



HAL
open science

Contributions à l'homogénéisation des milieux à plusieurs échelles de porosité : estimations analytiques et calculs numériques par transformée de Fourier rapide

Viet Hung Phan

► **To cite this version:**

Viet Hung Phan. Contributions à l'homogénéisation des milieux à plusieurs échelles de porosité : estimations analytiques et calculs numériques par transformée de Fourier rapide. Génie civil. Université Gustave Eiffel, 2023. Français. NNT : 2023UEFL2079 . tel-04609507

HAL Id: tel-04609507

<https://theses.hal.science/tel-04609507>

Submitted on 12 Jun 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ GUSTAVE EIFFEL

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mécanique

Présentée par :

Viet Hung PHAN

sujet :

Contributions à l'homogénéisation des milieux à
plusieurs échelles de porosité : estimations
analytiques et calculs numériques par
transformée de Fourier rapide

Soutenue le 20 juin 2023 ,
devant le jury composé de :

Y. MONERIE	Professeur, LMGC Univ. Montpellier	Rapporteur
L. TALON	Chargé de Recherche - HDR, FAST Paris-Saclay	Rapporteur
G. BONNET	Professeur, Univ. Eiffel	Examineur
I. GINZBURG	Ingénieure de Recherche - HDR, INRAE Paris-Saclay	Examinatrice
D. KONDO	Professeur, Sorbonne Université	Examineur
V. MONCHIET	Maître de Conférences, MSME, Univ. Eiffel	Directeur de thèse

Table des matières

Introduction générale	7
1 Etat de l'art	11
1.1 Milieu à une échelle de porosité	11
1.1.1 Principes d'homogénéisation	11
1.1.2 Calcul de la perméabilité par FFT	13
1.2 Milieu multiporeux	20
1.2.1 Milieux poreux à plusieurs échelles de porosité	21
1.2.2 Cas général : milieu à deux phases poreuses	25
1.3 Homogénéisation du problème de Brinkman	27
1.3.1 Reformulation du problème	27
1.3.2 Les conditions au bord	28
1.3.3 Lemme de Hill-Mandel	30
1.4 Résolution du problème de Brinkman par FFT	31
1.4.1 Opérateur de Green	31
1.4.2 Procédure d'intégration numérique	33
1.4.3 Illustration	34
2 Calcul par FFT de la perméabilité macroscopique de solides poreux contenant des macrocavités elliptiques et ellipsoïdales.	37
2.1 Formulation du problème avec des variables adimensionnées	37
2.1.1 Modélisation avec l'équation de Brinkman	37
2.1.2 Modélisation avec l'équation de Darcy seule	39
2.2 Macropores elliptiques	40
2.2.1 Etude de convergence	40
2.2.2 Effet de l'orientation	42
2.2.3 Le rôle du facteur d'échelle	43
2.2.4 Comparaison avec des estimations analytiques	44
2.3 Populations de macropores elliptiques	46
2.4 Macropores sphéroïdaux	48
2.5 Conclusion	52
3 Estimations analytiques de milieux biporeux avec inclusions cylindriques et sphériques	53
3.1 Equations du problème	53

3.1.1	Hiérarchisation des solutions	54
3.2	Estimations pour des inclusions cylindriques et sphériques	57
3.2.1	Principe général	57
3.2.2	Solution générique	58
3.2.3	Estimation de Mori-Tanaka	60
3.2.4	Modèle du cylindre/sphère composite	62
3.3	Comparaisons avec les solutions numériques	64
3.3.1	Résultats	65
3.4	Cellules multicouches	70
3.5	Conclusion	75
4	Nouveaux schéma itératifs basés sur la FFT pour le calcul de la perméabilité de milieux multiporeux	77
4.1	Première équation intégrale	78
4.2	Seconde équation intégrale	80
4.3	Resolution avec la méthode du gradient conjugué	82
4.3.1	Principe général	82
4.3.2	Calcul du produit avec \mathcal{H} pour la première équation intégrale	84
4.3.3	Calcul du produit avec \mathcal{H} pour la seconde équation intégrale	85
4.4	Choix du milieu de référence	86
4.5	Milieu poreux avec inclusions imperméables	91
4.5.1	Procédure	91
4.5.2	Estimations analytiques	92
4.5.3	Comparaison des résultats	92
4.6	Conclusion	94
	Conclusion générale	95
	Annexe A : matrices de transfert	105

Notations

• Notations tensorielles

a	scalaire,	\underline{a}	vecteur,
\mathbf{A}	tenseurs d'ordre deux,	\mathbb{A}	tenseurs d'ordre quatre,
\mathbf{I}	tenseur identité d'ordre 2,	\mathbb{I}	tenseur identité d'ordre 4,
"."	produit une fois contracté,	" : "	produit doublement contracté,
δ_{ij}	symbole de Kronecker.		

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ijkl} = A_{ik} B_{jl}$$
$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ijkl} = A_{il} B_{jk}$$
$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ijkl} = \frac{1}{2}(A_{ik} B_{jl} + A_{il} B_{jk})$$

• Autres notations

\mathbf{v}	champ de vitesse,
\mathbf{d}	taux de déformation,
\mathbf{V}	vitesse macroscopique,
p	pression
$\boldsymbol{\sigma}$	tenseur des contraintes,
\mathbf{s}	déviateur des contraintes,
\mathbf{J}	gradient de pression macroscopique,
$\mathbf{W} = -\mathbf{J}$	opposé du gradient de pression,
k	perméabilité scalaire,
h	résistivité hydraulique scalaire,
\mathbf{K}	tenseur de perméabilité,
\mathbf{H}	tenseur de résistivité hydraulique,
\mathbf{K}^{hom}	tenseur de perméabilité homogénéisé,
\mathbf{H}^{hom}	tenseur de résistivité hydraulique homogénéisé,
μ	viscosité dynamique,
μ_e	viscosité dynamique équivalente (de Brinkman),

Introduction générale

La détermination du tenseur de perméabilité dans le cadre de l'homogénéisation est une question ancienne qui a été abordée dans de nombreux travaux, à partir des travaux pionniers de Auriault et Sanchez-Palencia [4], Levy [39], Sanchez-Palencia [72] dans le contexte des structures périodiques et par Whitaker [81, 82] en considérant les méthodes de moyenne de volume appliquées aux milieux poreux aléatoires. Le tenseur de perméabilité est un ingrédient clé pour de nombreux problèmes physiques allant de la mécanique des sols à l'acoustique des structures poreuses. La détermination du tenseur de perméabilité à partir de la géométrie de la microstructure a été abordée dans de nombreux travaux et le lecteur peut se référer aux ouvrages de Boutin et al. [14] et Hornung [33] par exemple.

Les écoulements dans les milieux poreux continuent de susciter beaucoup d'intérêt car ils couvrent une grande variété de sujets scientifiques et d'ingénierie. Un axe de recherche a fait l'objet de nombreux travaux ces trente dernières années et concerne la détermination du tenseur de perméabilité en considérant des microstructures avec des échelles de porosité multiples tels que les milieux poreux fracturés. Les fractures peuvent agir comme des voies de circulation pour les fluides, augmentant ainsi la perméabilité globale du milieu. Auriault et al. [5, 6, 7] ont étudié les propriétés de filtration de milieux poreux fracturés dans le cadre des techniques d'homogénéisation périodique. Il convient de préciser la nature des fissures, ce sont des cavités aplaties mais de volume non nul dans lequel peut s'écouler librement le fluide. Il est donc nécessaire de distinguer ces fissures avec celles considérées en élasticité pour lesquelles on parle parfois de fissures fermées, deux surfaces libres en contact mais de volume nul. Le problème d'écoulement est macroscopiquement décrit à l'aide de la loi de Darcy avec une perméabilité qui dépend des deux échelles de porosité. Toutefois, le processus d'homogénéisation fait apparaître une échelle intermédiaire, caractéristique du réseau de fissures et à laquelle on doit résoudre un problème d'écoulement couplant l'équation de Darcy et l'équation de Stokes. Dans la matrice poreuse (contenant le réseau initial de micropores) on utilise donc l'équation de Darcy pour décrire l'écoulement. Dans les fissures, c'est l'équation de Stokes qui décrit l'écoulement du fluide. Ce problème a fait l'objet de nombreux travaux notamment sur les questions relatives au raccordement des champs à l'interface des deux régions. Effectivement, La nature des équations régissant l'écoulement dans chacune des phases est différente, et la nature des conditions aux bords est par conséquent également de nature différente. Dans le milieu poreux où l'on applique la loi de Darcy, les conditions aux

limites s'écrivent pour la pression et la vitesse normale. Pour le domaine occupé par les fissures, les conditions aux limites sont des conditions pour le champ de vitesse total et le vecteur contrainte. Se pose alors la nature des conditions de raccordement pour les contraintes de cisaillement et la vitesse tangentielle. On peut distinguer trois approches différentes pour traiter le problème d'écoulement à l'échelle des fractures.

L'approche de base, utilisée avec succès à certaines occasions (voir, par exemple, [60, 64]), consiste à étendre la validité de la loi de Darcy partout, même dans les fissures. Une valeur de perméabilité effective est ainsi attribuée à chaque phase (matrice poreuse et fissures). Cette approche présente plusieurs avantages, d'abord le problème de raccordement des champs à l'interface des deux régions ne se pose plus. Ensuite, on peut utiliser des schémas d'homogénéisation classiques et les méthodes numériques usuelles pour résoudre le problème puisque la nature des équation de Darcy est la même que celle de la conductivité thermique dans les composites déjà largement documenté dans la littérature scientifique. Ce modèle peut être utile si l'on n'est pas intéressé par une description précise de la solution locale mais plutôt par des grandeurs moyennes telle que la perméabilité macroscopique. Mais il soulève cependant la question de la valeur de perméabilité effective à utiliser dans le domaine occupé par les fissures. Il existe des résultats lorsque l'on considère des macrocavités de forme cylindrique ou sphérique au lieu de fissures (voir par exemple [40, 52]).

La seconde approche consiste à intercaler entre les deux régions une interface imparfaite. C'est généralement le modèle de Beavers-Joseph qui est utilisé [9]. Les expériences effectuées par Beavers et Joseph sur un écoulement unidirectionnel dans un canal adjacent à un milieu poreux ont indiqué que le débit dans le canal augmentait par la présence du milieu poreux et ont conclu par l'existence d'une condition de "glissement" à la paroi avec le milieu poreux, analogue à celle observée sur les gaz raréfiés (voir, par exemple, [19]). Les expériences plus perfectionnées menées trois en plus tard par Beavers et al. [10] ont fourni une vérification quantitative plus précise. Les expériences ont été effectuées pour des canaux de différentes largeurs et avec des milieux poreux de différentes perméabilités. Ils ont alors montré la validité du modèle proposé par Beavers et Joseph [9]. Le lecteur pourra également se référer à l'article de Nield [58] pour une discussion et une analyse critique du modèle de Beavers-Joseph. On peut également mentionner une variante du modèle de Beavers-Joseph proposé par Saffman [70] mieux adaptée pour l'intégration numérique par la méthode des éléments finis (voir notamment Layton et al. [38], Discacciati et al. [21], Celle et al. [18])

Une dernière approche également largement utilisée consiste à utiliser la loi de Brinkman [16, 17] au lieu de la loi de Darcy pour décrire l'écoulement dans la matrice poreuse et les équations de Stokes dans les fissures. Les équations Brinkman consiste à combiner l'équation de Stokes à la loi de Darcy et à utiliser une viscosité équivalente différente de celle du fluide en écoulement. Il existe plusieurs travaux visant à justifier d'un point de vue théorique le modèle de Brinkman (voir

notamment [27, 61, 82, 2]). Du point de vue pratique, le modèle de Brinkman peut simplement être considéré comme un modèle de transmission permettant de relier des régions poreuses et des régions fluides où l'écoulement est décrit par les équations de Stokes. De plus, en considérant l'équation de Stokes comme un cas particulier de l'équation plus générale donnée par Brinkman, la milieu composite fluide/poreux peut être traitée comme un seul domaine mais avec des propriétés locales différentes. De cette manière, on peut mettre en oeuvre les méthodes numériques basées sur la transformée de Fourier rapide en introduisant la fonction de Green associée à l'équation de Brinkman comme cela a été proposé par Mezhoud et al. [45]. L'équation de Brinkman a également été implémentée numériquement par la méthode des éléments finis [65, 55, 59]

Le modèle de Brinkman a également été mis en oeuvre pour décrire les écoulements et les propriétés de filtrations dans différentes situations. Mezhoud et al. [45] ont utilisé l'équation de Brinkman pour le calcul de la perméabilité de milieux biporeux à matrice polymère avec des pores de forme quasi-sphérique. La perméabilité macroscopique a été déterminée à l'aide simulations par FFT sur des images obtenues par tomographie à l'échelle des macropores. Griebel et al. [28] ont calculé la perméabilité de textiles composés de fils perméables, utile pour la simulation du procédé de moulage des composites dans la fabrication de composites à renforts textiles. D'autres auteurs ont utilisé la loi de Brinkman pour étudier les écoulements dans un milieu poreux contenant des sphères imperméables (Rudraiah et et al. [69]) puis perméables (Grosan et al. [29]). Ce problème a une grande variété d'applications technologiques telles que l'élimination des impuretés dans les circuits intégrés des ordinateurs, la lubrification dans les roulements poreux, etc (voir, par exemple, Rudraiah et et al. [69]).

Dans ce travail, on propose des contributions à la modélisation des milieux multiporeux. Le mémoire est constitué de quatre chapitres.

Le premier chapitre est dédié à l'état de l'art. On rappelle dans un premier temps le cadre théorique de l'homogénéisation des milieux poreux en vue de la détermination de la perméabilité macroscopique. On présente également la méthode de résolution basée sur la FFT proposée par Monchiet et al. [51]. Ensuite, on présente le cadre d'homogénéisation pour les milieux contenant plusieurs porosités. On décrit les différentes approches possibles, basées sur l'équation de Darcy avec perméabilité équivalente, l'approche couplant les équations de Darcy et Stokes et utilisant le modèle d'interface de Beavers-Joseph [9], enfin l'approche reposant sur l'équation de Brinkman [16, 17]. L'approche retenue étant celle fondée sur l'équation de Brinkman, on présente l'approche numérique par FFT proposée par Mezhoud et al. [45].

Au second chapitre, on propose de mettre en oeuvre la méthode FFT pour calculer la perméabilité de milieux poreux contenant des macrocavités de forme elliptique et sphéroïdale. On compare deux approches : celle basée sur l'équation de Darcy avec une perméabilité équivalente pour les macropores, celle basée sur le modèle de Brinkman. Les calculs sont réalisés sur différentes microstructures constituées de pores de formes, de tailles et d'orientations aléatoires.

Au chapitre trois, on propose d'établir des estimations de la perméabilité de milieux poreux constitués de deux phases poreuses. Les milieux étudiés sont constitués d'une matrice poreuse contenant des inclusions poreuses de forme cylindrique et sphérique. Pour ce type de géométrie simple, on peut reconduire les approches usuelles en homogénéisation des composites conducteurs de la chaleur et élastiques : l'estimation de Mori-Tanaka et les assemblages de cylindres et sphères composites. Les estimations obtenues sont ensuite comparées à des simulations numériques par FFT.

Au dernier chapitre, on propose de nouveaux schémas de résolution numérique basés sur la FFT et utilisant la méthode itérative du gradient conjugué afin d'améliorer la vitesse de convergence. En particulier, on examine le cas des inclusions imperméables pour lequel le schéma existant de Mezhoud et al. [45] n'est pas convergent. Les solutions obtenues avec les nouveaux schémas itératifs sont comparées avec des solutions analytiques.

On termine par une conclusion des travaux et on en donne quelques perspectives.

Chapitre 1

Etat de l'art

1.1 Milieu à une échelle de porosité

Dans cette première section, on rappelle l'approche par homogénéisation des milieux poreux en vue du calcul de la perméabilité macroscopique. On se place dans le cadre classique des techniques d'homogénéisation basées sur les méthodes de développement asymptotiques pour les milieux poreux périodiques [4, 39, 72] ou les milieux aléatoires [81]. Le lecteur pourra également se référer aux ouvrages de Boutin et al. [14], Hornung [33] pour plus de détails sur les techniques d'homogénéisation appliquées aux problèmes d'écoulement en milieux poreux. On rappelle ici les résultats théoriques les plus importants et on présente aussi les méthodes de résolution numérique basées sur la transformée de Fourier rapide (communément appelées méthodes FFT pour Fast Fourier Transform).

1.1.1 Principes d'homogénéisation

1.1.1.1 Le problème d'écoulement de Stokes

On considère un milieu poreux périodique saturé par un fluide visqueux de viscosité dynamique μ . On définit une cellule élémentaire notée Ω , de volume $|\Omega|$, contenant un fluide occupant le domaine Ω_1 dont le volume est noté $|\Omega_1|$ et un squelette rigide occupant le domaine Ω_2 dont le volume est noté $|\Omega_2|$. On note S la surface de contact entre la phase fluide et la phase solide. La cellule étudiée est schématisée sur la figure 1.1.

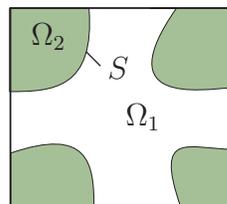


FIGURE 1.1 – Schématisation de la cellule élémentaire du milieu poreux.

L'écoulement du fluide est incompressible et suffisamment lent (faible nombre de Reynolds). A l'échelle locale, les équations du problème sont constituées (i) de l'équation de Stokes, (ii) avec la condition d'incompressibilité et (iii) la condition d'adhérence à la paroi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \mu \Delta \mathbf{v}(\mathbf{x}) - \nabla p(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ \text{(ii)} \quad \text{div}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ \text{(iii)} \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in S \end{array} \right. \quad (1.1)$$

où $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ et $p(\mathbf{x})$ désignent respectivement le champ de vitesse et la pression locale. On considère une cellule parallélépipédique (pour les problèmes 3D) ou rectangulaire (pour les problèmes 2D) et on impose les conditions de périodicité pour le champ de vitesse et, pour le champ de pression, on admet la décomposition suivante :

$$p = p^* + \mathbf{J} \cdot \mathbf{x} \quad (1.2)$$

où p^* est un champ périodique et \mathbf{J} est le gradient de pression macroscopique imposé. L'écoulement est généré en imposant à la cellule élémentaire le gradient de pression \mathbf{J} uniforme dans la phase fluide. La solution du problème dépend linéairement de \mathbf{J} , il existe donc un tenseur de localisation noté $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, tel que le champ de vitesse s'écrive sous la forme :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\mu} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J} \quad (1.3)$$

On définit par \mathbf{V} la vitesse macroscopique définie par la moyenne du champ de vitesse local sur la cellule Ω :

$$\mathbf{V} = \langle \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x}) dV \quad (1.4)$$

La vitesse macroscopique est une mesure du débit à travers les surfaces extérieures de la cellule élémentaire Ω (cf. Boutin et al. [14]). En introduisant le champ de vitesse donné par l'équation (1.3) dans (1.4), il vient :

$$\mathbf{V} = -\frac{1}{\mu} \mathbf{K} \cdot \mathbf{J} \quad (1.5)$$

Où \mathbf{K} est le tenseur de perméabilité défini par :

$$\mathbf{K} = \langle \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} \quad (1.6)$$

L'équation (1.5) est la loi de Darcy. Le tenseur de perméabilité \mathbf{K} dépend uniquement de la géométrie du réseau de pores mais ne dépend pas de la nature du fluide.

1.1.2 Calcul de la perméabilité par FFT

La méthode FFT a été introduite par Moulinec et Suquet [53, 54] pour le calcul des propriétés des matériaux composites élastiques ou régis par des lois de comportement non linéaires. Son extension pour traiter le problème d'écoulement de Stokes a été proposée plus tard par Monchiet et Bonnet [51]. Cette extension s'appuie sur la similitude entre les équations de Stokes et les équations de l'élasticité avec toutefois une spécificité liée à la nature du terme source pour le problème d'écoulement (un gradient de pression macroscopique imposé dans la phase fluide seule).

1.1.2.1 Reformulation du problème

En assimilant le champ de vitesse au champ des déplacements, la phase fluide à une matrice incompressible élastique et le squelette à des inclusions rigides, le problème d'écoulement présente une grande similitude avec le problème d'homogénéisation des composites élastiques. Le problème défini par les équations (1.1) peut s'écrire sous la forme équivalente :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{d}(\mathbf{x}) = \nabla_s \mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = 2\mu(\mathbf{x})\mathbf{d}(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x})\mathbf{I} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \quad \text{antipériodique} \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad \text{périodique} \end{array} \right. \quad (1.7)$$

Avec la définition suivante pour $\mu(\mathbf{x})$:

$$\mu(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mu & \forall \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ +\infty & \forall \mathbf{x} \in \Omega_2 \end{cases} \quad (1.8)$$

L'expression de la force de volume, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, est :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{J} & \forall \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ ? & \forall \mathbf{x} \in \Omega_2 \end{cases} \quad (1.9)$$

Il convient de signaler que nous avons effectué un prolongement par continuité dans la phase solide Ω_2 du problème de Stokes qui était initialement défini dans la phase fluide Ω_1 . Ceci est nécessaire pour une résolution du problème avec des séries de Fourier sur la cellule Ω .

Dès lors, on peut reconduire les méthodes de Fourier utilisées pour les composites élastiques, on utilisera plutôt une approche en contrainte qui utilise qui fait

intervenir dans la locale l'inverse de la viscosité dynamique (qui est nul dans la phase solide). Toutefois une spécificité concerne la force de volume. Celle-ci est connue uniquement dans la phase fluide où elle est égale au gradient de pression imposé \mathbf{J} . Dans la phase solide, elle est a priori indéterminée, elle décrit les forces de traînée qui dépendent des actions du fluide sur la paroi et donc de la solution du problème. L'introduction de ces forces de traînée est inhérent à l'utilisation des méthode basées sur la FFT. Effectivement, lorsque l'on résoud les équations de Stokes par la méthode des éléments finis, seule la phase fluide est considérée et la condition d'adhérence apparaît comme une condition de Dirichlet pour le champ de vitesse. Il n'y a donc pas de nécessité à décrire ces forces de traînées avec la méthode des éléments finis.

Pour mettre en oeuvre la méthode FFT, il convient donc de donner une expression à la force de volume dans la phase Ω_2 . En partant de l'équation d'équilibre et en utilisant le théorème de la divergence il vient :

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) dV \quad (1.10)$$

Le vecteur $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}$ étant antipériodique, la première intégrale est nulle et, en divisant par $|\Omega|$, la relation ci-dessus se réduit à :

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = 0 \quad (1.11)$$

Les forces de volume dans la partie fluide étant égale au gradient de pression imposé \mathbf{J} , on va introduire des forces de volume dans la phase solide pour assurer l'équilibre de la cellule. En utilisant une force de volume constante dans Ω_2 il vient alors :

$$\mathbf{f} = -\frac{c_2}{c_1} \mathbf{J}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_2 \quad (1.12)$$

où c_i pour $i = 1, 2$ représentent les fractions volumiques de la phase fluide et solide respectivement :

$$c_i = \frac{|\Omega_i|}{|\Omega|} \quad (1.13)$$

1.1.2.2 Le schéma itératif

Nous allons maintenant rappeler les étapes qui conduisent au schéma de résolution par la transformée de Fourier rapide. Le problème initial, décrit par les équations (1.7) est un problème d'inhomogénéité dans le sens où l'on peut utiliser les même équations dans Ω_1 et Ω_2 mais avec des viscosité différentes. Introduisons dans les équations un milieu fictif de viscosité μ_0 et le taux de déformation libre $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})$ défini par :

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = \left[\frac{1}{2\mu(\mathbf{x})} - \frac{1}{2\mu_0} \right] \mathbf{s}(\mathbf{x}) \quad (1.14)$$

où $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ est le déviateur des contraintes défini par :

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x})\mathbf{I} \quad (1.15)$$

On aboutit alors au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{d}(\mathbf{x}) = \nabla_s \mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = 2\mu_0(\mathbf{d}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})) - p(\mathbf{x})\mathbf{I} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \quad \text{antipériodique} \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad \text{périodique} \end{array} \right. \quad (1.16)$$

Pour toute fonction f on associe \widehat{f} sa transformée de Fourier définie par :

$$\widehat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \exp(-i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) dV \quad (1.17)$$

où i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$ et $\boldsymbol{\xi}$ est le vecteur d'onde. On note en particulier que pour $\boldsymbol{\xi} = 0$ la transformée de Fourier devient la moyenne de la quantité f , i.e $\widehat{f}(0) = \langle f(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega}$.

Dans le domaine de Fourier, le problème (1.16) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\xi} = 0 \\ \widehat{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\xi}) = i\widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi}) \otimes_s \boldsymbol{\xi} \\ \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\xi}) = 2\mu_0(\widehat{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\xi}) - \widehat{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\xi})) - \widehat{p}(\boldsymbol{\xi})\mathbf{I} \\ i\widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\xi} = \widehat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi}) \end{array} \right. \quad (1.18)$$

La solution pour le déviateur des contraintes lorsque $\widehat{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\xi})$ et $\widehat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi})$ sont donnés est :

$$\widehat{\mathbf{s}}(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{\boldsymbol{\Upsilon}}(\boldsymbol{\xi}) - \widehat{\boldsymbol{\Delta}}(\boldsymbol{\xi})^0 : \widehat{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\xi}) \quad (1.19)$$

$\widehat{\boldsymbol{\Upsilon}}(\boldsymbol{\xi})$ est défini par :

$$\widehat{\boldsymbol{\Upsilon}}(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{2i}{\|\boldsymbol{\xi}\|^2} (\mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \widehat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi})) \otimes_s \boldsymbol{\xi}, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \neq 0 \quad (1.20)$$

et $\widehat{\Upsilon}(\boldsymbol{\xi}) = 0$ lorsque $\boldsymbol{\xi} = 0$. Le tenseur d'ordre deux $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi})$ est défini par :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi}) &= \begin{cases} \mathbf{I} - \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}) & \forall \boldsymbol{\xi} \neq 0 \\ 0 & \text{si } \boldsymbol{\xi} = 0 \end{cases} \\ \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}) &= \begin{cases} \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}\|^2} \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi} & \forall \boldsymbol{\xi} \neq 0 \\ 0 & \text{si } \boldsymbol{\xi} = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Le tenseur d'ordre quatre $\widehat{\Delta}(\boldsymbol{\xi})^0$ a pour expression :

$$\widehat{\Delta}(\boldsymbol{\xi})^0 = 2\mu_0(\mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi}) \underline{\otimes} \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}) \underline{\otimes} \mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi})), \quad \forall \boldsymbol{\xi} \neq 0 \quad (1.22)$$

et $\widehat{\Delta}(\boldsymbol{\xi})^0 = 0$ lorsque $\boldsymbol{\xi} = 0$ et où $\underline{\otimes}$ est le produit tensoriel symétrisé de deux tenseurs d'ordre deux : $(\mathbf{a} \underline{\otimes} \mathbf{b})_{ijkl} = (a_{ik}b_{jl} + a_{il}b_{jk})/2$.

La déformation libre $\boldsymbol{\eta}$ est donnée par l'équation (1.14). En posant :

$$\frac{1}{2\mu(\mathbf{x})} = \frac{1}{2\mu} I_1(\mathbf{x}), \quad I_1(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_2 \end{cases} \quad (1.23)$$

On aboutit alors à une équation intégrale pour le déviateur des contraintes :

$$\widehat{\mathbf{s}}(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{\Upsilon}(\boldsymbol{\xi}) - \widehat{\Delta}^0(\boldsymbol{\xi}) : \left[\frac{1}{2\mu} \widehat{I}_1(\boldsymbol{\xi}) * \widehat{\mathbf{s}}(\boldsymbol{\xi}) - \frac{1}{2\mu_0} \widehat{\mathbf{s}}(\boldsymbol{\xi}) \right] \quad (1.24)$$

où "*" désigne le produit de convolution.

Cette équation intégrale est résolue à l'aide du schéma itératif :

$$\widehat{\mathbf{s}}^{k+1}(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{\Upsilon}(\boldsymbol{\xi}) - \widehat{\Delta}^0(\boldsymbol{\xi}) : \left[\frac{1}{2\mu} \widehat{I}_1(\boldsymbol{\xi}) * \widehat{\mathbf{s}}^k(\boldsymbol{\xi}) - \frac{1}{2\mu_0} \widehat{\mathbf{s}}^k(\boldsymbol{\xi}) \right] \quad (1.25)$$

Ce schéma peut-être simplifié en utilisant l'identité suivante pour tout champ de contrainte en équilibre avec la force de volume \mathbf{f} :

$$\widehat{\Delta}(\boldsymbol{\xi})^0 : \left[\frac{1}{2\mu_0} \widehat{\mathbf{s}}^k(\boldsymbol{\xi}) \right] = \widehat{\mathbf{s}}^k(\boldsymbol{\xi}) - \widehat{\Upsilon}(\boldsymbol{\xi}) \quad (1.26)$$

Il vient alors finalement :

$$\widehat{\mathbf{s}}^{k+1}(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{\mathbf{s}}^k(\boldsymbol{\xi}) - \widehat{\Delta}(\boldsymbol{\xi})^0 : \left[\frac{1}{2\mu} \widehat{I}_1(\boldsymbol{\xi}) * \widehat{\mathbf{s}}^k(\boldsymbol{\xi}) \right] \quad (1.27)$$

Le schéma itératif est alors initialisé avec la contrainte :

$$\widehat{\mathbf{s}}^{k=1}(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{\Upsilon}(\boldsymbol{\xi}) \quad (1.28)$$

A convergence du schéma, le taux de déformation est défini par :

$$\widehat{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\mu} \widehat{I}_1(\boldsymbol{\xi}) * \widehat{\mathbf{s}}(\boldsymbol{\xi}) \quad (1.29)$$

Par intégration dans le domaine de Fourier, on déduit le champ de vitesse :

$$\widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} -\frac{2i}{\|\boldsymbol{\xi}\|^2} \widehat{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\xi} & \forall \boldsymbol{\xi} \neq 0 \\ \mathbf{V} & \text{si } \boldsymbol{\xi} = 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

La vitesse macroscopique \mathbf{V} est indéterminée puisqu'il s'agit de la grandeur recherchée pour l'identification de la perméabilité macroscopique. Le champ de vitesse est donc connu pour toute valeur de $\boldsymbol{\xi}$ excepté pour $\boldsymbol{\xi} = 0$. Une autre manière d'exprimer cela est de dire que le champ de vitesse obtenu par intégration est défini à une constante près et cette constante est \mathbf{V} . Elle est identifiée avec la condition $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \Omega_2$. En pratique, on calcule le champ de vitesse périodique à moyenne égale à 0. Ce champ noté, $\mathbf{v}^*(\mathbf{x})$ est obtenu en utilisant l'équation (1.30) dans laquelle on pose $\mathbf{V} = 0$. Le champ de vitesse total est donc $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}^*(\mathbf{x})$. Finalement en considérant un point \mathbf{x}_0 appartenant à la phase solide on déduit que $\mathbf{V} = -\mathbf{v}^*(\mathbf{x}_0)$.

1.1.2.3 Procédure

On décrit ici un peu en plus en détail la procédure d'intégration numérique du schéma itératif. On remplace la transformée de Fourier continue par une transformée de Fourier discrète. Pour cela, on discrétise le vecteur d'onde $\boldsymbol{\xi}$ avec N nombre d'ondes :

$$\boldsymbol{\xi} = \left(\frac{2\pi n_1}{L_1}, \frac{2\pi n_2}{L_2}, \frac{2\pi n_3}{L_3} \right) \quad (1.31)$$

où n_1, n_2 et n_3 sont les nombres d'onde, ce sont des entiers naturels, $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ qui varient de $-N/2$ à $N/2 - 1$ soit N nombre d'ondes dans chaque direction de l'espace.. Pour les problèmes tridimensionnels, on discrétise donc à l'aide N^3 vecteurs d'ondes.

On note $\boldsymbol{\xi}_n$ les vecteurs d'ondes discrets définis par l'équation (1.31). Ainsi, avec un léger abus de langage, mais pour des raisons de simplicité d'écriture, on utilise un seul indice n bien qu'il corresponde à deux indices n_1, n_2 pour les problèmes bidimensionnels et trois indices n_1, n_2, n_3 pour le cas 3D. On note, pour tout champ $f(\mathbf{x})$, sa transformée de Fourier discrète par :

$$\widehat{f}_n = \widehat{f}(\boldsymbol{\xi}_n) \quad (1.32)$$

Sous la forme discrète, le schéma de résolution s'écrit donc :

Initialisation :	$\hat{\sigma}_n^0 = \hat{\Upsilon}_n$
Itération i :	$\hat{\mathbf{d}}_n^k = \frac{1}{2^\mu} \sum_{m=-N/2}^{N/2} \hat{I}_1(\boldsymbol{\xi}_{n-m}) : \hat{\sigma}_m^k, \quad \forall n \in \mathbb{N},$
	critère de convergence
	$\hat{\sigma}_n^{k+1} = \hat{\sigma}_n^k - \hat{\Delta}_n^0 : \hat{\mathbf{d}}_n^k, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

A chaque itération, on doit donc réaliser un produit de convolution discret entre la transformée de Fourier de la fonction caractéristique I_1 et la contrainte. Deux stratégies peuvent être mises en oeuvre :

- La première consiste à calculer la transformée de Fourier inverse à $\hat{\sigma}_n^k$ pour obtenir les σ_n^k avec $n = -N/2..N/2 - 1$ qui représentent les valeurs de la contrainte sur une grille régulière dans l'espace réel. On effectue ensuite le produit avec la fonction caractéristique I_1 en discrétisant la cellule élémentaire en pixels et on détermine les valeurs du taux de déformation dans chaque pixel. On calcule ensuite $\hat{\mathbf{d}}_n^k$ avec la transformée de Fourier rapide. Il s'agit de l'approche proposée par Moulinec et Suquet [53].
- La seconde stratégie repose sur l'utilisation des fonctions de forme introduites dans le cadre des méthodes FFT par Bonnet [13]. Les fonctions de forme sont les expressions analytiques exactes des transformées de Fourier des fonctions caractéristiques des phases, connues pour un certain nombre de géométries simples. La transformée de Fourier rapide est encore utilisée pour réaliser le produit de convolution. L'utilisation des fonctions de forme présentent plusieurs avantages, notamment elles améliorent très significativement la vitesse de convergence de la méthode.

Dans ce travail, nous utilisons la seconde méthode basée sur les fonctions de forme. Rappelons quelques propriétés essentielles et expressions pour des géométries usuelles. Le coefficient de forme associé à la phase Ω_α est donc défini par :

$$\hat{I}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_\alpha} \exp(-i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}) dV \quad (1.33)$$

Notons tout d'abord que pour $\boldsymbol{\xi} = 0$ on a :

$$\hat{I}_\alpha(0) = \frac{|\Omega_\alpha|}{|\Omega|} = c_\alpha \quad (1.34)$$

où c_α est la fraction volumique de la phase α .

Par ailleurs, les fonctions caractéristiques des phases satisfont à l'équation :

$$\sum_{\alpha=1}^2 I_\alpha(\mathbf{x}) = 1 \quad (1.35)$$

Dans le domaine de Fourier cette équation devient :

$$\sum_{\alpha=1}^2 \hat{I}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) = Y(\boldsymbol{\xi}) \quad (1.36)$$

où $Y(\boldsymbol{\xi})$ est la fonction qui est nulle pour toute valeur de $\boldsymbol{\xi} \neq 0$ et qui prend la valeur 1 lorsque $\boldsymbol{\xi} = 0$.

Ainsi, pour un milieu à deux phases, le coefficient de forme du second constituant est connu si le coefficient du premier constituant est lui même connu.

Le coefficient de forme d'une ellipse est :

$$I_2(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 2c_2 \frac{J_1(\eta)}{\eta} & \forall \boldsymbol{\xi} \neq 0 \\ c_2 & \text{si } \boldsymbol{\xi} = 0 \end{cases}, \quad \eta = \sqrt{\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\xi}}, \quad c_2 = \frac{\pi a_1 a_2}{|\Omega|} \quad (1.37)$$

où \mathbf{a} est le tenseur d'ordre deux qui a pour valeur principales a_1^2 et a_2^2 où a_1, a_2 sont les demi-axes de l'ellipse.

Pour une inclusion ellipsoïdale, le coefficient de forme a pour expression :

$$I_2(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 3c_2 \frac{\sin(\eta) - \eta \cos(\eta)}{\eta^3} & \forall \boldsymbol{\xi} \neq 0 \\ c_2 & \text{si } \boldsymbol{\xi} = 0 \end{cases}, \quad \eta = \sqrt{\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\xi}}, \quad c_2 = \frac{4\pi a_1 a_2 a_3}{3|\Omega|} \quad (1.38)$$

où \mathbf{a} a pour valeurs principales a_1^2, a_2^2 et a_3^2 où a_1, a_2, a_3 sont les demi-axes de l'ellipsoïde.

1.1.2.4 Exemple : Ecoulement autour d'un cylindre

Le problème de l'écoulement de Stokes à travers des réseaux périodiques de cylindres a déjà été largement étudié dans la littérature [76, 8, 74, 22, 36, 37, 80], une liste plus exhaustive des travaux portant sur les calculs analytiques et/ou numériques de la perméabilité peut être trouvée dans [14]. On considère un réseau périodique de cylindres. La cellule élémentaire est représentée sur la figure ci-dessous. Elle est définie par un carré contenant un inclusion circulaire de rayon R . En résolvant un problème plan et un problème anti-plan, on peut déterminer toutes les composantes du tenseur de perméabilité.

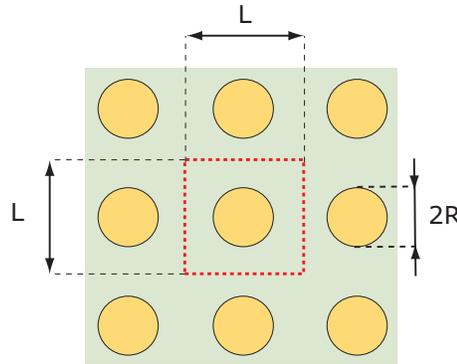


FIGURE 1.2 – Réseau tétragonal de cylindres de section circulaire.

Pour le problème plan on simule l'écoulement dans la direction x_1 en imposant le gradient de pression J_1 et on pose $J_2 = 0$ et $J_3 = 0$. La force de volume dans la direction x_1 a pour expression dans la phase solide :

$$f_1 = -\frac{1 - \pi R^2}{\pi R^2} J_1, \quad f_2 = f_3 = 0, \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega_2 \quad (1.39)$$

Pour le problème antiplan, on impose un gradient de pression J_3 dans la direction x_3 et la force de volume vaut :

$$f_3 = -\frac{1 - \pi R^2}{\pi R^2} J_3, \quad f_1 = f_2 = 0, \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega_2 \quad (1.40)$$

Sur la figure 1.3 on donne les résultats obtenus par [51] pour la perméabilité transverse (K_{11}) et longitudinale (K_{33}) en fonction du rayon de l'inclusion. Les résultats obtenus par la FFT sont comparés à ceux de Sparrow and Loeffler [76], Sangani and Acrivos [74] et Wang [80]. Les calculs sont réalisés sur une cellule élémentaire normalisée, c'est à dire de dimension 1 dans chaque direction de l'espace. Les perméabilités affichées sont donc des perméabilités adimensionnées K_{ij}/L^2 où L est la distance réelle entre le centre séparant deux cylindres voisins.

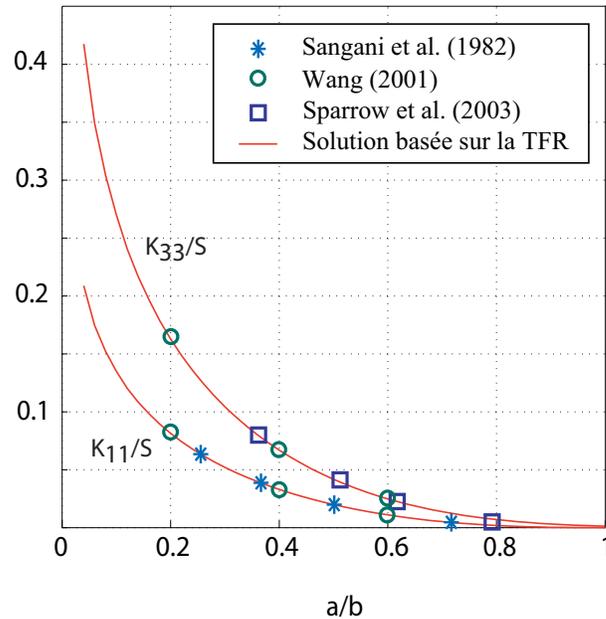


FIGURE 1.3 – Perméabilité longitudinale (K_{11}/L^2) et transverse (K_{33}/L^2) en fonction du rapport $2R/L$ pour un écoulement à travers un réseau de cylindres de rayon R .

1.2 Milieu multiporeux

Un milieu multiporeux est un milieu contenant plusieurs échelles de porosité ou plusieurs phases poreuses. Dans cette section présente les modélisations par chan-

gement d'échelle pour le calcul de la perméabilité macroscopique de ces milieux multiporeux.

1.2.1 Milieux poreux à plusieurs échelles de porosité

1.2.1.1 Positionnement du problème

On considère un milieu poreux à deux échelles de porosité décrit sur la figure 1.4 à travers lequel s'écoule un fluide visqueux newtonien. L'écoulement est incompressible et à faible nombre de Reynolds. Ce problème fait apparaître trois échelles caractéristiques :

- L'échelle microscopique dont la taille caractéristique est notée l_2 , c'est l'échelle des plus petits pores,
- L'échelle des macropores ou échelle mésoscopique, avec la taille caractéristique l_1 ,
- L'échelle macroscopique où l'on définit des grandeurs homogénéisées, en particulier la perméabilité macroscopique qui dépend des deux populations de pores.

La figure 1.4 fait aussi apparaître une longueur l'_2 caractéristique de la couche limite à la paroi entre la matrice contenant les micropores et les macrocavités. Cette zone de transition et son rôle dans la description des phénomènes de transports en milieux poreux a fait l'objet de nombreux travaux dans la littérature sur lesquels nous reviendrons par la suite.

La modélisation par homogénéisation des propriétés de transport de milieux à deux échelles de porosité nécessite donc une procédure par double homogénéisation. La première homogénéisation consiste à déterminer la perméabilité associée à la matrice contenant les micropores. Cette démarche a déjà été décrite dans la section précédente. Dans cette section on se focalise donc essentiellement sur la seconde homogénéisation, partant de l'échelle mésoscopique (ou échelle intermédiaire) pour obtenir la perméabilité homogénéisée.

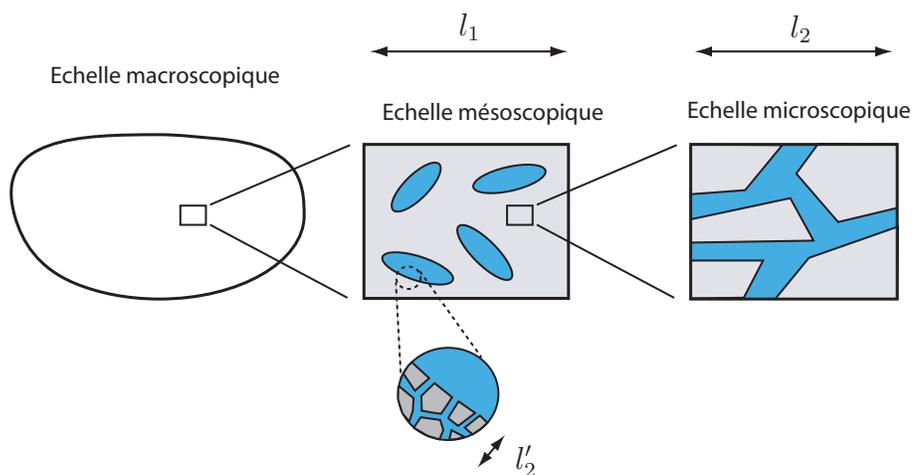


FIGURE 1.4 – Schématisation du milieu à deux échelles de porosité.

Le processus de double homogénéisation a été étudié par homogénéisation périodique par Auriault et Boutin [5, 6, 7], Royer et al. [67], Boutin et al. [15], Olny et Boutin [63], Royer et Boutin [68]. On admet que l'écoulement dans les micropores et les macropores est régi par les équation de Stokes. A l'échelle intermédiaire, après une première procédure d'homogénéisation, la matrice poreuse contenant les plus petits pores est remplacée par un milieu homogène équivalent de Darcy de perméabilité \mathbf{K} . On admet que la porosité est isotrope et on pose $\mathbf{K} = k\mathbf{I}$. Nous la distinguerons de la perméabilité macroscopique ou homogénéisée en notant cette dernière \mathbf{K}^{hom} . La vitesse d'écoulement dans la matrice poreuse est donc solution des équations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{\mu}\mathbf{K}\cdot\nabla p(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ \operatorname{div}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) &= 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_1 \end{aligned} \tag{1.41}$$

où μ est la viscosité dynamique du fluide, Ω_1 désigne le domaine occupé par la matrice poreuse, $p(\mathbf{x})$ est la pression.

Dans les macropores, la vitesse satisfait aux équations de Stokes :

$$\begin{aligned} \mu\Delta\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \nabla p(\mathbf{x}) &= 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_2 \\ \operatorname{div}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) &= 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_2 \end{aligned} \tag{1.42}$$

Dans ces équations, Ω_2 est le domaine occupé par les macropores.

Il reste à clarifier les conditions aux bords de la cellule ainsi que les conditions d'interface entre les deux domaine Ω_1 et Ω_2 . La cellule est constituée de deux milieux où la vitesse et la pression satisfont à des équations de nature différente. En particulier, les conditions à la frontière de la matrice poreuse Ω_1 sont des conditions pour la pression $p(\mathbf{x})$ et la vitesse normale $\mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}$. Pour les macropores, les conditions à la frontière sont des conditions en vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ et pour le vecteur contrainte $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}$. La contrainte dans les macropores est donnée par :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = 2\mu\mathbf{d}(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x})\mathbf{I}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_2 \tag{1.43}$$

où $\mathbf{d}(\mathbf{x})$ est le taux de déformation que l'on rappelle ci-dessous :

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}) = \nabla_s \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_2 \tag{1.44}$$

Dès lors, la nature des conditions à l'interface se pose pour fermer le problème. Deux modélisations sont usuellement employées pour décrire les phénomènes d'écoulement à la jonction des deux milieux : le modèle d'interface de Beavers-Joseph [9] et le modèle de Brinkman [16, 17]. Une autre approche consiste à contourner la difficulté en remplaçant les équations de Stokes par l'équation de Darcy dans les macropores. On détaille chacune de ces approches.

1.2.1.2 Approche simplifiée utilisant uniquement l'équation de Darcy

Une approche simplifiée pour estimer la perméabilité consiste à utiliser l'équation de Darcy dans les macropores (à la place de l'équation de Stokes) et en considérant une perméabilité équivalente. Le problème s'écrit donc :

$$-\mu h(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \nabla p(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.45)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.46)$$

avec :

$$h(\mathbf{x}) = \begin{cases} h & \bar{\mathbf{x}} \in \Omega_1 \\ h_{eq} & \bar{\mathbf{x}} \in \Omega_2 \end{cases} \quad (1.47)$$

où $h = 1/k$ est la résistivité hydraulique de la matrice poreuse.

Il reste alors à choisir la valeur de la résistivité équivalente, h_{eq} pour les macropores. Le choix le plus simple consiste à considérer la valeur 0 pour la résistivité équivalente, ce qui correspond à une perméabilité infinie. D'autres choix sont possibles, voir par exemple [40] ou [52], mais les valeurs proposées ne sont admissibles que pour des géométries circulaires et sphériques de ces macropores.

1.2.1.3 Le modèle d'interface de Beaver-Joseph

Les conditions à l'interface entre le milieu de Darcy et le milieu de Stokes sont données par les équations du modèle de Beavers-Joseph [9] qui s'écrivent :

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma : \begin{cases} \mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{v}^{(2)}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu} \\ \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau} = 2\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{d}^{(2)}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau} = \lambda (\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}^{(2)}(\mathbf{x})) \cdot \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu} = 2\mu \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{d}^{(2)}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu} - p^{(2)}(\mathbf{x}) = -p^{(1)}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (1.48)$$

Dans ces équations, les exposants "(1)" et "(2)" font référence à la quantité prise dans la phase poreuse Ω_1 et fluide Ω_2 respectivement. Les vecteurs $\boldsymbol{\nu}$ et $\boldsymbol{\tau}$ sont respectivement le vecteur normal et tangentiel à l'interface S . La première équation résulte de la conservation de la masse qui se traduit par la continuité de la vitesse normale. La seconde équation donne le saut de la composante tangentielle de la vitesse à l'interface qui est proportionnel à la composante tangentielle du vecteur contrainte. Dans cette équation λ est un paramètre du modèle de Beavers-Joseph. La dernière équation est la continuité de la composante normale du vecteur contrainte.

Le paramètre λ est généralement choisi sous la forme :

$$\lambda = \frac{\mu}{\sqrt{k}} \delta \quad (1.49)$$

où k est la perméabilité du milieu poreux et δ est appelé coefficient (sans dimension) de glissement. Cette forme a été validée avec des expériences menées par

Beavers et al. [10]. L'introduction du facteur \sqrt{k} au dénominateur permet de tenir compte de la géométrie du milieu poreux. Pour un milieu poreux très perméable le coefficient λ est petit et le saut du champ de vitesse est important. Inversement, si k est petit, alors λ est grand, le saut est faible. Dans le cas limite où le milieu est imperméable, $k = 0$ alors $\lambda = +\infty$, la vitesse dans la région poreuse est nulle et on retrouve alors la condition d'adhérence à la paroi :

$$\mathbf{v}^{(2)}(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in S \quad (1.50)$$

Le coefficient de glissement a été déterminé expérimentalement par Beavers et Joseph [9] pour une mousse métallique de Nickel et ont identifié des valeurs égales à 0.78, 1.45 and 4.0 pour des microstructures avec des tailles de pores moyens de 0.016, 0.034 and 0.045 inches respectivement. Pour l'Aloxite c'est une valeur de 0.1 qui a été déterminée pour des pores de taille moyenne égale 0.013 et 0.027 inches. D'autres travaux se sont basés sur des simulation numériques pour obtenir le coefficient de glissement, ainsi Sahraoui et Kaviany [71] un coefficient de glissement égal à 2 pour un réseau poreux périodique de cylindres.

1.2.1.4 Modélisation avec l'équation de Brinkman

Une approche alternative consiste à remplacer l'équation de Darcy par l'équation de Brinkman [16, 17] :

$$\mu_e \Delta \mathbf{v}(\mathbf{x}) - \frac{\mu}{k} \mathbf{v}(\mathbf{x}) - \nabla p(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_1 \quad (1.51)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_1 \quad (1.52)$$

Le terme diffusif est accompagné d'un coefficient de viscosité dynamique équivalent μ_e dont la valeur est différente de μ . On pose :

$$\mu_e = \mu \alpha \quad (1.53)$$

où α est un coefficient (sans dimension) à ajuster pour tenir compte des effets de couche limite à la paroi entre la matrice poreuse et les macropores. La détermination du coefficient k ne pose aucune ambiguïté, il peut être déterminé par exemple par homogénéisation numérique à partir de l'image de la microstruture en suivant la démarche présentée dans la première partie de ce chapitre. S'agissant du coefficient α , sa détermination est plus délicate et il n'existe pas à ce jour de consensus sur la méthode d'identification. En utilisant, les approches par développement asymptotique, Auriault [2] introduit les termes d'ordres supérieurs dans la loi de filtration macroscopique et montre l'équivalence avec l'équation de Brinkman lorsque l'on conserve tous les termes jusqu'à l'ordre trois. Notons toutefois que cette approche suppose que la microstructure à coeur du matériau et près de la surface est identique. Les processus de fabrications de matériaux multiporeux peuvent produire des matériaux avec des porosités plus grandes ou plus faibles près des interfaces/surfaces libres qu'à coeur du matériau. Ceci a notamment été observé par Mezhoud [43] Mezhoud et al. [44] sur des polymères à deux échelles

de porosité.

Dans de nombreuses applications impliquant des réseaux périodiques de particules solides fixes (voir par exemple Freed et Muthukumar [25], Muthukumar et Greed [56], Sanchez-Palencia [73], Levy [39], Allaire [1]), les auteurs utilisent $\alpha = 1$. Des études numériques et expérimentales de Givler et Altobelli [26], Martys et al. [41], Nabovati et Amon [57] ont été fournies dans la littérature et donnent des valeurs de α qui peuvent être plus grandes ou plus petites que 1. Par exemple, Taut [77] a identifié le paramètre de Brinkman α pour des écoulements à travers un milieu poreux constitué d'une couche vide et d'une couche constituée de particules circulaires fixes. Les résultats montrent que le coefficient α dépend fortement de la porosité et que sa valeur varie entre 0 (matériau dont la porosité est proche de 0) et 0.5 (pour un milieu fortement poreux).

Les conditions d'interface entre les deux milieux (milieu poreux de Brinkman et milieu fluide avec l'équation de Stokes) s'écrivent :

$$\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^{(2)}(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu} \quad \forall \mathbf{x} \in S \quad (1.54)$$

qui représentent la continuité du champ de vitesse et du vecteur contrainte à l'interface. La contrainte dans la matrice poreuse est donnée par :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = 2\mu_e \mathbf{d}(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x})\mathbf{I}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_1 \quad (1.55)$$

où $\mathbf{d}(\mathbf{x})$ est le taux de déformation calculé avec la vitesse dans la matrice poreuse. Dans les macropores, la contrainte a pour expression (1.43).

Il est à noter que certains auteurs ont proposé une condition de saut pour le vecteur contrainte à l'interface entre deux régions de Brinkman et de Stokes [61, 62]. Nous n'utilisons pas cette condition dans ce travail.

1.2.2 Cas général : milieu à deux phases poreuses

L'équation de Brinkman permet aussi de traiter des situations plus générales que la modélisation couplant les équations de Darcy et Stokes avec la condition d'interface de Beavers-Joseph. Par exemple : un milieu poreux contenant des inclusions imperméables, un écoulement autour d'inclusions perméables ou encore un milieu constitué de deux phases poreuses. Toutes ces situations sont des cas limites d'une modélisation d'un écoulement en milieu multiporeux avec l'équation de Brinkman. La figure 1.5 montre un exemple de milieu à deux phases poreuses. Ce type de configuration a notamment été étudié par Auriault et al. [3] dans le contexte des méthodes d'homogénéisation périodique.

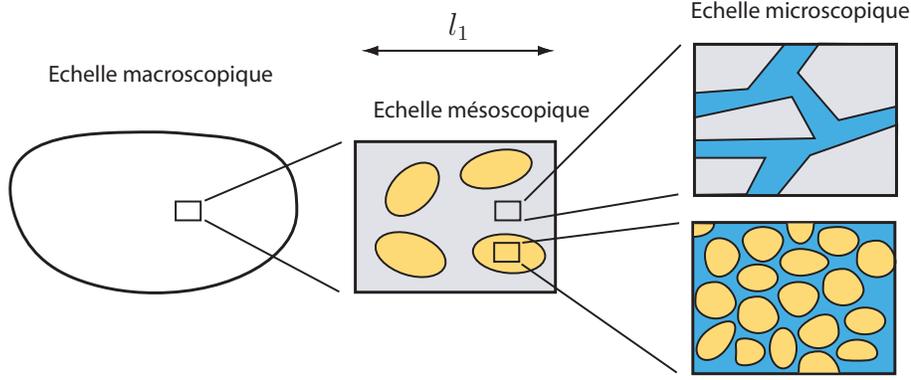


FIGURE 1.5 – Schématisation d'un milieu à deux phases poreuses.

Considérons donc un milieu à deux phases poreuses, l'une a la perméabilité k_1 et occupe le domaine Ω_1 , la seconde a pour perméabilité k_2 et occupe le domaine Ω_2 . On note également $h_1 = 1/k_1$ et $h_2 = 1/k_2$ les résistivités hydrauliques des phases. On note ensuite $\mu\alpha_1$ et $\mu\alpha_2$ les coefficients de viscosité dynamique équivalents dans chacune des phases. Le problème à résoudre s'écrit :

$$\mu_e(\mathbf{x})\Delta\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mu h(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \nabla p(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.56)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.57)$$

Avec les définitions suivantes pour les quantités $\mu_e(\mathbf{x})$ et $h(\mathbf{x})$:

$$\mu_e(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mu\alpha_1 & \mathbf{x} \in \Omega_f \\ \mu\alpha_2 & \mathbf{x} \in \Omega_s \end{cases}, \quad h(\mathbf{x}) = \begin{cases} h_1 & \mathbf{x} \in \Omega_f \\ h_2 & \mathbf{x} \in \Omega_s \end{cases} \quad (1.58)$$

Comme nous le verrons dans la suite, l'utilisation de l'équation de Brinkman dans l'ensemble du milieu poreux est beaucoup plus adapté pour la résolution numérique par la méthode FFT. En effet, les équations de Stokes et de Darcy sont de natures différentes. Or, les approches par FFT s'appliquent plutôt à des milieux hétérogènes, c'est à dire des milieux régis par les mêmes équations mais avec des propriétés différentes. Typiquement, pour les composites, on utilise les équations d'élasticité dans toutes les phases, seules les propriétés élastiques diffèrent d'une phase à l'autre. De cette manière on peut introduire un milieu de référence et l'opérateur de Green qui lui est associé.

Par ailleurs, la condition de Beaver-Joseph nécessite de considérer des champs discontinus et d'inclure une loi de comportement d'interface. La méthode FFT, sous sa forme standard, ne permet pas de traiter ce type de problème. Notons toutefois que la méthode FFT a récemment été étendue pour tenir compte de discontinuités d'interfaces dans les composites conducteurs de la chaleur [47] ou dans les composites élastiques [78] mais cela nécessite d'introduire un enrichissement pour tenir compte des sauts à l'interface. Nous n'abordons pas cette problématique dans ce travail de thèse.

Les conditions à l'interface des deux milieux de Brinkman restent inchangées et données par les équations (1.54).

1.3 Homogénéisation du problème de Brinkman

1.3.1 Reformulation du problème

Nous allons reformuler le problème sous une autre forme, mieux adaptée pour sa résolution par la méthode FFT. Tout d'abord, introduisons le vecteur $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$ défini par :

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = \mu h(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.59)$$

La contrainte en tout point de la cellule s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = 2\mu_e(\mathbf{x}) \mathbf{d}(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x}) \mathbf{I}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.60)$$

Son déviateur, $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ a donc pour expression :

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = 2\mu_e(\mathbf{x}) \mathbf{d}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.61)$$

On peut donc réécrire le problème sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{s}(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x}) \mathbf{I} \\ \mathbf{s}(\mathbf{x}) = 2\mu_e(\mathbf{x}) \mathbf{d}(\mathbf{x}) \\ \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = \mu h(\mathbf{x}) \mathbf{v} \\ \mathbf{d} = \nabla_s \mathbf{v} \\ \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \end{array} \right. \quad (1.62)$$

Etablissons quelques propriétés utiles pour la suite.

Le champ de vitesse étant à divergence nulle (écoulement incompressible), il vient alors :

$$\mathbf{v} = \operatorname{div}(\mathbf{x} \otimes \mathbf{v}) \quad (1.63)$$

En utilisant le théorème de la divergence, on peut formuler la propriété suivante :

$$\langle \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rangle_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{x} dS \quad (1.64)$$

Calculons la moyenne de la quantité $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$. En partant de la première équation dans (1.62) on peut écrire :

$$\langle \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) \rangle_\Omega = \langle \boldsymbol{\omega} \rangle_\Omega \quad (1.65)$$

En utilisant le théorème de la divergence il vient alors :

$$\langle \boldsymbol{\omega} \rangle_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.66)$$

1.3.2 Les conditions au bord

Nous allons maintenant clarifier les conditions au bord de la cellule élémentaire Ω . Effectivement, plusieurs types de conditions aux limites ont été utilisées dans la littérature. Des modèles fondés sur des cellules simples (cylindre/sphère solide entourée d'une couche de fluide de forme cylindrique/sphérique) a été proposé à l'origine par Happel [30] et Kuwabara [34] pour décrire l'écoulement de Stokes dans un réseau de cylindres et de sphères solides. Les deux approches diffèrent dans le type de conditions aux limites adoptées sur la surface extérieure de la cellule. Ainsi Happel a proposée une condition de contrainte de cisaillement nulle sur le bord tandis que Kuwabara a utilisé une condition de rotation nulle sur la cellule, également reprise par Silva et Ginzburg [75]. D'autres conditions ont été par la suite proposée : vitesse tangentielle imposée (Mehta et Morse [42]), sa dérivée radiale nulle (Kvashnin [35])...

Dans cette section nous proposons d'utiliser trois types de conditions au bord qui respectent le Lemme de Hill Mandel (étendu ici pour des milieux poreux dont l'écoulement est régi pas l'équation de Brinkman).

1.3.2.1 Conditions périodiques

On admet que le champ de vitesse total peut se décomposer en une vitesse moyenne \mathbf{V} , et une fluctuation périodique notée $\mathbf{v}^*(\mathbf{x})$ qui est à moyenne nulle sur la cellule, i.e. $\langle \mathbf{v}^*(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = 0$. De la même manière, le champ de pression se décompose en deux termes, la fluctuation périodique p^* et un second terme $\mathbf{J} \cdot \mathbf{x}$ où \mathbf{J} est le gradient de pression macroscopique. En résumé, on a donc :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{V} + \mathbf{v}^*(\mathbf{x}), \quad p(\mathbf{x}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{x} + p^*(\mathbf{x}) \quad (1.67)$$

Le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ avec la décomposition (1.67), s'écrit donc :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}) - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{x})\mathbf{I} \quad (1.68)$$

Où $\boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x})$ est défini par :

$$\boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}) = 2\mu_e(\mathbf{x})\mathbf{d}(\mathbf{v}^*(\mathbf{x})) - p^*(\mathbf{x})\mathbf{I} \quad (1.69)$$

On admet que $\boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}$ est antipériodique sur les bords de la cellule, avec \mathbf{n} la normale unitaire prise sur le bord de la cellule.

En utilisant l'équation (1.66), on déduit donc que :

$$\langle \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dS - \mathbf{J} \cdot \left[\frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \mathbf{x} \otimes \mathbf{n} dS \right] \quad (1.70)$$

La première intégrale à droite de l'égalité est nulle puisque $\boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x})$ est antipériodique et la seconde intégrale est égale au tenseur identité d'ordre deux. Il vient donc :

$$\langle \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = -\mathbf{J} \quad (1.71)$$

On note \mathbf{W} la moyenne de la quantité $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$ sur la cellule qui est donc égal à $-\mathbf{J}$. Par un léger abus de langage, on appelle également \mathbf{W} , le gradient de pression (mais en fait, il s'agit de l'opposé du gradient de pression). En résumé, et compte tenu de l'Eq. (1.68), on a $\boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) + (\mathbf{J}.\mathbf{x})\mathbf{I}$ qui est antipériodique et en remplaçant \mathbf{J} par $-\mathbf{W}$, les conditions de périodicité sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} & \text{ périodique} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}).\mathbf{n} - (\mathbf{W}.\mathbf{x})\mathbf{n} & \text{ antipériodique} \end{aligned} \tag{1.72}$$

Si on impose à la cellule une vitesse moyenne \mathbf{V} , par linéarité, il existe un tenseur de localisation $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ tel que :

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = \mu\mathbf{A}(\mathbf{x}).\mathbf{V} \tag{1.73}$$

Il vient alors :

$$\mathbf{W} = \langle \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = \mu\mathbf{H}^{hom}.\mathbf{V} \tag{1.74}$$

où \mathbf{H}^{hom} est la resistivité hydraulique macroscopique définie par :

$$\mathbf{H}^{hom} = \langle \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} \tag{1.75}$$

Si on impose le gradient de pression \mathbf{W} , alors il existe un tenseur de localisation $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ tel que :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mu}\mathbf{B}(\mathbf{x}).\mathbf{W} \tag{1.76}$$

Et il vient alors :

$$\mathbf{V} = \langle \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = \frac{1}{\mu}\mathbf{K}^{hom}.\mathbf{W} \tag{1.77}$$

où \mathbf{K}^{hom} est la perméabilité macroscopique définie par :

$$\mathbf{K}^{hom} = \langle \mathbf{B}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} \tag{1.78}$$

On reconnaît la loi de Darcy dans les relations (1.74) et (1.77). Les deux problèmes d'homogénéisation périodique (\mathbf{V} ou \mathbf{W} imposés) sont équivalents, c'est à dire que la resistivité \mathbf{H}^{hom} obtenue en imposant \mathbf{V} est l'inverse de la perméabilité \mathbf{K}^{hom} obtenue en imposant \mathbf{W} . Même si les deux problèmes sont rigoureusement équivalents, d'un point de vue numérique, on peut choisir un pilotage en vitesse moyenne imposée \mathbf{V} dans une formulation primale ou un pilotage en gradient de pression imposé, via \mathbf{W} , dans une formulation duale.

1.3.2.2 Conditions homogènes au contour

La condition de Dirichlet au bord de la cellule s'écrit :

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (1.79)$$

A partir de l'équation (1.64), on déduit donc que :

$$\langle \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = \mathbf{V} \quad (1.80)$$

On déduit ensuite la resistivité macroscopique en utilisant les relations (1.73) et (1.74).

La condition de Neumann au bord de la cellule s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{W} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (1.81)$$

En utilisant l'équation (1.66) on déduit que :

$$\langle \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = \mathbf{W} \quad (1.82)$$

On déduit ensuite la perméabilité macroscopique avec les relations (1.76) et (1.77).

1.3.3 Lemme de Hill-Mandel

Les conditions aux limites périodiques et les conditions homogènes au contour vérifient le lemme de Hill-Mandel, ou plutôt sa généralisation dans le contexte d'un milieu poreux hétérogène dans lequel l'écoulement est régi par l'équation de Brinkman. Partons de la première équation dans (1.62), on peut écrire :

$$\langle \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = \langle \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} \quad (1.83)$$

En utilisant l'égalité :

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) : \mathbf{d}(\mathbf{x}), \quad (1.84)$$

ainsi que le théorème de la divergence, il vient alors :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) : \mathbf{d}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) dS \quad (1.85)$$

Considérons les conditions aux limites périodiques (1.72). Le champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ est périodique tandis $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{W} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{n}$ est antipériodique. On déduit donc que :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) : \mathbf{d}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = \mathbf{W} \cdot \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \mathbf{x} (\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}) dS \quad (1.86)$$

En utilisant la propriété (1.64), il vient finalement :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) : \mathbf{d}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{V} \quad (1.87)$$

Considérons maintenant les conditions homogènes au contour. Pour la condition de Dirichlet, puisque $\mathbf{v} = \mathbf{V}$ sur le contour et en utilisant l'équation (1.66), on retrouve l'égalité (1.87). De même, avec la condition de Neumann, on remplace dans (1.85), $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}$ par $(\mathbf{W} \cdot \mathbf{x})\mathbf{n}$ et on utilise la propriété (1.66).

L'égalité (1.87) est donc une généralisation du Lemme de Hill-Mandel pour le problème de Brinkman, égalité qui est satisfaite pour les trois types de conditions utilisées : périodique, Dirichlet et Neumann.

1.4 Résolution du problème de Brinkman par FFT

1.4.1 Opérateur de Green

Un des points clés de la méthode FFT repose sur l'utilisation d'un opérateur de Green associé à un milieu de référence. Pour le problème de Brinkman nous considérons un milieu fictif de propriétés homogènes α_0 et h_0 . Dans le contexte de l'utilisation de la méthode FFT, ce sont les conditions périodiques au bord de la cellule qui sont considérées.

Considérons donc un milieu de Brinkman homogène et nous allons imposer des champs de polarisation $\mathbf{s}^*(\mathbf{x})$ et $\boldsymbol{\omega}^*(\mathbf{x})$ de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) - \mathbf{W} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{s}(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x})\mathbf{I} \\ \mathbf{s}(\mathbf{x}) = 2\mu\alpha_0\mathbf{d}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}^*(\mathbf{x}) \\ \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = \mu h_0\mathbf{v}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\omega}^*(\mathbf{x}) \\ \mathbf{d}(\mathbf{x}) = \nabla_s \mathbf{v}(\mathbf{x}) \\ \operatorname{div}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) = 0 \end{array} \right. \quad (1.88)$$

La solution de ce problème, pour $\mathbf{s}^*(\mathbf{x})$ et $\boldsymbol{\omega}^*(\mathbf{x})$ donnés, s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = -\mathbf{G}^0(\mathbf{x}) * \boldsymbol{\omega}^*(\mathbf{x}) - \overline{\boldsymbol{\Omega}}^0(\mathbf{x}) * \mathbf{s}^*(\mathbf{x}) \quad (1.89)$$

où "*" désigne le produit de convolution et où $\overline{\boldsymbol{\Omega}}^0$ est le transconjugué de $\boldsymbol{\Omega}^0$, c'est à dire $\overline{\boldsymbol{\Omega}}_{kij}^0$ est le conjugué de $\boldsymbol{\Omega}_{ijk}^0$ qui est invariant par la permutation des indices i et j . Les opérateurs de Green $\mathbf{G}^0(\mathbf{x})$ et $\boldsymbol{\Omega}^0(\mathbf{x})$ ont les expressions suivantes dans le domaine de Fourier, pour tout $\boldsymbol{\xi} \neq 0$:

$$\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{ijk}^0(\boldsymbol{\xi}) = \frac{i\lambda(\boldsymbol{\xi})}{2}(Q_{ik}(\boldsymbol{\xi})\xi_j + Q_{jk}(\boldsymbol{\xi})\xi_i), \quad (1.90)$$

$$\widehat{G}_{ij}^0 = \lambda(\boldsymbol{\xi})Q_{ij}(\boldsymbol{\xi}), \quad (1.91)$$

$$\lambda(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\mu(\alpha_0\|\boldsymbol{\xi}\|^2 + h_0)} \quad (1.92)$$

et où $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi})$ est le projecteur défini par l'équation (1.21). Lorsque $\boldsymbol{\xi} = 0$, les opérateurs de Green sont nuls si bien que le champ de vitesse défini par l'équation (1.89) est à moyenne égale à zéro.

1.4.1.1 Le schéma itératif

Si on considère les expressions suivantes pour les champs de polarisation $\boldsymbol{\omega}^*(\mathbf{x})$ et $\mathbf{s}^*(\mathbf{x})$ par :

$$\mathbf{s}^*(\mathbf{x}) = 2\mu(\alpha(\mathbf{x}) - \alpha_0)\mathbf{d}(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\omega}^*(\mathbf{x}) = \mu(h(\mathbf{x}) - h_0)\mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad (1.93)$$

Alors on obtient une équation intégrale pour le champ de vitesse :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{V} - \mathbf{G}^0(\mathbf{x}) * [\mu(h(\mathbf{x}) - h_0)\mathbf{v}(\mathbf{x})] \quad (1.94)$$

$$+ \overline{\boldsymbol{\Omega}}^0(\mathbf{x}) * [2\mu(\alpha(\mathbf{x}) - \alpha_0)\mathbf{d}(\mathbf{x})] \quad (1.95)$$

Dans cette équation, le taux de déformation $\mathbf{d}(\mathbf{x})$ dérive du champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ (c'est à dire que $\mathbf{d}(\mathbf{x}) = \nabla_s \mathbf{v}(\mathbf{x})$) de telle manière que l'équation ci-dessus est une équation intégralo-différentielle pour $\mathbf{v}(\mathbf{x})$.

Notons que dans cette équation on a ajouté le champ de vitesse moyen \mathbf{V} . On peut résoudre cette équation en utilisant le schéma itératif suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{k+1}(\mathbf{x}) &= \mathbf{V} - \mathbf{G}^0(\mathbf{x}) * [\mu(h(\mathbf{x}) - h_0)\mathbf{v}^k(\mathbf{x})] \\ &\quad - \overline{\boldsymbol{\Omega}}^0(\mathbf{x}) * [2\mu(\alpha(\mathbf{x}) - \alpha_0)\mathbf{d}^k(\mathbf{x})] \end{aligned} \quad (1.96)$$

avec $\mathbf{d}^k(\mathbf{x}) = \nabla_s \mathbf{v}^k(\mathbf{x})$.

Des simplifications de ce schéma itératif peuvent être effectuées pour faciliter son intégration numérique. D'abord, on montre que pour tout champ $\mathbf{d}^k(\mathbf{x})$ qui dérive du champ de vitesse $\mathbf{v}^k(\mathbf{x})$, on a la propriété :

$$\mathbf{G}^0(\mathbf{x}) * [\mu h_0 \mathbf{v}^k(\mathbf{x})] + \overline{\boldsymbol{\Omega}}^0(\mathbf{x}) * [2\mu \alpha_0 \mathbf{d}^k(\mathbf{x})] = \mathbf{v}^k(\mathbf{x}) - \mathbf{V} \quad (1.97)$$

Si bien que le schéma itératif (1.96) peut se réécrire sous la forme plus simple :

$$\mathbf{v}^{k+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^k(\mathbf{x}) - \mathbf{G}^0(\mathbf{x}) * \boldsymbol{\omega}^k(\mathbf{x}) - \overline{\boldsymbol{\Omega}}^0(\mathbf{x}) * \mathbf{s}^k(\mathbf{x}) \quad (1.98)$$

et dans lequel on a posé :

$$\boldsymbol{\omega}^k(\mathbf{x}) = \mu h(\mathbf{x}) \mathbf{v}^k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{s}^k(\mathbf{x}) = 2\mu \alpha(\mathbf{x}) \mathbf{d}^k(\mathbf{x}) \quad (1.99)$$

Une deuxième simplification est réalisée en notant que l'on a dans l'espace de Fourier :

$$\widehat{\mathbf{G}}^0(\boldsymbol{\xi}) \cdot \widehat{\boldsymbol{\omega}}^k(\boldsymbol{\xi}) + \overline{\boldsymbol{\Omega}}^0(\boldsymbol{\xi}) : \widehat{\mathbf{s}}^k(\boldsymbol{\xi}) = -\lambda(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\mathbf{E}}^k(\boldsymbol{\xi}) \quad (1.100)$$

avec :

$$\widehat{\mathbf{E}}^k(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi}) \cdot (i \widehat{\mathbf{s}}^k(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\xi} - \widehat{\boldsymbol{\omega}}^k(\boldsymbol{\xi})) \quad (1.101)$$

De cette manière il n'est pas nécessaire de calculer et de stocker les composantes des opérateurs de Green. Sous sa forme finale, le schéma itératif utilisé pour résoudre le problème de Brinkman est décrit ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\text{Initialisation : } & \widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \neq 0, \quad \widehat{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{V} \\
& \widehat{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\xi}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \\
\text{Itération : } & \widehat{\boldsymbol{\omega}}^k(\boldsymbol{\xi}) = \mu \widehat{h}(\boldsymbol{\xi}) * \widehat{\mathbf{v}}^k(\boldsymbol{\xi}), \quad \widehat{\mathbf{s}}^k(\boldsymbol{\xi}) = 2\mu \widehat{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) * \widehat{\mathbf{d}}^k(\boldsymbol{\xi}) \quad (1.102) \\
& \widehat{\mathbf{E}}^k(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi}) \cdot (i \widehat{\mathbf{s}}^k(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\xi} - \widehat{\boldsymbol{\omega}}^k(\boldsymbol{\xi})) \\
& \widehat{\mathbf{v}}^{k+1}(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{\mathbf{v}}^k(\boldsymbol{\xi}) + \lambda(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\mathbf{E}}^k(\boldsymbol{\xi}) \\
& \widehat{\mathbf{d}}^{k+1}(\boldsymbol{\xi}) = i \widehat{\mathbf{v}}^{k+1}(\boldsymbol{\xi}) \otimes_s \boldsymbol{\xi}
\end{aligned}$$

Le schéma itératif est initialisé avec la vitesse macroscopique, \mathbf{V} , le taux de déformation associé, \mathbf{d} est alors nul. A chaque itération la vitesse \mathbf{v}^k et le taux de déformation \mathbf{d}^k sont connus dans l'espace de Fourier. On peut alors calculer les quantités $\boldsymbol{\omega}^k(\boldsymbol{\xi})$ et $\mathbf{s}^k(\boldsymbol{\xi})$ qui dans l'espace de Fourier s'expriment à l'aide du produit de convolution avec les fonctions de forme associées à chacune des phases. Ce produit est effectué en utilisant l'algorithme FFT. On calcule ensuite la quantité \mathbf{E}^k qui a été introduit par l'équation (1.101). Notons que cette quantité est une mesure de la distance à l'équilibre de la solution calculée à l'itération k . Ainsi, on peut appliquer le critère de convergence suivant :

$$\frac{\|\mathbf{E}^k(\boldsymbol{\xi})\|}{\|\mathbf{W}^k\|} \leq \delta \quad (1.103)$$

Où \mathbf{W}^k est la valeur moyenne de $\boldsymbol{\omega}^k$ calculée à l'étape k que l'on détermine dans l'espace de Fourier par $\mathbf{W}^k = \widehat{\boldsymbol{\omega}}^k(0)$.

Si le test de convergence n'est pas vérifié, on incrémente le champ de vitesse $\widehat{\mathbf{v}}^{k+1}(\boldsymbol{\xi})$ et on détermine le taux de déformation associé $\widehat{\mathbf{d}}^{k+1}(\boldsymbol{\xi})$.

Comme pour l'élasticité, on utilise pour les coefficients du milieu de référence, α_0 et h_0 , les valeurs moyennes :

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \quad h_0 = \frac{h_1 + h_2}{2} \quad (1.104)$$

1.4.2 Procédure d'intégration numérique

Comme en section 1.1.2.3, on utilise la transformée de Fourier discrète, le schéma itératif s'écrit :

initialisation : $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_n^0 = 0$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_0^0 = \mathbf{V}$, $\hat{\mathbf{d}}_n^0 = 0$

iteration i : $\hat{\boldsymbol{\omega}}_n^k = \sum_p \mu h_p \sum_{m=-N/2}^{N/2} \hat{I}_p(\boldsymbol{\xi}_{n-m}) : \hat{\mathbf{v}}_m^k, \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

$\hat{\mathbf{s}}_n^k = \sum_p \mu \alpha_p \sum_{m=-N/2}^{N/2} \hat{I}_p(\boldsymbol{\xi}_{n-m}) : \hat{\mathbf{d}}_m^k, \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

$\hat{\mathbf{E}}_n^k = \mathbf{Q}_n \cdot (i \hat{\mathbf{s}}_n^k \cdot \boldsymbol{\xi}_n - \hat{\boldsymbol{\omega}}_n^k)$

critère de convergence

$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_n^{k+1} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_n^k - \hat{\boldsymbol{\Delta}}_n^0 : \hat{\mathbf{d}}_n^k, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\hat{\mathbf{v}}_n^{k+1} = \hat{\mathbf{v}}_n^k + \lambda_n \hat{\mathbf{E}}_n^k$

$\hat{\mathbf{d}}_n^{k+1} = i \hat{\mathbf{v}}_n^{k+1} \otimes_s \boldsymbol{\xi}_n$

A nouveau, on utilise ici les fonctions de forme pour \hat{I}_p et on effectue le produit de convolution discret avec la transformée de Fourier rapide

1.4.3 Illustration

A titre illustratif on considère un milieu biporeux constitué d'une matrice poreuse de perméabilité k_1 et de macropores de forme circulaire de rayon R . Dans le macropore, l'écoulement du fluide est régi par les équations de Stokes, on pose donc $\alpha_2 = 1$ et $h_2 = 0$. On pose également :

$$k_1 = 1 \text{Darcy}, \quad \mu = 10^{-3} \text{Pa.s}, \quad \alpha_1 = 1, \quad L = 10 \mu m \quad (1.105)$$

où L représente la longueur de la cellule élémentaire.

Dans cet exemple, la perméabilité macroscopique est isotrope et on pose $\mathbf{K}^{hom} = K^{hom} \mathbf{I}$. On impose la composante V_1 de la vitesse macroscopique pour déterminer K^{hom} . On présente les résultats pour la perméabilité adimensionnée K^{hom}/k sur la figure 1.6 en faisant varier le rayon de l'inclusion R/L . On observe que la perméabilité macroscopique augmente avec la taille du macropore qui montre l'influence de la seconde porosité, associée aux macropores, sur les propriétés de transport.

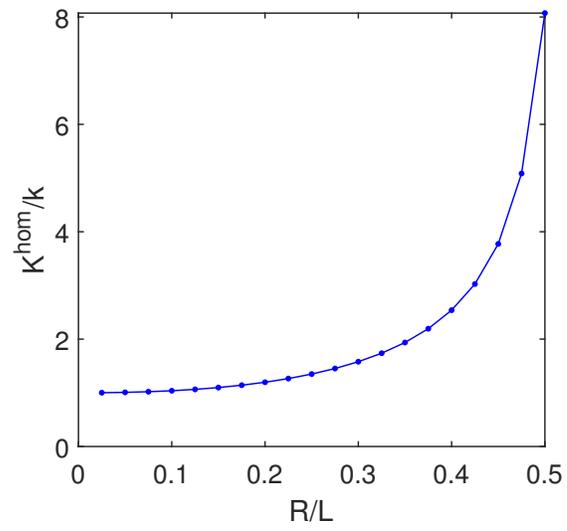


FIGURE 1.6 – Perméabilité adimensionnée K^{hom}/k du milieu biporeux en fonction du rapport R/L

Chapitre 2

Calcul par FFT de la perméabilité macroscopique de solides poreux contenant des macrocavités elliptiques et ellipsoïdales.

2.1 Formulation du problème avec des variables adimensionnées

2.1.1 Modélisation avec l'équation de Brinkman

On considère un milieu à deux phases, on désigne par Ω_1 et Ω_2 les domaines occupés par le solide poreux et les macrocavités. Dans chacune des phases, l'écoulement est décrit par l'équation de Brinkman. Dans la matrice poreuse la viscosité effective est $\mu\alpha_1$ et la résistivité est h_1 . Dans les macropores la résistivité est nulle la viscosité effective est μ , la viscosité du fluide. La méthode FFT est appliquée pour le problème écrit sous forme adimensionnelle. La méthode FFT de Mezhoud et al. [45] permet de résoudre le problème de Brinkman avec les conditions aux limites périodiques et la condition sur la moyenne $\langle \mathbf{v} \rangle_{\Omega} = \mathbf{V}$ (vitesse macroscopique prescrite). Nous introduisons dans l'équation de Brinkman le changement de variables :

$$\mathbf{v} = v_c \bar{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{x} = L \bar{\mathbf{x}}, \quad p = p_c \bar{p} \quad (2.1)$$

Où L est la dimension de la cellule élémentaire carrée/cubique utilisée pour les calculs FFT et v_c, p_c sont une vitesse et une pression caractéristique du problème. Avec ces définitions, le problème de Brinkman devient :

$$\bar{\alpha}(\bar{\mathbf{x}}) \bar{\Delta} \bar{\mathbf{v}} - \bar{h}(\bar{\mathbf{x}}) \bar{\mathbf{v}} - \bar{\nabla} \bar{p} = 0 \quad \forall \bar{\mathbf{x}} \in \bar{\Omega} \quad (2.2)$$

$$\overline{\text{div}} \bar{\mathbf{v}} = 0 \quad \forall \bar{\mathbf{x}} \in \bar{\Omega} \quad (2.3)$$

où $\alpha(\mathbf{x})$ est défini par :

$$\alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} \alpha_1 & \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ \alpha_2 & \mathbf{x} \in \Omega_2 \end{cases} \quad (2.4)$$

et où $\bar{\Delta}$ et $\bar{\nabla}$ sont les opérateurs différentiels par rapport aux coordonnées adimensionnées $\bar{\mathbf{x}}$. Les expressions de $\bar{\alpha}(\bar{\mathbf{x}})$ et $\bar{h}(\bar{\mathbf{x}})$ sont :

$$\bar{\alpha}(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{\mu v_c \alpha(\mathbf{x})}{p_c L}, \quad \bar{h}(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{\mu v_c L h(\mathbf{x})}{p_c} \quad (2.5)$$

Puisque le champ de vitesse est imposé à la cellule élémentaire, on choisit pour la vitesse caractéristique $v_c = \|\mathbf{V}\|$ qui est la norme du champ de vitesse macroscopique \mathbf{V} . Ainsi, on peut aussi introduire la vitesse macroscopique sans dimension :

$$\bar{\mathbf{V}} = \frac{\mathbf{V}}{\|\mathbf{V}\|} \quad (2.6)$$

où $\bar{\mathbf{V}}$ est un vecteur unitaire. Nous choisissons, pour la pression caractéristique, $p_c = \mu v_c L h_1$, si bien que :

$$\bar{\alpha}(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{\alpha(\mathbf{x})}{h_1 L^2}, \quad \bar{h}(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{h(\mathbf{x})}{h_1} \quad (2.7)$$

Rappelons que $\alpha(\mathbf{x})$ est sans dimension, h_1 est la résistivité de la matrice poreuse, l'inverse de la perméabilité k_1 . La résistivité h_1 a pour unités m^{-2} , si bien que $h_1 L^2$ est aussi sans dimension. La résistivité h_1 a pour ordre de grandeur $h_1 \simeq 1/l_2^2$ où l_2 est une longueur caractéristique de la première échelle de porosité. Avec ces notations, le schéma itératif basé sur la FFT est initialisé avec la vitesse adimensionnée $\bar{\mathbf{V}}$. A convergence, on détermine la moyenne de ω défini par l'équation (1.59) du chapitre 1. Cette moyenne permet d'identifier la résistivité hydraulique macroscopique à partir de la relation (1.74) du chapitre 1. La variable ω étant homogène à un gradient de pression, on note :

$$\bar{\omega} = \frac{L}{p_c} \omega \quad (2.8)$$

Et on définit :

$$\bar{\mathbf{W}} = \langle \bar{\omega}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = \frac{L \mu \|\mathbf{V}\|}{p_c} \mathbf{H}^{hom} \cdot \bar{\mathbf{V}} \quad (2.9)$$

En remplaçant p_c par son expression $p_c = \mu v_c L h_1$ avec $v_c = \|\mathbf{V}\|$, il vient alors :

$$\bar{\mathbf{W}} = \bar{\mathbf{H}}^{hom} \cdot \bar{\mathbf{V}} \quad (2.10)$$

Avec :

$$\bar{\mathbf{H}}^{hom} = \frac{1}{h_1} \mathbf{H}^{hom} \quad (2.11)$$

A convergence du schéma itératif, on déduit donc la résistivité adimensionnée $\overline{\mathbf{H}}^{hom}$. En pratique, on réalise donc les calculs sur une cellule de dimension 1 dans chacune des directions de l'espace et on considère une matrice poreuse ayant pour résistivité 1. Les autres paramètres sont :

$$\overline{\alpha}(\overline{\mathbf{x}}) = \begin{cases} \frac{\alpha_1}{h_1 L^2} & \overline{\mathbf{x}} \in \overline{\Omega}_1 \\ \frac{\alpha_2}{h_1 L^2} & \overline{\mathbf{x}} \in \overline{\Omega}_2 \end{cases}, \quad \overline{h}(\overline{\mathbf{x}}) = \begin{cases} 1 & \overline{\mathbf{x}} \in \overline{\Omega}_1 \\ \frac{h_2}{h_1} & \overline{\mathbf{x}} \in \overline{\Omega}_2 \end{cases} \quad (2.12)$$

Pour le problème qui nous intéresse ici, l'écoulement est régit par l'équation de Stokes dans les macropores, on pose donc $h_2 = 0$ et donc $\overline{h}_2 = 0$ tandis que $\alpha_2 = 1$. Dans la matrice poreuse, on pose $\alpha_1 = 0$ si bien que l'écoulement est régit par l'équation de Darcy. On a donc :

$$\overline{\alpha}(\overline{\mathbf{x}}) = \begin{cases} 0 & \overline{\mathbf{x}} \in \overline{\Omega}_1 \\ \epsilon^2 & \overline{\mathbf{x}} \in \overline{\Omega}_2 \end{cases}, \quad \overline{h}(\overline{\mathbf{x}}) = \begin{cases} 1 & \overline{\mathbf{x}} \in \overline{\Omega}_1 \\ 0 & \overline{\mathbf{x}} \in \overline{\Omega}_2 \end{cases} \quad (2.13)$$

où l'on a posé :

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{h_1} L} = \frac{\sqrt{k_1}}{L} \quad (2.14)$$

ϵ peut s'interpréter comme un facteur d'échelle entre la population de micropores et de macropores puisque, comme déjà exprimé plus haut, $k_1 \sim l_2$ la longueur caractéristique des micropores alors que L est caractéristique de l'échelle des macropores.

2.1.2 Modélisation avec l'équation de Darcy seule

Une approche simplifiée du problème consiste à utiliser l'équation de Darcy à la fois dans la matrice poreuse et dans les macropores. Cette approche déjà décrite au chapitre 1 présente deux avantages, la première est que sa résolution numérique est facilement mise en oeuvre avec les méthodes FFT classiques puisque les équations de Darcy sont formellement identiques au problème de conduction thermique. Il existe plusieurs schémas itératifs basés sur la FFT et qui permettent de résoudre efficacement le problème de conduction y compris dans les situations de contrastes infinis (voir par exemple Monchiet et Bonnet [50]). Par ailleurs, on peut utiliser les estimations usuelles en homogénéisation linéaire pour estimer la perméabilité tel que le schéma Mori-Tanaka. Le problème de Darcy, sous sa forme adimensionnée, peut être obtenu à partir de l'équation (2.2) dans laquelle on retire le terme diffusif :

$$\overline{h}(\overline{\mathbf{x}})\overline{\mathbf{v}} - \overline{\nabla} \overline{p} = 0 \quad \forall \overline{\mathbf{x}} \in \overline{\Omega} \quad (2.15)$$

$$\overline{\text{div}} \overline{\mathbf{v}} = 0 \quad \forall \overline{\mathbf{x}} \in \overline{\Omega} \quad (2.16)$$

2.2 Macropores elliptiques

2.2.1 Etude de convergence

On considère un macropore de forme elliptique de rayons a et b dans les directions x_1 et x_2 respectivement. On propose d'étudier l'influence du nombre de vecteurs d'ondes sur la précision de la perméabilité macroscopique.

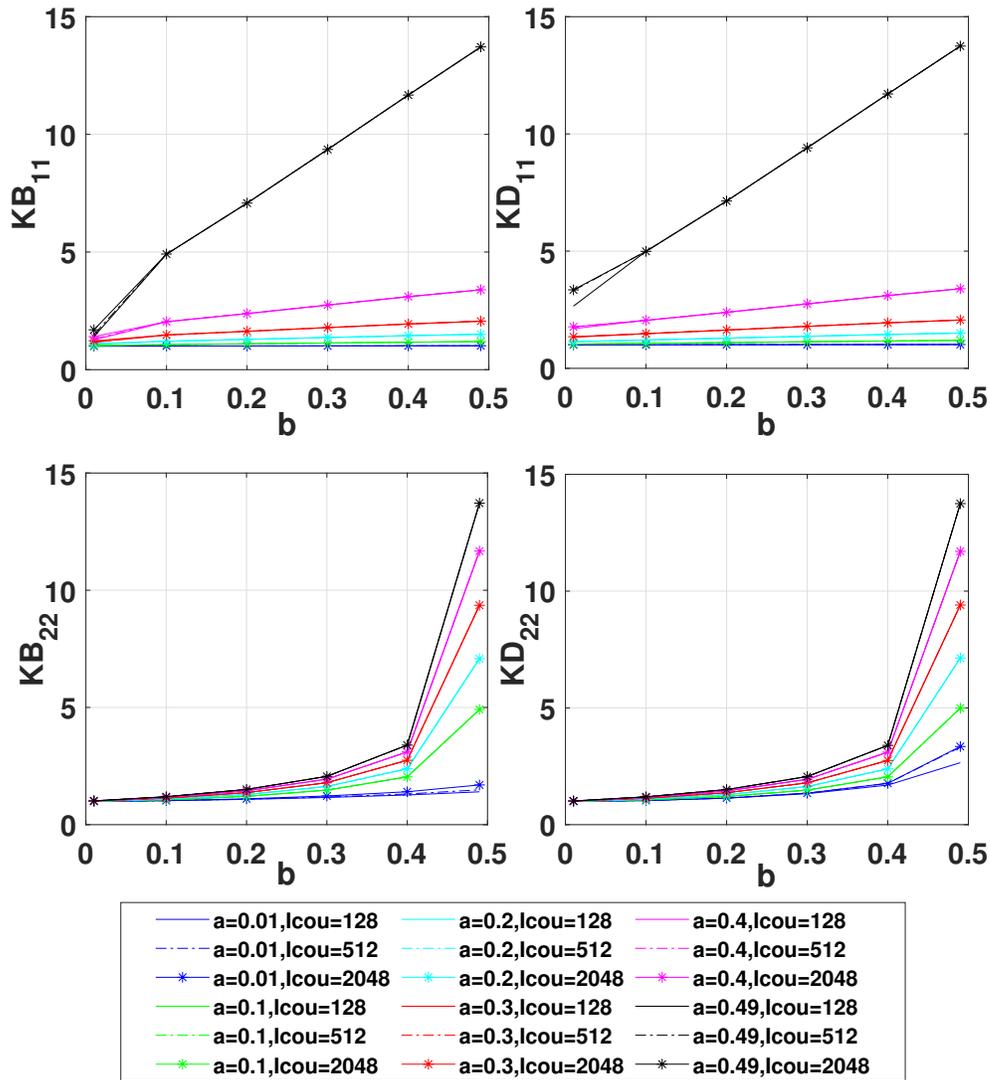


FIGURE 2.1 – Perméabilité macroscopique adimensionnée en fonction du rayon de l'ellipse b pour diverses valeurs du rayon a et du nombre de couches d'ondes $lcou$.

Les composantes de la perméabilité macroscopique adimensionnée calculée avec l'équation de Brinkman sont notées KB_{ij} tandis que l'on notera KD_{ij} celles obtenues en utilisant la loi de Darcy à la fois pour la matrice poreuse et les macrocavités. Dans chaque direction de l'espace on considère $2 \times lcou$ nombres

d'ondes, ce qui correspond, dans l'espace réel, à représenter les champs sur une grille régulière de dimension $(2 \times I_{cou})^2$. On choisit pour I_{cou} les valeurs 128, 512 et 2048. Les calculs sont réalisés en considérant $\epsilon = 0.001$ ce qui correspond à un rapport d'échelle très petit entre les micro et les macropores. Les comparaisons sont effectuées sur la figure 2.1. On représente la perméabilité macroscopique adimensionnée en fonction du rayon b et pour diverses valeurs de a . On constate, pour de nombreux cas, que $I_{cou}=128$ est suffisant pour atteindre la convergence sur les propriétés homogénéisées. Cependant, certaines différences sont observées pour la composante 11 de la perméabilité dans le cas d'une ellipse aplatie ($b \leq 0.1$) dans la direction x_2 ou dans la direction x_1 (lorsque $a \geq 0.4$). Pour ces cas, une bonne précision est obtenue avec 512 nombres d'ondes.

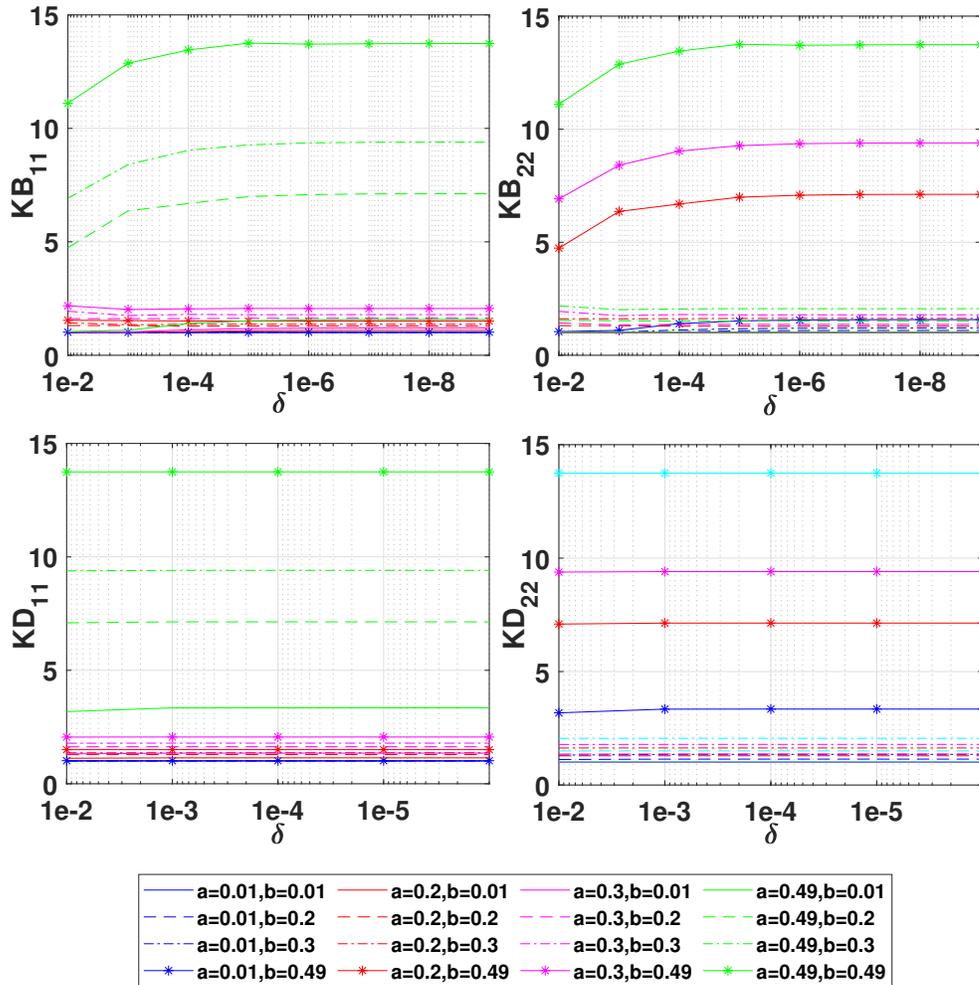


FIGURE 2.2 – L'influence de la précision δ sur la perméabilité macroscopique en utilisant la loi de Brinkman (en haut) et celle de Darcy (en bas).

Le critère de convergence utilisé est donné par l'équation (1.103) du chapitre 1 dans laquelle on doit définir la valeur de la précision δ . La convergence de la

perméabilité effective adimensionnée avec le choix de δ est étudiée pour diverses formes et dimensions de la cavité elliptique. Dans cet exemple, nous considérons toujours une cavité centrée à l'origine de rayons a et b . Les résultats sont représentés sur la figure 2.2. On fait varier la valeur de δ de 10^{-2} à 10^{-8} . On observe que les résultats obtenus avec le modèle de Darcy (KD_{11} et KD_{22}) convergent rapidement avec la précision et que l'on peut utiliser pour le critère d'arrêt, la valeur $\delta = 10^{-3}$. Avec le modèle Brinkman, la vitesse de convergence avec la précision δ est plus lente. On observe, pour de nombreux cas, qu'il faut atteindre la valeur $\delta = 10^{-6}$ pour obtenir la convergence sur la perméabilité macroscopique. Les valeurs $\delta = 10^{-3}$ et $\delta = 10^{-6}$ sont donc celles utilisées dans l'ensemble de ce chapitre pour les schémas de résolution utilisant Darcy et Brinkman respectivement.

2.2.2 Effet de l'orientation

Nous étudions l'effet de l'orientation de la cavité elliptique sur la perméabilité macroscopique. Pour réaliser les simulations, nous considérons toujours une cellule unitaire contenant un seul macropore comme décrit sur la figure 2.3. Les calculs sont réalisés en faisant varier l'angle θ . Les résultats pour les composantes de la perméabilité sont représentées sur la figure 2.4. Sur chaque figure, la perméabilité macroscopique est représentée en fonction de l'orientation θ .

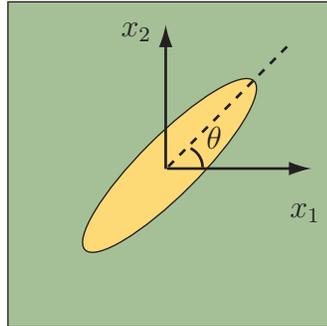


FIGURE 2.3 – Cellule unitaire contenant une cavité elliptique orientée d'un angle θ .

Nous observons des différences importantes pour la perméabilité calculée avec la loi de Brinkman et de Darcy pour des cavités très aplaties ($a = 0.01$ ou $b = 0.01$) correspondant à une fissure. Par exemple, lorsque $a = 0.01$ et $b = 0.45$, on observe que la composante 11 de la perméabilité est proche de 1 avec les deux approches lorsque $\theta = 0$, c'est à dire que la fissure est perpendiculaire à l'écoulement. Alors, la fissure n'affecte pas la perméabilité macroscopique. Toutefois, lorsque $\theta = 90^\circ$, c'est à dire que la fissure est parallèle à l'écoulement, la perméabilité est fortement affectée et les valeurs obtenues avec les deux approches (Darcy/Stokes ou Darcy seul) sont très éloignées. Lorsque la cavité a une forme quasi sphérique, alors les résultats obtenus avec les deux approches sont similaires, on peut l'observer par exemple dans le cas où $a = 0.25$ et $b = 0.21$ ou $b = 0.33$.

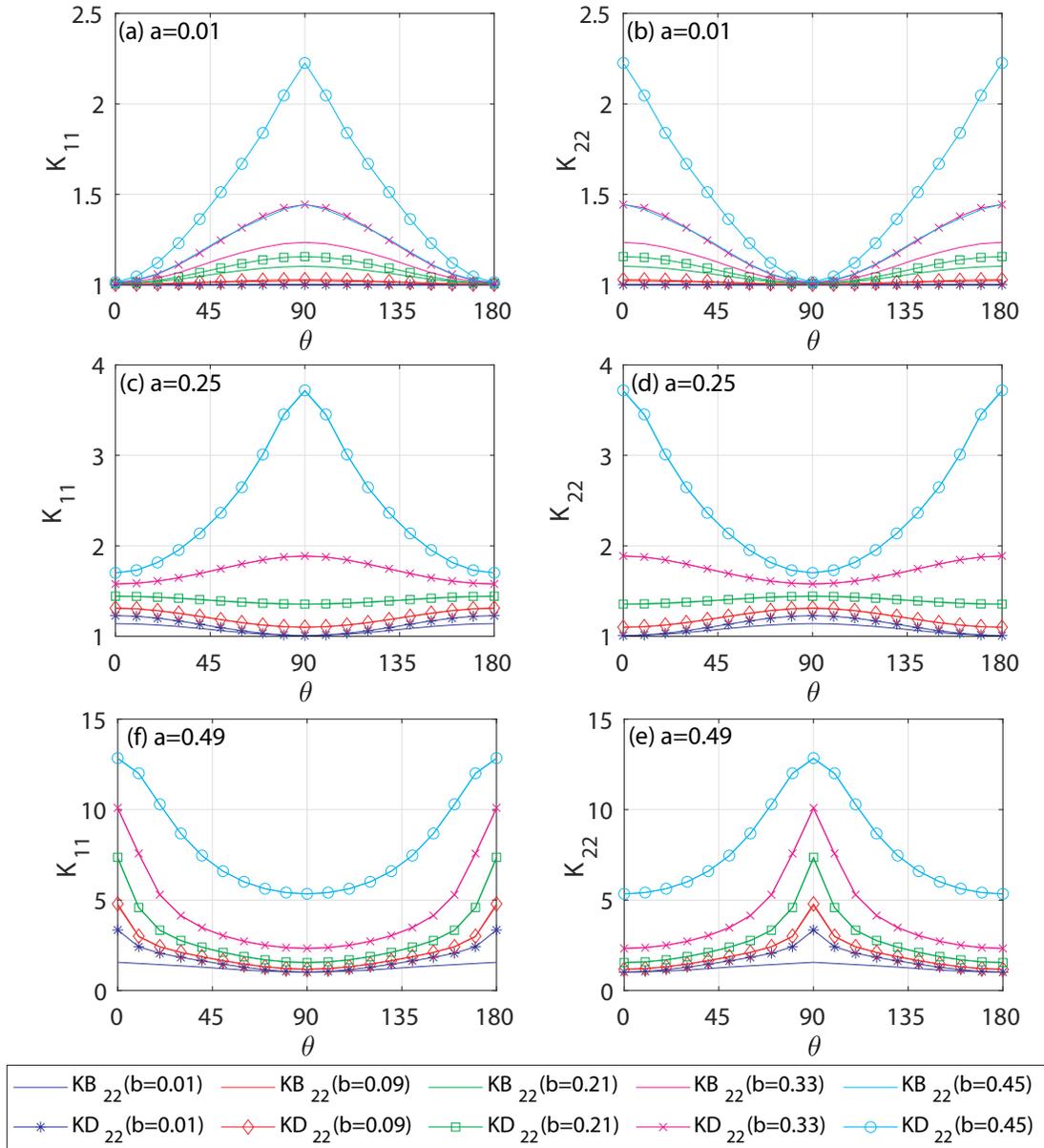


FIGURE 2.4 – Perméabilité macroscopique adimensionnée en fonction de l’orientation de la macrocavité elliptique.

2.2.3 Le rôle du facteur d’échelle

Dans cette section, on étudie l’effet du facteur d’échelle ϵ introduit dans l’équation (2.14). Il traduit le rapport entre l’échelle caractéristique des micropores constituant la matrice poreuse et la taille caractéristique des macropores elliptiques. On considère une cellule contenant un pore elliptique avec deux situations $a = 0.25$, $b = 0.125$ et $a = 0.4$ et $b = 0.1$. Sur la figure 2.5, on représente les variations de la perméabilité macroscopique en fonction du rapport d’échelle ϵ . Ce dernier varie de 10^{-6} à 1. Seules les valeurs obtenues avec le modèle de Brinkman sont repré-

sentées puisque la modélisation utilisant l'équation de Darcy ne rend pas compte de ces effets d'échelle. On observe que la composante KB11 est affectée par le rapport d'échelle. Le pore elliptique est aplati selon la direction x_2 et affecte la perméabilité de manière plus notable dans la direction x_1 . lorsque l'on augmente ϵ la perméabilité macroscopique diminue. On peut noter que l'effet de ϵ devient significatif lorsque le rapport d'échelle devient supérieur à 10^{-2} .

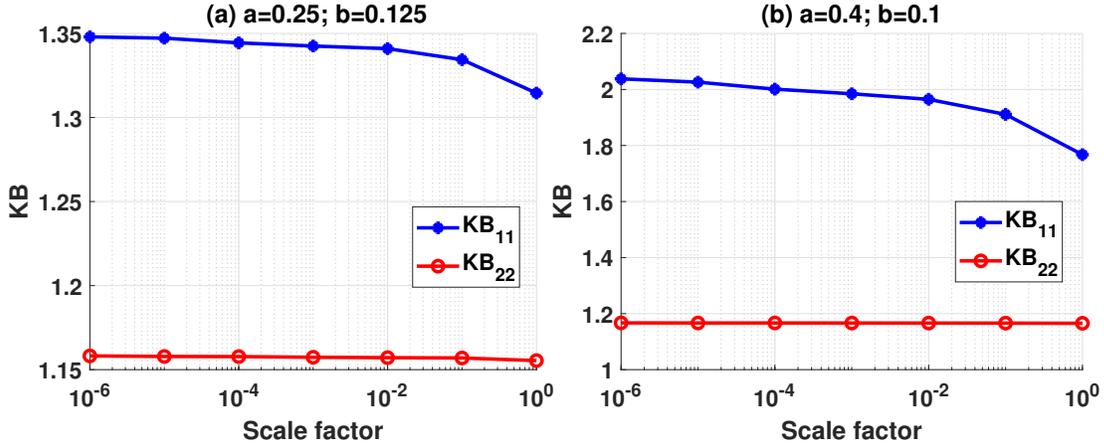


FIGURE 2.5 – Variation de la perméabilité macroscopique KB en fonction du rapport d'échelle ϵ entre les deux populations de pores.

2.2.4 Comparaison avec des estimations analytiques

Lorsque l'on utilise la loi de Darcy pour les deux phases, le milieu poreux et les macropores elliptiques, alors on peut estimer la perméabilité macroscopique en utilisant des estimations classiques comme le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka. Pour des macropores elliptiques de rayons a, b et orientés d'un angle θ par rapport à l'axe x_1 , les composantes du tenseur de perméabilité sont :

$$K_{11} = k_1 \left\{ 1 + \frac{f(a+b)}{1-f} \left[\frac{\cos^2(\theta)}{b} + \frac{\sin^2(\theta)}{a} \right] \right\} \quad (2.17)$$

$$K_{22} = k_1 \left\{ 1 + \frac{f(a+b)}{1-f} \left[\frac{\sin^2(\theta)}{b} + \frac{\cos^2(\theta)}{a} \right] \right\} \quad (2.18)$$

$$K_{12} = k_1 \frac{f(a+b)}{1-f} \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right] \cos(\theta) \sin(\theta) \quad (2.19)$$

où f désigne la fraction volumique des macropores.

Il n'existe pas de résultats équivalents pour le modèle de Brinkman. La détermination d'estimations analytiques avec le modèles de Brinkman est étudié au chapitre suivant pour des hétérogénéités de forme cylindrique et sphérique.

Les comparaisons sont effectuées avec des simulations par FFT sur une cellule contenant un macropore elliptique. On considère le cas $\theta = 0^\circ$ et nous considérons différentes valeurs des rayons de l'ellipse. Les calculs sont menés en considérant

$\epsilon = 10^{-3}$. La comparaison entre les solutions FFT et l'estimation de Mori-Tanaka est effectuée sur les figures. 2.6 et 2.7 pour $a = 0.2$ et $a = 0.49$ respectivement et on fait varier le rayon b de l'ellipse. On observe, pour les petites valeurs de b et pour $a = 0.2$, que l'estimation de Mori-Tanaka est en bon accord avec les solutions numériques. Pour des plus grandes valeurs de b on note des différences très significatives. Pour la valeur $a = 0.49$, on observe que l'estimation de Mori-Tanaka pour la composante 11 de la perméabilité est très éloignées des solutions numériques.

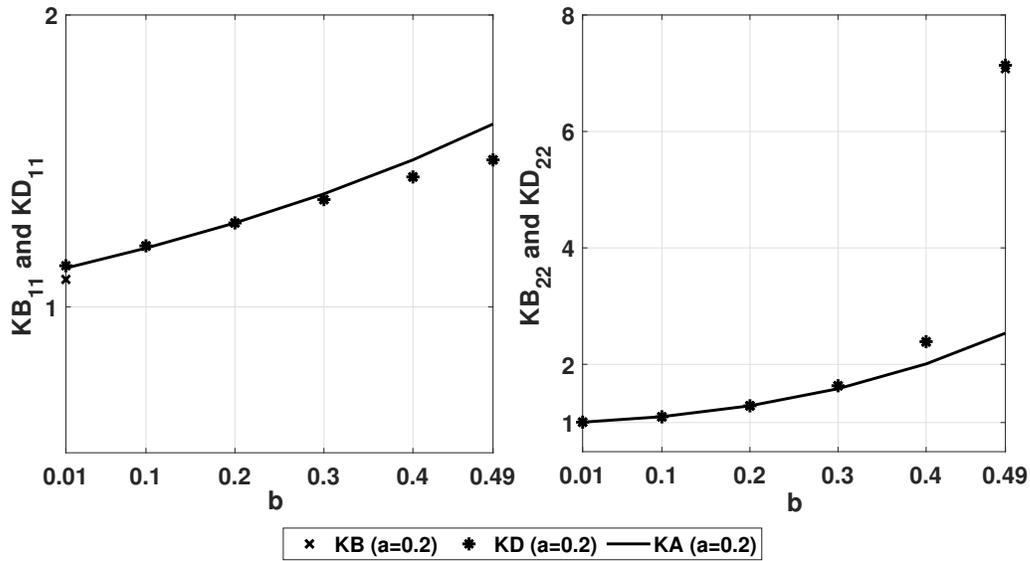


FIGURE 2.6 – Comparaison de l'estimation de Mori-Tanaka (KA) avec les solutions numériques pour $a = 0.2$.

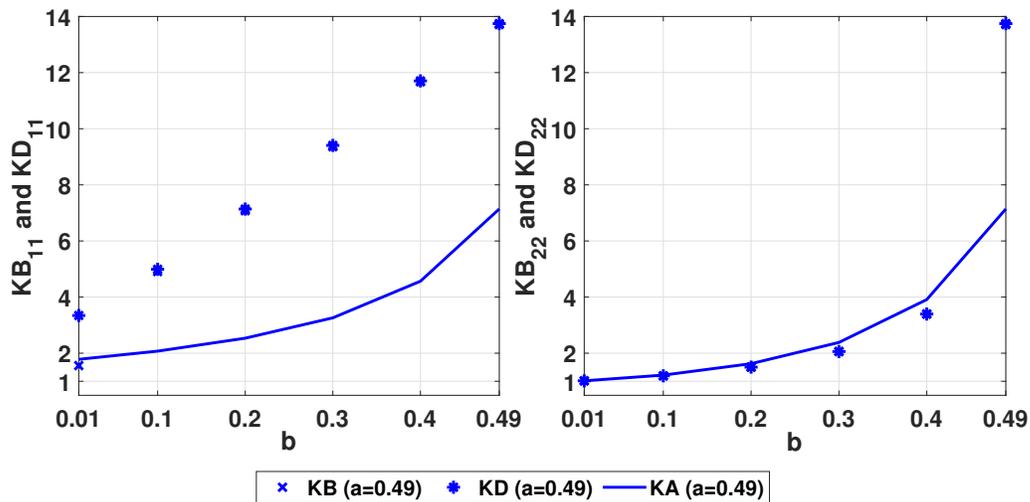


FIGURE 2.7 – Comparaison de l’estimation de Mori-Tanaka (KA) avec les solutions numériques pour $a = 0.49$.

2.3 Populations de macropores elliptiques

On considère des cellules avec des populations de macropores elliptiques. On détermine la perméabilité homogénéisée pour une distribution de pores de même taille et de même orientation (cf. figure 2.8). Les calculs sont réalisés en considérant quatre orientations : $\theta = 0^\circ$, 30° , 60° et 90° . Un total de 100 pores sont considérés dans la cellule unitaire avec les dimensions $a = 0.03$ et $b = 0.015$. Pour chaque orientation, on effectue 1000 tirages et on détermine la perméabilité moyenne statistique avec les deux approches numériques. Les résultats pour la perméabilité macroscopique sont représentés sur la figure 2.9. On représente la moyenne cumulée de la perméabilité macroscopique en fonction du nombre de tirages. On peut observer que les deux approches (Brinkman et Darcy) conduisent au même résultat lorsque pour la composante 11 et pour des ellipses orientées d’un angle $\theta = 0^\circ$ mais conduisent à des différences significatives lorsque $\theta = 90^\circ$ (ellipses aplaties).

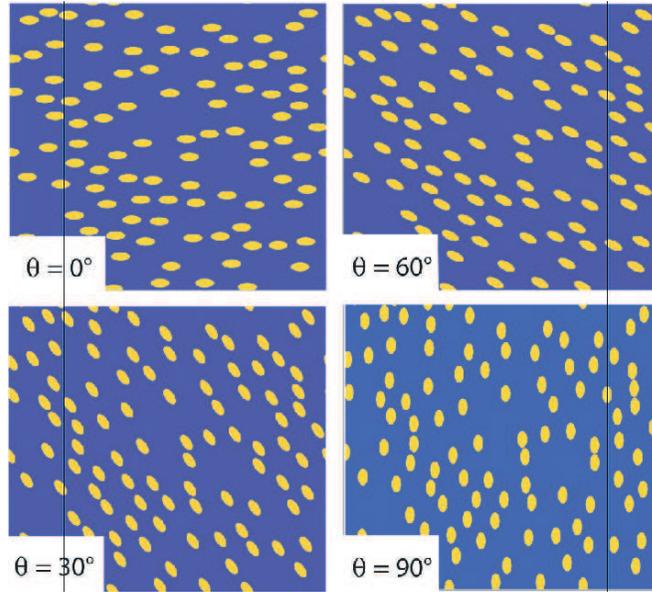


FIGURE 2.8 – Cellules contenant 100 pores elliptiques d’orientation $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ et 90° .

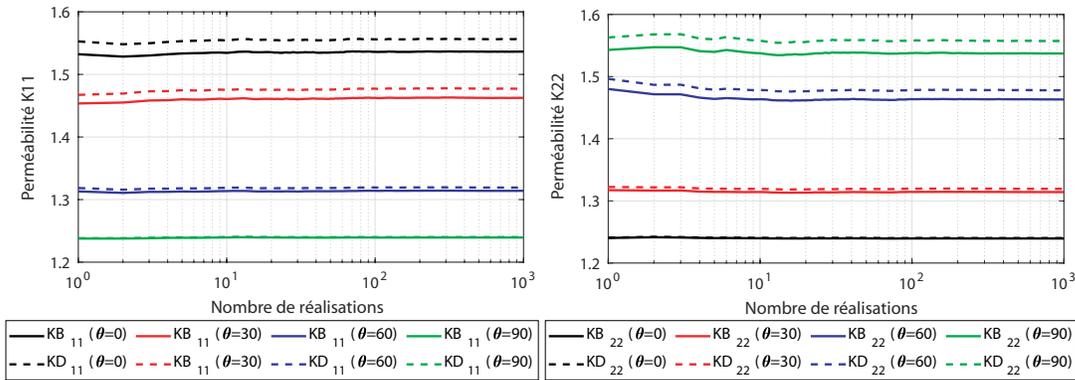


FIGURE 2.9 – Perméabilités moyennes statistiques pour une population de pores elliptiques d’orientation $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ et 90° .

On considère maintenant des pores elliptiques de même taille mais avec des orientations aléatoires. Les cellules unitaires sont présentées sur la figure 2.10 où l’on a considéré 25, 50, 75 puis 100 pores elliptiques. Les valeurs de a et b sont respectivement de 0.03 et 0.015. Les résultats pour la perméabilité moyenne statistique sont représentés sur la 2.11 en fonction du nombre de tirages. On observe que les perméabilités obtenues avec les deux approches sont proches. Dans ces exemples, les fractions volumiques de pores sont faibles et les différences entre les approches semblent s’estomper pour les faibles fractions volumiques. Par ailleurs, l’effet de l’orientation observé dans l’exemple précédent semble aussi s’estomper du fait que les ellipses ont des orientations aléatoires.

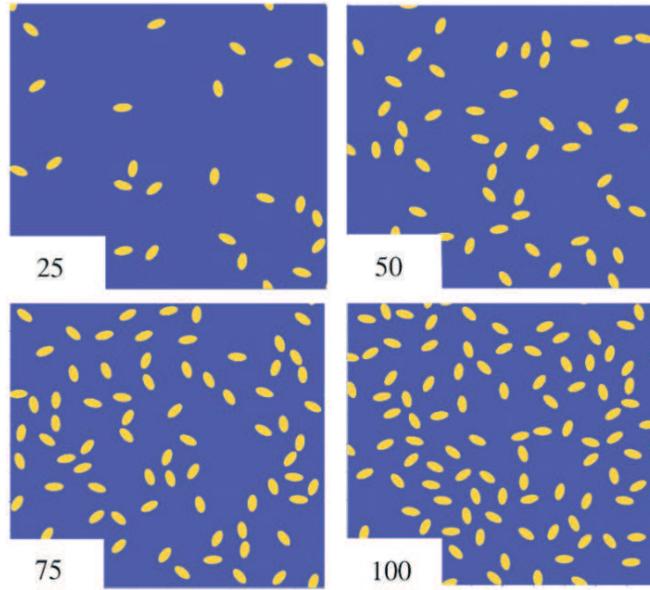


FIGURE 2.10 – Cellules unitaires avec des pores elliptiques orientés aléatoirement. Population avec 25, 50, 75 et 100 pores elliptiques.

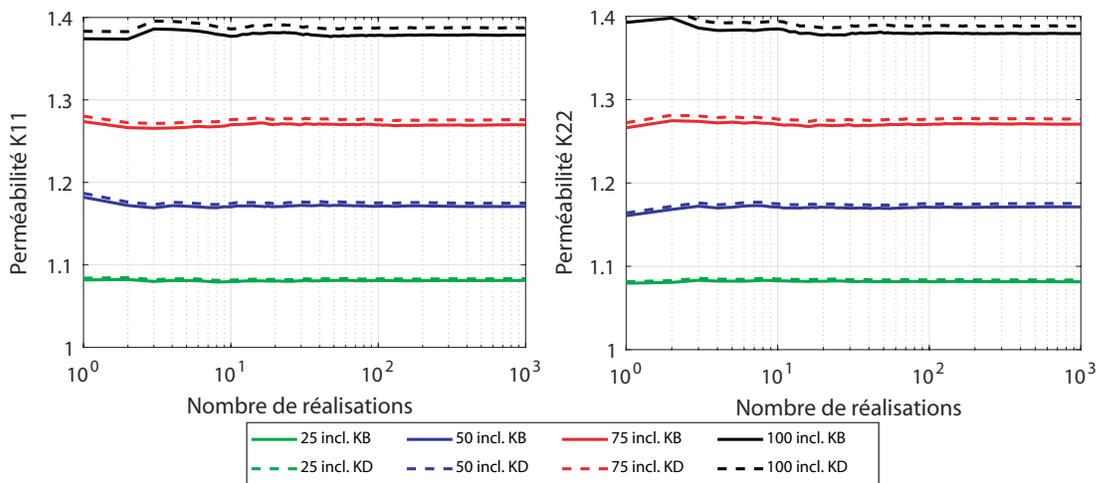


FIGURE 2.11 – Perméabilités moyennes statistiques pour une population de pores elliptiques d'orientation aléatoire.

2.4 Macropores sphéroïdaux

On détermine la perméabilité d'un milieu biporeux avec des macrocavités de forme sphéroïdale. Par sphéroïde, on désigne les ellipsoïdes qui ont un axe de symétrie de révolution. Ainsi, en notant $a_1 < a_2 < a_3$ les rayons de l'ellipsoïde, pour un sphéroïde, on a deux rayons de même longueur. Dans le cas où $a_1 < a_2 = a_3$, la sphéroïde est aplatie. Dans le cas où $a_1 = a_2 < a_3$, alors la sphéroïde est allongée. Dans les applications proposées ici, les sphéroïdes sont aplaties. Les

microstructures sont générées en choisissant des cavités aléatoirement distribuées dans la cellule élémentaire et avec des orientations et des rapports d'aspect choisis de manière aléatoire. Le rapport d'aspect d'une sphéroïde aplatie est défini par le rapport a_1/a_2 qui est compris dans l'intervalle $[0, 1]$. Les microstructures sont générées en contrôlant deux paramètres : le nombre d'inclusions et la porosité. Sur les figures 2.12 et 2.13, on montre diverses microstructures de milieux biporeux avec des cavités sphéroïdales. Sur la figure 2.12, on donne des réalisations pour des porosités de $f = 5\%$, 10% , 15% . Sur la figure 2.13, on représente des cellules élémentaires correspondant à une porosité de $f = 15\%$ et contenant 5, 10, 15 et 20 macropores.

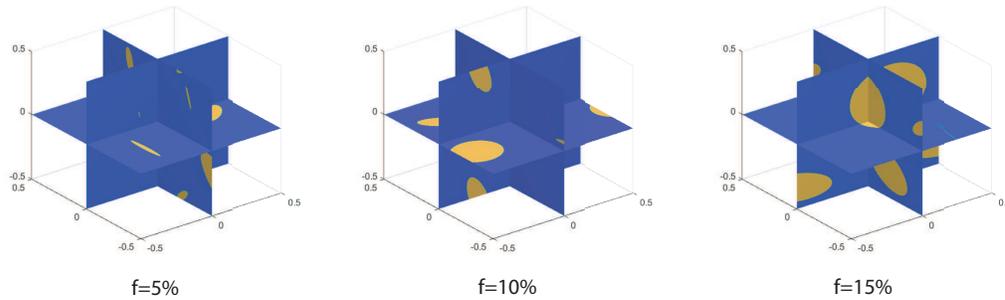


FIGURE 2.12 – Cellules élémentaires du milieu biporeux avec 10 macropores de forme sphéroïdale et diverses valeurs de la porosité.

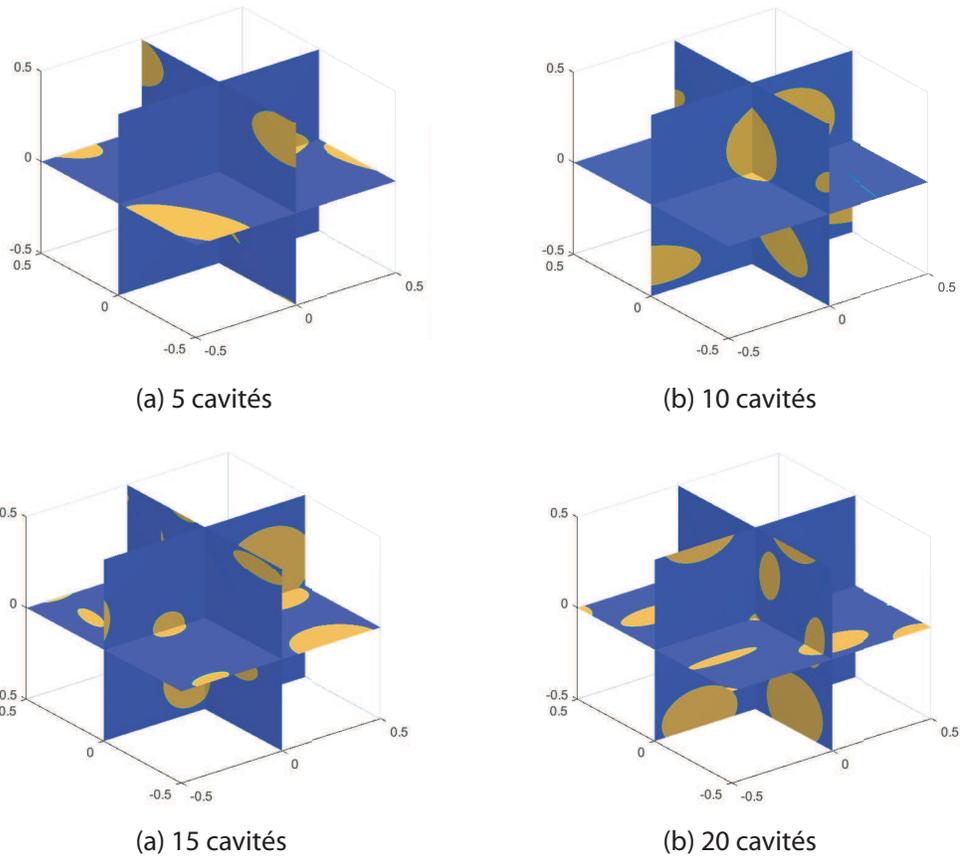


FIGURE 2.13 – Cellules élémentaires du milieu biporeux avec 5,10,15,20 macro-pores de forme sphéroïdale et une porosité $f = 15\%$.

Sur la figure 2.14, on représente les moyennes statistiques des composantes K_{11} , K_{22} et K_{33} du tenseur de perméabilité homogénéisé en fonction du nombre de réalisations. On observe peu de dispersion dans les résultats et une convergence rapide avec le nombre de réalisations. On observe également que les deux approches conduisent à des résultats très proches.

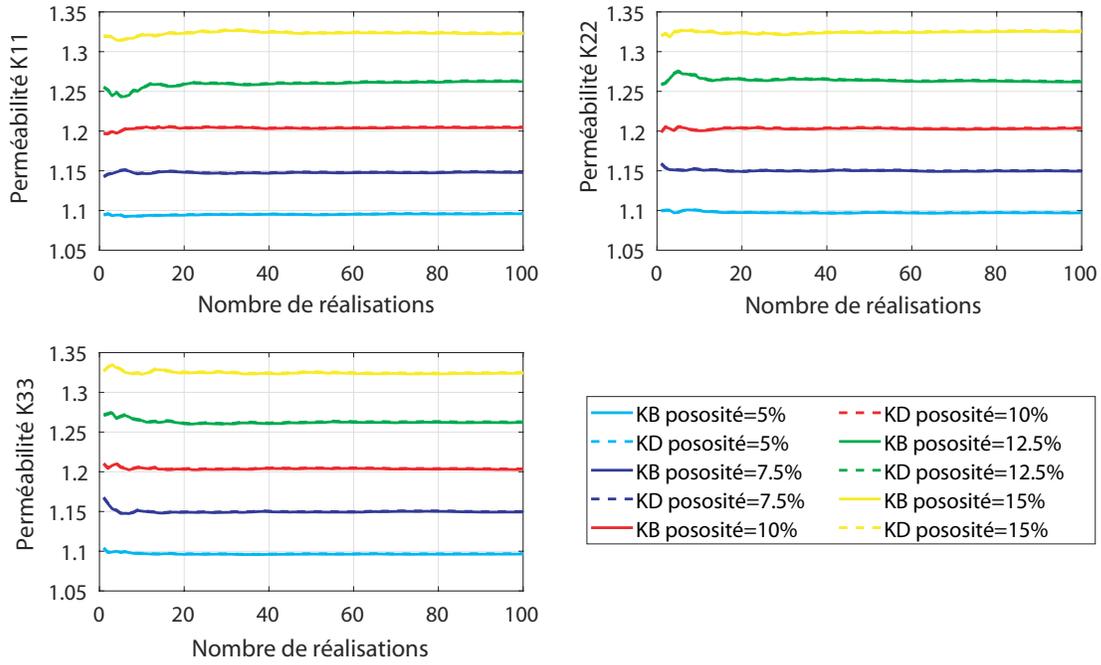


FIGURE 2.14 – Moyennes statistiques de la perméabilité homogénéisée en fonction du nombre de réalisation pour une cellule contenant 10 macropores et pour diverses valeurs de la porosité.

Sur la figure 2.15, on représente des résultats similaires mais en fixant la porosité à $f = 15\%$ et en faisant varier le nombre de macropores. Ainsi, ce sont les effets de taille qui sont étudiés ici. On observe une différence notable entre les deux approches utilisant l'équation de Darcy et de Brinkman. On observe par ailleurs une plus forte dispersion des résultats, ce qui se manifeste par une convergence statistique plus lente.

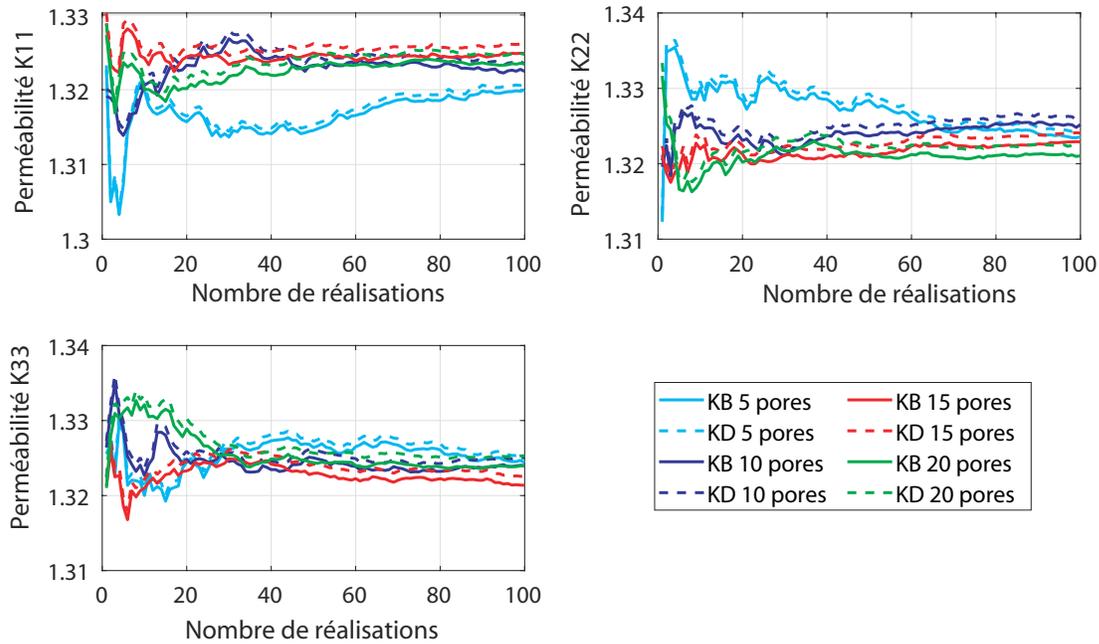


FIGURE 2.15 – Moyennes statistiques de la perméabilité homogénéisée en fonction du nombre de réalisation pour une cellule avec une porosité $f = 15\%$ et pour diverses valeurs du nombre de macropores.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé de mettre en oeuvre des méthodes de résolution numérique basées sur la transformée de Fourier rapide pour calculer la perméabilité homogénéisée d'un milieu biporeux contenant des inclusions elliptiques et sphéroïdales. Deux approches ont été considérées. La première consiste à utiliser l'équation de Brinkman avec des propriétés différentes pour la matrice poreuse et les macropores. La seconde approche, plus simple, utilise l'équation de Darcy, y compris dans les macropores dans lesquels la résistivité hydraulique est nulle. Les deux approches ont été appliquées à diverses microstructures : des arrangements périodiques de macropores elliptiques, puis des populations de macropores aléatoirement distribuées dans la cellule élémentaire. Nous avons fait varier divers paramètres microstructuraux tels que l'orientation des macropores, leur taille, leur forme, etc. Les résultats montrent que l'approche plus simple utilisant l'équation de Darcy dans l'ensemble de la cellule fournit une bonne approximation de la perméabilité macroscopique, au regard des résultats obtenus avec l'équation de Brinkman. Ceci est particulièrement vrai lorsque la porosité associée au système de macropores est petite. Lorsque la taille des macropores est grande et lorsque les macropores sont très aplatis, on a observé des différences importantes entre les deux modélisations.

Chapitre 3

Estimations analytiques de milieux biporeux avec inclusions cylindriques et sphériques

Dans ce chapitre on propose de déterminer la perméabilité macroscopique de milieux poreux contenant des inclusions poreuses. Pour atteindre cet objectif, nous établissons d'abord des résultats analytiques aux problèmes élémentaires suivants : inclusion noyée dans un milieu infini, cylindre et sphère composites avec conditions en vitesse ou en gradient de pression homogène au contour. Ces solutions sont ensuite utilisées pour obtenir des estimations des propriétés macroscopiques du milieu poreux contenant des inclusions poreuses, d'abord on établit le modèle de Mori-Tanaka puis les modèles de cylindre/sphère composites. Les estimations obtenues sont alors comparées avec des simulations numériques obtenues avec la méthode FFT. On généralise ensuite nos résultats analytiques pour des milieux multicouches et avec interfaces imparfaites.

3.1 Equations du problème

Reprécisons les équations du problème étudié, déjà détaillées au chapitre 1. Nous considérons un solide multiporeux constitué de deux phases : une matrice poreuse Ω_1 contenant des inclusions poreuses occupant le domaine Ω_2 . L'écoulement du fluide dans chaque domaine obéit à l'équation de Brinkman :

$$\mu_e(\mathbf{x})\Delta\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mu h(\mathbf{x})(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \nabla p(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.2)$$

où $\mu_e(\mathbf{x})$ est la viscosité équivalente de Brinkman et $h(\mathbf{x})$ est la résistivité hydraulique qui ont les expressions suivantes dans chacune des phases :

$$\mu_e(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mu\alpha_1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ \mu\alpha_2 & \forall \mathbf{x} \in \Omega_2 \end{cases}, \quad h(\mathbf{x}) = \begin{cases} h_1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ h_2 & \forall \mathbf{x} \in \Omega_2 \end{cases} \quad (3.3)$$

α_1, α_2 sont deux coefficients sans dimension et $h_1 = 1/k_1, h_2 = 1/k_2$ sont les résistivités hydrauliques. A l'interface entre les deux phases, on considère la continuité du champ de vitesse et du vecteur contrainte :

$$\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^{(2)}(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{x} \in S \quad (3.4)$$

où $\mathbf{v}^{(1)}, \boldsymbol{\sigma}^{(1)}$ et $\mathbf{v}^{(2)}, \boldsymbol{\sigma}^{(2)}$ représentent la vitesse et le vecteur contrainte de chaque coté de l'interface S et \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à S , dirigé de Ω_2 vers Ω_1 . L'expression du champ de contrainte est donné par :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = 2\mu_e(\mathbf{x})\mathbf{d}(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x})\mathbf{I} \quad (3.5)$$

où \mathbf{I} est le tenseur identité et $\mathbf{d}(\mathbf{x})$ est le tenseur des taux de déformation, défini par :

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}) = \nabla_s \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \nabla^T \mathbf{v}(\mathbf{x})) \quad (3.6)$$

qui est à trace nulle compte tenu de l'imcompressibilité de l'écoulement. Introduisons la variable $\boldsymbol{\omega}$ définie par :

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = \mu h(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad (3.7)$$

L'équation (3.1) peut être ainsi écrite sous la forme :

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \quad (3.8)$$

Pour résoudre le problème, des conditions aux limites doivent être ajoutées à la frontière du volume Ω . Ces conditions sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dirichlet : } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ \text{Neumann : } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{W} \cdot \mathbf{x})\mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ \text{Périodique : } \mathbf{v}(\mathbf{x}) \text{ (périodique)}, \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{W} \cdot \mathbf{x})\mathbf{n} \text{ (antipériodique)} \end{array} \right. \quad (3.9)$$

3.1.1 Hiérarchisation des solutions

Introduisons $\Psi(\mathbf{v})$ le potentiel des vitesses par :

$$\Psi(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \langle 2\mu_e(\mathbf{x})\nabla_s \mathbf{v}(\mathbf{x}) : \nabla_s \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mu h(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} \quad (3.10)$$

Le potentiel $\Psi(\mathbf{v})$ est convexe si $\mu_e(\mathbf{x}) \geq 0$ et $\mu h(\mathbf{x}) \geq 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$. Les solutions calculées avec les conditions périodiques, de Dirichlet et de Neumann sont respectivement notées avec les indices "P", "D" et "N". Nous cherchons à comparer ces solutions pour le potentiel $\Psi(\mathbf{v})$ et ensuite à établir une hiérarchie pour les tenseurs de perméabilité macroscopiques obtenus avec les différentes conditions au bord de la cellule. A cette fin, notons donc \mathbf{K}_p^{hom} la solution calculée

avec les conditions périodiques. Nous faisons de même avec les conditions de Dirichlet et de Neumann : \mathbf{K}_D^{hom} et \mathbf{K}_N^{hom} . Pour un volume Ω suffisamment grand, statistiquement représentatif du solide poreux considéré, il est attendu d'obtenir le même tenseur de perméabilité macroscopique : $\mathbf{K}_P^{hom} = \mathbf{K}_D^{hom} = \mathbf{K}_N^{hom}$, de sorte que la solution soit indépendante du choix des conditions prises au bord du domaine Ω . Pour un volume Ω quelconque (non nécessairement statistiquement représentatif du milieu poreux considéré), les tenseurs de perméabilité obtenus avec les trois types de conditions au bord conduisent à des estimations différentes. Nous allons d'abord comparer les solutions avec les conditions périodiques et la condition de Dirichlet. Nous notons \mathbf{v}_P et \mathbf{v}_D les champs de vitesse locaux obtenus avec ces deux conditions aux limites. On utilise la même notation pour les autres variables du problème, $\boldsymbol{\sigma}_P(\mathbf{x})$ et $\boldsymbol{\sigma}_D(\mathbf{x})$ pour la contrainte etc. Puisque le potentiel $\Psi(\mathbf{v})$ est quadratique, on a tout d'abord :

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{v}_D - \mathbf{v}_P) &= \Psi(\mathbf{v}_D) + \Psi(\mathbf{v}_P) \\ &- \langle \boldsymbol{\sigma}_P(\mathbf{x}) : \mathbf{d}_D(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\omega}_P(\mathbf{x}) : \mathbf{v}_D(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Le taux de déformation $\mathbf{d}_D(\mathbf{x})$ dérive du champ de vitesse $\mathbf{v}_D(\mathbf{x})$. Par ailleurs, le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}_P(\mathbf{x})$ est en équilibre avec $\boldsymbol{\omega}_P(\mathbf{x})$, i.e :

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_P(\mathbf{x})) = \boldsymbol{\omega}_P(\mathbf{x}) \quad (3.12)$$

En utilisant l'égalité :

$$\boldsymbol{\sigma}_P(\mathbf{x}) : \mathbf{d}_D(\mathbf{x}) = \operatorname{div}(\mathbf{v}_D(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_P(\mathbf{x})) - \mathbf{v}_D(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\omega}_P(\mathbf{x}), \quad (3.13)$$

ainsi que le théorème de la divergence, on obtient :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_P(\mathbf{x}) : \mathbf{d}_D(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\omega}_P(\mathbf{x}) : \mathbf{v}_D(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}_P(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}_D(\mathbf{x}) dS \quad (3.14)$$

A la frontière du domaine $\partial\Omega$, le champ de vitesse $\mathbf{v}_D(\mathbf{x})$ satisfait à la condition de Dirichlet $\mathbf{v}_D(\mathbf{x}) = \mathbf{V}$. En utilisant la propriété (1.66) établie au chapitre 1, il vient alors :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_P(\mathbf{x}) : \mathbf{d}_D(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\omega}_P(\mathbf{x}) : \mathbf{v}_D(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = \langle \boldsymbol{\omega}_P(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} \cdot \mathbf{V} \quad (3.15)$$

Le terme à droite de l'égalité dans (3.15) est égal à $2\Psi(\mathbf{v}_P(\mathbf{x}))$ en vertu du lemme de Hill-Mandel (voir la section 1.3.3 du chapitre 1). En revenant à l'équation Eq. (3.11), on peut donc déduire :

$$\Psi(\mathbf{v}_D) - \Psi(\mathbf{v}_P) = \Psi(\mathbf{v}_D - \mathbf{v}_P) \quad (3.16)$$

Ψ étant un potentiel convexe, alors $\Psi(\mathbf{v}_D - \mathbf{v}_P)$ est positif quelque soit \mathbf{v}_D et \mathbf{v}_P . On déduit donc :

$$\frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{H}_D^{hom} \cdot \mathbf{V} \geq \frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{H}_P^{hom} \cdot \mathbf{V} \quad (3.17)$$

Pour un même volume Ω la resistivité apparente obtenue avec la condition de Dirichlet sera plus grande que celle obtenue avec la condition périodique. S'agissant de la perméabilité (inverse de la résistivité), elle sera plus petite avec la condition de Dirichlet que celle obtenue avec la condition périodique.

Nous allons maintenant comparer les propriétés apparentes obtenues avec les conditions périodiques et la condition de Neumann. Nous désignons par l'indice "N" la solution calculée avec la condition de bord de Neumann et par l'indice "P" la solution calculée avec les conditions périodiques. La démonstration est assez analogue à celle effectuée avec la condition de Dirichlet, on ne détaille donc pas certaines étapes intermédiaires. Débutons par l'égalité :

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{v}_N(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_P(\mathbf{x})) &= \Psi(\mathbf{v}_N(\mathbf{x})) + \Psi(\mathbf{v}_P(\mathbf{x})) \\ &- \langle \boldsymbol{\sigma}_N(\mathbf{x}) : \mathbf{d}_P(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\omega}_N(\mathbf{x}) : \mathbf{v}_P(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Puisque $\mathbf{d}_P(\mathbf{x})$ dérive de $\mathbf{v}_P(\mathbf{x})$, que $\boldsymbol{\sigma}_N(\mathbf{x})$ est en équilibre avec $\boldsymbol{\omega}_N(\mathbf{x})$ on peut donc écrire :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_N(\mathbf{x}) : \mathbf{d}_P(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\omega}_N(\mathbf{x}) : \mathbf{v}_P(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}_N(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}_P(\mathbf{x}) dS \quad (3.19)$$

Sur le bord $\partial\Omega$, le champ de contrainte satisfait à la condition de Neumann, $\boldsymbol{\sigma}_N(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{W} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{n}$. En utilisant la propriété (1.64) du chapitre 1, il vient donc :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_N(\mathbf{x}) : \mathbf{d}_P(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\omega}_N(\mathbf{x}) : \mathbf{v}_P(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = 2\Psi(\mathbf{v}_P) \quad (3.20)$$

Et finalement :

$$\Psi(\mathbf{v}_N(\mathbf{x})) - \Psi(\mathbf{v}_P(\mathbf{x})) = \Psi(\mathbf{v}_N(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_P(\mathbf{x})) \geq 0 \quad (3.21)$$

Et par conséquent :

$$\frac{1}{2} \mathbf{W} \cdot \mathbf{K}_N^{hom} \cdot \mathbf{W} \geq \frac{1}{2} \mathbf{W} \cdot \mathbf{K}_P^{hom} \cdot \mathbf{W} \quad (3.22)$$

Pour résumer, le tenseur de perméabilité (resp. de resistivité) apparent obtenu par les conditions aux limites périodiques est encadré par les propriétés apparentes obtenues avec les conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann :

$$\mathbf{K}_N^{hom} \geq \mathbf{K}_P^{hom} \geq \mathbf{K}_D^{hom} \quad \text{ou} \quad \mathbf{H}_D^{hom} \geq \mathbf{H}_P^{hom} \geq \mathbf{H}_N^{hom} \quad (3.23)$$

Cette relation doit être considérée au sens des valeurs propres des tenseurs obtenus avec chacune des conditions au bord. Il convient également de mentionner que cette égalité n'a de sens que si les propriétés apparentes sont calculées pour le même volume Ω mais avec des conditions aux limites différentes. Typiquement, le calcul avec des conditions aux limites périodiques est réalisé sur des cellulés carrés (en 2D) ou cubiques (en 3D) en utilisant l'algorithme FFT. Afin d'obtenir des estimations analytiques des propriétés apparentes, les calculs avec conditions aux

limites de Dirichlet et Neuman sont réalisés pour des géométries simples consistant en des cylindres/sphères composites. La comparaison des résultats par FFT avec ces solutions analytiques ne peuvent donc pas être effectuées sur la base du théorème d’encadrement (3.23). S’agissant du modèle Mori-Tanaka, il s’agit d’une estimation des propriétés apparentes du milieu poreux, et non pas d’une solution exacte du problème avec conditions de Dirichlet ou de Neumann. Une approche plus rigoureuse est celle conduisant aux bornes de Hashin-Shtrikman, non abordée dans ce chapitre.

3.2 Estimations pour des inclusions cylindriques et sphériques

3.2.1 Principe général

Dans cette section, nous fournissons des estimations analytiques des propriétés de filtration d’un solide poreux à deux phases avec des inclusions cylindriques et sphériques. L’écoulement de fluide dans les inclusions poreuses et dans la matrice poreuse environnante obéit à l’équation de Brinkman. Deux procédures d’homogénéisation sont considérées pour estimer la perméabilité globale :

- Le schéma de Mori-Tanaka, qui utilise la solution exacte d’une inclusion isolée Ω_2 noyée dans un solide infini ayant les propriétés de filtration de la matrice poreuse Ω_1 (voir Fig. 3.1(a)) et soumise à l’infini à une vitesse homogène notée \mathbf{V}^∞ .
- Le modèle d’assemblage de cylindres/sphères composites pour lequel le volume élémentaire représentatif est constitué de cylindres et de sphères concentriques qui sont soumis sur leur bord extérieur à la condition de Dirichlet ou de Neumann (voir Fig. 3.1(b)).

Nous allons maintenant rechercher la solution exacte de ces problèmes.

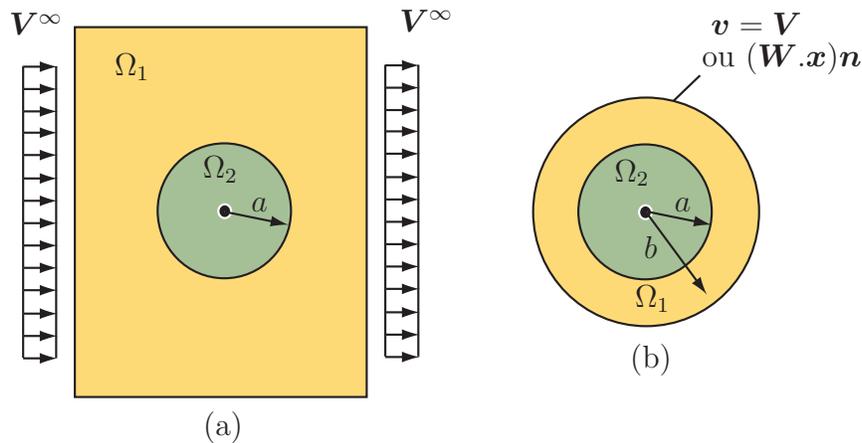


FIGURE 3.1 – (a) inclusion isolée dans un milieu infini, (b) cylindre/sphère composite soumis aux conditions de Dirichlet/Neumann.

3.2.2 Solution générique

Compte tenu de la symétrie des problèmes étudiés, le tenseur de perméabilité macroscopique est isotrope pour le cas sphérique et isotrope dans le plan pour le cas cylindrique. Les conditions de Dirichlet et de Neumann sont utilisées à la frontière du cylindre/sphère composite avec la vitesse macroscopique appliquée $\mathbf{V} = V_1 \mathbf{e}_1$ (pour Dirichlet) et le gradient de pression $\mathbf{W} = W_1 \mathbf{e}_1$ (pour Neumann) où \mathbf{e}_1 est le premier vecteur du repère cartésien $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Pour le problème de l'inclusion noyée dans un solide infini, le champ de vitesse appliqué est pris sous la forme $\mathbf{V}^\infty = V_1^\infty \mathbf{e}_1$. Nous utilisons le système de coordonnées polaires (r, θ) et le système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) ainsi que les bases orthonormales associées $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ et $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$.

La condition de Dirichlet au bord de la cellule s'écrit :

$$\begin{cases} v_r(r = b) = V_1 \cos(\theta), \\ v_\theta(r = b) = -V_1 \sin(\theta) \end{cases} \quad (\text{cylindre}) \quad (3.24)$$

$$\begin{cases} v_r(r = b) = V_1 \cos(\theta) \sin(\varphi), \\ v_\theta(r = b) = -V_1 \sin(\theta), \\ v_\varphi(r = b) = -V_1 \cos(\theta) \cos(\varphi) \end{cases} \quad (\text{sphère}) \quad (3.25)$$

La condition de Neumann au bord de la cellule s'écrit :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r = b) = bW_1 \cos(\theta), \\ \sigma_{r\theta} = 0 \end{cases} \quad (\text{cylindre}) \quad (3.26)$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r = b) = bW_1 \cos(\theta) \sin(\varphi), \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\varphi} = 0 \end{cases} \quad (\text{sphère}) \quad (3.27)$$

Et finalement, pour le milieu infini, les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} v_r(r = \infty) = V_1^\infty \cos(\theta), \\ v_\theta(r = \infty) = -V_1^\infty \sin(\theta) \end{cases} \quad (\text{cylindre}) \quad (3.28)$$

$$\begin{cases} v_r(r = \infty) = V_1^\infty \cos(\theta) \sin(\varphi), \\ v_\theta(r = \infty) = -V_1^\infty \sin(\theta), \\ v_\varphi(r = \infty) = -V_1^\infty \cos(\theta) \cos(\varphi) \end{cases} \quad (\text{sphère}) \quad (3.29)$$

Considérons un sous-domaine Ω_k (avec $k = 1$ pour la matrice poreuse et $k = 2$ pour l'inclusion) ayant pour coefficients de Brinkman h_k, α_k . En raison de la direction privilégiée de l'écoulement \mathbf{e}_1 , la solution est choisie sous la forme générale

suivante :

$$\begin{cases} v_r = \mathcal{U}_k(r) \cos(\theta), \\ v_\theta = -\mathcal{V}_k(r) \sin(\theta), \\ p = \mu \mathcal{P}_k(r) \cos(\theta) \end{cases} \quad (\text{cylindre}) \quad (3.30)$$

$$\begin{cases} v_r = \mathcal{U}_k(r) \cos(\theta) \sin(\varphi), \\ v_\theta = -\mathcal{V}_k(r) \sin(\theta), \\ v_\varphi = -\mathcal{V}_k(r) \cos(\theta) \cos(\varphi), \\ p = \mu \mathcal{P}_k(r) \cos(\theta) \sin(\varphi) \end{cases} \quad (\text{sphere}) \quad (3.31)$$

où $\mathcal{U}_k(r)$, $\mathcal{V}_k(r)$ et $\mathcal{P}_k(r)$ sont des fonction de la coordonnée r . Ce champ de vitesse permet de satisfaire les conditions de Dirichlet et les condition aux limites du problème avec le solide poreux infini. Comme nous le verrons par la suite le champ de contrainte obtenu permet également de satisfaire la condition de Neumann.

Le champ de pression et le champ de vitesse satisfont dans la phase Ω_k à :

$$\mu \alpha_k \Delta \mathbf{v} - \mu h_k \mathbf{v} = \nabla p \quad (3.32)$$

Le champ de vitesse étant à divergent nul, il vient donc pour p :

$$\Delta p = 0 \quad (3.33)$$

p est donc une fonction harmonique. Le champ de vitesse peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{\mu h_k} \nabla p + \mathbf{v}' \quad (3.34)$$

où \mathbf{v}' est la solution générale de l'équation de helmholtz :

$$\Delta \mathbf{v}' - \gamma_k^2 \mathbf{v}' = 0 \quad (3.35)$$

Où l'on a posé :

$$\gamma_k = \sqrt{\frac{h_k}{\alpha_k}} \quad (3.36)$$

La solution de ces équations pour les fonctions $\mathcal{U}_k(r)$, $\mathcal{V}_k(r)$, $\mathcal{P}_k(r)$ sont :

$$\mathcal{U}_k(r) = A_k + B_k \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} + C_k P_{11}(\gamma_k r) + D_k P_{12}(\gamma_k r), \quad (3.37)$$

$$\mathcal{V}_k(r) = A_k - \frac{B_k}{n} \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} - C_k P_{21}(\gamma_k r) - D_k P_{22}(\gamma_k r), \quad (3.38)$$

$$\mathcal{P}_k(r) = -h_k r \left(A_k - \frac{B_k}{n} \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} \right) \quad (3.39)$$

Avec $n = 1$ pour le cylindre et $n = 2$ pour la sphère. A_k, B_k, C_k, D_k sont quatre constantes à déterminer. Dans les expressions ci-dessus, les fonctions $P_{ij}(x)$ sont définies par :

$$\begin{cases} P_{11}(x) = \frac{I_{\frac{n+1}{2}}(x)}{x^{\frac{n+1}{2}}}, & P_{12}(x) = \frac{K_{\frac{n+1}{2}}(x)}{x^{\frac{n+1}{2}}}, \\ P_{21}(x) = \frac{1}{n} \left[\frac{I_{\frac{n+1}{2}}(x)}{x^{\frac{n+1}{2}}} - \frac{I_{\frac{n-1}{2}}(x)}{x^{\frac{n-1}{2}}} \right], \\ P_{22}(x) = \frac{1}{n} \left[\frac{K_{\frac{n+1}{2}}(x)}{x^{\frac{n+1}{2}}} + \frac{K_{\frac{n-1}{2}}(x)}{x^{\frac{n-1}{2}}} \right] \end{cases} \quad (3.40)$$

Où $I_n(x)$ et $K_n(x)$ sont les fonctions de Bessel modifiées de première et deuxième espèce, respectivement. Les composantes du vecteur contrainte sur le cylindre de rayon r (resp. la sphère de rayon r) sont :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \mu \mathcal{N}_k(r) \cos(\theta), \\ \sigma_{r\theta} = -\mu \mathcal{T}_k(r) \sin(\theta) \end{cases} \quad (\text{cylindre}) \quad (3.41)$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \mu \mathcal{N}_k(r) \cos(\theta) \sin(\varphi), \\ \sigma_{r\theta} = -\frac{\mu}{2} \mathcal{T}_k(r) \sin(\theta), \\ \sigma_{r\varphi} = -\frac{\mu}{2} \mathcal{T}_k(r) \cos(\theta) \cos(\varphi) \end{cases} \quad (\text{sphère}) \quad (3.42)$$

Avec :

$$\mathcal{N}_k(r) = h_k r \left[A_k - \frac{B_k a^{n+1}}{n r^{n+1}} \right] - \frac{2n\alpha_k}{r} [\mathcal{U}_k(r) - \mathcal{V}_k(r)], \quad (3.43)$$

$$\mathcal{T}_k(r) = -h_k r \left[A_k + B_k \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} - \mathcal{U}_k(r) \right] + \frac{2n\alpha_k}{r} [\mathcal{U}_k(r) - \mathcal{V}_k(r)] \quad (3.44)$$

Compte tenu de la complexité des solutions et du nombre de coefficients à déterminer, une stratégie de résolution des problèmes étudiés devra être adoptée pour aboutir à des expressions analytiques explicites des propriétés apparentes.

3.2.3 Estimation de Mori-Tanaka

Le principe de la méthode formulée par Mori-Tanaka appliquée aux composites élastiques consiste à relier la déformation moyenne dans les inclusions à la déformation moyenne dans la matrice et à utiliser la solution d'Eshelby pour estimer cette relation. En suivant la même méthodologie, nous supposons que la moyenne de la vitesse sur Ω_1 est $\langle \mathbf{v} \rangle_{\Omega_1} = \mathbf{V}^\infty$ et nous posons $\langle \mathbf{v} \rangle_{\Omega_2} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{V}^\infty$. Ici, le tenseur d'ordre deux \mathbf{T} doit être déterminé à partir de la solution du problème de

l'inclusion dans un solide infini et soumise à la vitesse V_1^∞ . Lorsque \mathbf{T} est identifié on déduit la résistivité macroscopique par la formule :

$$\mathbf{H}^{hom} = (c_1 h_1 \mathbf{I} + c_2 h_2 \mathbf{T}) \cdot (c_1 \mathbf{I} + c_2 \mathbf{T})^{-1} \quad (3.45)$$

Le tenseur \mathbf{T} est maintenant déterminé en considérant le problème d'une l'inclusion isolée de rayon a avec pour coefficients de Brinkman h_2, α_2 plongée dans la matrice poreuse infinie qui a pour coefficients de Brinkman h_1, α_1 . La solution générique dans chacune des phases est donnée par les équations (3.30) et (3.41) pour le cas cylindrique et (3.31) et (3.42) pour la sphère. Dans l'inclusion, les constantes B_2 et D_2 sont nulles car associées à des fonctions qui divergent en $r = 0$. Dans la matrice, le coefficient C_1 est nul car associé à une fonction qui diverge lorsque r tend vers l'infini. Il reste donc à identifier les constantes A_1, B_1, D_1, A_2 et C_2 . La condition à l'infini s'écrit $\mathcal{U}_1(+\infty) = \mathcal{V}_1(+\infty) = V_1^\infty$. Pour cette condition, on peut noter que les fonctions associées aux constantes B_1 et D_1 tendent vers zéro à l'infini, il résulte donc que $A_1 = V_1^\infty$. Il reste donc quatre coefficient à déterminer : B_1, D_1, A_2 et C_2 . Les conditions utilisées sont : la continuité du champ de vitesse : $\mathcal{U}_1(a) = \mathcal{U}_2(a)$ et $\mathcal{V}_1(a) = \mathcal{V}_2(a)$, la continuité du vecteur contrainte : $\mathcal{N}_1(a) = \mathcal{N}_2(a)$ et $\mathcal{T}_1(a) = \mathcal{T}_2(a)$, Afin de poursuivre la résolution analytique du problème, on décompose le problème en deux sous problèmes :

- Sous-problème 1 : une inclusion cylindrique/sphérique de rayon a contenant un milieu de Brinkman avec les coefficients α_2 et h_2 est soumis sur son bord extérieur aux vitesses U_a, V_a telles que $\mathcal{U}_2(a) = U_a$ et $\mathcal{V}_2(a) = V_a$.
- Sous-problème 2 : un solide poreux infini avec un trou cylindrique/sphérique contenant un milieu de Brinkman avec les coefficients α_1 et h_1 est soumis à la vitesse V_1^∞ et à U_a, V_a (telles que $\mathcal{U}_1(a) = U_a$ et $\mathcal{V}_1(a) = V_a$) à la surface du trou.

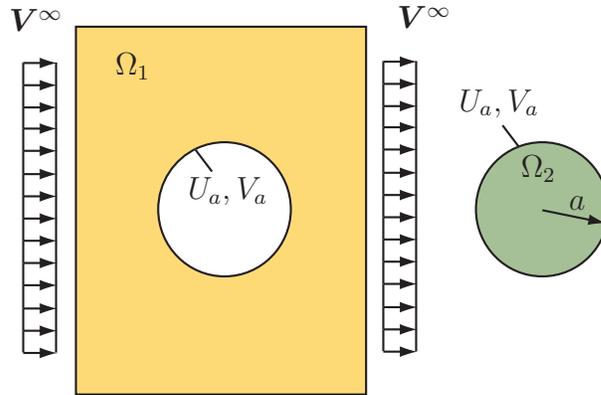


FIGURE 3.2 – Decomposition du problème de l'inclusion isolée dans un milieu infini

La solution dans l'inclusion implique les deux constantes A_2 et C_2 qui sont exprimées en fonction de U_a et V_a . Ensuite, les composantes de la traction sont

calculées avec les équations (3.41) et (3.42) et nous posons :

$$N_a = \frac{1}{a}\mathcal{N}_2(a), \quad T_a = \frac{1}{a}\mathcal{T}_2(a) \quad (3.46)$$

En éliminant A_2 et C_2 , on obtient une relation liant N_a, T_a à U_a, V_a . Cette relation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} N_a \\ T_a \end{pmatrix} = h_2 \mathbf{C}(\tau_{2a}) \begin{pmatrix} U_a \\ V_a \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

Où $\mathbf{C}(\tau_{2a})$ est une la matrice symétrique 2×2 donnée dans l'annexe A, elle dépend du paramètre $\tau_{2a} = \gamma_2 a$ (où γ_2 est donné par (3.36) pour $k = 2$).

Dans le sous-problème 2, on exprime A_1, B_1 et D_1 en fonction des paramètres imposés V_1^∞, U_a, V_a puis on détermine les valeurs de $N_a = \mathcal{N}_1(a)/a$ et $T_a = \mathcal{T}_1(a)/a$. Cela conduit à :

$$\begin{pmatrix} N_a \\ T_a \end{pmatrix} = h_1 \mathbf{A}(\tau_{1a}) \begin{pmatrix} U_a \\ V_a \end{pmatrix} - h_1 \mathbf{B}(\tau_{1a}) V_1^\infty \quad (3.48)$$

Où $\mathbf{A}(\tau_{1a})$ est une matrice 2×2 et $\mathbf{B}(\tau_{1a})$ est un vecteur de dimension 2 dont les expressions sont fournies dans l'annexe A, ils dépendent du paramètre $\tau_{1a} = \gamma_1 a$ (où γ_1 est donné par (3.36) pour $k = 1$).

En combinant les équations (3.47) et (3.48), cela conduit aux expressions suivantes pour U_a, V_a :

$$\begin{pmatrix} U_a \\ V_a \end{pmatrix} = \Lambda V_1^\infty, \quad \Lambda = \left[\mathbf{A}(\tau_{1a}) - \frac{h_2}{h_1} \mathbf{C}(\tau_{2a}) \right]^{-1} \mathbf{B}(\tau_{1a}) \quad (3.49)$$

Le tenseur d'ordres deux \mathbf{T} dans l'équation (3.45) est isotrope pour l'inclusion sphérique et isotrope dans le plan pour le cas cylindrique. De plus, en considérant que $\langle \mathbf{v} \rangle_{\Omega_2} = U_a \mathbf{e}_1$ avec $U_a = \Lambda_1 V_1^\infty$, nous déduisons que $T_{ii} = \Lambda_1$ pour $i = 1, 2, 3$ (pas de somme sur i) pour le cas sphérique et pour $i = 1, 2$ pour le cas cylindrique. La perméabilité macroscopique du schéma Mori-Tanaka est :

$$H^{hom} = \frac{c_1 h_1 + c_2 h_2 \Lambda_1}{c_1 + c_2 \Lambda_1} \quad (3.50)$$

où Λ_1 est la première composante du vecteur Λ défini par l'équation (3.49).

3.2.4 Modèle du cylindre/sphère composite

La perméabilité macroscopique est calculée en considérant maintenant le cylindre/sphère composite avec les conditions aux limites de Dirichlet ou Neumann. Nous allons suivre la même stratégie pour aboutir à des expressions analytiques explicites. On décompose le problème :

- Sous-problème 1 : une inclusion cylindrique/sphérique de rayon a contenant un milieu de Brinkman avec les coefficients α_2 et h_2 est soumis sur son bord extérieur aux vitesses U_a, V_a telles que $\mathcal{U}_2(a) = U_a$ et $\mathcal{V}_2(a) = V_a$.
- Sous-problème 2 : la couche cylindrique/sphérique de rayon interne a et de rayon externe b contenant un milieu de Brinkman avec les coefficients α_1 et h_1 est soumis à sa surface interne $r = a$ aux vitesses U_a, V_a , à la traction N_a et au cisaillement T_a .

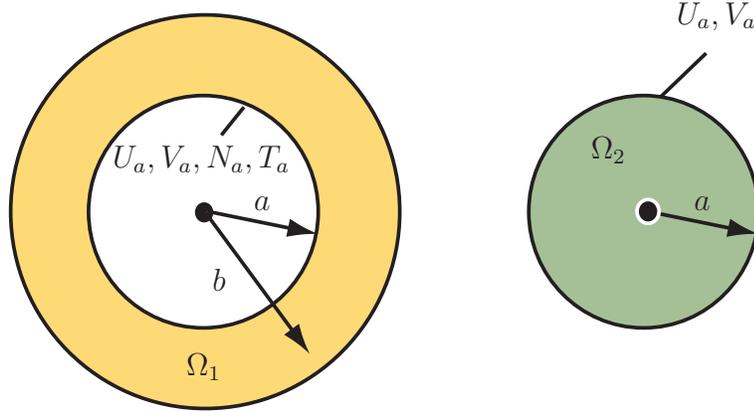


FIGURE 3.3 – Decomposition du problème du cylindre (la sphere) composite.

Le premier sous-problème a déjà été étudié dans la section précédente (voir équation (3.47)). La solution du sous-problème 2 implique quatre coefficients A_1, B_1, C_1, D_1 qui sont exprimés en fonction de U_a, V_a, N_a et T_a par les conditions $U_a = \mathcal{U}_1(a), V_a = \mathcal{V}_1(a), N_a = \frac{1}{a}\mathcal{N}_1(a), T_a = \frac{1}{a}\mathcal{T}_1(a)$. Ensuite, nous calculons $U_b = \mathcal{U}_1(b), V_b = \mathcal{V}_1(b), N_b = \frac{1}{b}\mathcal{N}_1(b), T_b = \frac{1}{b}\mathcal{T}_1(b)$ pour obtenir les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U_b \\ V_b \end{pmatrix} &= \mathbf{L}(\tau_{1a}, \tau_{1b}, f) \begin{pmatrix} U_a \\ V_a \end{pmatrix} + \frac{1}{h_1} \mathbf{M}(\tau_{1a}, \tau_{1b}, f) \begin{pmatrix} N_a \\ T_a \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} N_b \\ T_b \end{pmatrix} &= h_1 \mathbf{N}(\tau_{1a}, \tau_{1b}, f) \begin{pmatrix} U_a \\ V_a \end{pmatrix} + \mathbf{Q}(\tau_{1a}, \tau_{1b}, f) \begin{pmatrix} N_a \\ T_a \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Dans lesquelles $\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$ et \mathbf{Q} sont des matrices 2×2 dont les expressions sont fournies dans l'annexe A et dépendent de trois paramètres : $\tau_{1a} = \gamma_1 a, \tau_{1b} = \gamma_1 b$ et f , la fraction volumique de l'inclusion définie par :

$$f = \begin{cases} \frac{a^2}{b^2} & (\text{cylindre}) \\ \frac{a^3}{b^3} & (\text{sphère}) \end{cases} \quad (3.52)$$

En éliminant U_a, V_a, N_a, T_a dans les équations (3.51) avec (3.47), nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} N_b \\ T_b \end{pmatrix} = h_1 \mathbf{\Pi} \begin{pmatrix} U_b \\ V_b \end{pmatrix}, \quad (3.53)$$

$$\mathbf{\Pi} = \left[\mathbf{N}(\tau_{1a}, \tau_{1b}, f) + \frac{h_2}{h_1} \mathbf{Q}(\tau_{1a}, \tau_{1b}, f) \mathbf{C}(\tau_{2a}) \right] \quad (3.54)$$

$$\left[\mathbf{L}(\tau_{1a}, \tau_{1b}, f) + \frac{h_2}{h_1} \mathbf{M}(\tau_{1a}, \tau_{1b}, f) \mathbf{C}(\tau_{2a}) \right]^{-1} \quad (3.55)$$

où $\mathbf{\Pi}$ est une matrice symétrique 2×2 .

Lorsque le cylindre/sphère composite est soumis à la condition de Dirichlet, nous posons $U_b = V_b = V_1$, V_1 étant la première composante de la vitesse macroscopique \mathbf{V} . Avec la propriété (1.66) du chapitre 1 et les expressions pour le vecteur contrainte données par l'équation (3.41) pour le cylindre et l'équation (3.42) pour la sphère, nous déduisons que $\langle \boldsymbol{\omega} \rangle_{\Omega} = \mu(N_b + T_b)\mathbf{e}_1$. Alors, la perméabilité macroscopique est donnée par :

$$K_D^{hom} = \frac{k_1}{\Pi_{11} + 2\Pi_{12} + \Pi_{22}} \quad (3.56)$$

Si la condition de Neumann est appliquée sur le bord du volume, on pose $N_b = W_1/\mu$ et $T_b = 0$. De plus, avec la propriété (1.64) combinée avec l'équation (3.30) pour le cylindre et l'équation (3.31) pour la sphère, nous déduisons que $\langle \mathbf{v} \rangle_{\Omega} = U_b \mathbf{e}_1$. Ainsi, la perméabilité macroscopique est donnée par :

$$K_N^{hom} = k_1 \frac{\Pi_{22}}{\Pi_{11}\Pi_{22} - \Pi_{12}^2} \quad (3.57)$$

La perméabilité effective dépend des propriétés locales $h_1, h_2, \alpha_1, \alpha_2$ et deux paramètres de microstructuraux : le rayon de l'inclusion et la fraction volumique des inclusions f . Dans le modèle de cylindre/sphère composite, le rayon extérieur b est fixé lorsque le rayon de l'inclusion a et la fraction volumique f sont connus (voir équation (3.52)).

3.3 Comparaisons avec les solutions numériques

Nous proposons maintenant de comparer les estimations avec les solutions numériques obtenues avec le schéma itératif utilisant la FFT de Mezhoud et al. [45]. Les calculs sont effectués sur des cellules élémentaires avec des conditions aux limites périodiques. Les comparaisons sont effectuées pour le problème adimensionné déjà décrit au chapitre 2 (voir section 2.1.1). La cellule élémentaire a pour longueur 1 le long de chaque direction de l'espace et la matrice poreuse a la résistivité $\bar{h}_1 = 1$. Les comparaisons sont effectuées en faisant varier le contraste entre les phases, c'est à dire $\bar{h}_2 = h_2/h_1$, ainsi que les valeurs de $\bar{\alpha}_1 = \alpha_1/(h_1 L^2)$, $\bar{\alpha}_2 = \alpha_2/(h_1 L^2)$. Également, nous faisons varier la taille des inclusions $\bar{a} = a/L$,

Dans le cas d'une cellule élémentaire avec une inclusion centrée, la fraction volumique est directement relié à la taille de l'inclusions puisque $f = \pi\bar{a}^2$ (en 2D) et $f = 4\pi\bar{a}^3/3$ (en 3D). Pour une population d'inclusions, $f = N\pi\bar{a}^2$ (en 2D) où N est le nombre d'inclusions dans la cellule élémentaire.

3.3.1 Résultats

La perméabilité est d'abord calculée pour une cellule unitaire carrée contenant une inclusion circulaire centrée à l'origine. Les comparaisons entre les solutions numériques et les estimations analytiques sont illustrées sur les figures 3.4, 3.5 et 3.6. Par exemple, sur la figure 3.4, nous représentons les variations de la perméabilité en fonction du rayon de l'inclusion. Le contraste de résistivité entre l'inclusion et la matrice est $h_2/h_1 = 10$, dans ce cas, l'inclusion est 10 fois moins perméable que la matrice. Les calculs sont effectués en considérant $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2$ et pour lesquels différentes valeurs sont testées. Sur la figure 3.5, nous affichons les mêmes résultats mais pour le contraste $h_2/h_1 = 100$.

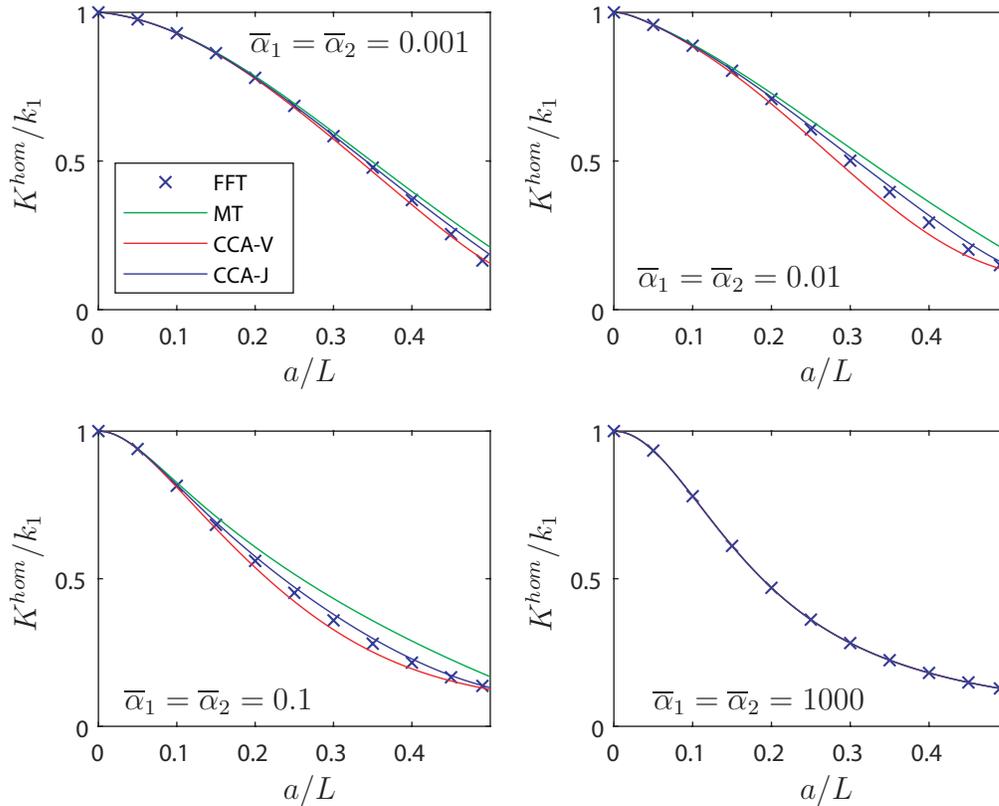


FIGURE 3.4 – Variations de la perméabilité macroscopique adimensionnée en fonction du rayon de l'inclusion $\bar{a} = a/L$ pour $h_2/h_1 = 10$ et différentes valeurs de $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2$. Comparaison des estimations analytiques avec les solutions FFT dans le cas d'une inclusion circulaire centrée à l'origine.

Sur la figure 3.6, le cas d'une inclusion moins résistive est considéré avec $h_2/h_1 = 0.01$, l'inclusion est donc très perméable en comparaison de la matrice puisque $k_2/k_1 = 100$. Pour une meilleure lisibilité, nous représentons les variations de la résistivité macroscopique en fonction du rayon de l'inclusion alors que sur les figures précédentes nous avons représenté les variations de la perméabilité avec le rayon de l'inclusion.

Sur chacune des figures, on compare les solutions numériques (FFT) avec les trois estimations analytiques obtenues : le schéma de Mori-Tanaka (MT), le modèle du cylindre composite avec la condition de Dirichlet (CCA-V) et avec la condition de Neumann (CCA-J). On peut observer sur les figures 3.4 et 3.5 que la perméabilité diminue lorsque l'on augmente le rayon de l'inclusion. L'inclusion étant moins perméable (donc plus résistive), la perméabilité effective est donc plus faible que la perméabilité de la matrice. Sur la figure 3.6, l'inclusion a une perméabilité plus grande que la matrice. Ainsi, lorsque l'on augmente le rayon, la perméabilité homogénéisée augmente et donc la résistivité homogénéisée diminue.

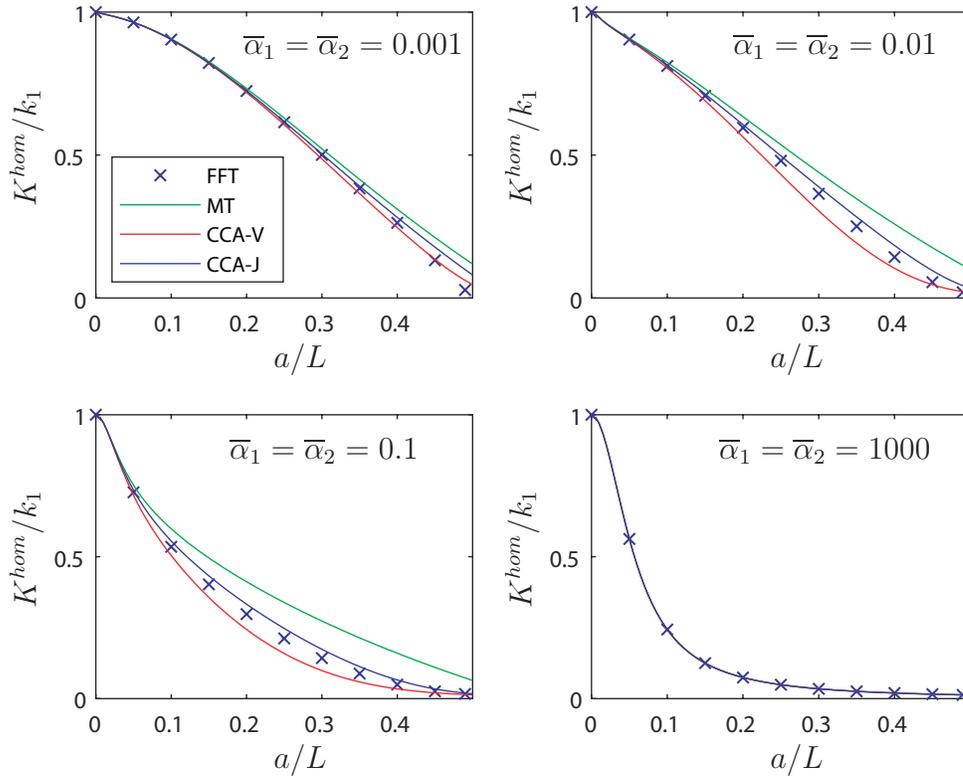


FIGURE 3.5 – Variations de la perméabilité adimensionnée en fonction du rayon de l'inclusion adimensionné $\bar{a} = a/L$ pour $h_2/h_1 = 100$ et diverses valeurs de $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2$. Comparaison des estimations analytiques avec les solutions FFT. Cellule avec une inclusion circulaire.

On peut observer que la solution périodique est comprise entre les deux solutions calculées avec le modèle de cylindre composite et les conditions de Dirichlet (CCA-V) et Neumann (CCA-J) conformément à l'inégalité (3.23). Toutefois cette inégalité n'est valable que si les conditions aux limites sont appliquées au même volume Ω , ce qui n'est pas le cas dans cette application (cellule rectangulaire pour les conditions périodiques et cellule cylindrique pour les conditions de Dirichlet et Neumann). Il est donc intéressant de noter que l'encadrement de la solution périodique est retrouvée pour des volumes Ω de formes différentes et sur un intervalle pour le rapport a/L allant jusqu'à $a/L = 0.5$, c'est à dire lorsque les inclusions se touchent. Notons toutefois que certains points numériques ne sont pas encadrés par les deux solutions analytiques, comme on peut l'observer sur les figures 3.5 et 3.6 (en haut, à gauche), lorsque $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 = 0.001$ et lorsque $a/L = 0.49$.

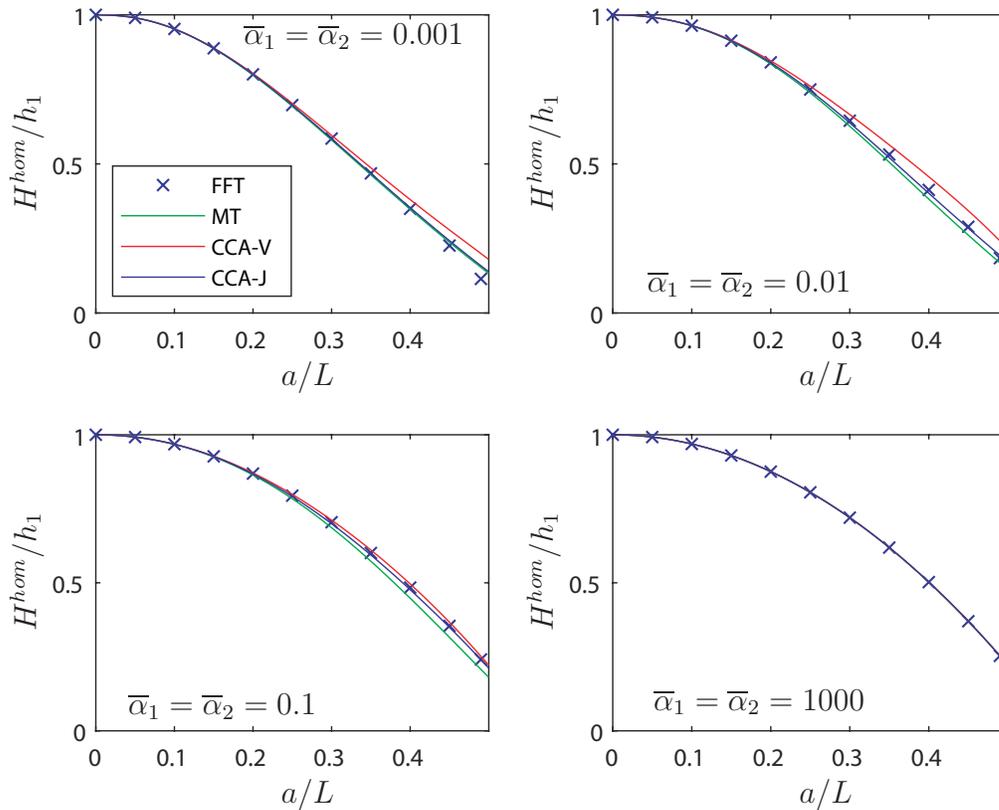


FIGURE 3.6 – Variations de la résistivité macroscopique adimensionnée en fonction du rayon d'inclusion adimensionné $\bar{a} = a/L$ pour $k_2/k_1 = 100$ et diverses valeurs de $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2$. Comparaison des estimations analytiques avec les solutions FFT. Cellule avec une inclusion circulaire.

On peut également observer que le schéma Mori-Tanaka (MT) n'est pas encadré par les solutions avec conditions homogènes au bord. Elle conduit à une estimation des propriétés homogénéisées plus perméable que les solution numériques. De plus, la meilleure estimation est celle obtenue sur la cellule cylindrique composite

et la condition de Neumann au bord (CCA-J). Pour certaines valeurs particulières des coefficients de Brinkman, les trois estimations sont très proches, c'est le cas lorsque $\bar{\alpha}_1$ et $\bar{\alpha}_2$ sont très grands ou très petits. Pour des valeurs intermédiaires de α_1 et α_2 , les trois solutions analytiques montrent des différences notables. La précision des solutions analytiques est maintenant examinée lorsque les calculs FFT sont effectués sur une cellule élémentaire contenant une population d'inclusions circulaires aléatoirement distribuées. Le problème est toujours bidimensionnel et nous considérons 10 inclusions identiques en taille et distribuées aléatoirement dans la cellule. La moyenne statistique de la perméabilité effective est calculée avec 100 réalisations. Cette perméabilité moyenne est représentée sur la figure 3.7 en fonction du nombre de réalisation. Nous avons choisi le contraste $h_2/h_1 = 100$ et nous considérons différentes valeurs du rayon des inclusions. Nous avons également choisi différentes valeurs des coefficients $\bar{\alpha}_1$ et $\bar{\alpha}_2$, y compris des cas où $\bar{\alpha}_1 \neq \bar{\alpha}_2$. On peut observer que pour chaque cas considéré, on obtient une convergence sur la moyenne statistique.

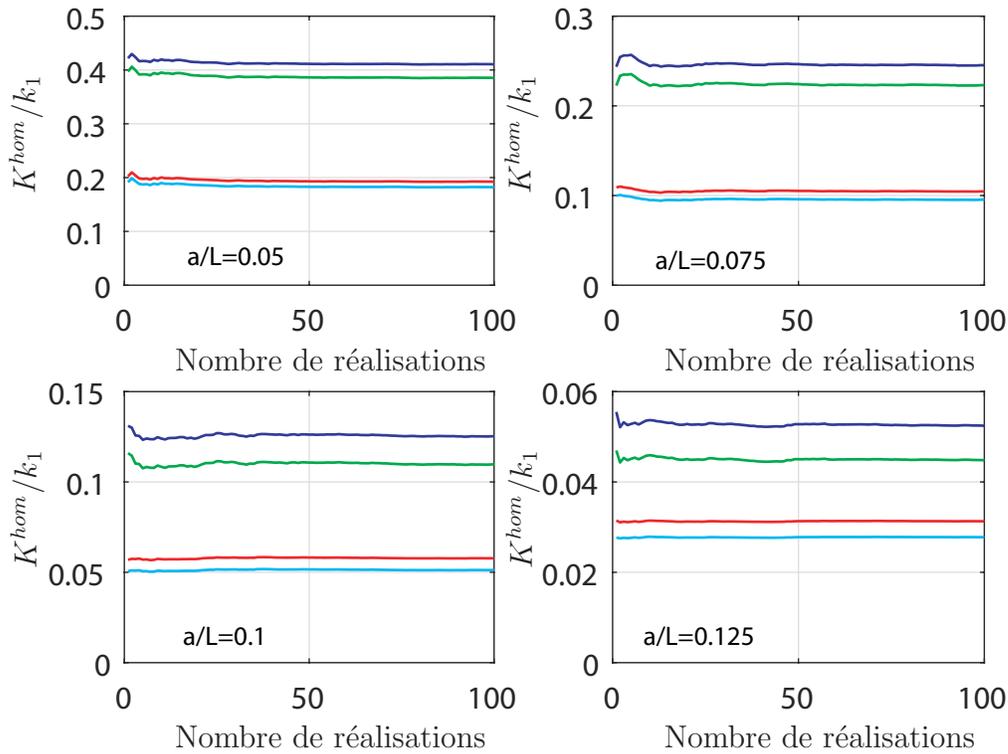


FIGURE 3.7 – Moyenne statistique de la perméabilité macroscopique en fonction du nombre de réalisations pour une population de 10 inclusions. Sur chaque figure, les résultats en partant du haut sont obtenus avec les valeurs $\bar{\alpha}_1 = 0.01$ et $\bar{\alpha}_2 = 0.01$, $\bar{\alpha}_1 = 0.01$ et $\bar{\alpha}_2 = 0.1$, $\bar{\alpha}_1 = 0.1$ et $\bar{\alpha}_2 = 0.01$, $\bar{\alpha}_1 = 0.1$ et $\bar{\alpha}_2 = 0.1$.

La perméabilité moyenne statistique sur 100 réalisations est comparée aux solutions analytiques sur la figure 3.8, les conclusions sont assez similaires à celles

données pour le cas d'une cellule avec une seule inclusion. Dans tous les cas présentés sur les figures, les solutions FFT sont comprises entre les deux estimations obtenues avec les conditions de Dirichlet et Neumann et sont plus proches de l'estimation avec la condition de Neumann.

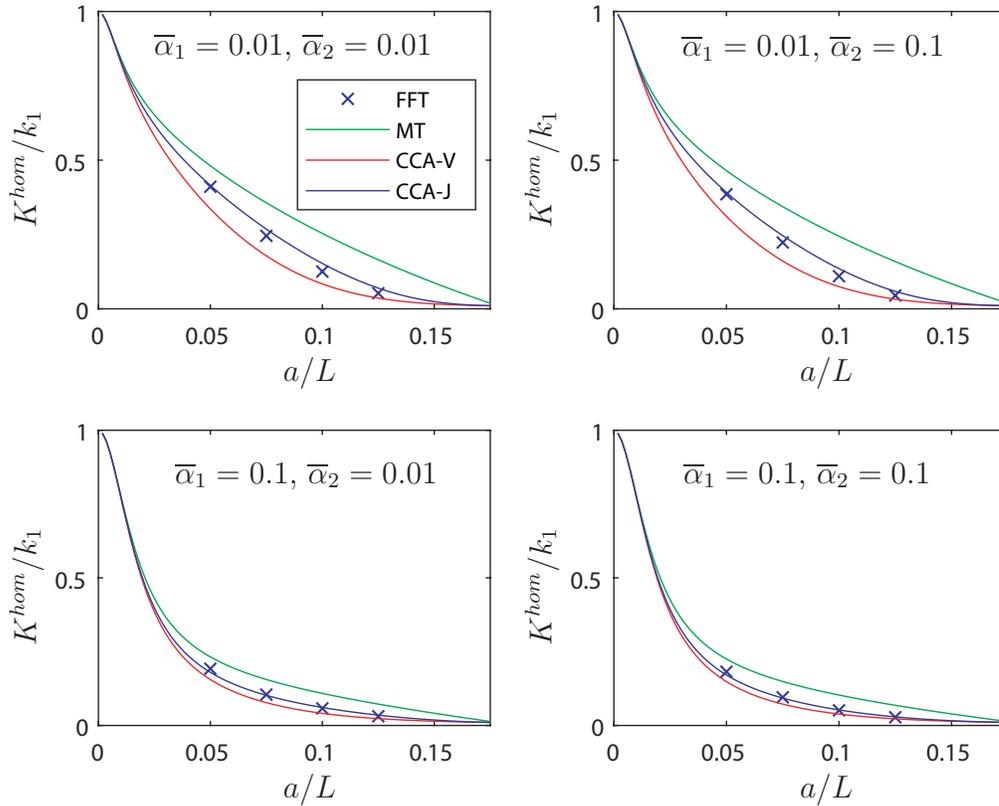


FIGURE 3.8 – Variations de la perméabilité macroscopique adimensionnée en fonction du rayon des inclusions pour $h_2/h_1 = 100$ et diverses valeurs de $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2$. Comparaison des estimations analytiques avec les solutions FFT obtenues pour des cellule avec une population de 10 inclusions circulaires aléatoirement distribuées.

Enfin, nous proposons de comparer les solutions analytiques aux solutions FFT pour un milieu poreux contenant des inclusions sphériques poreuses. Les calculs sont effectués sur des cellules élémentaires cubiques avec une seule sphère centrée à l'origine. Les résultats sont présentés sur la figure 3.9 pour diverses valeurs des coefficients de Brinkman. Encore une fois, les solutions FFT se situent entre les deux solutions avec la condition de Dirichlet au bord (CCS-V) et la condition de Neumann (CCS-J).

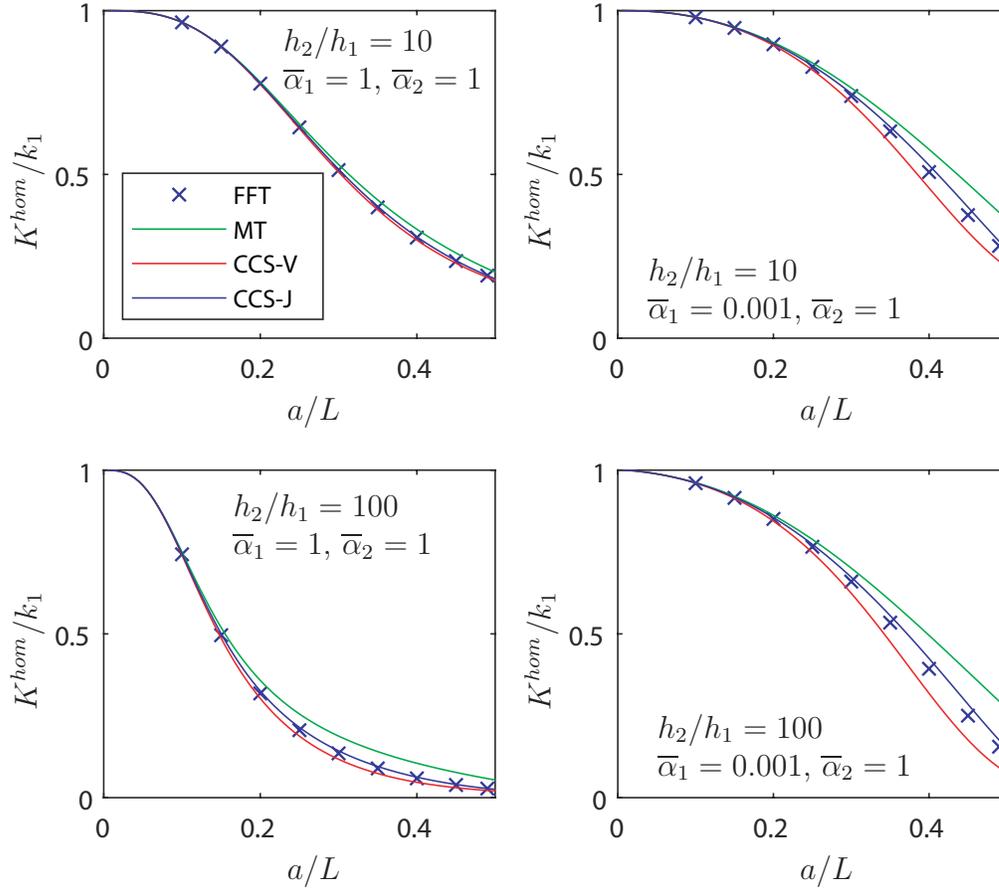


FIGURE 3.9 – Variations de la perméabilité macroscopique adimensionnée en fonction du rayon de l’inclusion pour $h_2/h_1 = 10$ et $h_2/h_1 = 100$ et diverses valeurs de $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$. Comparaison des estimations analytiques avec les solutions FFT. Cas d’une inclusion sphérique.

3.4 Cellules multicouches

On propose de généraliser les résultats en considérant un cylindre / une sphère composite constitué de n solides de Brinkman concentriques : le noyau a pour rayon a_1 et les coefficients de Brinkman h_1 et α_1 , des couches successives ont pour rayons internes et externes a_{k-1} et a_k et les coefficients de Brinkman h_k , α_k pour $k = 2..n$. La dernière couche a pour coefficients de Brinkman h_n , α_n et rayon extérieur a_n . A la frontière de la cellule, nous considérons encore les conditions de Dirichlet ou de Neumann. Des couches supplémentaires sont introduites pour tenir compte, par exemple, de la présence d’une zone de transition autour des inclusions qui est plus ou moins perméable, ou possédant une viscosité dynamique apparente plus petite ou plus grande que dans les deux milieux avoisinants.

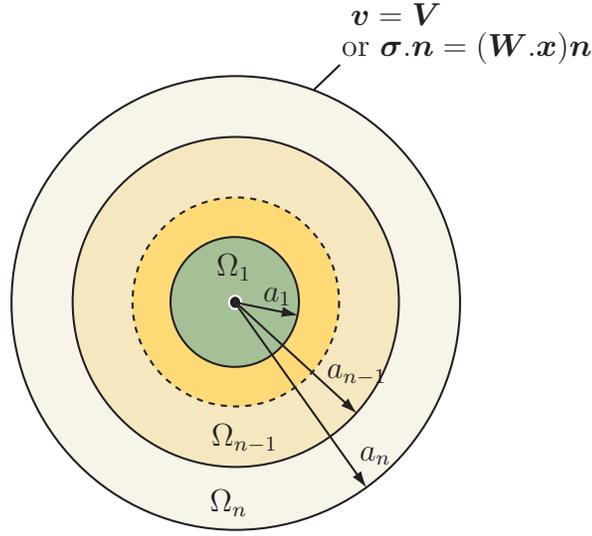


FIGURE 3.10 – Cellule cylindrique/sphérique multicouche.

Avec l'introduction des matrices de transfert dans la section (3.2.4), le problème avec n couches peut être facilement résolu. Nous isolons une couche avec les rayons intérieur et extérieur a_{k-1} et a_k . Le résultat donné par l'équation (3.51) est alors adapté pour la couche k comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U_{a_k} \\ V_{a_k} \end{pmatrix} &= \mathbf{L}^{(k)} \begin{pmatrix} U_{a_{k-1}} \\ V_{a_{k-1}} \end{pmatrix} + \frac{1}{h_k} \mathbf{M}^{(k)} \begin{pmatrix} N_{a_{k-1}} \\ T_{a_{k-1}} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} N_{a_k} \\ T_{a_k} \end{pmatrix} &= h_k \mathbf{N}^{(k)} \begin{pmatrix} U_{a_{k-1}} \\ V_{a_{k-1}} \end{pmatrix} + \mathbf{Q}^{(k)} \begin{pmatrix} N_{a_{k-1}} \\ T_{a_{k-1}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.58)$$

où $\mathbf{L}^{(k)} = \mathbf{L}(\gamma_k a_{k-1}, \gamma_k a_k, f_k)$ et f_k est donné par l'équation (3.52) en remplaçant les rayons a et b par les rayons a_{k-1} et a_k respectivement. Nous faisons la même chose avec les matrices $\mathbf{M}^{(k)}$, $\mathbf{N}^{(k)}$ et $\mathbf{Q}^{(k)}$. Par un processus itératif, la matrice $\mathbf{\Pi}^{(n)}$ associée à la cellule composite à n couches est calculée avec la formule :

$$\mathbf{\Pi}^{(k)} = \left[\mathbf{N}^{(k)} + \frac{h_{k-1}}{h_k} \mathbf{Q}^{(k)} \mathbf{\Pi}^{(k-1)} \right] \left[\mathbf{L}^{(k)} + \frac{h_{k-1}}{h_k} \mathbf{M}^{(k)} \mathbf{\Pi}^{(k-1)} \right]^{-1} \quad (3.59)$$

Le processus itératif débute à $k = n$ et diminue jusqu'à $k = 2$, où l'on pose $\mathbf{\Pi}^{(1)} = \mathbf{C}(\gamma_1 a_1)$ pour le noyau.

Examinons maintenant le cas d'une interphase très fine entourant une inclusion de rayon a . Nous posons $a_1 = a$ et $a_2 = a + e$ où la largeur de la couche e est supposée très petite par rapport à la taille de l'inclusion, $e \ll a$. Nous désignons par h_e et α_e les coefficients de Brinkman de l'interphase. Evidemment, lorsque $e \rightarrow 0$, l'interphase disparaît. Cependant, lorsque des hypothèses appropriées sont

faites sur l'amplitudes des propriétés de filtration de l'interphase, il est possible de la remplacer par une interface imparfaite insérée entre les deux régions poreuses voisines. Ce problème a été largement étudié dans le cas des composites conducteurs de la chaleur et des composites élastiques par Hashin [31], Benveniste [11] notamment.

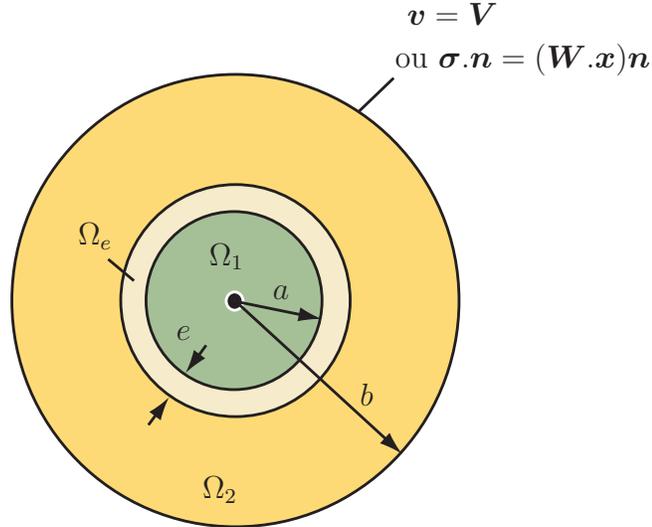


FIGURE 3.11 – Cylindre/sphere composite avec interphase mince.

Dans le cas d'une interphase très fine, une série de Taylor par rapport au petit paramètre $\epsilon = e/a$ donne :

$$\begin{aligned}
 U_{a+\epsilon} &= U_a + n(V_a - U_a)\epsilon + o(\epsilon^2) \\
 V_{a+\epsilon} &= V_a + \left(V_a - U_a + \frac{a^2}{n\alpha_e} T_a \right) \epsilon + o(\epsilon^2) \\
 N_{a+\epsilon} &= N_a + \left(h_e U_a + \frac{2n(n+1)\alpha_e}{a^2} (U_a - V_a) + T_a - N_a \right) \epsilon \\
 &\quad + o(\epsilon^2) \\
 T_{a+\epsilon} &= T_a + \left(nh_e V_a - \frac{2n(n+1)\alpha_e}{a^2} (U_a - V_a) - (n+2)T_a - nN_a \right) \epsilon \\
 &\quad + o(\epsilon^2)
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, on retrouve $U_b = U_a$, $V_b = V_a$, $N_b = N_a$ et $T_b = T_a$ qui correspondent à la continuité de la vitesse et du vecteur contrainte en $r = a$. Dans certaines situations très particulières, le terme en $O(\epsilon)$ ne disparaît pas lorsque ϵ tend vers zéro. Par exemple, une de ces situations apparaît lorsque la couche fine est constituée d'un solide Brinkman poreux de faible viscosité dont la magnitude

est en $o(\epsilon)$. Nous posons alors $\alpha_e = \alpha_s \epsilon$ où α_s prend une valeur finie non nulle lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. Il est clair que le produit entre $1/\alpha_e$ et ϵ reste fini lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ dans l'expression de V_{a+e} . Cependant, dans l'expression de U_{a+e} , N_{a+e} et T_{a+e} , le terme en $o(\epsilon)$ disparaît. En conséquence, la couche fine de faible viscosité peut être remplacée par une interface imparfaite qui se caractérise par une discontinuité de la vitesse tangentielle. Il est à noter que la vitesse normale reste continue, ce qui est la conséquence de la conservation de la masse à travers l'interface entre les deux milieux poreux. En notant par V_a^+ et V_a^- les valeurs prises par la vitesse tangentielle des deux côtés de l'interface, nous avons :

$$[V_a] = V_a^+ - V_a^- = \frac{a^2}{n\alpha_s} T_a, \quad (3.61)$$

Une formulation plus pratique pour les conditions du saut du champ de vitesse est :

$$\begin{pmatrix} U_a^+ \\ V_a^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_a^- \\ V_a^- \end{pmatrix} + \frac{a^2}{\alpha_s} \mathbf{S} \begin{pmatrix} N_a \\ T_a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

La perméabilité macroscopique est toujours calculée à partir des composantes de la matrice $\mathbf{\Pi}$ donnée par l'équation ((3.55)), mais dans ce cas, la matrice $\mathbf{C}(\tau_{2a})$ doit être remplacée par la matrice $\mathbf{C}^*(\tau_{2a}, \tau_{sa})$ définie par :

$$\mathbf{C}^*(\tau_{2a}, \tau_{sa}) = \mathbf{C}(\tau_{2a})(\mathbf{I} + \tau_{sa}^2 \mathbf{S} \mathbf{C}(\tau_{2a}))^{-1}, \quad \tau_{sa} = \sqrt{\frac{h_2}{\alpha_s}} a \quad (3.63)$$

Il convient de noter que dans ce type d'interface imparfaite, le saut de la vitesse tangentielle est proportionnel à la contrainte de cisaillement, la vitesse normale et la vecteur contrainte restent continus, ce qui est très similaire aux conditions d'interface de Beavers-Joseph [9] utilisées à la frontière entre une région poreuse de Darcy et une région de Stokes.

Pour poursuivre nos investigations sur d'autres modèles d'interface possible, nous examinons maintenant le cas d'une couche mince hautement visqueuse et supposons que $\alpha_e = \alpha_s/\epsilon$. Dans ce cas, on retrouve la continuité de la vitesse, $U_{a+e} = U_a$ et $V_{a+e} = V_a$, cependant, dans l'expression de N_{a+e} et T_{a+e} , le produit entre α_e et ϵ reste fini. Le modèle d'interface équivalent implique alors un saut du vecteur contrainte qui peut être écrit :

$$[N_a] = -[T_a] = \frac{2n(n+1)\alpha_s}{a^2} (U_a - V_a) \quad (3.64)$$

Enfin, un troisième cas correspond à une couche mince hautement résistante, ceci correspondant à $h_e = h_s/\epsilon$. La vitesse reste continue à travers l'interface équivalente mais les composantes du vecteur contrainte sont discontinues :

$$[N_a] = h_s U_a, \quad [T_a] = n h_s V_a \quad (3.65)$$

Pour résumer, il existe deux types d'interfaces imparfaites équivalentes impliquant un saut du vecteur contrainte (hautement visqueuse ou hautement résistante). Dans les deux cas, le saut du vecteur contrainte est pris en compte en remplaçant dans la définition de $\mathbf{\Pi}$ la matrice $\mathbf{C}(\tau_{2a})$ par la matrice $\mathbf{C}^{**}(\tau_{2a}, \tau_{sa})$ avec la définition suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{C}^{**}(\tau_{2a}, \tau_{sa}) = \mathbf{C}(\tau_{2a}) + \frac{2n(n+1)}{\tau_{sa}^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{très visqueuse}) \\ \mathbf{C}^{**}(\tau_{2a}, h_s/h_2) = \mathbf{C}(\tau_{2a}) + \frac{h_s}{h_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}, \quad (\text{très résistive}) \end{array} \right. \quad (3.66)$$

A des fins d'illustration, nous calculons la résistivité macroscopique dans le cas d'un solide poreux à deux phases avec une inclusion sphérique et une interface imparfaite hautement résistante. Il est à noter que le cas de parois plus résistantes a été observé expérimentalement, par exemple par Mezhoud et al. [44] sur des polymères biporeux. Les images obtenues par synchrotron révèlent trois caractéristiques différentes dans le solide biporeux : les macropores, la matrice polymère poreuse et les parois polymères minces. A proximité des grands pores, les parois minces sont moins perméables que dans le volume, ce qui est attribué à l'élaboration chimique du polymère biporeux. On peut deviner que ces parois jouent un rôle significatif sur les propriétés de filtration macroscopiques et peuvent être simulées par une interface imparfaite hautement résistante. Nous proposons ici une étude qualitative de l'influence de ce type d'interface imparfaite sur la perméabilité homogénéisée. Les paramètres du modèle de Brinkman pour l'inclusion et la matrice sont $\bar{h}_1 = 1$, $\bar{\alpha}_1 = 1$, $\bar{h}_2 = 0.01$ et $\bar{\alpha}_2 = 1$. Différentes valeurs du paramètre adimensionnel de l'interface $\bar{h}_s = h_s/h_1$ sont considérées : $\bar{h}_s = 0$ (interface parfaite), $\bar{h}_s = 0, 2$, $\bar{h}_s = 0, 5$ et $\bar{h}_s = 1$. Les résultats sont présentés sur la figure 3.12 dans laquelle la résistivité macroscopique adimensionnelle H^{hom}/h_1 est représentée en fonction de la fraction volumique f . La résistivité macroscopique diminue avec la fraction volumique f car l'inclusion est moins perméable que la matrice. Cependant, en présence d'une interface imparfaite hautement résistante, le milieu biporeux peut avoir une résistivité plus élevée que celle de la matrice. Il est observé que les deux modèles (avec condition de Dirichlet et Neumann) sont équivalentes pour des faibles fractions volumiques, mais des différences importantes sont observées pour $h_s = 1$ et pour des valeurs plus élevées de la fraction volumique. L'évaluation des solutions analytiques ne peut pas être effectuée par comparaison avec la solution FFT car la méthode ne permet pas de simuler les problèmes avec des discontinuités d'interface.

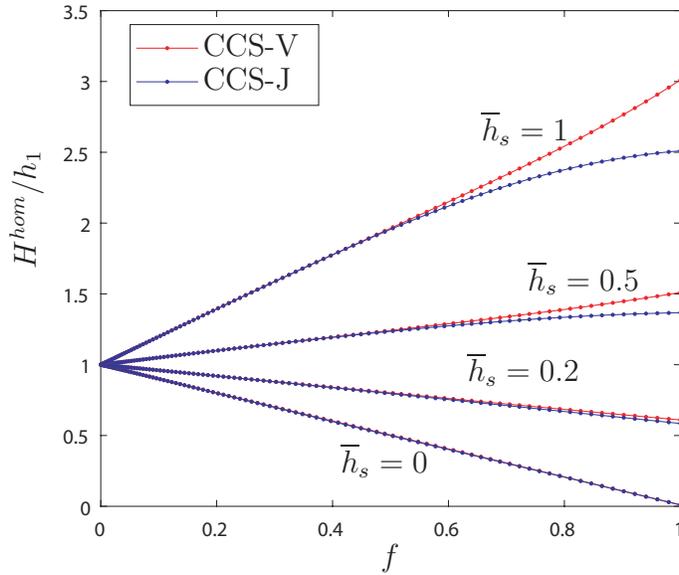


FIGURE 3.12 – Variations de la perméabilité macroscopique en fonction de la fraction volumique f pour un milieu poreux contenant des inclusions sphériques faiblement résistives entourées d’interfaces hautement résistives.

3.5 Conclusion

Le schéma de Mori-Tanaka et le modèle d’assemblage de cylindres/sphères composites ont été utilisés pour obtenir des estimations de la perméabilité macroscopiques de solides à deux phases poreuses. L’écoulement dans chaque milieu poreux est décrit avec l’équation de Brinkman et des solutions analytiques ont été établies pour des inclusions cylindriques et sphériques. Le modèle de cylindre/sphère composite est développé en considérant une vitesse prescrite (condition de Dirichlet) ou un gradient de pression prescrit (condition de Neumann) sur le bord de la cellule conduisant ainsi à deux estimations différentes de la perméabilité macroscopique. De plus, une hiérarchie entre les solutions a été établie, y compris celle calculée avec les conditions périodiques au bord. Les différentes estimations ont été comparées aux solutions numériques basées sur la FFT (solutions périodiques), aboutissant à deux résultats essentiels. Tout d’abord, dans de nombreux cas, les solutions numériques sont comprises entre les deux estimations obtenues avec les cellules de cylindre/sphère composite. Deuxièmement, l’estimation analytique la plus proches avec les solutions numériques est celle obtenue avec la condition de Neumann (gradient de pression prescrit au bord). Enfin, les résultats analytiques établis permettent également la résolution de problèmes physiques plus complexes correspondant à des cellules cylindriques/sphériques composites multicouches ou la présence d’interfaces imparfaites entre les inclusions et la matrice.

Chapitre 4

Nouveaux schéma itératifs basés sur la FFT pour le calcul de la perméabilité de milieux multiporeux

Dans ce chapitre, on propose de nouveaux schémas itératifs basés sur la FFT pour le calcul de la perméabilité macroscopique de milieux multiporeux. A l'échelle locale, on admet que l'écoulement dans chacune des phases est incompressible et décrit par l'équation de Brinkman. Un schéma de résolution pour l'équation de Brinkman a déjà été proposé par Mezhoud et al [45] et a été rappelé au premier chapitre et mis en oeuvre aux chapitres 2 et 3. L'objet de ce quatrième chapitre est de formuler d'autres schémas possédant une meilleure vitesse de convergence dans des situations de forts contrastes des propriétés locales. Plus spécifiquement, c'est le cas des inclusions fortement imperméables (grande résistivité hydraulique) pour lequel le schéma de résolution proposé par Mezhoud est divergent. Les nouveaux schémas proposés s'inspirent de la méthode en polarisation proposée par Monchiet et Bonnet [49] pour traiter les composites élastiques à forts contrastes de propriétés (inclusions très souples ou très rigides). Comme montré plus tard par Monchiet [46], on peut formuler également un schéma pour la déformation libre (forme duale du schéma en polarisation) toutefois ce schéma conduit à des résultats équivalents au schéma en polarisation.

Dans ce chapitre, on propose donc d'étendre la méthode de résolution en polarisation ainsi que sa forme duale pour traiter des écoulements en milieux poreux régis par l'équation de Brinkman. Contrairement à Monchiet et Bonnet [49], l'équation de Lippman-Schwinger pour la polarisation est résolue avec la méthode du gradient conjugué (et non pas la méthode de point fixe). Les capacités des méthodes proposées sont illustrées et comparées avec le schéma de Mezhoud et al. pour diverses situations.

4.1 Première équation intégrale

Le problème d'homogénéisation à résoudre a déjà été détaillé au premier chapitre de la thèse. Rappelons qu'il s'agit de résoudre le problème d'écoulement de fluide régit par l'équation de Brinkman dans un milieu multiporeux constitué de p phases. Chaque phase a pour propriétés α_p et h_h . Le point de départ de ce chapitre est la reformulation du problème avec les champs de polarisation $\mathbf{s}^*(\mathbf{x})$ et $\boldsymbol{\omega}^*(\mathbf{x})$ et un milieu de référence homogène de propriétés α_0 et h_0 . Les équations sont (voir section (1.4) du chapitre 1) :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) - \mathbf{W} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = 2\mu\alpha_0\mathbf{d}(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x})\mathbf{I} + \mathbf{s}^*(\mathbf{x}) \\ \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = \mu h_0\mathbf{v}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\omega}^*(\mathbf{x}) \\ \mathbf{d}(\mathbf{x}) = \nabla_s \mathbf{v}(\mathbf{x}) \\ \operatorname{div}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

où $\mathbf{s}^*(\mathbf{x})$ et $\boldsymbol{\omega}^*(\mathbf{x})$ sont définis par

$$\mathbf{s}^*(\mathbf{x}) = 2\mu(\alpha(\mathbf{x}) - \alpha_0)\mathbf{d}(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\omega}^*(\mathbf{x}) = \mu(h(\mathbf{x}) - h_0)\mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad (4.2)$$

Le principe de la méthode consiste à écrire une équation intégrale pour les champs de polarisation et non plus pour la vitesse comme cela a été proposé par Mezhoud et al. [45].

La solution du système d'équations (4.1) pour $\mathbf{s}^*(\mathbf{x})$ et $\boldsymbol{\omega}^*(\mathbf{x})$ peut être résolu dans le domaine de Fourier. La solution s'écrit pour tout $\boldsymbol{\xi} \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\xi}) \\ \widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} = -\widehat{\mathcal{G}}_0(\boldsymbol{\xi}) \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{s}}^*(\boldsymbol{\xi}) \\ \widehat{\boldsymbol{\omega}}^*(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

où $\mathcal{G}^0(\mathbf{x})$ est l'opérateur de Green associé au milieu de référence de propriétés α_0 et h_0 qui a pour expression :

$$\widehat{\mathcal{G}}_0(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} \widehat{\Gamma}^0(\boldsymbol{\xi}) & \widehat{\Omega}^0(\boldsymbol{\xi}) \\ \widehat{\widetilde{\Omega}}^0(\boldsymbol{\xi}) & \widehat{G}^0(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

où $\widehat{\Gamma}^0(\boldsymbol{\xi})$, $\widehat{\Omega}^0(\boldsymbol{\xi})$ et $\widehat{G}^0(\boldsymbol{\xi})$ sont respectivement des tenseurs d'ordre quatre, trois et deux qui ont pour expression :

$$\widehat{\Gamma}_{ijkl}^0(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\lambda(\boldsymbol{\xi})\|\boldsymbol{\xi}\|^2}{4}(Q_{ip}(\boldsymbol{\xi})P_{jq}(\boldsymbol{\xi}) + Q_{iq}(\boldsymbol{\xi})P_{jp}(\boldsymbol{\xi}) \quad (4.5)$$

$$+ P_{ip}(\boldsymbol{\xi})Q_{jq}(\boldsymbol{\xi}) + P_{iq}(\boldsymbol{\xi})Q_{jp}(\boldsymbol{\xi})), \quad (4.6)$$

$$\widehat{\Omega}_{ijk}^0(\boldsymbol{\xi}) = \frac{i\lambda(\boldsymbol{\xi})}{2}(Q_{ik}(\boldsymbol{\xi})\xi_j + Q_{jk}(\boldsymbol{\xi})\xi_i), \quad (4.7)$$

$$\widehat{G}_{ij}^0(\boldsymbol{\xi}) = \lambda(\boldsymbol{\xi})Q_{ij}(\boldsymbol{\xi}) \quad (4.8)$$

où les tenseurs d'ordre deux $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi})$ et $\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi})$ sont donnés au chapitre 1, équation (1.21).

$\lambda(\boldsymbol{\xi})$ est défini par :

$$\lambda(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\mu(\alpha_0 \|\boldsymbol{\xi}\|^2 + h_0)} \quad (4.9)$$

$\overline{\widehat{\boldsymbol{\Omega}}}^0(\boldsymbol{\xi})$ est le transconjugué de $\widehat{\boldsymbol{\Omega}}^0(\boldsymbol{\xi})$.

Notons que $\widehat{\boldsymbol{\Omega}}^0(\boldsymbol{\xi})$ et $\widehat{\mathbf{G}}^0(\boldsymbol{\xi})$ ont déjà été donnés au chapitre 1 pour la formulation du schéma itératif de Mezhoud et al. [45]. Dans le nouveau schéma itératif, on utilise également un tenseur supplémentaire d'ordre quatre $\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}^0(\boldsymbol{\xi})$. La raison vient du fait que le nouveau schéma proposé utilise deux champs pour inconnues, le vecteur $\boldsymbol{\omega}^*$ et le tenseur d'ordre deux \mathbf{s}^* .

L'équation (4.3) est maintenant réécrite dans le domaine réel. Rappelons que cette équation est valable pour tout $\boldsymbol{\xi} \neq 0$. Les valeurs de $\widehat{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\xi})$ et $\widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi})$ lorsque $\boldsymbol{\xi} = 0$ correspondent aux moyennes des quantités $\mathbf{d}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ sur la cellule Ω . La moyenne du champ de vitesse sur la cellule avec les conditions périodiques au bord est \mathbf{V} (voir chapitre 1, section 1.3.2.1). Le taux de déformation $\mathbf{d}(\mathbf{x})$ dérive du champ de vitesse périodique, en conséquence sa moyenne sur la cellule est égale à zéro. Il vient donc :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{V} \end{pmatrix} - \mathcal{G}^0(\mathbf{x}) * \begin{pmatrix} \mathbf{s}^*(\mathbf{x}) \\ \mathbf{w}^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Ensuite, les équations (4.2) sont réécrites sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{s}^*(\mathbf{x}) \\ \mathbf{w}^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = (\mathcal{C}(\mathbf{x}) - \mathcal{C}^0) \begin{pmatrix} \mathbf{d}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

où l'on a introduit $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ et \mathcal{C}^0 qui sont définis par :

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \left(\begin{array}{c|c} 2\mu\alpha(\mathbf{x})\mathbb{K} & 0 \\ \hline 0 & \mu h(\mathbf{x})\mathbf{I} \end{array} \right), \quad \mathcal{C}^0 = \left(\begin{array}{c|c} 2\mu\alpha_0\mathbb{K} & 0 \\ \hline 0 & \mu h_0\mathbf{I} \end{array} \right) \quad (4.12)$$

Et où \mathbb{K} est le projecteur d'ordre quatre pour les tenseurs déviatoriques, c'est à dire tel que $\mathbf{s} = \mathbb{K} : \boldsymbol{\sigma}$ et $\mathbf{d} = \mathbb{K} : \mathbf{d}$ tandis que \mathbf{I} est l'identité d'ordre deux.

En combinant les équations (4.10) et (4.11), il vient :

$$(\mathcal{C}(\mathbf{x}) - \mathcal{C}^0)^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{s}^*(\mathbf{x}) \\ \mathbf{w}^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix} + \mathcal{G}^0(\mathbf{x}) * \begin{pmatrix} \mathbf{s}^*(\mathbf{x}) \\ \mathbf{w}^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{V} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Qui est une équation intégrale pour les champs de polarisation. Il convient de résoudre cette équation, c'est à dire rechercher les valeurs de $\mathbf{s}^*(\mathbf{x})$ et $\boldsymbol{\omega}^*(\mathbf{x})$ pour \mathbf{V} donné.

4.2 Seconde équation intégrale

Nous pouvons formuler une seconde équation intégrale en introduisant des champs de polarisation duaux et un opérateur de Green dual. Pour cela, repartons de l'égalité (4.3). Introduisons les champs de polarisation duaux $(\widehat{\mathbf{d}}^*(\boldsymbol{\xi}), \widehat{\mathbf{v}}^*(\boldsymbol{\xi}))$ définis par :

$$\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{d}}^*(\boldsymbol{\xi}) \\ \widehat{\mathbf{v}}^*(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} = -\mathcal{S}^0 \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{s}}^*(\boldsymbol{\xi}) \\ \widehat{\mathbf{w}}^*(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Où \mathcal{S}^0 est l'inverse de \mathcal{C}^0 et s'écrit :

$$\mathcal{S}^0 = (\mathcal{C}^0)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{2\mu\alpha_0}\mathbb{K} & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{\mu h_0}\mathbf{I} \end{array} \right) \quad (4.15)$$

On a donc également :

$$\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{s}}^*(\boldsymbol{\xi}) \\ \widehat{\mathbf{w}}^*(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} = -\mathcal{C}^0 \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{d}}^*(\boldsymbol{\xi}) \\ \widehat{\mathbf{v}}^*(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

En remplaçant dans l'équation (4.3), on obtient pour tout $\boldsymbol{\xi} \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\xi}) \\ \widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} = \widehat{\mathcal{G}}_0(\boldsymbol{\xi})\mathcal{C}^0 \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{d}}^*(\boldsymbol{\xi}) \\ \widehat{\mathbf{v}}^*(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

On peut ensuite noter que le déviateur $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ et $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$ dans l'équation (4.1) sont définis par :

$$\begin{cases} \mathbf{s}(\mathbf{x}) = 2\mu\alpha_0\mathbf{d}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}^*(\mathbf{x}) \\ \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = \mu h_0\mathbf{v}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\omega}^*(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (4.18)$$

Relations que l'on peut écrire dans le domaine de Fourier sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{s}}(\boldsymbol{\xi}) \\ \widehat{\mathbf{w}}(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} = \mathcal{C}^0 \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\xi}) \\ \widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{s}}^*(\boldsymbol{\xi}) \\ \widehat{\mathbf{w}}^*(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Ou encore, en utilisant la relation (4.14) :

$$\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{s}}(\boldsymbol{\xi}) \\ \widehat{\mathbf{w}}(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} = \mathcal{C}^0 \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\xi}) \\ \widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} - \mathcal{C}^0 \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{d}}^*(\boldsymbol{\xi}) \\ \widehat{\mathbf{v}}^*(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Puis enfin, en utilisant l'équation (4.17), on a pour tout $\boldsymbol{\xi} \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{s}}(\boldsymbol{\xi}) \\ \widehat{\mathbf{w}}(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} = -\widehat{\mathcal{D}}^0(\boldsymbol{\xi}) \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{d}}^*(\boldsymbol{\xi}) \\ \widehat{\mathbf{v}}^*(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Où l'on a introduit le tenseur de Green Dual défini par :

$$\widehat{\mathcal{D}}^0(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} \mathcal{C}^0 - \mathcal{C}^0 \widehat{\mathcal{G}}_0(\boldsymbol{\xi}) \mathcal{C}^0 & \forall \boldsymbol{\xi} \neq 0 \\ 0 & \text{si } \boldsymbol{\xi} = 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

Puisque \mathcal{C}^0 est un opérateur symétrique, $\widehat{\mathcal{D}}^0(\boldsymbol{\xi})$ est aussi un opérateur Hermitien. Si l'on transpose l'équation (4.21) dans l'espace réel, il convient d'ajouter les moyennes de chaque quantité :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{s}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{w}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{s}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} \\ \mathbf{W} \end{pmatrix} - \mathcal{D}_0(\mathbf{x}) * \begin{pmatrix} \mathbf{d}^*(\mathbf{x}) \\ \mathbf{v}^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

La moyenne de $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ est \mathbf{W} , cela signifie que sous cette forme duale, c'est un pilotage en \mathbf{W} qui est appliqué. La moyenne du déviateur des contraintes est indéterminée. L'équation (4.23) doit donc être complétée avec la condition $\langle \mathbf{d}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = 0$. Notons que :

$$\langle \mathbf{s}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = 2\mu\alpha_0 \langle \mathbf{d}(\mathbf{x}) - \mathbf{d}^*(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = -2\mu\alpha_0 \langle \mathbf{d}^*(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} \quad (4.24)$$

On peut donc introduire un opérateur de Green dual modifié $\mathcal{D}^{0'}(\boldsymbol{\xi})$ qui est défini dans l'espace de Fourier par :

$$\widehat{\mathcal{D}}^{0'}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} \mathcal{C}^0 - \mathcal{C}^0 \widehat{\mathcal{G}}_0(\boldsymbol{\xi}) \mathcal{C}^0 & \forall \boldsymbol{\xi} \neq 0 \\ \mathcal{A}_0 & \text{si } \boldsymbol{\xi} = 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

où \mathcal{A}_0 a pour expression :

$$\mathcal{A}_0 = \left(\begin{array}{c|c} 2\mu\alpha_0 \mathbb{K} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \quad (4.26)$$

La solution pour $\mathbf{d}^*(\mathbf{x})$ et $\mathbf{v}^*(\mathbf{x})$ donnés, s'écrit donc :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{s}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{w}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{W} \end{pmatrix} - \mathcal{D}^{0'}(\mathbf{x}) * \begin{pmatrix} \mathbf{d}^*(\mathbf{x}) \\ \mathbf{v}^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Reprenons l'équation (4.20) qui s'écrit dans l'espace réel :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{s}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{w}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \mathcal{C}^0 \begin{pmatrix} \mathbf{d}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} - \mathcal{C}^0 \begin{pmatrix} \mathbf{d}^*(\mathbf{x}) \\ \mathbf{v}^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

Ou encore :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{s}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{w}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} - \mathcal{C}^0 \mathcal{S}(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} \mathbf{s}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{w}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = -\mathcal{C}^0 \begin{pmatrix} \mathbf{d}^*(\mathbf{x}) \\ \mathbf{v}^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

où $\mathcal{S}(\mathbf{x})$ est l'inverse de $\mathcal{C}(\mathbf{x})$. On a donc finalement :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{s}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{w}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = (\mathcal{S}(\mathbf{x}) - \mathcal{S}^0)^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{d}^*(\mathbf{x}) \\ \mathbf{v}^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

La seconde équation intégrale pour les champs de polarisation $\mathbf{d}^*(\mathbf{x})$ et $\mathbf{v}^*(\mathbf{x})$ s'écrit donc :

$$(\mathcal{S}(\mathbf{x}) - \mathcal{S}^0)^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{d}^*(\mathbf{x}) \\ \mathbf{v}^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix} + \mathcal{D}^{0'}(\mathbf{x}) * \begin{pmatrix} \mathbf{d}^*(\mathbf{x}) \\ \mathbf{v}^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{W} \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

4.3 Resolution avec la méthode du gradient conjugué

4.3.1 Principe général

Nous avons établis une intégrale pour les champs de polarisation $(\mathbf{s}^*, \boldsymbol{\omega}^*)$ et une seconde intégrale pour les champs de polarisation duaux $(\mathbf{d}^*, \mathbf{v}^*)$. Ces équations intégrales sont respectivement données par les équations (4.13) et (4.31) et que l'on peut écrire formellement :

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{U}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}(\mathbf{x}) \quad (4.32)$$

où $\mathcal{H}(\mathbf{x})$ est un opérateur intégral, $\mathcal{U}(\mathbf{x})$ regroupe les inconnues du problème et $\mathcal{B}(\mathbf{x})$ est le second membre dont le valeur est imposée.

Par exemple, pour la première équation intégrale (4.13), on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} \mathbf{s}^*(\mathbf{x}) \\ \mathbf{w}^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \\ \mathcal{H}(\mathbf{x}) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{s}^*(\mathbf{x}) \\ \mathbf{w}^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix} &= (\mathcal{C}(\mathbf{x}) - \mathcal{C}^0)^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{s}^*(\mathbf{x}) \\ \mathbf{w}^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix} + \mathcal{G}^0(\mathbf{x}) * \begin{pmatrix} \mathbf{s}^*(\mathbf{x}) \\ \mathbf{w}^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \\ \mathcal{B}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{V} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Pour la seconde équation intégrale (4.31), on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} \mathbf{d}^*(\mathbf{x}) \\ \mathbf{v}^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \\ \mathcal{H}(\mathbf{x}) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{d}^*(\mathbf{x}) \\ \mathbf{v}^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix} &= (\mathcal{S}(\mathbf{x}) - \mathcal{S}^0)^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{d}^*(\mathbf{x}) \\ \mathbf{v}^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix} + \mathcal{D}^{0'}(\mathbf{x}) * \begin{pmatrix} \mathbf{d}^*(\mathbf{x}) \\ \mathbf{v}^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, (4.34) \\ \mathcal{B}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{W} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le système linéaire (4.32) est résolu avec une méthode itérative. Nous faisons le choix de la méthode du gradient conjugué. Notons que la plupart des schémas de résolution basés sur la méthode FFT utilisent la méthode du point fixe. C'est le cas de la méthode FFT basique proposée par Moulinec et Suquet [53, 54], du schéma en contrainte de Bhattacharya et Suquet [12], Bonnet [13], du schéma accéléré de Eyre et Milton [23], du schéma en polarisation de Monchiet et Bonnet [49]...

La méthode du gradient conjugué a été utilisée pour la première fois dans le cadre des approches par FFT par Zeman et al. [84] sur un problème de conduction électrique dans un composite à deux phases isotropes. Les résultats montrent que le taux de convergence de la méthode est proportionnel à la racine carrée du contraste entre les phases alors que dans le schéma de base de Moulinec et Suquet [53] le taux de convergence de la méthode est proportionnel au contraste des phases. Par ailleurs, le coût d'une itération reste comparable au schéma de base puisqu'à chaque itération une FFT et une FFT inverse sont requises. Enfin, la méthode est insensible au choix du milieu de référence ce qui ne nécessite pas de rechercher le milieu de référence optimal, c'est à dire menant au plus petit nombre d'itérations pour obtenir la convergence.

La méthode du gradient conjugué a également été utilisée par Brisard et Dormieux pour la résolution du problème de composites élastiques. L'approche repose sur l'approche variationnelle de Hashin-Shtrikman [32] avec une discrétisation du champ de polarisation constant par pixel. Le système linéaire ainsi obtenu est résolu avec la méthode du gradient conjugué. Dans leur approche, les auteurs indiquent que le milieu de référence choisi a un effet sur la vitesse de convergence du schéma itératif.

La méthode du gradient conjugué a également été utilisée par Taut [77], Taut et Monchiet [78] pour traiter des composites conducteurs de la chaleur et des composites élastiques avec discontinuités d'interfaces. Les résultats obtenus avec la méthode du gradient conjugué montrent clairement une meilleure convergence que la méthode du point fixe. Par ailleurs, pour les composites conducteurs de la chaleur, la vitesse de convergence est indépendante du choix du milieu de référence. La vitesse de convergence est quasiment indépendante du choix du milieu de référence pour le composite élastique avec discontinuité d'interface.

Rappelons l'algorithme du gradient conjugué. Tout d'abord, on définit par \mathcal{R} le résidu du système linéaire :

$$\mathcal{R} = \mathcal{H}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{U}(\mathbf{x}) - \mathcal{B}(\mathbf{x}) \quad (4.35)$$

On initialise le schéma itératif en posant :

$$\mathcal{U}^{k=1} = 0, \quad \mathcal{R}^{k=1} = -\mathcal{B}, \quad \mathcal{P}^{k=1} = \mathcal{B} \quad (4.36)$$

A chaque itération, on effectue les opérations suivantes :

1. $\alpha_k = \frac{\mathcal{R}^k \cdot \mathcal{R}^k}{\mathcal{P}^k \cdot \mathcal{H} \cdot \mathcal{P}^k}$
2. $\mathcal{U}^{k+1} = \mathcal{U}^k + \alpha_k \mathcal{P}^k$
3. $\mathcal{R}^{k+1} = \mathcal{R}^k + \alpha_k \mathcal{H} \cdot \mathcal{P}^k$ (4.37)
4. $\beta_k = \frac{\mathcal{R}^{k+1} \cdot \mathcal{R}^{k+1}}{\mathcal{R}^k \cdot \mathcal{R}^k}$
5. $\mathcal{P}^{k+1} = -\mathcal{R}^{k+1} + \beta_k \mathcal{P}^k$

Pour stopper le schéma itératif, on utilise un critère de convergence basé sur la norme du résidu du système linéaire :

$$\sqrt{\mathcal{R}^k \cdot \mathcal{R}^k} < \epsilon \quad (4.38)$$

A chaque itération, on doit effectuer le calcul de $\mathcal{H} \cdot \mathcal{P}^k$ ce qui va nécessiter une FFT et une FFT inverse. Nous allons expliciter le produit de \mathcal{H} par \mathcal{P}^k pour chaque équation intégrale.

4.3.2 Calcul du produit avec \mathcal{H} pour la première équation intégrale

A chaque étape du schéma itératif, nous devons effectuer le produit entre l'opérateur intégral \mathcal{H} et \mathcal{P} . On pose, pour \mathcal{P} :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

où \mathbf{a} est un tenseur d'ordre deux déviatorique et \mathbf{b} un vecteur.

Le produit de \mathcal{H} avec \mathcal{P} est effectué dans le domaine de Fourier. On note $\widehat{\mathcal{P}}$ la transformée de Fourier de \mathcal{P} qui s'écrit donc :

$$\widehat{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{a}} \\ \widehat{\mathbf{b}} \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

$\mathcal{H}(\mathbf{x})$ est constitué de deux termes, un premier terme faisant intervenir les propriétés locales, il s'agit du terme $(\mathcal{C}(\mathbf{x}) - \mathcal{C}^0)^{-1}$, un second correspondant à l'opérateur de Green $\mathcal{G}^0(\mathbf{x})$. Nous devons traiter séparément ces deux termes.

Le produit avec $(\mathcal{C}(\mathbf{x}) - \mathcal{C}^0)^{-1}$ s'écrit :

$$\sum_{p=1}^{p=K} (\mathcal{C}^p - \mathcal{C}^0)^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{I}_p(\boldsymbol{\xi}) * \mathbf{a}(\boldsymbol{\xi}) \\ \widehat{I}_p(\boldsymbol{\xi}) * \mathbf{b}(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

Les $\widehat{I}_p(\boldsymbol{\xi})$ sont les fonctions de forme des phases. Dans les applications que nous proposons, nous appliquons les algorithmes du gradient conjugués à des cellules contenant des inclusions de forme cylindrique. Pour ce type de géométrie, les fonctions de forme exactes sont connues et déjà données au chapitre 1.

Le produit avec la fonction de Green peut s'écrire sous la forme plus simple :

$$\widehat{\mathcal{G}}^0(\boldsymbol{\xi}) \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi}) \\ \widehat{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} = -\lambda(\boldsymbol{\xi}) \begin{pmatrix} i\widehat{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\xi}) \otimes_s \boldsymbol{\xi} \\ \widehat{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

où le vecteur $\widehat{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\xi})$ est défini par :

$$\widehat{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi}) \cdot (i\widehat{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\xi} - \widehat{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\xi})) \quad (4.43)$$

De cette manière il n'est pas nécessaire de calculer et de stocker les composantes des opérateurs de Green.

4.3.3 Calcul du produit avec \mathcal{H} pour la seconde équation intégrale

Comme pour le premier schéma itératif, nous devons calculer à chaque itération le produit entre l'opérateur \mathcal{H} et \mathcal{P} où \mathcal{H} est défini par l'équation (4.34) et \mathcal{P} est toujours choisi sous la forme (4.39). L'opérateur \mathcal{H} est lui aussi constitué de deux termes, un premier terme faisant intervenir les propriétés locales, le terme $(\mathcal{S}(\mathbf{x}) - \mathcal{S}^0)^{-1}$, un second correspondant à l'opérateur de Green $\mathcal{D}^{0'}(\mathbf{x})$.

Le produit avec $(\mathcal{S}(\mathbf{x}) - \mathcal{S}^0)^{-1}$ s'écrit :

$$\sum_{p=1}^{p=K} (\mathcal{S}^p - \mathcal{S}^0)^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{I}_p(\boldsymbol{\xi}) * \mathbf{a}(\boldsymbol{\xi}) \\ \widehat{I}_p(\boldsymbol{\xi}) * \mathbf{b}(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

Il faut toujours intervenir les fonctions de forme et on utilise à nouveau la FFT et son inverse pour effectuer le produit de convolution.

Le produit avec l'opérateur de Green $\mathcal{D}^{0'}$ s'écrit $\forall \boldsymbol{\xi} \neq 0$:

$$\widehat{\mathcal{D}}^{0'}(\boldsymbol{\xi}) \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi}) \\ \widehat{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} = \mathcal{C}^0 \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi}) \\ \widehat{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} - \mathcal{C}^0 \widehat{\mathcal{G}}^0(\boldsymbol{\xi}) \mathcal{C}^0 \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi}) \\ \widehat{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

En tenant compte de l'équation (4.42), on a $\forall \boldsymbol{\xi} \neq 0$:

$$\widehat{\mathcal{D}}^{o'}(\boldsymbol{\xi}) \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi}) \\ \widehat{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu\alpha_0(\widehat{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi}) + i\lambda(\boldsymbol{\xi})\widehat{\mathbf{E}}'(\boldsymbol{\xi}) \otimes_s \boldsymbol{\xi}) \\ \mu h_0(\widehat{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\xi}) + \lambda(\boldsymbol{\xi})\widehat{\mathbf{E}}'(\boldsymbol{\xi})) \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

où l'on a introduit :

$$\widehat{\mathbf{E}}'(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi}) \cdot (2\mu i \alpha_0 \widehat{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\xi} - \mu h_0 \widehat{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\xi})) \quad (4.47)$$

Lorsque $\boldsymbol{\xi} = 0$:

$$\widehat{\mathcal{D}}^{o'}(\boldsymbol{\xi}) \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi}) \\ \widehat{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu\alpha_0 \widehat{\mathbf{a}}(0) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

A nouveau, sous cette forme, il n'est pas nécessaire de calculer et de stocker les composantes de l'opérateur de Green.

4.4 Choix du milieu de référence

Le milieu de référence est le milieu qui a pour propriétés α_0 et h_0 . C'est un milieu fictif, c'est à dire qu'il est introduit de manière artificielle pour réécrire le système d'équation différentielles sous la forme d'une équation intégrale. Il convient de préciser que la solution du problème est indépendante du choix du milieu de référence, toutefois, la vitesse de convergence du schéma itératif employé pour résoudre l'équation différentielle dépend souvent du choix du milieu de référence. Dans cette section, nous proposons une étude numérique de la vitesse de convergence des schémas itératifs basés sur le gradient conjugué en fonction du choix des propriétés du milieu de référence. Pour cela, nous faisons varier les coefficients α_0 et h_0 et nous relevons le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir la convergence des schémas de résolution.

Tous les calculs dans cette section sont menés en considérant une cellule élémentaire contenant une inclusion centrée à l'origine de rayon $a/L = 0.25$. Par ailleurs, on considère le problème adimensionné pour lequel la cellule a pour côté $L = 1$ et la matrice a une résistivité hydraulique $h_1 = 1$. Sur la figure 4.1, on considère une inclusion de résistivité $h_2 = 100$ et on pose $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.001$. On représente le nombre d'itérations à convergence en fonction de α_0 et pour trois valeurs de h_0 égales à $-1, -10, -100$. Sur les figures du haut, α_0 varie avec des valeurs négatives et avec des valeurs positives sur les figures du bas. On peut noter que les coefficients du milieu de référence ont une influence importante sur la vitesse de convergence. Il est à noter aussi que les schémas itératifs sont stoppés après 1000 itérations si la convergence n'est pas obtenue, ceci pour éviter des temps de calcul prohibitifs. Lorsque sur les figures on observe un nombre d'itération égal à 1000 cela signifie que le schéma est soit non convergent, soit converge à des valeurs au-delà de 1000 itérations. On observe que certaines courbes présentent

un minimum local, c'est le cas notamment pour $h_0 = -1$ et $h_0 = -10$. Pour la valeur $h_0 = -100$ il n'y a pas de minimum local clairement identifié. Les courbes sont quasiment indépendantes de α_0 sur les plages de valeurs correspondant à $\alpha_0 < -100$ ou $\alpha_0 > 100$ et les valeurs du nombre d'itérations deviennent excessives lorsque $-1 < \alpha_0 < 1$. On peut également noter que pour les valeurs de $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2$, les schémas itératifs sont systématiquement non convergents, ceci s'explique par le fait que les opérateurs $(\mathcal{C}(\mathbf{x}) - \mathcal{C}^0)^{-1}$ et $(\mathcal{S}(\mathbf{x}) - \mathcal{S}^0)^{-1}$ sont singuliers pour ces valeurs particulières de α_0 .

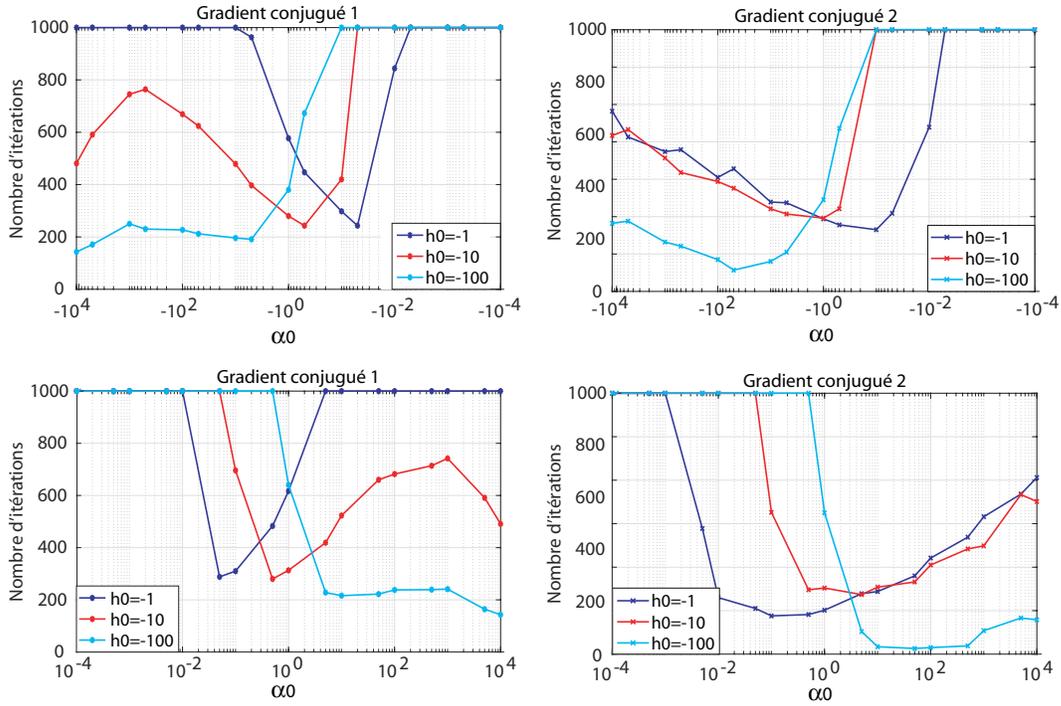


FIGURE 4.1 – Nombre d'itérations à convergence en fonction de α_0 pour différentes valeurs de h_0 et pour $a/L = 0.25$, $h_1 = 1$, $h_2 = 100$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.001$.

Sur la figure 4.2, on présente les mêmes résultats mais en posant $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.1$. On retrouve des résultats qualitativement équivalents. En particulier, pour la valeur $h_0 = -100$, on observe que le nombre d'itérations est à nouveau constant lorsque $\alpha_0 < -100$ ou $\alpha_0 > 100$ pour le premier schéma à gradient conjugué. Pour le second schéma à gradient conjugué, toutes les courbes sont indépendantes du nombre d'itérations lorsque $\alpha_0 < -1$ et $\alpha_0 > 1$.

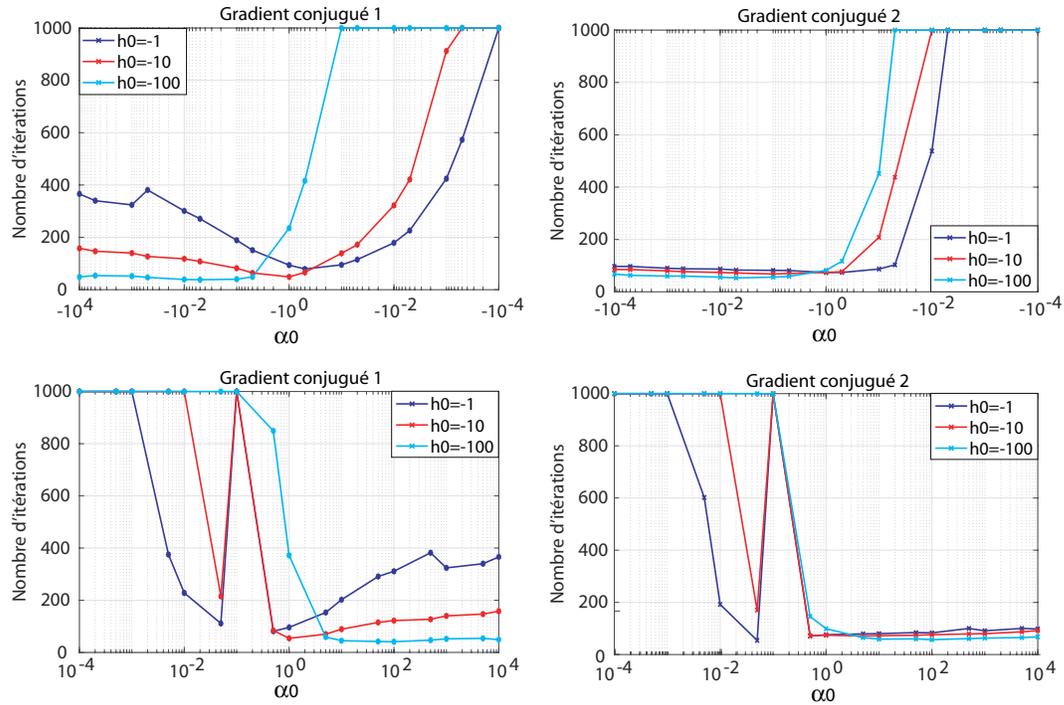


FIGURE 4.2 – Nombre d’itérations à convergence en fonction de α_0 pour différentes valeurs de h_0 et pour $a/L = 0.25$, $h_1 = 1$, $h_2 = 100$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.1$.

On étudie maintenant la convergence des schémas itératifs avec les valeurs de h_0 égales à -0.1 , -0.01 et -0.001 . Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 4.3 pour $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.001$ et sur la figure 4.4 pour $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.1$. Pour le premier schéma basé sur le gradient conjugué et pour les valeurs $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.001$ (figure 4.3 en haut à gauche), on observe que le nombre d’itérations devient excessif dès que $\alpha_0 < -10$. Les courbes présentent un minimum local pour des valeurs de α_0 comprises entre -0.01 et -0.001 puis, pour des valeurs inférieures à -0.001 pour α_0 , le nombre d’itérations à convergence augmente significativement. Lorsque α_0 est positif (figure 4.3 en bas à gauche), la convergence du schéma est obtenue sur une plage de valeurs de α_0 restreinte, comprise entre -0.01 et -1 . S’agissant maintenant du second schéma basé sur le gradient conjugué, on observe une bonne convergence lorsque α_0 est négatif (figure 4.3 en haut à droite) avec notamment des minima locaux pour des valeurs de α_0 comprises entre -0.01 et -0.001 . On observe également une bonne convergence lorsque $\alpha_0 > 0.01$ (figure 4.3 en bas à droite).

Lorsque $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.1$, on retrouve des résultats similaires. Tout particulièrement, pour le second schéma à gradient conjugué, on retrouve une bonne convergence lorsque $\alpha_0 < -0.01$ et lorsque $\alpha_0 > 1$.

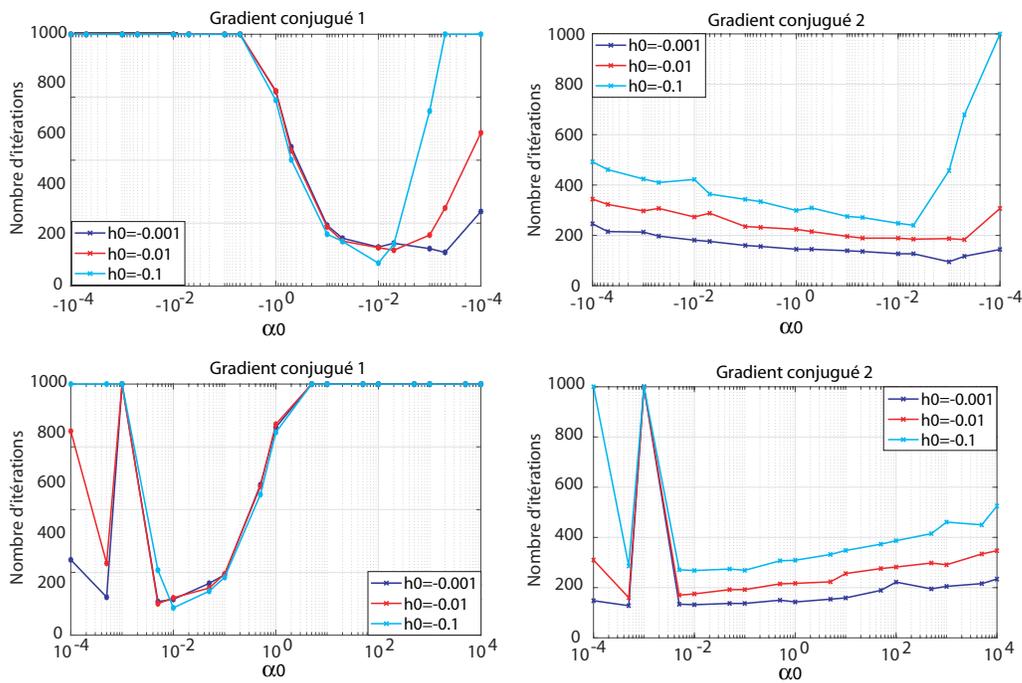


FIGURE 4.3 – Nombre d’itérations à convergence en fonction de α_0 pour différentes valeurs de h_0 et pour $a/L = 0.25$, $h_1 = 1$, $h_2 = 100$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.001$.

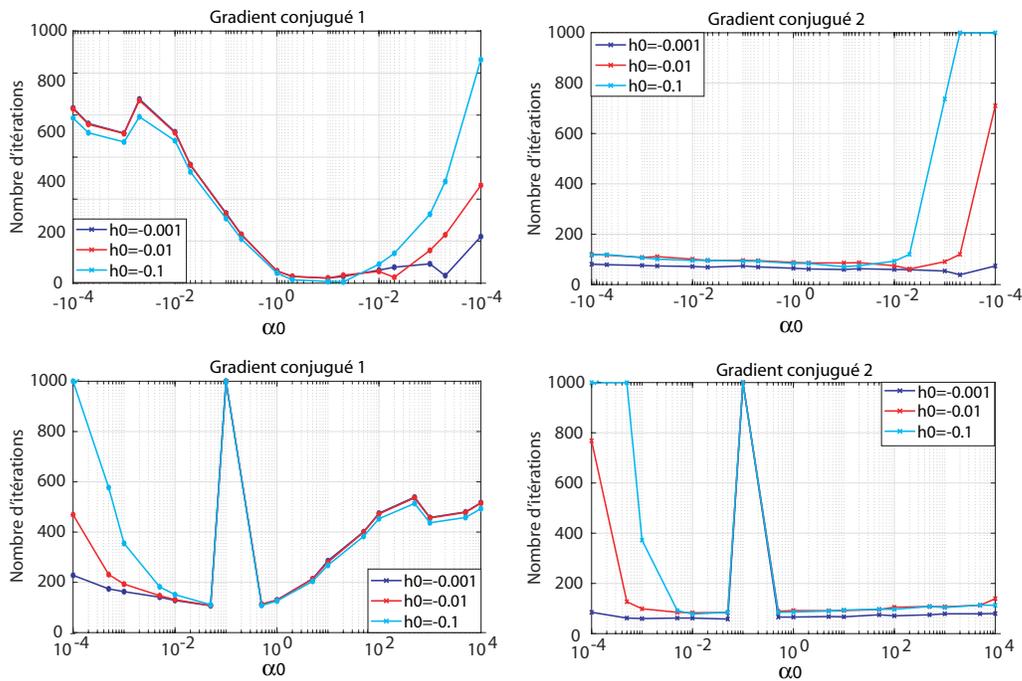


FIGURE 4.4 – Nombre d’itérations à convergence en fonction de α_0 pour différentes valeurs de h_0 et pour $a/L = 0.25$, $h_1 = 1$, $h_2 = 100$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.1$.

Pour conclure sur cette étude de convergence avec le choix du milieu de référence, nous avons choisi $\alpha_0 = -10$ et $h_0 = -100$ pour le premier schéma itératif et $\alpha_0 = -0.1$ et $h_0 = -0.001$ pour le second schéma itératif. Certes, il ne s'agit pas des coefficients optimaux, au sens où ils minimisent absolument le nombre d'itérations pour une situation donnée. Mais la recherche du milieu de référence optimal est numériquement coûteuse, d'autant qu'elle dépend des valeurs des coefficients de Brinkman de chacune des phases, mais aussi de la microstructure étudiée. Le choix adopté permet d'obtenir une convergence satisfaisante pour tous les problèmes étudiés par la suite.

Par exemple, nous avons étudié la convergence des schémas itératifs : le schéma de Mezhoud et al. [45] qui utilise la méthode du point fixe (PF) ainsi que les deux schémas basés sur le gradient conjugué (GC1 et GC2) en faisant varier le rapport de résistivité des phases h_2/h_1 . Nous avons choisi pour le rayon de l'inclusion $a/L = 0.25$ et différentes valeurs de $\alpha_1 = \alpha_2$. Pour le schéma de Mezhoud et al., rappelé au premier chapitre, nous avons utilisé le milieu de référence optimal donné par l'équation (1.104). Les résultats sont donnés sur la figure 4.5. On observe que le schéma basé sur le point fixe n'est pas convergent lorsque l'inclusion est très résistive. Par ailleurs, des deux schémas basés sur le gradient conjugué, c'est le second schéma qui possède la meilleure vitesse de convergence lorsque h_2 est très grand.

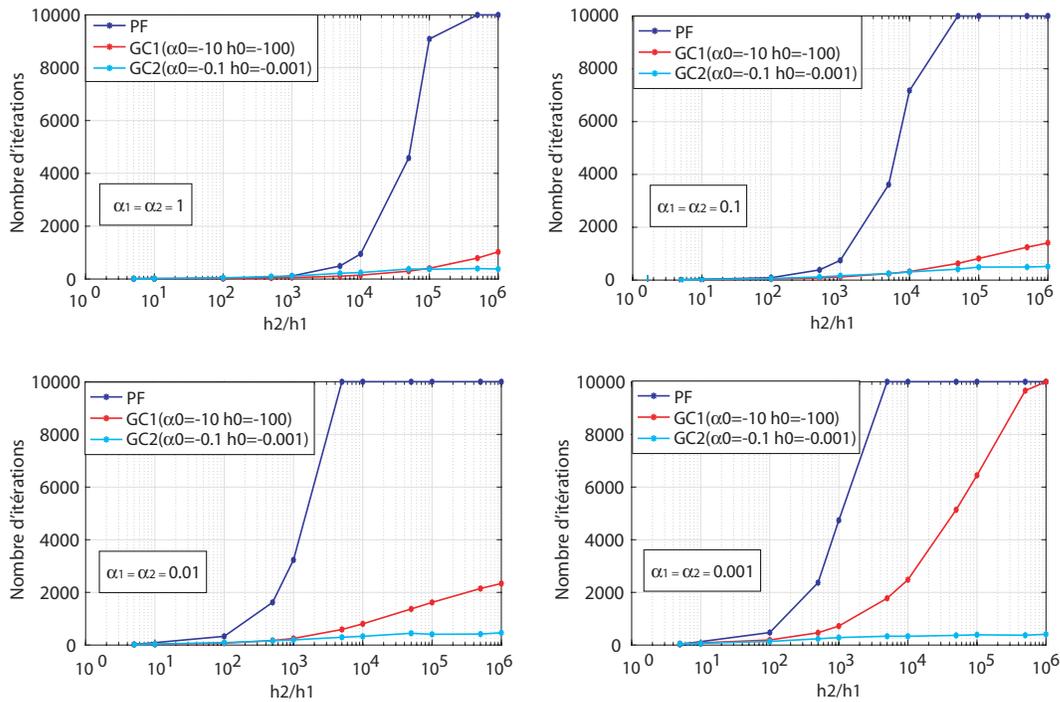


FIGURE 4.5 – Nombre d'itérations à convergence en fonction du contraste h_2/h_1 pour $a/L = 0.25$, et différentes valeurs de $\alpha_1 = \alpha_2$.

4.5 Milieu poreux avec inclusions imperméables

4.5.1 Procédure

On détermine les propriétés homogénéisées d'un milieu poreux contenant une inclusion imperméable en augmentant progressivement la valeur de h_2 . La cellule étudiée est carrée et contient une seule inclusion circulaire centrée à l'origine. Sur la figure 4.6, on trace la perméabilité homogénéisée calculée avec les deux schémas itératifs en fonction du rapport h_2/h_1 pour plusieurs valeurs $\alpha_1 = \alpha_2$. Il convient de noter que la valeur de α_2 pour une inclusion imperméable n'a pas d'influence sur la perméabilité homogénéisée puisque la vitesse dans l'inclusion est nulle. On effectue les calculs en prenant $\alpha_2 = \alpha_1$ car on obtient une meilleure convergence des schémas itératifs toutefois la perméabilité homogénéisée obtenue reste la même avec d'autres valeurs de α_2 . Sur la figure 4.6, on observe que la perméabilité homogénéisée atteint une limite lorsque l'on augmente le contraste, lorsque $h_2/h_1 > 10^4$ les valeurs de la perméabilité atteignent un plateau et ne varient plus avec le contraste. La perméabilité du milieu poreux avec inclusions imperméables peut donc être calculée en choisissant le contraste $h_2/h_1 = 10^6$.

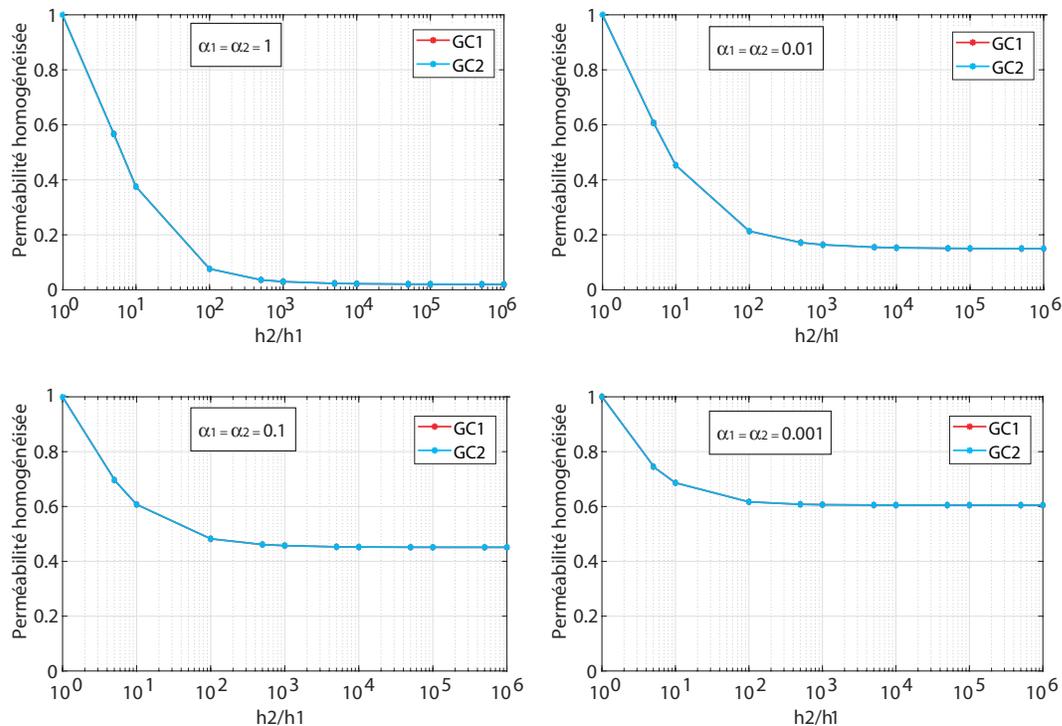


FIGURE 4.6 – Perméabilité homogénéisée en fonction du contraste h_2/h_1 pour $a/L = 0.25$, et différentes valeurs de $\alpha_1 = \alpha_2$.

4.5.2 Estimations analytiques

Les estimations analytiques d'un milieu poreux contenant des inclusions imperméables peuvent être obtenues à partir des résultats du chapitre 3 en considérant la limite lorsque $h_2 \rightarrow +\infty$. Pour l'estimation de Mori-Tanaka, quelques précautions doivent être prises pour calculer la limite. Tout d'abord, lorsque $h_2 \rightarrow +\infty$ dans la formule (3.49) du chapitre 3, la matrice $\mathbf{C}(\tau_{2a})$ tend vers une valeur finie. On rappelle que $\tau_{2a} = \gamma_2 a$ où $\gamma_2 = \sqrt{h_2/\alpha_2}$. En conséquence, lorsque $h_2 \rightarrow +\infty$ alors $\tau_{2a} \rightarrow +\infty$. Par ailleurs :

$$\mathbf{C}(+\infty) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

il résulte donc (en se référant aux équations de l'annexe A) :

$$\lim_{h_2 \rightarrow +\infty} \Lambda_1 = 0, \quad \lim_{h_2 \rightarrow +\infty} h_2 \Lambda_1 = h_1 (1+n) \frac{P_{22}(\tau_{1a}) + P_{12}(\tau_{1a})}{nP_{22}(\tau_{1a}) + P_{12}(\tau_{1a})} \quad (4.50)$$

On trouve alors pour l'estimation de Mori-Tanaka :

$$H^{hom} = h_1 \left[1 + (1+n) \frac{c_2}{c_1} \frac{P_{22}(\tau_{1a}) + P_{12}(\tau_{1a})}{nP_{22}(\tau_{1a}) - P_{12}(\tau_{1a})} \right] \quad (4.51)$$

Et la perméabilité macroscopique vaut :

$$K^{hom} = \frac{k_1}{1 + (1+n) \frac{c_2}{c_1} \frac{P_{22}(\tau_{1a}) + P_{12}(\tau_{1a})}{nP_{22}(\tau_{1a}) - P_{12}(\tau_{1a})}} \quad (4.52)$$

Pour le modèle du cylindre composite, on peut astucieusement calculer la perméabilité macroscopique sans effectuer le calcul de la limite lorsque $h_2 \rightarrow +\infty$. Pour cela, on reprend l'équation (3.51) du chapitre 3 et on pose $U_a = V_a = 0$ (vitesse nulle sur le contour de l'inclusion). On élimine N_a et T_a pour obtenir la nouvelle expression de la matrice $\mathbf{\Pi}$ pour une inclusion imperméable :

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{Q}(\tau_{1a}, \tau_{1b}, f) [\mathbf{M}(\tau_{1a}, \tau_{1b}, f)]^{-1} \quad (4.53)$$

La perméabilité homogénéisée avec les conditions de Dirichlet ou de Neumann sont alors toujours données par les formules (3.56) et (3.57) respectivement mais en utilisant l'expression ci-dessus pour $\mathbf{\Pi}$.

4.5.3 Comparaison des résultats

Les calculs par FFT sont toujours réalisés sur une cellule carrée contenant une inclusion circulaire. Sur la figure 4.7, on représente les variations de la perméabilité homogénéisée en fonction de a/L , a étant le rayon de l'inclusion et L la taille de la cellule élémentaire pour le calcul par FFT. Les résultats sont comparés avec les estimations analytiques. Sur chaque figure on compare la solution obtenue par

FFT avec le second schéma itératif (GC2), l'estimation de Mori-Tanaka (MT), les deux estimations obtenues avec le cylindre composite et la condition de Dirichlet au bord (CCA-V) et la condition de Neumann (CCA-J). On observe que la perméabilité homogénéisée diminue avec la taille de l'inclusion. Lorsque $\bar{\alpha}_1 = 0.001$, la perméabilité apparente vaut k_1 (la perméabilité de la matrice) lorsque le rayon de l'inclusion est nul. La perméabilité diminue et tend vers 0 lorsque le rayon de l'inclusion tend vers L (c'est à dire $a/L = 1$) auquel cas il y a percolation des inclusions imperméables, la perméabilité homogénéisée est donc nulle. On observe une forte influence du paramètre $\bar{\alpha}_1$ sur la perméabilité homogénéisée. Lorsque l'on augmente ce paramètre, ce qui correspond à une matrice poreuse de viscosité équivalente de plus en plus grande, alors la perméabilité diminue. Par exemple, sur la figure en haut à gauche, on observe que pour une inclusion de petite taille $a/L = 0.05$ la perméabilité homogénéisée est déjà très faible en comparaison de celle obtenue avec le même rayon mais pour $\bar{\alpha}_1 = 0.001$. En conséquence, on peut donc conclure sur cet exemple, que le choix de la perméabilité équivalente du modèle de Brinkman a une influence très importante lorsque le milieu poreux contient des inclusions imperméables. A ce titre, on peut noter que la détermination du coefficient de viscosité équivalente du modèle de Brinkman a été beaucoup discutée lorsque le milieu poreux est en contact avec une région fluide mais les questions relatives aux effets de couche limite à l'interface avec un milieu imperméable n'a pas l'objet d'étude. Au vu des résultats obtenus, il serait essentiel d'étudier ce type de situation pour guider le choix de la valeur adéquate du coefficient de viscosité équivalente.

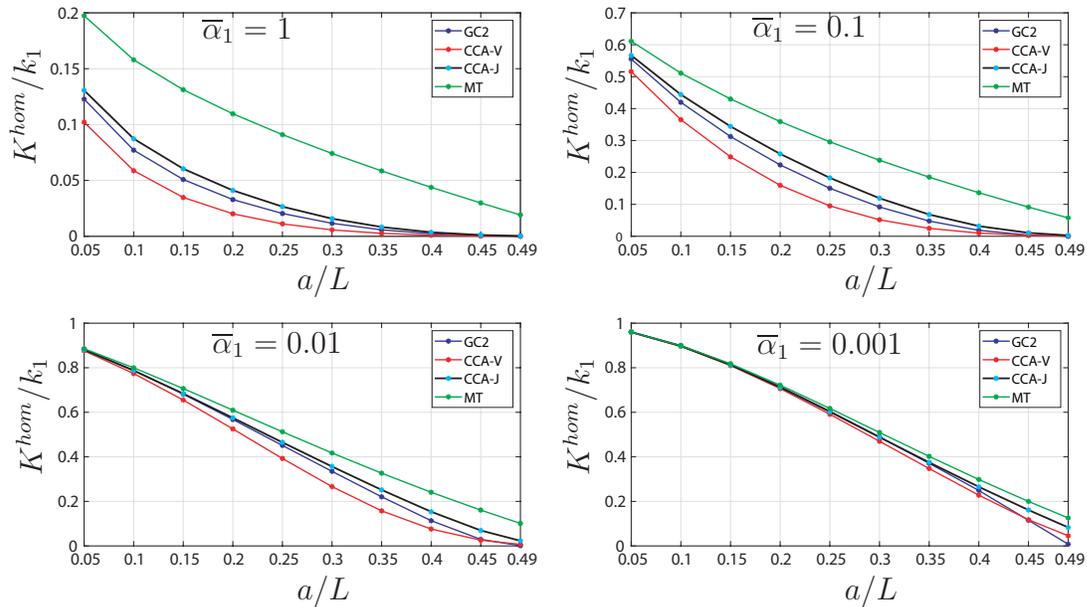


FIGURE 4.7 – Perméabilité macroscopique en fonction du rayon de l'inclusion pour différentes valeurs de $\bar{\alpha}_1$. Comparaison des solutions numériques par FFT avec les estimations analytiques.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé deux nouveaux schémas itératifs basés sur la FFT pour le calcul des milieux poreux contenant des inclusions perméables. Ces nouveaux schémas sont formulés avec les champs de polarisation et résolus par la méthode itérative du gradient conjugué. Les études de convergence ont montré que le second schéma est particulièrement bien adapté pour résoudre le problème d'écoulement dans un milieu poreux contenant des inclusions imperméables. Les résultats obtenus pour la perméabilité homogénéisée ont ensuite été comparés avec les estimations analytiques établies au chapitre 3. A nouveau, nous avons montré que les solutions FFT sont comprises entre les deux estimations obtenues sur la cellule cylindrique composite avec la condition de Dirichlet et de Neumann au bord. Et c'est le modèle obtenu avec la condition de Neumann qui conduit à l'estimation la plus proche des solutions numériques.

L'étude de ces nouveaux schémas devra être poursuivie en étudiant des microstructures tridimensionnelles et plus complexes pour valider les capacités de la nouvelle méthode de résolution proposée.

Conclusion générale

Dans ce travail de thèse nous avons proposé de nouvelles contributions à la modélisation du comportement homogénéisé de milieux à plusieurs échelles de porosité. Dans un premier chapitre, on s'est attaché à rappeler un certain nombre de contributions et de résultats de la littérature. Après avoir rappelé le cadre général de l'homogénéisation des milieux à une échelle de porosité, nous avons présenté les modélisations permettant d'estimer la perméabilité macroscopique des milieux multiporeux qui est le thème central de ce travail. En particulier, les différentes modélisations à l'échelle intermédiaire ont été présentées et c'est celle fondée sur l'utilisation de l'équation de Brinkman qui a été retenue pour deux raisons essentielles. La première est sa généralité, puisque qu'elle permet de traiter une grande variété de situations allant des milieux poreux contenant des macropores aux milieux poreux constitués de plusieurs phases poreuses ou contenant des inclusions imperméables. La seconde raison est que l'équation de Brinkman est bien adaptée pour une intégration numérique avec les méthodes FFT.

A chapitre 2, nous avons proposé de mettre en oeuvre la méthode FFT pour traiter des milieux poreux contenant des macrocavités de forme elliptique et ellipsoïdale. Nous avons suivi deux stratégies d'intégration numérique. La première consiste à utiliser l'équation de Darcy en tout point de la cellule et à appliquer une perméabilité infinie dans les macrocavités. La seconde, est basée sur l'utilisation de l'équation de Brinkman à la fois dans le milieu poreux et dans les macropores et d'appliquer une résistivité nulle dans les macropores. Les calculs ont été menés d'abord sur des situations simples correspondant à une seule inclusion centrée à l'origine et nous avons fait varier certains paramètres géométriques tel que les rayons de la macrocavité et son orientation. Par la suite, nous avons déterminé la perméabilité pour des populations de macropores de forme, de taille, d'orientations aléatoires.

Dans le troisième chapitre nous avons proposé des estimations analytiques des propriétés de filtration de milieux poreux contenant des inclusions poreuses avec des propriétés de filtrations différentes de la matrice. Les estimations sont obtenues pour des inclusions de forme cylindrique et sphérique. Nous avons ainsi étendus quelques modèles classiques de l'homogénéisation, d'abord le modèle de Mori-Tanaka, puis les modèles du cylindre/sphère composite en appliquant sur le bord de la cellule des conditions de Dirichlet ou de Neumann, c'est à dire des conditions en vitesse ou en gradient de pression homogènes. Les estimations obtenues

nues ont ensuite été comparées avec des simulations numériques par FFT pour des arrangements périodiques de cylindres et de sphères et des distributions aléatoires des inclusions. Nous avons montré sur un grand nombre de situations différentes que ces solutions numériques sont encadrées par les deux estimations issues du modèle de cylindre/sphère composite. Et c'est le modèle avec un gradient de pression homogène au contour qui est la plus proche de la solution numérique avec les conditions périodiques au bord. Le modèle Mori-Tanaka conduit à une estimation parfois éloignée des solutions numériques dans certaines situations. Dans ce chapitre, nous avons également étendu les résultats pour un milieu multicouches, permettant par exemple de traiter des matériaux contenant des inclusions poreuses entourées d'une zone de transition plus poreuse ou plus résistive que l'inclusion et la matrice poreuse. Nous avons ensuite étudié les interfaces imparfaites comme cas limite d'une interphase très fine avec des forts contrastes de propriétés. Quelques résultats qualitatifs ont mis en évidence le rôle important des ces interfaces sur les propriétés homogénéisées. Toutefois, nous n'avons pas effectué de comparaisons avec des simulations numériques puisque la méthode FFT considérée dans ce travail ne permet pas de traiter les problèmes avec interphases très fines. Ceci est lié à la méthode FFT, les phénomènes très localisés en espace, telle que les problème d'interphase très fine, nécessitent d'utiliser un nombre prohibitif de vecteurs d'ondes. Et en cas limite, les problèmes avec discontinuités d'interface, ne peuvent pas être traités puisque la méthode repose sur la discrétisation à l'aide de séries de Fourier qui sont des champs continus. Une approche alternative consiste à traiter le problème avec des interfaces imparfaites en utilisant par exemple des fonctions d'enrichissement pour décrire les discontinuités d'interfaces comme cela a été fait dans la thèse de L. Taut [77].

Enfin, au chapitre quatre, nous avons proposé deux nouveaux schémas de résolution numérique pour calculer les propriétés de milieux multiporeux en situation de fort contraste. A l'échelle locale, l'écoulement est toujours décrit par l'équation de Brinkman dans chacune des phases, mais nous examinons la situation extrême pour laquelle les inclusions sont très imperméables, le cas limite étant celui d'une inclusion totalement imperméable plongée dans une matrice poreuse perméable. Ce type de situation échappe au schéma de résolution déjà proposé dans la thèse de Mezhoud [43] que nous avons présenté au chapitre 1 et utilisé aux chapitres deux et trois. Ce schéma de résolution n'est pas convergent pour des inclusions imperméables. C'est donc deux nouveaux schémas basés sur la polarisation et utilisant l'algorithme du gradient conjugué qui sont proposés. Nous avons étudiés la convergence de ces schémas et en particulier le choix du milieu de référence optimal afin d'obtenir la meilleure vitesse de convergence. Nous avons montré, pour les inclusions très résistives, que c'est le second schéma en polarisation qui possède la meilleure vitesse de convergence pour les inclusions très résistives et qu'il reste convergent y compris pour une inclusion imperméable (résistivité infinie). Les solutions numériques obtenues avec les schémas en polarisation ont été ensuite comparées avec les solutions analytiques établies au chapitre 3. Ces comparaisons ont permis de mettre en évidence la qualité du modèle de cylindre

composite, en particulier celui obtenu avec le gradient de pression homogène au contour.

Les perspectives à ce travail sont multiples et nous donnons ici quelques pistes visant à compléter les résultats ou à étendre à d'autres phénomènes physiques.

Les résultats au chapitre 2 pourraient être employés pour valider les estimations des propriétés de milieux poreux contenant des cavités de forme ellipsoïdales. Il existe peu de résultats pour ce type de géométries. Des estimations semi-analytiques ont été proposées par Rasoulzadeh et Kuchuk [66] pour des macropores de forme sphéroïdale mais en utilisant le modèle d'interface de Beavers-Joseph [9]. Plus récemment, Monchiet [48] a proposé des estimations explicites de la perméabilité pour le même type de géométrie en utilisant toujours le modèle d'interface de Beavers-Joseph et en considérant des cellules sphéroïdales avec des conditions en vitesse ou en gradient de pression homogènes au contour. Il existe également quelques résultats avec le modèle de Brinkman, notamment certains auteurs [85, 20] ont étudié l'écoulement de Stokes à travers un réseau de sphéroïdes poreux en utilisant l'équation de Brinkman dans les inclusions. Le problème de l'écoulement dans un milieu poreux contenant des inclusions poreuses sphéroïdales a été étudié avec l'équation de Brinkman [83].

Parmi les différentes extensions possibles à ce travail, le cas dynamique pourrait être étudié à la fois analytiquement et numériquement. Le calcul de la perméabilité dynamique est à la base des modélisations des propriétés acoustiques des milieux poreux. Il existe des travaux récents sur le sujet de l'acoustique des milieux multiporeux, notamment ceux de Venegas et al. [79] qui ont montré des interactions acoustiques entre les constituants poreux et des propriétés de dissipation d'énergie sonore supplémentaires dans des situations de forts contrastes des propriétés locales.

Un autre piste d'investigation concerne les écoulements en milieux multiporeux à plus forts débits. Les effets inertiels de l'équation de Navier-Stokes ne sont plus négligeables et peut être introduits à l'échelle intermédiaire en remplaçant la loi de Darcy par celle de Forchheimer [24] ou une équation Darcy-Brinkman-Forchheimer pour écrire les conditions à l'interfaces de deux milieux poreux. Les propriétés de filtration d'un milieu poreux contenant des inclusions perméables a notamment été étudié par Auriault et al. [3] en considérant la loi de Forchheimer [24] dans chaque phase. Dans ce contexte on peut à la fois estimer la loi de filtration macroscopique de manière analytique en utilisant des modèles de cylindre/sphère composite dans le cadre de l'homogénéisation non linéaire. On peut également estimer la loi homogénéisée en étendant les approches numériques par FFT.

Bibliographie

- [1] G. Allaire. Homogenization of the navier-stokes equations and derivation of brinkman's law. *Mathématiques appliquées aux sciences de l'ingénieur (Santiago, 1989)*, pages 7–20, 1991.
- [2] J.-L. Auriault, C. Geindreau, and C. Boutin. Filtration law in porous media with poor separation of scales. *Transport in porous media*, 60(1) :89–108, 2005.
- [3] J.-L. Auriault, C. Geindreau, and L. Orgéas. Upscaling forchheimer law. *Transport in Porous Media*, 70(2) :213–229, 2007.
- [4] J.-L. Auriault and E. Sanchez-Palencia. Study of the macroscopic behavior of a saturated porous elastic medium. *Journal de Mécanique*, 16(4) :575–603, 1977.
- [5] J.L. Auriault and C. Boutin. Deformable porous media with double porosity. quasi-statics. i : Coupling effects. *Transport in Porous Media*, 7 :63–82, 1992.
- [6] J.L. Auriault and C. Boutin. Deformable porous media with double porosity. quasi-statics. ii : Memory effects. *Transport in Porous Media*, 10 :153–169, 1993.
- [7] J.L. Auriault and C. Boutin. Deformable porous media with double porosity iii : Acoustics. *Transport in Porous Media*, 14 :143–162, 1994.
- [8] S. Banerjee and G.I. Hadaller. Longitudinal laminar flow between cylinders arranged in a triangular array by a variational technique. *J. Appl. Mech.*, 40 :1136–1138, 1973.
- [9] G.S. Beavers and D.D. Joseph. Boundary conditions at a naturally permeable wall. *Journal of fluid mechanics*, 30(1) :197–207, 1967.
- [10] G.S. Beavers, E.M. Sparrow, and R.A. Magnuson. Experiments on coupled parallel flows in a channel and a bounding porous medium. 1970.
- [11] Y. Benveniste. A general interface model for a three-dimensional curved thin anisotropic interphase between two anisotropic media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54(4) :708–734, 2006.

- [12] K. Bhattacharya and P. Suquet. A model problem concerning recoverable strains of shape-memory polycrystals. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 461(2061) :2797–2816, 2005.
- [13] G. Bonnet. Effective properties of elastic periodic composite media with fibers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55(5) :881–899, 2007.
- [14] C. Boutin, J.-L. Auriault, and C. Geindreau. *Homogenization of coupled phenomena in heterogenous media*, volume 149. John Wiley & Sons, 2010.
- [15] C. Boutin, P. Royer, and J.L. Auriault. Acoustic absorption of porous surfacing with dual porosity. *International Journal of Solids and Structures*, 35 :4709–4737, 1998.
- [16] H.C. Brinkman. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. *Flow, Turbulence and Combustion*, 1(1) :27, 1949.
- [17] H.C. Brinkman. On the permeability of media consisting of closely packed porous particles. *App. Sci. Res.*, 1 :81–86, 1949.
- [18] P. Celle, S. Drapier, and J.M. Bergheau. Numerical modelling of liquid infusion into fibrous media undergoing compaction. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 27(4) :647–661, 2008.
- [19] S. Colin and L. Baldas. Effets de raréfaction dans les micro-écoulements gazeux. *Comptes Rendus Physique*, 5(5) :521–530, 2004.
- [20] S. Deo and B.R. Gupta. Stokes flow past a swarm of porous approximately spheroidal particles with kuwabara boundary condition. *Acta mechanica*, 203 :241–254, 2009.
- [21] M. Discacciati, A. Quarteroni, and A. Valli. Robin–robin domain decomposition methods for the stokes–darcy coupling. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 45(3) :1246–1268, 2007.
- [22] J.E. Drummond and M.I. Tahir. Laminar viscous flow through arrays of parallel solid cylinders. *Int. J. Multiphase Flow*, 10 :515–540, 1984.
- [23] D.J. Eyre and G.W. Milton. A fast numerical scheme for computing the response of composites using grid refinement. *The European Physical Journal-Applied Physics*, 6(1) :41–47, 1999.
- [24] P.H. Forchheimer. Wasserbewegung durch boden. *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, 45(50) :1781–1788, 1901.
- [25] K.F. Freed and M. Muthukumar. On the stokes problem for a suspension of spheres at finite concentrations. *The Journal of Chemical Physics*, 68(5) :2088–2096, 1978.

- [26] R.C. Givler and S.A. Altobelli. A determination of the effective viscosity for the brinkman–forchheimer flow model. *Journal of Fluid Mechanics*, 258 :355–370, 1994.
- [27] W.G. Gray. A derivation of the equations for multi-phase transport. *Chemical Engineering Science*, 30(2) :229–233, 1975.
- [28] Michael Griebel and Margit Klitz. Homogenization and numerical simulation of flow in geometries with textile microstructures. *Multiscale Modeling & Simulation*, 8(4) :1439–1460, 2010.
- [29] T Grosan, A Postelnicu, and I Pop. Brinkman flow of a viscous fluid through a spherical porous medium embedded in another porous medium. *Transport in Porous Media*, 81(1) :89, 2010.
- [30] J. Happel. Viscous flow relative to arrays of cylinders. *AIChE Journal*, 5(2) :174–177, 1959.
- [31] Z. Hashin. Thin interphase/imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50(12) :2509–2537, 2002.
- [32] Z. Hashin and S. Shtrikman. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 10(4) :335–342, 1962.
- [33] U. Hornung. *Homogenization and Porous Media*. 1997.
- [34] S. Kuwabara. The forces experienced by randomly distributed parallel circular cylinders or spheres in a viscous flow at small reynolds numbers. *Journal of the physical society of Japan*, 14(4) :527–532, 1959.
- [35] A.G. Kvashnin. Cell model of suspension of spherical particles. *Fluid Dynamics*, 14(4) :598–602, 1979.
- [36] R.E. Larson and J.J.L. Higdon. Microscopic flow near the surface of two-dimensional porous media. part i : axial flow. *J. Fluid Mech.*, 166 :449–472, 1986.
- [37] R.E. Larson and J.J.L. Higdon. Microscopic flow near the surface of two-dimensional porous media. part ii : transverse flow. *J. Fluid Mech.*, 178 :119–136, 1987.
- [38] W.J. Layton, F. Schieweck, and I. Yotov. Coupling fluid flow with porous media flow. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 40(6) :2195–2218, 2002.
- [39] T. Lévy. Fluid flow through an array of fixed particles. *International Journal of Engineering Science*, 21 :11–23, 1983.

- [40] M. Markov, E. Kazatchenko, A. Mousatov, and E. Pervago. Permeability of the fluid-filled inclusions in porous media. *Transp. Porous Med.*, 84 :307–317, 2010.
- [41] N. Martys, D.P. Bentz, and E.J. Garboczi. Computer simulation study of the effective viscosity in brinkman’s equation. *Physics of Fluids*, 6(4) :1434–1439, 1994.
- [42] G.D. Mehta and T.F. Morse. Flow through charged membranes. *The Journal of Chemical Physics*, 63(5) :1878–1889, 1975.
- [43] S. Mezhoud. *Microstructure et propriétés de transport de matériaux polymères biporeux*. PhD thesis, Paris Est, 2018.
- [44] S. Mezhoud, B. Le Droumaguet, P. Aimedieu, V. Monchiet, M. Bornert, and D. Grande. Investigation of morphology associated with biporous polymeric materials obtained by the double porogen templating approach. *Colloid and Polymer Science*, 299(3) :537–550, 2021.
- [45] S. Mezhoud, V. Monchiet, M. Bornert, and D. Grande. Computation of macroscopic permeability of doubly porous media with FFT based numerical homogenization method. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 83 :141–155, 2020.
- [46] V. Monchiet. Combining FFT methods and standard variational principles to compute bounds and estimates for the properties of elastic composites. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 283 :454–473, 2015.
- [47] V. Monchiet. FFT based iterative schemes for composites conductors with non-overlapping fibers and Kapitza interface resistance. *Int. J. Solids Struct.*, 135 :14–25, 2018.
- [48] V. Monchiet. Macroscopic permeability of doubly porous solids with spheroidal macropores : closed-form approximate solutions of the longitudinal permeability. *Proceedings of the Royal Society A*, 476(2244) :20200224, 2020.
- [49] V. Monchiet and G. Bonnet. A polarization-based FFT iterative scheme for computing the effective properties of elastic composites with arbitrary contrast. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 89(11) :1419–1436, 2012.
- [50] V. Monchiet and G. Bonnet. A polarization-based fast numerical method for computing the effective conductivity of composites. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 2013.
- [51] V. Monchiet, G. Bonnet, and G. Lauriat. A FFT-based method to compute the permeability induced by a Stokes slip flow through a porous medium. *Comptes Rendus Mécanique*, 337(4) :192–197, 2009.

- [52] V. Monchiet, H.B. Ly, and D. Grande. Macroscopic permeability of doubly porous materials with cylindrical and spherical macropores. *Meccanica*, 54(10) :1583–1596, 2019.
- [53] H. Moulinec and P. Suquet. A fast numerical method for computing the linear and nonlinear mechanical properties of composites. *C. R. Acad. Sci*, 318(11) :1417–1423, 1994.
- [54] H. Moulinec and P. Suquet. A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 157(1) :69–94, 1998.
- [55] L. Mu, J. Wang, and X. Ye. A stable numerical algorithm for the brinkman equations by weak galerkin finite element methods. *Journal of Computational Physics*, 273 :327–342, 2014.
- [56] M. Muthukumar and K.F. Freed. On the stokes problem for a suspension of spheres at nonzero concentrations. ii. calculations for effective medium theory. *The Journal of Chemical Physics*, 70(12) :5875–5887, 1979.
- [57] A. Nabovati and C.H. Amon. Assessment of the hydrodynamic boundary condition at open-porous interface using pore-level flow simulations. In *Fluids Engineering Division Summer Meeting*, volume 44755, pages 1109–1113. American Society of Mechanical Engineers, 2012.
- [58] D.A. Nield. The beavers–joseph boundary condition and related matters : a historical and critical note. *Transport in porous media*, 78 :537–540, 2009.
- [59] L.B.A. Nillama, J. Yang, and L. Yang. An explicit stabilised finite element method for navier-stokes-brinkman equations. *Journal of Computational Physics*, 457 :111033, 2022.
- [60] R.H. Nilson and S.K. Griffiths. Wormhole growth in soluble porous materials. *Physical Review Letters*, 65(13) :1583, 1990.
- [61] J.A. Ochoa-Tapia and S. Whitaker. Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid. i. theoretical development. *J. Heat Mass Transf.*, 38(14) :2635–2646, 1995.
- [62] J.A. Ochoa-Tapia and S. Whitaker. Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid. ii. comparison with experiment. *J. Heat Mass Transf.*, 38(14) :2647–2655, 1995.
- [63] X. Olny and C. Boutin. Acoustic wave propagation in double porosity media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 114 :73–89, 2003.
- [64] M.K.R. Panga, M. Ziauddin, and V. Balakotaiah. Two-scale continuum model for simulation of wormholes in carbonate acidization. *AIChE journal*, 51(12) :3231–3248, 2005.

- [65] M. Parvazinia, V. Nassehi, R.J. Wakeman, and M.H.R. Ghoreishy. Finite element modelling of flow through a porous medium between two parallel plates using the brinkman equation. *Transport in porous media*, 63 :71–90, 2006.
- [66] M. Rasoulzadeh and F.J. Kuchuk. Effective permeability of a porous medium with spherical and spheroidal vug and fracture inclusions. *Transp Porous Med.*, 116 :613–644, 2017.
- [67] P. Royer, J.L. Auriault, and C. Boutin. Macroscopic modeling of double-porosity reservoirs. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 16 :187–202, 1996.
- [68] P. Royer and C. Boutin. Time analysis of the three characteristic behaviours of dual-porosity media. i : fluid flow and solute transport. *Transport in Porous Media*, 95 :603–626, 2012.
- [69] N Rudraiah and DV Chandrashekhar. Flow past an impermeable sphere embedded in a porous medium with brinkmann model. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 10(1) :145–158, 2005.
- [70] P.G. Saffman. On the boundary condition at the surface of a porous medium, studies appl. *Mech*, 1 :93–101, 1971.
- [71] M. Sahraoui and M. Kaviany. Slip and no-slip velocity boundary conditions at interface of porous, plain media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 35(4) :927–943, 1992.
- [72] E. Sanchez-Palencia. Non-homogeneous media and vibration theory. *Lecture notes in physics*, 127, 1980.
- [73] E. Sanchez-Palencia. On the asymptotics of the fluid flow past an array of fixed obstacles. *International Journal of Engineering Science*, 20(12) :1291–1301, 1982.
- [74] A.S. Sangani and A. Acrivos. Slow flow past periodic arrays of cylinders with application to heat transfer. *Int. J. Multiphase Flow*, 8(3) :193–206, 1982.
- [75] G. Silva and I. Ginzburg. Stokes-brinkman-darcy solutions of bimodal porous flow across periodic array of permeable cylindrical inclusions : cell model, lubrication theory and lbm/fem numerical simulations. *Transport in Porous Media*, 111(3) :795–825, 2016.
- [76] E.M. Sparrow and A.L. Loeffler. Longitudinal laminar flow between cylinders arranged in a regular array. *A.I.Ch.E.J.*, 5 :325–330, 1959.
- [77] L. Taut. *Homogénéisation numérique par Transformée de Fourier Rapide des composites avec discontinuité d’interface et des effets de couche limite en milieux multiporeux*. PhD thesis, Université Gustave Eiffel, 2022.

- [78] L. Taut and V. Monchiet. Numerical homogenization with fft method for elastic composites with spring-type interfaces. *Composite Structures*, 305 :116426, 2023.
- [79] R. Venegas, T.G Zieliński, G. Núñez, and F.-X. Bécot. Acoustics of porous composites. *Composites Part B : Engineering*, 220 :109006, 2021.
- [80] C.Y. Wang. Stokes flow through a rectangular array of circular cylinders. *Fluid. Dyn. Res.*, 29 :65–80, 2001.
- [81] S. Whitaker. Flow in porous media i : A theoretical derivation of darcy’s law. *Transport in porous media*, 1(1) :3–25, 1986.
- [82] S. Whitaker. *The method of volume averaging*, volume 13. Springer Science & Business Media, 1998.
- [83] P.K. Yadav and S. Deo. Stokes flow past a porous spheroid embedded in another porous medium. *Meccanica*, 47 :1499–1516, 2012.
- [84] J. Zeman, J. Vondřejc, J. Novák, and I. Marek. Accelerating a FFT-based solver for numerical homogenization of periodic media by conjugate gradients. *Journal of Computational Physics*, 229(21) :8065–8071, 2010.
- [85] T. Zlatanovski. Axisymmetric creeping flow past a porous prolate spheroidal particle using the brinkman model. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 52(1) :111–126, 1999.

Matrices de transfert

Coque cylindrique/sphérique

Les conditions $U_a = \mathcal{U}_1(a)$, $V_a = \mathcal{V}_1(a)$, $N_a = \frac{1}{a}\mathcal{N}_1(a)$, $T_a = \frac{1}{a}\mathcal{T}_1(a)$ sont les suivantes :

$$\begin{cases} A_1 + B_1 + C_1 P_{11}(\tau_{1a}) + D_1 P_{12}(\tau_{1a}) = U_a, \\ A_1 - \frac{B_1}{n} - C_1 P_{21}(\tau_{1a}) - D_1 P_{22}(\tau_{1a}) = V_a, \\ A_1 + B_1 f + C_1 P_{11}(\tau_{1b}) + D_1 P_{12}(\tau_{1b}) = U_b, \\ A_1 - \frac{B_1 f}{n} - C_1 P_{21}(\tau_{1b}) - D_1 P_{22}(\tau_{1b}) = V_b \end{cases} \quad (4.54)$$

Inversement, les définitions $U_b = \mathcal{U}_1(b)$, $V_b = \mathcal{V}_1(b)$, $N_b = \frac{1}{b}\mathcal{N}_1(b)$, $T_b = \frac{1}{b}\mathcal{T}_1(b)$ donnent :

$$\begin{cases} N_a = h_1 \left(A_1 - \frac{B_1}{n} \right) - \frac{2\alpha_1}{a^2} (U_a - V_a), \\ T_a = -h_1 (A_1 + B_1 - U_a) + \frac{2\alpha_1}{a^2} (U_a - V_a), \\ N_b = h_1 \left(A_1 - \frac{B_1 f}{n} \right) - \frac{2\alpha_1}{b^2} (U_b - V_b), \\ T_b = -h_1 (A_1 + B_1 f - U_b) + \frac{2\alpha_1}{b^2} (U_b - V_b) \end{cases} \quad (4.55)$$

En éliminant les constantes A_1, B_1, C_1, D_1 dans les équations ((4.54)) et ((4.55)), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l}
L_{11} = \frac{1 + nf}{1 + n} + \frac{2n(1 + S_{11} + S_{12})}{\tau_{1a}^2} \\
L_{12} = -\frac{2n(1 + S_{11}) + (2n + \tau_{1a}^2)S_{12}}{\tau_{1a}^2} \\
L_{21} = \frac{1 - f}{1 + n} + \frac{2n(1 + S_{21} + S_{22})}{\tau_{1a}^2} \\
L_{22} = -\frac{2n(1 + S_{21}) + (2n + \tau_{1a}^2)S_{22}}{\tau_{1a}^2} \\
M_{11} = \frac{n(1 - f)}{(n + 1)} + S_{12} \\
M_{12} = -\frac{(1 + nf)}{(n + 1)} - S_{11} \\
M_{21} = \frac{n + f}{(n + 1)} + S_{22} \\
M_{22} = -\frac{(1 - f)}{(n + 1)} - S_{21} \\
N_{11} = \frac{1 - f}{1 + n} + 2n \left(\frac{1}{\tau_{1a}^2} - \frac{f}{\tau_{1b}^2} \right) + \frac{4n^2(S_{22} + S_{21} - S_{11} - S_{12})}{\tau_{1a}^2 \tau_{1b}^2} \\
N_{12} = -\frac{2n}{\tau_{1a}^2} + \frac{2n((2n + \tau_{1a}^2)(S_{12} - S_{22}) + 2n(S_{11} - S_{21}))}{\tau_{1a}^2 \tau_{1b}^2} \\
N_{21} = \frac{2nf}{\tau_{1b}^2} + \frac{2n((2n + \tau_{1b}^2)(S_{11} + S_{12}) - 2n(S_{21} + S_{22}))}{\tau_{1a}^2 \tau_{1b}^2} \\
N_{22} = -\frac{2n(2n + \tau_{1b}^2)S_{11} - 4n^2 S_{21} + (2n + \tau_a^2)(2n + \tau_{1b}^2)S_{12} - 2n(2n + \tau_{1a}^2)S_{22}}{\tau_{1a}^2 \tau_{1b}^2} \\
Q_{11} = \frac{n + f}{n + 1} + \frac{2nf}{\tau_{1b}^2} + \frac{2n(S_{22} - S_{12})}{\tau_{1b}^2} \\
Q_{12} = -\frac{1 - f}{n + 1} + \frac{2nf}{\tau_{1b}^2} + \frac{2n(S_{11} - S_{21})}{\tau_{1b}^2} \\
Q_{21} = -\frac{2nf}{\tau_{1b}^2} + \frac{(2n + \tau_{1b}^2)S_{12} - 2nS_{22}}{\tau_{1b}^2} \\
Q_{22} = -\frac{2nf}{\tau_{1b}^2} - \frac{(2n + \tau_{1b}^2)S_{11} - 2nS_{21}}{\tau_{1b}^2}
\end{array} \right. \quad (4.56)$$

Dans lesquelles les coefficients S_{ij} sont définis par :

$$\begin{aligned}
S_{11} &= n\tau_{1a}^{n+1} [P_{12}(\tau_{1b})P_{21}(\tau_{1a}) - P_{11}(\tau_{1b})P_{22}(\tau_{1a})] \\
S_{12} &= n\tau_{1a}^{n+1} [P_{12}(\tau_{1b})P_{11}(\tau_{1a}) - P_{11}(\tau_{1b})P_{12}(\tau_{1a})] \\
S_{21} &= n\tau_{1a}^{n+1} [P_{21}(\tau_{1b})P_{22}(\tau_{1a}) - P_{22}(\tau_{1b})P_{21}(\tau_{1a})] \\
S_{22} &= n\tau_{1a}^{n+1} [P_{21}(\tau_{1b})P_{12}(\tau_{1a}) - P_{22}(\tau_{1b})P_{11}(\tau_{1a})]
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Il est à noter également que ces expressions ont été obtenues en considérant la propriété suivante :

$$nx^{n+1}(P_{11}(x)P_{22}(x) - P_{12}(x)P_{21}(x)) = 1 \tag{4.58}$$

pour toute valeur de x .

L'inclusion

Les conditions $U_a = \mathcal{U}_1(a)$, $V_a = \mathcal{V}_1(a)$ donnent :

$$\begin{cases} A_2 + C_2P_{11}(\tau_{2a}) = U_a, \\ A_2 - C_2P_{21}(\tau_{2a}) = V_a \end{cases} \tag{4.59}$$

Les conditions $N_a = \frac{1}{a}\mathcal{N}_1(a)$, $T_a = \frac{1}{a}\mathcal{T}_1(a)$ s'écrivent :

$$\begin{cases} N_a = h_2A_2 - \frac{2n\alpha_2}{a^2}(U_a - V_a), \\ T_a = -h_2(A_2 - U_a) + \frac{2n\alpha_2}{a^2}(U_a - V_a) \end{cases} \tag{4.60}$$

En éliminant les constantes A_1 et C_1 , on obtient les expressions suivantes pour les composantes de la matrice \mathbf{C} (en considérant que $\alpha_2 = h_2a^2/\tau_{2a}^2$) :

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{P_{21}(\tau_{2a})}{P_{11}(\tau_{2a}) + P_{21}(\tau_{2a})} - \frac{2n}{\tau_{2a}^2} \\
C_{12} = C_{21} = -C_{22} &= \frac{P_{11}(\tau_{2a})}{P_{11}(\tau_{2a}) + P_{21}(\tau_{2a})} + \frac{2n}{\tau_{2a}^2}
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Milieu infini

Les conditions $U_a = \mathcal{U}_1(a)$, $V_a = \mathcal{V}_1(a)$ donnent :

$$\begin{cases} V_1^\infty + B_1 + D_1P_{12}(\tau_{1a}) = U_a, \\ V_1^\infty - \frac{B_1}{n} - D_1P_{22}(\tau_{1a}) = V_a \end{cases} \tag{4.62}$$

Les conditions $N_a = \frac{1}{a}\mathcal{N}_1(a)$, $T_a = \frac{1}{a}\mathcal{T}_1(a)$ s'écrivent :

$$\begin{cases} N_a = h_1 \left(V_1^\infty - \frac{B_1}{n} \right) - \frac{2n\alpha_1}{a^2}(U_a - V_a), \\ T_a = -h_1(V_1^\infty + B_1 - U_a) + \frac{2n\alpha_1}{a^2}(U_a - V_a) \end{cases} \quad (4.63)$$

En éliminant les constantes B_1 et D_1 dans les équations (4.62) et (4.63), on obtient l'expression donnée par l'équation (3.48) avec les expressions suivantes pour les composantes des matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} :

$$A_{11} = \frac{P_{22}(\tau_{1a})}{P_{12}(\tau_{1a}) - nP_{22}(\tau_{1a})} - \frac{2n}{\tau_{1a}^2}, \quad (4.64)$$

$$A_{12} = A_{21} = \frac{P_{12}(\tau_{1a})}{P_{12}(\tau_{1a}) - nP_{22}(\tau_{1a})} + \frac{2n}{\tau_{1a}^2}, \quad (4.65)$$

$$A_{22} = \frac{nP_{12}(\tau_{1a})}{P_{12}(\tau_{1a}) - nP_{22}(\tau_{1a})} - \frac{2n}{\tau_{1a}^2}, \quad (4.66)$$

$$B_1 = \frac{(1+n)P_{22}(\tau_{1a})}{P_{12}(\tau_{1a}) - nP_{22}(\tau_{1a})}, \quad (4.67)$$

$$B_2 = \frac{(1+n)P_{12}(\tau_{1a})}{P_{12}(\tau_{1a}) - nP_{22}(\tau_{1a})} \quad (4.68)$$

Résumé

Résumé en français : Ce travail concerne la modélisation des propriétés de transport de milieux à plusieurs échelles de porosité ou contenant plusieurs phases poreuses. L'objectif est de déterminer le tenseur de perméabilité dans le cadre des techniques de changement d'échelle en proposant des approches analytiques et numériques par transformée de Fourier. Dans le premier chapitre, on s'attarde sur les différentes modélisations issues de la littérature et c'est en particulier celle fondée sur l'équation de Brinkman qui est retenue. Au deuxième chapitre, on propose de déterminer la perméabilité d'un milieu biporeux contenant des macropores de forme elliptique et sphéroïdale. On compare numériquement deux approches : l'une, plus riche, basée sur l'équation de Brinkman, une seconde approche simplifiée utilisant l'équation de Darcy, y compris dans les macropores. Au chapitre trois, on propose de déterminer la perméabilité macroscopique d'un milieu poreux contenant des inclusions poreuses de forme cylindrique et sphérique. À nouveau, c'est l'équation de Brinkman qui est utilisée pour décrire l'écoulement rampant dans les deux phases. Des expressions analytiques sont obtenues en considérant des cellules cylindriques/sphériques composites, et les résultats sont ensuite comparés avec des solutions numériques obtenues par FFT. Enfin, dans le dernier chapitre, nous proposons de nouveaux schémas itératifs basés sur la FFT pour résoudre le problème de la cellule élémentaire avec plusieurs phases de Brinkman et tout particulièrement dans des situations de forts contrastes de propriétés locales. Ainsi, deux nouveaux schémas en polarisant et utilisant l'algorithme du gradient conjugué sont proposés, mis en oeuvre et comparés pour des inclusions très fortement imperméables.

Abstract : This work concerns the modeling of transport properties of porous media with multiple porosity scales or containing multiple porous phases. The objective is to determine the permeability tensor within the homogenization framework considering analytical methods and numerical approaches based on fast Fourier transforms. In the first chapter, various modeling from the literature are presented and discussed, with particular emphasis on the Brinkman equation-based approach. In the second chapter, the permeability of a biporous medium containing elliptical and spheroidal macropores is determined using two numerical approaches : a more comprehensive approach based on the Brinkman equation, and a simplified approach using the Darcy equation, including in the macropores. In chapter three, the macroscopic permeability of a porous medium containing cylindrical and spherical porous inclusions is determined. Again, the Brinkman equation is used to describe the creeping flow in both phases. Analytical expressions are obtained by considering composite cylindrical/spherical cells, and the results are then compared with numerical solutions obtained by FFT. Finally, in the last chapter, we propose new iterative schemes based on FFT to solve the problem of the Brinkman's multi-phase elementary cell, especially in situations of strong local property contrasts. Two new polarization schemes that use the conjugate gradient algorithm are implemented and compared for highly impermeable inclusions.