



HAL
open science

Groupe de renormalisation fonctionnel pour systèmes fermioniques unidimensionnels sur réseau appliqué au modèle de Fermi-Hubbard étendu

Lucas Désoppi

► **To cite this version:**

Lucas Désoppi. Groupe de renormalisation fonctionnel pour systèmes fermioniques unidimensionnels sur réseau appliqué au modèle de Fermi-Hubbard étendu. Matière Condensée [cond-mat]. Sorbonne Université; Université de Sherbrooke (Québec, Canada), 2023. Français. NNT : 2023SORUS740 . tel-04608612

HAL Id: tel-04608612

<https://theses.hal.science/tel-04608612>

Submitted on 11 Jun 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sherbrooke, le 30 novembre 2023

Le jury a accepté la thèse de M. Lucas Désoppi dans sa version finale.

Membres du jury

Claude Bourbonnais, directeur de thèse

Université de Sherbrooke

Nicolas Dupuis, directeur de thèse

Sorbonne Université

Christophe Brun, examinateur

Sorbonne Université

Bertrand Reulet, examinateur

Université de Sherbrooke

Daniel Rohe, rapporteur externe

Institute for Advanced Simulation, Jülich Supercomputing Centre

Shan-Wen Tsai, rapporteure externe

Université de Californie à Riverside

André-Marie Tremblay, président-rapporteur

Université de Sherbrooke

THÈSE DE DOCTORAT

Groupe de renormalisation fonctionnel pour
systèmes fermioniques unidimensionnels sur
réseau appliqué au modèle de
Fermi-Hubbard étendu

par

Lucas DÉSOPPI

Thèse en cotutelle

Présentée au département de physique
en vue de l'obtention du grade de docteur ès sciences (Ph.D.)
FACULTÉ des SCIENCES, UNIVERSITÉ de SHERBROOKE

et

Présentée au Laboratoire de Physique de la Matière Condensée
en vue de l'obtention du grade de docteur
SORBONNE UNIVERSITÉ

Table des matières

Résumé	x
Remerciements	xi
Introduction	1
1 Systèmes fermioniques unidimensionnels	5
1.1 Représentation des systèmes fermioniques par la théorie des champs . . .	6
1.2 Construction de modèles par les symétries	16
1.3 Systèmes fermioniques unidimensionnels et g -ologie	24
1.4 Modèle de Fermi-Hubbard étendu	32
2 Groupe de renormalisation fonctionnel	42
2.1 Un exemple introductif	42
2.2 Groupe de renormalisation : différentes approches	48
2.3 Groupe de renormalisation à la Wetterich	60
2.4 Équations de flot à une boucle pour systèmes fermioniques	64
3 FRG fermionique sur réseau unidimensionnel	69
3.1 Fermions avec spin	69
3.2 Systèmes unidimensionnels à température finie	72
3.3 Choix du régulateur	78
3.4 Développement en ξ	79
3.5 Exemple 1 : identification sur la surface de Fermi	84
3.6 Exemple 2 : équation pour la self-énergie	87
4 Application au modèle EH	95
4.1 Conditions initiales	95
4.2 Limite du continuum	97
4.2.1 Équations de flot	97

4.2.2	Demi-remplissage	102
4.2.3	En dehors du demi-remplissage	106
4.3	Effets de réseau à demi-remplissage	107
4.4	En dehors du demi-remplissage	112
4.4.1	Dopages faibles	113
4.4.2	Dopages intermédiaires	116
4.4.3	Dopages forts	117
5	Extensions supplémentaires	124
5.1	Interactions généralisées aux plus proches voisins	125
5.1.1	Modèle $U-V-W-X(-X')$	125
5.1.2	Cas du terme W	127
5.2	Autres extensions possibles	130
5.2.1	Termes supplémentaires	130
5.2.2	Susceptibilités uniformes	131
5.2.3	Extensions méthodologiques	133
5.2.4	Systèmes quasi-unidimensionnels	135
	Conclusion	138
A	Unités et conventions	140
B	Algorithme de recherche des frontières	141
C	Quelques remarques théoriques	142
C.1	Des systèmes différentiels linéaires aux intégrales fonctionnelles	142
C.2	Quelques propriétés des intégrales fonctionnelles	149
	Bibliographie	155

Table des figures

1.1	Processus de diffusion à deux électrons aux basses énergies. L'existence des deux points de Fermi montre que ces processus peuvent être divisés en trois types : diffusion vers l'arrière associée à g_1 , diffusion vers l'avant associée à g_2 et g_4 et enfin processus Umklapp associés à g_3	27
1.2	Linéarisation du spectre autour du niveau de Fermi effectuée pour simplifier l'étude. Cependant dans ce travail, la courbure du spectre sera prise en compte.	28
1.3	Premières corrections diagrammatiques à l'amplitude de diffusion vers l'arrière où tous les diagrammes ne sont pas représentés, mais le point important est que la somme sur les états intermédiaires se scinde en deux contributions : celle due aux paires électron-électron (en rouge) et celle due aux paires électron-trou (en bleu).	29
1.4	Bulles de Cooper (en rouge) et de Peierls (en bleu). Dans le cas unidimensionnel, lorsque le spectre possède la propriété de <i>nesting</i> , on obtient $L_C = -L_P \sim \log(\Lambda_0/T)$	30

1.5	Illustration des différents termes présents dans le hamiltonien du modèle EH. Le terme cinétique associé au coefficient t décrit les sauts d'électrons entre atomes plus proches voisins et correspond au hamiltonien de liaisons fortes. Le terme d'interaction en U est le terme de Hubbard. Il décrit simplement l'interaction de deux électrons (ayant des spins ayant des orientations opposées) sur un même atome. Enfin, le terme en V décrit une interaction de type densité-densité entre électrons situés sur des atomes plus proches voisins.	33
1.6	Illustration des ondes de densité. La ligne du haut illustre une onde de densité de charge centrée sur les sites (CDW pour <i>Charge Density Wave</i>). On voit clairement une modulation de la densité de charges électriques. La deuxième ligne montre une onde de densité de spin centrée sur les sites (SDW pour <i>Spin Density Wave</i>), qui montre une modulation de l'orientation du spin des électrons. Le caractère anti-ferromagnétique de cet état est dû à la présence du terme cinétique. La troisième ligne illustre une onde de densité de charge centrée sur les liens (BOW pour <i>Bond Order Wave</i>), qui correspond à une collection de spins dans un état singulet. Enfin, la dernière ligne représente une onde de densité de spins sur liens (BSDW pour <i>Bond Spin Density Wave</i>) correspondant à une collection de spins dans un état triplet.	34
1.7	Le panneau de gauche représente la relation de dispersion de liaisons fortes pour un remplissage différent de 1. Le panneau de droite montre la densité d'états associée et étendue. De plus, la coupure UV initiale $\Lambda_0 = 2t + \mu $ apparaît ainsi qu'une coupure $\Lambda < \Lambda_0$ en un point quelconque du flot de RG.	37
1.8	Diagramme de phase du modèle EH dans la limite du continuum à $\mu = 0$. La frontière CDW-SDW est donnée par la ligne $U = 2V \geq 0$, la frontière SDW-TS est quant à elle donné par la ligne $U = -2V \geq 0$, la frontière SS-TS correspond à la ligne $U = 2V \leq 0$ et enfin, la frontière SS-CDW est donnée par $V = 0$ pour $U \leq 0$	38

1.9	Diagramme de phase du modèle EH à $\mu = 0$. Figures tirées de [44] pour le panneau de gauche, et [59] pour le panneau de droite.	39
1.10	Diagramme de phase du modèle EH à $\mu = 0$. Figures tirées de [50] pour le panneau de gauche, et [57] pour le panneau de droite.	40
1.11	Diagramme de phase du modèle EH à $\mu = 0$. Figure tirée de [37]. Les pointillés indiquent les frontières déterminées dans la limite du continuum.	41
2.1	Les solutions de l'équation $X^2 + X + \varepsilon = 0$ sont montrées pour des petites valeurs de ε de part et d'autre de 0. Dans cette figure, $X^{(ex)}$ est la solution exacte, $X^{(1)}$ correspond à la solution perturbative à l'ordre 1 en ε et $X^{(1\ell)}$ est la solution obtenue à partir de l'équation de flot à une boucle. La solution à une boucle améliore significativement le résultat purement perturbatif.	45
3.1	Représentation diagrammatique de l'équation de flot pour la self-énergie à une boucle. La ligne est associée à la dérivée du propagateur libre régularisé par rapport à Λ .	73
3.2	Équations de flot à une boucle pour les constantes de couplage. La ligne barrée dans les diagrammes est associée au propagateur S_Λ .	74
3.3	Équations de flot pour les susceptibilités associées aux ondes de densité de charge/spin et aux états supraconducteurs singulet/triplet.	75
3.4	Équations de flot pour les vertex à trois pattes associés aux susceptibilités de la figure 3.3.	76
3.5	Régulateur $r_a(x)$ et sa dérivée $r'_a(x)$, tel que $r_{a=\infty}(x) = \Theta(x)$.	78
3.6	La singularité de van Hove est régularisée grâce à la fonction de porte lissée $\Pi_a(x)$, et la densité d'états originelle $f(x)$ est remplacée par la la densité d'états régularisée $f_a(x)$, dont la rigidité est contrôlée par le paramètre a , avec lequel on a $f_{a\rightarrow\infty}(x) = f(x)$. De plus, le panneau du bas montre que l'on a $f(x) \neq f_a(x)$ seulement sur un intervalle fini autour de la singularité.	80

4.1	Les bulles de Cooper, Peierls et Landau sont montrées pour différentes valeurs du potentiel chimique, dans le cas du spectre de liaisons fortes. Dans cette figure, le paramètre $\ell > 0$ est le temps de RG, défini par la relation $\Lambda = \Lambda_0 e^{-\ell}$. Le pic à ℓ faible est dû à la singularité de van Hove présente dans la densité d'états. . . .	100
4.2	Diagramme de phase du modèle de g -ologie à demi-remplissage, soit $n = 1.0$	103
4.3	Diagramme de phase du modèle de g -ologie pour un remplissage $n = 1.01$	104
4.4	Diagramme de phase du modèle EH à demi-remplissage. Les lignes pointillées sont celles de la limite du continuum. Les points A, B, C et C' sont discutés dans le texte, et les flots associés apparaissent dans les figures suivantes.	108
4.5	$[(a), (c)]$ Flot pour les vertex Z_x . $[(b), (d)]$ Flot des constantes de couplages. Les points A et B sont ceux apparaissant dans la figure 4.4.	110
4.6	$[(a), (c)]$ Flot pour les vertex Z_x . $[(b), (d)]$ Flot des constantes de couplages. Les points C et C' sont ceux apparaissant dans la figure 4.4.	111
4.7	Diagramme de phase du modèle EH, en dehors du demi-remplissage, à $n = 1.01$. Le point D est discuté dans le texte.	114
4.8	Valeur du couplage U minimale pour pouvoir observer la phase BOW avec un gap de charge. Par exemple, le point correspondant à $\mu = 0.035$ est illustré par un disque blanc à la figure 4.7. L'ajustement de la courbe donne un exposant $b = 0.53$	115
4.9	Diagramme de phase pour un remplissage $n = 1.10$. Le point E, illustrant le phénomène d'écrantage favorisant SS au détriment de CDW, est discuté dans le texte.	118
4.10	Diagramme de phase pour un remplissage $n = 1.34$. Le point F, illustrant le phénomène d'anti-écrantage favorisant SDW au détriment de CDW, est discuté dans le texte.	121
4.11	Flots associés au point D de la figure 4.7. (a) Vertex Z. (b) Constantes de couplage.	122

4.12	Flots associés au point E de la figure 4.9. (a) Vertex Z . (b) Constantes de couplage.	122
4.13	Flots associés au point F de la figure 4.10. (a) Vertex Z . (b) Constantes de couplage.	123
5.1	Diagramme de phase à demi-remplissage dans la limite du continuum en présence du terme d'interaction saut-saut W . Les phases gappées ne sont pas différenciées des phases non gappées.	126
5.2	Diagramme de phase à demi-remplissage sur réseau en présence du terme W . Les phases gappées ne sont pas différenciées des phases non gappées.	128
5.3	Diagramme de phase à un remplissage $n = 1.01$ en présence du terme W . Les phases gappées ne sont pas différenciées des phases non gappées.	129
5.4	Susceptibilités uniformes. La courbe χ associée aux points jaune correspond à la bulle de Landau, c'est-à-dire $\chi(T) = \int_0^\ell d\ell' \mathcal{L}_L(\ell')$, avec $\ell \gg \ell_T$	134

Résumé

Les systèmes fermioniques unidimensionnels sont connus pour leurs propriétés particulières, donnant naissance à la théorie des liquides de Luttinger. Le comportement de ces systèmes de basse dimension est bien connu dans le voisinage de la surface de Fermi, alors réduite à deux points dans la première zone de Brillouin. Le modèle de g -ologie dans la limite du continuum est alors obtenu en projetant les interactions sur ces deux points, et il est possible d'en calculer le diagramme de phase. Cependant, loin de la surface de Fermi, le spectre possède en général une courbure, et les interactions dépendent des impulsions, du fait de leur caractère non-local. Dans cette thèse, un formalisme basé sur le groupe de renormalisation fonctionnel est développé pour prendre en compte ces effets à un remplissage arbitraire, et calculer les diagrammes de phase en étudiant les fluctuations quantiques dominantes. Le modèle de Fermi-Hubbard étendu est pris comme exemple pour tester la méthode. On retrouve les résultats d'études précédentes à demi-remplissage, et on détermine les diagrammes de phase pour différentes valeurs du potentiel chimique. Les résultats sont étendus à des modèles prenant en compte des interactions généralisées dont les effets sont brièvement discutés.

Remerciements

Une thèse de doctorat ne peut être menée à bien seul, et avant toute chose, je tiens à témoigner ma difficulté à trouver le mot juste pour exprimer toute ma reconnaissance.

Tout d'abord, je tiens à remercier les membres de mon jury. Je suis très reconnaissant à Shan-Wen Tsai, Daniel Rohe, qui a accepté presque à la dernière minute d'être rapporteur, et André-Marie Tremblay, avec qui j'espère pouvoir échanger à nouveau, entre autres, à propos de mon sujet de thèse. Je tiens également à remercier Christophe Brun et Bertrand Reulet d'avoir été examinateurs. Bertrand, j'ai énormément apprécié nos discussions, et j'espère qu'elles se poursuivront.

Ayant fait ma thèse en cotutelle entre l'université de Sherbrooke et Sorbonne Université, j'ai eu le privilège d'avoir eu Claude Bourbonnais et Nicolas Dupuis comme co-directeurs de thèse. Je tiens à vous témoigner toute ma gratitude, pour tout ce que vous m'avez appris au cours de ces cinq dernières années, tant du point de vue de la physique que de celui de la pratique du métier de chercheur. Je tiens à souligner votre soutien, votre écoute, votre disponibilité, votre patience, et je vous suis très reconnaissant pour la confiance, la liberté et l'autonomie que vous m'avez accordées. Merci infiniment.

Je tiens également à remercier Emile Larouche et Mathieu Haguier, qui lors de leurs stages dans le groupe de Claude m'ont permis d'améliorer mon programme numérique et d'en faire une exploitation poussée.

Une thèse en cotutelle nécessite des démarches administratives complexes, et j'ai pour cela (heureusement!) été accompagné tout au long de ma scolarité. Je tiens à remercier Josée Lamoureux et Stéphanie Moisan (à Sherbrooke) pour leur soutien sans faille, et également Maria Chamarro et Patricia Zizzo (à Paris) pour leur aide indispensable.

La fin de cette aventure qu'est le doctorat est également l'aboutissement de onze années d'études (déjà). Je dois beaucoup à mes professeurs qui m'ont formé tout au long de ma longue scolarité. Je pense en particulier à Marlène Dufour, professeure dans mon lycée, dont la passion pour l'astronomie est insatiable. La

prépa a été une période très marquante, j’y ai acquis des méthodes de travail et des savoirs qui m’ont été indispensables lors de mes travaux de thèse. Je suis très reconnaissant à Dominique Fellah, mon professeur de maths de PCSI, ainsi qu’à Saverio Callea et Sophie Remy, qui m’ont enseigné la chimie et la physique en PC*, et qui m’ont toujours soutenu. Enfin j’ai une pensée pour Pietro Cortona, fabuleux professeur de physique à Centrale, et qui m’a conseillé et suivi pour mon séjour en Suisse. Je vous dois beaucoup.

À présent, il me faut décrire un peu ce que cela représente de faire une thèse en physique à Sherbrooke. Je ne peux m’empêcher de paraphraser Jean-Pierre Rives¹ : « une thèse en physique à Sherbrooke, c’est l’histoire d’un hamiltonien avec des copains autour, et quand il n’y a plus de hamiltonien, il reste les copains ». Je tiens à remercier Martin pour nos discussions passionnées jusqu’au bout de la nuit, et également pour tes connaissances gastronomiques intarissables. Julien et Nicolas, votre amitié m’est chère, et je vous suis très reconnaissant de m’avoir plongé dans la culture québécoise ! Je remercie également Rédha, pour nos conversations riches en controverses dans bien des domaines. Je pense également à Souheila, toujours partante pour une petite discussion à propos de maths. Je remercie Antoine de m’avoir confectionné de magnifiques vêtements pour ma soutenance, et pour son goût pour la pataphysique. Et puis bien sûr, je pense à Benjamin, Claude, Laurine, Maxime, Sam, Baptiste, Robin, Pierre-Alexandre, Quentin, Franck, Luca, Aimé, Alexandre, Samuel, Simon pour tous les bons moments passés autour d’un ballon de rugby, d’un diagramme de Feynman, d’un bon repas, ou même à quelques dizaines de mètre d’une baleine !

Enfin, mes derniers mots vont à ma famille, que je remercie pour tout le soutien qu’elle m’a apporté. En particulier, je tiens à remercier ma chère maman, tu m’as toujours laissé libre de faire mes choix, depuis le latin en cinquième jusqu’à la thèse en physique, et en passant bien sûr par la pratique du rugby (je ne me suis jamais cassé le nez !). Je te remercie pour ta présence, ta confiance, tes encouragements et ton soutien à tout moment (malgré le décalage horaire).

1. Rugbyman français légendaire, dont voici la citation originale : « le rugby, c’est l’histoire d’un ballon avec des copains autour, et quand il n’y a plus de ballon, il reste les copains ».

« Comme il arrive souvent en philosophie, la difficulté ici est de voir que le problème est difficile. Si vous vous adressez à quelqu'un d'inexercé en philosophie et que vous lui demandez : « comment savez-vous que j'ai deux yeux ? » Il vous répondra « Quelle sottise question ! Je puis voir que vous avez deux yeux. » Il n'y a pas lieu de supposer qu'au terme de notre enquête nous aboutirons à quoi que ce soit de radicalement différent de cette position non philosophique. Ce qui sera advenu c'est que nous aurons été amené à voir une structure compliquée où nous pensions que tout était simple ; que nous aurons pris conscience de la pénombre d'incertitude entourant les situations qui n'inspirent pas le moindre doute ; que nous trouverons que le doute se justifie beaucoup plus fréquemment que nous ne le supposions et que même les prémisses les plus plausibles apparaîtront à leur tour susceptibles de comporter des conclusions qui ne sont pas plausibles. Le résultat le plus net sera de substituer une hésitation instruite à une certitude encore fruste. Quant à savoir si ce résultat a une valeur quelconque, c'est une question que je n'examinerai pas. »

Bertrand RUSSELL, *Signification et vérité*

Introduction

Les exercices de physique de premier cycle universitaire où il est typiquement question de phénomènes ondulatoires ou de diffusion de la chaleur sont souvent concentrés sur le cas des systèmes unidimensionnels, dans la mesure où, premièrement, ceux-ci sont techniquement plus simples à traiter, et deuxièmement, les conclusions auxquelles ils mènent se généralisent trivialement aux dimensions supérieures. Cette image donne à penser que les systèmes unidimensionnels ne seraient que des simplifications de la réalité servant à tester le sens physique des étudiants! Et pourtant, cette idée est complètement fautive si l'on songe aux systèmes fermioniques de la matière condensée. En effet, cette physique est tout à fait spéciale par rapport au cas des dimensions supérieures, notamment en raison du principe d'exclusion de Pauli. Selon ce principe, deux fermions, même s'ils n'interagissent pas entre eux, peuvent tout de même être corrélés de façon non-triviale, particulièrement dans le cas unidimensionnel. Dans cette situation particulière, deux fermions ne peuvent effectivement pas "s'éviter".

En conséquence, la physique des systèmes fermioniques unidimensionnels se différencie significativement de la théorie des liquides de Fermi, valable pour les dimensions plus grandes. Les fonctions de corrélation et les temps de relaxation des excitations de quasi-particules sont données par des lois de puissance caractérisées par des exposants non-universels. Ces derniers sont déterminés par un petit nombre de paramètres hydrodynamiques dépendant des interactions, et sont associés, pour les fermions de spin $1/2$, à une séparation des degrés de liberté de charge et de spin, qui sont alors décrits par des champs bosoniques [19, 56, 51, 60, 7, 26]. Ces éléments forment la base de la phénoménologie des liquides de Luttinger [28], valable asymptotiquement lorsque le spectre à un corps devient strictement linéaire et que les interactions à deux corps peuvent être projetées

sur la surface de Fermi, devenant ainsi indépendante des impulsions. Ces considérations bien connues mènent à la théorie du continuum, aussi appelée modèle de g -ologie du gaz de Fermi en interaction.

Cependant, loin de la surface de Fermi, le spectre à un corps possède en général une certaine courbure. Celle-ci, ainsi que les interactions dépendant des impulsions, bien que non-pertinentes au sens du groupe de renormalisation (RG) [28], conduisent à des écarts à la théorie des liquides de Luttinger. Par exemple, le facteur de structure dynamique pour des fermions sans spin en interaction, et avec un spectre à un corps courbé, est modifié [49]. Ces effets de non-linéarité dans les liquides de Luttinger peuvent être étudiés rigoureusement pour les modèles intégrables de fermions sans spin définis sur réseau [47, 30, 13, 36].

Ainsi, la "projection" des modèles non-intégrables (définis sur réseau) sur le modèle de g -ologie atteint ses limites, notamment pour ce qui est du calcul des fonctions de corrélation possédant des singularités, nécessaire à la détermination des diagrammes de phase. Le cas du modèle de Fermi-Hubbard étendu unidimensionnel sur réseau pour fermions de spin 1/2 (modèle EH) constitue un exemple particulièrement parlant de cette limitation. Ceci explique le choix de ce modèle pour faire la démonstration de la technique du RG sur réseau qui sera présentée dans ce travail. À demi-remplissage, les simulations numériques ont vite identifié une modification de la ligne de transition continue entre les états d'onde de densité de charge et de spin [22, 29]. Le modèle du continuum prédit pourtant une absence de gap sur la ligne de transition $U = 2V$, où U est associé aux interactions locales, et V aux interactions aux plus proches voisins. L'origine de cette modification résiste, au moins dans le régime des couplages faibles, à toutes les tentatives d'explication formulées dans le cadre du modèle de g -ologie avec spectre linéaire [11, 61]. La méthode de diagonalisation exacte utilisée par Nakamura [43] a montré par la suite que la modification à la ligne de transition était en fait due à la présence d'une troisième phase distincte, à savoir une onde de densité de charge centrée sur les liens (BOW). Cette phase BOW est gappée à la fois dans le secteur de charge et de spin, et s'étend dans une région située au voisinage de la ligne $U = 2V \geq 0$ [43, 44]. Ces résultats ont été confirmés par des études utilisant la méthode Monte Carlo Quantique [54, 50], et également grâce au groupe de renormalisation de la matrice densité [70, 32,

18].

Par des méthodes analytiques, Tsuchiizu et Furusaki [59, 58] ont montré, en prenant en compte la dépendance en les impulsions des processus de diffusion à deux corps aux hautes énergies (c'est-à-dire au-delà de la région où le spectre est linéaire), à l'aide de la théorie des perturbations, qu'il est possible de définir un modèle de g -ologie effectif en couplage faible à une énergie arbitrairement basse. Les paramètres de ce modèles sont alors modifiés par rapport aux données initiales du modèle sur réseau [1]. Ces modifications sont suffisantes pour montrer l'émergence de la phase BOW dans le voisinage de la ligne $U = 2V \geq 0$ dans la limite des couplages faibles. Tam *et al.* [57] ont montré l'existence de cette même phase dans la même région du diagramme de phase, au moyen du RG fonctionnel à l'ordre d'une boucle, en intégrant tous les processus de diffusion pour un ensemble discret d'impulsions obtenu en partitionnant le spectre de liaison forte exprimé dans la première zone de Brillouin. Ménard *et al.* [37] ont ensuite utilisé le RG dans sa version wilsonienne [15] et effectué une classification des couplages non-pertinents ayant une dépendance en les impulsions. Ces couplages ont une influence sur les amplitudes de diffusion loin de la surface de Fermi et ont été identifiés comme l'ingrédient permettant à la phase BOW de dominer dans la région précisée précédemment. De plus, ces couplages sont responsables de changements quantitatifs dans le diagramme de phase, se traduisant par l'apparition de courbure dans les lignes de transitions entre les différentes phases. Le modèle de g -ologie comporte effectivement des symétries accidentelles qui sont alors brisées par les effets de réseau.

Les résultats qui viennent d'être mentionnés, obtenus par le RG, sont limités au modèle EH à demi-remplissage. La motivation principale du travail exposé dans ce manuscrit est de proposer une formulation plus générale de la méthode du RG en couplage faible, afin de déterminer les états fondamentaux des phases quantiques pour des modèles de fermions en interaction définis sur réseau. La méthode développée permet en principe d'étudier n'importe quel type de spectre non-linéaire, tout en prenant en compte la dépendance en les impulsions des interactions, et ce, à un remplissage arbitraire. La méthode retenue pour mener à bien ce programme est le groupe de renormalisation fonctionnel (FRG) dans le schéma dit irréductible à une particule [38, 16].

Les équations de RG à une boucle pour les vertex à quatre points dépendant des impulsions sont développées jusqu'au deuxième ordre en la différence énergétique au niveau de Fermi (on parlera de développement en ξ) avec le spectre de liaisons forte comme exemple. Ces variables énergétiques servent de variable d'échelle et permettent d'effectuer la classification des termes d'interaction par ordre de pertinence. Le diagramme de phase du modèle EH est alors obtenu en déterminant les susceptibilités les plus singulières. Le cas du demi-remplissage permet de confirmer les résultats précédents obtenus par RG concernant la phase BOW, et sont également en accord avec les résultats numériques [44]. Le rôle de la courbure du spectre et des couplages non-pertinents dans la renormalisation des conditions initiales pour un modèle du continuum de basse énergie est confirmé. La méthode est appliquée en dehors du demi-remplissage, et il est montré que la région correspondant à la phase BOW se réduit progressivement pour finir par disparaître à mesure que le dopage augmente. Le diagramme de phase évolue alors dans son ensemble vers un régime dominé par l'incommensurabilité, où des modifications significatives par rapport au modèle du continuum sont observées. L'intégration par le RG des états électroniques de hautes énergies, asymétriques par rapport au niveau de Fermi du fait de la non-linéarité du spectre, est responsable d'un effet d'écrantage logarithmique, agissant en faveur de l'état supraconducteur singulet, au détriment de l'onde de densité de charge dans le secteur attractif $U < 0$, et en faveur de l'antiferromagnétisme (toujours au détriment de l'onde de densité de charge) dans le secteur répulsif.

1

Systemes fermioniques unidimensionnels

« L'abstraction est un devoir, le devoir scientifique, la possession
enfin épurée de la pensée du monde! »

Gaston BACHELARD, *La Formation de l'esprit scientifique*

Ce premier chapitre rappelle brièvement les éléments nécessaires à la compréhension du travail présenté dans cette thèse. La seconde quantification pour les fermions est le point de départ de notre étude, à laquelle on substitue rapidement le formalisme des intégrales fonctionnelles (quelques remarques au sujet des intégrales fonctionnelles et de leurs propriétés sont présentées à l'annexe C). Sont alors introduites les notions de moments, cumulants, vertex irréductibles à une particule (vertex 1PI), ainsi que les différentes fonctionnelles génératrices associées, notamment l'action effective, qui sera d'une importance capitale pour la suite. La question des symétries du problème est ensuite discutée, car celles-ci contraignent la forme des hamiltoniens à considérer, et indiquent quelles sont les différentes fluctuations quantiques à sonder. Le modèle de g -ologie mentionné dans l'introduction est alors présenté, et permet de comprendre les principales caractéristiques de la physique des fermions en une dimension. On utilise ce modèle pour expliquer en quoi le groupe de renormalisation est un outil bien adapté pour attaquer les questions qui nous occupent. Enfin, le modèle EH, exemple paradigmatique pour l'étude des fermions sur réseau, est introduit.

1.1 Représentation des systèmes fermioniques par la théorie des champs

Poser un problème de physique de la matière condensée à l'équilibre thermodynamique nécessite de se donner un cadre ontologique, dynamique, informationnel et méthodologique. L'ontologie correspond à la nature des degrés de liberté en présence, c'est-à-dire pour nous les électrons. Les propriétés dynamiques sont encodées dans le hamiltonien, dont la donnée définit un modèle. L'information sur le système considéré est quant à elle équivalente à un choix d'ensemble statistique, c'est-à-dire l'ensemble grand canonique dans ce travail. Enfin, la méthode d'étude sera dans notre cas le groupe de renormalisation fonctionnel. Une fois ce cadre donné, il est alors possible de poser le problème : quelles sont les observables intéressantes susceptibles d'être calculées, et quelles sont les approximations nécessaires à effectuer pour y parvenir ? Dans notre cas, nous souhaitons obtenir des diagrammes de phase, qui nécessitent le calcul de fonctions de réponse, la fonction de réponse dominante donnant la nature de l'état fondamental de notre système. Les approximations requises sont l'utilisation de la théorie des perturbations, et la limitation du groupe de renormalisation à l'ordre d'une boucle, ce qui nécessite de se restreindre au régime des couplages faibles à intermédiaires. D'autres approximations seront toutefois nécessaires pour réaliser une troncature du modèle choisi, afin d'obtenir un ensemble d'équations pouvant faire l'objet d'une étude numérique.

Le point crucial est donc le choix du modèle, qui se fait en utilisant différents critères de classification et de hiérarchisation tels que :

- la dimensionalité (1D, 2D, 3D...),
- les symétries (conservation de la charge, invariance par rotation, symétrie électron-trou...),
- la géométrie (réseau, continuum),
- la complexité (termes à un/deux/trois corps...),
- la (non)-localité (termes locaux, aux premiers/seconds voisins...),
- la pertinence (termes essentiels/marginaux/inessentiels),
- les paramètres statistiques (température, remplissage).

Une fois le choix de modèle effectué, encore faut-il être en mesure d'en ex-

1.1. Représentation des systèmes fermioniques par la théorie des champs

traire de l'information physique pertinente, ce qui, dans le cas d'une grande collection de particules, revient à comprendre la structure des corrélations entre degrés de liberté. Dans le cas de systèmes fermioniques, le point de départ est la seconde quantification. Celle-ci est amplement décrite dans de nombreux ouvrages traitant du problème à N corps quantique [3], et c'est pourquoi son traitement dans cette section est réduit au strict minimum au cas des fermions. L'espace de Hilbert total à considérer est l'espace de Fock, sur lequel on définit l'algèbre des opérateurs de création et annihilation, exprimée par les relations d'anticommutation suivantes :

$$\{c_\alpha, c_\beta\} = 0, \quad \{c_\alpha, c_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta}, \quad (1.1)$$

où l'indice α fait référence aux états à une particule $|\alpha\rangle$. L'opérateur $n_\alpha = c_\alpha^\dagger c_\alpha$ compte le nombre de fermions dans l'état α . Dans ce qui suit, on va exclusivement considérer des modèles où la charge électrique est conservée, ou, ce qui ici revient au même, à des modèles où le nombre de particules est conservé, car on s'intéresse à des systèmes électroniques. Cela revient à considérer des modèles invariant par action de $U(1)$, c'est-à-dire tels invariant par la transformation $c_\alpha \rightarrow e^{i\theta} c_\alpha$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ une phase quelconque. Ainsi, sous ces hypothèses, le hamiltonien le plus général contenant un terme à un corps ainsi qu'un terme d'interaction à deux corps a la forme suivante¹ (la convention de sommation sur les indices muets est utilisée) :

$$\mathcal{H} = t_{\alpha\beta} c_\alpha^\dagger c_\beta + U_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2} c_{\alpha_1}^\dagger c_{\alpha_2}^\dagger c_{\beta_2} c_{\beta_1}. \quad (1.2)$$

La propriété d'hermiticité de \mathcal{H} contraint la forme des matrices de saut t et d'interaction U :

$$t_{\alpha\beta}^* = t_{\beta\alpha}, \quad U_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2}^* = U_{\beta_1\beta_2,\alpha_1\alpha_2}. \quad (1.3)$$

De plus, un changement de base est représenté par une matrice unitaire de composantes $u_{\alpha\alpha'}$ agissant sur les opérateurs d'annihilation par $c_\alpha = u_{\alpha\alpha'} \tilde{c}_{\alpha'}$, ce qui

¹. Une remarque concernant les constantes et les unités : ce manuscrit s'inscrit dans la tradition des conventions de la physique théorique, c'est-à-dire que l'on considèrera $\hbar = k_B = 1$. De plus, il sera question d'un réseau dont le pas a sera également pris égal à 1.

1.1. Représentation des systèmes fermioniques par la théorie des champs

implique les formes suivantes pour les matrices t et U :

$$\tilde{t}_{\alpha'\beta'} = t_{\alpha\beta} u_{\alpha\alpha'}^* u_{\beta\beta'}, \quad \tilde{U}_{\alpha_1\alpha_2, \beta_1\beta_2} = U_{\alpha_1\alpha_2, \beta_1\beta_2} u_{\alpha_1\alpha_1'}^* u_{\alpha_2\alpha_2'}^* u_{\beta_1\beta_1'} u_{\beta_2\beta_2'}. \quad (1.4)$$

Enfin, mentionnons qu'il est possible de travailler avec des opérateurs fermioniques de Majorana, définis comme suit :

$$\gamma_{\alpha}^{+} = c_{\alpha}^{\dagger} + c_{\alpha}, \quad \gamma_{\alpha}^{-} = i(c_{\alpha}^{\dagger} - c_{\alpha}), \quad (1.5)$$

d'où les relations de d'anti-commutation :

$$\{\gamma_{\alpha}^{\epsilon}, \gamma_{\beta}^{\eta}\} = 2\delta_{\epsilon\eta}\delta_{\alpha\beta}. \quad (1.6)$$

Le point important est que ces opérateurs coïncident avec leurs opérateurs conjugués hermitiens, soit $(\gamma_{\alpha}^{\pm})^{\dagger} = \gamma_{\alpha}^{\pm}$.

Cependant, nous n'utiliserons cependant pas directement le formalisme de la seconde quantification, auquel nous préférons celui des intégrales fonctionnelles, qui se prête bien au développement de méthodes d'approximation telles que le groupe de renormalisation, qui fera l'objet du chapitre suivant. Comme cela a été montré à l'annexe C, il est possible de réécrire la fonction de partition dans l'ensemble grand canonique sous forme d'une intégrale fonctionnelle² :

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} e^{-\beta(\mathcal{H} - \mu\mathcal{N})} = \int \mathcal{D}[\psi, \bar{\psi}] e^{-\mathcal{S}[\psi, \bar{\psi}]}, \quad (1.7)$$

où la fonctionnelle d'action $\mathcal{S}[\psi, \bar{\psi}]$ est donnée par une intégrale sur le temps imaginaire τ allant de 0 à $\beta \equiv 1/T$:

$$\mathcal{S}[\psi, \bar{\psi}] = \int_0^{\beta} d\tau \left(\sum_{x,\sigma} [\bar{\psi}_{x\sigma}(\tau) \partial_{\tau} \psi_{x\sigma}(\tau) - \mu \bar{\psi}_{x\sigma}(\tau) \psi_{x\sigma}(\tau)] + \mathcal{H}[\psi, \bar{\psi}] \right). \quad (1.8)$$

Dans cette expression, x désigne un indice spatial, $\sigma = \uparrow, \downarrow$ est l'orientation du spin selon un axe de quantification fixé, et $\tau \in [0, \beta]$ est le temps imaginaire. De

2. Permettons-nous de paraphraser Clausewitz : « L'intégrale fonctionnelle est la continuation de la *physique théorique* par d'autres moyens. »

1.1. Représentation des systèmes fermioniques par la théorie des champs

plus, μ est le potentiel chimique, et $\mathcal{N} = \sum_{x,\sigma} \bar{\psi}_{x\sigma} \psi_{x\sigma}$ compte le nombre total de particules. Enfin, $\mathcal{H}[\psi, \bar{\psi}]$ correspond au hamiltonien. Étant donné que nous considérons des fermions, le champ $\psi_{x\sigma}(\tau)$, $\bar{\psi}_{x\sigma}(\tau)$ prend ses valeurs dans une algèbre de Grassmann, c'est-à-dire qu'il est soumis aux relations d'anti-commutation suivantes :

$$\begin{aligned} \psi_{x\sigma}(\tau) \psi_{x'\sigma'}(\tau') + \psi_{x'\sigma'}(\tau') \psi_{x\sigma}(\tau) &= 0, \\ \bar{\psi}_{x\sigma}(\tau) \bar{\psi}_{x'\sigma'}(\tau') + \bar{\psi}_{x'\sigma'}(\tau') \bar{\psi}_{x\sigma}(\tau) &= 0, \\ \psi_{x\sigma}(\tau) \bar{\psi}_{x'\sigma'}(\tau') + \bar{\psi}_{x'\sigma'}(\tau') \psi_{x\sigma}(\tau) &= 0. \end{aligned} \tag{I.9}$$

Par ailleurs, les variables de Grassmann sont soumises aux relations d'anti-périodicité :

$$\psi_{x\sigma}(\beta) = -\psi_{x\sigma}(0), \quad \bar{\psi}_{x\sigma}(\beta) = -\bar{\psi}_{x\sigma}(0). \tag{I.10}$$

À présent, discutons de la manipulation formelle de l'intégrale (I.7). Pour cela, nous allons nous placer dans un cadre plus général et nous allons écrire φ_α au lieu de $\psi_{x\sigma}(\tau)$, $\bar{\psi}_{x\sigma}(\tau)$ afin de simplifier les notations. Cela revient en fait à construire l'intégrale fonctionnelle avec les opérateurs de Majorana plutôt qu'avec les opérateurs $c_\alpha^{(\dagger)}$.

L'action $\mathcal{S}[\varphi]$, lorsque restreinte à un terme à un corps plus un terme à deux corps, s'écrit ³ :

$$\mathcal{S}[\varphi] = \frac{1}{2} \mathcal{K}_{\alpha_1 \alpha_2} \varphi_{\alpha_1} \varphi_{\alpha_2} + \frac{1}{4!} \mathcal{V}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \varphi_{\alpha_1} \varphi_{\alpha_2} \varphi_{\alpha_3} \varphi_{\alpha_4}, \tag{I.11}$$

où le premier terme décrit les fermions libres tandis que les interactions sont représentées par le second terme. L'intégrale fonctionnelle s'écrit alors simplement :

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}[\varphi] e^{-\mathcal{S}[\varphi]}. \tag{I.12}$$

³. La convention de sommation sur les indices muets est utilisée dans cette expression : les sommes et les intégrales sont sous-entendues. Cette convention sera abondamment utilisée dans le reste de ce manuscrit.

1.1. Représentation des systèmes fermioniques par la théorie des champs

Cette intégrale est effectuée sur les variables de Grassmann φ_α qui vérifient la relation d'anti-commutation provenant de (I.9) :

$$\varphi_\alpha \varphi_\beta + \varphi_\beta \varphi_\alpha = 0. \quad (\text{I.13})$$

De plus, la "mesure" d'intégration est donnée par :

$$\mathcal{D}[\varphi] = \prod_{\alpha} d\varphi_{\alpha}, \quad (\text{I.14})$$

et l'ordre des intégrations est tel que la fonction de partition est positive (en effet, on a également la relation $d\varphi_{\alpha}d\varphi_{\beta} + d\varphi_{\beta}d\varphi_{\alpha} = 0$).

Le formalisme de l'intégrale fonctionnelle permet de calculer des moyennes statistiques. Considérons une observable $\theta[\varphi]$ (ce sont des observables au sens statistique et non quantique). Sa moyenne est définie par :

$$\langle \theta[\varphi] \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}[\varphi] \theta[\varphi] e^{-S[\varphi]}.$$

Considérons à présent une famille d'observables $\theta_{\mathbf{a}}[\varphi]$ satisfaisant aux relations de commutation $\theta_{\mathbf{a}}[\varphi]\theta_{\mathbf{b}}[\varphi] = \zeta_{\mathbf{ab}}\theta_{\mathbf{b}}[\varphi]\theta_{\mathbf{a}}[\varphi]$, avec $\zeta_{\mathbf{ab}} = \zeta_{\mathbf{ba}} = \pm 1$. On introduit alors la *fonctionnelle génératrice des moments* $\mathcal{F}[J]$ de la famille d'observables considérée :

$$\mathcal{F}[J] = \int \mathcal{D}[\varphi] e^{-S[\varphi] + J_{\mathbf{a}}\theta_{\mathbf{a}}[\varphi]}, \quad (\text{I.15})$$

où les champs source $J_{\mathbf{a}}$ vérifient eux aussi les relations de commutation $J_{\mathbf{a}}J_{\mathbf{b}} = \zeta_{\mathbf{ab}}J_{\mathbf{b}}J_{\mathbf{a}}$. La fonctionnelle introduite doit son nom à l'identité suivante, obtenue par dérivations répétées par rapport aux champs source :

$$\langle \theta_{\mathbf{a}_1}[\varphi] \dots \theta_{\mathbf{a}_n}[\varphi] \rangle = \mathcal{Z}^{-1} \mathcal{F}_{\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n}[0], \quad (\text{I.16})$$

où l'on a fait usage de la notation raccourcie suivante pour les dérivées :

$$\mathcal{F}_{\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n}[J] \equiv \frac{\delta^n \mathcal{F}}{\delta J_{\mathbf{a}_n} \dots \delta J_{\mathbf{a}_1}}[J]. \quad (\text{I.17})$$

1.1. Représentation des systèmes fermioniques par la théorie des champs

Les moments sont aussi appelés *fonctions de corrélation*. Définissons à présent la *fonctionnelle génératrice des cumulants* $\mathcal{F}^c[J]$, en prenant le logarithme de la fonctionnelle génératrice des moments :

$$\mathcal{F}^c[J] = \log \mathcal{F}[J]. \quad (1.18)$$

Les cumulants de la famille d'observables (aussi appelés fonctions de corrélation connexes) sont alors obtenus par dérivations répétées par rapport aux champs source de $\mathcal{F}^c[J]$. Par exemple, le cumulants d'ordre 2 est donné par :

$$\langle \theta_{\mathbf{a}_1}[\varphi] \theta_{\mathbf{a}_2}[\varphi] \rangle^c = \langle \theta_{\mathbf{a}_1}[\varphi] \theta_{\mathbf{a}_2}[\varphi] \rangle - \langle \theta_{\mathbf{a}_1}[\varphi] \rangle \langle \theta_{\mathbf{a}_2}[\varphi] \rangle = \mathcal{Z}^{-1} \mathcal{F}_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2}^c[0]. \quad (1.19)$$

Dans le cas particulier où $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$, on retrouve bien la variance de l'observable $\theta_{\mathbf{a}_1}[\varphi]$.

Le cas particulier le plus important est celui où les observables correspondent au champ. On définit alors les deux fonctionnelles génératrices suivantes :

$$\mathcal{Z}[\eta] = \int \mathcal{D}[\varphi] e^{-S[\varphi] + \eta \cdot \varphi}, \quad (1.20)$$

$$\mathcal{W}[\eta] = \log \mathcal{Z}[\eta]. \quad (1.21)$$

Dans cette expression, on a fait apparaître un produit scalaire entre le champ φ et le champ source η . Ce produit scalaire peut être explicité grâce à une matrice symétrique définie positive $(q_{\alpha\beta})$ avec laquelle on peut écrire $\eta \cdot \varphi = \eta_\alpha q_{\alpha\beta} \varphi_\beta$. Pour raccourcir la notation, on écrira $\eta \cdot \varphi = \eta_{\check{\alpha}} \varphi_\alpha$ ⁴. Par exemple, considérons le cas d'un champ scalaire dans l'espace euclidien de dimension d . Dans l'espace réel, le produit scalaire s'écrit :

$$\eta \cdot \varphi = \int d^d x d^d y \eta(x) q(x, y) \varphi(y), \quad q(x, y) = \delta(x - y),$$

⁴. Techniquement, on aurait pu noter plutôt $\eta \cdot \varphi = \eta^\alpha \varphi_\alpha$, mais une notation utilisant exclusivement les indices bas a été préférée.

mais dans l'espace réciproque, on aura :

$$\eta \cdot \varphi = \int d^d p d^d p' \eta(p) \hat{q}(p, p') \varphi(p'), \quad \hat{q}(p, p') = \delta(p + p').$$

Il y a une dernière fonctionnelle que nous allons définir et qui sera capitale pour la suite. Il s'agit de la fonctionnelle d'*action effective* $\Gamma[\phi]$ définie comme la transformée de Legendre de $\mathcal{W}[\eta]$, c'est-à-dire :

$$\Gamma[\phi] + \mathcal{W}[\eta] = \eta \cdot \phi. \quad (1.22)$$

En dérivant par rapport à η ou par rapport à ϕ , on obtient :

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_\alpha} = \eta_{\dot{\alpha}}, \quad \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta \eta_{\dot{\alpha}}} = \phi_\alpha. \quad (1.23)$$

La dernière égalité exprime que le champ ϕ est la moyenne statistique du champ microscopique φ , c'est-à-dire :

$$\phi_\alpha = \langle \varphi_\alpha \rangle. \quad (1.24)$$

On peut travailler avec la fonctionnelle $\Gamma[\phi]$, et dans ce cas le champ source η devient une fonctionnelle $\eta[\phi]$, mais on peut plutôt travailler avec la fonctionnelle $\mathcal{W}[\eta]$ et c'est alors le champ ϕ qui devient une fonctionnelle du champ source $\phi[\eta]$. Cela est bien connu en thermodynamique des systèmes magnétiques. Dans ce cas, le champ microscopique φ est associé aux spins microscopiques présents dans le matériau, tandis que le champ macroscopique ϕ correspond à l'aimantation, et le champ source η correspond au champ magnétique.

Pour la suite, nous aurons besoin de prendre des dérivées multiples par rapport aux φ_α ou aux $\eta_{\dot{\alpha}}$. On adoptera donc là encore les notations raccourcies suivantes :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_n}[\phi] &= \frac{\delta^n \Gamma}{\delta \phi_{\alpha_n}, \dots, \delta \phi_{\alpha_1}}[\phi], \\ \mathcal{W}_{\dot{\alpha}_1 \dots \dot{\alpha}_n}[\eta] &= \frac{\delta^n \mathcal{W}}{\delta \eta_{\dot{\alpha}_n}, \dots, \delta \eta_{\dot{\alpha}_1}}[\eta]. \end{aligned} \quad (1.25)$$

1.1. Représentation des systèmes fermioniques par la théorie des champs

Décrivons un peu plus en détails la signification des trois fonctionnelles $\mathcal{Z}[\eta]$, $\mathcal{W}[\eta]$ et $\Gamma[\phi]$. Toutes trois permettent d'encoder l'information statistique associée à la théorie de champs décrite par l'action microscopique $\mathcal{S}[\varphi]$. Cette information statistique porte sur la structuration des corrélations. Ainsi, la fonctionnelle $\mathcal{Z}[\eta]$ encode les corrélations de la façon la moins fine, à travers les moments du champ. La fonctionnelle $\mathcal{W}[\eta]$ encode les cumulants, qui sont appelés *fonctions de corrélation connexes*. Enfin, l'action effective $\Gamma[\phi]$ génère les *vertex irréductibles à une particule* (vertex 1PI). Ces vertex peuvent être obtenus de façon itérative par dérivations successives par rapport à ϕ à partir de la relation suivante :

$$\delta_{\alpha\alpha'} = \frac{\delta\eta_{\dot{\alpha}}}{\delta\eta_{\dot{\alpha}'}} = \frac{\delta\eta_{\dot{\alpha}}}{\delta\phi_{\beta}} \frac{\delta\phi_{\beta}}{\delta\eta_{\dot{\alpha}'}} = \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_{\beta}\delta\phi_{\alpha}} \frac{\delta^2\mathcal{W}}{\delta\eta_{\dot{\alpha}'}\delta\eta_{\dot{\beta}}} = \Gamma_{\alpha\beta}[\phi]\mathcal{W}_{\dot{\beta}\dot{\alpha}'}[\eta[\phi]]. \quad (1.26)$$

Pour y parvenir, il faut simplement utiliser l'égalité

$$\frac{\delta}{\delta\phi_{\alpha}}\mathcal{W}_{\dot{\beta}_1\dots\dot{\beta}_n}[\eta[\phi]] = \frac{\delta\eta_{\dot{\beta}_{n+1}}}{\delta\phi_{\alpha}}\mathcal{W}_{\dot{\beta}_1\dots\dot{\beta}_n\dot{\beta}_{n+1}}[\eta[\phi]] = \mathcal{W}_{\dot{\beta}_1\dots\dot{\beta}_n\dot{\beta}_{n+1}}\Gamma_{\beta_{n+1}\alpha}, \quad (1.27)$$

obtenue par simple application de la règle de la chaîne. Par exemple, les premières dérivations donnent successivement :

$$0 = \Gamma_{\alpha\beta\alpha_2}\mathcal{W}_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} + \Gamma_{\alpha\beta}\mathcal{W}_{\dot{\beta}\dot{\alpha}\dot{\beta}_2}\Gamma_{\beta_2\alpha_2}, \quad (1.28a)$$

$$\begin{aligned} 0 = & \Gamma_{\alpha\beta\alpha_2\alpha_3}\mathcal{W}_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} + \Gamma_{\alpha\beta\alpha_2}\mathcal{W}_{\dot{\beta}\dot{\alpha}\dot{\beta}_3}\Gamma_{\beta_3\alpha_3} \\ & + \Gamma_{\alpha\beta\alpha_3}\mathcal{W}_{\dot{\beta}\dot{\alpha}\dot{\beta}_2}\Gamma_{\beta_2\alpha_2} + \Gamma_{\alpha\beta}\mathcal{W}_{\dot{\beta}\dot{\alpha}\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3}\Gamma_{\beta_3\alpha_3}\Gamma_{\beta_2\alpha_2} \\ & + \Gamma_{\alpha\beta}\mathcal{W}_{\dot{\beta}\dot{\alpha}\dot{\beta}_2}\Gamma_{\beta_2\alpha_2\alpha_3}. \end{aligned} \quad (1.28b)$$

Le point important est qu'il existe une hiérarchie de fonctions de corrélations, et que (généralement) cette hiérarchie ne s'arrête pas, ce qui signifie que pour connaître totalement la structure des corrélations d'une théorie donnée, il faut connaître toutes les fonctions de corrélation, ce qui en général n'est pas possible (et en fait pas nécessaire non plus) d'un point de vue pratique. De façon similaire, on peut obtenir une hiérarchie d'équations du mouvement pour les moments, ce sont les équations de Schwinger-Dyson (voir annexe C).

1.1. Représentation des systèmes fermioniques par la théorie des champs

Pour la suite, nous aurons besoin de considérer des fonctionnelles génératrices contenant des termes supplémentaires générant des observables quadratiques en les champs. Nous noterons de façon générique J les champs sources nécessaires et $\mathcal{Z}[\eta, J]$, $\mathcal{W}[\eta, J]$, $\Gamma[\phi, J]$ les fonctionnelles génératrices correspondantes. Considérons deux de ces observables $\theta_{\mathbf{a}_1}$ et $\theta_{\mathbf{a}_2}$. Par définition, la *susceptibilité* $\chi_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}$ est le cumulatif d'ordre 2 associé aux deux observables considérées :

$$\chi_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2} = \mathcal{W}_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}[\eta = J = 0]. \quad (1.29)$$

Il est possible d'exprimer les susceptibilités en fonction des dérivées de l'action effective. Pour cela, utilisons la transformation de Legendre, et travaillons à ϕ fixé, impliquant que η devient une fonctionnelle de ϕ et J :

$$\Gamma[\phi, J] + \mathcal{W}[\eta[\phi, J], J] = \eta \cdot \phi. \quad (1.30)$$

Dérivons par rapport à $J_{\mathbf{a}_1}$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathbf{a}_1}[\phi, J] + \frac{\delta\eta}{\delta J_{\mathbf{a}_1}}[\phi, J] \cdot \frac{\delta\mathcal{W}}{\delta\eta}[\eta[\phi, J], J] + \mathcal{W}_{\mathbf{a}_1}[\eta[\phi, J], J] &= \eta_{\mathbf{a}_1}[\phi, J] \cdot \phi \\ \implies \Gamma_{\mathbf{a}_1}[\phi, J] + \mathcal{W}_{\mathbf{a}_1}[\eta[\phi, J], J] &= 0, \end{aligned} \quad (1.31)$$

où la dernière égalité résulte du fait que l'on a $\delta\mathcal{W}/\delta\eta = \phi$. À présent, dérivons par rapport à $J_{\mathbf{a}_2}$:

$$\Gamma_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}[\phi, J] + \frac{\delta\eta}{\delta J_{\mathbf{a}_2}} \cdot \frac{\delta\mathcal{W}_{\mathbf{a}_1}}{\delta\eta}[\eta[\phi, J], J] + \mathcal{W}_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}[\eta[\phi, J], J] = 0. \quad (1.32)$$

Or, dans cette expression le deuxième terme est nul car, étant donné que l'on travaille à ϕ fixe, on peut écrire :

$$\frac{\delta\mathcal{W}_{\mathbf{a}_1}}{\delta\eta} = \frac{\delta}{\delta J_{\mathbf{a}_2}} \frac{\delta\mathcal{W}}{\delta\eta} = \frac{\delta}{\delta J_{\mathbf{a}_2}} \phi = 0. \quad (1.33)$$

En conclusion, on obtient l'égalité voulue :

$$\chi_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2} = -\Gamma_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}[\phi_0, J = 0], \quad (1.34)$$

où ϕ_0 est la configuration spontanée du champ, telle que $\delta\Gamma/\delta\phi[\phi_0, J = 0] = 0$. Dans le cas des fermions, on aura toujours $\phi_0 = 0$. La connaissance des susceptibilités sera capitale pour la suite. En effet, plus une susceptibilité est élevée, plus les fluctuations associées sont fortes. Ce sont les fluctuations dominantes qui déterminent les diagrammes de phase.

Le calcul de ces fonctionnelles génératrices est bien souvent impossible à effectuer de façon exacte. Il existe cependant un cas essentiel pour lequel cela est faisable : il s'agit du cas des théories gaussiennes. Celles-ci sont définies par les propriétés suivantes, qui expliquent également leur intérêt, même lorsque la théorie à considérer contient un terme d'interaction :

1. l'action est quadratique, c'est-à-dire qu'elle s'écrit $S[\varphi] = \frac{1}{2}\mathcal{K}_{\alpha_1\alpha_2}\varphi_{\alpha_1}\varphi_{\alpha_2}$,
2. on peut séparer l'action en un terme purement fermionique et un terme purement bosonique,
3. la matrice $(\mathcal{K}_{\alpha_1\alpha_2})$ est inversible. Cette propriété est cruciale pour développer des méthodes d'approximations basées sur la théorie des perturbations lorsque l'action contient un terme d'interaction. Pour certains systèmes cependant, cette matrice n'est pas inversible, comme par exemple dans le cas des théories de Yang-Mills (qui sont cependant des théories bosoniques, et contiennent en plus des termes d'interaction lorsqu'elles sont non abéliennes). Dans ce cas, le fait que $(\mathcal{K}_{\alpha_1\alpha_2})$ soit non-inversible est étroitement lié à l'invariance de jauge qui introduit une redondance dans la description des degrés de liberté.

Mentionnons pour finir les expressions des intégrales gaussiennes dans le cas fermionique et bosonique, dans le cas où l'on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[v, \eta, \bar{\eta}] &= \int \mathcal{D}[b, \bar{b}, f, \bar{f}] e^{-S[b, f, \bar{f}] + v \cdot b + \bar{\eta} \cdot f + \eta \cdot \bar{f}}, \\ S[b, f, \bar{f}] &= \frac{1}{2} b \cdot \mathcal{K}^b \cdot b + \bar{f} \cdot \mathcal{K}^f \cdot f = \frac{1}{2} \mathcal{K}_{\alpha_1\alpha_2}^b b_{\alpha_1} b_{\alpha_2} + \mathcal{K}_{\alpha_1\alpha_2}^f \bar{f}_{\alpha_1} f_{\alpha_2}, \\ \mathcal{D}[b, f, \bar{f}] &= \prod_{\alpha} \frac{db_{\alpha}}{\sqrt{2\pi}} \prod_{\alpha'} d\bar{f}_{\alpha'} df_{\alpha'}. \end{aligned}$$

On obtient alors [3] :

$$\mathcal{Z}[\nu, \eta, \bar{\eta}] = \frac{\det(\mathcal{K}^f)}{\sqrt{\det(\mathcal{K}^b)}} \exp \left\{ \bar{\eta} \cdot [\mathcal{K}^f]^{-1} \cdot \eta + \frac{1}{2} \nu \cdot [\mathcal{K}^b]^{-1} \cdot \nu \right\}. \quad (1.36)$$

Ces expressions sont utiles pour comprendre la démonstration de certaines équations de flot⁵ pour le groupe de renormalisation, et permettent de comprendre leur structure, comme on va le voir au chapitre suivant.

1.2 Construction de modèles par les symétries

Discutons à présent de la structuration de l'action $\mathcal{S}[\varphi]$ ⁶. On peut distinguer principalement deux chemins pour déduire les modèles traités dans le présent travail. La première consiste à écrire l'action la plus générale pour des électrons et des noyaux atomiques en interaction coulombienne⁷, puis d'effectuer les opérations de simplifications successives conduisant au modèle de Hubbard et à ses extensions. Ici, on privilégie une autre route, qui est celle de la phénoménologie. On considère un système purement fermionique dès le début, puis l'on se restreint à des actions possédant des structures de plus en plus restrictives en tenant compte des symétries du problème attendues, qui sont celles des systèmes électroniques unidimensionnels, nous menant au modèle de Hubbard et à ses extensions. Les symétries du modèle de Hubbard sont par exemple traitées dans [23]. Cependant, pourquoi se donner tant de mal à déduire des modèles si simples? Les considérations à propos des symétries donnent en fait des indications à propos des fluctuations susceptibles de dominer, et permettent de construire les observables $\theta_{\mathbf{a}}[\varphi]$ qu'il faut sonder.

5. Le terme de "flot" est utilisé dans la suite du manuscrit, car il fait référence à la notion de "flot d'un champ de vecteurs", que l'on rencontre dans la littérature mathématique francophone. Cependant, on pourrait tout à fait lui préférer le terme d'"écoulement".

6. Cela nécessite un peu de modélisation mathématique. Cette partie est surtout utile pour avoir une bonne image mentale de la situation, et donner une explication à la classification des états fondamentaux.

7. On peut en quelque sorte dire que les physiciens de la matière condensée ont le luxe de connaître la "théorie du tout" de leur discipline résumée en une action, mais il est en pratique impossible d'en tirer des conclusions directement à partir de celle-ci.

1.2. Construction de modèles par les symétries

Pour mener à bien ce programme, il est nécessaire de s'intéresser à la structure de l'espace E auquel appartiennent les indices α . Celui-ci possède souvent une structure d'espace fibré (nous n'entrerons pas dans les détails, voir par exemple [42]) ce qui signifie essentiellement qu'il existe deux espaces M et F et une surjection $\pi : E \rightarrow M$ telle que $\pi^{-1}(x) \equiv F_x \cong F$. On dit que M est l'*espace de base* tandis que F est la *fibre typique*. On considérera uniquement la situation où la fibre typique est un espace vectoriel de dimension finie. Dans le cas où M est une variété différentielle, des conditions de compatibilité avec la structure différentielle doivent être ajoutées à la définition des espaces fibrés, mais dans notre cas la situation est plus simple puisque M sera un *réseau*, c'est-à-dire une collection dénombrable de points de \mathbb{R}^d engendrée par un point $x \in \mathbb{R}^d$ ainsi qu'un sous-groupe discret du groupe des translations⁸. Dans ce cas, on a simplement $E \cong M \times F$ et un point de E s'écrit donc de façon unique $\alpha = (x, u)$. On va de plus considérer un groupe G qui agit sur E via une collection de représentations $\rho_x : G \rightarrow \text{GL}(F_x)$ pour tout $x \in M$. Cela signifie que si les (u_i) forment une base de F_x , alors on peut écrire pour tout $u = a_i u_i \in F_x$:

$$\rho_x(g)(a_i u_i) = a_i \rho_x(g)(u_i) = a_i \rho_x(g)_{ij} u_j, \quad (1.37)$$

où $(\rho_x(g)_{ij})$ est la matrice de $\rho_x(g)$ dans la base (u_i) .

Pour faire la connexion avec les systèmes fermioniques, il faut faire appel à une algèbre \mathbf{A} . Dans notre cas, cette algèbre correspond à l'algèbre des variables de Grassmann. Il s'agit d'une algèbre graduée, c'est-à-dire qu'elle s'écrit comme une somme directe :

$$\mathbf{A} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k, \quad \mathbf{A}^0 = \mathbb{C}, \quad (1.38)$$

et la graduation signifie simplement que l'on a $\mathbf{A}^k \mathbf{A}^p \subset \mathbf{A}^{k+p}$. Cette algèbre est engendrée par les éléments $\theta, \theta' \in \mathbf{A}^1$ qui satisfont à l'identité suivante (prove-

⁸. En physique de la matière condensée topologique, la notion de fibré est nécessaire à la définition de la courbure de Berry, et dans ce cas l'espace de base est donné par la première zone de Brillouin.

nant bien sûr de la relation (1.9)) :

$$\theta\theta' + \theta'\theta = 0. \quad (1.39)$$

Le lien entre l'algèbre \mathbf{A} et le fibré E se fait au moyen d'une application $\varphi : E \rightarrow \mathbf{A}^1$ telle que pour tous $x \in M$, tout $a \in \mathbb{C}$ et tous $u_1, u_2 \in F_x$:

$$\varphi_{x, au_1 + u_2} = a\varphi_{x, u_1} + \varphi_{x, u_2},$$

et de plus, φ doit impliquer la décomposition suivante :

$$\mathbf{A}^1 = \bigoplus_{x \in M} \left(\mathbf{A}_x^1 \equiv \varphi(x, F_x) \right), \quad \mathbf{A}_x^1 \cong F_x \cong F. \quad (1.40)$$

Il faut à présent se demander comment faire agir un groupe G sur l'algèbre \mathbf{A} , et comment utiliser les représentations de G pour produire des modèles possédant une invariance par action de ce groupe. Soit donc un groupe de Lie (on prend en fait le même groupe G qui agit sur E). On suppose que l'on connaît toutes ses représentations irréductibles, et l'on note $\pi_j : G \rightarrow GL(V_j)$ ces représentations (il faut prendre en compte en plus les représentations duales $\bar{\pi}_j : G \rightarrow GL(V_j^*)$ telles que $\bar{\pi}_j(g) = \pi_j(g)^\dagger$ pour tout $g \in G$). On fait de plus l'hypothèse que la fibre standard F est une somme directe de représentations irréductibles de G . Une action de G sur l'algèbre \mathbf{A} est alors naturellement donnée par une application $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{A})$, où $\text{Aut}(\mathbf{A})$ désigne les automorphismes⁹ de l'algèbre \mathbf{A} , c'est-à-dire que l'on doit avoir pour tout $a \in \mathbb{C}$, et tous $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathbf{A}$:

$$\rho(g)(a\theta_1\theta_2 + \theta_3) = a\rho(g)(\theta_1)\rho(g)(\theta_2) + \rho(g)(\theta_3). \quad (1.41)$$

On cherche alors à déterminer une action de groupe ρ qui soit compatible avec l'application $\varphi : E \rightarrow \mathbf{A}^1$. On peut en fait définir une action ρ totalement déterminée par la bijection φ et par les représentations $\rho_x : G \rightarrow GL(F_x) \cong GL(\mathbf{A}_x^1)$ qui nous permettent d'écrire, en utilisant les définitions précédentes :

$$\rho(g)(\varphi_{(x,u)}) \equiv \varphi_{(x, \rho_x(g)(u))} = \varphi_{(x, a_i \rho_x(g)_{ij} u_j)} = a_i \rho_x(g)_{ij} \varphi_{(x, u_j)}. \quad (1.42)$$

⁹. Pour rappel, un automorphisme de \mathbf{A} est un élément $f \in GL(\mathbf{A})$ qui préserve la structure d'algèbre, c'est-à-dire que l'on a $f(\theta_1\theta_2) = f(\theta_1)f(\theta_2)$ pour tous $\theta_1, \theta_2 \in \mathbf{A}$.

Dans la suite, pour simplifier l'écriture, on notera :

$$\varphi_\alpha = \varphi_{(x,u_i)} = \varphi_{xi}.$$

Un élément $\theta \in \mathbf{A}$ est *invariant par action de G* si l'on a $\rho(g)(\theta) = \theta$. Les éléments invariants sont à déterminer impérativement pour pouvoir trouver des lagrangiens adéquats, on dit alors de façon informelle qu'il "possèdent la symétrie G ". Plus généralement, on s'intéresse aux sous-espaces vectoriels V_α de \mathbf{A} stables par action du groupe G . Par définition, V_α est *stable par action de G* s'il existe une représentation $\rho_\alpha : G \rightarrow \text{GL}(V_\alpha)$ obtenue par restriction de ρ à V_α , c'est-à-dire que l'on a $\rho_\alpha = \rho|_{V_\alpha}$. Par exemple, les sous-espaces \mathbf{A}_x^1 sont laissés stables par action de ρ , ce qui est précisément l'effet escompté. À présent, intéressons-nous au cas où V_α est un sous-espace de \mathbf{A}^2 . Les éléments d'une base de V_α peuvent être écrits sous la forme $A_\mu^\alpha = A_{\mu;yj;xi}^\alpha \varphi_{yj} \varphi_{xi}$, avec $A_{\mu;yj;xi}^\alpha \in \mathbb{C}$. Tout élément $\theta \in V_\alpha$ s'écrit $\theta = \vartheta_\mu A_\mu^\alpha$, avec $\vartheta_\mu \in \mathbb{C}$. Ainsi, l'action de G sur θ s'écrit :

$$\rho(g)(\theta) = \vartheta_\mu \rho_V(g)(A_\mu^\alpha) = \vartheta_\mu \rho(g)_{\mu\nu} A_\nu^\alpha = \vartheta_\mu \rho_\alpha(g)_{\mu\nu} A_{\nu;yj;xi}^\alpha \varphi_{yj} \varphi_{xi}, \quad (1.43)$$

où $(\rho_\alpha(g)_{\mu\nu})$ est la matrice de $\rho_\alpha(g)$ dans la base (A_μ^α) . Par ailleurs, l'action de $\rho(g)$ sur θ s'écrit :

$$\rho(g)(\theta) = \vartheta_\mu A_{\nu;yj';xi'}^\alpha \rho_y(g)_{j'j} \rho_x(g)_{i'i} \varphi_{yj} \varphi_{xi}, \quad (1.44)$$

ce qui nous conduit à l'identification suivante :

$$\rho_\alpha(g)_{\mu\nu} A_{\nu;yj;xi}^\alpha = \rho_y(g)_{j'j} \rho_x(g)_{i'i} A_{\mu;yj';xi'}^\alpha. \quad (1.45)$$

Les représentations ρ_α que l'on peut construire sont classées en deux ensembles : les représentations "scalaires", c'est-à-dire celles qui produisent des éléments $\theta \in \mathbf{A}^2$ invariants, et les autres. Les scalaires θ servent naturellement à construire des actions à un corps. En fait, pour tout couple $(x, y) \in M^2$, il sera en général possible de construire des éléments θ_{yx}^a (où a est un indice discret) se transformant comme des scalaires, et qui sont linéairement indépendants. En conséquence, une action à un corps $\mathcal{S}_1[\varphi]$ aura l'allure suivante (avec utilisation convention de

sommation) :

$$\mathcal{S}_1[\varphi] = t_{yx}^a \theta_{yx}^a [\varphi]. \quad (\text{I.46})$$

On utilise ensuite les représentations $\rho_{\mathbf{a}}$ restantes, et on cherche les applications bilinéaires $Q_{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2} : V_{\mathbf{a}_1} \times V_{\mathbf{a}_2} \rightarrow \mathbf{A}^4$ qui produisent des invariants, c'est-à-dire :

$$\rho(g)(Q_{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2}(\theta_1, \theta_2)) = Q_{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2}(\rho_{\mathbf{a}_1}(g)(\theta_1), \rho_{\mathbf{a}_2}(g)(\theta_2)) = Q_{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2}(\theta_1, \theta_2). \quad (\text{I.47})$$

Les éléments $Q_{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2}(\theta_1, \theta_2)$ servent alors à construire des actions à deux corps décrivant des termes d'interactions. Par exemple, le cas le plus simple est celui où l'on a $V_{\mathbf{a}_2} = V$ et $V_{\mathbf{a}_1} = V^*$. Un autre cas est celui pour lequel V est muni d'un produit scalaire tel que $\rho_{\mathbf{a}}(G)$ est un sous-groupe du groupe des isométries associées à ce produit scalaire. Dans la pratique, on rencontrera ces deux cas.

Enfin, discutons de l'inclusion de champs sources pertinents, c'est-à-dire des termes $J_{\mathbf{a}} \theta_{\mathbf{a}}[\varphi]$. Ces termes se transforment par définition dans la représentation scalaire. L'idée est de prendre un champ source dans la représentation V^* , par analogie avec ce qui a été expliqué dans le paragraphe précédent.

Traisons à présent le cas utile pour la suite, c'est-à-dire celui des électrons sur un réseau. On cherche à construire des modèles sur réseau invariants par action du groupe $G = U(1) \times SU(2)$. En effet, le groupe $U(1)$ est lié à la conservation de la charge tandis que $SU(2)$ est associé à la conservation du spin. Ce groupe possède des représentations irréductibles V_j indexées par un demi-entier $j \geq 0$. Dans le cas où il n'y a qu'un bande, un site atomique ne peut accueillir qu'un électron par orientation du spin. De façon complémentaire, on peut raisonner en termes de trous. Ainsi, la fibre standard est donnée par :

$$F = V_{1/2} \oplus V_{1/2}^*. \quad (\text{I.48})$$

Ainsi, les variables de Grassmann sont de la forme $\psi_{x\sigma}$ et $\bar{\psi}_{x\sigma}$. Cette forme nous permet de munir l'algèbre \mathbf{A} d'une *involution* $(\cdot)^\dagger : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$, telle que, pour tout

1.2. Construction de modèles par les symétries

$\alpha \in \mathbb{C}$ et pour tous $\theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbf{A}^1$:

$$\begin{aligned}
 (\alpha\theta_1 + \theta_2)^\dagger &= \alpha^* \theta_1^\dagger + \theta_2^\dagger, \\
 (\theta_1\theta_2)^\dagger &= \theta_2^\dagger \theta_1^\dagger, \\
 (\theta^\dagger)^\dagger &= \theta, \\
 \psi_{x\sigma}^\dagger &= \bar{\psi}_{x\sigma}, \\
 \bar{\psi}_{x\sigma}^\dagger &= \psi_{x\sigma}.
 \end{aligned} \tag{I.49}$$

Un élément \mathbf{A} est hermitien s'il est tel que $\theta^\dagger = \theta$. Il est de plus pratique d'introduire la notation spinorielle Ψ_x :

$$\Psi_x = \begin{pmatrix} \psi_{x\uparrow} \\ \psi_{x\downarrow} \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}_x = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_{x\uparrow} \\ \bar{\psi}_{x\downarrow} \end{pmatrix}, \tag{I.50a}$$

$$\Psi_x^\dagger = (\psi_{x\uparrow} \quad \psi_{x\downarrow}), \quad \bar{\Psi}_x^\dagger = (\bar{\psi}_{x\uparrow} \quad \bar{\psi}_{x\downarrow}). \tag{I.50b}$$

On peut alors construire les représentations V mentionnées au paragraphe précédent. Cette construction utilise en fait des propriétés bien connues de la combinaison des moments cinétiques. En effet, on souhaite combiner deux particules de spin $1/2$ (un électron ou un trou avec un électron ou un trou), ce qui donne obligatoirement une paire de spin 0 et une paire de spin 1 . Si un électron porte une charge $-e$, alors une paire électron-électron porte naturellement une charge $-2e$, tandis qu'une paire de trous porte une charge $+2e$. Enfin, une paire électron-trou est électriquement neutre. Pour toute paire de points (x, y) , on peut donc construire les opérateurs quadratiques $S_{yx}^\mu = (S_{yx}^0 = \rho_{yx}, \vec{S}_{yx})$ et $\Delta_{yx}^\mu = (\Delta_{yx}^0, \vec{\Delta}_{yx})$ associés respectivement au canal électron-trou et électron-électron, définis par :

$$S_{yx}^\mu[\psi, \bar{\psi}] = \frac{1}{2} \left(\bar{\psi}_{y\sigma} \sigma_{\sigma\sigma'}^\mu \psi_{x\sigma'} + \text{H.c.} \right) = \frac{1}{2} \Psi_y^\dagger \sigma^\mu \Psi_x + \text{H.c.}, \tag{I.51a}$$

$$\Delta_{yx}^\mu[\psi, \bar{\psi}] = \psi_{y\sigma} \pi_{\sigma\sigma'}^\mu \psi_{x\sigma'} = \Psi_y^\dagger \pi^\mu \Psi_x, \tag{I.51b}$$

où les matrices σ^μ sont les matrices de Pauli, et de plus $\pi^\mu = i\sigma^2 \sigma^\mu$.

Seuls les opérateurs $\rho_{yx}[\psi, \bar{\psi}]$ peuvent être utilisés pour produire une action

1.2. Construction de modèles par les symétries

à un corps convenable, car il sont invariants par action de $U(1) \times SU(2)$. On peut donc écrire de façon générale :

$$\mathcal{S}_1[\psi, \bar{\psi}] = t_{yx} \rho_{yx}[\psi, \bar{\psi}]. \quad (1.52)$$

Si l'action est hermitienne, alors on doit avoir :

$$t_{yx}^* = t_{xy}. \quad (1.53)$$

Le terme purement local t_{xx} correspond au terme de potentiel chimique. Pour la suite, on se restreindra à un modèle très simplifié pour lequel seul les premiers termes non-locaux sont conservés, c'est-à-dire que les seuls termes t_{xy} non nuls sont ceux pour lesquels x et y sont plus proches voisins. De plus, les termes de saut sont supposés homogènes, c'est-à-dire que l'on a $t_{xy} = t$ si $t_{xy} \neq 0$. On notera donc, en rétablissant les sommes :

$$\mathcal{S}_1[\psi, \bar{\psi}] = t \sum_{\langle x,y \rangle} B_{yx}[\psi, \bar{\psi}] - \mu \sum_x n_x[\psi, \bar{\psi}], \quad (1.54)$$

où l'on a utilisé les notations standard pour l'opérateur de saut $B_{yx}[\psi, \bar{\psi}] = \rho_{yx}[\psi, \bar{\psi}]$, et pour l'opérateur nombre de particules au point x , $n_x[\psi, \bar{\psi}] = \rho_{xx}[\psi, \bar{\psi}]$. Notons que l'opérateur nombre se scinde en deux opérateurs différentiant l'orientation du spin $n_x[\psi, \bar{\psi}] = n_{x\uparrow}[\psi, \bar{\psi}] + n_{x\downarrow}[\psi, \bar{\psi}]$.

La forme générale d'une action d'interaction hermitienne à deux corps s'écrit grâce aux opérateurs S et Δ de la façon suivante (où la convention de sommation sur les indices est utilisée) :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2[\psi, \bar{\psi}] = & V_{yx, y'x'}^t \vec{\Delta}_{yx}[\psi, \bar{\psi}]^\dagger \cdot \vec{\Delta}_{y'x'}[\psi, \bar{\psi}] \\ & + V_{yx, y'x'}^s \Delta_{yx}^0[\psi, \bar{\psi}]^\dagger \Delta_{y'x'}^0[\psi, \bar{\psi}] \\ & + V_{yx, y'x'}^\sigma \vec{S}_{yx}[\psi, \bar{\psi}] \cdot \vec{S}_{y'x'}[\psi, \bar{\psi}] \\ & + V_{yx, y'x'}^\rho \rho_{yx}[\psi, \bar{\psi}] \rho_{y'x'}[\psi, \bar{\psi}]. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Les conditions d'hermiticité de l'action s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 (V_{yx, y'x'}^s)^* &= V_{y'x', yx}^s, \\
 (V_{yx, y'x'}^t)^* &= V_{y'x', yx}^t, \\
 (V_{yx, y'x'}^\rho)^* &= V_{y'x', yx}^\rho, \\
 (V_{yx, y'x'}^\sigma)^* &= V_{y'x', yx}^\sigma.
 \end{aligned} \tag{1.56}$$

De plus, les propriétés de symétrie $\rho_{xy} = \rho_{yx}$ et $\vec{S}_{xy} = \vec{S}_{yx}$ impliquent les égalités suivantes :

$$V_{yx, y'x'}^{\rho, \sigma} = V_{xy, y'x'}^{\rho, \sigma} = V_{yx, x'y'}^{\rho, \sigma} = V_{xy, x'y'}^{\rho, \sigma}. \tag{1.57}$$

L'action précédente est en général non locale puisqu'elle couple *a priori* tous les points du réseau. Le cas le plus simple est celui d'une action local et homogène, pour laquelle les termes d'interaction sont spécifiés par seulement quatre constantes réelles $g_s, g_t, g_\rho, g_\sigma$ telles que :

$$\begin{aligned}
 V_{yx, y'x'}^s &= g_s \delta_{yx} \delta_{y'x'}, \\
 V_{yx, y'x'}^t &= g_t \delta_{yx} \delta_{y'x'}, \\
 V_{yx, y'x'}^\rho &= g_\rho \delta_{yx} \delta_{y'x'}, \\
 V_{yx, y'x'}^\sigma &= g_\sigma \delta_{yx} \delta_{y'x'},
 \end{aligned} \tag{1.58}$$

ce qui simplifie drastiquement la forme de l'action d'interaction¹⁰ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_2[\psi, \bar{\psi}] &= \sum_x g_t \vec{\Delta}_x[\psi, \bar{\psi}]^* \cdot \vec{\Delta}_x[\psi, \bar{\psi}] + g_s \Delta_x^0[\psi, \bar{\psi}]^* \Delta_x^0[\psi, \bar{\psi}] \\
 &\quad + g_\sigma \vec{S}_x[\psi, \bar{\psi}] \cdot \vec{S}_x[\psi, \bar{\psi}] \quad (+ g_\rho n_x[\psi, \bar{\psi}] n_x[\psi, \bar{\psi}]).
 \end{aligned} \tag{1.59}$$

Le cas le plus simple est celui où seule g_σ est non nulle, qui correspond au modèle de Hubbard. Dans ce travail, cependant, on considérera l'effet de termes non locaux. Le terme en g_ρ est entre parenthèses puisque c'est en fait un terme à un corps, car pour des fermions, en raison du principe de Pauli, on a $n_x^2 = n_x$.

¹⁰. On a simplement noté $X_{xx} = X_x$.

Discutons à présent des champs sources qu'il est pertinent d'inclure dans l'action. Étant donné que l'action d'interaction est restreinte à des termes à deux corps, il est naturel de sonder les états fondamentaux obtenus par appariement. Cela nous fait donc quatre champs sources $\vec{J}^t, J^s, \vec{J}^\sigma, J^\rho$, qui nous permettent d'écrire un terme $\mathcal{S}_g[\psi, \bar{\psi}, J]$ ayant la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_g[\psi, \bar{\psi}, J] &= \vec{\Delta}_{yx}[\psi, \bar{\psi}]^\dagger \cdot \vec{J}_{yx}^t + \text{H.c.} \\ &+ (\Delta_{yx}^0[\psi, \bar{\psi}])^\dagger J_{yx}^s + \text{H.c.} \\ &+ \vec{J}_{yx}^\sigma \cdot \vec{S}_{yx}[\psi, \bar{\psi}] + J_{yx}^\rho \rho_{yx}[\psi, \bar{\psi}]. \end{aligned} \quad (1.60)$$

En résumé, l'action microscopique $\mathcal{S}[\psi, \bar{\psi}, J]$ est une somme de trois termes :

$$\mathcal{S}[\psi, \bar{\psi}, J] = \mathcal{S}_1[\psi, \bar{\psi}] + \mathcal{S}_2[\psi, \bar{\psi}] + \mathcal{S}_g[\psi, \bar{\psi}, J]. \quad (1.61)$$

1.3 Systèmes fermioniques unidimensionnels et g -ologie

Nous sommes à présent en mesure de spécialiser la discussion au cas unidimensionnel. Nous considérons donc un réseau unidimensionnel contenant L atomes régulièrement espacés les uns des autres (à la fin des calculs, on prendra toujours la limite thermodynamique pour supprimer les éventuels effets de taille finie, ce qui revient à prendre la limite $L \rightarrow \infty$). Dans ce cas, la mesure d'intégration est donnée par :

$$\mathcal{D}[\psi, \bar{\psi}] = \prod_{K, \sigma} d\bar{\psi}_\sigma(K) d\psi_\sigma(K). \quad (1.62)$$

avec $K = (k, \omega_n)$, où k désigne l'impulsion (cristalline) définie dans la première zone de Brillouin $\text{BZ1} = [-\pi, \pi]$, tandis que les $\omega_n = (2n + 1)\pi T$ sont les fréquences de Matsubara fermioniques (voir annexe A pour les conventions de transformation de Fourier). Les deux premiers termes de l'action prennent alors

1.3. Systèmes fermioniques unidimensionnels et g -ologie

La relation de dispersion $\xi(k)$ s'écrit en général $\xi(k) = \varepsilon(k) - \mu$, où $\varepsilon(k)$ donne le spectre à un corps, tandis que μ est le potentiel chimique. Le vecteur d'onde de Fermi $k_F \geq 0$ est par définition solution de l'équation $\xi(k_F) = 0$. Il marque donc la séparation entre états occupés et états vides (lorsque la température tend vers 0). La relation de dispersion $\xi(k)$ sera supposée monotone sur $[0, \pi]$. De plus, la vitesse de Fermi v_F est définie par :

$$v_F = \left. \frac{\partial \xi}{\partial k} \right|_{k_F}. \quad (1.65)$$

L'existence de la surface de Fermi (qui est bien sûr réduite à deux points dans le cas $1D$ à une bande avec relation de dispersion monotone) implique que les propriétés de basse énergie de tous les modèles devraient se réduire à l'étude d'un même modèle.

Tout d'abord, au voisinage de la surface de Fermi, on peut écrire $k = \eta k_F + (k - \eta k_F)$ avec $\eta = \text{sgn } k$. Le spectre $\xi(k)$ peut alors être linéarisé en ηk_F :

$$\xi(k) = \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial k} \right|_{\eta k_F} (k - \eta k_F) = \eta v_F (k - \eta k_F) = v_F (|k| - k_F) + \dots$$

Plus précisément, le spectre linéarisé prend la forme suivante (il faut en effet pouvoir considérer une impulsion quelconque, que l'on ramène dans la première zone de Brillouin) :

$$\xi(k) = \begin{cases} v_F (|k| - k_F) & \text{si } k \in \text{BZ1}, \\ v_F (|k - \eta 2\pi| - k_F) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.66)$$

Ensuite, les processus de basse énergie se déroulant nécessairement dans le voisinage de la surface de Fermi, cela implique que les impulsions des électrons sont localisées autour de $\pm k_F$. Il en résulte une classification des différents pro-

1.3. Systèmes fermioniques unidimensionnels et g -ologie

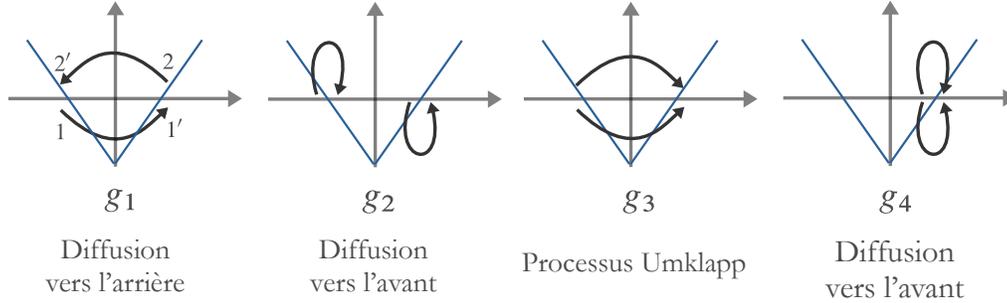


FIG. 1.1 – *Processus de diffusion à deux électrons aux basses énergies. L'existence des deux points de Fermi montre que ces processus peuvent être divisés en trois types : diffusion vers l'arrière associée à g_1 , diffusion vers l'avant associée à g_2 et g_4 et enfin processus Umklapp associés à g_3 .*

cessus de diffusion que voici :

$$\begin{aligned}
 g_1 &\equiv g_{+k_F, -k_F, -k_F} = g_{-k_F, +k_F, +k_F}, && \text{(diffusion vers l'arrière)} \\
 g_2 &\equiv g_{+k_F, -k_F, +k_F} = g_{-k_F, +k_F, -k_F}, && \text{(diffusion vers l'avant)} \\
 g_3 &\equiv g_{+k_F, +k_F, -k_F} = g_{-k_F, -k_F, +k_F}, && \text{(processus Umklapp)} \\
 g_4 &\equiv g_{+k_F, +k_F, +k_F} = g_{-k_F, -k_F, -k_F}. && \text{(diffusion vers l'avant)}
 \end{aligned}$$

Ces processus sont ainsi classés en trois types (diffusion vers l'avant, vers l'arrière et processus Umklapp). Ils sont illustrés à la figure 1.1. Les processus Umklapp sont le seul vestige du réseau. Ils ne sont en effet possibles que parce que les impulsions sont conservées à un vecteur du réseau réciproque près, qui nous permet d'ailleurs de faire les identifications suivantes :

$$3k_F \leftrightarrow -k_F, \quad -k_F \leftrightarrow 3k_F. \quad (1.67)$$

Précisons la représentation diagrammatique des constantes de couplage. Tout d'abord, nous pouvons différencier les branches, c'est-à-dire les voisinages des

deux points de Fermi, ce qui nous donne :

$$k \approx +k_F \rightsquigarrow \longrightarrow, \quad k \approx -k_F \rightsquigarrow \dashrightarrow. \quad (1.68)$$

En conséquence, les constantes de couplage g_1 , g_2 , g_3 , et g_4 sont représentées de la façon suivante (on devrait aussi considérer l'échange des branches $\longrightarrow \leftrightarrow \dashrightarrow$) :

$$\begin{array}{cc}
 g_1 \sim \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \dashrightarrow \end{array} \begin{array}{c} \dashrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \text{ , } & g_2 \sim \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \dashrightarrow \end{array} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \dashrightarrow \end{array} \text{ , } \\
 g_3 \sim \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{c} \dashrightarrow \\ \dashrightarrow \end{array} \text{ , } & g_4 \sim \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \text{ . }
 \end{array} \quad (1.69)$$

Lorsque le spectre linéaire est extrapolé jusqu'aux bords de la bande (en particulier, on a $k_F = \pi/2$ à demi-remplissage), et que les constantes de couplage sont systématiquement projetées sur la surface de Fermi, on obtient alors le *modèle de g -ologie*¹¹ [17]. La linéarisation du spectre est illustrée à la figure 1.2. No-

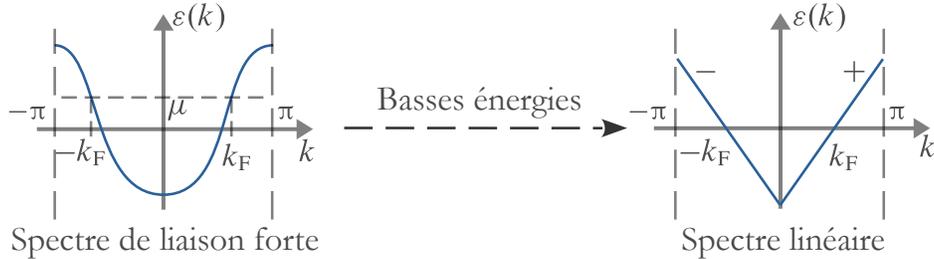


FIG. 1.2 – Linéarisation du spectre autour du niveau de Fermi effectuée pour simplifier l'étude. Cependant dans ce travail, la courbure du spectre sera prise en compte.

tons que pour ce modèle, les couplages sont purement locaux puisqu'ils sont évalués sur la surface de Fermi. Le modèle de g -ologie permet de comprendre les

¹¹. On parle également de *limite du continuum*.

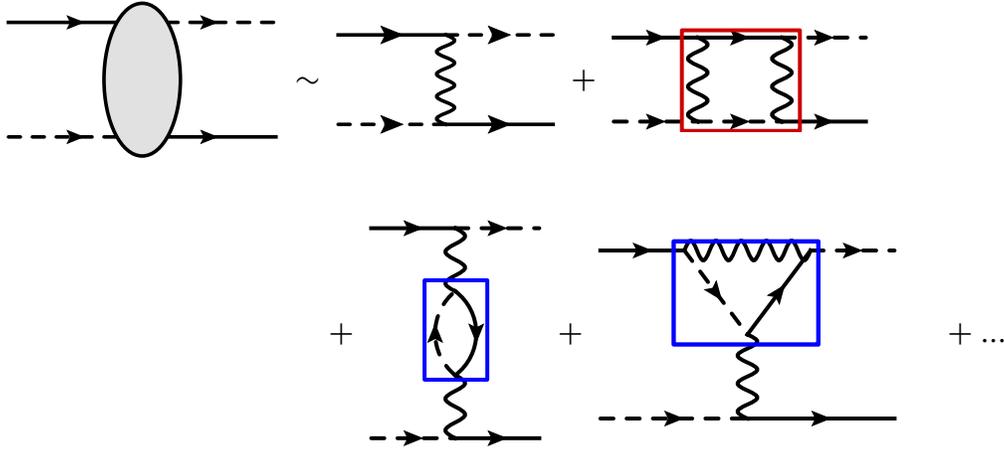


FIG. 1.3 – Premières corrections diagrammatiques à l'amplitude de diffusion vers l'arrière où tous les diagrammes ne sont pas représentés, mais le point important est que la somme sur les états intermédiaires se scinde en deux contributions : celle due aux paires électron-électron (en rouge) et celle due aux paires électron-trou (en bleu).

phénomènes spécifiques aux cas unidimensionnel. Pour les mettre en exergue, considérons le cas d'un couplage faible, pour lequel les méthodes perturbatives sont *a priori* pertinentes. Supposons en particulier que l'on s'intéresse à l'amplitude de diffusion vers l'arrière de deux électrons. D'un point de vue diagrammatique, cette amplitude s'écrit (schématiquement) comme représenté à la figure 1.3. Cette expression fait apparaître une structure présente dans la somme sur les états intermédiaires provenant de la théorie des perturbations : cette somme se scinde en deux contributions. La première est due aux paires électron-électron virtuelles, identifiées par la couleur rouge, et la deuxième est liée aux paires virtuelles électron-trou. Les sommes sur les états intermédiaires sont représentées à la figure 1.4. La bulle rouge L_C , appelée *bulle de Cooper*, correspond aux paires électron-électron, tandis que la bulle bleue L_P , appelée *bulle de Peierls*, correspond aux paires électron-trou. L'existence de ces deux canaux n'est absolument pas spécifique au cas unidimensionnel, car elle résulte simplement de ce que nous avons affaire à des fermions de spin $1/2$ portant une charge électrique. Cepen-



FIG. 1.4 – Bulles de Cooper (en rouge) et de Peierls (en bleu). Dans le cas unidimensionnel, lorsque le spectre possède la propriété de nesting, on obtient $L_C = -L_P \sim \log(\Lambda_0/T)$.

nant, le rapport de ces amplitudes est remarquable dans le cas unidimensionnel, dans la mesure où les deux bulles sont égales à un signe près :

$$L_C = -L_P. \quad (1.70)$$

D'où vient cette égalité? Un simple calcul pour les bulles avec des paires portant des impulsions *a priori* quelconques révèle que leur amplitude est maximale lorsque les paires (on considère $k > 0$) sont de la forme $(+k, -k)$ dans le cas de la bulle de Cooper, et $(k, k - 2k_F)$ dans le cas de la bulle de Peierls. Les expressions de ces deux bulles sont de la forme suivante :

$$L_C \sim \sum_{k \geq 0} \frac{n_F(\xi(k)) - n_F(-\xi(-k))}{\xi(k) + \xi(-k)}, \quad (1.71a)$$

$$L_P \sim \sum_{k \geq 0} \frac{n_F(\xi(k)) - n_F(\xi(k - 2k_F))}{\xi(k) - \xi(k - 2k_F)}, \quad (1.71b)$$

où $n_F(\varepsilon)$ désigne la fonction de Fermi-Dirac à température $T = 1/\beta$:

$$n_F(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} + 1}. \quad (1.72)$$

Or, le spectre linéaire possède en dimension 1 une propriété bien particulière, appelée *nesting*, c'est-à-dire :

$$\xi(k - 2k_F) = -\xi(-k). \quad (1.73)$$

ce qui implique la relation (1.75). Cela signifie d'un point de vue quantique que l'on a affaire à deux amplitudes qui interfèrent de façon destructive, et il n'est

donc pas possible de traiter un seul canal au détriment de l'autre. C'est cependant ce que l'on fait lorsque l'on traite la théorie BCS, ce qui est justifié lorsque l'on considère un matériau de dimensionnalité plus élevée, impliquant une contribution moindre du canal électron-trou par rapport au canal électron-électron.

L'interférence destructive des deux canaux de diffusion n'est cependant pas le fin mot de l'histoire. Nous n'avons en effet pas mentionné un détail : le calcul perturbatif est-il correct ? Très schématiquement, le calcul perturbatif de l'amplitude de diffusion \bar{g} donne une expression de la forme suivante :

$$\bar{g} \sim g + Lg^2 + \dots \quad (1.74)$$

Pour que ce calcul soit justifié physiquement, il est nécessaire que le terme Lg^2 soit suffisamment petit devant g , ce qui demande, certes, que les constantes de couplage soient petites, mais également que le coefficient L soit suffisamment petit. Or, après évaluation des expressions (1.71b), il vient :

$$L_C = -L_P \sim \log \frac{\Lambda_0}{T}, \quad (1.75)$$

où Λ_0 est typiquement de l'ordre de la largeur de la bande. Ainsi, lorsque la température T tend vers 0, le calcul perturbatif devient incorrect puisque le terme Lg^2 peut devenir arbitrairement grand devant g ! Comment alors gérer cette situation ? S'il n'y avait qu'un seul canal, il serait possible d'effectuer une resommation de la série perturbative, qui se réduirait alors essentiellement à la somme d'une série géométrique, qu'il faudrait ensuite prolonger analytiquement pour pouvoir aller à des températures arbitrairement basses. Là encore, c'est exactement ce que l'on ferait dans la théorie BCS. Mais dans notre cas, l'interférence des canaux nous empêche pratiquement d'effectuer cette simple resommation¹². Le groupe de renormalisation, expliqué au chapitre suivant, est une méthode qui permet d'effectuer cette resommation compliquée en intégrant progressivement les états intermédiaires.

¹². Il est tout de même envisageable d'effectuer cette resommation, au prix d'une technicité élevée [17], avec la méthode des diagrammes parquet.

1.4 Modèle de Fermi-Hubbard étendu

Le but du présent projet est d'obtenir le diagramme de phase du modèle de Fermi-Hubbard étendu unidimensionnel à une bande en fonction du remplissage. Le hamiltonien que nous allons donc considérer a la forme suivante :

$$\mathcal{H} = -t \sum_{\langle x,y \rangle} B_{xy} + U \sum_x n_{x\uparrow} n_{x\downarrow} + V \sum_x n_x n_{x+1}. \quad (1.76)$$

Les effets de chacun des termes de ce hamiltonien sont illustrés à la figure 1.5. Le premier terme, à un corps, est cinétique, il décrit des sauts d'électrons de plus proches voisins en plus proches voisins : c'est le hamiltonien de liaisons fortes. Les deux derniers termes sont quartiques, c'est-à-dire qu'ils décrivent des interactions à deux corps. Le terme en U est le terme de Hubbard, qui correspond aux interactions sur un même site atomique. Le second terme d'interaction en V décrit une interaction électronique de type densité-densité, sur des sites plus proches voisins.

Le diagramme de phase cherché sera tracé dans le plan $(U/t, V/t)$, avec des coupes en μ . Il est possible de se faire une intuition quant à l'allure d'une partie du diagramme de phase de ce modèle à demi-remplissage (soit $\mu = 0$). On peut en effet examiner trois cas distincts, illustrés à la figure 1.6 :

- Supposons tout d'abord que le terme cinétique est dominant, dans ce cas, on a simplement un système d'électrons libres avec une bande demi-remplie, c'est-à-dire un métal.
- Maintenant supposons que le terme U est dominant et positif. Dans ce cas, les configurations électroniques avec double occupation des sites atomiques sont largement défavorisées. De plus, la présence du terme cinétique que l'on peut considérer comme une perturbation a pour effet de créer un couplage antiferromagnétique entre les spins des électrons se situant sur des sites voisins [4]. Ainsi, dans cette situation, l'état fondamental devrait donc être une onde de densité de spin.
- Enfin, considérons le cas où le terme V domine et est positif. Dans ce cas, pour minimiser l'énergie, il est nécessaire d'alterner l'occupation des sites atomiques entre un site doublement occupé, et un site non-occupé.

1.4. Modèle de Fermi-Hubbard étendu

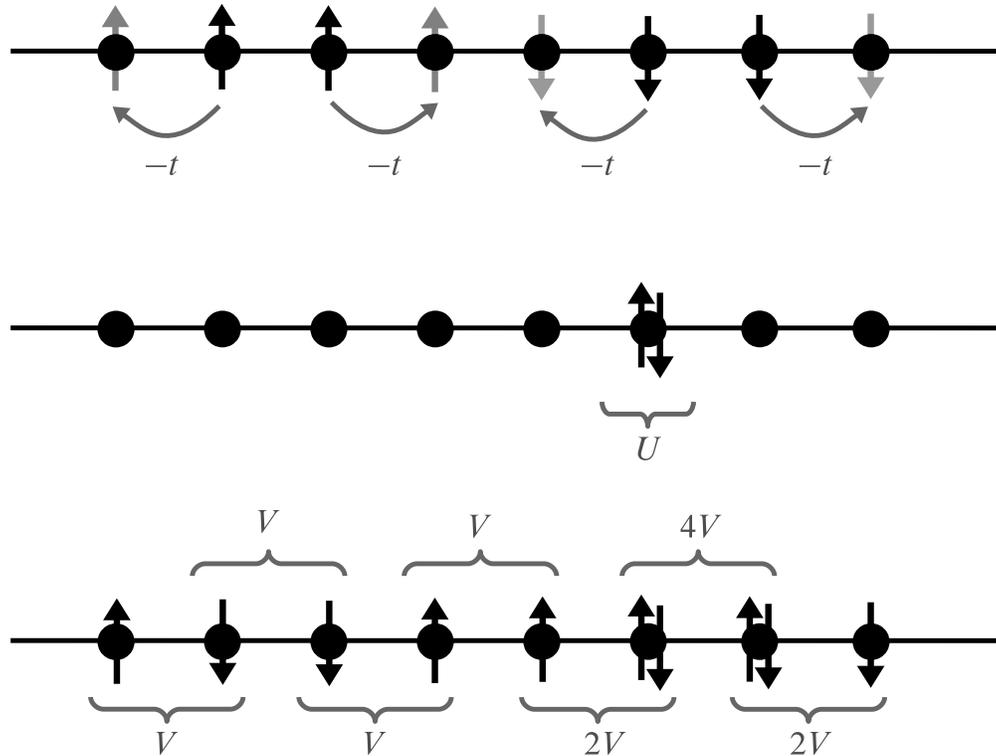


FIG. 1.5 – Illustration des différents termes présents dans le hamiltonien du modèle EH. Le terme cinétique associé au coefficient t décrit les sauts d'électrons entre atomes plus proches voisins et correspond au hamiltonien de liaisons fortes. Le terme d'interaction en U est le terme de Hubbard. Il décrit simplement l'interaction de deux électrons (ayant des spins ayant des orientations opposées) sur un même atome. Enfin, le terme en V décrit une interaction de type densité-densité entre électrons situés sur des atomes plus proches voisins.

Autrement dit, l'état fondamental attendu est une onde de densité de charge.

Dans la suite, on ne va cependant pas se restreindre à ces seuls états fondamentaux, mais on va considérer toutes les possibilités suivantes :

- onde de densité de charge sur site (CDW),

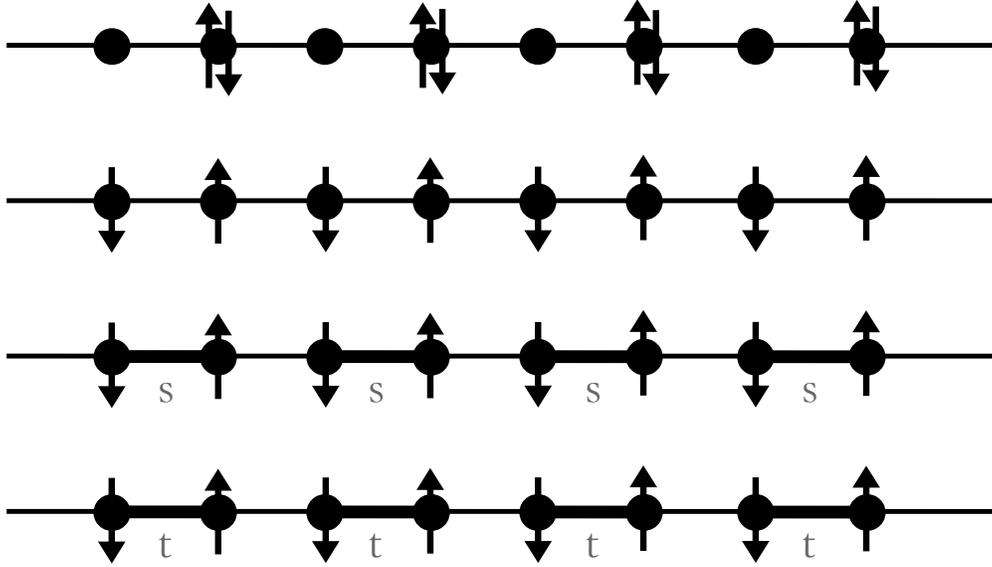


FIG. 1.6 – Illustration des ondes de densité. La ligne du haut illustre une onde de densité de charge centrée sur les sites (CDW pour Charge Density Wave). On voit clairement une modulation de la densité de charges électriques. La deuxième ligne montre une onde de densité de spin centrée sur les sites (SDW pour Spin Density Wave), qui montre une modulation de l'orientation du spin des électrons. Le caractère anti-ferromagnétique de cet état est dû à la présence du terme cinétique. La troisième ligne illustre une onde de densité de charge centrée sur les liens (BOW pour Bond Order Wave), qui correspond à une collection de spins dans un état singulet. Enfin, la dernière ligne représente une onde de densité de spins sur liens (BSDW pour Bond Spin Density Wave) correspondant à une collection de spins dans un état triplet.

- onde de densité de charge sur lien (BOW),
- onde de densité de spin sur site (SDW),
- onde de densité de spin sur lien (BSDW),
- supraconductivité singulet (SS),
- supraconductivité triplet (TS).

Pour chercher ces différents états fondamentaux, il faut que le terme $S_g[\psi, \bar{\psi}, J]$

contenant les champs sources soit décomposé en plusieurs termes dont voici la structure dans l'espace direct et dans l'espace réciproque :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_{\text{chs}}[\psi, \bar{\psi}, J_s] &= \frac{1}{2} \sum_x \int_0^\beta d\tau J_s(x) \Psi_x^\dagger(\tau) \sigma^\mu \Psi_x(\tau) \\
 &= \frac{v_F T}{2L} \sum_{K, K', Q} J_s^\mu(Q) \Psi^\dagger(K') \sigma^\mu \Psi(K) \delta_{K-K'+Q}^{\text{RR}}, \quad (\text{I.77a})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_{\text{ehb}}[\psi, \bar{\psi}, J_b] &= \frac{1}{2} \sum_x J_s^\mu(x + a/2) \int_0^\beta d\tau \left(\Psi_x^\dagger(\tau) \sigma^\mu \Psi_{x+a}(\tau) + \Psi_{x+a}^\dagger(\tau) \sigma^\mu \Psi_x(\tau) \right) \\
 &= \frac{v_F T}{2L} \sum_{K, K', Q} J_b^\mu(Q) \Psi^\dagger(K') \sigma^\mu \Psi(K) \\
 &\quad \times \cos((k + q/2)a) \delta_{K-K'+Q}^{\text{RR}}, \quad (\text{I.77b})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_{\text{ec}}[\psi, \bar{\psi}, J_{\text{sc}}] &= \frac{1}{2} \sum_x \int_0^\beta d\tau \left(\Psi_x^\dagger(\tau) [J_{\text{sc}}^\mu(x) \pi^\mu]^\dagger \bar{\Psi}_x(\tau) + \Psi_x^\dagger(\tau) J^\mu(x) \pi^\mu \Psi_x(\tau) \right) \\
 &= \frac{v_F T}{2L} \sum_{K_1, K_2, Q} \left\{ [\Psi^\dagger(K_1) [J_{\text{sc}}^\mu(Q) \pi^\mu]^\dagger \bar{\Psi}(K_2) \right. \\
 &\quad \left. + \Psi^\dagger(K_2) J^\mu(Q) \pi^\mu \Psi(K_1) \right\} \delta_{K_1+K_2+Q}^{\text{RR}}. \quad (\text{I.77c})
 \end{aligned}$$

Dans ces expressions, l'indice μ va de 0 à 4, la valeur $\mu = 0$ correspondant aux excitations "scalaires". On remarque de plus que le champ source pour \mathcal{S}_{ehb} est centré sur les liens, d'où le fait qu'il soit évalué en $x + a/2$, où a est le pas du réseau, que l'on prend (rappelons-le) égal à 1.

Examinons à présent le modèle dans l'espace de Fourier. Les quatre termes

du hamiltonien se transforment comme suit :

$$\sum_{\langle x,y \rangle} B_{yx} = 2 \sum_{K,\sigma} \cos(k) \bar{\psi}_\sigma(K) c_\sigma(K), \quad (1.78)$$

$$\sum_x n_x = \sum_{k,\sigma} \bar{\psi}_\sigma(K) \psi_\sigma(K), \quad (1.79)$$

$$\sum_x (n_x)^2 = \frac{1}{L} \sum_{\{K,\sigma\}} \bar{\psi}_{\sigma_1}(K'_1) \bar{\psi}_{\sigma_2}(K'_2) \psi_{\sigma_2}(K_2) \psi_{\sigma_1}(K_1) \delta_{K_1+K_2-K'_1-K'_2}^{\text{RR}}, \quad (1.80)$$

$$\begin{aligned} \sum_x n_x n_{x+1} &= \frac{1}{L} \sum_{\{K,\sigma\}} \cos(k_1 - k'_1) \delta_{K_1+K_2-K'_1-K'_2}^{\text{RR}} \\ &\quad \times \bar{\psi}_{\sigma_1}(K'_1) \bar{\psi}_{\sigma_2}(K'_2) \psi_{\sigma_2}(K_2) \psi_{\sigma_1}(K_1), \end{aligned} \quad (1.81)$$

ce qui nous donne donc ($\varepsilon(k) \equiv -2t \cos(k)$) :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_{K,\sigma} (\varepsilon(k) - U/2) \bar{\psi}_\sigma(K) \psi_\sigma(K) \\ &\quad + \frac{\pi v_F}{L} \sum_{\{K,\sigma\}} g(k_1, k_2, k'_1) \delta_{K_1+K_2-K'_1-K'_2}^{\text{RR}} \\ &\quad \quad \times \bar{\psi}_{\sigma_1}(K'_1) \bar{\psi}_{\sigma_2}(K'_2) \psi_{\sigma_2}(K_2) \psi_{\sigma_1}(K_1), \end{aligned} \quad (1.82)$$

avec :

$$g(k_1, k_2, k'_1) = \frac{U}{2\pi v_F} + \frac{V}{\pi v_F} \cos(k_1 - k'_1). \quad (1.83)$$

La dépendance de la constante de couplage en les impulsions traduit bien la non-localité des interactions.

Intéressons-nous maintenant plus en détails à la partie cinétique. Pour la suite, il sera crucial d'introduire l'écart énergétique au niveau de Fermi (on absorbe le terme en $-U/2$ dans le potentiel chimique) :

$$\xi(k) = -2 \cos(k) - \mu.$$

Au niveau de Fermi, $\xi(k_F) = 0$, ce qui nous donne donc $\mu = -2 \cos(k_F)$, qui

est l'expression du potentiel chimique à température nulle. De plus, la vitesse de Fermi est donnée par $v_F = |d\xi/dk|(k_F) = 2|\sin(k_F)| = 2\sqrt{1 - \mu^2/4}$. La densité d'états (volumique) tenant compte du spin s'obtient en écrivant :

$$2 \times \frac{L}{2\pi} dk = L\mathcal{N}(\xi)d\xi,$$

soit finalement :

$$\mathcal{N}(\xi) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - (\xi + \mu)^2/4}}. \quad (1.84)$$

En particulier, sur la surface de Fermi on a $\mathcal{N}(0) = 1/(\pi v_F)$. Dans la pratique,

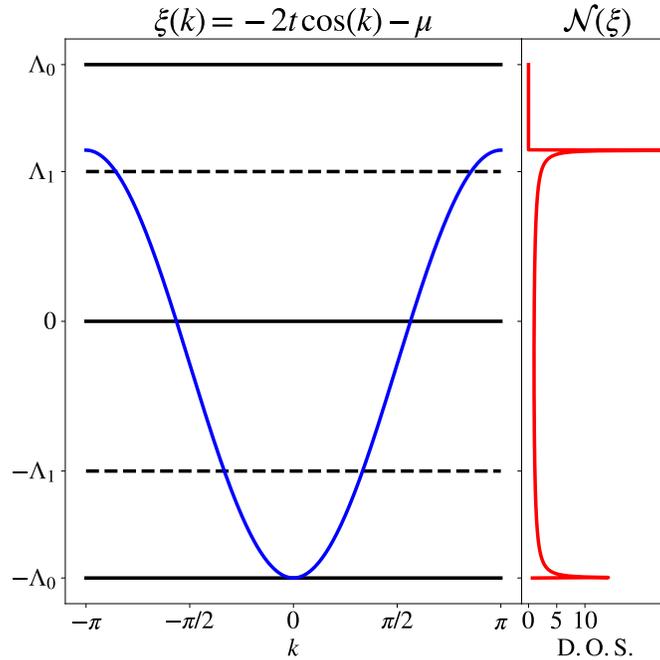


FIG. 1.7 – Le panneau de gauche représente la relation de dispersion de liaisons fortes pour un remplissage différent de 1. Le panneau de droite montre la densité d'états associée et étendue. De plus, la coupure UV initiale $\Lambda_0 = 2t + |\mu|$ apparaît ainsi qu'une coupure $\Lambda < \Lambda_0$ en un point quelconque du flot de RG.

on va avoir besoin d'étendre la densité d'états. En effet, jusqu'à présent, on a l'encadrement $-2 - \mu \leq \xi \leq 2 - \mu$. À partir de maintenant, on va considérer que l'on a l'encadrement $-\Lambda_0 \leq \xi \leq \Lambda_0$, avec $\Lambda_0 = 2t + |\mu|$. La densité d'états étendue est alors donnée par (voir figure 1.7) :

$$\mathcal{N}(\xi) = \frac{\Theta(2 - \mu - \xi)\Theta(2 + \mu + \xi)}{2\pi\sqrt{1 - (\xi + \mu)^2/4}}. \quad (1.85)$$

Cette densité d'états est remarquable car elle possède deux singularités situées

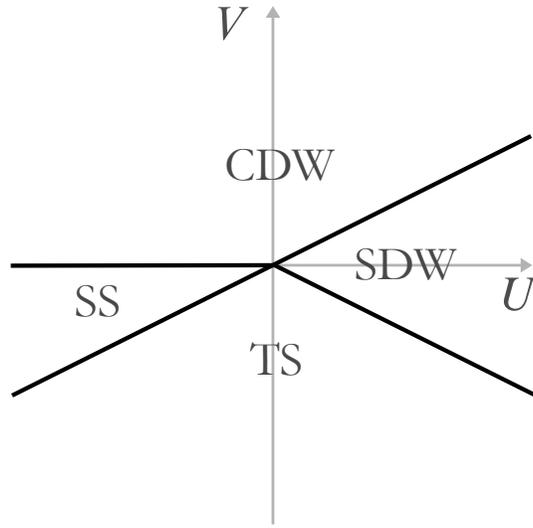


FIG. 1.8 – Diagramme de phase du modèle EH dans la limite du continuum à $\mu = 0$. La frontière CDW-SDW est donnée par la ligne $U = 2V \geq 0$, la frontière SDW-TS est quant à elle donnée par la ligne $U = -2V \geq 0$, la frontière SS-TS correspond à la ligne $U = 2V \leq 0$ et enfin, la frontière SS-CDW est donnée par $V = 0$ pour $U \leq 0$.

en bord de bande, appelées *singularités de van Hove*. L'impact de ces singularités ainsi que leur traitement numérique sera expliqué dans les chapitres suivants. La densité d'états permet de calculer le nombre d'électrons par site n présents dans

le système :

$$n = \int_{-\infty}^0 d\xi \mathcal{N}(\xi) = 2 \int_{-k_F}^{+k_F} \frac{dk}{2\pi} = \frac{2k_F}{\pi}. \quad (1.86)$$

On obtient donc les relations suivantes liant le nombre d'électrons n , le potentiel chimique à température nulle μ ainsi que le vecteur d'onde de Fermi k_F :

$$k_F = \frac{\pi}{2}n, \quad \mu = -2 \cos(\pi n/2) \quad \Longleftrightarrow \quad n = \frac{2}{\pi} \arccos(-\mu/2). \quad (1.87)$$

Une question essentielle se pose au sujet du modèle EH : l'approximation du modèle de g -ologie est-elle suffisante pour obtenir un diagramme de phase qualitativement correct? La plupart des études menées jusqu'à présent se sont concentrées sur le cas du demi-remplissage ($\mu = 0$). Dans ce cas, le diagramme de phase tel que prédit dans la limite du continuum a l'allure telle que décrite à la figure 1.8. On constate la présence de quatre phases, à savoir deux ondes de densité centrées sur les sites, et deux phases supraconductrices. Pourtant, les modèles

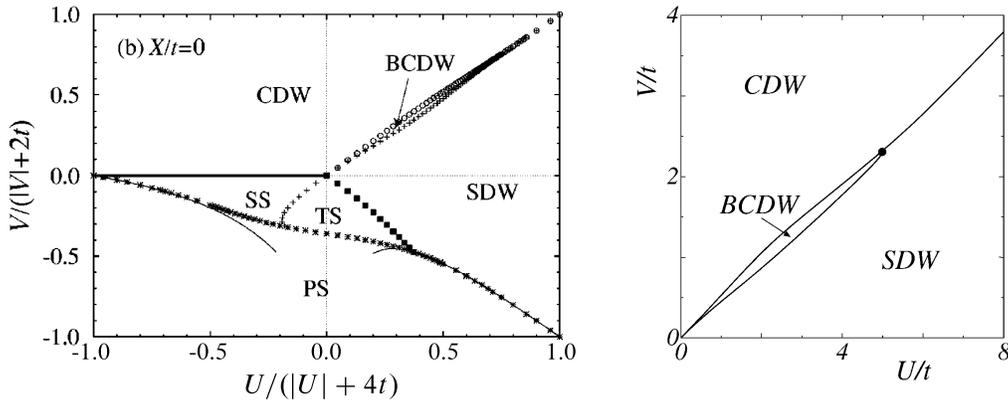


FIG. 1.9 – Diagramme de phase du modèle EH à $\mu = 0$. Figures tirées de [44] pour le panneau de gauche, et [59] pour le panneau de droite.

plus généraux discutés à la deuxième section dévient du modèle de g -ologie, ce qui est particulièrement clair dans le cas du modèle EH. En effet, les interactions

1.4. Modèle de Fermi-Hubbard étendu

sont généralement non-locales, ce qui pose la question de leurs effets sur le diagramme de phase. D'un point de vue du groupe des renormalisation (les détails seront donnés au chapitre suivant), ces interactions sont non-pertinentes, ce qui signifie que leurs contributions n'ont lieu qu'aux hautes énergies, suggérant qu'il est possible de les négliger dès le début, en cohérence avec le modèle de g -ologie. Cependant, comme expliqué dans l'introduction, des résultats obtenus par dia-

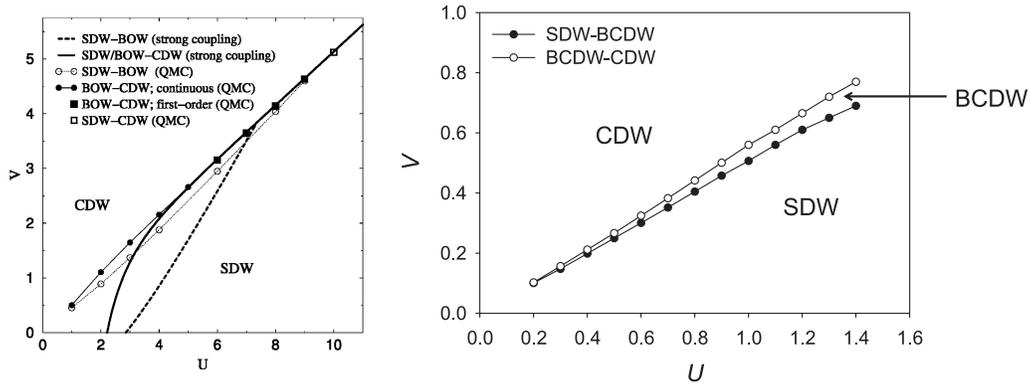


FIG. 1.10 – Diagramme de phase du modèle EH à $\mu = 0$. Figures tirées de [50] pour le panneau de gauche, et [57] pour le panneau de droite.

gonalisation exacte [44], mais aussi avec le groupe de renormalisation wilsonien [59], puis par des méthodes Monte Carlo [50], par le groupe de renormalisation fonctionnel [57] et enfin à nouveau par le groupe de renormalisation wilsonien [37] ont montré un désaccord qualitatif avec la limite du continuum, exprimé par l'existence d'une phase BOW (parfois nommée BCDW dans la littérature) existant dans le voisinage de la ligne $U = 2V$ dans le secteur répulsif. L'article de Ménard *et al.* [37] en particulier, a permis d'expliquer l'origine de cette phase comme résultant de l'effet aux hautes énergies de constantes de couplage non-locales. Ces processus de haute énergie sont suffisants pour stabiliser la phase BOW, comme cela sera expliqué plus en détail au chapitre 4. Ainsi, pour espérer obtenir un diagramme de phase à potentiel chimique quelconque qui soit qualitativement correct, il est nécessaire de prendre en compte ces couplages non-locaux. Enfin, le spectre possède en général de la courbure. Ainsi, à remplissage quelconque, le *nesting* est en général (au moins partiellement) détruit, et il existe alors une asymétrie entre les états occupés et les états vacants. Quels sont les effets

1.4. Modèle de Fermi-Hubbard étendu

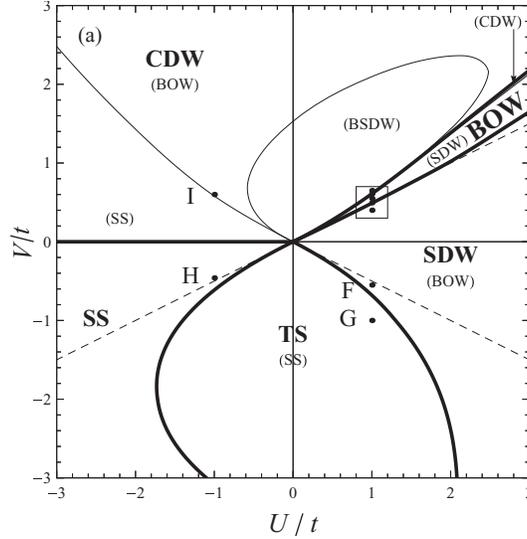


FIG. 1.11 – Diagramme de phase du modèle EH à $\mu = 0$. Figure tirée de [37]. Les pointillés indiquent les frontières déterminées dans la limite du continuum.

de cette asymétrie sur le diagramme de phase ? De façon immédiate, étant donné les expressions des bulles (1.71b), il est clair que la bulle de Peierls sera affectée, car sa divergence logarithmique est conditionnée par le *nesting*. On peut donc anticiper que cette chute de la bulle de Peierls favorisera la bulle de Cooper, dont la divergence logarithmique est quant à elle seulement liée à l'invariance par renversement du temps (qui se traduit dans notre cas par la propriété $\xi(k) = \xi(-k)$). Cela peut-il favoriser la supraconductivité ? Les résultats présentés au chapitre 4 permettront de répondre par l'affirmative, et mettront en lumière un phénomène d'écrantage des interactions similaire à l'écrantage de l'interaction coulombienne par le mécanisme de Morel-Anderson [41].

2

Groupe de renormalisation fonctionnel

« Tout est changement, non pour ne plus être mais pour devenir ce
qui n'est pas encore. »

ÉPICTÈTE

Dans ce chapitre le groupe de renormalisation (RG) est présenté. Les idées générales du RG wilsonien sont abordées et illustrées brièvement avec la méthode de Wegner-Houghton ainsi que celle de Wilson-Polchinski. Puis le RG à la Wetterich est exposé plus en détails, car c'est cette méthode qui a été utilisée dans le reste du travail. Cette version du RG est puissante car elle permet de traiter des systèmes fermioniques mais permet également d'étudier des effets non-perturbatifs dans les systèmes bosoniques. Avant de passer à des considérations formelles dans le cadre de théories de champs, un exemple simple est donné, pour illustrer la généralité de l'idée à la base du RG à la Wetterich.

2.1 Un exemple introductif

Avant de traiter le cas de la théorie des champs, nous allons expliquer à l'aide d'un exemple trivial le principe général à l'origine du groupe de renormalisation. Supposons que l'on s'intéresse aux solutions réelles de l'équation du second degré

2.1. Un exemple introductif

suivante :

$$X^2 + bX + \varepsilon = 0.$$

Naturellement, pour $\varepsilon < b^2/4$ on sait écrire les solutions de cette équation :

$$X_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\varepsilon}}{2}.$$

Cependant, supposons que l'on ne sache résoudre le problème que pour $\varepsilon = 0$, et que ε reste petit (disons que l'on a $|\varepsilon| < b^2/4$). La première idée que l'on pourrait avoir consiste à effectuer un développement perturbatif en ε . Ainsi, on écrit $X = X_0 + \varepsilon X_1 + \dots$, où X_0 est une solution du problème à $\varepsilon = 0$. On injecte cette forme dans notre équation, ce qui nous conduit à :

$$((2X_0 + b)X_1 + 1)\varepsilon + \dots = 0,$$

et nous permet de déterminer X_1 , en demandant que tous les termes devant les puissances de ε soient identiquement nuls :

$$X_1 = \frac{-1}{2X_0 + b},$$

soit :

$$X = X_0 - \frac{\varepsilon}{2X_0 + b} + \dots$$

Il s'agit de la solution perturbative "pure". Cette approximation est de moins en moins précise au fur et à mesure que ε s'éloigne de 0. Cependant, il y a mieux. En effet, en dérivant l'équation par rapport à ε , on obtient une équation différentielle :

$$\partial_{\varepsilon} X_{\varepsilon} = \frac{-1}{2X_{\varepsilon} + b}.$$

Cette équation de flot est exacte. Il s'agit du genre d'équation que l'on obtient dans des schémas de groupe de renormalisation fonctionnel tels que ceux de

2.1. Un exemple introductif

Wegner-Houghton, Wilson-Polchinski ou encore Wetterich. Pour que ces équations soient utiles, il faut utiliser des méthodes d'approximation, basées sur des ansatz par exemple. Dans notre cas, nous allons plutôt utiliser une méthode d'approximation utilisant la théorie des perturbations. Pour cela, plaçons-nous à nouveau au voisinage de X_0 . On peut alors écrire $X_\varepsilon = X_0 + x_\varepsilon$. L'équation de flot pour x_ε est donc :

$$\partial_\varepsilon x_\varepsilon = \frac{-1}{2x_\varepsilon + 2X_0 + b}.$$

On peut ensuite effectuer un développement perturbatif *dans l'équation de flot* en remarquant que $x_\varepsilon/(2X_0 + b)$ devrait rester petit devant 1. Cela nous conduit à :

$$\partial_\varepsilon x_\varepsilon = \frac{-1}{2x_\varepsilon + 2X_0 + b} = \frac{-1}{2X_0 + b} + \frac{2x_\varepsilon}{(2X_0 + b)^2} + \dots$$

Cette dernière équation de flot peut être qualifiée d'équation à une boucle, en ceci qu'elle a été obtenue en se restreignant au premier terme non-trivial dans le développement perturbatif. En prenant en compte le fait que l'on doit avoir $x_0 = 0$, on obtient une solution perturbative améliorée :

$$X_\varepsilon = X_0 + \frac{1}{2}(2X_0 + b)[1 - e^{2\varepsilon/(2X_0 + b)^2}].$$

Ainsi, au premier ordre en ε , on retrouve (sans surprise) le résultat purement perturbatif :

$$X_\varepsilon = X_0 - \frac{\varepsilon}{2X_0 + b} + \dots$$

2.1. Un exemple introductif

Considérons le cas $b = 1$, et plaçons-nous explicitement autour de $X_0 = 0$. On a alors :

$$X_\varepsilon^{(\text{ex})} = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2},$$

$$X_\varepsilon^{(1)} = -\varepsilon,$$

$$X_\varepsilon^{(1\ell)} = \frac{1}{2}[1 - e^{2\varepsilon}],$$

où $X_\varepsilon^{(\text{ex})}$ est la solution exacte, $X_\varepsilon^{(1)}$ correspond au premier ordre de la théorie des perturbations, et $X_\varepsilon^{(1\ell)}$ est la solution de l'équation de flot "à une boucle". Ces fonctions sont tracées à la figure 2.1.

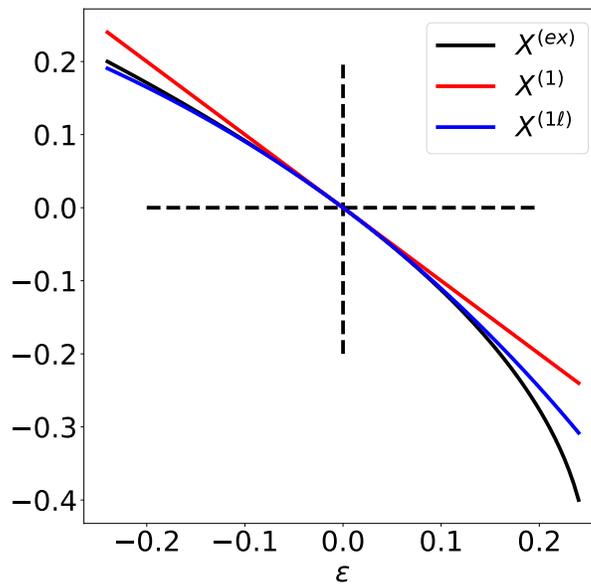


FIG. 2.1 – Les solutions de l'équation $X^2 + X + \varepsilon = 0$ sont montrées pour des petites valeurs de ε de part et d'autre de 0. Dans cette figure, $X^{(\text{ex})}$ est la solution exacte, $X^{(1)}$ correspond à la solution perturbative à l'ordre 1 en ε et $X^{(1\ell)}$ est la solution obtenue à partir de l'équation de flot à une boucle. La solution à une boucle améliore significativement le résultat purement perturbatif.

2.1. Un exemple introductif

Pourquoi l'équation de flot permet-elle d'améliorer la méthode perturbative? La réponse est que la solution de l'équation de flot est en fait une resommation partielle de la solution perturbative. En effet, plutôt que de se contenter de perturber le système autour de $\varepsilon = 0$, on peut écrire $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \delta\varepsilon$, puis résoudre perturbativement l'équation de flot autour de ε_n . Autrement dit, on privilégie les petits pas aux grands bonds. Ainsi, on remplace notre problème de départ par une famille de problèmes :

$$X_n^2 + X_n + \varepsilon_n = 0.$$

Puis on écrit :

$$X_{n+1} = X_n + \delta\varepsilon \dot{X}_n,$$

que l'on injecte dans l'équation à $n + 1$, ce qui nous donne, au premier ordre en $\delta\varepsilon$:

$$\begin{aligned} 0 &= X_n^2 + 2\delta\varepsilon X_n \dot{X}_n + X_n + \delta\varepsilon \dot{X}_n + \varepsilon_{n+1} + \dots \\ \implies 0 &= -\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} + \delta\varepsilon \dot{X}_n (2X_n + 1) + \dots \\ \implies 0 &= \delta\varepsilon (1 + \dot{X}_n (2X_n + 1)) + \dots \\ \implies \dot{X}_n &= -\frac{1}{2X_n + 1}. \end{aligned}$$

Dans la limite $\delta\varepsilon \rightarrow 0$, on a donc retrouvé l'équation de flot. Si l'on écrit les premiers termes de cette suite, on obtient :

$$\begin{aligned} X_1 &= X_0 - \frac{\delta\varepsilon}{2X_0 + 1}, \\ X_2 &= X_0 - \frac{\delta\varepsilon}{2X_0 + 1} - \frac{\delta\varepsilon}{2\left(X_0 - \frac{\delta\varepsilon}{2X_0 + 1}\right) + 1}, \end{aligned}$$

ce qui apparaît bien comme une resommation de la série perturbative. Nous pouvons illustrer ce phénomène de resommation en reprenant la discussion du chapitre précédent à propos du modèle de g -ologie, en la simplifiant quelque

2.1. Un exemple introductif

peu. L'article écrit par B. Delamotte [14] discute dans le détail ces questions ainsi que le groupe de renormalisation, en évitant le cadre technique de la théorie des champs. En supposant que l'on n'ait affaire qu'à un seul canal, on a vu que le développement perturbatif pour une amplitude de diffusion g_T évaluée à température T s'exprime en fonction de la constante de couplage g_{Λ_0} sous la forme suivante¹ :

$$g_T = g_{\Lambda_0} + \log\left(\frac{\Lambda_0}{T}\right) g_{\Lambda_0}^2 + \dots \quad (2.1)$$

Or, si le développement perturbatif est poursuivi, on se rend compte que les diagrammes menant à la divergence logarithmique réapparaissent à tous les ordres et conduisent à une série géométrique (mais ce développement ignore beaucoup d'autres diagrammes qui contribuent cependant moins, et qui sont qualifiés de sous-dominants) :

$$g_T = g_{\Lambda_0} + g_{\Lambda_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\log\left(\frac{\Lambda_0}{T}\right) g_{\Lambda_0} \right]^n = \frac{g_{\Lambda_0}}{1 - g_{\Lambda_0} \log(\Lambda_0/T)}. \quad (2.2)$$

On peut cependant retrouver ce résultat en connaissant seulement (2.1), en établissant une équation de flot. Pour cela, il faut comprendre que si l'on avait coupé l'intégration sur les états virtuels à une échelle Λ telle que $T < \Lambda < \Lambda_0$, alors on aurait obtenu une amplitude notée g_Λ donnée par :

$$g_\Lambda = g_{\Lambda_0} + \log\left(\frac{\Lambda_0}{\Lambda}\right) g_{\Lambda_0}^2 + \dots \quad (2.3)$$

On peut introduire une autre échelle Λ' un peu plus petite que Λ , qui nous conduit à une autre amplitude $g_{\Lambda'}$ ayant une expression analogue, et qui nous permet d'écrire :

$$g_\Lambda - g_{\Lambda'} = \log\left(\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) g_{\Lambda_0}^2 + \dots \quad (2.4)$$

Or, on peut très bien "inverser" la relation (2.1) pour écrire au premier ordre

¹. les facteurs numériques sont ignorés étant donné que la discussion est avant conceptuelle.

$g_{\Lambda_0} = g_{\Lambda}$, ce qui fait disparaître Λ_0 de la relation précédente, ne laissant alors que les échelles Λ et Λ' :

$$g_{\Lambda} - g_{\Lambda'} = \log\left(\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) g_{\Lambda}^2 + \dots \quad (2.5)$$

En divisant cette dernière relation par $\Lambda - \Lambda'$ et en prenant la limite $\Lambda' \rightarrow \Lambda$ on obtient alors une équation de flot, prototype des équations que l'on dérivera par la suite d'une façon systématique :

$$\Lambda \partial_{\Lambda} g_{\Lambda} = -g_{\Lambda}^2. \quad (2.6)$$

On intègre aisément de Λ_0 à T , et la solution redonne alors exactement le résultat (2.2)! L'équation de flot obtenue nous a permis d'effectuer la resommation de la série perturbative en nous basant seulement sur le développement au deuxième ordre de la théorie des perturbations. Comme à cet ordre il n'y a qu'une impulsion sur laquelle on intègre dans les diagrammes de Feynman correspondant, on dit que l'on a obtenu une équation de flot à une boucle. Nous allons maintenant passer au groupe de renormalisation tel qu'il est utilisé pour le traitement des théories de champs de la matière condensée, ce qui nous permettra d'obtenir des équations de flot que nous restreindrons à l'ordre d'une boucle, qui seront suffisantes pour la détermination des diagrammes de phase.

2.2 Groupe de renormalisation : différentes approches

Comme on a vu au chapitre précédent, le calcul analytique de la fonctionnelle génératrice $\mathcal{F}[J]$ est en général impossible, et l'un des seuls cas où cela est faisable est celui des théories gaussiennes. Nous allons voir dans cette section comment mettre en œuvre l'idée présentée à la section précédente pour parvenir à calculer (au moins partiellement) la fonction de partition ainsi que des observables d'intérêt physique permettant d'étudier le diagramme de phase du modèle considéré, c'est-à-dire les vertex couplant les observables quadratiques aux champs sources ainsi que les susceptibilités. Les méthodes issues de ces idées portent le nom de *groupe de renormalisation*. L'idée du RG à la Wilson consiste à effectuer l'intégration des degrés de liberté de façon progressive. En effet, une

intégrale fonctionnelle peut être vue de façon intuitive comme une intégrale multiple que l'on calcule en intégrant progressivement sur toutes les variables. On verra qu'une implémentation de ce RG conduit à l'équation de Wegner-Houghton [62]. De façon alternative, on peut imaginer une façon de déformer continûment la fonctionnelle génératrice $\mathcal{F}[J]$ dans le but de dériver une équation de flot convenable. Deux implémentations utilisent cette idée : le RG à la Wilson-Polchinski [48] et le RG à la Wetterich [63]. Cependant, la fonctionnelle dont on étudie le flot n'est pas la même suivant l'approche considérée. En effet, dans l'approche de Wetterich, qui sera utilisée dans la suite, on regarde plutôt le flot de l'action effective $\Gamma[\phi]$.

Dans tous les cas, on est donc amené à étudier une équation de flot pour une fonctionnelle $\mathcal{A}_\Lambda[\phi]$. Cette équation peut elle-même être qualifiée de fonctionnelle. Pourtant, dans la présentation usuelle du RG ainsi que dans deux nombreuses applications, l'aspect fonctionnel disparaît au profit du concept de flot de constantes de couplages. Cette "défonctionnalisation" se fait en supposant que l'on peut systématiquement écrire $\mathcal{A}_\Lambda[\phi]$ comme une combinaison linéaire de fonctionnelles $\mathcal{O}^i[\phi]$:

$$\mathcal{A}_\Lambda[\phi] = \sum_i g_{i,\Lambda} \mathcal{O}^i[\phi], \quad (2.7)$$

où chacune des fonctionnelles $\mathcal{O}^i[\phi]$ est homogène de degré n_i en le champ ϕ , c'est-à-dire que l'on a pour tout $\lambda > 0$:

$$\mathcal{O}^i[\lambda\phi] = \lambda^{n_i} \mathcal{O}^i[\phi].$$

Les coefficients $g_{i,\Lambda}$ sont les constantes de couplage précédemment mentionnées. Elles représentent en quelque sorte les coordonnées de la théorie à l'étape Λ . L'équation de flot pour $\mathcal{A}_\Lambda[\phi]$ se décompose donc en équations de flot pour les constantes de couplage :

$$\Lambda \partial_\Lambda g_{i,\Lambda} = \beta_i(\{g_{j,\Lambda}\}). \quad (2.8)$$

À ce stade, on peut remarquer qu'il est possible de se placer "dans le référentiel" d'un des termes $\mathcal{O}^i[\phi]$. La première chose à faire est d'adimensionner ces opéra-

teurs. Dans la pratique, cela est effectué en utilisant le fait que le paramètre Λ a en général la dimension d'une impulsion². Lorsque cet adimensionnement est fait, on peut alors écrire $\mathcal{O}^i[\phi] = \Lambda^{d_i} \tilde{\mathcal{O}}^i[\tilde{\phi}]$. Cette écriture est toujours possible pourvu que les fonctionnelles $\mathcal{O}^i[\phi]$ soient convenablement choisies. Il s'agit ensuite de réécrire le champ sous la forme $\phi = \zeta_\Lambda^{1/2} \tilde{\phi}$ (où le facteur positif ζ_Λ est à ce stade arbitraire), et d'injecter cette expression dans la fonctionnelle $\mathcal{A}_\Lambda[\phi]$, laquelle se réécrit alors :

$$\mathcal{A}_\Lambda[\phi] = \sum_i \tilde{g}_{i,\Lambda} \tilde{\mathcal{O}}^i[\tilde{\phi}], \quad \text{avec} \quad \tilde{g}_{i,\Lambda} = \zeta_\Lambda^{n_i/2} \Lambda^{d_i} g_{i,\Lambda}.$$

Les équations de flot pour les constantes de couplage adimensionnées $\tilde{g}_{i,\Lambda}$ s'écrivent donc :

$$\Lambda \partial_\Lambda \tilde{g}_{i,\Lambda} = D_i \tilde{g}_{i,\Lambda} + \tilde{\beta}_i(\{\tilde{g}_{j,\Lambda}\}), \quad (2.9)$$

avec :

$$D_i = \frac{n_i}{2} \frac{\Lambda \partial_\Lambda \zeta_\Lambda}{\zeta_\Lambda} + d_i \quad \text{et} \quad \tilde{\beta}_i(\{\tilde{g}_{j,\Lambda}\}) = \zeta_\Lambda^{n_i/2} \Lambda^{d_i} \beta_i(\{\zeta_\Lambda^{-n_j/2} \Lambda^{-d_j} \tilde{g}_{j,\Lambda}\}).$$

Ainsi, pour se placer dans un référentiel précis, on choisit un opérateur $\mathcal{O}^0[\phi]$ et on impose la condition $\Lambda \partial_\Lambda \tilde{g}_{0,\Lambda} = 0$ qui fixe alors la valeur du facteur ζ_Λ . En général, le RG est implémenté à l'aide de la théorie des perturbations, et le terme $\mathcal{O}^0[\phi]$ correspond à la partie gaussienne de l'action autour de laquelle la perturbation est appliquée. Ainsi, il y a trois cas à distinguer pour D_i :

- $D_i > 0$, pour lequel la constante de couplage $\tilde{g}_{i,\Lambda}$ est essentielle (pertinentes),
- $D_i = 0$ correspondant à une constante marginale,
- $D_i < 0$ qui est associé aux constantes inessentiels (non-pertinentes).

Les constantes de couplage non-pertinentes ont une tendance à être supprimées au cours du flot, et plus elles sont non-pertinentes, plus elles ont tendance à être supprimées tôt dans le flot³. Le destin des constantes de couplages marginales

2. Dans le RG que nous utiliserons, Λ aura cependant la dimension d'une énergie.

3. On utilise la tournure de phrase "avoir tendance" dans la mesure où le premier terme des équations de flot peut parfois être contrebalancé par le terme $\tilde{\beta}_i$ qui peut tout de même pousser

est totalement déterminé par le terme $\tilde{\beta}_i$, tandis que les constantes pertinentes ont tendance à être amplifiées au cours du flot. Dans la suite, on ne rencontrera que des constantes de couplage non-pertinentes et marginales.

Cette dénomination est la même que celle utilisée pour caractériser les points fixes du flot de renormalisation. En effet, supposons que l'on trouve un point fixe de coordonnées $\{g_i^*\}$. Au voisinage du point fixe, le flot est alors décrit par un système différentiel linéaire. S'il peut être diagonalisé, les équations de flot prennent alors la forme simple $\Lambda \partial_\Lambda \lambda_i = [\lambda_i] \lambda_i$. Les nombres $[\lambda_i]$ sont analogues aux D_i , dans le sens où les constantes λ_i peuvent être qualifiées d'essentiels, marginales ou inessentielle. Il reste maintenant à présenter les méthodes permettant d'obtenir ces équations de flot.

RG wilsonien à la Wegner-Houghton

L'idée de base du RG est de faire une intégration progressive et organisée des degrés de liberté, une idée qui semble raisonnable si, rappelons-le, on garde en tête qu'une intégrale fonctionnelle (sans se soucier des aspects rigoureux [12]) peut être vue comme une intégrale (très fortement) multiple. Cette intégration des degrés de liberté est progressive en ceci qu'elle se fait à mesure que s'écoule un paramètre de contrôle Λ , et elle est organisée dans le sens où les degrés de liberté de hautes énergies sont intégrés en premier, permettant ainsi de déduire la physique des basses énergies, ou ce qui est équivalent, des grandes longueurs d'onde. Les idées d'intégration progressive des degrés de liberté ont d'abord été formulées dans l'espace réel avec l'idée de *décimation* des blocs de spins, due à Kadanoff [34]. Le problème était alors de donner des estimations des exposants critiques apparaissant dans la théorie des phénomènes critiques [27]. Wilson a introduit le RG de façon systématique dans une série d'articles parus dans la première moitié des années 1970 [64, 65, 67, 68, 66].

Le RG à la Wegner-Houghton est wilsonien par excellence, en ceci qu'il réalise à la lettre le programme d'intégration progressive des degrés de liberté. L'approche de Wegner-Houghton est succinctement présentée car elle permet d'illustrer sur un cas concret les idées générales du RG. Une équation de flot

les constantes non-pertinentes vers les couplages forts, auquel cas ces constantes sont qualifiées de *dangereusement* non-pertinentes.

fonctionnelle est introduite, de laquelle est déduit le développement en vertex. La pertinence/marginalité des différents termes de l'action est alors présentée. Enfin, on illustre le calcul du flot d'observables d'intérêt en prenant le cas de la susceptibilité uniforme. Cela permet de comprendre le fait que pour obtenir de façon minimale le flot d'une susceptibilité, il est nécessaire d'obtenir des équations de flot pour les constantes de couplage, les vertex champ-champ source et les vertex quadratiques en les champ sources directement associés aux susceptibilités.

Notre point de départ est la fonctionnelle génératrice des moments d'une collection d'observables convenablement choisie $\mathcal{F}[J]$, associée à une théorie de champs scalaire (le champ est à valeurs réelles, $\varphi(\vec{x}) \in \mathbb{R}$) en dimension d , spécifiée par l'action suivante :

$$\mathcal{S}[\varphi] = \int d^d x \left(\frac{(\partial_i \varphi)^2}{2} + \frac{r\varphi^2}{2} + \frac{g\varphi^4}{4} \right),$$

avec r un paramètre réel et g un paramètre strictement positif représentant les interactions. Le choix d'un champ scalaire réel ne nuit pas à la compréhension de l'exposé car les équations de flot dans le cas fermionique à une boucle telles qu'elles seront dérivées dans la suite auront essentiellement la même structure. Comme cela a été expliqué, la fonctionnelle $\mathcal{F}[J]$ est définie par une intégrale fonctionnelle. En général, la théorie des champs est définie sur l'espace euclidien \mathbb{R}^d ou bien sur un réseau de dimension d . En matière condensée, les théories de champs provenant de l'étude des solides, il y a une longueur minimale qui donne naissance à une impulsion Λ_0 de coupure ultraviolette. On notera $\varphi(\vec{p})$ notre champ portant une impulsion \vec{p} . Cela signifie que la mesure d'intégration $\mathcal{D}[\varphi]$ peut être notée $\mathcal{D}_{0\Lambda_0}[\varphi]$, exprimant qu'elle intègre tous les modes $\varphi(\vec{p})$ d'impulsion $0 \leq |\vec{p}| \leq \Lambda_0$. L'idée du RG wilsonien part d'une observation très simple : il est possible de factoriser la mesure d'intégration de la façon suivante, avec une échelle d'impulsion telle que $0 < \Lambda < \Lambda_0$:

$$\mathcal{D}_{0\Lambda_0}[\varphi] = \mathcal{D}_{0\Lambda}[\varphi] \mathcal{D}_{\Lambda\Lambda_0}[\varphi]. \quad (2.10)$$

On doit donc faire une séparation du champ de la forme :

$$\varphi_\alpha(\vec{p}) = \varphi_\alpha^{0\Lambda}(\vec{p}) + \varphi_\alpha^{\Lambda\Lambda_0}(\vec{p}), \quad (2.11)$$

de sorte que :

$$\varphi_\alpha(\vec{p}) = \begin{cases} \varphi_\alpha^{0\Lambda}(\vec{p}) & \text{si } 0 \leq |\vec{p}| < \Lambda, \\ \varphi_\alpha^{\Lambda\Lambda_0}(\vec{p}) & \text{si } \Lambda \leq |\vec{p}| \leq \Lambda_0, \end{cases} \quad (2.12)$$

qui nous permet de définir une action à l'échelle Λ que l'on note $\mathcal{S}[\varphi, J]$, telle que :

$$\mathcal{F}[J] = \int \mathcal{D}_{0\Lambda_0}[\varphi] \exp \{ -\mathcal{S}[\varphi, J] \} = \int \mathcal{D}_{0\Lambda}[\varphi] \exp \{ -\mathcal{S}_\Lambda[\varphi^{0\Lambda}, J] \}, \quad (2.13)$$

autrement dit, on doit avoir :

$$\exp \{ -\mathcal{S}_\Lambda[\varphi^{0\Lambda}, J] \} = \int \mathcal{D}_{\Lambda\Lambda_0}[\varphi] \exp \{ -\mathcal{S}[\varphi^{0\Lambda} + \varphi^{\Lambda\Lambda_0}, J] \}. \quad (2.14)$$

On peut répéter l'opération cette fois-ci avec une nouvelle échelle d'impulsion Λ' telle que $0 < \Lambda' < \Lambda$, ce qui nous donne :

$$\mathcal{D}_{0\Lambda_0}[\varphi] = \mathcal{D}_{0\Lambda'}[\varphi] \mathcal{D}_{\Lambda'\Lambda}[\varphi] \mathcal{D}_{\Lambda\Lambda_0}[\varphi], \quad (2.15)$$

nous conduisant à l'égalité suivante :

$$\exp \{ -\mathcal{S}_\Lambda[\varphi^{0\Lambda}, J] \} = \int \mathcal{D}_{\Lambda'\Lambda}[\varphi] \exp \{ -\mathcal{S}_\Lambda[\varphi^{0\Lambda'} + \varphi^{\Lambda\Lambda}, J] \}. \quad (2.16)$$

L'échelle des impulsions ultraviolettes Λ_0 a disparu! On peut donc espérer obtenir une équation de flot pour $\mathcal{S}_\Lambda[\varphi, J]$ en prenant la limite $\Lambda' \rightarrow \Lambda$. Dans un premier temps, on multiplie l'équation précédente par $\exp \{ \mathcal{S}_\Lambda[\varphi^{0\Lambda'}, J] \}$, puis on prend le logarithme et on multiplie par -1 , ce qui nous donne, en simplifiant quelque peu les notations :

$$\mathcal{S}_\Lambda[\varphi, J] - \mathcal{S}_{\Lambda'}[\varphi, J] = \log \left(\int \mathcal{D}_{\Lambda'\Lambda}[\vec{\varphi}] e^{\mathcal{S}_\Lambda[\varphi, J] - \mathcal{S}_\Lambda[\varphi + \vec{\varphi}, J]} \right), \quad (2.17)$$

avec $\varphi = \varphi^{0\Lambda'}$ et $\bar{\varphi} = \varphi^{\Lambda'\Lambda}$. Le point important est de comprendre que la limite $\Lambda' \rightarrow \Lambda$ implique que l'intégrale fonctionnelle qui reste à calculer devient essentiellement gaussienne. Considérons l'action $\mathcal{S}_\Lambda[\varphi + \bar{\varphi}, J]$. Lors du passage à la limite $\Lambda' \rightarrow \Lambda$, il y a de moins en moins de modes $\bar{\varphi}$ disponibles, tant et si bien que si l'on fait un développement de Taylor :

$$\mathcal{S}_\Lambda[\varphi + \bar{\varphi}, J] = \mathcal{S}_\Lambda[\varphi, J] + \frac{\delta\mathcal{S}_\Lambda}{\delta\varphi} \cdot \bar{\varphi} + \frac{1}{2}\bar{\varphi} \cdot \frac{\delta^2\mathcal{S}_\Lambda}{\delta\varphi^2} \cdot \bar{\varphi} + \dots, \quad (2.18)$$

on s'aperçoit que les termes en $O(\bar{\varphi}^n)$ ont en fait nécessairement une dépendance en Λ et Λ' de la forme $\sim (\Lambda - \Lambda')^n \Lambda^{n(d-1)}$ en raison d'une intégrale sur n impulsions k_i telles que $\Lambda' \leq |k_i| \leq \Lambda$. On peut donc faire un développement en puissance de $\Lambda - \Lambda'$, qui nous donne (on fait usage de l'intégrale fonctionnelle gaussienne (1.36) et de l'identité $\text{Tr} \log = \log \det$) :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\Lambda[\varphi, J] - \mathcal{S}_{\Lambda'}[\varphi, J] &= \log \left\{ \int \mathcal{D}_{\Lambda'\Lambda}[\bar{\varphi}] \exp \left(-\frac{1}{2}\bar{\varphi} \cdot \frac{\delta^2\mathcal{S}_\Lambda}{\delta\varphi^2} \cdot \bar{\varphi} + \frac{\delta\mathcal{S}_\Lambda}{\delta\varphi} \cdot \bar{\varphi} \right) \right\} + \dots \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr}_{\Lambda'\Lambda} \left\{ \log \frac{\delta^2\mathcal{S}_\Lambda}{\delta\varphi^2} \right\} + \frac{1}{2} \left[\frac{\delta\mathcal{S}_\Lambda}{\delta\varphi} \cdot \left(\frac{\delta^2\mathcal{S}_\Lambda}{\delta\varphi^2} \right)^{-1} \cdot \frac{\delta\mathcal{S}_\Lambda}{\delta\varphi} \right]_{\Lambda'\Lambda}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

où l'indice $\Lambda'\Lambda$ est là pour rappeler que les intégrales se font sur le domaine des impulsions \vec{p} telles que $\Lambda' \leq |\vec{p}| \leq \Lambda$. Le premier terme dans cette expression est d'ordre $\Lambda - \Lambda'$ car il contient une intégrale sur les impulsions, mais le second terme contient une intégrale double, et il est donc d'ordre $(\Lambda - \Lambda')^2$, ce qui implique que l'on peut le négliger. En conclusion, on obtient une équation de flot ayant la forme suivante :

$$\begin{aligned} \partial_\Lambda \mathcal{S}_\Lambda[\varphi, J] &= \lim_{\Lambda' \rightarrow \Lambda} \frac{\mathcal{S}_\Lambda[\varphi, J] - \mathcal{S}_{\Lambda'}[\varphi, J]}{\Lambda - \Lambda'} \\ &= - \lim_{\Lambda' \rightarrow \Lambda} \frac{1}{2(\Lambda - \Lambda')} \text{Tr}_{\Lambda'\Lambda} \left\{ \log \frac{\delta^2\mathcal{S}_\Lambda}{\delta\varphi^2} \right\} \\ &\equiv -\frac{1}{2} \partial \text{Tr}_\Lambda \log \frac{\delta^2\mathcal{S}_\Lambda}{\delta\varphi^2}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

où l'on a introduit une notation condensée $\lim_{\Lambda' \rightarrow \Lambda} \frac{1}{(\Lambda - \Lambda')} \text{Tr}_{\Lambda'\Lambda}(\bullet) = \partial \text{Tr}_\Lambda(\bullet)$.

Il s'agit de l'équation de Wegner-Houghton. Comment cette équation de flot nous est-elle utile? À partir de maintenant, on va se contenter d'une écriture très schématique dans le but d'expliquer la structure des équations de flot. Il serait en effet inutile d'être rigoureux dans la mesure où ce paragraphe se veut avant tout conceptuel. Ainsi, on va supposer pour simplifier que l'on s'intéresse à une unique observable $\theta \sim \varphi^2$, et qu'il n'y a donc qu'une seule susceptibilité à considérer. De façon minimale, l'action $\mathcal{S}_\Lambda[\varphi, J]$ doit avoir la structure suivante (les signe \int et les facteurs numériques sans dimension sont omis dans l'écriture) :

$$\mathcal{S}_\Lambda[\varphi, J] \sim \bar{\mathcal{S}}_\Lambda[\varphi] + Z_\Lambda J \varphi^2 - \frac{\chi_\Lambda}{2} J^2 + \dots \quad (2.21)$$

En effet, le flot affecte la partie de l'action "pure" $\bar{\mathcal{S}}_\Lambda[\varphi]$, mais est aussi susceptible d'alimenter le vertex $\sim \varphi^2 J$ (et nécessite l'introduction d'un vertex spécifique Z_Λ), et bien sûr la susceptibilité χ_Λ . Plus précisément, on peut même supposer que l'action $\bar{\mathcal{S}}_\Lambda[\varphi]$ possède un développement en vertex de la forme :

$$\bar{\mathcal{S}}_\Lambda[\varphi] \sim \varphi \cdot G_\Lambda^{-1} \cdot \varphi + g_\Lambda \varphi^4 + \dots \quad (2.22)$$

On déduit de l'équation (2.20), en ne faisant apparaître que les termes utiles :

$$\begin{aligned} \partial_\Lambda \mathcal{S}_\Lambda &\sim \partial \text{Tr}_\Lambda \log \left[G_\Lambda^{-1} \left(1 + G_\Lambda (g_\Lambda \varphi^2 + Z_\Lambda J) \right) \right] \\ &\sim \partial \text{Tr}_\Lambda \log G_\Lambda^{-1} + \partial \text{Tr}_\Lambda G_\Lambda g_\Lambda \varphi^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \partial \text{Tr}_\Lambda G_\Lambda^2 \left(g_\Lambda^2 \varphi^4 - 2Z_\Lambda g_\Lambda \varphi^2 J + Z_\Lambda^2 J^2 \right) + \dots \end{aligned} \quad (2.23)$$

où l'on a utilisé le développement limité usuel $\log(1+x) = x - x^2/2 + o(x^2)$. Par identification, on en déduit la forme des équations de flot cherchées :

$$\begin{aligned} \partial_\Lambda G_\Lambda^{-1} &\sim \partial \text{Tr}_\Lambda G_\Lambda g_\Lambda, \\ \partial_\Lambda g_\Lambda &\sim \partial \text{Tr}_\Lambda G_\Lambda^2 g_\Lambda^2, \\ \partial_\Lambda Z_\Lambda &\sim \partial \text{Tr}_\Lambda G_\Lambda^2 g_\Lambda Z_\Lambda, \\ \partial_\Lambda \chi_\Lambda &\sim \partial \text{Tr}_\Lambda G_\Lambda^2 Z_\Lambda^2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

On peut maintenant adimensionner ces équations. Pour cela, on introduit

$x = \tilde{x}/\Lambda$, et on exige que l'action soit sans dimension. En se plaçant dans le référentiel du terme de gradient, on obtient :

$$\int d^d x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 = \Lambda^{2-d} \int d^d \tilde{x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{x}_i} \right)^2 \implies \varphi(x) = \Lambda^{(d-2)/2} \tilde{\varphi}(\tilde{x}).$$

De plus, le champ source devrait avoir la dimension de $(\varphi(x))^2$:

$$J(x) = \Lambda^{d-2} \tilde{J}(\tilde{x}). \quad (2.25)$$

On en déduit les adimensionnements des autres termes de l'action :

$$G_\Lambda^{-1} = \Lambda^2 \tilde{G}_\Lambda^{-1}, \quad g_\Lambda = \Lambda^{4-d} \tilde{g}_\Lambda, \quad Z_\Lambda = \Lambda^{4-d} \tilde{Z}_\Lambda, \quad \chi_\Lambda = \Lambda^{4-d} \tilde{\chi}_\Lambda. \quad (2.26)$$

Ainsi, les équations de flot pour les quantités adimensionnées ont la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Lambda \partial_\Lambda \tilde{G}_\Lambda^{-1} &= -2\tilde{G}_\Lambda^{-1} + \Lambda^{-2} \cdot \Lambda \partial_\Lambda G_\Lambda^{-1}, \\ \Lambda \partial_\Lambda \tilde{g}_\Lambda &= (d-4)\tilde{g}_\Lambda + \Lambda^{d-4} \cdot \Lambda \partial_\Lambda g_\Lambda, \\ \Lambda \partial_\Lambda \tilde{Z}_\Lambda &= (d-4)\tilde{Z}_\Lambda + \Lambda^{d-4} \cdot \Lambda \partial_\Lambda Z_\Lambda, \\ \Lambda \partial_\Lambda \tilde{\chi}_\Lambda &= (d-4)\tilde{\chi}_\Lambda + \Lambda^{d-4} \cdot \Lambda \partial_\Lambda \chi_\Lambda. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Ces équations forment les équations de flot à une boucle. Comme cela a été mentionné, les équations de flot qui seront dérivées pour des systèmes fermioniques (avec une autre méthode) auront la même structure. Les calculs qui précèdent nous mènent aux enseignements suivants. Tout d'abord, pour déterminer les fluctuations dominantes, il faut connaître le flot des vertex "à trois pattes" Z_Λ qui sont eux-mêmes alimentés par les constantes de couplage g_Λ . Ensuite, le flot de ces constantes de couplage à une boucle dépend de g_Λ^2 . On reconnaît en fait la théorie des perturbations, et on comprend ce que fait le RG : il effectue progressivement la somme sur les états intermédiaires. On reconnaît le processus de resommation qui a été esquissé à la section précédente.

Enfin, mentionnons que dans la pratique, on travaille plutôt avec une va-

riable que l'on appelle *le temps de RG* ℓ définie par :

$$\Lambda = \Lambda_0 e^{-\ell}. \quad (2.28)$$

Ainsi, abaisser la coupure ultraviolette Λ de Λ_0 à 0 revient à augmenter le temps de RG de 0 à $+\infty$.

Nous nous arrêterons ici pour la présentation du RG wilsonien, et nous allons à présenter une idée alternative pour obtenir des équations de flot, aboutissant à deux autres méthodes de RG, que nous appellerons de façon générique "RG par déformation".

Idée générale du RG par déformation

Le RG à la Wilson-Polchinski et celui à la Wetterich sont un peu comme les deux faces d'une même pièce. Dans les deux cas, on commence par écrire une intégrale fonctionnelle avec un terme à un corps dépendant d'un paramètre Λ , ce qui revient à dire que l'action s'écrit :

$$\bar{\mathcal{S}}_\Lambda[\varphi, J] = \frac{1}{2} \varphi \cdot \mathcal{K}_\Lambda \cdot \varphi + \mathcal{S}_\Lambda[\varphi, J], \quad (2.29)$$

et donc la fonctionnelle génératrice des moments s'écrit :

$$\mathcal{F}_\Lambda[J] = \int \mathcal{D}[\varphi] \exp \{ - \bar{\mathcal{S}}_\Lambda[\varphi, J] \}. \quad (2.30)$$

C'est dès ce stade que les deux approches diffèrent. En effet, dans l'approche de Wilson-Polchinski, on suppose qu'un changement dans le paramètre de flot Λ laisse la fonctionnelle $\mathcal{F}_\Lambda[J]$ inchangée, ce qui implique que $\mathcal{S}_\Lambda[\varphi, J]$ doit évoluer en contre-partie. L'équation en question est *l'équation de Wilson-Polchinski*. Ainsi, dans cette approche, on considère que l'on s'intéresse à un unique système, et que l'on calcule progressivement l'intégrale fonctionnelle, tout comme dans l'approche de Wegner-Houghton. Au contraire, dans l'approche de Wetterich, on suppose que l'on regarde une famille de systèmes pour lesquels $\mathcal{S}_\Lambda[\varphi, J]$ reste inchangée. Le flot ne décrit pas une intégration progressive des degrés de liberté, mais un écoulement dans l'espace des modèles, dont le point $\Lambda \rightarrow 0$ correspond au système qui nous intéresse. Il faut donc s'intéresser au flot des

fonctionnelles génératrices, et on verra que le flot pour l'action effective $\Gamma_\Lambda[\phi, J]$ conduit à une bonne équation de flot appelée *équation de Wetterich*.

On peut ainsi résumer les différentes contraintes imposées aux grandeurs dépendant de Λ dans les deux approches du RG :

$$\begin{aligned} \partial_\Lambda \mathcal{F}_\Lambda[J] &= 0, & (\text{Wilson-Polchinski}) \\ \partial_\Lambda \mathcal{S}_\Lambda[\varphi, J] &= 0. & (\text{Wetterich}) \end{aligned}$$

Il reste maintenant à exploiter ces conditions pour obtenir des équations de flot intéressantes.

RG à la Wilson-Polchinski

Pour obtenir une équation de flot intéressante dans l'approche de Wilson-Polchinski [71], on va s'inspirer de l'expression (2.16) qui permet de relier les actions avec deux coupures Λ et Λ' . Cependant, il faut ici adapter cette expression en exploitant le terme à un corps que l'on a ajouté à l'action. On définit ainsi :

$$e^{-\mathcal{S}_{\Lambda'}[\varphi, J]} = \left(\det \mathcal{K}_{\Lambda'\Lambda} \right)^{1/2} \int \mathcal{D}[\bar{\varphi}] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \bar{\varphi} \cdot \mathcal{K}_{\Lambda'\Lambda} \cdot \bar{\varphi} - \mathcal{S}_\Lambda[\varphi + \bar{\varphi}, J] \right\}, \quad (2.31)$$

où par définition :

$$\mathcal{K}_{\Lambda'\Lambda}^{-1} = \mathcal{K}_\Lambda^{-1} - \mathcal{K}_{\Lambda'}^{-1}. \quad (2.32)$$

Le facteur $(\det \mathcal{K}_{\Lambda'\Lambda})^{1/2}$ est là pour compenser la présence du terme à un corps dans l'action. On peut se convaincre de sa nécessité en prenant le cas trivial où l'on a $\mathcal{S}_\Lambda[\varphi, J] = 0$, qui implique que l'on doit avoir également $\mathcal{S}_{\Lambda'}[\varphi, J] = 0$ puisqu'il n'y a plus de dépendance en φ dans le membre de droite. On est alors ramené à l'identité

$$1 = \left(\det \mathcal{K}_{\Lambda'\Lambda} \right)^{1/2} \int \mathcal{D}[\bar{\varphi}] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \bar{\varphi} \cdot \mathcal{K}_{\Lambda'\Lambda} \cdot \bar{\varphi} \right\}$$

qui est bien vérifiée. Le propagateur $\mathcal{K}_{\Lambda'\Lambda}^{-1}$ est tel que l'on puisse faire la comparaison suivante avec l'approche de Wegner-Houghton :

$$\mathcal{D}[\bar{\varphi}] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \bar{\varphi} \cdot \mathcal{K}_{\Lambda'\Lambda} \cdot \bar{\varphi} \right\} \longleftrightarrow \mathcal{D}_{\Lambda'\Lambda}[\bar{\varphi}]. \quad (2.33)$$

Exploitions maintenant l'expression (2.31) pour obtenir l'équation de flot voulue. L'idée consiste une fois encore à faire un développement de l'action en puissance de $\bar{\varphi}$ puis à se limiter à une action gaussienne, les autres termes étant supprimés à mesure que $\Lambda' \rightarrow \Lambda$, ce qui nous donne donc, en multipliant par $e^{\mathcal{S}_\Lambda[\varphi, J]}$ puis en prenant le logarithme (on fait à nouveau usage de l'intégrale (1.36) et de l'identité $\text{Tr} \log = \log \det$) :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\Lambda[\varphi, J] - \mathcal{S}_{\Lambda'}[\varphi, J] &= \log \left\{ \left(\det \mathcal{K}_{\Lambda'\Lambda} \right)^{1/2} \int \mathcal{D}[\bar{\varphi}] \exp \left[-\frac{1}{2} \bar{\varphi} \cdot \mathcal{K}_{\Lambda'\Lambda} \cdot \bar{\varphi} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \bar{\varphi} \cdot \frac{\delta^2 \mathcal{S}_\Lambda}{\delta \varphi^2} \cdot \bar{\varphi} + \frac{\delta \mathcal{S}_\Lambda}{\delta \varphi} \cdot \bar{\varphi} \right] \right\} + \dots \\ &= \log \left\{ \left(\det \mathcal{K}_{\Lambda'\Lambda} \right)^{1/2} \left(\mathcal{K}_{\Lambda'\Lambda} + \frac{\delta^2 \mathcal{S}_\Lambda}{\delta \varphi^2} \right)^{-1/2} \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left[\frac{1}{2} \frac{\delta \mathcal{S}_\Lambda}{\delta \varphi} \cdot \left(\mathcal{K}_{\Lambda'\Lambda} + \frac{\delta^2 \mathcal{S}_\Lambda}{\delta \varphi^2} \right)^{-1} \cdot \frac{\delta \mathcal{S}_\Lambda}{\delta \varphi} \right] \right\} + \dots \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \log \left(1 + \mathcal{K}_{\Lambda'\Lambda}^{-1} \frac{\delta^2 \mathcal{S}_\Lambda}{\delta \varphi^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\delta \mathcal{S}_\Lambda}{\delta \varphi} \cdot \left(1 + \mathcal{K}_{\Lambda'\Lambda}^{-1} \frac{\delta^2 \mathcal{S}_\Lambda}{\delta \varphi^2} \right)^{-1} \mathcal{K}_{\Lambda'\Lambda}^{-1} \cdot \frac{\delta \mathcal{S}_\Lambda}{\delta \varphi} + \dots \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \text{Tr} \left(\mathcal{K}_{\Lambda'\Lambda}^{-1} \frac{\delta^2 \mathcal{S}_\Lambda}{\delta \varphi^2} \right) - \frac{\delta \mathcal{S}_\Lambda}{\delta \varphi} \mathcal{K}_{\Lambda'\Lambda}^{-1} \frac{\delta \mathcal{S}_\Lambda}{\delta \varphi} \right\} + \dots \quad (2.34) \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient l'équation de Wilson-Polchinski, en divisant par $\Lambda - \Lambda'$ et en prenant la limite $\Lambda' \rightarrow \Lambda$:

$$\partial_\Lambda \mathcal{S}_\Lambda[\varphi, J] = -\frac{1}{2} \left\{ \text{Tr} \left(\mathcal{D}_\Lambda \frac{\delta^2 \mathcal{S}_\Lambda}{\delta \varphi^2} \right) - \frac{\delta \mathcal{S}_\Lambda}{\delta \varphi} \mathcal{D}_\Lambda \frac{\delta \mathcal{S}_\Lambda}{\delta \varphi} \right\}, \quad (2.35)$$

avec :

$$\mathcal{D}_\Lambda = \lim_{\Lambda' \rightarrow \Lambda} \frac{\mathcal{K}_{\Lambda'\Lambda}^{-1}}{\Lambda' - \Lambda}.$$

Pour finir, il faut montrer que si l'action $\mathcal{S}_\Lambda[\varphi, J]$ est solution de (2.31), alors la fonction génératrice $\mathcal{F}_\Lambda[J]$ est bien indépendante de Λ . Ainsi, dans la philosophie, les approches de Wilson-Polchinski et de Wegner-Houghton sont très proches. Nous ne pousserons donc pas plus loin l'étude de l'approche de Wilson-Polchinski, à laquelle nous préférons celle de Wetterich.

2.3 Groupe de renormalisation à la Wetterich

Le RG à la Wetterich est assez récent, introduit en 1993 [63]. Il a depuis trouvé de très nombreuses applications (voir l'article de revue [16]) dans des domaines très variés : en physique statistique, matière condensée, mais également en physique des hautes énergies (étude des théories de jauge) et même dans le domaine de la gravitation quantique. L'application aux systèmes fermioniques est quant à elle détaillée dans l'article de revue [38].

Nous introduisons le RG à la Wetterich sans faire aucune hypothèse quant à la nature des champs : il peut s'agir d'un mélange de bosons et de fermions. Les champs portent un indice α général. La forme spécifique des équations de flot pour les systèmes électroniques unidimensionnels sera déduite à la section suivante.

Notre point de départ est à nouveau la fonctionnelle génératrice des moments, en présence d'un terme régulateur (il est de tradition d'écrire R_Λ dans ce cas plutôt que \mathcal{K}_Λ) :

$$\mathcal{Z}_\Lambda[\eta, J] = \int \mathcal{D}[\varphi] \exp \left\{ -\mathcal{S}[\varphi] + \eta \cdot \varphi - \frac{1}{2} \varphi \cdot R_\Lambda \cdot \varphi + J_a \theta_a[\varphi] \right\}, \quad (2.36)$$

où l'on a $\frac{1}{2} \varphi \cdot R_\Lambda \cdot \varphi = \frac{1}{2} \varphi_{\alpha_1} R_{\Lambda, \alpha_1 \alpha_2} \varphi_{\alpha_2}$, avec $R_{\Lambda, \alpha_1 \alpha_2} = R_{\Lambda, \alpha_2 \alpha_1}$. Le régulateur R_Λ doit être choisi de sorte que $\mathcal{Z}_{\Lambda=0}[\eta, J] = \mathcal{Z}[\eta, J]$, ce qui impose que l'on doit avoir $R_{\Lambda=0} = 0$. Ce régulateur agit comme un terme de masse, et à ce titre, il a pour rôle de supprimer les fluctuations. Sa réalisation concrète sera discutée

plus loin.

Les deux premières dérivées de $\mathcal{Z}_\Lambda[\eta, J]$ par rapport à η donnent :

$$\mathcal{Z}_{\Lambda, \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2}[\eta, J] = \int \mathcal{D}[\varphi] \varphi_{\alpha_1} \varphi_{\alpha_2} \exp \left\{ -\mathcal{S}[\varphi] + \eta \cdot \varphi - \frac{1}{2} \varphi \cdot R_\Lambda \cdot \varphi + J_{\mathbf{a}} \theta_{\mathbf{a}}[\varphi] \right\}. \quad (2.37)$$

Ainsi, l'équation de flot pour cette fonctionnelle est :

$$\partial_\Lambda \mathcal{Z}_\Lambda[\eta, J] = -\frac{1}{2} \partial_\Lambda R_{\Lambda, \beta_1 \beta_2} \mathcal{Z}_{\Lambda, \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2}[\eta, J]. \quad (2.38)$$

On peut remarquer que cette équation est formellement une équation de la chaleur dans l'espace des théories. Introduisons maintenant la fonctionnelle génératrice des cumulants $\mathcal{W}_\Lambda[\eta, J] = \log \mathcal{Z}_\Lambda[\eta, J]$. Ses deux dérivées premières permettent d'établir :

$$\frac{\mathcal{Z}_{\Lambda, \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2}[\eta, J]}{\mathcal{Z}_\Lambda[\eta, J]} = \mathcal{W}_{\Lambda, \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2} + \mathcal{W}_{\Lambda, \dot{\beta}_2} \mathcal{W}_{\Lambda, \dot{\beta}_1}. \quad (2.39)$$

Ainsi, l'équation de flot pour cette fonctionnelle est quant à elle :

$$\begin{aligned} \partial_\Lambda \mathcal{W}_\Lambda[\eta, J] &= \frac{\partial_\Lambda \mathcal{Z}_\Lambda[\eta, J]}{\mathcal{Z}_\Lambda[\eta, J]} \\ &= -\frac{1}{2} \partial_\Lambda R_{\Lambda, \beta_1 \beta_2} \left[\mathcal{W}_{\Lambda, \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2} + \mathcal{W}_{\Lambda, \dot{\beta}_2} \mathcal{W}_{\Lambda, \dot{\beta}_1} \right]. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Enfin, introduisons l'action effective régularisée, au moyen d'une transformation de Legendre modifiée :

$$\Gamma_\Lambda[\phi, J] + \mathcal{W}_\Lambda[\eta, J] = \eta \cdot \phi - \frac{1}{2} \phi \cdot R_\Lambda \cdot \phi. \quad (2.41)$$

Le fait de modifier la transformation de Legendre de la sorte permet de montrer que la condition initiale de l'action effective est donnée par l'action microscopique, c'est-à-dire que l'on peut écrire $\Gamma_{\Lambda_0}[\phi] = \mathcal{S}[\phi]$, ce qui coïncide avec le calcul de l'action effective en champ moyen, un résultat attendu étant donné que le régulateur R_{Λ_0} supprime toutes les fluctuations.

2.3. Groupe de renormalisation à la Wetterich

Après une dérivation de (2.41) par rapport à η , il vient :

$$\mathcal{W}_{\Lambda, \dot{\beta}} = \phi_{\beta}. \quad (2.42)$$

Au contraire, une dérivation par rapport à ϕ donne :

$$\Gamma_{\Lambda, \alpha} = \eta_{\dot{\alpha}} - R_{\Lambda, \alpha\alpha'} \phi_{\alpha'}. \quad (2.43)$$

On travaille à ϕ arbitraire, ce qui a pour conséquence de fixer η en fonction de Λ et de ϕ . Ainsi, l'équation de flot pour l'action effective, *l'équation de Wetterich*, est donnée par :

$$\partial_{\Lambda} \Gamma_{\Lambda}[\phi, J] = \frac{1}{2} \partial_{\Lambda} R_{\Lambda, \gamma_1 \gamma_2} \mathcal{W}_{\Lambda, \dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2} [\eta[\phi, J], J]. \quad (2.44)$$

On peut fermer plus explicitement cette équation, en reliant les dérivées secondes de \mathcal{W}_{Λ} et Γ_{Λ} . En effet, les dérivées secondes donnent :

$$\frac{\delta \phi_{\alpha}}{\delta \eta_{\dot{\beta}}} = \mathcal{W}_{\Lambda, \dot{\alpha} \dot{\beta}}, \quad \frac{\delta \eta_{\dot{\beta}}}{\delta \phi_{\alpha}} = \Gamma_{\Lambda, \beta \alpha} + R_{\Lambda, \beta \alpha} = \tilde{\Gamma}_{\Lambda, \beta \alpha}. \quad (2.45)$$

Mais par ailleurs, on a :

$$\frac{\delta \phi_{\alpha}}{\delta \phi_{\alpha'}} = \frac{\delta \phi_{\alpha}}{\delta \eta_{\dot{\beta}}} \frac{\delta \eta_{\dot{\beta}}}{\delta \phi_{\alpha'}} = \delta_{\alpha \alpha'}, \quad (2.46)$$

d'où :

$$\mathcal{W}_{\Lambda, \dot{\alpha} \dot{\beta}} \tilde{\Gamma}_{\Lambda, \beta \alpha'} = \delta_{\alpha \alpha'}. \quad (2.47)$$

On peut également obtenir les équations pour les vertex, par dérivation de l'équation de Wetterich par rapport à ϕ , ce qui donne successivement (en omet-

2.3. Groupe de renormalisation à la Wetterich

tant les arguments et la dépendance en Λ) :

$$\partial_\Lambda \Gamma_{\alpha_1} = \frac{1}{2} \partial_\Lambda R_{\gamma_1 \gamma_2} \mathcal{W}_{\dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 \dot{\beta}_1} \tilde{\Gamma}_{\beta_1 \alpha_1}, \quad (2.48a)$$

$$\partial_\Lambda \Gamma_{\alpha_1 \alpha_2} = \frac{1}{2} \partial_\Lambda R_{\gamma_1 \gamma_2} \{ \mathcal{W}_{\dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2} \tilde{\Gamma}_{\beta_2 \alpha_2} \tilde{\Gamma}_{\beta_1 \alpha_1} + \mathcal{W}_{\dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 \dot{\beta}_1} \Gamma_{\beta_1 \alpha_1 \alpha_2} \}, \quad (2.48b)$$

$$\begin{aligned} \partial_\Lambda \Gamma_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = \frac{1}{2} \partial_\Lambda R_{\gamma_1 \gamma_2} \{ & \mathcal{W}_{\dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3} \tilde{\Gamma}_{\beta_3 \alpha_3} \tilde{\Gamma}_{\beta_2 \alpha_2} \tilde{\Gamma}_{\beta_1 \alpha_1} \\ & + \mathcal{W}_{\dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2} (\Gamma_{\beta_2 \alpha_2 \alpha_3} \tilde{\Gamma}_{\beta_1 \alpha_1} + \tilde{\Gamma}_{\beta_2 \alpha_2} \Gamma_{\beta_1 \alpha_1 \alpha_3}) \\ & + \mathcal{W}_{\dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_3} \tilde{\Gamma}_{\beta_3 \alpha_3} \Gamma_{\beta_1 \alpha_1 \alpha_2} + \mathcal{W}_{\dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 \dot{\beta}_1} \Gamma_{\beta_1 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \}, \end{aligned} \quad (2.48c)$$

$$\begin{aligned} \partial_\Lambda \Gamma_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} = \frac{1}{2} \partial_\Lambda R_{\gamma_1 \gamma_2} \{ & \mathcal{W}_{\dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3 \dot{\beta}_4} \tilde{\Gamma}_{\beta_4 \alpha_4} \tilde{\Gamma}_{\beta_3 \alpha_3} \tilde{\Gamma}_{\beta_2 \alpha_2} \tilde{\Gamma}_{\beta_1 \alpha_1} \\ & + \mathcal{W}_{\dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3} (\Gamma_{\beta_3 \alpha_3 \alpha_4} \tilde{\Gamma}_{\beta_2 \alpha_2} \tilde{\Gamma}_{\beta_1 \alpha_1} + \tilde{\Gamma}_{\beta_3 \alpha_3} \Gamma_{\beta_2 \alpha_2 \alpha_4} \tilde{\Gamma}_{\beta_1 \alpha_1} \\ & \quad + \tilde{\Gamma}_{\beta_3 \alpha_3} \tilde{\Gamma}_{\beta_2 \alpha_2} \Gamma_{\beta_1 \alpha_1 \alpha_4}) \\ & + \mathcal{W}_{\dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_4} \tilde{\Gamma}_{\beta_4 \alpha_4} (\Gamma_{\beta_2 \alpha_2 \alpha_3} \tilde{\Gamma}_{\beta_1 \alpha_1} + \tilde{\Gamma}_{\beta_2 \alpha_2} \Gamma_{\beta_1 \alpha_1 \alpha_3}) \\ & + \mathcal{W}_{\dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2} (\Gamma_{\beta_2 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \tilde{\Gamma}_{\beta_1 \alpha_1} + \Gamma_{\beta_2 \alpha_2 \alpha_3} \Gamma_{\beta_1 \alpha_1 \alpha_4} \\ & \quad + \Gamma_{\beta_2 \alpha_2 \alpha_4} \Gamma_{\beta_1 \alpha_1 \alpha_3} + \tilde{\Gamma}_{\beta_2 \alpha_2} \Gamma_{\beta_1 \alpha_1 \alpha_3 \alpha_4}) \\ & + \mathcal{W}_{\dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_3 \dot{\beta}_4} \tilde{\Gamma}_{\beta_4 \alpha_4} \tilde{\Gamma}_{\beta_3 \alpha_3} \Gamma_{\beta_1 \alpha_1 \alpha_2} \\ & + \mathcal{W}_{\dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_3} (\Gamma_{\beta_3 \alpha_3 \alpha_4} \Gamma_{\beta_1 \alpha_1 \alpha_2} + \tilde{\Gamma}_{\beta_3 \alpha_3} \Gamma_{\beta_1 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4}) \\ & + \mathcal{W}_{\dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_4} \tilde{\Gamma}_{\beta_4 \alpha_4} \Gamma_{\beta_1 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} + \mathcal{W}_{\dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 \dot{\beta}_1} \Gamma_{\beta_1 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \} \end{aligned} \quad (2.48d)$$

...

On obtient donc une hiérarchie d'équations de flot : les vertex d'ordre n dépendent des vertex d'ordres $1, 2, \dots, n + 1$. Pour pouvoir exploiter ces équations, deux stratégies sont envisageables :

- tronquer la hiérarchie "à la main" en effectuant un développement en puissances du champ. C'est cette stratégie qui sera utilisée dans le projet portant sur le modèle de Fermi-Hubbard étendu, car elle est structurel-

lement adaptée aux problèmes mettant en jeu des fermions.

- remplacer la hiérarchie par une équation de flot pour un ansatz.
- Enfin, mentionnons qu'il est possible de tronquer la hiérarchie (dans le cas de champs bosoniques) en gardant la dépendance en les impulsions, en se restreignant à une évaluation des fonctionnelles à champ uniforme. Ces considérations conduisent aux famille d'approximations BMW (Blaziot-Mendez-Wschebor) [6, 5] qui ne seront pas utilisées dans ce travail.

2.4 Équations de flot à une boucle pour systèmes fermioniques

À présent, l'étude est spécialisée au cas des fermions. La propriété d'anticommutation des variables de Grassmann contraint fortement la forme de l'action dans la mesure où les seules fonctions possibles sont des polynômes. Ainsi, nous utiliserons la première stratégie, c'est-à-dire celle du développement en vertex, qui nous amène à écrire la fonctionnelle d'action effective sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Lambda}[\phi, J] &= \sum_{n,p=0}^{\infty} \Gamma_{\Lambda}^{[n,p]}[\phi, J] \\ &= \sum_{\{\alpha_i, \mathbf{a}_k\}} \frac{(-1)^n}{n!p!} \Gamma_{\Lambda, \alpha_1 \dots \alpha_n; \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_p}^0 \phi_{\alpha_1} \dots \phi_{\alpha_n} J_{\mathbf{a}_1} \dots J_{\mathbf{a}_p}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Les vertex $\Gamma_{\Lambda, \alpha_1 \dots \alpha_n; \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_p}^0$ possèdent les propriétés de symétrie (anti-symétrie) suivantes :

$$\Gamma_{\Lambda, \alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_j \dots \alpha_n; \{\mathbf{a}_k\}}^0 = -\Gamma_{\Lambda, \alpha_1 \dots \alpha_j \dots \alpha_i \dots \alpha_n; \{\mathbf{a}_k\}}^0, \quad (2.50)$$

$$\Gamma_{\Lambda, \{\alpha_i\}; \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_i \dots \mathbf{a}_j \dots \mathbf{a}_p}^0 = +\Gamma_{\Lambda, \{\alpha_i\}; \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_j \dots \mathbf{a}_i \dots \mathbf{a}_p}^0. \quad (2.51)$$

L'anti-symétrie exprimée dans la première équation provient de la propriété d'anti-commutativité des variables de Grassmann. En termes de ces vertex, la dérivée

2.4. Équations de flot à une boucle pour systèmes fermioniques

seconde de l'action effective par rapport à ϕ prend la forme suivante :

$$\Gamma_{\beta_1\beta_2}[\phi, J] = \sum_{\{\alpha_i, \mathbf{a}_k\}} \frac{(-1)^n}{(n-2)!p!} \Gamma_{\beta_1\beta_2\alpha_3\dots\alpha_n; \mathbf{a}_1\dots\mathbf{a}_p}^0 \phi_{\alpha_1} \dots \phi_{\alpha_n} J_{\mathbf{a}_1} \dots J_{\mathbf{a}_p}.$$

On va à partir de maintenant utiliser la notation \mathbf{A} pour désigner la matrice dont les éléments sont donnés par $A_{\alpha\beta}$. On commence par introduire la matrice $\Gamma_{\Lambda}^{(2)}$ dont les éléments sont donnés par les $\Gamma_{\beta_1\beta_2}[\phi, J]$. De plus, on définit :

$$\tilde{\Gamma}_{\Lambda}^{(2)} = \Gamma_{\Lambda}^{(2)} + \mathbf{R}_{\Lambda}.$$

Dans le langage des matrices, l'équation de Wetterich s'écrit :

$$\partial_{\Lambda} \Gamma_{\Lambda}[\phi, J] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \partial_{\Lambda} \mathbf{R}_{\Lambda} (\tilde{\Gamma}_{\Lambda}^{(2)}[\phi, J])^{-1} \right\} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \frac{\partial_{\Lambda} \mathbf{R}_{\Lambda}}{\Gamma_{\Lambda}^{(2)}[\phi, J] + \mathbf{R}_{\Lambda}} \right\}. \quad (2.52)$$

On décompose la matrice $\tilde{\Gamma}_{\Lambda}^{(2)}$ en une somme de quatre termes, le premier $\mathbf{G}_{\Lambda}^{-1}$ étant indépendant de tous les champs, le deuxième $\delta\Gamma_{\Lambda}^{(2)}[J]$ ne dépendant que des champs source J , le troisième $\mathbf{M}_{\Lambda}[\phi]$ que du champ ϕ , et le dernier terme $-\delta\mathbf{M}_{\Lambda}[\phi, J]$ contenant tous les termes croisés restant :

$$\tilde{\Gamma}_{\Lambda}^{(2)}[\phi, J] = \mathbf{G}_{\Lambda}^{-1} + \delta\Gamma_{\Lambda}^{(2)}[J] - \mathbf{M}_{\Lambda}[\phi] - \delta\mathbf{M}_{\Lambda}[\phi, J]. \quad (2.53)$$

On écrira également :

$$\tilde{\Gamma}_{\Lambda}^{(2)}[\phi, J] = \mathbf{G}_{\Lambda}^{-1} - \delta\tilde{\Gamma}_{\Lambda}^{(2)}[\phi, J]. \quad (2.54)$$

On effectue ensuite une décomposition de ces matrices en monômes :

$$\delta\Gamma_{\Lambda}^{(2)}[J] = \sum_{n=1}^{\infty} \delta\Gamma_{\Lambda}^{[n]}[J], \quad (2.55a)$$

$$\mathbf{M}_{\Lambda}[\phi] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}_{\Lambda}^{[n]}[\phi] \quad (2.55b)$$

$$\delta\mathbf{M}_{\Lambda}[\phi, J] = \sum_{n,p=1}^{\infty} \delta\mathbf{M}_{\Lambda}^{[n,p]}[\phi, J]. \quad (2.55c)$$

À partir de ce point, l'idée est de développer le second membre en puissances des champs ϕ et J . Pour cela, il suffit de faire apparaître une série géométrique :

$$\begin{aligned} (\tilde{\Gamma}_{\Lambda}^{(2)})^{-1} &= (\mathbf{G}_{\Lambda}^{-1} - \delta\tilde{\Gamma}_{\Lambda}^{(2)})^{-1} \\ &= (\mathbf{1} - \mathbf{G}_{\Lambda} \delta\tilde{\Gamma}_{\Lambda}^{(2)})^{-1} \mathbf{G}_{\Lambda} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{G}_{\Lambda} \delta\tilde{\Gamma}_{\Lambda}^{(2)})^n \mathbf{G}_{\Lambda}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Il est maintenant possible d'insérer ce développement dans l'équation de Wetterich et de procéder à l'identification des monômes $\sim \phi^n J^m$ de part et d'autre de l'équation, ce qui donne pour les premiers termes (ceux qui seront utiles pour la suite) :

$$\begin{aligned} \partial_{\Lambda} \Gamma^{[0,0]}[\phi, J] &= \frac{1}{2} \text{Tr} \{ \partial_{\Lambda} \mathbf{R}_{\Lambda} \mathbf{G}_{\Lambda} \}, \\ \partial_{\Lambda} \Gamma^{[2,0]}[\phi, J] &= \frac{1}{2} \text{Tr} \{ \mathbf{S}_{\Lambda} \mathbf{M}_{\Lambda}^{[2]}[\phi] \}, \\ \partial_{\Lambda} \Gamma^{[4,0]}[\phi, J] &= \frac{1}{2} \text{Tr} \{ \mathbf{S}_{\Lambda} \mathbf{M}_{\Lambda}^{[2]}[\phi] \mathbf{G}_{\Lambda} \mathbf{M}_{\Lambda}^{[2]}[\phi] \}, \\ \partial_{\Lambda} \Gamma^{[2,1]}[\phi, J] &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \{ \mathbf{S}_{\Lambda} [\mathbf{M}_{\Lambda}^{[2]}[\phi] \mathbf{G}_{\Lambda} \delta\Gamma_{\Lambda}^{[1]}[J] \\ &\quad + \delta\Gamma_{\Lambda}^{[1]}[J] \mathbf{G}_{\Lambda} \mathbf{M}_{\Lambda}^{[2]}[\phi]] \}, \\ \partial_{\Lambda} \Gamma^{[0,2]}[\phi, J] &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \{ \mathbf{S}_{\Lambda} \delta\Gamma_{\Lambda}^{[1]}[J] \mathbf{G}_{\Lambda} \delta\Gamma_{\Lambda}^{[1]}[J] \}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

2.4. Équations de flot à une boucle pour systèmes fermioniques

avec $\mathbf{S}_\Lambda = -\mathbf{G}\partial_\Lambda \mathbf{R}_\Lambda \mathbf{G}_\Lambda$. Ce propagateur est celui qui permet de "sélectionner" les modes qui sont intégrés à l'étape Λ en raison de la présence de la dérivée du régulateur $\partial_\Lambda \mathbf{R}_\Lambda$. On peut à présent revenir à une écriture plus explicite de ces équations, en n'écrivant que les vertex impliqués. Pour cela, on commence par écrire :

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\beta_1\beta_2}^{[1]}[J] &= \Gamma_{\beta_1\beta_2;\mathbf{a}}^0 J_{\mathbf{a}}, \\ M_{\beta_1\beta_2}^{[2]}[\phi] &= \frac{1}{2}\Gamma_{\beta_1\beta_2\alpha_3\alpha_4}^0 \phi_{\alpha_3} \phi_{\alpha_4}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Une fois ces expressions insérées dans les équations de flot, il vient :

$$\begin{aligned} \partial_\Lambda \Gamma_0^0 &= \frac{1}{2}R_{\alpha_1\alpha_2} G_{\alpha_1\alpha_2}, \\ \partial_\Lambda \Gamma_{\alpha_1\alpha_2}^0 &= -S_{\beta_1\beta_1'} \Gamma_{\beta_1\beta_1'\alpha_1\alpha_2}^0 / 2, \\ \partial_\Lambda \Gamma_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}^0 &= -S_{\beta_1\beta_1'} G_{\beta_2\beta_2'} [\Gamma_{\beta_1'\beta_2\alpha_1\alpha_2}^0 \Gamma_{\beta_2'\beta_1\alpha_3\alpha_4}^0 \\ &\quad + \Gamma_{\beta_1'\beta_2\alpha_1\alpha_3}^0 \Gamma_{\beta_2'\beta_1\alpha_2\alpha_4}^0 \\ &\quad + \Gamma_{\beta_1'\beta_2\alpha_1\alpha_4}^0 \Gamma_{\beta_2'\beta_1\alpha_2\alpha_3}^0], \\ \partial_\Lambda \Gamma_{\alpha_1\alpha_2;\mathbf{a}}^0 &= -S_{\beta_1\beta_1'} G_{\beta_2\beta_2'} [\Gamma_{\beta_1'\beta_2\alpha_1\alpha_2}^0 \Gamma_{\beta_2'\beta_1;\mathbf{a}}^0 + \Gamma_{\beta_1'\beta_2;\mathbf{a}}^0 \Gamma_{\beta_2'\beta_1\alpha_1\alpha_2}^0] / 2, \\ \partial_\Lambda \Gamma_{0;\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}^0 &= -S_{\beta_1\beta_1'} G_{\beta_2\beta_2'} \Gamma_{\beta_1'\beta_2;\mathbf{a}_1}^0 \Gamma_{\beta_2'\beta_1;\mathbf{a}_2}^0. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Pour la suite, il sera utile d'utiliser une autre implémentation du régulateur. Celle-ci consiste à utiliser la partie gaussienne de l'action \mathbf{K} et à écrire :

$$\mathbf{K} + \mathbf{R}_\Lambda = \mathbf{K}\theta_\Lambda^{-1}. \quad (2.60)$$

La matrice θ_Λ sera dans la pratique construite à partir d'une fonction porte dont la rigidité sera contrôlée par un paramètre libre. Cette construction sera détaillée au chapitre suivant.

Introduisons à présent la matrice de self-énergie Σ_Λ par :

$$\mathbf{G}_\Lambda^{-1} = \mathbf{Q}^{-1}\theta_\Lambda^{-1} - \Sigma_\Lambda, \quad (2.61)$$

avec $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{K}$ le propagateur libre. Pour la suite, on utilisera également le pro-

2.4. Équations de flot à une boucle pour systèmes fermioniques

propagateur libre régularisé $\bar{Q}_\Lambda = \theta_\Lambda Q$. La matrice de self-énergie représente les corrections au propagateur libre dues aux fluctuations. Dans les équations de flot, c'est le propagateur complet G_Λ qui intervient. Celui-ci, ainsi que le propagateur S_Λ , peuvent être développés en puissances de la self-énergie :

$$G_\Lambda = \bar{Q}_\Lambda + O(\Sigma_\Lambda), \quad (2.62a)$$

$$S_\Lambda = \partial_\Lambda \bar{Q}_\Lambda + O(\Sigma_\Lambda), \quad (2.62b)$$

où il a été fait usage de l'identité $\partial_\Lambda \theta_\Lambda = -\theta_\Lambda (\partial_\Lambda \theta_\Lambda^{-1}) \theta_\Lambda$. Pour la suite, on supposera de plus que l'on se place dans une base dans laquelle le propagateur libre (régularisé) est diagonal, c'est-à-dire que l'on écrira $\bar{Q}_{\beta_1 \beta_2} = \bar{Q}_{\beta_1} \delta_{\beta_1 \beta_2}$. Lorsque toutes ces simplifications sont faites, on obtient une nouvelle forme des équations de flot (on est cependant obligé de conserver le propagateur S_β , lui aussi supposé diagonal, dans l'équation pour la self-énergie) :

$$\begin{aligned} \Lambda \partial_\Lambda \Gamma_{\alpha_1 \alpha_2}^0 &= -\Lambda S_\beta \Gamma_{\beta \beta \alpha_1 \alpha_2}^0 / 2, \\ \Lambda \partial_\Lambda \Gamma_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}^0 &= \mathcal{L}_{\beta_1 \beta_2} \left[\Gamma_{\beta_1 \beta_2 \alpha_1 \alpha_2}^0 \Gamma_{\beta_2 \beta_1 \alpha_3 \alpha_4}^0 \right. \\ &\quad \left. + \Gamma_{\beta_1 \beta_2 \alpha_1 \alpha_3}^0 \Gamma_{\beta_2 \beta_1 \alpha_2 \alpha_4}^0 \right. \\ &\quad \left. + \Gamma_{\beta_1 \beta_2 \alpha_1 \alpha_4}^0 \Gamma_{\beta_2 \beta_1 \alpha_2 \alpha_3}^0 \right], \quad (2.63) \\ \Lambda \partial_\Lambda \Gamma_{\alpha_1 \alpha_2; \mathbf{a}}^0 &= \mathcal{L}_{\beta_1 \beta_2} \left[\Gamma_{\beta_1 \beta_2 \alpha_1 \alpha_2}^0 \Gamma_{\beta_2 \beta_1; \mathbf{a}}^0 + \Gamma_{\beta_1 \beta_2; \mathbf{a}}^0 \Gamma_{\beta_2 \beta_1 \alpha_1 \alpha_2}^0 \right] / 2, \\ \Lambda \partial_\Lambda \Gamma_{0; \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2}^0 &= \mathcal{L}_{\beta_1 \beta_2} \Gamma_{\beta_1 \beta_2; \mathbf{a}_1}^0 \Gamma_{\beta_2 \beta_1; \mathbf{a}_2}^0, \end{aligned}$$

où la bulle $\mathcal{L}_{\beta_1 \beta_2}$ est donnée par :

$$\mathcal{L}_{\beta_1 \beta_2} = -\Lambda \partial_\Lambda (\bar{Q}_{\beta_1} \bar{Q}_{\beta_2}) / 2. \quad (2.64)$$

La structure de ces équations est alors claire d'un point de vue heuristique. Pour les obtenir, il suffit de calculer les diagrammes de Feynman corrigeant un vertex donné à l'ordre 2 en théorie des perturbations, en prenant pour les lignes internes les propagateurs libres régularisés. Il faut alors dériver ces diagrammes par rapport à Λ en supposant les vertex constants.

3

FRG fermionique sur réseau unidimensionnel

« L'intelligence ne se représente clairement que dans le
discontinu. »

Henri BERGSON, *L'évolution créatrice*

Dans ce chapitre les équations de flot sont précisées dans le cas d'un système d'électrons unidimensionnel. La construction du régulateur intervenant dans les équations de flot est précisée, et il est montré que le choix d'un régulateur dur permet de retrouver les équations de flot que l'on aurait obtenues avec une méthode purement wilsonienne. On présente ensuite une hiérarchie des constantes de couplage par ordre de pertinence. Celle-ci permet de prendre en compte les effets de non-localité des interactions, qui auront des effets qualitatifs sur les diagrammes de phase calculés dans les chapitres suivants. Cette hiérarchie prend la forme d'un développement des vertex en puissances de variables ξ traduisant l'écart énergétique au niveau de Fermi d'un mode d'impulsion k . Un calcul explicite utilisant ce développement dans le cas de la self-énergie est exposé.

3.1 Fermions avec spin

À ce stade, on effectue la décomposition de l'indice α de sorte qu'il soit adapté à un système de fermions chargés de spin $1/2$. Cela signifie que l'on doit

3.1. Fermions avec spin

écrire :

$$\alpha \rightarrow (u, \sigma, a), \quad (3.1)$$

où $u = c, a$ est associé à la charge électrique, tandis que $\sigma = \uparrow, \downarrow$ est associé au spin. Enfin, a contient toute l'information restante, c'est-à-dire l'indice de bande, l'impulsion, et la fréquence de Matsubara. En fait, on utilisera plutôt la notation $\phi_{a,a\sigma} = \psi_{a\sigma}, \phi_{c,a\sigma} = \bar{\psi}_{a\sigma}$ telle qu'elle a été introduite dans le premier chapitre. Les symétries imposées contraignent la forme du vertex à deux corps qui doit prendre la forme suivante :

$$\Gamma_{\alpha'_1 \alpha'_2 \alpha_2 \alpha_1}^0 = \frac{1}{2} \delta_{u'_1, c} \delta_{u'_2, c} \delta_{u_2, a} \delta_{u_1, a} (V_{a'_1 a'_2 a_2 a_1} \delta_{\sigma'_1 \sigma_1} \delta_{\sigma'_2 \sigma_2} - V_{a'_2 a'_1 a_2 a_1} \delta_{\sigma'_1 \sigma_2} \delta_{\sigma'_2 \sigma_1}). \quad (3.2)$$

De plus, le propagateur ne peut pas affecter l'orientation du spin et doit conserver la charge, ce qui implique :

$$X_{\beta' \beta} = X_{b' b}, \quad X = S, G, \Sigma. \quad (3.3)$$

À présent, discutons les fonctions de réponse. Puisque nous considérons des électrons, nous devons faire la différence entre les fonctions de réponse particule-particule et particule-trou. Les premières sont associées à la supraconductivité, tandis que les autres sont associées aux ondes de densité. Pour que la distinction soit claire, il faut donc introduire deux champs sources différents. En tenant bien sûr encore en compte de la symétrie $U(1) \times SU(2)$, le terme d'action effective prenant en compte le couplage entre les champs source H (associés aux opérateurs de paires particule-trou) et J (particule-particule) et le champ décrivant les électrons est de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathcal{Z}}[\phi, H, J] = & Z_{aa', b}^{\text{ch}} \bar{\psi}_{a\sigma} H_b^0 \sigma_{\sigma\sigma'}^0 \psi_{a'\sigma'} + Z_{aa', b}^{\text{sp}} \bar{\psi}_{a\sigma} \vec{H}_b \cdot \vec{\sigma}_{\sigma\sigma'} \psi_{a'\sigma'} \\ & + Z_{aa', b}^s \bar{\psi}_{a\sigma} J_b^0 \pi_{\sigma\sigma'}^0 \bar{\psi}_{a'\sigma'} + \text{H.c.} \\ & + Z_{aa', b}^t \bar{\psi}_{a\sigma} \vec{J}_b \vec{\pi}_{\sigma\sigma'} \bar{\psi}_{a'\sigma'} + \text{H.c.} \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.1. Fermions avec spin

De plus, le terme contenant les susceptibilités est donné par une somme de termes quadratiques en les champs source :

$$\Gamma_\chi[H, J] = \chi_{b'b}^{\text{ch}} H_{b'}^0 H_b^0 + \chi_{b'b}^{\text{sp}} \vec{H}_{b'} \cdot \vec{H}_b + \left(\chi_{b'b}^s (J_{b'}^0)^* J_b^0 + \text{H.c.} \right) + \left(\chi_{b'b}^t \vec{J}_{b'}^* \cdot \vec{J}_b + \text{H.c.} \right). \quad (3.5)$$

Enfin, traitons le cas des bulles. Comme les propagateurs ne peuvent pas affecter l'orientation du spin, il en va de même pour les bulles qui s'écrivent alors :

$$\mathcal{L}_{\beta_1 \beta_2} = \mathcal{L}_{b_1 b_2} \delta_{\sigma_1 \sigma_2}. \quad (3.6)$$

Une fois que tous ces changements sont insérés dans les équations (2.63), on obtient les équations pour la self-énergie Σ , les vertex V , les susceptibilités χ^x ainsi que les vertex à trois pattes Z^x . L'équation de flot pour la self-énergie est :

$$\Lambda \partial_\Lambda \Sigma_{a'a} = \Lambda S_b (V_{ba'ba}/2 - V_{a'bba}). \quad (3.7)$$

Les vertex V vérifient quant à eux :

$$\Lambda \partial_\Lambda V_{a'_1 a'_2 a_2 a_1} = \mathcal{D}_{a'_1 a'_2 a_2 a_1}^{\text{ee}} + \mathcal{D}_{a'_1 a'_2 a_2 a_1}^{\text{eh1}} + \mathcal{D}_{a'_1 a'_2 a_2 a_1}^{\text{eh2}} + \mathcal{D}_{a'_1 a'_2 a_2 a_1}^{\text{eh3}}, \quad (3.8)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a'_1 a'_2 a_2 a_1}^{\text{ee}} &= \mathcal{L}_{bc} V_{cba_1 a_2} V_{a'_1 a'_2 cb}, \\ \mathcal{D}_{a'_1 a'_2 a_2 a_1}^{\text{eh1}} &= \mathcal{L}_{bc} V_{ba'_2 c' a_1} V_{ca'_1 b' a_2}, \\ \mathcal{D}_{a'_1 a'_2 a_2 a_1}^{\text{eh2}} &= -2 \mathcal{L}_{bc} V_{a'_1 bca_1} V_{ca'_2 a_2 b}, \\ \mathcal{D}_{a'_1 a'_2 a_2 a_1}^{\text{eh3}} &= \mathcal{L}_{bc} (V_{ba'_1 c' a_1} V_{ca'_2 a_2 b} + V_{a'_1 bca_1} V_{ca'_2 ba_2}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.2. Systèmes unidimensionnels à température finie

Les susceptibilités évoluent selon les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \Lambda \partial_{\Lambda} \chi_{a'a}^{\text{ch}} &= \mathcal{L}_{bc} Z_{bc;a'}^{\text{ch}} Z_{cb;a}^{\text{ch}}, \\
 \Lambda \partial_{\Lambda} \chi_{a'a}^{\text{sp}} &= \mathcal{L}_{bc} Z_{bc;a'}^{\text{sp}} Z_{cb;a}^{\text{sp}}, \\
 \Lambda \partial_{\Lambda} \chi_{a'a}^{\text{s}} &= \mathcal{L}_{bc} (Z_{cb;a'}^{\text{s}})^* Z_{cb;a}^{\text{s}}/2, \\
 \Lambda \partial_{\Lambda} \chi_{a'a}^{\text{t}} &= -\mathcal{L}_{bc} (Z_{cb;a'}^{\text{t}})^* Z_{cb;a}^{\text{t}}/2.
 \end{aligned} \tag{3.I0}$$

Enfin, les équations de flot pour les vertex à trois pattes sont :

$$\begin{aligned}
 \Lambda \partial_{\Lambda} Z_{a'a;d}^{\text{ch}} &= \mathcal{L}_{bc} Z_{bc;d}^{\text{ch}} (V_{ca'ba} - 2V_{a'cba}), \\
 \Lambda \partial_{\Lambda} Z_{a'a;d}^{\text{sp}} &= \mathcal{L}_{bc} Z_{bc;d}^{\text{sp}} V_{ca'ba}, \\
 \Lambda \partial_{\Lambda} Z_{a'a;d}^{\text{s}} &= \mathcal{L}_{bc} Z_{cb;d}^{\text{s}} (V_{cba'a} + V_{bca'a})/2 \\
 \Lambda \partial_{\Lambda} Z_{a'a;d}^{\text{t}} &= -\mathcal{L}_{bc} Z_{cb;d}^{\text{t}} (V_{cba'a} - V_{bca'a})/2.
 \end{aligned} \tag{3.II}$$

3.2 Systèmes unidimensionnels à température finie

À présent, il est temps de spécialiser les équations obtenues au cas des systèmes unidimensionnels à température finie, en présence d'une unique bande pour la suite, ce qui revient à donner à l'indice a la structure suivante¹ :

$$a \rightarrow K = (\omega_n, k), \tag{3.I2}$$

en utilisant exactement la notation du premier chapitre, c'est-à-dire que les $\omega_n = (2n + 1)\pi T$ ($n \in \mathbb{Z}$) sont les fréquences de Matsubara fermioniques à température T , tandis que $k \in \text{BZ1} = [-\pi, \pi]$ est l'impulsion cristalline. Les vertex et

1. On fait les associations suivantes, en terme de lettres $a \leftrightarrow K, b \leftrightarrow P, c \leftrightarrow Q$.

3.2. Systèmes unidimensionnels à température finie

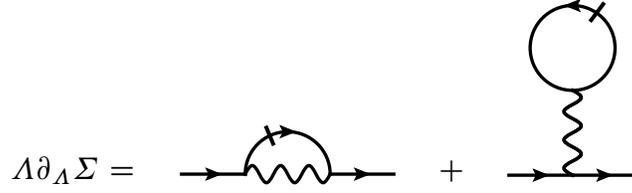


FIG. 3.1 – Représentation diagrammatique de l'équation de flot pour la self-énergie à une boucle. La ligne est associée à la dérivée du propagateur libre régularisé par rapport à Λ .

les bulles prennent alors la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 V_{a'_1 a'_2 a_2 a_1} &= \frac{\pi v_F T}{L} g_{k_1, k_2, k'_1} \delta_{K'_1 + K'_2 - K_2 - K_2}^{\text{RR}}, \\
 \Sigma_{a'a} &= \Sigma_K \delta_{K'-K}^{\text{RR}}, \\
 Z_{a'a;c}^{\text{chs}} &= Z_k^{\text{chs}}(q) \delta_{K-K'+Q}^{\text{RR}}, \\
 Z_{a'a;c}^{\text{chb}} &= Z_k^{\text{chb}}(q) \cos((k+q)/2) \delta_{K-K'+Q}^{\text{RR}}, \\
 Z_{a'a;c}^{\text{chs}} &= Z_k^{\text{ee}}(q) \delta_{K+K'+Q}^{\text{RR}}, \\
 \mathcal{L}_{bc} &= \mathcal{L}_{P,Q}.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Lorsque les expressions de ces vertex sont injectées dans les équations de flot de la section précédente, on obtient tout d'abord pour la self-énergie :

$$\Lambda \partial_{\Lambda} \Sigma_k = \frac{\pi v_F T}{L} \Lambda S_P(g_{k,p,p}/2 - g_{k,p,k}), \tag{3.14}$$

pour les constantes de couplage :

$$\Lambda \partial_{\Lambda} g_{k_1, k_2, k'_1} = \mathcal{D}_{k_1, k_2, k'_1}^{\text{ee}} + \mathcal{D}_{k_1, k_2, k'_1}^{\text{eh1}} + \mathcal{D}_{k_1, k_2, k'_1}^{\text{eh2}} + \mathcal{D}_{k_1, k_2, k'_1}^{\text{eh3}}, \tag{3.15}$$

avec :

$$\Lambda \partial_{\Lambda} g =$$

FIG. 3.2 – Équations de flot à une boucle pour les constantes de couplage. La ligne barrée dans les diagrammes est associée au propagateur S_{Λ} .

3.2. Systèmes unidimensionnels à température finie

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{k_1, k_2, k'_1}^{ee} &= \mathcal{L}_{p, k_1+k_2}^{ee} \mathcal{G}_{k_2, k_1, -p+k_1+k_2} \mathcal{G}_{p, -p+k_1+k_2, k'_1}, \\
 \mathcal{D}_{k_1, k_2, k'_1}^{eh1} &= \mathcal{L}_{p, -k'_1+k_2}^{eh} \mathcal{G}_{k_1, p-k'_1+k_2, p} \mathcal{G}_{k_2, p, p-k'_1+k_2}, \\
 \mathcal{D}_{k_1, k_2, k'_1}^{eh2} &= -2\mathcal{L}_{p, k'_1-k_1}^{eh} \mathcal{G}_{k_1, p+k'_1-k_1, k'_1} \mathcal{G}_{p, k_2, p+k'_1-k_1}, \\
 \mathcal{D}_{k_1, k_2, k'_1}^{eh3} &= \mathcal{L}_{p, k'_1-k_1}^{eh} (\mathcal{G}_{k_1, p+k'_1-k_1, p} \mathcal{G}_{p, k_2, p+k'_1-k_1} \\
 &\quad + \mathcal{G}_{k_1, p+k'_1-k_1, k'_1} \mathcal{G}_{k_2, p, p+k'_1-k_1}).
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
 \Lambda \partial_{\Lambda} \chi^{\text{ch/sp}} &= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \\
 \Lambda \partial_{\Lambda} \chi^{\text{s/t}} &= \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4}
 \end{aligned}$$

FIG. 3.3 – Équations de flot pour les susceptibilités associées aux ondes de densité de charge/spin et aux états supraconducteurs singulet/triplet.

Les équations pour les susceptibilités sont alors :

$$\begin{aligned}
 \Lambda \partial_{\Lambda} \chi^{\text{ch-s}}(q) &= \mathcal{L}_{p, -q}^{\text{ch}} Z_{p-q}^{\text{ch-s}}(q) Z_p^{\text{ch-s}}(-q), \\
 \Lambda \partial_{\Lambda} \chi^{\text{sp-s}}(q) &= \mathcal{L}_{p, -q}^{\text{sp}} Z_{p-q}^{\text{sp-s}}(q) Z_p^{\text{sp-s}}(-q), \\
 \Lambda \partial_{\Lambda} \chi^{\text{ch-b}}(q) &= \mathcal{L}_{p, -q}^{\text{ch}} Z_{p-q}^{\text{ch-b}}(q) Z_p^{\text{ch-b}}(-q) [\cos(p-q/2)]^2, \\
 \Lambda \partial_{\Lambda} \chi^{\text{s}}(q) &= \mathcal{L}_{p, -q}^{\text{cc}} [Z_p^{\text{s}}(q)]^* Z_{-p-q}^{\text{s}}(q)/2, \\
 \Lambda \partial_{\Lambda} \chi^{\text{t}}(q) &= \mathcal{L}_{p, -q}^{\text{cc}} [Z_p^{\text{t}}(q)]^* Z_{-p-q}^{\text{t}}(q)/2.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

3.2. Systèmes unidimensionnels à température finie

Enfin, les équations pour les vertex à trois pattes s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \Lambda \partial_{\Lambda} Z_k^{\text{ch-s}}(q) &= \mathcal{L}_{p,q}^{\text{eh}} Z_p^{\text{ch-s}}(q) (g_{k,p+q,p} - 2g_{k,p+q,k+q}), \\
 \Lambda \partial_{\Lambda} Z_k^{\text{sp-s}}(q) &= \mathcal{L}_{p,q}^{\text{eh}} Z_p^{\text{sp-s}}(q) g_{k,p+q,p}, \\
 \Lambda \partial_{\Lambda} Z_k^{\text{ch-b}}(q) &= \mathcal{L}_{p,q}^{\text{eh}} Z_p^{\text{ch-b}}(q) \frac{\cos(p+q/2)}{\cos(k+q/2)} \\
 &\quad \times (g_{k,p+q,p} - 2g_{k,p+q,k+q}), \quad (3.18) \\
 \Lambda \partial_{\Lambda} Z_k^{\text{sp-b}}(q) &= \mathcal{L}_{p,q}^{\text{eh}} Z_p^{\text{sp-b}}(q) \frac{\cos(p+q/2)}{\cos(k+q/2)} g_{k,p+q,p}, \\
 \Lambda \partial_{\Lambda} Z_k^{\text{s}}(q) &= \mathcal{L}_{p,-q}^{\text{ec}} Z_p^{\text{s}}(q) (g_{k,-k-q,-p-q} + g_{k,-k-q,p})/2, \\
 \Lambda \partial_{\Lambda} Z_k^{\text{t}}(q) &= -\mathcal{L}_{p,-q}^{\text{ec}} Z_p^{\text{t}}(q) (g_{k,-k-q,-p-q} - g_{k,-k-q,p})/2.
 \end{aligned}$$

Ces équations sont représentées de façon diagrammatiques aux figures 3.2, 3.3 et

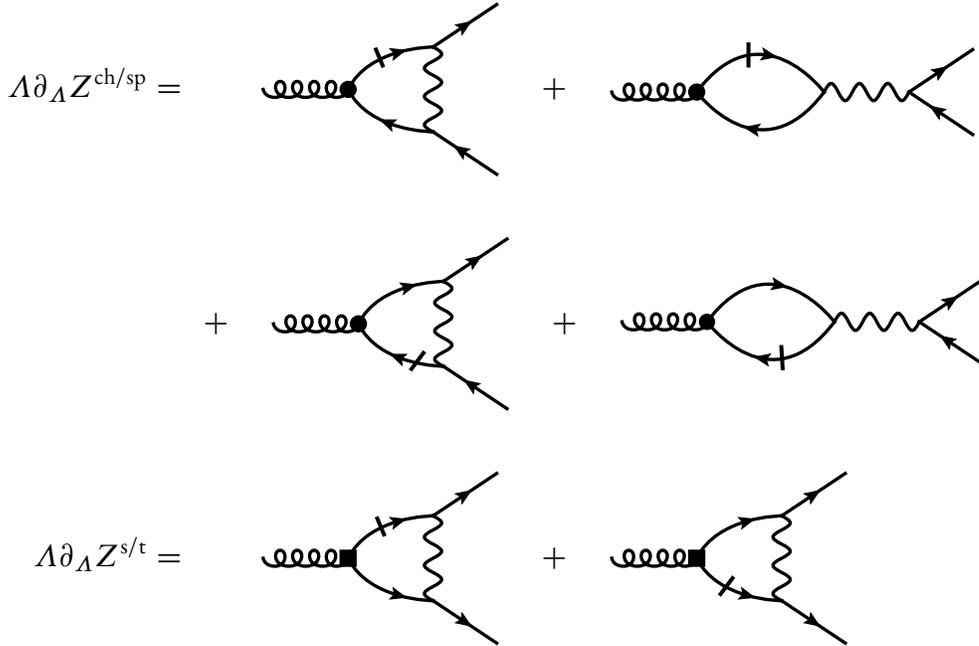


FIG. 3.4 – Équations de flot pour les vertex à trois pattes associés aux susceptibilités de la figure 3.3.

3.3. On voit que ces équations ont la même structure que celles dérivées de façon schématique au chapitre précédent avec la méthode de Wegner-Houghton dans le cas d'un champ scalaire.

Notons également que dans ces équations, la somme sur les fréquences de Matsubara p_n de la variable interne $P = (p_n, p)$ a été faite, ce qui conduit à la bulle électron-électron \mathcal{L}^{ee} et à la bulle électron-trou \mathcal{L}^{eh} . Celles-ci sont définies comme suit, en négligeant la dépendance en les fréquences de Matsubara de l'impulsion d'échange $Q = (q_n, q)$, c'est-à-dire en prenant $q_n = 0$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{p,q}^{ee} &= \sum_{p_n} \mathcal{L}_{(p_n,p),-(p_n,p)+(0,q)}, \\ \mathcal{L}_{p,q}^{eh} &= \sum_{p_n} \mathcal{L}_{(p_n,p),(p_n,p)+(0,q)}.\end{aligned}\quad (3.19)$$

Tout d'abord, rappelons l'expression du propagateur libre (1.64) :

$$\bar{Q}_P = \frac{\theta_\Lambda(p)}{ip_n - \xi(p)}, \quad (3.20)$$

grâce à laquelle on obtient, d'après les expressions (2.64) et (3.6) :

$$\mathcal{L}_{P,Q} = -\frac{\pi v_F T}{2L} \Lambda \partial_\Lambda \left(\theta_\Lambda(p) \theta_\Lambda(q) \right) \mathcal{Q}_P \mathcal{Q}_Q. \quad (3.21)$$

La somme sur les fréquences de Matsubara donne alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{p,q}^{eh} &= \frac{\pi v_F}{2L} \Lambda \partial_\Lambda \left(\theta_\Lambda(p) \theta_\Lambda(-p+q) \right) \frac{n_F(\xi(p)) - n_F(\xi(p+q))}{\xi(p) - \xi(p+q)}, \\ \mathcal{L}_{p,q}^{ee} &= -\frac{\pi v_F}{2L} \Lambda \partial_\Lambda \left(\theta_\Lambda(p) \theta_\Lambda(p+q) \right) \frac{n_F(\xi(p)) - n_F(-\xi(p+q))}{\xi(p) + \xi(p+q)}.\end{aligned}\quad (3.22)$$

Il faut à présent discuter le choix du régulateur.

3.3. Choix du régulateur

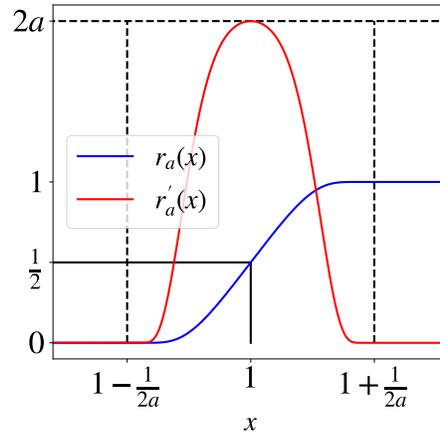


FIG. 3.5 – Régulateur $r_a(x)$ et sa dérivée $r'_a(x)$, tel que $r_{a=\infty}(x) = \Theta(x)$.

3.3 Choix du régulateur

Décrivons à présent la construction du régulateur. L'idée est de construire une fonction "marche" lisse qui vaut exactement 0 puis vaut exactement 1 en variant dans une région dont la largeur, aussi faible que désiré, est contrôlée par un paramètre a . Pour parvenir à ce résultat, on commence par considérer la fonction suivante :

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puis on forme une deuxième fonction :

$$h(x) = \frac{g(x)}{g(x) + g(1-x)},$$

ce qui nous permet de définir notre fonction "marche" par :

$$r_a(x) = h(ax - a + 1/2), \quad r_0(x) = \Theta(x - 1)$$

Finalement, le régulateur est donné par :

$$\theta_{\Lambda}(k) = r_a(|\xi(k)|/\Lambda).$$

Ainsi, dans la limite $a \rightarrow \infty$, on retrouve la coupure dure qui est celle apparaissant naturellement dans la version wilsonienne du groupe de renormalisation.

Régularisation de la singularité de van Hove Il est possible d'utiliser les fonctions construites précédemment pour régulariser la singularité de van Hove. Cette singularité apparaît dans la densité d'états en bordure de bande. Mathématiquement, la densité d'états est une fonction de la forme suivante :

$$f(x) = \frac{\Theta(1 - |x|)}{\sqrt{1 - x^2}},$$

où $\Theta(x)$ est la fonction de Heaviside. L'idée pour la régulariser est de commencer par définir une fonction porte

$$\Pi_a(x) = r_a(x + 2)(1 - r_a(x)),$$

avec laquelle il est possible de "couper" la singularité en empêchant x d'atteindre la valeur 1, c'est-à-dire en faisant le remplacement suivant :

$$f(x) \longrightarrow f_a(x) = \frac{\Pi_a(x)}{\sqrt{1 - x^2 \Pi_a(x)}}.$$

Ainsi, l'erreur commise par rapport à la véritable densité d'états est localisée dans une petite région autour des singularité de van Hove. L'extension de cette région est contrôlée par le paramètre arbitraire a qui est tel que $f(x) = f_{a \rightarrow \infty}(x)$. L'illustration de cette régularisation est présentée dans la figure 3.6.

3.4 Développement en ξ

À ce stade, les équations de flot sont encore fonctionnelles dans la mesure où elles décrivent le flot de fonctions des impulsions. Ces équations sont doublement difficiles à exploiter. D'une part, il n'est pas aisé de distinguer quels sont

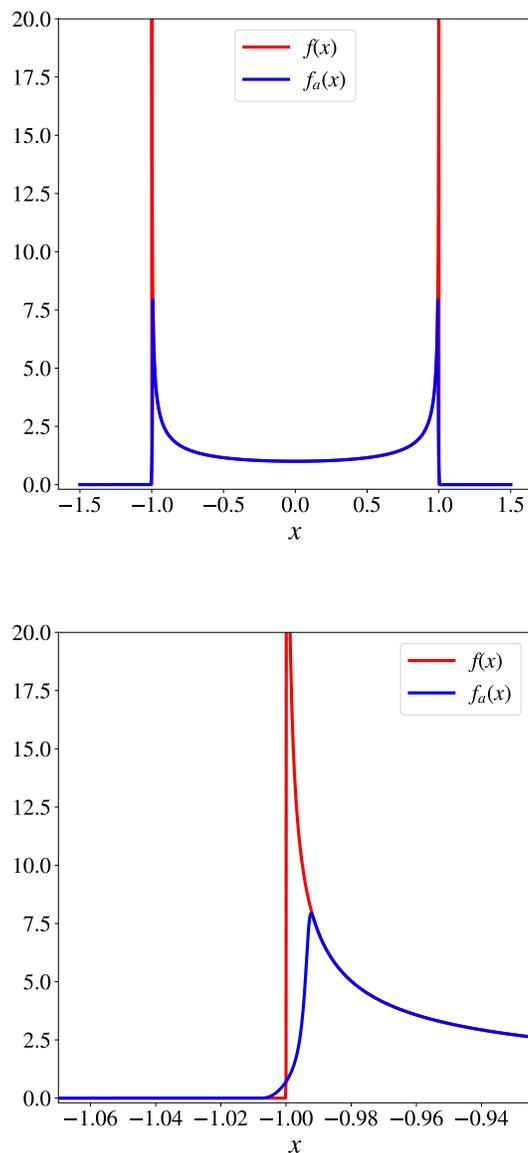


FIG. 3.6 – La singularité de van Hove est régularisée grâce à la fonction de porte lissée $\Pi_a(x)$, et la densité d'états originelle $f(x)$ est remplacée par la densité d'états régularisée $f_a(x)$, dont la rigidité est contrôlée par le paramètre a , avec lequel on a $f_{a \rightarrow \infty}(x) = f(x)$. De plus, le panneau du bas montre que l'on a $f(x) \neq f_a(x)$ seulement sur un intervalle fini autour de la singularité.

les processus d'interactions qui sont responsables de l'aspect qualitatif du diagramme de phase. D'autre part, ces équations ne se prêtent pas en l'état à une résolution numérique. Une stratégie possible consiste à effectuer une discrétisation de la première zone de Brillouin qui permet de réduire les équations fonctionnelles à une (possiblement grande) collection d'équations différentielles couplées. Cette stratégie a déjà été utilisée avec succès dans des études antérieures [57, 69, 46, 8].

Dans cette section, une autre approche est développée. Elle consiste à établir une hiérarchie des constantes de couplage par ordre de pertinence, qu'il faudra interrompre à un ordre souhaité. Pour comprendre l'existence de cette hiérarchie, considérons les constantes de couplage g_{k_1, k_2, k'_1} . Plutôt que de travailler avec les impulsions, il est judicieux d'utiliser l'écart énergétique au niveau de Fermi. Autrement dit, on effectue un changement de variable $k \rightarrow (\eta, \xi)$ avec $\eta = \text{sgn}(k)$ et $\xi = \xi(k)$. On réécrit donc les constantes de couplage ainsi :

$$g_{k_1, k_2, k'_1} = g^{\vec{\eta}}(\vec{\xi}), \quad \vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta'_1), \quad \vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi'_1). \quad (3.23)$$

À présent, on effectue un développement en série entière² des constantes de couplage en les variables ξ au voisinage des deux points de Fermi, c'est-à-dire que l'on écrit :

$$g^{\vec{\eta}}(\vec{\xi}) = \sum_{n_i=0}^{\infty} \frac{\xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \xi_{1'}^{n_{1'}}}{n_1! n_2! n_{1'}!} g_{\vec{n}}^{\vec{\eta}}, \quad \vec{n} = (n_1, n_2, n_{1'}). \quad (3.24)$$

L'idée de ce développement est qu'il puisse nous permettre de remplacer des équations de flot fonctionnelles par des équations différentielles couplées. Or, les bulles \mathcal{L}^x sont aussi porteuses d'impulsions externes, et il est nécessaire de les

2. L'analyticité des constantes de couplage ne semble pas être une hypothèse nécessaire, il est seulement utile de supposer que les constantes de couplage sont suffisamment régulières au voisinage de la surface de Fermi.

développer en puissances des variables ξ elles aussi, ce qui nous donne :

$$\mathcal{L}_{p, k_1+k_2}^{ee} = \sum_{n_i=0}^{\infty} \frac{\xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2}}{n_1! n_2!} \mathcal{L}_{n_1, n_2}^{ee, \eta_1, \eta_2}(p), \quad (3.25a)$$

$$\mathcal{L}_{p, k_1'-k_1}^{eh} = \sum_{n_i=0}^{\infty} \frac{\xi_1^{n_1} \xi_{1'}^{n_{1'}}}{n_1! n_{1'}!} \mathcal{L}_{n_1, n_{1'}}^{eh, \eta_1, \eta_{1'}}(p). \quad (3.25b)$$

L'identification des termes $\sim \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \xi_{1'}^{n_{1'}}$ est maintenant possible, et elle nous donne les équations de flot ayant nécessairement la forme suivante (il y a des sommes implicites sur les indices $\vec{n}_{1,2}$ et $\vec{n}_{1,2}$) :

$$\Lambda \partial_{\Lambda} g_{\vec{n}}^{\vec{\eta}} = \mathcal{L}_{\vec{n}, \vec{n}_1, \vec{n}_2}^{\vec{\eta}, \vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2} g_{\vec{n}_1}^{\vec{\eta}_1} g_{\vec{n}_2}^{\vec{\eta}_2}. \quad (3.26)$$

En effet, comme on a des équations à une boucle, elles sont forcément quadratiques en les constantes de couplage. C'est à ce stade qu'il est possible de comprendre l'intérêt physique du développement qui vient d'être proposé. Pour cela, considérons les variables adimensionnées $\tilde{\xi} = \xi/\Lambda$, et introduisons de plus les constantes de couplage adimensionnées $\tilde{g}_{\Lambda}^{\vec{\eta}}(\tilde{\xi})$, avec lesquelles on peut écrire :

$$g_{\Lambda}^{\vec{\eta}}(\tilde{\xi}) = \Lambda^{[g]} \tilde{g}_{\Lambda}^{\vec{\eta}}(\tilde{\xi}/\Lambda) \quad \iff \quad g_{\Lambda}^{\vec{\eta}}(\Lambda \tilde{\xi}) = \Lambda^{-[g]} \tilde{g}_{\Lambda}^{\vec{\eta}}(\tilde{\xi}), \quad (3.27)$$

où $[g]$ est la dimension d'échelle des constantes de couplage. On en déduit l'adimensionnement des constantes $g_{\vec{n}}^{\vec{\eta}}$:

$$g_{\vec{n}}^{\vec{\eta}} = \Lambda^{[g]+|\vec{n}|} \tilde{g}_{\vec{n}}^{\vec{\eta}}, \quad |\vec{n}| = n_1 + n_2 + n_{1'}. \quad (3.28)$$

Ainsi, les équations de flot sous forme adimensionnées s'écrivent sous la forme suivante :

$$-\frac{d\tilde{g}_{\vec{n}}^{\vec{\eta}}}{d\ell} = \Lambda \partial_{\Lambda} \tilde{g}_{\vec{n}}^{\vec{\eta}} = ([g] + |\vec{n}|) \tilde{g}_{\vec{n}}^{\vec{\eta}} + \tilde{\mathcal{L}}_{\vec{n}, \vec{n}_1, \vec{n}_2}^{\vec{\eta}, \vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2} \tilde{g}_{\vec{n}_1}^{\vec{\eta}_1} \tilde{g}_{\vec{n}_2}^{\vec{\eta}_2}, \quad (3.29)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\vec{n}, \vec{n}_1, \vec{n}_2}^{\vec{\eta}, \vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2} = -\Lambda^{|\vec{n}|-|\vec{n}_1|-|\vec{n}_2|} \mathcal{L}_{\vec{n}, \vec{n}_1, \vec{n}_2}^{\vec{\eta}, \vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2}.$$

C'est cette forme des équations qui justifie l'intérêt du développement en ξ . Plus

$|\vec{n}|$ augmente, plus les constantes de couplage associées sont non-pertinentes, constituant la hiérarchie mentionnée plus haut.

Nous avons affaire à une hiérarchie infinie d'équations de flot couplées qu'il est nécessaire de tronquer si l'on veut pouvoir mener une étude numérique. Pour la suite, nous ne considérerons que les constantes de couplage telles que $|\vec{n}| \leq 2$. De plus, nous ferons une approximation supplémentaire : nous négligerons les corrections diagrammatiques aux constantes de couplage non-pertinentes, c'est-à-dire pour les constantes telles que $|\vec{n}| = 1, 2$. Illustrons la forme des équations de flot dans le cadre de ces approximations. Pour cela, on sépare les constantes de couplage en deux ensembles. D'une part, on rassemble les constantes marginales \tilde{g}_K et d'autre part on collecte les constantes non-pertinentes $\tilde{\tilde{g}}_K$:

$$\{\tilde{g}_K\} = \{\tilde{g}_{0,0,0}^{\vec{n}}\}, \quad \{\tilde{\tilde{g}}_K\} = \{\tilde{\tilde{g}}_{\vec{n}}^{\vec{n}} \mid |\vec{n}| \in \{1, 2\}\}. \quad (3.30)$$

Les équations de flot ont donc la forme suivante :

$$\frac{d\tilde{g}_K}{d\ell} = \tilde{\mathcal{L}}_{K,IJ}^{(0)} \tilde{g}_I \tilde{g}_J + \tilde{\mathcal{L}}_{K,IJ}^{(1)} \tilde{g}_I \tilde{\tilde{g}}_J + \tilde{\mathcal{L}}_{K,IJ}^{(2)} \tilde{\tilde{g}}_I \tilde{\tilde{g}}_J, \quad (3.31a)$$

$$\frac{d\tilde{\tilde{g}}_K}{d\ell} = -[\tilde{g}_K] \tilde{\tilde{g}}_K, \quad [\tilde{\tilde{g}}_K] \in \{1, 2\}. \quad (3.31b)$$

Ainsi, seules les équations pour les constantes de couplage marginales sont non triviales et nécessitent une résolution numériques. Les équations pour les constantes non pertinentes s'intègrent trivialement :

$$\tilde{\tilde{g}}_K(\ell) = \tilde{\tilde{g}}_K(0)e^{-[\tilde{g}_K]\ell}. \quad (3.32)$$

Pour la suite, on utilisera les notations simplifiées suivantes :

$$\begin{aligned} g_{0,0,0}^{\vec{n}} &= g^{\vec{n}}, \\ g_{1,0,0}^{\vec{n}} &= g_1^{\vec{n}}, \quad g_{0,1,0}^{\vec{n}} = g_2^{\vec{n}}, \quad g_{0,0,1}^{\vec{n}} = g_{1'}^{\vec{n}}, \\ g_{2,0,0}^{\vec{n}} &= g_{11}^{\vec{n}}, \quad g_{0,2,0}^{\vec{n}} = g_{22}^{\vec{n}}, \quad g_{0,0,2}^{\vec{n}} = g_{1'1'}^{\vec{n}}, \\ g_{1,1,0}^{\vec{n}} &= g_{11'}^{\vec{n}}, \quad g_{1,0,1}^{\vec{n}} = g_{11'}^{\vec{n}}, \quad g_{0,1,1}^{\vec{n}} = g_{21'}^{\vec{n}}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

3.5. Exemple 1 : identification sur la surface de Fermi

Cette notation sera de plus combinée avec la notation de g -ologie ($\eta = \pm 1$) :

$$\begin{aligned}
 g_X^{(+\eta, -\eta, -\eta)} &= g_{1,X}, \\
 g_X^{(+\eta, -\eta, +\eta)} &= g_{2,X}, \\
 g_X^{(+\eta, +\eta, -\eta)} &= g_{3,X}, \\
 g_X^{(+\eta, +\eta, +\eta)} &= g_{4,X}.
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Maintenant que tous les éléments sont en place, passons en revue quelques exemples d'utilisation du développement en ξ , tout d'abord pour l'obtention des équations de flot pour les constantes marginales, qui représente à la fois le cas le plus simple et le plus important, et ensuite nous examinerons l'équation pour la self-énergie.

3.5 Exemple 1 : identification sur la surface de Fermi

Pour trouver les équations de flot pour les constantes de couplage marginales, on commence par introduire les variables suivantes :

$$\begin{aligned}
 \xi &= \xi(p), \\
 \xi_{\eta, \eta'}^{ee} &= \xi(-p + (\eta + \eta')k_F), \\
 \xi_{\eta, \eta'}^{eh} &= \xi(p + (\eta - \eta')k_F).
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Ces variables sont utiles dans la mesure où elles apparaissent comme argument des constantes de couplage dans les équations de flot. Par exemple, dans le cas du diagramme (ee), la combinaison suivante est présente :

$$g_{p, -p+k_1+k_2, k_1'}.$$

Grâce au développement en ξ , on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 g_{p, -p+k_1+k_2, k_1'} &= \sum_{n_i=0}^{\infty} \frac{\xi(p)^{n_1} \xi(-p+k_1+k_2)^{n_2} \xi(k_1')^{n_1'}}{n_1! n_2! n_1'} \\
 &\quad \times g_{n_1, n_2, n_1'}^{\text{sgn}(p), \text{sgn}(-p+k_1+k_2), \text{sgn}(k_1')}.
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

3.5. Exemple 1 : identification sur la surface de Fermi

Il faut maintenant faire un développement de Taylor en les variables ξ_1 , ξ_2 et $\xi_{1'}$. Le terme d'ordre 0 correspond à la projection sur la surface de Fermi. On notera $[\cdot]_F$ cette projection. Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned} [g_{p,-p+k_1+k_2,k_{1'}}]_F &= g_{p,-p+(\eta_1+\eta_2)k_F,\eta_1',k_F} \\ &= \sum_{n_i=0}^{\infty} \frac{\xi^{n_1} (\xi_{\eta_1,\eta_2}^{ee})^{n_2}}{n_1!n_2!} g_{n_1,n_2,0}^{\eta, \text{sgn}(-p+(\eta_1+\eta_2)k_F), \eta_1'}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

La série dans l'équation précédente est tronquée par notre approximation consistant à s'arrêter à l'ordre 2 en ξ . Maintenant que la démarche est expliquée, voici les contributions à tous les diagrammes :

— diffusion (ee) :

$$\begin{aligned} [g_{p,-p+k_1+k_2,k_{1'}}]_F &= g_{0,0,0}^{\vec{\eta}} + g_{1,0,0}^{\vec{\eta}} \xi + \frac{1}{2} g_{2,0,0}^{\vec{\eta}} \xi^2 \\ &\quad + g_{0,1,0}^{\vec{\eta}} \xi_{\eta_1,\eta_2}^{ee} + \frac{1}{2} g_{0,2,0}^{\vec{\eta}} (\xi_{\eta_1,\eta_2}^{ee})^2 + g_{1,1,0}^{\vec{\eta}} \xi \xi_{\eta_1,\eta_2}^{ee}, \\ [g_{k_2,k_1,-p+k_1+k_2}]_F &= g_{0,0,0}^{\vec{\eta}'} + g_{0,0,1}^{\vec{\eta}'} \xi_{\eta_1,\eta_2}^{ee} + \frac{1}{2} g_{0,0,2}^{\vec{\eta}'} (\xi_{\eta_1,\eta_2}^{ee})^2, \\ \vec{\eta} &= (\eta, \text{sgn}(-p+(\eta_1+\eta_2)k_F), \eta_1'), \\ \vec{\eta}' &= (\eta_2, \eta_1, \text{sgn}(-p+(\eta_1+\eta_2)k_F)), \end{aligned} \quad (3.38)$$

— diffusion (eh₁) :

$$\begin{aligned} [g_{k_1,p-k_{1'}+k_2,p}]_F &= g_{0,0,0}^{\vec{\eta}} + g_{0,0,1}^{\vec{\eta}} \xi + \frac{1}{2} g_{0,0,2}^{\vec{\eta}} \xi^2 \\ &\quad + g_{0,1,0}^{\vec{\eta}} \xi_{\eta_2,\eta_{1'}}^{eh} + \frac{1}{2} g_{0,2,0}^{\vec{\eta}} (\xi_{\eta_2,\eta_{1'}}^{eh})^2 + g_{0,1,1}^{\vec{\eta}} \xi \xi_{\eta_2,\eta_{1'}}^{eh}, \\ [g_{k_2,p,p-k_{1'}+k_2}]_F &= g_{0,0,0}^{\vec{\eta}'} + g_{0,0,1}^{\vec{\eta}'} \xi_{\eta_2,\eta_{1'}}^{eh} + \frac{1}{2} g_{0,0,2}^{\vec{\eta}'} (\xi_{\eta_2,\eta_{1'}}^{eh})^2, \\ \vec{\eta} &= (\eta_1, \text{sgn}(p+(-\eta_{1'}+\eta_2)k_F), \eta), \\ \vec{\eta}' &= (\eta_2, \eta, \text{sgn}(p+(-\eta_{1'}+\eta_2)k_F)), \end{aligned} \quad (3.39)$$

3.5. Exemple 1 : identification sur la surface de Fermi

— diffusion (eh2) :

$$\begin{aligned}
 [g_{k_1, p+k_1'-k_1, k_1'}]_{\text{F}} &= g_{0,0,0}^{\bar{\eta}} + g_{0,1,0}^{\bar{\eta}} \xi_{\eta_1', \eta_1}^{\text{eh}} + \frac{1}{2} g_{0,2,0}^{\bar{\eta}} (\xi_{\eta_1', \eta_1}^{\text{eh}})^2, \\
 [g_{p, k_2, p+k_1'-k_1}]_{\text{F}} &= g_{0,0,0}^{\bar{\eta}'} + g_{1,0,0}^{\bar{\eta}'} \xi + g_{0,0,1}^{\bar{\eta}'} \xi_{\eta_1', \eta_1}^{\text{eh}} \\
 &\quad + \frac{1}{2} g_{2,0,0}^{\bar{\eta}'} \xi^2 + \frac{1}{2} g_{0,0,2}^{\bar{\eta}'} (\xi_{\eta_1', \eta_1}^{\text{eh}})^2 + g_{1,0,1}^{\bar{\eta}'} \xi \xi_{\eta_1', \eta_1}^{\text{eh}}, \\
 \bar{\eta} &= (\eta_1, \text{sgn}(p + (\eta_1' - \eta_1)k_{\text{F}}), \eta_1'), \\
 \bar{\eta}' &= (\eta, \eta_2, \text{sgn}(p + (\eta_1' - \eta_1)k_{\text{F}})), \tag{3.40}
 \end{aligned}$$

— diffusion (eh3) :

$$\begin{aligned}
 [g_{k_1, p+k_1'-k_1, p}]_{\text{F}} &= g_{0,0,0}^{\bar{\eta}} + g_{0,0,1}^{\bar{\eta}} \xi + \frac{1}{2} g_{0,0,2}^{\bar{\eta}} \xi^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} g_{0,1,0}^{\bar{\eta}} \xi_{\eta_1', \eta_1}^{\text{eh}} + \frac{1}{2} g_{0,2,0}^{\bar{\eta}} (\xi_{\eta_1', \eta_1}^{\text{eh}})^2 + g_{0,1,1}^{\bar{\eta}} \xi \xi_{\eta_1', \eta_1}^{\text{eh}} \\
 [g_{p, k_2, p+k_1'-k_1}]_{\text{F}} &= g_{0,0,0}^{\bar{\eta}'} + g_{1,0,0}^{\bar{\eta}'} \xi + g_{0,0,1}^{\bar{\eta}'} \xi_{\eta_1', \eta_1}^{\text{eh}} \\
 &\quad + \frac{1}{2} g_{2,0,0}^{\bar{\eta}'} \xi^2 + \frac{1}{2} g_{0,0,2}^{\bar{\eta}'} (\xi_{\eta_1', \eta_1}^{\text{eh}})^2 \\
 &\quad + g_{1,0,1}^{\bar{\eta}'} \xi \xi_{\eta_1', \eta_1}^{\text{eh}}, \\
 [g_{k_1, p+k_1'-k_1, k_1'}]_{\text{F}} &= g_{0,0,0}^{\bar{\eta}''} + g_{0,1,0}^{\bar{\eta}''} \xi_{\eta_1', \eta_1}^{\text{eh}} + \frac{1}{2} g_{0,2,0}^{\bar{\eta}''} (\xi_{\eta_1', \eta_1}^{\text{eh}})^2, \\
 [g_{k_2, p, p+k_1'-k_1}]_{\text{F}} &= g_{0,0,0}^{\bar{\eta}'''} + g_{0,0,1}^{\bar{\eta}'''} \xi_{\eta_1', \eta_1}^{\text{eh}} + \frac{1}{2} g_{0,0,2}^{\bar{\eta}'''} (\xi_{\eta_1', \eta_1}^{\text{eh}})^2, \\
 \bar{\eta} &= (\eta_1, \text{sgn}(p + (\eta_1' - \eta_1)k_{\text{F}}), \eta), \\
 \bar{\eta}' &= (\eta, \eta_2, \text{sgn}(p + (\eta_1' - \eta_1)k_{\text{F}})), \\
 \bar{\eta}'' &= (\eta_1, \text{sgn}(p + (\eta_1' - \eta_1)k_{\text{F}}), \eta_1'), \\
 \bar{\eta}''' &= (\eta_2, \eta, \text{sgn}(p + (\eta_1' - \eta_1)k_{\text{F}})). \tag{3.41}
 \end{aligned}$$

Dans toutes ces expressions, la présence des constantes non-pertinentes vient apporter des corrections aux constantes marginales, marquant ainsi une différence nette avec le modèle de g -ologie dans la limite du continuum.

3.6. Exemple 2 : équation pour la self-énergie

Les bulles doivent aussi être développées en puissance de ξ . En fait, pour les constantes de couplage marginales, seules les projections des bulles sur la surface de Fermi contribuent aux équations de flot. Par exemple, pour le diagramme (ee), la bulle $\mathcal{L}_{p, k_1+k_2}^{ee}$ apparaît, ce qui signifie que la projection sur la surface de Fermi donne :

$$[\mathcal{L}_{p, k_1+k_2}^{ee}]_F = \mathcal{L}_{p, (\eta_1+\eta_2)k_F}^{ee}. \quad (3.42)$$

3.6 Exemple 2 : équation pour la self-énergie

Dans cette section, on s'intéresse en guise de second exemple à l'équation pour la self-énergie. Pour cela, on suppose que les corrections de self-énergie restent petites et n'affectent que la dépendance en impulsion cristalline, ce qui revient à faire l'approximation suivante dans le calcul du propagateur \mathbf{S}_Λ :

$$(\mathbf{K} - \boldsymbol{\Sigma}_\Lambda \boldsymbol{\theta}_\Lambda)^{-1} \mathbf{K} \approx \mathbf{1}, \quad (3.43)$$

ce qui nous permet de conserver la forme de nos équations, en effectuant le remplacement formel $\mathbf{K}^{-1} \rightarrow (\mathbf{K} - \boldsymbol{\Sigma}_\Lambda \boldsymbol{\theta}_\Lambda)^{-1}$. Le propagateur \mathbf{S}_Λ prend la forme suivante :

$$\mathbf{S}_\Lambda = -\partial_\Lambda \boldsymbol{\theta}_\Lambda (\mathbf{K} - \boldsymbol{\Sigma}_\Lambda \boldsymbol{\theta}_\Lambda)^{-1} / 2. \quad (3.44)$$

À présent, repartons de l'équation pour la self-énergie (3.14) :

$$\partial_\Lambda \Sigma_k = \frac{\pi v_F T}{L} \sum_{p_n, p} S_P (g_{k, p, p} / 2 - g_{k, p, k}), \quad (3.45)$$

c'est-à-dire, en explicitant le propagateur S_P :

$$\partial_\Lambda \Sigma_k = -\frac{\pi v_F T}{2L} \sum_{p_n, p} \frac{\partial_\Lambda \theta_\Lambda(p)}{ip_n - \xi(p) - \Sigma_p} (g_{k, p, p} / 2 - g_{k, p, k}), \quad (3.46)$$

3.6. Exemple 2 : équation pour la self-énergie

À présent, on utilise la somme sur les fréquences de Matsubara fermioniques [3] :

$$T \sum_{q_n} \frac{1}{iq_n - \varepsilon} = n_F(\varepsilon), \quad q_n = (2n + 1)T, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.47)$$

qui nous permet de réécrire l'équation pour la self-énergie :

$$\partial_\Lambda \Sigma_k = -\frac{\pi v_F}{2L} \sum_p n_F(\xi(p) - \Sigma_p) \partial_\Lambda \theta_\Lambda(p) (g_{k,p,p}/2 - g_{k,p,k}). \quad (3.48)$$

La contribution en $g_{k,p,k}$ est celle de Hartree (diagramme avec la bulle fermée), et celle en $g_{k,p,p}$ est celle de Fock (bulle ouverte). Ainsi, on peut écrire, au premier ordre en $\xi(k)$:

$$g_{k,p,k} = g_{H0}^{\eta\pi\eta}(p) + g_{H1}^{\eta\pi\eta}(p)\xi(k), \quad g_{k,p,p} = g_{F0}^{\eta\pi\pi}(p) + g_{F1}^{\eta\pi\pi}(p)\xi(k),$$

avec $\pi, \eta = \text{sgn } p, \text{sgn } k$. On a négligé le terme en $\xi(p)^2$, conformément au développement qui suit.

À présent, on peut introduire un développement en ξ pour la self-énergie. Notons que par symétrie, on doit avoir $\Sigma_k = \Sigma_{-k}$. De plus, on veut se contenter de calculer la correction au terme de saut, ce qui nous permet de nous restreindre à l'ordre 1 en ξ . En définitive, on peut écrire :

$$\Sigma_k = \Sigma_0 + \Sigma_1 \xi(k). \quad (3.49)$$

On obtient donc par identification les deux équations de flot suivantes (en prenant par exemple $\eta = +$) :

$$\begin{aligned} \partial_\Lambda \Sigma_0 = & -\frac{\pi v_F}{2L} \sum_p n_F(\xi(p) - \Sigma_0 - \Sigma_1 \xi(p)) \\ & \times \partial_\Lambda \theta_\Lambda(p) (g_{F0}^{+\pi\pi}(p)/2 - g_{H0}^{+\pi+}(p)), \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \partial_\Lambda \Sigma_1 = & -\frac{\pi v_F}{2L} \sum_p n_F(\xi(p) - \Sigma_0 - \Sigma_1 \xi(p)) \\ & \times \partial_\Lambda \theta_\Lambda(p) (g_{F1}^{+\pi\pi}(p)/2 - g_{H1}^{+\pi+}(p)). \end{aligned} \quad (3.51)$$

3.6. Exemple 2 : équation pour la self-énergie

Maintenant on transforme la somme sur les impulsions en intégrale :

$$\begin{aligned}
 \partial_{\Lambda} \Sigma_0 &= -\frac{v_F}{4} \int dp \left[n_F(\xi(p) - \Sigma_0 - \Sigma_1 \xi(p)) \right. \\
 &\quad \left. \times \partial_{\Lambda} \theta_{\Lambda}(p) (g_{F0}^{+\pi\pi}(p)/2 - g_{H0}^{+\pi+}(p)) \right], \\
 \partial_{\Lambda} \Sigma_1 &= -\frac{v_F}{4} \int dp \left[n_F(\xi(p) - \Sigma_0 - \Sigma_1 \xi(p)) \right. \\
 &\quad \left. \times \partial_{\Lambda} \theta_{\Lambda}(p) (g_{F1}^{+\pi\pi}(p)/2 - g_{H1}^{+\pi+}(p)) \right]. \tag{3.52}
 \end{aligned}$$

On sépare l'intégrale sur les deux branches, puis on fait le changement de variable $\xi = \xi(p)$ d'où :

$$\begin{aligned}
 \partial_{\Lambda} \Sigma_0 &= -\frac{v_F}{4} \int d\xi \mathcal{N}(\xi) \left[n_F(\xi(1 - \Sigma_1) - \Sigma_0) \partial_{\Lambda} \theta_{\Lambda}(\xi) \right. \\
 &\quad \left. \times (g_{1,F0}(\xi)/2 + g_{4,F0}(\xi)/2 - g_{2,H0}(\xi) - g_{4,H0}(\xi)) \right], \\
 \partial_{\Lambda} \Sigma_1 &= -\frac{v_F}{4} \int d\xi \mathcal{N}(\xi) \left[n_F(\xi(1 - \Sigma_1) - \Sigma_0) \partial_{\Lambda} \theta_{\Lambda}(\xi) \right. \\
 &\quad \left. \times (g_{1,F1}(\xi)/2 + g_{4,F1}(\xi)/2 - g_{2,H1}(\xi) - g_{4,H1}(\xi)) \right]. \tag{3.53}
 \end{aligned}$$

Il reste à expliciter les constantes de couplage apparaissant dans ces équations. En procédant par identification, il vient :

$$\begin{aligned}
 g_{p,q,p} &= g_0^{\eta\pi\eta} + g_1^{\eta\pi\eta} \xi_p + g_2^{\eta\pi\eta} \xi_q + g_{1'}^{\eta\pi\eta} \xi_p \\
 &\quad + \frac{1}{2} (g_{11}^{\eta\pi\eta} \xi_p^2 + g_{22}^{\eta\pi\eta} \xi_q^2 + g_{1'1'}^{\eta\pi\eta} \xi_p^2) \\
 &\quad + g_{12}^{\eta\pi\eta} \xi_p \xi_q + g_{11'}^{\eta\pi\eta} \xi_p^2 + g_{21'}^{\eta\pi\eta} \xi_p \xi_q, \tag{3.54}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{p,q,q} &= g_0^{\eta\pi\pi} + g_1^{\eta\pi\pi} \xi_p + g_2^{\eta\pi\pi} \xi_q + g_{1'}^{\eta\pi\pi} \xi_q \\
 &\quad + \frac{1}{2} (g_{11}^{\eta\pi\pi} \xi_p^2 + g_{22}^{\eta\pi\pi} \xi_q^2 + g_{1'1'}^{\eta\pi\pi} \xi_q^2) \\
 &\quad + g_{12}^{\eta\pi\pi} \xi_p \xi_q + g_{11'}^{\eta\pi\pi} \xi_p \xi_q + g_{21'}^{\eta\pi\pi} \xi_q^2, \tag{3.55}
 \end{aligned}$$

3.6. Exemple 2 : équation pour la self-énergie

d'où :

$$\begin{aligned}
 g_{H0}^{\eta\pi\eta}(\xi) &= g_0^{\eta\pi\eta} + g_2^{\eta\pi\eta}\xi + \frac{1}{2}g_{22}^{\eta\pi\eta}\xi^2, \\
 g_{H1}^{\eta\pi\eta}(\xi) &= g_1^{\eta\pi\eta} + g_{1'}^{\eta\pi\eta} + (g_{12}^{\eta\pi\pi} + g_{11'}^{\eta\pi\pi})\xi, \\
 g_{F0}^{\eta\pi\pi}(\xi) &= g_0^{\eta\pi\pi} + (g_2^{\eta\pi\pi} + g_{1'}^{\eta\pi\pi})\xi + \frac{1}{2}(g_{22}^{\eta\pi\pi} + g_{1'1'}^{\eta\pi\pi} + 2g_{21'}^{\eta\pi\pi})\xi^2, \\
 g_{F1}^{\eta\pi\pi}(\xi) &= g_1^{\eta\pi\pi} + (g_{12}^{\eta\pi\pi} + g_{11'}^{\eta\pi\pi})\xi,
 \end{aligned}$$

ce que l'on note également :

$$\begin{aligned}
 g_{i,H0}(\xi) &= g_{i,0} + (g_{i,1} + g_{i,1'})\xi + (g_{i,11} + g_{i,11'} + g_{i,1'1'})\xi^2, \\
 g_{i,H1}(\xi) &= g_{i,2} + (g_{i,12} + g_{i,21'})\xi \\
 g_{i,F0}(\xi) &= g_{i,0} + (g_{i,2} + g_{i,1'})\xi + (g_{i,22} + g_{i,21'} + g_{i,1'1'})\xi^2, \\
 g_{i,F1}(\xi) &= g_{i,1} + (g_{i,12} + g_{i,11'})\xi.
 \end{aligned}$$

Si l'on utilise les conditions d'initialisation données précédemment, alors les constantes suivantes sont nulles :

$$g_{i,2} = g_{i,12} = g_{i,21'} = 0,$$

d'où :

$$\begin{aligned}
 g_{i,H0}(\xi) &= g_{i,0} + (g_{i,1} + g_{i,1'})\xi + (g_{i,11} + g_{i,11'} + g_{i,1'1'})\xi^2, \\
 g_{i,H1}(\xi) &= 0 \\
 g_{i,F0}(\xi) &= g_{i,0} + g_{i,1'}\xi + g_{i,1'1'}\xi^2, \\
 g_{i,F1}(\xi) &= g_{i,1} + g_{i,11'}\xi.
 \end{aligned}$$

Intéressons-nous maintenant à l'effet de la self-énergie sur les équations de flot. La prise en compte de la self-énergie revient à écrire les bulles $\mathcal{L}_{p,q}^{\text{eh}}$ et $\mathcal{L}_{p,q}^{\text{ee}}$ et à les corriger en effectuant le remplacement suivantes :

$$\xi \rightarrow \xi_{\Lambda}(p) = \xi(p) + \Sigma_{\Lambda}(p)\theta_{\Lambda}(p), \quad (3.56)$$

3.6. Exemple 2 : équation pour la self-énergie

soit, de façon explicite :

$$\mathcal{L}_{p,q}^{ee} = -\frac{\pi v_F}{2L} \Lambda \partial_\Lambda \left(\theta_\Lambda(p) \theta_\Lambda(-p+q) \right) \frac{n_F(\xi_\Lambda(p)) - n_F(-\xi_\Lambda(-p+q))}{\xi_\Lambda(p) + \xi_\Lambda(-p+q)}, \quad (3.57a)$$

$$\mathcal{L}_{p,q}^{eh} = \frac{\pi v_F}{2L} \Lambda \partial_\Lambda \left(\theta_\Lambda(p) \theta_\Lambda(p+q) \right) \frac{n_F(\xi_\Lambda(p)) - n_F(\xi_\Lambda(p+q))}{\xi_\Lambda(p) - \xi_\Lambda(p+q)}. \quad (3.57b)$$

On fait l'approximation $\theta_\Lambda(p) = 1$, étant donné la forme du cutoff. Cette approximation est exacte suffisamment loin de la région $|\xi(p)| \approx \Lambda$. L'erreur commise devrait être petite, et est contrôlée par l'étroitesse de la dérivée du régulateur. Dans la limite d'un régulateur dur, l'erreur doit être nulle. De plus, si l'on ne fait pas cette approximation, cela complique sévèrement les calculs, car le changement de variable $k \rightarrow \xi_\Lambda(k)$ devient très compliqué. De façon plus explicite, on a donc :

$$\begin{aligned} \xi_\Lambda(k) &= -2t_\Lambda \cos(k) - \mu_\Lambda, \\ t_\Lambda &= t(1 + \Sigma_{\Lambda,1}), \\ \mu_\Lambda &= \mu(1 + \Sigma_{\Lambda,1}) - \Sigma_{\Lambda,0}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Ainsi, le changement de variable $k \rightarrow \xi_\Lambda(k)$ implique l'apparition de la densité d'états corrigée :

$$\mathcal{N}_\Lambda(\xi) = \frac{1}{\sqrt{4t_\Lambda^2 - (\xi + \mu_\Lambda)^2}}. \quad (3.59)$$

La forme de la bulle est donc pratiquement inchangée. Il faut juste ne pas oublier de corriger les régulateurs lorsque le changement de variable est effectué. Enfin, les bornes d'intégration changent également. Cependant, l'éventuel effet des bornes d'intégration ne peut avoir lieu qu'au début du flot, lors de l'intégration des degrés de liberté de hautes énergies, en raison de l'étroitesse de la dérivée du régulateur. Enfin, on peut calculer la correction à la vitesse de Fermi, que l'on

3.6. Exemple 2 : équation pour la self-énergie

note $v_F(\Lambda)$. De la relation $\mathcal{N}_\Lambda(0) = 1/\pi v_F(\Lambda)$ on déduit :

$$v_{F\Lambda} = \pi^{-1} \sqrt{4t_\Lambda^2 - \mu_\Lambda^2}. \quad (3.60)$$

Il y a une dernière simplification. En effet, on travaille à remplissage fixé, ce qui permet de déduire la valeur du potentiel chimique. Le nombre d'états quantiques occupés s'écrit en effet (après simplification des facteurs numériques) :

$$r = \int_{-2t_\Lambda - \mu_\Lambda}^0 \frac{d\xi}{\sqrt{4t_\Lambda^2 - (\xi + \mu_\Lambda)^2}} = \int_{-2t - \mu}^0 \frac{d\xi}{\sqrt{4t^2 - (\xi + \mu)^2}}. \quad (3.61)$$

On effectue le changement de variable suivant :

$$\xi' = \frac{2t + \mu}{2t_\Lambda + \mu_\Lambda} \xi, \quad (3.62)$$

ce qui donne :

$$r = \int_{-2t - \mu}^0 \frac{d\xi'}{\sqrt{4t_\Lambda^2 \left(\frac{2t + \mu}{2t_\Lambda + \mu_\Lambda} \right)^2 - \left(\xi' + \frac{2t + \mu}{2t_\Lambda + \mu_\Lambda} \mu_\Lambda \right)^2}}. \quad (3.63)$$

On obtient ainsi les deux conditions équivalentes suivantes pour fixer le potentiel chimique :

$$t_\Lambda \frac{2t + \mu}{2t_\Lambda + \mu_\Lambda} = t, \quad \frac{2t + \mu}{2t_\Lambda + \mu_\Lambda} \mu_\Lambda = \mu, \quad (3.64)$$

ce qui donne finalement :

$$\mu_\Lambda = \mu t_\Lambda / t. \quad (3.65)$$

3.6. Exemple 2 : équation pour la self-énergie

Par ailleurs, on a :

$$\mu_\Lambda = \mu t_\Lambda / t - \Sigma_{\Lambda,0}, \quad (3.66)$$

ce qui nous donne simplement $\Sigma_{\Lambda,0} = 0$. Ainsi, il n'y a besoin que de l'équation pour $\Sigma_{\Lambda,1}$. De plus, la loi d'évolution de la vitesse de Fermi est particulièrement sympathique, puisqu'elle s'écrit :

$$v_{F\Lambda} = v_F t_\Lambda / t = v_F (1 + \Sigma_{\Lambda,1}). \quad (3.67)$$

On peut donc remplacer l'équation pour $\Sigma_{\Lambda,1}$ par une équation pour $v_{F\Lambda}$:

$$\begin{aligned} \partial_\Lambda v_{F\Lambda} &= -\frac{v_F^2}{8} \int_{-\Lambda_0}^{+\Lambda_0} d\xi \mathcal{N}(\xi) n_F(\xi(2 - v_{F\Lambda}/v_F)) \partial_\Lambda \theta_\Lambda(\xi) (g_{1,F1}(\xi) + g_{4,F1}(\xi)), \\ &= -\frac{v_F^2}{8} \int_{-\Lambda_0}^{+\Lambda_0} d\xi \mathcal{N}(\xi) n_F(\xi(2 - v_{F\Lambda}/v_F)) \partial_\Lambda \theta_\Lambda(\xi) (g_{1,1} + (g_{1,11'} + g_{4,11'})\xi). \end{aligned} \quad (3.68)$$

Considérons la simplification de cette équation à demi-remplissage, dans le cas d'un spectre linéaire et d'un cut-off dur. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} g_{1,1} &= 0, \\ \mathcal{N}(\xi) &= \frac{1}{\pi v_F}, \\ \partial_\Lambda \theta(\xi) &= -\delta(\xi + \Lambda) - \delta(\xi - \Lambda), \\ g_{1,11'} &= \tilde{g}_{1,11'} \Lambda^{-2}, \quad g_{4,11'} = \tilde{g}_{4,11'} \Lambda^{-2}. \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \Lambda \partial_\Lambda v_{F\Lambda} &= -\frac{v_F}{8\pi} \left(n_F(\Lambda(2 - v_{F\Lambda}/v_F)) - n_F(-\Lambda(2 - v_{F\Lambda}/v_F)) \right) (\tilde{g}_{1,11'} + \tilde{g}_{4,11'}), \\ &= -\frac{v_F}{8\pi} \tanh(\beta\Lambda(2 - v_{F\Lambda}/v_F)/2) (\tilde{g}_{1,11'} + \tilde{g}_{4,11'}). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Dans la limite de température nulle, la tangente hyperbolique est remplacée par

3.6. Exemple 2 : équation pour la self-énergie

1, d'où :

$$\partial_\ell v_{F\ell} = \frac{v_F}{8\pi} (\tilde{g}_{1,11'} + \tilde{g}_{4,11'}) = \frac{v_F}{8\pi} \frac{V}{\pi v_F} e^{-2\ell}, \quad (3.70)$$

où à la dernière égalité on a utilisé les conditions initiales obtenues pour le modèle EH, détaillées au chapitre suivant. Cette renormalisation de la vitesse de Fermi ne conduit à aucun changement qualitatif du diagramme de phase. Par conséquent, dans la suite, cette correction sera ignorée.

4

Application au modèle EH

« Si l'on sait qu'on ne sait pas, si l'on est attentif à ce que l'on ne connaît pas, si l'on guette ce qui apparaît comme inconnu, c'est alors qu'une découverte est possible. »

Pierre SOULAGES

Dans ce chapitre, les effets de réseau sont pris en compte dans le calcul du diagramme de phase du modèle de Fermi-Hubbard étendu unidimensionnel. L'initialisation des équations de flot est tout d'abord présentée, puis le diagramme de phase à demi-remplissage est établi. Celui-ci sert à vérifier que la méthode développée jusqu'à présent produit des résultats corrects, en accord avec les études précédentes. Enfin, les diagrammes de phase en fonction du remplissage sont présentés. Ils constituent le cœur du travail exposé dans ce manuscrit. Les effets de la non-localité des interactions jouent un rôle essentiel à la compréhension de la déviation des diagrammes de phase par rapport aux diagrammes obtenus avec le modèle de g -ologie.

4.1 Conditions initiales

Tous les éléments sont en place pour pouvoir déterminer le diagramme de phase du modèle EH. En effet, nous avons les équations de flot prenant en compte la non-localité des interactions. Il ne reste qu'à déterminer les conditions ini-

4.1. Conditions initiales

tiales, déterminées par le hamiltonien du modèle EH, et obtenues grâce au développement en ξ . Repartons de l'expression des constantes de couplage microscopiques :

$$g_{k_1, k_2, k_{1'}} = \frac{U}{\pi v_F} + \frac{2V}{\pi v_F} \cos(k_1 - k_{1'}). \quad (4.1)$$

Il faut donc faire le développement en ξ du cosinus, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \cos(k_1 - k_{1'}) &= \eta_1 \eta_{1'} + (1 - \eta_1 \eta_{1'}) \frac{\mu^2}{4} + \frac{\mu}{4} (1 - \eta_1 \eta_{1'}) (\xi_1 + \xi_{1'}) \\ &\quad - \eta_1 \eta_{1'} \left(\frac{1}{8} - \frac{\mu^2}{32(1 - \mu^2/4)} \right) (\xi_1^2 + \xi_{1'}^2) \\ &\quad + \left(\frac{1}{4} + \eta_1 \eta_{1'} \frac{\mu^2}{16(1 - \mu^2/4)} \right) \xi_1 \xi_{1'} + \dots \end{aligned} \quad (4.2)$$

Ainsi, par identification, on obtient les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} g_1 &= g_3 = \frac{U}{\pi v_F} - \frac{2V}{\pi v_F} \left(1 - \frac{\mu^2}{2} \right), \\ g_2 &= g_4 = \frac{U}{\pi v_F} + \frac{2V}{\pi v_F}, \\ g_{1,1} &= g_{1,1'} = g_{3,1} = g_{3,1'} = \frac{V\mu}{\pi v_F}, \\ g_{1,11} &= g_{1,1'1'} = g_{1,11'} = \frac{V}{\pi v_F} \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu^2}{8(1 - \mu^2/4)} \right), \\ g_{3,11} &= g_{3,1'1'} = g_{3,11'} = \frac{V}{\pi v_F} \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu^2}{8(1 - \mu^2/4)} \right), \\ g_{2,11} &= g_{2,1'1'} = g_{4,11} = g_{4,1'1'} = -\frac{V}{\pi v_F} \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu^2}{8(1 - \mu^2/4)} \right), \\ g_{2,11'} &= g_{4,11'} = \frac{V}{\pi v_F} \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu^2}{8(1 - \mu^2/4)} \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Toutes les autres constantes de couplage sont nulles.

Notons que comme nous négligeons les corrections diagrammatiques dans

les équations de flot pour les constantes non-pertinentes, celles-ci évoluent selon une loi de la forme $g(\ell) = g(0) e^{-n\ell}$, avec $n = 1, 2$, ce qui implique que si ces constantes sont nulles au début du flot, alors elles sont nulles tout le long du flot.

Enfin, les vertex à trois pattes Z sont initialisés avec une valeur de 1, tandis que les susceptibilités χ sont nulles au début du flot.

L'algorithme permettant de trouver les frontières du diagramme de phase est brièvement décrit à l'annexe B.

4.2 Limite du continuum

4.2.1 Équations de flot

Avant de considérer l'effet des constantes de couplages non-pertinentes et de la courbure du spectre, il est important pour la suite de considérer le cas bien connu du modèle de g -ologie du gaz d'électron, tel qu'il a été décrit au premier chapitre. Le vertex $\Gamma^{[4,0]}[\psi, \bar{\psi}]$ se simplifie en prenant la projection sur les deux points de la surface de Fermi $[\cdot]_F$:

$$\begin{aligned}
 \left[\Gamma^{[4,0]}[\psi, \bar{\psi}] \right]_F &= \frac{\pi v_F T}{8L} \left[g_{k_1, k_2, k'_1} \right]_F \delta_{k'_1 + k'_2 - k_2 - k_1}^{\delta_{RR}} \bar{\psi}_{k'_1, \sigma_1} \bar{\psi}_{k'_2, \sigma_2} \psi_{k_2, \sigma_2} \psi_{k_1, \sigma_1} \\
 &= \frac{\pi v_F T}{L} \sum_{\eta} \sum_{k_i > 0} \left\{ (g_1 \delta_{\sigma_1, \sigma_3} - g_2 \delta_{\sigma_2, \sigma_4}) \bar{\psi}_{-\eta k'_1, \sigma_3} \bar{\psi}_{+\eta k'_2, \sigma_4} \psi_{-\eta k_2, \sigma_2} \psi_{+\eta k_1, \sigma_1} \right. \\
 &\quad + \frac{g_3}{2} (\bar{\psi}_{+\eta k'_1, \sigma_1} \bar{\psi}_{+\eta k'_2, \sigma_2} \psi_{-\eta k_2, \sigma_2} \psi_{-\eta k_1, \sigma_1} \\
 &\quad \quad \quad + \bar{\psi}_{-\eta k'_1, \sigma_1} \bar{\psi}_{-\eta k'_2, \sigma_2} \psi_{+\eta k_2, \sigma_2} \psi_{+\eta k_1, \sigma_1}) \\
 &\quad + \frac{g_4}{2} (\bar{\psi}_{+\eta k'_1, \sigma_1} \bar{\psi}_{+\eta k'_2, \sigma_2} \psi_{+\eta k_2, \sigma_2} \psi_{+\eta k_1, \sigma_1} \\
 &\quad \quad \quad + \bar{\psi}_{-\eta k'_1, \sigma_1} \bar{\psi}_{-\eta k'_2, \sigma_2} \psi_{-\eta k_2, \sigma_2} \psi_{-\eta k_1, \sigma_1}) \left. \right\}. \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

Dans cette expression on a omis la contrainte de conservation des impulsions pour simplifier les notations, mais elle est bien sûr présente. Les équations de flot (3.15), en tenant compte de la coupure des processus Umklapp telle que décrite

4.2. Limite du continuum

par l'équation (??), prennent alors la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \Lambda \partial_\Lambda g_1 &= -\mathcal{L}_P g_1^2 + (\mathcal{L}_C + \mathcal{L}_P) g_1 g_2 + \mathcal{L}_L g_1 g_4, \\
 \Lambda \partial_\Lambda g_2 &= \mathcal{L}_C g_1^2/2 + (\mathcal{L}_C + \mathcal{L}_P) g_2^2/2 + \mathcal{L}_{P'} g_3^2/2 + \mathcal{L}_L g_4 (g_1 - 2g_2), \\
 \Lambda \partial_\Lambda g_3 &= -(\mathcal{L}_P + \mathcal{L}_{P'}) g_3 (g_1 - 2g_2)/2 + \mathcal{L}_{C'} g_3 (g_2 + g_4)/2, \\
 \Lambda \partial_\Lambda g_4 &= \mathcal{L}_L (g_1^2 - 2g_2^2 + 2g_1 g_2 + g_4^2)/2 + \mathcal{L}_{C'} (g_3^2 + g_4^2)/2.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Les bulles \mathcal{L}_X sont les dérivées par rapport à Λ des bulles associées aux canaux électron-électron et électron-trou. Pour ce calcul en particulier, un régulateur dur est choisi, ce qui permet de calculer analytiquement les intégrales. Les bulles qui en résultent sont classées en deux catégories. Premièrement, il y a les dérivées des bulles qui possèdent une divergence logarithmique dans le canal électron-électron à impulsion d'échange nulle, et dans le canal électron-trou à $2k_F$, et qui donnent les plus fortes contributions aux équations de flot :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_C &= -\Lambda \partial_\Lambda \int_{-A_0}^{A_0} d\xi \Theta(|\xi| - \Lambda) \frac{n_F(\xi) - n_F(-\xi)}{2\xi}, \\
 \mathcal{L}_P &= \Lambda \partial_\Lambda \int_{-A_0}^{A_0} d\xi \Theta(|\xi| - \Lambda) \frac{n_F(\xi) - n_F(-\xi)}{2\xi}, \\
 \mathcal{L}_{P'} &= \Lambda \partial_\Lambda \int_{-A_0}^{A_0} d\xi \Theta(|\xi| - \Lambda) \frac{n_F(\xi) - n_F(-\xi(k_\xi + 2k_F))}{\xi - \xi(k_\xi + 2k_F)},
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

avec $k_\xi = \arccos(-(\xi + \mu)/2)$. La dernière contribution $\mathcal{L}_{P'}$ a tendance à s'annuler lorsque l'on s'éloigne du semi-remplissage. Cela est dû à la destruction du *nesting* lorsque $k_F \neq \pi/2$. Deuxièmement, il y a les dérivées des bulles non-divergentes provenant là encore des canaux particule-particule et particule-trou lorsque les deux particules sont sur une même branche. Ces contributions ont

la forme suivante :

$$\mathcal{L}_{L,C'} = \pm \Lambda \partial_\Lambda \int_{-A_0}^{A_0} d\xi \Theta(|\xi| - \Lambda) \partial_\xi n_F(\xi), \quad (4.7)$$

et ne prennent des valeurs non nulles que lorsque l'on a $\Lambda \lesssim T$ en raison de la forme de la distribution de Fermi-Dirac.

Pour calculer le diagramme de phase, il faut utiliser les équations de flot pour les vertex à trois pattes Z . Dans le cas du modèle de g -ologie, on se limite aux vertex $Z_{\eta k_F}^x(q)$ évalués à $q = \pm 2k_F$ pour les ondes de densité et à $q = 0$ pour les supraconductivités singulet et triplet. On définit alors quatre vertex correspondant aux ondes de densité, et deux vertex associées aux deux phases supraconductrices, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} Z_{\text{CDW}} &= Z_{+k_F}^{\text{ch-s}}(-2k_F) = Z_{-k_F}^{\text{ch-s}}(+2k_F), \\ Z'_{\text{CDW}} &= Z_{+k_F}^{\text{ch-s}}(+2k_F) = Z_{-k_F}^{\text{ch-s}}(-2k_F), \\ Z_{\text{BOW}} &= Z_{+k_F}^{\text{ch-b}}(-2k_F) = Z_{-k_F}^{\text{ch-b}}(+2k_F), \\ Z'_{\text{BOW}} &= Z_{+k_F}^{\text{ch-b}}(+2k_F) = Z_{-k_F}^{\text{ch-b}}(-2k_F), \\ Z_{\text{SDW}} &= Z_{+k_F}^{\text{sp-s}}(-2k_F) = Z_{-k_F}^{\text{sp-s}}(+2k_F), \\ Z'_{\text{SDW}} &= Z_{+k_F}^{\text{sp-s}}(+2k_F) = Z_{-k_F}^{\text{sp-s}}(-2k_F), \\ Z_{\text{BSDW}} &= Z_{+k_F}^{\text{sp-b}}(-2k_F) = Z_{-k_F}^{\text{sp-b}}(+2k_F), \\ Z'_{\text{BSDW}} &= Z_{+k_F}^{\text{sp-b}}(+2k_F) = Z_{-k_F}^{\text{sp-b}}(-2k_F), \\ Z_{\text{SS}} &= Z_{+k_F}^{\text{s}}(0) + Z_{-k_F}^{\text{s}}(0), \\ Z_{\text{TS}} &= Z_{+k_F}^{\text{t}}(0) - Z_{-k_F}^{\text{t}}(0). \end{aligned} \quad (4.8)$$

4.2. Limite du continuum

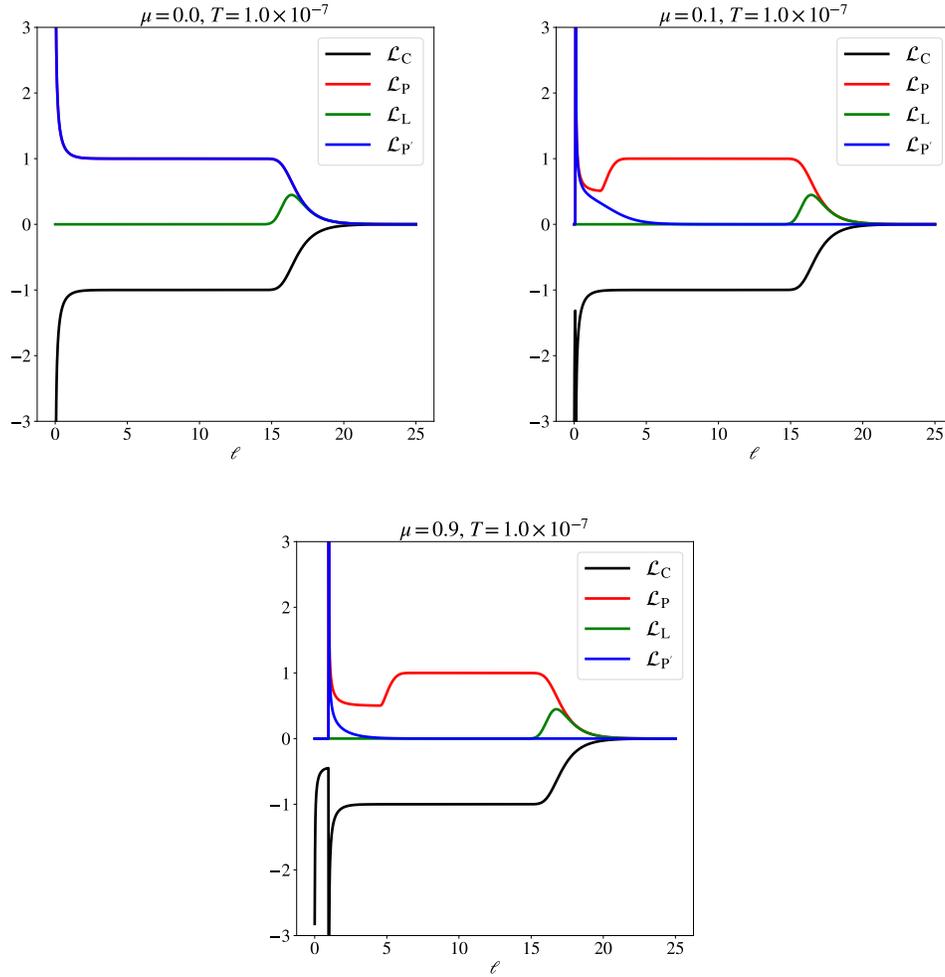


FIG. 4.1 – Les bulles de Cooper, Peierls et Landau sont montrées pour différentes valeurs du potentiel chimique, dans le cas du spectre de liaisons fortes. Dans cette figure, le paramètre $\ell > 0$ est le temps de RG, défini par la relation $\Lambda = \Lambda_0 e^{-\ell}$. Le pic à ℓ faible est dû à la singularité de van Hove présente dans la densité d'états.

4.2. Limite du continuum

Les équations de flot pour les vertex associés aux ondes de densité s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}
 \Lambda \partial_{\Lambda} Z'_{\text{CDW}} &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_{P'} (g_2 - 2g_1) Z'_{\text{CDW}} - \frac{1}{2} \mathcal{L}_P g_3 Z_{\text{SDW}}, \\
 \Lambda \partial_{\Lambda} Z_{\text{CDW}} &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_P (g_2 - 2g_1) Z_{\text{CDW}} - \frac{1}{2} \mathcal{L}_{P'} g_3 Z'_{\text{CDW}}, \\
 \Lambda \partial_{\Lambda} Z'_{\text{SDW}} &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_{P'} g_2 Z'_{\text{SDW}} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_P g_3 Z_{\text{SDW}}, \\
 \Lambda \partial_{\Lambda} Z_{\text{SDW}} &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_P g_2 Z_{\text{SDW}} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_{P'} g_3 Z'_{\text{SDW}}, \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Lambda \partial_{\Lambda} Z'_{\text{BOW}} &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_{P'} (g_2 - 2g_1) Z'_{\text{BOW}} - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}_P}{\cos(2k_F)} g_3 Z_{\text{BOW}}, \\
 \Lambda \partial_{\Lambda} Z_{\text{BOW}} &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_P (g_2 - 2g_1) Z_{\text{BOW}} - \frac{1}{2} \mathcal{L}_{P'} \cos(2k_F) g_3 Z'_{\text{BOW}}, \\
 \Lambda \partial_{\Lambda} Z'_{\text{BSDW}} &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_{P'} g_2 Z'_{\text{BSDW}} + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}_P}{\cos(2k_F)} g_3 Z_{\text{BSDW}}, \\
 \Lambda \partial_{\Lambda} Z_{\text{BSDW}} &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_P g_2 Z_{\text{BSDW}} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_{P'} \cos(2k_F) g_3 Z'_{\text{BSDW}}. \tag{4.10}
 \end{aligned}$$

et celles associées aux phases supraconductrices :

$$\begin{aligned}
 \Lambda \partial_{\Lambda} Z_{\text{SS}} &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_C (g_1 + g_2) Z_{\text{SS}}, \\
 \Lambda \partial_{\Lambda} Z_{\text{TS}} &= -\frac{1}{2} \mathcal{L}_C (g_1 - g_2) Z_{\text{TS}}. \tag{4.11}
 \end{aligned}$$

L'expression pour la susceptibilité normalisée qui vaut pour les deux canaux est quant à elle donnée par :

$$\chi_x(\ell) = \int_0^{\ell} d\ell' \mathcal{L}_x(\ell') Z_x^2(\ell'). \tag{4.12}$$

Ainsi, la phase pour laquelle χ_x est la plus singulière correspondra au vertex Z_x possédant la singularité la plus forte. Pour la détermination du diagramme de phase, on se limitera aux fonctions de réponse qui viennent d'être présentées. Pour celles-ci, les expressions des vertex à trois pattes peuvent être exprimées

comme des lois de puissance $Z_x(\ell) = \exp(\gamma_x(\ell)/2)$, avec un exposant d'échelle $\gamma_x(\ell) = \int_0^\ell d\ell' \tilde{g}_x(\ell')$.

Il est utile pour la suite de rappeler les principales caractéristiques du flot à une boucle de la théorie du continuum à demi-remplissage et en dehors du demi-remplissage.

4.2.2 Demi-remplissage

On considère tout d'abord le cas à demi-remplissage aux basses températures lorsque $\mu = 0.0$, c'est-à-dire $n = 1.0$. On obtient alors pour les dérivées des bulles :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_C &= -\mathcal{L}_P = -\mathcal{L}_{P'} = -\tanh(\beta\Lambda/2), \\ \mathcal{L}_{C'} &= \mathcal{L}_L = -2\Lambda\partial_\xi n_F(\Lambda). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Autrement dit, lorsque Λ est significativement plus grand que la température, et que celle-ci tend vers 0 ($\beta \rightarrow \infty$) on peut utiliser les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_C &= -\mathcal{L}_P \approx 1, \\ \mathcal{L}_{C'} &= \mathcal{L}_L \approx 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Les équations de flot se simplifient alors et prennent la forme suivante [56, 17, 53] :

$$\frac{dg_1}{d\ell} = -g_1^2, \quad (4.15a)$$

$$\frac{dg_2}{d\ell} = (g_3^2 - g_1^2)/2, \quad (4.15b)$$

$$\frac{dg_3}{d\ell} = g_3(2g_2 - g_1), \quad (4.15c)$$

$$\frac{dg_4}{d\ell} = 0. \quad (4.15d)$$

Rappelons que ℓ est le temps de RG tel que $\Lambda = \Lambda_0 e^{-\ell}$.

Le flot de $g_1(\ell)$ est associé aux degrés de liberté de densité de spin, et est

4.2. Limite du continuum

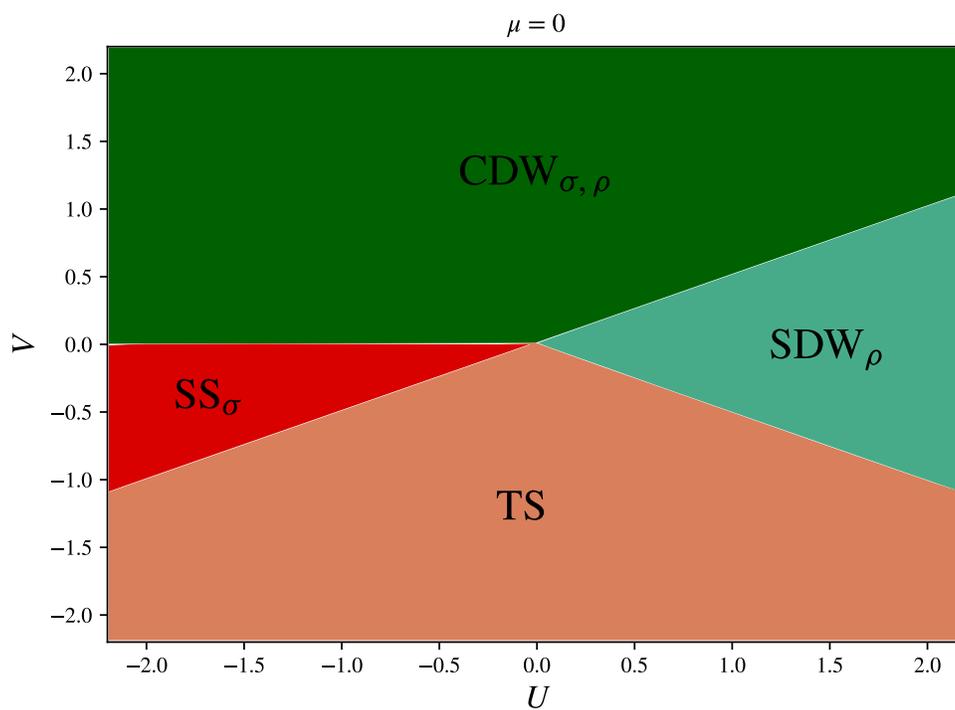


FIG. 4.2 – *Diagramme de phase du modèle de g-ologie à demi-remplissage, soit $n = 1.0$.*

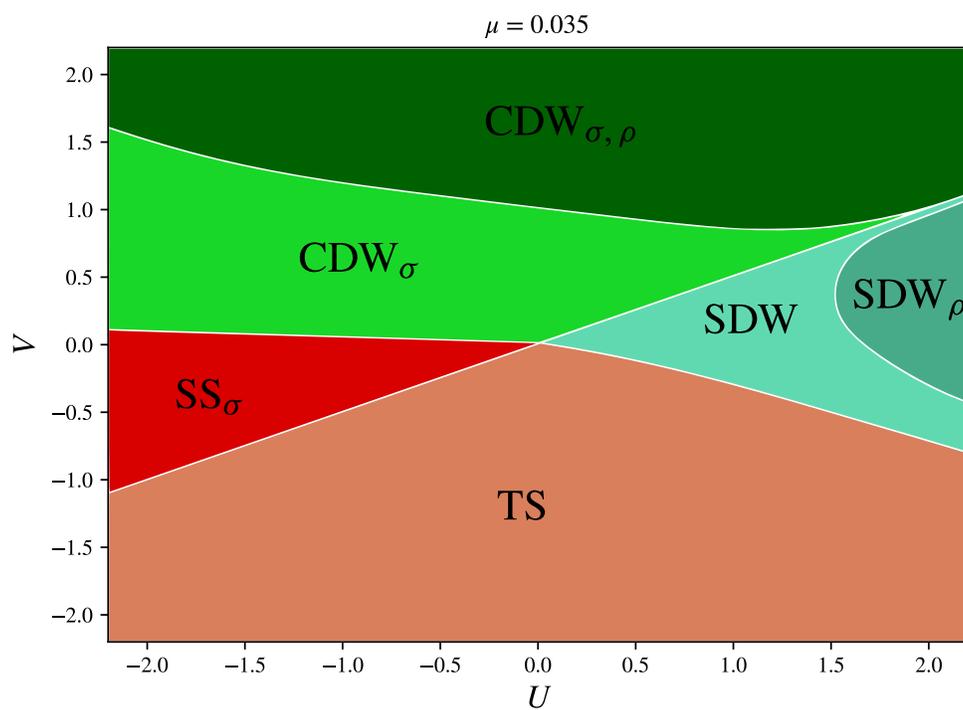


FIG. 4.3 – Diagramme de phase du modèle de g-ologie pour un remplissage $n = 1.01$.

découplée des équations pour $g_3(\ell)$ et $2g_2(\ell) - g_1(\ell)$, qui sont liées à la densité de charge et à l'invariant d'échelle $C = g_3^2(\ell) - (2g_2(\ell) - g_1(\ell))^2$ [17]. Ainsi, pour un couplage initialement attractif $g_1(0) < 0$, c'est-à-dire dans le domaine $U < 2V$, le flot de $g_1(\ell)$ est porté vers les couplages forts avec une singularité apparaissant à un ℓ_σ fini indiquant la présence d'un gap de spin $\Delta_\sigma \sim \Lambda_0 e^{-\ell_\sigma}$. On a de plus $\ell_\sigma = -1/g_1(0)$, car la solution de l'équation de flot pour $g_1(\ell)$ s'écrit en effet :

$$g_1(\ell) = \frac{g_1(0)}{1 + g_1(0)\ell}.$$

Pour un couplage initial attractif, soit $g_1(0) > 0$, alors $g_1(\ell)$ devient marginalement non-pertinente à mesure que ℓ augmente, et les degrés de liberté de densité de spin restent sans gap. Pour le secteur de charge, lorsque $g_1(0) - 2g_2(0) \geq |g_3(0)|$, les processus Umklapp $g_3(\ell)$ deviennent marginalement non-pertinents, et $2g_2(\ell) - g_1(\ell)$ s'écoule vers une valeur non-universelle tandis que les degrés de liberté de densité de charge restent sans gap. En revanche, lorsque $g_1(0) - 2g_2(0) < |g_3(0)|$, les processus Umklapp deviennent marginalement pertinents, et le flot conduit à une singularité à la fois pour $g_3(\ell)$ et $2g_2(\ell) - g_1(\ell)$ à un certain ℓ_ρ qui est associé à un gap de Mott $\Delta_\rho \sim \Lambda_0 e^{-\ell_\rho} = \Lambda_0 e^{-1/\sqrt{|C|}}$ dans le secteur de charge. Finalement, à l'ordre d'une boucle, il n'y a aucune contribution logarithmique au flot de la constante de diffusion intra-branche $g_4(\ell)$ tant que l'on considère des écarts énergétiques au niveau de Fermi plus grands que la température, soit $\Lambda \gtrsim T$.

Examinons les conséquences de ce qui précède sur le diagramme de phase. On distingue quatre phases :

- premièrement lorsque $U > \pm 2V$, de sorte que $g_1(0) > 0$ et $g_1(0) - 2g_2(0) < |g_3(0)|$, la susceptibilité χ_{SDW} présente la plus forte singularité, γ_{SDW} étant le plus grand exposant, et l'on a donc un état SDW sans gap de spin dans les excitations de spin mais avec un gap de Mott.
- Ensuite, lorsque $V < \pm U/2$, ce qui correspond à $g_1(0) > 0$ et $g_1(0) - 2g_2(0) > |g_3(0)|$, c'est γ_{TS} qui devient le plus grand exposant, conduisant à la domination des fluctuations associées à la phase TS, sans gap ni de spin ni de charge.
- Dans la région délimitée par $U/2 < V < 0$, correspondant à $g_1(0) < 0$

et $g_1(0) - 2g_2(0) > |g_3(0)|$, c'est alors γ_{SS} qui domine, et l'on est en présence d'un gap de spin, mais il n'y a pas de gap de charge.

- Lorsque $U/2 < V$ et $V > 0$, on a $g_1(0) - 2g_2(0) < |g_3(0)|$ et l'exposant γ_{CDW} est le plus fort, signifiant que les fluctuations CDW dominent, et dans ce cas il y a un gap de spin et un gap de charge.

Mentionnons que le long de la ligne $U = 2V$, soit $g_1(0) = g_3(0) = 0$, correspond au modèle de Tomonaga-Luttinger, avec $\gamma_{SDW} = \gamma_{CDW}$. Sur la demi-droite $U = 2V > 0$, les susceptibilités χ_{CDW} et χ_{SDW} possèdent des singularités d'égale importance, tandis que sur la demi-droite $U = 2V < 0$ on a alors une dégénérescence $\gamma_{SS} = \gamma_{TS}$ impliquant une égalité des susceptibilités $\chi_{SS} = \chi_{TS}$. Enfin, la ligne de symétrie $V = 0$ pour $U < 0$, avec $g_1(0) < 0$ et $g_1 - 2g_2(0) > |g_3(0)|$, conduit à l'égalité $\gamma_{CDW} = \gamma_{SS}$, et donc à la coexistence des phases CDW et SS. Le diagramme de phase bien connu qui résulte de ces considérations à propos de la théorie du continuum est illustré à la figure 4.2. Il est à noter que dans le cadre de ce modèle, la susceptibilité associée à la phase BOW ne possède jamais la singularité dominante, mais elle est cependant sous-dominante dans le secteur SDW [53].

4.2.3 En dehors du demi-remplissage

Examinons à présent le modèle de g -ologie à une valeur de μ finie. Les équations (4.5) peuvent être écrites sous la forme suivante, dans le limite des basses températures :

$$\frac{dg_1}{d\ell} = -g_1^2, \quad (4.16a)$$

$$\frac{d}{d\ell}(2g_2 - g_1) = -\mathcal{L}_{P'} g_3^2, \quad (4.16b)$$

$$\frac{dg_3}{d\ell} = (1 + \mathcal{L}_{P'})g_3(2g_2 - g_1)/2, \quad (4.16c)$$

$$\frac{dg_4}{d\ell} = 0. \quad (4.16d)$$

Ces équations correspondent aux résultats de Seidel *et al.* [53, 21], et sont également cohérentes avec les résultats obtenus par bosonisation dans la limite des couplages faibles [40, 25, 26].

Le flot de $g_1(\ell)$, qui, comme on l'a mentionné, est lié aux degrés de liberté de spin, garde la même forme que précédemment, et conduit à l'ouverture d'un gap de spin $\Delta_\sigma \sim \Lambda_0 e^{-1/g_1(0)}$ pour $g_1(0) < 0$, c'est-à-dire, étant donné les conditions initiales (4.3), que le gap de spin est présent dans la région au-dessus de la ligne $V = U/(2 - \mu^2)$. La pente de cette droite augmente avec μ , comme cela peut être constaté à la figure 4.3. Cependant, en ce qui concerne les degrés de liberté de charge, l'influence du potentiel chimique μ lorsqu'il est non nul affecte les flots de $2g_2(\ell) - g_1(\ell)$ et de $g_3(\ell)$ en raison de la suppression de la divergence logarithmique de la bulle électron-trou \mathcal{L}_P , lorsque $\Lambda(\ell) \lesssim \mu$. Ainsi, aux couplages suffisamment faibles, le flot de $2g_2(\ell) - g_1(\ell)$ n'est plus singulier, de sorte qu'il n'est plus possible d'ouvrir un gap de charge $\Delta_\rho < \mu$. En conséquence, des régions sans gap apparaissent dans le secteur de charge montrées à la figure 4.3, pour lesquelles les fluctuations dominantes donnent des phases CDW ou SDW.

En augmentant μ , les régions possédant un gap de charge reculent vers les domaines de couplages forts. Dans les domaines sans gap de charge, l'influence des processus Umklapp se réduit à une simple renormalisation de la combinaison $2g_2(\ell) - g_1(\ell)$, qui devient invariante d'échelle dans le régime des couplages faibles. Dans la région de la figure 4.3 où $g_1(0) > 0$, c'est-à-dire lorsque $V < U/(2 - \mu^2)$, l'effet de suppression des processus Umklapp par le potentiel chimique apparaît également dans la région sans gap où les fluctuations dominantes sont de type TS, plutôt que SDW. Sur la même figure, un effet similaire prend place à $g_1(0) < 0$, où la région SS (dans laquelle les termes Umklapp sont non-pertinents) prend de l'ampleur au détriment de CDW à mesure que μ augmente.

La discussion du modèle de g -ologie étant faite, passons à présent à l'étude prenant en compte les effets de réseau.

4.3 Effets de réseau à demi-remplissage

Le diagramme de phase à demi-remplissage a été calculé afin de tester la méthode basée sur le développement en ξ exposé au chapitre précédent. Il est également intéressant de décrire la physique du modèle EH à $\mu = 0$ pour comprendre les phénomènes en jeu lorsque l'on considérera un remplissage différent dans la section suivante.

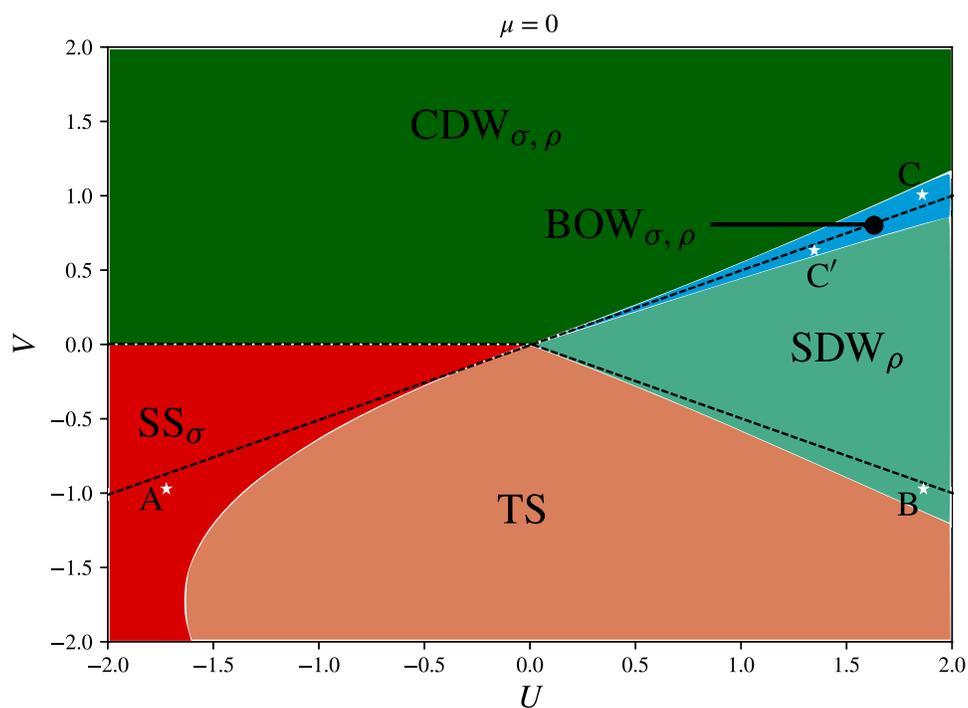


FIG. 4.4 – Diagramme de phase du modèle EH à demi-remplissage. Les lignes pointillées sont celles de la limite du continuum. Les points A , B , C et C' sont discutés dans le texte, et les flots associés apparaissent dans les figures suivantes.

Tout d'abord, notons que le spectre de liaison forte a une pente qui s'annule en bord de bande et également en $k = 0$, ce qui conduit à l'apparition de singularités de van Hove dans la densité d'états. Ces singularités affectent la forme des bulles. Cependant à demi-remplissage, la symétrie électron-trou est préservée, car il y a dans ce cas autant d'états vides que d'états occupés.

Plusieurs différences sont à noter entre le diagramme de phase de g -ologie et le modèle sur réseau. Toutes ces différences sont imputables à la présence de termes d'interaction non-locaux. Considérons tout d'abord le voisinage de la ligne $U = -2V$ pour $U > 0$. Dans ce cas, on observe que les constantes de couplage non-pertinentes jouent en faveur de la phase SDW, avec un élargissement de la portion du diagramme de phase présentant un gap de charge.

Passons maintenant à l'examen du voisinage de la ligne $U = 2V$. Cette ligne marque un changement de signe dans les conditions initiales de g_1 et g_3 . Rappelons que dans le cas du modèle de g -ologie, le fait que g_1 soit attractive implique l'ouverture d'un gap de spin. Ainsi, l'observation de la phase SS au-dessous de la ligne $U = 2V$ signifie que la constante g_1 , pourtant répulsive au début du flot, est écrantée jusqu'à devenir attractive. Le flot peut être schématiquement séparé en deux régimes. Initialement, on a $g_1(0) > 0$, mais la présence des termes non-locaux fait changer le signe de g_1 . Le flot continue sa progression et les termes non-pertinents disparaissent. On peut alors approximer les équations de flot par celles du modèle de g -ologie. Supposons que l'on fasse cette approximation à partir d'un instant ℓ^* . On peut alors utiliser $g_1(\ell^*)$ comme nouvelle condition initiale, et ainsi écrire :

$$g_1(\ell) = \frac{g_1(\ell^*)}{1 + g_1(\ell^*)(\ell - \ell^*)}, \quad (4.17)$$

qui montre qu'un gap de spin s'ouvre à $\ell_\sigma = \ell^* - 1/g_1(\ell^*)$. Or, comme en général $|g_1(\ell^*)| \ll 1$, on comprend que le gap est très petit, typiquement $\Delta_\sigma \sim \Lambda_0 e^{-\ell_\sigma}$.

Pour terminer cette section, examinons le voisinage de la ligne $U = 2V > 0$. Dans ce cas, une différence qualitative avec le diagramme de g -ologie est à noter, car une phase d'onde de densité de charge centrée sur les liens (BOW) apparaît. Dans cette région, les constantes de couplages non-pertinentes affectent le flot de

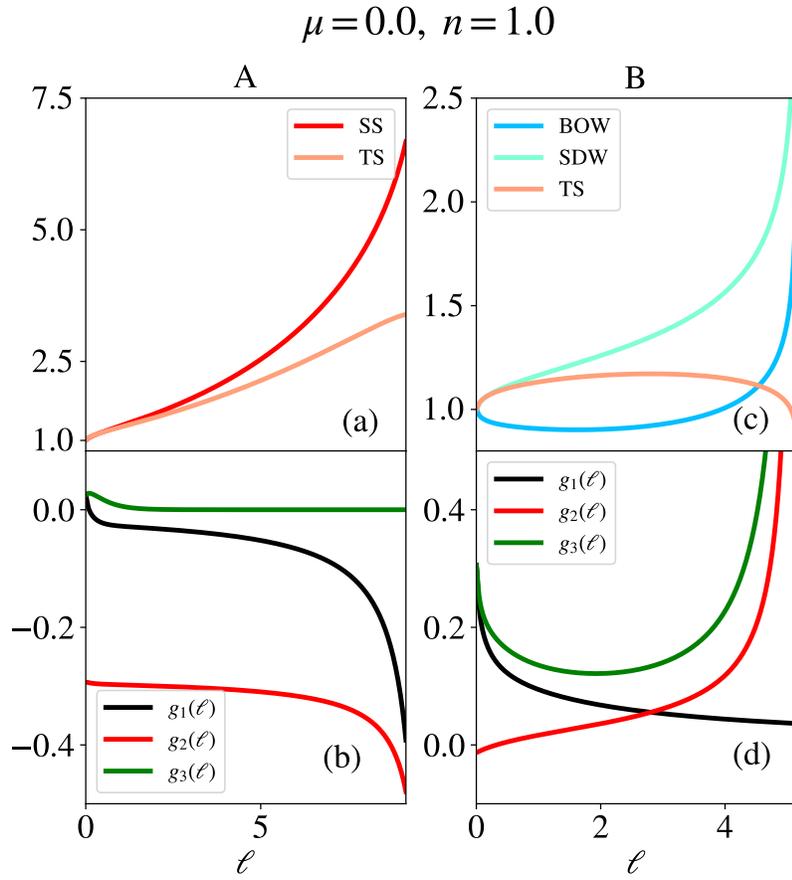


FIG. 4.5 – [(a), (c)] Flot pour les vertex Z_x . [(b), (d)] Flot des constantes de couplages. Les points A et B sont ceux apparaissant dans la figure 4.4.

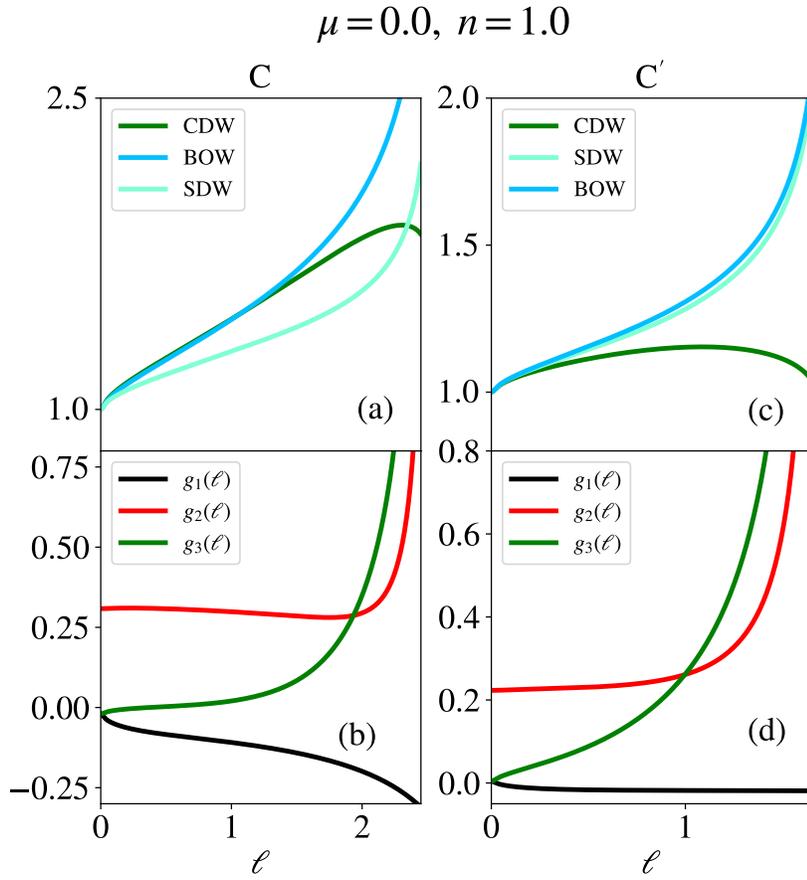


FIG. 4.6 – [(a), (c)] Flot pour les vertex Z_x . [(b), (d)] Flot des constantes de couplages. Les points C et C' sont ceux apparaissant dans la figure 4.4.

g_3 qui devient positif, puis diverge à un certain ℓ_ρ . La divergence des processus Umklapp va de paire avec la divergence de $2g_2 - g_1$ qui signale l'apparition d'un gap de charge (de Mott).

4.4 En dehors du demi-remplissage

Prendre un potentiel chimique non nul implique un déséquilibre entre les états occupés et les états vides. Ainsi, l'intégration des degrés de liberté n'est plus symétrique par rapport au niveau de Fermi, sauf bien sûr lorsque $\Lambda \ll \Lambda_0$, c'est-à-dire lorsque la coupure est très petite par rapport à la largeur de la bande initiale, ce qui permet de linéariser le spectre.

Le flot de RG peut alors être divisé en trois régimes. Dans le premier régime, l'asymétrie entre les électrons et les trous joue un rôle important. Par exemple, pour $\mu > 0$, il est possible d'avoir $\mathcal{N}(\xi > \Lambda) = 0$, c'est-à-dire qu'aucun état fermionique n'est disponible, et d'avoir également $\mathcal{N}(\xi < -\Lambda) \neq 0$. Les contributions aux bulles électron-électron et électron-trou sont affectées différemment. Il n'y a pas d'excitations électron-trou à $2k_F$ et la bulle électron-trou \mathcal{L}^{eh} s'annule dans ce régime. En revanche, les excitations par paires de Cooper qui contribuent à la bulle \mathcal{L}^{ec} sont bien présentes pour des impulsions $(-k, k)$ dès lors que des états quantiques sont disponibles, c'est-à-dire pour $\mathcal{N}(\xi) \neq 0$. En fait, l'amplitude de la bulle de Cooper est affectée en raison de la densité d'états, mais elle conserve sa propriété de divergence logarithmique. Ces propriétés induisent un écrantage des interactions en début de flot dont l'impact modifie la structure du diagramme de phase obtenu dans la limite du continuum. Cet effet est un reliquat de l'écrantage de l'interaction coulombienne par les fluctuations de paires de Cooper dans la théorie de la supraconductivité conventionnelle.

Le second régime correspond à la région où Λ est tel que la densité d'états est presque symétrique, soit $\mathcal{N}(-\xi) \approx \mathcal{N}(\xi)$, mais le spectre n'est pas encore correctement décrit par deux branches linéaires. Dans ce régime, la singularité logarithmique du canal électron-trou est seulement partiellement restaurée, alors que la singularité logarithmique du canal électron-électron est intacte (voir figure 4.1). En suivant l'exemple du premier régime, le déséquilibre entre les deux régimes joue en faveur de l'effet d'écrantage.

Enfin, le dernier régime correspond à la limite du continuum obtenue à Λ faible devant Λ_0 . Dans ce cas, on peut écrire $\mathcal{N}(\xi) \approx \mathcal{N}(-\xi) \approx 1/\pi v_F$ pour $\xi \rightarrow 0$. Cela correspond à la densité d'états utilisée dans les modèles de g -ologie.

En plus des effets associés à la densité d'états, le potentiel chimique a un impact sur la bulle de Peierls. Celle-ci est constituée de deux termes \mathcal{L}_P et $\mathcal{L}_{P'}$, dont un ($\mathcal{L}_{P'}$) impliquant un vecteur du réseau réciproque. Ce terme s'annule car la relation de *nesting* est imparfaite en dehors du demi-remplissage (car $4k_F$ n'est plus un vecteur du réseau réciproque). En conséquence, les équations pour les processus normaux g_1 et g_2 deviennent indépendantes des processus Umklapp.

Ceci étant dit, il est maintenant possible de discuter des effets du dopage, que l'on sépare en trois régimes : faibles, intermédiaires, et forts.

4.4.1 Dopages faibles

Examinons le diagramme de phase de la figure 4.7 obtenu pour un faible écart au demi-remplissage ($\mu = 0.035$) à partir des conditions initiales données en (4.3), et en intégrant les équations de flot (3.31b).

Dans le secteur localisé autour de la ligne $U = 2V$ (qui rappelons-le est associée à un changement de signe de g_1 dans la limite du continuum, et donc à l'ouverture d'un gap de spin au-dessus de cette ligne), on constate que les régions BOW avec gap de spin et de charge et SDW avec gap de charge sont repoussées vers les couplages forts, et existent seulement au delà d'un couplage seuil U_c . En conséquence, une région portant des ondes de densité de charge et de spin incommensurables et sans gap de charge apparaît à faible couplage. Le gap s'annule à une échelle d'énergie incommensurable $v_F\mu$ qui arrête le flot de $2g_2 - g_1$ et g_3 qui divergent alors vers les couplages forts lorsque Λ devient plus petit que $v_F\mu$. La région où les fluctuations BOW dominant s'abaisse légèrement par rapport au demi-remplissage. La figure 4.8 présente la forme de $U_c(\mu)$, marquant l'apparition de la phase BOW gappée de charge en fonction du potentiel chimique μ . Cette fonction est bien représentée par une expression de la forme $U_c(\mu) = 8.03\mu^b + c$, avec $b \approx 0.53$. Notons de plus que l'on obtient $c \rightarrow 0$ dans la limite $T \rightarrow 0$. En effet, à température finie, même très faible, on observe un gap seulement pour des couplages excédant un certain seuil. La température induit une échelle ℓ_T au-delà de la laquelle le flot est coupé tandis que l'appari-

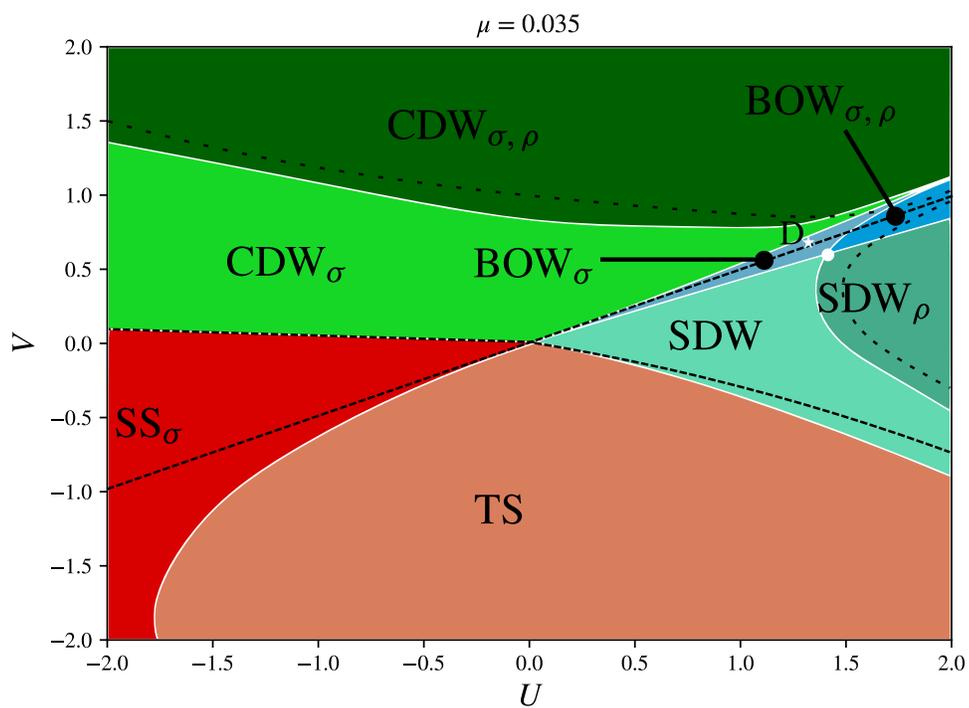


FIG. 4.7 – Diagramme de phase du modèle EH, en dehors du demi-remplissage, à $n = 1.01$. Le point D est discuté dans le texte.

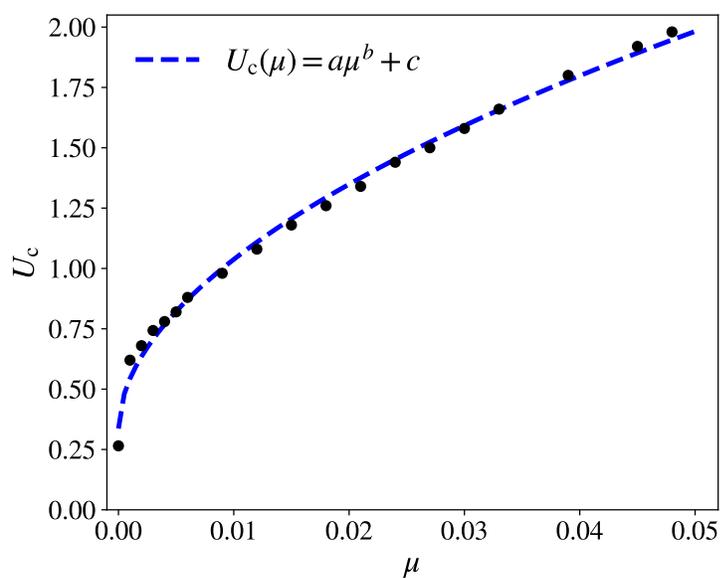


FIG. 4.8 – Valeur du couplage U minimale pour pouvoir observer la phase BOW avec un gap de charge. Par exemple, le point correspondant à $\mu = 0.035$ est illustré par un disque blanc à la figure 4.7. L'ajustement de la courbe donne un exposant $b = 0.53$.

tion du gap de charge est associée à une échelle $\ell_\rho(U, V)$. Par exemple, dans le cas du modèle de Hubbard pur répulsif ($U \geq 0, V = 0$), l'échelle $\ell_\rho(U, 0)$ est décroissante en fonction de U , ce qui signifie que le gap devient de plus en plus petit à mesure que l'on se rapproche du couplage nul. Ainsi, on n'observe cette ouverture de gap que lorsque l'on a $\ell_\rho(U, V) < \ell_T$. Des fluctuations BOW dominantes en dehors du demi-remplissage, mais à U et V finis au voisinage de la ligne $U = 2V$ ont été trouvées de façon numérique avec des simulations Monte Carlo quantiques [50], et sont en accord avec des résultats présentés dans ce travail. Si l'on examine la région ($U > 0, V < 0$) du diagramme représenté en figure 4.7, on constate qu'un potentiel chimique fini conduit à une suppression de la transition pour le gap de charge à la frontière entre les phases TS et SDW qui est présente à demi-remplissage. La phase SDW devient alors non-gappée au voisinage de cette frontière.

Enfin, on remarque que la frontière entre CDW et SS dans la région ($U < 0, V > 0$) de la figure 4.7 se déplace légèrement vers le haut du diagramme par rapport aux résultats du continuum (qui sont représentés en pointillés). Cela va dans le sens d'un élargissement de la région de stabilité de la supraconductivité en raison de l'asymétrie finie dans le spectre entre les électrons et les trous dès lors que le potentiel chimique est non nul.

4.4.2 Dopages intermédiaires

Les résultats pour le diagramme de phase à remplissage intermédiaire sont montrés en figure 4.9 pour un potentiel chimique $\mu = 0.3$. En raison de l'effet faible des processus Umklapp à ce remplissage, aucune région du diagramme ne porte un gap de charge. Cependant, l'influence de g_3 au début du flot est toujours présente et va de paire avec un changement de signe de g_1 vers les valeurs négatives à cause des couplages non pertinents. Cela a pour conséquence la persistance d'une région BOW au voisinage de la ligne $U = 2V$. L'allure du flot des constantes de couplage dans cette région BOW est comparable au flot illustré à la figure 4.II, mais avec une amplitude nettement plus faible (voir par exemple figure 4.5 (c), (d)).

Plus bas dans le diagramme, la frontière entre SS et TS coïncide essentiellement avec les résultats du continuum. L'impact faible des processus Umklapp

et des couplages non pertinents fait que g_2 ne change pas de signe au cours du flot, ce qui restaure la stabilité de la phase TS contrairement au cas des très faibles potentiels chimiques.

Dans la région ($U < 0, V > 0$), les déviations par rapport au continuum sont plus remarquables. La tendance amorcée aux potentiels chimiques faibles présentée à la figure 4.7 se poursuit et dépasse largement les prédictions du continuum. L'origine de l'étalement de la phase SS prend racine dans l'asymétrie marquée du spectre par rapport au niveau de Fermi. Au début du flot, c'est-à-dire pour Λ grand (proche de Λ_0) toutes fluctuations de paires électron-trou à $2k_F$ venant des boucles fermées, des diagrammes de correction de vertex et en échelle sont fortement supprimées en conséquence de l'absence d'états disponibles pour cet appariement. Cela est dû à la forte asymétrie entre électrons et trous. Ainsi, ne survivent que les diagrammes mettant en jeu les fluctuations de paires électron-électron, c'est-à-dire les diagrammes de Cooper, bien qu'elles soient diminuées en amplitude. Ces diagrammes alimentent les équations pour g_1 et g_2 . Au point E, le couplage g_2 , bien qu'initialement répulsif, est fortement écranté par les fluctuations de paires de Cooper, jusqu'à devenir attractive, comme cela est illustré à la figure 4.12. On constate que la phase SS est favorisée au détriment de CDW. Cet effet est une réminiscence de l'écrantage de l'interaction coulombienne par les fluctuations de paires de Cooper et conduit à l'apparition de la supraconductivité dans les métaux isotropes [41].

La forte réduction de la contribution des paires électron-trou à $2k_F$ au début du flot est également responsable de la suppression des processus Umklapp dans toute la région CDW présente dans la partie supérieure du diagramme de phase. Il n'y a pas de gap de charge, contrairement aux prédictions du modèle du continuum (voir la région délimitée par les pointillés espacés de la figure 4.9).

4.4.3 Dopages forts

Considérons à présent le cas d'un remplissage fort, comme illustré à la figure 4.10, avec un potentiel chimique $\mu = 1.03$. À un remplissage aussi fort que celui-ci, les processus Umklapp g_3 n'ont plus aucun effet, car ils sont coupés au tout début du flot. Cela se traduit par le fait que les ondes de densité sont systématiquement incommensurables. De plus il n'y a plus aucune région

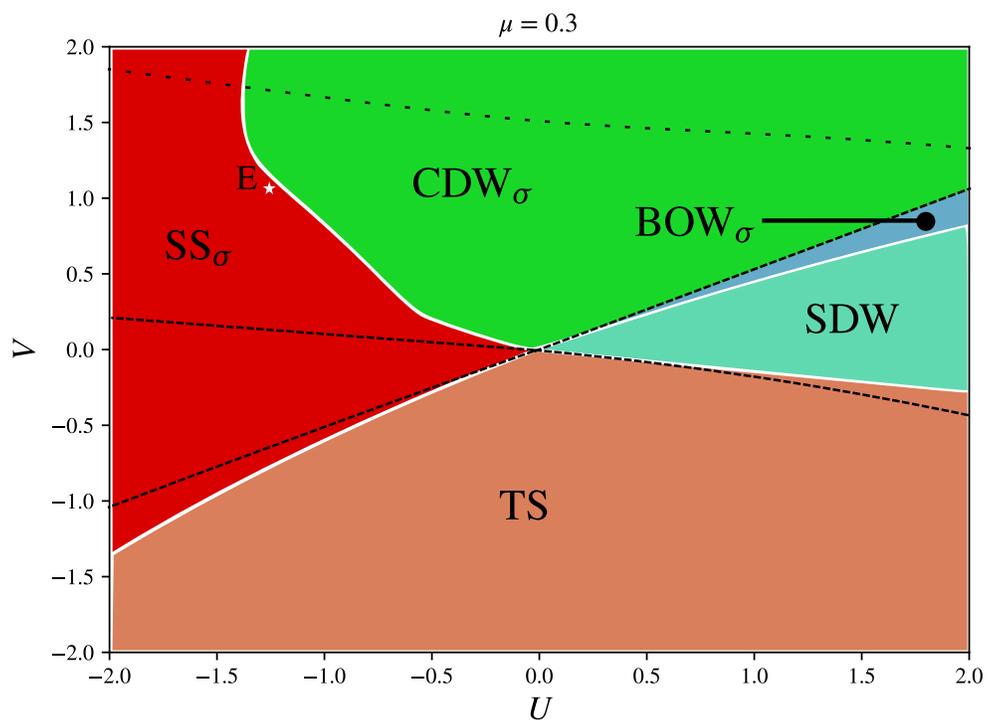


FIG. 4.9 – Diagramme de phase pour un remplissage $n = 1.10$. Le point E , illustrant le phénomène d'écrantage favorisant SS au détriment de CDW , est discuté dans le texte.

du diagramme de phase dominée par les fluctuations BOW. Ainsi, il est possible d'ignorer ces processus dans l'analyse du diagramme de phase. Seul le gap de spin est à considérer. Dans la limite du continuum, on a vu que ce gap est régi par le flot de g_1 , comme illustré par l'équation (4.15a) ainsi que par la condition initiale $g_1 \approx U - V$ ce qui signifie qu'il faut se placer au-dessus de la ligne $U \approx V$ (ligne en pointillés dans la figure 4.10) pour avoir un processus répulsif. L'examen du diagramme de phase montre que cette frontière est fortement modifiée par les effets de réseau, qui sont particulièrement prononcés dans la région répulsive. Au point F par exemple, la figure 4.13 montre que g_1 est en effet attractive au début du flot, puis bascule vers des valeurs répulsives, et devient marginalement non pertinente à des valeurs de ℓ suffisamment élevées.

Cet effet remarquable a ses origines dans l'asymétrie particulièrement marquée du spectre, qui, comme cela a déjà été mentionné, supprime les contributions au flot des paires électron-trou à $2k_F$ lorsque Λ est proche de Λ_0 . Seules les contributions dues aux fluctuations électron-électron à faible impulsion provenant des diagrammes de Cooper en échelle (voir figure 3.2) alimentent l'équation de flot pour g_1 . Ces contributions sont associées à un terme proportionnel au produit $g_1 g_2$ qui est initialement négatif, ce qui rend les diagrammes correspondant globalement positifs. En conséquence, le flot de g_1 atteint finalement les valeurs positives. Cela peut être vu comme la contre-partie de l'écrantage favorisant la phase SS discuté plus haut. Cet anti-écrantage élargit la région de stabilité de la phase SDW au détriment de la phase CDW, qui perd donc du terrain sur toutes ses frontières. L'anti-écrantage est aussi présent dans une moindre mesure dans le voisinage de la ligne $U \approx V$ mais dans la région attractive, où dans ce cas la phase TS gagne du terrain sur la phase SS (on constate bien que la frontière TS-SS est au-dessus de la ligne en pointillés).

Enfin, portons notre attention sur la région ($U < 0, V > 0$) du diagramme de phase, où nous voyons qu'en comparaison avec les résultats de la figure 4.9, la région de stabilité de la phase SS est encore augmentée toujours au détriment de CDW, et atteint environ le double ce que la théorie du continuum prédit. L'écrantage de g_2 vers les valeurs négatives par les fluctuations de paires de Cooper est dû au régime de début de flot, régi par la non-linéarité du spectre. On observe la même tendance que celle présente à la figure 4.12, mais elle est encore

renforcée car l'asymétrie du spectre est alors encore plus marquée à mesure que le potentiel chimique prend des valeurs plus fortes. Les calculs menés à des remplissages encore plus forts, notamment à $\mu = \sqrt{2}$, c'est-à-dire pour une bande remplie aux trois quarts, montrent que le diagramme de phase a essentiellement la même allure que celui de la figure 4.10, avec toutefois des différences portant sur les frontières de la région de domination de CDW. Par le même mécanisme d'écrantage, la région CDW diminue progressivement en faveur des phases SS et SDW¹. Cela conduit à la conclusion que l'asymétrie électron-trou dans une bande remplie de façon incommensurable fournit un mécanisme efficace pour écranter la partie répulsive des interactions coulombiennes, et favorise alors l'apparition d'une phase supraconductrice.

1. Les calculs effectués ne prennent pas en compte l'influence des processus Umklapp à trois particules à $8k_F$, présents dans le cas d'une bande remplie aux trois quarts [26]. Ces termes sont non-pertinents dans le secteur à couplage faible car ils seraient en $O(\xi^2)$, mais ils peuvent influencer le flot des constantes marginales.

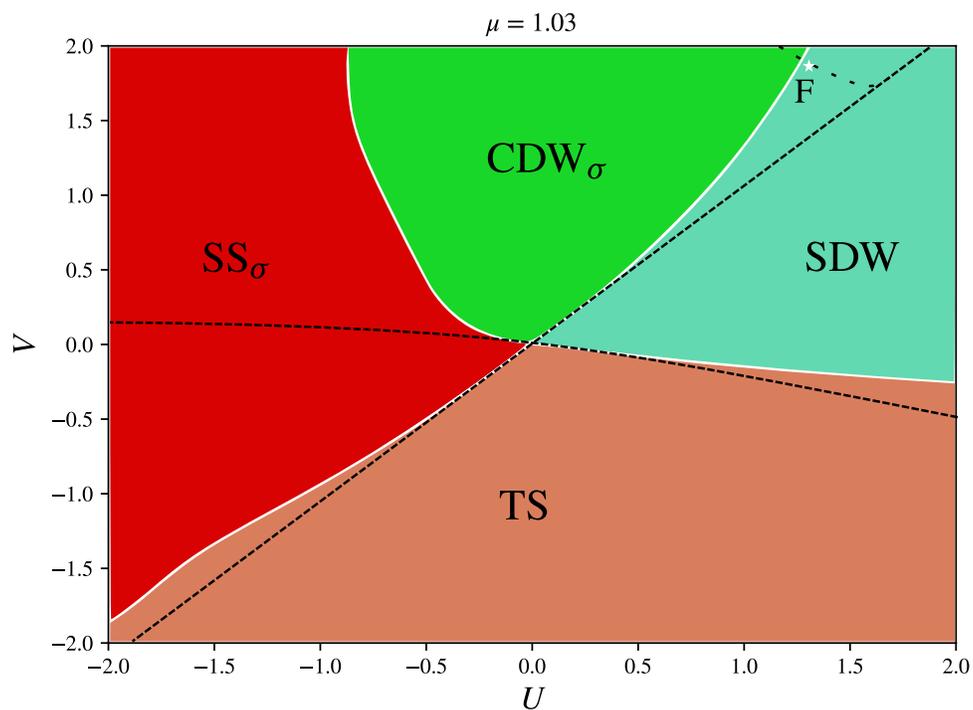


FIG. 4.10 – *Diagramme de phase pour un remplissage $n = 1.34$. Le point F, illustrant le phénomène d'anti-écranage favorisant SDW au détriment de CDW, est discuté dans le texte.*

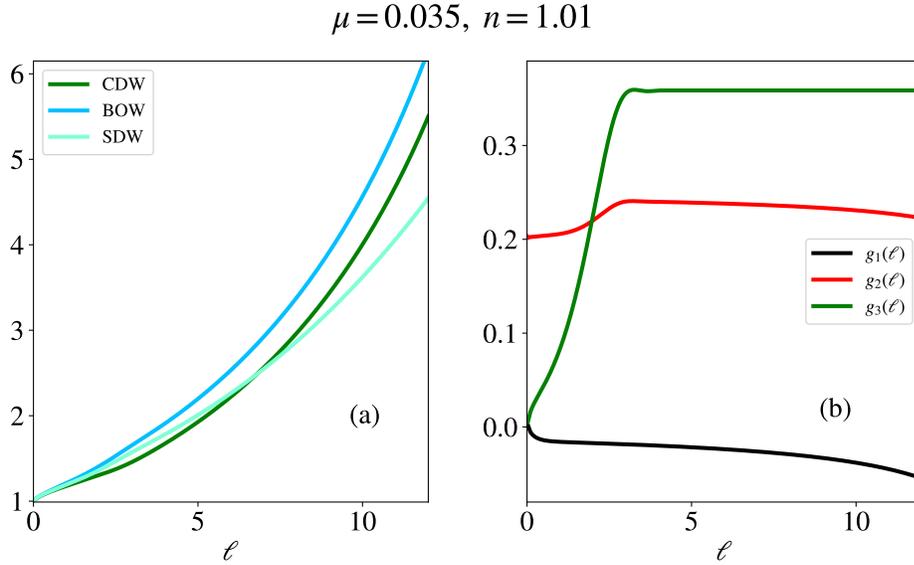


FIG. 4.11 – Flots associés au point D de la figure 4.7. (a) Vertex Z. (b) Constantes de couplage.

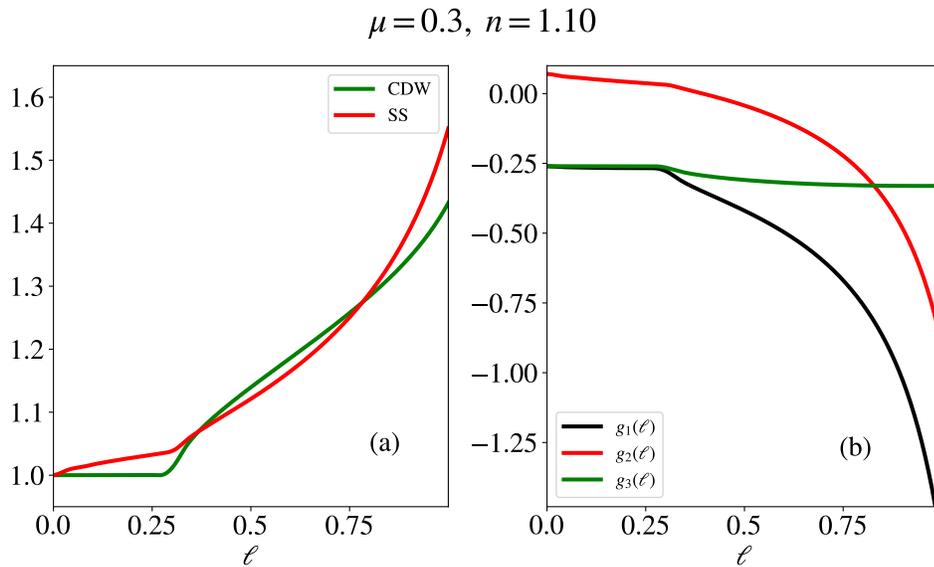


FIG. 4.12 – Flots associés au point E de la figure 4.9. (a) Vertex Z. (b) Constantes de couplage.

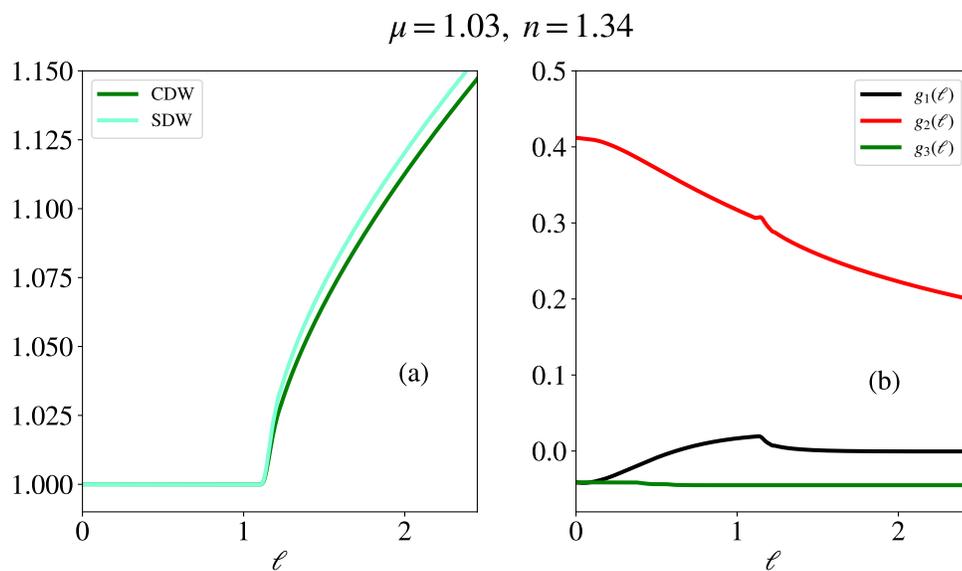


FIG. 4.13 – Flots associés au point F de la figure 4.10. (a) Vertex Z .
 (b) Constantes de couplage.

5

Extensions supplémentaires

« This new learning amazes me, Sir Bedevere. Explain to me again how sheep's bladders may be employed to prevent earthquakes. »

Monty Python and the Holy Grail

Ce dernier chapitre donne un aperçu de différentes extensions du travail présenté jusqu'à présent. Dans la première section, des interactions aux plus proches voisins autres que densité-densité sont présentées. Les termes que l'on considère correspondent à des interactions de la forme saut-saut et saut-densité respectivement. Quelques diagrammes de phase prenant en compte ces termes sont présentés, d'abord à demi-remplissage pour comparer avec la littérature existante sur le sujet, et ensuite à potentiel chimique fini. La seconde section esquisse les autres extensions possibles. Tout d'abord, on traite de la prise en compte de termes supplémentaires dans le spectre à une particule et de termes d'interactions aux seconds voisins et au-delà. Ensuite, il est brièvement question des susceptibilités uniformes. Enfin, le cas d'une extension aux systèmes quasi-unidimensionnels est brièvement évoqué.

5.1 Interactions généralisées aux plus proches voisins

5.1.1 Modèle $U-V-W-X(-X')$

Jusqu'à présent, les efforts ont été concentrés sur le cas du modèle EH, que l'on peut aussi qualifier de modèle $U-V$ pour des raisons évidentes. Cependant, la méthode qui a été développée peut être utilisée pour étudier le diagramme de phase d'autres modèles non-intégrables. On peut en effet considérer des interactions non-locales généralisées [35, 9, 10, 2, 31], dont les effets ont été étudiés à demi-remplissage. Des résultats numériques à $\mu = 0.0$ montrent des déviations dans les diagrammes de phases par rapport au modèle de g -ologie [44].

Le terme d'interaction aux plus proches voisins V n'est pas le seul que l'on peut écrire. Rappelons en effet la forme générale de l'action à deux corps construite à partir des opérateurs particule-trou de spin 0 :

$$\mathcal{S}_2[\psi, \bar{\psi}] = V_{xy, x'y'}^p \rho_{xy}[\psi, \bar{\psi}] \rho_{x'y'}[\psi, \bar{\psi}]. \quad (5.1)$$

Si on se limite à des interactions aux plus proches voisins, avec des couplages spatialement uniformes, alors il n'y a, en plus du terme V , que deux possibilités, qui mènent au Hamiltonien d'interaction suivant :

$$\mathcal{H}_{WX} = W \sum_{\langle x,y \rangle} B_{xy}^2 + X \sum_{\langle x,y \rangle} B_{xy} (n_x + n_y). \quad (5.2)$$

Le terme W décrit une interaction entre sauts d'électrons. Un tel terme peut être généré par l'interaction électron-phonon. Si l'on appelle ϕ le champ associé aux phonons, alors le terme d'interaction électron-phonon est schématiquement de la forme $\sim \phi_x B_{xy}$. L'action pour les phonons seuls se réduit à une théorie gaussienne dans le cas où les vibrations du réseau sont supposées harmoniques. On peut donc intégrer les phonons, ce qui mène à un terme $\sim B_{xy}^2$, c'est-à-dire un terme de type W . Le terme X est plus mystérieux quant à son interprétation physique, et on se contentera de dire qu'il est *a priori* tout à fait permis par l'interaction coulombienne.

Lorsque le terme $W-X$ est transformé dans l'espace de Fourier, les constantes

5.1. Interactions généralisées aux plus proches voisins

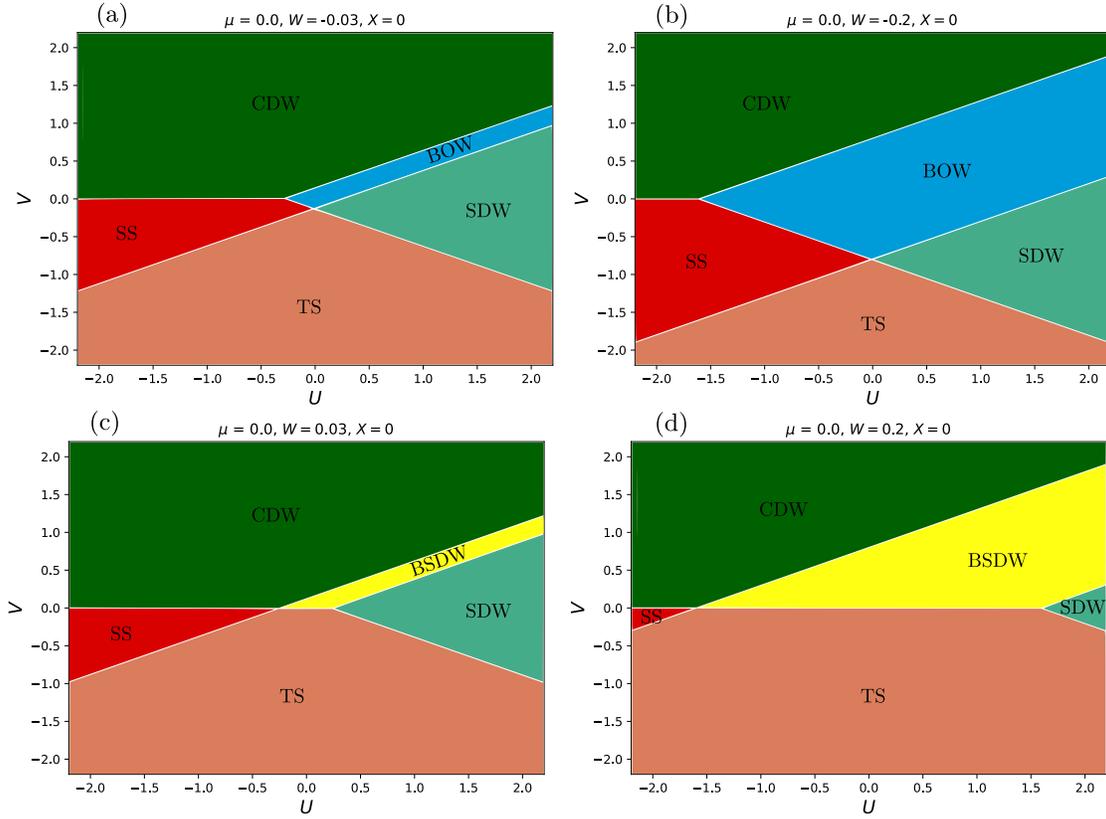


FIG. 5.1 – Diagramme de phase à demi-remplissage dans la limite du continuum en présence du terme d'interaction saut-saut W . Les phases gappées ne sont pas différenciées des phases non gappées.

de couplage g_{k_1, k_2, k'_1}^{WX} prennent la forme suivante :

$$g_{k_1, k_2, k'_1}^{WX} = \frac{2W}{\pi v_F} [\cos(k_2 - k'_1) + \cos(k_1 + k_2)] + X [\cos(k_1) + \cos(k_2) + \cos(k'_1) + \cos(k_1 + k_2 - k'_1)]. \quad (5.3)$$

Pour prendre en compte le terme W - X dans les équations de flot précédemment établies, il suffit donc de dériver les conditions initiales en utilisant le développement en ξ . La démarche est exactement la même que pour le modèle U - V , illustré à la section 4.1. Contentons-nous d'écrire les contributions marginales aux

constantes de couplage initiales, en prenant en compte les termes W et X :

$$\begin{aligned}
 g_1 &= \frac{U}{\pi v_F} + \frac{2V}{\pi v_F} \cos(2k_F) + \frac{8W}{\pi v_F} + \frac{8X}{\pi v_F} \cos(k_F), \\
 g_2 &= \frac{U}{\pi v_F} + \frac{2V}{\pi v_F} + \frac{4W}{\pi v_F} (1 + \cos(2k_F)) + \frac{8X}{\pi v_F} \cos(k_F), \\
 g_3 &= \frac{U}{\pi v_F} + \frac{2V}{\pi v_F} \cos(2k_F) + \frac{8W}{\pi v_F} \cos(2k_F) + \frac{2X}{\pi v_F} (3 \cos(k_F) + \cos(3k_F)), \\
 g_4 &= \frac{U}{\pi v_F} + \frac{2V}{\pi v_F} + \frac{4W}{\pi v_F} (1 + \cos(2k_F)) + \frac{8X}{\pi v_F} \cos(k_F). \tag{5.4}
 \end{aligned}$$

On constate ainsi qu'à demi-remplissage, étant donné que $\cos(k_F) = 0$, le terme X n'a aucune contribution marginale. De plus, ce terme brise la symétrie électron-trou, et introduit une dépendance en le signe du potentiel chimique. Pour des raisons liées à la technique utilisée, Nakamura *et al.* [44] ont ajouté un terme supplémentaire à trois corps X' de type saut-densité-densité, qui, lorsque l'on a $X' = -2X$, permet de restaurer la symétrie électron-trou. Lorsque le terme X' est traité en champ moyen, il conduit à un terme de type saut-saut qui vient s'ajouter au terme W ainsi qu'à un terme de type saut-densité qui vient annuler exactement le terme X . L'approche qui a été décrite dans ce manuscrit ne nécessite cependant pas la présence de la symétrie électron-trou, et les termes X et X' (ce dernier étant traité en champ moyen comme décrit) peuvent être étudiés indépendamment l'un de l'autre.

Dans la suite, on va se concentrer sur le cas du terme W , qui fournit un autre mécanisme pour favoriser la phase BOW, mais qui permet aussi, lorsque W est répulsif, de donner naissance à une phase BSDW.

5.1.2 Cas du terme W

La figure 5.1 donne le diagramme de phase du modèle U - V à demi-remplissage en présence du terme W , pour des valeurs attractives et répulsives, à couplages faibles et intermédiaires. Dans tous les diagrammes qui suivent, les phases gappées ne sont pas différenciées des phases non gappées. Lorsque W est attractif, la phase BOW est favorisée dans le voisinage de la ligne $U = 2V$. L'interaction de type saut-saut est donc un mécanisme différent pour favoriser ce type de phase.

5.1. Interactions généralisées aux plus proches voisins

Cependant, dans le cas où W est répulsif, la phase BSDW est alors favorisée.

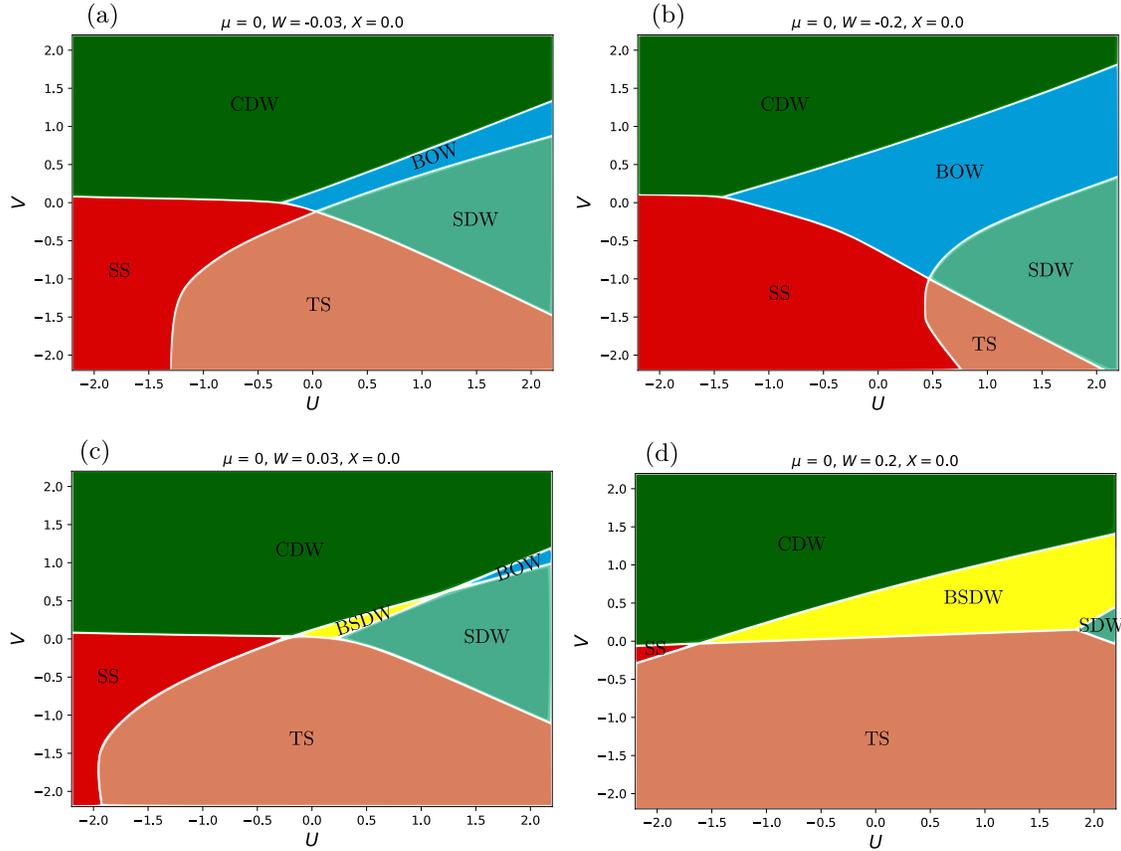


FIG. 5.2 – Diagramme de phase à demi-remplissage sur réseau en présence du terme W . Les phases gappées ne sont pas différenciées des phases non gappées.

Ces résultats sont à comparer avec ceux de la figure 5.2, obtenus en prenant en compte les effets de réseau, à demi-remplissage. On constate les effets de réseau quantitatifs pour le cas où W est attractif, avec un recul marqué de la phase TS au profit de SS. Pour une valeur faible et répulsive de W (panneau (c) de la figure 5.2), on constate une différence marquée avec le résultat du continuum. En effet, pour des couplages $U-V$ très faibles dans le voisinage de la demi-ligne $U = 2V > 0$, on retrouve un accord qualitatif avec les résultats du continuum, mais lorsque U augmente encore, la phase BSDW se referme au profit

5.1. Interactions généralisées aux plus proches voisins

de la phase BOW, et l'on retrouve une différence qualitative avec le cas du continuum. Que la phase BOW apparaisse n'est pas surprenant. En effet, W reste fixé, mais à mesure que U augmente, V augmente aussi puisque nous sommes toujours dans le voisinage de $U = 2V$, ce qui signifie que passé un couplage suffisamment grand, on peut presque négliger le terme W , et dans ce cas, on sait que la phase BOW va dominer. Enfin, lorsque W devient plus répulsif, on observe un élargissement de la phase BSDW, et la phase BOW disparaît alors du diagramme de phase en couplage faible. De plus, on remarque que les frontières BSDW-TS et SS-CDW sont des droites avec une pente faible mais tout de même non nulle. Cette pente devrait pourtant être nulle du fait de la présence de la symétrie suivante du terme W [44, 55] :

$$\psi_{x,\uparrow} \rightarrow \psi_{x,\uparrow}, \quad \psi_{x,\downarrow} \rightarrow (-1)^x \bar{\psi}_{x,\uparrow}. \quad (5.5)$$

Nous interprétons cette pente comme la signification que le développement en ξ brise faiblement cette symétrie, montrant ainsi une limite de l'approche développée. On peut cependant penser qu'en allant à des ordre plus élevés en ξ les résultats seraient meilleurs, puisque l'on devrait avoir tendance à rétablir cette symétrie.

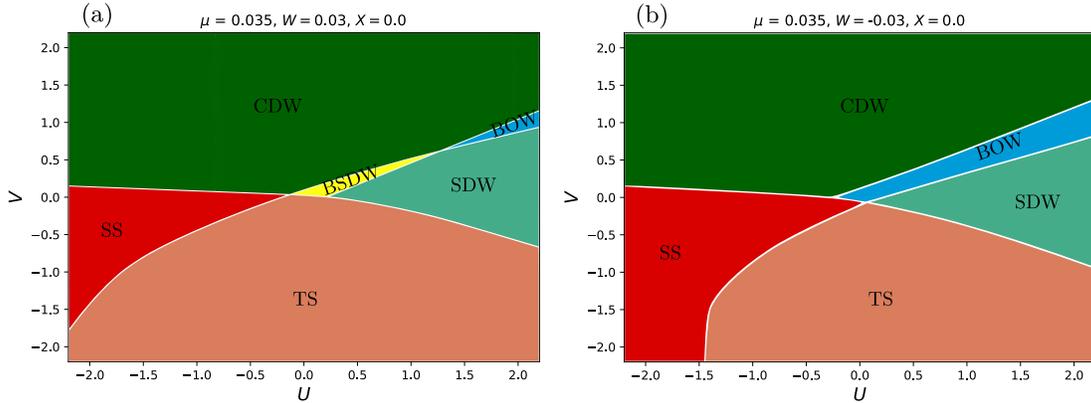


FIG. 5.3 – Diagramme de phase à un remplissage $n = 1.01$ en présence du terme W . Les phases gappées ne sont pas différenciées des phases non gappées.

Enfin, décrivons brièvement la figure 5.3, montrant les diagrammes de phase

à $\mu = 0.035$ prenant en compte les effets de réseau, pour des valeurs $W = \pm 0.03$. Les effets sont peu marqués avec un potentiel chimique faible. La phase BOW persiste lorsque W est attractif, et se maintient lorsque W est répulsif. Enfin, on devine le début d'un effet d'écrantage favorisant la phase SS au détriment de CDW, qui devrait s'accroître à des potentiels chimiques plus élevés.

5.2 Autres extensions possibles

5.2.1 Termes supplémentaires

Jusqu'à présent, les hamiltoniens explorés comportaient une "dose minimale" de non-localité, limitée aux liens entre plus proches voisins. Il est cependant possible d'étendre les modèles étudiés en considérant des termes encore plus non-locaux, à commencer par le cas des liens aux seconds voisins¹. Les termes d'interaction à deux corps ne posent pas de problème particulier, il suffit de les exprimer dans l'espace de Fourier puis d'utiliser le développement en ξ afin d'obtenir les conditions initiales.

Il est également possible de considérer un terme de sauts aux seconds voisins :

$$-t_2 \sum_{\langle x,y \rangle_2} \rho_{xy} = \sum_{K,\sigma} \varepsilon_2(k) \bar{\psi}_\sigma(K) \psi_\sigma(K), \quad \varepsilon_2(k) = t_2 \left(-4(\cos k)^2 + 2 \right). \quad (5.6)$$

Le spectre à un corps total $\xi_{\text{tot}}(k)$ s'écrit donc :

$$\xi_{\text{tot}}(k) = \varepsilon_1(k) + \varepsilon_2(k) - \mu, \quad \varepsilon_1(k) = -2t_1 \cos(k). \quad (5.7)$$

La présence du terme t_2 modifie le vecteur d'onde de Fermi, qui est solution de l'équation $\xi_{\text{tot}}(k_F) = 0$, c'est-à-dire :

$$-2t_1 \cos(k_F) - 4t_2(\cos k_F)^2 + 2t_2 - \mu = 0. \quad (5.8)$$

1. On notera $\langle x, y \rangle_2$ une paire de points seconds plus proches voisins.

On obtient alors :

$$\cos(k_F) = \frac{t_1}{4t_2} \left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{8t_2^2}{t_1^2} - 4\frac{\mu t_2}{t_1^2}} \right). \quad (5.9)$$

Par définition, on a $k_F > 0$, ce qui implique que pour certaines valeurs de t_2 et μ il y a deux solutions. Autrement dit, cela signifie que le spectre $\xi_{\text{tot}}(k)$ n'est pas monotone sur la moitié de première zone de Brillouin $k \geq 0$, et donc il est possible de trouver une gamme de remplissages telle qu'il existe une poche de trous dans cette moitié de première zone de Brillouin.

Or, la méthode qui a été développée repose notamment sur la monotonie de la relation de dispersion². Dans le cas où t_2 reste suffisamment faible, $\xi_{\text{tot}}(k)$ est monotone, et des modifications techniques minimales sont requises par rapport à ce qui a été présenté dans les chapitres précédents. En effet, il est toujours possible de travailler avec des variables ξ corrigées de la façon suivante :

$$\xi = -2t_1 \cos(k) - \mu - \delta\mu, \quad (5.10)$$

où le terme correctif $\delta\mu$ est choisi tel que $\xi(k_F) = 0$. Le changement de variable $k \rightarrow \xi$ comporte une dose d'arbitraire : on est libre de faire les intégrales avec les variables de notre choix ! Le point important est que la condition $\xi \approx 0$ se traduise par $k \approx k_F$. Grâce à la dernière équation, on voit qu'il suffit d'adapter la méthode des chapitres précédents en faisant le remplacement $\mu \rightarrow \mu + \delta\mu$ dans le programme écrit précédemment, et qu'il faut utiliser la fonction $\xi_{\text{tot}}(k)$ dans les expressions des bulles.

5.2.2 Susceptibilités uniformes

Jusqu'à présent, nous nous sommes concentrés sur le cas des fonctions de réponse associées à des divergences logarithmiques présentes dans le canal électron-électron inter-branche, et électron-trou à $2k_F$. Il est cependant possible de s'intéresser au cas des fonctions de réponse associées au canal électron-trou intra-

2. Il serait pourtant possible de considérer le cas d'un spectre $\xi_{\text{tot}}(k)$ non-monotone, mais cela nécessiterait d'introduire un indice supplémentaire sur les champs lorsque le changement de variable $k \rightarrow \xi$ est effectué.

branche (c'est-à-dire le canal de Landau, donnant lieu à une bulle \mathcal{L}_L), alimentées par des contributions intervenant en fin de flot, lorsque l'on atteint le régime $\Lambda \sim T$. On peut s'intéresser à deux de ces fonctions de réponse. La première correspond à la susceptibilité magnétique uniforme, et la seconde à la compressibilité. Des études de ces fonctions de réponse ont déjà été menées, notamment :

- pour le modèle de Hubbard dimérisé à quart-remplissage par la méthode Monte Carlo Quantique [39],
- pour le modèle de Hubbard avec une méthode analytique construite à partir de la matrice de transfert [33],
- pour le modèle de Hubbard répulsif par le groupe de renormalisation [45].
- pour le modèle $U-V-V_2$ à quart-remplissage par le groupe de renormalisation dans le cadre du modèle de g -ologie [24],
- pour le modèle de Hubbard répulsif par des méthodes numériques associées à l'ansatz de Bethe [20].

La méthode qui a été développée permet d'obtenir ces susceptibilités pour le modèle $U-V$ en prenant en compte les effets de réseau, à travers leur influence sur le flot des constantes de couplage marginales. Pour dériver les équations pour les fonctions de réponse, il faut obtenir les équations de flot pour les vertex à trois pattes correspondant. Afin d'y parvenir, on reprend des équations (3.4) pour ch-s et sp-s, à $q = 0$, c'est-à-dire avec un champ source uniforme. Autrement dit, on définit les deux vertex suivants :

$$Z_C = Z_{\pm k_F}^{\text{ch-s}}(0), \quad Z_M = Z_{\pm k_F}^{\text{sp-s}}(0). \quad (5.11)$$

On obtient alors les équations de flot voulues :

$$\begin{aligned} \frac{dZ_x}{d\ell} &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_L Z_x g_x, \\ g_C &= g_1 - g_4 - 2g_2, \\ g_M &= g_1 + g_4. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Les susceptibilités normalisées sont alors données par :

$$\chi_{x,\ell}(T) = \int_0^\ell d\ell' \mathcal{L}_L(\ell') (Z_x(\ell'))^2. \quad (5.13)$$

Pour pouvoir tracer les courbes donnant ces susceptibilités uniformes en fonction de la température, il faut prendre en considération les corrections au potentiel chimique. Le potentiel chimique à température T doit satisfaire à l'équation suivante, assurant que le remplissage n est fixé :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon \mathcal{N}(\varepsilon) n_F(\varepsilon - \mu_T) = n. \quad (5.14)$$

Dans notre cas, la densité d'états est celle correspondant au spectre de liaisons fortes. Enfin, mentionnons qu'il faut intégrer jusqu'aux grandes valeurs de ℓ afin de dépasser la valeur ℓ_T correspondant à l'échelle thermique, que l'on peut définir grâce à l'équation $n_F(\Lambda_0 e^{-\ell_T}) = 1/2$. Ainsi, si l'on prend $\ell_1 > \ell_2 \gg \ell_T$, on obtiendra $\chi_x(T) = \chi_{x,\ell_1}(T) = \chi_{x,\ell_2}(T)$.

Un exemple de profil de susceptibilité en fonction de la température est donné à la figure 5.4, pour le cas du modèle de Hubbard répulsif $U = 1.2$, et à un très fort remplissage $n = 1.86$ correspondant à un potentiel chimique $\mu = 1.95$. On retrouve les principales caractéristiques attendues de ces fonctions de réponse (voir articles cités plus haut). Tout d'abord aux basses températures, on retrouve la chute vers une valeurs finie de la susceptibilité magnétique, et l'on retrouve un profil de type loi de Curie dans le domaine des hautes températures. Aux températures intermédiaires, on observe de plus un "rebond" des susceptibilités produit par les effets de réseau. Une étude plus détaillée serait nécessaire pour obtenir des graphes dans le cas du modèle prenant en compte le terme V .

5.2.3 Extensions méthodologiques

Comme on l'a vu, nous nous sommes limités à l'ordre deux dans le développement en ξ . De plus, nous avons négligé les corrections diagrammatiques apportées au flot des constantes non-pertinentes, réduisant alors drastiquement le coût de la résolution numérique. On pourrait cependant gagner en préci-

5.2. Autres extensions possibles

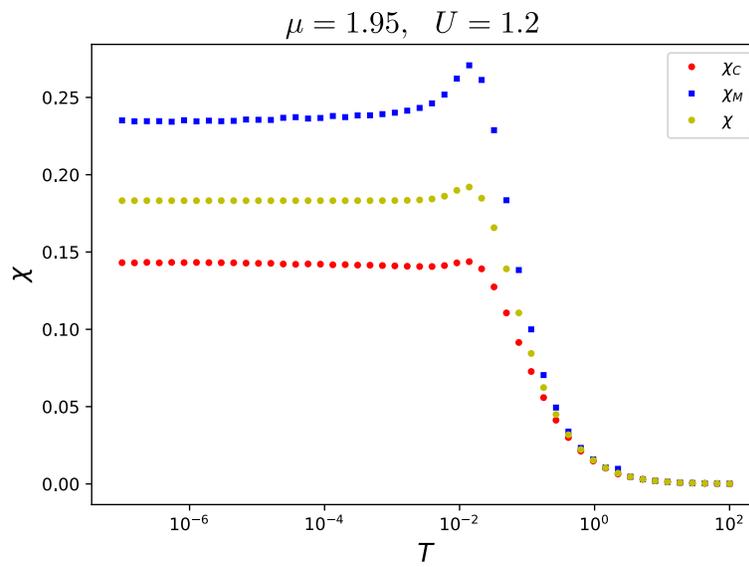


FIG. 5.4 – *Susceptibilités uniformes.* La courbe χ associée aux points jaune correspond à la bulle de Landau, c'est-à-dire $\chi(T) = \int_0^\ell d\ell' \mathcal{L}_L(\ell')$, avec $\ell \gg \ell_T$.

sion en prenant en compte ces corrections. De plus, il serait possible d'aller à un ordre plus élevé dans le développement en ξ . Cependant, ces ajouts ne devraient conduire qu'à des modifications quantitatives légères des diagrammes de phase obtenus, n'affectant pas les conclusions exposées plus haut, ainsi qu'au chapitre précédent.

Une autre extension envisageable, beaucoup plus technique à mettre en œuvre, serait d'étendre les équations de flot obtenues en prenant en compte les termes à deux boucles.

5.2.4 Systèmes quasi-unidimensionnels

Plaçons-nous dans le cas quasi-unidimensionnel. On considère donc des chaînes faiblement couplées entre elles. On peut considérer la relation de dispersion suivante :

$$E(k, k_{\perp}) = -2t \cos(k) - 2t_{\perp} \cos(k_{\perp}) - \mu, \quad (5.15)$$

où k est l'impulsion le long des chaînes, tandis que k_{\perp} désigne l'impulsion perpendiculaire aux chaînes. Pour la suite, on va noter $\xi(k) = -2t \cos(k) - \mu$ et $\varepsilon_{\perp}(k) = -2t_{\perp} \cos(k_{\perp})$. Nous allons esquisser une démarche envisageable pour traiter le cas quasi-unidimensionnel en suivant la ligne de raisonnement des chapitres précédents. L'intérêt est là encore de classer les constantes de couplage par ordre de pertinence et de réduire le coût numérique grâce au développement en ξ . Supposons que l'on ait une fonction $f(k, k_{\perp})$, dans ce cas, on pourrait introduire un développement de la forme suivante :

$$f(k, k_{\perp}) = f_{\eta\eta_{\perp}}(\xi, \varepsilon_{\perp}) = \sum_{n, n_{\perp}=0}^{\infty} f_{nn_{\perp}}^{\eta\eta_{\perp}} \frac{\xi^n \varepsilon_{\perp}^{n_{\perp}}}{n! n_{\perp}!}. \quad (5.16)$$

Maintenant, même les quantités définies sur la surface de Fermi dépendent de ξ . En effet, être sur la surface de Fermi implique la contrainte $\xi + \varepsilon_{\perp} = 0$. Mais dans la pratique, étant donné que les sauts inter-chaînes sont bien moins probables que les sauts intra-chaînes, ce qui est équivalent à écrire $t_{\perp} \ll t$, on a bien $\xi \approx 0$, et les corrections doivent rester petites.

On peut supposer que la procédure de régularisation pourrait être réalisée

en utilisant $E = \xi + \varepsilon_{\perp}$ comme variable d'échelle. Cela modifierait au minimum la forme des bulles :

$$\mathcal{L}_{\vec{p}, \vec{q}}^{\text{ee}} = -\Lambda \partial_{\Lambda} \left(\theta_{\Lambda}(\vec{p}) \theta_{\Lambda}(-\vec{p} + \vec{q}) \right) \frac{n_{\text{F}}(E(\vec{p})) - n_{\text{F}}(-E(-\vec{p} + \vec{q}))}{E(\vec{p}) + E(-\vec{p} + \vec{q})}, \quad (5.17)$$

$$\mathcal{L}_{\vec{p}, \vec{q}}^{\text{eh}} = \Lambda \partial_{\Lambda} \left(\theta_{\Lambda}(\vec{p}) \theta_{\Lambda}(\vec{p} + \vec{q}) \right) \frac{n_{\text{F}}(E(\vec{p}_1)) - n_{\text{F}}(E(\vec{p} + \vec{q}))}{E(\vec{p}) - E(\vec{p} + \vec{q})}, \quad (5.18)$$

où le régulateur est donné par une expression similaire au cas purement unidimensionnel :

$$\theta_{\Lambda}(\vec{p}) = r_a(|E(\vec{p})|/\Lambda). \quad (5.19)$$

La somme sur les impulsions pourrait être remplacée par une intégrale sur ξ et ε_{\perp} . Cela ferait alors apparaître une densité d'états factorisée de la forme $\mathcal{N}(\xi) \mathcal{N}_{\perp}(\varepsilon_{\perp})$.

Pour terminer, faisons une estimation du nombre d'équations de flot à une boucle pour les constantes de couplage. Cette estimation varie en fonction de l'approximation considérée :

- dans le cas où l'on considère toutes les variables ξ et les variables ε à l'ordre 2, il faut considérer tous les termes suivants :

$$\xi^0 \varepsilon^0, \xi^1 \varepsilon^0, \xi^2 \varepsilon^0, \xi^0 \varepsilon^1, \xi^0 \varepsilon^2, \xi^1 \varepsilon^1,$$

ce qui, en prenant en compte les signes des impulsions donne au total $8 \cdot 8 \cdot (1 + 3 + 6 + 3 + 6 + 9) = 1792$ constantes. Par symétrie de réflexion des impulsions, on peut diviser par quatre ce nombre, ce qui donne dans le pire des cas 448 constantes de couplages. On peut supposer que les constantes de couplage ne dépendront pas du signe des impulsions transverses, ce qui donne au total $4 \cdot 28 = 112$ constantes de couplage.

- supposons que l'on se place dans une approximation de type g -ologie pour la partie longitudinale, alors on peut négliger la dépendance en les ξ , ce qui donne $4 \cdot (1 + 3 + 6) = 40$ constantes de couplage. C'est donc exactement le même nombre de constantes de couplage que dans le cas purement unidimensionnel avec dépendance en les ξ .

« Rien de ce qui est fini n'est jamais complètement achevé tant que tout ce qui est commencé n'est pas totalement terminé. »

Pierre DAC, *Pensées*

Conclusion

Dans cette thèse, une méthode basée sur le groupe de renormalisation fonctionnel a été développée pour l'étude des modèles fermioniques unidimensionnels sur réseau. L'exemple du modèle EH a été traité, et le diagramme de phase a été calculé à remplissage arbitraire. On a vu que les effets de la courbure du spectre à un corps ainsi que les processus non-pertinents modifient systématiquement les conditions initiales du modèle de g -ologie effectif défini dans la limite du continuum, valable aux basses énergies. Une des conséquences les plus importantes des effets aux hautes énergies est l'apparition de la phase BOW dans le voisinage de la ligne $U = 2V$ dans le secteur répulsif. La disparition progressive de cette phase à mesure que le potentiel chimique augmente a été étudiée. De la même façon, à demi-remplissage, les couplages non-pertinents modifient le diagramme de phase dans les autres secteurs, favorisant les phases gappées SS et SDW (SS pour $U > 0$ et SDW pour $U < 0$) au détriment de la phase TS non-gappée. À potentiel chimique fini, on a vu que la symétrie électron-trou du spectre de liaisons fortes est perdue, induisant une asymétrie dans l'intégration des degrés de liberté. Cette asymétrie affecte fortement le flot des amplitudes de diffusion et des susceptibilités, à travers un déséquilibre entre les contributions des processus électron-électron et électron-trou à $2k_F$, ayant pour effet de coupler les degrés de liberté de spin et de charges à haute énergie. Au début du flot, les vertex à trois pattes pour les ondes de densité ainsi que les diagrammes alimentant les processus Umklapp sont fortement réduits, au contraire du canal électron-électron qui conserve sa divergence logarithmique. À la fin du flot, les constantes de couplage non-pertinentes sont supprimées, ne laissant que les termes marginaux qui permettent alors de définir un modèle de g -ologie dans la limite du continuum, avec des paramètres initiaux renormalisés. En résultent

des différences entre les diagrammes de phase obtenus et ceux prédits par le modèle de g -ologie pur. L'exemple de la phase CDW est particulièrement parlant à cet égard, puisque la région sur laquelle elle domine se réduit à mesure que le dopage augmente, en faveur de l'état SS dans le secteur $U < 0$. Cet effet n'est pas sans rappeler l'écrantage de l'interaction coulombienne par les paires de Cooper de haute énergie dans les métaux ordinaires, permettant l'existence d'une phase supraconductrice induite par le couplage attractif retardé résultant de l'interaction électron-phonon [41].

On a également vu que l'approche développée n'est pas limitée au modèle EH, et peut être transposée au cas d'autres modèles non-intégrables sur réseau. Le cas d'interactions non-locales généralisées aux premiers voisins a été présenté. On a notamment vu que le terme W , de type saut-saut, favorise la phase BOW dans le cas attractif et la phase BSDW dans le cas répulsif. Le devenir de ces phases à potentiel chimique fini a été brièvement présenté. La méthode développée permet en outre de calculer les fonctions de réponse uniformes pour les ondes de densité. Enfin, il semble envisageable d'étendre la méthode au cas des systèmes quasi-unidimensionnels, en présence d'un terme de saut inter-chaîne faible, ce qui permettrait de faire une étude de ces systèmes en couplage faible en dehors du demi-remplissage, pertinente pour la compréhension de certains matériaux présentant une phase supraconductrice non-conventionnelle.

A

Unités et conventions

Unités On travaille dans un système d'unités tel que $k_B = \hbar = 1$. De plus, t désignant le paramètre de saut du modèle de liaisons fortes est utilisé comme unité d'énergie. Dans les équations de flot de RG que nous utilisons, le paramètre Λ a la dimension d'une énergie et non d'une impulsion. Enfin, nous noterons a le pas du réseau, que nous prendrons comme unité de longueur.

Transformation de Fourier Les conventions pour la transformation de Fourier sont données par :

$$\begin{aligned} f(x, \tau) &= \sqrt{\frac{T}{L}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_k^{\text{BZ1}} f(k, \omega_n) e^{ikx - i\omega_n \tau}, \quad \omega_n = (2n + 1)\pi T, \\ \Leftrightarrow f(k, \omega_n) &= \sqrt{\frac{T}{L}} \sum_x \int_0^\beta d\tau f(x, \tau) e^{i\omega_n \tau - ikx}. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

De plus, on notera l'égalité suivante :

$$\sum_x e^{ikx} = \sum_{G \in \text{RR}} L \delta_{k, G} \equiv L \delta_k^{\text{RR}}, \quad L \gg 1. \quad (\text{A.2})$$

B

Algorithme de recherche des frontières

Les frontières sont déterminées grâce à un algorithme de dichotomie. On se place dans le plan (U, V) avec une valeur de μ fixée, puis on choisit une valeur V_{\max} ainsi que plusieurs valeurs $-U_{\max} \leq U_i \leq U_{\max}$. On détermine alors la phase pour chacun des points $(U_i, \pm V_{\max})$. Ensuite, sur chaque ligne verticale $U = U_i$ on précise le diagramme de phase par dichotomie. Les frontières apparaissent alors dans la limite où le nombre de générations tend vers l'infini. Dans la pratique on s'arrête après 10 générations. Au besoin, il est également possible de faire un balayage horizontal. Les calculs pour chaque ligne $U = U_i$ sont effectués en parallèle pour diminuer le temps de calcul. Ainsi, pour un diagramme de phase, on prend environ 60 lignes verticales, ce qui donne environ 10^3 points calculés.

C

Quelques remarques théoriques

C.1 Des systèmes différentiels linéaires aux intégrales fonctionnelles

Les intégrales fonctionnelles peuvent être introduites comme moyen d'étude de certains systèmes d'équations différentielles linéaires. Ces systèmes ont la forme suivante :

$$\begin{aligned}\partial_s |\sigma(s)\rangle &= \mathcal{D} |\sigma(s)\rangle, \\ \mathcal{C} |\sigma\rangle &= 0, \\ |\sigma(0)\rangle &= |\sigma_0\rangle,\end{aligned}\tag{C.1}$$

où l'on a :

- $|\sigma(s)\rangle$ un élément d'un \mathbb{K} -espace vectoriel \mathcal{V} évoluant selon le paramètre réel s ,
- $\mathcal{D} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ un opérateur linéaire *diagonalisable par hypothèse*,
- $\mathcal{C} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ un autre opérateur linéaire servant à spécifier des conditions aux limites qui réduisent l'espace des solutions,
- $|\sigma_0\rangle$ une condition initiale.

Naturellement, on doit avoir $[\mathcal{D}, \mathcal{C}] = 0$ pour être sûr que si $\mathcal{C}|\sigma_0\rangle = 0$ alors $\mathcal{C}|\sigma(s)\rangle = 0$ pour tout $s \geq 0$. Il est à noter qu'en dépit de la notation utilisée, le problème considéré n'a potentiellement rien de quantique. En fait, il y a essentiellement deux cas à considérer. Soit le problème est classique, et dans ce cas le vecteur $|\sigma\rangle$ représente en fait une distribution de probabilité. Dans ce cas, on considère usuellement un vecteur spécial $|1\rangle$ à l'aide duquel on impose une condition de normalisation $\langle 1|\sigma\rangle = 1$ (et il faut en plus imposer que les

coordonnées du vecteur soient positives). En général, une observable sera alors définie par un opérateur \mathcal{O} dont la moyenne est donnée par $\langle \mathcal{O} \rangle = \langle 1 | \mathcal{O} | \sigma \rangle$. Au contraire, dans le cas où le problème est quantique, le vecteur $|\sigma\rangle$ représente l'état quantique du système, et l'on retrouve le formalisme habituel de la mécanique quantique en imposant la condition de normalisation $\langle \sigma | \sigma \rangle = 1$.

Ce type de système différentiel peut être résolu de façon immédiate (mais seulement formelle) grâce à l'application exponentielle, avec laquelle on obtient :

$$|\sigma(s_2)\rangle = e^{(s_2-s_1)\mathcal{D}} |\sigma(s_1)\rangle, \quad s_2 \geq s_1.$$

Ainsi, si les $|\chi_\alpha\rangle$ sont les vecteurs propres de \mathcal{D} associés aux valeurs propres λ_α , alors une solution est donnée par¹ :

$$|\sigma(s)\rangle = \int_{\alpha} \sigma_{\alpha} e^{\lambda_{\alpha}s} |\chi_{\alpha}\rangle, \quad \sigma_{\alpha} \in \mathbb{K}, \quad \mathcal{D}|\chi_{\alpha}\rangle = \lambda_{\alpha}|\chi_{\alpha}\rangle. \quad (\text{C.2})$$

Introduisons à présent un objet capital dans l'étude de l'équation (C.1), à savoir le *propagateur* $\mathcal{G}(s)$. Celui-ci est un opérateur évoluant avec le paramètre s , il est défini par :

$$\mathcal{G}(s) = \Theta(s) e^{s\mathcal{D}}. \quad (\text{C.3})$$

Le propagateur est solution de l'équation suivante :

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial s}(s) = \mathcal{D} \mathcal{G}(s) + \delta(s).$$

Ainsi, on obtient immédiatement $|\sigma(s_2)\rangle = \mathcal{G}(s_2 - s_1)|\sigma(s_1)\rangle$, ce qui explique l'utilisation du terme *propagateur*. Il permet en outre de résoudre l'équation suivante, en présence d'un terme source $|J(s)\rangle \in \mathcal{V}$:

$$\frac{\partial}{\partial s} |\sigma(s)\rangle = \mathcal{D} |\sigma(s)\rangle + |J(s)\rangle, \quad (\text{C.4})$$

1. on utilise une mesure μ_{χ} sur l'espace \mathcal{E}_{χ} dans lequel vivent les étiquettes α et on écrit $\int_{\alpha} f_{\alpha} = \int_{\mathcal{E}_{\chi}} d\mu_{\chi}(\alpha) f_{\alpha}$ qui peut donc représenter à la fois une somme discrète et une intégrale.

dont une solution est donnée par :

$$|\sigma(s)\rangle = |\sigma_0(s)\rangle + \int_{-\infty}^{+\infty} ds' \mathcal{G}(s-s') |J(s')\rangle \equiv |\sigma_0(s)\rangle + \mathcal{G} * |J(s)\rangle,$$

où $|\sigma_0\rangle$ est une solution de l'équation (C.1). Remarquons de plus que cette dernière expression explique la présence de la fonction de Heaviside dans la définition du propagateur : elle est là pour assurer la *causalité*. Ainsi, $|\sigma(s)\rangle$ ne dépend que des valeurs passées de la source $|J(s)\rangle$.

Le calcul formel du propagateur dans la base $|\chi_\alpha\rangle$ est immédiat, et on obtient :

$$\mathcal{G}(s) = \int_{\alpha} \Theta(s) e^{s\lambda_\alpha} |\chi_\alpha\rangle \langle \chi_\alpha|,$$

mais cette forme n'est d'aucun secours pratique, car le spectre n'est en général pas connu. La difficulté du problème (C.1) réside en effet dans la diagonalisation de l'opérateur \mathcal{D} . Cependant, pour de nombreux problèmes auxquels on s'intéresse en physique, cet opérateur prend la forme $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 + g\mathcal{D}_1$ où $g\mathcal{D}_1$ représente une perturbation (dont la petitesse est contrôlée par le paramètre g) de l'opérateur \mathcal{D}_0 dont le spectre est connu. Une première stratégie consiste à utiliser une méthode des perturbations directement sur l'équation (C.1). Cela consiste à supposer que la solution $|\sigma(s)\rangle$ peut être décomposée en une série entière $\sum_n g^n |\sigma_n\rangle$, avec pour condition initiale $|\sigma(0)\rangle = |\sigma_0(0)\rangle$, $|\sigma_n(0)\rangle = 0$ pour tout $n > 0$. Lorsque l'on insère cette forme dans notre équation et que l'on identifie les termes, on obtient une infinité de nouvelles équations couplées formant une relation de récurrence différentielle :

$$\frac{\partial}{\partial s} |\sigma_{n+1}(s)\rangle = \mathcal{D}_0 |\sigma_{n+1}(s)\rangle + \mathcal{D}_1 |\sigma_n(s)\rangle,$$

et avec pour terme initial $\partial/\partial s |\sigma_0(s)\rangle = \mathcal{D}_0 |\sigma_0(s)\rangle$. On reconnaît des équations avec termes sources, que l'on peut résoudre puisque l'on connaît le propagateur non-perturbé $\mathcal{G}_0(s) = \Theta(s) e^{s\mathcal{D}_0}$. On obtient donc une relation de récurrence

intégrale :

$$|\sigma_{n+1}(s)\rangle = \mathcal{G}_0 * \mathcal{D}_1 |\sigma_n(s)\rangle = \mathcal{G}_0 \mathcal{D}_1 * |\sigma_n(s)\rangle,$$

avec pour terme initial $|\sigma_0(s)\rangle = \mathcal{G}_0(s)|\sigma_0(0)\rangle$. En itérant cette relation dans elle-même, on détermine $|\sigma_n\rangle$ en fonction de $|\sigma_0\rangle$:

$$|\sigma_n(s)\rangle = (\mathcal{G}_0 \mathcal{D}_1)^{*n} * |\sigma_0(s)\rangle.$$

Puis en revenant à la série perturbative, on obtient :

$$|\sigma(s)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} g^n (\mathcal{G}_0 \mathcal{D}_1)^{*n} * |\sigma_0(s)\rangle = \left(1 - g \mathcal{G}_0 * \mathcal{D}_1\right)^{-1} * \mathcal{G}_0 |\sigma(0)\rangle,$$

ce qui nous permet d'obtenir la forme du propagateur total :

$$\mathcal{G} = \left(1 - g \mathcal{G}_0 * \mathcal{D}_1\right)^{-1} * \mathcal{G}_0.$$

En inversant cette dernière équation, puis en multipliant à gauche par \mathcal{G}_0 et à droite par \mathcal{G} , on parvient à l'équation de Lippmann-Schwinger :

$$\mathcal{G}(s) = \mathcal{G}_0(s) + g \mathcal{G}_0 \mathcal{D}_1 * \mathcal{G}(s). \quad (\text{C.5})$$

Dans l'espace de Fourier, le produit de convolution devient un produit :

$$\mathcal{G}(\omega) = \mathcal{G}_0(\omega) + g \mathcal{G}_0(\omega) \mathcal{D}_1 \mathcal{G}(\omega).$$

Cependant, il n'est pas évident de travailler directement avec ces équations. Le formalisme des *intégrales fonctionnelles* est particulièrement propice à la construction d'approximations. Il y a plusieurs approches pour parvenir à ce formalisme. Commençons par décrire l'idée générale. On utilise les éléments de matrice du propagateur, qui sont donnés par :

$$G(\psi, \varphi; s) = \langle \psi | \mathcal{G}(s) | \varphi \rangle \in \mathbb{K},$$

où $|\psi\rangle$ et $|\varphi\rangle$ sont deux éléments quelconques de \mathcal{V} . À présent, remarquons que le propagateur vérifie l'identité suivante pour tous $s_3 \geq s_2 \geq s_1$:

$$\mathcal{G}(s_3 - s_1) = \mathcal{G}(s_3 - s_2)\mathcal{G}(s_2 - s_1),$$

ce qui nous donne donc, dans une base orthonormée² $|q_\alpha\rangle$:

$$G(q_{\alpha_3}, q_{\alpha_1}; s_3 - s_1) = \int_{\alpha_2} G(q_{\alpha_3}, q_{\alpha_2}; s_3 - s_2)G(q_{\alpha_2}, q_{\alpha_1}; s_2 - s_1).$$

Il s'agit de l'équation de *Chapman-Kolmogorov*, que l'on a obtenu en appliquant la définition des éléments de matrice, et en insérant une résolution de l'identité³. Cette dernière équation est assez suggestive car elle peut être injectée dans elle-même autant de fois que désiré, ce qui nous permet d'écrire :

$$G(q_{\alpha_f}, q_{\alpha_i}; s) = \int_{\alpha_1 \dots \alpha_{N-1}} \prod_{n=0}^{N-1} G(q_{\alpha_{n+1}}, q_{\alpha_n}; \varepsilon), \quad \alpha_i = \alpha_0, \quad \alpha_f = \alpha_N, \quad (\text{C.6})$$

où l'on s'est donné un entier $N > 1$ et avec $\varepsilon = s/N$. L'expression qui précède est une somme sur les chemins à $N + 1$ dans l'espace des étiquettes α commençant en α_i et terminant en α_f . En effet, un tel chemin est la donnée d'une séquence $\gamma = (\alpha_i, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \alpha_f)$. Ainsi, si l'on écrit :

$$G(q_{\alpha_{n+1}}, q_{\alpha_n}; \varepsilon) = e^{-\varepsilon \mathcal{L}(\alpha_n, \alpha_{n+1})},$$

on obtient :

$$G(q_{\alpha_f}, q_{\alpha_i}; s) = \int_{\alpha_1 \dots \alpha_{N-1}} \exp(-S[\gamma]), \quad S[\gamma] = \varepsilon \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{L}(\alpha_n, \alpha_{n+1}).$$

Le but à présent est de trouver l'expression du propagateur dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Contentons-nous d'esquisser l'idée en mettant l'accent sur la structure algè-

2. Une base orthonormée est telle que $\langle \chi_\alpha | \chi_{\alpha'} \rangle = \delta_{\alpha\alpha'}$ où $\delta_{\alpha\alpha'}$ désigne la fonction delta de Dirac, telle que $\int_\alpha \delta_{\alpha\alpha'} f_\alpha = f_{\alpha'}$.

3. c'est-à-dire $1 = \int_\alpha |q_\alpha\rangle \langle q_\alpha|$.

brique. En général, l'espace \mathcal{V} est une représentation d'une \mathbb{K} -algèbre d'opérateurs \mathbf{A} unitaire et munie d'une involution \dagger . Autrement dit, l'algèbre \mathbf{A} peut être considérée comme étant une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ des endomorphismes de \mathcal{V} . On se concentre sur le cas où cette algèbre est spécifiée par une famille de générateurs $a_\alpha, a_\alpha^\dagger \in \mathbf{A}$ qui satisfont à un ensemble de relations :

$$\begin{aligned} A(a_\alpha, a_\alpha) &\equiv \sum_\gamma (A_{\alpha\beta\gamma}^{(1)} a_\gamma + A_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} a_\gamma^\dagger) + A_{\alpha\beta}^{(3)} a_\alpha a_\beta + A_{\alpha\beta}^{(4)} a_\beta a_\alpha = A_{\alpha\beta}^{(0)}, \\ B(a_\alpha, a_\beta^\dagger) &\equiv \sum_\gamma (B_{\alpha\beta\gamma}^{(1)} a_\gamma + B_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} a_\gamma^\dagger) + B_{\alpha\beta}^{(3)} a_\alpha a_\beta^\dagger + B_{\alpha\beta}^{(4)} a_\beta^\dagger a_\alpha = B_{\alpha\beta}^{(0)}, \quad (\text{C.7}) \\ A_{\alpha\beta}^{(\gamma)}, B_{\alpha\beta}^{(\gamma)} &\in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Par exemple, dans un système fermionique, l'algèbre \mathbf{A} est celle des opérateurs de création/annihilation. On définit alors $\mathcal{S}\mathcal{U}(\mathcal{V})$ le groupe des automorphismes intérieurs spéciaux unitaires de $\mathcal{L}(\mathcal{V})$: il s'agit de l'ensemble des applications $u : \mathcal{L}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{V})$ telles qu'il existe $U \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ tel que $u(\theta) = U\theta U^\dagger$, $U^\dagger U = 1$ et $\det U = 1$. Les morphismes u , en tant que morphismes d'algèbres involutives, possèdent les propriétés suivantes pour tous $\theta_1, \theta_2 \in \mathbf{A}$ et tout $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{1}) &= 1, \\ u(\theta_1 + \alpha\theta_2) &= u(\theta_1) + \alpha u(\theta_2), \\ u(\theta_1\theta_2) &= u(\theta_1)u(\theta_2), \\ u(\theta^\dagger) &= u(\theta)^\dagger. \end{aligned}$$

Ainsi, les transformations u préservent les relations imposées aux générateurs a_i , c'est-à-dire que l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} u(A(a_\alpha, a_\beta)) &= A(u(a_\alpha), u(a_\beta)) = A_{\alpha\beta}^{(0)}, \\ u(B(a_\alpha, a_\beta^\dagger)) &= B(u(a_\alpha), u(a_\beta^\dagger)) = B_{\alpha\beta}^{(0)}. \end{aligned}$$

Pour la suite, il sera fondamental de considérer les opérateurs $\varphi_\alpha(u)$ définis par :

$$\varphi_\alpha(u) = a_\alpha - u(a_\alpha).$$

Autrement dit, on a :

$$\varphi_\alpha(u)U = [a_\alpha, U].$$

Dans le cas des fermions, les φ_α sont donc les nombres de Grassmann. Cela nous permet de définir le groupe des *opérateurs de déplacements* $\mathcal{D}(\mathbf{A}) \subset \mathcal{SU}(\mathcal{V})$ dont les éléments d sont tels que :

$$\begin{aligned} A(\varphi_\alpha(d), \varphi_\beta(d)) &= 0, \\ A(a_\alpha, \varphi_\beta(d)) &= 0, \\ B(\varphi_\alpha(d), \varphi_\beta(d)^\dagger) &= 0, \\ B(a_\alpha, \varphi_\beta(d)^\dagger) &= 0. \end{aligned}$$

Lorsque le groupe $\mathcal{D}(\mathbf{A})$ est muni d'une mesure d'intégration ν , telle que $\int_{\mathcal{D}(\mathbf{A})} d\nu(d) = 1$ et que l'on prend un vecteur $|\psi\rangle \in \mathcal{V}$ tel que $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, alors on peut former l'opérateur $I(\psi)$ défini par :

$$I(\psi) = \int_{\mathcal{D}(\mathbf{A})} d\nu(d) d(|\psi\rangle\langle\psi|) = \int_{\mathcal{D}(\mathbf{A})} d\nu(d) D|\psi\rangle\langle\psi|D^\dagger.$$

On montre que l'on a les propriétés suivantes :

$$a_\alpha^{(\dagger)} I(\psi) = I(\psi) a_\alpha^{(\dagger)}, \quad [I(\psi)]^2 = I(\psi).$$

Par le lemme de Schur ⁴, en raison de la première propriété, l'opérateur $I(\psi)$ est proportionnel à l'identité. En raison de la seconde propriété, $I(\psi)$ est un projecteur. Ainsi, l'opérateur $I(\psi)$ est l'identité.

Si $|\psi\rangle$ est choisi tel que $a_\alpha|\psi\rangle = 0$, alors on obtient, pour tout opérateur de déplacement D :

$$a_\alpha D|\psi\rangle = (a_\alpha D - D a_\alpha)|\psi\rangle = \varphi_\alpha(d) D|\psi\rangle.$$

4. Soient E un \mathbb{K} -espace-vectoriel de dimension finie et L une partie irréductible des endomorphismes de E (c'est-à-dire que les seuls sous-espaces stables de E par action des éléments de L sont E et $\{0\}$) et soit f un endomorphisme de E . Si f commute avec tous les éléments de L , alors f est proportionnel à l'identité.

En prenant le conjugué, on obtient :

$$\langle \psi | D^\dagger a_\alpha^\dagger = \langle \psi | D^\dagger \varphi_\alpha(d)^\dagger.$$

Ainsi, si l'on considère un opérateur en ordre normal :

$$\theta(a, a^\dagger) = \sum_k f_k(a^\dagger) g_k(a),$$

on obtient une expression de ses éléments de matrice évalués pour deux états $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ tels que $a_\alpha|\psi_j\rangle = 0$:

$$\langle \psi_1 | D_1^\dagger \theta(a, a^\dagger) D_2 |\psi_2\rangle = \sum_k \langle \psi_1 | D_1^\dagger f_k(\varphi(d_1)^\dagger) g_k(\varphi(d_2)) D_2 |\psi_2\rangle.$$

L'idée pour obtenir la représentation du propagateur \mathcal{G} sous forme d'intégrale fonctionnelle est d'utiliser le fait que l'opérateur \mathcal{D} s'écrit pour les problèmes qui nous intéressent en ordre normal en fonction des générateurs $a_\alpha^{(\dagger)}$, ainsi que la décomposition suivante en "petits pas de temps" :

$$\mathcal{G}(s_f - s_i) = \mathcal{G}(s_f - s_{N-1}) \dots \mathcal{G}(s_{i+1} - s_i) \dots \mathcal{G}(s_1 - s_i).$$

L'intégrale fonctionnelle est alors obtenue en insérant les identités $I(\psi_i)$ et en utilisant la limite $s_{i+1} - s_i \rightarrow 0$ lorsque $N \rightarrow \infty$.

C.2 Quelques propriétés des intégrales fonctionnelles

On considère dans cette section une intégrale fonctionnelle quelconque :

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}[\varphi] e^{-\mathcal{S}[\varphi]}.$$

Avant d'aller plus loin, il nous faut de (cauteusement) ramener à l'ordre du jour la nonobstacle de la dérivation — dont les linéaments seuls ont été donnés — des équations de Wegner-Houghton et Wilson-Polchinski est notamment assurée par l'identité subséquente, souvent utilisée, et obtenue par le truchement des propriétés définitives des fonctions agissant sur les matrices symétriques dé-

finies positives :

$$\text{Tr log} = \log \det. \quad (\text{C.8})$$

Invariance par changement de variable

La fonction de partition est invariante par changement de variable $\varphi = \Phi[\chi]$. Une telle transformation implique l'apparition d'un jacobien tel que :

$$\mathcal{D}[\varphi] = \left| \det \left(\frac{\delta \Phi}{\delta \chi} \right) \right| \mathcal{D}[\chi].$$

En particulier, prenons un changement de variable de la forme :

$$\Phi[\chi] = \chi + \varepsilon \Psi[\chi],$$

contrôlé par un petit paramètre réel ε . On a donc :

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}[\varphi] e^{-S[\varphi]} = \int \mathcal{D}[\chi] \left| \det \left(\frac{\delta \Phi}{\delta \chi} \right) \right| e^{-S[\Psi[\chi]]}.$$

Si l'on développe le membre de droite en ε , on va trouver que le terme d'ordre 0 est égal au membre de gauche, ce qui implique (en particulier) que le terme en ε est nul. Ainsi, on obtient successivement (en utilisant la propriété $\det(1 + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \text{Tr } A + \dots$) :

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}[\chi] \left| \det \left(\frac{\delta \Phi}{\delta \chi} \right) \right| e^{-S[\Phi[\chi]]} &= \int \mathcal{D}[\chi] \left| \det \left(1 + \varepsilon \frac{\delta \Psi}{\delta \chi} \right) \right| e^{-S[\chi + \varepsilon \Psi[\chi]]} \\ &= \mathcal{Z} + \varepsilon \int \mathcal{D}[\chi] \left(\text{Tr} \left\{ \frac{\delta \Psi}{\delta \chi} \right\} - \frac{\delta S}{\delta \chi} \cdot \Psi[\chi] \right) e^{-S[\chi]} + \dots \end{aligned}$$

ce qui nous permet d'aboutir à l'identité suivante :

$$\int \mathcal{D}[\chi] \left(\text{Tr} \left\{ \frac{\delta \Psi}{\delta \chi} \right\} - \frac{\delta S}{\delta \chi} \cdot \Psi[\chi] \right) e^{-S[\chi]} = 0.$$

Cette dernière égalité est importante pour vérifier que la fonctionnelle génératrice (2.30) est bien indépendante du paramètre Λ .

Équations du mouvement

L'identité précédemment établie permet d'obtenir les équations du mouvement pour les fonctions de corrélation. Prenons comme point de départ l'expression de la fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélation :

$$\mathcal{Z}[\eta] = \int \mathcal{D}[\varphi] \exp \{ -\mathcal{S}[\varphi] + \eta \cdot \varphi \}.$$

Celle-ci est inchangée par un changement de variable de type translation de la forme $\varphi \rightarrow \varphi + \chi$ où χ est une configuration de champ quelconque. On obtient donc :

$$\mathcal{Z}[\eta] = \int \mathcal{D}[\varphi] \exp \{ -\mathcal{S}[\varphi + \chi] + \eta \cdot (\varphi + \chi) \} \implies \frac{\delta \mathcal{Z}[\eta]}{\delta \chi} = 0.$$

On obtient alors, grâce à un développement au premier ordre en χ :

$$\frac{\delta \mathcal{Z}[\eta]}{\delta \chi_\alpha} = \int \mathcal{D}[\varphi] \left(\eta_\alpha - \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \varphi_\alpha}[\varphi] \right) \exp \{ -\mathcal{S}[\varphi] + \eta \cdot \varphi \} = 0,$$

soit finalement :

$$\left(\eta_\alpha - \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \varphi_\alpha} \left[\frac{\delta}{\delta \eta} \right] \right) \mathcal{Z}[\eta] = 0. \quad (\text{C.9})$$

Ce résultat constitue l'équation du mouvement "statistique", à mettre en perspective avec les équations classiques du mouvement. En fait, cette équation est duale de celle vérifiée par le poids statistique $P[\varphi] = e^{-\mathcal{S}[\varphi]}$, à savoir :

$$\frac{\delta P}{\delta \varphi_\alpha}[\varphi] = \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \varphi_\alpha} P[\varphi].$$

Ainsi, $\mathcal{Z}[\eta]$ est essentiellement la transformée de Laplace fonctionnelle de $P[\varphi]$.

En repartant de l'équation (C.9), et en dérivant par rapport au champ source autant de fois que nécessaire, on obtient, en annulant le champ source, des équations couplées vérifiées par les fonctions de Green. En fait, on obtient une récur-

rence construite avec une suite de fonctionnelles $\mathcal{M}_n[\varphi, \eta]$ telles que :

$$\mathcal{M}_{n+1} = \frac{\delta \mathcal{M}_n}{\delta \eta_{\dot{\alpha}_{n+1}}} + \mathcal{M}_n \varphi_{\alpha_{n+1}},$$

$$\mathcal{M}_1 = \eta_{\dot{\alpha}_1} - \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \varphi_{\alpha_1}}.$$

Ces fonctionnelles vérifient toutes la propriété $\langle \mathcal{M}_n \rangle_\eta = 0$. On obtient alors les équations de Schwinger-Dyson en prenant $\eta = 0$. Les premiers termes de la suite s'écrivent [52] :

$$\mathcal{M}_2 = \delta_{\alpha_1 \alpha_2} + \left(\eta_{\dot{\alpha}_1} - \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \varphi_{\alpha_1}} \right) \varphi_{\alpha_2},$$

$$\mathcal{M}_3 = \delta_{\alpha_1 \alpha_3} \varphi_{\alpha_2} + \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \varphi_{\alpha_3} + \left(\eta_{\dot{\alpha}_1} - \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \varphi_{\alpha_1}} \right) \varphi_{\alpha_2} \varphi_{\alpha_3},$$

$$\mathcal{M}_4 = \delta_{\alpha_1 \alpha_4} \varphi_{\alpha_2} \varphi_{\alpha_3} + \delta_{\alpha_1 \alpha_3} \varphi_{\alpha_2} \varphi_{\alpha_4} + \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \varphi_{\alpha_3} \varphi_{\alpha_4} + \left(\eta_{\dot{\alpha}_1} - \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \varphi_{\alpha_1}} \right) \varphi_{\alpha_2} \varphi_{\alpha_3} \varphi_{\alpha_4},$$

...

$$\mathcal{M}_n = \sum_{i=2}^n \delta_{\alpha_1 \alpha_i} \langle \varphi_{\alpha_2} \dots \hat{\varphi}_{\alpha_i} \dots \varphi_{\alpha_n} \rangle + \left(\eta_{\dot{\alpha}_1} - \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \varphi_{\alpha_1}} \right) \varphi_{\alpha_2} \dots \varphi_{\alpha_n},$$

où la notation $\hat{\varphi}_{\alpha_i}$ signifie que cet élément est omis. On est donc conduit aux

équations suivantes :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \varphi_{\alpha_1}} \right\rangle &= 0, \\ \left\langle \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \varphi_{\alpha_1}} \varphi_{\alpha_2} \right\rangle &= \delta_{\alpha_1 \alpha_2}, \\ \left\langle \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \varphi_{\alpha_1}} \varphi_{\alpha_2} \varphi_{\alpha_3} \right\rangle &= \delta_{\alpha_1 \alpha_3} \langle \varphi_{\alpha_2} \rangle + \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \langle \varphi_{\alpha_3} \rangle, \\ \left\langle \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \varphi_{\alpha_1}} \varphi_{\alpha_2} \varphi_{\alpha_3} \varphi_{\alpha_4} \right\rangle &= \delta_{\alpha_1 \alpha_4} \langle \varphi_{\alpha_2} \varphi_{\alpha_3} \rangle + \delta_{\alpha_1 \alpha_3} \langle \varphi_{\alpha_2} \varphi_{\alpha_4} \rangle + \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \langle \varphi_{\alpha_3} \varphi_{\alpha_4} \rangle, \\ &\dots \\ \left\langle \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \varphi_{\alpha_1}} \varphi_{\alpha_2} \dots \varphi_{\alpha_n} \right\rangle &= \sum_{i=2}^n \delta_{\alpha_1 \alpha_i} \langle \varphi_{\alpha_2} \dots \hat{\varphi}_{\alpha_i} \dots \varphi_{\alpha_n} \rangle. \end{aligned}$$

Dans le cas où l'action s'écrit

$$\mathcal{S}[\varphi] = \frac{1}{2} \varphi_{\alpha'} \mathcal{K}_{\alpha' \alpha} \varphi_{\alpha} + \mathcal{V}[\varphi],$$

on obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\alpha_1 \alpha} \langle \varphi_{\alpha} \rangle + \left\langle \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \varphi_{\alpha_1}} \right\rangle &= 0, \\ \mathcal{K}_{\alpha_1 \alpha} \langle \varphi_{\alpha} \varphi_{\alpha_2} \rangle + \left\langle \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \varphi_{\alpha_1}} \varphi_{\alpha_2} \right\rangle &= \delta_{\alpha_1 \alpha_2}, \\ \mathcal{K}_{\alpha_1 \alpha} \langle \varphi_{\alpha} \varphi_{\alpha_2} \varphi_{\alpha_3} \rangle + \left\langle \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \varphi_{\alpha_1}} \varphi_{\alpha_2} \varphi_{\alpha_3} \right\rangle &= \delta_{\alpha_1 \alpha_3} \langle \varphi_{\alpha_2} \rangle + \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \langle \varphi_{\alpha_3} \rangle, \\ \mathcal{K}_{\alpha_1 \alpha} \langle \varphi_{\alpha} \varphi_{\alpha_2} \varphi_{\alpha_3} \varphi_{\alpha_4} \rangle + \left\langle \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \varphi_{\alpha_1}} \varphi_{\alpha_2} \varphi_{\alpha_3} \varphi_{\alpha_4} \right\rangle &= \delta_{\alpha_1 \alpha_4} \langle \varphi_{\alpha_2} \varphi_{\alpha_3} \rangle + \delta_{\alpha_1 \alpha_3} \langle \varphi_{\alpha_2} \varphi_{\alpha_4} \rangle + \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \langle \varphi_{\alpha_3} \varphi_{\alpha_4} \rangle, \end{aligned}$$

et plus généralement, au rang n :

$$\mathcal{K}_{\alpha_1 \alpha} \langle \varphi_{\alpha} \varphi_{\alpha_2} \dots \varphi_{\alpha_n} \rangle + \left\langle \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \varphi_{\alpha_1}} \varphi_{\alpha_2} \dots \varphi_{\alpha_n} \right\rangle = \sum_{i=2}^n \delta_{\alpha_1 \alpha_i} \langle \varphi_{\alpha_2} \dots \hat{\varphi}_{\alpha_i} \dots \varphi_{\alpha_n} \rangle. \quad (\text{C.10})$$

Ces équations sont remarquables à bien des égards. Elles peuvent notamment

constituer le point de départ d'une étude perturbative. Notons en particulier qu'elles impliquent une hiérarchie dans les fonctions de corrélations, analogue à la hiérarchie rencontrée dans les équations de flot du RG, ce qui se constate aisément dans le cas typique où le terme d'interaction \mathcal{V} est d'ordre 4 en φ . Dans ce cas, en effet, on voit que la fonction de corrélation à n points est déterminée par les fonctions de corrélation à $n - 2$ points et par celles à $n + 1$ points.

Bibliographie

- [1] I AFFLECK et J B MARSTON. “Field-theory analysis of a short-range pairing model”. In : *Journal of Physics C : Solid State Physics* 21.13 (1988), p. 2511. DOI : 10.1088/0022-3719/21/13/014. URL : <https://dx.doi.org/10.1088/0022-3719/21/13/014>.
- [2] A. A. ALIGIA et al. “Phase diagrams from topological transitions : The Hubbard chain with correlated hopping”. In : *Phys. Rev. B* 61 (12 2000), p. 7883-7886. DOI : 10.1103/PhysRevB.61.7883. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.61.7883>.
- [3] Alexander ALTLAND et Ben D. SIMONS. *Condensed Matter Field Theory*. 2^e éd. Cambridge University Press, 2010. DOI : 10.1017/CB09780511789984.
- [4] P. W. ANDERSON. “New Approach to the Theory of Superexchange Interactions”. In : *Phys. Rev.* 115 (1 1959), p. 2-13. DOI : 10.1103/PhysRev.115.2. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.115.2>.
- [5] F. BENITEZ et al. “Nonperturbative renormalization group preserving full-momentum dependence : Implementation and quantitative evaluation”. In : *Phys. Rev. E* 85 (2 2012), p. 026707. DOI : 10.1103/PhysRevE.85.026707. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.85.026707>.
- [6] F. BENITEZ et al. “Solutions of renormalization-group flow equations with full momentum dependence”. In : *Phys. Rev. E* 80 (3 2009), p. 030103. DOI : 10.1103/PhysRevE.80.030103. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.80.030103>.
- [7] C. BOURBONNAIS et L. G. CARON. “Renormalization group approach to quasi-one dimensional conductors”. In : *Int. J. Mod. Phys. B* 05 (1991),

- p. 1033. DOI : 10.1142/S0217979291000547. URL : <https://doi.org/10.1142/S0217979291000547>.
- [8] Claude BOURBONNAIS et Abdeliouahab SEDEKI. “Superconductivity and antiferromagnetism as interfering orders in organic conductors”. In : *Comptes Rendus Physique* 12.5 (2011). Superconductivity of strongly correlated systems, p. 532-541. ISSN : 1631-0705. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.crhy.2011.04.005>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631070511000880>.
- [9] D. K. CAMPBELL, J. Tinka GAMMEL et E. Y. LOH. “Bond-charge coulomb repulsion in peierls-hubbard models”. In : *Phys. Rev. B* 38 (16 1988), p. 12043-12046. DOI : 10.1103/PhysRevB.38.12043. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.38.12043>.
- [10] D. K. CAMPBELL, J. Tinka GAMMEL et E. Y. LOH. “Modeling electron-electron interactions in reduced-dimensional materials : Bond-charge Coulomb repulsion and dimerization in Peierls-Hubbard models”. In : *Phys. Rev. B* 42 (1 1990), p. 475-492. DOI : 10.1103/PhysRevB.42.475. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.42.475>.
- [11] Joel W. CANNON et Eduardo FRADKIN. “Phase diagram of the extended Hubbard model in one spatial dimension”. In : *Phys. Rev. B* 41 (13 1990), p. 9435-9443. DOI : 10.1103/PhysRevB.41.9435. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.41.9435>.
- [12] Pierre CARTIER et Cécile DEWITT-MORETTE. *A new perspective on Functional Integration*. 1996. arXiv : [funct-an/9602005](https://arxiv.org/abs/funct-an/9602005) [funct-an].
- [13] Vadim V. CHEIANOV et Michael PUSTILNIK. “Threshold Singularities in the Dynamic Response of Gapless Integrable Models”. In : *Phys. Rev. Lett.* 100 (2008), p. 126403. DOI : <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.126403>.
- [14] Bertrand DELAMOTTE. “A hint of renormalization”. In : *American Journal of Physics* 72.2 (fév. 2004), p. 170-184. ISSN : 0002-9505. DOI : 10.1119/1.1624112. eprint : https://pubs.aip.org/aapt/ajp/article-pdf/72/2/170/7531448/170_1_1_online.pdf. URL : <https://doi.org/10.1119/1.1624112>.
- [15] B. DUMOULIN et al. “Fluctuation Effects in Low-Dimensional Spin-Peierls Systems : Theory and Experiment”. In : *Phys. Rev. Lett.* 76 (8 1996), p. 1360-

1363. DOI:10.1103/PhysRevLett.76.1360. URL:https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.76.1360.
- [16] N. DUPUIS et al. “The nonperturbative functional renormalization group and its applications”. In : *Physics Reports* 910 (2021), p. 1-114. ISSN : 0370-1573. DOI : https://doi.org/10.1016/j.physrep.2021.01.001. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157321000156.
- [17] I. E. DZYLOSHINSKII et A. I. LARKIN. “Possible states of quasi-unidimensional systems”. In : *Sov. Phys. JETP* 34 (1972), p. 422.
- [18] Satoshi EJIMA et Satoshi NISHIMOTO. “Phase Diagram of the One-Dimensional Half-Filled Extended Hubbard Model”. In : *Phys. Rev. Lett.* 99 (21 2007), p. 216403. DOI : 10.1103/PhysRevLett.99.216403. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.99.216403.
- [19] V.J. EMERY. “Theory of the One-Dimensional Electron Gas”. In : *Highly Conducting One-Dimensional Solids*. Sous la dir. de Jozef T. DEVREESE, Roger P. EVRARD et Victor E. van DOREN. Boston, MA : Springer US, 1979, p. 247-303. ISBN : 978-1-4613-2895-7. DOI : 10.1007/978-1-4613-2895-7_6. URL : https://doi.org/10.1007/978-1-4613-2895-7_6.
- [20] Fabian H. L. ESSLER et al. *The One-Dimensional Hubbard Model*. Cambridge University Press, 2005. DOI : 10.1017/CB09780511534843.
- [21] Yu. A. FIRSOV, V. N. PRIGODIN et Chr. SEIDEL. “Ground states and critical temperatures in quasi-one-dimensional systems”. In : *Physics Reports* 126.5-6 (sept. 1985), p. 245-371. DOI : 10.1016/0370-1573(85)90079-1.
- [22] B. FOURCADE et G. SPRONKEN. “Real-space scaling methods applied to the one-dimensional extended Hubbard model. II. The finite-cell scaling method”. In : *Phys. Rev. B* 29 (9 1984), p. 5096-5102. DOI : 10.1103/PhysRevB.29.5096. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.29.5096.
- [23] Eduardo FRADKIN. *Field Theories of Condensed Matter Physics*. 2^e éd. Cambridge University Press, 2013. DOI : 10.1017/CB09781139015509.
- [24] Yuki FUSEYA et al. “Effect of Intersite Repulsions on Magnetic Susceptibility of One-Dimensional Electron Systems at Quarter Filling”. In : *Journal of the Physical Society of Japan* 74.12 (2005), p. 3159-3162. DOI :

- 10.1143/JPSJ.74.3159. eprint : <https://doi.org/10.1143/JPSJ.74.3159>. URL : <https://doi.org/10.1143/JPSJ.74.3159>.
- [25] T. GIAMARCHI. “Umklapp process and resistivity in one-dimensional fermion systems”. In : *Phys. Rev. B* 44 (7 1991), p. 2905-2913. DOI : 10.1103/PhysRevB.44.2905. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.44.2905>.
- [26] Thierry GIAMARCHI. *Quantum Physics in One Dimension*. Oxford University Press, déc. 2003. ISBN : 9780198525004. DOI : 10.1093/acprof:oso/9780198525004.001.0001. URL : <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198525004.001.0001>.
- [27] Nigel GOLDENFELD. *Lectures On phase Transitions And The Renormalization Group*. 1^{re} éd. CRC Press, 1992. DOI : 10.1201/9780429493492.
- [28] F. D. M. HALDANE. “Luttinger liquid theory of one-dimensional quantum fluids. I. Properties of the Luttinger model and their extension to the general 1D interacting spinless Fermi gas”. In : *J. Phys. C: Solid State Phys.* 14 (1981), p. 2585. DOI : <https://doi.org/10.1088/0022-3719/14/19/010>.
- [29] J. E. HIRSCH. “Charge-Density-Wave to Spin-Density-Wave Transition in the Extended Hubbard Model”. In : *Phys. Rev. Lett.* 53 (24 1984), p. 2327-2330. DOI : 10.1103/PhysRevLett.53.2327. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.53.2327>.
- [30] Adilet IMAMBEKOV, Thomas L. SCHMIDT et Leonid I. GLAZMAN. “One-dimensional quantum liquids : Beyond the Luttinger liquid paradigm”. In : *Rev. Mod. Phys.* 84 (3 2012), p. 1253-1306. DOI : 10.1103/RevModPhys.84.1253.
- [31] G. I. JAPARIDZE et A. P. KAMPF. “Weak-coupling phase diagram of the extended Hubbard model with correlated-hopping interaction”. In : *Phys. Rev. B* 59 (20 1999), p. 12822-12829. DOI : 10.1103/PhysRevB.59.12822. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.59.12822>.
- [32] Eric JECKELMANN. “Ground-State Phase Diagram of a Half-Filled One-Dimensional Extended Hubbard Model”. In : *Phys. Rev. Lett.* 89 (23 2002), p. 236401. DOI : 10.1103/PhysRevLett.89.236401. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.89.236401>.

- [33] G. JÜTTNER, A. KLÜMPER et J. SUZUKI. “The Hubbard chain at finite temperatures : ab initio calculations of Tomonaga-Luttinger liquid properties”. In : *Nuclear Physics B* 522.3 (1998), p. 471-502. ISSN : 0550-3213. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0550-3213\(98\)00256-9](https://doi.org/10.1016/S0550-3213(98)00256-9). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321398002569>.
- [34] Leo P. KADANOFF. “Scaling laws for ising models near T_c ”. In : *Physics Physique Fizika* 2 (6 1966), p. 263-272. DOI : 10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.2.263. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.2.263>.
- [35] S. KIVELSON et al. “Missing bond-charge repulsion in the extended Hubbard model : Effects in polyacetylene”. In : *Phys. Rev. Lett.* 58 (18 1987), p. 1899-1902. DOI : 10.1103/PhysRevLett.58.1899. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.58.1899>.
- [36] Lisa MARKHOF, Mikhail PLETYUKHOV et Volker MEDEN. “Investigating the roots of the nonlinear Luttinger liquid phenomenology”. In : *SciPost Phys.* 7 (2019), p. 047. DOI : 10.21468/SciPostPhys.7.4.047. URL : <https://scipost.org/10.21468/SciPostPhys.7.4.047>.
- [37] M. MÉNARD et C. BOURBONNAIS. “Renormalization group analysis of the one-dimensional extended Hubbard model”. In : *Phys. Rev. B* 83 (7 2011), p. 075111. DOI : 10.1103/PhysRevB.83.075111. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.83.075111>.
- [38] Walter METZNER et al. “Functional renormalization group approach to correlated fermion systems”. In : *Rev. Mod. Phys.* 84 (1 2012), p. 299-352. DOI : 10.1103/RevModPhys.84.299. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.84.299>.
- [39] Frédéric MILA et Karlo PENC. “Susceptibility of the one-dimensional dimerized Hubbard model”. In : *Phys. Rev. B* 51 (3 1995), p. 1997-2000. DOI : 10.1103/PhysRevB.51.1997. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.51.1997>.
- [40] G. MONTAMBAUX, M. HÉRITIER et P. LEDERER. “Band-filling and magnetic-field effects on the phase diagram of one-dimensional conductors”. In : *Phys. Rev. B* 33 (11 1986), p. 7777-7786. DOI : 10.1103/PhysRevB.33.

7777. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.33.7777>.
- [41] P. MOREL et P. W. ANDERSON. “Calculation of the Superconducting State Parameters with Retarded Electron-Phonon Interaction”. In : *Phys. Rev.* 125 (4 1962), p. 1263-1271. DOI : 10.1103/PhysRev.125.1263. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.125.1263>.
- [42] M. NAKAHARA. *Geometry, topology and physics*. Bristol, UK : Hilger (1990) 505 p. (Graduate student series in physics). 2003.
- [43] Masaaki NAKAMURA. “Mechanism of CDW-SDW Transition in One Dimension”. In : *Journal of the Physical Society of Japan* 68.10 (1999), p. 3123-3126. DOI : 10.1143/JPSJ.68.3123. eprint : <https://doi.org/10.1143/JPSJ.68.3123>. URL : <https://doi.org/10.1143/JPSJ.68.3123>.
- [44] Masaaki NAKAMURA. “Tricritical behavior in the extended Hubbard chains”. In : *Phys. Rev. B* 61 (24 2000), p. 16377-16392. DOI : 10.1103/PhysRevB.61.16377. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.61.16377>.
- [45] H. NÉLISSE et al. “Spin susceptibility of interacting electrons in one dimension : Luttinger liquid and lattice effects”. In : *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems* 12.3 (1999), p. 351-365. ISSN : 1434-6036. DOI : 10.1007/s100510051016. URL : <https://doi.org/10.1007/s100510051016>.
- [46] J. C. NICKEL et al. “Superconducting pairing and density-wave instabilities in quasi-one-dimensional conductors”. In : *Phys. Rev. B* 73 (16 2006), p. 165126. DOI : 10.1103/PhysRevB.73.165126. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.73.165126>.
- [47] R. G. PEREIRA, S. R. WHITE et I. A. AFFLECK. “Spectral functions of spinless fermions on a one-dimensional lattice”. In : *Phys. Rev. B* 79 (2009), p. 165113. DOI : 10.1103/PhysRevB.79.165113.
- [48] Joseph POLCHINSKI. “Renormalization and effective lagrangians”. In : *Nuclear Physics B* 231.2 (1984), p. 269-295. ISSN : 0550-3213. DOI : [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(84\)90287-6](https://doi.org/10.1016/0550-3213(84)90287-6). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321384902876>.

- [49] M. PUSTILNIK et al. “Dynamic Response of One-Dimensional Interacting Fermions”. In : *Phys. Rev. Lett.* 96 (19 2006), p. 196405. DOI : 10 . 1103/PhysRevLett . 96 . 196405.
- [50] Anders W. SANDVIK, Leon BALENTS et David K. CAMPBELL. “Ground State Phases of the Half-Filled One-Dimensional Extended Hubbard Model”. In : *Phys. Rev. Lett.* 92 (23 2004), p. 236401. DOI : 10 . 1103/PhysRevLett . 92 . 236401. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.92.236401>.
- [51] H. J. SCHULZ. “Fermi liquids and non-Fermi liquids”. In : *Proceedings of Les Houches Summer School LXI*. Sous la dir. d’E. AKKERMANS et al. Elsevier, Amsterdam, 1995, p. 533. DOI : <https://doi.org/10.48550/arXiv.cond-mat/9503150>.
- [52] Matthew D. SCHWARTZ. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2013. DOI : 10 . 1017/9781139540940.
- [53] Chr. SEIDEL et V. N. PRIGODIN. “The influence of band filling on the phase diagram of one-dimensional conductors”. In : *J. Low Temp. Phys.* 48 (1982), p. 85. DOI : <https://doi.org/10.1007/BF00681719>.
- [54] Pinaki SENGUPTA, Anders W. SANDVIK et David K. CAMPBELL. “Bond-order-wave phase and quantum phase transitions in the one-dimensional extended Hubbard model”. In : *Phys. Rev. B* 65 (15 2002), p. 155113. DOI : 10 . 1103/PhysRevB . 65 . 155113. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.65.155113>.
- [55] Hiroyuki SHIBA. “Thermodynamic Properties of the One-Dimensional Half-Filled-Band Hubbard Model. II : Application of the Grand Canonical Method”. In : *Progress of Theoretical Physics* 48.6 (déc. 1972), p. 2171-2186. ISSN : 0033-068X. DOI : 10 . 1143/PTP . 48 . 2171. eprint : <https://academic.oup.com/ptp/article-pdf/48/6/2171/5254982/48-6-2171.pdf>. URL : <https://doi.org/10.1143/PTP.48.2171>.
- [56] J. SOLYOM. “The Fermi gas model of one-dimensional conductors”. In : *Adv. Phys.* 28 (1979), p. 201. DOI : <http://dx.doi.org/10.1080/00018737900101375>.
- [57] Ka-Ming TAM, Shan-Wen TSAI et David K. CAMPBELL. “Functional Renormalization Group Analysis of the Half-Filled One-Dimensional Extended Hubbard Model”. In : *Phys. Rev. Lett.* 96 (3 2006), p. 036408.

- DOI : 10.1103/PhysRevLett.96.036408. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.96.036408>.
- [58] M. TSUCHIIZU et A. FURUSAKI. “Ground-state phase diagram of the one-dimensional half-filled extended Hubbard model”. In : *Phys. Rev. B* 69 (3 2004), p. 035103. DOI : 10.1103/PhysRevB.69.035103. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.69.035103>.
- [59] M. TSUCHIIZU et A. FURUSAKI. “Phase Diagram of the One-Dimensional Extended Hubbard Model at Half Filling”. In : *Phys. Rev. Lett.* 88 (5 2002), p. 056402. DOI : 10.1103/PhysRevLett.88.056402. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.88.056402>.
- [60] J VOIT. “One-dimensional Fermi liquids”. In : *Reports on Progress in Physics* 58.9 (1995), p. 977-1116. DOI : 10.1088/0034-4885/58/9/002. URL : <https://doi.org/10.1088/0034-4885/58/9/002>.
- [61] Johannes VOIT. “Phase diagram and correlation functions of the half-filled extended Hubbard model in one dimension”. In : *Phys. Rev. B* 45 (8 1992), p. 4027-4042. DOI : 10.1103/PhysRevB.45.4027. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.45.4027>.
- [62] Franz J. WEGNER et Anthony HOUGHTON. “Renormalization Group Equation for Critical Phenomena”. In : *Phys. Rev. A* 8 (1 1973), p. 401-412. DOI : 10.1103/PhysRevA.8.401. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.8.401>.
- [63] Christof WETTERICH. “Exact evolution equation for the effective potential”. In : *Physics Letters B* 301.1 (1993), p. 90-94. ISSN : 0370-2693. DOI : [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(93\)90726-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(93)90726-X). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026939390726X>.
- [64] Kenneth G. WILSON. “Renormalization Group and Critical Phenomena. I. Renormalization Group and the Kadanoff Scaling Picture”. In : *Phys. Rev. B* 4 (9 1971), p. 3174-3183. DOI : 10.1103/PhysRevB.4.3174. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.4.3174>.
- [65] Kenneth G. WILSON. “Renormalization Group and Critical Phenomena. II. Phase-Space Cell Analysis of Critical Behavior”. In : *Phys. Rev. B* 4 (9 1971), p. 3184-3205. DOI : 10.1103/PhysRevB.4.3184. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.4.3184>.

Bibliographie

- [66] Kenneth G. WILSON. “The renormalization group : Critical phenomena and the Kondo problem”. In : *Rev. Mod. Phys.* 47 (4 1975), p. 773-840. DOI : 10.1103/RevModPhys.47.773. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.47.773>.
- [67] Kenneth G. WILSON et Michael E. FISHER. “Critical Exponents in 3.99 Dimensions”. In : *Phys. Rev. Lett.* 28 (4 1972), p. 240-243. DOI : 10.1103/PhysRevLett.28.240. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.28.240>.
- [68] Kenneth G. WILSON et J. KOGUT. “The renormalization group and the ϕ^4 expansion”. In : *Physics Reports* 12.2 (1974), p. 75-199. ISSN : 0370-1573. DOI : [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(74\)90023-4](https://doi.org/10.1016/0370-1573(74)90023-4). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157374900234>.
- [69] D. ZANCHI et H. J. SCHULZ. “Weakly correlated electrons on a square lattice : Renormalization-group theory”. In : *Phys. Rev. B* 61 (20 2000), p. 13609-13632. DOI : 10.1103/PhysRevB.61.13609. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.61.13609>.
- [70] Y. Z. ZHANG. “Dimerization in a Half-Filled One-Dimensional Extended Hubbard Model”. In : *Phys. Rev. Lett.* 92 (24 2004), p. 246404. DOI : 10.1103/PhysRevLett.92.246404. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.92.246404>.
- [71] Jean ZINN-JUSTIN. *Phase Transitions and Renormalization Group*. Oxford University Press, juill. 2007. ISBN : 9780199227198. DOI : 10.1093/acprof:oso/9780199227198.001.0001.