



HAL
open science

Contrôle des vibrations de poutres par composites multicouches granulaires

Antoine Faulconnier

► **To cite this version:**

Antoine Faulconnier. Contrôle des vibrations de poutres par composites multicouches granulaires. Matériaux et structures en mécanique [physics.class-ph]. Université Paris-Saclay, 2023. Français. NNT : 2023UPAST112 . tel-04622579

HAL Id: tel-04622579

<https://theses.hal.science/tel-04622579>

Submitted on 24 Jun 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Contrôle des vibrations de poutres par composites multicouches granulaires

*Vibration control of beams using granular
multilayer composites*

Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay

École doctorale n° 579, Sciences mécaniques et énergétiques,
matériaux et géosciences (SMEMAG)
Spécialité de doctorat : Génie mécanique
Graduate School : Sciences de l'ingénierie et des systèmes, Référent :
CentraleSupélec

Thèse préparée au Laboratoire Quartz (EA7393) à l'ISAE-Supméca et à l'ESTACA
Lab' de l'ESTACA Campus Ouest, sous la direction de **Jean-Luc DION** (PU
ISAE-Supméca), le co-encadrement de **Stéphane JOB** (MCF ISAE-Supméca), et
du co-encadrant **Julien BROCAIL** (E-C ESTACA Campus Ouest)

Thèse soutenue à Paris-Saclay, le 28 septembre 2023, par

Antoine FAULCONNIER

Composition du jury

| | |
|---|--------------------------|
| Nicolas DAUCHEZ Professeur des universités, Université de technologie de Compiègne, Laboratoire Roberval | Rapporteur |
| Stéphanie DEBCEUF Chargée de recherche CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Institut Jean Le Rond d'Alembert (UMR CNRS 7190) | Examinatrice |
| Guilhem MICHON Directeur de recherche, Institut Clément Ader (UMR CNRS 5312) ISAE- Supaéro | Président et examinateur |
| Jean-Noël ROUX Ingénieurs Général des Ponts, des Eaux et des Forêts (HDR), Université Gustave Eiffel, Laboratoire Navier (UMR CNRS 8205) | Rapporteur |

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Les ondes, les vibrations et leur contrôle... | 5 |
| 1 Introduction générale | 5 |
| 1.1 Contexte général et problématique | 5 |
| 1.2 Les ondes et les vibrations | 6 |
| 1.2.1 Généralité sur les ondes mécaniques | 6 |
| 1.2.2 Contrôle des ondes par des matériaux architecturés | 7 |
| 1.3 Dissipation de l'énergie vibratoire | 10 |
| 1.3.1 Mécanisme de dissipation d'énergie | 10 |
| 1.3.2 Amortissement dans les milieux granulaires | 12 |
| 1.4 Objectifs et organisation du manuscrit | 15 |
| | |
| I Propagation d'ondes dans les poutres élastiques | 17 |
| | |
| 2 Propagation et dispersion des ondes dans les milieux architecturés | 19 |
| 2.1 Onde de flexion dans les structures minces | 19 |
| 2.1.1 Équation de propagation des ondes élastiques | 19 |
| 2.1.2 Ondes de Lamb | 21 |
| 2.1.3 Ondes de flexion dans les poutres | 22 |
| 2.1.4 Modèle de flexion de Timoshenko | 26 |
| 2.2 Propagation des ondes dans les milieux architecturés | 27 |
| 2.2.1 Chaîne de masses infinie reliées par des ressorts | 27 |
| 2.2.2 Chaîne de masses infinie à résonance locale | 29 |
| 2.2.3 Modèle continu : onde de Bloch dans une poutre infinie dotée de résonateurs à 1 DDL | 32 |
| 2.3 Propagation en milieu dissipatif | 39 |
| 2.3.1 Onde de flexion dans une poutre mince dissipative | 40 |
| 2.3.2 Métamatériaux et amortissement. | 41 |
| 2.4 Conclusion du chapitre | 42 |
| | |
| 3 Modélisation expérimentale : moyens, méthodes et exemples | 45 |
| 3.1 Présentation des moyens de mesure | 45 |
| 3.1.1 Mesure par vibrométrie laser | 45 |
| 3.1.2 Banc d'essai ISAE-Supméca à vibrométrie laser monopoint piloté en translation . . | 46 |
| 3.2 Méthode d'analyse des résultats expérimentaux et de l'atténuation | 49 |
| 3.2.1 Mesure plein champ des vibrations d'une poutre | 49 |
| 3.2.2 Extraction de la relation de dispersion | 51 |
| 3.3 Application sur une métapoutre résonante | 61 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 3.3.1 | Caractéristique de la métapoutre à l'essai | 61 |
| 3.3.2 | Post-traitement des données | 63 |
| 3.3.3 | Cas de la propagation à plusieurs modes. | 66 |
| 3.3.4 | Analyse des données du banc d'essai de l'ISAE-Supméca. | 68 |
| 3.4 | Conclusion du chapitre | 70 |
| 4 | Modélisation numérique de la propagation des ondes | 73 |
| 4.1 | Modélisation de la propagation d'une onde par la méthode des éléments finis | 73 |
| 4.1.1 | Éléments finis pour les poutres minces | 73 |
| 4.1.2 | Intégration temporelle des équations du mouvement | 76 |
| 4.2 | Modèles d'amortissement dans les poutres | 79 |
| 4.2.1 | Généralités sur l'amortissement et modèles rhéologiques | 79 |
| 4.2.2 | Amortissement numérique | 80 |
| 4.2.3 | Amortissement structural | 80 |
| 4.2.4 | Amortissement de Rayleigh | 81 |
| 4.2.5 | Exemple d'application : relation de dispersion dans une poutre dissipative en flexion | 82 |
| 4.3 | Modèle numérique d'une métapoutre par la méthode des éléments finis | 83 |
| 4.3.1 | Modèle | 83 |
| 4.3.2 | Résultats | 84 |
| 4.4 | Conclusion du chapitre | 87 |
| II | Dissipation d'énergie mécanique dans les milieux granulaires | 89 |
| 5 | Méthode des éléments discrets par l'exemple | 91 |
| 5.1 | Méthode des éléments discrets | 91 |
| 5.1.1 | Présentation de la méthode | 91 |
| 5.1.2 | Équations de la dynamique | 92 |
| 5.1.3 | Modélisation des forces de contacts | 93 |
| 5.1.4 | Détection des collisions | 94 |
| 5.1.5 | Intégration temporelle et calcul de la position | 95 |
| 5.2 | Modèles de dynamique du contact | 96 |
| 5.2.1 | Modèles élastiques | 96 |
| 5.2.2 | Modèles frottants | 99 |
| 5.2.3 | Exemples | 104 |
| 5.3 | Modélisation d'un volume de grains cubique sous pression soumis à du cisaillement | 106 |
| 5.3.1 | Préambule sur les propriétés d'un milieu granulaire confiné | 107 |
| 5.3.2 | Lois d'échelle au voisinage de la transition de blocage | 108 |
| 5.3.3 | Analyse de la mise en contrainte du cube granulaire | 110 |
| 5.3.4 | Bilan d'énergie | 117 |
| 5.4 | Conclusion du chapitre | 120 |

| | | |
|------------|--|------------|
| 6 | Modèle réduit d'un milieu granulaire cisailé | 123 |
| 6.1 | Introduction | 124 |
| 6.2 | Modèle réduit élasto-frictionnel d'un milieu granulaire en cisaillement cyclique | 124 |
| 6.3 | Conclusion | 140 |
| | | |
| III | Contrôle vibratoire par structures composites à âme granulaire | 141 |
| | | |
| 7 | Poutre composite à âme granulaire | 143 |
| 7.1 | État de l'art | 143 |
| 7.2 | Analyse du cisaillement dans une poutre composite viscoélastique | 144 |
| 7.3 | Modèle de poutre composite à âme granulaire | 146 |
| 7.3.1 | Hypothèses | 147 |
| 7.3.2 | Formulation énergétique | 149 |
| 7.3.3 | Modélisation spatiale par la méthode des éléments finis | 152 |
| 7.3.4 | Intégration temporelle | 154 |
| 7.3.5 | Protocole et modélisation du milieu granulaire | 155 |
| 7.3.6 | Chargement initial | 156 |
| 7.4 | Résultats | 158 |
| 7.5 | Conclusion du chapitre | 164 |
| | | |
| | Conclusion et perspectives | 169 |
| | | |
| 8 | Conclusion et perspectives | 169 |
| 8.1 | Conclusion générale | 169 |
| 8.2 | Perspectives | 172 |
| | | |
| | Bibliographie | 172 |

Table des figures

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Champ de déformation provoqué par le passage de (a) une onde de compression (haut) et de cisaillement (bas), et par des ondes de (b) Love (haut) et Rayleigh (bas). Illustrations issues de [111]. | 6 |
| 1.2 | Exemples de cristaux phononiques : (a) poutres en aluminium ondulée [98], (b) milieu de propagation alternant 2 matériaux et (c) plaque percée. | 8 |
| 1.3 | Exemples de milieux granulaires : bonbons, sable, riz, galets. | 13 |
| 1.4 | (a) illustration des trois états des milieux granulaires, obtenus en versant des billes en acier (illustration issue de [39]) et (b) diagramme de phase des milieux granulaires avec la compacité Φ , la contrainte de cisaillement Σ et la température T (illustration issue de [93]). | 14 |
| 2.1 | (a) Illustrations des champs de déplacement des deux premiers modes de Lamb symétrique à gauche et antisymétrique à droite et (b) figure de dispersion des ondes de Lamb symétriques S_i ($\alpha = 0$) et antisymétriques A_i ($\alpha = \pi/2$). La fréquence $\omega e/\pi$ est tracée en fonction du nombre d'onde sans dimension qe/π . Illustrations issue de [108]. | 23 |
| 2.2 | Mouvement de flexion pure d'une poutre. | 24 |
| 2.3 | Comparaison des relations de dispersion des différents modèles de flexion avec le mode A_0 | 27 |
| 2.4 | Schéma d'un réseau monoatomique périodique et infini. | 28 |
| 2.5 | Relation de dispersion pour les ondes longitudinales dans le réseau infini de masses connectées par des ressorts. | 29 |
| 2.6 | Schéma d'un réseau périodique et infini de masses reliées par des ressorts, à chacune desquelles sont attachées des masses résonantes. | 29 |
| 2.7 | Courbe de dispersion correspondant aux solutions réelles de l'équation Eq. 2.43. $m_2/m_1 = 5$ et $k_2/k_1 = 0.1$, les valeurs de m_1 et k_1 sont identiques à celle de k et m utilisées dans la figure Fig. 2.5. | 30 |
| 2.8 | Courbe de dispersion complexe obtenue avec l'équation Eq. 2.44 avec les mêmes valeurs numériques que pour la figure Fig. 2.7 et masse effective normalisée obtenue avec l'équation Eq. 2.46. | 31 |
| 2.9 | Poutre infinie avec un réseau de résonateurs à 1 degré de liberté | 32 |
| 2.10 | Diagramme de dispersion obtenu en résolvant l'équation Eq. 2.73 avec $M = 4$, avec à gauche la partie imaginaire du nombre d'onde réduit et à droite sa partie réelle. | 38 |
| 2.11 | Modèle réduit de double paroi. | 38 |
| 2.12 | Courbe de dispersion tracée dans la première zone de Brillouin avec le premier harmonique de la partie imaginaire. | 39 |
| 2.13 | Relation de dispersion complexe de la poutre infinie dotée d'un réseau de résonateurs pour $a = 0.0275$ m. | 40 |
| 2.14 | Relation de dispersion complexe du cristal résonant infini et masse effective d'une cellule pour différentes valeurs de l'amortissement. | 41 |

| | | |
|------|---|----|
| 2.15 | Partie imaginaire du nombre d'onde tracée pour plusieurs valeurs du coefficient d'amortissement. | 42 |
| 3.1 | Schéma de principe du vibromètre laser [source : Wikipédia] | 46 |
| 3.2 | (a) CAO du banc d'essai et (b) photographie du banc d'essai. | 47 |
| 3.3 | Comparaison de la fonction de réponse en fréquence de la poutre en un point, avec les FRF en accélération du vibromètre laser dans les trois directions de l'espace. | 48 |
| 3.4 | Comparaison des fonctions de réponse en fréquence au niveau du laser, dans trois configurations de support du laser, selon les trois directions de l'espace. | 49 |
| 3.5 | Schéma des points de mesure du champ vibratoire sur la poutre pour une extraction 1D des ondes de flexion. | 50 |
| 3.6 | Représentation temps espace du champ de vitesse transverse (à gauche) et représentation temps espace de la transformée de Hilbert du champ de vitesse. La ligne en pointillés illustre la vitesse de groupe c_g et celle en hachures la vitesse de phase c_ϕ | 51 |
| 3.7 | Photographies du montage expérimental, avec (a) le système de suspension de la poutre, (b) le vibromètre laser à balayage (Polytec PSV-400) et (c) le marteau de choc automatique. | 52 |
| 3.8 | (a) Module des fonctions de transfert $\tilde{h}(x, f)$ en fonction de la fréquence et de la position, (b) module de la mobilité quadratique moyenne en fonction de la fréquence. (c) et (d) représente respectivement la partie réelle et la partie imaginaire du nombre d'onde, obtenues avec différentes méthodes, comparées au modèle théorique en flexion pure. La courbe avec les cercles rouges correspond à l'équation Eq. 3.9 et les niveaux de couleur au module de $\hat{h}(\omega, q)$ normalisé. | 55 |
| 3.9 | Représentation du module de la transformée de Laplace à $f = 3200$ Hz dans le plan des s_r et s_i positifs. La ligne grise en $s_i = 0 \text{ m}^{-1}$ représente la transformée de Fourier temps-espace de $v(x, t)$ à $f = 3200$ Hz. | 58 |
| 3.10 | Fréquence en fonction de (a) la partie réelle du nombre d'onde sans dimension, (b) la partie imaginaire du nombre d'onde sans dimension superposée au modèle de flexion avec facteur de perte $\eta = 0.005$ constant en fréquence et (c) la vitesse de phase. | 59 |
| 3.11 | Fréquence en fonction de (a) la partie réelle et (b,c) la partie imaginaire du nombre d'onde de flexion pour chacune des trois méthodes d'extraction. | 62 |
| 3.12 | Photographies de l'échantillon de poutre mince dotée de résonateurs. | 64 |
| 3.13 | Partie réelle et partie imaginaire du nombre d'onde extraites des mesures expérimentales avec la méthode ESPRIT (points noirs) et SLaTCoW (croix rouge) sur la poutre avec un réseau de tige-masse. Pour SLaTCoW seul le premier mode de plus grande amplitude est tracé pour conserver la clarté de la figure. | 66 |
| 3.14 | Déformées spatiales mesurées auxquelles sont superposés les signaux reconstitués avec la méthode ESPRIT, à deux fréquences différentes (a) à l'extérieur d'une bande interdite et (b) à l'intérieur de la bande interdite de résonance (en rouge sur la figure Fig. 3.13). | 67 |
| 3.15 | Transformée de Laplace (a) à 2496 Hz hors bande interdite et (b) à 3848 Hz dans une bande interdite. | 67 |

| | | |
|------|---|-----|
| 3.16 | Zoom sur la relation de dispersion de la métapoutre obtenue par la méthode esprit appliquée à la série de mesures du côté $y = y_-$ montrant sur la partie réelle du nombre d'onde à gauche la présence de la branche liée au mode de torsion. | 68 |
| 3.17 | Déformée spatiale à $f=1814$ Hz (a) les modes de flexion et (b) les modes de torsions des deux lignes de maillage côtés $y = y_{\pm}$ | 68 |
| 3.18 | (a) Amplitude des fonctions de transfert en fonction de la fréquence et de la position, (b) mobilité quadratique moyenne en fonction de la fréquence. (c) et (d) représente la relation de dispersion complexe avec respectivement les parties réelle et imaginaire des nombres d'onde, obtenue avec la méthode ESPRIT. | 69 |
| 4.1 | Poutre éléments finis soumise à une distribution d'effort et de moment. | 74 |
| 4.2 | (a) Eléments finis de référence de la poutre, avec ses deux nœuds et 4 variables nodales. (b) Fonctions de formes. | 75 |
| 4.3 | (a) Relation de dispersion complexe et facteur de perte pour $(\alpha_r, \beta_r) = (0 \text{ s}^{-1}, 3.18 \text{ } \mu\text{s})$. (b) Relation de dispersion complexe et facteur de perte pour $(\alpha_r, \beta_r) = (61.57 \text{ s}^{-1}, 3.18 \text{ } \mu\text{s})$ | 83 |
| 4.4 | Représentation de la géométrie du modèle éléments finis de métapoutre localement résonante sur Abaqus. | 84 |
| 4.5 | (a) Relation de dispersion complexe du mode se propageant dans le sens des x positifs pour différentes valeurs de β_R^t dans les tiges résonantes. La courbe en tirets correspond à la poutre simple non amortie. (b) Déformées modales des tiges seules encastées sur support rigide, couplées aux masselottes. | 86 |
| 4.6 | (a-b) Signal d'excitation temporel d'un pulse Gaussien centré sur la fréquence 4500 Hz et sa représentation dans le domaine fréquentiel. (c) Logarithme décimal de u_{RMS} en fonction de la position. | 87 |
| 5.1 | Représentation schématique du contact en 2D en DEM avec (a) le chevauchement des particules (δ_n est volontairement exagérée) et (b) Représentation schématique du contact en DEM avec les raideurs k_n et k_t et amortisseurs viscoélastiques c_n et c_t intervenant dans le calcul des forces normale et tangentielle, ainsi que le contact frottant de coefficient de friction μ | 94 |
| 5.2 | Représentation de la force de frottement de Coulomb normalisée en fonction de la vitesse de glissement normalisée. | 100 |
| 5.3 | Courbe de Stribeck illustrant l'évolution du coefficient de friction en fonction de la hauteur de fluide h entre les surfaces, dans les trois régimes de lubrification. δ correspond ici à la rugosité des surfaces, i.e. la taille moyenne des aspérités. Courbe issue de [9]. | 101 |
| 5.4 | Analogie du modèle de Dahl avec la déformation d'un poil. | 102 |
| 5.5 | Comparaison des modèles de Dahl et de Coulomb avec $G_D = 500 \text{ N.m}^{-1}$, $n_D = 1$ et $F_C = 3 \text{ N}$ avec un déplacement cyclique imposé $x(t) = x_{\text{max}} \sin(2\pi f_0 t)$ m. | 103 |
| 5.6 | Illustration d'une courbe force/vitesse issue de [97], obtenue avec le modèle de LuGre prenant en compte la courbe de Stribeck. | 104 |

| | | |
|------|--|-----|
| 5.7 | Effort de contact d'une sphère après chute libre rebondissant sur un plan horizontal en fonction (a) du temps et (b) de l'enfoncement normal δ_n , en utilisant les modèles de Cundall, Hertz et Hertz-Tsuji avec $\epsilon = 0.9$. La raideur de contact k_n du modèle de Cundall est ici ajustée à l'aide du modèle de Hertz, pour avoir approximativement le même temps de contact avec $k_n \approx \kappa_n \sqrt{\delta_n^{\max}}$ | 105 |
| 5.8 | Illustration de la loi de Mohr-Coulomb implémentée dans le logiciel <i>Yade</i> avec (a) la relation entre la force et le déplacement tangentiels normalisés et (b) la relation entre la force et la vitesse tangentielle normalisées. | 106 |
| 5.9 | Représentation schématique de (a) la compression triaxiale et (b) le cisaillement simple d'une boîte cubique. | 106 |
| 5.10 | Lois d'échelles $Z(P/k_n)$ et $\phi(P/k_n)$ au cours de la phase de cisaillement cyclique, en fonction de la pression normalisée. La constante k_n est proportionnel au module élastique E des sphères. Chaque point correspond à une simulation avec un jeu de paramètres (ϕ, E, r, γ_m) . Les paramètres de l'ajustement sont $\phi_c = 0.595 \pm 0.003$, $\phi_0 = 6.414 \pm 0.208$, $Z_c = 5.042 \pm 0.085$, $Z_0 = 21.175 \pm 0.757$ | 111 |
| 5.11 | Évolution de U_f en fonction de la compacité ϕ dans le cas $v_c = 0.3 \text{ m.s}^{-1}$. La pression a également été tracée pour permettre la comparaison sur l'axe des abscisses. Le trait noir horizontal désigne la limite $U_f = 0.01$ et le trait vertical hachuré correspond à $\tilde{\phi}_c$ | 112 |
| 5.12 | Évolution de la pression hydrostatique P et du nombre de coordination Z pour différentes vitesses de compression, en fonction de la compacité $\phi - \tilde{\phi}_c$ | 113 |
| 5.13 | (a) Pression hydrostatique en fonction de la déformation volumique donnée par l'équation Eq. 5.43 et (b) logarithme décimal du module d'incompressibilité en fonction du logarithme de la pression. | 116 |
| 5.14 | Représentation schématique du calcul de la contrainte de cisaillement à partir des moments au centre de rotation des parois. | 117 |
| 5.15 | Illustration de la conservation de l'énergie mécanique dans le système de la bille rebondissante avec un coefficient de restitution $\epsilon = 0.9$ | 119 |
| 5.16 | Comparaison entre le travail des forces extérieures sur les grains et l'énergie totale dans le milieu granulaire. La courbe noire représente la part d'énergie cinétique dans le système relativement à l'énergie totale. Les données sont tracées en fonction du temps. La figure insérée représente E_{tot} en fonction de \mathcal{W}_{ext} | 121 |
| 7.1 | (a) Portion de poutre composite ($\eta_{ve} = 0$) avec déformée du premier mode propre de flexion (à 2.5 Hz), le niveau de gris décrivant l'amplitude de déformation en cisaillement dans le plan de coupe et (b) courbe de dispersion de cette même poutre comparée à quelques modèles en flexion pure de poutre multi-couches issus de la littérature [87, 48, 132]. | 146 |
| 7.2 | Représentations schématiques de la poutre sandwich (a) au repos et (b) déformée. | 148 |
| 7.3 | Comparaison des déformées modales des trois premiers modes propres d'une poutre composite viscoélastique non-amorti ($\eta_{ve} = 0$) encastree-libre décrite par les modèles d'Euler-Bernoulli (traits discontinus) et de Guyader (traits pleins). Les fréquences des trois premiers modes pour le modèle de Guyader sont : $f_1 = 2.76 \text{ Hz}$, $f_2 = 9.74 \text{ Hz}$ et $f_3 = 20.89 \text{ Hz}$ | 151 |

| | | |
|------|--|-----|
| 7.4 | Comparaison des déformées modales entre les modèles Abaqus 2D et le modèle FEM 1D basé sur le modèle de poutre de Guyader, pour (a) le mode 1, (b) le mode 2 et (c) le mode 3. Les propriétés matériaux utilisées sont celles données par le tableau Tab. 7.1. L'âme viscoélastique est supposée non-amortie ($\eta_{ve} = 0$). | 155 |
| 7.5 | Déformées spatiales statiques de la poutre composite à âme granulaire (non-amortie, $\Psi = 1$) soumise à un effort en $x = L$: flèche w et cisaillement γ en fonction de la position, pour différentes valeurs du module de cisaillement de l'âme. | 157 |
| 7.6 | Distribution des modules de cisaillement G_L et G_D le long de la poutre granulaire, obtenue selon les équations Eq. 7.34 et 7.34 et la distribution de cisaillement du cas statique, $\gamma_m = \gamma_s(x)$, pour (a) $w(L) = 0.005$ m et (b) $w(L) = 0.05$ m. | 158 |
| 7.7 | Évolution (a) de la flèche et (b) de la contrainte de cisaillement en $x = L$ dans la poutre composite granulaire de référence ($w(L, 0) = 0.1$ m, $P = 0.1P_{atm}$) en fonction du temps et (c,d) leurs densités spectrales d'énergie respectives en fonction de la fréquence. | 159 |
| 7.8 | Évolution des énergies de la poutre composite granulaire (cas de référence $w(L, 0) = 0.1$ m, $P = 0.1P_{atm}$) en fonction du temps (réponse libre oscillante amortie) relativement à l'énergie $\mathcal{W}_{ext}(t = 0)$ injectée dans le chargement initial. | 160 |
| 7.9 | (a-e) Réponses libres en déplacement de la flèche normalisée par sa valeur à l'instant initial, en fonction du temps normalisé par la période du premier mode propre, pour différents couples $(P, w(L, 0))$. (c) est le cas de référence. | 161 |
| 7.10 | Facteur de perte modal η_m en fonction (a,c) de la fréquence f et du temps discret $t_n = n\Delta t$ (où n est le numéro de la fenêtre temporelle de durée $\Delta t = 0.5$ s) et (b,d) coupe dans le plan (t_n, η_m) , pour une poutre composite à âme (a,b) granulaire (cas de référence $w(L, 0) = 0.1$ m, $P = 0.1P_{atm}$) et (c,d) viscoélastique ($\eta_m^{ve} = \omega_m \tau_{ve}$ avec $\tau_{ve} = \eta_1 / \omega_1 \simeq 0.92$ ms pour que $\eta_1 = \eta_1^{ve}$ arbitrairement). | 163 |
| 7.11 | Comparaison des flèches $w(L, t)$ normalisées par la flèche initiale en fonction du temps adimensionnel. Les poutres composites granulaire et viscoélastique sont identiques à celles de la figure Fig. 7.10. | 164 |
| 7.12 | Représentation en niveau de couleur (a) du facteur de perte η de la poutre composite granulaire et (b) du paramètre sans dimension $\langle \xi \rangle$ (moyenne sur la longueur de la poutre) en fonction de la pression de confinement des grains et de la flèche initiale de la poutre. (c) Corrélation $\eta(\langle \xi \rangle)$ à partir des données de (a) et (b). | 165 |

Liste des tableaux

| | | |
|-----|--|-----|
| 2.1 | Table des paramètres de la poutre et du résonateur | 37 |
| 3.1 | Table des paramètres de la barre d'essai. | 51 |
| 3.2 | Table des paramètres de la poutre et d'un résonateur élémentaire. | 63 |
| 3.3 | Tableau récapitulatif de l'utilisation des trois méthodes présentées dans ce chapitre pour l'extraction de la relation de dispersion. | 71 |
| 4.1 | Description quantitative de quelques schémas de la famille de Newmark. | 78 |
| 5.1 | Table des propriétés des grains. | 107 |
| 7.1 | Propriétés mécaniques du multi-couches viscoélastique de référence : module d'Young E , coefficient de Poisson ν , masse volumique ρ , facteur de perte η et module de cisaillement G | 145 |
| 7.2 | Fréquences propres des trois premiers modes de vibrations des modèles Abaqus 2D, de Guyader résolu par la méthode des éléments finis et de Guyader résolu par la méthode de séparation de variables (analytique). L'âme viscoélastique est supposée non-amortie ($\eta_{ve} = 0$). | 155 |
| 7.3 | Propriété matériau des grains en Nylon. | 158 |

Remerciement

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude envers mon encadrement de thèse. Je remercie en premier lieu, mon directeur de thèse Jean-Luc Dion. Malgré des interactions moins fréquentes qu'avec mes autres encadrants, j'ai tout de même pu profiter de ses conseils judicieux, de sa grande expérience, de son expertise et de sa bonne humeur tout au long de ces travaux.

Je voudrais aussi remercier mon encadrant Julien Brocail, qui m'a accompagné à l'ESTACA à Laval et a su parfaitement m'intégrer à son équipe de recherche et a toujours été présent pour m'aider dans mes travaux.

Je tiens à adresser un grand merci à Stéphane Job, qui a su me guider et être à l'écoute tout au long de cette thèse. Je lui suis reconnaissant pour toutes ses intuitions, sa méthode, sa rigueur, ses critiques constructives, sa vision, ses relectures attentives, mais également pour son soutien moral sans faille au cours de ces travaux, en particulier dans les moments difficiles, sans quoi je n'aurais peut-être pas réussi à aller au bout de cette aventure. Cette collaboration a été particulièrement enrichissante pour moi.

J'adresse mes remerciements à mon Jury de thèse. Tout d'abord à mes rapporteurs Jean-Noël Roux et Nicolas Dauchez, pour avoir pris le temps de s'intéresser à mon travail, qu'ils ont relu attentivement, et pour les échanges particulièrement enrichissants qui suivirent. Je remercie ensuite mes examinateurs, Stéphanie Debœuf et le président du jury Guilhem Michon, dont l'expertise et les questions pertinentes lors de la soutenance ont permis d'enrichir ma réflexion. J'en profite également pour remercier Adrien Pelat pour sa participation à mon comité de suivi de thèse et Georges Zambelis pour avoir participé au jury en temps qu'invité.

Je suis reconnaissant envers les deux établissements qui m'ont ouvert leurs portes : le laboratoire Quartz de l'ISAE-Supméca et l'ESTACA lab' de l'ESTACA Laval, des environnements de travail formidables. À travers ces deux établissements je voudrais remercier chaleureusement tous les nombreux collègues et amis que j'ai pu y rencontrer. Merci Benoit, Martin, Franck, Jean-Baptiste, les collègues doctorants : les Nicolas, Romain, Antonio, Reza, Antoine, Yun, Agnese, Layla, Charles... Sans oublier les collègues de l'ESTACA avec qui j'ai passé plus d'un an à Laval, et qui m'ont permis de traverser les périodes de confinement dans la bonne humeur : Léo, Antoine, Quentin, Alexandre, Aissam, Jean-Christophe, Sandrine, Mickael, Stéphane, Bertrand et tous ceux que j'oublie.

J'en profite pour adresser une attention particulière à Nicolas Even, entre autre pour sa connaissance aiguisée des commandes \LaTeX . En lui souhaitant une bonne fin de thèse, ainsi qu'aux autres doctorants.

L'achèvement de ces travaux de thèse aurait par ailleurs été impossible sans diverse collaboration. Merci à Rémy Tilet pour ses travaux de stage sur le bancs

de mesure 1D par vibrométrie laser, avec qui j'ai beaucoup apprécié travailler. Je remercie aussi grandement Benoît Nennig, pour sa disponibilité et son expertise, avec qui il est toujours agréable de travailler et d'échanger, de sciences ou autre, et qui m'a beaucoup aidé tant dans la réflexion que dans la réalisation du chapitre final de la thèse, sur les parties modélisation éléments finis et tri-couches. Je tiens aussi à ne pas oublier tous ceux avec qui j'ai eu la chance de collaborer pour les parties expérimentales et de fabrication, merci Arkadiusz et Abdel à l'ISAE-Supméca et Raphael à l'Estaca.

Bien entendu, je ne remercierais jamais assez mes très chers parents et ma sœur Juliette. Ils n'ont jamais cessé de me soutenir et de m'encourager, même s'ils ne comprenaient pas nécessairement ce sur quoi je travaillais (par manque d'explication de ma part) et que je pouvais parfois être difficile à supporter. Merci pour tout, du fond du cœur.

Valentin, Maxence, merci les amis, merci d'être là depuis plus de 25 ans. Et merci à toutes les amis qui m'ont permis de me changer les idées en dehors du travail, que ce soit au restaurant, en sortie ou en soirée : Adam, Côme, Constance et Ralph.

Enfin, pour tous ceux que je n'ai pas cités, mais qui ont participé à la réussite de ces travaux thèse, merci !

Les ondes, les vibrations et leur contrôle...

1 - Introduction générale

1.1 . Contexte général et problématique

Le contrôle des vibrations dans les structures fait depuis longtemps l'objet d'un grand nombre d'axes de recherches. Avec la mécanisation des sociétés modernes, la multiplication des sources de vibrations et d'ondes de chocs indésirables constitue des enjeux à la fois pour le confort acoustique et vibratoire (habitable des transports, confort psychoacoustique), mais aussi pour l'intégrité des structures. Deux grandes familles de méthodes existent pour le contrôle vibratoire : le contrôle actif et le contrôle passif. Un des avantages du contrôle actif est sa grande versatilité, du fait de son caractère réglable, accordable et optimisable. Son principal inconvénient réside dans la nécessité d'apporter de l'énergie supplémentaire au système. Ceci constitue un obstacle dans un contexte où il est nécessaire de réduire l'utilisation des énergies, sans évoquer les problématiques liées au matériel embarqué, sa mise en place et sa durée de vie. Il demeure donc essentiel d'étudier les méthodes de contrôle passif. Ces dernières ont pour avantage d'être souvent faciles à mettre en œuvre (par exemple par simple ajout de matériaux dissipatifs sur ou dans la structure primaire), voire inhérentes si l'on considère que toute matière est naturellement dissipative. En revanche, la plupart des mécanismes passifs ne sont pas modifiables (ils tirent partie d'une propriété mécanique intrinsèque de la matière) et ils se caractérisent par de faibles facteurs de pertes (la plupart des matériaux rigides, tels que les métaux, sont faiblement dissipatifs) et souffrent de limitations (les mécanismes visco-élastiques ne deviennent significatifs qu'à hautes fréquences uniquement).

Parmi tous les états de la matière, les milieux granulaires font exception. Étant constitués de particules disjointes interagissant via la mécanique du contact, ils sont non-linéaires par nature : leur élasticité effective dépend par exemple de la pression de confinement, les faisant passer d'un état s'apparentant à celui d'un liquide qui coule à faible contrainte à un état solide élastique à fort confinement. Le très grand nombre de contacts (1 litre de sable millimétrique compte un million de grains) engendre par ailleurs une forte dissipation par frottement inter-particules, qui laisse présager une dépendance de la dissipation à la pression de confinement (la force de frottement étant proportionnelle à la force d'écrasement d'un solide frottant contre un autre).

Ces travaux de thèse s'inscrivent dans la thématique du contrôle passif et explorent un moyen d'atténuer les ondes de flexions dans les poutres minces en mobilisant les mécanismes de dissipation d'énergie mécanique dans les milieux granulaires.

1.2 . Les ondes et les vibrations

1.2.1 . Généralité sur les ondes mécaniques

Une onde élastique correspond à la propagation spatio-temporelle d'une perturbation mécanique dans ou à la surface d'un solide déformable. Elle est définie par sa longueur d'onde λ et sa vitesse c . On distingue deux types d'ondes se propageant dans le volume, loin des bords, les ondes de pression (*p-wave*) et les ondes de cisaillement (*s-wave*), illustrées par la figure Fig. 1.1a. Proche des bords et/ou lorsque la longueur d'onde est comparable à la dimension caractéristique du milieu de propagation, ces deux types d'ondes interagissent et donnent naissance à de nouvelles ondes.

i. Ondes de surface

Ce type d'ondes est spécifique aux milieux de propagation semi-infini, avec un seul bord. On retrouve notamment les ondes de Rayleigh occasionnant un déplacement élliptique d'un point du solide et générant un mouvement combiné de compression et de cisaillement. Cette déformation est illustrée par la figure Fig. 1.1b. On retrouve également les ondes de Love qui se caractérisent par un mouvement transversal perpendiculaire à la direction de propagation (voir Fig. 1.1b), sans changement de volume. Ces deux types d'onde sont localisées à la surface avec une décroissance exponentielle de l'amplitude en fonction de la profondeur et sont un sujet d'étude particulièrement important en sismologie [111].

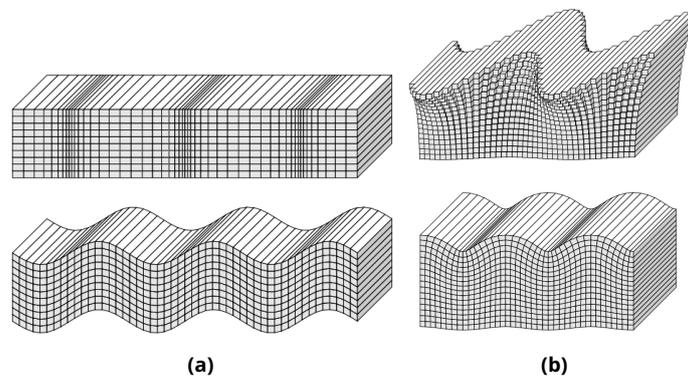


Figure 1.1 – Champ de déformation provoqué par le passage de (a) une onde de compression (haut) et de cisaillement (bas), et par des ondes de (b) Love (haut) et Rayleigh (bas). Illustrations issues de [111].

ii. Ondes dans les plaques et poutres

Dans les structures élancées, on distingue principalement les ondes de Lamb. Ce type d'ondes engendre un déplacement local perpendiculaire à la surface de la

plaque qui est soit symétrique de part et d'autre de la plaque, soit antisymétrique assimilable pour les grandes longueurs d'ondes à un mouvement de flexion. On retrouve également les ondes de torsion, qui se propagent en induisant un mouvement de rotation des points autour de l'axe de propagation. En plus des ondes longitudinales, les ondes de Lamb et de torsion constituent la principale source de vibrations dans les structures.

La propagation d'ondes élastiques dans les structures, couplées à des conditions aux limites, donne lieu à des vibrations. On distingue alors deux approches pour l'analyse vibratoire [10] :

- La méthode modale, employée plutôt en basses fréquences, s'appuie sur un formalisme d'ondes stationnaires pour l'identification de la fréquence, des temps de décroissance et des déformées modales.
- La méthode ondulatoire, s'appuie sur une description propagative des ondes. Elle est plus généralement utilisée en moyennes et hautes fréquences, lorsque la densité modale est élevée, et permet de s'affranchir des conditions aux limites [10, 82]. Cette approche consiste à caractériser directement les ondes propagatives en identifiant leur longueur d'onde, leur vitesse de propagation et leur longueur d'atténuation.

Ces deux approches sont complémentaires mais équivalentes.

1.2.2 . Contrôle des ondes par des matériaux architecturés

i. Matériaux composites

Les composites sont des assemblages d'au moins deux matériaux aux propriétés mécaniques contrastées, formant un nouveau matériau dont les performances sont supérieures à celles de ses constituants. Ils sont généralement constitués d'une matrice et de renforts. On trouve par exemple des matrices polymères renforcées par des fibres de carbone [137], ou encore à base de fibres de plante [73]. Les matériaux sandwichs, constitué d'un empilement collé de différentes couches de matériaux [135], font aussi partie des matériaux composites.

Dans les polymères renforcés par des fibres, la dissipation provient essentiellement du polymère lui-même et de son caractère viscoélastique. Mais on trouve d'autres sources de dissipation d'énergie. Par exemple, dans les composites à base de micro fibres, la principale source de dissipation est le frottement au niveau des contacts entre fibres [120]. Il en résulte un comportement hystérétique avec de multiples non-linéarités, lorsqu'on impose un cisaillement cyclique à un composite constitué de micro-fibres de carbone avec une matrice epoxy [103].

Du fait de leurs constituants, les matériaux composites sont généralement sensibles à la température, qui a tendance à assouplir la matrice et augmente donc le facteur de perte, mais diminue aussi la raideur de l'ensemble [120].

ii. Réseaux phononiques

Les réseaux phononiques sont conçus pour contrôler et manipuler la propagation des ondes élastiques dans des structures. Cela peut consister à doter le milieu de propagation d'un ensemble régulièrement espacé de diffuseurs rigides, ou bien à inclure un contraste périodique des propriétés géométriques ou matérielles du milieu de propagation (voir Fig. 1.2). L'interaction des ondes avec le réseau

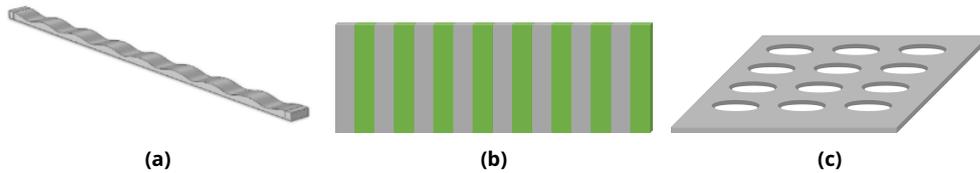


Figure 1.2 – Exemples de cristaux phononiques : (a) poutres en aluminium ondulée [98], (b) milieu de propagation alternant 2 matériaux et (c) plaque percée.

(réflexion, transmission) donnent lieu à des interférences constructives et destructives. En particulier, lorsque la projection de la longueur d'onde λ sur une direction principale du réseau périodique coïncide avec la période spatiale a du réseau, elle vérifie la loi de Bragg donnée par la relation suivante :

$$2a \sin(\theta) = n\lambda, \quad (1.1)$$

où θ correspond à l'angle d'incidence de l'onde et n un entier. Lorsque l'équation Eq. 1.1 est vérifiée, les interférences destructives donnent naissance à des bandes de fréquence dites interdites, dans lesquelles les ondes transmises deviennent évanescentes : elles ne se propagent plus et sont exponentiellement atténuées. Ce mécanisme de bandes interdites de Bragg est le même que celui qui opère à l'échelle des atomes vis-à-vis des électrons. En effet, la disposition régulière des atomes dans la matière crée des puits de potentiels électriques périodiques donnant lieu à des bandes d'énergie interdites pour les électrons. Ces bandes interdites confèrent alors un caractère isolant aux matériaux [63] non pas par dissipation mais par réflexion totale des ondes incidentes. Cette propriété est notamment mise à profit dans les miroirs de Bragg [65].

La caractérisation de telles structures est communément réalisée avec un diagramme de dispersion où la fréquence f , réelle (ou la pulsation $\omega = 2\pi f$), est tracée en fonction du nombre d'onde complexe, $q = 2\pi/\lambda + j/l_{\text{att}}$, où l_{att} correspond à la longueur d'atténuation de l'onde et $j = \sqrt{-1}$. La présence d'une bande interdite se caractérise alors par des valeurs imaginaires de q . Par ailleurs, la périodicité spatiale de ces structures rend possible l'analyse en ondes de Bloch [63], dont le formalisme, issu de la mécanique quantique, permet de décomposer la fonction d'onde en somme de fonctions périodiques de l'espace appelées modes de Bloch. L'utilisation de ce formalisme permet de réduire la taille et la complexité du problème : l'étude de la relation de dispersion des ondes dans la zone de Brillouin

irréductible [63, 57] suffit à caractériser la totalité des propriétés ondulatoires dans l'ensemble du réseau périodique.

Concrètement, ce formalisme trouve un intérêt pour caractériser la propagation d'ondes élastiques à hautes fréquences dans les plaques en nid d'abeille [119, 118], lorsque la longueur d'onde est du même ordre de grandeur que la dimension des alvéoles. Ce cas de figure se retrouve notamment dans le domaine spatial où les fuselages en nids d'abeilles sont soumis à des chocs pyrotechniques avec des contenus fréquentiels large bande [44].

En pratique, l'utilisation de patchs piézoélectriques étend les propriétés des réseaux phononiques, comme par exemple au moyen d'un ensemble périodique de patchs piézoélectriques disposé sur une poutre élastique [134]. L'utilisation de patchs permet de contrôler la raideur en flexion sur des portions périodiques de poutre, rendant ainsi possible le décalage ou l'élargissement de bandes interdites de Bragg par assouplissement ou raidissement local du milieu de propagation des ondes de flexion. Au delà de la modulation spatiale des propriétés, l'utilisation de patchs piézoélectriques permet également de les moduler dans le domaine temporel à l'aide de signaux électriques périodiques. Il en résulte une non-réciprocité du sens de propagation des ondes : les bandes de fréquences interdites de Bragg pour les ondes incidentes sont décalées par rapport à celles des ondes réfléchies [134, 21].

iii. Métamatériaux localement résonants

Les métamatériaux localement résonants sont des matériaux architecturés au même titre que les cristaux phononiques. En revanche, au lieu d'inclure des diffuseurs infiniment rigides au regard de la fréquence des ondes, on place des inclusions résonantes, dont la fréquence des modes de vibrations est typiquement dans la bande de fréquence de propagation des ondes. On parle alors d'hybridation entre les modes de propagation et les modes propres des résonateurs.

Un intérêt majeur de l'utilisation de métamatériaux résonants est la création de bandes interdites sub-longueurs d'onde, c'est-à-dire à des échelles de longueurs d'onde bien plus grandes que celles permises par la périodicité du réseau, exprimées par la relation Eq. 1.1. Ainsi, dans la gamme des fréquences d'hybridation, on montre que la masse volumique effective du milieu de propagation (au sens de la propriété homogénéisée à l'échelle des grandes longueurs d'ondes) devient négative [95, 51], traduisant le fait que les ondes y sont évanescentes. L'une des premières mise en œuvre d'hybridations dans le domaine élastique [74] a permis de prouver expérimentalement la pertinence de ce mécanisme. Le second intérêt de ce mécanisme réside dans le fait qu'une résonance à basses fréquences conduit à des bandes interdites complètes, omnidirectionnelles [66], contrairement aux bandes de Bragg. Par la suite, de nombreux travaux ont évalué la possibilité d'utiliser l'hybridation pour le contrôle des ondes dans les plaques. Ainsi, le positionnement de cylindres composites résonants régulièrement espacés sur une plaque permet la création de bandes interdites très basses fréquences pour les ondes de Lamb, grâce au couplage

avec les modes de vibrations des résonateurs [96]. Il est notamment possible de constater que les plages de fréquences des bandes interdites peuvent être contrôlées par ajout de masse sur les cylindres résonants. Il est également possible d'élargir les bandes interdites en plaçant des résonateurs de part et d'autre des bords latéraux de la plaque [6, 50] (plutôt que sur son axe), de telle manière à agir sélectivement sur des modes de propagations symétriques (ex. flexion axiale) ou anti-symétriques (ex. rotation autour de l'axe). De nombreuses autres géométries ont également été proposées pour contrôler les ondes dans les plaques, grâce aux multiples modes de résonances des résonateurs [56] ou pour détecter la formation de ces bandes interdites à partir de mesures vibratoires plein champs [138].

Il est également possible d'ajuster la distribution des propriétés des piliers résonants pour faire apparaître des propriétés non-triviales. Par exemple, des tiges de longueurs variables modifient localement l'indice de réfraction de la plaque [20], permettant ainsi de camoufler (*cloaking*) des régions dans certaines bandes de fréquences, tout en transmettant les ondes par contournement des zones camouflées.

Enfin, il est possible d'augmenter artificiellement l'amortissement modal effectif d'une structure vibrante [56] par ajout de résonateurs amortis distribués périodiquement dans la structure. Ce phénomène, appelé méta-amortissement (*meta-damping*)[52], a pu être mis en évidence par des modèles analytiques de réseaux périodiques de masses et de ressorts, numériquement avec des modèles de poutre [1] et dans des milieux granulaires unidimensionnels [124].

1.3 . Dissipation de l'énergie vibratoire

1.3.1 . Mécanisme de dissipation d'énergie

Concrètement, la propagation d'énergie vibratoire résulte d'une conversion alternée d'énergie cinétique et d'énergie potentielle élastique. Dissiper l'énergie vibratoire consiste à convertir ces énergies en chaleur. Ceci peut être accompli grâce à plusieurs mécanismes dissipatifs. Nous présentons dans cette sous-section, de façon non-exhaustive, quelques-uns de ces mécanismes.

i. Matériaux viscoélastiques

Les matériaux viscoélastiques ont naturellement la capacité de convertir une part de l'énergie de déformation élastique en chaleur par un effet visqueux, proportionnel à la vitesse de déformation. C'est le cas notamment du latex, du caoutchouc, des élastomères. Le caractère visqueux, fonction de la vitesse de déformation, est une conséquence du fluage des chaînes de polymères les constituant, qui se réarrangent entre-elles pour accommoder, avec retard, une contrainte mécanique. Les matériaux viscoélastiques peuvent être intercalés entre une structure et son environnement pour réaliser une fonction d'isolation vibratoire. Par exemple, l'utilisation de plots en élastomère est très répandue dans l'industrie pour ses propriétés

d'amortissement mais également pour sa souplesse permettant le découplage vibratoire des machines vibrantes. Les matériaux viscoélastiques peuvent également être insérés ou collés directement à une structure (par ex. une plaque ou une poutre) pour en augmenter l'amortissement global. Dans ce deuxième cas, cela conduit à un agencement multicouche généralement constitué d'un matériau de structure, souvent métallique avec un facteur de perte faible, sur lequel est collé un matériau viscoélastique souple, par exemple un élastomère, contraint ou non par une troisième couche. Le principe veut que les matériaux de structure, en se déformant, imposent une déformation en cisaillement à la couche viscoélastique qui va alors dissiper une partie de l'énergie [61, 87] par effet visqueux, sans pour autant modifier significativement la rigidité de la structure primaire. Leur utilisation est toutefois limitée par le fait que la plupart des matériaux polymères ne sont stables qu'à des températures modérées : au delà d'une centaine de degrés, ils perdent toute élasticité (ils se ramollissent ou ils fondent) et leur viscosité décroît fortement avec la température (conséquence d'une plus grande mobilité des macromolécules polymériques). Cela rend leur utilisation difficile dans les environnements où les calories générées par échauffement visqueux ne sont pas évacuées et où la température n'est pas contrôlée.

ii. Amortissement par frottement

La dissipation par frottement est un type de dissipation externe, reposant sur le glissement relatif entre deux surfaces. L'exemple classique de ce type d'amortissement est le freinage automobile, consistant à convertir l'énergie cinétique d'un véhicule en chaleur à travers le frottement des plaquettes sur les disques de freins. Ce type d'amortissement présente deux avantages : il est indépendant de la vitesse de déformation (et donc de la fréquence) en première approximation et il est robuste aux environnements sévères, notamment à hautes températures. Pour cette raison, il est mis à contribution notamment pour le contrôle des vibrations de pales de turbines [37], et il est également présent dans les assemblages boulonnés [101].

iii. Amortisseur à masse accordée (TMD)

Un amortisseur à masse accordée (tuned mass damper en anglais, TMD) est conçu pour être attaché à une structure de sorte que sa fréquence propre constitue une anti-résonance du point de vue de la structure principale dont on veut atténuer les vibrations, minimisant ainsi l'amplitude des vibrations à cette fréquence. Sa masse est généralement considérablement plus faible que celle de la structure. Lorsque la structure primaire vibre, le TMD capte l'énergie cinétique du système primaire en oscillant en quadrature de phase des vibrations. Il agit donc comme un étouffeur dynamique. Dans le cas théorique où le TMD n'est pas amorti, l'anti-résonance se traduit par une annulation complète de la vibration du système primaire sur une bande de fréquence réduite à la fréquence du TMD, en contre-partie

d'un facteur de qualité infini pour ce dernier. L'amortissement du TMD peut être ajusté pour minimiser (et non plus annuler) l'amplitude des vibrations, avec pour avantage d'élargir la bande de fréquences où le TMD agit [26]. Ce dispositif est très largement utilisé en génie civil pour contrôler l'amplitude des oscillations des bâtiments élancés [115, 2]. La tour Taipei 101 est un exemple fameux où un pendule de 660 tonnes logé entre le 87ème et le 92ème étage joue le rôle d'un TMD pour stabiliser la tour contre les mouvements causés par le vent [69].

iv. Puits d'énergie non-linéaires (NES)

Les puits d'énergie non-linéaires NES (nonlinear energy sinks en anglais, NES) sont un type de dispositif de contrôle des vibrations dans les structures mécaniques. Tout comme les TMD, ils sont attachés à une structure hôte, cependant les NES exploitent leur réponse non-linéaire pour contrôler les vibrations. Les NES peuvent être utilisés pour capter ou dissiper de l'énergie en leur sein, ou bien pour modifier la réponse de la structure hôte en redistribuant l'énergie vibratoire vers d'autres fréquences. On parle dans ce cas de réjection spectrale : la densité spectrale d'énergie vibratoire est d'autant plus réduite que l'énergie totale est répartie sur une large gamme de fréquence, et que les hautes fréquences sont dissipées plus rapidement que les fréquences primaires par des mécanismes viscoélastiques secondaires.

Un exemple de mise en oeuvre de NES sont les systèmes à vibro-impacts [16, 38] (Vibro-Impact Nonlinear Energy Sink en anglais, VI-NES) qui utilisent les chocs d'une particule dans une cavité pour d'une part dissiper de l'énergie à chaque choc inélastique, par frottement ou par viscoélasticité, et d'autre part, redistribuer l'énergie de la structure, par l'intermédiaire de la dynamique de contacts brefs, vers ses modes de vibration plus haute fréquence, dont l'amplitude est moins élevée. Par ailleurs, il est connu que le rebond d'une particule dans une cavité oscillante est un système modèle chaotique : l'analyse du temps de vol entre deux collisions révèle des bifurcations successives qui conduisent au chaos [70]. Un tel mécanisme est à même de redistribuer efficacement l'énergie du système sur une très large gamme de fréquence.

D'autre type de non-linéarités peuvent être mis à profit pour contrôler des vibrations, comme par exemple l'utilisation d'aimants permanents [8] pour ajuster la non-linéarité, ou encore l'utilisation du ballottement d'un liquide dans un contenant [36].

1.3.2 . Amortissement dans les milieux granulaires

i. Généralités sur les milieux granulaires

Les milieux granulaires [30, 3] sont des systèmes physiques composés de particules discrètes, solides et massives interagissant via des contacts mécaniques. Ces particules peuvent être de tailles, formes et matières variées et peuvent être de nature minérale, organique ou même vivante [94] (voir figure Fig. 1.3). Les milieux

granulaires présentent des propriétés collectives uniques qui les rendent différents de la matière classique. Les études sur les milieux granulaires visent à comprendre les propriétés macroscopiques effectives de ces systèmes, par exemple : leur élasticité effective [127, 81], leur coefficient de friction effectif [23, 59], en lien avec les propriétés et les interactions à l'échelle des contacts, ainsi qu'à développer des outils pour les simuler.



Figure 1.3 – Exemples de milieux granulaires : bonbons, sable, riz, galets.

Les milieux granulaires peuvent se trouver dans divers états ou phases, chacun conduisant à des propriétés et des choix de modélisations spécifiques. Pour les décrire, il est courant d'utiliser le vocabulaire associé aux états de la matière classique : solide, liquide et gazeux [54]. Ces trois états peuvent être décrits de la façon suivante :

- L'état solide des milieux granulaires est celui où les particules sont comprimées et peuvent difficilement se déplacer les unes par rapport aux autres. On parle alors d'état bloqué (*jammed*) où la pression et la densité sont élevées. Cet état peut être observé dans les amas de particules qui reposent sur une surface solide, comme le sable dans les dunes ou les grains à l'intérieur des silos. Dans cet état, le milieu granulaire est décrit par les équations de la mécanique du solide, avec des propriétés bien souvent non-linéaires héritées de la mécanique du contact de Hertz [58].
- L'état liquide des milieux granulaires est celui où les particules sont libres de se déplacer les unes par rapport aux autres, mais elles sont encore suffisamment proches pour que les interactions entre elles maintiennent une certaine cohésion. Cet état est souvent observé dans les écoulements de particules, comme les sables mouvants ou les éboulements [30, 3].
- L'état gazeux des milieux granulaires est celui où les particules sont à la fois agitées et éloignées les unes des autres et ne sont plus suffisamment proches pour maintenir une cohésion. La densité y est très faible et les interactions peu fréquentes. Dans ce régime on utilise souvent la température granulaire (moyenne du carré des vitesses des particules) pour décrire le milieu [12] dont les particules suivent un comportement similaire aux gaz parfaits décrit par la distribution de Boltzmann [139].

Il est important de noter que ces états ne sont pas définis au sens thermodynamique. Il n'en reste pas moins que les milieux granulaires peuvent, comme la matière

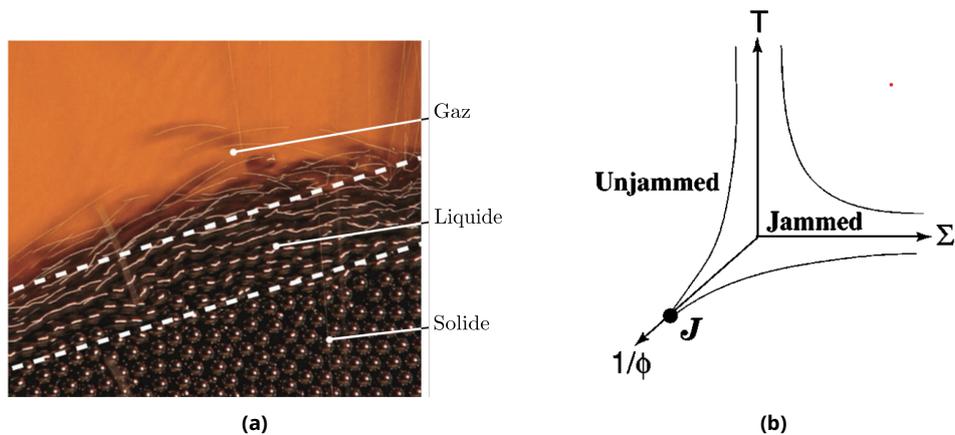


Figure 1.4 – (a) illustration des trois états des milieux granulaires, obtenus en versant des billes en acier (illustration issue de [39]) et (b) diagramme de phase des milieux granulaires avec la compacité Φ , la contrainte de cisaillement Σ et la température T (illustration issue de [93]).

classique, passer d'un état à l'autre en fonction des conditions extérieures. Par exemple, un tas de sable peut passer de l'état solide à l'état liquide lorsqu'il est incliné au-delà d'un certain angle, à partir duquel il commence à s'écouler sous l'effet de la gravité [39, 88]. La transition liquide-solide est appelée transition de blocage (jamming transition en anglais)[71], là où la transition inverse solide-liquide est une limite de rupture (yield en anglais) du milieu granulaire [55]. À l'image de la matière classique, les états des milieux granulaires peuvent être représentés dans un diagramme de phase (voir Fig. 1.4b) [11, 71, 93] à trois dimensions, dans lequel la température granulaire est tracée en fonction de la compacité Φ et de la pression de confinement [71] ou de la contrainte de cisaillement [93]. La prise en compte de la contrainte de cisaillement rend compte de la possibilité de changer d'état sous l'effet d'une déformation en cisaillement, sans changement de volume (shear-jamming en anglais) [11, 104].

ii. Dissipation d'énergie dans les milieux granulaires

La dissipation d'énergie au sein des milieux granulaires est un processus complexe qui tire sa source de plusieurs mécanismes. Les interactions entre grains étant intrinsèquement inélastiques [54], de l'énergie est perdue à chaque collision. Les principaux mécanismes de dissipation d'énergie dans ces systèmes sont :

- (i) Le frottement : lorsque des particules en contact ont des mouvements relatifs les unes par rapport aux autres, de l'énergie est dissipée par frottement sous forme de chaleur. Le frottement dépend des caractéristiques des particules, telles que leur forme, leur état de surface, leur taille, une éventuelle lubrification, ainsi que de la pression de confinement.
- (ii) Les collisions inélastiques : lorsque deux particules entrent en contact,

celles-ci se déforment, une partie de l'énergie est stockée sous forme d'énergie élastique, et le reste, selon les matériaux des particules, est dissipée via des mécanismes viscoélastiques.

- (iii) La redistribution d'énergie : ce phénomène n'est pas à proprement dit dissipatif, mais il participe à la spécificité des milieux granulaires dans le mécanisme d'atténuation global. Lors d'une collision, l'énergie cinétique incidente portée par un degré de liberté (translation et/ou rotation) est transférée aux six degrés de liberté de chaque particule impliquée dans la collision. Cette redistribution conduit à des densités d'énergie d'autant plus faibles que le nombre de particules est important.

Ainsi, tirant partie de ces mécanismes, de nombreuses études montrent que les milieux granulaires constituent des amortisseurs robustes de vibrations. Par exemple, les milieux granulaires vibrés [41, 85, 109, 110, 84] ont des propriétés universelles de dissipation, leur facteur de perte ne dépendant essentiellement que de la masse de particules ajoutées [85, 109, 110]. Cette propriété repose sur le phénomène d'effondrement inélastique [86] que subit un amas de particules qui percute une surface. Le très grand nombre de collisions partiellement inélastiques conduit à une dissipation totale de l'énergie en un temps fini. Le choc s'apparente donc à une collision parfaitement plastique, de coefficient de restitution nul, qui engendre un facteur de perte de 100%. Une illustration classique de ce phénomène est l'absence de rebond d'une balle de jonglage souple remplie de sable lors d'une collision avec le sol. In fine, le phénomène d'effondrement inélastique est une combinaison des mécanismes (i), (ii) et (iii).

1.4 . Objectifs et organisation du manuscrit

Les travaux présentés dans ce manuscrit, issus de la collaboration entre l'ISAE-Supméca et l'Estaca, visent à explorer un moyen passif original de contrôle des ondes de flexion dans les structures minces, en mobilisant les propriétés dissipatives des milieux granulaires.

Ces objectifs sont traités dans sept chapitres divisés en trois parties. La première s'intéresse aux ondes de flexion, à leur description théorique, numérique et leur identification expérimentale. La seconde traite la question de la dissipation dans les milieux granulaires en s'appuyant sur la méthode des éléments discrets. La troisième partie propose d'étudier un moyen de contrôler les ondes de flexion passivement à l'aide de la dissipation granulaire.

Dans une première partie, nous nous intéressons à la description théorique des ondes de flexion, à leur modélisation et à leur mesure.

Ainsi, au **chapitre 2**, on rappelle le cadre théorique en partant du modèle général des ondes élastiques pour aboutir au cas particulier de la flexion. Ensuite on s'intéresse au comportement des ondes dans des réseaux périodiques localement

résonants. Ce chapitre se termine par l'étude de l'atténuation des ondes de flexion dans un métamatériau localement résonant.

Ensuite, le **chapitre 3** est dédié à la mesure expérimentale des ondes de flexions et à leur caractérisation, via la relation de dispersion, dans des guides d'ondes unidimensionnels. Nous revenons sur trois différentes méthodes d'identification des relations de dispersion appliquées aux ondes de flexion et les mettons en œuvre pour identifier la relation de dispersion du mode de flexion d'abord sur une barre mince homogène puis sur une méta-poutre localement résonante.

Au **chapitre 4**, nous revenons sur la modélisation numérique des ondes de flexion avec la méthode des éléments finis. Celle-ci sera réutilisée dans le dernier chapitre de ce manuscrit. Nous revenons également sur l'intégration temporelle et quelques modèles d'amortissement des structures. Le chapitre 4 se conclue par l'étude d'un métamatériau phononique localement résonant à l'image de celui étudié expérimentalement dans le chapitre 3, mais dans lequel on introduit différents niveaux d'amortissement viscoélastique.

Dans une seconde partie, des travaux numériques sur la dissipation dans les milieux granulaires sont présentés.

Au **chapitre 5**, la méthode numérique des éléments discrets (DEM) est présentée avec plusieurs modèles de contacts. Ensuite, en s'appuyant sur les éléments présentés, un volume représentatif parallélépipédique de milieu granulaire est établi avec la méthode DEM. Le modèle est validé et ses propriétés mécaniques sont étudiées en comparaison avec les résultats de la littérature.

Au **chapitre 6**, le modèle établi au chapitre 5 est repris et ses propriétés élastiques et dissipatives en cisaillement sont étudiées dans un article. Nous apportons dans ce chapitre une des principales contributions de ce manuscrit en proposant un modèle réduit de dissipateur granulaire, adapté à l'ingénierie, en montrant notamment que son facteur de perte dépend d'un seul paramètre sans dimension résultant de la compétition entre élasticité et frottement effectif au sein du milieu granulaire.

Enfin, la troisième partie, donnée dans le **chapitre 7**, fait la synthèse des deux premières en proposant une architecture de poutre composite multi-couches granulaire. Le composite est constitué de deux barres de part et d'autre d'une âme granulaire. Le mouvement de flexion des barres permet de mettre à contribution le cisaillement du milieu granulaire et ainsi sa dissipation par frottement. La poutre composite granulaire proposée est modélisée par la méthode des éléments finis, en y intégrant la loi de comportement non-linéaire du milieu granulaire établie au chapitre précédent. Sa réponse libre et ses performances pour l'atténuation vibratoire sont étudiées vis à vis de quelques paramètres telles que la pression de confinement ou l'amplitude initiale, suggérant notamment la possibilité d'ajuster le facteur de perte de la structure via la pression de confinement du milieu granulaire.

Première partie

**Propagation d'ondes dans les
poutres élastiques**

2 - Propagation et dispersion des ondes dans les milieux architecturés

Résumé

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la propagation des ondes dans les structures minces et dans les milieux architecturés. Un rappel des équations de propagations d'onde dans les solides élastiques est effectué. On se focalise ensuite sur le cas particulier des ondes dans les structures d'épaisseur finie : les ondes de Lamb. Le passage à la limite basses fréquences/grandes longueurs d'onde de ces dernières nous permet d'aboutir aux modèles d'ondes de flexion dans les poutres. Une comparaison entre les différents modèles d'ondes de flexion est réalisée avec celui des ondes de Lamb, pour aboutir finalement au modèle de poutre d'Euler-Bernoulli qui sera utilisé plus tard dans le manuscrit.

Dans un second temps, nous considérons la propagation d'ondes dans des réseaux périodiques à une dimension. D'abord sur des systèmes élémentaires de réseaux monoatomiques et résonants, puis pour l'atténuation d'ondes de flexion. Ces modèles permettent de décrire les mécanismes de bandes interdites et d'introduire les expérimentations qui ont été menées dans le chapitre Chap. 3. Le chapitre se termine sur l'observation des effets de l'amortissement sur de telles structures.

2.1 . Onde de flexion dans les structures minces

2.1.1 . Équation de propagation des ondes élastiques

Dans le cadre de la mécanique des solides déformables, un solide est élastique lorsque ce dernier se déforme en conservant l'énergie sous l'action d'une sollicitation. L'élasticité linéaire suppose de surcroît que les déformations induites par ces sollicitations mécaniques sont petites. La déformation est alors uniquement due à une variation du déplacement \mathbf{u} . On définit alors le tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ par l'expression suivante :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}). \quad (2.1)$$

Le tenseur des déformations, dans le domaine élastique linéaire, est relié au tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ par la loi de Hooke :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\mathbb{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad (2.2)$$

où $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$ correspond au tenseur des rigidités élastiques. Ce dernier est un tenseur d'ordre quatre à 81 composantes, dont les 21 coefficients, indépendants pour un matériau isotrope, s'expriment en fonction des paramètres matériaux : E le module d'Young et ν le coefficient de Poisson. Par symétrie des tenseurs des contraintes

et de déformations, l'équation Eq. 2.2 peut être mise sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (2.3)$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé tels que $\lambda = E\nu/(1 + \nu)(1 - 2\nu)$ et $\mu = E/2(1 + \nu)$. Ce dernier correspond au module de cisaillement.

Équation de propagation

Considérant $\ddot{\mathbf{u}}$ la dérivée seconde du déplacement \mathbf{u} par rapport au temps, soit l'accélération en un point du solide. Celle-ci est régie par l'équation du mouvement ou principe fondamental de la dynamique qui s'exprime par :

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \mathbf{F}, \quad (2.4)$$

où \mathbf{F} représente l'ensemble des forces volumiques sur le solide, considérées nulles dans la suite, et ρ la masse volumique du matériau constituant le solide. Appliquant la divergence au tenseur des contraintes dans l'équation Eq. 2.3, sachant que $\text{div} \nabla \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}$, on obtient :

$$\text{div} \underline{\underline{\sigma}} = (\lambda + \mu) \nabla(\text{div} \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u}. \quad (2.5)$$

Ainsi l'équation Eq. 2.4 de la dynamique peut se réécrire sous la forme :

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = (\lambda + \mu) \nabla(\text{div} \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u}. \quad (2.6)$$

Finalement, en utilisant l'égalité $\Delta \mathbf{u} = \nabla \text{div} \mathbf{u} - \text{rot}(\text{rot} \mathbf{u})$, on obtient l'équation de Navier :

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = (2\mu + \lambda) \nabla \text{div} \mathbf{u} - \mu \text{rot}(\text{rot} \mathbf{u}). \quad (2.7)$$

Le théorème de Helmholtz-Hodge indique que le champ vectoriel de déplacement \mathbf{u} peut être décomposé en la somme d'une onde de compression (P-wave : une transformation irrotationnelle avec changement de volume) $\mathbf{u}_p = \nabla \phi$ et une d'une onde de cisaillement (S-wave : transformation sans changement de volume) $\mathbf{u}_s = \text{rot} \psi$ telles que :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_s \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{u}_s = \text{rot} \psi \\ \mathbf{u}_p = \nabla \phi \end{cases}. \quad (2.8)$$

Cette décomposition n'étant cependant pas unique, une condition supplémentaire est nécessaire [108], par exemple $\nabla \psi = 0$. Définis de la sorte, ϕ est un potentiel scalaire et ψ un potentiel vecteur, respectant les relations suivantes :

$$\begin{cases} \text{rot} \nabla \phi = \mathbf{0} \\ \text{div} \text{rot} \psi = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Ces deux relations traduisent, d'une part, que le champ \mathbf{u}_p a un rotationnel nul et que d'autre part que le champ \mathbf{u}_s est à divergence nulle. Ce qui permet de mettre l'équation Eq. 2.7 sous la forme :

$$\rho\ddot{\mathbf{u}}_p + \rho\ddot{\mathbf{u}}_s = (2\mu + \lambda)\nabla\text{div}\mathbf{u}_p - \mu\text{rot}(\text{rot}\mathbf{u}_s) \quad (2.10)$$

Ensuite, séparant les composantes transversale et longitudinale indépendantes, on obtient les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{u}}_p - c_p^2\nabla\text{div}\mathbf{u}_p = 0 \\ \ddot{\mathbf{u}}_s - c_s^2\text{rot}(\text{rot}\mathbf{u}_s) = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Les constantes $c_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ et $c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ correspondent respectivement aux célérités des ondes de compression et cisaillement. Ensuite, selon les propriétés irrotationnelles de \mathbf{u}_p et à divergence nulle de \mathbf{u}_s , le Laplacien de ces deux composantes prend la forme :

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{u}_p = \nabla(\text{div}\mathbf{u}_p) \\ \Delta\mathbf{u}_s = -\text{rot}(\text{rot}\mathbf{u}_s) \end{cases} \quad (2.12)$$

Finalement, en injectant l'équation Eq. 2.12 dans l'équation Eq. 2.11 on obtient deux équations de D'Alembert :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{u}}_p - c_p^2\Delta\mathbf{u}_p = 0 \\ \ddot{\mathbf{u}}_s - c_s^2\Delta\mathbf{u}_s = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Notons que ce découplage est valable pour une propagation dans un milieu infini, ou loin des bords.

2.1.2 . Ondes de Lamb

Les ondes de Lamb correspondent à des solutions particulières de l'équation d'onde Eq. 2.13 dans le cas où la longueur d'onde λ est comparable à l'épaisseur du milieu de propagation, ce qui correspond au cas des plaques, coques et des poutres. En adoptant les symétries de la propagation guidée par une plaque, on notera que l'onde de cisaillement est transverse et que l'onde de compression est longitudinale. Dans la suite, on retiendra que $c_L = c_p$ et $c_T = c_s$, telles que définies dans l'équation Eq. 2.11. Les deux surfaces libres inférieures et supérieures donnent lieu à des couplages et des conversions entre les ondes longitudinales (L) et les ondes transverses polarisées verticalement (TV), ce qui donnent naissance aux ondes de Lamb (voir Fig. 2.1a). L'établissement de la relation de dispersion correspondant à ces ondes a été décrite pour la première fois par Horace Lamb dans [68]. Considérant des ondes de Lamb de nombre d'onde q , cette relation s'exprime sous la forme suivante [108], dite équation de Rayleigh-Lamb :

$$\frac{\omega^4}{c_T^4} = 4q^2k_T^2 \left[1 - \frac{k_L \tan(k_L e + \alpha)}{k_T \tan(k_T e + \alpha)} \right] \quad (2.14)$$

où k_L et k_T correspondent respectivement aux nombres d'onde longitudinal et transversal, chacun défini en fonction du nombre d'onde q par $k_L^2 = \omega^2/c_L^2 - q^2$ et $k_T^2 = \omega^2/c_T^2 - q^2$. ω est la pulsation, e la demi épaisseur et $\alpha = \pi/2$ pour les modes de propagations antisymétriques. Cette relation de dispersion possède une infinité de solutions correspondant chacune à un mode de propagation dont les premiers ordres sont illustrés en figure Fig. 2.1b. Le cas nous intéressant ici des ondes de flexion correspond au cas particulier de la limite en grandes longueurs d'onde $\lambda \gg e$ et basses fréquences $\omega \rightarrow 0$ des ondes de Lamb. Dans ce cas, les nombres d'onde q , k_T , k_L sont petits et tels que qe , $k_T e$, $k_L e \ll 1$. En développant les tangentes pour $\alpha = \pi/2$ et $k_T e$, $k_L e$ voisins de 0, on obtient :

$$\frac{\omega^4}{c_T^4} \simeq 4q^2 k_T^2 \left[1 - \frac{1 + k_T^2 e^2/3}{1 + k_L^2 e^2/3} \right] \simeq \frac{4}{3} e^2 q^2 k_T^2 (k_L^2 - k_T^2). \quad (2.15)$$

Puis, $(k_L^2 - k_T^2) = -\omega^2/c_T^2(1 - c_T^2/c_L^2)$. De plus $\omega \rightarrow 0$, alors $k_T^2 \approx -q^2$ et on obtient :

$$\frac{\omega^4}{c_T^4} \simeq \frac{4}{3} q^4 e^2 \frac{\omega^2}{c_T^2} (1 - c_T^2/c_L^2). \quad (2.16)$$

On aboutit finalement à :

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{3}} q^2 e c_T (1 - c_T^2/c_L^2)^{1/2} = \frac{c_P}{\sqrt{3}} q^2 e \quad (2.17)$$

avec $c_P = 2c_T(1 - c_T^2/c_L^2)^{1/2} = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$. Il apparait donc clairement qu'en basses fréquences $\omega \propto q^2$.

2.1.3 . Ondes de flexion dans les poutres

Dans cette section et dans la suite du document, nous faisons le choix de restreindre l'étude aux solides dont la longueur L est grande devant l'épaisseur e et la largeur b ($L \gg e, b$). Cette hypothèse de poutre nous permet de considérer que la propagation des ondes est unidimensionnelle.

L'hypothèse de flexion pure revient à imposer des conditions cinématiques, a priori, au vecteur déplacement \mathbf{u} . Cinématiquement, en flexion pure, toute section transverse de la poutre demeure perpendiculaire à la fibre neutre (voir Fig. 2.2). Ceci impose une relation entre l'angle de rotation θ de la section et son déplacement transverse w qui s'exprime par :

$$\theta = -\partial_x w. \quad (2.18)$$

Il s'agit de l'hypothèse d'Euler-Bernoulli. Dans ce cas, le déplacement \mathbf{u} se réduit à :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \partial_x w \\ w \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

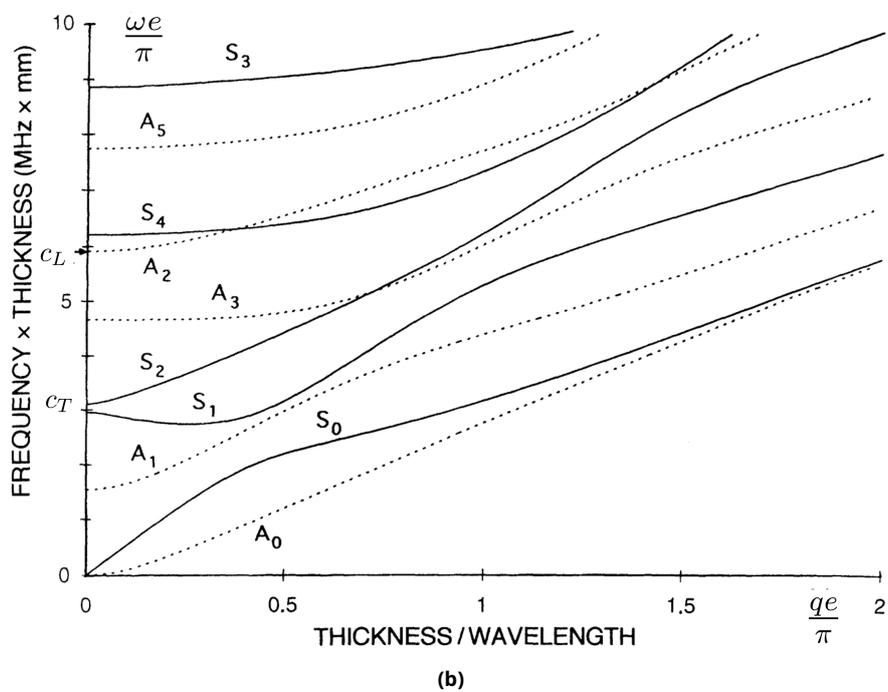
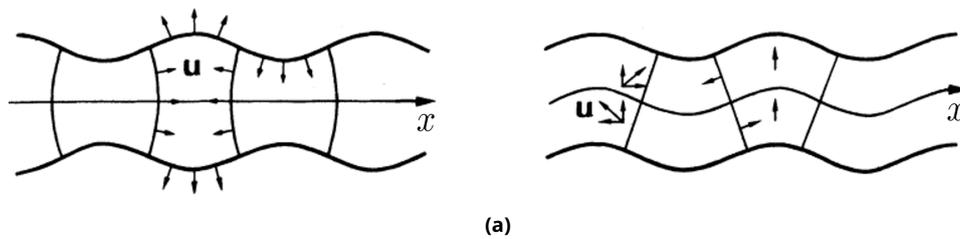


Figure 2.1 - (a) Illustrations des champs de déplacement des deux premiers modes de Lamb symétrique à gauche et antisymétrique à droite et (b) figure de dispersion des ondes de Lamb symétriques S_i ($\alpha = 0$) et antisymétriques A_i ($\alpha = \pi/2$). La fréquence $\omega e/\pi$ est tracée en fonction du nombre d'onde sans dimension qe/π . Illustrations issue de [108].

À partir de ce champ cinématique, on peut directement obtenir le champ de déformation, en remplaçant l'équation Eq. 2.19 dans l'équation Eq. 2.1 on obtient :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= -y\partial_x^2 w, & \varepsilon_{yy} &= 0, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}(\partial_x w + \partial_y u_x) = \frac{1}{2}(\partial_x w - \partial_x w) = 0.\end{aligned}\quad (2.20)$$

Notons que les hypothèses cinématiques faites précédemment de flexion pure aboutissent naturellement à un cisaillement nul tel que $\varepsilon_{xy} = 0$. En injectant l'équation Eq. 2.19 dans l'équation Eq. 2.4, on obtient :

$$\begin{aligned}-\rho y \partial_x \ddot{w} &= \partial_x \sigma_{xx} + \partial_y \sigma_{xy} \\ \rho \ddot{w} &= \partial_x \sigma_{yx} + \partial_y \sigma_{yy}\end{aligned}\quad (2.21)$$

avec $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ par symétrie du tenseur des contraintes. Les termes en σ_{xz} et σ_{yz} sont nuls en déformation plane. Puis en multipliant par y la première ligne et en intégrant sur la section les deux lignes, on obtient :

$$\begin{aligned}-\int_S \rho y^2 \partial_x \ddot{w} dS &= \int_S y \partial_x \sigma_{xx} dS + \int_S y \partial_y \sigma_{xy} dS \\ \int_S \rho \ddot{w} dS &= \int_S \partial_x \sigma_{yx} dS + \int_S \partial_y \sigma_{yy} dS\end{aligned}\quad (2.22)$$

On peut identifier le moment de flexion $M_{fz} = -\int_S y \sigma_{xx} dS$ dans l'équation Eq. 2.23, l'effort tranchant $T_y = \int_S \sigma_{yx} dS$ ainsi que le terme d'inertie en rotation de la section $\int_S \rho y^2 \partial_x \ddot{w} dS = \rho I \partial_x \ddot{w}$, avec I le moment quadratique. De plus, notons que $\partial_y (y \sigma_{xy}) = \sigma_{xy} + y \partial_y \sigma_{xy}$. Ceci permet d'identifier la densité linéique des efforts extérieurs $p(x) = \int_S \partial_y \sigma_{yy} dS$ et la densité linéique de moment $\mu(x) = \int_S \partial_y (y \sigma_{xy}) dS$. On en déduit le couple de relation suivant :

$$\begin{aligned}T_y &= -\partial_x M_{fz} + \rho I \partial_x \ddot{w} + \mu(x), \\ \rho S \ddot{w} &= \partial_x T_y + p(x).\end{aligned}\quad (2.23)$$

En remplaçant l'expression de T_y de la première ligne dans la seconde, on obtient l'expression suivante :

$$\rho S \ddot{w} = -\partial_x^2 M_{fz} + \rho I \partial_x^2 \ddot{w} + p(x) + \partial_x \mu(x).\quad (2.24)$$

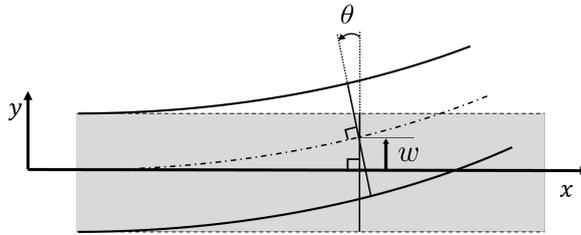


Figure 2.2 – Mouvement de flexion pure d'une poutre.

D'après la loi de Hooke $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$, le moment fléchissant peut se réécrire avec l'équation Eq. 2.20 :

$$M_{fz} = - \int_S y \sigma_{xx} dS = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (2.25)$$

En introduisant l'équation Eq. 2.25 dans l'équation Eq. 2.24, on obtient l'équation de propagation suivante :

$$EI \partial_x^4 w(x, t) - \rho I \partial_x^2 \ddot{w}(x, t) + \rho S \ddot{w}(x, t) = p(x, t) + \partial_x \mu(x, t). \quad (2.26)$$

L'équation Eq. 2.26, dite de poutre de Rayleigh, représente l'équation de propagation des ondes de flexion dans une poutre. Pour caractériser le comportement des ondes de flexion, on cherche la solution à l'équation Eq. 2.26 en régime libre, sans second membre, sous forme d'une onde plane propagative :

$$w(x, t) = W_0 e^{j(qx - \omega t)}. \quad (2.27)$$

En injectant l'expression Eq. 2.27 dans l'équation Eq. 2.26 sans second membre, on obtient :

$$W_0 (EI q^4 - \rho S \omega^2 - \rho I q^2 \omega^2) = 0, \quad (2.28)$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\omega^2 = \frac{EI q^4}{\rho I q^2 + \rho S}, \quad (2.29)$$

Dans l'hypothèse des grandes longueurs d'onde et d'une poutre mince telle que $h \ll b, L$, on a : $\frac{\rho I q^2}{\rho S} = h^2 q^2 / 12 \ll 1$. Sous cette hypothèse, le terme d'inertie en rotation $\rho I q^2$ est donc négligeable. On obtient alors la relation de dispersion suivante :

$$\omega = q^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}. \quad (2.30)$$

L'équation Eq. 2.30 correspond à la relation de dispersion du modèle de poutre d'Euler-Bernoulli, qui s'obtient en négligeant le terme $-\rho I \partial_x^2 \ddot{w}$ dans l'équation Eq. 2.26. L'équation Eq. 2.30 peut être réécrite, avec $S = h \times b$ et $I = b \times h^3 / 12$, de la façon suivante :

$$\omega = q^2 \frac{h}{2} \sqrt{\frac{E}{3\rho}}, \quad (2.31)$$

correspondant à l'équation Eq. 2.17, la limite grande longueur d'onde et basse fréquence du premier mode antisymétrique des ondes de Lamb, pour $e = h/2$ et en négligeant l'effet Poisson ($\nu = 0$). La relation parabolique indique que les ondes de flexion sont dispersives quelle que soit la longueur d'onde, la vitesse de groupe c_g est le double de la vitesse de phase c_Φ :

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial q} = 2q \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} = 2 \frac{\omega}{q} = 2c_\Phi. \quad (2.32)$$

2.1.4 . Modèle de flexion de Timoshenko

Le modèle de flexion de Timoshenko [33] est un modèle de flexion plus général que le modèle d'Euler-Bernoulli et de Rayleigh, prenant en compte les effets du cisaillement. Il est généralement utilisé pour la modélisation de poutre épaisse. Ceci signifie que la section de la poutre est cinématiquement libre de tourner par rapport à la fibre neutre, sans être contrainte par l'hypothèse de Bernoulli de l'équation Eq. 2.18. En désignant par ψ l'angle de rotation de la section S , le vecteur déplacement s'écrit alors :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y\psi(x) \\ w(x) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Tout comme pour le modèle de Bernoulli, les déformations sont déduites en injectant l'équation Eq. 2.33 dans l'équation Eq. 2.1, et s'expriment par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= -y\partial_x\psi, & \varepsilon_{yy} &= 0, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}(\partial_y u_x + \partial_x w) = \frac{1}{2}(-\psi + \partial_x w). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Pour une poutre homogène et isotrope, de section constante, l'équation d'onde peut se mettre sous la forme suivante avec une seule inconnue :

$$EI\partial_x^4 w + \rho S\ddot{w} - \rho I \left(1 + \frac{E}{\kappa G}\right) \partial_x^2 \ddot{w} + \frac{\rho^2 I}{\kappa G} \ddot{\ddot{w}} = 0. \quad (2.35)$$

On retrouve dans l'équation Eq. 2.35 les mêmes termes que dans l'équation Eq. 2.26, auxquels sont ajoutés deux termes correctifs faisant intervenir le facteur κG . $G = E/2(1 + \nu)$ correspond au module de cisaillement et κ à un coefficient de cisaillement sans dimension qui dépend principalement du coefficient de Poisson et de la géométrie de la section S ($\kappa = 5/6$ pour une poutre à section rectangulaire [60]). Ces deux termes correctifs résultent de la modification de l'expression de l'effort tranchant T_y et du moment de flexion M_f avec la prise en compte du cisaillement. Ils sont exprimés dans le modèle de Timoshenko par :

$$T_y = \kappa S G (\partial_x w - \psi) \text{ et } M_f = EI\partial_x\psi. \quad (2.36)$$

En injectant l'équation Eq. 2.27 dans l'équation Eq. 2.35, on obtient l'équation de dispersion suivante, quartique en fréquence et nombre d'onde :

$$EIq^4 - \omega^2 \rho S - \omega^2 q^2 \rho I \left(1 + \frac{E}{\kappa G}\right) + \omega^4 \frac{\rho^2 I}{\kappa G} = 0. \quad (2.37)$$

La figure Fig. 2.3 présente un comparatif de la relation de dispersion du mode A_0 des ondes de Lamb avec les différents modèles de poutre en flexion. Les 4 modèles sont équivalents en basse fréquence tant que $\lambda \gg h$, avec $\omega \propto q^2$. Le modèle basse fréquence d'Euler-Bernoulli est le premier à décrocher du mode de Lamb A_0 ,

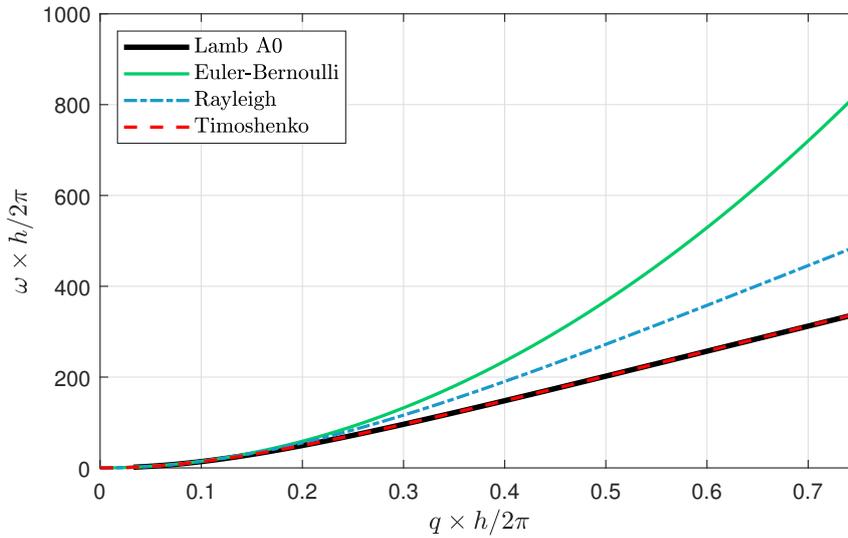


Figure 2.3 – Comparaison des relations de dispersion des différents modèles de flexion avec le mode A_0 .

la vitesse de phase c_ϕ augmente indéfiniment lorsque q augmente. En revanche, les trois autres modèles atteignent une saturation de la vitesse de phase pour $qh/\pi > 0.25$ soit $\lambda \approx 4h$, le milieu n'est plus dispersif au-delà de ces longueurs d'ondes. Le modèle de Rayleigh a une vitesse de phase qui tend asymptotiquement vers $c_L = \sqrt{E/\rho}$ d'après l'équation Eq. 2.29 quand $q \rightarrow \infty$. Ce qui ne correspond pas à la limite asymptotique des ondes de Lamb A_0 qui tendent à se propager à la vitesse des ondes de surface de Rayleigh [108]. Le modèle de Timoshenko, prenant en compte le cisaillement et l'inertie de rotation de la section, présente le meilleur accord avec le mode de Lamb A_0 , lorsque des petites longueurs d'onde sont considérées.

2.2 . Propagation des ondes dans les milieux architecturés

Nous avons vu dans la section Sec. 2.1 la propagation d'onde dans un milieu homogène et continu. Intéressons-nous à présent à la propagation dans les milieux dont la topologie est architecturée, en commençant par les milieux discrets.

2.2.1 . Chaîne de masses infinie reliées par des ressorts

L'exemple usuel pour décrire les concepts de propagation d'onde dans un milieu périodique et de dispersion est celui de la chaîne de masses m connectées par des ressorts linéaires de raideurs k (voir Fig. 2.4). Nommons a la constante du réseau, i.e. la distance séparant le centre de deux masses voisines au repos. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse n de position u_n s'écrit :

$$m\ddot{u}_n = k(u_{n-1} + u_{n+1} - 2u_n) \quad (2.38)$$

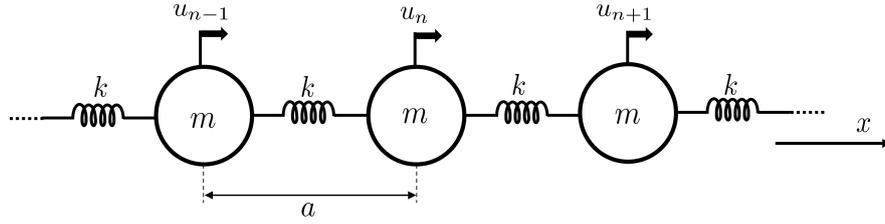


Figure 2.4 – Schéma d'un réseau monoatomique périodique et infini.

On cherche la solution u_n sous la forme d'une onde plane longitudinale telle que $u_n = U_0 e^{-j(\omega t + \varphi_n)}$, avec φ_n la phase, de sorte que le signal, en l'absence de dissipation, est perçu à l'identique en x_{n+1} mais avec un retard de phase différent φ_{n+1} , ce qui donne :

$$-m\omega^2 U_0 + 2kU_0 = kU_0(e^{-j(\varphi_{n+1} - \varphi_n)} + e^{-j(\varphi_{n-1} - \varphi_n)}) \quad (2.39)$$

L'espacement entre les masses au repos étant constant, la différence de phase est elle-même constante et on peut écrire :

$$\varphi_{n+1} - \varphi_n = \varphi_{n-1} - \varphi_n = \Delta\varphi = q\Delta x = qa \quad (2.40)$$

où q désigne ici le nombre d'onde. Notons que d'après l'équation Eq. 2.40, $u_{n+1} = U_0 e^{j(qx + qa - \omega t)} = u_n e^{jq a}$ est une illustration du théorème de Bloch, qui énonce que les solutions de l'équation d'onde dans un potentiel périodique (ici les potentiels élastiques) ont la forme d'un produit entre une onde plane e^{jqx} et une fonction périodique ayant la périodicité du réseau [63]. De proche en proche, $u_n = u_0 e^{jqna}$. Reprenant l'équation Eq. 2.41 avec l'équation Eq. 2.40, on obtient :

$$m\omega^2 = 2k(1 - \cos(qa)), \quad (2.41)$$

qui peut se mettre également sous la forme :

$$\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \left| \sin\left(\frac{qa}{2}\right) \right| \quad (2.42)$$

La relation de dispersion est donc périodique de période $2\pi/a$, ce qui permet de réduire son tracé sur la figure Fig. 2.5 à l'intervalle $q \in [-\pi/a; \pi/a]$ appelé zone de Brillouin. On voit ici que la périodicité spatiale du milieu de propagation induit une périodicité de la relation de dispersion. Par ailleurs, la symétrie de la relation de dispersion indique que deux modes de propagations longitudinaux sont solutions du problème, l'un se propageant dans le sens $+x$ et l'autre dans le sens $-x$. Pour les grandes longueurs d'onde, lorsque $\lambda = 2\pi/q \gg a$, c'est-à-dire $qa \ll 1$ la vitesse de propagation des ondes dans le réseau $c_\varphi = \omega/q \rightarrow a\sqrt{k/m}$ et est identique à la vitesse de groupe $c_g = \partial\omega/\partial q$, la propagation de l'onde s'effectue alors sans dispersion du paquet d'onde. La limite des grandes longueurs d'ondes est aussi appelée limite acoustique, et désigne alternativement la limite des milieux

continus. À l'opposé, lorsque $\lambda \rightarrow a$ la vitesse de groupe des ondes diminuent jusqu'à tendre vers 0 avec $\omega_c = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$ la fréquence de coupure au-delà de laquelle il n'existe plus de solution prorogative. Cette fréquence de coupure est appelée fréquence de Bragg.

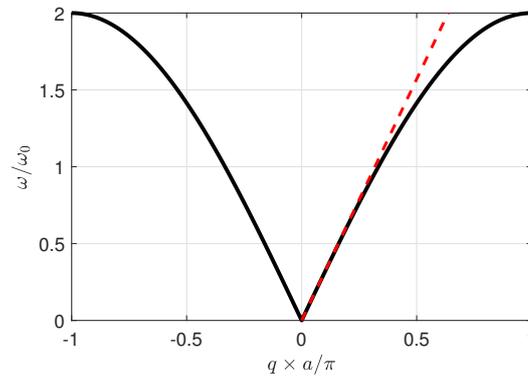


Figure 2.5 – Relation de dispersion pour les ondes longitudinales dans le réseau infini de masses connectées par des ressorts.

2.2.2 . Chaîne de masses infinie à résonance locale

On a vu qu'il est possible de décrire la propagation dans un milieu discret compatible avec la limite des milieux continus. Ici, k et m rendent compte des propriétés élastiques et d'inertie classique de la matière, lorsque leurs valeurs sont des constantes indépendantes de la fréquence. Considérer une cellule élémentaire plus complexe (par exemple une masse contenant un degré de liberté interne) permet de conférer au matériau de nouvelles propriétés. On parle de métamatériaux pour désigner un matériau architecturé dans la limite des grandes longueurs d'ondes. Lorsque la longueur d'ondes est compatible avec la taille de la maille élémentaire, on parle de réseau phononique.

L'exemple le plus simple de métamatériau réseau phononique consiste à des masselottes capables de rentrer en résonance au sein de chacune des masses du réseau comme illustrée sur la figure Fig. 2.6. Avec une démarche similaire à celle

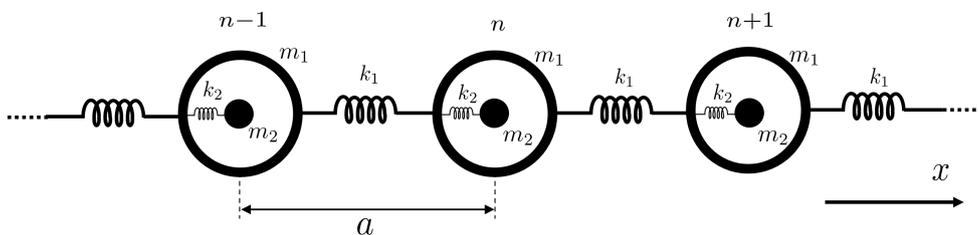


Figure 2.6 – Schéma d'un réseau périodique et infini de masses reliées par des ressorts, à chacune desquelles sont attachées des masses résonantes.

effectuée dans la section Sec. 2.2.1, en écrivant cette fois le principe fondamental

de la dynamique à chacune des masses, on aboutit à un système matriciel dont le déterminant donne la relation de dispersion, cette fois polynomiale de degré 4 en ω , donnée par :

$$0 = 2k_1k_2(1 - \cos(qa)) + m_1m_2\omega^4 - \omega^2[(m_1 + m_2)k_2 + 2m_2k_1(1 - \cos(qa))]. \quad (2.43)$$

Cette relation de dispersion donne lieu à deux branches de solutions réelles pour ω qui sont présentées en figure Fig. 2.7. À titre de comparaison, on a superposé la courbe de dispersion pour $m_2 = 0$, correspondant au cas du réseau monoatomique présenté dans la Sec. 2.2.1. Sur la courbe rouge, à mesure que la fréquence de l'onde propagative augmente, la vitesse de groupe tend vers 0 quand $\omega \rightarrow \omega_r = \sqrt{k_2/m_2}$, ce qui correspond à la fréquence de résonance des masselottes. À cette fréquence une rotation de phase s'opère, le mouvement longitudinal de la masselotte passe en opposition de phase avec le mouvement de la masse hôte. La résonance provoque l'ouverture d'une bande dite bande interdite de résonance dans laquelle il n'y a pas de solution réelle. Dans cette bande de fréquences, les ondes sont évanescentes, c'est-à-dire exponentiellement atténuées avec une longueur d'atténuation l_{att} égale à l'inverse de la partie imaginaire du nombre d'onde. L'équation Eq. 2.43 ayant été

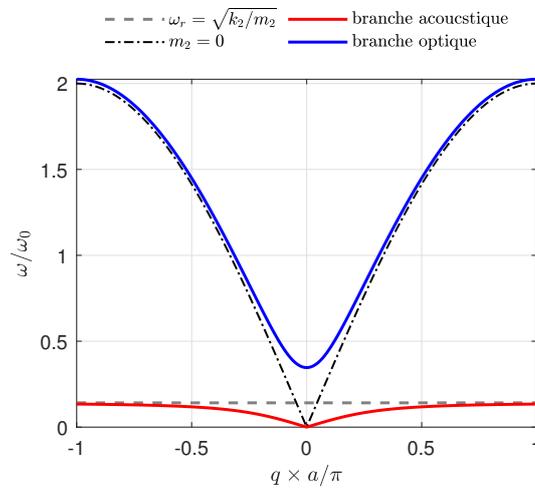


Figure 2.7 – Courbe de dispersion correspondant aux solutions réelles de l'équation Eq. 2.43. $m_2/m_1 = 5$ et $k_2/k_1 = 0.1$, les valeurs de m_1 et k_1 sont identiques à celle de k et m utilisées dans la figure Fig. 2.5.

résolue pour ω , avec q imposé réel, l_{att} ne peut être déterminé directement. En inversant l'équation Eq. 2.43, on obtient $q(\omega)$:

$$q(\omega) = \frac{1}{a} \arccos \left(1 + \frac{m_1m_2\omega^2 - k_2(m_1 + m_2)}{2\frac{k_1k_2}{\omega^2} - 2m_2k_1} \right). \quad (2.44)$$

Sous cette forme, on peut alors imposer la fréquence réelle et obtenir les solutions complexes de q . Celle-ci sont tracées sur la figure Fig. 2.8. On s'aperçoit ici que lorsque $\omega = \omega_r = \sqrt{k_2/m_2}$ alors $\text{Im}(q) \rightarrow \infty$. En d'autres termes, à la résonance, l'onde est évanescence avec $l_{\text{att}} \rightarrow 0$. Au-delà de la fréquence de résonance, la longueur d'atténuation augmente avec la fréquence jusqu'à devenir infinie lorsque le nombre d'onde redevient purement réelle. La figure Fig. 2.8 représente également

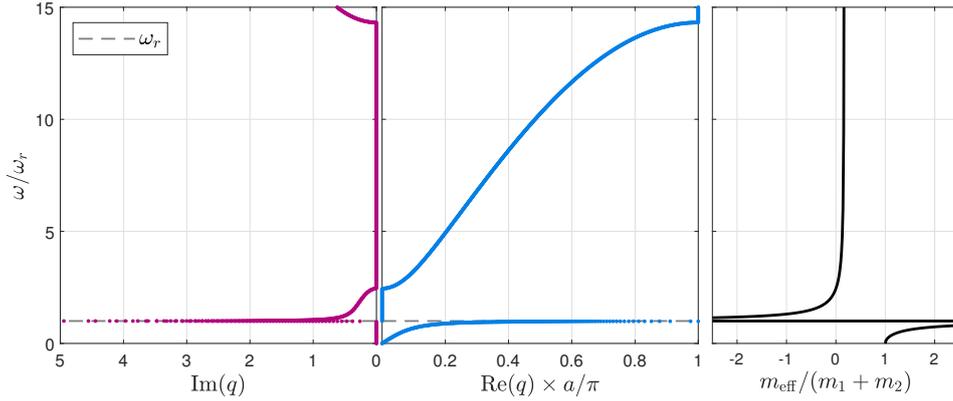


Figure 2.8 – Courbe de dispersion complexe obtenue avec l'équation Eq. 2.44 avec les mêmes valeurs numériques que pour la figure Fig. 2.7 et masse effective normalisée obtenue avec l'équation Eq. 2.46.

à droite la masse effective d'une cellule élémentaire du réseau, de cette façon, on obtient un système équivalent à la chaîne monoatomique infinie, mais avec des masses effectives m_{eff} dépendantes de la fréquence. m_{eff} s'obtient en factorisant l'expression de l'équation Eq. 2.43 sous la forme donnée par l'équation Eq. 2.41, pour obtenir une relation de dispersion de la forme :

$$m_{\text{eff}}\omega^2 = 2k_1(1 - \cos(qa)), \quad (2.45)$$

avec la masse effective :

$$m_{\text{eff}} = m_1 + m_2 + m_2 \frac{(\omega/\omega_0)^2}{1 - (\omega/\omega_0)^2}. \quad (2.46)$$

$m_1 + m_2$ représente simplement la masse statique, de la cellule au repos, comme l'indique la figure Fig. 2.8 avec $m_{\text{eff}}/(m_1 + m_2) \rightarrow 1$ quand $\omega \rightarrow 0$. À la résonance, la masse effective de la cellule est infinie, ce qui signifie qu'à cette fréquence la cellule se comporte comme un objet à l'inertie infinie bloquant la transmission des ondes, comme le montre la valeur infinie de la partie imaginaire du nombre d'onde. Au-delà de ω_0 la masse effective est négative à l'intérieur de la bande interdite, signifiant que le signe de l'accélération de la masse effective élémentaire s'oppose à la force excitatrice, ce qui conduit à une atténuation spatiale de l'onde.

2.2.3 . Modèle continu : onde de Bloch dans une poutre infinie dotée de résonateurs à 1 DDL

i. Description du système

Nous revenons à présent sur le modèle continue d'onde de flexion dans une poutre, à laquelle on attache un réseau périodique de systèmes masse ressort (voir Fig. 2.9). L'objet d'étude est une poutre d'Euler, un objet 1D, les ondes, de nombre

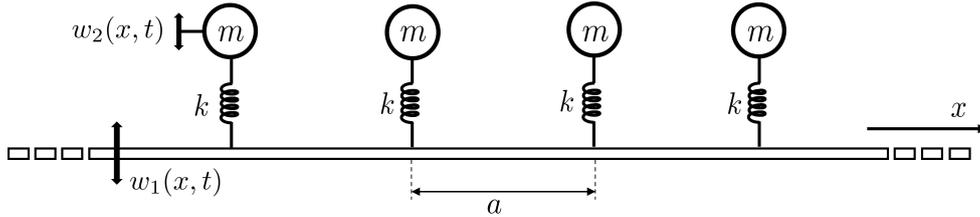


Figure 2.9 – Poutre infinie avec un réseau de résonateurs à 1 degré de liberté

d'onde q , ne se propagent que selon la direction x de la poutre. Nous allons résoudre ce problème en utilisant la méthode EPWE (Extended Plane wave expansion)[129, 128, 130, 105], adapté à la résolution d'équation dans un milieu périodique infini. Celle-ci permet d'obtenir la relation de dispersion des ondes se propageant dans la poutre et interagissant avec le réseau via une décomposition en onde de Bloch [63].

Le problème peut être formulé de la façon suivante, adapté au cas 1D de [128], sous la forme d'un système d'équations de Helmholtz :

$$\begin{cases} EI\nabla^4 w_1(x, \omega) - \omega^2 \rho S w_1(x, \omega) = \sum_R k [w_2(R, \omega) - w_1(R, \omega)] \delta(x - R) \\ -m\omega^2 w_2(R, \omega) = -k [w_2(R, \omega) - w_1(R, \omega)] \end{cases} \quad (2.47)$$

Avec E, I, ρ et S le module d'Young, le moment quadratique, la masse volumique et la section transverse de la poutre, respectivement. m et k sont la masse et la raideur des systèmes masse ressort. $w_1(x, \omega)$ et $w_2(x, \omega)$ sont respectivement les fonctions de déplacement transversal de la poutre et des résonateurs.

Dans la suite, on se place dans l'espace de Fourier des fréquences, pour simplifier l'écriture de $w_1(x, \omega)$ et $w_2(x, \omega)$ qui deviennent $w_1(x)$ et $w_2(x)$, en omettant le facteur $e^{-j\omega t}$ pour simplifier l'écriture.

Notons que dans cette modélisation, on ne considère la propagation des ondes que dans la poutre, elle n'est donc valide que si la taille des résonateurs modélisés est faible devant la plus petite longueur d'onde se propageant dans la poutre. Le système est donc composé d'une part de l'équation régissant le comportement dynamique de la poutre d'Euler en régime harmonique, soumise régulièrement sur toute sa longueur à l'effort de systèmes masse ressort. Et d'autre part de l'équation régissant la dynamique des systèmes à 1 degré de liberté. On pose

$R = \bar{n}a$, avec $\bar{n} \in \mathbb{Z}$, l'ensemble des vecteurs du réseau, c'est-à-dire l'ensemble des translations entre un point du réseau où se trouvent un résonateur local et un autre point du réseau [63]. La fonction $\delta(x - R)$ est définie de la façon suivante :

$$\delta(x - R) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.48)$$

ii. Expression de la relation de dispersion $\omega(q)$

La poutre étant de longueur infinie, tout comme le nombre de résonateurs régulièrement espacés sur toute sa longueur, le système a a priori une infinité d'équations. On définit également G , l'ensemble des vecteurs du réseau réciproque, dans l'espace des nombres d'onde, tel que :

$$G = nb, \quad n \in \mathbb{Z} \text{ et } a \cdot b = 2\pi \Leftrightarrow b = \frac{2\pi}{a} \quad (2.49)$$

b est donc le pas du réseau dans l'espace dual des nombres d'onde. La périodicité de la structure permet de décomposer l'amplitude du déplacement $w_1(x)$ de la poutre sous la forme d'une série de Fourier. Dans ce cas, dans l'espace de Fourier des fréquences, $w_1(x)$ s'écrit :

$$w_1(x) = e^{jqx} \sum_G W_1(G) e^{jGx} = \sum_G W_1(G) e^{j(q+G)x}. \quad (2.50)$$

De plus, les équations Eq. 2.50 et Eq. 2.49 nous permettent d'écrire :

$$\begin{cases} w_1(R) = w_1(0 + R) = w_1(0) e^{jqR} \\ w_2(R) = w_2(0 + R) = w_2(0) e^{jqR} \end{cases} \quad (2.51)$$

Notons la relation suivante concernant δ :

$$\sum_R \delta(x - R) e^{jqR} = e^{jqx} \sum_R \delta(x - R) \quad (2.52)$$

En substituant les équations Eq. 2.52 et Eq. 2.51 dans l'équation Eq. 2.47, le problème se met sous la forme suivante :

$$\begin{cases} EI \nabla^4 w_1(x) - \omega^2 \rho S w_1(x) = k [w_2(0) - w_1(0)] e^{jqx} \sum_R \delta(x - R) \\ -m \omega^2 w_2(0) = -k [w_2(0) - w_1(0)] \end{cases} \quad (2.53)$$

À partir du second membre de la première équation du système d'équations Eq. 2.53 on définit $g(x) = \sum_R \delta(x - R)$. Étant périodique, g peut-être décomposé en série de Fourier dans l'espace des nombres d'onde :

$$g(x) = \sum_G \tilde{g}(G) e^{jGx} \quad (2.54)$$

et les amplitudes $\tilde{g}(G)$ sont données par :

$$\tilde{g}(G) = \frac{1}{a} \int_0^a g(x) e^{jGx} dx = \frac{1}{a} \int_0^a \sum_R \delta(x - R) e^{jGx} dx = \frac{1}{a}. \quad (2.55)$$

où a désigne la longueur d'une cellule élémentaire, soit la périodicité spatiale. Ainsi :

$$g(x) = \sum_R \delta(x - R) = \frac{1}{a} \sum_G e^{jGx} \quad (2.56)$$

En insérant les équations Eq. 2.50 et Eq. 2.56 dans l'équation Eq. 2.53 :

$$\begin{cases} EI(q + G)^4 W_1(G) - \omega^2 \rho S W_1(G) = \frac{k}{a} [w_2(0) - w_1(0)] \\ -m\omega^2 w_2(0) = -k[w_2(0) - w_1(0)] \end{cases} \quad (2.57)$$

D'après la relation Eq. 2.50, on a :

$$w_1(0) = \sum_G W_1(G). \quad (2.58)$$

Puis, en insérant l'équation Eq. 2.58 dans l'équation Eq. 2.57, il vient :

$$\begin{cases} EI(q + G)^4 W_1(G) - \omega^2 \rho S W_1(G) = \frac{k}{a} [w_2(0) - \sum_G W_1(G)] \\ -m\omega^2 w_2(0) = -k[w_2(0) - \sum_G W_1(G)] \end{cases} \quad (2.59)$$

Finalement le problème peut se mettre sous la forme d'une équation aux valeurs propres matricielle, en imposant une dimension finie au problème $N = 2M + 1$, tel que $n \in [-M; M]$, ce qui revient à tronquer la solution $w_1(x)$ à un nombre fini d'ondes planes :

$$\left(\begin{bmatrix} aEI\mathbf{Q} + k\mathbf{U} & k\mathbf{P} \\ -k\mathbf{P}^t & k \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \rho Sa\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ w_2(0) \end{Bmatrix} = 0, \quad (2.60)$$

où

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} (q + G_1)^4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (q + G_2)^4 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & (q + G_N)^4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_N, \quad (2.61)$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{N \times N} \quad \text{et} \quad \mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_N \end{bmatrix}_N. \quad (2.62)$$

La résolution de ce problème aux valeurs propres, ω^2 , pour chaque vecteur d'onde de Bloch q le long de la zone de Brillouin donne $N + 1$ valeurs propres permettant

de tracer le diagramme de dispersion $\omega = \omega(q)$ avec q réel. Cependant, afin de caractériser les bandes interdites de façon plus approfondie, il convient d'inverser le problème. En effet, pour chaque fréquence ω est associé un nombre d'onde réel ou complexe, et la partie imaginaire du nombre d'onde permet de caractériser l'atténuation. Cependant, sous sa forme actuelle $\omega = \omega(q)$, il est impossible d'associer à chaque fréquence un nombre d'onde complexe. Nous allons donc mettre le problème sous la forme $q = q(\omega)$ comme dans la section Sec. 2.2.2.

iii. Expression de la relation de dispersion $q(\omega)$

Pour obtenir l'équation de dispersion sous la forme $q = q(\omega)$, il s'agit de reformuler les termes de la matrice \mathbf{Q} en remplaçant les G_i , $i \in [1, N]$ par leurs coordonnées vectorielles de l'équation Eq. 2.49. Ainsi :

$$(q + G)^4 = (q + nb)^4. \quad (2.63)$$

Après développement :

$$(q + nb)^4 = \frac{1}{a^4} [(qa)^4 + 8n\pi(qa)^3 + 6(2n\pi)^2(qa)^2 + 4(2n\pi)^3(qa) + (2n\pi)^4] \quad (2.64)$$

Posons $\bar{q} = qa$, le nombre d'onde sans dimension, ainsi que les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_3 &= \text{diag}(8n\pi)_{n \in [-M, M]}, \\ \mathbf{Q}_2 &= \text{diag}(6(2n\pi)^2)_{n \in [-M, M]}, \\ \mathbf{Q}_1 &= \text{diag}(4(2n\pi)^3)_{n \in [-M, M]}, \\ \mathbf{Q}_0 &= \text{diag}(2n\pi)^4_{n \in [-M, M]}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

La matrice \mathbf{Q} peut alors s'écrire :

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{a^4} [\mathbf{I}\bar{q}^4 + \mathbf{Q}_3\bar{q}^3 + \mathbf{Q}_2\bar{q}^2 + \mathbf{Q}_1\bar{q} + \mathbf{Q}_0] \quad (2.66)$$

D'autre part :

$$k_D = k - \frac{k^2}{k - \omega^2 m} \quad (2.67)$$

est la raideur dynamique des résonateurs, celle-ci est obtenue en résolvant le système suivant à deux degrés de liberté :

$$\left(\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} w_1(0) \\ w_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f_1(0) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.68)$$

où $f_1(0)$ représente la force transmise par la poutre au ressort. De cette façon $f_1(0) = -k_D w_1(0)$. Ce qui permet d'éliminer le dernier terme de l'équation Eq. 2.60 de façon à avoir :

$$\left(\mathbf{Q} - \frac{\rho S a^4}{EI} \mathbf{I} + \frac{k_D a^3}{EI} \mathbf{U} \right) \mathbf{W}_1 = 0 \quad (2.69)$$

Puis en substituant l'équation Eq. 2.66 dans l'équation Eq. 2.69, on a :

$$\left(\mathbf{I}\bar{q}^4 + \mathbf{Q}_3\bar{q}^3 + \mathbf{Q}_2\bar{q}^2 + \mathbf{Q}_1\bar{q} + \mathbf{Q}_0 - \frac{\rho S a^4}{EI} \mathbf{I} + \frac{k_D a^3}{EI} \mathbf{U} \right) \mathbf{W}_1 = 0 \quad (2.70)$$

On pose :

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{Q}_0 - \frac{\rho S a^4 \omega^2}{EI} \mathbf{I} + \frac{k_D a^3}{EI} \mathbf{U} \quad (2.71)$$

et les égalités suivantes :

$$\mathbf{I}\{\bar{q}W_1\} = \bar{q}\{W_1\}, \mathbf{I}\{\bar{q}^2W_1\} = \bar{q}\{\bar{q}W_1\} \text{ et } \mathbf{I}\{\bar{q}^3W_1\} = \bar{q}\{\bar{q}^2W_1\} \quad (2.72)$$

En substituant l'équation Eq. 2.71 dans l'équation Eq. 2.70 et en ajoutant les égalités de l'équation Eq. 2.72 au problème, on obtient l'équation aux valeurs propres suivant sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{Q}_3 & -\mathbf{Q}_2 & -\mathbf{Q}_1 & -\mathbf{A}_0 \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}^3 \mathbf{W}_1 \\ \bar{q}^2 \mathbf{W}_1 \\ \bar{q} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_1 \end{Bmatrix} = \bar{q} \begin{Bmatrix} \bar{q}^3 \mathbf{W}_1 \\ \bar{q}^2 \mathbf{W}_1 \\ \bar{q} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_1 \end{Bmatrix}. \quad (2.73)$$

vi. Analyse de la figure de dispersion

L'équation Eq. 2.73 à résoudre est un problème aux valeurs propres quartique. Pour chaque fréquence ω , l'inversion du problème nous donne $4 \times N$ solutions. L'ensemble de ces solutions est tracé sur la figure Fig. 2.10 pour $M = 4$, ce qui fait $4(2 \times 4 + 1) = 36$ valeurs propres complexes \bar{q} par fréquence. La figure Fig. 2.10 présente une partie de ces solutions pour les $\text{Im}(q)$ négatifs et les $\text{Re}(q)$ compris entre 0 et $3\pi/a$, c'est-à-dire ondes se propageant selon $+x$. Comme attendu et observé dans les cas de la section Sec. 2.2.1 et de la section Sec. 2.2.2, la partie réelle présente des symétries par rapport à l'axe vertical tous les $\text{Re}(q) \times a = \pi$, du fait de la périodicité spatiale du milieu de propagation. Ce qui signifie que l'on peut restreindre l'observation de la partie réelle à la seule zone de Brillouin irréductible dans l'intervalle $[0; 1]$. On peut également observer sur la partie réelle la présence d'une branche de solution horizontale, non propagative, légèrement au-dessus de 3 KHz. Cette solution correspond à la fréquence de résonance du système masse-ressort seul, à exactement $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$, découplée du reste de la poutre.

Comme vu précédemment, la partie imaginaire représente ici aussi le taux de décroissance exponentielle des ondes de Bloch évanescents dans le réseau. En revanche, pour chaque valeur de ω la résolution du problème aux valeurs propres donne plusieurs valeurs de $\text{Im}(q)$ traduisant une décroissance multi-exponentielle des ondes de Bloch comme cela avait pu être observé dans [34]. En revanche, il a été observé dans [105] avec des cristaux soniques que seul le premier terme de ce développement harmonique pouvait être retenu pour caractériser la décroissance exponentielle de l'amplitude des ondes dans le cristal. Ce qui signifie que la solution

| Poutre | | |
|---------------|-------------|--------------------|
| E | 210 | GPa |
| ρ | 7850 | kg.m ⁻³ |
| épaisseur e | 1.5 | mm |
| largeur b | 40 | mm |
| a | 0.045 | m |
| Résonateur | | |
| m | 0.0247 | kg |
| k | 9.2132E + 6 | N/m |

Table 2.1 – Table des paramètres de la poutre et du résonateur

observée est la moins atténuée, celle qui "transporte l'énergie le plus loin" d'après la formulation employée dans [128, 130].

La figure Fig. 2.12 représente la figure Fig. 2.10 restreinte à la première zone irréductible de Brillouin et se limite au premier harmonique de la partie imaginaire de la même manière que dans [128, 130]. Ici, on distingue nettement trois bandes de fréquences interdites, deux ont la forme de demi ellipses et la troisième est pointue. Les demies ellipses sont situées tous les $q = n \times \pi/a$ ($n \in \mathbb{N}$) et correspondent à des bandes interdites de Bragg. Ces fréquences peuvent être retrouvées à l'aide d'une part, de la condition de Bragg [63] de diffraction d'une onde sur un cristal, sans angle d'incidence exprimée par :

$$a = n \frac{\lambda}{2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.74)$$

et d'autre part, avec la relation de dispersion des ondes dans les poutres d'Euler-Bernoulli vu plus tôt à l'équation Eq. 2.30 :

$$f = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}. \quad (2.75)$$

En substituant l'équation Eq. 2.74 dans l'équation Eq. 2.30 la relation donnant les fréquences de Bragg du cristal sont données par :

$$f_B = n^2 \frac{\pi}{2a^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}, \quad (2.76)$$

ce qui permet de déterminer pour les rangs $n = 1$ et $n = 2$ les deux premières fréquences de Bragg du cristal phononique : $f_{B1} = 1737.3$ Hz et $f_{B2} = 6949.1$ Hz. Ces deux fréquences correspondent à la borne supérieure de la première bande interdite et à la borne inférieure de la troisième, respectivement pour f_{B1} et f_{B2} .

La seconde bande interdite ne coïncide pas avec un repliement de la courbe de dispersion puisqu'elle est indépendante de la périodicité du réseau et de l'effet

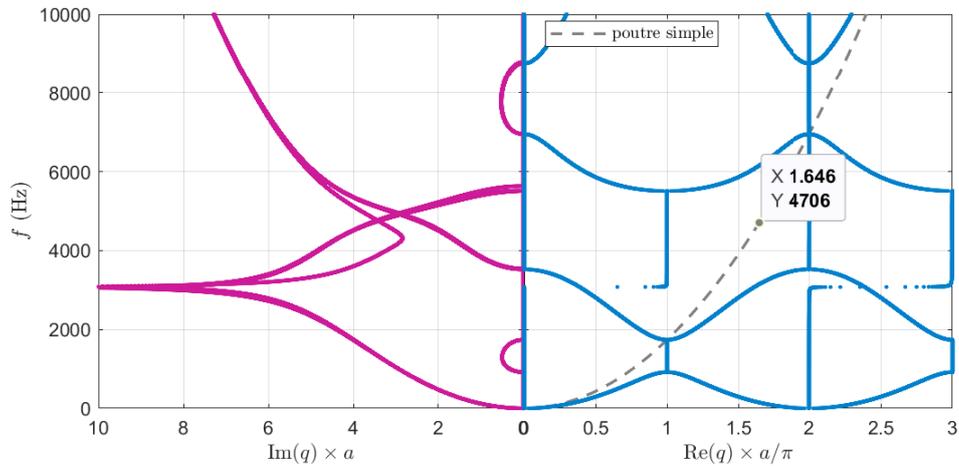


Figure 2.10 – Diagramme de dispersion obtenu en résolvant l'équation Eq. 2.73 avec $M = 4$, avec à gauche la partie imaginaire du nombre d'onde réduit et à droite sa partie réelle.

Bragg. Cette bande interdite correspond à un phénomène d'hybridation provoqué par la résonance locale des masses dont le mouvement est ici fortement corrélé avec le déplacement transversal de flexion de la poutre. En dessous de la fréquence d'ouverture de la bande interdite de résonance, la poutre et les masses vibrent en phase, au-dessus, ils sont en opposition de phase, et à l'intérieur, leur mouvement est très faible. Ce mécanisme peut être approché du phénomène de respiration d'une double paroi, dont chacune des parois sont modélisée par des masses rigides reliées par un ressort de raideur k (voir Fig. 2.11). Ici la première masse est la masse m résonante et la seconde est approchée par une portion de poutre dont la longueur est celle d'une cellule élémentaire et donc de masse $m_p = \rho S a$. Supposant que

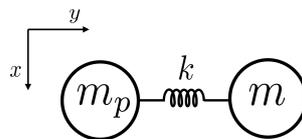


Figure 2.11 – Modèle réduit de double paroi.

m_p subit un effort harmonique F , les déplacements y de m et y_p de m_p s'écrivent d'après le principe fondamental de la dynamique :

$$y_p = \left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right) \frac{-F}{(m + m_p - mm_p\omega^2/k)\omega^2} \quad (2.77)$$

$$y = \frac{-F}{(m + m_p - mm_p\omega^2/k)\omega^2}.$$

Le pôle non nul commun à ces deux expressions permet de déduire la pulsation de

respiration $\omega_{res} = \sqrt{\frac{m+m_p}{m_p m}} k$ dont la fréquence correspondante $f_{res} = 4524.8$ Hz se trouve ici être dans la bande interdite de résonance.

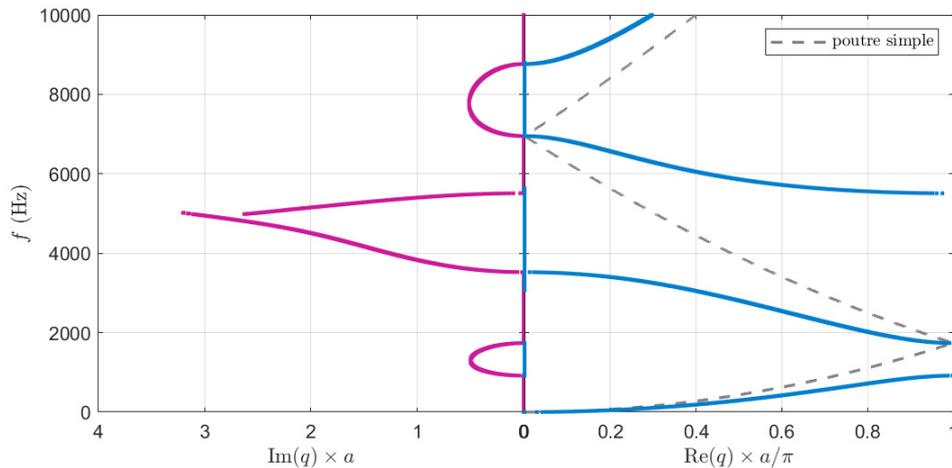


Figure 2.12 – Courbe de dispersion tracée dans la première zone de Brillouin avec le premier harmonique de la partie imaginaire.

La figure Fig. 2.13 présente la courbe de dispersion complexe du même système dans lequel le pas du réseau a été diminué de façon à rapprocher la bande interdite de Bragg de la bande d'hybridation. Nous pouvons voir que cette configuration permet d'obtenir deux bandes interdites très proches, quasiment jointes, avec une bande passante très étroite entre les deux avec une très faible vitesse de groupe. La bande interdite de Bragg est très élargie par rapport à la configuration initiale et l'amplitude de la partie imaginaire est amplifiée d'un facteur deux. La bande d'hybridation est également élargie, mais son amplitude maximale est diminuée d'un facteur 3. Cet exemple permet de montrer l'intérêt du couplage entre les propriétés du réseau phononique et d'un métamatériau localement résonant [128]. Ici, le phénomène de résonance permet d'améliorer très fortement les propriétés de largeur de bande et d'atténuation de l'effet Bragg, tout en réduisant le pas du réseau. Ceci trouve de plus un intérêt pratique très fort, car une réduction du pas du réseau s'accompagne généralement d'une diminution de la taille du dispositif de traitement vibratoire.

2.3 . Propagation en milieu dissipatif

Nous avons vu jusqu'à présent des ondes dans des milieux conservatifs. Cependant, un milieu réel, quel qu'il soit, apporte toujours un peu de dissipation. Nous allons donc voir dans cette section comment ajuster le formalisme précédent pour tenir compte de ces interactions non conservatives et en observer les effets sur la relation de dispersion.

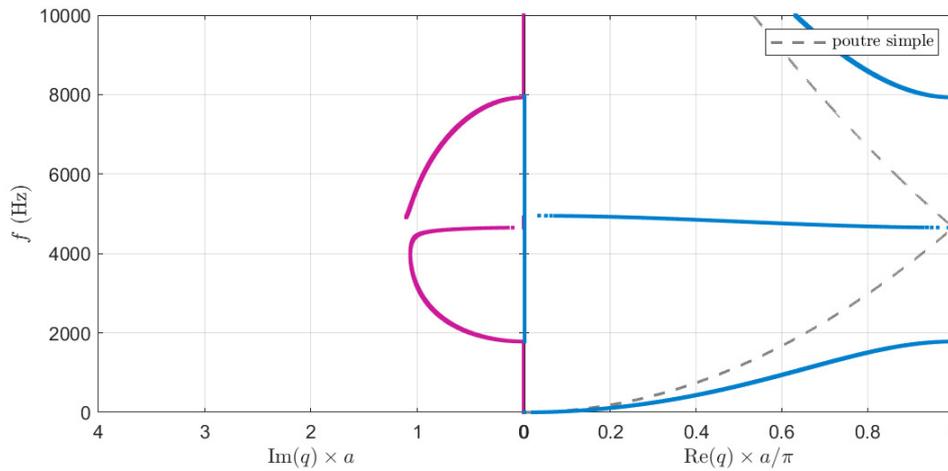


Figure 2.13 – Relation de dispersion complexe de la poutre infinie dotée d'un réseau de résonateurs pour $a = 0.0275$ m.

2.3.1 . Onde de flexion dans une poutre mince dissipative

Le nombre d'onde complexe q se décompose de la façon suivante :

$$q = q_r + jq_i = q_r(1 + j\gamma) \quad (2.78)$$

avec $\gamma = q_i/q_r$ qui désigne ici l'amortissement spatial de l'onde, comme ratio entre la longueur d'onde et la longueur d'atténuation, selon la description donnée dans [10]. La relation avec le facteur de perte matériau η n'est pas immédiate. En effet, η et γ caractérisent deux objets différents, respectivement le matériau et l'onde. Comme défini dans [77], cette relation s'exprime :

$$\eta = 2\gamma \frac{c_g}{c_\phi}. \quad (2.79)$$

La présence du ratio c_g/c_ϕ indique le passage du référentiel de l'onde se propageant à la vitesse c_ϕ , à celui du paquet d'onde de vitesse c_g , qui représente la vitesse de transport de l'énergie dans le milieu. Notons que si le milieu est non dispersif, on a directement $\eta = 2\gamma$.

Considérons le modèle de flexion pure d'Euler-Bernoulli de l'équation Eq. 2.30 avec un module élastique complexe : $E^* = E(1 + j\eta)$, où η correspond au facteur de perte du matériau. En remplaçant E par E^* dans l'équation Eq. 2.30, on obtient l'expression de η suivante, en fonction du nombre d'onde :

$$\eta = \frac{\text{Im}(q^4)}{\text{Re}(q^4)}. \quad (2.80)$$

Pour $\eta \ll 1$, on a :

$$\eta \approx 4 \frac{\text{Im}(q)}{\text{Re}(q)} = 4\gamma. \quad (2.81)$$

L'expression Eq. 2.81 peut également s'obtenir avec la relation Eq. 2.79.

2.3.2 . Métamatériaux et amortissement.

i. Chaîne de masses infinie à résonance locale amortie

Comme on a pu le voir plus tôt, en régime harmonique, il est possible d'ajouter de l'amortissement à toutes les fréquences de façon identiques via un amortissement structural. Ceci s'effectue en prenant un module élastique complexe ou bien avec une raideur complexe dans les modèles discrets. Ici, on remplace les raideurs réelles par des raideurs complexes $k_1^* = k_1(1 + j\eta_1)$ et $k_2^* = k_2(1 + j\eta_2)$ avec $\eta_2/\eta_1 = 1$ [40] avec $\eta_{1,2}$ les facteurs de pertes de chacun des ressorts. La figure Fig. 2.14 reprend la figure Fig. 2.8 pour différente valeur du facteur de perte. Une chose remarquable sur la partie réelle est qu'en présence d'amortissement, la partie réelle du nombre d'onde n'est pas nulle à l'intérieur des bandes interdites et est continue à la fréquence de résonance avec un changement de signe de la pente, indiquant le changement de signe de la vitesse de groupe $c_g = \partial\omega/\partial q$. On peut remarquer également que plus l'amortissement est important et moins ce changement de signe est brusque. La valeur non nulle de la partie réelle du nombre d'onde dans la bande interdite indique qu'avec l'amortissement, il y a bien propagation d'une onde dans cette bande de fréquence. En revanche, si l'on observe la partie imaginaire à gauche, cette propagation dans la bande interdite est exponentiellement atténuée avec une longueur d'atténuation d'autant plus grande que l'amortissement est élevé. Ce qui permet de constater l'opposition entre le phénomène d'atténuation et celui d'amortissement. De plus, à la résonance, la longueur d'atténuation n'est plus nulle.

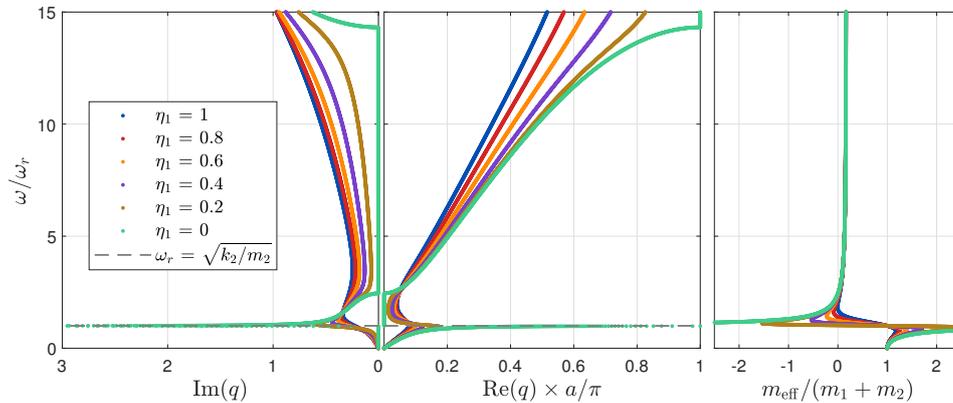


Figure 2.14 – Relation de dispersion complexe du cristal résonant infini et masse effective d'une cellule pour différentes valeurs de l'amortissement.

On observe également pour les fréquences au-delà de la bande interdite de résonance que les ondes se propagent comme dans le cas non amortis, mais sont exponentiellement atténuées du fait de l'amortissement. Cette atténuation est d'autant plus importante que le facteur de perte est grand. On peut observer en haut du graphe que les ondes peuvent se propager au-delà de la fréquence de coupure en

présence d'amortissement, l'effet de coupure à la fréquence de Bragg reposant entièrement sur des interférences destructives est éliminé par l'introduction de retard de phase via l'amortissement. La figure Fig. 2.14 présente aussi la masse effective de la cellule dans les différentes configurations amorties. L'amortissement réduit la plage de fréquence de masse effective négative, réduisant l'effet d'atténuation due à la résonance.

ii. Onde de flexion dans une métapoutre dissipative

Comme dans le cas précédent, on ajoute des pertes au modèle en remplaçant les raideurs des ressorts par des raideurs complexes $k^* = k(1 + j\eta)$ avec un facteur de perte η . La figure Fig. 2.15 représente la partie imaginaire vu précédemment sur la figure Fig. 2.12 pour plusieurs valeurs du facteur de perte des ressorts. Comme dans la section Sec. 2.3.2 l'amortissement affecte les bandes interdites. La première bande de Bragg n'est pas affectée par les pertes, en revanche un effet net est observé sur le pic de résonance qui diminue fortement avec l'augmentation du facteur de perte. Comme attendu, l'atténuation est moins importante en présence des pertes. Cependant, le pic est très nettement élargi à l'extérieur de la bande interdite initiale du cas non amorti représentée par la courbe en hachures vertes. L'atténuation est en revanche nulle aux fréquences de Bragg f_{B1} et f_{B2} .

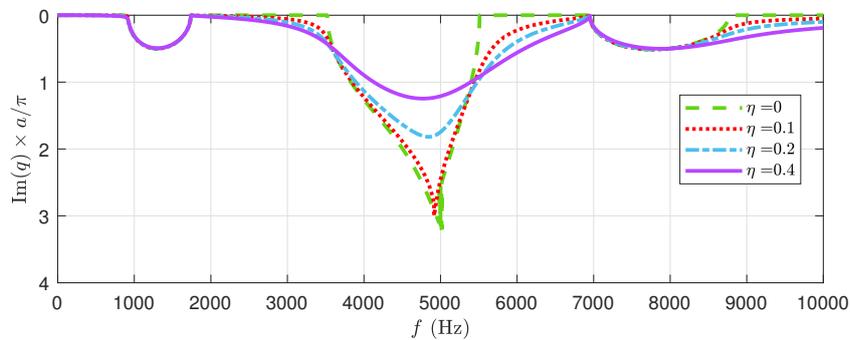


Figure 2.15 – Partie imaginaire du nombre d'onde tracée pour plusieurs valeurs du coefficient d'amortissement.

2.4 . Conclusion du chapitre

Ce chapitre est revenu sur la modélisation théorique des ondes dans les solides élastiques, afin de poser le cadre théorique qui servira dans les chapitres suivants. Dans un premier temps, l'étude s'est portée sur la modélisation grande longueur d'onde des ondes de Lamb avec les ondes de flexion. La comparaison des différents modèles de flexion avec les ondes de Lamb a permis de montrer l'équivalence en basses fréquences/grandes longueurs d'onde, lorsque la longueur d'onde est grande

devant l'épaisseur. Les ondes élastiques dans les milieux architecturés ont ensuite été modélisées pas à pas pour finalement s'intéresser à un métamatériau localement résonant pour les ondes de flexion. Enfin, les effets d'un amortissement structural ont été étudiées, montrant notamment que l'amortissement diminue l'atténuation dans les bandes interdites. Le chapitre suivant est dédié à la mesure de relation de dispersion des ondes de flexion à partir de systèmes réels de longueur finie, et s'appuie sur les concepts sur les ondes et les métamatériaux présentés dans cette section.

3 - Modélisation expérimentale : moyens, méthodes et exemples

Résumé

Le présent chapitre expose des mesures de propagation d'ondes dans un milieu à une dimension. Dans un premier temps une méthode de caractérisation expérimentale plein champ avec un vibromètre laser est décrite. Des campagnes d'essais sont réalisées pour mesurer le champ vibratoire de vitesse de plusieurs guides d'ondes supposés unidimensionnels (des poutres rectilignes libre-libre ou encastrée-libre). Ces mesures sont exploitées et analysées au moyen de trois méthodes pour en extraire la relation de dispersion complexe des ondes de flexion. Ces trois méthodes, la transformée de Fourier spatiale, SLaTCoW et ESPRIT, sont décrites puis comparées à travers les résultats des mesures sur une des poutres minces dont les vibrations sont peu atténuées. Ensuite les méthodes sont utilisées pour analyser une méta-poutre plus complexe dotée d'éléments résonants équirépartis donnant lieu à des phénomènes de diffusion de Bragg, de résonance locale.

Grâce à ces méthodes, des phénomènes intéressants ont pu être observés, comme par exemple la formation de bandes interdites, sur les métamatériaux résonants, et tout particulièrement sur la partie imaginaire du nombre d'onde, indispensable à l'étude de l'atténuation des ondes. La méthode ESPRIT étant la plus aisée et la plus robuste, sera utilisée dans la suite du manuscrit pour l'analyse de la relation de dispersion des ondes de flexion issues de simulations numériques.

Le chapitre est organisé de la façon suivante : d'abord, la mesure par vibrométrie laser LDV est décrite et un banc d'essai conçu pendant ces travaux de thèse est présenté. Ensuite, nous décrivons le principe de mesure de propagation d'onde, avant d'implémenter puis de comparer les trois méthodes de caractérisation.

3.1 . Présentation des moyens de mesure

3.1.1 . Mesure par vibrométrie laser

L'ensemble des mesures effectuées au cours de cette thèse a été réalisé par vibrométrie laser, tantôt monopoint, tantôt multipoint à balayage selon la disponibilité du matériel. Le vibromètre laser à effet Doppler (LDV) est un instrument de mesure sans contact qui utilise un laser pour mesurer la vibration d'une surface transverse dans sa direction normale. Son principe de base repose sur l'effet Doppler, qui est le décalage de fréquence qui se produit lorsqu'une source d'ondes et un observateur sont en mouvement relatif. L'onde réfléchiée par la surface en mouvement subit un décalage en fréquence, directement lié à la vitesse normale

de l'objet. Le faisceau laser est divisé en deux faisceaux via un séparateur, l'un est un faisceau de référence et l'autre est dirigé vers la surface en mouvement (voir la Fig. 3.1). Les deux faisceaux sont ensuite dirigés vers le photodétecteur et leur combinaison via un interféromètre donne une figure d'interférence, dont l'analyse permet donc d'obtenir le signal de vitesse de l'objet.

Un avantage majeur de ce type de mesure est son caractère non intrusif, ce qui signifie d'une part qu'il ne modifie pas les propriétés de l'objet mesuré et qu'il peut être utilisé pour mesurer les vibrations de surfaces fragiles, ou légères, sans causer de dommages.

Il existe une variété de vibromètres permettant la mesure 0D (monopoint), 1D ou 2D (à balayage) ou encore 3D avec l'usage de plusieurs têtes laser afin de mesurer les vibrations dans tout ou partie des directions de l'espace (voir par exemple dans [75]).

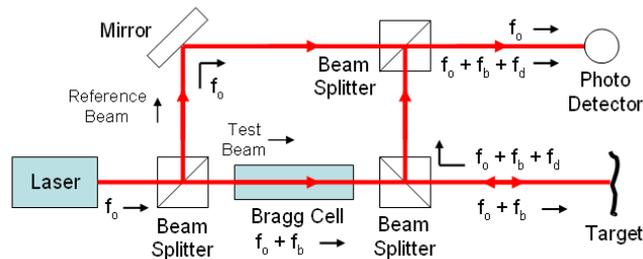


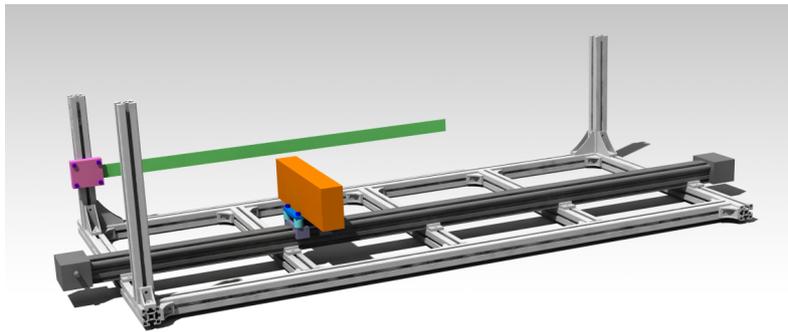
Figure 3.1 – Schéma de principe du vibromètre laser [source : Wikipédia]

3.1.2 . Banc d'essai ISAE-Supméca à vibrométrie laser monopoint piloté en translation

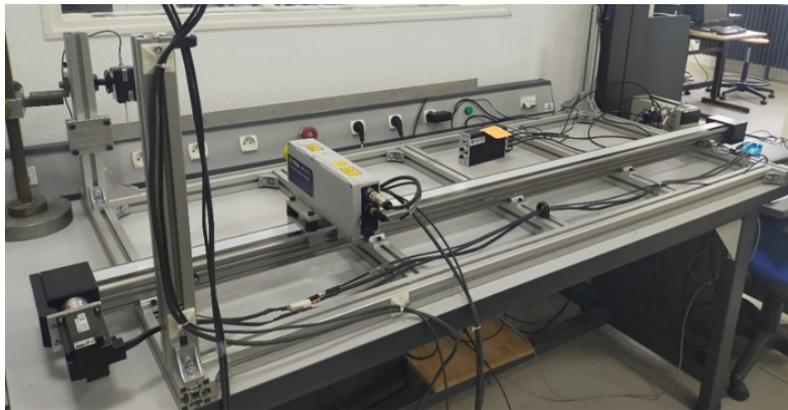
Les travaux présentés dans cette section ont été réalisés au cours du stage assistant ingénieur (niveau M1) de Rémy Tilet entre Septembre 2021 et Janvier 2022, sous ma supervision et celle de Stéphane Job. L'objectif de ce stage était la conception, la fabrication et la qualification d'un banc de mesure 1D utilisant un vibromètre laser mono-point. Ce banc est destiné à caractériser les prototypes de métapoutres développés au chapitre Chap. 7. Cette section présente un résumé des travaux de stage de Rémy.

La structure globale du banc est composée de profilés reliés par des équerres et des vis. Sur l'un des profilés verticaux se trouve l'encastrement (en rose sur la figure Fig. 3.2ba) permettant de fixer et serrer l'échantillon (en vert sur la figure Fig. 3.2ba) à la structure pour simuler un modèle de poutre encastree-libre. À la différence des autres profilés du banc, celui sur lequel est fixé l'encastrement est plein pour augmenter la masse et garantir la rigidité vis-à-vis de l'échantillon.

Le vibromètre laser LDV (laser Doppler Vibrometer) Polytech IVS-500 (en orange sur la Fig. 3.2ba) est fixé sur un plateau en aluminium supporté par 4 plots



(a)



(b)

Figure 3.2 - (a) CAO du banc d'essai et (b) photographie du banc d'essai.

en caoutchouc (en bleu sur la figure Fig. 3.2ba) eux-mêmes fixés sur le chariot du rail qui permet la translation du vibromètre.

En parallèle du banc, un marteau modal automatique (VImpact-61 de marque Maul-Theet) permet d'effectuer des chocs contrôlés et répétables, afin d'exciter l'échantillon en flexion. Il est relié au logiciel d'acquisition via un boîtier ainsi qu'à une carte d'acquisition (NI-9234 de marque National Instrument) pour permettre le déclenchement du choc, obtenir ses données et synchroniser la mesure avec le choc. Un logiciel a été développé en environnement Labview pour commander le déplacement du laser afin de piloter la mesure, l'acquisition et l'enregistrement d'une série de points sur un maillage 1D.

Une des étapes de la qualification du banc de mesure consiste à vérifier qu'aucune vibration n'est transmise de l'échantillon de mesure à l'appareil de mesure. Pour cela, un accéléromètre a été placé sur le vibromètre dont on enregistre le signal simultanément avec celui issu du vibromètre. Les fonctions de réponses en fréquence correspondent au spectre de l'accélération normalisé par le spectre de la force d'excitation ; elles sont estimées dans les trois directions de l'espace. Il peut être observé sur les spectres de la figure Fig. 3.3 que certains modes de vibrations de l'échantillon sont visibles sur le spectre de la réponse du laser. Pour remédier à cette perturbation de la mesure, des plots ou une feuille, un peu épaisse, en caoutchouc ont été installés au niveau de la liaison rail/laser, réalisant ainsi un découplage vibratoire par filtrage passe-bas.

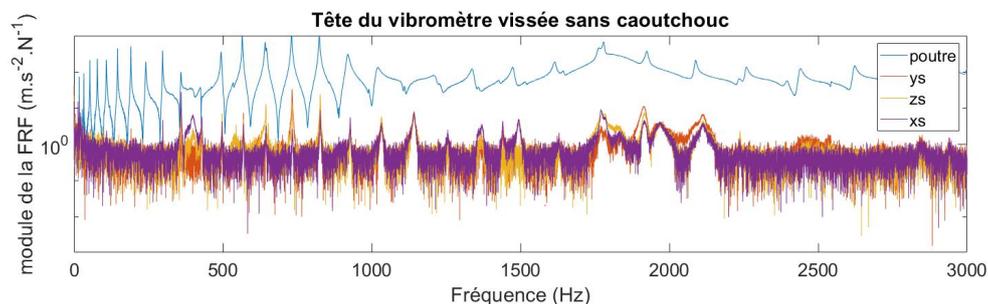


Figure 3.3 – Comparaison de la fonction de réponse en fréquence de la poutre en un point, avec les FRF en accélération du vibromètre laser dans les trois directions de l'espace.

La figure Fig. 3.4 présente le spectre de mesures réalisées avec différents supports du laser. La figure Fig. 3.4 montre que dans le cas de l'utilisation de plots en caoutchouc, les pics de résonance de la poutre disparaissent dans le bruit, dans les trois directions : les plots en caoutchouc offrent une bonne atténuation et un bon découplage. La feuille, étant moins épaisse que les plots, est plus rigide et offre donc un moins bon découplage vibratoire, comme le confirment les mesures de la figure Fig. 3.4.

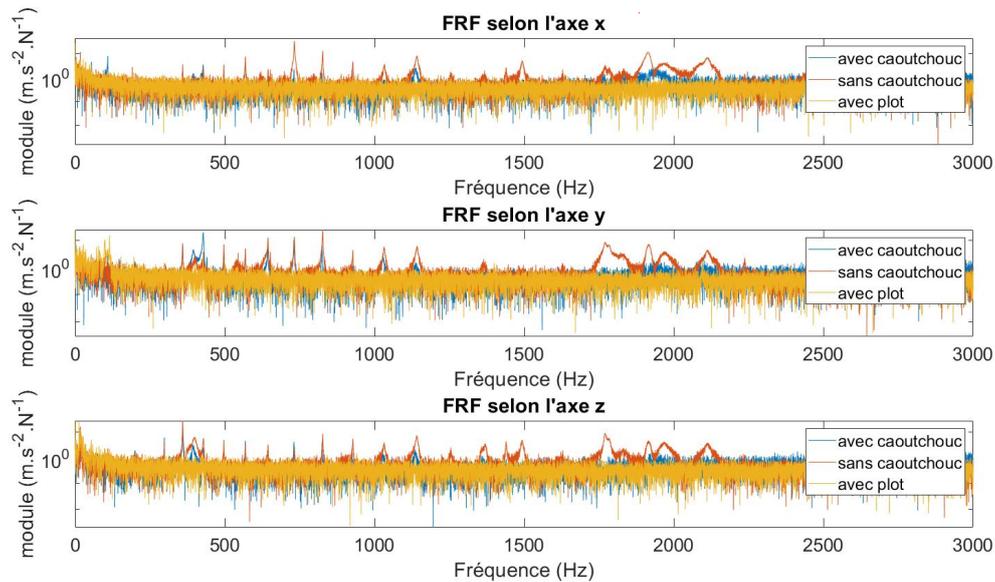


Figure 3.4 – Comparaison des fonctions de réponse en fréquence au niveau du laser, dans trois configurations de support du laser, selon les trois directions de l'espace.

3.2 . Méthode d'analyse des résultats expérimentaux et de l'atténuation

3.2.1 . Mesure plein champ des vibrations d'une poutre

La mesure plein champ en mécanique ondulatoire consiste à mesurer les vibrations en une collection de points recouvrant le domaine afin de reconstituer le trajet de l'onde dans l'espace et dans le temps. Le champ mesuré, par exemple la composante transverse des vibrations, doit être compatible avec le déplacement macroscopique occasionné par le passage de l'onde. Dans le cas d'ondes de flexion se propageant selon la direction x et occasionnant un déplacement selon z , une mesure des vibrations selon z est nécessaire pour reconstituer le champ de déplacement, de vitesse, et d'accélération. Dans l'hypothèse d'un guide d'onde tel qu'une poutre, l'hypothèse de propagation 1D suffit généralement à caractériser le comportement ondulatoire en flexion. En effet, le front d'onde se déplace dans la direction x et est uniforme dans la direction y . Dans ce cas, une ligne de mesure peut suffire (Fig. 3.5). L'échantillonnage spatial se heurte aux mêmes problématiques que l'échantillonnage temporel. La plus petite longueur d'onde observable λ_{\min} va être imposée par le pas spatial de mesure Δx (Fig. 3.5), ce qui peut s'exprimer selon le critère de Shannon-Nyquist :

$$2\Delta x \leq \lambda_{\min} = \frac{2\pi}{q_{\max}}. \quad (3.1)$$

De la même façon, la résolution en nombre d'onde Δq et la plus grande longueur d'onde observable λ_{\max} sont limitées par la taille de l'étendue de mesure. Supposant

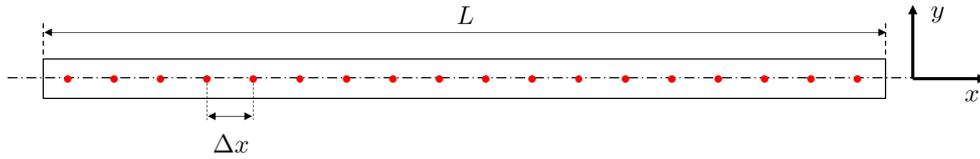


Figure 3.5 – Schéma des points de mesure du champ vibratoire sur la poutre pour une extraction 1D des ondes de flexion.

un échantillon de longueur L dont le premier point de mesure est situé en $x = 0$ et le dernier en $x = L$, le principe d'incertitude s'exprime :

$$\Delta q = \frac{2\pi}{\lambda_{\max}} \geq \frac{2\pi}{L}. \quad (3.2)$$

La propagation de l'onde implique un couplage spatio-temporel, notamment par la relation de vitesse de phase $q = \omega/c_\phi$. Ceci signifie qu'imposer une résolution en nombre d'onde Δq impose nécessairement une limite de la résolution en fréquence $\Delta\omega$ pour la relation de dispersion. En d'autres termes, la longueur de l'échantillon et le pas spatial impose également la plage de fréquence $[\omega_{\min}; \omega_{\max}]$ d'observation du phénomène propagatif; il est intéressant de noter qu'un sur-échantillonnage temporel au-delà de $2\omega_{\max}$ n'apportera pas d'information supplémentaire.

Une première mesure des ondes de flexions est réalisée sur une barre plate en acier ($L = 0.7$ m, $b = 0.03$ m, $e = 0.003$ m, $\rho = 7850$ kg.m⁻³, $E = 210e9$ Pa) avec un total de 66 points à l'aide d'un dispositif de vibrométrie laser LDV PSV-500 (de marque Polytec). La poutre est placée horizontalement, reposant sur deux suspensions souples à ses extrémités. Elle est excitée en flexion au moyen d'un marteau de choc automatique (SAM de marque Polytec). La mesure répétée de la vitesse point par point avec 5 répétitions par points permet de construire la matrice $v(x, t)$ des vitesses en fonction de la position et du temps. La figure Fig. 3.6a représente en niveau de couleur $v(x, t)$ dans le plan espace-temps au cours du premier passage de l'onde. On peut constater l'étalement spatial progressif du paquet d'onde à mesure de sa progression, révélant la nature dispersive des ondes de flexion. Au cours du premier passage de l'onde, le paquet n'est pas trop dispersé et il est possible d'estimer la vitesse de groupe à partir de l'enveloppe du signal obtenue en calculant le module du signal analytique $v_a(x, t)$ donné par :

$$|v_a(x, t)| = |v(x, t) + j\bar{v}(x, t)|, \quad (3.3)$$

où $\bar{v}(x, t)$ désigne la transformée de Hilbert de $v(x, t)$. La figure Fig. 3.6b représente $|v_a(x, t)|$ ainsi que la vitesse de groupe estimée en pointillés. Celle-ci est reportée sur la figure Fig. 3.6a et comparée à la vitesse de phase en pointillés, que l'on estime en observant l'évolution d'une crête d'oscillation (représentatif d'un évènement de phase). Le ratio de $\frac{1}{2}$ entre les pentes de ces deux droites est cohérent avec l'équation Eq. 2.32.

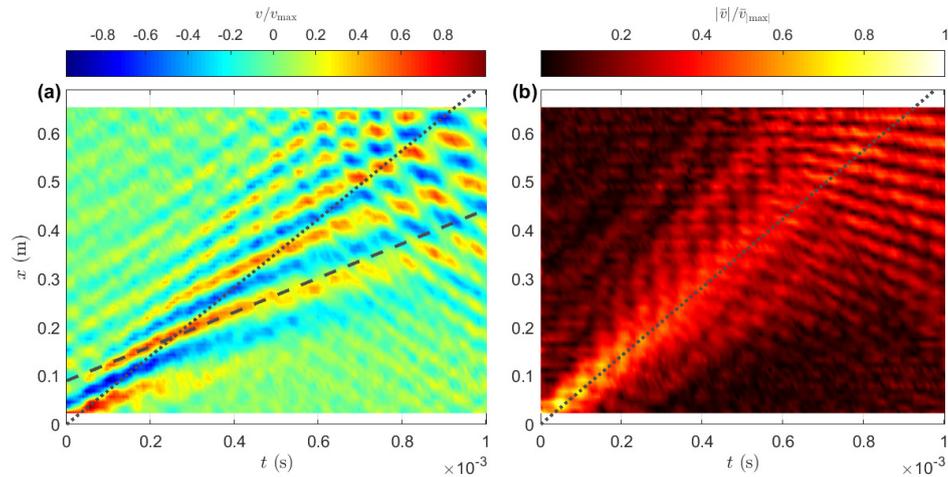


Figure 3.6 – Représentation temps espace du champ de vitesse transverse (à gauche) et représentation temps espace de la transformée de Hilbert du champ de vitesse. La ligne en pointillés illustre la vitesse de groupe c_g et celle en hachures la vitesse de phase c_ϕ .

Comme il a pu être constaté au chapitre Chap. 2, la relation de dispersion est l’outil le plus commode pour analyser des ondes et leur atténuation. La section suivante présente trois méthodes pour extraire la relation de dispersion à partir des données expérimentales de mesure plein champ.

3.2.2 . Extraction de la relation de dispersion

Cette section présente trois méthodes distinctes pour extraire la relation de dispersion à partir d’une mesure plein champ. Les trois méthodes sont d’abord présentées, puis mises en œuvre sur une barre mince dont les propriétés et dimensions sont rappelées dans le tableau Tab. 3.1. Les mesures sont effectuées premièrement dans un cas faiblement atténué (une barre nue en acier, un matériau de structure connu pour être faiblement dissipatif) et deuxièmement, dans un cas de métamatériau phononique (constitué de la même barre mais dotée d’éléments résonnants régulièrement espacés) présentant notamment des résonances, de la diffusion de Bragg et des bandes interdites.

| | | |
|---------------|------|--------------------|
| E | 210 | GPa |
| ρ | 7850 | kg.m^{-3} |
| épaisseur e | 1.5 | mm |
| largeur b | 40 | mm |
| L | 1 | m |

Table 3.1 – Table des paramètres de la barre d’essai.

L’échantillon est suspendu verticalement à un tendeur élastique souple noué

à une pince collée pour éviter le glissement (voir la Fig. 3.7a). On l'excite en flexion avec un marteau automatique (Vimact-61 de marque Maul-Theet, voir la Fig. 3.7c) qui permet des chocs large bande et répétables. L'acquisition des vibrations transverses est réalisée avec un vibromètre laser Polytec PSV-400 à balayage multipoint (voir la Fig. 3.7b) avec une fréquence d'échantillonnage f_s de 80 kHz. Le déclenchement de la mesure s'effectue avec le signal de la force excitatrice de façon à pouvoir effectuer des moyennes synchrones directement sur les signaux temporels. Pour chaque position, 10 mesures sont effectuées et moyennées afin de constituer la matrice des signaux $v(x, t)$.

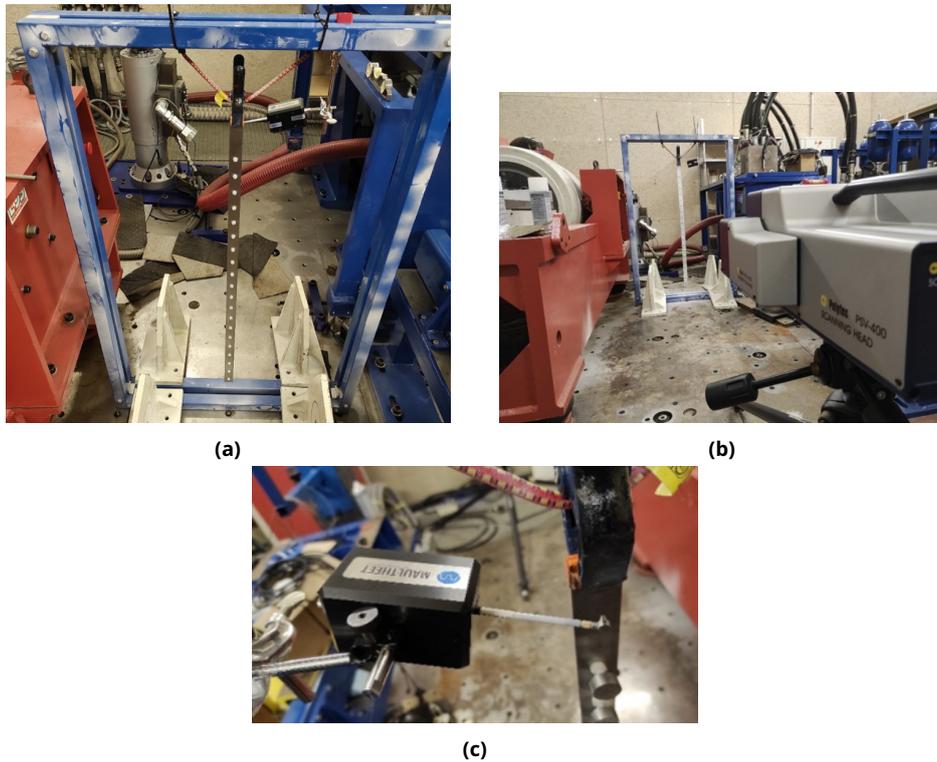


Figure 3.7 – Photographies du montage expérimental, avec (a) le système de suspension de la poutre, (b) le vibromètre laser à balayage (Polytec PSV-400) et (c) le marteau de choc automatique.

i. Analyse par transformée de Fourier 2D

À partir de la matrice de signal $v(x, t)$ constituée des différentes réponses temporelles mesurées en chacun des points, nous réalisons les transformées de Fourier temporelles discrètes afin de révéler les spectres de réponses en fréquences. Celle-ci s'exprime sous sa forme continue par :

$$\tilde{v}(x, \omega) = \mathcal{F}_t\{v(x, t)\} = \int_0^T v(x, t)e^{-j\omega t} dt, \quad (3.4)$$

avec T , la durée de la fenêtre temporelle du signal et $\omega = 2\pi f$, la fréquence angulaire (rad.s^{-1} , duale du temps t). Ensuite, nous normalisons chacun de ces spectres par le spectre de réponse en $x = x_0$ au point d'origine du choc de façon à obtenir un ensemble de fonction de transfert $\tilde{h}(x, \omega)$ s'exprimant par :

$$\tilde{h}(x, \omega) = \frac{\tilde{v}(x, \omega)}{\tilde{v}(x_0, \omega)}. \quad (3.5)$$

La figure Fig. 3.8a présente en niveau de couleur le module de l'ensemble des fonctions \tilde{h} , ce qui permet de révéler la répartition spectrale de l'énergie vibratoire. La distribution fait apparaître des raies verticales contrastées, d'amplitudes plus élevées, positionnées au niveau des fréquences propres de la barre. Ceci nous est confirmé par les maximums de mobilité quadratique moyenne [98], dont le module est tracé sur la figure Fig. 3.8b, et qui est donné par l'expression suivante :

$$\langle \tilde{h} \rangle = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{h}^2(x_i, \omega)}. \quad (3.6)$$

Cet indicateur permet d'obtenir une réponse en fréquence indépendante du point d'observation. La figure Fig. 3.8b présente également en traits verticaux les fréquences propres du modèle théorique de poutre libre-libre d'Euler Bernoulli. Cela nous permet de voir qualitativement la correspondance entre les modèles et la forte densité modale en basse fréquence des modes de flexion. En effet, pour une poutre libre-libre, le n -ième mode propre est tel que $q_n L \simeq (2n + 1)\pi/2$ pour $n > 2$, soit $f \propto q^2 \propto n^2$, selon la relation de dispersion théorique des ondes de flexion donnée par l'équation Eq. 2.30.

En reprenant la matrice des spectres normalisés \tilde{h} en chaque point de mesure, on effectue une transformée de Fourier spatiale, de sorte que l'on obtient une transformée de Fourier 2D $\hat{\tilde{h}}$ s'exprimant sous sa forme continue par :

$$\hat{\tilde{h}}(\omega, q) = \mathcal{F}_x\{\tilde{h}(x, \omega)\} = \int_0^L \tilde{h}(x, \omega) e^{-jqx} dx. \quad (3.7)$$

La figure Fig. 3.8c représente le module de $\hat{\tilde{h}}(\omega, q)$ discret, faisant apparaître une seule branche contrastée associant une valeur de nombre d'onde à chaque fréquence propre. Cette branche révèle la relation de dispersion des ondes de flexion attendues. L'épaisseur de la région contrastée rend compte de la largeur du lobe principal dû aux fenêtrages spatiaux et temporels. En particulier, la largeur du lobe principal est δq telle que définie dans l'équation Eq. 3.2. Notons que la même incertitude existe sur la valeur des fréquences, mais que celle-ci est très faible car $\Delta f = 1/T \ll f_n$, les fréquences propres du système. Notons également que le pas spectral de la transformée de Fourier spatiale peut être artificiellement diminué en allongeant la durée du signal spatial avec un signal nul (technique dite de zéro-padding), pour diminuer encore la précision fréquentielle. Cependant, aucune information supplémentaire n'est ajoutée par ce procédé.

Au-delà d'une représentation graphique, l'exploitation de la transformée Fourier 2D ne permet pas de quantifier le nombre d'ondes en partie réelles et imaginaires. Une alternative consiste à considérer un modèle d'ondes planes contra-propagatives dont la fonction de transfert $\tilde{h}(x_i, t)$ est exprimée par :

$$\tilde{h}(x_i, \omega) = \frac{\tilde{v}(x_i, \omega)}{\tilde{v}(x_0, \omega)} = e^{jq(x_i-x_0)} + Re^{-jq(x_i-x_0)}. \quad (3.8)$$

En ne considérant que l'onde aller, $R = 0$, ce qui revient à tronquer le signal réfléchi dans un enregistrement, il devient possible d'inverser l'équation Eq. 3.8, pour obtenir une expression de q sous la forme :

$$q(\omega) = -j \frac{1}{(x_i - x_0)} \log(\tilde{h}(x_i, \omega)). \quad (3.9)$$

L'Eq. 3.9 permet ensuite d'obtenir la partie réelle et imaginaire du nombre d'onde de l'onde se propageant dans le sens des x positifs. Notons cependant que cette approche directe n'est valable que dans l'hypothèse d'un seul mode de propagation. Il ne convient donc pas en présence de l'onde retour, c'est pourquoi il est nécessaire de tronquer le signal temporel avant réflexion. Cette troncature est en pratique difficile à réaliser, surtout dans un système dispersif où l'onde se déforme et rend difficile l'identification de l'onde réfléchie. Dans la figure Fig. 3.8c, une troncature approximative se traduit en effet par une partie réelle du nombre d'onde qui est entachée de sauts de phases (un profil en escalier), caractéristique de l'interférence avec un résidu d'onde réfléchie. De même, la partie imaginaire représentée sur la figure Fig. 3.8d devient négative, traduisant en fait l'amplification due à cette interférence. Enfin, une dernière difficulté, liée au fait que la partie réelle du nombre d'onde, i.e. la phase de la fonction de transfert, est définie modulo 2π , ce qui nécessite de déplier et éventuellement translater la partie réelle autant que nécessaire. Cela introduit donc une part d'arbitraire dans la mesure de la vitesse de phase. Les valeurs estimées de q_r et q_i peuvent toutefois être comparées à une valeur théorique obtenue en considérant un modèle d'Euler-Bernoulli à module élastique complexe, avec un facteur de perte constant en fréquence de 1%. L'accord modeste entre mesures et modèle, ainsi que les difficultés de mise en œuvre robuste de la technique par simples transformées de Fourier, justifie l'utilisation de méthodes plus élaborées.

La section suivante présente une première alternative dans laquelle la transformée de Fourier est substituée par une transformée de Laplace, pour laquelle la variable duale (le nombre d'onde) est complexe par définition.

ii. Méthode SLaTCoW

SLaTCoW (Spatial Laplace Transform for Complex Wavenumber recovery) [42, 15] est une méthode permettant d'extraire l'amplitude et le nombre d'onde complexe à l'aide de la transformée de Laplace d'une mesure spatio-temporelle de

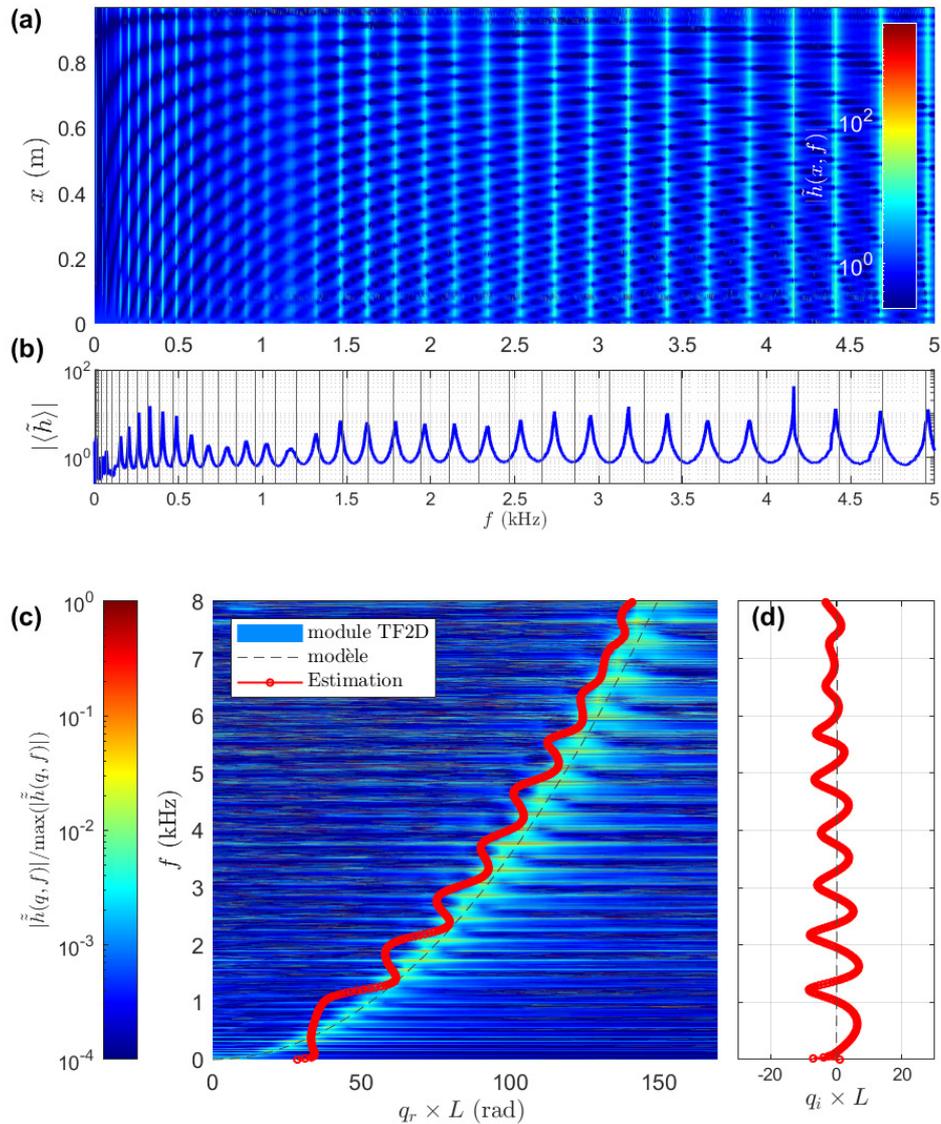


Figure 3.8 – (a) Module des fonctions de transfert $\tilde{h}(x, f)$ en fonction de la fréquence et de la position, (b) module de la mobilité quadratique moyenne en fonction de la fréquence. (c) et (d) représente respectivement la partie réelle et la partie imaginaire du nombre d’onde, obtenues avec différentes méthodes, comparées au modèle théorique en flexion pure. La courbe avec les cercles rouges correspond à l’équation Eq. 3.9 et les niveaux de couleur au module de $\hat{h}(\omega, q)$ normalisé.

propagation d'une onde. Le postula de départ consiste à considérer l'excitation sous la forme d'ondes planes se propageant dans la seule direction des x croissants. Ainsi la réponse du champ de vitesse prend la forme de la combinaison linéaire d'ondes planes :

$$v(x, t) = \sum_{m \in \mathcal{M}} V^m e^{jq^m x} \Pi(x, L) e^{-j\omega t}, \quad (3.10)$$

où q^m est le nombre d'onde complexe du m -ième mode parmi \mathcal{M} , et V^m est amplitude complexe. $\Pi(x, L)$ est la fonction porte indiquant que la mesure de l'onde est effectuée sur une fenêtre spatiale finie, sa valeur est 1 pour $x \in [0, L]$ et 0 partout ailleurs. \mathcal{M} désigne ici l'ensemble des modes propagatifs. Le nombre d'onde est complexe, $q^m = q_r^m + jq_i^m$, avec $q_r^m \geq 0$ car on ne considère que la propagation dans le sens des x croissants. Il est intéressant de noter qu'une transformée de Fourier spatiale de $v(x, t)$ est un cas particulier de la transformée de Laplace [42], restreint à $q_i = 0$. En appliquant la transformation de Laplace spatiale $\mathcal{L}_x\{u(x)\}(s) = \int_0^\infty u(x)e^{-sx}dx$, le nombre d'onde q (i.e. la variable duale $s = jq$) n'est plus limité à des valeurs réelles. La transformée de Laplace de l'équation Eq. 3.10 s'exprime de la façon suivante :

$$\bar{V}(s) = L \sum_{m \in \mathcal{M}} V^m e^{(jq^m - s)L/2} \frac{\sinh((jq^m - s)L/2)}{(jq^m - s)L/2} \quad (3.11)$$

avec $s = s_i + js_r$ la variable de Laplace, duale de la position, à valeurs complexes, homogène à un nombre d'onde. La restreindre à $s_i \geq 0$ et $s_r \geq 0$ permet à la fois de ne considérer que les ondes se propageant dans le sens des x positifs et les modes dont l'amplitude décroît, mais également d'assurer la convergence de $\bar{V}(s)$ dans l'expression de l'équation Eq. 3.11; la convergence de la série nécessite en effet que $s_i \geq -q_r^m$. On peut noter la présence d'un sinus hyperbolique cardinal dans l'équation Eq. 3.11 rendant compte du fenêtrage spatial. Ce terme devient un sinus cardinal pour $(jq^m - s) \in j\mathbb{R}$, ce qui correspond à l'expression de la transformée de Fourier de $v(x, t)$ fenêtrée par $\Pi(x, L)$. La méthode SLaTCoW consiste à identifier, pour une fréquence angulaire ω donnée, les paramètres $(q^m, V^m)_{m \in \mathcal{M}}$ permettant de minimiser l'écart entre le modèle donné par l'équation Eq. 3.11 et la transformée de Laplace du signal mesuré expérimentalement $\bar{V}^{mes}(s)$. La fonction objectif à minimiser est l'écart, au sens de la norme L_2 [42, 15], entre $\bar{V}(s)$ et $\bar{V}^{mes}(s)$ dans le plan $s_i \geq 0$ et $s_r \geq 0$. Cette fonction objectif s'exprime par :

$$F(|V^m|, \Phi^m, q_i^m, q_r^m, \mathcal{M}) = \left(\sum_{s_r} \sum_{s_i} \left\| \bar{V}^{mes}(s) - L \sum_{m \in \mathcal{M}} |V^m| e^{j\Phi^m} e^{(j(q_r^m + jq_i^m) - (s_i + js_r))L/2} \frac{\sinh((j(q_r^m + jq_i^m) - (s_i + js_r))L/2)}{(j(q_r^m + jq_i^m) - (s_i + js_r))L/2} \right\|_2 \right)^{1/2}. \quad (3.12)$$

Les quantités $|V^m|$ et Φ^m sont respectivement l'amplitude et la phase théorique du mode m , telle que $V^m = |V^m|e^{j\Phi^m}$. La minimisation revient à identifier quatre

variables par mode : $|V^m|$, Φ^m , q_r^m et q_i^m pour chacun des m modes propagatifs considérés. La minimisation de F est réalisée sous contrainte au moyen d'un algorithme de Simplex de Nelder-Mead (fonction *Matlab*[®] *fminsearchbnd*), à chaque fréquence. La minimisation contient donc $4\mathcal{M}$ paramètres dont certains peuvent être initialisés avec plus ou moins de précision. En pratique, l'initialisation de q_r^m , q_i^m , Φ^m et $|V^m|$ peut-être faite avec les informations extraites de la transformée de Fourier spatiale introduite à la section Sec. 3.2.2.

Avant de procéder à la minimisation, $\bar{V}^{mes}(s)$ doit être calculée à chaque fréquence. La transformée de Laplace de $\tilde{v}(x, \omega)$ s'exprime par :

$$\bar{V}^{mes}(s) = \int_0^L \tilde{v}(x, \omega) e^{-(s_i + js_r)x} dx = \int_0^L (\tilde{v}(x, \omega) e^{-s_i x}) e^{-js_r x} dx. \quad (3.13)$$

Le calcul de $\bar{V}^{mes}(s)$ revient donc à effectuer la transformée de Fourier de $\tilde{v}(x, \omega) e^{-s_i x}$ pour chaque valeur de s_i . Bien que le calcul des $\bar{V}^{mes}(s)$ est effectué une seule fois avant la minimisation, on peut noter toutefois que ceci représente une quantité de donnée non-négligeable. La figure Fig. 3.9 présente le module de $\bar{V}^{mes}(s)$ à une fréquence de $f = 3200$ Hz, pour la poutre libre-libre décrite dans le tableau Tab. 3.1. Nous pouvons observer un pic net centré sur le nombre d'onde de flexion correspondant à la fréquence de 3200 Hz, identifié plus tôt sur la figure Fig. 3.8c. La ligne grise en $q_i = 0$ représente le module de la transformée de Fourier temps-espace de $v(x, t)$. La présence d'un seul pic d'amplitude nous indique par ailleurs l'existence d'un unique mode propagatif : la minimisation peut être effectuée avec $\mathcal{M} = 1$. Rappelons à ce propos que dans le cas d'ondes de flexion, il existe quatre modes de propagations de nombre d'ondes $q_{1,2} = \pm\kappa$ et $q_{3,4} = \pm j\kappa$, avec $\kappa = 2\pi/\lambda$. En théorie, il n'est possible d'identifier que les modes se propageant dans le sens des x positifs avec SLaTCoW, soit deux modes. Toutefois, les deux modes $q_{3,4}$ sont par nature évanescents, donc non propagatifs et exponentiellement atténués. Ces deux modes contribuent essentiellement à très basse fréquence et deviennent rapidement négligeables devant le bruit quand la longueur d'onde λ diminue. C'est pourquoi on réalise ici l'extraction avec $\mathcal{M} = 1$.

La figure Fig. 3.10 présente la relation de dispersion complexe de l'onde de flexion extraite à l'aide de la méthode SLaTCoW en minimisant l'équation Eq. 3.12 à chaque fréquence, après initialisation par exploitation d'une transformée de Fourier 2D, telle que présentée dans la section Sec. 3.2.2. On observe un bon accord avec la théorie en partie réelle, q_r , qui est également consistant avec les résultats obtenus par application d'une simple transformée de Fourier. En revanche, la méthode SLaTCoW permet de mettre en évidence une partie imaginaire q_i plus faible et moins dispersée que celle obtenue dans la section précédente. La comparaison avec un modèle d'Euler Bernoulli à facteur de perte η constant en fréquence indique un facteur de perte de l'ordre de 0.5%. Par ailleurs, la vitesse de phase peut être calculée directement à partir des données de la figure Fig. 3.10a, celle-ci est tracée sur la figure Fig. 3.10c et présente un accord satisfaisant avec le modèle en flexion pure.

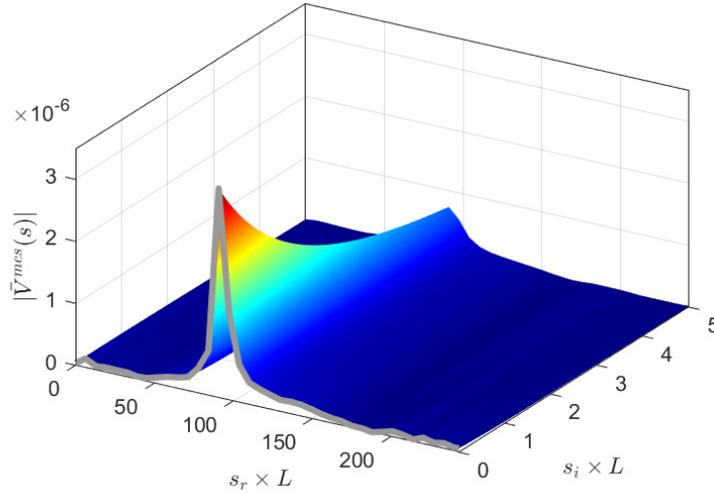


Figure 3.9 – Représentation du module de la transformée de Laplace à $f = 3200$ Hz dans le plan des s_r et s_i positifs. La ligne grise en $s_i = 0$ m^{-1} représente la transformée de Fourier temps-espace de $v(x, t)$ à $f = 3200$ Hz.

iii. Méthode ESPRIT

La méthode ESPRIT (Estimation of Signal Parameter via Rotational Invariance Techniques) fait partie des méthodes haute résolution en traitement du signal qui s'affranchissent des limites de l'analyse de Fourier, en améliorant notamment la résolution du nombre d'onde, limitée dans le cas d'une transformée de Fourier par la taille finie du système par l'équation Eq. 3.2. La méthode fut initialement développée pour l'analyse de signaux temporels dans le domaine de l'antennerie radar [107], et en particulier pour en identifier la direction de provenance [106]. Elle a également été utilisée récemment pour l'extraction de nombre d'onde dans des problèmes de propagation d'onde élastique en milieu anisotrope [83] de par sa robustesse à l'égard du bruit.

Contrairement à la méthode SLaTCoW, la méthode ESPRIT se base sur une décomposition en ondes planes non fenêtrée du signal mesuré $\tilde{v}(x, \omega)$ et n'impose pas de condition sur le sens de propagation des ondes. La méthode consiste à séparer la mesure en deux sous-espaces : le sous-espace signal engendré par un ensemble de fonctions sinusoïdales complexes et le bruit. Le signal $\tilde{v}(x)$ prend alors la forme suivante :

$$\tilde{v}(x) = \tilde{v}_s(x) + \tilde{b}(x) = \sum_{m=0}^{\mathcal{M}-1} a_m z_m^x + \tilde{b}(x) \quad (3.14)$$

(où le bruit $\tilde{b}(x)$ est supposé statistiquement blanc, centré et Gaussien). Ici \mathcal{M} désigne la dimension de l'espace signal, qui correspond en pratique au nombre de modes propagatifs recherché. Les fonctions $z_m^x = e^{jq^m x}$, où $q^m = q_r^m + jq_i^m$

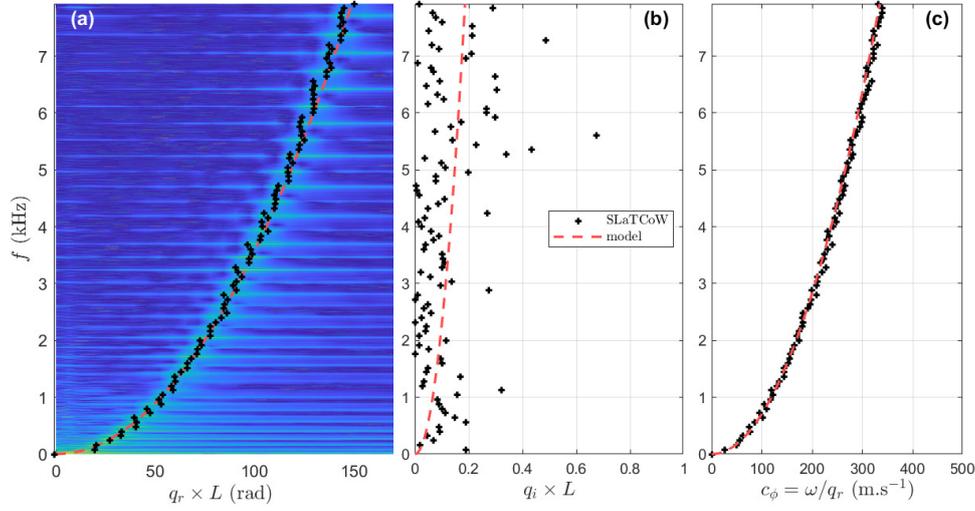


Figure 3.10 – Fréquence en fonction de (a) la partie réelle du nombre d’onde sans dimension, (b) la partie imaginaire du nombre d’onde sans dimension superposée au modèle de flexion avec facteur de perte $\eta = 0.005$ constant en fréquence et (c) la vitesse de phase.

est le nombre d’onde complexe associé au mode m , sont les fonctions propres oscillantes qui engendrent l’espace signal. Le signal est discrétisé spatialement, tel que $x = \beta\Delta x$ avec Δx le pas spatial de la mesure et $\beta \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$ le numéro du point de mesure le long de l’échantillon. On peut remarquer que :

$$z_m^x = e^{jq^m \beta \Delta x} = (e^{jq^m \Delta x})^\beta. \quad (3.15)$$

Ceci permet de réécrire la partie signal privée du bruit $\tilde{v}_s(x)$ sous la forme :

$$\tilde{v}_s(x) = \sum_{m=0}^{\mathcal{M}-1} a_m z_m^x = \mathbf{V}^N \mathbf{Z}_{\mathcal{M}} \mathbf{A}, \quad (3.16)$$

où $\mathbf{A} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{\mathcal{M}-1}]^T$, $\mathbf{Z}_{\mathcal{M}} = \text{diag}(z_0 \ z_1 \ \dots \ z_{\mathcal{M}-1})$. La matrice \mathbf{V}^N de taille $N \times \mathcal{M}$ est une matrice de Vandermonde s’écrivant :

$$\mathbf{V}^N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_0 & z_1 & \dots & z_{\mathcal{M}-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (z_0)^{N-1} & (z_1)^{N-1} & \dots & (z_{\mathcal{M}-1})^{N-1} \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Afin de construire la matrice de signal, on renumérote le vecteur signal incluant le bruit :

$$\begin{aligned} \tilde{v}(x) &= [\tilde{v}_0 \ \tilde{v}_1 \ \dots \ \tilde{v}_{N-1}] \\ &= [\tilde{v}_{i-l+1} \ \dots \ \tilde{v}_{i-l+n} \ \dots \ \tilde{v}_{i+n-1}], \end{aligned} \quad (3.18)$$

où \tilde{v}_i désigne un point du signal mesuré et n et l sont tels que $l + n - 1 = N$, avec $n, l \geq \mathcal{M} + 1$. On construit à présent la matrice de données $\mathbf{X}(x)$ à partir du signal mesuré, $\tilde{v}(x)$ numéroté selon l'équation Eq. 3.18, de la façon suivante :

$$\mathbf{X}(x) = \begin{bmatrix} \tilde{v}_{i-l+1} & \cdots & \tilde{v}_{i-1} & \tilde{v}_i \\ \tilde{v}_{i-l+2} & \cdots & \tilde{v}_i & \tilde{v}_{i+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{v}_{i-l+n} & \cdots & \tilde{v}_{i+n-2} & \tilde{v}_{i+n-1} \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

La matrice $\mathbf{X}(x)$ est alors construite selon une structure de Hankel de taille $(n \times l)$. Chacune de ses l colonnes contient une portion de signal de n points, décalée d'une composante par rapport à la colonne adjacente. De cette façon, $\mathbf{X}(x)$ simule la concaténation de plusieurs réalisations indépendantes, avec à chaque colonne une information supplémentaire, dotée du même contenu spectral. Ce modèle de signal permet de calculer la matrice de covariance $\mathbf{C}_{XX}(x)$ du signal en minimisant la quantité de données nécessaires, selon la relation :

$$\mathbf{C}_{XX}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{X}(x)^H, \quad (3.20)$$

où $(.)^H$ désigne le transposé conjugué (conjugué hermitien). Notons qu'il demeure possible de construire la matrice de covariance avec un modèle de signal \mathbf{X} différent, par exemple en concaténant de vraies réalisations indépendantes. C'est en calculant la décomposition en éléments propres (EVD) de $\mathbf{C}_{XX}(x)$ que l'on peut extraire et séparer les sous-espaces signal et bruit. Cette étape est permise par les hypothèses faites sur le bruit blanc centré. Désignons alors par \mathbf{W} la matrice qui engendre le sous-espace signal de dimension \mathcal{M} , dont les colonnes sont constituées des \mathcal{M} premiers vecteurs propres de $\mathbf{C}_{XX}(x)$, de taille $(n \times \mathcal{M})$ qui constitue une base de l'espace signal. La matrice de Vandermonde \mathbf{V}^n de taille $(n \times \mathcal{M})$ définie à l'équation Eq. 3.17, est également une base de l'espace signal. Il existe alors une matrice $\mathbf{P}(x)$ qui permet de passer d'une base à l'autre tel que :

$$\mathbf{V}^n = \mathbf{W}(x)\mathbf{P}(x). \quad (3.21)$$

Considérant que $\mathbf{V}^{n\uparrow}$ et $\mathbf{V}^{n\downarrow}$ sont des matrices constituées respectivement des $n - 1$ dernières et des $n - 1$ premières lignes de \mathbf{V}^n , ces deux matrices sont reliées par la relation suivante :

$$\mathbf{V}^{n\uparrow} = \mathbf{V}^{n\downarrow}\mathbf{Z}_{\mathcal{M}}. \quad (3.22)$$

Comme pour \mathbf{V}^n on définit \mathbf{W}^\uparrow et \mathbf{W}^\downarrow et substituant l'équation Eq. 3.21 dans l'équation Eq. 3.22, on obtient la relation :

$$\mathbf{W}(x)^\uparrow = \mathbf{W}(x)^\downarrow\Phi(x), \quad (3.23)$$

où $\Phi(x) = \mathbf{P}(x)\mathbf{Z}_{\mathcal{M}}\mathbf{P}(x)^{-1}$ est la matrice spectrale dont les valeurs propres sont les pôles recherchés $\{z_m\}_{m=0\dots\mathcal{M}-1}$. Cette matrice est calculée à partir de \mathbf{W} :

$$\Phi(x) = \left(\mathbf{W}(x)^\downarrow H \mathbf{W}(x)^\downarrow \right)^{-1} \mathbf{W}(x)^\downarrow H \mathbf{W}(x)^\uparrow. \quad (3.24)$$

Finalement les nombres d'ondes q_m sont extraits des $\{z_m\}_{m=0\dots M-1}$ par la relation :

$$q^m = -j \frac{\ln(z_m)}{\Delta x} = q_r^m + jq_i^m. \quad (3.25)$$

Une fois les nombres d'ondes obtenus par cette méthode, la matrice de Vandermonde \mathbf{V}^n peut être reconstruite et les amplitudes complexes $\{a_m\}_{m=0\dots M-1}$ peuvent être calculées à partir de la formulation de l'équation Eq. 3.16 en estimant \mathbf{A} au sens des moindres carrés telle que :

$$\mathbf{A} \simeq \mathbf{V}^{N\dagger} \tilde{\mathbf{v}} \quad (3.26)$$

avec $(.)^\dagger$ le pseudo inverse (pour les matrices non carrées). Nous pouvons remarquer ici que le calcul des nombres d'ondes via l'équation Eq. 3.25 est découplé de l'étape de calcul de l'amplitude de l'équation Eq. 3.26.

L'extraction de la relation de dispersion est ici effectuée avec $M = 2$, pour identifier les modes propagatifs de nombres d'onde opposés. Comme pour la méthode SLaTCoW les modes évanescents ne sont pas pris en compte car négligeable par rapport au bruit.

La figure Fig. 3.11 met en évidence les trois courbes obtenues par les différentes méthodes d'extraction du nombre d'onde. Chaque méthode permet l'extraction de la partie réelle du nombre d'onde. Cependant, la figure Fig. 3.11a met en évidence la haute résolution de la méthode ESPRIT comparée aux deux autres méthodes. Le pas d'échantillonnage est nettement visible sur la courbe obtenue par la méthode SLaTCoW. En effet, dans ce dernier cas, le processus de transformée de Laplace se heurte au même limitation que la transformée de Fourier avec $\Delta q \geq 2\pi/L$. La méthode ESPRIT présente également l'avantage sur SLaTCoW d'être plus simple à mettre en œuvre : les ondes réfléchies y étant prises en compte, il n'est plus nécessaire de tronquer les signaux mesurés pour retirer les réflexions précoces.

3.3 . Application sur une métapoutre résonante

3.3.1 . Caractéristique de la métapoutre à l'essai

Un dispositif expérimental de métapoutre a été conçu pour illustrer le modèle d'ondes de Bloch dans une poutre en flexion pure. Celui-ci se compose d'une poutre identique à celle présentée dans la section 3.2.2, mais perforée de 20 trous régulièrement espacés dans lesquels sont insérées des tiges filetées maintenues serrées à la poutre au moyen d'écrous (voir Fig. 3.12). Au bout du bord libre de ces tiges filetées, des masses cylindriques en acier sont collées (voir Fig. 3.12). Les caractéristiques de ces éléments sont répertoriées dans le tableau Tab. 3.2. La poutre munie de résonateurs est suspendue avec le même dispositif que sur l'image de la figure Fig. 3.7a.

Tout d'abord, il convient d'apporter quelques précisions sur les effets du réseau phononique sur l'échantillonnage spatial et la relation de dispersion. Comme mentionné au chapitre Chap. 2, le réseau de Bragg provoque le repliement de la figure

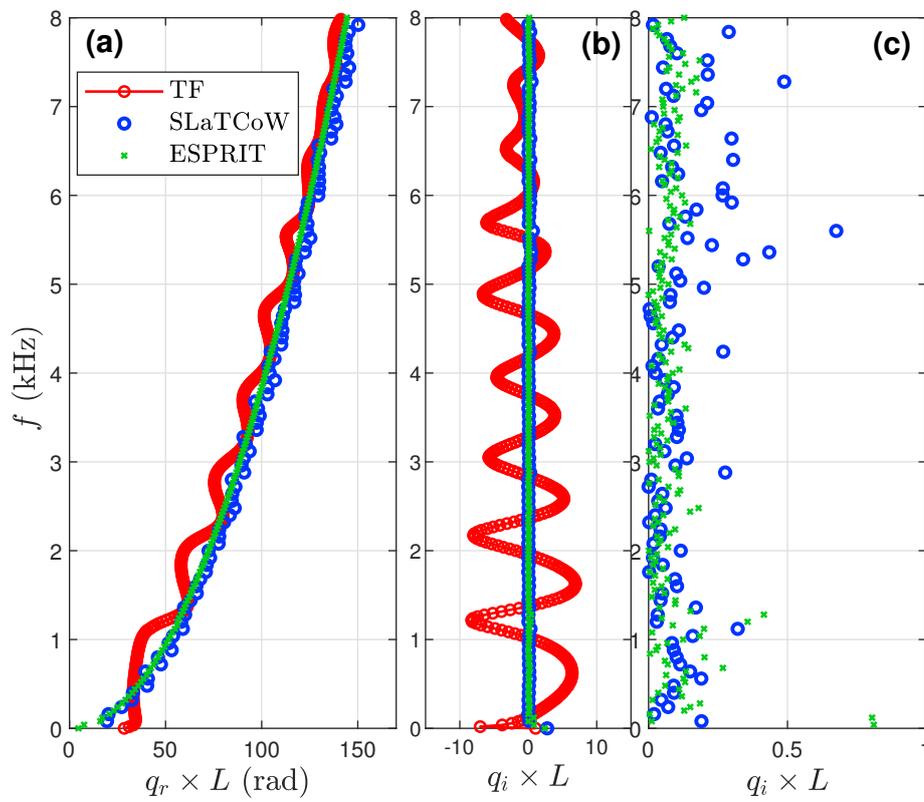


Figure 3.11 – Fréquence en fonction de (a) la partie réelle et (b,c) la partie imaginaire du nombre d'onde de flexion pour chacune des trois méthodes d'extraction.

| Poutre | | | |
|------------------------|--------|------|--------------------|
| Module d'Young | E | 210 | GPa |
| Coefficient de Poisson | ν | 0.27 | SU |
| Densité | ρ | 7850 | kg.m ⁻³ |
| Longueur | L | 1 | m |
| épaisseur | e | 1.5 | mm |
| largeur | b | 30 | mm |
| Pas du réseau | a | 45 | mm |

| Résonateurs | | | |
|--------------------|-------|-----------------|-----|
| Masselotte (acier) | m | 0.0247 ± 0.0003 | kg |
| long. tige M3 | l | 50 ± 0.5 | mm |
| Module Young tige | E_r | 97 | GPa |

Table 3.2 – Table des paramètres de la poutre et d'un résonateur élémentaire.

de dispersion du fait des réflexions multiples sur les diffuseurs et de leurs interférences. En théorie, pour un système de longueur infinie, l'observation de la relation de dispersion dans la seule zone de Brillouin est possible. L'échantillonnage spatial ne nécessite donc pas d'être affiné en dessous de $\Delta x = a$, où a est la longueur de la maille élémentaire, de sorte que la partie réelle q_r de la relation de dispersion est bien décrite entre 0 et π/a (zone irréductible de Brillouin). En pratique, le système est de longueur finie avec un nombre limité de cellules périodiques et le pas spatial a une précision finie. Nous avons donc choisi un échantillonnage spatial avec un peu moins de 4 points par cellule élémentaire de longueur a . Ceci signifie que nous ne limitons pas la mesure à la zone irréductible de Brillouin, on s'attend donc à observer des repliements tous les $q_r = \pi/a$.

On considère au moins 3 points pour décrire la plus petite longueur d'onde $\lambda_{\min} = 3\Delta x$. En considérant la relation de dispersion en flexion pure, $f_{\max} = \frac{q_{\max}^2}{2\pi} \sqrt{EI/\rho S}$, cela correspond à une fréquence $f_{\max} = \frac{2\pi}{(3\Delta x)^2} \sqrt{EI/\rho S} \approx 10$ kHz.

Notons que la présence des éléments résonants et des écrous empêche de positionner le point laser sur la ligne centrale comme par exemple sur la figure Fig. 3.5. Pour remédier à cela, une mesure est effectuée de part et d'autre de la ligne centrale, en $y = y_{\pm}$. La moyenne des signaux acquis de chaque côté est réalisée afin d'annuler toutes les composantes en opposition de phases, comme par exemple celles dues aux rotations et aux modes de torsion, tout en conservant les composantes en phase liées, à la flexion.

3.3.2 . Post-traitement des données

La figure Fig. 3.13 présente la relation dispersion complexe obtenue avec les méthodes ESPRIT et SLaTCoW sur la poutre pourvue d'inclusions résonantes.

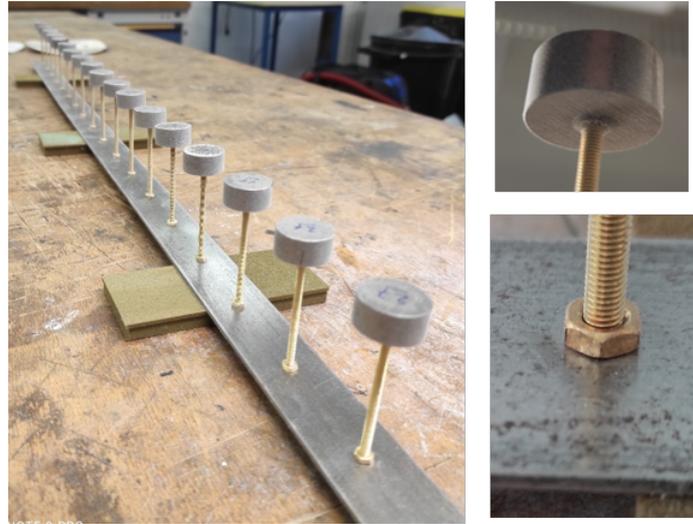


Figure 3.12 – Photographies de l'échantillon de poutre mince dotée de résonateurs.

L'extraction du nombre d'onde par la méthode ESPRIT et SLaTCoW apparaît très intéressante même à l'intérieur des bandes interdites. En effet, la première bande interdite de Bragg apparaît très nettement entre 800 et 1750 Hz. La partie imaginaire en forme de demi-ellipse, typique des bandes de Bragg [57], et la partie réelle constante égale à π/a sont bien visibles. Pour les fréquences juste au-dessus de cette bande interdite, la courbe de dispersion réelle se sépare en deux branches symétriques, dont une est repliée dans la zone de Brillouin. Cette duplication du nombre de branches pour la flexion oblige à augmenter le nombre \mathcal{M} de modes recherchés.

Proche de $f = 3$ kHz, une étroite bande interdite d'hybridation (en fond bleu sur la figure Fig. 3.13) s'ouvre dû à un faible couplage entre le mode de flexion de la poutre et le premier mode de flexion des éléments résonants [95].

Le principal effet des éléments résonants sur la propagation des ondes de flexion dans la barre est observable à partir de 3.3 kHz jusqu'à environ 5 kHz. Comme attendu et vu dans la section Sec. 2.2.3, une bande interdite très large se forme dû au couplage fort entre le mouvement transverse des ondes de flexion et le mouvement longitudinal des résonateurs, transverse à la poutre [95]. Cette hybridation diminue la vitesse de groupe $c_g = \partial\omega/\partial q_r$ avant la bande de résonance, ce qui fait que pour une fréquence donnée, la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/q_r$ est significativement plus petite que la longueur d'onde dans la poutre. Cette propriété intéressante appelée "slow wave" est notamment exploitée pour le traitement acoustique avec des solutions de tailles compactes [45, 46, 116, 133].

Une observation additionnelle peut-être faite sur la zone en dessous de la bande interdite indiquée par un fond rouge portant sur l'effet de diminution de la vitesse de groupe ayant pour conséquence de faire tendre la longueur d'onde vers la seconde résonance de Bragg, $q_r = 2\pi/a$ à $f \approx 3.3$ kHz. Ensuite, comme dans une bande

interdite de Bragg, q_r reste approximativement constante avec une valeur de $2\pi/a$, tandis que la partie imaginaire q_i croît en valeur absolue jusqu'à ce que le maximum d'atténuation soit atteint légèrement au-dessus de 4 kHz. Cette fréquence coïncide avec une fine bande où l'on peut observer la partie réelle passer de $2\pi/a$ à π/a avec une pente faible et négative. Une telle vitesse de groupe négative est caractéristique des métamatériaux localement résonnant [116]. Le maximum d'atténuation atteint ici 80 m^{-1} , soit une longueur d'atténuation $l_{\text{att}} \approx 13 \text{ mm}$. Rappelons qu'à cette fréquence, la longueur d'onde λ des ondes de flexions se situe entre $a = 45 \text{ mm}$ et $2a = 90 \text{ mm}$, donc la longueur d'atténuation est ici nettement plus courte que la longueur d'onde. La figure Fig. 3.14b présente la déformée en vitesse de la poutre à une fréquence dans la bande interdite. On peut notamment observer l'absence presque totale d'oscillations, excepté au niveau de l'extrémité de la barre où le coup de marteau est donné. En comparaison, des modes sont clairement identifiable sur la figure Fig. 3.14a, ce qui permet qualitativement de comparer les deux déformées. Notons que la présence du mode de torsion est visible à quelques fréquences où la moyenne des vitesses en $y = y_{\pm}$ ne permet pas toujours de l'annuler, à cause de légères dissymétries du maillage spatial. On retrouve notamment quelques points sur la courbe de dispersion de la figure Fig. 3.13, associés au mode de torsion, situé au niveau de la première bande interdite de Bragg, à gauche de la branche de torsion.

Sur la figure Fig. 3.13, la dernière bande interdite de flexion visible sur cette plage de fréquences est la seconde bande interdite de Bragg pour $\lambda = a$, entre 6.5 et 7.8 kHz. Celle-ci est chevauchée par la résonance d'un second mode de flexion des éléments résonants, qui vient modifier la forme en demi ellipse de la partie imaginaire, attendue pour une résonance de Bragg. L'aspect de la courbe de q_r est similaire à celle observée dans [116] et indique un chevauchement des bandes interdites d'hybridation et de Bragg.

Dans le cas de la méthode SLaTCoW, la multiplicité des modes de propagation peut poser problème. L'ajout d'un mode de propagation à l'identification augmente de 4 le nombre des inconnues, pour trois modes, on doit donc réaliser une minimisation à 12 paramètres. Ceci peut être coûteux en temps de calcul et dégrader la précision de la minimisation. La multiplicité des modes intervient dans les réseaux phononiques où l'effet de la diffusion de Bragg et de repliement sont présents. De ce point de vue, la méthode ESPRIT est plus efficace de par sa rapidité d'exécution, malgré l'augmentation du nombre de modes. C'est pourquoi il est préférable d'utiliser la méthode de SLaTCoW pour une analyse plus fine sur un système à moins de degrés de liberté.

Par ailleurs, dans les bandes interdites d'hybridation, la méthode SLaTCoW s'est avérée inefficace du fait du faible rapport signal à bruit. En revanche, la méthode ESPRIT se révèle plus robuste dans cette zone du fait de sa méthode de séparation de l'espace signal et bruit. La méthode SLaTCoW permet donc d'identifier de façon satisfaisante la partie réelle du nombre d'onde, cependant la

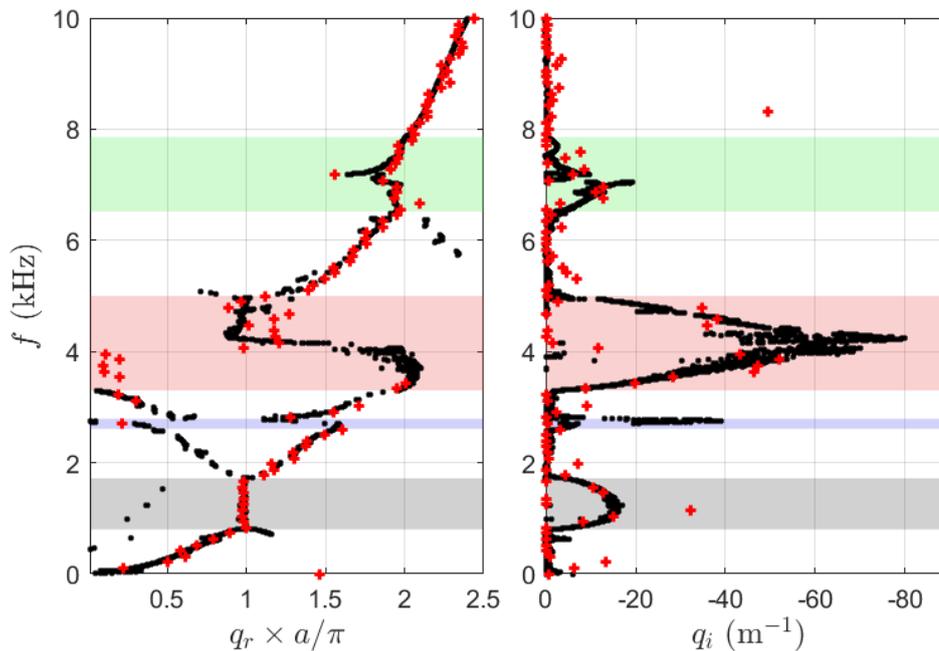


Figure 3.13 – Partie réelle et partie imaginaire du nombre d’onde extraites des mesures expérimentales avec la méthode ESPRIT (points noirs) et SLaTCoW (croix rouge) sur la poutre avec un réseau de tige-masse. Pour SLaTCoW seul le premier mode de plus grande amplitude est tracé pour conserver la clarté de la figure.

fonction objectif étant très sensible à la variation de la partie imaginaire du nombre d’onde, il demeure difficile avec un niveau de bruit important d’obtenir des résultats satisfaisants à l’intérieur des bandes interdites.

La figure Fig. 3.15a montre un cas de transformée de Laplace où 2 modes sont clairement identifiables, dont un est plus atténué que l’autre. La figure Fig. 3.15b présente le module de la transformée de Laplace à l’intérieur de la bande interdite de plus forte atténuation, où il est plus difficile d’identifier le nombre de modes, même à l’aide de la transformée de Fourier.

3.3.3 . Cas de la propagation à plusieurs modes.

Tout comme en analyse modale, il est possible de distinguer les différents types de modes propagatifs avec une mesure appropriée, et ainsi de séparer les branches sur la relation de dispersion. Ici, on tire partie des mesures effectuées de part et d’autre de la ligne médiane, $y = y_{\pm}$ où sont positionnés les résonateurs ; pour mémoire, une moyenne de ces deux lignes permet de supprimer les effets de la torsion. Cependant, en conservant le mode de torsion, par exemple en ne considérant qu’une seule ligne de points de mesure, il est possible de distinguer le mode de torsion en plus du mode de flexion. La figure Fig. 3.16 montre un zoom de la relation de dispersion de la figure Fig. 3.13 où on distingue nettement

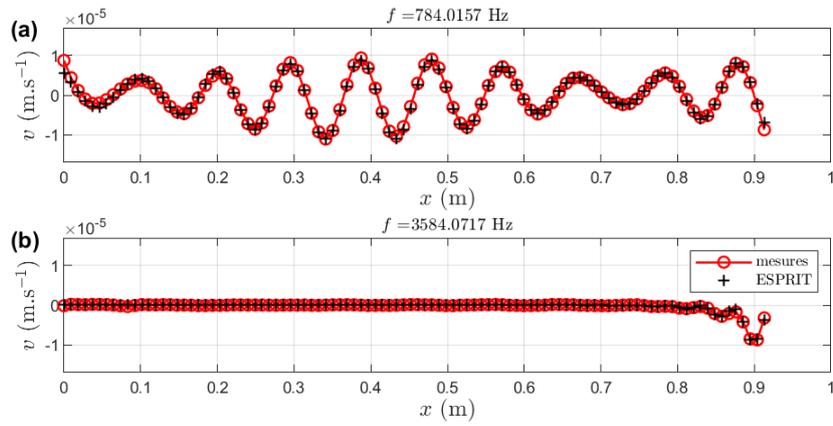


Figure 3.14 – Déformées spatiales mesurées auxquelles sont superposés les signaux reconstitués avec la méthode ESPRIT, à deux fréquences différentes (a) à l’extérieur d’une bande interdite et (b) à l’intérieur de la bande interdite de résonance (en rouge sur la figure Fig. 3.13).

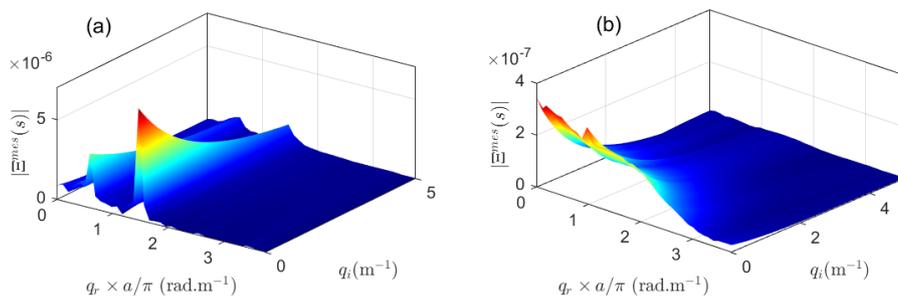


Figure 3.15 – Transformée de Laplace (a) à 2496 Hz hors bande interdite et (b) à 3848 Hz dans une bande interdite.

la branche des ondes de torsions, en particulier, elle est visible à l'intérieur de la bande de Bragg, où les ondes de flexion sont fortement atténuées. Une méthode

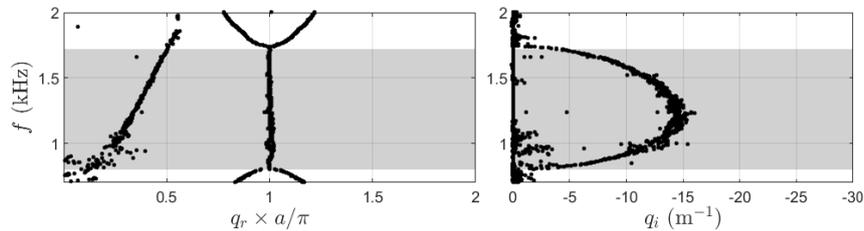


Figure 3.16 – Zoom sur la relation de dispersion de la métapoutre obtenue par la méthode esprit appliquée à la série de mesures du côté $y = y_-$ montrant sur la partie réelle du nombre d'onde à gauche la présence de la branche liée au mode de torsion.

permettant de différencier ces branches consiste à identifier leur polarisation, en observant les différences de phases entre les signaux identifiés en $y = y_{\pm}$. La figure Fig. 3.17 présente les deux contributions en flexion et torsion reconstituées avec les nombres d'onde extraits avec l'équation Eq. 3.25, et les amplitudes avec l'équation Eq. 3.26. On constate que les deux signaux des modes de torsions sont bien en oppositions de phases.

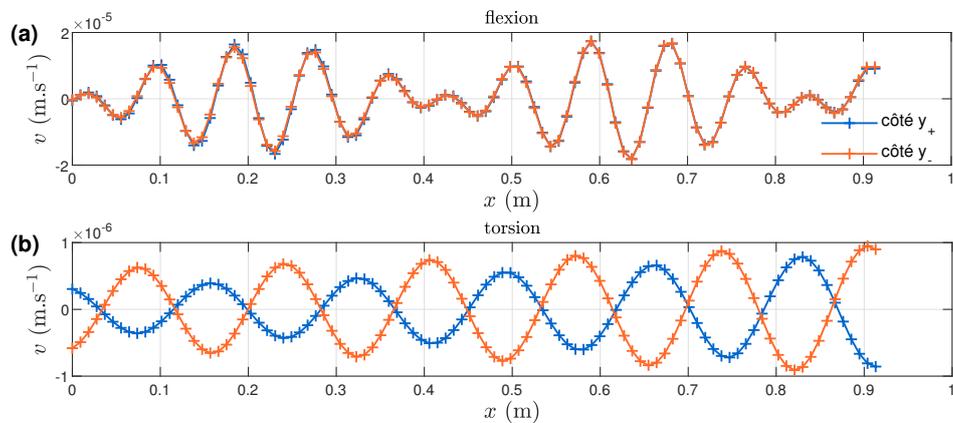


Figure 3.17 – Déformée spatiale à $f=1814$ Hz (a) les modes de flexion et (b) les modes de torsions des deux lignes de maillage côtés $y = y_{\pm}$.

3.3.4 . Analyse des données du banc d'essai de l'ISAE-Supméca.

La figure Fig. 3.18 présente des résultats expérimentaux obtenus avec le banc d'essai présenté à la section Sec. 3.1.2 avec une poutre de même longueur, mais en aluminium. La mobilité quadratique moyenne tracée en figure Fig. 3.18b présente un moindre rapport signal à bruit comparé au cas de la poutre suspendue présentée à la section Sec. 3.2.2. Ceci est attendu étant donné que dans le cas présent, la poutre est encastree et donc liée à un bâti : la mesure est plus sensible aux

sollicitations externes. De plus, la bande de fréquences d'observation en figure Fig. 3.18a et b est réduite à cause du couplage de la barre avec les modes du bâti au-delà de 1.6 kHz. Comme dans le cas de la poutre libre-libre, nous observons une forte densité modale en basses fréquences et une diminution de celle-ci lorsque la fréquence augmente. Ici, c'est la méthode ESPRIT qui a été utilisée pour extraire la courbe de dispersion des ondes propagatives. Nous pouvons constater sur la figure Fig. 3.18c la bonne description du mode de flexion, mais également la présence de la branche du mode de torsion décrite par quelques points.

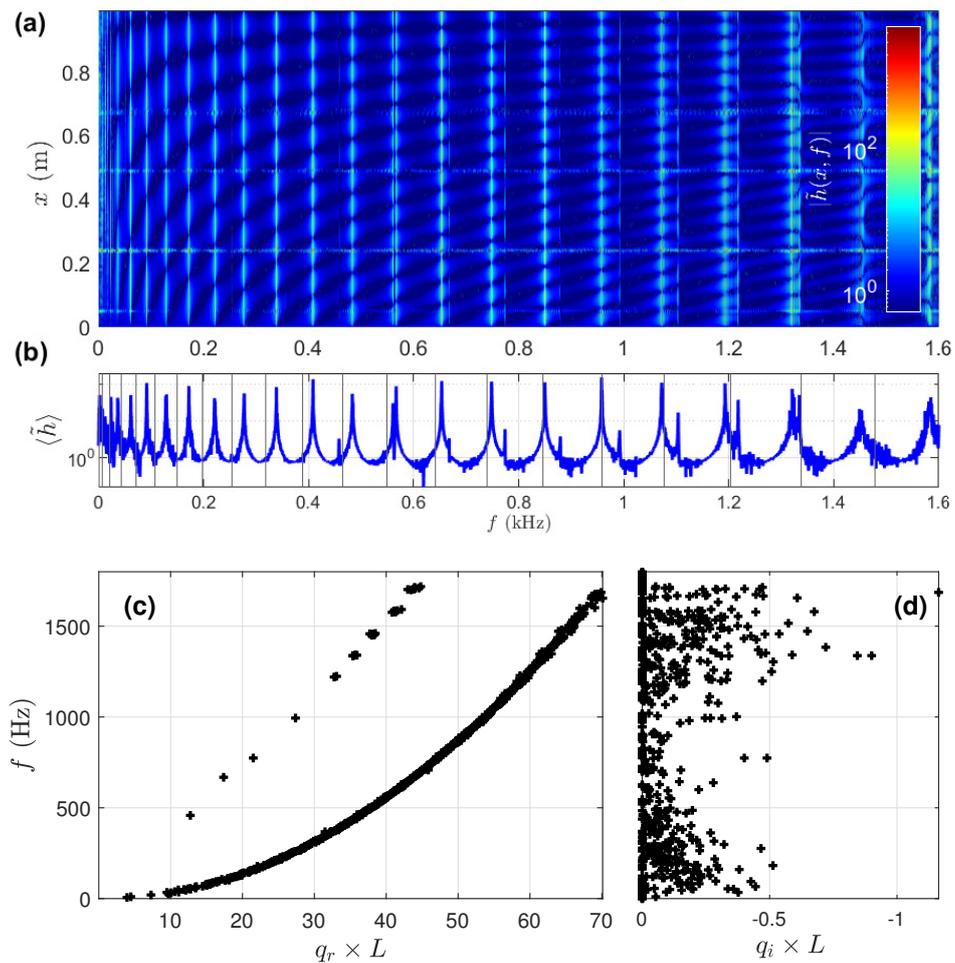


Figure 3.18 – (a) Amplitude des fonctions de transfert en fonction de la fréquence et de la position, (b) mobilité quadratique moyenne en fonction de la fréquence. (c) et (d) représente la relation de dispersion complexe avec respectivement les parties réelle et imaginaire des nombres d'onde, obtenue avec la méthode ESPRIT.

3.4 . Conclusion du chapitre

Ce chapitre était dédié à la mesure et à la caractérisation de la propagation d'ondes de flexion dans des guides d'ondes à une dimension, à partir de mesure plein champ. Pour réaliser ces mesures, des vibromètres laser ont été utilisés et un banc d'essai, présenté au début de ce chapitre, a été conçu à l'ISAE-Supméca. Trois méthodes d'analyse des mesures plein champ ont été implémentées en 1D et comparées sur une poutre homogène et une métapoutre : la transformée de Fourier, la méthode SLaTCoW et la méthode ESPRIT. Ces méthodes permettent l'extraction du nombre d'onde complexe, la partie oscillante de l'onde et son atténuation. Grâce à ces méthodes, des phénomènes intéressants liés aux bandes interdites de Bragg et d'hybridation ont pu être observés finement. Le tableau Tab. 3.3 propose un récapitulatif des atouts et des inconvénients liés aux trois méthodes. Suite à cette analyse, la méthode ESPRIT sera réutilisée dans les chapitres suivant pour l'analyse de signaux numériques.

| Tableau récapitulatif | | |
|-----------------------|---|--|
| | Avantages | Inconvénients |
| Fourier | <ul style="list-style-type: none"> • Rapidité • Donne une estimation de la partie réelle et de la partie imaginaire • Seulement deux points de mesure nécessaires | <ul style="list-style-type: none"> • Effets du fenêtrage • Pas d'ondes réfléchies • Faible précision à cause de la troncature du signal et du dépliement de la partie réelle • Analyse avec un seul mode |
| SLaTCoW | <ul style="list-style-type: none"> • Prise en compte du fenêtrage spatial • Analyse multimodale • Une plus grande précision grâce à la minimisation | <ul style="list-style-type: none"> • Coût de calcul de la minimisation • Calcul des transformées de Laplace, davantage de données à stocker • Pas d'ondes réfléchies • Sensible au bruit |
| ESPRIT | <ul style="list-style-type: none"> • Rapidité • Robustesse au bruit • Haute résolution, indépendante de la longueur • Prise en compte des ondes réfléchies • Analyse multimodale | <ul style="list-style-type: none"> • Hypothèse sur la nature du bruit blanc |

Table 3.3 – Tableau récapitulatif de l'utilisation des trois méthodes présentées dans ce chapitre pour l'extraction de la relation de dispersion.

4 - Modélisation numérique de la propagation des ondes

Résumé

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la modélisation numérique de la propagation des ondes de flexion dans une poutre. Dans un premier temps, un modèle 1D est formulé avec la méthode des éléments finis (FEM). Dans un second temps, nous présentons les deux méthodes de différences finies pour l'intégration temporelles des équations de la dynamique des poutres qui ont été utilisées au cours de ces travaux de thèse. Dans un troisième temps, nous nous intéressons à l'implémentation de l'amortissement dans de telles structures, notamment l'amortissement viscoélastique, en lien avec l'identification du facteur de perte grâce à la méthode ESPRIT présentée au chapitre Chap. 3. Pour conclure ce chapitre, un modèle FEM 3D de poutre est implémenté dans l'environnement *Abaqus* pour modéliser la propagation d'ondes dans un milieu périodique, localement résonnant et de longueur finie, et ainsi analyser la réponse de la poutre en présence d'amortissement.

4.1 . Modélisation de la propagation d'une onde par la méthode des éléments finis

Dans cette section nous établissons un modèle éléments finis de poutre en flexion. Il s'agit d'un modèle préliminaire à un modèle plus global dans lequel une réplique numérique du modèle expérimental présentée en Sec. 3.3 est implémenté dans l'environnement *Abaqus*. Le modèle de poutre 1D en flexion présenté ici sera par ailleurs adapté dans le chapitre Chap. 7 pour y intégrer le modèle réduit non-linéaire d'une couche de grains cisailée, établi aux Chap. 5 et 6 et destiné à décrire le comportement d'une de poutre sandwich à âme granulaire, constituée de deux poutres d'un matériau élastique de part et d'autre d'une couche d'un matériau constitué de particules précontraintes.

4.1.1 . Éléments finis pour les poutres minces

On s'intéresse à la réponse dynamique d'une poutre d'Euler Bernoulli soumise à un chargement réparti dépendant du temps $q(x, t)$ (voir Fig. 4.1 avec une longueur plus grande que la largeur b et l'épaisseur e : $L \gg b, e$). La résolution est faite par la méthode des éléments finis. Cette approche est classique et bien documenté dans [7, 49], on rappelle ici brièvement la démarche.

La comportement de la poutre est décrit par l'équation du mouvement :

$$EI\partial_x^4 w(x, t) + \rho S\ddot{w}(x, t) = q(x, t), \quad (4.1)$$

où S représente la section droite, E et ρ désigne le module d'Young et la masse

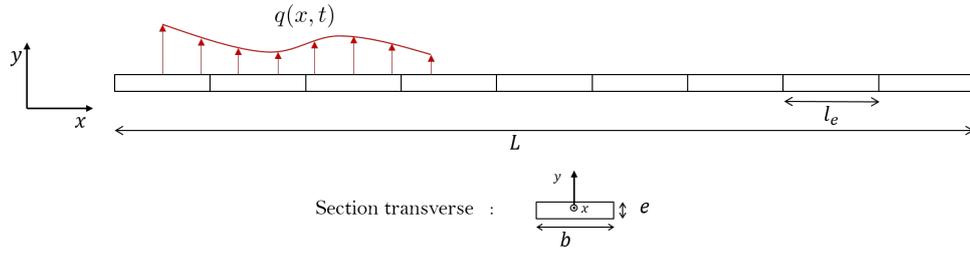


Figure 4.1 – Poutre éléments finis soumise à une distribution d'effort et de moment.

par unité de volume, $I = be^3/12$ correspond au moment quadratique et w est le déplacement transversal en fonction de la coordonnée axiale x et du temps t . Le calcul de l'énergie de déformation élastique en flexion $\mathcal{V} = \int_0^L EI(\partial_x^2 w)^2 dx$, intégrée sur la poutre nécessite l'existence et la continuité du déplacement w et de sa dérivée $\partial_x w$ (associée à la rotation θ de la section). Cet argument énergétique permet d'intégrer la forme faible de l'équation aboutissant à l'approximation élément finis. Pour assurer la continuité de la pente locale aux nœuds, la dérivée du déplacement est ajoutée comme variable nodale. Ceci conditionne le degré et le type des polynômes d'interpolation utilisés comme fonction de forme. En pratique on utilise des polynômes de Hermite (Fig. 4.2b) d'ordre 3 [7, 49] qui permettent de garantir la continuité de w et de sa dérivée. Soit w^* , une fonction test régulière, dérivable deux fois, et intégrable sur le domaine spatial, satisfaisant les conditions aux limites du problème tel que :

$$\int_0^L w^*(EI\partial_x^4 w + \rho S\ddot{w} - q)dx = 0 \quad (4.2)$$

Après une double intégration par partie du terme de raideur on obtient :

$$B(0, L) + EI \int_0^L \partial_x^2 w^* \partial_x^2 w dx + \rho S \int_0^L w^* \ddot{w} dx - \int_0^L w^* q dx = 0 \quad (4.3)$$

où $B(0, L) = [EIw^*\partial_x^3 w]_0^L - [EI\partial_x w^*\partial_x^2 w]_0^L$ correspond aux termes de bords. La condition de continuité du déplacement et de sa dérivée aux nœuds permet de décomposer la solution élément par élément. En supposant que l'on discrétise la poutre en N_e éléments de même taille $l = L/N_e$, on a :

$$\sum_{e=1}^{N_e} \int_0^l (EI\partial_x^2 w_e^* \partial_x^2 w_e + \rho S w_e^* \ddot{w}_e - w_e^* q) dx = 0. \quad (4.4)$$

On introduit à présent l'interpolation éléments finis du champ de déplacement w_e sur chaque élément e du maillage qui connecte les nœuds j et $j+1$. On utilise ici comme fonctions de forme des polynômes d'Hermite de degrés 3 [7, 49] (voir Fig. 4.2b) assurant la continuité aux nœuds de w et $\theta = \partial_x w$. Sur l'élément de référence, paramétré par $\alpha = x/l$, le déplacement s'écrit :

$$w_e(\alpha) = \mathbf{n}(\alpha)^T \mathbf{u}^e = n_1(\alpha)w^j + n_2(\alpha)\theta^j + n_3(\alpha)w^{j+1} + n_4(\alpha)\theta^{j+1}. \quad (4.5)$$

Ici le vecteur des degrés de liberté élémentaires $\mathbf{u}^e = [w^j \ \theta^j \ w^{j+1} \ \theta^{j+1}]^T$ contient les deux couples *déplacement-rotation* pour chacun des nœuds j et $j + 1$ (voir Fig. 4.2a), $\mathbf{n}(\alpha) = [n_1(\alpha) \ n_2(\alpha) \ n_3(\alpha) \ n_4(\alpha)]^T$ correspond au vecteur des fonctions de forme et $(\cdot)^T$ désigne la transposition. En substituant et en intégrant sur

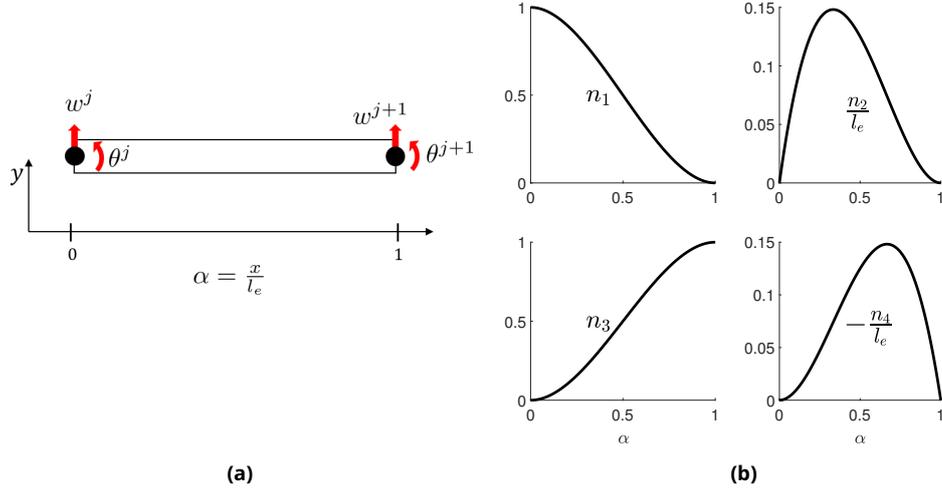


Figure 4.2 - (a) Eléments finis de référence de la poutre, avec ses deux nœuds et 4 variables nodales. (b) Fonctions de formes.

l'élément de référence, l'Eq. 4.4 devient :

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{N_e} (\mathbf{u}^{e*})^T \left(\frac{EI}{l^3} \int_0^1 \mathbf{n}''(\alpha) \mathbf{n}''(\alpha)^T d\alpha \right) \mathbf{u}^e \\ & + (\mathbf{u}^{e*})^T \left(\rho S l \int_0^1 \mathbf{n}(\alpha) \mathbf{n}(\alpha)^T d\alpha \right) \ddot{\mathbf{u}}^e - (\mathbf{u}^{e*})^T \left(l \int_0^1 \mathbf{n}(\alpha) q(\alpha, t) d\alpha \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

où $(\cdot)'$ désigne la dérivée spatiale. Les matrices de masse et de raideur élémentaires s'expriment :

$$\mathbf{K}_e = \frac{EI}{l^3} \int_0^1 \mathbf{n}''(\alpha) \mathbf{n}''(\alpha)^T d\alpha \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_e = \rho S l_e \int_0^1 \mathbf{n}(\alpha) \mathbf{n}(\alpha)^T d\alpha, \quad (4.7)$$

dont les valeurs sont détaillées dans [49] et la distribution de charge élémentaire est donnée par :

$$\mathbf{q}_e(t) = l_e \int_0^1 \mathbf{n}(\alpha)^T q(\alpha, t) d\alpha. \quad (4.8)$$

On obtient ainsi :

$$\sum_{e=1}^{N_e} (\mathbf{u}^{e*})^T (\mathbf{K}_e \mathbf{u}^e + \mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{u}}^e - \mathbf{q}_e(t)) = 0. \quad (4.9)$$

Après assemblage des matrices élémentaires et du chargement élémentaire \mathbf{q}_e et intégration des conditions aux limites, on obtient l'équation dynamique sous forme matricielle du problème éléments finis :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (4.10)$$

avec $\mathbf{u} = [w^0 \ \theta^0 \ w^1 \ \theta^1 \ \dots \ w^{N_e} \ \theta^{N_e}]^T$. Par ailleurs, on impose algébriquement les conditions aux limites dans les matrices de façon à modéliser une poutre encastree en $x = 0$ et libre en $x = L$, de sorte que $w(0, t) = 0$ et $\partial_x w(0, t) = \theta(0, t) = 0$ d'une part, et $\partial_x^2 w(L, t) = 0$ et $\partial_x^3 w(L, t) = 0$ d'autre part. Ceci se traduit dans l'équation matricielle par imposer à chaque instant $w^0 = 0$ et $\theta^0 = 0$.

4.1.2 . Intégration temporelle des équations du mouvement

Cette section présente les schémas numériques d'intégration temporelle employés au cours de ces travaux de thèse. Deux schémas explicites différents ont été utilisés. Pour résoudre l'équation de la dynamique de l'équation Eq. 4.10 dans un cas linéaire, la méthode de Newmark du second ordre a été privilégiée, notamment pour sa capacité à intégrer explicitement ou implicitement un problème faisant intervenir une dérivée seconde par rapport au temps. Dans le cas non-linéaire, comme ce sera par exemple le cas lorsque la contribution d'un milieu granulaire sera introduite à l'équation du mouvement de la poutre, Eq. 4.1 (voir chapitre Chap. 7), l'utilisation d'une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 à pas adaptatif, selon le schéma de Dormand-Prince [28], sera mise en œuvre.

En général, pour garantir la stabilité d'un schéma numérique explicite, les équations du mouvement sont intégrées avec un pas de temps plus petit que le temps de vol de l'onde la plus rapide au travers la plus petite longueur du système. Dans un problème dynamique résolu spatialement avec la méthode des éléments finis, la longueur à considérer est celle de la plus petite maille. Cette condition, appelée condition de Courant ou CFL, est exprimée par la relation suivante :

$$h = \Delta t < \frac{l^{\min}}{c} \quad (4.11)$$

où c correspond à la célérité des ondes et l^{\min} à la longueur élémentaire.

Dans la majorité des cas, l'intégration analytique de l'équation Eq. 4.10 n'est pas possible du fait d'un grand nombre de degrés de liberté. La solution consiste alors à intégrer numériquement cette équation en subdivisant l'intervalle de temps sur lequel la solution est recherchée et à utiliser des différences finies pour inverser l'équation à chaque instant t . Pour résoudre l'équation de la dynamique Eq. 4.10 qui est d'ordre deux en temps, un schéma faisant intervenir cet ordre de dérivation est nécessaire. C'est le cas du schéma de Newmark présenté dans la section suivante. Alternativement une méthode de Runge-Kutta peut être mise en œuvre, après réécriture du problème différentiel au premier ordre, comme expliqué dans la section d'après.

i. Schéma de Newmark

Les schémas d'ordre deux permettent par définitions d'intégrer des équations d'ordre deux, de la forme :

$$F\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0, \quad (4.12)$$

telles que l'équation de la dynamique Eq. 4.10, en une seule étape.

L'une de ces méthodes, la méthode de Newmark [92], a été proposée initialement pour intégrer des problèmes de dynamique de structures complexes incluant des non-linéarités. La grande force de cette méthode est qu'elle permet, grâce à l'ajustement d'un couple libre de paramètres (β, γ) , de passer facilement d'une formulation explicite, conditionnellement stable, à une formulation implicite inconditionnellement stable [49].

La méthode de Newmark repose sur un développement de Taylor à l'ordre un du déplacement u_{n+1} et à l'ordre zéro de la vitesse \dot{u}_{n+1} , dont les restes sont estimés à l'aide d'une moyenne des accélérations \ddot{u}_n et \ddot{u}_{n+1} , pondérée par les coefficients γ et β . Le schéma de Newmark se résume ainsi au couple d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + (1 - \gamma)h\ddot{u}_n + \gamma h\ddot{u}_{n+1}, \\ u_{n+1} = u_n + h\dot{u}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)h^2\ddot{u}_n + \beta h^2\ddot{u}_{n+1}. \end{cases} \quad (4.13)$$

Pour garantir la stabilité du schéma, les valeurs de γ et β doivent être choisies de sorte que l'erreur ne soit pas amplifiée d'un pas de temps à l'autre. Une analyse de la stabilité [92, 48] permet d'obtenir un critère sur γ et β pour la garantir :

$$\begin{aligned} \gamma \geq \frac{1}{2} \text{ et } \beta \geq \frac{\gamma}{2} & : \text{ inconditionnellement stable,} \\ \gamma \geq \frac{1}{2} \text{ et } \beta < \frac{\gamma}{2} & : \text{ stable si } h \leq \min_i \left(\frac{2}{\omega_i \sqrt{2\gamma - 4\beta}} \right), \\ \gamma \leq \frac{1}{2} & : \text{ instable.} \end{aligned} \quad (4.14)$$

où ω_i correspond à la pulsation propre la plus élevée de la structure. Les limites de stabilité de quelques schémas de Newmark sont rappelées dans le tableau Tab. 4.1. Le schéma de différences centrées ($\gamma = 1/2$ et $\beta = 0$) est le plus couramment utilisé dans les codes explicites de calculs de structures. Le schéma d'accélération constante moyenne ($\gamma = 1/2$ et $\beta = 1/4$) offre une stabilité inconditionnelle et permet donc d'augmenter le pas de temps sans pour autant faire diverger la solution. En revanche la solution obtenue est dégradée, l'erreur augmentant comme h^2 .

| dénomination | γ | β | explicite/ implicite | limite de sta- bilité | erreur d'ampli- tude | erreur de périodicité |
|-----------------------------------|----------|---------|-------------------------|--------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| Explicite | 0 | 0 | explicite | 0 (instable) | $-\omega h/4$ | 0 |
| Différence centrée | 1/2 | 0 | explicite | 0 | 0 | $-(\omega h)^2/24$ |
| Fox et Goodwin | 1/2 | 1/12 | implicite | 2.45 | 0 | $\mathcal{O}(\omega^4 h^4)$ |
| Accélération linéaire | 1/2 | 1/6 | implicite | 3.46 | 0 | $(\omega h)^2/24$ |
| Accélération constante moyenne | 1/2 | 1/4 | implicite | ∞ | 0 | $(\omega h)^2/12$ |

Table 4.1 – Description quantitative de quelques schémas de la famille de Newmark.

ii. Schéma de Runge-Kutta à pas adaptatif

L'équation différentielle du second ordre Eq. 4.10 peut être réécrite au premier ordre comme suit :

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{B}\mathbf{y} = \bar{\mathbf{f}}, \quad (4.15)$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \text{ et } \bar{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

qu'il est possible de résoudre avec un schéma du premier ordre. Il faut cependant noter que la taille du vecteur d'état est doublée du fait de la prise en compte de la dérivée première de la solution comme une variable inconnue intermédiaire.

Les méthodes du type Runge-Kutta permettent de résoudre des équations différentielles ordinaires du premier ordre. Elles permettent d'obtenir une erreur de troncature d'ordre supérieur sans calculer tous les termes du développement de la série de Taylor de la solution y . L'approximation y_{n+1} de la solution $y(t_{n+1})$ s'exprime par :

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h) \quad (4.17)$$

où Φ correspond à une moyenne pondérée entre les valeurs $k_j = \partial_t y(t_j)$ pour $j \in \{1..N\}$, de la dérivée première de y évaluée en N pas de temps sur l'intervalle $[t_n, t_n + h]$. Son expression est donnée par :

$$\Phi(t_n, y_n, h) = \sum_{j=1}^N a_j k_j \quad (4.18)$$

où les coefficients a_j et les expressions des k_j dépendent de N , et où N est l'ordre (la précision) de l'approximation. Pour le schéma classique d'ordre 4 à pas adaptatif RK45 que nous utilisons, la démarche est détaillée dans [28]. La spécificité de la procédure du schéma à pas adaptatif est de permettre de contrôler l'erreur de troncature en comparant la solution estimée à l'ordre 4 avec une solution estimée à l'ordre 5, à tout instant t_n . Si l'erreur excède une tolérance, le pas de temps est diminué pour la réduire. Le gain en précision par pas de temps adaptatif se fait toutefois au détriment du temps de calcul, par rapport à un pas de temps constant. Par ailleurs, d'un point de vue pratique, ce type de méthode convient bien lorsqu'il

est difficile d'estimer a priori un pas de temps garantissant la stabilité du fait par exemple d'une non-linéarité, comme nous le verrons dans le chapitre Chap. 7.

4.2 . Modèles d'amortissement dans les poutres

Dans cette section nous passons en revue différentes manières d'introduire de l'amortissement dans un modèle numérique de poutre en flexion.

4.2.1 . Généralités sur l'amortissement et modèles rhéologiques

Le comportement viscoélastique de matériaux sous sollicitations dynamiques peut être décrit par des modèles rhéologiques élémentaires [77]. Le plus simple d'entre eux repose sur l'approximation d'un unique degré de liberté, représentatif du déplacement $u(t)$ d'une masse ponctuelle m (exprimée en kg) soumise à un effort $f(t)$ (par exemple harmonique de fréquence $\omega = 2\pi f$) et reliée à un référentiel galiléen par l'intermédiaire d'un ressort élastique sans masse de raideur k (exprimée en N/m). L'ajout, en parallèle du ressort (modèle dit de *Kelvin-Voigt*, commun pour les solides viscoélastiques), d'un amortisseur visqueux proportionnel à la vitesse de déformation $\dot{u}(t)$, de coefficient c (exprimée en $N.s/m$), rend compte d'une interaction additionnelle non-conservative, dont le temps de relaxation est $\tau = c/k$. A l'image de l'équation dynamique Eq. 4.10, un tel système est décrit par l'équation du mouvement suivante,

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f, \quad (4.19)$$

dont le facteur de perte η , défini (i) comme le rapport entre l'énergie dissipée par cycle et le maximum de l'énergie potentielle stockée au cours d'un cycle, (ii) comme l'inverse du facteur de qualité Q à la fréquence de résonance $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, (iii) comme le double de l'amortissement réduit ξ , ou enfin (iv) comme le déphasage $\phi(\omega)$ entre le déplacement et l'effort, vaut

$$\eta = \frac{E_{diss}}{2\pi E_{stored}} = \frac{1}{Q} = 2\xi = \tan \phi = \frac{c}{\sqrt{km}}. \quad (4.20)$$

L'amortissement et le temps de relaxation étant proportionnel, $c = k\tau$, le facteur de perte croît donc avec la fréquence dans le cas d'un solide viscoélastique,

$$\eta = \frac{k\tau}{\sqrt{km}} = \omega_0\tau. \quad (4.21)$$

Lorsque l'amortisseur c est ajouté en série avec le ressort k (modèle dit de *Maxwell*, commun pour les fluides viscoélastiques), l'équation du mouvement s'écrit

$$m\ddot{u} + (m/\tau)\dot{u} + ku = f, \quad (4.22)$$

de telle sorte que le facteur de perte décroît avec la fréquence,

$$\eta = \frac{m/\tau}{\sqrt{km}} = \frac{1}{\omega_0\tau}. \quad (4.23)$$

Notons enfin que du point de vue expérimental, l'observation d'un déplacement pseudo-périodique (pseudo-fréquence ω_{osc}) à décroissance exponentielle (temps d'atténuation de l'amplitude du déplacement τ_{att} , soit un temps d'atténuation $\tau_{att}/2$ en énergie), permet de quantifier le facteur de qualité selon l'Eq. 4.20,

$$Q = \frac{1}{2}\omega_{osc}\tau_{att}. \quad (4.24)$$

4.2.2 . Amortissement numérique

D'un point de vue numérique, certains phénomènes, par exemple des mécanismes non-linéaires comme le contact frottant, peuvent engendrer des variations brusques des conditions de sollicitations. Si ces phénomènes ont un temps caractéristique inférieur ou égal au pas de temps, ils peuvent engendrer des instabilités numériques en hautes fréquences. Pour remédier à cela, il est possible d'agir directement sur le schéma d'intégration, en introduisant un amortissement des hautes fréquences qui ne dégrade pas la solution en basses fréquences, par l'intermédiaire d'un terme additionnel proportionnel à la vitesse de déplacement de la structure. La méthode HHT- α (Hilber, Hughes et Taylor) a été développée dans ce but, à partir du schéma de Newmark. Elle consiste à modifier légèrement l'équation dynamique en effectuant une moyenne pondérée par un coefficient réel α , des efforts viscoélastiques, élastiques et externes, entre les instants t_{n+1} et t_n . L'équation du mouvement Eq. 4.10 se réécrit de la façon suivante [91] :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{C}[(1 + \alpha)\dot{\mathbf{u}}_{n+1} - \alpha\dot{\mathbf{u}}_n] + \mathbf{K}[(1 + \alpha)\mathbf{u}_{n+1} - \alpha\mathbf{u}_n] = (1 + \alpha)\mathbf{f}_{n+1} - \alpha\mathbf{f}_n. \quad (4.25)$$

Le coefficient de pondération α permet de contrôler le niveau d'amortissement numérique mais il influe également sur la stabilité du schéma. Afin de garantir la stabilité du schéma numérique et la précision d'ordre 2, α doit appartenir à l'intervalle $[-1/3, 0]$ et les coefficient de Newmark doivent respecter la condition suivante [91] :

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha, \text{ et } \beta = \frac{(1 - \alpha)^2}{4}. \quad (4.26)$$

Malgré le caractère visqueux d'un tel amortissement numérique, sa signification physique n'est pas clairement établie, et on pourra préférer prendre en compte la dissipation telle que présentée dans les sections suivantes.

4.2.3 . Amortissement structural

D'un point de vue physique, un amortissement peut être introduit en régime harmonique, en ajoutant une partie imaginaire au module élastique réel E d'un matériau :

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \tilde{E}(\omega)\tilde{\varepsilon}(\omega) = E[1 + j\eta(\omega)]\tilde{\varepsilon}(\omega), \quad (4.27)$$

où $\tilde{\sigma}(\omega)$ représente la transformée de Fourier de $\sigma(t)$ et $\eta(\omega)$ est le facteur de perte introduit à l'équation Eq. 4.20. Cette approche requiert donc une description

du problème dans le domaine fréquentiel. La partie réelle du module élastique complexe, $E = \text{Re}(\tilde{E}) = \text{const}$, représente la contribution conservative de la contrainte, en phase avec la déformation, tandis que sa partie imaginaire représente la contribution non-conservative, en quadrature de phase. Ainsi, conformément à l'équation Eq. 4.20, le facteur de perte est donc bien tel que

$$\eta = \frac{\text{Im}(\tilde{E})}{\text{Re}(\tilde{E})} = \tan \phi, \quad (4.28)$$

où ϕ est le déphasage entre contrainte et déformation, alternativement, le module élastique peut être défini par son module et sa phase,

$$\tilde{E}(\omega) = |\tilde{E}| \exp(j\phi). \quad (4.29)$$

Le cas de la dissipation dans un solide viscoélastique (modèle de *Kelvin-Voigt*), $\eta = \omega\tau$ avec τ un temps de relaxation conforme à l'équation Eq. 4.21, est intéressant car il peut être décrit et résolu dans le domaine temporel, en faisant intervenir le taux de déformation conformément à la transformée de Fourier inverse de l'équation Eq. 4.27 :

$$\sigma(t) = E[1 + \tau\partial_t]\varepsilon(t). \quad (4.30)$$

Dans le cas où la dissipation viscoélastique est faible, $\tau\dot{\varepsilon}/\varepsilon \propto \omega\tau \ll 1$, un développement de Taylor de l'équation Eq. 4.30

$$\sigma(t) \simeq E\varepsilon(t + \tau), \quad (4.31)$$

montre bien que la dissipation se traduit par un déphasage entre contrainte et déformation, caractérisé ici par un retard constant approximativement égal au temps de relaxation τ .

Un autre cas particulier d'intérêt est l'amortissement structural, caractérisé par un déphasage constant, $\phi = \text{const}$. Cela requiert simplement de modifier le module élastique scalaire réel par une valeur scalaire complexe. Sous cette hypothèse, le facteur de perte devient indépendant de la fréquence :

$$\eta = \text{const}. \quad (4.32)$$

Cette deuxième approximation est largement utilisée, de part sa simplicité, pour calculer numériquement les fonctions de réponse en fréquence des structures, par exemple pour modéliser la viscoélasticité dans les matériaux sandwich [87, 132, 61].

4.2.4 . Amortissement de Rayleigh

L'amortissement de Rayleigh [77] est une approche intermédiaire, entre points de vue numérique et physique, qui consiste à ajouter un terme visqueux, proportionnel à la vitesse de déplacement dans l'équation dynamique :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (4.33)$$

La matrice d'amortissement de Rayleigh \mathbf{C} , est dite proportionnelle car elle prend la forme suivante :

$$\mathbf{C} = \alpha_R \mathbf{M} + \beta_R \mathbf{K} \quad (4.34)$$

avec (α_R, β_R) un couple de constantes ajustables influant directement sur l'amortissement réduit ξ_i du i -ème mode du problème aux valeurs propres du système défini par l'équation Eq. 4.33, de pulsation propre ω_i , selon la relation :

$$\xi_i = \alpha_R / 2\omega_i + \beta_R \omega_i / 2, \quad (4.35)$$

dont la comparaison avec les équations Eq. 4.21 et Eq. 4.23 montre que l'amortissement de Rayleigh est un modèle viscoélastique modal hybride, combinaison linéaire d'un modèle rhéologique de *Maxwell* (de temps caractéristique $1/\alpha_R$) et d'un modèle rhéologique de *Kelvin-Voigt* (de temps caractéristique β_R).

La définition de \mathbf{C} donnée par l'équation Eq. 4.34 est également commode numériquement car elle bénéficie du même remplissage que les matrices de masse \mathbf{M} et de raideur \mathbf{K} : elle est essentiellement creuse et n'ajoute aucune complexité à la mise en données.

4.2.5 . Exemple d'application : relation de dispersion dans une poutre dissipative en flexion

Nous illustrons ici la prise en compte de la dissipation sur le cas spécifique de la poutre d'Euler Bernoulli, dont la formulation éléments finis est donnée en section Sec. 4.1 à l'équation Eq. 4.10, en introduisant un amortissement de Rayleigh via une matrice d'amortissement \mathbf{C} défini par l'équation Eq. 4.34. Ceci confère donc à la poutre un facteur de perte dépendant de la fréquence $\eta(\omega)$, égale au double de l'amortissement réduit donné par l'équation Eq. 4.35, d'après l'équation Eq. 4.20.

Un calcul transitoire résolu en temps avec la méthode de Newmark, décrite à la section Sec. 4.1.2, nous permet d'obtenir la réponse libre amortie de la poutre soumise à un choc bref (au contenu large bande). Une transformée de Fourier de la réponse temporelle du déplacement $w(x_i, t)$ de chaque nœuds permet alors d'obtenir les spectres de réponse et donc les déformées spatiales dans le domaine fréquentiel, $\tilde{w}(x_i, \omega)$. Chacune de ces déformées spatiales est ensuite analysée fréquence par fréquence avec la méthode ESPRIT, décrite au chapitre Chap. 3 afin d'en extraire le nombre d'onde q complexe. Sa partie réelle q_r et imaginaire q_i sont tracées sur la figure Fig. 4.3 pour deux couples de paramètres de Rayleigh.

Par ailleurs, en introduisant un module élastique complexe, $E[1 + j\eta(\omega)]$, dans la relation de dispersion des ondes de flexion dans une poutre, définie par l'équation Eq. 2.30 on obtient :

$$q^4 = \omega^2 \frac{\rho S}{E[1 + j\eta(\omega)]I}. \quad (4.36)$$

En isolant partie réelle et imaginaire de l'équation Eq. 4.36, on déduit une mesure de $\eta(\omega)$ (une propriété du matériau) à partir de la détermination du nombre d'onde

(une caractéristique de l'onde) :

$$\eta(\omega) = \frac{\text{Im}(q^4)}{\text{Re}(q^4)}. \quad (4.37)$$

La troisième colonne de la figure Fig. 4.3 présente le facteur de perte identifié à l'aide de l'équation Eq. 4.37, comparé à celui défini par l'équation Eq. 4.35. Nous pouvons remarquer que l'analyse via le nombre d'onde permet bien de retrouver le facteur de perte initialement imposé (cercle rouge) par l'amortissement de Rayleigh donné par l'équation Eq. 4.34. L'accord quantitatif obtenu dans cet exemple montre que cette méthode, initialement proposée et détaillée dans [82], constitue ainsi une méthode robuste d'identification des paramètres matériaux (facteur de perte, module élastique) à partir de mesure plein champ.

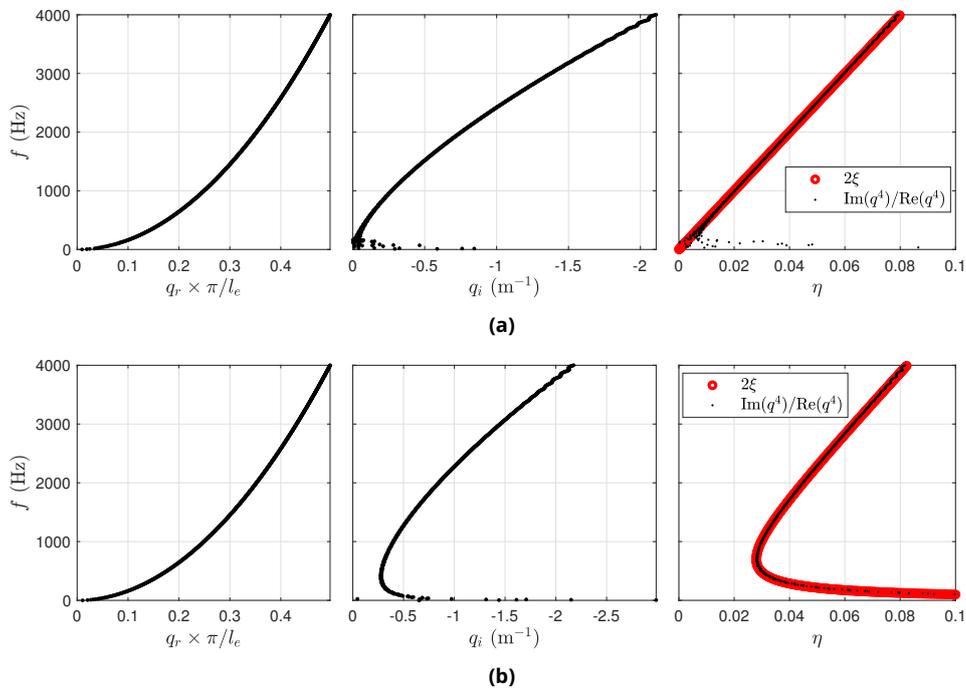


Figure 4.3 – (a) Relation de dispersion complexe et facteur de perte pour $(\alpha_r, \beta_r) = (0 \text{ s}^{-1}, 3.18 \text{ } \mu\text{s})$. (b) Relation de dispersion complexe et facteur de perte pour $(\alpha_r, \beta_r) = (61.57 \text{ s}^{-1}, 3.18 \text{ } \mu\text{s})$.

4.3 . Modèle numérique d'une métapoutre par la méthode des éléments finis

4.3.1 . Modèle

Nous mettons ici à profit les outils et nous réalisons un modèle par la méthode des éléments finis d'une métapoutre localement résonante à l'image de celle étudiée expérimentalement dans le chapitre Chap. 3. Le modèle est implémenté sur

Abaqus et sa géométrie est représentée sur la figure Fig. 4.4. La poutre mince en acier est modélisée avec des éléments de plaques de Kirschhoff, les tiges en laiton sont modélisée par des éléments de poutre de Timoshenko, et les masselottes par des masses ponctuelles localisées à l'extrémité libre de chaque tige. Un amortissement faible est ajoutée à la poutre principale, au moyen d'un coefficient de Rayleigh proportionnel à la raideur soit $(\alpha_R^p, \beta_R^p) = (0, 0.1 \mu s)$. Nous souhaitons étudier le comportement large bande de la poutre, pour cela nous réalisons un calcul transitoire en la sollicitant avec un choc calibré en utilisant une fenêtre de type flat-top qui génère un contenu spectral jusqu'à 10 kHz. La résolution temporelle est effectuée avec le schéma numérique des différences centrées d'ordre deux d'*Abaqus/Explicit*, qui correspond dans les faits à un schéma de Newmark explicite $(\gamma, \beta) = (1/2, 0)$ défini en section Sec. 4.1.2, qui est stable sous la condition donnée par l'équation Eq. 4.14. Des pertes viscoélastiques sont également ajoutées dans les tiges en laiton avec un modèle de Rayleigh de coefficients $\alpha_R^t = 0$ et β_R^t variable ($0 \leq \beta_R^t \leq 5 \mu s$) pour tester son effet sur l'atténuation des ondes. À l'image du protocole expérimental, nous récupérons un ensemble de valeurs de vitesse de vibration transverse de la plaque (selon z) tout au long de l'axe (selon x) de la poutre.

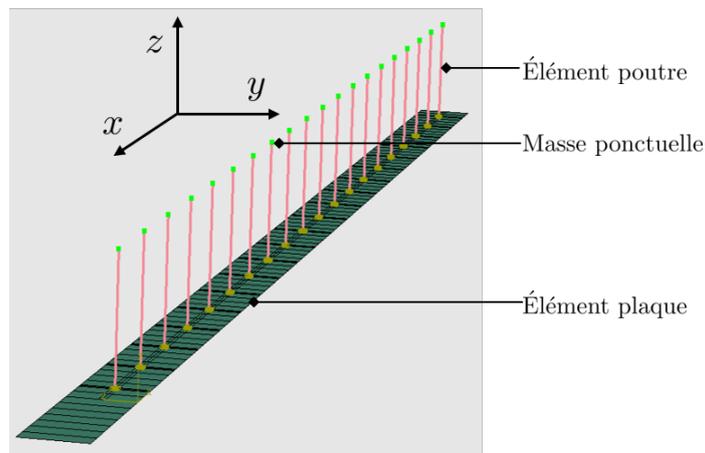


Figure 4.4 – Représentation de la géométrie du modèle éléments finis de métapoutre localement résonante sur Abaqus.

4.3.2 . Résultats

Avec ce jeu de données, la méthode ESPRIT permet d'extraire les nombres d'onde associés aux modes de propagation dans la poutre. Parmi les modes identifiés, ne sont conservés que ceux se propageant dans le sens des x croissants, tels que $\text{Re}(q) \geq 0$. Les nombres d'ondes extraits sont tracés en fonction de la fréquence dans la figure Fig. 4.5 pour les différents niveaux d'amortissement β_R^t des tiges résonantes.

Un calcul modal réalisé sur une tige unique sur un support rigide et dotée

d'une masse ponctuelle à l'autre extrémité permet d'identifier ses modes, qui une fois encastree sur la poutre seront hybridés à ses modes propagatifs en flexion (voir Fig. 4.5b). La principale bande interdite d'hybridation, sur l'intervalle de fréquences [3300, 5300] Hz, est associée au premier mode longitudinal (compression axiale) d'une tige chargée par une masse. Nous pouvons constater les différences entre les cas amortis et non-amortis au niveau de cette bande interdite, le pic d'atténuation s'élargissant en présence d'amortissement. Au-delà de 3700 Hz cette atténuation diminue toutefois à mesure que l'on augmente l'amortissement. Par ailleurs, dans la bande interdite d'hybridation [2000, 2300] Hz, associée au second mode de flexion de la tige résonante, l'amortissement diminue l'atténuation. Une autre bande interdite est observable dans la bande [6500, 8000] Hz, bien qu'elle soit difficilement lisible à cause du chevauchement entre les phénomènes de résonance de Bragg et d'hybridation avec le troisième mode de flexion de la tige.

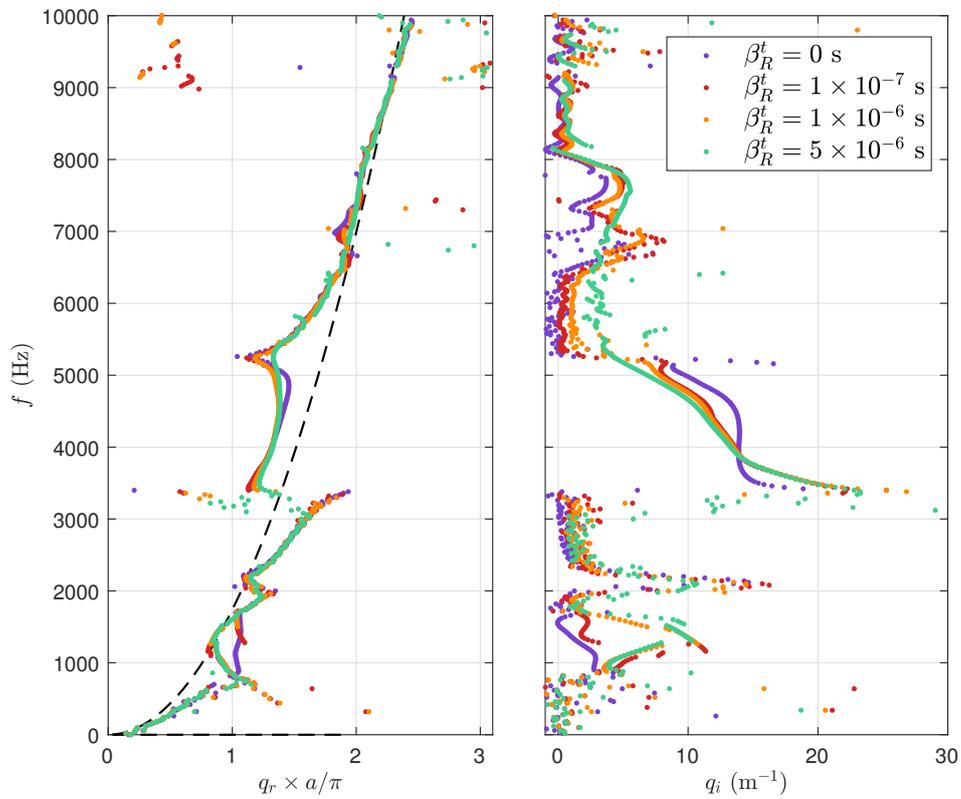
Pour étudier l'effet des pertes viscoélastiques sur l'atténuation dans une bande interdite, nous convoluons la réponse impulsionnelle $h(x, t)$ de la poutre avec un paquet d'ondes (un pulse gaussien, c'est-à-dire une onde harmonique dont l'amplitude est modulée par une fonction gaussienne) $g(t)$ centré sur la bande interdite associée au mode longitudinale des résonateurs (voir figure Fig. 4.6ab). Concrètement, la réponse impulsionnelle est la transformée de Fourier inverse de la fonction de réponse en fréquence $\tilde{h}(x, \omega) = e^{jq(\omega)x}$, où $q(\omega)$ est le nombre d'onde identifié avec la méthode ESPRIT présenté sur la figure Fig. 4.5. Ainsi, la réponse $u(x, t)$ à un paquet d'onde est obtenu par l'expression suivante :

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1} \left[\tilde{h}(x, \omega) \tilde{g}(\omega) \right], \quad (4.38)$$

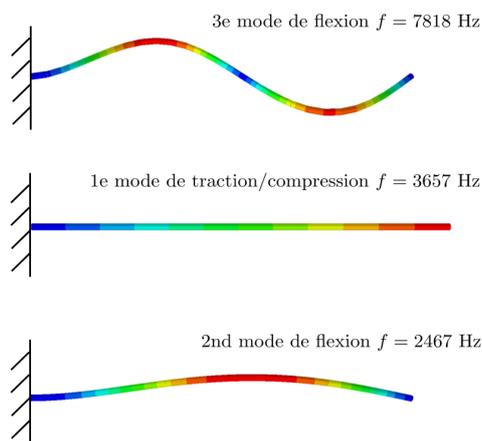
où \mathcal{F}^{-1} correspond à la transformée de Fourier inverse et $\tilde{g}(\omega)$ à la transformée de Fourier de $g(t)$ comme représenté sur la figure Fig. 4.6b. La réponse $u(x, t)$ est calculée en plusieurs positions dont on estime l'amplitude efficace :

$$u_{\text{RMS}}(x) = \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_0^\tau u^2(x, t) dt}, \quad (4.39)$$

où τ correspond à la durée du signal. La figure Fig. 4.6c montre la diminution de l'amplitude efficace du déplacement transverse en fonction de la position pour différentes valeurs de β_R^t . L'ajustement linéaire en échelle semi-logarithmique permet d'estimer une longueur d'atténuation de l'onde (égale à l'inverse opposé de la pente de cette droite) sur la bande de fréquence ciblée. On peut notamment observer que l'atténuation globale est plus importante lorsque l'on augmente les pertes viscoélastiques. En effet, comme on peut l'observer sur la figure Fig. 4.5b, l'amortissement permet d'augmenter l'atténuation autour de la bande interdite de résonance, permettant une meilleure atténuation globale.



(a)



(b)

Figure 4.5 – (a) Relation de dispersion complexe du mode se propageant dans le sens des x positifs pour différentes valeurs de β_R^t dans les tiges résonantes. La courbe en tirets correspond à la poutre simple non amortie. (b) Déformées modales des tiges seules encastées sur support rigide, couplées aux masselottes.

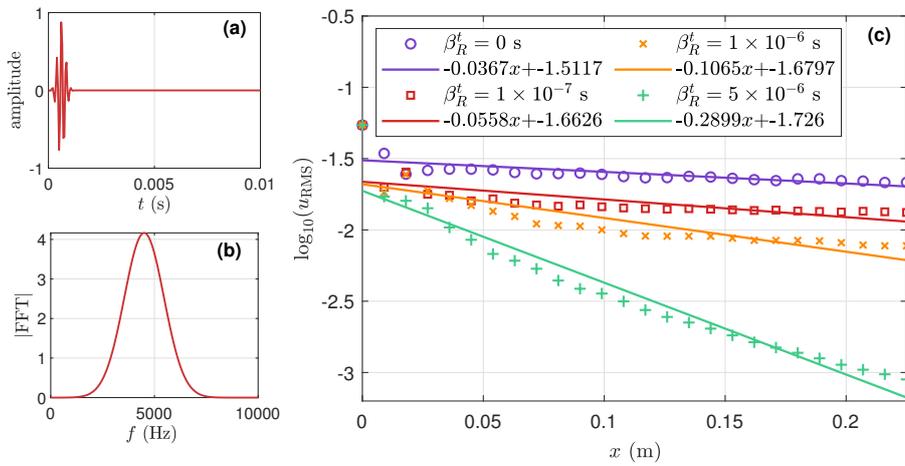


Figure 4.6 – (a-b) Signal d’excitation temporel d’un pulse Gaussien centré sur la fréquence 4500 Hz et sa représentation dans le domaine fréquentiel. (c) Logarithme décimal de u_{RMS} en fonction de la position.

4.4 . Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre nous avons abordé la modélisation par la méthode des éléments finis d’une poutre d’Euler-Bernoulli et détaillé deux méthodes d’intégration temporelle types permettant d’obtenir la réponse impulsionnelle d’une telle structure. Nous avons également présenté plusieurs manières d’introduire de l’amortissement dans le système, et la manière de le quantifier par un facteur de perte. L’identification des pertes est réalisée par l’analyse de la propagation des ondes avec la méthode ESPRIT présentée dans le chapitre précédent. Finalement, l’étude d’une métapoutre localement résonante a été mise en œuvre sous Abaqus par la méthode des éléments finis, à l’identique du prototype expérimental présenté dans le chapitre Chap. 3. L’outil numérique a permis d’étudier, en plus de la propagation des ondes, l’effet de différents niveaux d’amortissement viscoélastique des éléments résonants sur l’atténuation des ondes de flexion. Nous avons notamment pu observer que malgré une dégradation des effets de résonances locales, l’amortissement le plus élevé offrait une meilleure atténuation sur une plus large bande de fréquence.

Deuxième partie

Dissipation d'énergie mécanique dans les milieux granulaires

5 - Méthode des éléments discrets par l'exemple

Résumé

Dans ce chapitre, la méthode des éléments discrets est introduite. Dans un premier temps, une présentation globale s'appuyant sur des références bibliographiques et des exemples élémentaires est réalisée. Dans un second temps, des lois de contacts sont décrites dans le cas de particules sphériques, le modèle de Hertz-Mindlin et le modèle de Cundall et Strack, et comparées à travers des exemples implémentés dans l'environnement du logiciel *Yade*, que nous utilisons.

Dans un troisième temps, un modèle plus complexe (un volume représentatif de forme parallélépipédique, rempli de grains sphériques) dans *Yade*. En particulier, nous modélisons un tel milieu granulaire mis sous contrainte via un chargement triaxiale isotrope, puis soumis à un chargement cyclique en cisaillement simple. Pour vérifier la validité de notre approche, les propriétés du modèle sont comparées à des résultats de la littérature, en compression isotrope et en cisaillement cyclique. Ce chapitre permet d'introduire les concepts et méthodes repris dans le Chap. 6 dans lequel l'évolution des propriétés mécaniques et dissipatives du volume représentatif sont étudiées plus en détail pour en réaliser un modèle réduit.

5.1 . Méthode des éléments discrets

5.1.1 . Présentation de la méthode

La méthode des éléments discrets (DEM/MED), ou méthode des éléments distincts, a été initialement introduite par Cundall et Strack en 1979 [22] pour modéliser numériquement le comportement d'ensembles de particules non cohésives tels que des disques en deux dimensions ou des sphères en trois dimensions. Elle utilise des équations d'état et des lois de contact pour résoudre les équations du mouvement de Newton pour chacune des particules de l'ensemble. Cette méthode est aujourd'hui largement utilisée à diverses échelles pour modéliser, par exemple, les interactions entre des blocs de roche dans les éboulements dans le domaine de la géologie [22], pour les procédés de transport et de stockage dans l'agro-alimentaire et dans le milieu pharmaceutique [62].

Une méthode voisine de la DEM, appelée dynamique moléculaire (MD), consiste à modéliser des atomes ou molécules par des masses ponctuelles. Celle-ci peut être vue comme une sous branche de la DEM. La principale différence avec cette dernière est qu'en dynamique moléculaire, les particules interagissent généralement via des potentiels de champ lointain tel que celui de Van der Waals ou d'at-

traction/répulsion de Coulomb, sans contact direct de la matière. Appliquées aux milieux granulaires, ces deux méthodes se distinguent donc par exemple par leur échelle spatiale d'application, soit en dessous de $1 \mu\text{m}$ à l'échelle microscopique pour la MD, et à l'échelle méso/macrosopique pour la DEM. Le seuil de taille micrométrique distingue les petites particules (ex. poudres) pour lesquelles les forces électrostatiques dominent le poids, des grosses particules.

La DEM est largement utilisée dans l'Industrie et la Recherche. De nombreux codes open source sont disponibles parmi lesquels *Yade*[123], *LIGGGHTS* [64] qui est une version adaptée à la DEM du code de dynamique moléculaire *Lammps* [117], ou encore *LMGC90* [29]. La DEM tend à étendre son champs d'application en se couplant à d'autre méthodes numériques. Par exemple, *LIGGGHTS* développe des méthodes pour résoudre des problématiques granulaire/fluide avec le code *CFDEM* [43]. Le couplage avec la méthode des éléments finis est également un sujet activement étudié, notamment pour la modélisation multi-échelles discrète/continue [47, 126]. De plus, afin d'explorer les effets de différentes géométries de particules, la DEM peut être enrichie par l'introduction d'objets aux formes complexes, obtenues par agrégation de particules ou bien avec la méthode level-set (LS-DEM : *level set-DEM*), décrivant les formes avec des nœuds de frontière [31].

5.1.2 . Équations de la dynamique

En DEM, la dynamiques des particules est régie par l'équation du mouvement des corps rigides de Newton : les efforts et moments appliqués à une particule à un instant donné induisent une variation de sa quantité de mouvement et de son moment cinétique. Pour chaque particules ces équations sont intégrées avec un solveur explicite dont le pas de temps est contraint par les propriétés matérielles des particules. Les forces de contact sont calculées localement pour chaque paire de solides en contact.

À chaque incrément de temps Δt , les accélérations linéaires et angulaires à t de chacune des particules sont déduites du principe fondamental de la dynamique selon l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{x}}_i &= \frac{1}{m_i} \sum_j \mathbf{F}_{j \rightarrow i}, \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}_i &= \frac{1}{J_i} \sum_j \mathbf{r}_{ij} \wedge \mathbf{F}_{j \rightarrow i},\end{aligned}\tag{5.1}$$

où m_i et J_i désignent respectivement la masse et l'inertie en rotation de la particule i . Le vecteur $\mathbf{F}_{j \rightarrow i}$ désigne la force appliquée par la particule j sur la particule i et r_{ij} , le vecteur de norme le rayon de la particule i et orienté sortant, du centre de la particule i vers le centre de la particule j . L'opérateur \wedge désigne le produit vectoriel. Le calcul de l'accélération avec l'équation Eq. 5.1 permet de mettre à jour la vitesse et la position (angulaire et linéaire) des particules à $t + \Delta t$ via un intégrateur aux différences finies du second ordre. *Yade* utilise par exemple pour cela le schéma *leap-frog* du second ordre.

5.1.3 . Modélisation des forces de contacts

La méthode des éléments discrets intègre les équations du mouvement en se basant sur des contacts de durées finies entre les particules. La déformation des particules, qui n'est pas explicitement résolu par la DEM, est rendue par une inter-pénétration équivalente des formes rigides (voir Fig. 5.1a). Il en résulte une force de répulsion dépendant de la profondeur de chevauchement δ . La force de contact est calculée à l'aide d'une loi de contact. La plus commune et la première à avoir été intégrée à un code DEM est celle de Cundall et Strack [22] incluant la restitution élastique avec ou sans perte viscoélastique, et avec frottement. On retrouve également le modèle non-linéaire de Hertz et aussi celui de Hertz-Mindlin [89, 90] pour la prise en compte du frottement et des efforts tangentiels. Ces quelques modèles sont présentés en détails dans le suite du document, en section Sec. 5.2 D'autres modèles existent pour des utilisations plus spécifiques, par exemple le modèle de Derjaguin [27] permet de modéliser les milieux cohésifs avec un modèle de Hertz auquel est ajoutée une force de cohésion.

De façon générale, en DEM, lorsque deux particules entrent en contacts, une force de répulsion \mathbf{F} tend à les faire se repousser. Cette force \mathbf{F} s'exprime comme la somme de deux résultantes vectorielles par :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_t, \quad (5.2)$$

où \mathbf{F}_n désigne la résultante normale dirigée par une droite passant par le centre des deux particules et \mathbf{F}_t la composante tangentielle, orthogonale à \mathbf{F}_n . Selon le modèle de Cundall et Strack [22], ces deux résultantes sont exprimées par des relations de la forme suivante :

$$\mathbf{F}_n = k_n \delta_n \mathbf{n}_{ij} + c_n \dot{\delta}_n \mathbf{n}_{ij}, \quad (5.3)$$

$$\mathbf{F}_t = k_t \boldsymbol{\delta}_t + c_t \dot{\boldsymbol{\delta}}_t, \quad (5.4)$$

où k_n , k_t désignent respectivement les raideurs de contact normale et tangentielle et \mathbf{n}_{ij} le vecteur passant par le centre des deux sphères, orienté de la sphère i à la sphère j . De même, c_n et c_t désignent les coefficients d'amortissement introduisant les pertes viscoélastiques dans le contact. Les vitesses de déformation (i.e. de chevauchement) normale et tangentielle des particules, $\dot{\delta}_n$ et $\dot{\boldsymbol{\delta}}_t$, sont les dérivées premières par rapport au temps de δ_n et $\boldsymbol{\delta}_t$, respectivement. Les coefficients k_n , k_t , c_n et c_t dépendent de la physique et du potentiel d'interaction entre les particules. Contrairement à l'effort normal, la résultante de \mathbf{F}_t ne passe pas par le centre des particules. C'est pourquoi cette résultante peut générer un moment entraînant la rotation de la particule. Par ailleurs, un critère de Mohr-Coulomb peut tronquer la composante tangentielle \mathbf{F}_t comme suit :

$$|\mathbf{F}_t| \leq \mu |\mathbf{F}_n|, \quad (5.5)$$

de telle façon à rendre compte d'un comportement frottant (par exemple adhésion glissement). Ainsi, le contact devient glissant dès lors que $|\mathbf{F}_t|$ atteint $\mu |\mathbf{F}_n|$. Le

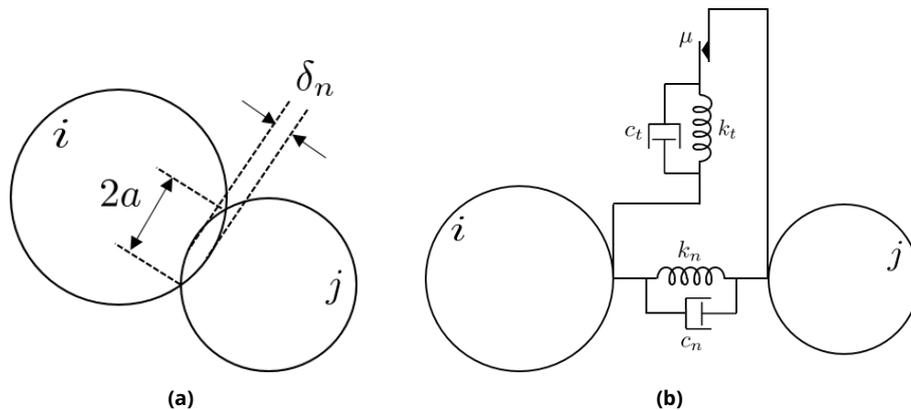


Figure 5.1 - Représentation schématique du contact en 2D en DEM avec (a) le chevauchement des particules (δ_n est volontairement exagérée) et (b) Représentation schématique du contact en DEM avec les raideurs k_n et k_t et amortisseurs viscoélastiques c_n et c_t intervenant dans le calcul des forces normale et tangentielle, ainsi que le contact frottant de coefficient de friction μ .

coefficient de frottement, noté μ , est égal à la tangente de l'angle de frottement. Notons que si $\mu = 0$ alors l'équation Eq. 5.5 devient simplement $|\mathbf{F}_t| = 0$, ce qui signifie que les contacts sont purement normaux en l'absence de frottement. Ce jeu d'équations Eq. 5.4 et Eq. 5.5 est représenté schématiquement par la figure 5.1b.

Notons pour finir que des modèles plus complexes que celui de Cundall et Strack peuvent être utilisés en DEM. Quelques-uns des modèles les plus communément employés sont présentés dans la section suivante, Sec. 5.2.

5.1.4 . Détection des collisions

La résolution des équations de la dynamique à chaque instant nécessite de connaître quels objets sont en contact. Un simple test de cette condition, particule par particule, atteint une complexité en $\mathcal{O}(n^2)$, et ce à chaque pas de temps, ce qui devient très rapidement inenvisageable pour des simulations impliquant un grand nombre de particules (rappelons à titre d'exemple qu'un litre de sable millimétrique contient 1.2 millions de grains!). Les codes de calcul DEM utilisent généralement des algorithmes permettant de diminuer cette complexité. Parmi ceux-là, on retrouve notamment les algorithmes hiérarchiques [100] et les algorithmes dits *flats* [123] basés sur les volumes délimitant les objets. *Yade*[123] emploie l'un de ceux là, l'algorithme *Sweep and Prune*, basé sur l'utilisation d'*axis aligned bounding boxes* (*aabb*) pour réaliser un pré-tri sur les contacts potentiels. Cela consiste à placer chacun des objets (particules, facettes, etc...) dans des boîtes parallélépipédiques dont les arêtes sont alignées sur les axes du repère global de la simulation. Un contact entre deux objets est alors possible si et seulement si leur boîte s'inter-

sectent selon les trois axes à la fois. Cette condition s'exprime :

$$\left(\tilde{P}_i \cap \tilde{P}_j\right) \neq \emptyset \Leftrightarrow \bigwedge_{w \in [x,y,z]} \left[\left(\left(\tilde{P}_i^{w0}, \tilde{P}_i^{w1} \right) \cap \left(\tilde{P}_j^{w0}, \tilde{P}_j^{w1} \right) \right) \neq \emptyset \right] \quad (5.6)$$

Autrement, l'absence de chevauchement sur l'un des axes permet d'éliminer le potentiel contact. Cette méthode utilise des algorithmes de tri et permet d'avoir des complexités de l'ordre de $\mathcal{O}(n \log(n))$. Il est toutefois possible d'accélérer cette méthode en agrandissant les boîtes contenant les objets grâce à la cohérence temporelle. Cet agrandissement est notamment basé sur la distance typique parcourue par les objets en un pas de temps faisant intervenir les vitesses des objets [123].

5.1.5 . Intégration temporelle et calcul de la position

En DEM, les schémas d'intégrations sont généralement explicites. De fait, ils sont conditionnellement stables, avec un pas de temps piloté par la durée des contacts et donc par la loi de contact. Pour le modèle de Cundall et Strack, la durée τ d'un contact peut être déduite de l'inverse de la fréquence propre de la raideur k du contact couplée à la masse m du grain, soit $\tau \simeq \pi \sqrt{m/k}$. Pour assurer la stabilité du schéma, il est donc recommandé de choisir un pas de temps Δt comme une fraction du temps de contact.

Le choix du pas de temps peut également s'appuyer sur les propriétés physiques des particules. Pour cela, il faut d'abord remarquer que supposer qu'un contact génère une déformation localisée, près de la surface, revient à supposer que la matière dans le volume (*bulk*) est infiniment rigide devant la raideur du contact. Cela revient donc à observer que la dynamique du contact est un mécanisme quasi-statique : la durée du contact est infiniment longue par rapport au temps de vol des ondes élastiques pour traverser une particule. Ainsi, sélectionner un pas de temps égal à ce temps de vol, quantifiable a priori, garanti que la dynamique du contact sera bien résolu temporellement, avec un pas de temps suffisamment court. On retrouve donc les mêmes arguments que pour la résolution d'équation par la méthode des éléments finis, on s'appuie sur le temps de vol des ondes longitudinales à travers la plus petite unité de longueur du système. Dans un système granulaire, celle-ci est donnée par le rayon de la plus petite particule. Ainsi, comme décrit dans [123], le pas de temps critique est donné par :

$$\Delta t_{cr} = \min_i R_i \sqrt{\frac{\rho_i}{E_i}}, \quad (5.7)$$

avec i le numéro de la particule.

Concernant l'intégration numérique temporelle, *Yade* utilise un schéma explicite d'ordre deux, basé sur une variante du modèle de velocity verlet [125] avec un calcul des vitesses à des pas de temps intermédiaires. Après calcul de l'accélération $\ddot{\mathbf{x}}^n$ à l'instant t_n avec l'équation Eq. 5.1, la position \mathbf{x}^{n+1} à t_{n+1} est mise à jour via

une différence finie d'ordre deux en temps :

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{n+1} &= 2\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^{n-1} + \ddot{\mathbf{x}}^n \Delta t^2 & (5.8) \\
&= \mathbf{x}^n + \Delta t \left(\frac{\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^{n-1}}{\Delta t} + \ddot{\mathbf{x}}^n \Delta t \right) \\
&\approx \mathbf{x}^n + \Delta t \left(\dot{\mathbf{x}}^{n-\frac{1}{2}} + \ddot{\mathbf{x}}^n \Delta t \right) \\
\mathbf{x}^{n+1} &\approx \mathbf{x}^n + \Delta t \dot{\mathbf{x}}^{n+\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

avec les vitesses aux pas de temps intermédiaires $\dot{\mathbf{x}}^{n-\frac{1}{2}} \approx (\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^{n-1})/\Delta t$ et $\dot{\mathbf{x}}^{n+\frac{1}{2}} \approx \dot{\mathbf{x}}^{n-\frac{1}{2}} + \ddot{\mathbf{x}}^n \Delta t$. Finalement, les positions et vitesses sont mises à jour avec les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}^{n+\frac{1}{2}} &= \dot{\mathbf{x}}^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t \ddot{\mathbf{x}}^n & (5.9) \\
\mathbf{x}^{n+1} &= \mathbf{x}^n + \Delta t \dot{\mathbf{x}}^{n+\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Le fait que les positions et vitesses des particules soient connues à des instants différents, t_{n+1} et $t_{n+1/2}$, donne le nom de *Leapfrog* à ce schéma et a l'avantage d'avoir un faible nombre d'opérations à chaque pas de temps.

5.2 . Modèles de dynamique du contact

Dans cette section, nous revenons plus en détails sur quelques-uns des modèles les plus communs utilisés en DEM, pour décrire des mécanismes élastiques et frottants.

5.2.1 . Modèles élastiques

i. Modèle de Cundall et Strack

Le modèle le plus couramment utilisé comme potentiel d'interaction est le modèle de force linéaire de Cundall et Strack, implémenté originalement dans le premier code DEM *Ball* [22]. Celui-ci est représenté par les équations Eq. 5.4 et Eq. 5.5 dans lesquelles k_n , k_t , c_n et c_t sont des constantes telles que $c_n = \beta k_n$ et $c_t = \beta k_t$. Le coefficient β désigne un temps de relaxation visqueux. Dans le modèle initial de Cundall, les raideurs k_n , k_t et la durée β ne reposent a priori pas sur la mesure indépendante des propriétés des particules, mais doivent être ajustées. Cependant, il existe aujourd'hui des méthodes pour estimer les grandeurs k_n et k_t , basées sur la géométrie et les propriétés matériaux des particules [123]. Une façon de quantifier le terme viscoélastique $c_n = \beta k_n$ consiste à définir un coefficient de restitution ϵ , comme le rapport entre les vitesses après et avant contact :

$$\epsilon = -\frac{\dot{\delta}_n(\tau)}{\dot{\delta}_n(0)}, \quad (5.10)$$

avec τ la durée du contact. Comme proposé par Antypov et al. dans [4], l'équilibre dynamique peut être décrit pendant toute la durée du contact par l'équation suivante :

$$m_*\ddot{\delta}_n + c_n\dot{\delta}_n + k_n\delta_n = 0, \quad (5.11)$$

avec $m_* = m_i m_j / (m_i + m_j)$, la masse réduite des deux particules i et j en contact. L'équation Eq. 5.11 est l'équation d'un oscillateur amorti, dont la forme canonique est donnée par :

$$\ddot{\delta}_n + 2\xi\omega_0\dot{\delta}_n + \omega_0^2\delta_n = 0. \quad (5.12)$$

avec l'amortissement critique $\xi = c_n / 2\sqrt{k_n m_*}$ et la pulsation propre du système $\omega_0 = \sqrt{k_n / m_*}$. En résolvant cette équation dans un régime faiblement amorti, avec comme conditions initiales : $\delta_n(t=0) = 0$ et $\dot{\delta}_n(t=0) = v_0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \delta_n(t) &= \frac{v_0}{\Omega_0} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\Omega_0 t), \\ \dot{\delta}_n(t) &= \frac{v_0}{\Omega_0} e^{-\xi\omega_0 t} (-\xi\omega_0 \sin(\Omega_0 t) + \Omega_0 \cos(\Omega_0 t)), \end{aligned} \quad (5.13)$$

où $\Omega_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$. En considérant la durée du contact τ comme une demi pseudo-période d'oscillation, on obtient :

$$\tau = \frac{\pi}{\Omega_0} = \pi \sqrt{\frac{m_*}{k_n(1 - \xi^2)}}. \quad (5.14)$$

Par ailleurs, la vitesse en sortie de contact est donnée par l'équation Eq. 5.10, telle que $\dot{\delta}_n(t = \tau) = -\epsilon v_0$. En égalant cette expression avec l'expression de $\dot{\delta}_n(t = \tau)$ donnée par l'équation Eq. 5.13, on obtient la relation suivante :

$$\epsilon = e^{-\xi\omega_0\tau}. \quad (5.15)$$

Finalement, en injectant l'expression de τ de l'équation Eq. 5.14 dans l'équation Eq. 5.15, on obtient l'expression suivante du temps de relaxation visqueux β :

$$\beta(\epsilon) = \frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{2}{\omega_0} \frac{-\log(\epsilon)}{\sqrt{\log^2(\epsilon) + \pi^2}}. \quad (5.16)$$

L'équation Eq. 5.16 permet donc de choisir le coefficient d'amortissement du contact $c_n = \beta(\epsilon)k_n$ permettant d'imposer des pertes viscoélastiques seulement à partir du coefficient de restitution ϵ , indépendamment de la vitesse d'impact des particules.

ii. Modèle de Hertz-Mindlin en DEM

La théorie du contact de Hertz, telle que présentée par Johnson dans [58], décrit de façon générale l'interaction entre deux solides élastiques géométriquement non conforme (par ex. deux formes convexes) pressés l'un contre l'autre. Initialement,

la zone de contact est soit un point (si les surfaces sont courbées dans plusieurs directions), soit une ligne (s'il n'y a qu'un rayon de courbure, par exemple, un cylindre sur un plan). Lorsqu'une pression est appliquée, les solides se déforment légèrement et la surface de contact croît. Dans le cas d'un contact sphère/plan, la surface de contact forme un disque de rayon a . En supposant que le déplacement de matière est localisé près de la zone de contact, à une profondeur de l'ordre de la largeur du disque de contact, on peut alors estimer la déformation (*strain*) par $\varepsilon \propto \delta_n/a$, avec δ_n la distance d'approche du centre de la sphère non déformée par rapport au plan non déformé; δ_n est assimilé à un chevauchement en DEM. Pour un matériau élastique Hookéen de module d'Young E (et dont on négligerait le coefficient de Poisson, $\nu = 0$), la contrainte (stress) σ s'exprime par :

$$\sigma \propto E \frac{\delta_n}{a}. \quad (5.17)$$

L'enfoncement δ_n étant supposé petit devant le rayon R de la sphère, on a $a \propto R\delta_n$. De plus, la surface de contact totale A s'exprime par $A = \pi a^2$. Ceci permet de déduire une force de contact F_n s'exprimant :

$$F_n \propto \sigma A \propto \frac{E\delta_n}{a} \times a^2 \propto ER^{1/2}\delta_n^{3/2}. \quad (5.18)$$

La force obtenue dépend non linéairement du déplacement, contrairement au modèle linéaire de Cundall et Strack vu précédemment dans la section Sec. 5.2.1. Sa formulation exacte, obtenue dans le cadre de la mécanique des milieux continus, pour deux sphères i et j de rayon $R_{i,j}$ et de module élastique $E_{i,j}$ s'écrit :

$$\mathbf{F}_n = \frac{4}{3}E^* \sqrt{R^*} \delta_n^{3/2} \mathbf{n}_{ij} = \kappa_n \delta_n^{3/2} \mathbf{n}_{ij}, \quad (5.19)$$

où les coefficients E^* et R^* , les module élastique et rayon réduits, sont donnés par :

$$E^* = \frac{E_i E_j}{E_i(1 - \nu_j^2) + E_j(1 - \nu_i^2)} \quad (5.20)$$

$$R^* = \frac{R_i R_j}{(R_i + R_j)} \quad (5.21)$$

Le modèle de Hertz peut être vu en DEM comme un modèle de Cundall avec une raideur de contact non-linéaire qui varie en fonction de l'enfoncement. Ce parallèle entre les modèles permet d'estimer la valeur de la raideur k_n du modèle de Cundall par :

$$k_n = \frac{F_n}{\delta_n} = \kappa_n \delta_n^{1/2}. \quad (5.22)$$

Dans le cas non conservatif, la force de contact normal donnée par le modèle de Hertz s'exprime d'après [67, 121] par :

$$\mathbf{F}_n = \kappa_n \delta_n^{3/2} \mathbf{n}_{ij} + \beta(\epsilon_n) \sqrt{m_* \kappa_n} \delta_n^{1/4} \dot{\delta}_n \mathbf{n}_{ij} \quad (5.23)$$

Cette définition du terme non conservatif suggérée par Tsuji [121] conduit à un coefficient de restitution ϵ_n indépendant de la vitesse d'impact. La fonction $\beta(\epsilon_n)$ ne dépend que du coefficient de restitution. Tout comme pour le modèle de Cundall et Strack, Antypov montre dans [4] qu'il est possible d'exprimer la fonction $\beta(\epsilon_n)$ pour le modèle de Hertz-Tsuji, afin d'obtenir le coefficient de restitution désiré. Considérant cette fois l'équation Eq. 5.23 dans l'équilibre dynamique donné par l'équation Eq. 5.11, en posant $\bar{\omega}_0 = \sqrt{\kappa_n/m_*}$, cette dernière se réécrit :

$$\ddot{\delta}_n + \beta(\epsilon_n)\bar{\omega}_0\delta_n^{1/4}\dot{\delta}_n + \bar{\omega}_0^2\delta_n^{3/2} = 0. \quad (5.24)$$

En appliquant une méthode similaire à celle utilisée dans le cas du modèle de force linéaire de Cundall et Strack, adaptée au cas non linéaire de l'équation Eq. 5.24, Antypov [4] montre que $\beta(\epsilon_n)$ prend la forme suivante :

$$\beta(\epsilon_n) = \frac{-\sqrt{5}\log(\epsilon_n)}{\sqrt{\log^2(\epsilon_n) + \pi^2}}, \quad (5.25)$$

de forme similaire à l'équation Eq. 5.16.

Concernant la dissipation lors de la déformation en cisaillement de la zone de contact, Mindlin et al. [89] expriment l'évolution de la force tangentielle entre deux solides pressés l'un contre l'autre soumis à une légère torsion, induisant la déformation en cisaillement du contact. En considérant une adhérence totale entre les deux solides élastiques via le modèle de Coulomb, sans glissement, ils obtiennent une extension du modèle de Hertz, dit de Hertz-Mindlin. Il est possible d'implémenter ce modèle en DEM en prenant en compte les pertes viscoélastiques selon le modèle de Tsuji [121] et Antypov [4] comme précédemment, voir Eq. 5.23. La force tangentielle, avec pertes viscoélastiques, s'exprime ainsi par :

$$\mathbf{F}_t = 8G^*\sqrt{R^*\delta_n}\boldsymbol{\delta}_t + \beta(\epsilon_t)\sqrt{m_*\kappa_n}\delta_n^{1/4}\dot{\boldsymbol{\delta}}_t, \quad (5.26)$$

où G^* correspond au module de cisaillement équivalent, défini par :

$$G^* = \left(\frac{2 - \nu_i}{G_i} + \frac{2 - \nu_j}{G_j} \right)^{-1}, \quad (5.27)$$

et ϵ_t quantifie la perte de quantité de mouvement par cisaillement ; en pratique, $\epsilon_t = \epsilon_n$.

5.2.2 . Modèles frottants

Dans cette section, nous apportons des détails sur la modélisation du frottement, introduit brièvement dans la section précédente.

Cette sous-section revient sur la modélisation du frottement.

i. Modèle de Coulomb

Le modèle de Coulomb rend compte du frottement avec une force tangentielle T constante s'opposant au mouvement relatif des objets en contact. L'amplitude de cette force est proportionnelle à la force normale du contact N (la force qui presse un solide sur l'autre) et à un coefficient de frottement μ (qui est donc une propriété qui dépend des deux surfaces en contact). La force tangentielle T du modèle de Coulomb est décrite par l'équation suivante :

$$T = -\mu N \operatorname{sgn}(\dot{x}) \quad (5.28)$$

où sgn représente la fonction signe, définie de la façon suivante :

$$\operatorname{sgn}(\dot{x}) = \begin{cases} -1 & \text{si } \dot{x} < 0 \\ 0 & \text{si } \dot{x} = 0 \\ 1 & \text{si } \dot{x} > 0 \end{cases} \quad (5.29)$$

La figure Fig. 5.2 montre le profil de la force en fonction de la vitesse de glissement. On peut remarquer que lorsque la vitesse change de signe, par définition, la force passe instantanément de $+\mu N$ à $-\mu N$. Cela correspond à une variation finie de la force sur une durée nulle. Spectralement, cet échelon de force correspond à une sollicitation large bande, au contenu fréquentiel infini peu physique. Numériquement, cette discontinuité correspond à une excitation dont le temps caractéristique est inférieur au pas de temps d'intégration numérique. Si le schéma numérique d'intégration est conditionnellement stable, une telle variation brusque peut provoquer des instabilités menant à des résultats erronés [122]. Pour pallier cette difficulté numérique, il est fréquent que cette loi soit régularisée avec une fonction de type \tanh [99], qui borne la durée d'inversion de l'effort de friction et présente l'avantage d'être continûment dérivable.

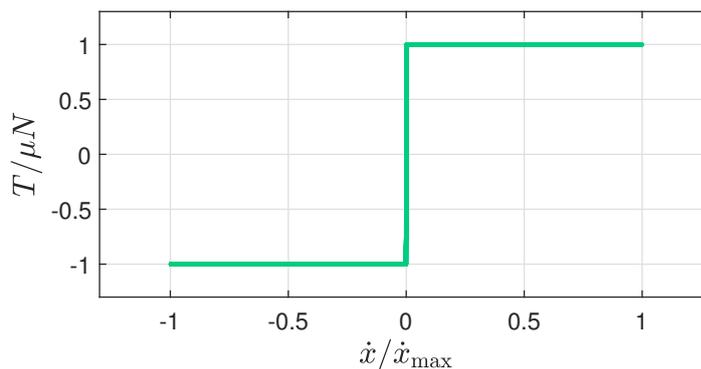


Figure 5.2 – Représentation de la force de frottement de Coulomb normalisée en fonction de la vitesse de glissement normalisée.

Une version légèrement améliorée du modèle de Coulomb consiste à différencier les phases de glissement et de frottement en introduisant un coefficient de friction

statique (le seuil) et un coefficient de friction dynamique légèrement inférieur (donnant une valeur constante de la force au cours du glissement). Ceci rend compte notamment que mettre en mouvement un solide frottant requiert un effort plus important que d'entretenir son mouvement une fois qu'il a commencé de glisser.

ii. Modèle de Stribeck

Dans de nombreuses conditions réelles, le frottement est lubrifié. Le modèle de contact de Stribeck, s'appuyant sur des travaux expérimentaux sur des paliers frottants [9], est utilisé pour décrire le frottement lorsque les deux surfaces en contact sont séparées par une couche de lubrifiant. Dans cette zone de lubrification mixte, le modèle de Stribeck prend en compte les effets hydrodynamique de la couche de fluide, en plus des effets du frottement sec dû au contact entre les aspérités des surfaces. Ceci permet de décrire l'évolution du coefficient de frottement μ . Pour cela, le modèle prend en compte trois régimes de frottement, illustrés dans la figure Fig. 5.3, en fonction de la vitesse de glissement, de la viscosité du fluide et de la charge normale appliquée. Le premier régime correspond à un frottement sec ou à une lubrification limite, dans lequel les aspérités des deux surfaces entrent en contact direct et frottent les unes contre les autres. Le second régime correspond à la lubrification mixte, dans lequel le lubrifiant s'écoule entre les aspérités des surfaces, mais une partie des aspérités restent en contact. Le troisième régime correspond à la lubrification hydrodynamique, dans lequel les aspérités ne sont plus en contact et le frottement est principalement dominée par la viscosité du lubrifiant.

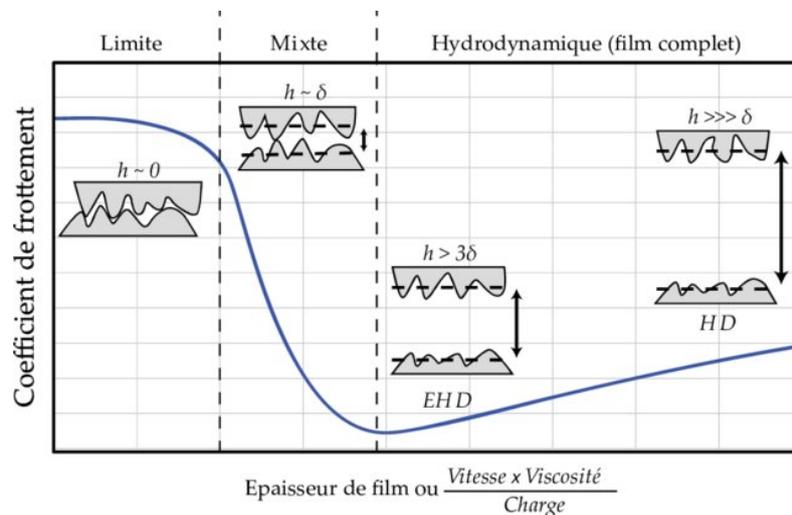


Figure 5.3 – Courbe de Stribeck illustrant l'évolution du coefficient de friction en fonction de la hauteur de fluide h entre les surfaces, dans les trois régimes de lubrification. δ correspond ici à la rugosité des surfaces, i.e. la taille moyenne des aspérités. Courbe issue de [9].

iii. Modèle de Dahl

Le modèle de Dahl a été proposé en 1968 dans [25], pour modéliser le frottement des billes dans les roulements. Dahl propose une approche en s'inspirant du comportement des matériaux élastoplastique. Ceci provient du fait que lorsque les billes sont soumises à de faibles chargements, elles opposent un effort élastique [18, 99, 25]. Lorsque soumises à un effort plus important celles-ci subissent un glissement irréversible, un mécanisme semblable à la plasticité des matériaux. Le modèle de Dahl est souvent décrit par analogie avec la déformation du poil d'une brosse déplacée tangentiellement, comme représenté en figure Fig. 5.4 [99, 18, 79]. Dans une certaine limite le poil se déforme d'abord en opposant une force de rappel élastique, avant d'atteindre progressivement une force qui provoque le glissement du poil. Contrairement au modèle de Coulomb, la transition vers le glissement totale est continue et peut-être assimiler à un phénomène de glissement partiel [102]. Le modèle de Dahl en force/déplacement est généralement décrit par l'équation

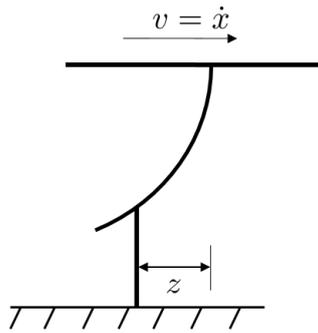


Figure 5.4 – Analogie du modèle de Dahl avec la déformation d'un poil.

aux dérivées partielles (EDP) non-linéaire suivante [99] :

$$\frac{dF_D}{dx} = G_D \left(1 - \frac{F_D}{F_C} \text{sgn}(\dot{x}) \right)^{n_D} \quad (5.30)$$

où G_D représente la raideur de rappel élastique, i.e. la raideur du poil, $F_C = \mu_D N$ est la limite de glissement de Coulomb. L'exposant n_D contrôle la forme de la courbe d'hystérésis, par analogie avec le comportement matériau, de ductile ($n_D = 1, 2$) à fragile ($n_D = 0, 1/4, 1/2$), comme le décrit Dahl dans [24]. Cette définition de la force de frottement permet d'atteindre de façon continue le seuil de glissement de Coulomb, régularisant ainsi le modèle de Coulomb de l'équation Eq. 5.28 lorsque la vitesse change de signe. Par ailleurs, il est possible de transformer cette équation en une EDP de la variable temporelle t en observant que :

$$\frac{dF_D}{dt} = \frac{dF_D}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dF_D}{dx} \dot{x}. \quad (5.31)$$

Ceci permet de réécrire l'équation Eq. 5.30 avec une variable interne z , fréquemment utilisée [99, 18, 24] et définie par :

$$\begin{aligned} F_D &= G_D z \\ \dot{z} &= \dot{x} \left(1 - \frac{F_D}{F_C} \operatorname{sgn}(\dot{x}) \right)^{n_D} \end{aligned} \quad (5.32)$$

De la sorte, sa solution peut être obtenue en intégrant numériquement l'équation avec un intégrateur temporelle du premier ordre. L'allure des relations force/déplacement et force/vitesse du modèle de Dahl, comparée au modèle de Coulomb, est représentée en figure Fig. 5.5.

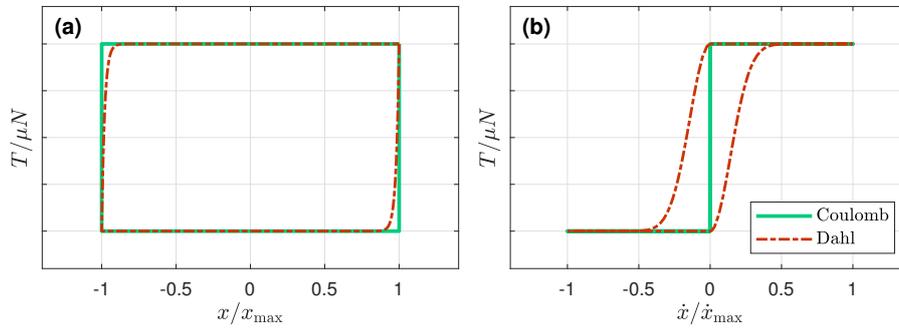


Figure 5.5 – Comparaison des modèles de Dahl et de Coulomb avec $G_D = 500 \text{ N.m}^{-1}$, $n_D = 1$ et $F_C = 3 \text{ N}$ avec un déplacement cyclique imposé $x(t) = x_{\max} \sin(2\pi f_0 t) \text{ m}$.

iv. Modèle de LuGre

Le modèle de LuGre (Lund Grenoble) a été proposé pour la première fois dans [14]. Sa construction est relativement similaire à celle du modèle de Dahl mais avec la prise en compte de phénomènes supplémentaires, comme la friction statique et les effets visqueux. L'analogie avec le modèle de poil de la figure Fig. 5.4 est également valable. La force de frottement du modèle de LuGre s'exprime de la façon suivante :

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \dot{x}. \quad (5.33)$$

Tout comme dans le modèle de Dahl, σ_0 représente la raideur du poil. Cependant, le modèle de LuGre ajoute deux termes visqueux : σ_1 le coefficient d'amortissement du poil et σ_2 le coefficient de viscosité du contact. Comme dans le modèle de Dahl, z représente la flèche du poil, mais elle est définie par une expression légèrement différente :

$$\dot{z} = \dot{x} - \frac{|\dot{x}|}{g(\dot{x})} z. \quad (5.34)$$

La fonction $g(\dot{x})$ permet de décrire la courbe de Stribeck de la figure Fig. 5.3. Son expression est donnée par :

$$g(\dot{x}) = \frac{1}{\sigma_0} \left(F_C + (F_s - F_C) e^{-|\dot{x}/\dot{x}_s|} \right), \quad (5.35)$$

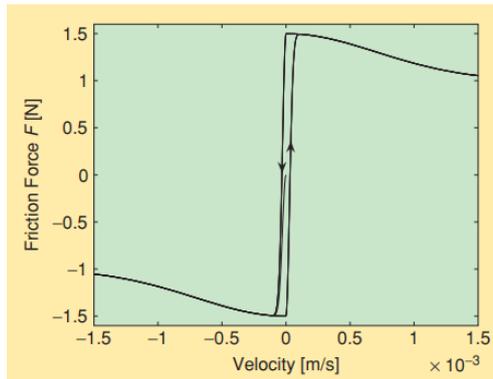


Figure 5.6 – Illustration d’une courbe force/vitesse issue de [97], obtenue avec le modèle de LuGre prenant en compte la courbe de Stribeck.

où $F_C = \mu N$ représente la force de Coulomb et F_s la force de friction statique. Notons que dans le cas où $g(\dot{x}) = F_C/\sigma_0$ (avec $F_s = F_C$), $\sigma_0 = G_D$ et $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ on retrouve l’expression du modèle de Dahl avec $n_D = 1$. La figure Fig. 5.6 représente la force en fonction de la vitesse de glissement, obtenue avec le modèle de LuGre. Celle-ci permet de constater la variation de la force en fonction de la vitesse de glissement, due à la prise en compte de la courbe de Stribeck. Ceci est à mettre en regard de la figure Fig. 5.5b obtenue avec les modèles de Dahl et Coulomb où la force de glissement est constante.

5.2.3 . Exemples

Nous présentons ici deux exemples emblématiques illustrant de manière simple les propos des sections Sec. 5.1 et 5.2 qui précèdent : le rebond d’une sphère sur un plan, puis la dynamique imposée d’un patin frottant.

i. Rebond d’une sphère sur un plan

La figure Fig. 5.7a présente la force de contact en fonction du temps pour les modèles de Cundall et Strack et de Hertz, pour une vitesse initiale d’impact résultant de la chute gravitaire d’une sphère. La valeur de k_n dans le modèle de Cundall et Strack a été ici ajustée à partir du modèle de Hertz, comme décrit dans le titre de la figure Fig. 5.7, de façon à avoir un temps de contact proche entre les deux modèles, pour faciliter la comparaison. Remarquons que cet ajustement n’est valable qu’à un enfoncement δ_n^{\max} donné, et qu’une autre situation, par exemple une chute libre depuis une hauteur plus importante, donnerait lieu à un enfoncement δ_n^{\max} plus important. La forme de cloche en demi sinus de $F(t)$ dans le cas du modèle de Cundall et Strack est caractéristique d’un système résonant à un degré de liberté pendant le contact. La figure Fig. 5.7b permet de constater le caractère linéaire (resp. non linéaire) de la relation de force/enfoncement du modèle de Cundall et Strack (resp. Hertz). La figure Fig. 5.7 présente également un cas

où l'on considère un grain d'un matériau viscoélastique de type Hertz-Tsuji avec $\epsilon = 0.9$ tel que présenté dans l'équation Eq. 5.23. L'ajout du terme non-conservatif a pour effet de transformer la relation $F(\delta_n)$ en une ellipse non-linéaire, dont l'aire à l'intérieur du contour représente l'énergie dissipée pendant le contact.

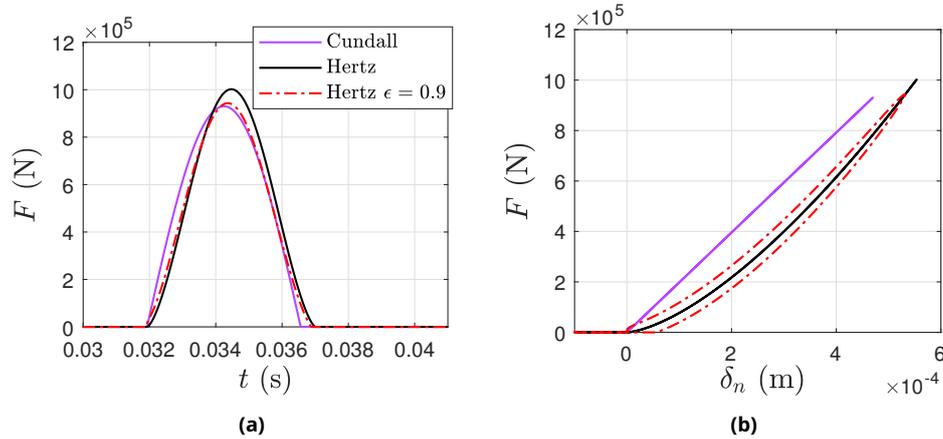


Figure 5.7 – Effort de contact d'une sphère après chute libre rebondissant sur un plan horizontal en fonction (a) du temps et (b) de l'enfoncement normal δ_n , en utilisant les modèles de Cundall, Hertz et Hertz-Tsuji avec $\epsilon = 0.9$. La raideur de contact k_n du modèle de Cundall est ici ajustée à l'aide du modèle de Hertz, pour avoir approximativement le même temps de contact avec $k_n \approx \kappa_n \sqrt{\delta_n^{\max}}$.

ii. Dynamique imposée d'un patin frottant

Dans cet exemple, une sphère frottante est pressée par une force normale contre un plan horizontal. Une force tangentielle est ensuite appliquée à la sphère, cyclique et parallèle au plan. La fréquence de la force oscillante est choisie suffisamment basse pour que l'énergie cinétique de la particule demeure négligeable devant l'énergie élastique. La figure Fig. 5.8 illustre la loi de Coulomb Eq. 5.5 telle qu'implémentée dans *Yade* pour le modèle de contact de Hertz-Mindlin, décrit par l'équation Eq. 5.26. On voit sur la figure Fig. 5.8a, qu'au-delà du seuil de Coulomb, $F_t = \mu F_n$, la force appliquée par la sphère sur le plan est écriquée et la sphère commence à glisser, avec une vitesse $\dot{\delta}_t$ non nulle comme le montre la figure Fig. 5.8b. On peut également observer sur la figure Fig. 5.8a que tant que la limite de glissement n'est pas atteinte, on a $F_t \propto \delta_t$. Cela est exprimé par le premier terme de la relation Eq. 5.26, avec pour pente $8G^* \sqrt{R^* \delta_n}$. Cette portion de courbe montre que tant que le glissement n'a pas lieu, la sphère se déforme élastiquement. Le système se comporte comme un ressort en série avec un modèle de frottement de Coulomb.

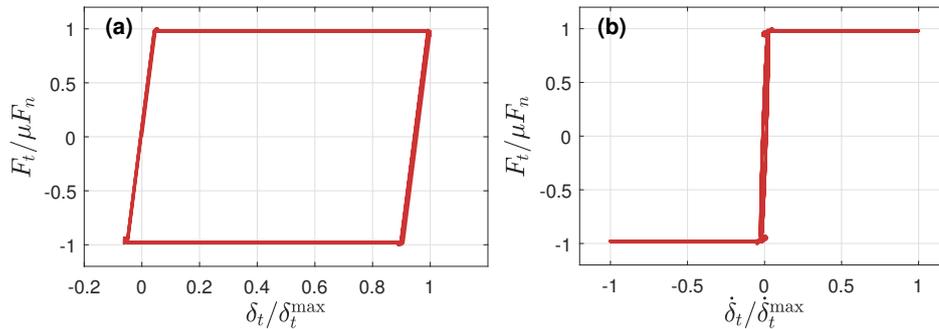


Figure 5.8 – Illustration de la loi de Mohr-Coulomb implémentée dans le logiciel *Yade* avec (a) la relation entre la force et le déplacement tangentiels normalisés et (b) la relation entre la force et la vitesse tangentielles normalisées.

5.3 . Modélisation d'un volume de grains cubique sous pression soumis à du cisaillement

Le modèle présenté ici a été implémenté sous *Yade* [123] en s'appuyant sur les différents éléments présentés dans les sections Sec. 5.1 et 5.2. On se propose de construire un modèle dans lequel un volume élémentaire de milieu granulaire comprimé est soumis à un cisaillement cyclique. Le potentiel d'interaction utilisé est celui de Hertz-Mindlin [89]. Un ensemble de 1000 grains est d'abord mis en contrainte par compression isotrope (voir Fig. 5.9a), puis il subit une déformation isochore en cisaillement simple dans le plan xy (voir Fig. 5.9b). La transformation est supposée quasi-statique. Les propriétés des grains dans la configuration

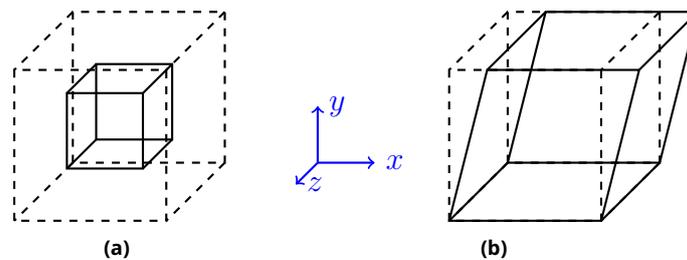


Figure 5.9 – Représentation schématique de (a) la compression triaxiale et (b) le cisaillement simple d'une boîte cubique.

nominales sont listées dans le tableau Tab. 5.1.

Cette configuration est représentative des mécanismes mis en œuvre dans une couche de grains soumise à déformation. En particulier, il est attendu une forte dissipation d'énergie vibratoire, conséquence de la friction entre grains sous l'effet d'un cisaillement plutôt que d'une compression.

L'objet de l'étude qui suit vise à comprendre et à quantifier la dissipation d'énergie dans une couche de grains pré-contrainte.

| | | | |
|-------------------------|---------|--------|--------------------|
| masse volumique | ρ | 7850 | kg.m ⁻³ |
| module d'Young | E | 210 | GPa |
| coefficient de Poisson | ν | 0.27 | S.U. |
| rayon | r | 1±0.25 | mm |
| coefficient de friction | μ_p | 0.15 | S.U. |

Table 5.1 – Table des propriétés des grains.

5.3.1 . Préambule sur les propriétés d'un milieu granulaire confiné

Au cours de la mise en contrainte triaxiale isotrope, le milieu granulaire passe par différents états. Quelques grandeurs spécifiques permettent de caractériser les milieux granulaires lors de ces évolutions. Nous exposons ici certaines d'entre elles utiles à notre étude : la compacité ϕ , la coordinence Z et la pression P .

i. Taux de compacité

Premièrement, on définit la compacité, ou fraction volumique de grain ϕ , comme le rapport entre le volume total occupé par les grains V_p et le volume du contenant V (la boîte) :

$$\phi = \frac{V_p}{V}. \quad (5.36)$$

Les petites valeur de ϕ représentent donc un milieu granulaire peu dense, où tout ou partie des grains sont libres de se mouvoir. À l'inverse, les valeurs de ϕ élevées caractérisent un milieu granulaire compact où les grains sont bloqués. Nous reviendrons sur la notion d'état bloqué (*jammed state*) dans la suite. Parfois, le milieu granulaire est caractérisé par la fraction de vide e_c [112], qui s'exprime en fonction de la compacité par $e_c = (1 - \phi)/\phi$.

ii. Nombre de coordination

Un second paramètre, spécifique au granulaire, permet de les caractériser. Il s'agit de la coordinence, ou nombre de coordination Z défini comme le nombre moyen de contacts par particule. Dans un milieu granulaire à 3 dimensions, ce nombre varie entre 0 et 12. Le nombre de coordination $Z = 12$ est une limite géométrique qui s'obtient dans les cas de distribution mono-disperse (des sphères de même rayon) de particules formant alors un cristal. Celle-ci s'obtient lorsque les grains sont agencés de façon hexagonal compact ou cubique à faces centrées [136].

iii. Pression de confinement

Lorsque les grains sont comprimés, il est alors possible de définir une pression de confinement moyenne P . Comme dans un solide, celle-ci correspond à la pression

hydrostatique et est donnée par la trace du tenseur des contraintes, par l'expression suivante :

$$P = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}), \quad (5.37)$$

avec σ_{ii} les composantes sphériques du tenseur des contraintes. Ces composantes sont définies par projection des efforts exercés par le milieu granulaires sur les faces du contenant parallélépipédique. À l'échelle de la boîte, ces trois composantes sont calculées à partir de l'expression suivante :

$$\sigma_{ii} = \frac{\mathbf{F}_{+i} \cdot \mathbf{n}_{+i} + \mathbf{F}_{-i} \cdot \mathbf{n}_{-i}}{2S_i} \quad (5.38)$$

où S_i correspond à l'aire de la face $i = (x, y, z)$, les vecteurs $\mathbf{F}_{\pm i}$ correspondent à la somme des forces exercées par les particules sur les parois dans la direction i , et $\mathbf{n}_{\pm i}$ sont les vecteurs normaux aux faces, définis sortant de la boîte par convention. Notons que cette méthode est rendu possible par le caractère quasi-statique de la transformation. En effet, l'hypothèse de l'équilibre entre les efforts internes au milieu granulaire et les efforts extérieurs aux parois implique que les forces d'inerties sont négligeables. En d'autre terme, l'énergie cinétique des particules est très faibles devant l'énergie élastique.

Il existe une autre manière d'évaluer les composantes du tenseur des contraintes, à l'échelle d'un volume élémentaire représentatif interne au contenant : cela consiste en l'estimation du tenseur des contraintes de Love-Weber. Ses composantes s'expriment [123] par :

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^{N_c} f_i^k l_j^k \quad (5.39)$$

où k désigne ici un indice de sommation sur toutes les N_c interactions contenu dans un volume élémentaire représentatif V , f_i^k la composante selon i de la force de contact du k -ième contact et l_j^k la composante selon j du vecteur reliant les centres des deux particules en contact.

5.3.2 . Lois d'échelle au voisinage de la transition de blocage

Lorsqu'un milieu granulaire est comprimé progressivement, en partant d'un état sans contact (de compacité tendant vers 0), sa compacité ϕ augmente jusqu'à atteindre un point particulier ϕ_c , dit seuil de blocage (*jamming*). En dessous de ce seuil, les grains ont toujours une certaine mobilité et peuvent accommoder le rapprochement des particules voisines en réorganisant la topologie du réseau. Le seuil de blocage correspond à une compacité à laquelle les grains ne peuvent plus s'éviter [93], ils sont alors bloqués et les contacts se déforment progressivement, pour accommoder le confinement. Ce changement de comportement brusque s'accompagne donc d'un passage d'une pression moyenne nulle à une pression non nulle au sens défini par l'équation Eq. 5.37. Pour ces raisons, le seuil de blocage présente des similarités avec la transition vitreuse [53, 72], ainsi que la transition

de phase liquide/solide de la matière classique [93], où l'état bloqué correspondrait à l'état solide.

Il est important de noter que la valeur de ϕ_c n'est pas universelle pour tous les milieux granulaires et dépend notamment de l'état initial, de la prise en compte ou non du frottement ou encore de la taille du système [93]. En revanche, dans les systèmes mono-disperses, il existe une limite géométrique supérieure pour ϕ_c (RCP = *random close packing*) au delà de laquelle le système ne peut plus se trouver dans un état non bloqué [114]. Il en est de même pour la limite inférieure (RLP = *random loose packing*) [114].

Dès que le seuil de *jamm*ing est franchi, toute augmentation de ϕ nécessite de déformer d'avantage les contacts. Ainsi la pression moyenne dans le milieu granulaire augmente. Des travaux expérimentaux [80] et numériques [93] ont montré qu'au delà du seuil de blocage, la pression obéit à une loi de puissance vis-à-vis de la compacité. Cette relation s'exprime par :

$$P \propto (\phi - \phi_c)^{\alpha_f - 1} \quad (5.40)$$

où α_f correspond à l'exposant du potentiel d'interaction inter-particulaire, celui-ci vaut 2 pour le modèle de Cundall et Strack et 5/2 pour celui de Hertz. Le terme $\phi - \phi_c$ étant représentatif d'une déformation par unité de volume (*strain*), la relation Eq. 5.40 définit donc une relation entre contrainte et déformation.

La transition de blocage se traduit également par une variation brusque du nombre de coordination Z . En trois dimensions, chaque particule possède six degrés de liberté. Bloquer une particule requiert donc six équations d'équilibre. Dans le cas de particules non frottantes ($\mu_p = 0$), un contact donne une équation d'équilibre, le blocage d'une particule requiert donc $Z_c(\mu_p = 0) = 6$ contacts. Dans le cas de particules frottantes, un contact donne lieu à plusieurs équations d'équilibres, Z_c est donc plus faible et dépend du coefficient de friction inter-particule, notamment, celui-ci est tel que $Z_c(\mu_p \rightarrow \infty) = 4$ [114]. Ce seuil Z_c est défini juste après le blocage à $\phi = \phi_c^+$, à partir duquel Z évolue comme une loi de puissance par rapport à ϕ . Cette loi est exprimée par :

$$(Z - Z_c) \propto (\phi - \phi_c)^\zeta \quad (5.41)$$

avec $\zeta = 1/2$, un exposant universel. En effet, a été observé que ce résultat est valable pour des grains mono-disperses ou poly-disperses, quel que soit le potentiel d'interaction utilisé, en 2D et 3D [93], pour des particules frottantes [19], frottantes et hautement déformables avec des lois de contacts hyperélastiques [13] jusqu'à des compacités proches de 1. Cette universalité a également été vérifiée expérimentalement [80].

Dans la suite du document, nous présentons au chapitre Chap. 6 une étude paramétrique, qui a été menée sur un milieu granulaire pré-contraint cisailé. Nous disposons ainsi d'une base de données issus d'un grand nombre de points de fonctionnement, simulés à diverses compacités, pressions de confinement, élasticité et

taille de particules. Ces données ont été obtenues en comprimant le milieu granulaire dans un premier temps jusqu'à une compacité $\phi > \phi_c$, en rapprochant les six parois du contenant cubique à vitesse constante (compression isotrope, voir Fig. 5.9a). Dans un second temps, un cisaillement cyclique est imposé par le mouvement de rotation de deux des parois latérales en regard (voir Fig. 5.9b). La pression est mesurée pendant ces deux phases via les efforts sur les parois avec les expressions Eq. 5.37 et Eq. 5.38. Une vingtaine de périodes d'oscillation sont simulées, pour laisser le temps aux grains de se réorganiser en accommodant les défauts topologiques locaux et que la pression de confinement relaxe vers une valeur stable, stationnaire. À chaque point de fonctionnement de l'étude paramétrique, on extrait la pression de confinement P , le nombre de coordination Z et le taux de compacité ϕ , moyennés sur les cinq derniers cycles de chargement en cisaillement. La figure Fig. 5.10 représente les lois d'échelles entre P , Z et ϕ , et chaque point correspond à une simulation effectuée au cours de l'étude paramétrique. Nous pouvons observer que les points s'alignent en accord avec les lois d'échelle des équations Eq. 5.40 et Eq. 5.41. Les variables ϕ_0 et Z_0 sont des variables d'ajustement. Les valeurs de $\phi_c = 0.595 \pm 0.003$, $Z_c = 5.042 \pm 0.085$ sont cohérentes avec les valeurs trouvées dans [93] et dans [114].

5.3.3 . Analyse de la mise en contrainte du cube granulaire

Nous étudions dans cette section le cas particulier de la mise sous contrainte de confinement du milieu granulaire, que nous quantifions à l'aide des quantités introduites en section Sec. 5.3.2.

i. Contrôle de la phase de compression

Pour s'assurer que la phase de compression est sous contrôle et répétable, on vérifie d'abord que la vitesse de compression v_c n'influe pas sur l'état de confinement hydrostatique du milieu granulaire, et notamment la valeur de la pression stationnaire. Cette dernière est déterminante dans la suite de la simulation, en cisaillement cyclique. Pour cela, nous vérifions que les forces d'inertie jouent un rôle négligeable dans la mise sous contrainte, selon une méthode similaire à celle employée dans [32]. Cela consiste d'une part à suivre l'évolution de l'équilibre des efforts sur les particules et d'autre part de réaliser l'étape de compression isotrope à différentes vitesses v_c . La plage de vitesse sondée s'étend sur deux décades : $v_c = [0.003 - 0.3] \text{ m.s}^{-1}$.

La première vérification consiste à examiner l'indicateur *unbalanced forces* U_f (forces non équilibrées), de la simulation. Cet indicateur est fréquemment utilisé en DEM et fut introduit dans [78]. La quantité U_f est définie de la façon suivante :

$$U_f = \frac{\langle \sum \mathbf{F}_{ext \rightarrow p_i} \rangle_i}{\langle \mathbf{F}_c \rangle}. \quad (5.42)$$

Cela correspond au rapport entre la moyenne de la somme des forces extérieures par particule $\langle \sum \mathbf{F}_{ext \rightarrow p_i} \rangle_i$, avec p_i le numéro de la particule, sur la moyenne des forces

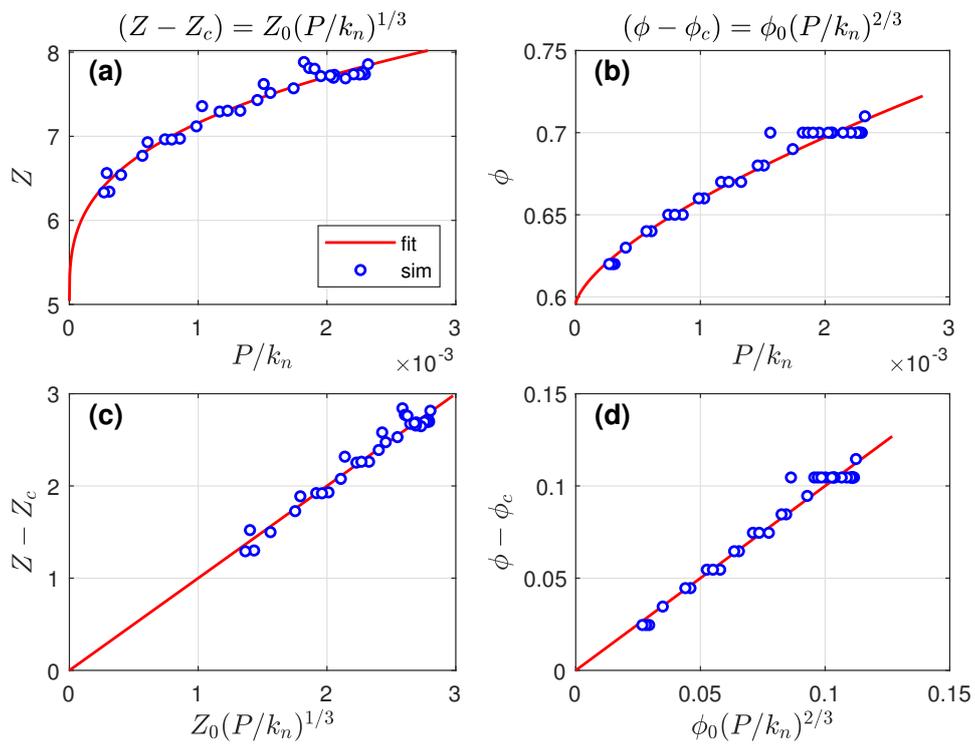


Figure 5.10 - Lois d'échelles $Z(P/k_n)$ et $\phi(P/k_n)$ au cours de la phase de cisailment cyclique, en fonction de la pression normalisée. La constante k_n est proportionnel au module élastique E des sphères. Chaque point correspond à une simulation avec un jeu de paramètres (ϕ, E, r, γ_m) . Les paramètres de l'ajustement sont $\phi_c = 0.595 \pm 0.003$, $\phi_0 = 6.414 \pm 0.208$, $Z_c = 5.042 \pm 0.085$, $Z_0 = 21.175 \pm 0.757$.

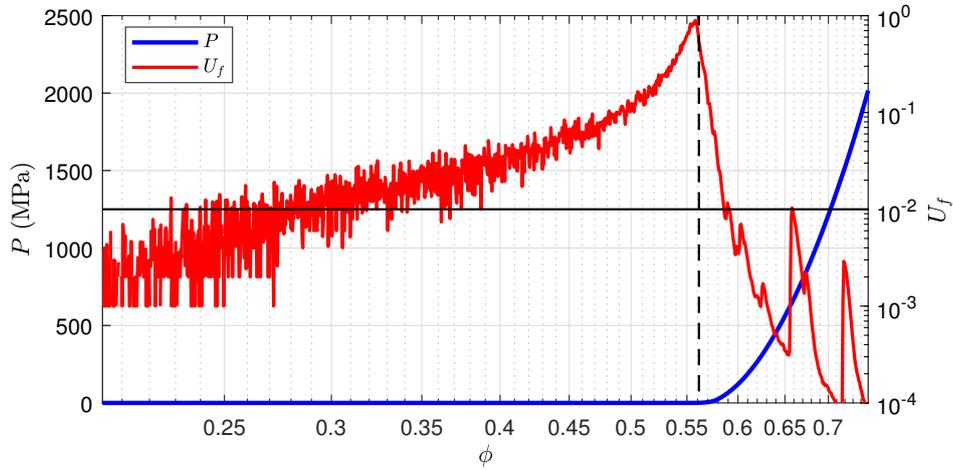


Figure 5.11 – Évolution de U_f en fonction de la compacité ϕ dans le cas $v_c = 0.3 \text{ m.s}^{-1}$. La pression a également été tracée pour permettre la comparaison sur l'axe des abscisses. Le trait noir horizontal désigne la limite $U_f = 0.01$ et le trait vertical hachuré correspond à $\tilde{\phi}_c$.

de contact $\langle \mathbf{F}_c \rangle$. Le numérateur de U_f étant proportionnel à l'accélération du centre de masse du paquet de grains, cela permet de quantifier l'état d'équilibre statique du système et de vérifier que les forces d'inerties n'ont pas d'effets sur le résultat. Pour une transformation quasi-statique, le ratio U_f doit rester petit ($U_f < 0.01$ [78]) et théoriquement cette quantité est nulle dans un cas parfaitement statique. En revanche, cette quantité peut atteindre des valeurs plus grandes (proche de 1, voir supérieur à 1) dans les cas où le nombre de contacts est très faible et les particules volent sans se toucher [32]. Ceci signifie que la part d'énergie cinétique est importante, et que la transformation subit par le système ne peut être considérée comme statique. Dans le cas de la vitesse maximale à $v_c = 0.3 \text{ m.s}^{-1}$, U_f a été tracée en figure Fig. 5.11 en fonction de ϕ . On constate que U_f augmente de façon monotone à mesure que ϕ augmente, dépassant largement la valeur de 0.01 préconisée dans [78]. Cela est attendu, car pour des compacités inférieures à la transition de blocage, $\phi < \phi_c$, les parois progressent en poussant les grains sans les comprimer, ces derniers étant dans un état non confiné où ils sont libres de se déplacer et de rebondir suite à des collisions.

Sur la figure Fig. 5.11, à partir de la compacité $\phi = \tilde{\phi}_c \approx 0.56$, U_f diminue brusquement de façon quasi monotone jusqu'à la fin du chargement. Cette diminution brusque est provoquée par la transition de blocage. Nous pouvons constater de plus sur la figure Fig. 5.11 que le pic de U_f à $\tilde{\phi}_c$ coïncide bien avec l'apparition d'une pression non nulle.

Notons que cette mesure de ϕ_c n'est pas standard pour plusieurs raisons : (i) U_f n'est pas un indicateur usuel pour mesurer ϕ_c , ceci est habituellement mesuré avec le passage à une pression non nul ; (ii) le cas de chargement n'est pas quasi-

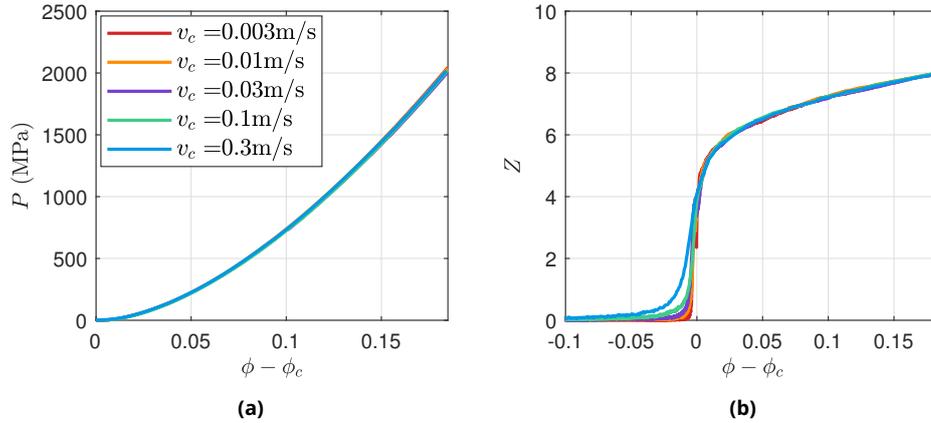


Figure 5.12 – Évolution de la pression hydrostatique P et du nombre de coordination Z pour différentes vitesses de compression, en fonction de la compacité $\phi - \tilde{\phi}_c$.

statique avant le seuil de blocage ; (iii) une seule réalisation est effectuée, donc aucune moyenne ne peut être évaluée comme sur la figure Fig. 5.10. $\tilde{\phi}_c$ correspond donc à une seule réalisation de la figure Fig. 5.10.

En complément de la première approche, on réalise la même compression isotrope à différentes vitesses v_c , s'étalant sur deux décades $[0.003 - 0.3] \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. La figure Fig. 5.12a montre que les courbes de pression de confinement en fonction de la compacité, $P(\phi)$, obtenues à différentes vitesses de compression se superposent, ce qui signifie que l'état de contrainte en fin de compression isotrope, et notamment la valeur stationnaire de la pression de confinement, ne dépend pas de v_c . Notons que la transition de *jamming* est particulièrement visible sur la figure Fig. 5.12b où l'on peut observer une discontinuité de coordination au passage de $Z = Z_c$, qui est d'autant plus marquée que le vitesse de compression est faible. À plus grande vitesse de compression v_c , la transition de la fonction $Z(\phi)$ apparaît plus régulière. En revanche, au-delà du seuil ϕ_c , on observe que l'évolution de $Z(\phi > \phi_c)$ est indépendante de v_c .

Dans la suite, la mise en contrainte est donc réalisée à vitesse de compression maximale, $v_c = 0.3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Cette vitesse permet notamment de diminuer le temps de calcul en réalisant la simulation en un nombre de pas de temps plus faible. En effet, le schéma d'intégration temporelle étant explicite à pas fixe, la durée d'un calcul est directement proportionnelle au nombre de pas de temps effectués.

ii. Mesure du module d'incompressibilité

Nous avons pu observer que lorsque $\phi > \phi_c$ le milieu granulaire gagne en rigidité, tel un solide, du fait du blocage des particules le constituant. Toute variation de ϕ entraîne une variation de P selon la relation non-linéaire Eq. 5.40. Une variation de ϕ correspond donc à une variation du volume globale et donc à une

déformation volumique du milieu granulaire. Cette déformation volumique (*strain*) ϵ est définie à partir du volume V_c à la compacité de *jamming* ϕ_c , par l'expression suivante :

$$\epsilon = -\frac{dV}{V} \simeq -\frac{V - V_c}{V_c}. \quad (5.43)$$

Par ailleurs, le taux d'accroissement de la pression P lors d'un incrément de déformation volumique correspond à un module d'incompressibilité effectif K (*bulk modulus*) du milieu granulaire dans l'état bloqué. Celui-ci a pour définition :

$$K = -V \frac{dP}{dV}. \quad (5.44)$$

Par ailleurs, d'après la définition de la compacité $\phi = V_p/V$, on peut en déduire que $dV/V = -d\phi/\phi$ et donc que K s'exprime alternativement en fonction de ϕ par :

$$K = \phi \frac{dP}{d\phi}. \quad (5.45)$$

La figure Fig. 5.13 présente l'évolution de la pression en fonction de la déformation et la loi d'échelle de K par rapport à P , où K est calculé à partir de l'équation Eq. 5.45. Ici, la valeur de ϕ_c considérée est la valeur spécifique de la réalisation du réseau, estimée à l'inflexion du paramètre *unbalanced force* U_f défini par l'équation Eq. 5.42, et non une valeur moyenne sur un ensemble de réalisations. Les figures Fig. 5.13a et b montre nettement le caractère non linéaire de l'évolution de la pression en fonction de la déformation du milieu granulaire et la dépendance en pression du module d'incompressibilité K . On rappelle que pour un matériau linéaire élastique ce dernier est constant vis-à-vis de la déformation. La figure Fig. 5.13b indique que le module d'incompressibilité K suit une loi de puissance vis-à-vis de la pression P en $K \propto P^{1/3}$. Cette loi d'échelle est attendue pour des contacts régis par un potentiel de Hertz-Mindlin [127] et est importante dans la compréhension des non-linéarités en élasticité granulaire. Car une loi linéaire tel que celle de Cundall et Strack avec $F \propto \delta$ donnerait $P \propto F \propto \delta \propto \epsilon$ et donc $K \propto P/\epsilon \propto \text{const}$, soit un module d'incompressibilité indépendant de la pression, comme en élasticité linéaire, ce qui a pu être constaté dans [93].

Notons qu'il est par ailleurs possible de retrouver la loi d'échelle $K \propto P^{1/3}$ à partir du potentiel de Hertz. Prenons l'exemple d'un alignement de sphères de rayon R , à l'extrémité duquel on applique une force de compression F . D'après l'équation Eq. 5.18, $F \propto ER^{1/2}\delta^{3/2}$, ceci permet d'exprimer la pression de confinement comme la force par unité de surface de section droite de sphère :

$$P = \frac{F}{\pi R^2} \propto \frac{E}{\pi} \left(\frac{\delta}{R}\right)^{3/2} \propto \frac{E}{\pi} \epsilon^{3/2} \rightarrow \epsilon \propto \left(\frac{P}{E}\right)^{2/3} \quad (5.46)$$

Le rapport δ/R représente la déformation volumique ϵ dans la direction axiale de l'alignement de sphères. Ainsi en substituant la déformation volumique ϵ de

l'équation Eq. 5.46 dans la définition de K de l'équation Eq. 5.44 et 5.45, on obtient :

$$\frac{K}{E} \propto \left(\frac{P}{E} \right)^{1/3} \quad (5.47)$$

Un raisonnement similaire a été mené dans [127] à partir du potentiel de Hertz, sur un empilement de grains en trois dimensions. Celui-ci a permis de développer la théorie des milieux effectifs de granulaires, en exprimant les modules d'incompressibilité K et de cisaillement G de l'empilement de grains sous pression. Selon la théorie du milieu effectif (*Effective medium theory*, EMT), et dans l'hypothèse où les grains ne sont pas frottant, les contacts entre les particules sont uniquement normaux (pas de composantes transverses), et les modules s'expriment par [81] :

$$\begin{aligned} K_{\text{emt}} &= \frac{k_n}{12\pi} (\Phi Z)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{6\pi P}{k_n} \right)^{\frac{1}{3}}, \\ G_{\text{emt}}^0 &= \frac{k_n}{20\pi} (\Phi Z)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{6\pi P}{k_n} \right)^{\frac{1}{3}}, \end{aligned} \quad (5.48)$$

avec $k_n = 4G/(1 - \nu)$ la rigidité équivalente des particules dans la direction normale, $G = E/2(1 + \nu)$ le module de cisaillement du matériau des particules et ν son coefficient de Poisson. Dans le cas asymptotique d'un coefficient de frottement infini (adhésion totale des surfaces, sans glissement), la prise en compte des efforts tangentiels entre les particules augmente uniquement le module de cisaillement effectif, de sorte que :

$$G_{\text{emt}}^\infty = \frac{k_n + 3/2k_t}{20\pi} (\Phi Z)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{6\pi P}{k_n} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (5.49)$$

avec $k_t = 8G/(2 - \nu)$ la raideur des particule dans la direction tangentielle. On retrouve dans les équations Eq. 5.48 et Eq. 5.49 la loi d'échelle en $P^{1/3}$ de l'équation Eq. 5.47. Le module d'incompressibilité K_{emt} est tracé en bleu sur les figures Fig. 5.13a et b : il présente un accord satisfaisant avec l'estimation tracée avec l'équation Eq. 5.44. Notons ici que K_{emt} est calculé en tenant compte de la dépendance de la compacité ϕ et de la coordinence Z avec la pression de confinement P , telles que définies dans les équations Eqs. 5.40 et 5.41 dans la figure Fig. 5.10, conformément aux préconisations de [81]. Ces dépendances ont pour conséquence d'introduire un léger écart à la loi en puissance d'exposant 1/3, visible sur la figure Fig. 5.13b.

iii. Évaluation de la contrainte de cisaillement

Le chargement cyclique en cisaillement est imposé au milieu granulaire par un forçage de la rotation des parois autour de l'axe z (voir Fig. 5.14). Le milieu granulaire applique en retour localement sur chaque parois des forces ponctuelles

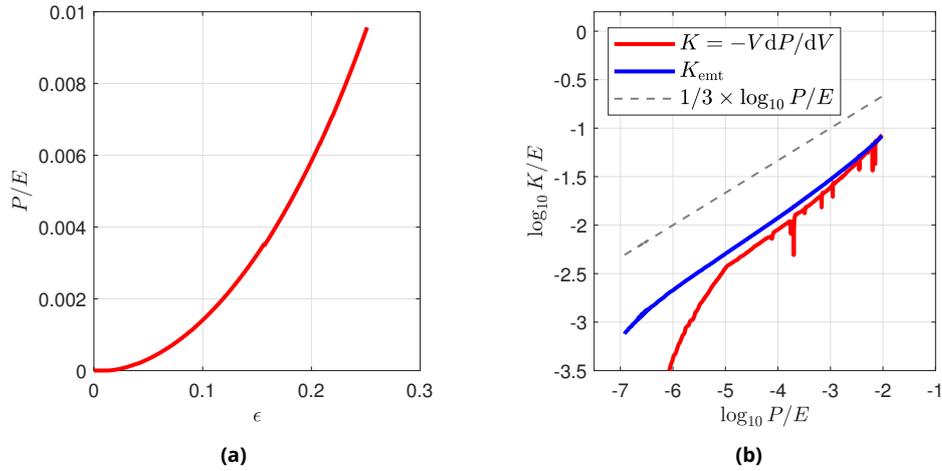


Figure 5.13 – (a) Pression hydrostatique en fonction de la déformation volumique donnée par l'équation Eq. 5.43 et (b) logarithme décimal du module d'incompressibilité en fonction du logarithme de la pression.

dont les résultantes induisent les moments \mathbf{M}_{+x}^{Oz} et \mathbf{M}_{-x}^{Oz} autour de l'axe z de rotation des parois (voir Fig. 5.14). Ces moments s'expriment :

$$\mathbf{M}_{-x}^{Oz} = \sum_i (\mathbf{d}_i^- \wedge \mathbf{F}_{i \rightarrow w^-}), \quad \mathbf{M}_{+x}^{Oz} = \sum_i (\mathbf{d}_i^+ \wedge \mathbf{F}_{i \rightarrow w^+}) \quad (5.50)$$

avec \mathbf{d}_i^\pm la distance entre le point d'application de la force exercée par la bille i et l'axe de rotation de la paroi w^\pm . La force $\mathbf{F}_{i \rightarrow w^\pm}$ désigne la force appliqué par la particule i sur la paroi w^\pm . Du point de vue du volume représentatif, le couple C requis pour passer de l'état initial non déformé à l'état cisailé est donné par :

$$C = 2(\mathbf{M}_{+x}^{Oz} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{M}_{-x}^{Oz} \cdot \mathbf{z}). \quad (5.51)$$

Imposer le couple C revient à imposer un effort \mathbf{F}_s sur la face supérieure dont l'expression est donné par :

$$F_s = \frac{C}{a}. \quad (5.52)$$

où a correspond à la hauteur du cube (bras de levier, voir Fig. 5.14). La force de cisaillement \mathbf{F}_s nous permet finalement d'obtenir la contrainte de cisaillement τ en divisant par l'aire de la surface supérieure S , tel que :

$$\tau = \frac{F_s}{S} = 2 \frac{(\mathbf{M}_{+x}^{Oz} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{M}_{-x}^{Oz} \cdot \mathbf{z})}{V}, \quad (5.53)$$

où $V = S \times a$. Notons également ici que comme pour le calcul de la pression de confinement, le calcul de la contrainte de cisaillement à partir des efforts au niveau des parois requiert l'équilibre statique et que les forces d'inerties soient négligeables.

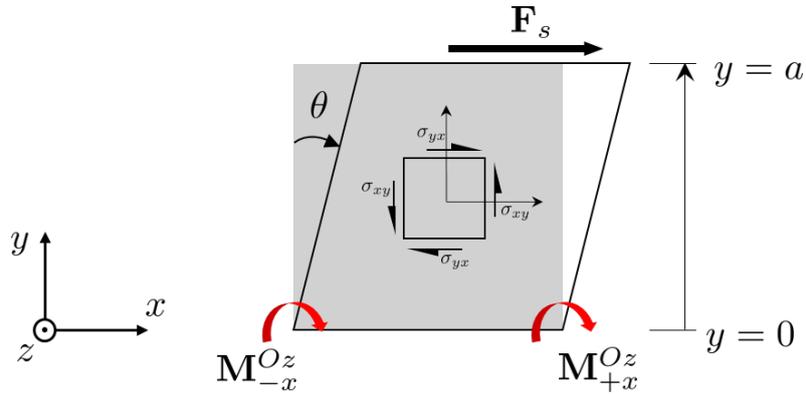


Figure 5.14 – Représentation schématique du calcul de la contrainte de cisaillement à partir des moments au centre de rotation des parois.

5.3.4 . Bilan d'énergie

Pour clore ce chapitre, nous détaillons d'abord dans cette section les différentes contributions participant au bilan d'énergie global, pour ensuite décrire un bilan énergétique visant à vérifier la cohérence de notre modèle numérique.

i. Description des contributions à l'énergie totale

L'énergie totale E_{tot} associée au milieu granulaire simulé par le modèle DEM à un instant t , correspond à la somme des énergies suivantes :

$$E_{\text{tot}} = E_k + E_{\text{el}} + E_{\text{pp}} + E_d \quad (5.54)$$

Chacun des termes de l'équation Eq. 5.54 s'exprime de la façon suivante :

- E_k correspond à la somme des énergies cinétiques de chacune des particules (en rotation et en translation) à un instant donné. Celle-ci est exprimée par :

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} \left(m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 + \dot{\boldsymbol{\theta}}_i \left(\mathbf{I}_i \dot{\boldsymbol{\theta}}_i^T \right) \right) \quad (5.55)$$

où $\dot{\mathbf{x}}_i$ et $\dot{\boldsymbol{\theta}}_i$ correspondent respectivement aux vecteurs vitesses linéaire et angulaire de la particule i .

- E_{el} est la somme de toutes les énergies de déformation élastique normales et tangentielles, dans tous les contacts, à un instant donné. Celle-ci dépend du potentiel élastique de contact de la modélisation. Cette énergie est exprimée par :

$$E_{\text{el}} = \sum_c \mathbf{F}_{\text{el}} \cdot \boldsymbol{\delta}_c, \quad (5.56)$$

où \mathbf{F}_{el} désigne l'ensemble des contributions élastiques de la force de contact et $\boldsymbol{\delta}_c$ est le vecteur déplacement relatif des deux corps associés au contact numéroté c .

- E_{pp} est la somme des énergies potentielles de pesanteur de chaque objet dans la simulation. Celle-ci s'exprime par :

$$E_{pp} = \sum_i m_i \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{g}, \quad (5.57)$$

où \mathbf{x}_i désigne la position de la particule i et \mathbf{g} le vecteur d'accélération de la pesanteur. Notons que la valeur de cette énergie est relative à la définition d'une position de référence \mathbf{x}_0 , à laquelle $E_{pp} = 0$.

- E_d correspond à la somme de l'ensemble de l'énergie dissipée depuis l'instant $t = 0$. Pour des grains constitués d'un matériau viscoélastique frottant, E_d se décompose en deux termes tels que :

$$E_d = E_f + E_v. \quad (5.58)$$

E_f correspond à l'énergie dissipée par frottement et E_v l'énergie dissipée par viscoélasticité. L'incrément de ces énergies à un pas de temps donné s'exprime :

$$\begin{aligned} \delta E_f &= \sum_c \mathbf{F}_f \cdot \delta c, \\ \delta E_v &= \sum_c \mathbf{F}_v \cdot \delta c, \end{aligned} \quad (5.59)$$

avec \mathbf{F}_f l'ensemble des forces de glissement au contact c et \mathbf{F}_v les contributions visqueuses normales et tangentielles.

À tout instant E_{tot} doit correspondre à l'énergie totale injectée dans le système, désignée par le travail des forces extérieures \mathcal{W}_{ext} . Cette relation s'exprime simplement par :

$$E_{tot} = \mathcal{W}_{ext}. \quad (5.60)$$

La vérification de l'équation Eq. 5.60 est un test rapide et efficace pour s'assurer de (i) la pertinence de la mise en donnée du problème DEM, (ii) la bonne comptabilité des différentes contributions au bilan d'énergie, (iii) la manière d'estimer les différentes énergies et enfin (iv) la stabilité du schéma d'intégration numérique.

La figure Fig. 5.15 illustre les équations Eq. 5.60 et Eq. 5.54 dans le cas de la sphère rebondissante, présentée en exemple dans la section Sec. 5.2.3. Nous pouvons observer que l'énergie totale reste constante (à 10^{-5} près dans notre exemple) dès lors qu'aucun apport d'énergie n'est réalisé en plus de l'énergie de pesanteur initiale E_0 à $t = 0$ s. À mesure que la bille accélère sous l'effet de la gravité, son énergie cinétique E_k augmente jusqu'à être maximale à l'instant précédant la collision avec le plan : à ce moment la vitesse de la particule est maximale v_{max} avec une énergie cinétique maximale $E_k = E_0 = \frac{1}{2}mv_{max}^2$. Pendant le rebond, une partie de l'énergie est stockée sous forme élastique via E_{el} et le reste est dissipé via le travail de la force normale visqueuse représenté par E_d . Notons que

dans ce cas particulier, il n'y a ni rotation, ni force tangentielle. Suite au rebond, la particule repart dans le sens opposé à la vitesse $\epsilon \times v_{\max}$, avec une énergie cinétique $\frac{1}{2}m\epsilon^2v_{\max}^2 = \epsilon^2E_0$. La constance de l'énergie totale E_{tot} permet de vérifier que l'énergie restituée après le choc est complémentaire de l'énergie dissipée lors de la collision.

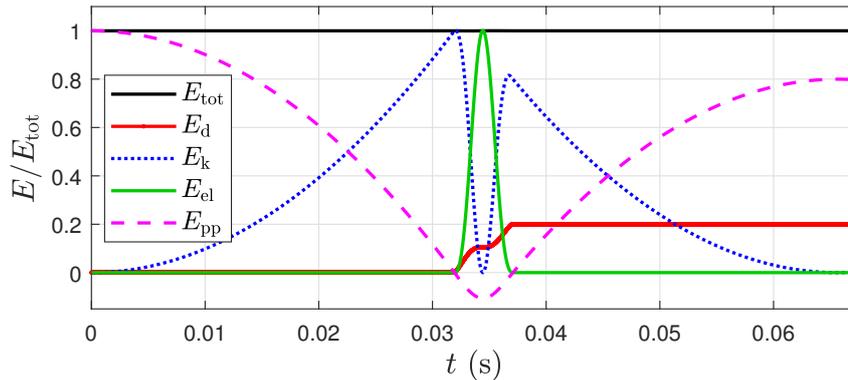


Figure 5.15 – Illustration de la conservation de l'énergie mécanique dans le système de la bille rebondissante avec un coefficient de restitution $\epsilon = 0.9$.

ii. Bilan d'énergie dans un milieu granulaire confiné et cisailé

On s'intéresse ici au cas du milieu granulaire d'abord confiné puis cisailé, tel que décrit dans la section Sec. 5.3.3. Contrairement au cas de la particule en chute libre sous l'effet de la gravité, ici de l'énergie est injectée en permanence dans le système via le mouvement imposé des parois. L'énergie totale n'est donc pas constante. Cette énergie est transmise aux particules qui en stockent une partie sous forme d'énergie élastique et qui dissipent le reste par frottement ou dissipation viscoélastique. La connaissance de l'énergie injectée dans le système à un instant t peut être réalisée de deux manières, selon qu'on impose un effort ou un couple (pour en déduire un déplacement ou une rotation, et donc une énergie) ou qu'on impose un déplacement en translation ou en rotation (pour en déduire la force ou le couple de réaction du milieu et par là son énergie). Dans notre modèle nous avons décidé de retenir la deuxième approche, qui permet d'imposer un taux de cisaillement donné (par l'intermédiaire d'une rotation des parois).

Lors de la phase de compression, le milieu granulaire subit une transformation avec changement de volume, avec conservation des rapports d'aspects. En termes de mécanique des milieux continus, pour un volume élémentaire, c'est une transformation sphérique. L'énergie est apportée au système via un déplacement imposé des six faces. La variation d'énergie à un instant donné peut s'exprimer par le travail des forces extérieures sur les parois, celui-ci pouvant s'exprimer par le travail

des efforts de pression avec la formule :

$$\delta\mathcal{W}_P = -PdV, \quad (5.61)$$

avec P la pression hydrostatique donnée par l'équation Eq. 5.37. Lors de la phase de cisaillement simple, la transformation est effectuée à volume constant, par conséquent le travail des forces de pression est nul. En revanche, de l'énergie est apportée pour déformer le paquet de grain en cisaillement. L'énergie de déformation par unité de volume s'exprime alors avec la contrainte de cisaillement τ donnée par l'équation Eq. 5.53 et la déformation en cisaillement γ de la façon suivante :

$$\delta w_\tau = \tau d\gamma \quad (5.62)$$

Puis en intégrant sur le volume de la boîte, on obtient le travail des forces de cisaillement :

$$\mathcal{W}_\tau = \int_V w_\tau dV = w_\tau \times V. \quad (5.63)$$

Le travail total injecté par les parois au cours de tout le processus, compression et cisaillement inclus, est alors exprimé par :

$$\mathcal{W}_{\text{ext}} = \mathcal{W}_\tau + \mathcal{W}_P \quad (5.64)$$

Finalement, l'égalité entre le travail total fourni par les parois rigides et l'énergie totale calculée par *Yade* via l'équation Eq. 5.54 est vérifiée dans la figure Fig. 5.16 où l'équation Eq. 5.60 est vérifiée avec une bonne approximation. La figure Fig. 5.16 montre également l'évolution de l'énergie cinétique au cours de toute la simulation. Celle-ci diminue très fortement (de 10 ordres de grandeurs) au delà de la transition de blocage, l'énergie totale est alors essentiellement distribuée dans la déformation des contact entre les particules. Cette observation est conforme au choix initial de travailler dans un régime quasi-statique, et est la conséquence de vitesse de déformations (translation et rotations) choisies suffisamment petites.

5.4 . Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons rappelé le principe de la méthode des éléments discrets. La méthode a d'abord été présentée de façon générale. Ensuite nous nous sommes attardés sur la modélisation du contact avec les modèles de Hertz-Mindlin et celui de Cundall et Strack, avec pertes viscoélastiques. Nous sommes également revenus sur la modélisation de quelques modèles de frottement. L'un de ces modèles, le modèle de Dahl sera utilisé dans la suite pour la construction d'un modèle réduit. Nous avons terminé cette section par deux exemples emblématiques de la méthode des éléments discrets pour illustrer les propos introductifs : le rebond d'une particule sur un plan et le forçage du frottement sphère/plan. La méthode a ensuite été utilisée pour modéliser un volume parallélépipédique rempli

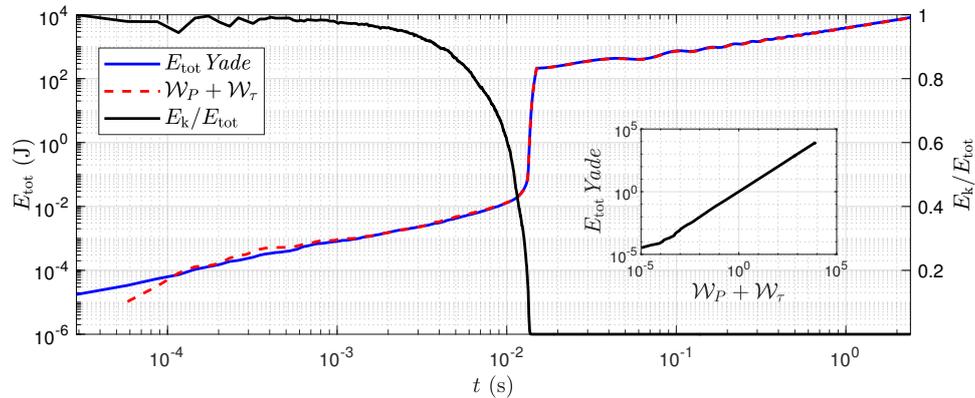


Figure 5.16 – Comparaison entre le travail des forces extérieures sur les grains et l'énergie totale dans le milieu granulaire. La courbe noire représente la part d'énergie cinétique dans le système relativement à l'énergie totale. Les données sont tracées en fonction du temps. La figure insérée représente E_{tot} en fonction de \mathcal{W}_{ext} .

de grains sphériques polydisperses, déformables et frottants. Plusieurs propriétés du milieu confiné ont été étudiées, dont la compacité, le nombre de coordination et la pression de confinement. L'étude des lois d'échelles reliant ces grandeurs, comparativement aux résultats de la littérature a permis de valider le modèle. Le modèle ainsi construit permet dans le Chap. 6 d'étudier plus en détail les effets dissipatifs pendant le chargement cyclique en cisaillement.

6 - Modèle réduit d'un milieu granulaire cisailé

Résumé

Dans le chapitre précédent (Chap. 5) un modèle éléments discrets simulant un volume élémentaire de particules a été établi. Pour être représentatif, ce volume nécessite un grand nombre de grains. Cette complexité peut engendrer des temps de calculs incompatibles avec une démarche de conception ou d'optimisation d'un système mécanique contenant un milieu granulaire. Dans cet objectif, un modèle réduit de volume élémentaire représentatif est présenté dans ce chapitre (Chap. 6). Il modélise la réponse hystérétique d'un volume de grains confinés soumis à un cisaillement cyclique.

6.1 . Introduction

Ce chapitre est un document de travail en cours d'élaboration et constitue un projet d'article reproduit en l'état.

Dans ce chapitre nous utilisons le modèle de milieu granulaire comprimé établi dans le chapitre Chap. 5 et nous le soumettons à une déformation cyclique en cisaillement pour étudier les spécificités du comportement hystérétique et des propriétés dissipatives d'un tel milieu en régime permanent et quasi-statique. Le milieu granulaire, sous pression, est donc modélisé par la méthode des éléments discret et sa réponse hystérétique en cisaillement est analysée en identifiant les paramètres d'un modèle de patin frottant de type Dahl, préalablement présenté au chapitre Chap. 5. Le processus est réalisé pour un ensemble de configurations, en faisant varier la pression de confinement, le module élastique des grains, l'amplitude de sollicitation et le nombre de particules, permettant ainsi d'étudier l'évolution du module de cisaillement effectif au regard des propriétés microscopiques. L'évolution du module de cisaillement et du coefficient de friction effectifs révèle des lois d'échelles que l'on retrouve dans la littérature avec la théorie des milieux effectifs (EMT) granulaires présentés au chapitre Chap. 5 ainsi que dans la rhéologie des écoulements granulaires (modèle $\mu(I)$) pour le coefficient de friction effectif. En s'appuyant sur ces modèles et sur l'étude paramétrique du modèle DEM, nous aboutissons à la définition d'un nombre sans dimension ξ , comparable à un seuil de Coulomb, faisant la répartition entre les mécanismes de frottement et d'élasticité. Ce nombre sans dimension fait donc la répartition entre un mécanisme conservatif (élasticité due au confinement) et un non-conservatif (le frottement).

6.2 . Modèle réduit élasto-frictionnel d'un milieu granulaire en cisaillement cyclique

Elasto-frictional reduced model of a cyclically sheared granular box

Antoine Faulconnier^{1,2*}, Stéphane Job^{1*}, Julien Brocaïl², Nicolas Peyret¹
and Jean-Luc Dion¹

¹Laboratoire Quartz (EA-7393), ISAE-Supméca, 3 rue Fernand Hainaut,
Saint-Ouen-sur-Seine, 93400, France.

²Estaca'Lab, Estaca campus Ouest, rue Georges Charpak, Laval, 53000, France.

*Corresponding author(s). E-mail(s): antoine.faulconnier@isae-supmeca.fr;
stephane.job@isae-supmeca.fr;

Abstract

This article explores the hysteretic behavior and the damping features of sheared granular box using discrete element method (DEM) simulations. We consider polydisperse non-cohesive frictional spherical particles, enclosed in a container submitted to a cyclic simple shear superimposed with a confinement pressure. The mechanical response of the grains is analyzed in the permanent regime, by fitting the macroscopic stress-strain relation applied to the box with a Dahl-like elasto-frictional model. The influence of several parameters such as the amplitude of the strain, the confining pressure, the elasticity, the size and the number of particles are explored. We find that the fitted parameters of our macroscopic Ansatz qualitatively rely on both the well-established effective medium theory of confined granular media and the well-documented rheology of frictional granular flow. Quantitatively, we demonstrate that the two degrees-of-freedom elasto-frictional reduced model reliably describes the nonlinear response of the granular layer over a wide range of operating conditions. In particular, we show that the mechanical response of a granular slab under simple shear depends on an unique dimensionless parameter, akin to an effective Coulomb threshold, revealing an optimal damping at the crossover between a loose unjammed regime and a compact elastic regime.

Keywords: Sheared granular media, Discrete Element Method simulations, Dahl-like elasto-frictional model

1 Introduction

Granular materials are ubiquitous in Nature, where they are found in a variety of states of matter [1]. From the application point of view, granular media are known to dissipate and disperse efficiently mechanical shocks (*a sandpile can stop a rifle bullet*) and they proved to be efficient also in the context of sound and vibration mitigation [2], damping [3] and isolation [4]. Compared to classical matter, granular media present

unusual and history dependent properties like softening [5], weakening [6], relaxation [7] and aging [8], to name but a few. Phases transition from one state of matter to another can occur via deformation [9]. The jamming process generally occurs when a granular medium goes from a fluid-like state to a solid-like jammed state [10] via a quasi-static compaction [11], by reducing the volume V at constant volume (number) of particles V_p , i.e by increases the volume fraction $\Phi = V_p/V$.

Alternatively, jamming can also be reached via an isochoric transformation at low volume fraction Φ , by applying shear stress or strain to the granular material [7, 12]. Here, the anisotropy of the contact network plays an important role on such shear jamming process [7, 12–14]. Indeed, liquefaction state of granular materials under isochoric cyclic simple shearing [15] recently revealed that liquefaction occurs via loops between jammed and unjammed states, characterized by an isotropic loss of contacts followed by the development of high contact anisotropy in each cycle.

Jammed granular media are frequently referred to as granular solids owing to their ability to resist to pressure and shear, or even as metamaterials [16]. To determine its elastic properties, an effective medium theory (EMT) was developed in the late 80’s to connect the properties at the particle level to the sample scale [17]. In particular, the macroscopic features of a pile of grains inherit and reveal the intrinsically nonlinear Hertzian potential at the heart of the contacts mechanics [18, 19]. When the particles are non-cohesive and dry, they are likely submitted to friction [19]. Frictional properties are particularly studied in the field of granular flow, in line with many industrial applications, where one of the bottleneck relies on understanding how friction dictates the rheology of an avalanche, for instance [20]. A key is found with dense and slow granular flows, where the behavior can be described with the tools of soil mechanics [21–23]. In that situation, an effective friction coefficient is defined as the ratio between shear stress and confining pressure [20]. Interestingly, this coefficient only depends on a dimensionless inertial number I [24, 25].

One interesting feature of non-cohesive grains relies on its capacity to damp mechanical energy thanks to friction and inelastic collisions between grains. For instance, owing to large numbers of particles, these media allows achieving perfectly inelastic collapse [26, 27] conditions in vibrated granular media, leading to exceptional damping efficiency [3, 28–30]. On the other hand, sheared granular solids present strong hysteretic behaviors [7, 12] leading to efficient and nonlinear damping properties [31–34]. Recent experimental investigations using X-Ray tomography [14] relate the stress-strain hysteresis as a combination of

shear driven topological disorder and anisotropy of the contacts network.

In the vast majority of the studies on granular media, simulations based on discrete element method (DEM) are widely used to model soil and hysteretical effect in granular matter [35, 36]. DEM allows to explore in depth phenomena at both macroscopic and microscopic scale even in 3D [36], which remains a challenging task in experiments. Inspired by DEM simulations, a constitutive model was proposed to describe a confined box filled with particles in two-dimensions [37], taking in account various phenomena like anisotropy, hysteresis and ratcheting. It was later enriched to include pressure relaxation and stabilization in pure shear [38], allowing to model transient as well as permanent regimes. Other extensive models for granular matter include granular solid hydrodynamics [39] handling static behavior with plasticity, but also transient loading [40] including hysteresis.

Using a practical approach, at the macroscopic scale, with the objective of reducing the complexity and size of the problem, we provide, in our study, a one dimensional light hysteretical model. The model is fed by existing theory such as effective medium theory and concepts from rheology of granular flow, to approximate the behavior of a sheared box of a confined granular material. Starting from a discrete element model of a confined granular packing in a box undergoing cyclic simple shear, evolution of hysteretic properties is analyzed and a reduced model is proposed.

The paper is organized as follow. The section Sec. 2 describes the setup of the discrete element method simulation and the Dahl-like reduced model we propose. We briefly remind the essential features of the effective medium theory of granular media, and the rheology of granular flows. In section Sec. 3 we present the method for the identification of the model, and we develop a parametric study devoted to quantify the elastic and frictional properties of the granular slab under shear. We find that the granular material is well described by a two degree-of-freedom Dahl-like model defined by a single non-dimensional parameter, akin to an effective Coulomb threshold. The reliability of our model is then discussed, before being used to estimate the nonlinear damping features. In line with our model, the DEM simulations reveal that the

damping ratio of the system only depends on the non-dimensional parameter we evidenced.

2 Modelling

2.1 Numerical model

The numerical setup consists in 1000 poly-disperse spherical purely elastic particles, with a radius distribution following a uniform law to prevent crystallization ($r_p = 1 \pm 0.25$ mm, $\rho_p = 7850$ kgm $^{-3}$, $E_p = 210$ GPa, $\mu_p = 0.15$). Grains are placed within a cubic box with rigid walls. The whole setup is modeled using discrete element method with *Yade* [41] open source software. Newton's equations of motion are integrated in the time domain with explicit second order Velocity Verlet scheme, with constant time step chosen equal to the time of flight of longitudinal wave across the smallest particle, $\Delta t = \min(r_p \sqrt{E_p/\rho_p})$. This is small enough for the proper resolution of the Hertz contact [18, 19] and to guarantee energy conservation. Hertz-Mindlin contact law coupled with a Mohr-Coulomb criterion is used to model elastofrictional interactions between particles, which means the normal force and the tangential contact forces take the form $F_n = \kappa_n \delta_n^{3/2}$ and $dF_t = \kappa_t \delta_n^{1/2} d\delta_t$ respectively, and sliding occurs if $F_t > \mu_p F_n$ [18, 19]. Our aim is to evidence the frictional dissipation from the granular material only. We thus choose a frictionless contact for the particle-to-wall interaction, $\mu_{pw} = 0$, such that no shearing occurs between the particles and the walls, and that the shear is uniform along the width direction (z -axis in Fig. 1) of the box [42].

In a *first step*, we prepare a granular sample. We generate 1000 size-distributed particles placed at random positions in a dilute state (at rest and well separated), inside a large cubic domain, using a *Yade's* builtin generator. Then we set the sample under pressure, by proceeding with a isotropic compression until a given volume fraction $\Phi = V_p/V$ is reached, with V_p the material volume of the spheres and V the volume of the box. This step is achieved by imposing a quasi-static displacement of the walls at slow velocity, see Fig. 1 (top-left). It is important to note that, here and in the following, all transformation are quasi-static in order to neglect inertia in the forces and moments balance. It turns out that we restrict all velocity magnitudes (translation, rotation) or frequencies

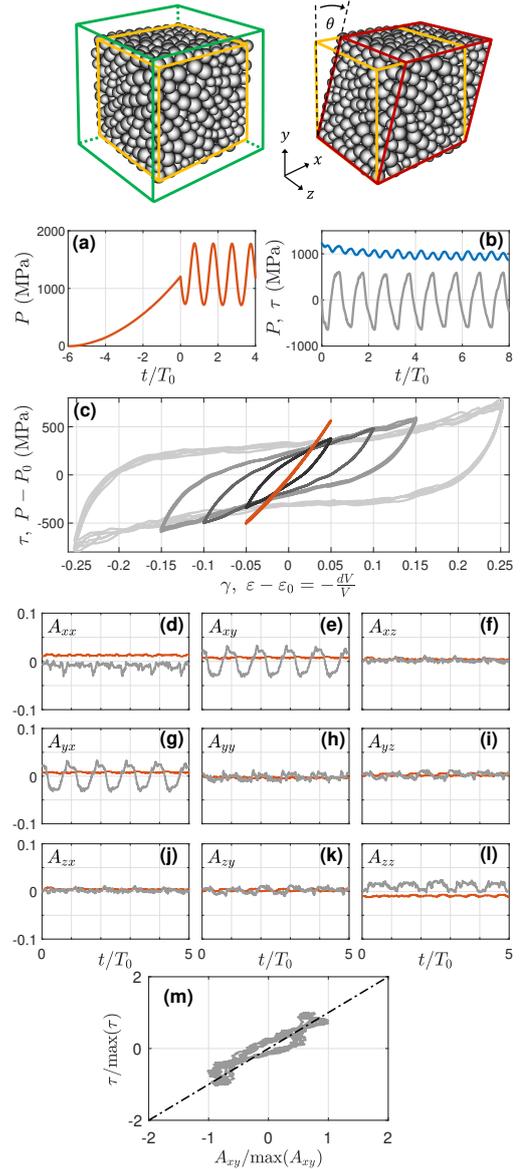


Fig. 1 (a) Pressure p (red) versus time during a monotonic ($t < 0$; up to particles volume fraction $\Phi = V_p/V = 0.7$ at $t = 0$) and a cyclic ($t > 0$; period T_0) triaxial compressions (top-left) of a granular slab. (b) Shear stress τ (grey) and p (blue) versus time during a simple shear (top-right) cyclic test, preceded by the same initial stage ($t < 0$) as in (a). (c) Cyclic τ (resp. $\delta p = p - p_0$, subscript 0 denoting the mean) versus cyclic shear strain $\gamma = \tan \theta$ (resp. volumetric strain $\delta \varepsilon = (V_0 - V)/V_0$). The hysteresis observed at different shear strain amplitude ($\gamma_m = 0.05, 0.10, 0.15$ and 0.25) reveal a strong dissipation (area within curves) under simple shear, which is negligible under triaxial compression. (d-l) The anisotropy tensor Eq. 1 shows that the cyclic triaxial compression (red) induces an isotropic orientation of the contact network, $\mathbf{S} \simeq \mathbf{I}/3$, due to the polydispersity of the particles, whereas the simple shear aligns the contacts in the xy -plane ($A_{xy} \neq 0$). (m) The proportionality $\tau(t) \propto A_{xy}(t)$ evidences the close relation between shear and anisotropy.

(in case of cyclic transformation) to ensure that the kinetic energy is always small compared to the total energy, $E_k/E_{tot} < 0.01$. The average pressure in the granular medium is estimated as the trace of the stress tensor $P = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$, where $\sigma_{ii} = (\mathbf{F}_{+i} \cdot \mathbf{n}_{+i} + \mathbf{F}_{-i} \cdot \mathbf{n}_{-i})/2S_i$ with S_i the area of face $i = (x, y, z)$, is computed from the forces $\mathbf{F}_{\pm i}$ exerted by the particles on opposite walls, with $\mathbf{n}_{\pm i}$ the faces normal vectors. We checked that our measure of the confining pressure is consistent, by less than 0.1% relative difference, with the one computed from the trace of the Love-Weber stress tensor [41, 43, 44]. Throughout the isotropic compression, as the packing fraction increases, the system goes from a stress-free state, where the pressure is weak, to a pressurized state as soon as the granular sample starts to jam. From this point, a significant resistance to compression results in a monotonic increase of the confining pressure [13], see Fig. 1a.

In a *second step*, two experiments are conducted separately, starting from a jammed state: (i) the granular packing is compressed cyclically and we probe the pressure P versus strain $\varepsilon = -dV/V$ and (ii) the granular packing is simple sheared cyclically by rotating two of the side walls, see Fig. 1 (top-right). In this case, the rotation angle $\theta = \theta_m \sin(\omega_0 t)$ is harmonic and the shear strain $\gamma = \tan(\theta)$ is quasi harmonic, in the limit of small θ_m . The shear stress τ is computed by summing all the reactions applied by the particles on the side walls. This induces two resisting moments computed at the center of rotation of the walls. The moments \mathbf{M}_{+x}^{Oz} and \mathbf{M}_{-x}^{Oz} , exerted on the two opposite faces $\mathbf{n}_{\pm x}$, are used to compute the magnitude of an equivalent shear stress $\tau = -2(\mathbf{M}_{+x}^{Oz} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{M}_{-x}^{Oz} \cdot \mathbf{z})/V$ exerted in-plane on the top wall \mathbf{n}_{+z} , where \mathbf{z} is the cartesian vector. In the cyclic compression experiment (i), the pressure oscillates, see Fig. 1a, with $(P - P_0)$ being approximately proportional to ε , $(P - P_0) \simeq K(P_0)\varepsilon$, where $K(P_0)$ is representative of the bulk modulus of the granular packing at the mean pressure P_0 . In Fig. 1c, $(P - P_0)$ is plotted against $(\varepsilon - \varepsilon_0)$ showing quasi-linear elastic behavior, without any noticeable dissipation. The latter is consistent with the fact that our particles deform elastically and that the friction (due to relative displacements between grains) is weakly activated during the triaxial compression. In turn, during cyclic simple shear seen in

Fig. 1b, the pressure also oscillates, but at twice the driving frequency and despite the volume of the container is constant. This non-intuitive phenomenon, known as the Reynolds dilatancy, has been described in a two-dimensional experiments with frictional discs [7], where the fluctuation of the pressure has been found proportional to the square of the shear strain, $\delta P \propto \gamma^2$. We also observe, consistently with [7], that the average confining pressure relaxes slowly with time during cyclic shear, see Fig. 1b. The initial jammed configuration resulting from a likely heterogeneous and anisotropic contact network of particles trapped by friction, applying a cyclic shear homogenizes the pressure distribution by breaking the force chains and helps accommodate the particles toward equilibrium positions. After about 10 cycles or so, the confinement pressure stabilizes around a permanent value. Grey curves in Fig. 1c show shear stress τ against shear strain γ , revealing a strong hysteretic behavior in shear compared the triaxial compression. The different shapes of the hysteresis at the different driving amplitudes, and the alignment of the reversal points, both indicate that above a certain stress limit, the shear stress increases linearly for $\gamma_m = 0.05 - 0.15$. This is typical of an hysteretic behavior combined with a linear elasticity: this observation will help identifying a relevant reduced model, in section Sec. 2.3. The figure Fig. 1c also highlights the fact that shear transformation is much more dissipative than the spherical transformation, for similar injected energy. Shear deformation is more efficient than compression to activate relative displacement and friction between particles.

The evolution of the contact network within compression or shear can be evidences by the estimating the fabric tensor [45]. It provides information on the directions of the bondings in the contact network [46], and it is frequently used to quantify anisotropy [14]. The fabric tensor \mathbf{S} and the anisotropy tensor \mathbf{A} are defined as

$$\mathbf{A} = \mathbf{S} - \mathbf{I}/3 \text{ with } \mathbf{S} = \frac{1}{N_c} \sum_{i=1}^{N_c} \mathbf{n}^i \otimes \mathbf{n}^i, \quad (1)$$

where N_c is the total number of contacts, \mathbf{n} is the direction connecting the centers of two neighbor particles, \mathbf{I} is the unit tensor, and \otimes denotes the outer product between two vectors [41]. The

figures Fig. 1(d-l) present the 9 components of the anisotropy tensor as functions of time during the 5 periods of cyclic shear. One can see that this tensor is symmetric with periodic responses, with a clear cyclic behavior in the shear directions. The anisotropy tensor shows that the cyclic triaxial compression induces an isotropic orientation of the contact network, $\mathbf{S} \simeq \mathbf{I}/3$, due to the polydispersity of the particles, whereas the simple shear aligns the contacts in the xy -plane ($A_{xy} \neq 0$). In Fig. 1(m), the component A_{xy} of the anisotropy tensor is plotted against the shear strain τ revealing a close relation consistent with experimental observations [14].

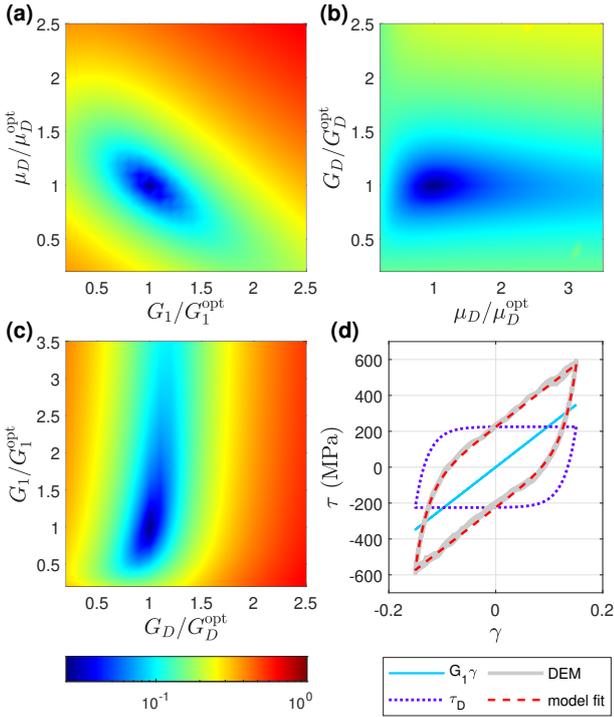


Fig. 2 (a,b,c) Maps of the RMSE between $\tau(\mu_D, G_D, G_1)$ and τ_{DEM} plotted in the three planes (μ_D, G_1) , (μ_D, G_D) and (G_D, G_1) , scaled by the optimal solution $\mu_D^{\text{opt}} = 0.24$, $G_D^{\text{opt}} = 9.7$ GPa, and $G_1^{\text{opt}} = 2.3$ GPa. **(d)** Hysteresis of the fit superimposed to the DEM results at the nominal case $\Phi = 0.7$ and $\gamma_m = 0.15$. Dotted purple line represent the hysteretic Dahl contribution $\tau_D(\gamma)$, see Eq. 10, and solid blue line represents the linear contribution $G_1\gamma$, see Eq. 11. Red dashed line is the sum of the blue and dotted purple line.

2.2 Theoretical models

2.2.1 Effective medium theory

Effective medium theory [17] (EMT) was developed in the late 80's based on Hertz contact mechanics [18, 19]. Analytical formula of effective elastic modulus were derived to connect grain properties to the macroscopic properties in the continuum limit. In the case of purely frictionless (i.e. no stick) particles, the effective bulk and shear moduli are expressed by

$$K_{\text{EMT}}(P) = \frac{k_n}{12\pi} (\Phi Z)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{6\pi P}{k_n} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (2)$$

$$G_{\text{EMT}}^0(P) = \frac{k_n}{20\pi} (\Phi Z)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{6\pi P}{k_n} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (3)$$

where $k_n = 4\mu_g/(1 - \nu_g)$ is the contact stiffness between particles in the normal direction. Z is the coordination number, i.e. the average number of contacts per particles, and P is the hydrostatic pressure. In the case of infinitely frictional (i.e. no slip) particles, the effective bulk modulus remains unchanged but the shear modulus is slightly larger than the frictionless estimation

$$G_{\text{EMT}}^\infty(P) = \frac{k_n + (3/2)k_t}{20\pi} (\Phi Z)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{6\pi P}{k_n} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (4)$$

where $k_t = 8\mu_g/(2 - \nu_g)$ is the particle contact stiffness the tangential direction. The expressions Eqs. 2-4 provides a scaling $G_{\text{EMT}}^{0,\infty} \propto K_{\text{EMT}} \propto E_p(P/E_p)^{1/3}$ characteristic of the inherited Hertzian contact interaction. This scaling was later discussed [43], especially for the shear modulus, where it noticeably fails due to stress relaxation and non-affine motions due to shear banding. However, the shear being imposed by the rotation of lateral walls in our setup, this flaw is likely less prominent. It is also noteworthy that we use a slightly improved version of the model, where the coordination number $Z(P)$ and the volume fraction $\Phi(P)$ are pressure dependent. We probed both dependencies (data not shown) and we found $(Z - Z_c) \propto (P/k_n)^{1/3}$ and $(\phi - \phi_c) \propto (P/k_n)^{2/3}$ with $Z_c = 5.042 \pm 0.085$ and $\phi_c = 0.595 \pm 0.003$, consistently with the literature [11, 43].

2.2.2 Rheology of granular flow

As discussed in Sec. 1, an effective friction coefficient can be defined [20] to describe the rheology of granular flow, as the ratio of shear stress over pressure,

$$\mu_{\text{eff}} = \tau/P, \quad (5)$$

which was found to depend on a single dimensionless inertial parameter [24, 25], $I = \dot{\gamma}r_p/\sqrt{P/\rho_p}$, defined as the ratio between two time scales, namely the typical time associated to shear rate and the typical timescale associated to the pressure. This parameter describes the regime of a granular flow, from the quasi-static limit $I < 10^{-3}$ to the kinetic regime at high I , with collisions. A phenomenological equation [25] provides an estimation of its value

$$\mu(I) = \mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{I_0/I + 1}, \quad (6)$$

where μ_s, μ_g, I_0 are constants [25]. In our simulations the inertial number I is negligibly small, $I < 10^{-4}$, such that we likely probe the quasi-static limit where the effective friction coefficient becomes independent of the strain amplitude, $\mu(I = 0) = \text{const.}$ Recent numerical studies [47] and interpretations [48] of slow granular flow inspected the model $\mu(I)$ at very low I ($10^{-5} \leq I \leq 10^{-3}$) and its dependency to inter-particle friction, highlighting in particular a non-monotonic dependency on the effective friction coefficient.

2.2.3 Reynolds dilatancy

It was identified in Sec. 2.1 that Reynolds dilatancy fluctuates the pressure when a cyclic simple shear is applied. Written as a small fluctuation, $P = \tilde{P} + \delta P$ with $\tilde{P} \gg \delta P$ the mean pressure, the fact that δP oscillates at twice the driving frequency, see Fig. 1b, reveals that the pressure fluctuation is proportional to the square of the shear strain [7], $\delta P = R\gamma^2$, according to a mechanism of Reynolds' dilatancy frustrated by the constant volume of the sample. The parameter R is thus proportional to an elasticity. However, its functional dependency is not studied in [7]; in the following, we will consider it as an adjustable parameter. Inserting this Ansatz in the EMT model, $\tau \propto E_p(P/E_p)^{1/3}\gamma$ see section Sec. 2.2.1, a

Taylor expansion at the lowest indicates

$$\tau(\gamma) \propto E_p \left(\frac{\tilde{P}}{E_p} \right)^{1/3} \gamma + \frac{1}{3} \left(\frac{\tilde{P}}{E_p} \right)^{-2/3} R\gamma^3. \quad (7)$$

The expansion with a cubic term is consistent with the observation of the stiffening of the hysteresis at large shear strain amplitude, see in Fig. 1c how the inflection of the hysteresis increases with the amplitude of the shear strain. The model describing Reynolds dilatancy [7], also defines the limit between linear and nonlinear elastic regime, whether the magnitude of the shear strain is sufficiently small, $\gamma \ll \sqrt{P/R}$, or not.

2.3 Dahl-like reduced model

We propose to decompose the hysteretic response of the granular media under shear shown in Fig. 1c, into two terms: a nonlinear hysteretic term τ_{hyst} saturating at a constant stress plus a linear elastic term proportional the shear strain. Owing to the Reynolds dilatancy introduced in section Sec. 2.2.3, if the elasticity relies on the effective elastic modulus of the granular material, a cubic term, yet conservative term, could thus be added to account for the inflection of the stress-strain relation at large amplitude. Our Ansatz is expressed as

$$\tau(\gamma) = \tau_{\text{hyst}}(\gamma) + G_1\gamma + G_3\gamma^3, \quad (8)$$

with G_1 and G_3 having the dimension of elastic shear moduli. In the limit of relatively small strain, G_3 can be neglected. It is noteworthy that a similar Ansatz has been considered to describe the hysteretic response of fibrous materials [49].

In practice, we define a dimensionless number ρ that quantifies the weight of the nonlinear term from Eqs. 7 and 8 with respect to the linear contribution. This number is defined by

$$\rho = \frac{G_3\gamma_m^2}{G_1} = \frac{\Delta P}{3P}, \quad (9)$$

where $\Delta P = R\gamma_m^2$ is the amplitude of the pressure fluctuation, G_1 and G_3 correspond to prefactors of the first and third order terms in Eqs. 7 and 8. Consequently, we consider that the elastic contribution in Eqs. 7 and 8 is linear when the non-dimensional parameter ρ is below 10%.

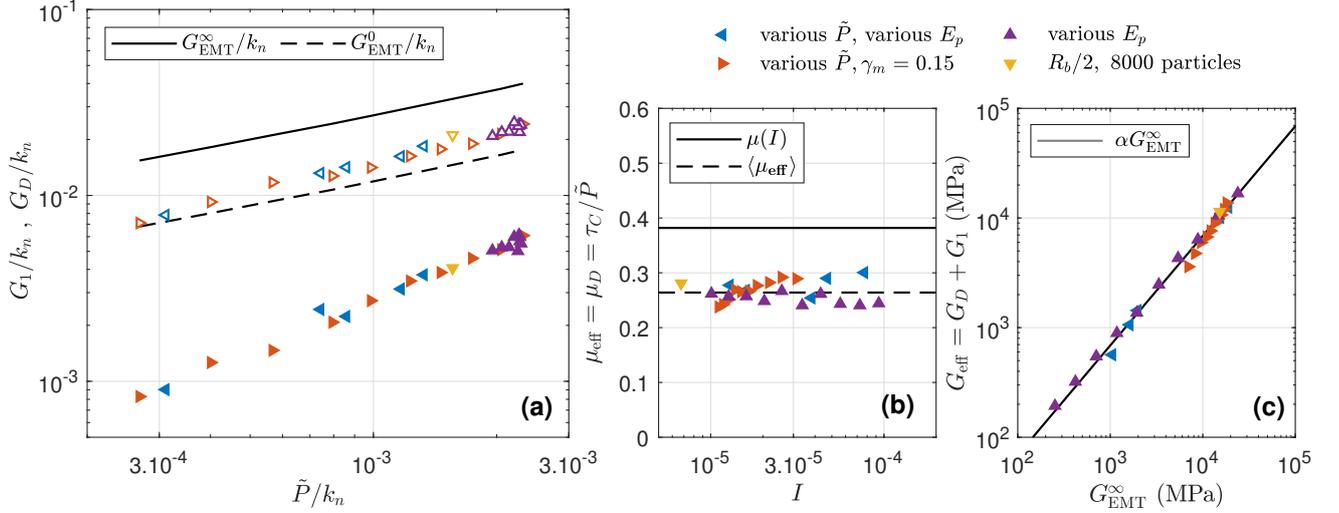


Fig. 3 (a): Dimensionless fitting parameters G_D/k_n (open symbols) and G_1/k_n (solid symbols) for various values of Φ and E_p as a function of the normalized pressure at $\gamma_m = 0.15$. Frictional G_{EMT}^{∞} (solid line) and frictionless G_{EMT}^0 (dashed line) shear moduli are also plotted. (b): effective friction against dimensionless shear rate. (dashed line): $\mu(I)$; $\mu_{\text{eff}} = 0.264 \pm 0.018$; (c): $G_D + G_1 = G_{\text{eff}}$ as a function of effective frictional shear modulus G_{EMT}^{∞} (Eqs. 2-4) and linear fit of slope $\alpha = 0.687 \pm 0.073$. Legend symbols are common for (a), (b) and (c).

Practically, such determination can be realized *a priori*, by analyzing the pressure fluctuations.

In turn, the saturating hysteretic function $\tau_{\text{hyst}}(\gamma)$ can be rendered by the Dahl friction model, amongst other. Dahl model was introduced half a century ago [50, 51] to model the frictional behavior of ball bearings. Dahl observed that for sufficiently small loading, the balls have an elastic restoring force. However for large loading, sliding occurs exhibiting plastic like behavior by analogy with stress-strain curves of elasto-plastic material. The Dahl model is used in a large variety of applications in literature to express relations between tangential force and displacement for contact mechanics [52], moment and angle in a gearbox [53] or stress and strain in fibrous material [49]. The stress-strain version of the Dahl model can be expressed in a compact shape, as a first order nonlinear equation of the time derivative of the hysteretic shear stress,

$$\dot{\tau}_D = G_D \dot{\gamma} \left[1 - \left(\frac{\tau_D}{\tau_C} \right) \text{sign}(\dot{\gamma}) \right]^{n_D}, \quad (10)$$

where G_D is homogeneous to an elastic modulus, and is the first parameters of Dahl's model. The elastic modulus G_D corresponds to the restoring slope of the hysteresis when $\gamma(t) = 0$. The exponent n_D controls the shape of the curve, e.g. $n_D = 1/2$ exhibits brittle behaviors, while $n_D = 2$

renders ductile responses. In the following of the study, we choose $n_D = 1$ as a first attempts, in line with the literature [49, 54, 55], to model elasto-plastic behaviors in between ductile and fragile. Finally, τ_C is the Coulomb stress limit, it can be related to a friction coefficient and a pressure as in Eqs. 5, $\mu_D = \tau_C/\tilde{P}$. Finally, considering the equation Eq. 8 in the linear regime, $\gamma \ll \sqrt{G_1/G_3}$, and the Dahl hysteretic model, our Ansatz becomes

$$\tau = \tau_D(\gamma) + G_1 \gamma. \quad (11)$$

It is noteworthy that our Ansatz, with $G_1 = 0$ and $n_D = 1$, is akin to the one proposed by Luding *et al.* [38, 56–58] in attempt to derive constitutive relation for a continuum description of a granular material. Our attempt differs in the sense that we consider a finite macroscopic granular medium enclosed in a container, and we seek a reduced model with as little degrees-of-freedom as possible to reduce the complexity of the description.

3 Parameters identification

3.1 Identification method

The identification consists in simulating with DEM the mechanical response of a granular material enclosed in a container submitted to cyclic

shear, and then identifying the parameters of the reduced model given in Eqs. 10 and 11. This process ends up in identifying a triplet of parameters $(\mu_D^{\text{opt}}, G_D^{\text{opt}}, G_1^{\text{opt}})$ for a given duty point. It is realized in two steps, owing to the determination of an initial guess followed by a refinement. We first determine an initial guess by searching for the pair (μ_D, G_D) which leads to closed loops that provides the same dissipated energy as in the DEM. This step is made possible because the dissipated energy does not depend on the conservative contribution associated with G_1 , see Eq. 11. In practice, we look for the numerical function $G_D(\mu_D)$ on a finite interval $\mu_{\min} \leq \mu_D \leq \mu_{\max}$. For all values of μ_D , we look for G_D to minimize (*Matlab's* simplex algorithm *fminsearch*) the root-mean-square error (RMSE) between the dissipated energy during one cycle given by the model and the one given by the DEM simulation. Then, for each pair (μ_D, G_D) , we search a value of G_1 which minimizes the RMSE between the instantaneous stress-strain relations given by the model and the DEM simulation. The best triplet (μ_D, G_D, G_1) thus constitutes a reliable starting point to perform a 3-parameters minimization of the RMSE between the instantaneous simulated and modeled stress-strain relations. This last step leads to a refined estimation of the triplet $(\mu_D^{\text{opt}}, G_D^{\text{opt}}, G_1^{\text{opt}})$. The Fig. 2 presents the results of a simulated response (grey lines) superimposed with the fit (dotted red lines). Both qualitative and quantitative agreements are thus found between the numerical simulations and the Ansatz proposed in equation Eq. 11. Finally, to demonstrate the reliability of the identification process, we show the RMSE between $\tau(\mu_D, G_D, G_1)$ and τ_{DEM} across the three sections of the parameters space, see Figs. 2a, 2b, and 2c. One can see that a unique and well defined global minimum exists in a wide region of parameters.

3.2 Parametric study

The following section focuses on parametric study to identify a law to predict the evolution of the model parameters G_D , G_1 and μ_D by relying on the model described in Sec. 2.2.1 and 2.2.2. For this purpose, the volume ratio Φ and the particle elasticity E_p are varied and for each hysteresis obtained, the protocol described from Sec. 3.1 is applied to retrieve the model parameters. For

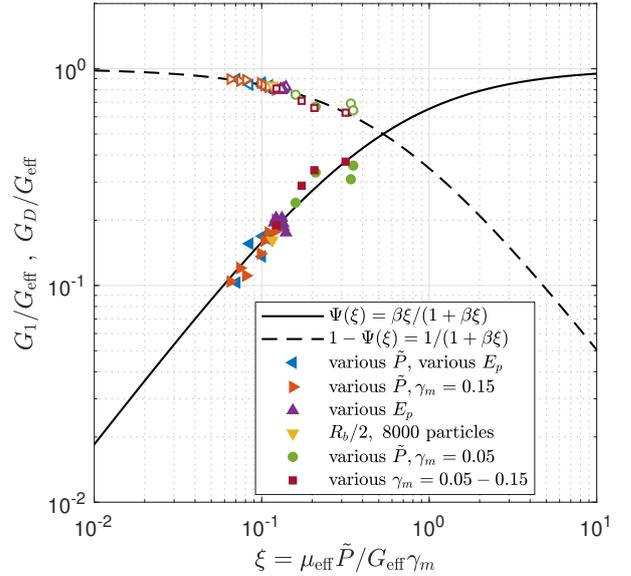


Fig. 4 Function $\Psi(\xi)$ as defined in Eq. 13, as a function of the dimensionless parameter $\xi = \mu_{\text{eff}} \tilde{P} / G_{\text{eff}} \gamma_m$, for the different parameters set. Same symbols are used in Fig. 3. The dashed line is the Ansatz introduced in Eq. 15 with $\beta = 1.882 \pm 0.254$ best fitting all the data shown.

every case, simulations are performed with the same initial condition. Fig. 3 shows the results of the scaling of the fitting parameters for all the combinations of Φ and E_p tested at $\gamma_m = 0.15$. Fig. 3a presents in a log-log scale the dimensionless elastic parameters against the dimensionless pressure. We can see that the points collapse on a master curve, indicating that G_D and G_1 are scaled with a power law with respect to the dimensionless confining pressure. Additional remark on this scaling is that changing E_p without changing Φ does not change the ratio \tilde{P}/k_n as \tilde{P} varies in the same proportions as E_p . Like EMT's shear modulus, G_D and G_1 mostly depend on the ratio \tilde{P}/k_n . Downward triangle on Fig. 3 corresponds to an additional case, where the particles radii are divided by two, conserving the approximate box size which means grain number is multiplied by 2^3 . This shows that the scaling is independent of the grain radius. However test was made at $r_p \times 2$ with a box of only about 3 to 4 grains in size, giving poor results as the number of grains is insufficient to fulfill the continuum mean field approximation. Fig. 3b shows that the effective friction coefficient does not depend on the volume fraction, nor the elastic modulus of the particles, which is consistent with the $\mu(I)$ theory of quasi-static granular

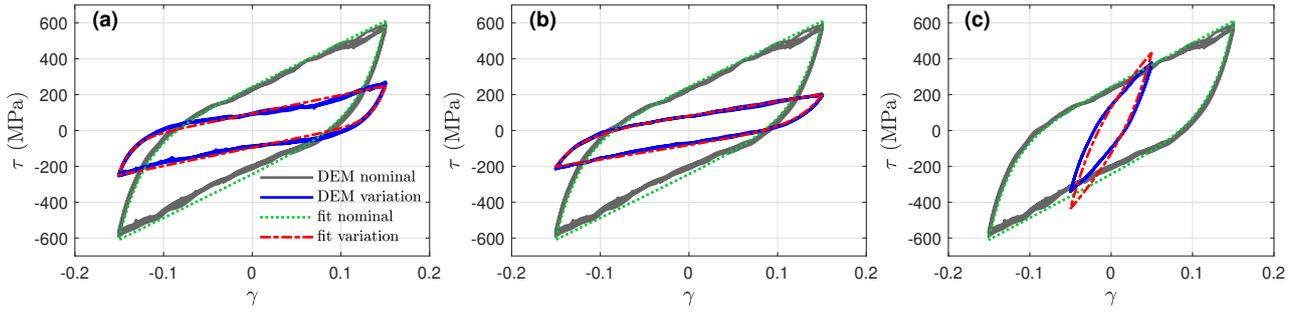


Fig. 5 Comparisons between model and numerical results of the hysteresis curves. Solid grey and blue lines are direct DEM results. Grey lines correspond to the nominal case, blue lines correspond to a variation of one parameter from the nominal case ($\xi = 0.124$): (a) \tilde{P} is divided by 2.5 ($\xi = 0.099$), (b) E_p is divided by 3.2 ($\xi = 0.119$) and (c) γ_m is divided by 3 ($\xi = 0.317$). Red dash dotted lines correspond to response computed from the reduced model where G_D and G_1 are determined with Eq. 13 and 15, μ_D was identified through the process presented in Sec. 3.1.

flow. The fact that μ_D is always greater than μ_p is also expected and in agreement with the fact that effective friction in frictional sheared granular material is a two scale property, at the nanoscale of μ_p and at the typical grain scale. However, immediate numerical comparison can not be made as the setup are different. Indeed we study wall driven shear strain with sliding interfaces whereas granular flow uses rough walls, usually with glass beads. A more immediate comparison would have been to use a setup similar to that used in [15] where shear comes from the tangential translation of a rough layer confining the granular on top of it.

Now observing that if $\mu_D \rightarrow \infty$ then $\tau_D = G_D \times \gamma$ according to Eq. 11, i.e. $G_{\text{eff}} = G_D + G_1$ should equal frictional G_{EMT}^∞ according to Eqs. 2-4 and 10, it should come that

$$G_{\text{eff}} = G_D + G_1 = \alpha \times G_{\text{EMT}}^\infty, \quad (12)$$

where G_{eff} corresponds to an effective shear modulus of the sample. This relation is also supported by Fig. 3c where the data plotted as $G_{\text{eff}}(G_{\text{EMT}}^\infty)$ align on a master curve of slope $\alpha = 0.687 \pm 0.073$. This assumes that the elasto-plastic behavior of the sheared granular media can be decomposed into two separate elastic moduli G_D and G_1 . The latter is associated to pure linear elasticity while the former is associated to hysteretic behavior as described in Sec. 2.3. In line with the EMT model, see Eqs. 2-4, the prefactor α must depend on the inter-particle friction only, which makes the effective shear modulus G_{eff} ranging in between frictionless G_{EMT}^0 and frictional G_{EMT}^∞ values, i.e. $0.4 \leq \alpha = 1/(1 + 3k_t/2k_n) \leq 1$,

see Eqs. 2-4. Concatenating all our data, we find $\alpha = \langle G_{\text{eff}}/G_{\text{EMT}}^\infty \rangle = 0.687 \pm 0.073$, see Fig. 3c.

In agreement with equation Eq. 12, a *partition function* $\Psi(\dots)$ is introduced, whose purpose is to estimate the relative (complementary) contributions of the hysteresis (G_D) and the elasticity (G_1) in the total elasto-plastic shear modulus of the reduced model given in Eq. 11, as a function of relevant dimensional parameters,

$$\Psi(\dots) = G_1/G_{\text{eff}} = 1 - G_D/G_{\text{eff}}. \quad (13)$$

The function Ψ is found, through a dimensional analysis presented in Fig. 4, to depend on a dimensionless number ξ defined as

$$\xi = \frac{\mu_{\text{eff}} \tilde{P}}{G_{\text{eff}} \gamma_m}. \quad (14)$$

Our approach requires to bound the parameter ξ to regimes in which nonlinear Reynolds pressure remains negligible (see Eqs. 7 to 11) and in which significant slip occurs (in order to observe some hysteresis). In practice, the parametric study explored an interval of ξ ranging over a decade around unity, $0.05 \leq \xi \leq 0.5$. Given the data collected in Fig. 4, we then aim at finding a regression in the form of the simplest saturating function,

$$\Psi(\xi) = \frac{\beta \xi}{1 + \beta \xi}, \quad (15)$$

where $\beta = 1.882 \pm 0.254$. This statement is supported by the fact that Ψ must be bounded to 1 when $\xi \gg 1$, meaning that the granular medium becomes purely elastic for $\tilde{P} \rightarrow \infty$ and $\gamma_m \rightarrow$

0. From a physical standpoint, the dimensionless number ξ can be interpreted as the ratio between two shear stress: $\mu_D \tilde{P} = \tau_C$ corresponds to a stress limit while $G_{\text{eff}} \gamma_m$ is the typical shear stress in the granular at the amplitude γ_m . The parameter ξ provides information on how hysteretic versus how elastic is the response.

Interestingly, the parameter ξ can be found also through a non-dimensional analysis of the model, Eqs. 10 and Eq. 11. For this aim, one can introduce the dimensionless strain $\Gamma = \gamma/\gamma_m$ and the dimensionless shear stress $T = \tau/G_{\text{eff}}\gamma_m$, such

that the model becomes

$$\dot{T} = \dot{\Gamma} \left[1 - \left(\frac{1 - \Psi}{\xi} \right) (T - \Psi \Gamma) \text{sign}(\dot{\Gamma}) \right]. \quad (16)$$

The Eq. 16 thus shows that the mechanical response of the granular box, in linear regime of the weak shear amplitude, is governed by the two parameters Ψ and ξ defined on Eqs. 13 and 14 respectively. Then, owing to the relation between Ψ and ξ deduced in Eq. 15 and proven in Fig. 4, the Eq. 16 finally depends on ξ , in agreement with the results shown in Figs. 5 and 6.

Using Eq. 13 and 15, one can approximate the value of G_D and G_1 for a particular case of pressure state \tilde{P} , excitation amplitude γ_m and Young's modulus E_p , and feed the reduced model to compute the response as it is done in Fig. 5. Starting from the nominal case of Fig. 2 (grey line), \tilde{P} , γ_m and E_p are changed. The DEM results and model present reasonable agreement qualitatively in these cases. Quantitatively, one can compare energetic values. The dissipated energy per volume unit and per cycle is

$$E_{\text{diss}}^{\text{cycle}} = \frac{1}{n} \oint_{n \text{ cycles}} \tau d\gamma. \quad (17)$$

In the case of the variation of \tilde{P} and E_p (Fig. 5ab), the relative \tilde{P} error is small ($< 5\%$), while in the case of the variation of γ_m (Fig. 5c) it reaches 45%. This has to be noted that dividing amplitude by three has much more effect than dividing \tilde{P} or E_p by three. Indeed, given EMT scaling law, $\xi \propto (\tilde{P}/E_p)^{2/3} \gamma_m^{-1}$ is more sensitive to a variation of γ_m . A reliable estimation of the maximum stored energy per volume unit, and reached during a cycle, is

$$E_{\text{stored}}^{\text{max}} \simeq \frac{1}{2} \tau_m \gamma_m, \quad (18)$$

with a relative error of 7.2%, 10.6% and 13.8% respectively for the cases of \tilde{P} , E_p and γ_m variation. Here, τ_m and γ_m stand for the maximum measured stress and strain. The case of a purely conservative and linear shear, $\tau = G_{\text{eff}}\gamma$, constitutes a useful reference to represent all the energies,

$$E_{\text{ref}} = \frac{1}{2} G_{\text{eff}} \gamma_m^2, \quad (19)$$

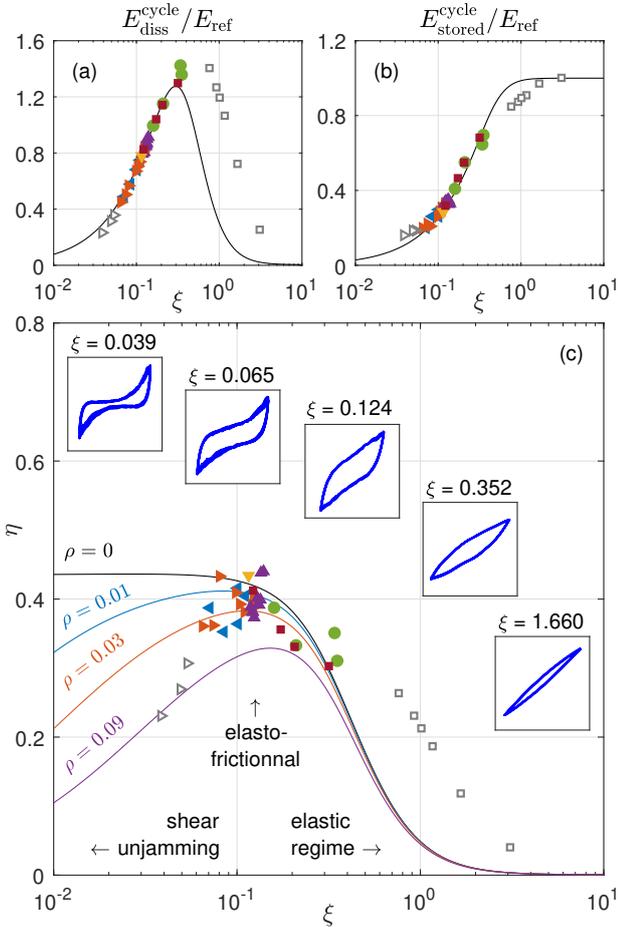


Fig. 6 Loss factor η as a function of the dimensionless parameter ξ (Eq. 20). Left inset: normalized dissipated energy per cycle per volume unit (Eq. 17) as a function of ξ . Right inset: normalized maximal stored energy per cycle per volume unit (Eq. 18) as a function of ξ . The normalization is made with the quantity E_{ref} (Eq. 19). Legend is the same as in Fig. 4. Hollow symbols are supplementary points from DEM calculations at various small γ_m (reversed hollow triangles) and various low pressures (circles). Coloured lines correspond to the loss factor estimated from the model taking into account for a weak nonlinearity associated to the pressure fluctuation, $\rho \leq 0.1$, see Eqs. 8 and 9.

in addition to the loss factor

$$\eta = \frac{E_{\text{diss}}^{\text{cycle}}}{2\pi E_{\text{stored}}^{\text{max}}}. \quad (20)$$

To summarize damping properties in the system, energies and loss factor are plotted on Fig. 6 for each datasets presented in Fig. 3 and 4. Low and high additional values of ξ have been added in Fig. 6 to complete the ones from the parametric study, showing that the loss factor reaches a maximum of about 45% around the value of $\xi = 0.1$, and keeps a value above 30% over approximately one decade. At the largest values of ξ , the behavior is close to a linear elastic response. This agrees with the right inset of Fig. 6 where the quantity $E_{\text{stored}}^{\text{max}}/E_{\text{ref}}$ tends to 1 when $\xi \rightarrow \infty$, as $\tau_m \rightarrow G_{\text{eff}}\gamma_m$. The left inset of Fig. 6 shows that the normalized dissipated energy reaches a maximum for intermediate value of $0.1 \leq \xi \leq 1.0$.

4 Conclusion

In this paper, hysteresis of simply sheared granular media compressed in a box was studied using discrete element method. At the light of EMT and frictional rheology of granular flow, a reduced model was built. This model accounts for the elastic as well as the dissipative behavior, by dividing the response into a combination of hysteretic and a linear response. Dahl model was used to model the hysteretic response. Reasonable agreement was found between numerical results and model thanks to a parametric study revealing the effects of the confining pressure, the particle's elasticity and the shear strain amplitude. A scaling law with the dimensionless parameter ξ has been identified to describe reliably the damping properties of such a system.

As a perspective, it should be interesting to study in more details the dependency of the Reynolds' dilatancy parameter R introduced in [7]. Indeed, this parameter has a great importance on the nonlinearity of the elastic response of confined grains, which in turn implies the existence of an optimal loss factor at intermediate regimes. Also, the effect of the inter-particle friction μ_p is of particular importance and should be investigated to probe effects on the effective friction coefficient μ_{eff} and ultimately on the magnitude of the loss factor η . Indeed, recent works such as [47]

and [59] showed that increasing inter-particle friction extends the elastic domain of the granular packing by decreasing the anisotropy, leading to the possibility of extending the optimal regime to broader amplitudes.

Acknowledgments

We thank Stefano Simone (Politecnico Di Torino) for the preliminary contribution (numerical code) during his Master's internship at ISAE-Supméca.

Declarations

Funding

Not applicable

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Ethics approval

Not applicable

Consent to participate

Not applicable

Consent for publication

Not applicable

Availability of data and materials

The data and the materials are available from the corresponding authors on reasonable request.

Code availability

The *Matlab* and *Yade* codes are available from the corresponding authors on reasonable request.

Authors' contributions

Antoine Faulconnier: Conceptualization, Methodology, Investigation, Numerical Simulations, Writing - Original Draft. **Stéphane Job:** Conceptualization, Methodology, Investigation, Formal Analysis, Writing - Original Draft. **Julien Brocail:** Writing - Review and Editing. **Nicolas Peyret:** Writing - Review and Editing. **Jean-Luc Dion:** Supervision, Writing - Review and Editing.

References

- [1] H. M. Jaeger, S. R. Nagel, and R. P. Behringer. Granular solids, liquids, and gases. *Rev. Mod. Phys.*, 68(4):1259–1273, 1996. [[10.1103/revmodphys.68.1259](https://doi.org/10.1103/revmodphys.68.1259)].
- [2] F. Melo, S. Job, F. Santibanez, and F. Tapia. Experimental evidence of shock mitigation in a hertzian tapered chain. *Phys. Rev. E*, 73:041305, 2006. [[10.1103/PhysRevE.73.041305](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.73.041305)].
- [3] M. Masmoudi, S. Job, M. S. Abbes, I. Tawfiq, and M. Haddar. Experimental and numerical investigations of dissipation mechanisms in particle dampers. *Granul. Matter*, 18(3), 2016. [[10.1007/s10035-016-0667-4](https://doi.org/10.1007/s10035-016-0667-4)].
- [4] C. Hentati, S. Job, J.-Ph. Cr  t  , M. Tak-tak, M. Haddar, and N. Dauchez. On the contact law of open-cell poro-granular materials. *International Journal of Solids and Structures*, 208-209:83–92, 2021. ISSN 0020-7683. [<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.10.023>].
- [5] P. A. Johnson and X. Jia. Nonlinear dynamics, granular media and dynamic earthquake triggering. *Nature*, 437(7060):871–874, 2005. [[10.1038/nature04015](https://doi.org/10.1038/nature04015)].
- [6] X. Jia, T. Brunet, and J. Laurent. Elastic weakening of a dense granular pack by acoustic fluidization: Slipping, compaction, and aging. *Phys. Rev. E*, 84(2), 2011. [[10.1103/physreve.84.020301](https://doi.org/10.1103/physreve.84.020301)].
- [7] J. Ren, J. A. Dijksman, and R. P. Behringer. Reynolds pressure and relaxation in a sheared granular system. *Phys. Rev. Lett.*, 110(1):018302, 2013. [[10.1103/physrevlett.110.018302](https://doi.org/10.1103/physrevlett.110.018302)].
- [8] D. Esp  ndola, B. Galaz, and F. Melo. Creep of sound paths in consolidated granular material detected through coda wave interferometry. *Phys. Rev. E*, 94:012901, 2016. [[10.1103/PhysRevE.94.012901](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.012901)].
- [9] Andrea J. Liu and Sidney R. Nagel. Jamming is not just cool any more. *Nature*, 396(6706):21–22, 1998. [[10.1038/23819](https://doi.org/10.1038/23819)].
- [10] R. Zu  niga, G. Varas, and S. Job. Geometry-controlled phase transition in vibrated granular media. *Sci. Rep.*, 12(1):14989, 2022. [[10.1038/s41598-022-18965-4](https://doi.org/10.1038/s41598-022-18965-4)].
- [11] C. S. O’Hern, L. E. Silbert, A. J. Liu, and S. R. Nagel. Jamming at zero temperature and zero applied stress: The epitome of disorder. *Phys. Rev. E*, 68(1):011306, 2003. [[10.1103/physreve.68.011306](https://doi.org/10.1103/physreve.68.011306)].
- [12] D. Bi, J. Zhang, B. Chakraborty, and R. P. Behringer. Jamming by shear. *Nature*, 480(7377):355–358, 2011. [[10.1038/nature10667](https://doi.org/10.1038/nature10667)].
- [13] T. S. Majmudar, M. Sperl, S. Luding, and R. P. Behringer. Jamming transition in granular systems. *Phys. Rev. Lett.*, 98(5):058001, 2007. [[10.1103/physrevlett.98.058001](https://doi.org/10.1103/physrevlett.98.058001)].
- [14] Y. Xing, J. Zheng, J. Li, Y. Cao, W. Pan, J. Zhang, and Y. Wang. X-ray tomography investigation of cyclically sheared granular materials. *Phys. Rev. Lett.*, 126(4):048002, 2021. [[10.1103/physrevlett.126.048002](https://doi.org/10.1103/physrevlett.126.048002)].
- [15] M. Yang, M. Taiebat, P. Mutabaruka, and F. Radjai. Evolution of granular materials under isochoric cyclic simple shearing. *Phys. Rev. E*, 103(3):032904, 2021. [[10.1103/physreve.103.032904](https://doi.org/10.1103/physreve.103.032904)].
- [16] Holger G  tz and Thorsten P  schel. Granular meta-material: response of a bending beam. *Granular Matter*, 25(3), jul 2023. [[10.1007/s10035-023-01336-9](https://doi.org/10.1007/s10035-023-01336-9)].
- [17] K. Walton. The effective elastic moduli of a random packing of spheres. *J. Mech. Phys. Solids*, 35(2):213–226, 1987. [[10.1016/0022-5096\(87\)90036-6](https://doi.org/10.1016/0022-5096(87)90036-6)].
- [18] K. L. Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1985. [[10.1017/cbo9781139171731](https://doi.org/10.1017/cbo9781139171731)].
- [19] Valentin L. Popov. *Contact Mechanics and Friction*. Springer Berlin Heidelberg, 2010. [[10.1007/978-3-642-10803-7](https://doi.org/10.1007/978-3-642-10803-7)].

- [20] GDR MiDi. On dense granular flows. *Eur. Phys. J. E*, 14(4):341–365, 2004. [[10.1140/epje/i2003-10153-0](https://doi.org/10.1140/epje/i2003-10153-0)].
- [21] P. G. Rognon, J.-N. Roux, M. Naaim, and F. Chevoir. Dense flows of cohesive granular materials. *Journal of Fluid Mechanics*, 596: 21–47, 2008. [[10.1017/S0022112007009329](https://doi.org/10.1017/S0022112007009329)].
- [22] P. Jop. Rheological properties of dense granular flows. *C. R. Phys.*, 16(1):62–72, 2015. [[10.1016/j.crhy.2014.12.001](https://doi.org/10.1016/j.crhy.2014.12.001)].
- [23] A. Fall, M. Badetti, G. Ovarlez, F. Chevoir, and J.-N. Roux. Dry granular flows – Rheological measurements of the $\mu(I)$ –rheology. *EPJ Web of Conferences*, 140:03005, 2017. [[10.1051/epjconf/201714003005](https://doi.org/10.1051/epjconf/201714003005)].
- [24] Frédéric da Cruz, Sacha Emam, Michaël Prochnow, Jean-Noël Roux, and François Chevoir. Rheophysics of dense granular materials: Discrete simulation of plane shear flows. *Physical Review E*, 72(2):021309, aug 2005. [[10.1103/physreve.72.021309](https://doi.org/10.1103/physreve.72.021309)].
- [25] P. Jop, Y. Forterre, and O. Pouliquen. A constitutive law for dense granular flows. *Nature*, 441(7094):727–730, 2006. [[10.1038/nature04801](https://doi.org/10.1038/nature04801)].
- [26] Sean McNamara and W. R. Young. Inelastic collapse and clumping in a one-dimensional granular medium. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 4(3):496–504, 1992. [[10.1063/1.858323](https://doi.org/10.1063/1.858323)].
- [27] F. Pacheco-Vázquez and S. Dorbolo. Rebound of a confined granular material: combination of a bouncing ball and a granular damper. *Sci. Rep.*, 3(1), 2013. [[10.1038/srep02158](https://doi.org/10.1038/srep02158)].
- [28] M. Sánchez, G. Rosenthal, and L. A. Pugnaloni. Universal response of optimal granular damping devices. *J. Sound Vib.*, 331(20): 4389–4394, 2012. [[10.1016/j.jsv.2012.05.001](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.05.001)].
- [29] G. Michon, A. Almajid, and G. Aridon. Soft hollow particle damping identification in honeycomb structures. *J. Sound Vib.*, 332(3): 536–544, 2013. [[10.1016/j.jsv.2012.09.024](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.09.024)].
- [30] M. V. Ferreyra, M. Baldini, L. A. Pugnaloni, and S. Job. Effect of lateral confinement on the apparent mass of granular dampers. *Granul. Matter*, 23(2):45, 2021. [[10.1007/s10035-021-01090-w](https://doi.org/10.1007/s10035-021-01090-w)].
- [31] D. Assimaki, E. Kausel, and A. Whittle. Model for dynamic shear modulus and damping for granular soils. *J. Geotech. Geoenviron.*, 126(10):859–869, 2000. [[10.1061/\(asce\)1090-0241\(2000\)126:10\(859\)](https://doi.org/10.1061/(asce)1090-0241(2000)126:10(859))].
- [32] H. G. Brandes. Simple shear behavior of calcareous and quartz sands. *Geotech. Geol. Eng.*, 29(1):113–126, 2010. [[10.1007/s10706-010-9357-x](https://doi.org/10.1007/s10706-010-9357-x)].
- [33] K. Senetakis, A. Anastasiadis, and K. Pitilakis. Normalized shear modulus reduction and damping ratio curves of quartz sand and rhyolitic crushed rock. *Soils Found.*, 53(6): 879–893, 2013. [[10.1016/j.sandf.2013.10.007](https://doi.org/10.1016/j.sandf.2013.10.007)].
- [34] A. Awdi, C. Chateau, F. Chevoir, J.-N. Roux, and A. Fall. Viscous dissipation in large amplitude oscillatory shear of unsaturated wet granular matter. *Journal of Rheology*, 67(2):365–372, mar 2023. [[10.1122/8.0000507](https://doi.org/10.1122/8.0000507)].
- [35] T.-T. Ng and R. Dobry. Numerical simulations of monotonic and cyclic loading of granular soil. *J. Geotech. Eng.*, 120(2):388–403, 1994. [[10.1061/\(asce\)0733-9410\(1994\)120:2\(388\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9410(1994)120:2(388))].
- [36] T. G. Sitharam and J. S. Vinod. Evaluation of shear modulus and damping ratio of granular materials using discrete element approach. *Geotech. Geol. Eng.*, 28(5):591–601, 2010. [[10.1007/s10706-010-9317-5](https://doi.org/10.1007/s10706-010-9317-5)].
- [37] V. Magnanimo and S. Luding. A local constitutive model with anisotropy for ratcheting under 2d axial-symmetric isobaric deformation. *Granul. Matter*, 13(3):225–232, 2011. [[10.1007/s10035-011-0266-3](https://doi.org/10.1007/s10035-011-0266-3)].
- [38] D. Krijgsman and S. Luding. 2d cyclic pure shear of granular materials, simulations and model. In *AIP Conf. Proc.* AIP, 2013. [[10.1063/1.4812159](https://doi.org/10.1063/1.4812159)].

- [39] Y. Jiang and M. Liu. Granular solid hydrodynamics. *Granul. Matter*, 11(3):139–156, 2009. [[10.1007/s10035-009-0137-3](https://doi.org/10.1007/s10035-009-0137-3)].
- [40] G. Gudehus. Granular solid dynamics with eutaxy and hysteresis. *Acta Geotech.*, 15(5):1173–1187, 2019. [[10.1007/s11440-019-00820-y](https://doi.org/10.1007/s11440-019-00820-y)].
- [41] V. Šmilauer *et al.* Yade Documentation (3rd ed.), The Yade Project, 2021. URL <https://doi.org/10.5281/zenodo.5705394>.
- [42] Z. Shojaaee, L. Brendel, J. Török, and D. E. Wolf. Shear flow of dense granular materials near smooth walls. II. block formation and suppression of slip by rolling friction. *Phys. Rev. E*, 86(1):011302, 2012. [[10.1103/physreve.86.011302](https://doi.org/10.1103/physreve.86.011302)].
- [43] H. A. Makse, N. Gland, D. L. Johnson, and L. Schwartz. Granular packings: Nonlinear elasticity, sound propagation, and collective relaxation dynamics. *Phys. Rev. E*, 70(6):061302, 2004. [[10.1103/physreve.70.061302](https://doi.org/10.1103/physreve.70.061302)].
- [44] C. Thornton. Numerical simulations of deviatoric shear deformation of granular media. *Géotechnique*, 50(1):43–53, 2000. [[10.1680/geot.2000.50.1.43](https://doi.org/10.1680/geot.2000.50.1.43)].
- [45] J. D. Goddard. Continuum modeling of granular assemblies. In H. J. Herrmann, J.P. Hovi, and S. Luding, editors, *Physics of Dry Granular Media*, NATO ASI Series E 350, pages 1–24. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1998. [[10.1007/978-94-017-2653-5_1](https://doi.org/10.1007/978-94-017-2653-5_1)].
- [46] J. Sun and S. Sundaresan. A constitutive model with microstructure evolution for flow of rate-independent granular materials. *J. Fluid Mech.*, 682:590–616, 2011. [[10.1017/jfm.2011.251](https://doi.org/10.1017/jfm.2011.251)].
- [47] E. DeGiuli and M. Wyart. Friction law and hysteresis in granular materials. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 114(35):9284–9289, 2017. [[10.1073/pnas.1706105114](https://doi.org/10.1073/pnas.1706105114)].
- [48] J. Fei, Y. Jie, X. Sun, and H. Xiong. Physical interpretation of shear-rate behaviour of soils and geotechnical solution to the coefficient of start-up friction with low inertial number. *Sci. Rep.*, 10(1), 2020. [[10.1038/s41598-020-69023-w](https://doi.org/10.1038/s41598-020-69023-w)].
- [49] E. Piollet, D. Poquillon, and G. Michon. Dynamic hysteresis modelling of entangled cross-linked fibres in shear. *J. Sound Vib.*, 383:248–264, 2016. [[10.1016/j.jsv.2016.06.023](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2016.06.023)].
- [50] P. R. Dahl. A solid friction model. Technical report, Aerospace Corp (El Segundo, CA), 1968. URL <https://doi.org/10.21236/ada041920>.
- [51] P. R. Dahl. Measurement of solid friction parameters of ball bearings. Technical report, Aerospace Corp (El Segundo, CA), 1977. URL <https://doi.org/10.21236/ada042599>.
- [52] N. Peyret, M. Rosatello, G. Chevallier, and J.-L. Dion. A mindlin derived dahl friction model. *Mech. Mach. Theory*, 117:48–55, 2017. [[10.1016/j.mechmachtheory.2017.06.019](https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2017.06.019)].
- [53] A. K. Padthe, B. Drincic, J. Oh, D. D. Rizos, S. D. Fassois, and D. S. Bernstein. Duhem modeling of friction-induced hysteresis. *IEEE Contr. Syst. Mag.*, 28(5):90–107, 2008. [[10.1109/mcs.2008.927331](https://doi.org/10.1109/mcs.2008.927331)].
- [54] D. Helmick and W. Messner. Describing function analysis of dahl model friction. In *American Control Conference*. IEEE, 2009. [[10.1109/acc.2009.5159996](https://doi.org/10.1109/acc.2009.5159996)].
- [55] A. Al Majid and R. Dufour. Harmonic response of a structure mounted on an isolator modelled with a hysteretic operator: experiments and prediction. *J. Sound Vib.*, 277(1-2):391–403, 2004. [[10.1016/j.jsv.2003.09.025](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2003.09.025)].
- [56] S. Luding. Anisotropy in cohesive, frictional granular media. *J. Phys.: Condens. Matter*, 17(24):S2623–S2640, 2005. [[10.1088/0953-8984/17/24/017](https://doi.org/10.1088/0953-8984/17/24/017)].
- [57] S. Luding and E. S. Perdahcioğlu. A local constitutive model with anisotropy for various homogeneous 2d biaxial deformation

modes. *Chem. Ing. Tech.*, 83(5):672–688, 2011. [[10.1002/cite.201000180](#)].

- [58] T. Weinhart, R. Hartkamp, A. R. Thornton, and S. Luding. Coarse-grained local and objective continuum description of three-dimensional granular flows down an inclined surface. *Phys. Fluids*, 25(7):070605, 2013. [[10.1063/1.4812809](#)].
- [59] C. Goldenberg and I. Goldhirsch. Friction enhances elasticity in granular solids. *Nature*, 435(7039):188–191, 2005. [[10.1038/nature03497](#)].

6.3 . Conclusion

Dans ce chapitre, la réponse hystérétique en cisaillement simple d'un milieu granulaire sous pression a été étudiée en utilisant la méthode des éléments discrets. Un modèle réduit a été proposé en s'appuyant sur les modèles de milieu effectif et sur la rhéologie des écoulements granulaires. Ce modèle rend compte du comportement élastique mais aussi du comportement dissipatif, en divisant la réponse en une somme de réponse hystérétique et élastique. Le modèle de Dahl, présenté au chapitre Chap. 5 a été utilisé pour modéliser la contribution hystérétique. Nous trouvons un accord raisonnable entre les résultats numériques et le modèle réduit en réalisant une étude paramétrique révélant les effets de la pression de confinement, l'élasticité des particules et l'amplitude de la déformation en cisaillement. Cette étude a permis de révéler une loi d'échelle vis-à-vis d'un paramètre sans dimension ξ , qui s'avère pertinente pour étudier les propriétés dissipatives du système.

Le modèle réduit hystérétique de milieu granulaire ainsi défini permet d'envisager une utilisation comme loi de comportement dans un modèle plus complexe, ce que nous proposons dans le chapitre suivant (Chap. 7), à travers la modélisation d'une poutre composite granulaire dont les propriétés d'atténuation reposent sur la réponse dissipative du milieu granulaire soumis à du cisaillement.

Troisième partie

Contrôle vibratoire par structures composites à âme granulaire

7 - Poutre composite à âme granulaire

Résumé

Ce chapitre synthétise les travaux présentés tout au long de ce manuscrit. Nous nous intéressons ici à une poutre architecturée pour le contrôle des vibrations. La solution dissipative retenue et présentée dans les chapitres Chap. 5 et Chap. 6, consiste à imposer une déformation en cisaillement à un milieu granulaire pour mobiliser le frottement entre particules. Afin de tirer profit de cette dissipation dans le cadre du contrôle des ondes de flexion, nous proposons d'architecturer une poutre composite à âme granulaire. Celle-ci consiste à placer un milieu granulaire contraint entre deux poutres. Les mouvements de flexion en phase de chacune des deux poutres imposent le cisaillement dans l'âme granulaire. Nous proposons un modèle homogénéisé de poutre tri-couches non-linéaire. La loi de comportement du milieu granulaire dans le multi-couches est celle établie dans le Chap. 6. Nous explorons les performances d'un tel système, en terme d'atténuation vibratoire, par comparaison avec un multi-couche viscoélastique pour donner des pistes de conception et de mise en œuvre expérimentale d'une telle solution.

7.1 . État de l'art

Le chapitre Chap. 6 a montré l'efficacité d'un milieu granulaire comprimé à dissiper l'énergie lorsqu'on le soumet à une déformation en cisaillement. Un moyen connu de provoquer le cisaillement à partir d'un mouvement de flexion consiste à former un empilement de trois couches constitué de deux plaques élastiques (deux éléments de structure) de part et d'autre d'une couche d'un matériau plus souple et dissipatif. Par la suite, nous désignerons ces deux poutres externes (parfois numérotées poutres 1 et 3) comme la *peau* du matériau composite, la poutre intérieure constituant son *âme* (parfois numérotée poutre 2). La flexion de l'ensemble impose un mouvement longitudinal relatif des deux poutres le long de la fibre neutre du multi-couches, provoquant ainsi le cisaillement de la couche centrale. Le cisaillement de la couche centrale est la principale source de dissipation dans ce type de matériau composite [61].

Les dispositifs amortissant reposant sur le cisaillement de matériaux viscoélastiques sont aujourd'hui répandus dans l'industrie (voir [113] par exemple). Pour de telles structures, les hypothèses cinématiques, géométriques, et sur les propriétés matériaux orientent les choix de modélisations. Un grand nombre de modèles de poutre existe dans la littérature, nous n'en évoquons ici que quelques uns. La plupart sont des modèles homogénéisés de flexion de poutre sandwich. Pour que les poutres externes imposent le cisaillement dans la couche intermédiaire, cette dernière doit être plus souple que les deux autres couches, son module élastique

est petit devant celui des couches externes. Par ailleurs, la couche centrale travaille essentiellement en cisaillement. C'est sous ces deux hypothèses que Kerwin propose un des tout premier modèle [61] en 1959, permettant d'obtenir le facteur de perte homogénéisé de la poutre composite en fonction des propriétés de chaque couche et du facteur de perte de la couche viscoélastique intermédiaire. Par la suite, d'autres modèles homogénéisés ont été proposés. Le modèle de Guyader dans [48], est un modèle d'Euler-Bernoulli enrichi d'un terme lié à la contrainte de cisaillement dans l'âme. Un autre modèle, plus complet est proposé dans par DiTaranto, Mead et Markus pour couvrir un plus grand nombre de cas par la prise en compte de termes de dérivations spatiales d'ordre supérieure dans l'équation de la dynamique provenant du cisaillement des peaux [87]. Cela est utile par exemple lorsque la couche intermédiaire est plus ou moins rigide et épaisse. Le modèle DTMM est validé expérimentalement dans [76]. Le modèle de [132] propose un modèle proche de DTMM d'ordre plus bas qui s'avère valable uniquement dans la limite des très grandes longueur d'onde. Dans ces cas de modèles homogénéisés, l'équation d'onde est assimilable à une version enrichie du modèle de flexion d'Euler-Bernoulli. Il existe également des modèles non homogénéisés. Par exemple, [5] propose un modèle éléments finis où les peaux sont modélisées par des éléments de poutre d'Euler-Bernoulli et la couche viscoélastique par des termes de couplage entre les deux poutres. Ceci permet notamment de prendre en compte la déformation en traction-compression de la couche viscoélastique dans la direction transversale.

Dans la plupart des cas [76, 87, 5, 61], l'amortissement est introduit dans la couche viscoélastique par un module de cisaillement complexe, ce qui rend possible la résolution directe dans le domaine fréquentiel. Dans notre cas, ces méthodes ne sont pas valables à causes des non-linéarités de frottement du modèle réduit de milieu granulaire ; une résolution numérique selon un schéma d'intégration temporelle, tel qu'abordé au chapitre Chap. 4.

7.2 . Analyse du cisaillement dans une poutre composite visco-élastique

Nous présentons d'abord ici un cas de référence illustrant le mécanisme de cisaillement dans un multi-couches viscoélastique. Le modèle réalisé sous *Abaqus*, est constitué de deux poutres en acier (de peaux) de part et d'autre d'une couche d'un matériau de type élastomère viscoélastique (l'âme). La poutre composite a une longueur $L = 1.1$ m et une largeur $b = 0.04$ m. Les matériaux de ces trois couches sont donnés dans le tableau Tab. 7.1 et correspondent a des choix typiques trouvés dans la littérature [5, 17]. On réalise d'abord une analyse modale dans le cas non-amorti ($\eta_{ve} = 0$) pour observer la cinématique des différentes couches et mettre en évidence le cisaillement, représenté pour le premier mode propre sur la Fig. 7.1a. D'un point de vue cinématique, la section transversale de chacune

des peaux subit uniquement une rotation d'axe z , sans cisaillement, la section transverse demeurant perpendiculaire à la fibre neutre en accord avec l'hypothèse des poutres de Bernoulli. En revanche l'âme subit une déformation en cisaillement simple.

| | E (Pa) | ν | ρ (kg.m ⁻³) | η | G (Pa) |
|----------|----------|-------|------------------------------|-------------------|------------------------------------|
| Couche 1 | 210e9 | 0.3 | 7850 | - | - |
| Couche 2 | 1e6 | 0.45 | 950 | $\eta_{ve} = 0.3$ | $\frac{E_2}{2(1+\nu_2)} = 0.345e6$ |
| Couche 3 | 210e9 | 0.3 | 7850 | - | - |

Table 7.1 – Propriétés mécaniques du multi-couches viscoélastique de référence : module d'Young E , coefficient de Poisson ν , masse volumique ρ , facteur de perte η et module de cisaillement G .

Comme évoqué en introduction, le cisaillement repose sur le fait que le mouvement de flexion des deux poutres élastiques externes impose les déplacements au niveau des interfaces avec l'âme souple. Cela nécessite donc que les raideurs en flexion de chaque couche, $B = EI$ avec E le module d'Young d'une couche et I son moment quadratique, soient telles que $B_{int} \ll B_{ext}$.

Les croix bleues sur la Fig. 7.1b représentent la courbe de dispersion des modes obtenus avec le modèle 2D sous Abaqus, se propageant dans le sens des x croissants dans la poutre composite illustrée en Fig. 7.1a. On peut distinguer deux branches. La première, sans fréquence de coupure (démarrant à fréquence nulle pour un nombre d'onde nul) correspond au mode de flexion, de type Lamb antisymétrique A_0 [108]. La seconde, avec une fréquence de coupure autour de 1200 Hz correspond au premier mode symétrique de Lamb S_0 . À cette fréquence de coupure, les deux couches externes se déplacent en opposition de phase de sorte que l'âme se déforme en traction-compression dans la direction transverse. Contrairement au mode de flexion, ce mode de propagation n'engendre pas ou peu de cisaillement dans l'âme (au mieux un cisaillement pure peu efficace car réparti sur des longueurs d'ondes longitudinales importantes, cf. Fig. 7.1b). La fréquence de coupure de ce mode de propagation dépend au premier ordre de la raideur en compression de la couche souple, donc principalement de son épaisseur et de son module élastique ainsi que de la masse linéique des couches externes. La validité d'un modèle ne prenant en compte que la flexion n'est donc possible qu'en dessous de cette fréquence de coupure. Cette condition est largement satisfaite car nous limitons cette étude aux basses fréquences, autour du premier mode propre en flexion vers 2.5 Hz. Les relations de dispersions de trois des modèles flexion de poutre multi-couches (DTMM[87], SYD [132] et Guyader [48]) sont tracées sur la figure Fig. 7.1b. Les trois modèles et la simulation FEM convergent vers les mêmes valeurs dans la limite des grandes longueurs d'ondes. En revanche, le modèle SYD s'écarte rapidement des trois autres à moyennes et hautes fréquences, étant limité à des configurations où l'âme est très épaisse. Les modèles de Guyader et DTMM

présentent un accord satisfaisant sur une large gamme de fréquences lorsque l'âme est souple. En revanche, nous avons pu observer que le modèle de Guyader devient inadapté lorsque l'âme est plus rigide. Au contraire, le modèle DTMM, régit par une équation d'ordre plus élevé, permet de mieux rendre compte de ce cas de figure. Cette plus grande précision (avec la prise en compte d'un terme de dérivée spatiale d'ordre 6) provient notamment de la prise en compte du cisaillement dans les couches externes, qui conduit à augmenter l'ordre de dérivation pour exprimer l'équation d'ondes en fonction de la seule variable de déplacement transversale.

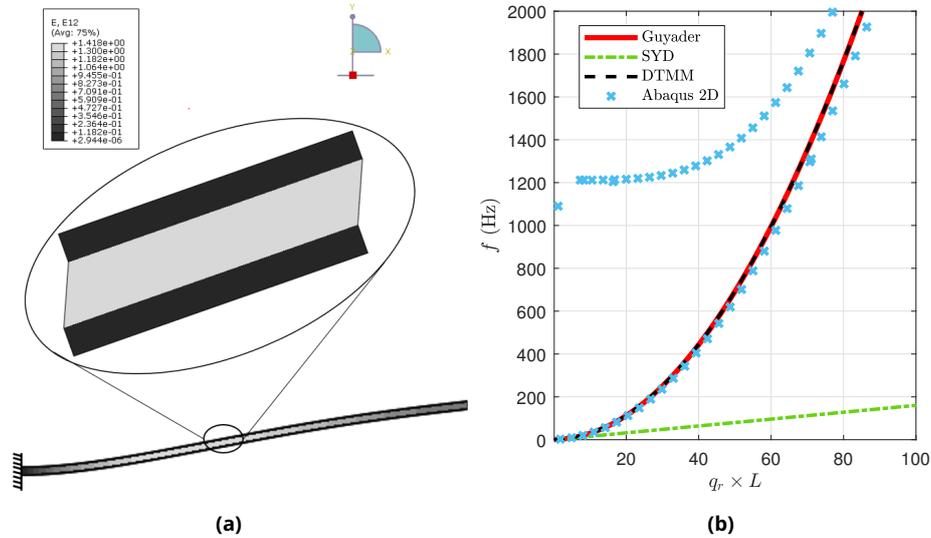


Figure 7.1 - (a) Portion de poutre composite ($\eta_{ve} = 0$) avec déformée du premier mode propre de flexion (à 2.5 Hz), le niveau de gris décrivant l'amplitude de déformation en cisaillement dans le plan de coupe et (b) courbe de dispersion de cette même poutre comparée à quelques modèles en flexion pure de poutre multi-couches issus de la littérature [87, 48, 132].

Dans la suite de cette étude, le modèle retenu pour le multi-couches à âme granulaire est celui de Guyader. Celui-ci présente un bon accord avec la référence Abaqus. Ce modèle est basé sur celui d'Euler-Bernoulli et tiens compte de l'énergie de déformation en cisaillement d'une couche centrale souple. Enfin, la résolution du modèle d'Euler-Bernoulli étant déjà implémentée dans le chapitre Chap. 4, l'implémentation du modèle de Guyader adapté à notre poutre composite à âme granulaire en est d'autant plus facilité.

7.3 . Modèle de poutre composite à âme granulaire

Dans cette section, nous décrivons le modèle de poutre multi-couches à âme granulaire qui a été développé pour cette étude. Tout d'abord, nous posons les hypothèses en réalisant une description cinématique du système. Ensuite, nous dé-

crivons la formulation énergétique du problème. Puis nous détaillons les hypothèses spécifiques au milieu granulaire et son intégration au problème. Enfin, la résolution spatiale par la méthode des éléments finis est décrite.

7.3.1 . Hypothèses

Le modèle de multi-couches que nous proposons s'appuie sur celui de Guyader [48]. Il en diffère par l'ajout d'effets non-linéaires et dissipatifs associés à la loi de comportement du milieu granulaire établie au chapitre Chap. 6. En notant $\mathbf{u}^n(x, y, z) = (u_x^n, u_y^n, u_z^n)$ le déplacement dans la couche n , cf. Fig. 7.2, la poutre composite est modélisée avec les hypothèses suivantes :

- i. Le modèle est bidimensionnel, en admettant une symétrie par translation dans la largeur des poutres, $\mathbf{u}^n(x, y) = (u_x^n, u_y^n)$.
- ii. Les déplacements transverses sont indépendants de la coordonnée transverse, $u_y^n(x, t)$ dans les trois couches. Cette condition suppose une grande rigidité en compression dans la direction de l'épaisseur (hypothèse de poutres minces) pour négliger les déformations transverses, $\varepsilon_{yy}^n = \partial_y u_y^n = 0$ pour $n = 1, n = 2$ et $n = 3$.
- iii. Les couches $n = 1$ et $n = 3$ travaillent en flexion pure (pas de cisaillement, pas d'allongement), leur section reste droite, perpendiculaire à la fibre neutre (hypothèse de Bernoulli), soit $\partial_x u_y^n + \partial_y u_x^n = 0$ (pas de cisaillement). On déduit de la condition (ii) que le déplacement longitudinal est une fonction affine de y qui s'annule sur la fibre neutre (pas d'allongement), $u_x^n = -y\partial_x u_y^n$ pour $n = 1$ et $n = 3$.
- iv. Toute la déformation en cisaillement de poutre composite est localisée dans l'âme ($n = 2$), où elle est supposée constante dans sa section. Le déplacement longitudinal u_x^2 est donc une fonction affine de la coordonnée transverse y . Elle doit notamment être suffisamment souple pour que le cisaillement lui soit imposé par les deux couches externes.
- v. Les déplacements sont continus aux interfaces, les couches ne glissant pas les unes par rapport aux autres.

Partant de ces hypothèses et en introduisant un déplacement transverse $w(x, t)$ fonction de la coordonnée longitudinale x et du temps t , le déplacement dans les couches de surface 1 et 3 s'exprime de la façon suivante :

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} u_x^1 \\ u_y^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y\partial_x w \\ w \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -y\partial_x w \\ w \end{bmatrix}. \quad (7.1)$$

La continuité des déplacements entre les différentes couches (voir Fig. 7.2) s'exprime, dans le repère respectif de chaque poutre par rapport à sa fibre neutre, par :

$$\begin{aligned} u_x^2(x, y = e_2/2) &= u_x^1(x, y = -e_1/2) = \frac{e_1}{2}\partial_x w(x), \\ u_x^2(x, y = -e_2/2) &= u_x^3(x, y = e_3/2) = -\frac{e_3}{2}\partial_x w(x). \end{aligned} \quad (7.2)$$

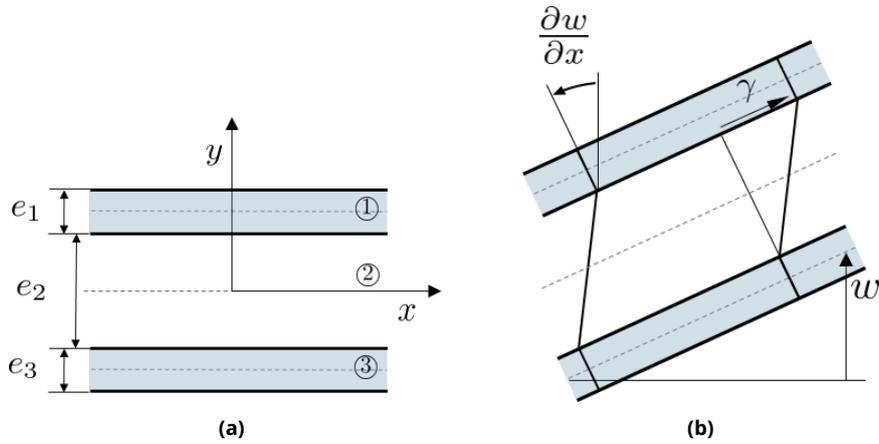


Figure 7.2 – Représentations schématiques de la poutre sandwich (a) au repos et (b) déformée.

Le déplacement dans l'âme s'exprime par :

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} g(y)\partial_x w \\ w \end{bmatrix}, \quad (7.3)$$

où $g(y)$ ¹ est définie par :

$$g(y) = y \frac{e_1 + e_3}{2e_2} + \frac{e_1 - e_3}{4}. \quad (7.4)$$

Cette définition de $g(y)$ permet de rendre compte d'un cisaillement dans l'âme qui soit une fonction affine de y et compatible avec la continuité des déplacements aux interfaces entre les couches, exprimée par l'équation Eq. 7.2 et illustrée par la figure Fig. 7.2b. À partir des déplacements, il est alors possible d'exprimer les déformations dans les différentes couches. Les deux poutres externes vérifient bien les hypothèses d'Euler-Bernoulli :

$$\varepsilon_{xx}^{1,3} = -y\partial_x^2 w \text{ (nulle sur la fibre neutre } y = 0), \quad \varepsilon_{yy}^{1,3} = 0, \quad \varepsilon_{xy}^{1,3} = 0. \quad (7.5)$$

Les hypothèses cinématiques de la couche intermédiaire donnent une déformation en cisaillement non nulle telle que :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^2 &= g(y)\partial_x^2 w \text{ (nulle sur la fibre neutre } y = 0 \text{ si } e_1 = e_3), \quad \varepsilon_{yy}^2 = 0, \\ \varepsilon_{xy}^2 &= \frac{1}{2}(\partial_x w + \partial_y[g(y)\partial_x w]) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{e_1 + e_3}{2e_2}\right)\partial_x w = \frac{r}{2}\partial_x w = \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

en posant le rapport géométrique suivant $r = \left(1 + \frac{e_1 + e_3}{2e_2}\right)$ et en définissant la déformation en cisaillement (*engineering shear strain*) dans l'âme par

$$\gamma = r\partial_x w. \quad (7.6)$$

1. Ce modèle de poutre à trois couches (sans le terme non-linéaire) est issu de [48], dans laquelle l'expression de $g(y)$ à l'équation (3.74) semble erronée (facteur 2 et erreur de signe).

Conformément à la définition retenue au chapitre Chap. 6, la déformation en cisaillement (*engineering shear strain*) $\gamma = \gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ est égale au double de la composante tensorielle (*tensorial shear strain*) $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = (\partial_x u_y + \partial_y u_x)/2$.

7.3.2 . Formulation énergétique

i. Équation du mouvement

Nous reproduisons ici le modèle de multi-couches tel que proposé par Guyader [48]. Dans un premier temps, le modèle de poutre composite est formulé dans l'hypothèse où les couches sont faites de matériaux linéaires élastiques, dont le comportement est régi par la loi de Hooke. La non-linéarité est ajoutée dans un second temps à la sous-section suivante.

L'énergie cinétique dans le tri-couches de longueur L s'exprime :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_0^L \sum_{i=1}^3 \rho_i I_i (\partial_x \dot{w})^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \sum_{i=1}^3 \rho_i S_i \dot{w}^2 dx, \quad (7.7)$$

où $I_i = be_i^3/12$ correspond au moment quadratique de la couche i , ρ_i sa masse volumique et S_i sa section droite. L'équation Eq. 7.7 fait intervenir les termes associés aux inerties de rotation et de translation des sections transverses des couches. L'énergie potentielle de déformation des peaux 1 et 3 ne contient que la flexion, elle s'exprime de la façon suivante en élasticité linéaire :

$$\mathcal{V}_{i=1,3} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\int_{S_i} \sigma_{xx}^i \varepsilon_{xx}^i dS \right] dx, \quad (7.8)$$

pour l'âme, on ajoute à la flexion l'énergie potentielle de déformation associée au cisaillement :

$$\mathcal{V}_2 = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\int_{S_2} \sigma_{xx}^2 \varepsilon_{xx}^2 dS + \int_{S_2} \tau \gamma dS \right] dx, \quad (7.9)$$

avec $\tau = G_2 \gamma$ et $\sigma_{xx}^i = E_i \varepsilon_{xx}^i$, dans l'hypothèse de l'élasticité linéaire. En substituant les expressions Eq. 7.6 et 7.5 dans Eq. 7.9 et 7.8, on obtient l'énergie potentielle de déformation totale :

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3 = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\overline{EI} (\partial_x^2 w)^2 + G_2 D_2 (\partial_x w)^2 \right] dx, \quad (7.10)$$

où G correspond au module de cisaillement de la couche 2, où $\overline{EI} = (E_1 I_1 + E_2 J_2 + E_3 I_3)$ avec E_i le module élastique de la couche i et où :

$$\begin{aligned} D_2 &= \int_{S_2} r^2 dS = \frac{b}{4e_2} (e_1 + 2e_2 + e_3)^2, \\ J_2 &= \int_{S_2} g(y)^2 dS = \left(\frac{e_1 + e_3}{2e_2} \right)^2 \frac{be_2^3}{12} + \left(\frac{e_1 - e_3}{4} \right)^2 e_2 b. \end{aligned} \quad (7.11)$$

À partir des énergies cinétique Eq. 7.7 et potentielle Eq. 7.10, on estime ensuite l'action \mathcal{S} du lagrangien $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$ du multi-couches :

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x, t, w) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{T} - \mathcal{V}) dt. \quad (7.12)$$

Le principe de moindre action est alors vérifié si l'équation d'Euler-Lagrange est satisfaite [48] :

$$\overline{\rho S} \ddot{w} - \overline{\rho I} \partial_x^2 \ddot{w} + \overline{EI} \partial_x^4 w - G_2 D_2 \partial_x^2 w = 0, \quad (7.13)$$

où $\overline{\rho S} = \sum_{i=1}^3 \rho_i S_i$ et $\overline{\rho I} = \sum_{i=1}^3 \rho_i I_i$. En négligeant l'inertie de rotation des sections droites, on aboutit finalement à l'équation du mouvement [48] :

$$\overline{\rho S} \ddot{w}(x, t) + \overline{EI} \partial_x^4 w(x, t) - G_2 D_2 \partial_x^2 w(x, t) = 0. \quad (7.14)$$

L'équation Eq. 7.14 est valable pour des matériaux linéaires élastiques. La prise en compte d'une loi de comportement non-linéaires et/ou non-conservatives est traitée dans la sous-section suivante. Nous pouvons constater qu'elle est proche d'un modèle de poutre d'Euler-Bernoulli avec ses termes inertiels où la densité linéique est la somme des densités linéiques de chaque couche, son terme de raideur en flexion dont la raideur correspond également à la somme des raideurs de chaque couche. La principale différence est donnée par le second terme associé au cisaillement dans l'âme. Ce dernier modifie la condition aux limites de l'effort tranchant au niveau d'une extrémité libre (en $x = L$ dans ce qui suit), par rapport au modèle de poutre d'Euler-Bernoulli. Cette condition est donnée par l'expression suivante (voir [48] Eq. 3.79) :

$$\overline{EI} \partial_x^3 w(L, t) - G_2 D_2 \partial_x w(L, t) = 0. \quad (7.15)$$

La figure Fig. 7.3 présente une comparaison des formes des trois premiers modes propres d'une poutre composite encastree-libre viscoélastique non-amorti ($\eta_{ve} = 0$), obtenues avec et sans prise en compte du terme de cisaillement dans l'équation Eq. 7.14. Les propriétés matériaux sont données par le tableau Tab. 7.1. Une telle comparaison permet de mettre en évidence l'importance du cisaillement dans l'âme du composite, en particulier sur la déformée du premier mode propre.

ii. Prise en compte de la non-linéarité

Nous considérons à présent la loi de comportement d'une âme constituée d'un matériau granulaire, établie au Chapitre Chap. 6, et dont nous rappelons ici les grandes lignes. Elle introduit une non-linéarité entre contrainte et déformation en cisaillement. Elle s'exprime sous la forme suivante :

$$\tau = G_L \gamma + \tau_D(\gamma, \dot{\gamma}). \quad (7.16)$$

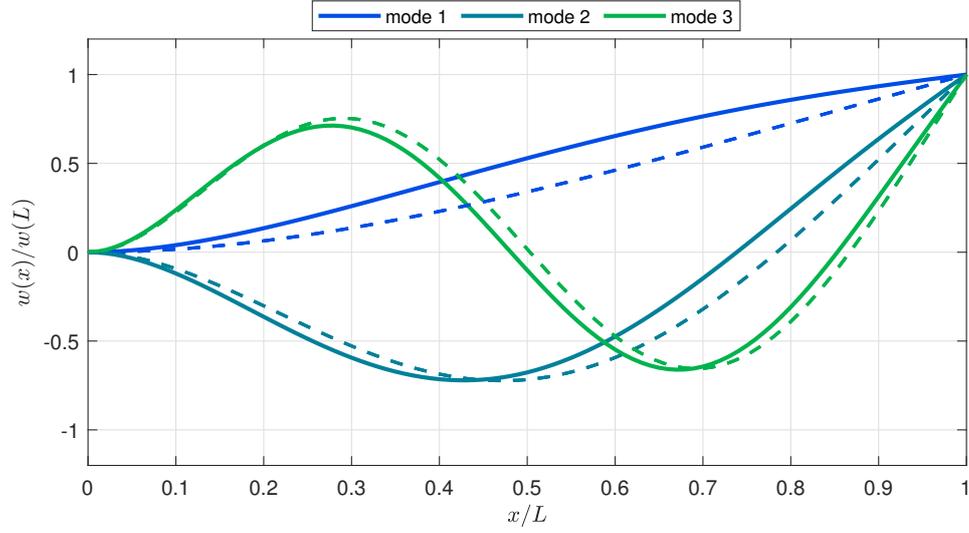


Figure 7.3 – Comparaison des déformées modales des trois premiers modes propres d'une poutre composite viscoélastique non-amorti ($\eta_{ve} = 0$) encastée-libre décrite par les modèles d'Euler-Bernoulli (traits discontinus) et de Guyader (traits pleins). Les fréquences des trois premiers modes pour le modèle de Guyader sont : $f_1 = 2.76$ Hz, $f_2 = 9.74$ Hz et $f_3 = 20.89$ Hz.

Le premier terme de l'équation Eq. 7.16 au second membre est linéaire élastique, avec G_L un module de cisaillement et le second terme, hystérétique, s'exprime par :

$$\tau_D = G_D \zeta, \quad (7.17)$$

où G_D est homogène à un module de cisaillement et ζ est une variable interne décrite par l'équation différentielle non-linéaire du premier ordre de Dahl :

$$\dot{\zeta} = \dot{\gamma} \left[1 - \frac{G_D \zeta}{\tau_C} \text{sign}(\dot{\gamma}) \right], \quad (7.18)$$

où $\tau_C = \mu_{\text{eff}} P$ est une contrainte seuil de glissement de Coulomb dépendant du coefficient de frottement effectif μ_{eff} et de la pression de confinement P du milieu granulaire.

L'approche d'Euler-Lagrange est adaptée aux systèmes conservatifs, dont les efforts dérivent d'un potentiel. En revanche, l'ajout des contraintes de frottement non-linéaires, qui ne dérivent pas d'un potentiel, peut être réalisé par application du principe des travaux virtuels. Ce principe constitue la base de la théorie des éléments finis avec la formulation faible. Pour cela on exprime l'effort volumique \mathbf{f}_v dans la couche 2, engendré par un ensemble de contraintes décrites par le tenseur $\underline{\underline{\tau}}$ et selon le théorème de la divergence :

$$\mathbf{f}_v = \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}. \quad (7.19)$$

Dans notre cas le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\tau}}$ décrit la contribution non-linéaire de la contrainte de cisaillement simple dans le plan (x, y) dans le milieu granulaire, il

s'écrit alors :

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_D \\ \tau_D & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.20)$$

En appliquant le principe des travaux virtuels, on projette l'effort \mathbf{f}_v sur un champ de déplacement test $\mathbf{u}^* = [g(y)\partial_x w^* \ w^*]^T$ compatible avec les hypothèses cinématiques de la couche 2 (voir Eq. 7.3). En l'intégrant sur le volume V de la poutre, on obtient après intégration par partie :

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{u}^* dV &= \int_V (\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}) \cdot \mathbf{u}^* dV \\ &= - \int_L \int_S \gamma^* \tau_D dS dx + \left[\int_S w^* \tau_D dS \right]_0^L \\ &= - \int_L S_2 \tau_D r \partial_x w^* dx + [S_2 r w^* \tau_D]_0^L. \end{aligned} \quad (7.21)$$

L'équation Eq. 7.21 donne une expression des travaux virtuels associés à la contribution non-linéaire des contraintes de cisaillement dans le milieu granulaire. Cette expression sera incluse ensuite dans la formulation faible. Pour conclure, nous pouvons vérifier qu'en remplaçant τ_D dans l'expression Eq. 7.21 par une contrainte de cisaillement linéaire telle que $\tau_D = G_D \gamma$, on retrouve le terme associé au cisaillement linéaire de l'équation Eq. 7.14 :

$$\begin{aligned} - \int_L S_2 r \partial_x w^* G_D \gamma dx + [S_2 r w^* G_D \gamma]_0^L &= \\ - \int_L \partial_x w^* S_2 r^2 G_D \partial_x w dx + [S_2 r^2 w^* \partial_x w]_0^L, \end{aligned} \quad (7.22)$$

dont les termes de bord s'annulent en intégrant par partie le terme de gauche, pour donner :

$$\begin{aligned} - \int_L S_2 r \partial_x w^* G_D \gamma dx + [S_2 r w^* G_D \gamma]_0^L &= \int_L w^* (S_2 r^2 G_D \partial_x w \tau_D) dx \\ &= \int_L w^* (G_D D_2 \partial_x^2 w) dx, \end{aligned} \quad (7.23)$$

qui correspond au travail virtuel du terme de cisaillement du modèle de Guyader de l'équation Eq. 7.14.

7.3.3 . Modélisation spatiale par la méthode des éléments finis

Le modèle non-linéaire de poutre composite que nous avons établie peut être résolu par la méthode des éléments finis introduite et illustrée au chapitre Chap. 4 sur une poutre d'Euler-Bernoulli : le problème spatial est résolu par la méthode des éléments finis et son évolution temporelle par un schéma d'intégration de Runge-Kutta à pas adaptatif décrit au chapitre Chap. 4. L'écriture du modèle aboutit à une matrice de masse identique à celle du modèle d'Euler-Bernoulli, mais en remplaçant ρS de l'équation Eq. 4.7 par $\overline{\rho S} = \sum \rho_i S_i$. Sa matrice de raideur est

composée de la somme de deux termes : la matrice de raideur du modèle d'Euler-Bernoulli où EI est remplacé par \overline{EI} et le terme linéaire de cisaillement des grains. Enfin s'ajoute le terme non-linéaire décrit dans la section Sec. 7.3.2. En effet, en multipliant l'équation Eq. 7.14 par un champ test w^* et en intégrant le long de la poutre, après intégration par partie et ajout des termes non linéaires de l'équation Eq. 7.21, on aboutit à la formulation faible suivante :

$$\begin{aligned} & [\overline{EI}\partial_x w^* \partial_x^2 w]_0^L - [\overline{EI}w^* \partial_x^3 w - G_L D_2 w^* \partial_x w - S_2 r w^* \tau_D]_0^L \\ & + \int_0^L (\overline{EI}\partial_x^2 w^* \partial_x^2 w + \overline{\rho S} w^* \ddot{w} + G_L D_2 \partial_x w^* \partial_x w + S_2 r \partial_x w^* \tau_D) dx = 0. \end{aligned} \quad (7.24)$$

La présence du terme non-linéaire apporte une modification au terme de bord de l'effort tranchant, de sorte qu'au niveau du bord libre, en $x = L$, la continuité de la contrainte impose :

$$\overline{EI}\partial_x^3 w(L, t) - G_L D_2 \partial_x w(L, t) - S_2 r \tau_D(L, t) = 0. \quad (7.25)$$

Le traitement des termes de raideur en flexion et d'inertie est conforme au chapitre Chap. 4, on ne détaille ici que les termes de cisaillement additionnels. Mailler le domaine et interpoler par éléments finis fait apparaître l'expression des matrices élémentaires :

$$\begin{aligned} & l \sum_{e=1}^{N_e} \int_0^1 (G_L(\alpha) D_2 \partial_x w_e^* \partial_x w_e + S_2 r \partial_x w_e^* \tau_D(\alpha)) d\alpha \approx \\ & \frac{D_2}{l} \sum_{e=1}^{N_e} (\mathbf{u}_e^*)^T \left(\int_0^1 \mathbf{n}'(\alpha) G_L(\alpha) \mathbf{n}'(\alpha)^T d\alpha \right) \mathbf{u}_e + \\ & S_2 r \sum_{e=1}^{N_e} (\mathbf{u}_e^*)^T \left(\int_0^1 \mathbf{n}'(\alpha) G_D(\alpha) \mathbf{n}_{\mathcal{L}}(\alpha)^T d\alpha \right) \boldsymbol{\zeta}_e \end{aligned} \quad (7.26)$$

où $\mathbf{u}_e = [w^{i-1} \ \theta^{i-1} \ w^i \ \theta^i]^T$ correspond au vecteur des degrés de libertés élémentaires, avec $\theta^i = \partial_x w^i$, la rotation au nœud i . Conformément au Chap. 4, la variable w et sa dérivée première $\partial_x w$ sont interpolées par des fonctions de formes $\mathbf{n}(\alpha)$ de Hermite. Dans l'équation Eq. 7.26, τ_D , G_L et G_D sont des quantités interpolées linéairement aux nœuds des N_e éléments, par les fonctions de forme $\mathbf{n}_{\mathcal{L}}(\alpha)$ qui sont des polynômes de Lagrange du premier ordre : $\mathbf{n}_{\mathcal{L}}(\alpha) = [1 - \alpha \ \alpha]^T$. Les contraintes de cisaillement (partie linéaire et non-linéaire) s'expriment ainsi pour l'élément e , de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \tau_D(\alpha) &= G_D(\alpha) \zeta(\alpha) = \mathbf{n}_{\mathcal{L}}(\alpha)^T \mathbf{G}_D \mathbf{n}_{\mathcal{L}}(\alpha)^T \boldsymbol{\zeta}_e, \\ (G_L \gamma)(\alpha) &= G_L(\alpha) r \partial_x w(\alpha) = r \mathbf{n}_{\mathcal{L}}(\alpha)^T \mathbf{G}_L \mathbf{n}'(\alpha)^T \mathbf{u}_e, \end{aligned} \quad (7.27)$$

où $\alpha = x/l$ est la coordonnée dimensionnelle le long d'un élément et où

$$\mathbf{G}_D = \begin{bmatrix} G_D^{i-1} \\ G_D^i \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\zeta}_e = \begin{bmatrix} \zeta^{i-1} \\ \zeta^i \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{G}_L = \begin{bmatrix} G_L^{i-1} \\ G_L^i \end{bmatrix}. \quad (7.28)$$

Les distributions spatiales, le long de la poutre, de G_L et G_D , sont explicitées dans la section suivante. Les variables nodales ζ^i vérifient l'équation du modèle de Dahl rappelée à l'équation Eq. 7.18 qui s'écrit ici :

$$\dot{\zeta}^i = \dot{\gamma}^i \left(1 - \frac{G_D^i \zeta^i}{\tau_C} \text{sign}(\dot{\gamma}^i) \right), \quad (7.29)$$

où $\dot{\gamma}^i = r \partial_x w^i$ correspond à la déformation en cisaillement au nœud i . Après assemblage des matrices élémentaires de l'équation Eq. 7.26, on obtient l'équation dynamique matricielle faisant intervenir les termes d'inertie $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}$, de raideur $\mathbf{K}\mathbf{u}$ (somme d'une matrice \mathbf{K}_b tenant compte de l'élasticité en flexion des trois couches et d'une matrice \mathbf{K}_s tenant compte de l'élasticité en cisaillement de l'âme, $\mathbf{K} = \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_s$) et non-linéaire $\mathbf{\Lambda}\zeta$ (tenant compte de la réponse non-linéaire de l'âme, selon le modèle de Dahl) :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{\Lambda}\zeta = 0, \quad (7.30)$$

où \mathbf{u} et ζ correspondent respectivement aux assemblages des vecteurs des degrés de libertés élémentaires \mathbf{u}_e et ζ_e . Le problème non-linéaire à résoudre est donc composé de l'équation matricielle Eq. 7.30 et des N_i équations scalaires Eq. 7.29, où $N_i = N_e + 1$ correspond au nombre de nœuds du maillage.

La figure 7.4 présente la comparaison des déformées modales des trois premiers modes propres obtenus par analyse modale avec le modèle Abaqus 2D et le modèle FEM 1D linéarisé (le terme non-linéaire étant arbitrairement annulé, $\mathbf{\Lambda}\zeta = 0$) avec $N_e = 50$ éléments. Les trois premières déformées modales obtenues par les deux modèles sont visuellement semblables, et leurs fréquences propres diffèrent de 10%, 6.7% et 4.6% respectivement (voir Tab. 7.2). Par ailleurs, il est possible de résoudre analytiquement le problème aux valeurs propres d'une poutre encastree-libre décrite par l'équation Eq. 7.14, par une méthode à variables séparées. Ce calcul permet de trouver une estimation des premières fréquences propres, qui sont indiquées dans le tableau Tab. 7.2. Nous constatons que le modèle FEM 1D linéarisé tend bien vers la solution analytique du modèle de Guyader, avec un nombre raisonnable d'éléments. Cette solution n'est cependant pas tout à fait celle du modèle de référence réalisé en 2D sur Abaqus. Ces écarts peuvent être attribués à une limitation intrinsèque due aux hypothèses du modèle de Guyader, dont le modèle FEM 1D hérite.

7.3.4 . Intégration temporelle

L'équation régissant le modèle de Dahl étant d'ordre un, nous choisissons d'écrire le système d'équations différentielles non-linéaires sous la forme d'un problème du premier ordre tel que :

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{\Gamma}(\dot{\gamma}, \zeta) = \mathbf{0}, \quad (7.31)$$

où

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K} & \mathbf{\Lambda} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{u} \\ \zeta \end{bmatrix}. \quad (7.32)$$

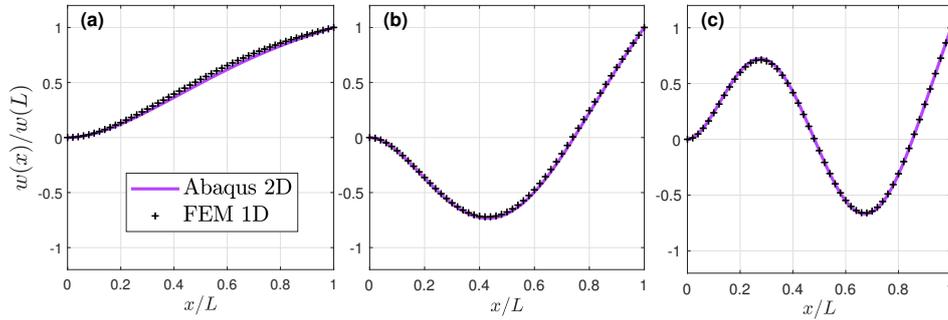


Figure 7.4 – Comparaison des déformées modales entre les modèles Abaqus 2D et le modèle FEM 1D basé sur le modèle de poutre de Guyader, pour (a) le mode 1, (b) le mode 2 et (c) le mode 3. Les propriétés matériaux utilisées sont celles données par le tableau Tab. 7.1. L'âme viscoélastique est supposée non-amortie ($\eta_{ve} = 0$).

| | f_1 (Hz) | f_2 (Hz) | f_3 (Hz) |
|--------------------|------------|------------|------------|
| Abaqus 2D | 2.50383 | 9.12892 | 19.96210 |
| FEM 1D lin. | 2.75695 | 9.73799 | 20.88670 |
| Guyader Analytique | 2.75695 | 9.73797 | 20.88665 |

Table 7.2 – Fréquences propres des trois premiers modes de vibrations des modèles Abaqus 2D, de Guyader résolu par la méthode des éléments finis et de Guyader résolu par la méthode de séparation de variables (analytique). L'âme viscoélastique est supposée non-amortie ($\eta_{ve} = 0$).

L'opérateur différentiel $\Gamma(\dot{\gamma}, \zeta)$ permet l'actualisation de la variable interne de Dahl à chaque pas de temps. L'intégration est réalisée au moyen d'un schéma explicite de Runge-Kutta à pas adaptatif présenté au chapitre Chap. 4 dans la Sec. 4.1.2.

7.3.5 . Protocole et modélisation du milieu granulaire

Les résultats du chapitre Chap. 6 ont montré le caractère non-linéaire de la réponse du milieu granulaire. Cette non-linéarité rend notamment le modèle paramétrique, dépendant d'un nombre sans dimension

$$\xi = \frac{\mu_{\text{eff}} P}{G_{\text{eff}} \gamma_m}, \quad (7.33)$$

qui pondère la réponse hystérétique (frottante) du milieu granulaire en regard de sa réponse élastique en cisaillement. Le paramètre ξ dépend de la pression de confinement P du milieu granulaire, d'un coefficient de frottement effectif macroscopique μ_{eff} relativement constant dans la limite quasi-statique [59, 35] (considéré constant dans ce chapitre, égal à la valeur identifiée au chapitre Chap. 6, $\mu_{\text{eff}} \simeq 0.26$), d'un module de cisaillement effectif G_{eff} qui dépend de P [81], et de l'amplitude de la déformation en cisaillement γ_m . En pratique, la répartition affecte la valeur des

modules élastiques G_L et G_D du modèle, tel que :

$$\begin{aligned} G_L &= G_{\text{eff}}\Psi(\xi), \\ G_D &= G_{\text{eff}}[1 - \Psi(\xi)], \end{aligned} \quad (7.34)$$

où $\Psi(\xi) \propto \xi/(1+\xi)$ est une fonction de répartition obtenue au chapitre Chap. 6. Le paramètre ξ définit donc l'état du système, autour d'un point de fonctionnement. Cependant, ce paramètre peut varier spatialement (par exemple lorsque l'amplitude du cisaillement est distribuée le long de la poutre) et temporellement (ce qui est le cas si les oscillations sont atténuées). Dans le contexte d'une première mise en données, nous faisons le choix d'étudier la réponse libre d'une poutre composite définie par un paramètre $\xi(x)$ distribué spatialement mais indépendant du temps. La dépendance en espace est obtenue en calculant la déformée statique à flèche imposée d'une poutre composite linéarisée (dont le terme frottant est annulé, $\Psi = 0$). La déformée est obtenue en inversant la version statique de l'équation Eq. 7.30 :

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_{\Psi=1}^{-1} \mathbf{f} \quad (7.35)$$

où \mathbf{f} est l'effort transversal ponctuel imposé à l'extrémité libre de la poutre pour imposer une valeur cible de flèche. La connaissance du déplacement transverse statique $w_s(x)$ permet de déduire la distribution de cisaillement $\gamma_s(x) = r\partial_x w_s(x)$, conformément à l'équation Eq. 7.6.

La figure Fig. 7.5 présente une comparaison des déformées spatiales de la poutre composite pour différentes valeurs du module de cisaillement effectif G_{eff} de l'âme. Nous constatons que le cisaillement est d'autant plus grand à l'extrémité que l'âme est souple. Par ailleurs, proche de l'encastrement, l'effet inverse est observé. Nous observons enfin que le cisaillement est relativement uniforme le long de la poutre, excepté près de l'encastrement, et ce sur une large étendue d'élasticités. La distribution statique de cisaillement $\gamma_s(x)$ ainsi déterminée est ensuite utilisée pour calculer la valeur du paramètre $\xi(x) = \mu_{\text{eff}}P/G_{\text{eff}}\gamma_s(x)$ en chaque nœuds conformément à l'équation Eq. 7.33. Les distributions de $G_L(x)$ et $G_D(x)$ sont alors déduites de l'équation Eq. 7.34. Deux exemples de distribution sont données en figure Fig. 7.6, pour deux valeurs de flèche.

7.3.6 . Chargement initial

La poutre composite granulaire étant frottante, sa déformée dépend de l'histoire du chargement qu'elle subit pour imposer sa déformée initiale, préalable à l'étude de sa réponse libre, on la déplace progressivement avec une rampe d'effort appliquée à son extrémité depuis sa position au repos (rectiligne) jusqu'à une valeur cible de sa flèche. La vitesse de la rampe d'effort est choisie de sorte que la transformation demeure quasi-statique, avec un temps caractéristique bien supérieur à la période propre du mode de plus basse fréquence. En pratique, on choisit une durée de la phase d'initialisation très grande devant la période du premier mode, $\tau_{\text{init}} = 10T_1$ permet de garantir une mise en position quasi-statique de la poutre.

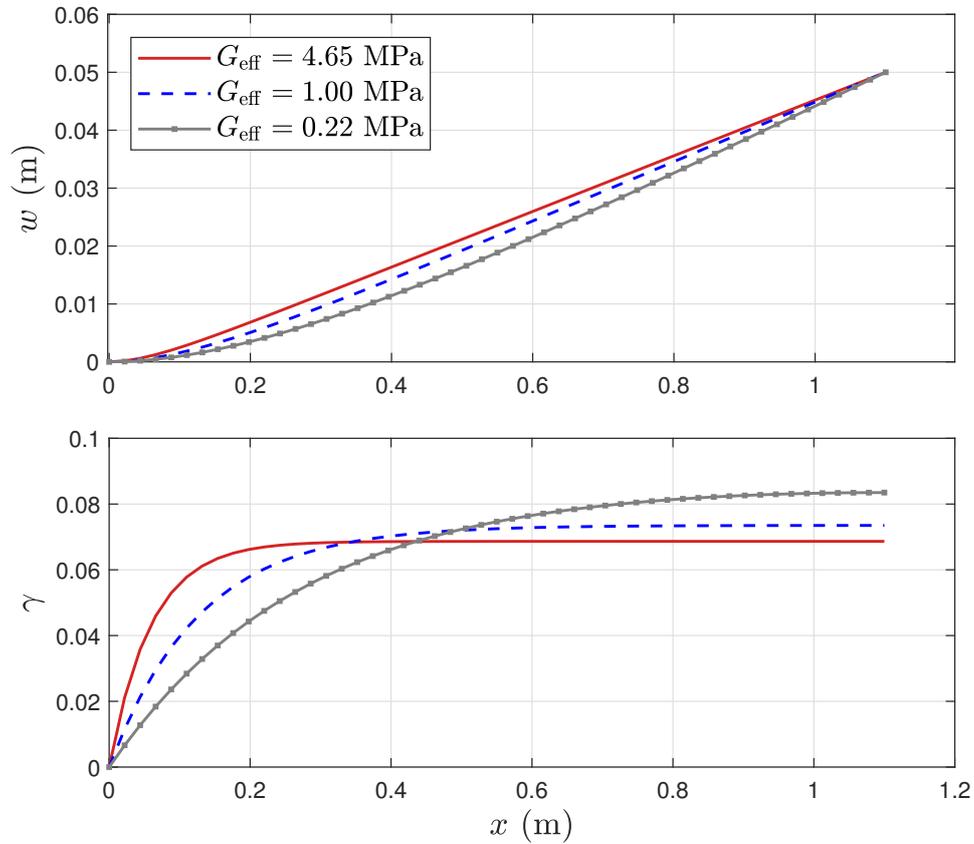


Figure 7.5 – Déformées spatiales statiques de la poutre composite à âme granulaire (non-amortie, $\Psi = 1$) soumise à un effort en $x = L$: flèche w et cisaillement γ en fonction de la position, pour différentes valeurs du module de cisaillement de l'âme.

Une réponse libre de la poutre est alors initiée à $t = 0$, lorsqu'on annule l'effort de chargement : l'énergie de déformation stockée lors du chargement, l'énergie cinétique qu'elle gagne suite à sa mise en mouvement, et les mécanismes dissipatifs, donnent lieu à une oscillation amortie de la poutre.

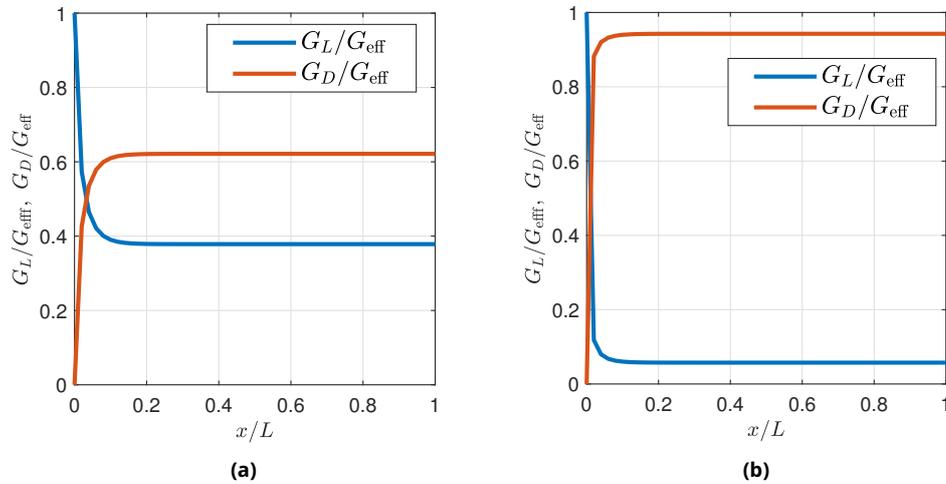


Figure 7.6 – Distribution des modules de cisaillement G_L et G_D le long de la poutre granulaire, obtenue selon les équations Eq. 7.34 et 7.34 et la distribution de cisaillement du cas statique, $\gamma_m = \gamma_s(x)$, pour (a) $w(L) = 0.005$ m et (b) $w(L) = 0.05$ m.

7.4 . Résultats

Afin de faciliter la comparaison directe avec un modèle de poutre multi-couches viscoélastique, nous choisissons comme point de départ un matériau réaliste pour les grains soumis à une fraction de la pression atmosphérique P_{atm} ($P_{atm} \approx 0.1$ MPa). Une telle pression est par exemple atteinte, dans un environnement à pression atmosphérique, à l'intérieur d'un contenant déformable sous un vide partiel. À ce niveau typique de pression, l'utilisation de billes en nylon procure une élasticité en cisaillement G_{eff} comparable à celle d'un élastomère, de l'ordre du MPa, d'après le modèle de milieu effectif granulaire [81]. Les propriétés du matériau des grains sont listées dans le tableau Tab. 7.3.

| E (GPa) | ρ (kg.m ⁻³) | ν | G (GPa) | Φ | Z | P (MPa) |
|-----------|------------------------------|-------|-----------|--------|-----|--------------|
| 1 | 1240 | 0.4 | 0.36 | 0.64 | 6 | $0.1P_{atm}$ |

Table 7.3 – Propriété matériau des grains en Nylon.

La poutre est tout d'abord lentement déplacée jusqu'à obtenir $w(L) = 0.05$ m, puis relâchée. Les figures Fig. 7.7a et b présentent les évolutions temporelles et fréquentielles de la flèche en $x = L$. Nous constatons le comportement multimodal amorti de la poutre, dominé par le premier mode. Les figures Fig. 7.7c et d montrent que bien que l'amplitude des modes d'ordre élevé soit petite devant celle du premier mode, ceux-ci sont néanmoins très peu amortis, comme le montre la finesse des raies spectrales. La contrainte de cisaillement est également tracée en temps et en fréquence sur les figures Fig. 7.7b et d. On remarque notamment sur le spectre que tous les modes ont une amplitude comparable, ce qui s'explique par le fait que

τ est essentiellement proportionnelle à la dérivée spatiale du déplacement, $\partial_x w$.

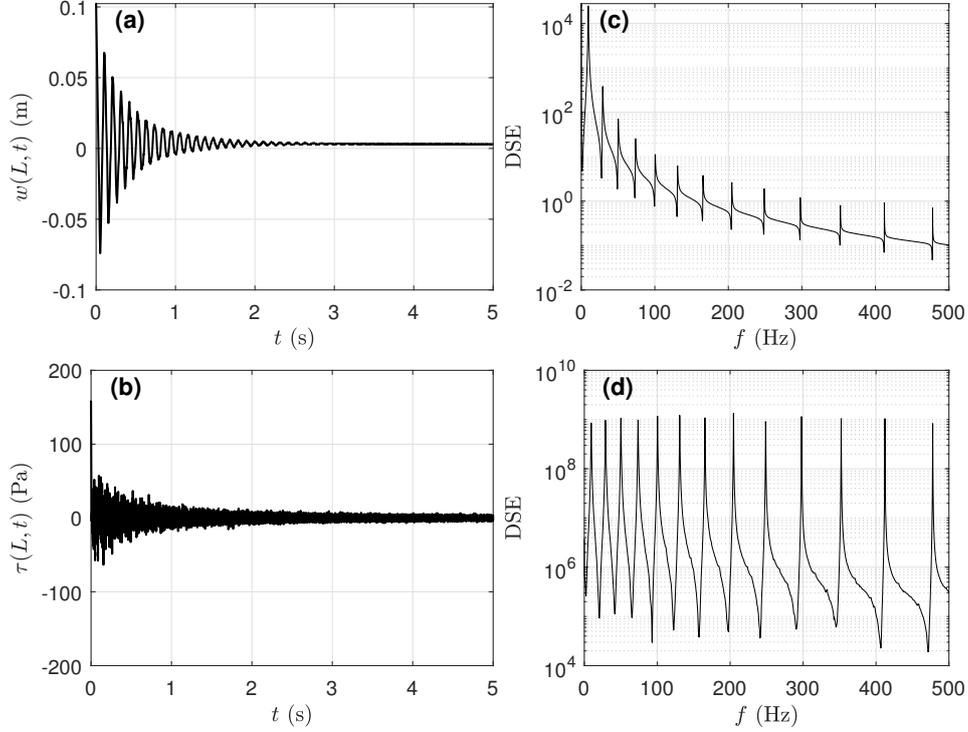


Figure 7.7 – Évolution (a) de la flèche et (b) de la contrainte de cisaillement en $x = L$ dans la poutre composite granulaire de référence ($w(L, 0) = 0.1$ m, $P = 0.1P_{atm}$) en fonction du temps et (c,d) leurs densités spectrales d'énergie respectives en fonction de la fréquence.

La Fig. 7.8 représente l'évolution des différentes énergies de la poutre en fonction du temps, illustrant la conservation de l'énergie mécanique. Ainsi, à chaque instant, on vérifie

$$\mathcal{W}_{ext} = \mathcal{T} + \mathcal{V} + \mathcal{W}_{nl} \quad (7.36)$$

où \mathcal{W}_{ext} correspond aux travaux des forces extérieures (énergie injectée) :

$$d\mathcal{W}_{ext} = d\mathbf{u}^T \mathbf{f}, \quad (7.37)$$

où \mathcal{T} correspond à l'énergie cinétique définie par :

$$d\mathcal{T} = d\dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}, \quad (7.38)$$

où \mathcal{V} désigne l'énergie potentielle élastique linéaire (flexion et cisaillement) donnée par :

$$d\mathcal{V} = d\mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u}, \quad (7.39)$$

et \mathcal{W}_{nl} aux travaux des forces non-linéaires conservatives et non-conservatives (modèle de Dahl) donnés par :

$$\delta\mathcal{W}_{nl} = d\mathbf{u}^T \mathbf{\Lambda} \boldsymbol{\zeta}. \quad (7.40)$$

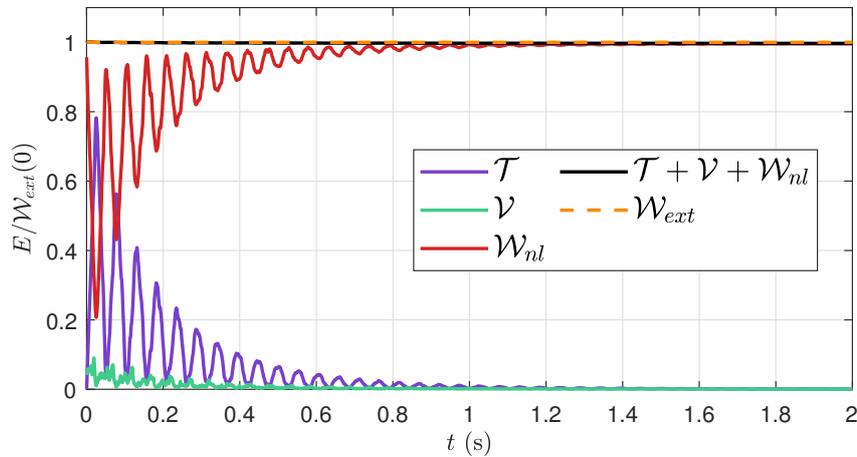


Figure 7.8 – Évolution des énergies de la poutre composite granulaire (cas de référence $w(L, 0) = 0.1 \text{ m}$, $P = 0.1P_{atm}$) en fonction du temps (réponse libre oscillante amortie) relativement à l'énergie $\mathcal{W}_{ext}(t = 0)$ injectée dans le chargement initial.

Au cours d'une réponse libre (flèche initiale imposée, vitesse initiale nulle), le mouvement amorti de la poutre se traduit par une décroissance des énergies cinétique et potentielle élastique qui tendent asymptotiquement vers 0. Le travail des forces non-linéaires \mathcal{W}_{nl} présente un profil oscillant saturant exponentiellement à temps longs, conformément au fait que le modèle de Dahl dissipe de l'énergie par frottement. Le fait que l'énergie \mathcal{W}_{nl} associée au modèle de Dahl oscille en temps révèle une contribution conservatrice non-linéaire, dont le module élastique G_D rend compte. En effet, l'énergie dissipée (la puissance cumulée des forces dissipatives) ne peut pas décroître. Il n'est donc pas possible de distinguer la dissipation seule par un bilan énergétique. Pour contourner cette indétermination, nous quantifions les pertes en analysant l'évolution temporelle de la flèche en oscillation libre. Le déplacement de la poutre révèle en effet l'énergie stockée (récupérable) au cours du chargement, et la diminution de son amplitude révèle l'effet de l'ensemble des mécanismes dissipatifs.

Nous menons pour cela une première étude paramétrique, où on fait varier la pression P et la flèche initiale $w(L, t = 0)$ pour observer (voir Fig. 7.9) la réponse libre en déplacement $w(L, t)$ en fonction du temps. Les figures Fig. 7.9a, c et d montrent que la décroissance de l'amplitude est d'autant plus rapide que la pression est faible. De même, les figures Fig. 7.9b, c et e montrent que plus l'amplitude initiale est faible, plus le système oscille longtemps. Ces résultats révèlent donc que le facteur de perte est paramétrique (fonction de la pression de confinement) et non-linéaire (en amplitude).

En figure Fig. 7.10, nous analysons les caractéristiques modales, dont le facteur de perte et les fréquences propres, du cas de référence $w(L, 0) = 0.1 \text{ m}$, $P = 0.1P_{atm}$ et leurs évolutions en fonction du temps. Pour cela, nous utilisons une

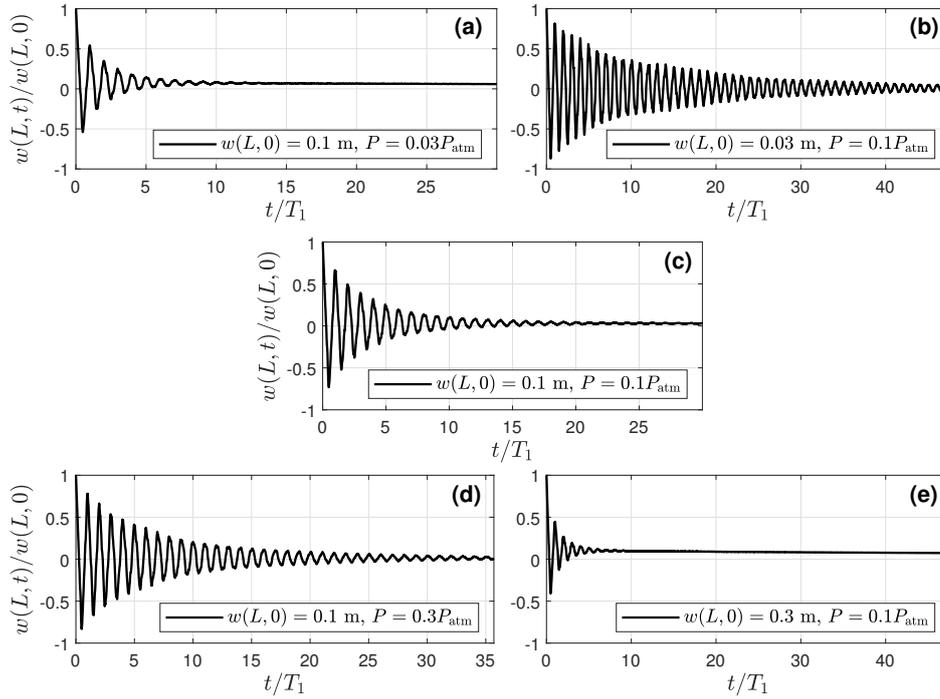


Figure 7.9 – (a-e) Réponses libres en déplacement de la flèche normalisée par sa valeur à l’instant initial, en fonction du temps normalisé par la période du premier mode propre, pour différents couples $(P, w(L, 0))$. (c) est le cas de référence.

fenêtre d’analyse glissante de durée $\Delta t = 0.5$ s, sur laquelle nous extrayons les fréquences propres complexes $r_m = \omega_m + j/\tau_{att}^m$ des $m = 10$ premiers modes au moyen de la méthode ESPRIT introduite au chapitre Chap. 3.

Le facteur de perte modal η_m est calculé comme au chapitre Chap. 4 :

$$\eta_m = \frac{2}{\omega_0^m \tau_{att}^m} = 2 \frac{\text{Im}(r_m)}{|r_m|}. \quad (7.41)$$

où $\omega_0^m = |r_m|$ correspond à la pulsation du mode m non amorti. Les figures Fig. 7.10a et b représentent le facteur de perte de chaque mode en fonction du temps. Le facteur de perte du premier mode est le plus important, de l’ordre de 5%, puis il est décroissant en fonction de la fréquence. Cela s’explique par le fait que l’énergie dissipée par friction est proportionnelle au déplacement, dont l’amplitude modale décroît avec la fréquence (voir Fig. 7.7c). Cela constitue une différence fondamentale avec la dissipation viscoélastique, pour laquelle le facteur de perte croît avec la fréquence. À titre d’illustration, nous représentons sur les figures Fig. 7.10c et d le facteur de perte modal d’une couche viscoélastique (modèle de Kelvin-Voigt), telle que $\eta_m^{ve} = \omega_m \tau_{ve}$ où τ_{ve} est un temps de relaxation viscoélastique. Ce temps est ici choisi arbitrairement pour égaler le facteur de perte du premier mode de la poutre à âme granulaire, $\eta_1^{ve} = \eta_1$ soit $\tau_{ve} = \eta_1/\omega_1 \simeq 0.92$ ms.

On peut également constater sur la figure Fig. 7.10b que le facteur de perte

du composite granulaire décroît légèrement en fonction du temps, à mesure que le signal est amorti, pour chacun des dix modes analysés. Cette observation découle à nouveau de la proportionnalité de l'énergie dissipée au déplacement, qui est amorti. Dans le cas du composite viscoélastique, le facteur de perte est indépendant de l'amplitude de déplacement, et donc du temps, car le mécanisme dissipatif est linéaire, voir Fig. 7.10d.

En pratique, les premiers modes de structure sont souvent les plus énergétiques, mais aussi les plus difficiles à atténuer avec des matériaux viscoélastiques peu efficaces en basses fréquences. Du point de vue applicatif, le comportement de la poutre composite granulaire inverse donc cette tendance, en permettant d'atteindre des facteurs de perte élevés dans les bandes de fréquences les plus énergétiques, où le déplacement est important.

La figure Fig. 7.11 montre la comparaison des déplacements pour les poutres composites granulaires et viscoélastiques. Nous constatons que les deux courbes se superposent initialement et qu'au bout de quelques périodes, le signal de la poutre composite viscoélastique ne contient plus que le premier mode tandis que le contenu modale hautes fréquences de la poutre composite granulaire est encore riche car très peu amorti. Toutefois, la flèche de la poutre granulaire décroît plus rapidement que celle de la poutre viscoélastique.

Nous réalisons enfin une étude systématique du facteur de perte pour un ensemble de configurations $(P, w(L, t = 0))$ tel que $1 \times 10^{-6} Patm \leq P \leq Patm$ et $0.003 \leq w(L, t = 0) \leq 0.3$ m. Pour chacun des couples $(P, w(L, t = 0))$, la méthode ESPRIT permet d'extraire la fréquence complexe du signal amorti $w(L, t)$. Cette dernière est ensuite utilisée pour calculer le facteur de perte η selon l'équation Eq. 7.41. Le facteur de perte η de chaque signal analysé est tracé en niveau de couleur sur la figure Fig. 7.12a. La Fig. 7.12a montre que le facteur de perte évolue sur une large plage de valeurs allant d'une valeur proche de 0 à des valeurs très élevées autour de 1. Par ailleurs la figure Fig. 7.12a révèle une bande extremum du facteur de perte pour un ensemble de valeurs de $(P, w(L, t = 0))$. La figure Fig. 7.12b montre la valeur $\langle \xi \rangle$, moyenne du nombre $\xi(x)$ le long de la poutre pour chaque de couple $(P, w(L, t = 0))$ testé. La dynamique des valeurs de ξ dans la figure Fig. 7.12b présente la même orientation dans le plan $(P, w(L, t = 0))$ que l'évolution du facteur de perte dans la figure Fig. 7.12a, suggérant que la bande extremum du facteur de perte est atteinte pour une gamme spécifique de valeur de ξ . Ceci est confirmé par la figure Fig. 7.12c dans laquelle les valeurs de η sont raisonnablement corrélées avec les valeurs de $\langle \xi \rangle$ sur une courbe maitresse présentant un maximum du facteur de perte η pour $\langle \xi \rangle \approx 2 \times 10^{-4}$. En outre cette grande variabilité du facteur de perte en fonction des conditions de sollicitations et de préparation du milieu granulaire montre que le facteur de perte peut être facilement ajusté, par exemple en comprimant davantage ou en relâchant la pression du milieu granulaire afin d'accommoder la valeur de ξ pour maximiser les pertes en fonction de l'amplitude typique de sollicitation du système.

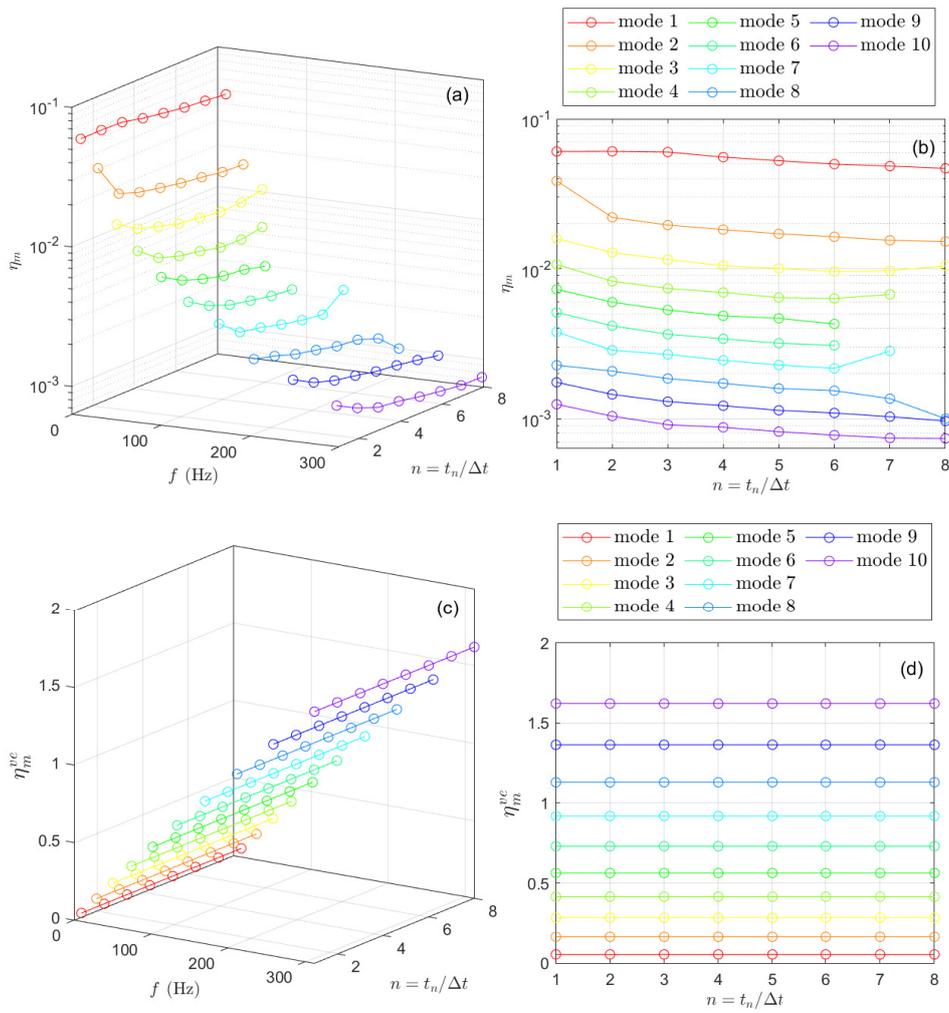


Figure 7.10 - Facteur de perte modal η_m en fonction (a,c) de la fréquence f et du temps discret $t_n = n\Delta t$ (où n est le numéro de la fenêtre temporelle de durée $\Delta t = 0.5$ s) et (b,d) coupe dans le plan (t_n, η_m) , pour une poutre composite à âme (a,b) granulaire (cas de référence $w(L, 0) = 0.1$ m, $P = 0.1P_{atm}$) et (c,d) viscoélastique ($\eta_m^{ve} = \omega_m \tau_{ve}$ avec $\tau_{ve} = \eta_1/\omega_1 \simeq 0.92$ ms pour que $\eta_1 = \eta_1^{ve}$ arbitrairement).

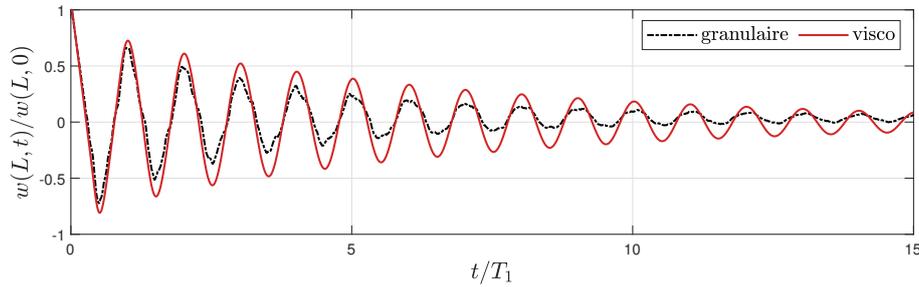


Figure 7.11 – Comparaison des flèches $w(L, t)$ normalisées par la flèche initiale en fonction du temps adimensionnel. Les poutres composites granulaire et viscoélastique sont identiques à celles de la figure Fig. 7.10.

7.5 . Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons établi un modèle de poutre composite granulaire par la méthode des éléments finis, en nous appuyant sur les modèles de poutre tri-couches de la littérature et en y intégrant le modèle effectif de milieu granulaire établi au Chap. 6. La poutre a été soumise à une déformation initiale et nous nous sommes intéressés à la décroissance de l'amplitude des vibrations en évaluant le facteur de perte. Une analyse sur une configuration de référence a été menée dans le domaine fréquentiel en analysant l'amortissement modal des dix premiers modes, révélant une forte dépendance de la dissipation à l'amplitude modale : l'amortissement modal est maximal pour le premier mode dont l'amplitude modale est la plus élevée et décroît ensuite progressivement pour les modes d'ordres supérieurs. Ce comportement modal a été comparé à celui d'une poutre composite viscoélastique modélisée par un amortissement proportionnel à la raideur de cisaillement de l'âme. Ceci a permis de mettre en évidence les avantages et inconvénients des deux solutions : la solution viscoélastique est avantageuse en haute fréquence, car dépendante de la vitesse, au contraire la dissipation dans le composite granulaire est indépendante de la vitesse et repose sur l'amplitude de déformation, généralement plus élevée en basses fréquences où l'énergie vibratoire est souvent plus importante. Ceci suggère une utilisation complémentaire entre les solutions viscoélastiques et granulaires. Enfin, en faisant varier la pression de confinement et l'amplitude initiale, nous avons pu voir que ce facteur de perte du composite granulaire pouvait atteindre des valeurs élevées et qu'il dépendait fortement de la pression de confinement et de l'amplitude. Tout comme le facteur de perte du milieu granulaire seul étudié au chapitre Chap. 6, celui du composite est lié à la valeur d'un nombre sans dimension ξ pondérant les effets dissipatifs (frottement/glissement) et élastiques du milieu granulaire. Cette dernière remarque suggère qu'il est possible d'ajuster le facteur de perte du milieu granulaire, notamment en modifiant la pression de confinement pour accommoder la valeur de ξ aux conditions de sollicitation du système.

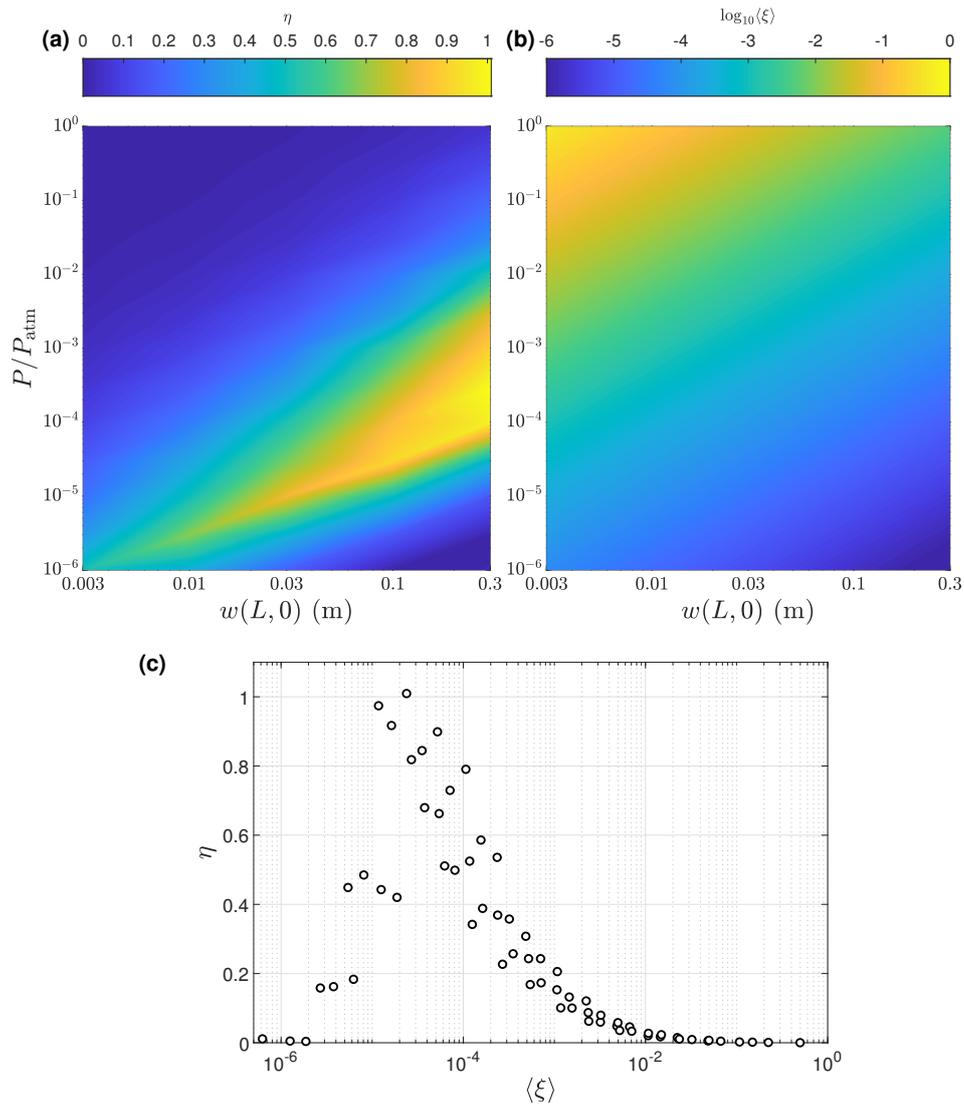


Figure 7.12 – Représentation en niveau de couleur (a) du facteur de perte η de la poutre composite granulaire et (b) du paramètre sans dimension $\langle \xi \rangle$ (moyenne sur la longueur de la poutre) en fonction de la pression de confinement des grains et de la flèche initiale de la poutre. (c) Corrélation $\eta(\langle \xi \rangle)$ à partir des données de (a) et (b).

Conclusion et perspectives

8 - Conclusion et perspectives

8.1 . Conclusion générale

Ces travaux de thèse de doctorat portent sur l'étude de l'amortissement dans les milieux granulaires sous contrainte ainsi que son utilisation pour contrôler les vibrations de flexion d'une poutre. Ces recherches ont été effectuées entre le laboratoire Quartz à l'ISAE-Supméca et l'Estaca Lab' du campus ouest de l'Estaca. Les travaux sont divisés en trois parties. La **première partie** s'intéresse à la description des ondes de flexion dans les solides élastiques et dans les milieux périodiques, à travers des modèles théoriques, des expériences pratiques et une modélisation numérique par la méthode des éléments finis. La **seconde partie** étudie les milieux granulaires à travers la méthode des éléments discrets afin d'établir un modèle décrivant la réponse élastique et dissipative d'un volume représentatif de grains comprimés soumis à des déformations élémentaires. La difficulté de modélisation numérique réside dans le grand nombre de degrés de liberté. Un modèle réduit constitutif à deux degrés de liberté de milieu granulaire est alors proposé. La **troisième partie** réalise la synthèse des deux premières en proposant une architecture de poutre composite contenant des particules. La réponse d'une telle structure est étudiée au moyen d'un modèle numérique utilisant la méthode des éléments finis associée au modèle réduit de milieu granulaire préalablement établi. Les trois parties de ce travail sont déclinées en sept chapitres.

Les ondes, les vibrations et leur contrôle...

Le **premier chapitre** propose une introduction générale sur le contrôle des vibrations et des ondes élastiques dans les structures. Nous revenons notamment sur les milieux architecturés de type réseaux phononiques et métamatériaux, mais également sur les méthodes dissipatives plus générales telles que les dispositifs linéaires et non-linéaires, reposant sur la viscoélasticité et le frottement. Une présentation succincte des milieux granulaires est ensuite proposée et nous abordons la spécificité de tels milieux en lien avec leurs propriétés dissipatives. Le chapitre se termine sur une présentation du contenu du manuscrit, exposant la démarche visant à apporter des réponses à la problématique du contrôle des vibrations dans des poutres en mobilisant les mécanismes dissipatifs des milieux granulaires.

Partie 1 : propagation d'ondes dans des poutres élastiques

Le **second chapitre** relève principalement d'un savoir académique. Sans apporter de nouvelle contribution, il permet cependant de rappeler le cadre théorique de la description des ondes de flexion dans les poutres, utilisé dans le reste du

document, en particulier les chapitres Chap. 3, 4 et 7. En partant du modèle général des ondes élastiques, on aboutit à la modélisation dans la limite des grandes longueurs d'ondes des ondes de Lamb dans les structures d'épaisseur finie (plaques et poutres). Nous revenons alors sur plusieurs modèles d'ondes de flexion qui sont comparés via la relation de dispersion. Enfin, l'évolution de telles ondes dans des milieux périodiques et localement résonants est étudiée grâce à la méthode analytique EPWE (méthode étendue de décomposition en ondes planes).

Le **troisième chapitre** s'intéresse à la propagation des ondes de flexions dans les poutres d'un point de vue expérimental. Pour cela un banc de mesure 1D a été conçu à l'ISAE-Supméca à l'aide d'un vibromètre laser mono-point et d'un rail motorisé. L'équipement disponible à l'ESTACA a également permis la mesure plein champs grâce à un vibromètre laser à balayage. La suite du chapitre propose une analyse des données expérimentales par la relation de dispersion des ondes de flexion. Pour cela, trois méthodes sont implémentées, SLaTCoW (transformée de Laplace spatial pour l'analyse de nombres d'ondes complexes), ESPRIT (estimation de paramètres de signaux via des techniques d'invariances rotationnelles) et la transformée de Fourier spatio-temporelle. Ces trois méthodes sont comparées, d'abord sur une poutre simple mince, puis sur une structure plus complexe dotée d'inclusions résonantes (une rangée périodique de tiges élastiques munies d'une masse à leur extrémité). La formation de bandes interdites de Bragg et d'hybridation est observée nettement, grâce notamment à la méthode ESPRIT qui s'avère la plus robuste. L'apport de ce chapitre réside dans la mise en œuvre et la comparaison de méthodes connues, dans l'analyse d'un milieu architecturé et la mise en évidence concluante de bandes interdites d'hybridation et de Bragg.

Dans le **chapitre quatre**, nous nous intéressons à la modélisation numérique des ondes de flexion en revenant tout d'abord sur la formulation par la méthode des éléments finis du modèle de poutre d'Euler-Bernoulli. Les caractéristiques de deux méthodes de résolution temporelle sont ensuite rappelées, ainsi que les méthodes classiques d'implémentations d'amortissement viscoélastiques. Ces éléments seront notamment réutilisés dans le chapitre Chap. 7. Ici, comme au chapitre précédent, la méthode ESPRIT est utilisée, pour identifier les facteurs de perte à partir des relations de dispersion. Le chapitre se termine sur la mise en application de la méthode des éléments finis sous *Abaqus* d'un modèle de poutre localement résonante à l'image de celle qui est analysée expérimentalement dans le chapitre précédent. Le modèle numérique permet d'évaluer l'influence du niveau d'amortissement dans les résonateurs locaux, sur l'atténuation des ondes dans et hors des bandes interdites.

Partie 2 : Dissipation d'énergie mécanique dans des milieux granulaires

Le **cinquième chapitre** porte sur la mécanique des milieux granulaires. Dans

un premier temps, la méthode des éléments discrets y est rappelée, avant de décrire les principaux modèles de contact connus, incluant des contributions élastiques, visqueuses et frottantes. La méthode et les modèles sont illustrés par la mise en données et la résolution numérique de deux exemples emblématiques (la sphère rebondissante et le patin frottant). Dans un second temps, un volume élémentaire parallélépipédique de référence doté de mille grains ($10 \times 10 \times 10$) est implémenté. Nous revenons d'abord sur la définition de paramètres et concepts caractéristiques des milieux granulaires en nous appuyant sur la littérature (taux de compacité, pression de confinement, modules élastiques effectifs, coordinence, transition de blocage, compacité critique). L'étude numérique menée sur notre volume représentatif de référence révèle les relations entre ces différentes grandeurs caractéristiques, que nous validons par comparaison avec des résultats de la littérature.

Le **sixième chapitre** est un document de travail en cours d'élaboration et constitue un projet d'article reproduit en l'état. Il s'agit de l'une des principales contributions de ces travaux de thèses. Ce chapitre s'appuie sur le modèle de volume élémentaire représentatif introduit au chapitre précédent et détaille l'étude des propriétés dissipatives et élastiques d'un milieu granulaire confiné soumis à un cisaillement cyclique. La multiplicité des contacts frottants entre particules donne lieu à une réponse hystérétique plus ou moins prononcée qu'il est possible de reproduire à l'aide d'un modèle réduit de patin frottant (un modèle de Dahl) couplé à une contribution élastique non linéaire. Une analyse paramétrique systématique révèle que le modèle identifié est déterminé par les caractéristiques d'un milieu effectif, issu de la littérature, équivalent à un milieu granulaire décrit dans la limite des milieux continus. Par ailleurs, notre apport est que nous montrons que le régime de fonctionnement du système dépend uniquement d'une variable sans dimension résultant de la compétition entre élasticité et frottement effectif. Ce nombre sans dimension fait notamment apparaître un point de fonctionnement optimal maximisant le facteur de perte. Ce résultat trouve un intérêt dans une démarche de conception d'un amortisseur granulaire de petite taille pour l'ingénierie.

Partie 3 : Contrôle vibratoire par des structures composites à âme granulaire

Le **septième chapitre** réunit les parties ondes de flexion et granulaires en proposant un composite granulaire doté de deux poutres élastiques métalliques de part et d'autre d'une âme granulaire dont le comportement mécanique est décrit par le modèle réduit établi au chapitre précédent. Le principe repose ici sur le fait que le mouvement de flexion de la poutre impose le cisaillement dans l'âme, à la manière des panneaux sandwich à âme viscoélastique souple. Le tout est implémenté avec la méthode des éléments finis et la réponse libre du système en flexion est étudiée. La comparaison avec un modèle de composite viscoélastique met

en valeur les spécificités et les bonnes performances du composite granulaire pour dissiper l'énergie, en particulier à basses fréquences grâce à son mode de dissipation non-linéaire par frottement, dépendant de l'amplitude. Enfin, nous mettons en avant le caractère ajustable d'une telle solution via la pression de confinement, permettant de maximiser les pertes.

8.2 . Perspectives

Les perspectives de ce travail de thèse s'articulent selon deux axes principaux, portant (i) sur l'étude du système dissipatif granulaire en lui-même et (ii) sur son intégration dans un système hôte dont il contrôle les vibrations.

Concernant (i) l'étude du système élémentaire, une première extension serait d'enrichir le modèle réduit en prenant pleinement en compte la dépendance à l'amplitude de cisaillement liée au comportement hystérétique de type Dahl et au comportement de la dilataance frustrée de Reynolds. Pour l'instant, l'effet de l'amplitude n'est pris en compte que de manière paramétrique dans le modèle réduit alors que ce mécanisme non-linéaire affecte significativement la manière dont le système stocke de l'énergie, et joue donc un rôle important sur le facteur de perte à pression faible/amplitude élevée. Une deuxième extension serait de mettre en œuvre expérimentalement le cisaillement cyclique d'une boîte contenant des grains, à l'image par exemple de celle présentée dans [131], afin d'en tester les capacités opérationnelles.

Concernant (ii) l'étude du système hôte et l'intégration d'un milieu granulaire dans ce dernier, une première perspective consisterait à accroître la complexité et la fidélité des modèles de poutres, de plaques et de coques, qui permettrait par exemple d'étendre l'étude à des éléments plus épais, courbes, avec une âme plus rigide, ou bien en plus grandes déformations. De plus, notre étude gagnerait à être étendue à d'autres types de sollicitations (transitoire, bruit large bande, choc) au-delà de réponses cycliques purement harmoniques.

Une seconde perspective concernerait la conception et la réalisation d'un dispositif expérimental de poutre tri-couches à âme granulaire, à l'image du modèle numérique proposé dans ces travaux, pour en vérifier et affiner les caractéristiques.

Pour finir, la géométrie de poutre tri-couches proposée dans ce mémoire ne fige en rien l'architecture de systèmes à dissipation granulaire, qui peuvent gagner en complexité. Des montages alternatifs sont en effet envisageables, dans la suite directe de l'étude exposée dans ce manuscrit, comme par exemple des méta-matériaux localement résonants à même d'amplifier l'amplitude du cisaillement et donc l'énergie dissipée pas le milieu granulaire.

Bibliographie

- [1] A Aladwani and M Nouh. Mechanics of metadamping in flexural dissipative metamaterials : Analysis and design in frequency and time domains. *International journal of mechanical sciences*, 173 :105459, 2020.
- [2] Anissa Allani. *Conception et optimisation d'amortisseurs à masse accordée pour les structures du génie civil*. Theses, Université Paris-Est ; Università degli studi di Roma "Tor Vergata" (1972-....), nov 2015.
- [3] Bruno Andreotti, Yoël Forterre, and Olivier Pouliquen. *Les milieux granulaires. Entre fluide et solide*. EDP Sciences, 2011.
- [4] D. Antypov and J. A. Elliott. On an analytical solution for the damped hertzian spring. *EPL (Europhysics Letters)*, 94(5) :50004, may 2011.
- [5] H. Arvin, M. Sadighi, and A.R. Ohadi. A numerical study of free and forced vibration of composite sandwich beam with viscoelastic core. *Composite Structures*, 92(4) :996–1008, mar 2010.
- [6] M. Badreddine Assouar and Mourad Oudich. Enlargement of a locally resonant sonic band gap by using double-sides stubbed phononic plates. *Applied Physics Letters*, 100(12) :123506, 2012.
- [7] Jean-Louis Batoz and Gouri Dhatt. *Modélisation des Structures par Éléments Finis. Volume 2 : Poutres et plaques*, volume 37. oct 1994.
- [8] S. Benacchio, A. Malher, J. Boisson, and C. Touzé. Design of a magnetic vibration absorber with tunable stiffnesses. *Nonlinear Dynamics*, 85(2) :893–911, mar 2016.
- [9] Hassan Berro. *A molecular dynamics approach to nano-scale lubrication*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, oct 2010.
- [10] Julien Berthaut. *Contribution à l'indentification large bande des structures anisotropes*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2004.
- [11] Dapeng Bi, Jie Zhang, Bulbul Chakraborty, and R. P. Behringer. Jamming by shear. *Nature*, 480(7377) :355–358, dec 2011.
- [12] C S Campbell. Rapid granular flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 22(1) :57–90, jan 1990.

- [13] David Cantor, Manuel Cárdenas-Barrantes, Itthichai Preechawuttipong, Mathieu Renouf, and Emilien Azéma. Compaction model for highly deformable particle assemblies. *Physical Review Letters*, 124(20) :208003, may 2020.
- [14] Carlos Canudas de Wit, Henrik Olsson, Karl Johan Åström, and Pablo Lischinsky. A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(3) :419–425, mar 1995.
- [15] Alejandro Cebrecos, Vicente Romero-García, and Jean Philippe Groby. Complex dispersion relation recovery from 2d periodic resonant systems of finite size. *Applied Sciences*, 9(3), 2019.
- [16] R. Chabrier, E. Sadoulet-Reboul, G. Chevallier, E. Foltête, and T. Jeannin. Full-field measurements with digital image correlation for vibro-impact characterisation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 156 :107658, jul 2021.
- [17] Jean-Daniel Chazot, Benoit Nennig, and Ameer Chettah. Harmonic response computation of viscoelastic multilayered structures using a ZPST shell element. *Computers & Structures*, 89(23-24) :2522–2530, dec 2011.
- [18] Danielle Chou. Dahl friction modeling, 2004.
- [19] M. Pica Ciamarra, R. Pastore, M. Nicodemi, and A. Coniglio. Jamming phase diagram for frictional particles. *Phys. Rev. E* 84, 041308 (2011), dec 2009.
- [20] Andrea Colombi, Philippe Roux, Sebastien Guenneau, and Matthieu Rupin. Directional cloaking of flexural waves in a plate with a locally resonant metamaterial. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 137(4) :1783–1789, 2015.
- [21] C. Croënne, J. O. Vasseur, O. Bou Matar, A.-C. Hladky-Hennion, and B. Dubus. Non-reciprocal behavior of one-dimensional piezoelectric structures with space-time modulated electrical boundary conditions. *Journal of Applied Physics*, 126(14) :145108, oct 2019.
- [22] Peter A. Cundall and Otto D. L. Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *geotechnique*, 29(1) :47–65, 1979.
- [23] Frédéric da Cruz, Sacha Emam, Michaël Prochnow, Jean-Noël Roux, and François Chevoir. Rheophysics of dense granular materials : Discrete simulation of plane shear flows. *Physical Review E*, 72(2) :021309, aug 2005.
- [24] Philip R. Dahl. Solid friction damping of mechanical vibrations, 1976.

- [25] P.R. Dahl. A solid friction model. Technical report, AEROSPACE CORP EL SEGUNDO CA, may 1968.
- [26] Jacob Pieter Den Hartog. *Mechanical vibrations*. Courier Corporation, 1985.
- [27] B.V Derjaguin, V.M Muller, and Yu.P Toporov. Effect of contact deformations on the adhesion of particles. *Journal of Colloid and Interface Science*, 53(2) :314–326, nov 1975.
- [28] J.R. Dormand and P.J. Prince. A family of embedded runge-kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 6(1) :19–26, mar 1980.
- [29] Frédéric Dubois and Rémy Mozul. LMGC90. In *11e colloque national en calcul des structures*, Giens, France, may 2013. CSMA.
- [30] J. Duran. *Sables, poudres et grains*. Eyrolles, 1999.
- [31] J. Duriez and S. Bonelli. Precision and computational costs of level set-discrete element method (LS-DEM) with respect to DEM. *Computers and Geotechnics*, 134 :104033, jun 2021.
- [32] Jérôme Duriez. *Stabilité des massifs rocheux : une approche mécanique*. PhD thesis, Institut polytechnique de Grenoble, 2009.
- [33] Isaac Elishakoff. Who developed the so-called timoshenko beam theory? *Mathematics and Mechanics of Solids*, 25(1) :97–116, aug 2019.
- [34] R J P Engelen, D Mori, T Baba, and L Kuipers. Subwavelength structure of the evanescent field of an optical bloch wave. *Physical review letters*, 102(2) :023902, 2009.
- [35] Abdoulaye Fall, Michel Badetti, Guillaume Ovarlez, François Chevoir, and Jean-Noël Roux. Dry granular flows – rheological measurements of the $\mu(i)$ – rheology. *EPJ Web of Conferences*, 140 :03005, 2017.
- [36] M. Farid and O. V. Gendelman. Response regimes in equivalent mechanical model of moderately nonlinear liquid sloshing. *Nonlinear Dynamics*, 92(4) :1517–1538, feb 2018.
- [37] A. A. Ferri. Friction damping and isolation systems. *Journal of Mechanical Design*, 117(B) :196–206, jun 1995.
- [38] S. Lo Feudo, S. Job, M. Cavallo, A. Fraddosio, M.D. Piccioni, and A. Tafuni. Finite contact duration modeling of a vibro-impact nonlinear energy sink to protect a civil engineering frame structure against seismic events. *Engineering Structures*, 259 :114137, may 2022.

- [39] Yoël Forterre and Olivier Pouliquen. Flows of dense granular media. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 40(1) :1–24, jan 2008.
- [40] Michael J. Frazier and Mahmoud I. Hussein. Generalized bloch's theorem for viscous metamaterials : Dispersion and effective properties based on frequencies and wavenumbers that are simultaneously complex. *Comptes Rendus Physique*, 17(5) :565–577, may 2016.
- [41] Friend and Kinra. Particle impact damping. *Journal of Sound and Vibration (2000)*, 1999.
- [42] A Geslain, S Raetz, M Hiraiwa, M Abi Ghanem, S. P Wallen, A Khanolkar, N Boechler, J Laurent, C Prada, A Duclos, P Leclaire, and J.-P Groby. Spatial laplace transform for complex wavenumber recovery and its application to the analysis of attenuation in acoustic systems. *Journal of applied physics*, 120(13) :135107, 2016.
- [43] Christoph Goniva, Christoph Kloss, Niels G. Deen, Johannes A.M. Kuipers, and Stefan Pirker. Influence of rolling friction on single spout fluidized bed simulation. *Particuology*, 10(5) :582–591, oct 2012.
- [44] Audrey Grede Grédé. *Modélisation des chocs d'origine pyrotechnique dans les structures d'Ariane5 : développement de modèles de propagation et d'outils de modélisation*. Theses, Ecole Centrale Paris, jan 2009.
- [45] J.-P. Groby, W. Huang, A. Lardeau, and Y. Aurégan. The use of slow waves to design simple sound absorbing materials. *Journal of applied physics*, 117(12) :124903, 2015.
- [46] J.-P. Groby, R. Pommier, and Y. Aurégan. Use of slow sound to design perfect and broadband passive sound absorbing materials. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 139(4) :1660–1671, 2016.
- [47] Ning Guo and Jidong Zhao. A coupled FEM/DEM approach for hierarchical multiscale modelling of granular media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 99(11) :789–818, jun 2014.
- [48] Jean-Louis Guyader. *Vibrations des milieux continus*. Hermès Sciences Publications, 2002.
- [49] Michel Géradin and Daniel J. Rixen. *Mechanical Vibrations : Theory and Application to Structural Dynamics, 2nd Edition*. 1997.
- [50] Aizhen Hu, Xin Zhang, Fugen Wu, and Yuanwei Yao. Enlargement of the locally resonant lamb wave band gap of the phononic crystal plate at the deep sub-wavelength scale. *Materials Research Express*, 1(4) :045801, nov 2014.

- [51] H.H. Huang, C.T. Sun, and G.L. Huang. On the negative effective mass density in acoustic metamaterials. *International Journal of Engineering Science*, 47(4) :610–617, apr 2009.
- [52] Mahmoud I Hussein and Michael J Frazier. Metadamping : An emergent phenomenon in dissipative metamaterials. *Journal of sound and vibration*, 332(20) :4767–4774, 2013.
- [53] J Jackle. Models of the glass transition. *Reports on Progress in Physics*, 49(2) :171–231, feb 1986.
- [54] Heinrich M. Jaeger, Sidney R. Nagel, and Robert P. Behringer. Granular solids, liquids, and gases. *Reviews of Modern Physics*, 68(4) :1259–1273, oct 1996.
- [55] Yimin Jiang and Mario Liu. Granular solid hydrodynamics. *Granular Matter*, 11(3) :139–156, apr 2009.
- [56] Yabin Jin, Yan Pennec, Bernard Bonello, Hossein Honarvar, Leonard Dobrzynski, Bahram Djafari-Rouhani, and Mahmoud I Hussein. Physics of surface vibrational resonances : pillared phononic crystals, metamaterials, and metasurfaces. *Reports on Progress in Physics*, 84(8) :086502, aug 2021.
- [57] John. D. Joannopoulos, Robert D. Meade, and Joshua N. Winn. *Photonic crystals : molding the flow of light*. Princeton University Press, Princeton (N.J.), 1995.
- [58] K.L. JOHNSON. Contact mechanics. In *Mechanical Engineering Series*, pages 1–19. Springer-Verlag, 1985.
- [59] Pierre Jop, Olivier Pouliquen, and Yoël Forterre. A constitutive law for dense granular flows. *Nature*, 441(7094) :727–730, jun 2006.
- [60] T. Kaneko. On timoshenko's correction for shear in vibrating beams. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 8(16) :1927–1936, nov 1975.
- [61] Edward M. Kerwin. Damping of flexural waves by a constrained viscoelastic layer. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 31(7) :952–962, jul 1959.
- [62] William R. Ketterhagen, Mary T. am Ende, and Bruno C. Hancock. Process modeling in the pharmaceutical industry using the discrete element method. *Journal of Pharmaceutical Sciences*, 98(2) :442–470, feb 2009.
- [63] Charles Kittel, Michèle Poumellec, Robert Mégy, and Claire Dupas. *Physique de l'état solide - Cours et problèmes*, volume 7. Dunod France, 1983.

- [64] Christoph Kloss, Christoph Goniva, Alice Hager, Stefan Amberger, and Stefan Pirker. Models, algorithms and validation for opensource DEM and CFD-DEM. *Progress in Computational Fluid Dynamics, An International Journal*, 12(2/3) :140, 2012.
- [65] I. Koné, F. Domingue, A. Reinhardt, H. Jacquinot, M. Borel, M. Gorisse, G. Parat, F. Casset, D. Pellissier-Tanon, J. F. Carpentier, L. Buchailot, and B. Dubus. Guided acoustic wave resonators using an acoustic Bragg mirror. *Applied Physics Letters*, 96(22) :223504, jun 2010.
- [66] M. S. Kushwaha, P. Halevi, L. Dobrzynski, and B. Djafari-Rouhani. Acoustic band structure of periodic elastic composites. *Physical Review Letters*, 71(13) :2022–2025, sep 1993.
- [67] Goro Kuwabara and Kimitoshi Kono. Restitution coefficient in a collision between two spheres. *Japanese Journal of Applied Physics*, 26(Part 1, No. 8) :1230–1233, aug 1987.
- [68] Lamb. On waves in an elastic plate. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 93(648) :114–128, mar 1917.
- [69] Q. S. Li, Lun-Hai Zhi, Alex Y. Tuan, Chin-Sheng Kao, Sheng-Chung Su, and Chien-Fu Wu. Dynamic behavior of taipei 101 tower : Field measurement and numerical analysis. *Journal of Structural Engineering*, 137(1) :143–155, jan 2011.
- [70] Tao Li, Claude-Henri Lamarque, Sébastien Seguy, and Alain Berlioz. Chaotic characteristic of a linear oscillator coupled with vibro-impact nonlinear energy sink. *Nonlinear Dynamics*, 91(4) :2319–2330, dec 2017.
- [71] Andrea J. Liu and Sidney R. Nagel. Jamming is not just cool any more. *Nature*, 396(6706) :21–22, nov 1998.
- [72] Andrea J. Liu and Sidney R. Nagel. The jamming transition and the marginally jammed solid. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 1(1) :347–369, aug 2010.
- [73] Taiqu Liu, Pauline Butaud, Vincent Placet, and Morvan Ouisse. Damping behavior of plant fiber composites : A review. *Composite Structures*, 275 :114392, nov 2021.
- [74] Zhengyou Liu, Xixiang Zhang, Yiwei Mao, Y. Y. Zhu, Zhiyu Yang, C. T. Chan, and Ping Sheng. Locally resonant sonic materials. *Science*, 289(5485) :1734–1736, sep 2000.

- [75] Martin Lott, Philippe Roux, Stéphane Garambois, Philippe Guéguen, and Andrea Colombi. Evidence of metamaterial physics at the geophysics scale : the metaforet experiment. *Geophysical journal international*, 2019.
- [76] Y.P. Lu and B.E. Douglas. On the forced vibrations of three-layer damped sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration*, 32(4) :513–516, feb 1974.
- [77] Richard H. Lyon. *Theory and Application of Statistical Energy Analysis, Second Edition*. Elsevier Science & Techn., 1995.
- [78] A Mahboubi, A Ghaouti, and B Cambou. La simulation numérique discrète du comportement des matériaux granulaires. *Revue française de géotechnique*, (76) :45–61, 1996.
- [79] Fida Majdoub. *Technique innovante pour mesurer le frottement faible : analyse de l'aspect dynamique des réponses libres caractérisées par un mouvement oscillatoire amorti*. Theses, Ecole Centrale de Lyon, dec 2013.
- [80] T. S. Majmudar, M. Sperl, S. Luding, and R. P. Behringer. Jamming transition in granular systems. *Physical Review Letters*, 98(5) :058001, jan 2007.
- [81] Hernán A. Makse, Nicolas Gland, David L. Johnson, and Lawrence Schwartz. Granular packings : Nonlinear elasticity, sound propagation, and collective relaxation dynamics. *Phys. Rev. E*, 70(6) :061302, dec 2004.
- [82] Pierre Margerit. *Caractérisation large bande du comportement dynamique linéaire des structures hétérogènes viscoélastiques anisotropes : application à la table d'harmonie du piano*. Theses, Université Paris-Est, dec 2018.
- [83] Pierre Margerit, Arthur Lebée, Jean-François Caron, Kerem Ege, and Xavier Boutillon. The high-resolution wavevector analysis for the characterization of the dynamic response of composite plates. *Journal of Sound and Vibration*, 458 :177–196, oct 2019.
- [84] Kun S. Marhadi and Vikram K. Kinra. Particle impact damping : effect of mass ratio, material, and shape. *Journal of Sound and Vibration 283 (2005) 433–448*, 2005.
- [85] Marwa Masmoudi, Stéphane Job, Mohamed Slim Abbes, Imad Tawfiq, and Mohamed Haddar. Experimental and numerical investigations of dissipation mechanisms in particle dampers. *Granular Matter*, 18(3), jul 2016.
- [86] Sean McNamara and W. R. Young. Inelastic collapse and clumping in a one-dimensional granular medium. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, 4(3) :496–504, mar 1992.

- [87] D.J. Mead. A comparison of some equations for the flexural vibration of damped sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration*, 83(3) :363–377, aug 1982.
- [88] GDR MiDi. On dense granular flows. *The European Physical Journal E*, 14(4) :341–365, aug 2004.
- [89] R. D. Mindlin. Compliance of Elastic Bodies in Contact. *Journal of Applied Mechanics*, 16(3) :259–268, apr 1949.
- [90] R. D. Mindlin and H. Deresiewicz. Elastic Spheres in Contact Under Varying Oblique Forces. *Journal of Applied Mechanics*, 20(3) :327–344, jun 1953.
- [91] Dan Negrut, Rajiv Rampalli, Gisli Ottarsson, and Anthony Sajdak. On the use of the HHT method in the context of index 3 differential algebraic equations of multibody dynamics. jan 2005.
- [92] Nathan M Newmark. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the engineering mechanics division*, 85(3) :67–94, 1959.
- [93] Corey S. O’Hern, Leonardo E. Silbert, Andrea J. Liu, and Sidney R. Nagel. Jamming at zero temperature and zero applied stress : The epitome of disorder. *Physical Review E*, 68(1), jul 2003.
- [94] Linda Oswald, Steffen Grosser, David M Smith, and Josef A Käs. Jamming transitions in cancer. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 50(48) :483001, oct 2017.
- [95] Mourad Oudich, Bahram Djafari-Rouhani, Yan Pennec, M. Badreddine Assouar, and Bernard Bonello. Negative effective mass density of acoustic metamaterial plate decorated with low frequency resonant pillars. *Journal of Applied Physics*, 116(18) :184504, nov 2014.
- [96] Mourad Oudich, Yong Li, Badreddine M. Assouar, and Zhilin Hou. A sonic band gap based on the locally resonant phononic plates with stubs. *New Journal of Physics*, 12(8) :083049, 2010.
- [97] Ashwani K. Padthe, Bojana Drincic, Jinhyoung Oh, Demosthenis D. Rizos, Spilios D. Fassois, and Dennis S. Bernstein. Duhem modeling of friction-induced hysteresis. *IEEE Control Systems*, 28(5) :90–107, oct 2008.
- [98] Adrien Pelat, Thomas Gallot, and François Gautier. On the control of the first bragg band gap in periodic continuously corrugated beam for flexural vibration. *Journal of sound and vibration*, 446 :249–262, 2019.

- [99] E. Pennestrì, P. P. Valentini, and L. Vita. Multibody dynamics simulation of planar linkages with dahl friction. *Multibody System Dynamics*, 17(4) :321–347, feb 2007.
- [100] John F. Peters, Raju Kala, and Robert S. Maier. A hierarchical search algorithm for discrete element method of greatly differing particle sizes. *Engineering Computations*, 26(6) :621–634, aug 2009.
- [101] Nicolas Peyret. *Dissipation de l'énergie mécanique dans les assemblages : effet du frottement en sollicitation dynamique*. Theses, Université Paris-Est, oct 2012.
- [102] Nicolas Peyret, Marco Rosatello, Gaël Chevallier, and Jean-Luc Dion. A mindlin derived dahl friction model. *Mechanism and Machine Theory*, 117 :48–55, nov 2017.
- [103] Elsa Piollet, Dominique Poquillon, and Guilhem Michon. Dynamic hysteresis modelling of entangled cross-linked fibres in shear. *Journal of Sound and Vibration*, 383 :248–264, nov 2016.
- [104] Jie Ren, Joshua A. Dijksman, and Robert P. Behringer. Reynolds pressure and relaxation in a sheared granular system. *Physical Review Letters*, 110(1) :018302, jan 2013.
- [105] V. Romero-García, J. V. Sánchez-Pérez, and L. M. Garcia-Raffi. Evanescent modes in sonic crystals : Complex dispersion relation and supercell approximation. *Journal of Applied Physics*, 108(4) :044907, 2010.
- [106] R. Roy and T. Kailath. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 37(7) :984–995, jul 1989.
- [107] R. Roy, A. Paulraj, and T. Kailath. ESPRIT—a subspace rotation approach to estimation of parameters of cisoids in noise. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 34(5) :1340–1342, oct 1986.
- [108] Daniel Royer and Eugene Dieulesaint. *Elastic Waves in Solids I*. Springer, 2000.
- [109] Clara Salueña, Thorsten Pöschel, and Sergei E. Esipov. Dissipative properties of vibrated granular materials. *Physical Review E*, 59(4) :4422–4425, apr 1999.
- [110] Martín Sánchez, Gustavo Rosenthal, and Luis A. Pugnaloni. Universal response of optimal granular damping devices. *Journal of Sound and Vibration*, 331(20) :4389–4394, sep 2012.

- [111] Peter M. Shearer. *Introduction to Seismology*. Cambridge University Press, jun 2009.
- [112] T. G. Sitharam and J. S. Vinod. Evaluation of shear modulus and damping ratio of granular materials using discrete element approach. *Geotechnical and Geological Engineering*, 28(5) :591–601, mar 2010.
- [113] SMAC. Structural damping (smacsonic) <https://smac-sas.com/en/structural-damping-smacsonic/>, 2023.
- [114] Chaoming Song, Ping Wang, and Hernán A. Makse. A phase diagram for jammed matter. *Nature*, 453(7195) :629–632, may 2008.
- [115] Mariantonieta Gutierrez Soto and Hojjat Adeli. Tuned mass dampers. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 20(4) :419–431, oct 2013.
- [116] G Theocharis, O Richoux, V Romero García, A Merkel, and V Tournat. Limits of slow sound propagation and transparency in lossy, locally resonant periodic structures. *New Journal of Physics*, 16(9) :093017, sep 2014.
- [117] Aidan P. Thompson, H. Metin Aktulga, Richard Berger, Dan S. Bolintineanu, W. Michael Brown, Paul S. Crozier, Pieter J. in 't Veld, Axel Kohlmeyer, Stan G. Moore, Trung Dac Nguyen, Ray Shan, Mark J. Stevens, Julien Tranchida, Christian Trott, and Steven J. Plimpton. LAMMPS - a flexible simulation tool for particle-based materials modeling at the atomic, meso, and continuum scales. *Computer Physics Communications*, 271 :108171, feb 2022.
- [118] Biyu Tian. *Numerical simulation of elastic wave propagation in honeycomb core sandwich plates*. Theses, Ecole Centrale Paris, sep 2012.
- [119] B. Tie, B.Y. Tian, and D. Aubry. Theoretical and numerical modeling of membrane and bending elastic wave propagation in honeycomb thin layers and sandwiches. *Journal of Sound and Vibration*, 382 :100–121, nov 2016.
- [120] A. Treviso, B. Van Genechten, D. Mundo, and M. Tournour. Damping in composite materials : Properties and models. *Composites Part B : Engineering*, 78 :144–152, sep 2015.
- [121] Y. Tsuji, T. Tanaka, and T. Ishida. Lagrangian numerical simulation of plug flow of cohesionless particles in a horizontal pipe. *Powder Technology*, 71(3) :239–250, 1992.
- [122] J. D. Turner. On the simulation of discontinuous functions. *Journal of Applied Mechanics*, 68(5) :751–757, apr 2001.

- [123] Vaclav Smilauer, Vasileios Angelidakis, Emanuele Catalano, Robert Caulk, Bruno Chareyre, William Chèvremont, Sergei Dorofeenko, Jerome Duriez, Nolan Dyck, Jan Elias, Burak Er, Alexander Eulitz, Anton Gladky, Ning Guo, Christian Jakob, Francois Kneib, Janek Kozicki, Donia Marzougui, Raphael Maurin, Chiara Modenese, Gerald Pekmezi, Luc Scholtès, Luc Sibille, Jan Stransky, Thomas Sweijen, Klaus Thoeni, and Chao Yuan. Yade documentation, 2021.
- [124] Carlos Vasconcellos, René Zuñiga, Stéphane Job, and Francisco Melo. Localized energy absorbers in hertzian chains. *Phys. Rev. Appl.*, 18 :014078, jul 2022.
- [125] Loup Verlet. Computer "experiments" on classical fluids. i. thermodynamical properties of lennard-jones molecules. *Phys. Rev.*, 159 :98–103, jul 1967.
- [126] Manon Voisin-Leprince, Joaquin Garcia-Suarez, Guillaume Anciaux, and Jean-François Molinari. Finite element method–discrete element method bridging coupling for the modeling of gouge. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 124(6) :1474–1488, nov 2022.
- [127] K Walton. The effective elastic moduli of a random packing of spheres. *Journal of the mechanics and physics of solids*, 35(2) :213–226, jan 1987.
- [128] Xiao and al. Flexural wave band gaps in locally resonant thin plates with periodically attached spring–mass. *IOPScience*, 2013.
- [129] W. Xiao, G. W. Zeng, and Y. S. Cheng. Flexural vibration band gaps in a thin plate containing a periodic array of hemmed discs. *Applied Acoustics*, 69(3) :255–261, 2008.
- [130] Yong Xiao, Jihong Wen, Lingzhi Huang, and Xisen Wen. Analysis and experimental realization of locally resonant phononic plates carrying a periodic array of beam-like resonators. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 47(4) :045307, 2013.
- [131] Yi Xing, Jie Zheng, Jindong Li, Yixin Cao, Wei Pan, Jie Zhang, and Yujie Wang. X-ray tomography investigation of cyclically sheared granular materials. *Physical Review Letters*, 126(4) :048002, jan 2021.
- [132] M.-J. Yan and E. H. Dowell. Governing equations for vibrating constrained-layer damping sandwich plates and beams. *Journal of Applied Mechanics*, 39(4) :1041–1046, dec 1972.
- [133] Jieun Yang, Joong Seok Lee, Hyeong Rae Lee, Yeon June Kang, and Yoon Young Kim. Slow-wave metamaterial open panels for efficient reduction of low-frequency sound transmission. *Applied physics letters*, 112(9) :091901, 2018.

- [134] Kaijun Yi, Morvan Ouisse, Emeline Sadoulet-Reboul, and Gaël Matten. Active metamaterials with broadband controllable stiffness for tunable band gaps and non-reciprocal wave propagation. *Smart Materials and Structures*, 28(6) :065025, may 2019.
- [135] G. Zambelis, T. Da Silva Botelho, O. Klinkova, I. Tawfiq, and C. Lanouette. Evaluation of the energy release rate in mode I of asymmetrical bonded composite/metal assembly. *Engineering Fracture Mechanics*, 190 :175–185, 2018.
- [136] Francesco Zamponi. Packings close and loose. *Nature*, 453(7195) :606–607, 2008.
- [137] Hao Zheng, Wenjian Zhang, Bowen Li, Junjie Zhu, Chaohang Wang, Guojun Song, Guangshun Wu, Xiaoping Yang, Yudong Huang, and Lichun Ma. Recent advances of interphases in carbon fiber-reinforced polymer composites : A review. *Composites Part B : Engineering*, 233 :109639, 2022.
- [138] Sahar Zouari. *Bandes interdites d'ondes de flexion dans une méta-plaque composite*. PhD thesis, Université Bretagne Loire, 2017.
- [139] Rene Zuñiga, Germán Varas, and Stéphane Job. Geometry-controlled phase transition in vibrated granular media. *Scientific Reports (under revision)*, 2022.

Titre : Contrôle des vibrations de poutres par composites multicouches granulaires.

Mots clés : Ondes élastiques, milieux granulaires, poutres composites, dissipation vibratoire, méthode des éléments discrets, méthode des éléments finis

Résumé : Ce travail de thèse est une collaboration entre ISAE-Supméca et l'ESTACA Campus Ouest. Il porte sur le contrôle d'ondes de flexion dans des structures de type plaque et poutre par utilisation de métamatériaux composites dotés de dissipateurs granulaires. Pour diminuer l'amplitude des vibrations d'une structure, une première classe de solutions consiste à agir sur l'amortissement intrinsèque des matériaux la constituant, sur l'amortissement structurel entre ses différents composants, ou encore sur l'ajout d'éléments amortissants au niveau de ses points de fixation ou d'encastrement. Ces trois approches introduisent des amortissements de type viscoélastique (généralement inefficace à basses fréquences) ou de type hystérique comme par exemple le frottement dans les structures assemblées (la quantité d'énergie dissipée étant ici limitée par la taille des surfaces en contact). Les milieux granulaires font exception, car constitués d'un ensemble de particules en interaction les unes avec les autres par l'intermédiaire de leurs contacts. Chaque contact étant intrinsèquement dissipatif via des mécanismes frottants et viscoélastiques, l'amortissement global est amplifié in fine par le nombre de particules. Les propriétés élastiques du milieu granulaire héritent également de la mécanique du contact de Hertz à l'échelle des contacts, conférant ainsi une élasticité accordable, qui dépend de la pression de confinement. Une deuxième classe de solutions consiste à architecturer la structure pour contrôler les ondes qui s'y propagent. C'est le cas des métamatériaux et des réseaux phononiques, qui mobilisent des interférences d'ondes pour annuler leurs transmissions dans des bandes de fréquences données. La contribution de la thèse s'inscrit dans la recherche d'une

solution de contrôle passif des ondes de flexion tirant profit de ses deux approches, dans une structure composite incluant un matériau granulaire. La démarche adoptée dans ce travail consiste, dans un premier temps, à définir puis étudier les outils permettant de modéliser, simuler, mesurer et caractériser la propagation des ondes de flexion dans des structures. Ensuite nous étudions la dissipation d'énergie dans un milieu granulaire sous précontrainte. L'approche consiste à utiliser la méthode des éléments discrets (DEM) pour modéliser un volume élémentaire représentatif de milieu granulaire, et d'en étudier la réponse à la compression et au cisaillement. En s'appuyant sur nos résultats de simulations, sur des modèles de milieux granulaires effectifs, et sur la rhéologie des écoulements de grains, nous établissons un modèle réduit constitutif basé sur un modèle de Dahl corrigé par un terme élastique non-linéaire. Notre modèle révèle un fonctionnement robuste car peu sensible aux caractéristiques intrinsèques du milieu granulaire, ainsi qu'une dépendance à la pression de confinement des grains qui offre un paramètre de réglage permettant d'accorder la réponse du système, et enfin l'existence d'un facteur de perte optimal résultant de la compétition entre confinement et frottement. Le modèle réduit est alors intégré à un modèle numérique éléments finis (FEM) décrivant une poutre composite multicouche contenant une âme constituée de particules frottantes sous précontrainte. Ce modèle permet d'en étudier la réponse dynamique en flexion, de caractériser sa capacité à dissiper l'énergie vibratoire relativement à une solution purement viscoélastique, et d'esquisser quelques recommandations de conception d'un prototype.

Title : Vibration control of beams using granular multilayer composites

Keywords : Elastic waves, granular media, composite beams, granular damping, discrete elements method, finite elements method.

Abstract : This thesis work is a collaboration between ISAE-Supméca and ESTACA Campus Ouest. It focuses on the control of bending waves in plate and beam type structures by using composite metamaterials with granular dampers. To reduce the amplitude of the vibrations of a structure, a first class of solutions consists in acting on the intrinsic damping of the materials constituting it, on the structural damping between its various components, or on the addition of damping elements at its fixing or embedding points. These three approaches introduce damping of the viscoelastic type (generally ineffective at low frequencies) or of the hysteretic type such as for example friction in the assembled structures (the quantity of dissipated energy being here limited by the size of the surfaces in contact). Granular media are an exception, as they consist of a set of particles interacting with each other through their contacts. Each contact being intrinsically dissipative via frictional and viscoelastic mechanisms, the overall damping is amplified in fine by the number of particles. The elastic properties of the granular medium also inherit Hertz contact mechanics at the contact scale, thus conferring tunable elasticity, which depends on the confining pressure. A second class of solutions consists in arranging the structure to control the waves propagating therein. This is the case of metamaterials and phononic networks, which mobilize wave interferences to cancel their transmissions in given frequency bands. The contribution of the thesis is part of the search for a passive control solution for bending waves taking advantage of its

two approaches, in a composite structure including a granular material. The approach adopted in this work consists, firstly, in defining and then studying the tools making it possible to model, simulate, measure and characterize the propagation of bending waves in structures. Then we study the energy dissipation in a granular medium under prestress. The approach consists in using the discrete element method (DEM) to model an elementary volume representative of a granular medium, and to study its response to compression and shear. Based on our simulation results, on models of effective granular media, and on the rheology of grain flows, we establish a constitutive reduced model based on a Dahl model corrected by a non-linear elastic term. Our model reveals a robust functioning point because it is not very sensitive to the intrinsic characteristics of the granular medium, as well as a dependence on the confinement pressure of the grains which offers an adjustment parameter making it possible to tune the response of the system, and finally the existence of an optimal loss factor resulting from the competition between confinement and friction. The reduced model is then integrated into a numerical finite element model (FEM) describing a multilayer composite beam containing a core made up of friction particles under prestress. This model makes it possible to study its dynamic response in bending, to characterize its ability to dissipate vibrational energy relative to a purely viscoelastic solution, and to outline some recommendations for the design of a prototype.