



HAL
open science

Connaissances mobilisées par les élèves du secondaire dans le domaine des fonctions, approche comparative entre la France et l’Afrique francophone.

Cyrrus Ngoua Ella

► **To cite this version:**

Cyrrus Ngoua Ella. Connaissances mobilisées par les élèves du secondaire dans le domaine des fonctions, approche comparative entre la France et l’Afrique francophone.. Apprentissage [cs.LG]. Université Bourgogne Franche-Comté, 2023. Français. NNT : 2023UBFCD066 . tel-04615323

HAL Id: tel-04615323

<https://theses.hal.science/tel-04615323>

Submitted on 18 Jun 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L’archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d’enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de doctorat préparée à l'Université de Franche-Comté

Par Cyrrus NGOUA ELLA

Pour obtenir le grade de

Docteur en Mathématiques de l'Université Bourgogne Franche-Comté

**Connaissances mobilisées par les élèves du secondaire dans le domaine des fonctions,
approche comparative entre la France et l'Afrique francophone**

Thèse soutenue à Besançon le 22/12/2023 devant le Jury composé de :

M ^{me} GOGA Camelia	Professeure, Université de Franche-Comté	Présidente du Jury
M. BALHAN Kevin	Chargé de cours, Université de Liège	Rapporteur
M. EMPRIN Fabien	Professeur, Université de Reims-Champagne-Ardenne	Rapporteur
M. LE BORGNE Philippe	Maitre de Conférence, Université de Franche-Comté	Codirecteur de thèse
M. NEUWIRTH Stefan	Maitre de Conférence HDR, Université de Franche Comté	Directeur de thèse
M. SIMARD Arnaud	Maitre de Conférence, Université de Franche-Comté	Examineur

Remerciements

Merci à Philippe LE BORGNE et Stefan NEUWIRTH pour m'avoir accepté et dirigé ce travail. Leurs apports scientifiques, leurs conseils, leur rigueur et leur patience m'ont permis d'être autonome et de mener à bien ce projet. Merci à mon ami Arsène EMVAOU pour m'avoir mis « le pied à l'étrier » et pour son soutien financier sans faille tout au long de ce travail. Il m'a permis de découvrir le monde du Laboratoire de mathématiques à travers le financement de mes recherches. Il m'a redonné l'envie d'apprendre alors que j'étais affecté, après l'ENS comme enseignant à Mabanda, son intervention pour la prise en charge de mes études a retenu l'attention de l'ancien Chef de l'État, son Excellence Ali BONGO ONDIMBA et en 2023 la Haute Attention du Chef de l'Etat, son Excellence le Général de Brigade Brice OLIGUI NGUEMA, qui ont donné des instructions pour que je ne manque de rien durant ma formation.

Merci à la France et au Gabon pour m'avoir permis de poursuivre mes études en qualité de fonctionnaire stagiaire. Merci à Fabien EMPRIN et à Kevin BALHAN qui ont accepté de lire et de faire le rapport de mon travail en qualité de Rapporteurs. Merci à Camelia GOGA qui a accepté de présider mon Jury de thèse. Merci à Jean-Marie DORNIER, à toute l'équipe du CTU de Besançon et à tous les membres du Laboratoire de Mathématiques de Besançon qui m'ont encadré malgré mes difficultés. Merci à Arnaud SIMARD et Maggy SCHNEIDER-GILOT qui m'ont fait l'honneur de participer à mon comité de suivi de thèse. Mes remerciements vont également à l'endroit de monsieur Louis JEANJEAN pour son suivi, orientations et sa disponibilité durant les journées de l'École Doctorale. Merci à madame Martine GAUTHERON.

Merci à Jean EYENE BEKALE, Franck Yann KOUBDJE, MABIALA Mérés et ANGOUE Orland, pour le temps et les moyens qu'ils m'ont consacré à des moments clefs de mon travail.

Merci à Stefan NEUWIRTH pour ses relectures attentives et nombreuses. Nos discussions ont été tendues, riches et m'ont permis d'éclaircir bon nombre de points et de grandir.

Je remercie les enseignants de lycée et collègue en France : Thierry OBIANG, Apollinaire ABOUROU et David MEUNIER et ceux du Groupe OMEGA du Gabon qui ont bien voulu m'accompagner dans cette recherche avec leurs élèves du secondaire et leurs collègues.

Je remercie le Laboratoire de Mathématiques de Besançon et l'École Doctorale CARNOT Pasteur pour avoir mis à ma disposition un cadre propice pour réussir.

Je remercie toute ma famille et mes amis, particulièrement à ma Grand mère OKOMO ALLOGO Martine, à mon père ELLA NGOUA Jean Pierre, à mes mamans Jeanette, Marthe, Philomène, Marie Noeline, Ruphine, ma femme Vanessa Séréna et mes frères et sœurs, Diminique, Justine, Eyi, Doline, David, Douglas, Alphonsine, Nadia, Gédéon, Audrew, Nabuchodonosor, Octavie, Jeannette, Dorante, Amélie, Sidonie, Samariva, Dalie, Zorobabel, Déborah, Élysée, Delphine, Hortense, Melchi, Calmen, Charles, Patrick, Alphonse OSSAKORO, Blanchard. Je sais qu'à des moments, j'ai été désagréable.

Je remercie mes étudiants des classes préparatoires mpsi, mp et mp2i du lycée National Léon MBA.

Merci pour la confiance et la patience aux ministres Michel MENGA M'ESSONE, Patrick MOUGUIMA-DAOUDA et Camelia Camélia NTOUTOUME-LECLERCQ.

Table des matières

1	Introduction Générale	12
1.1	Problématique et Cadre théorique	12
1.2	Questionnement et hypothèses préalables à l'expérimentation	13
1.3	Méthodologie	14
1.4	Cadre théorique	15
1.4.1	La théorie des champs conceptuels	16
1.4.2	L'histoire	16
1.4.3	La variété	16
1.4.4	La théorie des situations didactiques	19
1.4.5	Les hypothèses de Mariza KRYSIŃSKA et Maggy SCHNEIDER	21
1.4.6	Les divers fonctionnements graphiques : tels qu'on peut les enseigner	25
1.4.7	Intérêt pour notre recherche	25
1.4.8	Outils sémiotiques pour analyser les phénomènes didactiques	26
1.4.9	Intérêt pour notre recherche	27
1.4.10	L'objet fonction selon Anna Sfard	27
1.4.11	Dualité ontologique des objets mathématique	28
1.4.12	Genèse des objets mathématiques	29
1.4.13	L'approche promue : conceptions opérationnelle et structurelle	30
1.4.14	Les origines des fonctions selon Anna Sfard	31
1.4.15	Analyse théorique du modèle proposé	32
1.4.16	Le dilemme de la réification	33
1.4.17	Intérêt pour notre recherche	35
1.4.18	Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques	35
1.4.19	Intérêt	36
1.4.20	Une praxéologie	37
1.4.21	Connaître une fonction pour ce travail	37
1.4.22	Le problème de l'objectivation des connaissances mathématiques	37
1.4.23	Phénomènes de rupture entre cycles : les fonctions	40
1.4.24	Connaissances exacte, explicite, pseudo-explicites et implicite d'une fonction	42
1.4.25	Connaissances numériques d'une fonction	43
1.4.26	Connaissances des élèves	45
1.4.27	Comment construire une fonction : apport d' Errett Bishop	45
1.4.28	La croyance que les mathématiques constructives sont vagues et imprécises	47
1.5	Quelle théorie de la connaissance d'une fonction pour cette recherche?	48
1.5.1	La formulation philosophique du problème de la connaissance qui met au premier plan la notion de représentation	49

1.5.2	Jean Piaget et la formulation cognitive, sujet-objet-structure opératoire ou cognitive	49
1.5.3	Formulation didactique de la connaissance d'une fonction	56
1.5.4	Le modèle d'analyse ascendante et descendante de Margolinas	60
1.5.5	Connaissance mobilisée : définition, les trois approches	61
1.5.6	La première approche	61
1.5.7	La seconde approche	62
1.5.8	La troisième approche	62
1.5.9	La notion de connaissance mobilisée sur les fonctions	62
1.5.10	Étymologie et histoire du mot connaissance	62
2	L'histoire du concept de fonction	64
2.1	Introduction	64
2.2	Remarques préliminaires.	64
2.3	Les tables de fonctions et les « symptômes » des sections coniques.	65
2.4	Une notion générale de fonction dans l'Antiquité.	65
2.5	Représentation cinématique et géométrique des relations fonctionnelles. Théorie des calculs et des Latitudes des Formes.	65
2.6	La quantité variable de Descartes ; les fonctions algébriques.	66
2.7	Le concept de fonction selon Newton (1670) et Leibniz (1673-1694).	66
2.8	Une fonction en tant qu'expression analytique arbitraire : Jean Bernoulli (1694-1718) et Euler (1748).	66
2.9	Fonctions analytiques.	67
2.10	Les fonctions continues et discontinues (mixtes) au sens d'Euler ; la controverse au sujet des cordes vibrantes.	67
2.11	La définition générale d'une fonction par Euler.	67
2.12	La critique du concept de fonction « mixte » ; Charles (1780) et Fourier (1807-1821).	68
2.13	Une digression : la représentation analytique des fonctions.	68
2.14	La définition générale d'Euler est reconnue : Condorcet (1778), Lacroix (1797), Fourier (1821), Lobatchevski (1834), Dirichlet (1837).	68
2.15	La fonctionnalité chez Hankel.	69
2.16	Le rôle historique de la définition générale d'Euler.	70
2.17	1902 : justification des fonctions dans le programme français	70
2.18	1968 : conception de la notion de fonction en seconde	71
2.19	1968 : La notion de fonction est introduite dans le programme de quatrième	71
2.20	1972-1986 : La notion de fonction au programme de troisième et de quatrième	72
2.21	1981-1989 : Définition d'une fonction selon Vinner, Dreyfus et Tall (Tall et Vinner, 1981, Vinner et Dreyfus, 1989)	72
2.22	1988 : La notion de graphe pose problème selon Markovits et al., Barnes	72
2.23	1990 : la notion de fonction dans le programme de seconde	73
2.24	1992, Dubinsky et Harel, Breidenbach et al., la conceptualisation de l'objet fonction	73
2.25	1992, Sierpinska : obstacles épistémologiques relatifs aux fonctions et d'actes de compréhension	74
2.26	1994 : Tompson, Gray, Tall, Confrey et Smith approche des fonctions par les élèves	75

2.27	1995 : Schwarz et Dreyfus, l'acquisition des fonctions par des élèves	75
2.28	1996 : Borba et Confrey, les transformations de fonctions	75
2.29	1997 : Chauvat et la représentation graphique	75
2.30	1998 : O'callaghann, conception objet de la fonction	76
2.31	2001 : Yerushalmy et Shternberg	76
2.32	2002 : Programme de seconde	76
2.33	2002 : Robert et Rogalski	76
2.34	2003 : Bloch, différents cadres pour la notion de fonction	76
2.35	2004 : Arzarello, Robutti, Yerushalmy et Shternberg interprétation des graphes	76
2.36	2005 : Radford, Comin, Ilyas Yavuz, fonction et expérience sensuelle, relations fonctionnelles	77
2.37	2007 : Falcade, Laborde, Mariotti, Coppé, Dorier et Yavuz, amener les élèves à comprendre la notion de fonction	77
2.38	2008 : Maschietto, Aldon et al, point de vue global et local approcher la notion de dérivée	77
2.39	2009 : White	78
2.40	2010 : Maggy Schneider, Mariza Krysinska, Weigand et Bichler, Emergence de modèles fonctionnels et compréhension des fonctions	78
2.41	2011 : Minh Tran Kiem, fonctions comme modèles de dépendances	82
2.42	Histoire des fonctions selon Anna Sfard	82
2.43	Conclusion	84
3	La notion de fonction aux programmes du secondaire en France et d'Afrique francophone.	86
3.1	Introduction	86
3.2	Présentations des programmes de mathématiques en France et en Afrique francophone	89
3.2.1	Objectifs généraux en France	90
3.2.2	Objectifs généraux dans le programme HPM	90
3.2.3	Objectifs spécifiques en seconde en France	91
3.2.4	Objectifs spécifiques dans le programme HPM	91
3.2.5	Fonctions de référence, courbes représentatives, parité, variations et extremum	92
3.2.6	Connaissances aux programmes sur les fonctions	92
3.2.7	Exemples d'algorithmes	92
3.2.8	Les chapitres du programmes HPM	93
3.3	Le point commun entre les deux systèmes didactiques	93
3.4	Étapes au programme pour étudier une fonction dans les deux systèmes éducatifs	93
3.4.1	Domaine de définition	93
3.4.2	Calcul de limite	94
3.4.3	Sens de variations de la fonction	94
3.4.4	Dérivabilité	95
3.4.5	Continuité	95
3.4.6	Propriété de certaines fonctions particulières	96
3.4.7	Primitives, intégration	96
3.5	Les tâches, ostensifs et connaissances au programme	96

3.6	Les cadres mathématiques qu secondaire qui évoquent les fonctions	98
3.6.1	La géométrie	98
3.6.2	L'arithmétique	98
3.6.3	L'algèbre	100
3.6.4	Tableau récapitulatif des apports à la construction du cadre algébrique	101
3.6.5	En quoi ce cadre algébrique nous intéresse ?	102
3.6.6	L'Analyse	102
3.6.7	La théorie des ensembles	102
3.7	Les cadres qui interviennent au cycle 3	103
3.7.1	Cadre d'étude au quatrième cycle du secondaire	103
3.7.2	Progression du cycle 4	103
3.7.3	Que disent le BO et le HPM à propos des fonctions ?	115
3.7.4	Les tâches et les méthodes au programme	118
3.7.5	Organisation des contenus, les cours de mathématiques en France et en Afrique francophone	131
4	Le corpus	136
4.1	Configuration matérielle du corpus	136
4.1.1	Les critères choisis	136
4.2	Inventaire du corpus	137
4.2.1	Dossier 001, Le corpus de seconde, Toulouse, Besançon, Paris, Li- breville, Lastourville (2016-2022)	138
4.2.2	Dossiers 002, 003 et 004. Bac blanc 2020 série A, B, C et D	138
4.2.3	Dossier 005, Orale 2017-2021	138
4.2.4	Dossier 006, copies BAC C session 2021	142
4.2.5	Tâche de dérivabilité d'une fonction	142
4.2.6	Tâche de dérivation d'une fonction	147
4.2.7	Tâche du tableau de variations d'une fonction	152
4.2.8	Tâche de représentation graphique d'une fonction	157
4.2.9	Dossier 007, résultats aux baccalauréats officiels sur la notion de fonction session 2021	162
4.2.10	Dossier 008 : questions des enseignants aux sujets des fonctions . . .	162
4.2.11	Dossiers 009, 010 et 011 : les cadres, les programmes, les progressions sur la notion de fonction	171
4.3	Analyse du corpus	172
4.4	Corpus 001 du Baccalauréat blanc 2021	172
4.4.1	Le corpus de terminale C	172
4.4.2	Correction	172
4.4.3	Partie A	172
4.4.4	Partie B	173
4.4.5	Partie C	173
4.4.6	Analyse de tâche et d'activité des élèves de la terminale C	174
4.4.7	tache 1 : Dresser le tableau de variation de g_n	174
4.4.8	Analyse de la tâche de terminale C	176
4.4.9	La tâche 2 : Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\sqrt{x} > \ln x$	177
4.4.10	La tâche 3 : Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution . . .	177
4.4.11	La tâche 4 : Montrer que $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$	178
4.4.12	La tâche 5 : En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$	178

4.4.13	tâche 6 : étudier la dérivabilité de f en 0 puis d'interpréter graphiquement le résultat obtenu	179
4.4.14	Analyse de la sous tâche 6, Partie B question 1	179
4.4.15	Tâche 7 : Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu	180
4.4.16	Tâche 8 : Montrer que pour tout réel $x \in]0; +\infty [$, on a $f'(x) = \frac{1-3x}{3x} f(x)$ et dresser le tableau de variations de f	180
4.4.17	Tâche 9 : résoudre l'équation $f(x) = x$	181
4.4.18	Analyse de l'activité des élèves	182
4.4.19	Synthèse analyse de l'activité 1	183
4.4.20	Ce qui est mobilisée par les élèves pour résoudre cette tâche	183
4.4.21	Analyse de l'activité	184
4.4.22	Synthèse analyse de l'activité 2	185
4.4.23	Ce qui est mobilisée par les élèves pour résoudre cette tâche	185
4.4.24	Analyse de l'activité	185
4.4.25	Synthèse analyse de l'activité 3	186
4.4.26	Ce qui est mobilisée par les élèves pour résoudre cette tâche	187
4.4.27	Analyse de l'activité	187
4.4.28	Synthèse analyse de l'activité 4	188
4.4.29	Ce qui est mobilisée par les élèves pour résoudre cette tâche	188
4.4.30	Analyse de l'activité 5	188
4.4.31	Synthèse analyse de l'activité 5	189
4.4.32	Ce qui est mobilisée par les élèves pour résoudre cette tâche	189
4.4.33	Analyse de l'activité des élèves ?	189
4.4.34	Ce qui est mobilisée par les élèves pour résoudre cette tâche	190
4.4.35	Activité 8 : Tracer de C_f en prenant $f(\frac{1}{3}) \simeq 0.5$	192
4.4.36	Savoirs utilisés par les élèves pour résoudre les tâches de terminale	194
4.4.37	Les tâches communes aux différentes séries	194
4.4.38	Sur les limites	195
4.4.39	Sur la dérivée et la continuité	195
4.4.40	Sur les fonctions	195
4.4.41	Quelques chiffres sur les savoirs utilisées par les élèves de terminale	196
4.4.42	Niveau de fonctionnement des connaissances visées en terminales littéraires	196
4.5	Corpus 001 de de seconde	201
4.5.1	Analyse de la tâche 1 et de l'activité	201
4.5.2	Analyse de la tâche	201
4.5.3	Analyse de l'activité de fin de cycle 4	202
4.5.4	Analyse de la tâche 2 et de l'activité élève	204
4.5.5	Analyse de la tâche 3 et de l'activité élève	204
4.5.6	Activité de l'élève de seconde en France	205
4.5.7	réponse élèves 1, 2, 3	206
5	Résultats : les connaissances mobilisées par les élèves	208
5.1	Résultats 01 : la définition de la notion de fonction n'est pas assimilée par les élèves du secondaire	208
5.2	Résultat 02 : les élèves du secondaire sont arrivés à un niveau algorithmique de l'utilisation des fonctions	208

5.2.1	Pour étudier la dérivabilité en 0	208
5.2.2	Pour donner les points fixes	209
5.2.3	Pour calculer la dérivée	210
5.2.4	Pour dresser le tableau de variations	211
5.2.5	Pour tracer des courbes	213
5.3	Résultat 03 : les erreurs des élèves sont imprévisibles.	214
5.3.1	Résultats 04 : L'entrée par les tâches, pour identifier les savoirs mobilisés par les élèves est la meilleure.	214
5.3.2	Résultat 05 : la conformité de voir f ou $f(x)$ dans un tableau . . .	215
5.3.3	Résultat 06 : l'écriture des élèves est non standard pour valider les résultats.	215
5.3.4	Résultat 07 : la dérivation différentie suite et fonction.	215
5.4	Résultat 08 : Le passage du calcul de la dérivée au tableau de variation d'une d'apparence si simple reste le problème des élèves de terminale . . .	216
5.4.1	Résultat 09 : les candidats ne parviennent pas à résoudre les problèmes en analyse au baccalauréat.	216
6	Conclusion et perspectives	217
A	Les premières connaissances mobilisées	221
A.0.1	En France : de géométrie analytique	221
A.0.2	En Afrique francophone : de géométrie pure	223
B	Premiers travaux réalisés en France avec les élèves	224
C	Premiers travaux réalisés en France avec les enseignants	230
D	Les fonctions en seconde dans le Bulletin officiel de France BO	232
E	Les fonctions en seconde dans le programme officiel d'Afrique francophone HPM	234
F	La progression spiralée au Gabon	236
G	(Margolinas, 2012, p. 8) distingue connaissance et savoir	238
H	(Exemple de mobilisation d'une connaissance communautaire	240
I	(Entrée dans la pensée fonctionnelle	243
J	(Notation fonctionnelle	246
K	(Notation fonctionnelle	248
L	(Exemple de diagramme pouvant mener à une translation iconique (Déplacement d'un ballon dans le temps)	250
M	Formule des trois niveaux	256
N	Tâches pour introduire la notion de fonction en France et en Afrique francophone	258

O	Tâches pour introduire la notion de fonction en France	262
P	Premiers travaux réalisés en France avec les élèves	265
Q	Premiers travaux réalisés en France avec les enseignants	271

Table des figures

1.1	Théorie des situations	19
1.2	extrait du livre [50, p. 35]	28
1.3	connaissance exacte d'une fonction	42
1.4	Connaissance exacte	43
1.5	Pseudo connaissance explicite	44
1.6	Pseudo connaissance explicite	44
1.7	Connaissance implicite	44
1.8	Les savoirs convertis en connaissances	57
1.9	Les savoirs convertis en connaissances	57
1.10	Triangle de la mobilisation de connaissances	58
3.1	Définitions de la notion de fonction en seconde. Reproduite à partir de <i>Le manuel sésamath seconde avec ses compléments numériques</i> », par Gringoz, H. et Weyermann, F. (2010), [63, p. 82] et de <i>CIAM</i> par Saliou. T (dir.). (1997) [83, p. 156]	87
3.2	Organisation du programme	115
3.3	généralités et étude graphique HPM	116
3.4	Variations d'une fonction HPM	116
3.5	fonction dans le BO 2009	117
3.6	progression spiralee en Afrique francophone	118
3.7	tâches aux programmes 1	120
3.8	tâches aux programmes 2	121
3.9	tâches aux programmes 4	122
3.10	tâches aux programmes 5	123
3.11	tâches	123
4.1	Définitions de la notion de fonction en seconde. Reproduite à partir de <i>Le manuel sésamath seconde avec ses compléments numériques</i> », par Gringoz, H. et Weyermann, F. (2010), [63, p. 82] et de <i>CIAM</i> par Saliou. T (dir.). (1997) [83, p. 156]	171
4.2	Théorème : dérivée d'une somme en France	176
4.3	Dérivée d'une somme de fonctions en Afrique francophone	177
4.4	Copie théorème de la valeur intermédiaire, Ciam terminale sm	178
4.5	Dérivabilité de f en 0	179
4.6	Le point fixe	181
4.7	copie élève sur l'étude de variation d'une fonction	183
4.8	copie élève sur la comparaison de deux fonctions	185
4.9	copie élève sur la résolution de l'équation $f(x) = 0$	186
4.10	copie élève 2 sur la résolution de l'équation $f(x) = 0$	187

4.11	copie élève sur l'encadrement	188
4.12	copie élève sur le théorème de gendarme	189
4.13	Dérivabilité copie 1	189
4.14	Dérivabilité copie 1	191
4.15	dérivée et sens de variations	192
4.16	courbe représentative	192
4.17	Ce que les élèves 1, 2 et 3 écrivent pour montrer la stabilité	193
4.18	Comment les élèves montre que $u_n \in I$	194
4.19	Fonctionnement des connaissances sur les fonctions en terminales A1 et B .	196
4.20	Fonctionnement des connaissances sur les fonctions en Terminale littéraire	197
4.21	Fonctionnement des connaissances sur les fonctions en terminales A2 . . .	197
4.22	Fonctionnement des connaissances sur les fonctions en Terminale A2	198
4.23	Fonctionnement des connaissances sur les fonctions en terminales D	198
4.24	Fonctionnement des connaissances sur les fonctions en Terminale D	199
4.25	Fonctionnement des connaissances sur les fonctions en terminales D	199
4.26	Fonctionnement des connaissances sur les fonctions en Terminale D	200
4.27	Exercice donné à des élèves de troisième en France	201
4.28	Courbe et fonction	204
4.29	Variations d'une fonction	204
4.30	Copie élève1 de seconde en France	205
4.31	Copie élève2 de seconde en France	205
4.32	Copie élève2 suite seconde de en France	206
5.1	calcul du taux de variation du candidat 716255, Bac C 2021.	209
5.2	Conclusion candidat 716255 sur la dérivabilité en 0, Bac C 2021	209
5.3	Points fixes de deux courbes, Bac C 2021	210
5.4	Calcul de la dérivée, Bac C 2021	211
5.5	Dresser le tableau de variations, Bac C 2021	212
5.6	étude du signe de la dérivée, Bac C 2021	212
5.7	tableau de variations version 2, Bac C 2021	213
5.8	Tracer des courbes, Bac C 2021	214

Chapitre 1

Introduction Générale

1.1 Problématique et Cadre théorique

Le travail que nous présentons trouve son origine dans nos préoccupations d'harmonisateur de l'épreuve de mathématiques aux différents baccalauréats depuis 2017 et aux concours d'entrée à l'École Normale Supérieure de Libreville ; d'enseignant d'analyse 1,2 et 3, d'analyse pour l'économie et la gestion, d'algèbre 1, d'analyse numérique et d'analyse de Fourier en *DUTEII* au collège, au lycée, à l'École normale supérieure et en classes préparatoires mathématiques physiques sciences pour l'ingénieur et à l'Université. D'enseignant d'analyse en master 1 d'économie

Il s'agit d'une étude de l'activité élèves du secondaire devant des tâches sur des fonctions. Nous cherchons à identifier les connaissances mobilisées (savoirs faire et savoirs exprimés), des élèves du secondaire sur les fonctions. En master, une étude avait déjà été entreprise avec des élèves de seconde à ce sujet et les premières conclusions étaient les suivantes :

1. tous les élèves mobilisent des connaissances de l'algèbre et de l'analyse fonctionnelle ;
2. les élèves de France mobilisent des connaissances de géométrie analytique ;
3. les élèves d'Afrique francophone mobilisent des connaissances de géométrie pure.

Aussi, devant une situation de modélisation avec une fonction, tous mobilisent des connaissances hors programme à un niveau de seconde. Ils arrivent à manipuler les nombres et les lettres pour construire des fonctions à plusieurs variables, ils le font également avec des fonctions qui ont pour arguments d'autres fonctions, des fonctionnelles, à valeurs dans \mathbb{R} , or ces objets ne leur sont pas encore enseignés (cf. annexe. A.0.1 page 221). Bien qu'une telle performance soit remarquable, considérant en allant dans le même sens que Kant, que connaître une fonction va dépendre de la structure a priori de l'entendement de l'élève, c'est-à-dire que le fait de connaître une fonction va dépendre non de la fonction elle-même, mais de la façon dont l'élève la comprend ou la rencontre, nous avons le sentiment d'un travail non abouti en master. Nous n'avons pas pu à ce niveau, trouver d'explications logiques devant certaines difficultés des élèves du secondaire à définir ou à résoudre des problèmes liés aux fonctions. Comment se décrivent les difficultés, les conceptions et des représentations des enseignants ?

Sachant que dans les deux systèmes éducatifs, la notion de fonction ou d'application est enseignée et étudiée à tous les niveaux du secondaire. Elle est cachée dans les calculs économiques ou financiers, les algorithmes, les programmes, les études de phénomènes variables, et ce, indépendamment des séries et des filières. Le constat fait, en notre qualité

d'enseignant, est que les fondamentaux sur cette notion qui devraient être acquis à un niveau du secondaire ne sont pas maîtrisés par les élèves et les étudiants. Raison pour laquelle nous nous sommes engagés à faire cette recherche pour tenter de comprendre ce phénomène. Pour exemple, au Gabon, lors d'un devoir en « analyse pour la gestion » donné à des élèves de première année, où nous leur avons demandé de déterminer les extréma de la fonction f définie par : $f(x, y) = 2x^3 + 6xy$, tous les étudiants n'ont pas pu calculer la $\frac{\partial^2}{\partial y^2}(2x^3 + 6xy)$. Ils trouvent 6 en lieu et place de 0. Le problème étant de dériver $6x$ par rapport à y . Ils confondent le fait de dériver $6x$ par rapport à x qui donne 6 à dériver $6x$ par rapport à y . En deuxième année à l'école normale, le constat est celui de la non-maîtrise de l'intégration par partie par plus de la moitié des étudiants. En effet, nous avons demandé à des élèves d'étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$, puis de calculer $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$, Ils arrivent tous à démontrer que l'intégrale converge, mais échoue pour le calcul de la valeur de cette intégrale.

En d'autres mots, au baccalauréat officiel, les résultats des candidats ne sont pas satisfaisants en mathématiques. Quelle est la raison principale de la non-réussite en mathématiques des candidats ? Nous pensons que le problème portant sur l'étude de fonction en est une des causes. Nous allons tenter dans la suite de notre travail de mieux analyser ces résultats. La situation générale sus-mentionnée nous invite-t-elle indirectement à regarder la notion de fonctions de plus près, à revoir nos idées reçues à travers l'histoire de ce concept, son enseignement et sa définition. Afin de mieux comprendre ce qui peut expliquer les obstacles auxquels sont confrontés les élèves, une étude des problèmes rencontrés et identifiés par les enseignants est également nécessaire du côté de l'institution sur la notion de fonction. La question des difficultés des élèves à comprendre cette notion que nous avons choisie est posée et mes connaissances scientifiques ne me permettent pas de répondre complètement à cette problématique.

1.2 Questionnement et hypothèses préalables à l'expérimentation

Partant des difficultés des élèves à résoudre des problèmes liés aux fonctions dans le secondaire, mon questionnement de départ est de savoir qu'elles sont les connaissances mobilisées par les élèves sur les fonctions ? Pour cela, je me suis permis en premier de comprendre des travaux déjà faits sur les fonctions, la connaissance, la connaissance mobilisée, les difficultés des élèves à connaître une fonction, les conceptions et représentations des enseignants des fonctions, les caractères outil, objet, formalisateur, unificateur ou généralisateur de la fonction enseignée au secondaire, les points de vue condensation, réification, l'intériorisation, l'encapsulation et l'objectivation du concept de fonction, les niveaux de fonctionnement visés : technique, mobilisable ou disponible par les enseignants, etc. La notion de connaissance mobilisée est discutée, le travail consiste à en tirer une définition qui cadre avec notre recherche de la notion de connaissance mobilisée par les élèves sur les fonctions. Après avoir répondu à notre préoccupation première qui était de savoir comment les fonctions nous sont-elles données ? (par les ostensifs associés) Et, une fois en classe de troisième ou de seconde, lors de l'introduction de la notion de fonctions par les enseignants, quelles sont les savoirs historiques de fonctions qui sont transposés par les enseignants et mobilisées par les élèves devant des tâches mettant en jeu des fonctions ? Nous faisons l'hypothèse que les connaissances mobilisables par les élèves du secondaire sur la notion de fonction, au programme scolaire, ne sont pas bien identifiées ou rensei-

gnées par l'institution et sont mal utilisées par les élèves. Toutefois, connaître un objet de savoir tel que la fonction n'est pas aisé à ce niveau de la scolarité. Aussi, pour savoir ce que les élèves connaissent sur les fonctions, il faut bien que nous comprenions ce qu'on entend par connaissance et par connaître une fonction. Les outils théoriques de Vergnaud et de Chevallard[43], sur la connaissance, la compréhension, les pratiques et les praxéologies en matière de (types de) tâches (types de) techniques, technologies et théories nous seront utiles. La lumière des points de vue épistémologique et didactique de la connaissance et de la connaissance mobilisée étudiée dans notre cadre théorique nous aide également pour émettre d'autres hypothèses.

1.3 Méthodologie

L'étude des savoirs mobilisés par les élèves du secondaire sur une notion en mathématiques, en particulier en fin de lycée, conduit la didactique à puiser à des sources de nature variées : disciplinaires, épistémologique, cognitive, linguistique, anthropologique, etc. Les travaux sur lesquels nous nous appuyons ici, outre les sources précitées concernant les fonctions sont : ceux de Krynska et Schneider (2010), Sfard (1991), Bloch (2006), dont nous exploitons notamment les synthèses qu'elles ont effectuées dans : *Émergence de modèles fonctionnels, Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification – the case of function et dans sa thèse, l'enseignement de l'analyse à la charnière lycée-université. Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation* ainsi que des analyses de divers auteurs : (Artigue (1990), Anna Sfard (1991,1992), Dubinsky et Harel, Breidenbach[12] et al (1992), Sierpinska (1992), Thompson (1994), Gray and Tall (1994) Confrey et Smith (1994), Schwarz et Dreyfus (1995), Borba et Confrey (1996), O'callaghan (1998), Yerushalmy et Shternberg (2001), Bloch (2003), Arzarello et Robutti (2004), Kieran et Yerushalmy (2004), Nathalie Gaudin (2005), Radford (2005) Comin (2005), Ilyas Yavuz (2005), Falcade, Laborde et Mariotti (2007), Coppé, Dorier et Yavuz (2007), Michèle Artigue (2008), , Maschietto (2008), Aldon et al (2008), White (2009), ALEXANDER Briceno Montoy (2009) Maggy Schneider (2010), Weigand et Bichler (2010), Minh Tran Kiem (2011)). De ces travaux, différents éléments se dégagent comme jouant un rôle primordial dans l'apprentissage des fonctions, l'enseignement de cette notion par des enseignants et son appréhension par des élèves. Pour bien faire les choses, la bonne entrée commande de clarifier trois concepts :

1. la fonction, objet de la première partie histoire des fonctions ;
2. la connaissance mobilisable d'une fonction (institution), objet du chapitre 3, les contenus aux différents programmes ;
3. la connaissance mobilisée par l'élève, objet du chapitre 3, le corpus.

La méthodologie que nous avons élaborée pour répondre à nos questions de recherche est propre à cette recherche. Elle s'articule autour de notre idée principale qui est, pour le rappeler, l'identification des connaissances mobilisées par les élèves du secondaire sur les fonctions à partir d'un corpus. Nous repérons et analysons, comme le propose la TCC (Théorie des Champs Conceptuels), les filiations et les ruptures entre connaissances des fonctions du point de vue de leur contenu conceptuel. Puis, nous explicitons nos outils de recueils de données. Notre méthode est critique. En effet, nous avons créé un système fondé sur les résultats des élèves pour répondre à notre hypothèse principale. Avant d'examiner la cohérence de la réponse de l'élève, il faut bien en amont connaître ce qu'un élève peut connaître. Nous avons donc visité les programmes et les manuels au programme,

posé des questions aux enseignants et lu leurs cours. Ainsi, nous avons catégorisé ce qu'un élève peut produire en termes de savoirs et ainsi, nous munir d'un outil pouvant nous permettre d'identifier ce qu'un élève peut connaître sur les fonctions. Les résultats et discussions issues de l'analyse du corpus viennent en quelque sorte faire le point sur ce que savent les élèves du secondaire sur les fonctions, leurs connaissances mobilisées. Nous avons analysé les tâches des manuels et celle qui sont choisies par les enseignants sur la notion de fonction. Nous avons observé en particulier les copies des élèves ainsi que différentes situations et tâches au programme au cas par cas. Le but est d'identifier l'existence des choses singulières, les connaissances propres des élèves. L'histoire de la notion de fonction susmentionnée nous aide à nous prononcer sur ces connaissances. La transposition didactique ainsi que les choix épistémologiques opérés et présents dans les programmes d'Afrique francophone et de France ont également été étudiés. Nous avons avant tout, analysé les tâches et de l'activité des élèves.

La recherche est faite avec les élèves du secondaire de France et surtout d'Afrique francophone (Gabon), à un niveau du secondaire. Nous avons pour plus de précisions, identifié exclusivement les conceptions sur la notion de fonction chez les élèves de terminale série *C*, au baccalauréat. Nous présentons les résultats des entretiens avec les enseignants et les productions des élèves de seconde et d'autres séries de terminale (voir corpus de thèse), et ce, entre 2017 et 2023. Nous entreprenons dans cette recherche de développer les éléments d'une méthode de didactique qui nous semble devoir constituer dans l'avenir un référentiel de connaissances des fonctions. Commençons, pour savoir ce que nous connaissons des fonctions, par son histoire.

1.4 Cadre théorique

Pour les identifier les connaissances des élèves, nous nous appuyons sur les définissons du concept fonction. Pour cela, il s'agit d'examiner les travaux antérieurs qui permettent d'éclairer la question de connaissance mobilisée par les élèves sur les fonctions, dans un contexte d'enseignement où nous nous situons uniquement au moment de l'introduction de cette notion par les enseignants. Nous nous appuyons également sur des programmes et les manuels. Ils pourront nous aider à mieux comprendre la nature des connaissances sur les fonctions données aux élèves, dans le contexte d'apprentissage. Ceci nous conduit à explorer différents cadres théoriques. Nous faisons référence à la triple approche de la théorie de la connaissance et du savoir en épistémologie, en psychologie et en didactique des mathématiques pour cerner ce qu'est une connaissance mobilisée. Nous avons choisi de nous appuyer, pour mener cette recherche, sur des activités avec lesquelles les enseignants introduisent la notion de fonction en classes de troisième et de seconde, les copies de devoirs corrigées des élèves et des vidéos à l'oral au baccalauréat qui sont associées à une expérimentation pilotée par trois groupes d'enseignants et élaborée dans un cadre théorique précis : celui de la théorie des champs conceptuels. Il nous semble particulièrement intéressant de confronter les analyses qui président à l'analyse de tâches et conceptions des élèves à celles offertes par d'autres cadres théoriques à savoir : celui centré sur l'étude des potentialités de l'approche anthropologique, celles de la théorie des situations didactiques, celle de la dialectique outil-objet et des jeux de cadres et enfin celle de la structuration du milieu. Toutefois, nous avons passé en revue la majorité des travaux récents sur les notions de fonction, de connaissance et de cadre. Ceci dit, d'autres travaux et non des moindres ont été utiles pour définir notre concept et pour construire la problématique de notre travail. Dans son livre *Foundations of constructive analysis*, paru à New York en

1967 (p 312-315), Errett Bishop et McGraw-Hill trouvent dans le cadre constructiviste les fondamentaux pour tenter de construire une fonction. Ils font remarquer qu'en mathématiques constructives, le travail se fait souvent en dehors de tout cadre formel. Leurs travaux seront donc étudiés et utilisés pour mieux comprendre le lien qui pourrait exister entre d'une part la position de Kant qui affirme que connaître, c'est construire et les difficultés pour connaître et construire une fonction côté élèves en classe qu'Anna Sfard et Maggy Schneider tentent de présenter dans leurs travaux sur les origines opérationnelles des objets mathématiques, le cas des fonctions et sur la modélisation fonctionnelle. D'autres travaux toujours pour mieux nous situer par rapport à notre travail nous ont éclairés et nous en ferons une présentation sommaire.

1.4.1 La théorie des champs conceptuels

1.4.2 L'histoire

Gérard VERGNAUD définit, on le sait, une théorie absolument originale des champs conceptuels[86] comme une théorie psychologique et didactique. Il porte un intérêt tout particulier à la notion de connaissance. Il essaye de prendre en charge la question du développement et de l'apprentissage à long terme des connaissances. À moins de considérer qu'il est possible d'envisager et d'apprendre ex nihilo n'importe quel concept ou n'importe quel savoir-faire, la didactique des mathématiques est confrontée au problème essentiel des formes primitives de la connaissance, des filiations et des ruptures dans un champ donné. Nous allons pour notre part essayer de reformuler certaines de ses thèses. C'est une manière pour nous de nous approprier sa pensée.

Quelles situations sont-elles d'abord comprises et maîtrisées par l'élève de seconde et de troisième ? Et constituent de ce fait un premier et important ancrage du sens des concepts fonctions impliquées dans ces situations ? Comment de nouvelles classes de situations, et par conséquent de nouvelles procédures, de nouveaux aspects des concepts fonctions et de nouveaux concepts sont-ils abordés par les élèves de troisième et de seconde, et progressivement maîtrisés par eux ? Quelles filiations peut-on observer entre situations, entre procédures, entre concepts ? Et quelles ruptures ? Au cours de ce chapitre, nous essaierons de montrer que ce cadre théorique qui est loin d'être d'un accès facile nous conduit à des questions tout à fait actuelles sur la mobilisation des connaissances sur les fonctions par les élèves à la transition cycle 4- lycée.

1.4.3 La variété

Selon Gérard VERGNAUD, l'analyse d'un champ conceptuel repose nécessairement sur le contenu de la discipline. C'est la raison pour laquelle, nous nous intéressons aux contenus, au programme sur les fonctions. Il ajoute qu'une part importante revient aux faits de conduites observés chez l'élève : complexité relative des problèmes, erreurs, interprétation des énoncés, des symbolismes et des explications. Nous avons à partir des conduites observées chez les élèves une base théorique suffisante pouvant nous permettre d'identifier ce que les élèves savent des fonctions et savent faire avec elles. De par leurs erreurs, leur interprétation des énoncés, leurs explications, la tâche nous revient plus simple pour dire avec précision quelles sont les connaissances qui sont mobilisées par les élèves. Plusieurs concepts jouent un rôle essentiel dans la théorie : situation, schème et algorithme, signifiant et signifié, concept-en-acte et théorème-en acte (invariants opératoires).

Le concept de situation est pris dans un sens plus simple que le concept de situation didactique, en amont de celui-ci : Brousseau parlerait de situation adidactique, car elle ne contient encore ni l'idée de mise en scène, ni l'idée d'enseignement. Les deux sens ne s'opposent nullement, mais s'appuient l'un l'autre. Deux thèses sont essentielles à la théorie des champs conceptuels.

1. Il faut une théorie de référence, à la fois pour analyser les conduites et les procédures utilisées par un élève dans une situation donnée, et pour comprendre les différents sens d'un concept ;
2. Il faut analyser et classer les situations les unes par rapport aux autres pour identifier les filiations et les ruptures entre connaissances.

C'est le concept de schème (organisation invariante des conduites du sujet pour une classe de situations) qui est au centre de l'analyse de la connaissance du sujet, et de l'analyse du signifié. Les algorithmes forment une sous-classe de schèmes, qui ont pour caractéristique principale d'être effectifs (alors que les schèmes ne le sont pas toujours) et composés de règles explicitables, sinon explicites (les schèmes demeurent souvent implicites. Le concept de classe de situations est essentiel pour référer un schème et ses dérivés (procédure, stratégie, règle d'action...). Une classe de situations est définie en premier lieu par la structure mathématique de la relation ou des relations qui permettent de l'analyser ; en second lieu par le domaine d'expérience physique, technologique, économique ou social dans lequel cette structure est instanciée (pour la même structure de proportionnalité, coûts et productions, grandeurs spatiales, calorimétrie et électrocinétique soulèvent des problèmes de conceptualisation spécifiques très différents).

C'est aussi un fait que les valeurs numériques des variables de situation jouent un rôle très important, du point de vue de la mobilisation des schèmes, non seulement dans l'émergence de nouveaux savoirs, mais aussi dans le traitement par l'adulte (ou par l'élève-expert) d'un même problème. Des sous-classes de problèmes doivent donc être distinguées en fonction des valeurs numériques. Enfin d'autres paramètres interviennent, comme la forme et l'ordre des énoncés et des informations symboliques.

La classification est une tâche essentielle de la science, dans tous les domaines. La recherche en didactique ne peut y échapper. Cependant, comme on peut aboutir à une explosion exponentielle de classes et de sous-classes, il est en même temps décisif de repérer les distinctions les plus pertinentes pour la recherche et pour l'enseignement. Les plus pertinentes sont celles qui permettent d'identifier conceptions et schèmes primitifs, filiations et ruptures.

Un schème

Un schème est composé de règles (implicites ou explicites), mais ces règles sont elles-mêmes nécessairement déterminées par la représentation (implicite ou explicite) des relations en jeu dans la situation traitée, c'est-à-dire par une analyse d'ordre catégoriel : objets, propriétés, relations. C'est cela qui rend nécessaire, dans la théorie psychologique, et de ce fait dans la théorie didactique, le concept d'invariant opératoire.

Les invariants opératoires

Les invariants opératoires peuvent relever de plusieurs types logiques :

1. des fonctions propositionnelles à un ou plusieurs arguments : propriétés relations binaires, relations ternaires...

2. des propositions composées de une ou plusieurs fonctions propositionnelles et susceptibles de vérité ou de fausseté. Les fonctions propositionnelles n'en sont pas susceptibles : "le ciel est bleu" est une proposition, "bleu" est une fonction propositionnelle,

Quand fonctions propositionnelles et propositions sont explicites, on peut parler de concepts et de théorèmes. Quand elles sont seulement implicites et doivent être inférées à partir des conduites du sujet, on peut parler d'invariants opératoires, ou encore de concepts-en-acte et de théorèmes en-acte.

Or d'une part les élèves sont capables d'explicitier certaines de ces connaissances, d'autre part l'enseignement fait usage de représentations explicites : qu'il s'agisse des énoncés en langage naturel du maître et des manuels, ou des différentes formes de représentations symboliques utilisées en mathématiques. Ces signifiants sont donc partie intégrante du champ d'analyse. Ils ne peuvent être confondus avec la connaissance, mais en même temps, ils jouent un rôle très important dans la connaissance :

1. ils sont la matière principale de la communication didactique, qui est faite principalement de mots et de symboles ;
2. ils permettent de distinguer, de marquer et de contrôler des éléments pertinents de la situation et de contribuer ainsi à l'efficacité du raisonnement et de l'action en situation : accompagnement par le langage oral ou par des signes graphiques de la conduite de résolution de problème. Le concept de script-algorithme en algèbre est un exemple-limite de schème accompagné par le symbolisme. ;
3. ils sont la condition nécessaire (mais non-suffisante) de transformation des concepts-outils en concepts-objets (Douady) : transformation des instruments de pensée mis en dans le traitement des situations en objets du discours scientifique.

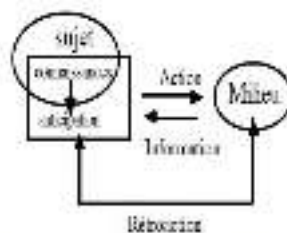
La théorie des champs conceptuels modélise les conditions sous lesquelles les êtres élèves produisent, communiquent et apprennent les connaissances que nous reconnaissons comme mathématiques. Ces conditions sont modélisées par des systèmes appelés situations, qui conduisent des élèves en interaction avec elles à manifester cette connaissance. Elles sont donc spécifiques de la connaissance en jeu. Les situations se distinguent par leur structure, leurs règles, leur fonctionnement, les formes de connaissances produites, etc. Nous les regroupons aujourd'hui en deux grands types :

les situations mathématiques au cours desquelles aucune intervention didactique n'est envisagée ;

et les « situations didactiques », qui comprennent une situation mathématique, enchâssée dans un système de conditions qui ne conduisent le sujet à l'adoption directe des comportements déterminés que par l'intervention du professeur, que l'élève en aperçoive ou non la nécessité mathématique.

Les situations mathématiques ont pour objet de représenter les conditions minimales nécessaires pour expliquer ou justifier la mise en œuvre d'un énoncé mathématique par un élève ou un groupe d'élèves, sans intervention didactique extérieure. Les formes de situations mathématiques les plus simples utilisées dans l'enseignement depuis des siècles sont les exercices et les problèmes

1.4.4 La théorie des situations didactiques



Situation d'apprentissage par adaptation

FIG. 1.1 – Théorie des situations

La théorie des situations illustre les diverses manières dont les mathématiques interviennent en didactique¹ il s'agit d'une approche théorique des processus d'apprentissage qui consiste à les analyser en décomposant en différentes phases l'utilisation du savoir. Selon les phases, ce savoir n'a pas la même fonction et l'élève n'a pas le même rapport avec lui. On en distingue quatre :

1. la dialectique de l'action : Elle consiste à placer l'élève devant un problème présentant plusieurs caractéristiques : la solution est la connaissance visée. L'élève peut agir sur cette connaissance. Il doit posséder un ou des modèles, lui permettant de s'engager dans la recherche. La situation doit renvoyer à l'élève de l'information sur son action lui permettant d'affiner sa stratégie. Il peut ainsi améliorer son modèle initial et en fabriquer un nouveau. C'est un apprentissage par adaptation alternant entre essais et erreurs. Cette dialectique favorise la création de modèles non-formulables et non structurés ;
2. la dialectique de formulation : Afin d'obtenir de l'élève une explicitation de son nouveau modèle construit dans le cadre de la dialectique d'action et que cette formulation ait du sens pour lui, il est nécessaire que cette nouvelle connaissance soit utilisée sous forme de langage oral ou écrit. L'élève peut échanger avec d'autres des informations sous forme de messages écrits ou oraux rédigés dans un langage qui sera lui-même objet d'étude. Parmi ces situations, on peut citer celles où les élèves communiquent entre eux lorsqu'ils travaillent par groupe ;
3. la dialectique de validation : L'explicitation d'un nouveau modèle ne suffit pas à valider. Il est important de faire en sorte que l'élève soit amené à argumenter et à prouver en quoi ce modèle est pertinent. Il revient à l'enseignant de mettre en place une situation dont l'enjeu est de convaincre quelqu'un d'autre afin que le débat s'instaure ;
4. la dialectique d'institutionnalisation : Après avoir construit et validé une nouvelle connaissance, il faut lui donner un statut de savoir. La connaissance acquiert une

1. comme objet d'étude (les « mathématiques didactiques », mathématiques aménagées pour l'enseignement), comme source d'ingénierie (pour produire de nouvelles organisations, problèmes et des situations mathématiques), comme moyen de modélisation (didactique mathématique), comme moyen d'analyse (statistique, épistémologie, sémiologie, etc.) La didactique des mathématiques fait partie des sciences mathématiques, comme la logique ou l'économie mathématique, et au moins au même titre que l'histoire et que l'épistémologie des mathématiques.

place dans le référentiel mathématique de la classe. Ainsi, les élèves pourront l'utiliser et la réinvestir dans des exercices d'entraînement et d'application. L'articulation entre ses différentes phases n'est pas systématique. La réalité s'avère parfois plus complexe, faisant intervenir des allers et retours entre elles.

Synthèse et intérêt pour notre recherche

La théorie des situations didactiques permettant une observation plus affinée des processus d'apprentissage et une analyse des pratiques de classe, pour notre recherche, elle va être un fil conducteur, car il s'agira de mettre les élèves devant des tâches présentant plusieurs caractéristiques. D'obtenir d'eux des explications et la validation de leurs nouveaux modèles et ainsi construire une nouvelle connaissance. Savoir si cette dernière n'est pas dans les capacités attendues du programme.

De même, selon (" Apprentissages et didactique. Où en est-on ? " Hachette 1994). Un champ conceptuel étant un ensemble de situations dont le traitement implique des schèmes, concepts et théorèmes, en étroite connexion, ainsi que les représentations langagières et symboliques susceptibles d'être utilisées pour les représenter. En seconde, les fonctions sont non seulement présentes dans tous les chapitres, elles constituent par la même occasion un champ conceptuel vaste de par ses ostensifs et de par sa capacité d'être de temps en temps outil ou objet selon l'angle sous lequel on les étudie.

Le champ de la didactique des mathématiques est au sens de Guy Brousseau celui de « l'étude des phénomènes d'enseignement qui sont spécifiques à la connaissance enseignée sans être réductible au domaine du savoir auquel elle appartient ». Et Philippe Meirieu note : qu'à travers les nombreux débats qui opposent la pédagogie centrée sur l'enfant et la didactique centrée sur les savoirs, se réfractent un très vieux problème philosophique en même temps que des oppositions stériles, parce que l'apprentissage, c'est précisément la recherche, la prospection permanente dans ces deux domaines et l'effort pour les mettre en contact. Il faudrait enfin qu'on arrive à sortir de cette méthode qui consiste à penser toujours sur le mode de la variation en sens inverse. Point de vue complété par Guy Avanzini qui écrivait : la recherche en didactique a toute sa portée et son ampleur, mais elle ne l'atteint que prise en compte dans un ensemble plus vaste, et à condition d'accepter le facteur d'irrationalité, de fortuité, que l'approche expérimentaliste prétend en vain réduire, mais que la considération des situations réelles oblige à introduire dans la compréhension de la réussite ou de l'échec scolaire. Cela s'accorde avec notre conception de la didactique des mathématiques dans sa complexité en prenant en compte la dimension psychologique : le sujet apprenant agit selon une logique d'appropriation des connaissances, soumise aux caractéristiques affectives et cognitives individuelles. De même, le sujet enseignant conduit son activité d'enseignement selon une logique empreinte de sa propre logique d'apprentissage, elle-même soumise à ses caractéristiques affectives et cognitives. Ce qui doit être la règle en didactique des mathématiques aujourd'hui pour optimiser notre processus de transmission et d'acquisition des connaissances est la prise en compte des intuitions.

L'idée est déjà dans « Le cognitif en didactique des mathématiques » de GISELE LEMOYNE et FRANCOIS CONNE ou il est bien repris le passage de KANT suivant : « Si comme il convient nous ne considérons les objets de sens que comme de simples phénomènes, cependant nous reconnaissons aussi par là qu'ils ont comme fondement une chose en soi, bien que nous ignorions comment elle est constituée en elle-même et que nous n'en connaissons que le phénomène, c'est-à-dire la façon dont nos sens sont affectés par cette chose inconnue » aussi on voit intervenir la notion de sous-système (élève, enseignant et savoir) surtout et c'est d'ailleurs ce qui est intéressante : la place du cognitif en di-

dactique des mathématiques. Ruhai Floris de l'Université de Genève nous dit « qu'une connaissance scientifique suppose d'abord un dédoublement de la réalité en un vécu, qui est l'expérience concrète, actuelle ou virtuelle du connaissant et en une « image » plus ou moins abstraite du connu.

1.4.5 Les hypothèses de Mariza KRYSINSKA et Maggy SCHNEIDER

Une fois le problème de la construction d'une fonction identifié et en nous appuyant sur leurs résultats, nous pouvons affirmer avec Maggy Schneider et Mariza Krysinska que les élèves sont en difficulté lors de la résolution des tâches de modélisation fonctionnelle du fait que tout ce travail reste à l'initiative de l'élève et le degré d'autonomie qu'on lui donne apparaît très important (identifier les différentes étapes à effectuer, déterminer les techniques à utiliser pour résoudre, anticiper sur la pertinence du choix de l'écriture, se convaincre que son choix pourra le mener sans risque, deux sous-tâches plus loin, à la solution de la deuxième question. Cela montre déjà d'une part que ce qui est demandé en premier à l'élève ou au candidat de mobiliser n'est pas tout simplement d'utiliser ou de savoir manipuler les ostensifs fonctions. C'est plutôt tout le processus c'est-à-dire du choix du modèle en entrée pouvant l'amener deux sous-tâches plus loin au résultat final en fonction des étapes proposées par la tâche. Elles font remarquer qu'il existe un décalage non-négligeable entre les exigences du sujet et les attentes chez les élèves. En plus le décalage important entre les pratiques enseignantes et l'évaluation dans le nombre et la gestion de symboles algébriques. Voltaire et Rogalski (2003) nuancent l'importance du découpage du problème en sous-tâches, critiquent et ne partagent pas du tout l'analyse des difficultés dues à la présence des paramètres, sauf si les enseignants n'ont pas joué leur rôle en classe. Artigue (2005, exposé à Namur p. 19) citée par Maggy Schneider, invoque une autre rupture : il s'agit d'analyser un long texte. Entretemps, les annales de cette année ne contenaient pas ce genre d'exercices. Elle critique la façon dont le texte a été inutilement compliqué dès le début par l'introduction de plusieurs paramètres. D'autre part ce texte ne respecte pas la tradition qui veut que le début de chaque partie du problème soit relativement facile et que la complexité aille croissant. Elles font remarquer que l'introduction de perturbations apparemment anodines dans des tâches qui semblent raisonnablement familières aux élèves fait perdre à leurs connaissances toute efficacité. Dans le cas du problème des bactéries proposé au baccalauréat, les données n'étaient pas numériques mais littérales. Il faut avouer que ce n'est pas facile pour les candidats de résoudre ce type de tâche sans au préalable avoir manipulé ou visionné le phénomène. La transposition didactique que suppose cette formulation des sujets fait perdre de vue les aspects proprement expérimentaux. Le problème de jeux² de rôle aussi entre mathématiciens et physiciens est soulevé par Ferrier (2006 p. 23). Ce dernier pour des problèmes posés en physique regrette lors des débats avec d'autres physiciens l'absence d'un mathématicien dans la salle dont le regard plus théorique peut permettre un traitement mathématique plus simple pouvant être simulé *a posteriori*. Tout comme le lien entre le discret (aspect macroscopique) et le continu (aspect microscopique), la physique utilise l'équation différentielle dans des situations où il n'y a pas de dérivée. Il paraît aussi évident que le manque de clarté de certaines tâches issues des expériences empêchent les mathématiciens à intégrer d'avantage la modélisation en classe. Un second fait divers est la question suivante posée à des enseignants de *TS* et refusée par ces derniers :

2. changements de cadre et de registre

« *La plupart des produits pharmaceutiques, comme la pénicilline par exemple, s'éliminent du sang à une vitesse proportionnelle à la quantité de produit y rémanente dans le sang (c'est-à-dire la quantité de produit y présent dans le sang à l'instant t). Le coefficient de proportionnalité est une constante strictement positive, caractéristique du produit administré. Le produit est donné au patient en une seule dose y_0 en milligrammes. On note $y = f(t)$ la quantité de produit rémanente dans le sang en fonction du temps t , exprimé en secondes. Déterminez la fonction. f » (p. 24).*

. La forme de l'énoncé sus-mentionné ainsi que les mots utilisés peuvent poser des problèmes pour la construction d'une fonction. Les deux chercheuses expliquent par la suite que « *ce qui n'est pas considéré comme travail d'un mathématicien, c'est précisément celui qui permet de traduire les observations dans les termes « le produit s'élimine du sang à une vitesse proportionnelle à la quantité de produits dans le sang »*. L'hypothèse est celle d'un manque didactique qui se traduit par l'inexistence d'un discours justifiant la technique de modélisation. Nous ajoutons à cela qu'au-delà du discours, il manque un cadre fonctionnel (un domaine construit pour connaître les fonctions). Ce dernier (le discours) appartient à un domaine non-mathématique et diffère fortement d'un discours relevant d'un système hypothético-déductif, cadre habituel du travail d'un mathématicien selon les deux auteures. Et c'est l'absence d'un tel discours « *technologique ; biologique qui handicaperait, la viabilité d'une organisation praxéologique utile pour le travail de modélisation parce que le travail de traduction mathématique est mal assuré.* »

La fonction qui est l'objet d'étude, lorsqu'on en parle sommes-nous dans le cadre algébrique, celui des nombres, de la géométrie ou de l'analyse? Cauchy dans son *cours d'analyse de l'école polytechnique*, en parlant de fonction algébrique nous laisse encore la possibilité de penser à un cadre fonctionnel.

Nous partirons de la façon dont la modélisation fonctionnelle est décrite par Hittlet (1992) et par les deux chercheuses. Pour Hittlet, le choix d'un modèle adéquat suppose des savoirs théoriques : en premier, il faut penser au modèle. Ensuite il faut l'associer à une certaine forme graphique, un tableau numérique, une progression arithmétique ou géométrique, etc. Enfin, il faut maîtriser des notions au programme.

Nous privilégions ainsi comme Maggy Schneider, l'étude d'aspects théoriques liés à la modélisation pour construire le cadre fonctionnel, et nous laissons de côté tout ce qui est expérimental ou lié à l'approximation. Car comme l'affirment les deux chercheuses, c'est l'existence du modèle théorique qui commande ou suggère les expérimentations et en ce sens les modèles fonctionnels standard sont des « idéaux-type » au sens du sociologue Weber (cité par Bourdieu et al. 1983) qui structurent le regard que l'on porte sur les phénomènes à modéliser tout en nécessitant un complément de sens lorsqu'on les exploite dans un contexte déterminé.

Peut-on trouver une situation fondamentale nous permettant de clarifier toutes les connaissances du cadre fonctionnel? En effet, le concept de situation fondamentale de Brousseau (1996) permet de penser le problème indépendamment du contexte : tout comme s'il n'y a pas besoin par exemple de comprendre la radioactivité pour associer une formule au tableau numérique, la modélisation fonctionnelle doit être acceptée pour les deux auteures. Le fait de ne pas être obligé de connaître la radioactivité pour associer une formule au tableau suppose qu'on doit mobiliser une autre connaissance (un savoir), le processus par exemple. Il faut connaître toutes les étapes du début (formule) au résultat (le tableau), pour le cas cité précédemment. Ceci n'est pas une tâche didactique facile selon Maggy Schneider.

Modes de fonctionnement

Pour Sfard (1992) citée par Maggy SCHNEIDER , « *le lien entre formule et graphique fonctionne seulement en association globale, (p. 111)* » c'est-à-dire que la donnée d'un graphique est en quelque sorte équivalente à celle d'une formule pour les élèves. Sierpinska et Chauvat (1997 p. 111) évoquent la notion de courbe comme un obstacle épistémologique à celle de fonction. Car pour eux, certains élèves identifient les fonctions aux diagrammes géométriques qui servent à les représenter dans le sens où ils perçoivent celles-ci avant tout comme des objets géométriques³. D'autres élèves ont une conception plus analytique des choses : une fonction⁴ est une équation qui représente la courbe plutôt que de voir la courbe comme modèle géométrique de l'équation au sens du lieu de points dont les coordonnées sont liées par cette équation. Pour l'ensemble de ces élèves, le graphique représente la fonction d'une manière indirecte et symbolique en une représentation statique qui en cache tout le dynamisme (la conception de la fonction comme courbe dans l'appréhension d'une fonction linéaire dont la signification se perd dans l'algorithmisation de son équation et le tracé de son graphique, banalisé par l'usage de la règle.) Ces résultats nous apportent encore un peu plus sur les représentations des élèves.

Nature de l'obstacle, courbe-fonction

commençons par rappeler la citation de Chauvat p.112

Dès lors le procédé (application linéaire) disparaît dans la procédure de représentation (le tracé à la règle). Un point de la droite n'est pas vu comme représentant, pour un certain x , de la correspondance x flèche ax , mais comme un élément d'un objet géométrique familier, aligné (au sens de la perception sensible) avec deux points particuliers de la feuille. C'est le paradoxe de la représentation graphique de l'application linéaire : Il est hors de question de tracer la droite point par point, mais l'instrument-règle tue la relation entre les coordonnées. (Chauvat p.112)

Je pense que ce passage est assez clair pour justifier la nécessité de construire un cadre où tous les ostensifs qui peuvent d'une manière ou d'une autre servir pour la représentation d'une fonction sont enseignés. C'est la raison pour laquelle, nous nous intéressons aux obstacles étudiés par Maggy Schneider. D'aucuns peuvent penser que les élèves ne comprennent rien, c'est-à-dire que la notion de fonction leur est inaccessible ou qu'ils n'arrivent pas à résoudre les problèmes liés aux fonctions. Entretemps le problème peut ne pas être la fonction elle-même à étudier. Mais plutôt l'ostensif par lequel elle est donnée. L'obstacle qui consiste à associer fonction et courbe est-il bien un obstacle de nature épistémologique comme le prétendent les deux chercheurs précités (Sierpinska et Chauvat). Elles se demandent aussi en regardant dans l'histoire des fonctions pourquoi les mathématiciens ont eu du mal à séparer l'étude de fonctions du cadre géométrique. Nous pensons à ce niveau aujourd'hui que les cadres connus (nombres, algèbre, analyse, géométrie, etc.) sont bien établis et qu'il est nécessaire de créer un cadre fonctionnel d'autant plus que les fonctions sont utilisées dans la plupart de ces cadres mathématiques : par exemple en géométrie, les fonctions sont évoquées sous forme de transformations géométriques parmi lesquelles on peut citer :

3. Fonction égale courbe représentative

4. Fonction égale équation algébrique représentée par la courbe

1. les transformations⁵ ponctuelles et déplacements comme la translation, la symétrie par rapport à un point, le retournement, la rotation ou la symétrie axiale.
2. l'homothétie : une transformation dans laquelle, étant donnée un point O (centre ou pôle d'homothétie) et un rapport k (rapport d'homothétie), l'homologue d'un point M est un point M_1 de la droite (OM) tel que $\overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}$;
3. les similitudes : une transformation produit d'une homothétie positive et d'un déplacement (pas au programme du cycle 4 et en seconde)
4. l'affinité et l'inversion en géométrie plane : une transformation ponctuelle dans laquelle, étant donné dans le plan une droite $x'x$ (axe d'affinité), une direction (δ) , un point M a pour transformer le point M_1 défini par la construction suivante : On mène par M la parallèle à (δ) qui rencontre $x'x$ en μ , sur la droite (μM) , on porte $\overrightarrow{\mu M_1} = k\overrightarrow{\mu M}$ pour l'affinité qui comme l'inversion n'est pas au programme du cycle 4.

L'intérêt de cette énumération ici est de comprendre que les fonctions ne sont pas que numériques comme dans les programmes du secondaire. bien que ce soit la tendance avec les fonctions trigonométriques, algébriques, etc. où les antécédents et les images sont des nombres. Il faut bien comprendre lorsqu'on analyse en profondeur nos manuels du secondaire qu'il y a bien d'autres fonctions encore. Mais à part celles énumérées plus haut on peut ajouter des fonctionnelles qui sont demandées à être construites dans certaines tâches au programme en France et en Afrique francophone. Un exemple est donné dans le chapitre *analyse de tâches*.

Revenant sur nos obstacles, cette difficulté d'identifier une fonction avec sa courbe représentative est induite par l'enseignement lui-même puisqu'il n'existe pas de chapitre dans les programmes portant sur les ostensifs comme objets d'étude. On est en face d'un obstacle de nature didactique selon Maggy Schneider car en effet, « *la fonction (ou plutôt sa courbe représentative) y est trop souvent considérée comme un objet d'étude en soi, non comme mode de représentation d'une loi de variation p. 112* ». Est-ce plutôt « *un obstacle métissé aux origines épistémologiques et didactiques Chauvat (1997)* ». La notion de fonction s'initialise dans les programmes actuels par la notion d'application linéaire et par les graphiques.

Les chercheurs dénoncent encore le poids exagéré, dans les pratiques scolaires, de l'exercice dit de « *variation de fonction p. 113* qui va demander aux élèves de mobiliser d'autres connaissances, d'autres ostensifs que sont les tableaux de valeurs, tableaux de variations, dérivées, etc. C'est là, selon Lacasta et Chauvat p.113 du livre *émergence de modèles fonctionnels*, l'origine du malentendu entre élève et professeur qu'ils décrivent en ces termes :

les professeurs utilisent les graphiques cartésiens avec l'illusion que ce qu'ils considèrent comme évident graphiquement, mais qui n'est évident que parce qu'ils ont construit ou déchiffré le dessin avec un certain nombre de connaissances qui leur sont propres, sera tout aussi évident, et aura une valeur évidente explicative, aux yeux de l'élève qui, lui, ne possède pas encore ces connaissances. C'est en particulier le cas dans le recours idéogrammatique, ou symbolique, au graphique où les courbes ont des formes standard (sinusoïdes « montagneuses », parabole avec son extremum...) mettant en évidence le comportement global et les singularités de relations représentées.

5. fonctions géométriques

Cette partie de leur recherche nous ouvre déjà la porte de ce que nous appellerons des possibilités et ou propositions c'est-à-dire des choses qui peuvent permettre à l'élève de percevoir le mystère (anticiper, prédire, etc.) Pour terminer, nous avons d'autres modes de représentation d'une fonction tels que les diagrammes en bâtonnets utilisés par les chercheurs et qui jouent un rôle dans l'interprétations de certaines transformations du plan et de leurs effet graphiques par exemple à la fonction $y = f(x)$ on fait correspondre la fonction $y = 2f(x)$, peut être décrite en parlant d'élongation de segment.

1.4.6 Les divers fonctionnements graphiques : tels qu'on peut les enseigner

Dans le cadre fonctionnel que nous construisons dans ce travail, les graphiques seront présentés à la manière de Maggy Schneider. Pour elle, « *on a deux différents fonctionnements des graphiques : abaque lorsqu'ils précisent des valeurs particulières de la fonction ou idéogrammes lorsqu'ils rendent compte globalement de leur allure graphique.* » Et Chauvat(1992, p. 115.) distingue : abaque, message topologique ou idéogramme. Ce travail à faire par les enseignants est consigné dans le chapitre *curriculum du cadre fonctionnel*.

1.4.7 Intérêt pour notre recherche

Que de difficultés pour construire une fonction ! L'émergence de modèles fonctionnels vient de nous baliser le chemin et nous montre simplement qu'il y a beaucoup d'obstacles pour la mobilisation des connaissances liées aux fonctions. C'est dire qu'il y a encore à dire et à faire sur les fonctions. Au Gabon par exemple cette année on a 3% de réussite au baccalauréat sur l'exercice 3 c'est-à-dire à l'étude de fonction sur 1200 candidats de mon centre. Il faut une nouvelle organisation didactique et épistémologique pour l'enseignement-apprentissage des ostensifs liés aux fonctions. C'est un manque⁶ pour le travail de modélisation à enseigner aux enseignants d'abord puis aux élèves. Notre but n'est pas de produire un modèle type de construction de fonctions mais d'en proposer un qui délimite (ordonne) les connaissances nécessaires lorsque la question de construction d'une fonction se pose ou se propose à nous ou à un élève. Les tâches qui seront au centre de notre travail de recherche nous permettront de connaître ce nouveau cadre et de le construire (fabriquer, bâtir) et ont pour finalité de résoudre des problèmes liés à l'introduction de la notion de fonction au programmes du cycle 4 et en seconde en France et en Afrique francophone. Nous allons à chaque fois partir de leurs caractéristiques. Ils s'agit en première analyse des tâches de changement de cadre et de registre mais dont la résolution par une fonction obéit aux mêmes règles de construction de fonction dans un cadre à déterminer. Concrètement, lorsqu'on change de cadre, qu'est-ce qui ne change pas ? Voilà la question fondamentale. La répondre à cette question est un ordre de la connaissance. Ensuite, une fois que cette connaissance est mobilisée, pour passer d'un modèle à un autre les élèves pourront faire le choix du modèle adéquat qui suppose des savoirs théoriques : penser au modèle, l'associer à une certaine forme graphique, tableau numérique, progression arithmétique ou géométrique, la maîtrise des notions au programme. La modélisation pour nous est le meilleur moyen de faire ressortir les connaissances des élèves, ces connaissances pouvant être aussi bien enseignées qu'intuitives. Les travaux de Maggy Schneider nous ont permis ainsi d'identifier la majorité des constituants de la première connaissance

6. l'enseignement-apprentissage des ostensifs liés aux fonctions

de notre nouveau cadre (domaine) et que nous appellerons systématiquement tout au long de notre travail cadre fonctionnel. Il s'agit comme première connaissance de ce cadre Le processus en ce sens qu'elle (le processus[80]) permet l'enchaînement ordonné de faits ou de phénomènes. Il s'agit d'une suite continue d'opérations, d'actions constituant la manière de faire, de fabriquer quelque chose répondant à un certain schéma et aboutissant à quelque chose d'autre. Pour les fonctions numériques (un nombre, antécédent admet pour image un autre nombre). Le passage du premier au second nombre impose la mobilisation du processus. C'est le cas dans la résolution du calcul de la valeur intermédiaire, du calcul de l'antécédent, de l'image, de l'extrémum ou de la détermination du signe d'une fonction. Nous demandons aux lecteurs de bien distinguer le processus des process ou procédure c'est-à-dire de la forme, des instructions(l'ensemble des règles qui doivent être respectées, la marche à suivre, l'ensemble de formalités, de démarches à accomplir pour obtenir tel ou tel résultat qui est synonyme de sous-programme).

1.4.8 Outils sémiotiques pour analyser les phénomènes didactiques

Nous nous appuyerons sur les « Outils sémiotiques pour analyser les phénomènes didactiques dans la classe de mathématiques » de Ferdinand Arzarélo[24] ou il s'intéresse aux :

1. mots (oralement ou par écrit) ;
2. modes d'expression extralinguistiques (gestes, regards, ...);
3. différents types d'inscriptions (formules, dessins, esquisses, graphiques, ...);
4. instruments (du crayon aux appareils numériques les plus sophistiqués)

pendant le cours de mathématiques. En effet, ce regard sera le notre pour comprendre par quels mots, expressions, formule, instrument etc... Les professeurs introduisent la notion de fonction en France et en Afrique francophone. leurs regards sur la covariation dans les mathématiques pour tenter de définir une fonction nous semble aussi d'un grand intérêt. L'auteur dit à ce sujet ce qui suit :

Nous soulignons que le raisonnement covariant continu, ou le raisonnement sur les valeurs de deux quantités ou plus variant simultanément, a joué un rôle crucial dans l'invention par les mathématiciens des concepts qui ont conduit à la définition moderne de la fonction, de l'utilisation d'équations pour représenter une variation contrainte à des représentations explicites de relations déterministes entre des quantités. (P.W. Thompson and M.P. Carlson, 2017) ; traduction de [24, p. 423]

Nous nous posons la question de savoir par quels signes les enseignants introduisent-ils la notion de fonction ? Nous identifions des pistes pour un autre problème dans ses travaux. C'est celui sur la discussion entre l'algèbre et les fonctions.

Au début du *XIX^e* siècle, on a pu résumer ce problème comme suit :
L'algèbre prise dans le sens le plus étendu, est l'art de déterminer les inconnues par des fonctions des quantités connues, ou qu'on regarde comme connues.
(Lagrange, 1808, p. vii).

L'auteur pense que cette manière fondamentale de raisonner a été négligée dans les écoles car l'algèbre est enseignée comme une arithmétique généralisée, les fonctions sont souvent enseignées aussi suivant la définition statique de Bourbaki, qui gèle leur nature

dynamique dans le langage statique de la théorie des ensembles. et il soutient que le raisonnement variant et covariant est fondamental pour le développement mathématique des élèves. Il fonde cette affirmation sur des recherches qui mettent en évidence les difficultés éprouvées par les étudiants en ce qui concerne les relations fonctionnelles, car ils n'ont pas la capacité de raisonner de façon variée ou covariante et dans des recherches montrant des changements productifs dans les conceptions et utilisations des fonctions par les enseignants et les élèves, quand ils utilisent le raisonnement covariant.

Cela nous encourage à chercher à construire ce cadre fonctionnel qui permettra aux élèves et aux enseignants de construire et de raisonner de façon variée et covariante avec les fonctions ou des fonctionnelles. Ce qui suppose une mobilisation du processus ainsi que la nature de la fonction.

1.4.9 Intérêt pour notre recherche

Nous n'allons pas nous étaler sur tous les travaux de Ferdinand Arzarello, mais à partir des programmes institutionnels, nous allons regarder comment les enseignants introduisent la notion de fonction en classes de troisième et de seconde. Ce regard entreprend de questionner un problème qui nous préoccupe, depuis quelques années : "le rôle du professeur dans une situation didactique, et les outils dont il dispose pour piloter la situation". Les travaux de F. Arzarello, dans *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2017, didactique des mathématiques*, témoignent de cette préoccupation. Cette recherche tente aussi d'esquisser ou de comprendre comment se crée un modèle de milieu avec lequel interagit le professeur lorsqu'il gère une situation adidactique ou comportant une dimension adidactique. Le modèle d'Arzarello que nous adoptons dans cette phase d'observation du cours fait par l'enseignant se fonde sur les travaux sur le milieu, mais aussi sur les recherches « des connaissances mobilisées (savoirs-faire) et les savoirs » dans la transposition didactique, ainsi que dans une moindre mesure sur les analyses de tâches ou situations complexes transversales et l'activité de l'élève. Nous avons choisi cette approche pour la simple raison qu'elle permet de faire vivre en même temps les savoirs (connaissances propositionnelles ou de faits) et les savoirs-faire (connaissances pratiques). Cette question de la différence entre savoir et connaissance sera aussi explicitée. Le plus important pour l'enseignant du point de vue didactique est de comprendre que le savoir est externe à l'élève et la connaissance interne. En mettant l'accent sur l'activité mathématique conjointe du professeur et de l'élève, cette approche nous permet de mieux analyser les contraintes et les libertés réelles du professeur qui cherche à gérer une situation adidactique visant à introduire la notion de fonction. Comment il fait en classe ? 333 enseignants ont été observés pendant six années dans les lycées et collèges français et africains. Les différentes séances d'enseignement de la notion de fonction, en classe de troisième et de seconde ont été observées et analysées à l'aide de ce modèle. Le plus gros du travail a été l'observation à travers les cahiers de cours élèves, les évaluations et les entretiens.

1.4.10 L'objet fonction selon Anna Sfard

Dans l'article [84, p. 59-84] Anna Sfard, professeur à l'Université d'Haifa tente de nous expliquer en premier ce qu'est un mathématicien idéal. Notre démarche ici est de faire en premier un tout petit résumé de son travail pour permettre à ceux qui nous lisent de

mieux comprendre ce dont on parle et ce qu'on construit. Ainsi nous présenterons en quoi son travail a un intérêt pour le notre. C'est dans le cadre de la didactique que nous nous appuyons sur son texte qui a une forte connotation épistémologique. Nous cherchons les points communs à toute fonction donnée. Comment Anna Sfard décrit-elle ce chemin qui mène à connaître une fonction chez les élèves du secondaire indépendamment du contexte ?

1.4.11 Dualité ontologique des objets mathématique

Anna Sfard commence par décrire ce qu'est un mathématicien idéal[50].

He studies objects whose existence is unsuspected by all except a handful of his fellows. Indeed, if one who is not an initiate asks him what he studies, he is incapable of showing or telling what it is. It is necessary to go through an arduous apprenticeship of several years to understand the theory to which he is devoted. Only then would one's mind be prepared to receive his explanation of what he is studying. Short of that, one could be given a "definition," which would be so recalcitrant as to defeat all attempts at comprehension.

The objects which our mathematician studies were unknown before the twentieth century; most likely, they were unknown even thirty years ago. Today they are the chief interest in life for a few dozen (at most, a few hundred) of his comrades. He and his comrades do not doubt, however, that non-Riemannian hypersquares have a real existence as definite and objective as that of the Rock of Gibraltar or Halley's comet. In fact, the proof of the existence of non-Riemannian hypersquares is one of their main achievements, whereas the existence of the Rock of Gibraltar is very probable, but not rigorously proved.

It has never occurred to him to question what the word "exist" means here. One could try to discover its meaning by watching him at work and observing what the word "exist" signifies operationally.

FIG. 1.2 — extrait du livre [50, p. 35]

il étudie des objets dont l'existence est insoupçonnée de tous sauf une poignée de ses semblables. En effet, si celui qui n'est pas initié lui demande ce qu'il étudie, il lui sera difficile de montrer ou de dire de quoi il s'agit. Il faut passer par un apprentissage laborieux de plusieurs années pour comprendre la théorie à laquelle il est dévoué. Ce n'est qu'à partir de là que l'esprit est prêt à recevoir l'explication de ce qu'il étudie. En dehors de cela, on pourrait donner une définition qui pourrait être si obscure que toutes les tentatives de compréhension seraient impossibles. Les objets que nos mathématiciens étudient étaient inconnus avant le XXe siècle ; très probablement, ils étaient inconnus il y a encore trente ans. Ils sont aujourd'hui le principal intérêt de la vie de quelques dizaines (au plus quelques centaines) de ses camarades. Lui et ses camarades ne doutent cependant pas que les hypersquares non-riemanniens aient une existence réelle aussi définie et objective que celle du Rocher de Gibraltar ou de la comète de Halley. En fait, la preuve de l'existence d'hypersquares non-riemanniens est l'une de leurs principales réalisations, alors que l'existence du rocher de gibraltar est très probable, mais pas rigoureusement prouvée. Il ne lui est jamais venu à l'esprit de remettre en question la signification du mot "exister". On pourrait essayer de découvrir sa signification en l'observant au travail et en observant ce que le mot «exister» signifie opérationnellement.

En fait, un mathématicien idéal est celui qui peut étudier les objets dont l'existence est insoupçonnée par les autres. Même les entités abstraites étranges, tout en étant scrutées et

manipulées, paraissent aux mathématiciens idéal comme incontestablement réelles comme la plume avec laquelle ils écrivent sur du papier. Cette première remarque nous intéresse dans la mesure où le concept de fonction est abstrait pour nous. Il s'agit d'un concept mathématique qui est enseigné à partir du quatrième cycle. Nous allons donc vérifier si les élèves de seconde et de troisième peuvent être considérés comme mathématiciens idéaux par la façon donc ils construisent les fonctions. L'auteure ajoute sur la base de ses résultats que les étudiants bien que généralement loin d'être des mathématiciens (et encore moins idéal), n'ont pas d'autres choix que de se comporter comme tel lorsqu'ils sont confrontés à des concepts mathématiques de base. C'est à dire que les élèves sont souvent obligés de s'écarter et de manipuler des objets mathématiques du fait du programme sans peut être mesurer la portée. C'est particulièrement ce qui se fait avec le concept de fonction, ou peu de temps après l'introduction de cette notion importante. Anna Sfard affirme qu'à ce niveau de la scolarité, les élèves arrivent à analyser et à manipuler cette nouvelle entité avec une confiance qui ne peut être atteinte que par ceux qui peuvent la traiter comme si c'était une chose réelle. Selon elle, beaucoup de nos élèves, semblent manquer de cette capacité. Elle fait remarquer au passage que d'autres études l'ont démontré et peuvent servir de preuves. Elle pense que La prise de conscience des processus longs (difficiles) précédant la naissance d'un objet mathématique peut être la clé pour comprendre certaines des difficultés rencontrées par tant d'apprenants. La genèse des objets mathématiques est le thème central, alors que le concept de fonction sert d'illustration et de pierre de touche pour des aspects purement théoriques.

Nous avons donc à travers ce travail cherché à comprendre les processus sous-jacents à toute construction d'objet mathématique et par la suite l'appliquer à notre recherche. C'est-à-dire ; est ce que la fonction, telle que construite aujourd'hui par un élève respecte le même processus proposé par Anna Sfard ? La première partie de son étude est un cadre conceptuel dans lequel le concept de fonction est présenté. C'est dans la deuxième partie qu'elle énonce les affirmations relatives à la dualité ontologique des conceptions mathématiques qu'elle fait suivre de plusieurs hypothèses concernant la formation de notions telles que nombre, ensemble et de fonction. Au regard de sa construction, nous voyons déjà que la notion de fonction intervient après celle du nombre et d'ensemble. Les fonctions de par cette construction viendraient ou devraient être enseignées si nous suivons sa logique, après les nombres et les ensembles de nombres donc après l'arithmétique, l'algèbre et les ensembles. Son analyse aboutit à un schéma en phase d'arbre de développement de concepts. Ce modèle est utilisé dans la seconde partie de son article pour

1. analyser ;
2. catégoriser et ;
3. expliquer

les difficultés largement rencontrées par les élèves qui apprennent le concept de fonction d'une manière traditionnelle (structurelle). Dans la dernière partie de son article, une étude empirique est présentée dans laquelle certaines conjectures sont testées sur les possibilités de surmonter les difficultés en simulant la formation d'objets mathématiques.

1.4.12 Genèse des objets mathématiques

Les conceptions mathématiques selon Anna Sfard ont une double nature. Elle s'explique dans les lignes qui suivent :

Nous définissons un nombre complexe comme étant une paire ordonnée (x, y) de nombres réels disent les auteurs d'un manuel de mathématique moderne (Stewart et Tall, 1983), Aujourd'hui, c'est la manière standard d'introduire de nouveaux concepts mathématiques. Un objet abstrait est construit avec un autre. Le message ontologique tacite de cette approche est que les entités mathématiques sont très semblables aux choses réelles : elles sont permanentes, leur existence ne dépend pas du jugement humain ou de la volonté, elles peuvent être manipulées selon certaines règles et elles peuvent être combinées en structures complexes tout comme des morceaux de lego. Plus souvent, cependant, le traitement des notions mathématiques comme si elles se réfèrent à des entités semblables à des objets n'est pas la seule possibilité. Bien que ce type de conception, qui dans ce papier sera appelé structurelle semble prévaloir dans les mathématiques modernes, il faut accepter des définitions mathématiques qui révèlent une tout autre approche. Une notion est conçue comme un processus de calcul plutôt que comme une construction statique. Une telle dualité peut certainement être trouvée dans le cas de la fonction qui, une fois, selon Harel et Kaput, (1991) ainsi que d'autres numéros font aussi des remarques des liens entre ses différents modes de pensée mathématiques. En effet, les conceptions de processus et d'objet de Dubinsky et Harel, les entités conceptuelles de Kaput et Harel (1991) et les procédures de raisonnement, les interprétations dynamiques et statiques de Goldenberg, Lewis et O'keeffe, et même les points de vue de Monk etc. ra décrite comme un processus de calcul et sur une autre comme une relation statique. [84, p. 60]

Anna Sfard nous invite à accepter le fait que les différents auteurs utilisent une terminologie différente pour exprimer des idées semblables avec tolérance et compréhension et, comme étant naturel à un stade précoce dans le développement d'une théorie. C'est dire que toutes les définitions que chaque enseignant ou manuel peut donner sur la fonction est à accepter. Son travail fait ressortir ou met en relief, la diversité (la richesse) linguistique et constitue un pas important vers l'unification. La fonction doit de ce fait, si on regarde de plus prêt, tous les ostensifs indépendamment des différents cadres et registres peuvent être unifiés par la fonction. C'est peut-être pour cette raison qu'il n'est pas rare de trouver dans les différents programmes, la fonction être définie à partir d'un tableau, d'une formule ou d'une représentation graphique. C'est ainsi que les manuels présentent cette notion.

1.4.13 L'approche promue : conceptions opérationnelle et structurelle

Afin de bien comprendre les vues et les contributions individuelles de chaque chercheur, Anna Sfard commande d'être sensible aux différences de contenus et d'intentions signalées par les différences de termes. Elle mentionne deux aspects particuliers de l'approche promue : tout d'abord, en parlant de conceptions opérationnelles et structurelles, elle se réfère aux croyances implicites des apprenants sur la nature des constructions mathématiques plutôt que sur leurs capacités ou leurs compétences. Ce point de vue impose une distinction délicate entre les termes objet et entité qui semblent être utilisés par d'autres auteurs comme synonymes. Un objet se réfère, selon l'auteure à la manière de transmettre l'information et ne signifiera pas beaucoup plus que la totalité, la généralité alors que la

première (entité) transmettra un message ontologique et donc une portée plus restreinte. Il faut comprendre selon l'auteure qu'un objet abstrait est une entité conceptuelle, mais il doit aussi être clair que c'est beaucoup plus que cela : c'est une métaphore qui fait une construction mathématique à l'image de la chose matérielle. Nous gardons pour la suite de notre travail la nature des constructions mathématiques qu'Anna Sfard utilise et qui sera développé dans le cadre épistémologique. Les termes processus et objet doivent être compris ici comme des facettes différentes, des composantes distinctes de la même chose (un peu comme les deux faces d'une pièce de monnaie) plutôt que comme des composantes totalement distinctes, et distinctes de l'univers mathématique. En d'autres termes, selon Anna Sfard, les modes de pensée opérationnels et structurels, bien que manifestement incompatibles, sont en fait complémentaires. Elle explique que la résolution efficace des problèmes est habituellement fondée sur des alternances fréquentes entre les approches opérationnelles et structurelles des concepts abstraits. Habituellement, la dualité ontologique des notions mathématiques est implicite dans le langage utilisé par le mathématicien et dans la façon dont il traite les concepts à la main, mais les représentations symboliques et graphiques ont aussi beaucoup à offrir à cet égard.

Bien qu'une propriété telle que la structure se trouve aux yeux du spectateur plutôt que dans les symboles eux-mêmes, certaines notations semblent être plus susceptibles d'interprétation structurelle que d'autres. Dans le cas de la fonction, l'élève serait probablement plus à même de la concevoir comme un objet en regardant son graphe que pendant la lecture ou l'exécution d'un programme pour le calcul de ses valeurs. Dans le processus de la pensée, les images mentales peuvent être censées jouer des rôles similaires à des images réelles. [84, p. 61]

Dans ce court passage nous voyons une petite partie de ce qui se trouve dans le programme français sur la notion de fonction en seconde ou les mots et groupes de mots suivants se retrouvent :

1. processus ;
2. images mentales

In fine on retiens de l'analyse des travaux d'Anna Sfard que les graphes et les programmes peuvent permettre aux élèves de mobiliser les processus indépendamment du point de vue structurel ou opérationnel de la fonction. C'est la raison pour laquelle à partir des travaux de Maggy Schneider, d'Anna Sfard et des programmes nous avons appelé la première connaissance du cadre fonctionnel processus

1.4.14 Les origines des fonctions selon Anna Sfard

Notre recherche à deux dimensions : didactique et épistémologique. Nous nous intéressons donc à l'histoire de la notion de fonction. Le regard d'Anna Sfard sur l'histoire de ce concept nous est donc utile. Elle se pose une question importante, celle qui concerne les origines des objets mathématiques : le cas des fonctions. Elle se demande d'où viennent ces entités abstraites à la fois en termes historiques et psychologiques ? Dans notre travail nous nous posons la même question mais d'un point de vue différent à savoir historique et épistémologique. Cette différence est capitale et il est très important de le dire. En effet chaque didacticien peut faire le choix de vouloir s'intéresser dans le processus de transmission des connaissances mathématiques au sens de la connaissance mathématique telle que construite empiriquement et d'en observer les choix faits par les programmes et

les enseignants (le point de vue épistémologique) ou, il peut s'intéresser aux mécanismes producteurs de connaissances enseignées. Il peut de ce fait regarder les méthodes de résolution de tâches, les techniques, les erreurs, les difficultés des élèves, le fonctionnement de leurs neurones, etc. (côté psychologique et cognitif). Dans son développement Anna Sfard pense que quiconque se penche sur un texte mathématique standard peut-être tenté de donner à cette question (origine des mathématiques, origine des fonctions) une réponse simple. Une telle réponse, cependant serait trop facile. Même si les mathématiciens estiment que la leur est de l'ordre ou du pouvoir divin d'introduire des objets abstraits dans l'existence juste en disant « let it be » (l'acte de création), en fait, cela n'est pas aussi simple. Après tout,

Construire des connaissances est une chose, et présenter les résultats est tout autre. Reconstruire le processus de construction n'est jamais facile. En mathématiques, la tâche peut être particulièrement difficile car beaucoup d'écrivains semblent partager la conviction de Gauss : quand on a construit un bel édifice, l'échafaudage ne devrait plus être visible [84, p. 61]

Cette partie du travail d'Anna Sfard nous a permis de prendre la mesure de ce que nous sommes en train de faire à savoir construire un cadre fonctionnel. En même temps, construire une fonction ou une fonctionnelle.

En dépit des inévitables difficultés méthodologiques, elle tente, dans cet article, de déterrer les racines historiques et psychologiques du concept de fonction. Dans Sfard (1987, 1991), une affirmation générale a été faite, selon laquelle les conceptions structurelles se développent habituellement hors du fonctionnement, ou, en d'autres termes, les objets abstraits émergent de certains processus informatifs. Cette thèse s'applique au concept de fonction, que ce soit par son développement historique ou son acquisition par les élèves. Nous comprenons par là que le concept de fonction est extrêmement lié aux processus informatifs. C'est déjà ce que nous avons observé dans notre étude qui cherchait à délimiter les cadres dans lesquels les fonctions étaient sollicitées. Nous avons de cette étude remarqué qu'à la base Leibniz pensait à une machine à calculer, un sous programme de l'ordinateur, le calculatrice aujourd'hui même si ce dernier ne pensait pas uniquement aux calculs avec les nombres mais également aux propositions (discours) pour mesurer si ce que vous dites est vraie ou pas. L'auteure se permet de se tourner vers l'histoire d'abord. Ainsi dans (Sfard (1988a, 1991), une analyse de plusieurs exemples a abouti à la conclusion que de nombreuses notions mathématiques avaient été conçues opérationnellement bien avant que leurs définitions et représentations strictes soient formulées.

1.4.15 Analyse théorique du modèle proposé

L'analyse théorique du modèle proposé par Anna Sfard sur l'histoire des fonctions (ou des nombres - voir Sfard, 1991) montre que l'on peut identifier un modèle de graphe construit pas à pas tel un arbre de calcul ou une suite à pas constant dans les transitions successives de la conception qu'elle nomme opérationnelle à la conception structurale de la fonction : elle montre qu'il doit y avoir un processus réalisé sur l'objet déjà familier, puis l'idée de transformer ce processus en un processus plus compact, un ensemble autonome devrait émerger, et enfin une capacité à considérer cette nouvelle entité comme un objet permanent en soi doit être acquise. Ces trois composantes du développement des concepts seront appelées respectivement intériorisation, condensation et réification. La condensation et la réification peuvent sembler pour le lecteur sembler quasiment confus similaires, mais il y a une différence subtile entre eux selon Anna Sfard.

1. Condensation signifie un changement d'approche plutôt technique, qui s'exprime dans une capacité à traiter un processus donné en termes d'imputation et de sortie sans considérer nécessairement ses étapes constitutives. La condensation peut donc être comparée à transformer certaines parties d'un programme informatique en procédures auto-entretenuës qui, à partir de maintenant, peuvent être évoquées, manipulées et désignées par leurs noms ;
2. La réification est la prochaine étape : dans l'esprit de l'élève, elle convertit le processus déjà condensé en une entité semblable à un objet. En d'autres termes, alors que la condensation est un changement quantitatif graduel, la réification doit être comprise comme un saut qualitatif soudain dans la façon de regarder les choses

Pour notre enquête de terrain les idées suivantes d'Anna Sfard nous ont aussi intéressées à savoir : Le fait que nous manquions encore d'outils pleinement satisfaisants (en recherche en didactique et en épistémologie) ne doit pas nous décourager de poursuivre des recherches prometteuses en matière d'enseignement des mathématiques, nous devrions simplement nous abstenir de trop nous pencher sur un type d'instrument pour essayer plutôt de sonder le terrain de différentes manières. Les entretiens, les questionnaires, les observations en classe et l'analyse approfondie des stratégies de résolution des problèmes des élèves et de la langue qu'ils utilisent, même s'ils ne sont pas très convaincants lorsqu'ils sont considérés séparément, peuvent être vraiment puissants lorsqu'ils sont combinés. Dans une étude, c'est ce mélange de méthodes qui nous peut nous permettre d'identifier certaines tendances claires, certaines connaissances des élèves.

1.4.16 Le dilemme de la réification

Une attention toute particulière est accordée aux obstacles qui doivent être surmontés par l'étudiant sur sa façon de comprendre comme objet un concept mathématique comme fonction. Qu'est-ce que nous gagnons donc, de pouvoir traiter une fonction non seulement comme un processus de calcul mais aussi comme une entité semblable à un objet ? Selon Lakoff et Johnson (1980) cité par Anna Sfard, « les objets mathématiques ne sont que des exemples typiques de l'énorme collection de métaphores qui imprègnent notre système conceptuel » (p.115). Notre recours fréquent aux métaphores s'explique aisément : parce que tant de concepts qui sont importants pour nous sont soit abstraits, soit bien délimités dans notre expérience, nous devons les saisir par d'autres concepts que nous comprenons plus clairement (Relations spatiales, objets, etc.). Une idée assez capitale pour notre travail est le fait qu'Anna Sfard pense que les objets mathématiques sont nos outils pour mettre le sens et l'ordre dans la connaissance mathématique. Elle fait donc la différence entre objet mathématique et connaissance mathématique. Cette déclaration de sa part peut également être présentée comme une implication de certaines hypothèses plausibles sur la façon dont « l'information mathématique est traitée par l'esprit humain. Il a été souligné dès le début de ce chapitre que la conception opérationnelle et structurelle sont complémentaires, à savoir que les deux sont nécessaires et que les deux doivent être utilisés dans le processus d'apprentissage et de résolution des problèmes. »

« En résolvant un problème mathématique complexe, un élève doit passer d'un mode de pensée à un autre (voir Sfard, 1987), l'approche opérationnelle est indispensable pour trouver des « réponses finales » à la question mathématique, mais c'est l'approche structurelle qui tourne Les longues chaînes d'informations conçues opérationnellement en unités beaucoup plus compactes, ce

qui a grandement facilité la contrainte cognitive (voir Harel et Kaput, 1991), combinant diverses procédures et les appliquant à la résolution de problèmes devient une tâche beaucoup plus simple. Les objets abstraits sont pour les processus ce que les images et les symboles sont pour les descriptions verbales : les moyens pour saisir de grandes quantités de données « d'un coup d'œil » équipé d'une telle « vue générale », un élève est plus apte de faire face aux problèmes qu'il n'a jamais vu. Bref, c'est la conception structurelle qui rend tous les processus cognitifs réellement efficaces.

On peut donc dire que les objets abstraits rendent certains processus mathématiques plus significatifs. En effet, même si un élève peut composer et décomposer des fonctions en utilisant uniquement l'approche opérationnelle (*traiter des fonctions comme des calculs*), il sera probablement plus compétent s'il peut penser à la tâche aussi en terme structurel. Un élève a besoin d'un objet mathématique « solide » pour s'appuyer en toute confiance dans ses actions. Sans aptitude à penser sur le plan structurel, l'élève est souvent perdu : s'il ne manipule rien, parce que, du point de vue de celui-ci, les objets en question n'existent pas. *Exemple : Quelle est la solution de l'équation fonctionnelle $f(x + y) = f(x) + f(y)$?* Un élève, pour qui le terme « fonction » ne se réfère pas à une « chose » imaginable et bien définie, aurait beaucoup de difficulté à répondre à cette question. En fait, la propre expérience d'Anna Sfard en tant qu'enseignante indique que des proportions étonnamment importantes d'élèves du secondaire éprouvent une telle difficulté. Pour certains d'entre eux, cela semble presque insurmontable. Les élèves qui ne sont pas capables de traiter les fonctions comme des entités permanentes l'ont eux-mêmes confirmés »

Les sources possibles des difficultés liées à la réification sont :

1. la sémantique : Le plus souvent, un nouvel objet abstrait vient de la généralisation d'une idée déjà bien développée qui peut être interprétée en termes de processus bien connu. Par exemple : la création de rationaux, d'irrationnels et de négatifs a successivement élargi le concept de nombre, les définitions données par Euler, Dirichlet et Bourbaki ont graduellement élargi la portée de la notion de fonction ;
2. les transitions : Dans chaque transition, certaines propriétés de la première version plus étroite du concept sont perdues. Comme l'ont montré Piaget et Garcia (1989, p. 204) cité par Anna Sfard, lorsque nous avançons dans la hiérarchie des notions mathématiques, certaines propriétés initiales des objets ne peuvent plus être acceptées, ou bien elles conduisent à des contradictions dans les interprétations. « *Le problème est que ces concessions inévitables* » sont parfois très difficiles à faire. En effet, ce qui doit être abandonné en passant d'un objet mathématique à sa version plus avancée peut être le processus même qui était jusqu'à présent la principale source de son sens et, par conséquent, le trait qui semblait jusqu'à présent le plus essentiel attribut du concept en question, par exemples : dans les temps anciens les chiffres étaient quelque chose à compter. Pas étonnant alors que les mathématiciens grecs étaient prêts à se débarrasser d'une personne qui a mentionné l'irrationalité plutôt que de reconnaître une telle chose comme $\sqrt{2}$. Similairement, l'une des raisons de la résistance à la notion de nombre complexe provient du fait que : ces nouveaux nombres ne pouvaient pas être utilisés pour mesurer des quantités et ne pouvaient pas être ordonnés de manière à préserver les relations entre nombres. En d'autres termes, il s'agissait de nombres sans grandeur !

3. caractère algorithmique : de la fonction qui, dans le cas général, a dû être finalement abandonné. Pour beaucoup de mathématiciens (et aujourd'hui pour la majorité des élèves), une expression « fonction non-algorithmique » apparaît comme idée contradictoire. Une affirmation aussi dépourvue de sens que l'idée de « bruit silencieux ou solide liquide »
4. les mutations : la seconde source de la difficulté évidente de la réification peut être encore plus grave que la première selon Anna Sfard. Il y a un problème de cercle vicieux inhérent. Un écart apparent entre deux conditions qui semblent nécessaires pour qu'un nouvel objet abstrait soit. D'une part, il apparaît que la réification doit précéder toute mention des manipulations de niveau supérieur, mais aussi des manipulations à exécuter sur le concept en question

1.4.17 Intérêt pour notre recherche

Pour notre recherche, les travaux d'Anna Sfard représentent une suite logique des travaux de Maggy Schneider. En effet, les deux chercheuses bien que partant de deux différents types de problèmes à savoir la réification (aspect ou conception structurel et procédural d'une fonction) pour la première et la question de la modélisation fonctionnelle pour la seconde utilise un mot dans différents contextes mais pour dire la même chose. Elle utilise le mot processus qu'on distingue de la procédure ou du processus dans leurs travaux pour parler des fonctions. Ceci nous amène à construire notre vision que nous portons la connaissance des fonctions. Ensuite les deux parlent de structure et de modèle que nous allons considérer comme une autre connaissance. Enfin Anna Sfard parle de nature d'une fonction, une autre connaissance pour notre recherche. Ce travail d'ordre épistémologique sera fait sur la conception des fonctions par Leibniz dans ses rapports avec Descartes. Anna Sfard pense que l'enseignant ne peut pas simplement mettre l'objet abstrait dans les idées des élèves ; Il ou elle ne pourra pas faire pour les élèves ce qu'ils ne veulent pas faire pour eux-mêmes. Elle a introduit la distinction entre un statut « structural et un statut procédural » du concept de fonction. Selon elle, les conceptions procédurales précèdent les conceptions structurales, ces dernières pouvant être considérées comme le stade le plus avancé du développement du concept de fonction ceci constitue sa première approche. Ensuite elle considère qu'il existe une hiérarchie des concepts, ce qui est considéré comme procédural à un certain niveau peut être conçu structurellement à un niveau plus avancé la dialectique entre les deux statuts du point de cognitif. Elle transpose l'antériorité des conceptions procédurales sur les conceptions structurales en les considérant comme un invariant dans le processus d'apprentissage et pour cela elle distingue trois étapes, correspondant à trois degrés de structuration, dans le processus de formation d'une fonction : Intériorisation (familiarisation), condensation et réification

1.4.18 Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques

De NICOLAS BALACHEFF ET CLAIRE MARGOLINAS cKc MODELE DE CONNAISSANCES POUR LE CALCUL DE SITUATIONS DIDACTIQUES p1-18

Point de vue préliminaire sur la modélisation des connaissances et son rôle en didactique

ils mettent en évidence la pluralité des points de vue possibles sur un même objet mathématique, et demandent de différencier les représentations et modes de traitement qui lui sont associés, pour ensuite mettre en évidence leur adaptation plus ou moins bonne à la résolution de problèmes. Pour eux les connaissances locales[27] sont des connaissances limitées. Au titre de connaissances, elles sont : *valides, cohérentes et efficaces* (Léonard et Sackur 1991, p. 211). Les travaux de Castela (1995), illustrent bien, en analyse, ce phénomène. *Lorsque l'élève aborde le cours d'analyse sur la dérivation, sa conception est largement centrée sur les spécificités de la tangente au cercle d'où il découle de nombreuses erreurs (par exemple dans la tâche de reconnaissance. Mais cette conception disparaît au cours de l'apprentissage.* Cependant, note Castela, les élèves manifestent *une extrême réticence à accepter la configuration courbe et tangente localement confondue.*

L'analyse fonctionnelle ou de façon plus limitée les fonctions de l'analyse scolaire, offre un excellent terrain de mise à l'épreuve de la modélisation proposée par cKc en raison de l'importante diversité des registres mobilisés : registre numérique, graphique, symbolique, etc. Et donc potentiellement, la grande diversité des opérateurs et des contrôles associés. La disponibilité de ces systèmes de représentation et leur utilisation dépendent pour la plus grande part du milieu qui sera dévolu par la situation. Ainsi Trouche et Guin (2002) relèvent- ils l'effet suivant selon que des élèves disposent ou non d'une calculatrice graphique : la question : « La fonction $f(x) = \ln x + 10 \sin x$ admet-elle pour limite $-\infty$ en $+\infty$? » *depend fortement de l'environnement. Si les élèves disposent d'un grapheur (figure 15), la représentation*

1.4.19 Intérêt

Il serait intéressant de mettre les élèves dans le temps devant des situations différentes, sachant qu'il n'y a pas de transfert qui aille de soi d'une situation à une autre, même si, aux yeux de l'observateur, ces situations peuvent apparaître isomorphes." N.Balacheff. Connaissance, conception et concept. Les états observés de connaissances seront donc classés de la même façon en fonction des critères, ainsi on parle volontiers de connaissance qu'a l'élève des tableaux de valeurs, de la représentation graphique, des expressions algébriques, des fonctions affines, de la covariation etc... En diversifiant les situations éventuellement, qu'elles soient incohérentes. Nous chercherons avec cette approche à diagnostiquer les états de connaissances contradictoires réfutant le principe théorique d'une structure mentale construite dans un processus d'adaptation réglé par des critères de fiabilité et d'adéquation à la résolution d'un problème ou à l'accomplissement d'une tâche. Nous parlons ici d'écart entre les attendus et ce que l'élève fait ou sait faire. « La connaissance rationnelle est libre ou ne l'est pas » Vergnaud, 1991, p.136. La connaissance rationnelle de l'élève est libre de contradictions, ou si des contradictions sont attestées elle ne peut survivre qu'en les dépassant. C'est à ce niveau qu'on parlera de connaissances autres que celles enseignées. Il s'agit aussi il faut déjà le signaler du paradigme de misconceptions qui revient, en vérité, à donner un statut épistémologique particulier à des connaissances qui se révéleraient erronées chez les élèves. De plus, la reconnaissance de l'existence de misconceptions a pour corollaire celle de connaissances qui seraient intrinsèquement correctes, proposition aujourd'hui clairement réfutée par l'analyse critique de l'histoire du développement des connaissances, en particulier scientifiques. La proposition voisine, celle de reconnaître l'existence de connaissances locales de Léonard et Sackur (1991, p.209) qui proposent une caractérisation par deux propriétés " deux critères d'évaluations de la com-

pétence "

1. la connaissance utilisée par l'élève est une connaissance correcte dans certaines limites,
2. l'élève ignore ces limites.

Le concept de connaissance locale a marqué une évolution épistémologique, il s'agira dans notre travail de connaissances. Cependant, parce qu'il a pour corollaire l'existence de connaissances globales, nous l'associons au paradigme des misconceptions (dans l'acceptation de Confrey)

1.4.20 Une praxéologie

Toute activité mathématique, selon Yves Chevallard peut être vue à travers un système de tâches qui permet de l'analyser. L'accomplissement de toute tâche résulte de la mise en oeuvre d'une technique. C'est une manière de résoudre une tâche, éventuellement composée de « sous tâches » et/ou des raisonnements routinisés. Il y a, autour de cette technique, un discours qui la rend compréhensible, qui la justifie, l'explique, la contrôle, la décrit. C'est la « technologie » de la technique. Enfin, la technologie, à son tour, trouve en général sa justification au sein d'une théorie dans laquelle elle s'inscrit. Les pratiques sont ainsi décrites soit par des praxéologies en termes de (types de) tâches, (types de) techniques, technologies et théories. Ainsi, pour connaître un objet d'une institution donnée, il faut identifier les praxéologies dans lesquelles il est investi, en particulier les techniques qui lui sont attachées. Le cadre permet de mettre ainsi l'accent sur le rôle joué par les techniques dans la construction de connaissances mathématiques.

En effet, la lecture de ce passage nous a amené à chercher à mieux comprendre en quoi une praxéologie peut-elle nous aider à savoir ce que les élèves connaissent d'une fonction ?. Selon cette approche, les techniques peuvent jouer un rôle dans l'entretien des relations vers les tâches et vers les théories. C'est la raison pour laquelle nous nous sommes engagés à aller regarder les tâches, les techniques et les théories au programme lors de l'introduction de la notion de fonction en seconde.

1.4.21 Connaître une fonction pour ce travail

1. c'est élaborer les mécanismes pour construire cette fonction ;
2. c'est décrire ses propriétés ;
3. c'est la définir et de fournir ses ostensifs associés qui permettent d'ordonner et de résoudre toute une classe de problèmes dans différents cadres mathématiques ;
4. C'est la créer, l'exhiber, la sortir d'autres ostensifs ou d'autres fonctions pour le cas des fonctionnelles. Un exemple : étant d'un tableau de valeurs et d'une représentation graphique cartésienne qu'on puisse en sortir une expression algébrique.

1.4.22 Le problème de l'objectivation des connaissances mathématiques

Par cette approche, nous avons un exemple de combien de fois il est complexe de voir un objet ou un certain état de choses, une propriété ou un ostensif d'une fonction. Il ne suffit pas de se tenir devant une situation de modélisation par une

fonction, un ostensif et de le regarder. Les mêmes ostensifs que les élèves utilisent en classe peuvent leur apparaître soudainement sous une nouvelle forme, on peut prendre l'exemple de f ou de g qui peuvent désigner la même chose (la fonction). La recherche ici est celle de savoir comment les enseignants apprennent à des élèves de seconde à voir ce qu'il ne pouvait pas voir avant ? Comment ils arrivent à faire ou voir e la fonction quelque chose de nouveau, quelque chose qui leur échappait jusqu'alors ? "Les élèves ont aussi besoin d'apprendre à voir au-delà de la perception brute et à trouver quelque chose qui a été inaperçu précédemment. Mais pour rendre les objets mathématiques apparemment évidents, même le geste ostensif le plus précis ne serait pas assez bon, car, comme l'a observé Gottlob Frege, les objets mathématiques ne sont ni palpables ni perceptibles". Nous allons donc voir comment les élèves évoquent d'autres ostensifs à partir de ceux introduits par leur enseignant. Comment les élèves de troisième e de seconde traitent l'objet fonction qui ne peut pas être directement perçu ? Frege répond : avec les symboles (1892/1977, p.144). Alors quels sont les symboles qui sont utilisés par les élèves ? Radford se pose encore d'autres questions. Dans quel sens les objets mathématiques sont-ils des signes connus ? Et peut-on assimiler les objets théoriques aux symboles qui les représentent ? Frege répondit encore catégoriquement, non ; affirmant que : nous devons éviter le danger des objets avec leurs symboles. Nous ne voulons pas prendre des décisions hâtives. Nous allons demander aux élèves s'il existe une différence entre une fonction et un de ses ostensifs associés. Nous attendons de voir et d'analyser leurs réponses. C'est dans ce contexte de la distinction entre les objets conceptuels et leur représentation que Radford voudrait suggérer que l'idée des moyens sémiotiques d'objectivation peut être intéressante. Nous allons restreindre notre étude sur les connaissances mobilisées par les élèves à leur production de symboles pour représenter la fonction. Les stratégies et les articulations des enseignants aussi seront nos critères d'observation. Nous avons sollicité cette approche à cause de la contraction sémiotique (un terme de Duval). En effet "La contraction sémiotique examine ce qui se produit lorsque ce qui a été dit, vu et agi est transformé en une forme symbolique écrite. S'il est vrai que les symboles jouent un rôle important dans notre processus de production ou de familiarisation avec des objets mathématiques, restreindre un tel processus aux symboles est très utile. Il existe d'autres moyens qui jouent un rôle fondamental dans le traitement et l'objectivation des objets mathématiques, des moyens tels que les artefacts (par exemple : les règles, les calculatrices, les ordinateurs) et les dispositifs linguistiques (comme les métaphores et les métonymies).

L'apport de la dialectique outil-objet

Une notion mathématique ici la fonction peut être envisagée comme outil pour la résolution d'un problème ou comme objet d'étude propre. Le mot *objet* fait référence au savoir institué à un moment donné, à sa représentation formelle, à l'aspect culturel et ce de différents points de vue. Comme objet, un concept est défini sans référence à un contexte particulier. Le mot *outil* fait référence au fonctionnement des notions mathématiques explicitement ou implicitement, notions constituées en objets ou seulement en voie de l'être. Comme outil, un concept est impliqué dans un contexte problématique par quelqu'un à un moment donné. Un même outil peut être adapté à différents contextes. Le mot "dialectique" fait référence aux change-

ments de statut des connaissances et à la façon dont ces changements interviennent dans l'organisation du savoir culturellement reconnu. La dialectique "outil-objet" est donc un processus où interviennent de façon alternée et interactive les aspects outil pour résoudre un problème et objet prenant place dans la construction d'un savoir des concepts.

Intérêt pour notre recherche

Pour notre travail on va regrouper les tâches par pôle les deux premiers étant l'ensemble des tâches ou la fonction est outil et l'autre ou elle est objet ainsi il va être question d'identifier les connaissances mobilisées selon les situations.

Apport de Kant : l'intuition, intérêt pour notre recherche

Pourquoi Kant ? Pour lui, « *connaître c'est construire* » P.42-47 dans *les théories de la connaissance de Jean-Michel Besnier*. Après Hume, Kant a eu la tâche difficile de chercher à sauver la science du scepticisme en réhabilitant la causalité qui sans elle, il n'y a plus de possibilités de connaissances empiriques des phénomènes. C'est-à-dire que l'expérience dérive du concept de cause (pour notre recherche de l'ensemble de départ ou d'entécédants), et non de la tendance psychologique à associer les événements. La théorie de la connaissance dans l'oeuvre de Kant satisfait à des exigences et offre une solution au scepticisme en expliquant dans *les prolégomènes à toute métaphysique future*, une version pédagogique de la *théorie de la raison pure*[69] ce qui l'a conduit « *à résumer ses préoccupations théoriques en une question fondamentale, d'apparence très technique. Comment des jugements synthétiques a priori sont-ils possibles ?* » Les énoncés mathématiques selon ce dernier s'imposent avant toute expérience ; ils sont fondés sur l'intuition pure du temps et de l'espace, lesquels déterminent la forme de tous les phénomènes susceptibles d'être communiqués à nos sens. Kant nous a permis de comprendre que les mathématiques (les fonctions pour notre travail) expriment des jugements synthétiques en ce sens qu'elle lient nos intuitions à des concepts.

Dans certaines tâches au programme, il est question de faire des conjectures. c'est à cet instant que l'intuition des élèves est sollicitée et c'est elle qui nous a fourni les connaissances premières des élèves sur les fonctions qu'on a en master appelée intuitions premières. l'intuition est un déclencheur de l'action : Pour ce travail nous nous référons aux évidences qu'on peut assimiler aux croyances et représentations, mais, on peut les voir dans les pré-acquis (intuition de base) des élèves, les premières impressions et observations sans se concentrer. Ces première représentations sont pour certains enseignants difficiles à comprendre mais utiles. ce sont pour nous des connaissances fonctionnelles qu'on peut à travers des actions précises en classe collecter et regrouper en un recueil de représentation. Un deuxième problème a pu être élucidé par la lecture des oeuvres de Kant sur l'intuition, celui de savoir comment connaître les intuitions des élèves ? Et à qui servent-elles ? Nous pensons à cet effet que :

- (a) la modélisation permet une meilleure connaissance des représentations des élèves sur les fonctions et permet à l'enseignant d'agir dessus. bien que les rares activités de modélisations qu'on donne aux élèves leurs posent des problèmes majeurs

- (b) la forme de l'énoncé stimule l'intuition des élèves. D'où la nécessité de bien poser les problèmes à ces derniers en respectant la matrice institutionnelle et en se rapprochant des modèles montrés en classe.
- (c) le niveau de langage aussi doit être celui des élèves. Il faut éviter des mots compliqués.

Apport de la théorie de Ed DUBINSKY

la conceptualisation de l'objet fonction

Ed DUBINSKY développe de son côté une épistémologie des fonctions proche de celle d'Anna SFARD. Il tente de déterminer la nature des objets et des processus spécifiques qui sont construits et comment ils s'organisent lorsqu'on étudie les fonctions ? Il nomme sa modélisation abstraction réflexive, l'adjectif réflexive étant à prendre au sens des lentilles de l'optique. Il désigne par action n'importe quelle manipulation physique ou mentale qui transforme des objets (ostensifs) pour obtenir d'autres choses. Ensuite il parle d'action intériorisée celle qui peut prendre place entièrement dans l'esprit du sujet c'est-à-dire une action intériorisée pour devenir un processus. D'après sa théorie, il n'y a qu'une façon de construire un objet mathématique : par encapsulation et il est essentiel selon lui d'être capable de faire marche arrière, de l'objet au processus. PIHOUE fait des rapprochements évidents entre ces deux théories, en identifiant les phases de réification et d'encapsulation. Le stade de condensation n'est pas explicitement noté chez ce dernier. Il désigne les diverses manières de produire des processus sans isoler cet ensemble pour le considérer comme une étape de structuralisation des connaissances dans la construction du concept de fonction. Aussi, l'encapsulation et la dé-encapsulation expriment les processus permettant de passer du statut procédural au statut structural de cette notion mathématique illustrant ainsi la dualité des deux statuts signalée par A. SFARD.

Les deux auteurs utilisent les mots structures, procédure, opérationnel, processus, encapsulation, intériorisation, dans le développement du concept de fonction. Aussi ils se prononcent suivant trois points de vue, historique, cognitif et épistémologique. C'est le point de vue didactique qui nous intéresse dans cette recherche : comment la fonction est enseignée, intériorisée, condensée, réifiée par les élèves ? A la lecture de ce qui précède, nous pouvons voir que la dimension processus est beaucoup employé par ces deux auteurs ainsi que la conceptualisation dans l'aspect structurel.

1.4.23 Phénomènes de rupture entre cycles : les fonctions

L'auteur indique qu'il s'agit des ruptures entre cycles, du cycle 4 au lycée. La question est de savoir si cette transition est gérée de façon cohérente ? Au sujet des fonctions (Bloch, 1995) elle trouve une fonction quelconque, en d'autres termes une pseudo-définition. Dans le cours de mathématiques en seconde elle constate essentiellement, suivant en cela les manuels, une introduction des fonctions par une définition formelle, suivie de quelques exercices, en variant parfois un peu les cadres ; il faut remarquer que les programmes n'incitent, eux, pas à donner cette définition formelle ; elle est proscrite en troisième, et n'est nullement recommandée en Seconde. Elle fait remarquer qu'on lit :

- (a) familiariser les élèves avec la description de phénomènes continus à l'aide de fonctions ;
- (b) acquérir une bonne maîtrise des fonctions usuelles.

Mais fait remarquer dans la totalité des manuels (en France), et dans la pratique des enseignants, une insistance à donner cette définition ; et ce n'est pas que le fait d'enseignants ayant connu le programme des années 70. elle donne l'exemple d'un professeur-stagiaire en Seconde dans un lycée de la côte basque, après quelques activités d'introduction, annonce : la notion de fonction et tente de la définir, définition : « une fonction f définie sur un intervalle ou une réunion d'intervalles I , associe à chaque nombre de I un unique nombre noté $f(x)$. Puis en remarque : qu'est-ce que c'est une fonction ? p. 32 » Effectivement le professeur a conscience de la faiblesse de cette « définition » qui dit ce que fait une fonction, mais pas ce que c'est. et de sa vacuité pour les élèves, puisqu'on a besoin d'une remarque pour essayer encore de le dire d'autres choses. Nous sommes bien heureux de constater que cette rupture montre bien que la définition de la notion de fonction en seconde ne permet pas de la connaître. La question mérite alors d'être posée : qu'est-ce qu'une fonction pour les enseignants et pour les élèves ? D'autre part l'auteur ne nous dit pas qui doit connaître la fonction encore moins ce qu'est connaître une fonction. L'auteur continue sa démonstration en décrivant le travail de l'enseignant qui, suite à la remarque, fait prendre place un petit dessin : deux « patates », l'une notée I , l'autre R , avec des flèches entre les deux (réminiscence de diagramme de Venn qui ne fait pas partie de la culture actuelle des élèves du secondaire). En 2020, on la retrouve encore dans le programme de mathématiques en Afrique francophone. Dans le livre CIAM Seconde S pour définir une fonction. Enfin, le professeur énonce : « c'est un processus ». Nous pensons que l'enseignant, effectivement, ne sait pas lui-même ce qu'est une fonction au moment où il l'a défini comme un processus. En effet il vient de présenter deux objets, deux patates. Quel est le lien entre les deux ? Il veut lui donner une structure et constate qu'il faut un minimum de temps pour passer d'une patate à l'autre. Il veut en même temps construire une patate à partir de l'autre.

Le mot processus nous interroge, qu'est ce qu'un processus ? Qu'est-ce qui a amené l'enseignant à définir la fonction tel un processus ? Nous allons répondre à cette question dans notre cadre fonctionnel. Dans le programme de Seconde continue l'auteure, l'enseignant passe très vite aux fonctions « de référence » $x, x^2, \sqrt{x}, x^3, \frac{1}{x}$. Le but est que l'élève apprenne à « reconnaître » les représentations graphiques de ces fonctions, moyennant éventuellement une transformation simple du plan (translation, affinité...). Elle indique qu'il n'y a là plus de souci formel. Elle se pose alors les questions de savoir comment peut-on s'expliquer l'insistance mise par les manuels (et les enseignants) à formuler une définition d'une fonction quelconque, alors que le programme ne la sollicite pas ? C'est très important pour notre recherche de s'appuyer sur les analyses d'Isabelle Bloch, en effet, le fait de reconnaître certaines caractéristiques d'une fonction signifie : mobiliser certaines connaissances sur les fonctions. Elle se pose encore plusieurs questions qui nous semblent fondamentales pour poursuivre notre recherche à complétant la sienne à savoir :

Quelle interprétation peut-on proposer de ce phénomène ? Est-ce que la rupture collège/lycée semble l'exiger ? Les professeurs de mathématiques ne se sentent-ils pas en charge de gérer l'entrée des élèves dans les mathématiques abstraites ? On peut remarquer que cette entrée est gérée par des

déclarations formelles, et non par des problèmes : elle n'est donc pas traitée dans le domaine mathématique, mais en termes de contrat : l'élève est prié d'avoir compris que les mathématiques du lycée ne sont plus celles du collège ; le positionnement des mathématiques par rapport au réel a changé, mais sans que l'élève en soit averti explicitement ; au collège, il était supposé n'avoir pas quitté le réel, en lycée, il n'y est plus du tout : dans les deux cas où est la modélisation ? Dans ce cas pourquoi cette rupture se porte-t-elle sur la notion de fonction, c'est-à-dire sur l'enseignement des premiers concepts de l'analyse ? Est-ce que cela pourrait concerner la géométrie ? En lycée la part consacrée à celle-ci diminue par rapport au collège où elle est majoritairement convoquée pour l'initiation au raisonnement ; ce n'est donc probablement pas un objet d'enseignement assez neuf ; de plus la part qui lui est réservée va aller en s'amenuisant encore en première, sauf dans les sections scientifiques ; par contre les fonctions sont en seconde un objet nouveau ; de plus l'étude des limites, des tableaux de variations, des représentations graphiques, constitue une part importante du programme des classes suivantes, du moins celles (*S, ESetL?A, B, C, D, E*, etc. avec option mathématiques) qui ont un enseignement mathématique significatif.[?, p. 32]

1.4.24 Connaissances exacte, explicite, pseudo-explicites et implicite d'une fonction

L'introduction à l'analyse numérique[30] dans son deuxième tirage de 1983 nous a permis de mieux comprendre ce qu'est connaître une fonction en effet, à la page 5 de son ouvrage, on peut lire ce qui suit :

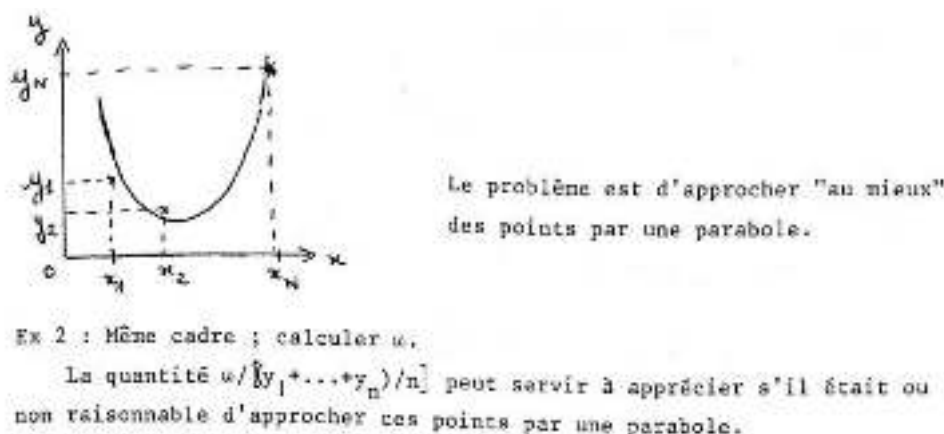


FIG. 1.3 – connaissance exacte d'une fonction

En laissant de côté toute discussion « philosophique » l'auteur commence par préciser ce que signifie connaissance numérique d'un nombre. Il indique que connaître numériquement un nombre c'est disposer de son écriture dans la base 10. c'est-à-dire qu'on ne connaît que les nombres décimaux. Les autres nombres tels que $\sqrt{2}$, e , etc. ne nous sont pas connus puisque nous ne pouvons pas écrire tous les chiffres de leur développement décimal bien qu'on puisse écrire autant que l'on veut. les réels ne sont donc connus numériquement

qu'à travers un certain nombre de chiffres de leur développement décimal et la précision (usage d'algorithme, de calculatrice, d'ordinateur, etc) avec laquelle ce développement est donné. l'auteur ajoute que dans la pratique, lorsque le problème est simple on travaille avec une précision fixée et contrôlée au cours du calcul. Si le problème est complexe, on ne connaît même pas la précision on a seulement les croyances sur la validité du résultat. L'auteur fait remarquer que nous avons des pseudo connaissances explicite des nombres lorsque que nous les considérons comme bien connus, lorsqu'on peut en trouver une valeur approchée raisonnable dans une table. Maintenant, le chemin est tout tracé pour les fonctions numériques qu'on étudie au niveau du secondaire. Un chemin qu'on voit déjà assez complexe puisque les nombres sur lesquels les fonctions vont opérer ou se mouvoir sont déjà assez difficiles à cerner. Après ces pseudo connaissances explicites, ils existent des connaissances implicites de nombres dont voici une liste d'exemples non exhaustive :

1. racines d'une équation ou d'un système d'équation ;
2. les suites
3. les intégrales
4. la valeur d'une fonction usuelle $\sin 1.035$ on peut regarder dans la table puis interpoler, on peut aussi se servir actuellement d'algorithme, de calculatrices et d'ordinateurs. Ceci étant construit, on en vient aux connaissances sur les fonctions

1.4.25 Connaissances numériques d'une fonction

Une fonction est dans le sens du nombre, connue numériquement si l'on dispose des valeurs d'entrées et des correspondants (valeurs de sorties) de chacune d'elles. exemple le tableau de proportionnalité

1	2	3	4	5
3	6	9	12	15

est une connaissance numérique de la fonction f qui à x associe $3x$. En s'appuyant sur les travaux de J. Baranger dans son livre Introduction à l'analyse numérique page 5, « *un élève connaît numériquement une fonction s'il peut calculer sa valeur en tout point de son domaine de définition. Nous voyons dans son développement ce qui suit : »*

3 - LES FONCTIONS.

Il s'agit de fonctions définies sur une partie Ω de \mathbb{R}^n (ou \mathbb{C}^n) à valeur dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

3.1 - Connaissance numérique d'une fonction.

Une fonction est connue numériquement si l'on peut calculer, au sens de 2.1, sa valeur en tout point (de Ω). En ce sens, les seules fonctions connues exactement sont les fonctions rationnelles $p(x)/q(x)$ où p et q sont des polynômes à coefficients décimaux (1).

FIG. 1.4 – Connaissance exacte

On considère donc une fonction connue numériquement si on peut en calculer une valeur approchée en tout point avec indication de la précision de cette valeur. Il y a, en gros, trois façons de procéder :

a) Avoir une table ou un algorithme en machine. C'est ce qui est fait pour les fonctions "usuelles" x^a ($a \in \mathbb{R}$), $\log x$, e^x , $\ln x$, $\operatorname{sh} x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$. Pour les ordinateurs modernes, ces algorithmes sont fournis par le constructeur. On peut considérer qu'il y a ici pseudo connaissance explicite.

FIG. 1.5 – Pseudo connaissance explicite

En ce sens, toutes les fonctions au programme de troisième et de seconde sont connues numériquement. En effet, les élèves du secondaire peuvent :

1. avoir une table (connaissance arithmétique)
2. un algorithme (connaissance algorithmique)
3. un algorithme en machine (connaissances informatique ou intelligence artificielle)
4. une formule ou une fonction usuelle (connaissance algébrique)
5. une représentation graphique cartésienne (connaissance géométrique)
6. connaître la valeur d'une fonction aux points d'un maillage de l'espace. Pour connaître la valeur de la fonction en d'autres points on interpolera
7. un développement de la fonction cherchée $f(x)$ sur une base de fonctions usuelle $u_n(x)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x)$$

FIG. 1.6 – Pseudo connaissance explicite

f est alors connue numériquement si l'on connaît un nombre fini de a_n avec l'idée que l'on peut en calculer autant que l'on veut.

8. une connaissance implicite d'une fonction

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

FIG. 1.7 – Connaissance implicite

On retrouve dans cette catégorie les fonctions dites spéciales telle que $erf(x)$

1.4.26 Connaissances des élèves

1. la solution optimale et découvrable au problème posé ;
2. ce qui réalise l'équilibre entre le sujet et le milieu ;
3. ce que le sujet met en jeu quand il investit une situation ;

caractérisation d'une fonction

Après avoir lu les deux programmes du secondaire de France et d'Afrique francophone, nous retenons pour ce travail qu'une fonction est caractérisée par :

1. un ensemble de départ : les antécédents (non vide) ;
2. un ensemble d'arrivée : les images ;
3. un graphe symbolisant un processus.

Cette phrase ne doit pas être considérée comme une définition, mais comme un résumé de ce que nous allons présenter : l'histoire et l'enseignement des fonctions en France et en Afrique francophone.

1.4.27 Comment construire une fonction : apport d' Errett Bishop

Dans son livre *Foundations of constructive analysis*, paru à New York en 1967 p 312-315, Errett Bishop et McGraw-Hill, trouvent dans le cadre constructiviste les fondamentaux pour tenter de construire une fonction. ils montrent en même temps que dans le cadre classique, ces fondamentaux sont d'ordre générale. Ils font remarquer qu'en mathématiques constructives, le travail se fait souvent en dehors de tout cadre formel. Dans le cadre de notre recherche les travaux de ces derniers nous on aider à construire notre cadre fonctionnel. En effet, nous avons mieux compris la difficulté rencontrée à un niveau de seconde à donner une forme, une formule à notre fonctionnelle de l'exercice du livre ciam visant à construire une fonctionnelle.

	x	10	20	30
f	f(x)	f(10)	f(20)	f(30)
g	g(x)	g(10)	g(20)	g(30)
h	h(x)	h(10)	h(20)	h(30)
H	H(f,g,h)(x)(j(x))	h(10)	g(20)	f(30)

Selon ces derniers, pour ce qui est des fonctions, on doit initialement avoir en esprit le concept très général d'ensemble sans pour autant s'inquiéter sur ses paradoxes. Nous notons donc que la toute première connaissance à mobiliser est la notion d'ensemble. En effet, elle évoque les paradoxes de la théorie de Cantor qui tente de montrer que ces paradoxes résident, non dans le concept d'un ensemble particulier, mais plutôt dans les notions plutôt vagues d'existence et d'égalité qui sont classiquement attribuées aux nombres (cardinal) de tout ensemble. Qu'est-ce que le paradoxe de Cantor ? Nous y reviendrons avec le paradoxe du *grand cardinal*. Les mathématiques constructives sont selon Errett Bishop de portée générale, mais il reconnaît en même temps que, généralement, c'est plutôt le

contraire qui est affirmé⁷ Errett Bishop pense qu'habituellement cela est causé par la confusion dans la réponse à la question de définir un ensemble et de construction des éléments de celui-ci. Il en donne un exemple : l'ensemble composé de 5 si le dernier théorème de Fermat est vrai et 7 s'il est faux n'est pas bien défini, selon *Brouwe* tel qu'il se présente, cela ne définit pas un entier. Mais il définit un sous-ensemble de $\{5, 7\}$ contenant tout au plus un entier. Cette même remarque se fait dans le cadre des mathématiques classiques, nous sommes selon Errett Bishop dans la même situation lorsque nous tenons compte de l'ensemble de solutions $y = y(x)$ d'une équation fonctionnelle particulière $f(x, y) = 0$ sans solution particulière, et même sans savoir s'il y en a. De même, ce dernier fait remarquer que définir un ensemble constructivement signifie uniquement d'indiquer précisément ce qui doit être fait pour construire un de ses éléments, et quoi d'autre doit être fait pour établir que deux éléments donnés soient égaux. C'est ce principe que nous développons ici à savoir, pour construire une fonction (une fonctionnelle) il faut au préalable savoir identifier dans l'ensemble de départ quels sont les rapports ou liens entre éléments de cet ensemble et surtout comment on peut les générer. Il faut faire remarquer que nous ne sommes pas obligés, dans la définition d'un ensemble, d'avoir tout moyen de construire des éléments ou tout moyen de décider si deux éléments sont égaux. D'une certaine façon, il s'agit de chercher une procédure finement réalisable (à portée de main) selon eux. Dans certains cas, la trouver (le procédé, le processus : la fonction) est un problème majeur en mathématique. C'est la raison pour laquelle ils cherchent dans leurs travaux à les construire dans le cadre scolaire tout en sachant bien sûre que de la façon dont il est facile de définir les ensembles de manière constructive, il est réciproquement difficile de construire des fonctions. Leur tentative, de mettre en relation deux ensembles par la définition d'une fonction est formulée ainsi : la définition d'une fonction d'un ensemble A à un ensemble B doit fournir un moyen explicite de convertir la construction de tout élément de A dans la construction d'un élément défini de B . Cela décrit le concept d'une opération. Nous l'avons d'ailleurs remarqué après une enquête auprès des élèves de terminales à l'oral du Baccalauréat à qui on demandait de définir une fonction, ces derniers la définissent comme une opération. Errett Bishop ajoute que dans la tentative de construire une fonction, il faut également prouver que les nombres égaux de A se transforment en nombres égaux de B . Pour être complet. La définition de la fonction doit également être accompagnée d'une vérification que le procédé est réalisable. Cette vérification pouvant être validé par d'autres fonctions qui se sont déjà avérées bien définies et précisées pour chaque élément spécifique.

À titre d'exemple, l'auteur du livre réfléchit sur ce qu'il faut faire pour définir constructivement une fonction à valeur réelle sur l'intervalle fermé, $[0, 1]$, en ce qui concerne ce qui doit être fait pour définir une fonction à partir de la positivité de la valeur absolue, de l'intégrale, de la distance, etc. Comment partir des nombres entiers vers d'autres nombres entiers, c'est-à-dire, en termes de séquences des nombres entiers. En essayant d'être explicites. Il n'y a aucune restriction à ne considérer que les nombres réels de la forme $x \equiv (x(n))/2^n$ où $(x(n))$ est une séquence de nombres entiers et, pour chaque n , $x(n+1)$ diffère de $2x(n)$ par au plus 1. La relation d'égalité $x = y$ entre les réels est ensuite exprimée par le condition, pour tout n , $|x(n) - y(n)| \leq 2^{-n}$ condition que $x \in [0, 1]$ signifie, pour tous n , $-1 \leq x(n) \leq 2^n + 1$. Par conséquent, nous voyons que la définition de toute fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ doit fournir, premièrement, une méthode performante pour trouver la bonne définition d'une séquence des nombres entiers $(x(n))$ qui satisfait (a) pour chaque n , $|x(n+1) - 2x(n)| \leq 1$, et (b) $-1 \leq x(n) \leq 2^n + 1$, dans la définition d'une

7. c'est la base de la plupart des difficultés du constructivisme.

autre séquence particulière des nombres entiers $(u_x(n))$ qui satisfait $|u_x(n+1) - 2u_x(n)| \leq 1$. si on prouve ensuite que pour tout nombre n , $|x(n) - y(n)| \leq 2$ alors, pour tous n , $|u_x(n) - u_y(n)| \leq 2$. Pour aller plus loin et pour définir une fonction uniformément continue nous devons fournir un module de continuité. Cela revient à définir une séquence de nombre entiers positifs $(k(n))$ et fournir la preuve que, pour tout n , si $|k(n) - y(k(n))| \leq 2$; alors $|u_x(n) - u_y(n)| \leq 2$.

1.4.28 La croyance que les mathématiques constructives sont vagues et imprécises

Les deux auteurs pensent que pour chaque n spécifique on pourra faire une vérification directe. C'est un travail assez compliqué de chercher à mettre de la précision dans les mathématiques constructives. Une construction d'un concept n'est pas simple. Cette façon de voir est aussi partagée par les constructivistes de l'école russe et les autres, qui estiment qu'il est nécessaire de fonder la construction de ce concept de fonction par la construction de fonction récursive. Pour trouver dans notre exemple du tableau donné en début de paragraphe, la formule la mieux adaptée qui peut nous permettre de donner directement en comparant $f(10)$, $g(10)$ et $h(10)$ à partir des fonctions en entrées le bon résultat. C'est en effet de cette façon que les fonctions sont enseignées. Ne pas arriver à trouver cette unique formule (fonction) qui permette d'arriver au résultat est un changement radical dans la façon dont les mathématiques regardent, comme interprétation Errett Bishop écrit les mathématiques constructives ont commencé à être développées avec succès seulement au milieu des années 1930. Et la notion de fonction, avait commencé à être travaillée précisément sous le concept d'algorithme arithmétique (fonction arithmétique calculable). Ils ajoutent pour mieux comprendre le cadre dans lequel les fonctions sont travaillées que l'introduction en mathématique de la précision avec la notion d'algorithme arithmétique créé une base satisfaisante pour le traitement de l'interprétation constructive d'une proposition mathématique et de la notion fondamentale (fonction) des mathématiques constructives en analyse[?].

Observations extra-mathématiques

Les observations extra-mathématiques peuvent avoir ou ont une grande valeur en tant que principes directeurs plus ou moins provisoires ; principes dans le développement des mathématiques constructives. Certains, les plus importants, sont basés sur des « contre-exemples dans le style de Brouwer, fgrévèlent les phénomènes de non-construction, et nous conseillent de ne pas essayer de faire certaines choses de manière constructive, par exemple définir une fonction continue. D'autres suggèrent que si nous pouvons prouver de manière constructive un certain type de résultat alors nous pouvons en fait le prouver dans une forme forte, par exemple que si nous pouvons prouver $(r = 0) \rightarrow (0 = 1)$, où r est un nombre réel défini de manière constructive, alors nous pouvons réellement construire un entier positif k et prouve que $|r| \geq \frac{1}{k}$. De telles observations, basé sur un examen des mathématiques qui a déjà été fait, sont d'une importance évidente.

Dans cet esprit, Bishop passe en revue son propre livre de mathématiques, langage numérique et, guidé par un important ouvrage de Gödel, il formule plusieurs observations générales sur la forme des énoncés mathématiques et sur la signification des implications, $P \rightarrow Q$.

A cet égard, il s'est également engagé à réinterpréter les mathématiques de son livre, en quelque sorte en accord avec son sens, dans un certain système formel de Gödel, conçu pour tenir compte de l'arithmétique constructive et pour lequel certaines de ces observations réapparaissent comme des métathéorèmes valablement constructif. (C'est aussi un bon endroit que quiconque puisse dire - s'il faut le dire - que définir des systèmes formels de manière constructive et prouver des théorèmes.) Donc peu importe le contenu constructif, ou l'absence de contenu, dans les idées que le système est conçu pour formaliser.

Intérêt pour cette recherche

Soit (a, b, G) avec G un sous-ensemble quelconque de AxB satisfaisant la propriété de fonctionnalité, la notion de sous-ensemble étant très problématique ; on cherche l'origine la cause, c'est-à-dire la notion principale de la théorie des ensembles qui la rend tellement importante. La notion de fonction est une notion qui peut faire vivre un ensemble. Elle peut être cet élément cherché de la théorie des ensembles. Comme c'est cet ensemble qui crée des paradoxes tels que celui des grands cardinaux, il y a donc ici un problème sérieux. Mais ce n'est pas pour résoudre ce problème qu'on va définir la notion de fonction qui est autonome et repose toute seule. Dans les mathématiques constructives, les choses doivent avoir une signification, cela est de nature à contaminer certains enseignements. Comment les choses se passent en mathématiques classique ? Il paraît évident qu'il faut :

1. commencer par les pratiques ;
2. parler d'ensemble, pour que cette notion ait un sens ;
3. avoir acquis un certain nombre d'expériences, pour sortir des contradictions
4. savoir ce qu'est un ensemble d'entiers naturels,

Pour définir l'ensemble des entiers naturels, En 1888, Dedekind dans son *Was sind und was sollen die Zahlen (Que sont et que doivent être les nombres.)*, définit la fonction comme base (fonction successeur). Il a déjà la notion d'entiers naturels. Intuitivement, ce qu'on va dire est brute de décoffrage⁸ c'est-à-dire qu'on reste ouvert à la critique si je ne me trompe. Une fonction, pour la construire nécessite qu'on parte d'un ensemble A et de deux choses :

1. ce qu'on doit faire pour construire des éléments de A ;
2. ce qu'on doit faire pour identifier deux éléments de A .

Une fois que les éléments de A sont construits, il faut connaître évidemment ce qu'on doit faire pour identifier deux éléments de A idem pour construire un autre ensemble que nous appelons B .

On définit alors une fonction comme une règle (mécanique) qui permet de transformer une construction. d'un élément de A en une construction d'un élément de B On dira que f est une fonction si ça se comporte bien avec l'opération. Voilà le grand apport d'Errett Bishop pour notre recherche.

1.5 Quelle théorie de la connaissance d'une fonction pour cette recherche ?

Nous partons du contenu de *Que sais-je*, de Jean-Michel Besnier dans lequel il présente ce que peut bien vouloir dire connaître. Son travail nous a permis de mieux cerner ce qu'est

8. terme de Stefan N.

une connaissance mobilisée. Nous partons du principe que la connaissance est un objet d'étude de l'épistémologie. Pour chercher à mieux comprendre ce qu'elle peut bien vouloir dire, nous analysons les conceptions des philosophes avant celles des didacticiens.

1.5.1 La formulation philosophique du problème de la connaissance qui met au premier plan la notion de représentation

Je fais en premier dans cette partie un état des lieux sur les définitions de la notion de connaissance. En effet dans son ouvrage sur la théorie de la connaissance, Jean-Michel Besnier[33] en fait une étude qui nous semble exhaustive sur la volonté de comprendre ce concept. Avant d'en tirer ce qu'est une connaissance pour notre travail analysons son développement de façon chronologique. Pour chaque définition nous allons montrer en quoi cela peut-il être intéressant pour comprendre ce qu'est une fonction. Seules les définitions que nous trouverons tout à fait limpides seront présentées. Dans la première partie de son œuvre, il pense que la connaissance ne peut être envisageable, que lorsqu'on peut clairement distinguer le sujet qui connaît et l'objet à connaître. Cela sous-entend qu'il faut une expérience cognitive qui doit amener l'élève à éprouver la résistance de l'objet et se trouver en quelque sorte en difficulté sur ses dispositions à comprendre. Dans cette expérience, il y a en quelque sorte une séparation, à la limite douloureuse, qui consacre la révélation du doute. « La conscience qui s'éprouve d'abord dans la certitude sensible en vient à désespérer d'elle-même, découvrant l'extrême précarité de son savoir, et elle se résout à la nécessité d'une réflexion théorique sur son pouvoir de connaître » Besnier.[33, p. 13-24]. La connaissance est dans ce sens un problème théorique et non plus seulement une activité tournée vers le monde. Il se pose la question de savoir : comment s'effectue cette élaboration qui a conduit au savoir et par quels prismes la réalité est passée avant de devenir un objet pour le sujet qui connaît ? Cette question peut être reformulée pour ce qui nous concerne par les questions suivantes : quel est le lien entre les fonctions et ses représentations ? Existents-ils des fonctions sans signes pour interpréter les situations ? Peut-on connaître les fonctions autrement que par les signes ? Kant et Hegel, dans la même veine se posent des questions allant dans ce sens : *comment nos concepts, qui sont des synthèses peuvent-ils synthétiser des représentations sensibles d'une nature différente de la leur ?* Kant. *Comment ce qui est en-soi, peut-il devenir pour-moi ?* Hegel. Telle est bien la formulation philosophique du problème de la connaissance qui met au premier plan la notion de représentation. Afin de résoudre ce problème, nous allons présenter quelques philosophes pour tâcher de surmonter ou neutraliser l'espace qui sépare sujet et objet. « Penseurs du système ou théoriciens de l'expérience mystique, ils associeront la finitude à la représentation et la philosophie à la quête de l'unité absolue. » Besnier [33, p. 13]

1.5.2 Jean Piaget et la formulation cognitive, sujet-objet-structure opératoire ou cognitive

Jean Piaget caractérise le processus cognitif dans son article *Logique et connaissance scientifique, Paris, Gallimard, « Encyclopédie de la Pléiade, 1967 »*. Chaque fois qu'on énonce une proposition traduisant un savoir, ces trois éléments c'est-à-dire le sujet, l'objet et la structure se trouvent mobilisés. Piaget propose deux exemples qu'il est commode de reprendre, à savoir : « Une truite est un poisson ». Tout d'abord, c'est un énoncé qui manifeste qu'un sujet a procédé à une opération de classification au terme de laquelle il peut identifier un objet comme appartenant au genre « poisson ». Le second exemple de

l'auteur est plus complexe mais satisfait à la même description : « Les corps s'attirent en raison directe de leur masse et en raison inverse de leur distance » est une proposition qui suppose un sujet (Newton) ayant mis les objets du monde en relation, grâce à des structures telles que des fonctions, des nombres ou des coordonnées spatiales sollicités pour décrire l'objet auquel il est confronté. Il est dès lors loisible d'envisager les cadres généraux d'une typologie des approches de la connaissance. En effet, les structures en question pourront appartenir :

1. au sujet ;
2. à l'objet ;
3. à la fois au sujet et à l'objet ;
4. exclusivement à leurs relations ;
5. ou bien ne relever ni de l'un ni de l'autre.

Autant de théories résulteront de ces possibilités, que l'auteur qualifie sommairement pour l'instant : d'idéalisme⁹ ; d'empirisme¹⁰ et de constructivisme¹¹.

distinction entre logique et théorie de la connaissance

Résolument attachée à l'espace intermédiaire entre sujet et objet, la logique se définit comme « l'étude des conditions formelles de la vérité ». Ce qui distingue une théorie de la connaissance d'une simple logique, dans le sens qu'il vient de suggérer, c'est qu'elle ne se borne pas à décrire la structure qui conditionne la production de la vérité ; elle cherche en outre à évaluer la part qui revient au sujet et à l'objet dans la constitution d'un savoir. C'est ainsi que la réflexion philosophique sur l'acte de connaître a eu tôt fait de poser une alternative : ou bien la connaissance n'est que le résultat de l'enregistrement dans le sujet d'informations déjà organisées dans le monde extérieur, ou bien elle est produite par le sujet qui possède la faculté d'agencer les données immédiates de la perception. Descartes, Locke, Leibniz, Hume et Kant sont les protagonistes des débats ouverts par cette alternative devenue canonique dans l'histoire de la philosophie [33, p. 24-26]

Débats ouverts : opposition entre le réalisme et l'idéalisme devenue canonique dans l'histoire de la philosophie

L'opposition entre le réalisme et l'idéalisme figure la version la plus schématique du conflit entre, d'une part, la thèse de la réceptivité du sujet qui accueille passivement les informations extérieures et, d'autre part, l'antithèse qui atteste l'initiative du sujet dans la production de ses connaissances. Le point commun entre ces positions antinomiques

9. « doctrine dont la matrice est souvent identifiée chez Platon et qui localise la vérité hors du monde sensible, dans un Ciel habité de Formes ou d'Idées. L'idéalisme en est ainsi venu à s'opposer au réalisme ou au matérialisme et à désigner l'attitude accordant au sujet de la connaissance les pleins pouvoirs pour « informer » la réalité. Absolu, il conduit ce sujet à se croire producteur du monde lui-même ; transcendantal, il suppose en lui des formes a priori destinées à s'appliquer au matériau de l'expérience sensible. Dans ce dernier sens, il s'accommode d'un réalisme empirique. [5, p. 116] »

10. « Communément opposé à « rationalisme », pour désigner la doctrine selon laquelle toute connaissance s'enracine dans l'expérience sensible. Le problème posé par l'empirisme consiste à comprendre comment le sujet, d'abord dépourvu de toute idée, pourra acquérir un savoir des choses qui composent le monde[5, p. 115] »

11. « désigne d'abord la théorie issue de Kant selon laquelle la connaissance des phénomènes résulte d'une construction effectuée par le sujet. Les travaux de Piaget ont mis en lumière, en un sens voisin, les opérations de l'intelligence dont résultent les représentations du monde. [5, p. 115] »

consiste à minimiser – sinon à ignorer – le rôle joué par les structures qui s'interposent entre sujet et objet.[5, p. 26-30]. Le premier considère que notre connaissance du monde s'acquiert en ouvrant les yeux et en le regardant ou, plus généralement, par l'observation ; le second n'hésite pas à soutenir que le monde n'est rien d'autre que notre rêve. Attitudes naïves et dogmatiques tout à la fois, le réalisme et l'idéalisme sont examinés par Karl Popper[79] dans le cadre des théories de la connaissance du sens commun. « Ce sont des opinions » Relevant de la simple opinion, ils sont « abstraits », au sens où ils ne se laissent pas engager dans des arguments démonstratifs. Hegel disait « qu'une opinion nue en vaut une autre » : de fait, on peut sans doute discuter les choix qui portent à privilégier le réalisme plutôt que l'idéalisme ou l'inverse, mais il est vain de vouloir les réfuter, car tous deux se dérobent à l'épreuve de la démonstration et de l'expérience qui offrent seules leurs critères à la démarche scientifique. Et, au bout du compte, lui-même s'avoue réaliste plutôt qu'idéaliste – « réaliste métaphysique » [33, p. 27-30]

Jean Michel Besnier pense que le réalisme possède au moins certaines affinités avec la science, alors que l'idéalisme nous enferme facilement dans l'absurde illusion que nous sommes créateurs de toute réalité ou, du moins, dans le vain constat qu'aucune réalité indépendante ne saurait être affirmée correspondre à nos sensations. Finalement, la connaissance n'est qu'une information reçue par l'intermédiaire des sens selon l'auteur ; elle finit par instruire une conception qui accorde au sujet une part des plus actives dans l'élaboration de son savoir. La théorie de l'« esprit-seau » a d'abord l'ambition de suggérer la pauvreté de la thèse sensualiste qu'il a rencontrée dans le Théétète de Platon : « *Notre esprit est un seau ; à l'origine, il est vide, ou à peu près ; et des matériaux entrent dans le seau par l'intermédiaire de nos sens (ou éventuellement à travers un entonnoir pour le remplir par en haut) ; ils s'accumulent et sont digérés.* [33, p. 28-30]

La théorie de la connaissance en premier montre que la connaissance est une information reçue par l'intermédiaire de nos sens. Cependant selon l'auteur, il n'est pas trop difficile de dessiner les limites de cette théorie vers laquelle penche le sens commun, surtout quand il (Besnier) se pique de pédagogie. La connaissance y est réduite à un pur réceptacle d'idées, d'impressions ou d'expériences censées rendre compte directement du réel, comment expliquera-t-on, par exemple, les erreurs ? Assurément pas en les imputant au monde extérieur qui est à la source des informations transmises grâce aux sens. Le sujet est en effet seul responsable de la bonne réception des connaissances : il peut mal les digérer, les relier maladroitement ou les mélanger. De toute façon, l'erreur est en lui. Sur ce point encore, on rejoint les résultats de la thèse de Locke pour qui connaître n'est rien d'autre que bien percevoir la liaison et la convenance entre les idées, et se tromper, échouer dans cette opération. Besnier [33, p. 29-30]

Qu'est-ce qu'on retient de ce passage ?

Nous pouvons remarquer dans ce passage que la connaissance n'est qu'une information reçue par l'intermédiaire de nos sens aussi, elle peut être la perception de la liaison et la convenance entre les idées. Par exemple : un élève a une idée de fonction et une idée de variation. Il peut devant une situation avoir la connaissance de la fonction croissante. Il peut se tromper, échouer dans son étude de fonction. Ce passage nous amène à l'évidence. C'est-à-dire qu'il ne suffit pas de regarder ou d'entendre pour savoir, ainsi, ce qui conduit l'élève à se tromper parfois doit aussi intervenir positivement dans l'élaboration de ses connaissances. Cela signifie que les erreurs sont aussi des connaissances. Il en fait la preuve avec la théorie de « l' esprit-seau », Il s'agit du degré zéro de l'analyse de la

connaissance, impose des réquisits¹² qui dépassent très largement le niveau des observations dont tout savoir est sensé, dériver intégralement. Le réalisme du sens commun conduit à une philosophie de l'esprit, sinon à une métaphysique susceptible de fonder nos facultés de connaître.

Réflexions sur le pouvoir de connaître : rôle joué par l'expérience dans la constitution du savoir : empirisme et rationalisme

La théorie de la connaissance nous apprend que la réflexion sur le pouvoir de connaître mobilise les esprits autour d'une grande question : Quel est le rôle joué par l'expérience dans la constitution du savoir? Concrètement, qu'entend-t-on par esprit-seau?, et les camps se sont affrontés : d'un côté, ceux pour qui la connaissance :

1. dérive intégralement de l'expérience, de l'autre ;
2. doit solliciter, pour se constituer, des instruments non déductibles de l'expérience.

Les théoriciens de la connaissance ont, dans ce contexte affiché des attitudes tranchées voici un résumé de leurs débats [5, p. 30-33] :

Opter pour une démarche extravertie ou introvertie

Opter pour une démarche extravertie, soucieuse de clarifier les données de l'expérience, puisque nos sens sont frappés par des objets extérieurs qui engendrent les idées de notre esprit (Locke), ou bien assumer une démarche introvertie, tournée vers les certitudes du sujet cognitif, car il est bien plus aisé de connaître l'esprit que le corps (Descartes). Analyser la connaissance consiste dès lors à dresser l'anatomie de l'entendement humain ou bien à s'engager dans une méditation introspective.

Le statut réel ou imaginaire des idées innées

Le statut réel ou imaginaire des idées innées, c'est-à-dire la nature de ces éléments de l'entendement réputés premiers et que Descartes décrivait en termes de « vérités éternelles », mais qu'on pourra aussi désigner, de manière plus neutre, comme « lois de la pensée ». Si on les admet, on minimise forcément le rôle de l'expérience ; si on les refuse, il faut confier à celle-ci la totalité de nos connaissances ;

Position empiriste et position rationaliste

Locke a su trouver dans la tradition scolastique l'expression propice à qualifier la position empiriste : «Nihil est in intellectu, quod non fuerit in sensu[75].» En amendant cette expression, Leibniz, quant à lui, caractérise la position rationaliste : «Nihil est in intellectu, quod non fuerit in sensu, nisi ipse intellectus[72].» La formule résume avec précision l'opposition doctrinale entre Locke et Leibniz : « rien n'est dans l'esprit qui ne vienne des sens (empirisme), si ce n'est l'esprit lui-même (rationalisme) ». Cet esprit qui, selon Leibniz, renferme les notions primitives sans lesquelles les données de l'expérience nous seraient incompréhensibles, par exemple : l'être, la substance, l'un, le même, la cause, la perception, le raisonnement. Il faut assurément prêter à l'esprit des facultés propres, un

12. Ce qui est nécessairement requis pour une fin donnée⁴⁴ (Aur.-Weil 1981). Une exposition, une discussion, un enseignement quelconques présupposent des êtres humains qui pensent, qui se communiquent plus ou moins imparfaitement leurs pensées et qui les comparent : que de connaissances déjà, et que d'assertions, même métaphysiques, dans ces simples requisits ! (Lalande, Raison et normes, 1948, p. 21).

fonctionnement autonome, si l'on veut qu'il explique, qu'il assimile et exploite les données qu'il ingurgite. L'auteur soupçonne alors volontiers les tenants des idées innées de vouloir entraver l'émancipation promise par le développement des sciences : invoquer des « vérités éternelles » pour fonder notre savoir, qu'est-ce d'autre que s'en remettre à Dieu qui les a créées pour Sa plus grande gloire et les dispense selon Son bon plaisir ? En revanche, refuser toute innéité, qu'est-ce d'autre que s'adresser à la seule « nature des choses » sinon à la seule matière. La cause des hommes apparaît mieux servie par la thèse qui accorde tout à l'expérience que par celle qui requiert le pouvoir transcendant d'un Dieu ou même d'une Nature providentielle ; [33, p. 29-30]

Comment acquérons-nous la connaissance de la cause et de l'effet ?

Pour Hume : connaître, c'est croire. en effet, si toute connaissance dérive de l'expérience, comment expliquer que nos concepts dépassent de très loin les renseignements donnés par nos sens ? De quel droit pouvons-nous affirmer, dans des lois scientifiques, des relations universelles et nécessaires entre les phénomènes ? Ces questions se posent à l'empiriste davantage qu'au rationaliste qui les écarte en soutenant, on l'a dit, que l'expérience est déchiffrée à l'aide des compétences innées de notre esprit, lesquelles sont porteuses des concepts universels que la science se charge d'organiser et d'exploiter. Philosophe empiriste, Hume interroge le principe de causalité qui est le nerf de toute entreprise scientifique. Expliquer un phénomène, qu'est-ce d'autres, pour l'homme de science, que le considérer comme effet d'une cause ou bien comme cause d'un effet qu'il permet de prévoir ? La causalité pose bel et bien à l'empiriste le problème de savoir comment il est possible de dépasser ainsi le strict plan de l'observation. Puisqu'on ne voit jamais ni une cause ni un effet, mais seulement des phénomènes contigus. Pour être précis, suivons quelque temps le questionnement que Hume engage dans son enquête sur l'entendement[65] : comment acquérons-nous donc la connaissance de la cause et de l'effet ? La méthode expérimentale caractéristique de la science moderne doit ainsi reconnaître sa précarité : une démonstration mathématique emporte la conviction après qu'elle s'est appliquée sur un cas unique (elle est déductive) ; le raisonnement expérimental, quant à lui, requiert une certaine quantité de cas (il est inductif) et il ne peut malgré cela offrir de conclusions que probables. Enfin, force est d'admettre que le lien entre les expériences qui forment le tissu de la science est bien énigmatique : si nous inférons à partir de l'expérience, n'est-ce pas que nous avons déjà établi ce lien (qui rattache le passé et le futur). De toute évidence, les questions posées à la conception empiriste de la connaissance sont dérangeantes. Elles ont mobilisé Kant qui disait avoir été réveillé par Hume de son « sommeil dogmatique ».

Pour Kant : connaître, c'est construire. Après Hume, la tâche s'impose à Kant de sauver la science du scepticisme. Rien de moins. Il lui faudra pour cela réhabiliter la causalité, sans laquelle il n'est plus de connaissance empirique des phénomènes, c'est-à-dire affirmer contre Hume que l'expérience dérive du concept de cause, et non pas de la tendance psychologique à associer les événements. En 1783, Kant publie les *Prolégomènes* à toute méta-physique future qui constituent la version « pédagogique » de la *Critique de la raison pure*[69]. Il y explique ce qui l'a conduit à résumer ses préoccupations théoriques en une question fondamentale, d'apparence très technique : Comment des jugements synthétiques a priori sont-ils possibles ? Pourquoi la métaphysique n'est-elle pas encore parvenue à se constituer comme science, à la différence des mathématiques et de la physique ? La réponse fait intervenir la question centrale de la théorie de la connaissance que Jean Besnier a rappelé : les énoncés mathématiques s'imposent avant toute expérience ; ils sont

fondés sur l'intuition pure du temps et de l'espace, lesquels déterminent la forme de tous les phénomènes susceptibles d'être communiqués à nos sens. On dira des mathématiques qu'elles expriment des jugements « synthétiques » parce qu'elles lient ces intuitions à des concepts. Un jugement est dit « analytique » quand la liaison établie par lui entre un prédicat et un sujet est pensée sur le mode de l'identité. Kant écrit : « Lorsque je dis que tous les corps sont étendus, j'énonce un jugement analytique, car je n'ai pas besoin de sortir du concept que je lie au mot corps pour trouver l'étendue unie à lui. En revanche, un jugement sera dit « synthétique » quand la liaison du sujet au prédicat apparaît comme une adjonction. Lorsque je dis, continue Kant, que tous les corps sont pesants, ici le prédicat est tout à fait différent de ce que je pense dans le simple concept d'un corps en général. Cette réponse fait appel à une notion qui implique l'essentiel des thèses kantienne sur la connaissance : la notion d'« expérience possible ». Pour s'exprimer brièvement selon l'auteur, les jugements synthétiques a priori des mathématiques ou de la physique sont scientifiques parce qu'ils satisfont les exigences d'une « expérience possible ».

Le problème de Hume est mal posé : l'induction n'explique pas le développement de nos connaissances. Le problème de Kant ne l'est pas mieux : l'esprit n'a pas pleins pouvoirs pour faire la loi dans le champ du savoir scientifique. Vers qui donc se tourner pour justifier nos dispositions à connaître ? L'auteur ne rentre pas dans le détail des analyses de la théorie de la connaissance. Karl Popper s'est destinée à montrer que les théories philosophiques de la connaissance ont toutes échoué. Est-ce par induction que nous connaissons ? La réponse de Hume est sans détours : c'est peut-être grâce à elle, mais ce n'est pas logiquement justifiable. Est-ce donc parce que nous possédons un savoir a priori que nous connaissons ? En un sens seulement : l'entendement prescrit sans doute ses lois aux phénomènes et il offre ainsi à la science sa grille de lecture, mais, ajoute Popper, celle-ci n'est pas forcément efficace, et il arrive que la nature la refuse ; [33, p. 62]

Pas d'observation sans une théorie implicite

contre l'apriorisme kantien qui s'étalait sur la physique newtonienne, Popper a beau jeu d'invoquer les développements ultérieurs de la science qui contestent la validité a priori des lois de la dynamique. l'histoire selon l'auteur accordera néanmoins à Kant quelques points : l'expérience suppose pour être déchiffrable que nous ayons des attentes à son endroit. Auguste Comte le disait à sa façon : pas d'observation sans une théorie implicite, et Gaston Bachelard aussi : pas d'expérience sans la formulation préalable d'un problème. Si l'on assimile le kantisme à la thèse générale selon laquelle notre perception implique une construction plus ou moins consciente du réel, alors il faut le donner gagnant. Mais ce serait confondre apriorisme et innéisme, ce que Popper ne fait pas ; Ce passage nous apprend qu'il va falloir mettre en place une grille d'analyse pour identifier les connaissances chez les élèves. Avec Popper, la théorie de la connaissance sera « objectiviste », c'est-à-dire qu'elle interrogera les contenus des conceptions scientifiques davantage que les modalités qui les rattachent au sujet connaissant. Einstein disait :

Si vous voulez étudier chez l'un quelconque des physiciens théoriciens les méthodes qu'il utilise, je vous suggère de vous tenir à ce principe de base : n'accordez aucun crédit à ce qu'il dit, mais jugez ce qu'il a produit [33, p. 53-54]

La connaissance se transforme en vue de se rapprocher toujours davantage de cette vérité

Dans le droit-fil de cette consigne, Popper se propose d'élaborer la théorie de l'expérience scientifique. C'est l'une des raisons pour lesquelles l'opposition traditionnelle [5, p. 54]. Comment se développe la connaissance de ce sujet? Tout simplement grâce à l'épreuve qu'il fait du réel, par modification, élimination et substitution de la forme de connaissance qui préexiste en lui. Popper ne renonce pas à l'antique théorie selon laquelle la vérité consiste dans la correspondance de nos idées avec la réalité. C'est pourquoi il soutient que la connaissance se transforme en vue de se rapprocher toujours davantage de cette vérité. Quelle différence y a-t-il donc entre Einstein et une amibe? Tous deux font usage de la méthode des essais, mais, tandis que l'amibe cherche à tout prix à éliminer l'erreur, Einstein en fait son miel dans l'espoir d'apprendre quelque chose sur le monde, grâce à elle. Le physicien essaie consciemment de mettre en échec des théories qu'il passe son temps à reformuler, l'amibe résout inconsciemment des problèmes à partir d'hypothèses qui font corps avec elle. De l'un à l'autre, il n'y a qu'un pas, qui marque cependant la conquête de l'esprit critique auquel s'attache la science. Avec Popper s'achève sans doute l'âge d'or des conceptions philosophiques de la connaissance. Il est désormais archaïque de considérer que « la connaissance la plus certaine que nous puissions avoir est celle qui porte sur nous-mêmes et sur nos expériences d'observation et de perception ». L'approche subjectiviste de la connaissance a fait son temps, et la méthode critique décrite par Popper entend bien mettre un terme à la recherche de la justification des démarches conduisant au savoir. Les béhavioristes qui ne se prononcent pas sur l'existence ou la non-existence de ce qui ne s'observe pas, ceux-ci réclament en effet qu'on en finisse définitivement avec cet œil intérieur inventé par Descartes, dont la fonction aurait été d'inspecter l'« espace interne » – véritable théâtre – où défilent les représentations, c'est-à-dire les reproductions du réel toujours plus ou moins parfaites, plus ou moins claires et distinctes. L'esprit n'est pas, selon Rorty, le « miroir de la nature », dont le philosophe devrait chercher à évaluer la fidélité et dont il pourrait rectifier par la méthode les imperfections, et la connaissance vraie ne se confond pas avec une collection de représentations adéquates.

Métaphysique de la connaissance : Connaître, c'est computer (calculer), connecter, sélectionner, faire émerger

La théorie de la connaissance précise en dernière analyse que connaître, ce n'est jamais plus qu'affirmer des raisons de croire dans la vérité d'un énoncé. c'est computer (calculer, estimer, etc... se rapproche de l'ordinateur). La question suivante se pose : comment l'ordinateur a-t-il pu devenir le modèle d'explication du fonctionnement de la connaissance? Il a d'abord fallu rompre avec certains préjugés que l'on impute en général au cartésianisme, par exemple celui qui porte à soutenir que les hommes sont seuls capables de connaître, parce qu'ils posséderaient une âme. Ainsi la théorie de la connaissance rajoute que connaître, c'est connecter. En effet, l'esprit n'est rien d'autre que le cerveau, ce pourquoi il pourrait être intégralement simulé par une « machine neuromimétique ». John von Neumann a, parmi les premiers, entrepris de montrer que le cerveau fonctionne comme une machine digitale. Sa démonstration est désormais bien connue : le neurone propage de l'influx nerveux, lequel consiste en une perturbation électrique et s'accompagne de modifications chimiques aussi, on peut connaître par sélection naturelle. Les promesses issues des recherches sur la cognition sont à peu près sans limites, au point que le questionnement philosophique paraîtra bientôt nul et non avvenu. Les sciences du

cerveau se présentant, d'une part, comme des « sciences de la recognition ». La théorie de la connaissance se termine par les affirmations suivantes : connaître, c'est faire émerger, c'est déléguer à l'intelligence artificielle. Ainsi, à force de recourir à l'ordinateur pour décrire et expliquer les actes cognitifs, on a fini par en faire le modèle de l'intelligence elle-même. Celui-ci résout des problèmes, comme nous le faisons ; il établit des relations, comme nous cherchons à toujours mieux le faire. De là à souhaiter en imiter les vertus, toujours plus fiables que les nôtres, la tentation était facile. Oubliées, les réserves concernant son incapacité à produire du sens ou à disposer de l'intention de faire ce qu'il fait ! Si l'essentiel pour un être intelligent est de parvenir à ses fins, en prenant les bonnes décisions ou en adoptant les bons comportements, il n'importe pas qu'il soit conscient. In fine, connaître, c'est réduire à l'unité [33, p. 103]

Synthèse

Pour identifier les connaissances mobilisées par les élèves sur les fonctions en nous appuyant sur la théorie de la connaissance sus décrite, nous allons nous en tenir uniquement chez les élèves et les enseignants aux différentes possibilités de connaître que ce cadre théorique nous a permis de construire : c'est-à-dire :

1. Par la croyance ;
2. par l'intuition et par la construction ;
3. par l'induction ;
4. par la possession d'un savoir a priori ;
5. par les affirmations.

1.5.3 Formulation didactique de la connaissance d'une fonction

Pour faire simple, dans le cadre didactique, la connaissance est une construction, un moyen, mais non nécessairement explicites. Elle (la connaissance) est du côté de l'élève. Cette formulation est évoquée dans de nombreux travaux à travers des mots tels que : les conceptions ; les connaissances à acquérir ; les connaissances à faire acquérir ; les théorèmes en acte ; les modèles implicites d'action ; les intuitions. Nous présentons dans la suite l'approche didactique de la connaissance qui nous a servi de fondement pour cerner les connaissances mobilisées par les élèves sur les fonctions

Savoirs et connaissances dans l'enseignement d'une théorie

Dans les travaux d'Isabelle Bloch [35, p. 48] l'inventaire des théories didactiques sur la connaissance a été fait. Quels sont les différentes approches et problèmes d'ordre didactique de la notion de connaissance ? C'est cette étude que nous allons mener dans les lignes qui suivent.

Savoirs convertis en connaissances dans une théorie

Les savoirs sont dans certaines situations converties en connaissances. Aussi, certaines connaissances construites lors d'une confrontation avec un milieu peuvent être institutionnalisées en savoirs. Cela nous amène à penser que les ostensifs tableaux, formules, courbes, etc. sont des connaissances institutionnalisées en savoirs sur l'objet fonction. de

ce point de vue, tous les ostensifs sont des connaissances lorsqu'ils sont évoqués par l'élève devant une tâche.

c) Savoirs et connaissances dans l'enseignement d'une théorie

Dans l'enseignement d'une théorie, les savoirs sont convertis en connaissances, et certaines formes du savoir sont plus favorables au développement de certaines connaissances : par exemple le savoir sur la décomposition des entiers en facteurs premiers se manifeste dans la façon de simplifier les fractions. Ou encore, le savoir sur les dérivées et la pente de la tangente à une courbe se manifeste comme connaissance dans la résolution graphique des équations différentielles (cf Artigue et Gautheron, 1983).

De même, les connaissances qui se manifestent dans une situation sont en général le reflet d'un savoir, interne ou externe à la théorie étudiée ; ou bien les connaissances construites lors de la confrontation avec un milieu vont être institutionnalisées comme des savoirs.

Ce qui semble important, c'est que rien ne prouve qu'une génération logique, qu'elle soit de type analytique ou productif, soit en même temps une génération cognitive : toutes les méthodes axiomatiques peuvent être inefficaces pour faire fonctionner les connaissances lors de l'apprentissage. Il est connu qu'un apprentissage peut parfaitement s'appuyer sur des déclarations fausses, si ces déclarations engendrent des questions, qui elles-mêmes produisent une genèse des connaissances qui est d'un autre type que la génération logique. Il s'agit de faire une place aux *causes d'apprentissage*, lesquelles ne se confondent pas avec les *raisons de savoir*.

FIG. 1.8 – Les savoirs convertis en connaissances

Dans la suite [35, p. 54], nous voyons que l'intuition est souvent mise en avant pour l'enseignement de certaines notions de l'analyse (les prémisses de l'analyse) donc des fonctions. L'élève peut construire des connaissances qui lui permettent de résoudre les tâches auxquelles ils sera confrontés. Ce sont ces connaissances construites et mobilisées qui font l'objet de notre étude.

IV. 2.4 Les connaissances de l'élève

L'enseignement des prémisses de l'analyse, dans les deux dernières années de lycée, se fait sans recourir au formalisme ni aux définitions ; il s'agit d'un apprentissage qui se veut basé sur l'intuition, et repose sur l'ostension de quelques cas emblématiques (voir chapitre 4). Dans ces conditions de quoi peut-on disposer pour analyser l'activité mathématique de l'élève ? Les savoirs étant absents, l'élève peut construire éventuellement des *connaissances* qui lui permettent de répondre aux demandes de l'institution concernant la résolution d'exercices et les relations avec les savoirs mathématiques ultérieurs.

FIG. 1.9 – Les savoirs convertis en connaissances

Il y a une nécessité théorique de l'étude des connaissances

L'introduction des connaissances se justifie pour plusieurs raisons, théoriques et empiriques. Il y a une nécessité théorique de l'étude des connaissances pour rendre compte de l'activité mathématique des élèves, et plus généralement du couple enseignant / enseigné. Conne (1997)., cette activité mathématique se traduit en connaissance avant de se traduire en pratiques mathématiciennes ; pour analyser le milieu.

Elle donne comme exemple : les passages entre registres différents relatifs à un même concept : en effet, les passages entre registres différents (conversions sémiotiques) ne sont pas tous objets de savoirs dans l'enseignement ; ils sont pris en charge de façon très

différenciée suivant la nature du registre ou de la conversion, et certains restent sous forme de connaissance privée du mathématicien. Par exemple les conversions graphique \rightarrow algébrique ne font pas partie explicitement du savoir sur les graphiques et fonctions dans l'enseignement secondaire. Duval (1994). Autre exemple : des connaissances sur l'infini peuvent être à l'oeuvre dans des calculs de limites, alors que la méthode de validation ne prévoit pas de traitement mathématique de l'infini. La prise en compte de la distinction connaissances/savoirs est donc nécessaire à deux niveaux :

1. fonction empirique : rendre compte de la contingence ;
2. fonction théorique : modèle d'analyse didactique.

Elle se pose ensuite les questions des savoir : si dans le milieu il n'y a pas de savoirs pour la validation, peut-on y mettre des connaissances ? ces connaissances peuvent-elles jouer un rôle satisfaisant pour engager cette validation ? (au sens où le savoir présent dans la situation sera bien identifié, mobilisé, et éventuellement pourra être institutionnalisé). Elle propose d'examiner les études publiées en didactique sur les savoirs et connaissances, et de retenir un modèle théorique utile pour notre étude. Nous avons choisi la théorie de champs conceptuels.

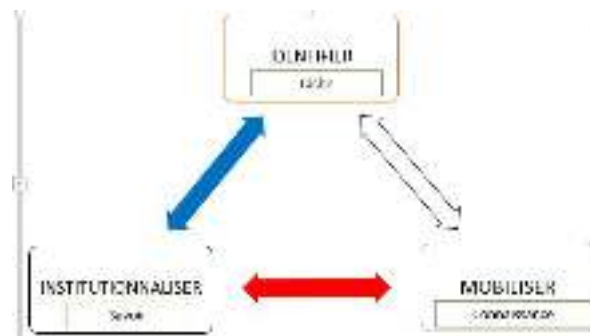


FIG. 1.10 – Triangle de la mobilisation de connaissances

Le milieu : connaissance-action, savoir-validation

Dans la suite du travail sur le milieu (Brousseau et Centeno, 1991), les définitions données placent clairement les connaissances du côté de l'action, et les savoirs du côté de la validation et la communication.

Les connaissances sont les moyens transmissibles (par imitation, initiation, communication, etc.), mais non nécessairement explicitables, de contrôler une situation, et d'y obtenir un certain résultat conformément à une attente et à une exigence sociale. Le savoir est le produit culturel d'une institution qui a pour objet de repérer, d'analyser et d'organiser les connaissances afin de faciliter leur communication, leur usage sous forme de connaissance ou de savoir, et la production de nouveaux savoirs. (Brousseau et Centeno 1991, note p. 176)

Dans la théorie des situations, effectivement, les connaissances se situent du côté du contrôle de la situation par l'élève, tandis que les savoirs sont du côté du contrôle de la situation par l'institution, ainsi que le remarque G. Chauvat (Chauvat 1997). Dans sa thèse (Lacasta, 1995) E.Lacasta insiste sur le caractère nécessaire de la distinction connaissances/savoirs :

Cette distinction va être catégorique en didactique si on montre que, dans une activité, il y a une partie des connaissances qui doivent rester opaque au savoir (Lacasta 1995 p.46).

Cela signifie bien que, dans une situation, il reste toujours un point aveugle pour le savoir du professeur : ce sont les connaissances mises en œuvre par les élèves pour traiter le savoir que celui-ci (le professeur) a mis en jeu dans la situation. Cela signifie que les élèves ont des croyances, des intuitions, des affirmations, etc. qui étonne parfois l'enseignant. Nous pensons à ce niveau que les activités proposées par les professeurs peuvent nous permettre d'identifier certaines des connaissances mobilisées par les élèves.

Connaissance : situation agie ou réfléchie

Isabelle Bloch montre que plusieurs auteurs (Brousseau, Rouchier, Conne) s'accordent pour remarquer que le savoir et les connaissances ont des fonctionnements culturels différents. Ils ne sont pas traités de la même manière par les institutions. Nous le remarquons par la façon dont la notion de fonction est introduite en France et en Afrique francophone. Les connaissances sont souvent très fortement contextualisées, et elles restent en général du côté du rapport privé au savoir, alors que les savoirs sont triés par des institutions comme celle des mathématiciens afin de garder les énoncés utiles, et ont une forte composante publique, voire exclusivement publique. Pour Rouchier par exemple, les connaissances sont du côté de la situation agie (niveau I) c'est-à-dire ce que fait l'élève pour résoudre la tâche, alors que dès qu'on aborde la situation réfléchie c'est-à-dire lorsqu'il fait appel aux propriétés, théorèmes, etc., on est dans l'ordre des savoirs.

L'enseignant transporte dans le milieu de la situation une partie de ses savoirs, sous forme de connaissances

Nous retenons des prédécesseurs, la différence pointée dans les textes de Brousseau, d'une part entre connaissances et savoirs, d'autre part entre connaissances de l'élève et connaissances de l'enseignant, à un même moment de la situation ; en ce sens, de même que le milieu a-didactique est une nécessité pour l'organisation de la transmission du savoir dans une perspective d'extinction du contrat didactique, la distinction connaissances/savoirs est une nécessité de l'étude du milieu a-didactique : en effet,

l'enseignant transporte dans le milieu de la situation une partie de ses savoirs, sous forme de connaissances afin que l'élève puisse les rencontrer et les utiliser pour contrôler son action dans la situation ; en même temps l'enseignant emploie, lui, des connaissances (différentes de celles de l'enseigné) pour contrôler que l'élève utilise bien les connaissances adéquates au contrôle de l'action dans le milieu a-didactique aménagé grâce aux savoirs de l'enseignant.

La connaissance est une condition nécessaire du savoir. Cela ne veut pas dire que temporellement il doit y avoir connaissance avant savoir. Cela veut dire qu'il ne saurait y avoir d'installation d'un savoir (pour un sujet) s'il ne visait pas ou s'il n'était pas conséquent de l'établissement d'un rapport de connaissance (effectif ou potentiel). La nécessité, pour la connaissance, se joue en cet endroit précis dans sa capacité à assurer le maintien de la relation entre le sujet et le milieu, finalisé par la situation. Cette nécessité... devra être transportée dans le savoir. (Rouchier 1991, p. 37)

1.5.4 Le modèle d'analyse ascendante et descendante de Margolinas

Dans le modèle d'analyse ascendante et descendante de Margolinas (Margolinas 1994). Il d'agit de préciser les connaissances des acteurs impliqués dans la situation, à chaque niveau de celle-ci. En reliant cette analyse à celle du temps didactique, il apparaît que les connaissances de l'enseignant sur la situation ne dépendent pas de ce temps (contrairement aux connaissances de l'élève) et donc que cette a-temporalité des différentes positions du professeur aux différents niveaux de milieu, et des connaissances afférentes, est ce qui caractérise la place de l'enseignant dans la structuration du milieu. (Margolinas, 1997, Séminaire National de Didactique). Ces connaissances sont d'ailleurs une caractéristique de ce que Chevallard appelle son topos, sa place dans le milieu, et ne caractérisent pas une évolution de son rapport au savoir : “ Ceci implique (..) qu'il (l'enseignant) reconnaisse ce milieu a-didactique comme territoire de référence culturelle et de fonctionnement des savoirs qu'il enseigne ”, ainsi que le dit Brousseau. (Brousseau, 1990) Si donc les connaissances de l'enseignant ne sont pas ce qui contrôle l'évolution de sa position, dans l'analyse du milieu, c'est que ces connaissances sont d'une nature différente de celles de l'élève, et ne s'en distinguent pas simplement par un décalage temporel (les connaissances de l'élève “ rattrapant ” presque celles du professeur en fin d'apprentissage). En quoi ce passage nous intéresse-t-il ? Nous comprenons qu'à la fin de l'apprentissage, les connaissances de l'élève se rapprochent de celle du professeur. Cela signifie que les renseignements donnés par le professeur peuvent nous permettre de cerner les connaissances mobilisées des élèves. Nous pouvons même aller plus loin en disant en pensant que les connaissances mobilisées par les élèves sont à la frontière des savoirs mobilisés par l'enseignant.

Existence d'une transposition didactique intermédiaire

Isabelle Bloch en 1997, a essayé de pointer la spécificité des connaissances de l'enseignant pour l'enseignement, c'est-à-dire justement celles qui lui permettent de contrôler la situation vécue et agie par l'élève. Une hypothèse faite alors par elle était qu'il existerait une “ transposition didactique intermédiaire ” qui serait celle de l'enseignant (et qu'il reste très largement à étudier). Elle pense qu'on peut faire l'hypothèse que ce qui distingue les connaissances de l'enseignant tient :

1. à leur nature (dans Bloch 1997 elle disait que ces connaissances étaient “ la part mathématique du didactique ”);
2. à leur genèse (dans l'activité mathématique d'enseignement justement, par une transposition spécifique);
3. à leur fonction, et en conséquence à leur fonctionnement.

L'étude des connaissances que le professeur manifeste dans la situation, pour la contrôler, et particulièrement dans les phases a-didactiques, apparaît donc comme une nécessité liée à celle de l'étude du milieu.

Distinguer connaissances et différents types de savoirs

Pour Conne, la didactique se caractérise donc par une (nécessairement) double référence à la réalité. Cependant, il y a lieu de faire des distinctions plus fines que celles exposées plus haut, et de distinguer connaissances et différents types de savoir :

Je propose que l'on distingue le cas où le contrôle de la relation sujet/situation se trouve du côté de la situation, ce sera l'ordre de la connaissance, du cas où ce contrôle se trouve du côté du sujet (et de la représentation) ce sera l'ordre du savoir. (...) le savoir est de l'ordre de l'utilité des connaissances pour transformer les situations.

L'ordre de la connaissance et l'ordre du savoir ne sont pas régis par des processus identiques, la situation les départage. (...) Enseigner, c'est travailler le savoir, pour induire dans un cadre situationnel choisi, un processus cognitif supportant l'apprentissage dont le produit sera en retour institué en savoir. " Un savoir est une connaissance utile. Utile est à prendre dans le sens le plus large possible : utilisable, à utiliser, etc. (Conne, 1992. p.249).

Conne distingue ensuite savoir-faire, savoirs réfléchis et savoirs savants — et parmi ces derniers, certains sont des savoirs institués :

En résumé, le savoir-faire est une connaissance utile en regard d'une situation donnée et du produit qui résulte de l'interaction. Le savoir-réfléchi est une connaissance utile en regard de la représentation à l'œuvre dans cette interaction. (...). La finalité d'un savoir savant sera l'organisation et le développement des savoirs eux-mêmes. ... Les savoirs savants sont des savoirs sur les situations. " (idem p. 255)

Un double investissement de connaissances

Isabelle Bloch retrouve les connaissances du professeur, qui a " [reconnu] ce milieu a-didactique comme territoire de référence culturelle et de fonctionnement des savoirs qu'il enseigne ", et qui pourra reconnaître (et éventuellement institutionnaliser) les connaissances et objets enseignés lors de leur remontée. Ce qu'il est important de noter ici, c'est qu'il apparaît clairement que la transposition didactique ne peut fonctionner sans un double investissement de connaissances, côté élève et côté professeur. Si les connaissances du côté de l'élève ont été évoquées dans de nombreux travaux (à travers les conceptions, ou les connaissances à acquérir — faire acquérir par l'élève, ou les théorèmes en acte et modèles implicites d'action) il n'en va pas de même pour les connaissances du professeur, qui sont moins étudiées (voir cependant les travaux de C. Margolinas à ce sujet ; M. Legrand a également évoqué ces connaissances de l'enseignant en parlant de contrôle épistémologique du professeur sur la situation : cf Legrand, 1991 et Di Martino, 1992. Surtout, il apparaît à l'issue de cette étude qu'il peut être intéressant d'étudier conjointement ces différentes connaissances, au lieu de les disjoindre. C'est pourquoi, suivant en cela F. Conne, nous parlerons de connaissances du couple enseignant/enseigné, dans le travail de la classe qui est identifié comme une activité mathématique propre aux deux composantes de ce couple : l'élève et le professeur. [35, p. 48-64]

1.5.5 Connaissance mobilisée : définition, les trois approches

1.5.6 La première approche

La première approche est celle de considérer une connaissance mobilisée comme un « programme de traitement disponible ».

1.5.7 La seconde approche

Une seconde approche considère une connaissance mobilisée comme celle que l'élève utilise ou applique. Mobiliser une connaissance, ce n'est pas seulement l'« utiliser » ou l'« appliquer », c'est aussi adapter, différencier, intégrer, généraliser ou spécifier, combiner, orchestrer, coordonner, conduire un ensemble d'opérations mentales complexes qui, en les connectant aux situations, transforment les connaissances plutôt que les « déplace ».

1.5.8 La troisième approche

La troisième approche considère la mobilisation des connaissances comme réinvestissement des acquis des élèves. Ainsi, les connaissances (savoirs) que nous allons considérer comme mobilisées par l'élève devant une tâche sur les fonctions sont : les acquis, les moyens qu'ont les élèves pour résoudre la tâche, les programmes de traitement disponible, des compétences devant une tâche, sans se poser la question du temps nécessaire pour la résoudre.

1.5.9 La notion de connaissance mobilisée sur les fonctions

Dans cette partie nous apportons quelques éclaircissements sur certaines des notions que nous utilisons telles que : la connaissance mobilisée, la connaissance d'une fonction enseignée et le domaine des fonctions. Ce sont des concepts clés pour notre travail. Ils méritent d'être étudiés. Nous partons des différents sens que la notion de connaissance peut prendre pour, en déduire le sens que nous gardons pour notre travail.

1.5.10 Étymologie et histoire du mot connaissance

Source : www.cnrtl.fr/etymologie/connaissance

1. Ca 1100 conoissance « acte de connaître ; idée, notion de quelque chose » (Roland, éd. J. Bédier, 3987) ;
2. . ca 1265 cognoissance « faculté de connaître, intelligence » (B. Latini, Li livres dou tresor, éd. F.-J. Carmody, II, 68) ;
3. 1283 dr. connoissance « droit de juger certaines personnes, de connaître de certaines questions » (Ph. de Beaumanoir, Coutumes de Beauvaisis, éd. A. Salmon, t. 1, P. 39) ;
4. 1491 congnoissance « expérience, habileté » (Commynes, Mémoires, éd. J. Calmette, Prologue, t. 1, p. 2) ;
5. 1595 plur. « contenu de la connaissance, ensemble de ce que l'on sait » (Montaigne, Essais, 1. II, chap. XII, éd. Gallimard, p. 599) ;
6. . av. 1650 « état de celui qui a le sentiment de son existence » (Vaugelas, Quinte-Curce, 1. III, chap. 5 ds Littré) ;
7. 1494 congnoissance « relation avec quelqu'un » (Arch. Nord, B 1708, fol. 52 vods IGLF)
8. 1554 « relation sexuelle » (Gruget, Diverses leçons, t. II, p. XXVIII ds Gdf. Compl.) ;
9.) 1656 « personne que l'on connaît » (Pascal, Provinciales, 5 ds Littré) ; b) 1852 p. ext. pop. « galant, maîtresse » (J. Humbert, Nouv. Glossaire genevois, p. 110) ; 4. 1823 faire connaissance avec qqc. (Las Cases, Le Mémorial de Sainte-Hélène, t. 1, p. 308). Dér. du rad. du part. prés. de connaître.

Dans cette première partie nous pouvons retenir que la notion de connaissance provient de l'idée d'un élève sur les fonctions ou de la notion de fonction elle-même. C'est-à-dire que les connaissances sur les fonctions sont : soient les idées des élèves sur cette notion, soit le contenu sur la notion de fonction enseigné.

Le mot « connaissance », dans le dictionnaire de français Larousse[?], prend plusieurs sens. Dans un premier temps, la connaissance est une action, le fait de comprendre, de connaître les propriétés, les caractéristiques, les traits spécifiques de quelque chose. [?]

Chapitre 2

L'histoire du concept de fonction

2.1 Introduction

Nous nous intéressons à la notion de fonction enseignée au secondaire. Notre regard entreprend de questionner un problème qui nous préoccupe depuis quelques années : comment les fonctions nous sont-elles données ? L'histoire de ce concept du professeur A.P. YOUSCHKEVITCH de l'Université de Moscou contenu dans son article *The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century*, témoigne de cette préoccupation. Nous adoptons le contenu de son article et nous en présentons dans la première partie ce premier chapitre, un résumé. Puis nous présentons les évolutions dans des conceptions de cette notions dans les programmes récente Cette approche nous permet de mieux analyser les contraintes et les libertés réelles du professeur qui cherche à introduire la notion de fonction, les programmes et les contenus des manuels scolaires. « Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIX^e siècle » d'après A. P. Youschkevitch.

Nous rendons compte de cet article section par section.

2.2 Remarques préliminaires.

Youschkevitch commence par focaliser son étude sur la « fonctionnalité » et plus précisément sur le concept de « dépendance fonctionnelle ». Il note que les historiens discordent sur la genèse de ces notions. Le problème est que nous pouvons facilement traduire les mathématiques d'époques très reculées grâce à ces concepts, mais que cela ne prouve pas qu'ils y sont réellement présents. Youschkevitch estime même que

ce fait trivial est stérile en ce qui concerne notre recherche sur la formation de l'idée de fonction, sa généralisation et sa compréhension graduée, la signification concrète qu'elle acquiert avec le progrès de la pensée scientifique et philosophique et, finalement le rôle qu'elle a joué au cours des différentes étapes de sa progression. [85, page 10]

Une analyse historique est d'autant plus nécessaire.

Il propose une première structuration de l'histoire de la dépendance entre deux quantités comme suit.

- *Antiquité*. La dépendance entre certaines quantités n'est pas encore conçue comme dépendance entre variables.
- *Moyen Âge*. La dépendance s'exprime sous une forme géométrique et mécanique.

- *Période moderne.* La dépendance s'exprime de manière analytique par des séries infinies jusqu'à ce que cette présentation s'avère inadéquate et qu'une nouvelle définition, qui prévaut encore aujourd'hui, soit introduite.

2.3 Les tables de fonctions et les « symptômes » des sections coniques.

Les mathématiques babyloniennes utilisent largement des tables, par exemple pour le calcul des carrés et des cubes, des racines carrées et cubiques, en particulier pour les calculs astronomiques. Otto Neugebauer (1957) repère deux types de tables pour lesquels il emploie la terminologie anachronique mais parlante de « step-function [fonction étagée] » et « linear zigzag-function [fonction linéaire en zigzag] ».

Les mathématiques grecques donnent lieu à un développement de la trigonométrie, et on trouve une table des cordes (la *corde* d'un angle α est égale à $2\sin(\alpha/2)$) dans l'*Almageste* de Ptolémée (2^e siècle).

La description des coniques par leurs « symptômes » est un autre cas de dépendance que nous lisons comme une relation fonctionnelle paramétrée de la forme $y^2 = 2px \pm \frac{p}{a}x^2$ (ou de la forme dégénérée $y^2 = 2px$ pour la parabole).

Mais il n'y a chez les Grecs aucune formule algébrique, aucun calcul littéral, mis à part peut-être chez le « dernier mathématicien de la période d'Alexandrie », Diophante.

2.4 Une notion générale de fonction dans l'Antiquité.

Par ailleurs, il n'y a pas dans les mathématiques grecques d'allusion à une idée qui unifierait les dépendances concrètes isolées qui y apparaissent. Notons aussi qu'elles ont une propension à éviter systématiquement les images cinématiques.

2.5 Représentation cinématique et géométrique des relations fonctionnelles. Théorie des calculs et des Latitudes des Formes.

Les sciences arabes n'apportent pas de progrès qualitatif à l'égard de la fonctionnalité, avec selon Youschkevitch la seule exception notable de l'analyse du mouvement accéléré par Al-Bīrūnī dans *Le Canon Mas'ūdī* (11^e siècle).

Au 14^e siècle, un progrès décisif est fait avec la théorie « des configurations des qualités » encore appelée « des latitudes des formes » avec en particulier Nicole Oresme. On y considère la dépendance de manière générale et non concrète : soit on la définit verbalement soit on la décrit en construisant une succession de points d'une courbe.

En Angleterre, avec William Heytesbury et Richard Swineshead, la théorie « des calculations » s'intéresse particulièrement à la dépendance par rapport au temps et au mouvement uniformément accéléré.

2.6 La quantité variable de Descartes ; les fonctions algébriques.

Youschkevitch relève alors une étape cruciale : celle de la « méthode analytique pour introduire les fonctions au moyen de formules et d'équations », franchie indépendamment et simultanément par Fermat et Descartes vers 1637. Descartes écrit :

Prenant successivement infinies diverses grandeurs pour la ligne y , on en trouvera aussi infinies pour la ligne x , et ainsi on aura une infinité de divers points tels que celui qui est marqué C, par le moyen desquels on décrit la ligne courbe demandée.[85, page 17]

C'est cette révolution qui a installé la « pensée fonctionnelle » en mathématiques. Un peu plus tard, P. Mengoli, N. Mercator, J. Gregory et I. Newton découvrent indépendamment le développement des fonctions en série entière.

2.7 Le concept de fonction selon Newton (1670) et Leibniz (1673-1694).

Le développement du calcul différentiel et intégral se fait dans un cadre géométrique (les aires, le triangle caractéristique infiniment petit). Chez Newton, ceci s'articule avec une cinématique qui pose le temps comme quantité de base par rapport à laquelle les autres quantités s'« écoulent ».

C'est chez Leibniz que le mot « fonction » apparaît pour la première fois, mais pour désigner des segments définis en relation avec la courbe étudiée, et qui sont les « fonctions » de cette courbe.

2.8 Une fonction en tant qu'expression analytique arbitraire : Jean Bernoulli (1694-1718) et Euler (1748).

Le mot « fonction » devient central pour l'analyse mathématique à l'orée du 18^e siècle seulement : c'est Jean Bernoulli qui en 1686 considère « diverses quantités données d'une façon ou d'une autre par une [quantité] indéterminée x et par des constantes... [soit] de manière transcendante, soit algébriquement », et qui en 1698 utilise le mot « fonction » pour cette « manière ». C'est à Leibniz qu'on doit la distinction algébrique/transcendant encore en cours aujourd'hui. Elle remplace la distinction géométrique/mécanique de Descartes. Simultanément, l'usage des mots « constante », « variable », « paramètre », « coordonnée » s'affermir.

En 1718, Jean Bernoulli formule la définition suivante :

Définition. On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes.[85, page 35]

On observe simultanément que la « manière » en question quitte toujours davantage le registre géométrique, mécanique, cinématique pour se recentrer sur l'expression « analytique » de la fonction, c'est-à-dire par série entière. Le temps perd son statut de fondement pour l'analyse mathématique ; la figure géométrique est reléguée à un rôle illustratif et pédagogique.

Euler précise la définition de Bernoulli en 1748 :

Une quantité variable est une quantité indéterminée ou, si l'on veut, une quantité universelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées.

[...] Ainsi, une [quantité variable] comprend tous les nombres tant positifs que négatifs, les nombres entiers et fractionnaires, ceux qui sont rationnels, irrationnels et transcendants ; on ne doit pas même en exclure zéro, ni les nombres imaginaires.

Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes.[85, page 36]

2.9 Fonctions analytiques.

Toute fonction, est-elle développable en série entière ? Euler exprime que c'est le cas en pratique, mais voit néanmoins le besoin d'inclure les séries de Puiseux (dans lesquelles les puissances « désignent n'importe quels nombres »).

2.10 Les fonctions continues et discontinues (mixtes) au sens d'Euler ; la controverse au sujet des cordes vibrantes.

Euler conçoit aussi qu'une fonction peut être introduite par distinction de cas (c'est-à-dire par morceaux), ce pour quoi il utilise les termes de « mixte » et, en contradiction avec la terminologie actuelle, de « discontinu ».

Cependant, Euler est amené à agrandir l'extension du concept de fonction pour les besoins de la physique mathématique et tout particulièrement l'étude des cordes vibrantes. En réponse à D'Alembert, il écrit en 1748 que la forme initiale de la corde est quelconque.

[...] La première vibration dépend de notre bon plaisir, puisqu'on peut, avant de lâcher la corde, lui donner une figure quelconque ; ce qui fait que le mouvement vibratoire de la même corde peut varier à l'infini, suivant qu'on donne à la corde telle ou telle figure au commencement du mouvement.[85, page 40]

2.11 La définition générale d'une fonction par Euler.

Voici la définition générale d'une fonction par Euler (1755) :

Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières ; cette dénomination a la plus grande étendue et contient en elle-même toutes les manières par lesquelles une quantité peut être déterminée par d'autres. Si, par conséquent, x désigne une quantité variable, alors toutes les autres quantités qui dépendent de x de n'importe quelle manière, ou qui sont déterminées par x , sont appelées fonctions de x . [85, page 48]

Il s'agit dès lors de caractériser les fonctions analytiques parmi l'ensemble des fonctions.

En 1791, Arbogast introduit la notion de fonction « discontigüe », c'est-à-dire discontinue au sens d'aujourd'hui.

2.12 La critique du concept de fonction « mixte » ; Charles (1780) et Fourier (1807-1821).

J. Charles remarque en 1780 qu'une fonction introduite par distinction de cas peut alternativement être introduite par une seule et même équation, et que la notion de fonction mixte n'est donc pas bien définie. Cauchy donnera en 1844 l'exemple très simple de la fonction valeur absolue qui peut être introduite par $y = \sqrt{x^2}$.

La théorie générale des sommes trigonométriques issue des travaux de Joseph Fourier sur la propagation de la chaleur mène à l'abandon de la classe des fonctions « mixtes ». Celui-ci écrit ceci en 1805 :

Il résulte de mes recherches sur cet objet que les fonctions arbitraires même discontinues peuvent toujours être représentées par les développements en sinus ou cosinus d'arcs multiples, et que les intégrales [des équations aux dérivées partielles] qui contiennent ces développements sont précisément aussi générales que celles où entrent les fonctions arbitraires d'arcs multiples. Conclusion que le célèbre Euler a toujours repoussée.[85, page 53]

2.13 Une digression : la représentation analytique des fonctions.

La question de la représentation des fonctions par séries « de Fourier » occupe les mathématiciens tout au long du 19^e siècle et jusqu'à nos jours.

En même temps, la théorie de la représentation par série entière se précise avec le célèbre contre-exemple de la fonction $\exp(-1/x^2)$ prolongée par 0 pour $x = 0$. Ce genre de questions mène jusqu'aux travaux de René Baire.

2.14 La définition générale d'Euler est reconnue : Condorcet (1778), Lacroix (1797), Fourier (1821), Lobatchevski (1834), Dirichlet (1837).

Condorcet semble être le premier, vers 1778-1782, à reconnaître l'importance de la définition d'Euler, suivi de Lacroix (1797).

Notons en particulier la définition de Cauchy (1821) :

Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles, que la valeur de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de *variable indépendante* ; et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont ce qu'on appelle des fonctions de cette variable.[85, page 55]

La même année, Fourier écrit dans sa *Théorie analytique de la chaleur* :

En général, la fonction $f(x)$ représente une suite de valeurs ou ordonnées dont chacune est arbitraire.[85, page 58]

Lobatchevski et Dirichlet proposent une décennie plus tard les définitions suivantes.

— Lobatchevski (1834) :

La conception générale exige qu'une fonction de x soit appelée un nombre qui est donné pour chaque x et qui change graduellement en même temps que x . La valeur de la fonction peut être donnée soit par une expression analytique, soit par une condition qui donne un moyen pour tester tous les nombres et sélectionner l'un d'eux ; ou, finalement, la dépendance peut exister, mais reste inconnue.[85, page 59]

— Dirichlet (1837) :

Désignons par a et b deux valeurs fixes et par x une grandeur variable, située entre a et b . Si à tout x correspond une valeur finie $y = f(x)$ qui varie de façon continue lorsque x varie lui-même de façon continue de a à b , nous dirons que y est une fonction continue pour cet intervalle. Ici, il n'est pas du tout nécessaire que y s'exprime en fonction de x selon une même loi sur tout l'intervalle ; il n'est même pas nécessaire d'envisager une expression algébrique explicite entre x et y . D'un point de vue géométrique, c'est-à-dire en envisageant x et y comme abscisse et ordonnée d'un point et où à chaque valeur de x de l'intervalle considéré correspond une valeur et une seule de y , la continuité d'une fonction est à mettre en parallèle avec le fait que la courbe soit d'un seul tenant. Cette définition ne prescrit en aucune façon aux différentes parties de la courbe une quelconque propriété commune et on peut se représenter les différents raccordements de manière totalement arbitraire, ou même s'imaginer une courbe simple tracée graphiquement, sans aucune contrainte préalable. Il résulte de cela qu'une telle fonction ne sera définie sur tout un intervalle que si chacune de ses parties est soit donnée graphiquement, soit mathématiquement. Par contre si elle n'est définie que sur une partie de l'intervalle, alors elle reste totalement libre de prendre ou de ne pas prendre n'importe quelles valeurs arbitraires sur la partie restante de l'intervalle.[85, page 60]

Ces définitions visent les fonctions continues. Cependant, leur formulation très générale autorisera les mathématiciens ultérieurs à aller au-delà de cette classe. Ce sera le cas en particulier de Cournot (1841) qui écrira « Nous concevons qu'une grandeur peut dépendre d'une autre sans que cette dépendance soit de nature à pouvoir être exprimée par une combinaison des signes de l'algèbre » et suggérera « d'imaginer une théorie qui aurait pour objet la discussion des propriétés générales des fonctions ».

2.15 La fonctionnalité chez Hankel.

Mais ce n'est pas à Lobatchevski, Dirichlet ou Cournot qu'on doit d'avoir popularisé en mathématiques le concept moderne de fonction : c'est à Hankel (1870).

On dit que y est fonction de x si à chaque valeur de x d'un certain intervalle correspond une valeur bien définie de y sans que cela exige pour autant que y soit définie sur tout l'intervalle par la même loi en fonction de x , ni même que y soit définie par une expression mathématique explicite de x . [85, page 61]

Hankel attribue cependant cette définition à Dirichlet.

2.16 Le rôle historique de la définition générale d'Euler.

Pour Hankel, le point principal est la définition de Dirichlet plutôt que sa formulation littérale. D'autre part, en opposant la définition de Dirichlet à la vision d'Euler, Hankel était certainement en erreur. Le concept de fonction d'Euler a évolué, et si l'un ou l'autre nom doit être lié à la définition d'une fonction en correspondance biunivoque, ce nom doit être celui d'Euler ; C'est Euler dont le concept, décrit en 1755, a été développé par de nombreux savants, Lobatchevsky et Dirichlet inclus. Le côté faible de la définition d'Euler n'a pas échappé à Hankel qui, pour sa part, la considérait comme une pure définition nominale. Il souligne que les fonctions ainsi définies universellement ne possèdent aucune propriété commune. Les expressions analytiques composées au moyen d'opérations de calcul relativement simples ayant été presque le seul sujet d'étude pendant environ deux siècles, elles n'ont jamais perdu leur importance. Ensuite, il est devenu nécessaire d'étudier différentes classes de fonctions (continues, différentiables, à variation finie, ponctuellement discontinues, mesurables, etc.) introduites au moyen de telle ou telle propriété fondamentale qui définit toute la structure d'une classe donnée indépendamment du fait de savoir si les fonctions de cette classe sont représentables analytiquement. La principale différence entre les méthodes d'étude des fonctions dans le cadre de l'analyse mathématique et [alternativement] de la théorie des fonctions est que l'analyse déduit les propriétés de toute fonction à partir des propriétés de l'expressions et formules analytiques par lesquelles cette fonction est définie, tandis que la théorie des fonctions détermine les propriétés de la fonction à partir de propriété, qui distingue a priori la classe de fonctions considérée.

les descriptions verbales du comportement des fonctions sur l'un ou l'autre ensemble de valeurs de la variable indépendante deviennent généralement utilisées. La logique mathématique moderne a découvert des difficultés essentielles inhérentes à la définition universelle, donc non-algorithmique, d'une fonction. Youschkevitch termine par une citation de Hermann Weyl (1927) :

Personne n'a jamais su expliquer ce qu'est une fonction. Mais « une fonction f est définie si par un moyen quelconque, on peut associer à un nombre a , un nombre b . . . On dit alors que b est la valeur de la fonction f pour la valeur a de l'argument ».[85, page 63]

2.17 1902 : justification des fonctions dans le programme français

En 1902, l'étude de phénomènes naturels nécessitent l'étude de variations de grandeurs, ce qui justifie l'étude de la notion de fonction qui jusque là était enseignée de manière disparate (Boyé, 2007)...Des allègements sont proposés en mai 1912 et un nouvel aménagement en 1925 du programme des classes de terminales scientifique. Cette période est une période charnière pour la transposition didactique(Chevallard, 1985) de la définition de fonction ou d'équation de droite : il y a une hésitation entre une axiomatique liée à l'analyse et une application des théories algébriques. En effet, les mêmes contenus peuvent apparaître sous le titre « algèbre » comme celui de « fonction d'une variable ». Dans le manuel « Enseignement secondaire, Algèbre et notions de trigonométrie, classes de 2^e et 1^{re} » (Brachet et Dumarque, 1942) on peut trouver dans le livre II : le Premier Degré, chapitre IV page 97, la définition de la fonction linéaire en ces termes : *Définition : On*

appelle fonction linéaire un binôme du 1er degré : $y = ax + b$ où a et b sont des nombres donnés.

Plus loin on précise l'origine de la dénomination. C'est pour rappeler que sa représentation graphique est une ligne droite que la fonction $y = ax + b$ est appelée linéaire x étant une lettre susceptible de prendre diverses valeurs numériques, on dit que y est une fonction de x si à une valeur donnée de x correspond une valeur déterminée de y . x s'appelle la variable indépendante.

Pour représenter graphiquement la variation d'une fonction, on porte en abscisse une valeur de la variable indépendante et en ordonnée la valeur correspondante de la fonction. On obtient ainsi autant de points représentatifs que l'on veut. Les points représentatifs forment un arc de courbe AB .

Dans « Algèbre Arithmétique et géométrie classe de troisième » de Lebossé et Hémerly de 1964, on trouve un chapitre intitulé : Fonctions et graphes. La notion de fonction est définie ainsi : « un nombre y est fonction d'un nombre variable x quand à chaque valeur de x correspond une valeur déterminée de y . » On définit ensuite son ensemble de définition, son sens de variation, les coordonnées des points d'un plan pour arriver à la représentation graphique d'une fonction.

Les théories de Piaget apportent des éléments à la mise en place des nouveaux programmes. L'idée de stades (intuitif, opératoire concret, opératoire formel) amène à structurer l'enseignement suivant ce principe. Le terme « analyse » apparaît pour la première fois au lycée sous la rubrique « Algèbre, et notions d'analyse » dès les classes de seconde et première dans l'arrêté du 6 mars 1962, on estime qu'à cet âge on peut aborder des notions plus formelles. Les publications de l'APMEP de l'époque témoignent de l'appui de l'association au nouveau programme.

2.18 1968 : conception de la notion de fonction en seconde

La notion de fonction est conçue comme correspondance. On retrouve les notions suivantes : fonction d'une variable ; notation $y = f(x)$; notion d'accroissement ; fonction croissante ; décroissante ; fonction constante sur un intervalle ; transformation du binôme $ax + b$ conduisant à la forme $a(x - p)$; fonctions $y = ax, y = ax + b$, de la variable x : existence, sens de variation, étude lorsque x tend vers l'infini ; signe.

2.19 1968 : La notion de fonction est introduite dans le programme de quatrième

Dans le manuel de 4^e cours Bredif de chez Hachette, on retrouve dans le chapitre 16 : expressions algébriques, monômes, polynômes, la définition d'une fonction suivante : « On appelle fonction une relation qui, à chaque élément d'un ensemble de départ A associe au plus un élément d'un ensemble d'arrivée B . ». Puis vient celle d'une fonction monôme : « On appelle fonction monôme une fonction comportant uniquement comme opérations sur la ou les variables, des multiplications ou des élévations à une puissance positive. » Aucune application concrète n'est proposée, les instructions officielles vont bien dans ce sens donnant à l'enseignement l'objectif de « faire saisir le sens et la vie profonde des êtres de la mathématique ». Il s'agit bien de séparer les êtres mathématiques du monde

empirique

2.20 1972-1986 : La notion de fonction au programme de troisième et de quatrième

Nous voyons apparaître les dénominations encore utilisées aujourd'hui : fonctions linéaires et affines ; la structure de l'ensemble des réels \mathbb{R} (applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R}) qui permet ensuite de définir les fonctions polynômes, les « applications linéaires et proportionnalité : représentation graphique d'une application linéaire, notion de coefficient directeur, de pente » et en classe de 3^e « applications affines : représentation graphique d'une fonction affine »

2.21 1981-1989 : Définition d'une fonction selon Vinner, Dreyfus et Tall (Tall et Vinner, 1981, Vinner et Dreyfus, 1989)

Dans le cas de la définition de fonction, Vinner et Dreyfus ont examiné les réponses à un questionnaire proposé à un groupe de 236 étudiants et 36 enseignants. Ils ont identifié et distingué six catégories de définitions :

fonction comme « correspondance » (au sens bourbakiste),
 comme « relation de dépendance » (avec mention du domaine et image),
 comme « loi » (sans mention du domaine et image),
 comme « opération ou manipulation de nombres »,
 comme « formule ou expression algébrique »
 ou comme « représentation » (Vinner et Dreyfus, 1989).

En outre, ils ont trouvé que, même les étudiants qui étaient capables de donner une définition de fonction de type ensembliste correcte (« correspondance »), préféraient utiliser des images intuitives, portant sur d'autres définitions, pour répondre aux questions posées. Par exemple, environ 40 % des étudiants examinés, pensaient que le graphe de fonction pour être conçu comme tel devait posséder des caractéristiques comme la continuité, la régularité, un caractère stable sur le domaine entier (en rejetant ainsi les fonctions définies différemment sur deux intervalles divers)

C'est dans ce esprit que nous avons à nouveau posé la même question à des élèves de terminale pour savoir comment ces derniers définissent-ils la fonction entre 2017 et 2021.

2.22 1988 : La notion de graphe pose problème selon Markovits et al., Barnes

Si l'on pose aux étudiants la question de savoir combien de graphes de fonctions est-il possible de tracer par les points donnés ? Les élèves répondaient en évoquant seulement le graphe d'une droite lorsque les points semblent alignés dans un système d'axes. Ils considéraient par contre de répondre à la question lorsque les points ne sont pas alignés, car il leur semble qu'il y avait deux ensembles de points sur des droites diverses. Barnes (1988)

a trouvé que la majorité d'un groupe d'élèves du secondaire et du début d'université, ne considéraient pas $y = 4$ comme l'expression d'une fonction, car y ne dépendait pas explicitement de x , et cela, à la différence de $x^2 + y^2 = 1$, qui, à cause de sa familiarité majeure et de la présence explicite dans l'expression de x et de y , était retenue une fonction.

2.23 1990 : la notion de fonction dans le programme de seconde

Le programme du 25 avril 1990 modification de l'arrêté du 14 mars 1986, BO N°20 du 17 mai 1990, classe de seconde, prévoit à la page 40 ce qui suit :

Fonctions usuelles : On mettra en valeur la diversité du comportement des fonctions. Dans ce cadre, il est important que les élèves soient entraînés à mieux maîtriser les situations de proportionnalité, dont l'étude a été abordée au collège, en relation avec l'étude des fonctions linéaires et des fonctions affines. Variation et représentation graphique des fonctions : $x \rightarrow ax + b$. Arrivés en seconde, les élèves associent le mot « fonction » aux propriétés de linéarité. Il devient difficile d'aborder le concept de fonction tant la représentation des fonctions affines est intégrée. L'étude de l'application linéaire sera donc bientôt abandonnée en 4^e au profit d'une pratique plus importante de « problèmes mettant en oeuvre la proportionnalité » (vitesse, changement d'unités, grandeurs quotients...). Le mot « application » semble abandonné au profit de la terminologie « fonction », « en fonction de » qui correspond mieux à l'objet mathématique considéré. On peut parler de fonction de proportionnalité ou de fonction à accroissements proportionnels (Bulletin APMEP décembre 1996 n°407. P 40)

Le programme précise : « Objectif : étudier quelques fonctions de références préparant à l'analyse. » et dans le cadre : Calcul et fonctions, on trouve : le contenu, les modalités de mise en oeuvre et les commentaires sur les fonctions linéaires et affines qui sont caractériser par le fait que l'accroissement de la fonction est proportionnel à l'accroissement de la variable. Puis on donne des exemples de non-linéarité en faisant remarquer que les fonctions carré, inverse,... ne sont pas linéaires. On retrouve également les « Fonctions affines par morceaux conforme à un tableau de variation ou un tableau de valeurs et des problèmes d'interpolation linéaire. »

2.24 1992, Dubinsky et Harel, Breidenbach et al., la conceptualisation de l'objet fonction

Ed DUBINSKY développe de son côté une épistémologie des fonctions proche de celle d'Anna Sfard. Il tente de déterminer la nature des objets et des processus spécifiques qui sont construits et comment ils s'organisent lorsqu'on étudie les fonctions ? Il nomme sa modélisation abstraction réflexive, l'adjectif réflexive étant à prendre au sens des lentilles de l'optique. Il désigne par action n'importe quelle manipulation physique ou mentale qui transforme des objets (ostensifs) pour obtenir d'autres choses. Ensuite il parle d'action intériorisée celle qui peut prendre place entièrement dans l'esprit du sujet c'est-à-dire une action intériorisée pour devenir un processus. D'après sa théorie, il n'y a qu'une façon de construire un objet mathématique : par encapsulation et il est essentiel selon lui d'être

capable de faire marche arrière, de l'objet au processus. Aussi, l'encapsulation et la dé-encapsulation expriment les processus permettant de passer du statut procédural au statut structural de cette notion mathématique illustre ainsi la dualité des deux statuts signalée par A. Sfard.

Ed DUBINSKY s'intéressent ainsi, aux transitions entre trois niveaux : actions – processus – objets : le processus d'apprentissage commence d'abord par des actions sur des objets. Lorsque l'action totale peut avoir lieu dans l'esprit du sujet sans courir à travers toutes les étapes spécifiques, nous disons que l'action a été intériorisée en processus. Ensuite, le sujet peut utiliser ce processus pour obtenir un nouveau processus, par exemple, en l'inversant, le transformant ou le combinant avec d'autres processus. Lorsqu'il est possible d'opérer de cette façon sur un processus, nous disons que le processus a été encapsulé en un objet. Au niveau « processus », la fonction est dépendante du processus, c'est-à-dire deux processus différents peuvent donner les significations différentes chez des élèves d'un même objet fonctionnel. Par exemple, deux formules algébriques équivalentes définissent le même objet « expression », mais correspondent à des processus de calcul différents. L'acquisition d'une conception « processus » des fonctions n'est pas triviale pour les élèves, et elle suppose un enseignement prenant explicitement en charge son développement.

2.25 1992, Sierpiska : obstacles épistémologiques relatifs aux fonctions et d'actes de compréhension

Sierpiska appuie son travail sur une étude épistémologique et historique du concept de fonction, ainsi que sur l'observation de l'activité d'étudiants. Ces analyses ont permis de dégager un certain nombre d'obstacles épistémologiques relatifs aux fonctions et d'actes de compréhension. Les obstacles épistémologiques et les actes de compréhensions sont décrits comme des connaissances. Sierpiska envisage la compréhension en mathématique au travers des sauts cognitifs nécessaires à l'apprentissage. Pour le tableaux de valeurs d'une fonction, l'obstacle épistémologique est la considération qu'une fonction est une suite de valeurs. L'acte de compréhension étant la distinction entre les notions de fonction et de suite. Un autre obstacle épistémologique est celui du graphe d'une fonction comme un modèle géométrique d'une relation fonctionnelle. Or, il n'est pas nécessairement précis ; il peut contenir des points (x, y) tels que la fonction n'est pas définie en x . Un autre obstacle est l'attraction de l'algèbre, l'expression analytique d'une fonction. En effet, il existe une grande confiance dans le pouvoir des opérations sur les expressions algébriques en pensant que seules les relations que l'on peut décrire par des expressions analytiques sont susceptibles d'être appelées fonctions. Dans ce sens, l'acte de compréhension est la distinction entre une fonction et les outils analytiques utilisés pour la représenter. Concernant le concept même de fonction, une définition est une description d'un objet par ailleurs appréhendable par les sens. Or, Ce n'est pas la définition qui détermine l'objet, mais l'objet qui détermine la définition. L'acte de compréhension dans ce cas est la distinction entre la définition et la description d'un objet. Les autres obstacles épistémologiques sont les suivants : le concept de fonction comme un objet ; discrimination entre les différents moyens de représenter une fonction et la fonction elle-même ; les différents moyens de représenter une fonction et de parler d'une fonction.

Sierpiska montre que certains étudiants identifient la fonction avec la ligne qui la représente, les axes n'ont parfois pas de sens particulier pour ces élèves.

2.26 1994 : Tompson, Gray, Tall, Confrey et Smith approche des fonctions par les élèves

dans l'approche des fonctions par un élève, la conception « processus » de fonctions précède la conception « objet » chez Tompson. Par contre Gray et Tall ont introduit la notion de « procept » pour exprimer une compréhension supérieure et flexible sur les fonctions. Les élèves acquièrent la conception « procept » lorsqu'ils peuvent montrer leur flexibilité pour la compréhension des fonctions entre processus et objets. Confrey et Smith expliquent la notion de co-variation par le mouvement entre des valeurs successives d'une variable en coordination avec le mouvement entre des valeurs successives correspondantes d'une autre variable.

Thompson (1994) a mis en évidence que, parmi les images de fonction les plus répandues chez les élèves, il y avait celle d'une expression écrite séparée par un signe d'égalité, et cela, parfois, sans un contrôle réel du sens de cette écriture. [?, p. 64]

2.27 1995 : Schwarz et Dreyfus, l'acquisition des fonctions par des élèves

Schwarz et Dreyfus ont analysé l'acquisition des fonctions par des élèves grâce à un logiciel de multireprésentation appelé Triple Representation Model (*TRM*). Cet environnement informatique permet une étroite interrelation dynamique entre registres algébrique, graphique et numérique. Il a été demandé aux élèves d'explorer et d'identifier les propriétés invariantes par des actions de la fonction examinée. Ces activités ont permis une compréhension assez profonde des fonctions chez des élèves.

2.28 1996 : Borba et Confrey, les transformations de fonctions

Borba et Confrey avaient développé et utilisé le logiciel Function Probe pour enseigner les transformations de fonctions grâce à sa capacité de modifier le graphe d'une fonction par translation, déformation et réflexion.

2.29 1997 : Chauvat et la représentation graphique

Chauvat (1997) dans sa thèse met en évidence que les objets impliqués dans la manipulation d'une représentation graphique sont :

une fonction numérique f , son graphe (fonctionnel et ensembliste), un repère cartésien du plan affine \mathbf{R} , un graphe géométrique de f relatif au repère \mathbf{R} (c'est-à-dire l'objet géométrique défini lui - aussi de manière ensembliste), le graphe figural contenant le graphe géométrique (c'est-à-dire l'ensemble des graphes géométriques équivalents), la courbe représentative de f dans \mathbf{R} (c'est-à-dire le tracé), la courbe figurale contenant toutes les courbes représentatives équivalentes à la courbe représentative donnée.

2.30 1998 : O'callaghann, conception objet de la fonction

Selon O'callaghan, la conception « objet » de la fonction semble difficile à acquérir même parmi les élèves ayant des connaissances algébriques avancées.

2.31 2001 : Yerushalmy et Shternberg

Yerushalmy et Shternberg ont utilisé des environnements spécialement conçus pour soutenir une variété d'expériences avec des représentations visuelles des fonctions comme modèles pour construire une représentation symbolique.

2.32 2002 : Programme de seconde

la notion de fonction qui n'est pas travaillée au collège dans un cadre général. Il faut initier les élèves à la lecture et à l'utilisation de représentations graphiques. C'est le début d'une nouvelle conception des mathématiques comme outil de modélisation. L'entrée de l'informatique et des outils numériques modifie aussi considérablement la manière dont l'information est communiquée et nécessite de nouveaux apprentissages.

2.33 2002 : Robert et Rogalski

La notion de fonction affine n'est pas disponible (Robert et Rogalski, 2002), pour bon nombre d'élèves malgré un enseignement par les problèmes.

2.34 2003 : Bloch, différents cadres pour la notion de fonction

Isabelle Bloch distingue différents cadres pour la notion de fonction : numérique, algébrique, géométrique, graphique, formel et analytique. Elle insiste particulièrement sur l'interaction des cadres graphique et formel pour une ingénierie portant sur la validation des propriétés des fonctions. Elle souligne également qu'au moment de son étude, le cadre géométrique est peu utilisé dans l'enseignement et qu'elle estime que sa réintroduction serait « coûteuse » d'après leur étude sur la place des tableaux de valeurs et de variations pour l'enseignement des fonctions dans le curriculum français.

2.35 2004 : Arzarello, Robutti, Yerushalmy et Shternberg interprétation des graphes

Arzarello et Robutti ont demandé aux élèves d'interpréter les graphes et les tableaux de valeurs donnés par la calculatrice en termes de mouvement. Les co-variations et les dépendances entre temps et distance dans le système physique ont été ensuite modélisées

en fonctions mathématiques. Yerushalmy et Shternberg visent particulièrement à développer ou utiliser des environnements informatiques spécifiques offrant les capacités de multi-représentations pour l'apprentissage des fonctions.

2.36 2005 : Radford, Comin, Ilyas Yavuz, fonction et expérience sensuelle, relations fonctionnelles

Louis Radford, propose des situations dans lesquelles le concept de fonction s'appuie sur l'expérience « sensuelle » de dépendances au sein d'un système physique et se construit à partir des variations mutuelles de ses objets. La même année, Comin affirme que la notion de fonction est fondée sur l'idée de relation de dépendance et ne peut prendre du sens que par l'étude des relations fonctionnelles entre grandeurs. Dans le cadre didactique, Ilyas Yavuz étudie les évolutions récentes de l'enseignement de la notion de fonction en France en classe de seconde ainsi que l'utilisation des tableaux de valeurs et de variations.

2.37 2007 : Falcade, Laborde, Mariotti, Coppé, Dorier et Yavuz, amener les élèves à comprendre la notion de fonction

Falcade, Laborde, Mariotti ont choisi la géométrie dynamique comme domaine d'application afin de fournir aux élèves une expérience qualitative de co-variations et de dépendances fonctionnelles. Leur étude a montré que les outils propres à la géométrie dynamique (déplacement des objets, visualisation de leurs traces, définition de macros etc.) appliqués à différents objets géométriques (segments, demi-droites, figures, etc.) peuvent être utilisés pour amener les élèves à comprendre la notion de fonction. Dans le cadre didactiques, Coppé, Dorier et Yavuz mettent l'accent sur un usage accru des divers modes de représentation des fonctions dans le curriculum et tentent de caractériser comment sont pris en compte, par les différents acteurs de l'institution, ces récentes modifications.

2.38 2008 : Maschietto, Aldon et al, point de vue global et local approcher la notion de dérivée

Maschietto a porté une attention particulière sur l'interaction entre deux points de vue global et local dans le contexte d'usage des potentialités de visualisation des TICE (les calculatrices symboliques). Il s'agit d'approcher la notion de dérivée à travers l'identification perceptive d'un processus de linéarisation locale. Un point de vue global considère les fonctions comme identités définies par une ou plusieurs formules ou représentations graphiques ainsi que leurs propriétés sur un intervalle. Un point de vue local sur les fonctions est lié à ce qui se passe en un point spécifique et dans son voisinage. Selon l'auteur, la considération de ce « jeu global/local » est essentielle pour la transition entre algèbre et analyse. Adon et Al, ont la même année expérimenté et testé les nouvelles potentialités ainsi que les contraintes d'une nouvelle calculatrice TI-nspire pour les apprentissages des élèves. Cette calculatrice est innovante, intégrant un logiciel de calcul formel et un environnement de géométrie.

L'entrée des programmes de 2008 (BO HS N°6 du 19 avril 2007) collège propose les contenus suivants : Organisation et gestion de données, fonction : Maîtriser différents traitements en rapport avec la proportionnalité ; Approcher la notion de fonction (exemples des fonctions linéaires et affines) ; S'initier à la lecture, à l'utilisation et à la production de représentations, de graphiques, et à l'utilisation d'un tableur.

2.39 2009 : White

White a conçu un environnement logiciel dédié à l'introduction des fonctions dans le contexte de la cryptographie. Les tâches données aux élèves dans cet environnement mettent en jeu différents aspects de la notion de fonction. La résolution des problèmes donnés dans cet environnement peut aider les élèves à atteindre une compréhension flexible des fonctions. Il y a l'affirmation qu'une dualité dialectique processus/objet est nécessaire à une compréhension profonde des fonctions.

2.40 2010 : Maggy Schneider, Mariza Krynska, Weigand et Bichler, Emergence de modèles fonctionnels et compréhension des fonctions

Nous allons accorder un peu plus de place à leurs travaux car, un certain travail de nature théorique sur la modélisation fonctionnelle participe grandement à l'apprentissage du concept de fonction. Ainsi, notre recherche, du point de vue didactique et épistémologique, s'appuie sur la modélisation fonctionnelle [70, p. 7-298]. En effet, les travaux réalisés par Maggy Schneider et Mariza Krynska présentent les caractéristiques et difficultés *a priori* d'une démarche de modélisation fonctionnelle. Par contre, elles pensent que l'apprentissage concerné dans la modélisation fonctionnelle se situe en amont d'une quelconque ritualisation procédurale¹ [70, p. 29]. En effet, l'enseignement de méthodes ne propose que la somme des savoirs utiles à la résolution des problèmes et non la théorie (connaissance) mathématiques du champ de problèmes à résoudre. C'est le même constat que font Corine Castella et Alain Mercier dans leur article [76] *Peut-on enseigner des méthodes ? Comment les élèves apprennent-ils des méthodes ? p. 3*. La méthode standard enseignée ou utilisée pour résoudre un certain type de tâche faisant appel aux fonctions doit être accompagnée ou précédée de la mobilisation des connaissances conceptuelles. Apprendre ou se servir d'une méthode, utiliser les outils sémiotiques tels que le tableau numérique, la formule, ou le graphique nécessitent avant tout, l'appréhension du concept même de fonction. Il faut donc en premier savoir ce qu'est une fonction avant de l'utiliser à travers ses ostensifs associés. L'observation montre que les pratiques enseignantes sont peu orthodoxes. Certains enseignants voire certains programmes et manuels ne mettent pas souvent l'accent sur la connaissance, la définition des objets mathématiques. Ils estiment qu'on peut s'en passer puisque de toute façon les élèves sont rarement évalués à cet égard aux examens (propos d'un inspecteur pédagogique au Gabon et d'un chercheur en France). C'est donc dire qu'il y a un problème au vu des difficultés rencontrées par les élèves devant des tâches liées aux fonctions. Ce problème pour nous est plutôt de nature épistémologique puisqu'il s'agit de la connaissance des fonctions en amont qui n'est pas

1. l'apprentissage des méthodes, fiches d'aide méthodologique, liste des procédures, descriptions d'actions à effectuer

assurée par l'institution, avant les transpositions et les pratiques. On peut se poser la question de savoir : qu'est ce qu'on doit d'abord connaître sur les fonctions avant toute modélisation fonctionnelle ? Voici en un mot, de manière simple, le point de départ de notre travail. Nous pensons pour le moment qu'il faut d'abord connaître l'objet fonction avant de l'utiliser. c'est la raison pour laquelle, nous allons nous retourner vers les élèves pour chercher ce qu'ils savent de la fonction.

Comment se décline l'enseignement-apprentissage de la modélisation actuellement ?

Au regard des curricula actuels, l'enseignement-apprentissage de la modélisation au sens de Beckers (2002), se décline de la manière suivante : *il s'agit de choisir et mener à terme une procédure mathématique pour représenter et modéliser un problème, un phénomène dans le cadre de l'étude des fonctions, la fonction de référence étant fournie. Représenter, modéliser sont les finalités des tâches et le but étant d'évaluer la compétence modéliser des problèmes de manière à les traiter au moyen des fonctions de référence en se limitant aux problèmes proches de ceux qui sont exercés en classe (p. 10).*

Elles donnent par la suite quelques exemples de tâches de modélisation portant sur les problèmes tels que : *dans une citerne contenant de l'eau pure, on introduit, avec un débit constant, de la saumure qui contient une certaine quantité de sel par litre. En même temps, la solution de l'eau et du sel mélangés dans la citerne s'écoule de la citerne à même débit (p. 26)* La question est ici de savoir comment évolue avec le temps la solution du sel dans l'eau. Un second problème est celui de savoir comment évolue la désintégration des atomes dans le temps (p. 27). En effet, il faut aller plus loin car selon les deux auteures, une telle ritualisation, si efficace soit-elle sans en douter qu'elle puisse l'être, ne permet pas de faire l'économie de l'apprentissage fondamental envisagé ici car elle participe premièrement à l'appréhension du concept même de fonction et de sa portée unificatrice dans le traitement des problèmes divers. Aussi, ajoutent-elles, il faut qu'on évite le phénomène de calculateurs aveugles dans la mesure où les élèves ne font jamais référence à une signification quelconque des ostensifs fonctions lorsqu'ils sont devant des tâches des changements de registre. Cela est d'autant plus inquiétant lorsque les professionnels de l'éducation soutiennent cette façon d'enseigner. En effet, il nous est revenu durant les entretiens chez une minorité d'inspecteurs au Gabon, de chercheurs en mathématiques en France et de quelques enseignants de mathématiques qu'on a pas du tout besoin de connaître ce qu'est une fonction. Le plus important pour eux est de pouvoir utiliser ses ostensifs pour pouvoir résoudre des problèmes à un niveau du secondaire. Ils pensent qu'il suffit de donner aux élèves des méthodes de résolution (des recettes standard) permettant de résoudre des problèmes.

Ce qu'on se propose de faire pour cette recherche est la construction d'un ensemble de connaissances à enseigner avant toute modélisation avec les fonctions. Les mots processus, règles, opérations, propositions ont été identifiés comme fondamentaux pour connaître la fonction (le concept et ses ostensifs). Il s'agit donc pour nous d'organiser tout ce qui permet de caractériser une fonction par catégorie de connaissance. Pour nous, chacune des connaissances identifiée s'exprime toujours de la même façon pour toute fonction indépendamment des situations).

Les rares activités de modélisation fonctionnelle proposées dans l'enseignement secondaire posent aux élèves des problèmes majeurs

Les deux auteures se sont appuyées sur les témoignages d'élèves, de professeurs et de chercheurs ainsi que sur quelques faits qui attestent que « *les rares activités de modélisation fonctionnelle proposées dans l'enseignement secondaire posent aux élèves des problèmes majeurs (p. 7)* » Elles tentent ensuite de disséquer cette démarche de modélisation pour mieux cerner ses enjeux, ses difficultés et les apprentissages associés possibles à différents moments de la scolarité (du primaire au secondaire), et elles arrivent à distinguer plusieurs difficultés et obstacles au chapitre 7, (p. 289-293). Aussi, elles présentent l'intérêt de la modélisation. En quoi est-elle importante pour notre recherche ?

En fait, elle permet de mobiliser certaines connaissances telles que : les variations qui dans le contexte de grandeur ne sont pas toujours faciles à concevoir. En effet, lorsque quelque chose varie, il y automatiquement un processus. La notion de variable aussi pose problème pour la modélisation. En effet, elle est ambiguë car elle contient deux concepts opposés : l'arbitraire (quelconque) et le fixé (singulier) pour un même nombre variable. Le temps aussi, variable par excellence, favorise la perception d'une variation et joue un rôle important dans le cas où il est variable transparente c'est-à-dire dont on peut ne pas en parler. Mais cette transparence constitue une autre difficulté pour la modélisation. En effet, il est difficile pour les élèves d'explicitier le temps comme une variable indépendante et de faire évoluer une variable temporelle vers une fonction du temps selon les deux auteures.

La modélisation est selon les deux auteures, une source d'économie de pensée² car elle permet de catégoriser les problèmes diversifiés se posant à l'intérieur des mathématiques ou dans d'autres disciplines et ainsi de les traiter catégorie par catégorie³ au moyen de mêmes techniques.

La modélisation fonctionnelle suppose entre autre une double algébrisation⁴. En effet, la double algébrisation se caractérise par le fait de mettre en jeu non seulement des variables mais aussi des paramètres : dans ax , a joue le rôle de paramètre et x celui d'inconnue lorsqu'on se situe dans le cadre algébrique. Ce même x jouera dans le cadre de l'analyse le rôle de variable. La construction du cadre fonctionnel se justifie donc par cette difficulté à passer du cadre de l'algèbre au cadre de l'analyse avec des expressions algébriques et analytiques. Outre la maîtrise des formules paramétrées, cette démarche de modélisation demande d'appréhender d'autres instruments sémiotiques que sont les tableaux numériques, les graphiques à partir desquels on peut adapter les modèles fonctionnels paramétrés : polynômes, exponentiels, sinusoidaux.

L'analyse des résultats de leurs recherches sur la modélisation fonctionnelle obtenus en Belgique et en France leur ont permis de comprendre les caractéristiques d'un environnement didactique propice à de tels apprentissages et, par là, d'indiquer comment faire fonctionner, dans le quotidien des classes, les idéologies d'enseignement véhiculées par les programmes scolaires, les référentiels de compétences et outils d'évaluation associés. Nous en déduisons des travaux de Maggy Schneider qu'il n'est pas du tout évident aujourd'hui (dans l'état actuel des programmes) que les élèves arrivent à modéliser par des

2. Elle permet de généraliser, par exemple : tous les problèmes de proportionnalité peuvent être traités par la formule $y = ax$ au collège. C'est un gain de temps énorme.

3. catégoriser les fonctions spécifiques en classes de fonctions ou modèles fonctionnels par exemple : affines ; linéaires ; harmoniques et du second degré (p. 290)

4. C'est-à-dire qu'on joue d'abord avec les variables (les inconnues du cadre algébrique) puis sur les paramètres

fonctions du moins sans l'aide du professeur. Les programmes ainsi que les enseignants ne permettent pas aux élèves de travailler suffisamment dans un cadre propice pour la mobilisation des fonctions. Nous tentons dans ce travail de mettre en place un tel cadre sur la base des résultats des travaux de Mariza Krysinska qui à la page 15 du livre *émergence de modèles fonctionnels* avait déjà en 2007 étayé une hypothèse selon laquelle « *les difficultés avérées des élèves à résoudre cette question relative à la modélisation par une fonction (cas de la radioactivité) sont les indices d'une absence d'enseignement relatif à la modélisation fonctionnelle et d'un rapport institutionnel inadéquat aux signes qui permettent de l'outiller, soit les graphiques, tableaux et formules paramétrées.* » Nous pensons ensuite comme elle que généralement, le travail effectif tel qu'enseigné actuellement au secondaire sur les fonctions se réduit à une seule démarche que l'on peut résumer comme suit : déterminer l'allure graphique d'une fonction donnée par son expression analytique en suivant, pour chacune d'elles isolément, un schéma d'étude immuable : domaine de définition, racines, parité, imparité ou périodicité éventuelles, limites et asymptotes, calcul des dérivées, tableau de variation et tracé d'un graphique comme produit final. Le paramétrage (le travail avec les variables et paramètres) aussi est rarement enseigné. Un tel enseignement ne rend pas forcément les élèves aptes à résoudre des problèmes de modélisation comme en témoigneraient leurs difficultés à traiter certains problèmes. C'est le cas du problème donné comme exemple par Mariza Krysinska et Maggy Schneider à la page 16 de leur livre où elles traitent d'une question au baccalauréat qui a fait scandale.

« *Dans les instants qui suivent l'ensemencement du milieu de culture, on considère que la vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries en présence. Dans ce premier modèle, on note $f(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus). La fonction f est donc solution de l'équation différentielle : $y' = ay$ (où a est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales).*

1. Résoudre cette équation différentielle, sachant que $f(0) = N_0$.
 2. On note T le temps de doublement de la population bactérienne. Démontrer que, pour tout réel t positif : $f(t) = N_0 2^{\frac{t}{T}}$
- »

Dans la première partie, on traite dans cette tâche d'un modèle qui convient pour les instants qui suivent l'ensemencement pour ensuite se polariser sur le modèle logistique qui rend compte d'une longue période. Ce problème a provoqué un grand désarroi chez les élèves et professeurs de France pourtant ; ce dernier semble être en conformité avec le curriculum. Comment expliquer le caractère scandaleux de cette situation ? Matheron et Schneider (2003) interprètent le phénomène en termes de rupture de contrat entre le niveau de complexité du problème et le rapport institutionnel aux notions du nouveau programme qui s'était construit l'année 2003 au sein des pratiques enseignantes où les tâches sont décomposées en sous-tâches : décomposition dont la responsabilité incombe davantage à l'élève lors de l'épreuve du baccalauréat que pendant les cours et travaux dirigés associés. Il faut quand même noter qu'en 2016 lors des expérimentations sur le terrain en France, les élèves de seconde montraient déjà une grande capacité à travailler avec les paramètres en modélisant par une fonction à plusieurs variables le temps nécessaire pour vider un immeuble, pour remplir d'eau un bidon avec un robinet en jouant sur les débits, etc. Ces résultats sont présentés dans le chapitre *Analyses de résultats en France et en Afrique Francophone*.

2.41 2011 : Minh Tran Kiem, fonctions comme modèles de dépendances

Minh Tran Kiem considère les fonctions comme modèles de dépendances dans un cadre géométrique tel que défini par Bloch (2003) et utilisé par Falcade, Laborde et Mariotti (2007). La modélisation fonctionnelle permet de relier ce cadre aux autres cadres et représentations des fonctions. Son hypothèse est donc que les activités fondées sur l'étude des dépendances entre grandeurs ou mesures permettent aux élèves de comprendre les fonctions comme modèles de ces dépendances. Ces activités s'inscrivent dans les dialectiques « locales-globales » et « processus-objet ». Les fonctions sont introduites sous tous ses aspects : numérique, graphique, algébrique. Le type de tâche de modélisation fonctionnelle des situations géométriques est encouragé pour l'approche des fonctions. Pour ces situations, il est souvent demandé aux élèves d'expérimenter et d'observer la co-variation et la relation de dépendance entre grandeurs ou mesures impliqués dans la figure. Ensuite, les élèves doivent reconnaître une dépendance fonctionnelle parmi des co-variations puis l'exprimer en une fonction mathématique. L'étude de sa variation et de ses extremums permet aux élèves de trouver la résolution du problème.

2.42 Histoire des fonctions selon Anna Sfard

Je me permets de reproduire telle que fait par Anna Sfard l'histoire de la notion de Fonction afin de mieux comparer du point de vue épistémologique nos deux récits. En effet je pense que ce qui est connu aujourd'hui l'est sous cette façon pour la simple raison que le récit de telle ou telle notion nous a bien été conté telle qu'elle. Selon Anna Sfard, tout en scrutant le développement long et difficile du concept de nombre, nous sommes arrivés à quelque chose de récurrente : à maintes reprises, les processus réalisés sur des nombres déjà acceptés avaient été convertis en des ensembles compacts, ou réifiés (de la chose (latine), Pour devenir un nouvel objet mathématique auquel de nouveaux procédés pourraient être appliqués. C'est ainsi que des nombres rationnels, par exemple, sont issus d'opérations de mesure qui étaient habituellement codées comme des paires de nombres entiers (ratios).

La longue histoire du concept de fonction peut servir d'illustration supplémentaire de la préférence à la préséance des conceptions opérationnelles sur les structures. Comme l'a montré Sfard (1991), la biographie turbulente de la fonction peut être considérée comme une lutte de trois siècles pour la rectification. La notion centrale des mathématiques d'aujourd'hui a émergé au *XVII^e* siècle comme un sous-produit d'une tentative de mathématisation des phénomènes physiques (en fait, comme le montre Sierpenska, ses racines remontent à l'antiquité, pendant une longue période. Cependant, au cours de laquelle l'idée de fonction a été utilisée selon les termes de Piaget que de façon implicite. Avec moins de pertinence comme dans ce contexte présent, même si, le compte historique plus large et plus complet donné par Sierpenska, donne des observations qui peuvent ajouter des points de vue à notre analyse tout en renforçant nos conclusions initialement, le concept était étroitement lié au processus informatique.

Les premières descriptions de ce qui a été intuitivement conçu comme une algèbre symbolique invincible invente la quantité de Jean Bernoulli composée d'une manière quelconque d'une variable et d'une constante (1718), et l'expression analytique d'Euler (1747), toutes deux destinées à définir des fonctions, utilisaient des entités algébriques pour imposer une

permanence et une stabilité à des quantités variables. Identifier des fonctions avec des courbes bidimensionnelles était une autre façon de fournir des processus informatiques avec une physionomie (l'expression d'Hadamard (1949)) d'une chose réelle.

Le piège insaisissable

Le concept insaisissable de la fonction défiait cependant ces tentatives naïves de réification. Pendant longtemps, ni les expressions algébriques, ni les représentations graphiques solidifiées ne semblaient très efficaces pour convertir le processus en objets. Les problèmes et les difficultés se cachaient à chaque coin de rue. Les définitions algébriques de Bernoulli et d'Euler s'appuyaient sur le concept de variable. Initialement, être variable et constante ont été probablement conçus comme des signes sur papier. Les symboles et les variables étaient déjà identifiés et semblaient déjà être des objets réels sur lesquels des processus (fonctions) pouvaient être réalisés. Cette conception naïve de la variable, cependant, invitait à l'examen et à la critique. Les penseurs sérieux devaient penser qu'il n'était pas mathématiquement saint et digne de parler des lettres comme des choses réelles, et qu'il devait y avoir une entité abstraite cachée derrière le symbole. La nature de cette entité, cependant, n'était pas du tout claire pour eux. Il ne fallut pas longtemps avant qu'Euler ne réalisât lui-même qu'en raison de l'imprécision des notions sous-jacentes, son simple «expression analytique ne pouvait fonctionner.» En 1755, il substitua sa définition originale à une autre, espérant évidemment faire avec des variables. Selon cette nouvelle description, «une quantité ne devrait être appelée fonction que si elle dépend d'une autre quantité comme si, en changeant celle-ci, la fonction subissait le changement elle-même». Il est à noter que dans cette nouvelle version, l'approche d'Euler est explicitement opérationnelle. Au regard de ce paragraphe les fonctions ont été construites suivant les étapes suivantes :

1. le développement du concept de nombre ;
2. processus réalisés sur les nombres acceptés
3. ensembles compacts (réifiés, chose) ;
4. objet mathématique, nombres rationnels
5. la fonction notion centrale des mathématiques

La notion de fonction a été utilisée de quelle façon ?

Piaget	utilisé de façon implicite dans l'antiquité
Anna Sfard	lutte pour la réification
Sierpinska	tentative de mathématisation des phénomènes physiques
Sierpenska	processus informatique
Jean Bernouilli	algèbre symbolique invincible : la quantité composée d'une manière quelconque d'une variable et d'une constante (1718)
Euler	l'expression analytique
Hadamard (1949)	processus informatiques avec une physionomie

Au fil du temps, de nombreuses interprétations ont été suggérées sur le concept quasiment peu clair de la variable. À des occasions différentes, on lui a donné des noms « explicatifs tels que :

1. inconnus ;
2. nombre donné ;

3. nombre variable,
4. nombre indéfini, etc. (voir, par exemple, Harper, 1987, Frege 1970)

Aucune des descriptions des inconnus, variables indéterminées mais fixées, etc. ne répond aux normes élevées de précision mathématique. Aussi tard que les premières décennies du XX^e siècle, la discussion sur la nature exacte de la variable et de la fonction était encore très avancée. Les opinions exprimées en 1904 par Frege dans l'article d'Anna Sfard en ce qu'est une fonction ? Nous a beaucoup éclairé sur ce qui se passait à ce moment-là du développement de ce concept :

« Il existe encore un doute en ce que représente le mot « fonction » dans l'analyse, bien qu'il ait été en usage continu pendant une longue période. Dans les définitions, nous trouvons deux expressions constamment récurrentes, parfois en combinaison et parfois séparément : « expression mathématique » et « variable ». On note aussi une utilisation fluctuante : le nom « fonction » est donné parfois à ce qui détermine le mode de dépendance, ou peut-être au mode de dépendance lui-même, et parfois aux variables dépendantes ... sont des variables d'analyse. Qu'est ce qui reste le même quand un nombre varie ? Rien ! ... donc il n'y a pas de nombres variables frege1 (Frege, 1970 ; 107-9). Il s'agit d'une tentative de mathématisation des phénomènes physiques

*Frege de légitime de ce fait l'emploi de terme indéfini et conclut : le mot variable n'a pas de justification en analyse pure *ibid*, p. 11) La raison première de l'éjection éventuel de la notion était le fait que dès que nous essayons de mentionner une variable, nous nous heurtons à quelque chose qui varie dans le temps, n'appartient donc pas à l'analyse pure. *ibid* p.107. Et alors tout ce qui implique le temps est étranger à l'arithmétique et ne peut être considéré comme un « objet d'analyse » propre. »*

Il est donc intéressant de remarquer que pour Frege pour une conception mathématique, être intrinsèquement dépendante du temps signifie être irréductible, pour résumer le travail d'Anna Sfard, il faut dire que les exemples qu'elle nous présente impliquent la vue des mathématiques comme une hiérarchie dans laquelle ce qui semble être un processus à un niveau doit être transformé en un objet abstrait complet à un niveau supérieur pour devenir un élément constitutif. Cette affirmation est semblable à celle de Jean Piaget (1972, p. 20) dans le constructivisme, bien que non identique. En effet chez Jean Piaget les entités mathématiques se déplacent d'un niveau à un autre. Il s'agit d'une opération sur ces « entités » qui deviennent à leur tour objets de la théorie, et ce processus est répété jusqu'à ce que nous atteignons des structures qui sont alternativement des structures plus « solide ».

2.43 Conclusion

Deux fonctions définies différemment sont considérées comme identiques si, pour toutes les valeurs possibles de a , les valeurs correspondantes de b coïncident. la définition générale (nominale) d'Euler d'une fonction est devenue nécessaire dès le milieu du $XVIII^e$ siècle. Elle a été utilisé avec succès pour des constructions de plus en plus complexes dans la théorie des fonctions et, aussi, a ouvert de nouveaux horizons dans le développement de nombreuses branches de l'analyse et de ses applications. Les difficultés mêmes, inhérentes à la définition, ont joué un rôle positif dans la formulation et l'étude de nombreux problèmes sur les fondements des mathématiques et la logique mathématique.

Différents mots utilisés par les mathématiciens pour définir la fonction

date	nom	mot
1325 - 1382	Oresme Nicolas	relation entre, Chose mesurable
1540-1603	Viète François	expression littérale
1596 – 1650	Descartes	dépend de
1637	Fermat	dépendance entre
1670	Newton	quantité corrélé
1673	Leibniz	courbe, fonctionnant
1718	Jean BERNOULLI	quantité composée
1748	Euler	expression analytique
1737-1813	Lagrange	expression de calcul
1839	Cauchy	quantités exprimées
1837	Dirichlet	règle variable
1792	Lobatchevski	correspondance arbitraire

Chapitre 3

La notion de fonction aux programmes du secondaire en France et d’Afrique francophone.

3.1 Introduction

Le terme concept de fonction, présenté dans le chapitre précédent et celui de notion de fonction, au programme ont de subtiles différences quant à leur signification. Nous allons en tenir en compte dans la suite de notre travail. En effet, la différence entre notion de fonction et concept de fonction est que la notion de fonction renvoie à une idée abstraite ou globale, généralement implicite au sens commun propre des mathématiciens, tandis que le concept de fonction est une idée tout autant abstraite, mais définie et produite avec plus d’exactitude, résultant d’une pratique et élément substantiel d’une théorie. Le concept de fonction dit ce que la chose (objet fonction) est en soi, non pas ce que l’on en a appris, ni ce que l’on en pense, tandis que la notion de fonction implique une étude et un jugement, une vue générale acquise avec un peu de travail, et dit ce que l’on sait de la chose (fonction).

La notion de fonction est présente dans les programmes d’enseignement secondaire en France et en Afrique francophone où le programme est commun à ce niveau de la scolarité. Nous remarquons que le programme français (cf. annexe. D page 232) embrasse plus de notions que celui d’Afrique francophone (cf. annexe. E page 234). Si pour la France les programmes sont accessibles en ligne, les progressions sont par contre laissées à la volonté et au choix des enseignants. En Afrique francophone, au Gabon en particulier, une progression spiralée nationale est imposée à tous les enseignants (cf. annexe. L page 252). On parle parfois de segment de connaissances pour imposer aux enseignants, la progression nationale. Dans le programme français, les fonctions sont appelées à être définies par une courbe, un tableau de données ou une formule ; comment est-elle censée être définie selon les programmes et manuels scolaires en Afrique francophone ?[83] Nous présentons dans cette section une progression nationale de mathématiques de l’année 2018 qui est toujours d’actualité. On remarquera dans cette progression que les fonctions sont introduites et définies dès la troisième semaine de cours comme le montre la progression de seconde dans le système éducatif gabonais. Les figures suivantes nous présentent comment les fonctions sont définies dans les différents manuels.

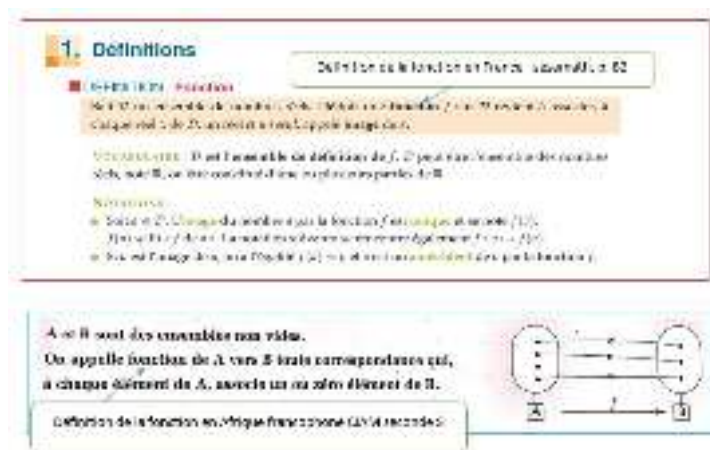


FIG. 3.1 – Définitions de la notion de fonction en seconde. Reproduite à partir de *Le manuel sésamath seconde avec ses compléments numériques* », par Gringoz, H. et Weyermann, F. (2010), [63, p. 82] et de *CIAM* par Saliou, T (dir.). (1997) [83, p. 156]

Au regard de ces deux définitions, issus de manuels scolaires, l’une réalisée par une association de manière collaborative (Sesamath) l’autre dans un manuel du Gabon. La définition en seconde de la fonction en Afrique pose la question de la correspondance arbitraire sus mentionnée entre des éléments de deux ensembles. En effet, le schéma évoque plutôt une application entre deux ensembles discrets et même une application bijective si on regarde le diagramme. j’ai ressenti que quelque chose n’était pas claire. Pourtant l’objet fonction reste le même qu’on soit en France ou en Afrique, mais pourquoi les approches et définitions changent-elles d’un système éducatif à un autre ? Nous nous sommes donc concentrer sur l’enseignement de cette notion qui semble centrale et importante aux deux systèmes éducatifs.

S’intéresser aux fonctions et à son enseignement en France et en Afrique francophone suppose, comparer deux systèmes éducatifs. D’autre part, avant de penser à construire quelque chose de commune aux deux systèmes éducatifs en lien avec les fonctions, il nous a paru assez intéressant de mieux connaître chacun des systèmes éducatifs. Les objectifs et les milieux sont différents. Les variables (critères et indicateurs) sont très difficiles à fixer pour évaluer puis comparer ces deux systèmes éducatifs. Lorsqu’on s’engage à étudier ce que savent faire les élèves dans chacun des systèmes, l’idée sous-jacente est bien de pouvoir les comparer. Je trouve assez délicat de fixer des critères qui permettront à la fin de mon étude de démontrer qu’un des systèmes éducatifs est mieux que l’autre. Comment procéder ? Pour comparer les deux systèmes éducatifs, c’est-à-dire le système éducatif français et celui d’Afrique francophone, il m’a fallu en premier chercher un modèle de référence. Suite aux difficultés rencontrées dans cette recherche dues aux manques de travaux sur la comparaison des systèmes éducatifs d’un pays d’Europe avec celui d’un pays d’Afrique francophone, il m’a semblé nécessaire d’en construire un modèle qui est tiré des travaux d’Annie Bessot[16] dans le cadre des transitions entre cycle et des travaux de recherche de Aurelie Chesnais, Nicolas Grenier-Boley, Julie Horoks, Aline Robert dans le cadre de l’évolution des contenus à enseigne[38]. Dans les premiers travaux, nous avons retenu trois axes d’analyse lors des transitions à savoir :

1. *la rupture culturelle ;*
2. *la rupture épistémologique ;*
3. *l’échelle de codétermination : civilisation, société, école, pédagogie, discipline, domaine,*

secteur, thème, sujet

En effet, pour être simple, sur la base des travaux antérieurs, nous avons choisi neuf axes pour résumer ce qui caractérise chacun des systèmes éducatifs à savoir la culture, la tradition, la civilisation, la société, l'école, le chômage, la population et l'examen d'entrée à l'université qu'on résume dans le tableau suivant :

Caractères	France	Afrique	Communs
Culture	universitaire	familiale	langue française, rites
Tradition	intellectuelle et morale	transcendante et impartiale	enseignement
Civilisation	valorisation	stabilité	langue
Société	le monde entier	africaine	le droit
École	de la confiance	réussite	obligatoire dès 3 ans
Chômage	9%	16%	jeunes
Population	66,99 (2019)	90,531 (2016)	cultivée
Fonction	plus outil	plus objet	outil-objet
Baccalauréat	fonction	fonction	fonction 60%

La motivation est celle de comprendre comment chacun des systèmes est constitué et surtout de voir quelle est la place reversée à l'école et pourquoi ? Notre seconde source pour cette comparaison qui peut être améliorée est celui des travaux de recherches d'Aurelie Chenais, Nicolas-Boley, Julie Horoks et d'Aline Robert. Nous avons essayé de comprendre les transitions. Pour notre recherche les axes suivants énoncés dans leurs travaux nous semblent pertinents. Nous avons donc comparé en amont les deux systèmes éducatifs en choisissant la lettre (*I*) pour des critères (caractéristiques) identiques aux deux systèmes éducatifs et (*D*) pour les critères ou indicateurs différents). Ainsi, nous avons comme premiers résultats :

1. l'aspect institutionnel : ordre d'enseignement (*I*), la structure (*D*), l'orientation (*D*), la sélection (*D*), la formation des enseignants (*D*), le recrutement(*D*) ;
2. l'aspect didactique : les programmes (*D*), les contenus (*D*), la formation des enseignants (*D*), les difficultés des élèves (*I*), les attentes (*I*), les déroulements des scénarios (*D*), le tâches (*D*), etc.
3. l'objet (fonction) de savoir à enseigner : sa *définition* (*D*), sa représentation des deux côtés de la transition, c'est en dire de la troisième en seconde (*I*). Ce qui permet aux élèves de seconde de *reconnaître* la notion de fonction déjà abordée en troisième, c'est-à-dire les moyens de contrôle qu'ont les élèves. (*I*)
4. les tâches : une augmentation dans la complexité des tâches en seconde (*I*), les différentes adaptations demandées, et les initiatives potentiellement laissées aux élèves dans la résolution (*D*), nombre de tâches proposées et variété (*D*)
5. les niveaux de conceptualisation visés : Les programmes (*D*), Objectif d'apprentissage (*D*). Les autres aspects du concept de fonction sont abordés par les enseignants, exemple, l'aspect variations, covariation, relation, etc. (*I*)
6. le formalisme : le domaine de définition d'une fonction (*I*), de nouveaux problèmes, liés à l'étude qualitative des fonctions (variations, extremums sur un intervalle)(*I*), de nouveaux objets : les fonctions carrées, inverse, polynomiales de degré 2 ou homograpiques en 3^e et en seconde, les fonctions affines (*I*) dans les deux niveaux

7. les cadres et registres : de nouveaux outils en 2^e, lors de la résolution graphique d'équations et d'inéquations, pour résoudre des problèmes déjà abordés (*D*), le niveau de rigueur attendu (*I*), le vocabulaire employé (*D*) le statut et la généralité de ce que l'on affirme dans chaque système éducatif (*I*), les liens entre ancien et nouveau, tant au niveau des notions que des tâches et des modes de raisonnement (*I*), la complexité des tâches proposées aux élèves (*D*), la *richesse de ce qui leur est proposé pour apprendre.* (*D*)
8. les difficultés : (*I*)

nombre de critères	identiques	différents
33	13	20

Après avoir constaté sur la base du résultat sus mentionné que les deux systèmes sont différents, ce que nous avons fait dans la suite est de laisser de côté les aspects institutionnels des transitions écoles, collèges et collège lycée, mais plutôt privilégier les points de vues didactiques et épistémologiques sur des connaissances mobilisées par les élèves sur les fonctions dans chacun des systèmes éducatifs. Il s'est agit de suivre fidèlement les orientations de Aurelie Chesnais, Nicolas Grenier-Boley, Julie Horoks, Aline Robert à savoir :

1. la caractérisation de la notion de fonction en troisième et en seconde (nature, place dans le programme, attentes, difficultés, évolutions entre la troisième et la seconde)
2. réflexion sur les scénarios possibles et analyses des déroulements en classe. Nous nous limitons aux cahiers d'élèves pour observer par quelles activités les fonctions sont introduites en classe.
3. les différents cadres et registres dans lesquels les fonctions sont évoqués : algébrique, formule, numérique, graphique, formel, etc.
4. la définition de la notion de fonction dans chaque système.

En collaboration avec Françoise Caratini, édition : Jean René Gombert, Borda Encyclopie 1985), il est souvent demandé aux élèves dans les deux systèmes éducatifs, de passer en revue sept stades pour étudier une fonction

3.2 Présentations des programmes de mathématiques en France et en Afrique francophone

Dans cette partie, nous présentons simplement les programmes officiels. L'enseignement de la notion de Fonction en seconde, nous a permis de connaître les connaissances sollicitées et potentiellement mobilisables par des élèves du secondaire. Nous analysons intégralement le programme sur les fonctions en France en y ajoutant les légères différences avec le programme sur la même notion en Afrique, au Caraïbe et au Pacifique. Source : Fonctions. *Les publications du Conseil supérieur des programmes (CSP), Mathématiques Classe de seconde, enseignement commun, Élaboration des projets de programme du nouveau lycée programmes - contenus des enseignements - Publication du CSP - 15/10/2018, P. 1-15*

3.2.1 Objectifs généraux en France

au cycle 4 (en France et au collège en Afrique francophone), les élèves ont découvert progressivement la notion de fonction, manipulé différents modes de représentation :

1. expression algébrique,
2. tableau de valeurs,
3. représentation graphique,
4. programmes de calcul.

Ils connaissent le vocabulaire de base variable, fonction, antécédent, image et la notation $f(x)$. Selon le mode de représentation choisi, ils déterminent une image ou des antécédents d'un nombre par une fonction. Ils ont étudié les fonctions linéaires, les fonctions affines et leur représentation graphique.

3.2.2 Objectifs généraux dans le programme HPM

La seconde est une classe de détermination, elle assure la continuité avec le premier cycle et prépare d'une manière privilégiée les élèves aux filières littéraires, économique et tertiaires $A1, A2, B, STT, STMG$. Le programme de mathématiques y a pour fonction :

1. de conforter l'acquisition par chaque élève de la culture mathématique nécessaire à la vie en société et à la compréhension du monde ;
2. d'assurer et de consolider les bases de mathématiques nécessaires aux poursuites d'étude du lycée ;
3. d'aider l'élève à construire son parcours de formation.

Pour chaque partie du programme, les capacités attendues sont clairement identifiées et l'accent est mis systématiquement sur les types de problèmes que les élèves doivent savoir résoudre. L'acquisition de contenus, de méthodes et de techniques est indispensable, mais doit être au service de la pratique du raisonnement qui est la base de l'activité mathématique des élèves. Il faut, en effet, que chaque élève, quels que soient ses projets, puisse faire l'expérience personnelle de l'efficacité des concepts mathématiques et de la simplification que permet la maîtrise de l'abstraction. L'objectif de ce programme est de former les élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes pour les rendre capables de :

1. modéliser et s'engager dans une activité de recherche ;
2. conduire un raisonnement, une démonstration ;
3. chercher, expérimenter (en particulier à l'aide d'outils logiciels) ;
4. appliquer des techniques et mettre en œuvre des algorithmes ;
5. faire une analyse critique d'un résultat, d'une démarche ;
6. pratiquer une lecture active de l'information (critique, traitement), en privilégiant les changements de registre (graphique, numérique, algébrique, géométrique) ;
7. utiliser les outils logiciels (ordinateur ou calculatrice) adaptés à la résolution d'un problème ;
8. raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;
9. expliquer oralement une démarche, communiquer un résultat par oral ou par écrit ;

Dans la mesure du possible, les problèmes posés s'inspirent de situations liées à la vie courante ou à d'autres disciplines. Ils doivent pouvoir s'exprimer de façon simple et concise et laisser dans leur résolution une place à l'autonomie et à l'initiative des élèves. Au niveau d'une classe de seconde de détermination, les solutions attendues sont aussi en général simples et courtes.

3.2.3 Objectifs spécifiques en seconde en France

En seconde, les objectifs sont les suivants :

1. consolider la notion de fonction, comme exprimant la dépendance d'une variable par rapport à une autre ;
2. exploiter divers registres, notamment le registre algébrique et le registre graphique ;
3. étendre la panoplie des fonctions de référence ;
4. étudier les notions liées aux variations et aux extremums des fonctions.

Les fonctions définies sur un intervalle de \mathbb{R} permettent de modéliser des phénomènes continus. On peut confronter les élèves à des exemples de fonctions définies sur \mathbb{N} pour modéliser des phénomènes discrets. La notation $u(n)$ est alors utilisée. La modélisation d'une dépendance par une fonction apparaît dans des domaines très variés : géométrie dans le plan ou dans l'espace, biologie, économie, physique, sciences sociales. La modélisation de phénomènes dépendant du temps, la variable étant alors notée t est mise en évidence. Les outils numériques sont mis à profit en France :

1. un logiciel de géométrie dynamique, pour la représentation graphique et l'utilisation de curseurs ;
2. Python, le tableur ou la calculatrice, pour mettre en évidence l'aspect de programme de calcul.

Dans un premier temps, les élèves découvrent, manipulent et verbalisent certaines propriétés (parité, monotonie sur un intervalle ...) sur les fonctions de référence. Ces propriétés se généralisent peu à peu aux fonctions quelconques. Leur maîtrise est un objectif de fin d'année. Leur formalisation est l'occasion d'un travail sur les quantificateurs.

3.2.4 Objectifs spécifiques dans le programme HPM

L'objectif est de rendre les élèves capables d'étudier :

1. un problème se ramenant à une équation du type $f(x) = k$ et de le résoudre dans le cas où la fonction est donnée (définie par une courbe, un tableau de données, une formule) et aussi lorsque toute autonomie est laissée pour associer au problème divers aspects d'une fonction ;
2. un problème d'optimisation ou un problème du type $f(x) > k$ et de le résoudre, selon les cas, en exploitant les potentialités de logiciels, graphiquement ou algébriquement, toute autonomie pouvant être laissée pour associer au problème une fonction. Les situations proposées dans ce cadre sont issues de domaines très variés : géométrie plane ou dans l'espace, biologie, économie, physique, actualité etc. Les logiciels mis à la disposition des élèves (tableur, traceur de courbes, logiciels de géométrie dynamique, de calcul numérique, de calcul formel, etc.) peuvent être utilement exploités. Par ailleurs, la résolution de problèmes vise aussi à progresser dans la maîtrise du calcul algébrique et à approfondir la connaissance des différents types de nombres, en particulier pour

la distinction d'un nombre de ses valeurs approchées. Il s'agit également d'apprendre aux élèves à distinguer la courbe représentative d'une fonction des dessins obtenus avec un traceur de courbe ou comme représentation de quelques données. Autrement dit, il s'agit de faire comprendre que des dessins peuvent suffire pour répondre de façon satisfaisante à un problème concret mais qu'ils ne suffisent pas à démontrer des propriétés de la fonction. Nous remarquons qu'il s'agit là des connaissances du programme français.

3.2.5 Fonctions de référence, courbes représentatives, parité, variations et extremum

Les élèves en France doivent *se constituer un répertoire d'images mentales* des courbes représentatives des fonctions de référence, sur lesquelles s'appuyer lors de l'étude des propriétés des fonctions.

3.2.6 Connaissances aux programmes sur les fonctions

1. Fonctions carré, inverse, racine carrée, cube : définitions et courbes représentatives, Fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle ou une réunion finie d'intervalles de \mathbb{R} , Courbe représentative : la courbe d'équation $y = f(x)$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient $y = f(x)$, Fonction paire, impaire. Traduction géométrique ; Croissance, décroissance, monotonie d'une fonction définie sur un intervalle ; Tableau de variations ; Maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle ; Pour une fonction affine, interprétation du coefficient directeur comme taux d'accroissement, variations selon son signe ; Variations des fonctions carré, inverse, racine carrée, cube
2. Capacités associées *deux nombres a et b donnés et une fonction de référence f , comparer $f(a)$ et $f(b)$ numériquement ou graphiquement, pour les fonctions affines, carré, inverse, racine carrée et cube, résoudre graphiquement ou algébriquement une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) < k$; Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe : appartenance, calcul de coordonnées ; Modéliser par des fonctions des situations issues des mathématiques, des autres disciplines. Résoudre une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) < k$, en choisissant une méthode adaptée : graphique, algébrique, logicielle ; Résoudre une équation, une inéquation produit ou quotient, à l'aide d'un tableau de signes ; Résoudre graphiquement ou à l'aide d'un outil numérique une équation ou inéquation du type $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$; Étudier la parité d'une fonction sur des exemples ; Relier représentation graphique et tableau de variations ; Déterminer graphiquement les extremums d'une fonction sur un intervalle ; Exploiter un logiciel de géométrie dynamique ou de calcul formel, la calculatrice ou Python pour décrire les variations d'une fonction donnée par une formule ; Relier sens de variation, signe et droite représentative d'une fonction affine.*
3. Étudier la position relative des courbes d'équation $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, pour $x \geq 0$.

3.2.7 Exemples d'algorithmes

Pour une fonction dont le tableau de variations est donné, algorithmes d'approximation numérique d'un extremum (balayage, dichotomie). Algorithme de calcul approché de

longueur d'une portion de courbe représentative de fonction. Approfondissement ; Relier les courbes représentatives de la fonction racine carrée et de la fonction carré sur \mathbb{R}

3.2.8 Les chapitres du programmes HPM

Dans le programme HPM, on retrouve des chapitres sur les fonctions le premier chapitre *Ensemble des nombres réels* vise à :

1. Maîtriser les calculs dans \mathbf{R}
2. Définir la notion de valeur absolue en la reliant à celle de la distance
3. Initier au raisonnement par l'absurde
4. Développer l'usage de la calculatrice scientifique.

le deuxième chapitre Fonctions vise à :

1. Faire découvrir la notion de fonction
2. Mettre en place le vocabulaire relatif aux fonctions numériques.
3. Utiliser les représentations graphiques pour résoudre certains problèmes
4. Dresser des tableaux de variations, caractériser des points remarquables.

le troisième chapitre Fonctions de références vise à : Initier l'élève à la démarche d'une étude de fonctions

3.3 Le point commun entre les deux systèmes didactiques

Dans les manuels aux programmes en France et dans le HPM, on peut remarquer quelques points communs ; En effet à la page 7 du livre *Odyssée* (2014), mathématiques seconde et dans le programme HPM à la page 9 du programme de seconde scientifique on retrouve le tableau identique suivant :

Contenus	Capacité attendues	commentaires (HPM)
----------	--------------------	---------------------

Ce constat nous amène à nous poser la question de savoir ou sont passées les connaissances au programme ? Nous proposons et ce en phase avec le programme français le nouveau tableau suivant :

contenus	connaissances	capacités, compétences	cadre fonctionnel
----------	---------------	------------------------	-------------------

3.4 Étapes au programme pour étudier une fonction dans les deux systèmes éducatifs

3.4.1 Domaine de définition

L'élève est amené à déterminer le domaine de définition de la fonction à étudier (le plus souvent, le domaine de définition est donné.). Pour ce, il lui est demandé d'avoir une bonne connaissance de la notion de variable à valeur dans \mathbb{R} (variable réelle), dans C (variable complexe pour les séries scientifiques) ou dans \mathbb{N} pour les suites ou pour les cas discrets,

puis de l'intervalle avec ses bornes inférieures et supérieures sans oublier l'amplitude d'un intervalle et la différence entre intervalle fermé et intervalle ouvert à gauche ou à droite avec leurs notations. Aussi, l'élève doit définir la fonction, chose pas très évidente puisque sa définition fait toujours appelle à d'autres mots difficilement définissables comme la notion d'application. Dans ce premier bloc, l'élève doit pouvoir être capable de travailler avec les fonctions en respectant leurs domaines de définitions ; Il devra s'intéresser uniquement aux valeurs de x pour lesquelles la fonction f est définie c'est-à-dire au domaine de définition de la fonction f . Cette tâche est simple ou compliquée suivant le type de fonction à étudier surtout si elle est donnée de façon implicite. Dans tous les cas, le programme est clair, ici, il s'agit pour l'élève de déterminer les domaines de définitions de fonctions algébriques et non transcendantes jusqu'en seconde. Les fonctions à plusieurs variables ne sont pas au programme. Enfin, l'élève peut être conduit à étudier la parité et la périodicité de la fonction, prévoir si elle admet des axes ou un centre de symétrie.

3.4.2 Calcul de limite

La tâche qui vient après la détermination du domaine de définition est le calcul des limites. De quoi s'agit-il exactement ? Et à quoi doit-on s'attendre ? Les tâches données aux élèves sont complexes. Il faut dans un premier temps que l'élève arrive à mieux cerner les notions suivantes : variable prenant successivement des valeurs qui tendent vers un nombre fini ou infini, un infiniment petit, l'infini, la variable qui tend vers a à gauche ou à droite ; nous voyons que de façon implicite, il doit pouvoir être capable d'associer à la notion de variable celle de suite, de continuité et de limite, les suites et les sommes, la périodicité et la parité, les intégrales, le théorème de la valeur intermédiaire, le théorème des accroissements finis, le calcul différentiel pour les séries scientifiques. Cette tâche associe également, la construction de suite convergentes, et l'équivalence entre l'existence d'une limite et la convergence d'une suite. C'est difficile parce qu'on voit apparaître le signe *epsilon* dans certaines formules visant à définir une limite, des valeurs absolues et un certain rang à partir duquel la suite converge. Alors une fois que c'est claire pour x (la construction, la manière de l'approcher) quoi de plus simple que l'élève soit capable de l'appliquer à y ou $f(x)$. Ainsi, il va être amené à montrer que $f(x)$ tend vers telle valeur lorsque x tend vers une autre, à montrer que les limites ($f(x)$) sont finies ou infinies, à utiliser les propriétés des limites (somme, produits, quotient, composée), à lever l'indétermination pour trouver la valeur-limite correspondante ou pour trouver la vraie valeur que prend l'expression pour un x donné. L'élève doit utiliser les fonctions équivalentes (cas des polynômes, croissance comparée, théorème de gendarme et la règle de l'Hôpital) afin de trouver les asymptotes, les nombres dérivés, à prouver qu'une fonction est dérivable en un point, est continue ou tout simplement, admet une limite.

3.4.3 Sens de variations de la fonction

Suivant le type d'énoncé, les programmes demandent à l'élève de pouvoir être capable de montrer que la fonction est soit croissante (ou strictement croissante), soit décroissante (ou strictement décroissante) soit constante suivant les intervalles appropriés. Le problème peut le conduire à travailler sur des restrictions de f à un intervalle aussi à déterminer les extremums (minimum et maximum) tout dépendant des suites d'intervalles consécutifs dans lesquels on peut trouver des maximums ou des minimum absolue ou globaux. Il faut ici dire que le programme commande que l'élève fixe dans chaque intervalle le sens de

variation d'une fonction en calculant le taux de variation de la fonction à partir de variables fixées. Et d'en déduire les variations des fonctions associées à la première, connaissant les sens de variations de deux fonctions l'élève doit pouvoir aussi déterminer le sens de variation des composées de fonctions. Enfin, pour ce bloc, il est demandé à l'élève de résoudre graphiquement des inéquations à partir de variables fixées.

3.4.4 Dérivabilité

Il faut d'abord que l'élève mobilise la notion de dérivée d'une fonction à savoir : la dérivée en un point, le nombre dérivé, la dérivée à droite et la dérivée à gauche, la dérivabilité en un point et sur un intervalle I de \mathbb{R} , taux de variation et interprétation géométrique de la dérivée : qu'il comprenne que l'existence de la dérivée et l'existence de la tangente sont des conditions équivalentes, l'équation de la tangente et le cas particulier concernant les points anguleux, d'inflexion, de rebroussement et d'extremum. l'élève doit pouvoir être capable de faire une idée générale, un concept, un symbole, une vue d'ensemble (un effort personnel). Il doit pouvoir faire la distinction entre dérivée d'une fonction (outil) et la fonction dérivée (objet) et être capable de déterminer la dérivée d'une fonction composée. Ensuite il faut pouvoir calculer les dérivées au programme à savoir : la dérivée d'une fonction algébrique et transcendante en utilisant les propriétés relatives à la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un carré, d'une puissance, d'un quotient, de la réciproque d'une fonction donnée ainsi que les représentations graphiques associées, il faut calculer les dérivées des fonctions circulaires, les dérivées seconde et d'ordre trois, des fonctions composées enfin, l'élève peut être devant une détermination des dérivées partielles dans certains cas hors programme du secondaire et doit pouvoir étudier le signe de la dérivée pour déterminer les variations de la fonction d'une part et trouver les conditions de validation du théorème des accroissements finis et de Rolle. Certaines tâches peuvent l'amener à utiliser les différentes écritures du nombre dérivée afin d'interpréter intuitivement soit géométriquement, soit graphiquement l'existence d'une tangente parallèle à l'axe des abscisses ou d'un point c tel que $f'(c)$ soit égal au nombre dérivée sous les conditions imposées à la dérivée par le théorème de Rolle. Enfin il doit pouvoir être capable de montrer à partir de la dérivée qu'une fonction est soit constante, soit identiquement nulle, soit croissante ou décroissante.

3.4.5 Continuité

L'élève doit pouvoir être capable d'étudier la continuité ou la discontinuité en un point d'une fonction f définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à partir de la définition (domaine de définition), établir qu'une fonction est continue en tout point de cet intervalle et se familiariser avec la fonction polynôme qui est continue par évidence (donné et non démontré au secondaire) sur \mathbb{R} . Utiliser les propriétés des fonctions continues pour démontrer l'existence d'une valeur intermédiaire, tracer les représentations graphiques cartésiennes des fonctions (si le tracé est en un seul trait ou en plusieurs), vérifier si une fonction est paire, impaire en déterminant les coordonnées du centre de symétrie ou l'équation de l'axe de symétrie. Dans cette partie, lorsque la continuité d'une fonction est établie sur un intervalle, on étudie des fonctions de fonctions ou fonctions composées, cela conduit également au calcul intégral. Enfin, la mobilisation, il doit pouvoir résoudre des équations et des inéquations.

3.4.6 Propriété de certaines fonctions particulières

Les programmes considèrent cette partie comme celle de la modélisation. L'élève va déterminer et étudier les caractéristiques des fonctions particulières à savoir les fonctions logarithmes népériennes, les logarithmes décimaux, les fonctions exponentielles et leurs applications à savoirs : la fonction exponentielle comme réciproque de la fonction logarithme népérienne, les fonctions puissance, le calcul des intérêts composés, l'annuité (de placement ou de remboursement, d'amortissement), les fonctions circulaires, les lois de probabilités, les courbes paramétrées.

3.4.7 Primitives, intégration

L'élève est amené à déterminer la ou les primitives de fonctions avec ou sans conditions initiales. Il doit pouvoir faire attention à la notion primitive (cadre général) et fonction primitive qu'il doit pouvoir déterminer. Il faut utiliser les règles tirées du calcul des dérivées et d'autres techniques de calcul pour déterminer les primitives de différentes fonctions. Connaître par cœur le tableau de primitives simples. Ensuite, il faut être à mesure d'utiliser les primitives pour le calcul d'aire qui fait intervenir la notion de continuité, de croissance et de positivité de l'intégrale pour déterminer l'aire limitée par deux courbes, de généraliser la formule relative aux aires suivant le signe de $f(x)$ dans le premier cas et selon les repères et des variations de f . Il faut ensuite que l'élève puisse calculer les volumes d'une pyramide, d'un tronc de pyramide, d'un polyèdre, d'un cône ou d'un tronc de cône, d'une sphère, d'un segment sphérique, d'un segment à une base, d'un solide de révolution, il faut connaître la formule des trois niveaux (qui permet de calculer le volume d'un solide déformé dans le cas d'un axe oblique par rapport aux plans sécants)(cf. annexe. M page 256). Dans le calcul intégral, l'élève doit être capable de définir l'intégrale en la rattachant à sa représentation par l'aire limitée par une courbe. Calculer les limites de l'intégrale lorsque le résultat dépend de n comme c'est souvent le cas dans des tâches proposées en terminale C , écriture d'une intégrale indéfinie, calculer une intégrale avec changement de variable, par intégration par partie, utiliser d'autres techniques de calcul intégral, la rectification d'une courbe et sa formule pour les courbes gauches, calculer la longueur d'une courbe en coordonnées polaire (terminales scientifiques). Enfin, on va dans cette tâche être amené à résoudre des équations différentielles linéaires du premier et du second ordre.

3.5 Les tâches, ostensifs et connaissances au programme

Pour répondre à la question : « de quoi est faite une technique donnée ? de quels « ingrédients » se compose-t-elle ? Et encore : en quoi consiste la « mise en oeuvre » d'une technique ? » Chevallard et Bosch ont introduit le concept d'Ostensif et de non-ostensif

Nous parlons d'objet ostensif – du latin ostendere, « montrer, présenter avec insistance » – pour nous référer à tout objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait, acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible. Ainsi qu'en est-il d'un objet matériel quelconque, et notamment, de ces objets matériels particuliers que sont les sons (parmi lesquels les mots de la langue), les graphismes (parmi lesquels les graphèmes permettant l'écriture des langues naturelles ou constitutifs des langues formelles), et les gestes.

Nous présentons dans le paragraphe qui suit le résumé de tous les ostensifs que nous avons pu identifier dans les nouveaux programmes. Nous nous sommes appuyé sur les nouveaux outils pour les mathématiques *CM1* cycle 3, programme 2016, sésamaths, programme 2019 cycles 3,4 et lycée, math'x programme 2011 première *S*, programme 2012, 2016 terminale *S*, Cian 2014, l'excellence en mathématiques seconde *A* et *SES* programme du Cameroun, collection Terracher terminale *S*, le manuel maths collection édition hachette, kiwi, Zéniu troisième édition Magnard.

Les ostensifs par lesquels sont données les fonctions, dans ces ressources actuellement sont : Les symboles - les écritures - les notations - les graphes - tableaux numériques - graphiques cartésiens - les équations et les notions (Limite, plus ou moins l'infini, dérivabilité et continuité, asymptotes). On retrouve dans les manuels scolaires, des généralités sur les fonctions, en collège et lycée et les mots suivants qui nous placent directement dans le champ conceptuel des fonctions, notion de fonction : ensemble de définition, coïncidence de deux fonctions sur un ensemble, restriction, composition, injection et surjection ; bijection réciproque, composée de bijections. Ensuite, on retrouve le titre : fonctions représentation graphique, image directe et réciproque d'un intervalle (étude graphique), maximum, minimum d'une fonction sur un ensemble, sens de variation, opérations, fonctions associées et représentation graphique, comparaison de fonctions, fonctions majorées, minorées, bornées. Représentation graphique de deux bijections réciproques, parité, périodicité, éléments de symétrie d'une courbe, ensemble d'étude d'une fonction. Juste après on retrouve le titre : Étude de fonctions numériques, dont le premier sous-titre est : limites ; (notion, limite à gauche, limite à droite, limites de fonctions élémentaires, propriétés de comparaison, opérations, limites à l'infini de fonctions polynôme ou rationnelle, limite infinie en a , limite à l'infini, composition, fonction monotone sur un intervalle ouvert, forme indéterminée la continuité étant le second sous-titre des limites (Notion de continuité, prolongement par continuité, continuité en a , critère de continuité, continuité sur un intervalle, opération, compositions, image d'un intervalle, théorème des valeurs intermédiaires, fonction strictement monotone, fonctions puissance d'exposant rationnel, prolongement par continuité).

Les grandes familles de tâches

Dans les deux systèmes éducatifs, en étude de fonctions les élèves éprouvent des difficultés à résoudre des problèmes portant sur des tâches faisant appel aux fonctions (voir résultats de l'étude réalisée à Besançon, à Toulouse, à Montpellier et à Libreville dans le chapitre expérimentations. C'est pourquoi, nous avons cherché à savoir si ce qu'on leur demande de faire est au-dessus de leurs connaissances (de leurs potentialité). Nous allons donc dans le paragraphe suivant analyser, dire et écrire ce qui est dans les programme car, il y a trop à dire et à écrire. Singulièrement, notre observation est la suivante : Les élèves sont plus en difficultés devant des tâches où les questions sont dépendantes et successives. Ces tâches sont construites autour des connaissances suivantes :

1. les définitions et généralités de la notion de fonction ;
2. les variables et fonction ;
3. les limites ;
4. le sens de variation d'une fonction et sa représentation graphique cartésienne ;
5. le tableau de valeurs ;
6. l'expression analytique, l'expression algébrique ;

7. la dérivabilité, la continuité, l'intégration ;
8. la résolution des équations, l'optimisation, la modélisation ;
9. les suites et les propriétés de certaines fonctions particulières.

Le parcours de toutes ses connaissances dans une même tâche pose énormément de difficultés aux candidats lors de la résolution du problème sur les fonctions du baccalauréat.

3.6 Les cadres mathématiques qu secondaire qui évoquent les fonctions

sources : Roger Caratini, *Bibliothèque pratique de l'enseignant, mathématiques, Bordas, Paris 1985, ISBN 2-04-012207-9, Volume de l'édition remanié de : Les nombres et l'espace, il a été publié pour la première fois aux Éditions Bordas en 1971, dans la collection « Bordas-Encyclopédie », Le manuel Sésamaths avec ses compléments numérique et le livre de mathématiques Ciam de la classe de sixième en classe de seconde*

3.6.1 La géométrie

La notion de fonction est utilisée en géométrie qui se définit aujourd'hui comme science de la mesure et de la position des figures dans l'espace. Ib. P11. Elle a été développée dans un monument de perfection trente-cinq propositions fondamentale (axiomes au sens large), un important corpus de corollaire établi. Les corollaires, c'est-à-dire les règles et définitions de base de la géométrie semblent sans reproche. La difficulté : les problèmes de géométrie sont difficiles à résoudre, car il n'existe pas de méthode générale de résolution pour les traiter. Autrement dit, chaque problème exige qu'on invente une méthode de résolution. C'est ce que se propose de faire dans certaines conditions, la fonction telle que retrouvée dans les programmes du secondaire. En effet plusieurs problèmes posés dans le cadre géométrique trouvent des solutions avec les fonctions.

3.6.2 L'arithmétique

Nous retrouvons des notions indispensables au domaine des fonctions construite en arithmétique. Simplement, pour comprendre ce qu'est ce cadre qui nous semblent étroitement lié aux autres et qui occupent une place assez importante dans les programmes du secondaire, regarder comment il a été construit par l'histoire des mathématiques. Dans le livre de Roger Caratini à la page 7 à 15 ou nous trouvons le titre *Théorie des ensembles, arithmétique, algèbre* De façon chronologique, il s'est agi :

1. des problèmes de numérotations : c'est Archimède qui, dans l'arénaire, généralise le procédé de la notation par myriade et laisse entendre que la suite des nombres ainsi notés peut être prolongée indéfiniment. (10.000) fois (10.000) donne (100.000.000) donc 10^8 .
2. importance des entiers naturels : avec au début les Pythagoriciens (système attique), qui représentaient les nombres entiers par des points, qui selon leur disposition, permettaient de parler de nombres linéaires, carrés, triangulaires, oblongs, rectangulaire, tétraédrique, palindromes, ou simplement nombre figuré contraire de promèque.
3. l'infini : les mathématiciens grecs n'ont raisonné que sur les nombres entiers sans se poser la question de leur infinité. Ils y pensaient mais s'en méfiaient, n'étant pas

capable de préciser le concept. Euclide dans son livre VII, Proposition 35; op. cit., p. 206) dit à ce sujet :« tant de nombres qu'on voudra étant donnés, trouvez les plus petits de ceux qui ont la même raison (le même rapport) avec eux », Archimède aussi a eu l'intuition de l'infini numérique.

4. les nombres irrationnels : issue du fait que les pythagoriciens se sont retrouvé obligé d'avouer que la diagonale était *incommensurable avec le côté du carré*.

Le cadre de la théorie des nombres peut être défini comme le corpus, l'ensemble convenablement ordonné des comparaisons des nombres, de la recherche de leurs diviseurs, de leurs multiples, d'étude de leur caractère premier ou non, de leurs propriétés et la description de leurs propriétés, leur représentation par des segments de droite, et leurs constructions géométrique. Dans la mesure ou la géométrie, est certaine, elle confère donc à la théorie des nombres cette certitude. Bombelli et Descartes ont insisté sur la signification géométrique des opérations sur les nombres. Exemples : tracer un segment unité, ensuite deux autres tels que le premier mesure a et le second b . Calculer la somme $c = a + b$, la différence $d = a - b$ ou $b - a$, le produit ab ou la racine de a se fait en manipulant les segments de longueurs $aetb$. Une fois cette correspondance assurée, le mathématicien peut calculer à loisir et faire confiance à la combinatoire numérique : elle ne le trahira jamais, puisqu'elle est le reflet abstrait de la géométrie.

Lorsqu'on parle du nombre, nous pensons immédiatement au cadre de la théorie des nombres qui commence avec le grand théorème de FERMAT qui avait affirmé en 1630, que l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'admet aucune solution entière non nulle lorsque n est supérieur à 2. Est ce qu'on trouve des tâches au programme visant à générer une liste de nombres à un niveau du secondaire ? Oui à travers des expressions littérales (le cadre algébrique) qui sont représentées comme quelque chose (une relation) qui permet à un élève de cinquième ou de classe de quatrième de créer une liste de nombres à partir d'une autre liste de nombres et si nous poussons notre analyse plus loin, en considérant x^n comme une fonction et y^n comme une autre fonction, la fonction z^n qui est construite à partir des deux premières donc à partir de leur somme est-elle aussi enseignée ? Du moins, une telle construction, on retrouve des fonctions de la forme ax et d'autres de forme x^2 mais aussi des fonctions de forme générale $ax + x^2$. Qu'est ce qui change et pourquoi cela nous intéresse tant ? C'est tout simplement la façon donc une fonction peut être fabriquée, soit à partir des nombres ou soit à partir d'autres fonctions.

Lorsque Euler en 1740 parle des partitions des entiers : exemple la partition de n en k parts, on peut se poser la même question de l'existence d'une fonction issue de la recherche d'une fonction p tel que : $p(n) = p(n - 1, k - 1) + p(n - k, k)$ et d'une autre égale au rapport $\frac{p(n+1)}{p(n)}$ cette manière de travailler sur les nombres peut permettre aux élèves de pouvoir additionner ou multiplier deux suites ce qu'on appellera plus tard, les séries formelles définies par : $U(x) = u_0 + u_1x + u_2x^2 \dots + u_nx^n \dots$ avec $u(n)$ une suite numérique quelconque. On peut aussi parler de waring « En théorie des nombres, le problème de Waring, proposé en 1770 par Edward Waring qui consiste à déterminer si, pour chaque entier naturel k , il existe un nombre s tel que tout entier positif soit somme de s puissances k -*imes* d'entiers positifs. La réponse affirmative, apportée par David Hilbert en 19093, est parfois appelée théorème de Hilbert-Waring[?]. » Nous voulons tout simplement montrer qu'il existe un cadre dans lequel il est possible de mettre par construction des fonctions arithmétiques et bien d'autres ayant pour arguments une ou plusieurs autres fonctions. Pour le moment le plus important est de démontrer l'existence de telle constructions de fonctions arithmétiques dans un cadre ou les nombres sont les éléments avec lesquels toute construction est possible. Nous ne pouvons pas quitter le cadre des nombres sans pour autant dire un mot

sur les travaux de DEDEKIND qui en 1888 dans son « Was sind und was sollen die Zahlen (Que sont et que doivent être les nombres.) » construit l'ensemble \mathbb{N} et d'autres encore. Ce qu'il faut surtout regarder, c'est la construction d'un ensemble formé de nombres ayant une certaine régularité. Les fonctions sont enseignées au secondaire dans ce cadre.

3.6.3 L'algèbre

Les expressions algébriques sont utilisées pour définir et pour étudier plusieurs fonctions au secondaire. L'algèbre est à l'origine une arithmétique selon Diophante, une succession de problèmes, dans lesquels on doit trouver un nombre inconnu x , rattaché à des quantités connues par certaines relations. En d'autres termes, le nombre x est donné par une équation que Diophante nous enseigne à résoudre. Nous voyons dans les exemples que Diophante donne qu'il part : de la dépendance des tâches successives :

1. de la théorie des nombres : « tous les nombres sont formés d'une certaine quantité d'unités, op.cit.,p.1, »
2. du calcul d'un nombre inconnu qu'il désigne par « arithme », contrairement à Euclide dont le problème était de déterminer les propriétés d'un ou de plusieurs nombres
3. de la définition axiomatique des entiers comme ensemble possédant deux lois opératoires : l'addition et la multiplication et dont les éléments peuvent être comparés par des relations « plus grand que, plus petit que, égale » inconnue (voyelle), connue, paramètre (consonne) ;
4. il admet que les fractions et les quantités irrationnelles peuvent être traitées comme des nombres, c'est-à-dire introduite dans les calculs sans se poser la question de cette assimilation. Toutefois, il n'a pas compris que les entiers, les rationnels et les irrationnels constituent un ensemble homogène (l'ensemble des réels), il n'a pas établi les axiomes qui permettent cette généralisation. Cette manière hâtive et naïve va obliger Cauchy à construire « une théorie des réels » généralisant et consolidant la théorie des entiers d'Eudoxe et d'Euclide.

Les Arabes et les Persans, avec al-Harizmi et Umar Hayyam sont d'un apport formel, hérité des Indiens (la numération décimale de position, l'usage du trait de fraction entre le numérateur et le dénominateur, le calcul automatique. Ils perfectionnent les méthodes algébriques de Diophante relatives aux équations du premier et du second degré (apport purement technique) il faut l'avouer, les méthodes de Diophante sont quand même assez difficile. Il n'y a aucun progrès théorique, les mathématiciens indiens invente le zéro comme un nombre et nom comme un symbole de numération et se servent du nombre négatif.

Un nombre est désormais considéré comme un être mathématique dans le cadre de l'algèbre. On peut sur lui faire deux opérations l'ajouter à ou le multiplier par un autre nombre. On peut dire que toute la symbolique moderne y est née : les expressions littérales, le calcul littéral, les opérations telles que la division de deux nombres entiers dont le diviseur est plus grand que le numérateur sont désormais possible à condition qu'il soit différent de zéro (les fractions). Euclide et les autres ont certes utilisés les fractions, mais ils ne les considéraient pas comme des nombres, Euclide les appelait des rapport qui peuvent être considéré aujourd'hui comme des opérateurs c'est à dire comme des processus qui à un nombre N entier fait correspondre un autre nombre entier N' . Ils n'ont pas justifiés cette extension d'une manière logique.

Gérard de Crémone ou Léonard de Pise au $XIII^e$ siècle (traducteurs), ont transmis l'héritage gréco-arabe à l'Occident et, l'algèbre, peu à peu, se définira comme la science qui

permet de résoudre des équations (une phrase par laquelle on exprime qu'une quantité inconnue est reliée à des quantités connues), en utilisant un symbolisme opératoire (les abréviations car le calcul verbal est très difficile à manier. Les calculs de plus en plus compliqués sont désormais possibles à faire sans trop de difficulté, l'usage des lettres représentant des nombres quelconques, connus ou inconnus donna au calcul algébrique une plus grande généralité. C'est une partie de l'histoire de l'algèbre qu'on peut reconnaître les mathématiciens de la Renaissance.

3.6.4 Tableau récapitulatif des apports à la construction du cadre algébrique

origine	apport	année
Nicolas Chuquet	le nombre est précédé du signe, règle de signes et de puissances	1484
Johann Widmann	+ou- pour marquer le surplus	1489
les Italiens	nomment l'inconnue cosa chose, res en latin, co, cu =	1494
Ch.Rudolff	coss(algèbre), symbole racine carré et cubique	1524
Stifel	progressions, exposant négatif	1544
Stifel	représente les inconnues par les lettres A, B, C... AA signifie A ²	1544
Simon Stevin	puissance notée à l'aide d'un cercle	1585
François Viète	symbolisme algébrique moderne, inconnue (voyelle), connue, paramètre (consonne)	1591
Descartes	perfectionnement de la symbolique algébrique	1619

Après les notations, le symbolisme, l'algèbre se fait avec les nombres et les opérations sur les nombres. la résolution des équations, dès que l'on quitte le domaine des problèmes concrets pour aborder les cas généraux, impose de considérer d'autres nombres que les nombres entiers positifs, les nombres réels et imaginaires. À partir de cet instant, la notion de nombre évolue, « il n'est plus nécessaire, pour qu'une notion soit appelée nombre, qu'elle représente quelque chose (qu'elle serve à compter des objets concrets ou à mesurer des longueurs géométrique ; il suffit qu'on puisse faire sur elle certaines opérations fondamentales ».

Le cadre algébrique se définit comme le cadre de la théorie des équations ou les inconnues sont désignées par les dernières lettres de l'alphabet x, y, z, \dots . Les quantités connues par les premières lettres de l'alphabet selon Descartes qui a perfectionné le symbolisme de Viète, les opérations par les symboles $+, -, x$, et par la barre de fraction, la notation exponentielle et celle des radicaux, des extractions de racines. On retrouve toutes les équations du premier, du second, du troisième et du quatrième degré pour l'enseignement du collège et du lycée, les techniques de résolutions des équations font aussi partir du cadre algébrique. On admet pour les besoins des calculs et pour la résolution des problèmes, les nombres négatifs et les nombres imaginaires, car personne n'a su encore déterminé leur équivalent géométrique, qui leur donnerait la même garantie axiomatique qu'aux nombres

positifs. (entiers, fractionnaires ou irrationnels)

3.6.5 En quoi ce cadre algébrique nous intéresse ?

Nous pouvons répondre par une phrase : Il s'agit de la théorie des équations et leurs méthodes de résolution, la fonctionnalité et la dépendance entre x et y . Descartes, en inventant la géométrie analytique en 1637, crée une méthode permettant de traduire algébriquement, par des équations, les propositions géométriques, une découverte à laquelle a participé le Français Fermat dans l'existence d'un lieu comme le montre son idée à savoir :

Toutes les fois que dans une équation finale, on trouve deux quantités inconnues on a un lieu, l'extrémité de l'une d'elle décrivant une ligne droite ou courbe[59]. (Fermat, Œuvres 3, 1896, P. 85)

Il ne s'agit pas selon Roger Caratini d'un progrès méthodologique, mais un grand pas en avant vers l'unification des mathématiques. Qu'est-ce qui peut bien unifier toutes les mathématiques en une seule ?

Avant de répondre à cette question regardons comment les choses ont évolué après Descartes. L'analyse infinitésimale est inventé par Leibniz et Newton simultanément , l'histoire sus mentionnée raconte que les premiers éléments de ce calcul avaient été posés quelque deux mille ans auparavant par Eudoxe et Archimède (méthode d'exhaustion : exemple l'aire du disque est proportionnelle au carrée du diamètre). Ce n'est pas ce qui nous intéresse. Plutôt la naissance des fonctions et de l'analyse.

3.6.6 L'Analyse

Ce cadre peut simplement se définir comme un élargissement du champ de l'algèbre traditionnelle et de la géométrie analytique. Il porte sur des grandeurs infiniment petites et non sur les nombres réels et imaginaires et il est l'auxiliaire indispensable de l'étude des fonctions d'une variable réelle. elle permet de résoudre des problème posés dans le cadre algébrique, mais aussi d'autres problèmes tels que ceux mettant en œuvre des équations différentielles, le calcul intégral, le nombre i introduit par Euler. Le nombre i a une portée importante en analyse ainsi qu'en algèbre, dans les calculs trigonométriques.

3.6.7 La théorie des ensembles

Pour ce travail, il s'agit des ensembles qu'on étudie dans le cadre scolaire « ensemble de points possédant une même propriété » et d'ensemble de valeurs d'une variable comprise entre deux limites a et b finies ou infinies. Le point pouvant représenter n'importe quel objet étudié.

Après l'annonce de la théorie des idéaux par DEDEKING, en 1871 Georg CANTOR dans son premier mémoire annonce la théorie des ensembles. Pour ne pas aller dans les détails inutile pour ce travail, il s'agit à nouveau d'un cadre d'étude finement construit et qui sera bien évidemment suivi des travaux de PEANO ébauche de la théorie de la mesure des ensembles, de LEBESQUE qui introduit la notion de fonction mesurable de l'axiomatisation en logique de premier ordre de ZERMELO qui avait permis d'éclaircir le concept d'ensemble et permet sa généralisation au cadre des fonctions en étant capable de passer d'une classes à une autre, d'un ensemble de définition à un autre qui peut être une fonction, un nombre ou autre chose. ici nous pouvons étendre cette conception en partant d'un ensemble de fonctions à un autre constitué de nombres. C'est déjà possible

de concevoir l'existence de telle construction.

Pour définir une fonction ou du moins pour l'étudier, on fait souvent appel en premier à deux ensembles. la plupart du temps au secondaire à deux ensembles de nombres.

3.7 Les cadres qui interviennent au cycle 3

3.7.1 Cadre d'étude au quatrième cycle du secondaire

Nous présentons uniquement les cadres d'étude du quatrième cycle, le but ici est de chercher à comprendre comment les cadres sont construits au collège de façon hiérarchique. Nous avons un sérieux problème qui est celui de savoir quel cadre est construit avant l'autre est ce que l'algèbre est antérieure à l'analyse, à la géométrie, à l'analyse de données, aux « calculus ratiocinator », etc. Mais surtout, la fonction à quel moment intervient-elle dans nos programmes ? Avant, pendant ou après la construction des autres cadres. Nous voulons savoir si la notion de fonction est introduite comme méthode algébrique pendant qu'on construit les objets à ce cadre ou un instrument extérieur qui appartiendrait à un autre cadre et qui est évoqué par l'algèbre pour faciliter la résolution de certains de ses problèmes de manière efficace. Le polynôme du premier degré le plus général, $y = ax + b$ avec a non nul, définit pour toutes les valeurs de x appartenant à \mathbb{R} UNE FONCTION f , appelée fonction polynôme. Une fois ce problème posé, le polynôme renvoyant au cadre algébrique, le même polynôme définissant une fonction, alors, la fonction serait-elle un constituant du cadre algébrique ? Nous pensons en seconde analyse que non et ce en nous plaçant du point de vue épistémologique. Mais comment cette réalité est-elle présentée dans nos programmes ?

3.7.2 Progression du cycle 4

ostensif	cadre scolaire	cadre mathématique	références
Nombre, nombres décimaux	décomposition, nom des chiffres, repérage sur une droite, droite graduée, comparaison et rangement, addition, soustraction, multiplication (per gélosia, russe, égyptienne), division euclidienne (avec un tableur), recherche de diviseurs, calcul sur les durées	théorie des nombres (arithmétique), algèbre	p.15, R p7
opération	les quatre opérations	logique abstraite, arithmétique, algèbre	p 15
fractions, nombres décimaux	fraction et partage, nombre fraction, comparaison, encadrement, décomposition d'une fraction, droite et demi-droite graduée	théorie des nombres (arithmétique), algèbre	p 38-39
Proportionnalité	grandeurs proportionnelles, calculs dans une situation de proportionnalité, pourcentage	théorie des nombres (rapport et proportions, moyennes), fonctionnel	p.93
gestion des données	tableaux, représentation graphique et interprétation, graphique cartésien un graphique cartésien permet de représenter l'évolution d'une grandeur en fonction d'une autre, diagramme en bâtons ou en barres, circulaire, semi circulaire	théorie des nombres, fonctionnel	p.105
éléments de géométrie	droites, demi-droite, segment, points alignés, droites sécantes, distances et cercles, longueur d'un segment, milieu d'un segment, droites, triangles, symétrie axiale (transformation), quadrilatères, parallépipède, perspective cavalière, patron de pavé droit	Géométrie, fonctionnel	p.117
Angles	notion, type d'angle, utilisation du rapporteur, bissectrice d'un angle	trigonométrie	p.219
Périmètre, aire et volume	unité d'aire, périmètre et aire de figure particulière, volume d'un solide, unité de volume (m^3 et de capacité L)	géométrie, fonctionnel	p.247

notions	cadres au programme	cadre dans l'histoire	ostensifs au programme	niveau
Nombres	arithmétique, géométrie, algèbre	nombres, algèbre	les quatre opérations, tableau de valeurs, tableur, repère, graphique (p.51 et une photo de Descartes liée à l'invention des coordonnées dans le manuel de cinquième à la page 53), les expressions littérales, les figures géométriques, barre de fraction, mots, calculatrices,	tout le cycle
calcul littéral	algèbre	algèbre	expression littéral	tous le cycle
Proportionnalité	nombres	nombres, algèbre, fonctionnel	nombres, tableau de valeurs, graphique,	tous les niveaux
Statistique	statistique	statistique	nombres, tableau, diagramme	tous les niveaux
symétrie, triangle, parallélogramme, angle	géométrie	géométrie	tableau	tous les niveaux
Prismes et cylindres	géométrie	géométrie	figures	tous les niveaux
aire, périmètre, volume	géométrie	géométrie	nombres, lettres	tous les niveaux
Puissances et grandeurs	nombres, algèbre	algèbres, nombres	tableau de valeurs, nombres et lettres	4 ^e et 3 ^e
équation et ordre	algèbre, nombre	algèbre	nombres, lettres, tableau de valeurs, figures géométriques	4 ^e et 3 ^e
distance et tangente	géométrie	topologie, analyse	points, droites, nombres	4 ^e et 3 ^e
cosinus, pyramide et cône	trigonométrie, géométrie dans l'espace	trigonométrie, géométrie dans l'espace	figures, nombres, lettres, <i>cos</i> , <i>sin</i> , <i>tan</i>	
racine carré, inégalité,	algèbre, nombres et ana-	algèbre, nombre et analyse	nombres, tableau, expressions algébrique	troisième

Programmes de première

En première, l'unique notion qui est abordée en France et non en Afrique francophone est celle de la fonction exponentielle qui est étudiée tôt en France. Les points communs et les différences sont consignés dans le tableau ci-dessous.

Première	En France		En Afrique francophone	Notions singulières
	Programme	Concepts abordés	Programme	Concepts abordés
	<p>Étude de fonctions</p> <ul style="list-style-type: none"> - Fonction racine carrée, fonction valeur absolue - Variations, représentations graphiques. - Transformations de fonctions (translation, homothétie), composition avec la fonction racine carrée, inverse, . <p>Dérivation</p> <ul style="list-style-type: none"> - Nombre dérivé d'une fonction en un point. - Tangente à la courbe représentative d'une fonction dérivable en un point - Fonction dérivée, dérivées des fonctions usuelles connues, dérivées d'une somme, d'un produit, d'un quotient. - Lien entre signe de la dérivée et variation de la fonction, extremum. 	<p>Transformation</p> <p>Composition</p> <p>Dérivation</p> <p>Restriction</p> <p>Injection</p> <p>Surjection</p> <p>Limite</p> <p>Continuité</p> <p>Prolongement</p> <p>Exponentielle</p> <p>Rationnelle</p> <p>Etude</p> <p>Tangente</p> <p>Approximation</p>	<p>Fonctions</p> <ul style="list-style-type: none"> - Généralités : fonction et application, - Restriction, prolongement d'une fonction, - Composition de fonctions <p>Applications particulières</p> <p>Injection, surjection, bijections, bijection réciproque d'une bijection, composé de deux bijections</p> <p>Fonctions numériques</p> <p>Opérations sur les fonctions, fonctions associées, comparaison de fonctions : minoration majoration, représentations graphiques de deux bijections réciproques,</p> <p>Limites et continuité</p> <ul style="list-style-type: none"> - Approche intuitive de la notion de limite : limite d'une fonction en l'infinie, en x_0, limite finie, limite à gauche, limite à droite, limite de fonctions usuelles - Calcul de limites : propriété de comparaison, encadrement, comparaison de limite, opérations sur les limites (fonction polynôme, rationnelle, racine carée - Continuité : définition et propriété, continuité en x_0 de fonctions élémentaires, prolongement d'une fonction par continuité, <p>Dérivation</p>	<p>Fonction</p> <p>Transformation</p> <p>Composition</p> <p>Dérivation</p> <p>Restriction</p> <p>Injection</p> <p>Surjection</p> <p>Limite</p> <p>Continuité</p> <p>Prolongement</p> <p>Rationnelle</p> <p>Etude</p> <p>Tangente</p> <p>Approximation</p>

	<p>Composition de fonctions et dérivation</p> <p>Variations et courbes représentatives d'une fonction</p> <ul style="list-style-type: none"> - Variation d'une fonction - Nombre dérivé et extremum locaux <p>Fonction exponentielle</p> <ul style="list-style-type: none"> - Propriétés algébriques - Nouvelle notation de e - Lien avec les suites géométriques - Propriétés analytiques - Courbe représentative de fonctions exponentielles <p>Fonctions trigonométriques</p> <ul style="list-style-type: none"> - Repérage sur le cercle trigonométrique - Cordonnées d'un point du cercle trigonométrique - Fonctions cosinus et sinus <p>Suites</p> <ul style="list-style-type: none"> - Mode de génération d'une suite. - Suite arithmétique, suite géométrique <p>p. 111-222 111 pages</p>		<ul style="list-style-type: none"> - Dérivation en x_0 : nombre dérivé d'une fonction en x_0, interprétation graphique, dérivabilité et continuité en x_0, dérivabilité à gauche et à droite, demi tangente parallèle à l'axe des ordonnées, fonction dérivée - Calcul de dérivées : fonctions élémentaires, cos et sin, dérivée et opérations sur les fonctions - Application de la dérivation : sens de variations d'une fonction, extrémum relatif d'une fonction, approximation d'une fonction par une fonction affine, application aux calculs numérique <p>Etudes de fonctions</p> <ul style="list-style-type: none"> - Généralités sur les fonctions : parité, périodicité, éléments de symétrie, notion d'asymptote - Fonction polynôme, fonctions rationnelles - Fonctions trigonométriques 	
--	--	--	--	--

Programmes de Terminale scientifique en en MPSI

En terminale scientifique S ou C , le programme est le même en France et en Afrique francophone. Le même constat est fait pour les programmes sur les fonctions de classes préparatoires scientifiques filière Mathématique Physiques, Sciences pour l'ingénieur (MPSI).

.

Terminale	Programme en France	Concepts abordés	Programme en France en Afrique francophone	Concepts abordés
	<p>Limites et continuité</p> <ul style="list-style-type: none"> - Limites en l'infini : limite finie, limite de fonction élémentaires - Limite en un point - Opération sur les limites - Déterminer une limite par encadrement et par comparaison <p>Continuité d'une fonction</p> <ul style="list-style-type: none"> - Continuité en un point - Continuité sur un intervalle - Propriété de la continuité : théorème, dérivabilité et valeurs intermédiaires <p>Convexité</p> <ul style="list-style-type: none"> - Convexité d'une fonction : sécantes, convexité et concavité, fonctions 	<p>Primitives Logarithme Népérien Intégrale Linéarité Positivité Relation de Chasles Valeur moyenne Fonctions convexes</p>	<p>Limite et continuité</p> <ul style="list-style-type: none"> - Limites d'une fonction - Etude d'une branche infinie - Continuité d'une fonction <p>Dérivation, étude de fonctions</p> <ul style="list-style-type: none"> - Dérivation - Etude de fonctions <p>Primitives, fonction logarithme népérien</p> <ul style="list-style-type: none"> - Primitive d'une fonction - Fonction logarithme népérien - Fonction comportant Ln - Logarithme décimal <p>Fonctions exponentielles fonctions puissances</p> <ul style="list-style-type: none"> - Fonction exponentielle - Fonction comportant exp - Fonctions puissances <p>Suites</p> <p>Intégration</p> <ul style="list-style-type: none"> Intégration d'une fonction continue Techniques de calculs intégrales Applications du calcul intégral <p>Equations différentielles</p> <p>p. 193-295 102 pages</p>	<p>Fonctions convexes Primitives Logarithme Népérien Intégrale Linéarité Positivité Relation de Chasles Valeur moyenne</p>

	<p>usuelles, position par rapport aux sécantes, concavité,</p> <ul style="list-style-type: none"> - Fonctions convexes et dérivées première et seconde - Tangente et point d'inflexion - Dérivée seconde et tangente - Point d'inflexion <p>Fonction logarithme népérien</p> <p>Primitives et équations différentielles</p> <p>p. 49-276 227 pages</p>			
--	--	--	--	--

Les fonctions en CPGE filière MPSI

Partie	Chapitre		
Techniques de calculs	Fonctions d'une variable réelle p.73	1. Inégalités dans \mathbb{R}	<ul style="list-style-type: none"> - Opérations et relation d'ordre (Partie positive (resp. Négative) de x, Valeurs absolues de x) - Inégalité triangulaire (intervalle, partie minorée, majorée, bornée)
		2. Généralité sur les fonctions	<ul style="list-style-type: none"> - Définition : Une fonction est la donnée d'un ensemble de départ I, d'un ensemble d'arrivée J et d'une correspondance qui à tout élément x de l'ensemble I associe un unique élément de l'ensemble J. - Graphe - Parité - Périodicité - Fonction croissante, décroissante, monotone. - Fonction minorée, majorée, bornée, maximum, minimum - Composée de deux fonctions - Fonction bijective, réciproque
		3. Dérivation	<ul style="list-style-type: none"> - Dérivation : fonction dérivable, taux d'accroissement, limite, dérivée, équation de la tangente, opérations sur les dérivées, - Théorème de dérivabilité de la fonction réciproque - Fonction dérivable et sens de variations (croissance, décroissance, constante)
		4. Fonctions usuelles	<ul style="list-style-type: none"> - Fonctions usuelles : logarithme népérien (définition et propriété), propriété de la fonction \exp, propriété de la fonction puissance, théorème de croissance comparée - Fonction cosinus, sinus et tangente (propriétés des fonctions trigonométriques, cas d'égalité des fonctions trigonométriques), fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, tangente hyperbolique
		5. Fonctions à valeurs complexes	<ul style="list-style-type: none"> - Dérivabilité - Opérations sur les dérivées
Méthodes	<ul style="list-style-type: none"> - Savoir dériver une fonction - Savoir étudier une fonction (ensemble de définition, restriction de f), parité, périodicité, dérivabilité, calcul de la dérivée, tableau de signe, de variations, valeurs particulières de f, limites, allure du graphe de la fonction, asymptotes, tangentes, - Exploiter les dérivées pour montrer une égalité, une inégalité. Savoir montrer qu'une fonction est bijective : méthode pratique ; méthode théorique - Savoir dériver la réciproque d'une fonction bijective - Savoir résoudre une équation trigonométrique - Savoir manipuler les fonctions trigonométriques réciproques. 		
Analyse réelle	Ensembles de nombres		

Suites réelles			
	Limites et continuité	1. Généralité	<ul style="list-style-type: none"> - Voisinage, notion de limite - Unicité de la limite - Fonction bornée au voisinage de a - Caractérisation séquentielle de la limite - Opérations sur les limites - Passage aux limites des inégalités larges - Théorème des gendarmes (ou d'encadrement) - Théorème de la limite monotone
		2. Continuité	<ul style="list-style-type: none"> - Fonction continue en a, à gauche (à droite) - Prolongement par continuité - Caractérisation séquentielle de la continuité - Opérations sur les fonctions continues
		3. Image d'un intervalle par une fonction continue	<ul style="list-style-type: none"> - Théorème des valeurs intermédiaires et corollaire - Application bornée - Application continue et injective (monotone) - Continuité de la réciproque
		4. Extension aux fonctions complexes	<ul style="list-style-type: none"> - Limite en a de $f(x)$
Méthode à maîtriser : Savoir déterminer la limite d'une fonction, exploiter la caractérisation séquentielle, exploiter la définition de la limite, savoir étudier la continuité d'une fonction, exploiter le théorème des valeurs intermédiaires, savoir montrer qu'une fonction admet un maximum sur un segment, savoir généraliser des énoncés à l'infini			
	Dérivation	1. Dérivée en un point, fonction dérivée	<ul style="list-style-type: none"> - Définition - Développement limité à l'ordre 1 - Opération sur les dérivées - Théorème de dérivabilité de la fonction réciproque - Extrémum et points critiques
		2. Accroissements finis et conséquences	<ul style="list-style-type: none"> - Théorème de Rolle - Théorème des accroissements finis - Fonction k-lipschitzienne - Inégalité des accroissements finis - Application aux suites récurrentes - Théorème de prolongement C^1
		3. Fonctions de class C^k	<ul style="list-style-type: none"> - Définition - Opérations sur les fonctions de classe C^k - Théorème de prolongement C^k

	Analyse asymptotique	4. Extension aux fonctions complexes p.379	
Les méthodes : Savoir montrer qu'une fonction est dérivable ou C^k , savoir exploiter les propriétés de f' , savoir utiliser le théorème de Rolle, Savoir calculer une dérivée $n^{\text{ième}}$, Savoir-faire un prolongement C^1/C^k			

En analysant les programmes de mathématiques sur les fonctions de la fin du cycle 4 en terminale en France et en Afrique Francophone, nous constatons que les contenus sont identiques à un niveau de fin de cycle 4 et les manuels accordent à peu près le même nombre de pages pour aborder cette notion. Certes les mots utilisés ne sont pas toujours les mêmes mais les connaissances restent identiques en troisième, en seconde, en première et en terminale. Les quelques différences sont négligeables. On retrouve : les fonctions en troisième en France en lieu et place des application en Afrique francophone, la bijection en fin de cycle 4 en Afrique francophone, la fonction exponentielle en première en France ainsi que les fonctions convexes et concaves en France.

Sur la base des documents officiels analysés, le programme français est non seulement plus riche en ce qui concerne la notion de fonction, mais également plus consistant. En effet, l'écart en terme de contenu et de place accordée aux fonctions s'agrandit de la troisième en terminale et ce qui est fait en France est plus dense par rapport à ce qui est fait en Afrique francophone avec les fonctions. Cela est clairement illustré sur la figure sus mentionnée où nous pouvons observer l'évolution des contenus enseignés de la fin de cycle 4 en terminale en France et en Afrique francophone.

3.7.3 Que disent le BO et le HPM à propos des fonctions ?

Les fonctions sont présentes dans les programmes d'enseignement en France et en Afrique francophone à un niveau du secondaire.

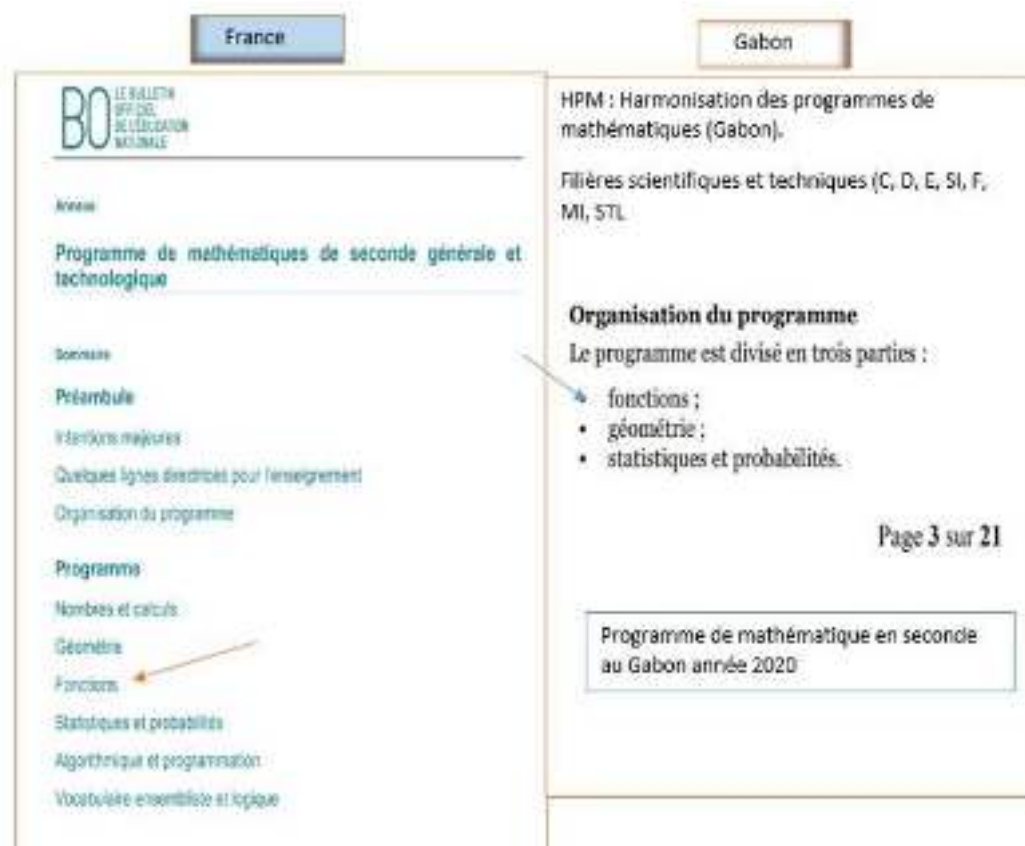


FIG. 3.2 – Organisation du programme

1. 2. Fonctions

OBJECTIF : Ce chapitre vise à :

- Faire découvrir la notion de fonction
- Mettre en place le vocabulaire relatif aux fonctions numériques,
- Utiliser les représentations graphiques pour résoudre certains problèmes
- Dresser des tableaux de variations, caractériser des points remarquables.

Contenu	Capacités exigibles	Commentaires
1-Généralités sur les fonctions - Définition - Détermination à l'aide de tables, de formules, calculatrice. - Ensemble de définition, image et antécédent d'un réel. - Image directe, image réciproque d'un intervalle. - Représentation graphique. 2-Etude graphique - Image et antécédent d'un nombre réel. - Image directe et image réciproque d'un intervalle. - Résolution graphique des équations $f(x) = g(x)$ (respectivement des inéquations $f(x) \leq g(x)$).	L'élève doit être capable de : <ul style="list-style-type: none"> • Reconnaître qu'une courbe donnée est ou non la représentation graphique d'une fonction. • Déterminer un ensemble de définition, l'image d'un réel, les antécédents d'un réel. • Lire graphiquement l'image d'un nombre réel, les antécédents d'un réel. • Déterminer graphiquement l'image directe d'un intervalle, l'image réciproque d'un intervalle par une fonction. 	Les fonctions abordées sont généralement des fonctions numériques d'une variable réelle pour lesquelles l'ensemble de définition est donné. Quelques exemples de fonctions définies sur un ensemble fini ou sur \mathbb{R} sont à donner. On insistera sur le maniement de la calculatrice. L'objectif de ce chapitre n'est pas de représenter graphiquement les fonctions. Le professeur fournira les représentations que les élèves auront à exploiter. On doit habituer les élèves à lire les représentations graphiques et à donner les variations de la fonction représentée.

FIG. 3.3 – généralités et étude graphique HPM

Contenu	Capacités exigibles	Commentaires
3-Variations d'une fonction - Maximum, minimum d'une fonction. - Sens de variation d'une fonction. - Exemples d'étude du sens de variations. - Utilisation des tableaux de variations	<ul style="list-style-type: none"> • Reconnaître graphiquement un maximum, un minimum d'une fonction. • Démontrer qu'un nombre donné est un maximum ou un minimum d'une fonction. • Trouver les intervalles de monotonie d'une fonction 	Une courbe étant donnée, les élèves devront savoir reconnaître si elle est la représentation graphique d'une fonction et, dans l'affirmative, lire l'ensemble de définition de cette fonction. Pour les variations des fonctions, on évitera les fonctions dont l'expression est trop complexe. On ne demandera pas aux élèves de rechercher algébriquement un extremum, mais on leur demandera de démontrer qu'un réel donné est un extremum de la fonction. Il est conseillé, lors des séances d'exercices, d'en varier le type (calculatoire, géométrique, graphique,...) et de choisir des exercices d'apprentissage accessibles aux élèves. On accordera la priorité aux exercices graphiques à exploiter à livre ouvert, ou alors fournir les représentations que les élèves collent directement dans leur cahier.

FIG. 3.4 – Variations d'une fonction HPM

Dans le programme français, les fonctions sont appelées à être définies par une courbe,

un tableau de données ou une formule, la question qu'on s'est donc posée est celle de savoir comment est-elle demandée d'être définie par les programmes et manuels scolaires en Afrique francophone ?

Programme de la classe de seconde
 Document officiel n° 20 du 23 juillet 2009

1. FONCTIONS

Contenus	Capacités attendues
Fonctions Image, antécédents, valeurs extrêmes.	<ul style="list-style-type: none"> • Tracer la loi entre deux quantités par une formule. • Pour une fonction définie par son courbe, en tabler de données ou son tableau : • Identifier la variable indépendamment, l'ensemble de définition ; • Déterminer l'image d'un nombre ; • Rechercher des antécédents d'un nombre.
Etude qualitative de fonctions Fonction croissante, fonction décroissante ; maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.	<ul style="list-style-type: none"> • Décrire, pour un nombre réel donné ou un tableau de variations, la caractéristique d'une fonction définie par une courbe ; • Déterminer une expression graphique compatible avec un tableau de variations ; • Lire sur le sens de variation ou descend, par une phrase ou un tableau de variations ; • Comparer les images de deux nombres d'un intervalle ; • Attribuer des valeurs numériques (image ou antécédent) à une image donnée.
Expressions algébriques Transformations d'expressions algébriques en vue d'une résolution de problème.	<ul style="list-style-type: none"> • Associer à un problème une expression algébrique ; • Mettre la forme la plus adaptée (développer, factoriser) d'une expression en vue de la résolution du problème donné ; • Développer, factoriser des expressions polynomiales simples ; transformer des expressions rationnelles simples.
Equations Méthodes graphiques et algébriques d'équation.	<ul style="list-style-type: none"> • Mettre une équation en forme ; • Résoudre une équation en ramenant au premier degré ; • Résoudre une suite d'équations grâce à un algorithme de résolution.
Fonctions de référence Fonctions linéaires et fonctions affines ; Variations de la fonction carré, de la fonction inverse.	<ul style="list-style-type: none"> • Décrire le sens de variations d'une fonction affine ; • Décrire la table de signes de $x \mapsto x^2$ pour des valeurs numériques données de x et y ; • Connaître les caractères des fonctions carré et inverse ; • Représenter graphiquement les fonctions carré et inverse.
Etudes de fonctions Fonction polynomiale de degré 2 ; Fonction homographique.	<ul style="list-style-type: none"> • Connaître les variations des fonctions polynomiales de degré 2 (maximum, minimum) et la propriété de symétrie de leur courbe ; • Identifier l'ensemble de définition d'une fonction homographique.
Inéquations Résolution graphique et algébrique d'inéquations.	<ul style="list-style-type: none"> • Mettre une inéquation en forme ; • Résoudre graphiquement des inéquations de la forme : $f(x) > k$, $f(x) < g(x)$; • Résoudre une inéquation à partir de l'étude du signe d'une expression polynomiale ou rationnelle du premier degré ; • Résoudre algébriquement les inéquations nécessaires à la résolution d'un problème.
Trigonométrie • Expression de la droite trigonométrique sur le cercle trigonométrique et utilisation du sinus et du cosinus d'un arc ou d'un angle.	<ul style="list-style-type: none"> • De fait le lien entre les valeurs des sinus et cosinus des angles de 0°, 30°, 45°, 60°.

FIG. 3.5 – fonction dans le BO 2009

Le plus important ici est d'avoir observé qu'après le programme, la notion de fonction est introduite par sa définition dès la troisième semaine de cours en seconde comme le montre la progression suivante :

PROGRESSION NATIONALE DE MATHÉMATIQUES 2018-2019 Niveau 2 ^{de} S, SI, STI		
Semaine	Contenus	Observations
1	Séquence 0 : Raisonnement logique <ul style="list-style-type: none"> ▪ Quantificateurs ▪ Types de raisonnement ▪ Contre-exemple ; implication ; équivalence ; contraposée ; absurde 	Exemples concrets Exercices.
2	Séquence 1 : Ensemble de nombres réels (Partie A) <ul style="list-style-type: none"> - Nombres rationnels - Ensembles $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ Séquence 2 : Angles inscrits (Partie A) <ul style="list-style-type: none"> - Relation entre angle inscrit et angle au centre associé - Angles inscrits interceptant le même arc ou deux arcs de même longueur. - Angle inscrit et bissectrice. 	TP : Exemples de raisonnement par l'absurde (irrationalité de $\sqrt{2}$) TP : Exemples de construction de \sqrt{n} , $n \in \mathbb{N}$ Exercices
3	Séquence 3 : Généralités sur les fonctions (Partie A) <ul style="list-style-type: none"> - Définition. - Détermination à l'aide de tables, de formules, calculatrice. - Ensemble de définition, image et antécédents d'un réel. Séquence 4 : Vecteurs et points du plan Notations ; Calcul vectoriel ; Norme ; vecteur unitaire ; Combinaison linéaire de deux vecteurs ; Vecteurs colinéaires ; Décomposition d'un vecteur	Exercices. Interrogation (30 min). DM1.
4	Séquence 5 : Généralités sur les Polynômes <ul style="list-style-type: none"> - Exemples de polynômes. - Degré, coefficients d'un polynôme. - Racine ou zéro d'un polynôme. - Somme et produit de deux polynômes. - Factorisation d'un polynôme Séquence 6 : Angles orientés (Partie A) <ul style="list-style-type: none"> - Radian- Cercle trigonométrique - Définition de l'angle orienté de 2 vecteurs. 	Exercices. DS1 (2h)
5	Séquence 7 : Opérations dans \mathbb{R}. Inverse, quotient, puissance, racine carrée Séquence 8 : Homothétie (partie A) <ul style="list-style-type: none"> - Définition. - Propriétés : alignement d'un point, de son image et du centre de l'homothétie. - Point invariant 	Exercices. Interrogation (30 min).

FIG. 3.6 – progression spiralee en Afrique francophone

Au regard de ses deux définitions, j'ai ressenti que quelque chose n'était pas clair. La fonction reste la même qu'on soit en France ou au Gabon, pourquoi sa définition change-t-elle d'un système à l'autre, d'un manuel à un autre ?

3.7.4 Les tâches et les méthodes au programme

Les fonctions sont définies de plusieurs manières en Afrique francophone et en France (tables : calendrier perpétuel, calculatrice, formule, représentation graphique, graphe, équations, tableau de valeur, tableau de variation) L'introduction de la notion de fonction est faite à partir d'exemples tirés de la géographie, de la biologie, de la physique et de l'économie (diagrammes de température, de consommation, circuit d'automobile, d'évolution des prix, etc.) Pour l'étude des maxima et minima, on se limite aux exercices conduisant à la résolution d'inéquations du premier degré et du second degré. On insiste sur les priorités de calcul et sur le maniement correct de la calculatrice surtout. Dans les manuels, l'objectif de cette étude des fonctions à travers les cours, les exercices et les problèmes

n'est pas de représenter graphiquement ces dernières uniquement, mais de réfléchir sur cette notion et sur ses modes de représentations dans un contexte donné, de l'utiliser pour résoudre un problème de façon graphique et algébrique, d'introduire les variations d'une fonction et la notion de maximum et minimum, de conjecturer les réponses à un problème géométrique en construisant dynamiquement sa représentation graphique, d'approcher la courbe de la fonction carré lors de l'étude d'un problème d'aire, d'approcher la courbe de la fonction inverse lors de l'étude d'une situation de physique, de développer la démarche d'investigation pour résoudre un problème du type $f(x)=k$ ou un problème d'optimisation, de modélisation et confronter les stratégie, enfin pour développer des stratégie basées sur l'observation des courbes . Le professeur joue un rôle important, il fournit les représentations que les élèves auront à exploiter. il habitue les élèves à lire les représentations graphiques et à donner les variations de la fonction représentée. Pour les fonctions déterminées par une formule explicite, le programme exige qu'on commence par des exemples simples ce qui n'est pas le cas dans les manuel d'Afrique Francophone on peut le voir à la page 159 du livre CIAM seconde S » ensemble de définition : présentation et on peut voir que la fonction proposée est difficile. Les messages d'erreur affichés par les calculatrices servent à introduire la notion d'ensemble de définition. dans tous les cas on commence par déterminer les ensembles de définition des fonctions élémentaires. Une courbe étant donnée, les élèves doivent savoir reconnaître si elle est la représentation graphique d'une fonction et, dans l'affirmative, lire l'ensemble de définition de cette fonction. Concernant l'étude graphique, pour gagner du temps, les leçons sont faites à livre ouvert ou fermé en fonction de l'enseignant. En effet, concernant la détermination graphique de l'image directe ou réciproque d'un intervalle de \mathbb{R} les films de constructions et les travaux dirigés du livre CIAM devraient permettre aux élèves d'assimiler ces savoir-faire. en France le complément numérique permettent aux élèves de pratiquer des activités expérimentales, d'utiliser des outils logiciels avec un tableur, une calculatrice, logiciel avec le calcul formel, algorithme. Pour les variations des fonctions, on évite les fonctions dont l'expression est trop complexe.

Les courbes de températures, par exemple, se prêtent à l'introduction de la notion de maximum, de minimum et de variations. De plus, elles donnent du sens à ces notions. On ne demandera pas aux élèves de rechercher algébriquement un extrémum sauf en France en étudiant les fonctions polynômes de degré 2 : coordonnées du sommet de la parabole, mais on leur demandera de démontrer qu'un réel donné est un extremum de la fonction. On retrouve, dans les manuels au programmes des d'exercices varier du type (calculatoire, géométrique, graphique, économique...) au professeur de choisir des exercices d'apprentissage accessibles aux élèves.

Les tâches au programme en France et en Afrique francophone sont naturellement simples et complexe selon les niveaux de difficultés : exigeant d'articuler plusieurs tâches simples non précisées. il s'agit entre autre de définir une fonction, de résoudre graphiquement ,algébriquement ou avec une calculatrice une équation ou une inéquation, de raisonner puis démontrer parfois , de faire des analyses critiques, communiquer à l'écrit et à l'oral, s'initier à la logique pour se préparer au contrôle par des QCM, réviser en travaillant des exercices d'approfondissement, des problèmes ouverts, des défis et des sujets d'exposés. Les tâches sont majoritairement outil de modélisation, d'optimisation et de résolution d'équations. en France constat est le même en Afrique francophone. Une tâche complexe est une tâche mobilisant des ressources internes (culture, capacités, connaissances, vécu...) et externes (aides méthodologiques, protocoles, fiches techniques, ressources documentaires...). Chaque élève peut adopter une démarche personnelle de résolution pour

Taches aux programmes	
En France	En Afrique Francophone
Fonctions, expressions algébriques et problèmes Lire les informations sur une courbe Connaître le vocabulaire des fonctions Lire les informations sur le tableau Connaître les identités remarquables Factoriser les expressions algébriques Mettre en équation Réfléchir sur la notion de fonction et sur les modes de représentation dans un contexte concret, Utiliser une fonction pour résoudre un problème de façon graphique ou algébrique	Généralités sur les fonctions, étude graphique et variations d'une fonction

FIG. 3.7 – tâches aux programmes 1

réaliser la tâche. Une tâche complexe ne se réduit pas à l'application d'une procédure automatisée. Dans ce contexte, complexe ne veut pas dire compliqué. Une tâche complexe est une tâche mettant en œuvre une combinaison de plusieurs procédures simples, automatisées, connues. Elle nécessite l'élaboration par l'élève d'une stratégie (et non pas de la stratégie experte attendue) et fait appel à plusieurs ressources. La notion de tâche complexe fait partie intégrante de celle de compétence, comme le rappelle le préambule du socle commun : « Maîtriser le socle commun, c'est être capable de mobiliser ses acquis dans des tâches et des situations complexes, à l'école puis dans la vie ». On compte sur la tâche complexe, pas toujours mais souvent, pas systématiquement mais à bon escient, pour motiver les élèves et les former à gérer des situations concrètes de la vie réelle en mobilisant les connaissances, les capacités et les attitudes acquises. Dans la vie courante, les situations sont toujours complexes, à un degré plus ou moins important. Les résoudre ne se réduisent pas à les découper en une somme de tâches simples effectuées les unes après les autres sans lien apparent. Les tâches simples incitent davantage à des reproductions de procédures laissant peu d'initiative à l'élève alors que les tâches complexes permettent une stratégie de résolution propre à chaque élève

À quel moment de la scolarité et dans quels cadres les fonctions sont enseignées dans les deux systèmes ?

Les fonctions telles que données dans les différents manuels scolaires ont un côté algébrique considérable dans les deux programmes. Si bien qu'il est, à plusieurs reprises arrivé de penser qu'on a même pas besoin de parler de fonction au collège plutôt d'algèbre. Après plusieurs années de recherches, j'ai finalement compris qu'il s'agit de deux choses bien différentes. L'algèbre est un cadre mathématique tandis que la fonction est un objet et outil mathématique. Il peut être évoqué en algèbre tout comme en analyse et dans bien d'autres cadres encore de par ses définitions et utilisations. La question qu'on s'est plutôt alors posée est celle de savoir à quel moment les enseignants commencent à enseigner l'algèbre ou du moins à quel moment cet enseignement est-il envisagé et en quoi l'algèbre est-elle nécessaire pour connaître une fonction au primaire où au secondaire ? En effet, on a besoin au regard des deux programmes des structures algébriques pour construire les fonctions (entrée par les inconnues, généralisation par des expressions algébriques, les

<p>Définir une fonction Traduire chaque information par l'appartenance de x à un intervalle Traduire chaque information par l'appartenance de y à un intervalle Représenter un intervalle sur une droite graduée Traduire une information par des égalités Lire graphiquement l'ensemble de définition, image et antécédents de f Vérifier à partir d'un algorithme la définition d'une fonction et réaliser un tableau de valeur A partir de l'observation d'un tableau de valeur, émettre une conjecture Ecrire la formule définissant $f(n)$ pour tout entier n (cas discret) et $f(x)$ en fonction de x (cas continu) Donner le domaine de définition d'une fonction à partir d'un tableau de valeur ainsi que l'antécédent ou l'image</p> <p>Expliquer pourquoi f n'est pas définie en un point, calculer $f(a)$ et déterminer un antécédent par f donnée sous forme algébrique Courbes et représentation graphique Tracer une courbe représentative de f</p> <p>Encadrer $f(x)$ Montrer à partir d'un graphique ou d'une expression algébrique qu'un point de coordonnées données appartient à une courbe Utiliser une calculatrice pour tracer une courbe, donner les antécédents et les images par f Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=0$, $f(x)=a$ Tracer un nuage de points Réaliser à mains levées un tracé Estimer $f(x)$ connaissant x à partir de l'expression algébrique et du tracé Tracer dans un repère la courbe représentative de la fonction qui à b associe l'aire (b étant la longueur d'un côté du trapèze par exemple)</p>	<p>Généralités sur les fonctions Etablir un tableau donnant l'arrondi d'ordre 1 de $f(x)$ pour des valeurs des valeurs de x données Etablir un tableau donnant l'arrondi d'ordre 2 de $f(x)$ pour des valeurs de x données Exprimer l'aire d'un triangle en fonction de x - AH F et g étant données trouver Df et Dg et calculer les images par f et g de x Exprimer PQ en fonction de x, calculer $A(x)$ (carré) Exprimer h en fonction de r (boîtes cylindriques), et l'aire en fonction de r Déterminer l'ensemble de définition de f, trouver les antécédents, représenter graphiquement f Montrer qu'un point appartient à (cf) et déterminer l'ordonnée d'un point connaissant son abscisse Représenter une caractéristique (Intensité tension, proportionnalité...) Dire si deux fonctions sont égales sur \mathbb{R} ou non et déterminer le plus grand ensemble sur lequel f et g coïncident</p> <p>Indiquer les représentations graphiques de fonctions Etude graphique Déterminer l'image directe et réciproque d'un intervalle Déterminer graphiquement les images et antécédents par f Déterminer Df à partir d'un graphique Reconnaître la représentation graphique de $\sqrt{ x }$ Indiquer le graphique qui traduit le mouvement du marcheur Déterminer graphiquement le signe de $f(x)$, l'ensemble d'antécédents de nombre donnés Déterminer graphiquement l'image directe et réciproque d'un intervalle Déterminer graphique l'heure Déterminer graphiquement une plage horaire</p>
---	---

FIG. 3.8 – tâches aux programmes 2

<p>A partir d'un tableau de variations : donner le domaine de définition, $f(a)$, dire si f est croissante, décroissante Décrire le sens de variation de f En observant une figure, donner le tableau de variation de f A partir d'une représentation graphique ou d'un tableau, lire sur la courbe ou donner : le maximum, le minimum par intervalle et dire pour quelle valeur de x on l'atteint Résoudre graphiquement des inéquations Donner le tableau des signes d'une expression Donner le sens de variation d'une fonction affine résoudre des problèmes concrets : longueur d'une ligne polygonale, surface minimale, Analyser et critiquer des documents, communiquer à l'oral et à l'écrit, s'initier à la logique Fonctions de référence et problèmes Tracer une courbe représentative de f Encadrer $f(x)$ Montrer à partir d'un graphique ou d'une expression algébrique qu'un point de coordonnées données appartient à une courbe</p> <p>Utiliser une calculatrice pour tracer une courbe, donner les antécédents et les images par f Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=0$, $f(x)=a$ Tracer un nuage de points Réaliser à mains levée un tracer Estimer $f(x)$ connaissant x à partir de l'expression algébrique et du tracé Tracer dans un repère la courbe représentative de la fonction qui à b associe l'aire (b étant la longueur d'un côté du trapèze par exemple) Développer, réduire et factoriser l'expression d'une fonction Résoudre l'équation $f(x)=0$ et $f(x)=a$ Exprimer en fonction de x les longueurs, les aires ou les volumes Exploiter un problème en géométrie dynamique, puis le résoudre algébriquement : traduire un problème en équation Résoudre un problème de plusieurs façon : avec un tableur, une calculatrice, avec le calcul formel ou par calcul algébrique Résoudre une équation du second degré Résoudre l'équation $f(x)=g(x)$ Résoudre des problèmes ouverts</p>	<p>Démontrer qu'une fonction numérique définie et décroissante sur I admet un minimum ou un maximum sur I Démontrer qu'une fonction f est croissante sur un intervalle Démontrer que $f(b)$ est un maximum de f sur I Tracer la représentation graphique d'une fonction admettant un maximum déduire qu'une fonction n'est ni croissante, ni décroissante sur I Démontrer qu'une fonction est soit croissante soit décroissante démontrer qu'une fonction présente un maximum et étudier ses variations Etudier une fonction f qui à M associe OM Déterminer l'image directe d'un plan Calculer $f(M)$, M étant un point appartenant à I Utiliser une méthode pour déduire que f est strictement croissante ou strictement décroissante Utiliser une comparaison pour déduire le sens de variation d'une fonction Démontrer qu'une fonction est monotone sur I En utilisant les propriétés des inégalités, donner un encadrement de $f(x)$ Soit $f(x)=AM$ (cas du triangle) à partir de considérations géométriques, faire une conjecture sur le sens de variation d'une fonction Compléter un tableau de valeurs et en déduire un tracé point par point de la courbe représentative d'une fonction Dresser le tableau de variations d'une fonction Etudier le sens de variation de la f dans un intervalle D, en utilisant le signe du rapport $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$</p>
--	--

FIG. 3.9 – tâches aux programmes 4

<p>Commenter et présenter oralement une courbe représentative d'un phénomène</p> <p>Fonctions et formules algébriques</p> <p>Consolidation des acquis</p> <p>Passer d'une formule à une fonction</p> <p>Tester une inégalité</p> <p>Donner du sens aux symboles</p> <p>Utiliser un tableur</p> <p>Développer et réduire avec une identité remarquable</p> <p>Factoriser avec une identité remarquable</p> <p>Réduire au même dénominateur</p> <p>Recopier et compléter les algorithmes</p> <p>Donner le sens de variation d'une fonction définie</p> <p>Déterminer les extrémums</p> <p>Dresser le tableau de variations</p> <p>Sans calculer, comparer $f(a)$ et $f(b)$</p> <p>Utiliser la calculatrice pour comparer</p> <p>Donner l'intervalle d'appartenance de x</p> <p>Donner l'expression de $A(x)$ $V(x)$ en $f(x)$ en fonction de x</p> <p>Donner le minimum et le maximum</p> <p>Associer à chaque $f(x)$ sa représentation graphique donnée</p> <p>Donner la position correspondante d'un point M</p> <p>Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthogonal</p> <p>Représenter une parabole (concavité, coordonnées du sommet)</p> <p>Utiliser une calculatrice pour tracer une courbe</p>	<p>Etudes de fonctions (fonctions affine par intervalle, fonctions élémentaires, utilisation des fonctions élémentaires)</p> <p>Démontrer qu'une fonction est affine par intervalle (valeur absolue, min et max)</p> <p>Construire la représentation graphique d'une fonction affine par intervalle</p> <p>Construire la représentation graphique d'une fonction affine connaissant son tableau de variation</p> <p>Définir explicitement une fonction Déterminer l'image directe (réciproque) d'un intervalle et contrôler le résultat par le calcul.</p> <p>Démontrer qu'une fonction est affine par intervalle</p> <p>Exprimer $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue</p> <p>Déterminer le min et le max de f sur I</p> <p>Résoudre graphiquement une équation comportant des valeurs absolue</p> <p>Résoudre graphiquement une inéquation comportant des valeurs absolues</p> <p>Etablir le tableau de variations d'une fonction</p> <p>Calculer $f(x)$, f étant la fonction qui à x associe le périmètre d'un polygone ou son double périmètre</p> <p>Résoudre l'équation $f(x)=g(x)$</p> <p>Fonctions élémentaires</p> <p>Résoudre graphiquement une inéquation</p> <p>Tracer sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions élémentaires</p> <p>Résoudre graphiquement un système d'équations</p> <p>Démontrer qu'un point M appartient à une parabole</p>
--	--

FIG. 3.10 – tâches aux programmes 5

FIG. 3.11 – tâches

fonctions simples selon Cauchy) et, nous n'avons pas trouvé assez d'outils dans les deux systèmes pour décrire de façon globale comment se fait cet apprentissage de l'algèbre qui pourrait aider autrement les élèves sur les fonctions que par les devinettes, les opérations, le calcul mental depuis le primaire, les suites de nombres figurés, les suites arithmétiques, géométriques, le calcul littéral et les puissances (x^3 , x^2) au secondaire quoique ces notions peuvent déjà être introduites au primaire et les expressions algébriques (calcul littéral) plus tôt en sixième par exemple.

Au secondaire, nous avons aussi remarqué dans mes travaux de master, que les élèves dans les deux systèmes éducatifs utilisent spontanément plusieurs lettres à partir du moment où ils ont déjà utilisé une précédemment *aire du carré égale : côté fois côté, $c \times c$ depuis le primaire et d'autres formules comme $L \times l$; $v \times t...$* , cela ne les gêne pas d'en utiliser d'autres dans des problèmes de double références, à doubles inconnues si ce sont des équations, en y mettant du sens à l'articulation entre les deux parce que ce n'est pas au programme de collègue dans les deux systèmes. Par contre les élèves mobilisent cette connaissance indépendamment du programme (le paramétrage), résultats de recherche mémoire master 2. Ainsi, nous pouvons dire que les difficultés rencontrées par les élèves en algèbre dans le secondaire ne sont pas du tout liées à l'arsenal sémiotique, mais plutôt à la multiplicité d'opérations, à l'articulation et liens entre elles (multiplicité, distributivité, priorité, etc.) Ce serait donc intéressant d'avoir des situations qui seraient effectivement de l'ordre de la pensée fonctionnelle pour construire des fonctions au secondaire. Un effort remarquable est observé dans les programmes de troisième en France où un accent particulier est mis sur la notion de fonction dans le cadre de l'analyse en se servant des structures, formes et régularité algébriques et fonctionnelles. Par contre en Afrique francophone, à un

niveau de troisième, les fonctions sont uniquement travaillées dans le cadre de l'algèbre. Nous pouvons le remarquer dans la progression de mathématique de l'année 2017-2018 ou Gabon ou cet enseignement est demandé à être fait après le travail algébrique, c'est du moins ce qui se lit dans la progression suivante :

1. Séquence 1 : calcul littéral partie A, Quotients ; exposants ; parenthèses et règles de priorité ;
2. Séquence 3 : calcul littéral partie B, Développement d'un produit ; factorisation
3. Séquence 6 : calcul littéral partie A, Racines carrées
4. Séquence 8 : calcul littéral partie C, Égalités remarquables : produit nul ; nombres de mêmes carrés ;
5. Séquence 10 : calcul littéral (numérique) partie A, Inégalités strictes, inégalités larges ; comparaison de nombres ;
6. Séquence 12 : ensemble des nombres réels partie A, Nombres rationnels, nombres irrationnels
7. Séquence 15 : calcul littéral (numérique) partie B, Racines carrées : opérations sur les racines carrées, expressions conjuguées ;
8. Séquence 17 : calcul littéral (numérique) partie B, Valeur absolue et distance de deux points sur une droite graduée, entrée dans le monde fonctionnel

Dans les deux systèmes éducatifs, une remarque est que les apprentissages algébriques en générales, le gros du temps, leurs travaux sont souvent mis dans l'ordre du procédural. Il faut donc être habile (pour les élèves) dans cet ordre afin de pouvoir faire des exercices de mise en équation ; manipuler des expressions très compliquées telles que *somme des carrés d'une somme de nombres* $(x + b)^2 + (y + d)^2$ ou tout se joue à l'attention (expression de Maggy Schneider). Ces situations se retrouvent plus dans le programme français au moment d'introduire les expressions littérales. Ce n'est pas un exercice mental, mais de l'algèbre, une expression algébrique, in fine une classe de fonction paramétrées. Le seul problème est qu'au moment de cette introduction les élèves ne savent pas dans quel cadre ils opèrent, ainsi que certains enseignants. C'est la raison première de notre idée de construction d'un cadre fonctionnel pour ce travail de recherche.

Aussi, ces règles demandent à l'apprenant de faire des efforts. Nous pensons que c'est embêtant de travailler sur ce genre d'exercices pour certains élèves. Ils n'y trouvent aucun intérêt à le faire, cela leur demandant de mobiliser trop de choses et ils peuvent finir par relâcher leurs efforts. C'est peut-être à partir de cet instant qu'on commence réellement à remarquer que les élèves sont en difficulté dans les deux systèmes éducatifs : trouver une expression algébrique rendant compte d'une certaine régularité, une certaine dépendance, dans des tâches de changements de cadres et registres.

Dans notre comparaison de l'enseignement des fonctions dans les systèmes éducatifs, de tout ce qui est connecté aux fonctions, il ne s'agit pas uniquement des types d'erreurs des élèves devant certains types de problèmes dans chaque système éducatif, mais de la nécessité de travailler tôt les fonctions pour donner un sens à l'algèbre, à ses expressions et opérations. Ce sont des effets de contrats¹, c'est-à-dire qu'à un moment donné, faute de mettre du sens dans les règles qu'on impose aux élèves dans les deux systèmes, ces derniers s'en créent eux mêmes et font des erreurs. Et on ne sait pas s'il y a un intérêt à les classer. Existe-t-il une logique derrière les erreurs des élèves à modéliser par une

1. Mercié

fonction ?

Le travail sur les fonctions est donc de ce fait mal introduit ou du moins très tard dans les deux systèmes éducatifs et devrait se préparer depuis le primaire à travers l'algèbre. La seule différence se trouve ici dans le fait qu'en France les programmes préparent l'élève à une étude qualitative de la fonction en intégrant déjà les mots variations, les tableaux de valeurs, les représentations graphiques depuis le primaire. Par contre en Afrique francophone, l'accent est mis sur les ensembles et les relations entre les ensembles, correspondances avant les variations à partir de la cinquième.

Les changements de cadres et registres dans les deux programmes

La volonté de rechercher le modèle fonctionnel global est développée dans les deux systèmes avec l'idée selon laquelle, il faut créer des représentations analytiques soit à partir des représentations graphiques (Descartes) ou d'autres (expressions algébriques, Fermat), (algorithme, Programme actuels) qui servent à représenter le modèle. On joue en permanence et c'est ce qui semble être recherché chez les élèves dans les deux systèmes. Qu'en est-il exactement ? Comment se fait l'enseignement du changement de registre dans les deux systèmes ? Dans chacun des deux programmes, on est constamment dans les registres tableau, graphique, expression algébrique, algorithme pour la France tandis qu'en Afrique francophone l'algorithme n'est pas encore bien enseigné. D'ailleurs, on ne voit pas l'utilité. En ma qualité de Censeur pédagogique des classes préparatoires j'ai pu observé que les jeunes bacheliers de séries *C* et *E* du Gabon n'avaient jamais appris la programmation au lycée, Python. Ils ne connaissent aucun langage de programmation. Ils découvrent python et camel en maths sup et spé filière *MPSI*.

La difficulté pour nous est de savoir comment l'élève évoque-t-il, dans chaque cadre, les ostensifs fonctions les mieux adaptés pour résoudre une tâche ? En effet, lorsqu'on analyse les effets et les programmes. Les élèves devraient arriver à manipuler des réductions ostensives avec des calculs à partir de la cinquième en Afrique francophone et en France où on rajoute les tableurs (feuille de calculs pour aller encore plus vite, la facilité). Le recours au tableau numérique, est utilisé et enseigné en France chaque fois qu'il est question de travailler la dénotation, pour justifier les règles de calcul algébrique (cela paraît important) lorsqu'il y a des retours à certains moments. Il faut aussi faire remarquer que les enseignants en France et en Afrique francophone ne disent pas souvent aux élèves qu'ils ne sont pas obligés de recourir à chaque fois aux tableaux numériques. S'ils ont un critère qui leur permet de reconnaître un modèle qu'ils continuent avec ce dernier. C'est une obligation dans les deux programmes qu'on les élèves à faire les tableaux numériques surtout avec les situations de proportionnalité, de statistique, de calculs de distances, des nombres, des conversions, etc. Le but du jeu est de s'en débarrasser en changeant de cadre et de registre. On ne dit pas souvent aux élèves du cycle 4 et de seconde en France et en Afrique francophone, qu'en mathématiques, on cherche une économie de pensée, donc on ne s'encombre pas de choses ; il faut réduire les ostensifs. C'est plus ergonomique. Voilà un peu ce qu'on a pu observer et quelques difficultés sur l'environnement propice à l'enseignement des fonctions dans les deux systèmes éducatifs.

les obstacles didactiques dans les deux systèmes éducatifs sur les fonctions

Pour les décrire, les idées de Maggy Schneider nous ont mis le pied à l'étrier Un exemple : la fonction $\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$; ne passe pas chez des élèves dans les deux

systèmes. Autour du concept de fonction, c'est vrai qu'ils se passent des choses (calcul infinitésimal, continuité, etc.). Les programmes demandent surtout aux élèves de ne travailler qu'avec des fonctions exprimées en une seule expression algébrique au collège et analytiques au lycée, du coup, nous pensons qu'il faut élargir à ce moment-là et aller vers le côté unificateur de ce concept². Il faut que les élèves sachent que les fonctions sont utilisées dans d'autres domaines. Ce travail doit se faire autrement et c'est l'occasion au secondaire de le dire. Que nous considérons que $\sqrt{x^2}$ et $\begin{cases} x \text{ si } x > 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$; est une même fonction, c'est dire qu'en changeant de registre, on travaille toujours sur le même concept ceci est juste un exemple visant à montrer la nécessité de travailler sur les changements de registres.

Un autre obstacle repéré est celui des fonctions affines par morceaux. Les élèves rencontrent trop de problèmes avec cette dernière dans les deux systèmes éducatifs. Cela n'a peut-être pas d'incidence directe si l'élève pense qu'il s'agit de plusieurs fonctions et de plusieurs formules (cela peut subsister dans sa tête.). Donc à un certain moment, comment les enseignants règlent-ils ce problème ? En disant qu'on va définir une fonction ainsi, c'est-à-dire avec plusieurs expressions ? Même quand on a plusieurs formules, il peut arriver qu'il s'agisse de la même fonction. C'est le principe de la règle variable de Dirichlet. Que le mathématicien a intérêt à élargir son spectre.

Avant ce travail, je me suis étonné de voir ce qui est souvent demandé aux candidats à l'épreuve de mathématique au baccalauréat. Des chercheurs en analysant les difficultés des élèves dans les deux systèmes éducatifs se disent qu'on demande aux élèves de mobiliser certaines classes de fonctions en classe. Et, lors du baccalauréat, il ne s'agit que des inégalités, des inéquations, des limites, etc. Les élèves peuvent se tromper facilement en cherchant à les résoudre. Ceci pour dire que le problème ne se pose peut-être pas au niveau de la fonction, mais à celui de l'algèbre et de l'analyse avec les changements de registres (graphique, formule, équation, limites, etc.). Le tableau de variation étant la bête noire des élèves pourtant, il semble facile à faire. On a fait le même constat chez les élèves du cycle 4 et de seconde qui ne sont pas souvent convaincu devant un graphe pour comprendre qu'on a défini une fonction sur les intervalles $]0, \frac{1}{n} [\cup] \frac{1}{n}, n [$

Ils veulent toujours qu'on leur donne une formule de la forme $f(x) = 1 - \frac{1}{nx} + \frac{5}{mx}$ pour être convaincu qu'on travaille sur les fonctions. La définition du concept de fonction de manière globale se justifie telle par le fait justement qu'on aimerait englober tous les registres, dans un même objet et pour des raisons d'économie de pensée, pour parvenir à des théories plus simples. Plus on regroupe dans un théorème (structure), les retombés sont énormes. L'intérêt à montrer aux élèves qu'on peut appeler fonction tous ces ostensifs et non-ostensifs utilisés dans n'importe quel cadre et registre avec ou sans formule est réel. Le problème : ce n'est pas un exigible dans les deux programmes.

Une fonction où plusieurs fonctions, quel est cet arbitraire ?

Pour les élèves après analyses des deux curricula, Il s'agit de plusieurs formules disent certains élèves à la limite tant qu'on ne leur a pas encore montré des raisons autres qu'une fonction peut être constitué de plusieurs autres fonctions. Et bien que ce ne sera pas la définition du mathématicien, mais une définition comme argument d'autorité. En France, on demande de ne plus introduire les fonctions par les expressions algébriques comme au Cameroun par exemple, plutôt comme un processus qui à un nombre fait

2. A ; Robert

correspondre un notre nombre. Personnellement, je suis tout à fait soucieux de connaître la façon dont on peut introduire la fonction autrement que comme boîte noire. La formule devant intervenir plus tard. Cela reste assez compliqué pour les enseignants. Introduire une fonction comme ensemble de couples (étude qualitative, étude de phénomènes, par des représentations graphiques, des formules de calculs, etc.) importe peu. Si on se réfère aux tâches des manuels formulées autour des courbes de température, de tableau de valeurs, représentant la distance de freinage, etc. On se rend bien vite compte que la question de variation se pose. Qu'est-ce qui varie ? x en fonction de y , y en fonction x , f ou $f(x)$, c'est quoi une fonction croissante ? On constate qu'il n'est pas toujours évident de partir d'étude qualitative. Alors, on a déjà dans la modélisation fonctionnelle un peu cette idée que lorsqu'on a des x et y on peut obtenir une fonction donnée par une formule qui va approcher celle qui n'a pas de formule, c'est mettre en rapport deux fonctions : une avec formule et l'autre sans formule. Quasiment toutes les notions sur les fonctions dans les deux programmes sont des notions de généralités. Ce qui est fondamental dans les programmes de France et du HPM est la décomposition des caractéristiques des fonctions avec :

1. domaine de définition ;
2. calculs de limites aux bornes ;
3. variations, continuité ;
4. équations ;
5. représentation graphique ;
6. calcul d'aire.

Les enseignants se sentent obligés de faire travailler les élèves sur des exercices types par rubrique (une planche de travaux dirigés sur la détermination du domaine de définition par exemple). Nous voyons sous cet angle que les programmes dans les deux systèmes éducatifs sont très contraignants et induisent des pratiques enseignantes. Chaque enseignant peut toutefois faire comme il veut, pour dérouler le programme. Le plus difficile étant de le faire lorsqu'on a une classe d'examen ou il y a des types d'exercices à avoir déjà fait par exemple, la démarche consistant à aller de la formule au graphe. La démarche inverse restant plus intéressante. Le graphe n'étant pas un outil de résolution de problème, plutôt un obstacle avant un certain âge.

Qu'est-ce qui est respecté dans les deux différents systèmes éducatifs ?

Je ne pouvais pas parler de l'enseignement des fonctions en France et en Afrique francophone sans pour autant m'intéresser aux deux systèmes éducatifs dans lesquels ces enseignements sont dispensés. Nous avons dans cette partie focalisé notre étude sur la dimension institutionnelle, c'est-à-dire, comparer les deux systèmes éducatifs en regardant comment l'institution fonctionne pour essayer de mieux en mieux comprendre ce qu'est un programme, comment il est mis en place, pourquoi et par qui ? Nous pouvons dire en guise de comparaison des deux systèmes éducatifs pour chacun des indicateurs I : pour identique et D : pour différents que : les enjeux sont (D), les buts (D), les finalités (D), les objectifs (I), rapport(lien) qui existe entre, le système éducatif et les attendus de fin de cycles (I), les profils de sorties (D), les socles communs de compétences et de connaissances (D), les programmes et la société (D). Ensuite, nous nous sommes intéressé à la dimension socio-éducative, c'est-à-dire qu'on a regardé et chercher à comprendre comment se font

les orientations en France et en Afrique francophone ? Pour être plus simple, qu'est ce qui détermine l'orientation d'un élève dans chacun des systèmes éducatifs à ces deux niveaux ? Les ordres d'enseignement et les niveaux ont de ce fait été regardés lors de la transition collège-lycée. Après cette clarification, nous avons suivi, l'organisation des contenus toujours dans une perspective comparative. Notre regard étant sur trois éléments à savoir : les cours, tels que proposé dans les manuels officiels, les manuels ; leur nombre et leur utilisation et enfin les ressources ; quelles sont les ressources mis à la disposition des enseignants, des élèves et des parents dans chaque système éducatif ? Cette recherche va nous ramener à mieux se poser les questions sur les curricula c'est-à-dire, la planification des enseignements, d'un côté les programmes, les progressions, les savoirs à enseignés et de l'autre les certifications et les contrôles de connaissances. Cette étude du point de vu didactique se termine par la prise en compte de la formation des enseignants. Comment les enseignants sont-ils formés, recrutés et suivis dans les deux systèmes ?

Quels sont les points respectés dans les deux systèmes éducatifs durant le parcours cycle 4 et lycée ?

1. l'institution
2. les programmes
3. trois pôles du système didactique[73] ontologique (savoir), fonctionnel (formateur) et génétique (apprenant)
4. les évaluations ;
5. les examens ;
6. la rémunération des enseignants
7. le recrutement et la formation des enseignants.
8. le niveau et l'âge de l'élève

Qu'est-ce qu'un système éducatif ?

Pour comparer ces deux institutions, il nous a semblé d'abord nécessaire de définir ce qu'est un système éducatif en s'appuyant sur les définitions des dictionnaires, regarder leurs structures, leurs compositions et leur puissance c'est-à-dire qu'on va calculer le rapport entre le nombre de chômeurs et le nombre d'élèves admis au baccalauréat l'année n que j'appelle Indice de Puissance du Système Éducatif IPSE. Toutefois, nous regarderons la place de chacun des pays dans le classement mondiale des meilleurs systèmes éducatifs au monde³. Enfin, nous présenterons les éléments du système éducatif français qui n'existe pas en Afrique francophone. Cette étude nous a conduit à voir les points communs au niveau de l'institution et les différences.

Un système éducatif est, un ensemble de procédés, de pratiques organisées, destinés à assurer une fonction définie ou encore un ensemble de pratiques, de méthodes et d'instruction formant à la fois une construction théorique et une méthode pratique. Le Petit Robert2012

Les deux systèmes éducatifs sont structurés de la manière suivante :

1. le pré-primaire

3. [http :etudiant.lefigaro.fr/les-news/palmares/detail/article/la-france-6eme-meilleur-systeme-educatif-au-monde-20461/](http://etudiant.lefigaro.fr/les-news/palmares/detail/article/la-france-6eme-meilleur-systeme-educatif-au-monde-20461/)

2. le primaire
3. le collège
4. le lycée
5. les centres de formations
6. l'université

Les différences se trouvent ici au niveau des cycles, en France la classe de sixième est encore rattachée au cycle 3 ce qui n'est pas encore le cas en Afrique francophone. Il faut quand même le signaler, au niveau du Gabon le ministre actuel tente de le faire pour des écoles primaires des zones défavorisées. Aussi, dans certaines localités, on retrouve plus en Afrique francophone des complexes allant de la classe de sixième en classe de terminale qu'on appelle lycée, ce qui est un peu rare en France dans la conception du mot lycée. En effet, le collège est bien distinct du lycée. Le principe reste le même dans les deux systèmes éducatifs.

structure	France	Afrique francophone	durée
cycle 1	maternelle	maternelle	3 ans
cycle 2	CP, CE1,CE2	Année1,2,3	3 ans
cycle 3	CM1,2 ;6ième	Années 4,5	3-2 ans
cycle 4	collège	collège	3-4 ans
lycée	lycées	lycées	3 ans
centres de formations	CFP	CFP	2 ans
université	université	université	7 ans

Les deux systèmes éducatifs sont dirigés chacun par un ministre de l'Éducation nationale et/ou de l'Enseignement supérieur et de la recherche⁴, un Secrétaire général⁵, un inspecteur général de l'éducation en France et un inspecteur général des services en Afrique francophone⁶; un inspecteur générale de l'administration, de l'éducation nationale et de la recherche en France, poste qui n'existe pas dans l'organigramme du Ministère de l'Éducation nationale des pays d'Afrique francophone, un directeur de cabinet du ministre, des directeurs centraux et leurs adjoints, les chefs de services, les médiateurs et les représentants des organismes rattachés⁷. En Afrique, francophone le *CSP* n'existe pas encore. C'est encore en projet au ministère de l'Éducation nationale du Gabon.

En Afrique francophone, il existe par contre des IPN (Inspection Pédagogique nationale) qui s'occupent de valider les programmes au niveau national. Il faut signaler qu'à ce niveau rien ne marche comme cela se doit pour la simple raison que les inspecteurs pédagogiques de certains pays d'afrique francophone n'ont pas un diplôme de troisième cycle. Concernant l'enseignement des mathématiques, il existe un programme commun à tous les pays

4. le ministre est notamment en charge de l'enseignement, de l'accès de chacun aux savoirs, de la jeunesse et de la vie associative.

5. assiste le ministre pour l'administration de leur ministère.

6. qui assure le suivi des méthodes pédagogiques et des politiques éducatives. Évalue également leurs résultats pour l'enseignement primaire et secondaire.

7. La loi d'orientation et de programmation pour la refondation de l'École de la République a institué le Conseil supérieur des programmes. Ouvert à la représentation nationale et sociale, il réunit des universitaires, des chercheurs, des spécialistes du système éducatif et des représentants élus de la Nation et de la société

d'Afrique francophone⁸. On retrouve également en France les Cniré⁹ et les DIOPM¹⁰.

Dimension socio-éducative, l'orientation

Nous rappelons que dans cette partie, nous nous référons aux informations des cites officiels des ministères de l'éducation nationale des pays concernés et des entretiens avec les responsables des ministères et des chefs d'établissements. Ainsi, nous observons que l'orientation est surtout fait dans les deux systèmes éducatifs dès troisième pour entrer dans les lycées techniques et professionnels, même s'ils existent des concours d'entrées en lycées techniques dès la classe de cinquième. Les procédures mises en œuvres dans chaque système éducatif sont différentes, on retrouve en France :

1. entre octobre et novembre : le temps de la réflexion
2. entre décembre et janvier : le premier bilan scolaire
3. entre janvier et février : les demandes provisoires d'orientation
4. en mars : la proposition provisoire du conseil de classe
5. en mai : le choix de l'orientation et les demandes d'affectation
6. en juin : la décision d'orientation et l'affectation

Par contre, en Afrique francophone, l'orientation est faite en fin d'année par le conseil de classe et sur avis du conseiller d'orientation et actuellement des vœux des élèves. Les conseillers d'orientation n'étant pas dans tous les collèges, cette responsabilité est laissée au conseil de classe qui décide. Le critère ici est la note en mathématique et en sciences physiques, et il faut une moyenne annuelle supérieure à 14 sur 20 pour être orienté en seconde scientifique en Afrique francophone. Il faut déjà dire qu'effectivement, contrairement à ce qui se fait en France, en Afrique francophone, dans l'enseignement général, ils n'existent que deux secondes, une seconde S et une seconde LE. l'avis des parents n'est pas pris en compte encore moins celui de l'élève, sauf pour des élèves ayant été orientés en seconde scientifique qui refusent d'y aller, dans ce cas ces derniers sont parfois obligés de terminer le premier trimestre en seconde scientifique ayant éventuellement, si les résultats ne suivent pas d'être réorientés en seconde littéraire, toutefois il leur est proposé de terminer l'année en seconde scientifique afin d'être orienté en première littéraire s'ils atteignent une moyenne de 9 sur 20 en seconde scientifique ;

la sélection

Dans les deux systèmes éducatifs, les critères de sélection sont les mêmes, on garde les notes, les moyennes et la progression du niveau ou des capacités de l'élève, il faut parfois passer des concours pour entrer dans des lycées techniques ou professionnels et des entretiens. Souvent, on organise des tests pour décider si un élève est apte à entrer dans un ordre d'enseignement ou pas. L'âge aussi intervient à un certain moment de la

8. les pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien ont manifesté depuis 1983 leur volonté d'unir leurs efforts dans un vaste projet inter-africain visant à harmoniser les programmes de mathématiques. Progressivement et patiemment, ils ont réussi à travers un certain nombre de séminaires à élaborer un noyau commun pour les programmes des premier et second cycles

9. le Conseil national de l'innovation pour la réussite éducative (Cniré) qui travaille à donner une dynamique nouvelle à la création d'une politique publique de réussite éducative. Il est composé de quarante membres et réunit des représentants des acteurs institutionnels, associatifs, économiques et des experts.

10. le délégué à l'information et à l'orientation auprès du Premier ministre, est chargé de mettre en place avec les régions et les partenaires sociaux le service public de l'orientation tout au long de la vie

scolarité. Le sexe aussi n'est pas un facteur limitant pour les deux systèmes, il importe peu de savoir si un élève est un garçon ou une fille pour l'évaluer, sauf en EPS¹¹ ou la grille d'évaluation change en fonction du sexe. Les filles restent minoritaires certes dans les filières scientifiques.

3.7.5 Organisation des contenus, les cours de mathématiques en France et en Afrique francophone

Voici un petit tableau simple nous permettant de comparer les structures des cours tels que fait par les enseignants en France et en Afrique francophone

étape	France	Afrique F	durée
titre	titre	séquence	1 minute
activité 1	activité	activité	5 minutes
propriété	propriété	propriété	10 minutes
démonstration	démonstration	démonstration	15 minutes
activité 2	méthode	application	15 minutes
exercice	conseils	exercice	9 minutes

Nous remarquons à partir de ce tableau que les cours ne sont pas déroulés de la même façon qu'on soit en France ou en Afrique francophone, ceci est expliqué par l'institution qui forme les enseignants et produit les manuels qu'ils utilisent. L'orientation pédagogique joue aussi un rôle fondamental dans cette histoire. En effet, dans un système où on utilise une approche par compétence comme actuellement en France, on va faire appel à une orientation didactique différente à celle qu'on utilise en Afrique francophone ou l'approche pédagogique est encore soit par les contenus, soit par les objectifs. Dans la partie activité 1 : on retrouve des objectifs qu'on fixe en Afrique francophone, la liberté étant laissée à l'enseignant en France de les énoncer ou pas au début de la leçon, du vocabulaire et on peut proposer quatre activités aux élèves en France ce qui n'est pas possible en Afrique francophone, pourquoi ? Tout simplement parce qu'on a pas dans les salles de classes des vidéos projecteurs ou des tableau numérique interactifs encore moins la possibilité de faire des copies tous les jours en fonction du besoin. Le cours (propriétés, définition, théorèmes et démonstrations) reste le même dans une certaine mesure, il s'agit là du savoir. La grande différence revient au niveau de la résolution de l'activité 2 où on voit apparaître les méthodes et algorithmes de résolution en France alors qu'en Afrique francophone, on n'enseigne pas souvent les méthodes encore moins les algorithmes. À la fin de chaque leçon, ils est demandé à chaque élève d'aller faire des exercices de maisons soit pour approfondir ses connaissances, soit pour prendre des initiatives, en moyenne quatre exercices par jour en Afrique francophone et un par jour en France. Les *QCM* sont privilégiés en France pour faire le point chez l'élève et pour évaluer ses capacités avant une évaluation sommative. En Afrique, francophone les *QCM* sont encore considérés par certains enseignants de mathématiques comme des cadeaux faits aux élèves ! Nous ne rentrons pas dans trop de détails. Nous présentons simplement comment se fait ou du moins comment est structurée le cours dans chaque système éducatif en nous référant aux cahiers d'élèves et aux cahiers de textes.

11. Éducation physique et sportive

les manuels au programmes et leur utilisation dans chaque système éducatif

Nous ne donnerons pas une liste exhaustive des manuels au programme. Il nous paraît important de dire qu'ils en existent plusieurs manuels en France et un seul identique à tous les pays de l'Afrique francophone à la base. Toutefois, il faut rappeler que dans certains pays un effort particulier est fait par des enseignants locaux visant à produire leurs propres manuels. Généralement, il s'agit des cahiers d'élèves (un recueil d'exercices). En Afrique, francophone en toute rigueur. Il est vrai qu'on laisse aux enseignants d'Afrique la liberté d'utiliser tous les livres qu'ils veulent pour préparer leur leçon. Le seul problème qui se pose est au niveau de la définition d'un concept. Pour le concept de fonction qui nous intéresse par exemple, les inspecteurs, ont toujours demandé aux jeunes professeurs de leur donner les définitions telles que dans le livre, c'est-à-dire telle que dans l'unique manuel CIAM, unique manuel issue de l'harmonisation des programmes en Afrique francophone pour le moment. Nous retrouvons pour la même collection en France, un cahier de mathématiques pour les élèves, un livre d'accompagnement pour le professeur, un cahier d'algorithme, une version du manuel numérique pour enseignant et pour élève ainsi que d'autres ressources.

La nature des problèmes que les élèves doivent savoir résoudre en France

Les objectifs à atteindre sont déclinés en termes de nature des problèmes que les élèves doivent savoir résoudre, et précisent également le degré d'autonomie attendu. Ces objectifs sont ambitieux, le degré d'autonomie que les élèves doivent montrer pouvant être maximal : autonomie du choix de la démarche, de la nature du traitement à apporter, de la modélisation à mettre en œuvre. Construire chez tout élève cette autonomie nécessite une formation adaptée incluant une confrontation fréquente à des problèmes posés sous une forme ouverte. Le programme Français fixe comme objectif la maîtrise de deux familles de problèmes : problèmes se ramenant à une équation du type $f(x) = k$ dans le cas où la fonction est donnée, mais aussi dans le cas où toute autonomie est laissée pour associer au problème divers aspects d'une fonction. Seconde famille : problèmes d'optimisation ou du type $f(x) > k$. Dans un premier temps, un élève doit pouvoir résoudre un tel problème, de façon exacte ou approchée, à l'aide d'un graphique et de façon exacte si les variations de la fonction et les antécédents de k sont connus. Dans un second temps, cette étude peut être faite, selon les cas, en exploitant les potentialités de logiciels, graphiquement ou algébriquement, toute autonomie pouvant être laissée pour associer au problème une fonction.

Nous voyons simplement que les objectifs du programme sur les fonctions en France sont centrés sur l'autonomie du choix d'une démarche donc la procédure, la modélisation à mettre en œuvre, la résolution d'équation et l'optimisation. La formation mathématique au lycée général et technologique vise deux objectifs : l'acquisition de connaissances et de méthodes nécessaires à chaque élève pour construire son avenir personnel, professionnel et citoyen, et préparer la poursuite d'études supérieures. Le développement de compétences transversales (autonomie, prise d'initiative, adaptabilité, créativité, rigueur...) et de compétences spécifiques aux mathématiques, explicitées comme suis : chercher, analyser un problème. Extraire, organiser et traiter l'information utile. Observer, s'engager dans une démarche, expérimenter en utilisant éventuellement des outils logiciels, chercher des exemples ou des contre-exemples, simplifier ou particulariser une situation, reformuler un problème, émettre une conjecture. Valider, corriger une démarche, ou en adopter une nouvelle. Modéliser. Traduire en langage mathématique une situation réelle (à l'aide d'équations, de suite, de fonctions, de configurations géométriques, de graphes, de lois de

probabilité, d'outils statistiques ...). Utiliser, comprendre, élaborer une simulation numérique ou géométrique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel. Valider ou invalider un modèle. Représenter Choisir, un cadre (numérique, algébrique, géométrique...) adapté pour traiter un problème ou pour représenter un objet mathématique. Passer d'un mode de représentation à un autre. Changer de registre. Calculer, effectuer, un calcul automatisable à la main ou à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel). Mettre en œuvre des algorithmes simples. Exercer l'intelligence du calcul : organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, choisir des transformations, effectuer des simplifications. Contrôler les calculs (au moyen d'ordres de grandeur, de considérations de signe ou d'encadrement). Raisonner, utiliser les notions de la logique élémentaire (conditions nécessaires ou suffisantes, équivalences, connecteurs) pour bâtir un raisonnement. Différencier le statut des énoncés mis en jeu : définition, propriété, théorème démontré, théorème admis... Utiliser différents types de raisonnement (par analyse et synthèse, par équivalence, par disjonction de cas, par l'absurde, par contraposée, par récurrence...). Effectuer des inférences (inductives, déductives) pour obtenir de nouveaux résultats, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture, prendre une décision. Communiquer : opérer la conversion entre le langage naturel et le langage symbolique formelle. Développer une argumentation mathématique correcte à l'écrit ou à l'oral. Critiquer une démarche ou un résultat. S'exprimer avec clarté et précision à l'oral et à l'écrit. Cadre de mise en œuvre, la résolution de problèmes est un cadre privilégié pour développer, mobiliser et combiner plusieurs de ces compétences. Cependant, pour prendre des initiatives, imaginer des pistes de solution et s'y engager sans s'égarer, l'élève doit disposer d'automatismes. En effet, ceux-ci facilitent le travail intellectuel en libérant l'esprit des soucis de mise en œuvre technique et élargissent le champ des démarches susceptibles d'être engagées. L'installation de ces réflexes nécessite la mise en œuvre directe, sur des exercices aux objectifs circonscrits, de procédures de base liées à chacune de ces compétences. Il n'y a pas d'ordre chronologique imposé entre l'entraînement sur des exercices et la résolution de problèmes. Cette dernière peut en effet révéler le besoin de s'exercer sur des tâches simples, d'ordre procédural, et motiver ainsi la nécessité de s'y engager. Les commissions d'élaboration de sujets peuvent se référer à ces compétences afin que les exercices et questions proposés les mobilisent de façon équilibrée et permettent de les observer.

Objectifs du programme en Afrique francophone

Pour étudier une fonction en seconde en Afrique francophone, l'objectif du programme est de gérer des situations concrètes à l'aide de tableaux, de diagrammes et de graphiques. La notion de fonction, d'ensemble de définition et de représentation graphique d'une fonction sont des thèmes nouveaux et délicats. Elles sont abordées avec beaucoup d'attention. L'utilisation d'une représentation graphique permet de déterminer l'image et les antécédents d'un nombre, l'image directe et l'image réciproque d'un ensemble. Lorsqu'une fonction est définie par une formule explicite, on veillera à ce que les études visant à déterminer l'ensemble de définition, une image ou des antécédents, ou à établir un sens de variation, se ramènent à la résolution d'équations ou d'inéquations du premier degré. Il est important ici que les élèves sachent reconnaître les phénomènes linéaires et saisissent le caractère spécifique des fonctions linéaires et des fonctions affines, et leur lien avec la proportionnalité. Aussi, l'apprentissage de la logique, saupoudré et renforcé tout au long de l'année, améliore l'acquisition par l'élève de la rigueur dans ses démonstrations. L'usage des quantificateurs et des tables de vérité qui ne donnent pas plus de sens à la logique est hors programme. Dans le cadre des fonctions, le professeur a toute liberté pour son

enseignement. En particulier, il lui revient de déterminer, selon le niveau de sa classe, les résultats qui seront à démontrer et ceux qui seront admis. Toutefois, il est indispensable que soit clairement exprimé le statut des résultats présentés aux élèves (admission, constat, conjecture, vérification, etc.). L'implication active, individuelle ou en groupe, des élèves dans le travail en classe doit les entraîner à la pratique de la démarche scientifique. Ceux-ci doivent continuer à découvrir des méthodes, à améliorer leurs capacités à communiquer leurs arguments : tout cela s'acquiert essentiellement par la résolution de problèmes. On évite cependant les exigences prématurées de formulation. Enfin, il est intéressant que les élèves se rendent compte que les mathématiques se sont construites peu à peu, à travers des recherches et des découvertes. Les notes historiques introduites dans le manuel de Seconde S CIAM peuvent être développées par le professeur qui s'y intéresse et qui juge sa classe réceptive.

En classe de seconde, on pourra entraîner les élèves à utiliser une calculatrice en étude de fonctions, sur quelques exemples simples, le calcul de valeurs numériques d'une fonction d'une variable. Il est conseillé dès la seconde de choisir un modèle de machine répondant aux objectifs et couvrant tout le cycle. Nous voyons ici que les objectifs du programme sur les fonctions en Afrique francophone sont non seulement centrés sur la modélisation à mettre en œuvre, la résolution d'équation et l'optimisation, mais aussi mettent en perspective l'apprentissage des notions. Les programmes de seconde accordent la priorité aux exercices graphiques. En Afrique, francophone, on peut dire au vu des tâches au programme que la seconde est une classe de détermination, elle assure la continuité avec le premier cycle (seconde littéraire) mais pas trop en seconde scientifique. Il faut revoir les programmes de troisième en étude de fonction afin de préparer d'une manière privilégiée les élèves aux filières scientifiques, social, économique, technologique et à s'adapter plus facilement aux exigences nouvelles de la société actuelle comme en France avec les logiciels et les compétences de bases. L'utilité et la pérennité des mathématiques ne sont plus à prouver. Néanmoins, chaque élève, à son niveau doit faire l'expérience personnelle de l'efficacité des concepts mathématiques et de la simplification que permet la maîtrise de l'abstraction. Les élèves doivent pouvoir prendre le temps de faire des mathématiques, de bâtir un ensemble cohérent de connaissances et d'accéder au plaisir de la découverte et à l'expérience de la compréhension. Les recherches à la limite en France prennent le pas des élèves. Entre temps pour que l'élève puisse définir son orientation en fin de classe de 2^{nde}, il doit avoir pris conscience de la diversité de l'activité mathématique. Chercher, trouver des résultats partiels, se poser des questions, appliquer des techniques bien comprises, étudier une démonstration qu'on n'aurait pas trouvée soi-même, expliquer oralement une démarche, rédiger au brouillon puis encore au propre, etc. Sont quelques-unes des tâches de cette activité. Il importe donc que cette diversité se retrouve dans les travaux proposés à la classe ; parmi ceux-ci, les travaux écrits à la maison restent absolument essentiels à toute progression de l'élève. À l'issue de la seconde, l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de commencer à détacher les principes de la logique formelle de ceux de la logique du langage courant, et par exemple, à dissocier implication mathématique et causalité. Le programme est une trame à partir de laquelle le professeur construit son enseignement. Il ne doit pas perdre de vue que, par le choix des exemples traités et de la progression suivie, par le vocabulaire imagé employé, par sa manière personnelle de raconter l'histoire de certaines idées, il transmet une image des mathématiques importante pour l'avenir de ses élèves.

Le problème de la situation de référence

Les quatre dimensions d'analyses des manuels au programme et utilisés par les enseignants et par les élèves en France et en Afrique francophone que nous avons pu identifier sont issues des travaux de recherche d'Aline Robert qui à son tour s'est inspirée des recherches de Vygotsky, dans sa dernière thèse très populaire, celle de la modélisation d'une phase de l'apprentissage en référence à une Zone Proximale de Développement qui caractérise certaines connaissances « à venir » des élèves. Pour elle, très schématiquement, les élèves peuvent s'approprier des connaissances par une sorte d'initiation intelligente de l'enseignant, si celle-ci sont suffisamment proche des connaissances qu'ils ont déjà, d'où le mot utilisé. Le problème de la situation de référence se pose en permanence dans les manuels, la conceptualisation dans les situations proposées aussi. Pour les notions enseignées, dans les différents manuels aux programmes et dans les deux institutions nous avons identifié les connaissances :

1. à acquérir par problème et par niveau de difficulté ;
2. qui présentent un degré de généralisation.
3. qui sont dans la continuité des acquis,
4. qui se retrouve dans les contenus : les notions et les modes de raisonnements attendues, les capacités attendues, les méthodes, les exercices et problèmes.

Les dimensions sur lesquelles nous allons nous appuyer sont des caractéristiques strictement liées à la notion de fonction à savoir :

1. son domaines d'application telle qu'elle est introduites et
2. sa mise en fonctionnement dans des problèmes.

Il s'agit à ce niveau des types d'exercices et méthodes au programme qu'on retrouve dans les manuels. Pour faire simple. Le monde étant déjà connecté, nous savons que certains enseignants d'Afrique utilisent les manuels en ligne. Pourtant, ils sont fait sur la base du programme français pour le plus grand nombre. Certes la contexte sanitaire actuel causé par la covid 19 a amené les autorités des pays d'Afrique francophone à motiver les enseignants à produire des manuels numériques. Ceci pour dire que les contenus bien que légèrement différents tendent vers l'uniformisation.

Chapitre 4

Le corpus

4.1 Configuration matérielle du corpus

Selon la formulation d'Elena Tognini-Bonelli[49, p. 4-5] « la première approche d'un corpus, *corpus-based*, utilise le corpus pour vérifier une théorie ou une hypothèse afin de la valider, la réfuter ou l'améliorer. La seconde, *corpus-driven*, plus inductive, revendique une exploration sans a priori du corpus faisant émerger depuis lui-même des hypothèses ». C'est la deuxième approche qui est notre pour cette recherche.

Afin de mieux cerner ce qui peut expliquer les phénomènes¹ que nous pourrions observer chez les élèves du secondaire lors de la résolution par eux-même, des tâches liées à la notion de fonction, nous avons décidé de partir d'un corpus représentatif et exhaustif. Il nous sert de base de données pour tenter via sa composition, ses délimitations et son analyse, de mieux connaître ce que font ou savent les élèves lorsqu'ils sont confrontés à des tâches sur les fonctions.

Des devoirs sur table donnés en classe, au baccalauréat blanc et au baccalauréat officiel à des élèves de fin de cycle 4, de seconde et de terminale en France et en Afrique francophone feront partir de l'ensemble de tâches du corpus. Ces tâches portant sur les fonctions au programme officiel à chacun des niveaux considérés seront traitées par les élèves. C'est l'analyse des productions² des élèves et des candidats au baccalauréat blanc et officiel, c'est-à-dire, du corpus, qui est l'objet de notre thèse. Ainsi, nous allons mettre en exergue des connaissances qui sont mobilisées par les élèves en les comparant avec les connaissances nécessaires précisées dans des manuels au programme pour résoudre des tâches liées aux fonctions au secondaire, c'est-à-dire le corpus des contenus identifiables dans les manuels au programme.

4.1.1 Les critères choisis

Les critères choisis pour constituer ce corpus et qui nous ont semblé à même de nous permettre de se faire une idée de l'activité des élèves d'un point de vue didactique sont :

-
1. les rapports, les écarts, les différences entre les tâches et l'activité élève sur les fonctions au programme dès la fin du cycle 4 jusqu'en terminale
 2. leurs activités présumées ou induites des copies, traces écrites

le niveau d'enseignement³ ; les types de tâches⁴ ; les réponses des élèves⁵

Les enseignants qui ont bien voulu nous accompagner sont tous en activités entre 2017 et 2021 et sont titulaires d'une maîtrise de mathématiques et ou d'un CAPES en mathématiques et l'expérimentation a eu lieu au Gabon et en France : à Paris ; à Besançon et à Toulouse.

En ce qui concerne l'analyse de la tâche et de l'activité, nous avons fait le choix d'analyser en amont trois premières copies pour identifier les régularités qui nous ont permis d'analyser les autres copies. Pour ce faire, nous avons pris en compte tout ce qu'on a pu identifier. Le travail dans la suite est de lire et de corriger toutes les autres copies, la moindre différence entre ce qu'on a pu trouver sur les trois premières copies et les nouvelles est signifiante. C'est d'ailleurs ce qu'on a essayé en espérant trouver quelque chose de particulière. Enfin, nous allons décrire d'une manière simple les différences. Nous allons être sur le volet de l'interprétation, c'est-à-dire savoir à travers ce qui est écrit, ce qui est fait. Non pas ce qui a voulu être fait, mais, ce qui conduit à ce qui est fait. Toutefois, lorsque nos idées seront limitées, nous nous contentons à présenter simplement la situation, le rendu des élèves, sans en ajouter de commentaire.

Nous avons ainsi construit notre corpus. Pour identifier des connaissances des élèves dans chacun des niveaux considérés, nous allons faire des analyses par dossier. Puis, nous allons confronter les résultats de chaque dossier aux autres pour en repérer les différences et les jeux de renvois des uns aux autres.

Dans la suite de notre étude, nous ne faisons de différence entre dossier et corpus. Aussi, nous avons fait le choix de commencer par le corpus de terminale pour finir avec celui de seconde.

4.2 Inventaire du corpus

Le corpus qui nous sert de fondement est constitué de 11 dossiers à savoir : le dossier 001, fait à Toulouse, à Besançon, à Paris, à Libreville et à Lastourville (années scolaires 2016-2022 avec 250 élèves.) ; les dossiers 002, 003 et 004 des Baccalauréats blancs de la session 2020 série *A*, *B*, *C* et *D* au Gabon ; du dossier 005, fait à Libreville à partir de l'épreuve orale du baccalauréat officiel sessions 2017-2021 ; du dossier 006 fait à partir des copies du baccalauréat officiel *C* session 2021 ; du dossier 007 des résultats aux baccalauréats officiels sur les tâches liées à la notion de fonction session 2021 ; du dossier 008 portant sur des questions des enseignants aux sujets des fonctions de l'année 2017 à l'année 2022 ; des dossiers 009, 010 et 011 portant sur les cadres, les programmes, les progressions sur la notion de fonction.

Ce corpus sera mis progressivement à disposition sur le site <http://epiphymaths.univ-fcomte.fr/corpus-fonctions>.

3. Nous avons tout un ensemble d'éléments composés de différents niveaux d'enseignement : la troisième, la seconde et la terminale

4. Nous pouvons faire des rapprochements entre les tâches

5. Nous pouvons faire des confrontations entre les différentes réponses, des projections et identifier des écarts, mais aussi des différences entre niveau et entre systèmes éducatifs.

4.2.1 Dossier 001, Le corpus de seconde, Toulouse, Besançon, Paris, Libreville, Lastourville (2016-2022)

Nous avons envoyé en version pdf à quatre lycées, un ensemble de tâches sous forme de devoir à faire passer à des élèves de classes de secondes. Des copies distinctes de 30 élèves de seconde S au Gabon et de 27 élèves de seconde générale en France nous ont été renvoyées par les collègues en version numérique (fichier pdf ou jpeg). Pour la France, le travail a été fait par Monsieur Gildas Antoine (contact : 0033758508729) , professeur de mathématiques en poste au Lycée Bernard Palissy et par Monsieur OBIANG Thierry en poste avant au Lycée Charles Naudier mais actuellement au collège Saint Exupéry de Lons le Saunier, puis par Monsieur ABOUROU ELLA Appolinaire, docteur en analyse et enseignant de lycée (contact : 0033684661358) en poste à Toulouse. Du côté de l'Afrique francophone, nous nous sommes limités au Gabon du Lycée national Léon MBA, le plus grand lycée du Gabon avec 20 classes de seconde, 7 classes de seconde S . M. NNANG ASSEKO Alex (actuellement en stage pour devenir conseiller pédagogique) nous y a accompagné ainsi que M. ONDO NDONG Jean Arsène en poste au Lycée public Jean Arsène Bounguendza de Lastourville (contact : 0024177840228).

4.2.2 Dossiers 002, 003 et 004. Bac blanc 2020 série A, B, C et D

Nous avons également un corpus de terminale littéraire et économique composé de deux épreuves de mathématiques au baccalauréat blanc en version pdf. Une épreuve de série $A2$ et une épreuve commune des séries $A1$ et B . Le département de mathématiques du Lycée National Léon MBA a bien voulu proposer une épreuve commune aux candidats des deux séries cette année 2021. Les copies distinctes et corrigées par les enseignants de 30 élèves de chaque terminale série $A2$, $A1$ et B nous ont été transmises. Celles des séries A et B ont été égarées. Nous avons par contre des copies en version pdf de 30 élèves de terminale série C (dossier 04 baccalauréat blanc de terminale C) et des copies de 50 élèves de terminale série D (corpus 05 baccalauréat blanc de terminale D) ce dernier dossier de terminale D a été fait dans un autre Lycée de Libreville. Le Lycée Paul Idjendje Gondjou. Les copies distinctes en version pdf nous avaient été envoyées en version pdf par le chef de département de mathématiques dudit lycée en 2020. Aussi, nous avons pu obtenir 30 copies au baccalauréat officiel dans chacune des séries A B et D .

4.2.3 Dossier 005, Orale 2017-2021

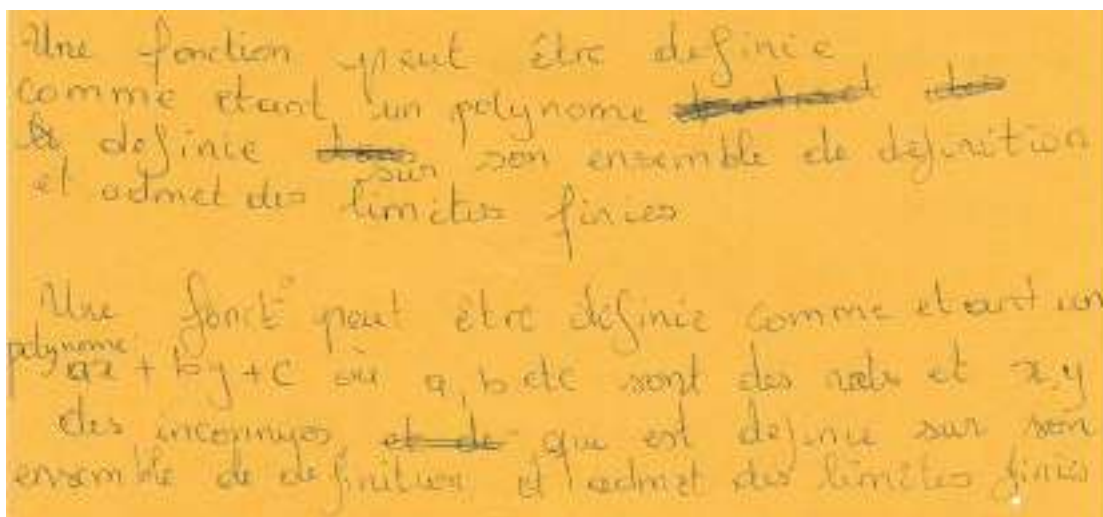
Lors des épreuves orales de second tour aux différents baccalauréats officiels, des réponses à la question :« qu'est-ce qu'une fonction ? »] ont été collectées auprès de 60 élèves de série C à l'orale de mathématiques au baccalauréat 2021 (dossier 06 baccalauréat officiel). Il devaient non seulement répondre oralement mais en plus écrire leurs réponse sur la copie qui leur servait de brouillon. Cette même question a été posée aux candidats interrogés à l'épreuve orale de 2018 à 2021 dans les autres séries.

Nous présentons ci-dessous douze réponses majoritaires des candidats admis au second tour du baccalauréat.

Corpus orale au baccalauréat série C, session 2021

Question: Qu'est-ce qu'une fonction?

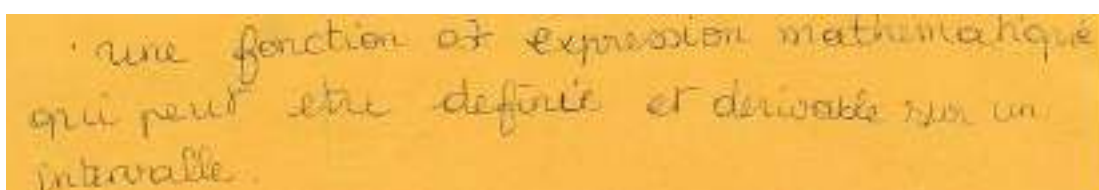
Réponse candidat 001: une fonction peut être un polynôme



Une fonction peut être définie comme étant un polynôme ~~et~~ ~~de~~ définie ~~sur~~ son ensemble de définition et admet des limites finies.

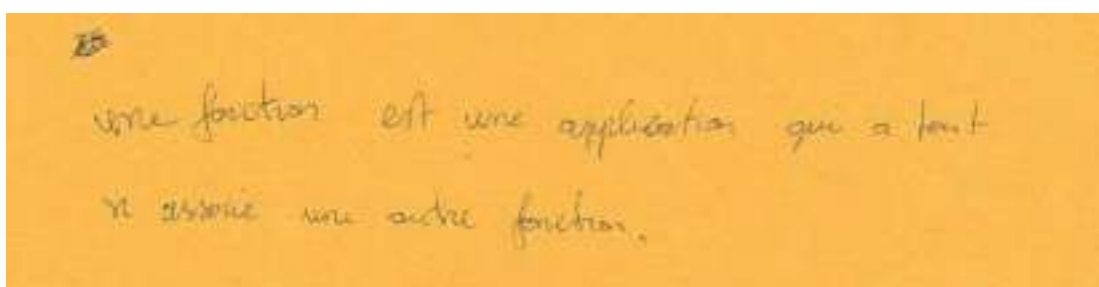
Une fonction peut être définie comme étant un polynôme $ax^2 + by + c$ où a, b, c sont des réels et x, y des inconnues ~~et de~~ qui est définie sur son ensemble de définition et admet des limites finies.

Réponse candidat 002: une fonction est une expression mathématique



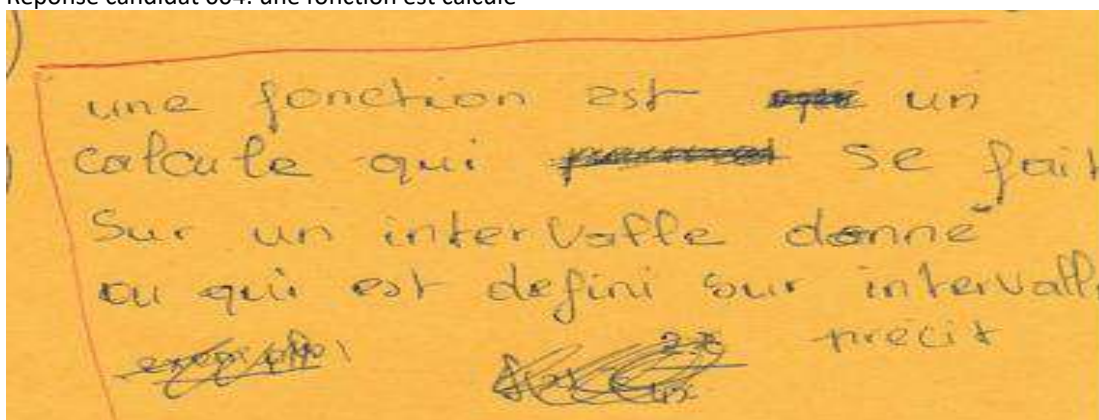
une fonction est expression mathématique qui peut être définie et dérivable sur un intervalle.

Réponse candidat 003: une fonction est une application



une fonction est une application qui à tout x associe une autre fonction.

Réponse candidat 004: une fonction est calculé



une fonction est ~~une~~ un calculé qui ~~peut~~ se fait sur un intervalle donné ou qui est défini sur intervalle.

~~exemple~~ ~~de~~ ~~la~~ ~~fonction~~ ~~qui~~ ~~est~~ ~~calculé~~ ~~sur~~ ~~un~~ ~~intervalle~~ ~~donné~~

*

Réponse candidat 005: une fonction ne peut être définie que sur un intervalle

Une fonction ~~peut~~ peut se définir sur un intervalle si et seulement elle appartient à cet intervalle.

Réponse candidat 006: Une fonction est tout point associé à un autre

Une fonction est tout point A associé à B

10526

Réponse candidat 007: une fonction est un ensemble de polynômes et de variant x

Une fonction est un ensemble de polynômes ayant un ensemble de définition et de variante, nous note souvent x .

63

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x - \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(x - 1)}$$

Réponse candidat 008: une fonction est une équation

une fonction est une équation définie sur un intervalle I , et qu'il faut résoudre.

64

Réponse candidat 009: une fonction est toute opération

Une fonction est toute opération comprise dans
des intervalles $x \rightarrow \mathbb{R}$

(62)

Réponse candidat 010: une fonction est une transformation

Une fonction est une transformation qui à un nombre
 x associe $f(x)$ qui prend sa valeur dans un ensemble
 E et la somme des ces ensembles

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x)$

(61)

Réponse candidat 011: une fonction est un ensemble

Une fonction est un ensemble qui à tout point d'un intervalle
a une image sur un intervalle I

Réponse candidat 012: une fonction est une association d'éléments

une fonction est une association
d'éléments d'un ensemble A vers
un ensemble B

(58)

4.2.4 Dossier 006, copies BAC C session 2021

Après l'examen du baccalauréat officiel au Gabon, nous avons demandé au Directeur de l'Office national des examens et concours de mettre à notre disposition les copies des élèves de série C pour analyse. Suite à son accord, des copies de 492 candidats au baccalauréat officiel série C du centre unique de Libreville nous ont été données. Ses copies sont disponibles via http://epiphymaths.univ-fcomte.fr/corpus-fonctions/dossier006_copies_bac_c_session_2021.pdf.

4.2.5 Tâche de dérivabilité d'une fonction

EXERCICE 4 : Etude de fonctions - Suites intégrale

1-) Montrez que la fonction f est dérivable en 0.
calculons la limite du taux d'accroissement en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n (-1 + \ln x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n (-1 + \ln x)}{x} = 0$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - 0} = 0$ d'où la fonction f_m est dérivable en 0 car sa limite en 0 est un réel.

2-)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = 0$$

alors la fonction f_n est dérivable au point 0

2) Démontrons que les courbes (C_n) et (C_{n+1}) ont trois points fixes.

$$3) a) f_n(x) = x^n (-1 + \ln x)$$

$$f'_n(x) = n x^{n-1} (-1 + \ln x) + \frac{1}{x} x x^n$$

$$= n x^{n-1} (-1 + \ln x) + x^{n-1}$$

$$= x^{n-1} [n(-1 + \ln x) + 1]$$

$$= x^{n-1} (-n + 1 + n \ln(x))$$

N.B: Il est formellement interdit aux candidats de mettre sur la copie un signe quelconque permettant d'identifier sa provenance.

E332 12
30

NOTE ENTIERE SUR 20

07

Signature des correcteurs

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

716262

Exercice 1

8

EX1 6
EX2 0
EX3 10
EX4 20

1) X

2) X

3) C

4) D

5) A

38

Exercice 4

20

1) Montrons que f_m est dérivable en 0

Calcul de la dérivabilité

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_m(x) - f_m(0)}{(x - 0)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^m(-1 + \ln x) - f_m(0)}{(x - 0)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^m(-1 + \ln x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^m(-1 + \ln x)}{x} = -x^m + x^{m-1} \ln x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^m}{x} + \frac{x^m \ln x}{x}$$

N.B: Il est formellement interdit aux candidats de mettre sur la copie un signe quelconque permettant d'identifier sa provenance.

NOTE ENTIERE SUR 20

07

Signature des correcteurs

[Handwritten signatures]

7/16 264

COMPOSITION DE : Mathématique

Exercice 1 : Questions à choix multiples

A2

1. ~~A~~

2. B

3. ~~A~~ D

4. ~~A~~

5. ~~B~~

EX1: 12
EX2: 2
EX3: 12
EX4: 15

41

N.B: Il est formellement interdit aux candidats de mettre sur la copie un signe quelconque permettant d'identifier sa provenance.

4.2.6 Tâche de dérivation d'une fonction

on a $f_n(x) = x^n(-1 + \ln x)$ de la forme $U(x) \cdot V(x)$

La fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur \mathbb{R} , en particulier sur $]0; +\infty[$

La fonction $x \mapsto (-1 + \ln x)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$

Comme produit de fonction dérivable, f_n est dérivable sur $]0; +\infty[$

on a $f_n(x) = U(x) \cdot V(x)$ avec $U(x) = x^n \Rightarrow U'(x) = nU(x) \cdot U^{n-1}$
 $V(x) = (-1 + \ln x) \Rightarrow V'(x) = \frac{1}{x}$

$f'_n(x) = U'(x)V(x) + U(x)V'(x)$

$f'_n(x) = nx^{n-1} \cdot (-1 + \ln x) + x^n \cdot \frac{1}{x}$
 $= -nx^{n-1} + n \ln x (x^{n-1}) + x^n \cdot \frac{1}{x}$
 $= x^{n-1} (-n + n \ln x) + x^n \cdot \frac{1}{x}$
 $= x^{n-1} (-n + 1 + n \ln x)$

3pts

$f'_n(x) = x^{n-1}(-n + 1 + n \ln(x))$

b) Donnons le tableau de variations complet de f

Étudions le signe de $f'_n(x)$

$\forall x \in]0; +\infty[, f'_n(x) > 0$

x	0	$+\infty$
$f'_n(x)$		↗

$f_n(x)$ est strictement positif sur $]0; +\infty[$

Tableau de Variation

x	0	$f_n(0)$	$+\infty$
$f'_n(x)$		↗	↘
$f_n(x)$		0	↗

2pts

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = 0$$

alors la fonction f_n est dérivable au point 0

2) Démontrons que les courbes (C_n) et (C_{n+1}) ont trois points fixes.

$$3) a) f_n(x) = x^n (-1 + \ln x)$$

$$f'_n(x) = n x^{n-1} (-1 + \ln x) + \frac{1}{x} x x^n$$

$$= n x^{n-1} (-1 + \ln x) + x^{n-1}$$

$$= x^{n-1} [n(-1 + \ln x) + 1]$$

$$= x^{n-1} (-n + 1 + n \ln(x))$$

N.B: Il est formellement interdit aux candidats de mettre sur la copie un signe quelconque permettant d'identifier sa provenance.

E332 12
30

3-)

a-) Montrons que $\forall n \geq 2: f'_m(x) = x^{n-1}(-n+1+n \ln(x))$

$$f_m(x) = x^n(-1 + \ln x)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, f'_m(x) = nx^{n-1}(-1 + \ln x) + x^n \left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= -nx^{n-1} + nx^{n-1} \ln x + \frac{x^n}{x}$$

$$= -nx^{n-1} + nx^{n-1} \ln(x) + x^{n-1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad \boxed{f'_m(x) = x^{n-1}(-n+1+n \ln(x))}$$

b-) Dressons le tableau de variation de f_m

calcul de limite de f_m en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n(-1 + \ln x)$$

$x \rightarrow +\infty$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^n + x^n \ln x$$

N.B: Il est formellement interdit aux candidats de mettre sur la copie un signe quelconque permettant d'identifier sa provenance.

3. a. Montrons que pour tout $n > 0$; $f(x) = x^{n-1}(-n+1+n \ln(x))$

La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ car elle est le produit de deux fonctions dérivables.

$$f(x) = x f'(x) \mapsto x^n \quad \text{et} \quad g(x) \mapsto (-1+n \ln(x))$$

$$f(x) = x^n (-1+n \ln(x))$$

$$f'(x) = n x^{n-1} (-1+n \ln(x)) + x^n \times \frac{1}{x}$$

$$= n x^{n-1} (-1+n \ln(x)) + \frac{x^n}{x}$$

$$= n x^{n-1} (-1+n \ln(x)) + x^{n-1}$$

$$= x^{n-1} (n(-1+n \ln(x)) + 1)$$

$$f'(x) = x^{n-1} (-n+1+n \ln(x))$$

$$\text{On a } x^{n-1} > 0 \quad \text{et} \quad -n+1+n \ln(x) > 0$$

$$n \ln(x) > n-1$$

$$\ln(x) > \frac{n-1}{n}$$

$$e^{\ln(x)} > e^{\frac{n-1}{n}}$$

$$x > e^{\frac{n-1}{n}}$$

Tableau de signe

4.2.7 Tâche du tableau de variations d'une fonction

3) Montrez que $\forall n \geq 2$: $f'_n(x) = x^{n-1}(-n+1+n \ln x)$

La fonction $f(x)$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle à savoir :
 $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto -1 + \ln x$, et sa dérivée est :

$$\forall x \in [0, +\infty[, f'_n(x) = (x^n(-1 + \ln x))'$$

$$= nx^{n-1}(-1 + \ln x) + x^n \times \frac{1}{x}$$

$$= -nx^{n-1} + nx^{n-1} \ln x + x^{n-1}$$

$$= x^{n-1}(-n + n \ln x + 1)$$



$$f'_n(x) = x^{n-1}(-n + 1 + n \ln x)$$

ce qu'il faut démontrer

b) Prenons le tableau complet des variations de f_n

Signe de f'_n : $\forall x \in [0, +\infty[$ et $n \geq 2$

$x^{n-1} > 0$ alors le signe de f'_n dépend de $-n + 1 + n \ln x$

$$\text{On a } -n + 1 + n \ln x = 0$$

$$n \ln x = n - 1$$

$$\ln x = 1 - \frac{1}{n}$$

$$x = e^{1 - \frac{1}{n}}$$

Tableau de variations

x	0	$e^{1 - \frac{1}{n}}$	$+\infty$	\mathbb{R}^+
$f'_n(x)$		-	0	+
$f_n(x)$	0	$f_n(e^{1 - \frac{1}{n}})$	$+\infty$	

N.B: Il est formellement interdit aux candidats de mettre sur la copie un signe quelconque permettant d'identifier sa provenance.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n (-1 + \ln x) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n (-1 + \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} -x^n + x^n \ln x$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} -x^n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0 \text{ (formule des limites)} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n (-1 + \ln x) = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1 + \ln x) = +\infty$$

x	0	$+\infty$
f_n'		+
f_n	0	$+\infty$

4) Constructions des courbes C_2 et C_3

$$* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (-1 + \ln x)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x (-1 + \ln x) = 0 \text{ d'après}$$

la question 3b) de même $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = +\infty$

$$* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_3(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 (-1 + \ln x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 (-1 + \ln x)}{x} = +\infty \text{ également selon 3-b}$$

$$\star \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n (-1 + \ln x) = +\infty$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n (-1 + \ln x) = 0$$

$$\star -n + 1 + n \ln x = 0$$

$$n \ln x = n - 1$$

$$\ln x = \frac{n-1}{n}$$

$$\ln x = \ln e^{\frac{n-1}{n}}$$

$$x = e^{\frac{n-1}{n}}$$

x	0	$e^{\frac{n-1}{n}}$	$+\infty$
f(x)	0	0	$+\infty$

4) construire la courbe (C_f) et (C_g)

3- On note f'_n la fonction dérivée de f_n

a) Montrez que pour tout $n \geq 2$, $f'_n(x) = x^{n-1}(-n+1+n \ln x)$

$$\text{On pose : } u = x^n \implies u' = n x^{n-1}$$
$$v = -1 + \ln x \implies v' = \frac{1}{x}$$

$$f'_n(x) = u'v + v'u$$
$$= (n x^{n-1})(-1 + \ln x) + x^n \left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= -n x^{n-1} + n x^{n-1} \ln x + x^{n-1}$$

$$f'_n(x) = x^{n-1}(-n+1+n \ln x)$$

b) Tableau de variation de f_n

$$* \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^n(-1 + \ln x) = 0$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n(-1 + \ln x) = +\infty$$

	x	0		$+\infty$
	$f'_n(x)$		+	
	$f_n(x)$			$+\infty$
		0		

N.B: Il est formellement interdit aux candidats de mettre sur la copie un signe quelconque permettant d'identifier sa provenance.

4.2.8 Tâche de représentation graphique d'une fonction

Calcul de limites

$$\lim_{n \rightarrow 0} f(n) = \lim_{n \rightarrow 0} n^n(-1 + \ln n) = \lim_{n \rightarrow 0} -n^n + n^n \ln n = 0$$

car $\lim_{n \rightarrow 0} n^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow 0} n^n \ln n = 0$ (croissance comparée)

Par somme $\boxed{\lim_{n \rightarrow 0} f(n) = 0}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^n(-1 + \ln n) = +\infty \text{ car}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} -1 + \ln n = +\infty$$

par produit $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = +\infty}$

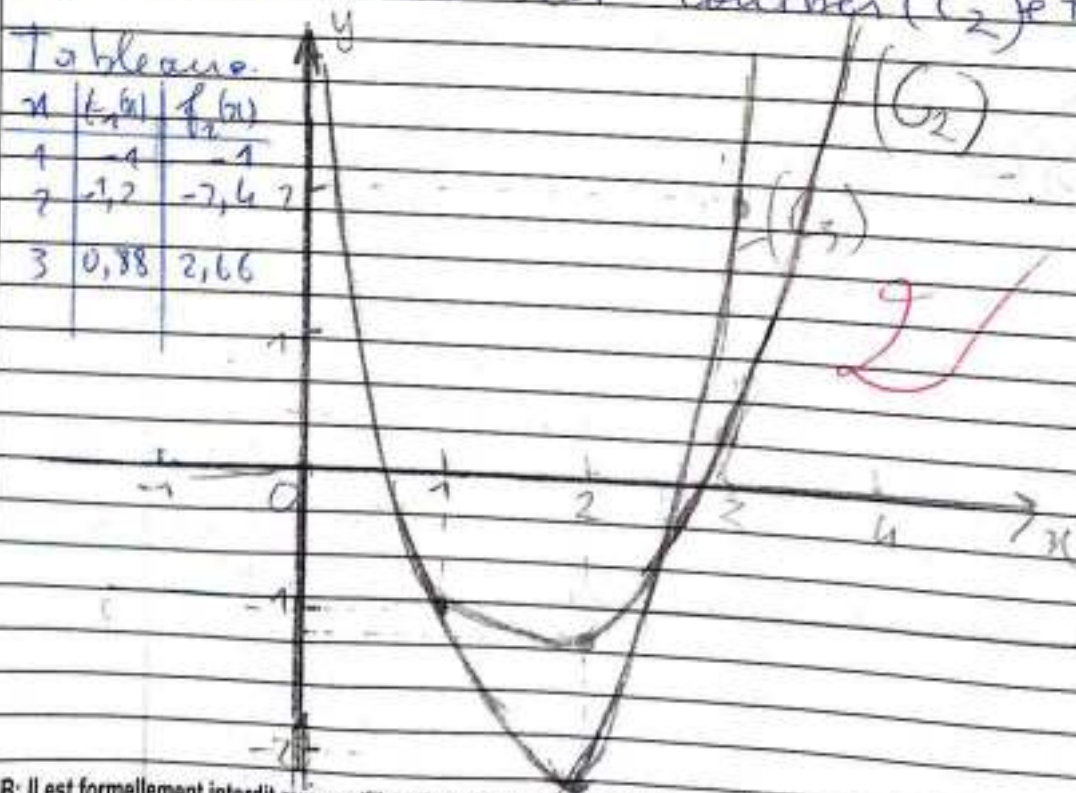
Seu de variation: $\forall n \in]0; e^{-\frac{1}{n}}] f'(n) < 0$

Alors $f(n)$ est strictement décroissante et $\forall n \in [e^{-\frac{1}{n}}; +\infty[f'(n) > 0$ Alors $f(n)$ est strictement croissante sur cet intervalle.

k) Construisons les courbes (C_2) et (C_3)

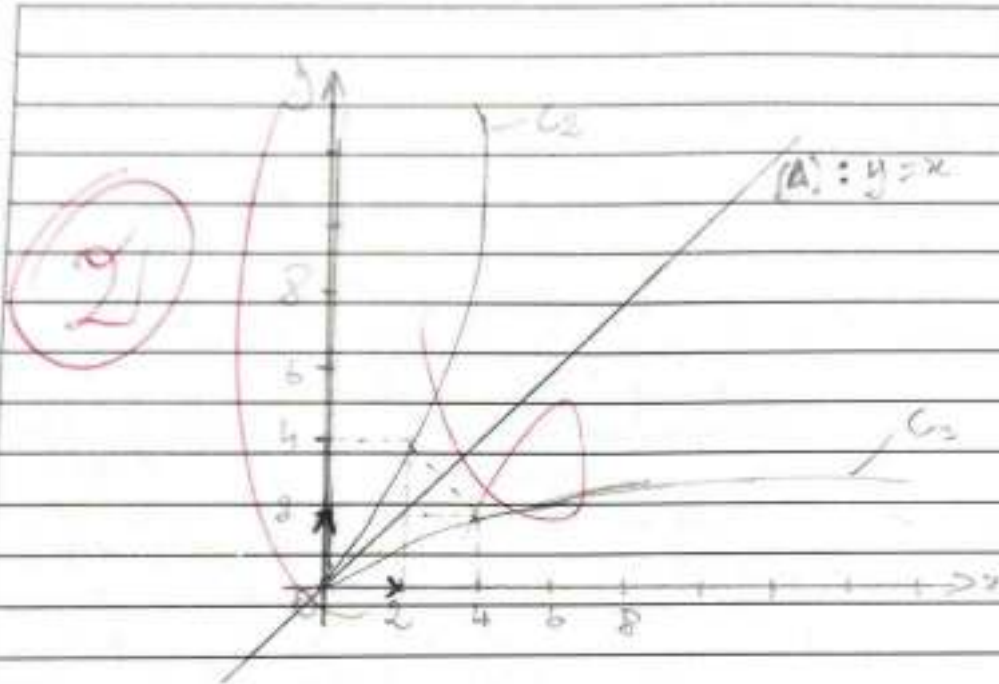
Tableau

n	$f_2(n)$	$f_3(n)$
1	-1	-1
2	-1,2	-7,67
3	0,88	2,66



N.B: Il est formellement interdit aux candidats de mettre sur la copie un signe quelconque permettant d'identifier sa provenance.

COMPOSITION DE : MATHÉMATIQUES.



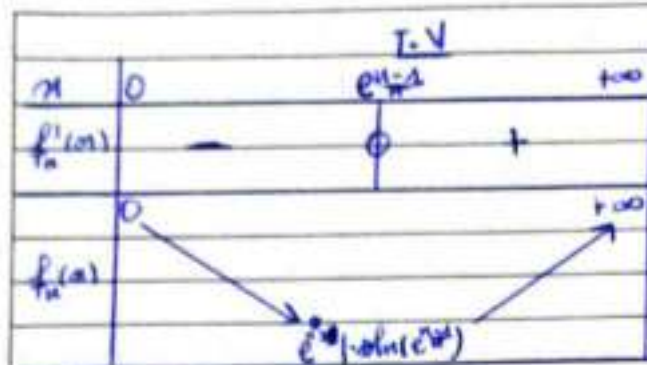
5. (U_n) , $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n = \int_1^e f_n(x) dx$

(a) Étudions les variations de la suite U_n .

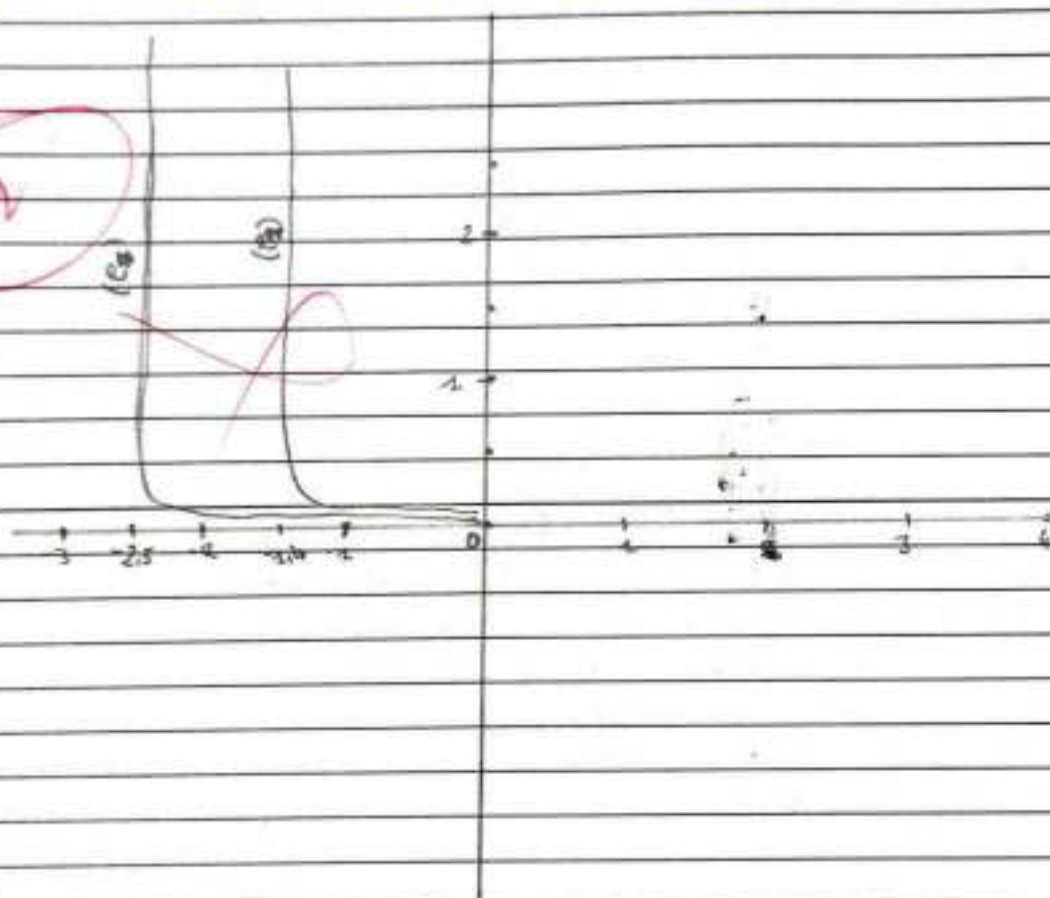
On a $n \in \mathbb{N}^*$ et donc $n \in [1, e]$

$U_{n+1} - U_n = x^{n+1}(-1 + \ln x) - x^n(-1 + \ln x) \geq 0$

donc (U_n) est croissante.



4) Construisez les courbes (C_1) et (C_2)



5 a) Les variations de (U_n) $U_n = \int_{\frac{1}{2}}^e f_n(x) dx$

$\forall n$ non nul si $f'_n(x) > 0$; $f_n(x) \uparrow$ alors $U_n \uparrow$

si $f'_n(x) < 0$; $f_n(x) \downarrow$ alors $U_n \downarrow$

b) Démontrons à l'aide d'une intégration par partie.

$$U_n = \frac{1}{(n+2)^2} [n+2 - e^{n+1}]$$

$$f_n = n x^{n-1} \left(-1 + \frac{1}{x} \ln x \right)$$

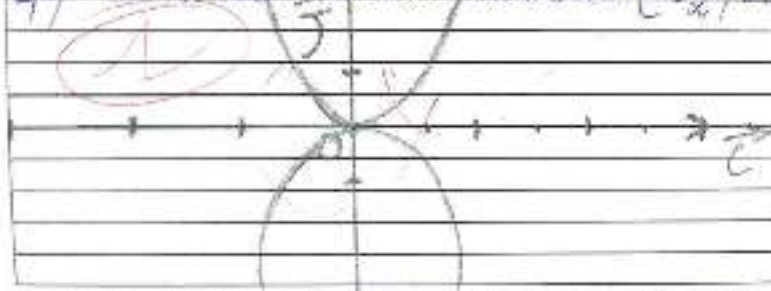
partiel but $n \geq 2$

$$f'_n(x) = x^{n-2} (-n + 1 + n \ln(x))$$

b) Dressons le tableau complet de variation

		0	$+\infty$
②	$f_n(x)$		+
	$f'_n(x)$		

4.) Construction des courbes (C_2) et (C_3)



N.B: Il est formellement interdit aux candidats de mettre sur la copie un signe quelconque permettant d'identifier sa provenance.

4.2.9 Dossier 007, résultats aux baccalauréats officiels sur la notion de fonction session 2021

Nous avons une base de données gérée par l'enseignant de mathématiques OLLOMO Seraphin. Ce dernier a mis en place une application qui présente les résultats aux baccalauréats exercice par exercice de chaque série et par centre d'examens. Ainsi nous disposons de cet outil pour analyser et pour comparer les résultats par série sur les tâches liées aux fonctions.

4.2.10 Dossier 008 : questions des enseignants aux sujets des fonctions

Différents points de vues issues des discussions en rapport avec l'enseignement apprentissage de la notion de fonction et ce, sous le contrôle des Inspecteurs, administrateurs d'un groupe de 423 enseignants de mathématiques, sont recensés depuis 2017. Ce corpus n'est pas fixe, puisque les débats varient en fonctions des besoins de tout un chacun. Mais chaque année des questions liées à la notion de fonction sont discutées. Si cela a un intérêt pour notre question de recherche, on fait la transcription sans orienter les idées, puis on fait une petite analyse tout en sachant que les enseignants ne sont pas tout à fait libre. Ils savent que Monsieur ONDJILA Inspecteur et ancien Directeur Général de l'Office National des examens et concours lit chaque message posté dans le groupe. Monsieur ONDJILA est également le président de l'association des Professeurs de mathématiques. C'est d'ailleurs ce dernier qui nous avait donné les copies des élèves après le baccalauréat officiel. Il répond au 0024166719451. Nous présentons ci-dessous la nature des discussions côté enseignant.

Voici ce que dit la collection Monge ,ouvrage ayant précédé *CIAM* du moins dans certains pays de l'Afrique subsaharienne. En ce moment, les fonctions s'appelaient relations. Définition. Soit deux ensembles A et B . on appelle relation \mathbb{R} de A vers B tout triplet (A, B, G) , où G est une partie du produit cartésien $A \times B$. A est appelé ensemble de départ de la relation \mathbb{R} , L'ensemble B est appelé ensemble d'arrivée de \mathbb{R} . Voici ce que dit le même ouvrage au sujet de l'égalité de deux relations R_1 et R_2 . Il est écrit : considérons deux ensemble A_1 et B_1 , et une partie G_1 du produit cartésien $A_1 \times B_1$. Soit R_1 la relation définie par le triplet (A_1, B_1, G_1) , D'une façon analogue, définissons une relation R_2 par le triplet (A_2, B_2, G_2) . Définition. Deux relations R_1 et R_2 sont égales si et seulement si elles ont le même ensemble de départ, le même ensemble d'arrivée et le même graphe. Il m'est arrivé de traîner les erreurs pendant des années pour me rendre compte très tardivement, je crois que cette plate forme nous permet de découvrir aussi certaines de nos erreurs. On aura tous gagné en levant le voile sur une notion qui nous divise certainement de façon inconsciente depuis des années. Les gagnants seront alors nos apprenants (P.28).

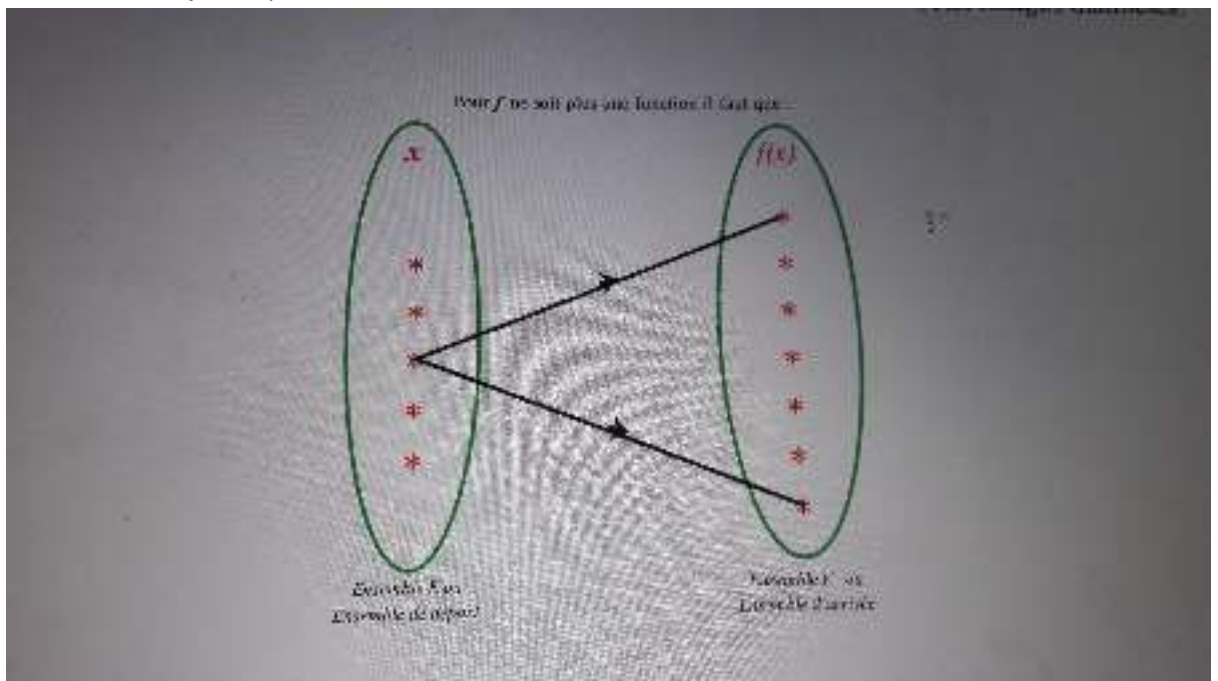
Enquête auprès des enseignants

1. A quel moment une fonction est-elle une application ?

1. Pourquoi tu ne donnes pas ta définition pour que le débat soit instructif

2. A cette question je répondrai : quand un élément de l'ensemble de départ à plus d'une image dans l'ensemble d'arrivée

3. 😬😬😬 Severin je n'ai pas de définition. Il en existe une.



4.

5. Là ça signifie qu'il ne s'agit ni d'une fonction, ni d'une application

6. Pas du tout.

7. Ici on ne parlera plus d'une fonction

8. Le "ta définition" ici signifie celle que tu connais

9. Les documents n'en parlent presque pas voilà pourquoi je voudrais qu'on en débattenne. Seul le livre CIAM seconde LE en parle. Il y a longtemps que j'ai enseigné cette classe. je crois que dans ce livre, on fait appel à l'ensemble de départ aussi

























10. Le n'ai pas parlé de "ma définition" mais de " la définition"

11. Tchouooh 😊😊 mais qui t'a dit que tu en a parlé

12. Tu as eu une réponse. A toi de réagir si tu n'es pas convaincu

13. J'ai parlé de ceci dès mon introduction dans le débat

14. Mon frère : fonction, application, bijective : CES termes veulent dire la même chose. Sauf que quand on parle de bijective c'est un antécédent associé à une unique image

15. J'attendais plutôt la suite de ceci 
16. Ta réponse est correcte M.TCHAPGA. seulement je voudrais savoir si tu corrobore à la définition de M.Lamiri au **sujet des conditions d'égalité de deux fonctions** ? Il serait bien de chercher à comprendre pourquoi les conditions énoncées par M.Lamiri et M.Sanoussi ne tiennent pas. A partir de la, on peut trouver ce qui manque
17. Je pense qu'il devait préciser s'il s'agit d'une fonction ou d'une application
18. M Sanoussi, es tu sérieux ? Il faut peut être revoir les définition de ces termes? (14)
19. Il serait bien de nous le dire   c'est l'objectif des échanges, explique aux autres ce que tu reproches à la définition qu'il propose, pourquoi jouer à cache cache cher Boni?  
20. Vous avez ceci est une plate forme d'échange. Faut pas jouer avec l'intelligence des gens. Soit vous connaissez vous donnez et on se corrige tous . Ou garde tous le silence désormais aux questions posées. Excusez moi d'être aussi dur .mais je suis ainsi
21.  
22.   **je voudrais prendre cet exemple. f est une fonction de R vers R définie par $f(x)=\sqrt{x}$ et g est une fonction de R^+ vers R telle que $f(x)=\sqrt{x}$. $DF= DG$. $f(x) = g(x)$. D'après les conditions énoncées ci dessus, $f=g$. f est une fonction qui n'est pas une application, g est une application. On déduit que f est une application. Ce qui est absurde.**
23. J'ai choisi une méthode pour aborder le sujet. elle consiste à poser au préalable des questions. Pourquoi voulez vous biaiser cette démarche?
24. Le pb ce n'est pas que tu aies raison ou pas frère le pb c'est que tu joue à cache-cache, et on s'éterniser sur des choses non essentielles  
25. Peut être parsk comme tu peux le constater parfois on ne sait pas où tu veux en venir  
26. Je suis désolé. **Nous ne sommes pas vos élèves à qui vous voulez donner des 1/2 points pour celui qui trouve la réponse. Moi Je suis là pour apprendre. Si ma réponse ne vous convient pas , proposer moi alors une réponse.**
27.   
28. **Vous me faites un procès d'intention Séverin. Je n'ai pas la définition. Je suis à la recherche de la définition.**    **malheureusement, je suis incompris. c'est pas grave.**
29. Il y a aucun procès, nous disons que ton approche des débats donne l'impression aux autres collègues de passer un test, je crois que tu peux changer ça
30. **Justement celui qui refuse une définition c'est qu'il a la définition recherchée ou des indices qui peuvent nous mener la définition. Mais vous ne proposez rien et vous bottez tout en touche . Mon aîné excuse moi d'être aussi dur sincèrement excuse**
31. M.Sanoussi, ne vous emportez pas svp. Je n'ai nullement cette intention. Et si un collègue se comportait ainsi envers moi, j'opposerais juste mes arguments contre les siens sans le juger. svp je ne vaut rien pour jouer ce rôle.
32. Je m'excuse aussi
33. Le pb c'est que tout le monde ne réagit pas comme toi  , il faut tenir compte de nos différences, c'est essentielle dans un forum
34. Merci infiniment pour la remarque mon aîné
35. C'est normal que dans une famille qu'on se chauffe parfois   
36. En résumé
Boni dit que dans la définition de fonctions égale il faut ajouter que les ensembles de départ sont les mêmes

54. Les deux conditions de cette définition sont suffisantes.
55. **Maintenant avec votre permission j'aimerais savoir la différence entre : fonction, application, bijection**
56. En attendant n'est il pas bien de nous éclairer sur la différence entre une application et une fonction ? Cela semble encore un peu flou et comme le disait Sanoussi nous sommes là pour s'entraider et apprendre.
57. Il manque quoi?
58. Regardez bien la définition que vous même avez postes. Vous avez omis de préciser que les deux fonctions ont le même ensemble de départ et d'arrivée
59. Voici ma contribution. Je crois que CIAM 2nde LE en parle. Pour une application de A dans B, chaque élément de A a une seule image dans B. Alors que pour une fonction chaque élément de A a 0 ou 1 image dans B
60. En réalité la comparaison des deux fonction se fait sur D, C'est pour ca que la premiere condition n'est pas necessaire
61. Quelle différence faites-vous entre ensemble de définition et ensemble de départ ? Même ensemble d'arrivée est réglé par $f(x)=g(x)$
62. C'est pour appuyer ceux qui disent que les deux dernieres conditions suffisent
63. Vous ne faites aucune différence entre ensemble de départ et ensemble de définition ?
Regardez bien
64. Malheureusement, vous êtes dans l'erreur
65. Explication
66. **Ce qui a été posté est une remarque et donc ne peut pas faire office de définition Et puis les éléments caractéristiques d'une fonction sont :**
L'ensemble de définition
L'ensemble des images
L'expression de la fonction.
67. Je vois 😊😊
Ensemble de départ c'est pour les applications
Ensemble de définition c'est pour les fonctions.
La fonction étant un cas particulier d'applications
68. 😊👉👉👉
69. **C'est l'application qui est un cas particulier des fonctions. Car toute application est une fonction**
70. 😊😊😊😊
71. Ensemble des images? Je crois que non.ensemble de départ et ensemble d'arrivée
72. 😊😊😊oui oui
73. *L'application relève de la théorie des ensembles.*
Elle est concurrencée par la fonction quand il s'agit des ensembles numériques
74. Donc peut on dire alors que une application est une fonction bijective ?
75. C'est trop fort pour moi M.BOUKALA !😊😊je ne comprends rien
76. Non.
77. Une application est une fonction dont l'ensemble de départ est égale à l'ensemble de définition. Par conséquent, toute application est une fonction

150. J'ai valide celle postee par Dieudonne
151. 🙌🙌🙌🙌cite nous seulement la source sauf si vous êtes chercheur en mathématiques 😊😊😊
152. La source?
153. Ce n'est pas des intentions Boni, tes postes parles d'eux memes
154. Lamiri, ce n'es pas un bras de fer.Je suis qu'en même surpris que lorsque CIAM propose quelque chose ,vous rejettez et des que vous tombez sur un cours dont j'ignore la source,vous etes satisfait
155. La source est au bas de page
156. Sincerment je cherche a comprendre la question
157. C'est un site créé certainement par un prof.comme nous
158. liveboard.com
159. Où est la fiabilité par rapport à un livre comme CIAM
160. CIAM ne dit pas le contraire de ce que nous avons avanc
161. Donc nous devons inventer nos définitions ?
162. 👍👍👍
163. On n'invente pas les définition. On ne les donne pas par intuition. Elles sont connues.
164. Essayons de reconsidérer ce que dit Boni . Peut être ne le comprenons nous pas. Ce que CIAM a remarqué est il faux?
165. Je ne sais pas si nous lisons la même chose
166. Des livres peuvent comporter des écrits inexacts.ça peut arriver. L'erreur est humaine dit on.
167. Voilà tout le PB.
168. Tu n'as pas fais l'effort de nous expliquer mon frere
169. Et pourtant on t'a poser la,question clairement
170. Quand vous montrerez un livre fiable qui contredit ce que dit CIAM,je vous croirai. Je suis vraiment surpris que vous parliez d'erreur
171. Je ne suis pas dépositaire de la définition. Elle se trouve dans les ouvrages credibles
172. Quelle definition?
173. Je suis d'accord. En tant que remarque j'ai comme l'impression cette remarque porte sur l'introduction.Mais s'en servir comme définition c'est ce que je ne comprends pas.
174. Les conditions d'égalité de deux fonctions
175. Le CIAM est écrit par Dieu???😊😊😊
176. Malheureusement il ne suffit pas de lire une definition, il faut la comprendre aussi
177. Autant chercher la c'est écrit définition et après on va débattre.
178. CIAM est claire et c'est ce qui se trouve aussi ailleurs. Deux conditions suffisent pour demontrer l'egalite de deux fonctions.
179. Voir ici aussi
180. Merci pour votre remarque. L'argument de la force ou la force de l'argument ?
181. CIAM parle bien de deux conditions ? Dans ce cas vous avez tous raison
182. Et puis une remarque en général est relative à ce qui a été dit précédemment. Faut pas la sortir de son contexte.
183. Je n'ai pas vu quelqu'un poste la definition de CIAM

307. Pardonner moi je commence a avoit mal au mains. Je suis au sol
308. 😊😊😊 comme par hasard
309. Doucement Lamiri
310. Tu peut'arreter chez moi
311. je comprend mais donc fait une note vocal je vais ecouter mon frère😊😊😊
312. Chaque fonction a un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée. L'ensemble de départ n'est pas forcément D_f c'est dans D_f que la fonction f est utile mais ce n'est pas D_f qui définit la fonction
313. tu n'as pas repondu à ma question😊😊😊
314. Qu'en pense tu mon Yametcheu.
315. J'ai envie de savoir ce qui va faire la différence entre f et g
316. A partir des graphiques
317. Les graphiques ne diffèrent pas sur D_f mais les fonctions sont différentes
318. la nuit porte conseil je suis sur que demain on sera tous d'accord, j'ai déjà sommeil
bonne nuit les gars
319. Bonne nuit à tous
320. Ne partez pas ! Vous n'avez pas encore raison😊😊😊
321. Une image qui peut aider. Une fonction : Libreville , son ensemble de définition : LPIG. Une autre fonction : l'estuaire, son ensemble de définition LPIG . A vous de réfléchir
322. 😊😊
323. Ce qui la différence entre f et g c'est justement ce qui n'est pas dans D_f , Mr Babeleme regarde bien. Tu verras !
324. Ça c'est pour l'ensemble de départ ça ne regarde pas la fonction. Les ensembles sont des accessoires. Le principal c'est la fonction, Si justement ! Peut tu définir une application sans son ensemble de départ ? Du moment qu'une application est une fonction pourquoi négliger cet ensemble ? Accessoires ne veut pas dire c'est négligeable, La vision graphique du problème est mieux, Surtout pour les fonctions numériques que tu as choisi. Heureusement que nous cet angle de vision, C'est Si deux fonctions sont égales sur I , alors pour savoir si elles sont différentes ils faut les regarder ailleurs que sur I ! Mais où alors si ce n'est dans les ensembles de départ
325. Ces deux ne peuvent plus se dérouler ailleurs .
326. Comment défini t on l'ensemble de définition d'une fonction ? D'abord, Il faut au préalable l'ensemble de départ, Ensuite on parle de D_f , Cela suppose un ensemble A/D_f ou A est l'ensemble de départ de f
327. Une fonction est une relation d'un E vers un F telle que tout élément de E soit en relation avec au plus un élément de l'arrivée
328. Que représente E ? Ce n'est pas le D_f ? Le D_f vient après ! Donc f existe avant son D_f
329. Ça c'est la philosophie que je vois venir, Ce n'est parce que tu es le premier né que cela fait de toi la première place dans la vie. Tu peux perdre ta place au profit de ton cadet.
330. 😊😊😊 c'est toi qui fait maintenant de la philosophie là
331. C'est un peu l'histoire de l'ensemble de départ et l'ensemble de définition. Des qu'il apparaît l'ensemble de départ s'éclipse, C'est lui qui vient déterminer la fonction.
332. Très sincèrement Mr Babeleme. Il faut bien revoir ça . Boni voyait quelques choses que nous refusions

432. Malheureusement non. tu fais toujours ce glissement vers la courbe alors qu'il n'y a pas équivalence. si $f = g$, alors les courbes de f et g sont confondues. La réciproque n'est pas vraie
433. Pourquoi la réciproque n'est pas vraie ? D'autant plus on a tout pris dans les ensembles de définition je ne vois pas ce qui fera la différence. Nous comparons avant tout des fonctions mais pas des ensembles. C'est vraie que les fonctions dépendent des ensembles pas jusqu'à ce point
434. M.Babeleme, mettez côte à côte la définition d'une fonction et de sa courbe. Vous verrez que la réciproque n'est pas vraie.
435. Le PB c'est que vous ne voulez pas prendre en compte tous les éléments constitutifs de la définition. A partir de là, on ne peut pas s'entendre. Pour appréhender une fonction on peut la représenter graphiquement si cela est possible c'est une démarche mathématique que tu ne peux pas rejeter. Sinon on est entrain de remettre en cause beaucoup de choses.
436. La base d'une discussion saine est le consensus au niveau de la définition. Vous faites fi de certains éléments qui interviennent pourtant dans cette définition. A partir de là, c'est presque impossible de trouver un consensus.
437. Si je rejette car il n'y a pas équivalence comme j'expliquais plus haut. Pourquoi veux tu considérer l'aspect physique qui entre dans la définition d'une fonction au lieu ce qui en fait la valeur. ? L' égalité ici ces en termes de valeur.
438. Tout est utile dans la définition même si certaines choses sont plus importante que d'autre. Ma batterie est plat. Désolé qu'on ne puisse pas s'accorder. excellente journée.
439. Bonne journée à toi aussi
440. M.Babeleme, pour le bien de tous, je souhaiterais qu'une conclusion soit tirée au sujet de l'égalité de deux ensembles.
- Voici ce que dit la collection Monge ,ouvrage ayant précédé CIAM du moins dans certains pays de l'Afrique subsaharienne.
- En ce moment, les fonctions s'appelaient relations.
- Définition. Soit deux ensembles A et B . on appelle relation R de A vers B tout triplet (A, B, G) , où G est une partie du produit cartésien $A \times B$.
- A est appelé ensemble de départ de la relation R , l'ensemble B est appelé ensemble d'arrivée de R .
- Voici ce que dit e même ouvrage au sujet de l'égalité de deux relations R_1 et R_2 .
- Il est écrit. Considérons deux ensemble A_1 et B_1 , et une partie G_1 du produit cartésien $A_1 \times B_1$. Soit R_1 la relation définie par le triplet (A_1, B_1, G_1) , D'une façon analogue, définissons une relation R_2 par le triplet (A_2, B_2, G_2) .
- Définition. Deux relations R_1 et R_2 sont égales si et seulement si elles ont le même ensemble de départ ,le même ensemble d'arrivée et le même graphe.
- Il m'est arrivé de traîner les erreurs pendant des années pour me rendre compte très tardivement, je crois que cette plate forme nous permet de découvrir aussi certaines de nos erreurs. On aura tous gagné en levant le voile sur une notion qui nous divise certainement de façon inconsciente depuis des années. Les gagnants seront alors nos apprenants.
441. Égalité de deux fonctions svp
442. Je vous poste les pages y afférentes.

La relation $R(x,y)$ est appelée une relation fonctionnelle de type $(T \times U)$ si elle satisfait à la condition suivante : quel que soit x , il existe au plus un y tel $R(x,y)$. À toute relation fonctionnelle, on attache un objet nouveau que l'on appelle une fonction[8];

On appelle champ de définition de la fonction f l'ensemble des éléments x de E pour lesquels il existe y tel que $R(x,y)$. C'est une partie E de E . On dit que f est définie sur E et dans E [9].

454. Au lieu de parler d'une fonction définie sur E et prenant ses valeurs dans F , on parle d'une application de E dans F [10].

Même si, dans la rédaction finale des Éléments de 1970[11] la fonction est toujours définie sur son ensemble de départ, cette distinction est reprise dans l'enseignement français du secondaire, premier et second cycle, quand, à la suite de la Commission Lichnerowicz, se mettent en place les nouveaux programmes, à partir de 1968. Ainsi voit-on dès la 6e, illustrées par des diagrammes sagittaux, les définitions suivantes[12]:

455. Voilà M.Babeleme, il est très bien écrit que f et g sont les fonctions de A vers B . donc elles ont le même ensemble de départ et d'arrivée 😊😊😊😊

456. **les relations telles que, de chaque élément de l'ensemble de départ, il part au plus une flèche, s'appellent des fonctions ;**

les relations telles que, de chaque élément de l'ensemble de départ, il part exactement une flèche, s'appellent des applications.

En pratique, le fait qu'il suffise de réduire l'ensemble de départ d'une fonction à son ensemble de définition pour la transformer en application rend peu utile ce distinguo.

Cette distinction ne commence à disparaître des ouvrages scolaires qu'à partir de 1985, à l'adoption de nouveaux programmes mais on trouve encore des ouvrages récents dans lesquels cette distinction est présente[13],[14],[15].

457. Répondez moi M.Babeleme !!!

458. Source: [https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Application_\(mathématiques\)](https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Application_(mathématiques))

459. Vous voyez que tous ouvrages sérieux ont la même définition

460. Le document parle bien d'ensemble de définition $D_f=D_g$. Et tous les collègues sont unanimes sauf Mr Boni.

461. 😊😊😊lisez très bien la définition M.BOUKALA

462. Pour parler de fonctions il faut qu'il y ait un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée .pour qu'on ait la chance que $D_f = D_g$

C'est pourquoi cette hypothèse apparaît. Si l'ensemble de départ de f est disjoint de celui de g on ne pourra pas prétendre à une égalité.

463. Pourquoi a t on choisi les même ensemble de départ et d'arrivée ? M.Babeleme, je vous connais comme un mathématicien rigoureux. Pour le bien de la communauté mathématique, pliez vous aux définitions concordantes de Monges, Irma et Ciam

Lemme

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I alors f établit une bijection de I dans l'intervalle image $J = f(I)$

Démonstration

- D'après le lemme précédent, f est injective sur I
- En restreignant son ensemble d'arrivée à son image $J = f(I)$, $f : I \rightarrow J$ est automatiquement surjective
- On obtient que f établit une bijection de I dans J
- Comme f est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, l'ensemble J est un intervalle

□

506.

Lemme

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est strictement monotone sur I , alors f est injective sur I

Démonstration

- Soient $x, x' \in I$ tels que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$
- Si on avait $x < x'$
 - alors on aurait $f(x) < f(x')$ si f strictement croissante
 - ou $f(x) > f(x')$ si f strictement décroissante
 - Comme c'est impossible, on en déduit que $x \geq x'$
- En échangeant les rôles de x et de x' , on montre de même que $x \leq x'$
- On en conclut que $x = x'$ et donc que f est injective

□

507.

508. Mais M.BOUKALA, c'est aussi une propriété. Si vous voulez la propriété des fonctions continues et strictement monotones. C'est vrai qu'une propriété n'est pas toujours un lemme, mais vous conviendrez avec moi qu'il s'agit d'un lemme qui est également une propriété

509. Voilà comment je comprends ça : Soit f une fonction définie de I vers J . Si f est monotone alors f est injective. Si f est continue f est surjective et alors $f(I)=J$. On aurait pu énoncer la propriété ainsi : Soit f une fonction de I vers J . Si f est continue et monotone sur I alors f est bijective et $f(I)=J$

510. La continuité peut être utilisée au travers du théorème des valeurs intermédiaires permettant de démontrer la surjectivité.

4.2.11 Dossiers 009, 010 et 011 : les cadres, les programmes, les progressions sur la notion de fonction

Les corpus 010, 011 et 012 sont constitués des contenus des manuels aux programmes officiels actuels (des connaissances nécessaires pour résoudre des tâches au programme en rapport avec les fonctions). Ce corpus s'intéresse plus aux manuels officiels entre 2017 et 2022 en France et en Afrique francophone. Nous présentons également les programmes de mathématiques de France (bulletin officiel) et d'Afrique francophone (*HPM*) et des progressions.

Les fonctions sont présentes dans les deux différents programmes d'enseignement à un niveau du secondaire. Le programme français (cf. annexe. D page 232) embrasse plus de notions que celui de l'Afrique francophone (cf. annexe. E page 234). Les progressions sont laissées à la liberté des enseignants. En Afrique francophone, une progression spiralée nationale est imposée à tous les enseignants (cf. annexe.L page 252). Cela est observé au Gabon où on parle parfois de segment de connaissances pour imposer aux enseignants, la progression nationale.

Dans le programme français, les fonctions sont appelées à être définies par une courbe, un tableau de données ou une formule ; comment sont-elles censées être définies selon les programmes et manuels scolaires officiels d'Afrique francophone ? [83]. Les figures suivantes nous présentent comment les fonctions sont définies dans les différents manuels.

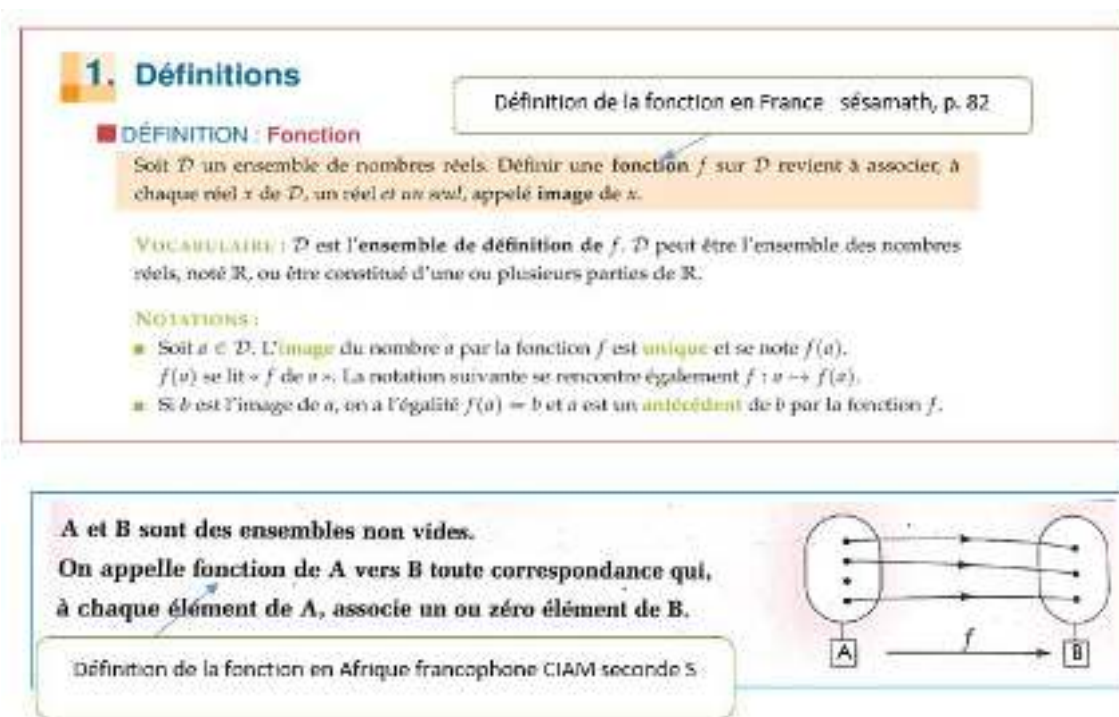


FIG. 4.1 – Définitions de la notion de fonction en seconde. Reproduite à partir de *Le manuel sésamath seconde avec ses compléments numériques*, par Gringoz, H. et Weyermann, F. (2010), [63, p. 82] et de *CIAM* par Saliou, T. (dir.). (1997) [83, p. 156]

4.3 Analyse du corpus

4.4 Corpus 001 du Baccalauréat blanc 2021

4.4.1 Le corpus de terminale C

Il est demandé à des élèves de terminale C d'approcher la racine α_3 de l'équation $f(x) = x$ de trois manières différentes. Dans la première partie, il s'agit d'utiliser une fonction auxiliaire g_n qui est une somme de fonctions. L'élève doit montrer que la racine de l'équation $g_n(x) = 0$ est proche de 0. Pour cela des sous tâches consistant à dresser le tableau de variation de g_n ; à montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\sqrt{x} > \ln x$, que $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ et que α_n tend vers 0 lorsque n tend vers plus l'infini. Cette tâche peut être résolue sans passer par les sous tâches sus mentionnées. En effet, l'élève peut toutefois tracer les courbes représentatives de g_1, g_2, g_3 , etc. Et vérifier que les courbes représentatives de chacune des questions coupe l'axe des abscisse proche de l'origine. La tâche qui consiste à dresser le tableau de variations ne sert à rien pour résoudre cette tâche. L'attendu ici est d'utiliser Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution; Montrer que $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$; En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$; étudier la dérivabilité de f en 0 puis d'interpréter graphiquement le résultat obtenu; Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu; Montrer que pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, on a $f'(x) = \frac{1-3x}{3x}f(x)$ et dresser le tableau de variations de f ; montrer que $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$; montrer une équivalence à savoir : $[x = \alpha_3 \iff (\forall x > 0 \text{ et } f(x) = x)]$, où α_3 est la solution de l'équation $g_3(x) = 0$; montrer que $u_n \in I$, montrer que $|u_{n+1} - \alpha_3| \leq |u_n - \alpha_3|$. Montrer que $|u_{n+1} - \alpha_3| \leq (\frac{2}{3})^n$. Montrer que la suite $(u_n)_{n>0}$ est convergente et de calculer sa limite.

4.4.2 Correction

4.4.3 Partie A

1) Soit $n \geq 3$, la fonction $g_n : x \mapsto nx + 2\ln x$ est définie et dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R}_+^* . On a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'_n(x) = n + \frac{2}{x} = \frac{nx+2}{x} > 0$ donc g_n est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* de plus $\lim_{x \rightarrow 0, x>0} g_n(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = +\infty$ d'où le tableau de variations suivant :

$$x/1, g_n(x)/20, +\infty \quad D-/-\infty, +/+ \infty$$

2) soit $d(x) = \sqrt{x} - \ln x$, la fonction $d : x \mapsto \sqrt{x} - \ln x$ est définie et dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme différence de fonctions définies et dérivables sur \mathbb{R}_+^* . On a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{x-2\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$ et $d'(x) = 0 \iff x - 2\sqrt{x} = 0 \iff x = 2\sqrt{x} \iff \sqrt{x} = 2 \iff x = 4$. Pour

$$\begin{cases} x > 4 & d'(x) > 0 \\ x < 4 & d'(x) < 0 \end{cases}$$

$$x/1, g_n(x)/20, 4, +\infty \quad D+ / +\infty, - / d(4) = 2 - 2\ln 2, + / +\infty$$

Comme $d(4) = 2 - \ln 2 = 2(1 - \ln 2) = 2\ln(\frac{e}{2}) > 0$ car $\frac{e}{2} > 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} d(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} d(x) = \infty$. On observe que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, d(x) \geq d(4) > 0$, c'est-à-dire, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \sqrt{x} > \ln x$. 3) g_n est continue et monotone sur \mathbb{R}_+^* , elle réalise une bijection de \mathbb{R}_+^* vers $g_n(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires ou en introduisant la fonction

réciproque g_n^{-1} de g_n , il existe un $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que $g_n(\alpha_n) = 0$. En fait $\alpha_n = g_n^{-1}(0)$ b) montrons que $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$
 $g_n(\frac{1}{n}) = n \times \frac{1}{n} - 2\ln(n) = 1 - 2\ln(n) < 0$ et $g_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) = \frac{n}{\sqrt{n}} - 2\ln(n)^2 = \sqrt{n} - \ln(n) > 0$, d'après d'après question 2. On a ainsi $g_n(\frac{1}{n}) < 0$ et $g_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) > 0$ donc $g_n(\frac{1}{n}) < 0 < g_n(\frac{1}{\sqrt{n}})$. D'après le théorème de la bijection $\frac{1}{n} < g_n^{-1}(0) = \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ c) comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, d'après le théorème d'encadrement dit « des gendarmes » on a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$.

4.4.4 Partie B

1) quelque soit $x > 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x^{-\frac{2}{3}}e^{-x} = e^{-x-\frac{2}{3}\ln x}$, la limite du taux de variation lorsque x tend vers 0 par valeurs positive est $+\infty$. f n'est donc pas dérivable en 0. Sa courbe représentative admet une tangente verticale en 0 2) Par croissance comparée, on a immédiatement la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers plus l'infini égale à 0. On dit que la fonction exponentielle domine la fonction puissance au voisinage de plus l'infini ou que la fonction puissance qui à x associe $x^{\frac{1}{3}}$ est négligeable devant la fonction qui à x associe la fonction e^x . Ainsi l'axe des abscisses, i.e la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$

3) On a, quelque soit x appartenant à l'intervalle ouvert de 0 à plus l'infini, $f(x) = e^{-x-\frac{2}{3}\ln x}$. f est dérivable sur cet intervalle comme composée de fonctions dérivables et $f'(x) = (-1 + \frac{1}{3x})e^{-x-\frac{2}{3}\ln x} = \frac{-3x+1}{3x}f(x)$

4) la fonction $f : x \mapsto x^{\frac{1}{3}}e^{-x}$ est bien définie sur $]0; +\infty [$ car par définition $x^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\ln x}$. Elle est par contre prolongeable par continuité en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, soit par composition puis par multiplication avec $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = 0$, on en vient à $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3}}e^{-x} = 0$. On admet la définition suivante : $f :]0; +\infty [\rightarrow \mathbb{R}$ tel qui à x associe

$\left\{ \begin{array}{ll} x^{\frac{1}{3}}e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{array} \right\}$ desortequefsoitcontinueencb) Puisque $f(x) = e^{-x+\frac{1}{3}\ln x}$ est positif on a $f(x)$ et $\frac{1-3x}{3x}$ de même signe. On a donc

$$1. f(x) := 0 \text{ si } x = \frac{1}{3}, > 0 \text{ si } 0 < x < \frac{1}{3}, < 0 \text{ si } x > \frac{1}{3}$$

Ainsi :

$$x/1, g_n(x)/20, \frac{1}{3}, +\infty \quad D-/-\infty, +/f(\frac{1}{3}) = 0.5, -/0$$

4.4.5 Partie C

1)a) f est strictement décroissante sur $]\frac{1}{3}; +\infty [$, d'après le tableau de variations, il en découle sur $[\frac{1}{3}; 1]$. Par monotonie et continuité : $f([\frac{1}{3}; 1]) = [f(1); f(\frac{1}{3})]$ car f est strictement décroissante. On a $f(1) = e^{-1} = \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ et $f(\frac{1}{3}) = 0.5 < 1$ donc $f(I) \cup I$ b) la limite de $f'(x)$ lorsque x tend vers 0 est infinie. son encadrement peut se faire sur I . On a vu que $|f(x)| \leq 1$. En posant $h(x) = \frac{1-3x}{3x}$. On sait que h est dérivable sur \mathbb{R}_+^* dont sur $[\frac{1}{3}; 1[= I$ et $h'(x) = \frac{-1}{3x^2} < 0$. h est donc continue et strictement décroissante sur I . On a donc

$$x/1, h(x)/2\frac{1}{3}, 1 \quad D+/0, -/-\frac{2}{3}$$

Donc, quelque soit x appartenant à I , $|h(x)| \leq \frac{2}{3}$, d'où finalement, quelque soit x appartenant à I , $|f'(x)| = |\frac{1-3x}{3x}f(x)| = |\frac{1-3x}{3x}| \times |f(x)|$, d'où $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

$$c) \forall x > 0 [f(x) = x] \iff x^{\frac{1}{3}}e^{-x} \iff e^{-x} = x^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}\ln x} \iff 3x + 2\ln x = 0 \iff g_3(x) = 0 \iff x = \dots$$

3 a) par récurrence :

1. Initialisation : $u_0 = \frac{1}{3} \in I$;
 2. Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $u_n \in I$ au rang $n + 1$ on $u_{n+1} = f(u_n)$ et puisque $f(I)$ est dans I et que par hypothèse de récurrence $u_n \in I$, on $u_{n+1} \in f(I) \cup I$;
 3. conclusion : d'après le principe de récurrence, il vient, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$. b) soit $n \in \mathbb{N}$, d'après l'égalité des accroissements finis, il existe un $\alpha \in]\min(u_n, \alpha_3); \max(u_n, \alpha_3)[\sup I$ tel que $\frac{f(u_n) - f(\alpha_3)}{u_n - \alpha_3} = f'(\alpha_3)$. ($\frac{1}{3} < \alpha_3 < \frac{1}{\sqrt{3} < 1, i.e. \alpha_3 \in I}$. or α_3 est un point fixe et $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$; donc $|u_{n+1} - \alpha_3| \leq |f'(x)| \times |u_n - \alpha_3|$ puis $|u_{n+1} - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha_3|$
- c) Par récurrence.
1. Initialisation : $u_0 = \frac{1}{3}$: on a $\frac{1}{3} \leq u_0 < \frac{1}{\sqrt{3}} \leq 1$ donc $|u_{n+1} - \alpha_3| \leq \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$;
 2. hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $|u_{n+1} - \alpha_3| \leq (\frac{2}{3})^{n+1}$ au rang $n + 1$, on a par hypothèse de récurrence $|u_{n+1} - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} \times (\frac{2}{3})^{n+1} = (\frac{2}{3})^{n+2}$
- D'après le principe de raisonnement par récurrence $|u_n - \alpha_3| \leq (\frac{2}{3})^{n+1}$ d) On reconnaît une suite géométrique de raison inférieure à 1 donc $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{2}{3})^{n+1} = 0$. Par le théorème des gendarmes, la suite $(u_n - \alpha_3)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et de limite nulle. Par somme, on déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite α_3

4.4.6 Analyse de tâche et d'activité des élèves de la terminale C

Nous avons fait le choix d'analyser en premier la tâche donnée aux élèves de série C. En effet, la terminale C est une classe où nous retrouvons comme enseignants, que ceux ayant validé au moins une maîtrise en mathématiques d'une part et d'autre part, des élèves qui ont fait le choix de faire des mathématiques une priorité. Seuls les meilleurs en mathématiques sont orientés en terminale C. Dès lors, nous pensons que les difficultés rencontrées par les élèves de terminale C sont les mêmes que celles rencontrées par tout autre élève d'une autre série de terminale. Partant de cette idée, les tâches de terminale C vont nous servir de socle. Elles vont être analysées en premier. A chacune des questions posées à des élèves en rapport avec les fonctions (exercice 4 de TC), nous allons en premier regarder s'il s'agit d'une tâche qui pour la résoudre, nécessite des sous-tâches ou si l'élève n'a pas besoin, pour la résoudre, des sous-tâches. Par exemple, on peut bien tracer le tableau de variations sans qu'apparaissent les traces de l'étude du signe de la dérivée. Cela signifie, la reconnaissance des tâches à effectuer. Cela nous renvoie en amont à une analyse a priori qui nous conduit à préciser : le type de tâche ; le degré d'ouverture de l'énoncé ; le niveau de fonctionnement des connaissances visées ; l'inscription de la tâche dans les attendus, c'est-à-dire, est-ce une tâche prototypique ? (une tâche inhabituelle), les différentes procédures, les prérequis, les variables didactiques, la réponse attendue, la modélisation, les intrus, les erreurs, le cadre de travail, les registres, les perspectives ; les différents points de vues : ponctuel ou global de la fonction en jeu, etc., dans le sens d'Aline Robert. Cette première analyse, a priori, est faite sans les copies des élèves. Nous avons eu besoin de reconnaître les tâches et les sous-tâches avant de regarder ce que font les élèves du secondaire dont nous allons que nous allons analyser l'activité de façon heuristique. C'est notre choix pour ce travail.

4.4.7 tâche 1 : Dresser le tableau de variation de g_n

Partie A

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3. On considère la fonction g_n définie sur \mathbb{R}_+^* par

$$g_n(x) = nx + 2 \ln x$$

1. Dresser le tableau de variation de g_n .
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\sqrt{x} > \ln x$.
3. (a) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet dans \mathbb{R}_+^* une unique solution notée α_n .
 (b) Montrer que $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$.
 (c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} e^{-x}.$$

On désigne par (\mathcal{C}_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3 \text{ cm}$.

1. Étudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3. (a) Montrer que pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, on a

$$f'(x) = \frac{1 - 3x}{3x} f(x)$$

où f' est la fonction dérivée de la fonction f .

(b) Dresser le tableau de variation de f .

4. tracer (\mathcal{C}_f) . On prendra $f\left(\frac{1}{3}\right) \simeq 0,5$.

Partie C

On pose $I = \left[\frac{1}{3}; 1\right]$.

1. (a) Montrer que $f(I) \subset I$.
 (b) A l'aide de la question 3) a) de la partie B, montrer que $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$.
 (c) Montrer que $[x = \alpha_3 \iff (\forall x > 0 \text{ et } f(x) = x)]$, où α_3 est la solution de l'équation $g_3(x) = 0$.
2. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{3}$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.
3. (a) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \in I$.
 (b) Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$|u_{n+1} - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha_3|$$

(c) En déduire que pour tout entier naturel n ,

$$|u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

(d) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente et donner sa limite.

4.4.8 Analyse de la tâche de terminale C

Nous n'allons pas être exhaustif sur l'analyse de tâche, car nous supposons que nous ne savons rien de ce qui est attendu des élèves pour résoudre la tâche.

analyse de la sous tâche 1, Partie A question 1

Il est demandé à la première tâche de la partie A aux élèves, de dresser le tableau de variations de la fonction g_n . Cette tâche est ouverte et le niveau de mise en fonctionnement de la connaissance est technique, car, même si la méthode n'est pas donnée, l'élève a peut-être appris une technique en classe pour résoudre cette tâche donc pour étudier les variations de la fonction g_n . La fonction est ici l'objet d'étude dans une perspective globale sur g_n . Le cadre de travail est fonctionnel et les registres qui peuvent être utilisés sont le tableau de signe, le tableau de variations et l'expression algébrique. De manière générale, pour étudier les variations de la fonction g_n dans le cadre général, les attentes pour dresser le tableau de variations d'une fonction sont les suivantes : il faut trouver le domaine de dérivabilité de la fonction g_n , puis calculer sa dérivée, puis étudier le signe de la dérivée pour en déduire les variations de g_n . La fonction g_n est définie comme somme de fonctions définies et dérivables sur son domaine d'étude. Le théorème : *dérivée d'une somme* peut être évoqué à savoir :



FIG. 4.2 – Théorème : dérivée d'une somme en France

Une fois que la dérivée de g_n est trouvée, c'est-à-dire $g'_n(x) = n + \frac{2}{x} > 0$ il va rester à l'élève de trouver son signe qui est positif sur le domaine d'étude avant d'en déduire que la fonction g_n est croissante sur \mathbb{R}_+ . Une autre méthode sera en Afrique francophone cette introduite à un niveau de première scientifique, il ne s'agit pas d'un théorème comme c'est le cas en France pour calculer la dérivée d'une somme de fonctions. En effet, nous retrouvons dans le livre au programme CIAM de la classe de première à la page 27 un tableau qui donne la formule de dérivation de la somme de deux fonctions dérivables à savoir :

Dérivées et opérations sur les fonctions

Le tableau ci-dessous donne les formules de dérivation de la somme, du produit et du quotient de deux fonctions dérivables.

Fonction	$f + g$	kf ($k \in \mathbb{R}$)	fg	$\frac{1}{g}$	$\frac{f}{g}$
Dérivée	$f' + g'$	kf'	$f'g + fg'$	$-\frac{g'}{g^2}$	$\frac{fg' - fg'}{g^2}$

Exemple
 Déterminer, sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, la dérivée de la fonction $f : x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$.
 La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto 2x$;
 la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$;
 donc, la fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto 2x - \frac{1}{x^2}$.

FIG. 4.3 – Dérivée d'une somme de fonctions en Afrique francophone

4.4.9 La tâche 2 : Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\sqrt{x} > \ln x$

Il est demandé à la deuxième tâche de la partie A aux élèves de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\sqrt{x} > \ln x$. Cette tâche est ouverte également et le niveau de mise en fonctionnement de la connaissance est disponible et mobilisable, la méthode n'est pas donnée. L'élève a appris la théorie en classe pour comparer deux nombres ou étudier la différence de deux fonctions. La fonction est ici outil pour en déduire celle qui domine l'autre dans une perspective globale sur le domaine de définition. Le cadre de travail est fonctionnel et les registres qui peuvent être utilisés sont le tableau de signe, le tableau de variations et l'expression algébrique ou la représentation graphique. En règle générale, comparer deux fonctions f et g , c'est comparer $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \ln x$ en fonction des valeurs de x . Pour x appartenant à $D_f \cap D_g$ pour notre cas. C'est-à-dire, déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x) > g(x)$. La méthode au programme est celle d'étudier le signe de la différence $f(x) - g(x)$. On peut s'attendre aussi à résoudre cette tâche que les élèves disent qu'au voisinage de 0, la fonction puissance l'emportent sur la fonction logarithme.

4.4.10 La tâche 3 : Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution

Il est demandé à la deuxième tâche de la partie A aux élèves de montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution. Cette tâche est ouverte également et le niveau de mise en fonctionnement de la connaissance est technique et mobilisable, la méthode n'est pas donnée. L'élève a appris la technique en classe pour localiser une racine. La fonction est ici outil pour trouver et approcher une solution connaissant l'image dans une perspective locale au voisinage de $f^{-1}(0)$. Le cadre de travail est de l'analyse fonctionnelle, la méthode permettant d'approcher la racine n'est pas indiquée et les registres qui peuvent être utilisés sont le tableau de signe, le tableau de variations et l'expression algébrique ou la représentation graphique. En règle générale, l'exigence pour résoudre cette tâche, est d'utiliser l'un des deux théorèmes suivants :

Le théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I , et a et b deux réels distincts de I ; pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$. Une autre formulation se trouve dans l'image qui suit :

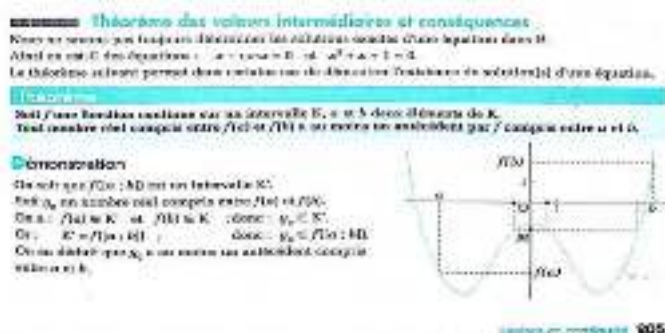


FIG. 4.4 – Copie théorème de la valeur intermédiaire, Ciam terminale sm

Le théorème de la bijection

Le Théorème de la bijection dit ceci : On considère une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur un intervalle I . Si f continue et strictement croissante (décroissante) sur I alors,

1. $f(I)$ est un intervalle ;
2. $f : I \rightarrow f(I)$ est bijective ;
3. $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ est continue et strictement croissante (décroissante) sur $f(I)$.

4.4.11 La tâche 4 : Montrer que $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$

Il est demandé aux élèves d'encadrer la racine α_n entre $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Cette tâche est ouverte également et le niveau de mise en fonctionnement de la connaissance est disponible, la méthode n'est pas donnée. L'élève a appris la technique en classe pour encadrer un nombre ou une expression. La fonction réciproque est l'outil pour trouver réaliser cet encadrement. Le cadre de travail est de l'analyse fonctionnelle, la méthode permettant d'approcher la racine n'est pas indiquée et les registres qui peuvent être utilisés sont le tableau de valeurs, le tableau de variations et l'expression algébrique. En règle générale, l'exigence pour résoudre cette tâche. Pour résoudre cette tâche, il faut en amont remarquer que les images des réels qui encadrent la racine sont de signe contraire. Ainsi, 0 est compris entre ces deux images. Enfin, d'après le théorème de la bijection, $f^{-1} :]-\infty; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[$ est strictement croissante. En appliquant f^{-1} à l'inégalité des images, on obtient ce qu'il faut démontrer

4.4.12 La tâche 5 : En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$

Il est demandé aux élèves de déduire la limite de α_n à partir de ce qu'il a fait précédemment. Cette tâche est non seulement liée aux autres, mais reste très fermée. Le niveau de mise en fonctionnement de la connaissance technique et mobilisable, la méthode est presque donnée. L'élève a appris la technique en classe pour déduire de $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$, la limite de α_n . Il peut calculer les limites de $\frac{1}{n}$ puis de $\frac{1}{\sqrt{n}}$ en $+\infty$. Dans le cas où elles sont

les mêmes, il peut en conclure que la limite de α_n est aussi égale à la limite commune trouvée. Le cadre de travail est de l'analyse. Les registres qui peuvent être utilisés sont le tableau de valeurs, le tableau de variations et l'expression algébrique. Le point de vue est ponctuel.

4.4.13 tâche 6 : étudier la dérivabilité de f en 0 puis d'interpréter graphiquement le résultat obtenu

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = x^3 e^{-3x}.$$

On désigne par (\mathcal{K}_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On prendra $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 3$ cm.

1. Étudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3. (a) Montrer que pour tout réel $x < 0$, $-\infty$, on a

$$f'(x) = \frac{1-3x}{3x} f(x).$$

où f' est la fonction dérivée de la fonction f .

(b) Dresser le tableau de variations de f .

3. tracer (\mathcal{K}_f) . On prendra $f\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0,5$.

FIG. 4.5 – Dérivabilité de f en 0

4.4.14 Analyse de la sous tâche 6, Partie B question 1

Nous n'allons pas être exhaustifs sur l'analyse de tâche, car nous supposons que nous ne savons rien de ce qui est attendu des élèves pour résoudre la tâche 6.

Analyse de la sous tâche 6, Partie B question 1

Il est demandé à la sixième tâche (première de la partie A), d'étudier la dérivabilité de f en 0 puis d'interpréter graphiquement le résultat obtenu. Cette tâche est fermée et le niveau de mise en fonctionnement de la connaissance est technique, car, la méthode est pas donnée, l'élève sait qu'il doit calculer la limite du taux de variation. Il l'a peut être appris en classe pour étudier la dérivabilité de f en 0. La fonction est ici outil, dans une perspective local sur en 0. Le cadre de travail est celui du calcul différentiel et le registre qui peuvent être utilisés est l'expression algébrique et la représentation graphique. De manière générale, pour étudier la dérivabilité de f en 0, il suffit de vérifier que le nombre l de f en 0 qui se note $f'(0)$ est fini ou, si l'on veut, on peut vérifier graphiquement que f admet en 0 une seule tangente non verticale. Le résultat auquel on peut s'attendre est de dire que la limite du nombre dérivée étant infinie, la tangente en 0 de f est verticale donc f n'est pas dérivable en 0.

4.4.15 Tâche 7 : Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu

Analyse de la tâche

La fonction f étant donnée avec $f(x) = x^{\frac{1}{3}}e^{-x}$ calculer sa limite en $+\infty$ est une tâche assez simple à réaliser. En effet, elle est ouverte, car la méthode n'est pas indiquée et la réponse est unique. Le niveau de fonctionnement de la connaissance visé ici est du mobilisable, voire technique. Il suffit que l'élève utilise le fait que la fonction exponentielle domine la fonction puissance. La variable didactique est $-x$ en exposant, si elle est mal interprétée peut amener l'élève à retrouver une forme indéterminée ($+\infty fois 0$). La réponse attendue est tout simplement que la limite est nulle en plus l'infini et que la droite horizontale d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f .

4.4.16 Tâche 8 : Montrer que pour tout réel $x \in]0; +\infty [$, on a $f'(x) = \frac{1-3x}{3x}f(x)$ et dresser le tableau de variations de f

Analyse de tâche

À la différence de la tâche 1 ou la question du calcul de la dérivée était à la charge de l'élève, puisque la question n'était pas posée. Ici, elle est implicitement posée lorsqu'on leur demande de montrer que $f'(x) = \frac{1-3x}{3x}f(x)$ et dresser le tableau de variations de f . Il s'agit d'une tâche fermée. Le niveau de fonctionnement est disponible chez l'élève qui doit en premier calculer $f'(x)$ pour comparer l'expression trouvée avec celle demandée. La fonction est dans ce cas outil et en même temps objet d'étude. La variable didactique à laquelle il faut prêter attention est le fait qu'il s'agit d'une fonction composée d'un produit de fonctions. Il faut donc connaître la règle à utiliser pour calculer la dérivée d'un produit de fonction d'une part et d'autre part celle qui justifie qu'une égalité est vraie. Les sous tâches après avoir traversé cette étape sont les suivantes : étude du signe de $\frac{1-3x}{3x}$ connaissant celui de $f(x)$; étude du signe de $f'(x)$ et construction du tableau de variations de f . La dérivée est d'abord positive En effet, La dérivée est d'abord positive pour $x \in]0; \frac{1}{3} [$ puis négative de $x \in]\frac{1}{3}; +\infty [$. Tout ce travail devra être fait dans le cadre algébrique pour revenir au cadre de l'analyse et pour établir ou en déduit que f est strictement croissante sur $x \in]0; \frac{1}{3} [$ et strictement décroissante sur $x \in]\frac{1}{3}; +\infty [$. Le tout devra être inscrit dans un tableau de variation.

4.4.17 Tache 9 : résoudre l'équation $f(x) = x$

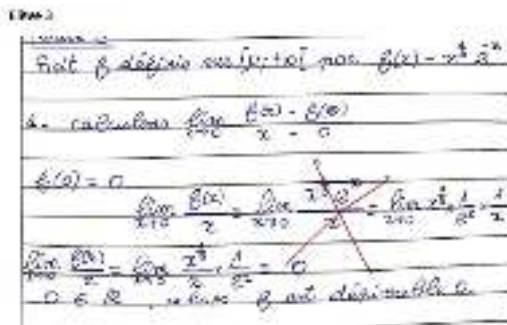


FIG. 4.6 – Le point fixe

Analyse de la tâche

Cette tâche consiste à trouver le point fixe par f . Elle est subdivisée en plusieurs sous-tâches assez intéressantes, dans un premier temps, l'élève doit étudier la stabilité de I par f c'est-à-dire qu'il doit montrer que si l'on prend des nombres quelconques dans I leurs images par f sont aussi dans I ($f(I) \subset I$). Une méthode peut partir de : soient x et y des éléments de I , montrons que $f(x)$ et $f(y)$ sont aussi dans I . La première tâche est assez complexe, car plusieurs méthodes peuvent être utilisées. Il peut utiliser les variations de f sur I . Si f est continue et strictement décroissante sur I , l'élève peut éventuellement calculer les images des bornes de I pour conclure que $f(I) \subset I$ ou pas. Ensuite, l'élève devra, à l'aide de l'expression de $f'(x)$, montrer que $|f'(x)| \leq \frac{1}{3}$ c'est la sous-tâche 2. Cette fois, il sait que f admet un maximum en $\frac{1}{3}$, que ce maximum est plus petit que 1. Il peut donc en déduire que $|f'(x)| \leq \frac{1-3x}{3x}$. Comme c'est vraie pour tout x de I , l'élève peut en tirer le résultat de la deuxième sous tâche. La sous tâche suivante demande quant à elle, à l'élève de montrer une équivalence à savoir : $[x = \alpha_3 \iff (\forall x > 0 \text{ et } f(x) = x)]$, où α_3 est la solution de l'équation $g_3(x) = 0$. Le but étant de montrer qu'il s'agit de la racine de l'équation $g_3(x) = 0$ qui est le point fixe par f et solution de l'équation $f(x) = x$. L'élève peut ainsi procéder par équivalences successives et montrer que $f(x) = x \iff x^{\frac{1}{3}} e^{-x} = x$. Puis en composant avec la fonction \ln puisque les deux fonctions sont continues et positives sur I l'élève pourra avoir $3x + 2\ln x = 0$ qui se trouve être par équivalence $g_3(x) = 0$ même si en toute rigueur, il ne s'agit pas des équivalences. Ainsi, l'élève peut montrer l'équivalence $[x = \alpha_3 \iff (\forall x > 0 \text{ et } f(x) = x)]$. Cela signifie pour être plus simple que g_3 est la fonction qui donne assez d'informations sur g_n . La tâche suivante amène l'élève à montrer que α_3 peut être approchée par une autre méthode en utilisant sa formule de récurrence. Ainsi pour tout n , l'élève devra montrer que $u_n \in I$, triviale sachant que les hypothèses donnent $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ qui est dans I . Par la suite, la dérivée étant majorée par un nombre $k < 1$ la fonction est donc contractante. Puis, comme $f(I) \subset I$, I un segment stable par f , alors l'élève peut se servir du théorème du point fixe pour montrer que $|u_{n+1} - \alpha_3| \leq |u_n - \alpha_3|$. En effet, comme $f'(3)$ est différent de 0, alors $|u_{n+1} - \alpha_3|$ est équivalent en plus l'infini à $|f'(3)| |u_n - \alpha_3|$ qui découle aussi du théorème des accroissement finis or $f'(3) = \frac{1}{3}$ donc $|u_{n+1} - \alpha_3| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha_3|$. Le point fixe étant attractif, l'élève peut remarquer de plus que, pour tout $u_0 \in I$, la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers α_3 , que, $|u_{n+1} - \alpha_3| \leq (\frac{2}{3})^n |u_n - \alpha_3|$ qui est le résultat attendu. La dernière sous tâche demande à l'élève de montrer que la suite $(u_n)_{n>0}$ est convergente et de calculer sa limite. L'élève pourra le montrer aisément à partir des

informations sus mentionnées. In fine, si $|u_{n+1} - \alpha_3| \leq (\frac{2}{3})^n |u_n - \alpha_3|$ on peut par passage à la limite déduire que la suite u_n converge vers α_3 .

4.4.18 Analyse de l'activité des élèves

Les élèves, avant de dresser le tableau de variations commencent par indiquer que la fonction étudiée est dérivable sur le domaine de définition, comme somme de fonctions élémentaires, toutes dérivables. Ensuite, ils calculent la dérivée et étudient son signe en cherchant à identifier les nombres pour lesquels cette dérivée s'annule. Une fois le signe ou les signes que prend la dérivée connus, ils calculent les limites de la fonction aux bornes du domaine de définition avant de dresser le tableau de variations.

Ce que les élèves écrivent

Les deux élèves commencent par donner l'intervalle I dans lequel la fonction g_n est dérivable. Ils identifient par la suite, d'après le théorème de dérivation des fonctions de références que g_n est dérivable comme somme de fonctions dérivables, la fonction linéaire qui à x associe nx et la fonction logarithme népérien à base e qui à x associe $n \ln x$. Les formulations sont tout de même différentes. En effet, certains utilisent la formulation « toutes dérivables sur I » tandis que d'autres écrivent « dérivable sur I ». Ils utilisent par la suite le quantificateur universel \forall avant de donner la dérivée sans aucune trace de calcul pour certain. Par la suite, ils donnent le signe de dérivée en utilisant le signe d'inégalité $g_n > 0$ et les mots strictement positive. Une fois le signe de la dérivée donnée, les élèves déduisent de ce signe, le sens de variation de la fonction. Par contre, nous avons remarqué que certains des élèves utilisent la conjonction de coordination « donc » pour conclure que la fonction est croissante sur I . De plus, ils donnent les limites dans le même esprit que la dérivée, c'est-à-dire, sans exhiber les calculs, comme quelque chose de triviale. On peut remarquer une volonté chez les élèves d'écrire l'expression de la fonction entre parenthèses devant le symbole limite. Pour finir, les tableaux de variations sont dressés. Il est constitué de deux lignes et de deux colonnes chez certains et de trois lignes et de deux colonnes chez d'autres. Certains élèves font le choix de g_n pour exprimer ce qui varie dans la deuxième ligne du tableau de variations alors que pour les autres $g_n(x)$ est choisie. Le fait que 0 n'appartienne pas au domaine de définition est précisé par une double barre dans le tableau par quelques élèves tout comme le fait de préciser l'existence d'un nombre qui annule la dérivée

Ce que les élèves reconnaissent

Les élèves reconnaissent la nature ainsi que le type de fonction à dériver. Ils savent qu'il s'agit d'une fonction somme. Après le calcul de la dérivée, ils reconnaissent à nouveau la fonction $\frac{1}{x}$ qui est la dérivée de la fonction $\ln x$.

Ce que les élèves ont fait avec présomption

Les élèves ont fait excessivement confiance à la dérivée calculer, d'autres à son signe trouvé, pour tirer des conclusions sur les variations de g_n

Les incomplétudes

Les incomplétudes sont de trois natures :

1. calcule de la dérivée sans préciser le domaine de dérivabilité ;
2. donner du tableau de signe sans traces d'étude du signe ;
3. donner du tableau de variations sans trace de calculs de limites ;
4. donner du tableau de variations à la place de la rédaction qui doit préciser les variations de la fonction.

4.4.19 Synthèse analyse de l'activité 1

Une copie élève parmi les trois premières copies analysées

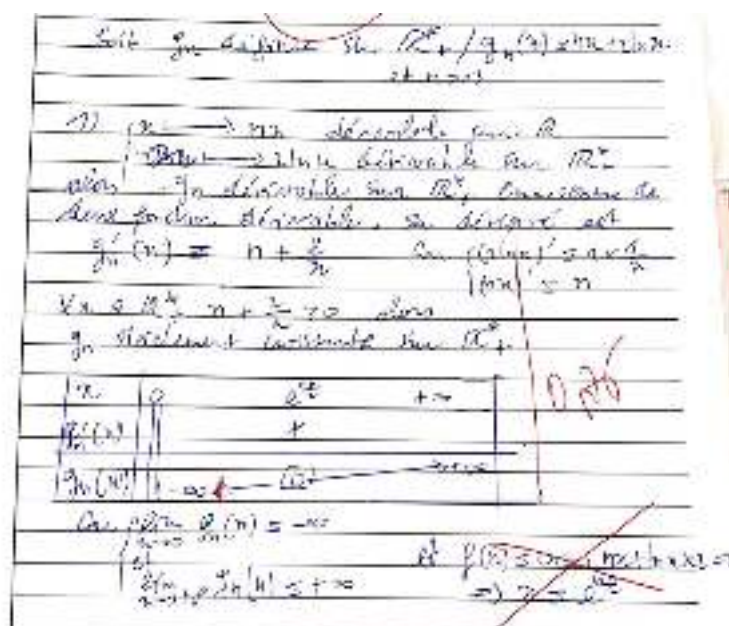


FIG. 4.7 – copie élève sur l'étude de variation d'une fonction

Les erreurs

Les élèves ont non seulement fait des erreurs de logique dans leurs rédactions. Mais aussi, nous avons identifié :

1. des flèches vers moins l'infini ;
2. Fonction $g_n(x)$;
3. signe négatif pour la dérivée dans le tableau de variations alors qu'il est positif ;
4. écriture $(nx)'$ et $(nlnx)'$ pour exprimer la dérivée

4.4.20 Ce qui est mobilisée par les élèves pour résoudre cette tâche

Les élèves ont mobilisé pour résoudre cette tâche les connaissances suivantes :

1. limite d'une fonction en l'infini et en 0 ;
2. limite infinie en un réel ;
3. opérations sur les limites ;

4. limite d'une fonction composée
5. limites d'une fonction aux bornes de son domaine de définition ;
6. le tableau de signe ;
7. dresser le tableau de variations en utilisant les variations de la fonction ;
8. calculer la dérivée d'une fonction ;
9. le signe de la dérivée ;
10. le sens de variations d'une fonction

4.4.21 Analyse de l'activité

Ce que les élèves écrivent

Les élèves, pour résoudre cette tâche tâtonnent. Ils affirment des inégalités sans justifications. Nous pouvons voir quelques traces de décomposition avec la fonction logarithme, la tentative de majorer x par la fonction e^x . Dans cette erreur, l'élève tente de retrouver le résultat en utilisant la continuité. Ce qui peut lui permettre de composer la fonction exponentielle avec la fonction logarithme. Il traduit le résultat de la croissance comparée utilisé en plus l'infinie dans la plus part du temps, au voisinage de 0 par ces derniers pour la fonction exponentielle et la fonction logarithme.

Nous remarquons que les élèves commencent par donner implicitement le domaine de validité. Nous pouvons lire dans des copies « soit x », « quel que soit x » par la suite, ils précisent le domaine sur lequel ils étudient la fonction qui est en fait, la différence de deux fonctions de x , \sqrt{x} et $\ln x$. Certains élèves tentent de montrer que la fonction est d'abord décroissante, puis croissante. Elle admet dans ce cas un minimum en 4. Le problème est qu'ils donnent une valeur exacte de ce minimum. Rien ne permet après le calcul de la dérivée. Ils affirment que la fonction prend des valeurs toutes positives. Cette conclusion devrait venir à la limite après le tableau de variations qu'ils exhibent. Tout un travail de clarification devrait être fait en amont. Certains concluent aussi d'une manière un peu sombre que la fonction admet un maximum négatif pour $x = 4$. Le tableau de signe n'a pas été utile pour nombre d'élèves, car tout leur raisonnement tient sur des implications et des déductions. Le travail reste d'ordre algébrique et les équivalences sont un peu douteuses.

Ce que les élèves reconnaissent

Les élèves reconnaissent l'inégalité et l'inéquation à résoudre sur \mathbb{R}_+^*

Ce que les élèves ont fait avec présomption

Il faut reconnaître qu'ils ne sont pas nombreux à avoir écrit des choses sur cette activité. Les élèves, on fait excessivement confiance à la croissance comparée sans pour autant respecter la règle.

Les incomplétudes

Les incomplétudes sont de deux natures :

1. utilise la continuité dans l'écriture $e^{\sqrt{x}} > x$ puis décompose les deux membres par \ln , puis écrivent « croissance comparée » avant d'écrire $\sqrt{x} > \ln x$ sans justifier pourquoi $e^{\sqrt{x}} > x$;
2. procède par des implications sans aboutir au résultat et efface toute leur traces écrites ;

4.4.22 Synthèse analyse de l'activité 2

Une copie élève parmi les trois premières copies analysées



FIG. 4.8 – copie élève sur la comparaison de deux fonctions

Les erreurs

nous avons identifié que :

1. les élèves partent du fait que la fonction exponentielle majore la fonction puissance. Par une composition avec la fonction \ln , ils aboutissent au résultat.
2. plusieurs raisonnements sont faux, Il s'agit plutôt de chercher la différence de deux fonctions et pour le faire, plusieurs élèves n'arrive pas à bien étudier la fonction $h(x) = f(x) \sim g(x)$ pour les mêmes raisons identifiées pour la première tâche ;

4.4.23 Ce qui est mobilisée par les élèves pour résoudre cette tâche

Les élèves ont mobilisé pour résoudre cette tâche les connaissances suivantes :

1. étude du signe d'une différence ;
2. croissance comparée ;
3. opérations sur les limites ;
4. le tableau de signe ;
5. dresser le tableau de variations en utilisant les variations de la fonction ;
6. calculer la dérivée d'une fonction ;
7. le signe de la dérivée et de l'extrémum ;
8. le sens de variations d'une fonction

4.4.24 Analyse de l'activité

Ce que les élèves écrivent

Les élèves, pour résoudre cette tâche écrivent en premier que la fonction est dérivable et strictement croissante sur I et d'autres écrivent qu'elle est continue et strictement croissante sur I . Le mot « continue » maque dans le début de la rédaction de certains

élèves. Ils continuent par déterminer les intervalles : antécédent et image et montrent que l'ensemble image contient zéro ou que 0 appartient à l'ensemble image. Si certains élèves utilisent le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour conclure que l'équation admet une solution, d'autres citent la bijection sans pour autant fixer rigoureusement les hypothèses. Le constat général est que des élèves commencent leurs rédactions de différentes manières : par la continuité, par la dérivabilité ou par le domaine de définition de la fonction. Ils concluent dans leur rédaction en précisant que la fonction réalise une bijection strictement croissante. Le théorème de la bijection est présenté comme un corollaire du TVI. Toutefois, citer le TVI au lieu du théorème de la bijection est considéré comme une erreur de rédaction : les hypothèses et résultats du théorème de la bijection sont plus précis. Dire en amont que f est continue et strictement croissante suffit pour utiliser le théorème de la bijection ou son corollaire : en considérant une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I , si f est continue et strictement monotone sur I , alors pour tout $y \in f(I)$, l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution $x \in I$.

Ce que les élèves reconnaissent

Les élèves reconnaissent une tâche classique qui est celle de localiser ou de chercher une solution de l'équation $f(x) = 0$, une équation à résoudre sur \mathbb{R} , la solution n'est pas accessible par les méthodes classiques.

Ce que les élèves ont fait avec présomption

Les élèves écrivent que l'équation admet une solution dans l'intervalle considéré dès qu'ils ont écrit « f réalise une bijection »

Les incomplétudes

Les incomplétudes sont de deux natures : la rédaction n'est pas rigoureuse, en effet, on s'attend à ce que les élèves écrivent : D'après le théorème de la bijection, la fonction f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ dans $] - \infty; +\infty [$. Or $0 \in] - \infty; +\infty [$. On en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $x \in]0; +\infty [$

4.4.25 Synthèse analyse de l'activité 3

Une copie élève parmi les trois premières copies analysées

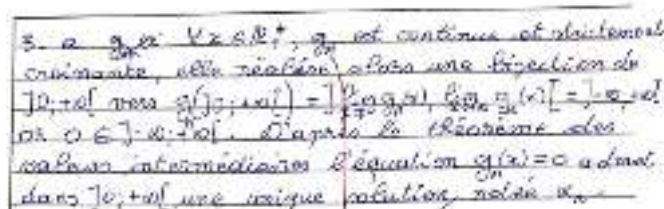


FIG. 4.9 – copie élève sur la résolution de l'équation $f(x) = 0$

Les erreurs

nous avons identifié que des élèves rencontrent des difficultés pour partir de la croissance de la fonction aux calculs et interprétations des limites aux bornes. Certains d'entre

eux qui n'arrivent pas à calculer des limites écrivent que 0 appartient à l'intervalle image et annoncent un théorème puis l'existence de la solution dans l'intervalle des antécédents.



FIG. 4.10 – copie élève 2 sur la résolution de l'équation $f(x) = 0$

4.4.26 Ce qui est mobilisée par les élèves pour résoudre cette tâche

Les élèves ont mobilisé pour résoudre cette tâche les connaissances suivantes :

1. résoudre une équation comprenant une fonction ;
2. opérations sur les limites ;
3. signe de $f(x)$;
4. le sens de variations d'une fonction.

4.4.27 Analyse de l'activité

Ce que les élèves écrivent, reconnaissent et font avec présomption et les incomplétudes

Les élèves, pour résoudre cette tâche calculent les images de nombres en encadrer, puis le signe du produit $g_n(\frac{1}{n}) \cdot g_n(\frac{1}{\sqrt{n}})$. Ils évoquent par la suite le théorème des valeurs intermédiaires et concluent.

Le constat général est que les élèves, pour résoudre cette tâche font des erreurs. Ils énoncent sans rigueur, le théorème de la valeur intermédiaire.

4.4.28 Synthèse analyse de l'activité 4

Une copie élève parmi les trois premières copies analysées

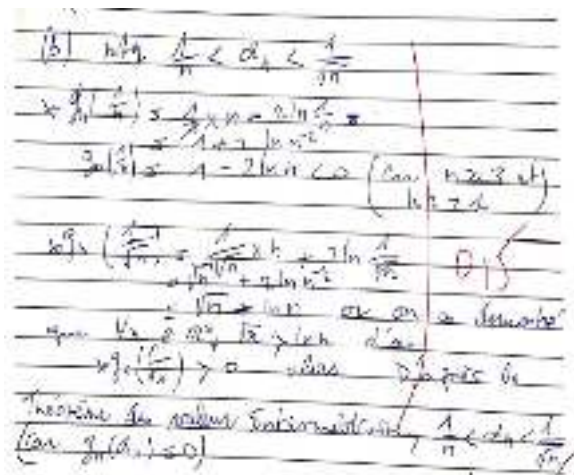


FIG. 4.11 – copie élève sur l'encadrement

4.4.29 Ce qui est mobilisée par les élèves pour résoudre cette tâche

Les élèves ont mobilisé pour résoudre cette tâche les connaissances suivantes :

1. résoudre une inéquation comprenant une fonction ;
2. théorème de comparaison des limites ;
3. théorème d'encadrement dit « des gendarmes ou sandwich » ;
4. le sens de variations d'une fonction ;
5. continuité d'une fonction
6. exploiter le théorème des valeurs intermédiaires

4.4.30 Analyse de l'activité 5

Ce que les élèves écrivent, reconnaissent et font avec présomption et les incomplétudes

Les élèves, pour résoudre cette tâche calculent les limites de $\frac{1}{n}$ et de $\frac{1}{\sqrt{n}}$ en plus l'infini, puis ils continuent leur rédaction en utilisant les termes : *par le théorème des gendarmes*, d'autre effacent le mot comparaisons, et certains utilisent plutôt l'expression *d'après le théorème d'encadrement*, une fois que la propriété est évoquée, chacun conclut que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$

4.4.31 Synthèse analyse de l'activité 5

deux copies élèves parmi les trois premières copies analysées



FIG. 4.12 – copie élève sur le théorème de gendarme

4.4.32 Ce qui est mobilisée par les élèves pour résoudre cette tâche

Les élèves ont mobilisé pour résoudre cette tâche les connaissances suivantes :

1. théorème de comparaison des limites ;
2. théorème d'encadrement dit « des gendarmes ou sandwich » ;
3. continuité d'une fonction

4.4.33 Analyse de l'activité des élèves ?

Les élèves, avant d'étudier la dérivabilité de f en 0 commencent par reproduire l'énoncé. Ensuite, certains calculent $f(0)$

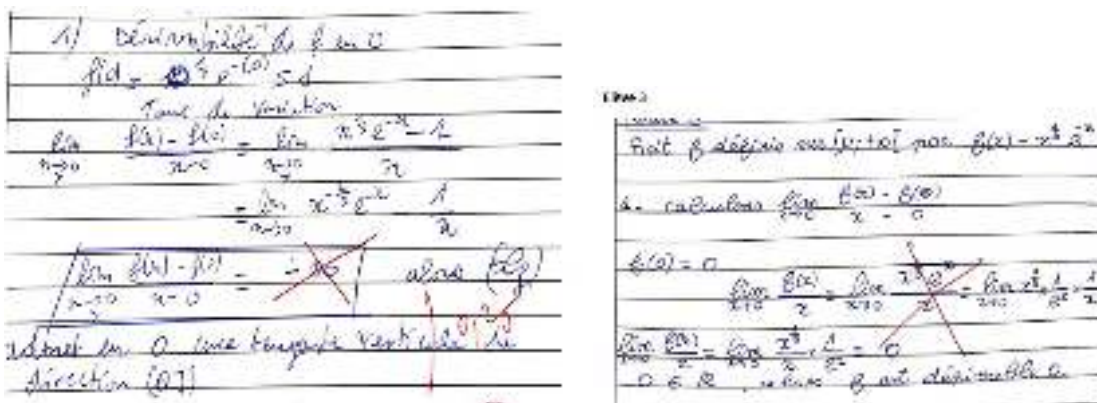


FIG. 4.13 – Dérivabilité copie 1

Le calcul de $f(0)$ est très mal fait car l'élève trouve 1. Logiquement, si $f(0)$ est fini, l'élève peut continuer son travail. Après s'être trompé, il ne s'arrête pas là et continue à écrire : taux de variations puis, il calcule sa limite avec $f(0) = 1$ et à nouveau se trompe

dans le calcul de limite. Il s'agit cette fois d'une limite de fonctions composées. Il faut faire un changement de variables et connaître les limites usuelles. L'élève 2, sans aucune trace de recherche affirme que f est dérivable en 0. et l'élève 3 commence par calculer la limite du taux de variations, puis écrit $f(0) = 0$ juste avant de reprendre le calcul de la limite du taux de variations et trouve 0. Les traces de la troisième copie sont présentées sur le document sus mentionné.

Les incomplétudes

Les incomplétudes sont de deux natures :

1. la décomposition de l'expression du nombre dérivée sans en tirer profit lors du calcul de la limite ;
2. la donnée de l'expression du taux de variation sans suite ;

Les erreurs

1. confusion dans le calcul de limite d'une fonction composée ;
2. mauvais calcul de $f(0)$, l'élève trouve 1 ;
3. la mauvaise gestion du de l'exposant rationnel.

4.4.34 Ce qui est mobilisée par les élèves pour résoudre cette tâche

Les élèves ont mobilisé pour résoudre cette tâche les connaissances suivantes :

1. limite infinie d'une fonction en 0 ;
2. Tangente en un point à une courbe
3. la position de la courbe C_k par rapport aux droites (D) et (D) ;
4. limite infinie en un réel ;
5. opérations sur les limites ;
6. limite d'une fonction composée
7. le taux de variation et sa limite

Pour savoir si la fonction est dérivable en 0, les élèves ont calculé la limite du taux de variations en précisant l'intervalle de x ; la limite en 0 du taux de variation est plaquée chez certains alors que d'autres utilisent un changement de variables. La limite en 0 étant infinie, une tangente verticale existe en 0. Les changements de variables sont utilisés par les uns tandis que d'autres se servent de la croissance comparée. Elle est évoquée par ces derniers avant d'en déduire que l'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe. Il s'agit d'une asymptote verticale précisent les élèves.

Analyse de l'activité

Les élèves pour résoudre cette tâche écrivent ce qui suit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}} e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}} e^x} = 0$$

alors (cf) admet en $+\infty$ une ~~branche~~
~~parabolique de direction (OI)~~.

2) calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{2}} e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

la droite d'équation $y=0$ est une
 asymptote horizontale à la courbe
 cf.

FIG. 4.14 – Dérivabilité copie 1

En effet, certains ne justifient pas la règle utilisée pour aboutir au résultat. La réponse leur semble triviale. Ils en déduisent de la limite nulle trouvée lorsque x devient de plus en plus grand que la courbe représentative de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (OI) ; que la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote verticale à C_f .

Analyse de l'activité 8

Les élèves pour résoudre cette tâche sautent la première sous-tâche qui est celle d'établir l'égalité $f'(x) = \frac{1-3x}{3x} f(x)$.

puis, écrivent : dressons le tableau de variations de f puis étudient le signe de $f'(x)$ en résolvant l'équation $1 - 3x = 0$ et font le tableau de signe de $1 - 3x$ d'autre affirme que le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - 3x$ puis comme dans la tâche 1 de la partie A, dressent le tableau de variations de f . Les difficultés sont de deux ordres, certains n'y arrivent pas pour établir l'égalité et d'autre après le calcul de la dérivée échouent pour étudier le signe. Nous pouvons lire les tracés de leurs productions dans l'élément qui suit :

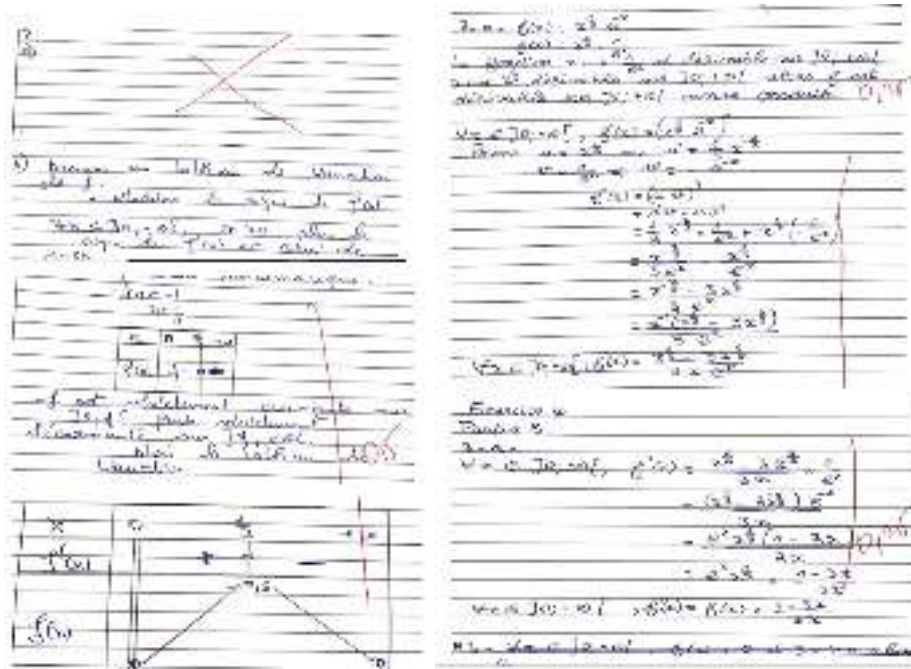


FIG. 4.15 – dérivée et sens de variations

Les connaissances nécessaires pour résoudre cette tâche sont les mêmes que celles identifiées pour la tâche 1 auxquelles on ajoute la dérivée d'un produit et mise en raison visant à montrer une relation d'équivalence.

4.4.35 Activité 8 : Tracer de C_f en prenant $f(\frac{1}{3}) \simeq 0.5$

Un repère orthonormé *tantdonn*, (O, \vec{i}, \vec{j}) , avec $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$ les élèves ont produit une courbe qui semble se rapprocher à celle attendue. Il faut remarquer que plusieurs élèves n'ont pas abordés cette tâche.



FIG. 4.16 – courbe représentative

Analyse de l'activité

Ce que font les élèves pour résoudre cette tâche est présenté dans les éléments suivants :

Soit $I = [\frac{1}{3}, 1]$

1) a) Montrer $f(I) \subset I$
 f étant décroissante, on a :

$$f(I) = f([\frac{1}{3}, 1]) = [f(1); f(\frac{1}{3})]$$

$$f(1) = \frac{1}{e} \approx 0,36$$

$$f(\frac{1}{3}) = (\frac{1}{3})^3 + \frac{1}{e^{\frac{1}{3}}} \approx 0,49$$

$$f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3\sqrt{3}e^{\frac{1}{3}}}$$

Donc $f(I) \subset I$.

ou montrer que $f(I) \subset I$
 $\forall x \in I, \frac{1}{3} \leq x \leq 1$

~~$0,69 < x^3 \leq 1$~~
 ~~$0,69 < x^3 \leq 1$~~

~~$0,69 < x^3 \leq 1$~~
 ~~$0,69 < x^3 \leq 1$~~

Donc $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$

soit $f(\frac{1}{3}) = 0,49$
 $f(1) = 0,36$

~~$f([\frac{1}{3}, 1]) = [0,36, 0,49]$~~
 (car f est décroissante)
 ou $[0,36, 0,49] \subset [\frac{1}{3}, 1]$

Donc $f([\frac{1}{3}, 1]) = [\frac{1}{3}, 1]$

Réponse
 on pose $I = [\frac{1}{3}, 1]$

a. f est strictement décroissante. alors
 $f(I) = [f(1); f(\frac{1}{3})]$
 $f(\frac{1}{3}) \approx 0,49$ et $f(1) \approx 0,36$ | 0,15
 $f(I) = [0,36; 0,49]$; $[0,36; 0,49] \subset [\frac{1}{3}; 1]$
 alors $f(I) \subset I$.

FIG. 4.17 – Ce que les élèves 1, 2 et 3 écrivent pour montrer la stabilité

Les élèves pour résoudre cette tâche, commencent par déterminer l'image de l'intervalle I en précisant qu'ils le font, car f est décroissante pour certains et sans aucune précision pour d'autres. Par la suite, ils donnent les valeurs approximatives de $f(\frac{1}{3})$ et de $f(1)$ qu'ils comparent avec $\frac{1}{3}$ et 1, puis montre que $f(I)$ est inclu dans I après avoir montrer que $f(\frac{1}{3})$ et $f(1)$ sont plus petits que $\frac{1}{3}$ pour le premier et de 1 pour le second. C'est une garantie pour montrer que f admet un point fixe. Dans la suite, les élèves utilisent les

propriétés de l'encadrement d'un produit, d'une somme, d'une différence et d'un quotient pour montrer que la valeur absolue de la dérivée est plus petite que $\frac{1}{3}$. Ils essaient de prendre en compte le fait que $f(x)$ soit positif. Mais cette précision n'est pas suffisante pour montrer que la dérivée est plus petite que $\frac{1}{3}$ en valeur absolue. La tâche qui consiste à montrer que $[x = \alpha_3 \iff (\forall x > 0 \text{ et } f(x) = x)]$ n'a pas été traitée par la quasi-totalité des élèves et par la suite, tente de montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \in I$. Voici une des productions d'un élève (T22) sur cette tâche

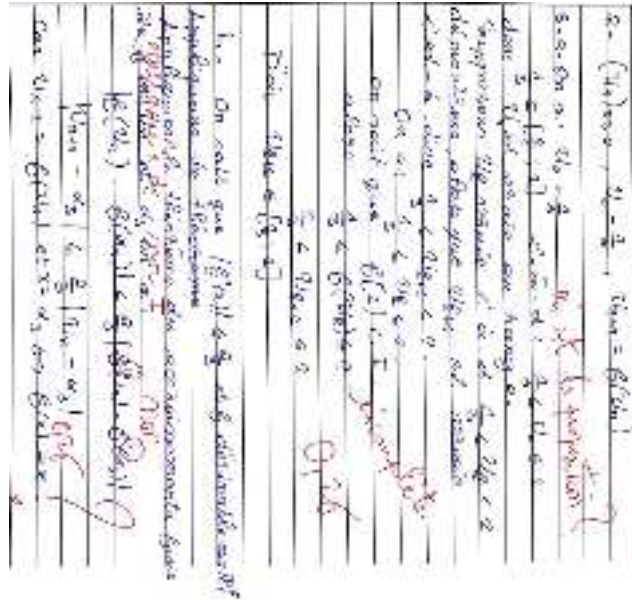


FIG. 4.18 – Comment les élèves montre que $u_n \in I$

La dernière production des élèves est celle de montrer que $|u_{n+1} - \alpha_3| \leq (\frac{2}{3})^n |u_n - \alpha_3|$ pour en déduire que $|u_{n+1} - \alpha_3| \leq (\frac{2}{3})^{n+1}$ puis la convergence de la suite ainsi que sa limite en plus l'infini. Les élèves, pour résoudre cette tâche ont utilisé le théorème des accroissements finis appliqué à f sur I . Ensuite, le fait que f soit décroissante et minorée par α_3 pour conclure qu'elle est convergente. Qu'elle converge vers α_3 .

4.4.36 Savoirs utilisés par les élèves pour résoudre les tâches de terminale

Après avoir analysé l'activité des trois élèves choisis à travers les trois premières copies, nous avons élargie cette analyse au reste des copies de terminale C , puis de terminal D et enfin nous avons observé si la tendance, c'est-à-dire, les mêmes qualité et difficultés se retrouvaient dans les traces des élèves de terminale $A_1, A_2, \text{ et } B$. Dans la suite, nous présentons la synthèse de tout ce qui a été fait par les élèves de terminale.

4.4.37 Les tâches communes aux différentes séries

En terminale A et B les tâches données sont de l'ordre de la recherche, d'études, d'estimation, de calcul ou de la détermination de l'image par une fonction, des variations, des tangentes, des fonctions a 2 variables, des graphiques, des courbes, d'estimations d'images, de dérivées, de signe de la dérivée, d'extremum, de limites, d'asymptotes, de sens et de tableaux de variations.

En terminale on retrouve : des tâches concernant, des images, des variations, des tangentes, des expressions algébriques en fonction de la variable, d'estimations, des limites, de décomposition en éléments simples, d'asymptote, de positions relatives des courbes, de dérivée et de signe dérivé, de sens de variations et de courbes représentatives.

En terminale D on retrouve des tâches portant sur des primitives, le domaine de définition, la courbe, l'asymptote, l'extremum, l'image, l'antécédent, les extremums, la monotonie, la convergence, la nature d'une application, l'expression d'une suite, la limite, les variations, la majoration, le signe de la fonction, la dérivabilité, la continuité, l'étude d'une fonction, le tableau de variations, la tangente et la représentation graphique.

En terminale C on retrouve parmi les tâches qui ont été données aux élèves et qui ont servi de base pour notre recherche : les suites de fonctions, le récurrence, la domination, le convergence, le sens de variations, le calcul de limites, les suites adjacentes, le tableau de variations, la valeur intermédiaire, l'extremum, la limite et l'encadrement, la dérivabilité et son interprétation graphique, la limite et son interprétation graphique, le calcul de dérivée, le tableau de variations, la représentation graphique, les images directe et réciproque, la majoration de la dérivée, le point fixes, les formule de récurrence pour approcher une racine, l'ensemble de définition et image, l'accroissement fini, application k contractante, le sens de variations et limite d'une suite de fonctions.

Après avoir identifié toutes les tâches données aux élèves de terminales dans chaque série, nous présentons notre synthèse des tâches communes. Elles nous serviront par la suite de points d'encrage pour identifier les connaissances qui sont mobilisées par les élèves de terminale dans le sens de niveau de réussite de l'élève devant la tâche. Quelles sont les tâches qui ont été bien traitées par les élèves ? C'est le travail que nous allons présenter dans la suite. Bien avant, nous donnons quelques précisions sur le niveau de fonctionnement de la connaissance qui a été sollicité par la tâche chez les élèves.

4.4.38 Sur les limites

L'élève de terminale détermine la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient de deux fonctions par comparaison, par encadrement et par croissance comparée. Il fait le lien entre limites et comportement asymptotique ; appréhende la notion de continuité d'une fonction ; exploite le théorème des valeurs intermédiaires ; approche une solution d'équation par l'algorithmique qui peut être une formule de récurrence consistant à prouver qu'une fonction converge vers sa limite finie en $+\infty$. Il lève une indétermination pour étudier une limite.

4.4.39 Sur la dérivée et la continuité

L'élève calcule la dérivée d'une fonction. Il détermine certaines caractéristiques d'une fonction à partir de sa dérivée. Dérive une fonction composée ; dérive une fonction avec les puissances. Il détermine le domaine de dérivabilité d'une fonction.

4.4.40 Sur les fonctions

L'élève utilise les calculs avec les puissances ; détermine une limite de fonction ; étudie la continuité et la dérivabilité d'une fonction ; calcule la dérivée d'une fonction ; étudie les variations d'une fonction ; applique les théorèmes des valeurs intermédiaires ; de la bijection et de gendarme. Il utilise la croissance comparée ; calcule des limites aux bornes ;

calcule des limites du taux d'accroissement ; résout des équations et des inéquations comprenant les fonctions ; utilise les relations fonctionnelles en composant les suites avec des fonctions. Connait l'allure de la courbe et trace la représentation graphique de la fonction ; étudie des fonctions composées.

4.4.41 Quelques chiffres sur les savoirs utilisés par les élèves de terminale

4.4.42 Niveau de fonctionnement des connaissances visées en terminales littéraires

Nous présentons ici, les résultats de notre analyse du niveau de mise en fonctionnement des connaissances visées chez les élèves de terminales littéraires pour résoudre la tâche sur les fonctions. Les résultats sont consignés dans un tableau dans lequel vous pouvez lire pour chaque sous tâche, le niveau de fonctionnement visé. Pour ce niveau, les tâches sollicitent 58% de techniques 31% du mobilisable et 12% du disponible.



FIG. 4.19 – Fonctionnement des connaissances sur les fonctions en terminales A1 et B

Les données qui nous ont permis de réaliser cette représentations graphique sont consignées dans le tableau ci-dessous

Série A et B	Tâches	Niveaux de mise en fonctionnement		
		Technique	Mobilisable	Disponible
	2	1		
	3			1
	4		1	1
	Exercice 2			
	2.a	1	1	
	2.b	1	1	
	Exercice 3			
	3.a	1	1	1
	3.b	1		
	4.a	1		
	4.b	1		
	Exercice 4			
	1.a	1		
	1.b	1		
	1.c	1		
	1.d	1		
	2.a	1	1	
	2.b	1	1	
	2.c	1	1	
	2.d	1	1	
	Total	15	8	3
	Pourcentage	58%	31%	12%

FIG. 4.20 – Fonctionnement des connaissances sur les fonctions en Terminale littéraire

Pour la classe de terminale A2 nous observons que le niveau mobilisable est plus sollicité qu'en terminale A1 et B. Cela montre à suffisance que les élèves de terminale A2 peuvent être en difficulté pour rapport à ceux de terminale B et A1

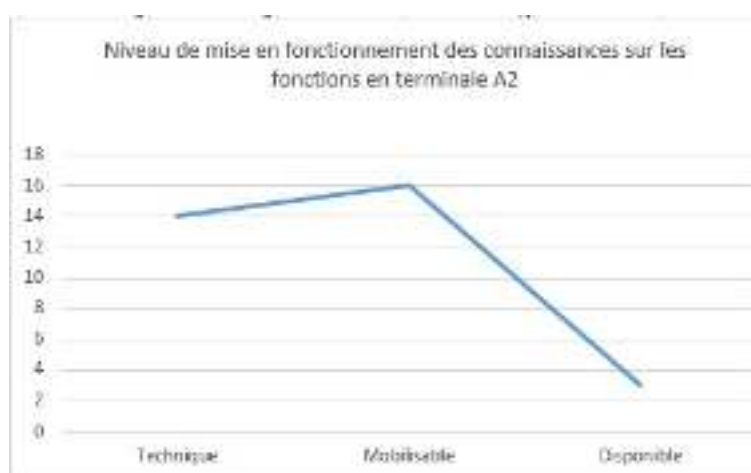


FIG. 4.21 – Fonctionnement des connaissances sur les fonctions en terminales A2

Les données qui nous ont permis de réaliser cette représentations graphique sont consignées dans le tableau ci-dessous

Série A2	Tâches	Niveaux de mise en fonctionnement		
		Technique	Mobilisable	Disponible
	2	1		
	3			1
	4		1	1
	Exercice 2			
	1.a	1	1	
	1.b	1	1	
	2.a	1	1	
	2.B	1	1	
	II. 1. g	1	1	
	1.b	1	1	
	2.a	1	1	
	Exercice 3			
	1.a	1	1	
	1.b	1	1	
	2.a		1	1
	2.b	1	1	
	2.c	1	1	
	3.a	1	1	
	3.b	1	1	
	3.c	1	1	
	2	1		
	Total	14	16	3
	Pourcentage	42,24%	48,48%	09,09%

FIG. 4.22 – Fonctionnement des connaissances sur les fonctions en Terminale A2

En terminale *D* cette tendance reste maintenue. Le niveau de fonctionnement visé reste plus des domaines mobilisables et technique.

FIG. 4.23 – Fonctionnement des connaissances sur les fonctions en terminales *D*

Les données qui nous ont permis de réaliser cette représentations graphique sont consignées dans le tableau ci-dessous

Série D	Tâches	Niveaux de mise en fonctionnement		
		Technique	Mobilisable	Disponible
	Exercice 1			
	1. a, b, c, d		1	
	2. a, b, c, d			1
	3. a	1	1	
	3. b	1	1	
	3. c		1	1
	3. d			1
	Exercice 2			
	II. 1	1	1	
	II. 2	1	1	1
	II. 3 b)		1	1
	Exercice 3			
	1. a		1	
	1. b			1
	1. c	1	1	
	2. a	1	1	
	2. b	1	1	
	2. c	1	1	
	Exercice 4			
	1. a	1	1	
	1. b	1	1	
	1. c	1	1	
	1. d	1	1	
	2. a	1	1	
	2. b	1	1	
	Total	18	22	8
	Pourcentage	47,36%	57,89%	21,05%

FIG. 4.24 – Fonctionnement des connaissances sur les fonctions en Terminale D

En terminale C le niveau de fonctionnement visé est disponible. Nous pouvons le remarquer sur le courbe ci dessous :



FIG. 4.25 – Fonctionnement des connaissances sur les fonctions en terminales D

Les données qui nous ont permis de réaliser cette représentations graphique sont consignées dans le tableau ci-dessous

Série C	Tâches	Niveaux de mise en fonctionnement		
		Technique	Mobilisable	Disponible
	1	1	1	
	2			1
	1. a		1	
	1. b		1	
	2			1
	3			1
	1. a		1	1
	1. b	1	1	
	1. c		1	1
	Partie A			
	1	1	1	1
	2			1
	3. a		1	1
	3. b		1	1
	3. c	1		
	Partie B			
	1		1	1
	2	1	1	1
	3. a	1	1	1
	3. b		1	1
	4		1	1
	Partie C			
	1. a		1	1
	1. b		1	1
	1. c		1	1
	2			1
	3. a	1		
	3. b		1	1
	3. c		1	1
	3. d		1	1
	Total			
	Pourcentage	47,36%	57,89%	21,05%

FIG. 4.26 – Fonctionnement des connaissances sur les fonctions en Terminale *D*

4.5 Corpus 001 de de seconde

4.5.1 Analyse de la tâche 1 et de l'activité

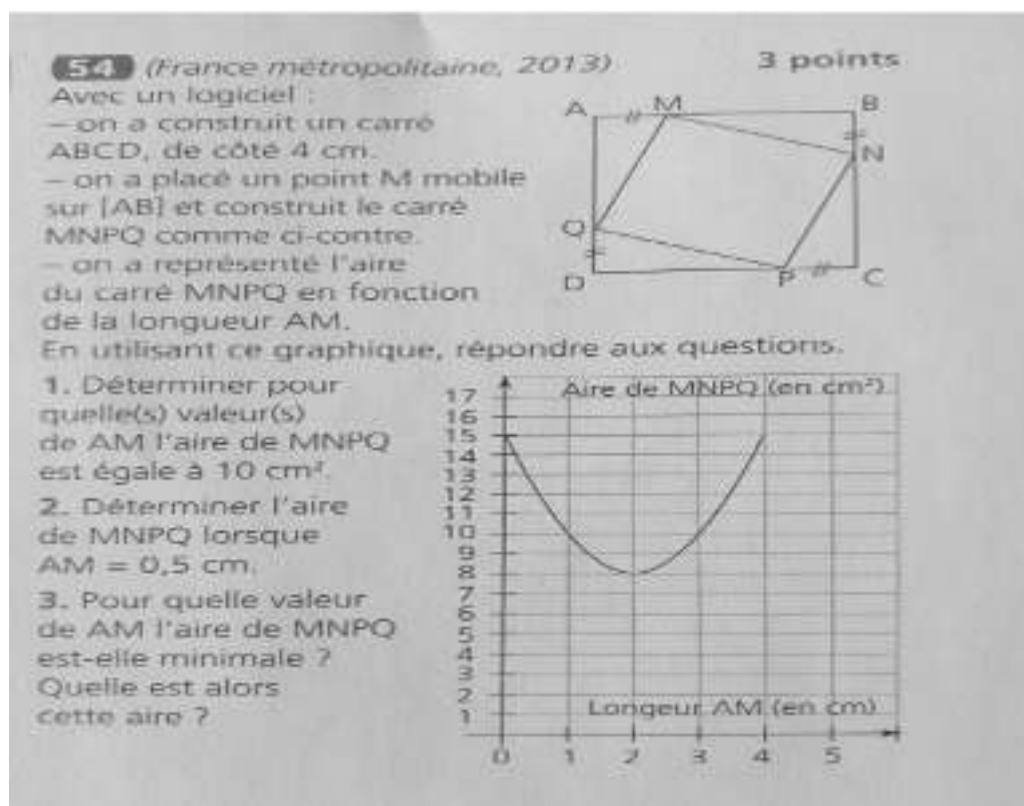


FIG. 4.27 – Exercice donné à des élèves de troisième en France

4.5.2 Analyse de la tâche

Il s'agit d'une interrogation écrite donnée à des élèves de troisième après le BEPC blanc en France. Ces copies ont été égarées après analyse. Nous présentons juste ce que nous avons pu observer sans toutefois considérer ces résultats pour cette recherche. Les questions 1 : déterminer pour quelles valeurs de AM l'aire de $MNPQ$ est égale à 10 cm^2 ; 2 : Déterminer l'aire de $MNPQ$ lorsque $AM = 0,5 \text{ cm}$ et 3 : Pour quelle valeur de AM l'aire de $MNPQ$ est-elle minimale ? Sont fermées et bien formulées. La technique est indiquée. En effet, on demande à l'élève de résoudre le problème par lecture graphique et non par une autre méthode. Au début de la tâche, on peut observer une figure géométrique qui peut être considérée comme intru ou moyen de contrôle du résultat. Juste après, on retrouve une représentation graphique cartésienne. La méthode de résolution est donnée. Il s'agit d'utiliser la représentation graphique. L'élève doit non seulement trouver l'antécédent connaissant l'image, mais également l'image connaissant l'antécédent et enfin identifier les extrémums pour donner le minimum, l'aire minimale, graphiquement. Le repère ne semble pas être orthonormé. La figure géométrique donnée au début de l'énoncé peut juste aider pour valider le résultat si l'élève cherche à trouver les solutions avec une expression littérale ou par les nombres en utilisant les propriétés métriques. X varie de 0 à 5 et l'aire est positive, l'allure de la courbe montre que l'aire diminue pour ensuite augmenter lorsque x prend les valeurs allant de 0 à 5. Le niveau de fonctionnement ici est

de l'ordre de la familiarité, purement technique. Il s'agit de lire l'abscisse et l'ordonnée d'un point. Une simple modélisation est à faire. Elle nécessite la mobilisation de la variation, des extremums, de la courbe, du processus qui à x associe $f(x)$ ainsi que de la dépendance, de la représentation graphique, des notions de croissance, de décroissance, de monotonie d'une fonction, de maximum, de minimum d'une fonction sur un intervalle, de courbe représentative, de courbe d'équation $y = f(x)$ est l'ensemble des $(x; y)$.

4.5.3 Analyse de l'activité de fin de cycle 4

Ce corpus a été égaré suite à nos multiples déplacements et n'a qu'une valeur indicative pour ce travail. Pour résoudre la première sous tâche, les réponses à la questions 1 des élèves interrogés sont les suivantes : *CL* écrit : d'après le graphique, pour que l'aire de $MNPQ$ soit égale à 10 cm^2 *AM* doit mesurer 3 cm . sans annoncé qu'il lit directement *CG* écrit contrairement à *CL* : les valeurs de *AM* quand $MNPQ$ est égale à 10 cm^2 sont 1 cm et 3 cm . *VE* tente justifier sa réponse en écrivant : les valeurs sont de 3 cm et 1 cm car on voit que sur le graphique 1 et 10 sont alignés et que la courbe passe sur la ligne 1 et 10 . Elle passe également sur la ligne et colonne 3 et 10 . *EL* utilise « si, alors, est de, ou » dans sa réponse, il écrit : Si l'aire de $MNPQ$ est égale à 10 cm^2 , alors la longueur du segment *AM* est de 3 cm ou de 1 cm . *GH* utilise la formulation L'aire de $MNPQ$ est égale à 10 cm^2 quand *AM* est égale à 1 cm ou 3 cm . *LA* commence par écrire, les valeurs de *AM*, sans une suite logique écrit : l'aire de $MNPQ$ est égale à 10 cm^2 est de 1 cm . Donc conclut-il, $AM = 1 \text{ cm}$ et $AM = 3 \text{ cm}$. *MJ* commence par écrire : l'aire de $MNPQ$ sa valeur et de 1 cm car 10 cm^2 égal 1 cm . ce qui est totalement ambigu. *GE* quant à lui répond à la question dans le même sens que *CL*. dans sa rédaction, il précise que la réponse a été donnée d'après la représentation, graphique. *FBC* choisit d'écrire : Quand l'aire de $MNPQ$ fait 10 cm^2 , *AM* fait 1 cm ou 3 cm . l'usage du ou est assez intéressante car indique la donnée des deux solutions d'une équation de degré deux. *ZS* donne directement la réponse 3 cm car $MNPQ$ égale 10 cm^2 . Il confond aussi $MNPQ$ et l'aire $MNPQ.VM, FH, TN$ donnent *AM* à partir des mesures de l'aire de $MNPQ$ sans justification. *AA* a redonné une copie vierge. *OB* Commence par utiliser le mot « quand » : quand *AM* est égale à 1 cm ou 3 cm , l'aire de $MNPQ$ est égale à 10 cm^2 . *AM* doit faire 1 cm ou 3 cm pour obtenir 10 cm^2 d'aire est la formulation choisie par *ZJ.MO* écrit : l'aire du carré $MNPQ$ est égale à 10 cm^2 lorsque la longueur *AM* mesure 3 cm . *DC* donne une seule valeur parmi les deux qui vérifie une aire égale à 10 cm^2 . Il donne seulement la valeur 1 cm . Pour *SM, SNa, SNi, KJ, CE* nous retrouvons la formulation : la (les) valeur de *AM* pour que $MNPQ$ est (soit) égale à 10 cm^2 sont 1 cm et 3 cm .

Pour la deuxième sous tâche (réponses questions 2) les élèves écrivent : *CL* : d'après le graphique, lorsque *AM* est égale à 0.5 cm l'aire de $MNPQ$ est 12 cm^2 . L'élève *CG, VE* n'introduit pas sa réponse par, d'après le graphique, il écrit : l'aire de $MNPQ$ lorsque *AM* est égal à 0.5 cm est de 12 cm^2 . *VE* répond à la question comme *CG.EL* utilise la même formulation que *CL* en prenant le soin d'ajouter "alors". Il écrit : lorsque *AM* est égale à 0.5 cm , alors l'aire du carré $MNPQ$ est de 12 cm^2 . *GH* écrit : L'aire de $MNPQ$ est de 12 cm^2 lorsque *AM* est égal à 0.5 cm . *LA* pour répondre à la question écrit ceci : L'aire de $MNPQ$ lorsque *AM* est égale à 0.5 cm est d'un peu près 13.5 cm^2 , puis il efface ce résultat pour enfin garder la réponse 12 cm^2 . sans préciser qu'il utilise le graphique, *MJ* écrit que l'aire de $MNPQ$ en cm^2 lorsque *AM* est égale à 0.5 cm est de 12 cm^2 . *GE* écrit : selon le graphique, l'aire de $MNPQ$ est d'environ 12 cm^2 lorsque *AM* est égale à 0.5 cm , contrairement à *CL* qui utilise le mot « d'après ». Quand *AM* fait 0.5 cm , l'aire de $MNPQ$

fait 12 cm^2 est la formulation de FBC. ZS répond de la manière suivante : Quand AM égale 0.5 cm , l'aire de MNPQ est 12 cm^2 . VM, FH, TN, ZJ donnent l'aire à partir des mesures de AM sans justifications. Pour la deuxième tâche, il utilise le théorème de Pythagore, sachant que le triangle MBN est rectangle en B. Il écrit dans la suite : sachant qu'on veut l'aire du carré, on peut s'arrêter ici. L'aire du carré MNPQ lorsque $AN = 0.5 \text{ cm}$ est 12.5 cm^2 alors que d'après le graphique cette aire serait....Il ne termine pas sa phrase. Plus loin en fin de copie, il écrit : approximativement. pour dire que le graphique nous donne une valeur approximative. MO répond sans donner d'indications par : l'aire du carré MNPQ est égale à 12 cm^2 lorsque la longueur AM mesure 0.5 cm . Pour répondre à la deuxième question, DC utilise le symbole sensiblement égale à 12 cm^2 . Il n'utilise pas l'élément de contrôle qu'est le carré donné plus haut. SM, SNa, SNi, KJ, CE écrivent : l'aire, de MNPQ lorsque AM est égale à 0.5 cm est de 12 cm^2

Enfin pour la troisième sous tâche (réponse question 3), les élèves écrivent ; CL : l'aire de MNPQ est minimale lorsque AM est égale à 2 cm . l'aire est 8 cm^2 . Sans faire référence dans sa rédaction au graphique, l'élève CG écrit : l'aire minimale de MNPQ c'est quand AM est égal à 2 cm . Donc l'aire est de 8 cm^2 . VE écrit : La valeur de AM est de 2 et la valeur minimale est de 8. La réponse de EL est la suivante : l'aire du carré MNPQ est minimale lorsque AM est égale à 2 cm . L'aire de MNPQ est alors de 8 cm^2 . GU utilise la formulation : L'aire de MNPQ est minimale pour AM égale à 2 cm . Elle fait donc 8 cm^2 . Pour LA, l'aire de MNPQ est minimale quand AM est égale à 2 cm . Cette aire est : $MNPQ = 8 \text{ cm}^2$, il confond évidemment l'aire de MNPQ et MNPQ. MJ utilise plutôt la formulation suivante : La valeur de AM pour laquelle l'aire de MNPQ est minimale est de 4 cm alors l'aire est de -15 cm^2 . Il donne une valeur négative à une aire. Contrairement à CL, GE commence par écrire : l'aire minimale de MNPQ est 8 cm^2 . Pour conclure de la manière suivante : La longueur AM, elle, à ce moment là est de 2 cm . Pour répondre à la dernière question FBC écrit : L'aire de MNPQ est minimale quand AM fait 2 cm . Cette aire fait 8 cm^2 . Pour l'aire minimale de MNPQ écrit ZS, AM égale 2 cm et MNPQ égale 8 cm^2 . le même soucis concernant la distinction en MNPQ et l'aire de MNPQ se fait également sentir auprès de ZS; VM écrit que l'aire minimale du carré MNPQ est obtenue lorsque AM mesure 2 cm . cette aire est de 8 cm^2 . FH écrit : pour $AM = 2 \text{ cm}$ l'aire de MNPQ est minimale, cette est alors de 8 cm^2 . Il a oublié le mot aire. TN quant à lui répond : La valeur de AM la plus basse est $AM = 2 \text{ cm}$ car l'aire de MNPQ est de 8 cm^2 . ZJ écrit : AM doit faire 2 cm pour que l'aire de MNPQ soit minimale. On observe alors que l'aire de MNPQ fait 8 cm^2 . Pour la tâche 3, MO écrit que l'aire du carré MNPQ est minimale lorsque la longueur AM mesure 2 cm . L'aire est alors de 8 cm^2 . MR a rendu une copie vierge. DC, répond simplement à la question en écrivant que l'aire est minimale pour AM égale 2 cm^2 . Elle est égale à 8 cm^2 . SE, SM, SNa, SNi, KJ écrivent pour répondre à cette question : La valeur de AM pour l'air (e) minimale de MNPQ et de 2 cm . cette aire est de 8 cm^2 . CE ajoute après une formulation identique à celle de KJ que cette aire est alors 15 cm^2 ce qui est évidemment faux. Il termine sa rédaction par : Je n'ai pas bien compris de ce qu'il fallait faire.

La connaissance pour cette tâche

La connaissance ici est le modèle de la courbe. Grâce à cette courbe, à ce modèle, on peut résoudre en un seul coup, non pas un seul problème, mais plusieurs. C'est une tâche qui permet à l'élève de comprendre la dimension modèle (possibilité, proposition) d'une fonction dans sa capacité à donner des résultats approchés et généraux. Les élèves utilisent la courbe représentative comme un algorithme. Si nous reprenons la réponse de

l'élève *VE* : les valeurs sont de 3 et 1 cm car on voit que sur le graphique, 1 et 10 sont alignés et que la courbe passe sur la ligne 1 et 10. Elle passe également sur la ligne et colonne 3 et et 10.

4.5.4 Analyse de la tâche 2 et de l'activité élève



FIG. 4.28 – Courbe et fonction

4.5.5 Analyse de la tâche 3 et de l'activité élève

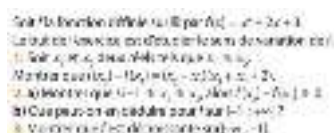


FIG. 4.29 – Variations d'une fonction

La tâche 3 rentre dans le contexte d'étude d'une fonction polynôme de degré 2. Par définition, elle est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont des nombres réels donnés avec a différent de 0. Pour étudier ses variations, les élèves devraient avoir comme connaissances disponibles le fait que :

1. si a est positif, f est d'abord croissante, puis décroissante.
2. si a est négatif, f est d'abord décroissante, puis croissante.

C'est la démonstration de cette propriété qui est la tâche à réaliser. En effet, soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a non nul. L'élève doit montrer que f est croissante pour certaines conditions réalisées par x_1 et par x_2 sur les intervalles $[-\frac{b}{2a}; +\infty[$ et $]-\infty; \frac{b}{2a}]$. Ainsi il doit étudier les variations de f en calculant $f(x_1) - f(x_2)$ et donner le résultat sous la forme $a(x_1 - x_2)(x_2 + x_1 + \frac{b}{a})$. Or pour a positif par exemple, $x_1 - x_2$ et $x_2 + x_1 + \frac{b}{a}$ strictement positif donc $f(x_1) - f(x_2)$ est positif $[-\frac{b}{2a}; +\infty[$. L'élève peut montrer de la même manière le sens de variation de f sur l'autre intervalle. Le cas a négatif étant similaire.

Nous allons dans la suite montrer ce que les élèves de seconde de France écrivent pour résoudre cette tâche et faire une toute petite comparaison avec ce que les élèves de seconde *S* du Gabon écrivent pour la tâche pour enfin identifier les connaissances mobilisées par les élèves de seconde sur les questions de variations.

4.5.6 Activité de l'élève de seconde en France

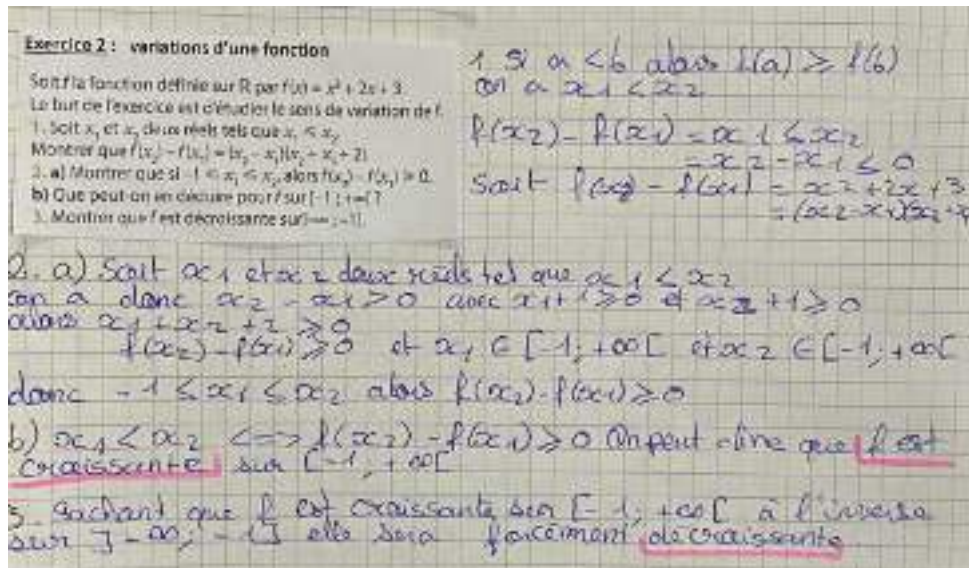


FIG. 4.30 – Copie élève1 de seconde en France

1) $g(x_2) - g(x_1) = x_2^2 + 2x_2 + 3 - (x_1^2 + 2x_1 + 3)$
 $= x_2^2 + 2x_2 + 3 - x_1^2 - 2x_1 - 3$
 $= x_2^2 + 2x_2 - x_1^2 - 2x_1$
 $(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 2) = x_2^2 + x_2x_1 + 2x_2^2 - x_1^2 - 2x_1$
 $= x_2^2 + 2x_2 - x_1^2 - 2x_1$

FIG. 4.31 – Copie élève2 de seconde en France

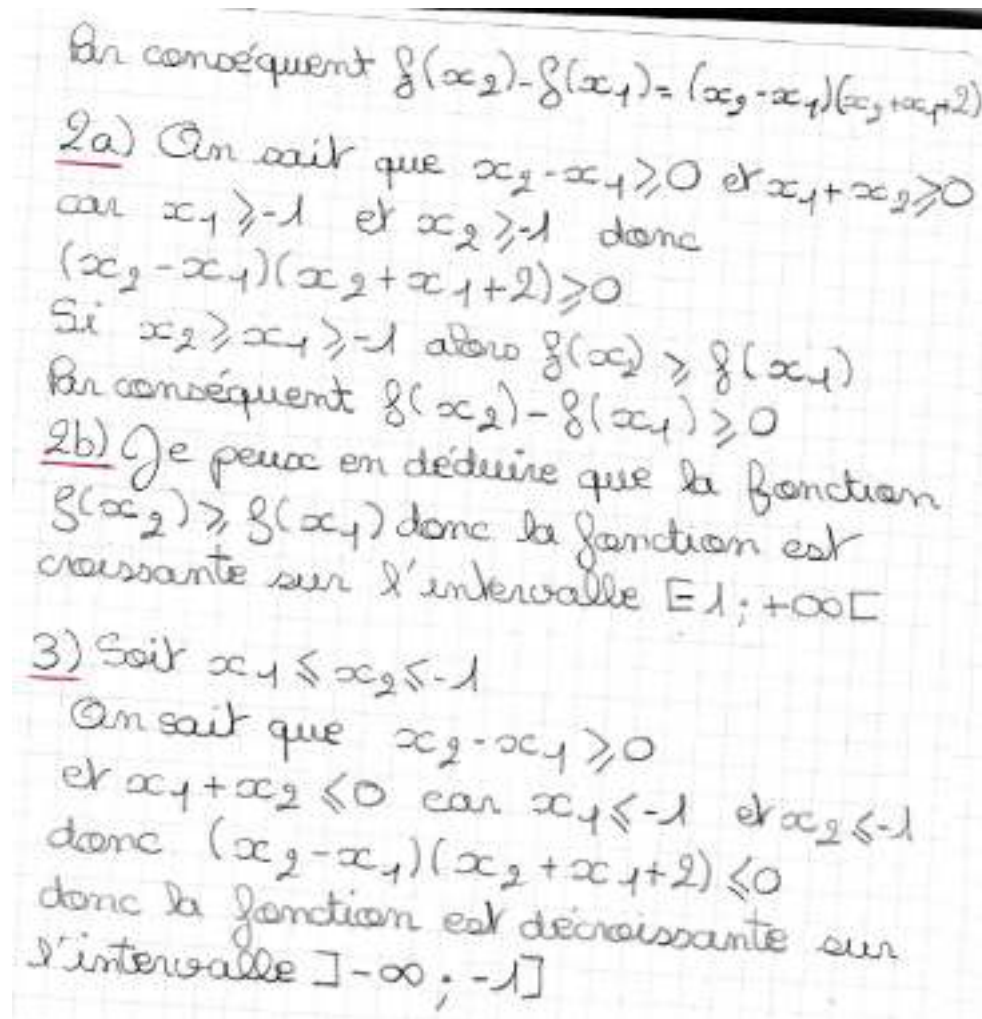


FIG. 4.32 – Copie élève2 suite seconde de en France

4.5.7 réponse élèves 1, 2, 3

Question 2.a

ce que l'élève 1 de France écrit

Nous remarquons que élève 1, pour résoudre la tâche, commence par écrire une proposition assez difficile à comprendre a strictement inférieure b implique $f(a)$ supérieure ou égale à b on a $x_1 \geq x_2$ ensuite, il se trompe dans le calcul de $f(x_2) - f(x_1)$ mais plaque pourtant le résultat attendu. Pour résoudre la sous tâche 2.a, il écrit : soit x_1 et x_2 deux nombres tels que x_1 inférieur ou égal à x_2 on a donc $x_2 - x_1$ strictement positif. Alors qu'au départ l'inégalité était large. Il continue sa rédaction par : avec $x_1 + 1$ supérieur ou égal à 1 et $x_2 + 1$ supérieur ou égal à 1 alors $x_1 + x_2 + 2$ est supérieur ou égal à 0. Il écrit une ligne plus bas que $f(x_2) - f(x_1)$ est supérieur ou égal à 0. Il ne s'arrête pas là. C'est-à-dire à la donnée de la réponse à la question posée. Il précise à nouveau les intervalles auxquels appartiennent x_1 et x_2 et écrit à la suite : donc $-1 \leq x_1 \leq x_2$ alors $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$.

ce que l'élève 2 de France écrit

l'élève 2 écrit : on sait que $x_2 - x_1$ est positif ou nul et que $x_2 + x_1$ est positif ou nul car $x_2 \geq -1$ et $x_1 \geq -1$ donc $(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 2) \geq 0$
Si $x_2 \geq x_1 \geq -1$ alors $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$

Ce que l'élève 3 de France écrit

Si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$ donc $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$

Question 2.b**Ce que l'élève 1 de France écrit**

$x_1 < x_2 \iff f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ On peut en déduire que f est croissante sur $[-1; +\infty[$.

Ce que l'élève 2 de France écrit

Je peux en déduire que la fonction $f(x_2) \geq f(x_1)$ donc la fonction est croissante sur l'intervalle $[-1; +\infty[$.

Ce que l'élève 3 écrit

Sur $[-1; +\infty[$ la fonction est croissante

Sous tache 3**Ce que l'élève 1 écrit**

Sachant que f est croissante sur $[-1; +\infty[$ à l'inverse sur $]-\infty; -1]$, elle sera forcément décroissante.

Ce que l'élève 2 écrit

$x_1 \leq x_2 \leq -1$ on sait que $x_2 - x_1$ est positif ou nul et que $x_2 + x_1$ est positif ou nul car $x_2 \geq -1$ et $x_1 \geq -1$ donc $(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 2) \geq 0$ donc la fonction est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; -1]$

Ce que l'élève 3 écrit

Si f est sur $]-\infty; -1]$ alors $x_1 \leq x_2$ mais $f(x_1) \geq f(x_2)$ la fonction inverse l'ordre. Elle est donc décroissante.

Chapitre 5

Résultats : les connaissances mobilisées par les élèves

5.1 Résultats 01 : la définition de la notion de fonction n'est pas assimilée par les élèves du secondaire

La fonction est définie comme : une application : affine, doté d'un lieu, du plan dans le plan (23%) ; forme numérique (0.9%) ; correspondance (1.8%) ; suite (0.9%) ; un nombre (0.9%) ; un réel (1.8%) ; un ensemble de réels (1.8%), d'éléments (0.9%) une composée (0.9%) ; un nombre imaginaire (0.9%) ; un élément (0.9%) ; un calcul qui se fait (0.9%) ; une expression mathématique (1.8%) ; un polynôme (3.6%) ; un outil (0.9%) ; une équation (1.8%) ; je ne connais pas (2.7%) ; une variable (0.9%) ; une opération (1.8%) ; une droite (0.9%) ; une association d'éléments (0.9%) et le reste sans aucune réponse.

5.2 Résultat 02 : les élèves du secondaire sont arrivés à un niveau algorithmique de l'utilisation des fonctions

L'algorithme, lorsque les élèves du secondaire utilisent les fonctions, est, ce qui représente l'organisation de leur activité. Face à une tâche d'une certaine classe et pour laquelle on va aboutir après un nombre fini de pas soit à une solution s'il existe une, soit à une démonstration s'il n'existe pas de solution, les algorithmes utilisés par tous les élèves sont les suivants :

5.2.1 Pour étudier la dérivabilité en 0

Les élèves du secondaire commencent par écrire la formule permettant le calcul de la limite du taux de variation. Puis, ils calculent cette limite. Exemple, le candidat 716255 écrit ce qui suit :

1.) Montrons que la fonction f_n est dérivable en 0.

Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_n(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^n (-1 + \ln x)}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^{n-1} (-1 + \ln x)) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} (-x^{n-1} + x^{n-1} \ln x)$$

$\lim_{x \rightarrow 0} -x^{n-1} = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} \ln x = 0$

par somme, $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^{n-1} + x^{n-1} \ln x) = 0$

alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} = 0$

FIG. 5.1 – calcul du taux de variation du candidat 716255, Bac C 2021.

Il utilise les mots « par somme » ; « alors », pour donner la valeur de la limite. Ensuite, si la limite du taux de variation est finie, Il conclut que le fonction est dérivable en 0. Sinon, il conclut que la fonction n'est pas dérivable en 0. Exemple

conclusion : f_n est dérivable en 0.
 La droite d'équation $(T): y = f'(0)x$
 $(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$ est une demi-tangente au point d'abscisse 0.

FIG. 5.2 – Conclusion candidat 716255 sur la dérivabilité en 0, Bac C 2021

. Enfin, l'algorithme utilisé par le candidat précise si la courbe représentative de la fonction admet une tangente ou une demie tangente en 0.

5.2.2 Pour donner les points fixes

Tous les candidats observés ont utilisé le même algorithme pour répondre à une question qui demande un algorithme différent. En effet, la notion de point fixe n'est pas mobilisées par les élèves et par les enseignants. Cette question a posé de débats chez les élèves et chez les enseignants. Voici ce que les élèves mobilisent comme connaissance pour répondre à cette question :

(p. 21) Démontrons que les courbes (C_1) et (C_2) ont trois points fixes.

Calculons $f_{n+1} - f_n = x^{n+1}(-1+\ln x) - x^n(-1+\ln x)$

$$f_{n+1} - f_n = x^n(-1+\ln x)(x-1)$$

$$f_{n+1} - f_n = 0 \Rightarrow x^n(-1+\ln x)(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ ou } \ln x = 1 \text{ ou } x=1$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ ou } x=e \text{ ou } x=1$$

Soit A d'abscisse 0, B d'abscisse e et C d'abscisse 1 sont les trois points fixes

FIG. 5.3 – Points fixes de deux courbes, Bac C 2021

Les candidats, pour étudier les points fixes commencent par écrire une égalité entre les deux fonctions représentées par les courbes étudiées ($f(x) = g(x)$), puis résolvent une équation ($f(x) - g(x) = 0$), qui admet pour racines, les abscisses des points fixes.

5.2.3 Pour calculer la dérivée

Les algorithmes utilisés par les candidats dans ce cas sont assez différents. Ils dépendent de la question d'une part, du candidat et de l'institution d'autre part. En effet, il se peut qu'on demande aux candidats de montrer que la dérivée est égale à celle qui leur est donnée dans le sujet. C'est une formulation récente de la tâche, car les élèves qui ne parvenaient pas à trouver la dérivée avaient du mal à continuer le problème. Dans ce premier cas, le calcul de la dérivée est direct. Le candidat n'a pas besoin d'écrire une longue phrase précédente le calcul de la dérivée. Cette phrase apparaît dans le cas où la tâche serait le calcul de la dérivée pour l'étude des variations de la fonction. Voici un exemple de l'algorithme élève.

a) Montrons que pour tout $n > 0$: $f'_n(x) = x^{n-1}(-n + 1 + n \ln x)$

$f_n(x) = x^n(-1 + \ln x)$

$f_n \rightarrow UV \Rightarrow f'_n \rightarrow U'V + UV'$

$f'_n(x) = (x^n)'(-1 + \ln x) + x^n(-1 + \ln x)'$

$= n x^{n-1}(-1 + \ln x) + x^n \left(\frac{1}{x}\right)$

$= n x^{n-1}(-1 + \ln x) + \frac{x^n}{x}$

$= -n x^{n-1} + n x^{n-1} \ln x + \frac{x^n}{x}$

$= -n x^{n-1} + n x^{n-1} \ln x + x^{n-1}$

$f'_n(x) = x^{n-1}(1 - n + n \ln x)$

FIG. 5.4 – Calcul de la dérivée, Bac C 2021

Les candidats commencent par identifier le type de fonction (somme, produit, composée, etc.). Puis, ils écrivent la fonction sous la forme (UV) pour le cas observé. Puis écrivent la forme de sa dérivée $U'V + UV'$. Puis calculent la dérivée.

5.2.4 Pour dresser le tableau de variations

Les élèves, pour dresser le tableau de variations, commencent par écrire la fonction dérivée. Puis, étudient son signe, dressent le tableau de variations en indiquant les signes de la dérivée, les variations de la fonction par des flèches, les limites de la fonction aux bornes ainsi que certaines valeurs remarquables. Ils existent plusieurs variantes. Nous présentons dans la ci-dessous les algorithmes de quarante candidats.

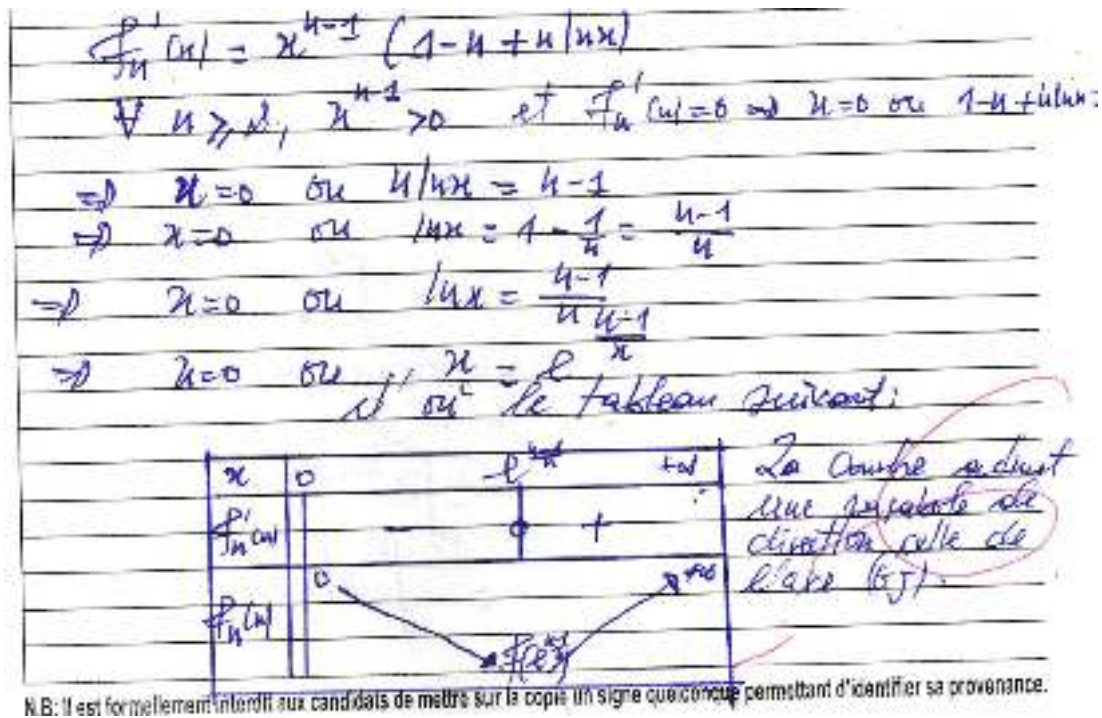


FIG. 5.5 – Dresser le tableau de variations, Bac C 2021

Le candidat 716561 a utilisé une procédure différente de celle des autres candidats. Il a étudié le signe de la dérivée et fait le tableau de signe en comme suit :

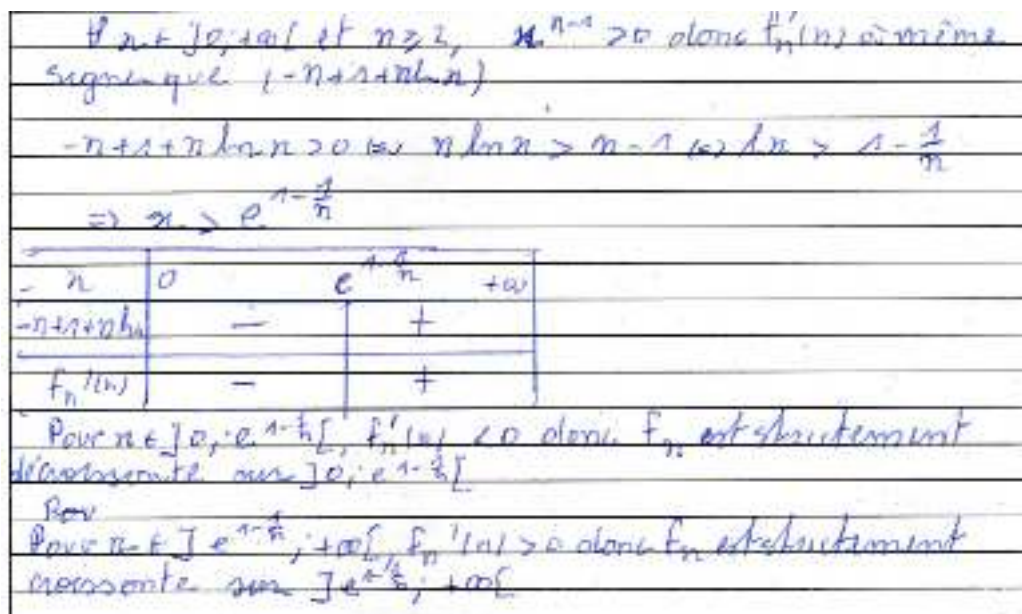


FIG. 5.6 – étude du signe de la dérivée, Bac C 2021

Plus loin, il donne les variations de la fonction qui est d'abord strictement décroissante puis strictement croissante avant de dresser le tableau de variations. Puis calcule les limites aux bornes. Ce qui est intéressant est qu'il fait dresse juste après un tableau de variation bien que plus haut, il avait déjà donné les variations de la fonction

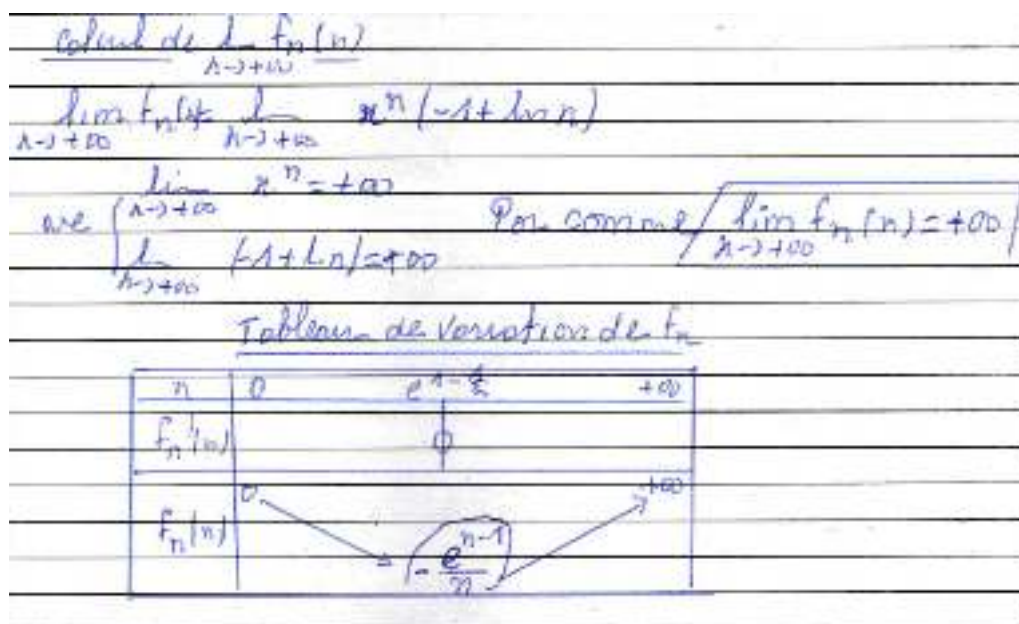


FIG. 5.7 – tableau de variations version 2, Bac C 2021

Le candidat 716561 utilise, comme la majorité des candidats $f_n(x)$ dans la ligne trois du tableau. Seuls les candidats 716581, 716516, 716413 utilisent f_n . Les candidats 716287, 716340, 716446 et 716321 n'ont rien renseigné dans la ligne 3.

5.2.5 Pour tracer des courbes

Pour construire des courbes, les élèves commencent par écrire les fonctions étudiées. Puis tracent les deux axes du repère, tracent les tangentes et placent les extremums locaux. Puis tracent les courbes.

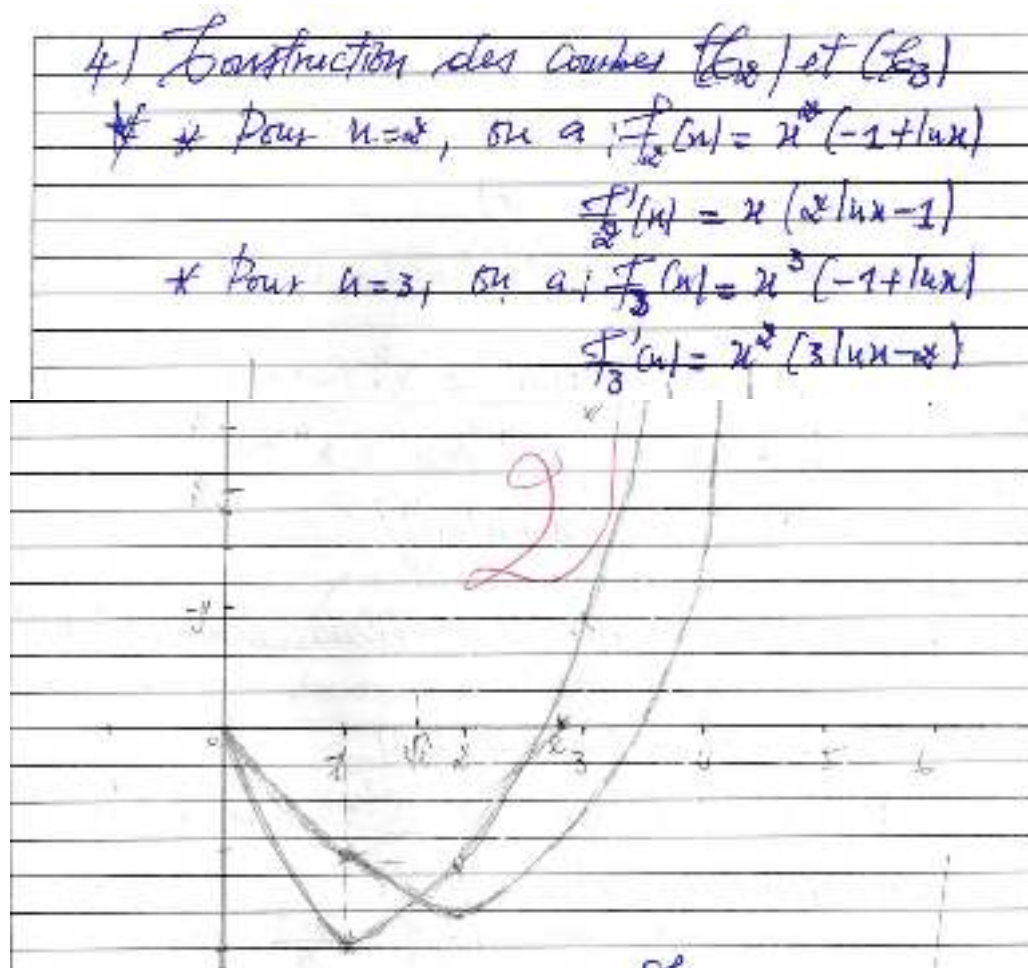


FIG. 5.8 – Tracer des courbes, Bac C 2021

5.3 Résultat 03 : les erreurs des élèves sont imprévisibles.

Les élèves font trop d'erreurs, ce constat est d'ordre général. Ils se trompent plus sur : la manipulation des notations ; l'utilisation de la croissance comparée ; l'interprétation graphique d'un résultat, l'utilisation du théorème de la bijection.

5.3.1 Résultats 04 : L'entrée par les tâches, pour identifier les savoirs mobilisés par les élèves est la meilleure.

Au regard des observations et analyses des différents corpus surtout côté enseignants, les enseignants font eux-mêmes face, à des difficultés sur la notion de fonction. Il serait donc souhaitable d'éviter l'entrée par les définitions, mais plutôt par la tâche à un niveau du secondaire en ce qui concerne les fonctions. Les définitions peuvent être introduites au moment de l'institutionnalisation.

5.3.2 Résultat 05 : la conformité de voir f ou $f(x)$ dans un tableau

la conformité de voir f ou $f(x)$ dans un tableau de variations n'est pas forcément en rapport avec une épistémologie, mais plutôt avec une histoire. Et si tu ne connais pas l'histoire, tu es dans la croyance que f ou $f(x)$ est mieux indiquée. C'est aussi le cas du corollaire de la bijection à partir du moment où les élèves ne pouvant pas parler de la bijection de manière rigoureuse, utilisent le théorème des valeurs intermédiaires.

Qu'est ce qui varie g ou $g(x)$, f_n ou f'_n ? Dans un sens, c'est bien la variation d'un réel, c'est bien un réel qui bouge, c'est $g(x)$ qui bouge quand x bouge. Il s'agit d'une représentation schématique de la courbe, la lecture de $g(x)$ se fait suivant celle de x . Que ce soit $g(x)$ ou g ne gêne pas. De plus dans les manuels, les deux notations sont utilisées. En effet, il y a une vérité sous-jacente là-dedans, nous l'avons évoqué dans la partie portant sur l'histoire des fonctions qui est que, dans l'analyse, x, y, z sont des quantités qui décrivent un phénomène qui lui-même dépend du temps. Il y'avait une variable sous-jacente qui dépend du temps t et x était aussi une variable. Ce qu'on précise ici, c'est comment y , un certain y , une certaine quantité y , varie en fonction de x . Sachant que, d'une manière implicite tant x que y varient en fonction de t . Mais ce qui nous intéresse, ce n'est pas la manière donc chacune varie en fonction de t , mais la manière dont l'une varie relativement à l'autre. Donc ce qui s'est passé est qu'une tradition bien ancrée voulait que x puisse devenir à un certain moment une valeur. Dans ce cas, il fallait écrire précisément la phrase, pour une valeur de x donnée (x_0 chez Cauchy, valeur donnée). A l'opposé, x pouvait également être une variable. Du coup, lorsqu'on écrit $g(x)$, $g(x)$, c'est la fonction. Sachant que x est une variable, c'est une autre variable $g(x)$ qui est décrite comme une fonction de x . Le gros problème, ce à quoi nous sommes confrontés, le problème rencontré est qu'il y a eu une volonté du groupe Bourbaki de vraiment mettre de l'ordre. A partir de cet instant, l'objet, c'est g . Nous oublions le temps et si j'écris quelque chose en fonction d'autres choses, ce que je suis en train d'identifier, c'est un objet. Je lui donne un nom qui est g . Et lorsque j'écris $g(x)$, il faut comprendre que ce que j'obtiens, c'est que g étant conçue comme une fonction, dans g il y a quelque part une case vide et cette case vide, si je la rempli avec une valeur, j'aurai un nombre réel x , alors j'obtiens un notre nombre réel que je peux appeler y . Il y'a eu cette volonté qu'on peut défendre. Le problème, c'est qu'elle n'a pas eu lieu à 100% comme pour la plus part des grandes réformes. Ce type d'histoire au sens des événements a toujours comme conséquence, de créer des comportement valides ou pas, des manières de faire, des praxéologie qui sont vraies ou pas.

5.3.3 Résultat 06 : l'écriture des élèves est non standard pour valider les résultats.

Tous les élèves à partir de la classe de seconde, bien que dans la même classe ou dans le pays ou dans le même système éducatif, n'écrivent pas la même chose pour répondre à une même question. Ce résultat englobe en quelque sorte tout ce que nous avons observé chez tous les candidats.

5.3.4 Résultat 07 : la dérivation différentie suite et fonction.

Même si les suites peuvent être considérées comme des fonctions, mais il y a des techniques particulières pour les suites et pour les fonctions, les fonctions sont un préalable à des questions comme la dérivation.

5.4 Résultat 08 : Le passage du calcul de la dérivée au tableau de variation d'une d'apparence si simple reste le problème des élèves de terminale

Les élèves échouent sur l'étude de fonction tout simplement parce que les deux objets intermédiaires à ce niveau ne sont pas maîtrisés en même temps par la majorité des élèves. Le passage du calcul de la dérivée au tableau de variations d'une d'apparence si simple, reste le problème des élèves de terminale. En effet, ils réussissent les deux difficilement. Si échec il y a, c'est précisément à ce niveau que tout se détermine.

5.4.1 Résultat 09 : les candidats ne parviennent pas à résoudre les problèmes en analyse au baccalauréat.

Sur l'étude de fonction, seuls les candidats 716433, 716418, 716438, 716484, 716586, 716592, 716446, 716537, 716536 ont 20/20 au problème d'analyse portant sur l'étude de fonction soit 1 élève sur 3 parmi les meilleurs élèves et 9/766 soit 2 élèves sur 10 parviennent à étudier comme attendu la fonction. L'enseignement de la notion de fonction est donc à revoir et à prendre au sérieux. Les choses ne sont pas aussi simples pour les élèves comme cela paraît. Les erreurs sont plus d'ordre calculatoire.

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

Revenons sur notre questionnement initial. Notre préoccupation première est celle de la définition du concept fonction, des savoir-faire et des savoirs-exprimés des élèves du secondaire sur cette notion, les raisons et les conditions historiques et épistémologiques des évolutions de la conception de la fonction ainsi que les conditions et les contraintes de l'enseignement de la fonction dans les classes. Hermann Weyl (1927) dit je cité : « Personne n'a jamais su expliquer ce qu'est une fonction ».

Analyse Historique

Nous avons tout d'abord mené une analyse historique de la notion de fonction dans une perspective épistémologique et didactique pour dégager les différentes évolutions de la définition de la notion de fonction. En effet, nous constatons que les descriptions verbales du comportement des fonctions sur l'un ou l'autre ensemble de valeurs de la variable indépendante sont généralement utilisées et que la logique mathématique moderne a découvert des difficultés essentielles inhérentes à la définition universelle, donc non-algorithmique, d'une fonction.

Une analyse historique de la construction de la notion de fonction nous a montré que, pour ce qui est des fonctions, on doit initialement avoir en esprit les concepts très généraux de correspondance, de relation de correspondance, de règle, d'expression, de dépendance, de covariation et d'ensemble sans pour autant s'inquiéter sur ses paradoxes. Nous notons donc que la toute première connaissance à mobiliser par les élèves est « la notion de fonction comme reliant deux ensembles ». C'est la base de la plupart des difficultés des élèves. En effet, le formaliste introduit le concept de fonction, totalement dénué de sens pour certains élèves, comme exemples : ensemble dont les éléments sont les points d'espace ; variations d'une fonction ; fonctions d'une variable ; variation d'une constante, etc. Cette situation est causée par la confusion dans la réponse à la question de définir un ensemble, une fonction avec celui de construire des éléments d'un ensemble et de construire une fonction. c'est ce principe que nous proposons ici est celui de la construction de la fonction dans le cadre scolaire tout en sachant bien sûre que : de la façon dont il est facile de définir les ensembles de manière constructive, il est réciproquement difficile de construire des fonctions. Les tentatives des programmes et des contenus des manuels scolaires de mettre en relation deux ensembles par la définition d'une fonction est formulée comme suit : la définition d'une fonction d'un ensemble A à un ensemble B doit fournir un moyen explicite de convertir la construction de tout élément de A dans la construction d'un élément défini de B . Cela décrit le concept d'une opération. Nous l'avons d'ailleurs

remarqué après une enquête auprès des élèves de terminale à l'oral du Baccalauréat à qui on demandait de définir une fonction, ces derniers la définissent comme une opération. Dans la tentative de construire une fonction, lors de son introduction, il est nécessaire de prouver que les nombres égaux de A se transforment en nombres égaux de B . Pour être complet. La définition de la fonction doit également être accompagnée d'une vérification que le procédé est réalisable. Cette vérification pouvant être validé par des applications ou par d'autres fonctions qui se sont déjà avérées bien définies et précisées pour chaque élément spécifique.

Analyse comparative des programmes et des contenus

Les fonctions sont présentes dans les programmes d'enseignement du secondaire en France et en Afrique francophone. Elles sont abordées dans les deux programmes de mathématiques dès la troisième. Nous remarquons que le programme français (cf. annexe. D page 232) embrasse plus de notions que celui de l'Afrique francophone (cf. annexe. E page 234). Dans le programme français, les fonctions sont appelées à être définies par une courbe, un tableau de données ou une formule.

Cette étude comparative, à un niveau du secondaire, montre que les fonctions sont introduites et définies différemment dans les différents manuels. Elles sont étudiées suivant les mêmes étapes. Les contenus et les cadres sont les mêmes avec quelques décalages en première. L'outil numérique est plus sollicité en France.

L'enseignement des fonctions, en France, débute en fin de cycle 4 avec la notion de fonction tout comme en Afrique francophone où la notion d'application est privilégiée. Pour la France, nous nous sommes intéressées aux nouveaux programmes qui ont débuté avec la réforme des lycées en 2010 et en 2009 pour la troisième. En Afrique francophone, il s'agit du programme actuel également. En effet, dans un monde qui évolue rapidement, la maîtrise et l'approfondissement des mathématiques apparaissent comme une condition indispensable au développement des nations, plongées qu'elles sont dans l'ère de la haute technologie et de la mondialisation des marchés. Voilà pourquoi les mathématiciens africains ont commencé, dès 1983, à organiser des réunions de concertation sur les problèmes posés par l'enseignement des mathématiques qui jouent un rôle essentiel dans la préparation des jeunes aux défis de l'avenir. La Collection Inter-Africaine de Mathématiques proposé aujourd'hui aux élèves de l'Enseignement Secondaire des pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien est le fruit de cette collaboration franche et fraternelle qui a abouti, au mois de juin 1992, à l'élaboration et à l'adoption par tous ces pays des programmes des premier et second cycles de l'enseignement secondaire. Les contenus adoptés ont été systématiquement expérimentés dans plusieurs pays avant que ne soient entreprises les rédactions définitives. Les deux programmes sont identiques en termes de notions abordées à plus de 90% sur la notion de fonction. En France, dans chaque partie du programme, nous avons un tableau qui détaille les contenus, les capacités attendues et précisent certains points sous forme de commentaires. En Afrique francophone, le programme est lui aussi divisé en parties, précisant les contenus, les capacités exigibles et les commentaires. En France, les fonctions rentrent dans la partie du programme intitulée « Organisation et gestion des données, fonctions » en fin de cycle 4, « Fonctions » en seconde, puis « Analyse » en première et terminale. Les fonctions représentent environ 40% du programme en seconde, un tiers en première (et plus de 40% avec les suites) et 40% en terminale (et la moitié avec les suites).

Discussion en rapport avec l'approche de connaissance mobilisée

Trois approches ont été identifiées au sujet de la connaissance mobilisée. La première approche est celle de considérer une connaissance mobilisée comme un « programme de traitement disponible ». La seconde approche considère une connaissance mobilisée comme celle que l'élève utilise ou applique. Ainsi, mobiliser une connaissance, ce n'est pas seulement l'« utiliser » ou l'« appliquer », c'est aussi adapter, différencier, intégrer, généraliser ou spécifier, combiner, orchestrer, coordonner, conduire un ensemble d'opérations mentales complexes qui, en les connectant aux situations, transforment les connaissances plutôt que les « déplacer ». La troisième approche considère la mobilisation des connaissances comme réinvestissement des acquis des élèves. Ainsi, les connaissances (savoirs) que nous considérons comme mobilisées par l'élève devant une tâche sur les fonctions sont : les savoirs faire et les savoirs exprimés à savoir : les acquis, les moyens qu'ont les élèves pour résoudre la tâche, les programmes de traitement disponible, des compétences devant une tâche, sans se poser la question du temps nécessaire pour la résoudre.

Le corpus visant à identifier les connaissances des élèves sur les fonctions

Nous avons choisi difficilement la formulation d'Elena Tognini-Bonelli[49, p. 4-5], dans sa seconde approche, *corpus-driven*, plus inductive, revendiquant une exploration sans a priori des savoirs faire et des savoirs exprimés des élèves afin de faire émerger depuis l'activité élèves des hypothèses ».

Nos analyses nous ont permis de mieux cerner ce qui peut expliquer les phénomènes : les rapports, les écarts, les différences entre les tâches et l'activité élève sur les fonctions au programme dès la fin du cycle 4 jusqu'en terminale. Notre corpus est assez représentatif, car il tient compte de l'institution, des enseignants, des élèves, des tâches et de l'activité et exhaustif dans la mesure où notre base de données est large de par sa composition, ses délimitations et son analyse. Ce corpus nous permet de mieux connaître ce que font ou savent les élèves lorsqu'ils sont confrontés à des tâches sur les fonctions, des devoirs sur table donnés en classe, au baccalauréat blanc et au baccalauréat officiel de la fin de cycle 4, de seconde et de la terminale en France et en Afrique francophone. Ces tâches sont traitées par les élèves. C'est l'analyse des productions, leurs activités présumées ou induites des copies, traces écrites. L'analyse du corpus est l'objet de notre thèse.

L'intérêt i, fine est de mettre en exergue des connaissances qui sont mobilisées par les élèves en les comparant avec les connaissances nécessaires précisées dans des manuels au programme pour résoudre des tâches liées aux fonctions au secondaire, c'est-à-dire le corpus des contenus identifiables dans les manuels au programme.

Les critères choisis sont : le niveau d'enseignement ; les tâches et les types de tâches ; les réponses des élèves. Les enseignants qui ont bien voulu nous accompagner sont tous en activités entre 2017 et 2023 et sont titulaires d'une maîtrise de mathématiques. L'expérimentation a eu lieu au Gabon et en France : à Paris ; à Besançon et à Toulouse.

En ce qui concerne l'analyse de la tâche et de l'activité, nous avons fait le choix d'analyser en amont trois premières copies pour identifier les régularités qui nous ont permis d'analyser les autres copies. Pour identifier des connaissances des élèves dans chacun des niveaux considérés, nous avons fait des analyses par dossier. Puis confronter les résultats de chaque dossier aux autres pour en repérer les différences et les jeux de renvois des uns aux autres. Nous avons fait le choix de commencer par le corpus de terminale pour finir avec celui de seconde.

Connaissances mobilisées par les élèves

Après analyse de l'activité élèves, la notion de fonction est conçue comme une relation entre, une Chose mesurable, une expression littérale, une dépendance, une dépendance entre, une quantité corrélée, une courbe fonctionnant, une quantité composée, une expression analytique, une expression de calculs, une quantités exprimées, une règle variable, une correspondance arbitraire. Les élèves du secondaire sont arrivés à un niveau algorithmique de l'utilisation des fonctions. Ils savent : étudier la dérivabilité en 0 ; déterminer les points fixes. Calculer la dérivée d'une fonction ; dresser le tableau de variations ; tracer des courbes. Afin d'éviter ou de minimiser les erreurs des élèves, nous soutenons l'entrée par les tâches, pour amener les élèves à mieux se saisir de la notion de fonction. Nous avons constaté que les enseignants font eux-mêmes face, à des difficultés sur la notion de fonction. Il serait donc souhaitable d'éviter l'entrée par les définitions, mais plutôt par la tâche à un niveau du secondaire en ce qui concerne les fonctions. Les définitions peuvent être introduites plus tard à en fonction du niveau de la classe. Les élèves font la différence entre f et $f(x)$. Ils n'écrivent pas la même chose pour résoudre des tâches identiques sur des fonctions. Ils font la différence entre fonction et suite par la notion la dérivation à un niveau du secondaire. Le passage du calcul de la dérivée au tableau de variation reste le problème majeur des élèves de terminale pour étudier une fonction. Les élèves échouent sur l'étude de fonction tout simplement parce que les deux objets intermédiaires à ce niveau ne sont pas maîtrisés en même temps par la majorité les élèves. Les candidats ne parviennent pas à résoudre les problèmes en analyse au baccalauréat.

Annexe A

Les premières connaissances mobilisées

A.0.1 En France : de géométrie analytique

Problème 4

BAHAR
Gautier
2023

Problème de Mathématiques



Altitude = 4 cm

Problème : trouver la position du point P pour lequel l'aire est maximale.



ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

soit $AB = AC = 5$ cm

soit l'altitude relative à l'hypoténuse $CH = FH = 2.5$ cm

Soit une droite d passant par P parallèle à l'hypoténuse BC .

On a $A(0,0), B(5,0), C(0,5), P(x,y), Q(0,y), R(x,0)$

Chercher la droite d

(C, B, y) est une

Chercher à quel point doit être égal x pour que l'aire soit maximale.

$$A = \frac{1}{2} x^2 + 2.5 x \quad a = -\frac{1}{2}, b = 2.5, c = 0$$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$= \frac{-2.5}{2 \cdot (-\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{-2.5}{-1}$$

$$= 2.5$$

$$= 2.5$$

$$A = \frac{1}{2} x^2 + 2.5 x$$

(la dérivée est égale à 0)

$$= 0 = 2.5 x + \frac{1}{2} x^2$$

$$= 2.5 x$$



ce qui est la position optimale pour que l'aire soit maximale est $x = 2.5$ cm, l'aire sera égale à $2.5^2 = 6.25$ cm².

$$a = \frac{2.5 - 2.5}{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = 2.5$$

$$\Rightarrow (C, B) : y = -x + 5$$

$$C \left(\frac{x}{y} = -x + 5 \right) \text{ soit } C(2.5, 2.5)$$

$$D \left(\frac{x}{y} = -x + 5 \right) \text{ soit } D(2.5, 2.5)$$

Chercher la longueur de BC

$$BC = \sqrt{(2.5 - 0)^2 + (2.5 - 0)^2} = \sqrt{2.5^2 + 2.5^2} = \sqrt{12.5} = 3.54$$

$$BC = -x + 5$$

Chercher l'aire de BCD

$$A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 3.54 \cdot 2.5 = 4.425$$

$$A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 3.54 \cdot 2.5 = 4.425$$

A.0.2 En Afrique francophone : de géométrie pure

$$A_{(EFAM)} = \frac{(EM+AF) \times AM}{2}$$

Posons $AM = x$ donc $BM = 5-x$. Les droites (EM) et (AF) étant parallèles car perpendiculaires à (AB) nous ↓ après la propriété de THALES on a: $\frac{EM}{BF} = \frac{AM}{AC}$ (\Rightarrow) $EM = AC \times \frac{AM}{BF}$ (\Rightarrow) $EM = 5x \times \frac{(5-x)}{5}$

donc $EM = BM = 5-x$

$$\text{donc } A_{(EFAM)} = \frac{(5-x+2,5)x}{2}$$

donc $EM = BM = 5-x$

$$\text{donc } A_{(EFAM)} = \frac{(5-x+2,5)x}{2}$$

$$A_{(EFAM)} = \frac{-x^2 + 7,5x}{2}$$

Cette aire est maximale pour $x = 3,75$

Annexe B

Premiers travaux réalisés en France avec les élèves

PROBLÈME 1: Écoulement de Poiseuille

On considère un écoulement de fluide newtonien incompressible dans une conduite cylindrique de rayon R . Le profil de vitesse est donné par :

- Profil de vitesse : $v(r) = v_{max} (1 - \frac{r^2}{R^2})$
- Profil de pression : $p(r) = p_0 - \frac{\Delta p}{R^2} r^2$
- Profil de contrainte de cisailage : $\tau(r) = \frac{\Delta p}{4L} r$
- Profil de débit : $Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8 \mu L}$

On définit le coefficient de Poiseuille C_p par :

$$C_p = \frac{Q}{\Delta p} = \frac{\pi R^4}{8 \mu L}$$

On définit également le coefficient de Poiseuille C_p par :

$$C_p = \frac{Q}{\Delta p} = \frac{\pi R^4}{8 \mu L}$$

On définit également le coefficient de Poiseuille C_p par :

$$C_p = \frac{Q}{\Delta p} = \frac{\pi R^4}{8 \mu L}$$

On définit également le coefficient de Poiseuille C_p par :

$$C_p = \frac{Q}{\Delta p} = \frac{\pi R^4}{8 \mu L}$$

Propriété	Profil	Description
Profil de vitesse	X	Parabole inversée, maximum au centre
Profil de pression	X	Parabole, maximum aux parois
Profil de contrainte de cisailage	X	Linéaire, maximum aux parois
Profil de débit	X	Constante

On définit également le coefficient de Poiseuille C_p par :

$$C_p = \frac{Q}{\Delta p} = \frac{\pi R^4}{8 \mu L}$$

PROBLÈME 2: Écoulement de Poiseuille

On considère un écoulement de fluide newtonien incompressible dans une conduite cylindrique de rayon R . Le profil de vitesse est donné par :

- Profil de vitesse : $v(r) = v_{max} (1 - \frac{r^2}{R^2})$
- Profil de pression : $p(r) = p_0 - \frac{\Delta p}{R^2} r^2$
- Profil de contrainte de cisailage : $\tau(r) = \frac{\Delta p}{4L} r$
- Profil de débit : $Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8 \mu L}$

On définit le coefficient de Poiseuille C_p par :

$$C_p = \frac{Q}{\Delta p} = \frac{\pi R^4}{8 \mu L}$$

On définit également le coefficient de Poiseuille C_p par :

$$C_p = \frac{Q}{\Delta p} = \frac{\pi R^4}{8 \mu L}$$

On définit également le coefficient de Poiseuille C_p par :

$$C_p = \frac{Q}{\Delta p} = \frac{\pi R^4}{8 \mu L}$$

On définit également le coefficient de Poiseuille C_p par :

$$C_p = \frac{Q}{\Delta p} = \frac{\pi R^4}{8 \mu L}$$

On définit également le coefficient de Poiseuille C_p par :

$$C_p = \frac{Q}{\Delta p} = \frac{\pi R^4}{8 \mu L}$$

Propriété	Profil	Description
Profil de vitesse	X	Parabole inversée, maximum au centre
Profil de pression	X	Parabole, maximum aux parois
Profil de contrainte de cisailage	X	Linéaire, maximum aux parois
Profil de débit	X	Constante

On définit également le coefficient de Poiseuille C_p par :

$$C_p = \frac{Q}{\Delta p} = \frac{\pi R^4}{8 \mu L}$$

PROBLÈME 3: Écoulement de Poiseuille

On considère un écoulement de fluide newtonien incompressible dans une conduite cylindrique de rayon R . Le profil de vitesse est donné par :

- Profil de vitesse : $v(r) = v_{max} (1 - \frac{r^2}{R^2})$
- Profil de pression : $p(r) = p_0 - \frac{\Delta p}{R^2} r^2$
- Profil de contrainte de cisailage : $\tau(r) = \frac{\Delta p}{4L} r$
- Profil de débit : $Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8 \mu L}$

On définit le coefficient de Poiseuille C_p par :

$$C_p = \frac{Q}{\Delta p} = \frac{\pi R^4}{8 \mu L}$$

On définit également le coefficient de Poiseuille C_p par :

$$C_p = \frac{Q}{\Delta p} = \frac{\pi R^4}{8 \mu L}$$

On définit également le coefficient de Poiseuille C_p par :

$$C_p = \frac{Q}{\Delta p} = \frac{\pi R^4}{8 \mu L}$$

On définit également le coefficient de Poiseuille C_p par :

$$C_p = \frac{Q}{\Delta p} = \frac{\pi R^4}{8 \mu L}$$

Propriété	Profil	Description
Profil de vitesse	X	Parabole inversée, maximum au centre
Profil de pression	X	Parabole, maximum aux parois
Profil de contrainte de cisailage	X	Linéaire, maximum aux parois
Profil de débit	X	Constante

On définit également le coefficient de Poiseuille C_p par :

$$C_p = \frac{Q}{\Delta p} = \frac{\pi R^4}{8 \mu L}$$

On définit également le coefficient de Poiseuille C_p par :

$$C_p = \frac{Q}{\Delta p} = \frac{\pi R^4}{8 \mu L}$$

PROBLÈME 4: Écoulement de Poiseuille

On considère un écoulement de fluide newtonien incompressible dans une conduite cylindrique de rayon R . Le profil de vitesse est donné par :

- Profil de vitesse : $v(r) = v_{max} (1 - \frac{r^2}{R^2})$
- Profil de pression : $p(r) = p_0 - \frac{\Delta p}{R^2} r^2$
- Profil de contrainte de cisailage : $\tau(r) = \frac{\Delta p}{4L} r$
- Profil de débit : $Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8 \mu L}$

On définit le coefficient de Poiseuille C_p par :

$$C_p = \frac{Q}{\Delta p} = \frac{\pi R^4}{8 \mu L}$$

On définit également le coefficient de Poiseuille C_p par :

$$C_p = \frac{Q}{\Delta p} = \frac{\pi R^4}{8 \mu L}$$

On définit également le coefficient de Poiseuille C_p par :

$$C_p = \frac{Q}{\Delta p} = \frac{\pi R^4}{8 \mu L}$$

On définit également le coefficient de Poiseuille C_p par :

$$C_p = \frac{Q}{\Delta p} = \frac{\pi R^4}{8 \mu L}$$

On définit également le coefficient de Poiseuille C_p par :

$$C_p = \frac{Q}{\Delta p} = \frac{\pi R^4}{8 \mu L}$$

Propriété	Profil	Description
Profil de vitesse	X	Parabole inversée, maximum au centre
Profil de pression	X	Parabole, maximum aux parois
Profil de contrainte de cisailage	X	Linéaire, maximum aux parois
Profil de débit	X	Constante

On définit également le coefficient de Poiseuille C_p par :

$$C_p = \frac{Q}{\Delta p} = \frac{\pi R^4}{8 \mu L}$$

EXERCÍCIO 1

1.1. Um sistema de equações lineares é dado por:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$$

- 1.2. Determine o conjunto solução desse sistema.
- 1.2.1. Calcule o determinante da matriz dos coeficientes.
 - 1.2.2. Calcule o determinante da matriz dos termos independentes.
 - 1.2.3. Calcule os determinantes das matrizes obtidas substituindo as colunas da matriz dos coeficientes pelas colunas da matriz dos termos independentes.

1.3. Determine o conjunto solução desse sistema.

1.4. Determine o conjunto solução desse sistema.

1.5. Determine o conjunto solução desse sistema.

1.6. Determine o conjunto solução desse sistema.

1.7. Determine o conjunto solução desse sistema.

1.8. Determine o conjunto solução desse sistema.

1.9. Determine o conjunto solução desse sistema.

1.10. Determine o conjunto solução desse sistema.

Equação	ca	cm	Resultado
Δ	1	1	
Δ_1	1	2	
Δ_2	1	3	
Δ_3	1	4	
Δ_4	1	1	
Δ_5	1	2	
Δ_6	1	3	
Δ_7	1	4	
Δ_8	1	1	
Δ_9	1	2	
Δ_{10}	1	3	
Δ_{11}	1	4	

Resolução de Matemática 1
Data: 20/03/2024

EXERCÍCIO 2

2.1. Um sistema de equações lineares é dado por:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$$

- 2.2. Determine o conjunto solução desse sistema.
- 2.2.1. Calcule o determinante da matriz dos coeficientes.
 - 2.2.2. Calcule o determinante da matriz dos termos independentes.
 - 2.2.3. Calcule os determinantes das matrizes obtidas substituindo as colunas da matriz dos coeficientes pelas colunas da matriz dos termos independentes.

2.3. Determine o conjunto solução desse sistema.

2.4. Determine o conjunto solução desse sistema.

2.5. Determine o conjunto solução desse sistema.

2.6. Determine o conjunto solução desse sistema.

2.7. Determine o conjunto solução desse sistema.

2.8. Determine o conjunto solução desse sistema.

2.9. Determine o conjunto solução desse sistema.

2.10. Determine o conjunto solução desse sistema.

Equação	ca	cm	Resultado
Δ	1	1	
Δ_1	1	2	
Δ_2	1	3	
Δ_3	1	4	
Δ_4	1	1	
Δ_5	1	2	
Δ_6	1	3	
Δ_7	1	4	
Δ_8	1	1	
Δ_9	1	2	
Δ_{10}	1	3	
Δ_{11}	1	4	

Resolução de Matemática 1
Data: 20/03/2024

EXERCÍCIO 3

3.1. Um sistema de equações lineares é dado por:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$$

- 3.2. Determine o conjunto solução desse sistema.
- 3.2.1. Calcule o determinante da matriz dos coeficientes.
 - 3.2.2. Calcule o determinante da matriz dos termos independentes.
 - 3.2.3. Calcule os determinantes das matrizes obtidas substituindo as colunas da matriz dos coeficientes pelas colunas da matriz dos termos independentes.

3.3. Determine o conjunto solução desse sistema.

3.4. Determine o conjunto solução desse sistema.

3.5. Determine o conjunto solução desse sistema.

3.6. Determine o conjunto solução desse sistema.

3.7. Determine o conjunto solução desse sistema.

3.8. Determine o conjunto solução desse sistema.

3.9. Determine o conjunto solução desse sistema.

3.10. Determine o conjunto solução desse sistema.

Equação	ca	cm	Resultado
Δ	1	1	
Δ_1	1	2	
Δ_2	1	3	
Δ_3	1	4	
Δ_4	1	1	
Δ_5	1	2	
Δ_6	1	3	
Δ_7	1	4	
Δ_8	1	1	
Δ_9	1	2	
Δ_{10}	1	3	
Δ_{11}	1	4	

Resolução de Matemática 1
Data: 20/03/2024

EXERCÍCIO 4

4.1. Um sistema de equações lineares é dado por:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$$

- 4.2. Determine o conjunto solução desse sistema.
- 4.2.1. Calcule o determinante da matriz dos coeficientes.
 - 4.2.2. Calcule o determinante da matriz dos termos independentes.
 - 4.2.3. Calcule os determinantes das matrizes obtidas substituindo as colunas da matriz dos coeficientes pelas colunas da matriz dos termos independentes.

4.3. Determine o conjunto solução desse sistema.

4.4. Determine o conjunto solução desse sistema.

4.5. Determine o conjunto solução desse sistema.

4.6. Determine o conjunto solução desse sistema.

4.7. Determine o conjunto solução desse sistema.

4.8. Determine o conjunto solução desse sistema.

4.9. Determine o conjunto solução desse sistema.

4.10. Determine o conjunto solução desse sistema.

Equação	ca	cm	Resultado
Δ	1	1	
Δ_1	1	2	
Δ_2	1	3	
Δ_3	1	4	
Δ_4	1	1	
Δ_5	1	2	
Δ_6	1	3	
Δ_7	1	4	
Δ_8	1	1	
Δ_9	1	2	
Δ_{10}	1	3	
Δ_{11}	1	4	

Resolução de Matemática 1
Data: 20/03/2024

NOTES :

Soit f une fonction définie sur un ensemble E à valeurs dans F .
 Soit A un sous-ensemble de E .
 Soit B un sous-ensemble de F .

- Soit f une fonction définie sur un ensemble E à valeurs dans F .
 Soit A un sous-ensemble de E .
 Soit B un sous-ensemble de F .
 Soit $f(A)$ l'ensemble des images des éléments de A par f .
 Soit $f^{-1}(B)$ l'ensemble des éléments de E dont l'image par f appartient à B .

10.1.1 :

Soit f une fonction définie sur un ensemble E à valeurs dans F .
 Soit A un sous-ensemble de E .
 Soit B un sous-ensemble de F .

- Soit f une fonction définie sur un ensemble E à valeurs dans F .
 Soit A un sous-ensemble de E .
 Soit B un sous-ensemble de F .
 Soit $f(A)$ l'ensemble des images des éléments de A par f .
 Soit $f^{-1}(B)$ l'ensemble des éléments de E dont l'image par f appartient à B .


Soit f une fonction définie sur un ensemble E à valeurs dans F .
 Soit A un sous-ensemble de E .
 Soit B un sous-ensemble de F .

	$f(A)$	$f^{-1}(B)$
$f(f^{-1}(B)) \subseteq B$	X	X
$f^{-1}(f(A)) \supseteq A$	X	X
$f(f^{-1}(f(A))) \subseteq f(A)$	X	X
$f^{-1}(f^{-1}(f(B))) \supseteq f^{-1}(B)$	X	X

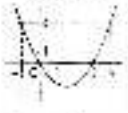
Annexe C

Premiers travaux réalisés en France avec les enseignants

On considère un cylindre de hauteur \$h\$ et de rayon \$r\$. On se propose de trouver la surface latérale \$S\$ en fonction de \$r\$ et \$h\$.
 On a : \$S = 2\pi r h\$
 On veut exprimer \$S\$ en fonction de \$r\$ et \$h\$.
 On a : \$S = 2\pi r h\$
 On veut exprimer \$S\$ en fonction de \$r\$ et \$h\$.


<p>Quelle est l'aire latérale d'un cylindre de hauteur \$h\$ et de rayon \$r\$?</p> 	<p>Objectifs de la séance Comprendre la relation entre l'aire latérale d'un cylindre et son rayon et sa hauteur. Trouver l'aire latérale d'un cylindre. Trouver l'aire latérale d'un cylindre.</p>
--	--


On se propose de trouver la surface latérale \$S\$ en fonction de \$r\$ et \$h\$.

<p>Appréhension a) Quelle est l'aire latérale d'un cylindre de hauteur \$h\$ et de rayon \$r\$? b) Trouver l'aire latérale d'un cylindre de hauteur \$h\$ et de rayon \$r\$.</p>	<p>Traitements de la séance 1. \$S = 2\pi r h\$ 2. \$S = 2\pi r h\$ 3. \$S = 2\pi r h\$</p>	<p>Graphique </p>	<p>Objectifs de la séance Comprendre la relation entre l'aire latérale d'un cylindre et son rayon et sa hauteur. Trouver l'aire latérale d'un cylindre. Trouver l'aire latérale d'un cylindre.</p>
--	---	--	--


On se propose de trouver la surface latérale \$S\$ en fonction de \$r\$ et \$h\$.
 On a : \$S = 2\pi r h\$
 On veut exprimer \$S\$ en fonction de \$r\$ et \$h\$.
 On a : \$S = 2\pi r h\$
 On veut exprimer \$S\$ en fonction de \$r\$ et \$h\$.

Exercice
 On se propose de trouver la surface latérale \$S\$ en fonction de \$r\$ et \$h\$.
 On a : \$S = 2\pi r h\$
 On veut exprimer \$S\$ en fonction de \$r\$ et \$h\$.



<p>Quelle est l'aire latérale d'un cylindre de hauteur \$h\$ et de rayon \$r\$?</p> 	<p>Objectifs de la séance Comprendre la relation entre l'aire latérale d'un cylindre et son rayon et sa hauteur. Trouver l'aire latérale d'un cylindre. Trouver l'aire latérale d'un cylindre.</p>
---	--

On se propose de trouver la surface latérale \$S\$ en fonction de \$r\$ et \$h\$.

<p>Appréhension a) Quelle est l'aire latérale d'un cylindre de hauteur \$h\$ et de rayon \$r\$? b) Trouver l'aire latérale d'un cylindre de hauteur \$h\$ et de rayon \$r\$.</p>	<p>Traitements de la séance 1. \$S = 2\pi r h\$ 2. \$S = 2\pi r h\$ 3. \$S = 2\pi r h\$</p>	<p>Graphique </p>	<p>Objectifs de la séance Comprendre la relation entre l'aire latérale d'un cylindre et son rayon et sa hauteur. Trouver l'aire latérale d'un cylindre. Trouver l'aire latérale d'un cylindre.</p>
--	---	--	--

On se propose de trouver la surface latérale \$S\$ en fonction de \$r\$ et \$h\$.
 On a : \$S = 2\pi r h\$
 On veut exprimer \$S\$ en fonction de \$r\$ et \$h\$.
 On a : \$S = 2\pi r h\$
 On veut exprimer \$S\$ en fonction de \$r\$ et \$h\$.

Equation	Forme	Interprétation
\$y = 2x + 3\$	\$y = ax + b\$	Représentation de la droite dans un repère.
\$y = x^2 + 2x + 1\$	\$y = ax^2 + bx + c\$	Représentation d'une parabole dans un repère.
\$y = \frac{1}{x}\$	\$y = \frac{a}{x}\$	Représentation d'une hyperbole dans un repère.

Annexe D

Les fonctions en seconde dans le Bulletin officiel de France BO

Programme de mathématiques de seconde générale et technologique

Sommaire

Préambule

Intentions majeures

Quelques lignes directrices pour l'enseignement

Organisation du programme

Programme

Nombres et calculs

Géométrie

Fonctions

Statistiques et probabilités

Algorithmique et programmation

Vocabulaire ensembliste et logique

- exploiter divers registres, notamment le registre algébrique et le registre graphique ;
- étendre la panoplie des fonctions de référence ;
- étudier les notions liées aux variations et aux extremums des fonctions.

Les fonctions définies sur un intervalle de \mathbb{R} permettent de modéliser des phénomènes continus. On peut confronter les élèves à des exemples de fonctions définies sur \mathbb{N} pour modéliser des phénomènes discrets. La notation $u(n)$ est alors utilisée.

La modélisation d'une dépendance par une fonction apparaît dans des domaines très variés : géométrie dans le plan ou dans l'espace, biologie, économie, physique, sciences sociales. La modélisation de phénomènes dépendant du temps, la variable étant alors notée t est mise en évidence

Les outils numériques sont mis à profit :

- un logiciel de géométrie dynamique, pour la représentation graphique et l'utilisation de curseurs ;
- Python, le tableur ou la calculatrice, pour mettre en évidence l'aspect de programme de calcul.

Dans un premier temps, les élèves découvrent, manipulent et verbalisent certaines propriétés (parité, monotonie sur un intervalle...) sur les fonctions de référence. Ces propriétés se généralisent peu à peu aux fonctions quelconques. Leur maîtrise est un objectif de fin d'année. Leur formalisation est l'occasion d'un travail sur les quantificateurs.

• Histoire des mathématiques

On peut évoquer la très lente élaboration de la notion de fonction, depuis l'Antiquité jusqu'à la codification actuelle par Dirichlet, en mettant en évidence quelques étapes importantes : Newton, Leibniz, Euler. On souligne alors l'importance de la notation algébrique.

• Se constituer un répertoire de fonctions de référence

Les élèves doivent se constituer un répertoire d'images mentales des courbes représentatives des fonctions de référence, sur lesquelles s'appuyer lors de l'étude des propriétés des fonctions.

Contenus

- Fonctions carré, inverse, racine carrée, cube : définitions et courbes représentatives.

Capacités attendues

- Pour deux nombres a et b donnés et une fonction de référence f , comparer $f(a)$ et $f(b)$ numériquement ou graphiquement.
- Pour les fonctions affines, carré, inverse, racine carrée et cube, résoudre graphiquement ou algébriquement une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) < k$.

Démonstration

- Étudier la position relative des courbes d'équation $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, pour $x \geq 0$.

• Représenter algébriquement et graphiquement les fonctions

Contenus

- Fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle ou une réunion finie d'intervalles de \mathbb{R} .
- Courbe représentative : la courbe d'équation $y = f(x)$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient $y = f(x)$.
- Fonction paire, impaire. Traduction géométrique.

Approfondissements possibles

- Démontrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.
- Expression de l'aire d'un triangle : $\frac{1}{2} ab \sin C$.
- Formule d'Al-Kashi.
- Le point de concours des médiatrices est le centre du cercle circonscrit.

• Représenter et caractériser les droites du plan

Au cycle 4, les élèves ont rencontré les équations de droite pour représenter les fonctions affines. En seconde, ils étendent l'étude à la forme générale des équations de droite.

Dans cette section, le plan est muni d'un repère orthonormé.

Contenus

- Vecteur directeur d'une droite.
- Équation de droite : équation cartésienne, équation réduite.
- Pente (ou coefficient directeur) d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Capacités attendues

- Déterminer une équation de droite à partir de deux points, un point et un vecteur directeur ou un point et la pente.
- Déterminer la pente ou un vecteur directeur d'une droite donnée par une équation ou une représentation graphique.
- Tracer une droite connaissant son équation cartésienne ou réduite.
- Établir que trois points sont alignés ou non.
- Déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes.
- Résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues, déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes.

Démonstration

- En utilisant le déterminant, établir la forme générale d'une équation de droite.

Exemples d'algorithme

- Étudier l'alignement de trois points dans le plan.
- Déterminer une équation de droite passant par deux points donnés.

Approfondissements possibles

- Ensemble des points équidistants d'un point et de l'axe des abscisses.
- Représentation, sur des exemples, de parties du plan décrites par des inégalités sur les coordonnées.

Fonctions

• Objectifs

Au cycle 4, les élèves ont découvert progressivement la notion de fonction, manipulé différents modes de représentation : expression algébrique, tableau de valeurs, représentation graphique, programmes de calcul. Ils connaissent le vocabulaire de base : variable, fonction, antécédent, image et la notation $f(x)$. Selon le mode de représentation choisi, ils déterminent une image ou des antécédents d'un nombre par une fonction. Ils ont étudié les fonctions linéaires, les fonctions affines et leur représentation graphique.

En seconde, les objectifs sont les suivants :

- consolider la notion de fonction, comme exprimant la dépendance d'une variable par rapport à une autre ;

Capacités attendues

- Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe : appartenance, calcul de coordonnées.
- Modéliser par des fonctions des situations issues des mathématiques, des autres disciplines.
- Résoudre une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) < k$, en choisissant une méthode adaptée : graphique, algébrique, logicielle.
- Résoudre une équation, une inéquation produit ou quotient, à l'aide d'un tableau de signes.
- Résoudre, graphiquement ou à l'aide d'un outil numérique, une équation ou inéquation du type $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$.

Approfondissement possible

- Étudier la parité d'une fonction dans des cas simples.

• Étudier les variations et les extremums d'une fonction

Contenus

- Croissance, décroissance, monotonie d'une fonction définie sur un intervalle. Tableau de variations.
- Maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.
- Pour une fonction affine, interprétation du coefficient directeur comme taux d'accroissement, variations selon son signe.
- Variations des fonctions carré, inverse, racine carrée, cube.

Capacités attendues

- Relier représentation graphique et tableau de variations.
- Déterminer graphiquement les extremums d'une fonction sur un intervalle.
- Exploiter un logiciel de géométrie dynamique ou de calcul formel, la calculatrice ou Python pour décrire les variations d'une fonction donnée par une formule.
- Relier sens de variation, signe et droite représentative d'une fonction affine.

Démonstration

- Variations des fonctions carré, inverse, racine carrée.

Exemples d'algorithme

- Pour une fonction dont le tableau de variations est donné, algorithmes d'approximation numérique d'un extremum (balayage, dichotomie).
- Algorithme de calcul approché de longueur d'une portion de courbe représentative de fonction.

Approfondissement possible

- Relier les courbes représentatives de la fonction racine carrée et de la fonction carré sur \mathbb{R}^+ .

Statistiques et probabilités

• Objectifs

En matière d'information chiffrée, les élèves ont travaillé au cycle 4 effectifs, fréquences, proportions, pourcentages, coefficient de proportionnalité, taux d'évolution, coefficient multiplicateur. L'objectif est de consolider et de prolonger ce travail par l'étude de situations multiplicatives : proportion de proportion, évolutions successives ou réciproques. Les élèves doivent distinguer si un pourcentage exprime une proportion ou une évolution.

Annexe E

Les fonctions en seconde dans le
programme officiel d'Afrique
francophone HPM

Organisation du programme

Le programme est divisé en trois parties :

- fonctions ;
- géométrie ;
- statistiques et probabilités.

Les capacités attendues dans le domaine de l'algorithmique d'une part et du raisonnement d'autre part, sont transversales et doivent être développées à l'intérieur de chacune des trois parties.

Le programme n'est pas un plan de cours et ne contient pas de préconisations pédagogiques. Il fixe les objectifs à atteindre en termes de capacités et pour cela indique les types de problèmes que les élèves doivent savoir résoudre.

Évaluation des élèves

Les élèves sont évalués en fonction des capacités attendues et selon des modes variés : travaux écrits, rédaction de travaux de recherche, compte-rendus de travaux pratiques. L'évaluation doit être en phase avec les objectifs de formation rappelés au début de cette introduction.

1. Fonctions

L'objectif est de rendre les élèves capables d'étudier :

- un problème se ramenant à une équation du type $f(x) = k$ et de le résoudre dans le cas où la fonction est donnée (définie par une courbe, un tableau de données, une formule) et aussi lorsque toute autonomie est laissée pour associer au problème divers aspects d'une fonction ;
- un problème d'optimisation ou un problème du type $f(x) > k$ et de le résoudre, selon les cas, en exploitant les potentialités de logiciels, graphiquement ou algébriquement, toute autonomie pouvant être laissée pour associer au problème une fonction.

Les situations proposées dans ce cadre sont issues de domaines très variés : géométrie plane ou dans l'espace, biologie, économie, physique, actualité etc. Les logiciels mis à la disposition des élèves (tableur, traceur de courbes, logiciels de géométrie dynamique, de calcul numérique, de calcul formel, etc.) peuvent être utilement exploités.

Par ailleurs, la résolution de problèmes vise aussi à progresser dans la maîtrise du calcul algébrique et à approfondir la connaissance des différents types de nombres, en particulier pour la distinction d'un nombre de ses valeurs approchées.

Il s'agit également d'apprendre aux élèves à distinguer la courbe représentative d'une fonction des dessins obtenus avec un traceur de courbe ou comme représentation de quelques données. Autrement dit, il s'agit de faire comprendre que des dessins peuvent suffire pour répondre de façon satisfaisante à un problème concret mais qu'ils ne suffisent pas à démontrer des propriétés de la fonction.

1.1 Ensemble des nombres réels

Ce chapitre vise à :

- Maîtriser les calculs dans \mathbb{R}
- Définir la notion de valeur absolue en la reliant à celle de la distance
- Initier au raisonnement par l'absurde
- Développer l'usage de la calculatrice scientifique.

Contenu	Capacités exigibles	Commentaires
1-Les nombres réels • Nombres rationnels • La suite des sous ensembles $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ • Exemples de raisonnement par l'absurde 2-Opérations dans \mathbb{R} Inverse, quotient, puissance, racine carrée. 3-Valeur absolue Définition, propriétés, distance de deux réels Inégalité triangulaire Equations de types $ x - a = r$ Inéquations de types $ x - a \leq r$ Calculs approchés. Approximation décimale d'ordre n d'un réel Arrondi d'ordre n d'un nombre réel Encadrement d'un réel	L'élève doit être capable de : • Utiliser les propriétés pour calculer, comparer, encadrer des quotients, des puissances, des racines carrées • Ranger des réels dans l'ordre croissant ou décroissant • Utiliser les propriétés des valeurs absolues pour effectuer des calculs, résoudre algébriquement ou graphiquement les équations et inéquations des types $ x - a = r$, $ x - a \leq r$. • Interpréter les équations ou inéquations précédentes en termes de distance. • Donner un ordre de grandeur, la notation scientifique d'un réel et une valeur approchée connaissant un encadrement • Caractériser des intervalles de \mathbb{R} par des inégalités du type $ x - a \leq r$	La construction d'un segment de longueur $\frac{a}{b}$ ou \sqrt{a} ($a, b \in \mathbb{N}^*$) se fera en travaux pratiques. C'est l'occasion de revenir sur les théorèmes de THALES et PYTHAGORE. Aucune compétence n'est exigible sur le raisonnement par l'absurde. Toute activité utilisant cette technique devra être guidée et ne fera l'objet d'aucune évaluation. On habituera l'élève à passer de l'écriture $x \in [a; b]$ à $ x - a \leq r$ et vice-versa. Le professeur insistera pour que les élèves s'habituent à l'usage de la calculatrice scientifique L'utilisation de la valeur approchée d'un nombre réel est l'occasion de faire le lien avec la valeur absolue (a est une valeur approchée de α à 10^{-2} près si $ \alpha - a \leq 10^{-2}$) Les inéquations du type $ x - a \geq r$ ne doivent pas faire l'objet d'une évaluation.

1. 2. Fonctions

OBJECTIF : Ce chapitre vise à :

- Faire découvrir la notion de fonction
- Mettre en place le vocabulaire relatif aux fonctions numériques.
- Utiliser les représentations graphiques pour résoudre certains problèmes
- Dresser des tableaux de variations, caractériser des points remarquables.

Contenu	Capacités exigibles	Commentaires
1-Généralités sur les fonctions - Définition - Détermination à l'aide de tables, de formules, calculatrice. - Ensemble de définition, image et antécédent d'un réel. - Image directe, image réciproque d'un intervalle. - Représentation graphique. 2-Etude graphique - Image et antécédent d'un nombre réel. - Image directe et image réciproque d'un intervalle. - Résolution graphique des équations $f(x) = g(x)$ (respectivement des inéquations $f(x) \leq g(x)$).	L'élève doit être capable de : • Reconnaître qu'une courbe donnée est ou non la représentation graphique d'une fonction. • Déterminer un ensemble de définition, l'image d'un réel, les antécédents d'un réel. • Lire graphiquement l'image d'un nombre réel, les antécédents d'un réel. • Déterminer graphiquement l'image directe d'un intervalle, l'image réciproque d'un intervalle par une fonction.	Les fonctions abordées sont généralement des fonctions numériques d'une variable réelle pour lesquelles l'ensemble de définition est donné. Quelques exemples de fonctions définies sur un ensemble fini ou sur \mathbb{R} sont à donner. On insistera sur le maniement de la calculatrice. L'objectif de ce chapitre n'est pas de représenter graphiquement les fonctions. Le professeur fournira les représentations que les élèves auront à exploiter. On doit habituer les élèves à lire les représentations graphiques et à donner les variations de la fonction représentée.

Contenu	Capacités exigibles	Commentaires
3-Variations d'une fonction - Maximum, minimum d'une fonction. - Sens de variation d'une fonction. - Exemples d'étude du sens de variations. - Utilisation des tableaux de variations	• Reconnaître graphiquement un maximum, un minimum d'une fonction. • Démontrer qu'un nombre donné est un maximum ou un minimum d'une fonction. • Trouver les intervalles de monotonie d'une fonction	Une courbe étant donnée, les élèves devront savoir reconnaître si elle est la représentation graphique d'une fonction et, dans l'affirmative, lire l'ensemble de définition de cette fonction. Pour les variations des fonctions, on évitera les fonctions dont l'expression est trop complexe. On ne demandera pas aux élèves de rechercher algébriquement un extremum, mais on leur demandera de démontrer qu'un réel donné est un extremum de la fonction. Il est conseillé, lors des séances d'exercices, d'en varier le type (calculatoire, géométrique, graphique,...) et de choisir des exercices d'apprentissage accessibles aux élèves. On accordera la priorité aux exercices graphiques à exploiter à livre ouvert, ou alors fournir les représentations que les élèves collent directement dans leur cahier.

1. 3. Polynômes et fractions rationnelle

Objectifs : Ce chapitre vise à :

- Maîtriser le calcul littéral, factoriser les polynômes
- Résoudre des équations et inéquations
- Etudier le signe des polynômes.

Contenu	Capacités exigibles	Commentaires
1. Généralités sur les polynômes Exemples de polynômes Degré, coefficient d'un polynôme Zéro ou racine d'un polynôme Somme et produit de deux polynômes Factorisation d'un polynôme 2. Polynômes du second degré Forme canonique Factorisation Etude de signe 3. Factorisation par $x - a$ Factorisation par coefficients indéterminés Factorisation par division euclidienne	L'élève doit être capable de : • Vérifier qu'un réel donné est zéro d'un polynôme • Trouver une racine « évidente » • Effectuer la somme, le produit de deux polynômes • Utiliser les égalités remarquables pour factoriser • Ecrire la forme canonique d'un polynôme du second degré • Utiliser la forme canonique pour factoriser • Etudier le signe d'un polynôme du second degré • Si a est un zéro d'un polynôme, utiliser la méthode des coefficients indéterminés ou la division euclidienne	On ne distinguera pas, polynôme, fonction polynôme et expression algébrique du polynôme. Il en sera de même pour fonction rationnelle et fraction rationnelle. On évitera de multiplier les exemples posés à priori et on se gardera de tout excès de technicité. On se limitera à la forme canonique du type $(x + \alpha)^2 + \beta$ pour les évaluations On choisira des situations issues de la géométrie, de la physique ou de la vie économique et sociale. Tout exercice faisant référence à un paramètre ne doit pas faire l'objet d'une évaluation. Ce chapitre est lié à celui sur les équations et inéquations dans \mathbb{R}

1.6 Fonctions de référence

Objectifs : Ce chapitre vise à :

- Initier l'élève à la démarche d'une étude de fonctions

Contenu	Capacités exigibles	Commentaires
1-Etude de quelques exemples • Fonctions linéaires et fonctions affines • Fonction affines par intervalles • Fonction valeur absolue 2-Fonctions élémentaires • Les fonctions puissances 2 et 3 • La fonction racine carrée • La fonction inverse 3-Utilisation des fonctions élémentaires • Fonction homographique	L'élève doit être capable de : • Donner le sens de variation d'une fonction affine. • Donner le tableau de signes de $ax + b$ pour des valeurs numériques données de a et b . • Représenter graphiquement la fonction : $x \mapsto ax + b $ • Connaître les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes. • Connaître les variations des fonctions, cube, racine carrée et inverse. • Représenter graphiquement les fonctions carré, cube, racine carrée et inverse. • Etudier le sens de variations des fonctions élémentaires et dresser leur tableau de variations • Utiliser les fonctions élémentaires pour étudier les fonctions du type : $x \mapsto ax^2$ et $x \mapsto \frac{a}{x}$ où $a \in \mathbb{R}^*$ • Identifier l'ensemble de définition d'une fonction homographique.	Cette partie se fera en travaux dirigés En seconde, pour l'étude des variations d'une fonction, deux cas se présentent - Une représentation graphique est donnée, les élèves liront le sens de variation qu'ils transcriront dans un tableau de variations. - Une formule explicite d'une fonction affine par intervalles ou d'une fonction élémentaire étant donnée, les élèves utiliseront les résultats du cours pour faire le tableau de variations. Les élèves doivent être capable de mettre en évidence les différentes étapes d'une étude de fonction, à savoir : ensemble de définition, sens de variation et tableau de variation. On fait le lien entre le signe de $ax + b$, le sens de variation de la fonction et sa courbe représentative. Savoir mettre sous forme canonique un polynôme de degré 2 n'est pas attendu du programme. Exemples de non-linéarité. En particulier, faire remarquer que les fonctions carré et inverse ne sont pas linéaires. Hormis le cas de la fonction inverse, la connaissance générale des variations d'une fonction homographique et sa mise sous forme réduite ne sont pas attendus du programme.

Annexe F

La progression spiralée au Gabon

Semaine	Contenus	Observations
1	Séquence 0 : Raisonnement logique ▪ Quantificateurs ▪ Types de raisonnement ▪ Contre-exemple ; implication ; équivalence ; contraposée ; absurde	Exemples concrets Exercices.
2	Séquence 1 : Ensemble de nombres réels (Partie A) - Nombres rationnels - Ensembles $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ Séquence 2 : Angles inscrits (Partie A) - Relation entre angle inscrit et angle au centre associé - Angles inscrits interceptant le même arc ou deux arcs de même longueur. - Angle inscrit et bissectrice.	TP : Exemples de raisonnement par l'absurde (irrationalité de $\sqrt{2}$) TP : Exemples de construction de \sqrt{n} , $n \in \mathbb{N}$ Exercices
3	Séquence 3 : Généralités sur les fonctions (Partie A) - Définition. - Détermination à l'aide de tables, de formules, calculatrice. - Ensemble de définition, image et antécédents d'un réel. Séquence 4 : Vecteurs et points du plan Notations ; Calcul vectoriel ; Norme ; vecteur unitaire ; Combinaison linéaire de deux vecteurs ; Vecteurs colinéaires ; Décomposition d'un vecteur	Exercices. Interrogation (30 min). DM1.
4	Séquence 5 : Généralités sur les Polynômes - Exemples de polynômes. - Degré, coefficients d'un polynôme. - Racine ou zéro d'un polynôme. - Somme et produit de deux polynômes. - Factorisation d'un polynôme Séquence 6 : Angles orientés (Partie A) - Radian- Cercle trigonométrique - Définition de l'angle orienté de 2 vecteurs.	Exercices. DS1 (2h)
5	Séquence 7 : Opérations dans \mathbb{R}. Inverse, quotient, puissance, racine carrée Séquence 8 : Homothétie (partie A) - Définition. - Propriétés : alignement d'un point, de son image et du centre de l'homothétie. - Point invariant. - Propriété fondamentale. - Image de droite, segment, demi-droite, cercle.	Exercices. Interrogation (30 min).
6	Séquence 9 : Statistiques (Partie A) - L'étendue, quartiles, l'écart interquartiles ; - Médiane, le mode, la moyenne, Séquence 10 : Bases et repères - Bases du plan vectoriel. - Coordonnées dans une base. - Déterminant de deux vecteurs. - Condition de colinéarité de deux vecteurs. - Distance de deux points du plan, milieu d'un segment	Exercices. Interrogation (30 min). DM2.

Semaine	Contenus	Observations
7	Séquence 11 : Arithmétique (partie A) - Division euclidienne dans \mathbb{Z} - Multiples et diviseurs d'un entier naturel, d'un entier relatif - Nombres premiers - PGCD de deux nombres entiers - Algorithme d'Euclide Séquence 12 : Généralités sur les fonctions (Partie B) - Image directe, image réciproque d'un intervalle. - Représentation graphique.	Exercices. DS2 (2h)
8	Séquence 13 : Polynômes du second degré - Forme canonique, Factorisation, Etude de signe Séquence 14 : Angles orientés (Partie B) - Effet des transformations usuelles sur les angles orientés. - La mesure principale d'un angle orienté. - Exemple de constructions d'angles orientés de mesure donnée.	Exercices. Interrogation (30 min).
9	Séquence 15 : Etude graphique (Partie C) - Image et antécédents d'un réel. - Image directe, image réciproque d'un intervalle. - Résolution graphique des équations $f(x) = g(x)$ (respectivement des inéquations $f(x) \leq g(x)$). Séquence 16 : Produit scalaire (Partie A) - Définition, Propriétés - Interprétation géométrique	Exercices. Interrogation (30 min). DM3
10	Séquence 17 : Statistiques (Partie B) - Echantillonnage, - Intervalle de fluctuation ; Séquence 18 : Angles inscrits (Partie B) - Angle inscrit défini par une corde et une demi-tangente - Angles inscrits interceptant deux arcs de mêmes extrémités. - Mesure d'un angle en radian	Exercices. DS3 (2h)
11	Séquence 19 : Equations et inéquations dans \mathbb{R} - Généralités - Vocabulaire (Notions d'équations, inéquations, solution d'une équation, variable) - Signe de $x - a$ - Raisonnement par équivalences ou par implications directes Séquence 20 : Rotations (Partie A) - Définition ; Propriétés ; Points invariants - Propriété fondamentale ; - Image d'une droite, d'un segment, d'une demi-droite, d'un cercle.	Exercices. Interrogation (30 min).
12	Séquence 21 : Exemples de résolution d'équations - Exemples de résolution d'équations du second degré - Exemples de résolution d'équations se ramenant au 1 ^{er} ou 2 nd degré Séquence 22 : Géométrie dans l'espace (partie A) - Description et représentation de l'espace physique - Positions relatives : Droite et plan ; de deux plans. Séquence 23 : Trigonométrie (Partie A) - Utilisation du cercle trigonométrique. - Lignes trigonométriques (Sinus, cosinus, tangente d'un angle orienté).	Exercices. Interrogation (30 min). DM4

Semaine	Contenus	Observations
13	Séquence 24 : Polynômes factorisation - Factorisation par $x - a$ - Factorisation par coefficients indéterminés - Factorisation par division euclidienne Séquence 25 : Exemples de résolution d'inéquations - Exemples de résolution d'inéquations du second degré - Exemples de résolution d'inéquations se ramenant au 1 ^{er} ou 2 nd degré	Exercices. DS4 (2h)
14	Séquence 26 : Valeur absolue - Définition, propriétés, distance de deux réels. - Inégalité triangulaire. - Equations de types $ x - a = r$. - Inéquations de types $ x - a \leq r$ Séquence 27 : Arithmétique (Partie B) - Ecriture des entiers naturels en base 2 et 8 - PGCD et PPCM de deux nombres entiers - Algorithme d'Euclide	Exercices. Interrogation (30 min).
15	Séquence 28 : Variations d'une fonction - Maximum, minimum d'une fonction. - Sens de variation d'une fonction. - Exemples d'étude du sens de variations, - Utilisation des tableaux de variations Séquence 29 : Produit scalaire (Partie B) - Différentes expressions du produit scalaire.	Exercices. Interrogation (30 min). DM5
16	Séquence 30 : Fractions rationnelles Définition ; Simplification ; Signe ; Différentes écritures Séquence 31 : Homothétie (partie B) - Conservation de l'alignement, de l'orthogonalité, du milieu et des angles orientés. - Multiplication des longueurs et des aires. - Caractérisation d'une homothétie	Exercices. DS5 (2h)
17	Séquence 32 : Produit scalaire (Partie C) - Produit scalaire et orthogonalité - Caractérisation d'un cercle de diamètre donné à l'aide du produit scalaire - Théorème des sinus - Théorème de la médiane.	Exercices. Interrogation (30 min).
18	Séquence 33 : Droites - Equations cartésiennes - Représentations paramétriques Séquence 34 : Ensemble de nombres réels (Partie B) - Calculs approchés - Approximation décimale d'ordre n d'un réel - Arrondi d'ordre n d'un nombre réel - Encadrement d'un réel	Exercices. Interrogation (30 min). DM6
19	Séquence 35 : Etude de fonctions (Partie A) - Fonction linéaire et fonction affines - Etude de quelques exemples Séquence 36 : Dénombrement - Les outils de dénombrement (comptage, tableau, diagramme et arbre) - Calcul du cardinal d'un ensemble fini - Produit cartésien de deux ensembles finis	Exercices. DS6 (2h)

Semaine	Contenus	Observations
20	Séquence 37 : Rotations (Partie B) - Conservation de l'alignement de points, du parallélisme, de l'orthogonalité, du milieu d'un segment, des angles orientés, des distances et des aires. Séquence 38 : Etude de fonctions (Partie B) - Fonction affines par intervalles - Fonction valeur absolue	Exercices. Interrogation (30 min).
21	Séquence 39 : Probabilité - Calcul de probabilité $p(\bar{A})$; $p(A \cup B)$; $p(A \cap B)$; - calcul de probabilité dans les situations d'équiprobabilité. Séquence 40 : Initiation à l'algorithmique - Calcul sur les nombres entiers Introduction élémentaire (affectation, calcul, entrée, sortie)	Exercices. Interrogation (30 min). DM7
22	Séquence 41 : Trigonométrie (partie B). - Relation fondamentale $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ - Angles remarquables ($0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}$) - Angles associés ($x, -x$; $+x$; $-x$; $-x$; $\frac{\pi}{2} - x$; $\frac{\pi}{2} + x$).	Exercices. DS7 (2h)
23	Séquence 42 : Fonctions élémentaires - $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^3$ - $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto \frac{1}{x}$ Séquence 43: Projection - Définition et programme de construction ; - Vocabulaire et propriété	Exercices. Interrogation (30 min).
24	Séquence 44 : Géométrie dans l'espace (partie B) - Sections planes - Parallélisme	Exercices. Interrogation (30 min). DM8
25	Séquence 45 : fonction homographique - Identifier l'ensemble de définition d'une fonction homographique	Exercices. DS8 (2h)
26	Séquence 46 : Equations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ - Généralités et résolutions (graphique et algébrique) - Déterminant.	Exercices. Interrogation (30 min).
27	Séquence 47 : Cercle. - Equation cartésienne d'un cercle	Exercices. Interrogation (30 min). DM9
28	Séquence 48: Inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ - Généralités et résolutions. - Déterminant. - Critère d'existence et d'unicité.	Exercices. DS9 (2h)

Annexe G

(Margolinas, 2012, p. 8) distingue
connaissance et savoir

Par ailleurs le scénario de formation est fondé sur les travaux de (Chappet-Pariès & Robert, s. d.), un cadre d'analyse adapté (Abboud-Blanchard & Emprin, 2009) et l'idée de réflexivité (Schon, 1983).

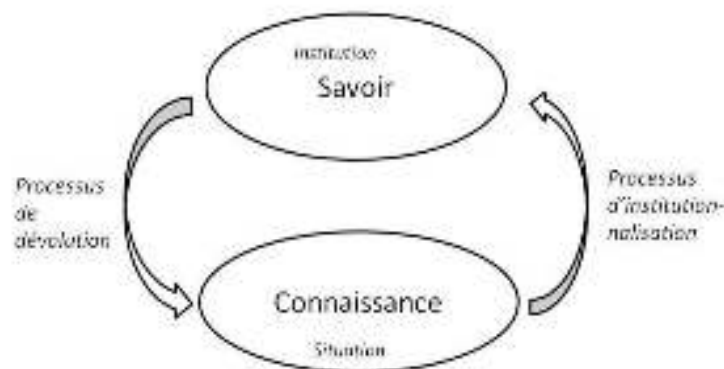
Des « savoirs de formation »

Nous faisons volontairement le choix de ne pas nous placer dans la cadre des « jeux sérieux » car il est fortement associé à un système de récompense (Sanchez, Ney, & Labat, 2011) et à l'idée de scénario gagnant qui va à l'encontre de notre idée de formation réflexive. Néanmoins, les choix faits dans le simulateur sont révélateurs de « savoirs de formation ».

(Margolinas, 2012, p. 8) distingue connaissance et savoir :

« Une connaissance est ce qui réalise l'équilibre entre le sujet et le milieu, ce que le sujet met en jeu quand il investit une situation. Il s'agit d'un concept très large, qui inclut à la fois des connaissances du corps, des connaissances dans l'action, des connaissances de l'interaction, des connaissances mémorisées, etc.

Un savoir est d'une autre nature, il s'agit d'une construction sociale et culturelle, qui vit dans une institution (Douglas, 2004) et qui est par nature un texte (ce qui ne veut pas dire qu'il soit toujours matériellement écrit). Le savoir est dépersonnalisé, décontextualisé, de temporalisé. Il est formulé, formalisé, validé et mémorisé. Il peut être linéarisé, ce qui correspond à sa nature textuelle.



Ce que l'on peut retenir schématiquement de ces distinctions, c'est déjà que la connaissance vit dans une situation, alors que le savoir vit dans une institution. Pour définir une connaissance donnée, il faut donc décrire les situations fondamentales de cette connaissance (Brousseau, 1986 ; Legrand, 1996 ; Bessot, 2011). Pour définir un savoir particulier, il faut dire quelle est l'institution qui produit et légitime ce savoir, ce qui conduit parfois à considérer plusieurs institutions et leurs éventuels conflits. »

Lorsque l'utilisateur travaille sur le simulateur, les interactions programmées l'incitent à modifier ses choix. En ce sens, le système d'interactions permet à l'utilisateur de construire des connaissances.

Identification de savoirs de formation

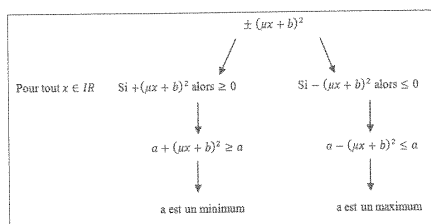
Le scénario programmé comporte une phase construction qui débouche sur une phase de conjecture. Pour que cette dernière puisse avoir lieu dans de bonnes conditions, la seule condition

Annexe H

(Exemple de mobilisation d'une
connaissance communautaire

$$f(x) = a \pm (\mu x + b)^2 \quad (E1)$$

Pour ce faire, le choix effectué est le suivant : élaborer des conjectures sur l'extremum en interprétant une représentation graphique → donner l'expression algébrique de la fonction, calculer les images de certaines valeurs de x dont l'extremum (calcul numérique) → mettre en œuvre une démarche de calcul algébrique pour identifier l'extremum (pour démontrer la conjecture, encadré 3). La présentation de l'exercice permet un travail individuel de l'élève sans besoin d'accompagnement.



Encadré 3. - Démarche algébrique pour démontrer la conjecture dans digiTex

En revanche, la ressource, telle qu'elle est présentée, ne favorise pas une activité mathématique autonome des élèves dans le sens qu'on ne sollicite pas leur aptitude à réaliser des choix (Robert et Robinet 1996) :

- le choix du domaine pour la résolution du problème : les moments d'utilisation des domaines graphiques et algébriques sont prédéterminés ;
- le choix d'une stratégie pertinente de résolution : les concepteurs fixent *a priori* la nature de l'interaction entre algébrique et graphique. La démonstration est donnée, l'élève n'a qu'à renseigner des valeurs numériques.

La ressource « Extremum et démonstration » est un produit résultant : de la mobilisation de la connaissance communautaire, du fait que l'algèbre est plutôt présentée comme outil pour résoudre l'exercice ; des exigences techniques de Kidimath (qui déterminent la présentation des ressources) ; des recommandations du nouveau programme.

Dans la conception de cette ressource, Anaïs a joué le rôle de relectrice. Elle a proposé des modifications qui portaient plus

particulièrement sur le langage et la formulation mathématiques de certaines idées :

Rémi : Que pensez-vous de cette formulation pour les 3 premières questions ? On pourrait ajouter 'En utilisant le graphique ci-contre, quelle conjecture peut-on émettre ?'

Anaïs : oui, c'est mieux de bien faire la différence entre la conjecture et la preuve.

La ressource a été mobilisée par Anaïs dans le cadre de sa documentation individuelle. Nous avons observé en avril 2011 la mise en œuvre dans sa classe d'une version adaptée de cette ressource (activité 0). La séance s'inscrit dans la quatrième partie de la progression d'Anaïs (cf. Encadré 3). Elle porte sur l'influence des paramètres a , b et μ sur la variation et les extremums de la courbe représentative des fonctions de la forme (cf. Annexe 3) :

$$f(x) = a + (\mu x + b)^2 \quad (E2)$$

Anaïs a modifié le second terme de l'expression algébrique en (E1) : au lieu de $(\mu x + b)^2$ elle a noté $\mu(x + b)^2$. Cette modification rend la concavité de la courbe représentative dépendant de la valeur du seul paramètre μ . Selon Anaïs, cette modification rend possible l'utilisation du Geogebra (activité +1). Elle a préparé une représentation graphique d'une fonction avec trois curseurs (chacun représente l'un des paramètres a , b et μ). Par manipulation directe des curseurs, les élèves interprètent les rapports entre les variations des valeurs des paramètres et les variations de la fonction. Il s'agit, en interprétant les paramètres de la fonction, de compléter un tableau de variations en fonction de la forme algébrique canonique d'une équation du second degré.

Anaïs n'est pas soumise aux mêmes contraintes techniques que celles de digiTex. Par conséquent, le choix de la stratégie de résolution du problème est laissé en partie à la charge de l'élève. Ce choix favorise l'interaction entre représentation graphique et caractéristiques de l'expression algébrique de la fonction. La formalisation du résultat est laissée à la charge de l'élève.

Dans cette ressource, Anaïs met en relation la forme de l'expression, sa représentation graphique et son tableau de variations dans le but de justifier algébriquement la valeur de l'extremum : la démarche algébrique employée pour la détermination de l'extremum est similaire à celle illustrée dans l'encadré 3. Ceci apparaît dans l'interaction d'Anaïs avec un élève (Mathieu) (activité 0), dans le cas de la fonction :

$$f(x) = 1 + (x - 3)^2 \quad (E3)$$

qui est un exemple de (E1) et (E2) avec $a = 1$, $\mu = 1$ et $b = -3$

Mathieu : Pour la valeur la plus petite ou la valeur la plus grande, il suffit d'annuler ça // le terme $(x - 3)$ de $f(x) = (x - 3)^2 + 1$ // une fois on a annulé ça, on prend celui-là // le paramètre a de la fonction qui est dans notre cas égal à 1 // Le chiffre qui a annulé ça c'est 3. Et quand on remplace le x par 3 dans la fonction, on tombe sur 1.

Anaïs : Oui, c'est l'image. [...]

Mathieu : Et puisque la fonction carré est toujours positive, donc ça donne ça... la plus petite valeur est 1.

Anaïs : Voilà, puisque en fait on a 1 plus un carré, c'est-à-dire plus quelque chose de positif donc c'est toujours forcément supérieur ou égale à 1... Bon, bien alors ?

Mathieu : Ce qui correspond à ce que je vois là // sur la représentation graphique // la parabole est toujours positive.

Anaïs : Alors là tu raisones graphiquement et avec des nombres tout simplement. Pour l'instant on fait ça oralement. Il faudra savoir l'écrire... prouver quand on a bien un minimum en l'écrivant.

Cet extrait illustre une mobilisation de la connaissance communautaire, notamment le statut d'outil des équations et inéquations. Anaïs met en évidence dans son interaction avec Mathieu, le rôle d'outil des équations dans la détermination de l'extremum.

Grâce à cette illustration de la documentation d'Anaïs tout au long de deux années scolaires, nous avons mis en évidence que les activités, en particulier de niveaux (+2) et (+1), mobilisant et produisant des ressources, sont primordiales dans le déclenchement de la dynamique d'articulations des documentations individuelle et communautaire. Le rapport entre fonctions, équations et inéquations, implicitement présent dans le programme de la classe de seconde, ouvre la possibilité à plusieurs configurations d'enseignement. La documentation communautaire a formé, pour Anaïs, une « arrière-cour » de réflexions et d'essais pour construire son enseignement. L'imbrication des activités individuelle et communautaire, ont soutenu la transposition de la connaissance communautaire dans la documentation d'Anaïs. Cette transposition n'est pas linéaire, elle suit un processus de *propagation complexe* dont une ou plusieurs ressources jouent un rôle pilote.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Notre travail se veut une contribution à l'étude didactique des collectifs d'enseignants de mathématiques. Dans cette conclusion, nous revenons à nos questions de recherche en présentant des éléments de réponses. Nous poursuivons par la discussion de nos résultats, leurs limites et domaine de validité. Nous terminons par la présentation des perspectives.

1. Les incidents documentaires révélateurs de l'impact d'une communauté

En ce qui concerne Q1 « Comment identifie-t-on, sur les plans théorique et méthodologique, l'impact de l'implication d'un enseignant dans un collectif sur ses pratiques individuelles ? », nous avons saisi les effets d'événements particuliers, que nous avons appelé *incidents documentaires* sur les documentations individuelle et communautaire, et sur leur articulation. Nous avons mis à l'épreuve un outil méthodologique particulier (le PAS). Cet outil nous a semblé crucial, en particulier pour l'analyse des incidents documentaires communautaires. La mise à l'épreuve du PAS a été motivée par un principe méthodologique : l'incitation à une réflexivité sur l'activité communautaire. Nous avons analysé le rapport entre les documentations individuelle et communautaire à travers le suivi d'une connaissance communautaire : sa construction dans digiTex, sa mobilisation dans les activités ultérieures à sa construction, et le processus de sa mobilisation dans la documentation d'Anaïs.

Lors du déroulement du projet digiTex, nous avons repéré quatre incidents documentaires communautaires. Nous avons traité, dans le présent article, l'exemple de deux incidents (l'incident A et l'incident B). Dans les deux cas étudiés, les moments d'incidents documentaires semblent constituer des moments critiques pour l'observation des documentations individuelle et communautaire. Les analyses révèlent que ces incidents documentaires rendent observables de nouveaux aspects du système de ressources et de nouveaux aspects d'activités, étroitement liés à la nature de l'incident. L'incident A a généré des activités de niveau (+2) et a incité à une modulation du système de ressources communautaires en fonction des progressions des membres et des manuels existants. L'incident B a généré des activités de niveau (+1) et a incité à un accroissement du système de ressources communautaires et à des

Annexe I

(Entrée dans la pensée fonctionnelle

III. L'entrée dans la pensée fonctionnelle au lycée

Lorsque les élèves sont confrontés pour la première fois au concept de fonction, en fin de troisième, puis en seconde, ils doivent arriver à lui donner un statut d'objet mathématique et entrer dans une pensée fonctionnelle où il sera outil de modélisation. Tout ceci ne va pas de soi, car accéder à la maîtrise du concept nécessite notamment l'utilisation et la coordination des différents registres de représentation dans lesquels il s'exprime, le dépassement de conceptions purement procédurales, la reconnaissance de l'intérêt de la modélisation fonctionnelle par rapport aux approches numériques et algébriques développées jusqu'alors et enfin la capacité d'évoluer dans différents environnements : le chemin à parcourir sera long et semé d'embûches...

Nous présenterons dans cette partie, de façon synthétique, différents travaux de recherche didactique qui, nous semble-t-il, aident à mieux comprendre ce que met en jeu l'entrée dans la pensée fonctionnelle au début du lycée.

III.1. Des recherches didactiques sur le concept de fonction

a) De la modélisation algébrique à la modélisation fonctionnelle

Le concept de fonction est retenu par le savoir "savant" comme correspondance arbitraire et univoque entre une variable x , élément d'un ensemble E , et une variable (dépendante) y , élément d'un ensemble F . Il perd lors de son introduction en cycle secondaire un peu de sa généralité puisque l'on considère essentiellement les fonctions numériques de la variable réelle.

Ce qui caractérise ainsi plus spécifiquement le passage à la pensée fonctionnelle pour les apprenants, par opposition aux modes de pensée arithmétique et algébrique, est l'intégration d'une variation continue de la variable (recommandée par les programmes⁵), par opposition aux phénomènes "discrets" étudiés antérieurement.

Si le mode de pensée algébrique est relié au domaine des lettres, à l'usage du calcul littéral, et se caractérise par l'établissement d'équations, d'inéquations, de formules permettant la détermination d'inconnues, le mode de pensée fonctionnel est lui essentiellement caractérisé par des variables, des lois fonctionnelles et des variations. Penser ainsi en terme de variation impliquera d'attribuer aux lettres un autre statut, d'intégrer de nouveaux registres de représentation qui puissent rendre compte de ces variations.

Entrer dans ce mode fonctionnel permettra de modéliser des situations fonctionnelles c'est à dire, en reprenant les critères retenus par D. Pihoué (Pihoué, 96), des situations présentant les caractéristiques suivantes :

- 1. l'exposé est posé dans un cadre non fonctionnel (c'est à dire qu'aucune fonction n'est donnée a priori),
- 2. une modélisation du problème conduit à l'introduction d'une fonction,
- 3. l'étude des propriétés de cette fonction permet de résoudre le problème.

⁵ Ainsi les suites, dissociées au fur et à mesure des fonctions, pour devenir un chapitre à part dans les programmes, ne représentent plus un des enjeux de l'entrée dans la pensée fonctionnelle au lycée, et sont introduites seulement en première. La notion de dépendance continue est ainsi privilégiée, laissant peut-être un peu trop dans l'ombre celle de dépendance tout court.

A la suite d'une étude portant sur divers manuels de seconde (classe où sont introduites les fonctions de façon plus générale que les cas affines et linéaires de troisième), D. Pihoué conclut que le mode de pensée fonctionnelle est le plus souvent imposé par l'énoncé et demeure lié à la résolution d'équations essentiellement algébriques pour ce qui concerne ce niveau.

Il analyse de plus les comportements d'élèves face à deux situations fonctionnelles : la première, géométrique (recherche d'une aire maximale dans une figure donnée), la seconde, d'origine non mathématique (établissement d'une jaugue pour un récipient donné). Il montre ainsi qu'en fin de seconde, le recours à un modèle fonctionnel, s'il n'est pas prescrit par l'énoncé, n'est pas naturel aux élèves, mais pointe des phases de la résolution où la transition vers un mode de pensée fonctionnelle se manifeste chez certains élèves et en analyse les caractéristiques.

En posant les questions d'entrée dans la pensée fonctionnelle en termes de modélisation de situations fonctionnelles, nous avons privilégié la dimension outil du concept. Nous aborderons, dans le paragraphe suivant, plus spécifiquement sa dimension objet, à travers la question de son statut.

b) Le statut des objets fonctionnels

Les recherches en didactique se sont attachées à distinguer au niveau des processus cognitifs les différents statuts que peut prendre un concept mathématique.

Ainsi Régine Douady (Douady, 86) introduit la dialectique outil-objet pour décrire les rôles d'outil et d'objet joués alternativement par les concepts mathématiques. De manière assez générale, ces derniers apparaissent d'abord comme outils implicites puis explicites dans la résolution de problèmes et ils n'acquiescent qu'ensuite le statut d'objets mathématiques (au sens d'objets culturels institutionnellement reconnus). Ils peuvent ensuite être réinvestis dans la recherche de nouveaux problèmes, recherche où ils joueront alors le rôle "d'ancien objet".

Elle introduit aussi la notion didactique de cadre, ensemble des "objets d'une branche des mathématiques, des relations entre ces objets, de leur formulation éventuellement diverse et des images mentales associées à ces objets et éléments". Le passage d'un cadre à un autre (jeu de cadres) qui demande d'établir des correspondances entre objets et relations lors des phases de transfert et d'interprétation est, selon elle, un élément moteur des processus de conceptualisation par les interactions qu'il rend nécessaires.

A. Sfard (Sfard 91) distingue, comme elle l'a fait à propos des expressions algébriques, des conceptions procédurales et structurales de la notion de fonction, les conceptions procédurales précédant, selon elle, les conceptions structurales dans le processus d'apprentissage.

Dans un premier temps, l'apprenant découvre un nouveau processus constitué d'opérations exécutées sur des objets mathématiques connus. Ceci permet au concept d'acquiescer plutôt un statut procédural. Pour les fonctions, par exemple, c'est lorsque l'apprenant aura acquis l'idée de variable, qu'il saura déterminer les valeurs de la variable sortie (l'image) en fonction de celles de la variable entrée.

Ensuite, l'apprenant devient capable de se référer au processus de façon plus économique - par un nom (son nom de fonction) - et il peut effectuer un certain nombre d'opérations sur le processus ainsi globalisé et intériorisé : calculs, tracé de courbes...

La dernière phase de l'apprentissage se produit lorsque l'objet (ici les fonctions) se dégage du processus de production pour devenir un objet à part entière, est intégré à une certaine catégorie dont on peut étudier les propriétés ou dans laquelle on peut chercher des représentants particuliers répondant à certaines conditions (recherche de solution d'équation fonctionnelle ou différentielle, par exemple). L'objet fonction acquiert alors davantage un statut structural.

Notons toutefois que, selon les contextes, c'est parfois une conception procédurale, parfois structurale qui pourra être privilégiée, car ces deux statuts ne fonctionnent pas en opposition mais en dualité. En fait, lors de l'introduction du concept de fonction en début de lycée, c'est le statut procédural de l'objet qui est essentiellement visé dans l'enseignement actuel, le statut structural intervenant beaucoup plus en fin de cycle secondaire et à l'université. Mais pour permettre aux apprenants d'intérioriser le processus, la résolution de problèmes, dans lesquels il interviendra comme outil, sera déterminante.

Cette résolution de problèmes passe essentiellement par des processus de modélisation qu'Yves Chevallard [Chevallard, 89] décompose en trois étapes :

- 1. définition du système et reconnaissance des aspects pertinents par rapport à l'étude envisagée ;
- 2. construction du modèle qui est l'ensemble des relations établies entre les variables prises en compte ;
- 3. "travail" sur le modèle pour produire des connaissances sur le système par l'intermédiaire de nouvelles relations entre les variables.

C'est la troisième étape seule qui est proprement mathématique, le système initial pouvant être extramathématique.

c) Les différents registres associés aux fonctions

Que l'on considère le concept dans sa dimension objet ou outil, celui-ci peut être caractérisé comme le propose Gérard Vergnaud (Vergnaud 90) par le triplet suivant :

- S : ensemble de situations donnant du sens (référence) ;
- I : ensemble des invariants rendant possible le recours aux schèmes (signifié) ;
- s : ensemble des formes langagières ou non symbolisant le concept (signifiant).

G. Vergnaud appelle schème "l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations donnée". Celui-ci est composé "de règles d'actions et d'anticipations puisqu'il génère une suite d'actions en vue d'atteindre un certain but", d'invariants opératoires (concepts et théorèmes en actes) et d'inférences en situation.

Étudier le développement et le fonctionnement d'un concept mathématique, au cours d'un apprentissage ou lors de son utilisation, c'est nécessairement considérer ces trois plans à la fois. Il n'y a pas de bijection entre signifiants et signifiés, ni entre invariants et situations. On ne peut donc réduire le signifié ni aux signifiants, ni aux situations.

G. Vergnaud privilégie ainsi un système d'élaboration pragmatique des connaissances où interviennent dualement symbolisme et situations.

S'intéressant plus particulièrement aux signifiants, R. Duval (Duval 93) s'appuie sur la notion de registre sémiotique, ensemble de signes (traits, symboles, icônes...) appartenant à un même réseau sémantique qui permet l'appréhension et la production d'une représentation du concept. A tout registre sémiotique pourra ainsi être associé un registre correspondant de représentation si celui-ci permet le fonctionnement des activités cognitives propres au traitement des signes :

- 1. formation d'une représentation identifiable dans un registre donné, ce qui implique la connaissance des règles propres au registre et la capacité d'accomplir une tâche de description pour produire la représentation ;
- 2. traitement d'une représentation dans un registre donné selon des règles de traitement qui sont propres à chaque registre ;
- 3. conversion d'une représentation d'un registre dans un autre, ce qui requiert de faire la différence entre le sens et la référence des symboles et des signes, sans qu'il s'agisse là de

codage dans un autre registre (substitutions directes de signifiants), ni d'interprétation (ce qui sous-entend un changement de cadre théorique⁶).

La capacité, pour un élève, d'effectuer des conversions entre différents registres de représentation d'un concept est ainsi, pour R. Duval, le signe d'une compréhension intégrative du concept. Cette conversion ne peut avoir lieu que si sont clairement identifiées les unités sémiotiques propres à chaque registre et les correspondances qui s'effectuent entre ces unités sémiotiques dans le passage d'un registre à l'autre⁷. Mais il n'y a pas forcément congruence dans ce passage (les unités ne se correspondent pas forcément de façon bijective, elles ne s'organisent pas forcément de la même façon dans les deux registres et c'est bien pourquoi l'activité de conversion n'est pas seulement une activité de codage). Ceci entraîne des difficultés de conversion, et donc des difficultés d'appréhension du concept.

En ce qui concerne les fonctions, les principaux registres de représentation sont les suivants :

- algébrique (loi fonctionnelle qui va permettre le calcul de la variable dépendante) ;
- graphique (la correspondance fonctionnelle s'exprime au travers d'un ensemble de points du plan) ;
- programmation (processus automatisé permettant d'obtenir des valeurs de la variable dépendante) ;
- tableau (la loi fonctionnelle est ici réduite à une description discrète).

On peut ajouter :

- diagramme (la loi fonctionnelle est exprimée de façon générique) ;
- verbal (la loi fonctionnelle est exprimée à travers les mots de la langue naturelle).

Pour ce dernier registre, nous soulignerons toutefois que s'il fait essentiellement intervenir des procédures langagières, celles-ci ne peuvent être absentes du travail dans un quelconque registre donné.

En effet, tout processus de conceptualisation met en jeu des procédures langagières d'explicitation, de formulation et les apprenants devront, outre la maîtrise des divers registres de représentation, de leurs règles et de leurs variables, faire interagir langue naturelle et écriture symbolique lors des opérations qu'ils effectueront dans ces divers registres, nouvelle source de difficultés comme l'a montré Colette Laborde (Laborde, 82).

Celle-ci introduit le concept de code : "système structuré de signes permettant à un émetteur de transmettre un message à un récepteur, un code est caractérisé par un répertoire de signes et par des règles d'agencement entre signes". L'écriture symbolique en mathématique, la langue naturelle sont des codes qui interagissent lors de toute activité mathématique. Elle met en évidence l'apparition d'un code hybride : la langue mathématique, résultat des déformations réciproquement subies, dans le discours mathématique.

Toute activité dans un registre donné mettra en jeu différents codes qui devront être maîtrisés et contrôlés par les apprenants. Le rôle de la langue et du discours est donc très important lors de la constitution des images mentales associées au concept et le processus de conceptualisation

⁶ Lors d'activités de transfert entre cadres, des problèmes d'interprétation se posent, mais soulignons que si "un registre se détermine par rapport à un système sémiotique permettant de remplir les trois fonctions cognitives fondamentales, un cadre se détermine par rapport à des objets théoriques, en l'occurrence des objets mathématiques". Ainsi, "il peut y avoir changement de cadre sans changement de registre et changement de registre sans changement de cadre, car un cadre peut exiger la mobilisation de plusieurs registres". [R. Duval]

⁷ Les traits graphiques de la représentation d'une fonction sont les unités sémiotiques du registre graphique : croissance ou décroissance sur un intervalle, position de la courbe par rapport aux axes, position des points d'intersection éventuels avec les axes, linéarité, discontinuités, convexité... Dans le registre des écritures algébriques, les unités sémiotiques sont celles intervenant dans une expression algébrique de la fonction voire de l'une de ses dérivées si elles existent, par exemple, le signe des coefficients numériques, le degré de l'expression...

⁸ Parmi les exemples les plus "perturbants" ou "paradoxaux", on peut relever le tracé de certaines courbes sur certains intervalles.

requiert, lors des phases d'institutionnalisation, le recours à un vocabulaire précis, à des définitions explicites, qui sont parfois négligées ou pour lesquelles il n'y a pas consensus (Nogués 92).

d) La problématique des environnements

Depuis quelques années, l'apparition dans les classes (le cours de mathématiques, en particulier) de calculatrices de plus en plus performantes et d'ordinateurs a ajouté aux problèmes de conceptualisation, qui jusqu'alors se posait dans un environnement papier/crayon, les problèmes liés à l'environnement informatique.

Les difficultés liées à cet environnement ont été soulignées par différents chercheurs, par exemple N. Balacheff (Balacheff 94) et M. Artigue (Artigue 95). L. Trouche (Trouche 96) a étudié plus précisément les rapports entre processus de conceptualisation et d'instrumentation. Enfin la nécessité d'une formation tant initiale que continue a été mise en évidence (Bernard et al. 97).

1. L'environnement informatique, par les contraintes de médiation qu'il introduit, modifie les objets qui sont représentés. Nicolas Balacheff analyse et nomme ce nouveau phénomène : la *transposition informatique*. Son analyse distingue trois régions :

- univers interne ;
- interface ;
- univers externe ;

liées à l'utilisation d'un dispositif informatique et qui sont autant de lieux de représentations des connaissances.

Les choix des concepteurs et les progrès techniques régissent au niveau interne les effets obtenus à l'interface, lieu de visualisation et de manipulation directe d'entités abstraites qui se retrouvent ainsi soumises à des phénomènes non intrinsèques⁸. Mais plutôt que de s'interroger sur la "fidélité" des représentations des dispositifs informatiques, Balacheff propose de s'attacher à la problématique du domaine de validité des représentations qui permettrait, sans ignorer les limites de telles représentations, de rendre compte de la réalité des bénéfices que l'on peut en tirer.

2. De façon plus pragmatique, Michèle Artigue analyse deux phénomènes liés à la transposition informatique, celui de la *double référence*⁹ et celui de la *pseudo transparence*¹⁰ et tient à souligner qu'il n'y a pas de familiarité immédiate avec l'environnement informatique. Par ailleurs, elle insiste sur la spécificité des processus d'adaptation aux EIAO¹¹, plus précisément sur le rôle joué par la possibilité d'une adaptation perceptive globale au détriment d'un fonctionnement plus analytique¹². Elle met aussi en évidence le fait que, si le recours aux EIAO, lié à une économie dans la résolution de certaines tâches, peut entraîner effectivement un fonctionnement plus réflexif et conceptuel chez les élèves, il peut aussi entraîner l'apparition de *comportements de pêche* dans la recherche de solutions¹³.

3. A propos des processus de conceptualisation, Luc Trouche s'appuie sur les travaux de Gérard Vergnaud pour attribuer aux schèmes, "totalité dynamique organisatrice de l'action du sujet

⁸A propos de la factorisation de $x^n - 1$, les processus mis en œuvre par le logiciel Derive ne correspondent pas forcément aux propriétés à utiliser recommandées par les programmes officiels.

¹⁰A propos d'activités de parenthésage d'expressions mathématiques, le traitement informatique de certains symboles – crochets par exemple – est différent selon le contexte.

¹¹EIAO : environnement interactif d'apprentissage avec ordinateur.

¹²Elle observe ainsi des séances autour des polynômes du second degré et conclut que la connaissance du rôle des coefficients sur la forme de la parabole associée peut être liée à une association perceptive globale, sans que l'articulation registre visuel, registre numérique soit effective.

¹³L'auteur analyse à ce propos les stratégies mises en place pour déterminer comment on passe d'une équation à une autre. Deux élèves demandent ainsi à la calculatrice d'effectuer le quotient de deux équations...

pour une classe de situations spécifiée", une place primordiale lors d'un processus de conceptualisation. Repérer les différentes étapes d'un tel processus requiert la mise en place d'un dispositif permettant le repérage des conceptions des apprenants à travers leurs réalisations.

Il reprend les travaux de Pierre Rabardel¹⁴, pour définir ce qu'est un processus d'instrumentation. L'appropriation d'un artefact (objet technique, machine) s'accompagne de l'élaboration de schèmes d'utilisation (schèmes d'action instrumentée, schèmes d'usage) spécifiques. Le processus d'instrumentation est défini par "l'accommodation des schèmes du sujet, consécutive à la découverte progressive des propriétés intrinsèques de l'instrument".

Il s'attache alors à repérer l'ensemble des conceptions des élèves, relatives à un concept (ici celui de limite), à déterminer les schèmes d'instrumentation (relatifs à une calculatrice graphique et aussi à une calculatrice symbolique) et à établir les rapports entre les deux processus.

Il met en évidence que la nature des liens entre les deux processus dépend du concept étudié, de l'instrument utilisé mais aussi du "profil" des élèves, dénomination qui renvoie à une classe de comportements spécifiques. L'interdépendance des processus de conceptualisation et d'instrumentation imposera ainsi une triple prise en compte par l'enseignant de la connaissance à enseigner, de l'instrument et de la diversité des élèves.

4. Soulignons pour terminer que la prise en compte de ce nouvel environnement rend nécessaire une formation des enseignants, tant initiale que continue.

Michèle Artigue (Artigue 95) propose de :

- présenter des recueils de situations mises au point par des chercheurs et des innovateurs qui ont déjà été expérimentés ;
- informer sur les phénomènes didactiques spécifiques auxquels les stagiaires seront nécessairement confrontés lors de leur cursus d'enseignant, sur les moyens de les repérer et de les gérer efficacement.

Dans leur rapport, faisant suite à une étude sur l'intégration des outils informatiques dans la formation initiale, (Bernard et al. 97), complètent ces propositions en envisageant certains moyens :

- inciter à la rédaction de mémoires professionnels sur ce thème ;
- proposer des prêts tournants de matériel ;
- insérer la problématique posée par l'intégration de ces nouveaux outils dans d'autres problématiques en la rendant ainsi plus globale, par exemple :
 - outils de calcul et pédagogie différenciée ;
 - outils de calcul et débat scientifique ;
 - outils de calcul, argumentation, et preuve.

¹⁴Voir en particulier, Pierre Rabardel : *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*, 1995, Armand Colin.

III.2. L'apprentissage des fonctions au lycée

Cet aperçu des différents statuts du concept de fonction (outil-objet), de ses divers registres de représentation, des problèmes liés à l'apparition d'un nouvel environnement, permettent de percevoir les enjeux qui seront attachés à l'apprentissage des fonctions au lycée.

Les fonctions, engagées comme outil dans la résolution de problèmes, acquièrent peu à peu un statut d'objet "procédural" à travers leurs différents registres de représentation et les divers environnements avant de se constituer en objet "structural".

Les situations proposées devront ainsi permettre l'émergence de cet objet. Divers travaux ont été proposés, en terme d'introduction, des approches géométriques (par exemple, recherche d'une aire extrême dans une figure donnée) en opposition aux approches cinématiques (par exemple, étude du remplissage d'un récipient) plus susceptibles de faire accéder les élèves à la notion de variable dépendante et de variations.

Dans tous les cas, afin de permettre l'émergence d'une pensée fonctionnelle, il faudrait mettre en place des situations fonctionnelles réellement ouvertes et axées sur ce qui fait vraiment la différence avec le mode de pensée algébrique : la notion de variation, se départissant ainsi d'un travail trop restreint à une résolution d'équation.

Cet aspect est essentiellement développé dans l'exemple proposé par le groupe "intégration des outils informatiques" de Montpellier (partie IV). Toutefois cette proposition ne néglige pas non plus un deuxième aspect, qui est l'utilisation de différents registres de représentation, même si les activités de conversion ne sont pas demandées à tous les apprenants, à ce stade de l'apprentissage, mais font l'objet d'une synthèse.

C'est le travail de l'équipe de Strasbourg qui permet de mettre plus particulièrement l'accent sur l'articulation des registres graphiques et algébriques, deuxième enjeu de l'apprentissage des fonctions au lycée. Lorsque les activités de passage entre divers registres seront maîtrisées, alors l'apprenant pourra plus facilement attribuer à l'objet fonction un statut structural lui permettant d'accéder à des concepts de niveau supérieur.

Les travaux de l'IREM de Montpellier introduisent une dimension supplémentaire à leur projet, en proposant un travail dans un environnement de calculatrice *formelle*. Les possibilités de calcul approché, exact, formel relèvent véritablement d'un bouleversement symbolique et la généralisation de ce type d'environnement dans les classes fait de sa prise en compte un enjeu important aussi bien pour l'enseignement de l'analyse que celui de l'algèbre.

Annexe J

(Notation fonctionnelle

CHAPITRE I

LA NOTION DE FONCTION

L'apprentissage des fonctions est une étape du développement de la pensée rationnelle de l'élève au secondaire, comme en témoigne leur présence dans la majorité des cursus scolaires pour les adolescents. À l'école, les élèves doivent faire face aux multiples propriétés liées à cet apprentissage. Pour ce faire, il est indispensable qu'ils apprennent à représenter et à manipuler les différentes interprétations de la fonction. Cependant, les fonctions sont complexes. Le concept de *fonction* a été travaillé pendant l'histoire par des scientifiques qui ont laissé des traces de leur développement intellectuel sur ce sujet. De la civilisation grecque jusqu'au XXI^e siècle, les travaux des mathématiciens étalés sur plusieurs périodes montrent la complexité de la notion qui prendra au XVII^e siècle le nom de *fonction*. Cette section aborde la notion de *fonction*, ainsi que, de manière chronologique, certaines idées présentes dans l'histoire permettant de mettre en relief sa complexité.

1.1 Définition générale de la fonction et sa place dans l'algèbre

Avant de commencer, voyons une définition générale de la fonction, telle qu'on la retrouve dans un manuel scolaire québécois (figure 1.1). Cette définition repose sur l'idée d'une relation, qui peut s'écrire sous forme de règle de correspondance, entre des éléments constituant un ensemble de départ, aussi appelé domaine, et des éléments constituant d'un ensemble d'arrivée, aussi appelé codomaine. Ces ensembles sont explicités dans la notation fonctionnelle, mais le texte signale qu'il n'est pas nécessaire de le faire lorsque ces ensembles correspondent à l'ensemble des nombres réels. Si cette stratégie est souvent utilisée dans les outils didactiques, elle ne correspond pas à une définition scientifique de la fonction mathématique.

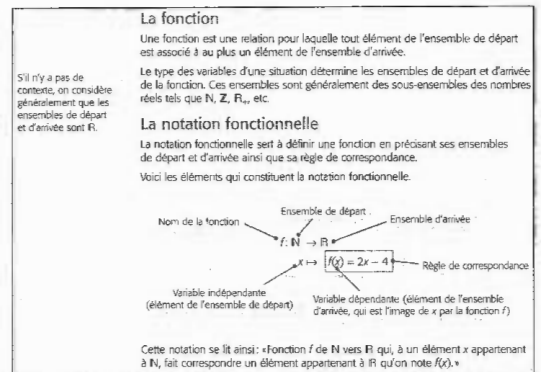


Figure 1.1 : Présentation de la fonction dans le manuel *Intersection* profil Technico-sciences (Boucher *et al.*, 2010, p. 14)

Du côté des travaux de recherche sur la fonction, Passaro (2007) donne une définition plus rigoureuse de *fonction*, qui s'appuie sur De Cotret (1985), Fikrat (1994) et Cabana (1996). Tout en soulignant la place des ensembles dans l'étude de la fonction, Passaro insiste plutôt sur quatre autres points qui se combinent pour définir ce qu'est une fonction :

- il existe une relation de dépendance entre deux grandeurs;
- on peut regarder cette relation de manière globale, c'est-à-dire s'intéresser à la « réaction » d'une des grandeurs (variable dépendante) lorsqu'on fait « bouger » l'autre (variable indépendante);

Annexe K

(Notation fonctionnelle

comme une règle de correspondance est aussi une des quatre catégories reconnues par Nicholas (1966).

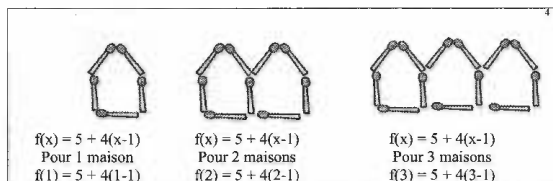


Figure 1.2 : Exercice de construction de maisons pour illustrer la règle

Selon Vinner et Dreyfus (1989) et Gaudin (2002), l'interprétation de la fonction comme règle ne met pas l'accent sur les valeurs d'un ensemble de départ et d'arrivée, mais plutôt sur une régularité, comme « quatre divisé par », par exemple. D'ailleurs, ces auteurs constatent qu'il est usuel chez les participants interprétant la fonction comme règle de ne pas préciser le domaine et le codomaine.

1.2.4 La fonction interprétée comme covariation

Thompson et Carlson (2017) signalent qu'il n'existe pas une interprétation de la fonction qui soit la bonne façon de concevoir la fonction, car la façon de comprendre ce qu'est une fonction peut varier d'une personne à l'autre. Au-delà des interprétations précédentes de la fonction, l'action mentale liée à une fonction dépend d'un raisonnement covariationnel. Dans leur vision, la covariation est une façon de traiter l'information. La covariation repose sur un traitement mental qui va plus loin que les interprétations précédentes, axées sur une image mentale.

⁴ Schéma récupéré de <https://www.mathovore.fr/exercices-sur-le-calcul-litteral-quatrieme-serie-4>

20

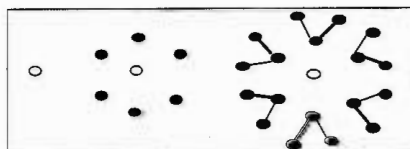


Figure 1.4 : Exemple de fonction représentée par un dessin

Par contre, dans les études empiriques qui présentent un classement des façons dont des participants étudiants ou enseignants représentent une fonction, cette catégorie est généralement absente. Par exemple, elle ne figure pas dans l'étude de Vinner et Dreyfus (1989). D'ailleurs, Bloch (2005, p. 41) soulève que le dessin géométrique

est actuellement peu utilisé (grandeurs géométriques variables pour la représentation de fonctions) et donc il n'est pas vu comme « évident » par les professeurs et les élèves. Par exemple le parallélogramme articulé [...] est-il un bon représentant de la fonction "sinus" ?

Ainsi, la représentation d'une fonction comme dessin est peu utilisée dans les études antérieures.

1.3.2 La fonction représentée comme tableau de valeurs

Une fonction peut être représentée numériquement dans un tableau de valeurs. Selon Duval (2003, p. 7), « [e]n distribuant des données selon un croisement de lignes et de colonnes, le tableau les sépare visuellement. » Il permet à chaque case de fournir une valeur discrète, ce qui élimine à première vue une complexité qui apparaît dans la compréhension d'un problème. Dans un même ordre d'idée, Coppé et al. (2007) disent qu'un tableau de valeurs est la représentation d'un échantillon de couples formés d'une valeur du domaine et d'une valeur du codomaine. Pour eux, cette représentation est partielle, car elle présente uniquement des valeurs discrètes d'une

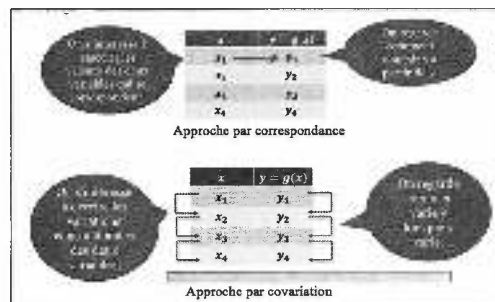


Figure 1.3 : Schématisation des approches par correspondance et par covariation selon Passaro (2016)

Citant un document inédit de Coulombe et Berenson, Saldanha et Thompson (1998) mentionnent quatre propriétés de la covariation, qui montrent bien les étapes de ce type de raisonnement : l'identification de deux ensembles de données, la coordination de patrons pour former des associations entre ces ensembles, l'établissement de connexions entre les valeurs spécifiques des deux ensembles et la généralisation des connexions pour prédire des valeurs encore inconnues de l'un des deux ensembles. Ainsi, si dans l'approche par covariation telle que définie par Confrey et Smith (1994, 1995) ou Passaro (2016), les valeurs de deux ensembles évoluent de façon simultanée mais indépendante, le raisonnement covariationnel mène à la coordination de la façon dont les deux ensembles évoluent. Pour Carlson et al. (2002), le raisonnement covariationnel permet à l'apprenant de s'engager dans cinq actions mentales, qui sont cinq types de coordination, incluant entre autres la coordination de la direction des changements dans les deux ensembles ainsi que la coordination du taux de changement de la variable d'un ensemble en lien au taux de changement de la variable de l'autre ensemble.

Annexe L

(Exemple de diagramme pouvant mener à une translation iconique (Déplacement d'un ballon dans le temps))

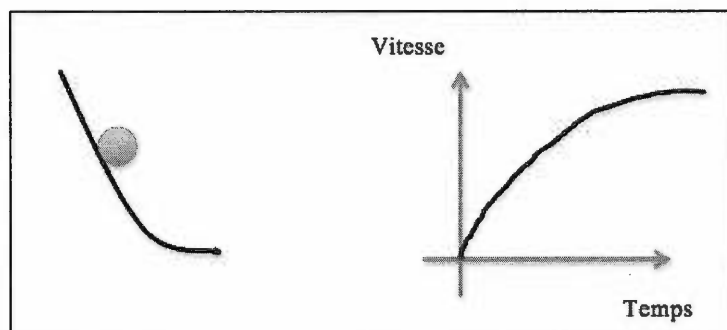


Figure 3.5 : Exemple de diagramme pouvant mener à une translation iconique
(Déplacement d'un ballon dans le temps)

Comme nous l'avons expliqué à l'aide de la figure 3.4, la coordination de plusieurs registres de représentation sémiotique est importante dans l'apprentissage de la notion de *fonction*. Selon Duval (1993), la conversion d'un registre à un autre ne s'effectue pas de façon immédiate. Un obstacle apparaît quand les deux registres ne sont pas congruents du côté sémantique. Par exemple, la représentation algébrique $f(x) = (x + 1)^2$ d'une fonction dans le domaine des nombres réels peut laisser des obstacles au moment de la représenter graphiquement puisqu'il manque de congruence entre la formule et la courbe due au signe (+) de la formule faisant croire à l'étudiant que le graphe de cette fonction polynomiale de 2^e degré doit se tracer entièrement dans le premier quadrant, mais elle doit plutôt se tracer avec un sommet situé sur l'axe des abscisses au point (-1,0) comme le montre la figure 3.6. Ici, la conversion de la représentation algébrique à la représentation graphique est moins intuitive.

ANNEXE L. (EXEMPLE DE DIAGRAMME POUVANT MENER À UNE
TRANSLATION GÉOMÉTRIQUE (DÉPLACEMENT D'UN BALLON DANS LE TEMPS))

Transitions entre actions – processus – objets, Covariation et relation de dépendance, cadre des fonctions , modélisation et définition

Les travaux récents sur les fonctions

Année	auteurs	Analyses des auteurs	Cadre et connaissances
1990	Artigue	Transitions entre actions – processus – objets, Co-variation et relation de dépendance, cadre des fonctions, modélisation et définition <i>aider le didacticien à lutter contre l'illusion de transparence de la communication didactique véhiculée par les modèles empiristes de l'apprentissage, en lui permettant de différencier le savoir que l'enseignement veut transmettre et les connaissances effectivement construites par l'élève » (Artigue (1990) p. 265), « l'ancrage des conceptions dans l'analyse a priori des points de vue possible sur le savoir en jeu, sur les classes de problèmes accessibles ou bien adaptés à tel ou tel point de vue, à travers l'étude du fonctionnement actuel de ce savoir comme de son développement historique peut apparaître comme une garantie nécessaire » (Artigue (1990) p. 274)</i>	garantie nécessaire
1991	Anna Sfard	La dualité entre processus et objet - Distingue la nature opérationnelle des fonctions en mettant l'accent sur les processus du calcul de la valeur de sortie pour une valeur d'entrée donnée, et leur nature structurelle comme objets constitués d'ensembles de couples - une conception pseudo-structurelle de la notion de fonction considère une formule algébrique comme un objet qui est manipulé sans reconnaître son domaine de définition et la relation dynamique ou statique entre valeurs d'entrée et valeurs de sortie.	historiques, épistémologiques et cognitives Les processus

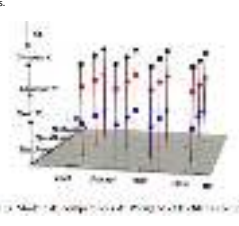
1992	Anna Sfard	- la fonction est un concept que les élèves acquièrent d'abord opérationnellement puis structurellement. Elle nomme « réification des processus » la transition de la conception processus à la conception objet - les termes processus et objet devraient être compris comme différentes facettes de la même notion plutôt que comme composants séparés - le fait d'écrire un programme (i.e. un processus) amène à passer de la conception « action » à la conception « processus » Elle différencie concept et conception // Cette distinction est celle faite en France par les termes savoir et connaissance, qui atteste des natures différentes entre le savoir de référence et la connaissance d'un sujet La définition d'une fonction comme un ensemble ordonné de couples (Bourbaki 1934) est structurelle selon Sfard, alors qu'une description en termes de méthode, processus, permettant d'obtenir un ensemble à partir d'un autre est opératoire. Ainsi, c'est entre autre le caractère non opératoire de la définition bourbakiste qui définit la dimension structurelle.	théorie anthropologique du didactique
1992	Dubinsky & Harel, Breidenbach et al.	- s'intéressent aux transitions entre trois niveaux : actions – processus – objets - le processus d'apprentissage commence d'abord par des actions sur des objets - Lorsque l'action totale peut avoir lieu dans l'esprit du sujet sans courir à travers toutes les étapes spécifiques, nous disons que l'action a été intériorisée en processus. Ensuite, le sujet peut utiliser ce processus pour obtenir un nouveau processus, par exemple, en l'inversant, le transformant ou le combinant avec d'autres processus. Lorsqu'il est possible d'opérer de cette façon sur un processus, nous disons que le processus a été encapsulé en un objet - au niveau « processus », la fonction est dépendante du processus, c'est-à-dire deux processus différents peuvent donner les significations différentes chez des élèves d'un même objet fonctionnel. Par exemple, deux formules algébriques équivalentes définissent le même objet « expression », mais correspondent à des processus de calcul différents. - l'acquisition d'une conception « processus » des fonctions n'est pas triviale pour les élèves, et elle suppose un enseignement prenant explicitement en charge son développement	approches cognitives et épistémologiques l'acquisition d'une conception « processus » des fonctions n'est pas triviale pour les élèves

1992	Sierpiska,	- appuie son travail sur une étude épistémologique et historique du concept de fonction, ainsi que sur l'observation de l'activité d'étudiants. Ces analyses lui permettent de dégager un certain nombre d'obstacles épistémologiques relatifs aux fonctions et d'actes de compréhension. Les obstacles épistémologiques et les actes de compréhensions sont décrits comme des connaissances. Sierpiska envisage la compréhension en mathématiques au travers des sauts cognitifs nécessaires à l'apprentissage - Tableaux de valeurs d'une fonction Obstacles épistémologiques : Une fonction est une suite de valeurs - Acte de compréhension : Distinction entre les notions de fonction et de suite. - Obstacle épistémologique : Le graphe d'une fonction est un modèle géométrique d'une relation fonctionnelle. Il n'est pas nécessairement précis ; il peut contenir des points (x,y) tels que la fonction n'est pas définie en x. - Attraction de l'algèbre, l'expression analytique d'une fonction : obstacles épistémologiques : Une grande confiance dans le pouvoir des opérations sur les expressions algébriques. – Seules les relations que l'on peut décrire par des expressions analytiques sont susceptibles d'être appelées fonctions. - Acte de compréhension : - Distinction entre une fonction et les outils analytiques utilisés pour la représenter. - Synthèse du concept de fonction : Obstacle épistémologique : - Une définition est une description d'un objet par ailleurs appréhendable par les sens. Ce n'est pas la définition qui détermine l'objet, mais l'objet qui détermine la définition. Actes de compréhension : - Distinction entre la définition et la description d'un objet - Synthèse du concept de fonction comme un objet. - Discrimination entre les différents moyens de représenter une fonction et la fonction elle-même. - Synthèse des différents moyens de représenter une fonction et de parler d'une fonction. - Sierpiska montre que certains étudiants identifient la fonction avec la ligne qui la représente, les axes n'ont parfois pas de sens particulier pour ces élèves	étude épistémologique et historique Opération, relation Les obstacles épistémologiques et les actes de compréhensions sont décrits comme des connaissances Seules les relations que l'on peut décrire par des expressions analytiques sont susceptibles d'être appelées fonctions
1994	Thompson	dans l'approche des fonctions par un élève, la conception « processus » de fonctions précède la conception « objet »	approches cognitives et épistémologiques
1994	Gray and Tall	- ont introduit la notion de « concept » pour exprimer une compréhension supérieure et flexible sur les fonctions	approches cognitives et épistémologiques

		- les élèves acquièrent la conception « concept » lorsqu'ils peuvent montrer leur flexibilité pour la compréhension des fonctions entre processus et objets	
1994	Confrey & Smith	expliquent la notion de co-variation par le mouvement entre des valeurs successives d'une variable en coordination avec le mouvement entre des valeurs successives correspondantes d'une autre variable.	approches cognitives et épistémologiques
1995	Schwarz & Dreyfus	ont analysé l'acquisition des fonctions par des élèves grâce à un logiciel de multireprésentation appelé Triple Representation Model (TRM). Cet environnement informatique permet une étroite interrelation dynamique entre registres algébrique, graphique et numérique. Il a été demandé aux élèves d'explorer et d'identifier les propriétés invariantes par des actions de la fonction examinée. Ces activités ont permis une compréhension assez profonde des fonctions chez des élèves.	informatique
1996	Borba & Confrey	avaient développé et utilisé le logiciel Function Probe pour enseigner les transformations de fonctions grâce à sa capacité de modifier le graphe d'une fonction par translation, déformation et réflexion	informatique
1998	O'callaghan	la conception « objet » semble difficile à acquérir même parmi les élèves ayant des connaissances algébriques avancées	approches cognitives et épistémologiques
2003	Bloch	- distingue différents cadres (settings) pour la notion de fonction : numérique, algébrique, géométrique, graphique, formel et analytique - elle insiste particulièrement sur l'interaction des cadres graphique et formel pour une ingénierie portant sur la validation des propriétés des fonctions - Elle souligne qu'au moment de son étude, le cadre géométrique est peu utilisé dans l'enseignement et qu'elle estime que sa réintroduction serait « coûteuse ». Dans leur étude sur la place des tableaux de valeurs et de variations pour l'enseignement des fonctions dans le curriculum français.	Ingénierie différents cadres (settings) pour la notion de fonction : numérique, algébrique, géométrique, graphique, formel et analytique
2004	Arzarello & Robutti	ont demandé aux élèves d'interpréter les graphes et les tableaux de valeurs donnés par la calculatrice en termes de mouvement. Les co-variations et les dépendances entre temps et distance dans le système physique ont été ensuite modélisées en fonctions mathématiques	culturelles et socio-historiques modélisation en fonction mathématiques
2005	Radford	propose des situations dans lesquelles le concept de fonction s'appuie sur l'expérience « sensorielle » de dépendances au sein d'un système physique et se construit à partir des variations mutuelles de ses objets	culturelles et socio-historiques
2005	Comin	la notion de fonction est fondée sur l'idée de relation de dépendance et ne peut prendre du sens que par l'étude des relations fonctionnelles entre grandeurs	
2005	Ilyas Yavuz	Evolution récente de l'enseignement de la notion de fonction en France en classe de seconde. Utilisation des tableaux de valeurs et de variations.	didactique

2007	Falcade, Laborde & Mariotti	ont choisi la Géométrie dynamique comme domaine d'application afin de fournir aux élèves une expérience qualitative de co-variations et de dépendances fonctionnelles. Leur étude a montré que les outils propres à la géométrie dynamique (déplacement des objets, visualisation de leurs traces, définition de macros...) appliqués à différents objets géométriques (segments, demi-droites, figures...) peuvent être utilisés pour amener les élèves à comprendre la notion de fonction.	perspective Vygotskienne de médiation sémiotique
Multi-représentations et visualisation			
2007	Coppé, Dorier & Yvauz	mettent l'accent sur un usage accru des divers modes de représentation des fonctions dans le curriculum et tentent de caractériser comment sont pris en compte, par les différents acteurs de l'initiation, ces récentes modifications.	didactique
2008	Michèle Artigue	L'enseignement des fonctions à la transition lycée - université Son travail concerne l'enseignement des fonctions et montre la fragilité des connaissances avec lesquelles beaucoup d'étudiants arrivent à l'université, par rapport à ce qui est attendu à la fin de la scolarité secondaire. Cette fragilité ne peut que renforcer les difficultés de la transition. Cette présentation est très synthétique aborde successivement des outils qui concernent : ➢ l'identification de niveaux de conceptualisation de la notion de fonction ; ➢ l'identification de différents registres de représentation de cette notion et l'analyse des caractéristiques des interactions entre ces registres ; ➢ l'identification de différents points de vue possibles sur cette notion ; ➢ l'identification de différents niveaux de mise en fonctionnement des connaissances en jeu dans la résolution de tâches engageant la notion de fonction ; ➢ la caractérisation des organisations mathématiques dans lesquelles intervient cette notion.	cryptographie
2009	White	a conçu un environnement logiciel dédié à l'introduction des fonctions dans le contexte de la cryptographie. - les tâches données aux élèves dans cet environnement mettent en jeu différents aspects de la notion de fonction - la résolution des problèmes donnés dans cet environnement peut aider les élèves à atteindre une compréhension flexible des fonctions - il y a l'affirmation qu'une dualité dialectique processus/objet est nécessaire à une compréhension profonde des fonctions	cryptographie

2001	Yerushalmy & Shternberg	a utilisé des environnements spécialement conçus pour soutenir une variété d'expériences avec des représentations visuelles des fonctions comme modèles pour construire une représentation symbolique	
2004	Kieran & Yerushalmy	visent particulièrement à développer ou utiliser des environnements informatiques spécifiques offrant les capacités de multi-représentations pour l'apprentissage des fonctions	Informatique
2005	Nathalie Gaudin	Les interactions constituent le matériau pour l'étude du sous système adidactique sujet/milieu. Dans ce jeu, les connaissances sont envisagées comme les moyens d'appréhender les règles et les stratégies gagnantes et d'obtenir le résultat recherché. L'interprétation des situations problèmes en terme de jeu justifie la correspondance entre comportement et connaissances : les interactions du système qui définissent le jeu adidactique sont sous la contrainte des connaissances. Trois dimensions des relations du système – action, formulation, validation – structurent les interactions, les connaissances et les types de milieux adidactiques.	didactique
2008	Maschietto	- a porté une attention particulière sur l'interaction entre deux points de vue global et local dans le contexte d'usage des potentialités de visualisation des TIC (les calculatrices symboliques) - Il s'agit d'approcher la notion de dérivée à travers l'identification perceptive d'un processus de linéarisation locale. Un point de vue global considère les fonctions comme identités définies par une ou plusieurs formules ou représentations graphiques ainsi que leurs propriétés sur un intervalle. Un point de vue local sur les fonctions est lié à ce qui se passe en un point spécifique et dans son voisinage. Selon l'auteur, la considération de ce « jeu global/local » est essentielle pour la transition entre algèbre et analyse.	
2008	Aidon et al.	les auteurs ont expérimenté et testé les nouvelles potentialités ainsi que les contraintes d'une nouvelle calculatrice TI-inspire pour les apprentissages des élèves. Cette calculatrice est innovante, intégrant un logiciel de calcul formel et un environnement de géométrie	
2010	Maggy Schneider	Emergence de modèles fonctionnels	modélisation fonctionnelle
2010	Weigand & Bichler	- proposent un modèle de compétences comprenant trois dimensions : compréhension des fonctions, compétences relatives à l'outil, et activation cognitive	compréhension des fonctions,

		<p>- La première dimension « compréhension des fonctions » se compose de quatre niveaux différents : intuitive, conceptuelle, relationnelle, et structurelle. La deuxième dimension « compétences relatives à l'outil » comprend trois niveaux : la mode statique, la mode dynamique, et la mode multiple. La dernière dimension « activation cognitive » du modèle concerne trois niveaux : connaissances de base, connaissances avancées, et connaissances complexes.</p> 	<p>La première dimension « compréhension des fonctions » se compose de quatre niveaux différents : intuitive, conceptuelle, relationnelle, et structurelle</p>
2011	Minh Tran Kiem	Considère les fonctions comme modèles de dépendances dans un cadre géométrique tel que défini par Bloch (2003) et utilisé par Falcade, Laborde & Mariotti (2007). La modélisation fonctionnelle permet de relier ce cadre aux autres cadres et représentations des fonctions. Son hypothèse est donc	

		<p>que les activités fondées sur l'étude des dépendances entre grandeurs ou mesures permettent aux élèves de comprendre les fonctions comme modèles de ces dépendances. Ces activités s'inscrivent dans les dialectiques « locales-globales » et « processus-objet</p> <p>Les fonctions sont introduites sous tous ses aspects : numérique, graphique, algébrique</p> <p>le type de tâche de modélisation fonctionnelle des situations géométriques est encouragé pour l'approche des fonctions. Pour ces situations, il est souvent demandé aux élèves d'expérimenter et d'observer la co-variation et la relation de dépendance entre grandeurs ou mesures impliqués dans la figure. Ensuite, les élèves doivent reconnaître une dépendance fonctionnelle parmi des co-variations puis l'exprimer en une fonction mathématique. L'étude de sa variation et de ses extremums permet aux élèves de trouver la résolution du problème</p> <p>Apprentissage des fonctions au lycée avec un environnement logiciel, situations d'apprentissage et genèse instrumentale des élèves</p> <p>construire une situation mettant en jeu le concept de fonction et ses représentations et montrer le rôle des représentations dans la différenciation des conceptions.</p> <p>voit émerger une distinction possible entre deux conceptions (« courbe » et « graphe »). Cette distinction est en partie rendue possible par l'analyse des rapports différents que peuvent entretenir le système de représentation graphique et le système de représentation algébrique</p> <p>Une fonction f de la variable réelle x est une relation entre des paires d'éléments de deux sous ensembles X et Y de R, qui associe à chaque élément x de X un et un seul élément y de l'ensemble Y. Cette relation peut être définie de plusieurs manières : verbalement, par une table de valeurs (x,y), par une expression algébrique, par un graphe, etc. ; et ainsi, pourra mobiliser les différents systèmes de représentation associés</p> <p>L'arrivée des outils de l'algèbre bouleverse considérablement le concept de fonction. Youshekeitch signale qu'il est difficile de déterminer l'influence du travail sur la notion de fonction précédant l'arrivée de ces outils sur le travail qui fera suite. étude à partir du 17ème siècle. Cette position est en grande partie justifiée par le fait que nous cherchons à identifier les conceptions de sujets qui ont accès aux outils de l'algèbre</p>	<p>le type de tâche de modélisation fonctionnelle des situations géométriques est encouragé pour l'approche des fonctions</p> <p>Définition de la notion de fonction</p> <p>Histoire des fonctions</p>
--	--	--	---

		<p>Conception courbe : les travaux de Descartes puis de Leibniz et Newton</p> <p>Descartes et Leibniz, à la suite de Viète, viennent éclairer sous un nouveau jour le concept de fonction. Les problèmes sont toujours ceux de l'étude des lois de la nature envisagées comme des relations entre des valeurs numériques (représentant des quantités physiques) Apparait alors un nouveau mode d'expression relatif à la méthode analytique : celui des expressions algébriques</p> <p>Bernoulli, contemporain de Leibniz, publie en 1698 un article dans lequel l'entrée sur la fonction se fait par l'expression analytique</p> <p>Le concept de fonction se développe considérablement avec le travail d'Euler (élève de Bernoulli). Dans <i>Introductio in analysin infinitorum</i> volume 1 (1748), celui-ci définit le terme fonction par : <i>Une fonction d'une quantité variable est une expression analytique composée de quelque manière que ce soit à partir de cette quantité, de nombre et d'autres variables...</i></p>	
2019	ALEXANDER Briceno Montoy	La relation de dépendance s'inscrit dans une vision globale de la fonction qui permet d'en percevoir la variation, alors que la correspondance en donne une vision ponctuelle ancrée sur l'association de deux éléments.	



Plan

1. Définition générale de la fonction telle qu'on la retrouve dans un manuel scolaire français et dans le Cam

Caroline Bardini, 2003, Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique

Isabelle Bloch, 2000, L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée / université : savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation

Nathalie Gaudin, 2005, Place de la validation dans la conceptualisation, le cas du concept de fonction

Thien Trung LE THAI BAO, 2007, Étude didactique des relations entre enseignement de la notion de limite au lycée et décimalisation des nombres réels dans un environnement 'calculatrice'. Une étude de cas au Viêt-nam.

Iyaa Yavuz, 2005, Evolutions récentes de l'enseignement de la notion de fonction en France en classe de seconde. Utilisation des tableaux de valeurs et de variations

Minh Tran Kiem, 2007, Apprentissage des fonctions au lycée avec un environnement logiciel: situations d'apprentissage et genèse instrumentale des élèves

Annexe M

Formule des trois niveaux

I Formule des trois niveaux



Traditionnellement, on récoltait le raisin dans des grands baquets de bois appelés « comportes » ou « ballonges » dont la forme ressemble à un demi-tonneau de section elliptique. (voir photo ci-contre)
 Tout aussi traditionnellement, pour évaluer des volumes comme celui d'un tonneau, d'un tas de sable, ... , on utilisait la formule dite des « trois niveaux ».

$$V = \frac{h}{6} (A_i + A_s + 4 \times A_m)$$

- où :
- h représente la hauteur ;
 - A_i l'aire inférieure ;
 - A_s l'aire supérieure ;
 - A_m l'aire à mi-hauteur.

Pour évaluer le volume d'une ballonge à l'aide de la formule des trois niveaux, il faut savoir calculer l'aire de la surface délimitée par une ellipse.

Activité GeoGebra « cercleellipse.ggb »

Pour $e = 1$, On obtient un disque de rayon b inscrit dans un carré. Compléter en fonction de b :

$$A_{\text{carré}} = \dots \quad A_{\text{disque}} = \dots \quad \text{et} \quad \frac{A_{\text{disque}}}{A_{\text{carré}}} = \dots$$

Pour $e > 1$, On obtient un ellipse de petit axe b et de grand axe a inscrite dans un rectangle. Compléter en fonction de a et de b :

$$A_{\text{rectangle}} = \dots \quad \text{Si l'on admet que le rapport des aires reste inchangé, calculer } A_{\text{ellipse}} = \dots$$

Exemple 1 :



Appliquer la formule des trois niveaux à la ballonge représentée ci-contre.



Évaluer de même en litres le volume du tonneau à section elliptique schématisé ci-contre.

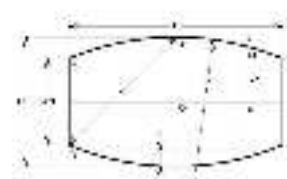
II Volume d'un tonneau

Quelques formules historiques :
 On se donne la hauteur L du tonneau, le diamètre minimal d , dit diamètre du fond, et le diamètre maximal D , dit diamètre du bouge. La plupart des formules historiques reviennent à approximer le volume du tonneau par celui d'un cylindre de même hauteur, mais de diamètre intermédiaire entre celui du fond et celui du bouge.

- Kepler $\rightarrow V = \frac{\pi L}{12} (D^2 + Dd + d^2)$;
- Oughtred $\rightarrow V = \frac{\pi L}{12} (2D^2 + d^2)$;
- Ministère de l'Intérieur en pluviose de l'an VII $\rightarrow V = \frac{\pi L}{4} (d + \frac{2}{3}(D - d))^2$;
- Dez $\rightarrow V = \frac{\pi L}{4} (d + \frac{5}{8}(D - d))^2$;
- Les douanes utilisent $\rightarrow V = 0.625c^3$;

D'autres Formules plus récentes, obtenues grâce aux progrès des mathématiques :

- $V = \frac{\pi L}{60} (8D^2 + 3d^2 + 4Dd)$;
- $V = \frac{\pi D^2 L}{8} \left(1 + \frac{d/D \sqrt{1 - (d/D)^2}}{\arccos(d/D)} \right)$



II.1 Recherche

Effectuer des recherches sur les « inventeurs » des formules.

II.2 Comparaison des formules

Effectuer une comparaison des formules, par exemple en utilisant un tableur, à partir des données chiffrées suivantes :

d	6,06 dm
D	7,01 dm
L	8,05 dm
c	7,68 dm

II.3 Travail en ligne

<http://euler.ac-versailles.fr/baseeuler/lexique/notion.jsp?id=44>

Écrire en quelques lignes la stratégie qui vous permet d'associer à un solide la bonne courbe.

Annexe N

Tâches pour introduire la notion de fonction en France et en Afrique francophone

Pour commencer

1. Le produit de deux nombres est toujours pair. Les nombres 1000, 3400, 10000 et 100000 sont-ils premiers entre eux ?
2. Il reste 50 € d'un achat de 100 €. Combien de fois le nombre 100 est-il contenu dans la somme de ces deux restes ?
3. Avec le calculateur programmable, à quel nombre faut-il multiplier le résultat pour...

4. Quelle est l'aire d'un carré de côté 50 ?
5. Si Denis a 10 ans, le périmètre de son carré est 20 plus 4.
6. Soit D l'aire d'un carré de côté x . On a $D(x) = 9$.
7. Soit D l'aire d'un carré de côté x . On a :
 - a) $x = 3$
 - b) $x = 1$

105

Activité 1 Notion de fonction et vocabulaire

Partie 1 • Un processus de la vie courante

Pour cuire un aliment, il faut le laisser cuire à l'eau.

On peut schématiser ce processus comme un processus :

1. Qu'est-ce qu'un aliment ?
2. Comment le cuire ?
3. Chauffer à l'eau bouillante.
4. Combien de temps ?

Aliment



Cocotte-minute

Aliment cuit à la vapeur

2. a) Faire cuire l'œuf pendant une heure ou deux en ayant recours à un bricolage ?

b) Faire cuire un œuf à la cocotte-minute pour obtenir un blanc de poisson et à la vapeur ?

Partie 2 • Un processus mathématique

Voici un programme de calcul : choisir un nombre ; le mettre au carré ; enlever 5 au résultat ; prendre le double du résultat obtenu.

On schématise ce programme de calcul à l'aide de trois « machines à calculer » :

- la machine **c**, qui met au carré ;
- la machine **d**, qui calcule le double ;
- la machine **e**, qui enlève 5.

On choisit -3 comme nombre de départ.

Voici le schéma obtenu.



Vocabulaire : En mathématiques, on « machine à calculer » sont des fonctions.

3. Recopier et compléter ce schéma.

4. a) Que devient le nombre 11 si on lui applique la fonction **e** ?

Y a-t-il plusieurs résultats possibles ?

b) Quelle est l'image de 2 par la fonction **e** ?

Recopier et compléter : **e** : ... → ... ou **e**(...) = ...

c) Quelle est l'image de -2,8 par la fonction **d** ?

Recopier et compléter : **d** : ... → ... ou **d**(...) = ...

5. a) À quel(s) nombre(s) peut-on appliquer la fonction **e** pour obtenir 25 ?

b) Quel est l'antécédent de 17 par la fonction **d** ?

Vocabulaire : Le résultat obtenu est l'image de 11 par la fonction **c**. On note $c(11) = 121$ ou $d(11) = 121$.

Vocabulaire : Ces nombres sont les antécédents de 25 par la fonction **e**.

0 **Bilan :** Avec les fonctions **c** et **d** ci-dessus, on a :

$$c : x \mapsto \dots ; d : x \mapsto \dots$$

$$c(3) = 9, \text{ donc } 3 \text{ a pour } \dots 9 \text{ et } 9 \text{ est un } \dots \text{ de } 3.$$

Activité 2 Tableau de valeurs

Les deux tableaux ci-dessous ont pour ensemble à définir les points de la droite \mathbb{R}^2 .

Un deuxième couple (x, y) est toujours obtenu de x par la fonction **e**.

On considère deux fonctions **f** et **g** qui, à un point (x, y) de \mathbb{R}^2 , associent respectivement les coordonnées x et y de ce point.

On note $f(x, y) = x$ et $g(x, y) = y$.

1. En observant les tableaux ci-dessus, quels sont les couples (x, y) qui sont dans l'ensemble à définir ?

2. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(1, 2)$?

3. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(-1, 2)$?

4. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(2, 2)$?

5. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(2, -1)$?

6. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(-2, -1)$?

7. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(-2, 1)$?

8. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(1, 1)$?

9. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(-1, 1)$?

10. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(1, -1)$?

11. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(-1, -1)$?

12. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(2, 1)$?

13. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(-2, 1)$?

14. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(2, -1)$?

15. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(-2, -1)$?

16. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(1, 1)$?

17. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(-1, 1)$?

18. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(1, -1)$?

19. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(-1, -1)$?

20. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(2, 1)$?

21. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(-2, 1)$?

22. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(2, -1)$?

23. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(-2, -1)$?

24. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(1, 1)$?

25. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(-1, 1)$?

26. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(1, -1)$?

27. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(-1, -1)$?

28. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(2, 1)$?

29. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(-2, 1)$?

30. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(2, -1)$?

31. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(-2, -1)$?

32. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(1, 1)$?

33. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(-1, 1)$?

34. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(1, -1)$?

35. À quel couple (x, y) associe la fonction **e** le couple $(-1, -1)$?

x	20	21	22
y	20	21	22

x	17	20	2
y	17	20	2

0 **Bilan :** La fonction **e** associe à un couple (x, y) le couple (x, y) .

Activité 3 Courbe représentative

Voici la courbe représentative d'une fonction **f** qui associe à un réel x un réel $f(x)$.

On considère la fonction **f** qui associe à un réel x un réel $f(x)$.

On considère la fonction **f** qui associe à un réel x un réel $f(x)$.

On considère la fonction **f** qui associe à un réel x un réel $f(x)$.

On considère la fonction **f** qui associe à un réel x un réel $f(x)$.

On considère la fonction **f** qui associe à un réel x un réel $f(x)$.

On considère la fonction **f** qui associe à un réel x un réel $f(x)$.

On considère la fonction **f** qui associe à un réel x un réel $f(x)$.

On considère la fonction **f** qui associe à un réel x un réel $f(x)$.

On considère la fonction **f** qui associe à un réel x un réel $f(x)$.

On considère la fonction **f** qui associe à un réel x un réel $f(x)$.

On considère la fonction **f** qui associe à un réel x un réel $f(x)$.

On considère la fonction **f** qui associe à un réel x un réel $f(x)$.

On considère la fonction **f** qui associe à un réel x un réel $f(x)$.

On considère la fonction **f** qui associe à un réel x un réel $f(x)$.

On considère la fonction **f** qui associe à un réel x un réel $f(x)$.

On considère la fonction **f** qui associe à un réel x un réel $f(x)$.

On considère la fonction **f** qui associe à un réel x un réel $f(x)$.

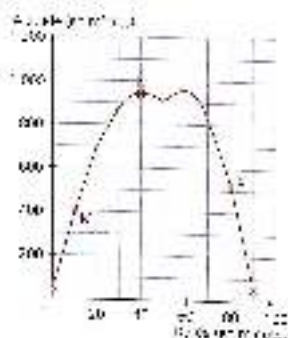
On considère la fonction **f** qui associe à un réel x un réel $f(x)$.

On considère la fonction **f** qui associe à un réel x un réel $f(x)$.

On considère la fonction **f** qui associe à un réel x un réel $f(x)$.

On considère la fonction **f** qui associe à un réel x un réel $f(x)$.

On considère la fonction **f** qui associe à un réel x un réel $f(x)$.



0 **Bilan :** Si x a pour image $f(x)$, on dit que x est un antécédent de $f(x)$ par la fonction **f**.

Mathématiques

collection
Zénius

3^e

**PRÉPARATION
AU BREVET**
Plus de 1 600 exercices
+ Livret Brevet



MAGNARD

ANNÉE DE 1970 À 2000		JANVIER	FÉVRIER	MARS	AVRIL	MAI	JUN	JUILLET	AOÛT	SEPTEMBRE	OCTOBRE	NOVEMBRE	DÉCEMBRE	a	b	COURS
1970	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199
1971	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212
1972	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227
1973	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242
1974	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257
1975	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272
1976	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287
1977	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302
1978	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317
1979	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332
1980	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347
1981	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362
1982	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377
1983	377	378	379	380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392
1984	392	393	394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404	405	406	407
1985	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	420	421	422
1986	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437
1987	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448	449	450	451	452
1988	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467
1989	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480	481	482
1990	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497
1991	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510	511	512
1992	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527
1993	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540	541	542
1994	542	543	544	545	546	547	548	549	550	551	552	553	554	555	556	557
1995	557	558	559	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570	571	572
1996	572	573	574	575	576	577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587
1997	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600	601	602
1998	602	603	604	605	606	607	608	609	610	611	612	613	614	615	616	617
1999	617	618	619	620	621	622	623	624	625	626	627	628	629	630	631	632
2000	632	633	634	635	636	637	638	639	640	641	642	643	644	645	646	647

Le tableau ci-dessus est un exemple de tableau de la semaine correspondante à la date. Les lettres J, M, A, S indiquent les jours de la semaine.

- rechercher l'année a dans l'une des colonnes de gauche,
- entre le a qui lui correspond dans la colonne du mois M ,
- après le mois M se trouve le nombre situé à l'intersection de la colonne M et de la ligne a qui est le jour de la semaine à laquelle correspond le jour de la semaine recherché.

Par exemple, le 26 octobre 1998 a été un **jeudi**.
 * Vérifier pour le reste du calendrier.
 * A l'aide de ce tableau, compléter le 1^{er} janvier 2007.
 * Rechercher, pour un jour donné, quel est le jour de la semaine correspondant à la date.
 * Rechercher l'ensemble des dates du 31 janvier 1997 au 31 décembre 2006.
 * Rechercher l'ensemble des jours de la semaine.

Ainsi, on est sûr de la précision de ce tableau. La France est le pays qui a le plus de jours de la semaine.

On peut également utiliser la touche de la racine carrée d'une valeur positive (ou d'un nombre complexe) et la touche de la puissance d'une valeur positive.

Par exemple, la touche $\sqrt{\quad}$ permet d'accéder à la racine carrée d'un nombre positif. On obtient le résultat en appuyant sur la touche de la racine carrée.

On obtient également le résultat en appuyant sur la touche de la puissance d'une valeur positive.

Toucher : $\sqrt{\quad}$ Affichage : $88888888 \sqrt{\quad} = 9$

Toucher : $2 \quad \sqrt{\quad}$ Affichage : $88888888 \sqrt{\quad} = 2894$

Toucher : $9 \quad 4 \quad \sqrt{\quad}$ Affichage : $88888888 \sqrt{\quad} = 17708$

On peut également utiliser la touche de la puissance d'une valeur positive et la touche de la racine carrée d'une valeur positive.

Fonctions déterminées par les touches d'une calculatrice

Les touches ci-dessous d'une calculatrice électronique déterminent les fonctions suivantes :

sin cos tan ln e^x 1/x

■ Fonctions déterminées par une formule explicite

Calculatrice : fonction $x \mapsto 1 \rightarrow 1$

$$f(x) = \frac{1}{22x - 1}$$

Calculatrice : fonction de la forme $f(x) = \frac{1}{22x - 1}$

Calculatrice : calcul du programme de calcul de la fonction $f(x)$, comme celle de la fonction $x \mapsto 1$ est complétée par une autre fonction $x \mapsto \frac{1}{22x - 1}$.

Calculatrice : fonction $f(x) = \frac{1}{22x - 1}$ en mode $f(x) = \frac{1}{22x - 1}$

Calculatrice : programme de calcul de la fonction $f(x)$ par la fonction $x \mapsto 1$ par un calcul de la fonction

Formule de f	Programme de calcul de $f(x)$	Schéma de calcul de $f(x)$
$f(x) = \frac{1}{22x - 1}$	<ul style="list-style-type: none"> - prendre x (clic 1) - multiplier les nombres par 22 - soustraire 1 - prendre l'inverse - prendre l'écran - Ou : Menu $\frac{1}{x}$ 	

Calculatrice : fonction $f(x) = \frac{1}{22x - 1}$

Calculatrice : résultat du calcul

Formule de g	Programme de calcul de $g(x)$	Schéma de calcul de $g(x)$
$g(x) = 5(x^2 - 4)$	<ul style="list-style-type: none"> - prendre x (clic 1) - élever au carré - soustraire 4 - multiplier par 5 - prendre l'écran - Ou : Menu x^2 	

Annexe O

Tâches pour introduire la notion de fonction en France

1 Évolution du climat

Remarque : les données sont en degrés Celsius.

André a travaillé pendant 4 ans dans une entreprise d'effacement de neige. Il a gagné 20 000 € l'année dernière. Les effectifs ont augmenté de 20 % et la demande de services a augmenté de 30 % par rapport à l'année dernière. Quel salaire propose-t-on à André ?

Le graphique ci-dessous représente le volume d'émission de dioxyde de carbone (CO_2) dans l'atmosphère (en milliards de tonnes) :

Le graphique ci-dessus représente la variation du volume d'émission de CO_2 dans l'atmosphère (en milliards de tonnes) par rapport à l'année 2000.



Source : Banque mondiale (Graphique élaboré par le Centre de données de la FAO, 2020)

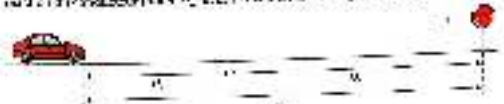
- 1 Quel sera le salaire proposé à André ?
- 2 Quel sera le salaire proposé à André si les effectifs de l'entreprise augmentent de 20 % ?
- 3 Quelle est la variation du volume d'émission de CO_2 dans l'atmosphère par rapport à l'année 2000 ?
- 4 Quelle est la variation du volume d'émission de CO_2 dans l'atmosphère par rapport à l'année 2000 si les effectifs de l'entreprise augmentent de 20 % ?
- 5 Quel sera le salaire proposé à André si les effectifs de l'entreprise augmentent de 20 % et si le volume d'émission de CO_2 dans l'atmosphère augmente de 30 % ?



2 Distance d'arrêt d'un véhicule

Remarque : la distance d'arrêt d'un véhicule est la somme de la distance de freinage et de la distance de réaction.

Un véhicule roule à 100 km/h sur une route droite. Le conducteur a réagi 0,7 s après avoir vu un obstacle à l'avance. Le véhicule a freiné pendant 2,3 s avant de s'arrêter. Quelle est la distance d'arrêt du véhicule ?



- 1 On suppose que la distance de réaction du conducteur est de 0,7 s. Quelle est la distance d'arrêt du véhicule ?
- 2 On suppose que la distance de réaction du conducteur est de 0,7 s. Quelle est la distance d'arrêt du véhicule si la vitesse du véhicule est de 120 km/h ?
- 3 On suppose que la distance de réaction du conducteur est de 0,7 s. Quelle est la distance d'arrêt du véhicule si la vitesse du véhicule est de 140 km/h ?

	Vitesse (km/h)	Temps de réaction (s)	Temps de freinage (s)	Distance de réaction (m)	Distance de freinage (m)	Distance d'arrêt (m)
1	100	0,7	2,3	19,25	19,25	38,5
2	120	0,7	2,3	28,8	28,8	57,6
3	140	0,7	2,3	39,2	39,2	78,4

- 4 On suppose que la distance de réaction du conducteur est de 0,7 s. Quelle est la distance d'arrêt du véhicule si la vitesse du véhicule est de 160 km/h ?
- 5 On suppose que la distance de réaction du conducteur est de 0,7 s. Quelle est la distance d'arrêt du véhicule si la vitesse du véhicule est de 180 km/h ?
- 6 On suppose que la distance de réaction du conducteur est de 0,7 s. Quelle est la distance d'arrêt du véhicule si la vitesse du véhicule est de 200 km/h ?



- 7 On suppose que la distance de réaction du conducteur est de 0,7 s. Quelle est la distance d'arrêt du véhicule si la vitesse du véhicule est de 220 km/h ?
- 8 On suppose que la distance de réaction du conducteur est de 0,7 s. Quelle est la distance d'arrêt du véhicule si la vitesse du véhicule est de 240 km/h ?
- 9 On suppose que la distance de réaction du conducteur est de 0,7 s. Quelle est la distance d'arrêt du véhicule si la vitesse du véhicule est de 260 km/h ?

L'élève a obtenu la solution 25

Savoir-faire

Savoir-faire 1 Calculer une image

ÉNONCÉ Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^2} - 2x + 3$. Calculer $f(2)$.

SOLUTION

$$f(2) = \frac{1}{2^2} - 2 \times 2 + 3$$

$$= \frac{1}{4} - 4 + 3$$

$$= \frac{1}{4} - 1$$

$$= -\frac{3}{4}$$

La fonction f a pour image de 2 le nombre $-\frac{3}{4}$.

► Exercices 1, 2, 3, 4, 5, 6

MÉTHODE

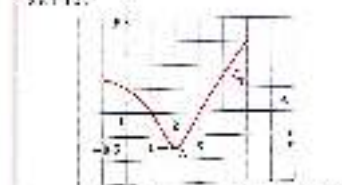
Remarque : la fonction f est définie par $f(x) = \frac{1}{x^2} - 2x + 3$. On a donc $f(2) = \frac{1}{2^2} - 2 \times 2 + 3$.

Savoir-faire 2 Lire un graphique

ÉNONCÉ Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Lire le graphique ci-dessous et répondre aux questions.

SOLUTION

- 1 Lire les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z.



2 Lire les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z.

► Exercices 1, 2, 3, 4, 5, 6

MÉTHODE

Remarque : la fonction f est définie par $f(x) = x^2 - 2x + 3$. On a donc $f(1) = 1^2 - 2 \times 1 + 3 = 2$. La fonction f a pour image de 1 le nombre 2.

Savoir-faire 3 Utiliser la calculatrice pour obtenir un tableau de valeurs et une courbe

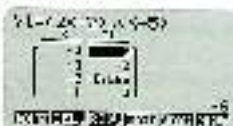
ÉNONCÉ Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Utiliser la calculatrice pour obtenir un tableau de valeurs et une courbe.

SOLUTION

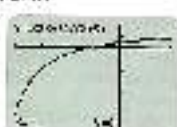
1. Calculer les valeurs de $f(x)$ pour $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

x	f(x)
0	3
1	2
2	3
3	6
4	11
5	18
6	27
7	38
8	51
9	66
10	83

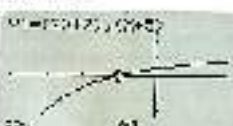
2. Tracer la courbe.



3. Lire les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z.



4. Lire les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z.



► Exercices 1, 2, 3, 4, 5, 6

MÉTHODE

Remarque : la fonction f est définie par $f(x) = x^2 - 2x + 3$. On a donc $f(0) = 0^2 - 2 \times 0 + 3 = 3$. La fonction f a pour image de 0 le nombre 3.

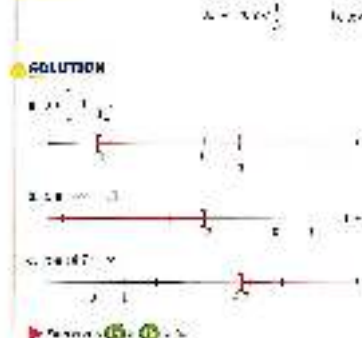
MÉTHODE

Remarque : la fonction f est définie par $f(x) = x^2 - 2x + 3$. On a donc $f(1) = 1^2 - 2 \times 1 + 3 = 2$. La fonction f a pour image de 1 le nombre 2.

Savoir-faire 4

Écrire sous forme d'intervalle les solutions d'une inégalité, d'un encadrement

ÉNONCÉ Soit une inégalité du type $ax + b < c$, $ax + b > c$, $ax + b \leq c$, $ax + b \geq c$.



MÉTHODE
On écrit sous forme d'intervalle les solutions de l'inégalité ou de l'encadrement. On utilise les symboles $<$, $>$, \leq , \geq pour les inégalités strictes et \leq , \geq pour les inégalités non strictes. On utilise les symboles $]$, $[$, $]$, $[$ pour les intervalles.

Savoir-faire 6

Résoudre graphiquement une équation

ÉNONCÉ Résoudre graphiquement une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$.

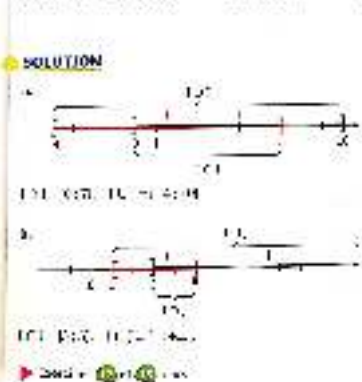


MÉTHODE
On résout graphiquement une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$ en trouvant les racines de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$. On trace la parabole $f(x)$ et on lit les abscisses des points d'intersection avec l'axe des abscisses. **Remarque** : Si la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses, l'équation n'a pas de solution réelle.

Savoir-faire 5

Déterminer l'intersection et la réunion de deux intervalles

ÉNONCÉ Soit deux intervalles $I_1 =]a; b[$ et $I_2 =]c; d[$.

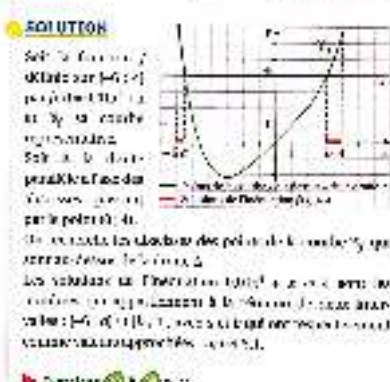


MÉTHODE
On trace les deux intervalles sur une droite graduée. L'intersection est la partie commune aux deux intervalles. La réunion est la partie comprise entre le plus petit et le plus grand des bornes.

Savoir-faire 7

Résoudre graphiquement une inéquation

ÉNONCÉ Résoudre graphiquement une inéquation du type $ax^2 + bx + c < 0$.



MÉTHODE
On résout graphiquement une inéquation du type $ax^2 + bx + c < 0$ en trouvant les racines de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$. On trace la parabole $f(x)$ et on lit les abscisses des points d'intersection avec l'axe des abscisses. On hachure la région comprise entre la parabole et l'axe des abscisses.

Savoir-faire 8

Déterminer graphiquement le signe d'une expression

ÉNONCÉ Soit une expression du type $ax^2 + bx + c$. Déterminer son signe.

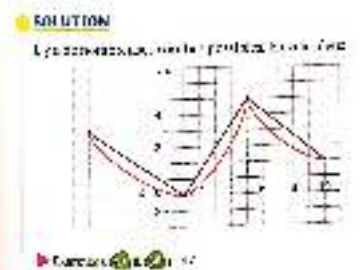


MÉTHODE
On résout graphiquement une inéquation du type $ax^2 + bx + c < 0$ en trouvant les racines de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$. On trace la parabole $f(x)$ et on lit les abscisses des points d'intersection avec l'axe des abscisses. On hachure la région comprise entre la parabole et l'axe des abscisses.

Savoir-faire 9

Proposer une allure de courbe à partir d'un tableau de variations

ÉNONCÉ Soit un tableau de variations. Proposer une allure de courbe.



MÉTHODE
On propose une allure de courbe qui respecte les variations indiquées dans le tableau de variations.

Savoir-faire 8

Déterminer graphiquement le signe d'une expression

ÉNONCÉ Soit une expression du type $ax^2 + bx + c$. Déterminer son signe.

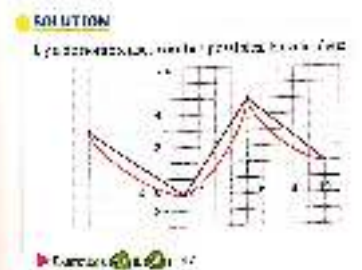


MÉTHODE
On résout graphiquement une inéquation du type $ax^2 + bx + c < 0$ en trouvant les racines de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$. On trace la parabole $f(x)$ et on lit les abscisses des points d'intersection avec l'axe des abscisses. On hachure la région comprise entre la parabole et l'axe des abscisses.

Savoir-faire 9

Proposer une allure de courbe à partir d'un tableau de variations

ÉNONCÉ Soit un tableau de variations. Proposer une allure de courbe.



MÉTHODE
On propose une allure de courbe qui respecte les variations indiquées dans le tableau de variations.

Annexe P

Premiers travaux réalisés en France avec les élèves

QUESTIONNAIRE

1. Quel est le but de cet exercice ?
 2. Quelles sont les données de l'énoncé ?
 3. Quelles sont les hypothèses ?
 4. Quelles sont les conclusions ?
 5. Quelles sont les méthodes utilisées ?

6. Quelles sont les difficultés rencontrées ?
 7. Quelles sont les solutions trouvées ?
 8. Quelles sont les remarques ?
 9. Quelles sont les conclusions ?
 10. Quelles sont les remarques ?

Question	OUI	NON	Autres
1. Quel est le but de cet exercice ?	X		
2. Quelles sont les données de l'énoncé ?	X		
3. Quelles sont les hypothèses ?		X	
4. Quelles sont les conclusions ?	X		
5. Quelles sont les méthodes utilisées ?		X	
6. Quelles sont les difficultés rencontrées ?		X	
7. Quelles sont les solutions trouvées ?		X	
8. Quelles sont les remarques ?		X	
9. Quelles sont les conclusions ?		X	
10. Quelles sont les remarques ?		X	

QUESTIONNAIRE

1. Quel est le but de cet exercice ?
 2. Quelles sont les données de l'énoncé ?
 3. Quelles sont les hypothèses ?
 4. Quelles sont les conclusions ?
 5. Quelles sont les méthodes utilisées ?

6. Quelles sont les difficultés rencontrées ?
 7. Quelles sont les solutions trouvées ?
 8. Quelles sont les remarques ?
 9. Quelles sont les conclusions ?
 10. Quelles sont les remarques ?

Question	OUI	NON	Autres
1. Quel est le but de cet exercice ?	X		
2. Quelles sont les données de l'énoncé ?	X		
3. Quelles sont les hypothèses ?		X	
4. Quelles sont les conclusions ?	X		
5. Quelles sont les méthodes utilisées ?		X	
6. Quelles sont les difficultés rencontrées ?		X	
7. Quelles sont les solutions trouvées ?		X	
8. Quelles sont les remarques ?		X	
9. Quelles sont les conclusions ?		X	
10. Quelles sont les remarques ?	X		

QUESTIONNAIRE

1. Quel est le but de cet exercice ?
 2. Quelles sont les données de l'énoncé ?
 3. Quelles sont les hypothèses ?
 4. Quelles sont les conclusions ?
 5. Quelles sont les méthodes utilisées ?

6. Quelles sont les difficultés rencontrées ?
 7. Quelles sont les solutions trouvées ?
 8. Quelles sont les remarques ?
 9. Quelles sont les conclusions ?
 10. Quelles sont les remarques ?

Question	OUI	NON	Autres
1. Quel est le but de cet exercice ?	X		
2. Quelles sont les données de l'énoncé ?	X		
3. Quelles sont les hypothèses ?		X	
4. Quelles sont les conclusions ?	X		
5. Quelles sont les méthodes utilisées ?		X	
6. Quelles sont les difficultés rencontrées ?		X	
7. Quelles sont les solutions trouvées ?		X	
8. Quelles sont les remarques ?		X	
9. Quelles sont les conclusions ?		X	
10. Quelles sont les remarques ?	X		

QUESTIONNAIRE

1. Quel est le but de cet exercice ?
 2. Quelles sont les données de l'énoncé ?
 3. Quelles sont les hypothèses ?
 4. Quelles sont les conclusions ?
 5. Quelles sont les méthodes utilisées ?

6. Quelles sont les difficultés rencontrées ?
 7. Quelles sont les solutions trouvées ?
 8. Quelles sont les remarques ?
 9. Quelles sont les conclusions ?
 10. Quelles sont les remarques ?

Question	OUI	NON	Autres
1. Quel est le but de cet exercice ?	X		
2. Quelles sont les données de l'énoncé ?	X		
3. Quelles sont les hypothèses ?		X	
4. Quelles sont les conclusions ?	X		
5. Quelles sont les méthodes utilisées ?		X	
6. Quelles sont les difficultés rencontrées ?		X	
7. Quelles sont les solutions trouvées ?		X	
8. Quelles sont les remarques ?		X	
9. Quelles sont les conclusions ?		X	
10. Quelles sont les remarques ?	X		

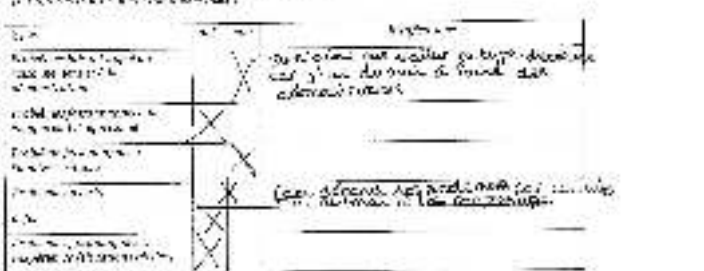
THEME 1 : Les nombres relatifs

1.1.2. Les opérations
 On a vu que l'addition et la soustraction sont des opérations qui permettent de passer d'un nombre relatif à un autre. On va maintenant voir comment multiplier et diviser des nombres relatifs.
 On a vu que la multiplication est une opération qui permet de passer d'un nombre relatif à un autre. On va maintenant voir comment diviser des nombres relatifs.
 On a vu que la division est une opération qui permet de passer d'un nombre relatif à un autre. On va maintenant voir comment multiplier et diviser des nombres relatifs.

1.1.3. Les puissances
 On a vu que la puissance est une opération qui permet de passer d'un nombre relatif à un autre. On va maintenant voir comment multiplier et diviser des nombres relatifs.

1.1.4. Les racines carrées
 On a vu que la racine carrée est une opération qui permet de passer d'un nombre relatif à un autre. On va maintenant voir comment multiplier et diviser des nombres relatifs.

1.1.5. Les fractions
 On a vu que la fraction est une opération qui permet de passer d'un nombre relatif à un autre. On va maintenant voir comment multiplier et diviser des nombres relatifs.



1.1.6. Les nombres relatifs
 On a vu que les nombres relatifs sont des nombres qui peuvent être positifs ou négatifs. On va maintenant voir comment multiplier et diviser des nombres relatifs.

THEME 2 : Les fractions

2.1.1. Les fractions
 On a vu que la fraction est une opération qui permet de passer d'un nombre relatif à un autre. On va maintenant voir comment multiplier et diviser des nombres relatifs.

2.1.2. Les opérations
 On a vu que l'addition et la soustraction sont des opérations qui permettent de passer d'un nombre relatif à un autre. On va maintenant voir comment multiplier et diviser des nombres relatifs.

2.1.3. Les puissances
 On a vu que la puissance est une opération qui permet de passer d'un nombre relatif à un autre. On va maintenant voir comment multiplier et diviser des nombres relatifs.

2.1.4. Les racines carrées
 On a vu que la racine carrée est une opération qui permet de passer d'un nombre relatif à un autre. On va maintenant voir comment multiplier et diviser des nombres relatifs.

2.1.5. Les fractions
 On a vu que la fraction est une opération qui permet de passer d'un nombre relatif à un autre. On va maintenant voir comment multiplier et diviser des nombres relatifs.



2.1.6. Les nombres relatifs
 On a vu que les nombres relatifs sont des nombres qui peuvent être positifs ou négatifs. On va maintenant voir comment multiplier et diviser des nombres relatifs.

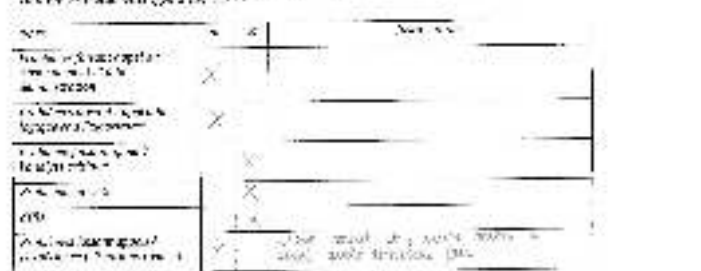
THEME 3 : Les nombres relatifs

3.1.1. Les opérations
 On a vu que l'addition et la soustraction sont des opérations qui permettent de passer d'un nombre relatif à un autre. On va maintenant voir comment multiplier et diviser des nombres relatifs.
 On a vu que la multiplication est une opération qui permet de passer d'un nombre relatif à un autre. On va maintenant voir comment diviser des nombres relatifs.
 On a vu que la division est une opération qui permet de passer d'un nombre relatif à un autre. On va maintenant voir comment multiplier et diviser des nombres relatifs.

3.1.2. Les puissances
 On a vu que la puissance est une opération qui permet de passer d'un nombre relatif à un autre. On va maintenant voir comment multiplier et diviser des nombres relatifs.

3.1.3. Les racines carrées
 On a vu que la racine carrée est une opération qui permet de passer d'un nombre relatif à un autre. On va maintenant voir comment multiplier et diviser des nombres relatifs.

3.1.4. Les fractions
 On a vu que la fraction est une opération qui permet de passer d'un nombre relatif à un autre. On va maintenant voir comment multiplier et diviser des nombres relatifs.



3.1.5. Les nombres relatifs
 On a vu que les nombres relatifs sont des nombres qui peuvent être positifs ou négatifs. On va maintenant voir comment multiplier et diviser des nombres relatifs.

THEME 4 : Les fractions

4.1.1. Les fractions
 On a vu que la fraction est une opération qui permet de passer d'un nombre relatif à un autre. On va maintenant voir comment multiplier et diviser des nombres relatifs.

4.1.2. Les opérations
 On a vu que l'addition et la soustraction sont des opérations qui permettent de passer d'un nombre relatif à un autre. On va maintenant voir comment multiplier et diviser des nombres relatifs.

4.1.3. Les puissances
 On a vu que la puissance est une opération qui permet de passer d'un nombre relatif à un autre. On va maintenant voir comment multiplier et diviser des nombres relatifs.

4.1.4. Les racines carrées
 On a vu que la racine carrée est une opération qui permet de passer d'un nombre relatif à un autre. On va maintenant voir comment multiplier et diviser des nombres relatifs.

4.1.5. Les fractions
 On a vu que la fraction est une opération qui permet de passer d'un nombre relatif à un autre. On va maintenant voir comment multiplier et diviser des nombres relatifs.



4.1.6. Les nombres relatifs
 On a vu que les nombres relatifs sont des nombres qui peuvent être positifs ou négatifs. On va maintenant voir comment multiplier et diviser des nombres relatifs.

Handwritten signature or initials.

EXERCÍCIO 1

1.1. Um sistema de equações lineares é dado por:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$$

1.2. Classifique o sistema quanto ao número de soluções.

Resolução:

1.1.1. Matriz dos coeficientes A e vetor termo b :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1.1.2. Cálculo do determinante de A :

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1(4-9) - 1(4-3) + 1(4-6) = -5 - 1 - 2 = -8 \neq 0$$

1.2. Como $\Delta A \neq 0$, o sistema possui uma única solução.

Equação	Grado	Grado	Grado
1.1.1.1	1	1	1
1.1.1.2	1	2	3
1.1.1.3	1	3	4
1.1.1.4	1	3	4
1.1.1.5	1	3	4
1.1.1.6	1	3	4
1.1.1.7	1	3	4
1.1.1.8	1	3	4
1.1.1.9	1	3	4
1.1.1.10	1	3	4
1.1.1.11	1	3	4
1.1.1.12	1	3	4
1.1.1.13	1	3	4
1.1.1.14	1	3	4
1.1.1.15	1	3	4
1.1.1.16	1	3	4
1.1.1.17	1	3	4
1.1.1.18	1	3	4
1.1.1.19	1	3	4
1.1.1.20	1	3	4

EXERCÍCIO 2

2.1. Um sistema de equações lineares é dado por:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$$

2.2. Classifique o sistema quanto ao número de soluções.

Resolução:

2.1.1. Matriz dos coeficientes A e vetor termo b :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2.1.2. Cálculo do determinante de A :

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1(4-9) - 1(4-3) + 1(4-6) = -5 - 1 - 2 = -8 \neq 0$$

2.2. Como $\Delta A \neq 0$, o sistema possui uma única solução.

Equação	Grado	Grado	Grado
2.1.1.1	1	1	1
2.1.1.2	1	2	3
2.1.1.3	1	3	4
2.1.1.4	1	3	4
2.1.1.5	1	3	4
2.1.1.6	1	3	4
2.1.1.7	1	3	4
2.1.1.8	1	3	4
2.1.1.9	1	3	4
2.1.1.10	1	3	4
2.1.1.11	1	3	4
2.1.1.12	1	3	4
2.1.1.13	1	3	4
2.1.1.14	1	3	4
2.1.1.15	1	3	4
2.1.1.16	1	3	4
2.1.1.17	1	3	4
2.1.1.18	1	3	4
2.1.1.19	1	3	4
2.1.1.20	1	3	4

EXERCÍCIO 3

3.1. Um sistema de equações lineares é dado por:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$$

3.2. Classifique o sistema quanto ao número de soluções.

Resolução:

3.1.1. Matriz dos coeficientes A e vetor termo b :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3.1.2. Cálculo do determinante de A :

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1(4-9) - 1(4-3) + 1(4-6) = -5 - 1 - 2 = -8 \neq 0$$

3.2. Como $\Delta A \neq 0$, o sistema possui uma única solução.

Equação	Grado	Grado	Grado
3.1.1.1	1	1	1
3.1.1.2	1	2	3
3.1.1.3	1	3	4
3.1.1.4	1	3	4
3.1.1.5	1	3	4
3.1.1.6	1	3	4
3.1.1.7	1	3	4
3.1.1.8	1	3	4
3.1.1.9	1	3	4
3.1.1.10	1	3	4
3.1.1.11	1	3	4
3.1.1.12	1	3	4
3.1.1.13	1	3	4
3.1.1.14	1	3	4
3.1.1.15	1	3	4
3.1.1.16	1	3	4
3.1.1.17	1	3	4
3.1.1.18	1	3	4
3.1.1.19	1	3	4
3.1.1.20	1	3	4

EXERCÍCIO 4

4.1. Um sistema de equações lineares é dado por:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$$

4.2. Classifique o sistema quanto ao número de soluções.

Resolução:

4.1.1. Matriz dos coeficientes A e vetor termo b :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4.1.2. Cálculo do determinante de A :

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1(4-9) - 1(4-3) + 1(4-6) = -5 - 1 - 2 = -8 \neq 0$$

4.2. Como $\Delta A \neq 0$, o sistema possui uma única solução.

Equação	Grado	Grado	Grado
4.1.1.1	1	1	1
4.1.1.2	1	2	3
4.1.1.3	1	3	4
4.1.1.4	1	3	4
4.1.1.5	1	3	4
4.1.1.6	1	3	4
4.1.1.7	1	3	4
4.1.1.8	1	3	4
4.1.1.9	1	3	4
4.1.1.10	1	3	4
4.1.1.11	1	3	4
4.1.1.12	1	3	4
4.1.1.13	1	3	4
4.1.1.14	1	3	4
4.1.1.15	1	3	4
4.1.1.16	1	3	4
4.1.1.17	1	3	4
4.1.1.18	1	3	4
4.1.1.19	1	3	4
4.1.1.20	1	3	4

NOTES :

Quelle est la définition d'une fonction ?
 Une fonction est une relation entre deux ensembles.
 On note $f: A \rightarrow B$ une fonction de A vers B .

- Une fonction est une relation entre deux ensembles A et B telle que pour tout $x \in A$, il existe un unique $y \in B$ tel que $(x, y) \in f$.
- On note $f: A \rightarrow B$ une fonction de A vers B .
- On note $f(x)$ l'image de x par f .
- On note $f^{-1}(y)$ l'ensemble des antécédents de y .

Exercice 1 :

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + 1$.
 Calculer $f(3)$ et $f^{-1}(7)$.

- On a $f(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$.
- On a $f^{-1}(7) = \frac{7 - 1}{2} = 3$.

Quelle est la définition d'une fonction injective ?
 Une fonction $f: A \rightarrow B$ est dite injective si et seulement si pour tout $x, y \in A$, $x \neq y$ implique $f(x) \neq f(y)$.


	Injective	Surjective	Bijection
Une fonction $f: A \rightarrow B$ est dite injective si et seulement si pour tout $x, y \in A$, $x \neq y$ implique $f(x) \neq f(y)$.	X		
Une fonction $f: A \rightarrow B$ est dite surjective si et seulement si pour tout $y \in B$, il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$.		X	
Une fonction $f: A \rightarrow B$ est dite bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.	X	X	X
Une fonction $f: A \rightarrow B$ est dite injective et surjective si et seulement si elle est bijective.	X	X	X

Quelle est la définition d'une fonction continue ?
 Une fonction $f: A \rightarrow B$ est dite continue si et seulement si pour tout $x_0 \in A$, $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $|x - x_0| < \delta$ implique $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Annexe Q

Premiers travaux réalisés en France avec les enseignants

On considère la fonction \$f\$ définie sur \$\mathbb{R}\$ par \$f(x) = x^2 - 4x + 5\$.
 1) Déterminez l'ensemble des valeurs de \$x\$ pour lesquelles \$f(x) \le 0\$.
 2) Déterminez l'ensemble des valeurs de \$x\$ pour lesquelles \$f(x) \ge 0\$.
 3) Déterminez l'ensemble des valeurs de \$x\$ pour lesquelles \$f(x) = 0\$.


<p>Question</p> <p>Quelle est l'aire d'un disque de rayon \$r\$?</p> 	<p>Réponse</p> <p>On sait que l'aire d'un disque de rayon \$r\$ est donnée par la formule \$A = \pi r^2\$.</p> <p>Donc, si \$r = 3\$, alors \$A = \pi \cdot 3^2 = 9\pi\$.</p>
--	--

<p>Question</p> <p>Quelle est la solution de l'équation \$x^2 - 5x + 6 = 0\$?</p>	<p>Réponse</p> <p>On peut résoudre cette équation en utilisant la méthode du discriminant. Ici, \$a=1, b=-5, c=6\$. $\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1$. $x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$. Les solutions sont \$x=2\$ et \$x=3\$.</p>
---	--

On considère la fonction \$f\$ définie sur \$\mathbb{R}\$ par \$f(x) = x^2 - 4x + 5\$.
 1) Déterminez l'ensemble des valeurs de \$x\$ pour lesquelles \$f(x) \le 0\$.
 2) Déterminez l'ensemble des valeurs de \$x\$ pour lesquelles \$f(x) \ge 0\$.
 3) Déterminez l'ensemble des valeurs de \$x\$ pour lesquelles \$f(x) = 0\$.

Exercice

Soit la fonction \$f\$ définie sur \$\mathbb{R}\$ par \$f(x) = x^2 - 4x + 5\$.



Quelle est la solution de l'équation \$f(x) = 0\$?

On considère la fonction \$f\$ définie sur \$\mathbb{R}\$ par \$f(x) = x^2 - 4x + 5\$.
 1) Déterminez l'ensemble des valeurs de \$x\$ pour lesquelles \$f(x) \le 0\$.
 2) Déterminez l'ensemble des valeurs de \$x\$ pour lesquelles \$f(x) \ge 0\$.
 3) Déterminez l'ensemble des valeurs de \$x\$ pour lesquelles \$f(x) = 0\$.

<p>Question</p> <p>Quelle est la solution de l'équation \$x^2 - 5x + 6 = 0\$?</p>	<p>Réponse</p> <p>On peut résoudre cette équation en utilisant la méthode du discriminant. Ici, \$a=1, b=-5, c=6\$. $\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1$. $x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$. Les solutions sont \$x=2\$ et \$x=3\$.</p>
---	--

<p>Question</p> <p>Quelle est la solution de l'équation \$x^2 - 5x + 6 = 0\$?</p>	<p>Réponse</p> <p>On peut résoudre cette équation en utilisant la méthode du discriminant. Ici, \$a=1, b=-5, c=6\$. $\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1$. $x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$. Les solutions sont \$x=2\$ et \$x=3\$.</p>
---	--

On considère la fonction \$f\$ définie sur \$\mathbb{R}\$ par \$f(x) = x^2 - 4x + 5\$.
 1) Déterminez l'ensemble des valeurs de \$x\$ pour lesquelles \$f(x) \le 0\$.
 2) Déterminez l'ensemble des valeurs de \$x\$ pour lesquelles \$f(x) \ge 0\$.
 3) Déterminez l'ensemble des valeurs de \$x\$ pour lesquelles \$f(x) = 0\$.

Question	Réponse
Quelle est la solution de l'équation \$x^2 - 5x + 6 = 0\$?	Les solutions sont \$x=2\$ et \$x=3\$.
Quelle est la solution de l'équation \$x^2 - 5x + 6 = 0\$?	Les solutions sont \$x=2\$ et \$x=3\$.
Quelle est la solution de l'équation \$x^2 - 5x + 6 = 0\$?	Les solutions sont \$x=2\$ et \$x=3\$.
Quelle est la solution de l'équation \$x^2 - 5x + 6 = 0\$?	Les solutions sont \$x=2\$ et \$x=3\$.

Bibliographie

- [1] C.B, Boyer. (1959). The History of the Calculus and its Conceptual Development (1939). N.Y.,(3rd ed.)
- [2] D.E, Smith. (1958). History of Mathematics, v. 1 (1923).
- [3] W. Hartner et M. Schramm, Al-Biruni. (1963). The theory of the solar apogee : an example of originality in Arabic Science. In : Scientific change, ed. by A.C.Crombie. London, 1963, 206-218.
- [4] O. Pedersen. (1974). Logistics and the Theory of Functions. Arch. Intern. d’Hist. d. Sciences, IA, N. 94, (p. 29-50).
- [5] N. Bourbaki. (1969) Eléments d’histoire des mathématiques. 2^e éd. revue, corrigée, augmentée. Paris,
- [6] Nicole Oresme. (1958). and the Medieval Geometry of Qualities and Motions. A Treatise on the Uniformity and Difformity of Intensities known as Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum. Ed. by M. Clagett. Madison, Milwaukee et London 1968. - Russ. ed. by V. P. Zoubov in I storicomatematicheskije issledovania, vol. XI, 601-731
- [7] Oeuvres de Fermat. (1891). éd. P. Tannery et Ch. Henry, 1. 1, Paris.
- [8] A, Sfard. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification – the case of function. Dans G, Harel. et E, Dubinsky, (dir.), *The concept of function : aspects of epistemology and pedagogy* (p. 59-84). Mathematical Association of America.
- [9] Oeuvres de Descartes. (1903). éd. Ch. Adam et P. Tannery, t. VI, Paris, 1903.
- [10] H, Gringoz et F, Weyermann. (2019). *Le manuel sésamath cinquième avec ses compléments numériques* (édition 2010.). MAGNARD. (p. 67).
- [11] H, Gringoz et F, Weyermann. (2019). *Mathématiques première, enseignement de spécialité* (édition 2019.). MAGNARD. (p. 172-176).
- [12] Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., Nichols, D, “Development of the process conception of function”, Educational Studies in Mathematics, 23, 247-285, 1992.
- [13] M, Kryszynska et M, Schneider. (2010). *Émergence de modèles fonctionnels*. Presses universitaires de Liège.(p. 112)
- [14] Y, Chevallard. (1999). *L’analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*. Recherche en Didactique des Mathématiques, vol 19 (2), La Pensée Sauvage, p. 221-266.
- [15] ALEXANDER, B.-M, A (2019). les interprétations et représentations de la notion de fonction chez les futurs enseignants de mathématiques au secondaire.

- [16] Annie, B. (2015). Pourquoi s'intéresser aux transitions entre cycles d'enseignement ? Comment problématiser les phénomènes didactiques liés à ces transitions ? *Cinquième Colloque International Franco-Vietnamien en Didactique des Mathématiques*. HUE, Vietnam.
- [17] LEONHARDI EULERI Opera omnia, ser. IT, vol. X, ed. F. STÜSSI et H.FAVRE, 1947.
- [18] Artigue, M. (1990). Épistémologie et didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, Cahier de DIDIREM, IREM de Paris. (p. 241-286).
- [19] Artigue, M. (1993). Enseignement de l'analyse et fonction de référence. *Re-pères IREM*, n. 11. Metz : Topiques éditions.
- [20] Artigue, M., Lenfant, A. Roditi, E. (2011). *La confrontation de cadres théoriques dans l'analyse didactique de vidéos réalisées dans des classes*. <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00609701>.
- [21] Arzarello, F et Sabena, C. (2014). Analytic-Structural Functions of Gestures in Mathematical Argumentation Processes et dans, F, Edwards., F, Ferrara, et D, Moore-Russo (dir.), *Mathematical argumentation process*. Information Age Publishing. (p. 75-103)
- [22] Arzarello, S (2017)
- [23] Oeuvres de J. L. Lagrange, publiées par J. A. SERRET, t. IX. Paris, 1881. F. Actes du séminaire national de l'ARDM. (p. 6-25).
- [24] ARZARELLO, F. et PAOLA, D. (2007). Semiotic Games : the role of the teacher. In : J, WOO., H, LEW., K, PARK., et D, SEO. (dir.). Proceedings of the 31th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2. Seoul, Korea : The Korean Society of Educational Studies in Mathematics. (p. 17-24).
- [25] ARZARELLO , F., et SABENA, C. (2014). Analytic-Structural Functions of Gestures in Mathematical Argumentation Processes. Dans : L.-D EDWARDS., F, FERARRA., et M. MOORE-RUSSO. (Editors), *Emerging perspectives on gesture and embodiment*, Charlotte, ISBN : 9781623965532. (p. 75-103).
- [26] Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique : contribution à une psychanalyse de la connaissance*. Vrin.
- [27] Balachef, N. (1995). *Conception, connaissance et concept*. Dans : Denise Grenier (ed.) Séminaire Didactique et technologies cognitives en mathématiques (p. 219-244). IMAG.
- [28] Baptiste, J.-L et Abboud, M (2018). (dir.), Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz n°19. (p. 20)
- [29] The Mathematical Papers of Isaac Newton, Vol. IIE, 1670-1673. Ed. by D.T. WHITESIDE with the assistance ... Of M. A. Hoskin et A. PRAG. Cambridge, 1969.
- [30] Baranger, J. (1977) *Introduction à l'analyse numérique*. Hermann. (p. 1-6).
- [31] Barrier, T. et Chambris, C. (2017) Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. IREM de Paris – Université Paris Diderot, 2019.
- [32] Baruk, S. (1995) *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*. Éditions du Seuil.
- [33] Besnier, J.-M. (2016). *Les théories de la connaissance*. col. Que sais-je ?. Presses Universitaires de France.

- [34] Bloch, I. (2000). *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée / université. Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation* [thèse de doctorat, Université Sciences et Technologies - Bordeaux I] [https : tel.archives-ouvertes.fr/tel-00012151/document](https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00012151/document)(p. 32-34)
- [35] Bloch, I. (2002). *Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycée* *Petit x*, 58,(p. 25-46).
- [36] Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Dans J, Vanhamme. et W, Vanhamme. (éd.), *La problématique et l'enseignement des mathématiques. Comptes rendus de la 27^e rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (p. 101-117). Louvain la Neuve.
- [37] Brousseau, G. (1997). La théorie des situations didactiques. Le cours de Montréal 1997. Récupéré de [http :/lguy-brousseau.com/1694/la theorie des situations didactiques](http://lguy-brousseau.com/1694/la_theorie_des_situations_didactiques), le cours de montreal.
- [38] Chesnais, A., Grenier-Boley, N., Horoks, J et Robert, A. (2015). Caractérisation didactique de l'évolution des contenus à enseigner lors des transitions – deux exemples d'une même notion abordée avant et après une transition (symétrie et fonction). Dans L, Theis (Dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF – Spé3, (p. 970-981)
- [39] Charbonneau, L. (1987a). Chronique : l'histoire des mathématiques. Première partie, fonction : du statisme grec au dynamisme du début du 18^e siècle. *Bulletin de l'AMQ*. (p. 5-8).
- [40] A.L. CAUCHY, Oeuvres complètes, 2 sér., vol. III, Paris, 1897.
- [41] Chauvat, G. (1999). Courbes et fonctions au collège. *Petit x*, (p. 51,23-44).
- [42] Chesnais, A., Grenier-Boley, N., Horoks, J et Robert, A. (2015). Caractérisation didactique de l'évolution des contenus à enseigner lors des transitions, deux exemples d'une même notion abordée avant et après une transition : *l'exemple des fonctions*. (p. 972-973). [https :hal.archives-ouvertes.fr/hal-01720627](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01720627)
- [43] Chevallard, Y. (1999). *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*. Recherche en Didactique des Mathématiques, vol 19 (2), La Pensée Sauvage, (p. 221-266).
- [44] Chevallard, Y. (1992). *Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique*. Recherches en didactique des mathématiques, (p. 12,73-112).
- [45] Comin, E. (2005). Variables et fonctions, du collège au lycée. *Petit x*, (p. 67, 33-61).
- [46] Conne, F. (1992), *Connaissance et savoir dans la perspective de la transposition didactique*. Recherches en didactique des mathématiques. La Pensée Sauvage (p. 221-270).
- [47] Coppé, S., Dorier, J.-L., et Yavuz, I. (2007). De l'usage des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans l'enseignement. De la notion de fonction en France en seconde. *Recherches en didactique des mathématiques*, 27(2), (p. 151-186).
- [48] P.G. LEJEUNE-DIRICHLET, Gesammelte Werke, Bd.I. Berlin, 1889 (Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données (1829), 117-132; Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen (1837), 133-160.

- [49] Magnani, E. (2017). Qu'est-ce qu'un corpus? Compte-rendu de la journée d'études, [enligne] <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01610087/document>, (consulté le 14/11/2021).
- [50] Davis, P et Hersh, R. (1983). *The Mathematical Experience*. Birkhauser. (p. 35)
- [51] De Cotret, S.-R. (1985). Étude historique de la notion de fonction : analyse épistémologique et expérimentation didactique. [Mémoire de maîtrise]. Université du Québec à Montréal.
- [52] De Cotret, S.-R. (1988). Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante. *Petit x*, (17) (p. 5-27).
- [53] Douady, R. (1986). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques. Une réalisation dans tout le cursus primaire*. [thèse de doctorat, université Paris VII]. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01250665>
- [54] Douady, R. (1986). *Jeux de cadres et dialectique outil/ objet*. Recherche en Didactique des Mathématiques, vol 7 (2), La Pensée Sauvage. (p. 5-32).
- [55] LEONHARDI EULERI Opera omnia, ser. I, vol. *IX*, ed. A.SPEISER, 1945.
- [56] LEONHARDI EULERI Opera omnia, ser. I, vol. *XXIII*, ed. H. DuLac, 1938.
- [57] LEONHARDI EULERI Opera Omnia, ser. I, vol. *VIII*, ed. A. KRAZER et F. RUDIO, 1922.
- [58] L'GRATTAN-GUINNESS in collaboration with J.R.RAVETZ, Joseph Fourier. 1768-1830. Cambridge, Mass.-London, 1972.
- [59] Fermat, P (1896). de Fermat, volume 3 de : P, Tannery (dir.). Gauthier-Villars.
- [60] Frege, G. (1969). *Les Fondements de l'arithmétique*, trad. Claude Imbert, *L'ordre philosophique*. Seuil
- [61] Gaudin, N. (2005) *Place de la validation dans la conceptualisation, le cas du concept de fonction* [thèse de doctorat, université Joseph Fourier – Grenoble 1]. <https://tel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/113100/filename/docprincipal.pdf>
- [62] Gringoz, H. et Weyermann, F. (2019). *Mathématiques première, enseignement de spécialité*. MAGNARD.(p. 172-176). <https://www.enseignants.magnard.fr/livre/9782210111653-maths-seconde-2019-manuel-eleve>.
- [63] Gringoz, H. et Weyermann, F. (2019). *Le manuel sésamath cinquième avec ses compléments numériques* (édition 2010.). MAGNARD.(p. 67). <https://www.enseignants.magnard.fr/numerique/9782210112827-maths-2de-2019-manuel-numerique-eleve>
- [64] Krysinska, M et Schneider, M. (2010). *Émergence de modèles fonctionnels*. Presses universitaires de Liège.
- [65] Hume, D. (1983). *Enquête sur l'entendement humain*, (trad. A. Leroy). GF-Flammarion.
- [66] Groupement national d'équipes de recherche en didactique des mathématiques.(1992). Algèbre et fonctions. Texte imprimé ; Ministère de l'éducation nationale, de la recherche et de la technologie, Direction de l'enseignement scolaire, Bureau de la valorisation des innovations pédagogiques (p. 18-24)
- [67] Jameau, A. (2012). *Les connaissances mobilisées par les enseignants dans l'enseignement des sciences. Analyse de l'organisation de l'activité et de ses évolutions* [thèse de doctorat, université de Bretagne Occidentale]. <http://www.theses.fr/2012BRES0036/document>.

- [68] Kant, E. (1781) *Critique de la raison pure* (traduit de l'allemand par Jules Barni. (1869). (p. 3-71).
- [69] Kant, E. (1983). *Critique de la raison pure et Prolégomènes à toute métaphysique future*, (dir.), F. Alquié. Gallimard.
- [70] Krysinska, M et Schneider, M. (2010). *Émergence de modèles fonctionnels*. Presses universitaires de Liège.(p. 112).
- [71] [https :www.larousse.fr/dictionnaires/francais/processus-procedure/64066](https://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/processus-procedure/64066)
- [72] Leibniz, G.-W. (1966) *Nouveaux Essais sur l'entendement humain*, (trad. J. Brunschwig). GF-Flammarion.
- [73] Lemoigne J.-L, (1977), (P.39) tiré du livre de J,Philippe (1998) *Conflits de savoirs et didactique*. (p. 23) ;
- [74] Lemoigne, J-L. (1977). Intelligence des mécanismes, mécanisme de l'intelligence. Dans P, Jonnaert (dir.), *Conflits de savoirs et didactique*. (p. 23). De Boeck Supérieur.
- [75] Locke, J. (1972). *Essai philosophique sur l'entendement humain*, (trad. P. Coste). Vrin.
- [76] Mercier, A et Castella, C. (1992). *Peut-on enseigner des méthodes ? Comment les élèves apprennent des méthodes*
- [77] Minh T-K, (2011). *Apprentissage des fonctions au lycée avec un environnement logiciel : situations d'apprentissage et genèse instrumentale des élèves*[thèse de doctorat, université Paris-Diderot].[https :tel.archives-ouvertes.fr/tel-00658680/file/These Tran Kiem Minh.pdf](https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00658680/file/These%20Tran%20Kiem%20Minh.pdf)
- [78] Perrenoud, P. (1999), *Transférer ou mobiliser ses connaissances ? D'une métaphore l'autre : implications sociologiques et pédagogiques*. [http : www.unige.ch/fapse/SSE/teachers/perrenoud/php main/php 1999/1999 28.html](http://www.unige.ch/fapse/SSE/teachers/perrenoud/php_main/php_1999/1999_28.html). (p. 1-24)
- [79] Popper, K. (1991). *La connaissance objective*, (trad. J.- J. Rosat, Paris), Aubier.
- [80] Processus (s,d). Dans Dictionnaire Larousse en ligne. [https :www.larousse.fr/dictionnaires/francais/processus/64066](https://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/processus/64066)
- [81] Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner dans les lycées et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol 18 2 (p. 139-190).
- [82] Sabra, H. (2016). L'étude des rapports entre documentations individuelle et collective : incidents, connaissances et ressources mathématiques. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 36(1),(p. 49-95). [https :revue-rdm.com/2016/l-etude-des-rapports-entre/](https://revue-rdm.com/2016/l-etude-des-rapports-entre/)
- [83] Saliou, T.(1997) (dir.), *mathématiques seconde S*. Edicef (p. 156)
- [84] Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification – the case of function. Dans G. Harel et E. Dubinsky (dir.), *The concept of function : aspects of epistemology and pedagogy* (p. 59-84). Mathematical Association of America.
- [85] Youschkevitch A. P. (1981). (*The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century*)
- [86] VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.10 n°2-3, (p. 133-170). La Pensée Sauvage

Titre : Connaissances mobilisées par les élèves du secondaire dans le domaine des fonctions, approche comparative entre la France et l'Afrique francophone

Mots clés : le concept fonction, connaissance d'une fonction, mobilisation d'une connaissance.

Résumé : cette thèse en mathématiques porte sur la notion de fonction. En effet, nous nous intéressons aux connaissances mobilisées, savoirs utilisés, par les élèves du secondaire, en France et en Afrique francophone, devant des tâches liées aux fonctions selon trois points de vue : didactique, épistémologique et cognitif. Dans une première partie, après l'introduction générale, la thèse étudie la notion de fonction dans les curriculums scolaires de France et d'Afrique francophone et son histoire en s'appuyant sur l'article *The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century* du professeur A.P YOUSCHKEVITCH.

La logique mathématique moderne a découvert des difficultés pour une définition universelle, non algorithmique, d'une fonction.

Dans une seconde partie, nous présentons la théorie de la connaissance la mieux indiquée pour cette recherche. Ensuite, nous nous posons la question de savoir ce que savent faire les élèves avec les fonctions ? Pourquoi cette question ? En effet, la notion de fonction occupe une place importante dans les programmes scolaires ainsi que dans chacune des épreuves de mathématiques surtout au baccalauréat

En notre qualité d'enseignant, nous avons voulu comprendre ce qui peut expliquer l'échec des élèves à l'épreuve de mathématiques au secondaire. Afin de mieux cerner ce qui peut expliquer les phénomènes observés chez les élèves du secondaire lors de la résolution des tâches liées à la notion de fonction, nous avons décidé de partir d'un corpus construit selon la formulation d'Elena Tognini-Bonelli. De l'analyse de ce corpus de tâches et d'activités élèves, côté élèves, côté enseignants et côté institution, il en ressort que : la définition de la notion de fonction n'est pas assimilée par les élèves du secondaire ; ils sont arrivés à un niveau algorithmique de l'utilisation des fonctions ; l'entrée par les tâches est mieux indiquée pour enseigner les fonctions ; la conformité de voir f ou $f(x)$ dans un tableau, etc. Nous avons en amont rappelé les résultats des travaux antérieurs au notre en rapport avec l'enseignement de la notion de fonction avant de conclure et présenter des perspectives qui ouvrent d'autres champs de recherches.

Knowledge mobilized by secondary school students in the field of functions, comparative approach between France and French-speaking Africa

Keywords : functions, Knowledge, mobilized.

Summary: this thesis in mathematics deals with the notion of function. Indeed, we are interested in the knowledge mobilized, knowledge used, by secondary school students, in France and in French-speaking Africa, in front of tasks related to functions according to three points of view: didactic, epistemological and cognitive. In the first part, the thesis studies the way functions are given to us through The history of this concept based on the article The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century by Professor A.P YOUSCHKEVITCH:

logic modern mathematics has discovered difficulties for a universal, non-algorithmic definition of a function. In a second part, we ask ourselves the question of what can students do with functions? Why this question ? Indeed, the concept of function occupies an important place in the school programs as well as in each of the mathematics tests, especially in the baccalaureate

. In our capacity as teachers, we wanted to understand what can explain the failure of students in the mathematics test in secondary school. In order to better understand what can explain the phenomena observed in secondary school students when solving tasks related to the notion of function, we decided to start from a corpus built according to the formulation of Elena Tognini-Bonelli. From the analysis of this corpus of student tasks and activities on the student side, on the teacher side and on the institution side, it emerges that: the definition of the concept of function is not assimilated by secondary school students; they have arrived at an algorithmic level of the use of functions; Entry by tasks is best suited for teaching functions; the conformity of seeing f or $f(x)$ in a table, etc. We have recalled beforehand the results of work prior to ours in relation to the teaching of the notion of function.