



HAL
open science

Analyse conjointe de magnétotellurique et de gravimétrie tridimensionnelles pour imager les ressources géothermiques : implication sur le mode de distribution de la ressource en République de Djibouti

Rachid Robleh Ragueh

► To cite this version:

Rachid Robleh Ragueh. Analyse conjointe de magnétotellurique et de gravimétrie tridimensionnelles pour imager les ressources géothermiques : implication sur le mode de distribution de la ressource en République de Djibouti. Géophysique [physics.geo-ph]. Université de Bretagne occidentale - Brest, 2023. Français. NNT : 2023BRES0064 . tel-04611795

HAL Id: tel-04611795

<https://theses.hal.science/tel-04611795>

Submitted on 14 Jun 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITE DE BRETAGNE OCCIDENTALE

ECOLE DOCTORALE N° 598
Sciences de la Mer et du Littoral
Spécialité : *Géosciences marines*

Par

Rachid ROBLEH RAGUEH

**Analyse conjointe de magnétotellurique et de gravimétrie
tridimensionnelles pour imager les ressources géothermiques:
implication sur le mode de distribution de la ressource en République
de Djibouti**

Thèse présentée et soutenue à Brest, le 14/12/2023
Unité de recherche : UMR 6538

Rapporteurs avant soutenance :

Guy MARQUIS Professeur, Institut Terre & Environnement de Strasbourg/ / Université de Strasbourg

Christel TIBERI Directrice de Recherche, Géosciences Montpellier / Université Montpellier

Composition du Jury :

Président : Christel TIBERI Directrice de Recherche, Géosciences Montpellier / Université Montpellier

Examineurs : Anne BRIAIS Chargée de Recherche CNRS/ IUEM, Université de Brest
Pierre WAWRZYNIAK HDR Docteur, chercheur BRGM

Rapporteurs : Guy MARQUIS Professeur, ITES/ / Université de Strasbourg

Dir. de thèse : Pascal TARITS Professeur, IUEM, Université de Brest

Invité(s)

Jalludin MOHAMED Docteur, Chercheur Centre d'Etude et de Recherche de Djibouti CERD, Directeur Générale,
co-encadrant

Sohie HAUTOT Docteur, Gérante IMAGIR Sarl, co-encadrante

Remerciement

Je tiens d'abord à adresser mes vifs remerciements, Pr. Pascal Tarits, d'avoir accepté de me superviser tout au long de cette thèse. Je suis ravi d'avoir pu travailler avec lui et la confiance qu'il a placée en moi. Il a été pour moi un directeur de thèse disponible et attentif malgré ses nombreuses charges et le fait qu'il encadrerait également d'autres doctorants. J'ai beaucoup appris à ses côtés, que ça soit en général l'univers de la géophysique ou spécifiquement sur les problèmes liés aux inversions conjointes des méthodes géophysiques. Encore une fois, je t'adresse mes remerciements les plus sincères.

Je remercie aussi mes co-encadrants Dr Sophie Hautot, pour m'avoir fait découvrir tous les rouages de la méthode magnétotellurique, en particulier sur l'importance de réaliser des données de mesures sur le terrain. Je remercie également mon autre encadrant et qui est d'ailleurs le directeur général du Centre d'Études et Recherche de Djibouti (CERD), qui est le centre où je suis affilié et où je continuerais mes travaux de recherches. Il m'a donné l'opportunité de réaliser cette thèse et à grandement contribué pour que cette thèse se déroule dans les meilleures conditions. Je te remercie pour tout le temps que tu as pris pour m'expliquer la géologie malgré ton agenda très chargé.

Mes remerciements s'adressent également à tous les membres du jury : les rapporteurs Guy Marquis et Christel Tiberi, et les examinateurs Anne Brias, et Pierre Wawrzyniak pour avoir accepté d'évaluer mon travail.

Je voudrais remercier tous les personnels du laboratoire Geo-Ocean, particulièrement Margot Sauvadet pour toutes les tâches administratives et ainsi que Christophe Martin pour ses contributions pour l'aide dans les bugs informatiques.

Merci à tous mes amis du laboratoire à ceux de Brest, de Rennes, de Djibouti, qui m'ont toujours encouragé et à qui je souhaite plus de succès.

Un grand merci à ma mère et à mes frères, à mes sœurs, ils n'ont cessé de prier pour moi durant mon parcours et m'ont encouragé régulièrement.

C'est avec une immense joie que je dédie cette thèse à mon défunt grand frère qui a été un pilier solide pour moi les deux premières années de ma thèse. Son soutien sans failles a été une source de motivation qui m'a poussé à préserver face à l'adversité.

Table des matières

| | |
|---|----|
| Remerciement..... | 3 |
| Liste des figures..... | 6 |
| Liste des tableaux..... | 10 |
| Introduction Générale..... | 11 |
| Chapitre I : Méthodes géophysiques..... | 15 |
| 1. Magnétotellurique..... | 16 |
| 1.1 Principe Fondamental..... | 16 |
| 1.2 Equations de Maxwell..... | 17 |
| 1.3 Équation de diffusion..... | 18 |
| 1.4 Impédance magnétotellurique..... | 19 |
| 1.5 Dimensionnalité et direction structurale..... | 19 |
| 1.6 Modélisation..... | 21 |
| 2. La Gravimétrie..... | 26 |
| 2.1 Principe et théorie..... | 26 |
| 2.2 Corrections et Anomalies..... | 28 |
| 2.3 Anomalie régionale et locale..... | 30 |
| 2.4 Modélisation 3-D..... | 30 |
| 3. Inversion Magnétotellurique 3D..... | 31 |
| 4. Inversion gravimétrique 3D..... | 32 |
| Bibliographie..... | 35 |
| Chapitre 2 : Inversion Multiparamétrique..... | 41 |
| 2.1 Pourquoi contraindre les données gravimétriques par la MT ?..... | 42 |
| 2.2 Inversions Itératives ou contraintes et inversions conjointes..... | 44 |
| 2.3 Inversion gravimétrique contrainte par la résistivité..... | 49 |
| 2.3.1 Couplage par Gradient Croisé..... | 50 |
| 2.3.2 Couplage par Corrélation des paramètres..... | 54 |
| 2.4 Tests synthétiques..... | 55 |
| Conclusion..... | 63 |
| Bibliographie..... | 64 |
| Annexe..... | 69 |
| Chapitre 3 : Amélioration de la résolution des modèles géophysiques grâce à l'inversion conjointe de la magnétotellurique et de la gravité : application à la région géothermique du rift d'Asal, République de Djibouti..... | 72 |

| | |
|---|-----|
| 3.1 Géologie..... | 73 |
| 3.2 Magnétotellurique | 74 |
| 3.2.1 Acquisitions des données MT | 74 |
| 3.2.2 Analyse du tenseur de phase | 75 |
| 3.2.3 Direction Géo-électrique | 76 |
| 3.3. Analyse des données gravimétriques..... | 78 |
| 3.4. Inversion des données..... | 80 |
| <i>Appendix A</i> | 109 |
| <i>Supplementary Section 1</i> | 112 |
| Chapitre 4: 3D gravity inversion constrained by a 3D resistivity model: implication for the conceptual models of Fiale caldera and Gale-le-Koma prospects in the Asal Rift, Djibouti Republic | 123 |
| Supplementary Section 2 | 144 |
| Conclusion Générale et perspectives | 155 |

Liste des figures

| | |
|---|----|
| Figure 1. 1: Interaction vent solaire et magnétosphère terrestre | 16 |
| Figure 1. 2: Le tenseur de phase est tracé graphiquement sous la forme d'une ellipse. Les principaux axes de maximum et de minimum sont représentés par Φ_{max} et Φ_{min} respectivement. Si le tenseur de phase est non symétrique, un troisième invariant de coordonnées est nécessaire pour caractériser le skew angle : β . l'angle $\alpha - \beta$, donne l'orientation du grand axe de l'ellipse, définit la relation entre le tenseur et la référence d'observation (X_1 et X_2). | 20 |
| Figure 1. 3: Diffusion d'un champ EM dans un milieu tabulaire 1D de N couches. | 22 |
| Figure 1. 4: Les orientations des différents champs E, I et H. D'après Mackie (1993). | 24 |
| Figure 1. 5: Représentation du géoïde terrestre (Rummel, 2020). | 28 |
| Figure 2. 1: Coupe transversale du modèle conceptuel d'un réservoir géothermique de 250 à 300°C avec des isothermes, des zones d'altération et des structures. Isothermes, zones d'altération et structures. D'après Cumming (2009). | 43 |
| Figure 2. 2: Modèle de densité 2D passant entre les volcans Paka et Silali (Lichoro 2019) superposé à a résistivité MT. Les carrés rouges sont les points de gravité mesurés, la courbe verte est la gravité modélisée et les flèches violettes sont les fumerolles. Les lignes noires sur la section transversale MT marquent les limites des corps de densité. | 43 |
| Figure 2. 3: modèle de résistivité 2D, (b) résultat d'inversion 2D à l'aide de données de résistivité à courant continu, (c) résultat d'inversion 2D à l'aide de données radiomagnétotelluriques et (d) résultat d'inversion conjointe 2D à l'aide de données de résistivité à courant continu et radiomagnétotelluriques calculées pour le 2D réel modèle de résistivité illustré sur cette figure 3 (a). D'après Candansayar et Tezkan, (2008). | 45 |
| Figure 2. 4: a) vitesses, b) densités et c) distributions de résistivité représentant le modèle synthétique du sous-bassin. Les cercles indiquent les emplacements des stations OBS et les croix mettent en évidence les positions des tirs dans a), des stations gravimétriques dans b) et des stations MT dans c). Panneaux inférieurs. Des valeurs élevées de résolution sont observées aux limites droite et gauche des données gravimétriques et MT (voir panneaux e,f) en raison de la nécessité d'inclure un modèle gravimétrique et MT d'arrière-plan. D'après Heincke et al . 2017. | 46 |
| Figure 2. 5: Résultats finaux des inversions conjointes, pour lesquelles les forces de couplage varient de manière adaptative au cours du processus d'inversion. Chaque ligne représente le résultat d'un test différent D'après Heincke et .al. 2017. Malheureusement cette approche présente des inconvénients, par exemple, la difficulté de pouvoir relier physiquement les différents paramètres entre eux, des non-linéarités entre ces derniers, ou bien la lithologie des différentes zones qui diffèrent. | 47 |
| Figure 2. 6: Coupe de densité à $x = 4000$ m. (a) Modèle réel ; (b,c) résultat de l'inversion sans/avec correc. d'après He et al 2022. | 48 |

| | |
|---|----|
| Figure 2. 7: (a) Modèle de densité réel ; (b) données d'observation ; (c,d) coupe de densité du modèle réel et résultat de l'inversion à $x = 4000$ m, d'après He et al 2022..... | 48 |
| Figure 2. 8: Modèle de densité réel ; (b) données d'observation ; (c) RMSd de l'inversion ; (d-f) coupe de densité du modèle réel et résultat de l'inversion sans/avec correction de volume à $x = 4000$ m, d'après He et al 2022..... | 49 |
| Figure 2. 9: Coupe verticale le long d'une coupe verticale au centre du synthétique avec 2 structures rectangulaires dans un milieu homogène a) Modèle synthétique de densité et b) Modèle synthétique de résistivité. | 56 |
| Figure 2. 10: Courbe en L entre le misfit et la régularisation dans cette étude..... | 57 |
| Figure 2. 11: Variation du coefficient de pondération d'une section verticale obtenue lors d'une inversion sans contrainte pour $\lambda = 10^{-8}$ | 58 |
| Figure 2. 12: (a) inversion sans contrainte, (b) modèle de résistivité, (c) inversion par corrélation de paramètres et (c) et (d) inversion par gradient croisé GC pour $\lambda = 10^{-8}$ et avec une variation du coefficient α_1 | 59 |
| Figure 2. 13: (a) inversion sans contrainte, (b) modèle de résistivité, (c), (d), (e) et (f) inversion par corrélation de paramètres CP pour $\lambda = 10^{-8}$ et avec une variation du coefficient α_2 | 61 |
| Figure 2. 14: (a) inversion sans contrainte, (b) modèle de résistivité, (c), (d), inversion par corrélation de paramètres CP pour $\lambda = 0$ et avec une variation du coefficient α_2 | 62 |
| Figure 3. 1: (a) Caractéristiques géologiques et structurelles avec les principaux forages géothermiques du rift d'Asal (modifié de Le Gall et al., 2015). (b) un modèle numérique d'élévation ASTER, le rectangle noir est la zone d'étude..... | 73 |
| Figure 3. 2 : Zone d'étude du Rift d'Asal, les sites gravimétriques sont en orange, les sites MT sont en bleu, les forages en étoile rouge et les lignes noires sont les profils (P1 à P4) que nous allons plus particulièrement étudier par la suite. | 74 |
| Figure 3. 3 : Cartes représentant des ellipses de tenseur de phase calculées à l'aide de la méthode détaillée par Caldwell et al. (2004) et vecteurs d'inductions (Niasari, 2016) pour les différentes périodes (0.1s, 10s, 100s, 500s et 1000s), sur l'ensemble des station MT | 76 |
| Figure 3. 4 : Diagrammes en rose des vents à différentes périodes à partir des invariants du tenseur d'impédance (Z) et du tenseur de phase (PT) (Chapitre 1). | 77 |
| Figure 3. 5 : Diagrammes en rose des vents pour toutes les périodes. | 78 |
| Figure 3. 6 : (a) anomalie de l'aire libre, (b) Anomalie de Bouguer Complete, (c) anomalie résiduelle de Bouguer dans le rift d'Asal | 79 |
| Figure 3. 7 : (a) Geological and structural features with the main geothermal boreholes in the Asal rift (modified from Le Gall et al., 2015). The red ellipses contour the two know geothermal areas, Gale-le- | |

| | |
|---|-----|
| Koma and Fialé Caldera with the positions of the boreholes (b) ASTER digital elevation model, the black rectangle is the study area. The exceptional site represented in red Asterix is Ardoukoba volcano. ... | 83 |
| Figure 3. 8 : Asal Rift study area, gravity data in orange, MT data in blue, boreholes in red star and black lines are the profiles (P1 to P4). The purple circle is the Fiale caldera (FC) zone and the blue circle the Gale-le-Koma (GK) zone. | 84 |
| Figure 3. 9 : Example of site 108: Left: apparent resistivity and phases of the diagonal components (XX in red, YY in blue); Right: off-diagonal (XY in red, YX in blue) as well as the model responses. | 85 |
| Figure 3. 10 : Vertical section of the 3D model, along the profiles of Figure 3.8..... | 86 |
| Figure 3. 11: Complete Bouguer anomaly and (b) Residual Bouguer anomaly | 88 |
| Figure 3. 12: Central Vertical section across the synthetic models. a) Synthetic density model and b) Synthetic resistivity model. | 92 |
| Figure 3. 13: Unconstrained model (for $\lambda= 10^{-7}$) different β (see text for details) (a) $\beta=0$, (b) $\beta =1$ and (c) $\beta =1.5$ for the vertical section of Figure 3.12. | 93 |
| Figure 3. 14: (a) unconstrained inversion, (c) and (e) parameter correlation and (d) and (f) cross-gradient coupling, for different coupling coefficients (Tab. 1). (b) synthetic resistivity model. | 95 |
| Figure 3. 15: Profile P1 (a) unconstrained inversion, (d), resistivity model (b and (c) inversion parameter correlation, (e) and (f) cross-gradient coupling for different coupling coefficients α_1 and α_2 (Tab. 2). | 97 |
| Figure 3. 16: PCA model density for eigenvalue VP1 | 100 |
| Figure 3. 17: PCA model density for eigenvalue VP2. | 101 |
| Figure S 3. 1: Full resistivity model as a function of depth..... | 113 |
| Figure S 3. 2: PCA density model for eigenvalue 1 | 114 |
| Figure S 3. 3: PCA density model for eigen value 2 | 115 |
| Figure S 3. 4: PCA density model for eigen value 3 | 116 |
| Figure S 3. 5: MT data for all sites in the Asal rift : off diagonal terms XY and YX in red and blue respectively, diagonal terms XX and YY in yellow and green respectively. The full line is the 3-D resistivity response..... | 121 |
| Figure 4. 1: (a) Geological and structural features with the main geothermal boreholes in the Asal rift (modified from Le Gall et al., 2015). (b) an ASTER digital elevation model, the black rectangle is the study area..... | 126 |
| Figure 4. 2 : Temperature profiles measured in the various boreholes in the present zones: (a) in Gale-le-Koma and (b) in Fiale Caldera. | 128 |

| | |
|---|-----|
| Figure 4. 3 : Fiale Caldera boreholes geological logs (Djama et al., 2022). | 130 |
| Figure 4. 4 : Geological sections of the three boreholes and the alteration minerals (from, Djama et al., 2022 reports)..... | 130 |
| Figure 4. 5:: a) MT stations in blue, gravity data in yellow, boreholes in red, b) seismic events between 1979 and 2011 in black..... | 131 |
| Figure 4. 6 : MT responses at 3 sites in FC and GK areas. Top apparent resistivity, bottom: phases of the four MT tensor coefficients. The full lines are for the model responses. The sites number refer to the ISOR EDI files database (see Supplementary section). | 132 |
| Figure 4. 7 M1-4 vertical sections in FC area. Left column: resistivity; middle: VP density for eigenvalue 1; Right: for eigenvalue 2. The black lines are the projection of the F1-3 and A5 boreholes. The black dots are the seismicity recorded between 1979 and 2011..... | 135 |
| Figure 4. 8: N1-4 vertical sections in GK area. Left column: resistivity; middle: VP density for eigenvalue 1; Right: for eigenvalue 2. The black lines are the projection of the A1-A4 and A6 boreholes. | 138 |
| Figure S 4. 1: Full resistivity model as a function of depth in the Fiale caldera zone | 144 |
| Figure S 4. 2: Full resistivity model as a function of depth in the Gale-le-Koma zone..... | 145 |
| Figure S 4. 3: PCA density model for eigenvalue 1 as a function of depth in the the Fiale Caldera zone | 146 |
| Figure S 4. 4: PCA density model for eigenvalue 1 as a function of depth in the the Fiale Caldera zone | 147 |
| Figure S 4. 5: PCA density model for eigenvalue 1 as a function of depth in the Gale-le-Koma zone | 148 |
| Figure S 4. 6: PCA density model for eigenvalue 2 as a function of depth in the Gale-le-Koma zone | 149 |
| Figure S 4. 7: MT data for all sites in the FC and GK : off diagonal terms XY and YX in red and blue respectively, diagonal terms XX and YY in yellow and green respectively. The full line is the 3-D resistivity response..... | 153 |

Liste des tableaux

| | |
|--|-----|
| Tableau 2. 1 : Paramètres et résultats de différents cycles d'inversion : (a) inversion sans contrainte, (c), (d), couplage par gradient croisé, pour différents coefficients de couplage α_1 et α_2 . Les deux colonnes de droite montrent la corrélation du modèle de densité avec l'image de résistivité et la corrélation de ses gradients avec le gradient de la densité..... | 59 |
| Tableau 2. 2 : Paramètres et résultats de différents cycles d'inversion : (a) inversion sans contrainte, (c), (d), (e) et (f) corrélation des paramètres d'inversion, pour différents coefficients de couplage α_1 et α_2 . Les deux colonnes de droite montrent la corrélation du modèle de densité avec l'image de résistivité et la corrélation de ses gradients avec le gradient de la densité. | 61 |
| Table 3. 1 : Setting and results for different inversion runs: (a) unconstrained inversion, (c) and (e) inversion parameter correlation, (d) and (f) cross-gradient coupling for different coupling coefficients α_1 and α_2 . The two right columns display the correlation of the density model with resistivity image and the correlation of its gradients with the gradient of the density..... | 94 |
| Table 3. 2: (a) unconstrained inversion, (b) and (c) correlation of inversion parameters, (e) and (f) cross-gradient coupling for different coupling coefficients α_1 and α_2 | 96 |
| Table 3. 3: Statistics of the PCA models for the first 3 eigenvalues exceed 80% of the total variance. | 100 |
| Table 4. 1: Boreholes characteristics in rift Asal | 129 |
| Table 4. 2: Results from the ACP analysis and correlation of PCA models (see text) onto the two first eigenvectors. | 134 |

Introduction Générale

L'épuisement prévisible des énergies fossiles et ainsi que les enjeux néfastes qu'elles présentent pour l'environnement (effet de serre, pollution atmosphérique, pluie acide, etc.), ont mis les énergies renouvelables au cœur d'un enjeu capital pour l'avenir. À l'heure actuelle, plusieurs pays en développement sont confrontés aux problèmes énergétiques, car la production est souvent inférieure aux besoins énergétiques, ce qui entraîne de fréquentes coupures d'électricité. Il est important d'envisager d'autres sources d'énergie, par exemple les énergies renouvelables, en particulier la géothermie qui connaît un essor mondial. L'exploitation de la géothermie, est aussi vieille que l'humanité, et est présente sur tous les continents. L'utilisation de l'énergie géothermique permet d'économiser environ 77 millions de barils de pétrole par an dans le monde (Wright et al, 1985). Des programmes nationaux ou internationaux, d'exploration et de développement géothermique sont menés par la Chine, Djibouti, l'Éthiopie, la France, l'Islande, l'Indonésie, l'Italie, le Japon, Costa-Rica, El-Salvador, le Kenya, au Mexique et en Nouvelle-Zélande pour ne citer que les principaux.

Les premières explorations géothermiques dans la région du rift d'Asal dans la dépression de l'Afar ont été réalisées en 1970 (BRGM, 1975, 1980). Ces explorations comprenaient des études géologiques et géochimiques, ainsi que des prospections géophysiques, et ont conduit à l'identification d'un système géothermique de Gale-le-Koma. Six forages profonds ont été réalisés entre 1975 à 1988, les puits A1 à A3 et A6, ont été réalisés à Gale-le-Koma et deux autres A4 et A5 ont été exécutés vers la partie centrale du rift d'Asal. Certaines de ces forages ont relevés une perméabilité élevée à faible et un fluide à forte salinité (126 g/l). En raison de la forte salinité et de la perméabilité élevée à faible du réservoir profond, un autre forage Glc-1 peu profond (600 m) près du puits A3 avec des températures d'enthalpie de 126°C a été réalisé en 2016 par l'Office Djiboutien de Développement de l'Énergie Géothermique (Ahmed, 2018). Dans la région de Fiale, une étude de pré-faisabilité géothermique a été réalisée en 2007 dans le rift d'Asal par Reykjavik Energy Invest (REI) et Iceland Geosurvey (ISOR) (2008). Ces études ont mis en évidence un autre système géothermique favorable à l'exploration géothermique. Trois autres puits profonds directionnels (F1 à F3) ont été réalisés par la société Iceland Drilling Company (IDC) à la zone de Fialé caldeira également dans le rift d'Asal (Caver, 2019).

L'identification de ces 2 prospectifs géothermiques et des sites de forage ont été faite avec un ensemble de données géophysiques limitées (carte gravimétrique et contexte géodynamique) complétée par des données de terrain en géologie et géochimie pour Gale-le-Koma et des modèles préliminaires 1-D de résistivité électrique par magnétotellurique et TEM (Transient Electromagnetic) associées à une tomographie sismique basse résolution et un contexte

géologique et géochimique pour la caldéra de Fialé. Dans les deux cas, les résultats ont été incertains (perméabilité élevée à faible et un fluide à forte salinité, des réservoirs secs). Ce type de problème est souvent rencontré en géothermie, en particulier en Afrique de l'Est où les campagnes d'explorations sont assez dispersées dans le temps et d'une résolution insuffisante. Ici comme dans d'autres régions du Rift comme au Rwanda ou à Tulu Moyo en Ethiopie, il reste très difficile de risquer les sites étudiés pour décider de forages très coûteux, par manque de technique véritablement intégratrice dans un premier temps de données géophysiques puis les données géologiques, géochimiques et thermiques pour construire un modèle conceptuel le plus précis possible.

Avant d'exploiter une ressource géothermique dans un contexte volcanique tel que le rift d'Asal, il est nécessaire d'acquérir une meilleure connaissance du sous-sol, pour l'objectif de localiser le réservoir géothermique et évaluer la ressource (perméabilité, température, etc.). Pour ce type de ressource, les méthodes d'exploration géophysiques sont essentielles (comme par exemple la gravimétrie, la sismique, la magnétotellurique, etc.). Les distributions de leurs paramètres physiques tels que la densité, la résistivité électrique et la vitesse sismique, permettent à la fois une évaluation et la délimitation de cette ressource. Une interprétation individuelle de ces différentes données ainsi que d'autres informations telle la géochimie, la géologie, peuvent aboutir à un modèle conceptuel raisonnable de la région.

Dans le cadre de ma thèse nous utilisons d'une part la magnétotellurique (MT) et d'autre part la gravimétrie. La MT est sensible aux conductivités électriques des roches, aux circulations des fluides souterrains, l'altération des roches etc. La gravimétrie est sensible aux structures des failles et des fractures du substratum rocheux. Ces deux informations sont complémentaires et peuvent converger vers une caractérisation du réservoir géothermique (Arts et al, 2019). Cependant, un type de donnée particulier n'a pas nécessairement la résolution et la sensibilité. Ainsi l'inversion individuelle des données géophysiques sont confrontées à l'ambiguïté de la non-unicité de la solution inverse, parfois intrinsèque à la méthode comme en gravimétrie ou en magnétisme statique et par la limitation du nombre de données et la présence de bruit. Ce problème peut conduire à un modèle conceptuel qui ne représente pas au mieux la structure du sous-sol.

C'est pourquoi nous nous sommes intéressés aux techniques d'inversion géophysiques conjointes et contraintes appliquées à la géothermie. En effet les inversions conjointes de plusieurs techniques différentes sont de plus en plus développées. En apportant plus de contraintes sur les paramètres inversés, cela permet réduire cette ambiguïté issue de l'inversion simple et améliore notre connaissance et notre compréhension de la structure du sous-sol. Cette inversion a été introduite pour la première fois par Lines et al. (1989). Il existe deux types de catégories : l'inversion séquentielle et l'inversion conjointe. L'inversion séquentielle (Menichetti et Guillen, 1983 ; Nielsen et al. 2000, Tiberi et al, 2003 ; Saunders et al., 2005, Favetto et al. 2007 ; Wang et al., 2011), consiste à inverser un type de donnée, le modèle obtenu issu de cette inversion servira de modèle initial pour la deuxième inversion. La

seconde approche qui a d'ailleurs suscité un certain intérêt, est dite l'inversion conjointe (Vozoff et Jupp, 1975 ; Gallardo et Meju, 2007 ; Moorkamp et al., 2011 ; Bennington et al., 2015). Ces inversions conjointes ont été utilisées dans plusieurs applications telles que pour imager la croûte lithosphérique (Tiberi et al, 2008, Plasman et al., 2017), pour l'exploration hydrocarbure (Tarits et al 2015 ; Morkamp et al, 2016), mais seulement très récemment en exploration géothermique (Ars et al., 2019).

L'objectif de cette thèse est de développer des méthodologies d'inversion conjointe afin de l'appliquer dans la prospection géothermique profonde en utilisant les données gravimétriques et les données magnétotellurique (MT). Ces méthodologies nous permettront d'étudier deux aspects, d'une part l'évaluation de la ressource géothermale ; et d'autre part pour tester si une telle approche conjointe peut permettre de limiter les échecs dans les forages prévus à partir du modèle conceptuel existant. Le site du rift d'Asal est pour ces études un excellent exemple avec une couverture MT et gravimétrique dense et plusieurs forages disponibles pour calibrer nos modèles. Ces données ont été collectées au cours des dernières décennies sur le rift d'Asal. Pour les analyser, nous avons développé une méthode d'inversion gravimétrique 3D contrainte par la résistivité électrique déduite de l'inversion 3D des données MT. Nous avons appliqué cette méthode aux données du rift Asal à deux échelles, à l'échelle du Rift et à l'échelle des champs géothermiques étudiés dans le rift.

Mon travail est divisé en 4 chapitres. Le premier chapitre, est un rappel théorique de chaque méthode utilisée. Nous expliquerons les principes fondamentaux de chaque méthode.

Dans le deuxième chapitre, nous décrivons d'abord les deux inversions individuelles utilisées. Le second volet de ce chapitre sera consacré à l'état de l'art des inversions conjointes. Enfin, nous détaillerons la méthode d'inversion contrainte développée dans cette thèse et nous présenterons les résultats de tests synthétiques.

Le troisième chapitre sous la forme d'une publication à soumettre traite de l'application de l'inversion contrainte aux données MT et gravimétrique sur l'ensemble du Rift d'Asal.

Le quatrième et dernier chapitre, également sous forme d'un article à soumettre, est axé sur l'inversion contrainte appliquée sur un jeu de données gravimétriques et MT limitées aux deux zones géothermiques reconnues, Gale-Le-Koma et la Caldera de Fialé avec une résolution accrue par rapport à l'étude précédente. Le but est de réévaluer la ressource géothermale en profondeur avec des modèles de résistivité et de densité mieux résolus.

Enfin, nous finirons ce manuscrit par une conclusion générale et nous proposerons des nouvelles perspectives de développement dans le futur.

Chapitre I : Méthodes géophysiques

1. Magnétotellurique

1.1 Principe Fondamental

La magnétotellurique (MT) est une méthode électromagnétique passive développée parallèlement par Tikhonov (1950) et Cagniard (1953). Elle est utilisée dans divers domaines d'application notamment dans les recherches d'hydrocarbures, de minerais, de fluides dans la croûte terrestre et de zone conductrice liées à un potentiel volcanique et ou géothermique. Cette méthode utilise comme source les champs électromagnétiques (EM) naturels à large bande observés à la surface de la terre.

Les sources de ces champs, encore appelés champs EM primaires, sont d'une part aux basses fréquences (< 1 Hz), générées par l'interaction entre la magnétosphère terrestre et le vent solaire (Figure 1) et d'autre part, aux plus hautes fréquences, les orages équatoriaux qui génèrent des ondes EM qui se propagent sur des milliers de kilomètres et se diffusent dans le sous-sol conducteur. Les champs primaires induisent un courant électrique dans les roches terrestres naturellement conductrices. Ce dernier va à son tour induire un autre champ EM, appelé champ magnétique secondaire. Le principe de la méthode est d'enregistrer la variation temporelle des champs EM primaires et secondaires à plusieurs fréquences.

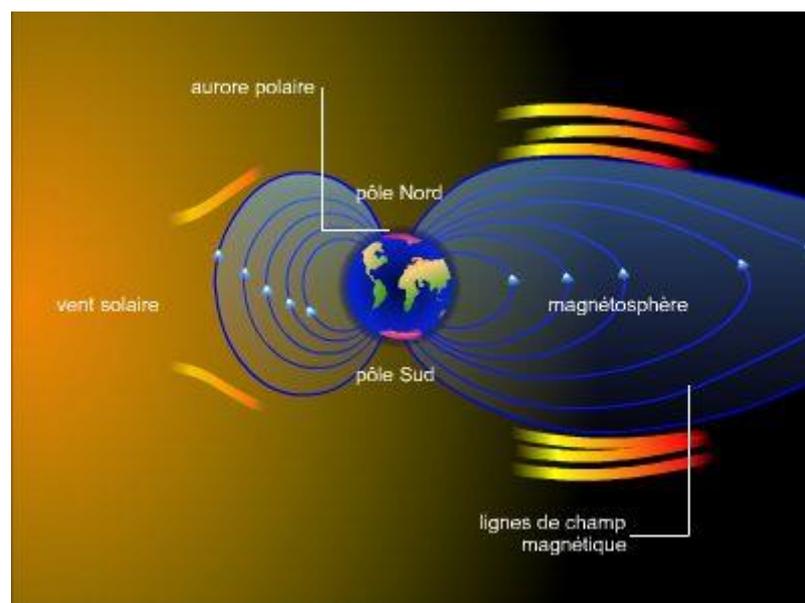


Figure 1. 1: Interaction vent solaire et magnétosphère terrestre

1.2 Equations de Maxwell

En magnétotellurique comme dans toutes les méthodes électromagnétiques, les équations de Maxwell décrivent les phénomènes électromagnétiques. Les champs électriques (E) et magnétiques (H) sont sous forme différentielle pour un matériau polarisable et magnétisant ne contenant aucune source électrique ou magnétique peuvent être écrites comme suit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \quad (1.4)$$

Ou \vec{H} et \vec{B} sont respectivement le champ magnétique (en A/m) et l'induction magnétique (en Telsa), \vec{E} et \vec{D} sont les vecteurs de champ électrique (en V/m) et de courant de déplacement (en C/m²), ρ est la densité de charge électrique (en C), ϵ est la permittivité diélectrique (en F/m).

Et les lois phénoménologiques :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (1.5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.6)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (1.7)$$

La perméabilité magnétique (μ) est en MT prise constante dans le sous-sol et égale à celle du vide (μ_0). La variable σ est la conductivité électrique.

Aux très basses fréquences (< quelques 10,000 Hz) utilisées en MT, les courants de conduction (la densité de courant électrique) dominent les courants de déplacement. Quasiment toute l'énergie électromagnétique est transmise par diffusion ce qui permet de négliger les courants de déplacement. De ce fait, en introduisant la loi d'Ohm (eq. 1.7), le champ magnétique dans l'équation (1.4) se réduit à :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \vec{E} \quad (1.8)$$

En introduisant la relation reliant l'induction magnétique et le champ magnétique ((eq. 1.6), la relation (1.3) devient :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1.9)$$

1.3 Équation de diffusion

En prenant le rotationnel des relations (1.8) et (1.9), nous trouvons pour un milieu homogène (eg. Marquis, 2004) :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (1.10)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \mu_0 \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1.11)$$

En utilisant l'identité vectorielle $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \cdot \vec{A}$, nous obtenons les équations de diffusion des champs électrique et magnétique (Eq. 1.12 et 1.13) :

$$\Delta \cdot \vec{E} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (1.12)$$

$$\Delta \cdot \vec{H} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad (1.13)$$

Dans le domaine fréquentiel et pour une variation du champ électromagnétique du type $\mathbf{E} = E_0 e^{i\omega t}$, $\mathbf{H} = H_0 e^{i\omega t}$ de pulsation $\omega = 2\pi f$ où f est la fréquence, les équations de diffusion peuvent s'écrire (Eq. 1.14 et 1.15).

$$\Delta \cdot \vec{E} - k^2 \vec{E} = 0 \quad (1.14)$$

$$\Delta \cdot \vec{H} - k^2 \vec{H} = 0 \quad (1.15)$$

Avec k^2 :

$$k^2 = i\omega\mu_0\sigma \quad (1.16)$$

Où k^2 est le carré du nombre d'onde magnétique qui caractérise la diffusion des champs électromagnétiques en fonction de la fréquence ω . On peut définir la profondeur d'investigation P (« effet de peau ») à partir du nombre d'onde. Elle correspond au fait que le courant électrique induit a tendance à circuler en surface des conducteurs. :

$$P(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}} \quad (1.17)$$

$$P(T) \approx 503 \sqrt{\frac{T}{\sigma}} \quad (1.18)$$

Avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$

La profondeur de pénétration est inversement proportionnelle à la racine de la conductivité électrique du milieu mais augmente avec la période T .

1.4 Impédance magnétotellurique

Pour le cas d'un demi espace homogène et isotrope, l'impédance magnétotellurique Z dans le plan horizontal (x,y) peut être définie comme étant le rapport entre le champ électrique (E_x et E_y) et le champ magnétique (H_x , H_y) à une fréquence donnée ω :

$$Z(\omega) = \frac{E_x}{H_y} = \frac{-E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu_0}{k} \quad (1.19)$$

En réarrangeant l'équation, la résistivité apparente d'un demi-espace est donnée par l'équation (1.20) :

$$\rho_a = \left(\frac{1}{\omega\mu}\right) |Z|^2 \quad (1.20)$$

La phase est constante à 45° , quelle que soit la résistivité électrique (Inverse de la conductivité) du demi-espace sous-jacent pour un milieu homogène mais varie avec la fréquence si la résistivité varie avec la profondeur.

Si le milieu présente des caractères 2D et 3D, l'impédance Z est un tenseur complexe : pour les composantes horizontales, ce tenseur est :

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

La composante du champ magnétique vertical est proportionnelle aux composantes horizontales grâce au vecteur d'induction T communément appelé tipper (Löwer, 2017)

$$H_z = \begin{pmatrix} T_x & T_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

La résistivité apparente associée est :

$$\rho_{aij} = \left(\frac{1}{\omega\mu}\right) |Z_{ij}|^2 \quad (1.23)$$

Et la phase est :

$$\varphi_{ii} = \tan^{-1} \left(\frac{RZ_{ij}}{IZ_{ij}} \right) \quad (1.24)$$

1.5 Dimensionnalité et direction structurale

Afin d'avoir une bonne compréhension de cette méthode, avant la modélisation et inversion des données, il est tout d'abord important d'évaluer la dimensionnalité et la direction structurale du tenseur MT. On peut soit directement déterminer par les composantes du

tenseur d'impédance ou bien soit par le tenseur de phase. Dans cette section, nous allons plus détailler le tenseur de phase (Caldwell and al., 2004).

1.5.1 Tenseur de phase

Ce tenseur contient des informations sur la dimensionnalité et direction de la structure (Chave and Jones, 2012). Il n'est fait aucune hypothèse a priori concernant la structure de résistivité régionale. De plus, le tenseur de phase est peu affecté par les effets galvaniques (Caldwell and al., 2004) qui biaisent les données.

Le tenseur de phase Φ (Eq. 1.25), est un rapport de la partie réelle X et Y la partie imaginaire du tenseur de l'impédance (Caldwell and al., 2004). Il est graphiquement représenté par une ellipse complètement caractérisée par une direction α , et trois invariants de coordonnées, Φ_{max} , Φ_{min} et β (Figure 1.2).

$$\Phi = X^{-1}Y \quad (1.25)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{\Phi_{xy} - \Phi_{yx}}{\Phi_{xx} + \Phi_{yy}} \right) \quad (1.26)$$

Avec β , étant l'angle d'inclinaison (Skew angle).

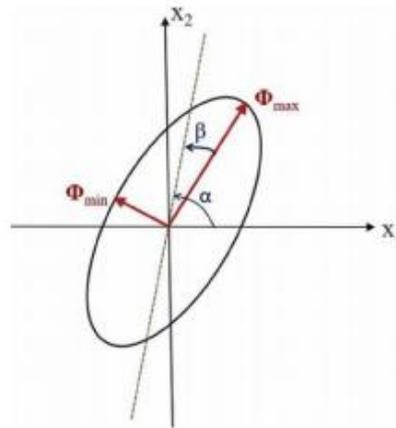


Figure 1. 2: Le tenseur de phase est tracé graphiquement sous la forme d'une ellipse. Les principaux axes de maximum et de minimum sont représentés par Φ_{max} et Φ_{min} respectivement. Si le tenseur de phase est non symétrique, un troisième invariant de coordonnées est nécessaire pour caractériser le skew angle : β . l'angle α - β , donne l'orientation du grand axe de l'ellipse, définit la relation entre le tenseur et la référence d'observation (X_1 et X_2).

Dans le cas d'une structure 1-D, le tenseur de phase est caractérisé par une forme circulaire ($\Phi_{max} = \Phi_{min}$). Pour une structure de résistivité régionale 2D, le tenseur de phase sera représenté par une ellipse et β est très petit, proche de zéro ($\beta = \pm 3^\circ$). Si le milieu est 3-D, le tenseur de phase est non symétrique et l'angle β a une grande valeur. Une autre indication

d'une structure 3D est un rapide changement latéral d'un site de mesure à l'autre de la direction des axes principaux entre les sites.

Les ellipses de tenseurs de phase, superposées aux vecteurs d'induction (Parkinson, 1962), sont largement utilisées. Ces vecteurs d'induction (communément appelés tipper) sont des représentations graphiques de la fonction de transfert entre le champ magnétique vertical et horizontal (Eq. 1.27).

$$H_z = K * H \quad (1.27)$$

Avec H champ magnétique horizontale, H_z , champ magnétique vertical et vecteur d'induction (Tipper) K .

Le champ magnétique verticale H_z est généré par le gradient de résistivité latérale. Si la longueur du tipper est nulle ou proche de zéro, la structure de résistivité régionale peut être définie comme étant un milieu 1D. Dans le cas des structures de 2D, on a le vecteur d'induction qui est parallèle ou perpendiculaire à la direction géo-électrique. Dans le cas contraire, où cette direction varie en fonction de la période et de l'emplacement, une structure tridimensionnelle 3D pourrait être envisagée.

La direction de la structure régionale peut être définie à partir du tenseur d'impédance (Eq.1.19 et 1.25). En effet, cette direction est considérée comme étant la direction dominante du flux électrique (Niasari, 2016).

1.6 Modélisation

Les équations de Maxwell décrites ci-dessus peuvent être utilisées pour modéliser la diffusion des champs EM dans le sous-sol en plusieurs dimensions. Nous présenterons dans cette section, les modélisations des différents milieux 1D, 2D et 3D.

Pour résoudre les équations de Maxwell dans un milieu hétérogène, il est nécessaire de définir les conditions aux limites des champs électriques et magnétiques :

- La composante normale à l'interface de la densité de courant, J , est continue.
- La composante du champ magnétique H parallèle à l'interface est continue.
- La composante du champ électrique E parallèle à l'interface est continue.
- La composante normale à l'interface de l'induction magnétique, B , est continue.

1.6.1 Milieu 1D

Dans le cas de la modélisation d'un milieu homogène et isotrope 1D, la variation de la résistivité (Eq. 1.19) ne dépend que de la profondeur. Le tenseur Z se réduit à une seule impédance :

$$Z_{xy} = -Z_{yx}; Z_{xx} = Z_{yy} = 0 \quad (1.28)$$

On considère un milieu homogène constitué de N couche tabulaire de conductivité électrique σ_j et d'épaisseur h_j (Figure 1.3). On peut calculer les champs E et H de la couche j-2 en fonction de ceux de la couche j -1.

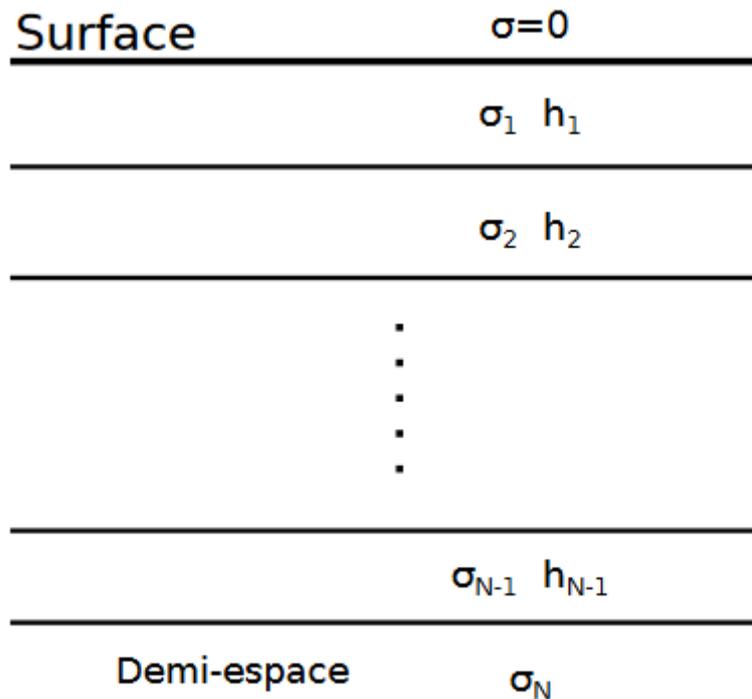


Figure 1. 3: Diffusion d'un champ EM dans un milieu tabulaire 1D de N couches.

Wait (1954), propose une formule récursive, permettant de calculer l'impédance en partant à la surface de la couche la plus profonde N (demi-espace) vers la surface (e.g. Simpson and Bahr, 2005).

$$\hat{Z}_{j-1} = \hat{Z}_{j-1} \frac{Z_j + Z_{j-1} \tanh(ik_{j-1}h_{j-1})}{Z_{j-1} + Z_j \tanh(ik_{j-1}h_{j-1})} \quad (1.29)$$

Avec cette formule, on peut calculer l'impédance \hat{Z} de N couches en connaissant seulement leurs épaisseurs et leurs conductivités électriques.

1.6.2 Milieu 2D

Dans le cas d'une modélisation 2D, les champs électrique E et magnétique H sont influencés par la direction de la structure. La résistivité change dans la direction horizontale en plus de la direction verticale. Dans le cas MT (onde plane), on considère un milieu composé d'une structure dans le plan (X et Z) de longueur infinie dans la direction Y . Les équations de Maxwell se découpent en deux modes selon lequel le champs électrique ou magnétique sont parallèle à la direction de la structure :

- Le mode de polarisation électrique transverse (TE), où le champ électrique est parallèle à la direction de la structure. Dans ce cas les composantes des champs électromagnétiques associés sont E_y , H_x et H_z . Les équations de diffusion (1.12 et 1.13) se réduisent :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - i\omega\mu_0\sigma E_y = 0 \quad (1.30)$$

$$H_x = \frac{1}{\omega\mu_0\sigma} \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad (1.31)$$

$$H_z = \frac{1}{\omega\mu_0\sigma} \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (1.32)$$

- Le mode de polarisation magnétique transverse (TM), où le champ magnétique est dans la direction de la structure. Dans ce cas les composantes des champs électromagnétiques associés sont H_y , E_x et E_z . Les équations de diffusion (1.12 et 1.13) se réduisent :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) - i\omega\mu_0\sigma H_y = 0 \quad (1.33)$$

$$E_x = \frac{1}{\omega\mu_0\sigma} \frac{\partial H_y}{\partial z} \quad (1.34)$$

$$E_z = \frac{1}{\omega\mu_0\sigma} \frac{\partial H_y}{\partial x} \quad (1.35)$$

Des nombreuses approches ont été développées pour résoudre les équations Maxwell dans ces deux modes (e.g. Wannamaker et al., 1986 ; Pek et al, 1997).

1.6.3 Milieu 3D

Dans le cas d'une modélisation 3D, la résolution des équations de Maxwell peut être réalisée suivant différentes approches numériques : volume fini (FV ; Eymard et al., 2000), équation intégrale (IE ; Colton and Kress, 2013), différence finie (FD ; Mackie et al, 1993), ou éléments finis (FE; Jin, 2015). La modélisation utilisée dans ce travail est celle développée par Mackie et al (1993). Cette approche se base sur la forme intégrale des équations de Maxwell (éq. 1.1 à 1.4).

$$\int E \cdot dl = \iint i\omega\mu H \cdot dS \quad (1.36)$$

$$\int H \cdot dl = \iint I \cdot dS = \iint \sigma E \cdot dS \quad (1.37)$$

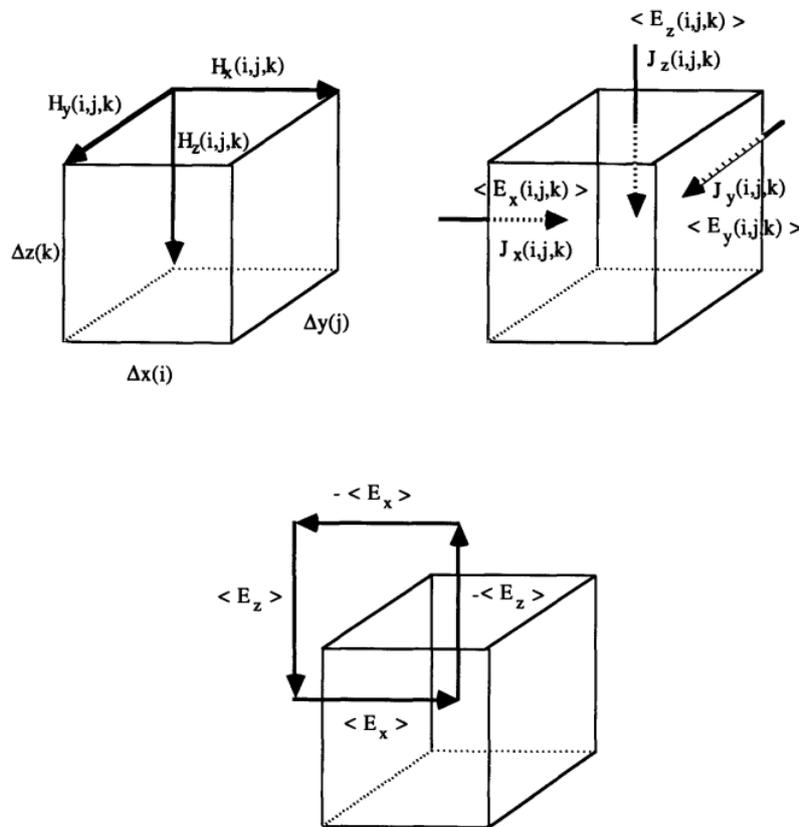


Figure 1. 4: Les orientations des différents champs E , I et H . D'après Mackie (1993).

On considère un milieu 3D, subdivisé en N mailles de conductivité constante. Pour calculer la réponse EM de ce milieu les conditions aux limites sont :

On considère un milieu 3D, subdivisé en N mailles de conductivité constante. Pour calculer la réponse EM de ce milieu, il est donc nécessaire de définir ses conditions aux limites.

Le modèle repose sur un demi-espace d'épaisseur infinie et de conductivité constante :

- Pour chaque maille, le champ H est suivant le long des arêtes alors que les champs J et E sont perpendiculaire aux faces. J est continue entre chaque maille tandis que E est discontinue.

- Afin de prendre en compte, le champ magnétique provenant de gradients de courants latéraux, une couche d'air est ajoutée en surface. La dernière couche de ce modèle est constituée d'un demi-espace d'épaisseur infinie et conductivité constante pour ainsi relier le champ EM.

Les modes TE et TM sont calculés, dans les quatre faces du modèle. En effet, elles sont considérées comme étant des modèles 2D à l'infini. D'après, les orientations des différents champs représentés dans la figure 3, la composante du champ magnétique suivant x de l'équation (1.25).

$$[H_z(i, j + 1, k) - H_z(i, j, k)] - [H_y(i, j, k + 1) - H_y(i, j, k)]L = J_x(i, j, k)L^2 \quad (1.39)$$

Avec L, la longueur d'une arête de maille. Les composantes y et z sont décrit de la même manière. Par la suite, on présentera uniquement la composante x des autres champs.

En raison de la discontinuité du champ E, il est défini comme étant la moyenne du champ électrique de part et d'autre du block. Le champ J normal à la surface, quant à lui est continu entre ces mailles.

$$E_z(i, j, k) = \frac{\rho_{xx}(i, j, k) + \rho_{xx}(i-1, j, k)}{2} J_x(i, j, k) = \langle \rho_{xx} \rangle J_x(i, j, k) \quad (1.40)$$

Ici, la résistivité est isotrope, mais en revanche le tenseur de résistivité est considéré comme étant anisotrope. Le même raisonnement s'applique pour la perméabilité magnétique. La composante du champ E, de l'équation (1.24).

$$[E_z(i, j, k) - E_z(i, j - 1, k)]L - [E_y(i, j, k) - E_y(i, j, k - 1)]L = \langle \mu_{xx} \rangle i\omega H_x(i, j, k)L^2 \quad (1.41)$$

Les différents éléments du champ électrique de l'équation 1.28 peuvent être substitués dans les équations 1.39 et 1.40. Afin d'obtenir une équation de second degré par rapport à la

composante H. Le même principe s'applique pour les deux autres orientations (suivant y et z). L'ensemble de ces équations d'ordre 2 est regroupé de la manière suivante :

$$Ax = \begin{pmatrix} M_{xx} & N_{xy} & N_{xz} \\ N_{yx} & M_{yy} & N_{yz} \\ N_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = b \quad (1.41)$$

Avec b contient les informations des conditions aux limites décrit ci-dessus.

Ce système d'équations, est résolu en utilisant la méthode de minimisation du résidu (Axelsson, 1980). Il s'agit d'une variante de la méthode des gradients conjugués s (Hestenes and Stiefel 1952) permettant de résoudre un système linéaire (Ax=b).

2. La Gravimétrie

La gravimétrie est une méthode géophysique qui mesure les variations spatiales du champ potentiel gravitationnel terrestre causé par les structures géologiques présentes en profondeur de la Terre. Les mesures de la gravité permettent de reconstituer des modèles 3D de densité, afin de fournir une meilleure compréhension de la géologie du sous-sol (localisation des minéraux, les failles, les ressources géothermales, pétrolières, etc.). Les prospections du champ potentiel sur le terrain sont relativement peu coûteuses et peuvent couvrir rapidement de grandes superficies (Parasnis, 2012). Dans cette section, nous détaillerons la théorie de base de cette méthode, les principales corrections de Bouguer et la modélisation gravimétrique 3D que nous avons utilisée.

2.1 Principe et théorie

La gravité est un champ de potentiel, i.e. une force qui agit à distance. Le principe de l'utilisation des variations de l'accélération gravitationnelle comme mesure des variations de densité est que la force d'attraction entre deux masses est directement proportionnelle aux deux masses, et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare.

La première loi universelle de gravitation de Newton (Eq. 1.42) stipule que :

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u} \quad (1.42)$$

Où G est la constante universelle de la gravitation et vaut $6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$, r est la distance séparant les deux masses m_1 et m_2 , \vec{u} est un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{12}$.

Si on considère la force d'attraction qu'exerce la terre de masse M_T sur un corps de masse m , qui est situé à sa surface, l'équation (1.42) peut être redéfinie comme suit :

$$\vec{F} = G \frac{mM_T}{R_T^2} \vec{u} \quad (1.43)$$

Dans le cas d'une terre homogène et sphérique et en appliquant le principe fondamental de la dynamique (2^{ème} loi de Newton) à ce corps, on obtient l'équation (1.45)

$$\vec{F} = m\vec{g} \quad (1.44)$$

$$\vec{g} = G \frac{M_T}{R_T^2} \vec{u} \quad (1.45)$$

Avec M_t et R_T , masse et rayon de la Terre. L'accélération gravitationnelle de pesanteur est en moyenne d'environ 9.8 m s^{-2} . La force gravitationnelle g au point N produit un champ conservatif. Par conséquent, la force gravitationnelle peut être exprimée en termes de potentiel gravitationnel.

$$\vec{g}(N) = \nabla U(N) \quad (1.46)$$

$$U(N) = G \frac{M_T}{R_T} \quad (1.47)$$

L'accélération de pesanteur mesurée en un point est susceptible de varier en fonction de plusieurs facteurs. Le premier paramètre pouvant influencer est l'altitude. En effet si la distance par rapport au centre de la terre augmente, cela engendre la diminution de l'accélération de pesanteur. Le deuxième facteur à prendre en compte est la latitude. En effet, la terre n'est pas une sphère parfaite. Sa forme irrégulière dépend notamment de distribution de masse dans la terre, de sa rotation sur elle-même. Le géoïde est une surface de potentiel gravitationnel constant (Santos and Rivas, 2009). Le gradient de ce potentiel est perpendiculaire à la surface d'où l'accélération gravitationnelle est toujours normale à la surface. Il est déterminé au niveau de l'océan, si l'on fait toutes abstractions des irrégularités terrestres (la topographie). L'équipotentielle du champ de pesanteur terrestre théorique est définie ici par un ellipsoïde de référence donnant une approximation simple du géoïde (Figure 1.5). Néanmoins quand l'étude porte sur une zone de dimension restreinte (quelques dizaines de kilomètres), cet effet est négligeable.

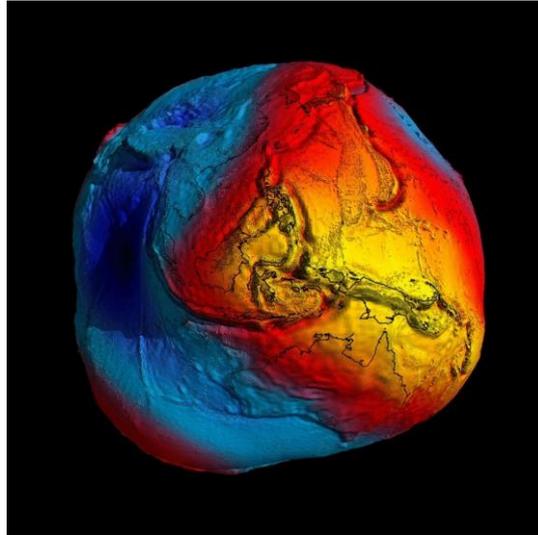


Figure 1. 5: Représentation du géoïde terrestre (Rummel, 2020)

2.2 Corrections et Anomalies

Afin d'obtenir les variations de masse \vec{g} dû à des causes géologiques, il est nécessaire d'effectuer plusieurs corrections sur les données gravimétriques brutes mesurées.

2.2.1 Correction d'altitude et anomalie d'air libre

Comme nous venons de voir précédemment, la latitude est un facteur pouvant influencer les variations de \vec{g} , en raison de l'aplatissement et de la rotation de la terre. L'anomalie est définie comme étant la différence entre une valeur mesurer de \overline{gm} et une valeur théorique \overline{gt} à la même station de mesure. Cette valeur théorique dépend uniquement de la latitude ϕ . La valeur théorique \overline{gt} (Eq.1.48) est calculée à partir de la formule gravimétrique international << The geodetic references system formula of 1967 or GR67>> :

$$\overline{g_t} = 9.7803253359 \frac{1+0.00193185265241\sin^2\phi}{\sqrt{1-0.00669437999014\sin^2\phi}} \quad (1.48)$$

Étant donné que les points de mesures ne se trouvent pas à la même altitude et qu'ils ne sont pas entourés par des reliefs similaires, il est donc nécessaire d'apporter des corrections supplémentaires.

Les mesures d'un levé gravimétrique ne sont pas forcément prises sur la surface de référence ellipsoïde (terrain plat). La correction d'altitude ou d'air libre (Eq.1.49), permet de corriger l'effet d'altitude avec pour référence prise en général par rapport au niveau moyen des mers. La valeur théorique à l'altitude de point de mesure est :

$$Cal_{(mgal)} = -0.3086h \quad (1.49)$$

Avec h en mètre.

Par conséquent, l'anomalie d'air libre est l'écart entre valeur de mesuré g_m et la valeur théorique g_t ramenée à la même altitude de mesure.

$$A_{al} = g_m - (g_t - 0.3086h) \quad (1.50)$$

2.2.3 Corrections et anomalie de Bouguer

Dans la correction précédente, la matière qui se trouve entre le point de mesure et l'ellipsoïde n'a pas été pris en compte. La correction de Bouguer simple ou correction de plateau permet de corriger cet effet :

$$C_{pl} = 2\pi Gh\rho = 0.04191h\rho. \quad (1.51)$$

Avec h en mètre et ρ la masse volumique en g/cm^3 .

Cette correction est souvent réalisée avec une densité de référence $2.67 g\cdot cm^{-3}$, densité moyenne de la croûte terrestre. Toutefois, il existe plusieurs méthodes pour calculer une densité de référence se rapprochant plus à la densité moyenne de la zone d'étude (Parasnis, 2012, Telford et al. 1990, Nettleton, 1939).

On peut alors définir l'anomalie de Bouguer simple qui est calculée à partir de l'équation 1.52 ci-dessous :

$$A_{BS} = g_m - (g_t - 0.3086h + 0.04191h\rho) \quad (1.52)$$

Pour calculer la correction de Bouguer complète, il faut prendre en compte la correction topographique. En effet, la correction de plateau néglige la totalité des irrégularités topographiques (montagne, vallée etc...). Il existe un certain nombre de techniques pour déterminer cette correction. Auparavant, cette correction de terrain était calculée à partir du système de Hammer pour compenser l'effet gravimétrique des reliefs prenant en compte une distance entre 22 et 160 Km autour de chaque point de mesure. Néanmoins, avec le développement des outils numériques, cette correction est calculée à partir des modèles numériques de terrain (MNT). Classiquement, on considère une zone de 162 km de rayon autour du point de mesure, discrétisée en des prismes possédant une densité de référence. Ensuite, on calcule l'effet gravimétrique de chacun de ces prismes au niveau du point de mesure. La somme des effets des prismes sur un point est la correction de topographie C_T .

Une fois toutes ces corrections réalisées. On peut calculer l'anomalie de Bouguer complète (Eq. 1.53) :

$$A_{BC} = g_m - (g_t - 0.3086h + 0.04191h\rho + C_T) \quad (1.53)$$

Lorsque cette anomalie est positive ou négative, elle indique respectivement la présence d'un excès ou un déficit de masse par rapport au modèle.

2.3 Anomalie régionale et locale

L'anomalie de Bouguer complète est la superposition de plusieurs composantes (ou signaux) : la composante régionale qui est associée aux variations à grande échelle et une composante résiduelle associée aux variations de densité à petite échelle. Dans les études structurales, il est donc important de retirer les anomalies de grande longueur d'onde (les variations régionales du aux morphologies des montagnes, bassins, etc.). Il existe plusieurs méthodes de séparation régionale-résiduelle, mais dans notre étude, de manière à éliminer l'effet régional nous avons retiré un polynôme d'ordre 2 calculé sur l'ensemble des données. Ce sont ces anomalies résiduelles que nous inverserons par la suite.

2.4 Modélisation 3-D

On peut calculer l'effet gravimétrique d'une distribution de masse à partir de la formulation de l'attraction gravitationnelle d'une masse de coordonnées x' , y' et z' d'un point de mesure P (x , y , z) distant de r . Elle est donnée par l'équation 1.54 :

$$g(x, y, z) = -G \int_{x'} \int_{y'} \int_{z'} \rho(x', y', z') \frac{z-z'}{r^3} dx' dy' dz' \quad (1.54)$$

En définissant ψ comme étant la fonction de Green traduisant l'effet gravimétrique de la masse au Point P. On peut réécrire l'équation 1.54 par :

$$g(x, y, z) = \int_{x'} \int_{y'} \int_{z'} \rho(x', y', z') \psi(x - x', y - y', z - z') dx' dy' dz' \quad (1.55)$$

$$\text{Avec } \psi(x, y, z) = -G \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Différentes solutions existent pour calculer l'effet gravimétrique à partir de l'équation 1.54. Dans notre cas, le milieu est décomposé en prismes (Plouff, 1976) de densité constante et la réponse gravimétrique de l'ensemble du modèle en un point de mesure peut alors s'écrire sous la forme :

$$gm = \sum_{i=1}^N \rho_i \psi_i \quad (1.56)$$

Avec ρ_i , a densité de la masse i et ψ_i l'effet gravimétrique intégré sur le volume de la maille de densité ρ_i au point de mesure m . Nous avons utilisé le sous-programme GBOX proposé par Blakely (1996). L'effet gravimétrique (suivant les directions x, y et z) a un point P ramené au point de référence (origine) est donnée par :

$$g = G\rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \left[z_k \arctan \frac{x_i y_i}{z_k R_{ijk}} - x_i \log(R_{ijk} + y_i) - y_i \log(R_{ijk} + x_i) \right] \quad (1.47)$$

$$\text{Avec } R_{ijk} = \sqrt{x_i^2 + y_j^2 + z_k^2} \text{ et } \mu_{ijk} = (-1)^i (-1)^j (-1)^k$$

Avec cette formulation, nous avons une relation linéaire entre l'observation g et la densité d que nous pouvons représenter sous forme matricielle :

$$\vec{g} = \mathbf{G} \cdot \vec{d} \quad (1.58)$$

Où \vec{g} est le vecteur de l'anomalie résiduel de Bouguer de dimension N de l'anomalie de Bouguer. \mathbf{G} est la fonction de Green sur de l'ensemble des prismes du modèle sur l'ensemble des points de mesure M et \vec{d} est le vecteur de la distribution de densité dans le modèle de dimension N.

3. Inversion Magnétotellurique 3D

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à l'interprétation des données MT avec l'inversion numérique des données qui est une étape importante. Ces inversions peuvent être effectuées selon les milieux terrestres (1D, 2D et 3D). Comme nous avons vu dans le chapitre précédent. La réponse MT d'un modèle de résistivité multi-dimension peut être calculée. Nous présentons ici le cas de l'inversion 3-D. Il existe plusieurs types d'inversion 3D, utilisant

plusieurs type approches (Zhdanov et al., 2000a ; Newman et Alumbaugh, 2000 ; Kelbert et al. 2014 ; Siripunvaraporn et al., 2005 ; Hautot et al. 2000). Dans cette partie, nous développerons plus en détail le code utilisé, Minim3D (Hautot et al. 2000, 2007).

Le problème direct, est résolu par la modélisation 3D précédemment présentée (Mackie et al 1993). La donnée MT est le tenseur d'impédance complexe à plusieurs fréquences et dans plusieurs sites de mesure. Le paramètre recherché est la conductivité électrique. Le problème inverse électromagnétique est non-linéaire et en général sous-déterminé, c'est-à-dire qu'il y a plus de paramètres à déterminer que de données disponibles.

Classiquement, l'inversion non linéaire repose sur la minimisation d'une fonction coût (Hautot et al, 2007) :

$$F = \chi^2(m) + \lambda REG \quad (1.59)$$

Le premier terme $\chi^2(m)$ représente l'écart entre l'observation et la réponse théorique du modèle (misfit). Cet écart est généralement pondéré par la variance des données

$$\chi^2(m) = \sum_{Nsite} \sum_{per} \sum_{i,j}^{x,y} \left(\frac{z_{ij}^{obs} - z_{ij}^{cal}(m)}{\sigma_{ij}} \right)^2 \quad (1.60)$$

Ou z_{ij}^{obs} est la composante ij (1,2) du tenseur issu des données observées, $z_{ij}^{cal}(m)$ la réponse du modèle, σ_{ij} l'écart-type sur les données. Ce terme prend en compte le tenseur d'impédance complet sur l'ensemble des périodes de chaque site. Dans notre cas m est le log10 de la résistivité (l'inverse de la conductivité).

Le deuxième terme de cette fonction est un terme de régularisation indispensable pour stabiliser l'inversion et éviter des contrastes de résistivité irréalistes. De nombreuses régularisations existent (norme, laplacien, etc ...). Ici nous utilisons la variance du log10 de la résistivité dans tout le modèle. Ce terme de régularisation REG, est défini par l'équation 1.61 :

$$REG = \sum_{i=1}^M \sum_{j=i+1}^M (\mathbf{m}(i) - \mathbf{m}(j))^2 \quad (1.61)$$

avec λ , est un paramètre de pondération de REG.

La minimisation de cette fonction coût est effectuée grâce à une méthode de gradient de plus grande pente basée sur un algorithme de recherche de minimum locale (Rosenbrock 1960, Beiner 1970).

4. Inversion gravimétrique 3D

L'inversion gravimétrique peut être considérée comme une inversion linéaire et ou non linéaire suivant la formulation du calcul direct. Il existe plusieurs méthodes d'inversion dans ce domaine (Li and Oldenburg 1998 ; Camacho et al. 2000 ; Boulanger et Chouteau 2001). Comme l'objectif est ici de développer une méthode d'inversion contrainte par une autre méthode géophysique, nous avons développé notre propre méthode d'inversion afin de pouvoir par la suite introduire dans la formulation du problème inverse des termes de couplage. La fonction coût simple est constituée de deux termes, la fonction misfit χ^2 et la fonction de régularisation *Reg* :

$$\phi = \chi^2 + \lambda REG \quad (1.62)$$

Il existe plusieurs méthodes pour formuler la fonction misfit χ^2 . Dans les inversions à champs de potentiel, deux méthodes sont les plus couramment utilisées, la méthode des moindres carrés ou norme L2 (Pilkington, 1997, Li et Oldenburg, 1998) et norme moindre écart absolu ou norme L1 (Tibshirani, 2013). La norme L1 étant non linéaire, nous utiliserons ici la norme L2 : Nous reprenons ici la formulation du calcul direct décrit (Eq.1.60) pour exprimer ce misfit :

$$\chi^2 = \|\overline{g_{obs}} - G\vec{d}\|^2 \quad (1.63)$$

Les termes $\overline{g_{obs}}$ et \vec{d} , sont respectivement les données observées et le vecteur de densité.

Comme pour l'inversion MT La fonction de régularisation introduit des connaissances a priori ou impose un comportement particulier de la distribution des paramètres. Il existe plusieurs façons de choisir le terme de régularisation, comme par exemple le cas du maximum de corrélation entre voisins (Tikhonov et Arsenin, 1977), la méthode de validation croisée généralisée (Golub et al., 1979 ; Wahba, 1990), basée sur le principe de la validation croisée, c'est-à-dire la résolution du problème est effectuée en omettant au moins une fois le paramètre optimal. Dans notre étude, nous avons choisi la méthode du minimum d'énergie. Cette fonction est définie par l'équation ci-dessous.

$$\phi_r = \|\lambda dW\|^2 \quad (1.64)$$

W est une matrice de poids qui varie uniquement avec la profondeur z, avec une épaisseur de référence z0 et un exposant beta contrôlant le taux de pondération (Eq. 1.65) avec la profondeur (Li et Oldenburg 1998).

$$W_z = \frac{1}{(z_0+z)^\beta} \quad (1.65)$$

Le coefficient λ dans l'Eq. 1.48 pondère la régularisation. En effet, avec cette méthode d'inversion les modèles ont tendance à organiser les contrastes de densité en proche-surface (Cockett et al, 2015 ; Li et Oldenburg 1998) et cette pondération permet de limiter cet effet et de localiser des structures en profondeur.

Dans le cas des moindres carrés amortis, la solution pour le minimum de l'Eq 1.62, est bien connue (Tikhonov AN, 1963) :

$$\vec{d} = (G^t G + \lambda \mathbf{W})^{-1} G^t \vec{g}_{obs} \quad (1.66)$$

Avec G^t étant la transposée de G .

Biibliographie

- Ahmed, M. M. (2018). Well design for the Asal geothermal field: a case study for well Glc-2.
- Axelsson, O., (1980). Conjugate gradient type methods for unsymmetric and inconsistent systems of linear equations. *Linear algebra and its applications* 29, 1–16.
- Ars, J. M., Tarits, P., Hautot, S., Bellanger, M., Coutant, O., & Maia, M. (2019). Joint inversion of gravity and surface wave data constrained by magnetotelluric: application to deep geothermal exploration of crustal fault zone in felsic basement. *Geothermics*, 80, 56-68.
- Blakely, R. J., 1996. *Potential theory in gravity and magnetic applications*. Cambridge University Press, Bennington, N.L., Zhang, H., Thurber, C.H. and Bedrosian, P.A. (2015) Joint inversion of seismic and magnetotelluric data in the parkfield region of California using the normalized cross-gradient constraint. *Pure and Applied Geophysics*, 172(5), 1033–1052.
- Cagniard, L. (1953). Basic theory of the magneto-telluric method of geophysical prospecting. *Geophysics*, 18(3) :605–635. 39, 65
- Caldwell, T. G., Bibby, H. M., & Brown, C. 2004: The magnetotelluric phase tensor. *Geophysical Journal International*, 158(2), 457-469.
- Carver, C. T., Garg, S. K., Davis, L. C., & Jalludin, M. *Reservoir Characterization from Exploration Well Completion Tests in the Fiale Caldera, Djibouti*.
- Chave, A. D. and Jones, A. G. (2012). *The magnetotelluric method: Theory and practice*. Cambridge University 423 Press
- Cockett, R., Kang, S., Heagy, LJ, Pidlisecky, A. et Oldenburg, DW (2015). SimPEG : un cadre open source pour la simulation et l'estimation de paramètres basés sur le gradient dans les applications géophysiques. *Informatique & Géosciences* , 85 , 142-154.
- Colton and Kress, (2013). Colton D., Kress R. *Integral Equation Methods in Scattering Theory* SIAM (2013), pp. 108-136.
- Eymard, R., Gallouët, T., & Herbin, R. (2000). Finite volume methods. *Handbook of numerical analysis*, 7, 713-1018.
- Favetto, A., C. Pomposiello, J. Booker and E. A. Rossello, 2007. Magnetotelluric inversion constrained by seismic data in the tucumán basin (andean foothills, 27s, nw argentina). *J. Geophys. Res*, 112, pp. 1–12

Hautot, S., Tarits, P., Whaler, K., Le Gall, B., Tiercelin, J.-J., Le Turdu, C., 2000. Deep structure of the baringo rift basin (central kenya) from three-dimensional magnetotelluric imaging : Implications for rift evolution. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth* 105 (B10), 23493–23518

Hautot, S., Single, R., Watson, J., Harrop, N., Jerram, D., Tarits, P., Whaler, K., Dawes, D., 2007. 3-d magnetotelluric inversion and model validation with gravity data for the investigation of flood basalts and associated volcanic rifted margins. *Geophysical Journal International* 170 (3), 1418–1430.

Hestenes, M. R., Stiefel, E., (1952). *Methods of conjugate gradients for solving linear systems*. Vol. 49. NBS.

Gallardo, L. A., & Meju, M. A. (2007). Joint two-dimensional cross-gradient imaging of magnetotelluric and seismic traveltimes data for structural and lithological classification. *Geophysical Journal International*, 169(3), 1261-1272.

Jin J.-M. (2015), *The Finite Element Method in Electromagnetics*. John Wiley & Sons, pp. 19-26 292–298

Kelbert, A., Meqbel, N., Egbert, G. D., Tandon, K., 2014. Modem: A modular system for inversion of electromagnetic geophysical data. *Computers & Geosciences* 66, 40–53

Mackie, R. L., Madden, T. R., and Wannamaker, P. E. (1993). Three-dimensional magnetotelluric modeling using difference equations-theory and comparisons to integral equation solutions. *Geophysics*, 58(2) :215–226. 41, 42, 43, 73, 74, 75, 77, 305

Marquis, G., (2004). *Cours d'électromagnétisme*. Institut de physique de Globe de Strasbourg, p. 85

Menichetti, V. and Guillen, A. (1983) Simultaneous interactive magnetic and gravity inversion. *Geophysical Prospecting*, 31, 929–944

Moorkamp, M., Lelièvre, P. G., Linde, N., & Khan, A. (Eds.). (2016). *Integrated imaging of the earth: Theory and applications* (Vol. 218). John Wiley & Sons.

Nettleton, L. L. (1939). Determination of density for reduction of gravimeter observations. *Geophysics*, 4(3), 176-183.

Newman, G. A., Alumbaugh, D. L., 2000. Three-dimensional magnetotelluric inversion using non-linear conjugate gradients. *Geophysical journal international* 140 (2), 410–424.

Niasari, S. W. (2016, July). A short introduction to geological strike and geo-electrical strike. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 1755, No. 1). AIP Publishing.

Nielsen, L., N. Balling, B. H. Jacobsen and M. L. W. Group, 2000. Seismic and gravity modelling of crustal structure in the central graben, north sea. observations along mona lisa profile 3. *Tectonophysics*, 328, pp. 229–244

Li, Y. and D. W. Oldenburg, 1998. 3-d inversion of gravity data. *Geophysics*, 63, pp. 109–119.

Löwer, A., & Junge, A. (2017). Magnetotelluric transfer functions: phase tensor and tipper vector above a simple anisotropic three-dimensional conductivity anomaly and implications for 3D isotropic inversion. *Pure and Applied Geophysics*, 174, 2089-2101.

Oldenburg, D. W. and Li, Y. (1994). Subspace linear inverse method. *Inverse Problems*, 10(4) :915. 44, 86

P. A. Santos et J. A. Rivas, (2009) "Gravity Survey Contribution to Geothermal Exploration in El Salvador : The Cases of Berlin, Ahuachapán and San Vicente Areas", LaGeo SA de CV United Nations University Geothermal Training Program.

Parkinson W.D., 1962. The influence of continents and oceans on geomagnetic variations, *Geophys. J. R. astron. Soc.*, 6, 441–449

Parasnis, (2012). Principles of applied geophysics. Springer Science & Business Media.

Plasman, M., Mar. 2017. Continental lithospheric rupture in the East African Rift : contribution of the joint inversion. Theses, Université de Bretagne occidentale - Brest. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01590496>

Pek, J., & Verner, T. (1997). Finite-difference modelling of magnetotelluric fields in two-dimensional anisotropic media. *Geophysical Journal International*, 128(3), 505-521.

Pilkington, M. (1997). 3-D magnetic imaging using conjugate gradients. *Geophysics*, 62(4), 1132-1142

Plouff, D., 1976. Gravity and magnetic fields of polygonal prisms and application to magnetic terrain corrections. *Geophysics* 41 (4), 727–741.

Rosenbrock H, 1960, An automatic method for finding the greatest or least value of a function. *Compt. J.* 3 (3), 175-184.

Rummel, Reiner. "Earth's gravity from space." *Rendiconti Lincei. Scienze Fisiche e Naturali* 31.Suppl 1 (2020): 3-13.

Saunders, J.H., Herwanger, J.V., Pain, C.C., Worthington, M.H. and Oliveira, C.R.E. (2005) Constrained resistivity inversion using seismic data. *Geophysical Journal International*, 160(3), 785–796.

Simpson, F. and Bahr, K. (2005). Practical magnetotellurics. Cambridge University Press. 39, 66, 74

Siripunvaraporn, W., Egbert, G., Lenbury, Y., Uyeshima, M., 2005. Three-dimensional magnetotelluric inversion : data-space method. *Physics of the Earth and planetary interiors* 150 (1), 3–14.

Tiberi, C., Diament, M., Déverchère, J., Petit-Mariani, C., Mikhailov, V., Tikhotsky, S., & Achauer, U. (2003). Deep structure of the Baikal rift zone revealed by joint inversion of gravity and seismology. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 108(B3).

Tiberi, C., Deschamps, A., Déverchère, J., Petit, C., Perrot, J., Appriou, D., ... & Artemiev, A. A. (2008). Asthenospheric imprints on the lithosphere in Central Mongolia and Southern Siberia from a joint inversion of gravity and seismology (MOBAL experiment). *Geophysical Journal International*, 175(3), 1283-1297.

Tikhonov, A. (1950). Determination of the electrical characteristics of the deeper strata of the earth's crust. pages 7–2. 39, 65

Tikhonov AN, (1963), Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method, *Soviet Math Dokl* 4, 1035-1038 English translation of *Dokl Akad Nauk SSSR* 151, 1963, 501-504

Telford, W. M., Telford, W., Geldart, L., Sheriff, R. E., 1990. Applied geophysics. Vol. 1. Cambridge university press.

Tibshirani, RJ (2013). Le problème du lasso et l'unicité.

Tikhonov, A. N., & Arsenin, V. I. A. K. (1977). Solutions of ill-posed problems. (No Title).

Vozoff, K. and Jupp, D.L.B. (1975) Joint inversion of geophysical data. *Geophysical Journal International*, 42, 977–991.

Wahba, G. (1990). *Spline models for observational data*. Society for industrial and applied mathematics.

Wait, J. R. (1954). On the relation between telluric currents and the earth's magnetic field. *Geophysics*, 19(2) :281–289. 41, 74

Wannamaker, P. E., Stodt, J. A., & Rijo, L. (1986). Two-dimensional topographic responses in magnetotellurics modeled using finite elements. *Geophysics*, 51(11), 2131-2144.

Wannamaker, P. E. (1991). Advances in three-dimensional magnetotelluric modeling using integral equations. *Geophysics*, 56(11) :1716–1728. 41, 73

Masero, W. A study of meteoritic impact craters with the magnetotelluric method. PhD thesis, Université de Neuchâtel, 1995.

Wright, LD (1985). Deltas des rivières. Dans *les environnements sédimentaires côtiers* (pp. 5-68). New York, New York : Springer États-Unis.

Zhdanov, M., & Hursan, G. (2000). 3D electromagnetic inversion based on quasi-analytical approximation. *Inverse Problems*, 16(5), 1297.

Chapitre 2 : Inversion Multiparamétrique

2.1 Pourquoi contraindre les données gravimétriques par la MT ?

Le réservoir géothermique dans un contexte volcanique comme ceux du rift d'Asal se caractérise le plus souvent sous la forme d'une source (Moeck, 2014) de chaleur profonde (magma à plusieurs kilomètres), au-dessus de laquelle se trouve une roche « réservoir » contenant des fluides chauds (à plus de 100 °C) sous pression (Ratouis et Zarrouk, 2016), elle-même sous une couche altérée, « argilisée », par les fluides géothermaux, qui agit comme un couvercle et permet de garder chauds et sous pressions ces fluides (Chambefort et al., 2016). Le modèle conceptuel de ce réservoir géothermique est conçu à partir des études sur les manifestations hydrothermales de surface (Bes-de-Berc, 2007), une caractérisation de la géologie (Lenhardt et Götz, 2015), des analyses géochimiques d'eaux souterraines et des sources chaudes et enfin des mesures géophysiques pour cartographier la géologie des paramètres physiques du sous-sol. Les méthodes géophysiques telles que la MT, la gravité et la sismique sont les plus utilisés pour décrire un réservoir géothermique haute enthalpie (Moeck, 2014).

La distribution des résistivités du sous-sol, obtenue grâce à la méthode EM (MT, électrique, etc.) est un paramètre physique des plus variables dans les roches les fluides et les processus d'altération hydrothermale des roches influencent la résistivité des roches selon la température d'altération. La couche imperméable (Clay-cap) présente une zone conductrice (Inférieur à 10 $\Omega.m$), avec une température comprise entre 70 à 100 °C, qui est caractérisée par la smectite (Ussher et al, 2000, Munoz, 2014, Cumming, 2009). Cette couche est suivie d'une zone présentant des résistivités et température plus élevées (> 180 °C et >10 $\Omega.m$). Les augmentations de la résistivité sont dues aux altérations des roches en argiles telles que les illites et chlorites. Le flux ascendant (upflow) et descendant (outflow) affectent la géométrie du Clay-cap (Figure 2.1). La distribution de résistivité issue des modèles MT peut alors être associée aux formations géologiques du réservoir géothermique (Gasperikova et al, 2016).

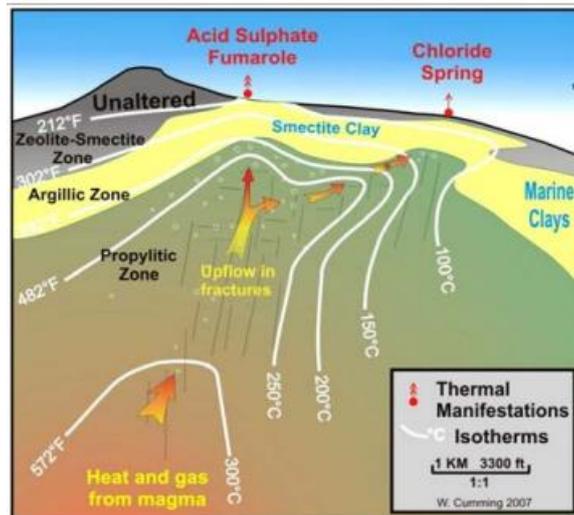


Figure 2. 1: Coupe transversale du modèle conceptuel d'un réservoir géothermique de 250 à 300°C avec des isothermes, des zones d'altération et des structures. Isothermes, zones d'altération et structures. D'après Cumming (2009).

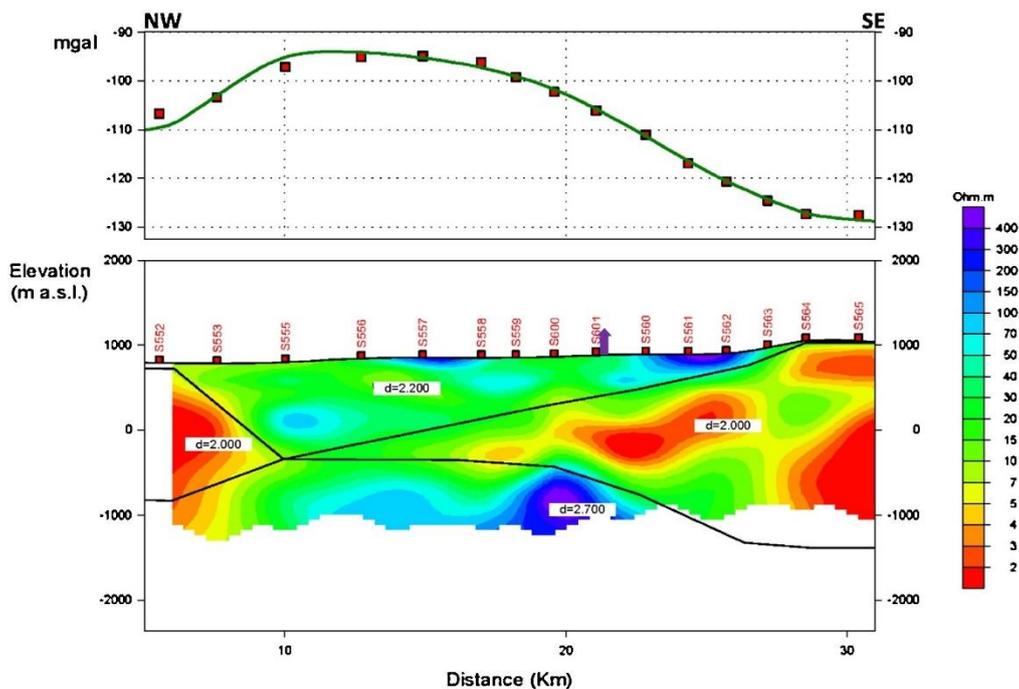


Figure 2. 2: Modèle de densité 2D passant entre les volcans Paka et Silali (Lichoro 2019) superposé à a résistivité MT. Les carrés rouges sont les points de gravité mesurés, la courbe verte est la gravité modélisée et les flèches violettes sont les fumarolles. Les lignes noires sur la section transversale MT marquent les limites des corps de densité.

La méthode gravimétrique permet d'associer les mesures des variations spatiales du champ potentiel gravitationnel aux unités rocheuses. Des auteurs comme Lichoro (2019) ou Tarits et al. (2015) observent dans un milieu volcanique des corrélations entre la densité et la

résistivité (Figure 2.2). Il est donc intéressant d'étudier plus avant les relations entre résistivité et densité en contexte géothermique.

En outre, chaque donnée géophysique n'est sensible qu'à un paramètre de modèle spécifique. En raison de la non-unicité inhérente à l'inversion des données géophysiques, qui fournissent plusieurs réponses du modèle géophysique qui peuvent s'ajuster aux données de la même manière. Cette ambiguïté peut être réduite en incorporant davantage d'informations a priori dans l'inversion.

L'inversion gravimétrique est intrinsèquement non unique car même pour un jeu dense de données, une infinité de modèles peut expliquer les observations. Cette limitation conduit à une faible résolution en profondeur. A l'inverse, l'inversion MT dans certains cas peut être unique pour un jeu dense de données et des distributions de résistivité particulières (Bailey 1970). Les principales sources de non-unicité viennent alors du nombre limité de sites de mesures disponibles, du nombre limité de fréquences et du bruit dans les données.

2.2 Inversions Itératives ou contraintes et inversions conjointes

Les différentes méthodes géophysiques fournissent des informations sur les différentes propriétés physiques des formations rocheuses et des minéralisations. Dans de nombreux cas, ces informations se complètent mutuellement. En même temps, les inversions individuelles de ces techniques sont confrontées à une incertitude et à une ambiguïté considérable. Notamment, à la non-unicité des problèmes inverses ou bien la présence de bruits dans les données. Par exemple, les méthodes électromagnétiques ne peuvent pas résoudre les frontières nettes, les données gravimétriques ont une résolution verticale limitée et les données sismiques fournissent des informations limitées sur la vitesse en milieu très hétérogène.

Un moyen de pallier ou bien de réduire cette ambiguïté issue de l'inversion simple est de concilier simultanément différents types de données en réalisant une inversion dite coopérative. Cette inversion a été introduite pour la première fois par Lines et al. (1989). Il existe deux types de catégories : l'inversion séquentielle et l'inversion conjointe. L'inversion séquentielle (Menichetti et Guillen, 1983 ; Nielsen et al. 2000 ; Saunders et al., 2005, Favetto

et al. 2007 ; Wang et al., 2011), consiste à inverser un type de donnée, le modèle obtenu issu de cette inversion servira de modèle initial pour la deuxième inversion. L'inversion conjointe (Vozoff et Jupp, 1975 ; Gallardo et Meju, 2007 ; Moorkamp et al., 2011 ; Bennington et al., 2015) consiste à inverser simultanément plusieurs jeux de données, pour réduire ces ambiguïtés mentionnées ci-dessus. Il est possible de mélanger les deux approches (Ars et al. 2019).

L'approche ayant recours au même paramètre physique est souvent utilisée lorsqu'on est confronté pour une même physique à des résolutions différentes comme dans les domaines électromagnétiques ou sismiques. On peut par exemple citer Candansayar et Tezkan, (2008) qui ont développé une inversion jointe 2D des mesures radiomagnétotellurique et des mesures résistivités électriques (DC) en utilisant une approche des moindres carrés régularisés (Figure 2.3).

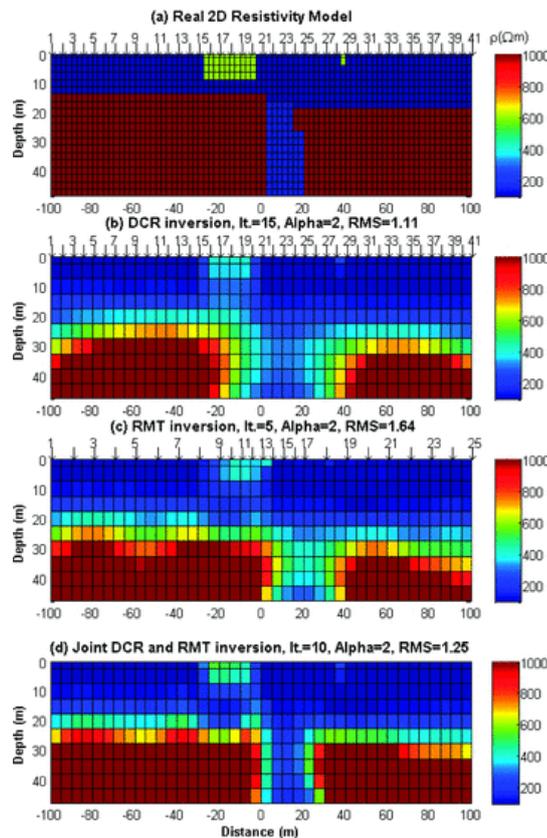


Figure 2. 3: modèle de résistivité 2D, (b) résultat d'inversion 2D à l'aide de données de résistivité à courant continu, (c) résultat d'inversion 2D à l'aide de données radiomagnétotelluriques et (d) résultat d'inversion conjointe 2D à l'aide de données de résistivité à courant continu et radiomagnétotelluriques calculées pour le 2D réel modèle de résistivité illustré sur cette figure 3 (a). D'après Candansayar et Tezkan, (2008).

Lorsque que les données sont de nature physique différente, par exemple pour des inversions conjointes reliées par deux paramètres physiques différents, deux approches sont possibles, un couplage qui utilise des relations petro-physiques et un couplage structural. Les couplages par petro-physiques sont basés par des relations souvent empiriques entre les paramètres. C'est le cas pour des propriétés physiques (Dewar, 2001), tel que la porosité, les saturations, la teneur en minéraux, etc. Il existe un certain nombre d'exemples où est utilisée cette approche, comme par exemple Savino et al (1980) qui combine la vitesse et la densité par une loi physique de Birch (1991), ou encore en reliant la résistivité à la porosité par une loi d'Archie (1942). On a aussi dans le cas d'une inversion conjointe MT, gravité et la tomographie ambiante en utilisant une fonction empirique permettant de relier la vitesse, résistivité et densité (Heincke et al. 2017). Cette inversion petro-physique a été testée sur des données générées à partir d'un modèle synthétique bidimensionnel de bassin. Les figures 2.4 et 2.5, montrent les résultats des tests synthétiques issus des inversions conjointes et les améliorations apportées dans les modèles finaux avec le couplage par des relation petro-physiques.

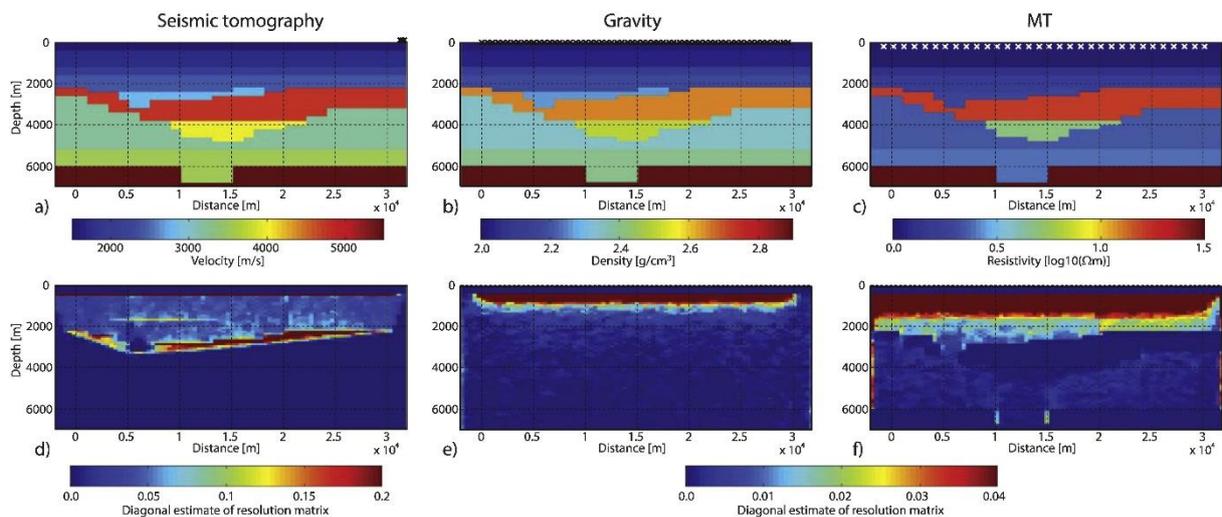


Figure 2. 4: a) vitesses, b) densités et c) distributions de résistivité représentant le modèle synthétique du sous-bassin. Les cercles indiquent les emplacements des stations OBS et les croix mettent en évidence les positions des tirs dans a), des stations gravimétriques dans b) et des stations MT dans c). Panneaux inférieurs. Des valeurs élevées de résolution sont observées aux limites droite et gauche des données gravimétriques et MT (voir panneaux e,f) en raison de la nécessité d'inclure un modèle gravimétrique et MT d'arrière-plan. D'après Heincke et al. 2017.

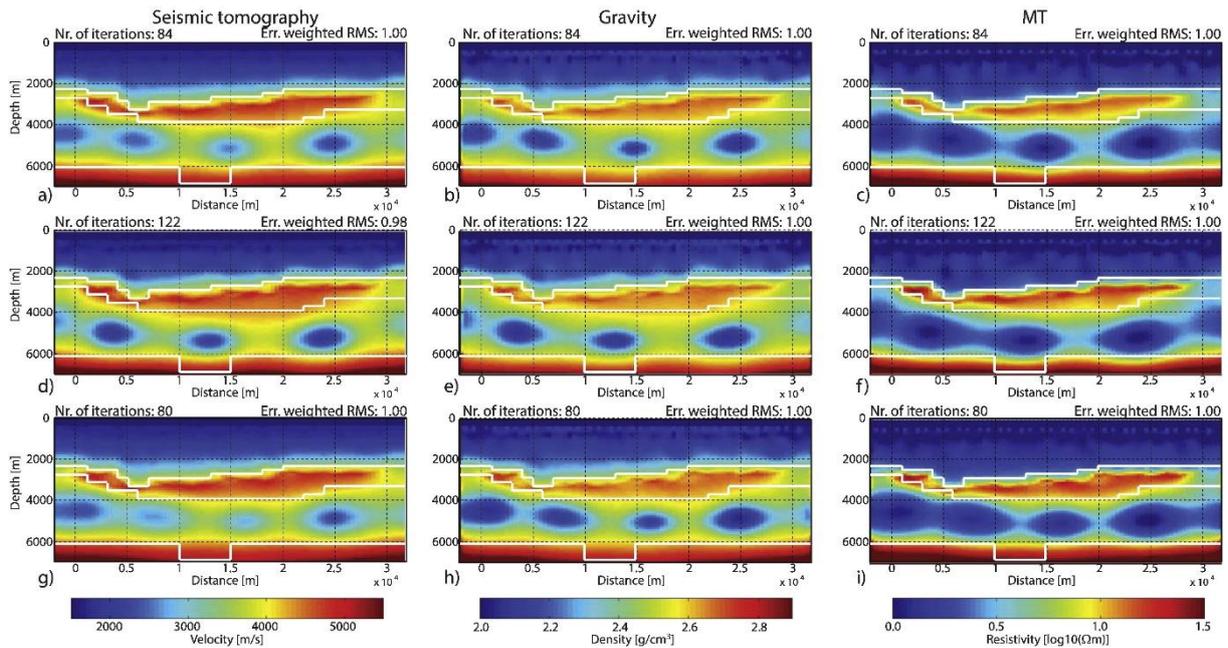


Figure 2. 5: Résultats finaux des inversions conjointes, pour lesquelles les forces de couplage varient de manière adaptative au cours du processus d'inversion. Chaque ligne représente le résultat d'un test différent D'après Heincke et .al. 2017. Malheureusement cette approche présente des inconvénients, par exemple, la difficulté de pouvoir relier physiquement les différents paramètres entre eux, des non-linéarités entre ces derniers, ou bien la lithologie des différentes zones qui diffèrent.

En l'absence de relation entre paramètre, on peut utiliser des contraintes structurelles (géométriques). Les approches structurelles, ne dépendent pas de la pétro-physique, elles sont plutôt basées sur le principe que chaque méthode discerne la même similitude structurelle.

De nombreuses recherches ont été effectuées par rapport aux contraintes structurelles (Zhang et Morgan, 1997 ; Haber et Oldenburg, 1997 ; Gallardo et Meju, 2003 ; Günther et al. 2006). Ce couplage cherche à forcer la similarité géométrique de plusieurs structures différentes. Cette approche a été tout d'abord introduite par Gallardo et Meju (2003), lors d'une étude inversion conjointe 2D entre la vitesse sismique et la résistivité. Cette approche a été étendue par Fregoso and Gallardo (2009) dans l'application d'une inversion conjointe 3D de données gravimétriques et magnétiques.

Plusieurs études (Doetsch et al. 2010 ; Moorkamp et al. 2011,)) ont utilisé cette méthode du gradient croisé. À titre d'exemple, cette approche a été appliquée lors d'une inversion conjointe de données gravimétriques et magnétiques 3D combiné sur une grille hexaédrique (He et al 2022). Les figures 2.6, 2.7 et 2.8, montrent les résultats des tests

synthétiques issus de cette inversion. Le modèle final présente une amélioration du a la contrainte du gradient croisé.

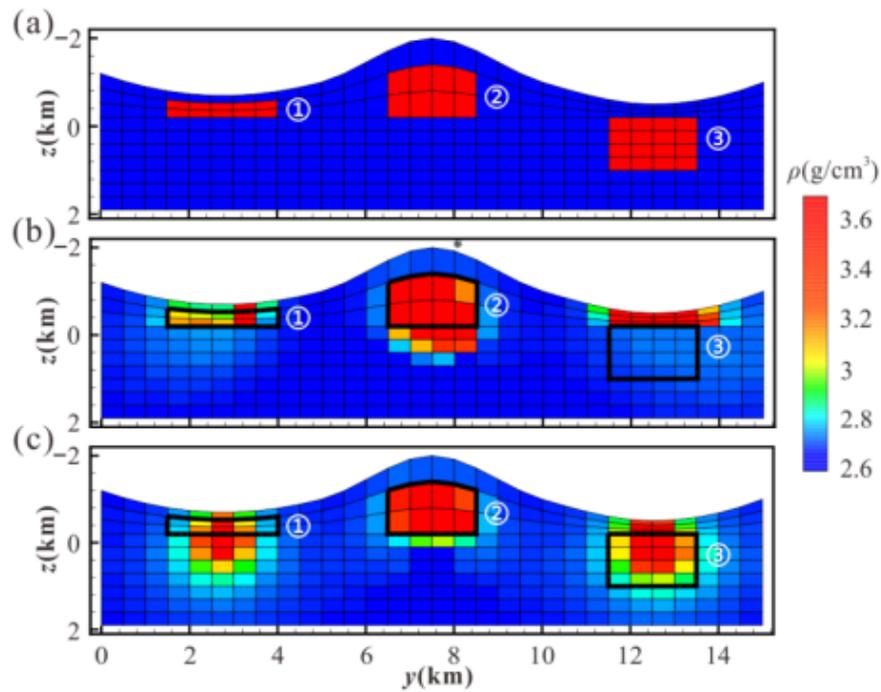


Figure 2. 6: Coupe de densité à $x = 4000$ m. (a) Modèle réel ; (b,c) résultat de l'inversion sans/avec correc. d'après He et al 2022.

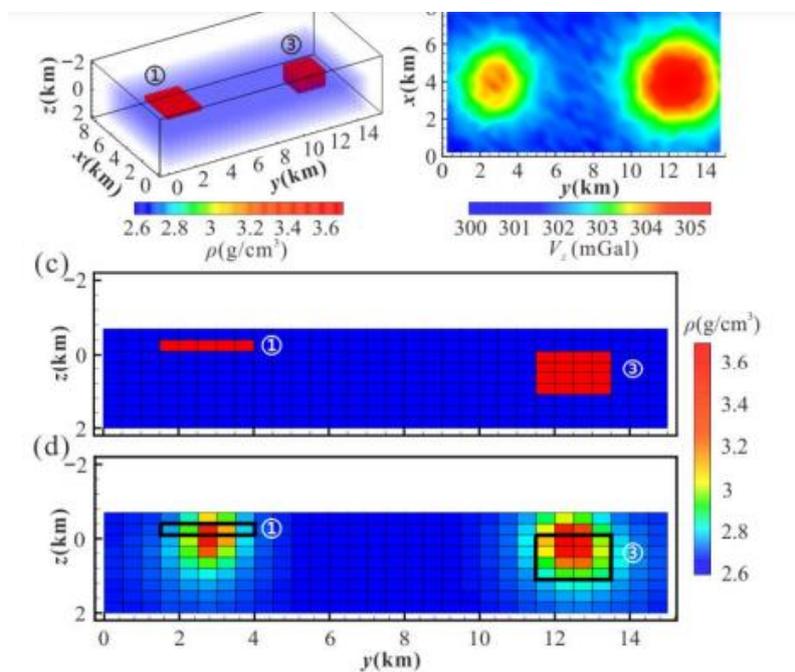


Figure 2. 7: (a) Modèle de densité réel ; (b) données d'observation ; (c,d) coupe de densité du modèle réel et résultat de l'inversion à $x = 4000$ m, d'après He et al 2022.

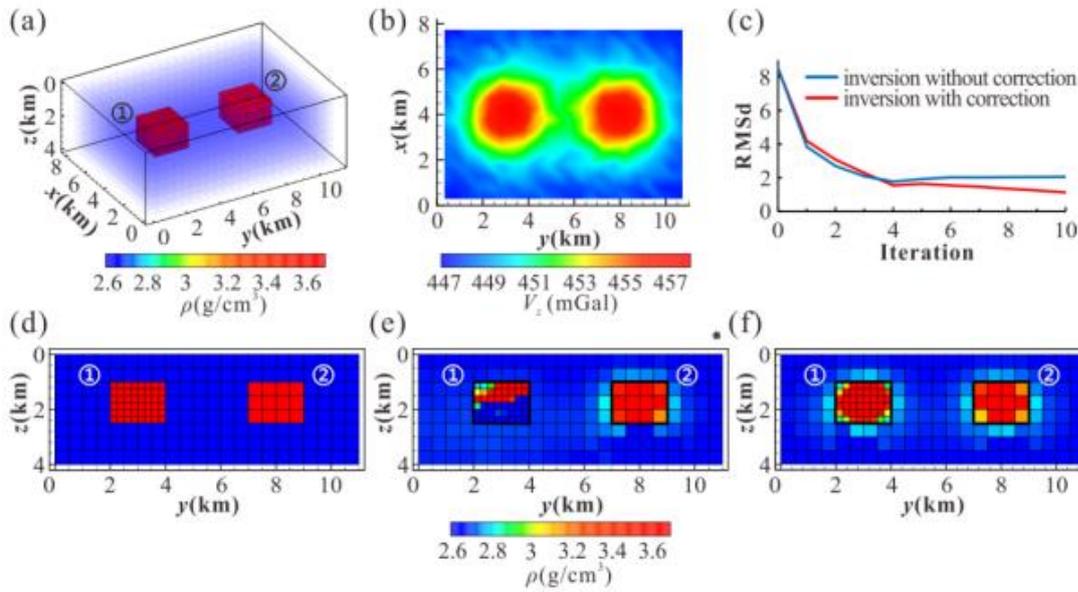


Figure 2. 8: Modèle de densité réel ; (b) données d'observation ; (c) RMSd de l'inversion ; (d-f) coupe de densité du modèle réel et résultat de l'inversion sans/avec correction de volume à $x = 4000$ m, d'après He et al 2022.

2.3 Inversion gravimétrique contrainte par la résistivité

Les approches d'inversion conjointes détaillées auparavant impliquent d'inverser plusieurs jeux de données simultanément. Cependant une inversion peut être plus robuste qu'une autre et/ou plus compliquée à mettre en œuvre ou très longue à calculer. C'est par exemple le cas de la magnétotellurique, inversion très non-linéaire et consommant beaucoup de ressource en calcul. Lorsqu'il est question d'inverser des jeux de données MT et de potentiel (gravité, magnétisme), il est alors préférable d'inverser d'abord la MT puis d'utiliser le modèle de résistivité comme contrainte pour inverser les données de potentiel. On parle alors d'inversion contrainte basée sur le formalisme de l'inversion contrainte-conjointe. Au cours de ma thèse, nous avons donc cherché à développer une telle méthode pour coupler la résistivité et la densité en inversant des données gravimétriques contrainte par la distribution de résistivité via un couplage de la grille de densité à inverser et de la distribution de résistivité. Même ainsi, une inversion contrainte peut s'avérer très lourde en temps calcul suivant les ressources à disposition et le besoin d'exécuter un grand nombre d'inversion. Nous nous sommes donc intéressés au problème inverse linéaire en développant une toute nouvelle approche d'inversion basée sur le formalisme de l'inversion conjointe avec des termes de

couplage qui restent linéaires avec différents paramètres physiques. Ainsi la fonction coût (Chapitre 1, Eq. 1.52) devient :

$$\phi = \|\overline{g_{obs}} - G\vec{d}\|^2 + \lambda\|\vec{d}\mathbf{W}\|^2 + \alpha_1 CO_{cg}^2 + \alpha_2 CO_{cp}^2 \quad (2.1)$$

Ou CO_{cg}^2 et CO_{cp}^2 , sont ici les deux termes de couplage que nous allons utiliser par la suite. Nous avons en effet introduit d'une part le gradient croisé (GC) décrit auparavant et un nouveau type de couplage (Tarits et al. 2015, Ars et al. 2023, Liu et al, 2022) par corrélation des paramètres (CP) que nous allons développer ci-dessous. Les coefficients α_1 et α_2 sont leurs coefficients de pondération dans la fonction coût. Lorsque $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, on retrouve l'équation 1.52 qui est la fonction coût de l'inversion gravimétrique sans contrainte. Si $\alpha_1 = 0$ ou $\alpha_2 = 0$, on a respectivement une inversion contrainte par corrélation des paramètres CP ou par gradient croisé GC. L'approche que nous proposons pour inverser un jeu de données gravimétriques par un modèle de résistivité est effectuée en deux étapes :

D'abord, on effectue une inversion 3D MT qui fournit un modèle de résistivité qui sera ensuite considéré comme étant constant dans l'inversion gravimétrique contrainte...

Puis nous réalisons cette dernière via la solution moindres carrés de la fonction coût :

$$\vec{d} = (G^t + \lambda\mathbf{W} + \alpha_1\mathbf{Zcg} + \alpha_2\mathbf{Zcp})^{-1}G^t\mathbf{g}_{obs} \quad (2.2)$$

Les termes \mathbf{Zcg} et \mathbf{Zcp} , sont les matrices des dérivées partielles des termes de couplage par rapport à chaque contraste de densité, respectivement du couplage par gradient croisé.

2.3.1 Couplage par Gradient Croisé

Le premier couplage est le gradient croisé développé par Gallardo et Meju (2003, 2004, 2007). Ce couplage cherche à forcer la similarité géométrique de plusieurs structures différentes. La fonction de couplage du gradient croisé dans une formulation d'inversion conjointe est non linéaire, car la densité et la résistivité varient. La fonction de couplage du gradient croisé est définie par :

$$CO_{cg}^2 = \sum_{m=1}^M |\nabla d \times \nabla r|^2 \quad (2.3)$$

Avec ∇d et ∇r les gradients respectivement de la densité et de la résistivité du modèle (généralement le log10) et \times est le produit vectoriel. Si les modèles ont donc une structure

identique, il y a une colinéarité entre leurs gradients et :

$$CO_{cg}^2 = 0 \quad (2.4)$$

Comme ici nous traitons l'inversion sous contrainte de résistivité. La relation 2.3 devient linéaire par rapport à la densité puisque nous considérons que la résistivité comme fixe.

Pour que le calcul de la solution 2.2 soit efficace, nous avons déterminé l'expression analytique du couplage Z_{cg} . Dans un volume 3D de $n_x n_y n_z$ mailles tel que $i=1, n_x j=1, n_y$ et $k=1, n_z$ – on range les mailles dans un vecteur densité $\mathbf{d}(m)$, $m=1, n_x*n_y*n_z$ – pour une maille $i j k$, $m=i+(j-1)*(k-1)*n_x+(k-1)*n_x*n_y$

$$CO_{cg}^2 = \sum_{m=1}^M (\partial_y d_m \partial_z r_m - \partial_z d_m \partial_y r_m)^2 + (-\partial_x d_m \partial_z r_m + \partial_z d_m \partial_x r_m)^2 + (\partial_x d_m \partial_y r_m - \partial_y d_m \partial_x r_m)^2 = CO_1^2 + CO_2^2 + CO_3^2 \quad (2.5)$$

Pour calculer les dérivées partielles de la densité et de la résistivité, nous utilisons la méthode des différences finies entre 3 points :

$$\begin{aligned} \partial_x d_m &= (d_{i+1jk} - d_{i-1jk}) / (x_{i+1} - x_{i-1}) \\ \partial_y d_m &= (d_{ij+1k} - d_{ij-1k}) / (y_{j+1} - y_{j-1}) \\ \partial_z d_m &= (d_{ijk+1} - d_{ijk-1}) / (z_{k+1} - z_{k-1}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \partial_x r_m &= (r_{i+1jk} - r_{i-1jk}) / (x_{i+1} - x_{i-1}) = a \\ \partial_y r_m &= (r_{ij+1k} - r_{ij-1k}) / (y_{j+1} - y_{j-1}) = b \\ \partial_z r_m &= (r_{ijk+1} - r_{ijk-1}) / (z_{k+1} - z_{k-1}) = c \end{aligned} \quad (2.7)$$

Pour simplifier les notations, notons a, b et c les composantes du gradient de résistivité le long de x, y et z respectivement (Eq. 2.7). Nous obtenons alors :

$$CO_{cg}^2 = CO_1^2 + CO_2^2 + CO_3^2 \quad (2.8)$$

$$CO_1^2 = \sum_{ijk}^M (c_{ijk} (d_{ij+1k} - d_{ij-1k}) / \Delta y_{ijk} - b_{ijk} (d_{ijk+1} - d_{ijk-1}) / \Delta z_{ijk})^2 \quad (2.9)$$

$$CO_2^2 = \sum_{ijk}^M (c_{ijk} (d_{i+1jk} - d_{i-1jk}) / \Delta x_{ijk} - a_{ijk} (d_{ijk+1} - d_{ijk-1}) / \Delta z_{ijk})^2 \quad (2.10)$$

$$CO_3^2 = \sum_{ijk}^M (b_{ijk} (d_{i+1jk} - d_{i-1jk}) / \Delta x_{ijk} - a_{ijk} (d_{ij+1k} - d_{ij-1k}) / \Delta y_{ijk})^2 \quad (2.11)$$

La dérivée par rapport à d_{ijk} de tous les termes ne contenant pas d_{ijk} disparaîtra. Nous ne gardons que les termes contenant ijk . Dans le cas de l'équation (2.9), il y a 4 termes à considérer : $ij+1k$, $ij-1k$, $ijk+1$ et $ijk-1$.

$$CO_1^2 = CO_{11}^2 + CO_{12}^2 + CO_{13}^2 + CO_{14}^2 \quad (2.111)$$

$$CO_{11}^2 = (c_{ij+1k} (d_{ij+2k} - d_{ijk}) / \Delta y_{ij+1k} - b_{ij+1k} (d_{ij+1k+1} - d_{ij+1k-1}) / \Delta z_{ij+1k})^2 \quad (2.12)$$

$$CO_{12}^2 = (c_{ij-1k} (d_{ijk} - d_{ij-2k}) / \Delta y_{ij-1k} - b_{ij-1k} (d_{ij-1k+1} - d_{ij-1k-1}) / \Delta z_{ij-1k})^2 \quad (2.13)$$

$$CO_{13}^2 = (c_{ijk+1} (d_{ij+1k+1} - d_{ij-1k+1}) / \Delta y_{ijk+1} - b_{ijk+1} (d_{ijk+2} - d_{ijk}) / \Delta z_{ijk+1})^2 \quad (2.14)$$

$$CO_{14}^2 = (c_{ijk-1} (d_{ij+1k-1} - d_{ij-1k-1}) / \Delta y_{ijk-1} - b_{ijk-1} (d_{ijk} - d_{ijk-2}) / \Delta z_{ijk-1})^2 \quad (2.15)$$

Les dérivées de ces 4 termes par la densité d_{ijk} sont :

$$\frac{\partial CO_{11}^2}{\partial d_{ijk}} = \frac{-2c_{ij+1k} (c_{ij+1k} (d_{ij+2k} - d_{ijk}) / \Delta y_{ij+1k} - b_{ij+1k} (d_{ij+1k+1} - d_{ij+1k-1}) / \Delta z_{ij+1k})}{\Delta y_{ij+1k}} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial CO_{12}^2}{\partial d_{ijk}} = \frac{2c_{ij-1k} (c_{ij-1k} (d_{ijk} - d_{ij-2k}) / \Delta y_{ij-1k} - b_{ij-1k} (d_{ij-1k+1} - d_{ij-1k-1}) / \Delta z_{ij-1k})}{\Delta y_{ij-1k}} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial CO_{13}^2}{\partial d_{ijk}} = \frac{2b_{ijk+1} (c_{ijk+1} (d_{ij+1k+1} - d_{ij-1k+1}) / \Delta y_{ijk+1} - b_{ijk+1} (d_{ijk+2} - d_{ijk}) / \Delta z_{ijk+1})}{\Delta z_{ijk+1}} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial CO_{14}^2}{\partial d_{ijk}} = \frac{-2b_{ijk-1} (c_{ijk-1} (d_{ij+1k-1} - d_{ij-1k-1}) / \Delta y_{ijk-1} - b_{ijk-1} (d_{ijk} - d_{ijk-2}) / \Delta z_{ijk-1})}{\Delta z_{ijk-1}} \quad (2.19)$$

Dans le cas de l'équation (2.10), il y a aussi 4 termes à considérer : $i+1jk$, $i-1jk$, $ijk+1$, $ijk-1$.

$$CO_2^2 = CO_{21}^2 + CO_{22}^2 + CO_{23}^2 + CO_{24}^2 \quad (2.19a)$$

$$CO_{21}^2 = (c_{i+1jk} (d_{i+2jk} - d_{ijk}) / \Delta y_{i+1jk} - a_{i+1jk} (d_{i+1jk+1} - d_{i+1jk-1}) / \Delta z_{i+1jk})^2 \quad (2.20)$$

$$CO_{22}^2 = (c_{i-1jk} (d_{ijk} - d_{i-2jk}) / \Delta y_{i-1jk} - b_{i-1jk} (d_{i-1jk+1} - d_{i-1jk-1}) / \Delta z_{i-1jk})^2 \quad (2.21)$$

$$CO_{23}^2 = (c_{ijk+1} (d_{i+1jk+1} - d_{i-1jk+1})/\Delta y_{ijk+1} - a_{ijk+1} (d_{ijk+2} - d_{ijk})/\Delta z_{ijk+1})^2 \quad (2.22)$$

$$CO_{24}^2 = (c_{ijk-1} (d_{i+1jk-1} - d_{i-1jk-1})/\Delta y_{ijk-1} - a_{ijk-1} (d_{ijk} - d_{ijk-2})/\Delta z_{ijk-1})^2 \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial CO_{21}^2}{\partial d_{ijk}} = \frac{-2c_{i+1jk}}{\Delta y_{i+1jk}} \left(\frac{c_{i+1jk}(d_{i+2jk}-d_{ijk})}{\Delta y_{i+1jk}} - \frac{a_{i+1jk}(d_{i+1jk+1}-d_{i+1jk-1})}{\Delta z_{i+1jk}} \right) \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial CO_{22}^2}{\partial d_{ijk}} = \frac{2c_{i-1jk}}{\Delta y_{i-1jk}} \left(\frac{c_{i-1jk}(d_{ijk}-d_{i-2jk})}{\Delta y_{i-1jk}} - \frac{b_{i-1jk}(d_{i-1jk+1}-d_{i-1jk-1})}{\Delta z_{i-1jk}} \right) \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial CO_{23}^2}{\partial d_{ijk}} = \frac{2a_{ijk+1}}{\Delta z_{ijk+1}} \left(\frac{c_{ijk+1}(d_{i+1jk+1}-d_{i-1jk+1})}{\Delta y_{ijk+1}} - \frac{a_{ijk+1}(d_{ijk+2}-d_{ijk})}{\Delta z_{ijk+1}} \right) \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial CO_{23}^2}{\partial d_{ijk}} = \frac{-2a_{ijk-1}}{\Delta z_{ijk-1}} \left(\frac{c_{ijk-1}(d_{i+1jk-1}-d_{i-1jk-1})}{\Delta y_{ijk-1}} - \frac{a_{ijk-1}(d_{ijk}-d_{ijk-2})}{\Delta z_{ijk-1}} \right) \quad (2.27)$$

Pour le troisième terme de l'équation 2.11, il y a 4 termes à considérer : i+1jk, i-1jk, ij+1k, ij-1k.

$$CO_3^2 = CO_{21}^2 + CO_{22}^2 + CO_{23}^2 + CO_{24}^2 \quad (2.27a)$$

$$CO_{21}^2 = (b_{i+1jk} (d_{i+2jk} - d_{ijk})/\Delta x_{i+1jk} - a_{i+1jk} (d_{i+1j+1k} - d_{i+1j-1k})/\Delta y_{i+1jk})^2 \quad (2.28)$$

$$CO_{22}^2 = (b_{i-1jk} (d_{ijk} - d_{i-2jk})/\Delta x_{i-1jk} - a_{i-1jk} (d_{i-1j+1k} - d_{i-1j-1k})/\Delta y_{i-1jk})^2 \quad (2.29)$$

$$CO_{23}^2 = (b_{ij+1k} (d_{i+1j+1k} - d_{i-1j+1k})/\Delta x_{ij+1k} - a_{ij+1k} (d_{ij+2k} - d_{ijk})/\Delta y_{ij+1k})^2 \quad (2.30)$$

$$CO_{24}^2 = (b_{ij-1k} (d_{i+1j-1k} - d_{i-1j-1k})/\Delta x_{ij-1k} - a_{ij-1k} (d_{ijk} - d_{ij-2k})/\Delta y_{ij-1k})^2 \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial CO_{21}^2}{\partial d_{ijk}} = \frac{-2b_{i+1jk}}{\Delta x_{i+1jk}} \left(\frac{b_{i+1jk}(d_{i+2jk}-d_{ijk})}{\Delta x_{i+1jk}} - \frac{a_{i+1jk}(d_{i+1j+1k}-d_{i+1j-1k})}{\Delta y_{i+1jk}} \right) \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial CO_{22}^2}{\partial d_{ijk}} = \frac{2b_{i-1jk}}{\Delta x_{i-1jk}} \left(\frac{b_{i-1jk}(d_{ijk}-d_{i-2jk})}{\Delta x_{i-1jk}} - \frac{a_{i-1jk}(d_{i-1j+1k}-d_{i-1j-1k})}{\Delta y_{i-1jk}} \right) \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial CO_{23}^2}{\partial d_{ijk}} = \frac{2a_{ij+1k}}{\Delta y_{ij+1k}} \left(\frac{b_{ij+1k}(d_{i+1j+1k}-d_{i-1j+1k})}{\Delta x_{ij+1k}} - \frac{a_{ij+1k}(d_{ij+2k}-d_{ijk})}{y_{ij+1k}} \right) \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial CO_{24}^2}{\partial d_{ijk}} = \frac{-2a_{ij-1k}}{\Delta y_{ij-1k}} \left(\frac{b_{ij-1k}(d_{i+1j-1k}-d_{i-1j-1k})}{\Delta x_{ij-1k}} - \frac{a_{ij-1k}(d_{ijk}-d_{ij-2k})}{\Delta y_{ij-1k}} \right) \quad (2.35)$$

$$Z_{cg} = \sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^4 \frac{\partial CO_{ln}}{\partial d_{ijk}} \quad (2.36)$$

2.3.2 Couplage par Corrélacion des paramètres

Le second couplage qu'on a développé, est construit à partir du coefficient de corrélation de Pearson (Pearson, 1895), qui estime la relation linéaire entre deux paramètres, en occurrence ici, la résistivité (en log10) et la densité. C'est le rapport entre la covariance de deux variables et le produit de leurs écart-types (Eq. 2.38). Autrement dit, c'est une mesure normalisée de la covariance, de sorte que le résultat a toujours une valeur comprise entre -1 et 1. Son expression au carré est :

$$\gamma^2 = \frac{(\sum_i r_i d_i)^2}{\sum_i r_i^2 \sum_i d_i^2} \quad (2.37)$$

Où $(\sum_i r_i d_i)$ représente la covariance entre la résistivité et la densité.

On peut définir le terme de couplage CP (Eq. 2.1) comme suit :

$$CO_{cp}^2 = 1 - \gamma^2 \quad (2.38)$$

Lorsque les deux paramètres sont corrélés, $\gamma^2 = 1$ et $CO_{cp}^2 = 0$

$$CO_{cp}^2 = \frac{\sum_i r_i^2 \sum_i d_i^2 - (\sum_i r_i d_i)^2}{\sum_i r_i^2 \sum_i d_i^2} \quad (2.39)$$

Où i varie de 1 à nx*ny*nz

Cette approche a été utilisée dans le cas d'inversion conjointe non-linéaire (Tarits, 2015 ; Ars et al, 2019 et Liu et al, 2022). Dans notre cas, nous modifions le couplage comme suit :

$$CO_{cp}^2 = \sum_i r_i^2 \sum_i d_i^2 - (\sum_i r_i d_i)^2 \quad (2.40)$$

Cependant cette expression non normalisée par la variance des paramètres présente 2 solutions pour réduire CO_{cp}^2 , soit d proche de 0, soit γ^2 proche de 1. Le cas d proche de 0 correspond en fait à une régularisation et fait double emploi avec le terme de régularisation Reg dans l'équation 2.2 Dans les tests synthétiques présentés ci-dessous (voir section 2.4), on peut en effet voir que le résultat est indépendant de la régularisation par minimum d'énergie. Par contre, nous avons remarqué lors de l'application aux données réelle du rift d'Asal, chapitre 3) qu'en présence du terme REG ($\lambda \neq 0$) dans l'équation 2.2, la régularisation par REG et par CO_{cp}^2 prenait le dessus sur la corrélation. Ce phénomène résulte du fait que pour les modèles synthétiques le nombre de paramètres pour décrire la structure est très petit tandis que pour le cas réel, ce nombre devient le nombre de paramètres inversé. La solution à ce

problème a été de supprimer le terme REG (via $\lambda = 0$) dans l'équation 2.2 pour ce mode de couplage.

Dans la solution (Eq 2.2), la matrice Z_{cp} est construite à partir de la dérivée partielle de 2.46 par rapport à la densité.

$$Z_{cp} = \frac{\partial CO_{cp}^2}{\partial d_i} = \sum_i r_i^2 d_i - r_i (\sum_i r_i d_i) \quad (2.47)$$

2.4 Tests synthétiques

Pour tester le fonctionnement des différents couplages, nous avons généré des ensembles de données synthétiques. Ces données n'ont pas été bruitées. Nous avons défini les modèles synthétiques inspirés de structures issues du modèle de résistivité 3-D du rift Asal (Chapitre 3 et Figure S1). L'objectif de ce travail est de tester et d'étudier le comportement de l'inversion conjointe sous contrainte en fonction des différents paramètres α , β et λ (Eq. 2.16). Pour mémoire, le coefficient λ contrôle le poids de la régularisation. L'exposant β (Eq. 1.55) contrôle l'influence de la grille d'inversion avec la profondeur. Les coefficients α_1 et α_2 influent sur les couplages (Eq. 2.1 et 2.2). Il faut en effet évaluer le poids d'un terme de la fonction coût par rapport aux autres termes. Cette évaluation est une étape cruciale pour voir si le modèle contraint est dominé soit par les données, soit par la régularisation, soit par le couplage des paramètres.

La construction de la dérivée du gradient croisé, détaillée dans la section précédente s'est avérée assez complexe, notamment pour les conditions aux limites et de surface. Bien qu'elle ne soit pas présentée ici par souci de concision, la procédure d'inversion a été évaluée au préalable à l'aide de plusieurs types de modèles synthétiques de formes en L, U, W et Z, avec des profondeurs et de densités différentes. Ceci nous a permis de résoudre des problèmes liés au calcul du gradient croisé.

Pour l'étude des coefficients de pondération mentionnée au début de cette section, nous avons utilisé des modèles synthétiques de structures rectangulaires 3D. Les modèles initiaux théoriques (Figure 2.9) sont constitués d'un milieu conducteur de 1.44 Ohm.m, et d'un contraste de densité de 0 g/cm³ respectivement pour les modèles de résistivité et de densité. Comme la résistivité est fixe, les valeurs ont été choisies pour être réaliste pour la zone d'étude

(voir Chapitre 3). Ces milieux contiennent une structure peu profonde (400 à 800 m) de 10 Ohm.m et de densité 2 g/cm³ et d'une autre structure profonde (2000 à 4500 m) de résistivité 100 Ohm.m et de densité 2.4 g/cm³. La figure 2.9 a et b, montre une section verticale le long des axes x et z, respectivement des modèles synthétiques de densité et de résistivité.

Nous avons utilisé une grille commune pour la distribution de la densité et de la résistivité, 11,6 km x 11,2 km horizontalement et 5,8 km verticalement. Le nombre de cellules d'inversion est de 29 x 28 x 12 paramètres. La largeur des mailles horizontales est constante tandis que l'épaisseur suivante z augmente avec la profondeur.

La raison d'utiliser un modèle synthétique inspiré des structures observées dans le modèle de résistivité MT était de générer la gravité synthétique à l'échelle et à la distribution des 641 observations. Nous avons également ajouté la topographie et la bathymétrie pour introduire des caractéristiques superficielles dans l'inversion synthétique.

Tout d'abord, nous présenterons le résultat de l'inversion gravimétrique sans contrainte, qui va être le modèle de densité comparative par rapport aux modèles de densité contraints. Ensuite, nous verrons l'influence sur l'inversion gravimétrique du couplage par gradient croisé du modèle de résistivité puis par corrélation des paramètres.

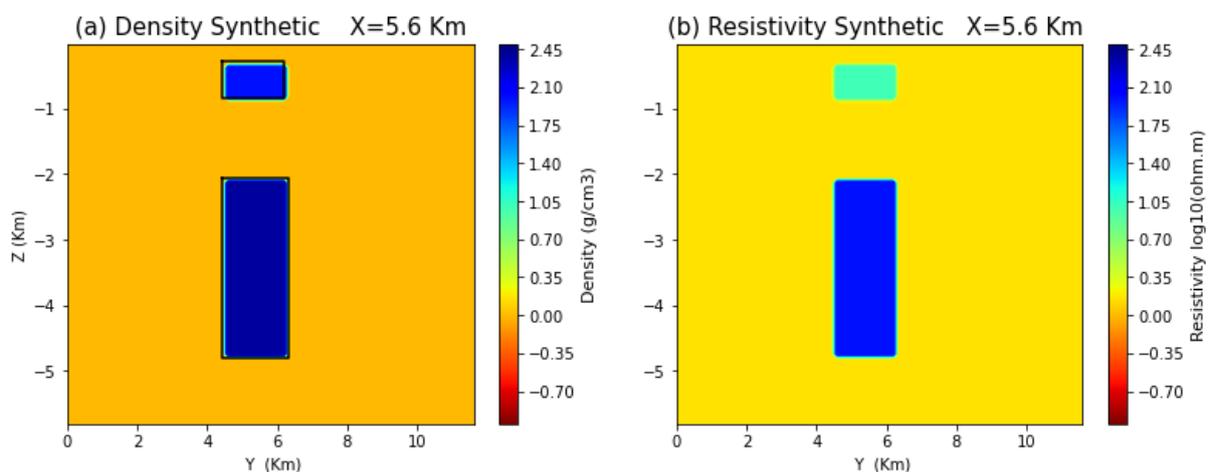


Figure 2. 9: Coupe verticale le long d'une coupe verticale au centre du synthétique avec 2 structures rectangulaires dans un milieu homogène a) Modèle synthétique de densité et b) Modèle synthétique de résistivité.

L'objectif ici est, avec l'inversion sans contrainte, de déterminer les valeurs optimums du coefficient de pondération verticale β (Eq. 1.55) et du poids lambda λ de la régularisation (Eq. 2.1 et 2.2) par la méthode de la « L-Curve » (Hanke, 1996). La figure 2.10 montre la

variation du coefficient de régularisation λ pour un coefficient de pondération β fixé à zéro. Cette méthode nous a permis d'identifier le coefficient optimum $\lambda = 10^{-8}$.

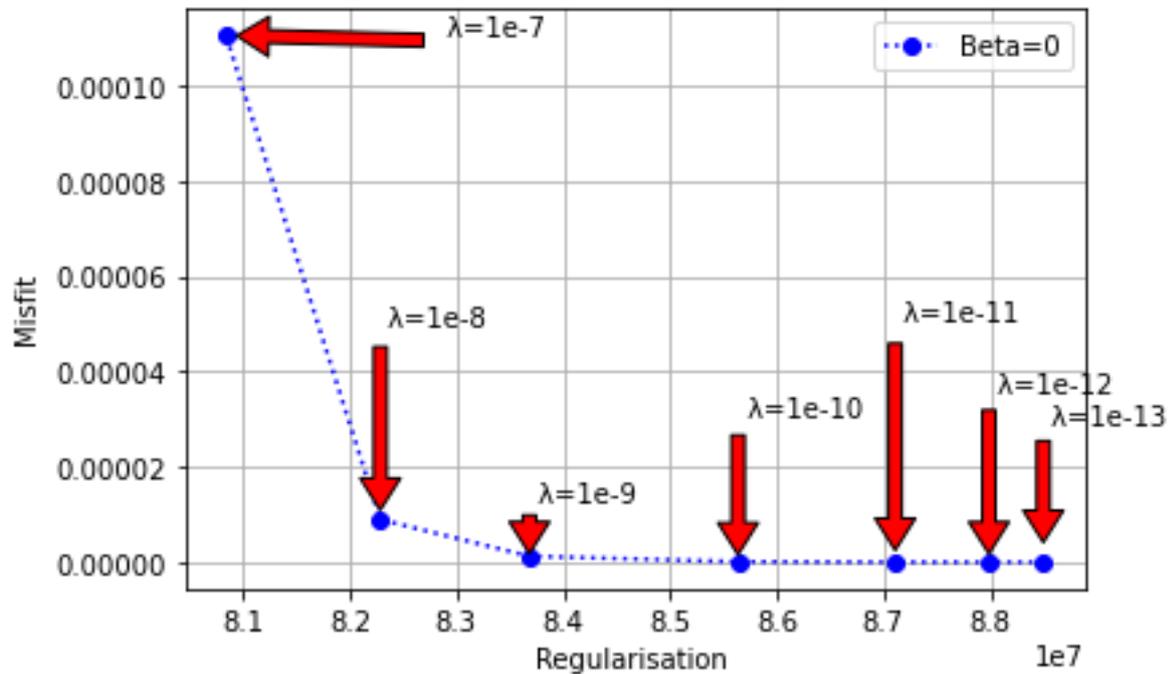


Figure 2. 10: Courbe en L entre le misfit et la régularisation dans cette étude.

Le modèle de densité issue de cette inversion est présenté sur la figure 2.11a. L'accord entre la réponse de nos modèles et les données est toujours excellent du fait de la nature de la donnée gravimétrique. On remarque que ce modèle présente un très faible contraste de densité et que les structures sont distribuées en proche surface. Puis, nous avons augmenté β , afin d'améliorer la résolution verticale du modèle (Figure 2.11 c et d). C'est avec $\beta=1.5$ que nous obtenons des structures distribuées en profondeur et non pas uniquement près de la surface (Figure. 2.11 d). Cependant, le résultat de l'inversion sans contrainte (Figure 2.11d) place les deux structures en profondeur sans les distinguer et ne permet pas de les délimiter.

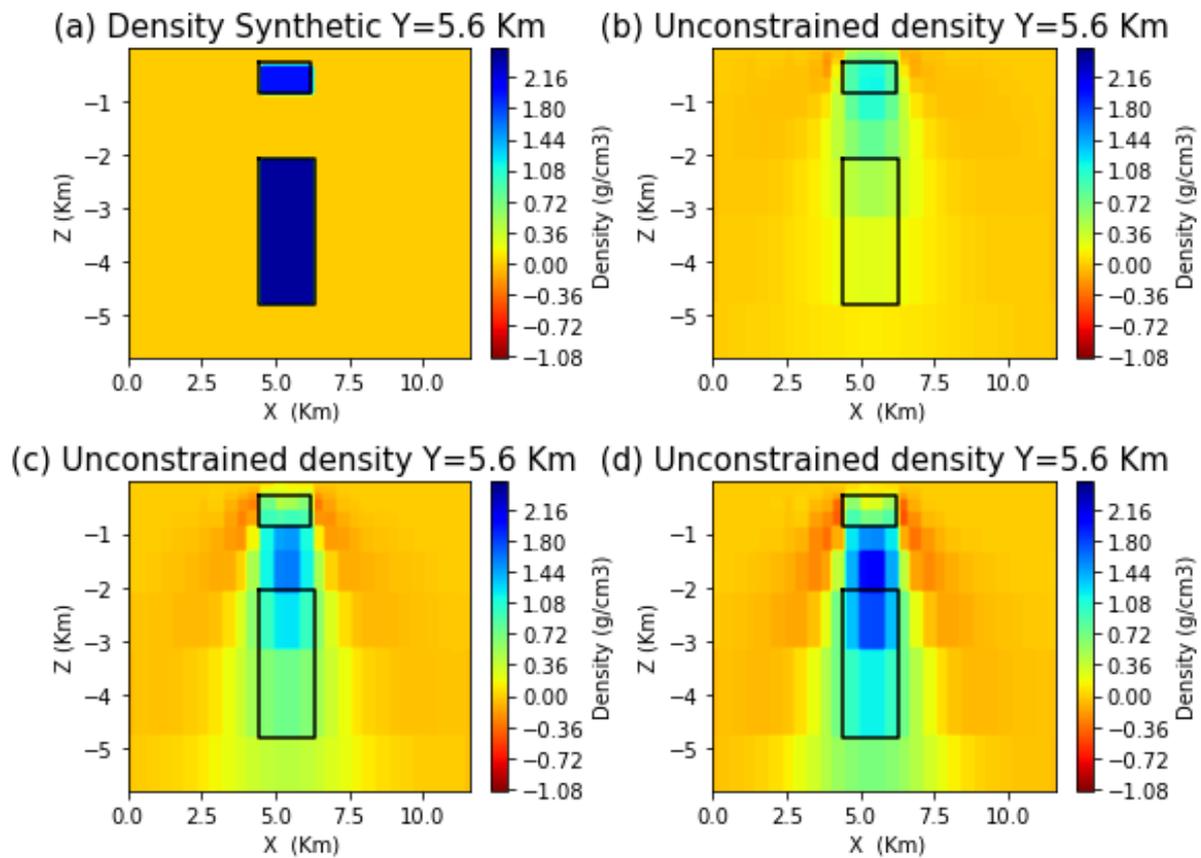


Figure 2. 11: Variation du coefficient de pondération d'une section verticale obtenue lors d'une inversion sans contrainte pour $\lambda = 10^{-8}$.

Couplage par gradient croisé

Nous allons maintenant comparer le modèle de densité sans contrainte aux modèles de densité contrainte obtenus par couplage par gradient croisé (GC) avec les mêmes coefficients de régularisation λ et de pondération β . On a fait varier le coefficient du couplage α_1 de l'équation 2.16 avec $\alpha_2=0$. Sur la figure 2.12c, le modèle de densité commence à être contraint par la résistivité en plaçant les deux structures aux bonnes profondeurs, mais sans les distinguer.

Nous avons encore augmenté l'effet de couplage, le modèle final est bien contraint (Figure 2.12d), De plus, nous voyons également dans ce modèle que les structures sont placées à la bonne profondeur avec une densité similaire au modèle synthétique (Figure 2.12b).

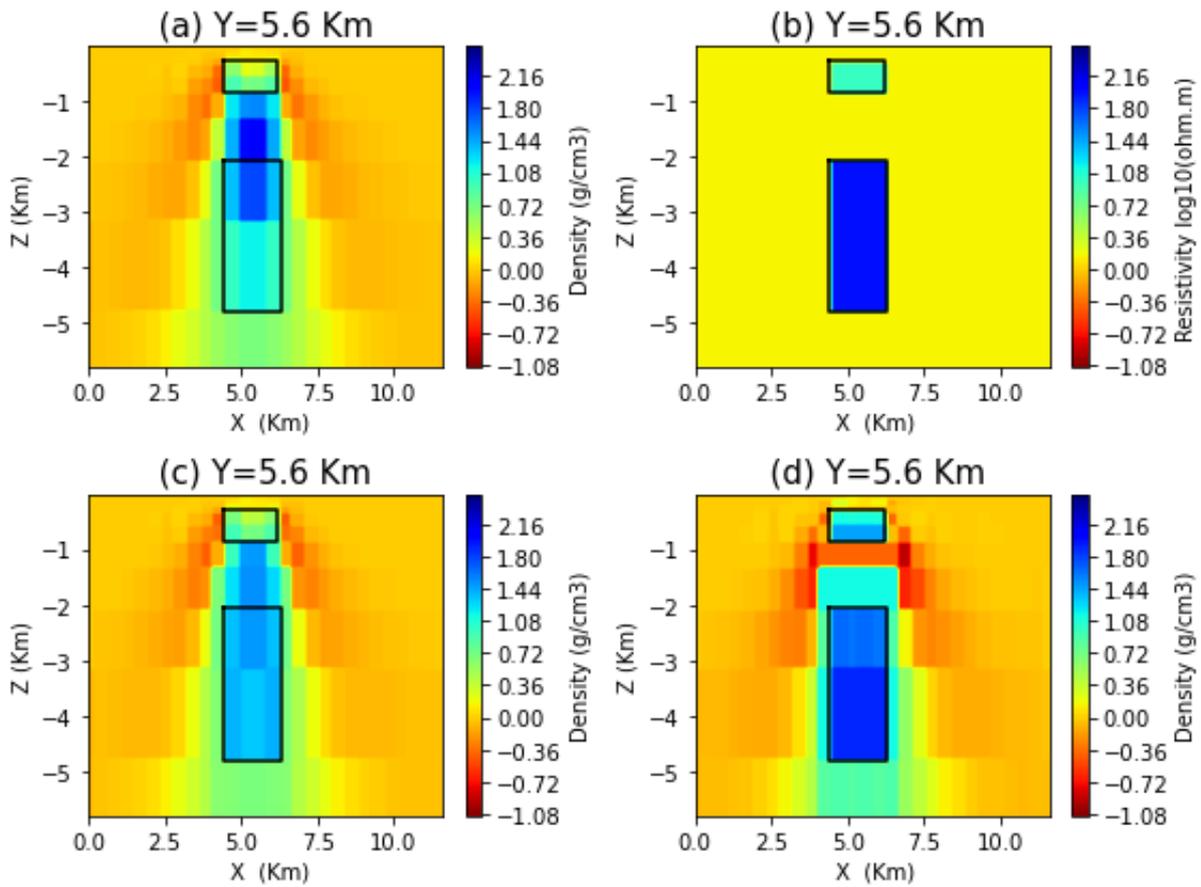


Figure 2. 12: (a) inversion sans contrainte, (b) modèle de résistivité, (c) inversion par corrélation de paramètres et (c) et (d) inversion par gradient croisé GC pour $\lambda = 10^{-8}$ et avec une variation du coefficient α_1 .

| | λ | α_1 | α_2 | correlation with resistivity | correlation with gradient resistivity |
|---|-----------|--------------|------------|------------------------------|---------------------------------------|
| a | 10^{-8} | 0 | 0 | 0.12 | 0.28 |
| C | 10^{-8} | $10^{-13.5}$ | 0 | 0.39 | 0.72 |
| d | 10^{-8} | 10^{-11} | 0 | 0.41 | 0.83 |

Tableau 2. 1 : Paramètres et résultats de différents cycles d'inversion : (a) inversion sans contrainte, (c), (d), couplage par gradient croisé, pour différents coefficients de couplage α_1 et α_2 . Les deux colonnes de droite montrent la corrélation du modèle de densité avec l'image de résistivité et la corrélation de ses gradients avec le gradient de la densité.

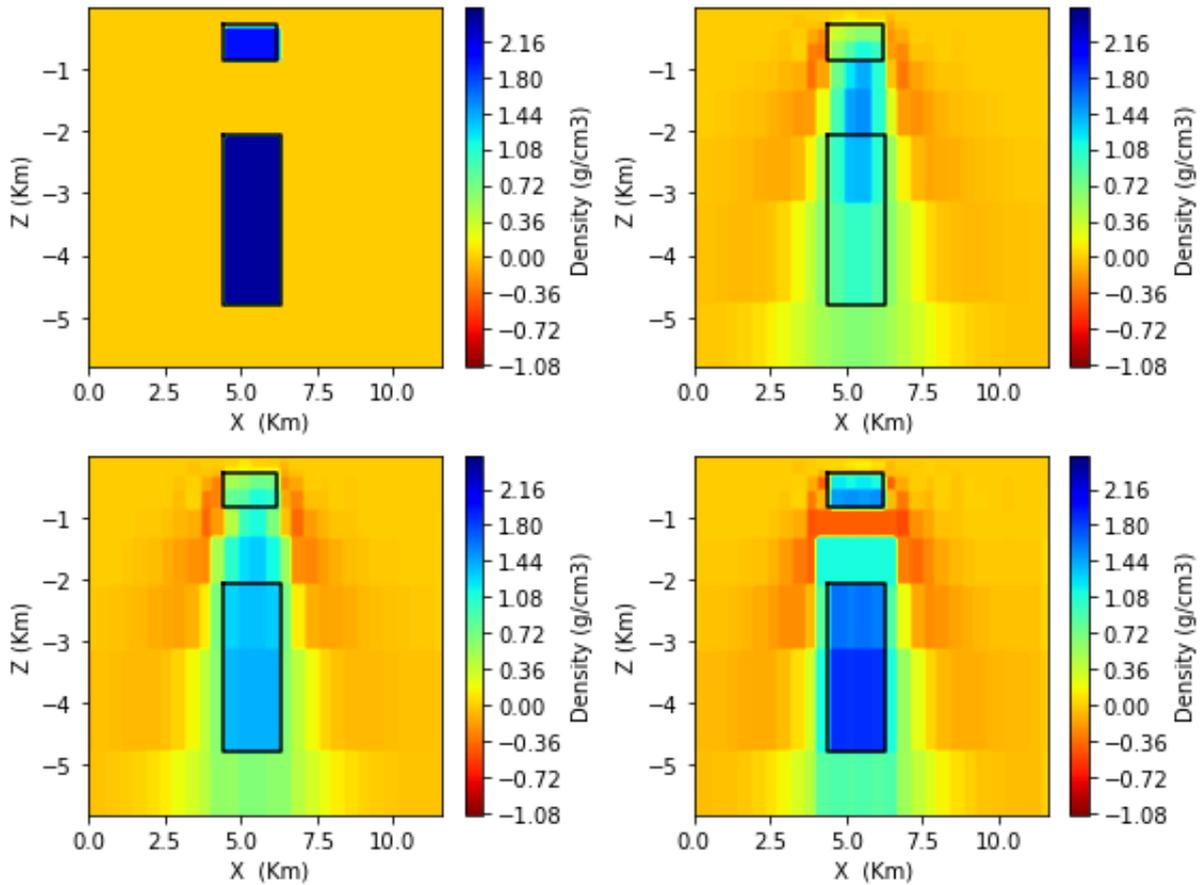


Figure 2. 13: (a) inversion sans contrainte, (b) modèle de résistivité, (c) inversion par corrélation de paramètres et (c) et (d) inversion par gradient croisé GC pour $\lambda=10^{-8}$ et avec une variation du coefficient α_1 .

Couplage par corrélations de paramètre

Le but de ce test est d'étudier l'influence de l'effet du coefficient α_2 (Eq. 2.2) du couplage entre paramètres (CP) avec $\alpha_1=0$. Pour le mêmes coefficients $\beta=1.5$ et $\lambda=10^{-8}$ que pour les deux autres inversions présentées auparavant, nous avons fait varier α_2 . Nous remarquons que l'augmentation du coefficient entraîne systématiquement l'apparition de l'effet de la contrainte de résistivité (Figure. 2.13 c, d, e et f). Avec un faible coefficient α_2 (Figure 12d), le modèle final est contraint et les deux structures en profondeur sont bien identifiées, mais avec une faible densité. Alors que pour un fort effet de couplage (Figure 2.13e et 2.13d), les deux structures sont bien délimitées en profondeur avec des densités proches du modèle synthétique.

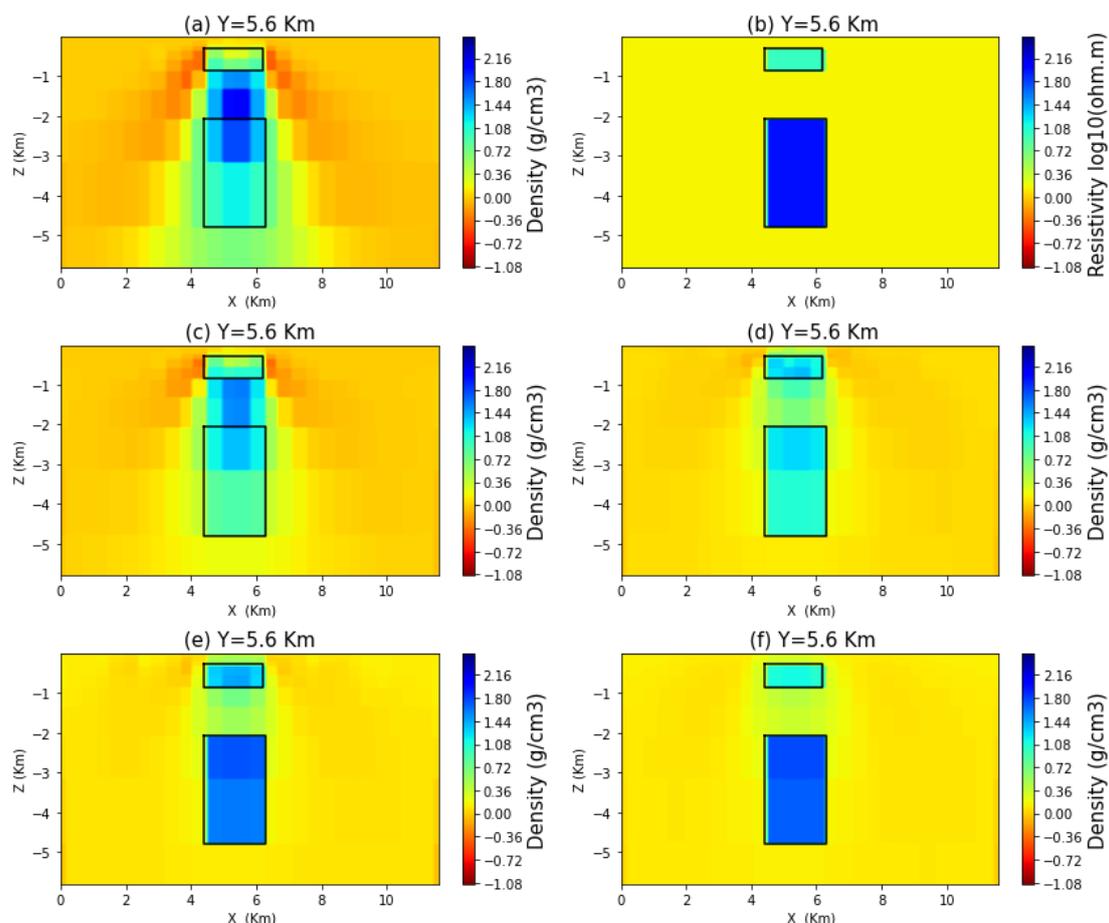


Figure 2. 14: (a) inversion sans contrainte, (b) modèle de résistivité, (c), (d), (e) et (f) inversion par corrélation de paramètres CP pour $\lambda = 10^{-8}$ et avec une variation du coefficient $\alpha 2$.

| | λ | $\alpha 1$ | $\alpha 2$ | correlation with resistivity | correlation with gradient resistivity |
|---|-----------|------------|------------|------------------------------|---------------------------------------|
| a | 10^{-8} | 0 | 0 | 0.12 | 0.28 |
| c | 10^{-8} | 0 | 10^{-17} | 0.36 | 0.63 |
| d | 10^{-8} | 0 | 10^{-15} | 0.46 | 0.74 |
| e | 10^{-8} | 0 | 10^{-11} | 0.55 | 0.92 |
| f | 10^{-8} | 0 | 10^{-7} | 0.97 | 0.97 |

Tableau 2. 2 : Paramètres et résultats de différents cycles d'inversion : (a) inversion sans contrainte, (c), (d), (e) et (f) corrélation des paramètres d'inversion, pour différents coefficients de couplage $\alpha 1$ et $\alpha 2$. Les deux colonnes de droite montrent la corrélation du modèle de densité avec l'image de résistivité et la corrélation de ses gradients avec le gradient de la densité.

Comme le coefficient α_2 contrôle en même temps l'effet de couplage et l'effet de régularisation, nous avons testé le cas où le terme de régularisation (λ REG) dans l'équation 2.1 est mis à zéro en faisant varier le coefficient α_2 . Nous constatons que les modèles obtenus (Figure 2.14 c et d)) sont quasi identiques à ceux de la figure 2.13, pour les mêmes valeurs d' α_2 . Pour ces cas théoriques simples où les structures sont décrites par un tout petit nombre de paramètres, la régularisation λ REG ne joue aucun rôle. Nous verrons au chapitre 3 que pour des données réelles, il devient nécessaire de la mettre à zéro.

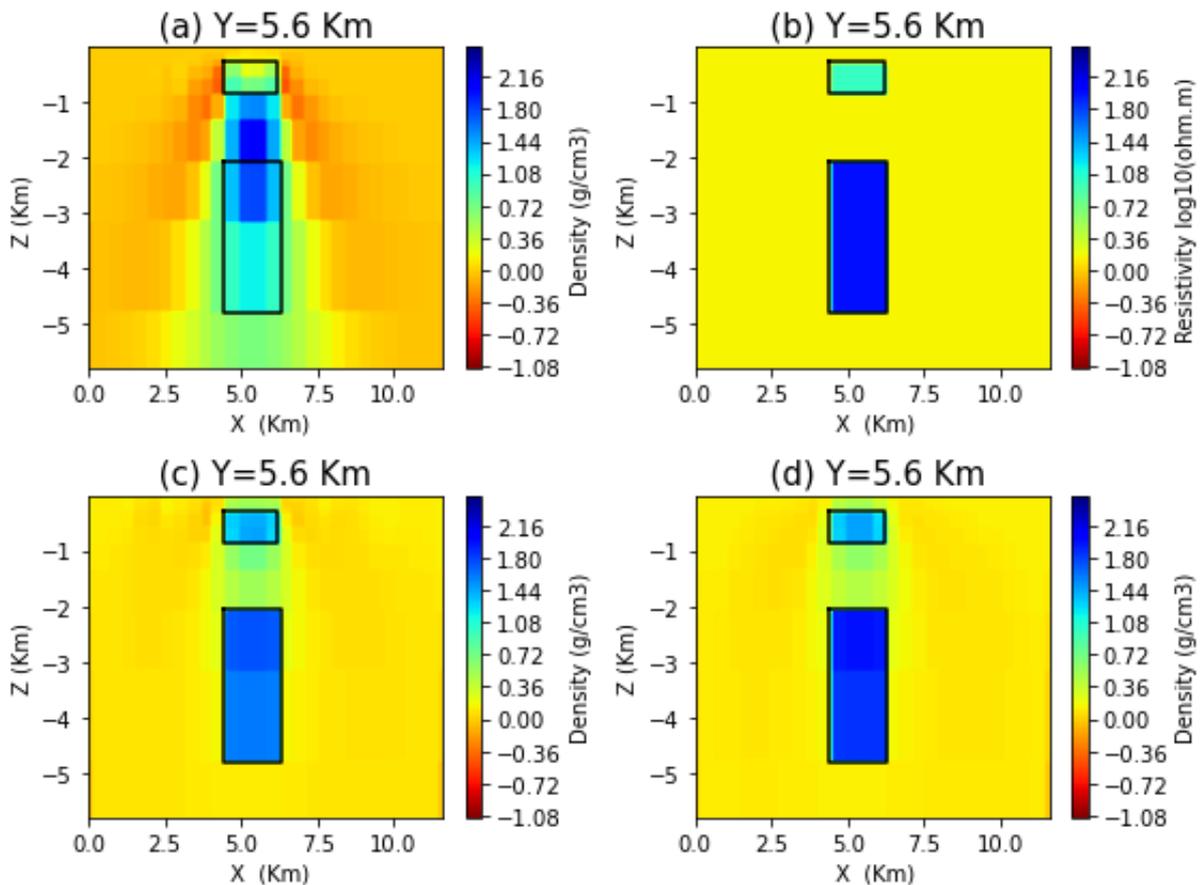


Figure 2. 15: (a) inversion sans contrainte, (b) modèle de résistivité, (c), (d), inversion par corrélation de paramètres CP pour $\lambda=0$ et avec une variation du coefficient α_2 .

| | λ | $\alpha 1$ | $\alpha 2$ | correlation with resistivity | correlation with gradient resistivity |
|---|-----------|------------|------------|------------------------------|---------------------------------------|
| a | 10^{-8} | 0 | 0 | 0.12 | 0.28 |
| c | 0 | 0 | 10^{-9} | 0.92 | 0.80 |
| d | 0 | 0 | 10^{-8} | 0.97 | 0.97 |

Tableau 2. 3 : Paramètres et résultats de différents cycles d'inversion : (a) inversion sans contrainte, (c), (d), corrélation des paramètres d'inversion, pour différents coefficients de couplage $\alpha 1$ et $\alpha 2$. Les deux colonnes de droite montrent la corrélation du modèle de densité avec l'image de résistivité et la corrélation de ses gradients avec le gradient de la densité.

Conclusion

Nous avons testé des approches d'inversion gravimétrique sous contrainte en utilisant deux techniques de couplage gradient croisé (GC) et corrélation de paramètres (CP) sur des données synthétiques. Ces tests sont concluants et très prometteurs. Les deux couplages (CP et GC) permettent de retrouver avec précision les modèles de gravité synthétiques et semblent très prometteurs. Ces tests peuvent s'adapter à des inversions sous contrainte de tout type de données n'ayant pas de relations petrophysiques. L'inversion par couplage CP a montré que la régularisation λ REG ne joue aucun rôle. Cependant, les résultats de ces deux couplages ont montré qu'ils s'ajustaient très bien avec les données synthétiques. Pour pallier cette non-unicité du a la gravité, nous allons appliquer dans le chapitre suivants une méthode statistique, l'analyse en composantes principales, nommé PCA, sur l'ensemble des modèles issus de ces deux couplages.

Bibliographie

Ars, J. M., Tarits, P., Hautot, S., Bellanger, M., Coutant, O., & Maia, M. (2019). Joint inversion of gravity and surface wave data constrained by magnetotelluric: application to deep geothermal exploration of crustal fault zone in felsic basement. *Geothermics*, 80, 56-68.

Bailey, R. C. (1970). Inversion of the geomagnetic induction problem. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 315(1521), 185-194.

Bennington, N.L., Zhang, H., Thurber, C.H. and Bedrosian, P.A. (2015) Joint inversion of seismic and magnetotelluric data in the parkfield region of California using the normalized cross-gradient constraint. *Pure and Applied Geophysics*, 172(5), 1033–1052.

Beiner, J., (1970). Fortran routine mindef for function minimization. Institut de Physique, Univ. of Neuchatel, Switzerland, 65, pp. 1–13

Boulanger, O. and M. Chouteau, 2001. Constraints in 3d gravity inversion. *Geophysical Prospecting*, 49, pp. 265–280.

Birch, F., 1961. The velocity of compressional waves in rocks to 10 kilobars : 2. *Journal of Geophysical Research* 66 (7), 2199–2224.

Chambefort, I., Buscarlet, E., Wallis, I. C., Sewell, S., & Wilmarth, M. (2016). Ngatamariki geothermal field, New Zealand: Geology, geophysics, chemistry and conceptual model. *Geothermics*, 59, 266-280

Camacho, A. G., F. G. Montesinos and R. Vieira, 2000. Gravity inversion by means of growing bodies. *Geophysics*, 65, pp. 95–101.

Candansayar, M. E., & Tezkan, B. (2008). Two-dimensional joint inversion of radiomagnetotelluric and direct current resistivity data. *Geophysical Prospecting*, 56(5), 737-749.

Carbajal, M. R. (2014). Time-lapse and probabilistic inversion strategies for plane-wave electromagnetic methods (Doctoral dissertation, Université de Lausanne).

Cumming, W. (2009, February). Geothermal resource conceptual models using surface exploration data. In *Proceedings* (pp. 9-11).

Dewar, J., 2001, Rock Physics for the Rest of Us – An Informal Discussion: CSEG Recorder, 26

Doetsch, J., Linde, N., Coscia, I., Greenhalgh, S. A., & Green, A. G. (2010). Zonation for 3D aquifer characterization based on joint inversions of multimethod crosshole geophysical data. *Geophysics*, 75(6), G53-G64.

Favetto, A., C. Pomposiello, J. Booker and E. A. Rossello, 2007. Magnetotelluric inversion constrained by seismic data in the tucumán basin (andean foothills, 27s, nw argentina). *J. Geophys. Res*, 112, pp. 1–12

Fregoso, E., & Gallardo, L. A. (2009). Cross-gradients joint 3D inversion with applications to gravity and magnetic data. *Geophysics*, 74(4), L31-L42.

Haber, E., & Oldenburg, D. (1997). Joint inversion: a structural approach. *Inverse problems*, 13(1), 63.

Hanke, M. (1996). Limitations of the L-curve method in ill-posed problems. *BIT Numerical Mathematics*, 36(2), 287-301.

Gallardo, L. A. (2007). Multiple cross-gradient joint inversion for geospectral imaging. *Geophysical Research Letters*, 34(19). 178, 198

Gallardo, L. A., & Meju, M. A. (2007). Joint two-dimensional cross-gradient imaging of magnetotelluric and seismic traveltimes data for structural and lithological classification. *Geophysical Journal International*, 169(3), 1261-1272.

Gallardo, L. A. and Meju, M. A. (2004). Joint two-dimensional dc resistivity and seismic travel time inversion with cross-gradients constraints. *Journal of Geophysical Research :Solid Earth*, 109(B3). 178, 198, 199

Gallardo, L.A. and Meju, M.A. (2007) Joint two-dimensional crossgradient imaging of magnetotelluric and seismic traveltimes data for structural and lithological classification. *Geophysical Journal International*, 169(3), 1261–1272.

Gasparikova, E., Rosenkjaer, G. K., Arnason, K., Newman, G. A., & Lindsey, N. J. (2015). Resistivity characterization of the Krafla and Hengill geothermal fields through 3D MT inverse modeling. *Geothermics*, 57, 246-257.

Golub, G. H., Heath, M., & Wahba, G. (1979). Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter. *Technometrics*, 21(2), 215-223.

Günther, T., Bentley, L. R., & Hirsch, M. (2006, June). A new joint inversion algorithm applied to the interpretation of DC resistivity and refraction data. In *Proceedings of XVI International Conference on Computational Methods in Water Resources*. Copenhagen: Tech. Univ. of Den.

He, H., Li, T., & Zhang, R. (2022). Joint Inversion of 3D Gravity and Magnetic Data under Undulating Terrain Based on Combined Hexahedral Grid. *Remote Sensing*, 14(18), 4651.

Heincke B., Jegen M., Hobbs R., 2006. Joint inversion of MT, gravity and seismic data applied to sub-basalt Imaging, SEG Technical Program Expanded Abstracts, pp. 784–789., Society of Exploration Geophysicists

Heincke, B., Jegen, M., Moorkamp, M., Hobbs, R. W., & Chen, J. (2017). An adaptive coupling strategy for joint inversions that use petrophysical information as constraints. *Journal of Applied Geophysics*, 136, 279-297.

Paige, C. C., & Saunders, M. A. 1982. LSQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 8(1), 43-71.

Pearson, K. (1901). LIII. On lines and planes of closest fit to systems of points in space. *The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science*, 2(11), 559-572.

Jones, I. F., & Levy, S. (1987). Signal-to-noise ratio enhancement in multichannel seismic data via the Karhunen-Loeve transform. *Geophysical prospecting*, 35(1), 12-32.

Kassenaar, J. D. C. (1991, August). An application of principal components analysis to borehole geophysical data. In *Proceedings of the 4th International MGLS/KEGS Symposium on Borehole Geophysics for Minerals, Geotechnical and Groundwater Applications* (pp. 211-218).

Lenhardt, N., & Götz, A. E. (2015). Geothermal reservoir potential of volcanoclastic settings: the Valley of Mexico, Central Mexico. *Renewable Energy*, 77, 423-429.

Li, Y. and D. W. Oldenburg, 1998. 3-d inversion of gravity data. *Geophysics*, 63, pp. 109–119.

Lichoro, CM, Arnason, K. et Cumming, W. (2019). Interprétation conjointe des données de gravité et de résistivité de la zone de rift volcanique du nord du Kenya : importance structurelle et géothermique. *Géothermie* , 77 , 139-150.

Liu, Y., Na, X., Yin, C., Su, Y., Sun, S., Zhang, B., ... & Baranwal, V. C. (2022). 3-D joint inversion of airborne electromagnetic and magnetic data based on local pearson correlation constraints. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 60, 1-13.

Menichetti, V. and Guillen, A. (1983) Simultaneous interactive magnetic and gravity inversion. *Geophysical Prospecting*, 31, 929–944

Minty, B., & Hovgaard, J. (2002). Reducing noise in gamma-ray spectrometry using spectral component analysis. *Exploration Geophysics*, 33(3-4), 172-176.

Moeck, I. S., 2014. Catalog of geothermal play types based on geologic controls. *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 37, 867–882

Moorkamp, M., Heincke, B., Jegen, M., Roberts, A.W. and Hobbs, R.W. (2011) A framework for 3D joint inversion of MT, gravity and seismic refraction data. *Geophysical Journal International*, 184(1).

Moorkamp, M., Heincke, B., Jegen, M., Hobbs, RW et Roberts, AW (2016). Inversion conjointe dans l'exploration des hydrocarbures. *Imagerie intégrée de la Terre : théorie et applications*, 167-189.

Munoz, G. (2014). Exploring for geothermal resources with electromagnetic methods. *Surveys in geophysics*, 35, 101-122.

Nielsen, L., N. Balling, B. H. Jacobsen and M. L. W. Group, 2000. Seismic and gravity modelling of crustal structure in the central graben, north sea. observations along mona lisa profile 3. *Tectonophysics*, 328, pp. 229–244

Pearson, K. (1895). Coefficient de corrélation. Dans *Royal Society Proceedings* (vol. 58, p. 214).

Paolucci, E., Lunedei, E., & Albarello, D. (2017). Application of the principal component analysis (PCA) to HVSR data aimed at the seismic characterization of earthquake prone areas. *Geophysical Journal International*, 211(1), 650-662.

Ratouis, T. M., & Zarrouk, S. J. (2016). Factors controlling large-scale hydrodynamic convection in the Taupo Volcanic Zone (TVZ), New Zealand. *Geothermics*, 59, 236-251.

Saunders, J.H., Herwanger, J.V., Pain, C.C., Worthington, M.H. and Oliveira, C.R.E. (2005) Constrained resistivity inversion using seismic data. *Geophysical Journal International*, 160(3), 785–796.

Tarits, P., Hautot, S., Roach, P., Magareh, H. M., et al., 2015. Mapping density models onto resistivity structure through joint inversion of gravity and mt. In : 2015 SEG Annual Meeting. Society of Exploration Geophysicists.

Ussher, G., Harvey, C., Johnstone, R., & Anderson, E. (2000, May). Understanding the resistivities observed in geothermal systems. In *proceedings world geothermal congress* (pp. 1915-1920). Japan: Kyushu.

Vozoff, K. and Jupp, D.L.B. (1975) Joint inversion of geophysical data. *Geophysical Journal International*, 42, 977–991.

Wang, X., Fang, J. and Hsu, H. (2011) Three-dimensional crustal density distribution beneath North China by sequential inversion of local earthquake traveltimes and gravity anomaly. *Earthquake Science*, 24(2), 135–141

Zhang, J., & Morgan, F. D. (1997, March). Joint seismic and electrical tomography. In 10th EEGS Symposium on the Application of Geophysics to Engineering and Environmental Problems (pp. cp-204). European Association of Geoscientists & Engineers.

Annexe

Les tests synthétiques présentés dans la thèse ont été complétés par d'autres tests dans lesquels nous avons inversé la relation résistivité/densité de corrélée à anti-corrélée. Le modèle initial théorique (Figure 2.9) est constitué d'un milieu conducteur de 1.44 Ohm.m. Les modèles initiaux théorique (Figure 2.9) sont constitués d'un milieu conducteur de 1.44 Ohm.m, contenant une structure peu profonde (400 à 800 m) de 0.02 Ohm.m et d'une autre structure profonde (2000 à 4500 m) de résistivité 0.024 Ohm.m. Nous avons utilisé le même modèle initial théorique de densité du test synthétique (paragraphe 2.4). Dans les cas des couplages par CG (Figure A1) et CP (Figure A2), nous observons respectivement le même comportement observé dans les figures 2.12 et Figure 2.13. En augmentant le coefficient du couplage le modèle final est bien contraint.

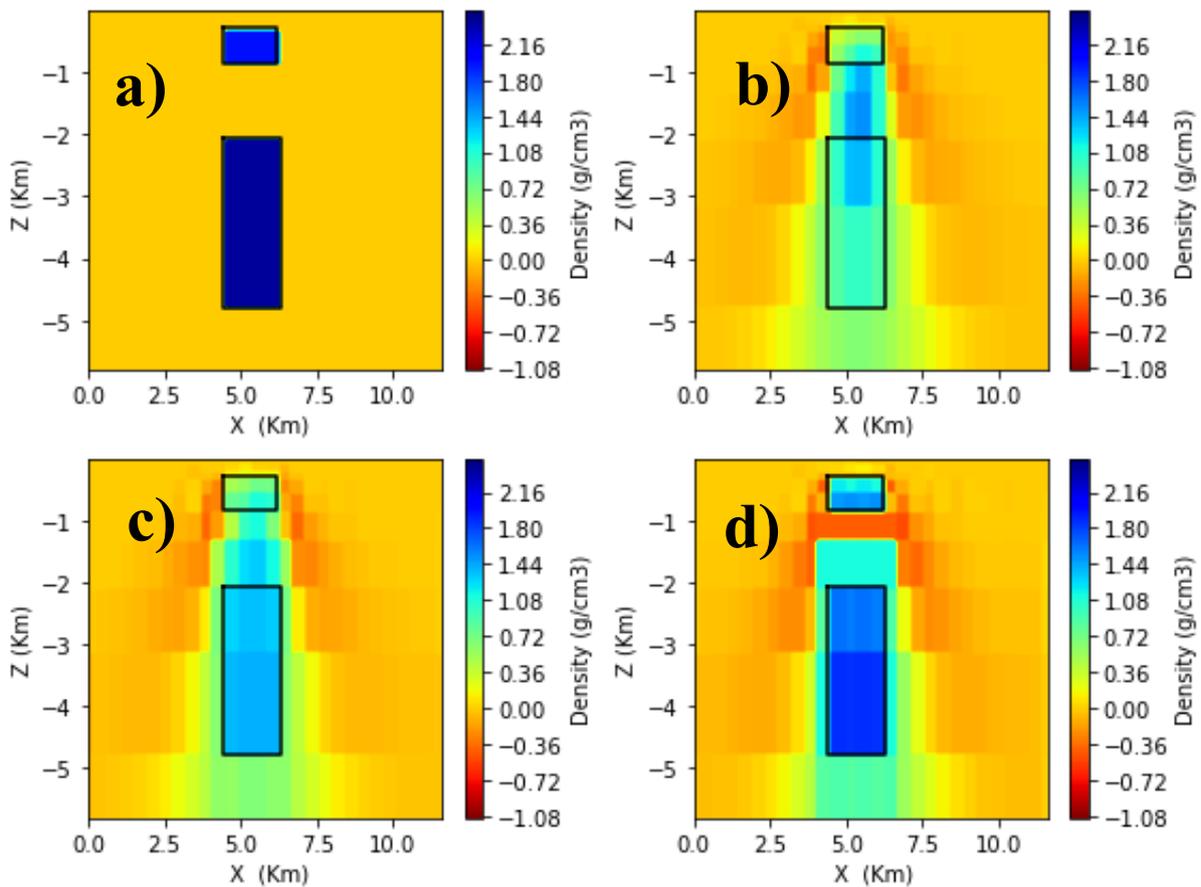


Figure A1: ((a) inversion sans contrainte, (b) modèle de résistivité, (c) inversion par gradient croisé CG pour $\lambda=10^{-8}$ et avec une variation du coefficient $\alpha_1=10^{-13.5}$. (d), inversion par gradient croisé CG pour $\lambda=0$ et avec une variation du coefficient $\alpha_1=10^{-11.5}$.

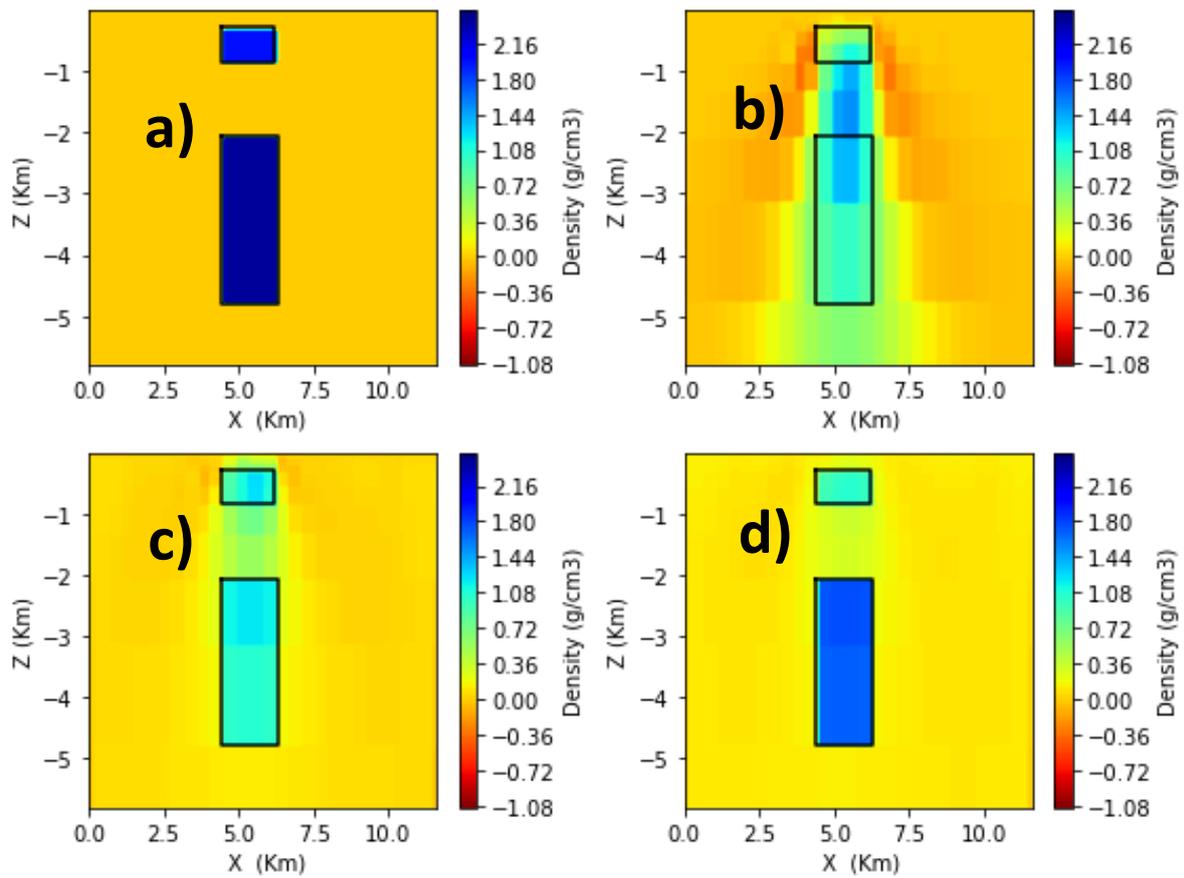


Figure A2: ((a) inversion sans contrainte, (b) modèle de résistivité, (c) inversion par corrélation des paramètres CG pour $\lambda=0$ et avec une variation du coefficient $\alpha_2=10^{-9}$. (d), inversion par gradient croisé CG pour $\lambda=0$ et avec une variation du coefficient $\alpha_2=10^{-8}$.

Chapitre 3 : Amélioration de la résolution des modèles géophysiques grâce à l'inversion conjointe de la magnétotellurique et de la gravité : application à la région géothermique du rift d'Asal, République de Djibouti.

3.1 Géologie

Le rift d'Asal (en République de Djibouti) est situé à la jonction entre trois rifts : la dorsale de la Mer Rouge, le Golfe d'Aden et le rift continental Est-Africain (Figure. 3.1A). Il est avec l'Islande, l'une des deux dorsales océaniques émergées. Avec une longueur d'environ 40 km, dont 15 km émergés, il s'ouvre actuellement à 16 ± 1 mm/an, se propageant dans la direction $N40 \pm 5^\circ E$ (Ruegg et Kasser, 1987, Magnighetti et al., 1998, Vigny et al., 2007). Le rift d'Asal est caractérisé par un réseau dense de fissures et de failles normales $N130 \pm 10^\circ$, délimitées par le lac Asal à l'ouest jusqu'au détroit de Ghoubbet à l'Est (Figure. 3.1B). Le lac Asal, situé à -150 m sous le niveau de la mer est un lac hypersalin bordé au nord par une banquise de sel avec des manifestation hydrothermales (Gasse et fonte, 1989). Deux régions à potentiel géothermal ont été identifiées, Gale-le-Koma et la caldéra de Fialé (Figure 3.1) où ont été forés au total 6 puits d'exploration (Figures. 3.1 et 3.2). Nous avons à notre disposition un grand nombre de données gravimétriques et de sondages MT (Figure. 3.2), collectés au cours de ces dernières décennies sur le rift d'Asal. Jusqu'à présent, ces données ont été interprétées seules. Mais compte tenu de la nature complexe du rift émergent, ces résultats se sont avérés insuffisants pour une interprétation détaillée de la structure du rift.

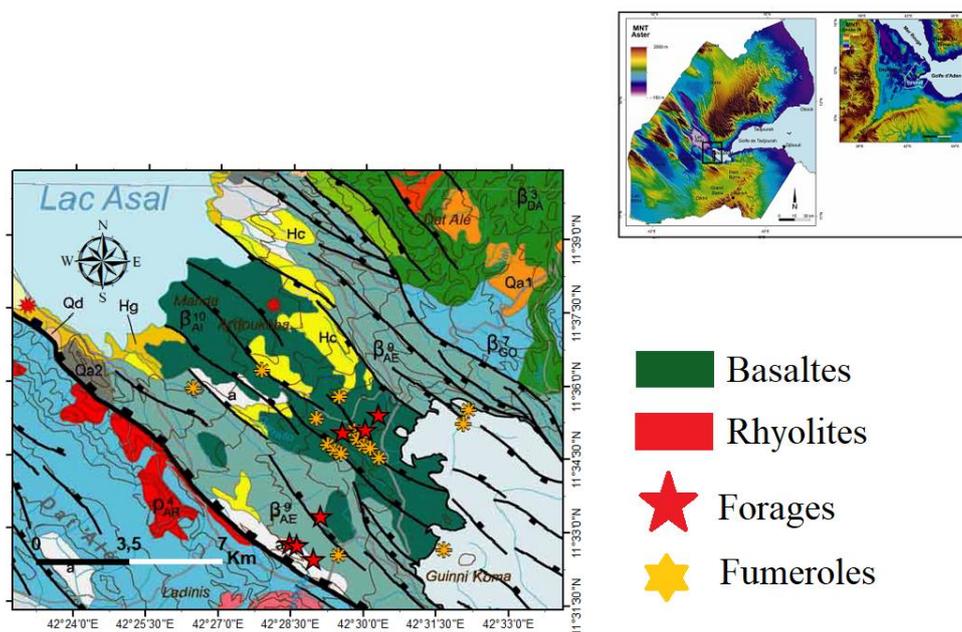


Figure 3. 1: (a) Caractéristiques géologiques et structurales avec les principaux forages géothermiques du rift d'Asal (modifié de Le Gall et al., 2015). (b) un modèle numérique d'élévation ASTER, le rectangle noir est la zone d'étude.

3.2 Magnétotellurique

3.2.1 Acquisitions des données MT

Nous avons utilisé lors de cette étude 109 sondages MT (Figure. 3.2), qui proviennent d'une exploration entreprise en 2008 dans le cadre d'une collaboration entre l'Iceland Geothermal Energy GeoSurvey (ISOR) en Islande et le Centre d'étude et de Recherche de Djibouti (CERD). Les données ont été enregistrées grâce à un système Phoenix MTU-5A (Phoenix Geophysics, 2009) qui mesure les deux composantes du champ électrique (E_x et E_y) ainsi que les trois composantes du champs magnétiques (H_x , H_y et H_z). Le temps d'enregistrement est de 48 h. Afin de réduire les bruits locaux, une station de référence, "remote referencing" (Gamble and al, 1979) a été installée à une distance de 10 Km de la zone d'étude (Sakindi, 2015). Les séries temporelles ont été traitées par ISOR avec un programme fournit par Phoenix (Phoenix Geophysics, 2005) qui utilise le traitement robuste d'Egbert et Booker (1986). Je n'ai eu accès qu'aux données traitées fournies sous format EDI.

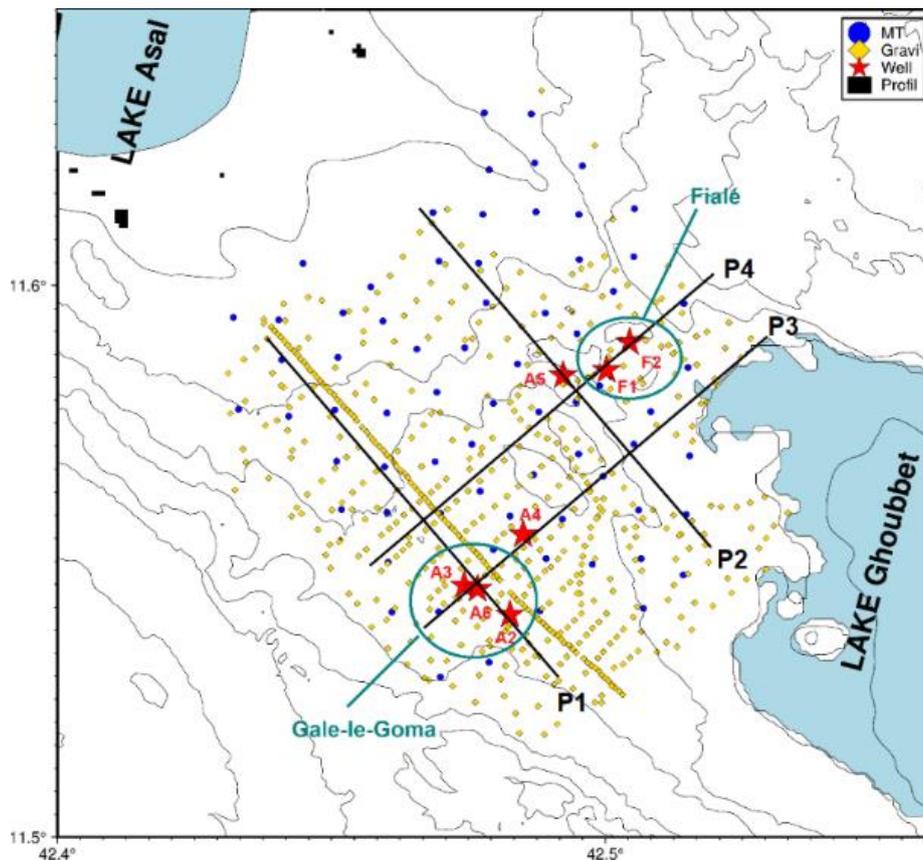


Figure 3. 2 : Zone d'étude du Rift d'Asal, les sites gravimétriques sont en orange, les sites MT sont en bleu, les forages en étoile rouge et les lignes noires sont les profils (P1 à P4) que nous allons plus particulièrement étudier par la suite.

3.2.2 Analyse du tenseur de phase

Une étude préliminaire des données a été réalisée à l'aide de la technique du tenseur de phase (Caldwell and al., 2004). Ce tenseur, rapport de la partie imaginaire par la partie réelle du tenseur d'impédance a été proposé originellement pour s'affranchir des problèmes de distorsion statiques dans l'analyse des données. Quoique de nos jours ce problème a été résolu grâce à l'inversion 3D, ce tenseur présente encore un intérêt car il contient des informations simples à visualiser sur la dimensionnalité et la direction des structures contrôlant les champs MT (Simpson et Bahr, 2005, Chave et Jones, 2012)

Dans le rift d'Asal, les ellipses de tenseur de phase sont tracées à l'aide d'un code open source MTpy (Kirkby, 2019), pour différentes périodes. Ces ellipses révèlent la dimensionnalité des données MT (Figure. 3.3). Les formes du tenseur de phase et de l'angle d'inclinaison donnent une idée de la dimensionnalité des structures de sub-surface. Aux courtes périodes (<0.1 s), les cartes du tenseur de phase indiquent que la majorité des stations présentent des formes circulaires à l'exception de quelques stations qui présentent un caractère 3D. Les périodes intermédiaires (10 s, 50 s, 100 s), présentent un petit angle de skew (défini dans le chapitre 1), dans la partie centrale du rift. Cependant, le Nord-ouest et le Sud-Est, sont dominés par des sites possédant des indices de fortes hétérogénéités (Figure. 3.4). Pour les longues périodes (500 s et 1 000 s), l'analyse du tenseur de phase révèle une forte tridimensionnalité. Ces résultats confirment le caractère tridimensionnel des données et une inversion 3D est donc nécessaire pour imager les structures complexes de la sub-surface.

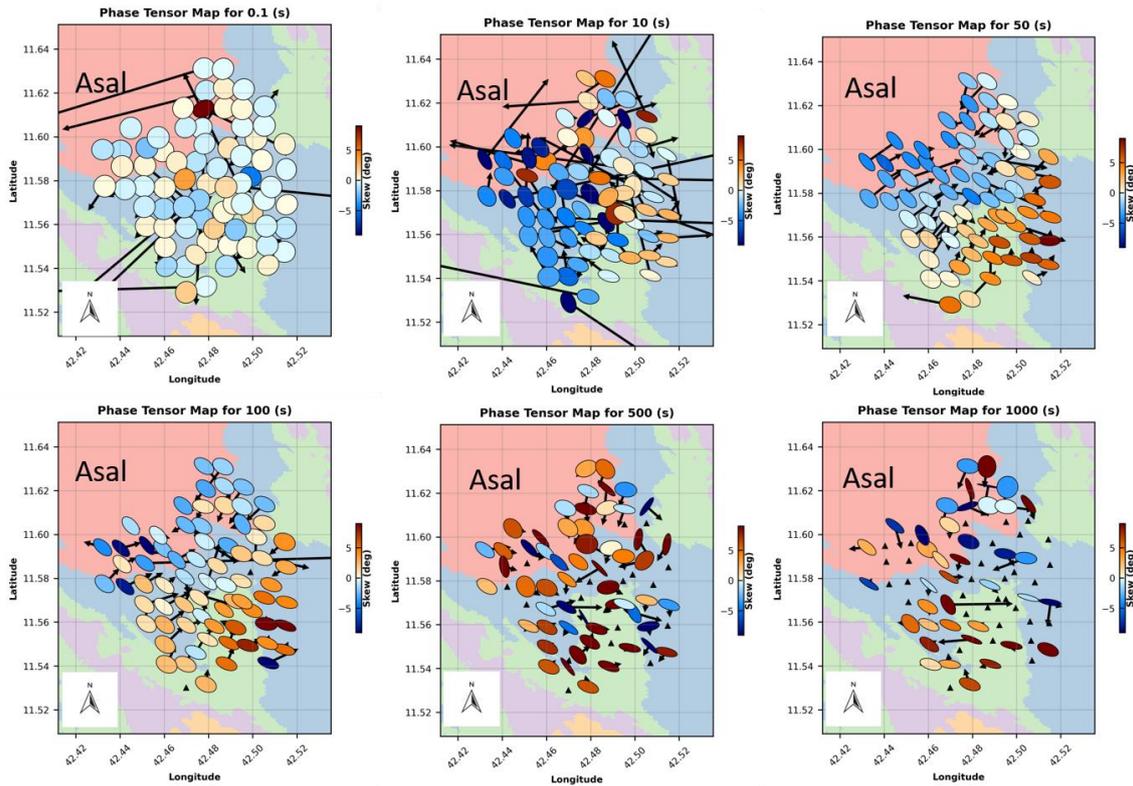


Figure 3. 3 : Cartes représentant des ellipses de tenseur de phase calculées à l'aide de la méthode détaillée par Caldwell et al. (2004) et vecteurs d'inductions (Niasari, 2016) pour les différents périodes (0.1s, 10s, 100s, 500s et 1000s), sur l'ensemble des station MT

3.2.3 Direction Géo-électrique

Dans cette étude, le tenseur d'impédance est mesuré suivant les directions N-S et E-W. Nous avons utilisé le code open source MTPy (Kirkby, 2019), pour représenter sous forme de diagramme en rose des vents pour différentes périodes, les directions des axes principaux du tenseur (voir chapitre 1 pour leur définition). La figure 3.4 montre pour les courtes périodes (<0.1s), une absence de direction géo-électrique préférentielle, qui suggère que le milieu est proche du 1D ce qui est cohérent avec le tenseur de phase (Figure. 3.4). Aux périodes intermédiaires (entre 0.1 s et 10 s), une direction dominante N30°-47.5° a été obtenue tandis que pour les longues périodes (entre 100 s et 1000 s), une direction bien définie est obtenue NE307. Le changement de direction est observé entre 5 – 15 s (Figure S 3.6 voir en supplémentaire). Bien que la direction varie avec la période et l'emplacement. Il est inhabituel d'observer un changement de direction aussi grande entre les périodes 10 s et 100 s. Ce changement aussi abrupt, sur une gamme de périodes aussi étroite souligne également la nature hétérogène du sous-sol profond.

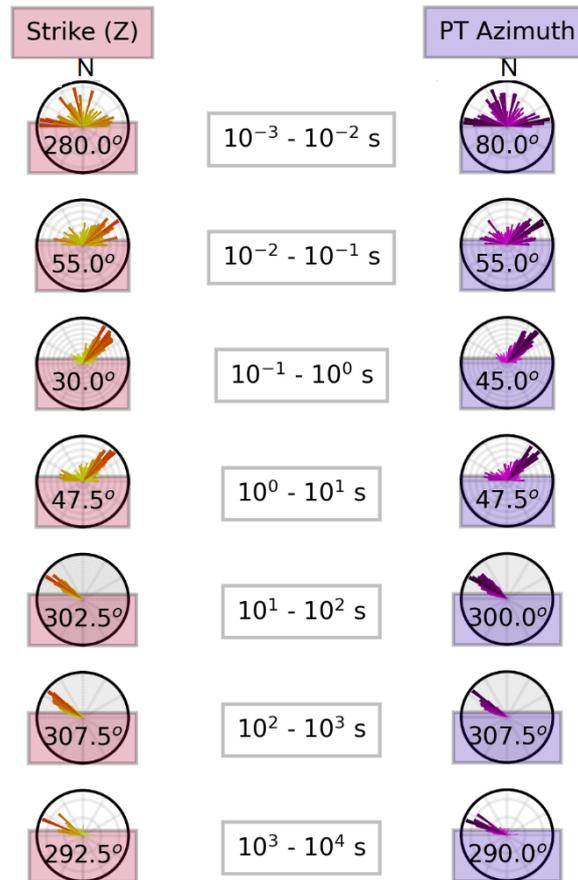


Figure 3. 4 : Diagrammes en rose des vents à différentes périodes à partir des invariants du tenseur d'impédance (Z) et du tenseur de phase (PT) (Chapitre 1).

La figure 3.5, représente les différents axes structuraux combinés pour tous les périodes. Nous retrouvons les directions $\sim N300$ et $\sim N45$ cohérentes avec la direction du système de failles normales du rift d'Asal ($N130 \pm 10^\circ E$) avec un taux d'extension d'environ 16 mm/an dans la direction ($N40 \pm 5^\circ E$). La structure en profondeur du rift d'Asal est dominé par ces deux directions structurales.

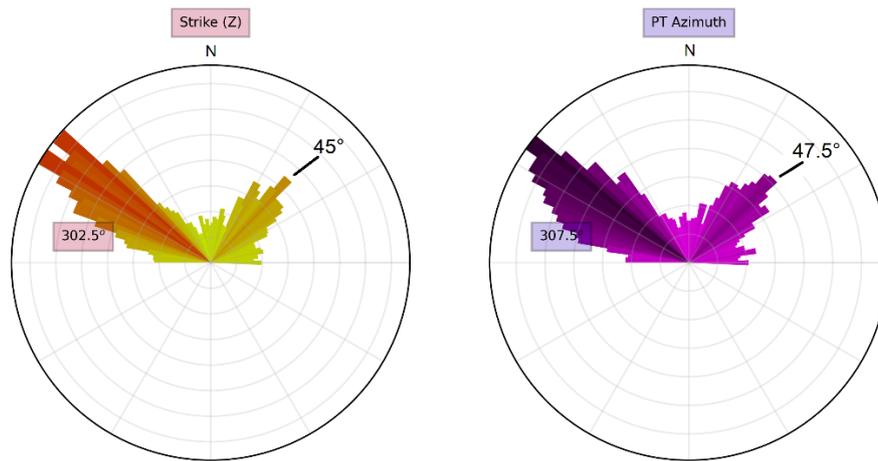


Figure 3. 5 : Diagrammes en rose des vents pour toutes les périodes.

3.3. Analyse des données gravimétriques

Les données gravimétriques utilisées proviennent d'une campagne de mesure réalisée par le Bureau de Recherches Géologiques et Minières (BRGM) dans le rift d'Asal en 1979 et 1980 (Demange et Puvilland, 1990) à l'aide d'un gravimètre LACOSTE-ROMBERG (modèle D.N 24) et d'un gravimètre Worden n°641. Ces données n'existaient à Djibouti que sous la forme d'un rapport (Rapport BRGM 80 SGN 525 GTH). J'ai donc dû effectuer un important travail de numérisation de l'ensemble des stations. Au total, j'ai numérisé 971 données gravimétriques, les coordonnées géographiques, des altitudes, et des corrections de terrains, etc. Les coordonnées géographiques des stations de mesures étaient dans un ancien système de référence (Clark 1880). Avec l'aide du Bureau Gravimétrique International (BGI) que je remercie vivement, nous avons pu convertir ces données dans le système de référence WGS84.

Le BRGM a calculé la correction de terrain jusqu'à une distance de 22 km autour des points de mesure, en utilisant le système Hammer. Ensuite, nous avons remarqué une certaine incohérence des altitudes numérisées et les altitudes d'un MNT 30 m (une différence entre les altitudes d'environ 100 m pour certaines stations). Nous avons néanmoins conservé les altitudes mesurées sur le terrain. De plus, un autre gros travail de sélection et de tri a été effectué en raison des stations en doublons présents dans les 971 stations de mesures. Dans notre zone d'étude, nous avons sélectionné et utilisé 418 stations gravimétriques (Figure. 3.2).

J'ai donc calculé l'anomalie de Bouguer complète (Eq. 1. 43), en utilisant une densité de référence (ici, 2.67 g.cc) qui a été déterminée grâce à la méthode Nettleton(1939). L'anomalies à l'air libre est représentée dans la figure 3.6a. L'anomalie de Bouguer (Figure 3.6b) recalculée à partir des coordonnées géographiques converties est similaire à celle présentée par le BRGM (1978). Comme nous cherchons à caractériser les anomalies gravimétriques à l'échelle de la zone du rift d'Asal, nous avons filtré les grandes longueurs d'onde en ôtant à l'anomalie de Bouguer un polynôme d'ordre 2 (Figure 3.6c). L'anomalie résiduelle sera analysée en détail dans la partie 3.4 de ce chapitre.

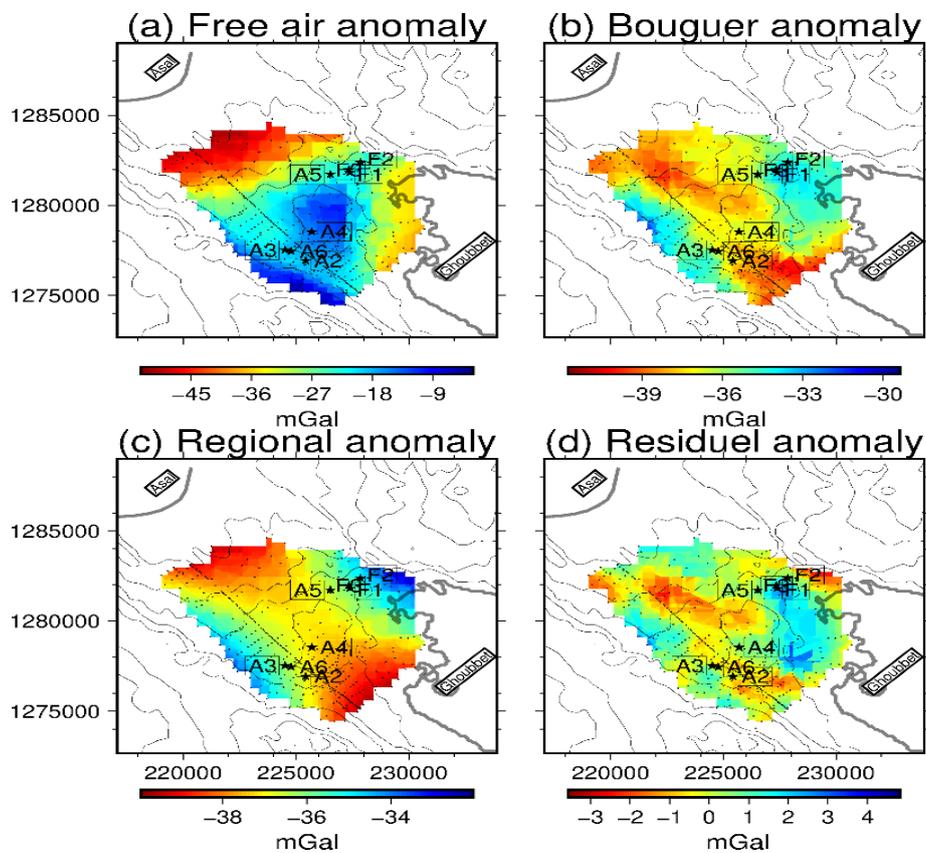


Figure 3. 6 : (a) anomalie de l'aire libre, (b) Anomalie de Bouguer Complete, (c) anomalie régionale de Bouguer et (d) anomalie résiduelle de Bouguer dans le rift d'Asal

3.4. Inversion des données

Les méthodes d'inversion contrainte présentées dans le chapitre 2 ont été appliquées aux données gravimétriques et magnétotelluriques du rift d'Asal dans la partie suivante. Les résultats sont présentés sous forme d'une publication qui est soumise dans le journal of geophysical research solid earth (JGR-solid earth).

Inversion of gravity data constrained by a magnetotelluric resistivity model: application to the Asal rift, Djibouti.

Rachid Robleh Ragueh^{1,3}, Pascal Tarits^{1,2}, Sophie Hautot², Mohamed Jalludin³

¹Geo-Ocean, Plouzané- ²IMAGIR Sarl, Saint Renan, ³CERD, Djibouti

Introduction

The existence of the emerged oceanic rift of Asal in Republic of Djibouti has been the subject of several geological, geochemical and geophysical studies with implications for geothermal resources (BRGM, 1975, 1980; Lépine et al, 1972; Ruegg, 1975; Demange and Puvilland, 1990; Magnighetti and al, 1998; Stieltjes, 1980; Barberie and al, 1980, Van and al 1981; Fouillac and al. 1983; Orkustofnun, 1988; Ruegg and Kasser, 1987; Fontes and al. 1989; Sanjuan 1990 and Magnighetti et al, 1998). The first geothermal prospect identified in 1970 in the Asal rift of the Afar Depression region (Figure. 3.7) is the Gale-le-Koma geothermal system (BRGM, 1975, 1980) and 6 boreholes have been drilled (Figure 3.7). Another geothermal pre-feasibility study in 2007 (Dobre 2007, Árnason, 2008, Khodayar, 2008) identified another geothermal system in the Fiale Caldera zone (Figure 3.7) with the drilling of three deep directional boreholes.

The identification of these two geothermal prospects and drilling sites was made with a set of limited geophysical data (gravity map and geodynamical context) supplemented by geology and geochemistry field data for Gale-le-Koma and preliminary models, 1-D electrical resistivity by magnetotellurics and TEM (Transient Electromagnetic), associated with low resolution seismic tomography and a geological and geochemical context for the Fialé caldera. In both cases, the results were uncertain either with excessive charged waters in Gale-le-Koma (Elmi, 2005) or with intrusion of seawater cooling down the system (Turk et al. 2019). This type of problem is often encountered in geothermal energy, in Eastern Africa and elsewhere, where

exploration campaigns can be dispersed in time and of insufficient resolution. Recent examples in Rwanda or Ethiopia outlines this difficulty in Eastern Africa to derisk the drilling plans due to the lack of truly integrating techniques, with geophysical data and then geological, geochemical and thermal data to build a conceptual model as precise as possible.

In order to derisk the decisions for drilling a borehole, it is necessary to acquire a better knowledge of both the regional setting of the geothermal resource and the fine structure underground, with the aim of locating the geothermal reservoir, the drains and assessing the resource (permeability, temperature). Geophysical techniques are the only approach to image structures at depth. Nevertheless, we cannot rely on a single geophysical technique to provide these informations given the non-unicity of the solutions of the inverse problem, which may lead to misleading interpretations. When other geophysical data are available (such as seismics and seismology, gravity, static magnetic and electromagnetic techniques), the usual approach is to model them separately and to interpret the models together. A possibility is to combine mathematically these different techniques sensitive to different physical properties, using the joint inversion formalism (e.g. Haber and Oldenburg, 1997, Gallardo and Meju, 2003, Gallardo and Meju, 2007, Infante et al., 2010, Moorkamp et al., 2011, Tarits et al. 2015, Ars et al. 2019).

Here we propose to combine two large set of geophysical data, namely magnetotellurics (MT) and gravity in the Asal rift. In tectonically, volcanic and geothermally active regions, the geological processes (faulting, melting, hydrothermalism) may affect both parameters in a similar way and at the same scale. Therefore, there is an interest to analyze both data together since MT has some substantial vertical resolution power but is measured at a limited number of sites when gravity data have no vertical resolution but cover the study area with a dense network of sites.

MT inversion in 3-D is very time consuming but the final resistivity model is generally robust while gravity inversion in its linear formulation is fast and straightforward but needs external constraints to compensate the lack of vertical resolution. In general, these constraints are introduced as interfaces or volumic structures which enforces somehow arbitrarily these features. The inversion nevertheless accommodates easily them and produces a density model whose response fits the data very well albeit with structures not necessarily required.

An alternative to this approach was to invert the gravity mathematically constrained by a resistivity model obtained from the 3D inversion of existing MT data. The constraints were introduced with the formalism of joint inversion with one or more couplings between density and resistivity. An advantage of this approach was that we could conserve the linearity of the gravity inversion since the resistivity did not change during the gravity inversion. Thus, numerous combinations between gravity and MT models could be tested. We observed that the resulting density models can vary significantly according to the coupling applied offering the possibility to explore somehow the model space for density distributions in relation with the distribution of resistivity. We analyzed the different density models with a multivariate statistical method in order to characterize two processes revealed. We compared the synthesized density models to existing seismic tomography results in the region (Dobre et al. 2007).

Geodynamical context

The Asal Rift (in the Republic of Djibouti) is located at the junction of three rifts: the Red Sea Ridge, the Gulf of Aden and the East African Continental Rift (Figure. 3.1). It is with Iceland, one of the two oceanic ridges that are emerged. With a length of about 40 km, of which 15 km is emerged, it is currently opening at 16 ± 1 mm/year, propagating in the $N40 \pm 5^\circ E$ direction (Ruegg and Kasser, 1987, Magnighetti and al., 1998, Vigny and al., 2007). A dense network of fissures and normal faults $N130 \pm 10^\circ$ characterizes this rift system bounded by the Asal Lake to the West and the Ghoubbet Strait to the East. The Lake Asal, 150 m below sea level, is a hypersaline lake bordered to the North by a salt floe with hydrothermal manifestations (Gasse and Fonte, 1989). The Ghoubbet Bay is a basin directly connected to the Gulf of Aden. It hosts most of the recent volcanism, with the last basaltic eruption of Ardoukobba in 1978 (Demange and al., 1980), which followed the rifting episode resulting in an opening of up to 2 m along the rift with a collapse of about 70 cm of its inner floor (Ruegg and Kasser, 1987). It is constituted exclusively of rhyolites on surface (AQUATER, 1989). This region presents an impressive dense fault network and steam fumaroles. The distribution of

earthquakes is generally concentrated in the Fialé Caldera zone, mainly between 1-4 km in depth (Doubre, 2004, 2007).

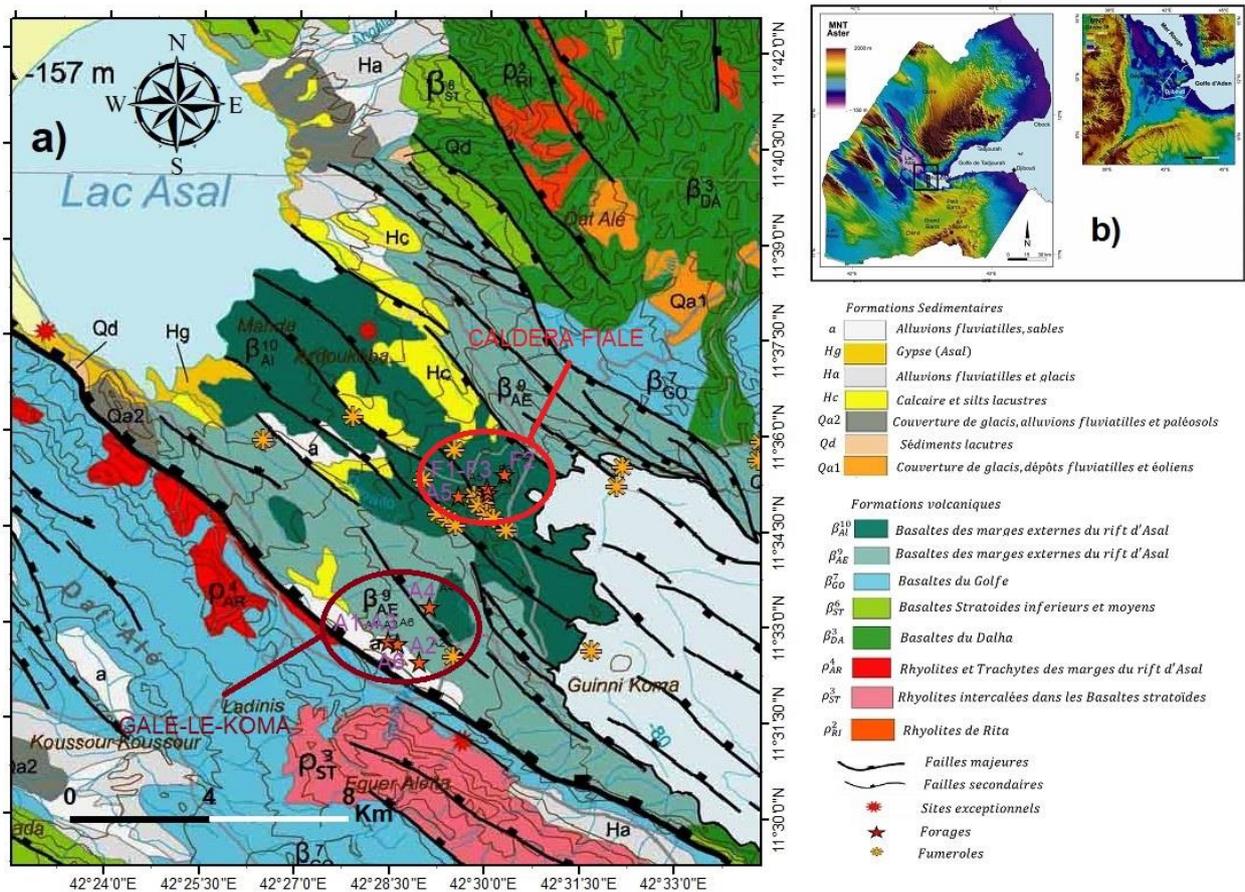


Figure 3. 7 : (a) Geological and structural features with the main geothermal boreholes in the Asal rift (modified from Le Gall et al., 2015). The red ellipses contour the two know geothermal areas, Gale-le-Koma and Fialé Caldera with the positions of the boreholes (b) ASTER digital elevation model, the black rectangle is the study area. The exceptional site represented in red Asterisk is Ardoukoba volcano.

This seismicity present in the southern part of the caldera is attributed to the extension of the rifting episode in 2000-2001 and with deeper magmatic movements. At depths greater than 3.5 km, the rocks in this zone become ductile and show a weak Vp velocity anomaly. Doubre et al, (2007a and b) interpret this zone as the presence of steam, water or gas in the rock pores. This observation is in agreement with the results from a MT study in 1981 by Pham et al. who suggested the presence of a magma chamber (2-4 km) near the Ardoukoba volcano (Figure 3.7). The second seismic zone presents in the older rift to the north of the caldera, is attributed to a tectonic activity resulting from fault slip (Doubre and al, 2007).

Six boreholes (A1-6) have been drilled between 1975 at 1989 m to depths between 1137-2105 m (Elmi, 2005). In 2018, three new boreholes (F 1 to F3) were drilled respectively at 2237 and 2443 m in the Fialé caldera area (Figure 3.7) west of Ghoubbet (Turk et al., 2019).

Magnetotellurics

In the framework of a geothermal project between Iceland and Djibouti, a MT and TDEM study was carried out in 2007 (Árnason, 2008, Khodayar, 2008) in collaboration with Iceland Geosurvey (ISOR), Reykjavik Energy Invest (REI) and the Centre d'Etude et de Recherche de Djibouti (CERD). Árnason (2008), Sakindi (2015) and Aden (2023) combined MT and TDEM data to obtain 1D, 2D and 3D resistivity models to describe the geothermal reservoirs.

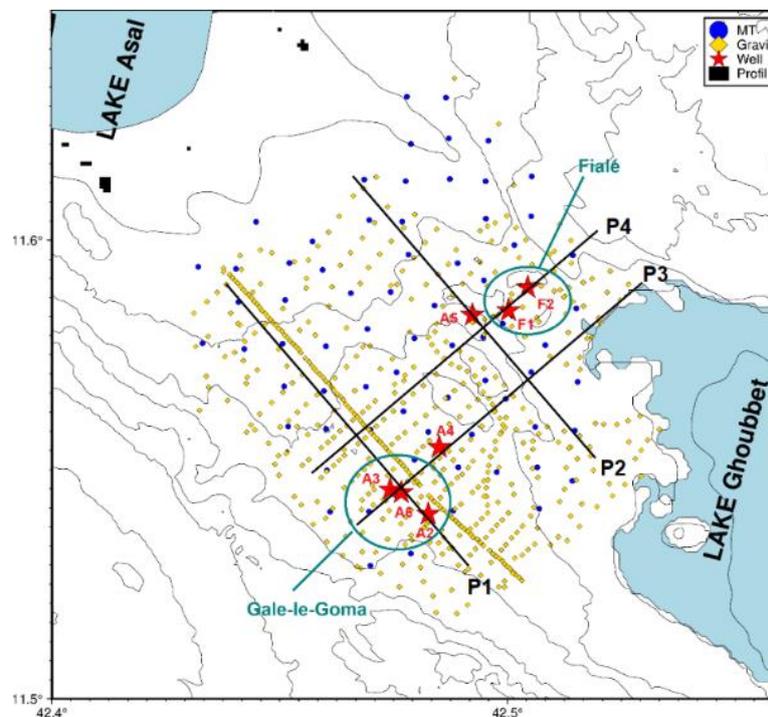


Figure 3. 8 : Asal Rift study area, gravity data in orange, MT data in blue, boreholes in red star and black lines are the profiles (P1 to P4). The purple circle is the Fialé caldera (FC) zone and the blue circle the Gale-le-Koma (GK) zone.

The MT array consists of 107 sites (Sakindi, 2015) recorded with Phoenix MTU-5A system and processed by ISOR with a software provided by Phoenix (Phoenix Geophysics, 2005) using the robust processing of Egbert and Booker (1986). The MTU system recorded the two horizontal

components of the electric field (E_x and E_y) and the three components of the magnetic field (H_x , H_y and H_z) for 8 hours. A remote reference station (Gamble et al, 1979) was set 10 km away from the study area (Sakindi, 2015). For this study, we selected 79 MT sites (Figure. 3.8).

Since our objective was to combine mathematically the gravity data and a resistivity model, we performed our own 3D MT inversion of the impedance tensors at all stations and at all available periods with the IMAGIR's software, MINIM3D (Hautot and al, 2007). The algorithm is based on an iterative procedure to minimize a cost function with a misfit and a regularization term (Hautot and al, 2007). The misfit is between the measured data (the four components of the MT impedance tensor at all available frequencies) and the model response. The error used is the calculated standard deviation with a minimum error floor of 1.5 % and 7.5% of the amplitude of the off-diagonal and diagonal components respectively.

After a study of the strike direction, we used a $29 \times 28 \times 14$ grid oriented along the direction N320 that controls the directionality of the MT tensor and corresponds to the direction of the rift propagation (Ruegg and Kasser, 1987, Magnighetti and al., 1998). The grid dimension is 12.4 km to the NW and 12 km to the SE down to 13.4 km in depth

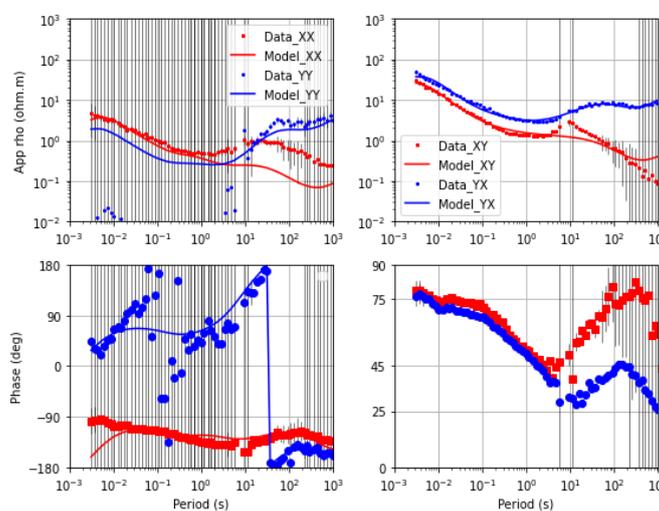


Figure 3. 9 : Example of site 108: Left: apparent resistivity and phases of the diagonal components (XX in red, YY in blue); Right: off-diagonal (XY in red, YX in blue) as well as the model responses.

. The starting model is a homogenous half space of 10 ohm-m. The initial root means square (RMS) of 25.1 was reduced to 4.1. The relatively large final misfit is explained by the small values of minimum error floors applied. The Figure 3.9 shows an example of the

apparent resistivity and phase observed at one site (#108) with the response of the 3D model. We present the responses of the other sites in supplementary section Figure S3.5.

The final 3D resistivity model is presented in full as horizontal sections as a function of depth in Supplementary S1. In Figure 3.10 we selected four profiles P1-P4 (Figure 3.8) to display the resistivity sections across the main tectonic and geothermal features of the Asal Rift. Profiles P1 and P2 are along the rift. Profile P1 crosses the Gale-le-Koma geothermal site and P2 the Fiale caldera. Profiles P3 and P4 are across the rift. P3 also cross the main geothermal targets of the area and P4 the Fiale caldera (Figure. 3.7 and 3.8). The sections were limited to 4.5km since the distribution of gravity data used (see next section) cannot resolve structures deeper.

The upper resistive layer (Figure. 3.10) is associated to lava layers from the recent volcanic sequence (AQUATER 1989). In supplementary section (Figure S 3.1), we observed a conductive zone at the NW and SE, which gradually develops in the layers at -48 m to -152 m. This characteristic could be related to the effects of seawater intrusion (Orkustofnun, 1988) from the SE to the NW. The model also revealed a conductive zone down to ~1000 m deep (Figure 3.10).

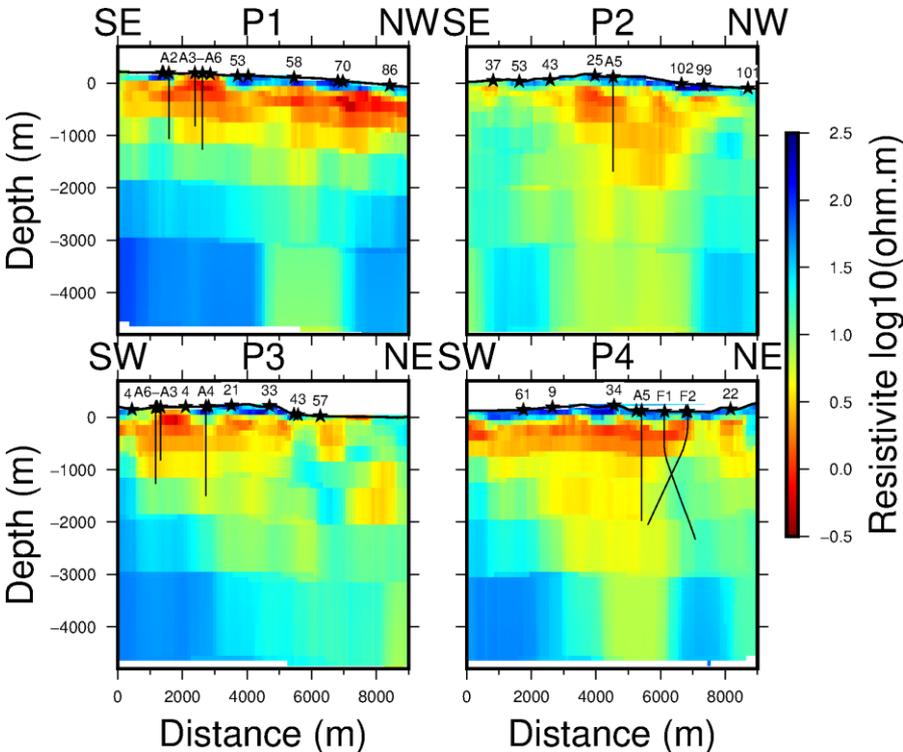


Figure 3. 10 : Vertical section of the 3D model, along the profiles of Figure 3.8

This conductor correlated with deep fluid circulations linked to the intrusion of seawater into Lake Asal. Mlynaski et al (2001) carried out a self-potential and telluric-telluric survey which indicates that the main fluid circulating in the shallow depths (<1Km) is seawater from the bay of Ghoubbet. Geochemical analyses (Bosch et al., 1977, Fouillac et al., 1983, Sanjuan et al., 1990) have demonstrated the presence of seawater in springs on the shores of Lake Asal and in boreholes in the Gale-Le-Koma area. In the Supplementary section (Figure S 3.1), between layers at -1054 and -3774 m, the resistivity gradually increases in the whole area excepted in the central part where a conductive anomaly is present. Between layers at -3774 m and -5774 m (Figure S 3.1), this conductive anomaly could be magma chambers suggested by Pham et al (1981) and Doubre et al. (2007).

Gravity inversion

The gravity data used (Figure 3.8) come from a survey carried out by the French Geological and Mining Research Bureau (BRGM) in the Asal rift in 1979 and 1980 (Demange and Puvilland, 1990). They used a LACOSTE-ROMBERG gravimeter (model D.N 24) and a Worden gravimeter 641. The data only existed in Djibouti in the form of a printed report (BRGM 80 SGN 525 GTH Report). Therefore, we had to scan all available information at all sites. After examination, we observed that some were duplicates and we obtained a total of 418 sites. The geographic coordinates of the time are in the old reference system from Clark (1880). Thanks to the International Gravimetric Bureau (BGI) help, we were able to convert all the data into the WGS84 reference system. The BRGM calculated the field correction up to a distance of 22 km around the measurement points, using the Hammer system. We also noticed some inconsistency between the digitized altitudes and the altitudes of a DTM 30 m with differences about 100 m for some sites. We do not have a clear explanation for this. Nevertheless, we preferred to keep the digitized altitudes measured in the field.

We recalculated the complete Bouguer anomaly (CBA), using a reference density of 2670 Kg/m³ determined with the Nettleton method. The Bouguer anomaly (Figure 3.11a) recalculated is similar to that presented in the BRGM report. Since the Asal area is only about 12 x 12 km, we removed a second-order polynomial from the data set to outline the short-wave lengths and obtained the residual Bouguer anomaly (RBA) presented in Figure 3.11b.

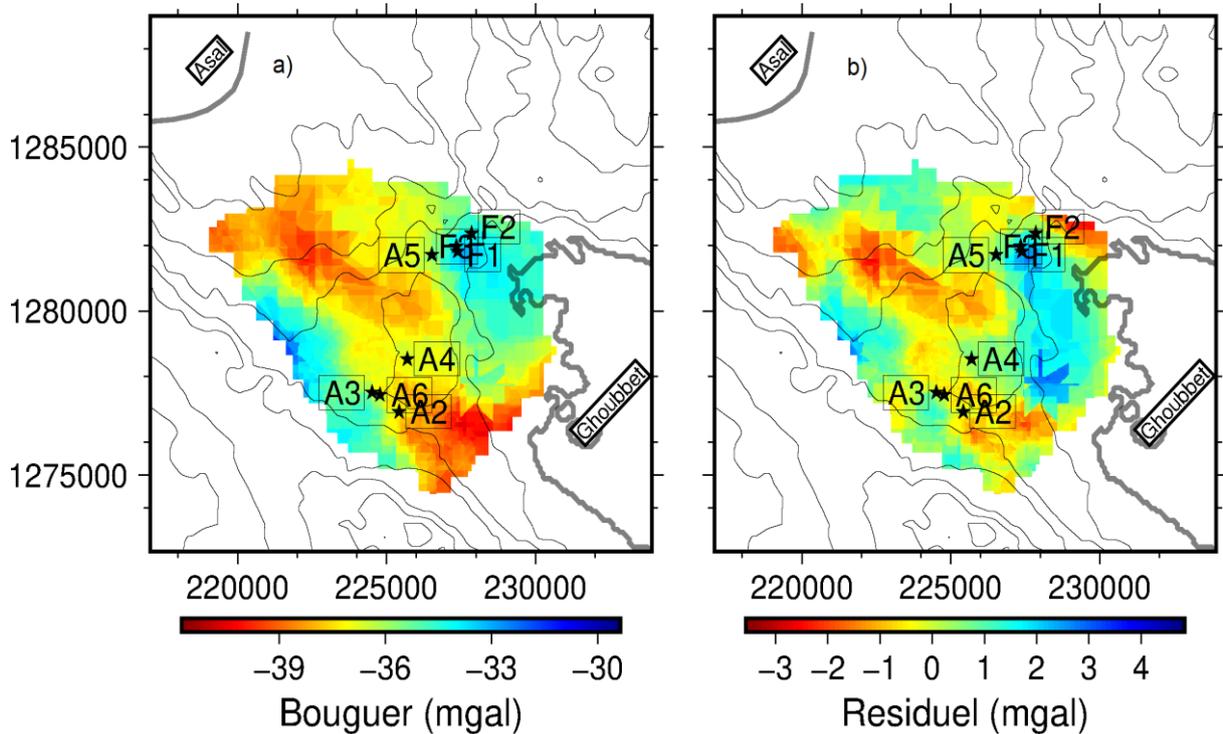


Figure 3. 11: Complete Bouguer anomaly and (b) Residual Bouguer anomaly

The RBA shows an alternation of positive and negative anomalies from the NE to the SW (Figure 3.11b). The positive anomalies coincided with recent volcanism (the 1978 magmatic episode) with basaltic and pyroclastic lava flows also observed in the hyaloclastite formations found in the Gale-le-Koma boreholes (Figure 3.8) (AQUATER 1989). The negative anomalies along the NW-SE trend of the rift could either be associated with a strongly faulted or highly or is the signature of the magmatic chamber proposed by Pham et al. (1981) and Doubre et al (2007), also suggested in the resistivity model (S1).

Gravity constrained inversion

Gravity inversion is linear with respect to density when we set the inversion grid and infer only the density distribution.

We set the inverse gravity problem as a linear relationship between the RBA and the density distribution (e.g. Aster et al. 2013). In matrix form, the linear relationship between the vector density contrast in each prism \vec{d} and the gravity \vec{g}_{cal} writes:

$$\overline{g_{cal}} = \mathbf{G}\vec{d} \quad (3.1)$$

\mathbf{G} is the kernel matrix. The inverse problem consists of finding the minimum of the cost function:

$$\phi = \|(\overline{g_{obs}} - \mathbf{G}\vec{d})\|^2 + \lambda\|\mathbf{W}\vec{d}\|^2 \quad (3.2)$$

With no information about the noise in the data, we set the data standard deviation to 1mgal. The cost function contains two terms, the misfit term between the observation and the model response, and regularization function, here the minimum energy, weighted by a coefficient lambda. \mathbf{W} is a matrix of weights, which varies only with depth z with a reference thickness z_0 and an exponent beta β controlling the rate of weighting with depth (Li and Oldenburg 1998).

$$\mathbf{W} = \frac{1}{(z_0+z)^\beta} \quad (3.3)$$

The vector $\overline{g_{obs}}$ is the RBA of size M and \vec{d} is the vector of the density contrast distribution in N cells of the density model. The term \mathbf{G} is a $M \times N$ matrix of the kernels function of the relative positions between the observation site and a given cell. The inverse gravity problem is fundamentally non-unique and different solutions maybe obtained depending on the chosen parametrization of the medium (e.g. Li and Oldenburg 1998). In practice, the models derived from the inversion tend to organize the density contrasts to the near surface.

The solution of (3.2) is:

$$\vec{d} = (\mathbf{G}^t\mathbf{G} + \lambda\mathbf{W})^{-1}\mathbf{G}^t\overline{g_{obs}} \quad (3.4)$$

and will be referred as the unconstrained inversion in the following.

We couple the density contrast distribution to another parameter in the inversion process with the addition of coupling terms in Eq. 3.2. The new cost function becomes:

$$\phi = \|(\overline{g_{obs}} - \mathbf{G}\vec{d})\|^2 + \lambda\|\mathbf{W}\vec{d}\|^2 + \alpha_1 CO_{cg}^2 + \alpha_2 CO_{cp}^2 \quad (3.5)$$

CO_{cg}^2 and CO_{cp}^2 are two different coupling terms and α_1, α_2 their weighting coefficients. Tarits et al. (2015) inverse gravity data in 2-D with three coupling terms with resistivity models. They observe that the density contrast models could vary significantly depending on the type of coupling chosen while almost perfectly fitting the gravity data. Hence, in the work presented in this article, we adopted a purely linear approach in order to be able to run a large number of inversions to investigate the variability of the density contrast models according to different

couplings. We used two different couplings, one between parameters density and resistivity and one between their gradients using a cross product (Gallardo and Meju, 2003, 2004, 2007).

The solution for the minimum of new the cost function in Eq. 3.6 is:

$$\vec{d} = (G^t + \lambda W + \alpha_1 \mathbf{Zcg} + \alpha_2 \mathbf{Zcp})^{-1} G^t \vec{g}_{obs} \quad (3.6)$$

The terms \mathbf{Zcg} and \mathbf{Zcp} are the matrices of partial derivatives of the coupling terms with respect to every density contrast

Coupling by cross-gradient

The cross-gradient approach developed by Gallardo and Meju (2003, 2004, 2007) enforces the geometric similarity between structures revealed by different techniques. The coupling function in a joint inversion formulation is non-linear since both density and resistivity vary. Here the resistivity is fixed and acts as a geometrical constraint for the gravity inversion. Thus, the cross gradient becomes linear with respect to density. We defined the cross-gradient coupling as follow:

$$CO_{cg}^2 = \sum_{m=1}^M |\nabla d \times \nabla r|^2 \quad (3.7)$$

where ∇d and ∇r are the gradient of the model of density contrast and the log10 of the resistivity respectively. When the models have identical contours, the gradients are parallel and the cross product is zero. The analytical form of the derivative of CO_{cg}^2 with respect to each density parameter Zcg (Eq 3.6) is presented in Appendix 1.

Coupling by parameter correlation

The correlation between two parameters is the basis of the parameter correlation coupling. This correlation writes:

$$\gamma = \frac{(\sum_i r_i d_i)}{(\sum_i r_i^2 \sum_i d_i^2)^{1/2}} \quad (3.8)$$

with $(\sum_i r_i d_i)$ the covariance between resistivity and density parameters. The correlation measures the possible linear relationship between the two parameters in the whole model.

This coupling is more complicated to implement than the cross gradient in the linear cost function since its form (3.8) it is non-linear with respect to the density (Liu et al. 2022).

Thus, we used the following form for the coupling coefficient CO_{cp}^2 .

$$CO_{cp}^2 = \sum_i r_i^2 \sum_i d_i^2 - (\sum_i r_i d_i)^2 \quad (3.9)$$

The coupling term becomes linear with respect to the density contrast but no longer insures that γ^2 tends toward 1 when CO_{cp}^2 tends toward zero. Two solutions are indeed possible, either $\vec{d} \rightarrow 0$ or $\gamma^2 \rightarrow 1$ (or both) In other words, CO_{cp}^2 not only optimize the correlation between density and resistivity but also acts as a regularization term enforcing the density contrast to be minimum. We tested this behavior in various synthetic inversion tests and observed that the inversion converged toward the correct solution independently of the damping parameter λ of the original regularization terms (see the synthetic tests section below). However, for real data (see the section on the inversion of real data in Asal rift) we observed that as long as λ in the regularization term in equation 3.6 is not zero, CO_{cp}^2 combines with the original regularization term to minimize preferably the density rather than optimizing the correlation. When lambda was exactly zero, CO_{cp}^2 balanced between \mathbf{d} minimum and an optimum correlation. So, we set lambda to zero whenever we used the parameter correlation coupling for real data.

With the new formulation of CO_{cp}^2 (Equation 3.9), the calculation of the derivatives with respect to density to build the matrix Z_{cp} is straightforward:

$$\frac{\partial CO_{cp}^2}{\partial d_i} = \sum_i r_i^2 d_i - r_i (\sum_i r_i d_i) \quad (3.10)$$

Synthetic tests

We generated synthetic gravity data (with no noise) to test the behavior of the inversion with the different couplings. The first objective was to check problems related to the function parameterization or for numerical testing purposes. We used several types of synthetic models with varying shapes (L, U, W and Z), depths and densities. We did not present these technical tests here. The second objective was to quantify the relative weights between regularization and couplings with respect to misfit (Eq.3.2).

The theoretical model used for this purpose consists of a conductive background of 1.44 Ohm-m, and a density contrast of 0 kg/m³ for the resistivity and density models

respectively. These media contained a 3-D shallow rectangular structure (from 400 to 800 m in depth) of 10 Ohm-m and density 2000 kg/m³ and another 3-D deep rectangular structure of resistivity (from 2000 to 4500 m in depth) 100 Ohm-m and a density 2400 kg/m³. These two structures are 2000x 2000 m wide. The Figure 3.12a and b show a median vertical section of the model. Since the resistivity does not change during inversion, the resistivity model is only a fixed image. However, the size, depth and resistivity values were taken from the actual MT resistivity model described before.

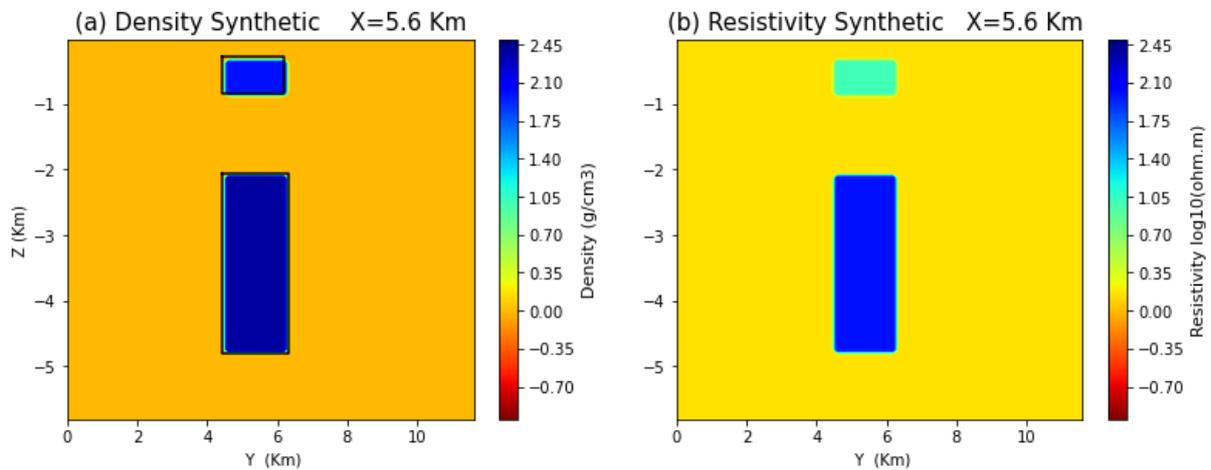


Figure 3. 12: Central Vertical section across the synthetic models. a) Synthetic density model and b) Synthetic resistivity model.

We used a common grid for the density and the resistivity distributions. The grid is 11.6km x 11.2km wide and 5.8 km deep. The number of cells is 29x 28 x12 parameters. The width of the horizontal cells is constant while their thickness increases with depth. The size of the gravity network limited the maximum depth of investigation to 5-6 km.

The reason to use a synthetic model inspired by the structures observed in the MT resistivity model was to generate the synthetic gravity data at the 641 observation sites. We also added the topography and bathymetry to introduce surficial features in the synthetic inversion.

The first step in our series of tests was to determine the optimum λ value for the regularization and the depth weight factor β (Eq. 3.2) with a L-curve approach for the unconstrained case ($\alpha_1=\alpha_2=0$). In Figure 3.13, we show the vertical section of Figure 3.12. For a model obtained by the unconstrained inversion with $\lambda=10^{-7}$, and the exponent of the vertical weights W_z (Eq. 3.3) β equal to 0, 1, and 1.5. The response of these synthetic models always

fit very well the data (a fit about numerically zero). In figure 3.13, we observe the classical behavior of a gravity inversion without external constraints with structures distributed in the near-surface for $\beta = 0$ and an improvement in the vertical distribution of density when β increases although we cannot distinguish the two structures. From now on, we used $\beta=1.5$ for the synthetic tests.

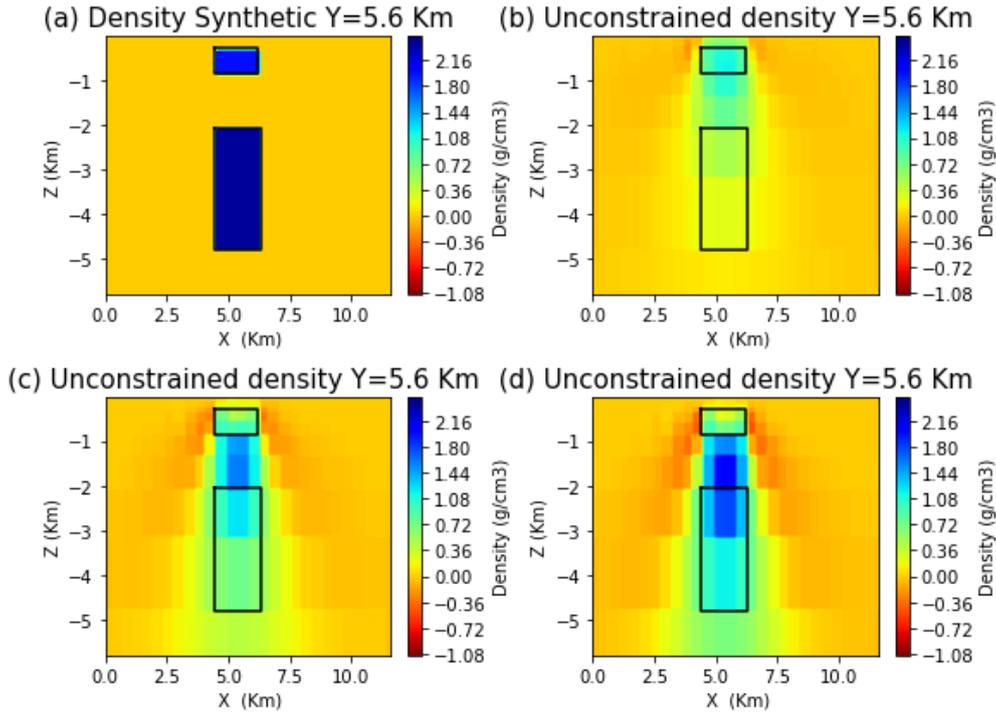


Figure 3. 13: Unconstrained model (for $\lambda= 10^{-7}$) different β (see text for details) (a) $\beta=0$, (b) $\beta =1$ and (c) $\beta =1.5$ for the vertical section of Figure 3.12.

The next step was to run a large number of inversions with different values of the coupling weights α_1 and α_2 to test both cross gradient (CG) and parameter correlation (CP) couplings. In Table 3.1 we present two examples of results for different inversion parameters. To compare the resulting models to the original image, we calculated the correlations between the parameter density and resistivity and their gradients for all models. These correlations were calculated as follow:

$$\text{Corr}(d, r) = \frac{\text{cov}(d, r)}{(\text{var}(d) * \text{var}(r))^{1/2}} \quad (3.11)$$

$$\text{Corr}(\nabla d, \nabla r) = \frac{\text{cov}(|\nabla d|, |\nabla r|)}{(\text{var}(\nabla d) * \text{var}(\nabla r))^{1/2}} \quad (3.12)$$

The values d and r , are respectively the density contrast and the \log_{10} of the resistivity. With this formulation, $\text{Corr}(d, r)$ can be positive or negative while $\text{Corr}(\nabla d, \nabla r)$ is always positive since we used the magnitude of the gradients.

| | λ | α_1 | α_2 | correlation with resistivity | correlation with gradient resistivity |
|---|-----------|--------------|------------|------------------------------|---------------------------------------|
| a | 10^{-7} | 0 | 0 | 0.12 | 0.28 |
| c | 0 | 0 | 10^{-9} | 0.92 | 0.80 |
| d | 10^{-7} | $10^{-13.5}$ | 0 | 0.39 | 0.72 |
| e | 0 | 10^{-8} | 10^{-8} | 0.97 | 0.97 |
| f | 10^{-7} | 10^{-11} | 0 | 0.41 | 0.83 |

Table 3. 1 : Setting and results for different inversion runs: (a) unconstrained inversion, (c) and (e) inversion parameter correlation, (d) and (f) cross-gradient coupling for different coupling coefficients α_1 and α_2 . The two right columns display the correlation of the density model with resistivity image and the correlation of its gradients with the gradient of the density.

Figures 3.14 shows the results for the vertical section of Figure 6 for two constrained inversion by parameter correlation (c) and (e), and two by cross gradient (d) and (f). The amplitude of the weighting coefficients λ , α_1 and α_2 depends on the amplitude of the units and number of cells in the coupling terms (Eq. 3.6). They were adjusted so that the product of the weights and the corresponding coupling terms was within a few orders of magnitudes of the misfit. While the parameter constraint (CP) restored very well the two stage structures (Figure 3.14ce), the cross gradient (CG) coupling (Figure 3.14df) depends significantly on the amount of weighting α_2 to reach a result of quality of those from CP inversions.

The synthetic tests demonstrated that the linear constrained inversion by cross gradient and parameter correlation efficiently retrieved the synthetic models. Nevertheless, care is required to balance the various weights to converge toward the best model. Not shown here, when the misfit and a coupling dominate over regularization, instabilities may appear with spurious effect at the edges of the structures. A dominant regularization and coupling over the misfit reduced the instabilities but the density contrast of the shallow structures decreased significantly. It is therefore necessary to find a balance between the misfit and the regularization with a strong coupling.

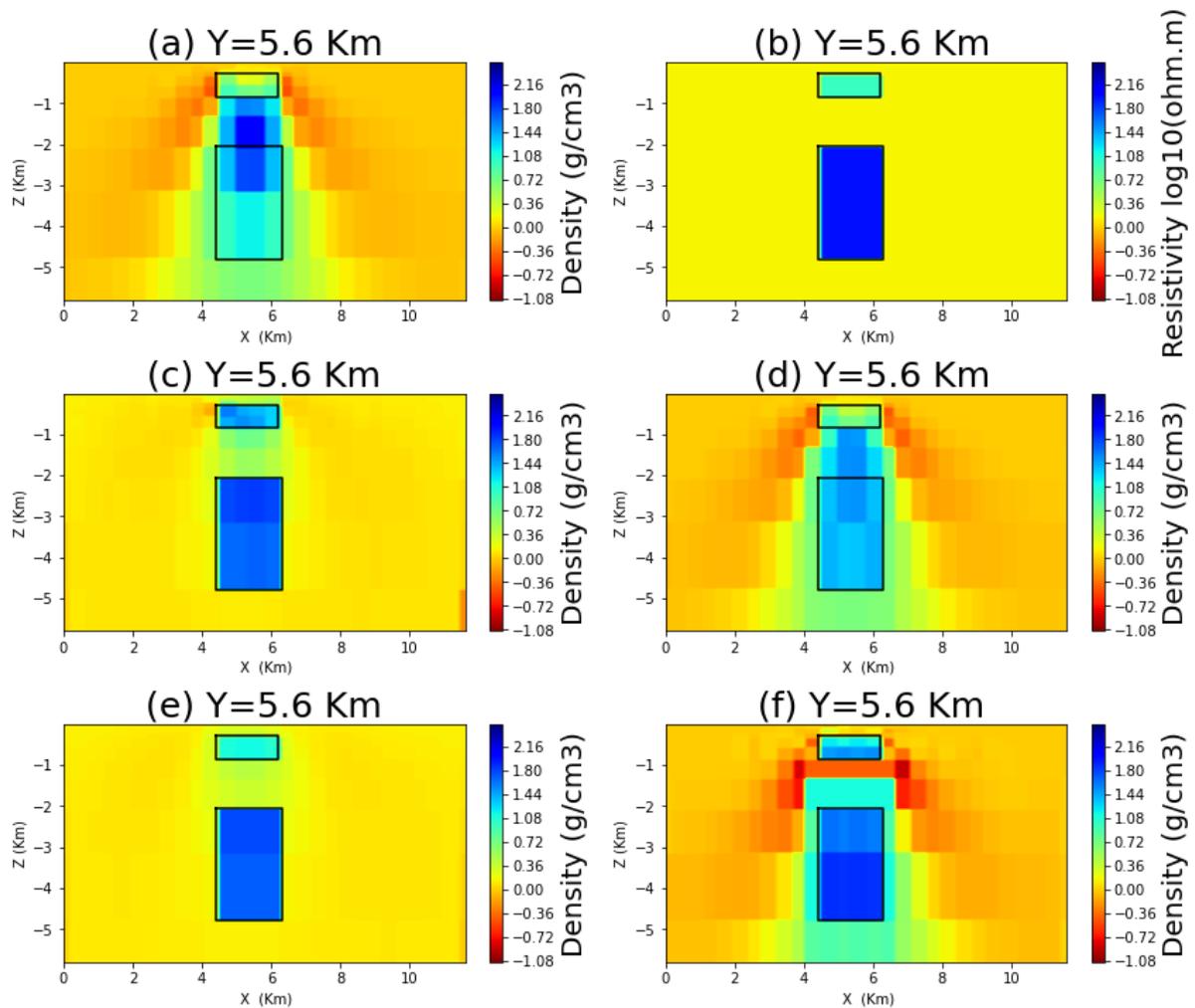


Figure 3. 14: (a) unconstrained inversion, (c) and (e) parameter correlation and (d) and (f) cross-gradient coupling, for different coupling coefficients (Tab. 1). (b) synthetic resistivity model.

Inversion of Asal rift gravity data

We applied the proposed methodology on the data collected in the Asal rift (Figure. 3.8) We used the RBA at all 641 sites (Figure. 3.11b) to perform the gravity inversions presented below. The medium was gridded with 29x28x14 rectangular prisms for a 11x11x5.8km density block. The residual Bouguer anomaly (RBA, Figure 3.11b) can characterize structures down to about 4-5 km in depth because of the size of the area covered by the data and the removal of the long wavelength in the Bouguer anomaly. The topography and bathymetry (Asal lake and Ghoubett gulf) effects were included in the inversion. We run several inversions with different values for α_1 and α_2 to study the influence of these weights on the resulting models. For all the inversions, the RMS was always less than 1mgal. The

exponent β (Eq 3.3) was set to 0.5, determined with a L-curve analysis for the unconstrained inversion. The later also provided an estimate for λ (Table 3.2). This regularization was used for both unconstrained and CG inversions (Eq 3.6). For the CP inversions, the regularization weight lambda was set to 0.

We observed that density models varied significantly with the type and amount of coupling. We present three examples in Figure 3.15 for a single profile (P1, Figure 3.8) to illustrate this observation. The weight coefficients are presented in Table 3.2 along with the correlations between the density and resistivity and their gradients.

| | λ | α_1 | α_2 | Parameter Correlation | Gradient Correlation |
|---|-----------|------------|------------|-----------------------|----------------------|
| a | 10^{-7} | 0 | 0 | $7 \cdot 10^{-2}$ | 0.27 |
| b | 0 | 0 | 10^{-13} | 0.64 | 0.60 |
| c | 0 | 0 | 10^{-10} | 0.63 | 0.58 |
| e | 10^{-7} | 10^5 | 0 | $7.2 \cdot 10^{-2}$ | 0.15 |
| f | 10^{-7} | 10^6 | 0 | $6.3 \cdot 10^{-2}$ | 0.28 |

Table 3. 2: (a) unconstrained inversion, (b) and (c) correlation of inversion parameters, (e) and (f) cross-gradient coupling for different coupling coefficients α_1 and α_2 .

The density model for the unconstrained inversion (Figure 3.15a) shows structures within 1000m in depth and very weak contrasts below. The introduction of a priori information from the resistivity model through the couplings helped to retrieve structures in depth (Figure 3.15bcef).

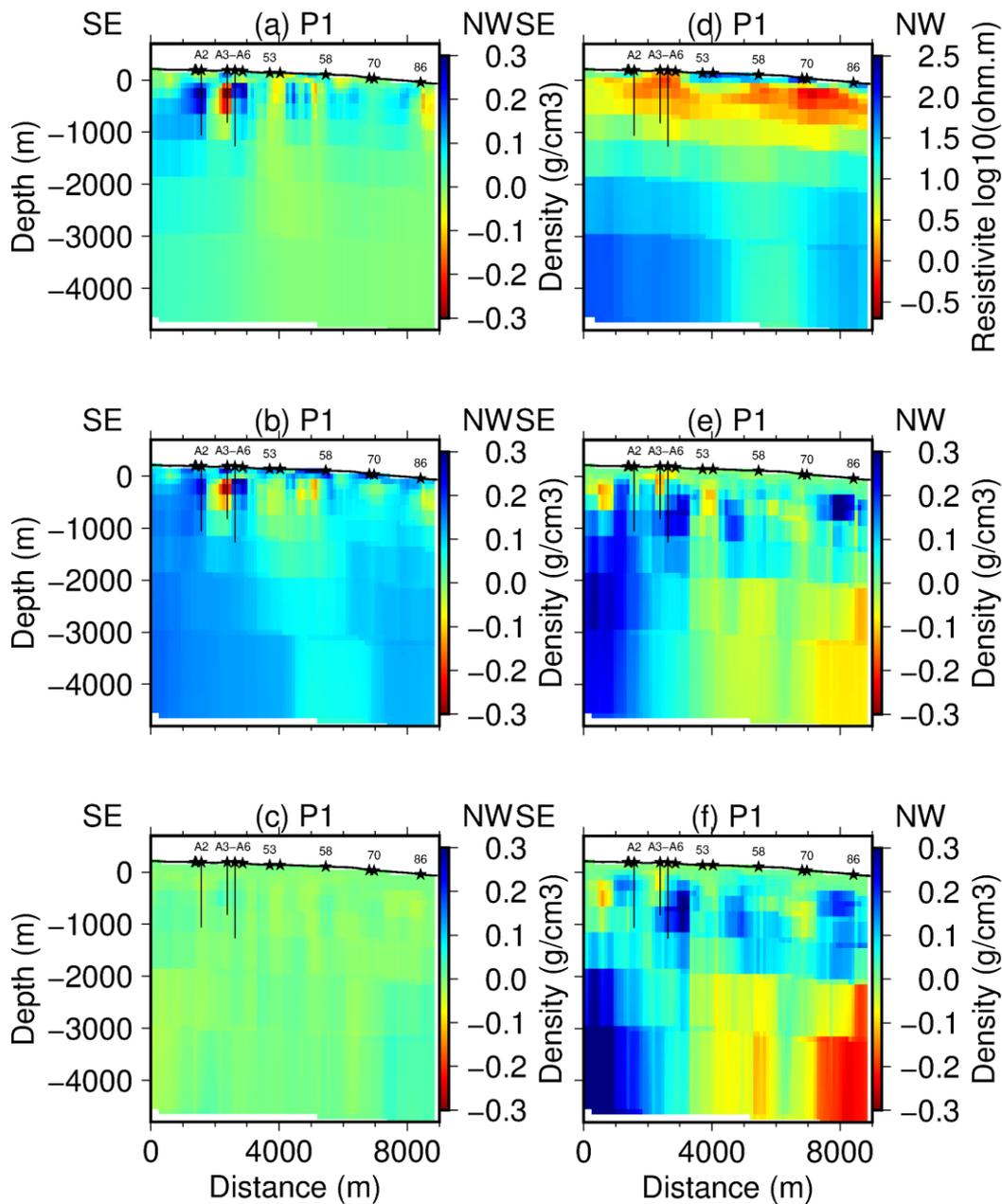


Figure 3. 15: Profile P1 (a) unconstrained inversion, (d), resistivity model (b and (c) inversion parameter correlation, (e) and (f) cross-gradient coupling for different coupling coefficients α_1 and α_2 (Tab. 2).

The CP coupling (Figure 3.15bc and Table 3.2) led to density models that correlated well with the resistivity model (Table 3.2) but with significant smoothing when the CP weight α_2 increased. Note that the correlations in Table 2 are for the whole model and may vary from one area to the other. Hence, we do not observe a strong visual correlation in the first ~1000m between density contrasts and resistivity (Figure 3.15d) in profile P1. The CG coupling led to density models (Figure 3.15ef) with more contrasted structures than for CP models (Figure 3.15bc) with less correlation with the resistivity (Table 3.2). For this CG coupling, increasing

the coupling weight enhanced the contrasts without changing the model (Figure 3.15ef). The most striking feature is the difference between the CP and CG models.

The many CP and CG inversions we ran with different weights showed a significant variability between models with always a good fit. The type and amount of coupling generated a series of acceptable models within the model space that are coupled to the resistivity distribution. The approach used seemed to provide a tool to explore this model space. The observed variability can be synthesized into a variance-covariance matrix between all models (we excluded the unconstrained model since it is not coupled to resistivity and the extreme cases of CG and CP couplings). Then in order to determine whether a small number of structures could explain the observed variance-covariance, we used a multivariate descriptive statistic, the Principal Component Analysis (PCA) (eg. Albarede, 1995).

The PCA is the calculation of the covariance matrix eigenvalues sorted in descending order and their associated eigenvectors. The eigenvalues are the variances of the covariance matrix along the eigenvectors. Here we used the reduced density models centered and normalized by their standard deviation. The covariance matrix for the reduced models is the correlation matrix of the original set of models. For this correlation matrix, the sum of the eigenvalues is the number of models. Dividing the eigenvalues by the number of models provides the fraction of variance explained by a given eigenvalues. In general, only the 2-3 first highest eigenvalues are significant, explaining most of the model's variance. Here we interpreted these eigenvalues as different processes controlling the density in relation with the resistivity distribution.

To perform the PCA, the N constrained density models of M parameters are stored in a matrix A (M × N). and its correlation matrix is (T is for the transpose):

$$R = \frac{(A' \cdot A'^T)}{(M-1)} \quad (3.13)$$

The reduced models as defined above are stored in a matrix A'. According to the spectral decomposition theorem (Wilks 2006), we have:

$$R = [E][\Lambda][E]^T \quad (3.14)$$

Where $[\Lambda]$ is a diagonal matrix (N × N) whose non-zero elements Λ_{jj} are the eigenvalues of R. The columns of the orthogonal matrix [E] are the N eigenvectors of R such that:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^N (E_{ij})^2} = 1, \forall j = 1, \dots, N, \quad (3.15)$$

Where E_{ij} are the elements of E

The fraction of the global variance F_j associated with each j th eigenvector is defined as follows.

$$F_j = \frac{\rho_{jj}}{N} \quad (3.16)$$

Each eigenvector is a linear combination of all density models. However, from (3.14), we observed that changing the sign of any eigenvector does not change Eq 3.14. The sign of the vector is randomly set by the diagonalization algorithm used. In general, this is not an issue because the variables are often of different nature (e.g. Albarede 1995). Here, we seek density contrast models along the eigenvectors for which the sign of the density contrast has a signification. Thus, we should control this sign. We retrieved this information from the correlations between the models and the eigenvectors, known as loadings (e.g. Albarede 1995) at least for the first 2-3 eigenvalues. For these eigenvalues, we expect the correlation to be high for at least one density model and must be positive for this model since all variables are density values. We calculated the loading matrix as follow (Albarede, 1995):

$$Loading = [E] \times \sqrt{[\Lambda]} \quad (3.17)$$

Finally, we projected the original density models on to the eigenvectors. We call these new density models PCA models. The PCA models combine all density models according to the corresponding eigenvector values. Since there is only one earth density distribution, the PCA models are not strictly interpretable in terms of density. Instead, they tell us where to expect density contrasts, and whether the density is less dense or denser than the reference value for a given process characterized by an eigenvalue.

We performed the PCA analysis on a selection of 10 models with the 2 couplings CP+GC. We also performed the PCA on either CP or CG models and on a larger set with extreme cases in the weight values. We always obtained that the three first eigenvalues exceeded 80% of the total variance. We interpreted this result as the evidence of more than one process common to all the density models. For these models, we calculated the correlation between the density contrasts of the PCA models and the resistivity as well as the correlation between their gradients (Table 3.3).

| Modèles PCA | Eigenvalue (%) | Parameter correlation | Gradient correlation |
|-------------|----------------|-----------------------|----------------------|
| PCA-1 | 54 | 0.51 | 0.56 |
| PCA-2 | 17 | -0.41 | 0.61 |
| PCA-3 | 10 | 0.62 | 0.63 |

Table 3. 3: Statistics of the PCA models for the first 3 eigenvalues exceed 80% of the total variance.

We show in Figures 3.15-3.16 the PCA models for eigenvalues 1-2 (called PCA1 and PCA2) as vertical sections along the four profiles of Figure 3.8 and comparison with the resistivity vertical sections (Figure 3.10). The full models as horizontal sections for eigenvalues 1-3 are displayed in Supplementary section, Figures S2-S4. The statistics for these PCA models are in Table 3.3. We observed significant correlations with the resistivity model. Noteworthy, the PCA density is negatively correlated to the resistivity for eigenvalue 2 and positively correlated for eigenvalue 1 (Table 3.3).

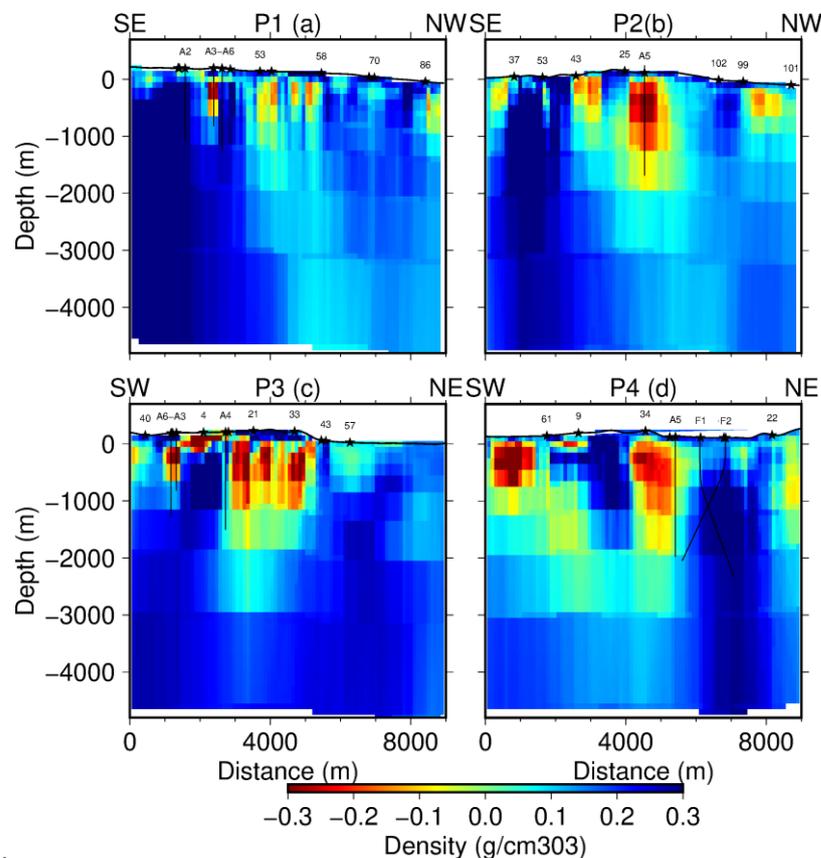


Figure 3. 16: PCA model density for eigenvalue VP1

We observed in all four profiles in Figures 3.10 and S1 that the conductive layer within 1km depth, interpreted as a clay cap, is not continuous laterally in the PCA models (Figures 3.16-3.17 and S2-4) in relation with the NW-SE fractures of the rift and the localized structural features such as the Fialé caldera. This observation is in contrast with the resistivity distribution in this layer, related to the hydrothermalism that affects nearly uniformly the area. The PCA1 model becomes featureless below ~1km. The PCA2 model however, has structures down to 4-5 km, similar to the resistivity model (Figure 3.10 and S1). The PCA3 model (figure S4) is only shown in the supplementary section. This model is quite similar to the PCA2 model (Figure S3 and Table 3.3), down to 1634 m depth.

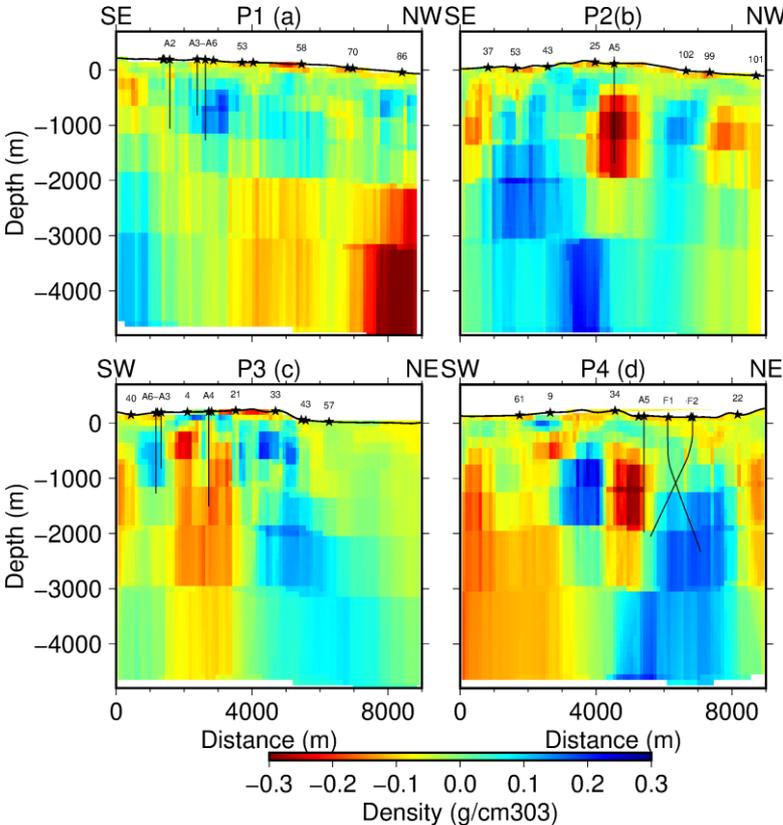


Figure 3. 17: PCA model density for eigenvalue VP2.

Discussion

The analysis suggested different processes dominating the data. The distinct PCA density models suggested at least two dominant processes acting on the density and resistivity. The resistivity distribution seemed related mostly to the geothermal and magmatic structure of the rift while the structural history of the rift dominantly controlled the density. These processes are necessarily interconnected hence the complicated patterns observed in all models. The possible existence of apparently contradictory positive or negative correlations between resistivity and PCA densities is in agreement with the complexity of the area. Resistivity and density may be correlated or anticorrelated in some circumstances. Minute quantity of highly conductive material (charged waters, clays) may be considerably decreased the resistivity with an imperceptible change in the density. Hence the correlation would be negative. On the contrary, a highly fractured permeable medium filled with light conductive material (charged water, magma) could decrease both density and resistivity and the correlation would be positive. A rock matrix with little fluids would be resistive and dense so again with a positive correlation. The comparison with the tomography imaging by Doubre et al. (2007) in the central part of the rift seems to back up our analysis. There are rapid lateral variation in the velocity model visually correlated with the structures outlined in the PCA models and not in the resistivity model excepted at 4-5 km. There the models of velocity, resistivity and PCA2 density seem to agree for a structure that could be a magmatic chamber beneath Fiale Caldera.

At the scale of the geothermal areas of Gale-le-Koma and Fiale Caldera (Figure 3.7), the comparison between the PCA models and the resistivity distribution clearly outlined the high complexity of the subsurface. We observe in both the PCAs models and the velocity model of Doubre et al. 2007, compartments connected or not by faults and fractures with rapid changes in the physical properties. The resistivity shows conversely, that the geothermal system extended rather evenly across the whole area. This contrasted image given by the different techniques could explain the difficulty encountered in the boreholes of both geothermal areas with highly saline waters in Gale-le-Koma or small permeability and in some places cold waters in Fialé Caldera.

Conclusion

We developed a linear constraint inversion technique based on joint inversion formalism to analyze gravity data with respect to a 3D resistivity model obtained from a magnetotellurics (MT) survey in the same region. We tested the approach on gravity and MT data in the region of Asal Rift in Republic of Djibouti. We observed that the intrinsic non-uniqueness of the gravity inversion led to a large variability in the density models depending on the type and weight of each coupling. We applied the principal component analysis technique so we could synthesize the density models. We discussed their meaning with respect to the resistivity distribution and existing velocity images from a previous study by Doubre et al. (2007). We could define two dominant processes acting differently on the density and resistivity distribution at depth, namely the geothermal activity of the rift and the structural control from the active tectonics. The approach developed in this study proved to be very promising to understand the complexity of the Asal rift structure and could explain the difficulty to define with a great precision the geothermal areas to exploit the resource.

Acknowledgements

We would like to thank all the organizations mentioned below, the Centre d'Etude et de Recherche de Djibouti (CERD), for providing the gravity and magnetotelluric data. The Institut de Physique du Globe de Paris (IPGP), for providing the bathymetric data of Ghoubbet. We also thank the International Gravity Bureau, for helping us with the geographical coordinates of the Asal rift gravity data. This research was co-funded by Campus France and the CERD through a doctoral grant.

References

AQUATER. (1989). Djibouti geothermal exploration project: Republic of Djibouti. AQUATER.

Aster, R.C., Borchers, B. & Thurber, C.H., 2013. Parameter Estimation and inverse Problem, 2nd edn, Academic Press.

Ars, J. M., Tarits, P., Hautot, S., Bellanger, M., Coutant, O., & Maia, M. (2019). Joint inversion of gravity and surface wave data constrained by magnetotelluric: application to deep geothermal exploration of crustal fault zone in felsic basement. *Geothermics*, 80, 56-68.

Berge, K. E., Tian, H., Graf, G. A., Yu, L., Grishin, N. V., Schultz, J., ... & Hobbs, H. H. (2000). Accumulation of dietary cholesterol in sitosterolemia caused by mutations in adjacent ABC transporters. *Science*, 290(5497), 1771-1775

Birch, F., 1961. The velocity of compressional waves in rocks to 10 kilobars: 2. *Journal of Geophysical Research* 66 (7), 2199-2224.

Blakely, R. J., 1995. Potential theory in gravity and magnetic applications. Cambridge University Press.

Corrado, L. Aldega, A.S. Celano, A.A. de Benedetti, G. Giordano Cap rock efficiency and fluid circulation of natural hydrothermal systems by means of XRD on clay minerals (Sutri, northern Latium, Italy) *Geothermics*, 50 (2014), pp. 180-188

Demange, J., & Puvilland, P. (1990). Champ géothermique d'Asal. Synthèse des Données. Bur. de Rech. Geol. et Min., Orléans, France.
Dobre, C.; Peltzer, G. Fluid-controlled faulting process in the Asal Rift, Djibouti, from 8 yr of radar interferometry observations. *Geology* 2007, 35, 69.

Dobre, C. (2004). Structure and mechanisms of volcano-tectonic rift segments: studies of ancient rifts (Scotland, Iceland) and an active rift (Asal-Ghoubbet) (Doctoral dissertation, Le Mans).

Egbert, G. D., Booker, J.R., 1986: Robust estimation of geomagnetic transfer functions. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*87,173-194.

Elmi, D. (2005). Analysis of geothermal well test data from the Asal Rift area, Republic of Djibouti. United Nations University.

Fouillac, C.; Fabriol, R.; Lundt, F. Champ Géothermique d'Asal. Synthèse des Données Hydrogéologiques et Géochimiques Disponibles au 1er Janvier 1983; Final BRGM Report 83 SGN 022 GTH; BRGM : Orléans, France, 1983.

Haber, E. and Oldenburg, D. (1997). Joint inversion: A structural approach. *Inverse problems*, 13(1):63. 177, 192, 19.

Gallardo, L. A., Meju, M. A., 2007. Joint two-dimensional cross-gradient imaging of magnetotelluric and seismic traveltime data for structural and lithological classification. *Geophysical Journal International* 169 (3), 1261-1272.

Gallardo, L. A. (2007). Multiple cross-gradient joint inversion for geospectral imaging. *Geophysical Research Letters*, 34(19). 178, 198

Gallardo, L. A. and Meju, M. A. (2003). Characterization of heterogeneous near-surface materials by joint 2d inversion of dc resistivity and seismic data. *Geophysical Research Letters*, 30(13). 178, 198.

Gamble, T.D., Goubau, W.M., Clarke, J., 1979: Magnetotellurics with a remote magnetic reference. *Geophysics*, V. 44, 53-68.

Gasse, F., & Fontes, J. C. (1989). Palaeoenvironments and palaeohydrology of a tropical closed lake (Lake Asal, Djibouti) since 10,000 yr BP. *Palaeogeography, Palaeoclimatology, Palaeoecology*, 69, 67-102.

Kirkby, A. L., Zhang, F., Peacock, J., Hassan, R., & Duan, J. (2019). The MTPy software package for magnetotelluric data analysis and visualisation. *Journal of Open Source Software*, 4(37), 1358.

Hautot, S., Tarits, P., Whaler, K., Le Gall, B., Tiercelin, J.-J., Le Turdu, C., 2000. Deep structure of the baringo rift basin (central kenya) from three-dimensional magnetotelluric imaging: Implications for rift evolution. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 105 (B10), 23493-23518.

Hautot, S., Single, R., Watson, J., Harrop, N., Jerram, D., Tarits, P., Whaler, K., Dawes, D., 2007. 3-d magnetotelluric inversion and model validation with gravity data for the investigation of flood basalts and associated volcanic rifted margins. *Geophysical Journal International* 170 (3), 1418-1430.

Infante, V., Gallardo, L. A., Montalvo-Arrieta, J. C., & de León, I. N. (2010). Lithological classification assisted by the joint inversion of electrical and seismic data at a control site in northeast Mexico. *Journal of Applied Geophysics*, 70(2), 93-102.

Jalludin M.: An overview of the geothermal prospections in the Republic of Djibouti. Results and perspectives. Kengengeothermalconference, Nairobi (2003).

Li, Y., Oldenburg, D. W., 1998. 3-d inversion of gravity data. *Geophysics* 63 (1), 109-119.

Lucazeau, F., Vasseur, G., 1989. Heat flow density data from france and surrounding margins. *Tectonophysics* 164 (2-4), 251-258.

Manighetti, I.; Tapponnier, P.; Gillot, P.Y.; Jacques, E.; Courtillot, V.; Armijo, R.; Ruegg, J.C.; King, G. Propagation of rifting along the Arabia-Somalia Plate Boundary: Into Afar. *J. Geophys. Res. Space Phys.* 1998, 103, 4947-4974.

Mlynarski, M.; Zlotnicki, J. Fluid circulation in the active emerged Asal rift (east Africa, Djibouti) inferred from self-potential and Telluric-Telluric prospecting. *Tectonophysics* 2001, 339, 455-472.

Moorkamp, M., Heincke, B., Jegen, M., Roberts, A. W., & Hobbs, R. W. (2011). A framework for 3-D joint inversion of MT, gravity and seismic refraction data. *Geophysical Journal International*, 184(1), 477-493.

Musil, M., Maurer, H., and Green, A. (2003). Discrete tomography and joint inversion for loosely connected or unconnected physical properties: Application to crosshole seismic and georadar data sets. *Geophysical Journal International*, 153(2):389-402. 197.

Niasari, S. W. (2016, July). A short introduction to geological strike and geo-electrical strike. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 1755, No. 1). AIP Publishing.

Phoenix Geophysics, 2005: Data Processing User Guide, Phoenix Geophysics Limited, 3781 Victoria Park Avenue, Unit 3, Toronto, ON Canada M1W 3K5.

Phoenix Geophysics, 2009: V5 system 2000 MT/MTU-A User Guide. Phoenix Geophysics. 178 p.

Ruegg, J.-C. (1975), Deep crustal and upper mantle structure of southeastern Afar from seismic data, *Ann. Geophys.* 31, 329 - 360.

Ruegg, J.-C., and M. Kasser (1987), Deformation across the Asal-Ghoubbet Rift, Djibouti, uplift and crustal extension, 1979 - 1986, *Geophys. Res. Lett.*, 14, 745 - 748.

Sakindi, G. Three-Dimensional Inversion of Magnetotelluric Data: Geological-Geothermal Interpretation of Asal Geothermal Field, Djibouti. Master's Thesis, United Nations University, Reykjavik, Iceland, 2015.

Sanjuan, B.; Michard, G.; Michard, A. Origine des substances dissoutes dans les eaux des sources thermales et des forage de la région Asal-Ghoubbet (République de Djibouti). *J. Volcanol. Geotherm. Res.* 1990, 43, 333-352.

Stein, R.S.; Briole, P.; Ruegg, J.-C.; Tapponnier, P.; Gasse, F. Contemporary, Holocene, and Quaternary deformation of the Asal Rift, Djibouti: Implications for the mechanics of slow spreading ridges. *J. Geophys. Res. Space Phys.* 1991, 96, 21789–21806,

Stieljes, L. (1980), Carte géologique du rift d'Asal, République de Djibouti (Dépression Afar, East Africa), Centre Natl. de la Res. Sci., Paris

Tarits, P., Hautot, S., Roach, P., Magareh, H. M., et al., 2015. Mapping density models onto resistivity structure through joint inversion of gravity and mt. In: 2015 SEG Annual Meeting. Society of Exploration Geophysicists

Tikhonov AN, (1963), Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method, *Soviet Math Dokl* 4, 1035-1038 English translation of *Dokl Akad Nauk SSSR* 151, 1963, 501-504

Tillmann, A., & Stöcker, T. (2001, June). A new approach for the joint inversion of seismic and geoelectric data. In *63rd EAGE Conference & Exhibition* (pp. cp-15). European Association of Geoscientists & Engineers.

Turk, J., Haizlip, J., Mohamed, J., Mann, M., Letvin, A. et Moussa, N. (2019). Une comparaison de la minéralogie d'altération et des températures mesurées à partir de trois puits d'exploration dans la caldeira de Fiale, Djibouti. *Transactions GRC* , 43 (11).

Van, N. P., Boyer, D., Le Mouël, J. L., & Courtillot, V. (1981). Identification of a magma chamber in the Ghoubbet-Asal Rift (Djibouti) from a magnetotelluric experiment. *Earth and Planetary Science Letters*, 52(2), 372-380.

Vigny, C., J.-B. de Chabalier, J.-C. Ruegg, P. Huchon, K. L. Feigl, R. Cattin, L. Asfaw, and K. Kanbari (2007), Twenty-five years of geodetic measurements along the Tadjoura-Asal rift system, Djibouti, East Africa, *J. Geophys. Res.* doi:10.1029/2004JB003230, in press

Appendix A

Numerical expression for the cross gradient and its derivative with respect to density.

Consider a 3D volume of $n_x n_y n_z$ meshes with $i=1, n_x$, $j = 1, n_y$ and $k=1, n_z$, the meshes are arranged in a density vector d (m), $m=1, n_x*n_y*n_z$. The cross-gradient coupling term is:

$$CO_{cg}^2 = \sum_{m=1}^M (\partial_y d_m c - \partial_z d_m b)^2 + (-\partial_x d_m c + \partial_z d_m a)^2 + (\partial_x d_m b - \partial_y d_m a)^2 \quad (A1)$$

To calculate the partial derivatives for the density and the resistivity, we use the finite difference method between 3 points:

$$\begin{aligned} \partial_x d_m &= (d_{i+1jk} - d_{i-1jk}) / (\Delta x) \\ \partial_y d_m &= (d_{ij+1k} - d_{ij-1k}) / (\Delta y) \\ \partial_z d_m &= (d_{ijk+1} - d_{ijk-1}) / (\Delta z) \end{aligned} \quad (A2)$$

$$\begin{aligned} \partial_x r_m &= (r_{i+1jk} - r_{i-1jk}) / (x_{i+1} - x_{i-1}) = a \\ \partial_y r_m &= (r_{ij+1k} - r_{ij-1k}) / (y_{j+1} - y_{j-1}) = b \\ \partial_z r_m &= (r_{ijk+1} - r_{ijk-1}) / (z_{k+1} - z_{k-1}) = c \end{aligned} \quad (A3)$$

To simplify notation, let's denote a , b and c the components of the resistivity gradient along x , y and z respectively. We obtain:

$$CO_{cg}^2 = CO_1^2 + CO_2^2 + CO_3^2 \quad (A4)$$

$$CO_1^2 = \sum_{ijk}^M (c_{ijk} (d_{ij+1k} - d_{ij-1k}) / \Delta y_{ijk} - b_{ijk} (d_{ijk+1} - d_{ijk-1}) / \Delta z_{ijk})^2 \quad (A5)$$

$$CO_2^2 = \sum_{ijk}^M (c_{ijk} (d_{i+1jk} - d_{i-1jk}) / \Delta x_{ijk} - a_{ijk} (d_{ijk+1} - d_{ijk-1}) / \Delta z_{ijk})^2 \quad (A6)$$

$$CO_3^2 = \sum_{ijk}^M (b_{ijk} (d_{i+1jk} - d_{i-1jk}) / \Delta x_{ijk} - a_{ijk} (d_{ij+1k} - d_{ij-1k}) / \Delta y_{ijk})^2 \quad (A7)$$

The solution of Eq 3.6 (solution equation for misfit with coupling) requires the matrix Z_{CG} which elements are the derivative of CO_{cg}^2 with respect to each density in the density grid. For a given element d_{ijk} , the derivative of all terms not containing d_{ijk} will disappear. So, we keep only the terms containing ijk .

There will be 4 terms left for each CO_{2}^1 (Eq. A5): $i+1jk$, $i-1jk$, $ijk+1$, $ijk-1$:

$$CO_{11} = (c_{ij+1k} (d_{ij+2k} - d_{ijk}) / \Delta y_{ij+1k} - b_{ij+1k} (d_{ij+1k+1} - d_{ij+1k-1}) / \Delta z_{ij+1k})^2 \quad (A8)$$

$$CO_{12} = (c_{ij-1k} (d_{ijk} - d_{ij-2k}) / \Delta y_{ij-1k} - b_{ij-1k} (d_{ij-1k+1} - d_{ij-1k-1}) / \Delta z_{ij-1k})^2 \quad (A9)$$

$$CO_{13} = (c_{ijk+1} (d_{ij+1k+1} - d_{ij-1k+1}) / \Delta y_{ijk+1} - b_{ijk+1} (d_{ijk+2} - d_{ijk}) / \Delta z_{ijk+1})^2 \quad (A10)$$

$$CO_{14} = (c_{ijk-1} (d_{ij+1k-1} - d_{ij-1k-1}) / \Delta y_{ijk-1} - b_{ijk-1} (d_{ijk} - d_{ijk-2}) / \Delta z_{ijk-1})^2 \quad (A11)$$

We now calculate the derivative of these 4 terms

$$\frac{\partial CO_{11}}{\partial d_{ijk}} = \frac{-2c_{ij+1k}}{\Delta y_{ij+1k}} \left(\frac{c_{ij+1k}(d_{ij+2k}-d_{ijk})}{\Delta y_{ij+1k}} - \frac{b_{ij+1k}(d_{ij+1k+1}-d_{ij+1k-1})}{\Delta z_{ij+1k}} \right) \quad (A12)$$

$$\frac{\partial CO_{12}}{\partial d_{ijk}} = \frac{2c_{ij-1k}}{\Delta y_{ij-1k}} \left(\frac{c_{ij-1k}(d_{ijk}-d_{ij-2k})}{\Delta y_{ij-1k}} - \frac{b_{ij-1k}(d_{ij-1k+1}-d_{ij-1k-1})}{\Delta z_{ij-1k}} \right) \quad (A13)$$

$$\frac{\partial CO_{13}}{\partial d_{ijk}} = \frac{2b_{ijk+1}}{\Delta z_{ijk+1}} \left(\frac{c_{ijk+1}(d_{ij+1k+1}-d_{ij-1k+1})}{\Delta y_{ijk+1}} - \frac{b_{ijk+1}(d_{ijk+2}-d_{ijk})}{\Delta z_{ijk+1}} \right) \quad (A14)$$

$$\frac{\partial CO_{14}}{\partial d_{ijk}} = \frac{-2b_{ijk-1}}{\Delta z_{ijk-1}} \left(\frac{c_{ijk-1}(d_{ij+1k-1}-d_{ij-1k-1})}{\Delta y_{ijk-1}} - \frac{b_{ijk-1}(d_{ijk+2}-d_{ijk})}{\Delta z_{ijk-1}} \right) \quad (A15)$$

There will be 4 terms left for each CO_{2}^1 (Eq. A6): $i+1jk$, $i-1jk$, $ijk+1$, $ijk-1$:

$$CO_{21} = (c_{i+1jk} (d_{i+2jk} - d_{ijk}) / \Delta y_{i+1jk} - a_{i+1jk} (d_{i+1jk+1} - d_{i+1jk-1}) / \Delta z_{i+1jk})^2 \quad (A16)$$

$$CO_{22} = (c_{i-1jk} (d_{ijk} - d_{i-2jk}) / \Delta y_{i-1jk} - b_{i-1jk} (d_{i-1jk+1} - d_{i-1jk-1}) / \Delta z_{i-1jk})^2 \quad (A17)$$

$$CO_{23} = (c_{ijk+1} (d_{i+1jk+1} - d_{i-1jk+1}) / \Delta y_{ijk+1} - a_{ijk+1} (d_{ijk+2} - d_{ijk}) / \Delta z_{ijk+1})^2 \quad (A18)$$

$$CO_{24} = (c_{ijk-1} (d_{i+1jk-1} - d_{i-1jk-1}) / \Delta y_{ijk-1} - a_{ijk-1} (d_{ijk} - d_{ijk-2}) / \Delta z_{ijk-1})^2 \quad (A19)$$

$$\frac{\partial CO_{21}}{\partial d_{ijk}} = \frac{-2c_{i+1jk}}{\Delta y_{i+1jk}} \left(\frac{c_{i+1jk}(d_{i+2jk}-d_{ijk})}{\Delta y_{i+1jk}} - \frac{a_{i+1jk}(d_{i+1jk+1}-d_{i+1jk-1})}{\Delta z_{i+1jk}} \right) \quad (A20)$$

$$\frac{\partial CO_{22}}{\partial d_{ijk}} = \frac{2c_{i-1jk}}{\Delta y_{i-1jk}} \left(\frac{c_{i-1jk}(d_{ijk}-d_{i-2jk})}{\Delta y_{i-1jk}} - \frac{b_{i-1jk}(d_{i-1jk+1}-d_{i-1jk-1})}{\Delta z_{i-1jk}} \right) \quad (A21)$$

$$\frac{\partial CO_{23}}{\partial d_{ijk}} = \frac{2a_{ijk+1}}{\Delta z_{ijk+1}} \left(\frac{c_{ijk+1}(d_{i+1jk+1}-d_{i-1jk+1})}{\Delta y_{ijk+1}} - \frac{a_{ijk+1}(d_{ijk+2}-d_{ijk})}{\Delta z_{ijk+1}} \right) \quad (A22)$$

$$\frac{\partial CO_{24}}{\partial d_{ijk}} = \frac{-2a_{ijk-1}}{\Delta z_{ijk-1}} \left(\frac{c_{ijk-1}(d_{i+1jk-1}-d_{i-1jk-1})}{\Delta y_{ijk-1}} - \frac{a_{ijk-1}(d_{ijk}-d_{ijk-2})}{\Delta z_{ijk-1}} \right) \quad (A23)$$

For the third term of equation A4 CO_3^2 , there are 4 terms to consider: i+1jk, i-1jk, ij+1k, ij-1k.

$$CO_{31} = (b_{i+1jk} (d_{i+2jk} - d_{ijk}) / \Delta x_{i+1jk} - a_{i+1jk} (d_{i+1j+1k} - d_{i+1j-1k}) / \Delta y_{i+1jk})^2 \quad (A24)$$

$$CO_{32} = (b_{i-1jk} (d_{ijk} - d_{i-2jk}) / \Delta x_{i-1jk} - a_{i-1jk} (d_{i-1j+1k} - d_{i-1j-1k}) / \Delta y_{i-1jk})^2 \quad (A25)$$

$$CO_{33} = (b_{ij+1k} (d_{i+1j+1k} - d_{i-1j+1k}) / \Delta x_{ij+1k} - a_{ij+1k} (d_{ij+2k} - d_{ijk}) / \Delta y_{ij+1k})^2 \quad (A26)$$

$$CO_{34} = (b_{ij-1k} (d_{i+1j-1k} - d_{i-1j-1k}) / \Delta x_{ij-1k} - a_{ij-1k} (d_{ijk} - d_{ij-2k}) / \Delta y_{ij-1k})^2 \quad (A27)$$

$$\frac{\partial CO_{31}}{\partial d_{ijk}} = \frac{-2b_{i+1jk}}{\Delta x_{i+1jk}} \left(\frac{b_{i+1jk}(d_{i+2jk}-d_{ijk})}{\Delta x_{i+1jk}} - \frac{a_{i+1jk}(d_{i+1jk+1k}-d_{i+1j-1k})}{\Delta y_{i+1jk}} \right) \quad (A28)$$

$$\frac{\partial CO_{32}}{\partial d_{ijk}} = \frac{2b_{i-1jk}}{\Delta x_{i-1jk}} \left(\frac{b_{i-1jk}(d_{ijk}-d_{i-2jk})}{\Delta x_{i-1jk}} - \frac{a_{i-1jk}(d_{i-1j+1k}-d_{i-1j-1k})}{\Delta y_{i-1jk}} \right) \quad (A29)$$

$$\frac{\partial CO_{33}}{\partial d_{ijk}} = \frac{2a_{ij+1k}}{\Delta y_{ij+1k}} \left(\frac{b_{ij+1k}(d_{i+1j+1k}-d_{i-1j+1k})}{\Delta x_{ij+1k}} - \frac{a_{ij+1k}(d_{ij+2k}-d_{ijk})}{y_{ij+1k}} \right) \quad (A30)$$

$$\frac{\partial CO_{34}}{\partial d_{ijk}} = \frac{-2a_{ij-1k}}{\Delta y_{ij-1k}} \left(\frac{b_{ij-1k}(d_{i+1j-1k}-d_{i-1j-1k})}{\Delta x_{ij-1k}} - \frac{a_{ij-1k}(d_{ijk}-d_{ij-2k})}{\Delta y_{ij-1k}} \right) \quad (A31)$$

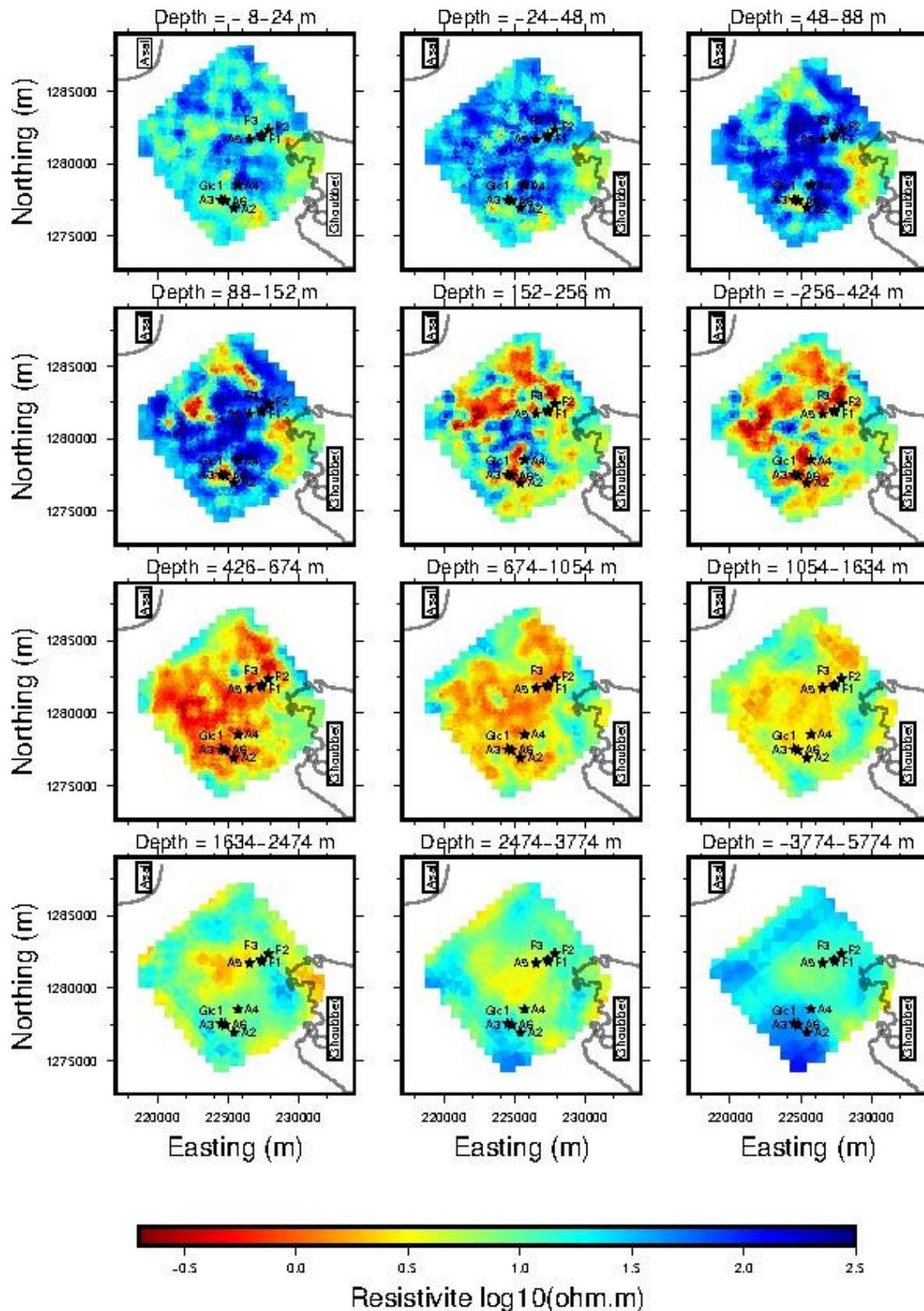
The total sum for $\mathbf{Z}_{CG} \cdot \mathbf{d}$ product of the matrix \mathbf{Z}_{CG} and the vector density \mathbf{d} at ijk is:

$$\mathbf{Z}_{CG} = \frac{\partial CO_{cg}^2}{\partial d_{ijk}} = \sum_{l=1}^3 \sum_{n=1}^4 \frac{\partial CO_{lm}^2}{\partial d_{ijk}} \quad (A32)$$

For the boundary conditions at $i=1$ and n_x , $j=1$ and n_y , $k=1$ and n_z , when a density is outside the range $1-n_x$, $1-n_y$ and $1-n_z$, we use the immediate neighbor value.

Supplementary Section 1

In this supplementary section, we present the full resistivity model in Figure S1 and the PCA density models for the 3 dominant eigenvalues in Figures S2-4. In Figure S 3.5 we show the MT data and the resistivity model responses at all sites in the Asal rift.



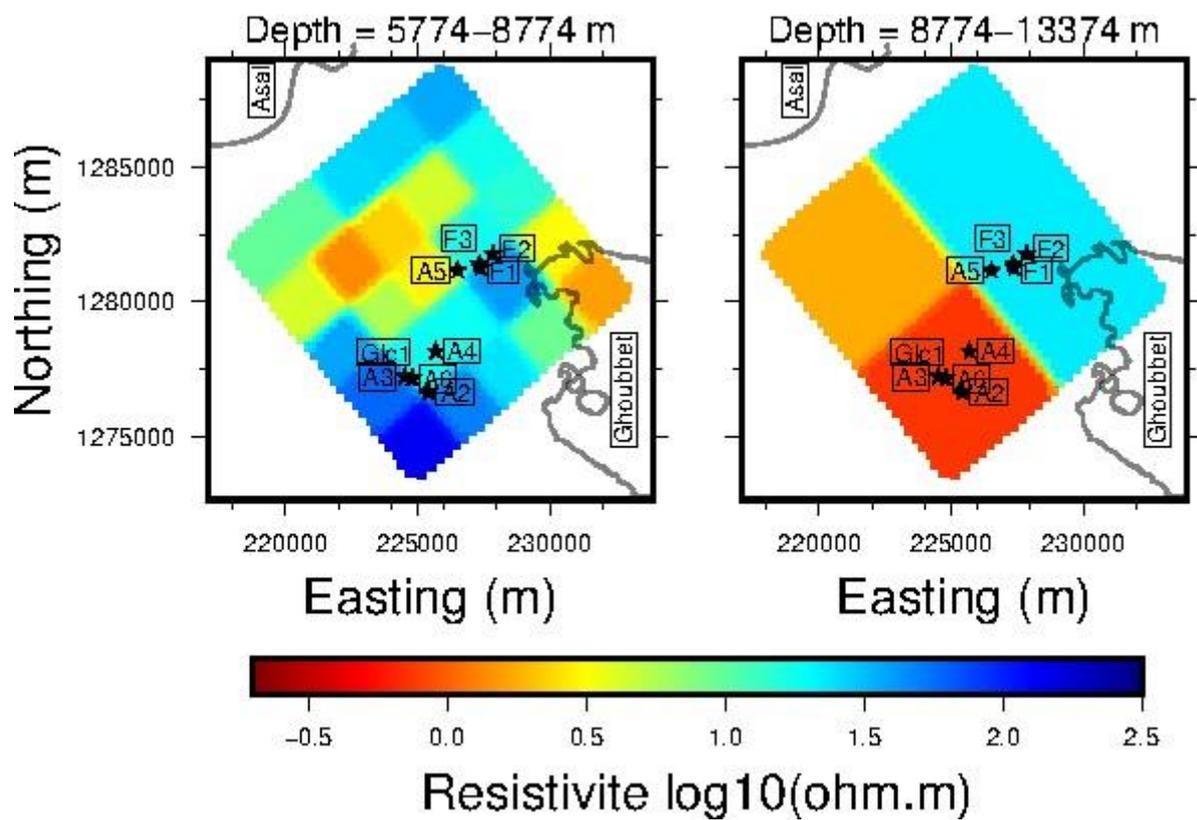


Figure S 3. 1: Full resistivity model as a function of depth

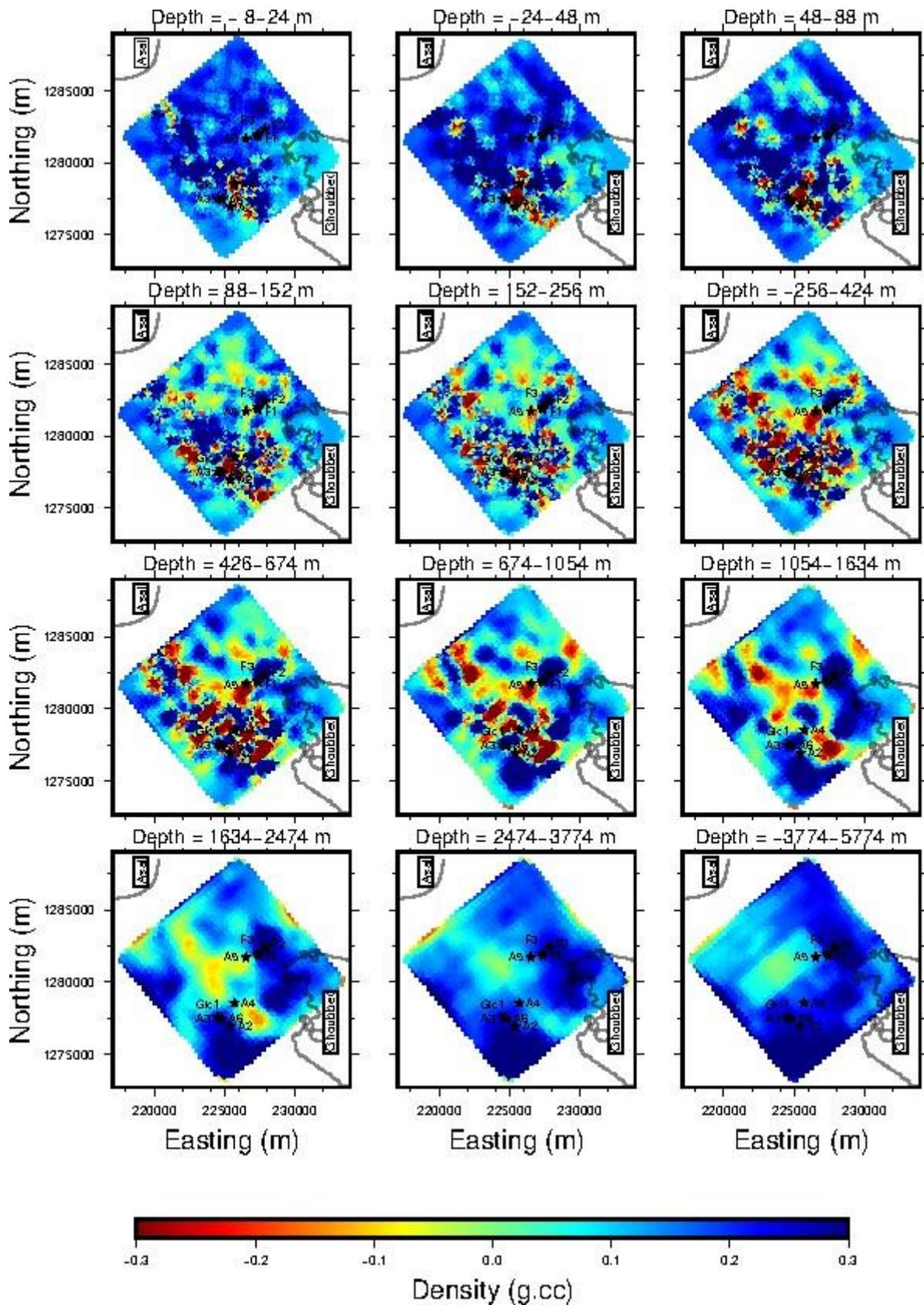


Figure S 3. 2: PCA density model for eigenvalue 1

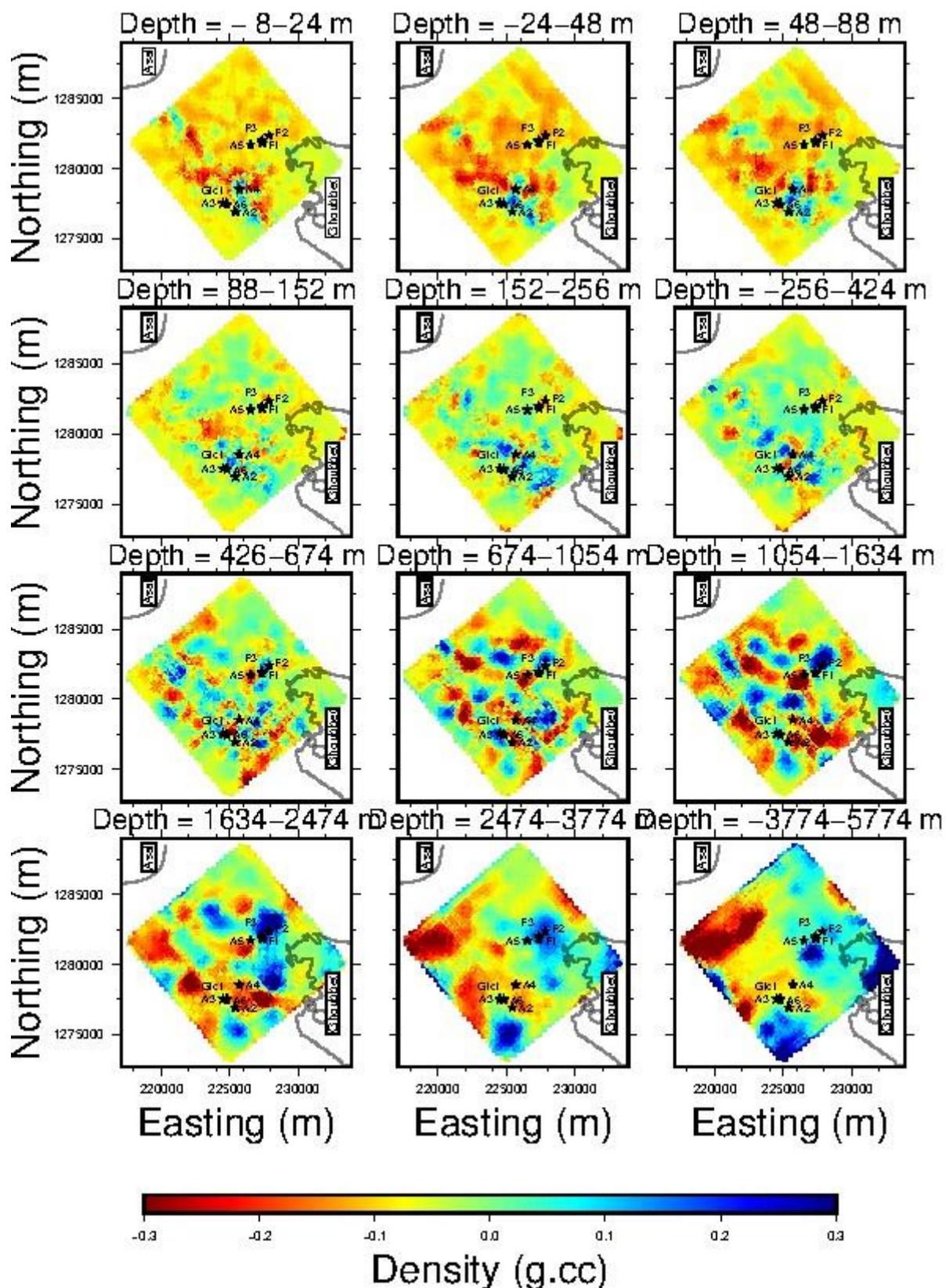


Figure S 3. 3: PCA density model for eigen value 2

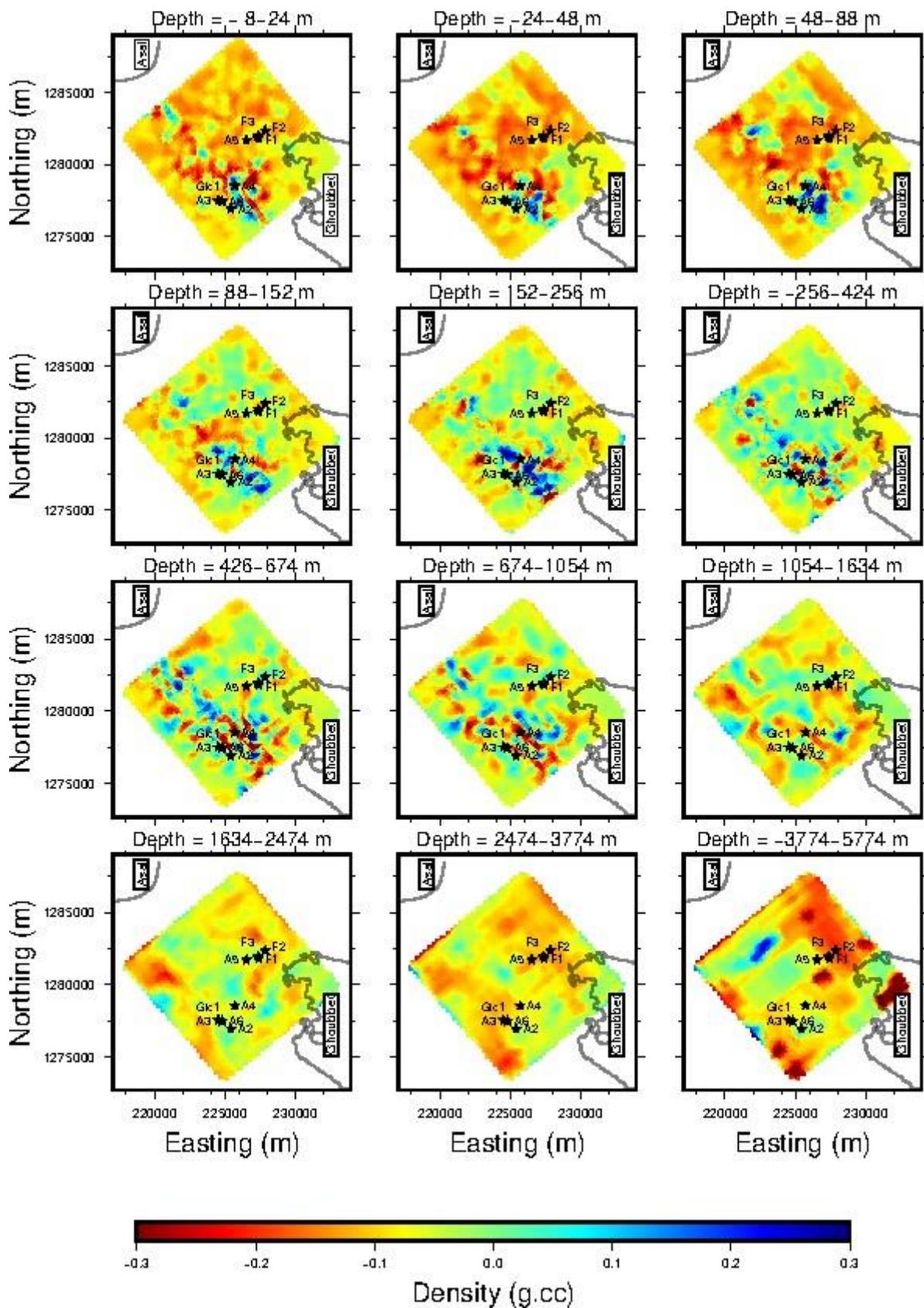
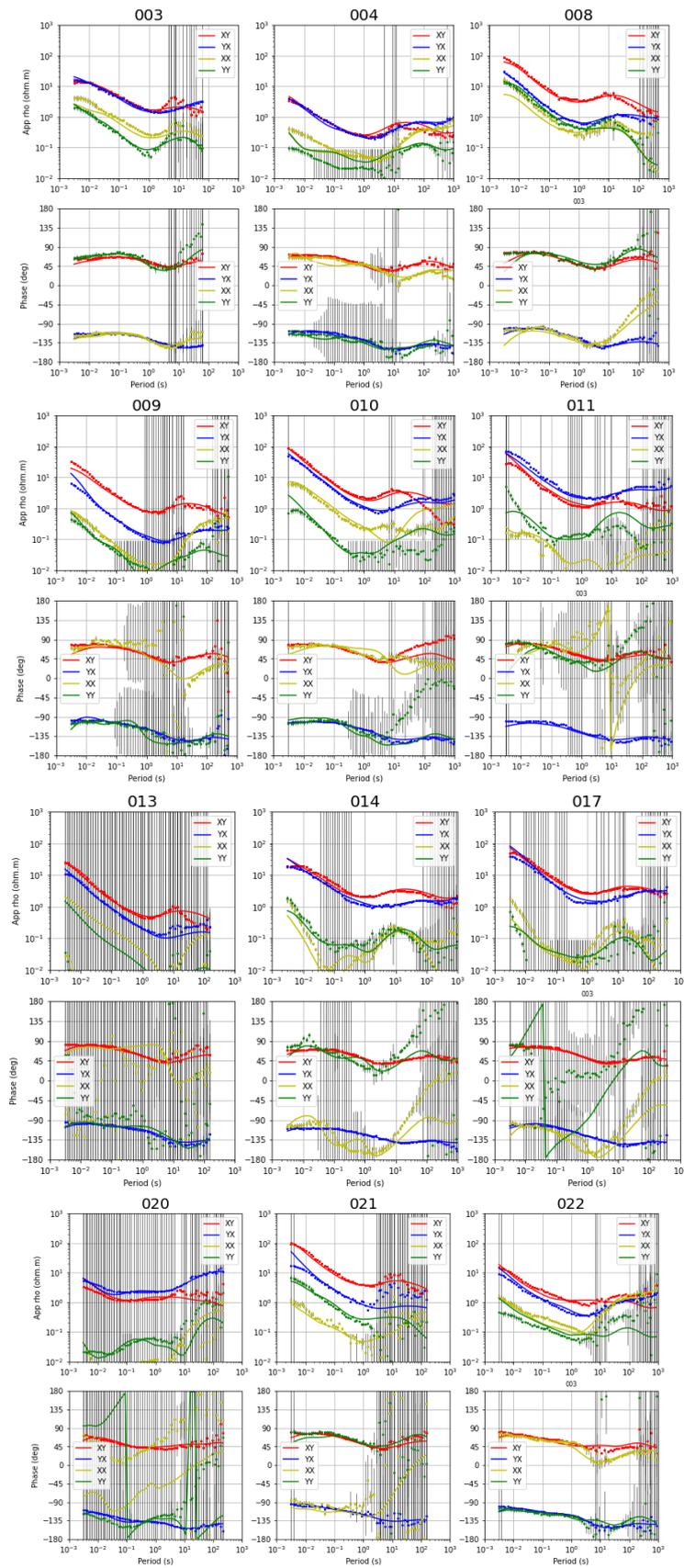
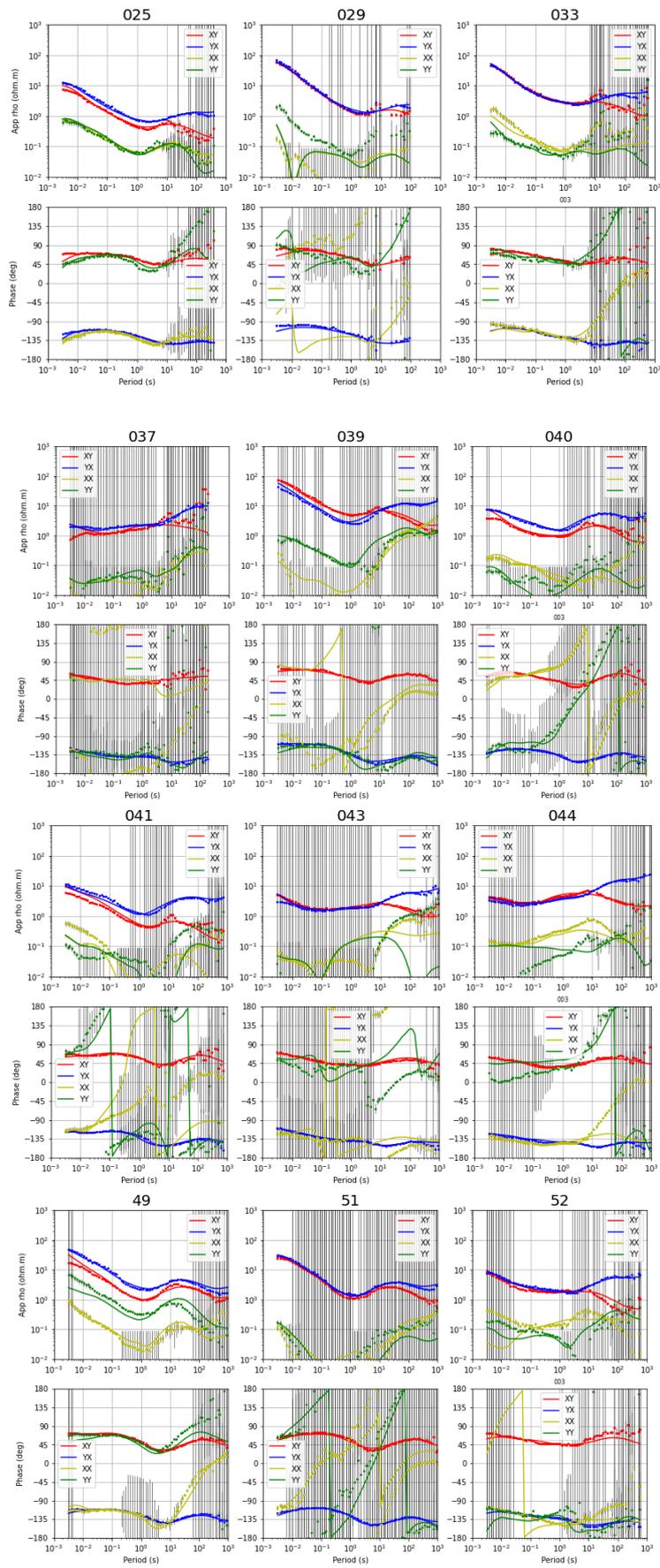
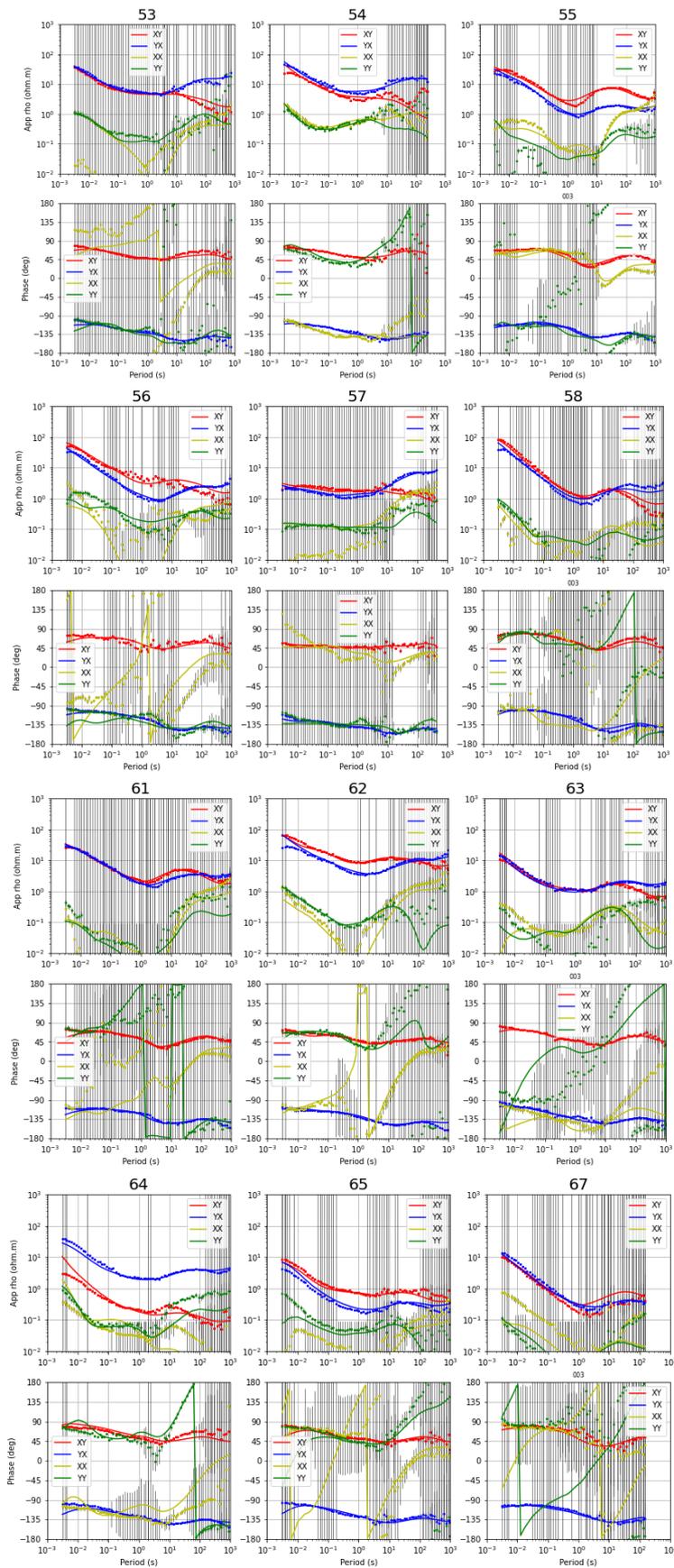
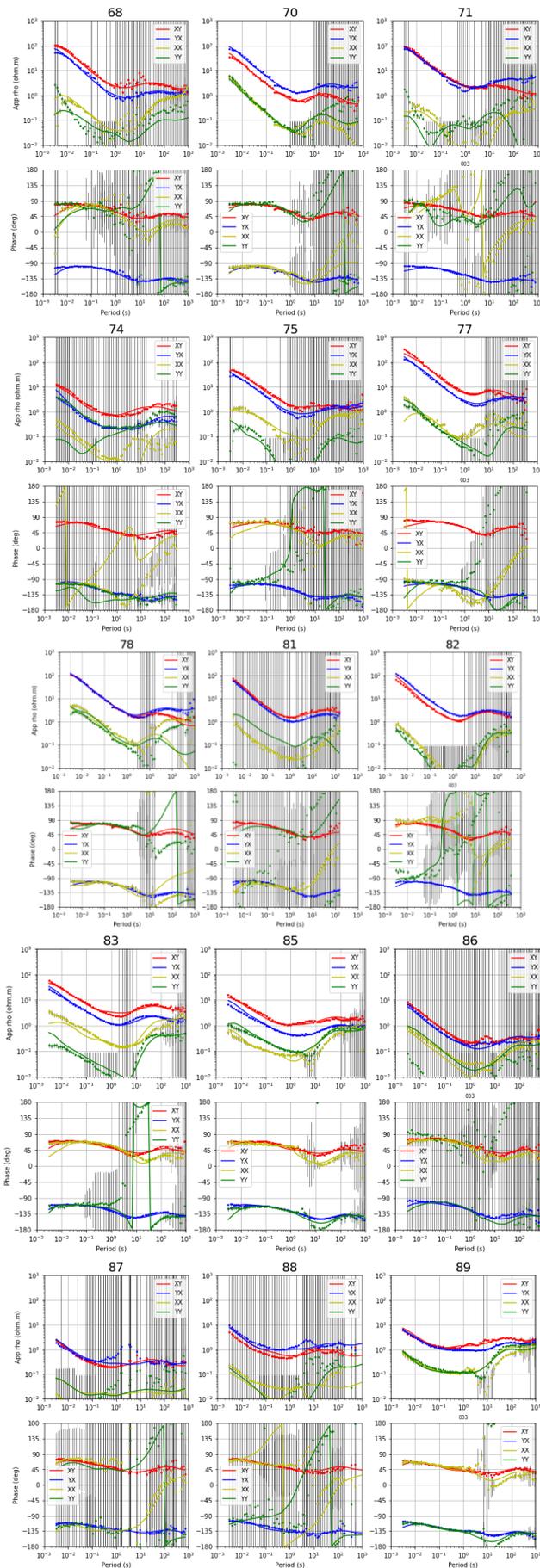


Figure S 3. 4: PCA density model for eigen value 3









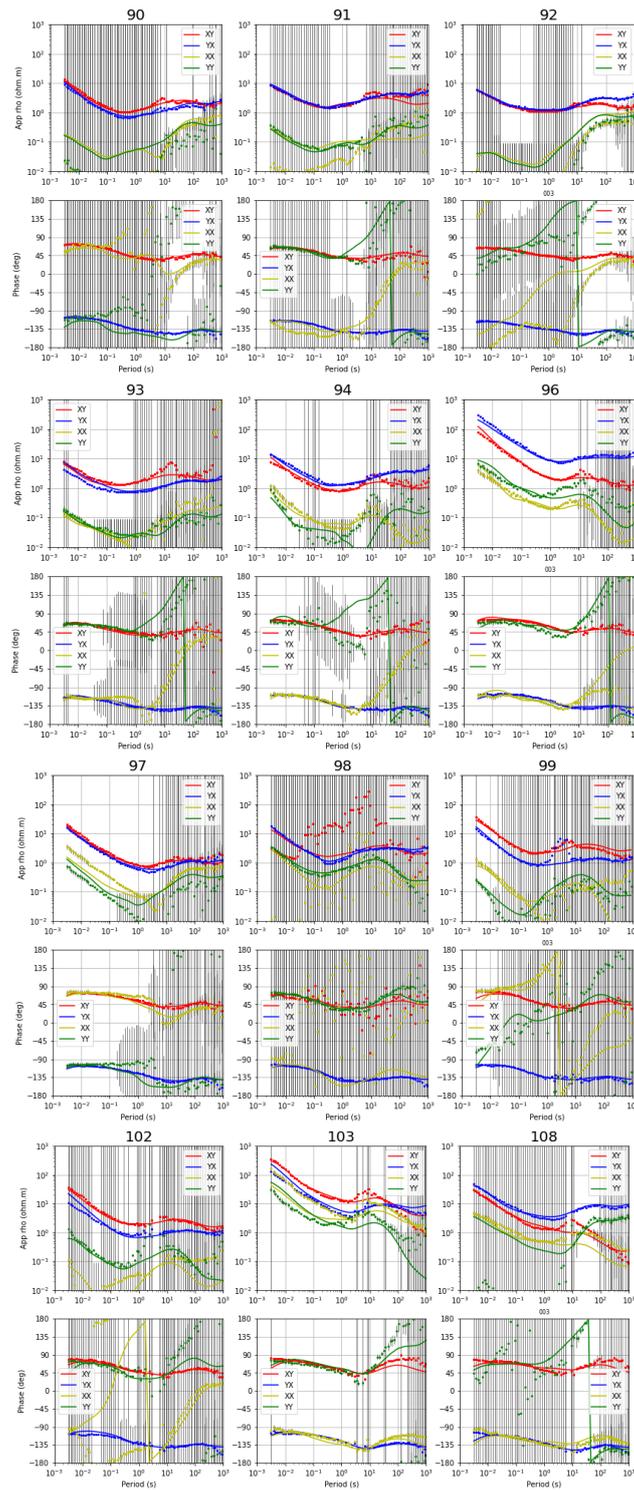


Figure S 3. 5: MT data for all sites in the Asal rift : off diagonal terms XY and YX in red and blue respectively, diagonal terms XX and YY in yellow and green respectively. The full line is the 3-D resistivity response.

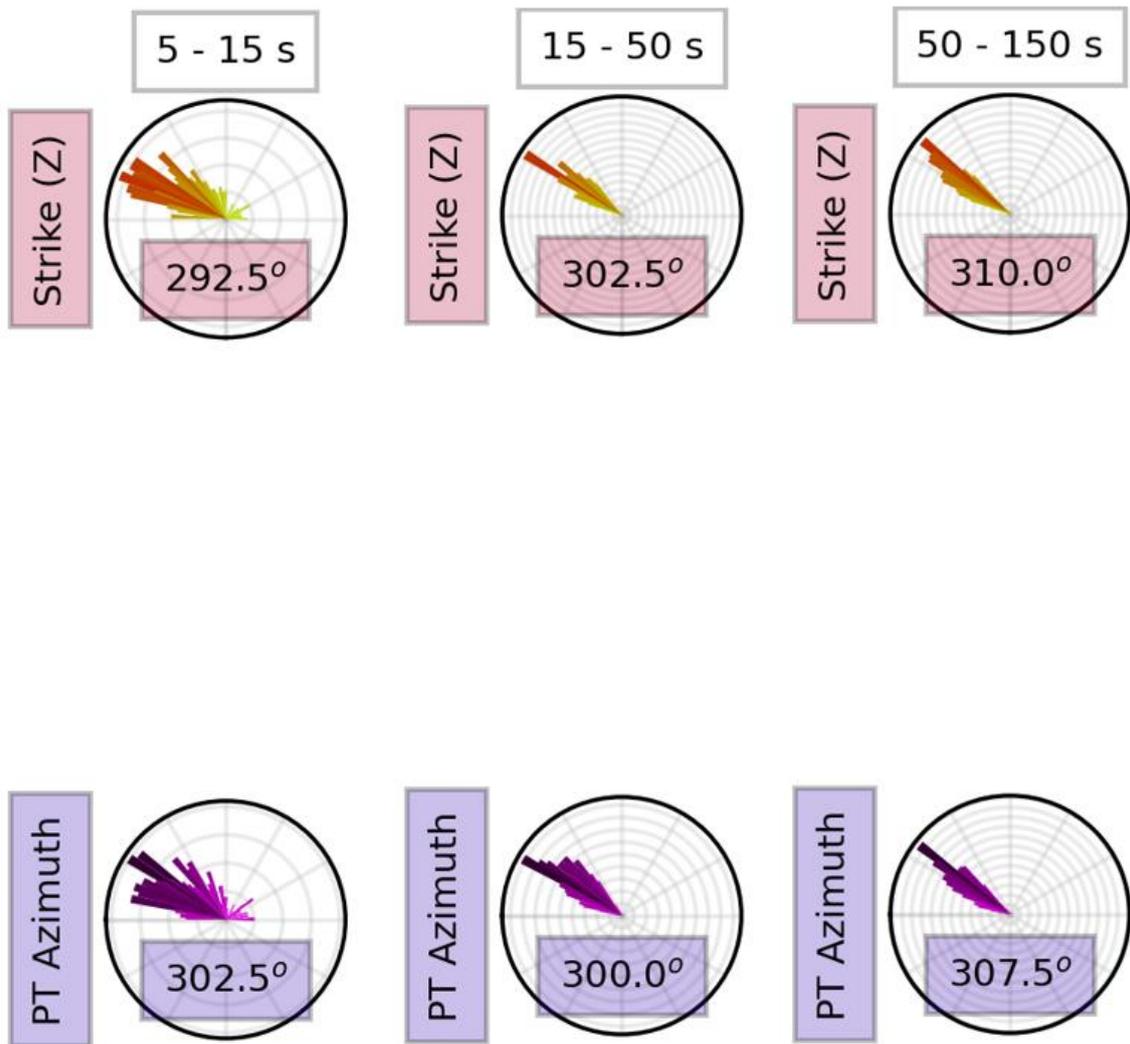


Figure S 3.6: Diagrammes en rose des vents à différentes périodes à partir des invariants du tenseur d'impédance (Z) et du tenseur de phase (PT) .

Chapitre 4: 3D gravity inversion constrained by a 3D resistivity model: implication for the conceptual models of Fiale caldera and Gale-le-Koma prospects in the Asal Rift, Djibouti Republic

Ce chapitre présente l'application de notre méthodologie aux deux zones géothermales reconnues du Rift d'Asal. En réduisant la dimension des zones étudiées par rapport au chapitre 3 et en augmentant la résolution des grilles d'inversion, nous pouvons améliorer la résolution pour chaque zone et mieux décrire les structures en relation avec les forages. Ce travail sera soumis à la revue *Geothermics*.

Introduction

The most extensively explored geothermal field in the Republic of Djibouti is located in the Asal rift (Figure 4.1). The first geothermal explorations were undertaken in 1975-88 (BRGM, 1975a, b and AQUATER 1989), leading to the drilling of six deep boreholes. Further exploration in 2016 ((Ahmed, 2018) led to the drilling of a shallow well (GLC-1) at Gale le Koma. In 2007, new geophysical surveys in Asal region has been carried out by CERD and ISOR with the objective to find new geothermal prospects. The magnetotelluric results combined to a new seismic tomography study by Doubre et al. (2007) suggested a prospect in the Fialé Caldera (Figure 4.1). Three new deep wells were drilled in the framework of the project of geothermal exploration of the Electricite de Djibouti (EDD) (Turk et al., 2019). In both areas (Gale-le-Koma and Fialé Caldera), the geophysical models provided positive indications for a geothermal reservoir of high enthalpy and high permeability. Nevertheless, the results from the borehole revealed high salinity, low to medium permeability and double phase flow in Gale-le-Koma and low temperatures in Fiale Caldera.

The design of a conceptual model of a geothermal reservoir relies in a large part on the results from different geophysical techniques such as magnetotellurics, gravity and seismics. However, each method has a different sensitivity and resolution because of the physics behind and the quality of the data collected. There is a need to improve the analysis of these techniques and their interpretation to better characterize the geothermal resources.

In this study, we propose a new approach to combine two geophysical methods, gravity and magnetotellurics, for a better understanding of the geological and geothermal properties through the coupling of the physical parameters controlling these data, the density and the electrical resistivity. This approach consists of linearly inverting the gravity data constrained by a resistivity model with the formalism of joint inversion. The resistivity model was obtained separately from the 3-D MT inversion. We applied the gravity inversion

constrained by the resistivity distribution the geothermal sites of Gale-le-Koma and Fialé Caldera to study the impact of correlated resistivity and density models to refine the conceptual geothermal models previously proposed (Geologica, 2022).

Asal Rift geology

The Asal Rift in the Republic of Djibouti lies at the junction of three rifts: The Red Sea Ridge, the Gulf of Aden and the East African Continental Rift (Figure. 4.1b). It is with Iceland, one of two emerged oceanic ridges. The Asal rift is about 40 km long, of which 15 km are emerged. It is currently opening at a rate of 16 ± 1 mm/year, propagating in the $N40 \pm 5^\circ E$ direction (Ruegg and Kasser, 1987, Magnighetti et al., 1998, Vigny et al., 2007). It is characterized by a dense network of fissures and normal faults $N130 \pm 10^\circ$ recent volcanism, with the last basaltic eruption of Ardoukobba in 1978 (Demange and al., 1980). This eruption follows the rifting episode leading to an opening of up to 2 m along the rift with a collapse of around 70 cm of its inner floor (Ruegg and Kasser, 1987). Several volcanic series outcrop in the region. The oldest one are observed in the deep geothermal wells. The Mabla rhyolite serie (15 Ma) is formed of flows, domes, ignimbrites and tuffs. The Dalha basalt series (8.9 Ma, 3.9 Ma), is a thick sequence of basaltic lava flows intercalated with rhyolites and trachytes, a few sedimentary layers. The series ends with the Ribta rhyolites and the Afar Stratoid series (4 Ma, 1 Ma) from the opening of the Afar Depression. Basalts dominates this series which also contains sequences of detrital and lacustrine deposits and rhyolites at the top. The Gulf basalts (2.8 Ma, 0.6 Ma, Figure 1) correspond to the opening of the Gulf of Tadjourah ridge outcropping on both sides of the Gulf. The Asal series, the youngest rock series (1 Ma to present), contain exclusively plagioclase rich basaltic flows and hyaloclastic resulting from the early volcanism of the Asal rift. The Fialé caldera is located about 8 km southeast of Lake Asal and about 2 km West of Ghoubbet Bay (Figure 4.1). This zone also lies in the axial rift graben between two main NW-trending faults and has a dense network of open fissures.

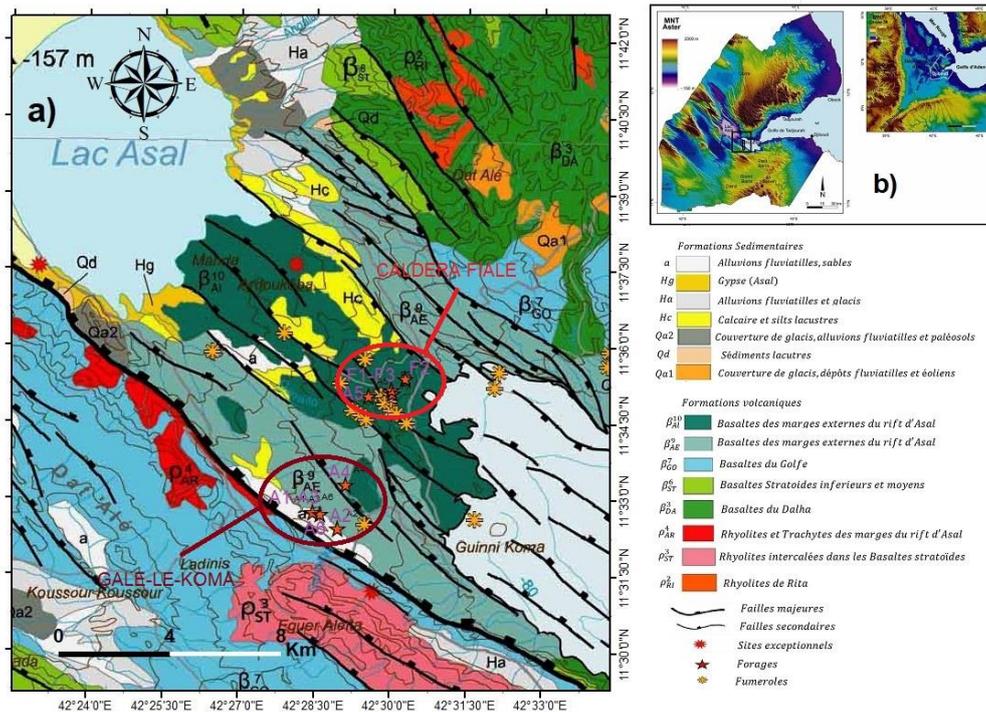


Figure 4. 1: (a) Geological and structural features with the main geothermal boreholes in the Asal rift (modified from Le Gall et al., 2015). (b) an ASTER digital elevation model, the black rectangle is the study area.

The study area in the Asal Rift is 12 kilometers long and 10 kilometers wide and is located between the hypersaline lake Asal to the North West (-150 meters below sea level) and Goubbet-al-Kharab to the South East, extension of the Gulf of Tadjourah (Figure 4.1). It is a very active volcano-tectonic structure similar to Erta Ale, Dabahu or Nabro in the Afar Depression (Yirgu and al, 2014) where Arabia, Nubia and Somalia plate tectonics expansion occur since 30 Myr.

An important network of fractures, N130-140, affects the recent basaltic formations (0.8 Myr). This particularly dense fault network is a result of extensive tectonic constraints and connects the Gulf of Goubbet to Lake Asal allowing a significant underground flow between them. Two types of faults are observed. Some are very long with vertical throws of several hundred meters delimiting panels, to which faults of shorter lengths are associated. These faults determine the geomorphology of the rift by breaking up the past large volcano of Fiale.

The other type of fault appears mainly in the central part of the rift and corresponds to open cracks or tensile fissures measuring several hundred meters in length (Ruegg and Kasser, 1987, Magnighetti and al., 1998, Vigny and al., 2007).

Several hot springs are located on the SE side of Lake Asal. The geochemical analysis of the water show that they result from a mixture between geothermal water and seawater or water from Lake Asal (Sanjuan et al. 1990). The analysis of the springs of the Manda group ((Sanjuan et al. 1990) demonstrate a rapid circulation between the Goubbet gulf and the Asal lake. Their geochemical signature reveals that it is seawater reacting very little with the rock because of the short contact duration. The study from BRGM (1973) estimates a flow up to at least 14 m³/s through this fault network.

Geothermal context

The first geothermal explorations in the Asal rift region of the Afar Depression were carried out in 1970 (BRGM, 1975, 1980). These explorations included geological and geochemical studies, as well as geophysical prospection, and led to the identification of the Gale-le-Koma geothermal system (Figure 4.1). Two deep wells A1 and A2 (Table 4.1) were drilled in 1975, of which A1 was productive. In 1987-1988, two additional deep wells A3 and A6 (Table 1) were drilled in Gale-le-Koma and two others A4 and A5 toward the central part of the Asal rift (Figure 4.1).

Two geothermal reservoirs were identified at the Gale-le-Koma site. The first one is at a shallow depth of 400-700m in the recent Asal volcanic series down to the top of the stratoid basalts/rhyolites. They are characterized by medium enthalpy temperatures (~130C). The second reservoir is found in the old Dalha basalts and corresponds to a high enthalpy reservoir at 1000 meters in depth with a temperature of 260°C. The tests of injectability performed in A1, A3, A6 revealed high to low permeability and high salinity fluids with a concentration of 126 g/l (Table 4.1).

Reykjavik Energy Invest (REI) and Iceland Geosurvey (ISOR) carried out a geothermal pre-feasibility study in 2007 in the Asal rift. In particular, they surveyed the Asal rift with magnetotellurics (MT) and proposed a pseudo-3D resistivity model based on 1-D inversion of each MT site.

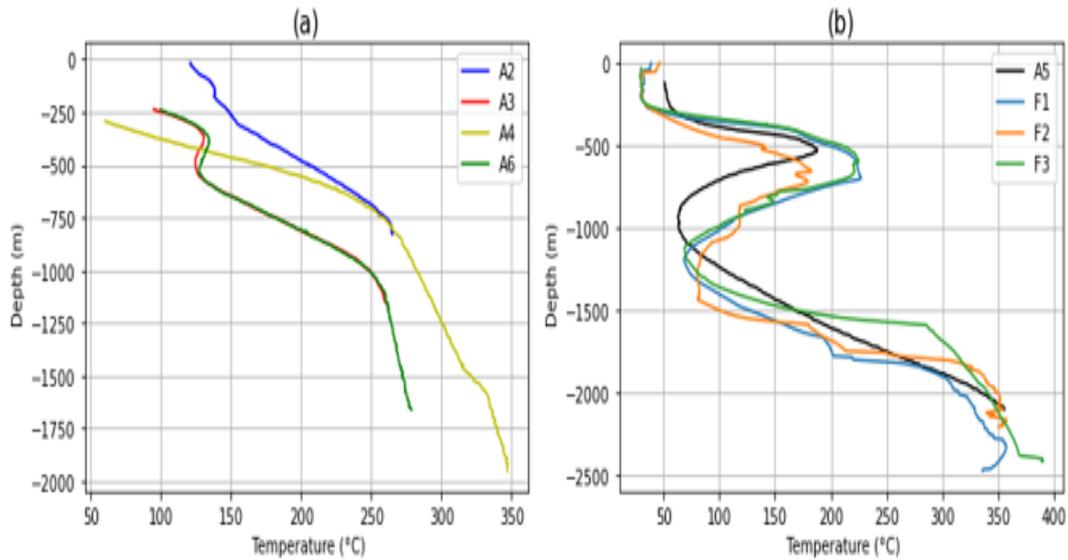


Figure 4. 2 : Temperature profiles measured in the various boreholes in the present zones: (a) in Galele-Koma (From AQUATER 1989) and (b) in Fiale Caldera.

A seismological study conducted by Doubre (2004,2007) found a distribution of earthquakes generally concentrated beneath the Fiale caldera 1-4 km in depth. These events seem caused by upward and downward vertical movements along the faults in this region. According to the same study, the 3D velocity model suggests that the magma chamber is at the center of the rift beneath the Fiale caldera. Ragueh et al. (2023) analyze the distribution of magnetotelluric and gravity data available in the area and obtain a 3D resistivity and 3D constrained density models that show below 3 km in depth, low resistivity and low-density values in agreement with the low velocity observed by Doubre et al (2007).

The synthesis of these results in MT, seismology and structural geology highlighted another geothermal system favorable to geothermal exploration in the Fiale Caldera site (Figure 4.1). In the framework of the Electricity of Djibouti project (EDD 2022), three deep directional boreholes (F1 to F3) were drilled (Figure 4.3, Table 1) by Iceland Drilling Company under the supervision of the company Geologica (GEOLOGICA, 2022). The lithology in these new boreholes (Figure. 4.3) is similar to the borehole A5 (Figure 4.1) located 700 m to the Southwest (Djama et al, 2022).

| Well | Depth max (m) | Temperature max (°C) | Temp. Gradient (°C/100m) | Salinity g/L |
|-----------|---------------|----------------------|--------------------------|--------------|
| A1 (1975) | 1145 | 261 | 18 | 120 |
| A2 (1975) | 1554 | 235 | 14.3 | - |
| A3 (1989) | 1316 | 280 | 15.51 | 130 |
| A4 (1989) | 2013 | 345 | 15.2 | 180 |
| A5 (1989) | 2105 | 360 | 15.2 | - |
| A6 (1989) | 1761 | 280 | 12.75 | 130 |
| F1(2019) | 2417 | 336 | 47 | |
| F2(2019) | 2205 | 350 | 35.11 | |
| F3(2019) | 2413 | 389 | 109 | |

Table 4. 1: Boreholes characteristics in rift Asal

The observed stratoid basalt series correspond to a porphyritic trachyte with sanidine and plagioclase phenocrysts. This series also features tectonically-induced rock fissuring and shrinkage cracks (Djama et al., 2022) and alteration with the formation of secondary minerals, epidote, quartz veins and clays (Figure 4.4). The Dalha basalt series (Figure. 4.3) consists of fractured and rather altered basalts and trachytes. Secondary minerals include actinolite, epidote, pyrite and quartz veins, as well as gray to brown clay (Figure. 4.4).

From the borehole data, the Fiale caldera geothermal prospect presents a shallow reservoir at depths between 500-800m between the recent volcanic series and the stratoid basalts. Its temperature is about 200°C and the permeability derived from injectivity tests is medium (Cavers et al, 2019). A deeper reservoir is identified below 1900 meters in the altered Mabla rhyolites series with a temperature exceeding 300°C and a salinity between 90-120g/l. The production tests conducted in F1 and F2 indicates a low to medium permeability for this deep reservoir. The temperature profiles (Figure 4.2b) show a temperature inversion down to 75°C between the two reservoirs.

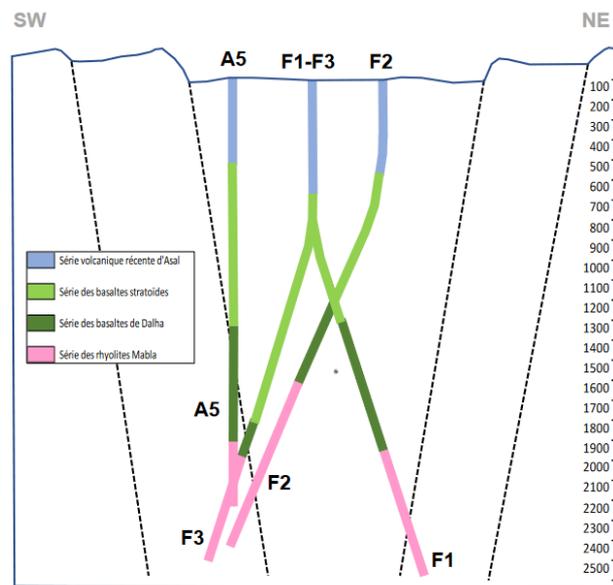


Figure 4. 3 : Fiale Caldera boreholes geological logs by depth in metres (m) (Djama et al., 2022).

This minimum at ~1300 m below surface is interpreted as a sea water intrusion (Jalludin 2004, Turk et al. 2019). Smectite found between 100 meters and 600 meters (Figure 4.4) characterizes the formation of a clay cap for the geothermal reservoirs in Fiale Caldera. High temperature minerals in the cold zone suggest the existence of a past geothermal reservoir invaded in the recent times by the sea water through the Asal rift zone (Jalludin 2004, Turk et al. 2019).

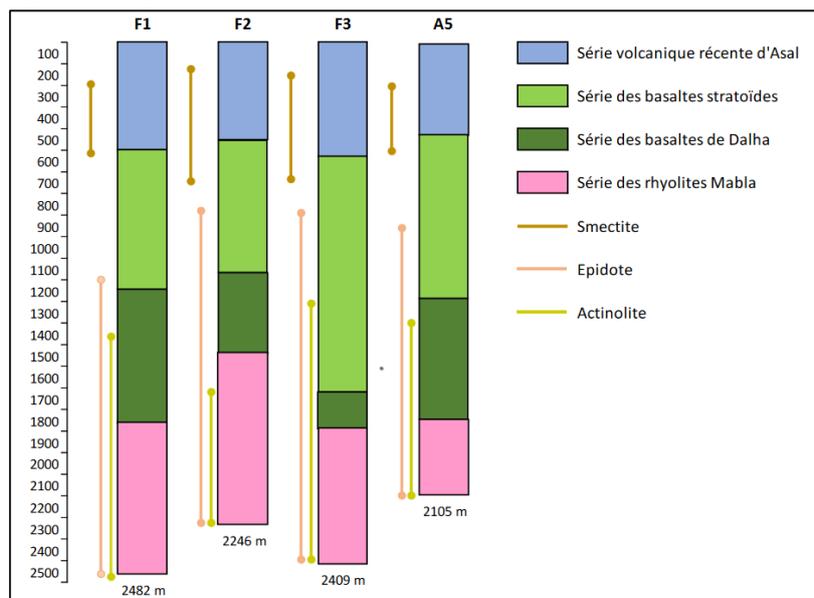


Figure 4. 4 : Geological sections of the three boreholes and the alteration minerals (from, Djama et al., 2022 reports)

A new geophysical investigation

Ragueh et al (2023) have developed a new linear 3D gravity inversion constrained by a resistivity model obtained from a prior 3D MT inversion. They applied the technique to gravity and magnetotellurics data available in the Asal Rift region. Here, we used a subset of this MT and gravity database to focus the analysis on the two acknowledged geothermal regions, Gale-le-Koma and the Fiale cadera (Figures 4.1 and 4.6). We performed new inversions at both sites on a refined grid compared to the previous study to increase the resolution of the resistivity and density models.

MT inversion

We first performed a new 3-D MT inversion at 22 MT sites in Gale-le-Koma (GK) area and 22 sites in Fialé caldera (FC) area (Figure 4.6). The MT data have been acquired by ISOR in Iceland and the Centre d'Etudes et de Recherches de Djibouti (CERD) in 2008 (Ragueh et al. 2023).

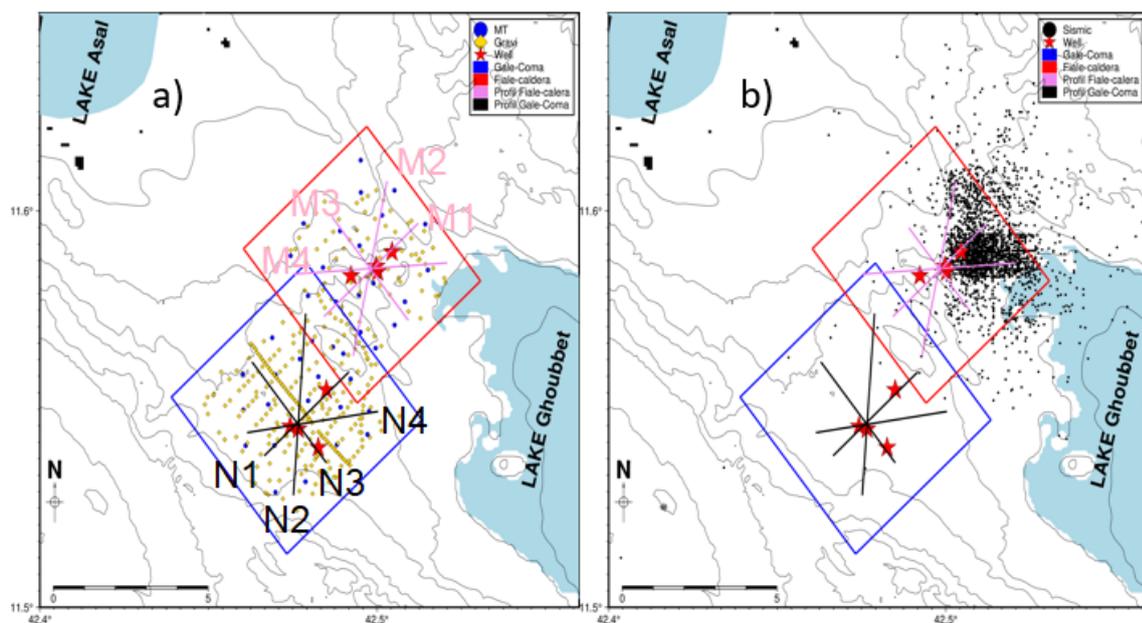


Figure 4. 5: a) MT stations in blue, gravity data in yellow, boreholes in red, b) seismic events between 1979 and 2011 in black.

We carried out the 3D inversion of the MT impedance tensors at all available periods with the IMAGIR MINIM3D code (Hautot et al, 2007). We examined carefully the four components of the tensor at each site and eliminated the non-physical data with the single site 3D inversion technique of IMAGIR. The 3D inversion of both FC and GK data sets was carried out on grids of 5x5x5km 23x24x14 cells for FC and 21x21x14 for GK. The minimum size for the cells were 200 m. The grids were aligned along N040 corresponding to the direction of rift propagation (Ruegg and Kasser, 1987, Magnighetti et al., 1998).

We carried out a series of tests for the homogeneous half-space starting models. The optimum value chosen was 12 ohm-m. We used a minimum error floor of 2% and 5% of the amplitude of the off-diagonal and diagonal components respectively. The final root-mean-square (RMS) values for these two models are 3.2 (for FC) and 2.4 (for GK). Figure 4.6 shows an example of the apparent resistivity and phase responses compared to the data at three sites.

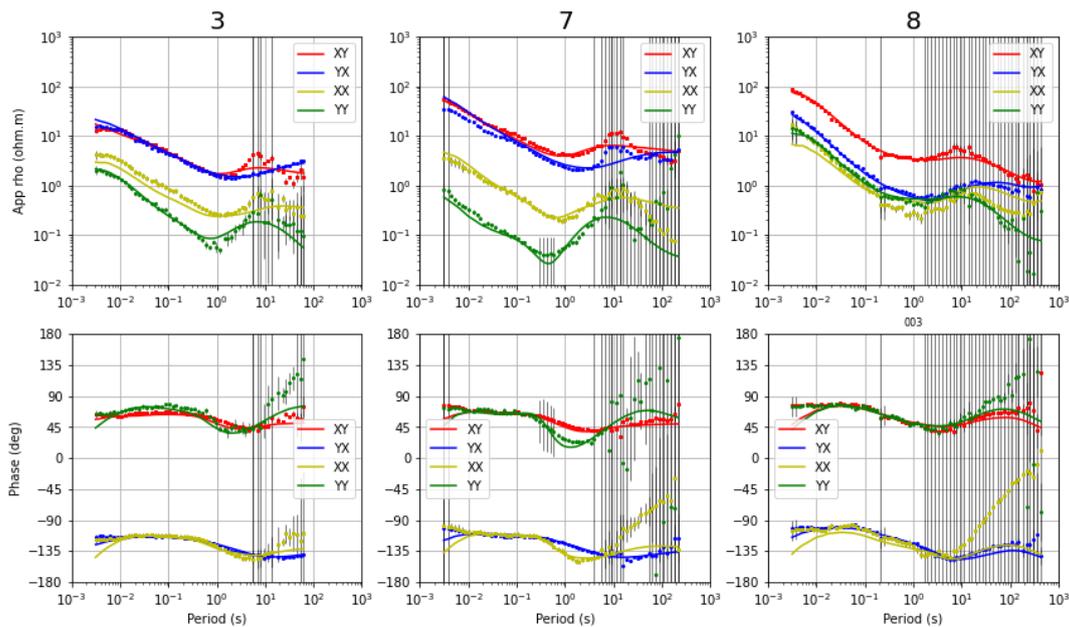


Figure 4. 6 : MT responses at 3 sites in FC and GK areas. Top apparent resistivity, bottom: phases of the four MT tensor coefficients. The full lines are for the model responses. The sites number refer to the ISOR EDI files database (see Supplementary section).

The resistivity models resulting from these inversions are presented in Figures 4.7 and 4.8 as vertical sections along the profiles depicted in figure 4.5. We present the full resistivity models for both areas FC and GK in the Supplementary section (Figures S 4.1 and S 4.2). The next step is to use this resistivity model to constrain the inversion of the gravity data. Indeed, gravity inversion suffers from an intrinsic non-uniqueness since it is always possible to design a

distribution of mass at any depth that would explain perfectly well the observations (e.g. Blakely 1996). The approach developed in Ragueh et al. (2023) is to restrict the density model space to density models with some degree of correlation with the resistivity distribution, a reasonably valid hypothesis in volcanic and geothermal area.

Constrained gravity inversion

The gravity data used in this study come from an extensive survey carried out by the Bureau de Recherches Géologiques et Minières (BRGM) in the Asal rift in 1979 and 1980 (Demange and Puvilland, 1990). From the initial database used by Ragueh et al 2023, we selected 221 and 210 data points in the two zones GK and FC respectively (Figure 4.3). The residual Bouguer anomaly (RBA) from Ragueh et al (2024) for these two zones GK and FC are presented in Figure 3.11b.

The inversion algorithm is described in Ragueh et al. (2023). The density grid used in the inversion is similar to the MT grid. The inversion is set linear and consists of minimizing a cost function (Eq. 4.1) composed of a misfit function between the RBA and the density model response, a regularization term and two coupling terms between density and the log of resistivity (Ragueh et al 2023). One coupling (CO_{cp}^2) is the correlation between the two parameters and the other (CO_{cg}^2) is the cross gradient of the parameters (Ragueh et al 2024). The density grid is formed by rectangular prisms whose attraction is computed with Blakely's subroutine gbox (1996).

$$D^2 = \|\vec{g}_{obs} - G\vec{d}\|^2 + \lambda\|W\vec{d}\|^2 + \alpha_1 CO_{cg}^2 + \alpha_2 CO_{cp}^2 \quad (4.1)$$

The term W is a matrix to weight the parameters to account for the loss of resolution with depth in the gravity inversion (Li and Oldenburg 1998). The coefficients λ , α_1 and α_2 weight the regularization and the coupling terms CO_{cg}^2 et CO_{cp}^2 .

Ragueh et al. (2024) studied Eq. 4.1; and determined rules to adjust the weight factors with respect to the misfit term. They observed that the choice of coupling and the weighting lead to density models with different features while always fitting very well the gravity data. We observed the same behavior in the analysis of the inversion of the FC and GK data. Following Ragueh et al., we used a principal component analysis (PCA) to determine the salient features common to all models but mixed in a given model. We run the PCA on a total of 10 density models from CP and CG couplings for each two areas studied. For each area, we observed that only two eigenvalues explained about 80% of the total variance of the 10 models (Table 4.2).

We projected the density models onto the corresponding two eigenvectors for each area. These PCA density models represented the distribution of the maximum of variance observed in the inverse density models obtained under the constraint of the resistivity distribution. These PCA models are along two perpendicular eigenvectors and therefore depict a complementary information contained in the original density models. Thus, they are not strictly density models. They describe features differently correlated to the resistivity model and its gradient (Table 4.2). The correlation between gradients is always positive since it is computed between the gradient magnitudes. The correlation between the parameters however may be positive (correlation) or negative (anticorrelation). We observe in Table 4.2 that for the 1st eigenvalues both FC and GK correlations are negative while it is positive for the 2nd eigenvalues. This contrasted result between the 1st and 2nd eigenvalues PCA models suggested two different processes controlling the density distribution (Ragueh et al. 2023).

The final PCA density models are presented as vertical sections along profiles M1-4 for Fiale Caldera area in Figure 4.7 and N1-4 for Gale-le-Koma in Figure 4.8. The full models as horizontal sections are presented in Supplementary section (Figures S 4.2- S 4.6).

| PCA models | Eigenvalues (%) | Correlation with resistivity | Correlation with gradient of resistivity |
|------------|-----------------|------------------------------|--|
| FC-1 | 58 | - 0.70 | 0.63 |
| FC-2 | 18 | 0.56 | 0.59 |
| GK-1 | 50 | -0.45 | 0.25 |
| GK-2 | 28 | 0.58 | 0.27 |

Table 4. 2: Results from the ACP analysis and correlation of PCA models (see text) onto the two first eigenvectors.

Results for the Fialé Caldera

All models, resistivity and PCA densities, exhibit complicated patterns even at this small scale. We first considered the resistivity model and its relationship with the geology of the Fialé Caldera and the informations obtained from the boreholes.

The top resistive layer (Figure 4.7 and S 4.1) seemed to correspond to the lavas from the recent volcanic sequence. Below, we observe a conductive medium interpreted as the clay cap resulting from the hydrothermalism of the volcanics in agreement with the data from the boreholes (Figure 4.4). The clay cap seems continuous laterally excepted in the EW direction.

The resistor at depths about 2000m bsl could be the signature of the geothermal reservoir observed in the boreholes. In Supplementary Figure S 4.1, we observed a conductive zone between the Goubhet Gulf and the Fiale caldera progressively increasing in size down to 178 m bsl (below sea level).

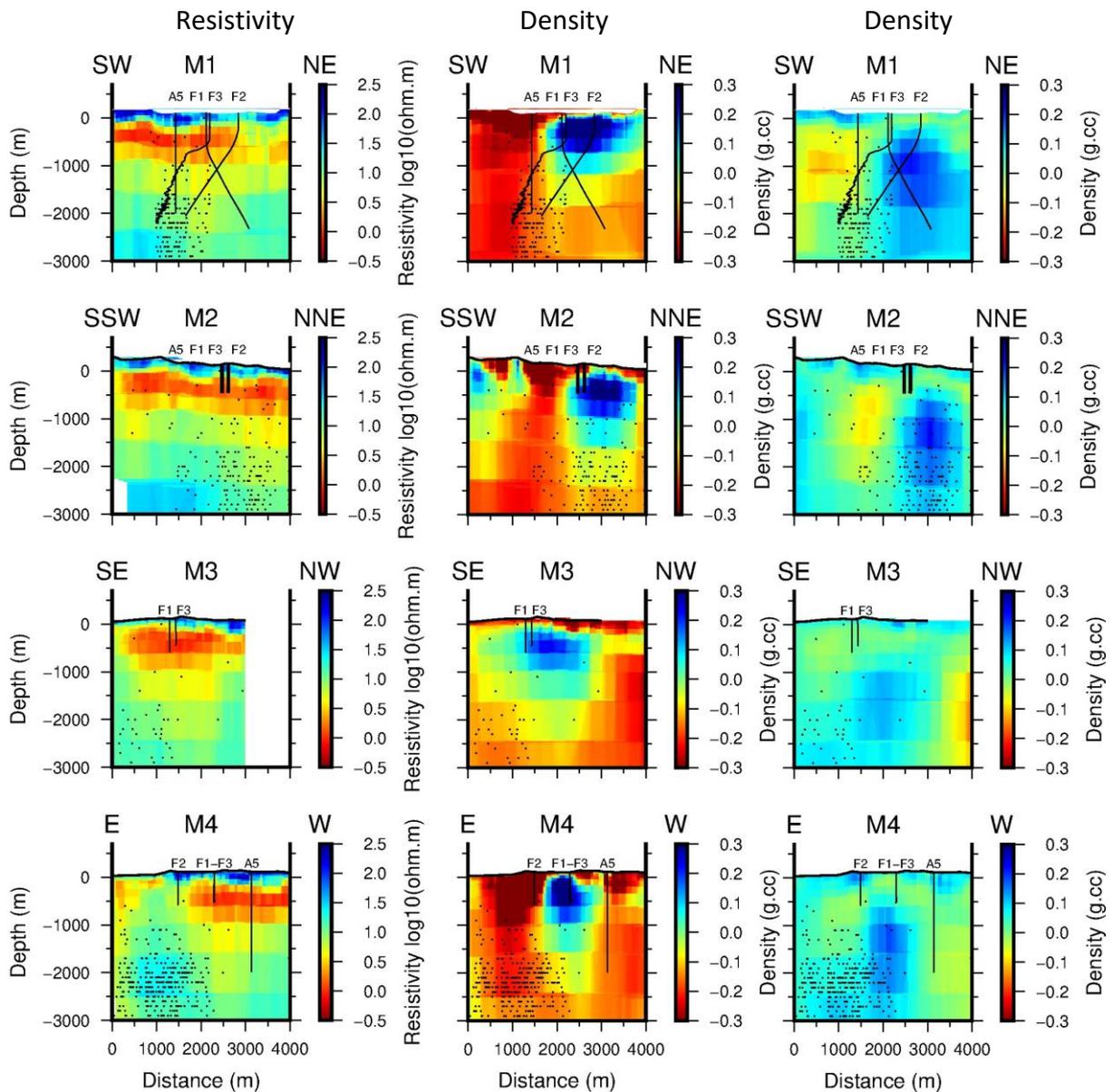


Figure 4. 7 M1-4 vertical sections in FC area. Left column: resistivity; middle: VP density for eigenvalue 1; Right: for eigenvalue 2. The black lines are the projection of the F1-3 and A5 boreholes. The black dots are the seismicity recorded between 1979 and 2011.

This feature could be related to the sea water intrusion effects already noticed from the results from a TDEM survey by Orkustofnun (1988) and continue to the SW (M1 profile Figure 4.7) along a steep slope near the caldera of Fiale. In Figure 4.7, the model then revealed a conductive structure down to ~800m in depth. While the upper part of this conductor appears consistent with the presence of a clay cap layer, the bottom of the conductive zone could be related to the cold intermediate reservoir in the lower part of the Asal volcanic series and in the upper part of the stratoid basalts. The extension of this conductor seemed to stop to the NE (M1, M4, Figure 4.7) although it is not well constrained by the data. This discontinuity is correlated to the so called “small rift” (Vigny et al, 2007), a highly fractured rift structure with numerous open fractures which could have acted as a drain to carry the water down to the intermediate reservoir.

At depths below 2000m, the resistivity in Figure 4.7 and in S 4.1 increases and so could correspond to the deep high enthalpy reservoir (~360°C) tapped into the aciditic rocks of Mablá, trachytes and rhyolites. This observation would be in agreement with the detection of a negative P-wave anomaly below the Fiale caldera area interpreted by steam and gas in the permeable zones of the rock instead of liquid saturation (Dobre, 2007). The highly saline fluids observed in this reservoir limit the increase in resistivity.

The correlations between the PCA models and the resistivity as well as their gradients are quite high (Table 4.2). These correlations are computed for the whole models and appears indeed visually correlated in Figures S 4.1-4.3 in Supplementary section. These correlations are not necessarily all visible on the profiles of Figure 7 because locally, there may be features either in the gravity data or in the resistivity model that are not correlated. In profiles M1 and M2, both PCA models show strong PCA density contrasts, in relation with the RBA data (Figure 3.11), but not seen in the resistivity section. This feature is however visually correlated with the seismicity (Figure 4.7) and the tomography from Dobre et al. (2007) suggesting a fault system controlling both density and velocity and less the resistivity which seems dominated by the hydrothermalism resulting in the formation of a highly conductive clay-cap. The correlations (>0 and <0) between PCA models and resistivity are observed in profiles M3 and M4 and deeper in the vertical sections (Figure 4.7). Ragueh et al. (2023) proposed at the scale of the Asal Rift that the two dominating eigenvalues correspond to two competing processes,

volcano-tectonics and geothermalism. Of course, these processes are interconnected which could explain the complicated patterns observed.

Results for the Gale-le-Koma area

The resistivity models for the Gale-le-Koma area along the profiles N1-N4 in Figure 4.8 are similar to those of Fiale Caldera (Figure 4.7) and shows the classical volcanic geothermal alternation of a top resistive volcanic layer over a highly conductive clay cap itself over a more resistive reservoir (e.g. Cumming 2016). This observation is consistent with the relatively similar lithology described in the boreholes in both areas. In details, of course we observed some differences related to the tectonic and volcanic environment. These differences are clearly outlined in the PCA density models quite distinct from the Fialé Caldera (Figure 4.7). Indeed, the main difference between the two sites are their location with respect to the faults, fracturing and recent volcanic events in the Asal rift (Figure 4.1).

From the surface we observed lateral variation of the top resistive layer (Figure S 4.1, Supplementary section) corresponding to the Asal volcanic series. The Northeastern side of the borehole area is the most resistive limited to the Northwest by more conductive structures along the rift trend.

The conductive layer beneath combines the altered hydrothermalised zone and the shallow reservoir observed 300-600m depth in the productive boreholes (A1, A3 and A6). Below ~1000m the increase in resistivity is in good agreement with the discovery of the deep high enthalpy reservoir, 260°C, tapped between 1100 m and 1300 m within the Dalha basalts and characterized by high to medium permeability. Since the water is highly saline, the resistivity increase is moderate compared to other systems (Cumming 2016).

In profile N3 (Figure 4.8) we observe a lateral increase in resistivity from the area of boreholes A3 and A6 toward A2, suggesting down to 3000 m, a discontinuity revealed more clearly in the ACP models. In the later, rapid lateral changes within 1000m below surface underlined the more subtle variations in the resistivity model, particularly up to the surface. This fracture zone is also observed in the field (Figure 4.1). The differences between ACP models 1 and 2 are likely to be due to the same processes differencing ACP models 1 and 2 in Fialé Caldera area (Figure 4.7), namely a geothermal control of the resistivity and ACP model 1 and a

tectonic control in ACP model 2. Indeed, the correlation between resistivity and ACP model 1 is more pronounced than for ACP model 2.

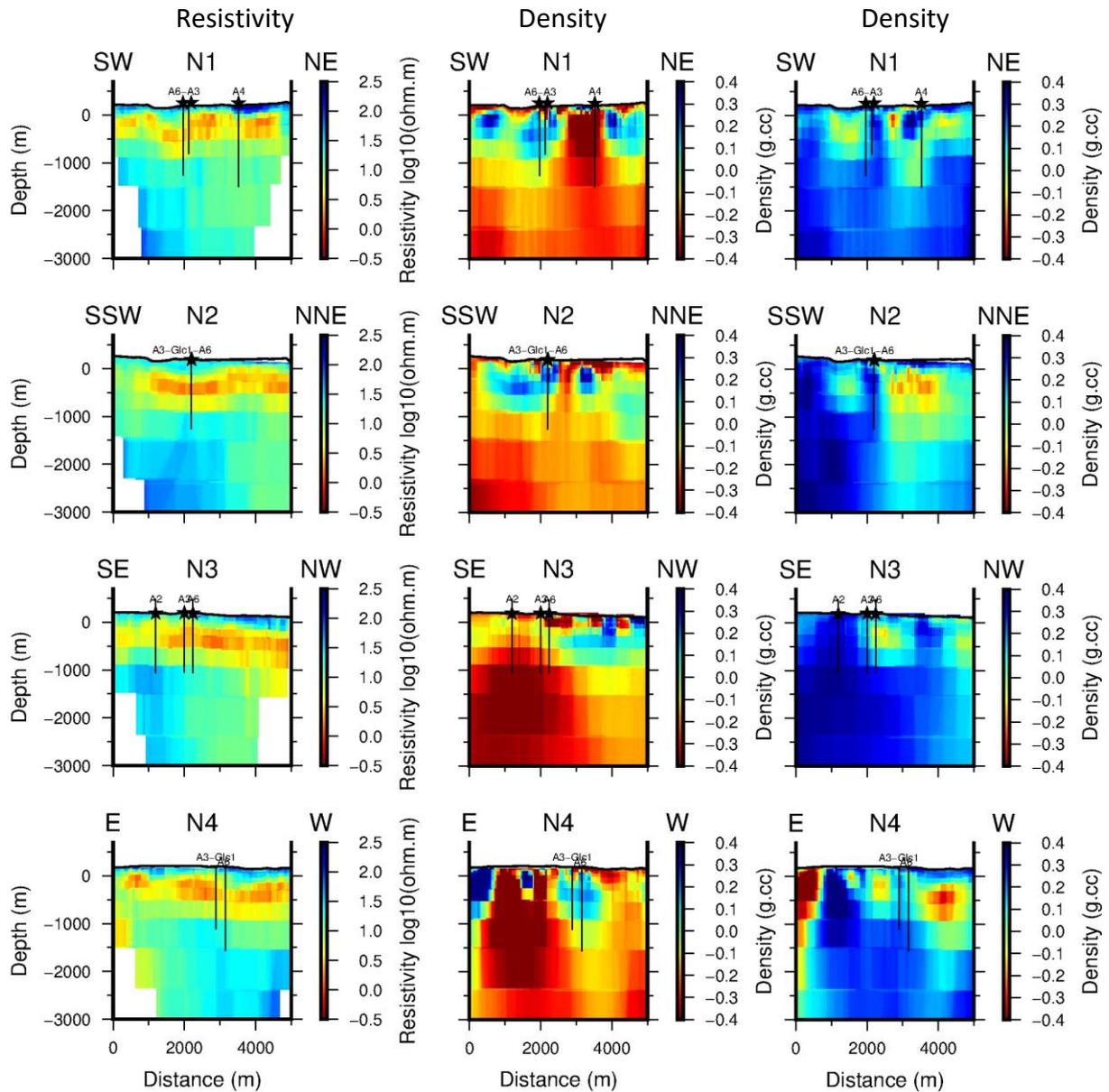


Figure 4. 8: N1-4 vertical sections in GK area. Left column: resistivity; middle: VP density for eigenvalue 1; Right: for eigenvalue 2. The black lines are the projection of the A1-A4 and A6 boreholes.

Discussion

In both regions (GK and FC), the resistivity model is in general agreement with the conceptual models built to describe the geothermal systems.

The Fialé Caldera conceptual model was indeed built partly on the basis of preliminary 1-D inversion of the MT data (Geological 2022) and therefore we expected the 3-D resistivity model to be consistent with that conceptual model but with much refined information on the geometry of the base of the clay cap and on the reservoirs. However, the existence of a cold intermediate reservoir remained a difficult clue to predict. Nevertheless, the refined resistivity structure showed the existence of conductive pathways from Ghoubett to Fialé. Furthermore, despite the very complicated structuration of the density revealed by the gravity inversion and ACP analysis, the latter provided a renewed vision of the fracturing of the Fialé area. Associated with the aforementioned observed conductive pathways, a better conceptual model would have included the possibility of seawater drained into deep (several 100m) structures and hence cooling eventual geothermal reservoirs.

In Gale-le-Koma, a geothermal prospect discovered well before the MT survey, the performance of the 3-D modeling allowed us to describe finely the structure of the geothermal system. In particular, a robust and moderate resistivity value in the deep high enthalpy reservoir suggested indeed conductive fluids flowing there. It remained difficult to see in the resistivity model all the complications revealed by the 5 boreholes in the area. The ACP density models here also helped to describe the highly heterogeneous nature of the substratum, a fact that should be accounted for in a revision of the existing conceptual model.

Conclusions

We applied a new approach to combine gravity inversion and resistivity distribution in the two acknowledged geothermal prospects in the Asal Rift, Gale-le-Koma and Fialé Caldera. The gravity inversion was constrained by the 3-D resistivity model for each site. The resulting density models were combined into a multivariate statistical analysis to extract the salient features explaining the gravity data in accordance with the resistivity models. The ACP analysis provided two models along the two dominant eigenvectors of the variance matrices between all density models spanning the model space associated with the resistivity distribution. While these models are not directly interpretable in terms of density, they provided clues on the distribution of positive and negative density contrasts and outlined the distribution of fracturing and faults in the studied areas. The synthesis of the resistivity and the ACP models led to suggestions to revise the conceptual models produced for the Asal geothermal prospects.

Acknowledgments

We would like to thank the supplier Electricite de Djibouti (EDD) for allowing us to use the drilling data. Our thanks to the Institut de Physique du Globe de Paris (IPGP) for making available the bathymetric data from the Ghoubbet. We would also like to thank the International Gravity Bureau for helping us obtain the geographical coordinates of the gravity data from the Asal rift.

References

Ahmed MM. 2018. Well design for the Asal geothermal field: a case study for well Glc-2. UNU-GTP 20.

Arnott, S. K., and G. R. Foulger (1994a), The Krafla spreading segment, Iceland: 1. Three-dimensional crustal structure and the spatial and temporal distribution of local earthquakes, *J. Geophys. Res.*, 99, 23,801 –23,825.

Awaleh, M. O., Baudron, P., Soubaneh, Y. D., Boschetti, T., Hoch, F. B., Egueh, N. M., ... & Gassani, J. (2017). Recharge, groundwater flow pattern and contamination processes in an arid volcanic area: Insights from isotopic and geochemical tracers (Bara aquifer system, Republic of Djibouti). *Journal of Geochemical Exploration*, 175, 82-98.

Arnason, K., H. Eysteinnsson, and G. P. Hersir, 2010, Joint 1D inversion of TEM and MT data and 3D inversion of MT data in the Hengill area, SW Iceland: *Geothermics*, 39, 13–34, doi: 10.1016/j.geothermics.2010.01.002.

AQUATER. (1989). Djibouti geothermal exploration project: Republic of Djibouti. AQUATER.

ARGeo: 9th African Rift Geothermal Conference (ARGEO-C9) Report, Djibouti, 2022. Djama Ali Guelleh, Mohamed Chaari and Jalludin Mohamed: Preliminary results of the geothermal exploration project of EDD in Fialé, Asal rift, Djibouti.

Ballu, V., Diament, M., Briole, P., & Ruegg, J. C. (2003). 1985–1999 gravity field variations across the Asal Rift: Insights on vertical movements and mass transfer. *Earth and Planetary Science Letters*, 208(1-2), 41-49.

Blakely, R. J., 1996. Potential theory in gravity and magnetic applications. Cambridge University Press, Bennington, N.L., Zhang, H., Thurber, C.H. and Bedrosian, P.A. (2015) Joint inversion of seismic and magnetotelluric data in the parkfield region of California using the normalized cross-gradient constraint. *Pure and Applied Geophysics*, 172(5), 1033–1052.

BRGM 1975. Rapport de fin de sondage Asal1. Résultats des premiers essais de production.

75SGN442GTH, 18p.

BRGM 1993. Champ géothermique d'Asal. Synthèse des données. ISERST. 93CFG06, 74p.

Carver, C. T., Garg, S. K., Davis, L. C., & Jalludin, M. Reservoir Characterization from Exploration Well Completion Tests in the Fiale Caldera, Djibouti.(2019)

Correia, H., Fouillac, C., Gerard, A., & Varet, J. (1985). The Asal Geothermal Field (Republic of Djibouti). Geothermal Resources Council Transactions, Volume 9, 513-519

Cumming, W. (2016). Geophysics and resource conceptual models in geothermal exploration and development. In *Geothermal power generation* (pp. 33-75). Woodhead Publishing.

D'Amore, F., Giusti, D., & Abdallah, A. (1998). Geochemistry of the High-Salinity Geothermal Field of Asal, Republic of Djibouti, Africa. *Geothermics* Vol 27, No. 2, 197-210.

Demange, J., & Puvilland, P. (1990). Champ géothermique d'Asal. Synthèse des Données. Bur. de Rech. Geol. et Min., Orléans, France.

Dobre, C. (2004). Structure et Mécanismes des Segments de Rift Volcano-Tectoniques. Etudes de Rift Anciens (Ecosse, Islande) et d'un Rift Actif (Asal-Ghoubbet). Phd Thesis.

Dobre, C.; Peltzer, G. Fluid-controlled faulting process in the Asal Rift, Djibouti, from 8 yr of radar interferometry observations. *Geology* 2007, 35, 69.

Fouillac, C.; Fabriol, R.; Lundt, F. Champ Géothermique d'Asal. Synthèse des Données Hydrogéologiques et Géochimiques Disponibles au 1er Janvier 1983; Final BRGM Report 83 SGN 022 GTH; BRGM : Orléans, France, 1983

Gasse, F., & Fontes, J. C. (1989). Palaeoenvironments and palaeohydrology of a tropical closed lake (Lake Asal, Djibouti) since 10,000 yr BP. *Palaeogeography, Palaeoclimatology, Palaeoecology*, 69, 67-102.

Gallardo, L. A., Meju, M. A., 2007. Joint two-dimensional cross-gradient imaging of magnetotelluric and seismic traveltimes data for structural and lithological classification. *Geophysical Journal International* 169 (3), 1261-1272.

GEOLOGICA 2022. Fiale Binder of Reports. Projet d'exploration géothermique de Fialé, Geothermal Consulting Company, Electricité de Djibouti. 220p.

GEOLOGICA 2023, Fiale Caldera Geothermal Exploration Power Generation Feasibility Study, Final report.

Gudmundsson, A. (1998), Magma chambers modeled as cavities explain the formation of rift zone central volcanoes and their eruption and intrusion statistics, *J. Geophys. Res.*, 103, 7,401 – 7,412.

Hautot, S., Tarits, P., Whaler, K., Le Gall, B., Tiercelin, J.-J., Le Turdu, C., 2000. Deep structure of the baringo rift basin (central kenya) from three-dimensional magnetotelluric imaging: Implications for rift evolution. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 105 (B10), 23493-23518.

Hautot, S., Single, R., Watson, J., Harrop, N., Jerram, D., Tarits, P., Whaler, K., Dawes, D., 2007. 3-d magnetotelluric inversion and model validation with gravity data for the investigation of flood basalts and associated volcanic rifted margins. *Geophysical Journal International* 170 (3), 1418-1430.

Karlsdóttir, R., Vilhjálmsson, A. M., & Guðnason, E. Á. (2020). Three dimensional inversion of magnetotelluric (MT) resistivity data from Reykjanes high temperature field in SW Iceland. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 391, 106498.

Kolker, A., Cumming, W., & Stelling, P. (2010). Geothermal exploration at Akutan, Alaska: Favorable indications for a high-enthalpy hydrothermal resource near a remote market. *Geothermal Resource Council Transactions*, 34, 561-566.

Lepine, J. C., Ruegg, J. C., & Steinmetz, L. (1972). Seismic profiles in the Djibouti area. In *Developments in Geotectonics* (Vol. 7, pp. 59-64). Elsevier.

Manighetti, I.; Tapponnier, P.; Gillot, P.Y.; Jacques, E.; Courtillot, V.; Armijo, R.; Ruegg, J.C.; King, G. Propagation of rifting along the Arabia-Somalia Plate Boundary: Into Afar. *J. Geophys. Res. Space Phys.* 1998, 103, 4947-4974.

Mlynarski, M.; Zlotnicki, J. Fluid circulation in the active emerged Asal rift (east Africa, Djibouti) inferred from self-potential and Telluric-Telluric prospecting. *Tectonophysics* 2001, 339, 455-472.

Newman, G. A., M. Hoversten, E. Gasperikova, and P. E. Wannamaker, 2008, Three-dimensional magnetotelluric characterization of the Coso geothermal field: *Geothermics*, 37, 369–399, doi: 10.1016/j.geothermics .2008.02.006.

Onacha, S. A., 2006, Hydrothermal fault zone mapping using seismic and electric measurements: Ph.D. thesis, Duke University

Phoenix Geophysics, 2005: Data Processing User Guide, Phoenix Geophysics Limited, 3781 Victoria Park Avenue, Unit 3, Toronto, ON Canada M1W 3K5.

Ruegg, J.-C., and M. Kasser (1987), Deformation across the Asal-Ghoubbet Rift, Djibouti, uplift and crustal extension, 1979 - 1986, *Geophys. Res. Lett*, 14, 745 - 748.

Sakindi, G. Three-Dimensional Inversion of Magnetotelluric Data: Geological-Geothermal Interpretation of Asal Geothermal Field, Djibouti. Master's Thesis, United Nations University, Reykjavik, Iceland, 2015.

Sanjuan, B.; Michard, G.; Michard, A. Origine des substances dissoutes dans les eaux des sources thermales et des forage de la région Asal-Ghoubbet (République de Djibouti). *J. Volcanol. Geotherm. Res.* 1990, 43, 333-352.

Smittarello, D., Grandin, R., De Chabaliere, J. B., Doubre, C., Deprez, A., Masson, F., ... & Saad, I. A. (2016). Transient deformation in the Asal-Ghoubbet Rift (Djibouti) since the 1978 diking event: Is deformation controlled by magma supply rates?. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 121(8), 6030-6052.

Tarits*, P., Hautot, S., Roach, P., & Magareh, H. M. (2015). Mapping density models onto resistivity structure through joint inversion of gravity and MT. In *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2015* (pp. 854-858). Society of Exploration Geophysicists.

Vigny, C., J.-B. de Chabaliere, J.-C. Ruegg, P. Huchon, K. L. Feigl, R. Cattin, L. Asfaw, and K. Kanbari (2007), Twenty-five years of geodetic measurements along the Tadjoura-Asal rift system, Djibouti, East Africa, *J. Geophys. Res.* doi:10.1029/2004JB003230, in press

Supplementary Section 2

In this supplementary section, we present the full resistivity models in Figures S 4.1-4.2 and the PCA density models for the 2 dominant eigenvalues in Figures S 4.3 à 4.6. Figure S 4.5 shows the MT data and resistivity model responses at all FC and GK sites.

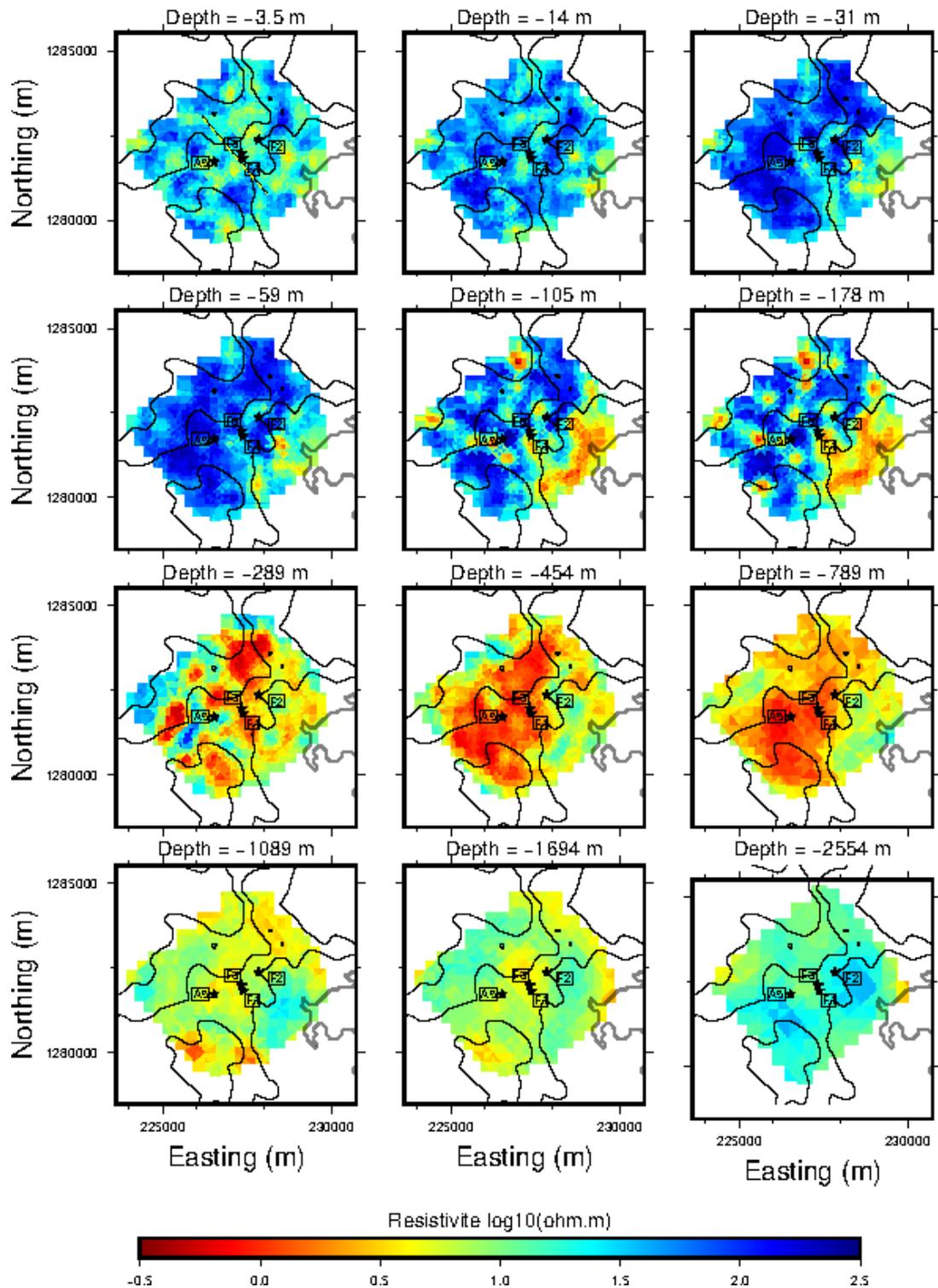


Figure S 4. 1: Full resistivity model as a function of depth in the Fiale caldera zone

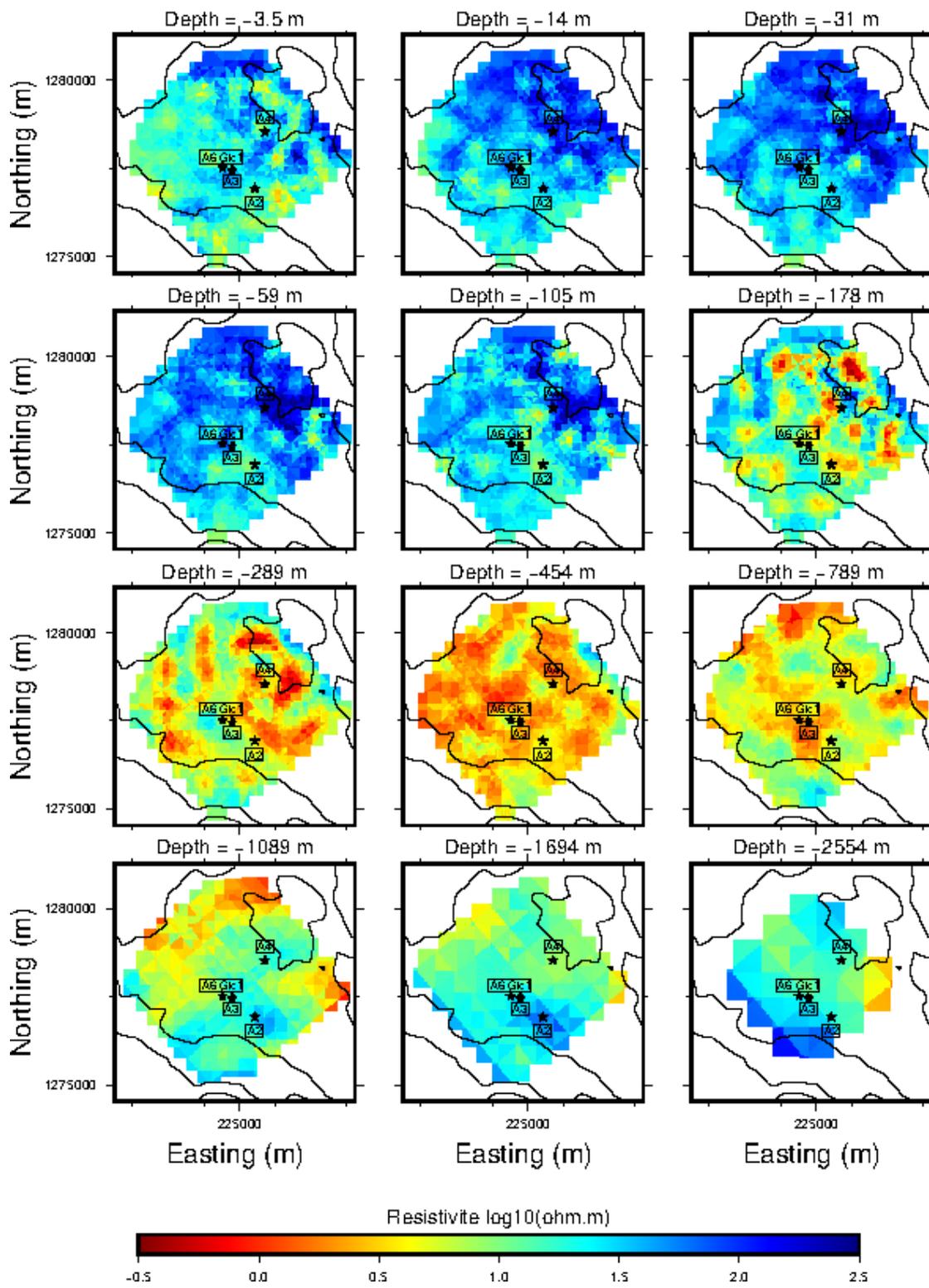


Figure S 4. 2: Full resistivity model as a function of depth in the Gale-le-Koma zone

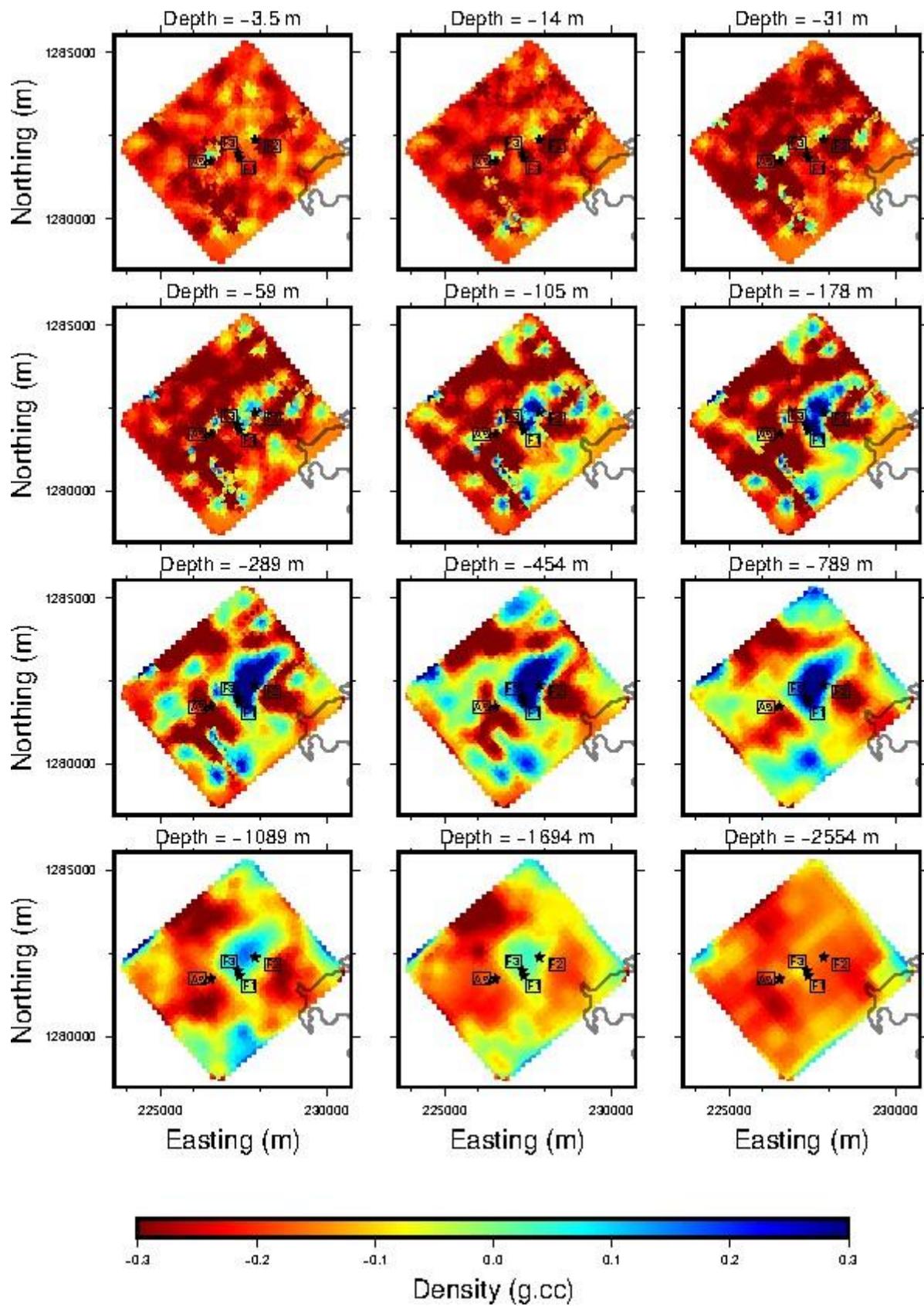


Figure S 4. 3: PCA density model for eigenvalue 1 as a function of depth in the the Fiale Caldera zone

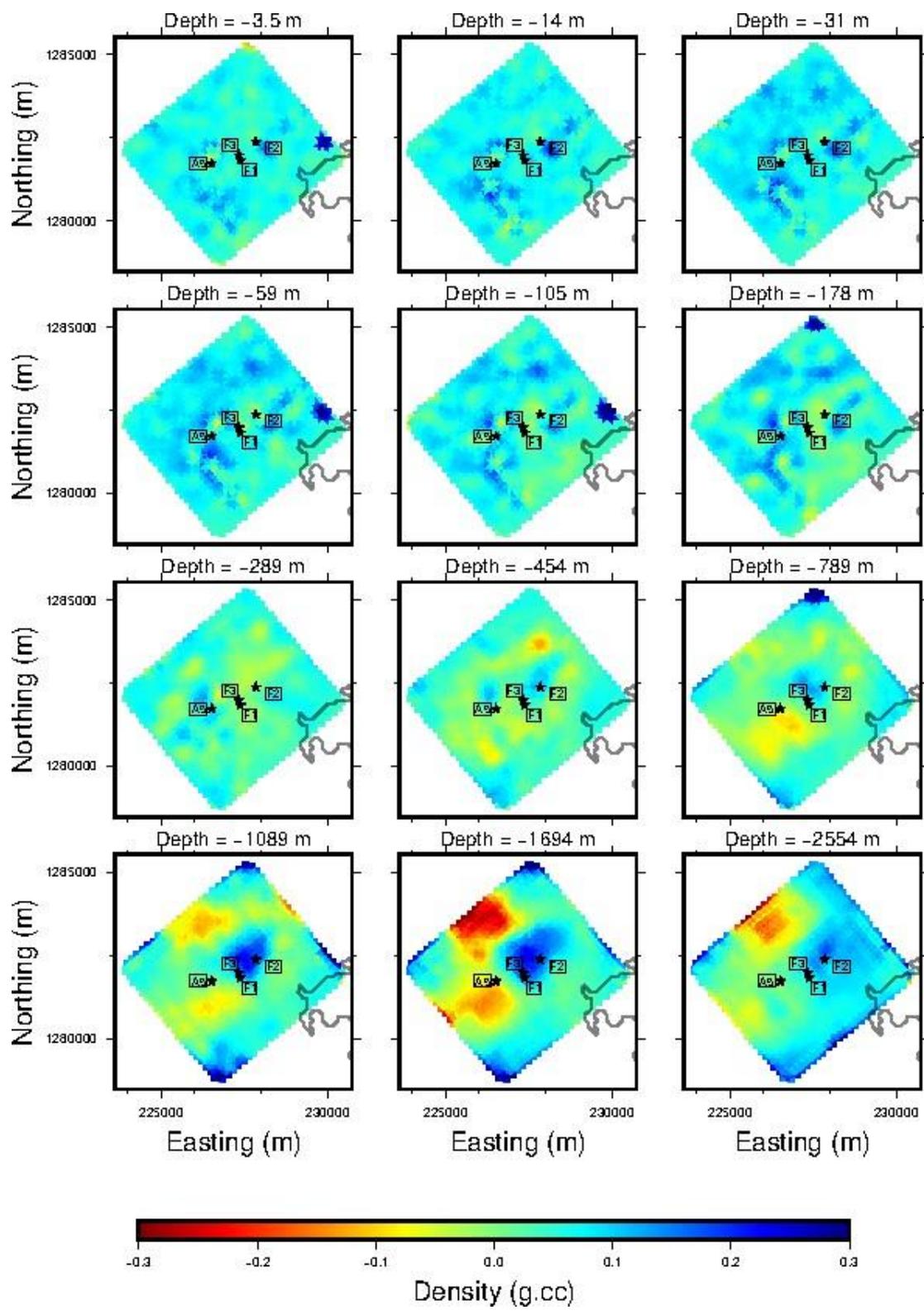


Figure S 4. 4: PCA density model for eigenvalue 1 as a function of depth in the the Fiale Caldera zone

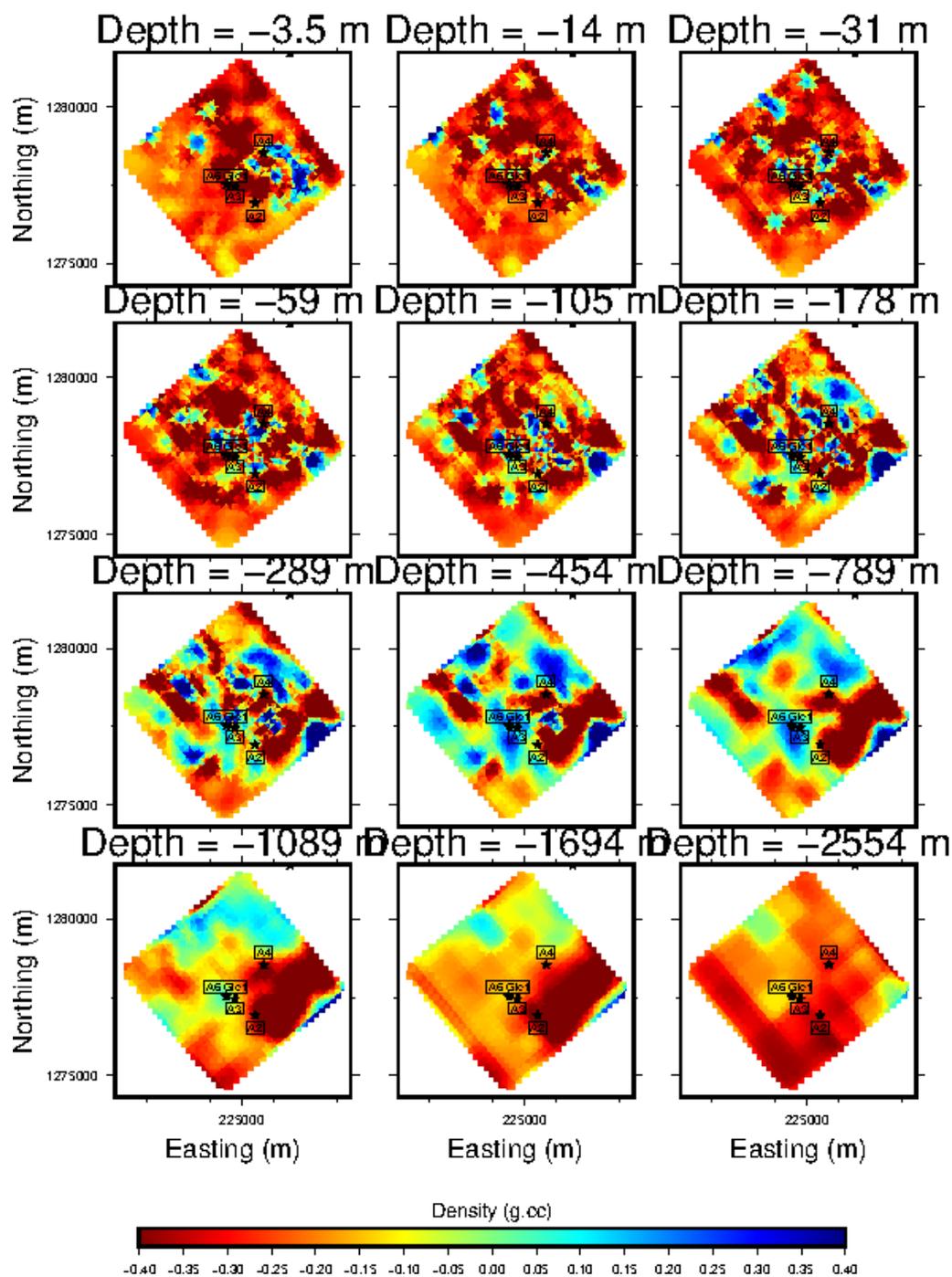


Figure S 4. 5: PCA density model for eigenvalue 1 as a function of depth in the Gale-le-Koma zone

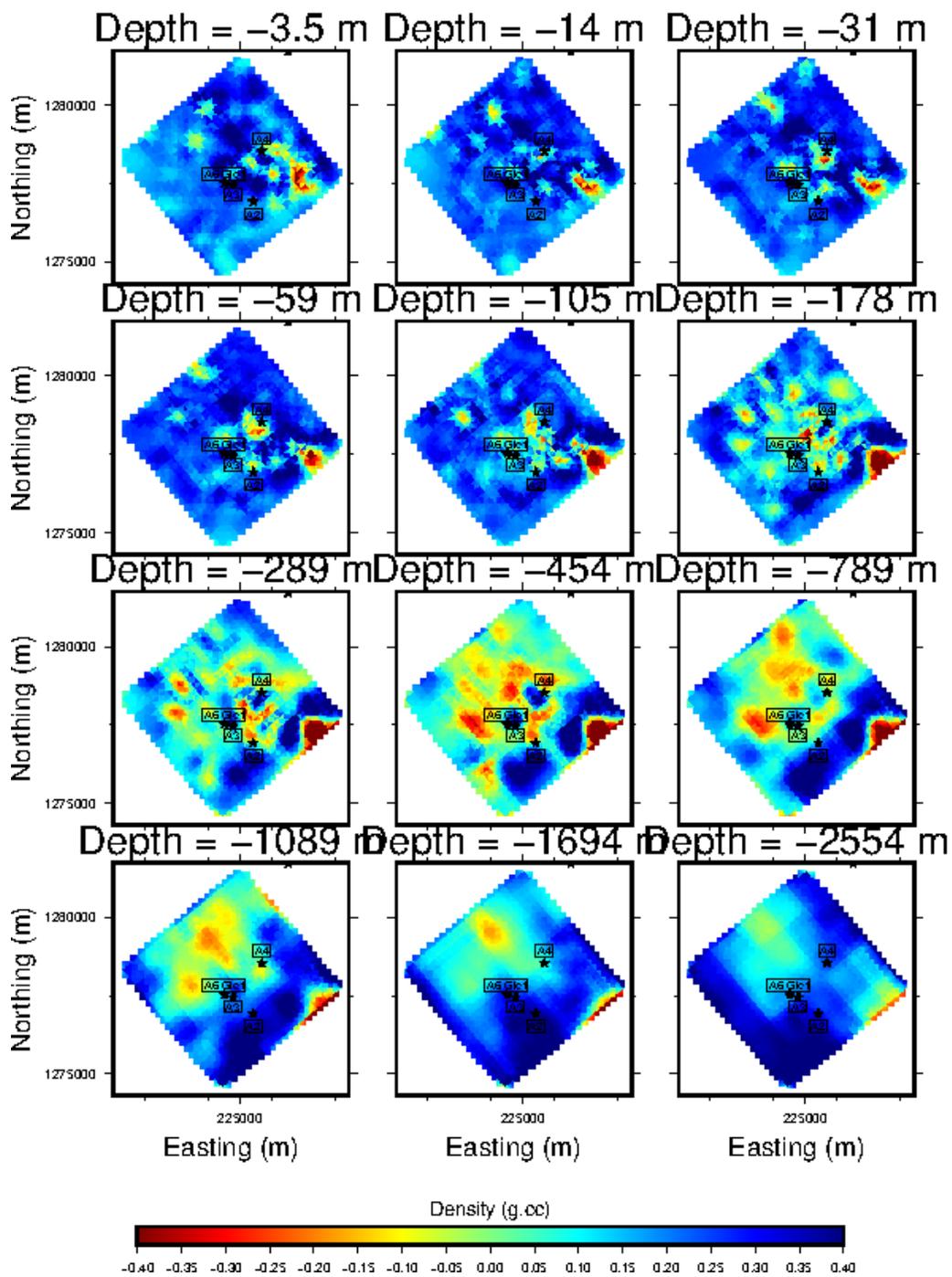
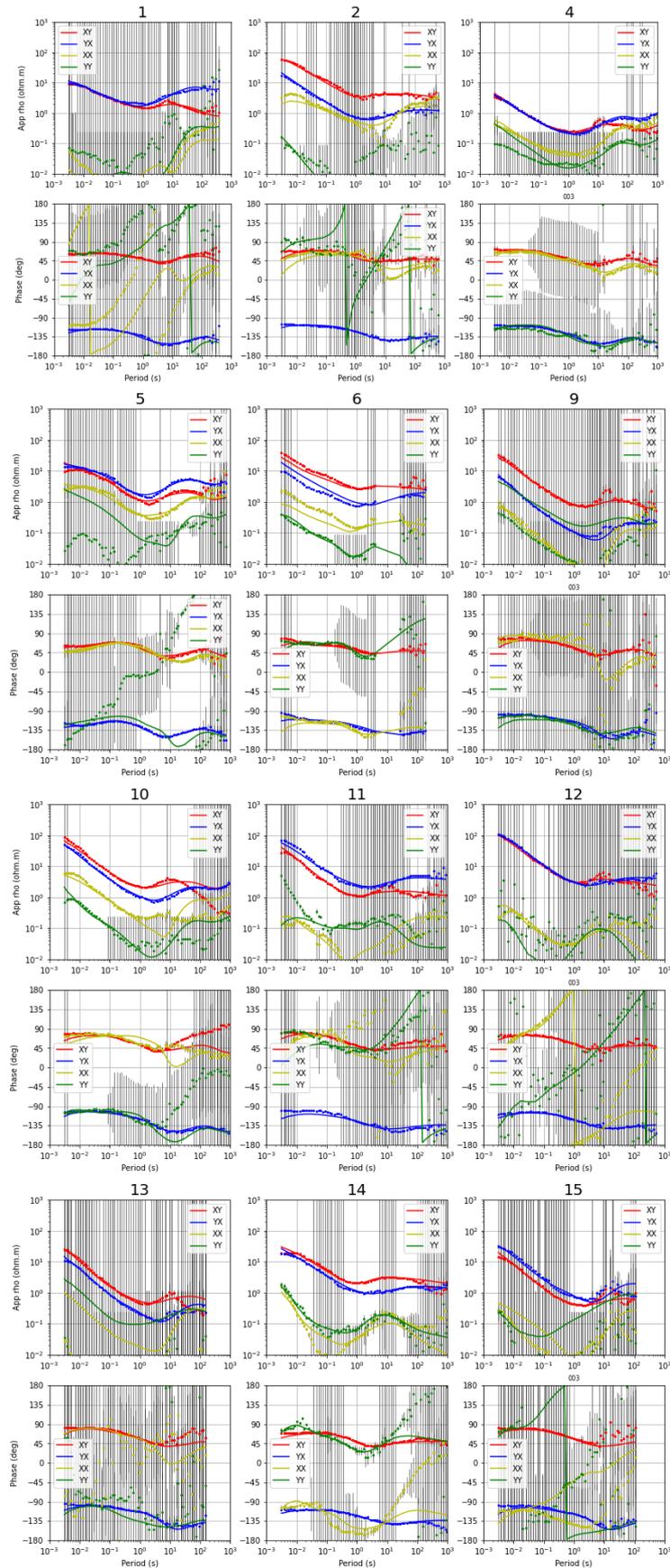
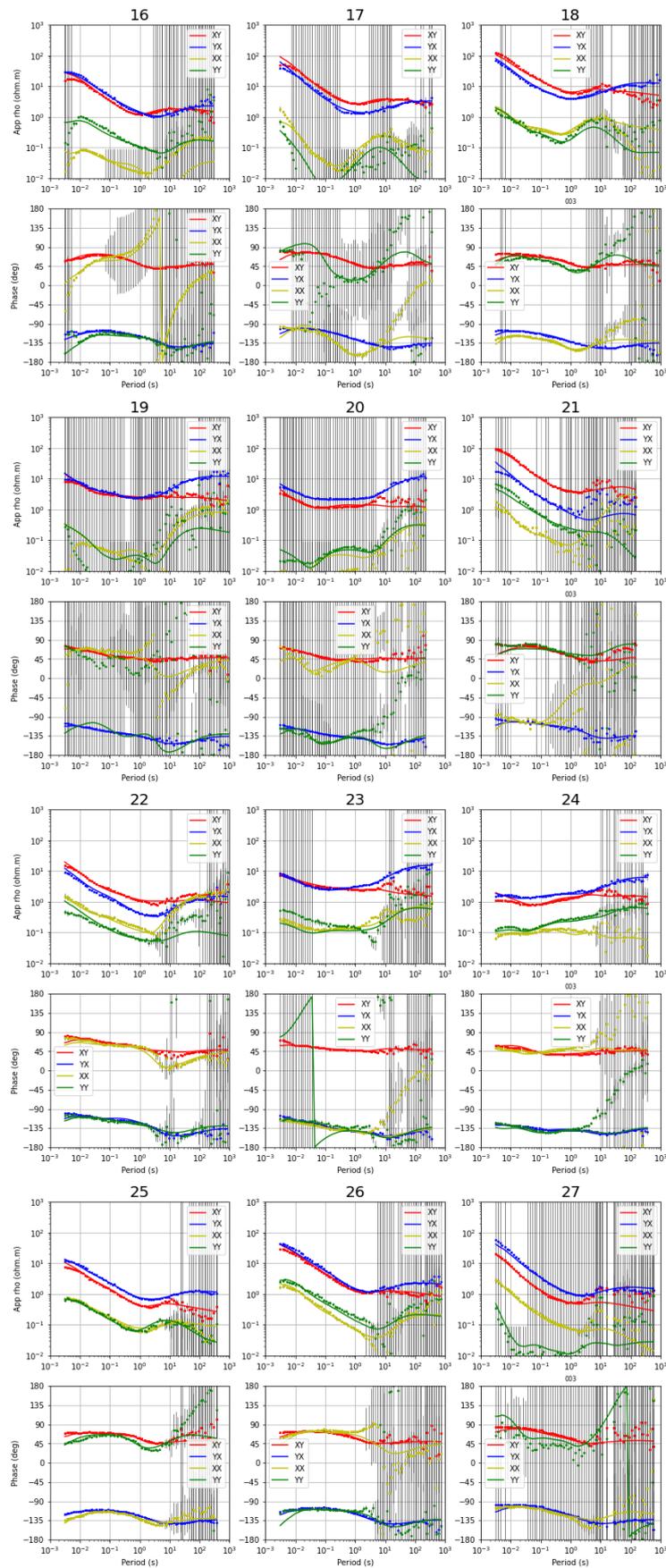
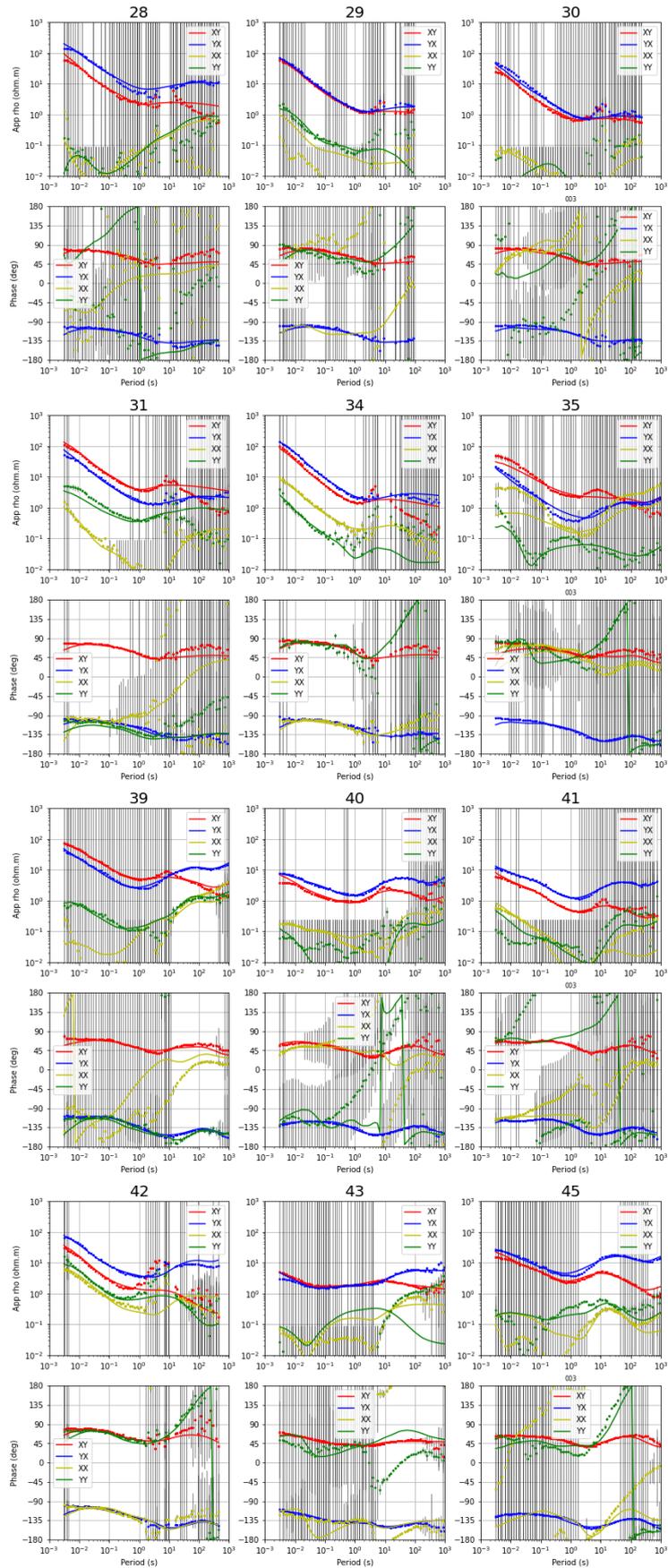


Figure S 4. 6: PCA density model for eigenvalue 2 as a function of depth in the Gale-le-Koma zone







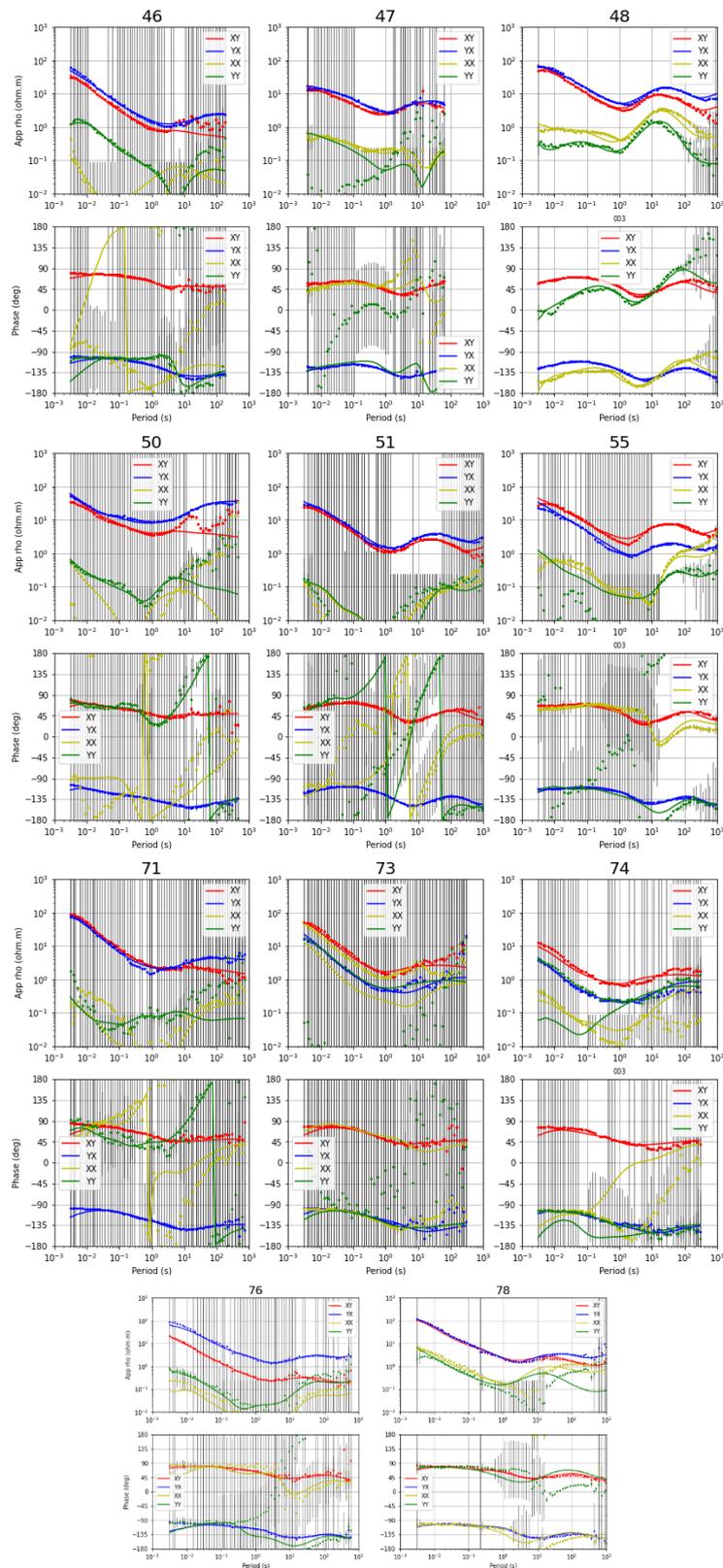


Figure S 4. 7: MT data for all sites in the FC and GK : off diagonal terms XY and YX in red and blue respectively, diagonal terms XX and YY in yellow and green respectively. The full line is the 3-D resistivity response.

Conclusion Générale et perspectives

Avant d'exploiter une ressource géothermique dans un contexte volcanique tel que le rift d'Asal, il est nécessaire d'acquérir une meilleure connaissance du sous-sol, pour l'objectif de localiser le réservoir géothermique et évaluer la ressource (perméabilité, température, etc.). Pour ce type de ressource, les méthodes d'exploration géophysiques sont essentielles (comme par exemple la gravimétrie, la sismique, la magnétotellurique, etc.). Les distributions de leurs paramètres physiques tels que la densité, la résistivité électrique et la vitesse sismique, permettent à la fois une évaluation et la délimitation de cette ressource. Une interprétation individuelle de ces différentes données ainsi que d'autres informations telle la géochimie, la géologie, peuvent aboutir à un modèle conceptuel raisonnable de la région.

Dans le cadre de ma thèse, nous utilisons d'une part la magnétotellurique (MT) et d'autre part la gravimétrie. La MT est sensible aux conductivités électriques des roches, aux circulations des fluides souterrains, l'altération des roches, etc. La gravimétrie est sensible aux structures des failles et des fractures du substratum rocheux. Ces deux informations sont complémentaires et peuvent converger vers une caractérisation du réservoir géothermique (Arts et al, 2019). Cependant ces données géophysiques sont confrontées à l'ambiguïté de la non-unicité, limitation du nombre de données et la présence de bruit. Tous ces problèmes peuvent conduire à la réalisation d'un modèle conceptuel biaisé qui ne reflète pas la réalité.

C'est pourquoi, dans mon travail de recherche, je me suis intéressé aux techniques d'inversion géophysiques conjointes et contraintes appliquées à la géothermie. En apportant plus de contraintes sur les paramètres inversés, cela permet de réduire les ambiguïtés rencontrées des inversions simples. L'approche que je propose est une nouvelle approche purement linéaire des données gravimétriques en utilisant la contrainte du modèle de résistivité MT. Afin de pouvoir effectuer un grand nombre d'inversions pour étudier la variabilité des modèles de contraste de densité en fonction de différents couplages. J'ai utilisé deux couplages différents, l'un entre les paramètres densité et résistivité (CP) et l'autre entre leurs gradients à l'aide d'un gradient croisé (GC).

Un grand nombre de tests ont été réalisés sur des données synthétiques calculées à partir de modèles synthétiques assez similaire d'un réservoir géothermique théorique simple. Bien qu'elles ne soient pas présentées dans ce manuscrit par souci de concision, la procédure d'inversion a été évaluée au préalable à l'aide de plusieurs types de modèles synthétiques de

formes en L, U, W et Z, avec des profondeurs et de densités différentes. Ces tests m'ont permis d'étudier le comportement de l'inversion conjointe sous contrainte en fonction des différents paramètres.

J'ai également appliqué ces approches linaires sur les données acquises sur l'ensemble du rift d'Asal. Les résultats d'inversion gravimétrique sous contrainte de la résistivité sont présentés sous forme d'une publication qui sera soumise à la revue *Geophysics*. Les différents modèles issus de ces deux inversions (CP et GP), ont montré que le choix du couplage et de la pondération conduisait à des modèles de densité présentant des caractéristiques différentes, tout en s'adaptant toujours très bien aux données gravimétriques. De ce fait, j'ai pu déterminer grâce la statistique descriptive multivariée, ici l'analyse en composantes principales (PCA), si un petit nombre de structures peut expliquer la variance-covariance observée. Les modèles de densité issus de la méthode PCA, a permis de mettre en évidence d'au moins deux processus dominants agissant sur la densité et la résistivité. La distribution de la résistivité semble principalement liée à la structure géothermique et magmatique du rift, tandis que l'histoire structurelle du rift contrôle principalement la densité. Ces processus sont nécessairement interconnectés, d'où les schémas complexes observés dans ces modèles PCA.

Ensuite, j'ai appliqué notre méthodologie sur les deux zones géothermales reconnues du Rift d'Asal, Gale-le-Koma et la cadéra de Fialé en réduisant la dimension des zones étudiées par rapport à l'application précédente et en augmentant la résolution des grilles d'inversion. Les résultats d'inversion gravimétrique sous contrainte de la résistivité de ces deux zones sont présentés sous forme d'une publication qui sera soumise à la revue *Geothermics*. La distribution des contrastes de densité PCA et de résistivité ont mis en évidence la distribution de la fracturation et des failles dans les zones étudiées. Quant aux modèles de résistivité de ces deux zones, ils sont en accord avec les lithologies des forages. La synthèse des modèles de résistivité et de PCA a conduit à des suggestions de révision des modèles conceptuels produits pour les perspectives géothermiques d'Asal.

Néanmoins, je compte refaire des nouvelles mesures gravimétriques, car comme préciser dans le chapitre 3, j'ai constaté des anomalies liées aux mesures gravimétriques réalisées en 1978, notamment sur les altitudes des stations de mesure. Je pourrais ainsi refaire des modèles de densité contrainte par la résistivité MT et le comparer avec les modèles présentés

dans le présent travail. Une autre solution envisagée que je n'ai pas eu le temps de réaliser et de rajouter une contrainte sismique afin d'affiner le modèle conceptuel de cette région. De plus, je compte faire une nouvelle approche d'inversion contrainte basée sur des variantes de la technique de clustering FCM. À ce stade du travail, je n'ai pas encore réalisé une étude de sensibilité des modèles de résistivités dans les différentes zones présentées ci-dessus. Donc la prochaine étape consiste à effectuer cette étude.

Titre : Analyse conjointe de magnétotellurique et de gravimétrie tridimensionnelle pour imager les ressources géothermiques : implication sur le mode de distribution de la ressource en République de Djibouti

Mots clés : Asal, Inversion contrainte, Magnétotellurique, Gravimétrie, Géothermie, Exploration

Résumé : Avant d'exploiter une ressource géothermique dans un contexte volcanique tel que le rift d'Asal, il est nécessaire d'acquérir une meilleure connaissance du sous-sol, pour l'objectif de localiser le réservoir géothermique et évaluer la ressource (perméabilité, température, etc.). Pour ce type de ressource, les méthodes d'exploration géophysiques sont essentielles (comme par exemple la gravimétrie, la sismique, la magnétotellurique, etc.). Cependant, un type de donnée particulier n'a pas nécessairement la résolution et la sensibilité. De plus, les inversions individuelles de ces données géophysiques sont confrontées à l'ambiguïté de la non-unicité de la solution inverse.

Dans le cadre de ma thèse, je présente une nouvelle approche linéaire de l'inversion gravimétrique en utilisant la contrainte du modèle de résistivité MT. Ces approches ont été testées validés sur des données synthétiques. J'ai appliqué la technique de l'analyse en composantes principales afin de synthétiser les modèles de densité obtenue sur le rift d'Asal. A l'échelle du rift d'Asal, j'ai pu définir deux processus dominants agissant différemment sur la densité et la distribution de la résistivité en profondeur, à savoir l'activité géothermique du rift et le contrôle structural de la tectonique active. Dans les zones des forages, les modèles obtenus ont mis en évidence la distribution de la fracturation et des failles.

Title: Constraint inversion of magnetotelluric and three-dimensional gravity to image geothermal resources: implication on the distribution of the resource in the Republic of Djibouti.

Keywords: Asal, Constraint inversion, Magnetotelluric, Gravity, Geothermal, Exploration

Abstract: Before exploiting a geothermal resource in a volcanic context such as the Asal rift, it is necessary to acquire a better understanding of the subsurface, with the aim of locating the geothermal reservoir and assessing the resource (permeability, temperature, etc.). For this type of resource, geophysical exploration methods are essential (e.g. gravity, seismic, magnetotelluric, etc.). However, one particular type of data does not necessarily have the resolution and sensitivity. Moreover, individual inversions of these geophysical data are confronted with the ambiguity of the non-uniqueness of the inverse solution.

In my thesis, I present a new linear approach to gravity inversion using the constraint of the MT resistivity model. This approach has been tested and validated on synthetic data. I applied the technique of principal component analysis to synthesize the density models obtained on the Asal rift. At the scale of the Asal rift, I was able to define two dominant processes acting differently on density and resistivity distribution at depth, namely rift geothermal activity and the structural control of active tectonics. In the drilling zones, the models obtained highlighted the distribution of fracturing and faults.