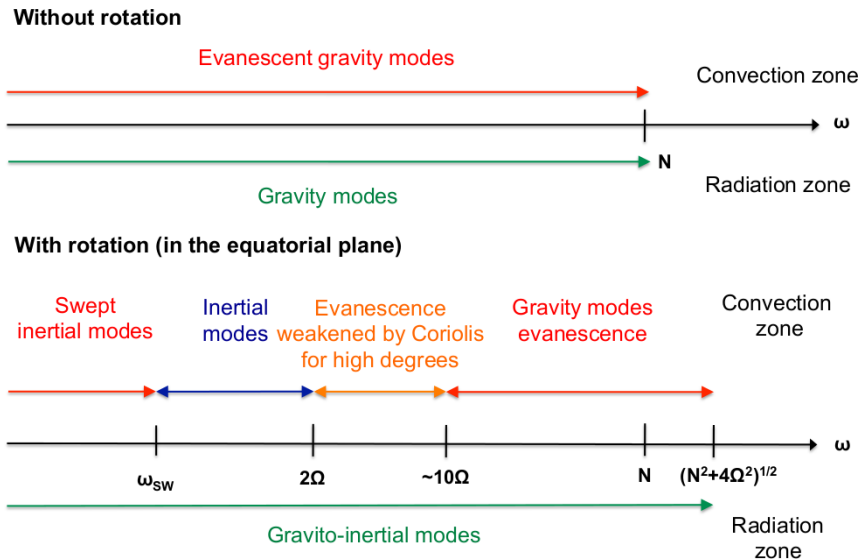
In the super-inertial regime ( $\omega > 2\Omega$ ), gi modes are evanescent in the convective envelope as g modes in the non-rotating case. However, their decay rate is potentially weaker than the one in the non-rotating case (Mathis et al. 2014). For high horizontal-degree super-inertial gi modes, which are weakly affected by density gradients, we show how the tunnelling should be favoured in rapidly rotating stars for a fixed stellar mass and age and frequencies below  $\sim 10\Omega$ . For a given rotation rate, the transmission (gain) increases when decreasing (increasing) the thickness of the convective envelope. Unfortunately, in the case of low horizontal-degree super-inertial gi modes, which may be

potentially observed by current techniques of global asteroseismology, the benefits induced by the Coriolis acceleration are cancelled by the effects of the strong density variations. In addition, the sweeping of waves by turbulent convection may affect their survival at low frequencies. To overcome this challenging situation, a more efficient stochastic excitation of gi modes in rapidly rotating stars with a thin convective envelope as observed in the numerical simulations computed by Breton et al. (2022) and predicted theoretically by Augustson et al. (2020) may help us in our quest to detect them. These conclusions point towards rapidly rotating F-type stars, where r.m.s. velocities are higher than in the Sun (they scale as  $M_*^3$ , Brun et al. 2017), as the best targets to study (Breton et al. 2023, subm.). In these stars, the Coriolis acceleration may favour the stochastic excitation of gi modes as in higher mass early-type stars (Neiner et al. 2012, 2020; Aerts et al. 2021).

All these behaviors are summarised in Fig. 12.

In the near future, we will study the tunnelling of gi modes in the realistic spherical case (e.g. Dintrans & Rieutord 2000) coupled with coherent models of their stochastic excitation in this





**Fig. 12.** Behaviours of  $g$  modes in radiative and convective stellar regions when neglecting rotation (top panel) and taking it into account (bottom panel). Their detection at the surface of late-type stars should be favoured in the sub-inertial regime in which they become propagative inertial modes when they are not distorted by the convective turbulence (if  $\omega_{sw} < 2\Omega$ ) and at the beginning of the super-inertial regime where the Coriolis acceleration weakens their evanescence rate for high-degree modes.

geometry (Neiner et al. 2020) to get quantitative results. In addition, we will evaluate the impact of stellar magnetism since the convective envelope of late-type stars are the seat of an efficient dynamo action (e.g. Brun & Browning 2017; Brun et al. 2022). These studies are essential to guide our quest of  $g$  modes in low-mass stars to constrain the dynamics of their core for which asteroseismology is still blind.

*Acknowledgements.* S.M., H.D., S.N.B. and R.A.G. acknowledge support from the CNES GOLF-SOHO and PLATO grants at CEA/Dap. S.N.B. acknowledges support from PLATO ASI-INAF agreement n. 2015-019-R.1-2018. This paper includes results obtained from data collected by the *Kepler* mission. Funding for the *Kepler* mission is provided by the NASA Science Mission directorate.

## References

Aerts, C. 2021, *Reviews of Modern Physics*, 93, 015001 1, 2  
Aerts, C., Augustson, K., Mathis, S., et al. 2021, *A&A*, 656, A121 10, 12, 13  
Aerts, C., Mathis, S., & Rogers, T. M. 2019, *ARA&A*, 57, 35 1  
Ahuir, J., Strugarek, A., Brun, A. S., & Mathis, S. 2021, *A&A*, 650, A126 1, 5, 16, 17  
Alvan, L., Brun, A. S., & Mathis, S. 2014, *A&A*, 565, A42 2, 10, 12  
Alvan, L., Strugarek, A., Brun, A. S., Mathis, S., & Garcia, R. A. 2015, *A&A*, 581, A112 5, 10, 16  
Andersen, B. N. 1996, *A&A*, 312, 610 2  
Ando, H. 1985, *PASJ*, 37, 47 2, 3, 4, 5, 12  
Appourchaux, T., Belkacem, K., Broomhall, A. M., et al. 2010, *A&A Rev.*, 18, 197 2  
Appourchaux, T. & Corbard, T. 2019, *A&A*, 624, A106 2  
Augustson, K. C. & Mathis, S. 2019, *ApJ*, 874, 83 10  
Augustson, K. C., Mathis, S., & Astoul, A. 2020, *ApJ*, 903, 90 2, 10, 13, 16  
Ballot, J., Lignières, F., Reese, D. R., & Rieutord, M. 2010, *A&A*, 518, A30 2, 3  
Barker, A. J., Dempsey, A. M., & Lithwick, Y. 2014, *ApJ*, 791, 13 10  
Beck, P. G., Montalbán, J., Kallinger, T., et al. 2012, *Nature*, 481, 55 2  
Bedding, T. R., Mosser, B., Huber, D., et al. 2011, *Nature*, 471, 608 2  
Belkacem, K., Samadi, R., Goupil, M. J., et al. 2009, *A&A*, 494, 191 2  
Benomar, O., Bazot, M., Nielsen, M. B., et al. 2018, *Science*, 361, 1231 5  
Benomar, O., Takata, M., Shibahashi, H., Ceillier, T., & García, R. A. 2015, *MNRAS*, 452, 2654 2, 5  
Berger, T. A., Huber, D., Gaidos, E., van Saders, J. L., & Weiss, L. M. 2020, *AJ*, 160, 108 10  
Bildsten, L., Ushomirsky, G., & Cutler, C. 1996, *ApJ*, 460, 827 2  
Böhm-Vitense, E. 1958, *ZAp*, 46, 108 10  
Böning, V. G. A., Hu, H., & Gizon, L. 2019, *A&A*, 629, A26 2

Borucki, W. J., Koch, D., Basri, G., et al. 2010, *Science*, 327, 977 10  
Breton, S. N., Brun, A. S., & García, R. A. 2022, arXiv e-prints, arXiv:2208.14759 2, 10, 12, 13  
Breton, S. N., Santos, A. R. G., Bugnet, L., et al. 2021, *A&A*, 647, A125 10, 11  
Brun, A. S. & Browning, M. K. 2017, *Living Reviews in Solar Physics*, 14, 4 12, 14  
Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2004, *ApJ*, 614, 1073 12  
Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2011, *ApJ*, 742, 79 12  
Brun, A. S. & Palacios, A. 2009, *ApJ*, 702, 1078 4  
Brun, A. S., Strugarek, A., Noraz, Q., et al. 2022, *ApJ*, 926, 21 4, 12, 14  
Brun, A. S., Strugarek, A., Varela, J., et al. 2017, *ApJ*, 836, 192 4, 10, 11, 13  
Cai, T., Yu, C., & Wei, X. 2021, *Journal of Fluid Mechanics*, 916, A48 2, 6, 13  
Campagne, A., Gallet, B., Moisy, F., & Cortet, P.-P. 2015, *Phys. Rev. E*, 91, 043016 11  
Ceillier, T., Tayar, J., Mathur, S., et al. 2017, *A&A*, 605, A111 10  
Chaplin, W. J., Bedding, T. R., Bonanno, A., et al. 2011, *ApJ*, 732, L5 12  
Christensen-Dalsgaard, J., Carpenter, K. G., Schrijver, C. J., Karovska, M., & Si Team. 2011, in *Journal of Physics Conference Series*, Vol. 271, GONG-SoHO 24: A New Era of Seismology of the Sun and Solar-Like Stars, 012085 12  
Christophe, S., Ballot, J., Ouazzani, R. M., Antoci, V., & Salmon, S. J. A. J. 2018, *A&A*, 618, A47 1, 2  
Clark di Leoni, P., Cobelli, P. J., Mininni, P. D., Dmitruk, P., & Matthaeus, W. H. 2014, *Physics of Fluids*, 26, 035106 11  
Clune, T. C., Elliott, J. R., Miesch, M. S., Toomre, J., & Glatzmaier, G. A. 1999, *Parallel Comput.*, 25, 361 12  
Cowling, T. G. 1941, *MNRAS*, 101, 367 3  
Currie, L. K., Barker, A. J., Lithwick, Y., & Browning, M. K. 2020, *MNRAS*, 493, 5233 10  
Deheuvels, S., Doğan, G., Goupil, M. J., et al. 2014, *A&A*, 564, A27 2  
Dhouib, H., Mathis, S., Bugnet, L., Van Reeth, T., & Aerts, C. 2022, *A&A*, 661, A133 12  
Dhouib, H., Prat, V., Van Reeth, T., & Mathis, S. 2021a, *A&A*, 652, A154 3  
Dhouib, H., Prat, V., Van Reeth, T., & Mathis, S. 2021b, *A&A*, 656, A122 3  
Dintrans, B., & Rieutord, M. 2000, *A&A*, 354, 86 2, 6, 13  
Dupret, M. A., Grigahcène, A., Garrido, R., Gabriel, M., & Scuflaire, R. 2005, *A&A*, 435, 927 8  
Eckart, C. 1960, *Hydrodynamics of Oceans and Atmospheres* (Pergamon Press (Oxford)) 2  
Fossat, E., Boumier, P., Corbard, T., et al. 2017, *A&A*, 604, A40 2  
Fröman, N. & Fröman, P. O. 2005, *Physical Problems Solved by the Phase-Integral Method* 5  
Fuentes, J. R., Anders, E. H., Cumming, A., & Hindman, B. W. 2023, arXiv e-prints, arXiv:2305.09921 10  
Fuller, J., Lecoanet, D., Cantiello, M., & Brown, B. 2014, *ApJ*, 796, 17 5, 17  
Gaia Collaboration, Brown, A. G. A., Vallenari, A., et al. 2018, *A&A*, 616, A1 10  
Gallet, F. 2020, *A&A*, 641, A38 1

- Gallet, F. & Bouvier, J. 2015, *A&A*, 577, A98 9
- García, R. A., Ceillier, T., Salabert, D., et al. 2014, *A&A*, 572, A34 11
- García, R. A., Hekker, S., Stello, D., et al. 2011, *MNRAS*, 414, L6 10
- García, R. A., Mathur, S., Salabert, D., et al. 2010, *Science*, 329, 1032 12
- García, R. A., Turck-Chièze, S., Jiménez-Reyes, S. J., et al. 2007, *Science*, 316, 1591 2, 5
- Gaulme, P., Jackiewicz, J., Appourchaux, T., & Mosser, B. 2014, *ApJ*, 785, 5 12
- Gebruers, S., Straumit, I., Tkachenko, A., et al. 2021, *A&A*, 650, A151 8
- Gizon, L., Cameron, R. H., Bekki, Y., et al. 2021, *A&A*, 652, L6 2, 5, 6, 11, 13
- Gough, D. O. & Tayler, R. J. 1966, *MNRAS*, 133, 85 12
- Guzik, J. A., Kaye, A. B., Bradley, P. A., Cox, A. N., & Neuforge, C. 2000, *ApJ*, 542, L57 8
- Hanson, C. S., Hanasoge, S., & Sreenivasan, K. R. 2022, *Nature Astronomy*, 6, 708 2, 6, 11
- Hotta, H. 2018, *ApJ*, 860, L24 12
- Huber, D., Chaplin, W. J., Christensen-Dalsgaard, J., et al. 2013, *ApJ*, 767, 127 1
- Kraft, R. P. 1967, *ApJ*, 150, 551 10
- Kumar, P., Quataert, E. J., & Bahcall, J. N. 1996, *ApJ*, 458, L83 2
- Lecoanet, D. & Quataert, E. 2013, *MNRAS*, 430, 2363 2
- Lee, U. & Saio, H. 1997, *ApJ*, 491, 839 2, 4
- Li, G., Van Reeth, T., Bedding, T. R., et al. 2020, *MNRAS*, 491, 3586 1
- Lignières, F. & Georgeot, B. 2009, *A&A*, 500, 1173 2
- Löptien, B., Gizon, L., Birch, A. C., et al. 2018, *Nature Astronomy*, 2, 568 5
- Maeder, A. 2009, *Physics, Formation and Evolution of Rotating Stars* 1
- Mathis, S. 2015, *A&A*, 580, L3 8
- Mathis, S. & de Brye, N. 2011, *A&A*, 526, A65 12
- Mathis, S., Neiner, C., & Tran Minh, N. 2014, *A&A*, 565, A47 2, 6, 12, 13, 16
- Mathur, S., Eff-Darwich, A., García, R. A., & Turck-Chièze, S. 2008, *A&A*, 484, 517 2
- Mathur, S., García, R. A., Bugnet, L., et al. 2019, *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*, 6, 46 12
- Mathur, S., Huber, D., Batalha, N. M., et al. 2017, *ApJS*, 229, 30 10
- Matt, S. P., Brun, A. S., Baraffe, I., Bouvier, J., & Chabrier, G. 2015, *ApJ*, 799, L23 1, 9
- Miglio, A., Chiappini, C., Morel, T., et al. 2013, *MNRAS*, 429, 423 1
- Mosser, B., Goupil, M. J., Belkacem, K., et al. 2012, *A&A*, 548, A10 2
- Neiner, C., Floquet, M., Samadi, R., et al. 2012, *A&A*, 546, A47 2, 10, 12, 13
- Neiner, C., Lee, U., Mathis, S., et al. 2020, *A&A*, 644, A9 2, 10, 12, 13, 14
- Noraz, Q., Breton, S. N., Brun, A. S., et al. 2022, *arXiv e-prints*, arXiv:2208.12297 11
- Nosan, Ž., Burmann, F., Davidson, P. A., & Noir, J. 2021, *Journal of Fluid Mechanics*, 918, R2 6
- Ogilvie, G. I. & Lin, D. N. C. 2004, *ApJ*, 610, 477 2
- Ouazzani, R. M., Lignières, F., Dupret, M. A., et al. 2020, *A&A*, 640, A49 1, 2, 12
- Ouazzani, R.-M., Salmon, S. J. A. J., Antoci, V., et al. 2017, *MNRAS*, 465, 2294 2, 3
- Paxton, B., Bildsten, L., Dotter, A., et al. 2011, *ApJS*, 192, 3 12
- Paxton, B., Cantiello, M., Arras, P., et al. 2013, *ApJS*, 208, 4 12
- Paxton, B., Marchant, P., Schwab, J., et al. 2015, *ApJS*, 220, 15 12
- Paxton, B., Schwab, J., Bauer, E. B., et al. 2018, *ApJS*, 234, 34 12
- Paxton, B., Smolec, R., Schwab, J., et al. 2019, *ApJS*, 243, 10 12
- Pedersen, M. G., Aerts, C., Pápics, P. I., et al. 2021, *Nature Astronomy*, 5, 715 1
- Pinçon, C., Appourchaux, T., & Buldgen, G. 2021, *A&A*, 650, A47 2
- Prat, V., Lignières, F., & Ballot, J. 2016, *A&A*, 587, A110 2
- Prat, V., Mathis, S., Augustson, K., et al. 2018, *A&A*, 615, A106 2
- Prat, V., Mathis, S., Lignières, F., Ballot, J., & Culpin, P. M. 2017, *A&A*, 598, A105 2
- Press, W. H. 1981, *ApJ*, 245, 286 4, 10, 16
- Rauer, H., Catala, C., Aerts, C., et al. 2014, *Experimental Astronomy*, 38, 249 10
- Ricker, G. R., Winn, J. N., Vanderspek, R., et al. 2015, *Journal of Astronomical Telescopes, Instruments, and Systems*, 1, 014003 10
- Rogers, T. M. 2015, *ApJ*, 815, L30 3
- Rogers, T. M. & Glatzmaier, G. A. 2006, *ApJ*, 653, 756 2
- Rogers, T. M., Lin, D. N. C., McElwaine, J. N., & Lau, H. H. B. 2013, *ApJ*, 772, 21 2, 3
- Rui, N. Z. & Fuller, J. 2023, *arXiv e-prints*, arXiv:2303.08147 12
- Saio, H., Takata, M., Lee, U., Li, G., & Van Reeth, T. 2021, *MNRAS*, 502, 5856 1, 2, 12
- Santos, A. R. G., Breton, S. N., Mathur, S., & García, R. A. 2021, *ApJS*, 255, 17 10, 11
- Santos, A. R. G., García, R. A., Mathur, S., et al. 2019, *ApJS*, 244, 21 10, 11
- Scherrer, P. H. & Gough, D. O. 2019, *ApJ*, 877, 42 2
- Schunker, H., Schou, J., Gaulme, P., & Gizon, L. 2018, *Sol. Phys.*, 293, 95 2
- Shibahashi, H. 1979, *PASJ*, 31, 87 6
- Siess, L., Dufour, E., & Forestini, M. 2000, *A&A*, 358, 593 8
- Stevenson, D. J. 1979, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 12, 139 10
- Thompson, M. J., Christensen-Dalsgaard, J., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2003, *ARA&A*, 41, 599 2, 5
- Triana, S. A., Guerrero, G., Barik, A., & Reikier, J. 2022, *ApJ*, 934, L4 6
- Turck-Chièze, S., García, R. A., Couvidat, S., et al. 2004, *ApJ*, 604, 455 2
- Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H., & Shibahashi, H. 1989, *Nonradial oscillations of stars* 6
- Vadas, S. L. & Fritts, D. C. 2005, *Journal of Geophysical Research (Atmospheres)*, 110, D15103 16
- Van Reeth, T., Mombarg, J. S. G., Mathis, S., et al. 2018, *A&A*, 618, A24 1
- Van Reeth, T., Tkachenko, A., & Aerts, C. 2016, *A&A*, 593, A120 1, 2
- Vasil, G. M., Julien, K., & Featherstone, N. A. 2021, *Proceedings of the National Academy of Science*, 118, 2022518118 10
- Yarom, E. & Sharon, E. 2014, *Nature Physics*, 10, 510 11
- Zahn, J. P., Talon, S., & Matias, J. 1997, *A&A*, 322, 320 16

## Appendix A: Standing modes versus progressive waves

In this appendix, we derive the critical frequency allowing to disentangle progressive waves from standing oscillation modes following the method by [Alvan et al. \(2015\)](#) and [Ahuir et al. \(2021\)](#). We recall that a standing mode forms when its damping by dissipative processes is sufficiently weak to allow reflections at the boundaries of the domain and constructive interferences. For this, we have to derive the damping of gi waves by heat and viscous diffusions.

We generalise here the method by [Press \(1981\)](#), [Zahn et al. \(1997\)](#) and [Vadas & Fritts \(2005\)](#). They have considered the case of low-frequency asymptotic g modes where they have neglected the Coriolis acceleration. For these modes, the JWKB approximation applies. Therefore, they derived their spatial damping within a local Cartesian model, which is then applied to the spherical geometry by identifying the relevant vertical and horizontal wave numbers.

We consider here a local cartesian model like in [Mathis et al. \(2014\)](#) and [Augustson et al. \(2020\)](#). We define the local unit vector basis  $\widehat{\mathbf{e}}_x \equiv \widehat{\mathbf{e}}_\varphi$ ,  $\widehat{\mathbf{e}}_y \equiv -\widehat{\mathbf{e}}_\theta$ , and  $\widehat{\mathbf{e}}_z \equiv \widehat{\mathbf{e}}_r$ , where  $\{\widehat{\mathbf{e}}_r, \widehat{\mathbf{e}}_\theta, \widehat{\mathbf{e}}_\varphi\}$  is the usual spherical unit vector basis (see [2.2](#)). In this reference frame, the momentum equation is given by

$$\begin{cases} \partial_t u - f v + \tilde{f} w = -\partial_x p + \nu \nabla^2 u, \\ \partial_t v + f u = -\partial_y p + \nu \nabla^2 v, \\ \partial_t w - \tilde{f} u = -\partial_z p + b + \nu \nabla^2 w, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

where  $u$ ,  $v$ , and  $w$  are the longitudinal, latitudinal, and vertical components of the velocity, respectively,  $p' = P'/\bar{\rho}$  is the fluctuation of the normalised pressure,  $\nu$  is the kinematic viscosity, and  $f = 2\Omega \cos \theta$  and  $\tilde{f} = 2\Omega \sin \theta$ . We introduce the buoyancy  $b = -\rho'/\bar{\rho} \times \bar{g}$  with  $\rho'$  the fluctuation of density. Here, we assume the Cowling and the Boussinesq approximations, which are valid for low-frequency gi waves. The continuity equation simplifies to

$$\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0. \quad (\text{A.2})$$

Finally, we have the equation for the heat transport

$$\partial_t b + N^2(z) w = \kappa \nabla^2 b, \quad (\text{A.3})$$

where  $\kappa$  is the thermal diffusivity.

We define  $D_\nu = (\partial_t - \nu \nabla^2)$  and  $D_\kappa = (\partial_t - \kappa \nabla^2)$ , that leads to the system

$$D_\nu u - f v + \tilde{f} w = -\partial_x p, \quad (\text{A.4})$$

$$D_\nu v + f u = -\partial_y p, \quad (\text{A.5})$$

$$D_\nu w - \tilde{f} u = -\partial_z p + b, \quad (\text{A.6})$$

$$\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$D_\kappa b + N^2(z) w = 0. \quad (\text{A.8})$$

We eliminate the fluctuation of the reduced pressure by computing  $\partial_y(\text{A.6}) - \partial_z(\text{A.5})$ :

$$D_\nu(\partial_y w - \partial_z v) - (f \cdot \nabla) u = \partial_y b, \quad (\text{A.9})$$

$$\partial_z(\text{A.4}) - \partial_x(\text{A.6}):$$

$$D_\nu(\partial_z u - \partial_x w) - (f \cdot \nabla) v = -\partial_x b, \quad (\text{A.10})$$

and  $\partial_x(\text{A.5}) - \partial_y(\text{A.4})$  with [\(A.7\)](#):

$$D_\nu(\partial_x v - \partial_y u) - (f \cdot \nabla) w = 0, \quad (\text{A.11})$$

where  $f = (0, \tilde{f}, f)$ . Finally, we calculate  $D_\nu D_\kappa(\partial_y \text{A.9} - \partial_x \text{A.10})$  with the help of Eqs. [\(A.7\)](#), [\(A.8\)](#), and [\(A.11\)](#). This allows us to obtain the Poincaré equation for the vertical component of the velocity in the non-adiabatic case:

$$D_\kappa D_\nu^2 \nabla^2 w + D_\kappa (f \cdot \nabla)^2 w + D_\nu N^2 \nabla_H^2 w = 0, \quad (\text{A.12})$$

where  $\nabla_H^2 = \partial_{y,y} + \partial_{z,z}$ .

We assume the quasi-adiabatic approximation, in which we consider the dissipation as a first-order perturbation of the adiabatic case ([Press 1981](#); [Zahn et al. 1997](#); [Vadas & Fritts 2005](#)). Introducing a plane wave solution  $w = A_w \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \omega t]$ , where  $\mathbf{k}$  is the wave vector with its vertical ( $k_V$ ) and horizontal ( $k_H$ ) components, Eq. [\(A.12\)](#) becomes:

$$\begin{aligned} -ik^2 \omega^{-1} \left[ (\kappa + 2\nu) \omega^2 k^2 - \kappa (f^2 k_V^2 + 2f\tilde{f}k_V k_H + \tilde{f}^2 k_H^2) - \nu N^2 k_H^2 \right] \\ = Ak_H^2 + 2Bk_H k_V + Ck_V^2 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

with  $A = N^2 - \omega^2 + \tilde{f}^2$ ,  $B = f\tilde{f}$ , and  $C = f^2 - \omega^2$ .

To derive the spatial damping, we expand the vertical wave number as:

$$k_V = k_{V_0} + i\tau, \quad (\text{A.14})$$

where  $k_{V_0}$  is the adiabatic vertical wave number and  $\tau$  the first-order damping. Eq. [\(A.13\)](#) is then expanded as:

$$\begin{aligned} -i(k_{V_0}^2 + k_H^2) \omega^{-1} \left[ (\kappa + 2\nu) \omega^2 (k_{V_0}^2 + k_H^2) \right. \\ \left. - \kappa (f^2 k_{V_0}^2 + 2f\tilde{f}k_{V_0} k_H + \tilde{f}^2 k_H^2) - \nu N^2 k_H^2 \right] \\ = Ak_H^2 + 2Bk_H k_{V_0} + i2Bk_H \tau + Ck_{V_0}^2 + i2Ck_{V_0} \tau. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Keeping the zeroth-order terms, we recover the adiabatic dispersion relationship

$$Ak_H^2 + 2Bk_H k_{V_0} + Ck_{V_0}^2 = 0 \quad (\text{A.16})$$

while first-order terms allow us to derive the vertical damping rate:

$$\begin{aligned} \tau = -\frac{1}{2\omega} \frac{k_{V_0}^2 + k_H^2}{Bk_H + Ck_{V_0}} \\ \times \left( \kappa \left[ \omega^2 (k_{V_0}^2 + k_H^2) - (f^2 k_{V_0}^2 + 2f\tilde{f}k_{V_0} k_H + \tilde{f}^2 k_H^2) \right] \right. \\ \left. + \nu \left[ 2\omega^2 (k_{V_0}^2 + k_H^2) - N^2 k_H^2 \right] \right). \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Applying this expression in the equatorial plane for which  $\theta = \pi/2$  and

$$k_{V_0} = k_H \sqrt{\frac{N^2 + 4\Omega^2}{\omega^2} - 1} \quad (\text{A.18})$$

we get in the low-frequency regime in which  $k_{V_0} \gg k_H$

$$\tau_{\text{eq}} = \frac{1}{2} \frac{k_H^3}{\omega^4} (N^2 + 4\Omega^2)^{1/2} \left[ (\kappa + \nu) N^2 + 2\nu 4\Omega^2 \right]. \quad (\text{A.19})$$

In the non-rotating case, we recover the well-known expression for pure gravity waves ([Zahn et al. 1997](#); [Vadas & Fritts 2005](#)):

$$\tau_{\text{eq}}^{\Omega=0} = \frac{1}{2} (\kappa + \nu) \frac{N^3}{\omega^4} k_H^3. \quad (\text{A.20})$$

In the isentropic case for which  $N^2 = 0$ , we recover the symmetric case of pure inertial waves in the equatorial plane:

$$\tau_{\text{eq}}^{N^2=0} = \nu \frac{(2\Omega)^3}{\omega^4} k_H^3. \quad (\text{A.21})$$

Finally, recalling that  $k_H = L/r$ , we obtain in our semi-global equatorial model:

$$\tau_{\text{eq}}(r) = \frac{1}{2} \frac{L^3}{\omega^4} \int_{r'}^{\alpha R_s} (N^2 + 4\Omega^2)^{1/2} [(\kappa + \nu)N^2 + 2\nu 4\Omega^2] \frac{dr'}{r'^3}. \quad (\text{A.22})$$

Following [Fuller et al. \(2014\)](#) and [Ahuir et al. \(2021\)](#), we define the critical frequency  $\omega_c$ , which separates the regimes of low-frequency damped progressive waves and standing oscillation modes by

$$\tau_{\text{eq}}(0) = 1. \quad (\text{A.23})$$

Finally, we obtain

$$\omega_c = L^{3/4} \left[ \frac{1}{2} \int_0^{\alpha R_s} (N^2 + 4\Omega^2)^{1/2} [(\kappa + \nu)N^2 + 2\nu 4\Omega^2] \frac{dr'}{r'^3} \right]^{1/4}. \quad (\text{A.24})$$



# Annexes



## ANNEXE A

# Harmoniques sphériques

Les harmoniques sphériques constituent une base orthonormale de fonctions propres de l'opérateur Laplacien sur la sphère unité. Dans cette annexe, nous présentons leurs définitions et leurs propriétés essentielles et nous introduisons leur base vectorielle associée  $(\mathbf{R}_\ell^m, \mathbf{S}_\ell^m, \mathbf{T}_\ell^m)$ . Pour plus de détails, nous recommandons de consulter [MacRobert \(1947\)](#) et [Abramowitz & Stegun \(1972\)](#).

## 1 Harmoniques sphériques scalaires

Les harmoniques sphériques  $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$  sont des fonctions propres de l'opérateur Laplacien sur la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$  définies pour tout couple d'entiers  $(\ell, m)$  tel que  $\ell \geq 0$  et  $|m| \leq \ell$ , par :

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}} P_\ell^{|m|}(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (\text{A.1})$$

avec  $(\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$  et  $P_\ell^m$  le polynôme de Legendre associé. Elles obéissent à la relation d'orthogonalité :

$$\int_{\Omega} (Y_{\ell_1}^{m_1}(\theta, \varphi))^* Y_{\ell_2}^{m_2}(\theta, \varphi) d\Omega = \delta_{\ell_1}^{\ell_2} \delta_{m_1}^{m_2}, \quad (\text{A.2})$$

où  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$  est l'angle solide sur la sphère unité,  $\delta_i^j$  est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si  $i = j$  et 0 sinon et les harmoniques sphériques conjuguées complexes sont données par :

$$(Y_\ell^m(\theta, \varphi))^* = (-1)^m Y_\ell^{-m}(\theta, \varphi). \quad (\text{A.3})$$

Les harmoniques sphériques constituent une famille complète de fonctions et vérifient la relation d'orthogonalité donc toute fonction scalaire suffisamment régulière  $f(r, \theta, \varphi)$  peut être développée de manière unique comme suit :

$$f(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_\ell^m(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi), \quad (\text{A.4})$$

avec

$$f_\ell^m(r) = \int_{\Omega} f(r, \theta, \varphi) (Y_\ell^m(\theta, \varphi))^* d\Omega. \quad (\text{A.5})$$



## 2 Harmoniques sphériques vectorielles

Suivant [Rieutord \(1987\)](#), on peut définir à partir de la base scalaire  $Y_\ell^m$  la base des harmoniques sphériques vectorielles  $(\mathbf{R}_\ell^m, \mathbf{S}_\ell^m, \mathbf{T}_\ell^m)$  définie par :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_\ell^m(\theta, \varphi) = Y_\ell^m \mathbf{e}_r \\ \mathbf{S}_\ell^m(\theta, \varphi) = \nabla_\perp Y_\ell^m = \partial_\theta Y_\ell^m \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi Y_\ell^m \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{T}_\ell^m(\theta, \varphi) = \nabla_\perp \times \mathbf{R}_\ell^m = \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi Y_\ell^m \mathbf{e}_\theta - \partial_\theta Y_\ell^m \mathbf{e}_\varphi \end{cases}, \quad (\text{A.6})$$

avec  $\nabla_\perp = \mathbf{e}_\theta \partial_\theta + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi$  le gradient horizontal. Ces fonctions vectorielles respectent les relations d'orthogonalité suivantes :

$$\int_\Omega \mathbf{R}_{\ell_1}^{m_1} \cdot \mathbf{S}_{\ell_2}^{m_2} d\Omega = \int_\Omega \mathbf{R}_{\ell_1}^{m_1} \cdot \mathbf{T}_{\ell_2}^{m_2} d\Omega = \int_\Omega \mathbf{S}_{\ell_1}^{m_1} \cdot \mathbf{T}_{\ell_2}^{m_2} d\Omega = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$\int_\Omega \mathbf{R}_{\ell_1}^{m_1} \cdot (\mathbf{R}_{\ell_2}^{m_2})^* d\Omega = \delta_{\ell_1}^{\ell_2} \delta_{m_1}^{m_2}, \quad (\text{A.8})$$

$$\int_\Omega \mathbf{S}_{\ell_1}^{m_1} \cdot (\mathbf{S}_{\ell_2}^{m_2})^* d\Omega = \int_\Omega \mathbf{T}_{\ell_1}^{m_1} \cdot (\mathbf{T}_{\ell_2}^{m_2})^* d\Omega = \ell_1(\ell_1 + 1) \delta_{\ell_1}^{\ell_2} \delta_{m_1}^{m_2}. \quad (\text{A.9})$$

Tout champ vectoriel  $\mathbf{u}(r, \theta, \varphi)$  peut être projeté sur cette base comme suit :

$$\mathbf{u}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \{u_\ell^m(r) \mathbf{R}_\ell^m(\theta, \varphi) + v_\ell^m(r) \mathbf{S}_\ell^m(\theta, \varphi) + w_\ell^m(r) \mathbf{T}_\ell^m(\theta, \varphi)\}. \quad (\text{A.10})$$

Dans la suite, on va noter les champs vectoriels par :

$$\mathbf{u} = [u_\ell^m, v_\ell^m, w_\ell^m]. \quad (\text{A.11})$$

## 3 Formulaire

Nous donnons ici les formules de projections des opérateurs différentiels usuels et de l'accélération de Coriolis sur la base des harmoniques sphériques (vectorielles) que nous utilisons dans le Chapitre 6 pour la projection des équations de la dynamique des fluides en rotation.

### Gradient

$$\nabla f = \left[ \partial_r f_\ell^m, \frac{f_\ell^m}{r}, 0 \right]. \quad (\text{A.12})$$

### Divergence

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[ \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 u_\ell^m) - \ell(\ell + 1) \frac{v_\ell^m}{r} \right] Y_\ell^m(\theta, \varphi). \quad (\text{A.13})$$



Dans le cas où  $\mathbf{u}$  a une divergence nulle, on a la relation suivante entre  $u_\ell^m$  et  $v_\ell^m$  :

$$v_\ell^m = \frac{1}{\ell(\ell+1)} \frac{1}{r} \partial_r (r^2 u_\ell^m). \quad (\text{A.14})$$

### Rotationnel

$$\nabla \wedge \mathbf{u} = \left[ \ell(\ell+1) \frac{w_\ell^m}{r}, \frac{1}{r} \partial_r (r w_\ell^m), \frac{u_\ell^m}{r} - \frac{1}{r} \partial_r (r v_\ell^m) \right]. \quad (\text{A.15})$$

### Laplacien d'une fonction scalaire

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left[ \frac{1}{r} \partial_{r^2} (r f_\ell^m) - \ell(\ell+1) \frac{f_\ell^m}{r^2} \right] Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \Delta_\ell f_\ell^m Y_\ell^m(\theta, \varphi), \quad (\text{A.16})$$

où

$$\Delta_\ell = \partial_{r^2} + \frac{2}{r} \partial_r - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}, \quad (\text{A.17})$$

est le laplacien sphérique radial de degré  $\ell$ .

### Laplacien d'une fonction vectorielle

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}) \quad (\text{A.18})$$

$$= \left[ \Delta_\ell u_\ell^m - \frac{2}{r^2} (u_\ell^m - \ell(\ell+1)v_\ell^m), \Delta_\ell v_\ell^m + 2 \frac{u_\ell^m}{r^2}, \Delta_\ell w_\ell^m \right]. \quad (\text{A.19})$$

Dans le cas où  $\mathbf{u}$  a une divergence nulle, on obtient :

$$\nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}) = \left[ \frac{1}{r} \Delta_\ell (r u_\ell^m), \frac{1}{r} \partial_r \left( r \frac{\Delta_\ell (r u_\ell^m)}{\ell(\ell+1)} \right), \Delta_\ell w_\ell^m \right]. \quad (\text{A.20})$$

### Produit vectoriel

Pour calculer l'accélération de Coriolis dans la base des harmoniques sphériques vectorielles, il faut connaître l'expression du produit vectoriel entre le vecteur unitaire le long de l'axe de rotation  $\mathbf{e}_z$  et un champ de vecteurs quelconque  $\mathbf{u}$ . Cette expression est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = & \left[ \beta_{\ell-1}^\ell w_{\ell-1}^m + \beta_{\ell+1}^\ell w_{\ell+1}^m - i m v_\ell^m, \right. \\ & \gamma_{\ell-1}^\ell w_{\ell-1}^m + \gamma_{\ell+1}^\ell w_{\ell+1}^m - \frac{i m}{\ell(\ell+1)} (u_\ell^m + v_\ell^m), \\ & \left. \frac{\alpha_{\ell-1}^\ell}{\ell} u_{\ell-1}^m - \frac{\alpha_{\ell+1}^\ell}{\ell+1} u_{\ell+1}^m - \gamma_{\ell-1}^\ell v_{\ell-1}^m - \gamma_{\ell+1}^\ell v_{\ell+1}^m - \frac{i m}{\ell(\ell+1)} w_\ell^m \right], \quad (\text{A.21}) \end{aligned}$$



avec les coefficients de couplage  $(\ell - 1, \ell, \ell + 1)$  donnés par :

$$\alpha_{\ell-1}^{\ell} = \alpha_{\ell}^{\ell-1} = \sqrt{\frac{\ell^2 - m^2}{(2\ell - 1)(2\ell + 1)}}, \quad (\text{A.22})$$

$$\beta_{\ell-1}^{\ell} = (\ell - 1)\alpha_{\ell-1}^{\ell}, \quad \beta_{\ell+1}^{\ell} = -(\ell + 2)\alpha_{\ell+1}^{\ell}, \quad (\text{A.23})$$

$$\gamma_{\ell-1}^{\ell} = \frac{\ell - 1}{\ell}\alpha_{\ell-1}^{\ell}, \quad \gamma_{\ell+1}^{\ell} = \frac{\ell + 2}{\ell + 1}\alpha_{\ell+1}^{\ell}. \quad (\text{A.24})$$

# ANNEXE B

## Méthode JWKB

Pour résoudre l'équation de Schrödinger radiale (Eq. 2.19)

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + K(r)\psi = 0, \quad (\text{B.1})$$

en utilisant la méthode asymptotique de JWKB (Jeffreys, Wentzel, Kramers et Brillouin), on écrit la solution de cette équation sous la forme

$$\psi(r) = A(r)e^{i\Psi(r)}, \quad (\text{B.2})$$

où la fonction de l'amplitude (l'enveloppe)  $A(r)$  varie lentement devant la fonction de la phase  $\Psi(r)$ , définie par  $d\Psi/dr = k_r$ . Puis, en l'injectant dans l'équation (B.1), on obtient :

$$\frac{d^2A}{dr^2} + 2i\frac{dA}{dr}k_r + iA\frac{dk_r}{dr} - Ak_r^2 + AK = 0. \quad (\text{B.3})$$

- L'hypothèse asymptotique consiste à négliger le terme  $d^2A/dr^2$ , qui est par hypothèse très inférieur à  $Ak_r^2$ , puisqu'on considère que l'enveloppe varie bien plus lentement que la fonction de la phase.
- Les deux termes dominants sont  $Ak_r^2$  et  $AK$ . Ils doivent donc s'annuler mutuellement, ce qui implique que  $k_r^2 = K(r)$ .
- Les deux termes du milieu mènent à l'égalité :

$$2\frac{1}{A}\frac{dA}{dr} = -\frac{1}{k_r}\frac{dk_r}{dr}, \quad (\text{B.4})$$

qui s'intègre en  $A(r) \propto |k_r|^{-1/2}$ , à un coefficient d'amplitude linéaire  $\mathcal{A}$  près.

On obtient donc la solution (2.21) :

$$\psi(r) = \frac{\mathcal{A}_+}{\sqrt{k_r}} e^{i\int k_r(r')dr'} + \frac{\mathcal{A}_-}{\sqrt{k_r}} e^{-i\int k_r(r')dr'}. \quad (\text{B.5})$$

À l'approche d'un point de retournement (disons  $r_1$ ) pour lequel  $k_r^2 = 0$ , le terme  $\frac{d^2A}{dr^2}$  n'est plus négligeable, ce qui empêche d'appliquer la méthode JWKB.



Au voisinage de  $r_1$ , on a

$$K(r) \approx K'(r_1)(r - r_1), \quad (\text{B.6})$$

où  $K'(r_1)$  est la dérivée de  $K$  par rapport à  $r$  en  $r_1$ . L'équation (2.19) devient alors :

$$\frac{d^2}{dr^2}\psi + K'(r_1)(r - r_1)\psi = 0, \quad (\text{B.7})$$

qui peut se résoudre à l'aide des fonctions d'Airy ([Christensen-Dalsgaard 2003](#)) :

$$\psi(r) = C_A \text{Ai}[-K'(r_1)(r - r_1)] + C_B \text{Bi}[-K'(r_1)(r - r_1)], \quad (\text{B.8})$$

où  $C_A$  et  $C_B$  sont deux constantes. On peut faire le même raisonnement pour le second point de retournement  $r_2$ . C'est le recollement des solutions en  $r_1$  et  $r_2$  qui permet de déterminer  $C_A$  et  $C_B$  et de contraindre la forme de la solution complète en faisant apparaître la relation de quantification (Eq. 2.22) :

$$\int_{r_1}^{r_2} k_r(r') dr' = \pi \left( n - \frac{1}{2} \right). \quad (\text{B.9})$$

## ANNEXE C

# Relations utiles en géométrie sphéroïdale

- La base naturelle est définie par  $\mathbf{E}_i = \partial_i \mathbf{r}$  :

$$\mathbf{E}_\zeta = r_\zeta \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{E}_\theta = r_\theta \mathbf{e}_r + r \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{E}_\varphi = r \sin \theta \mathbf{e}_\varphi, \quad (\text{C.1})$$

avec  $r_\zeta := \partial_\zeta r$  et  $r_\theta := \partial_\theta r$ .

- La base duale associée est définie par  $\mathbf{E}^i \cdot \mathbf{E}_j = \delta_j^i$  :

$$\mathbf{E}^\zeta = \frac{\mathbf{e}_r}{r_\zeta} - \frac{r_\theta \mathbf{e}_\theta}{r r_\zeta}, \quad \mathbf{E}^\theta = \frac{\mathbf{e}_\theta}{r}, \quad \mathbf{E}^\varphi = \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r \sin \theta}, \quad (\text{C.2})$$

avec  $\delta$  le symbole de Kronecker qui vaut 1 si  $i = j$  et 0 sinon.

- La forme covariante du tenseur métrique est donnée par :

$$g_{ij} = \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j = \begin{pmatrix} r_\zeta^2 & r_\zeta r_\theta & 0 \\ r_\zeta r_\theta & r^2 + r_\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{C.3})$$

avec son déterminant :

$$g = \det(g_{ij}) = r^4 r_\zeta^2 \sin^2 \theta. \quad (\text{C.4})$$

- La forme contravariante du tenseur métrique est donnée par :

$$g^{ij} = \mathbf{E}^i \cdot \mathbf{E}^j = \begin{pmatrix} \frac{r^2 + r_\theta^2}{r^2 r_\zeta^2} & -\frac{r_\theta}{r^2 r_\zeta} & 0 \\ -\frac{r_\theta}{r^2 r_\zeta} & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

- La forme covariante du tenseur de Levi-Civita est donnée par

$$\varepsilon_{ilk} = \sqrt{|g|} [i, l, k], \quad (\text{C.6})$$

avec

$$[i, l, k] = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, l, k) \text{ est une permutation paire de } (\zeta, \theta, \varphi) \\ -1 & \text{si } (i, l, k) \text{ est une permutation impaire de } (\zeta, \theta, \varphi). \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



- Un vecteur  $\mathbf{v}$  peut être représenté sous forme covariante ou contravariante :

- forme covariante :  $\mathbf{v} = V_\zeta \mathbf{E}^\zeta + V_\theta \mathbf{E}^\theta + V_\varphi \mathbf{E}^\varphi$ ,

- forme contravariante :  $\mathbf{v} = V^\zeta \mathbf{E}_\zeta + V^\theta \mathbf{E}_\theta + V^\varphi \mathbf{E}_\varphi$ .

On peut utiliser le tenseur métrique pour passer d'une représentation à l'autre (en utilisant la convention de sommation d'Einstein<sup>1</sup>) :

$$V_i = \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{v} = \mathbf{E}_i \cdot (\mathbf{E}_j V^j) = g_{ij} V^j. \quad (\text{C.7})$$

- Le produit vectoriel et le produit scalaire de deux vecteurs  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{u}$  sont données par :

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{u})_i = \epsilon_{ijk} V^j U^k, \quad (\text{C.8})$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = V^i U_i. \quad (\text{C.9})$$

- Le gradient et le laplacien d'une fonction scalaire  $f$  s'expriment comme :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial i} \mathbf{E}^i, \quad (\text{C.10})$$

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} \partial_j f). \quad (\text{C.11})$$

---

1. Selon cette convention, quand l'indice d'une variable apparaît deux fois dans un terme, on sous-entend la sommation sur toutes les valeurs que peut prendre cet indice.

# Bibliographie

- Abramowitz, M. & Stegun, I. A. 1972, Handbook of Mathematical Functions [113](#), [249](#)
- Aerts, C. 2021, Rev. Mod. Phys., 93, 015001 [55](#), [99](#), [118](#), [201](#)
- Aerts, C., Augustson, K., Mathis, S., et al. 2021, A&A, 656, A121 [201](#)
- Aerts, C., Christensen-Dalsgaard, J., & Kurtz, D. W. 2010, Asteroseismology (Springer) [xvi](#), [6](#), [33](#), [34](#), [39](#), [42](#)
- Aerts, C., Mathis, S., & Rogers, T. M. 2019, ARA&A, 57, 35 [xv](#), [7](#), [12](#), [53](#), [111](#)
- Aerts, C., Molenberghs, G., Michielsen, M., et al. 2018, ApJS, 237, 15 [11](#), [53](#)
- Aerts, C., Van Reeth, T., & Tkachenko, A. 2017, ApJ, 847, L7 [11](#), [111](#)
- Ahuir, J., Mathis, S., & Amard, L. 2021, A&A, 651, A3 [119](#), [203](#)
- Akgün, T., Reisenegger, A., Mastrano, A., & Marchant, P. 2013, MNRAS, 433, 2445 [113](#)
- Alfvén, H. 1942, Nature, 150, 405 [8](#), [22](#)
- Alvan, L., Brun, A. S., & Mathis, S. 2014, A&A, 565, A42 [207](#)
- Alvan, L., Mathis, S., & Decressin, T. 2013, A&A, 553, A86 [16](#), [109](#)
- Andersen, B. N. 1996, A&A, 312, 610 [207](#)
- Ando, H. 1985, PASJ, 37, 47 [208](#)
- André, Q., Barker, A. J., & Mathis, S. 2017, A&A, 605, A117 [160](#), [162](#)
- André, Q., Mathis, S., & Barker, A. J. 2019, A&A, 626, A82 [160](#), [174](#), [177](#)
- André, Q. 2019, PhD thesis, thèse de doctorat dirigée par Mathis, Stéphane et Brun, Allan Sacha Physique. Astronomie et astrophysique Université Paris Cité 2019 [xvi](#), [18](#), [166](#)
- Appourchaux, T., Belkacem, K., Broomhall, A. M., et al. 2010, A&A Rev., 18, 197 [34](#)
- Appourchaux, T. & Corbard, T. 2019, A&A, 624, A106 [10](#), [207](#)



- Arlt, R. 2014, in *Putting A Stars into Context : Evolution, Environment, and Related Stars*, ed. G. Mathys, E. R. Griffin, O. Kochukhov, R. Monier, & G. M. Wahlgren, 93–101 [12](#), [99](#), [112](#)
- Astoul, A. & Barker, A. J. 2022, *MNRAS*, 516, 2913 [153](#), [160](#)
- Astoul, A., Mathis, S., Baruteau, C., et al. 2019, *A&A*, 631, A111 [160](#), [164](#)
- Astoul, A., Park, J., Mathis, S., Baruteau, C., & Gallet, F. 2021, *A&A*, 647, A144 [16](#), [109](#), [153](#), [160](#)
- Auclair Desrotour, P., Mathis, S., & Le Poncin-Lafitte, C. 2015, *A&A*, 581, A118 [160](#), [166](#), [175](#)
- Augustson, K. C., Mathis, S., & Astoul, A. 2020, *ApJ*, 903, 90 [209](#)
- Aurière, M., Wade, G. A., Silvester, J., et al. 2007, *A&A*, 475, 1053 [100](#), [113](#)
- Auvergne, M., Bodin, P., Boissard, L., et al. 2009, *A&A*, 506, 411 [2](#)
- Baglin, A., Auvergne, M., Barge, P., et al. 2009, in *Transiting Planets*, ed. F. Pont, D. Sasselov, & M. J. Holman, Vol. 253, 71–81 [2](#)
- Ballot, J., Lignières, F., Prat, V., Reese, D. R., & Rieutord, M. 2012, in *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Vol. 462, *Progress in Solar/Stellar Physics with Helio- and Asteroseismology*, ed. H. Shibahashi, M. Takata, & A. E. Lynas-Gray, 389 [43](#), [51](#)
- Ballot, J., Lignières, F., Reese, D. R., & Rieutord, M. 2010, *A&A*, 518, A30 [43](#), [107](#), [202](#)
- Balona, L. A., Krisciunas, K., & Cousins, A. W. J. 1994, *MNRAS*, 270, 905 [36](#)
- Baraffe, I., Chabrier, G., Barman, T. S., Allard, F., & Hauschildt, P. H. 2003, *A&A*, 402, 701 [3](#)
- Baraffe, I., Chabrier, G., Fortney, J., & Sotin, C. 2014, in *Protostars and Planets VI*, ed. H. Beuther, R. S. Klessen, C. P. Dullemond, & T. Henning, 763–786 [162](#)
- Barker, A. J. 2020, *MNRAS*, 498, 2270 [xx](#), [152](#)
- Barker, A. J. & Astoul, A. A. V. 2021, *MNRAS*, 506, L69 [155](#)
- Barker, A. J., Dempsey, A. M., & Lithwick, Y. 2014, *ApJ*, 791, 13 [155](#)
- Barker, A. J. & Lithwick, Y. 2014, *MNRAS*, 437, 305 [155](#), [179](#)
- Barker, A. J. & Ogilvie, G. I. 2010, *MNRAS*, 404, 1849 [16](#)
- Barnes, G., MacGregor, K. B., & Charbonneau, P. 1998, *ApJ*, 498, L169 [8](#), [16](#), [22](#), [109](#)
- Baruteau, C. & Rieutord, M. 2013, *Journal of Fluid Mechanics*, 719, 47 [155](#), [160](#), [179](#)
- Beck, P. G., Montalban, J., Kallinger, T., et al. 2012, *Nature*, 481, 55 [8](#), [11](#)
- Bedding, T. R., Mosser, B., Huber, D., et al. 2011, *Nature*, 471, 608 [8](#)
- Belkacem, K., Marques, J. P., Goupil, M. J., et al. 2015, *A&A*, 579, A31 [16](#)
- Belkacem, K., Samadi, R., Goupil, M. J., et al. 2009, *A&A*, 494, 191 [207](#)

- Benomar, O., Bazot, M., Nielsen, M. B., et al. 2018, *Science*, 361, 1231 [10](#), [34](#)
- Benomar, O., Takata, M., Shibahashi, H., Ceillier, T., & García, R. A. 2015, *MNRAS*, 452, 2654 [34](#), [207](#)
- Bercovici, D. & Schubert, G. 1987, *Icarus*, 69, 557 [13](#)
- Berthomieu, G., Gonczi, G., Graff, P., Provost, J., & Rocca, A. 1978, *A&A*, 70, 597 [8](#), [44](#)
- Bildsten, L., Ushomirsky, G., & Cutler, C. 1996, *ApJ*, 460, 827 [44](#), [58](#)
- Blazère, A., Neiner, C., & Petit, P. 2016a, *MNRAS*, 459, L81 [12](#), [99](#)
- Blazère, A., Petit, P., Lignières, F., et al. 2016b, *A&A*, 586, A97 [12](#), [99](#)
- Bolmont, E. & Mathis, S. 2016, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 126, 275 [147](#)
- Bonazzola, S., Gourgoulhon, E., & Marck, J.-A. 1998, *Phys. Rev. D*, 58, 104020 [55](#)
- Böning, V. G. A., Hu, H., & Gizon, L. 2019, *A&A*, 629, A26 [207](#)
- Booker, J. R. & Bretherton, F. P. 1967, *Journal of Fluid Mechanics*, 27, 513 [16](#), [109](#)
- Borucki, W. J., Koch, D. G., Basri, G., et al. 2011, *ApJ*, 728, 117 [2](#)
- Bouabid, M.-P., Dupret, M.-A., Salmon, S., et al. 2013, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 429, 2500 [xvii](#), [50](#), [52](#), [53](#), [201](#)
- Braginsky, S. 1964, *Geomag. Aeron.*, 4, 698 [8](#), [22](#)
- Braginsky, S. 1967, *Geomag. Aeron.*, 7, 851 [8](#), [22](#)
- Braithwaite, J. 2006, *A&A*, 453, 687 [100](#)
- Braithwaite, J. 2008, *MNRAS*, 386, 1947 [113](#)
- Braithwaite, J. 2009, *MNRAS*, 397, 763 [100](#), [113](#)
- Braithwaite, J. & Cantiello, M. 2013, *MNRAS*, 428, 2789 [100](#)
- Braithwaite, J. & Nordlund, Å. 2006, *A&A*, 450, 1077 [113](#)
- Braithwaite, J. & Spruit, H. C. 2004, *Nature*, 431, 819 [12](#), [99](#), [113](#)
- Braithwaite, J. & Spruit, H. C. 2017, *Royal Society Open Science*, 4, 160271 [99](#)
- Braviner, H. J. & Ogilvie, G. I. 2014, *MNRAS*, 441, 2321 [68](#), [204](#)
- Braviner, H. J. & Ogilvie, G. I. 2015, *MNRAS*, 447, 1141 [204](#)
- Breton, S. 2022, PhD thesis, Université Paris Cité, thèse de doctorat dirigée par Rafaël, Garcia et Brun, Allan Sacha Physique. *Astronomie et astrophysique Université Paris Cité* 2022 [xvi](#), [44](#)
- Breton, S. N., Brun, A. S., & García, R. A. 2022, *A&A*, 667, A43 [207](#), [209](#)

- Briquet, M., Neiner, C., Aerts, C., et al. 2012, MNRAS, 427, 483 [12](#), [99](#)
- Briquet, M., Neiner, C., Leroy, B., Pápics, P. I., & MiMeS Collaboration. 2013, A&A, 557, L16 [12](#), [99](#)
- Brogi, M., Snellen, I. A. G., de Kok, R. J., et al. 2013, ApJ, 767, 27 [13](#)
- Brun, A. S. & Browning, M. K. 2017, Living Reviews in Solar Physics, 14, 4 [99](#)
- Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2011, ApJ, 742, 79 [34](#)
- Brun, A. S., Strugarek, A., Noraz, Q., et al. 2022, ApJ, 926, 21 [99](#)
- Bryan, G. H. 1889, Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A, 180, 187 [21](#)
- Bugnet, L. 2022, A&A, 667, A68 [9](#), [12](#)
- Bugnet, L., Prat, V., Mathis, S., et al. 2021, A&A, 650, A53 [9](#), [12](#), [100](#), [202](#)
- Buysschaert, B., Aerts, C., Bowman, D. M., et al. 2018, A&A, 616, A148 [12](#), [99](#)
- Cai, T., Yu, C., & Wei, X. 2021, Journal of Fluid Mechanics, 916, A48 [208](#)
- Cantiello, M. & Braithwaite, J. 2019, ApJ, 883, 106 [100](#)
- Cao, H., Dougherty, M. K., Hunt, G. J., et al. 2020, Icarus, 344, 113541 [158](#)
- Cao, H. & Stevenson, D. J. 2017, Icarus, 296, 59 [14](#), [157](#), [178](#), [204](#)
- Cartan, M. 1922, Bull. Sci. Math., 46, 317 [21](#)
- Ceillier, T., Tayar, J., Mathur, S., et al. 2017, A&A, 605, A111 [34](#)
- Chandrasekhar, S. 1961, Hydrodynamic and hydromagnetic stability [22](#)
- Charbonnel, C., Decressin, T., Amard, L., Palacios, A., & Talon, S. 2013, A&A, 554, A40 [16](#)
- Charbonnel, C. & Talon, S. 2005, Science, 309, 2189 [16](#)
- Charnoz, S., Crida, A., Castillo-Rogez, J. C., et al. 2011, Icarus, 216, 535 [15](#), [144](#), [161](#)
- Chernov, S. V., Papaloizou, J. C. B., & Ivanov, P. B. 2013, MNRAS, 434, 1079 [xx](#), [154](#)
- Christensen, U. R., Wicht, J., & Dietrich, W. 2020, ApJ, 890, 61 [158](#)
- Christensen-Dalsgaard, J. 1984, in Space Research in Stellar Activity and Variability, ed. A. Man- geney & F. Praderie, 11 [33](#)
- Christensen-Dalsgaard, J. 2003, Institut for Fysik og Astronomi, Aarhus Universitet, Denmark [6](#), [254](#)
- Christensen-Dalsgaard, J. 2021, Living Reviews in Solar Physics, 18, 2 [10](#)
- Christensen-Dalsgaard, J. & Frandsen, S. 1983, Sol. Phys., 82, 469 [34](#)

- Christophe, S., Ouazzani, R. M., Ballot, J., et al. 2018, in SF2A-2018 : Proceedings of the Annual meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics, ed. P. Di Matteo, F. Billebaud, F. Herpin, N. Lagarde, J. B. Marquette, A. Robin, & O. Venot, Di [10](#)
- Connerney, J. E. P., Adriani, A., Allegrini, F., et al. 2017, *Science*, 356, 826 [158](#)
- Cousins, A. W. J., Caldwell, J. A. R., & Menzies, J. W. 1989, *Information Bulletin on Variable Stars*, 3412, 1 [35](#)
- Couvidat, S., García, R. A., Turck-Chièze, S., et al. 2003, *ApJ*, 597, L77 [10](#), [34](#), [207](#)
- Cowling, T. G. 1941, *MNRAS*, 101, 367 [24](#), [37](#), [164](#)
- Cox, J. P. 1980, *Theory of Stellar Pulsation*. (PSA-2), Volume 2, Vol. 2 [42](#)
- Crida, A. & Charnoz, S. 2012, *Science*, 338, 1196 [15](#), [144](#), [161](#)
- Dandoy, V., Park, J., Augustson, K., Astoul, A., & Mathis, S. 2023, *A&A*, 673, A6 [14](#), [155](#)
- de Vries, N. B., Barker, A. J., & Hollerbach, R. 2023, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, stad1990 [155](#), [169](#)
- Debras, F. & Chabrier, G. 2019, *ApJ*, 872, 100 [xx](#), [14](#), [156](#), [157](#), [162](#), [163](#), [167](#), [168](#), [204](#)
- Dederick, E. & Jackiewicz, J. 2017, *ApJ*, 837, 148 [13](#)
- Dederick, E., Jackiewicz, J., & Guillot, T. 2018, *ApJ*, 856, 50 [13](#)
- Deeg, H. J. & Belmonte, J. A. 2018, *Handbook of Exoplanets* [2](#)
- Degroote, P., Aerts, C., Baglin, A., et al. 2010, *Nature*, 464, 259 [37](#)
- Deheuvels, S., Ballot, J., Beck, P. G., et al. 2015, *A&A*, 580, A96 [11](#)
- Deheuvels, S., Ballot, J., Eggenberger, P., et al. 2020, *A&A*, 641, A117 [11](#)
- Deheuvels, S., Doğan, G., Goupil, M. J., et al. 2014, *A&A*, 564, A27 [11](#)
- Deheuvels, S., García, R. A., Chaplin, W. J., et al. 2012, *ApJ*, 756, 19 [11](#)
- Deheuvels, S., Li, G., Ballot, J., & Lignières, F. 2023, *A&A*, 670, L16 [9](#)
- Deming, D., Mumma, M. J., Espenak, F., et al. 1989, *ApJ*, 343, 456 [13](#)
- Dermott, S. F. 1979, *Icarus*, 37, 310 [156](#)
- Dewberry, J. W. 2023, *MNRAS*, 521, 5991 [160](#), [177](#), [178](#), [204](#)
- Dewberry, J. W., Mankovich, C. R., Fuller, J., Lai, D., & Xu, W. 2021, *Planetary Science Journal*, 2, 198 [179](#)
- Dhouib, H., Baruteau, C., Mathis, S., et al. in preparation, *A&A* [204](#)
- Dhouib, H., Mathis, S., Bugnet, L., Van Reeth, T., & Aerts, C. 2022, *A&A*, 661, A133 [112](#), [202](#)

- Dhouib, H., Prat, V., Van Reeth, T., & Mathis, S. 2021a, *A&A*, 652, A154 [107](#), [108](#), [202](#)
- Dhouib, H., Prat, V., Van Reeth, T., & Mathis, S. 2021b, *A&A*, 656, A122 [63](#), [107](#), [108](#), [202](#)
- Dintrans, B. & Rieutord, M. 2000, *A&A*, 354, 86 [8](#), [43](#), [44](#), [49](#), [173](#), [208](#)
- Dintrans, B., Rieutord, M., & Valdetaro, L. 1999, *Journal of Fluid Mechanics*, 398, 271 [8](#), [44](#), [49](#), [173](#)
- Domiciano de Souza, A., Hadjara, M., Vakili, F., et al. 2012, *A&A*, 545, A130 [53](#)
- Donati, J. F. & Landstreet, J. D. 2009, *ARA&A*, 47, 333 [11](#)
- Dougherty, M. K., Cao, H., Khurana, K. K., et al. 2018, *Science*, 362, aat5434 [158](#)
- Driebe, T., Schoenberner, D., Bloeker, T., & Herwig, F. 1998, *A&A*, 339, 123 [xvi](#), [35](#)
- Duez, V. 2011, *Astronomische Nachrichten*, 332, 983 [113](#)
- Duez, V., Braithwaite, J., & Mathis, S. 2010a, *ApJ*, 724, L34 [100](#), [113](#)
- Duez, V. & Mathis, S. 2010, *A&A*, 517, A58 [12](#), [99](#), [112](#), [113](#)
- Duez, V., Mathis, S., & Turck-Chièze, S. 2010b, *MNRAS*, 402, 271 [107](#)
- Duguid, C. D., Barker, A. J., & Jones, C. A. 2020, *MNRAS*, 491, 923 [155](#)
- Dupret, M. A., Grigahcène, A., Garrido, R., Gabriel, M., & Scuflaire, R. 2005, *A&A*, 435, 927 [36](#)
- Durante, D., Parisi, M., Serra, D., et al. 2020, *Geophys. Res. Lett.*, 47, e86572 [161](#), [162](#), [170](#)
- Dziembowski, W. A. 1971, *Acta Astron.*, 21, 289 [8](#)
- Dziembowski, W. A., Gough, D. O., Houdek, G., & Sienkiewicz, R. 2001, *MNRAS*, 328, 601 [8](#)
- Eckart, C. 1960, *Hydrodynamics of Oceans and Atmospheres* (Pergamon Press (Oxford)) [44](#)
- Eggenberger, P., Maeder, A., & Meynet, G. 2005, *A&A*, 440, L9 [100](#), [111](#)
- Eggenberger, P., Montalbán, J., & Miglio, A. 2012, *A&A*, 544, L4 [11](#)
- Eggenberger, P., Moyano, F. D., & den Hartogh, J. W. 2022, *A&A*, 664, L16 [100](#), [111](#), [203](#)
- Eltayeb, I. A. & Kumar, S. 1977, *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 353, 145 [22](#)
- Eltayeb, I. A. & Roberts, P. H. 1970, *ApJ*, 162, 699 [22](#)
- Emeriau-Viard, C. & Brun, A. S. 2017, *ApJ*, 846, 8 [12](#), [99](#), [112](#)
- Espinosa Lara, F. & Rieutord, M. 2013, *A&A*, 552, A35 [55](#), [60](#), [202](#)
- Fabrycky, D. C., Ford, E. B., Steffen, J. H., et al. 2012, *ApJ*, 750, 114 [2](#), [5](#)
- Favier, B., Barker, A. J., Baruteau, C., & Ogilvie, G. I. 2014, *MNRAS*, 439, 845 [153](#), [155](#), [160](#)
- Fearn, D. R. & Proctor, M. R. E. 1983, *Journal of Fluid Mechanics*, 128, 1 [22](#)

- Fossat, E., Boumier, P., Corbard, T., et al. 2017, *A&A*, 604, A40 [10](#), [34](#), [207](#)
- Friedlander, S. 1987, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 39, 315 [8](#), [22](#), [109](#), [202](#)
- Friedlander, S. 1989, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 48, 53 [8](#), [22](#), [109](#), [202](#)
- Fröman, N. & Fröman, P. O. 1965, *JWKB approximation : contributions to the theory* (Amsterdam : North-Holland Publishing Company) [41](#)
- Fuller, J. 2014, *Icarus*, 242, 283 [13](#), [16](#)
- Fuller, J., Cantiello, M., Stello, D., Garcia, R. A., & Bildsten, L. 2015, *Science*, 350, 423 [8](#), [109](#), [118](#)
- Fuller, J. & Mathis, S. 2023, *MNRAS*, 520, 5573 [113](#)
- Fuller, J., Piro, A. L., & Jermyn, A. S. 2019, *MNRAS*, 485, 3661 [100](#), [111](#), [118](#), [119](#), [203](#)
- Galanti, E., Kaspi, Y., Miguel, Y., et al. 2019, *Geophys. Res. Lett.*, 46, 616 [14](#), [157](#), [158](#), [167](#), [178](#), [204](#)
- Garaud, P. 2018, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 50, 275 [162](#), [168](#)
- García, R. A. & Ballot, J. 2019, *Living Reviews in Solar Physics*, 16, 4 [99](#)
- García, R. A., Turck-Chièze, S., Jiménez-Reyes, S. J., et al. 2007, *Science*, 316, 1591 [10](#), [34](#), [207](#)
- Gastine, T. & Wicht, J. 2021, *Icarus*, 368, 114514 [156](#), [158](#)
- Gastine, T., Wicht, J., Duarte, L., Heimpel, M., & Becker, A. 2014, *Geophysical Research Letters*, 41, 5410 – 5419, cited by : 52; All Open Access, Bronze Open Access, Green Open Access [158](#)
- Gaulme, P., Mosser, B., Schmider, F. X., & Guillot, T. 2015, in *Extraterrestrial Seismology*, 189–202 [6](#), [13](#)
- Gaulme, P., Schmider, F. X., Gay, J., Guillot, T., & Jacob, C. 2011, *A&A*, 531, A104 [13](#)
- Gaurat, M., Jouve, L., Lignières, F., & Gastine, T. 2015, *A&A*, 580, A103 [100](#), [113](#)
- Gehan, C., Mosser, B., Michel, E., Samadi, R., & Kallinger, T. 2018, *A&A*, 616, A24 [11](#)
- Gellert, M., Rüdiger, G., & Elstner, D. 2008, *A&A*, 479, L33 [100](#)
- Gellert, M., Rüdiger, G., & Hollerbach, R. 2011, *MNRAS*, 414, 2696 [100](#)
- Gizon, L., Cameron, R. H., Bekki, Y., et al. 2021, *A&A*, 652, L6 [208](#)
- Goldreich, P. & Keeley, D. A. 1977, *ApJ*, 211, 934 [155](#)
- Goldreich, P. & Kumar, P. 1990, *ApJ*, 363, 694 [34](#)
- Goldreich, P. & Nicholson, P. D. 1977, *Icarus*, 30, 301 [155](#)
- Goldreich, P. & Nicholson, P. D. 1989, *ApJ*, 342, 1075 [153](#)
- Goldreich, P. & Soter, S. 1966, *Icarus*, 5, 375 [15](#), [144](#), [161](#)

Goldreich, P. & Tremaine, S. 1979, *ApJ*, 233, 857 [109](#)

González-Cataldo, F., Wilson, H. F., & Militzer, B. 2014, *ApJ*, 787, 79 [156](#), [168](#)

Goode, P. R. & Thompson, M. J. 1992, *ApJ*, 395, 307 [12](#), [99](#)

Goodman, J. & Dickson, E. S. 1998, *ApJ*, 507, 938 [xx](#), [151](#), [152](#)

Goodman, J. & Lackner, C. 2009, *ApJ*, 696, 2054 [153](#)

Gough, D. O. & Thompson, M. J. 1990, *MNRAS*, 242, 25 [99](#)

Guenel, M., Baruteau, C., Mathis, S., & Rieutord, M. 2016a, *A&A*, 589, A22 [160](#), [164](#), [179](#)

Guenel, M., Mathis, S., Baruteau, C., & Rieutord, M. 2016b, arXiv e-prints, arXiv :1612.05071 [160](#), [164](#), [179](#)

Guenel, M., Mathis, S., & Remus, F. 2014, *A&A*, 566, L9 [159](#)

Guillot, T., Chabrier, G., Morel, P., & Gautier, D. 1994, *Icarus*, 112, 354 [xx](#), [156](#), [157](#), [162](#)

Guillot, T., Fletcher, L. N., Helled, R., et al. 2022, arXiv e-prints, arXiv :2205.04100 [xx](#), [159](#), [162](#), [167](#)

Guillot, T., Miguel, Y., Militzer, B., et al. 2018, *Nature*, 555, 227 [14](#), [157](#), [158](#), [167](#), [178](#), [179](#), [204](#)

Guzik, J. A., Kaye, A. B., Bradley, P. A., Cox, A. N., & Neuforge, C. 2000, *ApJ*, 542, L57 [36](#)

Habets, G. M. H. J. & Heintze, J. R. W. 1981, *A&AS*, 46, 193 [3](#)

Hedman, M. M. & Nicholson, P. D. 2013, *AJ*, 146, 12 [13](#)

Heger, A., Woosley, S. E., & Spruit, H. C. 2005, *ApJ*, 626, 350 [100](#), [111](#), [118](#)

Heng, K. & Spitkovsky, A. 2009, *ApJ*, 703, 1819 [22](#), [110](#), [202](#)

Henneco, J., Van Reeth, T., Prat, V., et al. 2021, arXiv e-prints, arXiv :2101.04116 [55](#), [66](#), [67](#)

Houdek, G., Balmforth, N. J., Christensen-Dalsgaard, J., & Gough, D. O. 1999, *A&A*, 351, 582 [34](#)

Hough, S. S. 1898, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 191, 139 [47](#), [102](#)

Huber, D., Chaplin, W. J., Chontos, A., et al. 2019, *AJ*, 157, 245 [15](#), [144](#), [203](#)

Hurlburt, N. E., Toomre, J., & Massaguer, J. M. 1986, *ApJ*, 311, 563 [34](#)

Hut, P. 1980, *A&A*, 92, 167 [148](#)

Hut, P. 1981, *A&A*, 99, 126 [18](#), [147](#)

Idini, B. & Stevenson, D. J. 2021, *PSJ*, 2, 69 [162](#)

Iess, L., Militzer, B., Kaspi, Y., et al. 2019, *Science*, 364, aat2965 [158](#)

- Jackiewicz, J., Nettelmann, N., Marley, M., & Fortney, J. 2012, *Icarus*, 220, 844 [13](#)
- Jermyn, A. S. & Cantiello, M. 2020, *ApJ*, 900, 113 [100](#)
- Jones, C. A. 2014, *Icarus*, 241, 148 [158](#)
- Jouve, L., Lignières, F., & Gaurat, M. 2020, *A&A*, 641, A13 [113](#), [114](#)
- Kaspi, Y., Galanti, E., Hubbard, W. B., et al. 2018, *Nature*, 555, 223 [158](#)
- Kaula, W. M. 1961, *Geophysical Journal*, 5, 104 [144](#), [146](#)
- Kaula, W. M. 1964, *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 2, 661 [144](#), [146](#)
- Kaye, A. B., Handler, G., Krisciunas, K., Poretti, E., & Zerbi, F. M. 1999, *PASP*, 111, 840 [36](#)
- Kelvin, L. 1880, *Phil. Mag.*, 10, 155 [21](#)
- Kervella, P., Domiciano de Souza, A., & Bendjoya, P. 2008, *A&A*, 484, L13 [53](#)
- Kiefer, R. & Roth, M. 2018, *ApJ*, 854, 74 [12](#)
- Kiefer, R., Schad, A., Davies, G., & Roth, M. 2017, *A&A*, 598, A77 [34](#)
- Kim, E.-j. & MacGregor, K. B. 2003, *ApJ*, 588, 645 [29](#)
- Kippenhahn, R. & Weigert, A. 1994, *Stellar Structure and Evolution* [3](#), [33](#)
- Koch, D. G., Borucki, W. J., Basri, G., et al. 2010, *ApJ*, 713, L79 [2](#)
- Krisciunas, K., Aspin, C., Geballe, T. R., et al. 1993, *MNRAS*, 263, 781 [36](#)
- Kumar, P., Quataert, E. J., & Bahcall, J. N. 1996, *ApJ*, 458, L83 [207](#)
- Kumar, P., Talon, S., & Zahn, J.-P. 1999, *ApJ*, 520, 859 [8](#), [16](#), [22](#), [24](#), [26](#)
- Kurtz, D. W., Saio, H., Takata, M., et al. 2014, *MNRAS*, 444, 102 [11](#), [111](#)
- Lai, D. 2021, *PSJ*, 2, 122 [162](#)
- Lainey, V., Arlot, J.-E., Karatekin, Ö., & van Hoolst, T. 2009, *Nature*, 459, 957 [15](#), [144](#), [161](#), [162](#), [176](#), [203](#)
- Lainey, V., Casajus, L. G., Fuller, J., et al. 2020, *Nature Astronomy*, 4, 1053 [15](#), [144](#), [161](#), [162](#), [203](#)
- Lainey, V., Jacobson, R. A., Tajeddine, R., et al. 2017, *Icarus*, 281, 286 [xv](#), [15](#), [144](#), [159](#), [161](#), [162](#), [203](#)
- Lainey, V., Karatekin, Ö., Desmars, J., et al. 2012, *ApJ*, 752, 14 [15](#), [144](#), [161](#), [162](#), [203](#)
- Laplace, P. S. 1799, *Traité de Mécanique Céleste (Imprimerie de Crapelet (Paris))* [45](#), [47](#), [103](#), [143](#)
- Le Bars, M., Cébron, D., & Le Gal, P. 2015, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 47, 163 [153](#)
- Le Bihan, B. & Burrows, A. 2013, *ApJ*, 764, 18 [13](#)



- Lecoanet, D., Bowman, D. M., & Van Reeth, T. 2022, MNRAS, 512, L16 [8](#), [12](#)
- Lecoanet, D. & Quataert, E. 2013, MNRAS, 430, 2363 [34](#), [207](#)
- Lecoanet, D., Vasil, G. M., Fuller, J., Cantiello, M., & Burns, K. J. 2017, MNRAS, 466, 2181 [8](#), [109](#), [110](#), [118](#)
- Leconte, J. & Chabrier, G. 2012, A&A, 540, A20 [14](#), [156](#), [160](#), [162](#), [167](#), [168](#), [204](#)
- Leconte, J. & Chabrier, G. 2013, Nature Geoscience, 6, 347 [156](#), [168](#)
- Leconte, J., Chabrier, G., Baraffe, I., & Levrard, B. 2010, A&A, 516, A64 [18](#)
- Lee, U. 2019, MNRAS, 484, 5845 [49](#)
- Lee, U. & Baraffe, I. 1995, A&A, 301, 419 [43](#), [54](#)
- Lee, U. & Saio, H. 1987, MNRAS, 224, 513 [8](#), [43](#)
- Lee, U. & Saio, H. 1989, MNRAS, 237, 875 [8](#)
- Lee, U. & Saio, H. 1997, ApJ, 491, 839 [8](#), [44](#), [48](#), [49](#), [58](#), [108](#), [173](#), [201](#)
- Lee, U. & Saio, H. 2020, MNRAS, 497, 4117 [49](#)
- Lehnert, B. 1954, ApJ, 119, 647 [22](#)
- Leibacher, J. W. & Stein, R. F. 1971, Astrophys. Lett., 7, 191 [34](#)
- Leighton, R. B., Noyes, R. W., & Simon, G. W. 1962, ApJ, 135, 474 [34](#)
- Li, G., Deheuvels, S., Ballot, J., & Lignières, F. 2022, Nature, 610, 43 [9](#), [12](#), [101](#)
- Li, G., Van Reeth, T., Bedding, T. R., Murphy, S. J., & Antoci, V. 2019, MNRAS, 487, 782 [10](#), [11](#)
- Li, G., Van Reeth, T., Bedding, T. R., et al. 2020, MNRAS, 491, 3586 [10](#), [11](#), [36](#), [103](#)
- Li, G., van Reeth, T., Bedding, T. R., et al. 2021, VizieR Online Data Catalog, J/MNRAS/491/3586 [11](#)
- Lignières, F., Petit, P., Böhm, T., & Aurière, M. 2009, A&A, 500, L41 [12](#), [99](#)
- Lin, Y. 2023, A&A, 671, A37 [160](#), [162](#), [177](#)
- Lin, Y. & Ogilvie, G. I. 2018, MNRAS, 474, 1644 [153](#), [160](#), [179](#)
- Loi, S. T. 2021, MNRAS, 504, 3711 [9](#), [12](#), [100](#), [202](#)
- Longuet-Higgins, M. S. 1968, Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A, 262, 511 [47](#), [48](#)
- Love, A. E. H. 1909, Proceedings of the Royal Society of London Series A, 82, 73 [147](#)
- Love, A. E. H. 1911, Some Problems of Geodynamics [147](#)

- Lynden-Bell, D. & Ostriker, J. P. 1967, MNRAS, 136, 293 [42](#)
- Maas, L. R. M. & Lam, F. P. A. 1995, Journal of Fluid Mechanics, 300, 1 [173](#)
- MacGregor, K. B. & Rogers, T. M. 2011, Sol. Phys., 270, 417 [109](#)
- MacRobert, T. 1947, Spherical Harmonics : An Elementary Treatise on Harmonic Functions, with Applications (Methuen) [249](#)
- Maeder, A. 2009, Physics, Formation and Evolution of Rotating Stars [3](#), [33](#)
- Maeder, A. & Meynet, G. 2003, A&A, 411, 543 [100](#), [111](#)
- Maeder, A. & Meynet, G. 2005, A&A, 440, 1041 [118](#)
- Mankovich, C. R. & Fuller, J. 2021, Nature Astronomy, 5, 1103 [13](#), [168](#)
- Marcy, G. W., Isaacson, H., Howard, A. W., et al. 2014, ApJS, 210, 20 [5](#)
- Markey, P. & Tayler, R. J. 1973, MNRAS, 163, 77 [100](#)
- Markham, S. & Stevenson, D. 2018, Icarus, 306, 200 [13](#)
- Marques, J. P., Goupil, M. J., Lebreton, Y., et al. 2013, A&A, 549, A74 [11](#), [99](#), [203](#)
- Martić, M., Schmitt, J., Lebrun, J. C., et al. 1999, A&A, 351, 993 [34](#)
- Mathis, S. 2009, A&A, 506, 811 [8](#), [9](#), [44](#), [46](#), [53](#), [58](#), [65](#), [108](#), [115](#), [118](#), [119](#), [173](#), [179](#), [202](#), [203](#)
- Mathis, S. 2018, in Handbook of Exoplanets, ed. H. J. Deeg & J. A. Belmonte, 24 [18](#), [143](#)
- Mathis, S. 2019, in EAS Publications Series, Vol. 82, EAS Publications Series, 5–33 [18](#), [143](#), [162](#)
- Mathis, S., Auclair-Desrotour, P., Guenel, M., Gallet, F., & Le Poncin-Lafitte, C. 2016, A&A, 592, A33 [155](#), [159](#), [164](#), [169](#)
- Mathis, S., Bugnet, L., Prat, V., et al. 2021, A&A, 647, A122 [12](#), [100](#), [202](#)
- Mathis, S. & de Brye, N. 2011, A&A, 526, A65 [xv](#), [8](#), [9](#), [22](#), [68](#), [101](#), [106](#), [109](#), [115](#), [116](#), [118](#), [179](#), [202](#)
- Mathis, S. & de Brye, N. 2012, A&A, 540, A37 [8](#), [9](#), [22](#), [68](#), [101](#), [106](#)
- Mathis, S., Decressin, T., Eggenberger, P., & Charbonnel, C. 2013, A&A, 558, A11 [16](#)
- Mathis, S., Duez, V., & Braithwaite, J. 2011, in Astrophysical Dynamics : From Stars to Galaxies, ed. N. H. Brummell, A. S. Brun, M. S. Miesch, & Y. Ponty, Vol. 271, 270–278 [112](#)
- Mathis, S. & Le Poncin-Lafitte, C. 2009, A&A, 497, 889 [146](#), [148](#)
- Mathis, S., Neiner, C., & Tran Minh, N. 2014, A&A, 565, A47 [208](#), [209](#)
- Mathis, S. & Prat, V. 2019, A&A, 631, A26 [54](#), [58](#), [62](#), [63](#)

- Mathis, S. & Remus, F. 2013, in *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, ed. J.-P. Rozelot & C. E. . Neiner, Vol. 857, 111–147 [18](#)
- Mathis, S., Talon, S., Pantillon, F. P., & Zahn, J. P. 2008, *Sol. Phys.*, 251, 101 [9](#)
- Mathis, S. & Zahn, J. P. 2004, *A&A*, 425, 229 [17](#), [54](#)
- Mathur, S., Eff-Darwich, A., García, R. A., & Turck-Chièze, S. 2008, *A&A*, 484, 517 [10](#)
- Mathur, S., García, R. A., Bugnet, L., et al. 2019, *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*, 6, 46 [34](#)
- Mathur, S., Metcalfe, T. S., Woitaszek, M., et al. 2012, *ApJ*, 749, 152 [34](#)
- Mayor, M. & Queloz, D. 1995, *Nature*, 378, 355 [5](#)
- Mazevet, S., Tsuchiya, T., Taniuchi, T., Benuzzi-Mounaix, A., & Guyot, F. 2015, *Phys. Rev. B*, 92, 014105 [156](#), [168](#)
- Mérand, A., Kervella, P., Pribulla, T., et al. 2011, *A&A*, 532, A50 [53](#)
- Mestel, L. & Weiss, N. O. 1987, *MNRAS*, 226, 123 [99](#)
- Metcalfe, T. S., Monteiro, M. J. P. F. G., Thompson, M. J., et al. 2010, *ApJ*, 723, 1583 [34](#)
- Michielsen, M., Aerts, C., & Bowman, D. M. 2021, *A&A*, 650, A175 [10](#), [37](#)
- Miglio, A., Montalbán, J., Noels, A., & Eggenberger, P. 2008, *MNRAS*, 386, 1487 [36](#), [42](#), [100](#)
- Militzer, B., Wahl, S., & Hubbard, W. B. 2019, *ApJ*, 879, 78 [xx](#), [156](#), [157](#), [158](#), [204](#)
- Mirouh, G. M., Baruteau, C., Rieutord, M., & Ballot, J. 2016, *Journal of Fluid Mechanics*, 800, 213 [65](#), [173](#), [179](#)
- Mombarg, J. S. G., Dotter, A., Rieutord, M., et al. 2022, *ApJ*, 925, 154 [118](#)
- Mombarg, J. S. G., Van Reeth, T., & Aerts, C. 2021, *A&A*, 650, A58 [10](#)
- Moore, K. M., Yadav, R. K., Kulowski, L., et al. 2018, *Nature*, 561, 76 [158](#)
- Moore, W. B., Schubert, G., Anderson, J. D., & Spencer, J. R. 2007, in *Io After Galileo : A New View of Jupiter's Volcanic Moon*, ed. R. M. C. Lopes & J. R. Spencer, 89 [144](#)
- Moravveji, E., Aerts, C., Pápics, P. I., Triana, S. A., & Vandoren, B. 2015, *A&A*, 580, A27 [37](#)
- Moravveji, E., Townsend, R. H. D., Aerts, C., & Mathis, S. 2016, *ApJ*, 823, 130 [37](#)
- Morel, T., Castro, N., Fossati, L., et al. 2014, *The Messenger*, 157, 27 [11](#), [99](#)
- Mosser, B., Goupil, M. J., Belkacem, K., et al. 2012, *A&A*, 548, A10 [11](#)
- Moyano, F. D., Eggenberger, P., Salmon, S. J. A. J., Mombarg, J. S. G., & Ekström, S. 2023, *arXiv e-prints*, arXiv :2304.00674 [100](#)
- Murphy, S. J., Fossati, L., Bedding, T. R., et al. 2016, *MNRAS*, 459, 1201 [11](#), [111](#)

- Neiner, C. & Lampens, P. 2015, MNRAS, 454, L86 [12](#), [99](#)
- Neiner, C., Lee, U., Mathis, S., et al. 2020, A&A, 644, A9 [16](#)
- Neiner, C., Mathis, S., Alecian, E., et al. 2015, in *Polarimetry*, ed. K. N. Nagendra, S. Bagnulo, R. Centeno, & M. Jesús Martínez González, Vol. 305, 61–66 [11](#), [12](#), [100](#), [112](#)
- Neiner, C., Wade, G. A., & Sikora, J. 2017, MNRAS, 468, L46 [12](#), [99](#)
- Nettelmann, N., Fortney, J. J., Moore, K., & Mankovich, C. 2015, MNRAS, 447, 3422 [156](#), [204](#)
- Ogilvie, G. I. 2005, *Journal of Fluid Mechanics*, 543, 19 [164](#), [173](#)
- Ogilvie, G. I. 2013, MNRAS, 429, 613 [148](#), [161](#)
- Ogilvie, G. I. 2014, ARA&A, 52, 171 [xix](#), [18](#), [143](#), [144](#), [145](#), [147](#), [148](#), [150](#), [162](#), [203](#)
- Ogilvie, G. I. & Lesur, G. 2012, MNRAS, 422, 1975 [155](#)
- Ogilvie, G. I. & Lin, D. N. C. 2004, ApJ, 610, 477 [8](#), [16](#), [19](#), [46](#), [49](#), [53](#), [109](#), [153](#), [159](#), [162](#), [164](#), [169](#), [173](#)
- Ogilvie, G. I. & Lin, D. N. C. 2007, ApJ, 661, 1180 [147](#), [153](#), [164](#), [169](#)
- Ouazzani, R. M., Dupret, M. A., & Reese, D. R. 2012a, A&A, 547, A75 [43](#), [203](#)
- Ouazzani, R. M., Dupret, M. A., Roxburgh, I. W., & Goupil, M. J. 2012b, in *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Vol. 462, *Progress in Solar/Stellar Physics with Helio- and Asteroseismology*, ed. H. Shibahashi, M. Takata, & A. E. Lynas-Gray, 402 [xvii](#), [45](#)
- Ouazzani, R. M., Lignières, F., Dupret, M. A., et al. 2020, A&A, 640, A49 [36](#), [99](#)
- Ouazzani, R. M., Marques, J. P., Goupil, M. J., et al. 2019, A&A, 626, A121 [11](#), [53](#), [203](#)
- Ouazzani, R. M., Roxburgh, I. W., & Dupret, M. A. 2015, A&A, 579, A116 [43](#), [203](#)
- Ouazzani, R.-M., Salmon, S. J. A. J., Antoci, V., et al. 2017, MNRAS, 465, 2294 [xvii](#), [10](#), [36](#), [43](#), [51](#), [52](#), [53](#), [66](#), [67](#), [68](#), [202](#), [203](#)
- Pamyatnykh, A. A. 1999, *Acta Astron.*, 49, 119 [36](#)
- Pantillon, F. P., Talon, S., & Charbonnel, C. 2007, A&A, 474, 155 [9](#)
- Papics, P. I. 2013, PhD thesis, Katholieke University of Leuven, Astronomical Institute [xvi](#), [35](#)
- Pápics, P. I., Tkachenko, A., Aerts, C., et al. 2015, ApJ, 803, L25 [61](#)
- Pápics, P. I., Tkachenko, A., Van Reeth, T., et al. 2017, A&A, 598, A74 [37](#), [61](#)
- Paxton, B., Bildsten, L., Dotter, A., et al. 2011, ApJS, 192, 3 [103](#)
- Paxton, B., Cantiello, M., Arras, P., et al. 2013, ApJS, 208, 4 [103](#)
- Paxton, B., Marchant, P., Schwab, J., et al. 2015, ApJS, 220, 15 [103](#)

- Paxton, B., Schwab, J., Bauer, E. B., et al. 2018, *ApJS*, 234, 34 [103](#)
- Paxton, B., Smolec, R., Schwab, J., et al. 2019, *ApJS*, 243, 10 [103](#)
- Peale, S. J., Cassen, P., & Reynolds, R. T. 1979a, *Science*, 203, 892 [144](#)
- Peale, S. J., Cassen, P., & Reynolds, R. T. 1979b, in *Lunar and Planetary Science Conference, Lunar and Planetary Science Conference*, 964–966 [143](#)
- Pedersen, M. G., Aerts, C., Pápics, P. I., et al. 2021, *Nature Astronomy*, 5, 715 [16](#), [37](#), [201](#)
- Pedersen, M. G., Aerts, C., Pápics, P. I., & Rogers, T. M. 2018, *A&A*, 614, A128 [10](#), [53](#)
- Penev, K., Sasselov, D., Robinson, F., & Demarque, P. 2007, *ApJ*, 655, 1166 [155](#)
- Perryman, M. 2011, *The Exoplanet Handbook* [2](#)
- Petit, P., Lignières, F., Aurière, M., et al. 2011, *A&A*, 532, L13 [12](#), [99](#)
- Petitdemange, L., Marcotte, F., & Gissinger, C. 2023, *Science*, 379, 300 [xix](#), [100](#), [111](#), [113](#), [114](#), [118](#), [119](#), [203](#)
- Pinçon, C., Appourchaux, T., & Buldgen, G. 2021, *A&A*, 650, A47 [207](#)
- Pinçon, C., Belkacem, K., Goupil, M. J., & Marques, J. P. 2017, *A&A*, 605, A31 [16](#)
- Poincaré, H. 1885, *Bulletin astronomique, Observatoire de Paris*, 2, 109 [21](#)
- Poirier, J. P. 1982, *Nature*, 299, 683 [144](#)
- Polfiet, R. & Smeyers, P. 1990, *A&A*, 237, 110 [144](#)
- Pollack, J. B., Hubickyj, O., Bodenheimer, P., et al. 1996, *Icarus*, 124, 62 [156](#)
- Polycarpe, W., Saillenfest, M., Lainey, V., et al. 2018, *A&A*, 619, A133 [144](#)
- Pontin, C. M., Barker, A. J., & Hollerbach, R. 2023, *ApJ*, 950, 176 [160](#)
- Pontin, C. M., Barker, A. J., Hollerbach, R., André, Q., & Mathis, S. 2020, *MNRAS*, 493, 5788 [160](#)
- Prat, V., Mathis, S., Augustson, K., et al. 2018, *A&A*, 615, A106 [xv](#), [8](#), [9](#), [65](#)
- Prat, V., Mathis, S., Buyschaert, B., et al. 2019, *A&A*, 627, A64 [22](#), [36](#), [68](#), [100](#), [101](#), [103](#), [104](#), [116](#), [202](#)
- Prat, V., Mathis, S., Neimer, C., et al. 2020, *A&A*, 636, A100 [22](#), [36](#), [68](#), [100](#), [104](#), [116](#), [202](#)
- Press, W. H. 1981, *ApJ*, 245, 286 [16](#), [34](#)
- Press, W. H., Flannery, B. P., & Teukolsky, S. A. 1986, *Numerical recipes. The art of scientific computing* [49](#)
- Rambaux, N. & Castillo-Rogez, J. 2013, in *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, ed. J. Souchay, S. Mathis, & T. Tokieda, Vol. 861, 167 [143](#), [144](#)

- Ratnasingam, R. P., Edelmann, P. V. F., & Rogers, T. M. 2019, *MNRAS*, 482, 5500 [16](#)
- Rauer, H., Aerts, C., Cabrera, J., & PLATO Team. 2016, *Astronomische Nachrichten*, 337, 961 [2](#)
- Rauer, H., Catala, C., Aerts, C., et al. 2014, *Experimental Astronomy*, 38, 249 [2](#)
- Reese, D., Lignières, F., & Rieutord, M. 2006, *A&A*, 455, 621 [43](#), [57](#), [203](#)
- Reese, D., MacGregor, K. B., Jackson, S., Skumanich, A., & Metcalfe, T. S. 2009, *A&A*, 506, 189 [43](#), [57](#), [203](#)
- Reese, D., Rincon, F., & Rieutord, M. 2004, *A&A*, 427, 279 [22](#)
- Reese, D. R., Mirouh, G. M., Espinosa Lara, F., Rieutord, M., & Putigny, B. 2021, *A&A*, 645, A46 [43](#), [68](#), [203](#)
- Remus, F., Mathis, S., & Zahn, J. P. 2012, *A&A*, 544, A132 [xvi](#), [xix](#), [xx](#), [16](#), [19](#), [148](#), [150](#), [151](#), [152](#), [159](#), [161](#)
- Remus, F., Mathis, S., Zahn, J. P., & Lainey, V. 2015, *A&A*, 573, A23 [16](#), [159](#)
- Ricker, G. R., Winn, J. N., Vanderspek, R., et al. 2014, in *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, Vol. 9143, *Space Telescopes and Instrumentation 2014 : Optical, Infrared, and Millimeter Wave*, ed. J. Oschmann, Jacobus M., M. Clampin, G. G. Fazio, & H. A. MacEwen, 914320 [2](#)
- Rieutord, M. 1987, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 39, 163 [250](#)
- Rieutord, M. 2015, *Fluid Dynamics : An Introduction* [6](#)
- Rieutord, M. & Espinosa Lara, F. 2013, *Ab Initio Modelling of Steady Rotating Stars*, ed. M. Goupil, K. Belkacem, C. Neiner, F. Lignières, & J. J. Green (Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg), 49–73 [60](#), [202](#)
- Rieutord, M., Georgeot, B., & Valdetaro, L. 2001, *Journal of Fluid Mechanics*, 435, 103 [22](#), [173](#)
- Rieutord, M. & Valdetaro, L. 1997, *Journal of Fluid Mechanics*, 341, 77 [22](#), [173](#)
- Rieutord, M. & Valdetaro, L. 2010, *Journal of Fluid Mechanics*, 643, 363 [173](#)
- Rincon, F. & Rieutord, M. 2003, *A&A*, 398, 663 [22](#)
- Roberts, P. H. & Stewartson, K. 1974, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 277, 287 [22](#)
- Rogers, T. M. 2015, *ApJ*, 815, L30 [xvi](#), [9](#), [16](#), [17](#), [21](#)
- Rogers, T. M. & Glatzmaier, G. A. 2006, *ApJ*, 653, 756 [207](#)
- Rogers, T. M., Lin, D. N. C., McElwaine, J. N., & Lau, H. H. B. 2013, *ApJ*, 772, 21 [16](#)
- Rogers, T. M. & MacGregor, K. B. 2010, *MNRAS*, 401, 191 [8](#), [22](#), [109](#), [179](#)
- Rogers, T. M. & McElwaine, J. N. 2017, *ApJ*, 848, L1 [9](#), [21](#)

- Rossby, C.-G. 1939, *Journal of Marine Research*, 2, 38 [36](#)
- Rudraiah, N. & Venkatachalappa, M. 1972a, *Journal of Fluid Mechanics*, 54, 217 [109](#)
- Rudraiah, N. & Venkatachalappa, M. 1972b, *Journal of Fluid Mechanics*, 54, 209 [16](#)
- Rui, N. Z. & Fuller, J. 2023, *MNRAS*, 523, 582 [26](#), [101](#), [109](#), [110](#), [118](#)
- Saio, H. 1981, *ApJ*, 244, 299 [54](#)
- Saio, H., Kurtz, D. W., Murphy, S. J., Antoci, V. L., & Lee, U. 2018, *MNRAS*, 474, 2774 [36](#), [49](#)
- Saio, H., Kurtz, D. W., Takata, M., et al. 2015, *MNRAS*, 447, 3264 [11](#), [111](#)
- Saio, H., Takata, M., Lee, U., Li, G., & Van Reeth, T. 2021, *MNRAS*, 502, 5856 [36](#)
- Salpeter, E. E. 1973, *ApJ*, 181, L83 [156](#)
- Samadi, R. & Goupil, M. J. 2001, *A&A*, 370, 136 [34](#)
- Samadi, R., Goupil, M. J., Alecian, E., et al. 2005, *Journal of Astrophysics and Astronomy*, 26, 171 [34](#)
- Santos, A. R. G., Breton, S. N., Mathur, S., & García, R. A. 2021, *ApJS*, 255, 17 [34](#)
- Schaller, G., Schaerer, D., Meynet, G., & Maeder, A. 1992, *A&AS*, 96, 269 [xvi](#), [35](#)
- Schatzman, E. 1993, *A&A*, 279, 431 [8](#), [9](#), [16](#), [21](#), [22](#), [109](#)
- Schechter, D. A., Boyd, J. F., & Gilman, P. A. 2001, *ApJ*, 551, L185 [8](#), [22](#), [26](#)
- Scherrer, P. H. & Gough, D. O. 2019, *ApJ*, 877, 42 [207](#)
- Schmider, F. X., Fossat, E., & Mosser, B. 1991, *A&A*, 248, 281 [13](#)
- Schmitt, D. 2010, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 104, 135 [22](#)
- Schunker, H., Schou, J., Gaulme, P., & Gizon, L. 2018, *Sol. Phys.*, 293, 95 [207](#)
- Shibahashi, H. 1979, *PASJ*, 31, 87 [8](#), [207](#)
- Shibahashi, H. & Aerts, C. 2000, *ApJ*, 531, L143 [12](#)
- Shultz, M. E., Wade, G. A., Rivinius, T., et al. 2019, *MNRAS*, 490, 274 [99](#)
- Silva Aguirre, V., Lund, M. N., Antia, H. M., et al. 2017, *ApJ*, 835, 173 [34](#)
- Sinclair, A. T. 1983, in *Astrophysics and Space Science Library*, Vol. 106, IAU Colloq. 74 : Dynamical Trapping and Evolution in the Solar System, ed. V. V. Markellos & Y. Kozai, 19–25 [144](#)
- Spada, F., Gellert, M., Arlt, R., & Deheuvels, S. 2016, *A&A*, 589, A23 [11](#)
- Spiegel, E. A. 1963, *ApJ*, 138, 216 [154](#)
- Spiegel, E. A. & Veronis, G. 1960, *ApJ*, 131, 442 [24](#), [45](#), [164](#)

Spruit, H. C. 2002, *A&A*, 381, 923 [100](#), [113](#), [203](#)

Stähler, S. C. & Knapmeyer, M. 2022, *Advances in Geophysics*, 63, 9 [xv](#), [14](#)

Stevenson, D. J. 1975, *Phys. Rev. B*, 12, 3999 [156](#)

Stevenson, D. J. 1982, *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 10, 257 [162](#)

Stevenson, D. J. 1985, *Icarus*, 62, 4 [156](#)

Stevenson, D. J. & Salpeter, E. E. 1977a, *ApJS*, 35, 239 [156](#)

Stevenson, D. J. & Salpeter, E. E. 1977b, *ApJS*, 35, 221 [xx](#), [168](#), [169](#)

Storch, N. I. & Lai, D. 2014, *MNRAS*, 438, 1526 [159](#)

Storch, N. I. & Lai, D. 2015, *MNRAS*, 450, 3952 [159](#)

Szewczuk, W. & Daszyńska-Daszkiewicz, J. 2018, *MNRAS*, 478, 2243 [37](#)

Takata, M., Ouazzani, R. M., Saio, H., et al. 2020, *A&A*, 635, A106 [10](#)

Takata, M. & Shibahashi, H. 1994, *PASJ*, 46, 301 [12](#)

Talon, S. & Charbonnel, C. 2005, *A&A*, 440, 981 [xvi](#), [16](#), [17](#)

Talon, S. & Charbonnel, C. 2008, *A&A*, 482, 597 [16](#)

Tassoul, M. 1980, *ApJS*, 43, 469 [41](#)

Tayler, R. J. 1973, *MNRAS*, 161, 365 [100](#)

Tayler, R. J. 1980, *MNRAS*, 191, 151 [100](#)

Terquem, C. 2021, *MNRAS*, 503, 5789 [155](#)

Terquem, C., Papaloizou, J. C. B., Nelson, R. P., & Lin, D. N. C. 1998, *ApJ*, 502, 788 [xx](#), [151](#), [152](#)

Thompson, M. J., Christensen-Dalsgaard, J., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2003, *ARA&A*, 41, 599 [xv](#), [10](#), [11](#), [34](#), [207](#)

Tong, V. & García, R. 2015, *Extraterrestrial Seismology* (Cambridge University Press) [1](#), [6](#), [33](#)

Townsend, R. H. D. 2003, *MNRAS*, 340, 1020 [8](#), [47](#)

Townsend, R. H. D. 2020, *MNRAS*, 497, 2670 [47](#)

Townsend, R. H. D., Goldstein, J., & Zweibel, E. G. 2018, *MNRAS*, 475, 879 [103](#)

Townsend, R. H. D. & Teitler, S. A. 2013, *MNRAS*, 435, 3406 [103](#)

Tremblin, P., Chabrier, G., Mayne, N. J., et al. 2017, *ApJ*, 841, 30 [15](#)

Triana, S. A., Moravveji, E., Pápics, P. I., et al. 2015, *ApJ*, 810, 16 [xvi](#), [11](#), [17](#)

Turck-Chièze, S., García, R. A., Couvidat, S., et al. 2004, *ApJ*, 604, 455 [207](#)



- Ulrich, R. K. 1970, *ApJ*, 162, 993 [10](#), [34](#)
- Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H., & Shibahashi, H. 1989, *Nonradial oscillations of stars* [33](#), [49](#)
- Valdettaro, L., Rieutord, M., Braconnier, T., & Fraysse, V. 2007, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 205, 382 [172](#), [204](#)
- Vallée, O. & Soares, M. 2004, *Airy Functions and Applications to Physics (IMPERIAL COLLEGE PRESS)* [41](#)
- Van Beeck, J., Prat, V., Van Reeth, T., et al. 2020, *A&A*, 638, A149 [xviii](#), [22](#), [36](#), [68](#), [100](#), [103](#), [104](#), [106](#), [116](#), [202](#)
- Van Eylen, V., Agentoft, C., Lundkvist, M. S., et al. 2018, *MNRAS*, 479, 4786 [15](#), [144](#), [203](#)
- Van Reeth, T., Mombarg, J. S. G., Mathis, S., et al. 2018, *A&A*, 618, A24 [10](#), [36](#), [51](#), [54](#), [100](#)
- Van Reeth, T., Tkachenko, A., & Aerts, C. 2016, *A&A*, 593, A120 [10](#), [11](#), [36](#), [51](#), [112](#), [201](#)
- Van Reeth, T., Tkachenko, A., Aerts, C., et al. 2015a, *A&A*, 574, A17 [10](#)
- Van Reeth, T., Tkachenko, A., Aerts, C., et al. 2015b, *ApJS*, 218, 27 [10](#), [36](#)
- Vanlaer, V., Aerts, C., Bellinger, E. P., & Christensen-Dalsgaard, J. 2023, *A&A*, 675, A17 [10](#)
- Vidal, J. & Barker, A. J. 2020, *ApJ*, 888, L31 [155](#)
- Vorontsov, S. V., Zharkov, V. N., & Lubimov, V. M. 1976, *Icarus*, 27, 109 [13](#)
- Wade, G. A., Neiner, C., Alecian, E., et al. 2016, *MNRAS*, 456, 2 [11](#), [99](#)
- Waelkens, C. 1991, *A&A*, 246, 453 [36](#)
- Wahl, S. M., Hubbard, W. B., Militzer, B., et al. 2017, *Geophys. Res. Lett.*, 44, 4649 [14](#), [162](#), [168](#), [204](#)
- Wahl, S. M., Parisi, M., Folkner, W. M., Hubbard, W. B., & Militzer, B. 2020, *ApJ*, 891, 42 [162](#), [170](#)
- Wahl, S. M., Wilson, H. F., & Militzer, B. 2013, *ApJ*, 773, 95 [156](#), [168](#)
- Walker, G., Matthews, J., Kuschnig, R., et al. 2003, *PASP*, 115, 1023 [33](#)
- Wang, H., Boyd, J. P., & Akmaev, R. A. 2016, *Geoscientific Model Development*, 9, 1477 [48](#), [49](#), [63](#), [115](#)
- Watts, A. L., Andersson, N., Beyer, H., & Schutz, B. F. 2003, *MNRAS*, 342, 1156 [16](#), [109](#)
- Wei, X. 2016, *ApJ*, 828, 30 [160](#), [179](#)
- Wei, X. 2018, *ApJ*, 854, 34 [160](#), [179](#)
- Weidner, C. & Vink, J. S. 2010, *A&A*, 524, A98 [3](#)

- Wilson, H. F. & Militzer, B. 2012a, *Phys. Rev. Lett.*, 108, 111101 [156](#), [168](#)
- Wilson, H. F. & Militzer, B. 2012b, *ApJ*, 745, 54 [156](#), [168](#)
- Witte, M. G. & Savonije, G. J. 2002, *A&A*, 386, 222 [153](#)
- Yee, S. W., Winn, J. N., Knutson, H. A., et al. 2020, *ApJ*, 888, L5 [18](#)
- Zahn, J. P. 1966, *Annales d'Astrophysique*, 29, 313 [xx](#), [19](#), [147](#), [149](#), [150](#), [152](#), [154](#), [155](#), [161](#)
- Zahn, J. P. 1975, *A&A*, 41, 329 [19](#), [153](#), [162](#), [164](#)
- Zahn, J. P. 1989, *A&A*, 220, 112 [xx](#), [19](#), [150](#), [152](#), [154](#)
- Zahn, J. P. 1992, *A&A*, 265, 115 [17](#)
- Zahn, J.-P. 2013, *Stellar Tides*, ed. J. Souchay, S. Mathis, & T. Tokieda (Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg), 301–325 [143](#)
- Zahn, J. P., Brun, A. S., & Mathis, S. 2007, *A&A*, 474, 145 [100](#), [114](#)
- Zahn, J. P., Talon, S., & Matias, J. 1997, *A&A*, 322, 320 [9](#), [16](#), [21](#)
- Zaqarashvili, T. V., Oliver, R., & Ballester, J. L. 2009, *ApJ*, 691, L41 [22](#), [110](#), [202](#)
- Zhang, K., Earnshaw, P., Liao, X., & Busse, F. H. 2001, *Journal of Fluid Mechanics*, 437, 103 [22](#)
- Zhang, K., Liao, X., & Busse, F. H. 2007, *Journal of Fluid Mechanics*, 575, 449 [22](#)
- Zhang, K., Liao, X., & Earnshaw, P. 2004, *Journal of Fluid Mechanics*, 504, 1 [22](#)