



**HAL**  
open science

# Modèle de substitution hybride appliqué à l'interaction de fissures en tridimensionnel

Philippe Gilles

► **To cite this version:**

Philippe Gilles. Modèle de substitution hybride appliqué à l'interaction de fissures en tridimensionnel. Autre. Ecole Centrale de Lyon, 2024. Français. NNT : 2024ECDL0009 . tel-04626290

**HAL Id: tel-04626290**

**<https://theses.hal.science/tel-04626290v1>**

Submitted on 26 Jun 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



NNT : 2024ECDL0009

# THÈSE DE DOCTORAT

de l'École Centrale de Lyon,  
membre de l'Université de Lyon

**École Doctorale N°488**  
**(Sciences, Ingénierie, Santé)**

**Spécialité de doctorat : Mécanique & Ingénierie**

Soutenue publiquement le 01 mars 2024 par :

**Philippe Alain Gilles**

## **Modèle de substitution hybride appliqué à l'interaction de fissures en tridimensionnel**

Devant un jury composé de :

Brancherie, Delphine	Professeure des Universités, UTC	Rapporteure
Lazarus, Véronique	Professeure des Universités, ENSTA	Rapporteure
Chapuliot, Stéphane	HDR, Expert international, EDF R&D	Examineur
Gravouil, Anthony	Professeur des Universités, INSA-Lyon	Président
Lacroix, Valery	PhD, Ingénieur en chef, Tractebel, ENGIE	Examineur
Perrin, Gilles	HDR, Directeur scientifique, Framatome	Examineur
Bergheau, Jean-Michel	Professeur, ECLyon	Directeur de thèse
Feulvarch, Eric	Professeur, ECLyon	Co-directeur de thèse

## **DEDICACE**

Je dédie cette thèse à Annie, Claude et Francis, leurs chefs ornés de Beaune et de Nuits.

## **CITATIONS**

On ne pourra bien dessiner le simple qu'après une étude approfondie du complexe, Gaston Bachelard, le Nouvel Esprit scientifique (1934)

Je fais grand cas de la rupture, Racine J. (Anonyme)

## REMERCIEMENTS

Je souhaite vivement remercier mon directeur de thèse M. Jean-Michel Bergheau, Professeur des universités à l'Ecole Centrale de Lyon *ainsi qu'Éric Feulvarch*, Professeur des universités, pour m'avoir accepté et suivi comme étudiant.

Cette thèse n'aurait pas vu le jour sans l'opportunité qu'EDF m'a offert de revenir sur un sujet sur lequel j'avais travaillé en fin des années 1990. Sur la suggestion de Jean-Paul Massoud, expert en métallurgie et de Pierre Genette expert en mécanique, Pauline Bouin, David Albrecht et Frédéric Faure d'EDF/DT m'ont alors demandé d'améliorer la méthode d'analyse du risque d'interaction des retassures dans les produits moulés initialement développé pour un modèle de fissures traversantes. Après une étude de faisabilité de l'extension au tridimensionnel, le sujet est apparu comme suffisamment consistant en fin 2020 pour l'appuyer par une thèse. Je remercie EDF pour le financement de ces travaux.

Cette thèse se nourrit de calculs aux éléments qui ont été réalisés par Robin Degeilh à EDF, puis par ESI-France sous la direction de Cyrille Desrayaud et Célia Germain. Je félicite tous les ingénieurs qui ont maillé et calculé les massifs fissurés pour leur réactivité et la qualité de leurs travaux. Pierre Matray et Emmanuel Josserand ont eu le courage et la persévérance de programmer les formules. Je remercie J-P. Izard de Framatome pour ses calculs d'intégrales avec Mathcad et E. Feulvarch pour les calculs de charge limite.

Stéphane Chapuliot, triple expert en mécanique de la rupture au CEA, puis à Framatome et enfin à EDF m'a fourni une multitude de calculs complémentaires réalisés chez AREVA lors de son étude sur l'interaction de fissures traversantes et elliptiques.

Je remercie beaucoup Kisaburo Azuma, Research Engineer at JAEA, puis Dr. Valéry Lacroix et Pierre Dulieu, Senior Engineer, de Tractebel pour m'avoir fourni des résultats de facteurs d'interaction, très utiles à la validation des formules.

J'adresse mes vifs remerciements à Mmes les professeures Valérie Lazarus et Delphine Brancherie qui ont accepté de juger ce travail et d'en être les rapporteuses. Je remercie aussi Dr. Stéphane Chapuliot, Dr. Anthony Gravouil, Dr. Valéry Lacroix, Dr. Gilles Perrin, directeur scientifique de Framatome, pour m'avoir accordé leur intérêt à cette étude et participé au jury de thèse.

Je suis très reconnaissant envers Pauline Bouin d'avoir parfaitement organisé la soutenance et merci beaucoup à tous ceux qui ont répondu à notre invitation.

Je n'oublie pas ma compagne qui m'a soutenu dans ce projet, manifestant une confiance parfois excessive dans ma capacité à sortir des dolines rencontrées dans ce parcours. Mes parents et amis, la plupart hermétiques à la notion d'intensité des contraintes, m'ont offert de précieux moments de relaxation.

Philippe GILLES

# Affidavit

Je soussigné, Philippe GILLES, déclare par la présente que le travail présenté dans ce manuscrit est mon propre travail, réalisé sous la direction scientifique de Jean-Michel Bergheau et Eric Feulvarch, dans le respect des principes d'honnêteté, d'intégrité et de responsabilité inhérents à la mission de recherche. Les travaux de recherche et la rédaction de ce manuscrit ont été réalisés dans le respect de la charte nationale de déontologie des métiers de la recherche.

Ce travail n'a pas été précédemment soumis en France ou à l'étranger dans une version identique ou similaire à un organisme examinateur.

Fait à Paris, le 17 mai 2024

# SOMMAIRE

INTRODUCTION .....	15
1 ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE .....	19
1.1 Eléments de mécanique de la rupture .....	19
1.1.1 Elasticité linéaire.....	19
1.1.2 Elasto-plasticité.....	28
1.1.3 Critères d’amorçage de la rupture.....	33
1.2 Méthodes de calcul de l’interaction de fissures.....	34
1.2.1 Résolutions analytiques exactes.....	34
1.3 Application aux calculs d’interaction de défauts .....	35
1.3.1 Calculs analytiques approchés.....	35
1.3.2 Calculs numériques discrétisés.....	39
1.3.3 Méthodes hybrides.....	40
1.3.4 Modèles de substitution .....	42
1.3.5 Forces et faiblesses des types de méthodes .....	43
1.4 Interaction fissure enfouie – surface libre .....	43
1.4.1 Interaction fissure – bord libre en bidimensionnel .....	44
1.4.2 Interaction fissure – bord libre en tridimensionnel.....	46
1.5 Interaction fissure - cavité .....	48
1.5.1 Concentration de contraintes autour d’une de cavité.....	48
1.5.2 Effet de la forme du défaut sur la distribution de contraintes en avant du défaut .....	50
1.5.3 Effet d’une cavité sur le FIC.....	51
1.6 Règles codifiées.....	57
1.6.1 Evolution des règles de proximité des défauts.....	58
1.6.2 Le code RSE-M .....	58
1.6.3 Règles de proximité des défauts bande .....	61
1.6.4 Règles de proximité des défauts de surface.....	62
1.6.5 Règles de proximité des défauts enfouis .....	63
1.6.6 Les modifications depuis 2015 .....	65
2 Méthode d’évaluation de l’interaction de fissures.....	67
2.1 Représentation des défauts .....	67
2.2 Notions de base.....	68
2.2.1 Description des configurations.....	68

2.2.2	Ecrantage de fissures .....	69
2.2.3	Principe de la méthode proposée.....	72
2.2.4	Défaut équivalent .....	72
2.3	Limitations de l'approche .....	82
2.3.1	Effet de la flexion .....	82
2.3.2	Cas des fissures de surface.....	85
2.3.3	Traitement des fissures multiples.....	85
3	INTERACTION EN ELASTICITE LINEAIRE .....	87
3.1	Interaction entre deux fissures bande.....	87
3.1.1	Interaction entre deux fissures bande coplanaires .....	87
3.1.2	Interaction entre deux fissures bande parallèles .....	98
3.1.3	Fissures bande inclinées.....	106
3.2	Interaction entre deux fissures elliptiques .....	116
3.2.1	Fissures elliptiques coplanaires égales .....	116
3.2.2	Fissures elliptiques coplanaires inégales.....	123
3.2.3	Variations le long du front.....	125
3.2.4	Fissures elliptiques parallèles .....	131
3.2.5	Fissures elliptiques inclinées .....	152
3.3	Principales formules de facteurs d'interaction et de coefficient d'équivalence.....	153
3.3.1	Fissures bande .....	153
3.3.2	Fissures elliptiques.....	155
4	INTERACTION EN ELASTO-PLASTICITE.....	159
4.1	Introduction .....	159
4.2	Interaction entre deux fissures bande.....	159
4.2.1	Calcul du coefficient d'équivalence .....	160
4.2.2	Choix du niveau de chargement.....	161
4.2.3	Effets de la plasticité .....	161
4.2.4	Etablissement d'une fonction décrivant l'interaction de fissures égales .....	168
4.2.5	Effet de taille de fissure.....	174
4.2.6	Effet d'écrouissage et charge de référence.....	174
4.2.7	Effet d'écrouissage sur les grandeurs d'interaction .....	187
4.3	Défaut équivalent à deux fissures elliptiques .....	189
4.3.1	Coefficient d'équivalence en tridimensionnel.....	189
4.3.2	Choix du niveau de chargement.....	189
4.3.3	Formules pour des fissures elliptiques coplanaires.....	193

4.3.4	Formules pour des fissures parallèles.....	196
4.4	Charges de référence pour deux fissures elliptiques .....	198
4.4.1	Détermination des charges de référence.....	198
4.4.2	Charges de référence pour une fissure elliptique enfouie.....	199
4.4.3	Charges de référence pour deux fissures elliptiques coplanaires égales .....	202
4.4.4	Charges de référence pour deux fissures elliptiques coplanaires inégales.....	204
4.5	Principales formules de coefficient d'équivalence et de charges limites.....	207
4.5.1	Fissures bande .....	207
4.5.2	Fissures elliptiques coplanaires .....	209
4.5.3	Equivalence entre les approches.....	209
5	VALIDATION DU MODELE DE SUBSTITUTION .....	211
5.1	Introduction .....	211
5.2	Validation par comparaison aux résultats numériques.....	211
5.2.1	Précision du modèle en élasticité linéaire .....	211
5.2.2	Précision du modèle en élasto-plasticité .....	215
5.3	Validation expérimentale.....	217
5.3.1	Fissures bande en plasticité confinée .....	217
5.3.2	Fissures bande en élasto-plasticité.....	219
5.4	Conclusions sur la précision de la méthode.....	223
6	CONCLUSION ET PERSPECTIVES.....	225
6.1	Conclusions .....	225
6.1.1	Interaction de défauts en élasticité linéaire.....	225
6.1.2	Interaction de défauts en élasto-plasticité .....	226
6.2	Perspectives d'amélioration .....	227
6.2.1	En élasticité .....	227
6.2.2	En élasto-plasticité.....	227
	REFERENCES .....	229





# NOMENCLATURE

## ACRONYMES

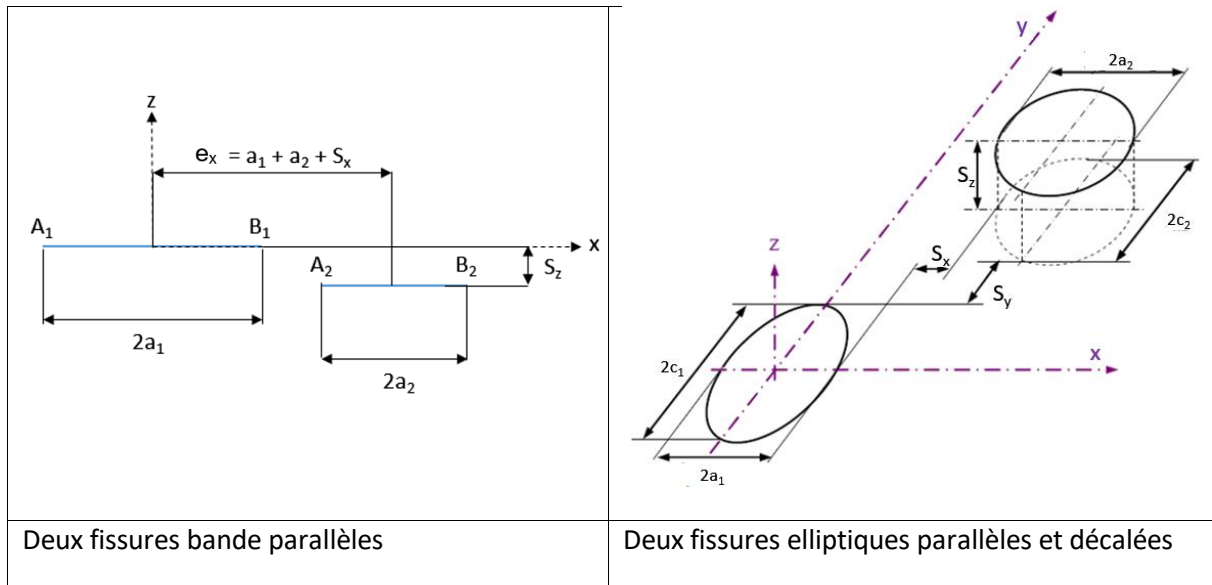
AFCEN	Association Française pour les règles de Conception, de construction et de surveillance en exploitation des matériels des chaudières Electronucléaires
ASME	American Society of Mechanical Engineers
BIM	Boundary Integral Method
CCT	Center Cracked Tension (specimen)
COD	Crack Opening Displacement
CTOD	Crack Tip Opening Displacement
DET	Double Edge (Cracked) Tension (specimen)
ESI	Engineering System International
EPFM	Elastic Plastic Fracture Mechanics
FIC	Facteur d'intensité des contraintes
JSME	Japan Society of Mechanical Engineers
LEFM	Linear Elastic Fracture Mechanics
MTS	Maximum Tensile Stress
PS	Penny Shaped
PSL	Principe de Symétrie Locale
SED	Strain Energy Density
SET	Single Edge Tension (specimen)
SSY	Small Scale Yielding
X-FEM	Méthode des Eléments Finis étendus

## TERMINOLOGIE ET CONVENTIONS

Vertex	Points d'intersection du grand d'axe d'une ellipse avec son contour, points où la courbure est la plus forte ;
Co-vertex	Points d'intersection du petit d'axe d'une ellipse avec son contour, points où la courbure est la moins forte ;

Pointes externes Points les plus éloignés des fronts des deux fissures situées dans des plans parallèles ;

Pointes internes En 2D, les deux pointes qui ne sont pas externes ;



Le charment est une traction suivant l'axe Oz

Le plan principal qui porte une des deux fissures est toujours normal au chargement.

Le demi-axe porté par Ox est toujours nommé a et celui par Oy c et parfois b dans la littérature.

## SYMBOLES

a	Profondeur de fissure semi-elliptique ; demi-longueur d'axe de fissure elliptique, demi-longueur de fissure en 2D
b	Longueur caractéristique de fissure, parfois utilisée à la place de a ou de c
c	Longueur de fissure de surface ; demi-longueur d'axe de fissure elliptique
d	Distance du centre de la fissure elliptique à la surface libre
$e_k$	Espacement des centres des deux fissures traitées avec k égal à x, y ou z
$e_c$	Rapport d'aspect de l'ellipse $e_c=c/a$
r	Coordonnée radiale
$S_x$	Espacement suivant l'axe x entre fissures coplanaires (pour des fissures bandes, il s'agit de l'écartement suivant leur alignement, cette distance est parfois nommée S dans la littérature)

$S_y$	Espacement suivant l'axe y entre fissures elliptiques coplanaires
$\hat{S}_x$	Notation définissant le rapport $\frac{S_x}{a_1+a_2}$
$\hat{S}_y$	Notation définissant le rapport $\frac{S_y}{a_1+a_2}$
$S_z$	Espacement suivant l'axe z entre fissures parallèles (espacement suivant l'axe normal à des fissures coplanaires, pouvant être appelé H dans la littérature)
$\hat{S}_z$	Notation définissant le ratio $\frac{S_z}{a_1+a_2}$
cn(u), dn(u)	
sn(u)	Fonctions elliptiques jacobiennes
K(k)	Intégrale elliptique complète de première espèce
E(k)	Intégrale elliptique complète de seconde espèce
E	Module d'Young
F	Facteur de forme de fissure
$F_{W\_B\_co}$	Fonction de Westergaard pour une fissure bande – contraintes normales à 0x
$F_{W\_B}$	Fonction de Westergaard pour une fissure bande – fonction de x et z (Notée aussi $F_{W\_B\_pa}$ )
$F_{W\_D\_co}$	Fonction de Westergaard pour une fissure disque – contraintes normales à 0r
$F_{W\_D}$	Fonction de Westergaard pour une fissure disque – fonction de r et z (Notée aussi $F_{W\_D\_pa}$ )
$F_{W\_E\_co}$	Fonction de Westergaard pour une fissure elliptique – contraintes normales à 0xy
$F_{W\_E}$	Fonction de Westergaard pour une fissure elliptique – fonction de x, y et z (Notée aussi $F_{W\_E\_pa}$ )
$K_I, K_{II}, K_{III}$	facteurs d'intensité de contrainte en mode I, II, III (exprimé en MPa. $\sqrt{m}$ )
$K_{eq}$	facteurs d'intensité de contrainte équivalent (MPa. $\sqrt{m}$ )
G	Taux de restitution d'énergie potentielle
$h_i$	Facteurs de forme dans l'expression de $J_p$
k	Module des intégrales elliptiques
J ou $J_{ep}$	Force fissurante (kJ/m <sup>2</sup> ou N/mm) ;
$J_e$	Force fissurante en élasticité linéaire
$J_p$	Part plastique de la force fissurante

$H_{env}$	En 2D, hauteur enveloppe de défauts correspondant à la somme des profondeurs de vides des défauts augmentée de la profondeur des ponts de matière
$H_i$	En 2D, hauteur intégrée de défauts correspondant à la somme des vides dans la direction des défauts
$H_{eq}$	En 2D, hauteur du défaut équivalent
$N$	Exposant d'écrouissage
$Q$	Effort appliqué
$Q_{Ly}$	Charge limite associée à la limite $\sigma_y$
$Q_{Ly\_nf}$	Charge limite associée à la limite $\sigma_y$ pour le solide non fissuré
$Q_R$	Charge de référence
$W$	Largeur de plaque (suivant Ox)
$\alpha_e$	Coefficient d'équivalence en élasticité linéaire
$\alpha_{ep}$	Coefficient d'équivalence en élasto-plasticité
$\alpha_p$	Rapport des coefficients d'équivalence $\alpha_{ep}$ et $\alpha_e$
$\beta$	Angle d'inclinaison de la fissure par rapport à Ox dans le plan Oxz et paramètre d'éloignement dans les formules de Gommerstadt $\beta = \frac{S_x}{2a_2}$
$\gamma_{ij}$	Facteur d'interaction en élasticité de la fissure i, influencée par la fissure j
$\sigma_{ij}$	Composante du tenseur des déformations
$\varepsilon(u,k)$	Fonction epsilon
$\zeta$	Rapport des tailles de fissure $a_1/a_2$
$\theta$	Angle polaire
$\iota_{ij}$	Facteur d'interaction en élastoplasticité de la fissure i, influencée par la fissure j
$\lambda_x$	Paramètre d'interaction de fissures bandes, disques ou elliptiques dans le plan suivant la direction x
$\lambda_y$	Paramètre d'interaction de fissures elliptiques dans le plan suivant la direction des axes $c_1$ et $c_2$
$\xi_E, \eta_E, \zeta_E$	Coordonnées ellipsoïdales
$\mu$	Paramètre d'interaction de fissures dans le plan pour l'application des formules de Gommerstadt ; et constante de Lamé
$\mu_c$	Facteur de fissure associé à la charge limite du solide fissuré
$\mu_e$	Facteur d'écrouissage associé à la charge de référence
$\mu_r$	Facteur de réduction de section
$\nu$	Coefficient de Poisson
$\phi$	Anomalie excentrique, angle paramétrique d'une ellipse

$\sigma_{app}$	Contrainte appliquée
$\sigma_y$	Limite d'élasticité conventionnelle à 0,2% de déformation plastique
$\sigma_{ij}$	Composante du tenseur des contraintes



# INTRODUCTION

Les défauts dans les structures sont constitués d'inhomogénéités dans la matière, susceptibles d'en affaiblir la résistance aux sollicitations. Les défauts existent à toutes échelles dans les matériaux, au niveau microscopique comme au niveau macroscopique. Ainsi, les structures cristallines contiennent différents types de défauts : défauts ponctuels telles les lacunes, lignes de dislocations, surfaces libres et interfaces, cavités et inclusions (GOH, 2010). Ces défauts ont un effet déterminant sur les propriétés des matériaux. Les défauts macroscopiques, objet de cette étude, apparaissent en général lors de l'affinage du matériau, des processus de fabrication ou encore lors du montage des structures, en particulier le soudage. Ils sont souvent aussi classés en fonction de leur géométrie : pores, inclusions volumiques, fissures.

Les sollicitations mécaniques, thermiques ou environnementales introduisent des efforts internes appelés contraintes et peuvent endommager le matériau. Les contraintes provoquent des déformations réversibles ou non. Les déformations et les modes d'endommagement sont couplés et peuvent conduire à la création de fissures macroscopiques puis à la rupture de la pièce (FPA, 1993). Les défauts sont des concentrateurs de contrainte et plus le rayon de courbure local est faible, plus la concentration est forte. En élasticité linéaire, en pointe de fissure cette concentration est infinie.

La nocivité des défauts dépend d'un grand nombre de facteurs : leurs dimensions, leur forme, leur position par rapport aux surfaces de la structure ou à d'autres défauts, leur orientation par rapport au chargement, le comportement du matériau, la température, l'environnement et le chargement appliqué à la structure. La mécanique de la rupture étudie les fissures et entailles macroscopique et leur évolution sous l'effet des sollicitations.

La fabrication des produits moulés peut entraîner la création de défauts. On considère généralement qu'il y a cinq catégories de défauts en se fondant sur leurs mécanismes de formation (GAR, 2017). Les défauts affectant la surface (défauts de remplissage, de joint) sont éliminés par l'usinage des pièces ou leur réparation. Les défauts étudiés dans cette thèse sont des défauts internes formés pendant le retrait de solidification (retassures, criques, tapures) ou créés par les gaz non évacués lors du remplissage (soufflures). Les soufflures sont des cavités à paroi lisse peu nocives. Les retassures sont produites par les contractions de volume subies par le métal liquide au cours de la solidification. Les criques sont créées par déchirure lors de la solidification. Ces défauts ont des formes anguleuses. Les criques sont plutôt isolées alors que les retassures ont une forme plus complexe comme l'illustre la figure 1. Les tapures sont créées par déchirure lors du refroidissement dans les parties chaudes.

Les coudes en aciers inoxydable austéno-ferritique moulés des circuits primaires des REP peuvent contenir des défauts de fonderie, principalement identifiés comme des retassures. Ces aciers comportent deux phases : une phase austénitique dominante qui assure un comportement ductile et une phase ferritique qui augmente la résistance mécanique. Les produits austéno-ferritiques moulés sont sensibles au vieillissement thermique (GUT, 1991 ; JOL, 1992 ; BAM, 2008, AND, 2013) qui réduit leur résistance à rupture. Néanmoins, même pour des produits très vieillis, leur rupture finale conserve une ductilité nécessitant un apport d'énergie continu et leur résistance à la fatigue n'est pas fortement affectée par les retassures (HEU, 1992).



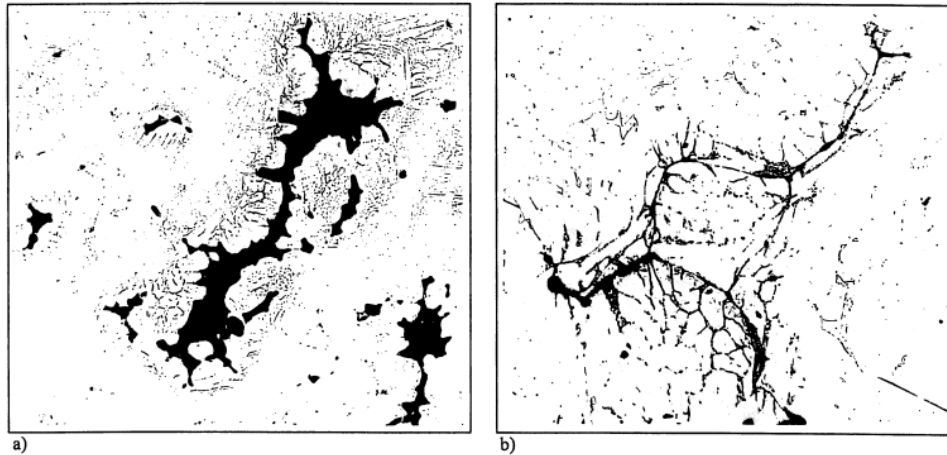
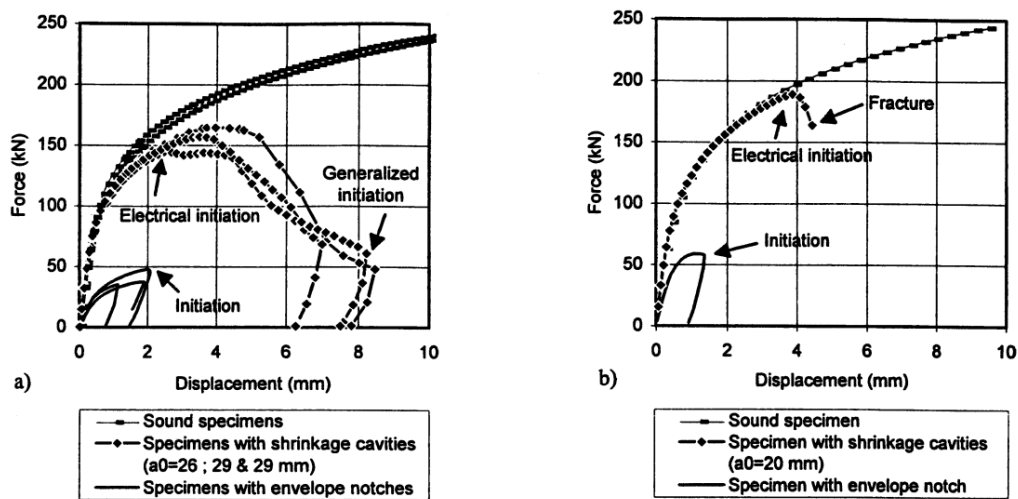


Fig. 1. Micrographs of the shrinkage cavities of plates A. (a) Large cavity surrounded by smaller ones ( $\times 25$ ). (b) Example of fine lines ( $\times 100$ ).

**Figure 1 : micrographies de retassures dans des plaques.  
(a) grandes cavités entourées de petites (b) retassures filamenteuses (JAY, 2000)**

Les retassures sont des défauts volumiques petits par rapport à la structure, toutefois, ils forment parfois des groupes ce qui amène à examiner leur éventuelle interaction. A cette fin les retassures sont modélisées par des fissures enveloppe, ce qui est pénalisant comme en témoignent les essais (JAY, 1997, 2000). L'enveloppe géométrique présente deux inconvénients : la taille est parfois difficile à déterminer en l'absence de critère mécanique et la résistance des ponts de matière n'est pas prise en compte. La figure 2 montre que les structures (éprouvette de flexion trois points et coudes sous flexion monotone) qui comportent des retassures sont nettement plus résistantes que les mêmes structures avec entaille enveloppe.



**Figure 2 : courbes force-déplacement d'essais de flexion sur éprouvettes (a) et coudes (b)  
(JAY, 2000)**

Afin d'analyser de façon plus réaliste le comportement des produits comportant des retassures, plusieurs approches ont été développées par EDF et Framatome :

1. Une approche globale de mécanique de la rupture fondée sur la détermination empirique d'un défaut équivalent, en termes de force fissurante, à un groupe de retassures. La fissure équivalente est une fissure de surface semi-circulaire dont la taille est calculée en élasto-plasticité de façon à identifier la force fissurante  $J$  en fond de fissure à la ténacité du matériau.

Le défaut a une taille deux fois plus petite que celle du défaut enveloppe. (JAY, 2000). Le calcul est réalisé en appliquant des formules établies sur des plaques à fissure de surface semi-elliptique.

2. Une approche de mécanique des milieux continus fondée sur la recherche de propriétés mécaniques dégradées : une contrainte critique pour les chargements monotones et une courbe S-N pour les chargements cycliques (JAY, 2000).
3. Une approche globale de mécanique de la rupture fondée sur la détermination analytique d'un défaut de surface équivalent, en termes de force fissurante, à un groupe de retassures modélisées par des fissures traversantes Une description partielle est fournie dans l'article (GIL, 2001).
4. Plusieurs modèles locaux de la rupture des aciers vieilliss ont été proposés (ANA, 2013, voir aussi une liste dans BUG, 2000). P. Joly a été le premier (JOL, 1992) à développer un modèle décrivant la germination de fissures de clivage, leur croissance et leur coalescence en utilisant le modèle établi par A. Gurson (GUR, 1977) pour les matériaux poreux et sur des mesures du taux de germination des cavités. Ce modèle a été repris et enrichi en améliorant la description du taux de germination (HAZ, 2002).
5. Un modèle couplant une modélisation micromécanique du matériau et un modèle d'endommagement décrivant l'apparition du clivage et la cinétique de germination de cavités (BUG, 2000).

Les approches 1 et 2 sont fondées sur la reproduction d'essais particuliers. Elles mettent en évidence le caractère pénalisant du recours à un défaut enveloppe. Toutefois pour être généralisées elles nécessitent de nombreux essais.

La mise en œuvre des approches 4 et 5 nécessite la réalisation de calculs complexes par des ingénieurs experts dans le domaine. Pour l'heure, ces approches ne sont pas codifiées, mais peuvent servir au cas par cas pour valider une analyse globale d'intégrité ou à interpréter des essais. Elles ont aussi le mérite de faire avancer les connaissances en matière de couplage vieillissement-endommagement.

L'approche 3 est fondée sur une modélisation trop grossière et pénalisante des retassures. C'est pourquoi EDF a souhaité un affinement de cette approche par la modélisation des retassures par des fissures elliptiques.

Cette étude a pour objet l'évaluation des effets d'interaction entre fissures planes par des formules de forme fermée.

Le chapitre I précise d'abord la notion de modèle de substitution afin d'expliquer le caractère hybride de l'approche proposée. Puis sont définies les grandeurs de mécanique de la rupture utilisées dans la thèse. Ensuite sont présentées et analysées les méthodes de calcul de l'interaction ainsi que plusieurs des règles codifiées.

Le chapitre II présente la méthode d'évaluation de l'interaction des deux fissures. La liste détaillée des configurations est illustrée par des schémas. La notion d'écrantage souvent interprétée de façon purement géométrique est montrée dépendante de la loi de comportement. Le concept de défaut équivalent joue un rôle clé dans l'approche car il permet de traiter les cas des défauts multiples. Il y a plusieurs façons de définir cette équivalence : selon le critère choisi et la façon de le mettre en œuvre en tridimensionnel. Enfin, les limitations de la méthode sont examinées. Les limitations du modèle sont pointées.

Le chapitre III est consacré à l'établissement de la méthode en élasticité linéaire. Pour les fissures traversantes, le modèle de substitution couvre tous les cas de figure. En tridimensionnel, le nombre de configurations augmente notablement : effets de forme, de position et d'orientation dans le plan. Tous les cas sont traités à l'exception des fissures désaxées dans le plan et inclinées ou situées dans deux plans sécants selon une droite non parallèle aux axes des ellipses (twist). La notion d'écrantage est analysée de façon approfondie et les limites d'écrantage sont décrites par des formules dans la plupart des cas.

L'interaction entre fissure enfouie et la surface libre est traitée par le même modèle. Pour l'interaction entre fissure enfouie et fissure de surface, le modèle est adapté en appliquant un correctif empirique. Enfin une proposition d'extension de l'approche à l'interaction entre fissure et cavité est examinée en bi et en tridimensionnel.

Ce chapitre est présenté dans sa version intégrale en annexe A1 et dans la thèse sont retenus les points essentiels à savoir l'interaction entre deux fissures bande et l'interaction entre deux fissures elliptiques.

Le chapitre IV est consacré à l'établissement de la méthode en en élastoplasticité sous chargement monotone croissant. Pour les fissures traversantes, deux approches sont déployées. La première est fondée en partie sur la théorie des lignes de glissement et sur l'interprétation empirique des évolutions du défaut équivalent. Elle a le mérite de couvrir les cas de fissures écrantée. La seconde approche est fondée sur les résultats de l'analyse limite et sur l'établissement de formules de charges de référence. En tridimensionnel, ces deux approches sont reprises mais avec une portée plus limitée. La théorie des lignes de glissement n'est plus applicable et le nombre de résultats de calcul exploitables est réduit. Néanmoins les formules de charge de référence sont établies pour les fissures isolées et pour le cas de fissures coplanaires de grand axes communs, c'est à dire pour une interaction au vertex.

Ce chapitre est présenté dans sa version intégrale en annexe A2 et dans la thèse sont retenus les points essentiels. Pour les fissures bande son retenues l'établissement des formules pour la fissure équivalente à deux fissures quels que soient les écartements et la mise au point des formules de charge de référence pour des fissures non écrantées. Pour les fissures elliptiques, le problème de la fissure équivalent est traité par une approche enveloppe et des formules de charge de référence décrivant l'interaction de fissure coplanaires sont établies.

Le chapitre V est consacré à la validation de la méthode en élasticité linéaire et en élastoplasticité sous chargement monotone croissant. Pour les fissures traversantes, la validation est complète y compris pour un comportement non-linéaire. En tridimensionnel, la validation n'est que qualitative en plasticité, faute de résultats expérimentaux.

Ce chapitre est présenté dans sa version intégrale en annexe A3. La thèse traite de la validation du modèle par comparaison des résultats à ceux d'autres approches numériques et par l'analyse de résultats expérimentaux.

La conclusion résume les résultats acquis et propose quelques perspectives de développement. Les deux résultats importants sont la complétude du modèle en élasticité linéaire et l'originalité des formulations en élasto-plasticité, qui couvrent les interactions de fissures bande parallèles et des fissures elliptiques coplanaires.

# 1 ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE

## 1.1 Eléments de mécanique de la rupture

Cette étude se situe dans le cadre de l'approche globale en mécanique de la rupture. Cette approche analyse le comportement des structures comportant des fissures macroscopiques en représentant ces fissures par des surfaces de discontinuité dans un solide considéré comme un milieu continu. Les défauts sont supposés préexistants. Les fissures introduisent des singularités des contraintes sans signification physique le long de leur front. Cependant les critères de rupture sont fondés sur des paramètres réguliers : en élasticité linéaire le facteur de singularité appelé Facteur d'intensité de Contraintes (FIC) ou, en élasticité linéaire ou non, sur le taux d'énergie par aire de surface de séparation de matière en avant du front de fissure.

Cette thèse analyse l'interaction de fissures ou de cavités dans un domaine restreint :

- Le matériau est homogène et isotrope.
- La température est constante.
- Les calculs sont effectués en petits déplacements et petites déformations.
- Les fissures sont planes.
- Les fissures n'évoluent pas, le critère de ruine ne porte que sur le risque d'amorçage à la rupture.

### 1.1.1 Elasticité linéaire

La résolution des problèmes de mécanique linéaire de la rupture est généralement scindée en deux conditions aux limites : l'état de déformations planes ou d'état antiplan (LEB, 2003). Leblond montre qu'en tridimensionnel (LEB, 2003) les termes singuliers s'obtiennent par superposition de ces deux états, mais que l'état de contraintes planes « n'est pas compatible avec les équations de l'élasticité tridimensionnelle ». Mais pour les structures minces fissurées en plasticité, le comportement est mieux traduit en considérant un état de contraintes planes.

#### 1.1.1.1 Le comportement asymptotique en élasticité linéaire

Les distributions de contraintes et de déplacement au voisinage du front de fissure sont décrites par des développements limités décrits par des fonctions séparées des deux coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$  dans le plan normal au front de fissure avec pour origine la pointe de fissure (plan  $z$ ,  $n$  de la figure 1.1). Le développement limité en déformations planes a été établi par Williams (WLL, 1952) et le problème antiplan résolu par Rice in (LIE, 1968, Chap II).

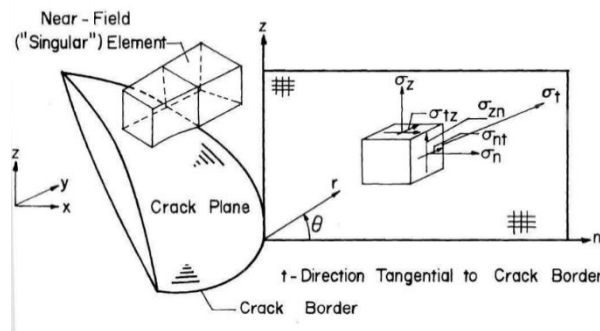


Figure 1.1 : repères global et local du milieu fissuré (KAT, 1976)

Le comportement statique au voisinage du front de fissure est décrit par les formules (PAK, 1991) :

- Dans le plan normal au front :

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot f_{ij}^{II}(\theta) + (T_{11} + \nu \cdot T_{33}) \cdot \delta_{1i} \cdot \delta_{1j} + O(\sqrt{r}) \quad i = 1, 2 \quad (1_1)$$

- Hors du plan normal au front :

$$\sigma_{i3}(r, \theta) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot f_{i3}^{III}(\theta) + T_{13} \cdot \delta_{1i} + O(\sqrt{r}) \quad i = 1,2 \quad (1\_2a)$$

$$\sigma_{33}(r, \theta) = \nu \cdot \left[ \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot (f_{11}^I(\theta) + f_{22}^I(\theta)) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot (f_{11}^{II}(\theta) + f_{22}^{II}(\theta)) \right] + T_{33} + \nu \cdot T_{11} + O(\sqrt{r}) \quad (1\_2b)$$

Où

- $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$ , nommés Facteurs d'Intensité des Contraintes (FIC) sont des fonctions du chargement et de la géométrie de la structure fissurée.
- Le premier terme du développement en  $r$  est singulier en  $1/\sqrt{r}$ .
- Les fonctions  $f_{ij}$  sont purement des fonctions angulaires.
- $T_{11}$  (souvent désignée par  $T$ ) et  $T_{33}$  sont des contraintes transverses agissant dans le plan de la fissure et donc qui n'entraînent pas de termes singuliers. Il en va de même pour le cisaillement hors plan  $T_{13}$ .
- Dans l'expression de  $\sigma_{33}$  le terme en  $\nu$  correspond à l'état de déformations planes, il faut l'annuler pour le cas de la contrainte plane.

Le comportement cinématique au voisinage du front de fissure est décrit par les formules :

- Dans le plan normal au front :

$$u_1(r, \theta) = \frac{K_I}{2\mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot g_1^I(\kappa, \theta) + \frac{K_{II}}{2\mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot g_1^{II}(\kappa, \theta) + \frac{T_{11} - \nu \cdot T_{33}}{E} \cdot r \cdot h_1(\text{Etat}, \nu, \theta) + O(r^{3/2}) \quad (1\_3a)$$

$$u_2(r, \theta) = \frac{K_I}{2\mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot g_2^I(\kappa, \theta) + \frac{K_{II}}{2\mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot g_2^{II}(\kappa, \theta) - \nu \cdot \frac{T_{11} + T_{33}}{E} \cdot r \cdot h_2(\text{Etat}, \nu, \theta) + O(r^{3/2}) \quad (1\_3b)$$

- Hors du plan normal au front :

$$u_3(r, \theta) = 2 \frac{K_{III}}{\mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{T_{33} - \nu \cdot T_{11}}{E} \cdot r \cdot h_3(\nu, \theta) + O(r^{3/2}) \quad (1\_4)$$

Avec  $\mu = \frac{1+\nu}{2E}$  et  $\kappa = 3 - 4\nu$  en déformations planes et  $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$  en contraintes planes.

### Détermination des Facteurs d'intensité des contraintes

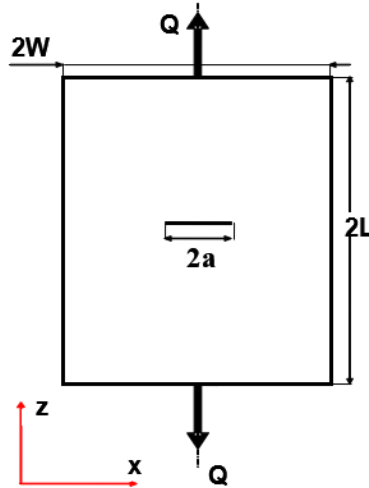
Les Facteurs d'Intensité des Contraintes (FIC) caractérisent l'intensité des contraintes singulières en pointe de fissure. Le FIC de mode I est toujours positif si la fissure est ouverte.

La détermination des expressions des FIC et des contraintes non singulières telles que  $T$  nécessite en général le recours au calcul de structure. Pour des structures de dimensions finies, il n'existe qu'une solution exacte, celle du panneau à entaille centrale sous cisaillement hors plan. De nombreux formulaires ont été établis pour des configurations spécifiques (TAP, 1973 ; MUR, 2001 ; ROO, 1976 ; NEW, 1979, 1984 ; RSE-M 2010).

En élasticité linéaire, pour une fissure centrée dans une plaque de largeur  $2W$  (Figure 1.2) et soumise à une contrainte normale appliquée à ses bords  $\sigma_{app}$ , le facteur d'intensité des contraintes s'écrit :

$$K_I = \sigma_{app} \cdot F\left(\frac{a}{W}\right) \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (1_5)$$

Avec la contrainte appliquée  $\sigma_{app} = \frac{Q}{Z_e}$  où  $Q$  est l'effort de traction appliqué à la plaque et  $Z_e$  est le module géométrique en élasticité égal en traction à  $2W$ , où  $W$  est la demi-largeur de plaque.



**Figure 1.2 : schéma d'une plaque à fissure centrale sollicitée en traction**

La fonction  $F$  (notation classique, voir TAP, 1973) correspond au facteur de forme et dépend de paramètres géométriques associés au défaut. Ce facteur de forme vaut 1 pour une fissure de taille très faible par rapport à la largeur de plaque et devient singulier (infini) quand la fissure tend à être aussi large que la plaque.

Une configuration joue un rôle clé dans cette étude, celle de la fissure elliptique (Figure 1.3) située dans un massif infini sollicité en traction normale  $\sigma_{app}$ .

En considérant  $c \leq a$ , le Facteur d'Intensité des Contraintes s'exprime par la formule suivante, également fournie par G. Irwin (IRW, 1962) :

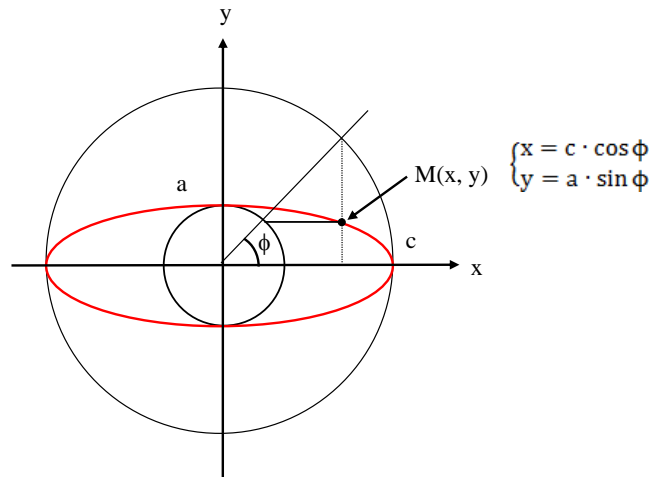
$$K_{I\infty}(\phi) = \frac{\sigma_{app}}{E(k)} \cdot \sqrt{\pi \cdot c} \cdot \left[ \sin^2 \phi + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \cdot \cos^2 \phi \right]^{\frac{1}{4}} \quad (1_6a)$$

Avec :

- $k = \sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2}$  ;
- $E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \phi} \cdot d\phi$  (7) l'intégrale complète de seconde espèce ;
- $\phi$  angle paramétrique de l'ellipse, décrit sur la figure 1.3 ci-après.

Au vertex  $\Phi = 0$  et  $K_{I\infty}(0) = \frac{\sigma_{app}}{E(k)} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot \frac{c}{a} = \frac{\sigma_{app}}{E(k)} \cdot \sqrt{\pi \cdot c} \cdot \sqrt{\frac{c}{a}}$

Au co-vertex  $\Phi = \frac{\pi}{2}$  et  $K_{I\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sigma_{app}}{E(k)} \cdot \sqrt{\pi \cdot c}$ .



**Figure 1.3 : paramètres de l'ellipse**

Dans le cas où  $a \leq c$ , une rotation des axes de 90 degrés est nécessaire ou, de façon plus élégante en utilisant l'expression complexe de  $E(i, k)$  (SCH, 1983), multiplier  $E(k)$  par  $\frac{a}{c}$ , ce qui donne :

$$K_{I\infty}(\phi) = \frac{\sigma_{app}}{E(k)} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot \left[ \cos^2 \phi + \left(\frac{a}{c}\right)^2 \cdot \sin^2 \phi \right]^{\frac{1}{4}} \quad (1_6b)$$

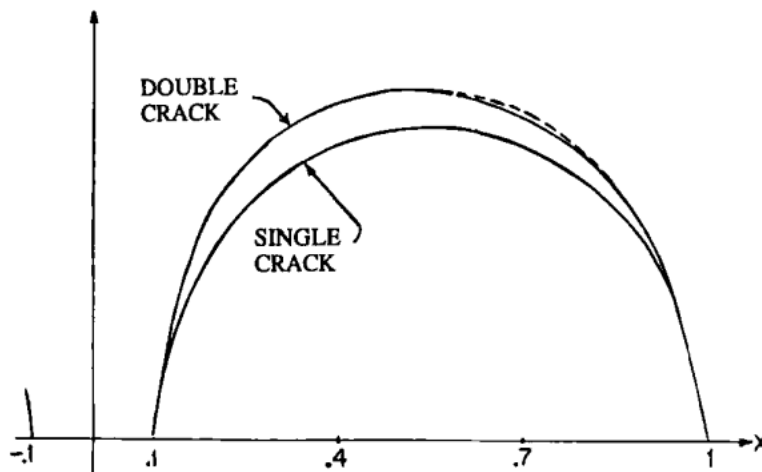
De façon analogue à la formulation en 2D, il est possible de compacter les formules (6a et b) sous la forme (pour  $a \leq c$ ) :

$$K_{I\infty}(\phi) = \sigma_{app} \cdot F(\phi, a/c) \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (1_7)$$

Avec F le facteur de forme du facteur d'intensité des contraintes en 3D.

#### L'utilisation de l'ouverture de la fissure

En élasticité linéaire, l'ouverture de fissure a servi essentiellement à la détermination du FIC par calcul à partir des formules asymptotiques (CTW, 1970). Cette méthode n'est pratiquement plus utilisée. En revanche, dans le cas de fissures interagissantes, l'asymétrie de l'ouverture évaluée dans un plan de coupe informe sur l'importance de l'effet d'interaction (Figure 1.4).



**Figure 1.4 : ouverture de fissures bande isolée et interagissante (KAC, 1994)**

L'ouverture de fissure en mode I (Crack Tip Opening Displacement) vaut en pointe de fissure :

$$CTOD_y = u_y(+\pi) - u_y(-\pi) = \frac{K_I}{2\mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot [\kappa + 1] + O\left(r^{\frac{3}{2}}\right) \quad (1_8)$$

Soit, en déformations planes :

$$CTOD_y = \frac{8K_I}{E'} \cdot \sqrt{\frac{r}{2\pi}} + O\left(r^{\frac{3}{2}}\right) \quad (1_9)$$

De manière conventionnelle, le CTOD est défini par la valeur du COD à la distance  $r = COD/2$ , vaut donc en omettant le  $y$  :

$$CTOD = \frac{16}{\pi} \cdot \left(\frac{K_I}{E'}\right)^2 \quad (1_{10})$$

Cette expression sera complétée au § consacré à la plasticité.

### 1.1.1.2 Le comportement énergétique en élasticité linéaire

La théorie de Griffith (GRI, 1920) est fondée sur le taux d'énergie  $G$  nécessaire à l'extension de fissure.  $G$  est le taux de restitution d'énergie potentielle défini par l'opposé de la dérivée de l'énergie potentielle par rapport à l'aire de fissure.

L'énergie potentielle  $\Pi$  du corps fissuré  $\Omega$  de contour  $\partial\Omega$  s'exprime par la différence entre l'énergie de déformation et le travail des forces extérieures :

$$\Pi = \int_{\Omega} W(\bar{\epsilon}) \cdot dV - \int_{\partial\Omega} \bar{Q} \cdot \bar{q} \cdot dS \quad (1_{11})$$

$W(\bar{\epsilon}) = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} \cdot d\epsilon_{ij}$  est la densité d'énergie de déformation.

$\bar{Q}$  est le vecteur des paramètres de chargement et  $\bar{q}$  le vecteur des déplacements conjugués.

$$G = - \frac{d\Pi}{dA} \quad (1_{12})$$

Cette approche a été étendue à la thermoélasticité dynamique (BUI, 1980).

Irwin (IRW, 1956) a relié  $G$  aux Facteurs d'Intensité des Contraintes par la formule :

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot [K_I^2 + K_{II}^2] + \frac{1 + \nu}{E} \cdot K_{III}^2 \quad (1_{13})$$

Cette formule été établie par Irwin pour une fissure plane en 2D (en contraintes planes, il faut annuler le coefficient de Poisson  $\nu$ ). Elle a été généralisée aux fissures planes en 3D par J-B. Leblond et O. Torlai (LEB, 1992). Ces auteurs ont montré que les champs mécaniques, au voisinage d'un point du front, résultent de la superposition d'un problème de déformation plane d'une part, et d'autre part d'un problème de déformation antiplane. La formule ne s'applique pas aux points d'intersection de la fissure avec la surface libre si le front de fissure n'est pas normal à cette surface.

### L'intégrale J

Afin de caractériser la concentration de déformation autour d'un fond d'entaille ou de fissure, J. R. Rice (RIC, 1968a) a défini, pour un milieu homogène élastique (linéaire ou non-linéaire, ce point sera repris



au § consacré à la plasticité) soumis à un champ de déformation bidimensionnel, l'intégrale de contour J définie par :

$$J = \oint_{\Gamma} \left[ w \cdot n_x - \vec{t} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \right] \cdot ds \quad (1.14)$$

Où  $\Gamma$  est un contour ouvert orienté de façon quelconque, entourant la pointe de fissure et dont les extrémités se situent sur les faces de la fissure.

La fissure est rectiligne sur cette partie entourée par le contour, est parallèle à l'axe x et n'est pas chargée.

$t_i = \sigma_{ij} \cdot n_j$ ,  $i = 1, 2$  sont les composantes du vecteur contrainte.

J. Rice a construit cette intégrale de façon à ce qu'elle soit indépendante du contour  $\Gamma$ . J peut donc être évalué loin de la zone singulière et ainsi pouvoir éviter un fort raffinement de maillage en pointe de fissure.

En utilisant les champs asymptotiques, le calcul de J sur un contour circulaire centré en pointe de fissure conduit en bidimensionnel à la relation :

$$J_e = \frac{1 + \kappa}{2\mu} \cdot (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (1.15)$$

Ce qui donne respectivement en Déformations Planes et Contraintes Planes :

$$J_e = \frac{1-\nu^2}{E} \cdot (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (1.16a) \quad \text{et} \quad J_e = \frac{1}{E} \cdot (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (1.16b)$$

Ces expressions sont celles du taux de restitution d'énergie. Dans son article, J. Rice renvoie la démonstration à un futur rapport. H. D. Bui (BUI, 1978, p. 65) en fournit une preuve élégante.

La même intégrale a été aussi proposée par G. Cherepanov (CHR, 1967a, b), mais ce travail n'a été traduit en anglais qu'en 1998 et n'a pas bénéficié du support de l'industrie et des organismes de codification des USA.

Cette intégrale constitue une expression particulière des lois de conservation de l'élastostatique comme l'a illustré H. Bui (BUI, 1978).

### La méthode G-Thêta

La méthode G-Thêta (DES, 1981) utilise la définition de G comme dérivée de l'énergie potentielle par rapport au domaine, c'est le taux de restitution de l'énergie :

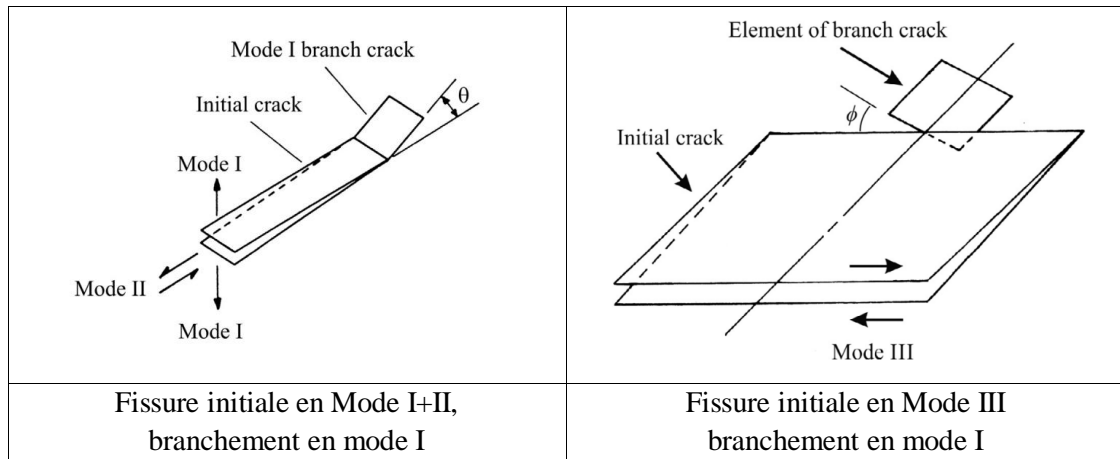
$$G = - \frac{d\Pi}{d\Omega} \quad (1.17)$$

où  $\Pi$  est l'énergie potentielle et  $\Omega$  le domaine d'intégration.

La cinématique virtuelle du front de fissure est définie par un champ vectoriel  $\theta$ . Il est construit de façon à être non nul et constant égal à  $\theta_1$  sur un domaine autour de la fissure et nul en dehors de ce domaine. Il vérifie certaines hypothèses : le champ est supposé rester parallèle à la fissure, normal au front de fissure et rester dans le domaine  $\Omega$ . Il doit être de régularité suffisante pour que l'on puisse définir la dérivée de l'énergie dans la direction  $\theta$  à partir de ce champ virtuel. Cette dérivée est égale à G au produit par  $\theta_1$  près. Ainsi en prenant le champ égal à 1 au voisinage de la fissure sur le domaine d'intégration, on obtient directement G.

### Les effets de mode mixte

Une fissure soumise à un mode mixte I+II se propage en déviant de sa trajectoire : il y a branchement de la fissure. L'angle de branchement croît avec l'importance du mode II. Sous mode III la fissure se tord en brisant le front de fissure, contrairement à ce qui se produit en mode I+II (Figure 1.5).



**Figure 1.5 : déviations de fissure en mode mixte (POO, 2018)**

L'expression des FIC et du taux de restitution d'énergie ne sont plus les mêmes avant et après branchement. Leblond (LEB, 2003) démontre que les FIC après branchement ne dépendent que du champ de contraintes avant branchement et établi une relation linéaire entre les FIC correspondants :

$$\begin{pmatrix} k_1^* \\ k_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \end{pmatrix} \quad (1_{18})$$

Où les composantes dépendent de l'angle de branchement la fissure initiale. Amestoy (AME, 1979) en a donné une expression asymptotique. Leblond (LEB, 2003) établi que l'expression du taux de restitution d'énergie conserve la même forme que l'expression d'Irwin en remplaçant les FIC  $K_I$  et  $K_{II}$  par  $k_1^*$  et  $k_2^*$ .

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot [(k_1^*)^2 + (k_2^*)^2] \quad (1_{19})$$

Le cas du mode mixte I+II+III est beaucoup plus complexe et a été étudié notamment par Leblond (LEB, 2003) et Lazarus (LAZ, 1998).

Il existe de très nombreux critères qui prédisent la direction de déviation et le risque de rupture fragile en élasticité linéaire, valables aussi en plasticité confinée. Quatre types de critères peuvent être distingués :

- Les critères fondés sur la solution asymptotique des contraintes en pointe de fissure initiale, tel le critère de la contrainte normale maximale (Maximal tangential Stress- MTS- ERS,1963).
- Les critères fondés sur la solution asymptotique à deux termes des contraintes en pointe de fissure initiale, tel le critère de la contrainte normale maximale (WLE,1972 ; BAN, 1986).
- Les critères fondés sur la solution asymptotique des contraintes en pointe de fissure branchée, tel le principe de la symétrie locale (AME, 1979).
- Les critères énergétiques, comme le critère du taux de restitution d'énergie maximal (voir références données par (AME, 1979 ; LEB, 2003).

De très nombreux essais ont été réalisés sur des plaques comportant une fissure sollicitée en mode I+II. Malheureusement la discrimination est difficile comme le montre la figure 1.6 tirée de (REN, 1968). Les critères suivants sont comparés : MTS, Minimum Strain Energy Density (MSSED) qui est très dépendant du coefficient de Poisson (SIH, 1974), Maximum Energy Release Rate (MERR), Minimum distortional Strain Energy Density-Y (YEH, 1991) et le critère NT qui lui est fondé sur le maximum de densité d'énergie de déformation de dilatation (YEH, 1987). Le critère MERR donne des prédictions voisines du critère MTS qui est le plus utilisé.

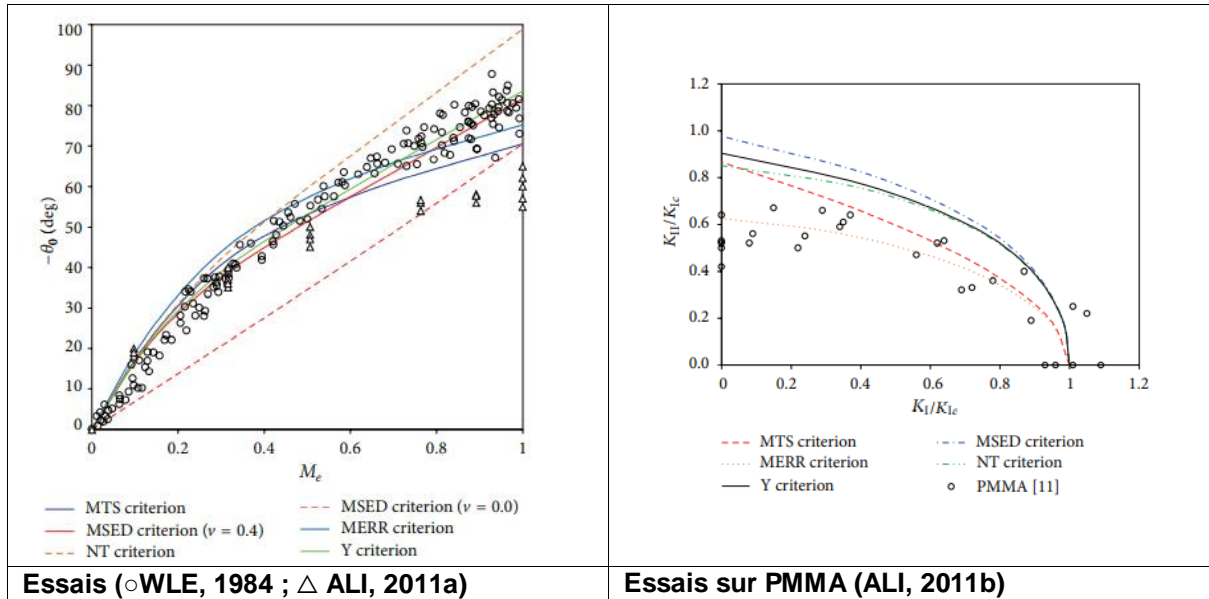


Figure 1.6 : comparaison des prédictions des critères directionnels aux résultats d'essais (REN, 2003)

Le paramètre  $M_e = \frac{2}{\pi} \cdot \text{Atan} \left( \frac{K_I}{K_{II}} \right) = \frac{\beta}{90}$  représente le taux de mixité et l'angle  $\beta$  est l'angle que fait une fissure par rapport à l'axe normal à l'axe de traction.

Pour une application éventuelle à l'interaction de défauts, deux critères sont à retenir : le critère MTS pour sa simplicité de mise en œuvre et le critère de la symétrie locale.

Le critère MTS ou critère d'Erdogan et Sih

L'angle de déviation est donné par les conditions :

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}(r, \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}(r, \theta)}{\partial^2 \theta} < 0 \quad (1_{20})$$

Ce qui conduit à l'équation en utilisant le terme singulier de la contrainte tangentielle :

$$K_I \cdot \sin \theta + K_{II} \cdot (3 \cdot \cos \theta - 1) = 0$$

La solution est donnée par :  $\cos \theta = \pm \frac{3K_{II}^2 + K_I \cdot \sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2}}{K_I^2 + 9K_{II}^2}$ . (1\_21)

Le critère de rupture est :

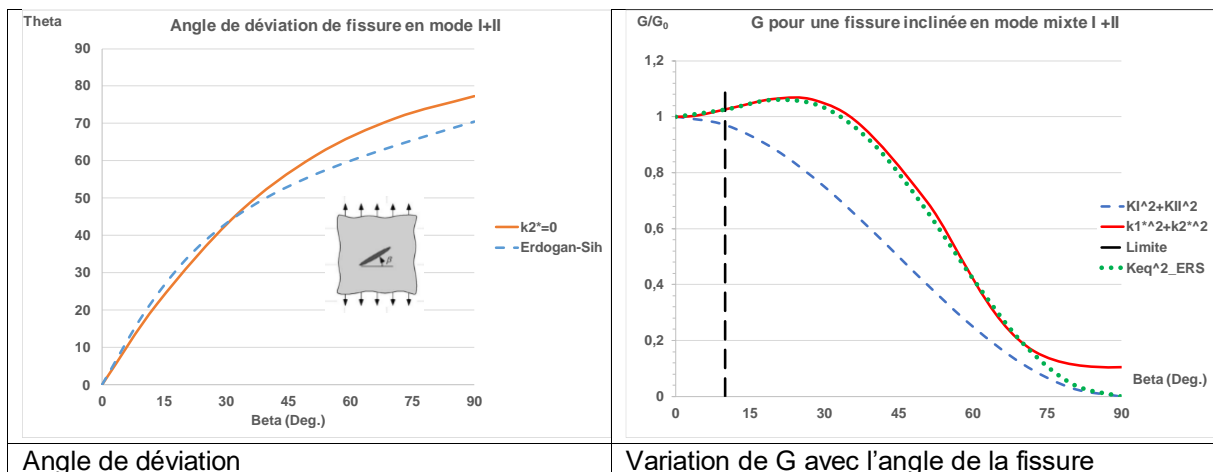
$$K_{I\theta} = 0.5 \cdot \cos \left( -\frac{\theta}{2} \right) \cdot [K_I \cdot (1 + \cos(-\theta)) - 3K_{II} \cdot \sin(-\theta)] = K_{Ic} \quad (1_{22})$$

Le critère du Principe de la Symétrie locale (PSL)

Les coefficients  $F_{ij}$  sont donnés sous forme tabulée (AME, 1979) le critère directionnel est donné par la condition  $k_2^* = 0$  qui donne l'angle  $\theta^*$  et le critère de rupture s'énonce simplement :

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot [(k_1^*)^2 + (k_2^*)^2] \equiv \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot (k_1^*(\theta^*))^2 = \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot (K_{Ic})^2 \quad (1_{23})$$

La comparaison des critères est illustrée à la figure 17.



**Figure 1.7 : comparaison des critères directionnels et de rupture ( $k_2^*$  est le critère PLS, le critère d'Erdogan et Sih est appelé MTS)**

Les deux critères MTS et PLS donnent des prédictions proches. En revanche l'expression de G avant branchement sous-estime fortement le taux réel de relaxation d'énergie si l'angle  $\beta = \text{atan}\left(\frac{K_{II}}{K_I}\right)$  dépasse 10 degrés soit  $K_{II}/K_I > 17\%$ .

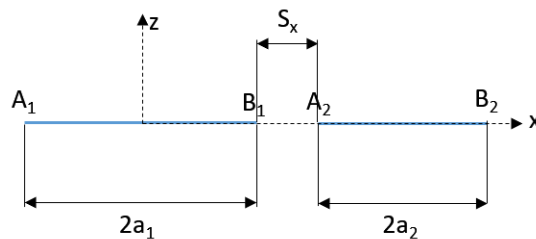
L'interaction avec faible mode II peut être mesurée par J sinon il faut connaître les valeurs des deux FIC  $K_I$  et  $K_{II}$ .

### 1.1.1.3 L'interaction de fissures

Le Facteur d'Interaction de fissure, noté  $\gamma$  dans la littérature récente, est le rapport entre d'une part, le facteur d'intensité des contraintes en un point  $P_k$  du front de fissure en présence d'une ou plusieurs fissures et d'autre part, le facteur d'intensité des contraintes au même point  $P_k$  de la même fissure, isolée cette fois-ci, obtenus sous chargement identique. Pour la fissure (i) influencée par la fissure (j), le facteur d'interaction élémentaire au point  $P_k$  de la fissure (i) est donc :

$$\gamma_{ij}(P_k) = \frac{K_{ij}(P_k)}{K_{i0}(P_k)} \quad (1.24)$$

$K_{ij}$  est le facteur d'intensité des contraintes de la fissure i au point  $P_k$  du front de la fissure i et  $K_{i0}$  est le facteur d'intensité de la fissure i isolée, soumise au même chargement que le couple de fissures. Le facteur d'interaction dépend de la position du point  $P_k$  sur le front de la fissure i et de la position, de la forme et de la taille de la fissure j.



**Figure 1.8 : défauts bande coplanaires**

En bidimensionnel pour deux fissures inégales (Figure 1.8), il existe 4 facteurs d'interaction, associés aux deux pointes des deux fissures. Les facteurs d'interaction utiles pour définir le défaut équivalent à des fissures non écrantées géométriquement sont uniquement ceux associés

aux deux pointes les plus proches. Ce document propose des formules approchées pour ces deux facteurs. Il existe par ailleurs, pour des fissures alignées, des formules exactes de calculs des facteurs d'interaction aux 4 pointes.

Dans le cas de deux fissures identiques ( $K_{1_0} = K_{2_0}$ ), l'écriture se simplifie de la manière suivante :

$$\gamma(P_k) = \frac{K_{12}}{K_{1_0}} = \frac{K_{21}}{K_{1_0}} \quad (1_25)$$

Pour deux fissures alignées inégales d'extrémités  $A_1/B_1$  et  $A_2/B_2$  situées dans un solide infini (voir Figure 1.8) :

$$K_{B_1} = \sigma_{app} \cdot F_{B_1} \cdot \sqrt{\pi \cdot a_1} \text{ et } K_{A_2} = \sigma_{app} \cdot F_{A_2} \cdot \sqrt{\pi \cdot a_2} \quad (1_26)$$

D'où

$$\gamma_{12}(B_1) = \frac{\sigma_{app} \cdot F_{B_1} \cdot \sqrt{\pi \cdot a_1}}{\sigma_{app} \cdot \sqrt{\pi \cdot a_1}} \equiv F_{B_1} \text{ et } \gamma_{21}(A_2) = \frac{\sigma_{app} \cdot F_{A_2} \cdot \sqrt{\pi \cdot a_2}}{\sigma_{app} \cdot \sqrt{\pi \cdot a_2}} \equiv F_{A_2} \quad (1_27)$$

En tridimensionnel, le facteur d'interaction varie le long du front. Pour deux fissures inégales, il est le plus important pour la petite fissure alors que le facteur d'intensité des contraintes est le plus important pour la grande fissure au niveau de leurs points d'interaction.

## 1.1.2 Elasto-plasticité

Les calculs aux éléments finis sont effectués en élasto-plasticité avec le critère de von Mises, mais les interprétations sont réalisées en théorie finie de la plasticité.

### 1.1.2.1 Théorie finie de la plasticité

En plasticité, la déformation actuelle dépend du trajet de chargement. Un chargement est dit radial, si en tout point du solide considéré, le tenseur des contraintes est proportionnel au produit d'un tenseur de contrainte en ce point par une fonction monotone du temps et nulle à l'état initial. Dans ce cas particulier, l'intégration des vitesses de déformations peut être effectuée et l'on aboutit à des lois de comportement formulées en déformations. L'étude de ces configurations fait l'objet de la plasticité de déformation encore appelée théorie finie de la plasticité de Hencky (HEN, 1923).

L. M. Kachanov (KAH, 1971) émet trois conditions pour que la plasticité puisse être traitée comme de l'élasticité non-linéaire :

- Le matériau est isotrope
- La variation relative de volume est une déformation élastique proportionnelle à la contrainte hydrostatique
- Les déviateurs des contraintes et des déformations sont proportionnels.

Il est clair que c'est la dernière hypothèse qui est la plus difficile à vérifier. Elle interdit de considérer la moindre décharge, ce qui est en général vérifié si le chargement est mécanique et monotone croissant. Tel n'est plus le cas pour un chargement thermique qui s'accompagne de décharges partielles significatives dès que le gradient de température diminue. Toutefois l'auteur souligne qu'un "processus irréversible de déformation d'une barre peut être représenté dans chaque portion de charge puis décharge par une équation d'état d'un matériau idéal élastique non-linéaire". Pour des charges croissant proportionnellement, Il'yushin (ILY, 1956) montre que cette troisième hypothèse ne pourra être vérifiée que si les déformations sont petites, le matériau incompressible et les contraintes et les déformations reliées par une fonction puissance.

Les hypothèses formulées ci-dessus permettent de décrire correctement les problèmes d'amorçage de la déchirure ductile, sauf si le matériau a une ténacité très élevée et une limite d'élasticité basse. Pour un tel matériau, l'amorçage s'accompagnera de déformations très élevées sur le front de fissure et la résolution du problème en petits déplacements, même en prenant des incréments de chargement très faibles, ne permettra pas de traduire l'émoussement en fond de fissure. On peut remarquer qu'une telle situation est loin de se produire si le critère de validité des essais de détermination de la ténacité  $J_{Ic}$  est respecté (KAN, 1985).

$$\frac{J_{Ic}}{\sigma_y} \leq \frac{d}{25} \quad (1.28)$$

Le paramètre  $d$  est une longueur qui correspond à la taille minimale du massif contenant la fissure. Pour les produits moulés en acier austéno-ferrique, la limite d'élasticité minimale vaut 150 MPa et la valeur de  $J_{Ic}$  ne dépasse pas 100 KJ/m<sup>2</sup>. La longueur  $d$  dans un coude est de 40 mm au minimum, donc le critère est toujours vérifié.

### 1.1.2.2 Le comportement Rigide Parfaitement Plastique

En plasticité parfaite :

- La loi de comportement avec la formulation de Von Mises se résume à l'expression :

$$\sigma_{eq} = \sigma_y \quad \text{et} \quad \sigma_y = \sqrt{3} \cdot \tau_y \quad (1.29)$$

- Le matériau est incompressible :  $\nu = 0.5$
- Les déformations ne sont pas déterminées de façon unique.

Les configurations d'intérêt pour cette étude sont la plaque en traction à fissure traversante centrale (éprouvette CC(T)) et la plaque en traction avec deux fissures traversantes latérales coplanaires (éprouvette DE(T)).

J. Rice (RIC, 1968a) utilise la théorie des lignes de glissement établie par Hencky (HEN, 1923) et Geringer (GER, 1930) ainsi que les développements de Hill (HIL, 1950) pour décrire les champs des contraintes de fissures dont la pointe est enfouie dans région plastifiée. Les figures 1.9 et 1.10 décrivent les réseaux de lignes de glissement au voisinage des pointes de fissure.

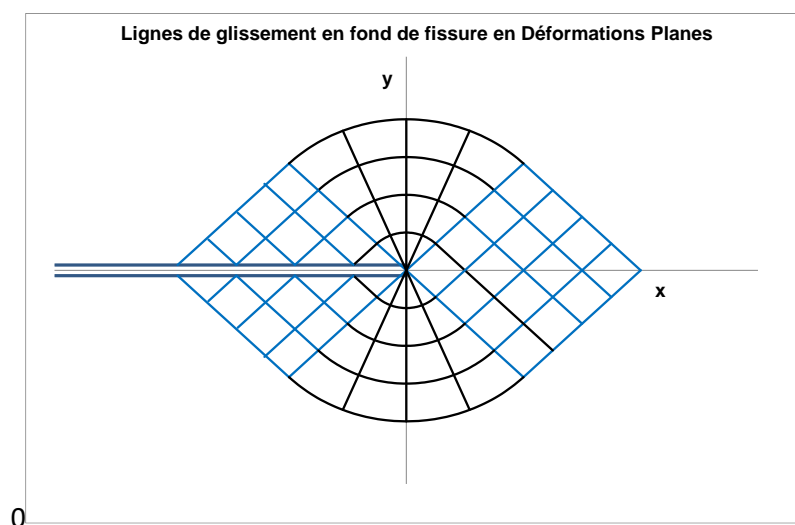
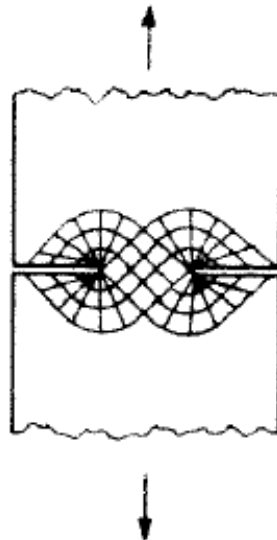


Figure 1.9 : champ de ligne de glissement en pointe de fissure en parfaite plasticité (d'après Rice in LIE, 1968)

Dans les régions coloriées en bleu les contraintes sont constantes. Elles varient de façon linéaire avec l'angle polaire dans les éventails. Les contraintes sont toutes bornées en raison de l'hypothèse de comportement parfaitement plastique.

Ce champ est caractéristique des configurations à forte triaxialité, on le retrouve dans l'éprouvette DE(T) comme illustré par la figure 1.10.



**Figure 1.10 : Champ de ligne de glissement dans l'éprouvette DE(T)**

#### Champs parfaitement plastiques de la plaque à fissure centrale de longueur $2a$

Le champ de lignes de glissement est (MCL, 1971) :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sigma_0 \cdot (1 - \cos 2\theta) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sigma_0 \cdot (1 + \cos 2\theta) \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sigma_0 \cdot \sin 2\theta\end{aligned}\quad (1_{30a,b,c})$$

La charge limite est :

$$Q_{L0} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sigma_0 \cdot 2W \cdot (1 - a/W) \quad (1_{31})$$

Les champs dans le ligament ont été étudiés par (ZHC, 2020) pour les éprouvettes CC(T) et DE(T) en déformations planes.

### 1.1.2.3 Le comportement plastique avec écrouissage

#### Les champs asymptotiques

La mécanique linéaire élastique de la rupture porte une contradiction importante : la singularité des contraintes en pointe de fissure entraîne une plasticité locale qu'il est trop grossier d'estimer par une zone parfaitement plastique. Hutchinson (HUT, 1968), Rice et Rosengreen (RIC, 1968b) ont déterminé en bidimensionnel les termes singuliers pour un comportement plastique. Par la suite le développement asymptotique des contraintes et déformations a été étendu à d'autres termes, apportant des résultats clés sur l'effet de confinement de la plasticité dans les structures fissurées.

La loi de comportement est une loi puissance de la forme  $\frac{\varepsilon^p}{\varepsilon_0} = \alpha \cdot \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^n$  (1\_32). Les champs désignés par l'acronyme HRR sont données par les équations suivantes.

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \sigma_0 \cdot \left[ \frac{J}{\alpha \cdot \varepsilon_0 \cdot \sigma_0 \cdot I_n \cdot r} \right]^{\frac{1}{n+1}} \cdot \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n) \\ \varepsilon_{ij} &= \alpha \cdot \varepsilon_0 \cdot \left[ \frac{J}{\alpha \cdot \varepsilon_0 \cdot \sigma_0 \cdot I_n \cdot r} \right]^{\frac{n}{n+1}} \cdot \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta, n) \\ u_i &= \alpha \cdot \varepsilon_0 \cdot \left[ \frac{J}{\alpha \cdot \varepsilon_0 \cdot \sigma_0 \cdot I_n \cdot r} \right]^{\frac{n}{n+1}} \cdot \frac{1}{r^{n+1}} \cdot \tilde{u}_i(\theta, n) + u_i^0\end{aligned}\quad (1_33, a, b, c)$$

La fonction  $I_n$  dépend faiblement de  $n$  mais dépend de l'état de contraintes.

Les fonctions adimensionnelles  $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n)$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta, n)$ ,  $\tilde{u}_i(\theta, n)$  ont été déterminées numériquement et ont été tabulées par Shih (SHI, 1973). Leurs variations sont reproduites dans de nombreux ouvrages (HUT, 1968 ; MIA, 1995).

Le déplacement  $u_i^0$  représente un déplacement de corps rigide.

Sharma et Aravas, (SHA, 1991, 1995) ont proposé un développement asymptotique exact des champs en pointe de fissure à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{ij}(r, \theta)}{\sigma_0} &= \sigma_{ij}(r, \theta)|_{\text{HRR}} + Q_A \cdot \left(\frac{r}{J/\sigma_0}\right)^{t(n)} \cdot \hat{\sigma}_{ij}^{(1)}(\theta, n) + \dots \\ \frac{\varepsilon_{ij}(r, \theta)}{\alpha \cdot \varepsilon_0} &= \frac{\varepsilon_{ij}(r, \theta)|_{\text{HRR}}}{\alpha \cdot \varepsilon_0} + Q_A \cdot \left(\frac{J}{\alpha \cdot \varepsilon_0 \cdot \sigma_0 \cdot I_n \cdot r}\right)^{\frac{n-1}{n+1}} \cdot \left(\frac{r}{J/\sigma_0}\right)^{t(n)} \cdot \hat{\varepsilon}_{ij}^{(1)}(\theta, n) + \dots \\ \frac{u_i(r, \theta) - u_i^0}{\varepsilon_0} &= \frac{u_i(r, \theta)|_{\text{HRR}}}{\varepsilon_0} + Q_A \cdot \left(\frac{J}{\alpha \cdot \varepsilon_0 \cdot \sigma_0 \cdot I_n \cdot r}\right)^{\frac{n-1}{n+1}} \cdot \left(\frac{r}{J/\sigma_0}\right)^{t(n)} \cdot r \cdot \hat{u}_i^{(1)}(\theta, n) + \dots\end{aligned}\quad (1_34, a, b, c)$$

L'exposant  $t$  est supérieur à  $-1/(n+1)$ . Il est déterminé par la résolution d'un problème de valeurs propres construit à partir des équations d'équilibre, de compatibilité et de la loi de comportement. Pour un matériau à faible écrouissage ( $1 < n < 1,6$ )  $t = (n-2)/(n+1)$  est négatif. Pour  $n$  compris entre 2 et 20, l'exposant  $t$  est positif mais prend des valeurs faibles :  $-0,102 < t < 0,053$ . Donc dans tous les cas, le second terme dépend peu de la distance à la pointe de la fissure.

Les fonctions adimensionnelles  $\hat{\sigma}_{ij}$ ,  $\hat{\varepsilon}_{ij}$ ,  $\hat{u}_i$  sont déterminées numériquement. Les auteurs présentent des illustrations des variations des contraintes et des déplacements pour  $n=3$  et 10. Ces résultats sont reproduits dans (MIA, 1995).

O'Dowd et Shih (ODO, 1991, 1992) ont simplifié cette approche pour la rendre plus robuste. Les auteurs montrent que le second terme est un champ de pression hydrostatique, ce qui conduit à la formulation communément adoptée :

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sigma_{ij}(r, \theta)|_{\text{HRR}} + Q_H \cdot \sigma_0 \cdot \delta_{ij} \quad \text{pour } |\theta| < \frac{\pi}{2} \text{ et } r > \frac{J}{\sigma_0} \quad (1_35)$$

Cette simplification donne une nouvelle portée à l'approche : le paramètre  $Q_H$  mesure l'écart de triaxialité par rapport au champ HRR en plasticité, comme le paramètre  $T$  par rapport au champ SSY en élasticité.



O'Dowd et Shih (ODO, 1992) ont proposé une définition de Q qui la plus souvent retenue.

$$Q_{H\_SSY} = \frac{\sigma_{\theta\theta}|_{EF}}{\sigma_0} - \frac{\sigma_{\theta\theta}|_{SSY_{T=0}}}{\sigma_0} \quad \text{pour } \theta = 0 \text{ et } \frac{r}{J/\sigma_0} = 2 \quad (1\_36)$$

### L'intégrale J et la méthode G-Thêta

L'intégrale J est valide en élasticité linéaire et petites déformations et donc applicable au cas des structures élastoplastiques chargés de façon proportionnelle croissante. L'établissement du champ HRR montre que J représente le facteur de singularité en plasticité confinée.

Dans son article, J. Rice (RIC, 1968a) :

- fournit des expressions de la déformation maximale en fond d'entaille pour plusieurs lois de comportement en plasticité confinée (Small Scale Yielding, SSY),
- établit que la théorie de Griffith est identique à celle du modèle des forces cohésives de Dugdale-Barenblatt (DUG, 1960 ; BAR, 1962),
- donne pour un état de déformations planes en plasticité parfaite la relation suivante entre J et le CTOD  $\delta_t$  :

$$J = \frac{1 + \pi/2}{\sqrt{3}} \cdot \sigma_y \cdot \delta_t \cong 1.484 \cdot \sigma_y \cdot \delta_t \quad (1\_37)$$

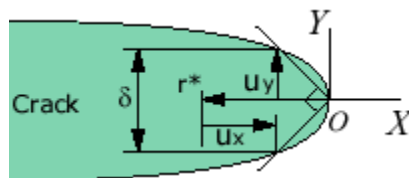
- fournit une estimation de la taille maximale de zone plastique en SSY.

La méthode G-Thêta possède les mêmes propriétés avec l'avantage de s'appliquer au tridimensionnel.

### L'utilisation de l'ouverture de la fissure

Plusieurs méthodes expérimentales de la résistance à rupture sur éprouvettes minces reposent sur des mesures d'ouverture de fissure.

En plasticité, le CTOD  $\delta_t$  est défini par l'intersection de lignes à 45 degrés issues de la pointe de fissure et les lèvres de la fissure comme illustré sur le schéma suivant :



**Figure 1.11: Définition du CTOD en plasticité.**

La relation de J au CTOD est de la forme :  $J = m \cdot \sigma_y \cdot \delta_t$  . Le coefficient m est souvent noté  $m = \frac{1}{d_n}$ .

La valeur du coefficient dépend du comportement de l'écrouissage, de la géométrie et du type de chargement (WEL, 1988 ; BRK,1995).

Cette grandeur n'est guère applicable en tridimensionnel.

### L'interaction de fissures

La notion de facteur d'interaction peut se généraliser à l'élasto-plasticité suivant la formule :

$$t_{ij}(P) = \sqrt{\frac{J_{i,j \neq i}(P)}{J_{i0}(P)}} \quad (1\_38)$$

En élasticité linéaire ce paramètre est identique au facteur d'interaction  $\gamma$ .

### 1.1.3 Critères d'amorçage de la rupture

#### 1.1.3.1 Critère fondé sur le FIC

Irwin (IRW, 1958) considère la rupture en mode I et utilise le FIC  $K_I$  comme grandeur caractéristique bornée par une valeur critique  $K_{Ic}$  propre au matériau. Le critère de non propagation s'écrit :

$$K_I < K_{Ic} \quad (1_39)$$

Si  $K_I = K_{Ic}$  il y a amorçage de la propagation.

Ce critère n'est en pratique utilisable que pour un comportement élastique dominant de la pièce, donc en rupture fragile.

Son extension au mode mixte pose le problème de la déviation de fissure après amorçage. En mode I+II la fissure propagée est branchée et il convient d'évaluer les FIC par calcul asymptotique après branchement (LEB, 2003). Ce point est repris au paragraphe suivant.

#### 1.1.3.2 Critère fondé sur le taux de relaxation d'énergie potentielle

Griffith (GRI, 1920) a proposé un critère fondé sur le taux de restitution d'énergie avec une condition de propagation dont la valeur critique représente l'augmentation d'énergie de surface libre. La principale critique adressée à cette proposition est la réversibilité du processus de séparation des faces de la fissure ce qui est infirmé par l'expérience.

Cependant, formellement le critère de Griffith est pertinent, il suffit de revenir sur la signification physique de la grandeur critique. Celle-ci correspond en fait à une dissipation d'énergie par avancée de fissure. Le critère est donc le suivant :

$$G < G_{Ic} \quad (1_40)$$

Cette dissipation s'effectue à la fois par rupture des liaisons atomiques mais aussi par plastification de la structure ce qui explique la dépendance de la grandeur critique avec la géométrie. Cet effet de géométrie est traduit par des paramètres de triaxialité (Figure 1.12).

Dans l'industrie on utilise plutôt le terme  $J$  qui est équivalent à  $G$ .  $G$  est plutôt réservé à son utilisation en élasticité linéaire. Le critère d'amorçage compare  $J$  à la ténacité  $J_{Ic}$ . En pratique  $J_{Ic}$  est déterminé de façon pénalisante sur une éprouvette à forte triaxialité.

$$J < J_{Ic} \quad (1_41)$$

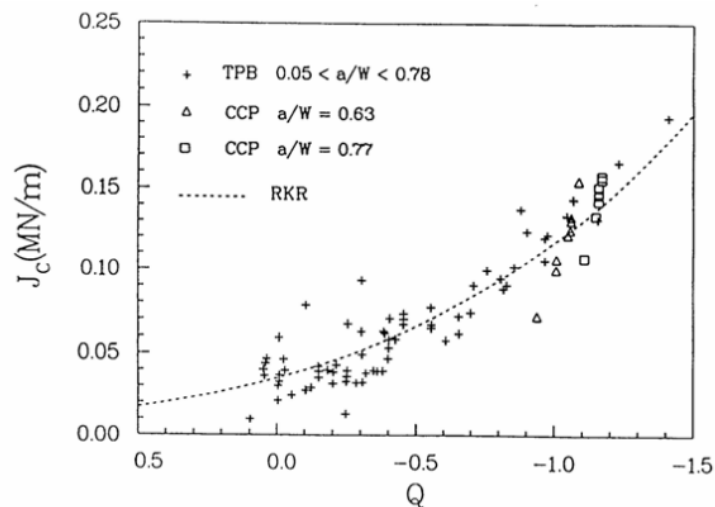


Figure 1.12 : Ténacités en clivage pour un acier doux testé à  $-50^\circ\text{C}$  (SUM, 1992)

## 1.2 Méthodes de calcul de l'interaction de fissures

De très nombreuses méthodes ont été développées pour quantifier l'interaction de défauts. W. Moussa (MOU, 2000) en a dressé une liste très complète. D'autres références sont commentées dans (SBL, 1964).

Les méthodes analytiques ou semi-analytiques sont pratiquement limitées aux cas bidimensionnels. Les méthodes numériques sont lourdes à mettre en œuvre mais sont générales et leur précision peut être maîtrisée. Les modèles de substitution sont encore peu développés et sont surtout appliqués aux problèmes de microfissures multiples.

Nous ne mentionnons pas les études expérimentales, en général consacrées surtout aux problèmes de propagation de fissure ou de rupture de ligament. Ces études peuvent permettre de juger de la pertinence de résultats théoriques comme l'effet de mixité des modes et les effets de forme de fissure. Une liste de travaux expérimentaux sur l'interaction des défauts est donnée dans (MOU, 2000).

### 1.2.1 Résolutions analytiques exactes

La résolution analytique complète des problèmes d'interaction de fissures est limitée au cas de fissures bande coplanaires situées dans un milieu infini. Les formules sont obtenues sous forme fermée.

Les solutions exactes sont obtenues à partir de la méthode des potentiels complexes développée par N. Muskhelishvili (MUS, 1933, 1953). D'autres auteurs ont utilisé la théorie des dislocations (YOK, 1965).

Les méthodes sont cependant limitées aux problèmes bidimensionnels.

#### 1.2.1.1 Deux fissures égales situées dans un milieu infini

T. Wilmore (WIL, 1949) est le premier auteur à avoir déterminé le champ de contrainte autour d'une paire de fissures colinéaires égales soumises à une pression uniforme sur les lèvres. C. Tranter (TRA, 1961) a ensuite résolu le même problème pour des contraintes normales quelconques en utilisant des transformations intégrales. F. Erdogan (ERD, 1962) a fourni les facteurs d'intensité de contraintes pour différents types de chargement en obtenant une expression explicite des intégrales intervenant dans l'expression des potentiels complexes.

#### 1.2.1.2 Plusieurs fissures égales situées dans un milieu infini

Le problème pour 3 fissures a été résolu par G. C. Sih (SIH, 1964) pour la traction et les cisaillements.

Le cas d'une rangée infinie de fissures égales sous traction et cisaillements a été résolu par G. Irwin (IRW, 1957) en utilisant la fonction de Westergaard pour un défaut bande. D'autres configurations similaires figurent dans le dictionnaire de Tada et Paris (TAP, 1973).

On trouve aussi dans ce dictionnaire les cas de milieu infini avec des fissures externes.

#### 1.2.1.3 Deux fissures inégales situées dans un milieu infini

V. Panasyuk et Lozoviy (PAL, 1962) ont déterminé les FIC pour les quatre extrémités de deux fissures inégales sous traction en fonction de l'intégrale elliptique complète de première espèce et d'une intégrale non explicite.

T. Yokobori et al. (YOK, 1965) ont utilisé le concept de rangée continue de dislocations infinitésimales pour ramener le problème à la résolution d'une équation intégrale. Cette solution ne fournit que les FIC aux points les plus proches. B. Gommerstadt (GOM, 2009) a complété la solution établissant les formules des FIC aux 4 extrémités.

A. Rubinstein (RUB, 1985) a établi la solution du problème de l'interaction d'une fissure semi-infinie avec une microfissure colinéaire. L'auteur a aussi présenté une solution approchée de l'interaction de la macro fissure avec une rangée périodique de microfissures colinéaires. L. Rose (ROS, 1986) a aussi résolu ce problème de l'interaction avec une microfissure.

### 1.3 Application aux calculs d'interaction de défauts

Ces formes sont extrêmement précieuses pour la compréhension des interactions de fissures coplanaires en raison de leur exactitude. Elles permettent par exemple de comprendre que l'effet d'interaction entre deux fissures bande sur les FIC aux points les plus proches est maximale si les fissures sont égales.

Elles servent aussi à valider les maillages de calculs aux éléments finis en 2D.

L'analyse des formules complètes de facteurs d'interaction de fissures bande coplanaires apporte la preuve des règles suivantes :

1. Les facteurs d'interaction ne dépendent que de l'espacement relatif et de la taille relative des fissures, pas des grandeurs absolues.
2. L'interaction est maximale sur la petite fissure.
3. La grande fissure est la plus nocive.
4. L'interaction est négligeable lorsque l'écartement est égal à la moyenne des tailles des deux fissures.
5. Le facteur d'interaction en pointe interne de la petite fissure est compris entre le facteur d'interaction en pointe interne de fissures égales et la fonction de Westergaard qui représente l'interaction avec une fissure nulle.
6. Le facteur d'interaction en pointe interne de la grande fissure est compris entre 1 et le facteur d'interaction en pointe interne de fissures égales.
7. Le FIC de la plus grande fissure est majoré en calculant le facteur d'interaction comme si les deux fissures étaient égales.
8. La différence entre les forces fissurantes  $J$  aux deux extrémités d'une fissure est égale à la différence des  $J$  aux extrémités de l'autre fissure.
9. La différence entre les carrés des facteurs d'interaction aux deux extrémités d'une fissure est égale au produit de la différence des carrés des facteurs d'interaction aux extrémités de l'autre fissure par le rapport des tailles de la première fissure à la seconde.
10. La variation du facteur d'interaction en pointe interne de la petite (respectivement la grande) fissure avec l'écartement des fissures est quasiment indépendante du rapport des tailles si l'écartement est normalisé par rapport à la taille de la plus grande (respectivement la petite) fissure.

#### 1.3.1 Calculs analytiques approchés

Plusieurs approches ont été développées à partir d'équations analytiques résolues en utilisant différentes techniques d'approximation.

##### 1.3.1.1 Calculs en séries de fonctions

M. Isida (ISI, 1973) résout plusieurs problèmes bidimensionnels de fissures enfouies dans un solide isotrope homogène de dimensions finies en utilisant les séries de Laurent (LAU, 1843) pour développer les potentiels. En fonction du type de conditions aux limites, des relations sont établies entre les coefficients. Les FIC sont évalués en doubles séries infinies. Ces séries, une fois tronquées, sont exprimés en fonction du paramètre d'écartement défini par le rapport de la longueur de fissure sur l'espacement des fissures  $\lambda_x = \frac{2a}{2a+S_x} = \frac{2a}{e_x}$ . On remarquera que ces séries comportent une quarantaine de termes. La méthode donne des résultats quasiment exacts selon l'auteur jusqu'à des espacements très faibles ( $\lambda_x = 0.9$ ).

Les résultats sont donnés sous forme d'abaques et parfois sous forme tabulée. La méthode présente l'avantage de tenir compte d'une grande diversité de conditions aux limites : fissure dans une plaque de dimensions finies, interaction fissure-trou, fissures parallèles...

### 1.3.1.2 Résolution d'équations intégrales par perturbation

A. Roy et Chatterjee M. (ROC, 1994) ont résolu le problème de l'interaction de fissures elliptiques coplanaires égales sous traction à partir d'équations intégrales. Ils ramènent le problème à la résolution de quatre systèmes d'équations intégrales de Fredholm de la seconde espèce dans un système de coordonnées cylindriques. La solution est obtenue pour des fissures coplanaires par perturbation de la solution pour une fissure unique. Cette solution n'est malheureusement valable que pour des fissures éloignées sauf à augmenter notablement l'ordre des termes de la perturbation.

La comparaison avec les résultats de Nisitani et Murakami (NIM, 1974 – Voir méthode des forces de volume) en fonction du paramètre d'éloignement  $\beta = \frac{a}{e_x} = \frac{\lambda}{2}$  est reproduite au tableau 1.1 pour le cas de deux ellipses égales alignées suivant leur petit axe sous traction.

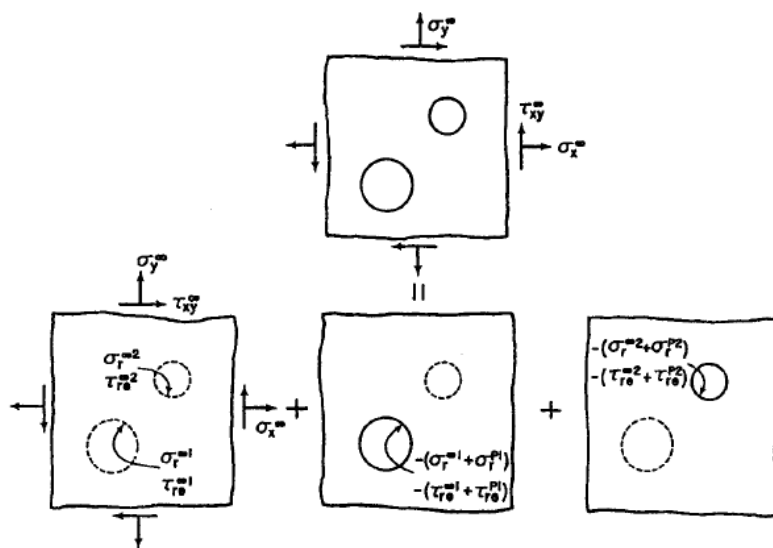
$\lambda = 2\beta$	(NIM, 1974)	$O(\beta^6)$	$O(\beta^7)$	$O(\beta^8)$
0,8	1,126	1,083 (4,3%)	1,1 (2,6%)	1,108 (1,8%)
0,625	1,038	1,032 (0,6%)	1,0355 (0,25%)	1,0365 (0,15%)
0,5	1,016	1,014 (0,2%)	1,0151 (0,09%)	1,0153 (0,07%)

**Tableau 1.1 : comparaison des facteurs d'interaction entre deux ellipses égales alignées suivant les petits axes de rapport  $b/a = 0,5$  au point le plus proche. en fonction de l'ordre du développement de la perturbation**

### 1.3.1.3 Résolution par approximation des potentiels

Horii et Nemat-Nasser (HNM, 1985) utilisent les équations de Kolossoff-Muskhelishvili. Ils appliquent la méthode alternée de Schwartz qui consiste à résoudre le problème pour une seule fissure sous les conditions de chargement données, ce qui permet d'obtenir une condition de chargement sur la seconde fissure. Ensuite on résout le problème de la seconde fissure avec la condition aux limites correcte. Le résultat est obtenu par superposition des deux solutions. Si l'on itère, l'algorithme de Schwartz converge.

Les auteurs traitent d'abord le cas de l'interaction de trous puis de fissure. Le principe de la méthode appelée la méthode des « pseudo tractions » est illustrée à la figure 1.13.



**Figure 1.13 : décomposition d'un problème initial en un problème homogène et deux sous-problèmes (HNM, 1985)**

Les potentiels sont obtenus en effectuant deux approximations :

1. Le champ des contraintes est obtenu par la solution de la fissure unique.
2. Les fonctions contraintes sont corrigées pour satisfaire la condition de surface libre sur la seconde fissure. On vérifie que la nouvelle fonction contrainte satisfait aux conditions de surface libre sur la première fissure.

Afin de résoudre le système d'équations intégrales, les auteurs développent en série de Taylor les pseudos tractions ce qui permet d'exprimer les potentiels par des séries ce qui conduit à la résolution d'un système d'équations algébriques. Les FIC sont exprimés sous forme de séries dont le nombre de termes devient d'autant plus important, à précision exigée égale que l'écartement est faible. Pour  $\lambda = 0,8$  le résultat est quasi-exact avec 28 termes !

L'avantage de la technique est de pouvoir estimer la convergence en augmentant le nombre de termes. Les auteurs fournissent aussi des formules approchées pour des rangées infinies de fissures colinéaires et superposées.

V. Ukadgaonker et A. Naik (UKA, 1991a) ont traité l'interaction de deux fissures bande égales inclinées par rapport à un axe de symétrie soumise à une traction uniaxiale en mettant en œuvre la même approche mais avec une expression moins développée des potentiels.

Les FIC de mode I et II sont obtenus sous forme complexe.

Les résultats sont similaires à ceux d'Isida (ISI, 1973). L'accord est bon pour des écartements relativement grands : pour  $\lambda = 0,8$  l'écart varie de 2 à 5% lorsque les fissures se rapprochent du cas complaire.

Un second article (UKA, 1991b) traite d'un autre cas sous traction de fissures bande égales inclinées, de fissures bande égales parallèles, de fissures inégales coplanaires (l'écart par rapport à Isida (ISI, 1973) est le même que celui cité plus haut) et d'une fissure branchée. Le cas de fissures colinéaires égales sous cisaillement est aussi analysé.

H. Cai and K. Faber (CAI, 1992) utilisent un champ de contrainte additionnel pour remplir la condition de surface libre afin d'étudier en 2D l'interaction entre macro fissure et une microfissure parallèle. Ce champ est exprimé par une fonction de Green et les intégrales sont calculées de façon itérative afin de vérifier les conditions aux limites sur les fissures. Les changements des valeurs des FIC de la macro fissure. Une simplification supplémentaire consiste à considérer la microfissure comme un point. La méthode itérative, comparée à la solution analytique pour des fissures bande inégales coplanaires donne de très bons résultats (0,65 % d'écart pour  $S/(2a) = 0,05$  où  $S$  est l'écartement et  $2a$  la longueur de la microfissure).

#### 1.3.1.4 Calcul intégral itératif

W. Collins (COL, 1963) a réduit le problème de l'interaction de deux fissures disque coplanaires égales à la résolution d'un système d'équations linéaires de Fredholm. Pour des écartements grands par rapport au rayon, ce système est résolu approximativement par itération. L'approche offre peu d'intérêt pratique.

V. Fabrikant (FAB, 1987) propose un nouveau type d'équations intégrales non singulières qu'il résout par itérations. Traiter ainsi le problème numérique de l'intégration quand l'espacement entre fissure est faible. Fabrikant résout ainsi le problème de deux fissures disque coplanaires égales. Il fournit des formules explicites pour les bornes supérieure et inférieure du FIC le long du front de fissure et des résultats numériques très proches de ceux obtenus par calcul direct aux éléments finis (Figure 1.14). Toutefois les bornes inférieures et supérieures sont fortement éloignées et la solution numérique ne se situe pas à distance constante par rapport à ces bornes lorsque l'écartement varie.

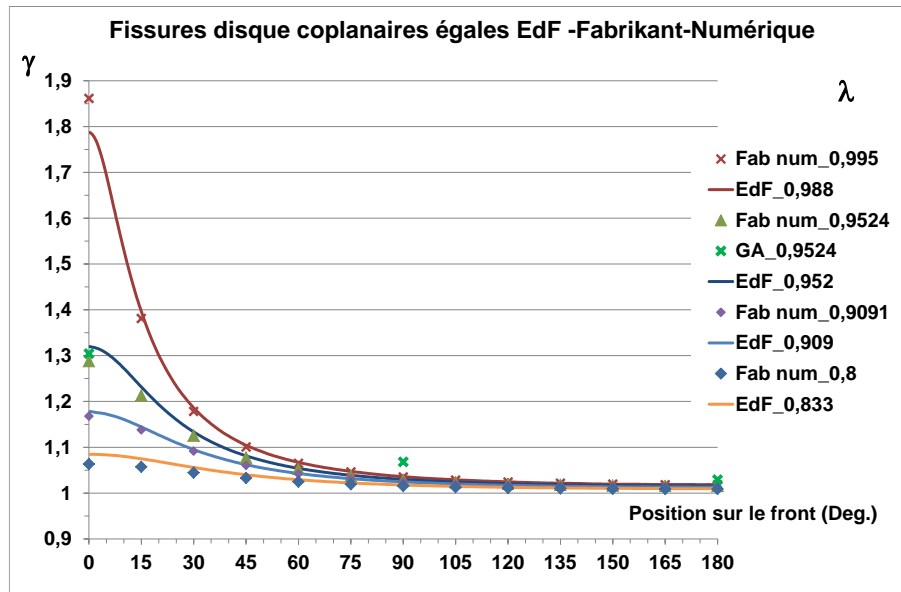


Figure 1.14 : variation le long du front de fissure du facteur d'interaction entre deux fissures disque (DEE, 2018 ; FAB 1987)

Le calcul direct du FIC par les logiciels de calcul intégral ne donne pas de résultats fiables lorsque le calcul est effectué le long du front de la fissure disque.

#### Application aux calculs d'interaction de défauts

Atteindre une précision satisfaisante peut demander d'utiliser un grand nombre de termes dans les séries ou d'effectuer de nombreuses itérations. Néanmoins ces résultats précis sont très utiles pour la mise au point et la validation du modèle simplifié que nous proposons.

#### 1.3.1.5 Méthode de superposition

M. Kachanov part de l'hypothèse selon laquelle les tractions non uniformes d'une fissure ont une influence négligeable sur une autre fissure. Cependant les contraintes agissant sur les fissures ne sont pas des contraintes uniformes. Une première application traite de l'interaction entre une fissure et des microfissures (CHU, 1987).

La méthode (KAC, 1987, KAL, 1989) consiste à décomposer le problème de l'interaction de N fissures par une superposition de N problèmes de fissure unique chargée par des tractions inconnues. En élasticité linéaire, le problème du solide contenant N fissures et soumis à une contrainte éloignée  $\sigma^\infty$  équivaut au problème du solide libre à l'infini avec des fissures sous tractions  $t_i^\infty = -n_i \cdot \sigma^\infty$ .

La fissure i est donc soumise à la traction :  $t_i(M) = t_i^\infty + n_i \cdot \sum \sigma_{(j)}(M)$

Où  $n_i$  est la normale unitaire à la fissure i

$\sigma_{(j)}(M)$  est le tenseur engendré par la fissure j au point M de la fissure i

Si l'on moyenne la traction  $t_i(M)$  sur la fissure i on aboutit à un système linéaire de N équations :

$$\langle t_i \rangle = t_i^\infty + \Lambda_{ji} \cdot \langle t_j \rangle \text{ pour } j \neq i \quad (1.42)$$

Le tenseur  $\Lambda_{ji}$  caractérise la transmission des tractions moyennes d'une fissure à l'autre. Ces facteurs de transmission sont obtenus par intégration des champs engendrés sur la surface de la fissure i par les champs de contraintes de la fissure j chargé uniformément. Les tractions uniformes sont décomposées

en une contrainte normale et deux contraintes de cisaillement ce qui conduit à un système algébrique linéaire de  $3N$  équations.

Une fois résolu ce système, et calculées les tractions  $t_i(M)$  les FIC sont calculés par la méthode des fonctions de poids. Pour les fissures elliptiques, les intégrales présentent des singularités. J. P. Laures a proposé une technique résumée dans (KAL, 1989) permettant d'éliminer ces singularités pour des fissures disque.

En 2D l'intégration peut être obtenue analytiquement (KAC, 1994). La méthode n'a pas été appliquée, à notre connaissance, au cas des fissures elliptiques.

Y. Benveniste (BEN, 1989) a utilisé la même méthode mais en considérant une approximation polynomiale des tractions agissant d'une fissure sur l'autre. La comparaison sur le cas des deux fissures égales en traction montre que la précision, évaluée par rapport à la formulation théorique d'Erdogan (ERD, 1966), est nettement meilleure pour des fissures très proches ( $\lambda > 0,98$ ) mais pour lesquelles il y a risque de coalescence. Pour  $\lambda > 0,98$  la méthode de Kachanov est précise à 10%, celle de Benveniste à 1%.

## 1.3.2 Calculs numériques discrétisés

### 1.3.2.1 Méthode des Eléments Finis

La méthode des éléments finis repose sur l'approximation d'un milieu continu par un milieu discret décrit par des éléments de forme géométrique simple. Le comportement de ces éléments est décrit par des fonctions d'interpolation du champ des déplacements entre les valeurs approchées du champ aux nœuds de l'élément (OUD, 2008).

Le système d'équations aux dérivées partielles est remplacé par un système d'équations algébriques. Sur chaque élément sont construites des matrices élémentaires et évalué le travail des efforts virtuels. Ensuite ces matrices sont assemblées pour fournir la forme matricielle du principe des travaux virtuels.

La MEF est la méthode la plus utilisée pour les calculs d'interaction (JPB, 1994, CHB, 2018 ; AZU, 2018, MOU, 2000) car elle peut traiter toutes les configurations en élasticité linéaire comme en élastoplasticité.

La difficulté majeure est de réaliser les maillages suffisamment fins. La finesse des maillages a considérablement augmenté à partir des années 2000 surtout en 3D. La plupart des auteurs augmentent le raffinement lorsque l'écartement des fissures est faible par rapport aux dimensions de celles-ci. Ce n'est pas une très bonne approche car si les fissures sont éloignées il faut une bonne précision pour calculer correctement de plus faibles valeurs de facteurs d'interaction. Dans tous les cas la discrétisation doit être fine et régulière le long du front si l'on souhaite évaluer la variation d'interaction le long des fronts.

H. Coules (COU, 2020) a développé un outil sous le logiciel MATLAB (MAT, 2018) une interface avec le logiciel Abaqus<sup>TM</sup> pour analyser l'interaction de fissures coplanaires elliptiques enfouies ou semi-elliptiques en surface.

### 1.3.2.2 Méthode des Equations Intégrales de Frontières

La méthode des équations intégrales de frontières est fondée sur la méthode aux éléments finis sauf qu'elle utilise une formulation intégrale qui lui permet de transposer le problème interne vers la frontière. L'identité de Somigliana exprime le déplacement en un point interne au domaine en fonction d'intégrales faisant intervenir les déplacements et les vecteurs contraintes à la frontière. Par passage à la limite on obtient un système d'équations

La méthode ne s'applique qu'à des milieux homogènes, sauf à appliquer la décomposition en domaines. Les noyaux des intégrales présentent des singularités qu'il faut traiter de façon spécifique (LAL, 2008).



La discrétisation est beaucoup plus aisée, mais en présence de forces de volumes, le système matriciel est beaucoup plus lourd.

L'application de la MEIF au cas de solides fissurés n'est simple que pour les cas où la fissure est située dans un plan de symétrie. Si la fissure est interne, la MEIF dégénère car chaque point des lèvres de la fissure comporte deux inconnues : le déplacement et l'ouverture de fissure. Afin de contourner cette difficulté majeure, plusieurs méthodes sont détaillées dans (LAL, 2008) :

- La méthode de sous structuration consiste à séparer la géométrie en deux sous-domaines contenant chacun une lèvre de la fissure. Cette approche complexifie la résolution du problème en particulier pour le calcul de l'intégrale J.
- La méthode de la discontinuité des déplacements consiste à générer une équation intégrale indirecte sur la fissure en la considérant comme une seule surface sollicitée en traction sur laquelle la discontinuité de déplacement est la seule inconnue. L'équation en traction est alors couplée avec l'identité de Somigliana. Cette méthode n'est valable que pour des fissures planes soumises à un chargement symétrique des lèvres.
- La méthode de la formulation mixte consiste à appliquer une formulation en déplacement à l'une des lèvres et une formulation en traction aux points de l'autre lèvre. L'inconvénient majeur est que les intégrales singulières sur les lèvres de la fissure doivent être traitées directement ce qui rend leur évaluation complexe et éventuellement imprécise.
- La méthode de séparation finie consiste simplement à ouvrir légèrement la fissure. L'intégration nécessitera un découpage fin de la fissure.

La comparaison de ces techniques conduit S Lalonde à la supériorité de la méthode de séparation finie.

La méthode est bien adaptée pour les calculs d'interaction de fissures coplanaires (XUY, 1999) ou de l'interaction entre fissure et trou. Mais les calculs sont longs dans le cas de fissures non coplanaires et surtout si le comportement est élasto-plastiques.

### 1.3.2.3 Méthode des Eléments Finis étendus

La méthode des éléments finis étendus (X-FEM) a été développée afin d'améliorer le traitement des singularités par la MEF (BEB, 1999 ; MDB, 1999). Ce modèle consiste à enrichir la base polynomiale d'approximation de manière à rendre possible la prise en compte d'une discontinuité au sein d'un élément. La méthode simplifie considérablement le maillage et est particulièrement bien adaptée aux problèmes d'élasticité linéaire.

La méthode (X-FEM) est bien adaptée au traitement de l'interaction de fissures sous réserve d'une validation pour le cas de fissures proches. La méthode a été souvent utilisée pour traiter les problèmes de l'interaction fissure-trou (KHO, 1999). V. Lacroix (LAC, 2016a) a traité des cas tridimensionnels de fissures elliptiques inclinées, après validation par benchmark.

Récemment la méthode a été appliquée en élasto-plasticité mais pour des problèmes bidimensionnels de fissures peu proches (GAJ, 2020).

## 1.3.3 Méthodes hybrides

Ces méthodes combinent des solutions analytiques et la méthode des éléments finis.

### 1.3.3.1 Méthode des forces de volume

La méthode des forces de volume (« Body Force Method »), proposée par H. Nisitani (NIS, 1967), est une méthode d'analyse des contraintes fondée sur la superposition de séries de solutions fondamentales. Il s'agit, en général des champs de contraintes engendrés par l'action d'une force ponctuelle agissant sur un corps élastique infini (CHY, 2014). Les solutions de force ponctuelles sont superposées et la distribution des forces ponctuelles est déterminée de façon à satisfaire les conditions aux limites. Elle s'apparente à la méthode des équations intégrales de frontières.

H. Nisitani et Y. Murakami (NIM, 1974) ont été les premiers, à notre connaissance, à mettre en œuvre cette méthode pour analyser l'interaction de fissure. Ils ont étudié le cas de deux fissures elliptiques égales coplanaires situées dans un milieu infini sous traction. Les calculs suivent les étapes suivantes :

1. Sélection de la solution fondamentale : champ des contraintes induits par une force ponctuelle agissant sur un milieu élastique isotrope infini pour les fissures enfouies ou champ de contraintes induit par des forces ponctuelles dans un solide semi-infini a été établi par Mindlin (MIN, 1936) pour les fissures de surface.
2. Détermination des expressions des densités de forces de volume sur l'enveloppe d'une cavité ellipsoïdale à partir des travaux d'Eshelby sur l'inclusion ellipsoïdale. En faisant tendre l'axe normal à la fissure vers 0, on obtient les densités d'effort sur la surface de l'ellipse.
3. Etablissement de la solution avec la fissure : les densités de force de volume sont multipliées par des fonctions de poids associées au type de fissure.
4. Imposition des conditions aux limites. La fissure est divisée en éléments sur lesquels les fonctions de poids sont constantes. Les contraintes induites par les forces de volume ne respectent pas à ce stade les conditions aux limites. Une méthode de collocation aux frontières est alors utilisée pour imposer des conditions de surface libre sur la fissure. L'approche est plus complexe si le milieu est de dimension finie : voir plus loin le cas de la plaque fissurée. Pour les problèmes tridimensionnels, la distribution des contraintes dépend en général du coefficient de Poisson. Dans les premières applications de la méthode, le coefficient de Poisson est considéré comme nul afin de réduire les temps de calcul.
5. La dernière étape consiste à calculer les contraintes par intégration des densités de fonctions de poids. Ensuite les FIC sont obtenus à partir des densités de forces de volume des éléments entourant l'extérieur de la fissure dans son plan.

Y. Murakami et S. Nemat-Nasser (MUN, 1982) ont mis en œuvre cette méthode pour analyser l'interaction de fissure. Ils ont étudié le cas de fissures semi-elliptiques coplanaires de tailles différentes situées à la surface d'un milieu semi-infini sous traction et flexion. Le champ des contraintes induit par la fissure est obtenu par un produit de convolution avec une fonction de poids. La fonction de poids est ensuite corrigée par intégration numérique. Les calculs ont été effectués pour un coefficient de Poisson nul.

M. Isida et Noguchi (ISI, 1983) ont adapté la technique pour les chargements de mode mixte.

M. Isida et al. (ISI, 1984) l'ont appliquée au calcul des FIC le long d'une fissure semi-elliptique de surface dans une plaque en traction et flexion. La technique est celle mise au point par Nisitani et Murakami (NIM, 1974). Sur la face arrière de la plaque sont appliquées des forces de volume et la méthode de collocation est appliquée en des points de référence pour imposer la condition de surface libre. La comparaison avec les résultats de Newman et Raju (NEW, 1979a, b), les plus fiables à l'époque, est bonne dans la plupart des cas.

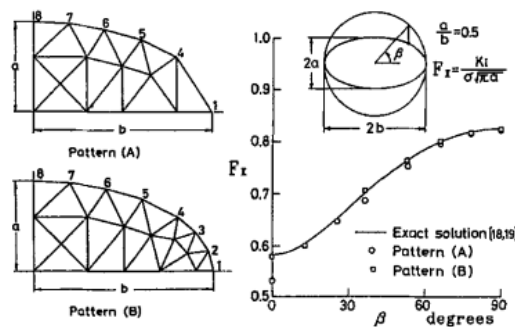


Figure 1.15 : type de maillage et variation du facteur de forme  $e$  long du front d'une fissure elliptique (ISI, 1994)

M. Isida et al. ont utilisé cette technique pour étudier l'interaction de fissures elliptiques enfouies parallèles sous traction (ISI, 1985) et semi-elliptiques parallèles sous traction (ISI, 1991). M. Isida et al. (ISI, 1994) ont amélioré la technique pour le traitement des problèmes tridimensionnels (figure 1.15).

### 1.3.3.2 Méthode alternée

La méthode alternée (« alternating method ») pour le problème de la fissure elliptique dans un solide a été développée initialement par Kobayashi et al. (SHK, 1972 ; KOB, 1975)

Cette méthode a été étendue par Atluri et Nishioka de la façon suivante (NIA, 1983 ; NIF, 1987) :

- Développement de la solution de la fissure elliptique située dans un milieu infini soumise à des contraintes polynomiales de traction et de cisaillement. La solution établie par Vijayakumar et Atluri (VIA, 1981) a été améliorée par Nishioka et Atluri (NIA, 1983). La distribution de contraintes dépend d'une série A de coefficients. Le FIC est une somme faisant intervenir des coefficients C dépendant de la condition de surface libre sur une fissure donnée.
- Utilisation de la technique itérative suivante (NIF, 1987) :
  1. Application d'une distribution de contrainte initiale sur chaque surface des ellipses
  2. Détermination des coefficients C des FIC
  3. Calcul des FIC
  4. En considérant chaque fissure comme une fissure unique située dans un milieu infini, calcul des contraintes à l'endroit des autres fissures en utilisant la solution analytique. Chaque fissure est soumise à un ensemble de contraintes résiduelles induites par les autres fissures. Pour chaque fissure on additionne toutes les contraintes.
  5. Vérification que le niveau de contrainte sur chaque fissure est inférieur à une contrainte admissible. Si tel est le cas le problème est résolu.
  6. Inverser le signe de ces contraintes et les appliquer sur chaque fissure
  7. Détermination des coefficients A par lissage par moindres carrés sur les champs de contraintes obtenus à l'étape 6.
  8. Il faut répéter chacune des étapes 2 à 7 jusqu'à ce que les contraintes de l'étape 5 soient négligeables.
  9. En fin d'itération, Il faut sommer tous les FIC des itérations successives.

L'article de Nishioka et Furutani (NIF, 1987) indique comment la fonctionnelle est minimisée.

O' Donoghue et al. (ONA, 1986) ont appliqué la méthode à l'interaction de deux fissures de surface dans un appareil à pression et comparé les résultats avec les règles d'interaction du code ASME.

Stonesifer et al. (SBL, 1964) ont appliqué cette méthode pour des fissures semi-elliptiques de surface parallèles situées dans une plaque en traction.

#### Remarque

Ces deux méthodes présentent plusieurs avantages : plusieurs fissures peuvent être prises en compte, le maillage ne nécessite pas de mailler finement la fissure, les FIC sont calculés directement.

### 1.3.4 Modèles de substitution

La plupart des modèles de substitution se résument à des règles de non-interaction (ou règles de proximité des défauts) développées pour l'analyse de nocivité de défauts (e.g. HAS, 2009 ; BOU, 2019).

### 1.3.4.1 Lissage de résultats de calculs par éléments finis

Hahn (HAH, 2014) a réalisé un très grand nombre de calculs par éléments finis pour des fissures semi-elliptiques de surface coplanaires ou parallèles. Les résultats des FIC normalisés de mode I et II aux points les plus proches II ont été lissés par des polynômes fonction des espacements horizontal et vertical et de l'excentricité des défauts. L'objectif de l'étude est de simuler la propagation des fissures en utilisant un critère directionnel et une loi de propagation. Il est à noter que les formes de fissure non symétriques sont prises en compte.

### 1.3.4.2 Systèmes experts utilisant des règles de proximité des défauts

Le modèle de distributions de fissures utilisé comme donnée d'entrée du code FAVOR (FAV, 2013) ont été établies en tenant compte des règles de proximité de défauts du code ASME. Cependant il s'agit plutôt d'un traitement préalable d'indications qu'un tri par logiciel.

Le laboratoire de Los Alamos (MUD, 2019) a développé un algorithme d'estimation des chemins de fissuration qui prend en compte les règles de proximité et de coalescence des défauts. Le modèle définit des zones de processus de rupture (FPZ) et l'interaction ou la coalescence ont lieu si les FPZ se chevauchent. Le modèle bidimensionnel définit la position initiale des fissures de façon aléatoire et calcule les positions relatives des fissures et calcule leurs évolutions sous chargement dynamique en utilisant un modèle d'endommagement.

### 1.3.4.3 Réseaux de neurones

Meyer et al. (MEY, 2000) ont obtenus sur la base de calculs élasto-plastiques une fonction d'interaction entre deux fissures bande inclinées dépendant de l'écartement de la taille et de l'inclinaison des fissures. Ensuite un réseau de neurones est bâti pour étendre cette fonction à toutes les configurations de microfissures observées sur des échantillons endommagés en fatigue.

## 1.3.5 Forces et faiblesses des types de méthodes

Les méthodes d'évaluation de l'interaction des défauts présentent des avantages et des inconvénients présentés dans le tableau 1.2.

Méthode	Forces	Faiblesses
Analytique exacte	Cas de référence Utile à la compréhension	Limité à l'élasticité linéaire en 2D
Analytique approchée	Développement au cas par cas.	Limité à l'élasticité linéaire. En 2D en général. Précision pas facile à maîtriser.
Numérique discrétisée	Très générale	Maillage lourd pour la MEF
Méthodes hybrides	Discrétisation facile	Ne peut traiter l'interaction en plasticité
Modèles de substitution	Calculs très rapides, adaptés au traitement statistique	Peu développés, long à mettre en œuvre

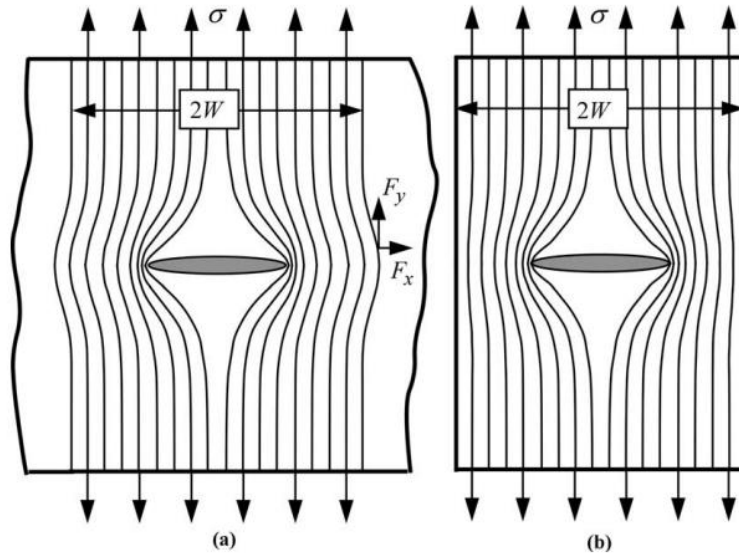
**Tableau 1.2 : comparaison des méthodes de calcul des interactions entre défauts**

## 1.4 Interaction fissure enfouie – surface libre

Les facteurs d'intensité des contraintes dépendent de leur taille, de leur forme mais aussi des distances relatives aux surfaces des pièces (LIU, 1976 ; FET, 1997), que ceux-ci soient chargés ou libres. Dans les configurations qui font l'objet de cette thèse, l'interaction avec les surfaces est à considérer uniquement dans le plan de la fissure.

### 1.4.1 Interaction fissure – bord libre en bidimensionnel

L'effet de surface libre est très bien illustré à la figure 1.16 (AND, 2005).



**Figure 1.16 : effets de concentration de contraintes induits par une fissure dans une plaque infinie (a) et une plaque de largeur finie (b) (AND, 2005)**

Les bords libres restreignent la zone de déformation et augmentent l'effet du chargement appliqué. Ceci se traduit par une augmentation du FIC (Figure 1.17). Le FIC d'une fissure bande de taille  $2a$  enfouie dans un massif infini sollicité en traction normale au plan de fissure est exprimé par :

$$K_I = \sigma_{app} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (1.43)$$

Où  $\sigma_{app}$  est la contrainte appliquée.

#### Cas de la plaque à fissure bande centrée sous traction

Pour une plaque de largeur  $2W$ , le FIC est amplifié par un facteur de forme  $F$ .

$$K_I = \sigma_{app} \cdot F \left( \frac{a}{W} \right) \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (1.44)$$

Le facteur de forme  $F$  ne dépend que de la taille relative de fissure  $X = \frac{a}{W}$ . Il n'est pas connu de façon exacte. La formule approchée de Feddersen-Tada (TAP, 1973) est la plus précise :

$$F(X) = \frac{1 - 0.025 \cdot X^2 + 0.06 \cdot X^4}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot X\right)}} \quad (1.45)$$

Pour  $a/W = 0,5$  l'amplification est de 20% (Figure 1.17).

L'effet de concentration est plus élevé que celui induit par une distribution périodique de fissures (TAP, 1973) comme le montre la figure 1.17 pour lequel :

$$F(X) = \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot X} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot X\right)} \quad (1.46)$$

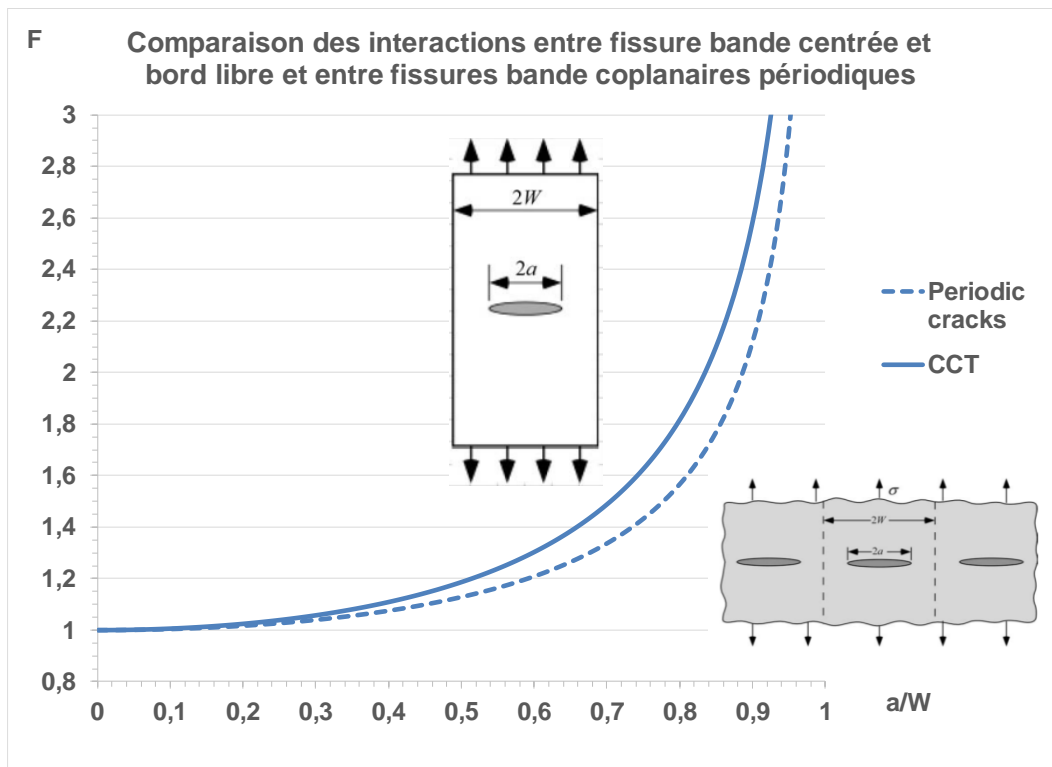


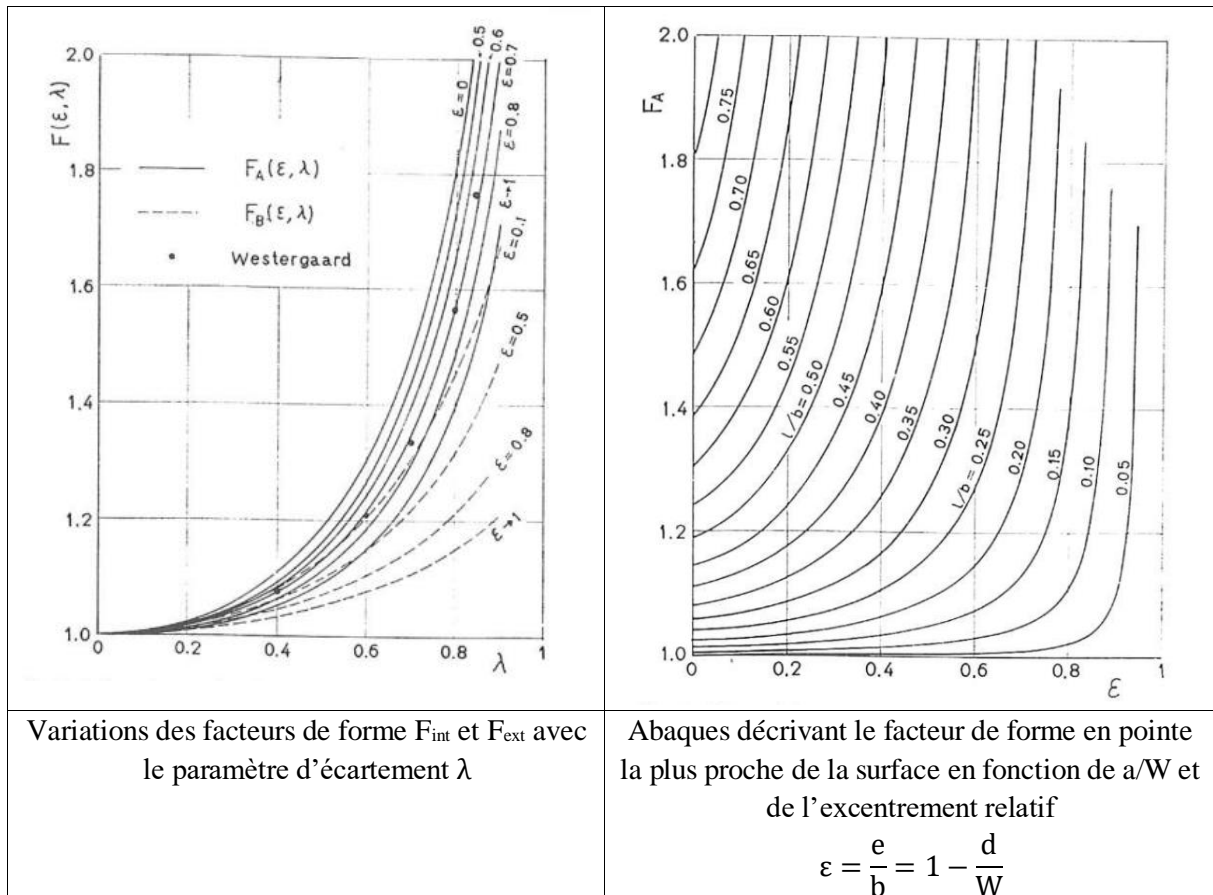
Figure 1.17 : effets de conditions aux limites latérales sur le FIC d'une fissure bande (CCT=Center Crack Tension)

Cas de la plaque à fissure bande excentrée située dans une plaque semi-infinie sous traction

M. Isida (ISI, 1966) a résolu numériquement le problème de la plaque à fissure bande excentrée en traction uniaxiale. Le calcul des facteurs d'intensité des contraintes est obtenu par détermination de fonctions d'Airy sous forme de séries de Laurent (LAU, 1843). Pour être précise, cette méthode nécessite de prendre en compte un grand nombre de termes. Les résultats sont présentés sous forme d'abaques (Figures 1.18 et 1.19).

Schéma de la configuration	Notations Isida	Nos notations
<p style="text-align: center;">Fig. 1</p>	Largeur 2b Taille de fissure 2l Excentrement e Distance du centre de la fissure au bord b <sub>1</sub>	2W 2a e d= a+ Lig
	$\varepsilon = \frac{e}{b}$	$\varepsilon = \frac{e}{W} = 1 - \frac{d}{W}$
	$\lambda = \frac{l}{b_1}$	$\lambda_x = \frac{a}{d}$
	$K = T \cdot F \cdot \sqrt{\pi \cdot l}$	$K = \sigma_{app} \cdot F \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$
	F <sub>A</sub> , F <sub>B</sub>	F <sub>Int</sub> , F <sub>Ext</sub>

Figure 1.18 : plaque à fissure bande excentrée en traction (ISI, 1966)



**Figure 1.19 : plaque à fissure bande excentrée en traction (ISI, 1966)**

Le cas  $\varepsilon = 0$  correspond à la plaque à fissure centrale.

Le cas  $\varepsilon \rightarrow 1$  correspond à la plaque semi-infinie à fissure latérale.

M. Isida fournit des abaques donnant l'effet combiné de l'écartement relatif  $\varepsilon = \frac{e}{W}$  et de la taille relative de fissure  $a/W$ , notée  $l/b$  sur le graphe reproduit à la figure 1.19 Isida (ISI, 1973) propose deux expressions simplifiées pour le FIC en pointe interne A (proche du bord libre) :

$$F_{int} = \frac{1}{\sqrt{\cos \frac{\pi \cdot \lambda}{2 + \varepsilon}}} \quad \begin{cases} \varepsilon \leq 0.2 & \lambda \leq 0.8 - 2\varepsilon \\ \varepsilon > 0.2 & \lambda \leq 0.4 \end{cases} \quad (1_47)$$

$$F_{int} = \sqrt{\frac{1}{\cos \frac{\pi \cdot \lambda}{2}} \cdot \frac{\sin(2\lambda \cdot \varepsilon)}{2\lambda \cdot \varepsilon}} \quad \lambda \leq 0.7 \sim 0.8 \quad \forall \varepsilon \quad (1_48)$$

Il est clair que l'amplification du FIC du côté est plus forte du côté le plus proche de la surface libre dès que la fissure n'est plus centrée.

Le cas de la plaque à fissure bande latérale située dans une plaque semi-infinie sous traction est traité dans l'Annexe X du dictionnaire de Tada-Paris (TPI, 2000).

#### 1.4.2 Interaction fissure – bord libre en tridimensionnel

La pièce est une plaque sollicitée en traction contenant une fissure elliptique d'axes parallèles aux faces (Figure 1.20). De nombreuses études ont traité ce problème en fournissant des résultats partiels (SHK, 1974 ; NIM, 1974 ; ISI 1984, ZAO, 1985 ; ZVE, 1990 ; HUC, 1993 ; NOG, 1997 ; MUR, 2002 ; FUO,

2006) ou complets (LED, 2007 ; MYA, 2006). Nous prendrons comme référence les tables de Le Delliou en raison de la finesse des maillages, du très bon accord avec des résultats théoriques et de ceux d'Isida.

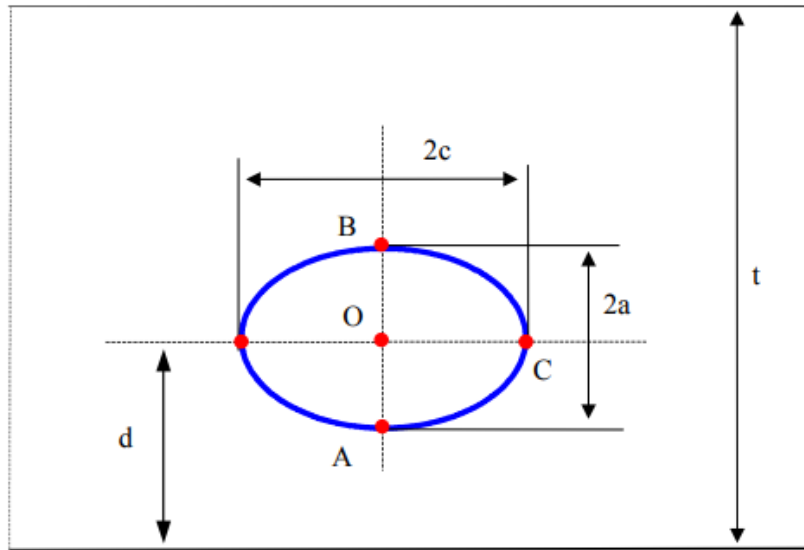


Figure 1.20 : plaque à fissure elliptique excentrée en traction (RSEM, 2000)

Le code RSE-M (RSEM, 2010) fournit les fonctions d'influence pour le calcul des Facteurs d'Intensité des Contraintes pour une fissure elliptique située dans une plaque (LED, 2007) en fonction des paramètres de taille relative  $a/W$  ( $2W$  est noté  $t$  sur la figure 1.20), de rapport d'aspect ( $a/c$ ) et d'éloignement par rapport à la surface ( $\lambda = \frac{a}{d}$ ).

La figure 1.21 montre les variations de  $i_0$  (fonction d'influence pour un chargement de membrane) pour deux rapports d'aspect différents ( $a/c = 0,5$  et  $0,125$ ) en fonction de l'écartement et de la taille de fissure. Les valeurs augmentent fortement avec la réduction de la distance à la surface. Les courbes sont d'autant plus proche que l'ellipse se rapproche du cercle.

La figure 1.22 montre les variations de  $i_0$  pour une très petite fissure par rapport à l'épaisseur de la plaque ( $a/W=0,05$ ) en fonction de l'écartement et de la forme de fissure. L'effet du rapport d'aspect est très important.

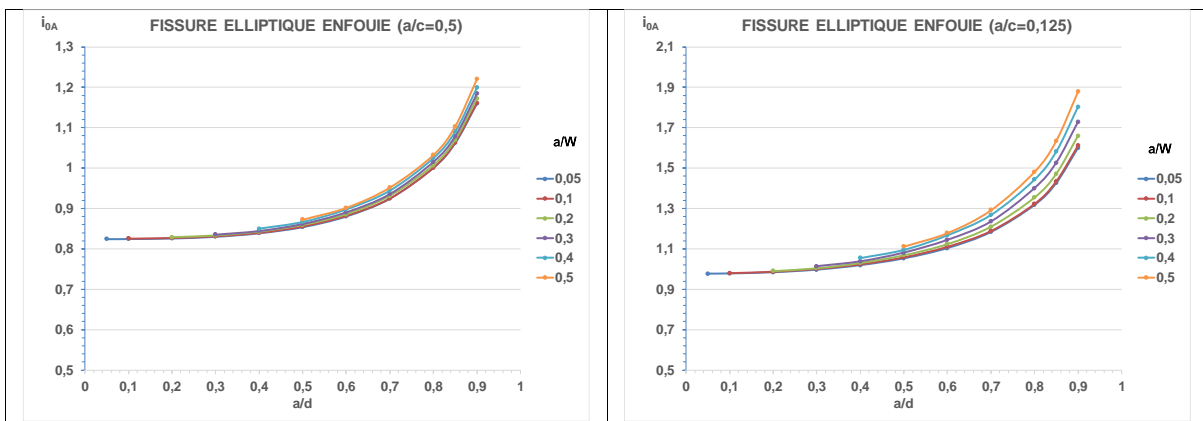


Figure 1.21 : fonction  $i_0$  pour une plaque à fissure elliptique excentrée en traction pour deux rapport d'aspect différents (RSEM, 2000)



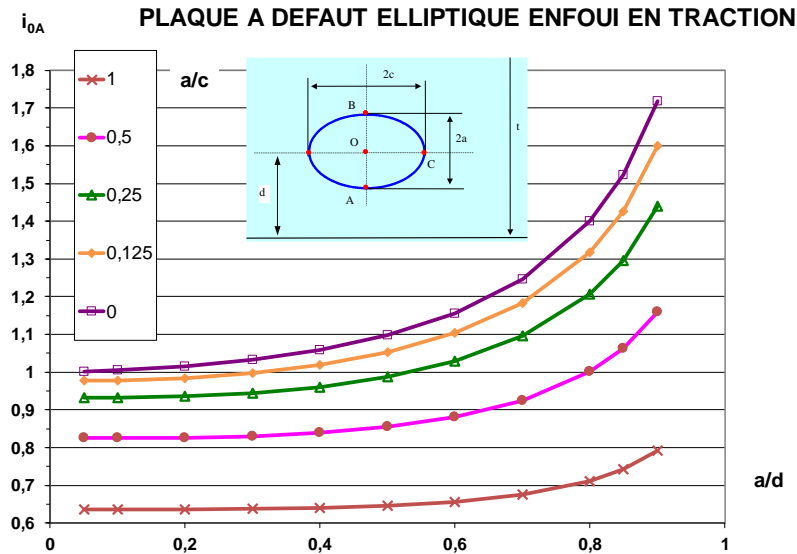


Figure 1.22 : fonction  $i_0$  pour une plaque à fissure elliptique excentrée en traction avec une fissure de petite taille  $a/W = 0,05$  (RSEM, 2000)

## 1.5 Interaction fissure - cavité

L'interaction entre fissures et cavités présente un intérêt marqué dans de nombreux domaines : effet de la porosité dans les soudures ou dans les os, effet de proximité de trous de rivets dans l'aéronautique, effet des inclusions dans les composites métalliques...

### 1.5.1 Concentration de contraintes autour d'une de cavité

La résolution du problème est effectuée avec l'hypothèse des contraintes planes. Elle passe par la détermination de fonctions bi harmoniques. Les deux types de cavités sont décrites à la figure 1.23.

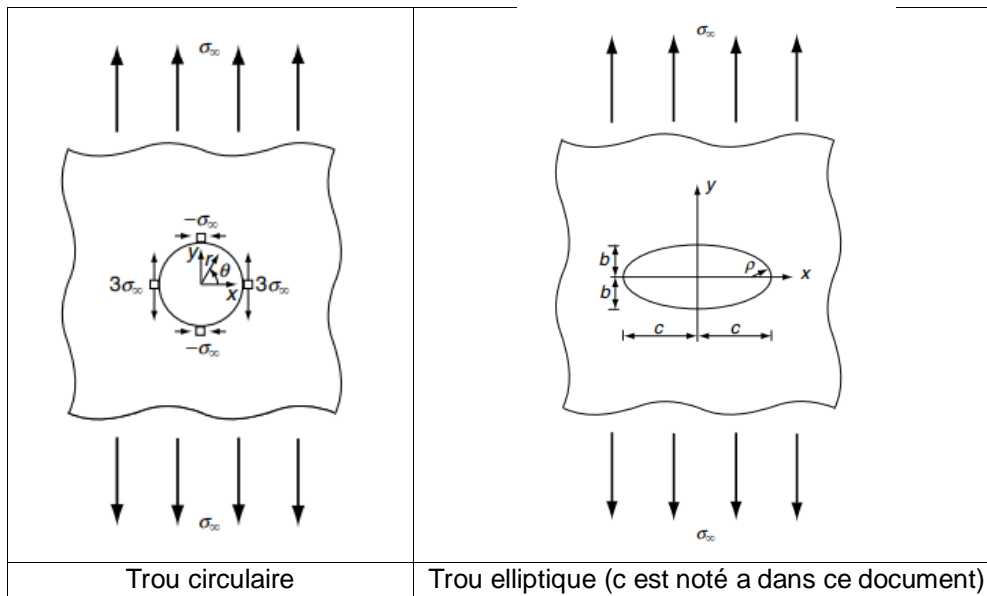


Figure 1.23 : schéma des plaques infinies troués en traction uniaxiale (PAN, 2005)

Plaque infinie à trou circulaire

La solution a été établie par G. Kirsch (KIR, 1898). Elle est reproduite dans les ouvrages comme celui de Timoshenko-Goodier (TIG, 1951) en considérant une sollicitation suivant x.

L'angle polaire est défini par rapport à l'axe x :  $y = a \cdot \sin \theta$

On introduit le paramètre  $\omega = \frac{a}{r}$

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{rr}}{\sigma_{app}} &= \frac{1}{2} \cdot (1 - \omega^2) - \frac{1}{2} \cdot (1 - 4\omega^2 + 3\omega^4) \cdot \cos 2\theta \\ \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\sigma_{app}} &= \frac{1}{2} \cdot (1 + \omega^2) + \frac{1}{2} \cdot (1 + 3\omega^4) \cdot \cos 2\theta \\ \frac{\tau_{r\theta}}{\sigma_{app}} &= -\frac{1}{2} \cdot (1 + 2\omega^2 - 3\omega^4) \cdot \sin 2\theta\end{aligned}\quad (1_49 \text{ a, b, c})$$

La variation de la contrainte normale  $\sigma_{yy}$  avec x est donnée par :

$$\frac{\sigma_{yy}}{\sigma_{app}} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\sigma_{app}} = \frac{1}{2} \cdot (1 + \omega^2) + \frac{1}{2} \cdot (1 + 3\omega^4) = 1 + \frac{\omega^2}{2} \cdot (1 + 3\omega^2) \quad (1_50)$$

Le facteur de concentration de contraintes vaut 3, il est indépendant de la taille du trou.

### Plaque à trou elliptique

La solution est obtenue par transformation conforme sous la forme de fonctions complexes analytiques bi harmoniques. La solution a été établie par Muskhelishvili (MUS, 1953). Les potentiels complexes sont décrits dans le Timoshenko et Goodier (TIG, 1951; §73) et Roylance (ROY, 2001) mais les champs de contraintes ne sont pas fournis. Kolosov (KOL, 1909) puis Inglis (ING, 1913) ont déterminé les champs induits par un trou elliptique dans un milieu infini plan sollicité en traction uniaxiale.

Les distributions des contraintes suivant l'axe x sont présentées au chapitre 2 de l'ouvrage de D. François et al. (FAZ, 2013). Le changement de variable suivant est adopté :

$$x = R \cdot \left(\rho + \frac{m}{\rho}\right) \cdot \cos \theta \quad y = R \cdot \left(\rho - \frac{m}{\rho}\right) \cdot \sin \theta \quad (1_51)$$

Avec :  $R = \frac{a+b}{2}$      $m = \frac{a-b}{a+b}$  où a est le demi-axe porté par x et b celui porté par y.

Suivant l'axe x le paramètre  $\rho$  vaut  $\rho = 0.5 \cdot \left(\frac{x}{R} + \sqrt{\left(\frac{x}{R}\right)^2 - 4m}\right)$  et 1 en pointe de fissure.

Les contraintes sur l'axe x sont données par :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \sigma_{app} \cdot \frac{1+m}{\rho^2-m} \cdot \left\{ 1 - (1-m) \cdot \left[ 0.5 \frac{1+\rho^2}{\rho^2-m} + \frac{\rho^2 \cdot (1-\rho^2)}{(\rho^2-m)^2} \right] \right\} \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{app} \cdot \frac{1+m}{\rho^2-m} \cdot \left\{ 1 + (1-m) \cdot \left[ 0.5 \frac{1+\rho^2}{\rho^2-m} + \frac{\rho^2 \cdot (1-\rho^2)}{(\rho^2-m)^2} \right] \right\}\end{aligned}\quad (1_52a, b)$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{app} \cdot \frac{1+m}{\rho^2-m} \cdot \left\{ 1 - (1-m) \cdot \left[ 0.5 \frac{1+\rho^2}{\rho^2-m} + \frac{\rho^2 \cdot (1-\rho^2)}{(\rho^2-m)^2} \right] \right\}$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{app} \cdot \frac{1+m}{\rho^2 - m} \cdot \left\{ 1 + (1-m) \cdot \left[ 0.5 \frac{1+\rho^2}{\rho^2 - m} + \frac{\rho^2 \cdot (1-\rho^2)}{(\rho^2 - m)^2} \right] \right\}$$

A l'extrémité de l'ellipse  $x = a$ , la contrainte est maximale :

$$\sigma_{yy} = \sigma_{app} \cdot \left[ 1 + 2 \frac{a}{b} \right] \quad (1.53)$$

Et le rayon de courbure est donné par :  $R_c = \frac{b^2}{a}$ , le facteur de concentration de contrainte est donc :

$$K_t = 1 + \sqrt{\frac{a}{R_c}} \quad (1.54)$$

Le facteur de concentration de contraintes ne dépend que de la forme du trou et il tend vers l'infini lorsque le trou elliptique s'aplatit.

### 1.5.2 Effet de la forme du défaut sur la distribution de contraintes en avant du défaut

L'interaction de défauts est pilotée principalement par le champ de contraintes induit par un défaut (cavité ou fissure) sur l'autre. Il est donc utile de comparer l'effet de la forme du défaut sur la distribution de contrainte en avant de celui-ci.

L'utilisation des formules de distribution de contraintes sur l'axe portant la fissure ou l'ellipse permet de comparer les distributions de contrainte normale. Les tailles de défauts suivant  $x$  sont identiques.

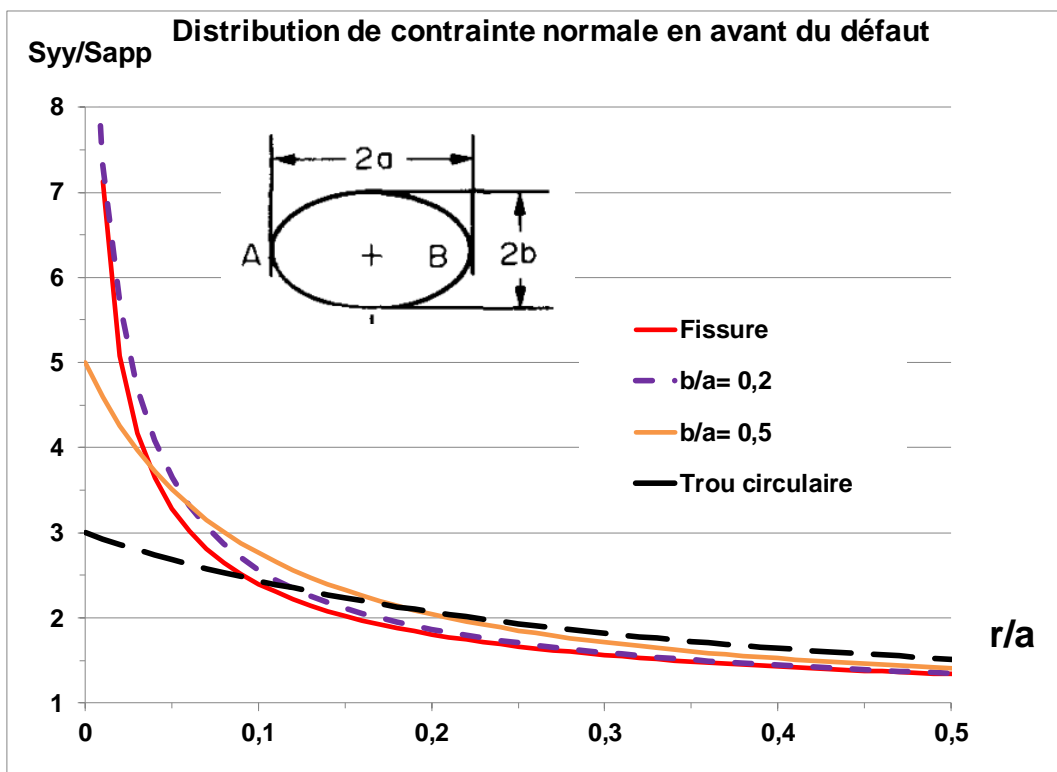
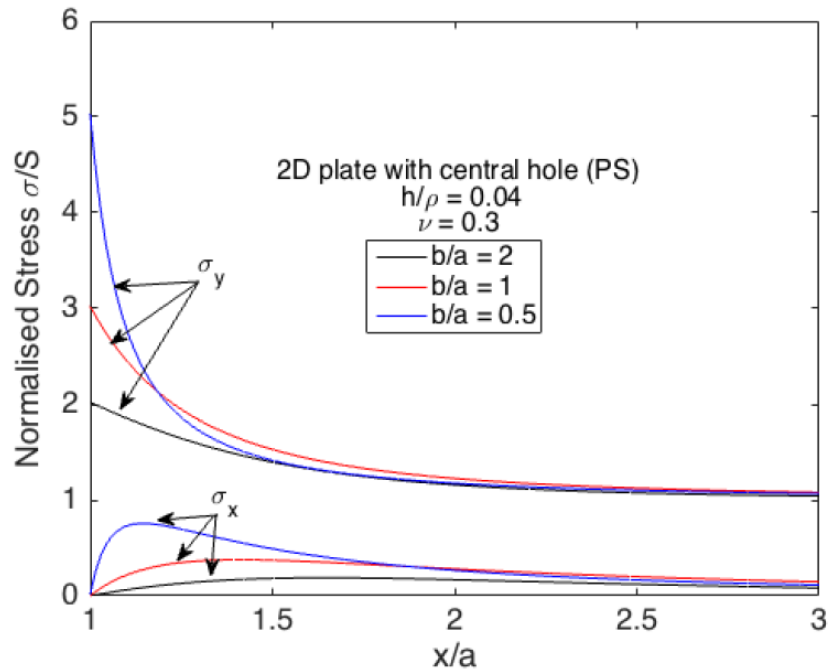


Figure 1.24 : schéma des plaques infinies troués en traction uniaxiale (PAN, 2005)

La figure 1.24 montre que l'effet de forme n'est pas très important tant que l'ellipse reste aplatie ( $b \ll a$ ). Cependant le cas de l'ellipse d'excentricité  $b/a = 0.2$ , l'effet du trou elliptique sur une fissure voisine sera plus important que celui d'une fissure sur sa voisine.

Ces résultats sont identiques à ceux de la littérature traction (GRY, 2007 ; KLU, 2016) comme l'illustre la figure 1.25.



**Figure 1.25 : distribution de contrainte en avant d'une entaille centrale dans une plaque en traction – Calcul par éléments finis en déformations planes (KLU, 2016)**

Les cavités elliptiques sous chargement uniaxial concentrent les contraintes aux extrémités des demi-axes perpendiculaires à la direction de sollicitations. Cette concentration est d'autant plus forte que le rayon de courbure local est faible et tend vers l'infini lorsque celui-ci tend vers 0. Cet effet s'accompagne d'une légère réduction de la portée de l'amplification des contraintes

### 1.5.3 Effet d'une cavité sur le FIC

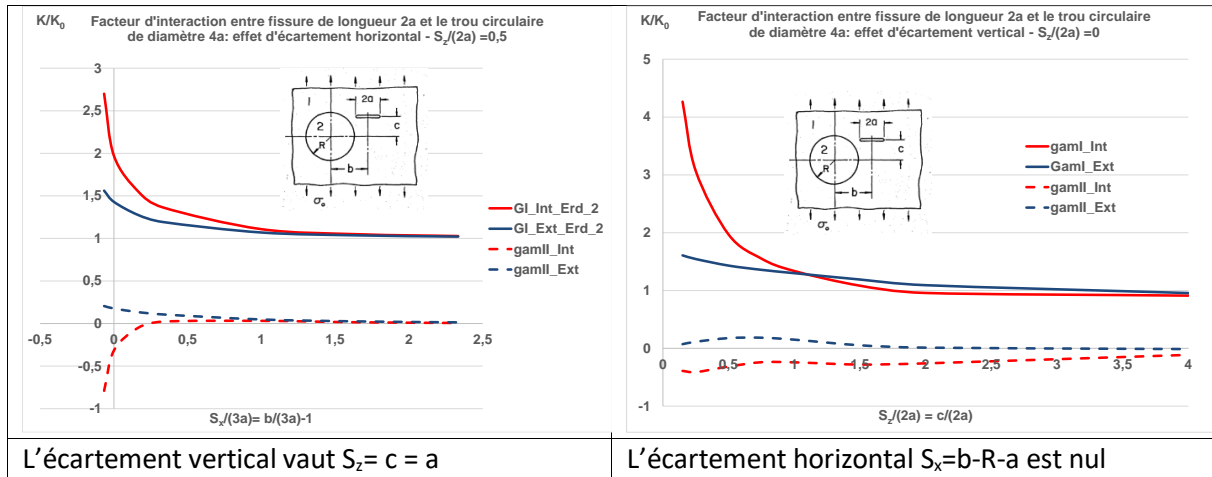
#### 1.5.3.1 Effet d'une cavité sur une fissure en bidimensionnel

De nombreuses études ont porté sur l'influence d'une cavité circulaire sur une fissure voisine en bidimensionnel (ISI, 1970 ; BHA, 1973 ; EGR, 1974 ; HUA, 1993 ; THO, 2000). Le cas de la cavité elliptique a été moins souvent analysé (YAN, 2006 ; YIR, 2022). D'autres formes de cavités ont été considérées (NIS, 2000 ; CHE, 1991). Chiu et al. (CHI, 2022) ont modélisé l'impact d'une retassure recouverte d'une couche d'oxyde par des trous revêtus de diverses formes et fourni plusieurs références d'études similaires.

#### Cavité circulaire

Les abaques d'Isida sont peu commodes à utiliser car les variables choisies ne sont pas indépendantes. L'étude systématique d'Erdogan et al. (EGR, 1973 et 1974) qui porte sur l'interaction d'une fissure bande parallèle à l'axe  $O_x$  et un trou ou d'une inclusion circulaire est plus intéressante. Ci-dessous sont

reproduites deux configurations (Figure 1.26) où le diamètre du trou est le double de la longueur de fissure ( $R=2a$ ). Dans la première configuration la fissure se situe à mi-hauteur du trou à une distance de  $0,586a$  et le facteur d'interaction devient négligeable pour un excentrement  $b = 6a$ . Dans la seconde configuration la pointe interne de la fissure se situe à la verticale du bord du trou suivant  $O_x$  et c'est l'écartement vertical qui varie. Le facteur d'interaction prend de plus fortes valeurs à proximité du trou et devient négligeable pour un écartement vertical  $c=4a$ .

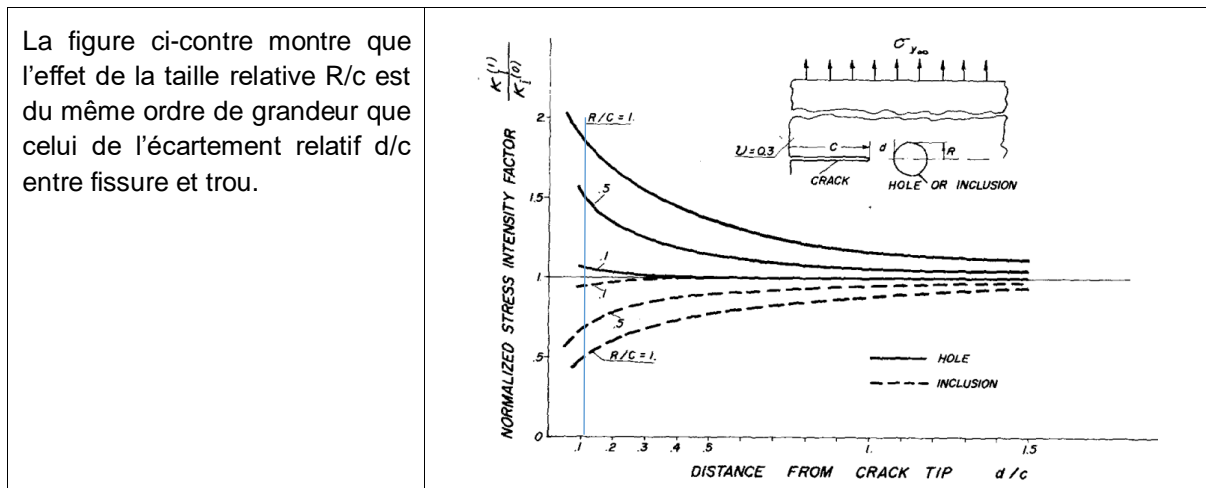


L'écartement vertical vaut  $S_2 = c = a$

L'écartement horizontal  $S_x = b - R - a$  est nul

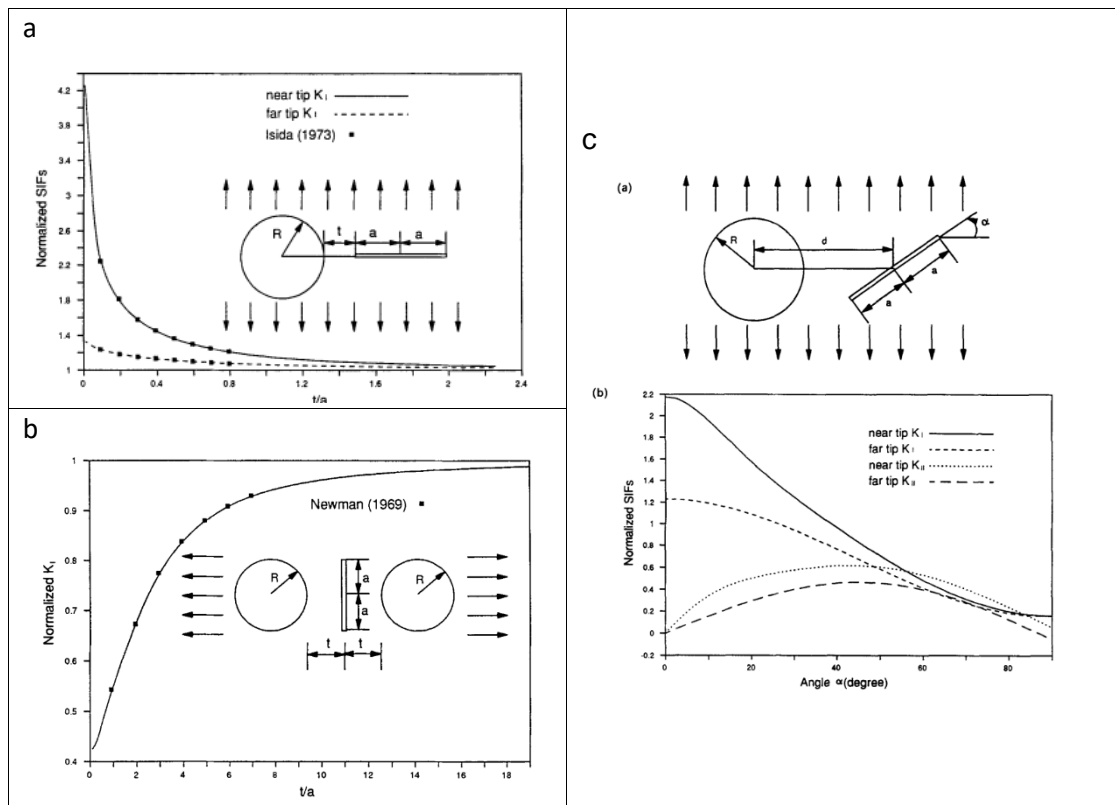
**Figure 1.26 : effet de la position de la fissure par rapport au trou sur le facteur d'interaction (EGR, 1974)**

Tirosh et Tetelman (TIR, 1976) ont analysé l'influence de l'éloignement et du rayon d'un trou ou d'une inclusion circulaire sur une fissure alignée avec le centre du trou. La figure 1.27 est tirée de leur publication.



**Figure 1.27 : effet de la position de la fissure par rapport au trou et de la taille relative du trou le facteur d'interaction (TIR, 1976)**

Hu et al. (HUA, 1993) ont passé en revue l'effet de très nombreux paramètres : comme l'inclinaison de la fissure, le nombre de trous et leur position (Figure 1.28).



**Figure 1.28 : effet de la position de la fissure par rapport au trou et de la taille relative du trou circulaire ( $R=a$ ) sur le facteur d'interaction (HUC, 1993)**

Les conclusions de ces études sont les suivantes :

- La présence de trous au voisinage d'une fissure peut amplifier ou diminuer le facteur d'interaction suivant la position des trous par rapport à la fissure.
- Dans le cas où la fissure est alignée avec le centre du trou et chargée normalement à son plan (Fig. 1.28a), la proximité du trou augmente fortement le facteur d'interaction. L'interaction devient négligeable pour un écartement égal à la taille de fissure  $2a$  pour un rayon  $R=1,2a$ .
- Dans le cas où la fissure sollicitée en mode I est comprise entre deux trous égaux de diamètre égal à la taille de fissure et dont les centres sont alignés avec celui de la fissure, il y a une forte atténuation du facteur d'interaction lorsque l'écartement se réduit (Fig. 1.28b).
- Dans le cas où les centres des fissures sont alignés, et la fissure inclinée par rapport à la direction de chargement (Fig. 1.28c) le facteur d'interaction mode I devient inférieur à 1 vers 40 degrés, mais le mode II n'est plus négligeable devant le mode I.

### Cavité elliptique

Yan (YAN, 2006) utilise une méthode d'équations intégrale avec discontinuité de déplacement pour déterminer l'effet d'une porosité sur une fissure. Quatre rapports de longueur de fissure sur la taille d'une cavité elliptique alignée avec la fissure sont considérés :  $l/a = 2,5 ; 5 ; 10$  et  $20$  (voir schéma emprunté à (YIR, 2022) sur la figure 1.29. La proximité des deux défauts est mesurée par le paramètre

$$\lambda_x = \frac{l+a}{t+a} = \frac{l/a+1}{t/a+1} \text{ soit en faisant apparaître l'écartement } S_x \quad \lambda_x = \frac{1}{1+\frac{S_x}{l+a}} \quad (54).$$

Pour les pores de rapport d'aspect  $a/b=0,5$  qui ont une longueur inférieures au égales à 10 fois celle de la fissure l'interaction est négligeable sauf si  $\lambda_x > 0.95$  (Figure 1.29). En revanche l'effet de la fissure sur la porosité est alors important, ce qui explique le risque de croissance de la cavité comme dans le mécanisme de déchirure ductile.

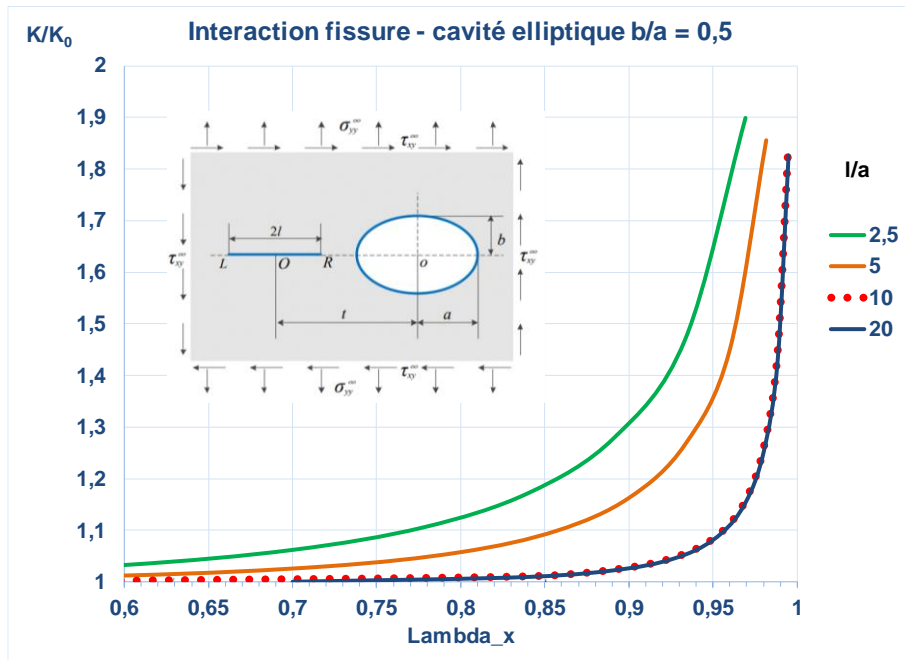


Figure 1.29 : effet du rapport des longueurs de la cavité à celle de la fissure sur le facteur d'interaction (YAN, 2006)

Yi et al. (YIR, 2022) ont effectué une étude similaire avec une méthode d'équations intégrales calculées par quadrature. Cette méthode est plus précise que celle de Yan, mais les différences sont de moins de 2%. Ces auteurs ont aussi considéré le cas de cavités multiples.

Dans les deux études, le coefficient de Poisson vaut 0,25.

Comparaison des interactions fissure-cavité et fissure-fissure

Il s'agit d'évaluer la différence entre l'interaction fissure 1-cavité et fissure 1-fissure de longueur égale à celle de la cavité. Dans les exemples reproduits ci-après la fissure 1 a une longueur deux fois plus petite que le diamètre de la cavité. Les figures 1.30a et b comparent les facteurs d'interaction aux deux points de la fissure 1 pour l'interaction trou-fissure 1 et l'interaction entre une fissure de longueur 4a substituée au trou et la fissure 1 (GamEq\_p calculé par Chapuliot – CHB, 2018). Celle-ci est donc la petite fissure. Les facteurs d'interaction incluent l'effet du mode II.

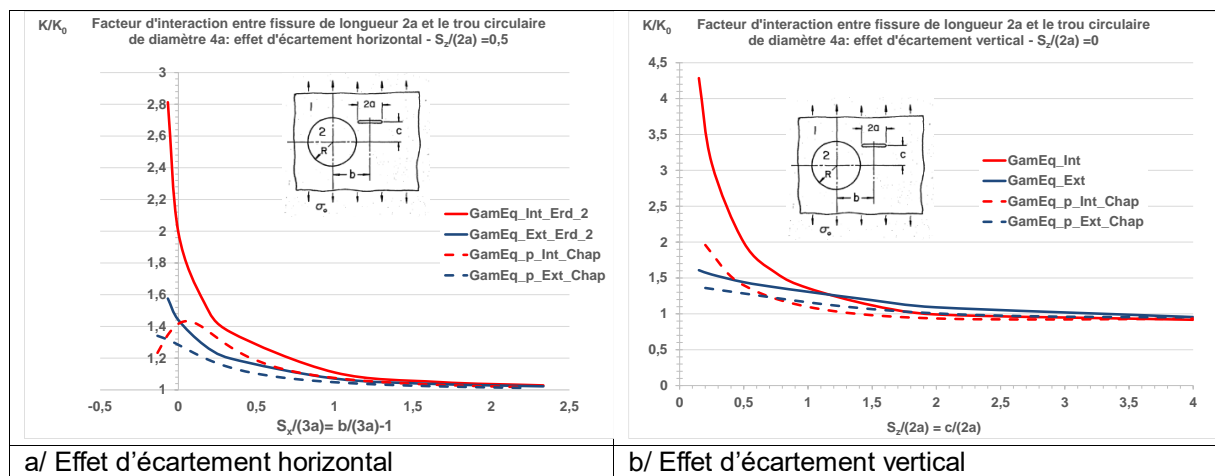
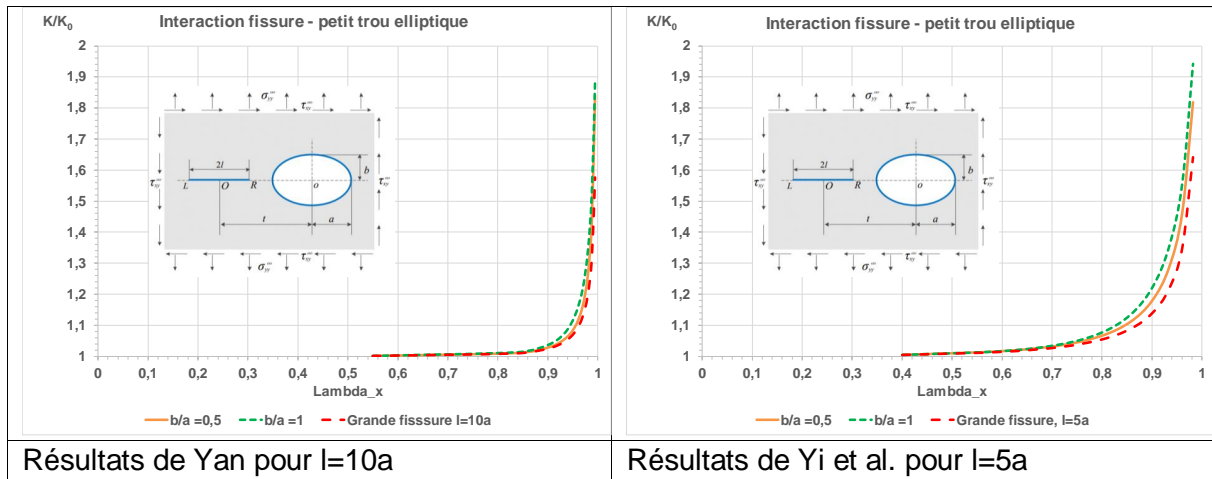


Figure 1.30 : effet de l'écartement entre une grande fissure et un trou circulaire (ERD, 1973) ou une fissure sur le facteur d'interaction (CHB, 2018)

L'interaction entre fissure et « grand » trou circulaire est nettement plus forte que celle entre fissure et une fissure de taille égale au diamètre du trou lorsque le petit défaut se rapproche horizontalement ou verticalement (Figure 1.31).

Cette différence est beaucoup moins sensible si la cavité est plus petite que la fissure et dans une moindre mesure si elle est aplatie comme le montrent les figures 1.31.

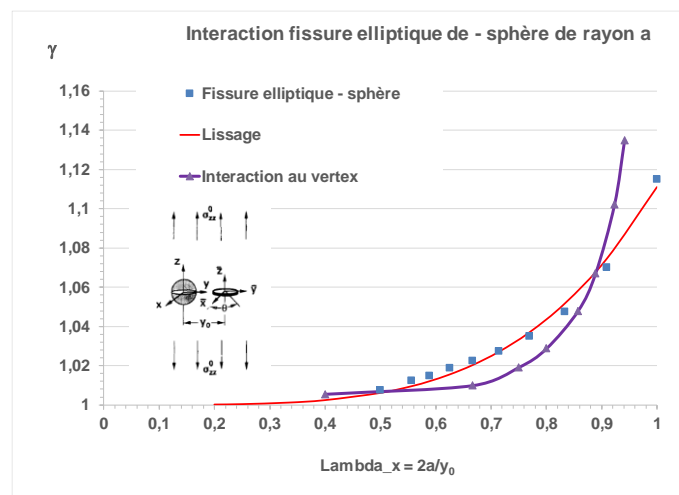


**Figure 1.31 : effet de l'écartement entre une grande fissure et un trou elliptique ou une fissure sur le facteur d'interaction (YAN, 2006) et (YIR, 2022)**

### 1.5.3.2 Effet d'une cavité sur une fissure en tridimensionnel

Xiao (XIA, 1994) a évalué l'effet d'une cavité sphérique sur une fissure elliptique par une méthode de superposition dans laquelle l'effet de la fissure sur l'homogénéité est négligeable. Le rayon de la sphère est égal au demi-grand axe de la fissure. Le grand axe est aligné suivant y et le rapport d'aspect est de 0,5. Le coefficient de Poisson vaut 1/3. L'interaction la plus forte a lieu au vertex de la fissure.

Le paramètre d'écartement  $\lambda_x = \frac{a}{y_0}$  vaut 1 lorsque la fissure touche la sphère.



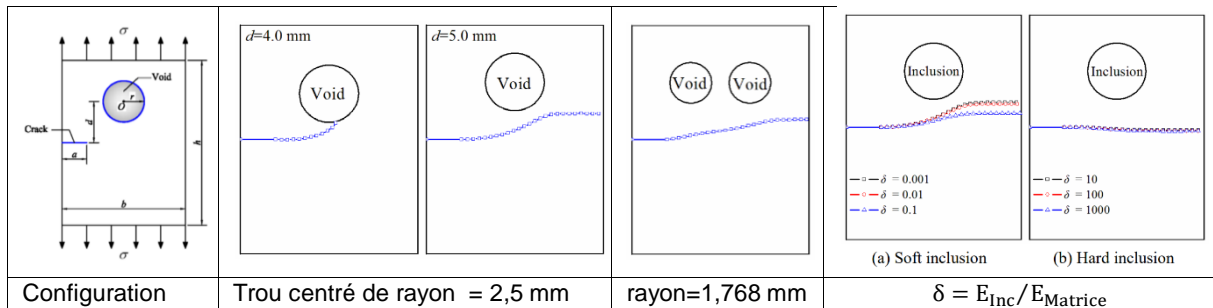
**Figure 1.32 : effet de l'écartement entre une sphère et une fissure elliptique avec interaction au vertex sur le facteur d'interaction (XIA, 1994)**

La figure 1.32 montre que le facteur d'interaction fissure sphère est plus forte que celle entre deux fissures elliptiques de grand axe  $2a$  jusque  $\lambda_x = 0,9$ . Au-delà le facteur d'interaction entre deux fissures devient singulier. Si la fissure avait son petit axe suivant y, l'interaction entre fissures serait beaucoup plus forte.



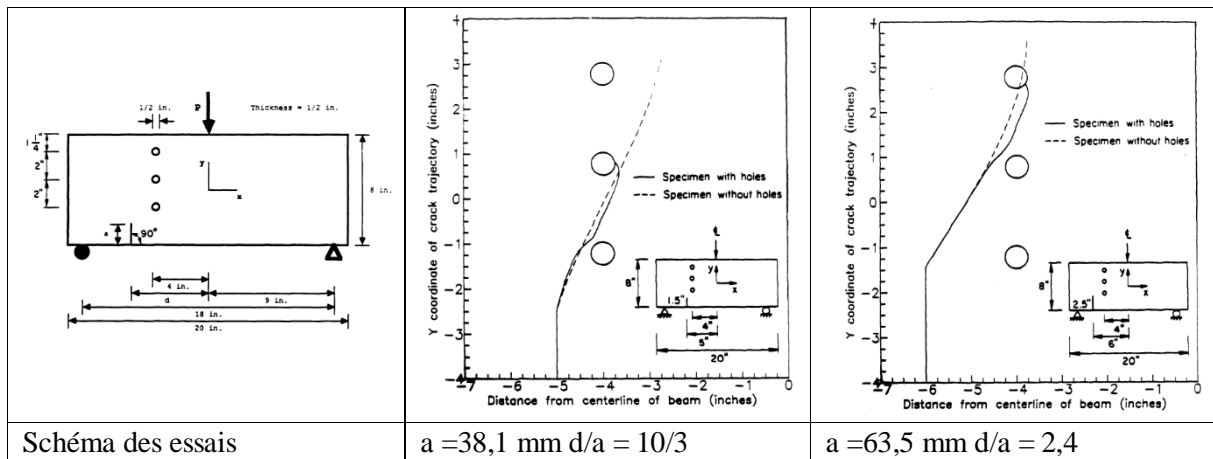
### 1.5.3.3 Effet d'une cavité sur le trajet d'une fissure en fatigue

Bien que la présente étude se limite à l'étude de l'amorçage, il importe de rappeler qu'il existe un effet important des cavités ou des inclusions sur le trajet d'une fissure. Dans un matériau homogène, le trajet d'une fissure qui se propage à proximité d'une cavité la pénètre alors qu'à proximité d'une inclusion elle s'en éloigne sauf si celle-ci est molle par rapport à la matrice. La figure 1.33 illustre la complexité du problème par une série de simulations numériques par la méthode des éléments finis étendue (JDG, 2014). Les FIC sont calculés par des intégrales, la direction de propagation obéit au critère de la contrainte normale maximale (ERS, 1963) et la fissure est incrémentée lorsque la valeur du FIC équivalent dépasse la ténacité. La plaque a une largeur de 15 mm, la fissure a une longueur initiale de 2,5 mm.



**Figure 1.33 : influence d'un vide ou d'une inclusion sur le trajet d'une fissure (JDG, 2014)**

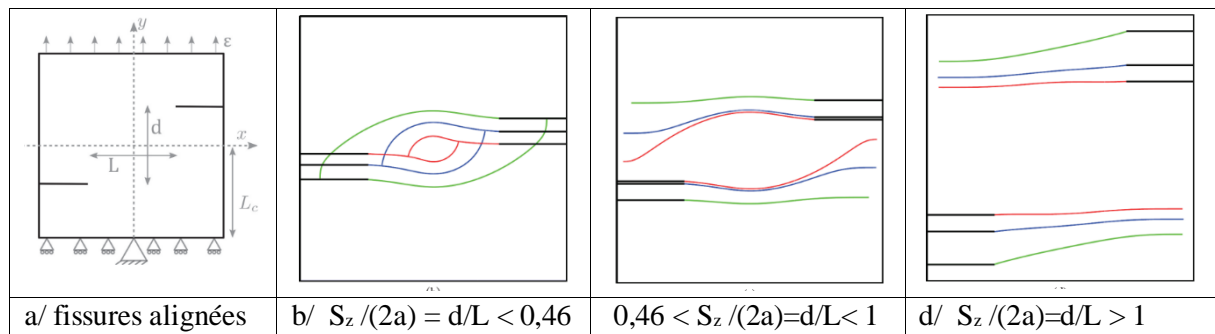
Ingraffea et Grigoriu (IGG, 1990) ont réalisé des essais de flexion 3 points sur des plaques de plexiglas comportant une fissure de longueur  $a$  située à la distance  $d$  de l'axe vertical de chargement et trois trous circulaires identiques de diamètre 12,7 mm percés à une distance de l'axe de 101,6 mm (4 pouces). Dans les éprouvettes présentées dans le rapport, la fissure atteint un trou d'autant plus éloigné que le rapport  $d/a$  est faible (Figure 1.34). Les auteurs montrent aussi que la trajectoire dépend des conditions aux limites mais n'évaluent pas le rapport des FIC  $K_{II}/K_I$  auquel ils attribuent l'influence.



**Figure 1.34 : effet de la présence de trous circulaire sur le trajet d'une fissure (IGG, 1990)**

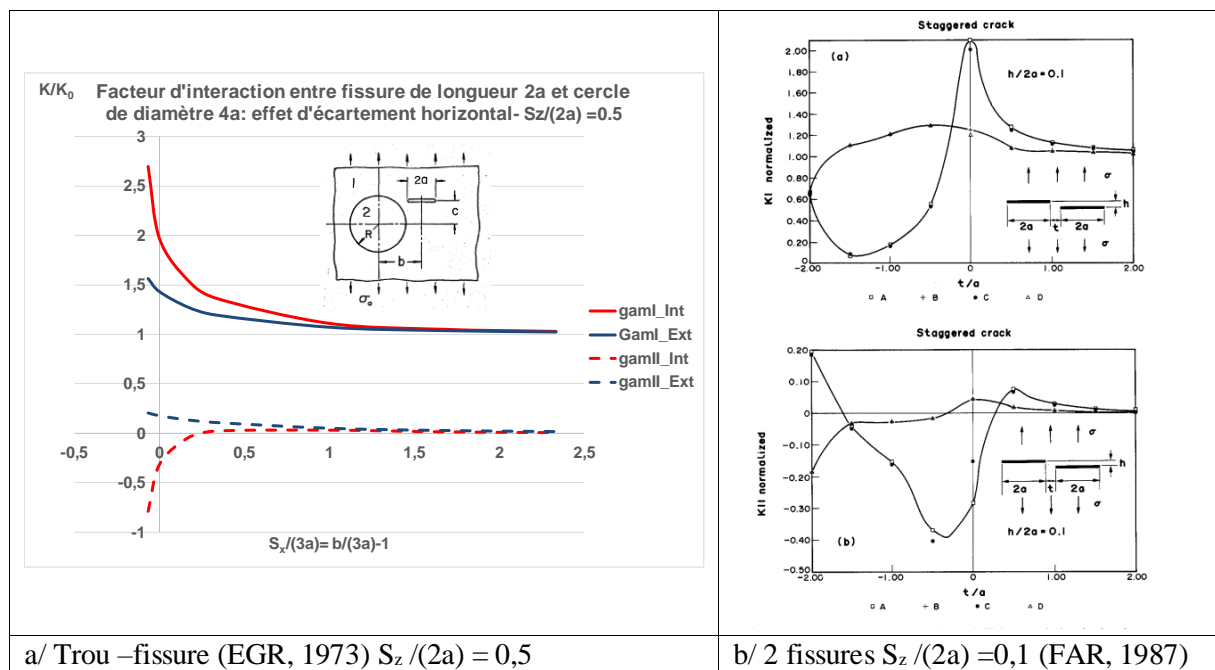
Dans le cas de fissures, Schwaab (SCW, 2018) a montré dans le cadre de l'élasticité linéaire le principe de symétrie locale (PSL) permet de prédire la trajectoire des fissures mais avec quelques incertitudes quant à la transition entre mode répulsif et mode attractif. Les nombreuses simulations effectuées sur la configuration de la figure 1.35a mettent en évidence 4 types de trajectoires. Seul l'écartement vertical  $d$ , (noté ici  $S_z$ ) est modifié, l'écartement  $L$  vaut 4 cm : la trajectoire est rectiligne si les fissures sont alignées ( $S_z=0$ ), en forme de crochet si  $S_z < 1,84$  cm, en forme de S si  $1,84 < S_z < 3$  cm. Si  $S_z$  est plus

grand que 4cm, il n'y a pas de répulsion mais l'attraction est modérée. Le bon adimensionnement serait de diviser  $S_x$  et  $S_z$  ( $L$  et  $d$ ) par la somme des longueurs de fissure  $2a$ . D'après les essais de Dalbe et al. (DAL, 2015)  $2a = 8 \text{ cm} - L$ , soit  $a = 2 \text{ cm}$  dans le cas considéré. Donc  $S_x/(2a) = 1$  et  $S_z/(2a) = d/L$ .



**Figure 1.35 : trajets de fissures simulées de façon incrémentale (SCW, 2018)**

La déviation de fissure s'explique par le signe du FIC de mode II et le rapport des FIC  $K_{II}/K_I$ , ce qui est formalisé dans les critères directionnels (ERS, 1963 ; AME, 1979, AML, 1992). Les figures ci-après montrent pour des fissures décalées dans la direction du chargement par rapport au second défaut, que le FIC de mode II devient négatif à proximité du trou (Figure 1.36a) ou de la seconde fissure (Figure 1.36b).



**Figure 1.36 : effet des écartements entre un trou circulaire et une fissure ou entre deux fissures avec sur les FIC ( $t$  est noté  $S_x$  et  $h S_z$ )**

## 1.6 Règles codifiées

De façon générale, « Les codes de construction définissent des règles et des exigences minimales pour la conception, les matériaux utilisés, la fabrication, et le contrôle des produits. Leur utilisation permet une standardisation des bonnes pratiques. La plupart des codes utilisent un dimensionnement par application de formules analytiques, certains permettent une analyse des contraintes par calcul, notamment par éléments finis (Design by Analysis) (MECA, 2022).

Les codes et standards adressent le problème de l'interaction de défauts par plusieurs types de règles de proximité :

- Conditions de non interaction de défauts de surface
- Conditions de non interaction de défauts enfouis
- Conditions de non interaction d'un défaut enfoui avec une fissure de surface
- Condition de proximité d'un défaut enfoui avec la surface
- Recaractérisation d'un défaut enfoui en fissure de surface

Toutes ces règles permettent de déterminer si oui ou non il faut regrouper des défauts ou transformer un défaut enfoui en défaut de surface. En cas de regroupement des défauts, les codes définissent le défaut unique à considérer dans les analyses.

### 1.6.1 Evolution des règles de proximité des défauts

L'évolution des règles de proximité des défauts a été gouvernée par le progrès des méthodes de contrôle non destructif et par l'énorme accroissement des capacités de calculs depuis 2010.

Les étapes principales de l'évolution des règles de proximité sont présentées ci après en se limitant à une ou deux références par cas. Le classement n'est pas purement chronologique : l'attention a souvent porté sur les défauts de surface plus faciles à dimensionner et en principe plus nocifs. Les évolutions des codes sont loin d'être parallèles, mis à part les développements communs à l'ASME (ASME, 2022) et le JSME (JSME' 2022) depuis plusieurs années. Les règles diffèrent suivant les codes, mais font intervenir à peu près les mêmes paramètres et souvent sont à peu près équivalentes (NUG, 2015). Ceci est avéré pour les fissures bande mais cette modélisation est trop pénalisante et a motivé les études en tridimensionnel.

1. Défauts bande coplanaires égaux puis inégaux
2. Défauts plans de surface
3. Défauts bande parallèles
4. Défauts elliptiques enfouis
5. Interaction avec la surface
6. Défauts non plans

Sauf indication contraire, les critères cités dans les tables se réfèrent à des éditions antérieures à 2015. Le principal changement dans la codification de l'interaction est intervenu dans les codes JSME et ASME (ASME\_Code Case N-848-1 et N-877) suite aux développements de plusieurs auteurs (LAC, 2018). Le code RSE-M présente une approche différente de celle des autres codes et sera donc présenté au paragraphe suivant. Les paragraphes 1.5.3 à 1.5.5 analysent les règles d'avant 2015, les changements apportés par la suite seront traités au paragraphes 1.5.6.

#### Règles communes aux codes

Dans la plupart des codes, les défauts sont représentés par des fissures planes situés dans des plans principaux ou dans un plan normal à la surface du composant. Donc les règles considèrent des fissures coplanaires ou parallèles sollicités en traction normale.

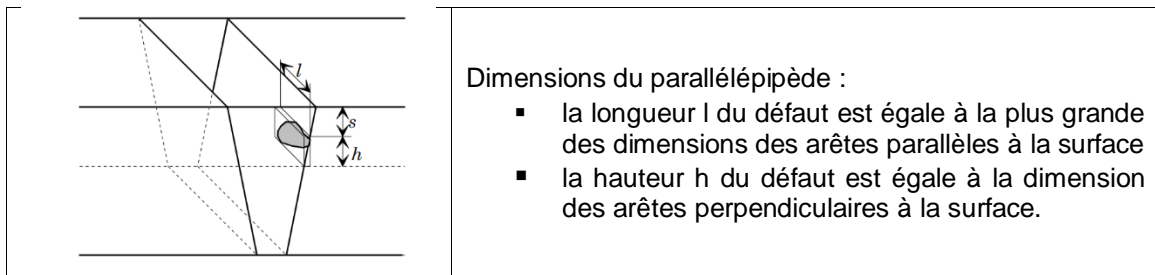
Nombre de publications distinguent règles de combinaison qui dépendent des écartements dans le plan et règles d'alignement fonction de l'écartement hors plan.

### 1.6.2 Le code RSE-M

#### 1.6.2.1 Caractérisation du défaut

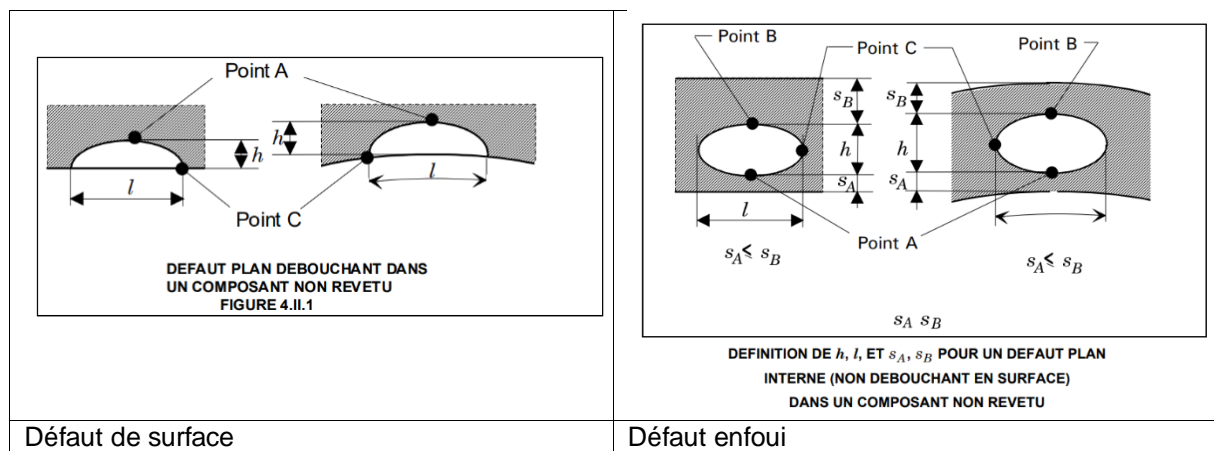
L'annexe 5-1 du RSE-M (RSE-M, 2010) définit la façon de caractériser les défauts :

« Lors de la caractérisation, le défaut est inscrit dans un parallélépipède rectangle dont les faces sont parallèles ou perpendiculaires à la surface la plus proche de l'enceinte sous pression » (Figure 1.37).



**Figure 1.37 : définition d'un défaut dans le RSE-M (RSE-M 2010)**

Cette présentation se résume au cas des composants non revêtus. Les deux types de défauts sont décrits à la figure 1.38.



**Figure 1.38 : caractérisation de défauts dans le RSE-M (RSE-M 2010)**

Le cas du défaut plan parallèle à la surface n'est pas traité dans la version 2010.

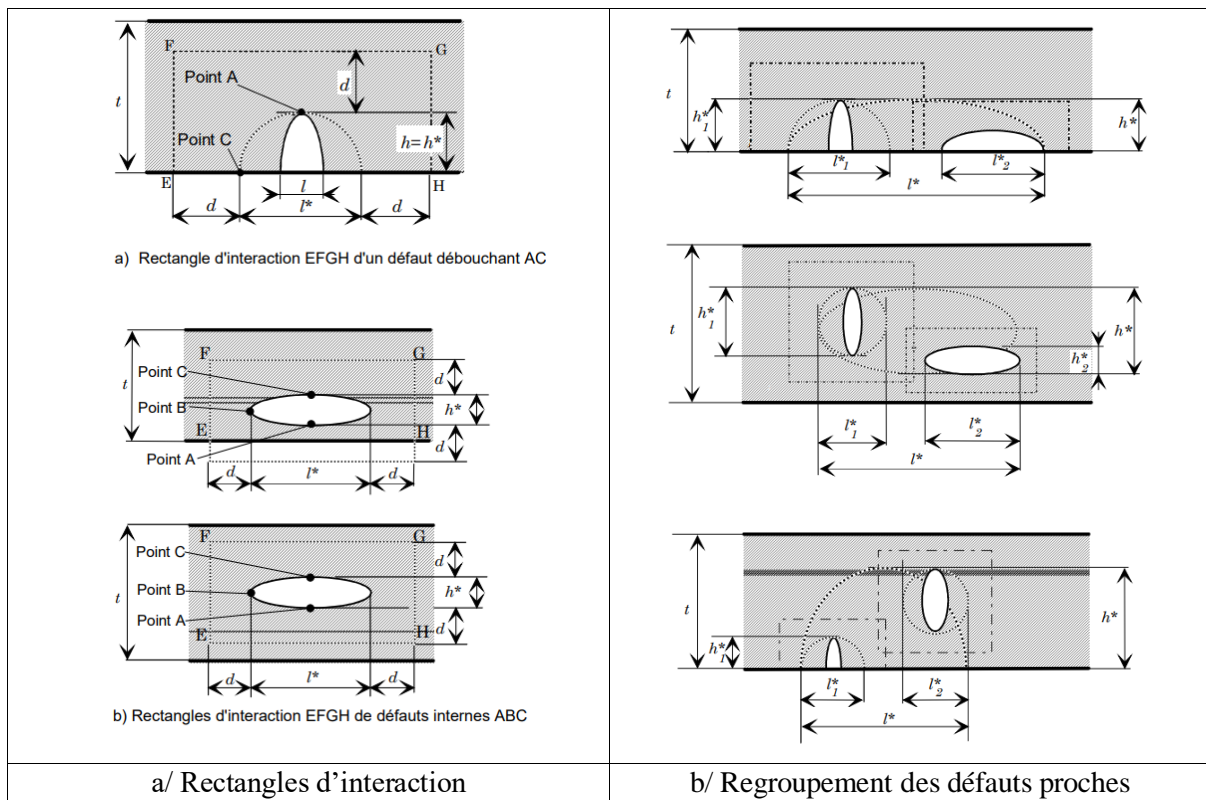
### 1.6.2.2 Caractérisation du défaut enveloppe

Le RSE-M propose des règles dont les limites dépendent du type de composant et qui sont très conservatives. Elles sont définies plutôt pour des défauts de surface semi-elliptiques et défauts enfouis elliptiques.

### 1.6.2.3 Conditions de non-interaction des défauts

#### Défauts coplanaires

Les défauts coplanaires sont des défauts ayant le même plan moyen ou des plans moyens voisins.



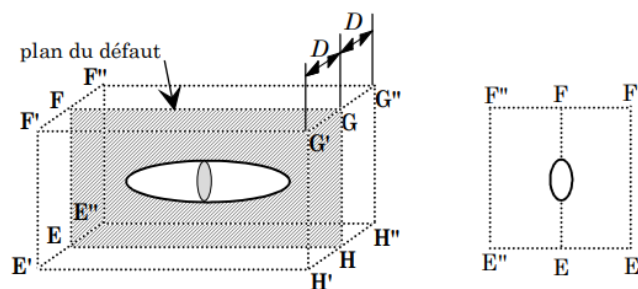
**Figure 1.39 : traitement de l'interaction de défauts coplanaires (RSE-M 2010)**

Les défauts sont re-caractérisés en construisant un rectangle d'interaction défini à la figure 1.39a. La distance d'interaction  $d$  est obtenue en multipliant la hauteur  $h^*$  par un coefficient  $z$  qui dépend du caractère débouchant ou non-débouchant du défaut et du type de composant. Pour les défauts de surface  $z$  varie de 1,1 à 3,5 et pour les défauts enfouis  $z$  varie de 0,6 à 1.

Chaque défaut est enveloppé dans un rectangle et si deux rectangles n'ont pas d'intersection, les défauts sont considérés comme isolés sinon les règles de regroupement définies à la figure 1.39b sont appliquées.

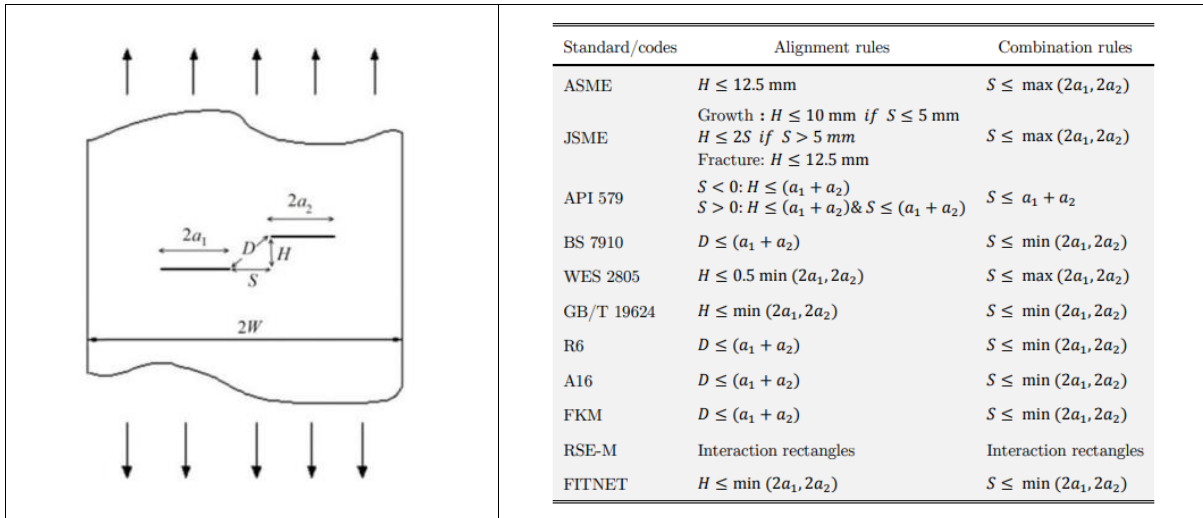
### Défauts non coplanaires

A chaque défaut est associé un parallélépipède et si deux parallélépipèdes n'ont pas d'intersection, les défauts sont considérés comme isolés (Figure 1.40).



**Figure 1.40 : traitement de l'interaction de défauts non coplanaires (RSE-M 2010)**

### 1.6.3 Règles de proximité des défauts bande



**Figure 1.41 : règles de proximité pour des défauts bande dans les codes d'aptitude au service (BIS, 2015)**

Les règles de l'ASME et du JSME se distinguent par le choix d'une règle d'alignement indépendante de la longueur de fissure (ASME, 2005 et 2010 ; JSME, 2004). La limitation de  $S_z$  à 12,5 mm soit environ 0,5 pouces vient de limites de capacités de méthodes d'examen non destructifs de défauts (DUL, 2019). Le choix d'une valeur absolue pour un critère d'interaction n'est pas conforme aux résultats exacts obtenus pour des fissures bande coplanaires qui ne dépendent que d'écartements adimensionnés par des longueurs de fissure et sont invalidés par les essais effectués par Hasegawa et Myazaki (HAS, 2007, Tableau 1.3).

<table border="1"> <thead> <tr> <th>Experiment</th> <th colspan="2">Code</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="3">Aligned</td> <td>JSME, ASME</td> <td>Aligned</td> </tr> <tr> <td>BS, FKM, A16</td> <td>Non-aligned</td> </tr> <tr> <td>API 579</td> <td>Non-aligned</td> </tr> </tbody> </table> <p><math>S_x/(2a) = 0.5</math> et <math>S_z/(2a) = 0,62</math></p>	Experiment	Code		Aligned	JSME, ASME	Aligned	BS, FKM, A16	Non-aligned	API 579	Non-aligned	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Experiment</th> <th colspan="2">Code</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="3">Aligned</td> <td>JSME, ASME</td> <td>Non-aligned</td> </tr> <tr> <td>BS, FKM, A16</td> <td>Non-aligned</td> </tr> <tr> <td>API 579</td> <td>Non-aligned</td> </tr> </tbody> </table> <p><math>S_x/(2a) = 0,5</math> et <math>S_z/(2a) = 0,85</math></p>	Experiment	Code		Aligned	JSME, ASME	Non-aligned	BS, FKM, A16	Non-aligned	API 579	Non-aligned	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Experiment</th> <th colspan="2">Code</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="3">Non-Aligned</td> <td>JSME, ASME</td> <td>Non-aligned</td> </tr> <tr> <td>BS, FKM, A16</td> <td>Aligned</td> </tr> <tr> <td>API 579</td> <td>Aligned</td> </tr> </tbody> </table> <p><math>S_x/(2a) = 0,111</math> et <math>S_z/(2a) = 0,43</math></p>	Experiment	Code		Non-Aligned	JSME, ASME	Non-aligned	BS, FKM, A16	Aligned	API 579	Aligned
Experiment	Code																															
Aligned	JSME, ASME	Aligned																														
	BS, FKM, A16	Non-aligned																														
	API 579	Non-aligned																														
Experiment	Code																															
Aligned	JSME, ASME	Non-aligned																														
	BS, FKM, A16	Non-aligned																														
	API 579	Non-aligned																														
Experiment	Code																															
Non-Aligned	JSME, ASME	Non-aligned																														
	BS, FKM, A16	Aligned																														
	API 579	Aligned																														

**Tableau 1.3 : comparaison des résultats expérimentaux à des règles codifiées d'alignement de fissures bande égales (HAS, 2007)**

Le troisième essai ( $S_x/(2a) = 0,111$  et  $S_z/(2a) = 0,43$ ) pose un problème d'interprétation : c'est une situation proche de l'écrantage (voir Tableau 1.3) et la proximité de la surface libre facilite la propagation des pointes externes.

Pour des fissures égales, Les règles des codes FITNET, GB-T 19624 (FITNET, 2008 ; GB/T1962, 2004) sont en bon accord avec nos formules et les calculs aux éléments finis de S. Chapuliot (GIL, 2022) en considérant comme critère facteur d'interaction limité à 5%. Les règles d'alignement de BS 7910, R6, RCCMR-A16, FKM et surtout WES 2805 peuvent sous-estimer l'interaction (BS 7910, 2005 ; R6, 2006 ; RCCMR-A16, 2002 ; FKM, 2004 ; WES, 1997).

Pour des fissures inégales le choix de diviser l'écartement par la plus petite longueur de fissure est pertinent ce qui rend conservatifs les critères API579 (API 579, 2007), BS 7910, R6, RCCMR-A16, FKM.

Les règles ASME, JSME et API579 sont pénalisantes pour des fissures coplanaires inégales.

Le RSE-M (RSE-M, 2010) propose des règles dont les limites dépendent du type de composant. Si l'on fixe le coefficient de composant à 1, alors la règle du RSE-M est conservatrice (Figure 1.42).

Ces commentaires sont en accord avec les constats expérimentaux et numériques de Hasegawa et al. (HAS, 2009). Bidokhti et al. (BIS, 2005) qui ont effectué une comparaison détaillée de l'application des codes ASME, API579, BS7910, R6, RCC\_MR/A16, FKM, FITNET, GB/T19624 arrivent à peu près aux mêmes conclusions (HAS, 2009) :

- Les règles d'alignement doivent être fonction de la taille des défauts.
- La règle d'alignement du code WES 2805 ne sont pas conservatives.
- Les règles d'alignement des codes API579, BS7910, FKM et RCC\_MR/A16 sont très conservatives.
- Les règles du RSE-M sont les plus conservatives.

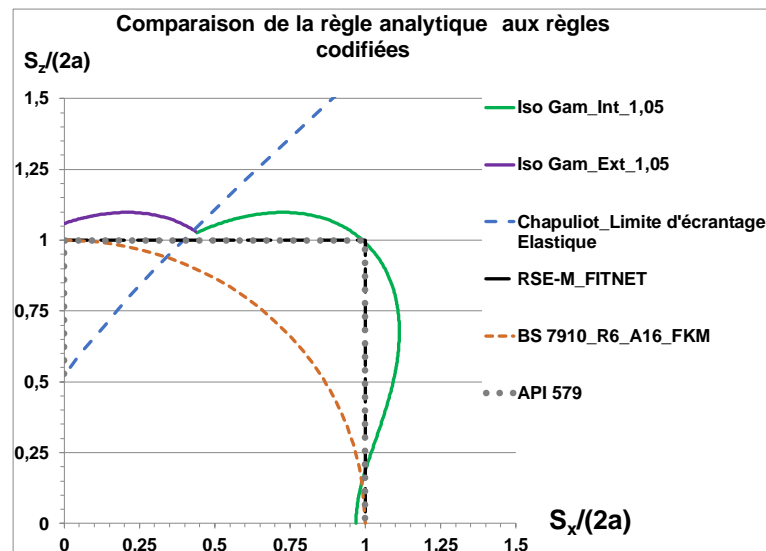


Figure 1.42 : règles de proximité pour des défauts bande dans les codes d'aptitude au service

#### 1.6.4 Règles de proximité des défauts de surface

Pour les défauts de surface les règles d'avant 2015 ne tiennent pas compte de la forme de fissure comme l'illustre la tableau 1.4 mis à part la règle R6, le British Standard (BS 7910, 2013) et le code FITNET (FITNET, 2018). Les notations sont définies à la figure 1.41.

TABLE 1 – ALIGNMENT RULES IN FFS CODES

ASME SSM	$H \leq 12.5 \text{ mm}$
JSME	$H \leq 12.5 \text{ mm}$ for NDE flaw characterization $H \leq 10 \text{ mm}$ , if $S < 5 \text{ mm}$ } for fatigue and SCC growth $H < S$ , if $S > 5 \text{ mm}$ } $H \leq 12.5 \text{ mm}$ for fracture assessment
API 579 HPI S	$H \leq 0.5(\ell_1 + \ell_2)$
WES 2805	$H \leq \max(\ell_1, \ell_2)$ for through wall flaws $H \leq \max(\ell_1, \ell_2, 2a_2)$ for through wall and surface flaws $H \leq \max(2a_1, 2a_2, \ell_1, \ell_2)$ for subsurface and surface flaws
FITNET	$H \leq \min(\ell_1, \ell_2)$
R6 BS 7910 FKM RCC-MR A16	$D \leq 0.5(\ell_1 + \ell_2)$
RSE-M	Overlap of interaction parallelepipeds

TABLE 2 – COMBINATION RULES IN FFS CODES

ASME JSME	$S \leq 0.5\max(a_1, a_2)$ $S = 0$ for SCC and fatigue
R6 BS 7910	$S \leq \min(\ell_1, \ell_2)$ for $a_1/\ell_1$ or $a_2/\ell_2 > 0.5$ $S \leq 0.5\max(a_1, a_2)$ for $a_1/\ell_1$ and $a_2/\ell_2 \leq 0.5$
FITNET	$S \leq \min(\ell_1, \ell_2)$ or $S \leq 0.5\max(a_1, a_2)$ } for $a_1/\ell_1$ or $a_2/\ell_2 > 0.5$ $S \leq 0.5\max(a_1, a_2)$ for $a_1/\ell_1$ and $a_2/\ell_2 < 0.5$
FKM	$S \leq \min(\ell_1, \ell_2)$
SSM	$S \leq \min(\ell_1, \ell_2)$
GB/T19624	$S \leq \min(\ell_1, \ell_2)$
WES 2805	$S \leq 0.5\min(\ell_1, \ell_2)$ if $S \geq 0$ $H \leq 0.75\min(\ell_1, \ell_2)$
API 579 HPI S RCC-MR A16	$S \leq 0.5(\ell_1 + \ell_2)$
A.M.E.	$S < (a_1^2 + a_2^2)^{0.5} a_2$ , where $a_1 > a_2$
RSE-M	Overlap of interaction rectangles

Tableau 1.4 : règles de proximité pour deux défauts de surface (DUL, 2018)

Les règles d’alignement sont les mêmes que pour les défauts bande pour tous les codes avec quelques nuances pour les codes JSME (JSME, 2012) et WES 2805 (WES, 2011). Les règles de combinaison sont similaires à celles proposées pour les défauts bande, mais l’effet du rapport d’aspect de la demi ellipse n’est pas pris en compte explicitement. Dès 1980, Iida a montré par des essais de fatigue de fissures semi-elliptiques de surface (IID, 1980, 1983) que les rapports d’aspect et les différences de rapport d’aspect jouent un rôle important sur la coalescence des fissures.

Kamaya (KAM, 2002) propose une condition d’alignement moins sévère que celles des codes pour des fissures semi-circulaires :

$$S_z/c \leq 1 \tag{1.55}$$

Dulieu et al. (DUL, 2018) ont effectué une étude très détaillée de l’interaction de fissures de surface fondée sur de nombreux calculs par éléments finis étendus. La courbe correspondant aux fissures semi-circulaires de la figure 1.43, confirme que la condition proposée par Kamaya est acceptable.

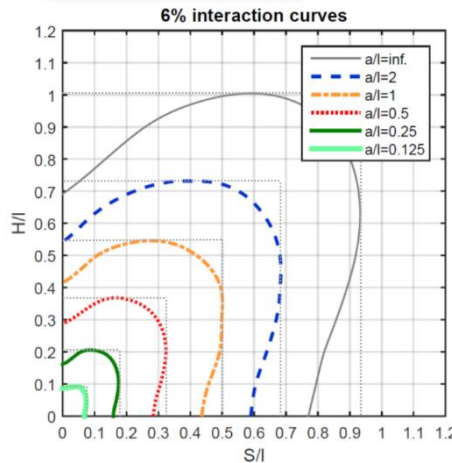
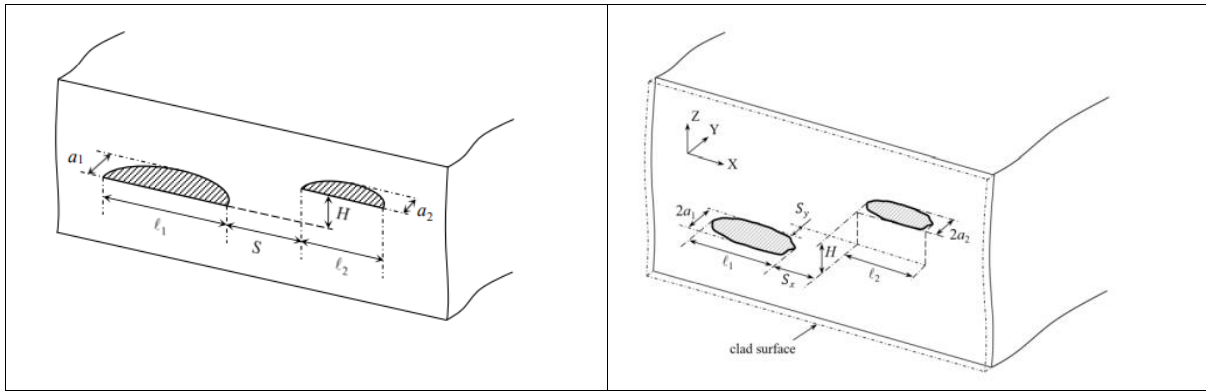


Figure 1.43 : iso valeurs de facteurs d’interaction de fissures égales semi-elliptiques de surface (DUL, 2018)

### 1.6.5 Règles de proximité des défauts enfouis

Le traitement de l’interaction des défauts enfouis est plus complexe que celle des défauts de surface en raison de l’accroissement du nombre de paramètres (Figure 1.44) et de la nécessité de traiter l’effet de proximité vis-à-vis de la surface.





**Figure 1.44: paramètres caractérisant deux défauts de surface et deux défauts enfouis (DUL, 2019)**

Défauts enfouis coplanaires

Les codes ASME, JSME, BS7910, FKM, API 579, RCCM-R (A16) comparent l'écartement S entre les défauts avec une dimension de défaut (Tableau 1.5). Les dimensions d'un défaut sont celles du rectangle enveloppe. Les rectangles sont orientés parallèlement aux parois. Deux cas sont à distinguer :

1. Les rectangles sont alignés suivant l'axe médian parallèle au petit côté. La règle de combinaison est  $S/\max(a_1, a_2) \leq 1$  pour les codes JSME et ASME et  $S/(a_1 + a_2) \leq 1$  pour les autres codes ce qui est plus pénalisant. Il faut noter que ce cas est le plus sévère.
2. Les rectangles sont alignés suivant l'axe médian parallèle au grand côté. Les règles des codes JSME et ASME sont identiques à celles du cas 1 ce qui est incorrect car il faut cette fois comparer l'écartement à la dimension l portée par le même axe. Comme attendu, les règles sont moins sévères. La règle de combinaison est  $S/\min(l_1, l_2) \leq 1$  pour les codes BS7910 et FKM et  $S/0.5(l_1 + l_2) \leq 1$  pour les codes API 579, RCCM-R (A16) ce qui est plus pénalisant.

Codes and Standards				
JSME Code S NAI-2004 (2004)	$S \leq 0.5\max(a_1, a_2)$	$S \leq \max(a_1, a_2)$	$S \leq \max(a_1, a_2)$	$S \leq \max(a_1, 0.5a_2)$
[Note: It is not necessary to consider flaw combination, when calculating fatigue crack growth and SCC growth]				
ASME Code Section XI (2004)	$S \leq 0.5\max(a_1, a_2)$	$S \leq \max(a_1, a_2)$	$S \leq \max(a_1, a_2)$	$S \leq \max(a_1, 0.5a_2)$
[Note: It is not necessary to consider flaw combination, when calculating fatigue crack growth and SCC growth]				
BS 7910 (2005)	$S \leq \min(l_1, l_2)$ for $a_1/l_1$ or $a_2/l_2 > 0.5$ $S = 0$ for $a_1/l_1$ or $a_2/l_2 < 0.5$	$S \leq (a_1 + a_2)$	$S \leq \min(l_1, l_2)$ for $a_1/l_1$ or $a_2/l_2 > 0.5$ $S = 0$ for $a_1/l_1$ or $a_2/l_2 < 0.5$	$S \leq (a_1 + a_2)$
FKM (2004)	$S \leq \min(l_1, l_2)$	$S \leq (a_1 + a_2)$	$S \leq \min(l_1, l_2)$	$S \leq (a_1 + a_2)$
API 579 (2000)	$S \leq 0.5(l_1 + l_2)$	$S \leq (a_1 + a_2)$	$S \leq 0.5(l_1 + l_2)$	$S \leq (a_1 + a_2)$
[ Note: Multiple flaws do not have to be combined into an equivalent flaw for evaluation if K and limit load solution can be obtained for interacting flaw.]				
A16 (2002)	$S \leq 0.5(l_1 + l_2)$	$S \leq (a_1 + a_2)$	$S \leq 0.5(l_1 + l_2)$	$S \leq 0.5(2a_1 + a_2)$

**Tableau 1.5 : règles de combinaisons pour des défauts coplanaires (HAS, 2007)**

## Défauts enfouis parallèles

Dans le version 2010 de la section XI, Division I de l'ASME la règle de non-interaction des défauts parallèles est  $S_z < 12,7 \text{ mm}$  (Figure 1.45). Sinon ces fissures sont considérées dans le même plan.

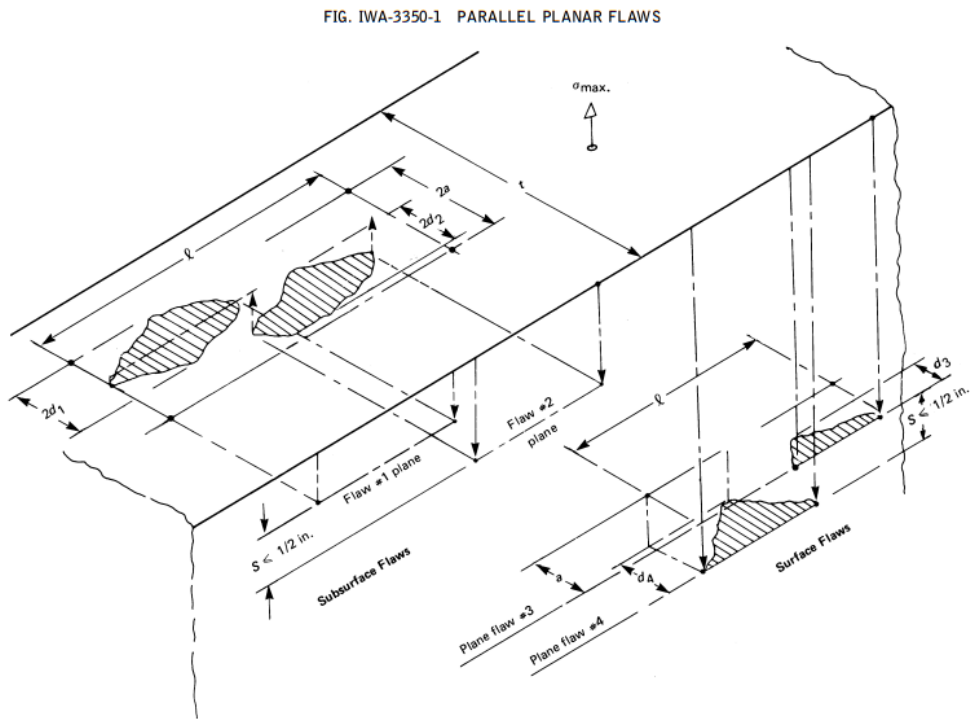


Figure 1.45 : règle d'alignement de fissures planes parallèles (IWA-3350, 2010)

## 1.6.6 Les modifications depuis 2015

### Codes ASME et JSME

Les études conjointes du JAEA et de Tractebel ont jeté les bases d'une profonde modification des effectué des règles d'interaction (LAC, 2018 ; DUL, 2019) et de proximité (HAS, 2017, LAC, 2020) dans les codes ASME et JSME.

Le code case N-877 a été modifié en 2017 puis en 2020 (N-877, 2017, 2020) afin de définir de façon plus précise les règles d'interaction entre fissures enfouies. Voici en résumé les règles de 2020.

- Règle de proximité de la surface libre :  $S_x/a < 0,4$  (Figure 1.46a).
- Les fissures planes qui ne sont pas situées dans un plan normal à la direction de contrainte normale principale doivent être projetées dans ce plan (Figure 1.46c).
- Règle de regroupement (Figure 1.46b1 et c)

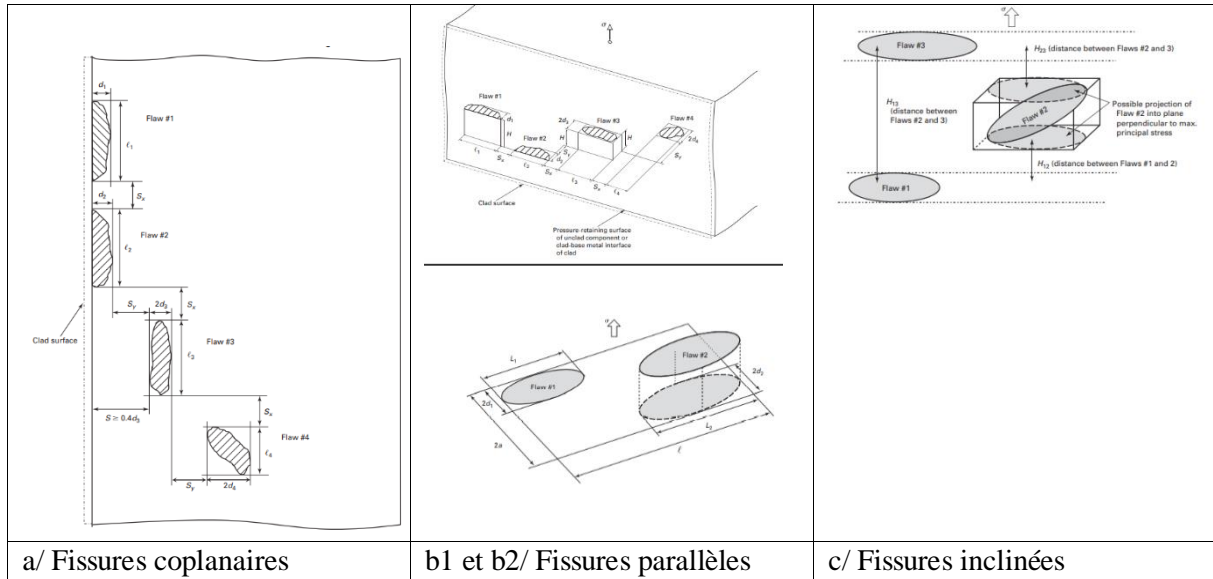
$$\begin{aligned}
 S_x &< \min(l_{i\text{-eq}}, l_{j\text{-eq}}) \\
 S_y &< \min(2d_{i\text{-eq}}, 2d_{j\text{-eq}}) \\
 S_z &< \max[\min(l_{i\text{-eq}}, l_{j\text{-eq}}), \min(2d_{i\text{-eq}}, 2d_{j\text{-eq}})] \quad (1\_56 \text{ a, b, c})
 \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
 l_{k\text{-eq}} &= 1.15l_k/[1 + 0.77(d_k/l_k)^{-1.17}] \\
 2d_{k\text{-eq}} &= 1.8\{2dl_k/[1 + 6.67(d_k/l_k)^{1.23}]\} \quad (1\_57 \text{ a, b})
 \end{aligned}$$

Où  $l_k$  et  $2d_k$  et  $L_i$  sont les longueur et profondeur de la fissure  $k$ .

- Règle de combinaison : la fissure combinée est une fissure elliptique de dimensions données par le rectangle de la figure 1.46b2.



**Figure 1.46 : règles alternatives de caractérisation de fissures planes multiples orientées radialement (N-877, 2020)**

Il est utile de mentionner la règle de regroupement de la version 2017 du code case N-877 car elle relie les modifications aux travaux de recherche.

$$S_x, \quad S_y \text{ et } S_z < \min(2d_{1\text{-eq}}, 2d_{2\text{-eq}}) \quad (1\_58)$$

$d_{i\text{-eq}} = \frac{d_i}{[E(k)]^2}$  avec  $k = \sqrt{1 - [\min(2d_i/L_i; L_i/2d_i)]^2}$  (1\_58) où  $d_i$  et  $L_i$  sont les profondeur et longueur de la fissure  $i$ . (Figure 1.46b1 et c)

Les formules de 2020 sont bâties sur la formule de 2017 mais la nouvelle formule de la profondeur intègre le cas de l'interaction entre fissure enfouies et fissure de surface en introduisant un facteur de sécurité.

### Code RSE-M

Les modifications du code RSE-M de 2016 ont été décrites par Faidy (FAI, 2017). Les principales sont résumées ci-après.

- Règle de proximité d'un défaut enfoui de la surface libre :  $S_x \leq 0.4a$
- Les définitions de la distance d'interaction  $d$  est modifiée :
  - Pour un défaut de surface  $d=h^*$
  - Pour un défaut enfoui  $d=0.5 h^*$

## 2 METHODE D'EVALUATION DE L'INTERACTION DE FISSURES

### 2.1 Représentation des défauts

Dans le circuit primaire de réacteurs à eau pressurisée, des composants en acier austéno-ferritique moulés contiennent des cavités, appelées retassures, créées lors de la solidification.

Les défauts de surface sont éliminés. Les défauts internes sont de petite taille par rapport à la forte épaisseur des composants. Après fabrication, un contrôle radiographique à 100 % est réalisé pour juger de la qualité et de l'acceptabilité des coudes. Ces examens radiographiques révèlent des groupes d'indications de taille variant de 10 microns à quelques millimètres et comportant des ponts de matière. Ce sont des défauts volumiques. Leurs formes sont irrégulières et la plupart sont fines et allongées.

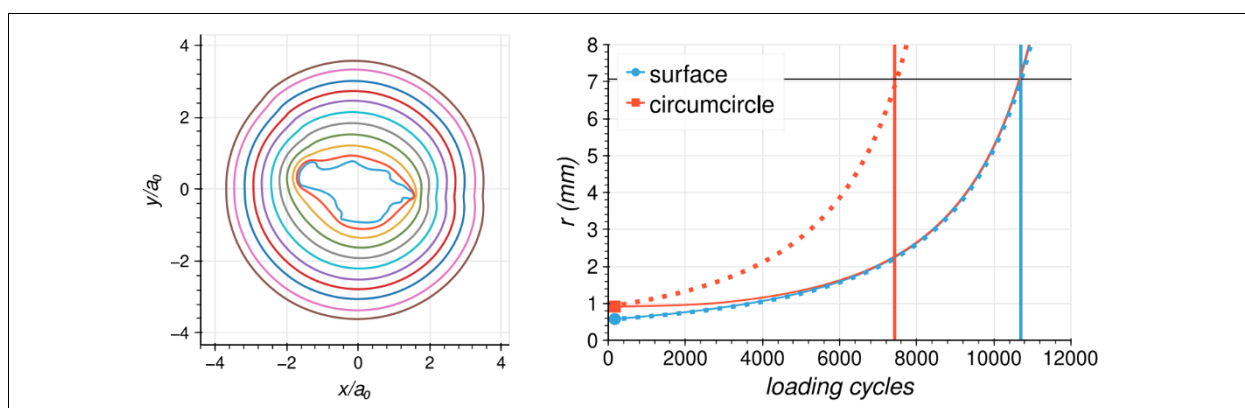
Dans le cas d'une hypothétique évolution de ces retassures sous l'effet des sollicitations cycliques ou par propagation stable, leur forme se régulariserait comme le montre l'exemple de l'évolution par fatigue d'une fissure obtenue par projection d'une retassure (DAV, 2022). La fissure est sollicitée normalement à son plan par une contrainte de membrane cyclique.

Les tailles de fissure sont définies soit par le rayon équivalent  $r_s = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$  où S est la surface de la fissure soit par le rayon  $r_c$  du cercle circonscrit. La valeur initiale de  $r_s$  est de 0,56 mm et la valeur initiale de  $r_c$  est de 0,92mm.

Trois simulations de l'évolution de la fissure sont effectuées :

1. La fissure initiale est une fissure disque de rayon initial  $r_c$  et elle se propage comme une fissure circulaire (courbe rouge en pointillés).
2. La fissure est une fissure réelle distortue et elle est propagée en utilisant l'approche perturbative (LAZ, 2011). Son évolution est mesurée par le rayon du cercle circonscrit (courbe rouge pleine).
3. La fissure est la fissure réelle et elle est aussi propagée en utilisant l'approche perturbative. Son évolution est mesurée par la surface de la fissure (courbe pleine bleue)

Les simulations 2 et 3 sont plus réalistes mais nécessitent un calcul complexe. Par la simulation 1, le rayon augmente bien plus rapidement. Ceci prouve que remplacer une retassure par une fissure circulaire enveloppe et en conserver la forme est conservatif. Les lignes verticales correspondent au nombre de cycles nécessaire pour que le FIC atteigne la valeur de la ténacité (Figure 2.1)



**Figure 2.1: évolution de la fissure par une approche de perturbation : changement de forme et comparaison des évolutions de la fissure circulaire enveloppe et de la fissure réelle dont la taille est mesurée par le rayon du cercle circonscrit ou de la surface (DAV, 2022)**

Dans notre approche les retassures seront remplacées par des fissures obtenues par projection de la retassure sur les plans principaux.

## 2.2 Notions de base

En élasticité linéaire, l'interaction de la fissure (j) sur la fissure (i≠j) est caractérisée par le facteur d'interaction au point P<sub>k</sub> de la fissure (i) :

$$\gamma_{ij}(P_k) = \frac{K_{ij}(P_k)}{K_{i0}(P_k)} \quad (2_1)$$

Où K<sub>ij</sub> est le facteur d'intensité des contraintes de la fissure i au point P<sub>k</sub> du front de la fissure i et K<sub>i0</sub> est le facteur d'intensité de la fissure i isolée, soumise au même chargement que le couple de fissures.

Sous traction uniaxiale, les FIC sont de la forme  $K = \sigma_{app} \cdot F \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$  où a est une longueur de fissure et F un facteur de forme qui dépend de paramètres géométriques propres à la fissure et sa position dans le solide. Dans un massif infini, F<sub>i0</sub> ne dépend que de la géométrie de la fissure (i) et F<sub>ij</sub> dépend de la géométrie de la fissure (i) mais aussi des tailles et des positions relatives des deux fissures. Il est évident que deux fissures égales proches interagiront fortement et qu'une petite fissure aura peu d'influence sur une grande fissure. Le facteur d'interaction est un paramètre adimensionnel quasiment<sup>1</sup> indépendant des caractéristiques du matériau, si celui-ci est isotrope et homogène, et du chargement, fonction uniquement de quantités géométriques relatives.

En élastoplasticité, l'interaction de la fissures (j) sur la fissure (i) est caractérisée par le facteur d'interaction élasto-plastique au point P<sub>k</sub> de la fissure (i) :

$$t_{ij}(P) = \sqrt{\frac{J_{i,j \neq i}(P)}{J_{i0}(P)}} \quad (2_2)$$

Ce facteur dépend des caractéristiques du matériau et du niveau de chargement, car la force fissurante n'est plus proportionnelle à la sollicitation.

### 2.2.1 Description des configurations

Cette étude ne porte que sur deux géométries de défauts : la fissure traversante, désignée ici par fissure bande et la fissure elliptique dont le disque est un cas particulier.

La figure 2.2a définit les paramètres géométriques d'interaction de deux fissures bande parallèles en 2D. Les deux fissures (1) et (2) sont respectivement de longueurs 2a<sub>1</sub> et 2a<sub>2</sub>.

La figure 2.2b définit les paramètres géométriques d'interaction de deux fissures elliptiques parallèles en 3D. Les deux fissures elliptiques (1) et (2) sont respectivement décrites par leurs longueurs 2a<sub>1</sub> et 2a<sub>2</sub> (portées par l'axe x) et 2c<sub>1</sub> et 2c<sub>2</sub> (portées par l'axe y).

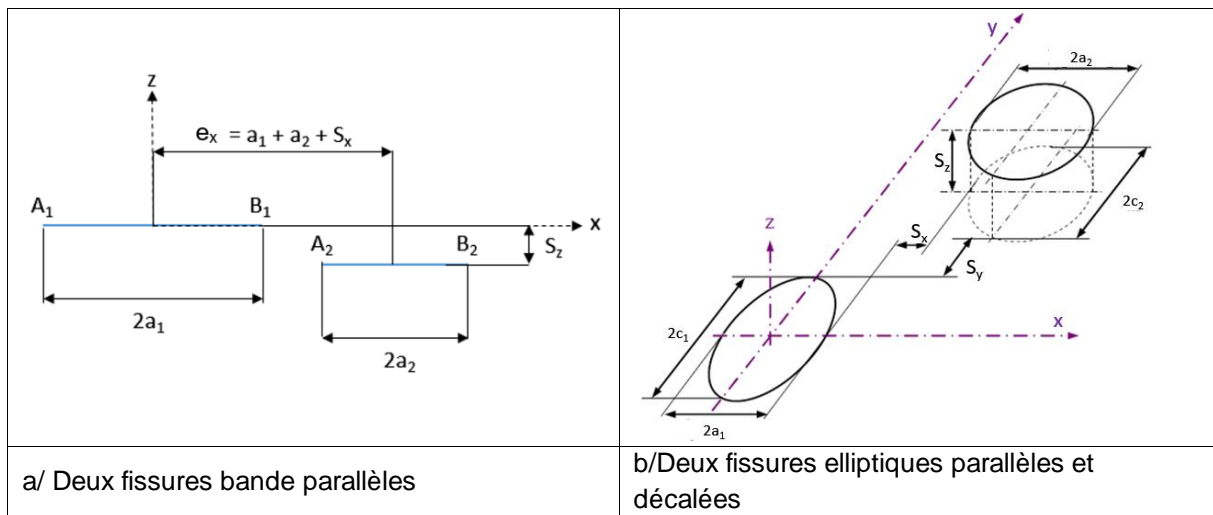
Les écartements entre les extrémités des fissures elliptiques (de vertex à vertex les plus proches ou de co-vertex à co-vertex les plus proches) sont notés S<sub>x</sub> suivant l'axe x et S<sub>y</sub> suivant l'axe y lorsque les deux fissures sont projetées dans un même plan (x, y). Pour décrire l'interaction il faut utiliser les écartements relatifs  $\hat{S}_x = \frac{S_x}{a_1 + a_2}$  ou le paramètre d'interaction  $\lambda_x = \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 + S_x}$  (idem pour S<sub>y</sub>)

La distance S<sub>z</sub> définit, quant à elle, l'écartement hors plan des deux fissures et  $\hat{S}_z = \frac{S_z}{a_1 + a_2}$ .

Si les plans des fissures sont inclinés, les quantités S sont appliquées :

- à la fissure sélectionnée ;
- à la projection de la seconde fissure sur un plan :
  - Parallèle au plan de la première ;
  - Passant par le centre de la seconde.

<sup>1</sup> Dans le cas des fissures elliptiques non coplanaires, le facteur d'interaction dépend légèrement du coefficient de Poisson.



**Figure 2.2: paramètres définissant les tailles et les écartements des fissures**

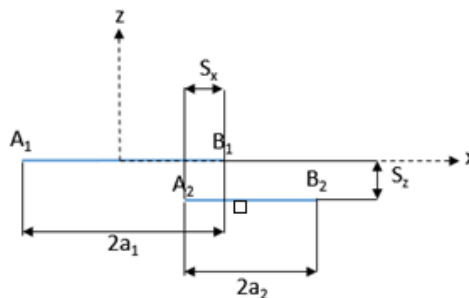
Les points les plus éloignés sont appelés les points externes. En bidimensionnel, les points B1 et A2 sont appelés points internes.

### 2.2.2 Ecrantage de fissures

Une fissure est dite écrantée lorsque sa nocivité est atténuée par un effet du chargement ou du changement de comportement du matériau. Dans le cas de l'interaction de deux fissures, il y a écrantage si la seconde fissure réduit la force fissurante de la première. Mais cette définition peut être interprétée de différentes façons.

#### Les différentes définitions de l'écrantage

La définition la plus simple est purement géométrique. **L'écrantage géométrique** est caractérisé par un recouvrement partiel ou total d'une fissure par l'autre comme illustré sur le schéma de la figure 2.3 pour des fissures bande. C'est souvent cette définition qui prévaut dans la littérature, mais elle n'a pas de signification physique.



**Figure 2.3: fissures écrantées géométriquement ( $S_x < 0$ )**

Nous considérons qu'il y a écrantage lorsque le facteur d'interaction d'une fissure n'est pas maximal au point le plus proche de l'autre fissure. Cela se produit lorsque l'une des fissures pénètre dans la zone de relaxation des contraintes de l'autre fissure. Cette notion **d'écrantage relatif** facilite la définition du défaut équivalent (§ 2.2.4) car elle permet de savoir quelle formule du facteur d'interaction choisir, celle pour le point le plus proche ou une relative à un autre point du front. Cette définition est appliquée notamment par Lam et al. (LCP, 1991).

**L'écrantage absolu** advient lorsque le facteur d'interaction est inférieur à l'unité. Cette définition est retenue par Han et al. (HAN, 2020) et Thomas et al. (THO, 2022).

Nous définissons l'**écranage total** comme celui pour lequel du facteur d'interaction est inférieur à 1 tout le long du front. C'est le cas analysé ci-après.

Ces trois types d'écranage sont comparés à la figure 2.6.

### Fissures superposées,

Dans ce cas, l'écranage est total et le facteur d'interaction est inférieur à l'unité comme l'ont montré par calcul aux éléments finis Han et al. (HAN, 2020) La figure 2.4 illustre le cas de fissures bande parallèles de différents rapports de taille  $R_a = \frac{a_2}{a_1}$ . Si les fissures sont égales l'interaction ne devient négligeable que pour un éloignement vertical très élevé :  $S_z > 10a$  (h correspond à  $S_z$  dans nos notations et « a » la demi-longueur de fissure). Leur formule donnant la valeur de H ( $S_z / a$ ) correspondant à l'écranage maximal n'est pas correcte car cette valeur n'est pas nulle pour des fissures égales (MUR, 1996). Si l'une des fissures est plus petite, son effet sur la grande fissure est négligeable pour un rapport  $\frac{a_2}{a_1} < 0,5$ .

Les auteurs ont aussi étudié le cas de fissures bande inclinées et bien évidemment l'écranage est plus élevé du côté des pointes de fissures les plus proches. L'effet d'écranage est nettement moindre que si la fissure est parallèle.

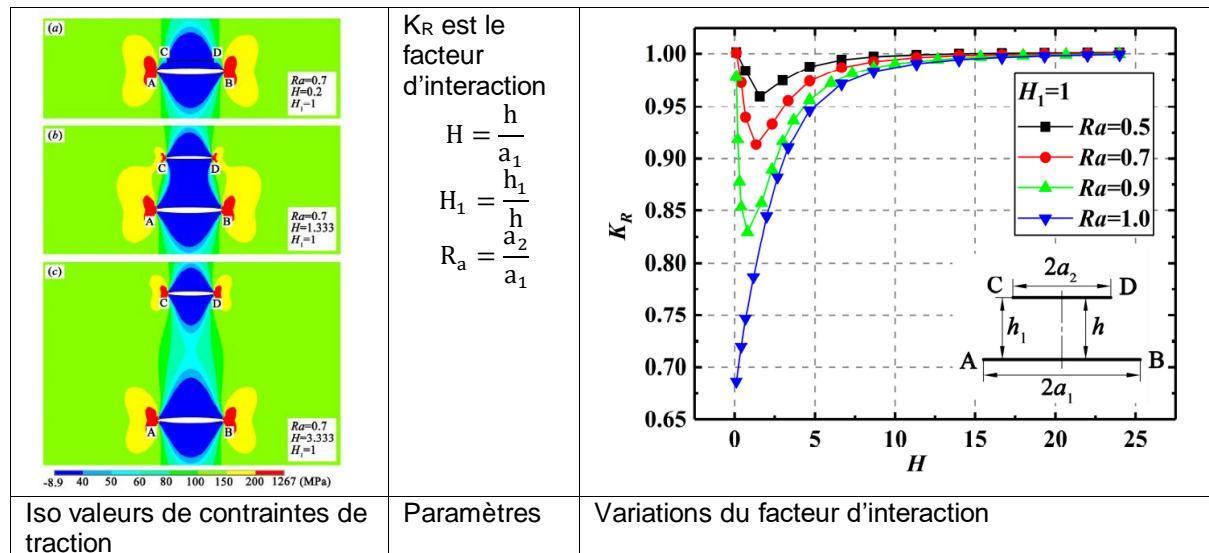


Figure 2.4: écranage géométrique (HAN, 2020)

### Cas de fissures partiellement échantées

Han et al. (2019) ont analysé de nombreux cas de fissures bande parallèles inégales. Leur critère de discrimination est le suivant :

- Si le facteur d'interaction est supérieur à 1,025, il y a amplification du FIC.
- Si le facteur d'interaction est inférieur à 0,925, il y a écranage et réduction du FIC.
- Sinon, les fissures sont considérées indépendantes.

Les FIC aux quatre pointes sont calculés et les auteurs ont synthétisé leurs résultats dans un diagramme à deux variables adimensionnelles  $H = \frac{h}{a}$  et  $S = \frac{s}{a}$  où a est la demi-longueur de la fissure courte lorsque l'on considère l'effet de la fissure longue sur la fissure courte et vice-versa. La variable h représente l'écartement vertical  $S_z$  entre les fissures, mais la variable s représente leur excentrement :  $s = a_1 + a_2 + S_x$ . La figure 2.5 reproduit ce diagramme et son équivalent pour des fissures égales avec nos notations.

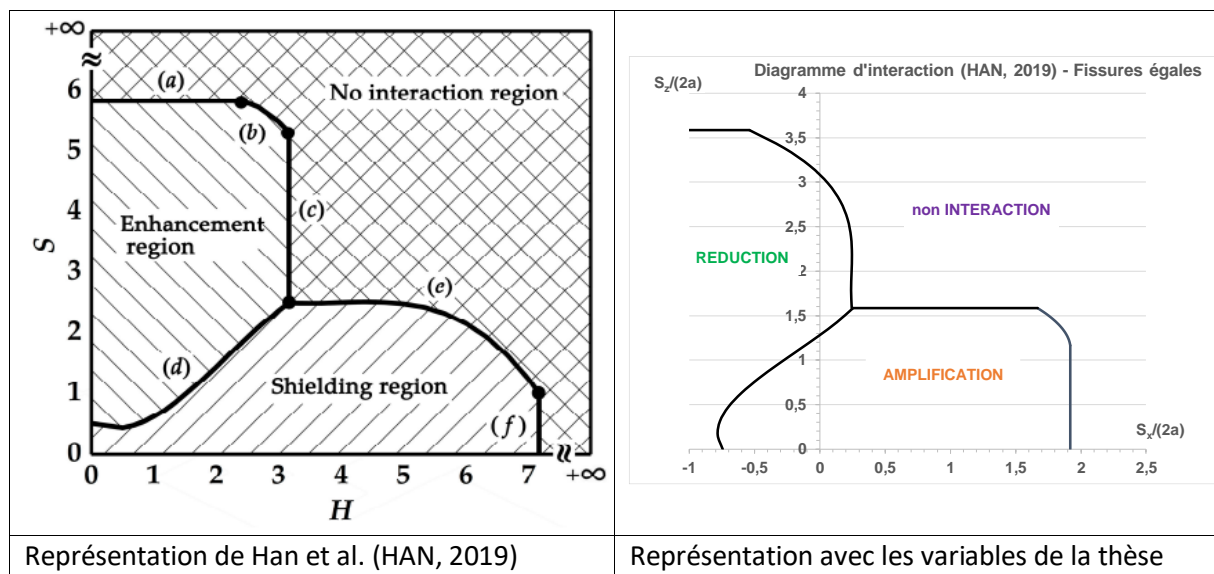
Un autre critère d'écrantage a été proposé par Lam et al. (LAP, 1991 LCP, 1991) :

- Si le rapport  $\frac{K_I}{K_{II}}$  est supérieur à 1 il y a amplification du FIC.
- Si le rapport  $\frac{K_I}{K_{II}}$  est inférieur à 1, il y a écrantage et réduction du FIC.

Les FIC sont évalués pour des fissures égales.

Zhu (2020) a analysé les effets d'écrantage en calculant les FIC par la méthode de Kachanov et utilisé le même type de critère que Han.

Ces résultats seront comparés aux résultats de calculs aux éléments finis de S. Chapuliot (CHA, 2020) au paragraphe 2.3.1.



**Figure 2.5 : écrantage géométrique (HAN, 2020)**

### Comparaison des types d'écrantage

La figure 2.6 compare les différents types d'écrantage. L'écrantage géométrique n'est pas représenté : les courbes seraient des droites verticales passant par 0 pour l'écrantage en pointe interne et par -1 pour l'écrantage total.

Les courbes déduites des calculs aux éléments finis (CHA, 2020) sont obtenues par interpolation linéaire. Bien que la grille soit très dense ( $S_x/(2a)$  varie de -0,9 à 2 par pas de 0,05 et  $S_z/(2a)$  de 0,1 à 2 par pas de 0,1) les interpolations perdent de précision si les variations sont non linéaires. La courbe correspondant au facteur d'interaction égal = 1 est obtenue de façon exacte à partir de la fonction de Westergaard.

On note que pour et  $S_z/(2a) > 0$ , les courbes sont rectilignes.

Toutes ces courbes montrent que l'écrantage ne peut être caractérisées par la géométrie. Comme elles sont obtenues par un rapport de FIC, elles sont indépendantes des caractéristiques du matériau. L'écrantage ne dépend que du champ des contraintes et peut être déduit du champ de la fissure unique.



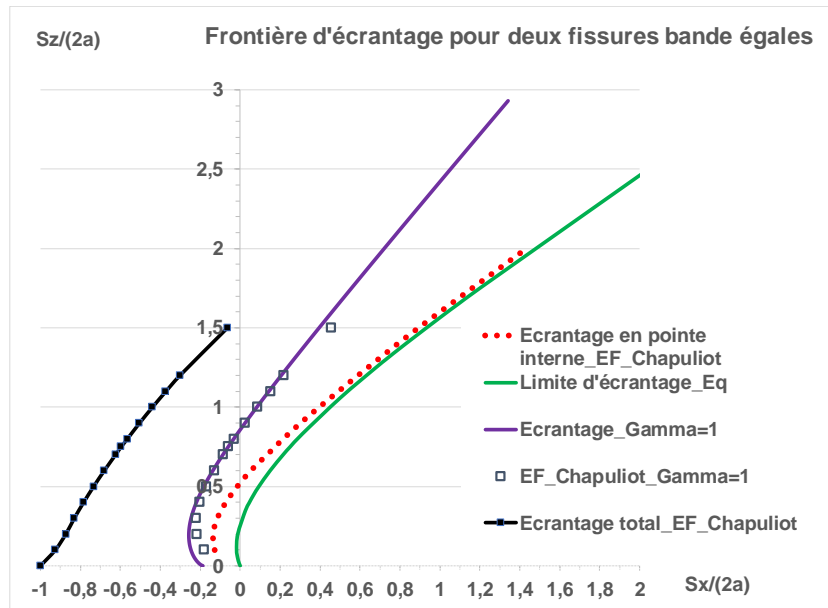


Figure 2.6 : comparaison des types d'écrantage pour des fissures bande

### 2.2.3 Principe de la méthode proposée

La méthode proposée pour le traitement analytique de l'interaction de fissures multiples se déroule en deux étapes :

1. Développement de formules fermées pour les facteurs d'interaction de deux fissures qui repose sur deux idées principales :
  - En élasticité linéaire, les formules de facteur d'interaction sont obtenues par transformation de la solution analytique établie pour une fissure unique. Ces solutions existent pour les fissures bandes, disques et elliptiques. La mise au point des formules s'appuie sur des résultats de calculs par éléments finis dont la qualité a été vérifiée par comparaison à des études réalisées de façon indépendante, à des résultats analytiques exacts et des conditions de cohérence des formulations. La même technique est appliquée au traitement de l'interaction avec la surface libre.
  - En élasto-plasticité, l'amplification du facteur d'interaction est obtenue par une approche fondée sur l'analyse limite et la notion de contrainte de référence.
2. Définition d'un défaut équivalent à ces deux fissures, son orientation et sa position afin de pouvoir traiter de proche en proche le cas de plusieurs fissures.

### 2.2.4 Défaut équivalent

Il existe plusieurs définitions du défaut équivalent à deux défauts interagissants.

#### 2.2.4.1 Défaut équivalent de l'ASME et du JSME

Chapuliot et Blouin (CHB, 2013) observant que les facteurs d'interaction s'expriment en fonction de  $S/a$  émettent l'hypothèse que la distance d'interaction pourrait être proportionnelle au carré du FIC qui dans un milieu infini est proportionnel à la longueur du défaut.

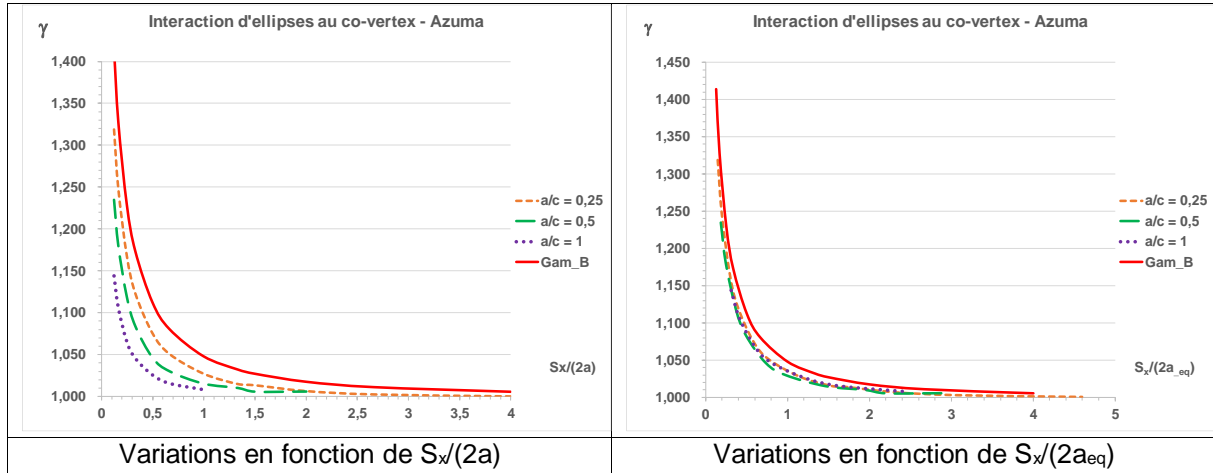
Au co-vertex avec nos notations (dans la publication de Chapuliot « a » est le demi petit axe) :

$$\frac{\sigma_{app}}{E(k_{eq})} \sqrt{\pi \cdot c} = \sigma_{app} \cdot \sqrt{\pi \cdot c_{eq}}$$

Donc :

$$c_{eq} = \frac{c}{[E(k)]^2} \quad (2.3)$$

Cette équivalence permet de rapprocher les variations des facteurs d'interaction au co-vertex, pour différentes ellipses. Chapuliot et Blouin en donnent plusieurs exemples pour des fissures disque elliptiques. La figure 2.7 utilise les résultats de calculs aux éléments finis d'Azuma (AZU, 2017).



**Figure 2.7 : regroupement des courbes de variation de facteur d'interaction au co-vertex pour des fissures coplanaires avec l'application de la notion de défaut équivalent**

Les courbes pour les fissures elliptiques se regroupent et se rapprochent de la courbe relative aux fissures bande (Gam\_B sur la figure 2\_7), mais sans le rejoindre.

L'application de cette formule au vertex ne donne pas de bons résultats. Il faut reprendre l'hypothèse initiale en écrivant l'équivalence pour une interaction au grand axe.

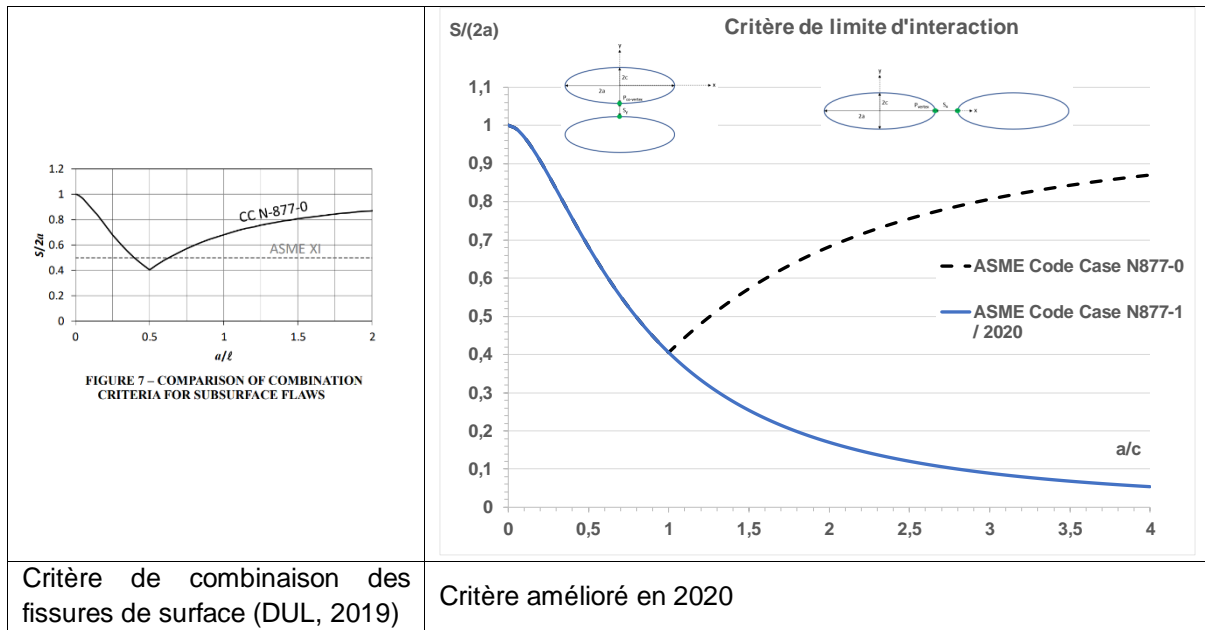
$$K_{I\infty}(\phi) = \frac{\sigma_{app}}{E(k)} \cdot \sqrt{\pi \cdot c} \cdot \left[ \sin^2 \phi + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \cos^2 \phi \right]^{\frac{1}{4}} . \text{ pour } \phi = 0 \text{ donne}$$

$$\frac{\sigma_{app}}{E(k)} \cdot \sqrt{\pi \cdot c} \cdot \sqrt{\frac{c}{a}} = \sigma_{app} \cdot \sqrt{\pi \cdot a_{eq}}$$

Donc:

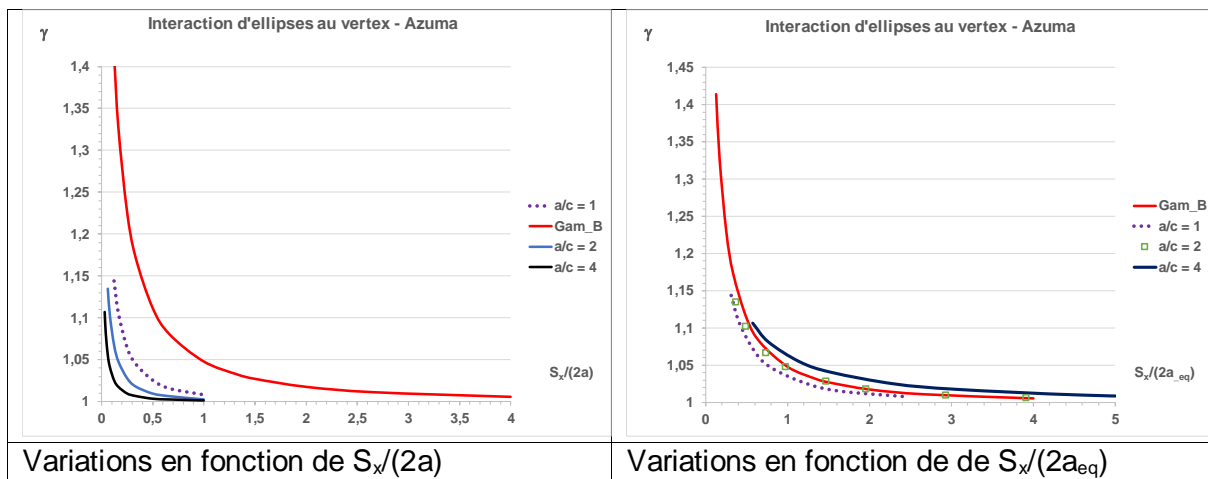
$$a_{eq} = \frac{a}{[E(k)]^2} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

C'est cette équivalence qui donne le tracé de la courbe (Figure 2.8) développée pour les fissures enfouies et les fissures de surface dans les codes ASME et JSME (DUL, 2019).



**Figure 2.8 : critères de combinaison des fissures proches de l'ASME et le JSME**

Toutefois l'équivalence pour le co-vertex n'est pas totalement satisfaisante comme le montre la comparaison (Figure 2.9) aux résultats d'Azuma (AZU, 2017). L'hypothèse du défaut équivalent fondé sur le FIC de la fissure isolée est-elle généralisable ?

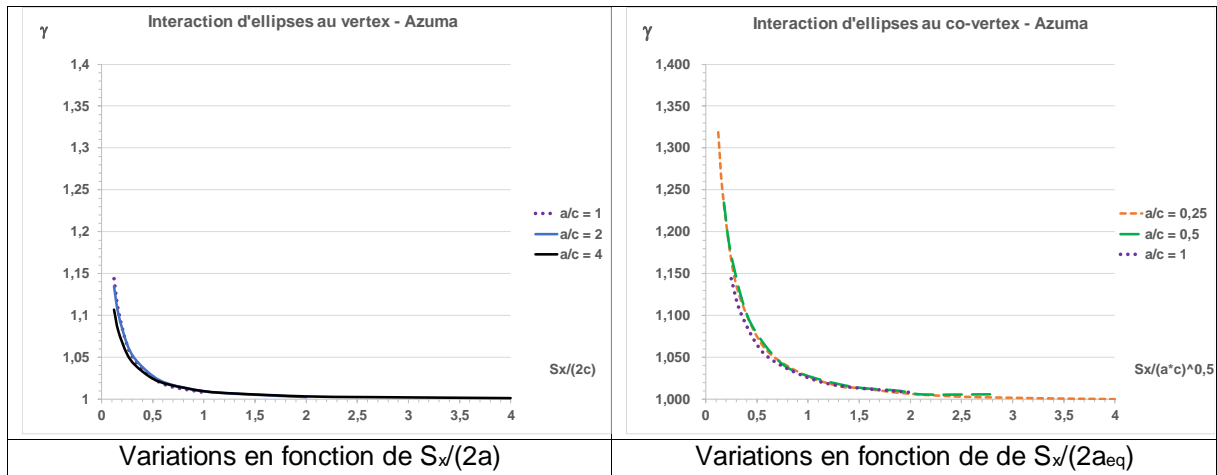


**Figure 2.9 : regroupement des courbes de variation de facteur d'interaction au vertex pour des fissures coplanaires avec l'application de la notion de défaut équivalent**

### 2.2.4.2 Défaut équivalent d'Azuma et Li

Azuma et Li (AZU, 2017) ont proposé deux équivalences pour l'interaction de deux fissures elliptiques égales coplanaires.

Dans le cas de l'interaction au vertex, l'écartement  $S_x$  est adimensionné par le demi-petit axe  $c$ , Ceci permet de regrouper les courbes du facteur d'interaction en fonction de l'écartement adimensionné. Dans le cas de l'interaction au co-vertex l'écartement  $S_x$  est adimensionné par le facteur  $\sqrt{a \cdot c}$ . Les résultats sont convaincants mais on ne peut appliquer ces équivalences au cas du défaut bande (Figure 2.10).

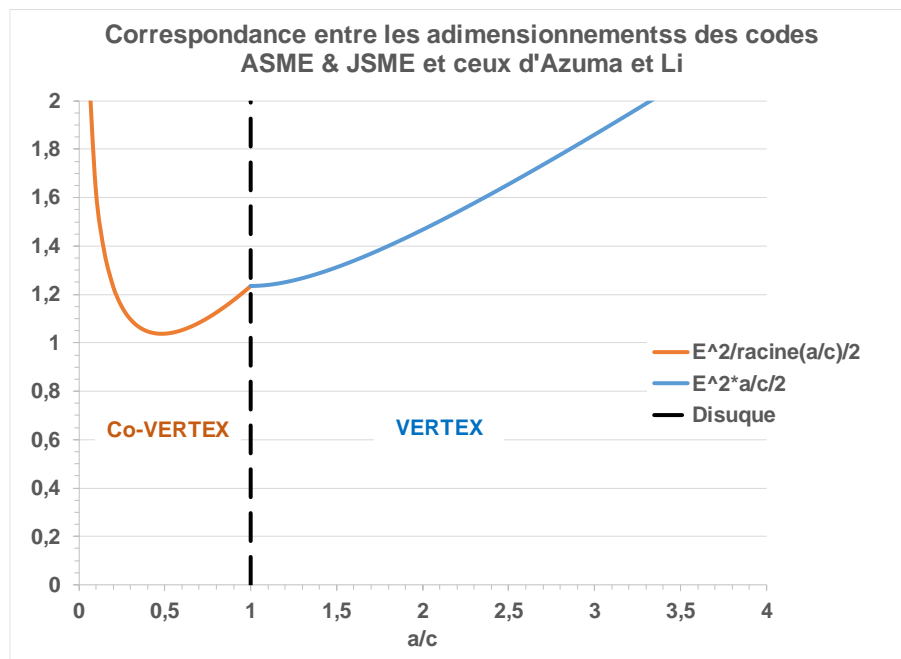


**Figure 2.10 : regroupement des courbes de variation de facteur d'interaction au vertex pour des fissures coplanaires avec l'application de la notion de défaut équivalent selon Azuma et Li**

Afin de comparer ces équivalences à celles des codes ASME et JSME, il faut évaluer les rapports suivants :

- Au covertex :  $[E(k)]^2/2/\sqrt{a \cdot c}$  (2\_4)
- Au vertex :  $[E(k)]^2 \cdot a/c/2$  (2\_5)

Le graphe de la figure 2.11 montre qu'au co-vertex, pour des fissures telles que «  $a/c < 0,2$  », le rapport est proche de l'unité. Au vertex, l'équivalence paraît moins bonne.



**Figure 2.11 : évolution des rapports d'adimensionnement relatifs aux défauts équivalents selon l'ASME-JSME (2020) et Azuma et Li (AZU, 2017)**

Cette approche sera comparée à la formule que nous proposons pour l'interaction de fissures elliptiques au § 3.2.1.

### 2.2.4.3 Notre définition du défaut équivalent

La notion défaut équivalent présentée ci-après diffère de celle de défaut regroupé ou coalescé utilisée dans les codes et normes. Dans les codes sont définis des seuils de non-interaction en dessous desquels les deux défauts interagissants sont remplacés par un défaut unique (Figure 2.12a) déterminé par des essais (ex Figure 2.12b) ou par des simulations.

La fissure équivalente à deux fissures interagissant entre elles est définie ici comme une fissure unique, enfouie ou débouchante, de même force fissurante maximale  $J_{max}$ , au point de plus forte interaction et située dans le plan normal à la direction de sollicitation. Cette définition doit être complétée pour les fissures elliptiques, c'est pourquoi il faut distinguer les configurations bi et tridimensionnelles.

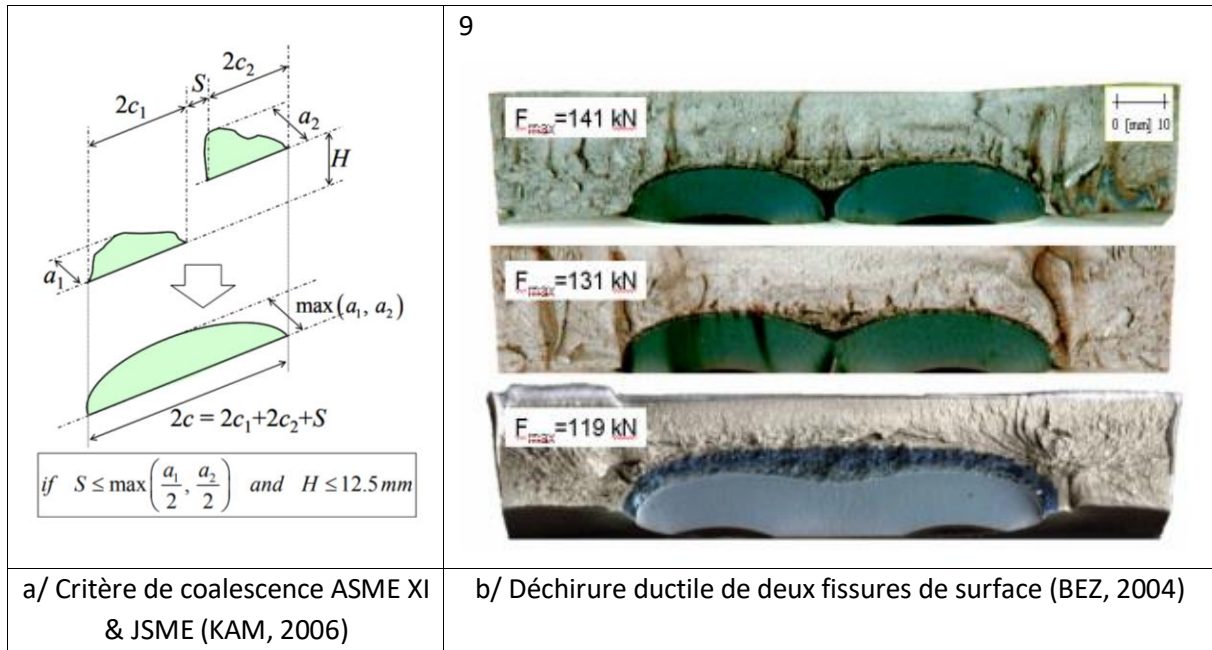


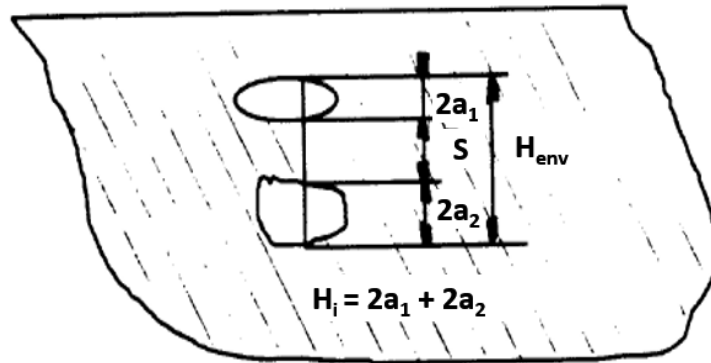
Figure 2.12: défauts de surface coalescés

#### 2.2.4.3.1 Défaut équivalent en bidimensionnel (fissures bande)

Dans les examens non-destructifs, les défauts alignés sont caractérisés par leur taille et leur écartement dans la direction d'alignement (Figure 2.13). La terminologie est la suivante :

- La hauteur intégrée  $H_i$ , qui correspond en 2D à la somme des vides dans la direction des défauts ;
- La hauteur enveloppe  $H_{env}$ , qui correspond à la somme des profondeurs de vides (c'est-à-dire  $H_i$ ) augmentée de la profondeur des ponts de matière ;

La hauteur équivalente  $H_{eq} = 2a_{eq}$  correspond à la longueur du défaut équivalent, bornée par  $H_{env}$ .



**Figure 2.13 : définition de la hauteur intégrée  $H_i$  et de la hauteur enveloppe  $H_{env}$**

Le rapport de la hauteur enveloppe à la hauteur intégrée est défini par le coefficient  $\alpha_{env}$  tel que :

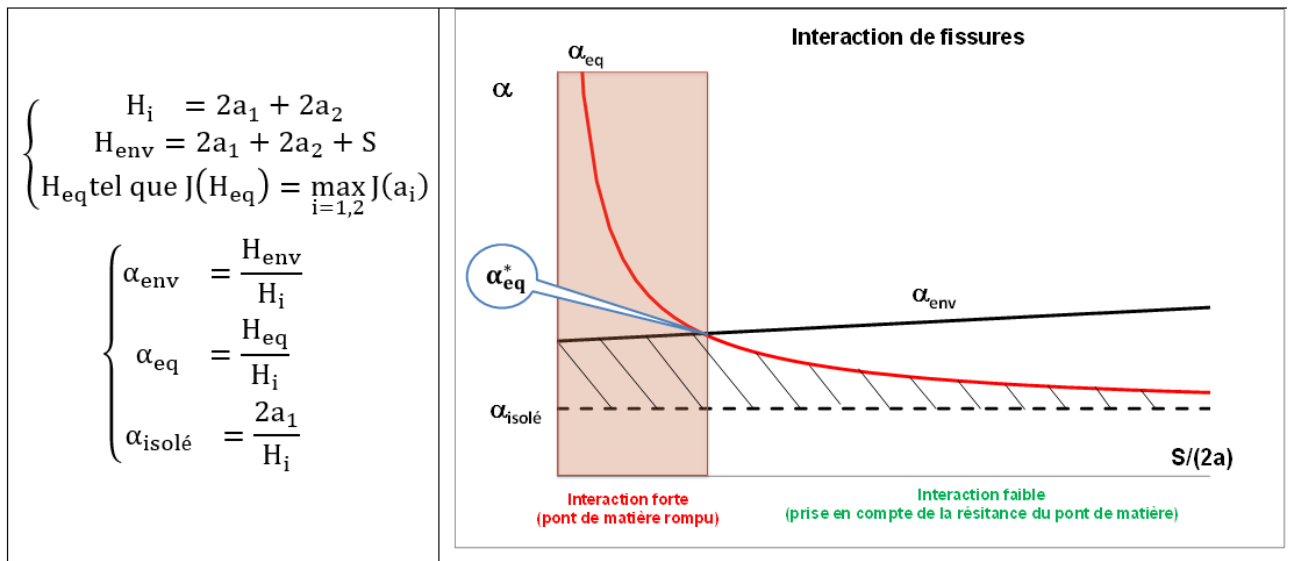
$$\alpha_{env} = \frac{H_{env}}{H_i} \quad (2_6)$$

Le coefficient d'équivalence  $\alpha_{eq}$  est défini comme le rapport entre la hauteur de la fissure équivalente  $H_{eq}$  et la hauteur intégrée  $H_i = 2a_1 + 2a_2$  du groupe des deux défauts :

$$\alpha_{eq} = \frac{H_{eq}}{H_i} \quad (2_7)$$

Ce coefficient  $\alpha_{eq}$  est donc compris entre  $\frac{\max(a_1, a_2)}{a_1 + a_2}$  (défauts non-écrantés non interagissant) et  $\alpha_{env}$  (voir schéma de la figure 2.14) où  $2a$  est la taille de la plus grande fissure :

- Si la hauteur intégrée  $H_i$  reste très petite par rapport à l'enveloppe, les défauts sont indépendants, ce qui signifie que le coefficient d'équivalence  $\alpha_{eq}$  tend vers  $\frac{\max(a_1, a_2)}{a_1 + a_2}$ .
- Si les ponts de matière tendent vers 0, c'est-à-dire si la hauteur intégrée  $H_i$  tend vers la hauteur enveloppe  $H_{env}$ , alors l'interaction est maximale et tend vers l'infini. Il s'avère toutefois que la coalescence se produit avant, pour  $\alpha_{eq} = \alpha_{env}$  noté  $\alpha_{eq}^*$  sur la figure 2.14.



**Figure 2.14 : définition des coefficients  $\alpha$**

### Expression du coefficient d'équivalence en élasticité linéaire

Le défaut équivalent à deux fissures bandes inégales de tailles respectives  $2a_1$  et  $2a_2$  est défini en élasticité linéaire par le FIC maximal des FIC aux deux pointes  $P_k$  de la grande fissure car celle-ci est toujours la plus nocive :

$$K_{eq} = \max_{ijk} [K_{ij}(P_k)] \quad (2_8)$$

Avec  $i \neq j = 1$  ou  $2$  et  $P_k$  = pointe interne ou externe.

$$\text{Les FIC s'écrivent sous la forme } K_{ij}(P_k) = F_{ij}(P) \cdot \sigma_{app} \cdot \sqrt{\pi \cdot a_i} \quad (2_9)$$

De façon arbitraire, le défaut 1 représente le plus grand défaut :

$$K_{eq} = K_{12}(P_{int}) = F_{12}(P_{int}) \cdot \sigma_{app} \cdot \sqrt{\pi \cdot a_1}$$

$P_{int}$  correspond à la pointe interne de la fissure 1, soit  $B_1$  dans le cas présent (Cf. Figure 2\_3).

La taille du défaut unique équivalent est définie par :

$$K_{eq} = K_0 = F_0 \cdot \sigma_{app} \cdot \sqrt{\pi \cdot a_{eq}} \equiv K_{eq} = F_{12}(P) \cdot \sigma_{app} \cdot \sqrt{\pi \cdot a_1}$$

Où  $F_0$  est le facteur de forme du défaut unique. Il est égal à 1 dans un massif infini.

Il vient donc, en considérant  $2a_1$  comme la fissure la plus grande :

$$a_{eq} = a_1 \cdot \left\{ \frac{\text{Max}[F_{12}(P_{int}); F_{12}(P_{ext})]}{F_0} \right\}^2 = a_1 \cdot [\text{Max}(\gamma_{12_{int}}; \gamma_{12_{ext}})]^2 \quad (2_{10})$$

$\gamma_{12_{int}}$  et  $\gamma_{12_{ext}}$  correspondent aux facteurs d'interaction de la fissure 1, influencée par la fissure 2, en pointe interne ( $B_1$ ) et externe ( $A_1$ ).

Le coefficient  $\alpha_{eq}$  est défini par :

$$\alpha_{eq} = \frac{H_{eq}}{H_i} \equiv \frac{a_{eq}}{a_1 + a_2} \quad (2_{11})$$

Donc en élasticité linéaire :

$$\alpha_{el} = \frac{H_{eq}}{H_i} = \frac{a_1}{a_1 + a_2} \cdot [\text{Max}(\gamma_{12_{int}}; \gamma_{12_{ext}})]^2 = \frac{\zeta}{1 + \zeta} \cdot [\text{Max}(\gamma_{12_{int}}; \gamma_{12_{ext}})]^2 \quad (2_{13})$$

avec  $\zeta = \frac{a_1}{a_2}$

### Expression du coefficient d'équivalence en élasticité non-linéaire

En termes de J, les expressions deviennent :

$$\frac{J_{el_{eq}}}{J_{el_{Hi}}} = \left[ \frac{F_{12}(P_{int}) \cdot \sigma_{app} \cdot \sqrt{\pi \cdot a_1}}{F_0 \cdot \sigma_{app} \cdot \sqrt{\pi \cdot (a_1 + a_2)}} \right]^2 = \frac{a_1}{a_1 + a_2} \cdot [\text{Max}(\gamma_{12_{int}}; \gamma_{12_{ext}})]^2$$

Donc :

$$\alpha_{eq} = \frac{H_{eq}}{H_i} = \frac{J_{el,eq}}{J_{el,Hi}} = \frac{\zeta}{1+\zeta} \cdot [\text{Max}(\gamma_{12_{Int}}; \gamma_{12_{Ext}})]^2 \quad (2_{14a})$$

De même, à titre informatif et pour la petite fissure :

$$\frac{J_{el,eq}}{J_{el,Hi}} = \left[ \frac{F_{21}(P_{Int}) \cdot \sigma_{app} \cdot \sqrt{\pi \cdot a_2}}{F_0 \cdot \sigma_{app} \cdot \sqrt{\pi \cdot (a_1 + a_2)}} \right]^2 = \frac{a_2}{a_1 + a_2} \cdot [\text{Max}(\gamma_{21_{Int}}; \gamma_{21_{Ext}})]^2$$

$$= \frac{1}{1+\zeta} \cdot [\text{Max}(\gamma_{21_{Int}}; \gamma_{21_{Ext}})]^2$$

$$\alpha_{eq} = \frac{H_{eq}}{H_i} = \frac{J_{el,eq}}{J_{el,Hi}} = \frac{1}{1+\zeta} \cdot [\text{Max}(\gamma_{21_{Int}}; \gamma_{21_{Ext}})]^2 \quad (2_{14b})$$

En effectuant les calculs de J numériquement, alors le calcul de  $\alpha_{eq} = \frac{J_e}{J_{e,Hi}}$  s'obtient directement.

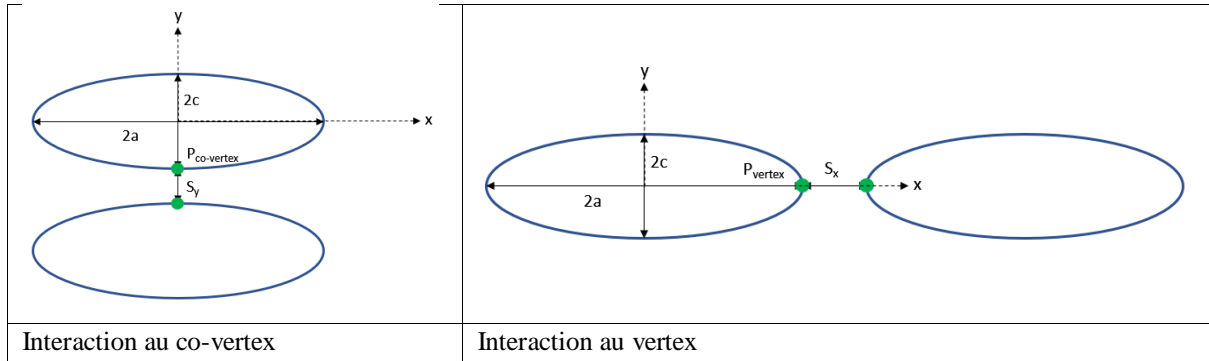
### 2.2.4.3.2 Défaut équivalent en tridimensionnel

Le raisonnement est développé pour l'élasticité linéaire. En non-linéaire il suffit de remplacer le FIC K par la force fissurante J.

La fissure équivalente à deux fissures elliptiques est définie comme une fissure elliptique unique située dans un plan normal à l'axe de traction. Deux conditions sont donc nécessaires pour déterminer les dimensions de cette fissure équivalente. Il faut d'abord déterminer quelle est la fissure la plus grande en comparant les FIC des fissures isolées aux points d'interaction.

#### Approche préliminaire

La fissure équivalente de demi-axes  $a_{eq}$  et  $c_{eq}$  est définie par deux conditions. La première condition consiste à imposer la valeur du FIC au point de la plus forte interaction de la plus grande fissure interagissante au même point de la fissure équivalente. La seconde condition est d'identifier en un autre point, dont l'anomalie est décalée de 90 degrés les FIC des deux fissures.



**Figure 2.15 : deux cas d'interaction de fissures**

#### Exemple de l'interaction de deux fissures au co-vertex

La formule de FIC est définie au chapitre 1. On considère la fissure 1 choisie comme la plus grande.

Le facteur d'interaction dépend du rapport d'aspect  $e_c = a/c \geq 1$ , du paramètre d'interaction  $\lambda_y = \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 + S_y}$  et de la position du point sur le front repéré par l'anomalie excentrique qui croît de 0 au vertex



à  $\frac{\pi}{2}$  au co-vertex. Le module de l'intégrale elliptique relative à la fissure équivalente est  $k_{eq} = \sqrt{1 - \left(\frac{c_{eq}}{a_{eq}}\right)^2}$

$$K_{cov_1} = \gamma_{12}\left(e_{c1}, \lambda_y, \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\sigma_{app}}{E(k_1)} \cdot \sqrt{\pi \cdot c_1} \equiv \frac{\sigma_{app}}{E(k_{eq})} \sqrt{\pi \cdot c_{eq}} \quad (2_{15a})$$

$$K_{v_1} = \gamma_{12}(e_{c1}, \lambda_y, 0) \cdot \frac{\sigma_{app}}{E(k_1)} \cdot \sqrt{\pi \cdot c_1} \cdot \sqrt{\frac{c_1}{a_1}} \equiv \frac{\sigma_{app}}{E(k_{eq})} \cdot \sqrt{\pi \cdot c_{eq}} \cdot \sqrt{\frac{c_{eq}}{a_{eq}}} \quad (2_{15b})$$

Donc :

$$\frac{c_{eq}}{a_{eq}} = \frac{c_1}{a_1} \cdot \left[ \frac{\gamma_{12}(e_{c1}, \lambda_y, 0)}{\gamma_{12}\left(e_{c1}, \lambda_y, \frac{\pi}{2}\right)} \right]^2 \quad (2_{16})$$

Au vertex, l'interaction est négligeable d'où

$$\frac{c_{eq}}{a_{eq}} \cong \frac{c_1}{a_1} \cdot \left[ \frac{1}{\gamma_{12}\left(e_{c1}, \lambda_y, \frac{\pi}{2}\right)} \right]^2 \quad (2_{17})$$

Avec l'interaction de défaut s'aplatit ( $c_{eq}/a_{eq} < c_1/a_1$ ) donc  $E(k_{eq}) < E(k_1)$

$$c_{eq} = c_1 \cdot \left[ \gamma_{12}\left(e_{c1}, \lambda_y, \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{E(k_{eq})}{E(k_1)} \right]^2 \quad (2_{18})$$

Le rapport  $c_{eq}/c_1$  est toujours supérieur à 1.

Pour rappel  $a_{eq} = c_{eq} \cdot \frac{a_{eq}}{c_{eq}}$

Sous interaction de défaut s'aplatit car le petit axe  $2c$  augmente moins que le grand axe  $2a$ . L'interaction au co-vertex fait grandir le défaut équivalent, mais la progression des deux fissures initiales vers la coalescence est ralentie.

Si l'interaction a lieu au vertex, alors

$$\frac{c_{eq}}{a_{eq}} \cong \frac{c_1}{a_1} \cdot [\gamma_{12}(e_{c1}, \lambda_x, 0)]^2 \quad (2_{19})$$

Sous interaction de défaut s'arrondit ce qui augmente le FIC au vertex mais ne permet pas de simuler la progression vers la coalescence (voir Figure 2\_17. Cette solution n'est pas admissible.

#### Approche retenue

Si les FIC au vertex et au co-vertex sont multipliés par le même facteur d'interaction  $\gamma_{12}(\Phi = 0 \text{ ou } 90 \text{ deg.})$ , ce qui entraîne le maintien constant du rapport  $c/a$ , la majoration du FIC est garantie tout le long du front. La figure 2.16 illustre ce point pour l'interaction au vertex : la valeur du FIC le long de la courbe « Equivalente\_Maj » est toujours supérieure à la celle calculée par éléments finis (courbe en pointillés mauve). La fissure équivalente tend vers la fissure intégrée avec la diminution de l'écartement (Figure 2.17). La fissure intégrée est proche de la fissure enveloppe car les écartements sont faibles.

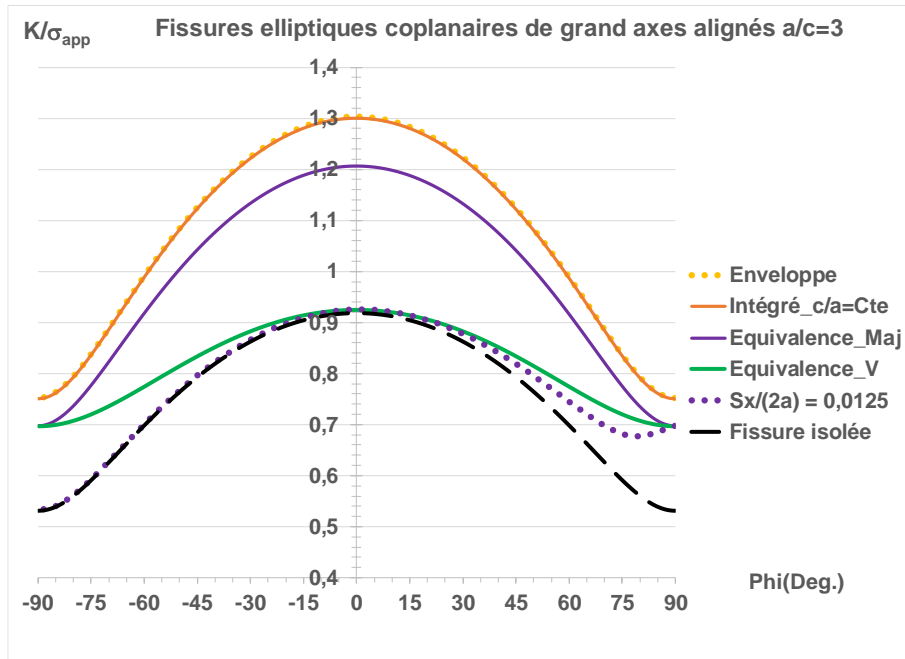
La fissure équivalente est une fissure elliptique dont les dimensions sont définies par :

$$e_{c\_eq} = \frac{c_{eq}}{a_{eq}} = \frac{c_1}{a_1} = e_{c1} \quad (2\_20a)$$

$$c_{eq} = e_{c1} \cdot [\gamma_{12}(e_{c1}, \lambda_x, 0)]^2 \quad (2\_20b)$$

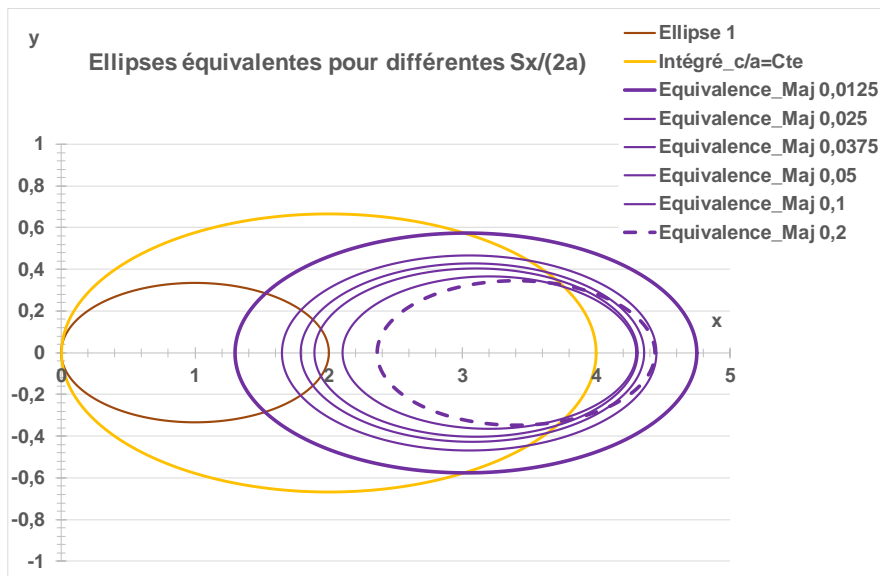
$$a_{eq} = c_{eq} \cdot \frac{a_1}{c_1}$$

Avec  $\gamma_{12}(e_{c1}, \lambda_x, 0)$  le facteur d'interaction au vertex de l'ellipse 1.



**Figure 2.16 : facteurs d'intensité des contraintes le long du front : comparaison de l'équivalence par l'approche préliminaire (Equivalence\_V) et l'approche proposée (Equivalence\_Maj)**

La figure 2.17 qui montre l'ellipse 2 majorée par l'interaction pour différents écartements : la jonction des défauts a lieu vers  $S_x/(2a)$  proche de 0,05.



**Figure 2.17 : évolution de la fissure équivalente avec l'écartement  $S_x/(2a)$**

Cette définition du défaut équivalent présente l'avantage d'être identique à celle du cas bidimensionnel.

Pour le grand axe  $H_i = 4a$   $\alpha_{eq} = \frac{a_{eq}}{2a}$   $\alpha_{env} = 1 + \frac{S_x}{4a}$   $\frac{c_{eq}}{c} = \frac{a_{eq}}{a}$

Donc  $\alpha_{eq} = \frac{a_{eq}}{2a} = \frac{c_{eq}}{2c} = \frac{[\gamma_{12}(0, \lambda_x, e_{co})]^2}{2}$  (2\_21)

Les variations du coefficient d'interaction en 2D et en 3D peuvent donc être comparés. La figure 2.18 montre que le coefficient d'interaction pour deux fissures elliptiques égales de grand axe commun est nettement plus faible que pour les défauts bande égaux. Cette figure met aussi en évidence que la définition de l'équivalence en identifiant les FIC au vertex et au co-vertex à ceux de la fissure interagissante (Equivalence\_V) n'est pas correcte. La courbe verte (Alpha\_E3\_GA) est obtenue à partir de la formule simplifiée du facteur d'interaction.

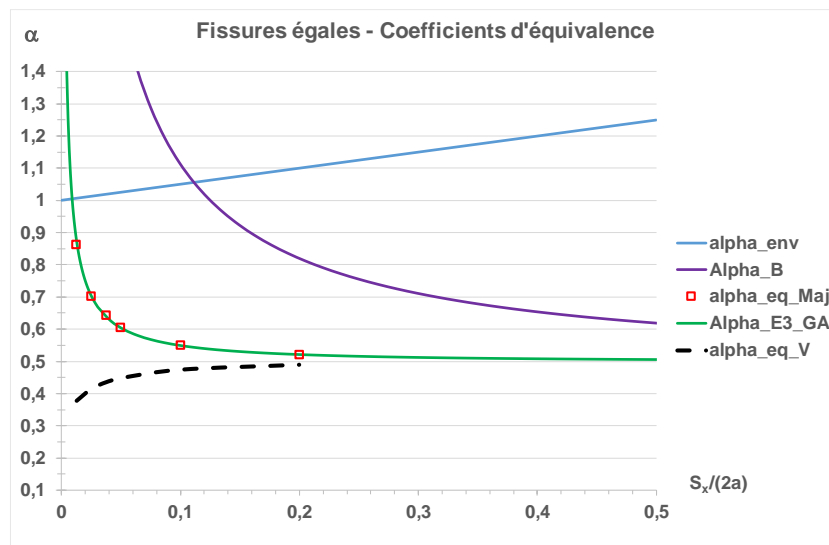


Figure 2.18 : évolution du coefficient d'équivalence avec l'écartement  $S_x/(2a)$  en 2D et 3D

### 2.3 Limitations de l'approche

L'approche développée dans cette thèse se limite au cas de deux défauts enfouis sollicités à l'infini par un chargement de traction uniaxiale normale au plan d'une des fissures. Hormis le cas d'une fissure inclinée par rapport à la première, les fissures sont principalement sollicitées en mode I.

#### 2.3.1 Effet de la flexion

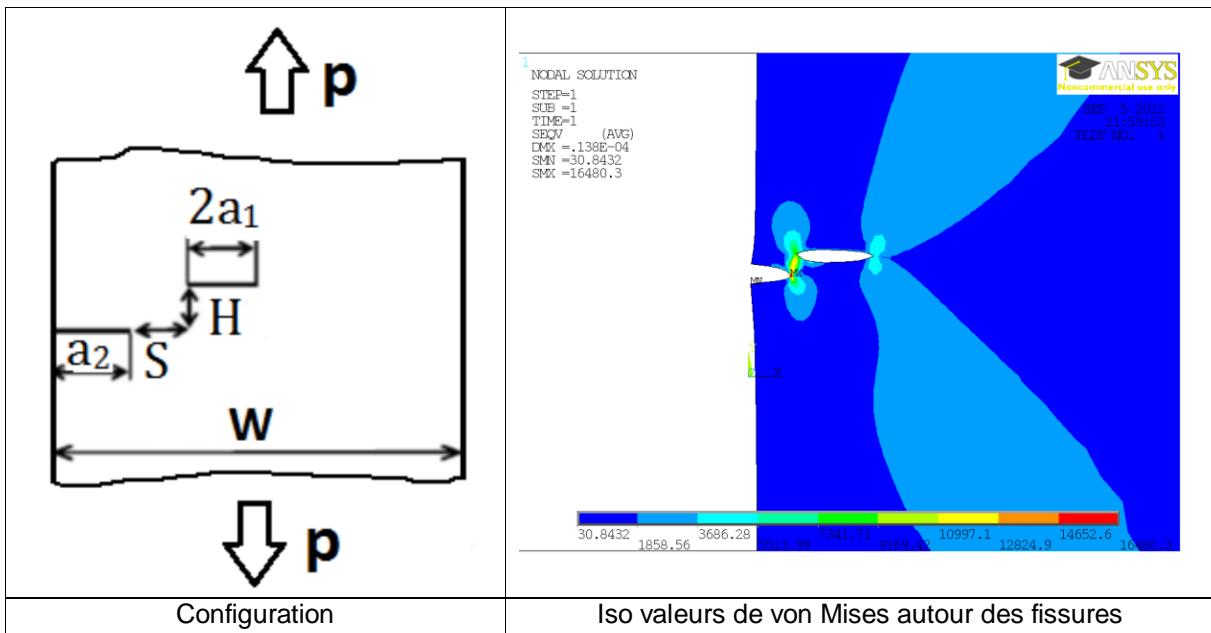
##### 2.3.1.1 Fissure bande sous flexion

Les articles de Q. Ma et al ; (MAQ, 2013, 2019) portent sur l'interaction d'une fissure bande de surface de longueur  $a_2$  avec une fissure bande enfouie de longueur  $2a_1$  respectivement sous chargement de membrane et de flexion. Dans les deux cas la largeur de la plaque est nettement supérieure à la taille des fissures.

#### Chargement de membrane

Dans le qui nous intéresse cas considéré  $a_1 = a_2$  donc les FIC des fissures isolées sont les suivants :

$$K_1 = \sigma_{app} \cdot \sqrt{\pi \cdot a_1} \quad \text{et} \quad K_2 = \sigma_{app} \cdot 1,122 \cdot \sqrt{\pi \cdot a_2} \quad (2_22)$$



**Figure 2\_19 : interaction d'une fissure de surface et une fissure enfouie parallèle sous traction normale**

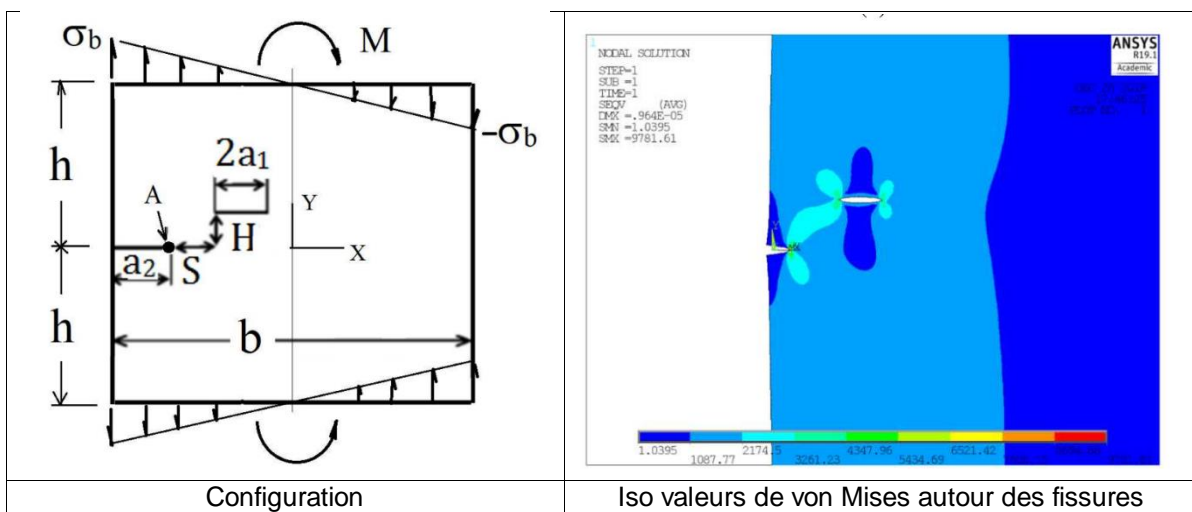
La figure 2.19 montre que les distributions de contraintes sont presque les mêmes en pointe de fissure de surface et à la pointe voisine de la fissure enfouie.

Chargement de flexion

Dans le cas considéré (Figure 2.20)  $a_1 = a_2$  donc les FIC des fissures isolées, de petite taille par rapport à la largeur, sont les suivants :

$$K_1 = \sigma_b \cdot \sqrt{\pi \cdot a_1} \quad \text{et} \quad K_2 = \sigma_b \cdot 1,122 \cdot \sqrt{\pi \cdot a_2} \quad (2_{23})$$

Avec :  $\sigma_b = 6 \frac{M}{b^2}$



**Figure 2.20 : interaction d'une fissure de surface et une fissure enfouie parallèle sous flexion globale**

### Comparaison des interactions

La figure 2.21 montre que l'interaction est moins forte sous flexion que sous traction.

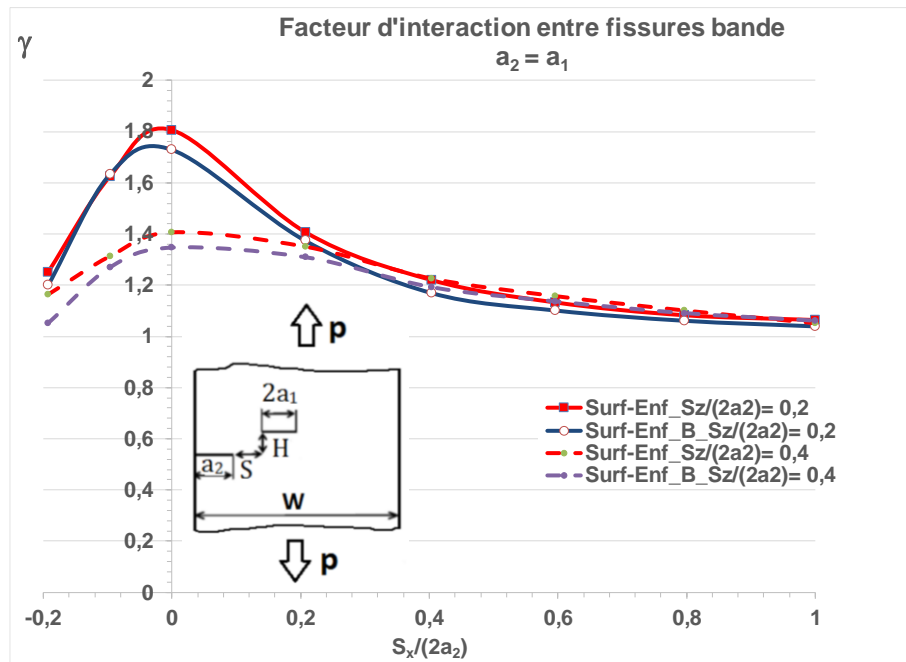


Figure 2.21 : facteurs d'interaction en pointe de fissure de surface interagissant avec une fissure enfouie sous traction ou flexion

### 2.3.1.2 Fissures elliptiques sous flexion

Dulieu et al. (DUL, 2020) ont effectué des calculs X-FEM pour différents profils de flexion et des configurations pénalisantes. Dans tous les cas les facteurs d'interaction ont été inférieurs au seuil de 6% choisi pour le calcul sous chargement de membrane.

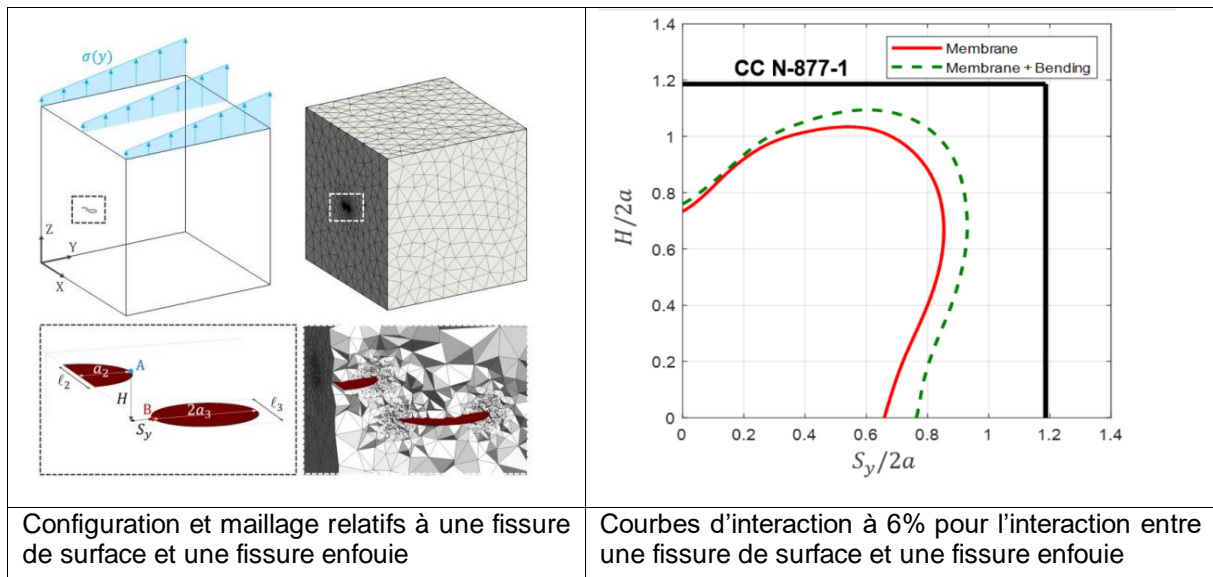


Figure 2.22 : interaction entre une fissure de surface avec une fissure enfouie sous traction ou flexion ( $a/c=0,25$ )

La figure 2.22 montre que le seuil est atteint pour des écartements relatifs plus faibles pour le chargement de membrane. Toutefois cet écart est faible comme dans le cas des défauts bande.

### 2.3.2 Cas des fissures de surface

Les fonctions de type Westergaard sont établies pour une fissure unique située dans un milieu infini. Elles ne s'appliquent donc pas aux fissures de surface. La méthode des forces de volume développée par Isida et Noguchi pour des fissures enfouies (ISN, 1983) a été étendue au cas des fissures de surface en remplaçant la solution des contraintes induites par des forces concentrées agissant dans un milieu infini par la solution correspondante de Mindlin (MIN, 1936) pour les milieux semi-infinis (ISN, 1994).

A notre connaissance, il n'existe pas pour les champs de contraintes induits par une fissure de surface de solution explicite équivalente à celles établies pour les fissures enfouies. Seules des solutions ont été établies pour les FIC (ex. NOD, 1999). Par conséquent le traitement des interactions entre fissure de surface et fissure enfouie par notre méthode ne peut être qu'empirique.

L'interaction avec la surface libre ne pose pas ce problème car il s'agit d'une interaction entre la fissure enfouie et son image symétrique par rapport à la surface. Ce cas peut être traité en modifiant la fonction A.

### 2.3.3 Traitement des fissures multiples

La question de l'orientation et de la position du défaut équivalent n'est pas traitée dans cette thèse. La première idée est de le positionner de façon pénalisante par rapport aux autres défauts en calculant les interactions avec chacun des défauts les plus proches. Cela suffit-il ? Afin de traiter cette question, il faudrait disposer de résultats pour plusieurs configurations. De très nombreux articles portent sur le comportement des réseaux de fissures, mais ils sont de peu d'utilité car les effets d'écrantage sont importants et l'objectif de ces articles est souvent d'évaluer le comportement global de la structure fissurée (ex. WAN, 1992). La configuration à fissures traitée par Zhao (ZHG, 2020) serait intéressante pour tester la façon de placer les défauts équivalents.



## 3 INTERACTION EN ELASTICITE LINEAIRE

Le principe de ces développements est le suivant :

- L'action d'une fissure sur une autre fissure est pilotée par le champ de contrainte de la première fissure.
- L'action réciproque entre les deux fissures est traitée par un facteur correctif.

Cette étude se compose de cinq parties qui forment trois catégories :

- Deux parties sont essentielles à la compréhension de la méthode. La partie 3.1 consacrée aux fissures bande pour lesquelles des solutions exactes de facteurs d'interaction ont permis de construire la méthode en élasticité notamment pour les fissures inégales coplanaires. La partie 3.2 traite des fissures elliptiques dont l'interaction comporte plusieurs caractères complexes : l'effet de forme, la variation du facteur d'interaction le long du front, le décalage et la désorientation des axes.
- La partie dédiée aux fissures disque présente plusieurs tentatives de résolution analytique du problème de l'interaction dans le plan, mais reste un cas particulier de fissures elliptiques. Elle est reproduite en Annexe A1. La partie qui quantifie l'interaction avec le bord libre reprend, en les adaptant, les méthodes développées aux paragraphes 3.1 et 3.2. Elle figure aussi en Annexe 1.
- L'interaction entre fissure et cavité (partie 3.5) constitue une extension du modèle de substitution relatif à l'interaction entre deux fissures. Mais cette extension est limitée au bidimensionnel et nécessite des investigations supplémentaires. Elle est reproduite en Annexe A1.

Seules les parties consacrées à l'interaction de fissures bande et des fissures elliptiques sont présentées dans ce chapitre. En fin de ce chapitre sont regroupées les principales formules.

### 3.1 Interaction entre deux fissures bande

Les seules solutions exactes de facteur d'interaction sont relatives à des fissures bande coplanaires.

#### 3.1.1 Interaction entre deux fissures bande coplanaires

En bidimensionnel pour deux fissures inégales, il existe 4 facteurs d'interaction, associés aux deux pointes des deux fissures. Les facteurs d'interaction utiles pour définir le défaut équivalent à des fissures non écartées sont uniquement ceux associés aux deux pointes les plus proches. Ce document propose des formules approchées généralisables au cas tridimensionnel pour ces deux facteurs. Le cas des fissures écartées est traité de façon complète pour les fissures bande et pour plusieurs configurations de fissures elliptiques.

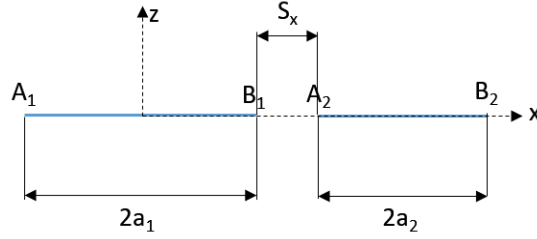
##### 3.1.1.1 Solution exacte pour deux fissures bande coplanaires

Plusieurs auteurs ont résolu de façon exacte le problème de l'interaction de deux fissures bande coplanaires situées dans une plaque infinie en traction normale au plan de la fissure (SAD, 1956 ; WIL, 1959 ; ERD, 1962, YOK, 1965).

La solution de Gommerstadt (GOM, 2009) pour des fissures inégales est la plus complète. Elle est la seule à fournir des résultats pour les quatre pointes de fissure, mais comporte une coquille que nous avons corrigé.

La configuration est décrite par la figure 3.1\_1.





**Figure 3.1\_1 : Interaction de fissures inégales**

Les formules de Gommerstadt sont paramétrées avec le rapport des tailles de fissure et un indicateur d'éloignement :  $\xi = \frac{a_1}{a_2}$        $\beta = \frac{S_x}{2a_2}$

Les facteurs d'interaction aux quatre extrémités sont données par les formules exactes suivantes :

$$\gamma_{A_1}(\zeta, \beta) = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{\sqrt{\zeta + \beta}}{\sqrt{\zeta + \beta + 1}} \cdot \left[ \zeta + \beta + 1 - (1 + \beta) \cdot \frac{E(k)}{K(k)} \right] \quad (3.1_1a)$$

$$\gamma_{B_1}(\zeta, \beta) = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{\sqrt{1 + \beta}}{\sqrt{\beta}} \cdot \left[ -\beta + (\zeta + \beta) \cdot \frac{E(k)}{K(k)} \right] \quad (3.1_1b)$$

$$\gamma_{A_2}(\zeta, \beta) = \frac{\sqrt{\zeta + \beta}}{\sqrt{\beta}} \cdot \left[ -\beta + (1 + \beta) \cdot \frac{E(k)}{K(k)} \right] \quad (3.1_1c)$$

$$\gamma_{B_2}(\zeta, \beta) = \frac{\sqrt{1 + \beta}}{\sqrt{\zeta + \beta + 1}} \cdot \left[ \zeta + \beta + 1 - (\zeta + \beta) \cdot \frac{E(k)}{K(k)} \right] \quad (3.1_1d)$$

$$k = \sqrt{\frac{\xi}{(\xi + \beta) \cdot (1 + \beta)}} \quad (3.1_1e)$$

$$\text{Yokobori et al. (YOI, 1965) utilisent es variables } \lambda_x = \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 + S_x} \quad \mu = \frac{a_2 - a_1}{a_1 + a_2 + S_x} \quad (3.1_2)$$

La correspondance avec les variables  $\lambda_x$  et  $\mu$  est donnée par:

$$\begin{aligned} 1 + \beta &= \frac{1 + \mu}{\lambda_x + \mu} & \zeta + \beta &= \frac{1 - \mu}{\lambda_x + \mu} & \beta &= \frac{1 + \mu}{\lambda_x + \mu} - 1 = \frac{1 - \lambda_x}{\lambda_x + \mu} & \zeta &= \frac{\lambda_x - \mu}{\lambda_x + \mu} \\ \lambda_x &= \frac{\zeta + 1}{\zeta + 1 + 2\beta} & \mu &= \frac{1 - \zeta}{\zeta + 1 + 2\beta} \end{aligned} \quad (3.1_3)$$

Toutes ces variables sont adimensionnelles et donc applicables à toute taille de fissure. La figure 3.1\_2 montre les variations des facteurs d'interaction en pointe de fissure interne pour des fissures inégales. La figure 3.1\_3 présente les variations du facteurs d'interaction aux quatre pointes de fissures bande de rapport de longueur égal à 2.

On note aussi dans toutes les formules décrivant l'interaction de deux fissures bande coplanaires situées dans une plaque infinie, le recours systématique au paramètre d'éloignement  $\lambda_x = \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 + S_x}$  qui rapporte la somme des demi-longueurs de fissure à l'éloignement des centres des deux fissures.

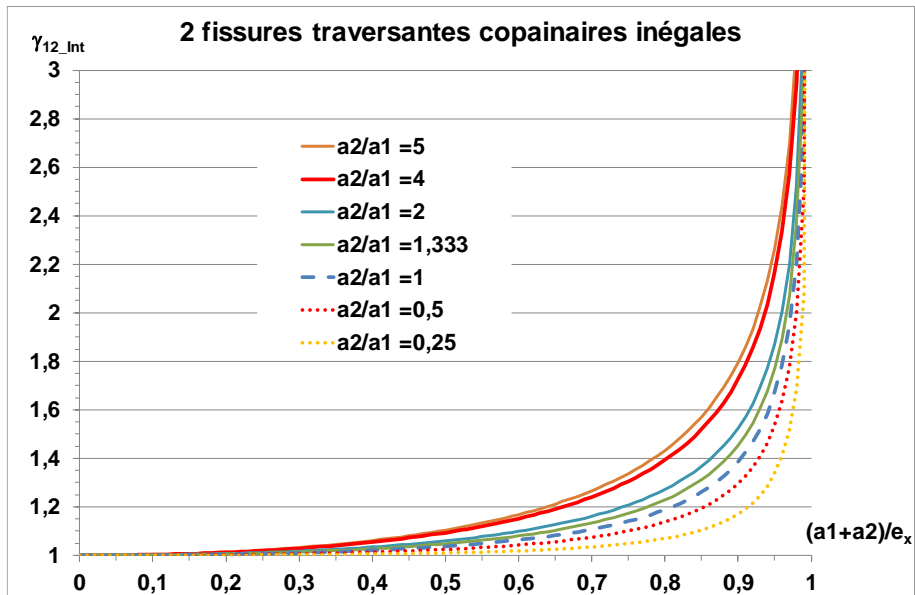


Figure 3.1\_2 : facteurs d'interaction en pointe interne pour deux fissures coplanaires inégales situées dans une plaque infinie et soumises à une contrainte de traction uniforme

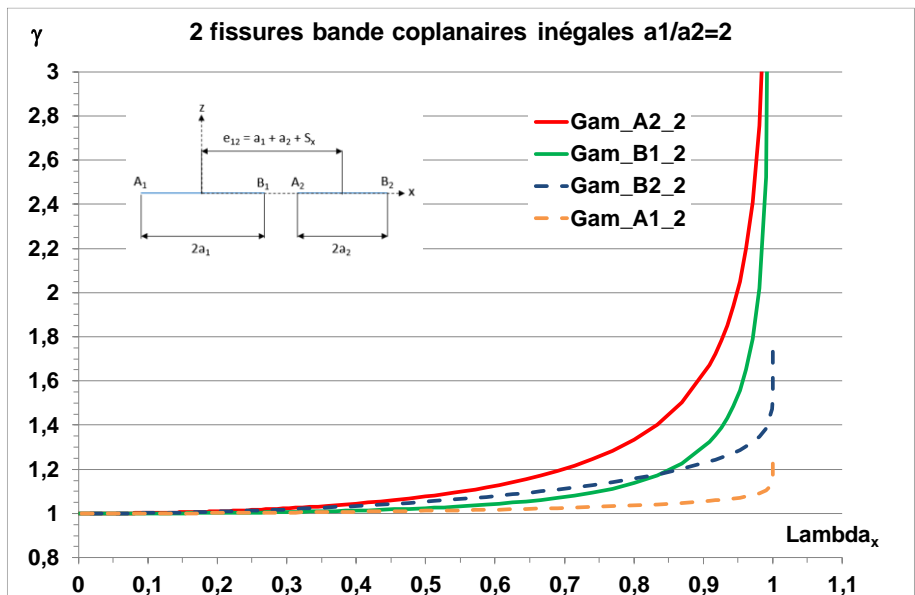
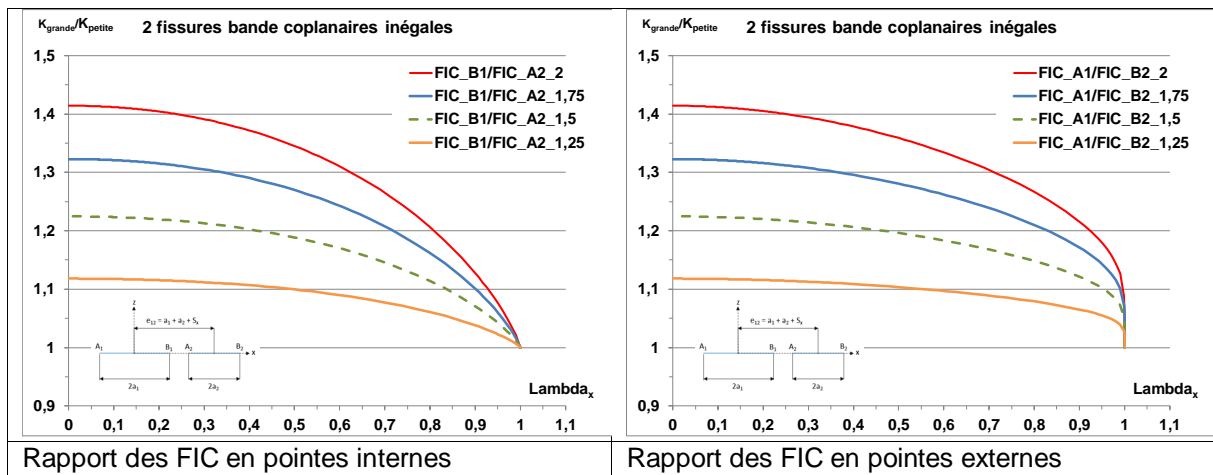


Figure 3.1\_3 : facteurs d'interaction pour deux fissures coplanaires inégales situées dans une plaque infinie et soumises à une contrainte de traction uniforme en fonction du paramètre d'interaction  $\lambda_x$

La figure 3.1\_4 compare les FIC aux pointes de la grande et de la petite fissure. Même si les facteurs d'interaction sont plus élevés sur la petite fissure, pour les FIC, c'est l'inverse. L'effet de taille l'emporte sur l'effet d'interaction.



**Figure 3.1\_4 : rapports du FIC de la grande fissure sur celui de la petite en fonction du paramètre d'interaction  $\lambda_x$**

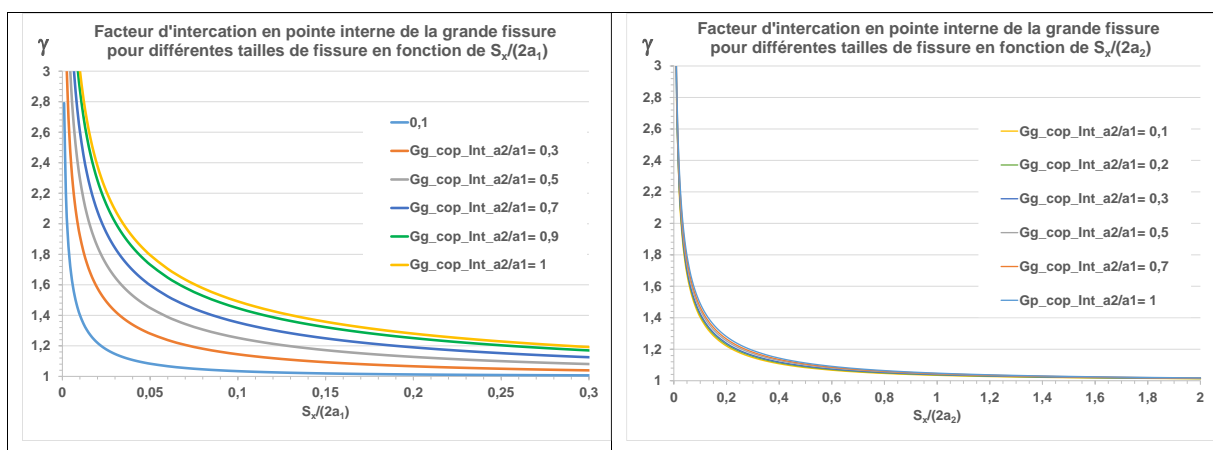
De ces résultats exacts, les conclusions suivantes peuvent être tirées :

- Les facteurs d'interaction en pointes interne et externe de la grande fissure sont plus faibles que ceux de la petite, mais pour les FIC c'est l'inverse.
- Lorsque les fissures sont proches, l'effet d'interaction dépend beaucoup de la longueur de la petite fissure.
- Quand l'espacement des fissures dépasse la longueur de la petite fissure, l'interaction peut être négligée. Ceci est mieux vérifié si l'espacement est égal à la taille de fissure moyenne.
- On peut considérer qu'il y a coalescence si  $S_x = 0,05 * \max(a_1, a_2)$  ce qui correspond à  $\lambda_x \cong 0,95$ .

#### Adimensionnement des écartements

Le choix de la variable servant à représenter les variations des facteurs d'interaction est important car il permet de mettre en évidence des propriétés remarquables.

Ainsi l'expression des variations des facteurs d'interaction de la grande fissure en fonction de l'écartement rapporté à la taille de la petite fissure permet de regrouper presque parfaitement toutes les courbes relatives à différents rapports de taille.



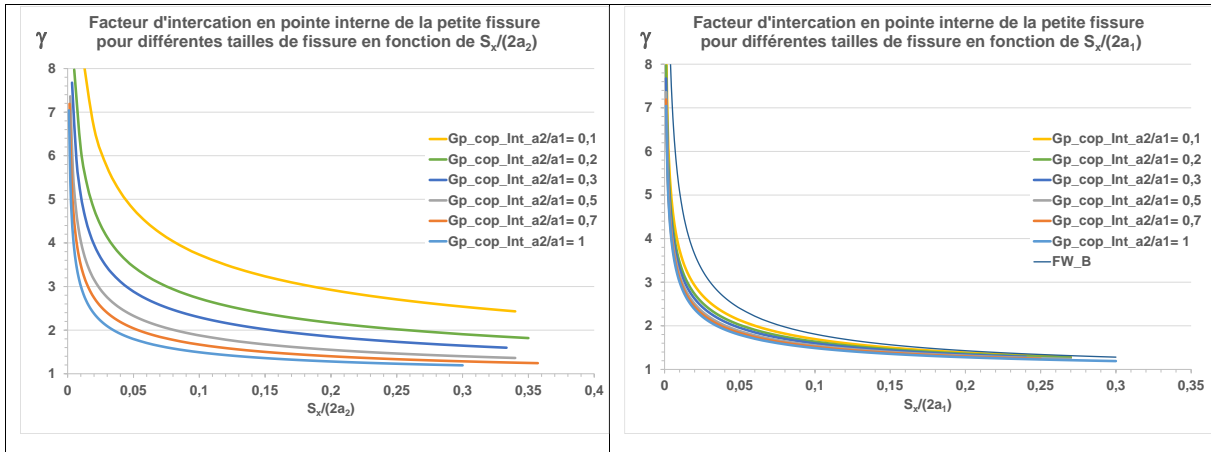
**Figure 3.1\_5 : variations des facteurs d'interaction en pointe interne de la grande fissure en fonction de l'écartement  $S_x$  rapporté à la taille de la grande fissure ou de la petite fissure**

Cette propriété a été remarquée par Hasegawa (HAS, 2009). Cette règle est approchée. L'analyse de la différence des formules exactes de Gommerstadt montre que les règles de normalisation de la variable

d'écartement entre deux fissures bande coplanaires pour rendre la variation du facteur d'interaction en pointe interne indépendante de la taille relative des fissures n'est valable qu'aux deux conditions suivantes :

- Les fissures ne doivent pas être trop proches  $\frac{S_x}{2a_2} \geq 0,2$
- Le rapport de la taille de la grande fissure sur celle de la petite doit être inférieur à 10.

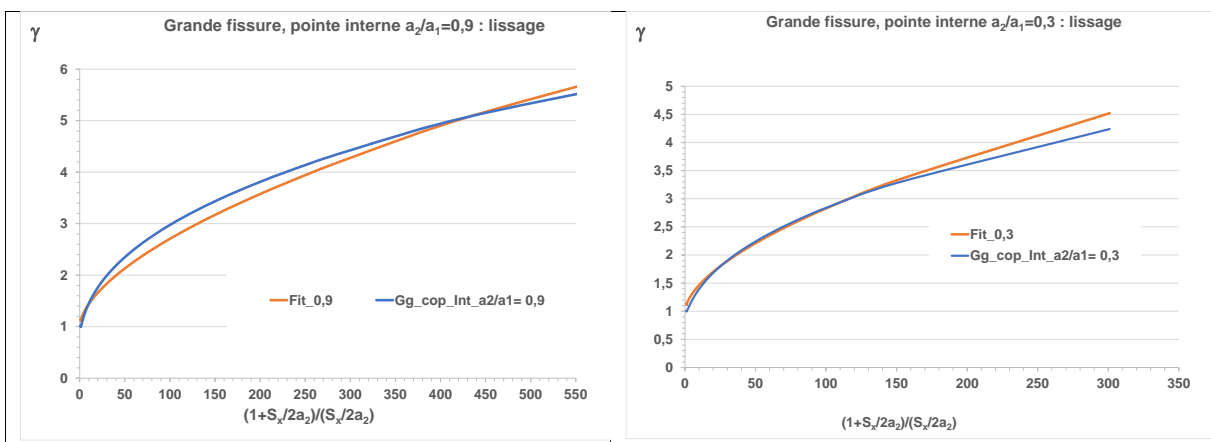
Pour la petite fissure, l'adimensionnement de l'écartement par à la taille de la grande fissure est moins efficace comme le montre la figure 3.1\_6.



**Figure 3.1\_6 : variations des facteurs d'interaction en pointe interne de la petite fissure en fonction de l'écartement  $S_x$  rapporté à la taille de la petite fissure ou de la grande fissure**

Les courbes des facteurs d'interaction en pointe interne de la petite fissure sont enveloppées supérieurement par la fonction de Westergaard  $F_{W\_B}$  (voir 3.1.1.2) et inférieurement par celle des fissures égales. Pour la grande fissure, l'enveloppe supérieure est la courbe des fissures égales et l'enveloppe inférieure est la droite  $\gamma = 1$ . Le lissage par une courbe maîtresse est envisageable pour les grandes fissures, mais pas pour les petites. L'expression des facteurs d'interaction en pointe interne de la grande fissure en fonction de  $\frac{1+S_x/(2a_2)}{S_x/(2a_2)}$  permet de supprimer l'asymptote et de lisser les courbes par une exponentielle.

$$\gamma_{int\_S_x/(2a_2)} = 1 + 0,118 \cdot \left( \frac{1 + S_x/(2a_2)}{S_x/(2a_2)} \right)^{0,595} \quad (3.1_4)$$



**Figure 3.1\_7 : validation des lissages des facteurs d'interaction en pointe interne de la grande fissure en fonction du rapport  $(1+S_x/(2a_2))/ S_x/(2a_2)$**

Cette approche n'a pas été retenue car trop difficile à généraliser aux fissures elliptiques.

### 3.1.1.2 Solution approchée pour deux fissures bande coplanaires

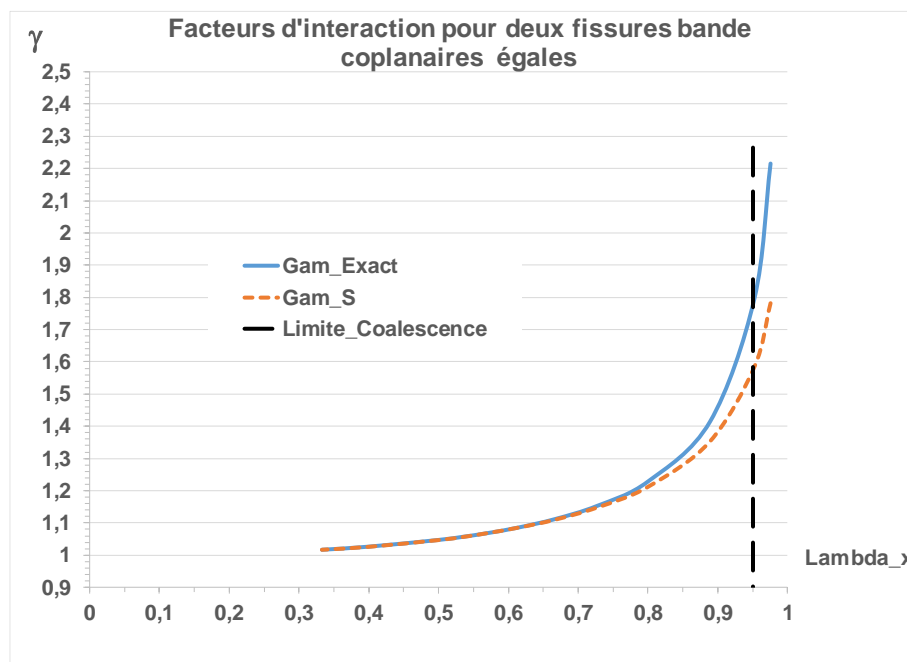
#### Etablissement de la formule

Le FIC  $K_{21}$  de la fissure soumise au champ de contrainte induit par la première fissure peut être exprimé à l'aide de la méthode de la fonction de poids de Bueckner (BUE, 1970). Bueckner a montré que le FIC d'une fissure plane chargée sur sa surface par la distribution des contraintes agissant sur cette surface dans le corps non fissuré est donné par le produit de cette distribution des contraintes et d'une fonction de poids  $\check{g}(M, P)$  où  $M$  indique le point courant sur la surface de la fissure et  $P$  un point sur son front. Ceci conduit à la formule suivante :

$$K_{21}(P) = \iint_S \sigma_{zz}(M) \cdot \check{g}(M, P) \cdot dS(M) \quad (3.1_5)$$

Où  $\sigma_{zz}(M)$  est la distribution normale des contraintes due à la première fissure considérée comme isolée agissant sur la seconde fissure et  $\check{g}(M, P)$  est la fonction de poids permettant le calcul du FIC de la seconde fissure.

Il est difficile de déterminer la fonction  $\check{g}(M, P)$  mais on peut estimer le FIC au premier ordre en utilisant la fonction de poids pour une fissure isolée  $g(M,P)$ . Selon V. Rangasamy et al. (RAN, 2002), la sous-estimation du facteur d'interaction n'est pas significative tant que l'espacement  $S_x/(2a)$  de deux fissures égales est supérieur à 0,05 (Figure 3.1\_8). Cette sous-estimation à la valeur limite de 0,05 est de 11,7 % pour les fissures traversant la paroi et tombe à 3,6 % pour les fissures de surface semi-circulaires.



**Figure 3.1\_8 : comparaison des facteurs d'interaction estimés avec la fonction de poids pour une fissure isolée (Gam\_S – RAN, 2002) et par la solution exacte (Gam\_Exact) pour deux fissures bande coplanaires égales**

La solution exacte du problème d'une fissure bande se trouvant dans un solide isotrope infini, a été établie par Westergaard (WES, 1939). La contrainte normale s'exprime comme suit :

$$\sigma_{W_{zz}}(M) = \sigma_{app} \cdot F_{W_B}(M) \quad (3.1_6)$$

Où  $F_{W_B}(M)$  est une fonction dépendant de la géométrie et du type de chargement. L'indice  $W$  renvoie à H. Westergaard. Par construction la fonction est infinie en pointe de fissure et tend vers 1 à l'infini.

Dans le cas de la fissure bande située dans un massif infini isotrope élastique sous traction uniaxiale, la fonction s'écrit avec la variable complexe  $\vartheta = x + i \cdot z$ . Cette variable est conventionnellement notée  $z$ , mais nous utilisons  $z$  pour désigner la coordonnée parallèle à l'axe de chargement.

$$F_{W\_B}(x, z) = \frac{\vartheta}{\sqrt{\vartheta^2 - a^2}} \quad (3.1_7)$$

Notre approche, traite différemment les défauts coplanaires (c.à.d. ayant un plan en commun) et les défauts parallèles ou inclinés. Afin de simplifier les expressions nous distinguerons les expressions des fonctions  $F_w$  suivant qu'elles sont limitées à l'action de la contrainte normale sur le plan de la fissure ou sur un plan parallèle. Ainsi :

$$F_{W\_B\_co}(x) = \frac{\vartheta}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}} = F_{W\_B}(x, 0) \quad (3.1_8)$$

$F_{W\_B}(x, z)$  sera aussi désignée par  $F_{W\_B\_Pa}(x, z)$  afin d'éviter toute confusion.

L'expression du facteur d'interaction  $\gamma_{21}(P)$  est alors :

$$\gamma_{21}(P) = \frac{\iint_S F_w\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right) \cdot g(P, M) \cdot dS(M)}{\iint_S g(P, M) \cdot dx} \quad (3.1_9)$$

Pour les fissures coplanaires, l'effet de la contrainte d'interaction est séparé :

$$\gamma_{21}(P) = 1 + \frac{\iint_S [F_{W\_B\_Co}(M) - 1] \cdot g(P, M) \cdot dS(M)}{\iint_S g(P, M) \cdot dx} \quad (3.1_{10})$$

L'application du deuxième théorème de valeur moyenne au numérateur de l'intégrale donne :

$$\iint_S [F_w(M) - 1] \cdot g(P, M) \cdot dS(M) = [F_{W\_B\_Co}(Q) - 1] \cdot \iint_{S_b} g(P, M) \cdot dS(M) \quad (3.1_{11})$$

Où Q est le point de la deuxième fissure le plus proche de la première dans le plan (x, y) et  $S_b$  est une partie de la surface de la deuxième fissure. Q est un paramètre décrivant l'écartement et non une position quelconque dans le plan.

Le facteur d'interaction apparaît donc comme une fonction affine de la fonction Westergaard :

$$\gamma_{21}(P) = 1 + A \cdot [F_{W\_B}(Q) - 1] \quad (3.1_{12})$$

En appliquant le théorème de la moyenne, la surface  $S_b$  autrement dit le facteur A peut varier avec l'écartement ce qui fait perdre de l'intérêt à l'approche. Il faut que la variable définissant le point Q soit égale à 1 pour un écartement nul afin que le facteur d'interaction approché tende vers l'infini et que pour un écartement infini la variable soit nulle.

#### Facteur d'interaction en pointe interne pour des fissures bande égales

Pour des fissures coplanaires, ce facteur est toujours plus élevé que celui en pointe externe.

La figure 3.1\_9 compare deux variations de A, calculé par le rapport  $\frac{\gamma_{Exact}-1}{F_w(u)-1}$  l'une avec le choix de la variable  $u = a/x$ , l'autre avec  $u = \lambda_x$ .

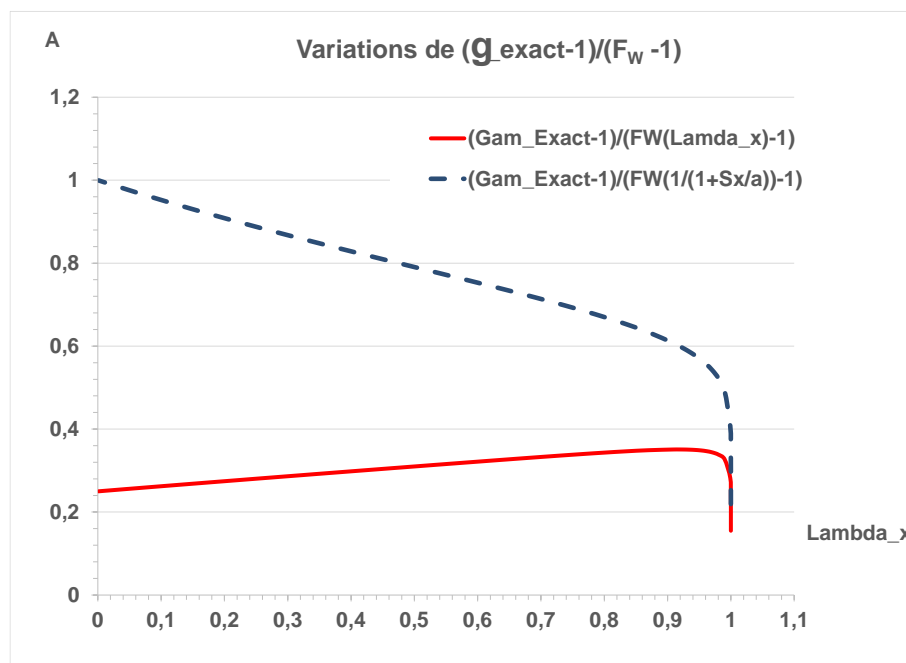
Le choix de  $\lambda_x$  comme variable s'impose pour trois raisons : il varie entre 1 et 0 selon que l'écartement est nul ou infini, il réduit la variation de A (Figure 3.1\_9) et permet de choisir une valeur constante dans l'intervalle 0,5-0,95 dans lequel le facteur d'interaction croît rapidement. Donc pour les fissures bande coplanaires, le point Q est défini par le paramètre d'espacement relatif  $\lambda_x$  :  $Q=(\lambda_x, 0, 0)$ . Afin de maximiser la valeur du facteur d'interaction, la valeur maximale de  $A(\lambda_x)$  soit 0,35.

Ainsi pour les fissures bande égales coplanaires, le facteur d'interaction en pointe interne a pour expression :

$$\gamma_{int} = \gamma_{21}(P_{int}) = 1 + A \cdot [F_{W\_B\_Co}(\lambda_x) - 1] \quad \text{avec} \quad \lambda_x = \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 + S_x} \quad (3.1_{13a})$$

Soit

$$\gamma_{int} = 1 + 0.35 \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - (\lambda_x)^2}} - 1 \right] \quad \text{avec} \quad \lambda_x = \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 + S_x} \quad (3.1_{13b})$$



**Figure 3.1\_9 : variations du facteur A de la formule du facteur d'interaction en fonction du choix de la variable d'écartement**

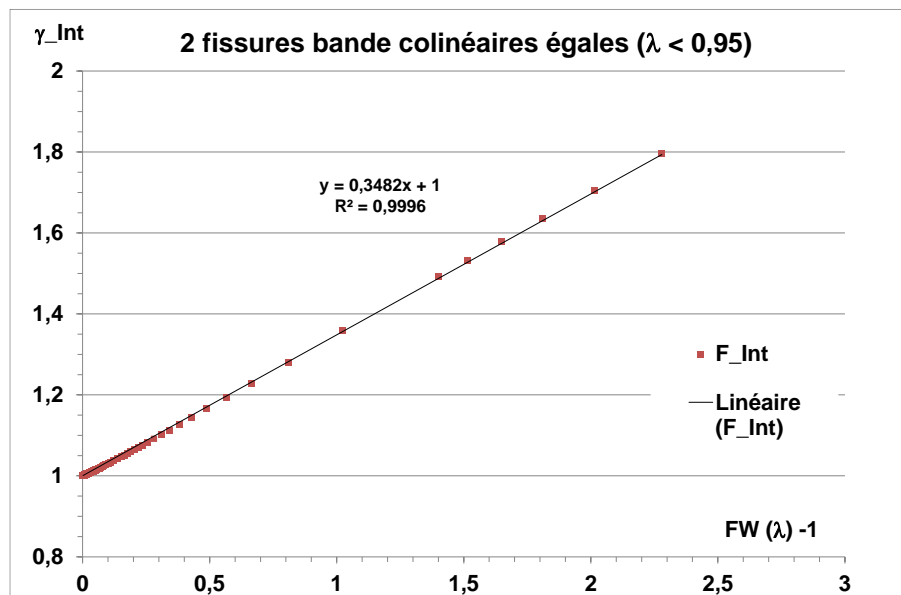
#### Validation de la formule du facteur d'interaction en pointe interne pour des fissures bande égales

La variation du facteur d'interaction exact avec l'écartement au point le plus sollicité  $\gamma_B(\lambda_x)$  est comparée à la variation de la fonction  $F_{W\_B}(\lambda_x)$  sur la figure 3.1\_10. Dans le domaine  $0 < \lambda_x < 0,95$  la corrélation entre le facteur d'interaction  $\gamma$  et la fonction de Westergaard  $F_w$  pour la fissure bande est linéaire, avec une pente de 0,35.

L'ajustement de la valeur de A compense la sous-estimation due au choix d'une fonction de poids approchée dans le calcul du FIC. Nous verrons que A est une fonction du rapport de taille des fissures et de leur forme.

Pour les fissures traversantes coplanaires, nous utiliserons la formulation exacte de Gommerstadt. L'intérêt de cette formulation simplifiée (3.1.12b) est d'offrir la possibilité d'extension à des configurations tridimensionnelles. Ce document montre que tel est le cas pour des fissures disques ou

elliptiques coplanaires. L'extension du domaine d'application nécessite la connaissance de la solution exacte de champs de contraintes induits par une fissure unique, située dans un solide isotrope infini à comportement élastique linéaire et de résultats de facteurs d'interaction obtenus par 4 ou 5 calculs de structure pour chaque configuration, afin de déterminer la fonction A.



**Figure 3.1\_10: fissures bande égales coplanaires : corrélation entre facteur d'interaction  $\gamma_{int}$  et fonction de Westergaard  $F_{W_B}$**

Formule du facteur d'interaction en pointe externe pour des fissures bande égales

La détermination du facteur d'interaction d'une fissure bande non écrantée avec l'extrémité la plus éloignée de l'autre fissure est un cas particulier du problème de l'évaluation de la variation de l'interaction le long du front de fissure. Il se traite par la recherche d'une fonction d'écartement équivalente  $\lambda_{x_{ext}} = \mathcal{G}(\lambda_x)$ .

Pour les fissures bandes coplanaires égales la meilleure approximation, sans modification de la fonction A, est simplement :

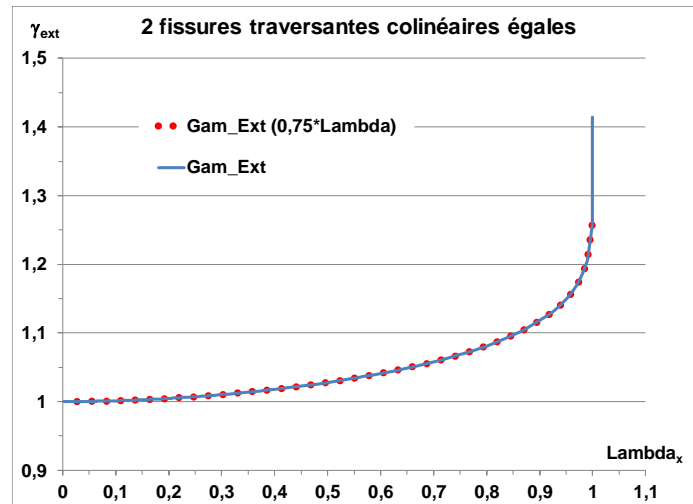
$$\lambda_{x_{ext}} = 0,75 \cdot \lambda_x \quad (3.1_{14})$$

Cette valeur est obtenue par identification de  $\lambda_{x_{ext}}$  à partir des facteurs d'interaction calculés avec les formules de Gommerstadt pour les pointes externes des fissures.

La figure 3.1\_11 valide cette proposition, même si la valeur limite égale à  $\sqrt{2}$  n'est pas atteinte.

Cette proposition est à tester sur les cas de fissures parallèles, et pourrait servir à établir la limite d'écrantage.



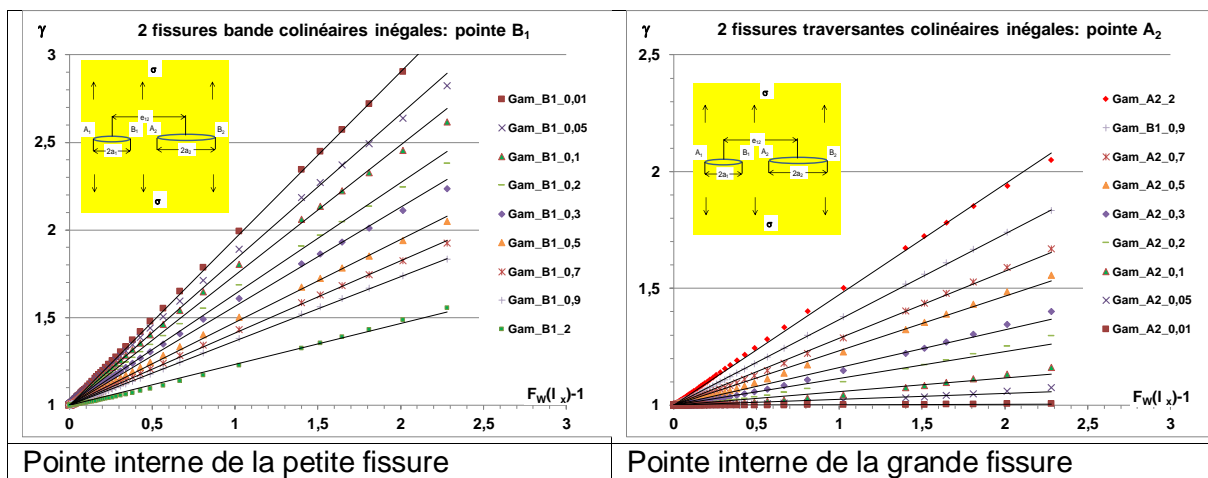


**Figure 3.1\_11: comparaison de la formule approchée du facteur d'interaction en pointe externe de fissures bande égales coplanaires et la formule exacte**

Facteur d'interaction en pointe interne pour des fissures bande inégales

La même approche est utilisée pour les fissures inégales.

La variation du facteur d'interaction exact avec l'écartement au point le plus sollicité  $\gamma_B(\lambda_x)$  est comparée à la variation de la fonction  $F_{W,B}(\lambda_x)$  sur la figure 3.1\_12. Dans le domaine  $0 < \lambda_x < 0,95$  la corrélation entre le facteur d'interaction  $\gamma$  exact et la fonction de Westergaard  $F_w$  pour la fissure bande est linéaire, avec une pente qui dépend du rapport des tailles de fissure.



**Figure 3.1\_12: fissures bande inégales coplanaires : corrélation entre facteur d'interaction  $\gamma_{int}$  et fonction de Westergaard  $F_{W,B}$**

A partir des solutions exactes des contraintes induites dans un massif infini élastique par des fissures bande, disque et elliptiques, on démontre que pour une fissure bande nulle le facteur d'interaction est donné par la fonction de Westergaard. Ce point avait été noté par Isida (ISI, 1985) pour l'interaction de fissures disque et il est naturel de l'étendre à tout type de fissure.

On en déduit que A varie entre 0 et 0,35

Le facteur d'interaction approché aux points intérieures pour deux fissures inégales alignées (Figure 3.1.13) est donné par la formule générique :

$$\gamma_{12}(B_1) = 1 + A(P; \zeta) \cdot [F_{W,B,co}(\lambda_x) - 1] \quad (3.1_{15a})$$

$$\gamma_{21}(A_2) = 1 + A(G; \zeta) \cdot [F_{W\_B\_co}(\lambda_x) - 1] \quad (3.1_{15b})$$

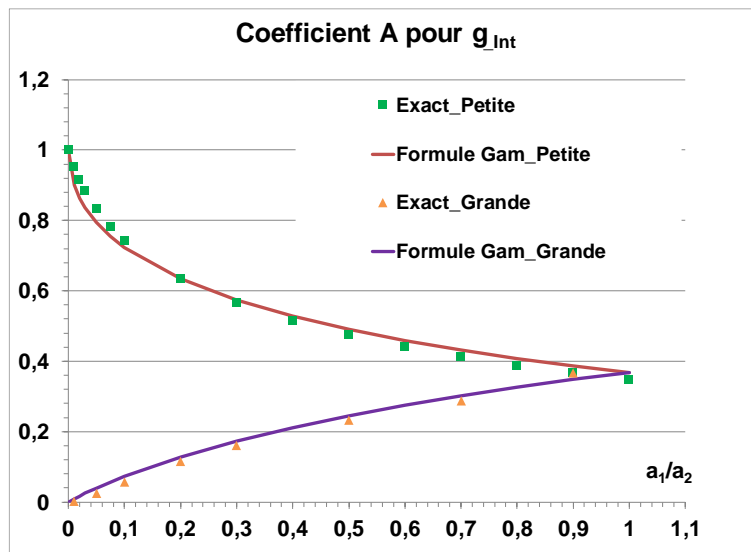
$F_{W\_B\_co}(\lambda_x)$  se calcule à l'aide de la formule (3.1\_8) explicitée au paragraphe 3.1.1.2. La fonction A dépend de la pointe de la fissure considérée (petite P ou grande G) et du rapport des longueurs de fissures  $\zeta = \frac{a_1}{a_2}$ . La formule de A est obtenue par analyse des formules théoriques de Gommerstadt (GOM, 2009), de façon similaire à celle effectuée en pour le cas des formules relatives aux fissures égales. Dans le cas où  $\zeta$  est supérieur ou égal à 1, la fonction A est une exponentielle de la forme  $\exp(-\zeta^p)$  pour la grande fissure et  $\zeta \exp(-\zeta^p)$  pour la petite. Le choix de l'exposant p doit être tel que  $A(P; \zeta) = \zeta \cdot A(G; 1/\zeta)$ . La valeur de l'exposant est de 0,49 pour  $\zeta \leq 2.5$ . Pour des valeurs supérieures il faudrait baisser légèrement cet exposant pour atteindre 0,43 si  $\zeta = 8$ .

La fonction A s'exprime de la façon suivante pour  $\zeta \geq 1$  :

$$A(G; \zeta) = A_G(\zeta) = \exp(-\zeta^{0.49}) \quad (3.1_{16a})$$

$$A(P; \zeta) = A_P(\zeta) = \zeta \cdot A_G(\zeta) \quad (3.1_{16b})$$

Si  $\zeta \leq 1$ , il faut inverser G et P.



**Figure 3.1\_13: fissures bande inégales coplanaires : variations de A avec le rapport des tailles de fissure**

Si les fissures sont égales, le ratio  $\zeta$  vaut 1 :

- Au paragraphe 3.1.1.2 est déterminé pour deux fissures égales  $A_P(1) = A_G(1) = 0,35$ .
- La formule précédente fournit quant à elle  $A_P(1) = A_G(1) = \exp(-1^{0.49}) = \exp(-1) = 0,368$ , ce qui diffère légèrement.

Les facteurs d'interaction ne dépendent pas des tailles de fissures mais du rapport des tailles des fissures et de leur écartement relatif. La figure 3.1\_14 présente un exemple de validation.

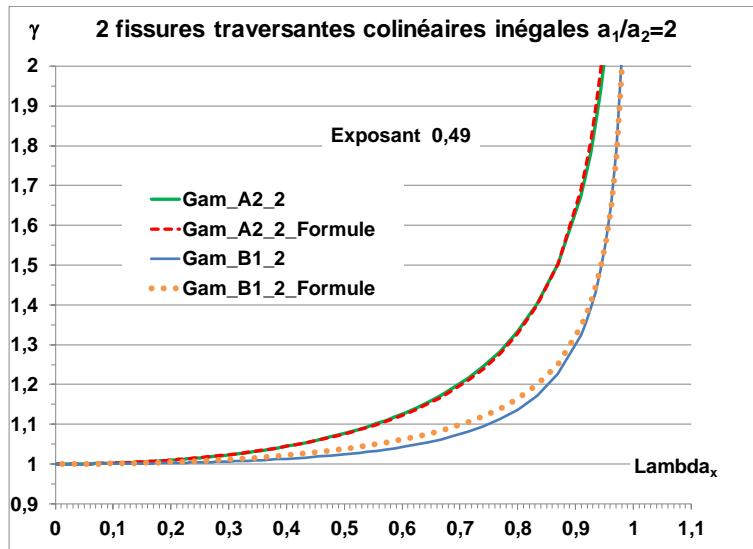


Figure 3.1\_14: fissures bande inégales coplanaires : comparaison des facteurs d'interaction exacts et approchés

### 3.1.2 Interaction entre deux fissures bande parallèles

La formulation approchée est déduite directement de la fonction de type Westergaard.

#### 3.1.2.1 Limite d'écrantage pour deux fissures bande

L'écrantage d'une fissure par une autre n'est pas définie par la simple relation géométrique  $S_{x0} < 0$  mais dépend de l'étendue de la zone d'atténuation des contraintes située au-dessus de la fissure agissant sur l'autre. La figure 3.1\_15 montre que l'écrantage est caractérisé par une zone de concentration de la contrainte normale, de taille moindre en pointe interne qu'en pointe externe.

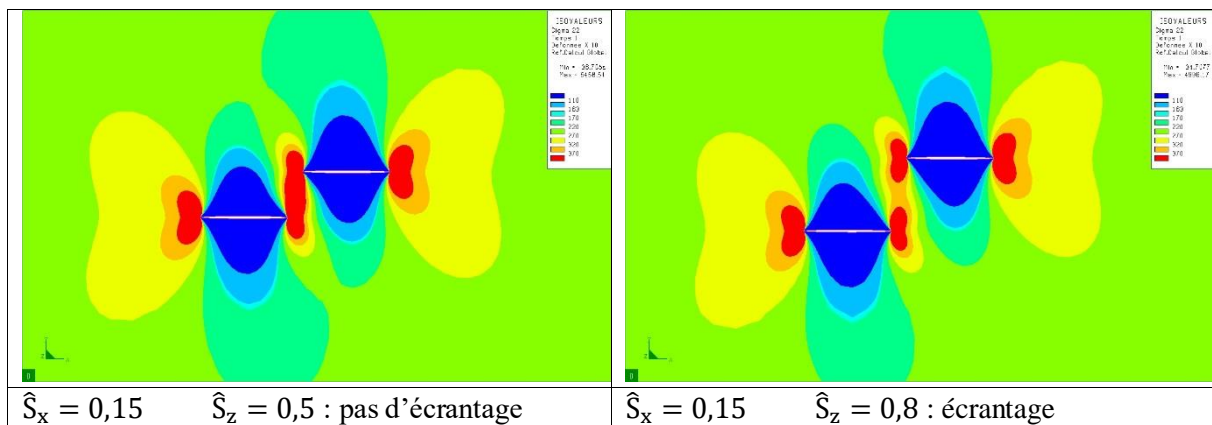


Figure 3.1\_15: comparaison des distributions de contraintes  $\sigma_{zz}$  pour deux cas d'interaction de fissures parallèles égales

L'écrantage de deux fissures bande interagissantes est défini par comparaison des facteurs d'interaction aux deux points d'une des fissures. La condition suivante est valable quelle que soit la taille des fissures.

$$\gamma_{21\_Int} \leq \gamma_{21\_Ext} \quad (3.1_{17})$$

Si la condition (3.1\_17) est vérifiée pour la première fissure, elle l'est aussi pour la seconde. Dans le cas où les facteurs d'interaction aux deux points d'une fissure sont inférieurs à 1, il existe un double écrantage.

Chapuliot (CHB, 2018; GIL, 2022) a réalisé un très grand nombre de calculs aux éléments finis avec le logiciel CAST3M (CAS, 2020) pour des fissures bande égales et inégales (Environ 36 valeurs de  $\hat{S}_x$ ,

$\hat{S}_z$  variant de 0,1 à 2 par pas de 0,1). En tenant compte des tests de précision, l'ensemble comporte 890 calculs. Ces résultats ont permis d'obtenir une limite d'écrantage avec précision. Les valeurs des facteurs d'interaction pour des fissures fortement écrantées sont cohérentes avec les valeurs asymptotiques obtenues pour des fissures égales superposées.

Les calculs d'interaction de fissures inégales ( $\frac{a_1}{a_2} = 0.5$  et  $0.7$ ) montrent que la limite d'écrantage pour des fissures inégales est identique à celle de fissures égales, à condition de l'exprimer dans le repère  $\hat{S}_x = \frac{S_x}{a_1+a_2}$  et  $\hat{S}_z = \frac{S_z}{a_1+a_2}$  (Figure 3.1\_16).

Cette propriété se démontre en utilisant les formules de Gommerstadt (GOM, 2009).

La limite d'écrantage calculée par éléments finis est décrite avec précision par un folium de Descartes décentré :

$$\begin{cases} \hat{S}_{xE} = \hat{S}_{x0} - t \cdot \hat{S}_{zE} \\ \hat{S}_{zE} = \hat{S}_{z0} - 3a \cdot \frac{t}{1+t^3} \end{cases} \quad \text{where } a = 0.4, \hat{S}_{x0} = -0.136, \hat{S}_{z0} = 0.215 \quad (3.1_{18})$$

La limite d'écrantage équivalente obtenue à partir des formules approchées des facteurs d'interaction (3.1\_14) ne tient compte que partiellement du mode II (Figure 3.1\_17).

$$\hat{S}_{x\_SEq} = -0.379 \cdot \hat{S}_z - 1.6268 \cdot \hat{S}_z^2 + 2.4547 \cdot \hat{S}_z^{1.8323} \quad (3.1_{19})$$

Les conditions d'écrantage pour deux fissures bande sont données par les formules :

$$\begin{aligned} \hat{S}_{zE} &= \text{Max}(\hat{S}_{zE}, 0, 2) \\ \Sigma_E &\equiv (\hat{S}_{zE} - \hat{S}_{z0}) \cdot \left[ \hat{S}_{zE}^3 - (\hat{S}_{xE} - \hat{S}_{x0})^3 \right] - 1,35 \cdot \hat{S}_{zE}^2 (\hat{S}_{xE} - \hat{S}_{x0}) = 0 \end{aligned} \quad (3.1_{20})$$

Il y a écrantage élastique si  $\Sigma_E > 0$  et  $\hat{S}_{xE} < \hat{S}_{x0} + \hat{S}_{zE} \cdot \sqrt{\frac{1,35}{3(\hat{S}_{zE} - \hat{S}_{z0})}}$  sinon la fonction est mise à la valeur-1.

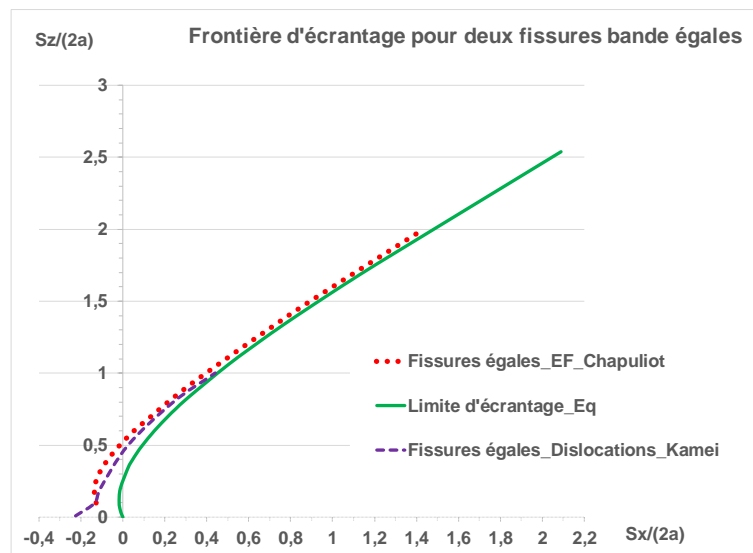


Figure 3.1\_16 : limite d'écrantage pour des fissures bande égales parallèles

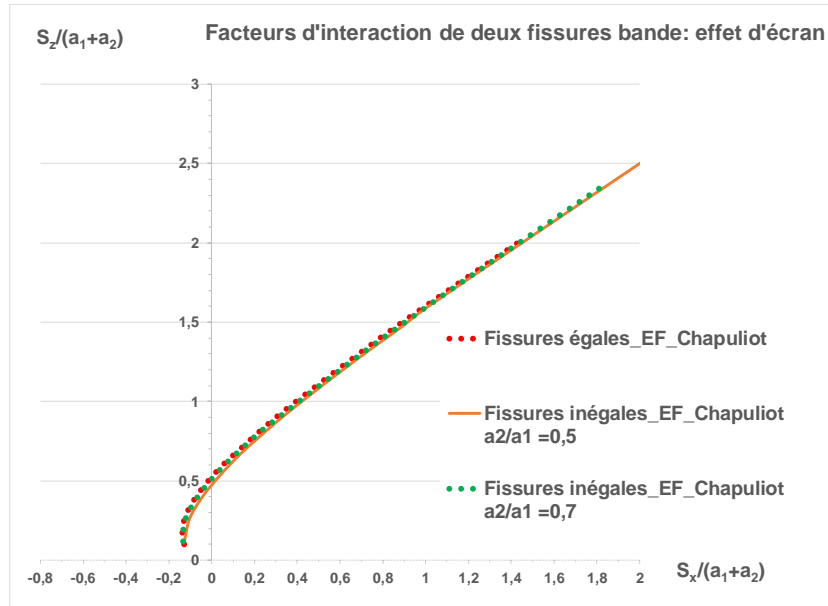


Figure 3.1\_17 : limite d'écrantage pour des fissures bande égales et inégales parallèles

### 3.1.2.2 Interaction entre deux fissures bande parallèles non écrantées

Les fissures non coplanaires peuvent atténuer ou amplifier les FIC des fissures interagissantes. Le modèle présenté ci-après ne s'applique que s'il y a amplification des FIC à toutes les pointes, c.à.d. quand il n'y a pas d'écrantage.

$$\gamma_{21}(P) = \frac{\iint_S F_W\left(\frac{x}{a}; \frac{z}{a}\right) \cdot \check{g}(P, M) \cdot dx}{\iint_S g(P, M) \cdot dx} \quad (3.1_{21})$$

L'application du premier théorème de valeur moyenne donne pour les fissures bande, compte tenu que l'intégration ne porte que sur  $x$  :

$$\iint_{x_1}^{x_2} F_W\left(\frac{x}{a}; \frac{z}{a}\right) \cdot \check{g}(P, M) \cdot dx = F_{W\_B\_Pa}\left(\frac{x_3}{a}; \frac{z}{a}\right) \cdot \iint_{x_1}^{x_2} g(P, M) \cdot dx \quad (3.1_{21})$$

Avec  $x_1 < x_3 < x_2$

L'abscisse  $x_3$  représente un décalage du point Q d'abscisse  $x_3$ . Nous le nommons  $x_D \equiv x_3$

La valeur de  $x_D$  est obtenue en écrivant cette formule pour les mêmes fissures coplanaires.

$$F_{W\_B\_pa}\left(\frac{x_D}{a}; 0\right) = \gamma_{21\_Coplanaire} \quad (3.1_{22})$$

La fonction de Westergaard pour le hors plan (3.1\_7) exprimée en coordonnées polaires est :

$$F_{W\_B\_Pa} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho_1 \cdot \rho_2}} \cdot \left[ \cos\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) + \frac{1}{\rho_1 \cdot \rho_2} \cdot \sin \theta \cdot \sin \frac{3}{2} \cdot (\theta_1 + \theta_2) \right] \quad (3.1_{23a})$$

Avec

$$\rho = \frac{r}{a} \rho_1^2 = \rho^2 + 1 - 2 \cdot \rho \cdot \cos \theta \quad \rho_2^2 = \rho^2 + 1 + 2 \cdot \rho \cdot \cos \theta \quad (3.1_{24b})$$

$$\theta_1 = A\cos\left(\frac{-1 + \rho \cdot \cos \theta}{\rho_1}\right) \quad \theta_2 = A\cos\left(\frac{1 + \rho \cdot \cos \theta}{\rho_2}\right) \quad (3.1_{25c})$$

$r$  et  $\theta$  sont les coordonnées polaires associées à  $x_D$  et  $z$

Donc le facteur d'interaction en pointe interne s'exprime par :

$$\gamma_{21}(P) = F_{W\_B\_Pa} \left( \frac{x_D}{a}; \frac{S_z}{a} \right) \quad (3.1_{27})$$

Dans le cas de fissures bande, le facteur d'interaction est donné par les formules exactes de Gommerstadt, donc le résultat obtenu en utilisant cette formule, valable pour tout  $S_x > 0$  et aux deux pointes internes, est exact.

L'inversion de la formule (3.1\_22) est simple dans le cas de fissures bande. La validation donnée à la figure 3.1\_19 est complétée à la figure 3.1.25 du § 3.1.2.4.

#### Détermination des isovaleurs de facteur d'interaction

La valeur du facteur d'interaction  $\gamma_0$  de la fissure 1 sur la fissure 2 est fixé à  $\gamma_0$

Il faut d'abord construire les isovaleurs de la fonction de Westergaard :

- Calcul de la valeur repère  $\frac{x_w}{a_1}$  sur l'axe Ox en résolvant l'équation  $FW_{B\_co} \left( \frac{x_w}{a_1} \right) = \gamma_0$
- Calculer pour chaque valeur de  $\frac{z_0}{a_1}$  l'abscisse  $\frac{x_0}{a_1}$  de l'isovaleur  $FW_{B\_pa} \left( \frac{x_0}{a_1}, \frac{z_0}{a_1} \right) = \gamma_0$ .

Création de l'isovaleur du facteur d'interaction par le changement de repère suivant :

- Calcul du point de repère de l'isovaleur d'interaction sur l'axe Ox  $\frac{S_{xG}}{l}$  en résolvant  $\gamma_{B\_Co} \left( \frac{S_{xG}}{l} \right) = \gamma_0$   
Où  $l$  est la longueur d'adimensionnement choisie  $2a$  ou  $a_1+a_2$
- Les coordonnées de l'isovaleur d'interaction  $\gamma = \gamma_0$  sont données par :

$$\frac{S_x}{l} = \frac{x_0}{l} - \frac{x_w}{l} + \frac{S_{xG}}{l} \quad \text{et} \quad \frac{S_z}{l} = \frac{z_0}{l} \quad (3.1_{28})$$

La figure 3.1\_18 illustre le décalage de l'isovaleur 1,1 de la fonction de Westergaard vers l'isovaleur du facteur d'interaction en mode I.

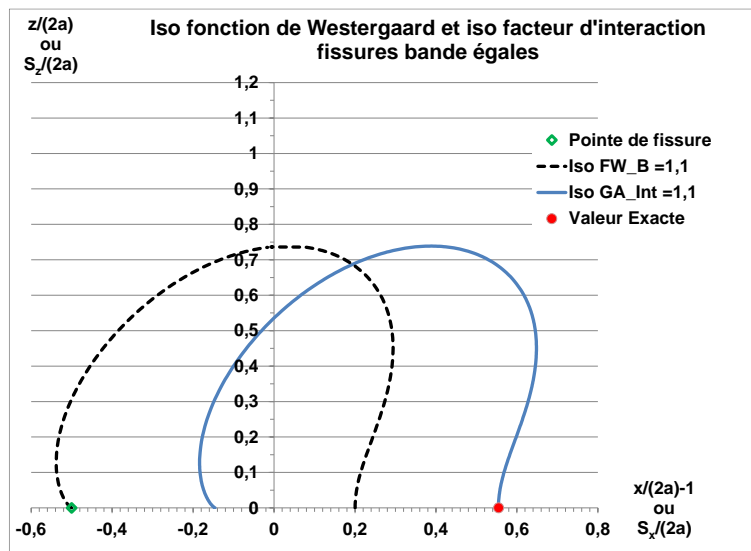
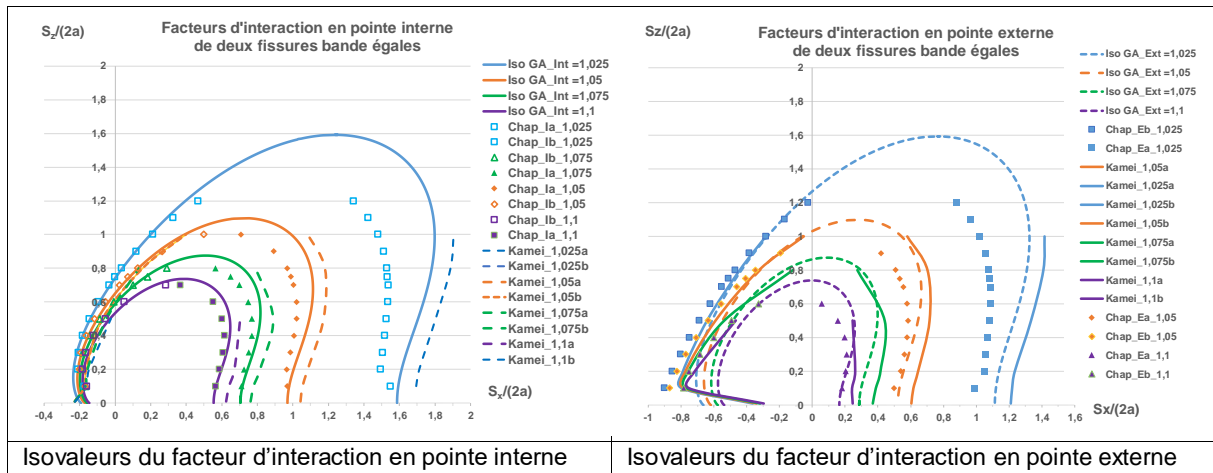


Figure 3.1\_18 : passage de l'isovaleur de la fonction  $F_{WB}$  à l'isovaleur du facteur d'inter action

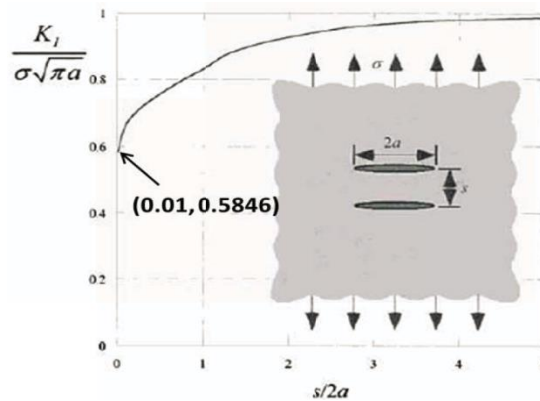


**Figure 3.1\_19: fissures bande inégales parallèles : comparaison des facteurs d'interaction exacts et approchés**

Kamei a utilisé la théorie des dislocations plus précise que la méthode des éléments finis (KAY, 1974). Pour des interactions faibles qui correspondent à des fissures plus éloignées il faudrait des maillages d'éléments finis très fin sur un grand domaine. De plus les calculs de Chapuliot (CHA, 2020) utilisent J pour calculer les facteurs d'interaction, ce qui tient compte du mode II, contrairement aux calculs de Kamei fondés sur le mode I seul. Donc les isovaleurs calculées par éléments finis sont situées à l'intérieur de celles obtenues par la théorie des dislocations.

### 3.1.2.3 Interaction entre deux fissures bande parallèles superposées

Il est difficile de calculer avec précision les facteurs d'interaction des fissures superposées et qui se trouvent à des intervalles très rapprochés. Kamei et Yokobori (KAY, 1974) ont fourni un résultat numérique fiable fondé sur la représentation des fissures par distribution des dislocations. Ces résultats sont mentionnés dans le dictionnaire de Murakami (MUR, 1996) et sont reproduits à la figure 3.1\_20.



**Figure 3.1\_20 : fissures bande égales, parallèles et superposées, situées dans un milieu infini en traction (image tirée de MUR, 1996)**

Gorbatikh (GOR, 2007) propose une méthode analytique pour prédire les facteurs d'intensité des contraintes pour des fissures séparées par des espacements sensiblement plus petits que les longueurs de fissure. Les fissures superposées de même longueur, lorsqu'elles sont très rapprochées, se protègent fortement. La figure 3.1\_21 montre que les résultats de Kachanov (KAC, 1994) ne sont pas corrects pour les écartements  $S_x/(2a) < 0,4$  mais que pour des fissures plus espacées l'accord est excellent avec les résultats de Gorbatikh et de Chang & Ma (CHM, 2002). En revanche, les résultats de Kamei et

Yokobori (KAY, 1974) concordent avec l'analyse asymptotique de Gorbattikh. En utilisant ces deux résultats, nous avons développé par lissage les équations suivantes :

$$\gamma_{S,I} = 1 - 0.435 * \exp(-1,015 * \hat{S}_z^{0,727}) \quad (3.1_{29})$$

$$\gamma_{S,II} = 0.335 * \exp(-1,675 * \hat{S}_z^{0,751}) \quad (3.1_{30})$$

Lorsque les fissures sont proches, le mode II peut ne pas être négligeable vis-à-vis du mode I.

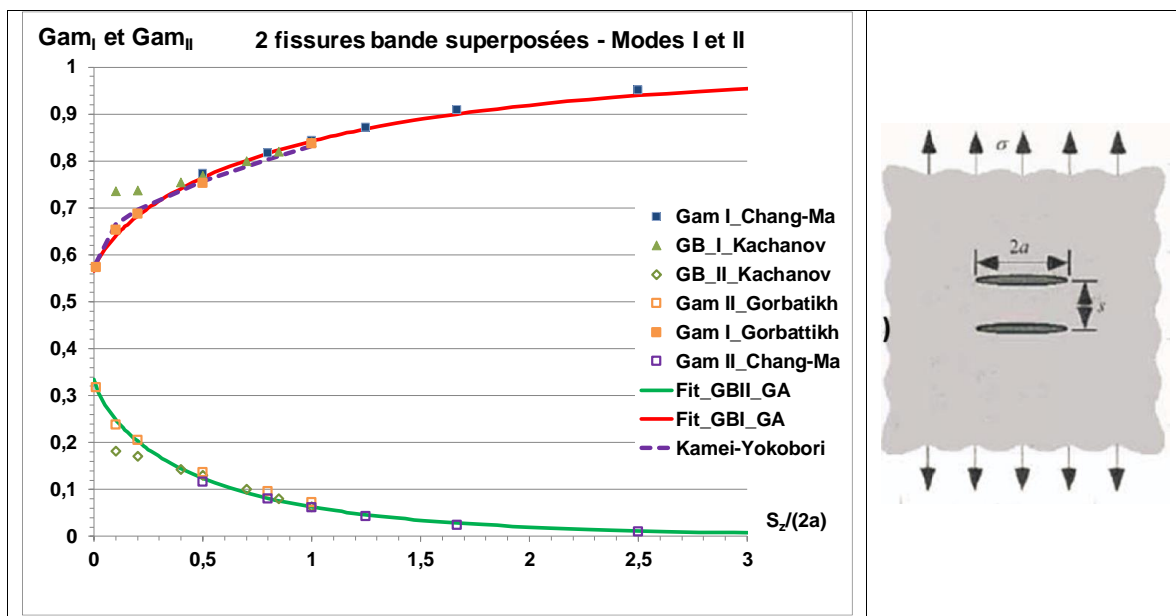
Une formule, fondée sur le calcul du FIC équivalent  $K_{eq} = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}$ , a été établie pour le facteur

d'interaction équivalent :

$$\gamma_{S,eq} = \sqrt{\gamma_{S,I}^2 + \gamma_{S,II}^2} \quad (3.1_{31})$$

Les facteurs d'interaction de fissures superposées sont identiques aux deux pointes.

$$\gamma_{S,eq} \left( \frac{S_z}{2a} \right) = \frac{K_{eq}}{K_{eq0}} = 1 - 0,347 \cdot \exp \left[ -0,788 \cdot \left( \frac{S_z}{2a} \right)^{0,936} \right] \quad (3.1_{32})$$

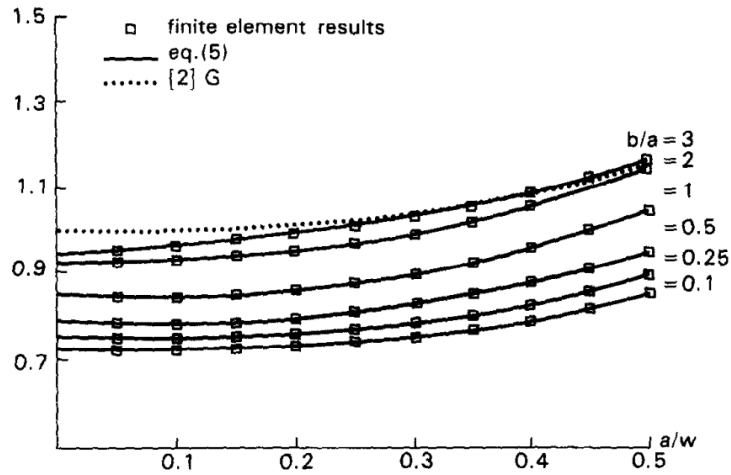


**Figure 3.1\_21 : facteurs d'interaction pour des fissures bande égales, parallèles et superposées, situées dans un milieu infini en traction**

Ces solutions serviront pour l'établissement de formules approchée pour des fissures écartées partiellement.

Le cas des fissures égales superposées dans une plaque de dimension finies a été étudié par Jiang et al. (JIA, 1990). L'effet de bord réduit peu l'effet d'écran jusqu'à la valeur de la taille relative  $a/W = 0,4$  (Figure 3.1\_22).



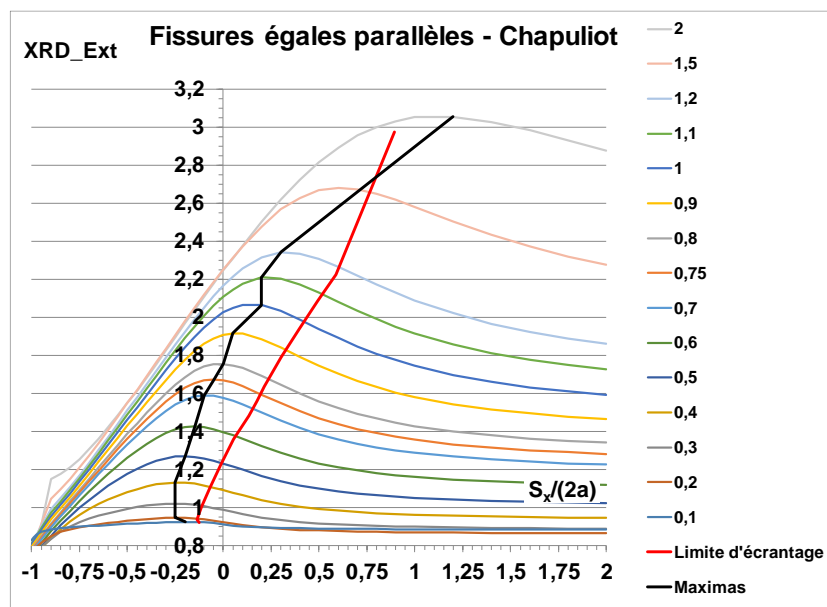


**Figure 3.1\_22 : facteurs d'interaction pour des fissures bande égales (de taille 2a), parallèles et superposées (séparées de 2b), situées dans une plaque de largeur 2W en traction (JIA, 1990)**

Le cas des fissures parallèles superposées inégales a fait l'objet de plusieurs études telle celle de Hahn (HAN, 2020) illustrée au § 2.2.2 du chapitre 2. Jiang et al. (JIA, 1992) ainsi que Chen et al. (CHC, 1995) ont analysé l'effet d'une petite fissure superposée à une plus grande fissure.

### 3.1.2.4 Interaction entre deux fissures bande parallèles écrantées

Les équations (3.1\_12) et (3.1\_22) ne peuvent pas être utilisées pour prédire les facteurs d'interaction pour des fissures écrantées. Les variations des facteurs d'interaction pour les valeurs négatives de  $\hat{S}_x$  sont fortement non-linéaires. L'équation (3.1\_27) a été utilisée pour déterminer la valeur de l'abscisse du décalage  $X_{RD} = \frac{x_D}{a}$  dans la fonction de Westergaard pour chaque écartement vertical relatif  $\hat{S}_z$  à partir des résultats aux éléments finis. Les variations de  $X_R$  sont reproduites à la figure 3.1\_23 pour la pointe externe, elles sont lissées par les équations des tableaux 3,1 a, b, c d. La limite d'écrantage a été légèrement modifiée pour les configurations correspondant à  $\hat{S}_z \leq 0.7$  :  $\hat{S}_{x,SEq} = \frac{0.2145}{0.7} \cdot \hat{S}_z$



**Figure 3.1\_23 : variations du décalage XRD pour des fissures bande égales parallèles**

Le décalage des fissures écrantées est approché par la forme polynomiale suivante.

$$X_{RD} \frac{X_D}{a} = A + B \cdot \hat{S}_{x0} + C \cdot \hat{S}_{x0}^2 + D \cdot \hat{S}_{x0}^3 + E \cdot \hat{S}_{x0}^4 \quad (3.1\_31)$$

Pointe interne

$\hat{S}_z \leq 0.6$	$A = -1.0033 \cdot S_{z0}^3 + 0.9125 \cdot S_{z0}^2 + 0.3602 \cdot \hat{S}_{z0} + 0.9795$
	$B = -6.6815 \cdot S_{z0}^3 + 8.6734 \cdot S_{z0}^2 - 2.45 \cdot \hat{S}_{z0} + 1.2583$
	$C = -41.714 \cdot S_{z0}^3 + 67.541 \cdot S_{z0}^2 - 35.532 \cdot \hat{S}_{z0} + 5.3758$
	$D = -71.356 \cdot S_{z0}^3 + 120.4 \cdot S_{z0}^2 - 68.799 \cdot \hat{S}_{z0} + 11.094$
	$E = -37.332 \cdot S_{z0}^3 + 63.837 \cdot S_{z0}^2 - 37.645 \cdot \hat{S}_{z0} + 6.976$

$\hat{S}_z > 0.6$	$A = -0.1078 \cdot S_{z0}^3 + 0.2237 \cdot S_{z0}^2 + 0.1073 \cdot \hat{S}_{z0} + 1.1797$
	$B = -0.0849 \cdot S_{z0}^3 + 0.1075 \cdot S_{z0}^2 + 0.1392 \cdot \hat{S}_{z0} + 1.4382$
	$C = -0.4952 \cdot S_{z0}^3 + 1.895 \cdot S_{z0}^2 - 1.943 \cdot \hat{S}_{z0} + 0.5988$
	$D = -0.4746 \cdot S_{z0}^3 + 2.0867 \cdot S_{z0}^2 - 2.36 \cdot \hat{S}_{z0} - 0.234$
	$E = 0$

Pointe externe

$\hat{S}_z \leq 0.5$	$A = -1.9 \cdot S_{z0}^3 + 3.93 \cdot S_{z0}^2 - 0.948 \cdot \hat{S}_{z0} + 0.9643$
	$B = -12.417 \cdot S_{z0}^3 + 13.482 \cdot S_{z0}^2 - 4.4496 \cdot \hat{S}_{z0} + 0.066$
	$C = -85342 \cdot S_{z0}^3 + 84.246 \cdot S_{z0}^2 - 23.547 \cdot \hat{S}_{z0} + 0.424$
	$D = -145.43 \cdot S_{z0}^3 + 150.95 \cdot S_{z0}^2 - 41.021 \cdot \hat{S}_{z0} + 0.8975$
	$E = -72.783 \cdot S_{z0}^3 + 79.614 \cdot S_{z0}^2 - 22.571 \cdot \hat{S}_{z0} + 0.5418$

$\hat{S}_z > 0.5$	$A = 2.28358 - 1.5837 \cdot S_{z0}^{0.06627} \cdot \text{Exp}(-1.9225 \cdot S_{z0}^{2.24237})$
	$B = 1.25447 - 5.3899 \cdot S_{z0}^{0.95834} \cdot \text{Exp}(-2.0908 \cdot S_{z0}^{2.0809})$
	$C = -7142.35 \cdot S_{z0}^{5.3429} \cdot \text{Exp}(-8.5377 \cdot S_{z0}^{0.7747})$
	$D = 0.01317 - 3.1623 \cdot S_{z0}^{3.1879} \cdot \text{Exp}(-1.3178 \cdot S_{z0}^{3.2597})$
	$E = 0$

Tableaux 3.1\_1 a, b, c, d : coefficients du décalage de l'abscisse dans la fonction de Westergaard pour des fissures bande égales parallèles

Les figures 3.1\_24 a et b comparent l'application des formules aux résultats des calculs aux éléments finis de Chapuliot (CHA, 2020).

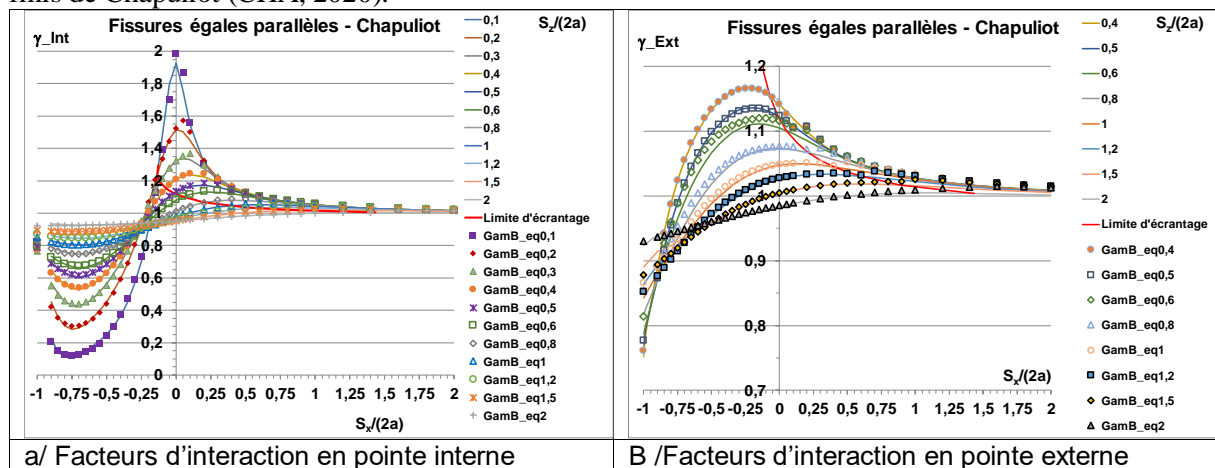


Figure 3.1\_24 : comparaison des prédictions de facteurs d'interaction pour des fissures bande égales parallèles aux résultats des calculs aux éléments finis

## Fissures inégales

K. Hasegawa (HAS, 2009) a observé que l'action d'une petite fissure traversante sur la grande est presque proportionnelle au rapport de la taille de la plus grande sur la plus petite. S. Chapuliot (CHA, 2020) en a tiré une règle de normalisation de l'interaction de la petite fissure sur la grande par la taille de la plus petite.

L'analyse de cette règle est limitée au cas des fissures coplanaires, donc pour des écartement horizontaux positifs.

Cette règle approchée peut être généralisée de la façon suivante :

- Si l'on étudie la petite fissure, la variation du facteur d'interaction en pointe interne avec l'écartement des fissures est quasiment indépendante du rapport des tailles si l'écartement est normalisé par rapport à la taille de la plus grande fissure.
- Si l'on étudie la grande fissure, la variation du facteur d'interaction en pointe interne avec l'écartement des fissures est quasiment indépendante du rapport des tailles si l'écartement est normalisé par rapport à la taille de la plus petite fissure.

Pour des fissures parallèles inégales, l'analyse des résultats de Chapuliot est illustrée à la figure 3.1\_25.

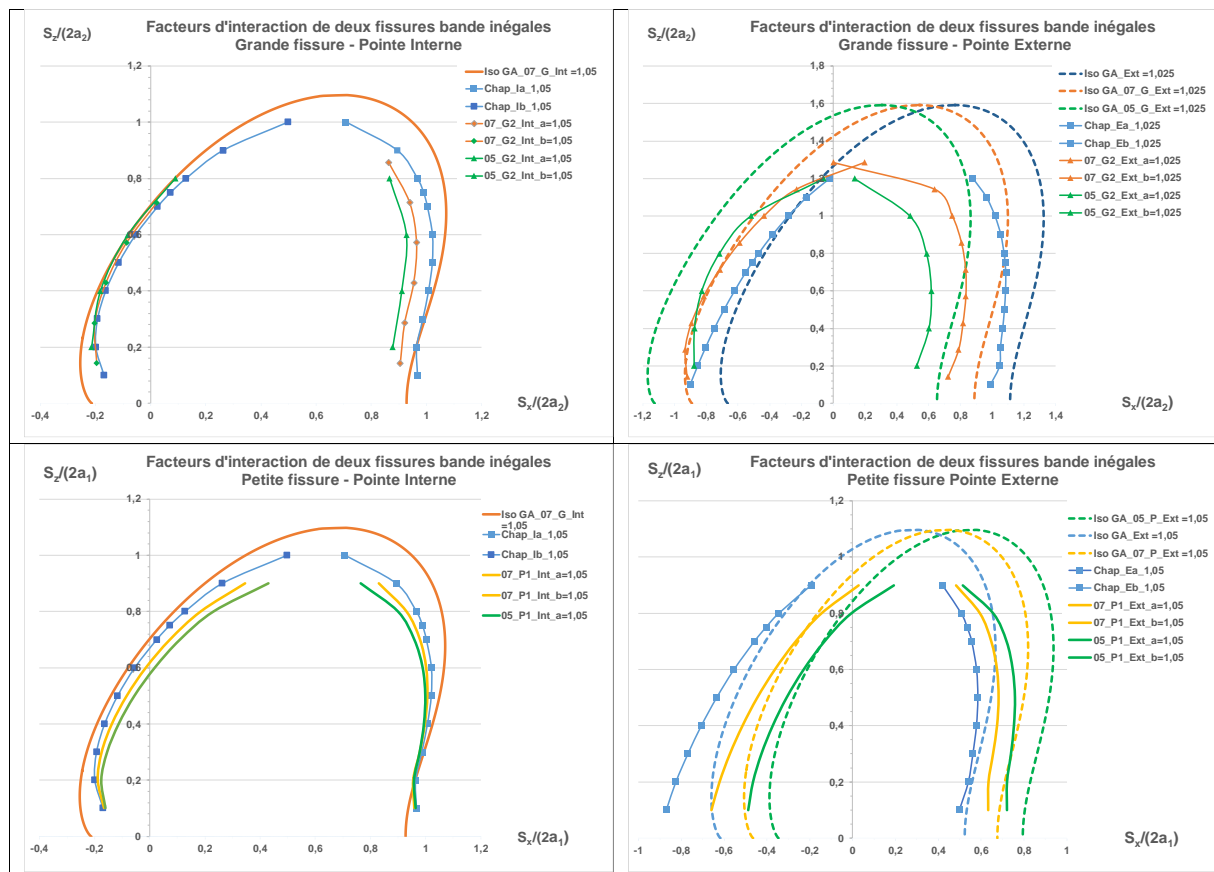


Figure 3.1\_25 : comparaison des prédictions de facteurs d'interaction pour des fissures bande inégales parallèles aux résultats des calculs aux éléments finis (CHA, 2020)

### 3.1.3 Fissures bande inclinées

Dès qu'une fissure est inclinée par rapport à la direction de traction, elle est sollicitée en mode mixte. Dans le cas bidimensionnel seuls les modes I et II interviennent.

### 3.1.3.1 FIC pour une fissure bande inclinée isolée

Les FIC de la fissure isolée inclinée d'un angle par rapport l'axe 0x, ont pour expression :

$$K_I = \sigma_{app} \cdot \cos^2 \beta \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (3.1\_32a)$$

$$K_{II} = \sigma_{app} \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (3.1\_32b)$$

$$K_{eq} = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2} = \sigma_{app} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot \cos \beta \quad (3.1\_32c)$$

$$J_{eq} = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} = J_{2a} \cdot \cos^2 \beta \quad (3.1\_33)$$

Le FIC de la fissure bande isolée en mode I est nommé  $K_{I0} = \sigma_{app} \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$

Les FIC réduits sont définis par le rapport du FIC à  $K_{I0}$ .

Le FIC équivalent réduit  $K_{eq}/K_{I0}$  décroît moins vite en fonction de  $\beta$  que le FIC de mode I, mais la diminution est significative dès que  $\beta > 20$  degrés (Figure 3.1\_26).

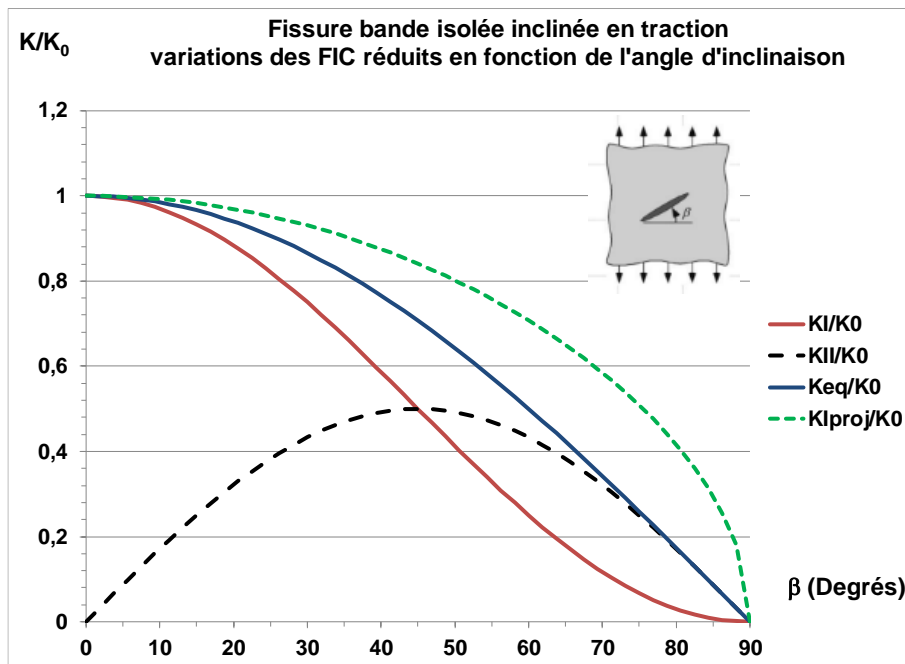


Figure 3.1\_26 : variations de Facteurs d'Intensité des Contraintes pour une fissure bande inclinées

Le défaut projeté sur l'axe normal à l'axe de sollicitation a pour demi-longueur :

$$a_{proj} = a \cdot \cos \beta \quad (3.1\_34a)$$

$$K_{I\_Proj} = \sigma_{app} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot \sqrt{\cos \beta} = \frac{K_{eq}}{\sqrt{\cos \beta}} \quad (3.1\_34b)$$

$$J_{Proj} = J_{2a} \cdot \cos \beta \quad (3.1\_34c)$$

La valeur de  $K_{I_{proj}}$  est supérieure à celle du FIC équivalent pour tout angle d'inclinaison comme l'illustre la figure 3.1\_26. Cette propriété est intéressante car au chapitre I, que si l'on prend en compte le branchement de la fissure lors de l'amorçage, le caractère non conservatif du  $K_{eq}$  a été mis en évidence. Ce résultat s'explique par l'évolution des coordonnées tangentielles réduite illustrée à la figure 3.1\_27.

Les contraintes tangentielles sont données par les formules suivantes :

$$\sigma_{\theta\theta_I} = \frac{\sigma_{app} \cdot \cos^2 \beta \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \left[ \frac{3}{4} \cdot \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (3.1_{35a})$$

$$\sigma_{\theta\theta_{II}} = \frac{\sigma_{app} \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \left[ -\frac{3}{4} \cdot \sin \frac{\theta}{2} - \frac{3}{4} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (3.1_{35b})$$

Les contraintes tangentielles réduites sont obtenues en divisant les contraintes par

$$\sigma_{00} = \frac{\sigma_{app} \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} :$$

$$\sigma_{\theta\theta_{IR}} = \frac{\sigma_{\theta\theta_I}}{\sigma_{00}} = \frac{3}{4} \cdot \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \quad (3.1_{36a})$$

$$\sigma_{\theta\theta_{IIR}} = \frac{\sigma_{\theta\theta_{II}}}{\sigma_{00}} \cdot \left[ -\frac{3}{4} \cdot \sin \frac{\theta}{2} - \frac{3}{4} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (3.1_{36a})$$

Suivant la direction  $\theta = -\beta$  il vient

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{\sigma_{00}} = \left( \frac{3}{4} \cdot \cos \frac{\beta}{2} + \frac{1}{4} \cdot \cos \frac{3\beta}{2} \right) \cdot \cos^2 \beta + \left( \frac{3}{4} \cdot \sin \frac{\beta}{2} + \frac{3}{4} \cdot \sin \frac{3\beta}{2} \right) \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta \quad (3.1_{37})$$

La figure 3.1\_27 donne le tracé de cette fonction ainsi que de ces deux termes. La décroissance devient nette à partir de 45 degrés qui devrait être la limite de validité de la méthode de la fissure équivalente projetée.

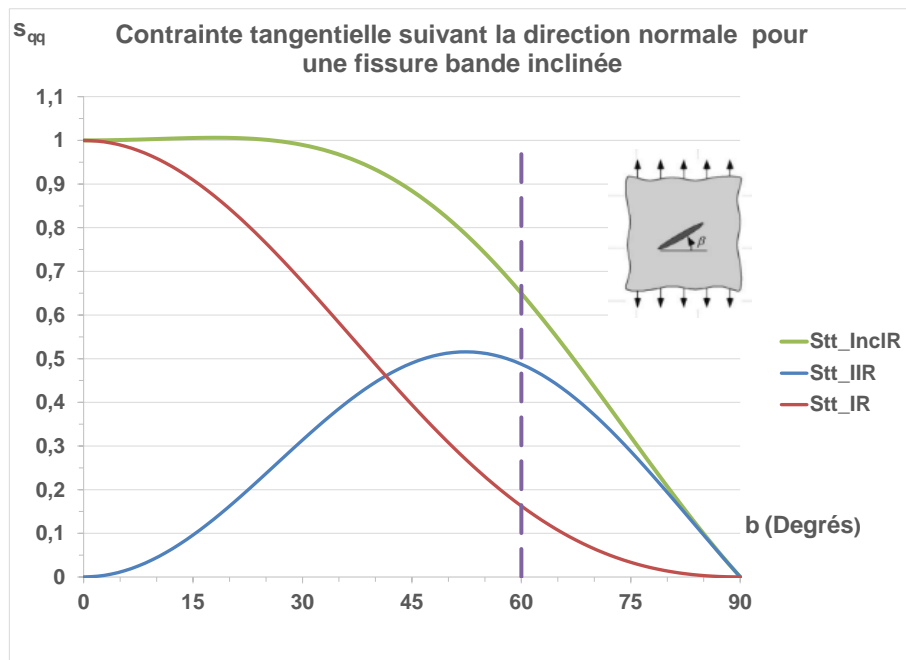
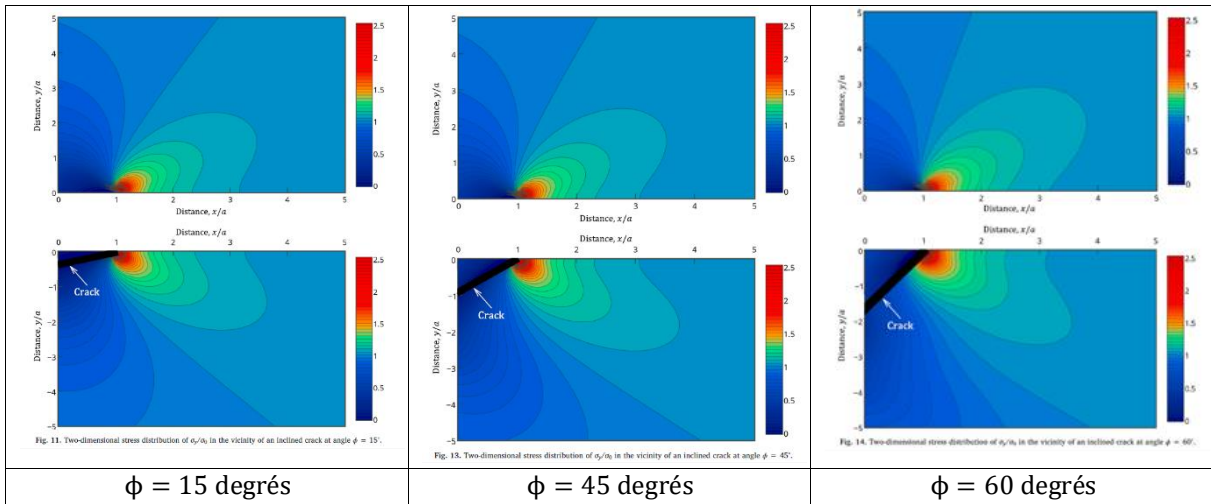


Figure 3.1\_27 : comparaison des contraintes tangentielles en mode I et en mode mixte

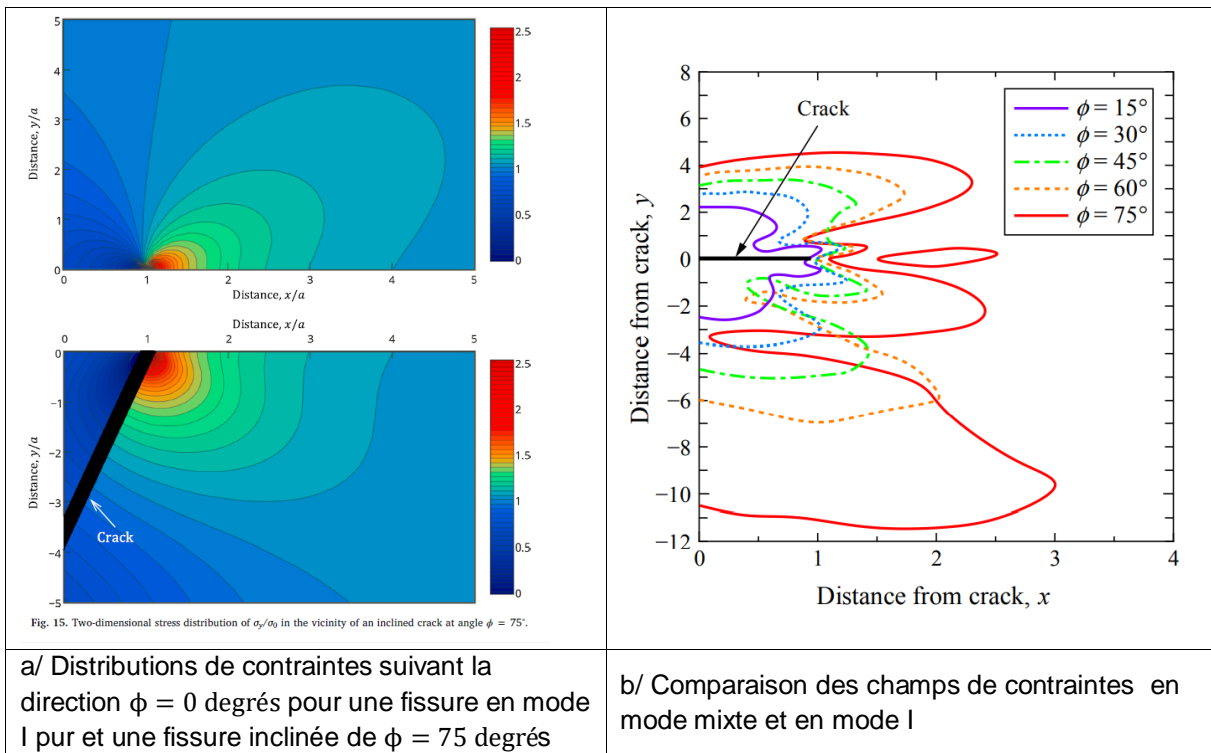
### 3.1.3.2 Interaction de deux fissures bande inclinées

Anis et al. (ANI, 2020) ont analysé de façon simplifiée l'interaction entre une fissure bande et une fissure bande inclinée. La méthode consiste à comparer le champ des contraintes autour d'une fissure isolée située dans un milieu infini (donné par la solution de Westergaard) et le champ des contraintes au voisinage d'une fissure inclinée de même longueur projetée. Ces comparaisons sont illustrées par les figures 3.1.28 et 3.1.29.



**Figure 3.1\_28 : distributions de contraintes suivant la direction perpendiculaire au plan  $\phi = 0$  pour une fissure située dans ce plan en mode I pur et une fissure inclinée de  $\phi$  degrés**

La figure 3.1.29 montre que les distributions de contraintes normales sont proches pour une fissure sollicitée en mode I pur et une fissure inclinée.



**Figure 3.1\_29 : comparaison de champs de contraintes  $\sigma_{zz}$  en mode I et en mode mixte**

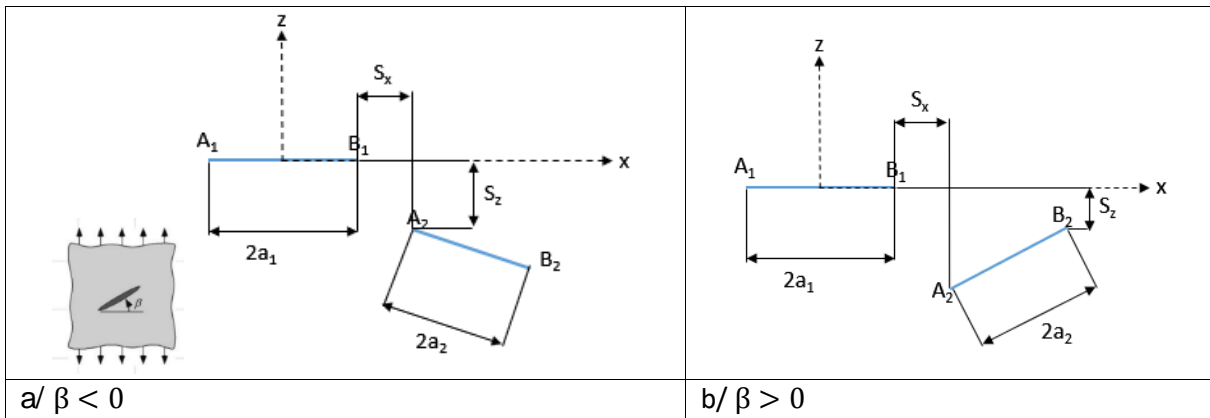
Deux conclusions importantes sont à retenir :

- Les distributions de contraintes suivant la direction de sollicitation sont similaires pour la fissure inclinée et la fissure projetée sur le plan normal à la sollicitation tant que l'angle d'inclinaison reste inférieur à 60 degrés.
- L'écrantage est plus important en mode mixte.

Les auteurs estiment que l'interaction d'une fissure avec une autre fissure coplanaire peut être négligée si la distance est de la moitié de la taille de fissure, ce qui n'est pas correct. Le rapport entre l'écartement  $S_x$  doit être supérieur à la taille de fissure  $2a$  pour que de facteur d'interaction soit de moins de 1,05.

### 3.1.3.3 Solution approchée pour deux fissures bande inclinées

Les configurations sont décrites à la figure 3.1\_30 pour des fissures non écrantées. L'angle  $\beta$  défini l'inclinaison de la fissure 2 par rapport à la direction de traction suivant l'axe  $z$ . Cet angle est considéré comme inférieur à 90 degrés.



**Figure 3.1\_30 : fissures inclinées l'une par rapport à l'autre**

Les fissures sont égales de demi-longueur  $a$ . Mais l'analyse peut être étendue au cas des fissures inégales.

Le facteur d'interaction en pointe interne des deux fissures sont exprimés par :

$$\gamma_{12}(B_1) = \frac{K_{I_{12}}}{K_{I_0}} \quad \text{et} \quad \gamma_{21}(A_2) = \frac{K_{eq_{21}}}{K_{I_{eq}}} \quad (3.1_{38})$$

Ces facteurs dépendent des écartements  $S_x$  et  $S_z$  et de l'angle d'inclinaison  $\beta$ .

Le développement d'une formule analytique pour les fissures inclinées est lourd, surtout en 3D. Il est préférable de suivre le raisonnement de Anis et al. (ANI, 2020) conforté en plasticité par celui de Kikuchi et al. (KIK, 2010) en considérant la projection de la fissure inclinée sur un plan parallèle au plan de la première fissure.

La dépendance vis-à-vis de  $S_z$  nécessite de considérer une fissure projetée sur un plan parallèle passant par la pointe la plus sollicitée. Dans le cas de la figure 3.1\_30a, il s'agit de la pointe  $A_2$ . Dans le cas de la figure 3.1\_30b, choisir la pointe  $A_2$  peut conduire à une sous-estimation de l'interaction, mais retenir le plan passant par  $B_2$  est sûrement pénalisant.

Il faut donc comparer le facteur d'interaction de la fissure inclinée à celui de la fissure projetée passant par la pointe correspondant à l'écartement  $S_z$  le plus faible.

$$\gamma_{21}(B_1) = \frac{K_{eq_{12}}}{K_{I_{eq}}} \quad \text{et} \quad \gamma_{21}(A_2) = \frac{K_{I_{proj_{21}}}}{K_{I_{eq}}}$$

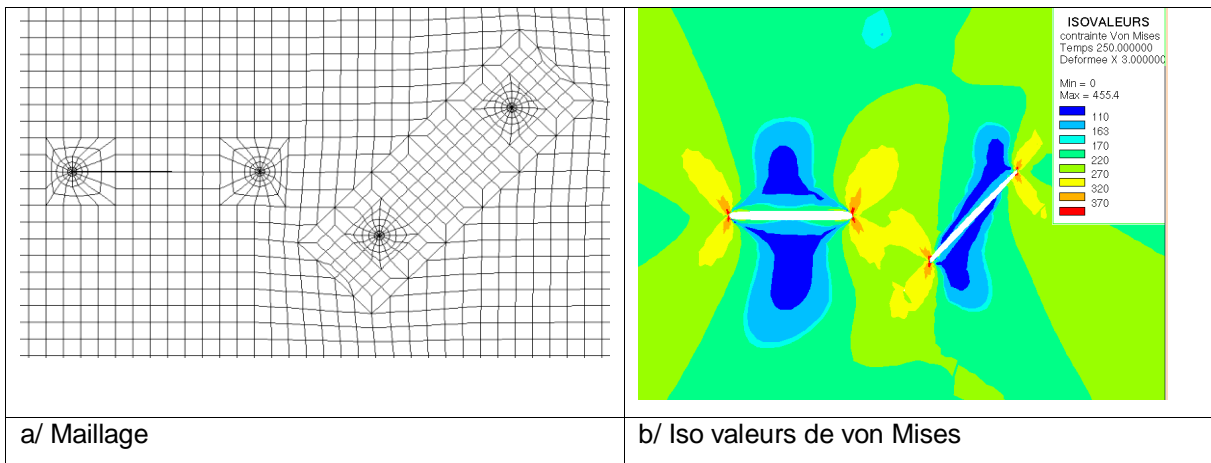
La projection de fissure réduit le paramètre d'interaction, mais aussi la taille de la fissure projetée.

### 3.1.3.4 Analyse des cas traités par FRAMATOME

Framatome a réalisé deux calculs de fissures bande inclinées de longueurs égales (FRA, 1999).

Configuration L1 : Fissure centrée sur Ox inclinée de -45 degrés par rapport à la fissure sollicitée en mode I

Les écartements relatifs valent  $S_x/(2a) = 0,65$  et  $S_z/(2a) = 0,354$ .

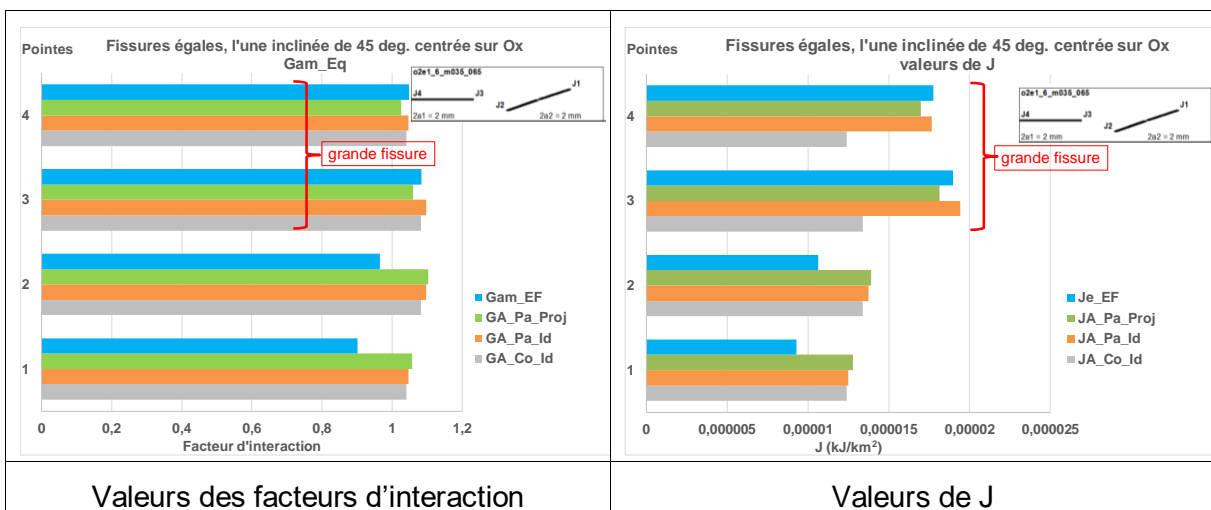


**Figure 3.1\_31 : seconde fissure centrée sur le plan de la première et inclinée à 45 degrés**

Les isovalues de Von Misès sont plus faibles aux pointes de la fissure inclinée et la zone de relaxation des contraintes est bien plus restreinte qu'en mode I (Figure 3.1\_31). La figure 3.1\_32 compare les facteurs d'interaction et les forces fissurantes J aux quatre pointes de fissure pour quatre configurations différentes :

1. Cas calculé par éléments finis
2. Cas où la seconde fissure est projetée sur un plan parallèle à la première passant par la pointe interne de la seconde fissure
3. Cas où la seconde fissure est pivotée autour de la pointe interne de la seconde fissure de façon à être parallèle à la première
4. Fissures égales coplanaires

Dans tous les cas l'écartement  $S_x$  est le même. Les valeurs dans les cas 2 à 4 sont obtenues par application des formules, ce qui explique les légendes en GA et JA.



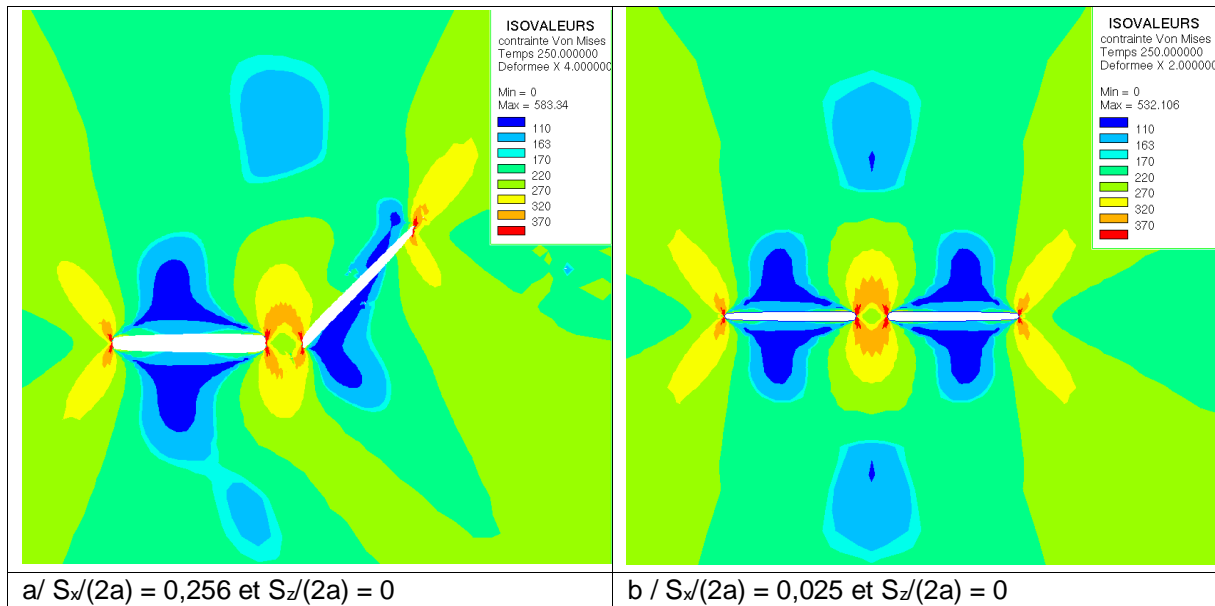
**Figure 3.1\_32 : comparaison des facteurs d'interaction équivalents et de J aux résultats des calculs par éléments finis pour la configuration L1**



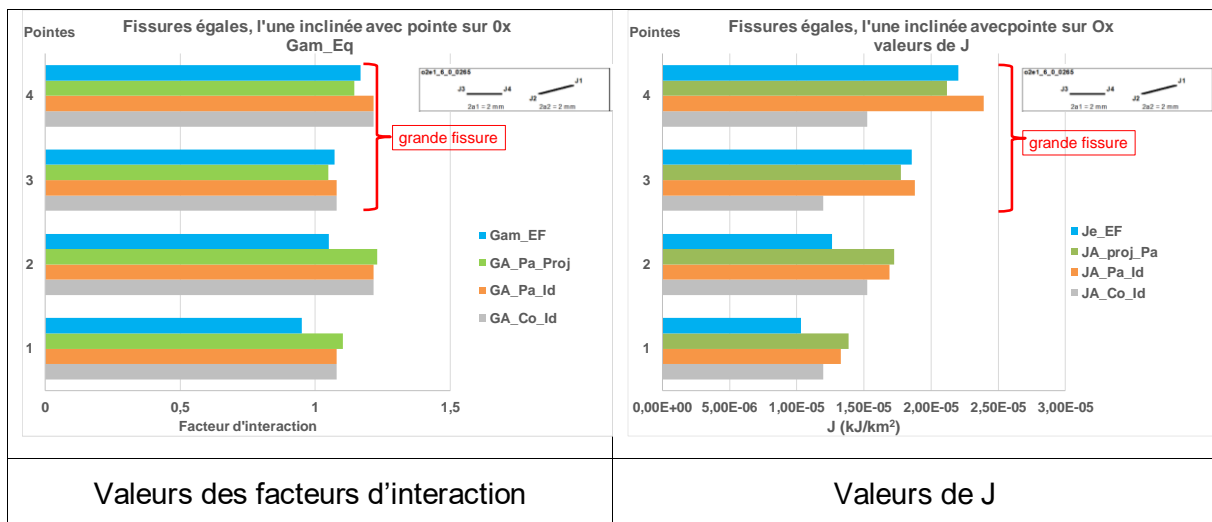
La grande fissure (celle sollicitée en mode I) est la plus nocive. L'approche la plus satisfaisante est celle de la fissure pivotée et celle de la fissure projetée parallèle sous-estime légèrement le résultat calculé par éléments finis. Toutefois c'est l'inverse pour la petite fissure.

Configuration L2 : fissure avec pointe sur 0x inclinée de +45 degrés par rapport à la fissure sollicitée en mode I

Les écartements relatifs valent  $S_x/(2a) = 0,265$  et  $S_z/(2a) = 0$ . Les isovaleurs de Von Mises pour deux configurations avec environ le même écartement horizontal mais dans un cas la seconde fissure est inclinée de 45 degrés et dans l'autre elle est coplanaire sont comparées à la figure 3.1\_33.



**Figure 3.1\_33 : comparaison des isovaleurs de von Mises pour deux configurations avec environ le même écartement horizontal mais dans un cas la seconde fissure est inclinée de 45 degrés et dans l'autre elle est coplanaire**



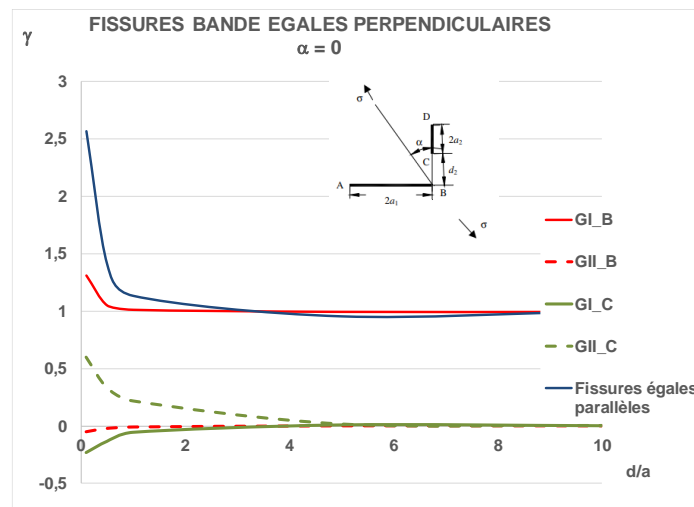
**Figure 3.1\_34 : comparaison des facteurs d'interaction équivalents et de J aux résultats des calculs par éléments finis pour la configuration L2**

La figure 3.1\_34 compare les facteurs d'interaction et les forces fissurantes J aux quatre pointes de fissure pour les quatre configurations différentes retenues pour le cas L1.

La grande fissure (celle sollicitée en mode I) est la plus nocive. Comme dans le cas précédent, l'approche la plus satisfaisante est celle de la fissure pivotée et celle de la fissure projetée parallèle sous-estime légèrement le résultat calculé par éléments finis. Toutefois c'est l'inverse pour la petite fissure.

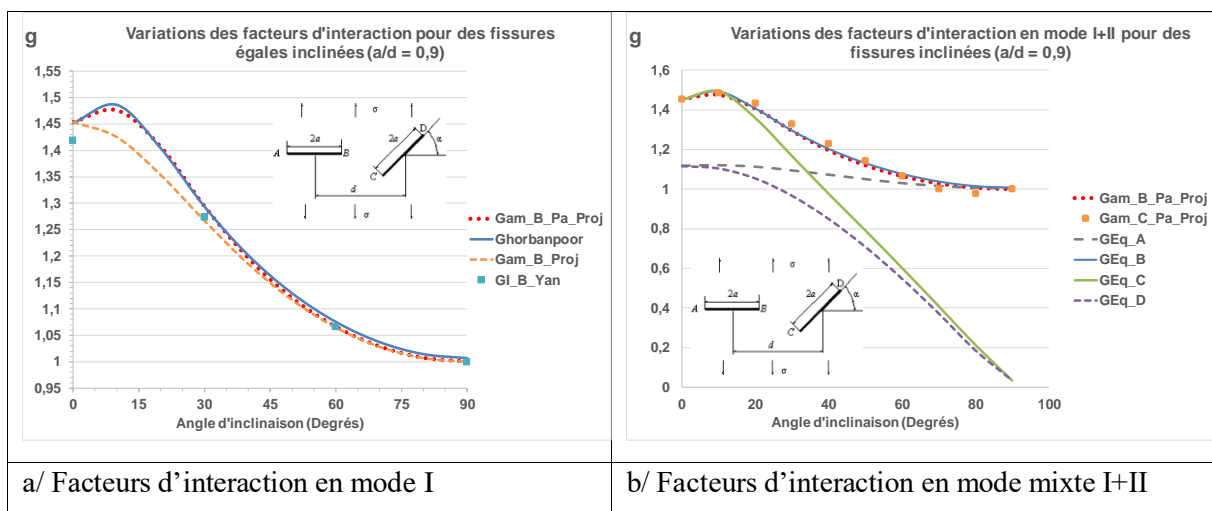
### 3.1.3.5 Autres études de fissures égales, l'une inclinée par rapport à l'autre

Plusieurs autres études ont traité ce problème, notamment Yan (YAN, 2007) dans le cas extrême des fissures perpendiculaires. La figure 3.1\_35 établie pour des fissure égales, montre que l'interaction est faible, mais pas nulle et confinée dans le domaine des distances  $d/a < 0,5$  soit  $\lambda_x < 0,8$ .



**Figure 3.1\_35 : facteurs d'interaction aux pointes les plus proches des deux fissures perpendiculaires**

Plusieurs autres études ont traité le problème, d'une fissure bande incliné par rapport à l'autre (UKA, 1991b ; CHN, 1985 ; YAN, 2010), mais l'étude la plus complète et précise est celle de Ghorbanpoor (GHO, 2020) qui a utilisé un modèle de dislocations et assuré la qualité des intégrations.



a/ Facteurs d'interaction en mode I

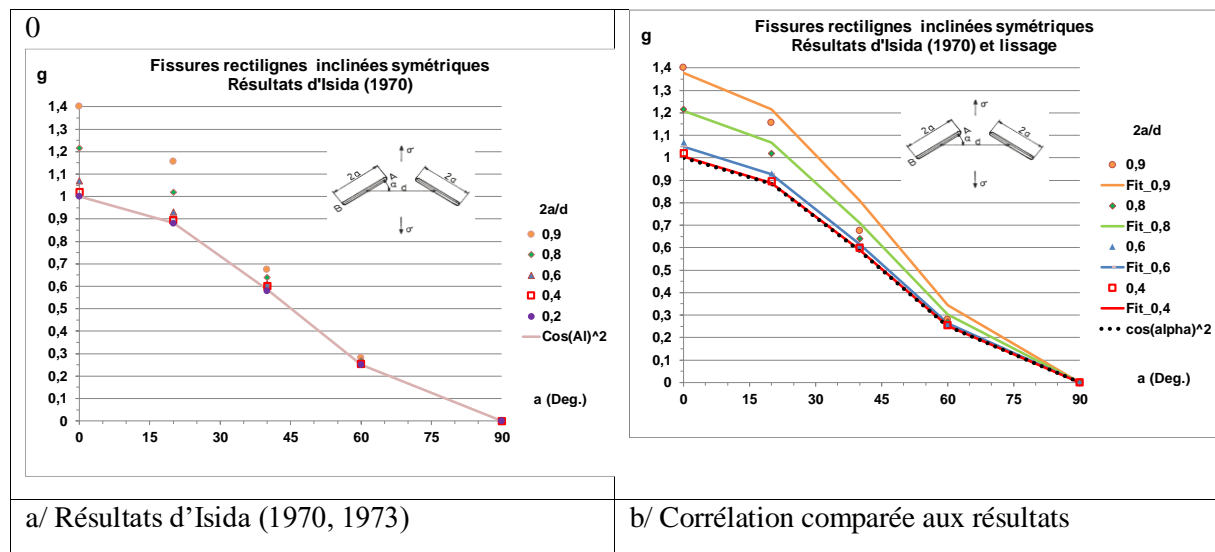
b/ Facteurs d'interaction en mode mixte I+II

**Figure 3.1\_36 : comparaison des facteurs d'interaction en mode I et en mode I+II (équivalent)**

Les deux figures 3.1\_36 a et b valident l'approche par projection du défaut incliné sur le plan parallèle passant par la pointe la plus proche du premier défaut.

### 3.1.3.6 Fissures égales inclinées symétriquement par rapport à l'axe de traction

Les publications d'Isida (ISI, 1970, 1973) ne donnent aucune information sur le mode II et les résultats ne sont fournis que sous forme d'abaques. Les résultats sont fournis par Ukadonger et Naik (UKA, 1991a) pour les comparer à leur approche. Il apparaît que le mode II est négligeable. Les résultats d'Isida sont plus précis et servent de référence à notre analyse.



**Figure 3.1\_37 : comparaison des facteurs d'interaction en mode I et en mode I+II (équivalent) pour deux fissures bandes en V**

Pour une fissure isolée ( $d$  grand devant  $a$ ) le facteur d'interaction est  $\cos^2 \alpha$ . Une corrélation simple s'en déduit. Elle est présentée à la figure 3.1\_37b et a pour équation :

$$\gamma_{\text{Sym}_I} \approx [1 + \lambda^{5.388} \cdot \exp(-0.4522 \cdot \lambda)] \cdot 1.1 \cdot \cos^2 \alpha \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{2a}{d} \quad (3.1_39)$$

Il y a un effet d'écrantage qui dépend de l'écartement et de l'inclinaison des fissures. Pour  $\lambda = \frac{2a}{d} < 0,6$  les fissures sont écartées pratiquement pour toute inclinaison.

### 3.1.3.7 Fissures égales inclinées parallèles

Le cas des fissures inclinées parallèles égales a été traité par de Ghorbanpoor (GHO, 2020) pour des fissures centrées sur l'axe normal à la direction de traction (fissures dites en série, Figure 3.1\_37a) ou sur l'axe de traction (fissures dites parallèles, Figure 3.1\_38b).

Dans les deux cas les facteurs d'interaction de mode I décroissent rapidement avec l'angle  $\alpha$ . Les fissures parallèles sont toutes écartées. Les facteurs d'interaction en mode II sont pratiquement nuls pour les deux configurations (Figure 3.1\_38).

Les auteurs analysent d'autres configuration de ce type notamment en faisant varier les tailles de fissures sans en tirer de conclusions autres que générales.

Le cas le plus sévère est la configuration de type L2.

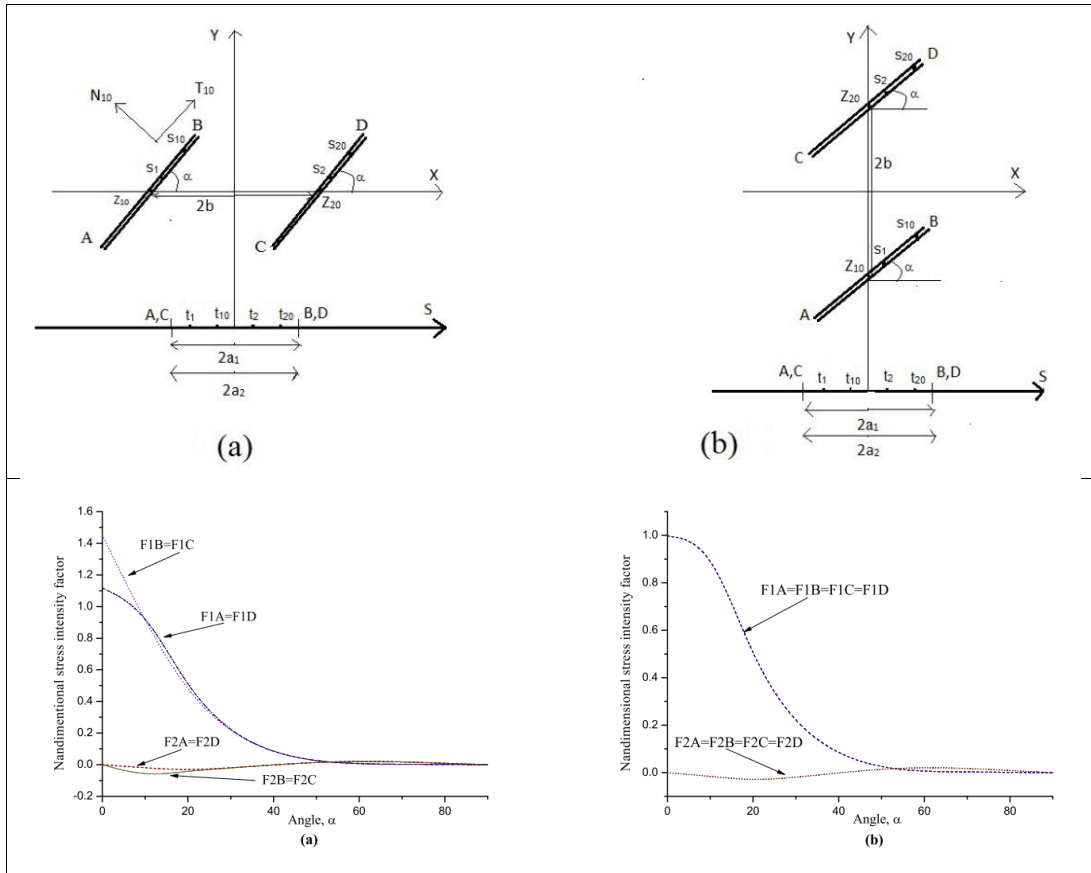


Figure 3.1\_38 : fissures inclinées parallèles (GHO, 2020)

## 3.2 Interaction entre deux fissures elliptiques

Les fissures sont planes et situées dans un massif considéré comme infini sollicité par une traction normale au plan de fissure.

Le problème de l'interaction de deux fissures elliptiques interagissantes comporte un nombre de paramètres beaucoup plus important que pour les fissures bande. Les fissures ont deux dimensions et la courbure varie le long de leur front. Ceci introduit les nouveaux paramètres suivants :

- La forme de fissure exprimée par le rapport d'aspect
- La différence de rapport d'aspect entre deux ellipses
- L'écartement des axes dans les deux directions du plan
- L'orientation des axes
- L'inclinaison des plans de fissures pour des axes non parallèles

Les solutions pour les fissures sollicitées en mode II et III dépendent du coefficient de Poisson. Le coefficient de Poisson vaut 0,3 dans calculs effectués par EDF ou ESI.

En dépit de ces différences par rapport aux cas des fissures bande ou des fissures disque, le modèle proposé conserve ses mêmes fondements :

- Pour des fissures coplanaires :

$$\gamma_{12}(P) = 1 + A \cdot \left[ F_{W\_E\_co} \left( \frac{c}{a}, \lambda_x, \lambda_y \right) - 1 \right] \quad (3.2\_1)$$

$$\lambda_x = \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 + S_x} \quad \lambda_y = \frac{c_1 + c_2}{c_1 + c_2 + S_y} \quad (3.2\_2)$$

La fonction de forme A dépend de la taille relative des fissures  $\zeta = \frac{a_1}{a_2}$ , du rapport d'aspect  $\frac{c}{a}$  de la fissure considérée, d'un paramètre décrivant le rapport des courbures aux points d'interaction et de nature (grande ou petite) de la fissure considérée.

- Pour des fissures parallèles :

$$\gamma_{12}(P) = F_{W\_E\_Pa} \left( \frac{c}{a}; \frac{x_D}{l}; \frac{y_D}{l}; \frac{z}{l} \right) \quad (3.2\_2)$$

La valeur de  $x_D$  et/ou de  $y_D$  sont déterminées comme pour les fissures bande.

La longueur  $l$  est liée à la taille des fissures et doit être cohérente avec la définition des  $\lambda$ .

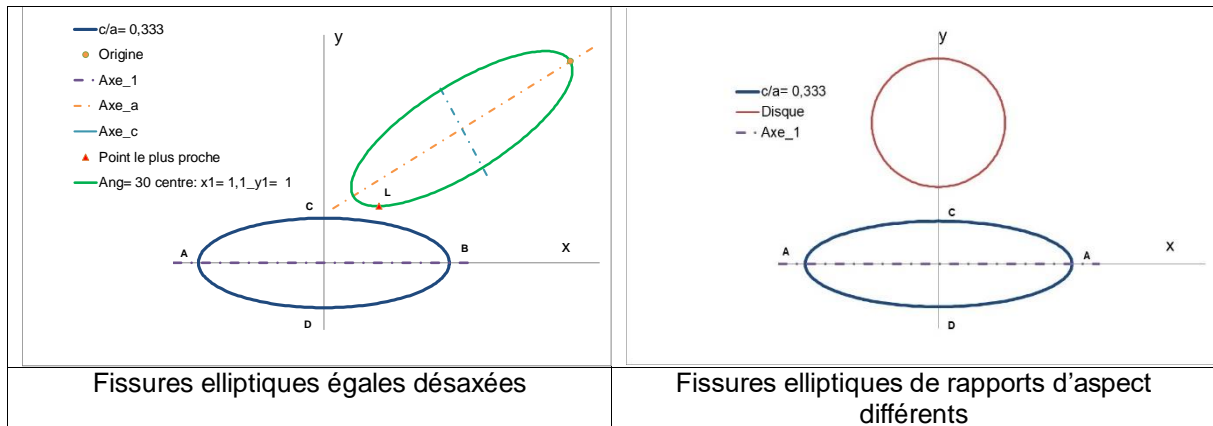
- Pour des fissures inclinées : application de la règle de rotation pour se ramener au cas de fissures parallèles comme pour les fissures disque.

Il faut donc disposer de la fonction de type Westergaard  $F_{W\_E}$  et déterminer la fonction A. Au total il y a 4 paramètres pour la fonction plus 3 paramètres décrivant les écartements relatifs pour la fonction  $F_{W\_E}$

Pour les fissures enfouies non écrantées, c'est l'interaction au co-vertex qui est la plus pénalisante, point du front où le FIC de la fissure isolée est le plus élevé.

### 3.2.1 Fissures elliptiques coplanaires égales

La Figure 3.2\_1 décrit deux des configurations de fissures coplanaires. Elles subissent une traction normale. Les points au vertex sont appelés A et B et au covertex C et D. Les demi-axes sont nommés a suivant x et c suivant y pour être plus proches des conventions du code RSE-M (RSE-M, 2010). Dans le cas général, les points les plus proches sont désignés par L en raison du lien avec la définition des paramètres d'écartement  $\lambda_x$  et  $\lambda_y$ . L'écartement vertical relatif est mesuré par  $\frac{S_z}{2a}$ . Les fissures sont indexées par les chiffres 1 et 2.

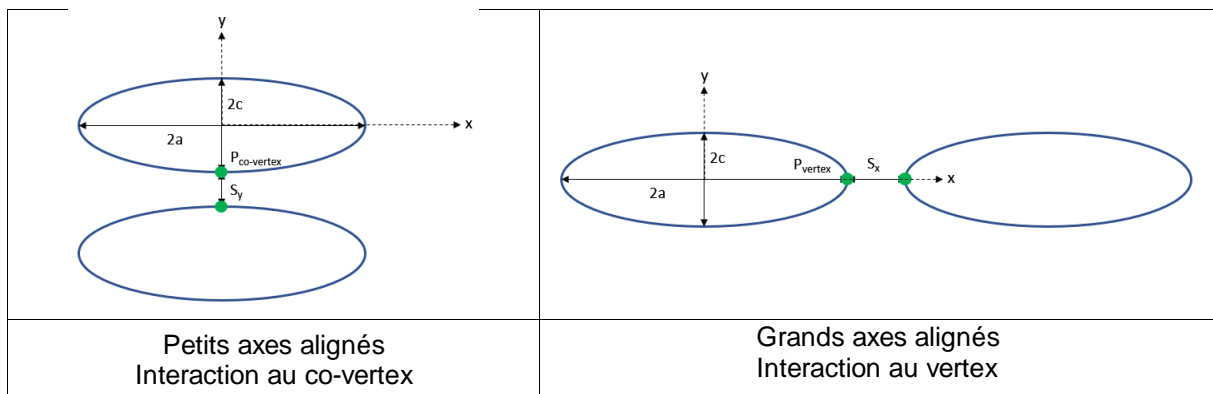


**Figure 3.2\_1 : fissures elliptiques coplanaires**

Dans notre encodage des fonctions la fissure elliptique a pour grand axe  $2a$  porté par  $x$  et l'abscisse curviligne, décrite par l'anomalie excentrique  $\varphi$  a son zéro en pointe de la fissure  $(a, 0, 0)$ .

### 3.2.1.1 Fissures elliptiques coplanaires égales ayant un axe commun

La Figure 3.2\_2 décrit les deux configurations des fissures ayant un axe commun.



**Figure 3.2\_2 : fissures elliptiques coplanaires égales ayant une direction d'axe en commun**

Plusieurs études ont traité le problème par calcul numériques, mais très peu de formulations approchées sont disponibles : la solution d'Azuma (AZU, 2017) et l'approche de la taille de fissure équivalente qui a été commentée au chapitre 2 (CHB, 2018).

### 3.2.1.2 Formules empiriques d'Azuma et Li

Azuma et Li (AZU, 2017) ont proposé les formules empiriques à partir de leurs résultats de calculs aux éléments finis pour l'interaction de fissures elliptiques égales.

$$\gamma = \begin{cases} 0.99 + 0.04 \frac{\sqrt{a \cdot c}}{S_x} & \text{pour } 0.33 \leq D \leq 4 \\ 1 & \text{pour } D > 4 \end{cases} \quad (3.2_3)$$

au co-vertex  $D = \frac{S_x}{\sqrt{a \cdot c}}$

Au vertex  $D = \frac{S_x}{c}$

La comparaison de l'application de ces formules à l'interaction au vertex (Figure 3.2\_3) avec les résultats de calculs aux éléments finis d'EDF (DEE, 2018) et ESI (SYSTUSTM, 2020) montre une très bonne cohérence.

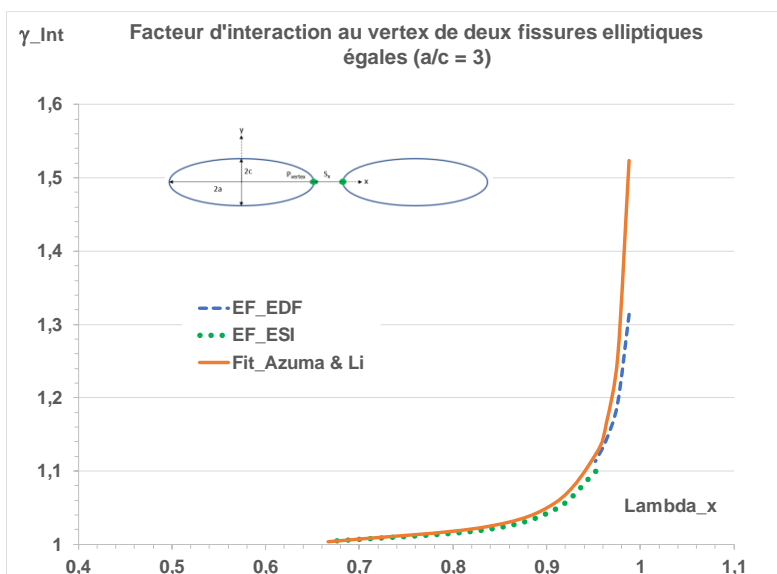


Figure 3.2\_3 : facteurs d'interaction pour deux fissures elliptiques coplanaires égales ayant des grands axes alignés

### 3.2.1.3 Solution approchée pour deux fissures elliptiques coplanaires égales

Le facteur d'interaction est exprimé par la formule suivante :

$$\gamma_{12}(P_1) = \gamma_{21}(P_2) = \gamma(P) = 1 + A \cdot \left[ F_{W_E} \left( \frac{c}{a}, P_{Int} \right) - 1 \right] \quad (3.2_4)$$

Pour les fissures coplanaires, aux pointes intérieures  $P_{Int}$  en vertex la fonction de calcul par  $F_{W_E} \left( \frac{c}{a}, \frac{1}{\lambda_x}, 0, 0 \right)$ . Au co-vertex,  $F_{W_E} \left( \frac{c}{a}, P_{Int} \right)$  se calcule par  $F_{W_E} \left( \frac{c}{a}, 0, \frac{1}{\lambda_y}, 0 \right)$ .

#### *Fonction de Westergaard pour les fissures elliptiques coplanaires*

La solution exacte du problème d'une fissure elliptique se trouvant dans un solide élastique isotrope infini, a été dérivée par A. Green et I. Sneddon (GRS, 1950) et explicitée plus tard par Kassir (KAS, 1975). La contrainte normale s'exprime comme suit :

$$\frac{\sigma_{zz}(x,y)}{\sigma_{app}} = F_{W_E.co} = \frac{1}{E(k)} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{\frac{\xi_E}{c^2} \cdot \left(1 + \frac{\xi_E}{a^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{\xi_E}{c^2}\right)}} + \frac{\text{sn}(u) \cdot \text{cn}(u)}{\text{dn}(u)} - \varepsilon(u,k) \right\} \quad (3.2_5)$$

$\varepsilon(u,k)$ ,  $\text{sn}(u)$ ,  $\text{cn}(u)$  et  $\text{dn}(u)$  sont des fonctions elliptiques jacobienues (ABS, 1964).  $\xi_E$  a la dimension du carré d'une coordonnée cartésienne.

Avec :

$$\xi_E = a^2 \cdot \frac{\text{cn}^2(u)}{\text{sn}^2(u)} \quad (3.2_6)$$

$E(k)$  est l'intégrale elliptique de seconde espèce telle que  $E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \phi} \cdot d\phi$  (3.2\_7a)

Les paramètres  $a$  et  $c$  sont les demi-axes de l'ellipse.

$$k = \begin{cases} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{c}\right)^2} & \text{si } \frac{a}{c} \leq 1 \\ \sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2} & \text{si } \frac{c}{a} \leq 1 \end{cases} \quad (3.2_7b)$$

$$u = \text{sn}^{-1} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\xi_E}{a^2}}} \right], \text{ ce qui équivaut à } u = \int_0^{\text{sn}(u,k)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} \quad (3.2_8)$$

Avec  $0 \leq k \leq 1$  et  $-1 \leq \text{sn}(u, k) \leq 1$

La variable  $u$  est exprimé par l'intégrale de Legendre de première espèce.

$\xi_E$  varie de 0 à l'infini, donc dans le cas présent,  $\text{sn}(u, k)$  varie de 1 à 0, donc  $u$  varie de  $k$  à 0.

$$\frac{2\xi_E}{a^2} = \left(\frac{r}{a}\right)^2 - \left[1 + \left(\frac{c}{a}\right)^2\right] + \frac{\sqrt{\Delta}}{a^2}$$

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{a^2} = \sqrt{\left[1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{r}{a}\right)^4 - 2\left[1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2\right] \cdot \left(\frac{x-y}{a}\right)^2} \quad (3.2_9)$$

### **Fonction de forme A**

La fonction de forme  $A()$  est déterminée par identification avec des résultats numériques jugés fiables. Au moins 4 à 5 espacements sont nécessaires pour effectuer une identification de préférence dans la plage  $0,5 \leq \lambda \leq 0,98$ .

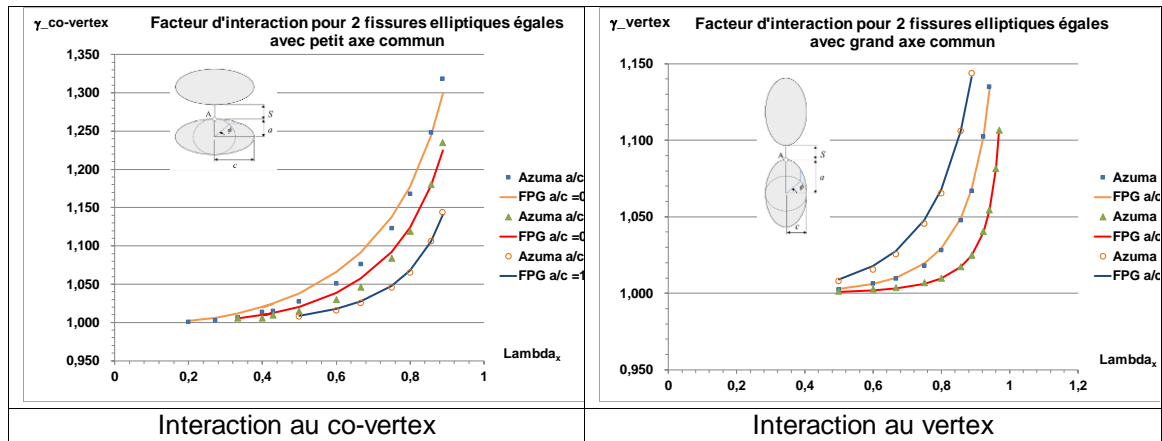
De très nombreux résultats de la littérature (KOB, 1965 ; NIM, 1974 ; AZU, 2017 ; CHA, 2020) ont été utilisés, en plus de ceux obtenus par EDF (DEE, 2018 ; SYSTUS™, 2020), afin d'établir une expression analytique de la fonction  $A$ . Cette expression est lissée sur des résultats de calculs numériques de précisions différentes, nous avons donc accordé plus de poids aux solutions les plus fiables. L'étude de Nisitani (NIM, 1974) ne porte que sur 3 espacements : il a donc fallu ajuster les valeurs en utilisant les résultats pour les fissures bandes ( $a/c = 0$ ) et les fissures disques, connues de façon plus précises.

En utilisant la formule de la moyenne, il est possible de démontrer que les résultats de  $A$  doivent être identiques si la seconde fissure a ses deux axes parallèles à la première (les fissures sont coplanaires et  $\lambda_x$  et  $\lambda_y$  varient) et que les différences de courbure aux points les plus proches sont négligeables. Ceci justifie le fait de moyenniser les résultats de Azuma (AZU 2017).

Les valeurs de la fonction  $A$  obtenues à partir de l'analyse des références mentionnées plus haut sont rassemblées au tableau 3.2\_1.

La figure 3.2\_4 compare les résultats de facteurs d'interaction estimés aux vertex et co-vertex de deux ellipses égales (de longueur  $2c$ ), coplanaires, de petit ou grand axe commun, entre calculs éléments finis d'une part (AZU 2017) et formules analytiques d'autre part.



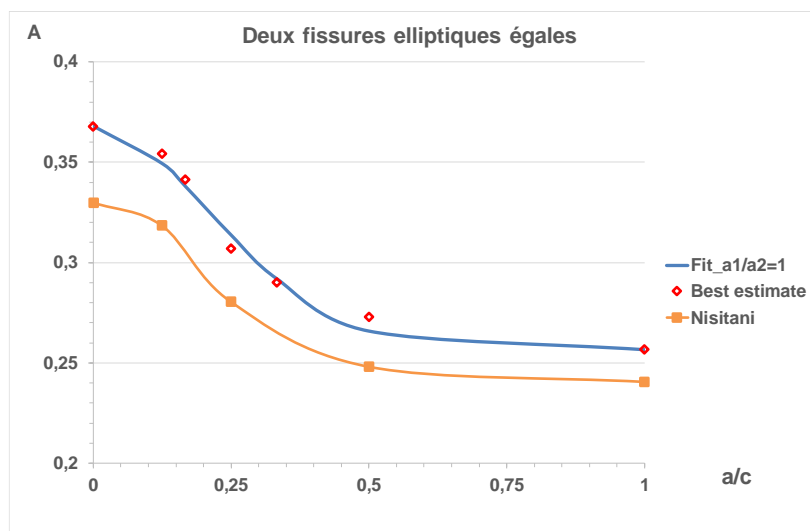


**Figure 3.2\_4 : facteurs d'interaction  $\gamma$  en fonction du ratio d'espacement  $\lambda$  pour des fissures elliptiques coplanaires égales – comparaison des résultats de calculs éléments finis aux formules analytiques**

$a/c$	$A_{co-vertex}$	$A_{vertex}$	$A_{sélection}$	Remarques
0	0,368	0,368	0,368	Valeur de $A(0)$
0,125	-	0,35 (KOB, 1965 ; NIM, 1974)	0,354	Valeur ajustée
0,1667	-	0,34 (CHA ; 2020)	0,341	
0,25	0,297 [33]	0,320 (AZU, 2017)	0,309	Moyenne
0,3333	-	0,293 (DEE, 2018)	0,293	Corrections à partir de calculs ESI
0,5	0,270 [33]	0,276 (AZU, 2017)	0,273	Moyenne
1	0,257	0,257	0,257	Valeur de $A(1)$

**Tableau 3.2\_1 : valeurs du facteur A pour des fissures elliptiques égales coplanaires**

La variation de la fonction A avec  $a/c$  peut être représentée par une courbe proche d'une sigmoïde dont les bornes sont déterminées par les valeurs de la fonction A pour  $a/c = 0$  et 1 (Cf. Figure 3.2\_5). Un plus grand nombre de calculs éléments finis permettrait d'affiner la précision de cette fonction. Son expression est fournie au § 3.2.2 consacré aux fissures elliptiques coplanaires inégales.

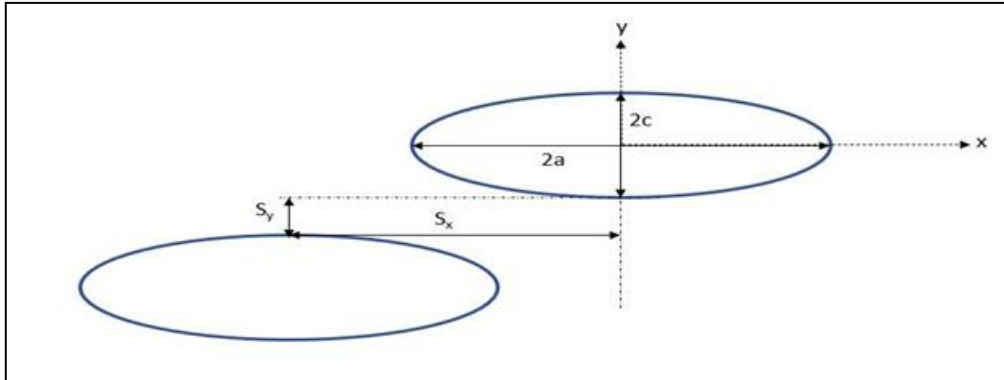


**Figure 3.2\_5 : variations de la fonction A avec le rapport d'aspect des 2 ellipses égales interagissantes**

### 3.2.1.4 Fissures elliptiques coplanaires égales décalées

Dans tous les cas de figure, l'interaction la plus forte entre deux fissures a lieu aux points les plus proches.

La configuration des fissures décalées qui a été validée est décrite à la figure 3.2\_6. Dans ce cas les grands axes sont parallèles.



**Figure 3.2\_6 : fissures elliptiques coplanaires égales de grands axes parallèles décalés**

La formule du facteur d'interaction pour des fissures elliptiques coplanaires (3.1\_10) est applicable avec A qui ne dépend pas de la position de la fissure car les axes sont parallèles, mais il faut définir les paramètres d'écartement.

Dans le cas de fissures ayant un axe commun le paramètre d'écartement relatif  $\lambda$  est défini comme le rapport des longueurs de fissure à la distance des centres. Par exemple pour deux fissures elliptiques de grands axes  $a_1$  et  $a_2$  :

$$\lambda_x = \frac{a_1 + a_2}{e_x} \quad \text{avec} \quad e_x = a_1 + a_2 + S_x$$

En s'inspirant de l'expression du FIC au point courant de l'ellipse proposée par Tada et Paris (TPI, 1973) (Figure 3.2\_7), le paramètre d'écartement est défini par :

$$\lambda_p = \frac{l_1 + l_2}{e_x} \quad \text{avec} \quad e_p = l_1 + l_2 + S_p \quad (3.2_{10})$$

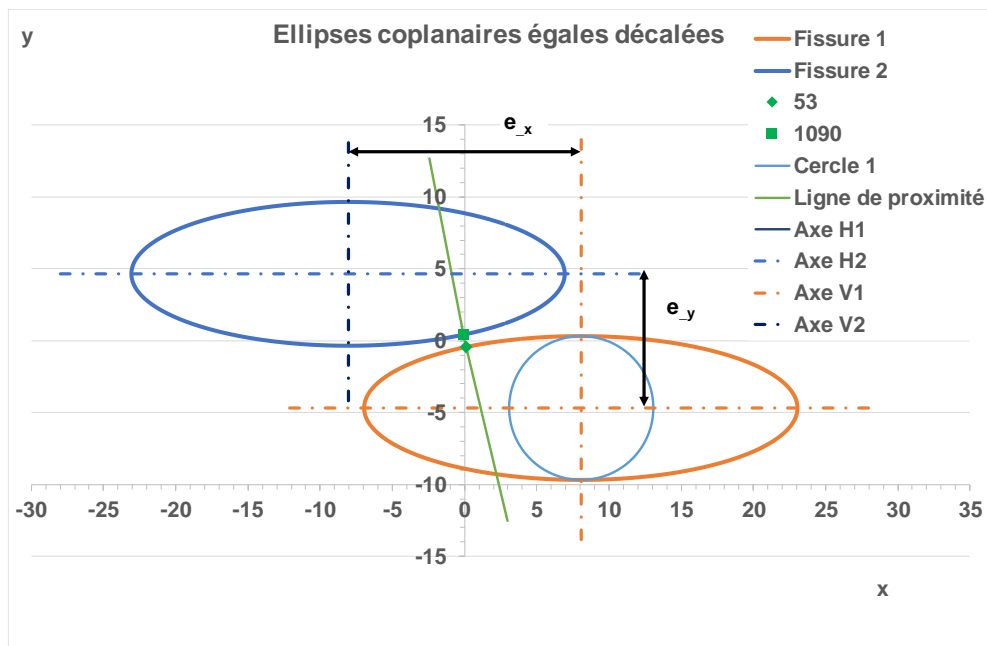
Où  $S_p$  est la distance entre les deux points  $P_1$  et  $P_2$ . Et  $l_1$  et  $l_2$  les distances des points  $P_i$  aux points d'intersection de la normale avec les axes des ellipses.

	<p>Avec <math>c</math> et <math>\phi</math> à la place de <math>b</math> et <math>\theta</math> sur la figure ci-contre :</p> $K_{I\infty}(\phi) = \frac{\sigma_{app}}{E(k)} \cdot \sqrt{\pi \cdot c} \cdot \left[ \sin^2 \phi + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \cos^2 \phi \right]^{\frac{1}{4}} \quad (3.2_{11})$ <p>Distance du point courant suivant la normale à l'axe :</p> $l = c \cdot \left[ \sin^2 \phi + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \cos^2 \phi \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.2_{12})$ <p>Donc</p> $K_{I\infty}(\phi) = \frac{\sigma_{app}}{E(k)} \cdot \sqrt{\pi \cdot l}$
--	---

**Figure 3.2\_7: autre expression de K pour une fissure elliptique enfouie (TPI, 1973, part IV)**

Application au cas traité par ESI

La configuration est décrite à la figure 3.2\_8, le maillage à la Figure 3.2\_9.



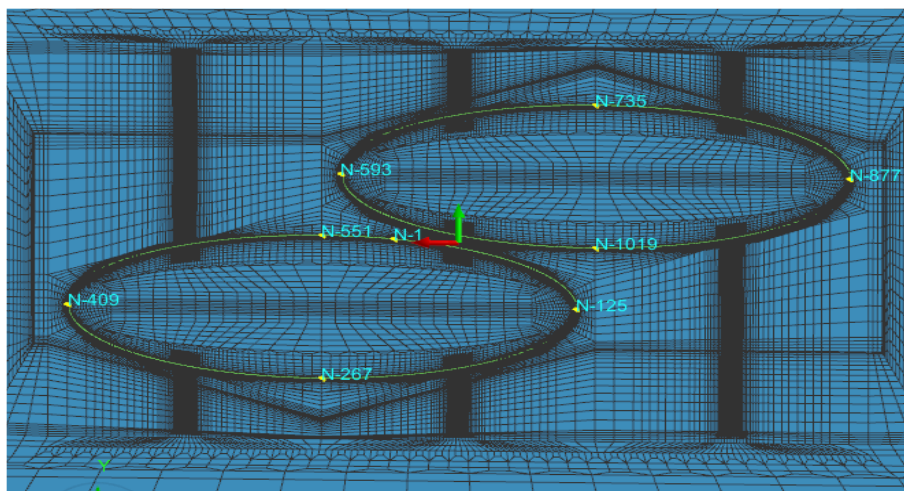
**Figure 3.2\_8 : analyse de l'interaction entre fissures décalées**

Les points des ellipses les plus proches portent les numéros 53 et 1090.

En appliquant le théorème de Thalès,

$$\lambda_p \equiv \lambda_y = \frac{e_y - S_y(P_1, P_2)}{e_y}$$

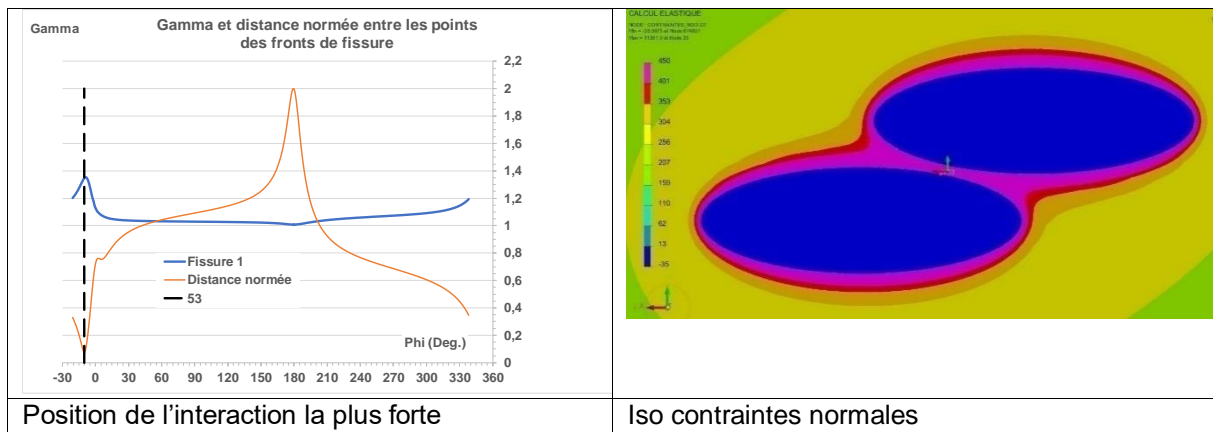
Si les petits axes étaient parallèles, l'écartement  $e_x$  serait utilisé.



**Figure 3.2\_9 : maillage des fissures décalées**

Bien que le calcul de la force d'extension de fissure ne semble pas correct sur tout le front, peut-être du fait d'une mauvaise orientation des mailles le long di front, le rapport des FIC calculés sur les fissures interagissantes et la fissure isolée apporte des informations, physiquement acceptables.

La figure 3.2\_10 montre que l'interaction la plus forte a bien lieu aux points les plus proches.



**Figure 3.2\_10 : interaction entre fissures elliptiques égales coplanaires décalées**

Le calcul aux éléments finis donne  $\gamma_{12}(P_1) = \gamma_{21}(P_2) = 1,353$ . Ce qui est légèrement inférieur à la valeur obtenue pour deux fissures égales interagissant au co-vertex pour une même valeur de paramètre d'écartement  $\lambda$ .

Avec la valeur  $A=0,293$  établie pour des fissures égales coplanaires, la formule prédit la même valeur. Ce traitement des fissures décalées est étendu aux désaxées au § 3.4.1.2 pour l'interaction avec la surface libre.

### 3.2.2 Fissures elliptiques coplanaires inégales

Il y a deux types de différences entre deux ellipses de même orientation : la taille et le rapport d'aspect. C'est le premier type qui a été le plus souvent étudié.

#### 3.2.2.1 Fissures elliptiques coplanaires de tailles différentes

Les effets de différences de taille ont été exprimé par des fonctions de forme  $A$  pour les fissures bande et les fissures disque.

ESI a effectué une série de calculs d'interaction entre deux ellipses de même rapport d'aspect  $a/c=3$  mais de tailles différentes ( $\zeta = 2$ ).

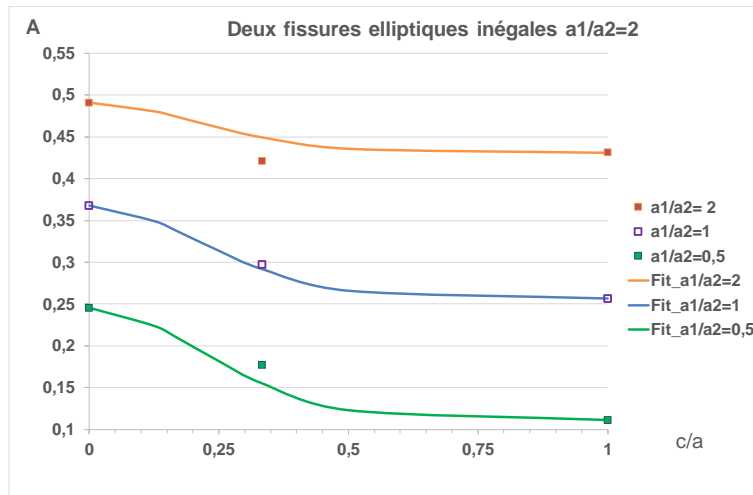
En imposant aux valeurs relatives aux fissures bande et disque les variations  $A(\zeta)$  et en conservant la forme de la sigmoïde établie pour des fissures coplanaires alignées, une fonction  $A\left(\frac{c}{a}, \zeta\right)$  est obtenue telle qu'illustrée à la figure 3.2\_11 et décrite par l'équation suivante :

- Pour  $\frac{c}{a} = 0$   $A\left(\frac{c}{a}, \zeta\right) \equiv A(0, \zeta)$
- Pour  $1 \geq \frac{c}{a} > 0$

$$A\left(\frac{c}{a}, \zeta\right) = \frac{1}{1 + p * \exp\left[q \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^r\right]} + s \quad (3.2_{13})$$

Avec  $p = \frac{1}{A(0, \zeta) - A(1, \zeta)} - 1$        $s = A(1, \zeta)$        $q = 9,2$        $r = 1,84$

Pour  $\frac{c}{a} > 1$   $\frac{c}{a}$  est change en  $\frac{a}{c}$ .



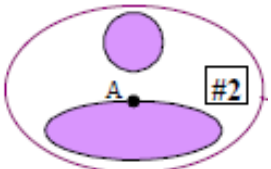
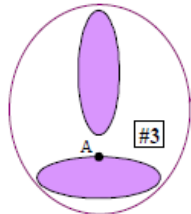
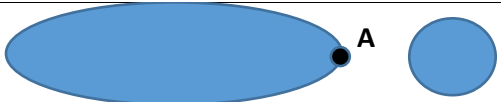
**Figure 3.2\_11 : variations de la fonction A avec le rapport d'aspect et la taille relative des deux ellipses coplanaires interagissantes**

### 3.2.2.2 Fissures elliptiques coplanaires de rapport d'aspect différents

Etude de Chapuliot et Blouin

S. Chapuliot et Blouin (CHB, 2018) ont considéré 6 cas de fissures coplanaires elliptiques. Les paramètres sont fournis au tableau 3.2\_2a et b, les résultats au tableau 3.2\_3.

Le détail des configurations avec rapports d'aspect différents est fourni dans le tableau 3.2\_2a. Seul un de ces cas (N°2) a été analysé pour des fissures parallèles. Les auteurs ont aussi considéré les cas parents (nommé 1, 4 et 6 dans l'étude), c.à.d. avec fissures interagissantes égales et même écartement.

Paramètres	$c1/a_1$	$c2/a_2$	$S_x/(2a_1)$	$S_y/(2a_1)$	$S_z/(2a_1)$
 #2 et cas 8	1/3	1	0	0,5	0
 #3	1/3	3	0	0,5	0
 #5	1/3	1	0,5	0	0

**Tableau 3.2\_2a : écartements relatifs dans le plan pour différentes fissures**

Pour les fissures identiques, la formule établie pour des fissures elliptiques égales coplanaires donne des valeurs très proches des résultats de Chapuliot (Tableau 3.2\_3b).

Cas	Configuration	A	Gam_E	Gam_EF	Ecart
1		0,2923	1,0734	1,0638	0,91%
4		0,2923	1,0264	1,0256	0,07%
6		0,2567	1,0269	1,0344	-0,72%

**Tableau 3.2\_2b : comparaison des facteurs d'interaction prédits et calculés par éléments finis pour des fissures coplanaires égales**

Pour les fissures de rapports d'aspect différents, les écarts par rapport à la formule sont significatifs.

Cas	A	Gam_E	Gam_EF	Ecart
2	0,2923	1,0736	1,0203	5,21%
3	0,5332	1,1554	1,0226	25,45%
5	0,0972	1,0009	1,0233	-2,18%

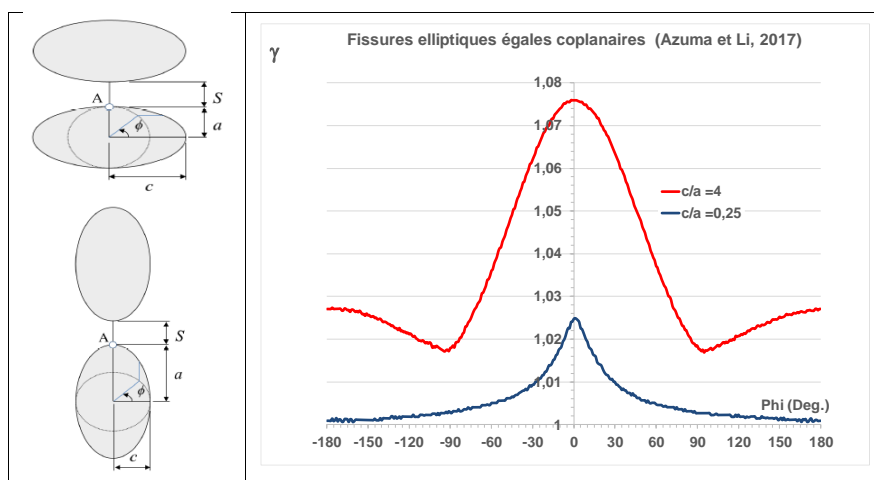
**Tableau 3.2\_3 : comparaison des facteurs d'interaction prédits et calculés par éléments finis pour des fissures coplanaires inégales**

Etudes de Lacroix, Dulieu, Hasegawa et al.

Ces études portent principalement sur des fissures parallèles ou inclinées. Le cas des fissures de rapport d'aspect différents est traité au § consacré aux fissures parallèles dans lequel nous établirons la formulation simplifiée pour ce cas.

### 3.2.3 Variations le long du front

Les variations du facteur d'interaction le long du front de fissures elliptiques diffère notablement suivant la position relative des fissures. La figure 3.2\_12 illustre ce point pour l'interaction au vertex et au co-vertex (AZU, 2017).

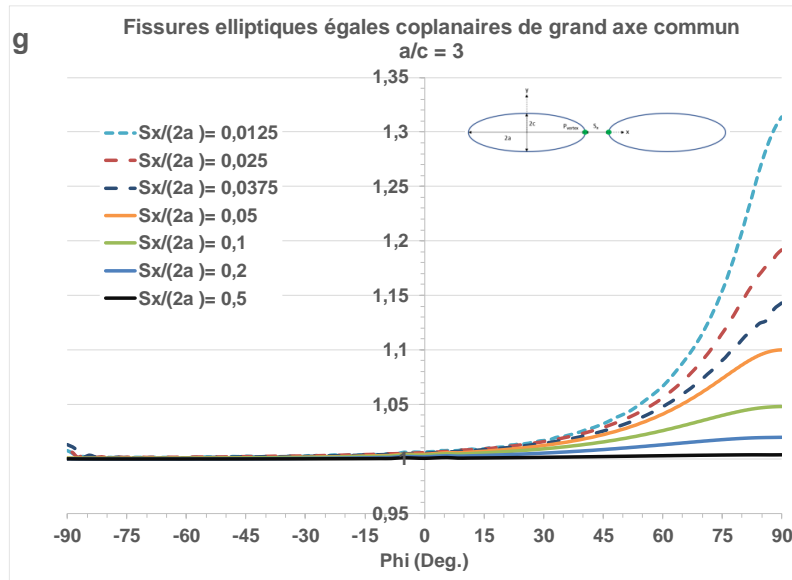


**Figure 3.2\_12 : variations du facteur d'interaction le long du front de fissures elliptiques égales de petit axe ou grand axe commun ( $a/c=0,25$  et  $4$ )**

Si les fissures sont décalées ou désorientées, les formes des courbes perdent la symétrie.

Interaction au vertex pour a/c = 3

Les variations le long du front de fissures elliptiques égales de grand axe commun avec un rapport d'aspect de 3 ont été calculées par EDF (DEE, 2018) et ESI (SYSTUS™, 2020). Elles sont représentées à la figure 3.2\_13.



**Figure 3.2\_13 : variations du facteur d'interaction le long du front de fissures elliptiques égales de grand axe commun (a/c=3). Les résultats de calcul d'EDF sont en pointillés.**

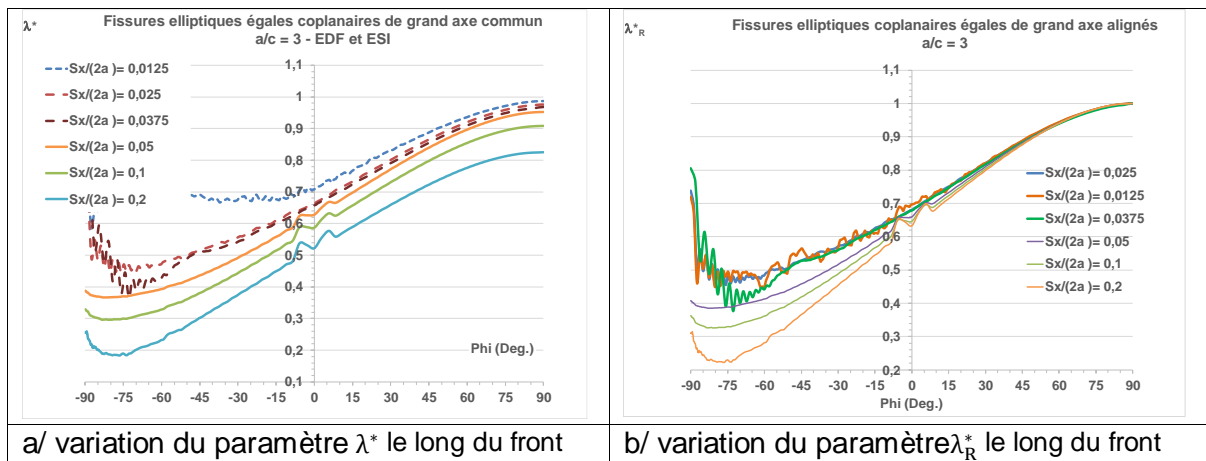
De même que pour les fissures disque l'inversion de la formule du facteur d'interaction pour des fissures égales (3.2.4) en prenant une valeur de la fonction A de 0,292 fait apparaître un décalage quasi-constant (Figure 3.2\_14a). En apportant la valeur des  $\lambda^*(\phi)$  à la valeur de  $\lambda^*(90^\circ)$  les courbes se confondent presque en une courbe maîtresse (Figure 3.2\_14b).

La valeur  $\lambda^*(90^\circ)$  est celle de la variable  $\lambda_x = \frac{2a}{2a + S_x}$ . La dispersion des résultats pour des points du front éloignés s'explique par une moins grande finesse de maillage dans cette région et par le fait que la procédure d'inversion donne des résultats moins précis pour des faibles valeurs du facteur d'interaction. Au voisinage du co-vertex (0 degrés) les irrégularités de traitement du calcul de G apparaissent dans les cas traités par ESI.

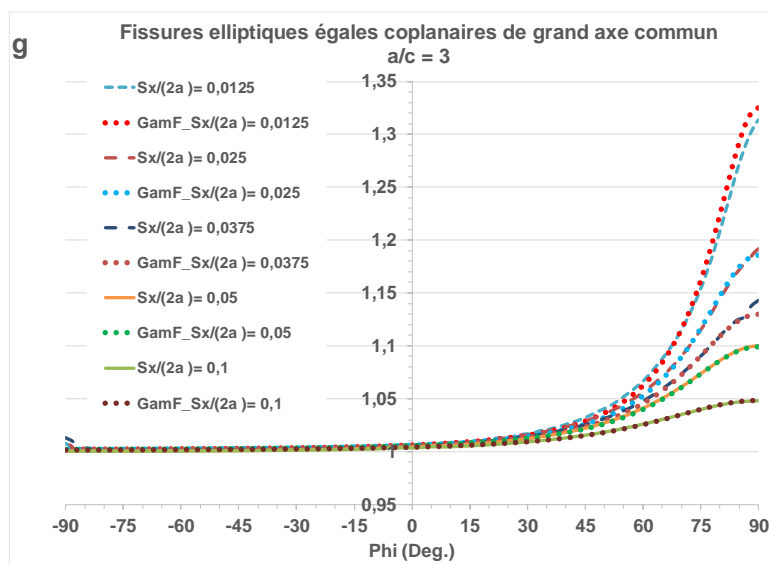
L'adimensionnement fait apparaître une courbe maîtresse dont l'expression est la suivante :

$$\lambda^*(S_x, \phi) = \lambda_x \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{E(a/c = 3)} \cdot \left(1 - \exp\left(-m \cdot \left(\frac{\phi}{\pi}\right)^2\right)\right)} \quad (3.2_{14})$$

Où  $\Phi$  est l'anomalie excentrique de l'ellipse, variant de 0 à  $\pi$ . Et  $m=2,71$ .



**Figure 3.2\_14 : variations des paramètres  $\lambda^*$  et  $\lambda_R^*$  le long du front de fissures elliptiques égales de grand axe commun ( $a/c=3$ ). Les résultats de calcul d'EDF sont en pointillés.**



**Figure 3.2\_15 : variations du facteur d'interaction le long du front de fissures elliptiques égales de grand axe commun ( $a/c=3$ ) prédites en pointillés et calculées par éléments finis.**

Le paramètre  $m$  est lissé sur les variations relatives aux faibles écartements et l'efficacité de cette approche est validée par la comparaison des variations facteur d'interaction prédits et calculés (Figure 3.2\_15).

#### Interaction au vertex pour $a/c = 4$

Azuma et Li (AZU, 2017) ont calculé les variations du facteur d'interaction le long du front pour deux fissures elliptiques ( $a/c=0,25$ ) de grand axe commun. Seul un calcul a été dépouillé le long du front, pour l'écartement relatif  $\tilde{S}_x = 0,5$ . De ce fait la valeur de  $m$  est située dans un encadrement  $[2,33 -2,9]$  selon que le lissage est effectué sur une première partie du front ou tout le front. La valeur optimale de 2,62 est retenue (courbe rouge de la figure 3.2\_16).



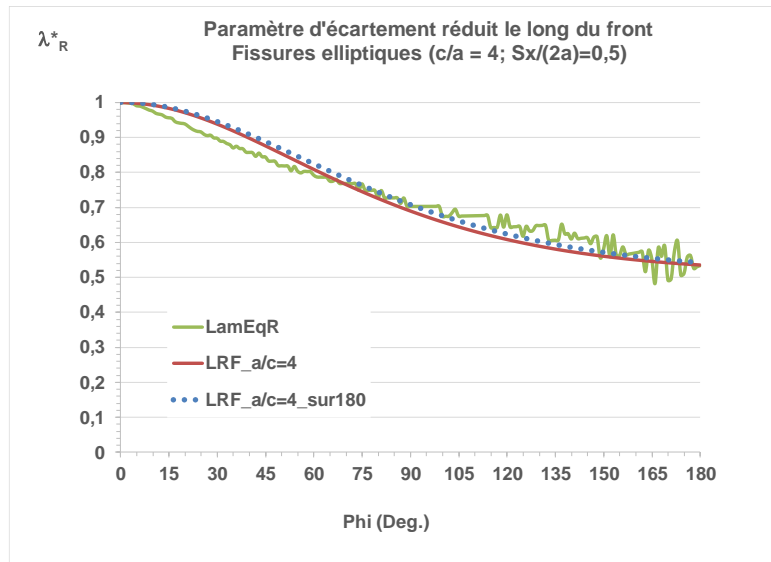


Figure 3.2\_16 : variations des paramètres  $\lambda_R^*$  le long du front de fissures elliptiques égales de grand axe commun ( $a/c=4$ ) obtenus par Azuma et Li (AZU, 2017).

Interaction au vertex pour  $a/c = 6$

Chapuliot (CHA, 2020) a calculé les variations du facteur d'interaction le long du front pour deux fissures elliptiques ( $a/c=1/6$ ) de grand axe commun en considérant différents écartements. Les résultats sont limités à un quart d'ellipse (Figures 3.2\_17).

La même approche donne les résultats suivants.

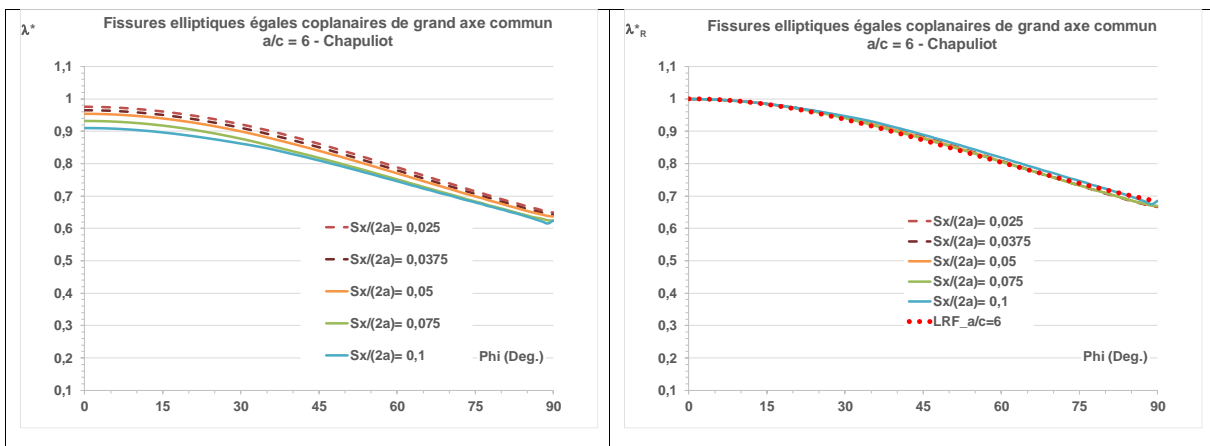
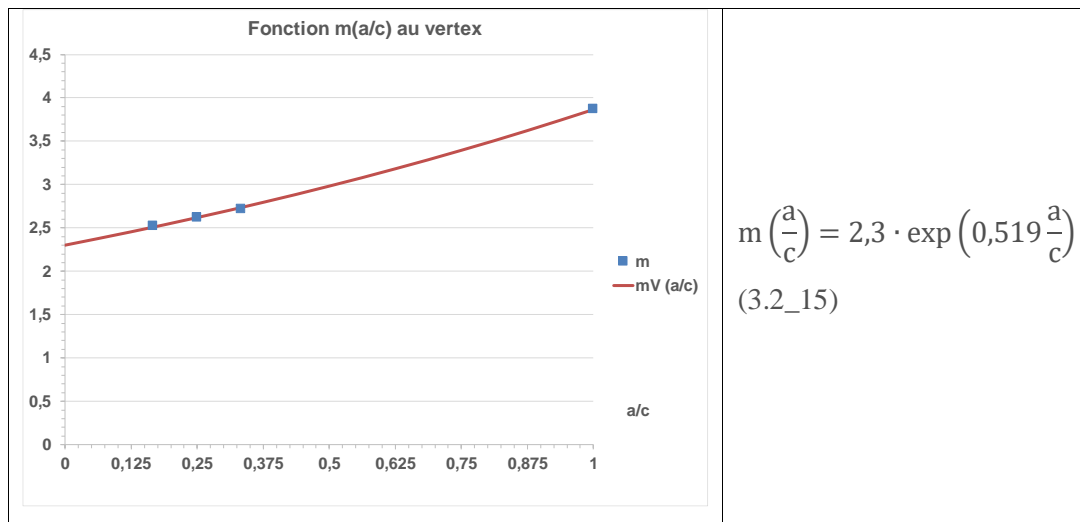


Figure 3.2\_17 : variations des paramètres  $\lambda^*$  et  $\lambda_R^*$  le long du front de fissures elliptiques égales de grand axe commun ( $a/c=6$ ) obtenus par Chapuliot (CHA, 2020).

Interaction au vertex pour  $a/c = \text{variable}$

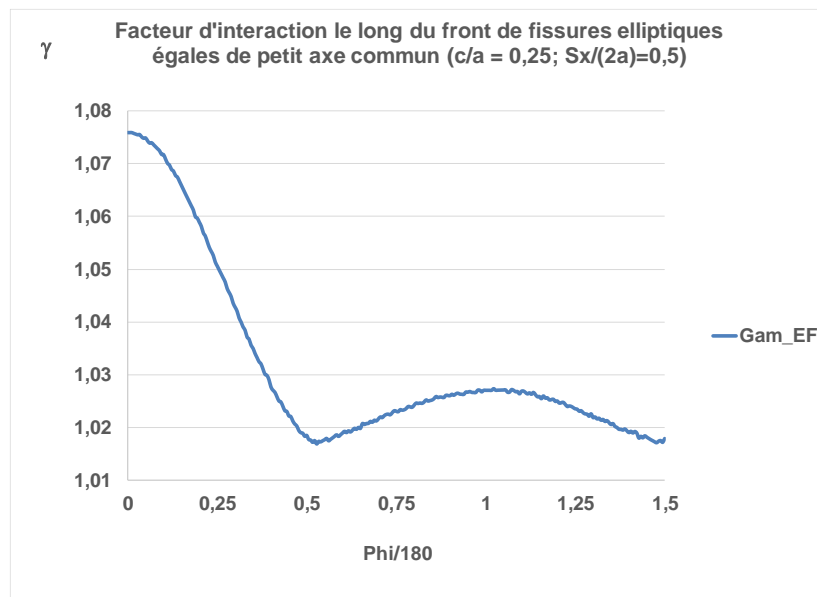
A partir des résultats obtenus pour la fissure disque et les fissures elliptiques égales de grand axe alignés, la fonction suivante  $m(a/c)$  a été établie pour la variation le long du front de fissures elliptiques égales de grand axe alignés (Figure 3.2\_18).



**Figure 3.2\_18 : fonction exprimant la variation du coefficient m pour des fissures elliptiques égales de grand axes alignés**

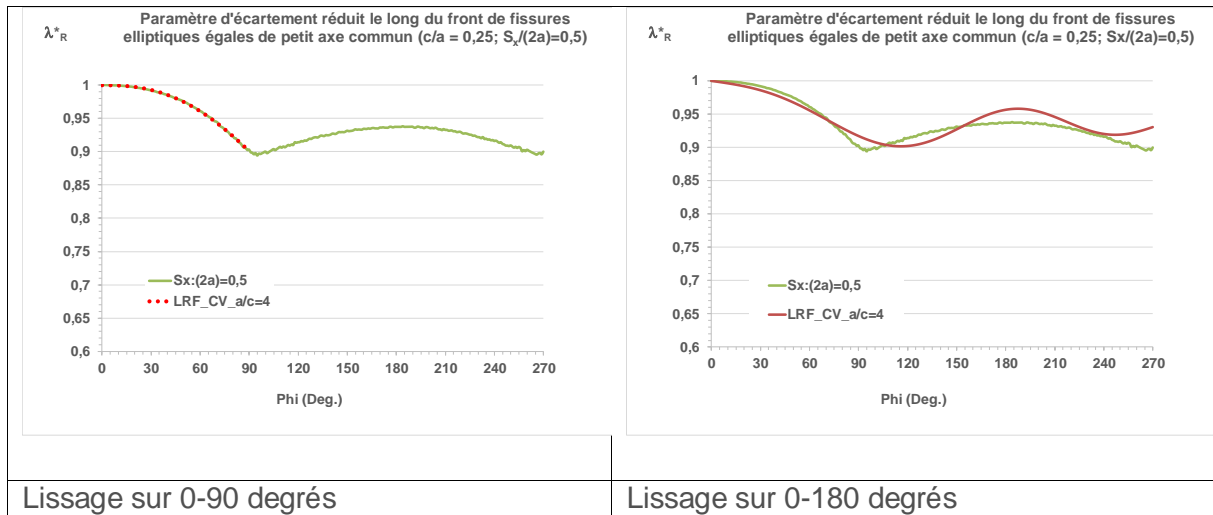
Interaction au co-vertex pour  $a/c = 4$

Le seul résultat disponible pour les variations du facteur d'interaction le long du front pour deux fissures elliptiques de petit axe commun est celui d'Azuma et Li (AZU, 2017). La fissure a un rapport d'aspect  $a/c=0,25$  et l'écartement relatif vaut  $\tilde{S}_x = 0,5$ .



**Figure 3.2\_19 : variations du facteur d'interaction le long du front de fissures elliptiques égales de petit axe commun et de rapport d'aspect  $a/c=4$  (AZU, 2017).**

Contrairement au cas de l'interaction au vertex, la variation du facteur d'interaction le long du front n'est plus monotone décroissante (Figure 3.2\_19). Ceci s'explique par l'effet de la fissure parente sur le point du co-vertex opposé au point le plus proche de l'autre fissure. Les points du vertex sont d'autant plus éloignés que la fissure est plus aplatie. La variation a l'allure d'une exponentielle amortie dont il est difficile de trouver une expression simple (Figure 3.2\_20).



**Figure 3.2\_20 : lissages du paramètre d'écartement réduit le long du front de fissures elliptiques égales de petit axe commun et de rapport d'aspect a/c=4 (AZU, 2017).**

Le lissage sur 90 degrés est obtenu avec le même type de formule que pour l'interaction au vertex.

$$\lambda^*(a/c, S_x, \phi) = \frac{\lambda_x}{1 + \frac{1}{E(a/c = 0,25)} \cdot \left( 1 - \exp\left(-0,733 \cdot \left(\frac{\phi}{\pi}\right)^{2,55}\right)\right)} \quad (3.2_{16})$$

Le lissage sur 180 degrés est obtenu avec une exponentielle amortie à trois paramètres  $\lambda_2$  qui est la valeur du second maximum, l'amortissement  $p$  et la pulsation  $\omega_0$ .

$$\lambda^*(a/c, S_x, \phi) = 1 - p + p \cdot \exp\left(-q \cdot \frac{\phi}{\pi}\right) \cdot \cos[\omega_a \cdot \phi^{1,5}] \quad (3.2_{17})$$

Avec  $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - q^2}$  et  $q = -\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1-\lambda_2}{1-p}\right)$   $\lambda_2 = 0,938$

L'optimisation donne  $q = 0,065$  et  $\omega_0 = 1,441$ .

Remarques sur l'évolution du facteur d'interaction le long du front de fissure

Au vertex le facteur d'interaction diminue de façon monotone le long du front. L'expression de sa représentation est :

$$\lambda^*(a/c, S_x, \phi) = \frac{\lambda_x}{1 + \frac{1}{E(a/c)} \cdot \left( 1 - \exp\left(-m \cdot \left(\frac{\phi}{\pi}\right)^2\right)\right)} \quad (3.2_{18})$$

Avec

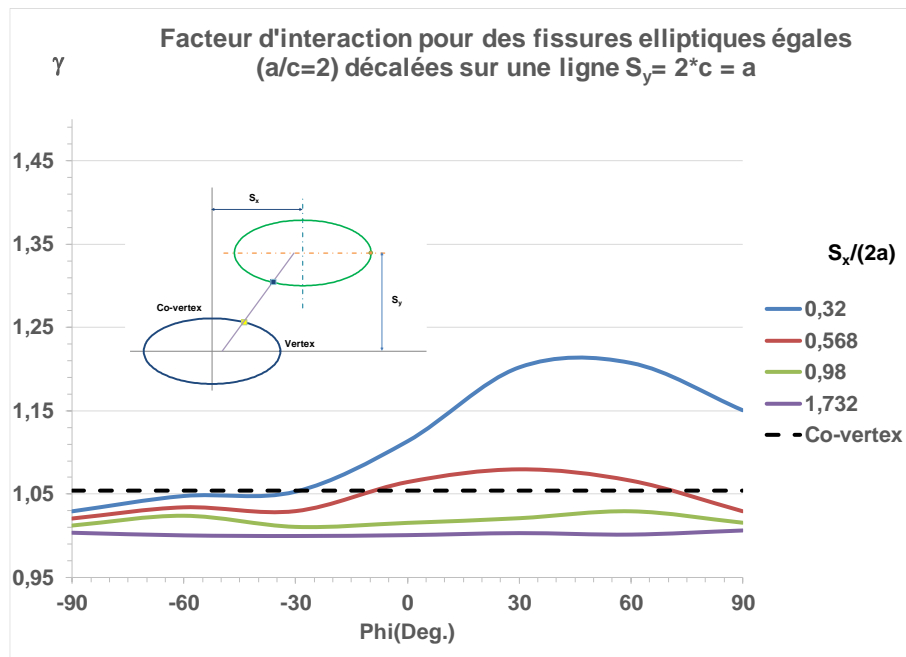
$$m\left(\frac{a}{c}\right) = 2,3 \cdot \exp\left(0,519 \frac{c}{a}\right) \quad a \geq c \quad (3.2_{19})$$

Au point le plus éloigné, la valeur est  $\frac{\lambda_x}{1 + \frac{1}{E(a/c)}(1 - \exp(-m))}$

Interaction de fissures décalées pour a/c = 2

Roy et Chatterjee (ROY, 1994) ont analysé l'interaction entre fissures elliptiques en employant une méthode d'équations intégrales. Ces équations sont résolues par une méthode de perturbation qui perd

en précision pour des écartements relatifs faibles. Leurs résultats pour des fissures décalées ont une valeur qualitative : l'effet d'asymétrie de la variation du facteur d'interaction est mis en évidence, mais les valeurs pour les écartements les plus faibles sont surestimés (Figure 3.2\_21).



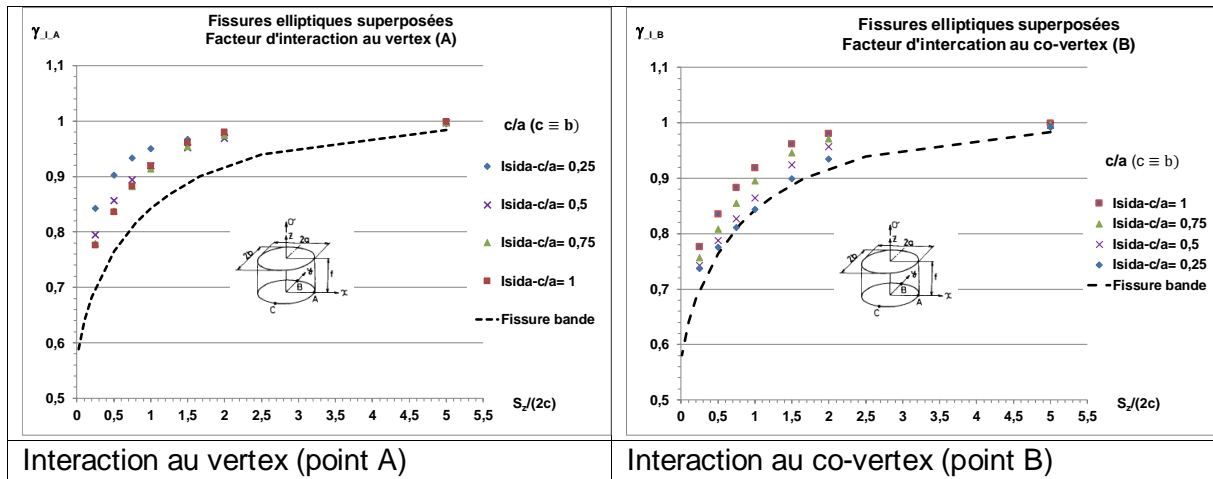
**Figure 3.2\_21 : variations du facteur d'interaction le long du front de fissures elliptiques égales de décalées de grands axes parallèles et de rapport d'aspect  $a/c=2$  (ROY, 1994)**

### 3.2.4 Fissures elliptiques parallèles

Il existe peu d'études consacrées à l'interaction de fissures elliptiques parallèles en dehors de celles d'Isida (ISI, 1985) et de Lacroix – Dulieu - Hasegawa. Ces travaux visent à établir des règles d'interaction de deux fissures elliptiques enfouies (LAC, 2015, 2018) et des fissures de surface, (DUL, 2018). Il s'agit de déterminer si oui ou non les fissures interagissent entre elles ou avec la surface libre (LAC, 2016a) établissant des conditions dépendant des écartements relatifs. Le seuil est fixé à 6% sur la base de l'interprétation des résultats expérimentaux (HAS, 2006, 2009).

#### 3.2.4.1 Fissures elliptiques superposées

Isida et al. (ISI, 1985) ont analysé l'interaction de fissures elliptiques égales superposées en utilisant la méthode des forces de volume. Nishioka et Kato (NIK, 1998) ont conduit le même type d'études en employant la méthode alternée. Les résultats de ces deux études pour deux fissures superposées sont très proches, la méthode alternée donne des valeurs un peu moins précises pour les écartements faibles.



**Figure 3.2\_22 : facteurs d'interaction pour des fissures elliptiques égales superposées en fonction de l'écartement vertical relatif et du rapport d'aspect (ISI, 1985)**

Les résultats (Figure 3.2.22) mettent en évidence les effets suivants :

- Avec le rapprochement des fissures les facteurs d'interaction diminuent en suivant la même allure que pour les fissures bande. Pour  $S_z = 2c$  l'interaction est négligeable au vertex et au co-vertex pour les fissures de rapport  $c/a > 0,5$ .
- Au vertex la diminution est d'autant plus forte que le rapport d'aspect  $c/a$  est élevé : l'écartement affecte moins les fissures allongées.
- Au co-vertex La diminution est d'autant plus forte que le rapport d'aspect est faible : l'effet d'écartement affecte plus les fissures allongées. La forme des fissures influe moins.
- L'écrantage pour les fissures elliptiques est plus faible pour les fissures elliptiques que pour la fissure bande. L'écart est un peu plus faible au co-vertex qu'au vertex.

Un lissage de ces résultats a été établi afin de les comparer aux quelques résultats de fissures écartées et de mieux comprendre les effets d'écrantage. Les deux variables sont l'écartement vertical relatif entre fissures égales  $\tilde{S}_z = \frac{S_z}{2a}$  et l'inverse du rapport d'aspect  $\frac{c}{a}$ . Le grand axe est nommé a. Les formules (équations 3.2\_20 et 21) sont présentées au tableaux 3.2\_4 et 3.2\_5.

$\gamma_{12}\left(\frac{a}{c}, 90\right) = \frac{K_{12}}{\frac{\sigma_{app}}{E(k)} \cdot \sqrt{\pi} \cdot c} = E(k) \cdot F_B$	$F_B = p + q \cdot \frac{c}{a} + r \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^2$
$p = 1 - \frac{0,4027}{1,533 + \left(\tilde{S}_z\right)^{2,107}}$	$q = -0,08748 \cdot \tilde{S}_z^{0,4227} \cdot \text{Exp}\left[-0,0103 + \tilde{S}_z^{-0,388}\right]$
Si $\tilde{S}_z < 1$ alors $r = -0,0245 + \frac{0,0049}{\tilde{S}_z} + \frac{0,0012}{\tilde{S}_z^2}$	
Si $\tilde{S}_z \geq 1$ alors $r = -0,0704 + \frac{0,0061}{\tilde{S}_z} + \frac{0,0456}{\tilde{S}_z^2}$	

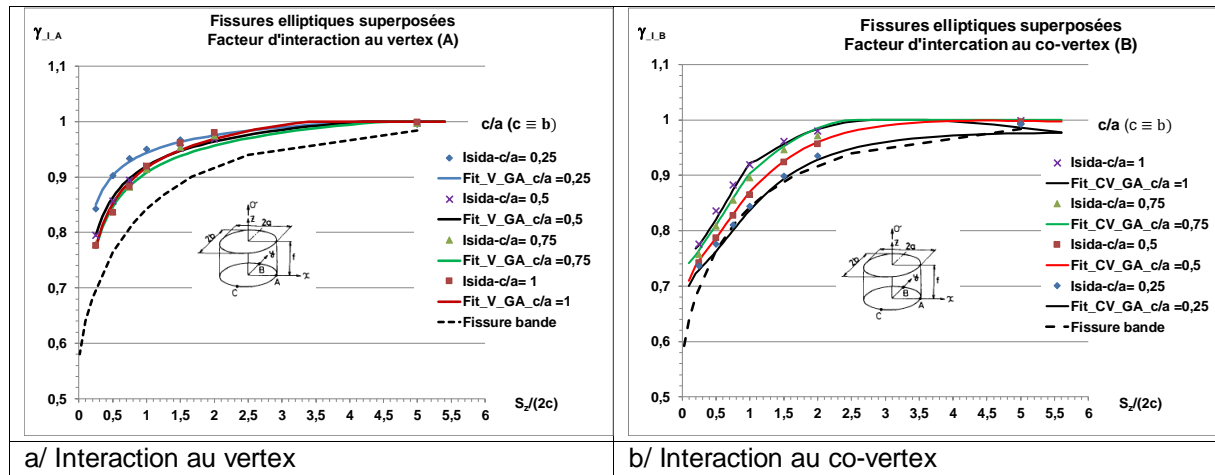
**Tableau 3.2\_4 : facteurs d'interaction au vertex (point A, anomalie excentrique = 0 degrés)**

$\gamma_{12}\left(\frac{a}{c}, 0\right) = \frac{K_{12}}{\frac{\sigma_{app}}{E(k)} \cdot \frac{c}{a} \cdot \sqrt{\pi} \cdot c} = E(k) \cdot \sqrt{\frac{a}{c}} \cdot F_A$	$F_A = \frac{p}{q + \tilde{S}_z^{-0,5}}$
$p = 2,9887 + 0,1738 \cdot \frac{a}{c} + 0,0197 \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^2$	$q = 3,8502 + 0,4502 \cdot \frac{a}{c} + 0,1563 \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^2$

**Tableau 3.2\_5 : facteurs d'interaction au co-vertex (point B, anomalie excentrique = 90 degrés)**

En outre les valeurs des formules des facteurs d'interaction sont plafonnées à 1.

La validation de ces formules est illustrée à la figure 3.2\_23.



**Figure 3.2\_23 : validation des formules de facteurs d'interaction de fissures elliptiques égales superposées**

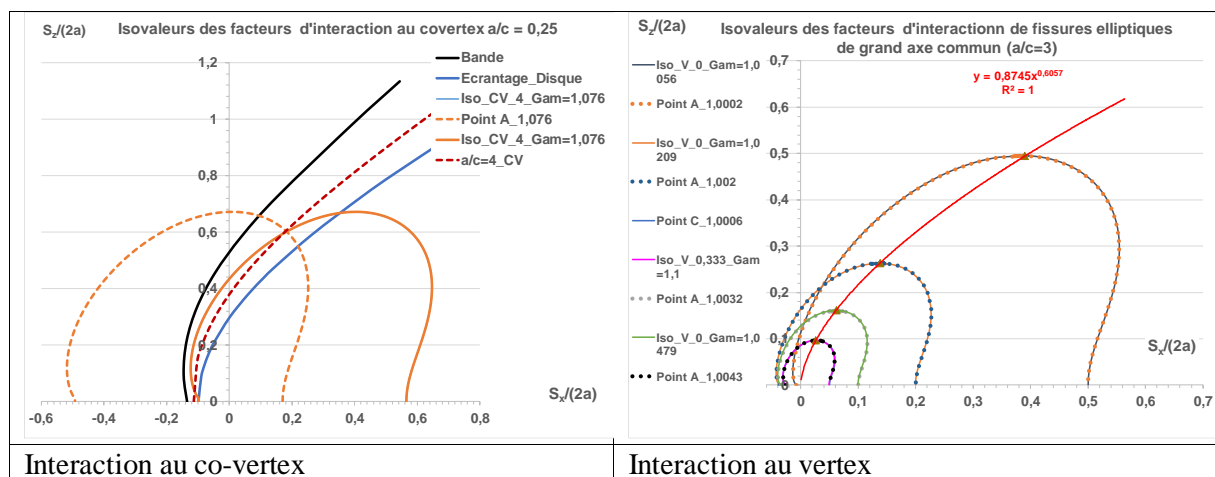
Le lissage est meilleur au vertex.

### 3.2.4.2 Fissures elliptiques parallèles décalées

#### Limite d'écrantage pour des fissures elliptiques

La limite d'écrantage correspond à l'égalité des facteurs d'interaction en un point du front de la première fissure et un point du front de la seconde. Dans le cas des fissures bande, l'intersection des isovaleurs de facteurs d'interaction associées aux deux points a permis de déterminer la limite d'écrantage, validée par les calculs aux éléments finis. Le paragraphe suivant décrit la façon d'obtenir des isovaleurs de facteurs d'interaction pour des fissures elliptiques associées à différents points du front de fissure. A cette fin, il est nécessaire d'obtenir les valeurs des facteurs d'interaction au point du front considéré pour des fissures coplanaires, ce qui est fourni par les courbes de variation le long du front.

Deux exemples sont présentés à la figure 3.2\_24. Dans le cas de l'interaction au vertex les facteurs sont plus faibles et les isovaleurs sont quasiment confondues et c'est le maximum qui est le point de la courbe de limite d'écrantage.



**Figure 3.2\_24 : établissement des limites d'écrantage pour des fissures elliptiques égales**

La figure 3.2\_25 compare les frontières d'interaction à 2,5% et les points d'écrantage sur ces frontières pour différentes formules de fissures coplanaires. L'effet de forme est considérable. Ceci a été aussi pointé par Lacroix (LAC, 2016b). Une comparaison des isovaleurs pour différentes fissures coplanaires

entre les évaluations de Lacroix et Dulieu (DLH, 2019) et les nôtres est illustré à la figure 3.2\_27 du paragraphe suivant. L'effet d'écrantage est illustré à la figure 3.2\_26 pour le cas des fissures elliptiques égales de rapport d'aspect  $a/c = 2$  avec les résultats d'Isida et al. (ISI, 1985).

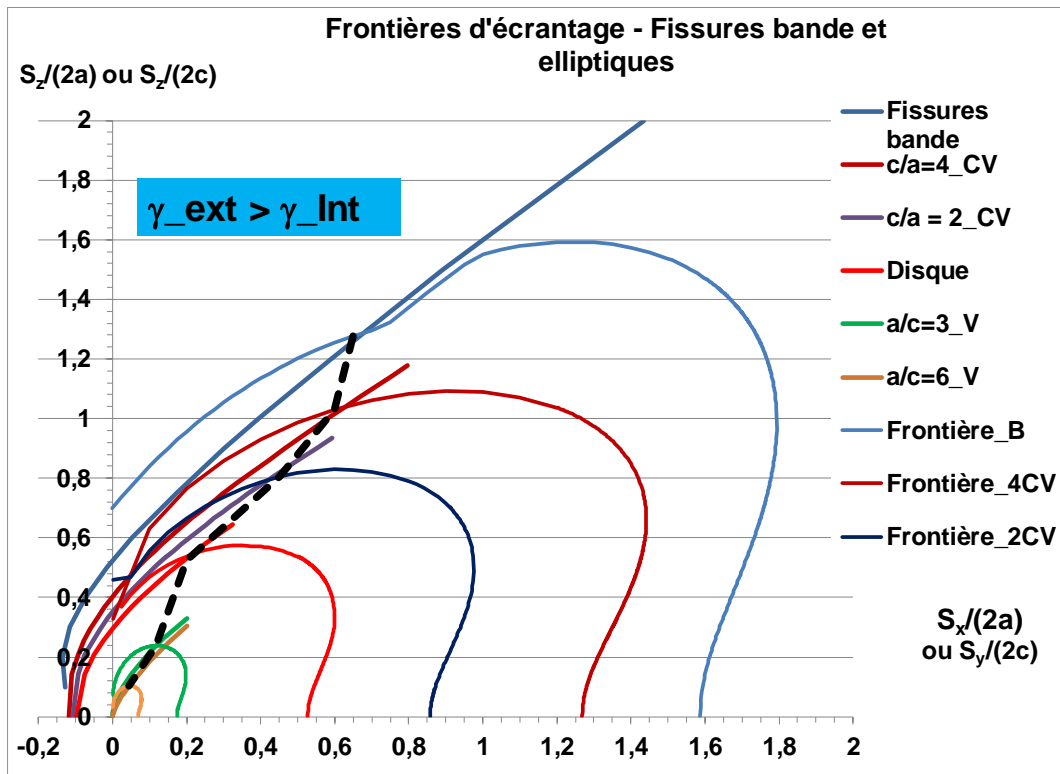


Figure 3.2\_25 : limites d'écrantage et limites d'interaction ( $\gamma < 1,025$ ) pour des fissures égales

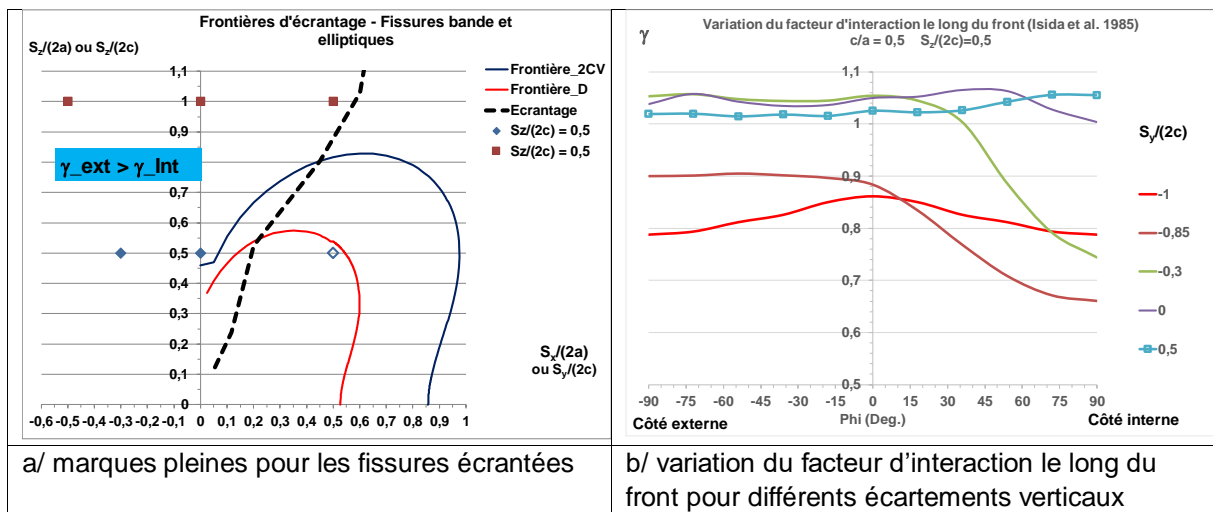


Figure 3.2\_26 : limites d'écrantage et limites d'interaction ( $\gamma < 1,025$ ) pour des fissures elliptiques égales de rapport d'aspect  $a/c = 2$

### Fissures elliptiques parallèles non écartées

L'interaction de fissures disque parallèles non écartées en mode I s'analyse de la même façon que celle des fissures bande parallèles non écartées. On considère l'action de la fissure  $a_2$  sur la fissure  $a_1$ .

- L'effet de l'écartement vertical ne dépend pas de la taille relative des fissures
- L'effet de l'écartement vertical est piloté par le paramètre d'écartement relatif  $S_z/(a_1+a_2)$
- La fonction de Westergaard calculée pour la valeur d'écartement relatif  $S_z/(a_1+a_2)$  obtenue à partir de la valeur du facteur d'interaction dans le plan et la valeur de  $S_z/(a_1+a_2)$  traduit l'effet d'interaction hors plan.

On considère l'interaction de la fissure 1 avec la fissure 2 au point le plus sollicité dit pointe interne.

Pour les valeurs de décalages horizontal  $S_x$  et vertical  $S_z$ , la valeur du facteur d'interaction s'obtient de la même façon que pour les fissures bande (§ 3.1.2.1)

L'expression simplifiée du facteur d'interaction est donnée directement par la fonction de Westergaard :

$$\gamma_{12}(P) = F_{W\_E\_Pa} \left( \frac{c}{a}, \frac{x_D}{l}, \frac{y_D}{l}, \frac{S_z}{l} \right) \quad (3.2\_22)$$

Où la valeur de  $x_D$  ou  $y_D$  est obtenue par identification de  $F_{W\_E\_Co} \left( \frac{c}{a}, \frac{x_D}{l}, \frac{y_D}{l} \right)$  à l'expression correspondante du facteur d'interaction de la fissure coplanaire projetée et  $l = a_1$  ou  $a_2$ .

La fonction  $F_{W\_E}$  établie par Green et Sneddon (GRS, 1950) est applicable hors du plan. Kassir et Sih (KAS, 1975) l'ont étendue aux cas des cisaillements plans et hors plan. Cette solution a été explicitée par R. Warpinski (WAR, 2004) pour la sollicitation de mode I.

Le demi-axe  $a$  est porté par l'axe  $O_x$ . Les coordonnées ellipsoïdales sont notées  $\xi, \eta, \zeta$  au lieu de  $\lambda, \mu, \nu$  comme dans les travaux de Green et Sneddon (GRS, 1950).

Sur la surface de la fissure  $F_{W\_Epa} = 0$ .

Sinon ( $\xi$  et  $\eta \neq 0$ ) l'expression de la fonction est la suivante :

$$F_{W\_E\_pa} = 1 + \frac{1}{E(k)} \cdot \left\{ \left[ \frac{\text{sn}(u) \cdot \text{dn}(u)}{\text{cn}(u)} - \varepsilon(u, k) \right] - z \cdot \left[ k_c^2 \cdot \frac{\text{sn}^2(u)}{\text{cn}^2(u)} \cdot \frac{du}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} - 2z^2 \cdot \left[ k_c^2 \cdot \frac{\text{sn}(u) \cdot \text{dn}(u)}{\text{cn}^3(u)} \right] \cdot \left( \frac{du}{d\xi} \right)^2 \cdot \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \right] \right. \\ \left. - z^2 \cdot \left[ k_c^2 \cdot \frac{\text{sn}^2(u)}{\text{cn}^2(u)} \right] \cdot \left[ \frac{d^2 u}{d\xi^2} \cdot \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 + \frac{du}{d\xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right] \right\} \quad (3.2\_23)$$

Où les interviennent les fonctions elliptiques de Jacobi :  $\text{sn}(u)$ ,  $\text{cn}(u)$ ,  $\text{dn}(u)$  et  $\varepsilon(u, k)$  décrites dans (ABS, 1964). Ces fonctions sont continues et dérivables.

Les variables  $\xi, \eta, \zeta$  sont les coordonnées ellipsoïdales dont l'expression en fonction des coordonnées cartésiennes est décrite ci-après. Ces trois coordonnées ( $\xi, \eta, \zeta$ ) vérifient l'équation 3.2\_24).

$$\frac{x^2}{a^2 + \theta} + \frac{y^2}{c^2 + \theta} + \frac{z^2}{\theta} - 1 + 0 \quad (3.2\_24)$$

Cette équation est de la forme

$$A \cdot \theta^3 + B \cdot \theta^2 + C \cdot \theta + D = 0$$

Avec

$$\begin{aligned} A &= +1 \\ B &= -x^2 - y^2 - z^2 + a^2 + c^2 \\ C &= -c^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 - (a^2 + c^2) \cdot z^2 + a^2 \cdot c^2 \\ D &= -a^2 \cdot c^2 \cdot z^2 \end{aligned}$$



L'équation (3.2\_24) a 3 racines réelles qui sont ordonnées de la façon suivante :

$$\infty > \xi \geq 0 \geq \eta \geq -c^2 \geq \zeta \geq -a^2 \quad (3.2_25)$$

Elles sont obtenues par la méthode de Cardan (CAR, 1545).

Les coordonnées ellipsoïdales sont proportionnelles au carré des longueurs (voir 3.2\_8).

$$\xi = a^2 \cdot \left( \frac{\text{cn}(u)}{\text{sn}(u)} \right)^2 \quad \text{soit} \quad u = \text{sn}^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\xi}{a^2}}} \right)$$

Les variables sont adimensionnalisées.

$$\bar{z} = \frac{z}{a} \bar{\xi} = \frac{\xi}{a^2} = \left( \frac{\text{cn}(u)}{\text{sn}(u)} \right)^2 \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{a^2} \bar{\zeta} = \frac{\zeta}{a^2} \quad (3.2_26)$$

$$\text{sn}(u) = \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{\xi}}} \quad \text{cn}^2(u) = \frac{\bar{\xi}}{1 + \bar{\xi}}$$

Les dérivées de u par rapport à  $\bar{\xi}$  et de  $\bar{\xi}$  par rapport à z sont données par:

$$\frac{du}{d\bar{\xi}} = -\frac{\text{sn}^3(u)}{2\text{cn}(u) \cdot \text{dn}(u)} \quad (3.2_27a)$$

$$\frac{d^2u}{d\bar{\xi}^2} = -\frac{\text{sn}^2(u)}{2} \cdot \left( 3 + \frac{\text{sn}^2(u)}{\text{cn}^2(u)} + k^2 \cdot \frac{\text{sn}^2(u)}{\text{dn}^2(u)} \right) \cdot \frac{du}{d\bar{\xi}} \quad (3.2_27b)$$

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{z}} = \bar{z} \cdot \frac{(1 + \bar{\xi}) \cdot \left( \left( \frac{c}{a} \right)^2 + \bar{\xi} \right)}{(\bar{\xi} - \bar{\eta}) \cdot (\bar{\xi} - \bar{\zeta})} \quad (3.2_27c)$$

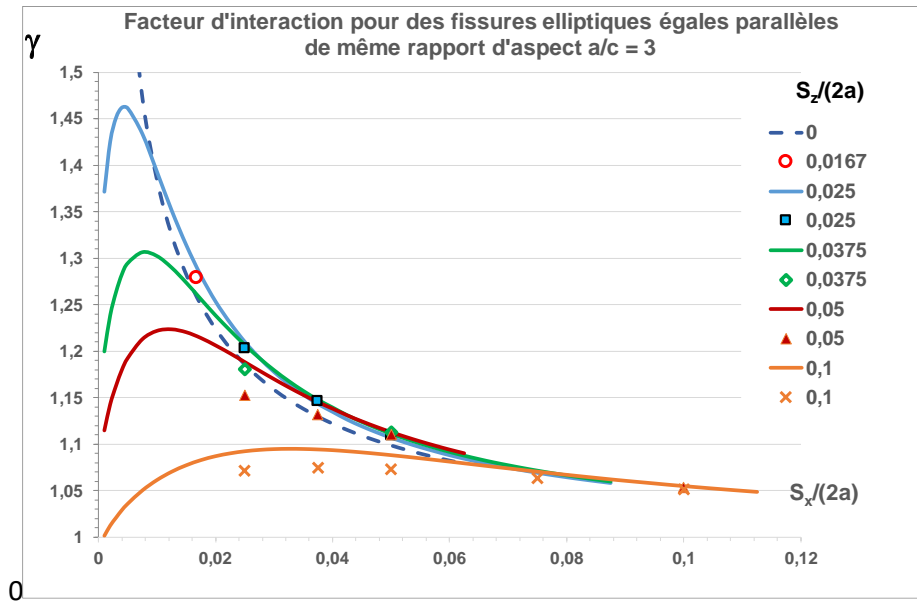
$$\frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial \bar{z}^2} = \frac{1}{2\bar{\xi} \cdot \bar{h}_1^2} \cdot \left\{ 1 - \frac{\bar{z}^2}{\bar{\xi}^2 \cdot \bar{h}_1^2} + \frac{\bar{z}^2}{4\bar{\xi} \cdot \bar{h}_1^4} \cdot \left[ \frac{\bar{x}^2}{\left( \left( \frac{c}{a} \right)^2 + \bar{\xi} \right)^3} + \frac{\bar{y}^2}{(1 + \bar{\xi})^3} + \frac{\bar{z}^2}{\bar{\xi}^3} \right] \right\} \quad (3.2_27d)$$

$$\bar{h}_1^2 = \frac{1}{4\bar{\xi}} \cdot \frac{(\bar{\xi} - \bar{\eta}) \cdot (\bar{\xi} - \bar{\zeta})}{(1 + \bar{\xi}) \cdot \left( \left( \frac{c}{a} \right)^2 + \bar{\xi} \right)} \quad (3.2_27e)$$

### Fissures elliptiques égales de grand axes alignés et de rapport d'aspect a/c =3

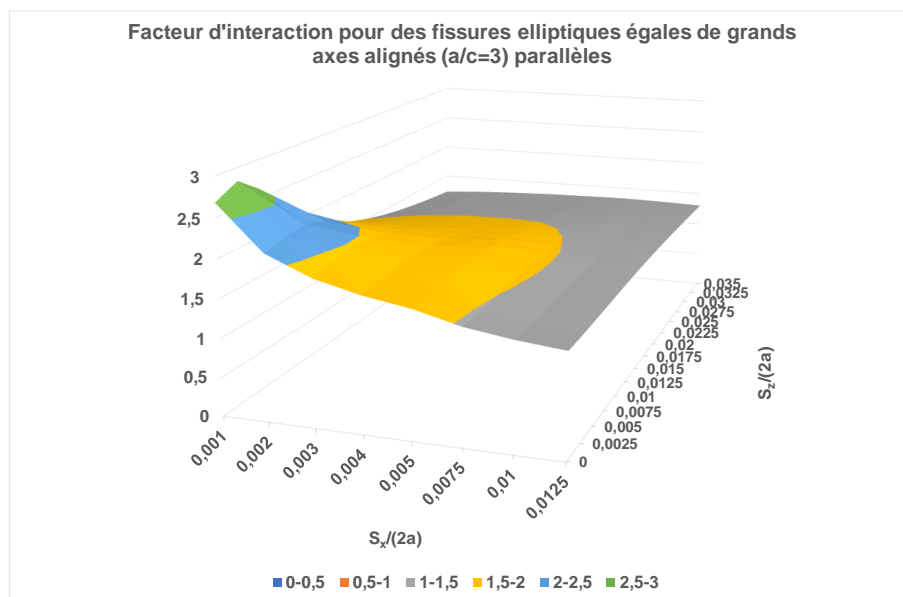
ESI-France (SYSTUS, 2020) a effectué 18 calculs par éléments finis de fissures parallèles égales de grand axe alignés et de rapport d'aspect a/c = 3.

La figure 3.2\_27 compare les prédictions du facteur d'interaction par la formule simplifiée aux résultats de calculs. L'accord est très bon.



**Figure 3.2\_27 : validation des formules de facteurs d'interaction de fissures elliptiques égales de rapport d'aspect  $a/c = 3$  de grand axe commun parallèles**

La variation du facteur d'interaction avec les écartements relatifs  $\hat{S}_x$  et  $\hat{S}_z$  est décrite à la figure 3.2\_28.



**Figure 3.2\_28 : variation des facteurs d'interaction de fissures elliptiques égales de rapport d'aspect  $a/c = 3$  de grand axe commun parallèles**

Le défaut équivalent s'obtient par application de la formule simplifiée ce qui permet de couvrir une large plage de variation des paramètres d'écartement. La figure 3.2\_29 décrit la variation du coefficient d'équivalence en fonction des écartements relatifs horizontaux et verticaux.

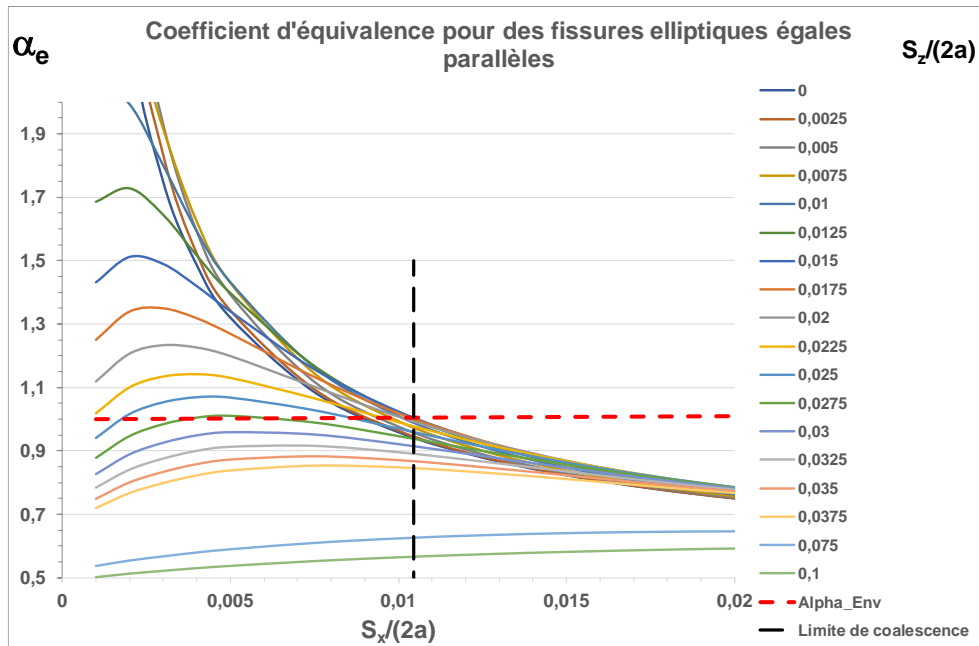
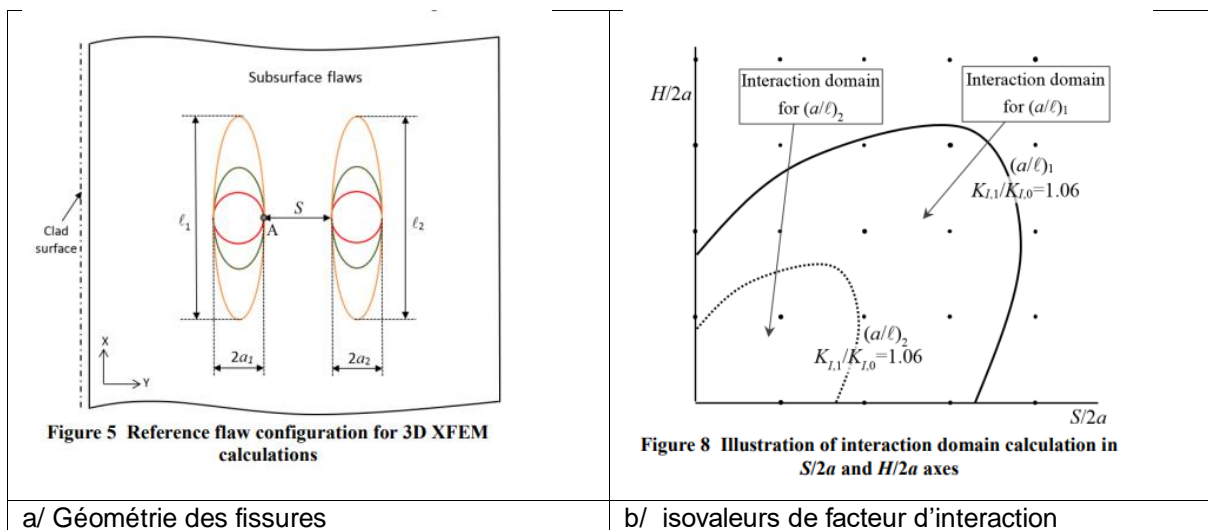


Figure 3.2\_29 : variation des coefficients d'équivalence de fissures elliptiques égales de rapport d'aspect  $a/c = 3$  de grand axe commun parallèles

Fissures elliptiques égales de petits axes alignés

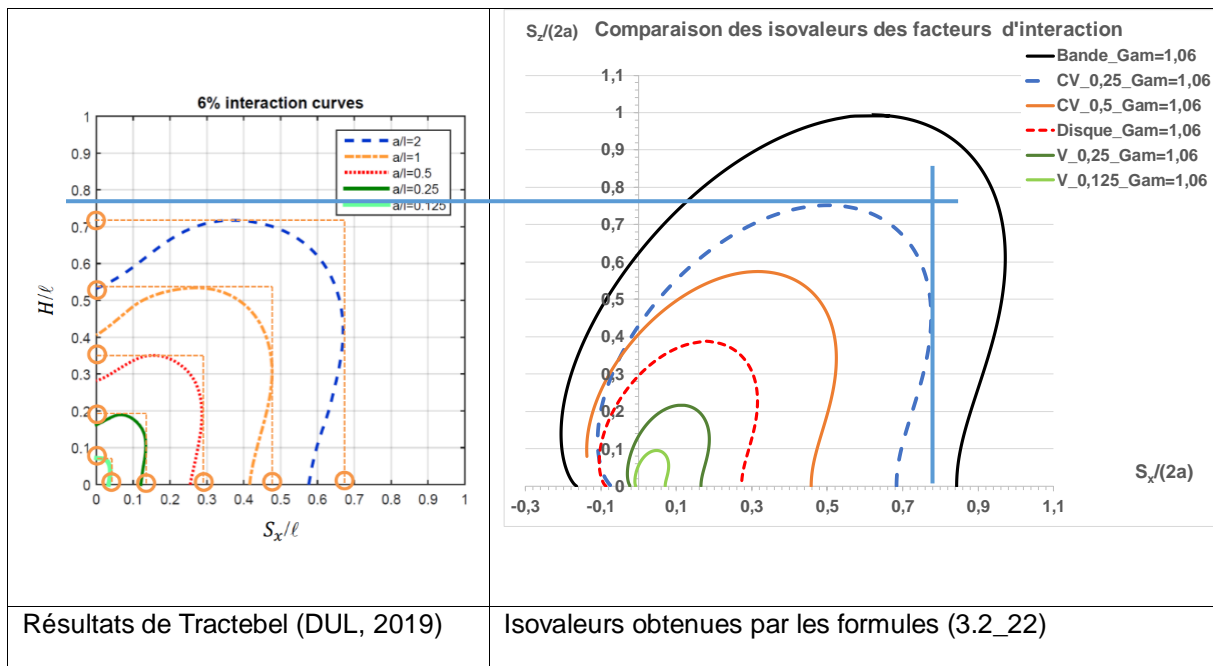
V. Lacroix et P. Dulieu (LAC, 2018, DLH 2019) ont analysé le cas de fissures enfouies de grands et surtout de petits axes alignés à partir de calculs par la méthode des éléments finis étendus X-FEM avec le logiciel Morfeo (MOR, 2014). La figure 3.2\_30b présente les courbes isovaleurs à 1,06 obtenues par interpolation entre résultats de calculs pour des valeurs discrètes d'écartements  $S_x$  et  $S_z$  notés respectivement  $S$  et  $H$  sur les figures 3.2\_30. Ces domaines d'interaction sont comparés à ceux établis à partir de nos formules (Figure 3.2\_31).



a/ Géométrie des fissures

b/ isovaleurs de facteur d'interaction

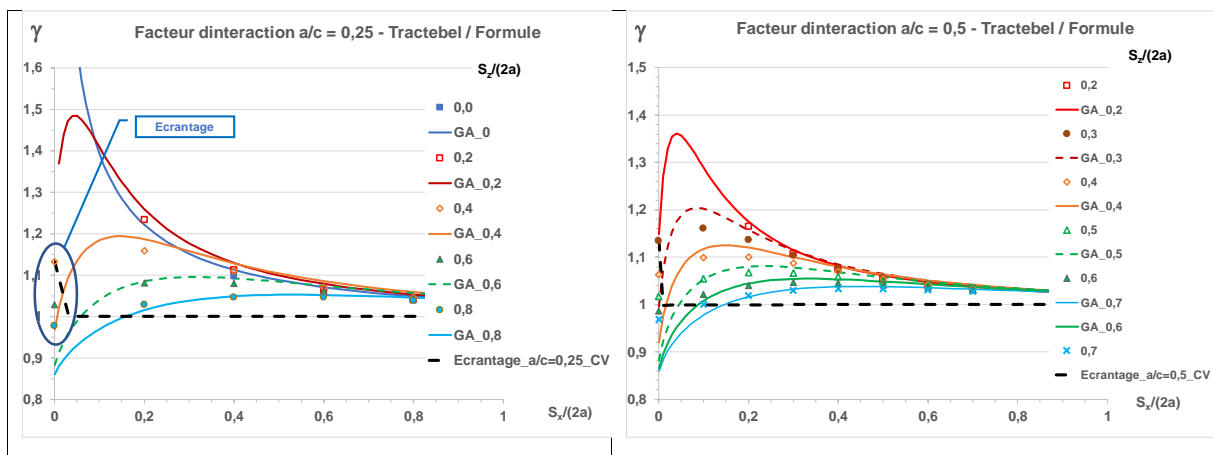
Figure 3.2\_30 : description des données variation des coefficients d'équivalence de fissures elliptiques égales de rapport d'aspect  $a/c = 3$  de grand axe commun parallèles



**Figure 3.2\_31 : comparaison des courbes d'interaction à 6% au vertex et au co-vertex pour différentes formes de fissures égales établies par Tractebel et nos formules**

Les formes sont identiques et nos isovaleurs sont légèrement enveloppes de celles obtenues par Tractebel. Ces travaux ont servi de base à la modification des codes ASME et JSME décrite au premier chapitre.

Une autre comparaison est présentée ci-après (Figure 3.2\_32 pour des fissures elliptiques parallèles égales en interaction au co-vertex. L'accord est très bon mis à part pour de faibles valeurs de couples  $S_x/(2a)$ .



**Figure 3.2\_32 : comparaison des facteurs d'interaction au co-vertex pour des fissures elliptiques parallèles égales établies par Tractebel et nos formules**

Dans le cas des ellipses ( $a/c = 0,25$  et  $0,5$ ) interagissantes au co-vertex, il n'y a d'écrantage que pour des écartements  $S_x/(2a)$  très faibles.

#### Variations le long du front de fissures elliptiques égales parallèles

La figure 3.2\_33 compare les variations des facteurs d'interaction le long du front de fissures elliptiques égales coplanaires ou parallèles dont les grands axes sont situés dans un même plan. Les calculs ont été réalisés par ESI-France (SYSTUS, 2020).

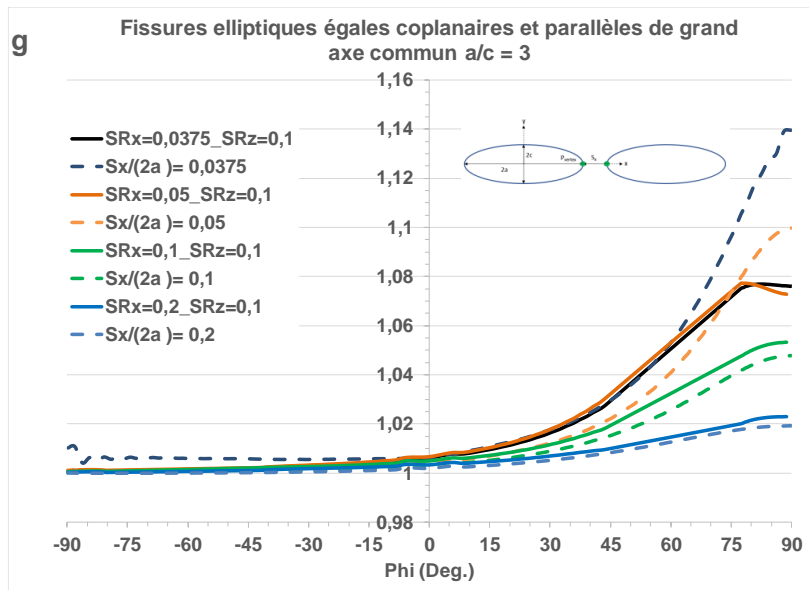


Figure 3.2\_33 : variation des facteurs d'interaction le long du front de fissures elliptiques égales coplanaires ou parallèles pour un écart vertical relatif  $S_z/(2a) = 0,1$

Les variations le long du front sont les mêmes que les fissures soient coplanaires ou parallèles, sauf s'il y a écrantage comme pour  $S_z/(2a) = 0,1$  et  $S_x/(2a) = 0,0375$  et  $0,05$ .

### 3.2.4.3 Fissures elliptiques parallèles de rapport d'aspect différents

V. Lacroix et P. Dulieu (LAC, 2018) ont analysé le cas de fissures de rapport d'aspect différents décrits à la figure 3.2\_34.

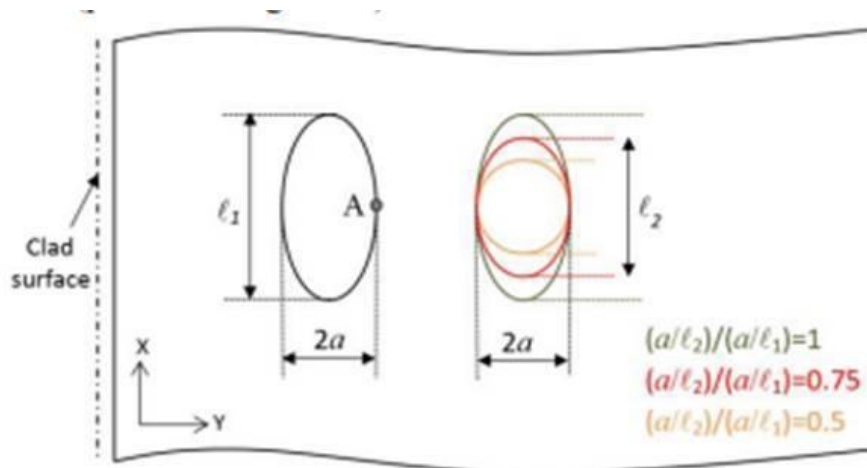


Figure 15 Sensitivity analysis for Hypothesis No. 3

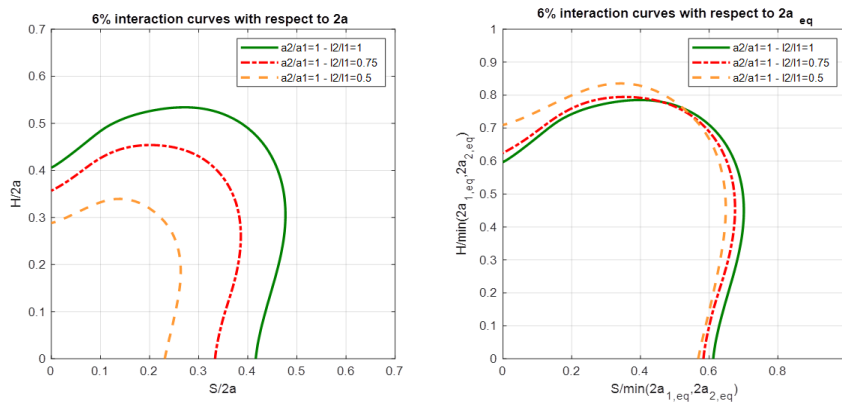
Figure 3.2\_34 : configurations de fissures elliptiques de rapport d'aspect différents analysées par Tractebel (LAC, 2018)

Leurs résultats sont présentés sous forme de diagramme d'interaction (Figure 3.2\_35) et interprétés en utilisant la notion de défaut équivalent proposée par Chapuliot et Blouin (CHB, 2018).

Le défaut équivalent selon cette approche est défini pour l'interaction au co-vertex par :

$$a_{eq} = \frac{a}{[E(k)]^2} \quad (3.2_{28})$$

Cette définition permet de regrouper les domaines d'interaction au co-vertex comme le montre les deux figures 3.2\_34 tirées de (LAC, 2018). Au paragraphe suivant nous reviendrons sur cette équivalence. L'intégrale elliptique complète de seconde espèce E représente le rapport du quart du périmètre d'une ellipse à son grand axe. Cette fonction dépend uniquement du rapport d'aspect a/c. Cette équivalence est étendue au vertex au paragraphe 3.2.4.3 où il est montré que l'interaction dépend du rayon de courbure rapporté au demi-axe au même point.



**Figure 3.2\_35 : application de la notion de défaut équivalent au sens de Chapuliot à l'interaction de fissures elliptiques de rapport d'aspect différents (LAC,2018)**

Sur la base des résultats de Chapuliot (CHB, 2018) et de Lacroix et al. (LAC, 2018), nous avons modifié l'expression de la fonction A afin de tenir compte des effets de différence de courbure aux points d'interaction.

Le paramètre choisi est le rapport des facteurs de forme du FIC de la grande fissure sur celui de la petite :  $RAC = (F_{grande})/(F_{petite})$ . La correction n'est établie que pour la grande fissure. La grande fissure est la fissure isolée qui a le FIC le plus élevé au même point que le point d'interaction.

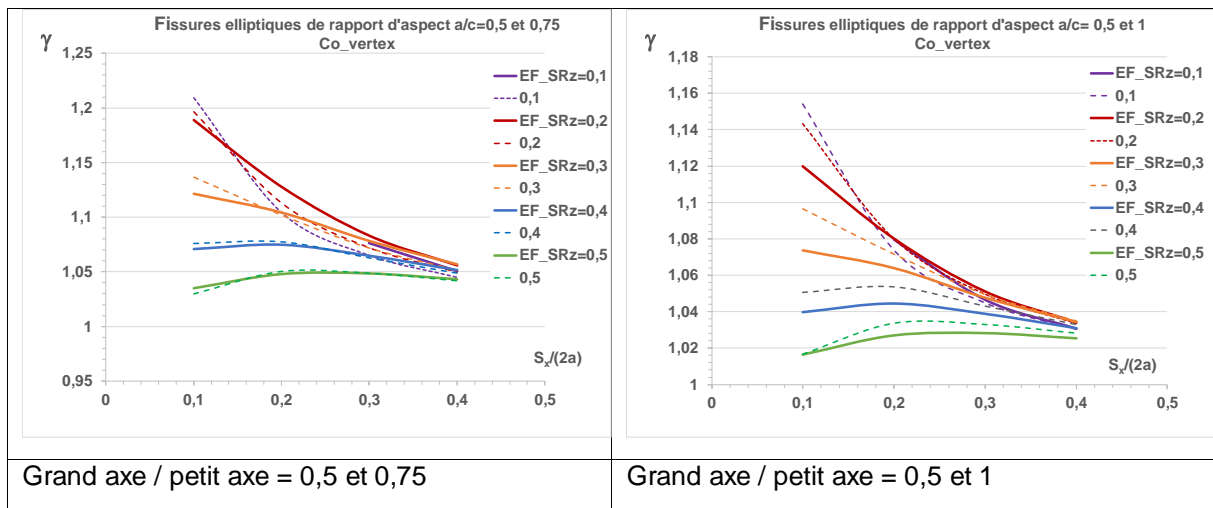
La fonction est modifiée par un coefficient multiplicateur :

$$A(RAC) = A(RAC = 1) \cdot RAC^{-0,28} \quad (3.2_{29})$$

Le facteur de forme du FIC dépend du rapport d'aspect a/c et du rayon de courbure relatif de l'ellipse au point d'interaction  $\rho/c$ . Le demi petit axe est c.

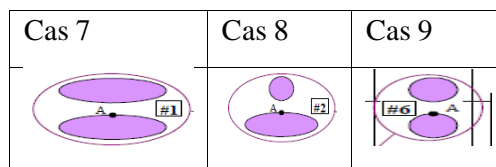
$$F(a/c, \phi) = \frac{K_{I\infty}(c, a/c, \phi)}{\sigma_{app} \cdot \sqrt{\pi} \cdot c} = \frac{1}{E(a/c)} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left[\frac{\rho(a/c, \phi)}{c}\right]^{\frac{1}{6}} \quad (3.2_{30})$$

La comparaison de l'application de cette formule aux calculs de Lacroix et al. (LAC, 2018) pour des interactions au co-vertex est présenté à la figure 3.2\_36. L'accord est satisfaisant.



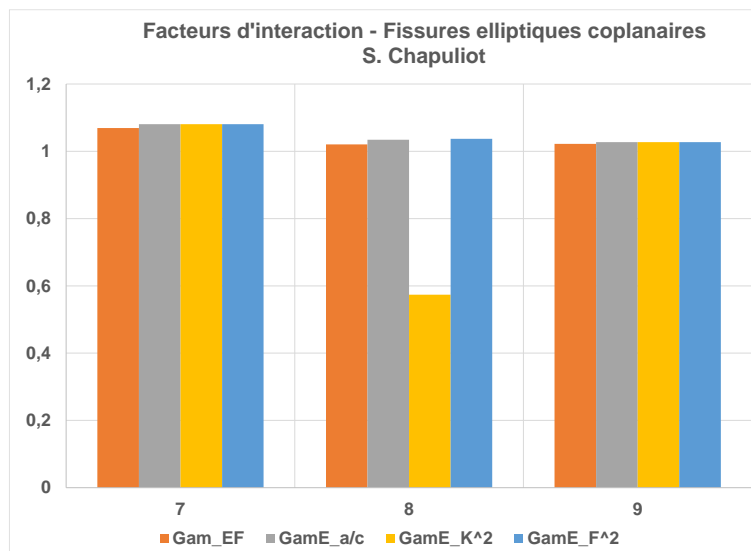
**Figure 3.2\_36 : comparaison des facteurs d'interaction calculés (LAC, 2018) et ceux obtenus par nos formules pour des fissures elliptiques coplanaires de même valeur de petit axe mais de rapport d'aspect différents**

La comparaison avec les résultats de Chapuliot (CHB, 2018) pour des fissures parallèles est illustrée par l'histogramme de la figure 3.2\_37. Les cas sont représentés par les images du tableau ci-dessous.



**Tableau 3.2\_6 : cas d'interaction de fissures parallèles**

Les cas 7 et 9 ne comportent pas de différences de rapport d'aspect, donc il n'y a pas de différences entre les options. Seul le cas 8 est pertinent pour la validation de cette correction de la fonction A, il ne sert qu'à valider le traitement des fissures parallèles égales.



**Figure 3.2\_37 : comparaison des facteurs d'interaction calculés (CHB, 2018) et ceux obtenus par nos formules pour des fissures elliptiques de rapport d'aspect différents**

Le rapport du carré des FIC n'est pas adapté (Figure 3.2\_37). Le rapport du carré des facteurs de forme vaut 2 et celui des rapport d'aspect vaut 3. L'effet sur le facteur d'interaction est trop faible pour être discriminant. Il faudrait disposer de calculs avec de plus faibles écartements.

### 3.2.4.4 Critères de combinaisons des fissures

Ces critères sont appelés aussi règles de proximité. La version 2013 de la section XI du code ASME B&PV (ASME, 2005, 2015) proposait les règles suivantes pour les défauts enfouis plans : un critère d'alignement portant sur  $S_z$  et un critère de combinaison portant sur  $S_x$  et les profondeurs de défauts  $a_1$  et  $a_2$  :

$$\begin{aligned} S_z &\leq 12,5 \text{ mm (1/2 pouce)} \\ S_x &\leq \max(a_1, a_2) \end{aligned} \quad (3.2_{30})$$

Afin d'améliorer cette règle d'alignement indépendante de la taille de fissure et ces conditions portant sur la profondeur maximale du défaut Lacroix, Dulieu, Hasegawa et al. (LAC, 2018 ; DLH, 2019) ont appliqué l'équivalence proposée par Chapuliot et Blouin (CHB, 2018).

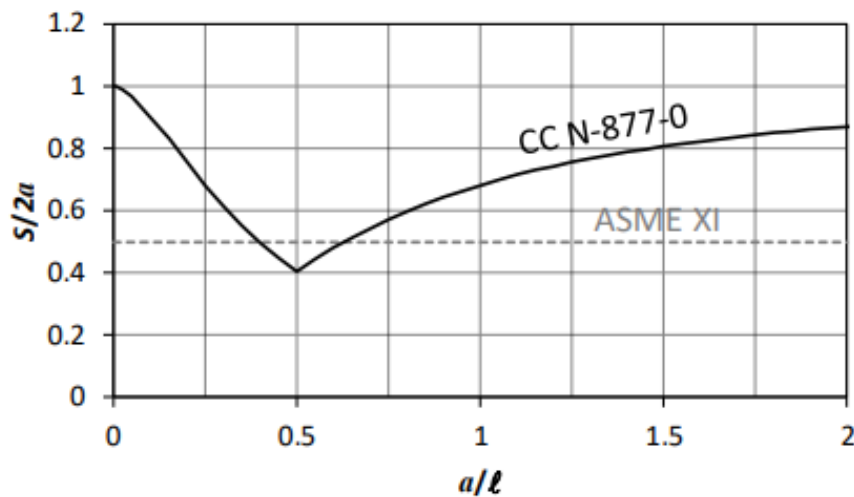
Cette équivalence est fondée sur l'identification du FIC de la fissure elliptique au co-vertex à celui d'une fissure bande. Suivant nos notations  $a$  est le grand axe et  $2c$  le petit axe :

$$K_{I\infty}(\phi) = \frac{\sigma_{app}}{E(k)} \cdot \sqrt{\pi \cdot c} \cdot \left[ \sin^2 \phi + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \cos^2 \phi \right]^{\frac{1}{4}} \equiv \sigma_{app} \cdot \sqrt{\pi \cdot c_{eq}} \quad (3.2_{31})$$

Au co-vertex  $\phi = 90$  degrés  $\frac{c}{[E(k)]^2} = c_{eq}$

Avec les notations de Chapuliot et Lacroix :  $a_{eq} = \frac{a}{[E(k)]^2}$

Ces études ont abouti à l'écriture du code case N-877-0 de 2018 (LAC, 2018) tenant compte du rapport d'aspect. Cette version du critère convient au traitement des fissures d'aspect inférieurs à 1 mais est très conservative au-delà (Figure 3.2.38 tirée de DLH, 2019).



**FIGURE 7 – COMPARISON OF COMBINATION CRITERIA FOR SUBSURFACE FLAWS**

**Figure 3.2\_38 : comparaison des critères de combinaison des défauts portant sur  $S_x$  ou  $S_y$  (DLH, 2019)**

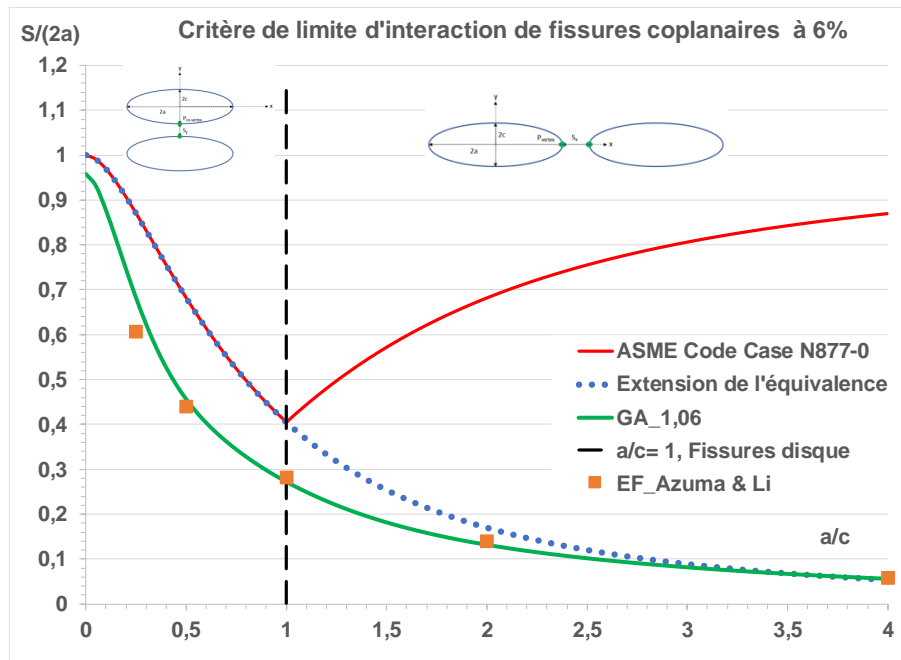
Cette définition doit être adaptée pour l'interaction au vertex.

Au vertex  $\phi = 0$  :  $\frac{c}{[E(k)]^2} \cdot \frac{c}{a} = c_{eq}$  et donc :



$$c_{eq} = \frac{a}{[E(k)]^2} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^2 \quad (3.2\_32)$$

Ceci donne la courbe en pointillés bleus de la figure 3.2\_39.



**Figure 3.2\_39 : comparaison des critères de combinaison des défauts à partir de l'équivalence et en utilisant nos formules (courbe verte)**

Pour les valeurs de  $S/(2a)$  inférieures à la courbe limite, il y a interaction.

La courbe fondée sur nos formules présente une allure similaire à celle donnée par l'équivalence. Cette courbe est en excellent accord avec les résultats de calculs aux éléments finis d'Azuma et Li (AZU, 2017). La courbe fondée sur l'équivalence est pénalisante et montre son caractère approximatif, mais son établissement n'a pas nécessité des calculs numériques.

Dulieu et al. (DLH, 2019) ont proposé un lissage fondé sur de nombreux résultats de calculs X-FEM.

$$l_{k-eq} = 1.15l_k/[1 + 0.77(a_k/l_k)^{-1.17}] \quad (3.2\_33)$$

Où  $l_k$  et  $2a_k$  sont les longueur et profondeur de la fissure  $k$ .

Le critère ASME de 2019 s'énonce :

$$\begin{cases} S_x < \min(l_{1-eq}, l_{2-eq}) \\ S_z < \min(l_{1-eq}, l_{2-eq}) \end{cases} \quad (3.2\_34)$$

Le minimum est pris afin de prendre en compte le cas des fissures inégales.

Ce lissage est proche de la courbe bleue de la courbe fondée sur l'équivalence, mais est dans l'ensemble plus pénalisante. Ceci s'explique en partie parce que le critère ASME de 2019 s'appuie sur les maxima de  $S_x$  ou  $S_y$  des isométriques qui sont un peu plus élevés que les valeurs en  $S_z=0$ . Néanmoins cette courbe reste supérieure aux maxima obtenus par nos formules comme le montre la figure 3.2\_40.

Ces courbes illustrent bien le fait que l'interaction au vertex est beaucoup moins sévère que celle au co-vertex.

Si l'on prend en compte l'interaction en  $S_z$ , la courbe des maxima de  $S_z$  obtenus par nos formules se rapproche notablement de la courbe ASME de 2019 (Figure 3.2.40). Notre approche et la codification

ASME donnent des critères très proches, la nôtre permet de séparer les cas des fissures coplanaires du cas général comme l'atteste l'écart entre la courbe orange en pointillés et la courbe violette de la figure 3.2\_41.

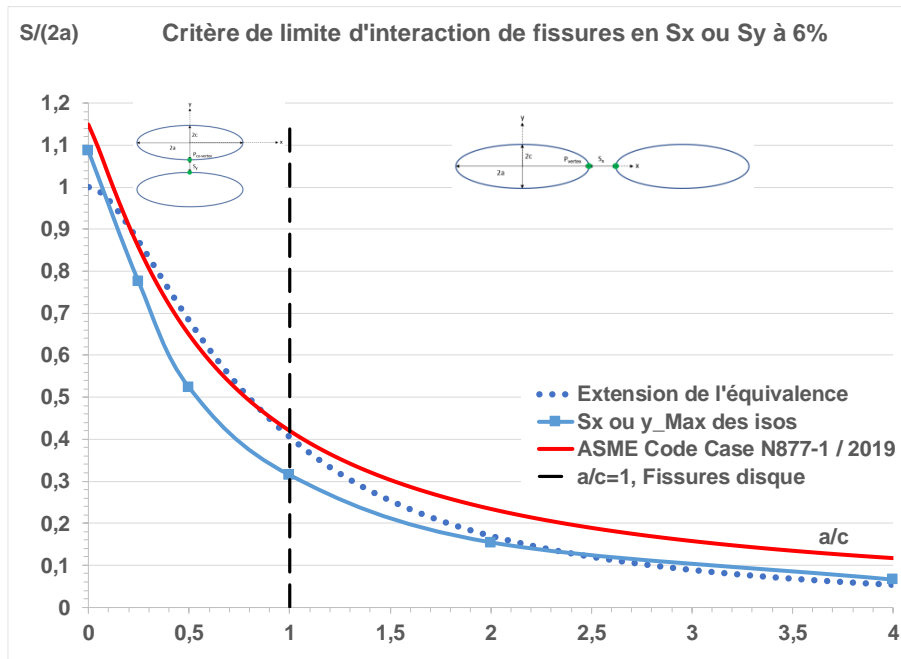


Figure 3.2\_40 : comparaison des critères de combinaison des défauts à partir de l'équivalence et des maxima des valeurs de  $S_x$  ou  $S_y$  des domaines d'interaction

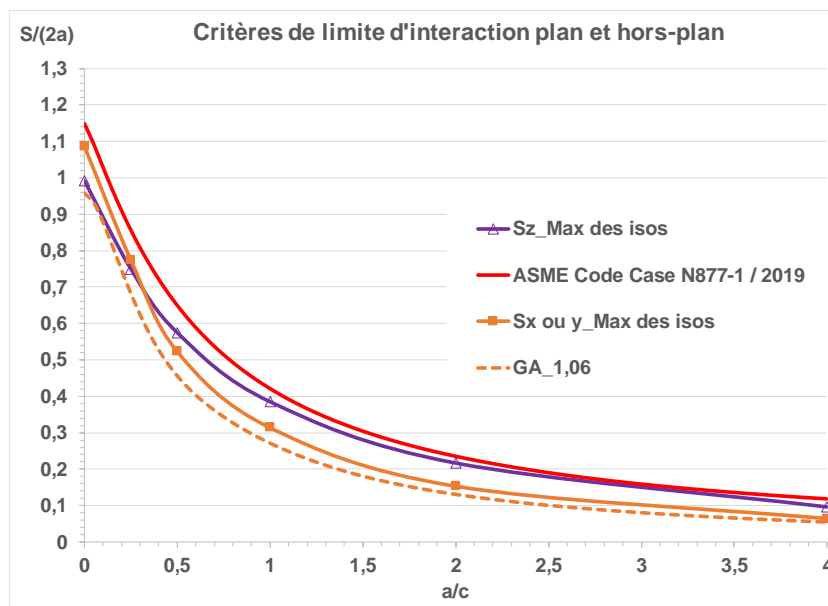


Figure 3.2\_41 : comparaison des critères de combinaison de l'équivalence et des maxima des valeurs de  $S_x$  ou  $S_y$  et  $S_z$  des domaines d'interaction

Les critères ASME seront encore amendés en 2020 afin de tenir compte des interactions entre fissure enfouie et fissure de surface. Ceci est présenté au paragraphe 3.4.1.

### 3.2.4.5 Fissures elliptiques écrantées

Isida et al. (ISI, 1985), Miyazaki et al. (MYA, 1989), Moussa (MOU, 1999, 2000) et Wang (WAG, 2022) ont analysé les effets d'écrantage de fissures elliptiques ou semi-elliptiques.

#### Ecrantage géométrique

Les points d'écrantage géométrique de deux ellipses ayant un axe commun sont définis par les deux conditions, valables pour  $S_x$  négatif ou nul :

$$\begin{aligned} y_1 = y_2 = c_1 \cdot \sin \varphi_1 = c_2 \cdot \sin \varphi_2 \\ a_1 \cdot \cos \varphi_1 + a_2 \cdot \cos \varphi_2 = a_1 + a_2 + S_x \end{aligned} \quad (3.2_{35})$$

La cote  $x_1$  de la ligne d'écrantage géométrique est donnée par la résolution de l'équation :

$$a_1 \cdot \cos \varphi_1 + a_2 \cdot \cos \left\{ A \sin \left[ \frac{c_1}{c_2} \cdot \sin \varphi_1 \right] \right\} = a_1 + a_2 + S_x \quad (3.2_{36})$$

$$x_1 = a_1 \cdot \cos \varphi_1$$

Si les fissures sont égales

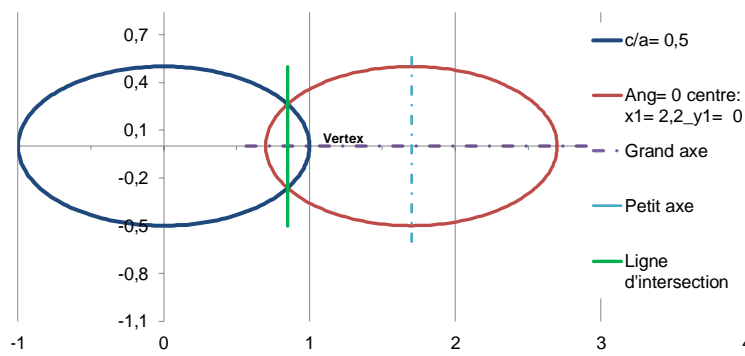
$$\varphi_2 = \varphi_1 = \varphi$$

$$x_1 = a \cdot \cos \varphi = a + \frac{S_x}{2} \quad (3.2_{37a})$$

$$\varphi = \text{Acos} \left( 1 + \frac{S_x}{2a} \right)$$

$$y_1 = c \cdot \sin \varphi = c \cdot \sqrt{1 - \left( 1 + \frac{S_x}{2a} \right)^2} \quad (3.2_{37b})$$

La ligne est située au milieu des deux pointes de fissure (Figure 3.2\_42).



**Figure 3.2\_42 : écrantage géométrique de fissures de grands axes alignés**

#### Etude de l'écrantage physique d'Isida et al.

L'écrantage physique est caractérisé par le fait que le facteur d'interaction maximal n'est pas situé aux points les plus proches.

La publication d'Isida et al. (ISI, 1985) est la meilleure sur le sujet. Elle fournit les valeurs des facteurs d'amplification  $M = \frac{K_{12}}{\sigma_{app} \cdot \sqrt{\pi \cdot c}}$  (où « c » est le demi petit axe) pour différentes configurations de fissures elliptiques égales parallèles situées dans un milieu infini en traction.

Nous avons transformé ces facteurs d'amplification en ces facteurs d'interaction. Les variations le long du front des fissures de rapport d'aspect  $c/a=0,5$  pour les écartements verticaux  $S_z/(2a) = 0,5, 1$  et  $2$  sont présentées aux figures 3.2\_43 et 3.2\_44.

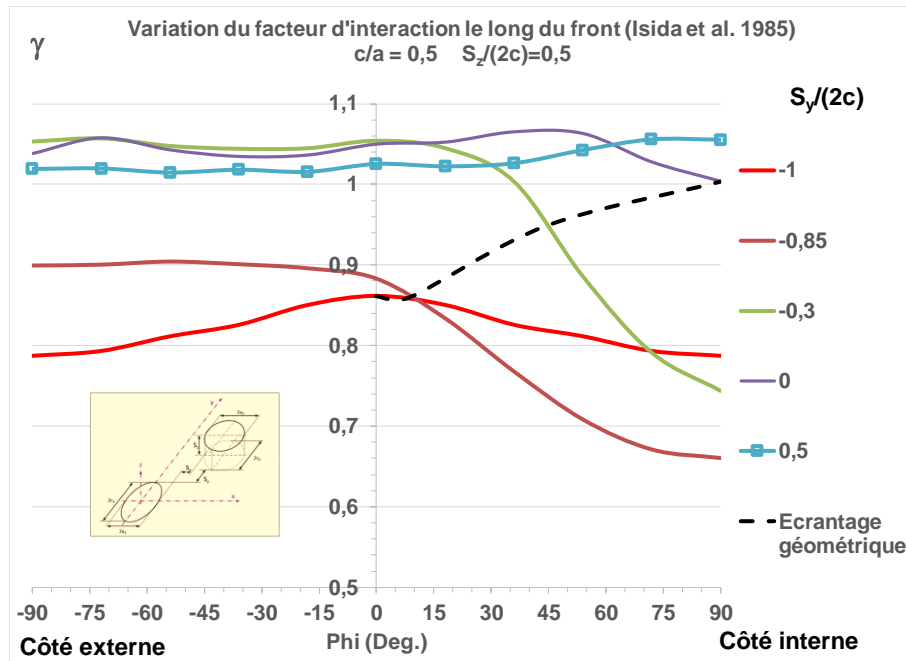


Figure 3.2\_43 : variation du facteur d'interaction le long du front de fissures elliptiques égales décalées ayant le petit axe en commun pour  $S_z/(2a) = 0,5$

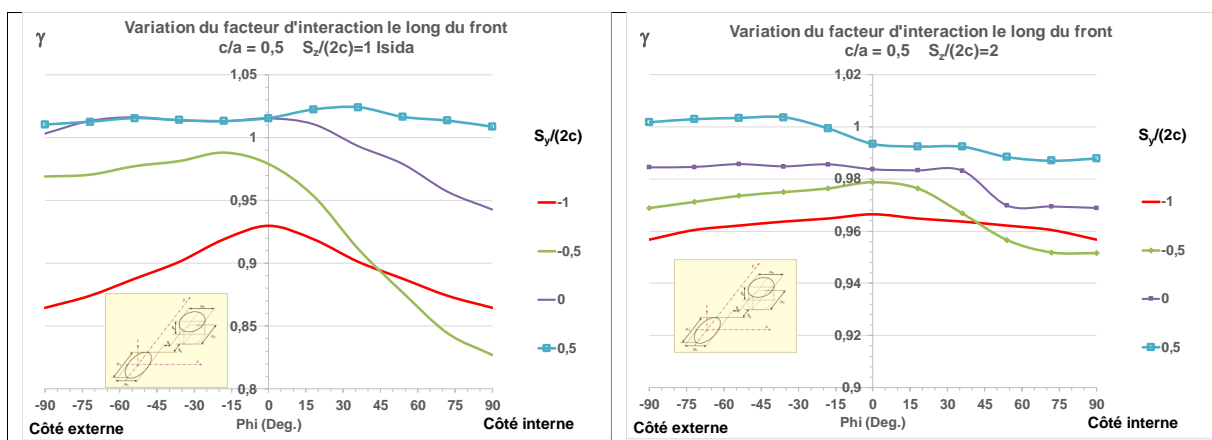


Figure 3.2\_44: variation du facteur d'interaction le long du front de fissures elliptiques égales décalées ayant le petit axe en commun pour  $S_z/(2a) = 1$  et  $2$

Pour  $S_z/(2a) = 0,5$  et  $1$  (à la limite) seule la fissure écartée verticalement de  $S_z/(2a) = 0,5$  n'est pas écartée. Pour  $S_z/(2a) = 2$ , toutes les fissures sont écartées.

Pour  $S_z/(2a) = 0,5$  et  $S_z/(2a) = -0,3$ , le point pour lequel le facteur d'interaction est égal à 1 est indiqué sur la figure 3.2\_44 qui décrit l'écrantage géométrique en projection sur le plan de la première fissure pour cette configuration.

Il importe de souligner que le facteur d'interaction des fissures écartées est toujours inférieur à celui des fissures non écartées.

Les points du front écartés géométriquement, c.à.d. situés sous la courbe d'écrantage géométrique tracée sur la figure 3 ;3\_45 ont un facteur d'interaction inférieur à 1.

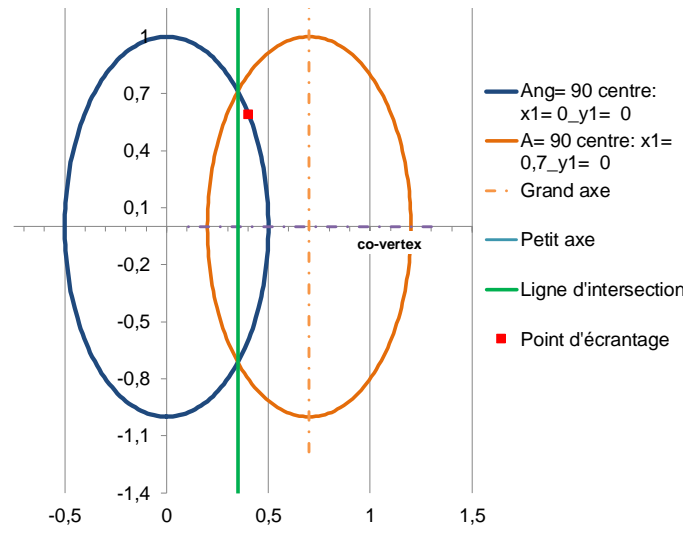


Figure 3.2\_45 : écrantage géométrique et physique de fissures de petits axes alignés

Etude de l'écrantage physique de Miyazaki et al.

L'étude de Miyazaki et al. (MYA, 1989) porte sur l'interaction de fissures elliptiques égales parallèles situées dans une plaque sous traction uniaxiale. Ce travail comporte plusieurs limitations :

- L'approche combine l'utilisation d'éléments frontière et le modèle « Line Spring » pour calculer les FIC. Cette technique ne donne pas de bons résultats pour les fissures profondes et ne permet pas de calculer les valeurs des FIC au vertex.
- Pour des profondeurs relatives « a/épaisseur » importantes la variation le long du front ne peut être comparée à celle obtenue dans un milieu infini.

Nous avons analysé le cas d'une fissure peu profonde ( $a/t = 0,2$ ) illustré à la figure 3.2\_46.

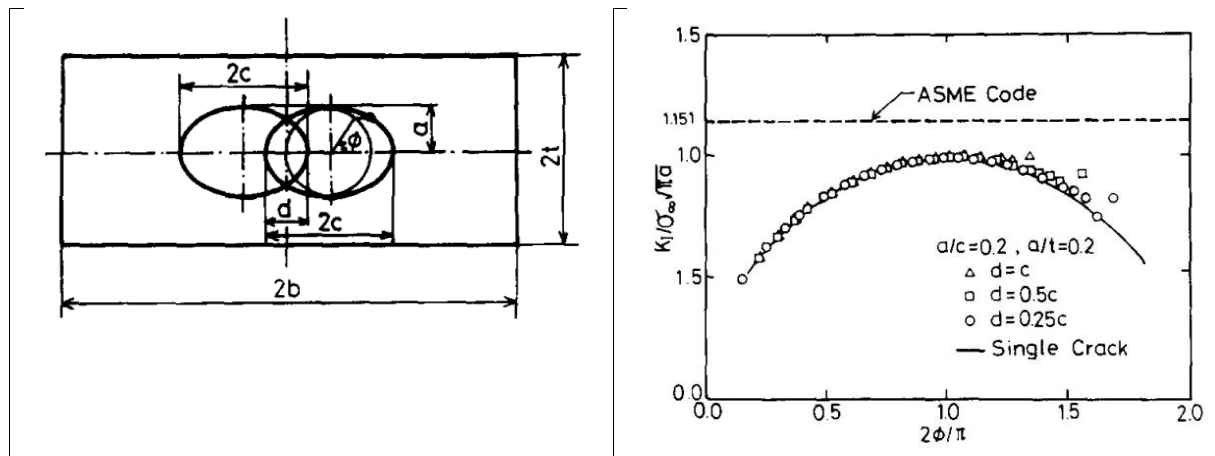


Figure 3.2\_46 : variation du facteur d'amplification le long du front de fissures elliptiques coplanaires égales ayant le grand axe en commun pour  $S_x/(2c) = -0,25 ; -0,5$  et  $-1$  (MIY, 1989)

L'écart entre le facteur d'amplification de la fissure interagissante et de la fissure isolée croît lorsque l'écrantage géométrique caractérisé par « d » diminue. Le facteur d'interaction est bien maximal aux points détachés situés au-dessus de la moyenne. Les positions de ces points et les facteurs d'interaction sont donnés au tableau 3.2\_7. Comme dans l'étude d'Isida et al. (ISI, 1985) la valeur du facteur

d'interaction diminue avec l'écrantage et la position du point d'interaction maximale suit la position de l'écrantage géométrique tout en étant inférieure (voir courbe rouge de la figure 3.2\_47).

d	0,25	0,5	1
Anomalie Phi (Deg.)	150,91	139,82	122,14
Phi/90	1,677	1,554	1,357
M	0,821	0,911	0,996
Gamma	1,223	1,159	1,094

Tableau 3.2\_7 : effet d'écrantage sur des fissures elliptiques de grands axes alignés

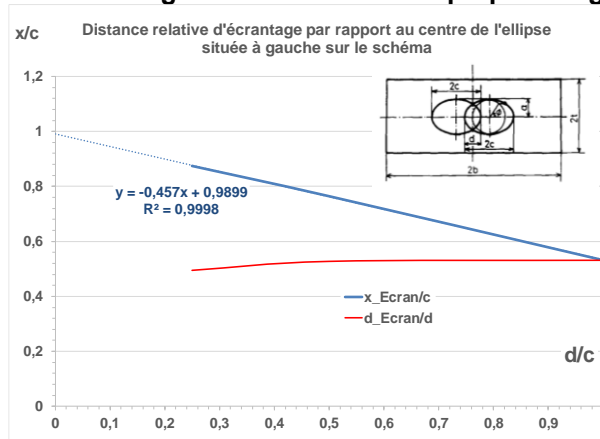


Figure 3.2\_47 : écrantage géométrique de fissures de grands axes alignés

#### Etude de l'écrantage physique de Moussa

La thèse de Moussa (MOU, 2000) porte sur l'interaction de fissures semi-elliptiques et elliptiques coplanaires ou non coplanaires égales et inégales. L'interaction entre fissure elliptique enfouie et fissure semi-elliptique de surface est aussi analysée. Les cas d'écrantage sont très nombreux (Figure 3.2\_48 où « h » est l'écartement vertical). Cependant les valeurs numériques des facteurs d'interaction ne sont pas fournies. Les calculs sont effectués par éléments finis en couplant un modèle global représentant la plaque parallélépipédique et un sous modèle décrivant la zone fissurée. Un algorithme assure la continuité des déplacements aux nœuds de couplage.

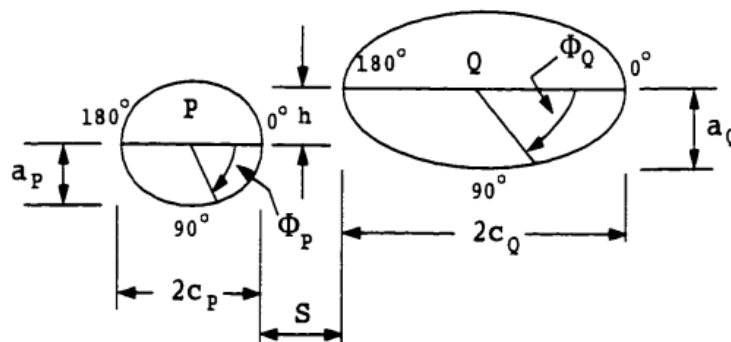


Figure 3.2\_48 : paramètres relatifs aux deux fissures elliptiques de grands axes alignés

Seuls les cas de fissures égales et peu profonde par rapport à l'épaisseur de la plaque ( $a/t = 0,2$ ) sont retenus.

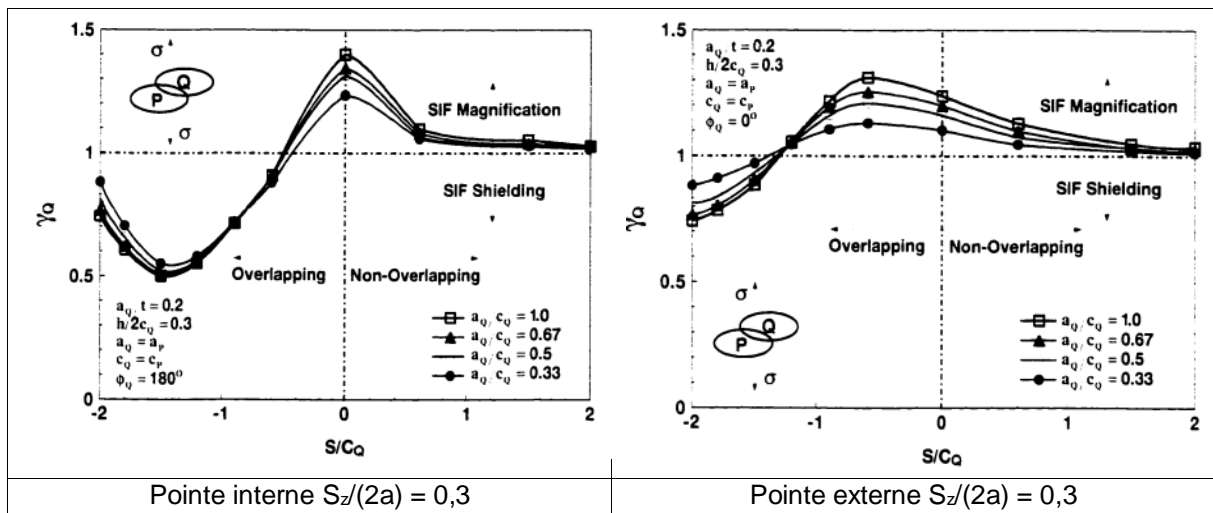


Figure 3.2\_49 : effet du rapport d'aspect de deux fissure elliptiques de grands axes alignés (MOU, 2000)

Le rapport d'aspect a peu d'effet sur le facteur d'interaction en pointe interne (Figure 3.2\_49).

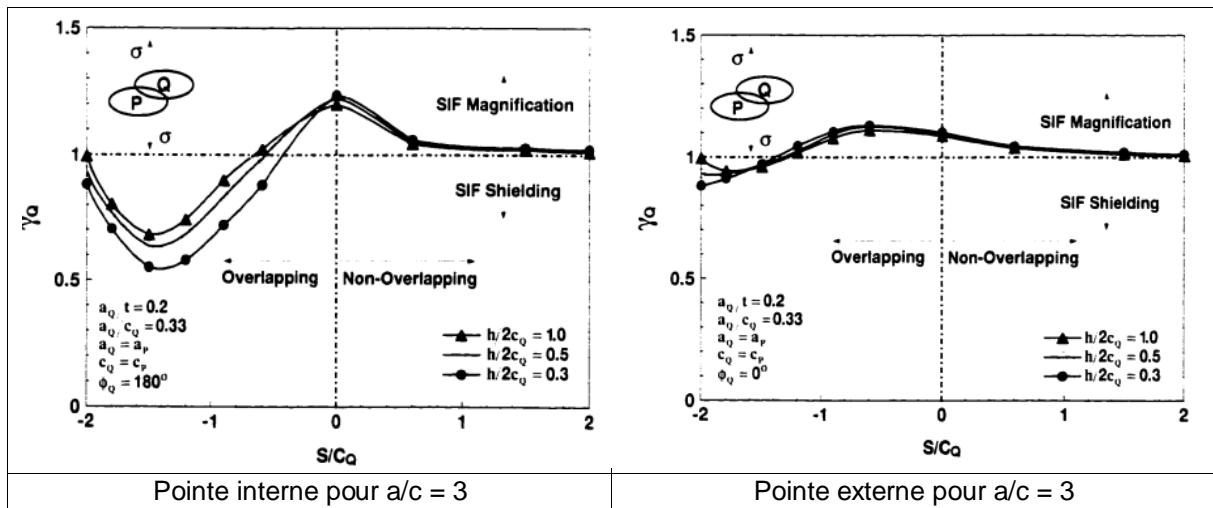


Figure 3.2\_50 : effet d'écartement vertical relatif de deux fissures elliptiques de grands axes alignés (MOU, 2000)

L'écartement vertical a peu d'effet sur le facteur d'interaction en pointe externe (Figure 3.2\_50).

De ces travaux on ne peut déduire les points d'écrantage car les variations le long du front ne sont fournies qu'en trois points (les deux co-vertex et le vertex).

#### Etude de l'écrantage physique de Wang et al.

Wang et al. (WAG, 2022) ont étudié la propagation en fatigue de fissures disque parallèles. La vue latérale de l'évolution de la fissure met en évidence la forme en « crochet » comme dans le cas des fissures bande. La diminution de la vitesse de propagation dans la zone d'écrantage est manifeste dans la simulation comme dans l'expérience. L'aire propagée est plus importante pour la fissure supérieure (Figure 3.2\_51), ce qui est probablement dû à une dissymétrie dans l'expérience comme dans l'algorithme de calcul.

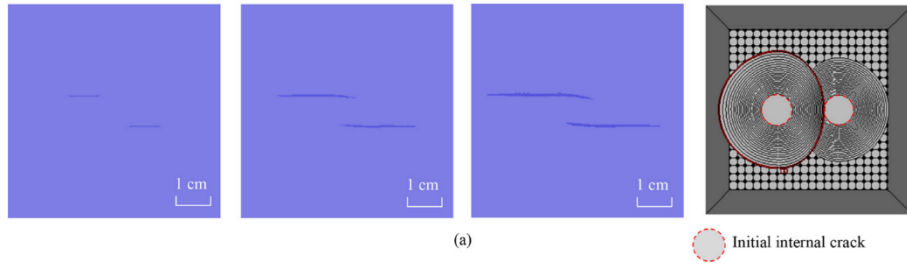


Figure 3.2\_51 : évolution en fatigue de fissures disque parallèles (WAG, 2022)

Facteur d'interaction de fissures écartées

Les facteurs d'interaction des fissures elliptiques (ISI, 1985) sont inférieurs ou proches de ceux des fissures bande que les fissures soient écartées ou non. Ceci est illustré pour l'interaction au point le plus proche (Figure 3.2\_52) et au point le plus éloigné (Figure 3.2\_53). Il est donc pénalisant de retenir les facteurs d'interaction des fissures bande (CHB, 2013 ; CHA, 2020) pour tous les cas de défauts elliptiques.

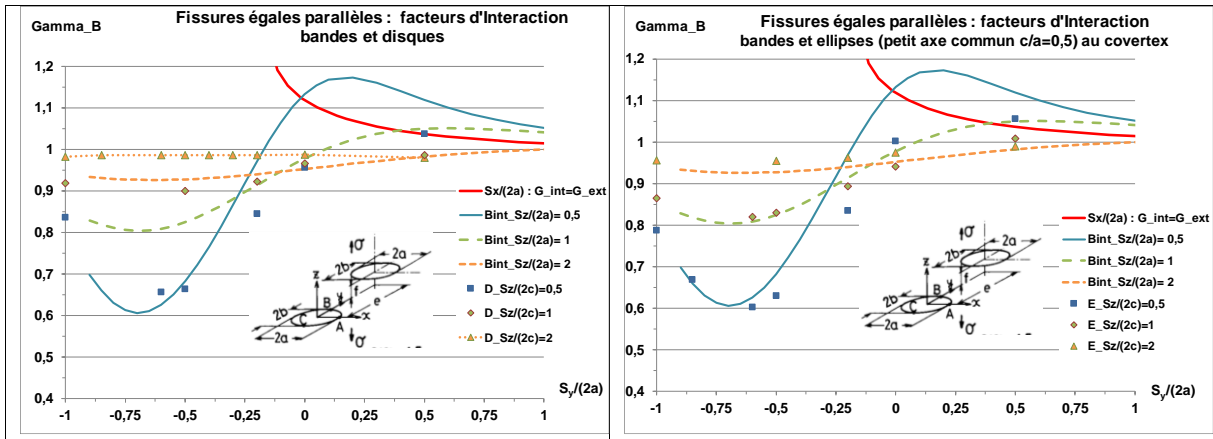


Figure 3.2\_52 : comparaison des facteurs d'interaction internes pour des fissures bande et elliptiques au point B

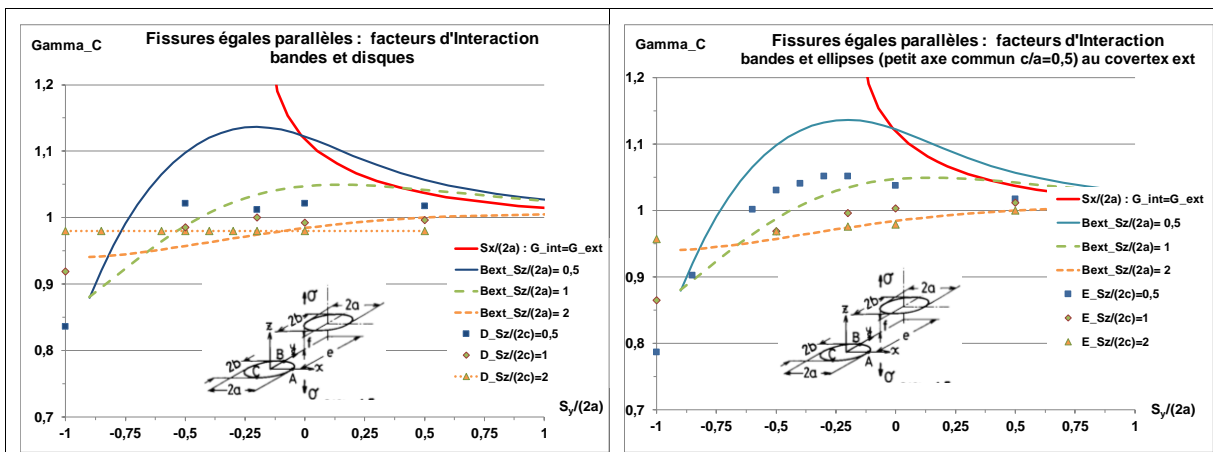


Figure 3.2\_53 : comparaison des facteurs d'interaction externes pour des fissures bande et elliptiques au point C

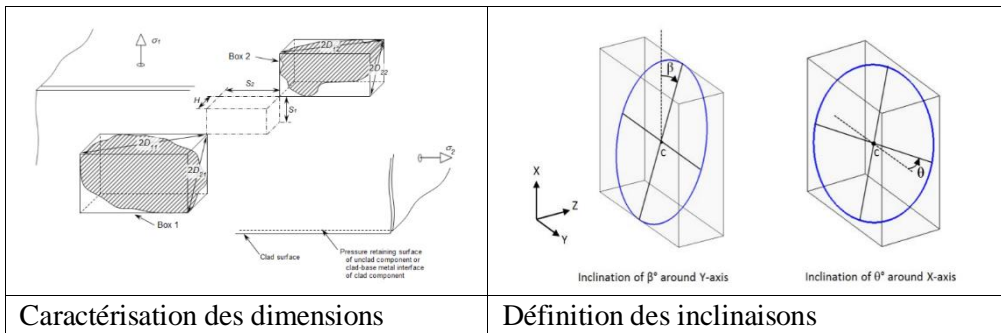


### 3.2.5 Fissures elliptiques inclinées

Comme retenu pour le cas des fissures bande, les fissures inclinées peuvent être traitées comme des fissures bande coplanaires en les projetant sur le même plan et en conservant le plus petit écartement hors-plan, mesuré avant projection. Cette solution peut sous-estimer l'interaction, aussi nous recommandons d'appliquer la technique proposée pour les fissures disque, qui consiste à faire pivoter la seconde fissure à partir du point le plus proche sur le plan parallèle à la première fissure.

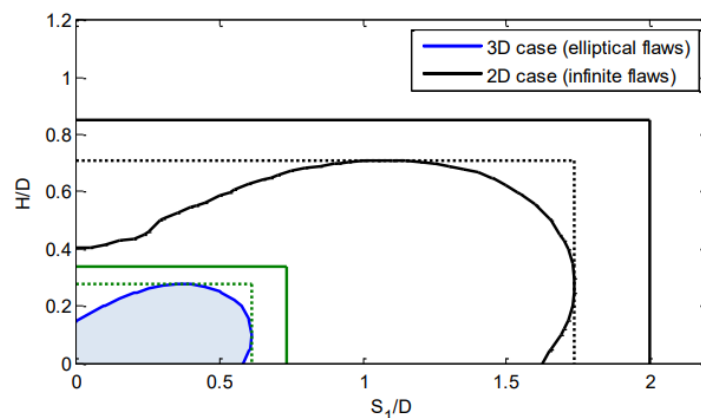
A notre connaissance dans la littérature, à l'exception des travaux de Dulieu et al. (DUL, 2015, LAC, 2015) sur l'interaction de fissures laminaires, les études de fissures inclinées ne portent que sur les fissures disque.

Les dimensions des fissures et leur inclinaison est mesurée en enveloppant les fissures dans un parallélépipède rectangle (Figure 3.2\_54). Le FIC équivalent est déterminé en utilisant la formule d'Irwin, comme préconisé dans le RSE-M (RSEM, 2020). Le tracé du critère est reproduit à la figure 3.2\_55.



**Figure 3.2\_54 : définition des caractéristiques géométriques des fissures inclinées (DUL, 2015)**

Dans leur étude, les inclinaisons des deux fissures sont considérées comme égales. Les dimensions sont aussi égales, mais la généralisation des résultats aux fissures inégales est assurée en se référant à la taille de la plus petite fissure équivalente. Le massif est sollicité en traction uniaxiale. Le critère d'interaction à 6% est présenté en fonction des écartements rapportés à la demi-diagonale de la plus grande fissure, ce qui peut prêter à confusion car dans le cas de fissures parallèles les écartements sont rapportés aux longueurs.



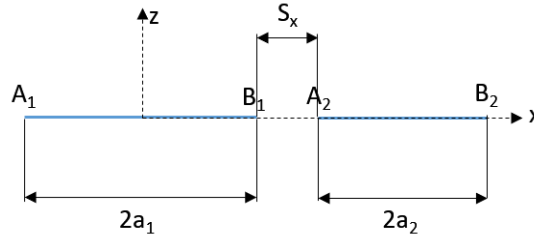
**Figure 3.2\_55 : critères d'interaction des fissures inclinées (LAC, 2015)**

Cette approche est similaire à notre proposition d'appliquer une projection sur un plan parallèle à la première fissure par rotation de la seconde fissure.

### 3.3 Principales formules de facteurs d'interaction et de coefficient d'équivalence

#### 3.3.1 Fissures bande

##### 3.3.1.1 Fissures bande coplanaires



**Figure 3.3\_1 : Interaction de fissures inégales**

Les facteurs d'interaction aux quatre extrémités sont donnés par les formules exactes de Gommerstadt. Ces formules sont paramétrées avec le rapport des tailles de fissure  $\zeta = \frac{a_1}{a_2}$  et un indicateur d'éloignement  $\beta = \frac{S_x}{2a_2}$

Les facteurs d'interaction aux quatre extrémités sont données par les formules exactes suivantes :

$$\gamma_{A_1}(\zeta, \beta) = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{\sqrt{\zeta + \beta}}{\sqrt{\zeta + \beta + 1}} \cdot \left[ \zeta + \beta + 1 - (1 + \beta) \cdot \frac{E(k)}{K(k)} \right] \quad (3.1_1a)$$

$$\gamma_{B_1}(\zeta, \beta) = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{\sqrt{1 + \beta}}{\sqrt{\beta}} \cdot \left[ -\beta + (\zeta + \beta) \cdot \frac{E(k)}{K(k)} \right] \quad (3.1_1b)$$

$$\gamma_{A_2}(\zeta, \beta) = \frac{\sqrt{\zeta + \beta}}{\sqrt{\beta}} \cdot \left[ -\beta + (1 + \beta) \cdot \frac{E(k)}{K(k)} \right] \quad (3.1_1c)$$

$$\gamma_{B_2}(\zeta, \beta) = \frac{\sqrt{1 + \beta}}{\sqrt{\zeta + \beta + 1}} \cdot \left[ \zeta + \beta + 1 - (\zeta + \beta) \cdot \frac{E(k)}{K(k)} \right] \quad (3.1_1d)$$

$$k = \sqrt{\frac{\xi}{(\xi + \beta) \cdot (1 + \beta)}} \quad (3.1_1e)$$

Afin d'établir une formulation généralisable aux fissures elliptiques, nous avons validé la formule approchée suivante en pointes internes  $P_k$  (=G pour grande et P pour petite) des deux fissures :

$$\gamma_{int} = \gamma_{21}(P_{Int}) = 1 + A(P_k, \zeta) \cdot [F_{W\_B\_Co}(\lambda_x) - 1] \quad \text{avec} \quad \lambda_x = \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 + S_x} \quad (3.1_13a)$$

Avec 
$$F_{W\_B\_Co}(\lambda_x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\lambda_x)^2}}$$

La fonction A s'exprime de la façon suivante pour  $\zeta \geq 1$  :

$$A(G; \zeta) = A_G(\zeta) = \exp(-\zeta^{0.49}) \quad (3.1_16a)$$

$$A(P; \zeta) = A_P(\zeta) = \zeta \cdot A_G(\zeta) \quad (3.1_{16b})$$

Si  $\zeta \leq 1$ , il faut inverser G et P.

### 3.3.1.2 Fissures bande parallèles

#### 3.3.1.2.1 Limite d'écrantage

Les conditions d'écrantage pour deux fissures bande sont données par les formules :

$$\hat{S}_{zE} = \text{Max}(\hat{S}_{zE}, 0, 2)$$

$$\Sigma_E \equiv (\hat{S}_{zE} - \hat{S}_{z0}) \cdot \left[ \hat{S}_{zE}^3 - (\hat{S}_{xE} - \hat{S}_{x0})^3 \right] - 1,35 \cdot \hat{S}_{zE}^2 (\hat{S}_{xE} - \hat{S}_{x0}) = 0 \quad (3.1_{30})$$

Il y a écrantage élastique si  $\Sigma_E > 0$  et  $\hat{S}_{xE} < \hat{S}_{x0} + \hat{S}_{zE} \cdot \sqrt{\frac{1,35}{3(\hat{S}_{zE} - \hat{S}_{z0})}}$  sinon la fonction est mise à la valeur-1.

#### 3.3.1.2.2 Fissures bande parallèles non écrantées

La formule en pointe interne est donnée directement par la fonction de Westergaard pour le hors plan.

$$\gamma_{21}(P) = F_{W\_B\_Pa} \left( \frac{x_D}{a}; \frac{S_z}{a} \right) \quad (3.1_{21})$$

La valeur de  $x_D$  est obtenue en écrivant cette formule pour les mêmes fissures coplanaires.

$$F_{W\_B\_pa} \left( \frac{x_D}{a}; 0 \right) = \gamma_{21\_Coplanaire} \quad (3.1_{19})$$

La fonction de Westergaard pour le hors plan exprimée en coordonnées polaires est :

$$F_{W\_B\_Pa} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho_1 \cdot \rho_2}} \cdot \left[ \cos \left( \theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) + \frac{1}{\rho_1 \cdot \rho_2} \cdot \sin \theta \cdot \sin \frac{3}{2} \cdot (\theta_1 + \theta_2) \right] \quad (3.1_{20a})$$

Avec

$$\rho = \frac{r}{a} \rho_1^2 = \rho^2 + 1 - 2 \cdot \rho \cdot \cos \theta \quad \rho_2^2 = \rho^2 + 1 + 2 \cdot \rho \cdot \cos \theta \quad (3.1_{20b})$$

$$\theta_1 = \text{Acos} \left( \frac{-1 + \rho \cdot \cos \theta}{\rho_1} \right) \quad \theta_2 = \text{Acos} \left( \frac{1 + \rho \cdot \cos \theta}{\rho_2} \right) \quad (3.1_{20c})$$

r et  $\theta$  sont les coordonnées polaires associées à  $x_D$  et z

#### 3.3.1.2.3 Fissures bande parallèles écrantées

Le décalage des fissures écrantées s'exprime sous la forme polynomiale suivante.

$$X_{RD} = \frac{x_D}{a} = A + B \cdot \hat{S}_{x0} + C \cdot \hat{S}_{x0}^2 + D \cdot \hat{S}_{x0}^3 + E \cdot \hat{S}_{x0}^4 \quad (3.1_{31})$$

Pointe interne

$\hat{S}_z \leq 0.6$	$A = -1.0033 \cdot S_{z0}^3 + 0.9125 \cdot S_{z0}^2 + 0.3602 \cdot \hat{S}_{z0} + 0.9795$
	$B = -6.6815 \cdot S_{z0}^3 + 8.6734 \cdot S_{z0}^2 - 2.45 \cdot \hat{S}_{z0} + 1.2583$
	$C = -41.714 \cdot S_{z0}^3 + 67.541 \cdot S_{z0}^2 - 35.532 \cdot \hat{S}_{z0} + 5.3758$
	$D = -71.356 \cdot S_{z0}^3 + 120.4 \cdot S_{z0}^2 - 68.799 \cdot \hat{S}_{z0} + 11.094$
	$E = -37.332 \cdot S_{z0}^3 + 63.837 \cdot S_{z0}^2 - 37.645 \cdot \hat{S}_{z0} + 6.976$
$\hat{S}_z > 0.6$	$A = -0.1078 \cdot S_{z0}^3 + 0.2237 \cdot S_{z0}^2 + 0.1073 \cdot \hat{S}_{z0} + 1.1797$
	$B = 0.0849 \cdot S_{z0}^3 + 0.1075 \cdot S_{z0}^2 + 0.1392 \cdot \hat{S}_{z0} + 1.4382$

	$C = -0.4952 \cdot S_{z0}^3 + 1.895 \cdot S_{z0}^2 - 1.943 \cdot \hat{S}_{z0} + 0.5988$
	$D = -0.4746 \cdot S_{z0}^3 + 2.0867 \cdot S_{z0}^2 - 2.36 \cdot \hat{S}_{z0} - 0.234$
	$E = 0$

Pointe externe

$\hat{S}_z \leq 0.5$	$A = -1.9 \cdot S_{z0}^3 + 3.93 \cdot S_{z0}^2 - 0.948 \cdot \hat{S}_{z0} + 0.9643$
	$B = -12.417 \cdot S_{z0}^3 + 13.482 \cdot S_{z0}^2 - 4.4496 \cdot \hat{S}_{z0} + 0.066$
	$C = -85342 \cdot S_{z0}^3 + 84.246 \cdot S_{z0}^2 - 23.547 \cdot \hat{S}_{z0} + 0.424$
	$D = -145.43 \cdot S_{z0}^3 + 150.95 \cdot S_{z0}^2 - 41.021 \cdot \hat{S}_{z0} + 0.8975$
	$E = -72.783 \cdot S_{z0}^3 + 79.614 \cdot S_{z0}^2 - 22.571 \cdot \hat{S}_{z0} + 0.5418$

$\hat{S}_z > 0.5$	$A = 2.28358 - 1.5837 \cdot S_{z0}^{0.06627} \cdot \text{Exp}(-1.9225 \cdot S_{z0}^{2.24237})$
	$B = 1.25447 - 5.3899 \cdot S_{z0}^{0.95834} \cdot \text{Exp}(-2.0908 \cdot S_{z0}^{2.0809})$
	$C = -7142.35 \cdot S_{z0}^{5.3429} \cdot \text{Exp}(-8.5377 \cdot S_{z0}^{0.7747})$
	$D = 0.01317 - 3.1623 \cdot S_{z0}^{3.1879} \cdot \text{Exp}(-1.3178 \cdot S_{z0}^{3.2597})$
	$E = 0$

Tableau 3.3\_1 : coefficient de la fonction de décalage pour des fissures bande écrantées

Le cas des fissures inclinées est traité par projection des fissures sur un même plan (§ 3.1.3).

### 3.3.2 Fissures elliptiques

#### 3.3.2.1 Fissures elliptiques coplanaires

La formule de base donnant le facteur d'interaction en pointes internes est la suivante. Les expressions de la fonction A et celle des paramètres  $\lambda_x$  et  $\lambda_y$  dépendent de configurations.

$$\gamma_{12}(P) = 1 + A \cdot \left[ F_{W\_E\_co} \left( \frac{c}{a}, \lambda_x, \lambda_y \right) - 1 \right] \quad (3.2_1)$$

$$\lambda_x = \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 + S_x} \quad \lambda_y = \frac{c_1 + c_2}{c_1 + c_2 + S_y} \quad (3.2_2)$$

$$\frac{\sigma_{zz}(x, y)}{\sigma_{app}} = F_{W\_E\_co} = \frac{1}{E(k)} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{\frac{\xi_E}{c^2} \cdot \left(1 + \frac{\xi_E}{a^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{\xi_E}{c^2}\right)}} + \frac{\text{sn}(u) \cdot \text{cn}(u)}{\text{dn}(u)} - \varepsilon(u, k) \right\} \quad (3.2_5)$$

Avec:

- les fonctions elliptiques jacobienes  $\varepsilon(u, k)$ ,  $\text{sn}(u)$ ,  $\text{cn}(u)$  et  $\text{dn}(u)$  (ABS, 1964)

- La coordonnée ellipsoïdale  $\xi_E = a^2 \cdot \frac{\text{cn}^2(u)}{\text{sn}^2(u)}$  (3.2\_6)

- $E(k)$  l'intégrale elliptique de seconde espèce

- La variable  $u = \int_0^{\text{sn}(u, k)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2) \cdot (1-k^2 t^2)}}$  (3.2\_7)

La variable  $\xi_E$  est obtenue à partir des coordonnées cylindriques par résolution d'une équation de degré 3 :

$$\frac{2\xi_E}{a^2} = \left(\frac{r}{a}\right)^2 - \left[1 + \left(\frac{c}{a}\right)^2\right] + \frac{\sqrt{\Delta}}{a^2}$$

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{a^2} = \sqrt{\left[1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{r}{a}\right)^4 - 2\left[1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2\right] \cdot \left(\frac{x-y}{a}\right)^2} \quad (3.2_8)$$

### 3.3.2.1.1 Effets de forme et de taille des fissures

Les rapports d'aspect c/a des deux fissures sont identiques

La fonction A dépend du rapport d'aspect c/a des deux fissures et du rapport des tailles :  $A = A\left(\frac{c}{a}, \zeta\right)$

- Pour  $\frac{c}{a} = 0$   $A\left(\frac{c}{a}, \zeta\right) \equiv A(0, \zeta)$  voir § 3.3.1.1
- Pour  $\frac{c}{a} = 1$   $A\left(\frac{c}{a}, \zeta\right) \equiv A(1, \zeta) = \exp(-1.41 \cdot \zeta^{0.721})$
- Pour  $1 \geq \frac{c}{a} > 0$   $A\left(\frac{c}{a}, \zeta\right) = \frac{1}{1+p \cdot \exp\left[q \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^r\right]} + s$  (3.2.3)

$$\text{Avec } p = \frac{1}{A(0, \zeta) - A(1, \zeta)} - 1 \quad s = A(1, \zeta) \quad q = 9,2 \quad r = 1,84$$

- Pour  $\frac{c}{a} > 1$   $\frac{c}{a}$  est change en  $\frac{a}{c}$ .

Les rapports d'aspect c/a des deux fissures sont différents

La fonction A est multiplié par un facteur correctif qui fait intervenir les différences de rapport d'aspect.

Le paramètre choisi est le rapport des rapports des facteurs de forme du FIC de la grande fissure sur celui de la petite :  $RAC = (F_{\text{grande}})/(F_{\text{petite}})$ . La correction n'est établie que pour la grande fissure. La grande fissure est la fissure isolée qui a le FIC le plus élevé au même point que le point d'interaction.

La fonction est modifiée par un coefficient multiplicateur :

$$A(RAC) = A(RAC = 1) \cdot RAC^{-0,28} \quad (3.2_{29})$$

### 3.3.2.1.2 Effets de position des fissures

Les effets de position des fissures (décalage ou désorientation) sont traités par la modification des paramètres d'éloignement  $\lambda_x$  et  $\lambda_y$  à partir du paramètre  $\lambda_p$ .

$$\lambda_p = \frac{l_1 + l_2}{e_x} \text{ avec } e_p = l_1 + l_2 + S_p \quad (3.2_{10})$$

Où  $S_p$  est la distance entre les deux points  $P_1$  et  $P_2$ . Et  $l_1$  et  $l_2$  les distances des points  $P_i$  aux points d'intersection de la normale avec les axes des ellipses.

Les paramètres  $\lambda_x$  ou  $\lambda_y$  sont obtenus par projection des quantités sur les axes  $Ox$  et  $Oy$ .

## 3.3.2.2 Fissures elliptiques parallèles

### 3.3.2.2.1 Fissures elliptiques non écartées

L'expression simplifiée du facteur d'interaction est donnée directement par la fonction de Westergaard :

$$\gamma_{12}(P) = F_{W\_E\_Pa} \left( \frac{c}{a}, \frac{x_D}{l}, \frac{y_D}{l}, \frac{S_z}{l} \right) \quad (3.2_{22})$$

Où la valeur de  $x_D$  ou  $y_D$  est obtenue par identification de  $F_{W\_E\_Co} \left( \frac{c}{a}, \frac{x_D}{l}, \frac{y_D}{l} \right)$  à l'expression correspondante du facteur d'interaction de la fissure coplanaire projetée et  $l = a_1$  ou  $a_2$ . Cette identification peut être faite pour les deux points internes des fissures coplanaires.

La fonction  $F_{W\_E}$  notée ici  $F_{W\_E\_Pa}$  est évaluée pour  $x_D$  ou  $y_D$  positifs.

L'expression de la fonction est la suivante :

$$F_{W,E,pa} = 1 + \frac{1}{E(k)} \cdot \left\{ \left[ \frac{\text{sn}(u) \cdot \text{dn}(u)}{\text{cn}(u)} - \varepsilon(u, k) \right] - z \cdot \left[ k_c^2 \cdot \frac{\text{sn}^2(u)}{\text{cn}^2(u)} \right] \cdot \frac{du}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} - 2z^2 \cdot \left[ k_c^2 \cdot \frac{\text{sn}(u) \cdot \text{dn}(u)}{\text{cn}^3(u)} \right] \cdot \left( \frac{du}{d\xi} \right)^2 \cdot \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \right. \\ \left. - z^2 \cdot \left[ k_c^2 \cdot \frac{\text{sn}^2(u)}{\text{cn}^2(u)} \right] \cdot \left[ \frac{d^2 u}{d\xi^2} \cdot \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 + \frac{du}{d\xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right] \right\} \quad (3.2_{23})$$

Où interviennent les fonctions elliptiques de Jacobi :  $\text{sn}(u)$ ,  $\text{cn}(u)$ ,  $\text{dn}(u)$  et  $\varepsilon(u, k)$  décrites dans (ABS, 1964). Les variables  $\xi, \eta, \zeta$  sont les coordonnées ellipsoïdales qui sont les trois racines de l'équation (3.2\_24).

$$\frac{x^2}{a^2 + \theta} + \frac{y^2}{c^2 + \theta} + \frac{z^2}{\theta} - 1 + 0 \quad (3.2_{24})$$

Elles sont obtenues par la méthode de Cardan (CAR, 1545).

Les coordonnées ellipsoïdales sont proportionnelles au carré des longueurs (voir 3.2\_8).

$$\xi = a^2 \cdot \left( \frac{\text{cn}(u)}{\text{sn}(u)} \right)^2 \quad \text{soit} \quad u = \text{sn}^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\xi}{a^2}}} \right)$$

Les variables sont adimensionnalisées.

$$\bar{z} = \frac{z}{a} \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{a^2} = \left( \frac{\text{cn}(u)}{\text{sn}(u)} \right)^2 \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{a^2} \quad \bar{\zeta} = \frac{\zeta}{a^2} \quad (3.2_{26})$$

Les dérivées de  $u$  par rapport à  $\bar{\xi}$  et de  $\bar{\xi}$  par rapport à  $z$  sont données dans le tableau suivant.

$\frac{du}{d\bar{\xi}} = - \frac{\text{sn}^3(u)}{2\text{cn}(u) \cdot \text{dn}(u)}$	(3.2_27a)
$\frac{d^2 u}{d\bar{\xi}^2} = - \frac{\text{sn}^2(u)}{2} \cdot \left( 3 + \frac{\text{sn}^2(u)}{\text{cn}^2(u)} + k^2 \cdot \frac{\text{sn}^2(u)}{\text{dn}^2(u)} \right) \cdot \frac{du}{d\bar{\xi}}$	(3.2_27b)
$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{z}} = \bar{z} \cdot \frac{(1 + \bar{\xi}) \cdot \left( \left( \frac{c}{a} \right)^2 + \bar{\xi} \right)}{(\bar{\xi} - \bar{\eta}) \cdot (\bar{\xi} - \bar{\zeta})}$	(3.2_27c)
$\frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial \bar{z}^2} = \frac{1}{2\bar{\xi} \cdot \bar{h}_1^2} \cdot \left\{ 1 - \frac{\bar{z}^2}{\bar{\xi}^2 \cdot \bar{h}_1^2} + \frac{\bar{z}^2}{4\bar{\xi} \cdot \bar{h}_1^4} \cdot \left[ \frac{\bar{x}^2}{\left( \left( \frac{c}{a} \right)^2 + \bar{\xi} \right)^3} + \frac{\bar{y}^2}{(1 + \bar{\xi})^3} + \frac{\bar{z}^2}{\bar{\xi}^3} \right] \right\}$	(3.2_27d)
$\bar{h}_1^2 = \frac{1}{4\bar{\xi}} \cdot \frac{(\bar{\xi} - \bar{\eta}) \cdot (\bar{\xi} - \bar{\zeta})}{(1 + \bar{\xi}) \cdot \left( \left( \frac{c}{a} \right)^2 + \bar{\xi} \right)}$	(3.2_27e)

**Tableau 3.3\_2 : fonction de Westergaard pour une fissure elliptique isolée**

### 3.3.2.2 Fissures elliptiques écrantées

Les facteurs d'interaction des fissures elliptiques (ISI, 1985) sont inférieurs ou proches de ceux des fissures bande que les fissures soient écrantées ou non. Ceci est illustré pour l'interaction au point le plus proche (Figure 3.2\_52) et au point le plus éloigné (Figure 3.2\_53). Il est donc pénalisant de retenir les facteurs d'interaction des fissures bande (CHB, 2013 ; CHA, 2020) pour tous les cas de défauts.



## 4 INTERACTION EN ELASTO-PLASTICITE

### 4.1 Introduction

Sous l'effet de sollicitations de niveau élevé, les structures se plastifient. Les configurations étudiées dans cette thèse ne sont pas déformées à l'état initial et sont soumises à un chargement unique monotone croissant, le comportement peut donc être décrit en élasticité non-linéaire (LEC, 1988). Les conditions sont donc réunies pour que l'utilisation de la force d'extension de fissure  $J$  introduite par Rice (RIC, 1968c) soit valide. Dans le cas d'une structure fissurée soumise à un chargement mécanique primaire,  $J$  est amplifiée par rapport à sa valeur en élasticité linéaire pour le même niveau de charge. Il importe donc d'étudier l'impact de la plastification sur l'interaction de fissures et sur la taille du défaut équivalent.

En élasticité comme en plasticité l'interaction entre un défaut et la structure dépend essentiellement de la taille du ligament entre pointe de fissure et la paroi. Toutefois, en plasticité étendue cette interaction est notablement amplifiée. Même pour des défauts de petite taille centrés dans la section fissurée le fait que le milieu fissuré ne soit pas infini modifie le comportement de la force fissurante  $J$ . Dans le calcul du facteur d'interaction en élastoplasticité, il est donc impératif de tenir compte des dimensions de la structure (cf. § 5.2.2.1).

Le facteur d'interaction comme le coefficient d'équivalence sont définis par un rapport de forces fissurantes l'une calculée pour la fissure soumise à interaction, l'autre pour cette même fissure isolée. Pour les fissures enfouies, le milieu est considéré comme infini. Cette condition est satisfaite dans les approches analytiques (ex : ERD, 1962) ainsi que dans les calculs effectués par la méthode des forces de volume (ex : ISI, 1985). Mais les calculs de structures fissurées sont souvent effectués sur des domaines finis et pour que les résultats soient peu dépendants de la taille relative de fissure par rapport à celle de la section fissurée, il faut que les fissures soient à peu près centrées dans la section et que leurs dimensions soient inférieures à 10 fois celle des dimensions de la section fissurée. Il est recommandé de calculer la fissure isolée dans le même massif.

La détermination du défaut équivalent à deux fissures égales en élasto-plasticité n'est réalisée complètement dans cette thèse que pour le cas de fissures bande. Toutefois, les principes de la démarche sont généralisables aux configurations tridimensionnelles : ils peuvent guider la sélection des cas les plus pertinents pour le traitement de l'interaction de fissures elliptiques. Seul un coefficient équivalent enveloppe est fourni pour des fissures elliptiques.

### 4.2 Interaction entre deux fissures bande

La prédiction du coefficient d'équivalence en élasto-plasticité repose sur deux approches complémentaires :

1. La première approche est fondée sur l'analyse des iso valeurs de contraintes et des résultats de calculs élastoplastiques de coefficients d'équivalence.
2. La seconde approche consiste à appliquer la méthode de la contrainte de référence, ici appliquée pour déterminer une charge de référence. Le lien avec le coefficient d'équivalence est établi. Cette approche permet de montrer que les coefficients dépendent peu de l'écroutissage (cf. § 4.2.7.1). Le calcul du coefficient nécessite toutefois la recherche de fonctions définissant les contraintes de référence pour chaque pointe de fissure. Cette tâche n'a été accomplie que pour des fissures coplanaires égales ; l'étendre aux fissures parallèles inégales demande un très grand nombre de calculs.

L'analyse se place dans le cadre de l'élasticité non-linéaire, pour lequel  $J$  est défini.

Elle s'appuie sur un très grand nombre de calculs par éléments finis :

- 26 calculs élasto-plastiques effectués en 1999 par Framatome avec le code SYSTUS<sup>TM</sup> (SYSTUS, 2020) ;



- 70 calculs élasto-plastiques effectués en 2020 par ESI France avec le code SYSTUS™ (SYSTUS, 2020).

L'écart relatif entre les résultats théoriques de calculs élastiques et ceux par éléments finis évalués dans le cas des fissures coplanaires est limité à 1%.

La précision des calculs élasto-plastiques d'ESI France (SYSTUS, 2020) est meilleure que celle des calculs effectués par Framatome (FRA, 1999), essentiellement pour les pointes de fissure les moins sollicitées car les maillages d'ESI France sont considérablement plus fins, en particulier aux pointes les moins sollicitées. Plusieurs calculs de 1999 ont à ce titre été repris pour évaluer les différences, notamment pour les fissures écrantées.

Hormis ces derniers cas, les écarts relatifs entre les résultats d'ESI et de Framatome sur le coefficient d'équivalence sont inférieurs à 2% en élasto-plasticité, les effets de maillage jouant moins sur le rapport des J que sur les J eux-mêmes.

#### 4.2.1 Calcul du coefficient d'équivalence

De la même manière qu'en élasticité linéaire, il est possible de définir le calcul des coefficients d'équivalence élémentaires avec une loi de comportement élasto-plastique.

Dans le cas bidimensionnel des fissures bande, le coefficient à la pointe  $P_k$  de la fissure (i) est donné par :

$$\alpha_{ep,i,j \neq i, P_k} = \frac{J_{i,j \neq i}(P_k)}{J_0(a_1 + a_2)} \quad (4.1)$$

Où  $J_0(a_1 + a_2)$  est la valeur de J au même niveau de chargement pour la fissure unique de demi longueur  $a_1 + a_2$ .

Des formules ont été développées pour le comportement élastique.

Ce paramètre est relié au facteur d'interaction élasto-plastique, nommé *iota*, défini au chapitre 2 :

$$t_{ij}(P_k) = \sqrt{\frac{J_{i,j \neq i}(P_k)}{J_{i0}(a_i)}} \quad (\text{cf. 2. 2})$$

$$\alpha_{ep,i,j \neq i, P_k} = t_{ij}^2(P_k) \cdot \frac{J_0(a_i)}{J_0(a_1 + a_2)} \cong \frac{a_i}{a_1 + a_2} \cdot t_{ij}^2(P_k) \quad (4.2)$$

L'identité est vérifiée pour les fissures situées dans un milieu infini.

En 2D, par choix, l'effet de la plasticité est défini par le rapport des coefficients  $\alpha$  calculés en élasto-plasticité et en élasticité :

$$\alpha_{ep,k} = \max_{i,j} \frac{\alpha_{ep,i,j \neq i, P_k}}{\alpha_{el,i,j \neq i, P_k}} \quad (4.3a) \text{ avec } k = i \text{ ou } j \text{ selon que l'on considère la fissure } i \text{ ou la fissure } j$$

Soit, pour des fissures égales qui sont principalement traitées dans ce document :

$$\alpha_p = \max_{P_k} \frac{\alpha_{ep,k}}{\alpha_{e,k}} \quad (4.3b)$$

Le coefficient  $\alpha_p$  est l'enveloppe des coefficients concernant les pointes les plus proches, dites internes, et les plus éloignées, dites externes. Les calculs, effectués séparément pour les deux pointes, fournissent six coefficients notés sur les graphes  $\alpha_{e\_Int}$ ,  $\alpha_{ep\_Int}$ ,  $\alpha_{p\_Int}$ ,  $\alpha_{e\_Ext}$ ,  $\alpha_{ep\_Ext}$ ,  $\alpha_{p\_Ext}$  et le coefficient  $\alpha_p$  :

$$\alpha_p = \max_{l=\text{fissure } 1,2} [\max(\alpha_{l,P\_Int}, \alpha_{l,P\_Ext})] \quad (4.4)$$

## 4.2.2 Choix du niveau de chargement

Le calcul du coefficient d'équivalence s'effectue au chargement maximal. En effet, ce coefficient évolue de manière monotone croissante puis présente un plateau à partir d'un niveau de chargement, marquant l'entrée en plasticité étendue. Ceci est attesté pour les fissures non écrantées (Figure 4.1) comme pour les fissures écrantées en pointe externe (Figure 4.2). Pour un petit nombre de cas de fissures écrantées, on constate la présence d'un maximum en fin de plasticité confinée (ex  $\hat{S}_x = -0,25$ ,  $\hat{S}_x = 1,5$ ) mais la sous-estimation par la valeur du coefficient pour la charge maximale est faible et l'effet d'interaction pour ces cas également très faible.

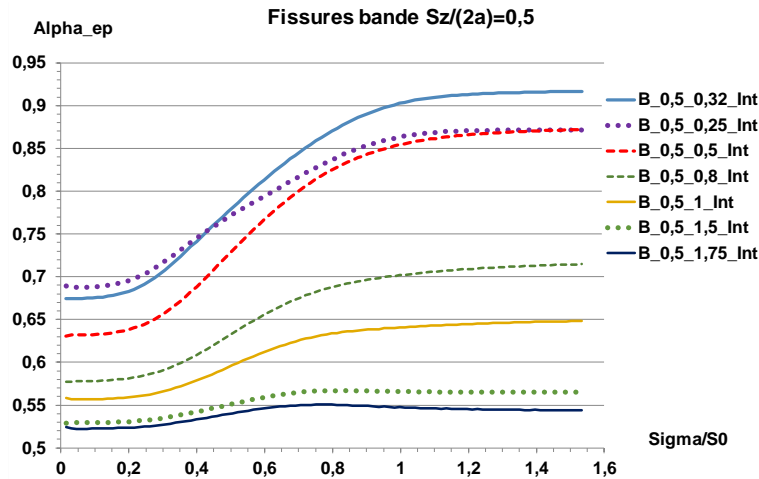


Figure 4\_1 : variation du coefficient d'équivalence avec le niveau de chargement pour des fissures non écrantées

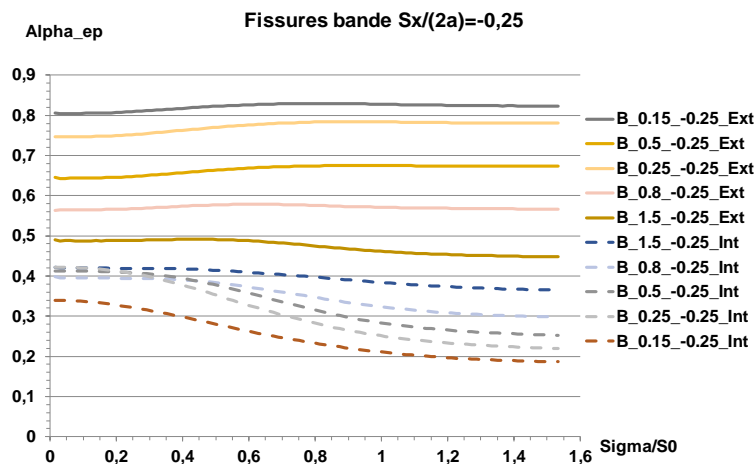


Figure 4\_2 : variation du coefficient d'équivalence avec le niveau de chargement pour des fissures écrantées

## 4.2.3 Effets de la plasticité

L'interaction de deux fissures est pilotée par la distribution des contraintes pour une fissure unique, comme l'a prouvé l'analyse en élasticité linéaire.

Toutefois deux différences majeures existent entre les comportements élastique linéaire et plastique :

- En élasticité linéaire, la force fissurante  $J$  ne dépend que des contraintes associées aux trois modes d'ouverture - c'est-à-dire que seules les contraintes normales et de cisaillement parallèles à la fissure interviennent.

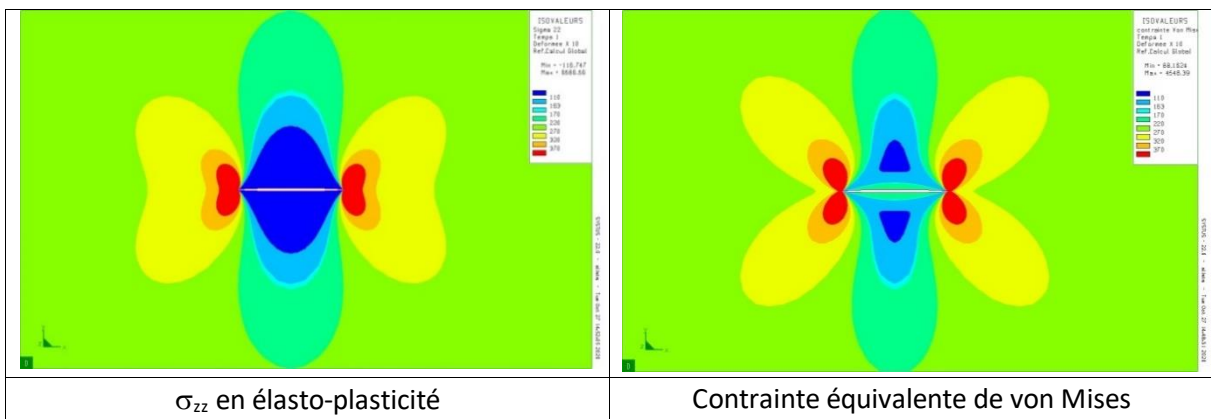
- En plasticité pure, c'est le critère de plasticité qui gouverne les distributions de contraintes. Dans les études analysées dans ce document le critère de plasticité utilisé est celui de von Mises.

Dans les deux cas les fissures coplanaires, sont soumises au seul mode I et pour les fissures parallèles, c'est le mode I qui est nettement dominant.

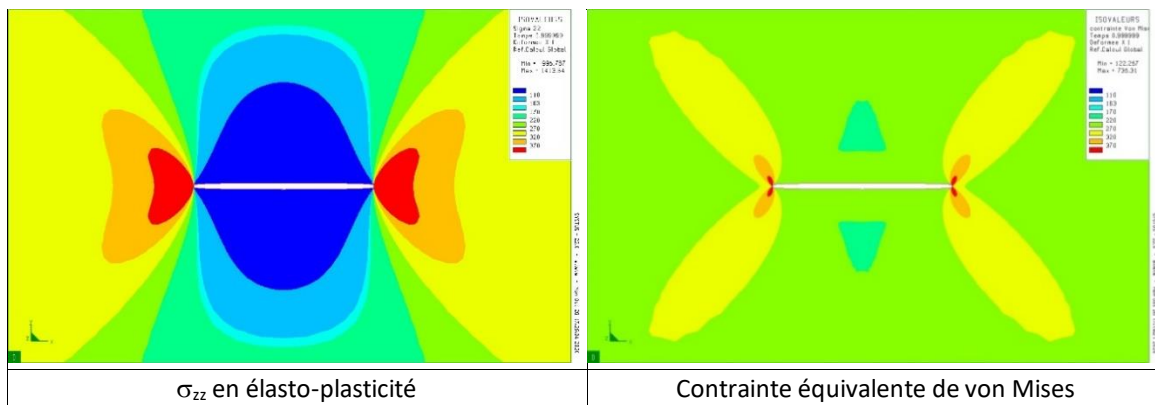
Les motifs des distributions de contraintes diffèrent notablement en élasticité et plasticité, ce qu'illustrent les figures 4\_3 et 4\_4. Les calculs élasto-plastiques sont effectués avec mêmes caractéristiques élastiques et le comportement élasto-plastique est régi par la loi de Ramberg-Osgood suivante :

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \cdot \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^n \text{ avec } \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E} \quad E = 174700 \text{ MPa}, \alpha = 1, n = 6, \sigma_0 = 163 \text{ MPa} \quad (4.5)$$

Les isovaleurs sont issues des calculs effectués par ESI.



**Figure 4\_3 : iso valeurs de contraintes pour une fissure unique – élasticité linéaire**



**Figure 4\_4 : iso valeurs de contraintes pour une fissure unique – élastoplasticité**

Dans le cas de deux fissures interagissantes, il existe une différence notable entre les niveaux et les distributions de contraintes qui pilotent les forces fissurantes J, ce qu'illustre la figure 4.5.

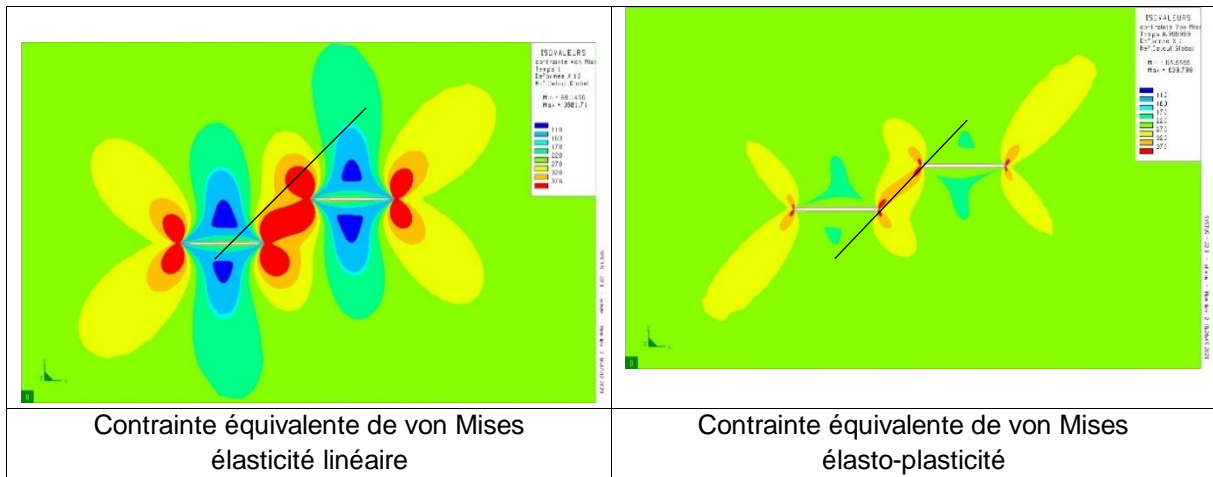


Figure 4\_5: iso valeurs de contraintes pour deux fissures égales séparées de  $S_x/2a = S_z/(2a) = 0,5$

Ces différences de comportement engendrent trois conséquences importantes :

### 1. La plasticité décale la limite d'écrantage

La figure 4\_6 illustre le décalage vers les  $\hat{S}_x$  (définis pour rappel comme le rapport  $\frac{S_x}{a_1 + a_2}$ ) positifs de la courbe limite d'écrantage plastique par rapport à la courbe limite d'écrantage élastique. Pour des écarts  $\hat{S}_x > 0,5$  les pentes ont des valeurs proches.

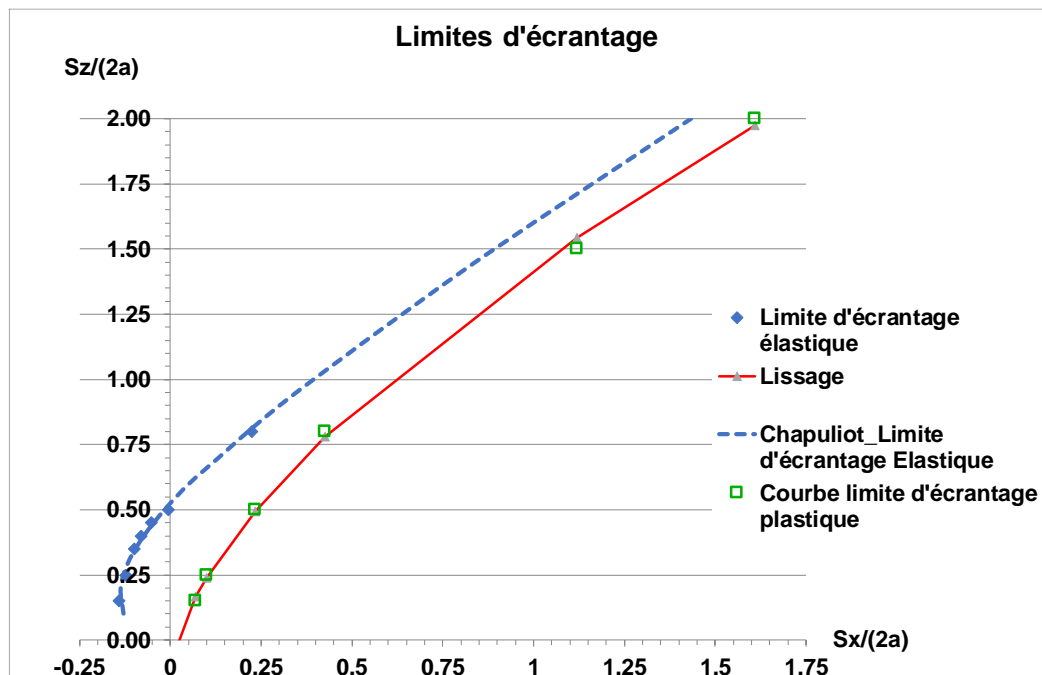


Figure 4\_6 : limites d'écrantage pour  $\alpha_e$  et  $\alpha_p$

Calculer le coefficient enveloppe  $\alpha_p$  nécessite de savoir quelle valeur de  $\alpha_e$  retenir et donc de connaître la courbe limite d'écrantage plastique.

La courbe d'écrantage plastique peut être décrite de façon approchée par l'équation suivante :

$$\hat{S}_z = -0,307 + 1,4544 \cdot (0,001 + \hat{S}_x)^{0,7236} \quad (4.6)$$

Avec  $\hat{S}_x = \frac{S_x}{a_1+a_2}$  et  $\hat{S}_z = \frac{S_z}{a_1+a_2}$

La forme du champ suit les lignes de glissement dont l'orientation ne dépend pas de l'écroutissage (Figure 4\_7). Il en va de même pour la limite d'écrantage.

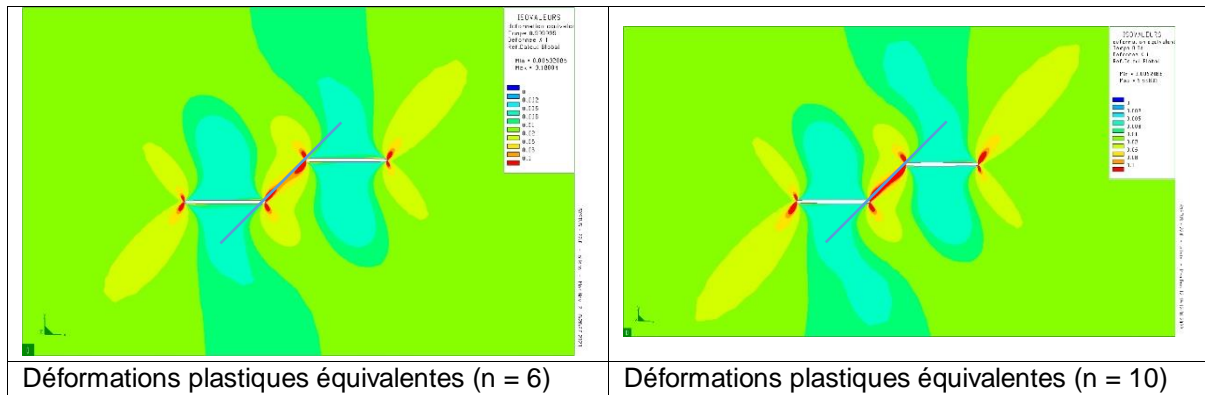


Figure 4\_7 : champs de déformation équivalente pour  $S_x/(2a) = S_z/(2a) = 0,5$  ; n= 6 et 10

La plastification est plus intense dans la bande pour n =10.

## 2 La plasticité augmente la portée de l'interaction

La figure 4\_8 montre que l'écart entre les valeurs des coefficients  $\alpha$  en élasticité et en élasto-plasticité diminue moins lorsque  $\hat{S}_x$  augmente pour deux fissures parallèles plus éloignées dans la direction normale à ces fissures.

La non-interaction est atteinte lorsque  $\alpha$  vaut 0,5 en élasticité, comme en élasto-plasticité. Cette limite est atteinte plus rapidement en élasticité.

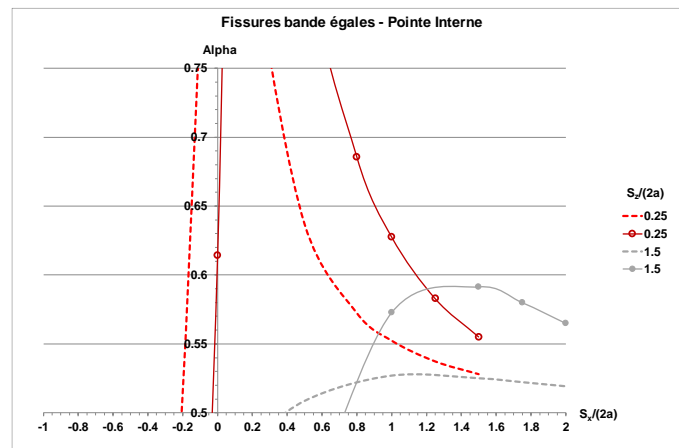


Figure 4\_8: comparaison des coefficients  $\alpha$  en élasticité (courbes en tirets) et en élasto-plasticité (courbes continues)

Une autre illustration est donnée à la figure 4\_9. Lorsque les fissures s'écartent en  $\hat{S}_x = \frac{S_x}{a_1+a_2} > 0$ , les coefficients  $\alpha_p$  croissent puis décroissent de façon monotone. Lorsque  $\hat{S}_z$  augmente, les maxima sont de moins en moins élevés et se décalent vers les  $\hat{S}_x$  croissants et la décroissance est plus lente.

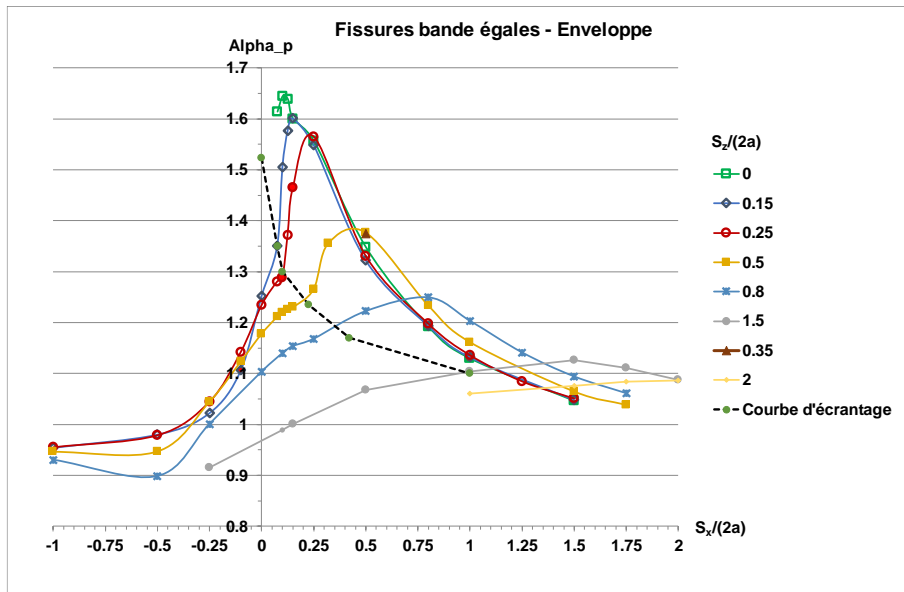


Figure 4\_9 : variation du coefficient  $\alpha_p$  enveloppe

### 3 L'écoulement plastique

#### Fissure isolée

Les milieux fissurés en traction pure présentent des écoulements plastiques en déformations planes de même motif. Celui-ci s'organise autour de lignes de glissement à 45 degrés, caractéristiques de la parfaite plasticité (RIC, 1968c).

L'écroutissage augmente la largeur de la bande plastique. Ceci est vérifié quelle que soit la taille de fissure. La figure 4\_10 illustre ces propriétés. Les calculs élasto-plastiques ont été réalisés par E. Debourdeaux (DEB, 2012).

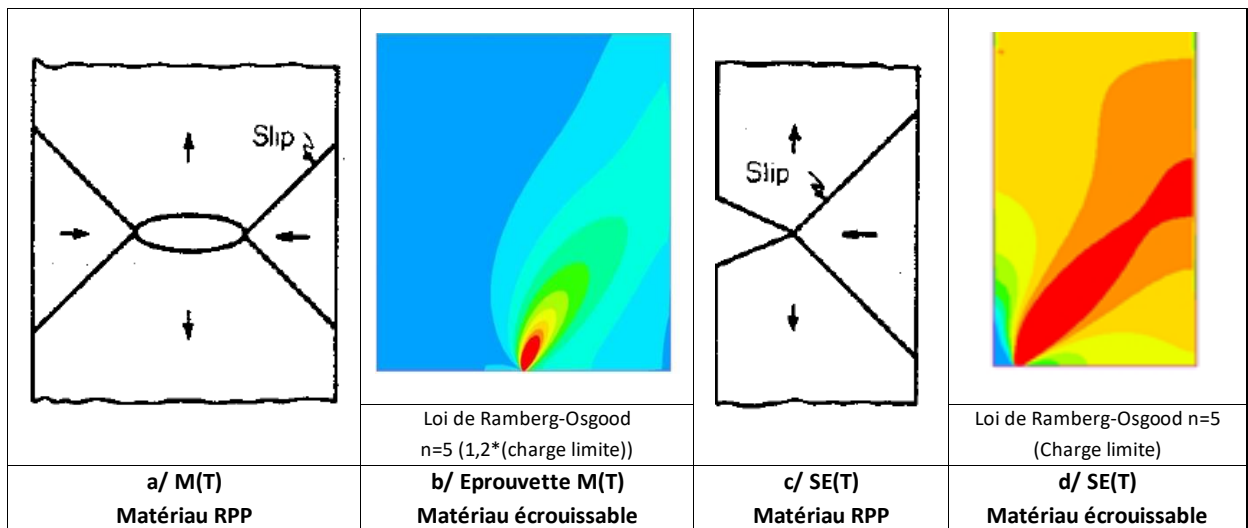


Figure 4\_10 : comparaison des comportements plastiques  
a/ Epreuves à fissure centrale M(T): lignes de glissement à 45 degrés  
b/ Epreuves à fissure centrale M(T) : déformations équivalentes  
c/ Epreuves à fissure latérale SE(T) en rotation bloquée : lignes de glissement à 45 degrés  
d/ Epreuves à fissure latérale SE(T) en rotation bloquée : déformations équivalentes

### Deux fissures bande coplanaires

La configuration de fissures interagissantes coplanaires la plus connue est celle de l'éprouvette DE(T), qui comporte deux fissures latérales colinéaires. Le réseau des lignes de glissement est totalement différent : le champ d'écoulement est constitué de pavés de contrainte constante joints par des éventails. Il existe entre les deux pointes de fissure un bloc rigide fixe en forme de losange. Cette solution a été établie à partir des travaux de Prandtl (PRA, 1921) et a été réexaminée par Hill (HIL, 1950). Unger (UNG,1995) a effectué une comparaison détaillée des deux approches. Les champs de contraintes sont identiques, la solution de Hill décrit un champ Rigide Plastique réduit où ne figure pas le losange Rigide Plastique fixe (Figure 4\_11).

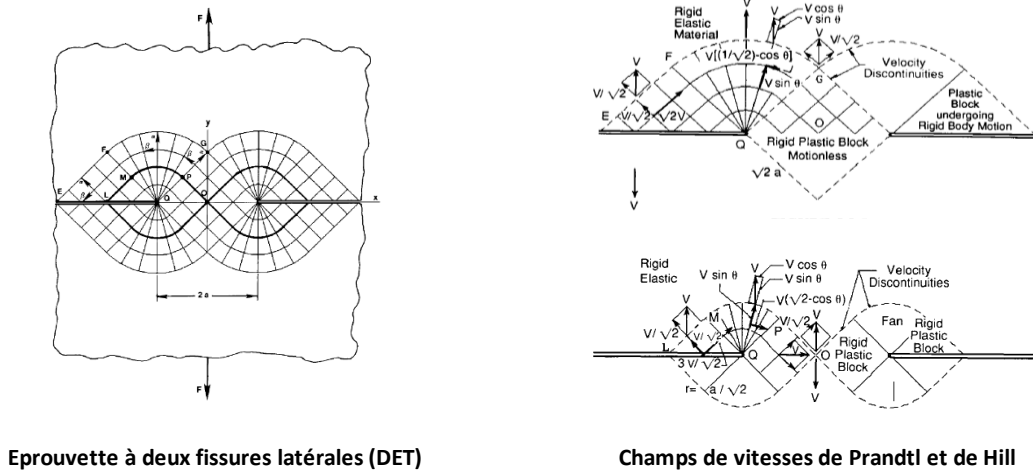


Figure 4\_11 : champ de lignes de glissement de Prandtl-Hill

Les calculs effectués par ESI France pour des fissures bande coplanaires donnent des résultats similaires (Figure 4\_12).

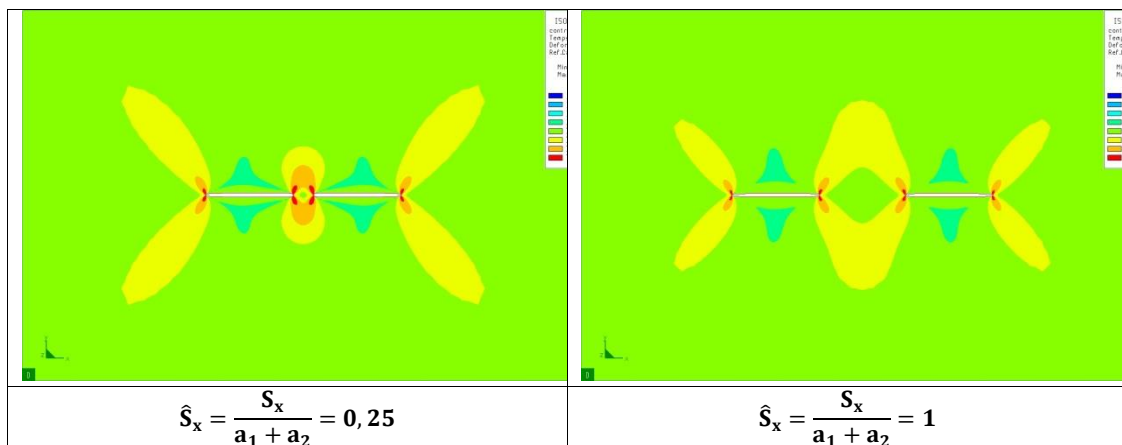


Figure 4\_12 : iso valeurs de von Mises en élasto-plasticité pour deux fissures bande égales

### Deux fissures bande parallèles

Peu d'études d'interaction de fissures parallèles ont été menées en plasticité étendue (SAM, 2017) et encore moins en s'appuyant sur des isométriques de contraintes ou de déformations équivalentes.

L'étude de Samadian et al. (SAM, 2017), effectuée sur des éprouvettes à deux entailles latérales égales décalées, montre que la forme des champs de déformations plastiques entre pointes de fissure varie considérablement entre le cas de fissures coplanaires et celui des fissures décalées verticalement (Figure 4\_14).

La géométrie de l'éprouvette est décrite à la figure 4\_13 tirée de l'article comme les figures 4\_14 et figure 4\_15.

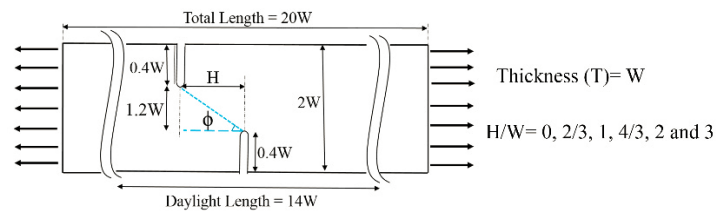


Figure 4\_13 : géométrie de l'éprouvette DE(T) asymétrique (SAM, 2017)

La correspondance avec nos paramètres est la suivante :

$$S_x = 2W - 2a = 1,2 * W \quad S_x / (2a) = 1,5 \quad S_z / S_x = H/W / 1,2.$$

Les fissures sont assez éloignées.

Le chargement est une traction pure par déplacement imposé, jusqu'à ce que la force chute de 15%. Toutefois les illustrations de la figure 4\_15 sont relatives au niveau de force maximale : il ne se produit pas d'extension de fissure.

Le chargement est une traction pure par déplacement imposé, jusqu'à ce que la force chute de 15%. Toutefois les illustrations de la figure 4\_15 sont relatives au niveau de force maximale : il ne se produit pas d'extension de fissure.

La procédure de caractérisation des bandes de déformation équivalente maximale est illustrée à la figure 4\_14 ci-dessous.

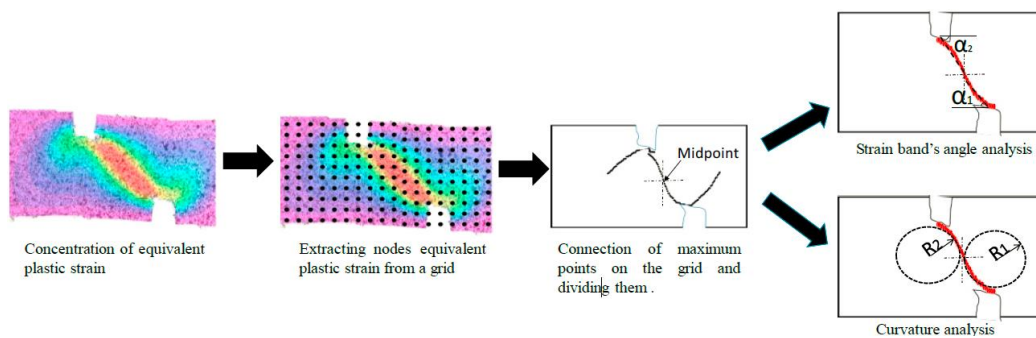


Figure 4\_14 : procédure de caractérisation des bandes de déformations équivalentes

H/W	0	2/3	1	4/3	2	3
$\hat{S}_z$	0	0,833	1,25	1,666	2,5	3,75
$S_z/S_x$	0	0,463	0,833	0,926	1,667	2,5
Iso.						
C						
$\epsilon_{eq}$						

Figure 4\_15 : motifs de déformations équivalentes (échelle de 0 à 0,1) et analyse de la courbure C et de l'amplitude de déformations équivalentes le long de la trajectoire de la bande



L'article fournit plusieurs résultats importants :

- La localisation et la forme des bandes restent quasiment constantes au cours des tests.
- Pour les fissures coplanaires, les bandes sont symétriques et presque circulaires.
- Pour  $S_z/S_x = 0,46$  et  $0,83$ , la bande forme une sigmoïde puis devient rectiligne pour  $S_z/S_x = 1,7$ .
- L'angle moyen de la bande est voisin de 45 degrés pour  $S_z/S_x = 0,93$  et pour cette valeur, l'intensité de déformation équivalente apparaît maximale (cf. ligne 'Iso.' de la figure 4\_14).
- La séparation complète des concentrations de déformations intervient pour  $S_z/S_x = 2,5$ .
- Le niveau de déformation équivalente est maximal pour  $S_z/S_x = 0,83$ , mais les résultats manquent pour le cas  $S_z/S_x = 0,93$ .

Lorsque  $S_z/S_x = 1$ , la bande de glissement a la même orientation que pour une fissure isolée : il est donc légitime de penser que c'est pour cette géométrie que l'interaction est maximale.

#### 4.2.4 Etablissement d'une fonction décrivant l'interaction de fissures égales

L'objectif est de fournir une fonction décrivant les variations du coefficient  $\alpha_p$  enveloppe. A cette fin, l'espace  $(\hat{S}_x; \hat{S}_z)$  a été découpé en 6 domaines sur la base de la prise en compte de l'effet d'écrantage, des variations du coefficient  $\alpha_p$  et de l'analyse des motifs de distributions de contraintes en plasticité (essentiellement les contraintes de von Mises en plasticité). Toutes les iso valeurs sont cadrées de la même façon et établies pour la valeur du chargement maximal.

Les configurations géométriques considérées dans la présente étude sont comprises entre :

$$-1 \leq \hat{S}_x \leq 2 \text{ et } 0 \leq \hat{S}_z \leq 2.$$

Les 6 domaines sont caractérisés dans le Tableau 4\_3 ci-dessous.

Domaine	Ecrantage		Interaction en pointe interne		Perte d'interaction	
	1	2	3	4	5	6
Effets	2 pointes élastiques	Pointes ext élasto-plastiques	2 pointes élasto-plastiques	2 pointes élasto-plastiques	Pas d'interaction en élasticité	Pas d'interaction en élasto-plasticité
$\alpha_e$	$\leq 0,75$	Croît rapidement	Décroit rapidement	Décroit	$\leq 0,55$	$\leq 0,51$
$\alpha_p$	$\leq 1$	Croît faiblement	Croît rapidement	Décroit	Stabilisation	$\leq 1,05$

**Tableau 4\_3 : classification des domaines de variation du coefficient  $\alpha_p$**

##### Domaine 1 : écrantage entraînant un comportement élastique total

Ce domaine est illustré par les résultats de calculs présentés sur les figures 4\_16 et 4\_17. Le comportement des deux pointes est quasiment élastique.

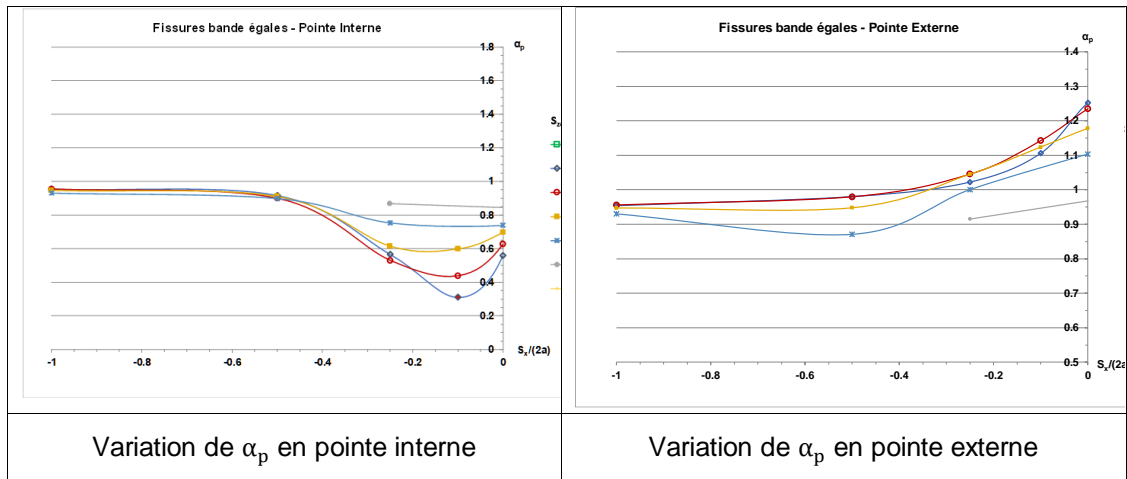


Figure 4\_16 : variation de l'interaction de fissures parallèles aux deux points pour  $\hat{S}_x \leq 0$

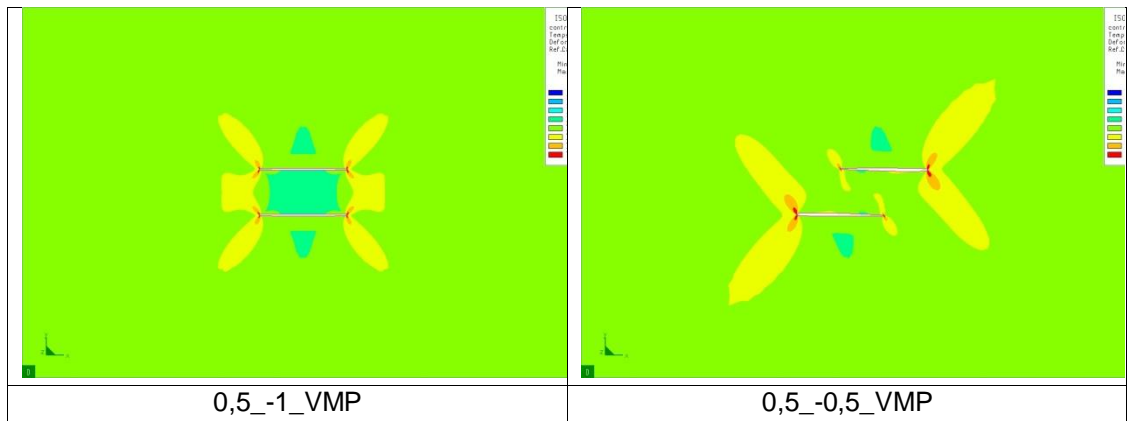


Figure 4\_17 : contraintes élastoplastiques de von Mises pour  $\hat{S}_z = 0,5$  avec  $\hat{S}_x = -1$  et  $-0,5$

Le domaine est défini par  $-1 \leq \hat{S}_x \leq \hat{S}_{x1}$ .

$\hat{S}_{x1}$  est supérieur à  $-0,5$  et  $\alpha_p$  est légèrement inférieur à 1.

La valeur de  $\hat{S}_{x1}$  est déterminée par l'intersection de la droite décrivant la variation de  $\alpha_p$  dans ce domaine et de la droite  $T_1$  décrite dans le domaine suivant.

Afin de ne pas être trop pénalisant, la valeur  $\alpha_p$  est considérée comme décroissant linéairement entre bornes, suivant l'équation :

$$\alpha_p = \text{Max}\{\text{Min}[0,97 - 0,046 \cdot \hat{S}_z; 0,96]; 0,92\} \quad (4.26)$$

Domaine 2 : écrantage entraînant un comportement élastique en pointe interne

Le comportement de la pointe interne uniquement est élastique.

Le comportement de  $\alpha_p$  est décrit par des droites décrivant sa variation jusqu'à la courbe limite d'écrantage (Figure 4\_18).

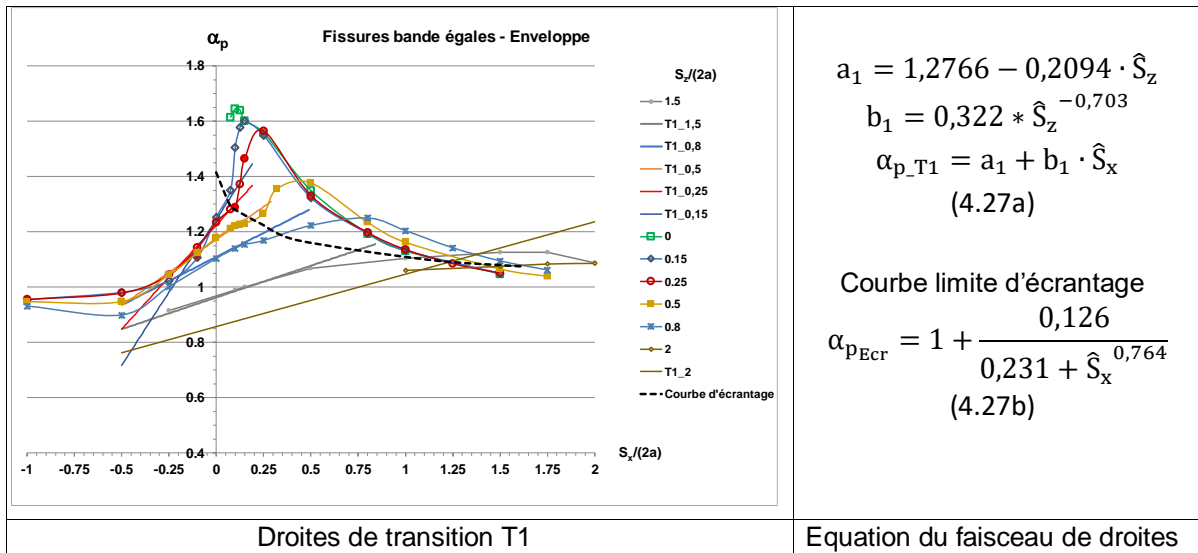


Figure 4\_18 : variation de l'interaction de fissures parallèles aux deux points pour  $\hat{S}_x \leq \hat{S}_{x,Ecr}$

Les isométriques de la figure 4\_19 ci-après montrent que les contraintes de von Mises sont nettement plus élevées en pointe interne pour  $\hat{S}_x > 0$ .

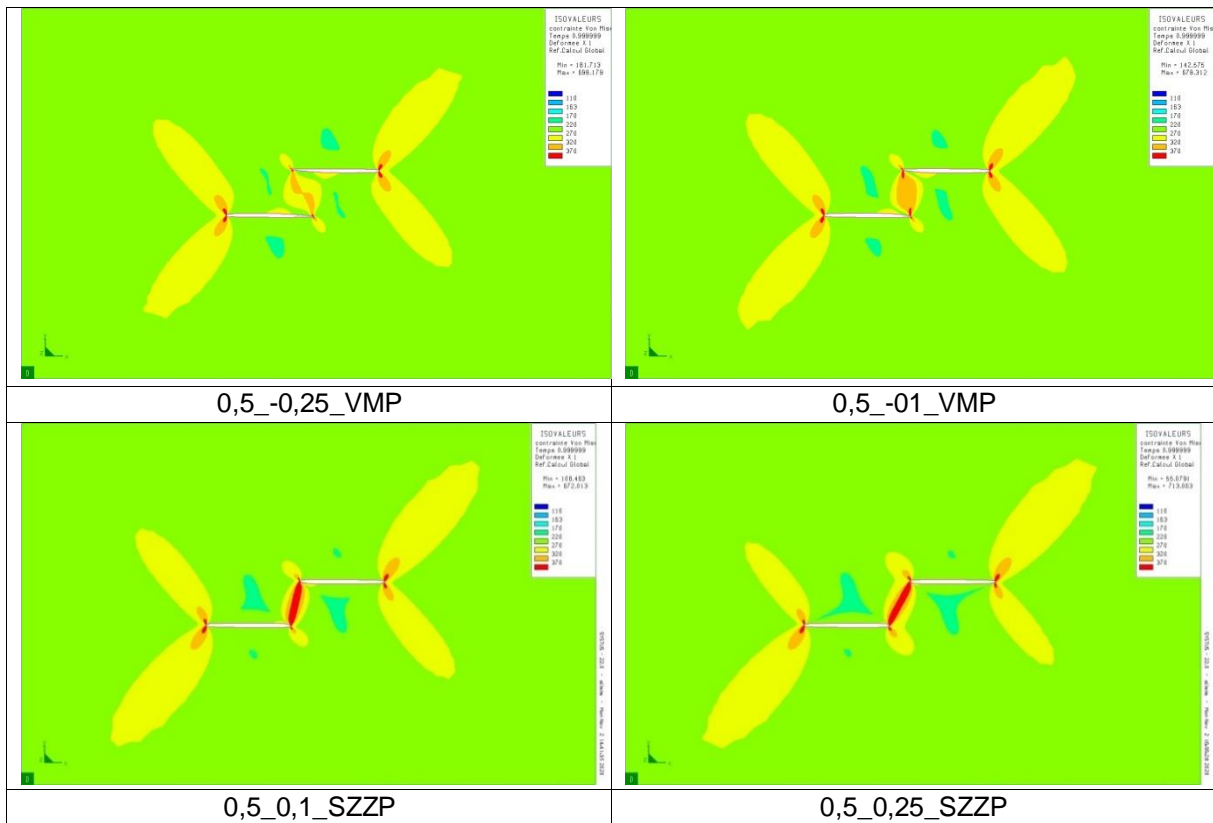
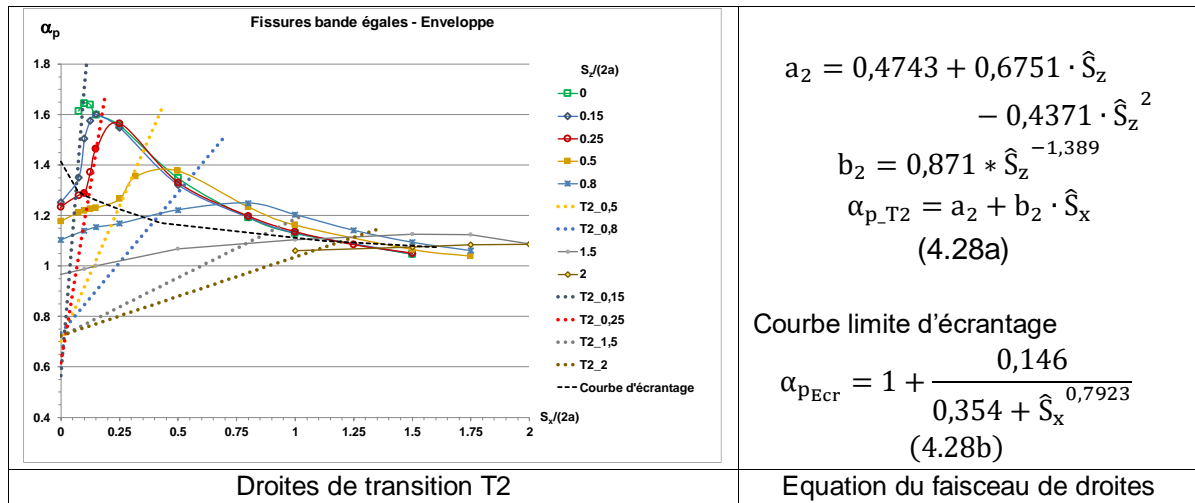


Figure 4\_19 : contraintes de von Mises et contraintes  $\sigma_{zz}$  élasto-plastiques pour  $\hat{S}_z = 0,5$  et  $-0,25 \leq \hat{S}_x \leq 0,25$

Domaine 3 : les fissures sont non écrantées, le comportement plastique domine en pointe interne

Si les deux points plastifient, une plastification intense du ligament a lieu entre fissures (cf. Figure 4\_19) : le coefficient  $\alpha_p$  croît très rapidement.

Le comportement de  $\alpha_p$  est décrit par des droites décrivant sa variation au-delà de la courbe limite d'écrantage. Cette variation est bornée par la valeur du maximum de  $\alpha_p$  (Figure 4\_20).



**Figure 4\_20 : variation de l'interaction de fissures parallèles aux deux points pour  $\hat{S}_{x,Ecr} \leq \hat{S}_x$**

Conformément aux conclusions de Besensek (BEZ, 2007), le maximum d'interaction est obtenu lorsque  $S_z/S_x=1$ , hormis pour les valeurs faibles de  $\hat{S}_z$ .

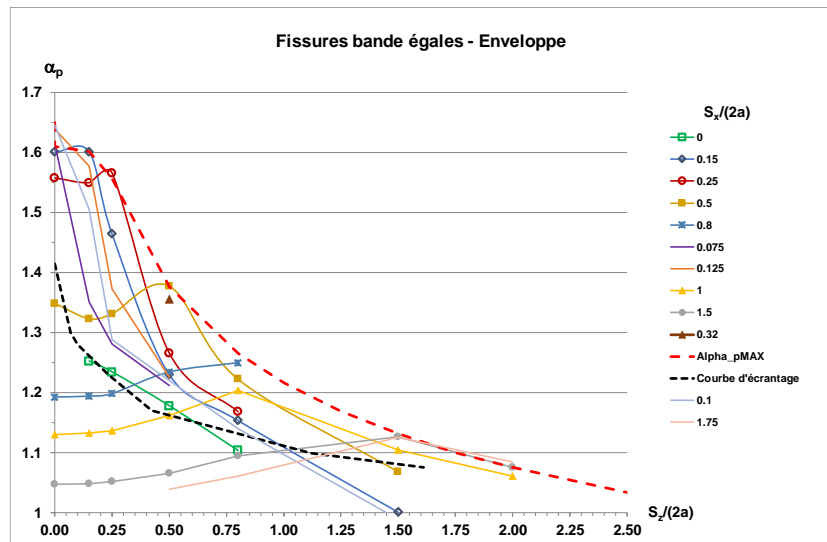
La courbe des maxima de  $\alpha_p$  est lissée par une exponentielle tronquée par une droite pour des  $\hat{S}_z$  faibles :

$$\alpha_{pMax_0} = \text{Max}(1,65 - 0,32 \cdot \hat{S}_z; 1,1)$$

$$\alpha_{pMax} = \text{Max}(1 + 1,4517 \cdot \text{Exp}(-1,9635 \cdot \hat{S}_z); 1,1; \alpha_{pMax_0}) \quad (4.29)$$

Cette expression peut être exprimée en fonction de  $\hat{S}_x$  en remplaçant  $\hat{S}_z$  par  $\hat{S}_x$  pour  $\hat{S}_x \leq 1,5$ . Au-delà, la formule doit évoluer, comme suggéré sur la figure 4.21.

Il manque à cet effet quelques résultats pour écrire une prolongation de la formule.



**Figure 4\_21 : enveloppe des coefficients  $\alpha_{px}$  pour des fissures parallèles**

Les isométriques de la figure 4\_22 ci-dessous montrent que les contraintes de von Mises sont nettement plus fortes en pointe interne pour  $0,32 < \hat{S}_x < 0,5$ .



Figure 4\_22 : contraintes élastoplastiques de von Mises pour  $\hat{S}_z = 0,5$  avec  $\hat{S}_x = 0,36$  et  $0,5$

La bande plastique de von Mises relative au cas  $\hat{S}_x = 0,32$  est d'un rouge plus intense que celle de  $\hat{S}_x = 0,5$ . Cependant la valeur de  $\alpha_p$  est maximale pour  $\hat{S}_x = 0,5$  comme l'atteste la courbe de la figure 4\_22.

La valeur de  $\alpha_{ep}$  pour  $\hat{S}_x = 0,32$  est supérieure à celle pour  $\hat{S}_x = 0,5$ .

Domaine 4 : les fissures sont non-écranées, le comportement plastique devient similaire aux deux pointes

Dans ce domaine  $\alpha_p$  décroît régulièrement en exponentielle. Cette décroissance comporte deux familles : celle des fissures peu éloignées verticalement ( $0 \leq \hat{S}_z \leq 0,3$  environ) et celle des fissures plus distantes verticalement. Pour les premières, les courbes  $\alpha_p(\hat{S}_x)$  sont communes. Des lissages, présentés à la figure 4\_23, peuvent en être déduits avec les équations suivantes :

$$\bullet \quad 0 \leq \hat{S}_z \leq 0,25 \quad \alpha_p = 1 + 1,0895 \cdot \exp(-2,0958) \quad (4.30a)$$

$$\bullet \quad \hat{S}_z > 0,25 \quad \alpha_p = 1 + a \cdot \exp(-b \cdot \hat{S}_x^c) \quad (4.30b)$$

Avec :  $a = 0,0837 + 1,6692 \cdot \text{Exp}(-2,0845 * \hat{S}_z)$

$b = 35,954 \cdot \hat{S}_z^{1,1954} \cdot \text{Exp}(-4,747 * \hat{S}_z)$  et  $c = 0,2407 \cdot \hat{S}_z^2 + 1,7524 \cdot \hat{S}_z + 0,3454$

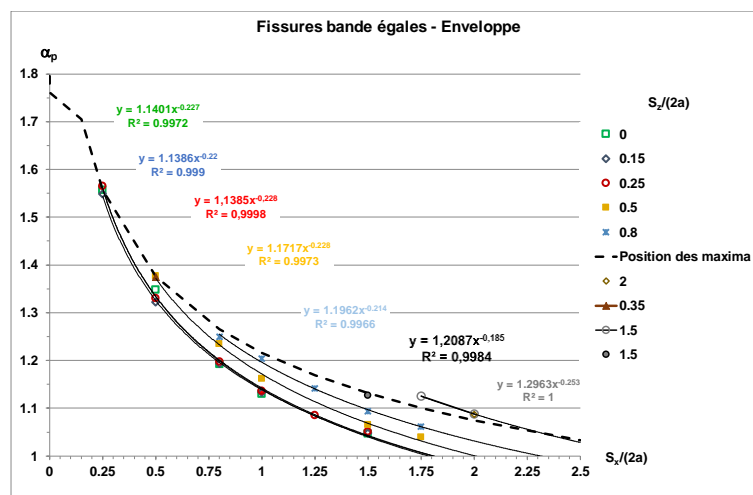
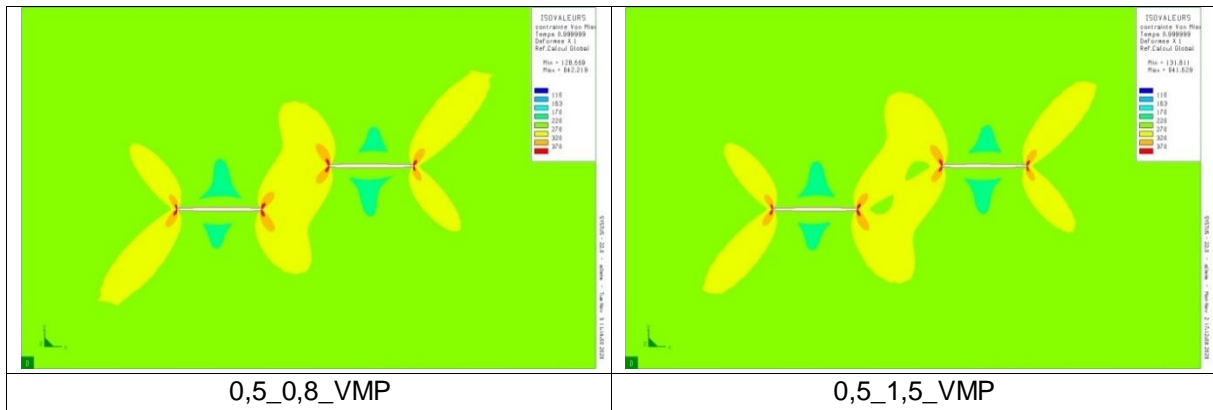


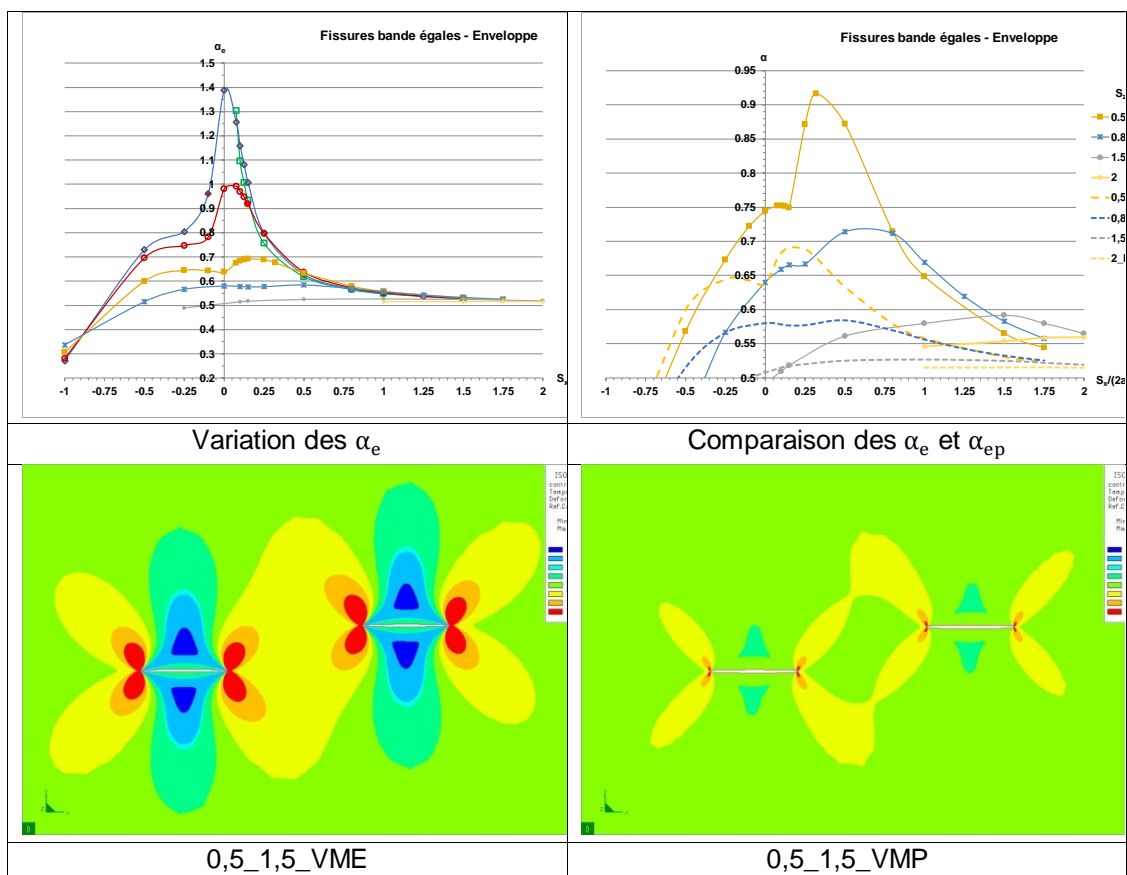
Figure 4\_23 : variation de l'interaction de fissures parallèles aux deux pointes après le maximum de  $\alpha_p$



**Figure 4\_24 : contraintes élastoplastiques de von Mises pour  $\hat{S}_z = 0,5$  avec  $\hat{S}_x = 0,8$  et  $1,5$**

Domaine 5 : les fissures n'interagissent plus en élasticité

La figure 4\_25 montre que pour  $\hat{S}_x = 1,5$ , et quelle que soit la valeur de  $\hat{S}_z$ , le coefficient  $\alpha_e$  est très proche de la valeur 0,5 pour laquelle il n'existe plus d'interaction en élasticité. En revanche le coefficient  $\alpha_{ep}$  reste supérieur à 0,55 lorsque  $\hat{S}_x \geq 1,5$  et  $\hat{S}_z > 0,5$ . Les courbes  $\alpha_e$  sont mêmes que pour le domaine 5.



**Figure 4\_25 : contraintes élastiques et élastoplastiques de von Mises pour  $\hat{S}_z = 0,5$ , avec  $\hat{S}_x = 0,8$  et  $1,5$**

Dans le domaine 6 l'interaction est négligeable.

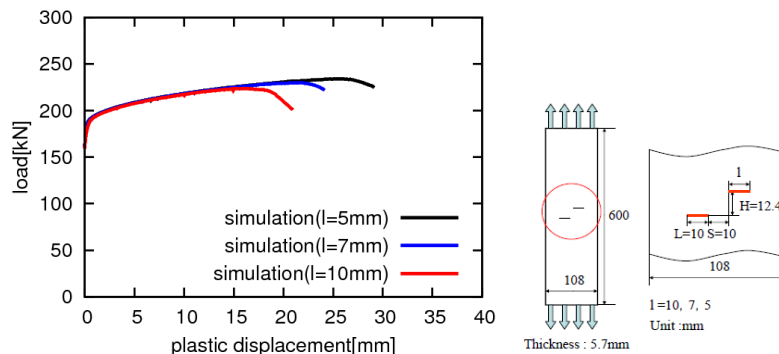
Une synthèse des résultats est présentée au chapitre 5 (§ 5.5.2.1).

## 4.2.5 Effet de taille de fissure

En élasticité, l'interaction maximale correspond au cas où les fissures sont égales (BIS, 2015). Cette propriété est valable en élasto-plasticité, comme le montre l'article de Kikuchi et al. (KIK, 2010).

La figure 4\_26 ci-après compare les courbes force-déplacement de plaques contenant deux fissures décalées verticalement et horizontalement d'un écartement fixe. La première fissure garde une longueur fixe et trois configurations sont considérées, la seconde fissure prenant les longueurs de rapport 1, 0,7 et 0,5 avec la longueur de la première fissure.

En outre, comme en élasticité, sous chargement de traction pure, c'est toujours la plus grande fissure qui se révèle la plus nocive.



**Figure 4\_26 : courbes force-déplacement pour des panneaux comportant deux fissures parallèles de tailles égales ou différentes, avec écartement fixes  $S_x$ ,  $S_z$  et de longueur de seconde fissure de 0,5, 0,7 et 1\*L**

Ces résultats ont été obtenus par simulation de la déchirure ductile par le modèle d'approche locale de Gurson (GUR, 1977). La modélisation a été validée par comparaison à deux essais sur des plaques en traction contenant deux fissures parallèles.

## 4.2.6 Effet d'écrouissage et charge de référence

En élasticité linéaire, l'interaction de fissure ne dépend pas des propriétés mécaniques car elle est caractérisée par un rapport de Facteurs d'Intensité de Contraintes. Les facteurs d'interaction ne dépendent que de caractéristiques géométriques relatives de la pièce fissurée : rapport des tailles de fissure, rapports d'aspect de fissures elliptiques, rapport des tailles de fissure à la distance à la surface.

En élasticité non-linéaire ou en élasto-plasticité, l'interaction définie par un rapport de force fissurante dépend a priori du niveau de chargement. Toutefois un adimensionnement approprié des  $J$  évalués le long du front de fissures interagissantes peut rendre cette dépendance faible.

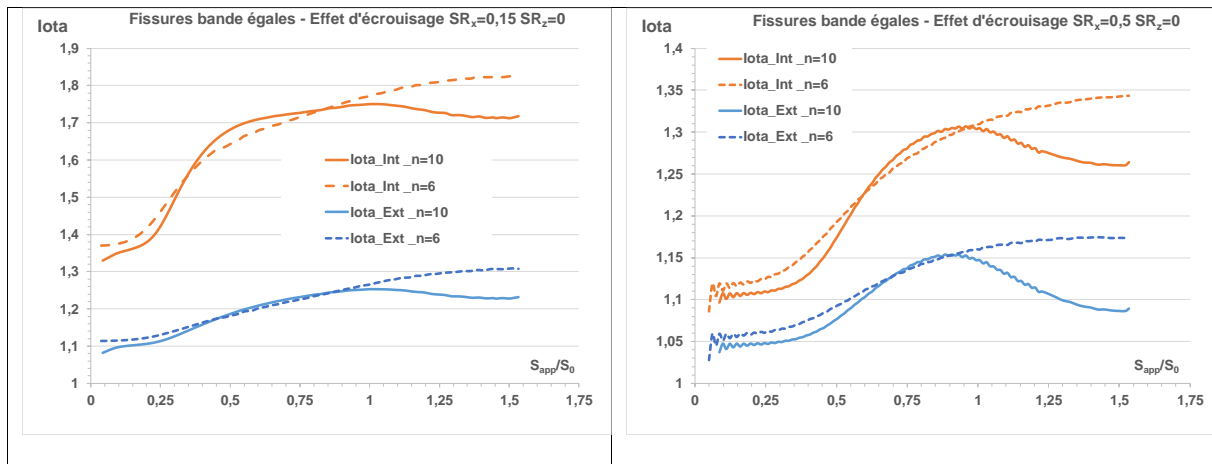
### 4.2.6.1 Effet d'écrouissage

Framatome (FRA, 1999) et ESI-France (SYSTUS, 2020) ont effectués plusieurs calculs de plaques contenant deux fissures en élasto-plasticité pour deux valeurs de l'exposant d'écrouissage de la loi de Ramberg-Osgood (4.5). Les autres paramètres étant inchangés.

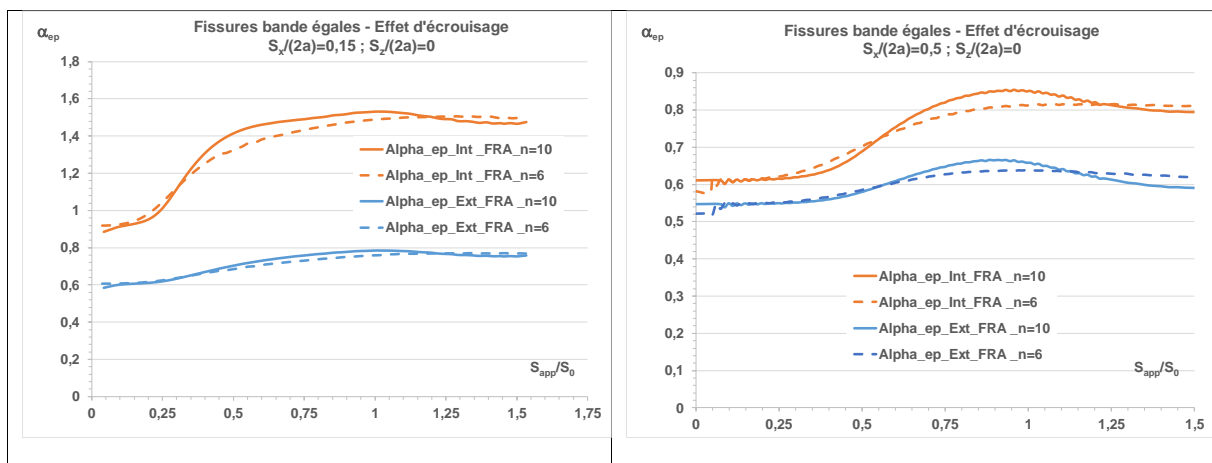
#### Fissures coplanaires

Framatome (FRA, 1999) a comparé les effets d'écrouissage pour deux cas de fissures coplanaires égales espacées de  $S_x/2a = 0,15$  et  $0,5$ . Les figures 4\_27 et 4\_28 quantifient l'interaction en termes de facteur d'interaction et de coefficient d'équivalence.

Les valeurs du facteur Iota dépendent de l'écroutissage et ne se stabilisent pas contrairement à celles du coefficient d'équivalence  $\alpha_{ep}$ .



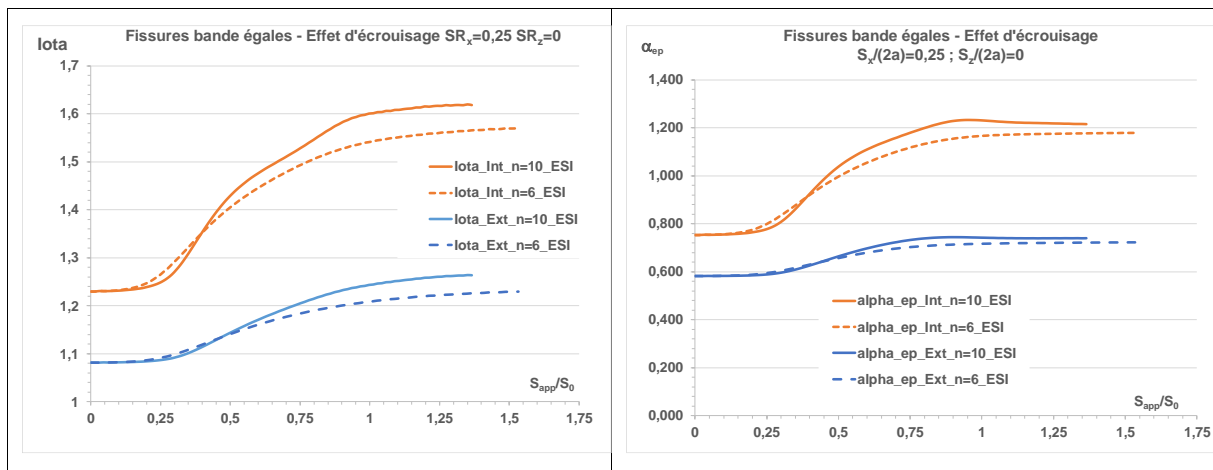
**Figure 4\_27 : variations de Iota en fonction du niveau de chargement pour des fissures bande coplanaires espacées de  $S_x/(2a) = 0,15$  et  $0,5$**



**Figure 4\_28 : variations du coefficient d'équivalence en fonction du niveau de chargement pour des fissures bande coplanaires espacées de  $S_x/(2a) = 0,15$  et  $0,5$**

Les coefficients  $\alpha_{ep}$  ne dépendent pas de l'écroutissage pour des fissures coplanaires. Ceci est expliqué au paragraphe 4.2.7.2. Ces résultats ont été confirmés par un calcul ESI-France (SYSTUS, 2020) pour un écartement intermédiaire  $S_x/2a = 0,25$  (Figure 4\_29).

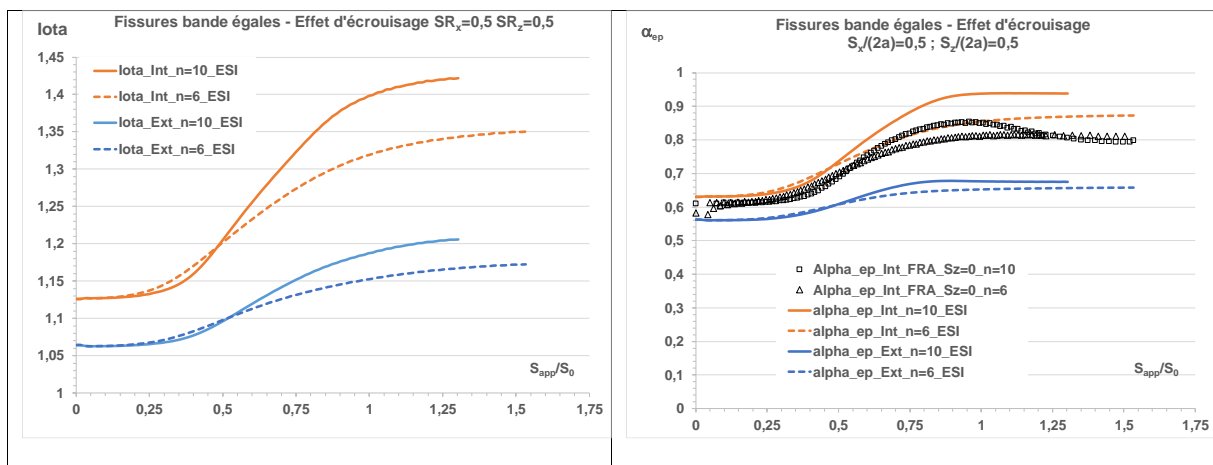




**Figure 4\_29 : variations du facteur d'interaction et du coefficient d'équivalence en fonction du niveau de chargement pour deux fissures bande coplanaires espacées de  $S_x/(2a) = 0,25$**

### Fissures parallèles

ESI-France (SYSTUS, 2020) a comparé les effets d'écroûissage pour deux fissures parallèles égales espacées de  $S_x/(2a) = 0,15$  et  $S_z/(2a) = 0,5$ . Les figures 4\_30 quantifient l'interaction en termes de facteur d'interaction et de coefficient d'équivalence. L'effet d'écroûissage est plus faible sur le coefficient d'équivalence que sur le facteur d'interaction. Ceci s'explique par le fait que le facteur d'interaction est le rapport de J de la fissure interagissante au J de la fissure 2a, alors que le coefficient d'équivalence est obtenu par le rapport de J de la fissure interagissante au J de la fissure 4a. Or les effets d'écroûissage sont sensibles aux tailles de fissure relative à la largeur de plaque et une fissure 4a est plus proche de la configuration à deux fissures égales que la fissure 2a.



**Figure 4\_30 : variations du facteur d'interaction et du coefficient d'équivalence en fonction du niveau de chargement pour deux fissures bande coplanaires espacées de  $S_x/(2a) = S_z/(2a) = 0,5$**

Le cas traité est comparé à la configuration  $S_x/(2a) = S_z/(2a) = 0$  réalisé par Framatome. Pour le coefficient d'équivalence il y a une légère augmentation avec n pour les fissures parallèles contrairement au cas de fissures coplanaires.

Ceci est difficile à quantifier sur un cas, c'est sans doute lié au fait que la charge limite diminue avec l'écartement vertical.

#### 4.2.6.2 Charge de référence pour des fissures bande

La charge limite est une quantité globale, déterminée pour un comportement parfaitement plastique. La charge de référence est une grandeur déduite de la force fissurante  $J$ , elle se différencie de la charge limite par trois caractéristiques :

- Elle prend en compte pleinement les effets d'interaction.
- Elle intègre les effets d'écroutissage.
- Elle traduit l'effet d'écrantage.

##### 4.2.6.2.1 Brève description de la méthode de la charge de référence

La Compagnie General Electric et l'Institut EPRI (KUM, 1981) ont développé une méthode d'estimation de la force fissurante  $J$  fondée sur l'hypothèse de décomposition de la solution en une superposition d'une solution élasto-plastique confinée  $J_{e\_corr}$  et d'une solution complètement plastique  $J_p$  :

$$J = J_{e\_corr} + J_p \quad (4.31)$$

Où  $J_{e\_corr}$  est une correction du  $J$  calculé en élasticité afin de tenir compte de la plasticité confinée. Pour une loi puissance et sous chargement radial, le terme  $J_p$  peut se mettre sous la forme adoptée par GE-EPRI.

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \alpha \cdot \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^n \quad \rightarrow \quad J_p = \alpha \cdot \varepsilon_0 \cdot \sigma_0 \cdot g_1(a, W) \cdot h_1(a/W, n) \cdot \left(\frac{Q}{Q_0}\right)^{n+1} \quad (4.32)$$

- Les fonctions  $g_i$  ne dépendent que de la géométrie de la structure fissurée. Pour les plaques à fissure traversante de demi-largeur  $W$ , la fonction  $g_1(a, W)$  se réduit à l'expression  $(1-a/W) \cdot a/W$ .
- Les charges d'adimensionnement  $Q_0$  sont des charges proportionnelles à  $\sigma_0$ . Elles correspondent à la plastification du ligament pour autant que  $\sigma_0$  représente une limite d'élasticité
- Les facteurs de forme  $h_i$  sont calculés par éléments finis en plasticité pure pour des valeurs discrètes de l'exposant d'écroutissage  $n$  et de la taille relative de la fissure  $a/W$ . Les résultats sont fournis dans des tables.

R. Ainsworth (AIN, 1984) a appliqué le concept de contrainte de référence au calcul de  $J$  en réécrivant la formule GE-EPRI.

- Le premier terme est décomposé en deux :  $f_1(a_e) \cdot \frac{Q^2}{E'} = J_e + J_z$  où  $J_z$  est un terme correctif négligeable devant  $J_p$  pour  $Q > Q_0$ .
- Le second terme est récrit en utilisant l'expression de  $J_p$  pour  $n=1$  :

$$J_p = \alpha \cdot h_{nu} \cdot J_e \cdot \left(\frac{Q}{Q_{R0}}\right)^{n-1} \quad \text{avec} \quad Q_{R0} = Q_0 \cdot \left[\frac{h_1(a/W, 1)}{h_1(a/W, n)}\right]^{\frac{1}{n-1}} \quad (4.33)$$

$$h_{nu} = \frac{0.75}{1-\nu^2} \quad \text{en déformations planes et } 1 \quad \text{en contraintes planes} \quad (4.34).$$

R. Ainsworth simplifie les expressions de  $J_z$  et  $J_p$  en identifiant  $h_{nu}$  à l'unité et en supprimant la dépendance  $Q_{R0}$  vis-à-vis de l'écroutissage sous réserve que  $Q_0$  soit la charge limite exacte  $Q_{L0\_c}$  et défini la contrainte de référence par

$$\frac{\sigma_{ref}}{\sigma_0} = \frac{Q}{Q_{L0\_c}} \quad (4.35)$$

Ces choix ont pour avantage de donner une expression très simple de  $J$  mais conduisent à sous-estimer  $J$  pour de petites fissures ( $2a < W$ ) et ne permet pas de traiter l'écroutissage avec précision. Nous exprimons donc  $J$  sous la forme pour la loi de Ramberg-Osgood :

$$J = J_e + J_z + \alpha \cdot h_{nu} \cdot J_e \cdot \left( \frac{Q}{Q_{R0}} \right)^{n-1} \quad \text{avec } Q_{R0} = Q_{R0}(n, a/W) \quad (4.36)$$

En plasticité étendue, où  $J_z$  est négligeable, la charge de référence  $Q_{R0}$  est obtenue par inversion de la formule de J.

$$Q_{R0} = \lim_{Q \gg Q_{L0,c}} Q \cdot \left[ \frac{\alpha \cdot h_{nu}}{\left( \frac{J}{J_e} - 1 \right)} \right]^{\frac{1}{n-1}} \quad (4.37)$$

Nous avons donc appliqué cette formule au résultats de calcul de J effectués par Framatome (FRA, 1999) et ESI-France (SYSTUS, 2020).

La charge de référence est adimensionnée par la charge limite de la plaque non fissurée :

$$Q_{L0,nc} = k_{VM} \cdot \sigma_0 \cdot Z_{p,nc} \quad \text{avec } k_{VM} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ en D.P. En traction pure, il vient :}$$

$$\frac{Q_{R0}}{Q_{L0,nc}} = \frac{\sigma_{app}}{k_{VM} \cdot \sigma_0} \cdot \left[ \alpha \cdot h_{nu} \cdot \frac{J_e}{J_p} \right]^{\frac{1}{n-1}} \quad (4.38)$$

Si l'adimensionnement est effectué par la charge limite de la plaque fissurée, le module  $Z_{p,c}$  est mis sous la forme et  $Z_{p,c} = Z_{p,nc} \cdot \mu_c$

$$\frac{Q_{R0}}{Q_{L0,c}} = \frac{1}{\mu_c} \cdot \frac{Q_{R0}}{Q_{L0,nc}} \quad (4.39)$$

La charge de référence, comme J est une quantité relative à chaque point du front de fissures, contrairement aux charges d'effondrement plastique et aux charges limites globales, c'est une « charge limite locale » au sens de Bezensek (BEZ, 2007).

### Relation avec le coefficient d'équivalence et le facteur d'interaction

Le coefficient d'équivalence en élastoplasticité est défini par :

$$\alpha_{ep} = \frac{J_{max}}{J_{Hi}}$$

Où  $H_i$  est le défaut intégré correspond à une enveloppe de la projection sur un même plan des deux défauts joints : par exemple en 2D, un défaut bande de longueur  $a_1+a_2$ . Pour des fissures non écrantées, sous réserve que la fissure équivalente soit inférieure à la fissure enveloppe,  $J_{max} = J_{Int}$ .

Le coefficient d'équivalence est déterminé à la charge maximale, donc on peut négliger les termes  $J_e$  et  $J_z$  devant le terme purement plastique  $\alpha \cdot h_{nu} \cdot \left( \frac{Q}{Q_{R0}} \right)^{n-1}$ . Il vient :

$$\alpha_{ep} \cong \frac{J_{eInt}}{J_{eHi}} \cdot \left( \frac{Q_{R0,Hi}}{Q_{R0,Int}} \right)^{n-1} \quad \text{et} \quad \alpha_{ep} \cong \alpha_e \cdot \left( \frac{Q_{R0,Hi}}{Q_{R0,Int}} \right)^{n-1} \quad (4.40)$$

Donc :

$$\alpha_p \cong \left( \frac{Q_{R0,Hi}}{Q_{R0,Int}} \right)^{n-1} \quad (4.41)$$

Dans le cas des fissures bande égales :  $\alpha_e = \frac{\gamma^2}{2}$

Le facteur d'interaction en élastoplasticité est défini par :  $\iota = \sqrt{\frac{J}{J_{isol}}}$

$$\iota^2 = \frac{J}{J_{isol}} \cong \frac{J_e}{J_{e\_isol}} \cdot \left( \frac{Q_{R0\_Iso}}{Q_{R0\_Int}} \right)^{n-1} \quad (4.42)$$

Donc la charge de référence est déduite de la charge de référence de la fissure isolée, des rapports de facteurs d'interaction et de l'exposant d'écroutissage :

$$Q_{R0} = Q_{R0\_Iso} \cdot \left( \frac{\gamma}{\iota} \right)^{\frac{2}{n-1}} \quad (4.43)$$

Cette formule est valable en pointe interne comme en pointe externe.

Ces équations démontrent l'équivalence des approches appuyées sur le coefficient d'équivalence, du facteur d'interaction et de la charge de référence. Toutefois leur dépendance vis-à-vis de l'écroutissage n'est pas la même. Ce point est examiné au §.2.4.7.3.

#### 4.2.6.2.2 Charge de référence pour des fissures isolées

Framatome en (FRA, 1999) et ESI (ESI,2022) ont calculé les forces d'extension de fissure pour deux longueurs de fissure centrée dans une plaque en traction.

Les calculs de J effectués par Framatome (FRA, 1999) conduisent à des charges de références plus élevées comme le montre la figure 4\_31.

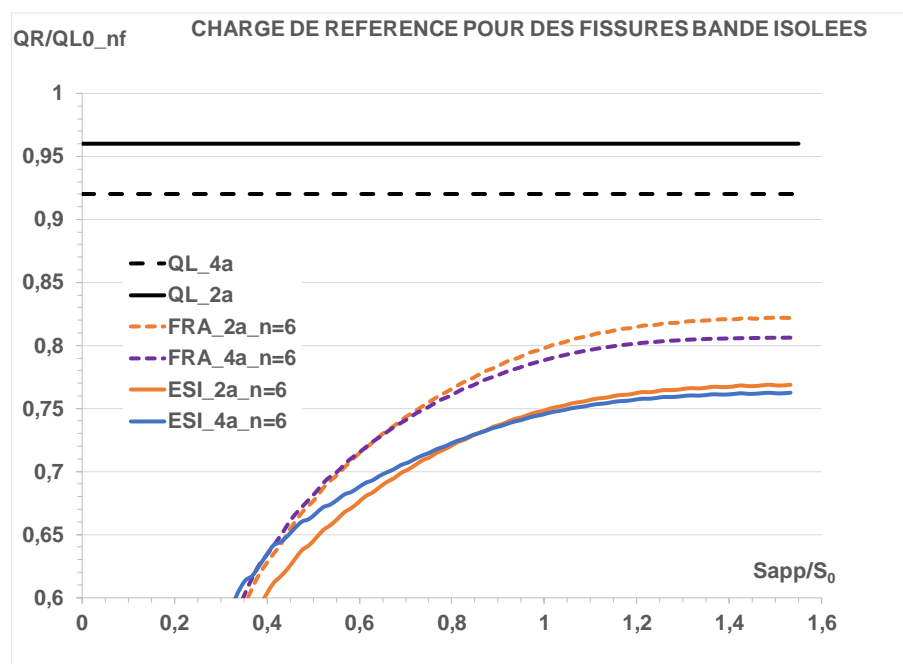


Figure 4\_31: variation de la contrainte de référence avec le chargement pour une fissure bande isolée

Les valeurs de la charge de référence sont les suivantes :

	2a	4a	Ratio
QL	0,96	0,92	1,0434
QR_ESI	0,7688	0,7623	1,0085
QR_FRA	0,8218	0,8064	1,0191

Tableau 4\_4 : charges de référence pour des fissures bande isolées

Les valeurs de la charge de référence sont nettement inférieures aux charges limites pour les fissures de longueur 2a et 4a. Ceci s'explique par le fait que les fissures sont très courtes et dans ce cas l'écrouissage amplifie les valeurs de J et réduit la charge de référence par rapport à la charge limite correspondante (GIL, 2018).

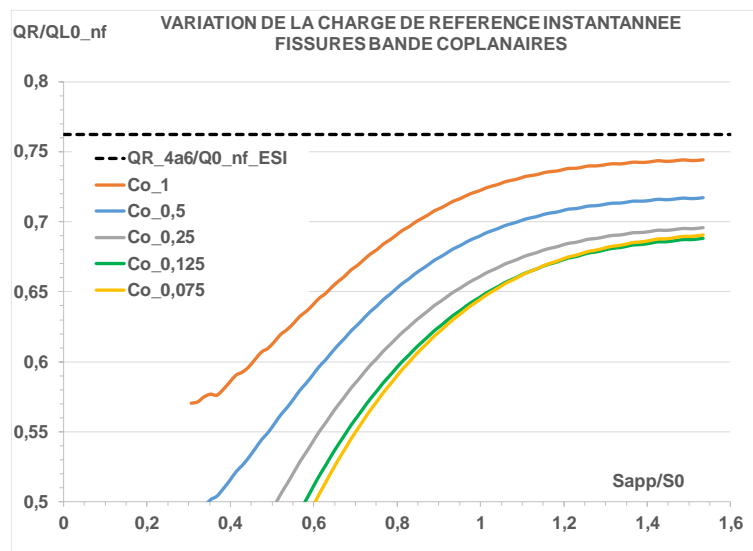
Les valeurs d'ESI sont environ 6% inférieures à celles de Framatome. Les deux maillages sont composés d'éléments quadratiques rectangulaires, sauf autour des la pointe de fissure où les mailles sont triangulaires. Le maillage de 1999 est plus grossier.

Les facteurs d'interaction plastique comme les coefficients d'équivalence font intervenir des rapports de charge de référence. Par conséquent l'impact de la surestimation de la charge de référence pour les fissures isolées comme pour les plaques à deux fissures coplanaires est faible. Comme le montre la bonne concordance des charges de référence pour deux fissures parallèles égales adimensionnées par la charge de référence de la fissure isolée 4a (Figures 4\_35 et 4\_36).

#### 4.2.6.2.3 Charge de référence pour des fissures coplanaires

##### Analyse de résultats de ESI-France pour les fissures coplanaires

Le graphe de la figure 4\_32 présente la variation de la charge de référence instantanée avec le chargement pour deux fissures coplanaires. Dans tous les cas le plateau est quasiment atteint. Plus l'écartement est élevé, plus la charge de référence tend vers celle de la fissure isolée de longueur 4a.

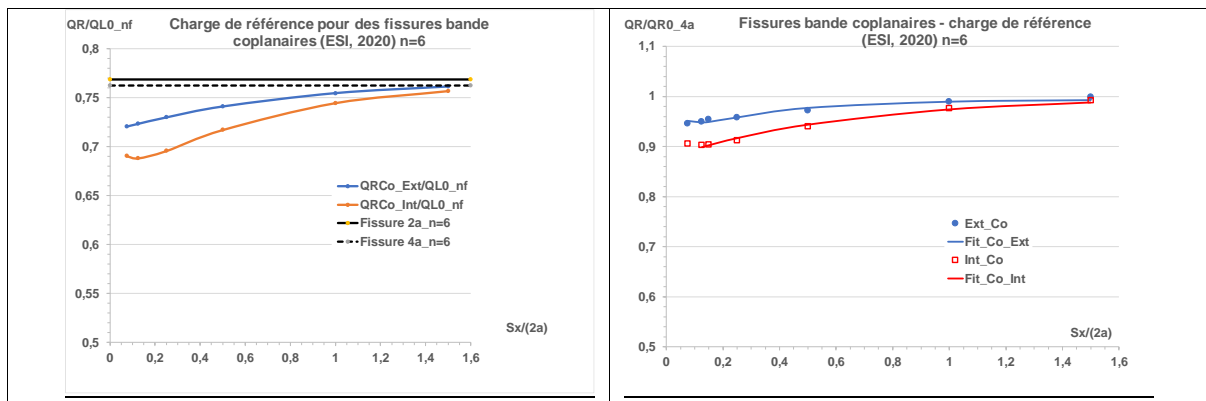


**Figure 4\_32 : variations de la charge de référence avec le chargement pour des fissures bande coplanaires**

Cette évolution de la charge de référence avec l'écartement  $S_x$  est illustrée à la figure suivante pour les points interne et externe. En pointe externe, la charge de référence est supérieure à celle de la pointe interne et pour des écartements relatifs supérieurs à 1,5 les valeurs tendent à se confondre, ce qui signifie que les fissures n'interagissent plus. Les charges de référence tendent alors vers la charge de référence de la fissure 2a.

En 0 les deux charges doivent être égales à la charge de référence de la fissure isolée 4a, Mais lorsque l'écartement diminue, les deux charges doivent diminuer. Le calcul relatif à l'écartement  $S/(2a) = 0,075$  donne une charge de référence supérieure à celle relative à l'écartement  $S/(2a) = 0,125$  (Figure 4.33a). Ceci signifie, si l'on admet que le calcul est suffisamment précis que l'interaction plastique devient moins forte que l'interaction élastique ce qui est attesté par la comparaison des rapports  $J_p/J_e$ . Il est toutefois difficile de capter cette évolution rapide par calcul aux éléments finis.

Le lissage des valeurs  $Q_R/Q_{L\_ynf}$  ne porte que sur la partie décroissante.



**Figure 4\_33 a et b : variations de la charge de référence avec l'écartement**

Les lissages des charges de référence sont exprimés par les équations suivantes :

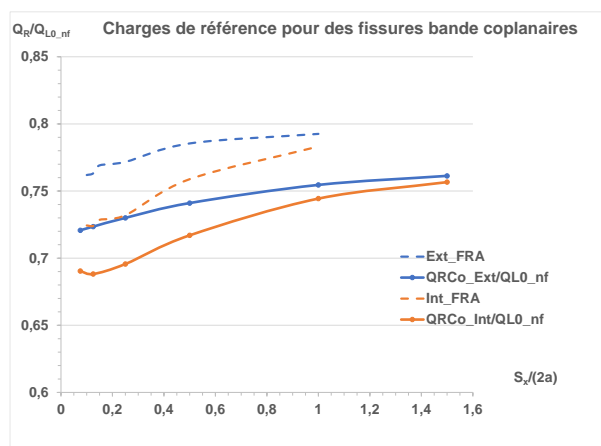
$$\frac{Q_{R0\_Int}}{Q_{R0\_4a}} = 1 - 0,0159 \cdot \exp[-0,0282 \cdot S_x/(2a)] \quad (4.44)$$

$$\frac{Q_{R0\_Ext}}{Q_{R0\_4a}} = 0,5607 \cdot \exp[0,5832 \cdot S_x/(2a)] \quad (4.45)$$

La diminution de la charge de référence avec l'écartement s'explique une intensification des déformations et des contraintes permises par l'écrouissage.

#### Analyse de résultats de Framatome pour les fissures coplanaires

Les résultats des calculs ESI seront privilégiés, mais il est utile de faire deux comparaisons avec les calculs réalisés par Framatome (FRA, 1999). La figure 4\_34 compare les charges de référence pour des fissures bande coplanaires égales rapportées à une valeur commune, la charge limite de la plaque non fissurée. Comme pour les fissures isolées, les valeurs obtenues par Framatome sont supérieures à celles obtenues par ESI.



**Figure 4\_34 : variations de la charge de référence adimensionnée par la charge limite du solide non fissuré avec l'écartement  $S_x$**

En revanche l'adimensionnement des charges de référence regroupe les courbes (Figure 4\_35), ce qui justifie le traitement groupé des valeurs de  $\frac{Q_{R0}}{Q_{R0\_4a}}$  relatives à différentes configurations et valide les lissages 4\_45 et 4\_46 pour tous les calculs.

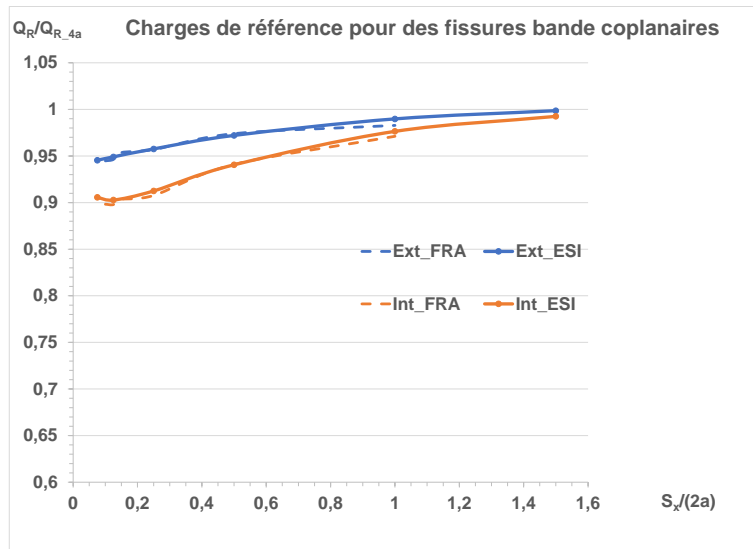


Figure 4\_35 : variations de la charge de référence avec l'écartement adimensionnée par la charge de référence de la fissure isolée 4a

#### 4.2.6.2.4 Charge de référence pour des fissures parallèles

La figure 4\_36 présente des résultats obtenus pour les mêmes configurations en pointe interne par Framatome (FRA, 1999) et ESI (SYSTUS, 2020). La cohérence des valeurs autorise le regroupement des résultats (Figure 4\_37). Les valeurs de  $S_x/(2a)$  sont indiqués en légende.

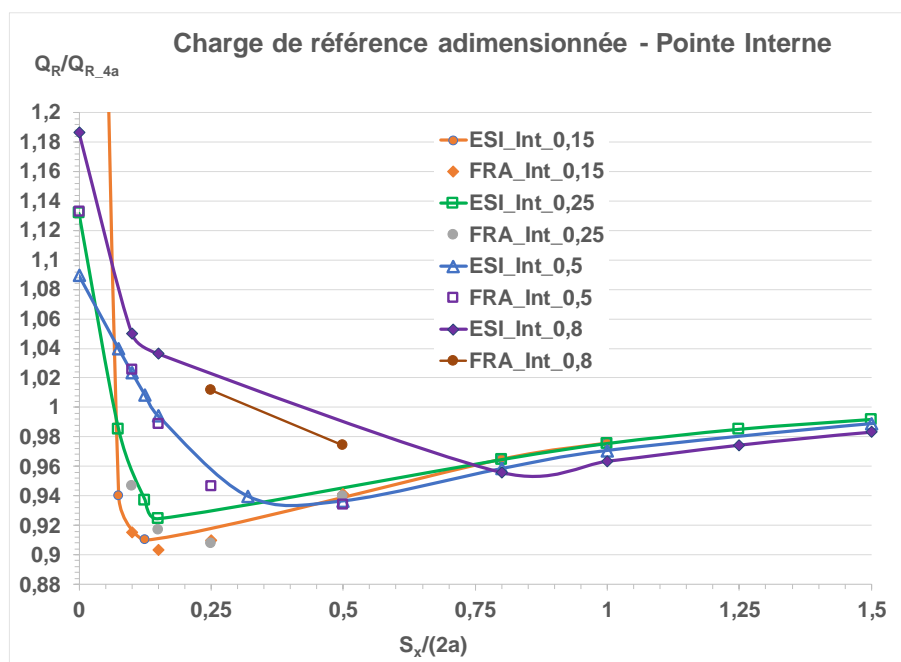


Figure 4\_36 : comparaison des charges de référence adimensionnées obtenues à partir des calculs ESI (SYSTUS, 2020) et Framatome (FRA, 1999)

Le regroupement des résultats pour différents écartements verticaux  $S_x/(2a)$  est présenté à la figure 4\_37.

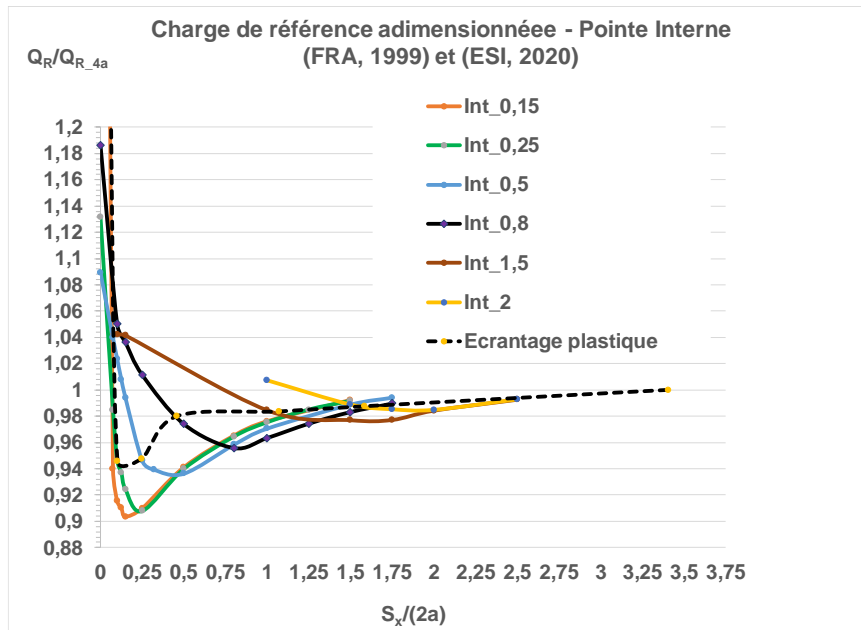


Figure 4\_37 : variations de la charge de référence pour des fissures parallèles avec l'écartement

La figure suivante montre que, comme pour la charge limite, les minimas sont atteints pour  $\hat{S}_x = \hat{S}_z$ .

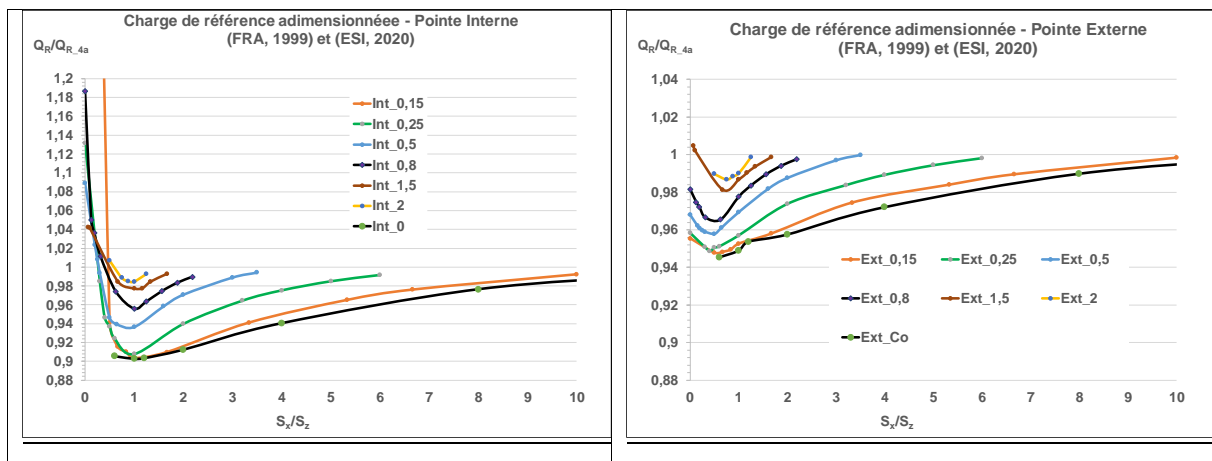


Figure 4\_38 : variations de la charge de référence pour différents écartements verticaux avec le rapport  $S_x/S_z$

Pour les fissures non écartées les charges limites adimensionnées peuvent être représentées dans la partie croissante par des formules de type exponentiel pour chaque valeur de  $S_z/(2a)$ .

$$\frac{Q_{R0\_Int}}{Q_{R0\_4a}} = 1 + p \cdot \exp[q \cdot S_x/(2a)] \quad (4.46)$$

Mais les variations des coefficients  $p$  et  $q$  sont difficiles à représenter toutes deux par des fonctions simples. Le tableau suivant donne l'exemple d'une variation linéaire de  $q$ , mais les valeurs de  $p$  oscillent.

$S_z/(2a)$	0	0,15	0,25	0,5	0,8	1,5	2
$p$	-0,1292	-0,1074	-0,0949	-0,1381	-0,09362	-0,1217	-0,06447
$q_{Lin}$	-1,8	-1,725	-1,675	-1,55	-1,4	-1,05	-0,8

Tableau 4\_5 : coefficients de la formule 4.41 en fonction de  $S_z/(2a)$



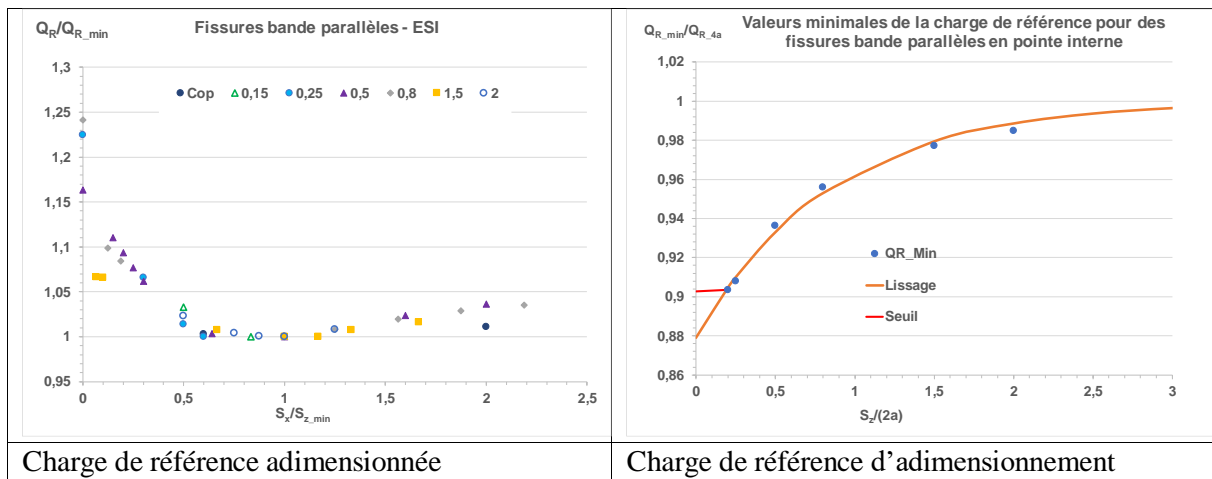
Il est plus intéressant de tirer parti de la propriété mise en évidence pour les charges limites obtenues par approche cinématique (§ 4.2.4.2) et confortée par le fait que les minima des charges de référence sont atteints pour  $\hat{S}_x = \hat{S}_z$  mis à part pour les petits écarterments (Figure 4\_38). La représentation des charges de référence adimensionnées par la charge de référence minimale à  $S_z$  fixé en fonction de  $S_x/S_{x,min}$  permet de regrouper pratiquement toutes les valeurs (Figure 4\_39).  $S_{x,min}$  est la valeur de  $S_x$  associée à la charge de référence minimale. Pour les écarterments relatifs  $S_x/(2a)$  supérieurs à 0,125  $S_{x,mi}=S_z$ . Pour les fissures avec écarterments  $S_x/(2a)$  inférieurs ou égaux à 0,125,  $S_{x,min}/(2a) = 0,125$ .

$$\text{Soit :} \quad S_{x,Min}/2a = \max(0,125; \hat{S}_z) \quad (4.47)$$

$$\text{Les graphes sont tracés pour la fonction d'écrouissage} \quad \mu_e = \frac{Q_{R0}}{Q_{L0,nc} \cdot \mu_c} \quad (4.48)$$

La valeur minimale de  $Q_R$  est donnée par les deux équations avec  $\hat{S}_z = S_z/(2a)$  :

$$\begin{cases} \hat{S}_z \leq 0,2 & \frac{Q_{R0, \min}}{Q_{R0, 4a}} = 0,903 \\ \hat{S}_z > 0,2 & \frac{Q_{R0, \min}}{Q_{R0, 4a}} = 1 - 0,1211 \cdot \exp(-1,1822 \cdot \hat{S}_z) \end{cases} \quad (4.49)$$



**Figure 4\_39 : variations de la charge de référence avec le rapport  $S_x/S_z$  et variations de la charge d'adimensionnement avec l'écartement vertical**

Ces résultats peuvent être lissés par une fonction inspiré de l'équation d'état des fluides de Van der Walls. La variable est  $s = S_x/S_{x,min}$ .

$$\frac{Q_{R0,Int}}{Q_{R0,min}} = -6,183 + \frac{0,4703}{s - 0,0935} + \frac{7,7585}{s^{0,1231}} - \frac{1}{s^{0,5}} \quad (4.50)$$

Les deux premiers termes représentent les charges de référence pour des fissures écartées. Les deux autres termes les charges pour des fissures interagissantes. Le dernier terme autorise une légère remontée des effets d'interaction.

Sur la figure 4\_40 est tracée la limite d'écrantage qui sépare les charges de référence des fissures écartées (à gauche de la courbe limite) de celles des fissures interagissantes. Cette courbe se situe avant la verticale  $S_x/S_{z,min} = 1$  ce qui correspond au fait que la limite d'écrantage dans l'espace ( $S_x, S_z$ ) n'est pas la diagonale comme l'illustre la figure 3.3\_25.

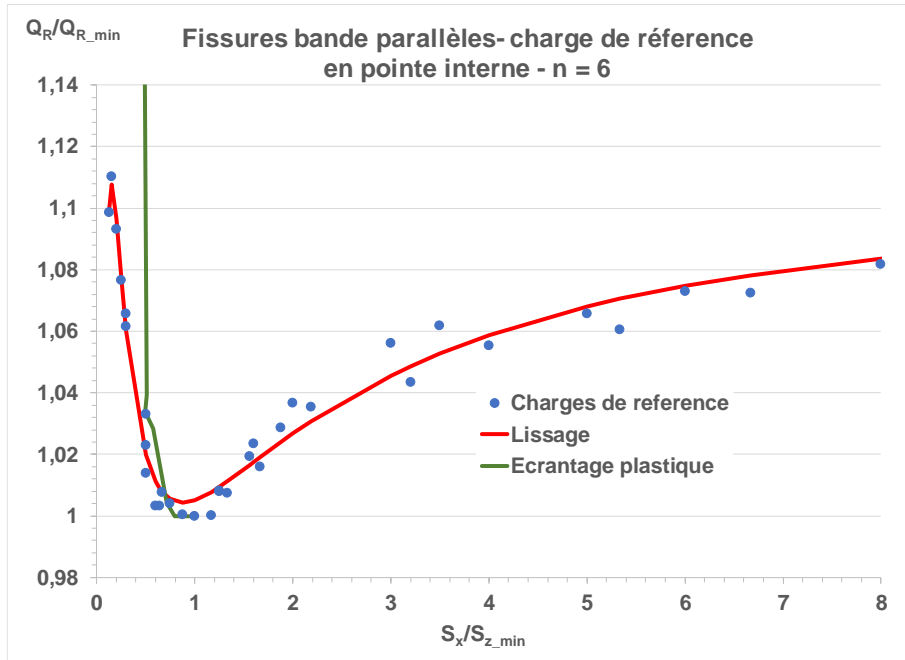


Figure 4\_40 : variations de la charge de référence adimensionnée avec le rapport  $S_x/S_z$

La courbe des charges de référence  $\frac{Q_{R0\_Int}}{Q_{R0\_min}}(S_x/S_{z\_min})$  prend des valeurs supérieures à l'unité pour des  $S_x/S_{z\_min}$  élevés car  $Q_{R0\_Int}$  tend vers  $Q_{R0\_4a}$  qui est supérieur à la valeur minimale  $Q_{R0\_min}$  (Figure 4-40). La courbe devrait tendre vers une asymptote à  $\frac{Q_{R0\_4a}}{Q_{R0\_min}} \cong 1,08$ .

Pour des valeurs très faibles de l'écartement  $S_x$  et en particulier pour  $S_x=0$ , la formule 4.50 ne s'applique plus. A partir des calculs d'ESI France, les  $\frac{Q_{R0\_Int}}{Q_{R0\_min}}$  sont obtenues par interpolation linéaire entre la formule suivante établie pour  $s=0$  et la formule 4.50 calculée pour  $s = 0,16$ .

$$\frac{Q_{R0\_Int}}{Q_{R0\_min}} \Big|_0 = \max \left( 1,8463 - \frac{0,004294}{\hat{S}_z - 0,2014} + \frac{0,000374}{\hat{S}_z^{4,1773}} - \frac{0,7464}{\hat{S}_z^{-0,00004}} ; 1,05 \right) \quad (4.51)$$

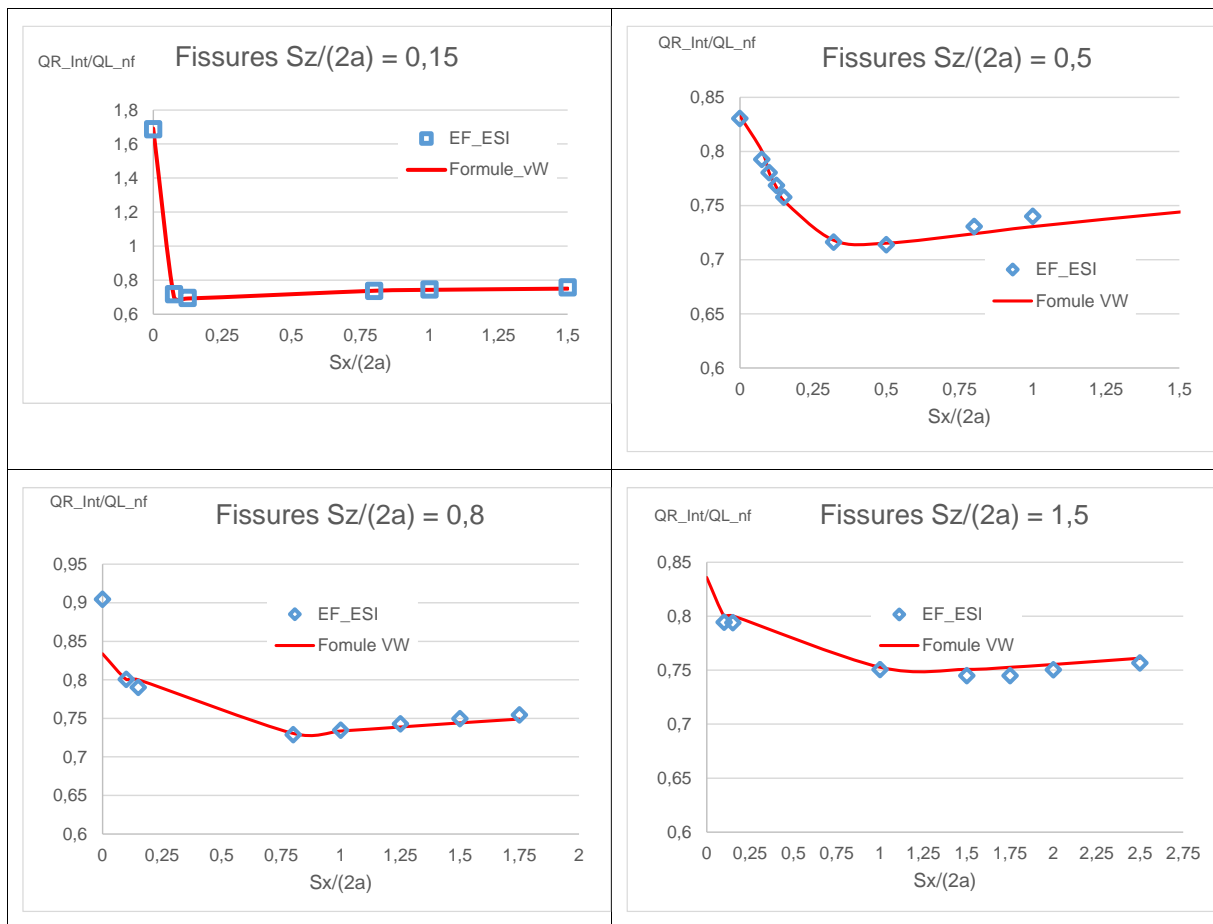
La validation des formules 4.48 à 4.51 est illustrée à la figure 4\_41 pour quatre cas d'écartement vertical.

Les charges de référence adimensionnées par la charge limite de la plaque non fissurée  $Q_{L0\_nf}$  sont évaluées par le produit des trois quantités évaluées par les équations 4.50 ou 4.51, 4.49 et 4.46 :

$$\frac{Q_{R0\_Int}}{Q_{L0\_nf}} = \frac{Q_{R0\_Int}}{Q_{R0\_min}} \cdot \frac{Q_{R0\_min}}{Q_{R0\_4a}} \cdot \frac{Q_{R0\_4a}}{Q_{L0\_nf}} \quad (4.52)$$

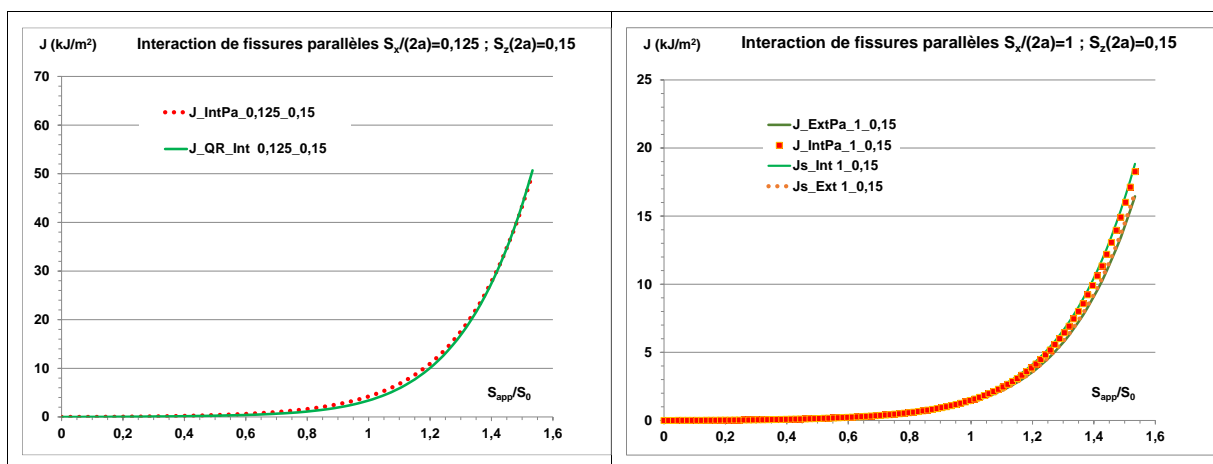
La valeur retenue pour la fissure 4a est :

$$\frac{Q_{R0\_4a}(ESI, n = 6)}{Q_{R0\_nf}} = 0,7623 \quad (4.53)$$



**Figure 4\_41 : validations des formules de charge de référence pour la pointe interne de fissures bande parallèles égales**

La figure 4\_42 compare les variations de  $J$  calculées par éléments finis (ESI, 2020) pour des fissures bande égales parallèles aux prédictions par la méthode de la charge de référence. Deux cas sont choisis parmi les dizaines de configurations de fissure non écartées. Les prédictions n'intègrent pas la correction de zone plastique en plasticité confinée qui joue d'ailleurs un rôle négligeable. La précision est excellente : par exemple pour tous les cas de fissures non écartées et écartées verticalement de  $S_z/2a=0,15$ , les écarts varient de 1 à 2%.



**Figure 4\_42 : comparaison des variations de  $J$  calculées par éléments finis et celles obtenues par la méthode de la charge de référence pour des fissures bande égales parallèles**

### 4.2.7 Effet d'érouissage sur les grandeurs d'interaction

Le facteur d'interaction et le coefficient d'équivalence en élastoplasticité sont liés aux charges de référence par les formules suivantes.

$$\iota^2 \cong \gamma^2 \cdot \left( \frac{Q_{R0\_Iso}}{Q_{R0}} \right)^{n-1} \quad \text{et} \quad \alpha_{ep} \cong \alpha_e \cdot \left( \frac{Q_{R0\_Hi}}{Q_{R0}} \right)^{n-1} \quad (4.54)$$

Toutes les plaques analysées ont même dimension et sont sollicitées en déformations planes, donc la charge limite en l'absence de fissure est la même pour toutes ces plaques.

$$Q_{L0\_nc} = k_{VM} \cdot \sigma_0 \cdot Z_{pnc} \quad (4.55)$$

Les charges de référence ont pour forme :

$$Q_{R0\_c} = Q_{L0\_nc} \cdot \mu_R = Q_{L0\_nc} \cdot \mu_c \cdot \mu_e \quad (4.56)$$

Où les fonctions

- $\mu_R$  représente l'effet de la fissure sur la charge de référence. Cette fonction est décomposée en un produit de deux fonctions afin de faire le lien avec la charge limite.
- $\mu_c$  traduit l'effet de la géométrie de la pièce fissurée pour un matériau rigide parfaitement plastique. La charge limite est  $Q_{L0\_c} = Q_{L0\_nc} \cdot \mu_c$ .
- $\mu_e$  est une fonction qui dépend à la fois de la géométrie de la pièce fissurée et de l'érouissage de la structure. Cette fonction est quantifiée à partir des calculs de la force fissurante  $J$ .

$$\mu_e = \frac{Q_{R0}}{Q_{L0\_nc} \cdot \mu_c} = \frac{1}{\mu_c} \cdot \lim_{Q \gg Q_{L0\_c}} \frac{Q}{Q_{L0\_nc}} \cdot \left[ \frac{\alpha \cdot h_{nu}}{\left( \frac{J}{J_e} - 1 \right)} \right]^{\frac{1}{n-1}} \quad (4.57)$$

Pour les fissures isolées,  $\mu_c$  est connue de façon exacte :  $\mu_c = 1 - \frac{a_1 + a_2}{W}$  où  $W$  est la demi-largeur de plaque.

#### Fissures coplanaires

La fonction  $\mu_c$  est la même que les fissures soient séparées (fissures combinées) ou jointes (fissures isolées). Pour des fissures égales, on a donc :

$$\frac{Q_{R0\_Iso}}{Q_{R0}} = \frac{1 - \frac{a}{W}}{1 - \frac{2a}{W}} \cdot \frac{\mu_{e\_Iso}(a, n)}{\mu_{e\_Com}(2a, n)} \quad \text{et} \quad \frac{Q_{R0\_Hi}}{Q_{R0}} = \frac{\mu_{e\_Iso}(2a, n)}{\mu_{e\_Com}(2a, n)} \quad (4.58)$$

L'expression de  $Q_{R0\_Iso}/Q_{R0}$  montre que le facteur d'interaction  $\iota$  dépend nécessairement de  $n$  (Figure 4\_43).

L'évaluation de l'expression de  $Q_{R0\_Hi}/Q_{R0}$  nécessite de comparer les fonctions  $\mu_e$  pour une fissure isolée  $4a$  et pour les fissures combinées. La figure 4\_43 montre que  $\mu_e$  décroît avec l'inverse de l'exposant d'érouissage et que les pentes pour les fissures combinées sont voisines, ce qui permet de conclure à la faible dépendance du rapport  $Q_{R0\_Hi}/Q_{R0}$  vis-à-vis de  $n$ .

La courbe relative à la plaque infinie fissurée sous traction est obtenue à partir de la formule approchée de  $h_1$ , précise pour  $n \leq 5$  au moins : de He et Hutchinson (HET, 1981) :

$$h_1 = \pi \cdot \sqrt{n} \quad (4.59)$$

D'où la formule :

$$\mu_{e\_Iso}(0, n) \cong \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad (4.60)$$

Cette fonction varie de  $e^{-0,5}$  à 1 lorsque  $n$  varie de 1 à l'infini et constitue la borne supérieure de la fonction d'écroissage.

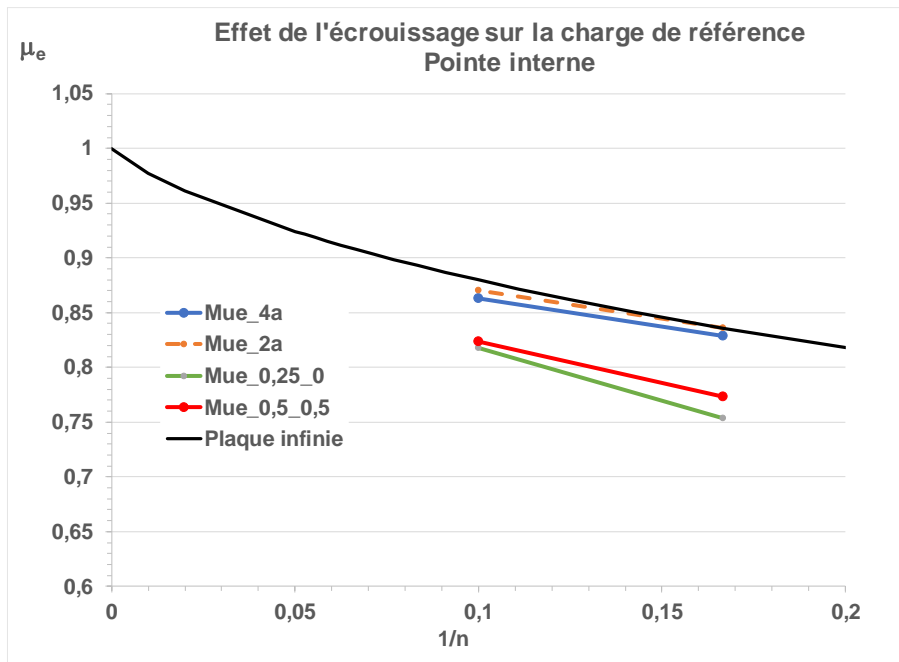


Figure 4\_43 : variations de la fonction  $\mu_e$  avec l'exposant d'écroissage

Le cas  $\hat{S}_x = \hat{S}_z = 0,5$ , a été sélectionné car il correspond à un cas où la charge limite pour des fissures parallèles est proche de celle des fissures coplanaires.

Le coefficient d'équivalence plastique  $\alpha_p \cong \left( \frac{Q_{R0\_Hi}}{Q_{R0\_Int}} \right)^{n-1}$  (4\_59) est tracé en fonction de l'exposant d'écroissage. Pour les fissures coplanaires, le coefficient d'équivalence plastique est quasiment indépendant de l'écroissage (Figure 4\_44).

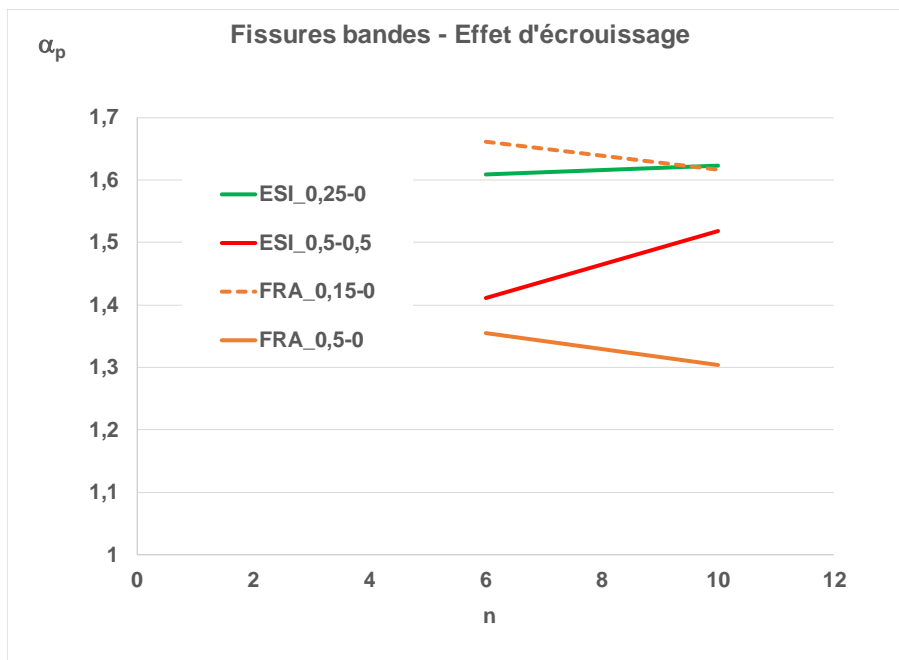


Figure 4\_44 : variations du coefficient d'équivalence plastique avec l'exposant d'écroissage

### Fissures parallèles

La dépendance du coefficient d'équivalence vis-à-vis de l'écroutissement vient du fait que l'adimensionnement de la charge de référence des fissures interagissantes est effectué par rapport à la charge de référence de la fissure de longueur 4a.

$$\alpha_{ep} \cong \alpha_e \cdot \left( \frac{Q_{R0\_Hi}}{Q_{R0}} \right)^{n-1} \quad (4.61)$$

$$Q_{R0\_2a} > Q_{R0\_4a} \quad (4.62)$$

Cependant la différence entre ces deux charges de référence est faible :

	$Q_{R0\_2a}/Q_{L0\_nf}$	$Q_{R0\_4a}/Q_{L0\_nf}$
FRA	0,8218	0,8064
ESI	0,7688	0,7623

**Tableau 4\_6 : charges de référence pour les fissures isolées**

L'augmentation de la charge de référence ne contribue que de 4% à l'augmentation de  $\alpha_{ep}$  pour  $n=6$

### **4.3 Défaut équivalent à deux fissures elliptiques**

Le cas des fissures disque est traité dans ce paragraphe.

L'interaction en élastoplasticité est mesurée par le coefficient  $\alpha_{ep} = \frac{H_{eq}}{H_i}$  qui est obtenu par le rapport des forces fissurantes J aux points d'interaction entre fissure unique et fissure intégrée comme décrit au paragraphe 4.3.1 (équation 4\_61).

Contrairement au cas des de fissures bande, aucune formule analytique générale n'a pu être établie pour les variations du coefficient d'équivalence en tridimensionnel. Les formules relatives aux fissures elliptiques ont été obtenues par lissage de résultats calculs aux éléments finis pour un nombre limité de rapport d'aspect. Les formules sont limitées aux cas de fissures égales. Le cas des fissures inégales est traité en considérant l'interaction de deux fissures égales à la plus grande en conservant l'écartement. Nous donnerons cependant quelques résultats de calcul d'interaction de fissures elliptiques inégales.

#### 4.3.1 Coefficient d'équivalence en tridimensionnel

Dans le cas tridimensionnel, le coefficient est donné par :

$$\alpha_{ep\_i,j \neq i,P} = \frac{J_{i,j \neq i}(P)}{J(a_1 + a_2)} \quad (4.63)$$

Où P est un des deux points le plus proches sur les fronts des deux fissures.

$J(a_1 + a_2)$  est estimé à partir des facteurs d'interaction élasto-plastiques  $t_{ij}(P) = \sqrt{\frac{J_{i,j \neq i}(P)}{J_{i0}(P)}}$

$$\alpha_{ep} = \frac{H_{eq}}{H_i} = \frac{J_{ep\_eq}}{J_{ep\_Hi}} = \frac{\zeta}{1 + \zeta} \cdot [\text{Max}(t_{12\_Int}; t_{12\_Ext})]^2 \quad (4.64)$$

#### 4.3.2 Choix du niveau de chargement

Dans le cas de fissures tridimensionnelles, le coefficient d'équivalence n'évolue pas de façon monotone, mais atteint un plateau en plasticité étendue comme en 2D. Les comportements sont similaires pour les fissures disque et les fissures elliptiques.

### 4.3.2.1 Coefficient d'équivalence des fissures disque coplanaires

EDF a effectué plusieurs calculs d'interaction de fissures disques coplanaires égales en élasto-plasticité (DEE, 2018). La figure 4.45 montre que pour tout écartement, le coefficient d'équivalence croît fortement en plasticité confinée, puis décroît et atteint un plateau en plasticité étendue. C'est la valeur en plasticité étendue qui doit être retenue car les valeurs de J croissent fortement dès que  $S/S_0$  dépasse 2. Cette valeur est obtenue en moyennant les valeurs entre  $S/S_0 = 3,1$  et  $5,2$ .

Les calculs d'EDF et ESI ont été réalisés par éléments finis avec des codes qualifiés (ASTER, 2017 et SYSTUS, 2020) pour les mêmes caractéristiques du matériau, sur des massifs de grande taille par rapport à celles des fissures et pour les mêmes conditions de chargement.

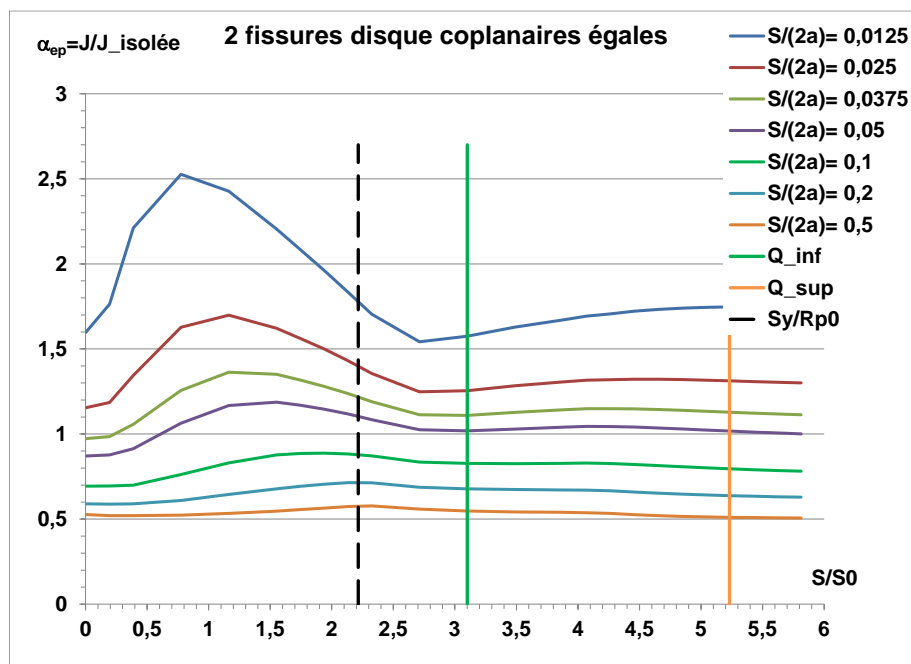


Figure 4\_45 : variations du coefficient d'équivalence élasto-plastique avec la charge pour deux fissures disque égales

### 4.3.2.2 Coefficient d'équivalence des fissures elliptiques coplanaires

Les résultats ne portent que sur les fissures coplanaires de rapport d'aspect  $a/c = 3$ . Les configurations pour les fissures égales et inégales sont décrites à la figure suivante.

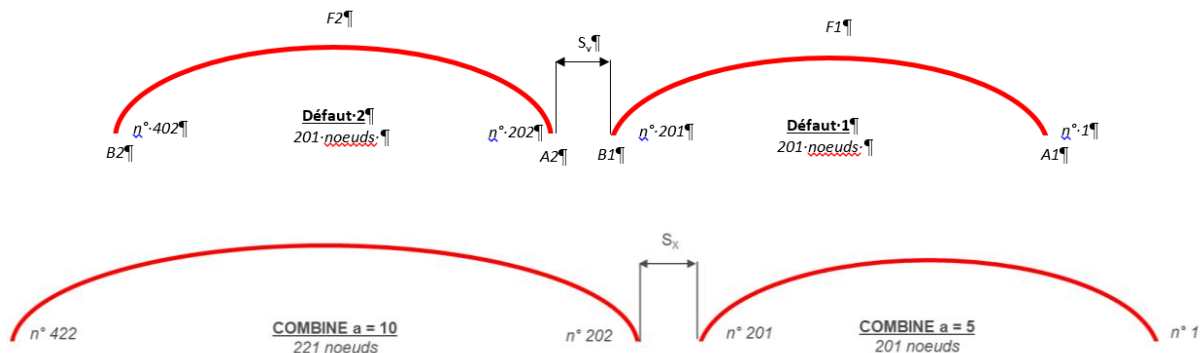


Figure 4\_46 : demi fissures elliptiques égales et inégales

Les interactions varient suivant que les couples de fissures considérés (égales / inégales) et leurs positions relatives (grands ou petits axes communs).

#### 4.3.2.2.1 Coefficient d'équivalence pour une interaction au vertex

Sous chargement uniforme, la force d'extension de fissure pour une fissure isolée est maximale au co-vertex. Dans le cas de deux fissures interagissantes au vertex, l'interaction tend à uniformiser la plasticité le long du front comme le montre la comparaison des déformations équivalentes en plasticité étendue de la figure 4\_47. La plasticité se concentre le long des fronts de fissure en particulier dans le ligament qui sépare les vertex. Il faut aussi noter la plus forte plastification de la grande fissure.

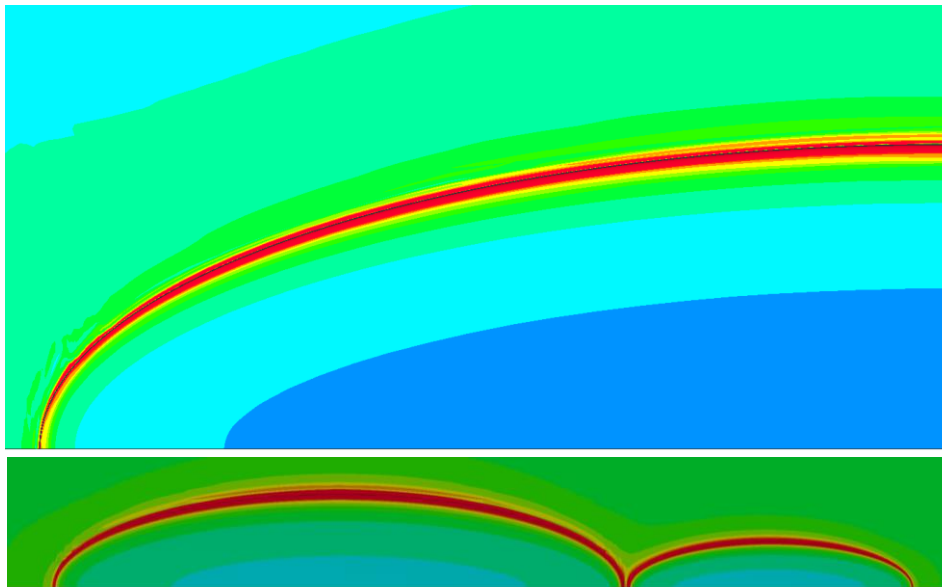


Figure 4\_47 : déformation totale équivalente en plasticité étendue pour une fissure isolée et deux fissures coplanaires de grand axes alignés (SYSTUS, 2020)

Les calculs EDF (DEE, 2018) montrent que le coefficient croît puis décroît ainsi que l'illustre la figure 4\_48. Par rapport au cas des fissures circulaires, les pics sont un peu décalés vers les valeurs plus élevées de contrainte. La valeur du coefficient d'équivalence est obtenue en moyennant les valeurs entre  $S/S_0 = 2,7$  et  $4,2$ .

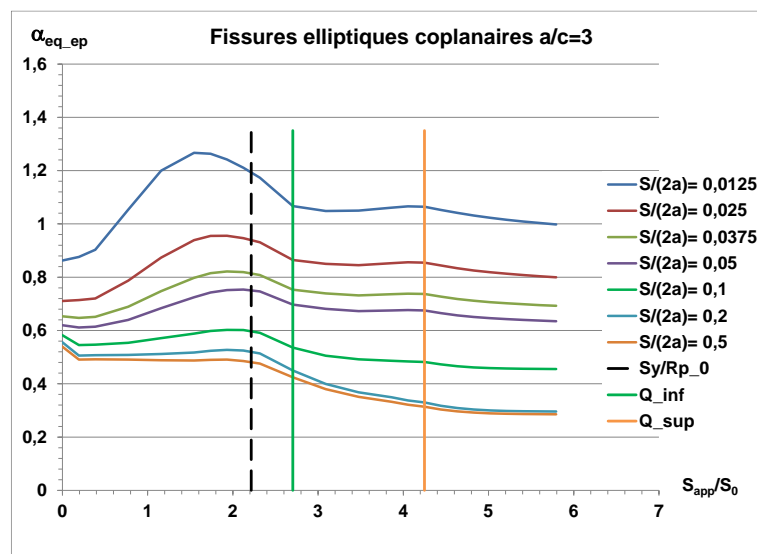
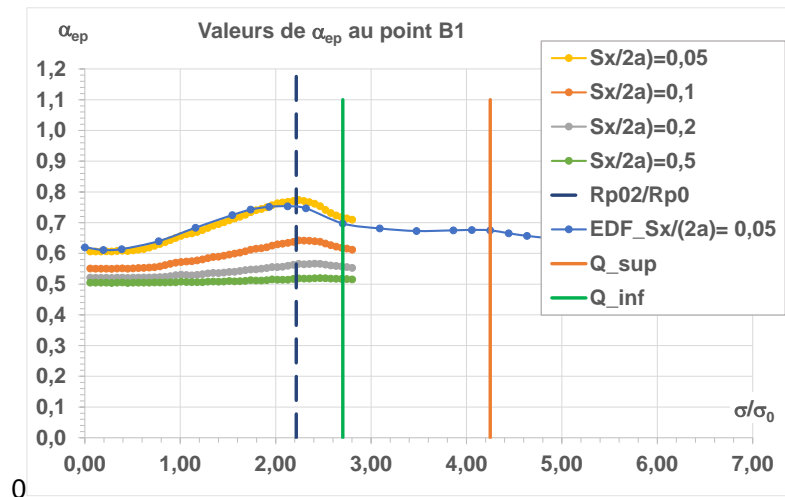


Figure 4\_48 : évolution du coefficient d'équivalence élasto-plastique avec le niveau de chargement pour des fissures elliptiques coplanaires égales au point de plus forte interaction



Les courbes relatives écartements relatives supérieures ou égales à 0,1 ne présentent plus de plateaux. Ceci est dû à une moins bonne qualité des maillages, choix qui s'explique par l'hypothèse qu'une interaction moins forte nécessiterait moins de concentration de mailles dans le ligament et le long du front. Cette hypothèse n'est pas correcte car les quantités qui mesurent l'interaction sont des rapports de grandeurs pour la fissure interagissante et la fissure isolée, faiblement différentes lorsque les écartements sont relativement élevés et donne une bonne précision des calculs s'impose.

Les calculs ESI (SYSTUS, 2020) n'ont été effectués que pour des valeurs élevées des écartements pour lesquelles les calculs EDF ne sont pas valides. Les maillages ont été adaptés au cas des écartements plus élevés. Un des cas valide traité par EDF ( $S_x/2a=0,5$ ) a été aussi calculé par ESI. La comparaison illustrée à la figure 4.49 montre que les évolutions sont similaires à celles calculée par EDF mais les calculs ne sont pas poussés assez loin.

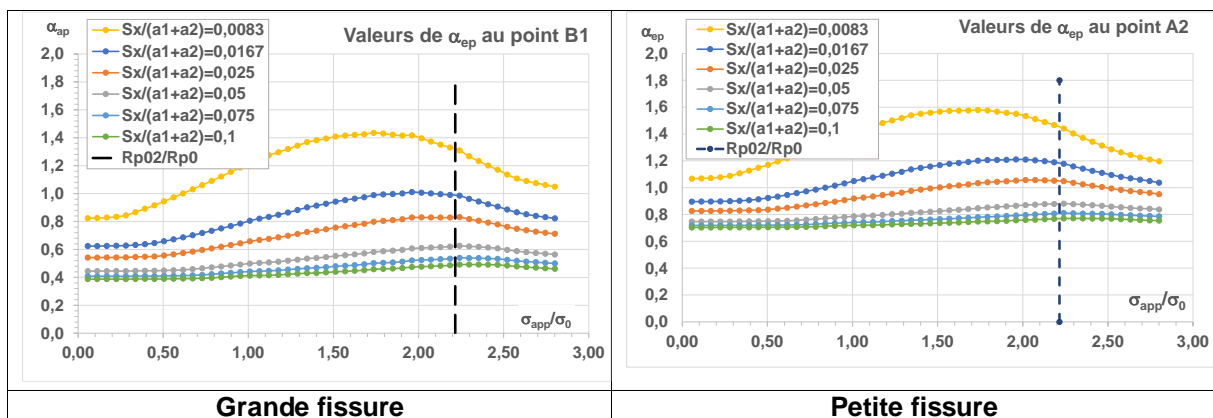


**Figure 4\_49 : évolution du coefficient d'équivalence élasto-plastique avec le niveau de chargement pour des fissures elliptiques coplanaires égales au point de plus forte interaction**

La valeur retenue pour le coefficient d'équivalence doit être la valeur moyenne dans le plateau pour les calculs réalisés par EDF ou la valeur finale pour les calculs effectués par ESI. Pour l'écartement  $S_x=a$ , il n'y a pratiquement plus d'interaction.

### Cas des fissures inégales

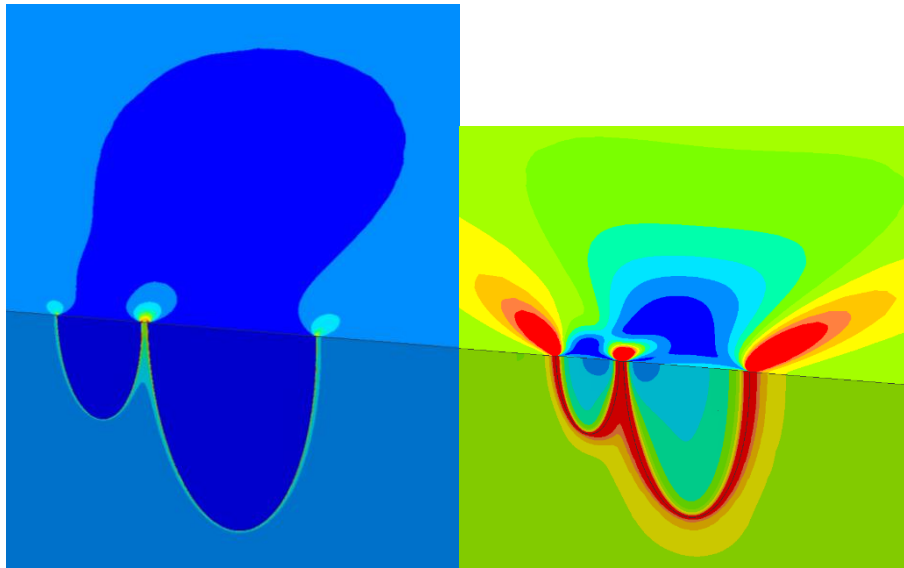
Ce cas a été traité par ESI pour des fissures de rapports d'aspects identiques dont le rapport de taille est 2. La figure 4\_50 montre que les évolutions ont même forme pour les deux fissures mais les valeurs du coefficient d'équivalence de la petite fissure sont toujours supérieures à celle de la grande fissure.



**Figure 4\_50 : évolution du coefficient d'équivalence élasto-plastique avec le niveau de chargement pour des fissures elliptiques coplanaires inégales au vertex**

#### 4.3.2.2 Coefficient d'équivalence pour une interaction au co-vertex

Dans le cas de deux fissures interagissantes au co-vertex, l'interaction accroît la concentration de contrainte dans le ligament qui sépare les co-vertex. Il faut aussi noter, comme dans le cas de l'interaction au vertex, la plus forte plastification de la grande fissure (Figure 4\_51, SSYTUS, 2020)).



**Figure 4\_51 : déformation totale équivalente en élasticité et déformation plastique équivalente Fissures inégales ( $a_1/a_2=2$ ) écartement relatif  $S_x/(a_1+a_2) = 0,05$**

#### 4.3.3 Formules pour des fissures elliptiques coplanaires

Pour les fissures coplanaires la procédure suivie est la suivante :

1. Lissage des résultats de calculs aux éléments finis afin d'obtenir des fonctions applicables sur tout le domaine de variation de l'écartement  $S_x$  ou  $S_y$ . Dans le cas de fissures inégales de petit axe commun, une pondération des résultats a été réalisées pour obtenir un lissage pour des fissures égales.
2. Validation de ces lissages par comparaison aux résultats éléments finis et à la valeur asymptotique de 0,5.
3. Etablissement d'une fonction d'interpolation entre les lissages afin de disposer d'une fonction  $\alpha_{ep,Id}(\hat{S}_x \text{ ou } y, a/c)$  pour des fissures identiques.

Les formules présentées dans le Tableau 4\_7 ont été établies pour des fissures identiques.

Type de fissure	Formules	Remarques
Fissures bande ( $a/c=0$ )	$0.1406 + 0.4858 \cdot (\hat{S}_x)^{-0.541}$	-
Fissures elliptiques de petit axes alignés ( $a/c = 1/3$ )	$0.1585 + 0.2881 \cdot (\hat{S}_y)^{-0.5977}$	Estimation à partir de fissures inégales ( $\zeta = 2$ )
Fissures disque ( $a/c=1$ )	$0.2956 + 0.1447 \cdot (\hat{S}_x)^{-0.5266}$	-
Fissures elliptiques de grand axes alignés ( $a/c=3$ )	$0.456 + 0.0374 \cdot (\hat{S}_x)^{-0.7022}$	-

**Tableau 4\_7 : formules 4.65 des coefficients élastoplastiques  $\alpha_{ep}$  pour des fissures enfouies coplanaires égales**

Avec  $\hat{S}_x = \frac{S_x}{a_1+a_2}$  et  $\hat{S}_y = \frac{S_y}{c_1+c_2}$

Les coefficients de ces lissages varient de façon monotone sauf pour les exposants. Avec peu de points calculés par éléments finis, il faut se limiter à des fonctions monotones les plus lisses possible. Le lissage

de la configuration  $a/c = 1/3$  avec petites axes alignés a donc été modifié avec pour conséquence une légère perte de précision :

$$0.22 + 0.339 \cdot (\hat{S}_y)^{-0.535} \quad (4.66)$$

Les variations des coefficients de lissage sont alors satisfaisantes comme le montre la figure 4\_52. Le Tableau 4\_8 donne les lissages des formules des coefficients.

Des correctifs ont été apportés afin d'améliorer ces formules aux bornes.

Le domaine de validité est  $0 \leq \frac{a}{c} \leq 3.25$ . Pour des rapports d'aspect plus élevés, il faut utiliser la valeurs des coefficients obtenus pour  $\frac{a}{c} = 3.25$ .

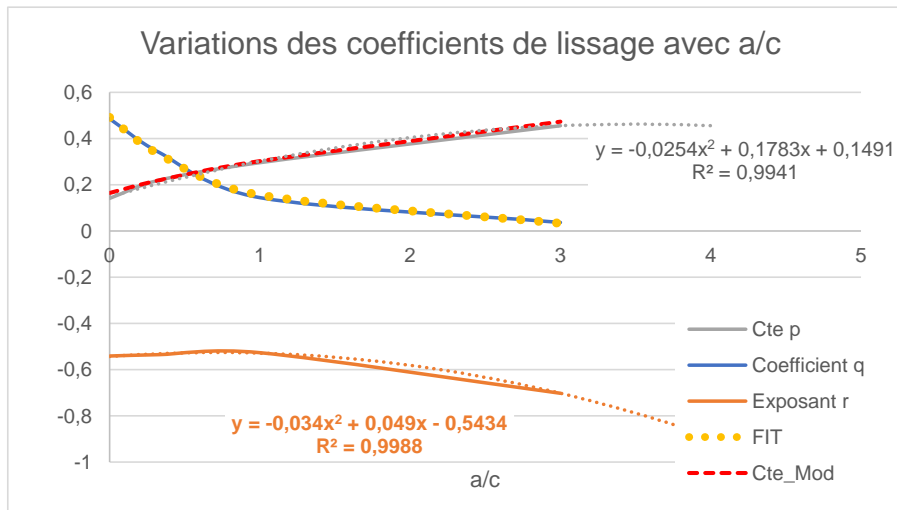


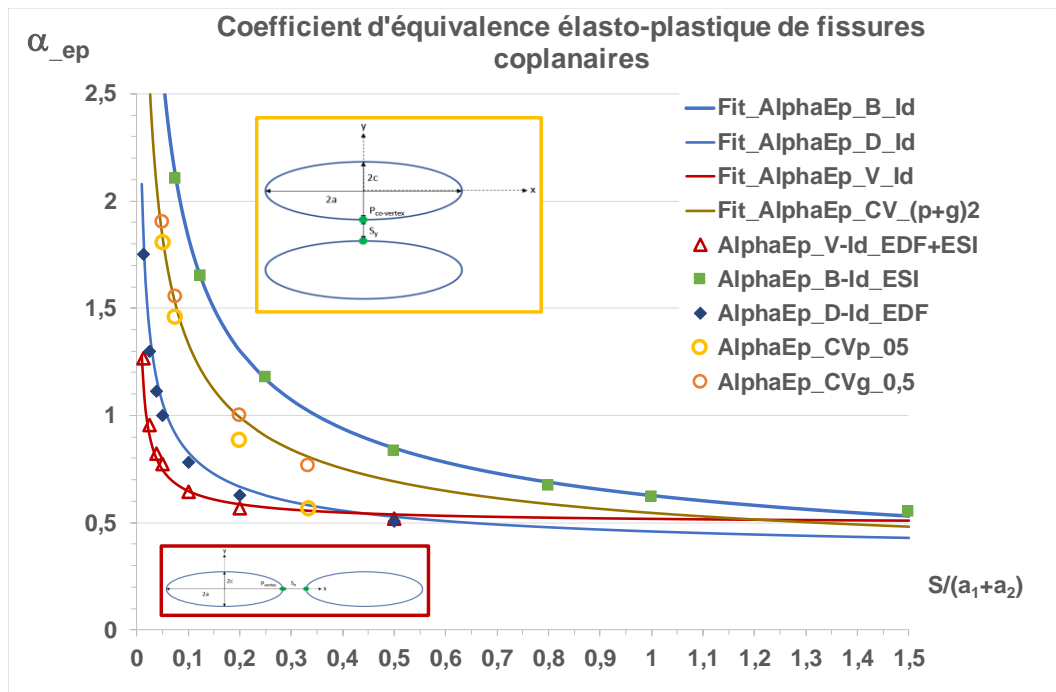
Figure 4\_52 : variations des coefficients de formules 4.65 avec le rapport d'aspect

$\frac{a}{c} = 0$	$0.1406 + 0.4858 \cdot (\hat{S}_x)^{-0.541}$
Coefficients pour $2 \geq \frac{a}{c} > 0$	$p = 0.1491 + 0.1783 \cdot \frac{a}{c} - 0.0254 \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^2 + 0.015 \cdot \exp\left(\left[1 - \frac{a}{c}\right]\right)$ $q = 0.0232 + 0.46835 \cdot \exp\left(-1.2607 \cdot \frac{a}{c}\right)$ $r = -0.5434 + 0.049 \cdot \frac{a}{c} - 0.034 \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^2$
Coefficients pour $\frac{a}{c} > 2$	$p = 0.1491 + 0.1783 \cdot \frac{a}{c} - 0.0254 \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^2 + 0.015 \cdot \left[1 - \frac{a}{c}\right]$ $q = 0.0232 + 0.46835 \cdot \exp\left(-1.2607 \cdot \frac{a}{c}\right)$ $r = -0.5434 + 0.049 \cdot \frac{a}{c} - 0.034 \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^2$ $r = \max\left(-0.46 - 0.075 \cdot \frac{a}{c}; r\right)$
Formule	$\alpha_{ep\_ld} = p + q \cdot (\hat{S}_{x\text{ ou }y})^r$

Tableau 4\_8 : formules 4.67 des coefficients d'équivalence élastoplastiques pour des fissures enfouies coplanaires égales

Dans ces formules le rapport d'aspect  $\frac{a}{c}$  varie de 0 pour les fissures bande, à 3 pour les fissures elliptiques de grand axe alignés en passant par 1/3 pour les fissures elliptiques de petit axe alignés et 1 pour les fissures disque.

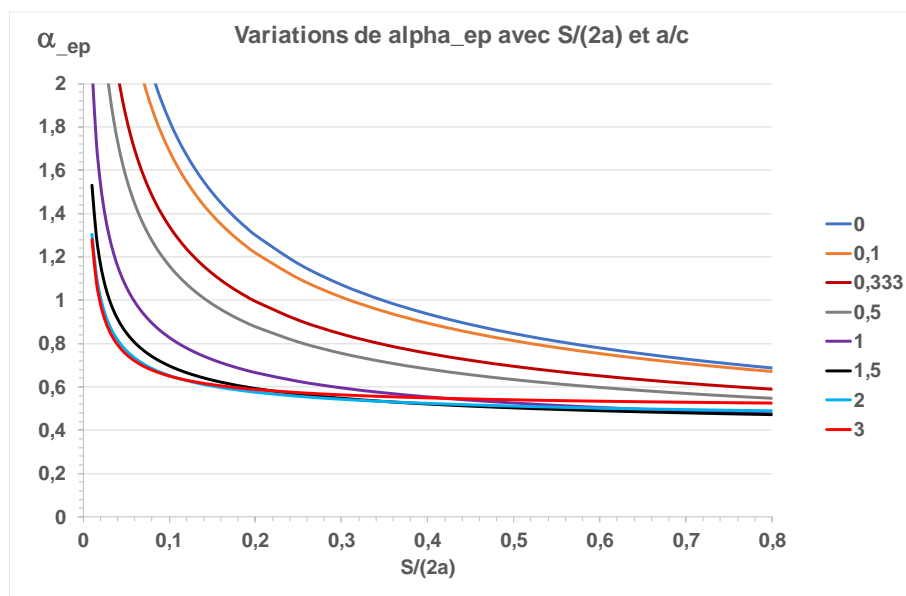
La Figure 4\_53 présente les variations des coefficients d'équivalence pour des fissures coplanaires égales comparées aux résultats de calculs aux éléments finis.



**Figure 4\_53 : validation des coefficients d'équivalence pour des fissures coplanaires**

Les écarts sont en général de moins de 3% pour  $0.95 \geq \lambda \geq 0.2$ , un peu plus au-delà. Autour du cas de la fissure disque, les formules surestiment de 7% environ le coefficient  $\alpha_{ep\_Id}$ .

La validité des interpolations est illustrée sur la Figure 4\_54 qui montre, comme attendu, une décroissance continue des coefficients d'équivalence avec l'écartement et avec l'accroissement du rapport d'aspect.



**Figure 4\_54 : coefficients d'équivalence prédits pour des fissures coplanaires**

Les coefficients d'équivalence pour des fissures inégales sont tels que :

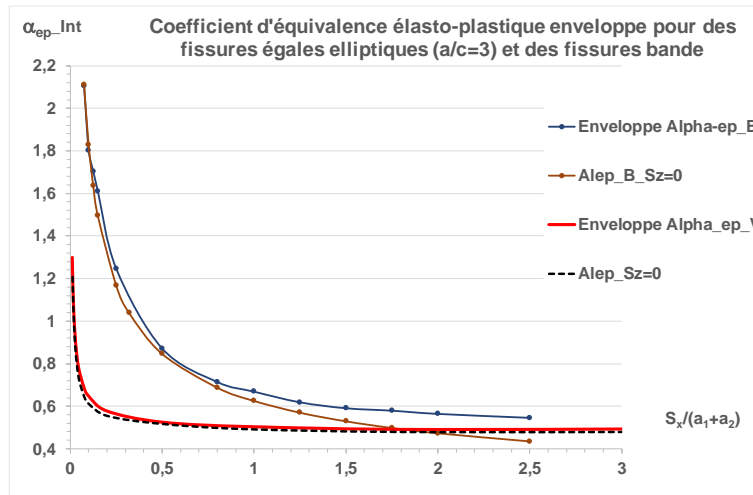
$$\alpha_{ep_p} \leq \alpha_{ep_{Id}} \leq \alpha_{ep_g} \quad (4.68)$$

Donc il n'est pas possible de prédire avec cette formule les coefficients des grandes fissures. Il faut remplacer les fissures inégales par des fissure égales.

Le coefficient d'équivalence plastique est obtenu par le rapport  $\alpha_{p_{Id}} = \alpha_{ep_{Id}} / \alpha_{e_{Id}}$

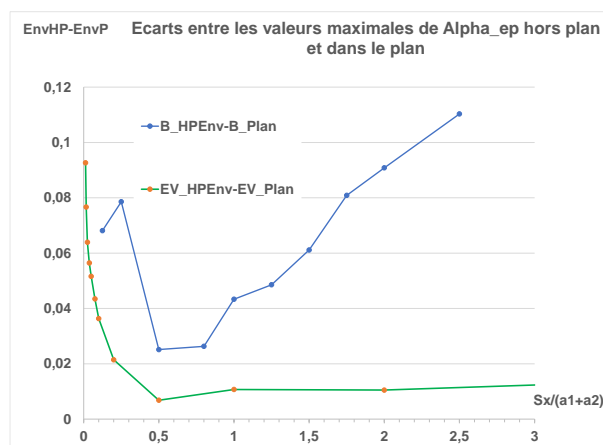
#### 4.3.4 Formules pour des fissures parallèles

Les valeurs des coefficients d'équivalence élasto-plastiques enveloppe pour des fissures parallèles sont légèrement supérieures à celles des fissures coplanaires comme l'illustre la figure 4\_55.



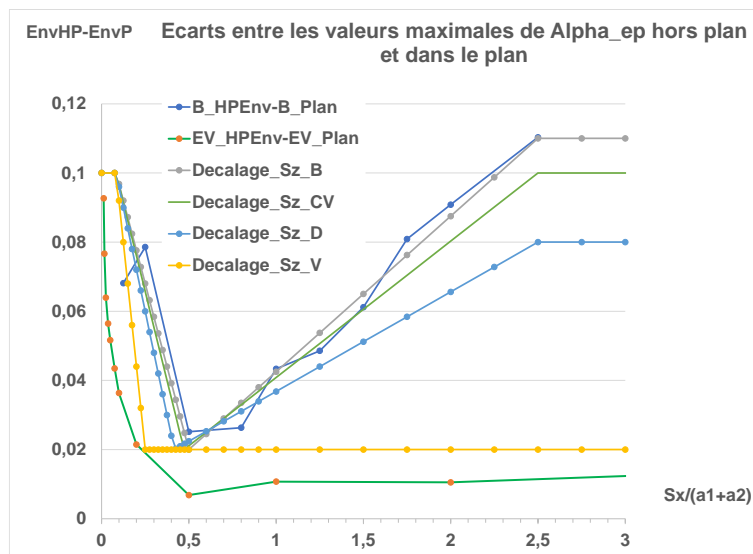
**Figure 4\_55 : coefficients d'équivalence élasto-plastiques enveloppe pour des fissures elliptiques parallèles de grands axes alignés et des fissures bande (Alep désigne les enveloppes pour des fissures coplanaires)**

L'application de ces formules au cas Hors Plan nécessite de modifier la fonction  $\alpha_{ep_{Id}}$  notamment pour des fissures éloignées ( $S_x/(2a) > 0,5$ ). Ceci est obtenu par un simple décalage des valeurs de  $\alpha_{ep_{Id}}$  comme l'illustre la figure 4\_55. La différence entre les enveloppes des coefficients d'équivalence élastoplastiques pour des fissures dans le plan et des fissures hors plan est important comme le montre la figure 4\_56. Cet écart est atténué si l'on distingue les types de fissures (Figure 4\_57) : B pour bande, CV pour interaction d'ellipse au co-vertex, D pour disque et V pour interaction d'ellipse au vertex.



**Figure 4\_56 : écarts de coefficients d'équivalence enveloppe des fissures parallèles et des fissures coplanaires**

Les décalages pour les fissures bande sont notablement plus importants que ceux relatifs aux fissures elliptiques de grand axes alignés et de rapport d'aspect  $a/c = 3$ . Afin d'obtenir une formulation plus simple et générale mais pénalisante, une interpolation linéaire par morceaux est décrite à la figure 4\_57 et au Tableau 4\_9.



**Figure 4\_57 : lissage des écarts de coefficients d'équivalence enveloppe des fissures parallèles et des fissures coplanaires**

$\hat{S}_{x \text{ ou } y}$	$\Delta\alpha_{ep}$
$0 \leq \hat{S}_{x \text{ ou } y} \leq \hat{S}_1 = 0.125 \cdot (1 - 1/3)$	0.1
$\hat{S}_1 \leq \hat{S}_{x \text{ ou } y} \leq \hat{S}_2 = 0.5 - a/c * 0.25/3$	$0.1 + (\hat{S}_{x \text{ ou } y} - \hat{S}_1) \cdot (0.1 - 0.02) / (\hat{S}_1 - \hat{S}_2)$
$\hat{S}_2 \leq \hat{S}_{x \text{ ou } y} \leq 2.5$	$0.02 + (\hat{S}_{x \text{ ou } y} - \hat{S}_2) \cdot (\Delta\alpha_1 - 0.02) / (2.5 - \hat{S}_2)$
$\hat{S}_{x \text{ ou } y} \geq 2.5$	$\Delta\alpha_1 = 0.11 - a/c / 3 \cdot (0.11 - 0.02)$

**Tableau 4\_9 : formules 4.69 des lissages enveloppes des décalages des coefficients d'équivalence élastoplastiques pour des fissures parallèles**

L'estimation des coefficients d'équivalence élasto-plastiques enveloppe pour des fissures parallèles s'effectue suivant les étapes suivantes :

1. Calcul du décalage  $\Delta\alpha_{ep}$  pour le rapport d'aspect  $c/a$  et du décalage  $\hat{S}_{x \text{ ou } y}$  ;
2. Pour ces mêmes données d'entrée, calcul des coefficients d'équivalence élastoplastiques  $\alpha_{ep\_Id}$  avec la formule relative aux fissures coplanaires égales ;
3. Somme  $\alpha_{ep\_Id} + \Delta\alpha_{ep}$  au-delà de  $\hat{S}_z = 0.5$ , la somme est bornée à 1 ;
4. Calculer  $\alpha_{e\_Id}$  ;
5. Obtenir coefficient d'équivalence élasto-plastique en divisant  $\alpha_{p\_Id} = \alpha_{ep\_Id} + \Delta\alpha_{ep}$  par  $\alpha_{e\_Id}$  ;

Exemple pour deux fissures elliptiques de rapport d'aspect  $a/c = 3$

$\hat{S}_x$	$\lambda_x$	$\alpha_{ep\_Id}$				
		0	0,025	0,0375	0,05	0,1
0,025	0,976	1,345	1,367	1,277	1,144	1,004
0,0375	0,964	1,275	1,297	1,294	1,244	1,0153
0,05	0,952	1,280	1,257	1,256	1,251	1,027

**Tableau 4\_10 : valeurs  $\alpha_{ep\_Id}$  calculées par éléments finis**

		Ecart relatifs en fonction des $\alpha_{ep\_Id}$				
$\hat{S}_x$	$\lambda_x$	0	0,025	0,0375	0,05	0,1
0,025	0,976	-3,87%	5,02%	12,38%	25,45%	42,91%
0,0375	0,964	-0,91%	9,49%	9,76%	14,17%	39,91%
0,05	0,952	-3,03%	11,93%	11,98%	12,43%	36,93%

**Tableau 4\_11 : écarts relatifs avec les valeurs prédites**

Les 4\_10 et 4\_11 fournissent les résultats calculés pour le cas présenté. Les écarts relatifs sont plus importants pour des fissures éloignées verticalement mais les valeurs sont alors plus faibles.

#### 4.4 Charges de référence pour deux fissures elliptiques

La détermination des charges de référence pour des fissures elliptiques se fonde sur des calculs effectués par EDF (DEE, 2018) et ESI (SYSTUS, 2020). Deux difficultés rendent cette détermination plus complexe :

- L'existence d'une charge de référence pour des configurations tridimensionnelles n'est pas garantie. Ceci sera illustré au paragraphe suivant.
- Les calculs sont effectués pour une loi de comportement en plasticité qui n'est pas une loi puissance ce qui enfreint les hypothèses relatives à la validité de l'approche et complique la détermination des charges de référence.

Ce paragraphe est limité au cas de fissures coplanaires.

##### 4.4.1 Détermination des charges de référence

La loi de comportement (contrainte Sigma- déformation totale Eps\_t est décrite aux tableaux suivants.

Sigma (MPa)	0	39,876	42,475	58,021	69,206	78,418	86,515	93,919	100,876
Eps_t	0	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0005	0,0006	0,0006

Sigma (MPa)	107,548	114,046	120,454	126,836	133,242	139,716	146,293	153,003	159,874
Eps_t	0,0007	0,0008	0,0008	0,0009	0,001	0,0012	0,0013	0,0015	0,0017

Sigma (MPa)	166,931	174,197	181,691	189,434	197,445	205,742	214,343	223,266	232,528
Eps_t	0,002	0,0024	0,0028	0,0034	0,0041	0,005	0,0061	0,0074	0,0092

Sigma (MPa)	242,146	252,139	262,525	273,322	284,548	296,223	308,367	320,999	334,142
Eps_t	0,0114	0,0142	0,0178	0,0223	0,028	0,0353	0,0445	0,0563	0,0712

Sigma (MPa)	347,816	362,045	376,852	392,259	408,294	424,981	442,348	460,422	479,232
Eps_t	0,0901	0,1141	0,1446	0,1835	0,2328	0,2955	0,3752	0,4766	0,6054

Sigma (MPa)	498,81	519,187	540,394	562,467	585,44	609,351	634,238	660,141	687,102
Eps_t	0,7691	0,9773	1,242	1,5785	2,0063	2,5502	3,2417	4,1208	5,2387

Sigma (MPa)	715,164	744,37	774,771	806,411	839,344	873,622	909,299	946,432	985,083
Eps_t	6,6599	8,4669	10,7644	13,6854	17,3992	22,1212	28,1248	35,7578	45,4631

**Tableaux 4\_12 : loi de comportement de l'acier austéno-ferritique**

Le module d'Young E vaut 197000 MPa, le coefficient de Poisson 0,3 et la limite d'élasticité  $\sigma_y = 316,4$  MPa.

La méthode de calcul diffère de celle utilisée pour la loi de Ramberg-Osgood. Afin de résoudre le problème pour une loi quelconque, il faut suivre la démarche d'Ainsworth (AIN, 1984).

L'expression 4\_31 tirée de la méthode GE-EPRI est transformée de la façon suivante

$$J_p = \alpha \cdot h_{nu} \cdot J_e \cdot \left(\frac{Q}{Q_{R0}}\right)^{n-1} \quad \text{avec} \quad Q_{R0} = Q_0 \cdot \left[\frac{h_1(a/W, 1)}{h_1(a/W, n)}\right]^{\frac{1}{n-1}} \quad (4.70)$$

$$h_{nu} = \frac{0.75}{1-\nu^2} \quad \text{en déformations planes et 1 en contraintes planes} \quad (\text{cf. 4.34}).$$

En prenant comme référence la limite d'élasticité, on peut écrire  $\sigma_{ref} = \sigma_y \cdot \frac{Q}{Q_{Ry}}$

$$\text{Il vient} \quad \alpha \cdot \left(\frac{Q}{Q_{Ry}}\right)^{n-1} = \alpha \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_{ref}} \cdot \left(\frac{\sigma_{ref}}{Q_{Ry}}\right)^n = \frac{E \cdot \varepsilon_{p,ref}}{\sigma_{ref}}$$

$$\text{Donc :} \quad \frac{1}{h_{nu}} \cdot \frac{J_p}{J_e} = \frac{E \cdot \varepsilon_{p,ref}}{\sigma_{ref}}$$

$$\frac{1}{h_{nu}} \cdot \frac{J_p}{J_e} = \frac{\varepsilon_{ref}}{\varepsilon_{e,ref}} = \mathfrak{J}\left(\frac{\sigma_{ref}}{\sigma_y}\right) \quad (4.71)$$

Le second terme  $\mathfrak{J}(\sigma_{ref})$  est donné par la loi de comportement plastique.

Donc la charge de référence est obtenue par inversion de la loi de comportement, ce qui complique sa détermination pour une loi connue point par point.

$$Q_{Ry} = \lim_{Q \gg Q_{L0,c}} \frac{Q}{\mathfrak{J}^{-1}\left[\frac{1}{h_{nu}} \cdot \frac{J - J_e}{J_e}\right]} \quad (4.72)$$

En pratique on résout l'équation suivante :

$$\frac{J_p}{J_e} - h_{nu} \cdot \mathfrak{J}\left(\frac{\sigma_{ref}}{\sigma_y}\right) = 0 \quad (4.73)$$

En tridimensionnel, la charge limite sans fissure a pour expression :

$$Q_{Ly,nc} = \sigma_y \cdot Z_{p,nc} \quad Z_{p,nc} = 2B \cdot W$$

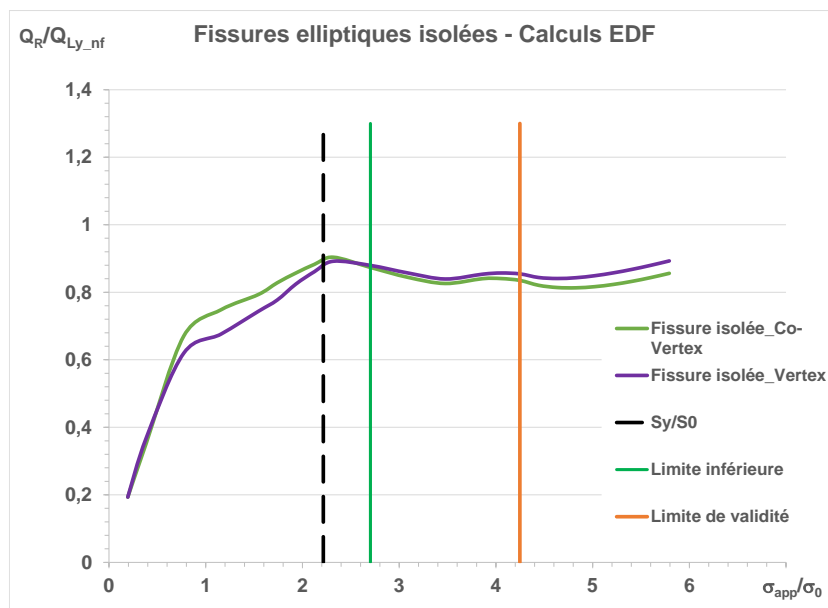
B est l'épaisseur du massif et W la demi-largeur.

La charge de référence instantanée varie avec le chargement, nous appelons charge de référence la valeur limite stabilisée. L'expression évolution de la charge de référence se réfère à la charge de référence instantanée.

#### 4.4.2 Charges de référence pour une fissure elliptique enfouie

La figure 4.58 compare les évolutions de la charge de référence instantanée calculées pas à pas au vertex et au co-vertex par EDF pour une fissure elliptique isolée de rapport d'aspect  $a/c = 3$ .





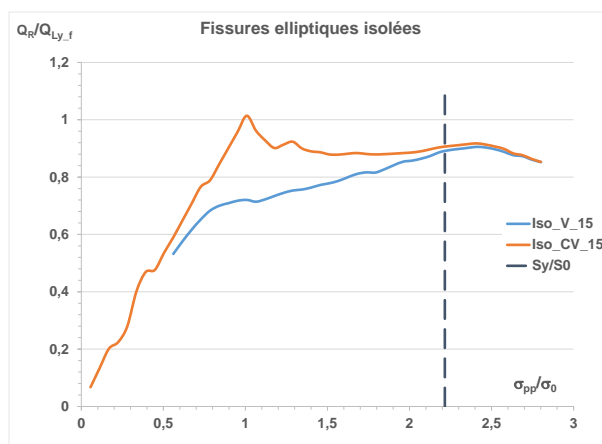
**Figure 4\_58 : évolution de la charge de référence pour une fissure elliptique isolée**

L'évolution de la charge de référence avec le niveau de chargement comporte trois domaines (4\_58) :

1. Une phase de croissance dans le domaine élastique qui se termine par un pic situé à  $\sigma/\sigma_y \cong 1$ .
2. Un plateau compris entre  $1,5 \leq \sigma/\sigma_y \leq 2,37$ .
3. Une phase de plasticité très étendue où les calculs de J perdent leur validité.

L'existence d'un plateau prouve celle de la charge de référence. Il faut noter que les charges de référence au vertex et au co-vertex sont pratiquement les mêmes, ce qui laisse supposer que bien que, pour un niveau de charge donné, les valeurs de  $J_e$  le long du front augmentent en passant du vertex au covertex, l'amplification plastique  $J/J_e$  est constante le long du front.

La figure 4.59 compare les évolutions de la charge de référence calculées pas à pas au vertex et au co-vertex par ESI pour une fissure elliptique isolée de rapport d'aspect  $a/c = 3$ .



**Figure 4\_59 : évolution de la charge de référence pour une fissure elliptique isolée (configuration traitée par ESI)**

L'évolution de la charge de référence avec le niveau de chargement calculée par ESI-France comporte aussi les trois domaines cités plus haut, mais seule l'amorce du plateau apparaît. Les calculs effectués par ESI n'ont pas été poussés assez loin. La charge de référence est estimée en retenant la valeur extrême.

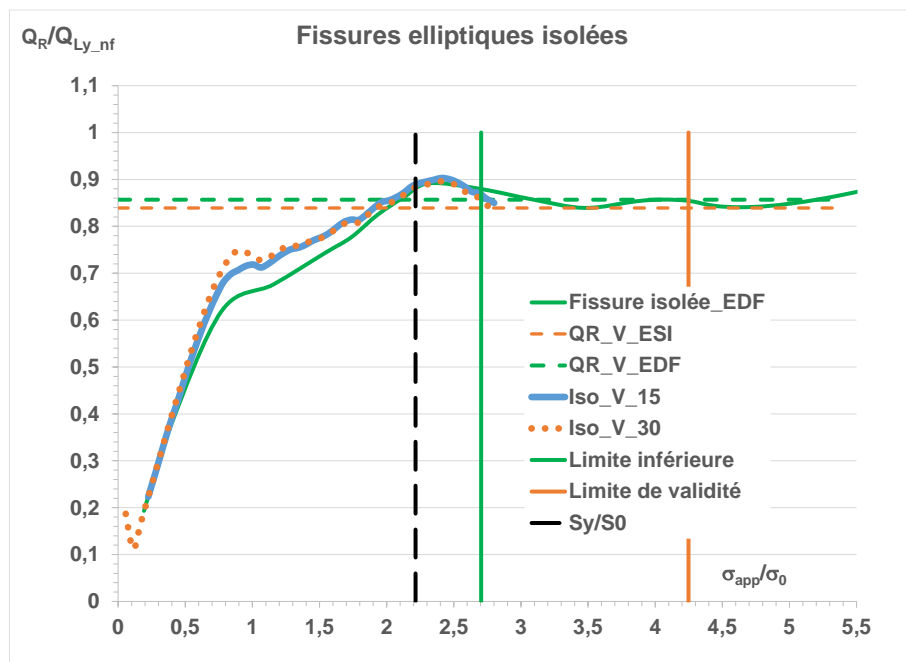
Ce choix est validé par comparaison des évolutions de la charge de référence illustrée à la figure 4\_60 et la proximité des valeurs du tableau 4\_13.

$$Q_{Ly\_nf} = \sigma_y \cdot Z_{p\_nf} \quad Z_{p\_nf} = 4W \cdot t$$

Où W est la demi largeur du bloc et t la demi-épaisseur.

	Calculs EDF	Calculs ESI
$Q_{Ly\_nf}$ (kN)	284,76	7119
$Q_{Ry}/Q_{Ly\_nf}$	0,8567	0,8499 – fissure a = 15 0,8392 – fissure a = 30

**Tableau 4\_13 : charges de référence au vertex adimensionnées pour une fissure elliptique isolée**



**Figure 4\_60 : évolution de la charge de référence pour les fissures elliptiques isolées**

Afin de mesurer l'éventuelle influence de la taille finie des massifs, le tableau 4\_14 compare les charges limites des massifs fissurés en utilisant une charge limite fondée sur l'effet de réduction de section.

$$Q_{Ly\_f} = Q_{Ly\_nf} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{a}{W} \cdot \frac{c}{t}\right) \quad (4.74)$$

	Calculs EDF	Calculs ESI	Calculs ESI
Bloc	4*30x30 mm	4*150x150 mm	4*150x150 mm
Fissure	a= 3 mm, c=1 mm	a=15 mm, c= 5 mm	a=30 mm, c= 10mm
$Q_{Ly\_f}/Q_{Ly\_nf}$	0,997	0,997	0,989

**Tableau 4\_14 : charges limites pour une fissure elliptique isolée**

Les charges limites sont voisines de celle du massif non fissuré, ce qui montre que les effets de bord sont négligeables. Pour la grande fissure traitée par ESI, la valeur est légèrement plus faible comme attendu.

### 4.4.3 Charges de référence pour deux fissures elliptiques coplanaires égales

La figure 4.61 montre les évolutions de la charge de référence calculées pas à pas au vertex par EDF pour deux fissures elliptiques égales de rapport d'aspect  $a/c = 3$ .

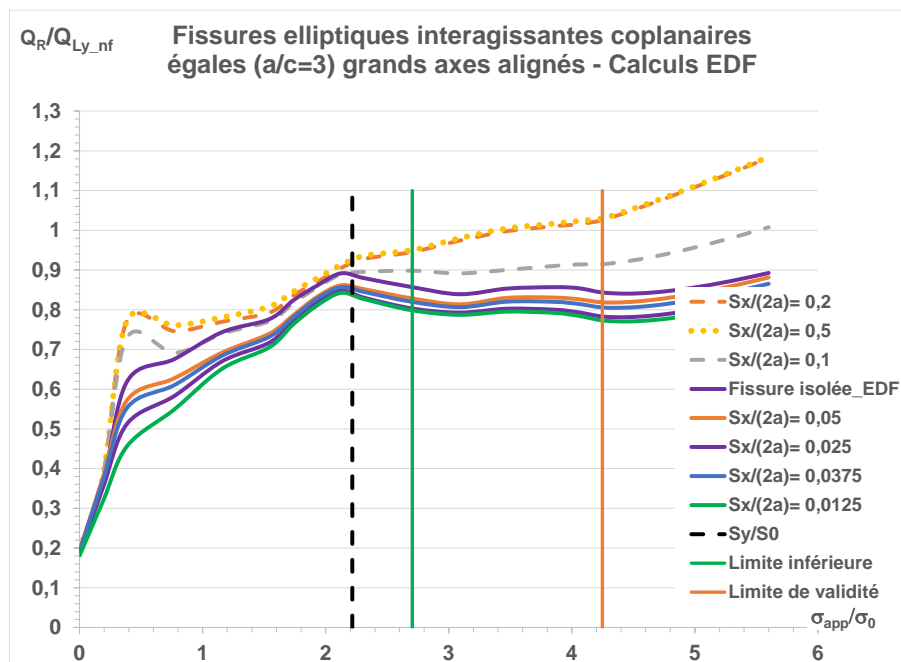


Figure 4\_61 : évolution de la charge de référence pour deux fissures elliptiques interagissantes

Les évolutions relatives aux écartements relatifs  $S_x/(2a) > 0,05$  sont supérieures à celles relatives aux fissures isolées et ne présentent pas de plateau. Ces calculs ne permettent pas d'obtenir la valeur de la charge de référence.

Les résultats des calculs ESI-France sont reproduits à la figure 4\_62.

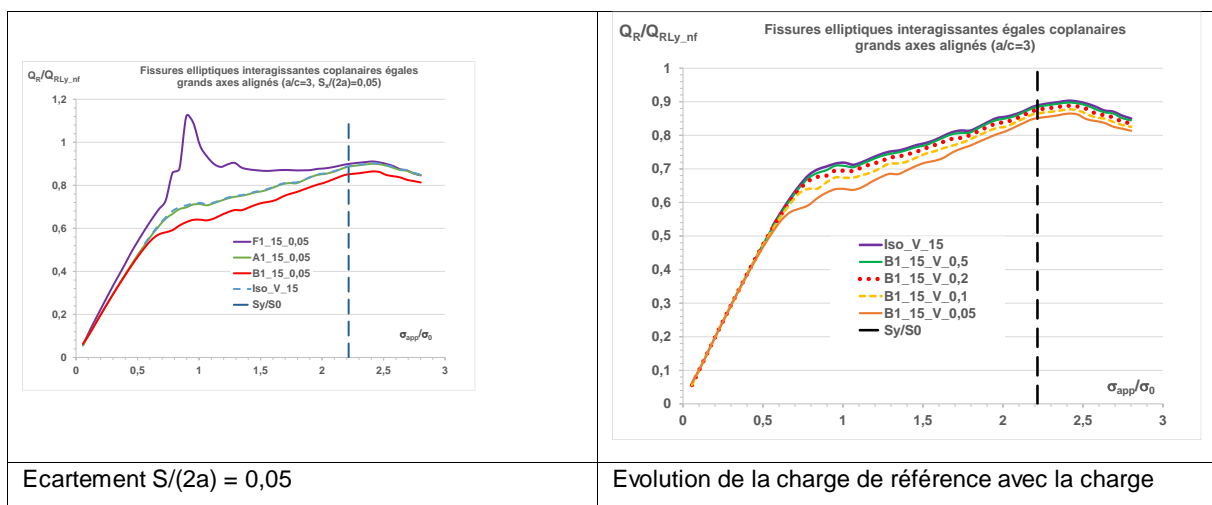
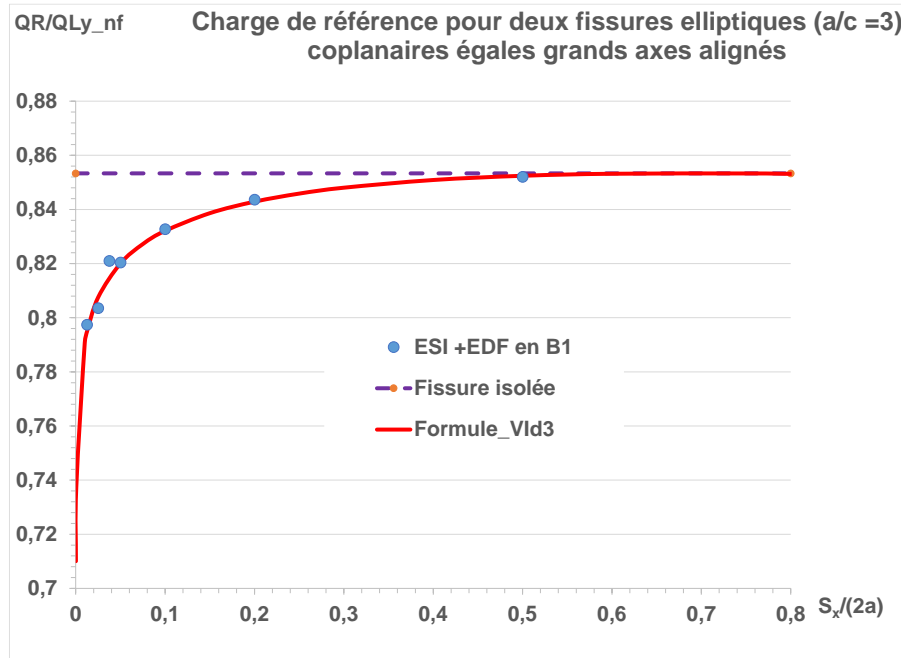


Figure 4\_62 : évolution de la charge de référence pour deux fissures elliptiques interagissantes

Les résultats d'ESI-France complètent ceux d'EDF. Pour chaque écartement les charges de référence au fond et au vertex opposé (point A1) sont confondues. Le point de plus forte plastification sont les points les plus proches (B1 et A2). Les résultats regroupés sont lissés par la formule suivante :

$$Q_{Ry} = p \cdot \hat{S}_x^q \cdot \exp(r \cdot \hat{S}_x^q) \quad (4.75)$$

Avec  $p=0,8812$ ,  $q=0,0234$ ,  $r=-0,034$ .



**Figure 4\_63 : évolution de la charge de référence pour deux fissures elliptiques interagissantes**

Les variations des charges de référence présentent toutes une allure en V : rapidement décroissantes pour les écartements très faibles et lentement croissante ensuite pour se rapprocher de l'asymptote relative à la fissure isolée (Figure 4\_64). Les écartements retenus pour les fissures elliptiques interagissant au vertex ne sont pas assez faibles pour que le V n'apparaisse pas. C'est attesté, dans une moindre mesure, le cas pour les fissures bande.

Ceci s'explique par le fait que la charge de référence doit tendre vers la valeur correspondant à une fissure unique lorsque l'écartement relatif tend vers 0. La valeur de  $S_x/(2a)$  qui sépare ces deux comportements est d'autant plus faible que la courbure de la fissure au point d'interaction est forte, depuis le cas des ellipses de grand axes alignés au cas de la fissure bande.

Des lissages ont été établis pour la partie croissante, les formules sont regroupées dans le tableau 4\_14 ci-après.

Fissure	Point bas	Formule
Bande	$S_x/(2a) > 0,1$	$0,7586 - 0,0718 \cdot \exp(-1,6936 \cdot \hat{S}_x^{1,733})$
Disque	$S_x/(2a) > 0,05$	$0,8412 \cdot \hat{S}_x^{0,0266}$
Ellipses V	$S_x/(2a) > 0,025$	$0,881 \cdot \hat{S}_x^{0,0234} \cdot \exp(r \cdot \hat{S}_x^{-0,034})$

**Tableau 4\_15 : équation des charges de référence en pointe interne pour des fissures égales coplanaires**

La figure 4\_64 compare les points de calcul et les lissages de charges de référence pour des fissures coplanaires égales de différentes formes en fonction de leur écartement relatif.

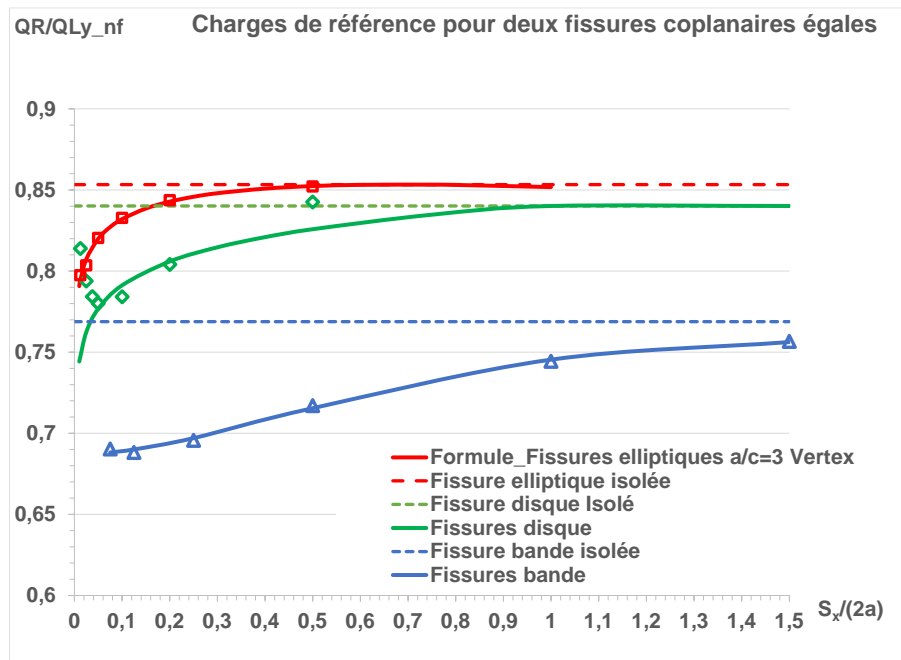


Figure 4\_64 : charges de référence pour deux fissures coplanaires

Nous ne disposons pas de calculs élastoplastiques pour des fissures interagissantes au co-vertex. Le courbe devrait se situer entre celle relative aux fissures disque et celle relative aux fissures bande.

#### 4.4.4 Charges de référence pour deux fissures elliptiques coplanaires inégales

##### Interaction au vertex

La figure 4.65 compare les évolutions de la charge de référence calculées pas à pas au vertex par ESI-France pour deux fissures elliptiques de rapport d'aspect  $a/c = 3$  et de taille en rapport 2.

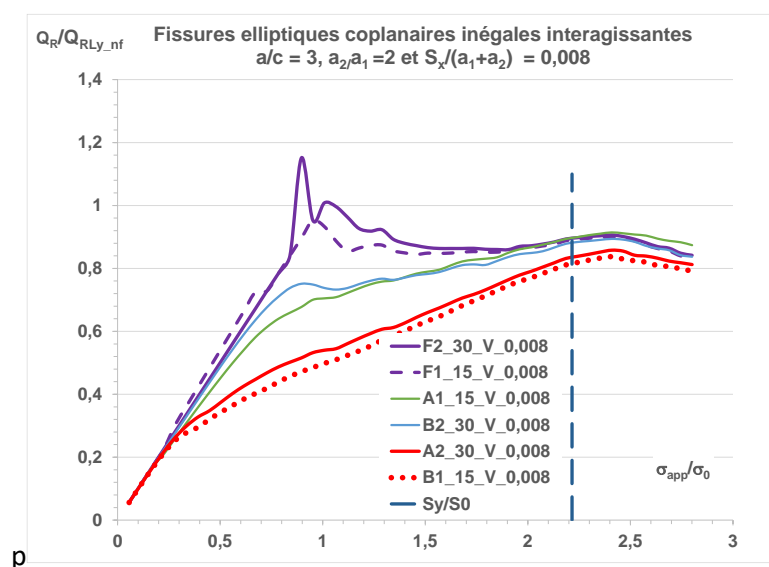


Figure 4\_65 : évolution des charges de référence pour deux fissures coplanaires inégales

Les charges de référence en fond de fissure et au vertex opposé à celui du ligament entre fissures (points A1 et B2) sont identiques et égales à celles de la fissure isolée. Aux points les plus proches les charges de référence sont voisines, celle de la petite fissure étant légèrement inférieure. Ceci signifie que l'amplification plastique est plus forte sur la petite fissure, néanmoins la force fissurante J est plus élevée pour la grande fissure (Figure 4\_66).

La figure 4\_67 présente les variations de charge de référence avec l'écartement relatif horizontal. Pour les points extrêmes A1 et B2 et les points du co-vertex (F1 et F2) les charges de référence sont constantes et voisines à l'exception du cas de la petite fissure associée au plus fort écartement. La charge de référence de la grande fissure et celle de la petite fissure ont des évolutions similaires. La charge de référence de la grande fissure est toujours supérieure à celle de la petite fissure. Ces résultats sont lissés par deux fonctions dont les variations sont présentées à la figure 4\_68.

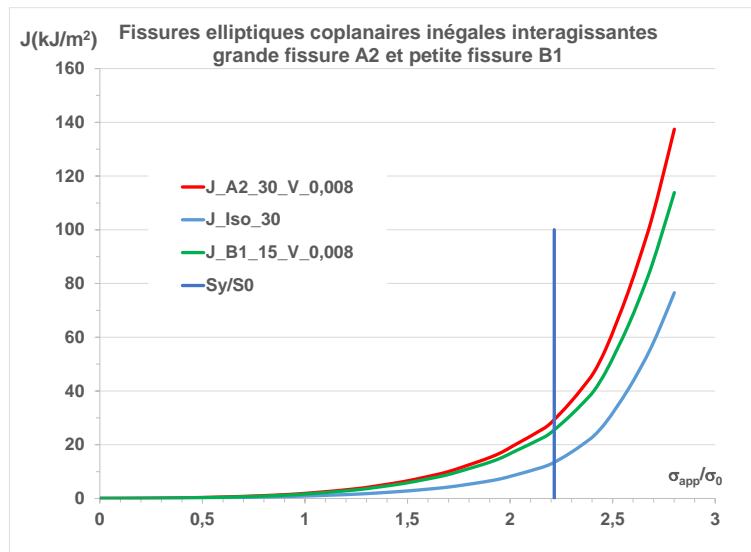


Figure 4\_66 : variations des force fissurantes pour la grande et la petite fissure ( $a_2/a_1=2$ )

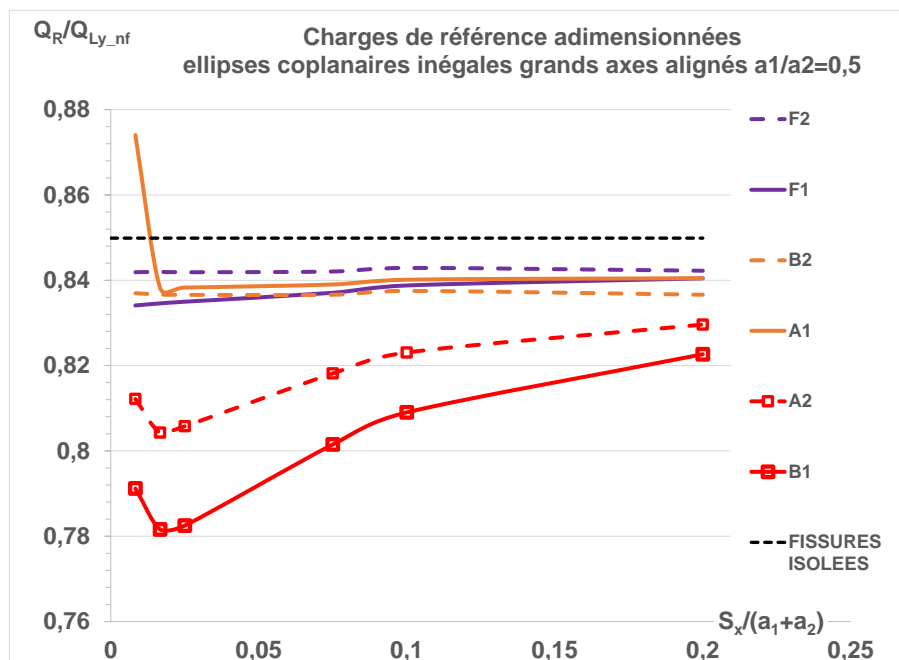


Figure 4\_67 : charges de référence pour la grande et la petite fissure ( $a_2/a_1=2$ )

Les équations des lissages sont les suivantes :

$$Q_{Ry} = p \cdot SR_x^q \cdot \exp(r \cdot SR_x) \quad (4.76)$$

Avec, pour la grande fissure  $p=0,848$ ,  $q=0,0117$ ,  $r=-0,00292$

Avec, pour la petite fissure  $p=0,8473$ ,  $q=0,0182$ ,  $r=-0,00479$

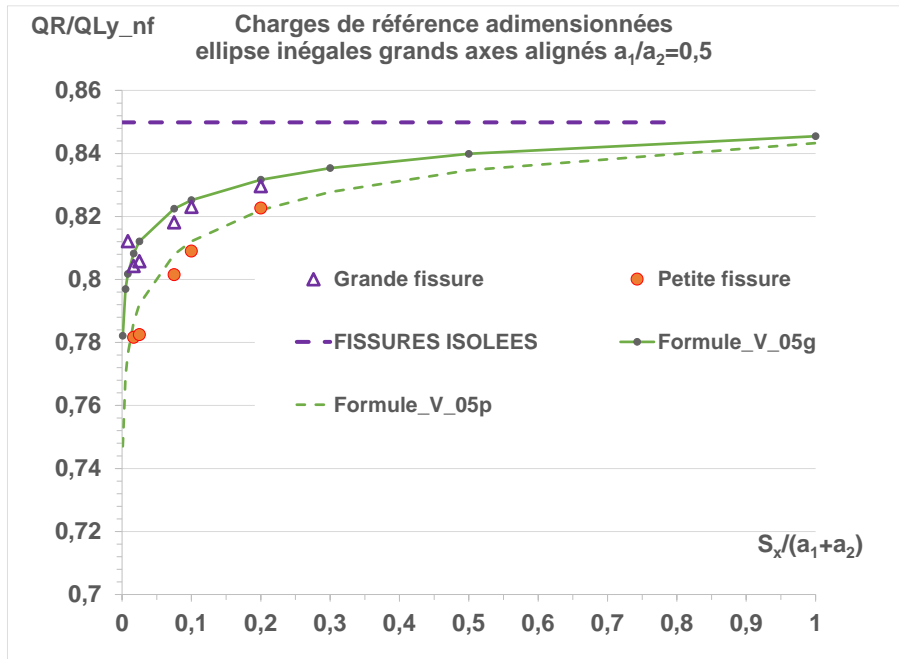


Figure 4\_68 : lissages des charges de référence pour la grande et la petite fissure ( $a_2/a_1=2$ )

#### Interaction au co-vertex

Les quelques résultats obtenus par ESI-France ne permettent pas de déterminer directement les charges de référence car les calculs n'ont pas été effectués pour des charges suffisamment élevées (Figure 4\_93).

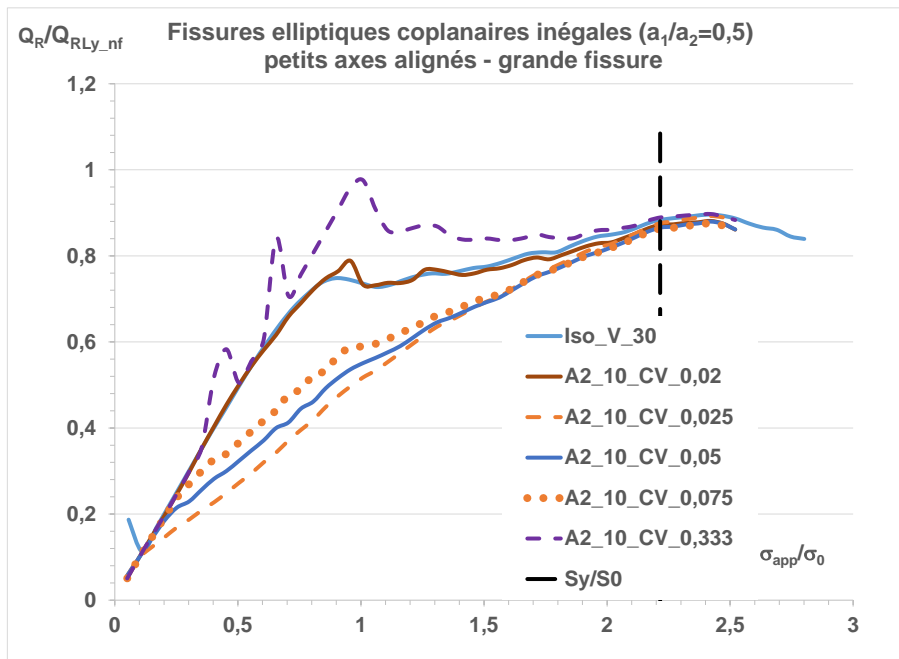


Figure 4\_69 : charges de référence au co-vertex pour la grande fissure ( $a_2/a_1=2$ )

Les évolutions des charges de référence pour des fissures interagissant au vertex et au co-vertex sont similaires (Figure 4\_69) et un facteur correctif pourrait être établi à partir des rapports des maxima si l'on disposait de plus de configurations comparables. Les calculs relatifs aux fissures inégales interagissant au co-vertex sont sujets à caution. La tendance observée sur la figure 4\_70 est que les charges de référence au co-vertex sont légèrement inférieures à celles relatives à une interaction au vertex. Il faudrait reprendre ces calculs pour confirmer ce point.

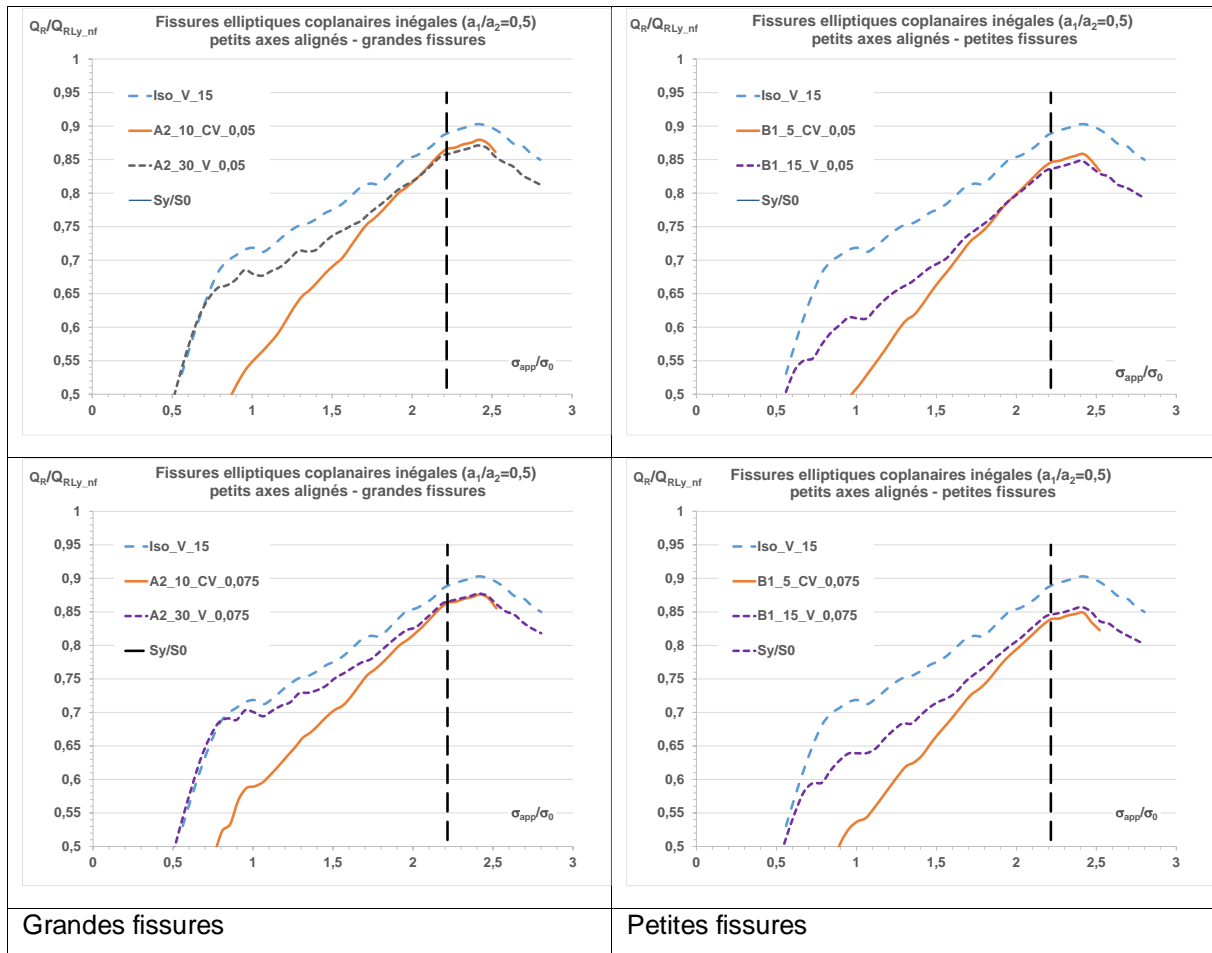


Figure 4\_70 : comparaison des évolutions des charges de référence au vertex et co-vertex et pour la grande et la petite fissure ( $a_2/a_1=2$ )

## 4.5 Principales formules de coefficient d'équivalence et de charges limites

### 4.5.1 Fissures bande

Le traitement des fissures coplanaires et parallèles est traité simultanément.

#### 4.5.1.1 Coefficient d'équivalence

Les variations du coefficient d'équivalence plastique  $\alpha_p$  sont décrites par des droites ou des courbes en  $S_x/(2a)$  paramétrées en  $S_z/(2a)$ . Les fissures sont égales, écrantées ou non.

$S_x/(2a)$ _Min	Domaine	Equations
-1	1 : écrantage entraînant un comportement élastique total	$\alpha_{p1} = \text{Max}\{\text{Min}[0.97 - 0.046 \cdot \hat{S}_z; 0.96]; 0.92\}$



Intersection avec T1	2 : écrantage entraînant un comportement élastique en pointe interne	$\alpha_{p_{T1}} = 1,2766 - 0,2094 \cdot \hat{S}_z + 0,322 \cdot \hat{S}_z^{-0,703} \cdot \hat{S}_x$
Intersection de T1 avec T2	3 : les fissures sont non écrantées, le comportement plastique domine en pointe interne	$\alpha_{p_{T2}} = 0,4743 + 0,6751 \cdot \hat{S}_z - 0,4371 \cdot \hat{S}_z^2 + 0,871 \cdot \hat{S}_z^{-1,389} \cdot \hat{S}_x$ Plafonnement à $\alpha_{p_{Max}}$
Intersection de $\alpha_{p_{Max}}$ avec l'exponentielle	4 : les fissures sont non écrantées, le comportement plastique devient similaire aux deux pointes	$0 \leq \hat{S}_z \leq 0,25 \quad \alpha_p = 1 + 1,0895 \cdot \exp(-2,0958)$ $\hat{S}_z > 0,25 \quad \alpha_p = 1 + a \cdot \exp(-b \cdot \hat{S}_x^c)$ $a = 0,0837 + 1,6692 \cdot \text{Exp}(-2,0845 \cdot \hat{S}_z)$ $b = 35,954 \cdot \hat{S}_z^{1,1954} \cdot \text{Exp}(-4,747 \cdot \hat{S}_z)$ $c = 0,2407 \cdot \hat{S}_z^2 + 1,7524 \cdot \hat{S}_z + 0,3454$
Alpha_e= 0,5*1,05	5 : interaction faible en élasticité	Mêmes équations que dans le domaine 4

Le maximum  $\alpha_{p_{Max}}$  est décrit par l'équation suivante :

$$\alpha_{p_{Max,0}} = \text{Max}(1,65 - 0,32 \cdot \hat{S}_z; 1,1)$$

$$\alpha_{p_{Max}} = \text{Max}(1 + 1,4517 \cdot \text{Exp}(-1,9635 \cdot \hat{S}_z), 5302); 1,1; \alpha_{p_{Max,0}}) \quad (4.29)$$

#### 4.5.1.2 Courbe d'écrantage

La courbe d'écrantage plastique peut être décrite de façon approchée par l'équation suivante :

$$\hat{S}_z = -0,0307 + 1,4544 \cdot (0,001 + \hat{S}_x)^{0,7236} \quad (4.6)$$

Avec  $\hat{S}_x = \frac{S_x}{a_1 + a_2}$  et  $\hat{S}_z = \frac{S_z}{a_1 + a_2}$

#### 4.5.1.3 Charges de référence pour les fissures non écrantées

$$\frac{Q_{R0\_Int}}{Q_{R0\_min}} = -6,183 + \frac{0,4703}{s - 0,0935} + \frac{7,7585}{s^{0,1231}} - \frac{1}{s^{0,5}} \quad (4.50)$$

Pour des valeurs très faibles de l'écartement  $S_x$  et en particulier pour  $S_x=0$ , la formule 4.50 ne s'applique plus. Les  $\frac{Q_{R0\_Int}}{Q_{R0\_min}}$  sont obtenus par interpolation linéaire entre la formule suivante 4.51 établie pour  $s=0$  et la formule 4.50 calculée pour  $s = 0,16$ .

$$\left. \frac{Q_{R0\_Int}}{Q_{R0\_min}} \right|_0 = \max \left( 1,8463 - \frac{0,004294}{\hat{S}_z - 0,2014} + \frac{0,000374}{\hat{S}_z^{4,1773}} - \frac{0,7464}{\hat{S}_z^{-0,00004}}; 1,05 \right) \quad (4.51)$$

La valeur minimale de  $Q_R$  est donnée par les deux équations avec  $\hat{S}_z = S_z/(2a)$  :

$$\begin{cases} \hat{S}_z \leq 0,2 & \frac{Q_{R0\_min}}{Q_{R0\_4a}} = 0,903 \\ \hat{S}_z > 0,2 & \frac{Q_{R0\_min}}{Q_{R0\_4a}} = 1 - 0,1211 \cdot \exp(-1,1822 \cdot \hat{S}_z) \end{cases} \quad (4.49)$$

La valeur retenue pour la fissure 4a est :

$$\frac{Q_{R0\_4a}(ESI, n = 6)}{Q_{R0\_nf}} = 0,7623 \quad (4.53)$$

## 4.5.2 Fissures elliptiques coplanaires

### 4.5.2.1 Charge de référence de fissures égales

Lissages de la partie croissante des courbes des charges de référence en pointe interne de fissures égales.

Fissure	Point bas	Formule
Bande	$S_x/(2a) > 0,1$	$0,7586 - 0,0718 \cdot \exp(-1,6936 \cdot \hat{S}_x^{1,733})$
Disque	$S_x/(2a) > 0,05$	$0,8412 \cdot \hat{S}_x^{0,0266}$
Ellipses V	$S_x/(2a) > 0,025$	$0,881 \cdot \hat{S}_x^{0,0234} \cdot \exp(r \cdot \hat{S}_x^{-0,034})$

### 4.5.2.2 Charge de référence de fissures inégales

$$Q_{Ry} = p \cdot SR_x^q \cdot \exp(r \cdot SR_x) \quad (4.76)$$

Avec, pour la grande fissure  $p=0,848$ ,  $q=0,0117$ ,  $r=-0,00292$

Avec, pour la petite fissure  $p=0,8473$ ,  $q=0,0182$ ,  $r=-0,00479$

## 4.5.3 Equivalence entre les approches

Pour un comportement en loi puissance :

$$\alpha_{ep} \cong \frac{J_{eInt}}{J_{eHi}} \cdot \left( \frac{Q_{R0\_4a}}{Q_{R0\_Int}} \right)^{n-1} \quad et \quad \alpha_{ep} \cong \alpha_e \cdot \left( \frac{Q_{R0\_4ai}}{Q_{R0\_Int}} \right)^{n-1} \quad (4.40)$$

$$\alpha_p \cong \left( \frac{Q_{R0\_4ai}}{Q_{R0\_Int}} \right)^{n-1} \quad (4.41)$$

Dans le cas des fissures bande égaux :  $\alpha_e = \frac{\gamma^2}{2}$

Le facteur d'interaction en élastoplasticité est défini par :  $\iota = \sqrt{\frac{J}{J_{isol}}}$

$$\iota^2 = \frac{J}{J_{isol}} \cong \frac{J_e}{J_{e\_isol}} \cdot \left( \frac{Q_{R0\_Iso}}{Q_{R0\_Int}} \right)^{n-1} \quad (4.42)$$



## 5 VALIDATION DU MODELE DE SUBSTITUTION

### 5.1 Introduction

Les modèles de substitution consistent à approcher une fonction continue à partir d'un échantillon discret de points d'évaluation. Pour l'interaction de fissures les échantillons sont des résultats de calculs ou de mesure de facteurs d'interaction dont l'obtention pour des fissures elliptiques est couteuse. Le modèle est fondé sur des calculs aux éléments finis et les rares mesures servent à la validation du modèle.

L'interpolation polynomiale ne convient pas pour des fonctions complexes telles que celles induites par les singularités des contraintes dans les milieux fissurés. Par ailleurs la méthode des réseaux de neurones nécessite de disposer d'un très grand nombre d'échantillons, ce qui n'est pas envisageable pour le problème considéré. Afin de garantir une précision suffisante, le modèle développé est un modèle de substitution hybride rassemblant plusieurs formules de forme fermée et fondé sur :

- Des calculs aux éléments finis d'interaction de deux fissures dont la qualité a été vérifiée par comparaison à des études réalisées de façon indépendante.
- Des résultats analytiques exacts.
- La cohérence des formulations.

Le cas des fissures multiples est traité de la façon suivante :

1. Sélection du couple de défaut présentant le facteur d'interaction le plus grand est retenu.
2. Le défaut équivalent sélectionné est positionné de manière pénalisante par rapport à la seconde interaction à traiter.
3. Et ainsi de suite, par itérations successives.

Ce traitement est, par construction, pénalisant pour la plupart des configurations.

La question de la précision de l'approche est traitée en Annexe A3.

### 5.2 Validation par comparaison aux résultats numériques

Le modèle de substitution hybride est développé de façon différente en élasticité linéaire et en élasto-plasticité.

#### 5.2.1 Précision du modèle en élasticité linéaire

Les formules du modèle sont présentées au chapitre 3.

##### 5.2.1.1 Fissures coplanaires

Le facteur d'interaction apparaît donc comme une fonction affine de la fonction de Westergaard :

$$\gamma_{12}(P) = 1 + A \cdot [F_W(a/c, Q) - 1] \quad (5.1)$$

Le point Q est défini par les paramètres d'écartements relatifs  $Q = \left( \frac{1}{\lambda_x}, \frac{1}{\lambda_y}, 0 \right)$  avec

$$\lambda_x = \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 + S_x} \quad \text{et} \quad \lambda_y = \frac{c_1 + c_2}{c_1 + c_2 + S_y} \quad (5.2)$$

##### 5.2.1.1.1 Fissures bande inégales

La fonction A calibrée pour des fissures inégales a pour expression :

pour  $\zeta = \frac{a_1}{a_2} \geq 1$  :

$$A(G; \zeta) = A_G(\zeta) = \exp(-\zeta^{0.49}) \quad (5.3a)$$

$$A(P; \zeta) = A_P(\zeta) = \zeta \cdot A_G(\zeta) \quad (5.3b)$$

Où G désigne la grande fissure et P la petite. La valeur de l'exposant est de 0,49 pour  $\zeta \leq 2.5$ . Pour des valeurs supérieures il faudrait baisser légèrement cet exposant pour atteindre 0,43 si  $\zeta = 8$ .

En utilisant cette formule, l'écart pour des fissures égales avec la formule exacte (GOM, 2009) pour la grande fissure est de 2,4 % (Figure 5\_1).

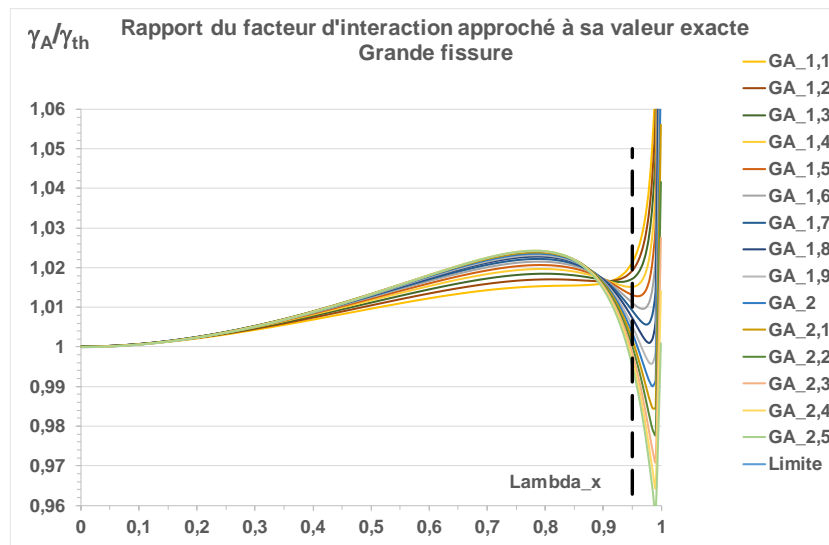


Figure 5\_1 : comparaison des variations du facteur d'interaction de fissures bande inégales

### 5.2.1.1.2 Fissures elliptiques

La formule du facteur d'interaction en élasticité donne des prédictions qui s'écartent de moins de 1% des valeurs calculées numériquement. Ceci est en accord avec le constat de V. Rangasamy et al. (RAN, 2002) : la sous-estimation du facteur d'interaction par un calcul du FIC au premier ordre est moindre pour des fissures semi-circulaires que pour des fissures bande.

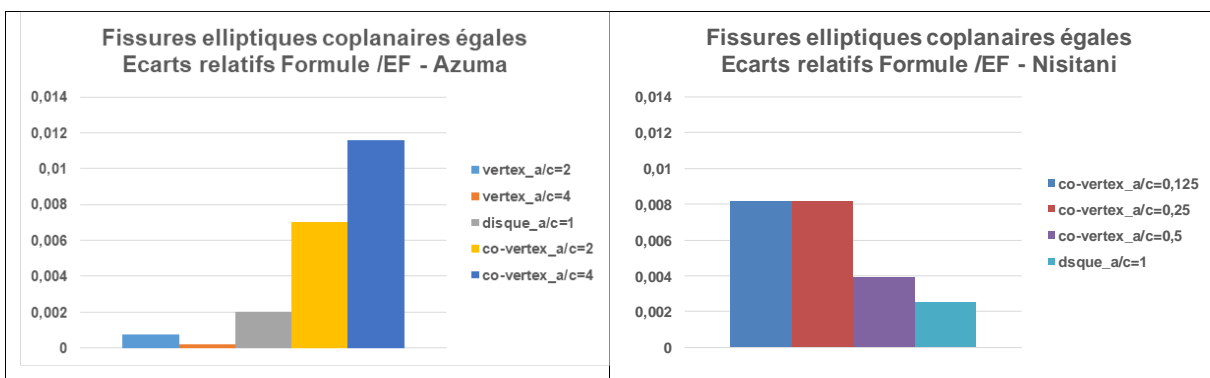


Figure 5\_2 : comparaison des variations du facteur d'interaction de fissures bande inégales

Les comparaisons avec les facteurs d'interaction calculés pour des fissures elliptiques coplanaires par Azuma et al. (AZU, 2017) et Nisitani (NIS, 1974) illustrées à la figure 5\_2 montre que la formule du facteur d'interaction en élasticité donne des prédictions qui s'écartent de l'ordre de 1% des valeurs calculées numériquement.

Les comparaisons avec les facteurs d'interaction calculés pour des fissures elliptiques coplanaires par Isida et al. (ISI, 1985) sont illustrées à la figure 5\_3. Elles montrent que la formule du facteur d'interaction en élasticité donne des prédictions qui s'écartent de l'ordre de 1% à 1,5% des valeurs calculées numériquement.

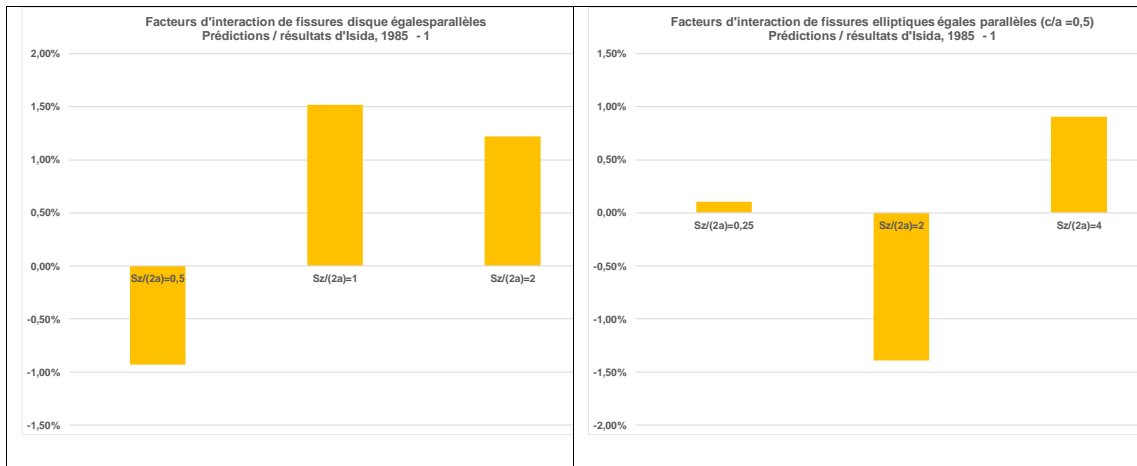


Figure 5\_3 : Comparaison des facteurs d'interaction prédits et calculés pour des fissures égales elliptiques coplanaires

### 5.2.1.2 Fissures parallèles

#### 5.2.1.2.1 Fissures bande

S. Chapuliot et A. Blouin (CHB, 2018, CHA, 2020) ont calculé un nombre très important de cas de fissures bande égales ou inégales. Les résultats des comparaisons avec les formules simplifiées sont présentés aux figures 5\_4 et 5 pour un nombre limité de cas et dans le tableau 5\_1 pour les quelques 800 calculs de fissures non écartées. Pour les fissures écartées les lissages sont pénalisants. Une comparaison graphique plus complète est fournie au chapitre 3.1.2.4.

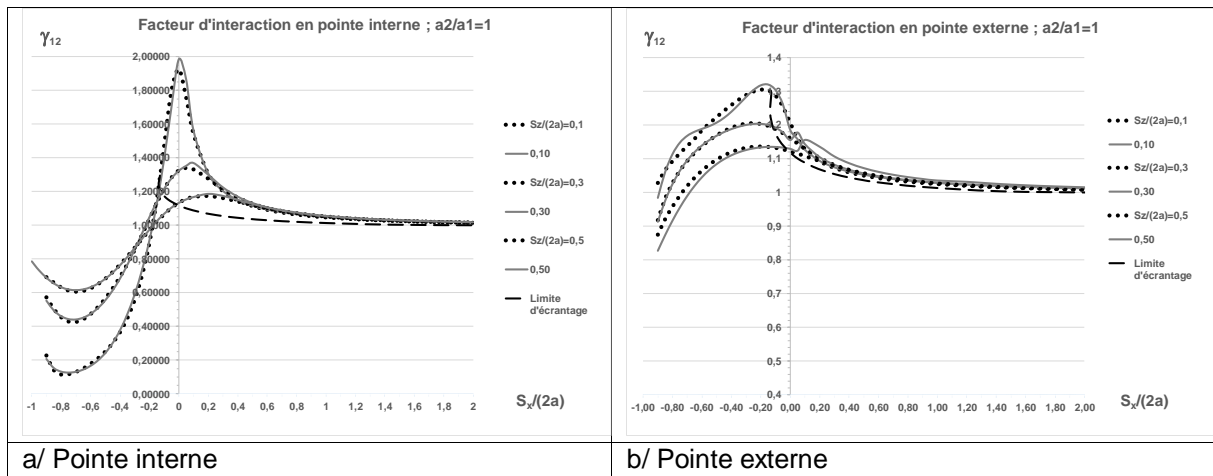
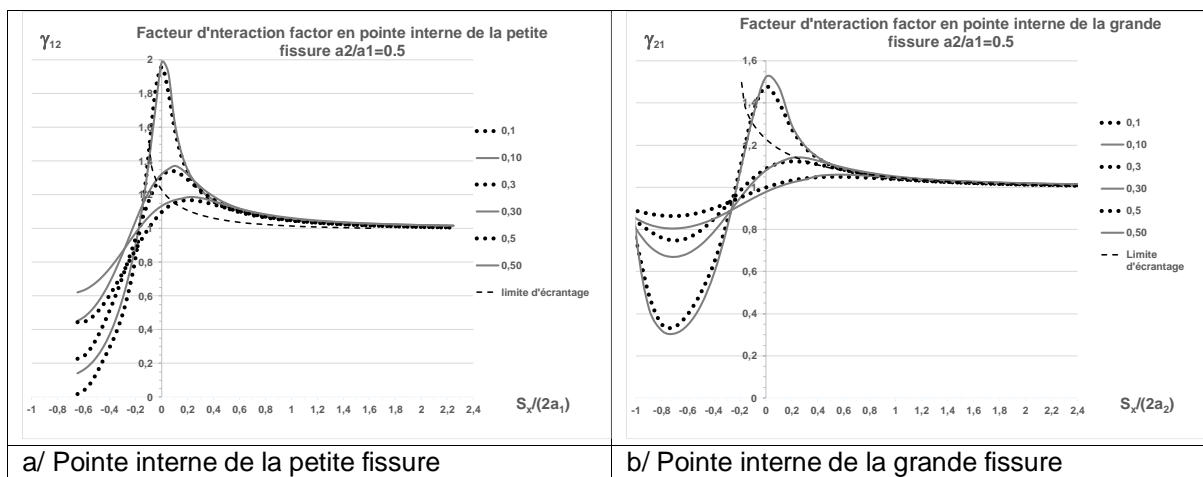


Figure 5\_4 : comparaison des facteurs d'interaction de fissures bande parallèles égales calculés par éléments finis et ceux estimés par les formules (CHA, 2020)



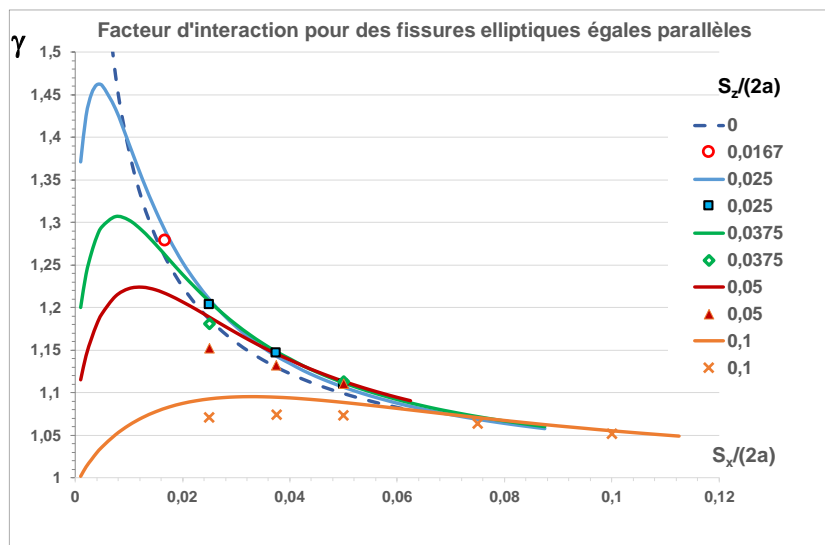
**Figure 5\_5 : comparaison des facteurs d'interaction de fissures bande parallèles inégales calculés par éléments finis et ceux estimés par les formules**

	$a_2/a_1=1$	$a_2/a_1=0,7$	$a_2/a_1=0,5$
Pointe interne grande fissure	0,02	0,02	0,02
Pointe interne petite fissure	NA	0,025	0,025
Pointe externe grande fissure	0,015	0,02	0,02
Pointe externe petite fissure	NA	0,02	0,02

**Tableau 5\_1 : écarts relatifs maximaux entre facteurs d'interaction de fissures bande estimés et calculés (CHA, 2020)**

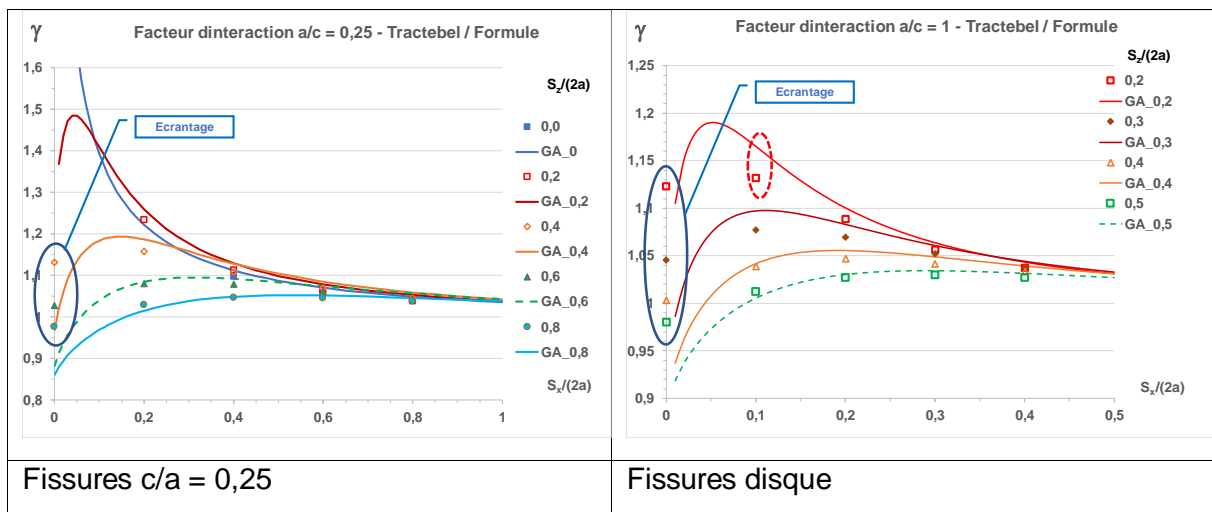
### 5.2.1.2 Fissures elliptiques

ESI-France (SYSTUS, 2020) a réalisé 18 calculs de fissures elliptiques égales parallèles de rapport d'aspect  $a/c = 3$ . Le graphe de la figure 5\_6 (qui a été présentée au chapitre 3) compare les facteurs d'interaction calculés au vertex aux prédictions par la méthode simplifiée. Les variations sont bien reproduites : l'écart maximal est de 2,2% sauf pour la configuration  $S_x = 0,025$  ;  $S_z = 0,05$  pour laquelle la prédiction dépasse le calcul de 3,2%.



**Figure 5\_6 : facteurs d'interaction de fissures elliptiques égales parallèles calculés (marques) et estimés (lignes continues)**

V. Lacroix et al. (LAC, 2018) ont calculé les facteurs d'interaction de fissures elliptiques égales de petit axes situés dans un même plan par la méthode X-FEM pour plusieurs rapports d'aspect. Les graphes de la figure 5\_7 comparent les facteurs d'interaction calculés au vertex aux prédictions par la méthode simplifiée.



**Figure 5\_7 : comparaison des facteurs d'interaction de fissures elliptiques parallèles égales calculés par éléments finis (LAC, 2018) et ceux estimés par les formules**

Les écarts relatifs plafonnent à 2%, excepté pour les points écrantés et pour 1 point par cas de rapport d'aspect pour lesquels la formule surestime de 3% environ. Ces points sont proches de la limite d'écrantage.

## 5.2.2 Précision du modèle en élasto-plasticité

Comme en élasticité linéaire, les solutions diffèrent suivant la position des plans de fissure.

### 5.2.2.1 Fissures bande

La Figure 5\_8 montre que les résultats de calcul aux éléments finis du coefficient  $\alpha_p$  sont très bien reproduits par la formulation.

L'écart entre les résultats obtenus en appliquant les formules et ceux des calculs est positif pour la plupart des cas : c.à.d. la méthode est pénalisante. Pour les fissures non écrantées, l'écart maximal est de 2,5%. Pour les fissures écrantées, l'écart est compris entre -6% et +6%. Ceci s'explique par le fait que moins de résultats de calcul de fissures écrantées sont disponibles pour établir les formules.



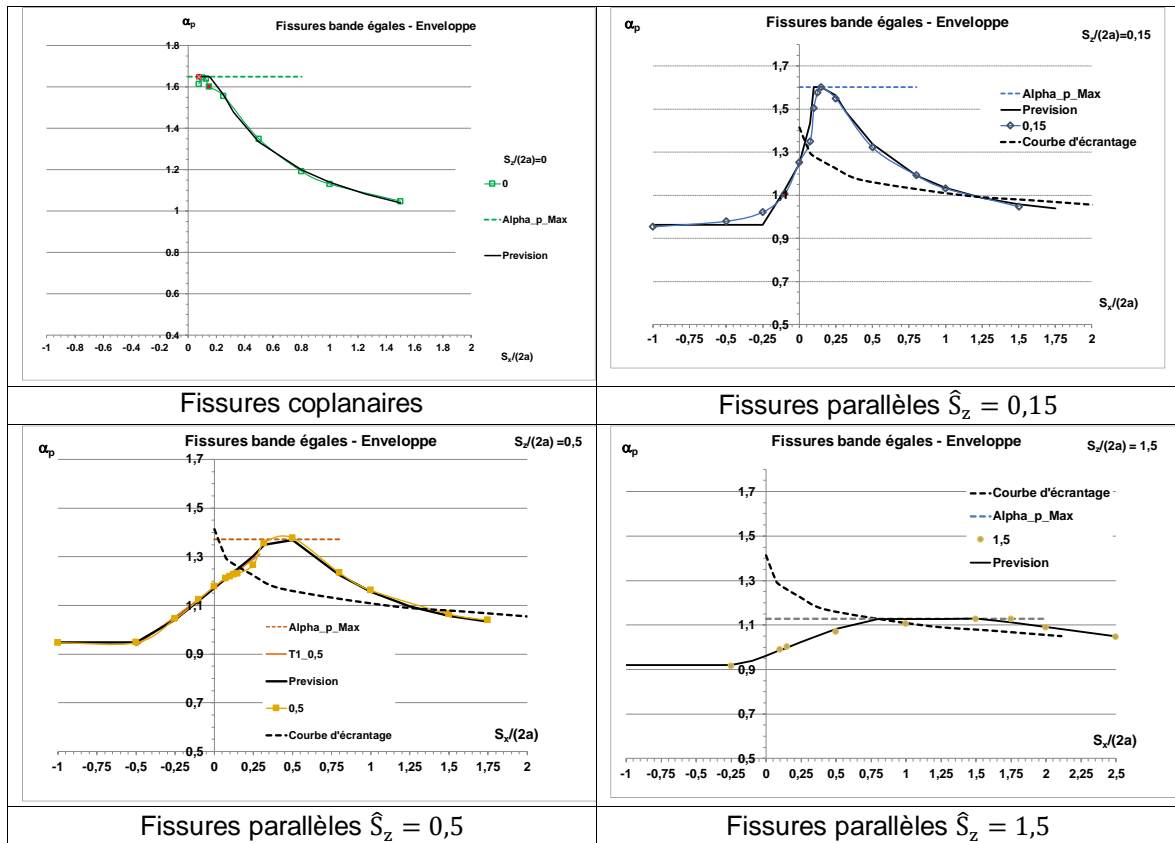


Figure 5\_8 : Comparaison des prédictions par la formule et les résultats de calcul

### 5.2.2.2 Fissures elliptiques

Les études d'interaction de fissures elliptiques enfouies en élastoplasticité portent pratiquement toutes sur l'interaction entre une fissure elliptique et une fissure de surface coplanaires (e.g. ZAX, 2014 ; ZFX, 2016, SEQ, 2018).

Les deux premiers articles quantifient l'interaction de la fissure de surface avec la fissure enfouie à partir du CTOD. La seule comparaison possible est qualitative : comme pour le cas de deux fissures enfouies de grands axes alignés, l'interaction est d'autant plus forte que le rapport d'aspect (grand axe sur petit axe) est élevé. Le troisième article étudie l'effet de triaxialité des contraintes dans le ligament.

L'étude de Coules et Bezensek (COB, 2019) porte sur l'interaction de fissures de surfaces égales et du problème de la recharacterisation d'un défaut enfoui proche de la surface libre. Les résultats confirment ceux obtenus en élasticité.

Seah et Qian proposent une approche fondée sur une contrainte moyennée sur une zone plastique (SEQ, 2018). Une de leurs conclusions est que l'interaction eu co-vertex entre deux fissures elliptiques enfouies est plus forte qu'entre deux fissures de surface de même rapport d'aspect et de même petit axe.

La précision ne peut être quantifiée.

A notre connaissance, il n'existe pas dans la littérature d'études portant sur l'interaction de fissures elliptiques parallèles en plasticité.

### 5.3 Validation expérimentale

Les seules expériences de coalescence de fissures enfouies parallèles portent sur des fissures bande.

#### 5.3.1 Fissures bande en plasticité confinée

##### 5.3.1.1 Fissures bande égales

K. Hasegawa et al. (HAS, 2009) ont réalisé des essais de rupture fragile sur des plaques comportant des fissures traversantes égales parallèles. Les essais ont été menés sur des plaques en acier au carbone JIS SM 400A à -196°C. A cette température la mesure de ténacité a donné 28,2 MPa√m. Les plaques ont une largeur de 160 mm et une épaisseur de 5,7 mm et la longueur de fissure « 2a » est de 20mm.

La matrice des essais est reproduite au tableau 5\_2. Les éprouvettes rompent par clivage.

No.	Length (mm)	S (mm)	H (mm)	$P_B$ (kN)	$\sigma_B$ (MPa)	Fracture path coalescence
BW-05		30	30	101.6	111	No
BW-01	$2a_1=20$	20	20	130.9	144	No
BW-02	$2a_2=20$	15	15	112.5	123	Yes
BW-03		10	10	109.4	120	Yes
BD-05		20	20	106.9	117	No
BD-04	$2a_1=20$	15	15	153.0	168	No
BD-01	$2a_2=10$	10	10	152.7	167	Yes
BD-02		7.5	7.5	139.6	153	Yes
BDS-03		15	15	166.9	183	No
BDS-01	$2a_1=20$	10	10	201.0	220	No
BDS-02	$2a_2=5$	5	5	116.3	128	Yes

**Tableau 5\_2: matrice décrivant les essais sur plaques à fissures traversantes parallèles (HAS, 2009)**

Le tableau suivant présente l'analyse des résultats.

N°	$S_x/(2a)$	$S_z/(2a)$	Sapp (MPa)	G_Int	HAS, 2009	Coal.	K_Int	K/K <sub>Ic</sub>
BW-05	1,5	1,5	111	1,0257	<< 1,06	Non	28,54	1,012
BW-01	1	1	144	1,0496	=<1,06	Non	37,89	1,343
<b>BW-02</b>	<b>0,75</b>	<b>0,75</b>	123	1,0756	<b>&gt;1,06</b>	<b>Oui</b>	33,16	1,176
<b>BW03I</b>	<b>0,5</b>	<b>0,5</b>	120	1,1278	<b>&gt;1,06</b>	<b>Oui</b>	33,92	1,203

**Tableau 5\_3 : analyse des essais sur plaques à fissures traversantes parallèles égales**

##### 5.3.1.2 Fissures bande inégales

Deux séries de calculs (HAS, 2009) sont analysées aux tableaux 5\_4 et 5\_5. Il faut considérer la grande fissure, celle dont le FIC est toujours supérieur à celui de la petite. Dans le domaine d'interaction établi pour des fissures égales, il faut reporter les coordonnées  $S_x/(2*$ petite fissure) et  $S_z/(2*$ petite fissure). Ceci est une approximation (voir § 3.1.1, Figure 3.1\_5) qui est ici étendue à l'élasto-plasticité.

Fissures inégales 2a1=20, 2a2=10

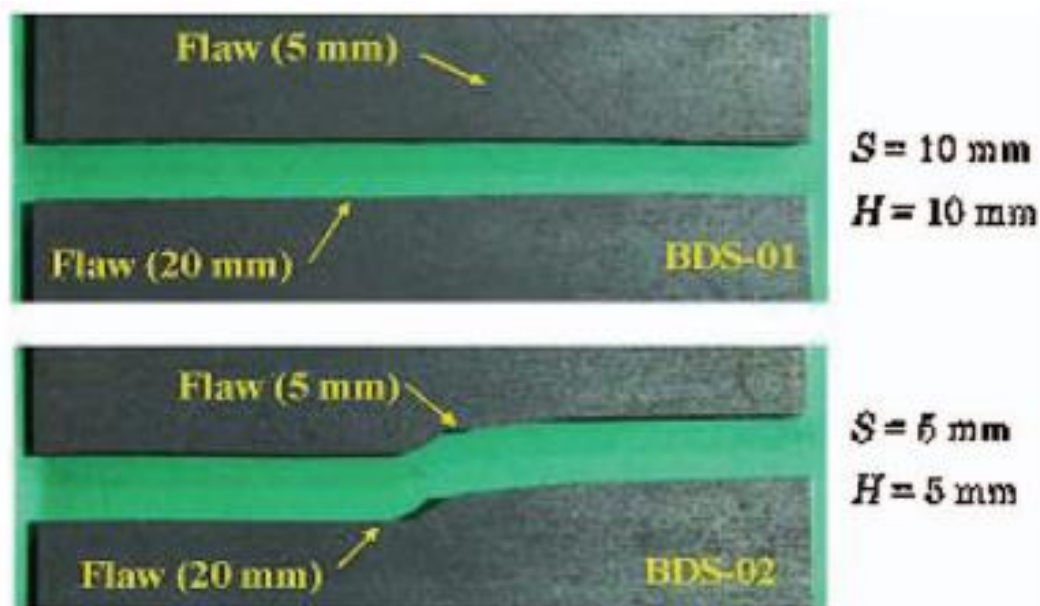
N°	S <sub>x</sub> / (a1+a2)	λ <sub>x</sub>	S <sub>z</sub> / (a1+a2)	S <sub>app</sub> (MPa)	G_Int_P	G_Int_G	HAS, 2009	Coal.	K_Int	K/K <sub>Ic</sub>
BD-05	1,333	0,428	1,333	106,9	1,052	1,015	<< 1,06	Non	28,47	1,01
BD-04	1	0,5	1	153	1,081	1,024	<1,06	Non	41,81	1,48
<b>BD-01</b>	0,667	0,6	0,667	152,7	1,139	1,046	=< 1,06	Oui	43,81	1,55
<b>BD-02</b>	0,5	0,667	0,5	153	1,196	1,07	>> 1,06	Oui	45,86	1,63

**Tableau 5\_4 : analyse des essais sur plaques à fissures traversantes parallèles inégales**

Les prédictions sont en bon accord avec celles des auteurs, avec des valeurs des facteurs d'interaction peut-être un peu plus faibles.

Fissures inégales 2a1=20, 2a2=5

La photographie de la figure 5\_9 illustre la différence de comportement pour les deux cas d'écartement.

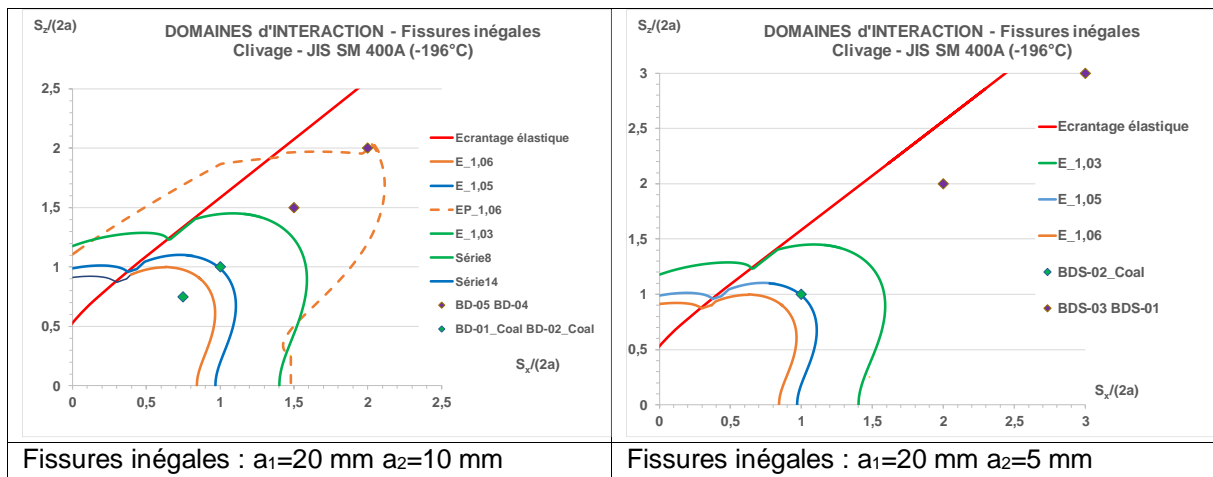


**Figure 5\_9 : comparaison des comportements de fissures parallèles inégales (HAS, 2009)**

N°	S <sub>x</sub> / (a1+a2)	λ <sub>x</sub>	S <sub>z</sub> / (a1+a2)	S <sub>app</sub> (MPa)	G_Int_P	G_Int_G	HAS, 2009	Coal.	K_Int	K/K <sub>Ic</sub>
BDS-03	1,2	0,4545	1,2	166,9	1,084	1,007	<< 1,06	Non	45,35	1,61
BDS-01	0,8	0,75	0,8	220	1,147	1,014	<< 1,06	Non	76,26	2,7
<b>BDS-02</b>	0,4	0,8571	0,4	128	1,322	1,043	<1,06	Oui	53,88	1,91

**Tableau 5\_5 : analyse des essais sur plaques à fissures traversantes parallèles inégales**

Pour le cas de la plaque BDS02 le facteur d'interaction est inférieur à 1,06, mais proche de cette valeur. Dans ce cas le FIC de mode II est négatif ce qui peut favoriser la coalescence. Les marques vertes de la figure 5\_10 correspondent aux cas de coalescence.



**Figure 5\_10 : Comparaison des comportements de fissures parallèles inégales en clivage**

La figure 5\_10 montre que la condition de coalescence devrait plutôt être fixée à 0,5%.

### 5.3.2 Fissures bande en élasto-plasticité

Des essais sur plaques contenant deux fissures ont été réalisés sur des matériaux tenaces mais de types différents.

#### 5.3.2.1 Essais sur un matériau ferritique à proximité de la transition

S. Weihe et al. (WEI, 2022) ont effectué des essais de déchirure sur des barreaux comportant des fissures traversantes égales inclinées parallèles. Le matériau est un acier ferritique 22NiMoCr3-7 dont le plateau ductile commence à une température d'environ  $-80^{\circ}\text{C}$  pour des fissures sollicitées essentiellement en mode I. Les deux essais A et B sont effectués à des température respectives de  $-100^{\circ}\text{C}$  et  $-60^{\circ}\text{C}$ . La rupture est ductile, mais l'essai A est peut-être dans la transition fragile-ductile. Sur la figure 5\_11, l'axe de traction est vertical et l'inclinaison est de 20 degrés. Les fissures sont égales et les positions relatives des fissures projetées sont données par le tableau 5\_6. Sur la figure, l'écartement horizontal est désigné par H ( $S_x$  avec nos notations) et l'écartement vertical est nommé désigné par  $S_t$  ( $S_z$  avec nos notations). Les quatre fissures ont une longueur égale à 3,75 mm et pour notre analyse, les fissures sont projetées sur l'axe horizontal avec conservation des écartements  $S_x$ .

	A	B
$S_x$ (mm)	4,5	3,75
$S_x/(2a_{Proj})$	1,7543	1,4619
$S_z$ (mm)	4,5	0
$S_z/(2a_{Proj})$	1,7543	0

**Tableau 5\_6 : écartement des fissures des essais de Weihe et al. (WEI, 2022)**

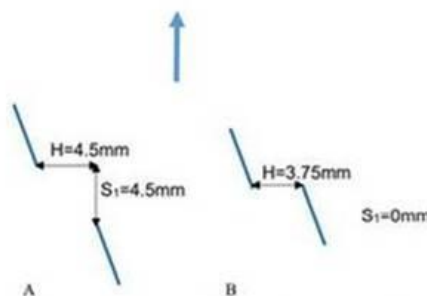
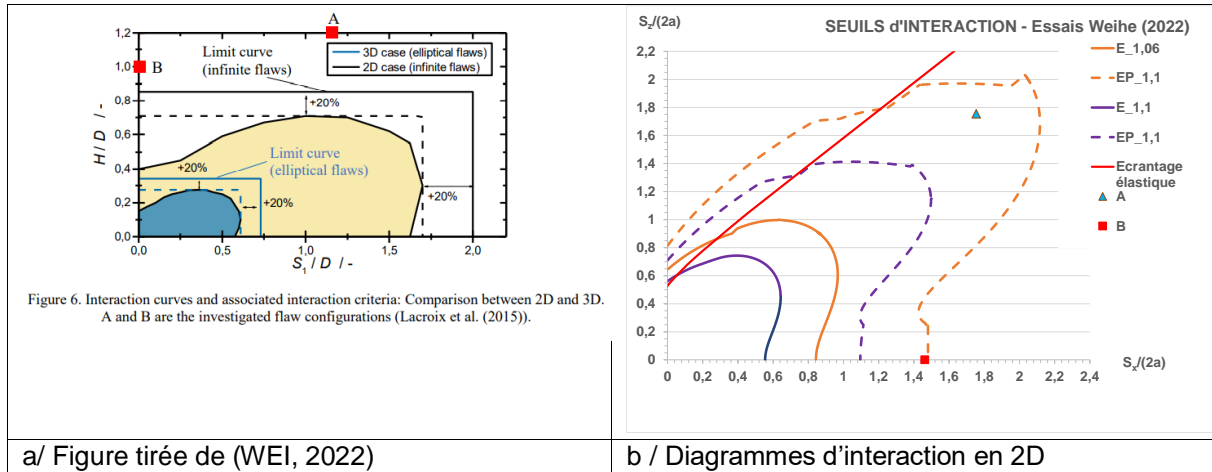


Figure 7. Flaw configuration A with  $H/D = S_t/D = 1.2$  and flaw configuration B with  $H/D = 1$  and  $S_t/D = 0$ . Half flaw size and flaw angle are  $D = 3.75\text{mm}$  and  $\alpha = 20^{\circ}$ , respectively.

**Figure 5\_11 : configurations des essais (WEI, 2022)**

La figure 5\_11 précise la direction de sollicitation et illustre la position des fissures, position similaire à celle des défauts de Doel 3 (voir LAC, 2019 cité en conclusion).

Les auteurs utilisent les domaines d'interaction établis par Lacroix et al. (LAC, 2015) pour estimer le risque d'interaction des fissures. D est la demi-diagonale de la boîte 3D entourant le défaut quasi-laminaire, orienté à 20 degrés par rapport à la direction de traction. Ils en concluent à la non applicabilité du critère de Lacroix et al. (LAC, 2015) établi en élasticité linéaire (Figure 5\_12a). Les résultats d'essai (Figure 5\_12) montrent qu'il y a interaction pour la configuration B aux deux températures. Ce constat est vérifié par l'application de notre méthode (Figure 5\_12b).



**Figure 5\_12 : estimations de l'interaction des fissures des essais A et B.**

Pour la configuration A il y a rupture de l'éprouvette par déchirure à partir de la pointe externe des fissures (Figure 5\_13). Toutefois, le diagramme de la figure 5\_12b montre qu'il y a interaction. Ce diagramme ne tient pas compte de la proximité de la pointe externe de la surface libre. Le ligament entre la pointe externe et le bord libre est de 3,18 mm. En élasticité le facteur d'interaction avec le bord est légèrement supérieur aux facteurs interne et externe dans la configuration A ce qui suggère que l'interaction plastique est plus forte avec le bord qu'avec l'autre fissure.

Pour la configuration B, le ligament entre les fissures est déchiré (Figure 5\_13), ce qui prouve qu'il y a interaction comme le prédit notre méthode. Ce ligament a une taille légèrement supérieure (3,56 mm) à l'autre ligament et en élasticité le facteur d'interaction avec le bord est légèrement inférieur aux facteurs interne et externe dans la configuration

Les facteurs d'interaction sont déduits de rapports de forces fissurantes calculées pour un même matériau, l'interaction ne dépend donc pas de la température.

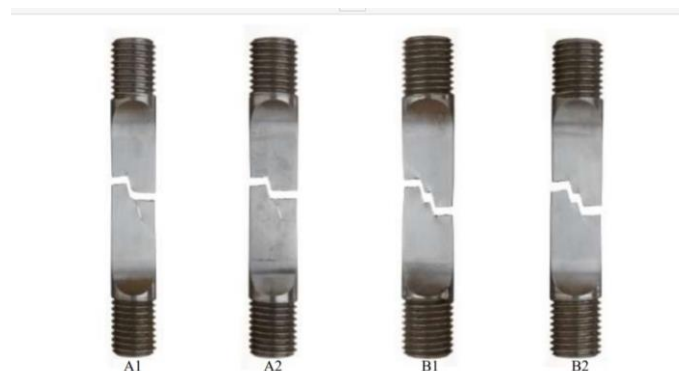


Figure 8. Fractured flaw field specimen; A1: Flaw configuration A at T = -60°C ; A2: Flaw configuration A at T = -100°C ; B1: Flaw configuration B at T = -60°C ; B2: Flaw configuration B at T = -100°C.

**Figure 5\_13 : rupture des éprouvettes A et B aux deux températures (WEI, 2022)**

Ces essais montrent qu'il est ici nécessaire d'évaluer les interactions de fissure en élasto-plasticité. La largeur trop faible de l'éprouvette complique l'analyse en raison de la compétition entre interaction entre la deux fissures et interaction avec le bord libre.

### 5.3.2.2 Essais sur acier doux au carbone

Une série d'essais à l'ambiante sur des plaques en acier doux au carbone JIS-SM-400A a servi de base à l'étude de fissures traversantes parallèles égales afin d'examiner la validité des règles d'interaction de fissures. Ces essais (MIA, 2009) ont été analysés par B. Besensek (BEZ, 2007) en utilisant l'analyse limite. Les dimensions et les résultats d'essais sont présentés au tableau 5\_7.

Les résultats sont placés dans le diagramme d'interaction de la figure 5\_14. Les marques bleues correspondent aux cas de non-coalescence.

Essai	2w	L=2a	S <sub>x</sub>	S <sub>z</sub>	S <sub>x</sub> /(2a)	S <sub>z</sub> /(2a)	P <sub>max</sub>	Coal
	mm	mm	mm	mm			kN	
DN-02	108	10	10	12,4	1	1,24	221	Oui
DN-06	108	10	10	17	1	1,7	227	Oui
DN-07	108	10	10	22	1	2,2	232	Non
DN-09	108	10	17	17	1,7	1,7	226	Oui
DN-10	108	10	22	22	2,2	2,2	227	Oui
DNW-02	180	30	0	10	0	0,3333	298	Oui
DNW-03	180	30	0	20	0	0,6667	307	Non
DNW-04	180	30	5	20	0,1667	0,6667	303	Oui

Tableau 5\_7 : essais sur plaques à fissures traversantes parallèles égales (MIA, 2009)

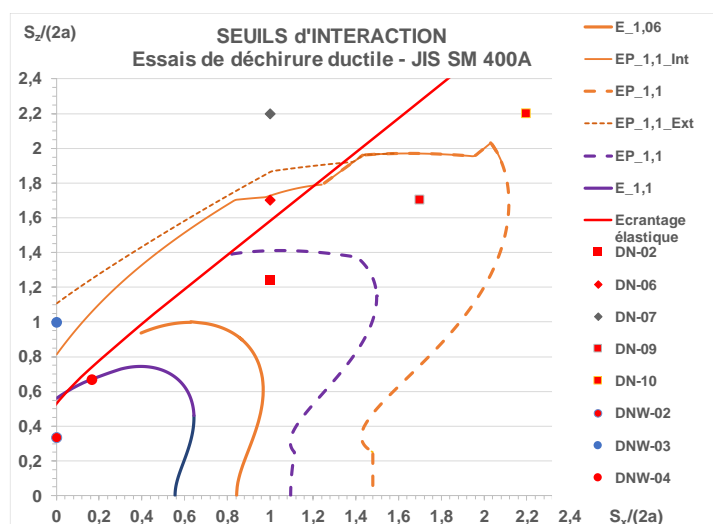


Figure 5\_14 : estimations de l'interaction des fissures des essais en rupture ductile

### 5.3.2.3 Essais sur acier austénitique

Le JNES (HAS, 2011) a fait réaliser des essais sur des plaques en acier 304L à l'ambiante comportant deux fissures traversantes parallèles. La fissure 2 est la petite fissure, utilisée comme référence dans le diagramme d'interaction de la figure 5\_15b. Les tableaux 5\_8 et 5\_9 donnent les caractéristiques des essais et le tableau 5\_10 analyse les essais. Les longueurs de fissure sont notées  $l_1 = 2a_1$  et  $l_2 = 2a_2$ .

	<table border="1"> <thead> <tr> <th rowspan="2">No.</th> <th colspan="2">Specimen, mm</th> <th colspan="2">Flaw length, mm</th> <th colspan="2">Distance, mm</th> </tr> <tr> <th><math>W</math></th> <th><math>t</math></th> <th><math>\ell_1</math></th> <th><math>\ell_2</math></th> <th><math>S</math></th> <th><math>H</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>DD-13</td> <td>120.1</td> <td>9.63</td> <td>20.0</td> <td>5.0</td> <td>10.0</td> <td>0.0</td> </tr> <tr> <td>DD-13R</td> <td>120.0</td> <td>9.61</td> <td>20.0</td> <td>5.0</td> <td>10.0</td> <td>0.0</td> </tr> <tr> <td>DD-14</td> <td>120.1</td> <td>9.60</td> <td>20.0</td> <td>5.0</td> <td>10.0</td> <td>10.0</td> </tr> <tr> <td>DD-15</td> <td>120.1</td> <td>9.61</td> <td>20.0</td> <td>5.0</td> <td>10.0</td> <td>25.0</td> </tr> <tr> <td>DD-16</td> <td>120.1</td> <td>9.62</td> <td>20.0</td> <td>5.0</td> <td>10.0</td> <td>50.0</td> </tr> <tr> <td>DD-18</td> <td>120.0</td> <td>9.74</td> <td>25.0</td> <td>-</td> <td>-</td> <td>-</td> </tr> </tbody> </table>	No.	Specimen, mm		Flaw length, mm		Distance, mm		$W$	$t$	$\ell_1$	$\ell_2$	$S$	$H$	DD-13	120.1	9.63	20.0	5.0	10.0	0.0	DD-13R	120.0	9.61	20.0	5.0	10.0	0.0	DD-14	120.1	9.60	20.0	5.0	10.0	10.0	DD-15	120.1	9.61	20.0	5.0	10.0	25.0	DD-16	120.1	9.62	20.0	5.0	10.0	50.0	DD-18	120.0	9.74	25.0	-	-	-
	No.		Specimen, mm		Flaw length, mm		Distance, mm																																																	
		$W$	$t$	$\ell_1$	$\ell_2$	$S$	$H$																																																	
	DD-13	120.1	9.63	20.0	5.0	10.0	0.0																																																	
	DD-13R	120.0	9.61	20.0	5.0	10.0	0.0																																																	
	DD-14	120.1	9.60	20.0	5.0	10.0	10.0																																																	
	DD-15	120.1	9.61	20.0	5.0	10.0	25.0																																																	
DD-16	120.1	9.62	20.0	5.0	10.0	50.0																																																		
DD-18	120.0	9.74	25.0	-	-	-																																																		
Nomenclature	Géométrie																																																							

Tableau 5\_8 : description des essais sur plaques à fissures traversantes parallèles inégales

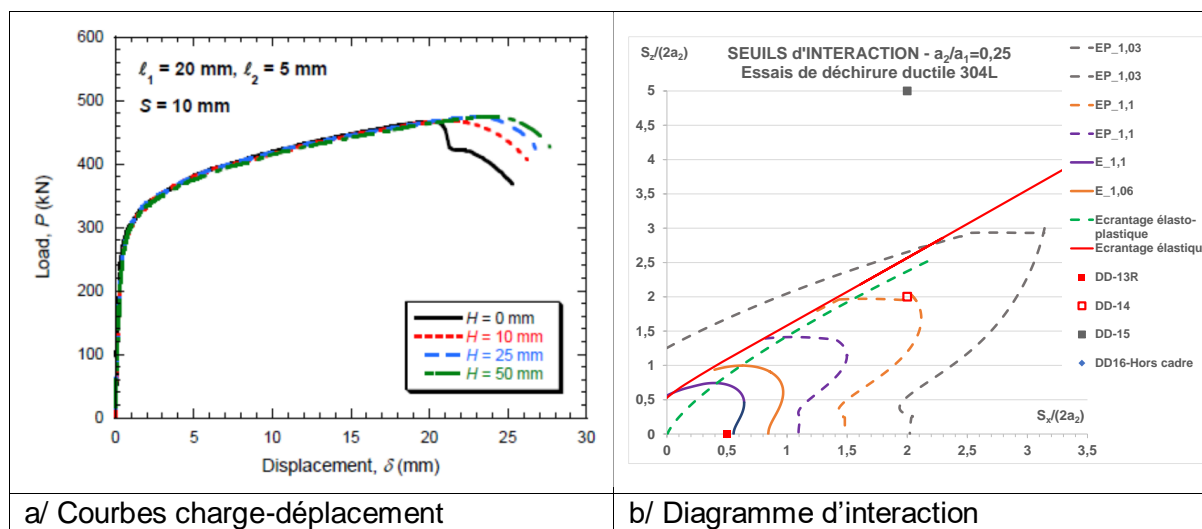


Figure 5\_15 : comportement au cours des essais et diagramme d'interaction (HAS, 2011)

La figure 5\_15a montre que les fissures ont propagé et que le seul l'essai pour lequel les fissures ont coalescé est l'essai DD-13R ( $H=0$ ). Pour les autres essais (DD-15 à 16) les écartements sont trop importants. Le point correspondant à l'essai DD-16 est situé hors du diagramme (Figure 515b). Dans le cas de l'essai DD-15, il y a écrantage. On note que le comportement global est peu affecté par l'écartement vertical avant amorçage.

Essai	$S_x/(2a_2)$	$S_y/(2a_2)$	$S_x/(a_1+a_2)$	$S_y/(a_1+a_2)$	$a_1/a_2$	Lambda_x
DD-13	2	0	0,8	0	4	0,667
DD-13R	2	0	0,8	0	4	0,667
DD-14	2	2	0,8	0,8	4	0,667
DD-15	2	5	0,8	2	4	0,667
DD-16	2	10	0,8	4	4	0,667

Tableau 5\_9 : géométrie des essais sur plaques à fissures traversantes parallèles inégales

Essai	Gg_Ext	Gg_Int	Gp_Int	Gp_Ext	Ecrantage EI	Iota_Int	Coal_Exp
DD-13	1,008	1,028	1,228	1,161	0,0198	1,122	
DD-13R	1,008	1,028	1,228	1,161	0,0198	1,122	Oui
DD-14	1,009	1,033	1,071	1,086	0,0246	1,163	Non
DD-15	1,007	0,995	0,995	1,007	-0,0122	1,003	Non
DD-16	0,99	1,004	1,004	0,99	0,0131	1,004	Non

Tableau 5\_10 : analyse des essais sur plaques à fissures traversantes parallèles inégales

Le cas de l'essai DD-14 est discutable : l'article signale que les charges maximales sont les mêmes pour les éprouvettes DD-13R et DD-14 et la figure 5\_16 montre que sur la plaque DD-14 les lignes de glissement apparaissent entre pointes les plus proches, ce qui n'est pas le cas pour la plaque DD-15. Visiblement, les fissures de la plaque DD-14 au chargement maximal sont proches de la coalescence. Dans le diagramme d'interaction, l'essai DD-14 est plus proche de l'écrantage plastique.

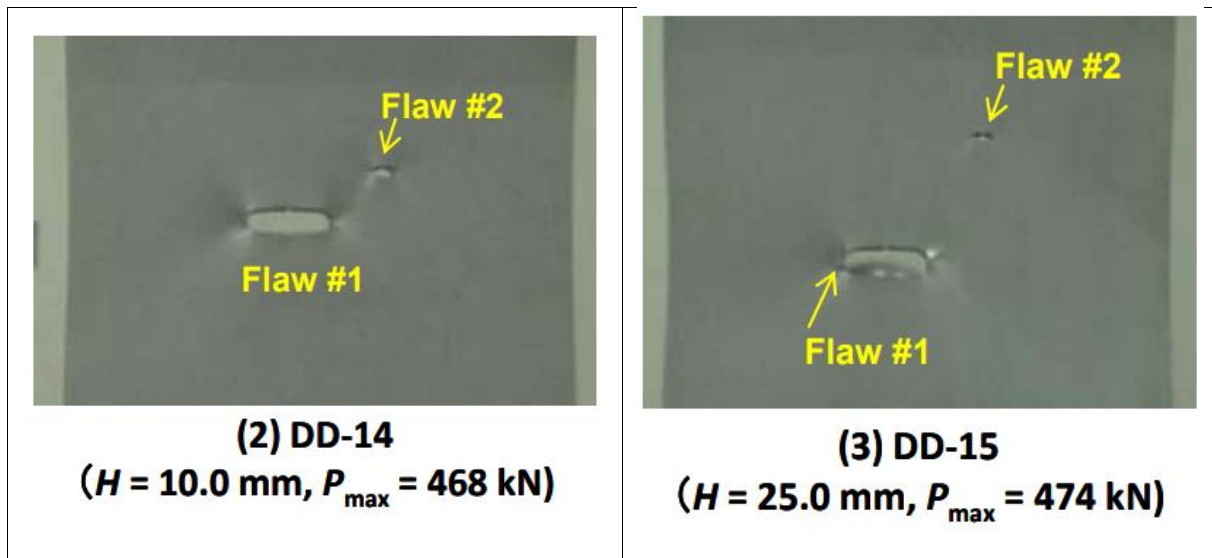


Figure 5\_16 : déformations autour des fissures des essais DD-14 et DD-15 (HAS, 2011)

Il faut noter que pour tous les essais, la déchirure ductile commence toujours en pointe de la grande fissure. Enfin l'analyse par la charge limite globale ne permet pas de détecter le risque de coalescence.

#### 5.4 Conclusions sur la précision de la méthode

La précision en élasticité linéaire est de moins de 1% pour les calculs aux éléments finis et de 3% pour les formules simplifiées. Ces limites ne doivent pas se cumuler car les estimations par les formules sont pénalisantes dans la plupart des cas.

En élasto-plasticité, pour des fissures bande la précision des calculs ESI-France (SYSTUS, 2020) à 2% à 3%.

En élasto-plasticité, pour les fissures elliptiques, les vérifications ne sont que qualitatives. La qualité du calcul des fissures isolées est validée par comparaison à d'autres calculs effectués avec des maillages très fins.

La meilleure validation est celle apportée par la comparaison aux essais sur fissures bande parallèles. Pour quatre matériaux différents (acier ferritique à basse température et à l'ambiante austénitiques) et trois modes de rupture (clivage, rupture au début du palier ductile et déchirure ductile), les prédictions par le diagramme d'interaction sont conformes aux résultats d'essais. Il permet en effet de prédire s'il y a coalescence ou non. La prédiction de l'écrantage tel que défini dans cette étude signifie qu'il n'y a pas interaction aux pointes les plus proches.





## 6 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

### 6.1 Conclusions

Il importe de noter deux principales caractéristiques du problème de l'interaction des défauts que la bibliographie et nos investigations ont révélé :

- L'interaction de fissures ou de cavités est régie par des grandeurs et des variables sans dimension, et n'est donc pas sensible à l'effet d'échelle. Les formules d'interaction de défauts multiples s'appliquent aussi bien à la fissuration des microcomposants qu'à la mécanique des failles.
- L'interaction dépend du type de comportement car le champ des contraintes en plasticité diffère notablement de celui en élasticité. Mais pour un comportement donné, l'interaction dépend faiblement des caractéristiques des matériaux sous réserve qu'ils soient homogènes et isotropes. En élasticité, l'interaction n'est affectée que par la valeur du coefficient de Poisson pour des fissures enfouies non coplanaires. En élastoplasticité, l'interaction dépend modérément de l'écroutissement du matériau.

L'étude bibliographique met en évidence au Chapitre I qu'il faut distinguer quatre types d'interaction listées au tableau suivant.

Numéro	Type	Application industrielle
1	entre cavités	matériaux poreux (KAC, 1994)
2	cavité de grande dimension et fissure (le plus grand diamètre de l'enveloppe de la cavité est comparable à celui de la fissure)	Structures percées (panneaux d'avions (GAL, 2017)
3	pores et fissure	Croissance des cavités en avant de la fissure (LEB, 2003)
4	Fissures traversantes ou enfouies	Corrosion (TOU, 2007) Rupture : Défauts des cuves des centrales Doel-Tihange (LAC, 2019) Fluage (ZHW, 2019)
5	Fissure enfouie et surface libre Fissure enfouie et fissure de surface	(CHZ 2000)

Notre étude ne porte que sur les points 2 et principalement 4 et 5 et apporte les résultats suivants sur l'interaction de deux fissures planes (ou d'une cavité et une fissure) situées à l'intérieur d'un solide homogène et isotrope sollicité en traction uniaxiale suivant l'axe normal à l'une des fissures.

#### 6.1.1 Interaction de défauts en élasticité linéaire

La méthode de prédiction du facteur d'interaction entre deux fissures en élasticité linéaire, exposée au chapitre II, a permis de traiter par des formules de forme fermée la plupart des configurations, à savoir :

- L'interaction entre fissures bande enfouies
  - Coplanaires
  - Parallèles écrantées ou non
  - Inclinées par projection

- L'interaction entre fissures elliptiques enfouies
  - Coplanaires ayant un axe en commun
  - Coplanaires décalées ou désaxées
  - Parallèles non écrantées
  - Le long du front de fissures coplanaires ou parallèles égales
  - De tailles égales ou inégales
  - De rapports d'aspect égaux ou inégaux
  - Inclinaison par rotation sur le plan parallèle
- Le domaine d'interaction pour des fissures bande ou elliptiques
- L'interaction entre fissure enfouie et fissure de surface
- L'interaction entre fissure et surface libre
- L'interaction entre cavité et fissure dans quelques cas

De plus les propriétés suivantes en élasticité linéaire ont été établies :

1. Le facteur d'interaction entre deux fissures coplanaires est décrit de façon approchée, mais simple et précise par une fonction affine de la contrainte d'ouverture adimensionnée notée  $F_w$ . Le coefficient d'affinité est une fonction  $A$  indépendante des écartements. Pour la fonction  $F_w$  s'impose le choix des paramètres d'éloignement dans le plan  $\lambda_x$  et  $\lambda_y$  qui rapportent la somme des demi-longueurs de fissure à l'éloignement des centres des deux fissures.
2. Le facteur d'interaction entre deux fissures parallèles est décrit de façon approchée, mais simple et précise directement par la contrainte d'ouverture adimensionnée en fonction des écartements obtenus par inversion de la formule établie pour les fissures coplanaires et de l'écartement vertical relatif.
3. La limite d'écrantage des fissures bande en élasticité linéaire ne dépend pas des caractéristiques mécaniques ni de la géométrie. Pour les fissures elliptiques, il y a un effet du coefficient de Poisson mais qui est faible si celui-ci diffère peu de la valeur 0,3.
4. Les effets de forme et de taille de fissures elliptiques coplanaires sont traduits par une modification de la fonction  $A$ .
5. Les effets de position relative (décalage des axes ou désorientation) de fissures elliptiques coplanaires sont traduits par une extension de la définition des paramètres d'écartement.
6. La variation le long du front de fissures elliptiques coplanaires interagissantes est prédictible par une courbe maîtresse indépendante des écartements.

La définition d'une fissure équivalente à deux fissures permet de traiter les interactions de plusieurs fissures.

### 6.1.2 Interaction de défauts en élasto-plasticité

Les notions de facteur d'interaction et de défaut équivalent ont été étendues en élasto plasticité. Les résultats obtenus sont les suivants :

- Formules donnant la taille de fissure équivalente à deux fissures bandes égales y compris si elles sont écrantées. Toutefois l'approche retenue, fondée en partie sur la théorie des lignes de glissement est limitée au bidimensionnel.
- Formules de charge limite pour une plaque contenant deux fissures bande. Ces formules permettent d'estimer le degré d'interaction, pas de la quantifier.
- Formules de charge de référence pour deux fissures bande égales. Les résultats sont équivalents avec ceux de la taille équivalente, mais la méthode est applicable aux fissures elliptiques. Les formules ont été établies pour les fissures elliptiques de rapport d'aspect  $a/c=3$  et de taille égales ou inégales.
- La limite d'écrantage a été déterminée pour les fissures bande, montrant la dépendance de l'écrantage vis-à-vis du comportement

- Evaluation des effets d'écroutissage sur le facteur d'interaction des fissures bande. La méthode de la charge de référence apparaît prometteuse pour prendre en compte ces effets.

## 6.2 Perspectives d'amélioration

### 6.2.1 En élasticité

- La variation du facteur d'interaction le long du front de fissures coplanaires ou parallèles inégales.

La variation du facteur d'interaction le long du front de fissures elliptiques permet de déterminer les limites d'écrantage. Il est utile de confirmer, comme pour les fissures bande, que cette limite ne dépend pas du rapport des tailles de fissure à condition de l'exprimer en fonction du rapport d'écartement à la taille de fissure moyenne.

- Le facteur d'interaction pour des fissures elliptiques écrantées.

Seuls les rares cas disponibles dans la littérature ont été analysés dans la thèse. La quantification des effets d'écrantage permet de réduire les conservatismes dans l'évaluation de la nocivité de groupes de fissures.

- L'amélioration du traitement de fissures multiples.

Il existe quelques cas pour lesquels la procédure de traitement de fissures multiples par la fissure équivalente à deux fissures sous-estime le facteur d'interaction en présence d'une troisième fissure. En général la présence de nombreuses fissures au voisinage d'une fissure atténue la nocivité de celle-ci en raison des effets d'écrantages. Par exemple, Dolgopolsky et al. (DOL, 1989) ont analysé l'effet de renforcement de ténacité induit par des microfissures au voisinage de la pointe d'une macro fissure. De nombreuses études ont été consacrées à l'analyse de l'interaction plusieurs fissures (e.g. LAP, 1991 ; LAM, 1993) et aussi à l'effet d'un réseau de microfissures sur l'amplification ou la réduction du FIC en pointe d'une macro fissure (e.g. BRI, 1960 ; SAH, 1997 ; BRC, 1996, 1998). Toutes ces études sont limitées au cas de fissures bande et il est difficile de conclure sur l'effet d'amplification ou l'atténuation du FIC de la macro fissure car, le résultat dépend beaucoup de la position de la première colonne de microfissures par rapport à la pointe de la macro fissure. Il faudrait examiner quelques cas réels pour retenir les règles pertinentes.

- L'application des formules à la propagation en fatigue de fissures elliptiques coplanaires.

Les formules de facteur d'interaction permettent en utilisant la loi de propagation en fatigue de prédire la nouvelle forme de fissure. Il faut ensuite valider le choix d'une fissures elliptique équivalente à la nouvelle fissure, par exemple en maintenant les écartements des plus faibles et en conservant l'aire de fissure. Plusieurs études ont été consacrées à l'évolution de plusieurs fissures en fatigue en tridimensionnel, mais, pratiquement, toutes considèrent l'évolution de fissures semi-elliptiques (e.g. LIN, 1997 ; DUN, 2015 ; KIK, 2016 ; WEN, 2016).

### 6.2.2 En élasto-plasticité

- Les grandeurs d'interaction pour des fissures bande coplanaires ou parallèles inégales.

Nous ne disposons que de quelques cas, il devrait suffire d'un petit nombre de calculs pour pouvoir développer des règles de traitement des fissures inégales.

Charge de référence pour d'autres configurations de fissures elliptiques

Il faudrait compléter les formules pour des fissures coplanaires égales avec interaction au co-vertex et des fissures parallèles égales avec interaction au co-vertex et au vertex. Le cas des fissures inégales pourrait être traité par les règles déduites du cas des fissures bande. L'établissement de formules

complètes (c.à.d. pour tout rapport d'aspect) de forme fermée en élastoplasticité pour des fissures elliptiques reste à mes yeux un challenge.

- L'application de la méthode au fluage par la méthode de la charge de référence.

Le comportement en fluage secondaire et étendu est apparenté au comportement en rupture ductile : lois de comportement puissance, paramètres  $C^*$  et  $J$ . Une étude comparative de l'interaction de fissures pour ces deux endommagements serait précieuse (ZHW, 2019).

## REFERENCES

Les références indiquées en italique ont été citées aux chapitres précédents.

### REFERENCES DE L'INTRODUCTION

(ANA, 2013)

Andrieu, A. (2013) Mécanismes et modélisation multi-échelle de la rupture fragile trans- et intergranulaire des aciers pour réacteurs à eau sous pression, en lien avec le vieillissement thermique. Autre. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2013.

(BAM, 2008)

Barbu, A. and Massoud, J.-P. (2008) Comportement des matériaux dans le cœur des REP. Techniques de l'ingénieur. Génie nucléaire, (BN3760).

(BUG, 2000)

Bugat, S. (2000) *Comportement et endommagement des aciers austeno-ferritiques vieillis : une approche micromécanique* Thèse physics.med-ph]. École Nationale Supérieure des Mines de Paris.

(FPA, 1993)

Francois, D., Pineau, A., Zaoui, A. (1993), Comportement mécanique des matériaux : viscoplasticité, endommagement, *mécanique de la rupture, mécanique du contact*. Ed. Hermès, Paris, France.

(GOH, 2010)

Gourgues-Lorenzon, A-F., Haudin, J-M. (2010) Matériaux pour l'ingénieur, Collection, Les cours de l'école des Mines, Paris, France.

(GAR, 2017)

Gara, S., (2017) Procédés de mise en forme par moulage,  
<https://www.technologuepro.com/cours-moulage/17-defauts-de-moulage.pdf>.

(GIL, 2001)

Gilles, P., Migné, C. (2001) Ductile fracture behavior of cast structure containing voids, *Proceedings of ICONE 9 Ninth International Conference On Nuclear Engineering*, April 8-12, Nice, France.

(GUR, 1977)

Gurson, A. L. (1977) Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part I —Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media, *Transaction of the ASME. Journal of Engineering Materials and Technology*, 99, 2-15;

(GUT, 1991)

Guttman, M. (1991) Intermediate temperature aging of duplex stainless steels. A review. *Duplex stainless steels*, 79-92.

(HAZ 2002)

Hazarabedian, A., Forget, P., Marini, B. (2002) Local Approach to Fracture of an Aged Duplex Stainless Steel, *Materials Research*, 5, No. 2.

(HEU 1992)

Heuler, P., Berger, C., Motz, J., 1992. Fatigue behaviour of steel castings containing near-surface defects. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 16, 1.

- (JAY, 1997)  
Jayet-Gendrot, S., Gilles, P. and Migné, C. (1997) Fatigue and Fracture: *PVP-Vol. 350*, ASME, 1, 107-116.
- (JAY, 2000)  
Jayet-Gendrot, S., Gilles, P. and Migné, C. (2000) Behavior of duplex stainless steel casting defects under mechanical loadings, *Nuclear Engineering and Design*, 197, Issues 1–2, 141-153.
- (JOL, 1992)  
Joly, P. (1992) *Etude de la rupture d'aciers inoxydables austéno-ferritiques moulés, fragilisés par vieillissement à 400 °C.*, [thèse de doctorat "Science et Génie des Matériaux". Ecole Nationale des Mines de Paris, 21 Mai].
- (MAS, 2017)  
Massoud, J P, Jayet-Gendrot, S, Le Delliou, P, Semeté, P, Churier-Bosseneq, H, Ignaccolo, S, & Bezdikian, G. (1997) Thermal ageing of cast duplex stainless steel primary components. Overview of the research program conducted by EDF. (EDF--97-NB-00097). France.

## REFERENCES DU CHAPITRE 1

### CODES ET FFS

- (API, 2000,2007)  
API 579-1/ASME FFS-1 (2000, 2007) Fitness-For-Service, American Petroleum Institute.
- (ASME, 2005, 2015, 2022)  
ASME B&PV Code Section XI: Rules for In-service Inspection of Nuclear Power Plant Components, (Addenda 2005, 2015).
- (N-877, 2017, 2020)  
ASME Code Case N-877 (2017, 2020) Alternative Characterization Rules for Multiple Subsurface Radially Oriented Planar Flaws – Section XI, Division 1.
- (N-877, 2017)  
ASME Code Case N-848-1, Alternative Characterization Rules for Quasi-Laminar Flaws – Section XI, Division 1, 2017.
- (BS 790, 2005, 2013)  
British Standards BS 7910 (2005, 2013) Guide to Methods for Assessing the Acceptability of Flaws in Metallic Structures.
- (FITNET, 2008)  
European Fitness for Service Network. (2008) FITNET Fitness-for-Service (FFS) – Procedure: Eds. M. Koçak, S. Webster, J.J. Janosch, R.A. Ainsworth, R. Koers.
- (FKM, 2004, 2009)  
FKM (2004) Fracture Mechanics Proof of Strength for Engineering Components.
- (JSME, 2004, 2022)  
JSME S NA1 (2004) Rules on Fitness-For-Service for Nuclear Power Plants.
- (GB/T1962, 2004)  
GB/T19624 (2004) Safety Assessment for In-Service Pressure Vessels Containing Defects. Beijing, Chinese Standards (CS).
- (MECA, 2022)  
**Calcul-Méca, Conception-Méca et Fluide-Méca** : 18 rue Paul Bellamy - 44 000 NANTES, contact@cluster-meca.fr.

(NUG, 2015)

Sharples, J., Keim, E. and Laureva, D. (2015) Fracture Mechanics Assessment- The European view of the State of the Art, NUGENIA position on Fracture Mechanics Assessment, NUGENIA association, c/o EDF av. des arts 53, BP 1000, Bruxelles, Belgium.

(R6, 2006)

R6 rule (2006) Assessment of the Integrity of Structures Containing Defects. British Energy Generation Ltd, Gloucester, UK.

(RCCMR-A16, 2002, 2010)

Code RCC-MR (2002, 2010) référentiel technique choisi pour la réalisation des composants mécaniques des réacteurs innovants de génération IV, Annexe A16.

(RSEM, 2000, 2010)

RSE-M (2000, 2010) Règles de surveillance en exploitation des matériels mécaniques REP, Edition AFCEN.

(WES, 1997, 2011)

Wes 2805 (1997, 2011) Methods of Assessment for Defects in Fusion welded Joints with Respect to Brittle Fracture and Failure due to Fatigue Crack Growth: The Japan Welding Engineering Society.

#### ARTICLES ET LIVRES

(ALI, 2011a)

Aliha M. R. M. and M. R. Ayatollahi, M. R and Saghafi, H. (2011) An improved semi-circular bend specimen for investigating mixed mode brittle fracture, *Engineering Fracture Mechanics*, 78, no. 1, 110–123

(ALI, 2011b)

Aliha M. R. M. and M. R. Ayatollahi, M. R. (2011) Mixed mode I/II brittle fracture evaluation of marble using SCB specimen, *Proceedings of the 11th International Conference on the Mechanical Behavior of Materials (ICM '11)*, 10, 311–318, Lake Como, Italy, June.

(AME, 1979)

Amestoy, M., Bui, H. D. and Dang Van, K. (1979). Déviation infinitésimale d'une fissure dans une direction arbitraire. *C. R. Acad. Sci. B* 289, 99.

(AML, 1992)

Amestoy, M. and Leblond, J. B. (1992) Crack paths in plane situations-II. Detailed form of the expansion of the stress intensity factors, *International Journal of Solids and Structures*, 29, 465-501.

(AND, 2005)

Anderson, T. L. (2005) Fracture mechanics fundamentals and applications, 3rd ed., Boca Raton, CRC Press.

(AZU, 2017)

Azuma, K. and Li, Y. (2017) Interaction factors for two elliptical embedded cracks with a wide range of aspect ratios, *AIMS Materials Science*, 4(2): 328-339.

(BAN, 1986)

Banks-Sills, L. and Bortman, Y. (1986) Mixed-mode fracture specimen: analysis and testing, *International Journal of Fracture*, 30, 181-201.

(BAR, 1962)

Barenblatt GI. (1962) The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture. In: *Advances in Applied Mechanics*, Vol. VII. Academic Press; 55–129.



- (BEB, 1999)  
Belytschko T, Black T. (1999), Elastic crack growth in finite element with minimal remeshing, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 45, 601620.
- (BEN, 1989)  
Benveniste Y., Dvorak, G. J., Zarzour. J. and Wung, E. C. J. (1989) On Interacting Cracks and Complex Crack Configurations in Linear Elastic Media, *Int. J. Solids Structures*, 25, 1279-1293.
- (BHA, 1973)  
Bhargava, R.D., Bhargava, R.R. (1973) Effect of a crack in an infinite plane containing a circular hole under uniform normal pressure. *Acta Mechanica*, 16, 279–284.
- (BIS, 2015)  
Bidokhti, A., A. and Shahani, A. R. (2015) Interaction Analysis of Non-aligned Cracks Using Extended Finite Element Method, *Latin American Journal of Solids and Structures*, January.
- (BON, 1995)  
Bonnet, M. (1995) Equations intégrales et éléments de frontière. CNRS Editions, Eyrolles.
- (BOU, 2019)  
Bouydo, A., Dulieu, P., Lacroix, V., Hasegawa, K., and Mares, V. (2019) A Comparison of Proximity Rules for Surface Planar Flaws. *Proceedings of the Volume 1: Codes and Standards*. San Antonio, Texas, USA. July 14–19. PVP2019 ASME.
- (BRK, 1995)  
Brocks, W. and Schmitt, W. (1995) The second parameter in J-R curves: constraint or triaxiality? *In ASTM STP 1244: Constraint effects in fracture, theory and applications: second volume*, M. Kirk and A. Bakker, eds. American Society for Testing Materials, Philadelphia, 209–231.
- (BUI, 1978)  
Bui, H. D. (1978) Mécanique de la Rupture Fragile, Masson.
- (BUI, 1980)  
Bui, H. D., Ehrlacher, A., Nguyen, Q., S. (1980) Propagation de fissure en thermoélasticité dynamique, *J. Mec.*, 19, 697-723.
- (CAI, 1992)  
Cai, H., Faber, K. T. (1992) On the Use of Approximation Methods for Microcrack Shielding Problems, *Jour. Appl. Mechs*, Transactions of ASME, 59, 497-501.
- (CHB, 2018)  
Chapuliot, S., Blouin, A. (2018) Definition and validation of an interaction rule for two cracks submitted to a complex loading, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 160, 34–42.
- (CHE, 1991)  
Chen, Y.Z. Lin, W.Z. (1991) Stress intensification at crack tips near parabolic notch, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 16, Issue 3, 243-254,
- (CHI, 2022)  
Chiu, C.; Tseng, S.; Chao, C.; Guo, J. (2022) Stress Intensity Factors for a Non-Circular Hole with Inclusion Layer Embedded in a Cracked Matrix. *Aerospace*, 9, 17
- (CHU, 1987)  
Chudnovsky. A., Dolgopolsky. A. and Kachanov, M. (1987) Elastic Interaction of a Crack with a microcrack Array \_ I. Formulation of the Problem and General Form of the Solution, *Int. J. Solids Struct.*, 23, 1-10.

- (CHR, 1967a)  
Cherepanov, G. P. (1967) Crack propagation in continuous media, *USSR J. Appl. Math. and Mech. Translation*, 31, 467–88.
- (CHR, 1967b)  
Cherepanov, G. P. (1967) The propagation of cracks in a continuous medium, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 31(3), 503-512.
- (CHY, 2014)  
Chen, Y. (2014) Body Force Method, Shanghai Jiao Tong University, ROC.
- (COE, 1972)  
Cook, T. S. and Erdogan, F. (1972) Stresses in bonded materials with a crack perpendicular to the interface, *Int. J. Engng Sci.* 10, 677-69.
- (COL, 1963)  
Collins, W.D. (1963) Some coplanar punch and crack problems in three-dimensional elastostatics, *Proc. Roy. Soc., Series A* 274, 507—528.
- (COU, 2020)  
Coules, H. E., Probert, M. A. (2020) Studying the interaction of crack-like flaws using the MATLAB toolbox int\_defects, *Engng. Fract. Mech.*, 227.
- (CTW, 1970)  
Chan, S.K. Tuba, I. S., Wilson W.K. (1970) On the finite element method in linear fracture mechanics, *Engineering Fracture Mechanics*, 2, Issue 1, 1-17.
- (DAL, 2015)  
Dalbe, M-J., Koivisto, J., Vanel, L., Miksic, A., Ramos, O., Alava, M., Santucci, S. (2015) Repulsion and Attraction between a Pair of Cracks in a Plastic Sheet. *Physical Review Letters*. 114, Issue 20.
- (DEE, 2018)  
Deleigh R. (2018) Calculs aux éléments finis de fissures elliptiques coplanaires, communication privée.
- (DES, 1981)  
Destuynder, Ph., Djaoua, M. (1981) Sur une interprétation mathématique de l'intégrale de Rice en théorie de la rupture fragile, *Math. Meth. In the Appl. Sci.*, 3, 70-87.
- (DUG, 1960)  
Dugdale D. S. (1960) Yielding of steel sheets containing slits, *J. Mech. Phys. Solids*, 8 (2), 100 - 104.
- (DUL, 2018)  
Dulieu, P., Lacroix, V., Hasegawa, K. et al. (2018) Alternative Characterization Rules for Multiple Surface Planar Flaws, *PVP2018-84960, Proceedings of ASME 2018 Pressure Vessels and Piping Division Conference*, July 2018, Prague (Czech Republic).
- (DUL, 2019)  
Dulieu, P., Lacroix, V/, Hasegawa, K. (2019) Generic proximity rules for multiple radially oriented planar flaws: technical basis of code case n-877 revision 1 (2019), *Proceedings of the ASME 2019 Pressure Vessels & Piping Conference, PVP2019*, July 14-19, San Antonio, Texas, USA.
- (ERD, 1962)  
Erdogan, F. (1962) *On the Stress Distribution in Plates with Collinear Cuts under Arbitrary Loads*, *Proc. 4th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, 547-553.

- (EGR, 1973)  
Erdogan F, Gupta GD, Ratwani M. (1973) Interaction between a circular inclusion and an arbitrarily oriented crack, *Technical Report NASA TR-73-10*, May, 1-33.
- (EGR, 1974)  
Erdogan F, Gupta GD, Ratwani M. (1974) Interaction between a circular inclusion and an arbitrarily oriented crack. *ASME J Appl. Mech*, December, 41, 4, 1007–13.
- (EMP, 2007)  
Concentration de contrainte dans une plaque trouée en traction, corrigé 2007, ENSMP, Paris.
- (ERS, 1963)  
Erdogan, F., and Sih, G. C. (1963) On the Crack Extension in Plates Under Plane Loading and Transverse Shear, *Journal of Basic Engineering*, TRANS. ASME, Vol. 85, Series D, 1963, 519-52
- (FAB, 1987)  
Fabrikant, V. I. (1987) Close interaction of coplanar circular cracks in an elastic medium, *Acta Mechanica*, **67**, 39-59.
- (FAI, 2017)  
Faidy C. (2017) RSE-M Nuclear In-Service Inspection Code - A Set of Modern Flaw Evaluation Rules, *Proceedings of the ASME 2017 Pressure Vessels & Piping Division Conference PVP2017*, July 16-20, Waikoloa Village, Hawaii, USA.
- (FAR, 1987)  
Fares, N., Li, V. C. (1987) An indirect boundary element method for 2-D finite/infinite regions with multiple displacement discontinuities, *Engineering Fracture Mechanics*, 26, Issue 1, 127-141,
- (FAV, 2013)  
U.S.NRC (2013) A Generalized Procedure for Generating Flaw-Related Inputs for the FAVOR Code, *NUREG/CR-6817*, Rev. 1.
- (FAZ, 2013)  
François, D., Pineau, A., Zaoui, A. (2013) Mechanical behaviour of materials. *Vol. II: Fracture mechanics and damage*. 2nd ed. January.
- (FET, 1997)  
Fett, T., Munz, D. (1997) Stress intensity factors and weight functions, *Computational Mechanics Publications*, Southampton, U.K.
- (FUO, 2006)  
Fuhrey M and Osage D A: (2006) Stress intensity factor solutions for long surface cracks in flat plates, cylinders and spheres. in *API A579 Appendix C*, Fitnet, May.
- (GAJ, 2020)  
Gajjar, M., Pathak, H. & Kumar, S. (2020) Elasto-Plastic Fracture Modeling for Crack Interaction with XFEM. *Trans Indian Inst. Met* , **73**, 1679–1687.
- (GER, 1930)  
Geringer, H. (1930), *Proc. 3rd Int. Cong. App. Mech.*, Stockholm, 29, 185-90.
- (GIL, 2022)  
Gilles, Ph. and Chapuliot (2022) Closed form formulae for two interacting equal parallel through-wall cracks embedded in an infinite elastic medium under normal tension, *Transactions, SMiRT-26, Berlin/Potsdam, Germany Division II*, July 10-15.

- (GOM, 2009)  
Gommerstadt, B. I. (2009) Potential Energy of Two Collinear Cracks, *ICF12*. 12-17 July, Ottawa, Ontario, Canada.
- (GRI, 1920)  
Griffith, A. A. (1920) The phenomenon of rupture and flow in solids. *Phil Trans Roy Soc.*, London, *A221*, 163–98.
- (GRI, 1924)  
Griffith, A. A. (1924) The theory of rupture. In: Biezeno CB, Burgers JM, editors. *Proc First Int Congr Appl Mech*. Delft: Technische Boekhandel en Drukkerij; 1924, 55–63.
- (GRY, 1995)  
Gray, T. G. F., Tournery, F., Spence, J., Brennan, D. (1995) Closed form functions for elastic stress concentration factors in notched bars, *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, *30* (2), 143-154.
- (GRY, 2007)  
Gray, T. G. F., & Wood, J. (2007). Fracture mechanics approach to design analysis of notches, steps and internal cut-outs in planar components. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, *42* (6), 433-446.
- (HAH, 2014)  
Hahn, J. (2014) Analysis of the interaction of two parallel surface cracks, PhD thesis, Purdue University, Indiana, USA.
- (HAS, 2007)  
Hasegawa, K., and Miyazaki, K. (2007) Alignment and Combination Rules on Multiple Flaws in Fitness-for-Service Procedures, *Key Engineering Materials*, *345-346*, 411-416.
- (HAS, 2009)  
Hasegawa, K., Saito K, Miyazaki K (2009) Alignment Rule for Non-Aligned Flaws for Fitness-for Service Evaluations Based on LEFM. *ASME JPVT* 131, 041403.
- (HAS, 2017)  
Hasegawa, K., Li, Y., Katsumata, G., Duleiu, P., Lacroix, V. (2017) Introduction of subsurface proximity criteria in the world and stress intensity factors for transformed surface flaws, *Proceedings of the ASME 2017 Pressure Vessels & Piping Division Conference PVP2017*, July 16-20, Waikoloa, Hawaiï, USA.
- (HEN, 1923)  
Hencky H. (1923) Über einige statisch bestimmte Fälle des Gleichgewichts in plastischen Körpern, *Zeits. Angew. Math. Mech.* **3**, 241-251.
- (HIL, 1950)  
Hill R. (1950) The mathematical theory of plasticity, Ed. Clarendon Press, Oxford, U.K.
- (HNM, 1985)  
Horri, H. and S. Nemat-Nasser, S. (1985) Elastic Fields of Interacting inhomogeneities, *Journal of Solids and Structures*, *21*, No. 7, 731-745.
- (HUA, 1993)  
Hu, K. X., Chandra, A. and Huang, Y. (1993) multiple void-crack interaction, *Int. J. Solids Structures*, *30*. No. 11. 1473-1489.
- (HUC, 1993)  
Hu, K. X., Chandra, A. (1993) Interactions among cracks and rigid lines near a free surface, *International Journal of Solids and Structures*, *30*, Issue 14, 1919-1937.

- (HUS, 1974)  
Hussain, M. Pu, S. L. and Underwood, J. (1974) Strain energy release rate for a crack under combined mode I and mode II, *Fracture Analysis ASTM STP 560*, 2–28.
- (HUT, 1968)  
Hutchinson, J.W., 1968. Plastic stress and strain fields at a crack tip, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 16, 337–347.
- (IID, 1980)  
Iida, K. (1980) Aspect Ratio Expression for Part-Through Fatigue Crack, Intern. Institute of Welding, Doc. XIII-967-80.
- (IID, 1983)  
Iida, K. (1983) Shapes and coalescence of Surface Fatigue Crack, ICF, Beijing.
- (ILY, 1956)  
Ilyushin, A. A. (1956) Plasticité - déformations élastoplastiques. Eyrolles, France.
- (ING, 1913)  
Inglis C.E. (1913) Stresses in Plates Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners, *Transactions of the Institute of Naval Architects*, 55, 219-241.
- (IGG, 1990)  
Ingraffea, A. R. and Grigoriu, M. (1990) Probabilistic fracture mechanics: A validation of predictive capability, Report 90-8, Department of Structural Engineering, Cornell University.
- (IRW, 1957)  
Irwin, G. R. (1957) Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate, *Journal of Applied Mechanics*, 24, 361-364
- (IRW, 1958)  
Irwin, G. R. (1958) *Fracture Handbuch der Physik*, Springer, Berlin., Vol. VI, 551-590.
- (IRW, 1962)  
Irwin, G. R. (1962) Crack Extension Force for a Part-Trough Crack in a Plate, *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.*, 29, 651-654.
- (ISI, 1953)  
Isida, M. (1953) Form Factors of a Strip with an Elliptic Hole in Tension and Bending, *Scientific Papers of Faculty of Engineering, Tokushima University*, 4, pp. 70-.
- (ISI, 1966)  
M. Isida, (1966) Stress intensity factors for the tension of an eccentrically cracked strip. *J. appl. Mech.* 33: Trans. ASME 88; (Series E) 674-675.
- (ISI, 1970)  
Isida, M. (1970) on the determination of stress intensity factors for some common structural problems, *Engineering Fracture Mechanics*, 2, 61-79.
- (ISI, 1973)  
Isida, M. (1973) Method of Laurent Series Expansion for Internal Crack Problems, Chapter 2 in *Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems*, edited by G. C. Sih, Noordhoff.
- (ISI, 1984)  
Isida, M., Noguchi, H. and and Yoshida. T (1984) Tension and Bending of Finite Thickness Plates with a Semi-Elliptical Surface Crack, *Int J. Fracture*, 26, 157-186.
- (ISI, 1985)  
Isida, M., Hirota, K., Noguchi, H., and Yoshida, T. (1985) Two parallel elliptical cracks in an infinite solid subjected to tension. *Int J Fracture* 27, 31–48.

- (ISI, 1991)  
Isida, M., Yoshida, T. and Noguchi, H. (1991) Parallel array of semi-elliptical surface cracks in semi-infinite solid under tension. *Engng. Fract. Mech.*, 39, 845-850.
- (ISI, 1994)  
Isida, M., Tsuru, H. and Noguchi, H. (1994) an analysis for three dimensional cracks. *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.*, 17, No. 7, 737-749.
- (ISN, 1983)  
Isida M. and Noguchi H. (1983) On the analysis of three-dimensional crack problems by the body force method. *Trans. Jap. Soc. Mech. Engrs. Ser. A*, 49, 707-717.
- (JDG, 2014)  
Jiang, S., Du, C. and Gu, C. (2014) An investigation into the effects of voids, inclusions and minor cracks on major crack propagation by using XFEM, *Structural Engineering and Mechanics*, 49, No. 5, 597-618.
- (JPB, 1992)  
Jiang Z. D., Petit. J... and Bezine G. (1992) An Investigation of Stress Intensity Factors for Two Unequal Parallel Cracks in a Finite Width Plate, *Engng. Fracture Mech.*, 42. N°1, 129-138.
- (KAC, 1971)  
Kachanov, L. M. (1971) Foundations of the theory of plasticity. Ed. North Holland Publishing Company, Amsterdam, Pays-Bas.
- (KAC, 1987)  
Kachanov M. (1987) Elastic Solids with Many Cracks: -A Simple Method of Analysis, *Int. J. Solids Struct.*, 23, 23-43.
- (KAC, 1994)  
Kachanov M (1994) Elastic solids with many cracks and related problems. *Advances in applied mechanics*, 30, Academic Press, Inc.
- (KAH, 1971)  
Kachanov, L. M. (1971) *Foundations of the theory of plasticity*. Ed. North Holland Publishing Company, Amsterdam, Pays-Bas.
- (KAL, 1989)  
Kachanov, M., Laures, J.-P (1989) Three-dimensional problems of strongly interacting arbitrarily located penny-shaped cracks, *International Journal of Fracture* 41(4):289-313.
- (KAM, 2002)  
Kamaya M, (2002) Evaluation of coalescence criteria for parallel crack, *Proceedings of PVP2002 2002 ASME Pressure Vessels and Piping Conference*, August 5-9, Vancouver, BC, Canada.
- (KAN, 1985)  
Kanninen M. F. & Popelar C. H. (1985) *Advanced Fracture Mechanics*, Ed. Clarendon Press, Oxford, Grande-Bretagne, 1985.
- (KAT, 1976)  
Kathiresan, K. (1976) *Three-dimensional linear elastic fracture mechanics analysis by a displacement hybrid finite element model* [PhD in the School of Engineering Science and Mechanics, Georgia Institute of Technology, GA, USA].
- (KIR, 1898)  
Kirsch, G. (1898), Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre. *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, 42, 797–807.

- (KLU, 2016)  
 Klungerbo, K. (2016) *Stress Concentrations and Stress Gradients at Elliptical Through-Holes and Spheroidal Cavities*, [Master of Science in Mechanical Engineering, Norwegian University of Science and Technology].
- (KHO, 1999)  
 Khoei, A. R., Broumand, P. (2010) Modeling multiple crack problems with eXtended Finite Element Method, *18th Annual International Conference on Mechanical Engineering-ISME2010* 11-13 May, 2010, Sharif University of Technology, Tehran, Iran
- (KOL, 1909)  
 Kolosoff, G.V. (1909) On an application of complex function theory to a plane problem of the mathematical theory of elasticity, Yuriev.
- (KOB, 1975)  
 Kobayashi, A. S., Enetanyaa, A. N. and Shah, R. C. (1975) Stress intensity factors of elliptical cracks. *Prospects of Fracture Mechanics* (Edited by G. C. Sih, H. C. Van Elst and D. Broek), 525-544. Noordhoff International, Leyden (1975).
- (LAC, 2016a)  
 Lacroix, V. (2016) *Assessment and improvement of flaw characterization rules in fitness-for-service codes using extended finite element method* [Thesis Yokohama National University].
- (LAC, 2018)  
 Lacroix, V., Dulieu, P., Blasset, S. et al. (2018) Rules for Flaw Interaction for Subsurface Flaws in Operating Pressurized Vessels: Technical Basis of Code Case N-877, *PVP2018-84120, Proceedings of ASME 2018 Pressure Vessels and Piping Division Conference*, July 2018, Prague (Czech Republic).
- (LAC, 2020)  
 Lacroix, V., Dulieu, P., Hasegawa, K., Mares, V. (2020) Treatment of the interaction with the free surface of the component for combined subsurface flaws – technical basis for revision of IWA-3300 and table IWB/IWC-3510-1, *Proceedings of the ASME 2020 Pressure Vessels & Piping Division Conference PVP2020, July 19-24, 2020, Minneapolis, Minnesota, USA*.
- (LAL, 2008)  
 Lalonde, S. (2008) *Modélisation de la propagation des fissures dans les engrenages par la méthode des éléments de frontières* [Mémoire de maîtrise électronique, École de technologie supérieure, Montréal Canada].
- (LAU, 1843)  
 In De Marçay, F. (2018). *Analyse Complexe, Homotopies, Séries de Laurent, Fonctions méromorphes*, Département de Mathématiques d'Orsay Université Paris-Saclay, France.
- (LAZ, 2008)  
 Lazarus V, Leblond J-B. (1998) Crack paths under mixed mode (I+III) or (I+II+III) loadings. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série II (Mécanique, Physique, Astronomie)* 326, 3, 171–177.
- (LEB, 1992)  
 Leblond J-B., Torlai O. (1992) The stress-field near the front of an arbitrarily shaped crack in a 3-dimensional elastic body, *J. Elast.*, 29 (2):97–131.
- (LEB, 2003)  
 Leblond J. B. (2003) *Mécanique de la rupture fragile et ductile*. Ed. Hermès, France.
- (LEC, 1988)  
 Lemaitre J., Chaboche J.-L. (1988) *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, Paris.

- (LED, 2007)  
 Le Delliou, P., Barthelet, B. (2007) Stress intensity factor solutions for an elliptical crack in a plate. Etude complémentaire. *Nuclear Engineering and Design*, 237, 1395–140.
- (LIE, 1968)  
 Liebowitz, H. (1968) – Fracture, an advanced treatise,  
 Vol. 2: Mathematical analysis in the mechanics of fracture, J. R Rice, 191-311.  
 Vol.3: Plasticity aspects of failure, Mac Clintock, F. A., 312 - Academic Press, New York and London.
- (LIU, 1976)  
 Liu, A. (1976) Summary of stress intensity factors, Rockwell International
- (MAT, 2018)  
 MATLAB®, version 9.4.0.813654 (R2018a). Natick, USA: The Mathworks Inc.
- (MCL, 1971)  
 McClintock, F.A. (1971) Plasticity aspects of fracture. In: Liebowitz, H. Editor, Fracture: An Advanced Treatise vol. 3 Academic Press, New York, 47–225.
- (MDB, 1999)  
 N. Moës, J. Dolbow, T. Belytschko. A finite element method for a crack growth without remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46, 131-150, 1999.
- (MEY, 2000)  
 Meyer, S. Diegele, E, Bruckner-Fait, A. and Möslang, 1A. (2000) Crack interaction modelling, *Fatigue Fract Engng Mater Struct* 23, 315–323.
- (MIA, 1995)  
 Miannay, D. P. (1995) Mécanique de la rupture. Editions de Physique, Les Ulis, France.
- (MIN, 1936)  
 Mindlin, R. D. (1936) Force at a point in the interior of a semi-infinite solid, *Physics* 7, 195-202.
- (MOU, 2000)  
 Moussa, W. A. M. (2000) *Finite Element Study of the Interaction and Shielding Effects of Multiple Cracks in Three Dimensions* [Thesis Carleton University, Ottawa, Ontario, Canada].
- (MUD, 2019)  
 Mudunuru, M. K., Panda, N., Karra, N., Srinivasan G., Chau, V. T., Rougier, E., Hunter, G. and Viswanathan, H. S. (2019) Surrogate Models for Estimating Failure in Brittle and Quasi-Brittle Materials, *Appl. Sci.* 2019, 9, 2706.
- (MUN, 1982)  
 Murakami, Y. and Nemat-Nasser, S. (1982) Interacting Dissimilar Semi-Elliptical Surface Flaws under Tension and Bending. *Engng. Fract. Mech.* 16, 373-386.
- (MUR, 1981)  
 Murakami, Y. and Nisitani, H. (1981). Stress intensity factors for interacting two equal semi-elliptical surface cracks in tension. *Transactions of JSME (Series A)* 47, 295-303.
- (MUR, 1987, 2001)  
 Murakami Y., (1987, 2001) Stress Intensity Factor Handbook, 1-2 and 3-4, Pergamon Press.
- (MUR, 2002)  
 Murakami, Y. (2002) Metal Fatigue: Effects of Small Defects and Nonmetallic Inclusions, Elsevier.



- (MUS, 1933)  
Muskhelishvili, N. I. (1933) Praktische Lösung der fundamentalen Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie in der Ebene für einige Berandungsformen, *Z. Angew. Math. Mech.*, 13, N° 14, 264-282.
- (MUS, 1953)  
Muskhelishvili, N. I. (1953) Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity, P. Nordhoff publishing.
- (MYA, 2006)  
Myazaki, K., Iwamatsu, F., Nakanishi, S., Shiratori, M. (2006) Stress intensity factor solution for subsurface flaw estimated by influence function method, *Proceedings of PVP2006-ICPVT-11 2006 ASME Pressure Vessels and Piping Division Conference*, July 23-27, Vancouver, BC, Canada
- (NEW, 1979)  
Newman, J. C. and Raju, I. S. (1979) Stress Intensity Factors for a Wide Range of Semi-Elliptical Surface Cracks in Finite Thickness Plates, *Eng. Fract. Mech.*, 11, 817-829.
- (NEW, 1984)  
Newman, J. C. and Raju, I. S. (1984) Stress Intensity Factor Equation for Cracks in Three-Dimensional Finite Bodies Subjected to Tension and Bending Loads, *NASA Technical Memorandum 85793*, National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Centre, Virginia, April (1984).
- (NIA, 1983)  
Nishioka, T. und Atluri, S.N. (1983) Analytical Solution for Embedded Elliptical Cracks and Finite Element Alternating Method for Elliptical Surface Cracks Subjected to Arbitrary Loadings. *Engng. Fract. Mech.*, 17, 247-268.
- (NIF, 1987)  
Nishioka, T. und Furutani, Y. (1987) An Alternating Method of Analysis of a Group of Interacting Multiple Elliptical Cracks in an Infinite Solid. *JSME*, 30, N°266, 1121-1128.
- (NIM, 1974)  
Nisitani, H. and Murakami, Y. (1974). Stress intensity factors of an elliptic or a semi-elliptical crack subject to tension. *Int. J. Frac.* 10, 353-368.
- (NIS, 1967)  
Nisitani H (1967) Two dimensional problem solved using a digital computer. *J Japan Soc Mech Eng.*, 70, 627-635.
- (NIS, 2000)  
Nisitani, H. and Yamasaki, K. (2000) Approximate Method for Calculating the Interference Effect of Stress Concentration between a Notch and a Crack. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part A* 66 (652), 2198-2203 (In Japanese).
- (NOG, 1997)  
Noguchi, H., Smith, R. A, Carruthers, J. J. and Gilchrist, M. D. (1997) Stress intensity factors of embedded elliptical cracks and an assessment of the ASME XI defect recharacterisation criteria, *Int.J. Press. Ves. & Piping*, 70, 69-76.
- (ODO, 1991)  
O'Dowd, N.P. and Shih, C.F.: Family of Crack Tip Fields Characterized by a Triaxiality Parameter - I. Structure of Fields (1991), *J. Mech. Phys. Solids*, 39, 989-1015.
- (ODO, 1992)  
O'Dowd, N.P. and Shih, C.F.: Family of Crack Tip Fields Characterized by a Triaxiality Parameter - II. Fracture Applications (1992) *J. Mech. Phys. Solids*, 40, 939-963.

- (ONA, 1986)  
O' Donoghue, P. E., Nishioka T. and Atluri S. N. (1986) Analysis of Interaction Behavior of Surface Flaws in Pressure Vessels *Trans of ASME, J. Press. Vess. Tech.* 108.
- (OUD, 2008)  
Oudin, H. (2008) Méthode des éléments finis. Engineering school. Ecole Centrale de Nantes, p. 63.
- (PAL, 1962)  
Panasyuk, V. V., Lozoviy, B. L. (1962). On the deformation of two unequal length cracks, Kiev, *DAN URSR 12 (11)*, 1444-1447.
- (PAN, 2005)  
Pan, J. and Lin, S-H (2005) Fracture Mechanics and Fatigue Crack Propagation in Fatigue Testing and Analysis (Theory and Practice), Ed Elsevier Butterworth–Heinemann 200 Wheeler Road, Burlington, MA 01803, USA.
- (POO 2018)  
Pook, L. P. (2018) Mixed-mode fatigue crack growth thresholds: A personal historical review of work at the National Engineering Laboratory, 1975–1989, *Engineering Fracture Mechanics*, 187 115-141.
- (PAK, 1991)  
Parks, D. M. (1991) Three-Dimensional aspects of HRR-dominance, *Defect Assessment in Components- Fundamental and Applications*, ESIS/EGF9, Edited by J. G. Blauel and K. H. Schwalbe), Mechanical Engineering Publications, London, 205-231.
- (REN, 1968)  
Ren, L., Zhu, Z., Yang, Q. and Ting Ai, T. (2013) Investigation on the Applicability of Several Fracture Criteria to the Mixed Mode Brittle Fractures, *Advances in Mechanical Engineering, Hindawi Publishing Corporation Article ID 545108*, 11 pages.
- (RIC, 1968a)  
Rice, J. R. (1968) A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations. *J. Appl Mech.*, 35, 379–86.
- (RIC, 1968b)  
Rice, J. R, Rosengren, G. F. (1968b) Plane strain deformation near a crack tip in a power law hardening materials. *J Mech Phys Solids*, 16, 1–12.
- (RIC, 1972a)  
Rice, J. (1972), Some remarks on elastic-plastic fields, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 8, 751-758, 1972.
- (ROC, 1994)  
Roy A. and Chatterjee M. (1994) Interaction Between Coplanar Elliptic Cracks-I Normal Loading. *Int. J. Solids Struct.* 31, N°1, 127-144.
- (ROO, 1976)  
Rooke, D. P., and Cartwright, D. J. (1976) Compendium of Stress Intensity Factors, HMSO, London, U.K.
- (RUB, 1985)  
Rubinstein, A. A. (1985) Macrocrack Interaction with Semi-infinite Microcrack Array, *Int. J. Fract.*, 27, 113-119.
- (ROS, 1986)  
Rose, L.R.F. (1986) Effective Fracture Toughness of Microcracked Materials, *Journal of the American Ceramic Society* 69, 212-214.

- (ROY, 2001)  
Roylance, D. (2001) Closed-Form Solutions, MIT Sept., Cambridge, MA, USA.
- (SAL, 2001)  
Salençon, J. (2001) Elasto-plasticité et calcul à rupture. Editions de l'école Polytechnique, Palaiseau, France.
- (SAN, 1979)  
Sanford, R. J. (1979) A critical re-examination of the Westergaard method for solving opening-mode crack problems, *Mechanics Research Communications*, 6, No. 5, 289–294.
- (SBL, 1964)  
Stonesifer, R. B., Brust. F. and Leis, B. S. (1993) Mixed-Mode Stress Intensity Factors for interacting Semi-Elliptical Surface Cracks in a Plate, *Engng. Fracture Mech.*, 43, 357-380.
- (SCH, 1983)  
Schijve, J. (1983) Brief note on the stress intensity factor of elliptical cracks, *Engineering Fracture Mechanics*, 18, n°5, 1057-1069.
- (SCW, 2018)  
Schwaab, M. E. (2018) Croissance de fissures en interaction : étude numérique du cas "En passant". Material chemistry. Université de Lyon, English.
- (SHA, 1991)  
Sharma, S.M. and Aravas, N. (1991) Determination of Higher-Order Terms in Asymptotic Elastoplastic Crack Tip Solutions, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39, 1043–1072.
- (SHA, 1995)  
Sharma, S.M., Aravas, N. and Zelman, M.G. (1995) Two-Parameter Characterization of Crack Tip Fields in Edge-Cracked Geometries. *Fracture Mechanics: 25th volume, ASTM 1220*, F. Erdogan, Ed., Plasticity and creep solutions, American Society for Testing and Materials, Philadelphia.
- (SHI, 1973)  
Shih, C.F., 1973. *Elastic-plastic analysis of combined mode crack problem* [Ph.D. Thesis, Harvard University, Cambridge, MA.]
- (SHK, 1972)  
Shah, R. C. and Kobayashi, A. S. (1972) On the surface flaw problem. The Surface Crack: Physical Problems and computational Solutions (Edited by I. L. Swedlow), 79-124. The American Society of Mechanical Engineers (1972).
- (SID, 1980)  
Sidorroff, F. (1980) Mécanique des milieux continus École d'ingénieur. École Centrale de Lyon, France. pp. 166-.
- (SIH, 1964)  
Sih, G.C. (1964). Boundary problems for longitudinal shear cracks. *Proc. 2nd Conf. Theor. Appl. Mech.*, 117–130.
- (SIH, 1974)  
Sih, G. C. (1974) Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems, *International Journal of Fracture*, 10, no. 3, 305–321.
- (SUM, 1992)  
Sumpter, J. D. G. and Forbes, A.T. (1992) Constraint Based Analysis of Shallow Cracks in Mild Steel, *Proceedings of TWI/EWI/IS International Conference on Shallow Crack Fracture Mechanics Test and Applications*, Cambridge, UK.

- (TAP, 1973 – 2000)  
Tada, H. P. C. Paris and G. Irwin, *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Del Research Corporation.
- (THO, 2000)  
Thomas, S. B., Mhaiskar, M. J. & Sethuraman, R. (2000). Stress intensity factors for circular hole and inclusion using finite element alternating method. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 33(2):73–81
- (TIG, 1951)  
Timoshenko, S., and Goodier, J.N. (1951) *Theory of Elasticity*, 3rd Ed., McGraw-Hill, New York.
- (TIR, 1976)  
Tirosh, J., Tetelman, A. S. (1976) Fracture conditions of a crack approaching a disturbance, *International Journal of Fracture*, 12, No. 2, 187-199.
- (TRA, 1961)  
Tranter, C. J. (1961) The opening of a pair of coplanar Griffith cracks under internal pressure. *Q. J. Mech. appl. Math.* XIV, 283-292
- (UKA, 1991a)  
Ukadgaonker, V. G. and Naik, A. P. (1991) Interaction Effect of two Arbitrarily Oriented Cracks - Part-I. *Int. J. Fracture*, 51, 219-230.
- (UKA, 1991b)  
Ukadgaonker, V. G. and Naik, A. P. (1991) Effect of Interaction of two Arbitrarily Oriented Cracks – Applications - Part-II. *Int. J. Fracture*, 51, 285-304.
- (VIA, 1981)  
Vijayakumar, K. and Atluri, S. N. (1981) An embedded elliptical flaw in an infinite solid, subject to arbitrary crack-face tractions. *J. Appl. Mech.* 48, 88-96
- (WEL, 1988)  
Wellman, G. W., Sorem, W. A., Dodds, Jr., RIZ, and Rolfe, S. T., (1988) Specimen Thickness Effects for Elastic-Plastic COD Toughness of A36 Std, ASTM STP 945, American Society of Testing and Materials, Philadelphia, PA, 535 -554.
- (WIL, 1949)  
Willmore, T. J. (1949) The distribution of stress in the neighborhood of a crack, *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 2, 53-63.
- (WLE, 1972)  
Williams, J. G. and Ewing, P. D. (1972) Fracture under complex stress—the angled crack problem, *International Journal of Fracture*, 8, no. 4, 441–446.
- (WLL, 1952)  
Williams, M., L. (1952) Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension, *ASME J. Appl. Mech.*, 19, 526-528.
- (XIA, 1994)  
Xiao, Z.M., Lim, M.K. Liew, K.M. (1994) Stress intensity factor of an elliptical crack as influenced by a spherical inhomogeneity, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 21, 219-232
- (XUY, 1999)  
XU, Y. (1999) Crack interaction and interaction theorem by the BEM analysis, *Transactions on Modelling and Simulation*, 24, WIT Press.

- (YAN, 2006)  
Yan, X. (2006) An effective numerical approach for multiple void-crack interaction, *J. Appl. Mech.*, **73**, 525–536.
- (YEH, 1987)  
Yehia, N. A. B. and M. S. Shephard, M. S. (1987) The NT-criterion for predicting crack growth increments, *Engineering Fracture Mechanics*, **26**, no. 3, 371–382.
- (YEH, 1991)  
Yehia, N. A. B. (1991) Distortional strain energy density criterion: the Y-Criterion 1991) *Engineering Fracture Mechanics*, **39**, no. 3, 477–485.
- (YIR, 2022)  
Yi, W. Rao, Q. Zhu, W. Shen, Q., Li, Z. and Ma, W. (2022) Interacting Stress Intensity Factors of Multiple Elliptical-Holes and Cracks Under Far-Field and Arbitrary Surface Stresses, *Adv. Appl. Math. Mech.*, **14**, 125-154.
- (YOK, 1965)  
Yokobori, T. Ohashi, M., Ichikawa, M. (1965). The interaction of two collinear asymmetrical elastic cracks, *Report of the research institute for strength and fracture of materials*, **7** (2), 33-39.
- (ZAO, 1985)  
Zahoor A: (1985) Closed form expressions for fracture mechanics analysis of cracked pipes, *J Pressure Vessel Technology*, **107**, N2, 203-205, (Ref for BS7910).
- (ZHC, 2000)  
Zhu, X. K. and Chao, Y. J. (2000) Fully plastic crack-fields for CCP and DECP specimens under tension in non-hardening materials, *Int. J. Solids Structures*, **37**, 577-598.
- (ZVE, 1990)  
Zvezdin Y I: (1990) Handbook - Stress intensity and reduction factors calculation, *Central Research Institute for Technology of Machinery Report MR 125-01-90*, Moscow, (Ref for R6).

## REFERENCES DU CHAPITRE 2

### ARTICLES ET LIVRES

- (AZU, 2017)  
Azuma, K. and Li, Y. (2017) Interaction factors for two elliptical embedded cracks with a wide range of aspect ratios, *AIMS Materials Science*, **4**(2): 328-339.
- (BEZ, 2004)  
Bezensek B. & Hancock JW. (2004) The Re-characterisation of Complex Defects, Part I: Fatigue and Ductile tearing, *Engng. Fract. Mech.*, **71**, 1000-1020.
- (CHA, 2020)  
Chapuliot S. (2020) Calculs aux éléments finis de fissures elliptiques coplanaires. Communication privée.
- (CHB, 2013)  
Chapuliot S., Blouin, A. (2013) Determination of an interaction rule for two defects submitted to a mode I of fracture in an infinite media, *Transactions, SMiRT-22, San Francisco, California, USA - August 18-23*.

(DAV, 2022)

David, L., Lazarus, V. (2022) On the key role of crack surface area on the lifetime of arbitrarily shaped flat cracks, *International Journal of Fatigue*, 154, 106512.

(DUL, 2019)

Dulieu, P., Lacroix, V., Hasegawa, K. (2019) Generic proximity rules for multiple radially oriented planar flaws: technical basis of code case n-877 revision 1 (2019), *Proceedings of the ASME 2019 Pressure Vessels & Piping Conference, PVP2019*, July 14-19, San Antonio, Texas, USA.

(DUL, 2020)

Dulieu, P., Lacroix, V., Hasegawa, K. (2020) assessment of flaw interaction under combined tensile and bending stresses: suitability of ASME code case n°877-1, *Proceedings of the ASME 2020 Pressure Vessels & Piping Conference PVP2020*, August 3, Virtual, Online

(HAN, 2019)

Han, Z. C.; Qian, C. F.; Tang, L. Q.; Li, H. F. (2019) Determination of the enhancement or shielding interaction between two parallel cracks under fatigue loading. *Materials*, 12, 1331.

(HAN, 2020)

Han, Z.; Qian, C.; and Li, H. (2020) Study of the shielding interactions between double cracks on crack growth behaviors under fatigue loading. *Metals*, 10, 202.

(ISN, 1983)

Isida, M. and Noguchi, H. (1983). Analysis of three-dimensional crack problems using body force method. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, 49, 707–717 (in Japanese).

(ISN, 1984)

Isida, M., Noguchi, H. (1984) Tension of a plate containing an embedded elliptical crack, *Engineering Fracture Mechanics*, 20, No. 3, 387-408.

(KAM, 2006)

Kamaya, M., (2006). Flaw Proximity Rules for Parallel Surface Cracks Based on Elastic, Elastic-Plastic Fracture Mechanics and Limit Load Analyses. *Proceedings of PVP2006-ICPVT-11 2006 ASME Pressure Vessels and Piping Division Conference*. 1–8.

(LAU, 1843)

In De Marçay, F. (2018). Analyse Complexe, Homotopies, Séries de Laurent, Fonctions méromorphes, Département de Mathématiques d'Orsay Université Paris-Saclay, France.

(LAZ, 2011)

Lazarus V. (2011) Perturbation approaches of a planar crack in Linear Elastic Fracture Mechanics: A review. *J Mech Phys Solids*, 59 (2), 121–44.

(LAP, 1991)

Lam, K.Y., Phua, S. P. (1991) Multiple crack interaction and its effect on stress intensity factor, *Engineering Fracture Mechanics*, 40, Issue 3, 585-592.

(LCP, 1991)

Lam, K. Y, Cotterell, B and Phua S-P (1991) Statistics of Flaw Interaction in Brittle Materials, *J Am Ceram Soc.*, 74 [Z] 352-57.

(MAQ, 2013)

Ma Q, Levy C, Perl M (2013) A LEFM Based study on the interaction between an edge and an embedded parallel crack. *ASME 2013 Pressure Vessels and Piping Conference, July 14-18, 2013*, Paris, France. <https://doi.org/10.1115/PVP2013-97083>.

(MAQ, 2019)

Ma Q, Perl M, Levy C (2019) Stress intensity factors for an edge crack interacting with an embedded parallel crack for a finite plate under pure bending. *ASME 2019 Pressure Vessels and Piping Conference, July 14-19*, San Antonio, TX, USA. <https://doi.org/10.1115/PVP2019-93248>.

(MIN, 2019)

Mindlin, R. D. (1936) Force at a point in the interior of a semi-infinite solid. *Physics*, 7, 195

(NOD, 1999)

Noda, A-K, Kobayashui, K., and Yaguishita, K. (1999) Variation of mixed modes stress intensity factors of an inclined semi-elliptical surface crack, *International Journal of Fracture*, 100, 207–225.

(MUR, 1996)

Murakami, Y. (1996) *Stress Intensity Handbook*. Pergamon Press.

(THO, 2017)

Thomas, R. N., Paluzni, A. and Zimmerman, R. W. (2017) Quantification of Fracture Interaction Using Stress Intensity Factor Variation Maps, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 122.

(WAN, 1992)

Wang, T. C., Ehrlacher A. (1992) Micromechanics of elastic solids weakened by a large number of cracks, *Engineering Fracture Mechanics*, 43, No. 5, 707-724.

(ZHG, 2020)

Zhao, G. (2020) Numerical Comparison Research on the Solution of Stress Intensity Factors of Multiple Crack Problems, *Advances in Pure Mathematics*, 10, 706-72

(ZHU, 2020)

Zhu, D.-J. (2020) Stress intensity factor and interaction analysis of offset parallel cracks in brittle solids, *European Journal of Mechanics / A Solids*.

## REFERENCES DU CHAPITRE 3

### CODES ET FFS

(ASME, 2005, 2015, 2022)

ASME B&PV Code Section XI: Rules for In-service Inspection of Nuclear Power Plant Components, (Addenda 2005, 2015).

(RCC-M, 2020)

RCC-M Code, 2020 Edition, AFCEN, Paris.

(RSEM, 2010, 2020)

RSE-M (2010 Addenda, 2020) Règles de surveillance en exploitation des matériels mécaniques REP, Edition AFCEN, Paris, Annexe 5.4-11.

### ARTICLES ET LIVRES

(ABS, 1964)

Abramowitz, M. and Stegun, I. Eds (1964) *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, NBS Applied Mathematics Series 55, National Bureau of Standards, Washington, DC.

- (ANI, 2020)  
Anis, S., Koyama, M., Hamada, S. Noguchi, H. (2020) *Simplified Stress Field determination for an Inclined Crack and Interaction between Two Cracks under Tension*, Theoretical and Applied Fracture Mechanics, February.
- (AZU, 2017)  
Azuma, K. and Li, Y. (2017) *Interaction factors for two elliptical embedded cracks with a wide range of aspect ratios*, AIMS Materials Science, 4(2): 328-339.
- (BUE, 1970)  
Bueckner, H.F (1970) A novel principle for the computation of stress intensity factor, *Zeit. Angew Math. Mech*, 50 , 129-146.
- (CAR, 1545)  
Cardan, J. (1545) *Ars Magna* (Girolamo Cardano).
- (CAS, 2020)  
Cast3M, *Commissariat à l'Energie Atomique*, <http://www-cast3m.cea.fr/>.
- (CHA, 2020)  
Chapuliot S. (2020) *Calculs aux éléments finis de fissures elliptiques coplanaires*, communication privée.
- CHB, 2013)  
Chapuliot S., Blouin, A. (2013) *Determination of an interaction rule for two defects submitted to a mode I of fracture in an infinite media*, 22nd Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, San Francisco, California, USA - August 18-23. Division IX
- (CHB, 2018)  
Chapuliot, S., Blouin, A. (2018) *Definition and validation of an interaction rule for two cracks submitted to a complex loading*, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 160, 34–42.
- (CHC, 1995)  
Chen W. H., Chen T. C. (1995) *An efficient dual boundary-element technique for a 2-dimensional fracture problem with multiple cracks*. *Int J Numer Methods Eng*, 38 (10), 1739–1756.
- (CHM, 2002)  
Chang, C-Y, Ma, C-C (2002) *The Mixed-Mode Fracture Analysis of Multiple Embedded Cracks in a Semi-Infinite Plane by an Analytical Alternating Method*, *Journal of Pressure Vessel Technology*, 124, November, 446-456.
- (CHN, 1985)  
Chen, Y. Z. (1995) *Hypersingular integral equation approach for the multiple crack problem in an infinite plate*, *Acta Mechanica*, 108, 121–131.
- (COL, 1963)  
Collins, W.D. (1963) *Some coplanar punch and crack problems in three-dimensional elastostatics*, *Proc. Roy. Soc., Series A* 274, 507-528.
- (COE, 1972)  
Cook, T. S. and Erdogan, F. (1972) *Stresses in bonded materials with a crack perpendicular to the interface*, *Int. J. Engng Sci.* 10, 677-69.
- (DEE, 2018)  
Delegh R. (2018) *Calculs aux éléments finis de fissures elliptiques coplanaires*, communication privée.



- (DUL, 2015)  
Dulieu, P., Bogaert, A. S., and Lacroix, V. (2015) Proximity criteria for quasi-laminar flaws based on 3d calculations, Transactions, SMiRT-23, Manchester, United Kingdom - August 10-14, Division II.
- (DUL, 2016)  
Dulieu, P., Lacroix, V. (2016) Mutual interaction of stress concentration and stress intensity factor between semi-circular notch and crack, *AIMS Materials Science*, **3** (4): 1520-1533.
- (DLH, 2019)  
Dulieu, P, Lacroix, V., Hasegawa, K. (2019) Generic proximity rules for multiple radially oriented planar flaws: technical basis of code case n-877 revision 1, *Proceedings of the ASME 2019 Pressure Vessels & Piping Conference, PVP2019, July 14-19, San Antonio, Texas, USA.*
- (ERD, 1962)  
Erdogan, F. (1962) *On the Stress Distribution in Plates with Collinear Cuts under Arbitrary Loads, Proc. 4th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., 547-553.*
- (EGR, 1973)  
Erdogan F, Gupta GD, Ratwani M. (1973) Interaction between a circular inclusion and an arbitrarily oriented crack, *Technical Report NASA TR-73-10*, May, 1-33.
- (EGR, 1974)  
Erdogan F, Gupta GD, Ratwani M. (1974) Interaction between a circular inclusion and an arbitrarily oriented crack. *ASME J Appl. Mech*, December, **41**, 4, 1007–13.
- (FAB, 1987)  
Fabrikant, V. I. (1987) Close interaction of coplanar circular cracks in an elastic medium, *Acta Mechanica*, **67**, 39-59.
- (FRA, 1999)  
Note Framatome EER.99.1430 (1999) Dictionnaire de calculs 2D.
- (GHO, 2020)  
Ghorbanpoor, R., Saberi-Nadjaf, J., Long, N. M. A. N., Erfanian, M. (2020) Stress intensity factor for multiple cracks in an infinite plate using hypersingular integral equations, *Computational Methods for Differential Equation*, 8, No. 1, 69-84.
- (GIL, 2022)  
Gilles, Ph. and Chapuliot (2022) Closed form formulae for two interacting equal parallel through-wall cracks embedded in an infinite elastic medium under normal tension, *Transactions, SMiRT-26, Berlin/Postdam, Germany Division II*, July 10-15.
- (GOM, 2009)  
Gommerstadt, B. I. (2009) Potential Energy of Two Collinear Cracks, *ICF12*. 12-17 July, Ottawa, Ontario, Canada.
- (GOR, 2007)  
Gorbatikh, L., Lomov, S., Verpoest, I. (2007) on stress intensity factors of multiple cracks at small distances in 2-d problems, *Int J Fract*, **143**, 377–384.
- (GRA, 1994)  
Graham, G. A. C. and Lan, Q;(1994) Stress intensity factors for two offset parallel circular cracks: Part I - Infinite elastic solid, *J. Theor. Appl. Fract. Mech.* **20**, 227-237.
- (GRS, 1950)  
Green A. E. and Sneddon I. (1950) The distribution of stress in the neighborhood of a flat elliptical crack in an elastic solid, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **46**, 159-163.

- (HAE, 2003)  
Hasebe, N., Wang, X. and Kondo, M. (2003) Interaction between crack and arbitrarily shaped hole with stress and displacement boundaries, *International Journal of Fracture*, 119, 83-102.
- (HAN, 2020)  
Han, Z.; Qian, C.; and Li, H. (2020) Study of the shielding interactions between double cracks on crack growth behaviors under fatigue loading. *Metals*, 10, 202.
- (HAS, 2006)  
Hasegawa, K., Saito, K., Miyazaki, M. (2006) Alignment rule for non-aligned flaws at LEFM evaluation procedures, *J. of Pressure Vessel Technology*, 131.
- (HAS, 2009)  
Hasegawa, K., Saito, K., Miyazaki, M. (2009) Alignment rule for non-aligned flaws for fitness-for-service evaluation based on LEFM, *J. of Pressure Vessel Technology*, 131.
- (HAS, 2016)  
Hasegawa, K., Li, Y., Serizawac, R., Kikuchichi, M., Lacroix, V. (2016) Proximity factor on transformation from subsurface to surface flaw, 6th New Methods of Damage and Failure Analysis of Structural Parts, *Procedia Materials Science* 12, 36 – 41.
- (HUC, 1993)  
Hu, K. X., Chandra, A. (1993) Interactions among cracks and rigid lines near a free surface, *International Journal of Solids and Structures*, 30, Issue 14, 1919-1937.
- (ISI, 1970)  
Isida, M. (1970) On the determination of stress intensity factors for some common structural problems, *Engineering Fracture Mechanics*, 2, 61-79.
- (ISI, 1973)  
Isida, M. (1973) Analysis of Stress Intensity Factors for the Tension of a Centrally Cracked Strip with Stiffened Edges, *Engineering Fracture Mechanics*, 5, 647-655.
- (ISI, 1985)  
Isida M, Hirota K, Noguchi H, and T. Yoshida (1985) Two parallel elliptical cracks in an infinite solid subjected to tension. *Int J Fracture* 27: 31–48.
- (ISI, 1994)  
Isida, M., Igawa, H. (1994) Some asymptotic behavior and formulae of stress intensity factors for collinear and parallel cracks under various loadings. *Int. J. Fract.*, 65, 247–259.
- (ISN, 1983)  
Isida M. and Noguchi H. (1983) *Transactions of JSME, A*, 49-442, 707.
- (JIA, 1990)  
Jiang, Z. D., Zegloul, A. Bezine, G. and J. Petit, J. (1990) Stress intensity factors of parallel cracks in a finite width sheet. *Engineering Fracture Mechanics*. 35, 1073-1079.
- (JIA, 1992)  
Jiang, Z. D., Petit J. and Bezine, G. (1992) An investigation of stress intensity factors for two unequal parallel cracks in a finite width plate. *Engng Fracture Mech.* 42, N°1, 129-138.
- (KAC, 1985)  
Kachanov, M. (1985) A simple technique of stress analysis in elastic solids with many cracks. *Int. J. Fract.* 28, 11–19.
- (KAC, 1993 ou 1994)  
Kachanov, M. (1994) Elastic solids with many cracks and related problems, in *Advance in applied mechanics*, Academic Press, 7 Dec. - 460 pages.

- Kachanov, M. (1994) Elastic solids with many cracks and related problems. *Advances in Applied Mechanics* 30, 259–445.
- (KAL, 1989)  
Kachanov, M., Laures, J.-P (1989) Three-dimensional problems of strongly interacting arbitrarily located penny-shaped cracks, *International Journal of Fracture* 41 (4):289-313.
- (KAS, 1975)  
Kassir, M. K. and Sih, G. C. (1975) *Methods of analysis and solutions of crack problems, Vol. 2 Three-dimensional crack problems*, Noordhoff International Publishing, Leyden, The Netherlands.
- (KAY, 1974)  
Kamei, A. and Yokobori, T. (1974) Some results on the stress intensity factors of cracks and/or slip bands system, *Reports of the Research Institute for Strength and Fracture of Materials, Tohoku Univ.*, 10, n. 2, 29-93 (in Japanese).
- (KIK, 2010)  
Kikuchi, M., Suga, K. and Kawasaki, S. (2010) Simulation of Ductile Fracture of Multiple Flaws, *2010 ASME Pressure Vessels and Piping Division Conference, PVP2010*, paper 25453.
- (KIK, 2013)  
Kikuchi, M., Yamada, S., Seizawa, R., Yulong, L. (2013) Evaluation of growth of subsurface crack by fatigue - simulation of penetration of internal flaw to surface of the structure, *Proceedings of the ASME 2013 Pressure Vessels and Piping Conference PVP2013-97580, July 14-18, Paris, France*.
- (KOB, 1965)  
Kobayashi, A.S., Ziv, M. & Hall, L.R. (1965) Approximate stress intensity factor for an embedded elliptical crack near two parallel free surfaces, *Int J Fract*, 1, 81-95.
- (LAC, 2015)  
Lacroix, V., Dulieu, P., and Bogaert, A.-S. (2015) Alternative Characterization Rules for Quasi-Laminar Flaws based on 3D X-FEM Calculations, *PVP2015-45792, Proceedings of ASME 2015 Pressure Vessels and Piping Division Conference, July, Boston (USA)*.
- (LAC, 2016a)  
Lacroix, V. (2016) *Assessment and improvement of flaw characterization rules in fitness-for-service codes using extended finite element method* [Thesis Yokohama National University].
- (LAC, 2016b)  
Lacroix, V., Katsumata, G., Li, Y., and Hasegawa, K., (2016) Effect of thickness of re-characterization of surface to surface flaw: Application on piping and vessels, *ASME PVP Conference, PVP2016*, paper 63768, Vancouver, Canada.
- (LAC, 2018)  
Lacroix, V., Dulieu, P., Blasset, S., Tiete, R., Li, Y., Hasegawa, K., Bamford, W., Udyawar, A. (2018) Rules for flaw interaction for subsurface flaws in operating pressurized vessels: technical basis of code case N-877, *PVP2018-84120, Proceedings of ASME 2018 Pressure Vessels and Piping Division Conference, July 15-20, Prague (Czech Republic)*.
- (LAN, 1994)  
Lan Q. (1994) *Some elastic multi-crack and multi punch problems* [Thesis Simon Fraser University, Burnaby, Canada].
- (LAK, 1991)  
Laures, J-P and Kachanov, M. (1991) Three-dimensional interactions of a crack front with arrays of penny-shaped microcracks, *International Journal of Fracture*, 48, 255-279.

- (LOD, 2005)  
Lo, S. H., Dong, C.Y., Cheung, Y.K. (2005) Integral equation approach for 3D multiple-crack problems, *Engineering Fracture Mechanics*, 72, 1830–1840.
- (MHC, 2020)  
Mathcad (2020) Logiciel permettant de réaliser des calculs scientifiques, PTC.
- (MOU, 1999)  
Moussa, W.A.; Bell, R.; Tan, C.L. (1999) The interaction of two parallel non-coplanar identical surface cracks under tension and bending. *Int. J. Press. Vessel. Piping*. 76, 135–145.
- (MOU, 2000)  
Moussa, W. A. M. (2000) *Finite Element Study of the Interaction and Shielding Effects of Multiple Cracks in Three Dimensions* [Thesis Carleton University, Ottawa, Ontario, Canada].
- (MOR, 2014)  
Morfeo 2.3.1, User Manual, GeonX-Cenaero, May 2014.
- (MYA, 1989)  
Miyazaki H, Kaneko H, Murakata T. (1989) Stress intensity factor analyses of interacting elliptical cracks using line-spring boundary element method. *Int. J. Press. Vess. Piping*, 38, 1–14.
- (MUR, 1996)  
Murakami, Y. Stress Intensity Handbook. Pergamon Press.
- (NIM, 1974)  
Nisitani H, Murakami Y (1974) *Stress intensity factors of an elliptical crack or a semi-elliptical crack subject to tension*. *Int J Fracture* 10: 353–368.
- (NIK, 1998)  
Nishioka, T. and Kato, T. (1998) An alternating method based on the VNA solution for analysis of damaged solid containing arbitrary distributed elliptical micro-cracks, *Int J Fracture* 89, 159–192.
- (NOG, 1997)  
Noguchi, H., Smith, R. A, Carruthers, J. J. and Gilchrist, M. D.(1997) Stress intensity factors of embedded elliptical cracks and an assessment of the ASME XI defect recharacterisation criteria, *Int.J. Press. Ves. & Piping*, 70, 69-76
- (PAA, 2013)  
Panasyuk, V. V., Savruk, M. P. and Kazberuk, A. (2013) stress concentration near sharp and rounded v-notches, *Materials Science*, 49, No. 6, May, 2014 (Ukrainian Original Vol.49, No. 6, November–December 2013).
- (RAN, 2002)  
Rangasamy, V. Wang, X. and Bell, R. (2002) on the analysis of crack interactions using weight function method, *Proceedings of OMAE02 21st International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, June 23-28, Oslo, Norway, OMAE2002-28220.
- (RAO, 2016)  
Rao, K. R., 2016, Global Application of the ASME Boiler & Pressure Vessel Codes, Chapter 19, *Global Harmonization of Flaw Modeling/Characterization*, New York, 2016.
- (ROY, 1994)  
A. Roy, M. Chatterjee (1994) Interaction between coplanar elliptic cracks - I. Normal loading, *Int. Jour. Sol. Struct.*, 31, 1, 127-144.
- (SAD, 1956)  
Sadovsky, M., Troy, N. Y.(1956) Stress concentration caused by multiple punches and cracks, *Journal of Applied Mechanics*, 23, 80–84.

(SAM, 2022)

Samadian K., Adriano, V., Huising, O. J., De Waele, W., Herterlé, S. (2022) Interaction between surface breaking and embedded circumferential flaws in tension loaded (pressurized) steel pipes, *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 198, 104657

(SNE, 1946)

Sneddon, L. N. (1946) *Proceedings of the Royal Society of London, A-187*, 229.

(SYSTUS™, 2020)

- Note ESI Group G-CS-20.16-A – Validation Report – Industrial Tests – SYSTUS 2020.0.
- Note ESI Group G-CS-20.11-A – SYSWORLD™ 2020.0 Numerical Validation Report.

(THO, 2017)

Thomas, R. N., Paluzni, A. and Zimmerman, R. W. (2017) Quantification of Fracture Interaction Using Stress Intensity Factor Variation Maps, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 122.

(TPI, 1973 – 2000)

Tada, H., Paris, P. C. and Irwin, G. (1973, 2000) *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Del Research Corporation.

(UKA, 1991a)

Ukadgaonker, V. G. and Naik, A. P. (1991) Effect of interaction of two arbitrarily oriented cracks, Part I, *Int. J. Frac.*, 51, 219-230.

(UKA, 1991b)

Ukadgaonker, V. G. and Naik, A. P. (1991) Effect of interaction of two arbitrarily oriented cracks, Part II, *Int. J. Frac.*, 51, 285-304.

(WAG, 2022)

Wang, H., Li, H., Tang, L., Ren, X., Meng, Q., Zhu, C. (2022) Fracture of two three-dimensional parallel internal cracks in brittle solid under ultrasonic fracturing, *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, 14, 757-769.

(WAR, 2004)

Warpinski, N. R. and Wolhart, S. L. and Wright, C. A. (2004) *Analysis and Prediction of Microseismicity Induced by Hydraulic Fracture in SPE Journal – SPE J.* 9. 24-33. 10.2118/87673-PA.

(WES, 1939)

Westergaard, H. M. (1939) Bearing Pressures and Cracks, *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.*, 6, N° 2, 49-53.

(WIL, 1949)

Willmore, T. J. (1949) The distribution of stress in the neighborhood of a crack, *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 2, 53-63.

(XIA, 1999)

Xiao, Z. M., Lim, M. K. and K. M. Liew, M. K. (1994) Stress intensity factors for two coplanar penny-shaped cracks under uniaxial tension, *Inr. J. Engng Sci.* Vol. 32. No. 2, 303-311.

(YAN, 2005)

Yan, X. (2005) Microdefect interacting with a finite main crack, *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 40, 421.

(YAN, 2007)

Yan, X. (2007) Stress intensity factors for interacting cracks and complex crack configurations in linear elastic media, *Engineering Failure Analysis*, 14, 179–195.

(YAN, 2010)

Yan, X. (2010) A boundary element analysis for stress intensity factors of multiple circular arc cracks in a plane elasticity plate, *Applied Mathematical Modelling*, 34, 2722–2737.

(YIR, 2022)

Yi, W. Rao, Q. Zhu, W. Shen, Q., Li, Z. and Ma, W. (2022) Interacting Stress Intensity Factors of Multiple Elliptical-Holes and Cracks Under Far-Field and Arbitrary Surface Stresses, *Adv. Appl. Math. Mech.*, 14, 125-154.

(YOK, 1965)

Yokobori, T. Ohashi, M., Ichikawa, M. (1965). The interaction of two collinear asymmetrical elastic cracks, *Report of the research institute for strength and fracture of materials*, 7 (2), 33-39.

(ZHA, 2006)

Zhan, S. G., Wang, T. C., (2006) Interactions of penny-shaped cracks in three-dimensional solids. *Acta Mechanica Sinica*, 22, (4), 341–353.

## REFERENCES DU CHAPITRE 4

### CODES ET FFS

(R6, 2009)

R6: Assessment of the integrity of structures containing defects. British Energy Generation, Report R6 Revision 4, including Amendment 7 ; 2009.

(RSEM, 2018)

Règles de Surveillance en Exploitation des matériels Mécaniques des îlots nucléaires REP (RSEM), Edition 2018.

### ARTICLES ET LIVRES

(AIN, 1984)

Ainsworth, R.A. (1984) The assessment of defects in structures of strain-hardening material. *Engineering Fracture Mechanics*, 19 (4), 633-642.

(AST, 2017)

Code\_Aster (version 2017), EDF R&D, code général pour l'étude du comportement mécanique des structures diffusé sous licence GNU GPL, <http://www.code-aster.org> Domaine d'application des opérateurs de mécanique de la rupture du Code\_Aster et conseils d'utilisation, Manuel d'utilisation, Fascicule U 2 05 : Mécanique de la rupture et de l'endommagement, document U 2 05.01.

(BEZ, 2003)

Bezenšek, B. (2003) *Elastic-plastic crack problems in the ductile-brittle transition* [PhD thesis, Univ. of Glasgow, UK.]

(BEZ, 2006)

Bezensek B. and McCulloch E. (2006) Interaction of twin non-aligned through-wall flaws under elasticplastic conditions, *Proc. Int. Conf. ASME 2006 Pressure Vessels and Piping, Vancouver, BC, Canada, July*; Paper No. PVP06-ICPVT11-93373

(BEZ, 2007)

Bezensek B. (2007) Flaw Alignment Criteria based on the Limit Load Solutions for Non-aligned Through-wall Flaws, 2007 ASME Pressure Vessel and Piping Conference, PVP2007-26041.

- (BEZ, 2008)  
 Bezensek, B., Miyazaki, K. (2008) Alignment criteria for through-wall flaws in plates and pipes, *Proceedings of PVP2008 2008 ASME Pressure Vessels and Piping Division Conference July 27-31*, Chicago, Illinois, USA.
- (BIS, 2015)  
 Bidokhti, A. and Shahani, A., R. (2015) Interaction Analysis of Non-aligned Cracks Using Extended Finite Element Method, *Latin American Journal of Solids and Structures* 12, 2439-2459.
- (DEE, 2018)  
 Deleigh R. (2018) Calculs aux éléments finis de fissures elliptiques coplanaires, communication privée.
- (DEB, 2012)  
 Debourdeaux E. (2012) rapport de stage ENPC à Framatome.
- (ERD, 1962)  
 Erdogan, F. (1962) *On the Stress Distribution in Plates with Collinear Cuts under Arbitrary Loads*, *Proc. 4th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, 547-553.
- (FRA, 1999)  
 Note Framatome EER.99.1430 (1999) Dictionnaire de calculs 2D.
- (GFB, 2024)  
 Gilles, Ph., Feulvarch, E., Bergheau, J. M. (2024) Limit and reference loads for plates containing twin parallel through-wall cracks, to be submitted to *Int. Jour. of Fracture*.
- (GIL, 2018)  
 Gilles, Ph. (2018) Improvement of J estimation schemes based on reference stress for linear hardening behavior, *Proceedings of the ASME Pressure Vessels & Piping Division Conference PVP2018, July 17-20*, Prague, Czech Republic.
- (GUR, 1977)  
 Gurson, A. L. (1977) Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part I —Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media, *Transaction of the ASME. Journal of Engineering Materials and Technology*, 99, 2-15.
- (HAS, 2001)  
 Hasegawa K., Kanno S. and Miyazaki K., (2001) Interaction criteria for multiple flaws on the basis of stress intensity factors”, *Proc. ASME PVP2001 conference*, PVP-vol. 422, 23-29.
- (HAS, 2005)  
 Hasegawa K., Miyazaki K. and Saito K. (2005) Development of Flaw Interaction Rules for Ductile Behaviour, Presentation for the ASME Code Section XI, WG on Pipe Flaw Evaluation, Orlando, FL, May.
- (HAS, 2011)  
 Hasegawa, K., Miyazaki, K., Saito, K. (2011) Plastic collapse loads for flat plates with dissimilar non-aligned through-wall cracks, *Proceedings of the ASME 2011 Pressure Vessels & Piping Division Conference PVP2011, July 17-21*, Baltimore, Maryland, USA.
- (HIL, 1950)  
 Hill, R. (1950) *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press, London.
- (IWA, 2013)  
 Iwamatsu, F., Miyazaki, K., Takazawa, H., Saito, K. (2013) Evaluation Procedure of Limit Load for Non-aligned Multiple Flaws, *Proceedings of the ASME 2013 Pressure Vessels and Piping Conference PVP2013 July 14-18*, Paris, France.

- (KIK, 2010)  
Kikuchi, M., Suga, K. and Kawasaki, S. (2010) *Simulation of Ductile Fracture of Multiple Flaws*, 2010 ASME Pressure Vessels and Piping Division Conference, PVP2010-25453.
- (KOT, 2014)  
Kotousov, A. Chang, D. (2014) Local plastic collapse conditions for a plate weakened by two closely spaced collinear cracks, *Engineering Fracture Mechanics*, 127, 1–11
- (LEC, 1988)  
Lemaitre J., Chaboche J.-L. (1988) *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, Paris.
- (KUM, 1981)  
Kumar, V., German, M.D., and Shih, C.F. (1981) An Engineering Approach for Elastic-Plastic Fracture Analysis, EPRI Report NP-1931, Electric Power Research Institute, Palo Alto, CA.
- (MEA, 2015)  
Meek, C. Ainsworth, R.A. (2015) The effects of load biaxiality and plate length on the limit load of a centre-cracked plate, *Engineering Fracture Mechanics* 147 (2015) 306–317.
- (MIY, 2009)  
Miyazaki, K., Saito, K. Hasegawa, K. and Bezensek, B. (2009) Experimental study of ductile fracture for non-aligned multiple flaws in a plate, *ASME Pressure Vessels and Piping Division Conference, PVP2009*, Paper 77103.
- (MIL, 1988)  
Miller A. G. (1988) Review of Limit Loads of Structures Containing Defects, *Int J Pres Ves Piping*, 32, 197-327;
- (MOO, 2004)  
Moon, S-I, Chang, Y-S, Kim, Y-J, Lee, J-H, Song, M-H, Choi, Y-H, Kim, J-S (2004) Plastic collapse behavior for thin tubes with two parallel cracks, *Korean Nuclear Society Autumn Meeting, Korea*.
- (PRA, 1921)  
Prandtl, L. (1921) Über die Eindringungsfestigkeit (Härte) plastischer Baustoffe und die Festigkeit von Schneiden, *Z. Angew. Math. Mech.* 1, 15-20.
- (RAN, 2007)  
Ranganath, S. and Carter, R. (2007) Structural Capability of Austenitic Piping and Shells with Parallel Offset Cracks, *ASME Pressure Vessel and Piping Conference, PVP2007*, paper 26688.
- (RIC, 1968c)  
Rice, J., R. (1968) *Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracture*, Chapter 3 of Fracture: An Advanced Treatise (Vol. 2, Mathematical Fundamentals) (ed. H. Liebowitz), Academic Press, N.Y., 191-311.
- (RIC, 1972b)  
Rice, J.R. and Levy, N. (1972), The part-through surface crack in an elastic plate, *Journal of Applied Mechanics*, 39, No.1, March 1972, pp: 185-194.
- (RIC, 1985)  
Rice, J.R., (1985), First-order variation in elastic fields due to variation in location of a planar crack front, *Journal of Applied Mechanics*, 52, 571-579.
- (SAL, 1973)  
Salençon J. (1973) Théorèmes généraux de l'analyse limite, *Revue Française de Mécanique*, N°47
- (SAM, 2017)  
Samadian, K., Héterlé, S., De Waele W. (2017) A novel flaw alignment approach based on the analysis of bands of maximum strain using full field deformation measurements, *2<sup>nd</sup> International Conference on Structural Integrity, ICSI 2017, 4-7 September*, Funchal, Madeira, Portugal.



(SYSTUS, 2020)

- Note ESI Group G-CS-20.16-A – Validation Report – Industrial Tests – SYSTUS 2020.0.
- Note ESI Group G-CS-20.11-A – SYSWORLD™ 2020.0 Numerical Validation Report.

(UNG, 1995)

Unger, D., J. (1995) Analytical fracture mechanics, Academic Press, Inc, USA.

## REFERENCES DU CHAPITRE 5

### ARTICLES ET LIVRES

(AST, 2017)

Code\_Aster (version 2017), EDF R&D, code général pour l'étude du comportement mécanique des structures diffusé sous licence GNU GPL, <http://www.code-aster.org> Domaine d'application des opérateurs de mécanique de la rupture du Code\_Aster et conseils d'utilisation, Manuel d'utilisation, Fascicule U 2 05 : Mécanique de la rupture et de l'endommagement, document U 2 05.01.

(AZU, 2017)

Azuma, K. and Li, Y. (2017) Interaction factors for two elliptical embedded cracks with a wide range of aspect ratios, *AIMS Materials Science*, 4(2): 328-339.

(BEZ, 2007)

Bezensek, B. (2007) Flaw Alignment Criteria based on the Limit Load Solutions for Non-aligned Through-wall Flaws, *2007 ASME Pressure Vessel and Piping Conference, PVP2007-26041*.

(CHA, 2020)

Chapuliot S. (2020) Calculs aux éléments finis de fissures elliptiques coplanaires, communication privée.

(CHB, 2018)

Chapuliot, S., Blouin, A. (2018) Definition and validation of an interaction rule for two cracks submitted to a complex loading, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 160, 34–42.

(COB, 2019)

Coules, H. A., Bezensek B. (2019) Analysis of defect interaction in inelastic materials, *Proceedings of the ASME 2019 Pressure Vessels & Piping Conference PVP2019, July 14-19, 2019, San Antonio, Texas, USA*.

(DEB, 2012)

Debourdeaux E. (2012) rapport de stage ENPC à Framatome.

(DEE, 2018)

Deleigh R. (2018) Calculs aux éléments finis de fissures elliptiques coplanaires, communication privée.

(DEL, 2002)

Le Delliou, PL, & Barthelet, B. (2002) Influence Coefficients to Calculate Stress Intensity Factors for an Elliptical Crack in a Plate, *Proceedings of the ASME 2002 Pressure Vessels and Piping Conference. Fatigue, Fracture and Damage Analysis, Volume 1*. Vancouver, BC, Canada. August 5–9, 85-92. ASME.

(DES, 1981)

Destuynder P. et Djaoua M. (1981) Sur une interprétation mathématique de l'intégrale de Rice en théorie de la rupture fragile. *Math. Meth. In the Appl. Sci.*, 3, 70-87, 1981.

- (DEV, 1999)  
Delvallée, I. (1999) *Nocivité d'un défaut semi-elliptique d'orientation complexe dans une coque cylindrique fermée soumise à une pression interne*, [Thèse Université de Lille 1, France].
- (FRA, 1999)  
Note Framatome EER.99.1430 (1999) Dictionnaire de calculs 2D.
- (GEN, 2005)  
Geniaut, S., Massin, P. and Moes, N. (2005) Evaluation of stress intensity factors with g-theta method and level sets in code\_ASTER, *11th International Conference of Fracture*, Turin, Italy.
- (GIL, 2018)  
Gilles, Ph. (2018) Improvement of J estimation schemes based on reference stress for linear hardening behavior, *Proceedings of the ASME Pressure Vessels & Piping Division Conference PVP2018, July 17-20*, Prague, Czech Republic.
- (GOM, 2009)  
Gommerstadt, B. I. (2009) *Potential Energy of Two Collinear Cracks*, ICF12.
- (HAS, 2009)  
Hasegawa, K. et al.: (2009) *Alignment rule for non-aligned flaws for fitness-for-service evaluation based on LEFM*, *J. of Pressure Vessel Technology*, 131.
- (HAS, 2011)  
Hasegawa, K., Miyazaki, K., Saito, K. (2011) Plastic collapse loads for flat plates with dissimilar non-aligned through-wall cracks, *Proceedings of the ASME 2011 Pressure Vessels & Piping Division Conference PVP2011, July 17-21*, Baltimore, Maryland, USA.
- (ISI, 1985)  
Isida M, Hirota K, Noguchi H, and T. Yoshida (1985) *Two parallel elliptical cracks in an infinite solid subjected to tension. Int J Fracture* 27, 31–48.
- (ISN, 1984)  
Isida, M. and Noguchi, H., (1984) Tension of a plate containing an embedded elliptical crack, *Engineering Fracture Mechanics*, 20, No. 3, 387-408.
- (LAC, 2015)  
Lacroix, V., Dulieu, P., Bogaert, A. (2015) Alternative characterization rules for quasi-laminar flaws based on 3D X-FEM calculations, *Proceedings of ASME Pressure Vessels & Piping conference (PVP 2015)*, PVP2015-45792, Boston, USA.
- (LAC, 2018)  
Lacroix, V., Dulieu, P., Blasset, S., Tiete, R., Li, Y., Hasegawa, K., Bamford, W., Udyawar, A. (2018) Rules for flaw interaction for subsurface flaws in operating pressurized vessels: technical basis of code case N-877, *PVP2018-84120, Proceedings of ASME 2018 Pressure Vessels and Piping Division Conference, July 15-20*, Prague (Czech Republic).
- (LEI, 2004)  
Lei, Y., Budden P.J. (2004) Limit load solutions for plates with embedded cracks under combined tension and bending, *Int. J. Pres. Ves. Pip.* 81, 589–597.
- (LIR, 2012)  
Li, R.S., Gao, Z. L., Lei, Y. (2012) A global limit load solution for plates with embedded offset elliptical cracks under combined tension and bending, *J. Pres. Vessel Technol. Trans. ASME* 134, 11204–11211.
- (LVY, 2017)  
Lv, Y. J, Yang, J.G. Lei, Y., Gao, Z.L (2017) A global limit load solution for plates containing embedded off-set rectangular cracks under combined biaxial force/stress and through-thickness Bending, *Int. J. Pres. Ves. Pip.* 149, 93–107.

- (LIY, 2018)  
Li, Y.B., Lv, Y.J., Lei, Y., Gao, Z.L. (2018) Reference stress solutions for plates with embedded off-set elliptical cracks under combined biaxial forces and cross-thickness bending, *Int. J. Pres. Ves. Pip.* **165**, 90–103.
- (LIY, 2021a)  
Li, Y.B., Lv, Y.J., Lei, Y., Gao, Z.L. (2021) Structural integrity assessment of plates containing embedded cracks-Part I: finite element fracture analyses, *Int. J. Pressure Vessels Piping* **194**, 104486.
- (LIY, 2021b)  
Li, Y.B., Lv, Y.J., Lei, Y., Gao, Z.L. (2021) Structural integrity assessment of plates containing embedded cracks - Part II: developing guidance for limit load solutions, *Int. J. Pressure Vessels Piping* **194**, 104487.
- (MIY, 2009)  
Miyazaki, K., Saito, K. Hasegawa, K. and Bezensek, B. (2009) Experimental study of ductile fracture for non-aligned multiple flaws in a plate, *ASME Pressure Vessels and Piping Division Conference, PVP2009*, Paper 77103.
- (NAG, 2015)  
Nagai, M., Miura, N., Shiratori, M. (2015) Stress intensity factor solution for a surface crack with high aspect ratio subjected to an arbitrary stress distribution using the influence function method, *International Journal of Pressure Vessels and Piping* **131**, 2-9.
- (NIS, 1974)  
Nisitani H, Murakami Y (1974) Stress intensity factors of an elliptical crack or a semi-elliptical crack subject to tension. *Int J Fracture* **10**, 353–368.
- (RAN, 2002)  
Rangasamy, V. Wang, X. and Bell, R. (2002) on the analysis of crack interactions using weight function method, *Proceedings of OMAE 21st International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, June 23-28, Oslo, Norway, OMAE2002-28220*.
- (SEQ, 2018)  
Seah, T. T., Qian, X. (2018) An interaction factor to estimate the over-constraining effect in plates with co-planar cracks, *Engineering Fracture Mechanics* **199**, 13–28.
- (SYS, 2004)  
Mourgue, Ph. (2004) Calcul de G par la méthode Thêta numérisation dans SYSTUS, rapport LGSR96/2004/A, Framasoft-CSI.
- (SYS, 2020)  
Note ESI Group G-CS-20.16-A – Validation Report – Industrial Tests – SYSTUS 2020.0;  
Note ESI Group G-CS-20.11-A – SYSWORLDTM 2020.0 Numerical Validation Report.
- (TPI 1973)  
Tada, H., Paris, P. C. and Irwin, G. R. (1973) *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, 1st Ed. Del Research Corporation, Hellertown, PA, 1973.
- (TER, 1974)  
Terada, H. and Isida, M. (1974) Analysis of stress intensity factors for a finite plate with an eccentric crack, *Proc. Japan Soc. Mech. Engrs.*, n 740-2.
- (WEI, 2022)  
Weihe, S., Stumpfrock, L., Webe, U., Schopf, T., Gauder, P., Seidenfuss, M. (2022), *26th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*, Berlin/Potsdam, Germany, July 10-15, Division II.

(ZAX, 2014)

Zhang, Y. M., Arifin, M. Z., Xiao, Y. M., Zhang, W. G. and Huang, Z. H. (2014) Nonlinear elastic-plastic stress investigation for two interacting 3-D cracks in offshore pipelines, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials & Structures* 00, 1-11.

(ZFX, 2016)

Zhang, Y., Fan, M. and Xiao, Z. (2016) Nonlinear elastic-plastic stress investigations on two interacting 3-D cracks in offshore pipelines subjected to different loadings, *AIMS Materials Science* 3 (4): 1321-1339.

(ZHA 1989)

Zhao, W., Wu, X. R. and Yan, M. G. (1989) weight function method for three dimensional crack problems-i. basic formulation and application to an embedded elliptical crack in finite plates, *Engineering Fracture Mechanics* 34, No. 3, 593-7.

## REFERENCES DE LA CONCLUSION

(BRC, 1996)

Brenchich, A., Carpinteri, A. (1996) Interaction of a main crack with ordered distributions of microcracks: a numerical technique by displacement discontinuity boundary elements, *International Journal of Fracture* 76, 373-389.

(BRC, 1998)

Brenchich A and Carpinteri A (1998) Stress field interaction and strain energy distribution between a stationary main crack and its process zone. *Engineering Fracture Mechanics* 59, 797-814.

(BRI, 1960)

Bristow J. R. (1960) Microcracks, and the static and dynamic elastic constants of annealed and heavily coldworked metals. *British Journal of Applied Physics* 11, 81.

(CHZ 2000)

Chai, G., Zhang, K. (2000) Stress intensity factors for interaction of surface crack and embedded crack in a cylindrical pressure vessel, *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 77, 539-548.

(DOL, 1989)

Dolgopolsky, A., Karbhari, V. and Kwak, S. S. (1989) Microcrack induced toughening- an interaction model, *Acta Metallurgica* 37, 1349-1354.

(DUN, 2015)

Dündar, H., Ayhan, A. O. (2015) Three-dimensional fracture and fatigue crack propagation analysis in structures with multiple cracks, *Computers and Structures* 158, 259-27.

(GAL, 2017)

Galatolo, R. Lazzeri, J. R. (2017) Fatigue crack growth of multiple interacting cracks: Analytical models and experimental validation, *Fatigue Fract Eng Mater Struct.*, 1-14.

(KAC, 1993 ou 1994)

Kachanov, M. (1994) Elastic solids with many cracks and related problems, in *Advance in applied mechanics*, Academic Press, 7 Dec. - 460 pages.

Kachanov, M., 1994. Elastic solids with many cracks and related problems. *Advances in Applied Mechanics* 30, 259-445.

(KIK, 2016)

Kikuchi, M. (2016) Study on multiple surface crack growth and coalescence behaviors, *AIMS Materials Science* 3 (4): 1623-1631.

- (LAC, 2019)  
Lacroix, V., Dulieu, P. (2019) Quantification of the Conservatism in the Flaw Acceptability Assessment of Doel 3 and Tihange 2 RPVs Containing Hydrogen Flakes, *Proceedings of the ASME 2019 Pressure Vessels & Piping Conference PVP2019*, July 14-19, San Antonio, Texas, USA
- (LAM, 1993)  
Lam, K. Y., C. Wen, C. and Tao, Z. (1993) Interaction between microcracks and a main crack in a semi-infinite medium, *Engineering Fracture Mechanics* 44, 753-761.
- (LAP, 1991)  
Lam, K. Y., and Phua, S. P. (1991) Multiple Crack Interaction and its Effect on Stress Intensity Factor, *Engineering Fracture Mechanics*, 40, 585- 592.
- (LEB, 2003)  
Leblond, J. B. (2003) *Mécanique de la rupture fragile et ductile*, Hermès. France.
- (LIN, 1997)  
Lin, X. B. and Smith, R. A. (1997) Fatigue growth analysis of interacting and coalescing surface defects, *International Journal of Fracture*, 85, 283–299.
- (SAH, 1997)  
Sahasakmontri, K., Horri, H., Hasegawa, A. and Nishino, F. (1987) Mechanical properties of solids containing a doubly periodic rectangular array of cracks, *Structural Eng. / Earthquake Eng.*, 4, N°1, 125-135.
- (TOU, 2007)  
Touzet, M., Lamazouade, M., Puiggali, M. (2007) Interaction between 3D stress corrosion cracks, *Politechnika Gdańska*, 7, n°1 (11).
- (WEN, 2016)  
Wen, J.-F, Zhan, Y., Tu, S. T. and Xuan, F-Z. (2016) , A combination rule for multiple surface cracks based on fatigue crack growth life, *AIMS Materials Science*, 3 (4): 1649-1664.
- (ZHW, 2019)  
Zhao, L., Guo, W., Xu, L., Han, Y., Jing, H. (2019) Evaluation of the multiple embedded cracks interaction effect in creep regime by creep damage method, *Advances in Engineering Software*, 128, 125-135.

## Résumé :

L'interaction de fissures est un sujet qui concerne de nombreux domaines d'activité : la microélectronique, les industries mécaniques (machinerie, réservoirs), l'aéronautique, le nucléaire ou encore la géophysique. La fissuration multiple se manifeste dans les matériaux composites, les os, les aciers, les roches. Dans tous les cas se pose la question du risque de coalescence de ces fissures par fatigue, fluage ou rupture ainsi que de leur impact sur la résistance de la structure. La plupart des études publiées restent dans le cadre de l'élasticité linéaire.

La présente étude vise à développer un modèle de substitution hybride tenant compte de l'interaction de fissures dans un milieu homogène isotrope infini soumis à un champ de contrainte uniforme normal au plan de référence. Les fissures sont traversantes ou elliptiques, situées dans le même plan de référence, parallèles ou inclinées. Le comportement du matériau est élastique linéaire ou élasto-plastique. Étant donné que le problème d'interaction entre les fissures est sans dimension, toutes les variables sont relatives, comme l'effet d'espacement des fissures qui est mesuré par le rapport entre l'écartement des fissures et la taille des fissures. Le modèle consiste en un large ensemble de formules fondées sur des résultats théoriques et des calculs numériques réalisés par ESI Group, EDF, Framatome ou à partir de la littérature.

En élasticité linéaire, les facteurs d'interaction entre deux fissures coplanaires sont des fonctions affines du champ de contrainte normal induit par la première fissure considérée comme isolée. Le coefficient d'affinité est une fonction de différence relative  $A$  tenant compte des différences de forme et de taille des fissures et de l'action de la seconde fissure sur la première. Le champ de contrainte normal d'une fissure située dans un milieu élastique isotrope infini est donné par des fonctions exactes  $FW$  comme celle dérivée par H. Westergaard pour les fissures traversantes. La fonction  $A$  est déterminée en ajustant des résultats analytiques ou numériques relatifs à quatre à cinq configurations de même type, comme par exemple celle de deux fissures elliptiques inégales. La fonction  $FW$  prend en compte l'effet d'écartement des fissures. L'utilisation optimale de cette fonction est assurée en choisissant pour les fissures traversantes coplanaires le rapport entre la moyenne des tailles de fissures et la distance entre les centres. Cette définition est étendue aux fissures elliptiques en reliant la moyenne de la longueur de la normale aux points les plus proches de la distance entre les intersections avec les axes.

Des fissures parallèles peuvent s'écranter. Les limites d'écrantage sont exprimées par des formules fermées comme une relation entre les espacements horizontaux et verticaux relatifs. Pour les fissures non écranées, le facteur d'interaction est obtenu en inversant le facteur d'interaction entre les deux fissures projetées sur le même plan pour obtenir un paramètre de décalage horizontal. Ce paramètre et l'espacement vertical relatif introduits comme arguments de la fonction  $FW$  donnent la valeur du facteur d'interaction.

Le facteur d'interaction des fissures traversantes écranées est déterminé en ajustant les résultats des éléments finis et en utilisant des solutions asymptotiques pour les fissures superposées. Pour les fissures elliptiques écranées, seules des formules d'enveloppe sont proposées.

Des règles de projection sont proposées pour les fissures inclinées. Un coefficient de fissuration équivalent est défini pour obtenir une fissure unique équivalente à deux fissures en interaction en termes de force fissurante. Cela permet de traiter l'interaction de plusieurs fissures.

Toutes les formules sont étendues aux fissures de taille et de forme inégales. Par conséquent, en élasticité, le modèle couvre toutes les configurations à l'exception des fissures elliptiques formant un angle de torsion l'une par rapport à l'autre.

Les concepts de facteur d'interaction, de limite d'écrantage et de coefficient de fissuration équivalent sont étendus à un comportement élasto-plastique. Pour les configurations bidimensionnelles (fissures traversantes), ces quantités sont dérivées des résultats des éléments finis et des considérations liées à la théorie des lignes de glissement. Une autre approche, fondée sur une version modifiée de la méthode de contrainte de référence, est développée et généralisée aux configurations coplanaires 3D.

Le modèle est étendu aux interactions d'une fissure enfouie avec la surface libre ou avec une fissure de surface.

On propose une méthode parente pour application à l'interaction fissure-cavité.

Le modèle est validé par comparaison à d'autres résultats informatiques ou expérimentaux.

## Abstract:

The interaction of cracks is a subject that concerns many fields of activity: microelectronics, mechanical industries (machinery, tanks), aeronautics, nuclear and geophysics. Multiple cracking occurs in composite materials, bones, steels, rocks. In all cases the question arises of the risk of coalescence of these cracks by fatigue, creep or rupture and of their impact on the strength of the structure. Most published studies remain within the framework of linear elasticity.

The present study aims to develop a hybrid surrogate model accounting for crack interaction in an infinite isotropic homogeneous medium subjected to a uniform stress field normal to the reference plane. The cracks are through-wall or elliptical, located in the same reference plane, parallel or inclined. The material behavior is linear elastic or élasto-plastic. Since the crack interaction problem is dimensionless, all variables are relative, such as the crack spacing effect which is measured by the ratio of crack spacings to crack sizes. The model consists of a large set of formulas based on theoretical results and computational studies carried out by ESI Group, EDF, Framatome or from the literature.

In linear elasticity the interaction factors between two coplanar cracks are affine functions of the normal stress field induced by the first crack considered as isolated. The affine coefficient is a relative difference function  $A$  accounting for the differences in crack shape and size and for the action of the second crack on the first one. The normal stress field of a crack located in an infinite isotropic elastic medium is given by exact functions  $F_w$  like the one derived by H. Westergaard for through-wall cracks. The function  $A$  is determined by fitting analytical or numerical results of four to five configurations of the same type such as two unequal elliptical cracks. The function  $F_w$  takes crack spacing effect into account. The optimal use of this function is ensured by choosing for coplanar through-wall cracks the ratio between the average of the crack sizes and the distance between the centers. This definition is extended to elliptical cracks by relating the average of the length of the normal to the closest points to the distance between intersections with the axes.

Parallel cracks may shade each other. The shielding limits are expressed by closed form formulas as a relation between relative horizontal and vertical spacings. For unshielded cracks, the interaction factor is obtained by inverting the coplanar crack interaction factor to get a horizontal shift parameter. This parameter and the relative vertical spacing set as the arguments of the function  $F_w$  give the interaction factor value.

The interaction factor of shielded through-wall cracks is determined by fitting Finite Element results and using asymptotic solutions for unstaggered cracks. For shielded elliptical cracks, only envelope formulas are proposed.

Projection rules are proposed for inclined cracks.

An equivalent crack coefficient is defined to get a single crack equivalent to two interacting cracks in terms of driving force. This allows to deal with multiple cracks.

All the formulas are extended to cracks of unequal size and shape. Therefore, in elasticity, the model covers all the configurations except for twisted elliptical cracks.

The concepts of interaction factor, shielding limit and equivalent crack coefficient are extended to an elastic-plastic behavior. For two-dimensional configurations (through-wall cracks) these quantities are derived from finite element results and considerations related to the slip line theory. Another approach, based on a modified version of the reference stress method is developed and generalized to 3D coplanar configurations.

The model is extended to the interactions of an embedded crack with the free surface or with a surface crack.

A parent method applied to crack – cavity interaction is proposed.

The model is validated by comparison to other computational or experimental results.





CENTRALE LYON  
**ENISE**

N° d'ordre NNT : 2024ECDL0009

**THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON  
opérée au sein de l'Ecole centrale de Lyon**

**Ecole Doctorale N° 488  
(Sciences Ingénierie Santé)**

**Spécialité de doctorat** : Mécanique & ingénierie  
**Discipline** : Sciences de l'Ingénieur

Soutenue publiquement le 01/03/2024, par :  
**Philippe Alain Gilles**

---

**Modèle de substitution hybride  
appliqué à l'interaction de fissures en  
tridimensionnel**

**Annexes au mémoire**

---



# Sommaire

Annexe 1.	INTERACTION EN ELASTICITE LINEAIRE.....	5
A1.1.	Interaction entre deux fissures bande.....	7
A1.1.1.	Interaction entre deux fissures bande coplanaires .....	7
A1.1.2.	Interaction entre deux fissures bande parallèles .....	19
A1.1.3.	Fissures bande inclinées.....	29
A1.2.	Interaction entre deux fissures disque .....	39
A1.2.1.	Fissures disque coplanaires.....	39
A1.2.2.	Fissures disque parallèles.....	57
A1.2.3.	Fissures disque inclinées .....	73
A1.3.	Interaction entre deux fissures elliptiques .....	79
A1.3.1.	Fissures elliptiques coplanaires égales .....	80
A1.3.2.	Fissures elliptiques coplanaires inégales .....	87
A1.3.3.	Variations le long du front .....	90
A1.3.4.	Fissures elliptiques parallèles .....	96
A1.3.5.	Fissures elliptiques inclinées.....	118
A1.4.	Interaction entre une fissure et un bord libre .....	120
A1.4.1.	Formule de facteur d'interaction entre une fissure enfouie avec une surface libre..	120
A1.4.2.	Interaction entre une fissure enfouie et une fissure de surface .....	135
A1.5.	Interaction entre une cavité et une fissure enfouie .....	142
A1.5.1.	Caractéristiques de l'interaction cavité - fissure enfouie .....	142
A1.5.2.	Grandes et petites cavités.....	143
A1.5.3.	Extension de l'approche à l'interaction entre une cavité et une fissure enfouie.....	145
A1.5.4.	Distribution de contraintes induites par une cavité .....	147
A1.5.5.	Interaction entre une cavité et une fissure enfouie en 2D.....	148
A1.5.6.	Interaction entre une cavité et une fissure enfouie en 3D.....	151
Annexe 2.	INTERACTION EN ELASTO-PLASTICITE.....	157
A2.1.	Introduction .....	159
A2.2.	Interaction entre deux fissures bande.....	160
A2.2.1.	Calcul du coefficient d'équivalence .....	160
A2.2.2.	Choix du niveau de chargement .....	161
A2.2.3.	Effets de la plasticité .....	162
A2.2.4.	Charge limite d'une plaque contenant une ou deux fissures bande égales.....	169
A2.2.5.	Etablissement d'une fonction décrivant l'interaction .....	185

A2.2.6.	Effet de taille de fissure .....	191
A2.2.7.	Effet d'écrouissage et charge de référence .....	192
A2.2.8.	Effet d'écrouissage sur les grandeurs d'interaction .....	207
A2.3.	Défaut équivalent à deux fissures elliptiques .....	210
A2.3.1.	Coefficient d'équivalence en tridimensionnel .....	210
A2.3.2.	Choix du niveau de chargement .....	210
A2.3.3.	Formules pour des fissures elliptiques coplanaires .....	215
A2.3.4.	Formules pour des fissures parallèles.....	218
A2.4.	Charges de référence pour deux fissures elliptiques.....	221
A2.4.1.	Détermination des charges de référence .....	221
A2.4.2.	Charges de référence pour une fissure elliptique enfouie .....	223
A2.4.3.	Charges de référence pour deux fissures elliptiques coplanaires égales .....	225
A2.4.4.	Charges de référence pour deux fissures elliptiques coplanaires inégales .....	228
Annexe 3.	Précision des calculs aux éléments finis - L'expérience de Framatome .....	233
A3.1.	Précision des calculs aux éléments finis .....	235
A3.1.1.	Evaluation de l'interaction.....	235
A3.1.2.	Les effets de la discrétisation.....	235
A3.1.3.	Précision des méthodes de calcul du FIC et de la force fissurante .....	241
A3.1.4.	Différence de discrétisation de la fissure en interaction et la fissure isolée .....	244
A3.2.	Evaluation des calculs en élasticité.....	247
A3.2.1.	Vérification du critère de raffinement.....	247
A3.2.2.	Champ $\theta$ .....	247
A3.2.3.	Champs de contraintes au voisinage de la fissure .....	248
A3.2.4.	Comparaison des FIC pour une fissure elliptique isolée .....	250
A3.3.	Evaluation des calculs en élasto-plasticité.....	255
A3.3.1.	Fissure bande .....	255
A3.3.2.	Fissure elliptique .....	259

## **ANNEXE 1. INTERACTION EN ELASTICITE LINEAIRE**



Le principe de ces développements est le suivant :

- L'action d'une fissure sur une autre fissure est pilotée par le champ de contrainte de la première fissure.
- L'action réciproque entre les deux fissures est traitée par un facteur correctif.

Cette longue annexe se compose de cinq paragraphes principaux qui forment trois catégories :

- Deux paragraphes sont essentiels à la compréhension de la méthode. Le paragraphe 3.1 consacré aux fissures bande pour lesquelles des solutions exactes de facteurs d'interaction ont permis de construire la méthode en élasticité notamment pour les fissures inégales coplanaires. Le paragraphe 3.3 traite des fissures elliptiques dont l'interaction comporte plusieurs caractères complexes : l'effet de forme, la variation du facteur d'interaction le long du front, le décalage et la désorientation des axes.
- Le paragraphe 3.2 dédié aux fissures disque présente plusieurs tentatives de résolution analytique du problème de l'interaction dans le plan, mais reste un cas particulier de fissures elliptiques. Le paragraphe 3.4 qui quantifie l'interaction avec le bord libre reprend en les adaptant les méthodes développées aux paragraphes 3.1 et 3.3.
- L'interaction entre fissure et cavité (paragraphe 3.5) constitue une extension du modèle de substitution relatif à l'interaction entre deux fissures. Mais cette extension est limitée au bidimensionnel et nécessite des investigations supplémentaires.

## A1.1. Interaction entre deux fissures bande

Les seules solutions exactes de facteur d'interaction sont relatives à des fissures bande coplanaires.

### A1.1.1. Interaction entre deux fissures bande coplanaires

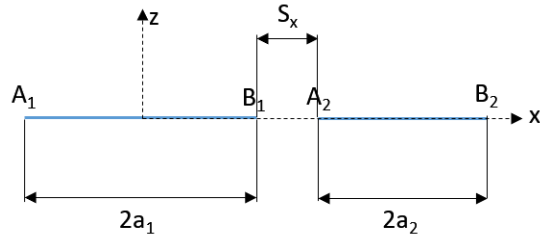
En bidimensionnel pour deux fissures inégales, il existe 4 facteurs d'interaction, associés aux deux pointes des deux fissures. Les facteurs d'interaction utiles pour définir le défaut équivalent à des fissures non écartées sont uniquement ceux associés aux deux pointes les plus proches. Ce document propose des formules approchées généralisables au cas tridimensionnel pour ces deux facteurs. Le cas des fissures écartées est traité de façon complète pour les fissures bande et pour plusieurs configurations de fissures elliptiques.

#### A1.1.1.1. Solution exacte pour deux fissures bande coplanaires

Plusieurs auteurs ont résolu de façon exacte le problème de l'interaction de deux fissures bande coplanaires situées dans une plaque infinie en traction normale au plan de la fissure (SAD, 1956 ; WIL, 1959 ; ERD, 1962, YOI, 1970).

La solution de Gommerstadt (GOM, 2009) pour des fissures inégales est la plus complète. Elle est la seule à fournir des résultats pour les quatre pointes de fissure, mais comporte une coquille que nous avons corrigé.

La configuration est décrite par la figure A1.1\_1.



**Figure A1.1\_1 : Interaction de fissures inégales**

Les formules de Gommerstadt sont paramétrées avec le rapport des tailles de fissure et un indicateur d'éloignement :  $\xi = \frac{a_1}{a_2}$        $\beta = \frac{S_x}{2a_2}$

Les facteurs d'interaction aux quatre extrémités sont données par les formules exactes suivantes :

$$\gamma_{A_1}(\zeta, \beta) = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{\sqrt{\zeta + \beta}}{\sqrt{\zeta + \beta + 1}} \cdot \left[ \zeta + \beta + 1 - (1 + \beta) \cdot \frac{E(k)}{K(k)} \right] \quad (3.1_1a)$$

$$\gamma_{B_1}(\zeta, \beta) = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{\sqrt{1 + \beta}}{\sqrt{\beta}} \cdot \left[ -\beta + (\zeta + \beta) \cdot \frac{E(k)}{K(k)} \right] \quad (3.1_1b)$$

$$\gamma_{A_2}(\zeta, \beta) = \frac{\sqrt{\zeta + \beta}}{\sqrt{\beta}} \cdot \left[ -\beta + (1 + \beta) \cdot \frac{E(k)}{K(k)} \right] \quad (3.1_1c)$$

$$\gamma_{B_2}(\zeta, \beta) = \frac{\sqrt{1 + \beta}}{\sqrt{\zeta + \beta + 1}} \cdot \left[ \zeta + \beta + 1 - (\zeta + \beta) \cdot \frac{E(k)}{K(k)} \right] \quad (3.1_1d)$$

$$k = \sqrt{\frac{\xi}{(\xi + \beta) \cdot (1 + \beta)}} \quad (3.1_1e)$$

$$\text{Yokobori et al. (YOI, 1965) utilisent es variables } \lambda_x = \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 + S_x} \quad \mu = \frac{a_2 - a_1}{a_1 + a_2 + S_x} \quad (3.1_2)$$

La correspondance avec les variables  $\lambda_x$  et  $\mu$  est donnée par:

$$\begin{aligned} 1 + \beta &= \frac{1 + \mu}{\lambda_x + \mu} & \zeta + \beta &= \frac{1 - \mu}{\lambda_x + \mu} & \beta &= \frac{1 + \mu}{\lambda_x + \mu} - 1 = \frac{1 - \lambda_x}{\lambda_x + \mu} & \zeta &= \frac{\lambda_x - \mu}{\lambda_x + \mu} \\ \lambda_x &= \frac{\zeta + 1}{\zeta + 1 + 2\beta} & \mu &= \frac{1 - \zeta}{\zeta + 1 + 2\beta} \end{aligned} \quad (3.1_3)$$

Toutes ces variables sont adimensionnelles et donc applicables à toute taille de fissure. La figure A1.1\_2 montre les variations des facteurs d'interaction en pointe de fissure interne pour des fissures inégales. La figure A1.1\_3 présente les variations du facteur d'interaction aux quatre pointes de fissures bande de rapport de longueur égal à 2.



On note aussi dans toutes les formules décrivant l'interaction de deux fissures bande coplanaires situées dans une plaque infinie, le recours systématique au paramètre d'éloignement  $\lambda_x = \frac{a_1+a_2}{a_1+a_2+S_x}$  qui rapport la somme des demi-longueurs de fissure à l'éloignement des centres des deux fissures.

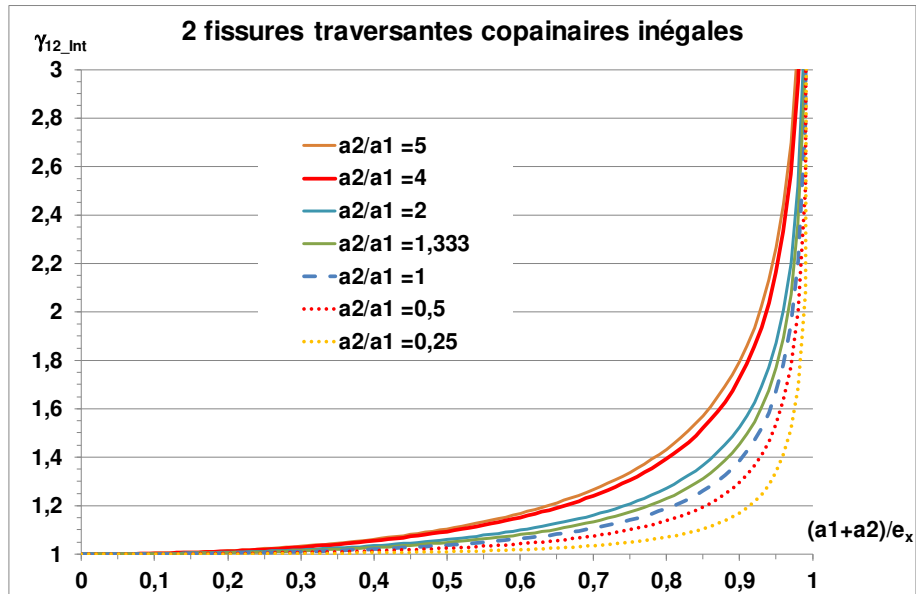


Figure A1.1\_2 : facteurs d'interaction en pointe interne pour deux fissures coplanaires inégales situées dans une plaque infinie et soumises à une contrainte de traction uniforme

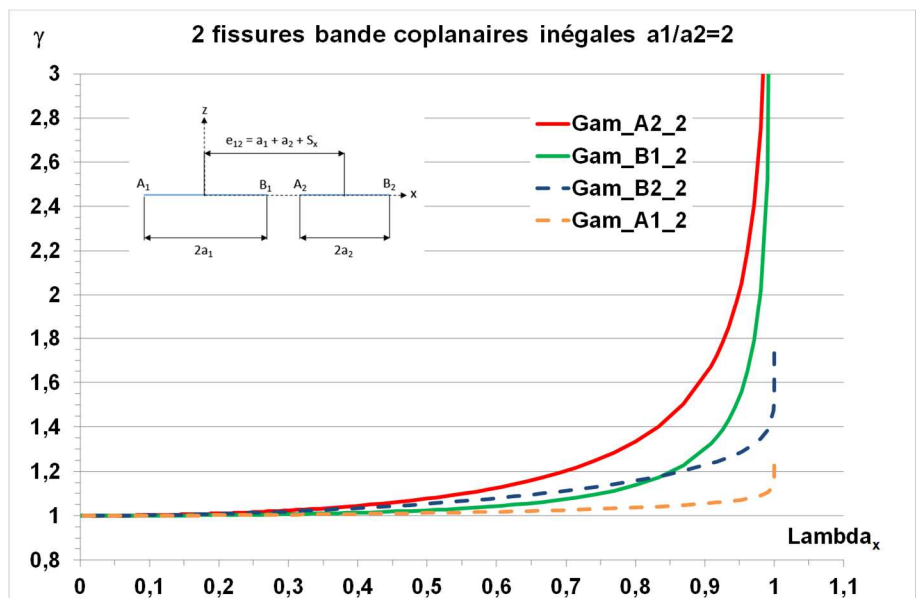
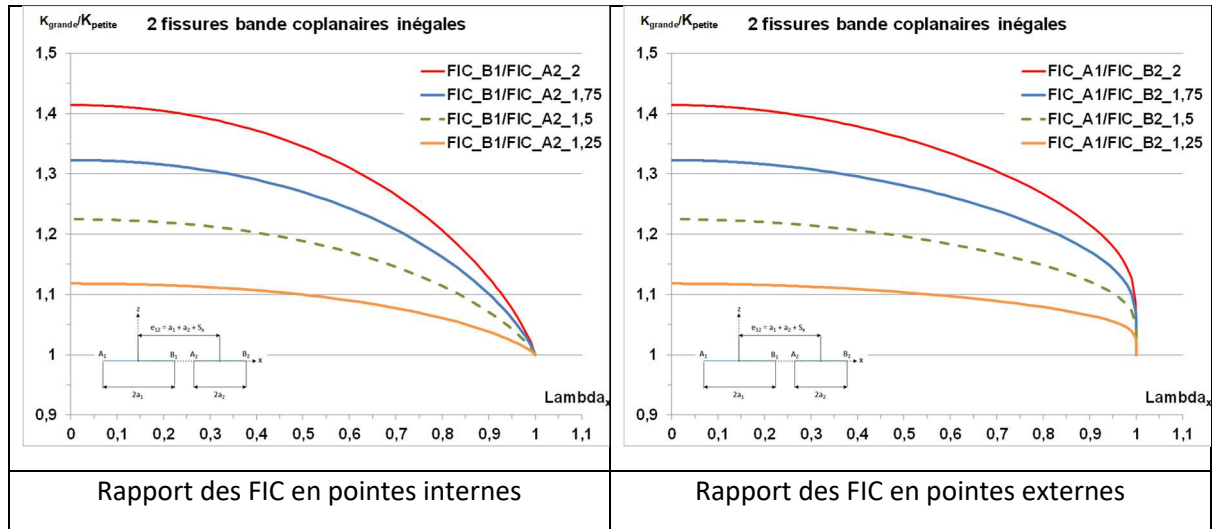


Figure A1.1\_3 : facteurs d'interaction pour deux fissures coplanaires inégales situées dans une plaque infinie et soumises à une contrainte de traction uniforme en fonction du paramètre d'interaction  $\lambda_x$

La figure A.1.1\_4 compare les FIC aux pointes de la grande et de la petite fissure. Même si les facteurs d'interaction sont plus élevés sur la petite fissure, pour les FIC, c'est l'inverse. L'effet de taille l'emporte sur l'effet d'interaction.



**Figure A1.1\_4 : rapports du FIC de la grande fissure sur celui de la petite en fonction du paramètre d'interaction  $\lambda_x$**

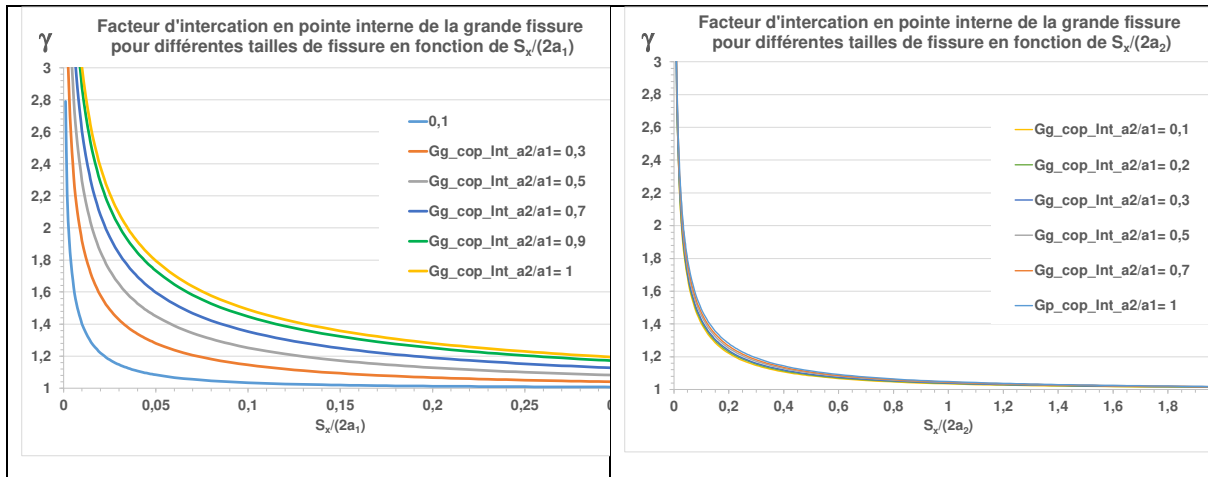
De ces résultats exacts, les conclusions suivantes peuvent être tirées :

- Les facteurs d'interaction en pointes interne et externe de la grande fissure sont plus faibles que ceux de la petite, mais pour les FIC c'est l'inverse.
- Lorsque les fissures sont proches, l'effet d'interaction dépend beaucoup de la longueur de la petite fissure.
- Quand l'écartement des fissures dépasse la longueur de la petite fissure, l'interaction peut être négligée. Ceci est mieux vérifié si l'écartement est égal à la taille de fissure moyenne.
- On peut considérer qu'il y a coalescence si  $S_x = 0,05 * \max(a_1, a_2)$  ce qui correspond à  $\lambda_x \cong 0,95$ .

#### Adimensionnement des écartements

Le choix de la variable servant à représenter les variations des facteurs d'interaction est important car il permet de mettre en évidence des propriétés remarquables.

Ainsi l'expression des variations des facteurs d'interaction de la grande fissure en fonction de l'écartement rapporté à la taille de la petite fissure permet de regrouper presque parfaitement toutes les courbes relatives à différents rapports de taille (Figure A1.1\_5).

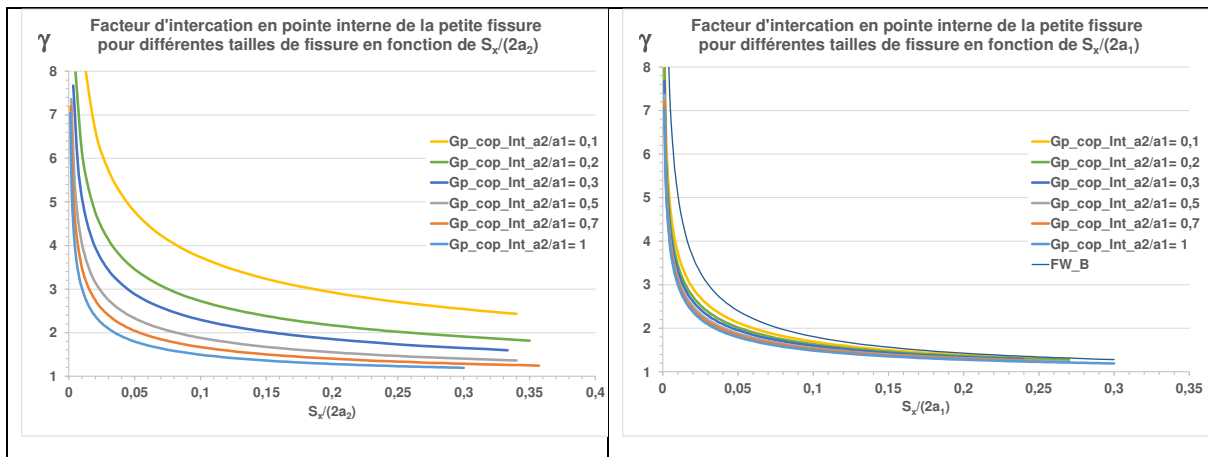


**Figure A1.1\_5 : variations des facteurs d'interaction en pointe interne de la grande fissure en fonction de l'écartement  $S_x$  rapporté à la taille de la grande fissure ou de la petite fissure**

Cette propriété a été remarquée par Hasegawa (HAS, 2009). Cette règle est approchée. L'analyse de la différence des formules exactes de Gommerstadt montre que les règles de normalisation de la variable d'écartement entre deux fissures bande coplanaires pour rendre la variation du facteur d'interaction en pointe interne indépendante de la taille relative des fissures n'est valable qu'aux deux conditions suivantes :

- Les fissures ne doivent pas être trop proches  $\frac{S_x}{2a_2} \geq 0,2$
- Le rapport de la taille de la grande fissure sur celle de la petite doit être inférieur à 10.

Pour la petite fissure, l'adimensionnement de l'écartement par à la taille de la grande fissure est moins efficace comme le montre la figure A1.1\_6.

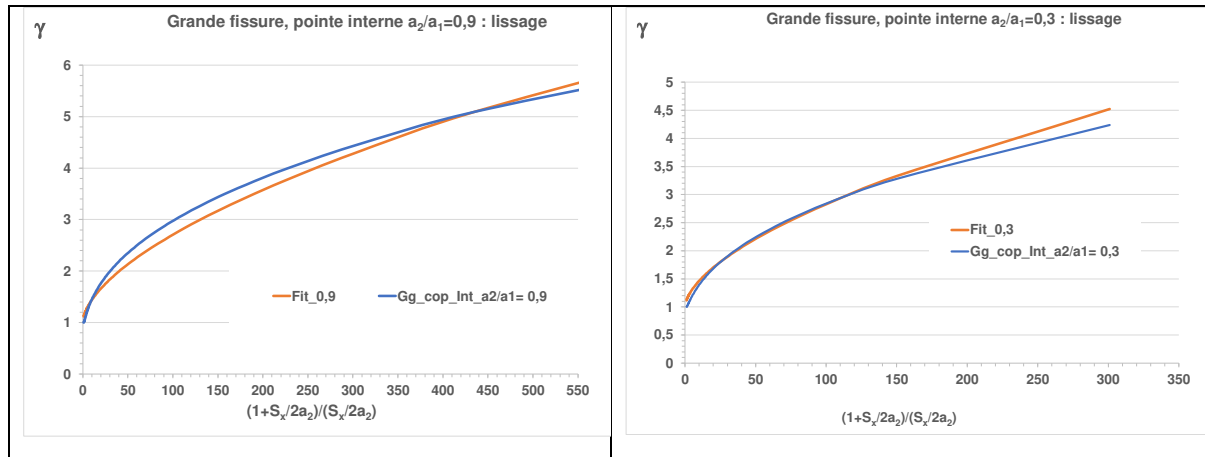


**Figure A1.1\_6 : variations des facteurs d'interaction en pointe interne de la petite fissure en fonction de l'écartement  $S_x$  rapporté à la taille de la petite fissure ou de la grande fissure**

Les courbes des facteurs d'interaction en pointe interne de la petite fissure sont enveloppées supérieurement par la fonction de Westergaard  $F_{W\_B}$  (voir A1.1.1.2) et inférieurement par celle des fissures égales. Pour la grande fissure, l'enveloppe supérieure est la courbe des fissures égales et l'enveloppe inférieure est la droite  $\gamma = 1$ .

Le lissage par une courbe maîtresse est envisageable pour les grandes fissures (Figure A1.1\_7), mais pas pour les petites. L'expression des facteurs d'interaction en pointe interne de la grande fissure en fonction de  $\frac{1+S_x/(2a_2)}{S_x/(2a_2)}$  permet de supprimer l'asymptote et de lisser les courbes par une exponentielle.

$$\gamma_{int\_Sx/(2a2)} = 1 + 0,118 \cdot \left( \frac{1 + S_x/(2a_2)}{S_x/(2a_2)} \right)^{0,595} \quad (A1.1_4)$$



**Figure A1.1\_7 : validation des lissages des facteurs d'interaction en pointe interne de la grande fissure en fonction du rapport  $(1+S_x/(2a_2))/ S_x/(2a_2)$**

Cette approche n'a pas été retenue car trop difficile à généraliser aux fissures elliptiques.

### A1.1.1.2. Solution approchée pour deux fissures bande coplanaires

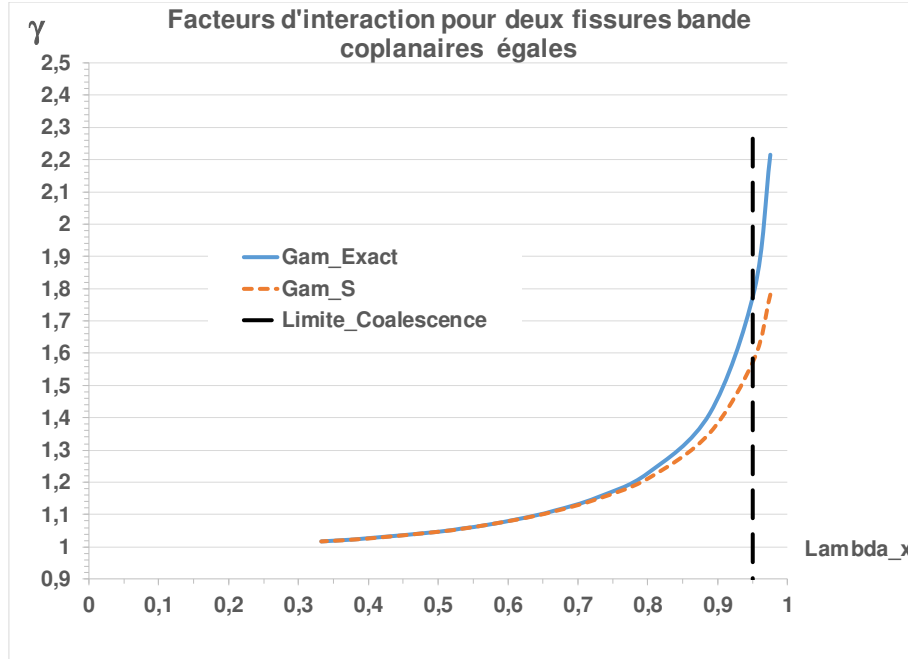
#### Etablissement de la formule

Le FIC  $K_{21}$  de la fissure soumise au champ de contrainte induit par la première fissure peut être exprimé à l'aide de la méthode de la fonction de poids de Bueckner (BUE, 1970). Bueckner a montré que le FIC d'une fissure plane chargée sur sa surface par la distribution des contraintes agissant sur cette surface dans le corps non fissuré est donné par le produit de cette distribution des contraintes et d'une fonction de poids  $\check{g}(M, P)$  où  $M$  indique le point courant sur la surface de la fissure et  $P$  un point sur son front. Ceci conduit à la formule suivante :

$$K_{21}(P) = \iint_S \sigma_{zz}(M) \cdot \check{g}(M, P) \cdot dS(M) \quad (A1.1_5)$$

Où  $\sigma_{zz}(M)$  est la distribution normale des contraintes due à la première fissure considérée comme isolée agissant sur la seconde fissure et  $\check{g}(M, P)$  est la fonction de poids permettant le calcul du FIC de la seconde fissure.

Il est difficile de déterminer la fonction  $\check{g}(M, P)$  mais on peut estimer le FIC au premier ordre en utilisant la fonction de poids pour une fissure isolée  $g(M,P)$ . Selon V. Rangasamy et al. (RAN, 2002), la sous-estimation du facteur d'interaction n'est pas significative tant que l'espacement  $S_x/(2a)$  de deux fissures égales est supérieur à 0,05 (Figure A1.1\_8). Cette sous-estimation à la valeur limite de 0,05 est de 11,7 % pour les fissures traversant la paroi et tombe à 3,6 % pour les fissures de surface semi-circulaires.



**Figure A1.1\_8 : comparaison des facteurs d'interaction estimés avec la fonction de poids pour une fissure isolée (Gam\_S – RAN, 2002) et par la solution exacte (Gam\_Exact) pour deux fissures bande coplanaires égales**

La solution exacte du problème d'une fissure bande se trouvant dans un solide isotrope infini, a été établie par Westergaard (WES, 1939). La contrainte normale s'exprime comme suit :

$$\sigma_{W_{zz}}(M) = \sigma_{app} \cdot F_{W_B}(M) \quad (A1.1_6)$$

Où  $F_{W_B}(M)$  est une fonction dépendant de la géométrie et du type de chargement. L'indice W renvoie à H. Westergaard. Par construction la fonction est infinie en pointe de fissure et tend vers 1 à l'infini.

Dans le cas de la fissure bande située dans un massif infini isotrope élastique sous traction uniaxiale, la fonction s'écrit avec la variable complexe  $\vartheta = x + i \cdot z$ . Cette variable est conventionnellement notée  $z$ , mais nous utilisons  $z$  pour désigner la coordonnée parallèle à l'axe de chargement.

$$F_{W_B}(x, z) = \frac{\vartheta}{\sqrt{\vartheta^2 - a^2}} \quad (A1.1_7)$$

Notre approche, traite différemment les défauts coplanaires (c.à.d. ayant un plan en commun) et les défauts parallèles ou inclinés. Afin de simplifier les expressions nous distinguerons les expressions des fonctions FW suivant qu'elles sont limitées à l'action de la contrainte normale sur le plan de la fissure ou sur un plan parallèle. Ainsi :

$$F_{W_{B_{co}}}(x) = \frac{\vartheta}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}} = F_{W_B}(x, 0) \quad (A1.1_8)$$

$F_{W_B}(x, z)$  sera aussi désignée par  $F_{W_{B_{Pa}}}(x, z)$  afin d'éviter toute confusion.

L'expression du facteur d'interaction  $\gamma_{21}(P)$  est alors :

$$\gamma_{21}(P) = \frac{\iint_S F_{W_B}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right) \cdot g(P, M) \cdot dS(M)}{\iint_S g(P, M) \cdot dx} \quad (A1.1_9)$$

Pour les fissures coplanaires, l'effet de la contrainte d'interaction est séparé :

$$\gamma_{21}(P) = 1 + \frac{\iint_S [F_{W\_B\_Co}(M) - 1] \cdot g(P, M) \cdot dS(M)}{\iint_S g(P, M) \cdot dx} \quad (A1.1_{10})$$

L'application du deuxième théorème de valeur moyenne au numérateur de l'intégrale donne :

$$\iint_S [F_W(M) - 1] \cdot g(P, M) \cdot dS(M) = [F_{W\_B\_Co}(Q) - 1] \cdot \iint_{S_b} g(P, M) \cdot dS(M) \quad (A1.1_{11})$$

Où Q est le point de la deuxième fissure le plus proche de la première dans le plan (x, y) et S<sub>b</sub> est une partie de la surface de la deuxième fissure. Q est un paramètre décrivant l'écartement et non une position quelconque dans le plan.

Le facteur d'interaction apparaît donc comme une fonction affine de la fonction Westergaard :

$$\gamma_{21}(P) = 1 + A \cdot [F_{W\_B}(Q) - 1] \quad (A1.1_{12})$$

En appliquant le théorème de la moyenne, la surface S<sub>b</sub> autrement dit le facteur A peut varier avec l'écartement ce qui fait perdre de l'intérêt à l'approche. Il faut que la variable définissant le point Q soit égale à 1 pour un écartement nul afin que le facteur d'interaction approché tende vers l'infini et que pour un écartement infini la variable soit nulle.

#### Facteur d'interaction en pointe interne pour des fissures bande égales

Pour des fissures coplanaires, ce facteur est toujours plus élevé que celui en pointe externe.

La figure A1.1\_9 compare deux variations de A, calculé par le rapport  $\frac{\gamma_{Exact}-1}{F_W(u)-1}$  l'une avec le choix de la variable u= a/x, l'autre avec u = λ<sub>x</sub>.

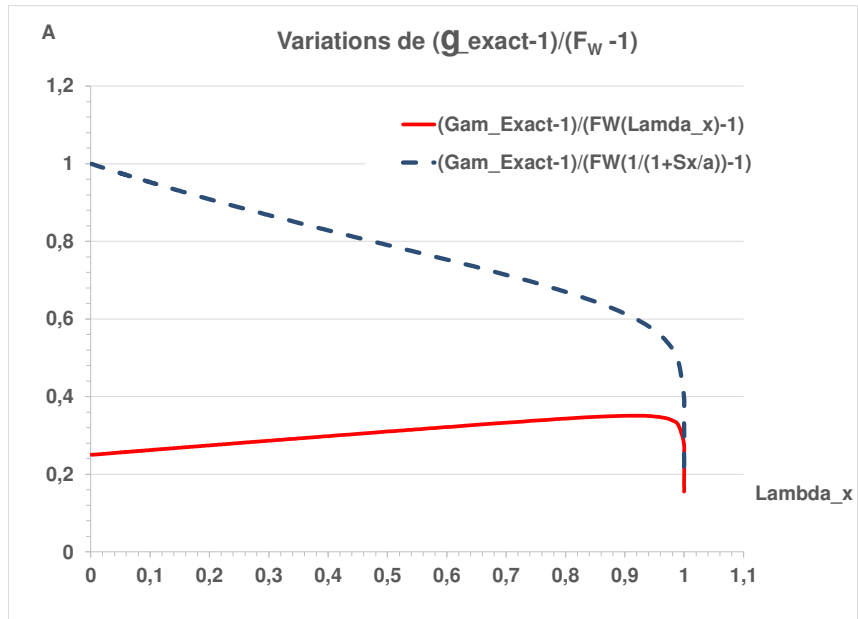
Le choix de λ<sub>x</sub> comme variable s'impose pour trois raisons : il varie entre 1 et 0 selon que l'écartement est nul ou infini, il réduit la variation de A (Figure A1.1\_9) et permet de choisir une valeur constante dans l'intervalle 0,5-0,95 dans lequel le facteur d'interaction croît rapidement. Donc pour les fissures bande coplanaires, le point Q est défini par le paramètre d'espacement relatif λ<sub>x</sub> : Q=(λ<sub>x</sub> , 0, 0). Afin de maximiser la valeur du facteur d'interaction, la valeur maximale de A(λ<sub>x</sub>) soit 0,35.

Ainsi pour les fissures bande égales coplanaires, le facteur d'interaction en pointe interne a pour expression :

$$\gamma_{int} = \gamma_{21}(P_{int}) = 1 + A \cdot [F_{W\_B\_Co}(\lambda_x) - 1] \quad \text{avec} \quad \lambda_x = \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 + S_x} \quad (A1.1_{13a})$$

Soit

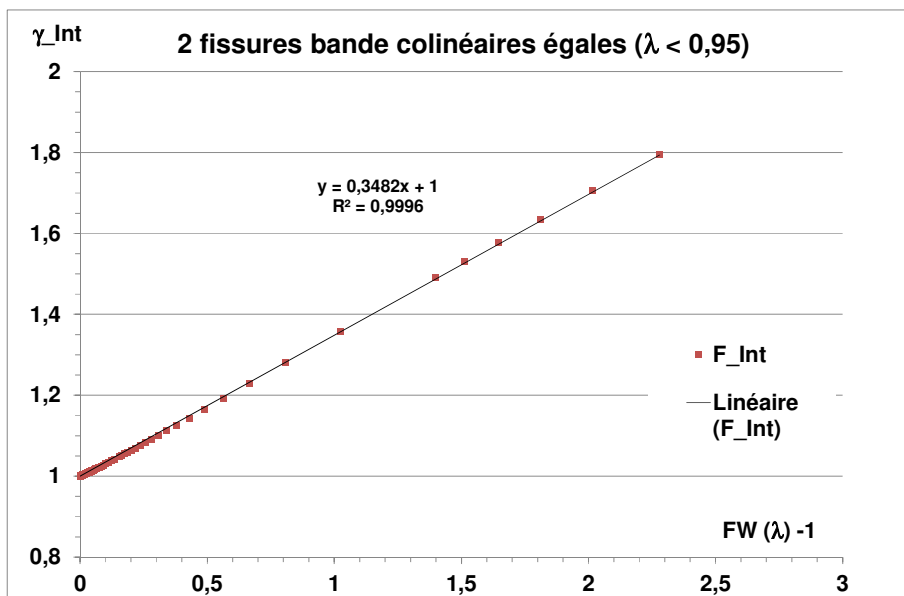
$$\gamma_{int} = 1 + 0.35 \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - (\lambda_x)^2}} - 1 \right] \quad \text{avec} \quad \lambda_x = \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 + S_x} \quad (A1.1_{13b})$$



**Figure A1.1\_9 : variations du facteur A de la formule du facteur d'interaction en fonction du choix de la variable d'écartement**

Validation de la formule du facteur d'interaction en pointe interne pour des fissures bande égales

La variation du facteur d'interaction exact avec l'écartement au point le plus sollicité  $\gamma_B(\lambda_x)$  est comparée à la variation de la fonction  $F_{W_B}(\lambda_x)$  sur la figure A1.1\_10. Dans le domaine  $0 < \lambda_x < 0,95$  la corrélation entre le facteur d'interaction  $\gamma$  et la fonction de Westergaard  $F_W$  pour la fissure bande est linéaire, avec une pente de 0,35.



**Figure A1.1\_10: fissures bande égales coplanaires : corrélation entre facteur d'interaction  $\gamma$  et fonction de Westergaard  $F_{W_B}$**

L'ajustement de la valeur de A compense la sous-estimation due au choix d'une fonction de poids approchée dans le calcul du FIC. Nous verrons que A est une fonction du rapport de taille des fissures et de leur forme.

Pour les fissures traversantes coplanaires, nous utiliserons la formulation exacte de Gommerstadt. L'intérêt de cette formulation simplifiée (A1.1.12b) est d'offrir la possibilité d'extension à des configurations tridimensionnelles. Ce document montre que tel est le cas pour des fissures disques ou elliptiques coplanaires. L'extension du domaine d'application nécessite la connaissance de la solution exacte de champs de contraintes induits par une fissure unique, située dans un solide isotrope infini à comportement élastique linéaire et de résultats de facteurs d'interaction obtenus par 4 ou 5 calculs de structure pour chaque configuration, afin de déterminer la fonction A.

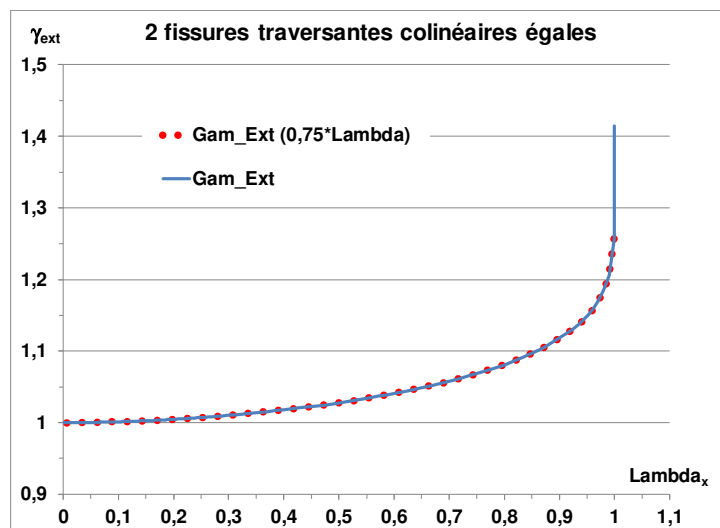
#### Formule du facteur d'interaction en pointe externe pour des fissures bande égales

La détermination du facteur d'interaction d'une fissure bande non écrantée avec l'extrémité la plus éloignée de l'autre fissure est un cas particulier du problème de l'évaluation de la variation de l'interaction le long du front de fissure. Il se traite par la recherche d'une fonction d'écartement équivalente  $\lambda_{x\_ext} = \varphi(\lambda_x)$ .

Pour les fissures bandes coplanaires égales la meilleure approximation, sans modification de la fonction A, est simplement :

$$\lambda_{x\_ext} = 0,75 \cdot \lambda_x \quad (A1.1_{14})$$

Cette valeur est obtenue par identification de  $\lambda_{x\_ext}$  à partir des facteurs d'interaction calculés avec les formules de Gommerstadt pour les pointes externes des fissures.



**Figure A1.1\_11: comparaison de la formule approchée du facteur d'interaction en pointe externe de fissures bande égales coplanaires et la formule exacte**

La figure A1.1\_11 valide cette proposition, même si la valeur limite égale à  $\sqrt{2}$  n'est pas atteinte.

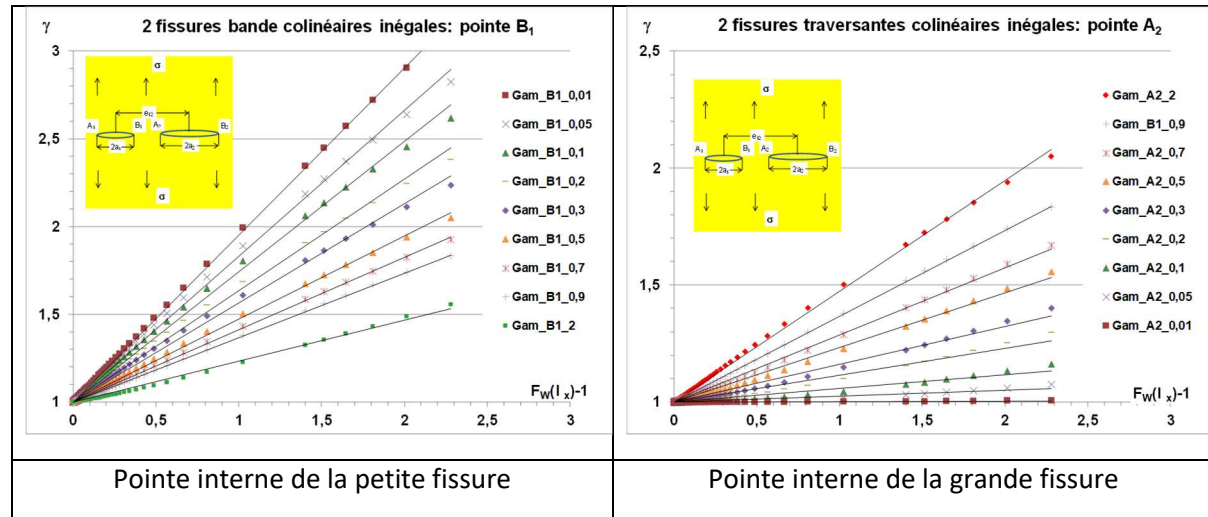
Cette proposition est à tester sur les cas de fissures parallèles, et pourrait servir à établir la limite d'écrantage.

#### Facteur d'interaction en pointe interne pour des fissures bande inégales

La même approche est utilisée pour les fissures inégales.



La variation du facteur d'interaction exact avec l'écartement au point le plus sollicité  $\gamma_B(\lambda_x)$  est comparée à la variation de la fonction  $F_{W_B}(\lambda_x)$  sur la figure A1.1\_12. Dans le domaine  $0 < \lambda_x < 0,95$  la corrélation entre le facteur d'interaction  $\gamma$  et la fonction de Westergaard  $F_W$  pour la fissure bande est linéaire, avec une pente qui dépend du rapport des tailles de fissure.



**Figure A1.1\_12: fissures bande inégales coplanaires : corrélation entre facteur d'interaction  $\gamma$  et fonction de Westergaard  $F_{W_B}$**

A partir des solutions exactes des contraintes induites dans un massif infini élastique par des fissures bande, disque et elliptiques, on démontre que pour une fissure bande nulle le facteur d'interaction est donné par la fonction de Westergaard. Ce point avait été noté par Isida (ISI, 1985) pour l'interaction de fissures disque et il est naturel de l'étendre à tout type de fissure.

On en déduit que A varie entre 0 et 0,35

Le facteur d'interaction approché aux pointes intérieures pour deux fissures inégales alignées (Figure A1.1\_13) est donné par la formule générique :

$$\gamma_{12}(B_1) = 1 + A(P; \zeta) \cdot [F_{W_{B_{co}}}(\lambda_x) - 1] \quad (A1.1_15a)$$

$$\gamma_{21}(A_2) = 1 + A(G; \zeta) \cdot [F_{W_{B_{co}}}(\lambda_x) - 1] \quad (A1.1_15b)$$

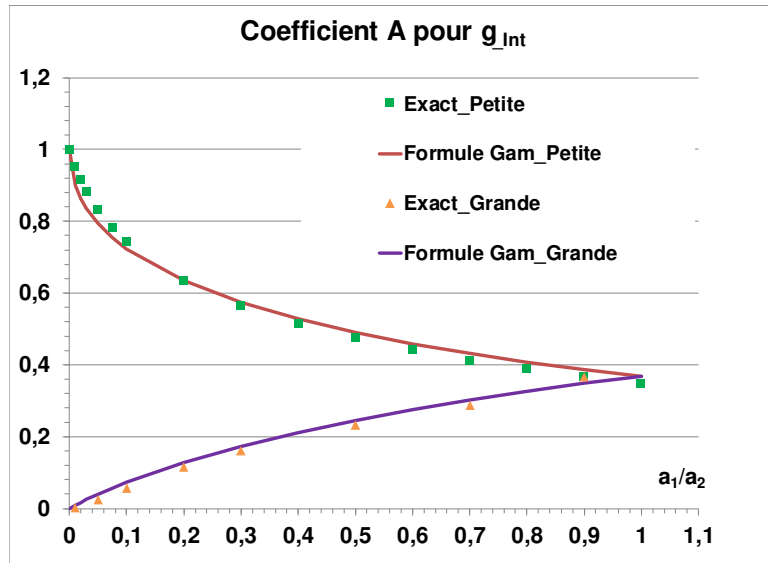
$F_{W_{B_{co}}}(\lambda_x)$  se calcule à l'aide de la formule (A1.1\_8) explicitée au paragraphe A1.1.1.2. La fonction A dépend de la pointe de fissure considérée (petite P ou grande G) et du rapport des longueurs de fissures  $\zeta = \frac{a_1}{a_2}$ . La formule de A est obtenue par analyse des formules théoriques de Gommerstadt (GOM, 2009), de façon similaire à celle effectuée en pour le cas des formules relatives aux fissures égales. Dans le cas où  $\zeta$  est supérieur ou égal à 1, la fonction A est une exponentielle de la forme  $\exp(-\zeta^p)$  pour la grande fissure et  $\zeta \exp(-\zeta^p)$  pour la petite. Le choix de l'exposant p doit être tel que  $A(P; \zeta) = \zeta \cdot A(P; 1/\zeta)$ . La valeur de l'exposant est de 0,49 pour  $\zeta \leq 2.5$ . Pour des valeurs supérieures il faudrait baisser légèrement cet exposant pour atteindre 0,43 si  $\zeta = 8$ .

La fonction A s'exprime de la façon suivante pour  $\zeta \geq 1$  :

$$A(G; \zeta) = A_G(\zeta) = \exp(-\zeta^{0.49}) \quad (A1.1_16a)$$

$$A(P; \zeta) = A_P(\zeta) = \zeta \cdot A_G(\zeta) \quad (A1.1_{16b})$$

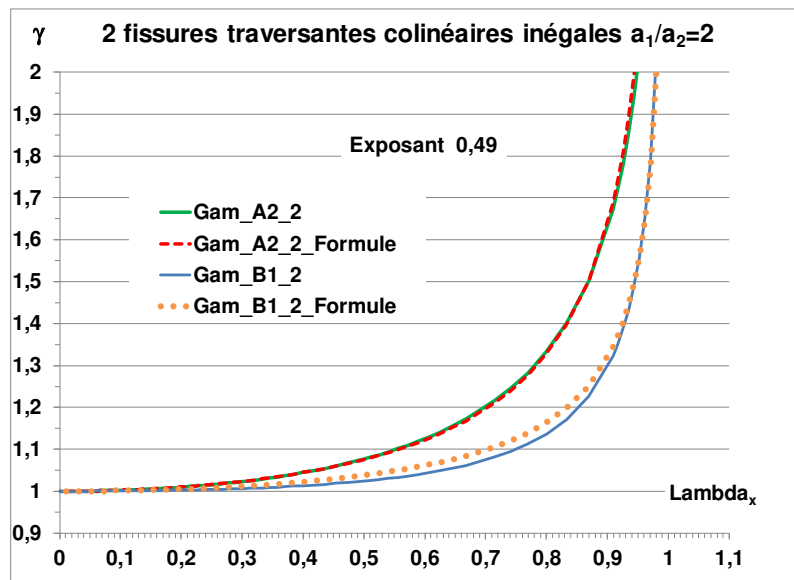
Si  $\zeta \leq 1$ , il faut inverser G et P.



**Figure A1.1\_13: fissures bande inégales coplanaires : variations de A avec le rapport des tailles de fissure**

Si les fissures sont égales, le ratio  $\zeta$  vaut 1 :

- Au paragraphe A1.1.1.2 est déterminé pour deux fissures égales  $A_P(1) = A_G(1) = 0,35$  ;
- La formule précédente fournit quant à elle  $A_P(1) = A_G(1) = \exp(-1^{0.49}) = \exp(-1) = 0,368$ , ce qui diffère légèrement.



**Figure A1.1\_14: fissures bande inégales coplanaires : comparaison des facteurs d'interaction exacts et approchés**

Les facteurs d'interaction ne dépendent pas des tailles de fissures mais du rapport des tailles des fissures et de leur écartement relatif. La figure A1.1\_14 présente un exemple de validation.

## A1.1.2. Interaction entre deux fissures bande parallèles

La formulation approchée est déduite directement de la fonction de type Westergaard. La limite d'écrantage est définie au paragraphe A1.1.2.3.

### A1.1.2.1. Interaction entre deux fissures bande parallèles non écrantées

Les fissures non coplanaires peuvent atténuer ou amplifier les FIC des fissures interagissantes. Le modèle présenté ci-après ne s'applique que s'il y a amplification des FIC à toutes les pointes, c.à.d. quand il n'y a pas d'écrantage.

$$\gamma_{21}(P) = \frac{\iint_S F_W \left( \frac{x}{a}; \frac{z}{a} \right) \cdot \check{g}(P, M) \cdot dx}{\iint_S g(P, M) \cdot dx} \quad (A1.1_17)$$

L'application du premier théorème de valeur moyenne donne pour les fissures bande, compte tenu que l'intégration ne porte que sur  $x$  :

$$\iint_{x_1}^{x_2} F_W \left( \frac{x}{a}; \frac{z}{a} \right) \cdot \check{g}(P, M) \cdot dx = F_{W\_B\_Pa} \left( \frac{x_3}{a}; \frac{z}{a} \right) \cdot \iint_{x_1}^{x_2} g(P, M) \cdot dx \quad (A1.1_18)$$

Avec  $x_1 < x_3 < x_2$

L'abscisse  $x_3$  représente un décalage du point Q d'abscisse  $x_3$ . Nous le nommons  $x_D \equiv x_3$

La valeur de  $x_D$  est obtenue en écrivant cette formule pour les mêmes fissures coplanaires.

$$F_{W\_B\_pa} \left( \frac{x_D}{a}; 0 \right) = \gamma_{21\_Coplanaire} \quad (A1.1_19)$$

La fonction de Westergaard pour le hors plan (A1.1\_7) exprimée en coordonnées polaires est :

$$F_{W\_B\_Pa} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho_1 \cdot \rho_2}} \cdot \left[ \cos \left( \theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) + \frac{1}{\rho_1 \cdot \rho_2} \cdot \sin \theta \cdot \sin \frac{3}{2} \cdot (\theta_1 + \theta_2) \right] \quad (A1.1_20a)$$

Avec

$$\rho = \frac{r}{a} \rho_1^2 = \rho^2 + 1 - 2 \cdot \rho \cdot \cos \theta \quad \rho_2^2 = \rho^2 + 1 + 2 \cdot \rho \cdot \cos \theta \quad (A1.1_20b)$$

$$\theta_1 = A \cos \left( \frac{-1 + \rho \cdot \cos \theta}{\rho_1} \right) \quad \theta_2 = A \cos \left( \frac{1 + \rho \cdot \cos \theta}{\rho_2} \right) \quad (A1.1_20c)$$

$r$  et  $\theta$  sont les coordonnées polaires associées à  $x_D$  et  $z$

Donc le facteur d'interaction en pointe interne s'exprime par :

$$\gamma_{21}(P) = F_{W\_B\_Pa} \left( \frac{x_D}{a}; \frac{S_z}{a} \right) \quad (A1.1_21)$$

Dans le cas de fissures bande, le facteur d'interaction est donné par les formules exactes de Gommerstadt, donc le résultat obtenu en utilisant cette formule, valable pour tout  $S_x > 0$  et aux deux pointes internes, est exact.

L'inversion de la formule (A1.3\_19) est simple dans le cas de fissures bande. La validation donnée à la figure A1.1\_16 est complétée à la figure A1.1.25 du § A1.1.2.4.

### Détermination des isovaleurs de facteur d'interaction

La valeur du facteur d'interaction  $\gamma_0$  de la fissure 1 sur la fissure 2 est fixé à  $\gamma_0$

Il faut d'abord construire les isovaleurs de la fonction de Westergaard :

- Calcul de la valeur repère  $\frac{x_w}{a_1}$  sur l'axe Ox en résolvant l'équation  $FW_{B\_co} \left( \frac{x_w}{a_1} \right) = \gamma_0$
- Calculer pour chaque valeur de  $\frac{z_0}{a_1}$  l'abscisse  $\frac{x_0}{a_1}$  de l'isovaleur  $FW_{B\_pa} \left( \frac{x_0}{a_1}, \frac{z_0}{a_1} \right) = \gamma_0$ .

Création de l'isovaleur du facteur d'interaction par le changement de repère suivant :

- Calcul du point de repère de l'isovaleur d'interaction sur l'axe Ox  $\frac{S_{xG}}{l}$  en résolvant  $\gamma_{B\_Co} \left( \frac{S_{xG}}{l} \right) = \gamma_0$

Où  $l$  est la longueur d'adimensionnement choisie  $2a$  ou  $a_1+a_2$

- Les coordonnées de l'isovaleur d'interaction  $\gamma = \gamma_0$  sont données par :

$$\frac{S_x}{l} = \frac{x_0}{l} - \frac{x_w}{l} + \frac{S_{xG}}{l} \quad \text{et} \quad \frac{S_z}{l} = \frac{z_0}{l} \quad (\text{A1.1}_{22})$$

La figure A1.1\_15 illustre le décalage de l'isovaleur 1,1 de la fonction de Westergaard vers l'isovaleur du facteur d'interaction en mode I.

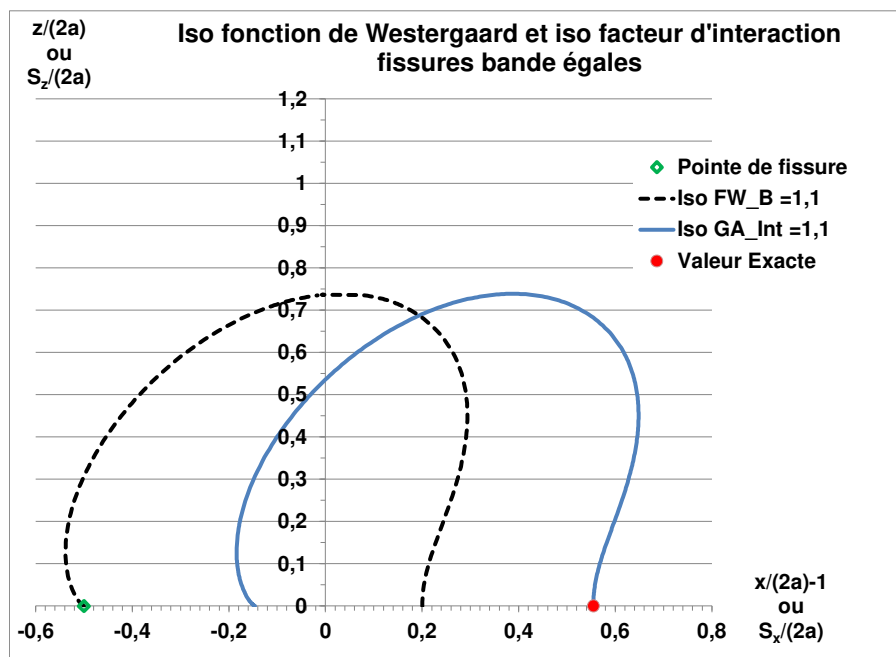
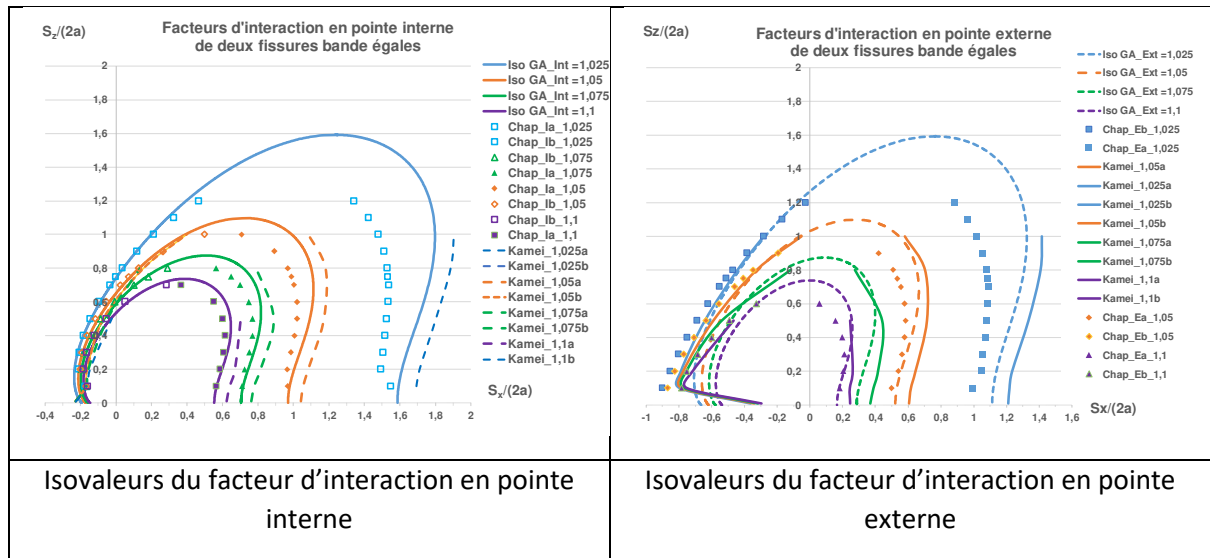


Figure A1.1\_15 : passage de l'isovaleur de la fonction  $F_{WB}$  à l'isovaleur du facteur d'inter action

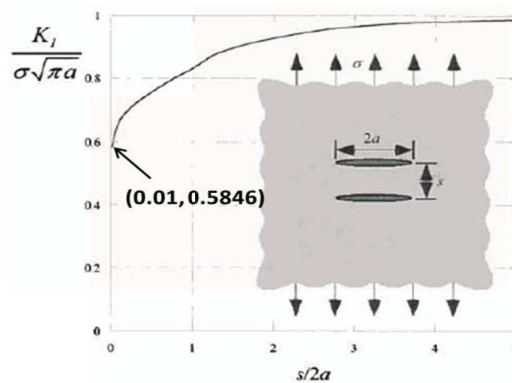


**Figure A1.1\_16: fissures bande inégales parallèles :  
comparaison des facteurs d'interaction exacts et approchés**

Kamei a utilisé la théorie des dislocations plus précise que la méthode des éléments finis (KAY, 1974). Pour des interactions faibles qui correspond à des fissures plus éloignées il faudrait des maillages d'éléments finis très fin sur un grand domaine. De plus les calculs de Chapuliot (CHA, 2000) utilisent J pour calculer les facteurs d'interaction, ce qui tient compte du mode II, contrairement aux calculs de Kamei fondés sur le mode I seul. Donc les isovaleurs calculées par éléments finis sont situées à l'intérieur de celles obtenues par la théorie des dislocations.

- A1.1.2.2 Interaction entre deux fissures bande parallèles superposées

Il est difficile de calculer avec précision les facteurs d'interaction des fissures superposées et qui se trouvent à des intervalles très rapprochés. Kamei et Yokobori (KAY, 1974) ont fourni un résultat numérique fiable fondé sur la représentation des fissures par distribution des dislocations. Ces résultats sont mentionnés dans le dictionnaire de Murakami (MUR, 1996) et sont reproduits à la figure A1.1\_17.



**Figure A1.1\_17 : fissures bande égales, parallèles et superposées, situées dans un milieu infini en traction (image tirée de MUR, 1996)**

Gorbatikh (GOR, 2007) propose une méthode analytique pour prédire les facteurs d'intensité des contraintes pour des fissures séparées par des espacements sensiblement plus petits que les longueurs de fissure. Les fissures superposées de même longueur, lorsqu'elles sont très rapprochées, se protègent fortement. La figure A1.1\_18 montre que les résultats de Kachanov (KAC, 1994) ne sont pas corrects pour les écartements  $S_z/(2a) < 0,4$  mais que pour des fissures plus espacées l'accord est excellent avec les résultats de Gorbatikh et de Chang & Ma (CHM, 2002). En revanche, les résultats de Kamei et Yokobori (KAY, 1974) concordent avec l'analyse asymptotique de Gorbatikh. En utilisant ces deux résultats, nous avons développé par lissage les équations suivantes :

$$\gamma_{S_I} = 1 - 0.435 \cdot \exp(-1,015 \cdot \hat{S}_z^{0,727}) \quad (A1.1_23)$$

$$\gamma_{S_{II}} = 0.335 \cdot \exp(-1,675 \cdot \hat{S}_z^{0,751}) \quad (A1.1_24)$$

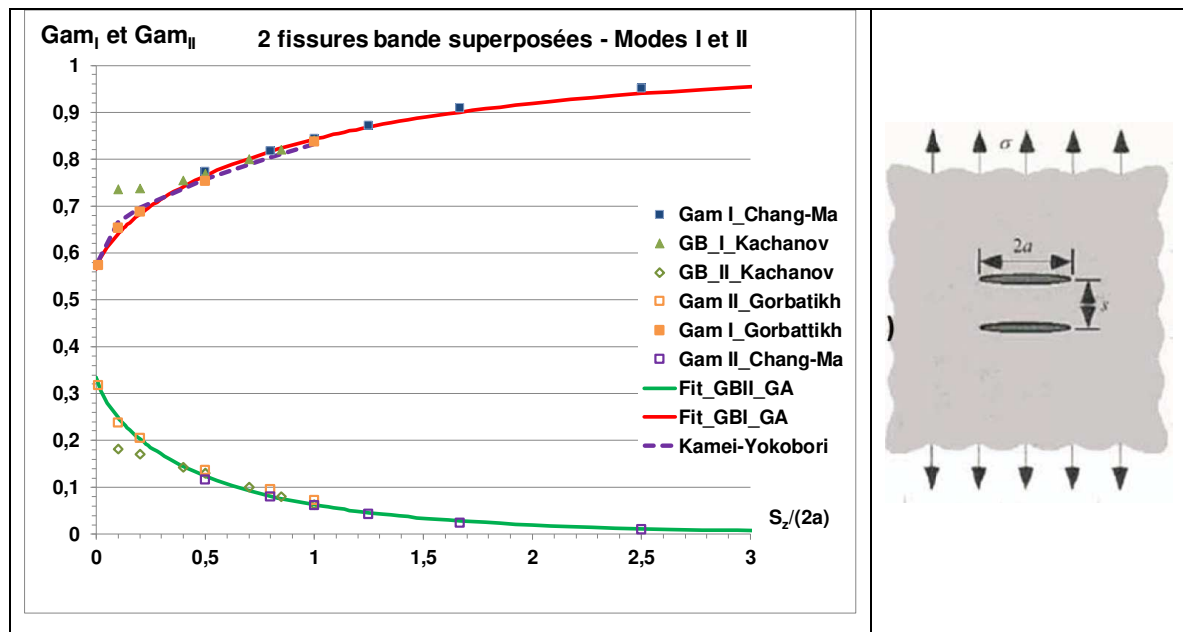
Lorsque les fissures sont proches, le mode II peut ne pas être négligeable vis-à-vis du mode I.

Une formule, fondée sur le calcul du FIC équivalent  $K_{eq} = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}$ , a été établie pour le facteur d'interaction équivalent :

$$\sqrt{\gamma_{S_I}^2 + \gamma_{S_{II}}^2} \quad (A1.1_25)$$

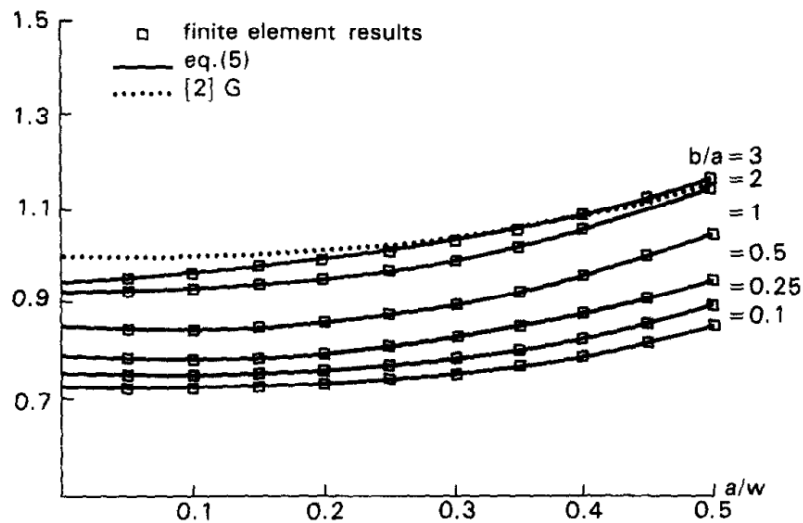
Les facteurs d'interaction de fissures superposées sont identiques aux deux points.

$$\gamma_{S_{eq}} \left( \frac{S_z}{2a} \right) = \frac{K_{eq}}{K_{eq0}} = 1 - 0,347 \cdot \exp \left[ -0,788 \cdot \left( \frac{S_z}{2a} \right)^{0,936} \right] \quad (A1.1_26)$$



Ces solutions serviront pour l'établissement de formules approchée pour des fissures écartées partiellement.

Le cas des fissures égales superposées dans une plaque de dimension finies a été étudié par Jiang et al. (JIA, 1990). L'effet de bord réduit peu l'effet d'écran jusqu'à la valeur de la taille relative  $a/W = 0,4$  (Figure A1.1\_19).



**Figure A1.1\_19 : facteurs d'interaction pour des fissures bande égales (de taille  $2a$ ), parallèles et superposées (séparées de  $2b$ ), situées dans une plaque de largeur  $2W$  en traction (JIA, 1990)**

Le cas des fissures parallèles superposées inégales a fait l'objet de plusieurs études telle celle de Hahn (HAN, 2020) illustrée au § 2.2.2 du chapitre 2. Jiang et al. (JIA, 1992) ainsi que Chen et al. (CHC, 1995) ont analysé l'effet d'une petite fissure superposée à une plus grande fissure.

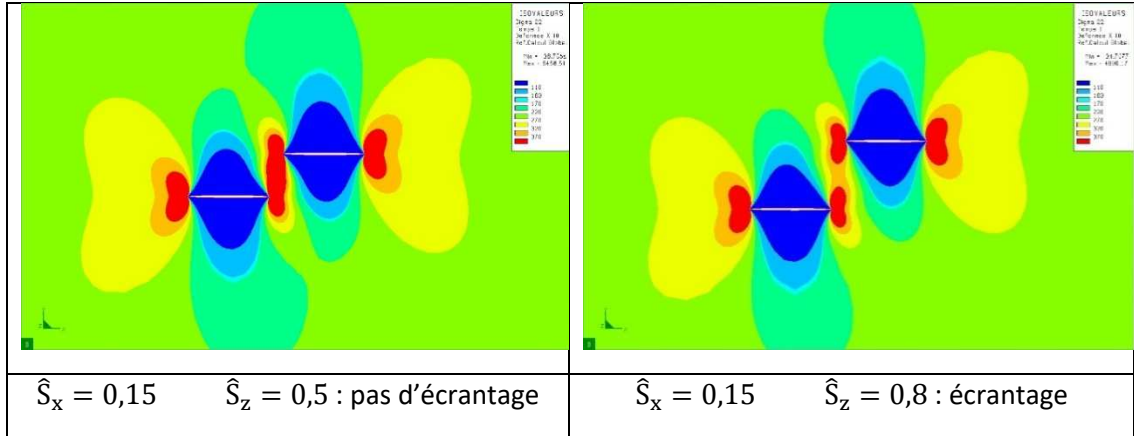
### A1.1.2.2. Limite d'écrantage pour deux fissures bande

L'écrantage d'une fissure par une autre n'est pas définie par la simple relation géométrique  $S_{x0} < 0$  mais dépend de l'étendue de la zone d'atténuation des contraintes située au-dessus de la fissure agissant sur l'autre. La figure A1.1\_20 montre que l'écrantage est caractérisé par une zone de concentration de la contrainte normale, de taille moindre en pointe interne qu'en pointe externe.

L'écrantage de deux fissures bande interagissantes est défini par comparaison des facteurs d'interaction aux deux pointes d'une des fissures. La condition suivante est valable quelle que soit la taille des fissures.

$$\gamma_{21\_Int} \leq \gamma_{21\_Ext} \quad (A1.1\_27)$$

Si la condition (A1.1\_27) est vérifiée pour la première fissure, elle l'est aussi pour la seconde. Dans le cas où les facteurs d'interaction aux deux pointes d'une fissure sont inférieurs à 1, il existe un double écrantage.



**Figure A1.1\_20: comparaison des distributions de contraintes  $\sigma_{zz}$  pour deux cas d'interaction de fissures parallèles égales**

Chapuliot (CHB, 2018; GIL, 2022) a réalisé un très grand nombre de calculs aux éléments finis avec le logiciel CAST3M (CAS, 2020) pour des fissures bande égales et inégales (Environ 36 valeurs de  $\hat{S}_x$ ,  $\hat{S}_z$  variant de 0,1 à 2 par pas de 0,1. En tenant compte des tests de précision, l'ensemble comporte 890 calculs. Ces résultats ont permis d'obtenir une limite d'écrantage avec précision. Les valeurs des facteurs d'interaction pour des fissures fortement écartées sont cohérentes avec les valeurs asymptotiques obtenues pour des fissures égales superposées.

Les calculs d'interaction de fissures inégales ( $\frac{a_1}{a_2} = 0.5$  et  $0.7$ ) montrent que la limite d'écrantage pour des fissures inégales est identique à celle de fissures égales, à condition de l'exprimer dans le repère  $\hat{S}_x = \frac{S_x}{a_1+a_2}$  et  $\hat{S}_z = \frac{S_z}{a_1+a_2}$  (Figure A1.1\_21).

Cette propriété se démontre en utilisant les formules de Gommerstadt (GOM, 2009).

La limite d'écrantage calculée par éléments finis est décrite avec précision par un folium de Descartes décentré :

$$\begin{cases} \hat{S}_{xE} = \hat{S}_{x0} - t \cdot \hat{S}_{zE} \\ \hat{S}_{zE} = \hat{S}_{z0} - 3a \cdot \frac{t}{1+t^3} \end{cases} \quad \text{where } a = 0.4, \hat{S}_{x0} = -0.136, \hat{S}_{z0} = 0.215 \quad (\text{A1.1}_28)$$

La limite d'écrantage équivalente obtenue à partir des formules approchées des facteurs d'interaction (A1.1\_14) ne tient compte que partiellement du mode II (Figure A1.1\_22).

$$\hat{S}_{x,SEq} = -0.379 \cdot \hat{S}_z - 1.6268 \cdot \hat{S}_z^2 + 2.4547 \cdot \hat{S}_z^{1.8323} \quad (\text{A1.1}_29)$$

Les conditions d'écrantage pour deux fissures bande sont données par les formules :

$$\hat{S}_{zE} = \text{Max}(\hat{S}_{zE}, 0,2)$$

$$\Sigma_E \equiv (\hat{S}_{zE} - \hat{S}_{z0}) \cdot [\hat{S}_{zE}^3 - (\hat{S}_{xE} - \hat{S}_{x0})^3] - 1,35 \cdot \hat{S}_{zE}^2 (\hat{S}_{xE} - \hat{S}_{x0}) = 0 \quad (\text{A1.1}_30)$$

Il y a écrantage élastique si  $\Sigma_E > 0$  et  $\hat{S}_{xE} < \hat{S}_{x0} + \hat{S}_{zE} \cdot \sqrt[3]{\frac{1,35}{3(\hat{S}_{zE} - \hat{S}_{z0})}}$  sinon la fonction est mise à la valeur-1.



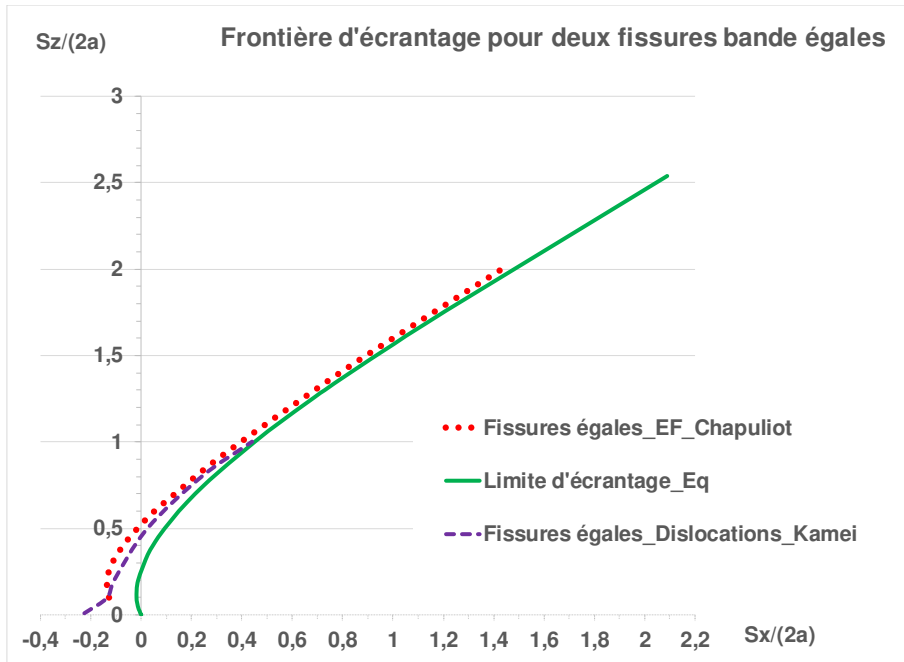


Figure A1.1\_21 : limite d'écrantage pour des fissures bande égales parallèles

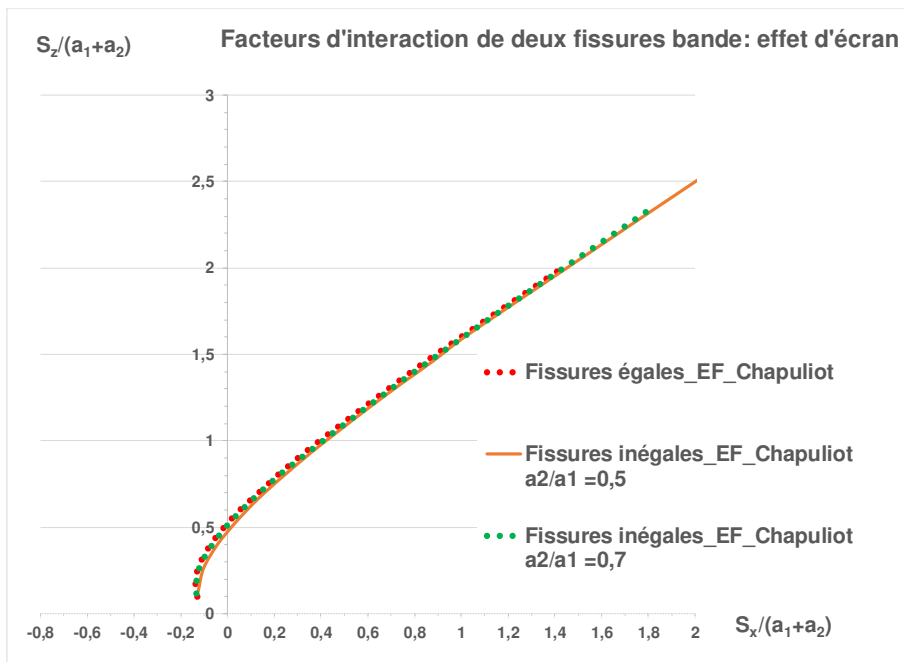


Figure A1.1\_22 : limite d'écrantage pour des fissures bande égales et inégales parallèles

### A1.1.2.3. Interaction entre deux fissures bande parallèles écrantées

Les équations (A1.1\_12) et (A1.1\_21) ne peuvent pas être utilisées pour prédire les facteurs d'interaction pour les fissures écrantées. Les variations des facteurs d'interaction pour les valeurs négatives de  $\hat{S}_x$  sont fortement non-linéaires. L'équation (A1.1\_21) a été utilisée pour déterminer la valeur de l'abscisse du décalage  $X_{RD} = \frac{x_D}{a}$  dans la fonction de Westergaard pour chaque écartement

vertical relatif  $\hat{S}_z$  à partir des résultats aux éléments finis. Les variations de  $X_R$  sont reproduites à la figure A1.1\_23 pour la pointe externe, elles sont lissées par les équations des tableaux A1.1 a, b, c d. La limite d'écrantage a été légèrement modifiée pour les configurations correspondant à  $\hat{S}_z \leq 0.7$  :

$$\hat{S}_{x\_SEq} = \frac{0.2145}{0.7} \cdot \hat{S}_z$$

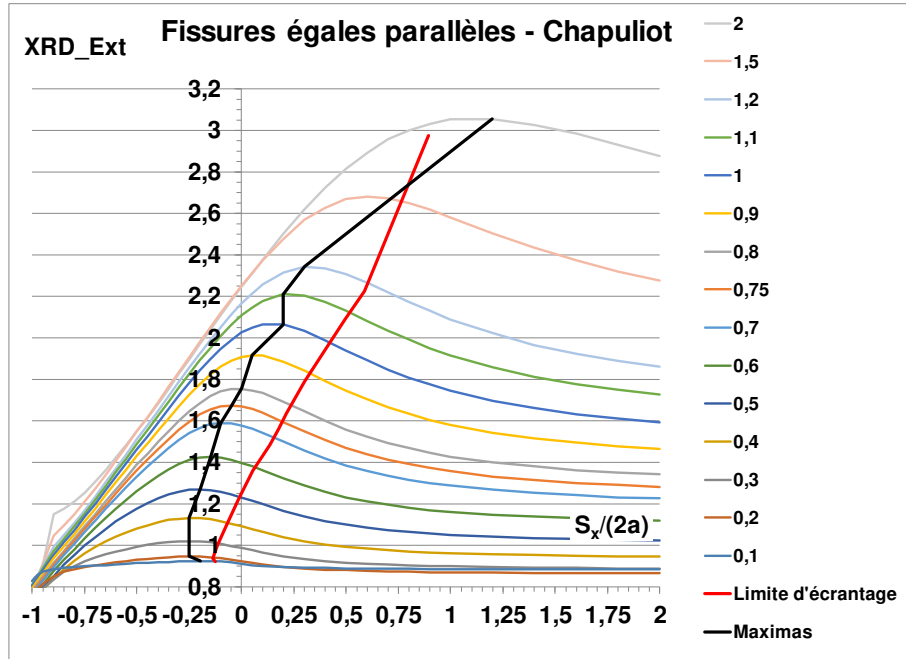


Figure A1.1\_23 : variations du décalage XRD pour des fissures bande égales parallèles

Le décalage des fissures écrantées s'exprime sous la forme polynomiale suivante.

$$X_{RD} = A + B \cdot \hat{S}_{x0} + C \cdot \hat{S}_{x0}^2 + D \cdot \hat{S}_{x0}^3 + E \cdot \hat{S}_{x0}^4 \quad (A1.1_31)$$

Pointe interne

$\hat{S}_z \leq 0.6$	$A = -1.0033 \cdot S_{z0}^3 + 0.9125 \cdot S_{z0}^2 + 0.3602 \cdot \hat{S}_{z0} + 0.9795$
	$B = -6.6815 \cdot S_{z0}^3 + 8.6734 \cdot S_{z0}^2 - 2.45 \cdot \hat{S}_{z0} + 1.2583$
	$C = -41.714 \cdot S_{z0}^3 + 67.541 \cdot S_{z0}^2 - 35.532 \cdot \hat{S}_{z0} + 5.3758$
	$D = -71.356 \cdot S_{z0}^3 + 120.4 \cdot S_{z0}^2 - 68.799 \cdot \hat{S}_{z0} + 11.094$
	$E = -37.332 \cdot S_{z0}^3 + 63.837 \cdot S_{z0}^2 - 37.645 \cdot \hat{S}_{z0} + 6.976$

$\hat{S}_z > 0.6$	$A = -0.1078 \cdot S_{z0}^3 + 0.2237 \cdot S_{z0}^2 + 0.1073 \cdot \hat{S}_{z0} + 1.1797$
	$B = 0.0849 \cdot S_{z0}^3 + 0.1075 \cdot S_{z0}^2 + 0.1392 \cdot \hat{S}_{z0} + 1.4382$
	$C = -0.4952 \cdot S_{z0}^3 + 1.895 \cdot S_{z0}^2 - 1.943 \cdot \hat{S}_{z0} + 0.5988$
	$D = -0.4746 \cdot S_{z0}^3 + 2.0867 \cdot S_{z0}^2 - 2.36 \cdot \hat{S}_{z0} - 0.234$
	$E = 0$

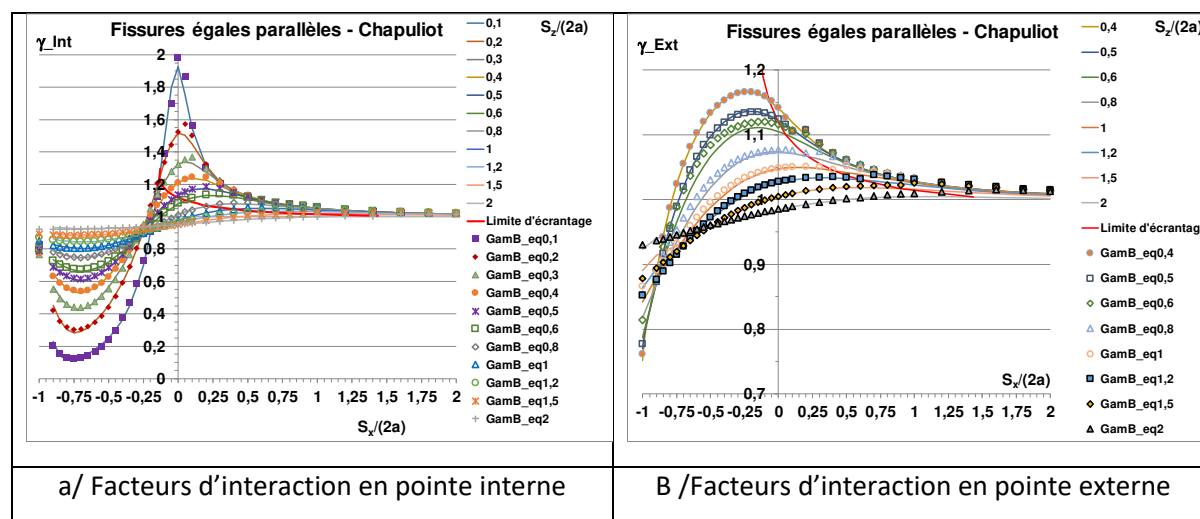
Pointe externe

$\hat{S}_z \leq 0.5$	$A = -1.9 \cdot S_{z0}^3 + 3.93 \cdot S_{z0}^2 - 0.948 \cdot \hat{S}_{z0} + 0.9643$
	$B = -12.417 \cdot S_{z0}^3 + 13.482 \cdot S_{z0}^2 - 4.4496 \cdot \hat{S}_{z0} + 0.066$
	$C = -85342 \cdot S_{z0}^3 + 84.246 \cdot S_{z0}^2 - 23.547 \cdot \hat{S}_{z0} + 0.424$
	$D = -145.43 \cdot S_{z0}^3 + 150.95 \cdot S_{z0}^2 - 41.021 \cdot \hat{S}_{z0} + 0.8975$
	$E = -72.783 \cdot S_{z0}^3 + 79.614 \cdot S_{z0}^2 - 22.571 \cdot \hat{S}_{z0} + 0.5418$

$\hat{S}_z > 0.5$	$A = 2.28358 - 1.5837 \cdot S_{z0}^{0.06627} \cdot \text{Exp}(-1.9225 \cdot S_{z0}^{2.24237})$
	$B = 1.25447 - 5.3899 \cdot S_{z0}^{0.95834} \cdot \text{Exp}(-2.0908 \cdot S_{z0}^{2.0809})$
	$C = -7142.35 \cdot S_{z0}^{5.3429} \cdot \text{Exp}(-8.5377 \cdot S_{z0}^{0.7747})$
	$D = 0.01317 - 3.1623 \cdot S_{z0}^{3.1879} \cdot \text{Exp}(-1.3178 \cdot S_{z0}^{3.2597})$
	$E = 0$

**Tableaux A1.1\_1 a, b, c, d : coefficients du décalage de l'abscisse dans la fonction de Westergaard pour des fissures bande égales parallèles**

Les figures A1.1\_24 a et b comparent l'application des formules aux résultats des calculs aux éléments finis de Chapuliot (CHA, 2020).



**Figure A1.1\_24 : comparaison des prédictions de facteurs d'interaction pour des fissures bande égales parallèles aux résultats des calculs aux éléments finis**

## Fissures inégales

K. Hasegawa (HAS, 2009) a observé que l'action d'une petite fissure traversante sur la grande est presque proportionnelle au rapport de la taille de la plus grande sur la plus petite. S. Chapuliot (CHA, 2020) en a tiré une règle de normalisation de l'interaction de la petite fissure sur la grande par la taille de la plus petite.

L'analyse de cette règle est limitée au cas des fissures coplanaires, donc pour des écartement horizontaux positifs.

Cette règle approchée peut être généralisée de la façon suivante :

- Si l'on étudie la petite fissure, la variation du facteur d'interaction en pointe interne avec l'écartement des fissures est quasiment indépendante du rapport des tailles si l'écartement est normalisé par rapport à la taille de la plus grande fissure.
- Si l'on étudie la grande fissure, la variation du facteur d'interaction en pointe interne avec l'écartement des fissures est quasiment indépendante du rapport des tailles si l'écartement est normalisé par rapport à la taille de la plus petite fissure.

Pour des fissures parallèles inégales, l'analyse des résultats de Chapuliot est illustrée à la figure A1.1\_25.

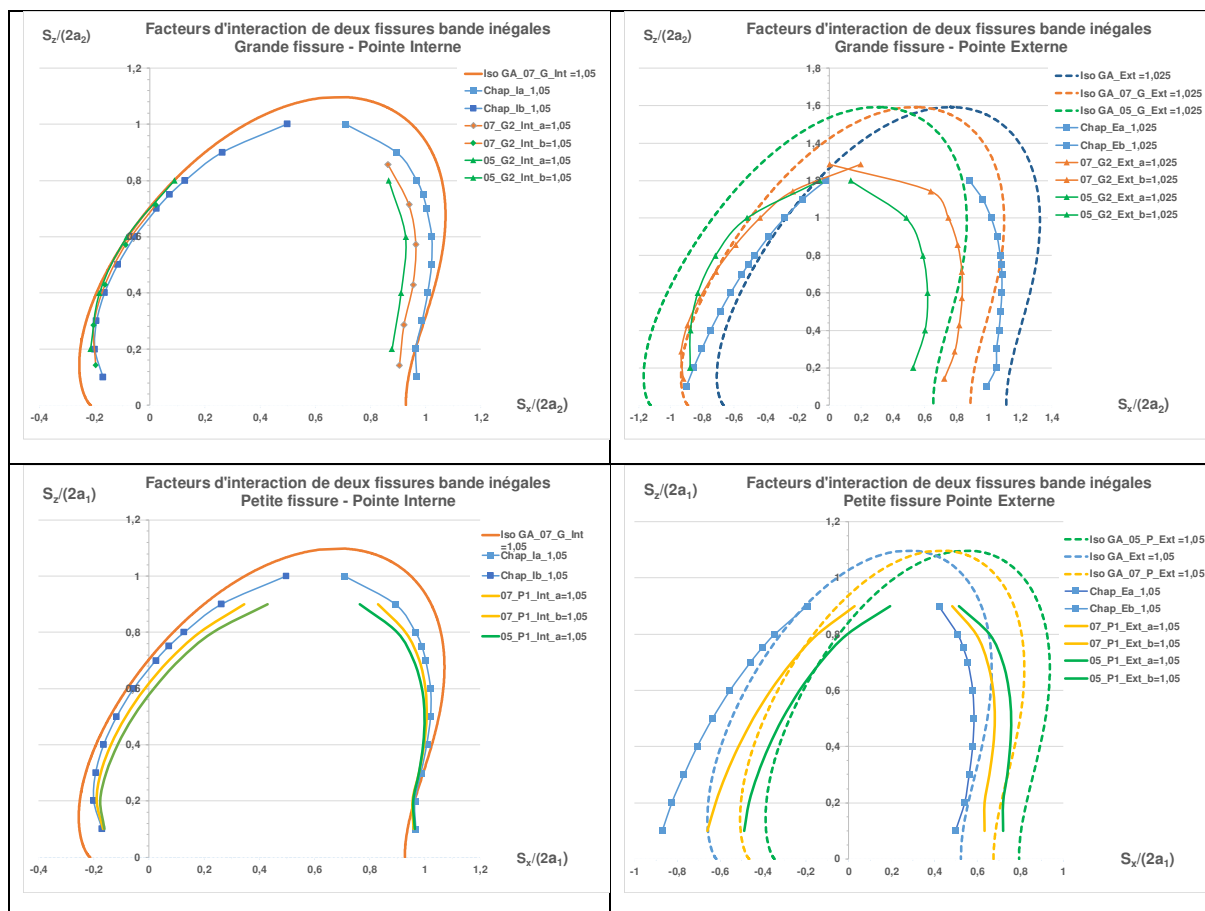


Figure A1.1\_25 : comparaison des prédictions de facteurs d'interaction pour des fissures bande inégales parallèles aux résultats des calculs aux éléments finis (CHA, 2020)

### A1.1.3. Fissures bande inclinées

Dès qu'une fissure est inclinée par rapport à la direction de traction, elle est sollicitée en mode mixte. Dans le cas bidimensionnel seuls les modes I et II interviennent.

#### A1.1.3.1. FIC pour une fissure bande inclinée isolée

Les FIC de la fissure isolée inclinée d'un angle par rapport l'axe 0x, ont pour expression :

$$K_I = \sigma_{app} \cdot \cos^2 \beta \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (A1.1\_32a)$$

$$K_{II} = \sigma_{app} \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (A1.1\_32b)$$

$$K_{eq} = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2} = \sigma_{app} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot \cos \beta \quad (A1.1\_32c)$$

$$J_{eq} = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} = J_{2a} \cdot \cos^2 \beta \quad (A1.1\_33)$$

Le FIC de la fissure bande isolée en mode I est nommé  $K_{I0} = \sigma_{app} \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$

Les FIC réduits sont définis par le rapport du FIC à  $K_{I0}$ .

Le FIC équivalent réduit  $K_{eq}/K_{I0}$  décroît moins vite en fonction de  $\beta$  que le FIC de mode I, mais la diminution est significative dès que  $\beta > 20$  degrés (Figure A1.1\_26).

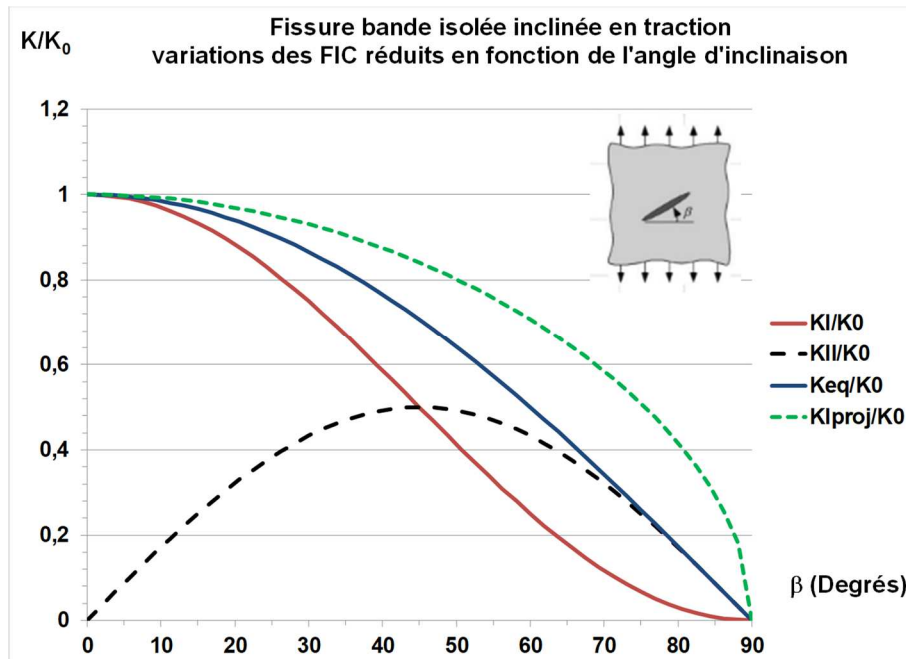


Figure A1.1\_26 : variations de Facteurs d'Intensité des Contraintes pour une fissure bande inclinées

Le défaut projeté sur l'axe normal à l'axe de sollicitation a pour demi-longueur :

$$a_{\text{proj}} = a \cdot \cos \beta \quad (\text{A1.1}_{34\text{a}})$$

$$K_{\text{I\_Proj}} = \sigma_{\text{app}} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot \sqrt{\cos \beta} = \frac{K_{\text{eq}}}{\sqrt{\cos \beta}} \quad (\text{A1.1}_{34\text{b}})$$

$$J_{\text{Proj}} = J_{2a} \cdot \cos \beta \quad (\text{A1.1}_{34\text{c}})$$

La valeur de  $K_{\text{I\_Proj}}$  est supérieure à celle du FIC équivalent pour tout angle d'inclinaison comme l'illustre la figure A1.1\_26. Cette propriété est intéressante car au chapitre I, que si l'on prend en compte le branchement de la fissure lors de l'amorçage, le caractère non conservatif du  $K_{\text{eq}}$  a été mis en évidence.

Ce résultat s'explique par l'évolution des coordonnées tangentielles réduite illustrée à la figure A1.1\_27.

Les contraintes tangentielles sont données par les formules suivantes :

$$\sigma_{\theta\theta_{\text{I}}} = \frac{\sigma_{\text{app}} \cdot \cos^2 \beta \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \left[ \frac{3}{4} \cdot \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (\text{A1.1}_{35\text{a}})$$

$$\sigma_{\theta\theta_{\text{II}}} = \frac{\sigma_{\text{app}} \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \left[ -\frac{3}{4} \cdot \sin \frac{\theta}{2} - \frac{3}{4} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (\text{A1.1}_{35\text{b}})$$

Les contraintes tangentielles réduites sont obtenues en divisant les contraintes par

$$\sigma_{00} = \frac{\sigma_{\text{app}} \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} :$$

$$\sigma_{\theta\theta_{\text{IR}}} = \frac{\sigma_{\theta\theta_{\text{I}}}}{\sigma_{00}} = \frac{3}{4} \cdot \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \quad (\text{A1.1}_{36\text{a}})$$

$$\sigma_{\theta\theta_{\text{IIR}}} = \frac{\sigma_{\theta\theta_{\text{II}}}}{\sigma_{00}} \cdot \left[ -\frac{3}{4} \cdot \sin \frac{\theta}{2} - \frac{3}{4} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (\text{A1.1}_{36\text{a}})$$

Suivant la direction  $\theta = -\beta$  il vient

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{\sigma_{00}} = \left( \frac{3}{4} \cdot \cos \frac{\beta}{2} + \frac{1}{4} \cdot \cos \frac{3\beta}{2} \right) \cdot \cos^2 \beta + \left( \frac{3}{4} \cdot \sin \frac{\beta}{2} + \frac{3}{4} \cdot \sin \frac{3\beta}{2} \right) \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta \quad (\text{A1.1}_{37})$$

La figure A1.1\_27 donne le tracé de cette fonction ainsi que de ces deux termes. La décroissance devient nette à partir de 45 degrés qui devrait être la limite de validité de la méthode de la fissure équivalente projetée.

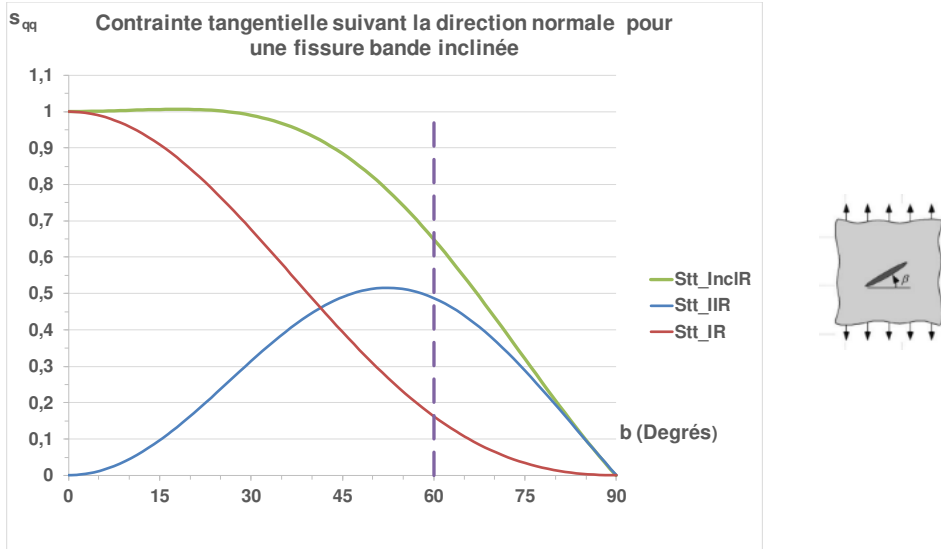


Figure A1.1\_27 : comparaison des contraintes tangentielles en mode I et en mode mixte

### A1.1.3.2. Interaction de deux fissures bande inclinées

Anis et al. (ANI, 2020) ont analysé de façon simplifiée l'interaction entre une fissure bande et une fissure bande inclinée. La méthode consiste à comparer le champ des contraintes autour d'une fissure isolée située dans un milieu infini (donné par la solution de Westergaard) et le champ des contraintes au voisinage d'une fissure inclinée de même longueur projetée.

Ces comparaisons sont illustrées par les figures A1.1.28 et A1.1\_29.

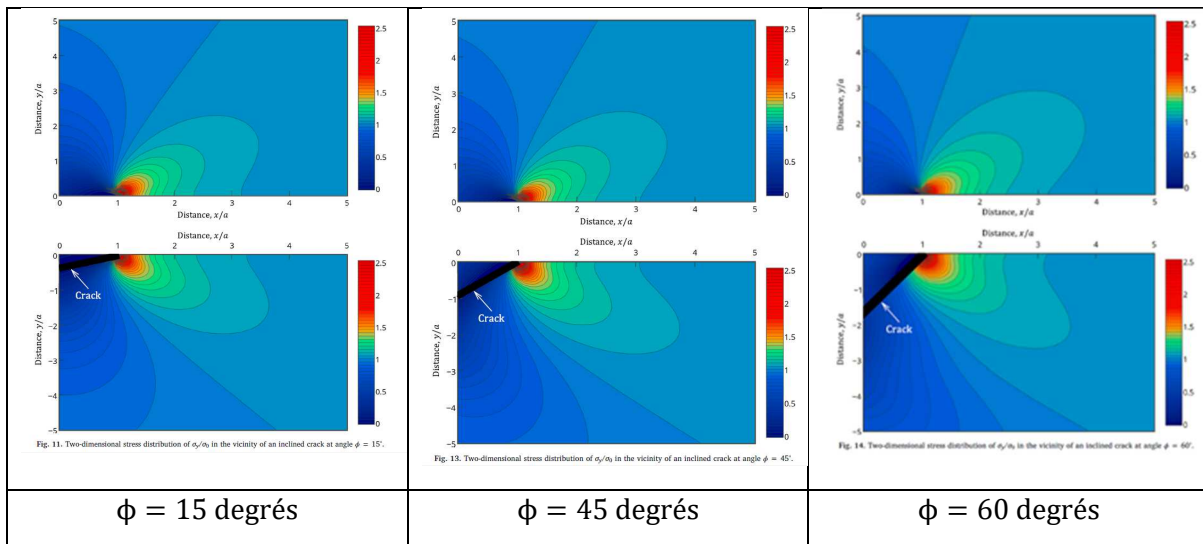
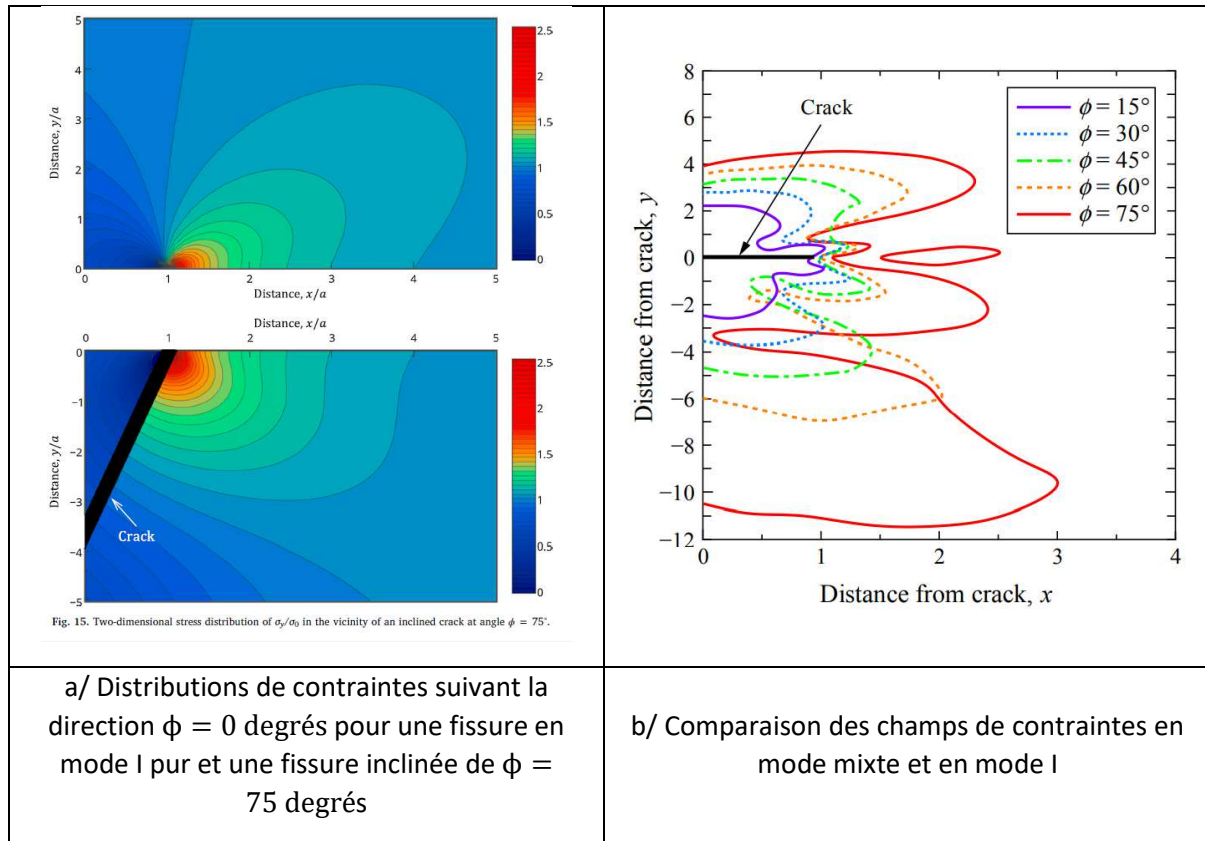


Figure A1.1\_28 : distributions de contraintes suivant la direction perpendiculaire au plan  $\phi = 0$  pour une fissure située dans ce plan en mode I pur et une fissure inclinée de  $\phi$  degrés

La figure A1.1\_29 montre que les distributions de contraintes normales sont proches pour une fissure sollicitée en mode I pur et une fissure inclinée.



**Figure A1.1\_29 : comparaison de champs de contraintes  $\sigma_{zz}$  en mode I et en mode mixte**

Deux conclusions importantes sont à retenir :

- Les distributions de contraintes suivant la direction de sollicitation sont similaires pour la fissure inclinée et la fissure projetée sur le plan normal à la sollicitation tant que l'angle d'inclinaison reste inférieur à 60 degrés.
- L'écrantage est plus important en mode mixte.

Les auteurs estiment que l'interaction d'une fissure avec une autre fissure coplanaire peut être négligée si la distance est de la moitié de la taille de fissure ce qui n'est pas correct. Le rapport entre l'écartement  $S_x$  doit être supérieur à la taille de fissure  $2a$  pour que de facteur d'interaction soit de moins de 1,05.

### A1.1.3.3. Solution approchée pour deux fissures bande inclinées

Les configurations sont décrites à la figure A1.1\_30 pour des fissures non écartées. L'angle  $\beta$  défini l'inclinaison de la fissure 2 par rapport à la direction de traction suivant l'axe  $z$ . Cet angle est considéré comme inférieur à 90 degrés.



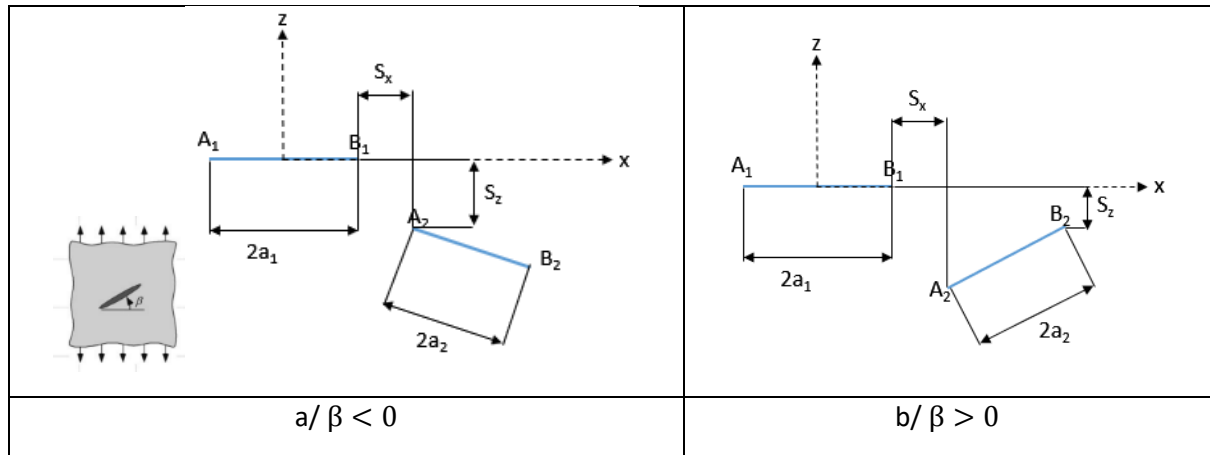


Figure A1.1\_30 : fissures inclinées l'une par rapport à l'autre

Les fissures sont égales de demi-longueur  $a$ . Mais l'analyse peut être étendue au cas des fissures inégales.

Le facteur d'interaction en pointe interne des deux fissures sont exprimés par :

$$\gamma_{12}(B_1) = \frac{K_{I_{12}}}{K_{I_0}} \quad \text{et} \quad \gamma_{21}(A_2) = \frac{K_{eq_{21}}}{K_{I_{eq}}} \quad (A1.1_{38})$$

Ces facteurs dépendent des écartements  $S_x$  et  $S_z$  et de l'angle d'inclinaison  $\beta$ .

Le développement d'une formule analytique pour les fissures inclinées est lourd, surtout en 3D. Il est préférable de suivre le raisonnement de Anis et al. (ANI, 2020) conforté en plasticité par celui de Kikuchi et al. (KIK, 2010) en considérant la projection de la fissure inclinée sur un plan parallèle au plan de la première fissure.

La dépendance vis-à-vis de  $S_z$  nécessite de considérer une fissure projetée sur un plan parallèle passant par la pointe la plus sollicitée. Dans le cas de la figure A1.1\_30a, il s'agit de la pointe  $A_2$ . Dans le cas de la figure A1.1.30b, choisir la pointe  $A_2$  peut conduire à une sous-estimation de l'interaction, mais retenir le plan passant par  $B_2$  est sûrement pénalisant.

Il faut donc comparer le facteur d'interaction de la fissure inclinée à celui de la fissure projetée passant par la pointe correspondant à l'écartement  $S_z$  le plus faible.

$$\gamma_{21}(B_1) = \frac{K_{eq_{12}}}{K_{I_{eq}}} \quad \text{et} \quad \gamma_{21}(A_2) = \frac{K_{I_{proj_{21}}}}{K_{I_{eq}}}$$

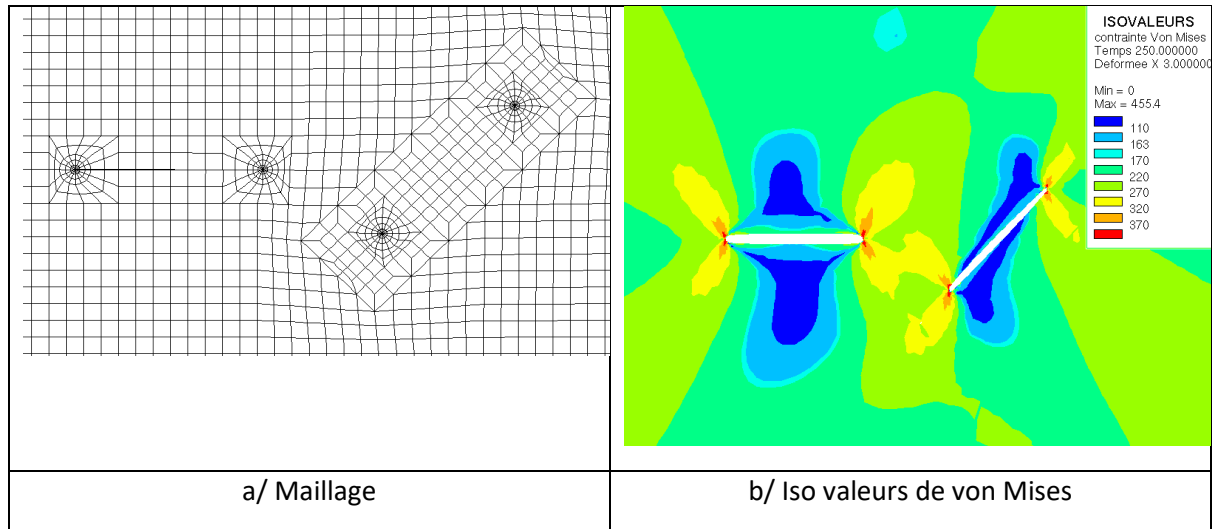
La projection de fissure réduit le paramètre d'interaction, mais aussi la taille de la fissure projetée.

- Analyse des cas traités par FRAMATOME

Framatome a réalisé deux calculs de fissures bande inclinées de longueurs égales (FRA, 1999).

Configuration L1 : Fissure centrée sur  $Ox$  inclinée de  $-45$  degrés par rapport à la fissure sollicitée en mode I

Les écartements relatifs valent  $S_x/(2a) = 0,65$  et  $S_z/(2a) = 0,354$ .

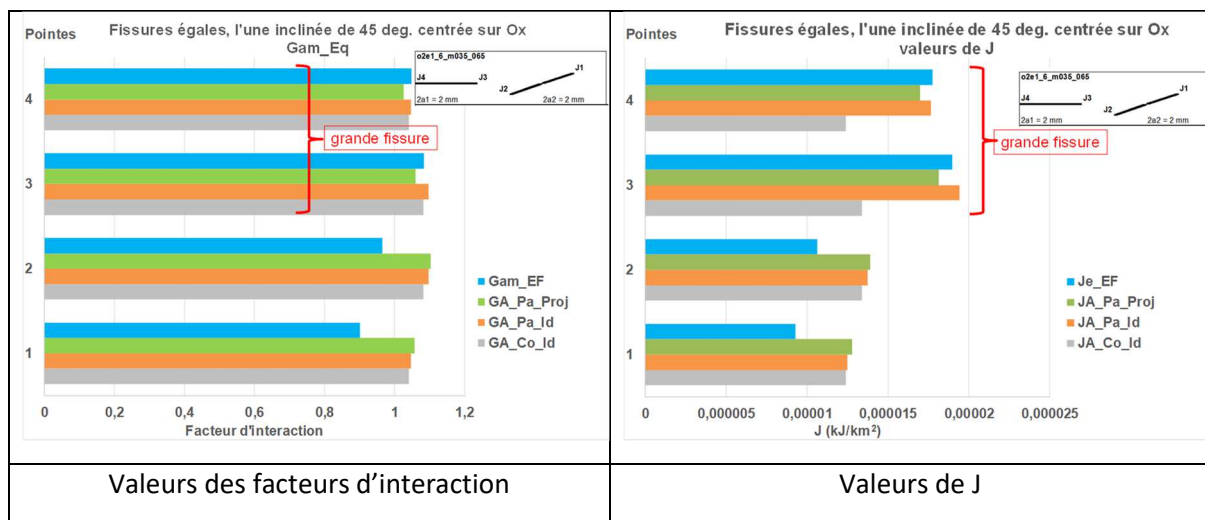


**Figure A1.1\_31 : seconde fissure centrée sur le plan de la première et inclinée à 45 degrés**

Les isovaleurs de von Misès sont plus faibles aux pointes de la fissure inclinée et la zone de relaxation des contraintes est bien plus restreinte qu'en mode I (Figure A1.1\_31). La figure A1.1\_32 compare les facteurs d'interaction et les forces fissurantes J aux quatre pointes de fissure pour quatre configurations différentes :

1. Cas calculé par éléments finis
2. Cas où la seconde fissure est projetée sur un plan parallèle à la première passant par la pointe interne de la seconde fissure
3. Cas où la seconde fissure est pivotée autour de la pointe interne de la seconde fissure de façon à être parallèle à la première
4. Fissures égales coplanaires

Dans tous les cas l'écartement  $S_x$  est le même. Les valeurs dans les cas 2 à 4 sont obtenues par application des formules, ce qui explique les légendes en GA et JA.



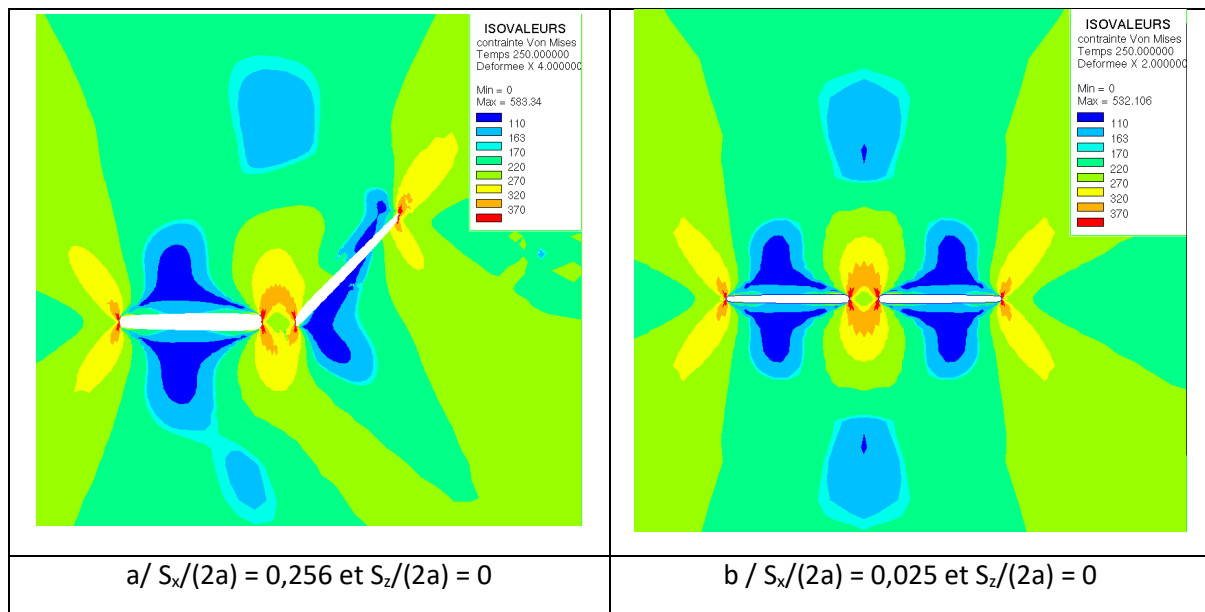
**Figure A1.1\_32 : comparaison des facteurs d'interaction équivalents et de J aux résultats des calculs par éléments finis pour la configuration L1**

La grande fissure (celle sollicitée en mode I) est la plus nocive. L'approche la plus satisfaisante est celle de la fissure pivotée et celle de la fissure projetée parallèle sous-estime légèrement le résultat calculé par éléments finis. Toutefois c'est l'inverse pour la petite fissure.

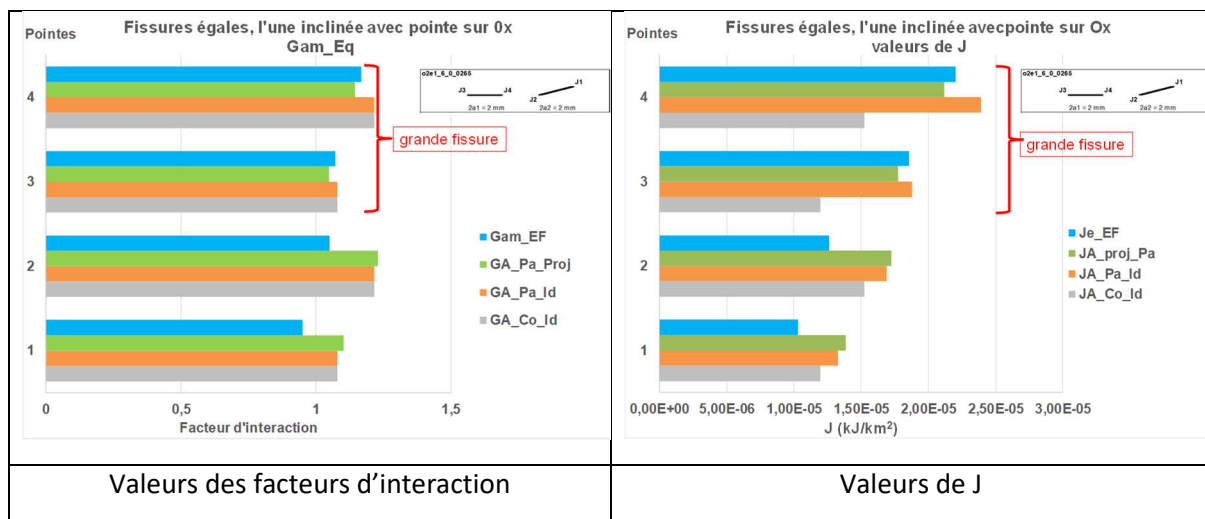
Configuration L2 : fissure avec pointe sur Ox inclinée de +45 degrés par rapport à la fissure sollicitée en mode I

Les écartements relatifs valent  $S_x/(2a) = 0,265$  et  $S_z/(2a) = 0$ .

Les isovaleurs de von Mises pour deux configurations avec environ le même écartement horizontal mais dans un cas la seconde fissure est inclinée de 45 degrés et dans l'autre elle est coplanaire sont comparées à la figure A1.1\_33.



**Figure A1.1\_33 : comparaison des isovaleurs de von Mises pour deux configurations avec environ le même écartement horizontal mais dans un cas la seconde fissure est inclinée de 45 degrés et dans l'autre elle est coplanaire**



**Figure A1.1\_34 : comparaison des facteurs d'interaction équivalents et de J aux résultats des calculs par éléments finis pour la configuration L2**

La figure A1.1\_34 compare les facteurs d'interaction et les forces fissurantes J aux quatre pointes de fissure pour les quatre configurations différentes retenues pour le cas L1.

La grande fissure (celle sollicitée en mode I) est la plus nocive. Comme dans le cas précédent, l'approche la plus satisfaisante est celle de la fissure pivotée et celle de la fissure projetée parallèle sous-estime légèrement le résultat calculé par éléments finis. Toutefois c'est l'inverse pour la petite fissure.

- Autres études de fissures égales, l'une inclinée par rapport à l'autre

Plusieurs autres études ont traité ce problème, notamment Yan (YAN, 2007) dans le cas extrême des fissures perpendiculaires. La figure A1.1\_35 établie pour des fissure égales, montre que l'interaction est faible, mais pas nulle et confinée dans le domaine des distances  $d/a < 0,5$  soit  $\lambda_x < 0,8$ .

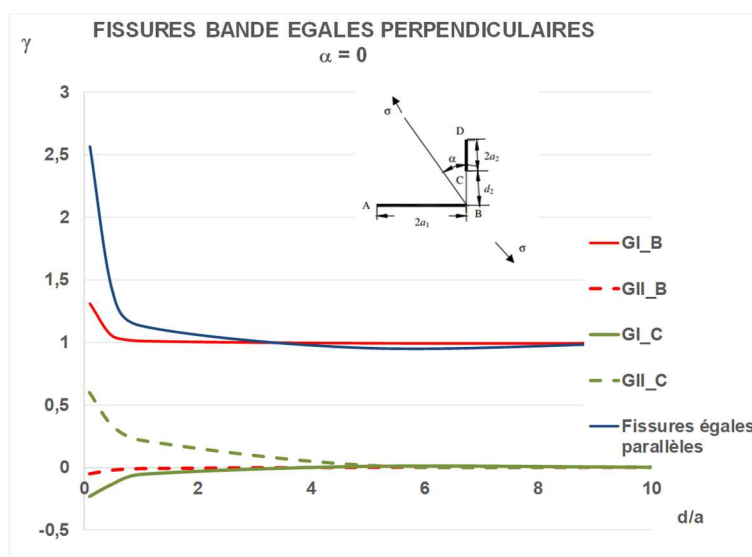
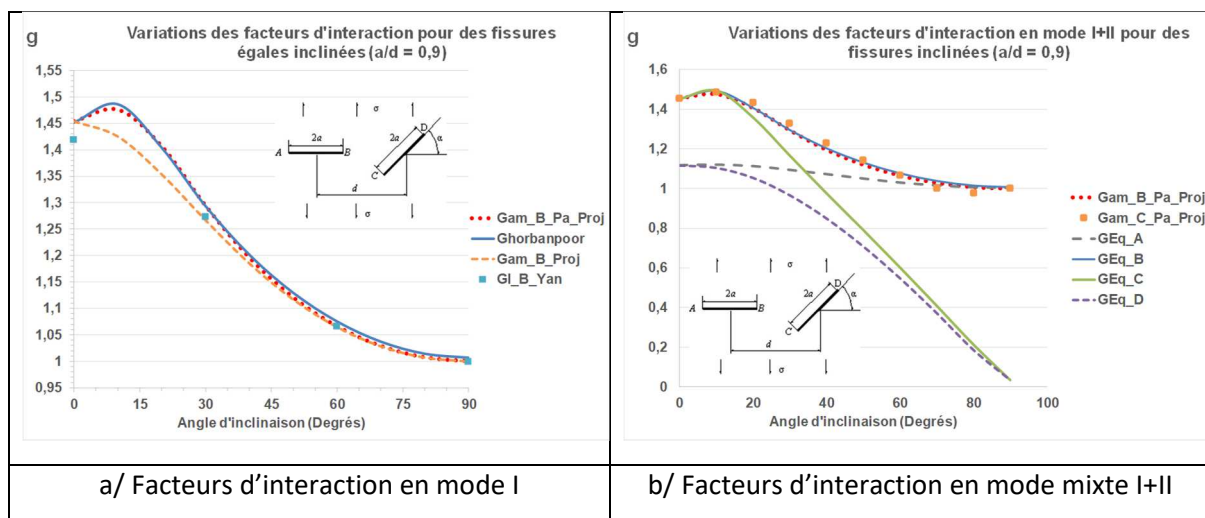


Figure A1.1\_35 : facteurs d'interaction aux points les plus proches des deux fissures perpendiculaires



a/ Facteurs d'interaction en mode I

b/ Facteurs d'interaction en mode mixte I+II

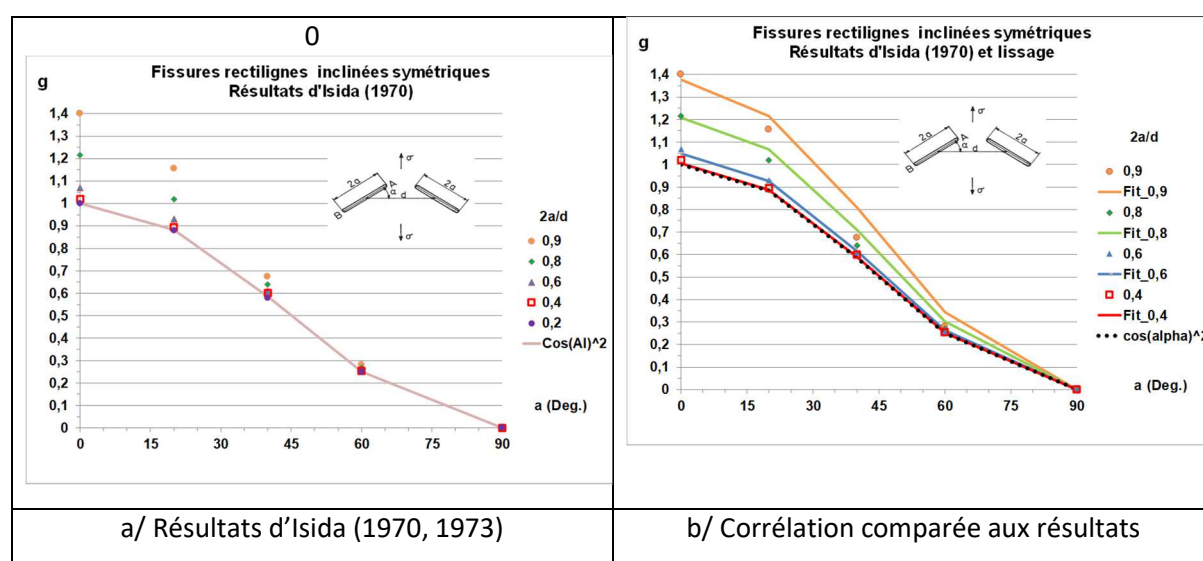
Figure A1.1\_36 : comparaison des facteurs d'interaction en mode I et en mode I+II (équivalent)

Plusieurs autres études ont traité le problème, d'une fissure bande incliné par rapport à l'autre (UKA, 1991b ; CHN, 1985 ; YAN, 2010), mais l'étude la plus complète et précise est celle de Ghorbanpoor (GHO, 2020) qui a utilisé un modèle de dislocations et assuré la qualité des intégrations.

Les deux figures A1.1\_36 a et b valident l'approche par projection du défaut incliné sur le plan parallèle passant par la pointe la plus proche du premier défaut.

- Fissures égales inclinées symétriquement par rapport à l'axe de traction

Les publications d'Isida (ISI, 1970, 1973) ne donnent aucune information sur le mode II et les résultats ne sont fournis que sous forme d'abaques. Les résultats sont fournis par Ukadonger et Naik (UKA, 1991a) pour les comparer à leur approche. Il apparaît que le mode II est négligeable. Les résultats d'Isida sont plus précis et servent de référence à notre analyse.



**Figure A1.1\_37 : comparaison des facteurs d'interaction en mode I et en mode I+II (équivalent) pour deux fissures bandes en V**

Pour une fissure isolée ( $d$  grand devant  $a$ ) le facteur d'interaction est  $\cos^2 \alpha$ . Une corrélation simple s'en déduit. Elle est présentée à la figure A1.1\_37b et a pour équation :

$$\gamma_{\text{Sym}_I} \approx [1 + \lambda^{5.388} \cdot \exp(-0.4522 \cdot \lambda)] 1.1 \cdot \cos^2 \alpha \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{2a}{d} \quad (\text{A1.1}_39)$$

Il y a un effet d'écrantage qui dépend de l'écartement et de l'inclinaison des fissures. Pour  $\lambda = \frac{2a}{d} < 0,6$  les fissures sont écrantées pratiquement pour toute inclinaison.

- Fissures égales inclinées parallèles

Le cas des fissures inclinées parallèles égales a été traité par de Ghorbanpoor (GHO, 2020) pour des fissures centrées sur l'axe normal à la direction de traction (fissures dites en série, Figure A1.1\_37a) ou sur l'axe de traction (fissures dites parallèles, Figure A1.1\_38b).

Dans les deux cas les facteurs d'interaction de mode I décroissent rapidement avec l'angle  $\alpha$ . Les fissures parallèles sont toutes écrantées. Les facteurs d'interaction en mode II sont pratiquement nuls pour les deux configurations (Figure A1.1\_38).

Les auteurs analysent d'autres configuration de ce type notamment en faisant varier les tailles de fissures sans en tirer de conclusions autres que générales.

Le cas le plus sévère est la configuration de type L2.

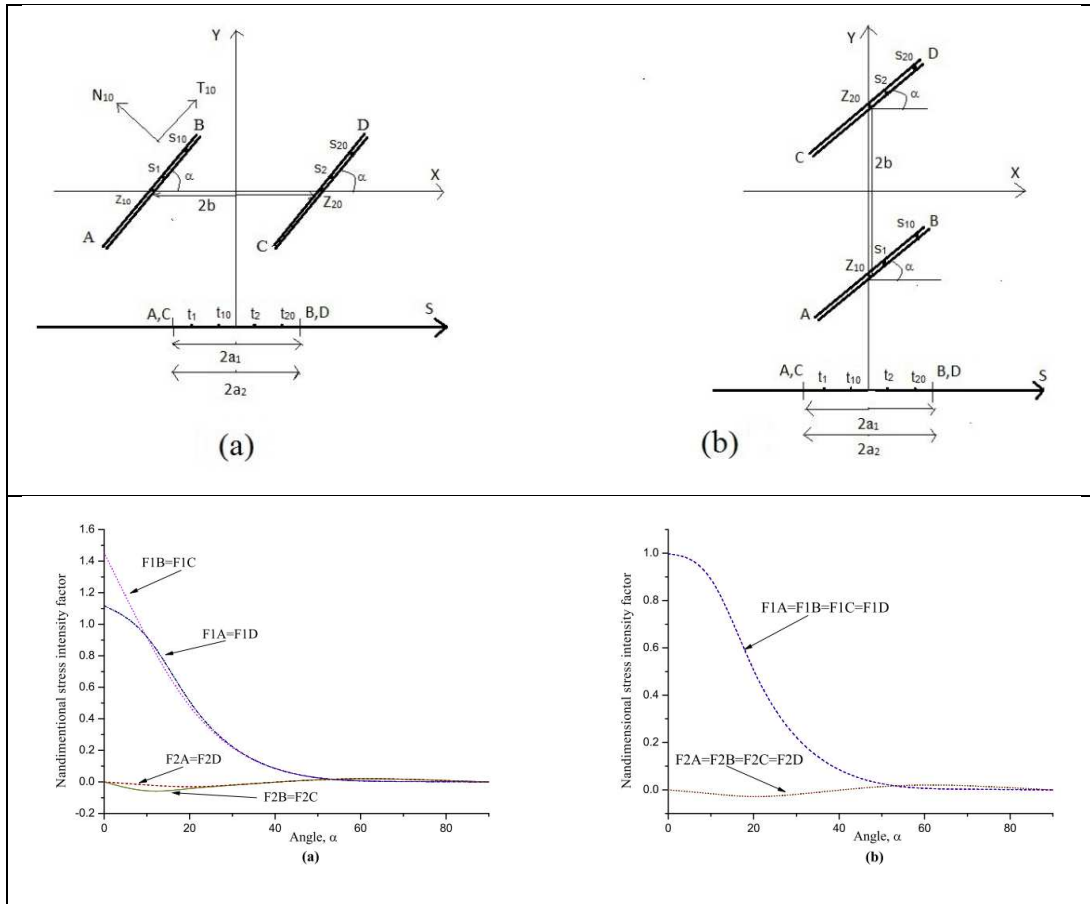


Figure A1.1\_38 : fissures inclinées parallèles (GHO, 2020)

## A1.2. Interaction entre deux fissures disque

La configuration de deux fissures disque s'apparente au cas des deux fissures bande, toutefois la forme de fissure change et le facteur d'interaction varie le long du front. Les solutions pour les fissures sollicitées en mode II et III dépendent du coefficient de Poisson. Le coefficient de Poisson vaut 0,3 dans calculs effectués par EDF ou ESI. Les fissures coplanaires sont sollicitées en mode I seul.

### A1.2.1. Fissures disque coplanaires

La figure A1.2\_1 décrit la configuration dans le plan des fissures. Elles subissent une traction normale.

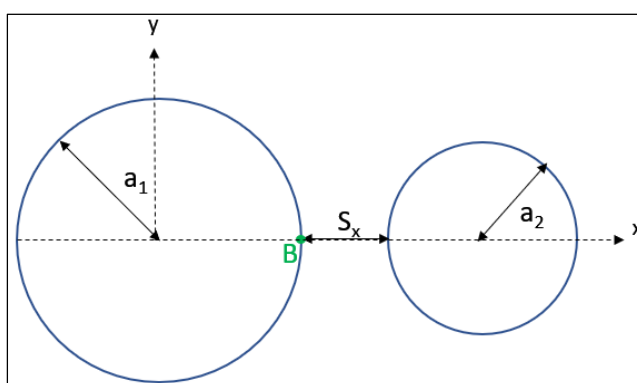


Figure A1.2\_1 : fissures disque coplanaires inégales

#### A1.2.1.1. Solutions analytiques pour deux fissures disque coplanaires égales

Plusieurs auteurs ont essayé d'apporter une solution analytique au problème de l'interaction de 2 fissures disque égales coplanaires. Aucune de ces solutions n'est exacte, mais deux travaux ont marqué une avancée décisive dans l'analyse de l'interaction des fissures disque.

##### Solution analytique de W. Collins

Collins (COL, 1963) a réduit le problème de l'interaction de deux fissures disque coplanaires égales à la résolution d'un système d'équations linéaires de Fredholm. Pour des écartements grands par rapport au rayon, ce système est résolu approximativement par itération. La méthode peut s'étendre au cas de deux fissures disque inégales.

L'auteur ne donne pas de formule explicite pour le FIC. V. Fabrikant (FAB, 1987) a tiré des équations de Collins un développement en série du Facteur d'Interaction le long du front :

$$\gamma = 1 + \frac{2\varepsilon^3}{3\pi} + \frac{8\varepsilon^5}{5\pi} + \frac{4\varepsilon^6}{9\pi^2} + \frac{30\varepsilon^7}{7\pi} + \frac{12\varepsilon^8}{5\pi^2} + \frac{4\varepsilon^4}{3\pi} \cdot \left( 1 + 3\varepsilon^2 + \frac{2\varepsilon^3}{3\pi} + 9\varepsilon^4 \right) \cdot \cos \varphi$$

$$\gamma = 1 + \frac{2\varepsilon^3}{3\pi} + \frac{8\varepsilon^5}{5\pi} + \frac{4\varepsilon^6}{9\pi^2} + \frac{30\varepsilon^7}{7\pi} + \frac{12\varepsilon^8}{5\pi^2} + \frac{4\varepsilon^4}{3\pi} \cdot \left( 1 + 3\varepsilon^2 + \frac{2\varepsilon^3}{3\pi} + 9\varepsilon^4 \right) \cdot \cos \varphi \quad (A1.2_1)$$

Où l'écartement est caractérisé par le rapport du rayon du disque à la distance entre les deux centres des disques  $\varepsilon = \frac{a}{e}$ . La validité de la formule est limitée à des écartements tels que  $\varepsilon = \frac{a}{e} < 0,4$  soit  $\lambda < 0,8$ , ce qui correspond à une interaction moyenne.

### Solution analytique de W. Fabrikant

V. Fabrikant (FAB, 1987) propose un nouveau type d'équations intégrales non singulières qu'il résout par itérations. Les FIC définis par Fabrikant sont ici multipliés par  $\sqrt{2\pi}$  pour en revenir à la notation classique.

$$K(\varepsilon, \varphi) = K_1(\varepsilon, \varphi) + K_2(\varepsilon, \varphi) \quad (A1.2_2)$$

$$K_1(\rho, \varphi) = \frac{2a}{\pi \cdot \sqrt{\pi \cdot a}} \cdot \int_0^1 \int_0^\pi \frac{\sigma_z(\rho, \varphi) \cdot \sqrt{1 - \rho^2}}{1 + \rho^2 - 2\rho \cdot \cos(\varphi - \theta)} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\theta \quad (A1.2_3)$$

$K_1$  est le FIC dû à contrainte induite par la première fissure, le repère ayant pour origine le centre de cette fissure.

$$K_2(\rho, \varphi) = \frac{\sqrt{\pi \cdot a}}{\pi^3 \cdot H} \cdot \int_0^1 \int_0^\pi \frac{\omega_z(\rho, \varphi)}{[1 + \rho^2 - 2\rho \cdot \cos(\varphi - \theta)] \cdot \sqrt{\rho^2 - 1}} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\theta \quad (A1.2_4)$$

Avec  $H = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1 - \nu^2}{E} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{E'}$

$\omega_z(\rho, \varphi)$  représente les déplacements normaux de la seconde fissure, c.à.d. le COD.

$K_2$  représente le FIC dû à l'effet de la seconde fissure sur la première. C'est ce terme que nous négligeons dans l'établissement de la formule approchée mais que nous prenons en compte dans la fonction A.

Seule la formule du FIC correctif dépend du coefficient de Poisson ce qui laisse supposer que celui-ci a peu d'influence sur le facteur d'interaction.

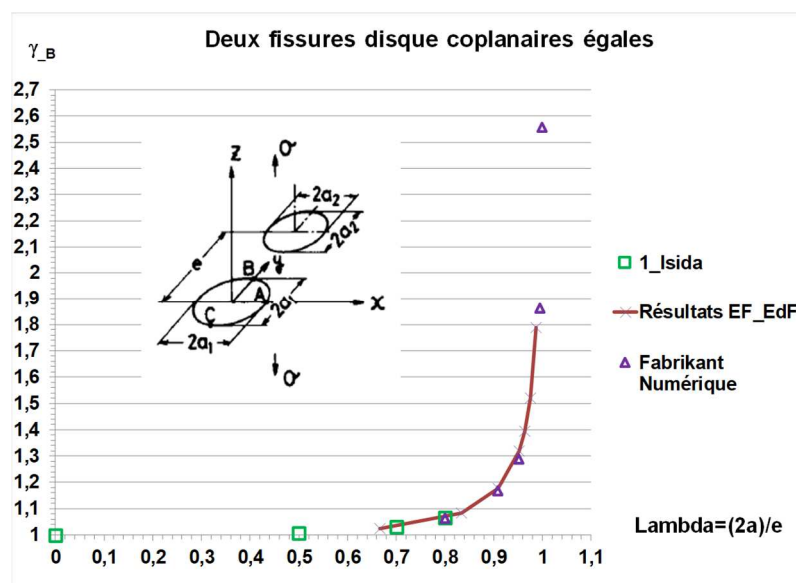


Figure A1.2\_2 : comparaison des résultats de Fabrikant aux résultats de calculs d'Isida et d'EDF pour des fissures disque coplanaires égales



Fabrikant exprime la fonction COD comme le produit du COD pour une fissure seule par une fonction inconnue déterminée numériquement par itérations successives. Après 13 itérations le résultat est très proche de ceux obtenus par la méthode des forces de volume ou des éléments finis (ISI, 1985 ; DEE, 2018), ce qu'illustre la figure A1.2\_2. L'accord est excellent.

La figure A1.2\_3 compare les résultats le long du front. Il faut noter que les valeurs du paramètre  $\lambda_x$  ne sont pas les mêmes pour les calculs de Fabrikant et ceux d'EDF (DEE, 2018). Quand les écartements ont des valeurs très proches, l'accord est très bon.

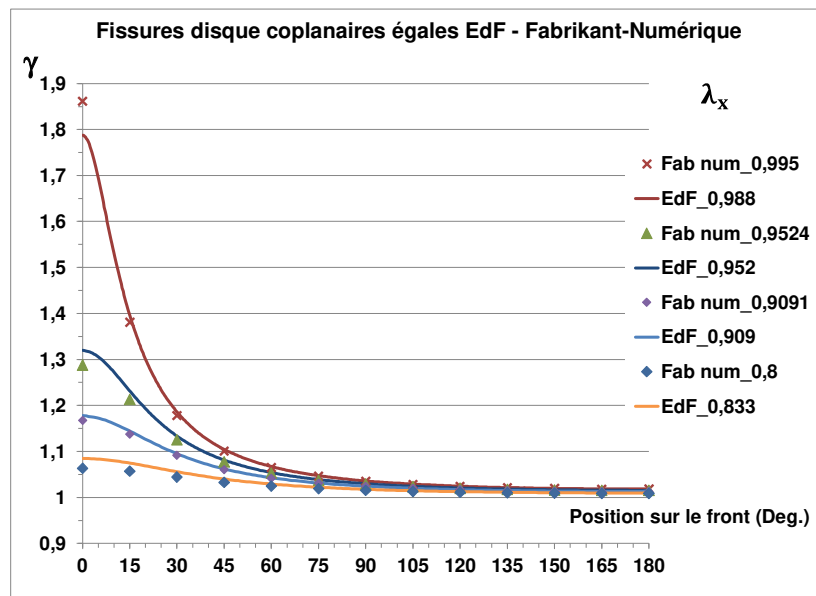


Figure A1.2\_3 : comparaison des variations du facteur d'interaction le long du front de la fissure disque par Fabrikant (1987) et EDF (DEE, 2018)

#### Solution analytique de Kachanov et Laures

Kachanov and Laures (KAL, 1989) ont utilisé leur méthode pour évaluer l'interaction de fissures disque. Ils ont comparé leurs résultats relatifs à deux fissures disque égales coplanaires à ceux de Fabrikant (FAB, 1987).

Lekesiz et al. (LEK, 2013) ont reproduit les écarts entre les résultats de l'application de la méthode de Kachanov pour le cas des fissures bande et des fissures disque. La figure A1.2\_4 met en évidence quatre résultats :

- Dans les deux cas l'erreur relative croît de façon monotone avec le rapport de l'écartement à la taille de fissure ( $a/b$  sur la figure A1.2\_4 soit avec nos notations  $\lambda_x$ ).
- L'erreur relative est plus forte dans le cas de fissures bande.
- Dans le cas de fissures bande, la méthode de Kachanov sous-estime la valeur exacte (environ -4% pour  $a/b = 0,95$ ) alors que pour le cas des fissures disque la méthode surestime la valeur de référence (+6% pour  $a/b = 0,95$ ).
- L'erreur de la méthode approchée pour  $a/b = 0,995$  (0,99 selon nos calculs) est de 16.5% en 2D, ce qui est nettement supérieur à 2.5% pour le cas 3D.

La méthode de Kachanov évalue l'action de la fissure j sur la fissure i en considérant la contrainte moyenne induite par la fissure j sur la fissure i. Le fait de négliger la partie non uniforme de la contrainte conduit à sous-estimer le facteur d'interaction dans le cas du défaut bande. Curieusement dans le cas des disques, c'est l'inverse. Le fait que l'imprécision soit plus forte s'explique par le plus fort degré de non uniformité de la distribution de contrainte agissant sur la seconde fissure dans le cas des fissures bande.

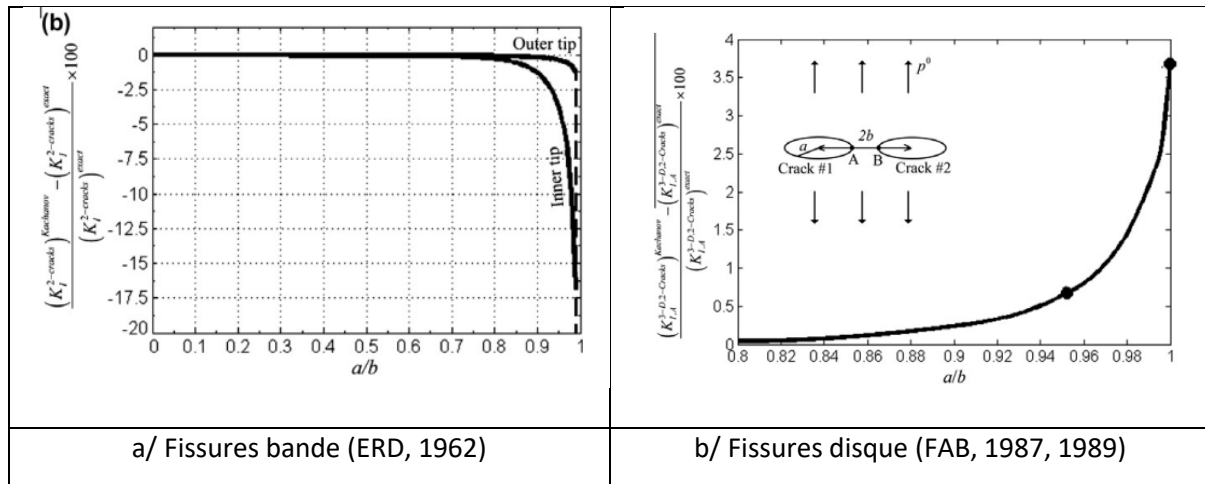


Figure A1.2\_4 : erreur relative du calcul du FIC aux points les plus proches de deux fissures égales coplanaires par la méthode de Kachanov (KAL, 1985, 1989) estimée par rapport aux valeurs exactes. Les points sont issus de (KAL, 1989)

### Solutions de Zhan et Wang

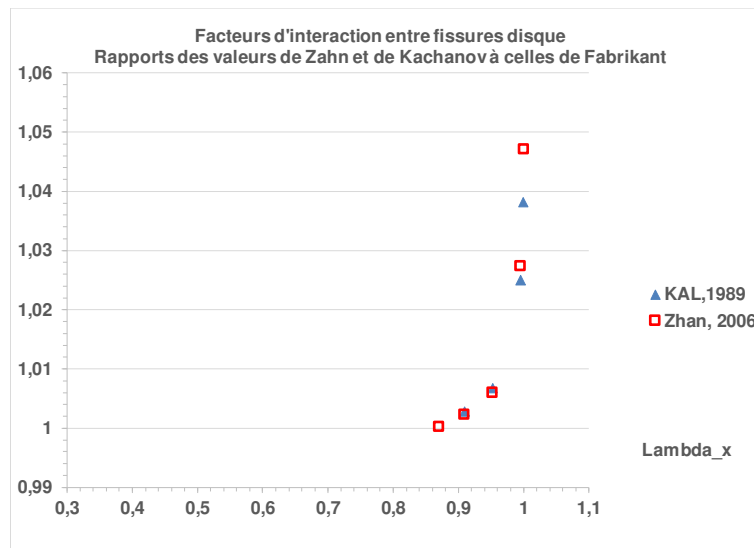


Figure A1.2\_5 : comparaison des variations des facteurs d'interaction Zhan et de Kachanov à celles de de Fabrikant

Cette étude (ZHA, 2006) exprime les déplacements par des séries de polynômes de Legendre dont les coefficients sont inconnus. La condition de surface libre pour chaque fissure est établie par superposition et la moyennation des efforts de surface. Ceci aboutit à un ensemble d'équations qui

est résolu par collocation aux frontières. Toutefois, la méthode reprend la représentation des tractions agissant sur les surfaces des fissures par leur moyenne comme dans la méthode de Kachanov.

Plusieurs exemples d'interaction de fissures disques interagissantes sont traités et leurs résultats comparés à la littérature (FAB, 1987 ; KAL, 1989). Le coefficient de Poisson est pris à 0,25 mais ceci n'a pas d'influence dans le cas des fissures coplanaires en mode I.

La solution de Zhan et Wang est comparable à celle de Kachanov. La solution numérique de Fabrikant est la plus précise (Figure A1.2\_5).

### A1.2.1.2. Formules asymptotiques pour deux fissures disques coplanaires égales

#### Approche de Fabrikant

Fabrikant (FAB, 1987) applique le théorème de la moyenne à la seconde intégrale, ce qui donne :

$$K_2(\rho, \varphi) = \frac{\sqrt{\pi \cdot a}}{2\pi^2} \cdot \frac{E'}{a^3} \cdot \frac{V_2}{[1 + \rho_{12}^2 - 2\rho_{12} \cdot \cos(\varphi - \varphi_{12})] \cdot \sqrt{\rho_{12}^2 - 1}} \quad (A1.2_5)$$

$V_2$  est le volume de la fissure 2 ouverte.

Les coordonnées du point  $(\rho_{12}, \varphi_{12})$  sont inconnues, mais il appartient à la fissure 2. Suivant le choix des coordonnées, on obtient une borne inférieure ou supérieure.

Le volume  $V_2$  dépend des deux tailles de fissures, mais si les fissures sont égales, Fabrikant montre que les équations se simplifient.

$$V_2 = V_1 = \frac{V_0}{1 - \frac{2}{\pi} \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 1}} - A \sin\left(\frac{1}{\rho}\right) \right]} = \frac{V_0}{1 - F_W(\rho)} \quad (A1.2_6)$$

Où  $\rho$  varie entre  $e/a - 1$  et  $e/a + 1$

$$V_0 = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot a^3 \cdot H \cdot \sigma_{app} = \frac{8}{3} \cdot a^3 \cdot \frac{\sigma_{app}}{E'}$$

Donc

$$K_2(\rho, \varphi) = \sigma_{app} \cdot \frac{\sqrt{\pi \cdot a}}{\pi^2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{[1 + \rho_{12}^2 - 2\rho_{12} \cdot \cos(\theta + \varphi_{12})] \cdot \sqrt{\rho_{12}^2 - 1}} \cdot \frac{1}{1 - F_W(\rho_{12})} \quad (A1.2_7a)$$

$$K_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \sigma_{app} \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$$

Il vient :

$$\gamma_2(\rho, \varphi) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{[1 + \rho_{12}^2 - 2\rho_{12} \cdot \cos(\theta + \varphi_{12})] \cdot \sqrt{\rho_{12}^2 - 1}} \cdot \frac{1}{1 - F_W(\rho_{12})} \quad (A1.2_7b)$$

Fabrikant propose une formule approchée pour la variation du FIC le long du front. Ce qui conduit à l'expression suivante du Facteur d'Interaction :

$$\gamma = 1 + \frac{2 \cdot \varepsilon^3}{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cdot \cos \varphi} \cdot \frac{1}{3\pi\sqrt{1 - \varepsilon^2} - 6[\varepsilon - \sin^{-1}(\varepsilon) \cdot \sqrt{1 - \varepsilon^2}]} \quad (\text{A1.2\_8a})$$

Soit :

$$\gamma = 1 + \frac{2\varepsilon^3}{3\pi} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cdot \cos \varphi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} - \sin^{-1}(\varepsilon) \right]} \quad (\text{A1.2\_8b})$$

Ce qui fait apparaître en facteur la fonction de Westergaard :

$$FW_{Dr} \left( \frac{r}{a} \right) = 1 + \frac{2}{\pi} \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{\left( \frac{r}{a} \right)^2 - 1}} - A \sin \left( \frac{a}{r} \right) \right]$$

$$\gamma = 1 + [FW_{Dr}(\varepsilon) - 1] \cdot \frac{2\varepsilon^3}{3\pi} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cdot \cos \varphi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \cdot \frac{1}{\frac{2}{\pi} \left[ \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} - \sin^{-1}(\varepsilon) \right] \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} - \sin^{-1}(\varepsilon) \right] \right\}} \quad (3)$$

De la forme  $\gamma = 1 + A(\varepsilon) \cdot [FW_{Dr}(\varepsilon) - 1]$ , expression similaire à celle que nous proposons au paragraphe suivant.

Fabrikant propose trois estimations du paramètre  $\varepsilon$ . L'estimation centrale  $\varepsilon = \frac{a}{e} = \frac{\lambda}{2}$  donne les meilleurs résultats mais sous-estime le facteur d'interaction. La calibration de ce paramètre sur la valeur maximale du facteur d'interaction n'est pas satisfaisante pour des faibles écartements.

### Développements en séries

Le développement en série de la formule de Fabrikant du Facteur d'Interaction le long du front s'écrit :

$$\gamma = 1 + \frac{2\varepsilon^3}{3\pi} \cdot \left( 1 + 2 \sum_1^{\infty} \varepsilon^k \cdot \cos k\varphi \right) \cdot \left( 1 + \frac{3}{2}\varepsilon^2 + \frac{2\varepsilon^3}{3\pi} + \frac{7}{4}\varepsilon^4 + \dots \right) \quad (\text{A1.2\_9})$$

Avec  $\varepsilon = \frac{a}{e} = \frac{\lambda}{2}$  et  $\varphi$  l'angle polaire.

Cette expression comporte quelques termes communs avec celle de Collins, mais celle-ci sous-estime la solution de Fabrikant.

Lambda_x	0,4	0,5	0,6667	0,8	0,9091	0,9524	0,995	0,9998
(KAL,1989)	1,0029	1,0067	1,0224	1,0369	1,1711	1,2964	1,9078	2,8819
(XIA, 1994)	1,0105	1,0228	1,0622	1,0394	1,2138	1,2575	1,3070	1,3131

**Tableau A1.1\_2 : comparaison des facteurs d'interactions pour deux fissures disque égales coplanaires**

Xiao et al. (XIA, 1994) ont étudié plusieurs problèmes d'interaction de fissures disque en utilisant le principe de superposition et la méthode de l'inclusion équivalente d'Eshelby. La résolution est

simplifiée en utilisant un développement en série afin d'évaluer le champ de déplacement dans la matrice. Les résultats (Tableau A1.1\_2) sous-estiment les valeurs plus fiables de Kachanov (KAL, 1989) pour des fissures très proches  $S_x/(2a) < 0,05$ .

### Solution de Kachanov

La méthode développée par Kachanov, exposée au chapitre I, simplifie les efforts appliqués sur une fissure par les autres en moyennant les tractions appliquées aux faces des fissures. Cette approximation permet de linéariser le système d'équations intégrales. Kachanov l'a appliquée à l'interaction de deux fissures disque (KAC, 1985) et obtient en simplifiant l'intégration des FIC, les premiers termes du futur développement de Fabrikant.

$$\gamma \approx 1 + \frac{2\lambda^3}{12\pi}$$

Kachanov obtient aussi une solution approchée pour des fissures disque coplanaires inégales :

$$\gamma_{12} \approx 1 + \frac{2}{12\pi} \cdot \left(\frac{a_2}{e_x}\right)^3 \quad \text{et} \quad \gamma_{21} \approx 1 + \frac{2}{12\pi} \cdot \left(\frac{a_1}{e_x}\right)^3 \quad (\text{A1.2}_{10})$$

Plus tard, Kachanov et Laures (KAL, 1989) en calculant avec précision les intégrales obtient des résultats de qualité comparable à ceux de Fabrikant (Figure A1.2\_6).

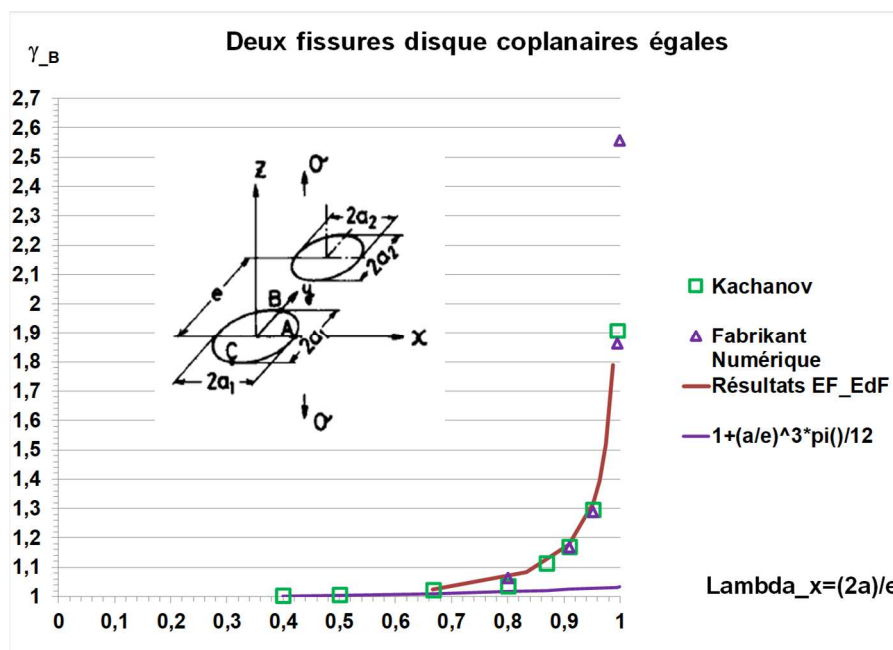


Figure 1,2\_6 : comparaison des résultats de Fabrikant aux résultats de calculs de Kachanov et d'EDF pour des fissures disque coplanaires égales

### A1.2.1.3. Formule approchée pour deux fissures disque coplanaires égales

La méthode de détermination développée pour les défauts bande (§ A1.1.1.2) est reprise pour les cas de deux fissure disque.

#### Facteur d'interaction en pointe interne pour des fissures bande égales

Pour des fissures coplanaires, ce facteur est toujours plus élevé au points les plus proches des deux disques.

Le facteur d'interaction est exprimé par une fonction affine de la fonction dite de Westergaard :

$$\gamma_{12}(P) = 1 + A \cdot [F_{W\_D}(\lambda_x, 0) - 1] \quad (A1.2\_11)$$

Sneddon (SNE, 1946) a résolu le problème de la fissure à front circulaire située dans un milieu infini et soumise à une contrainte de compression  $-\sigma_{app}$  sur ses lèvres. La solution du problème de la fissure disque sollicitée en mode I par une traction uniforme est obtenue en retranchant à la contrainte appliquée la solution de Sneddon. La fonction  $F_{W\_D}$  établie par Sneddon a pour expression dans le plan de la fissure:

$$F_{W\_D\_co} = F_{W\_D}\left(\frac{r}{a}, 0\right) = 1 + \frac{2}{\pi} \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1}} - A \sin\left(\frac{a}{r}\right) \right] \quad (A1.2\_12)$$

Avec :

- A, le rayon de la fissure circulaire ;
- R, le rayon dans le plan.

Le paramètre  $\lambda_x = \frac{2a}{2a+S_x}$  est substitué à  $a/r$ .

#### Calcul du facteur d'interaction par intégration

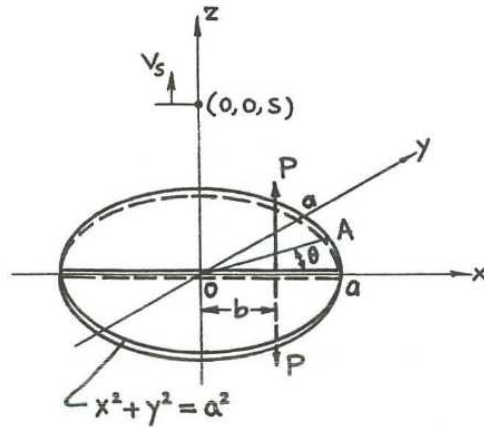
Afin de calculer le FIC de la seconde fissure  $\mathcal{A}_2$  induit par la contrainte  $\sigma_z(r)$  créée par la première fissure  $\mathcal{A}_1$ , nous utilisons la méthode des fonctions de poids. Les deux fissures sont des disques de rayon a.

Sous l'action de la contrainte  $\sigma_{zz}$ , produite par la première fissure, le FIC de la seconde fissure est obtenu par intégration sur la surface de la fissure du produit de cette contrainte par la fonction de poids  $g(M, P)$  où P désigne le point P du front de de la seconde fissure.

$$K_{21\_a}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, P) = \int_{S_2} \sigma_{zz}(\mathcal{A}_1, r) \cdot g(M, P) \cdot dS \quad (A1.2\_13)$$

Ce FIC  $K_{12a}$  est un FIC partiel, il faut lui ajouter celui dû à la contrainte appliquée  $\left(\frac{2}{\pi} \cdot \sigma_{app} \cdot \sqrt{\pi \cdot a}\right)$  et celui dû à l'amplification du FIC de la première fissure par la seconde.

La fonction de poids d'une fissure circulaire de rayon a est donnée par l'expression du FIC dû à l'effet d'une contrainte en un point de la fissure circulaire et intégrée sur le disque (TPI, 2000), voir figure A1.2\_7.



$$K_{IA} = K_I(\theta) = \frac{P}{\pi\sqrt{\pi a}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}$$

$$(K_{II} = K_{III} = 0)$$

**Figure A1.2\_7 : fonction de poids pour une fissure circulaire ouverte sous l'action d'une force normale appliquée en un point P de sa surface (TPI, 2000)**

La fonction de poids pour l'action d'une contrainte  $\sigma_z(r, \varphi)$  dans le plan d'une fissure disque est :

$$g(\rho, \varphi) = \frac{a}{\pi \cdot \sqrt{\pi \cdot a}} \cdot \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{1 + \rho^2 - 2\rho \cdot \cos(\theta + \varphi)} \quad \text{avec } \rho = \frac{r}{a} \quad (\text{A1.2}_{14})$$

- *Calcul de l'interaction au point le plus sollicité*

Au point de la plus forte interaction le FIC est donné par :

$$K_{21,a} = \sigma_{app} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{\pi^2} \cdot \int_0^1 \int_0^\pi \left[ \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R}{a}\right)^2 - 1}} - \sin^{-1}\left(\frac{a}{R}\right) \right] \cdot \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{1 + \rho^2 - 2\rho \cdot \cos \theta} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\theta \quad (\text{A1.2}_{15a})$$

$$\text{Avec} \quad R = \sqrt{(e - r \cdot \cos \theta)^2 + (r \cdot \sin \theta)^2} \quad (\text{A1.2}_{15b})$$

$$\text{On pose } y = \frac{R}{a}, \quad \varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{2}{\lambda_x} = 2 + \frac{s}{a} > 2e \quad \rho = \frac{r}{a}$$

En utilisant Mathcad (MHC, 2020) on calcule l'intégrale suivante :

$$I(\varepsilon) = \int_0^1 \int_0^\pi \left[ \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} - \sin^{-1}\left(\frac{1}{y}\right) \right] \cdot \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{1 + \rho^2 - 2\rho \cdot \cos \theta} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\theta \quad (\text{A1.2}_{16a})$$

$$y = \sqrt{(\varepsilon - \rho \cdot \cos \theta)^2 + (\rho \cdot \sin \theta)^2} \quad (\text{A1.2}_{16b})$$

$$K(\varepsilon) = \sigma_{app} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{\pi^2} \cdot I(\varepsilon)$$

Donc au premier ordre, c.à.d. sans tenir compte de l'effet de la seconde fissure sur la première :

$$\gamma_{Max}(\varepsilon) = 1 + \frac{2}{\pi^2} \cdot I(\varepsilon) \quad (\text{A1.2}_{17})$$

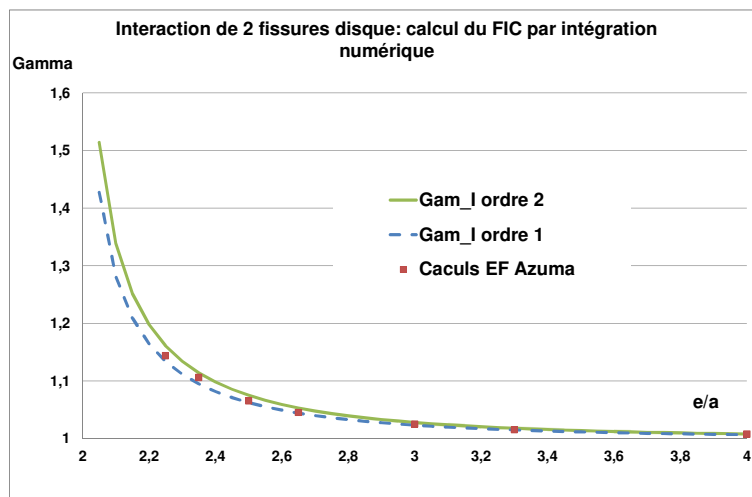
Cette solution est comparée aux résultats de la littérature (AZU, 2017) à la figure A1.2\_8. La solution obtenue par intégration du produit de la fonction de Westergaard avec la fonction de poids sous-estime légèrement les résultats des calculs aux éléments finis. Ceci s'explique par le fait que l'action de la seconde fissure sur la première est négligée. Le coefficient  $\frac{2}{\pi^2}$  vaut 0,2.

Afin de tenir compte de l'effet rétroactif de la fissure 2 sur la fissure 1, on peut de façon simplifiée modifier le coefficient de l'intégrale  $I(\varepsilon)$  en ajoutant au coefficient multiplicatif le carré de ce coefficient.

$$\gamma(M) = 1 + \frac{2}{\pi^2} \cdot I(\varepsilon) + \left(\frac{2}{\pi^2}\right)^2 \cdot I(\varepsilon) \quad (A1.2_{18})$$

Le nouveau coefficient vaut 0,244.

La comparaison, illustrée à la figure A1.2\_8, montre que les deux formules encadrent les résultats des calculs par éléments finis. Cela confirme le fait que l'effet rétroactif de la seconde fissure sur la première joue un rôle secondaire dans l'évaluation de l'intégrale.



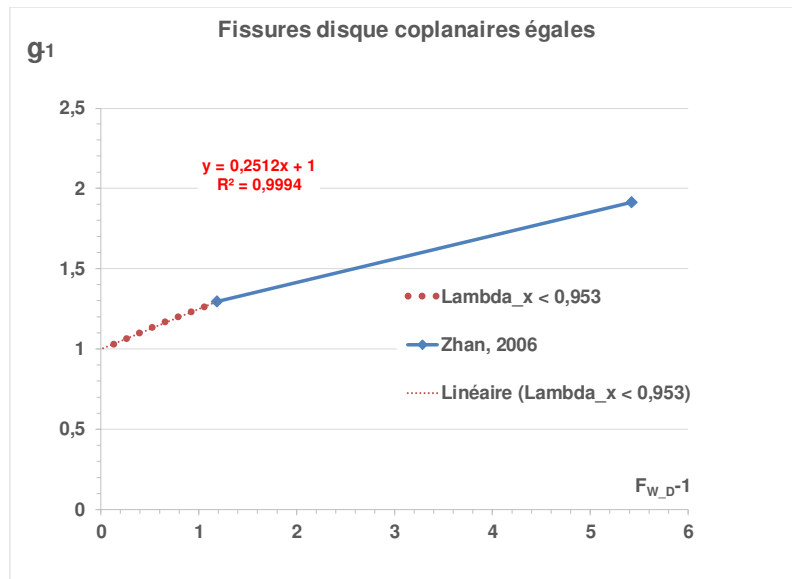
**Figure A1.2\_8 : comparaison du calcul du facteur d'interaction par intégration avec les résultats de calcul par éléments finis pour deux fissures disque égales**

Toutefois ces calculs ne fournissent pas de formule explicite.

#### Validation de la formule du facteur d'interaction en pointe interne pour des fissures disque égales

La variation du facteur d'interaction exact avec l'écartement au point le plus sollicité  $\gamma_B(\lambda_x)$  est comparée à la variation de la fonction  $F_{W\_B\_Co}(\lambda_x)$  sur la figure A1.2\_9. Dans le domaine  $0 < \lambda_x < 0,95$  la corrélation entre le facteur d'interaction  $\gamma$  et la fonction de Westergaard  $F_W$  pour la fissure disque est linéaire, avec une pente de 0,25.





**Figure A1.2\_9 : fissures disque égales coplanaires :  
corrélation entre facteur d'interaction  $g_1$  et fonction de Westergaard  $F_{W\_D\_co}$**

L'ajustement de la valeur de A compense la sous-estimation due au choix d'une fonction de poids approchée dans le calcul du FIC. Pour les fissures disque égales A vaut 0,254. Ce nombre sera légèrement modifié (en 0,257) pour l'extension au cas des disques inégaux.

#### Formule du facteur d'interaction le long du front

La variation de l'effet de 'interaction sur K le long du front est obtenue à partir de la fonction de poids.

$$I = \int_0^1 \int_0^\pi \left[ \frac{1}{\sqrt{Y^2 - 1}} - \sin^{-1} \left( \frac{1}{Y} \right) \right] \cdot \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{1 + \rho^2 - 2\rho \cdot \cos(\theta - \varphi)} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\theta \quad (A1.2_{19})$$

$$\rho = \frac{b}{a} = \frac{r}{a}$$

$$Y = \sqrt{\varepsilon^2 + \rho^2 - 2\varepsilon \cdot \rho \cdot \cos(\theta - \varphi)}$$

Pour  $\rho = 1$  cette l'intégrande est singulier quand  $\theta = \varphi$ .

Laures, en annexe de (KAL, 1989), propose un changement variable qui permet de régulariser les intégrales.

La variation du facteur d'interaction le long du front est présentée au § A1.2.1.6. Une formule est présentée dans le cas plus général de fissures elliptique égales coplanaires (§ A1.3.1).

#### **A1.2.1.4. Résultats numériques de l'interaction de deux fissures disque coplanaires inégaux**

##### Résultats d'Isida et al.

Isida et al. (ISI, 1985) ont réalisé une étude très complète sur l'interaction de fissures elliptiques enfouies parallèles. Les calculs sont effectués avec la méthode des forces de volume induites par une fissure (du type fonctions de poids). Le cas de deux fissures disques coplanaires est un cas particulier.

Les variations des facteurs de forme des défauts avec le rapport des tailles sont décrites à la figure A1.21\_10.

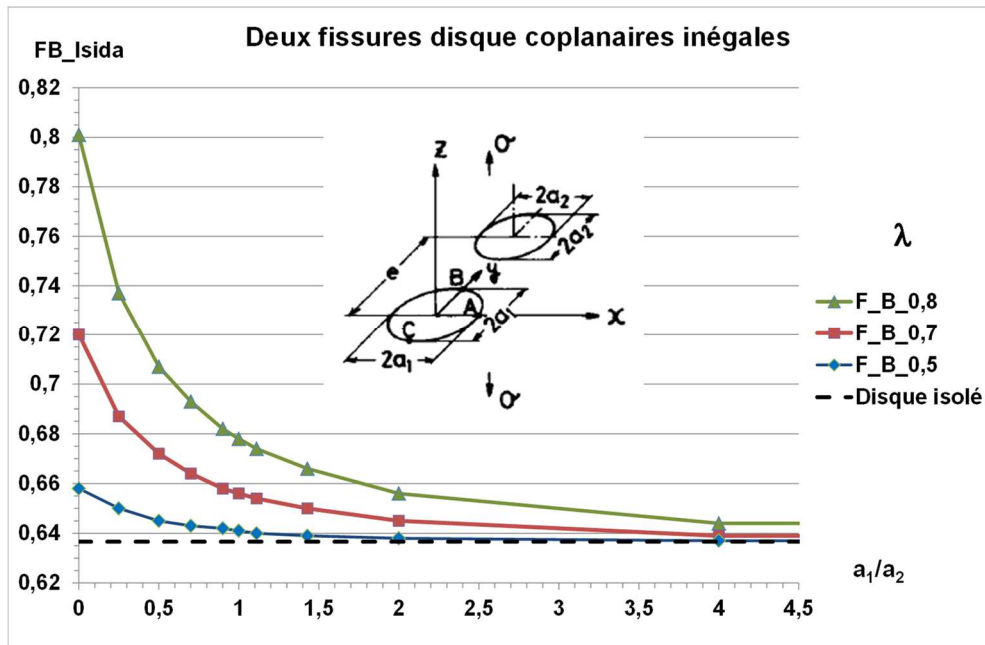


Figure A1.2\_10 : résultats des calculs d'Isida et al. du facteur d'interaction de fissures disque au point de plus faible écartement (B)

La précision des calculs d'Isida au point B est attestée par comparaison aux calculs aux éléments finis d'EDF (DEE, 2018), ainsi qu'aux calculs numériques de Fabrikant (FAB, 1987). L'accord est excellent mais la vérification est limitée à  $\lambda_x \leq 0,8$ .

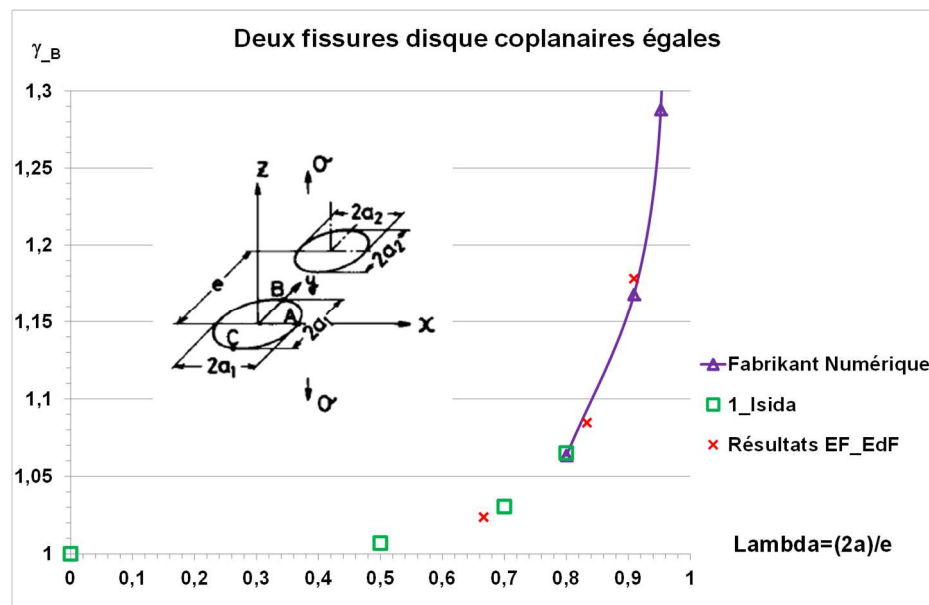
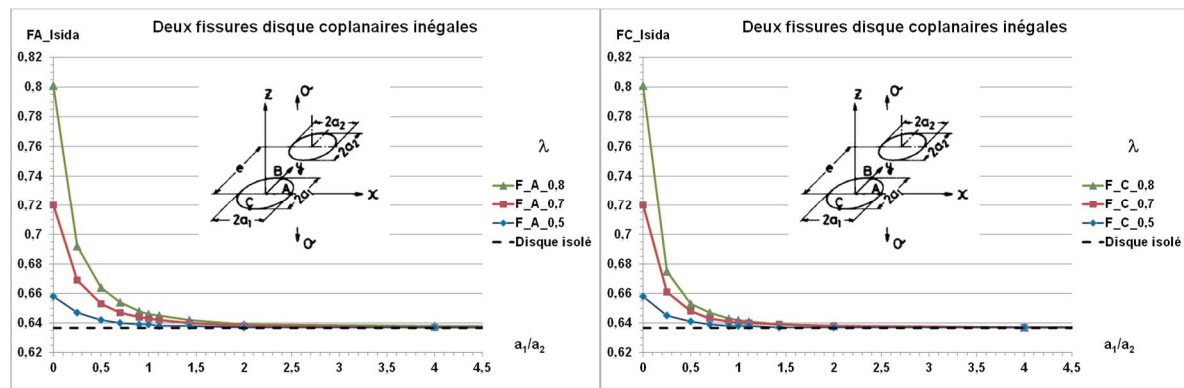


Figure A1.2\_11 : comparaison des résultats d'Isida et al. à ceux de Fabrikant et d'EDF

Les résultats aux autres points A et C sont décrits à la figure A1.2\_12.



**Figure A1.2\_12 : résultats des calculs d'Isida et al. du facteur d'interaction de fissures disque au points A et C**

### A1.2.1.5. Formules approchées pour deux fissures disque coplanaires inégales

La formule du facteur d'interaction a la même forme que pour les fissures égales. Au point le plus proche le facteur d'interaction est donné par la formule :

$$\gamma_B = 1 + A(\zeta) \cdot (F_{W\_D\_Co}(\lambda_x) - 1) \quad (\text{rappel A1.2}_{11})$$

Soit, en remplaçant  $F_{W\_D\_co}$  par sa formule A1.2.12 fournie au paragraphe A1.2.1 :

$$\gamma_B = 1 + A(\zeta) \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left( \frac{\lambda_x}{\sqrt{1 - \lambda_x^2}} - \sin^{-1} \lambda_x \right) \quad (\text{A1.2}_{20})$$

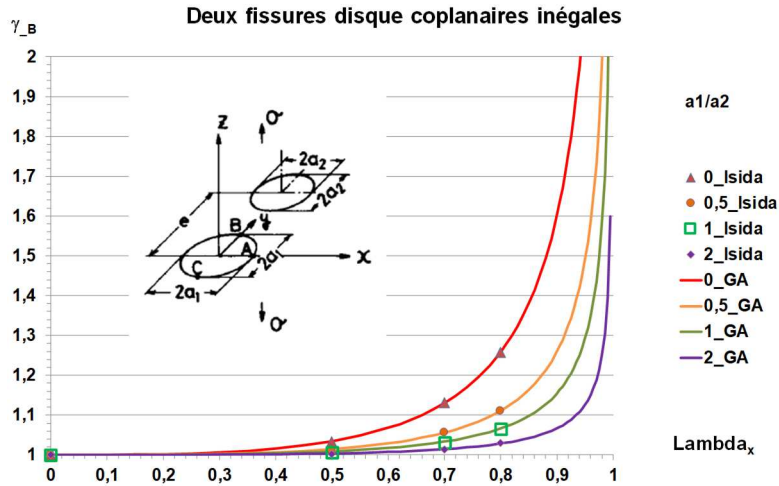
Avec :  $\zeta = \frac{a_1}{a_2}$  et  $\lambda_x = \frac{a_1 + a_2}{e} = \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 + S_x}$  ;

$$A(\zeta) = \exp(-1.36 \cdot \zeta^{\ln(2)}) \quad (\text{A1.2}_{21})$$

La formule de la fonction A est calibrée sur les résultats d'Isida et al. (ISI, 1985) La figure A1.2\_13 illustre la qualité du lissage pour des fissures disques coplanaires inégales.

Pour des fissures égales  $A = 0,257$  ce qui est très proche de la valeur trouvée pour des fissures disques égales (0,25).

Cette détermination de la fonction A est fondée sur un nombre suffisant de tailles relatives de défauts, mais pour des valeurs modérées du paramètre d'écartement  $\lambda_x$ . Pour des fissures égales, en mélangeant les résultats de Fabrikant (FAB, 1987) à ceux de Zhan (ZHA, 2006), sur une plage allant de  $\lambda_x = 0,2$  à  $\lambda_x = 0,952$  la valeur de A reste très proche : 0,244 avec une précision de moins de 0,5%. Au-delà de  $\lambda_x = 0,95$  la fonction de Westergaard perd sa représentativité et l'approche n'est plus valable.

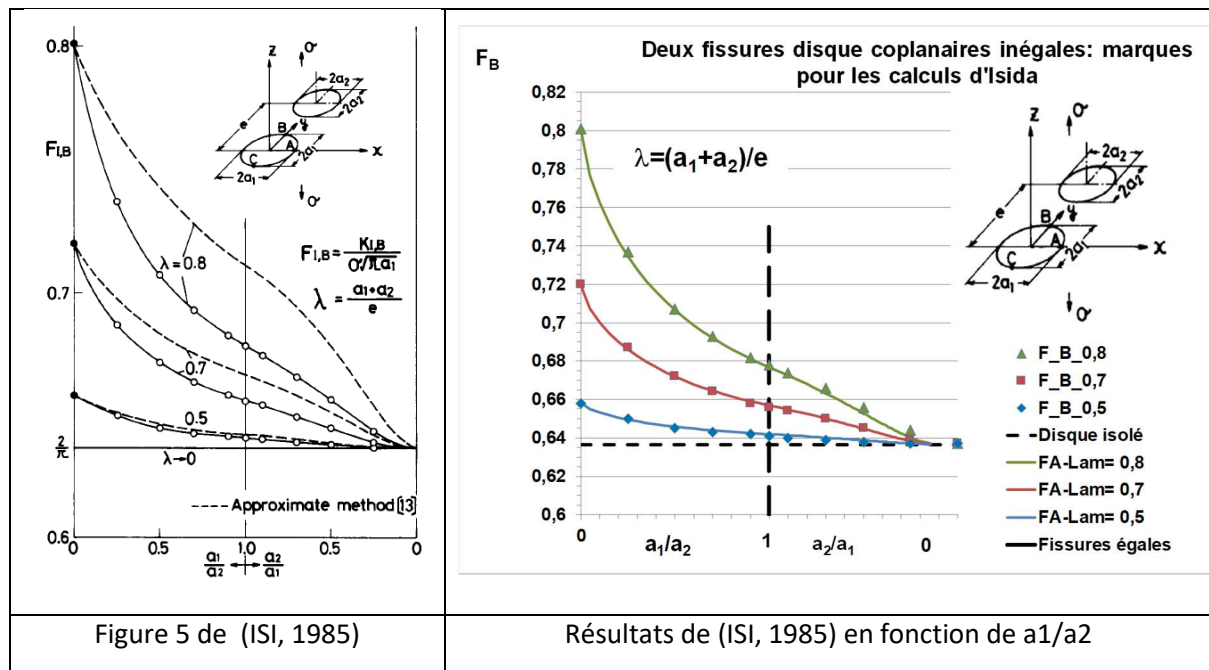


**Figure 2 : Facteur d'interaction aux points de plus petite distance (B) pour des fissures disque inégales en traction**

En retenant la valeur de ce paramètre, le lissage des résultats d'Isida est exprimé par la formule :

$$A(\zeta) = \exp(-1.41 \cdot \zeta^{0,721}) \quad (A1.2_{22})$$

L'écart par rapport aux valeurs d'Isida est compris entre -0,2% et 0,67%. Ceci est illustré à la figure ci-dessous qui compare les résultats d'Isida à l'application de notre formule pour les facteurs de forme. Les facteurs d'interaction sont obtenus en divisant les facteurs de forme par  $2/\pi$ .



**Figure A1.2\_14 : facteurs de forme au point B pour des fissures disque coplanaires inégales situées dans un milieu infini et soumises à une contrainte de traction uniforme**

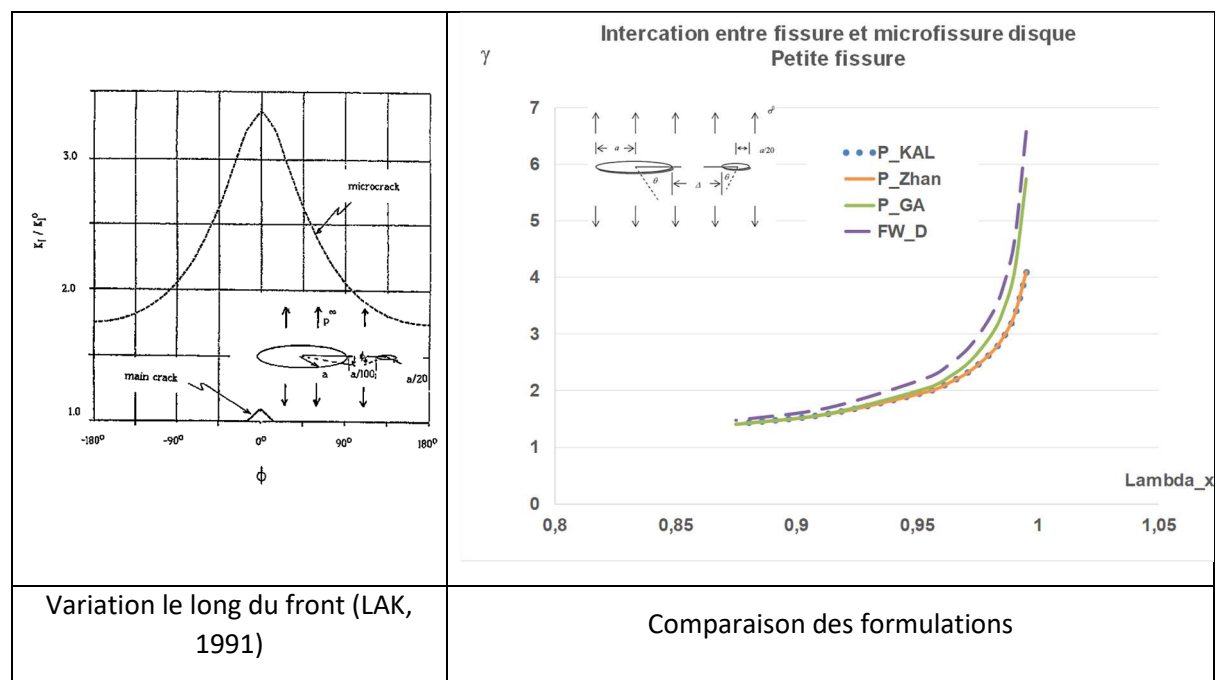
La présentation des variations de facteur de forme dans l'article est élégante mais pas pertinente car elle masque le caractère exponentiel de la variation de F avec le rapport des rayons.

Comme pour les fissures bandes inégales, l'action de la grande fissure sur la petite est plus forte que l'inverse, mais le FIC de la plus grande est toujours plus élevé que celui de la petite fissure.

Interaction entre macro-fissure et microfissure.

Kachanov et Laures (KAL, 1989) puis Zhan (ZHA, 2006) ont étudié l'interaction entre macro et micro fissure. Le rapport des tailles est de 20.

La figure A1.2\_15 compare les résultats de notre formule notée (P\_GA) à ceux de Zhan-Wang (ZHA, 2006) et Kachanov-Laures (KAL, 1989). Les résultats de ces derniers sont confondus, notre formulation donne des résultats légèrement supérieurs. La fonction de Westergaard constitue la borne supérieure correspondant au cas où la petite fissure est nulle. Pour la grande fissure, le facteur d'interaction est très faible <1,01) sauf pour des écartements très réduits ( $\lambda_x > 0,95$ ) pour lesquels notre formule donne un résultat constant voisin de 1 alors que le facteur d'interaction évalué par Kachanov ou Zhan croit jusque 1,16 pour des fissures quasiment jointes. Afin d'améliorer notre formulation il faudrait traiter séparément le cas des fissures de rapport de taille inférieur ou supérieur à 1. Il faudrait pour cela disposer de résultats relatifs à des rapports de taille intermédiaire, tels ceux considérés par Isida (ISI, 1985) mais pour des valeurs de  $\lambda_x$  plus élevées.



**Figure A1.2\_15 : facteurs d'interaction entre macro-fissure et microfissure disque coplanaires aux points les plus proches situées dans un milieu infini sous contrainte de traction uniforme**

A1.2.1.6. Variation du facteur d'interaction le long du front de disque coplanaires

Les variations le long du front de fissures disque égales de la figure A1.2\_16 ont été calculées par EDF (DEE, 2018).

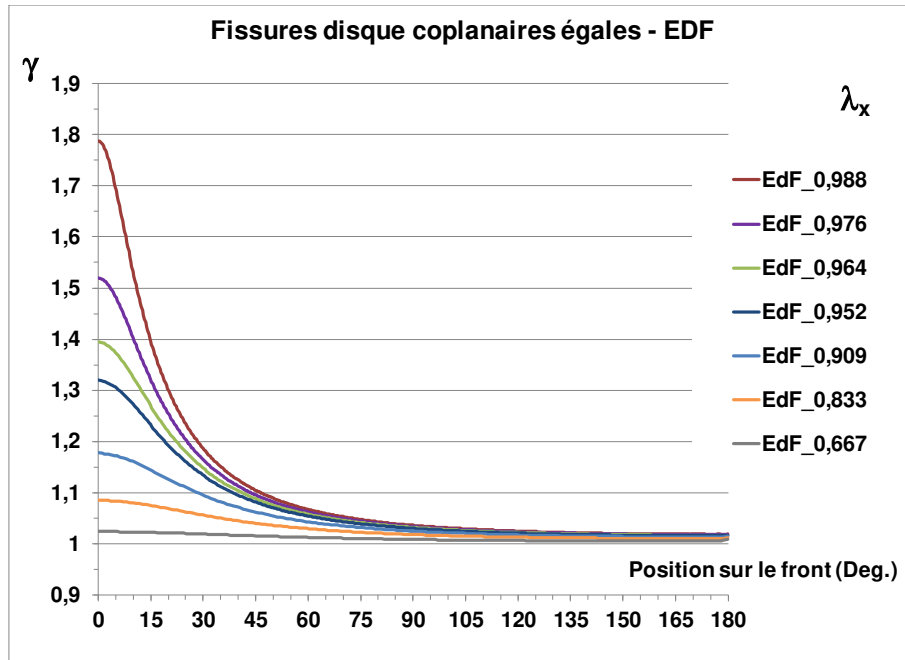


Figure A1.2\_16 : variations du facteur d'interaction le long du front de fissures disque coplanaires (DEE, 2018)

La comparaison est très bonne avec les valeurs obtenues numériquement par Fabrikant (FAB, 1987). Il faut noter que les valeurs d'écartement ne sont pas exactement les mêmes.

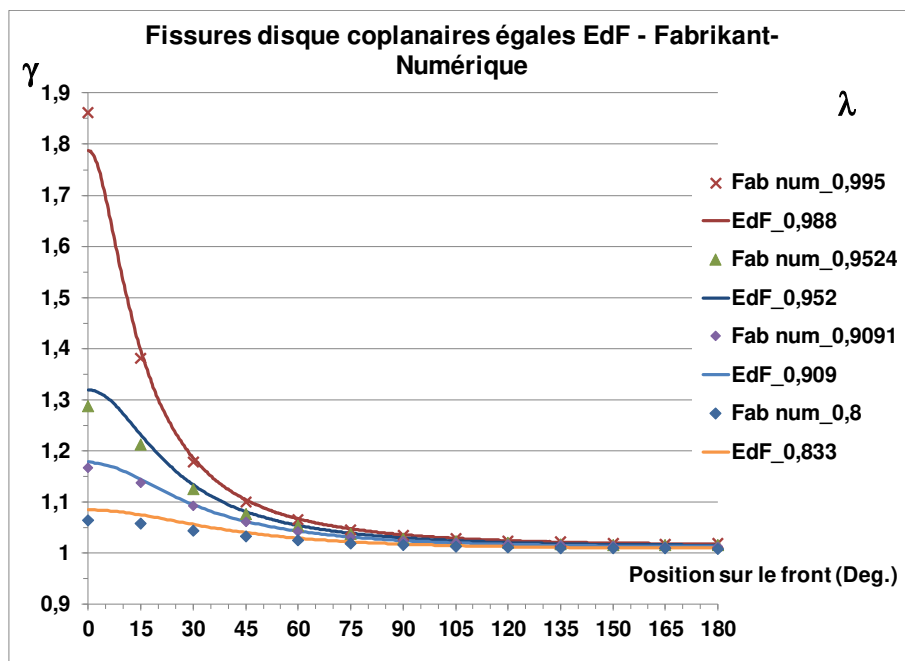


Figure A1.2\_17 : variations du facteur d'interaction le long du front de fissures disque coplanaires : solutions EDF et de Fabrikant

Afin d'interpréter ces variations, l'inversion de la formule du facteur d'interaction pour des fissures égales (A1.2\_21) en prenant une valeur de la fonction A de 0,257. La figure A1.2\_18 fait apparaître un décalage quasi constant entre les courbes.

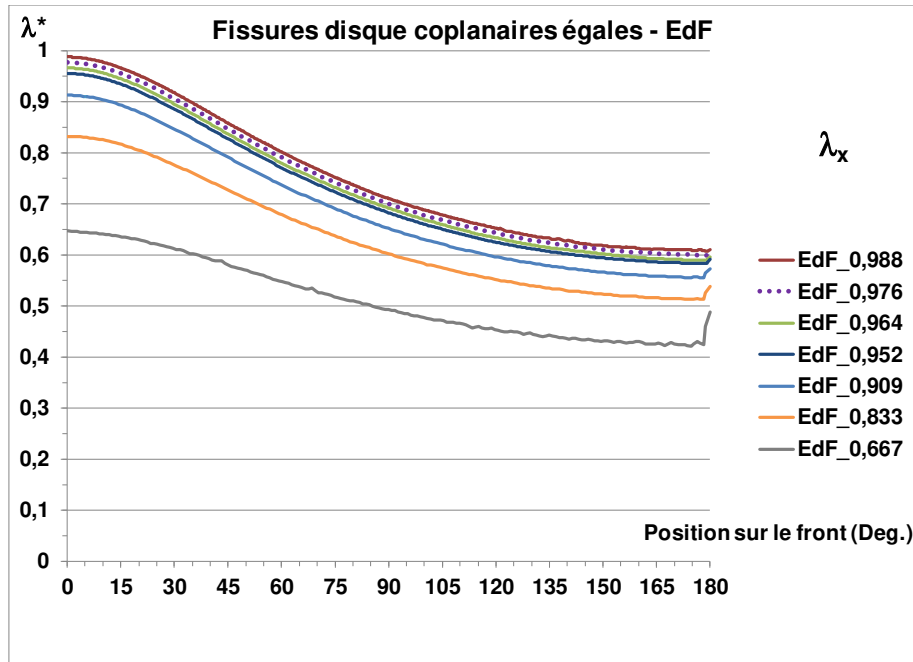


Figure A1.2\_18 : variation du paramètre d'écartement déduit de l'inversion du facteur d'interaction le long du front de fissures disque coplanaires

En rapportant la valeur des  $\lambda^*(\phi)$  à la valeur de  $\lambda^*(90^\circ)$  les courbes se confondent en une courbe maîtresse (Figure A1.2\_19) ce qui s'explique par la séparabilité des variables. La valeur  $\lambda^*(90^\circ)$  est celle de la variable  $\lambda_x = \frac{2a}{2a+S_x}$ , elle est donc connue.

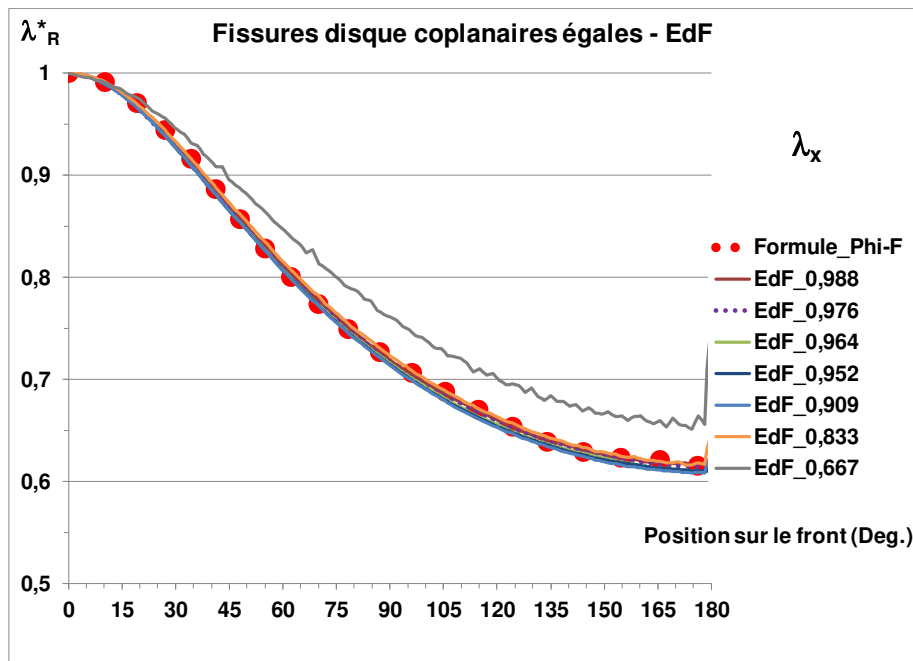


Figure A1.2\_19 : courbe maîtresse du paramètre d'interaction le long du front de fissures disque coplanaires

L'adimensionnement fait apparaître une courbe maîtresse lissée par une fonction  $\Lambda(\phi)$ .

$$\lambda^*(S_x, \phi) = \lambda_x \cdot \Lambda(\phi) \quad (A1.2_23)$$

Pour les fissures disques égales l'expression est la suivante :

$$\lambda^*(S_x, \phi) = \lambda_x \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{\pi} \cdot \left( 1 - \exp\left(-3.87 \cdot \left(\frac{\phi}{\pi}\right)^2\right)\right)} \quad (A1.2_{24})$$

Où  $\Phi$  est l'angle polaire de l'ellipse, variant de 0 à  $\pi$ .

Les maillages le long du front sont moins raffinés pour les écartements plus élevés : 600 points pour  $\frac{S_x}{2a} < 0,0375$  , 400 points pour  $0,0375 \leq \frac{S_x}{2a} \leq 0,05$  et 200 pour  $\frac{S_x}{2a} \geq 0,1$ . Pour l'écartement le plus élevé  $\frac{S_x}{2a} = 0,5$  soit  $\lambda_x = 0,666$  les valeurs des facteurs d'interaction sont faibles ( $< 1,025$ ) donc plus sensibles au moindre raffinement du maillage.

L'existence d'une courbe maîtresse montre qu'il existe une équivalence entre l'effet d'écartement et de la position le long du front de fissure.

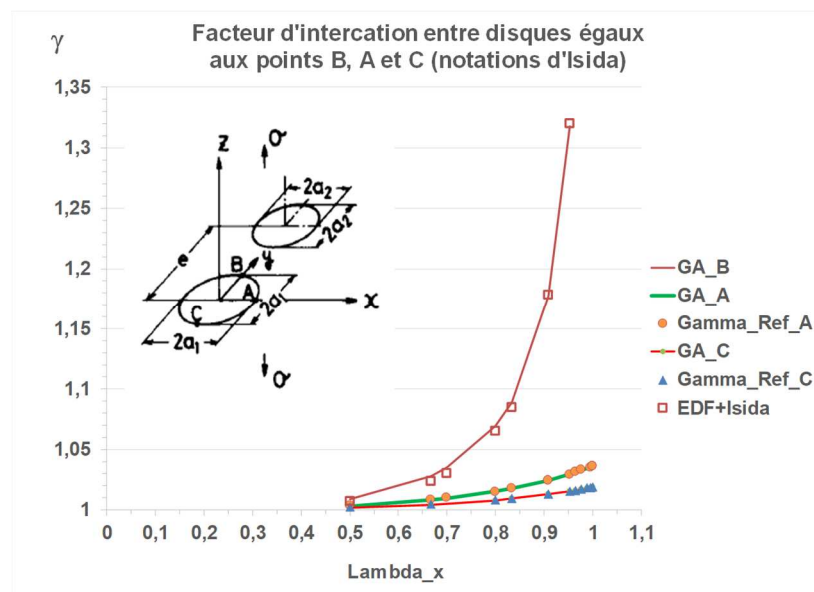
Cette approche sera étendue au cas des fissures elliptiques égales. L'extension aux fissures inégales devrait être possible, mais il faudrait des résultats de calcul numériques pour le vérifier.

#### Formules pour les points situés à 90 degrés (point A) et à 180 degrés (point C)

Le facteurs d'interaction est singulier au point le plus proche (B) pour un écartement nul alors que ce n'est pas le cas pour les autres points du front. Pour les points A et C les formules suivantes établies pour les fissures égales, sont plus simples à utiliser que de recourir à la fonction  $\Lambda(\phi)$ .

$$\begin{aligned} \gamma_A &= 1 + 0.1419 \cdot (F_{WD}(\lambda_{eq}, 0) - 1) \\ \lambda_{eq} &= \lambda_x \cdot (1 - 0.2 \cdot \lambda_x) \end{aligned} \quad (A1.2_{25})$$

$$\begin{aligned} \gamma_C &= 1 + 0.07388 \cdot (F_{WD}(\lambda_{eq}, 0) - 1) \\ \lambda_{eq} &= \lambda_x \cdot (1 - 0.2 \cdot \lambda_x) \end{aligned} \quad (A1.2_{26})$$



**Figure A1.2\_20 : variations des facteurs d'interaction aux points caractéristiques du front de fissures disque coplanaires égales**



La validation de ces formules est présentée à la figure A1.2\_20.

## A1.2.2. Fissures disque parallèles

Hormis pour le cas de fissures superposées, il existe peu d'études consacrées à l'interaction de fissures disque parallèles.

### A1.2.2.1. Fissures disque superposées

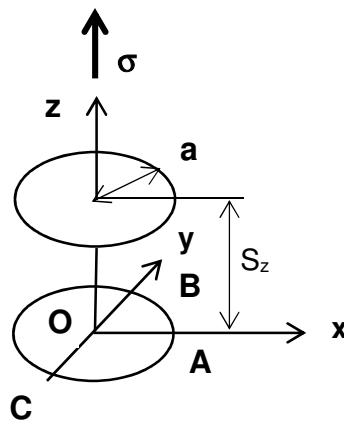
Cette configuration (Figure A1.2\_21) est axisymétrique ce qui explique qu'elle ait été analysée par de nombreux auteurs (ISN, 1983 ; ISI, 1985 ; KAL, 1989 ; KAC, 1993 ; FAB, 1997 ; ZHA, 2006).

Le cas des fissures inégales a été étudié dans le cadre d'études d'interaction entre fissure et microfissure (KAL, 1989).

Cette configuration est particulière car elle induit un fort effet d'écran et un mode II d'autant plus important que les fissures sont proches. Le mode III est nul en raison de l'axisymétrie de la configuration. L'écartement est mesuré par la variable réduite  $\hat{S}_z = \frac{S_z}{2a}$ .

Les fissures superposées traitées dans ce paragraphe sont des fissures parallèles centrées sur le même axe (Figure A1.2\_21).

Fissures superposées égales - Mode I



**Figure A1.2\_21 : deux fissures disque égales superposées situées dans un solide infini**

L'effet d'écran est illustré à la figure A1.2\_22. M. Kachanov fait remarquer que l'effet d'amplification pour des fissures coplanaires est plus fort pour les fissures bande que pour les fissures disque et qu'en revanche, l'effet d'écran pour des fissures superposées est plus fort pour les fissures disque que pour les fissures bande. De plus, l'effet d'écran a une portée plus grande que l'effet d'amplification. Kachanov (KAC, 1994) en voit à juste titre, la conséquence de la structure du champ de contrainte normale induit par une fissure sollicitée en mode I. La zone de contrainte en avant de la fissure est plus compacte que celle située au-dessus de la fissure comme l'illustre la figure A1.2\_23.

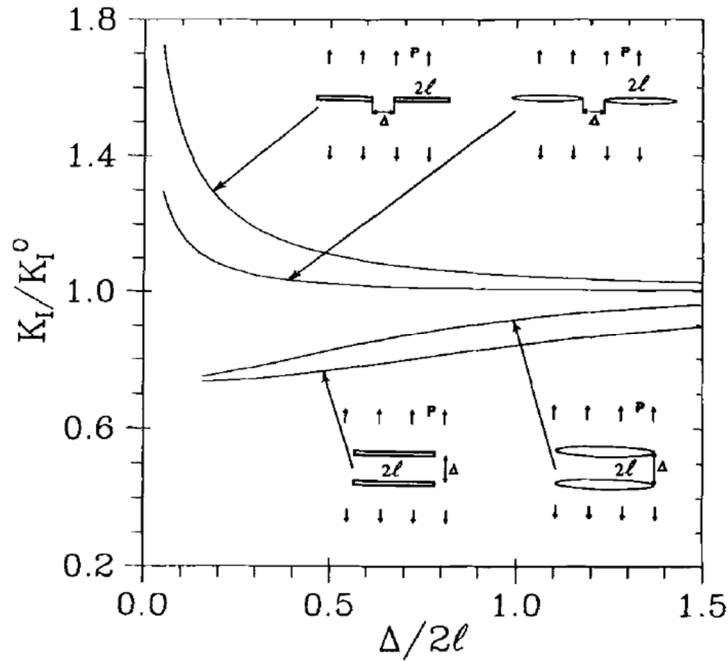


Figure A1.2\_22 : comparaison des effets d'interaction pour des fissures bande et des fissures disque égales superposées (KAC, 1994),  $\Delta \equiv S_z$

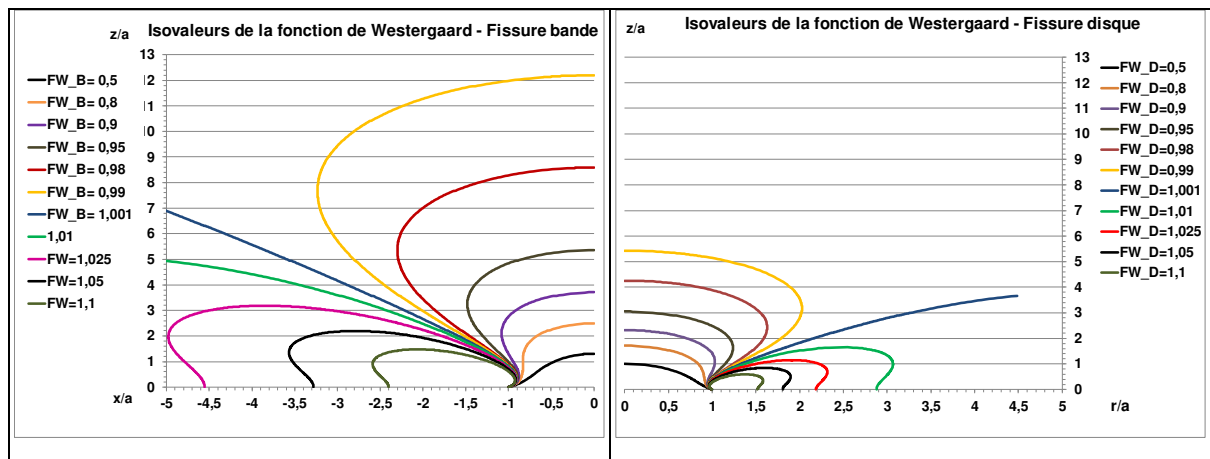


Figure A1.2\_23 : iso contraintes  $\sigma_{zz}$  pour la fissure bande et la fissure disque en traction

Ceci confirme la pertinence d'utiliser la fonction de Westergaard pour établir les formules de facteur d'interaction.

La figure A1.2\_24 semble montrer, en extrapolant les résultats de Kachanov, que la valeur asymptotique en  $S_z = 0$  pour les fissures bande et les fissures disque sont voisines.

Toutefois les calculs de Kachanov (KAC, 1989) ou de Zhan (ZHA, 2006) perdent en précision pour des valeurs faibles de  $S_z/(2a)$ . Cette difficulté existe aussi pour des fissures bande. Plusieurs auteurs ont effectué des analyses asymptotiques pour de faibles valeurs de l'écartement vertical : Kamei et Yokobori (KAY, 1974) ainsi que Gorbachik (GOR, 2007) pour les fissures bande et Fabrikant (FAB, 1997) pour les fissures disque. Ceci est illustré à la figure A1.2\_24 pour les fissures disque : le facteur d'interaction en mode I diminue fortement pour des écartements  $S_z/(2a) < 0,25$ . La méthode de Kachanov qui ne tient pas compte des contraintes d'ordre 2 sur l'interaction est inopérante.

La valeur asymptotique du facteur d'interaction pour deux fissures bande parallèles lorsque l'écartement devient nul est de 0,7359 par la méthode de Kachanov (KAL, 1989, voir § 2.3.1.3). La valeur de référence est celle obtenue par Gorbatchik (GOR, 2007) :

$$\gamma_{B,I}(\hat{S}_z = 0,01) \cong 0.573 \quad (A1.2_27)$$

Pour les fissures disque, Fabrikant (FAB, 1997) obtient par analyse asymptotique la valeur limite du facteur suivante d'interaction en mode I :

$$\lim_{\hat{S}_z \rightarrow 0} \gamma_{D,I}(\hat{S}_z) = \frac{6\pi^2}{4 + 9\pi^2} \cong 0.638 \quad (A1.2_28)$$

La Figure A1.2\_24 compare les résultats d'Isida et leur extrapolation avec les résultats de Fabrikant et ceux de Zhan pour des écartements plus élevés. Il est clair que la valeur limite ne peut être obtenue par extrapolation à  $\hat{S}_z = 0$ .

Les deux valeurs limite sont donc assez différentes.

Fabrikant propose pour le facteur d'interaction en mode I la formule approchée suivante :

$$\gamma_{D,I} \cong 1 - \frac{1}{\pi} \cdot \left[ \text{Atan} \left( \frac{1}{\hat{S}_z} \right) - \frac{\hat{S}_z}{1 + (\hat{S}_z)^2} \right] \quad (A1.2_29)$$

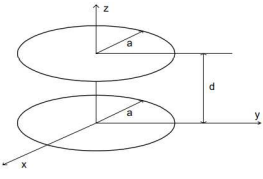
Mais cette formule ne donne des résultats satisfaisants que pour  $\hat{S}_z > 1$ . Elle est toutefois plus utile que les formules asymptotiques en  $\hat{S}_z = \infty$  établies par Graham et Lan (GRA, 1994) pour des fissures très éloignées.

Nous avons donc développé des formules de lissage sur les résultats de Fabrikant et Zhan pour les fissures disque. Celles relatives aux fissures bande ont été obtenues à partir des résultats de Kamei (KAY, 1987) et de Gorbatchik (GOR, 2007). Elles sont données au tableau A1.2\_1 ci-après.

Fissure bande	$\gamma_{B,Su,I} = 1 - 0.435 \cdot \exp \left( -1.015 \cdot \hat{S}_z^{0,727} \right)$
Fissure disque	$\gamma_{D,Su,I} = 1 - 0.358 \cdot \exp \left( -1.467 \cdot \hat{S}_z^{0,888} \right)$

**Tableau A1.2\_1 : facteurs d'interactions en mode I pour des fissures bande et des fissures disque superposées (Formules GA – A1.2\_30)**

Lo et al. (LOD, 2005) ont comparé leurs résultats de calcul par équations intégrales duales de frontière pour deux fissures disque superposées à ceux d'Isida et al.

	$S_z/(2a)$	0,5	0,75	1	1,5	2
	(ISI,1985)	0,836	0,883	0,919	0,961	0,98
	(LOD,2005)	0,823	0,877	0,916	0,958	0,977

**Tableau A1.2\_2 : facteurs d'interaction de deux fissures disques égales superposées pour différents espacements  $d = S_z$  (LOD, 2005)**

Il est impossible de discriminer les résultats des deux auteurs (Tableau A1.2\_2).

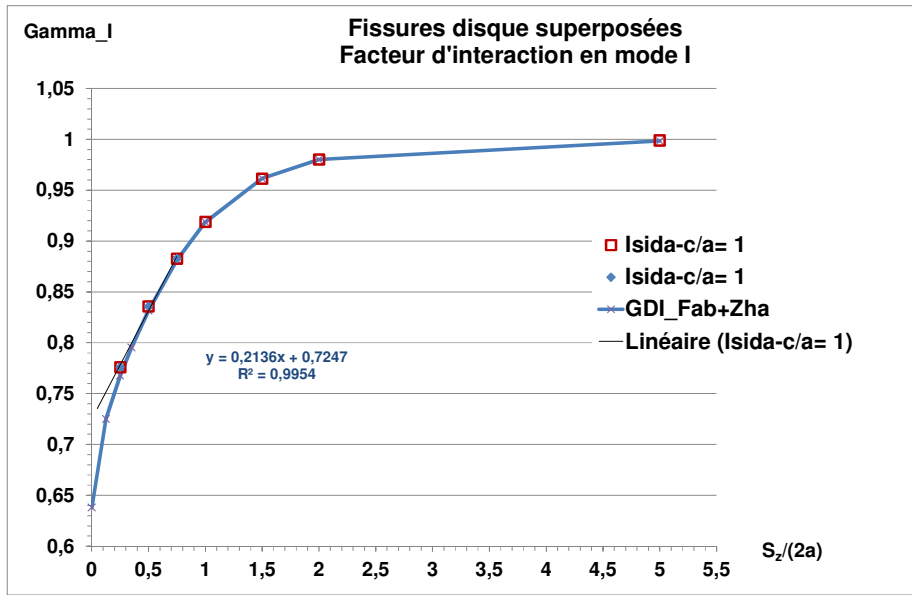


Figure A1.2\_24 : comparaison des effets d'interaction pour des fissures disque égales : résultats d'Isida (ISI, 1985) et de Fabrikant (FAB, 1997) complétés par ceux de Zhan (ZHA, 2006).

La figure A1.2\_24 corrige la figure A1.2\_22, mais les conclusions de Kachanov restent valables, à savoir que l'effet d'amplification pour des fissures coplanaires est plus fort pour les fissures bande que pour les fissures disque et qu'en revanche, l'effet d'écran pour des fissures superposées est plus fort pour les fissures disque que pour les fissures bande (Figures A1.2\_25 et 26).

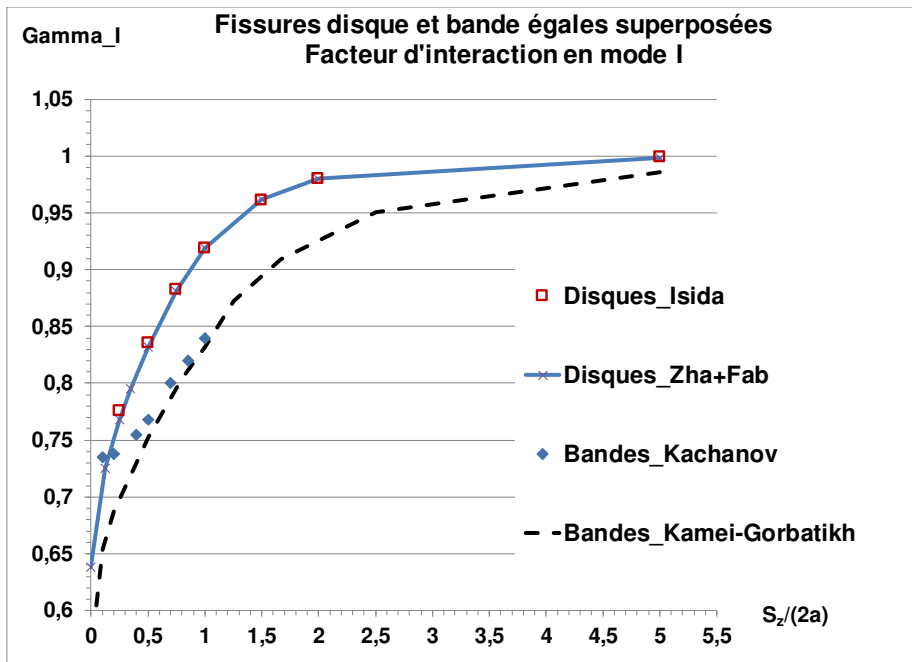
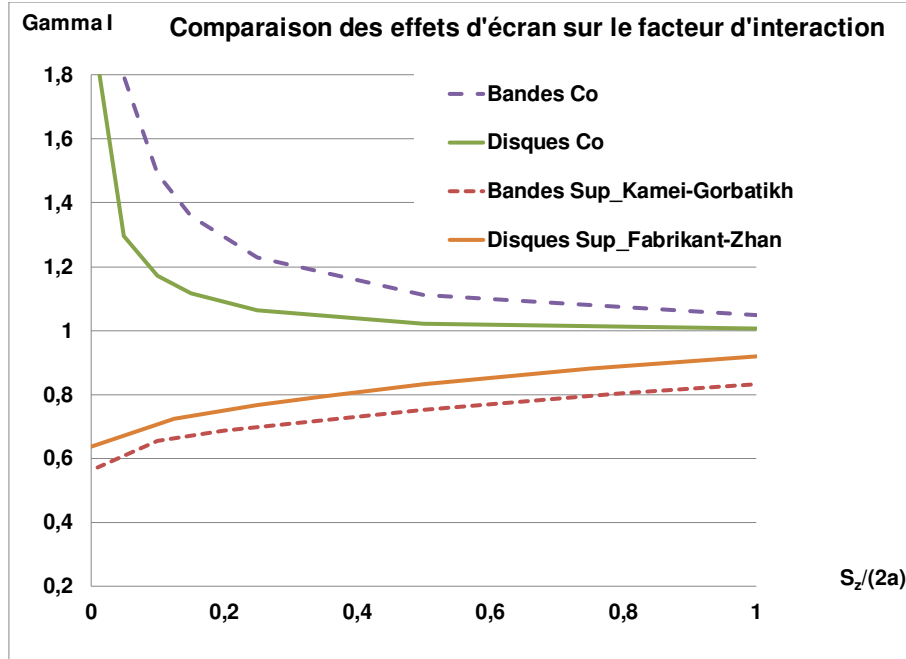


Figure A1.2\_25 : comparaison des effets d'interaction pour des fissures bande et des fissures disque égales superposées



**Figure A1.2\_26 : comparaison des effets d'interaction pour des fissures bande et des fissures disque égales coplanaires et superposées**

Le facteur d'interaction pour les fissures superposées reste toujours inférieur à 1, mais il est toujours plus élevé pour les fissures disque.

Fissures superposées égales - Mode II

En divisant la formule du FIC en mode II de l'article (FAB, 1997) par  $\frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \sigma_{app} \cdot \sqrt{a}$  il vient :

$$\gamma_{D,II} = \frac{1}{\pi} \cdot \left\{ 1 + \frac{\hat{S}_z^2}{1 + \hat{S}_z^2} - 2\hat{S}_z^2 \cdot \text{Ln} \left[ 1 + (\hat{S}_z)^{-2} \right] \right\} \quad (A1.2_{31})$$

Le développement à  $\hat{S}_z$  infini a pour seul intérêt la comparaison avec la formule de Graham (GRA, 1994) qui n'est pas tout à fait correcte.

$$\gamma_{D,II} \cong \frac{1}{3\pi} \cdot \left[ \frac{1}{\hat{S}_z^4} - \frac{3}{2} \frac{1}{\hat{S}_z^6} \right] \quad (A1.2_{32})$$

L'importance du mode II est illustrée à la figure A1.2\_27. Le mode II augmente à mesure que la distance entre les fissures parallèles diminue. Le FIC en mode II est plus élevé pour la fissure bande que pour la fissure disque, pour des écartements élevés, à l'inverse de ce que l'on observe pour le mode I. Pour des écartements faibles la position des courbes s'inverse.

Les extrapolations des résultats de Kachanov et de Zhan donneraient des courbes bien différentes.

Pour les fissures bande, nous avons développées la formule de lissage (A1.1\_19).

La valeur du facteur d'interaction en mode II n'est pas nulle lorsque l'écartement tend vers 0 : deux fissures superposées très proches ne se comportent pas comme une seule fissure.

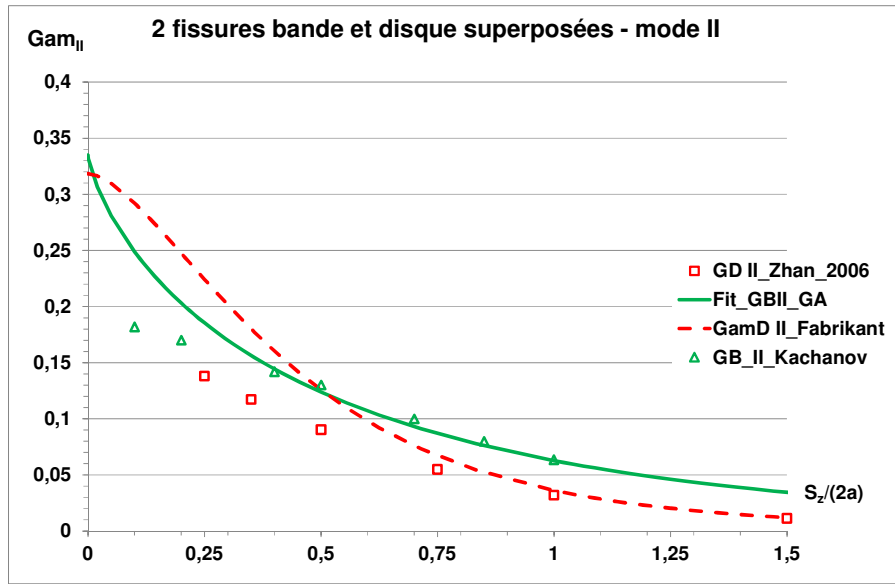


Figure A1.2\_27 : comparaison de l'importance du mode II pour des effets d'interaction pour des fissures bande (GB) et des fissures disque (GD)

La figure A1.2\_28 montre que le mode II peut être négligé si  $\hat{S}_z > 0.5$ .

Le FIC équivalent est défini par  $K_{eq} = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}$  donc  $\frac{K_{eq}}{K_I} \equiv \frac{\gamma_{eq}}{\gamma_I}$ . Pour les fissures égales superposées les facteurs d'interaction équivalents ont des valeurs très voisines.

La figure A1.2\_29 synthétise les résultats pour le mode I et le mode II : la décroissance du mode I avec la décroissance de la distance relative entre fissures superposées  $\hat{S}_z$  s'accompagne d'une croissance du mode II.

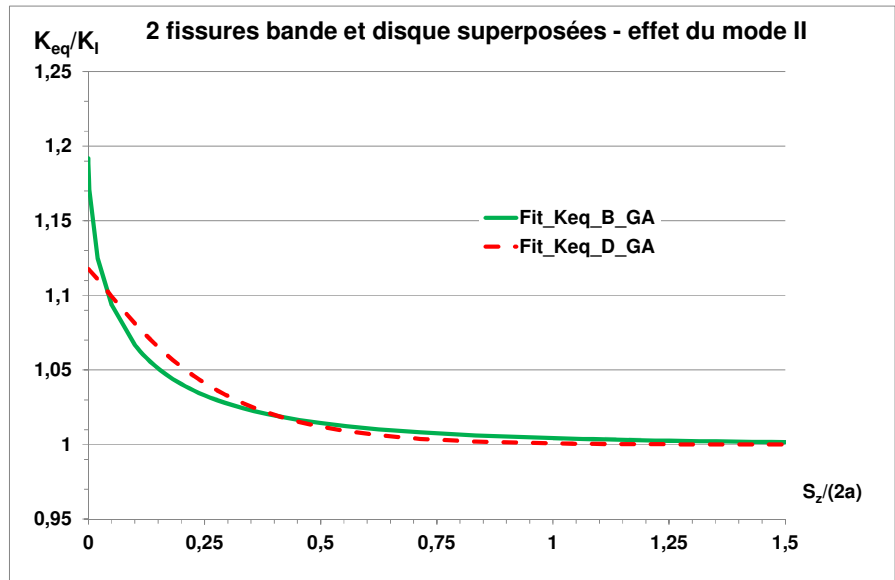


Figure A1.2\_28 : comparaison des FIC équivalents I pour des fissures bande et disque égales superposées interagissantes

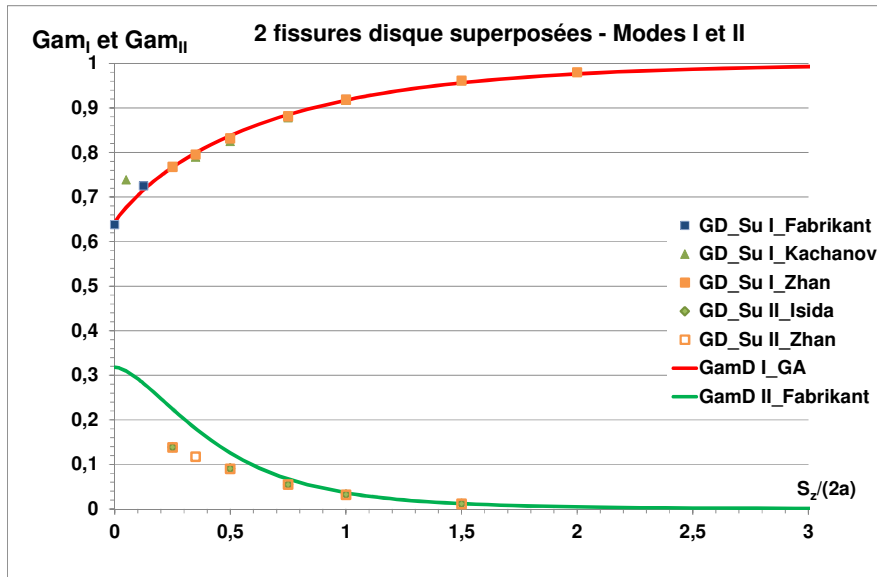


Figure A1.2\_29 : diminution du facteur d'interaction en mode I et augmentation du facteur d'interaction en mode II lorsque les fissures disque parallèles égales se rapprochent

Fissures superposées inégales

Ce cas entre dans la catégorie des études d'interaction entre fissure et microfissure.

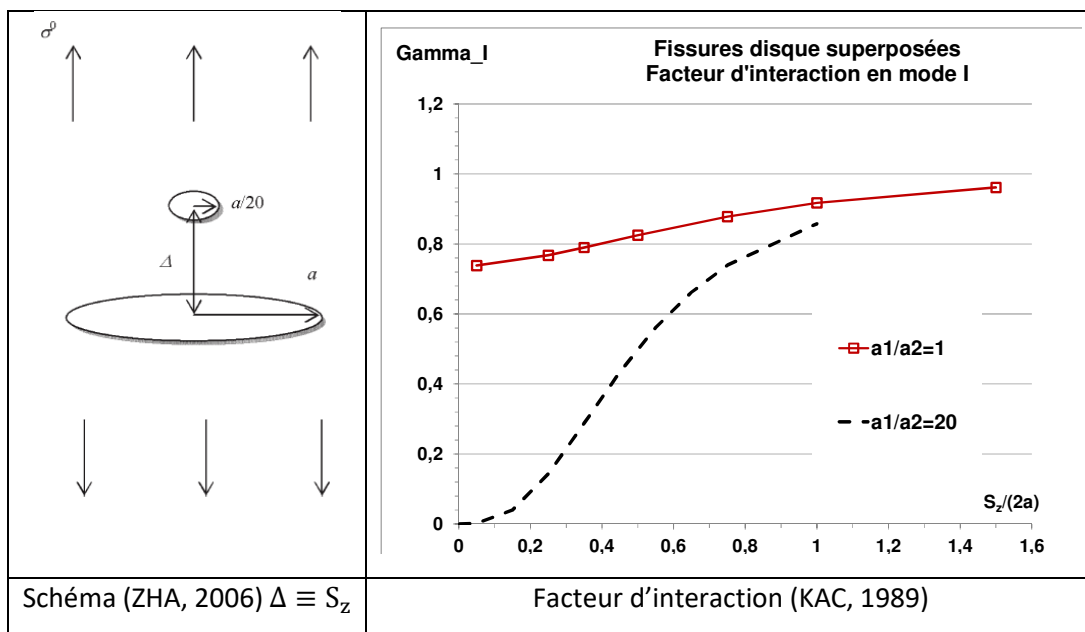


Figure A1.2\_30 : 2 fissures disque superposées inégales situées dans un solide infini

Dans le cas de fissures inégales superposées, lorsque le rapport des tailles diminue, l'effet d'interaction tend à être nul sur la grande fissure et l'effet d'écran très fort sur la petite fissure (Figure 3.2\_30).

Par conséquent, une fissure à laquelle sont superposée des petites fissures se comporte comme une fissure unique.

### A1.2.2.2. Fissures disque parallèles décalées non écartées

Les fissures sont des disques, donc la position de la seconde fissure est caractérisée par les deux seuls écartements  $S_x$  et  $S_z$ . La configuration analysée est décrite à la figure A1.2\_31.

Dans le cas de fissures décalées sous traction normale, les trois modes sont présents. Cependant nous verrons que l'on peut négliger leur effet sur le facteur d'interaction. Les FIC des modes II et III dépendent du coefficient de Poisson.

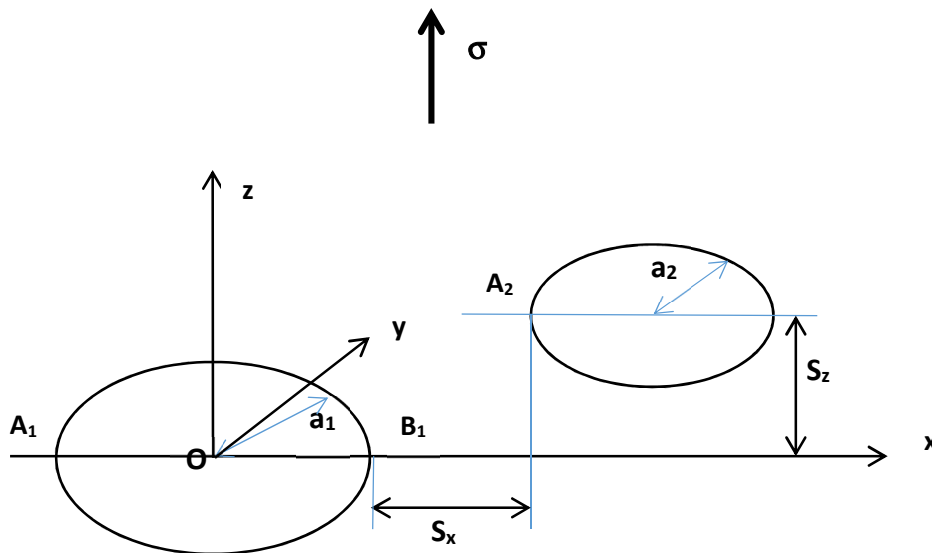


Figure A1.2\_31 : deux fissures disque inégales situées dans des plans parallèles

#### Limite d'écrantage pour des fissures disque

La limite d'écrantage correspond à l'égalité des facteurs d'interaction en un point du front de la première fissure et un point du front de la seconde. Le paragraphe suivant décrit la façon d'obtenir des isovaleurs de facteurs d'interaction A cette fin, il est nécessaire d'obtenir les valeurs des facteurs d'interaction au point du front considéré pour des fissures coplanaires.

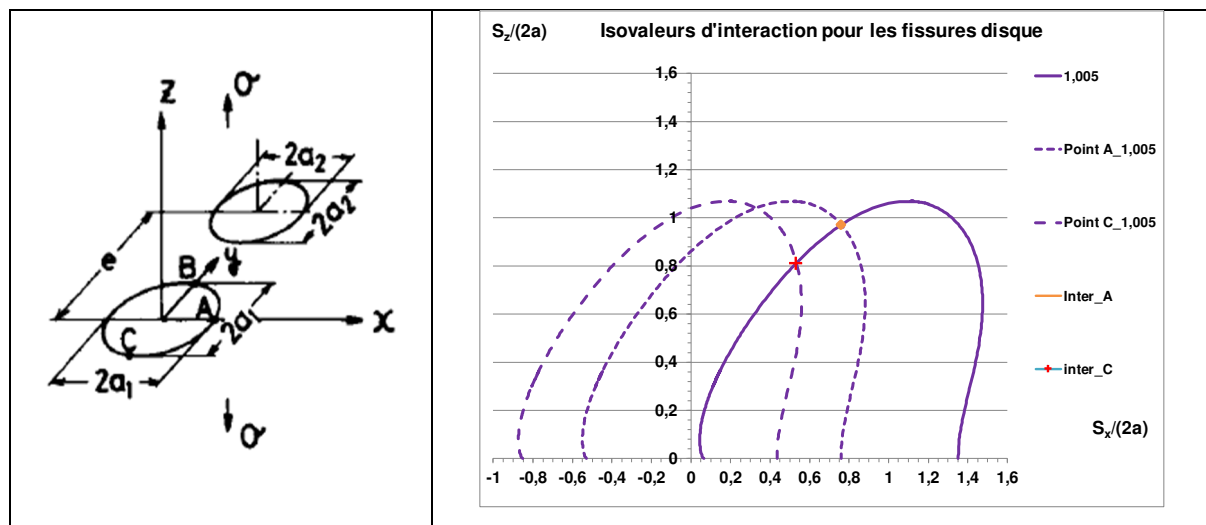


Figure A1.2\_32 : points d'écrantage pour des fissures disque parallèles égales



La figure A1.2\_32 présente les isovaleurs des facteurs d'interaction pour la valeur 1,005. La propriété d'équivalence entre écartement et position sur le front permet de déterminer deux points d'écrantage avec les isovaleurs associées aux points B, A et C.

La limite d'écrantage est obtenue en opérant la même démarche pour différentes isovaleurs.

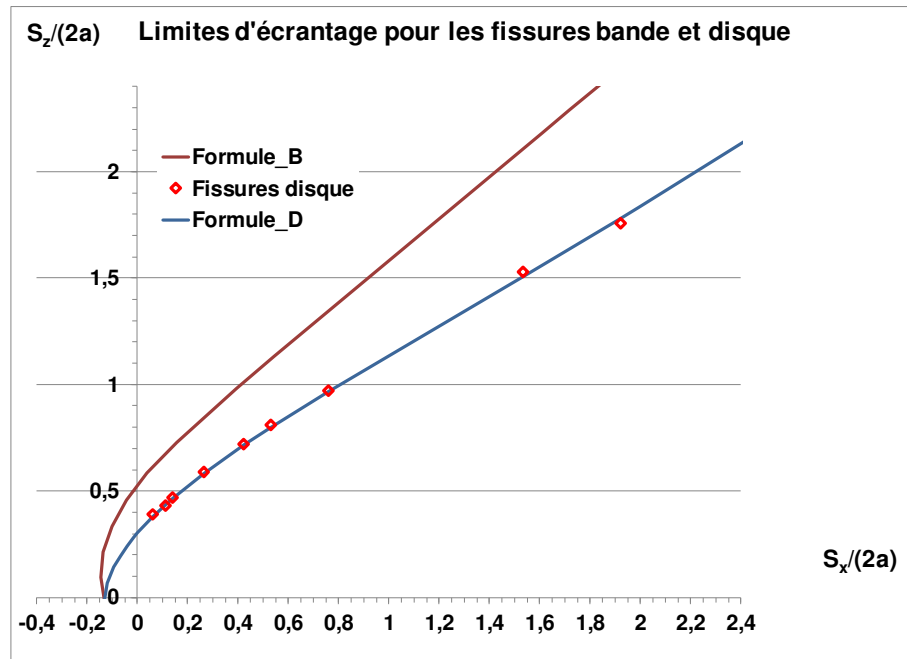


Figure A1.2\_33 : limites d'écrantage pour des fissures bande et disque égales

La figure A1.2\_33 confirme que l'effet d'écrantage est plus élevé pour les fissures disque que pour les fissures bande.

#### Fissures disque parallèles non écartées

L'interaction de fissures disque parallèles non écartées en mode I s'analyse de la même façon que celle des fissures bande parallèles non écartées. On considère l'action de la fissure  $a_2$  sur la fissure  $a_1$ .

- L'effet de l'écartement vertical ne dépend pas de la taille relative des fissures
- L'effet de l'écartement vertical est piloté par le paramètre d'écartement relatif  $S_z/a_2$
- La fonction de Westergaard calculée pour la valeur d'écartement relatif  $S_x/(a_1+a_2)$  obtenue à partir de la valeur du facteur d'interaction dans le plan et la valeur de  $S_z/a_2$  traduit l'effet d'interaction hors plan.

On considère l'interaction de la fissure 2 avec la fissure 1 au point le plus sollicité  $B_1$ .

Pour les valeurs de décalages horizontal  $S_x$  et vertical  $S_z$ , la valeur du facteur d'interaction s'obtient de la façon suivante :

- On calcule  $\lambda_x = \frac{a_1+a_2}{a_1+a_2+S_x}$  puis  $\gamma_{D\_co}(B_1) = 1 + A \left( \frac{a_1}{a_2} \right) \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left( \frac{\lambda_x}{\sqrt{1-\lambda_x^2}} - \sin^{-1} \lambda_x \right)$  (A1.2\_33)

- On calcule  $r_0/a$  en inversant  $FW_{D\_co}\left(\frac{r_0}{a}\right) - \gamma_{D\_co}(B_1) = 0$  (A1.2\_34)

- Le facteur d'interaction pour les fissures parallèles est donné, en fonction de l'adimensionnement choisi ( $2a_i$ ) par

$$\gamma_{D\_Pa}(M) = FW_{D\_Pa}\left(\frac{r_0}{2a_i}, \frac{S_z}{2a_i}\right) \quad (A1.2_35)$$

La fonction de Westergaard pour une fissure disque en mode I est donnée par :

$$FW_{D\_pa}(r, z) = 1 + \frac{2}{\pi} \cdot [C_1^0(\rho, \zeta_D) - S_0^0(\rho, \zeta_D) + \zeta_D \cdot C_2^0(\rho, \zeta_D) - \zeta_D \cdot S_1^0(\rho, \zeta_D)] \quad (A1.2_36)$$

Avec les expressions suivantes des coefficients

$$\rho = \frac{r}{a} \quad \zeta_D = \frac{z}{a} \quad r_D = \sqrt{1 + \zeta_D^2} \quad (A1.2.37)$$

Dans l'article de Sneddon, il y a une coquille il faut lire  $C_1^0(\rho, \zeta_D)$  au lieu de  $C_0^1$  dans l'expression du premier coefficient.

Les coefficients C et S sont donnés par les formules (A1.2.38) ci-après.

$$C_1^0(\rho, \zeta_D) = \frac{1}{\sqrt{R}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \quad C_2^0(\rho, \zeta_D) = \frac{\sqrt{1+\zeta_D^2}}{R^{\frac{3}{2}}} \cdot \cos\left(\frac{3}{2}\varphi - \theta\right)$$

$$C_0^1(\rho, \zeta_D) = \frac{1}{\rho} \cdot \left(\sqrt{R} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} - \zeta\right) \quad C_1^1(\rho, \zeta_D) = \frac{1}{\rho} \cdot \left[1 - \frac{\sqrt{1+\zeta_D^2}}{\sqrt{R}} \cdot \cos\left(\theta - \frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

$$C_2^1(\rho, \zeta_D) = \frac{\rho}{R^{\frac{3}{2}}} \cdot \cos \frac{3\varphi}{2} \quad C_1^2(\rho, \zeta_D) = \frac{2}{\rho} \cdot C_0^1 - C_1^0 \quad C_2^2(\rho, \zeta_D) = \frac{2}{\rho} \cdot C_1^1 - C_2^0$$

$$S_0^0(\rho, \zeta_D) = \text{Atan} \left[ \frac{\sqrt{R} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} + (1+\zeta_D^2) \cdot \sin \theta}{\sqrt{R} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} + (1+\zeta_D^2) \cdot \cos \theta} \right] (\rho \neq 0) \quad S_0^2(\rho, \zeta_D) = \frac{1}{\rho} \cdot (C_0^1 - \zeta \cdot S_0^1)$$

$$S_1^0(\rho, \zeta_D) = \frac{1}{\sqrt{R}} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \quad S_2^0(\rho, \zeta_D) = \frac{\sqrt{1+\zeta_D^2}}{R^{\frac{3}{2}}} \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\varphi - \theta\right)$$

$$S_0^1(\rho, \zeta_D) = \frac{1}{\rho} \cdot \left(1 - \sqrt{R} \cdot \sin \frac{\varphi}{2}\right) \quad S_1^1(\rho, \zeta_D) = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\sqrt{1+\zeta_D^2}}{\sqrt{R}} \cdot \sin\left(\theta - \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$S_2^1(\rho, \zeta_D) = \frac{\rho}{R^{\frac{3}{2}}} \cdot \sin \frac{3\varphi}{2} \quad S_1^2(\rho, \zeta_D) = \frac{2}{\rho} \cdot S_0^1 - S_1^0$$

$$R^2 = (\rho^2 + \zeta_D^2 - 1)^2 + 4\zeta_D^2$$

$$\theta = \text{Atan}\left(\frac{1}{\zeta_D}\right)$$

Angle  $\varphi$

	$\zeta = 0$	$\rho < 1$ et $\rho^2 + \zeta_D^2 < 1$	$\rho \geq 1$
$\varphi =$	$\frac{\pi}{2}$	$\text{Atan}\left(\frac{2\zeta_D}{\rho^2 + \zeta_D^2 - 1}\right) + \pi$	$\text{Atan}\left(\frac{2\zeta_D}{\rho^2 + \zeta_D^2 - 1}\right)$

Tableau A1.2\_3expressions de l'angle  $\varphi$  des formules de Sneddon pour la fissure disque

La détermination des isovaleurs suit la même procédure que celle décrite au § A1.1.2.1 pour les fissures bande. La figure A1.2\_34 illustre le décalage de l'isovaleur 1,1 de la fonction de Westergaard vers l'isovaleur du facteur d'interaction en mode I.

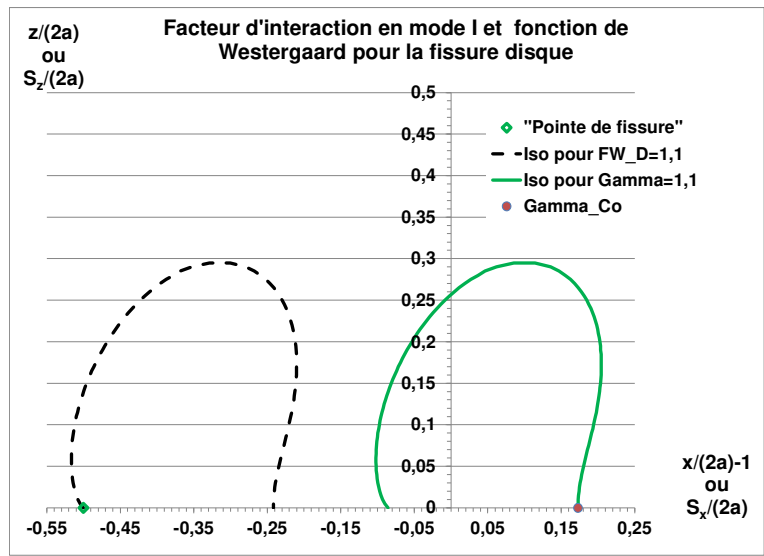


Figure A1.2\_34 : iso valeurs  $F_{W_D}=1,1$  et  $\Gamma=1,1$  pour deux fissures disque égales

La comparaison des isovaleurs des fonctions de Westergaard pour la fissure bande et la fissure disque montre que la fissure bande est environ 1,8 fois plus nocive que la fissure disque (Figure A1.2\_35).

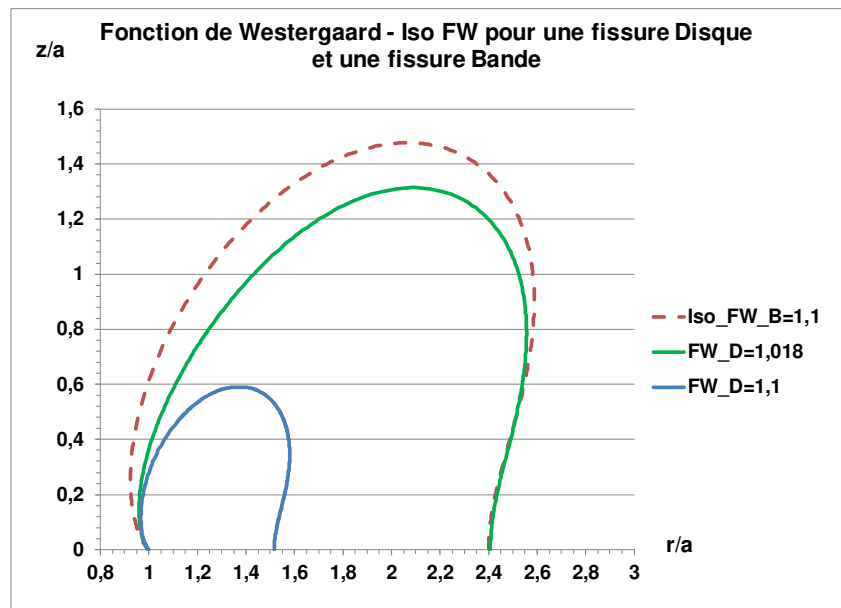


Figure A1.2\_35 : comparaison des isovaleurs de la fonction de Westergaard pour des fissures disque et d'une fissure bande

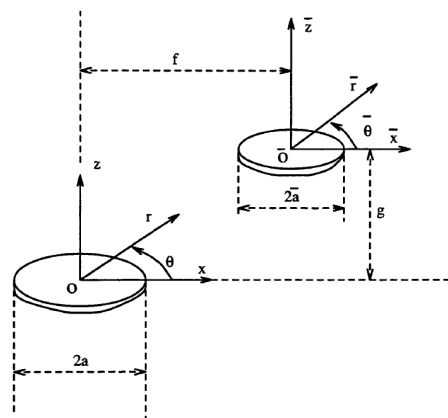
L'interaction dans le plan est définie par le paramètre  $\lambda_x$  et l'interaction hors plan est pilotée par le paramètre  $\frac{S_z}{2a}$ .

Cette approche s'applique au cas de fissures inégales. Il faut alors choisir l'adimensionnement de  $S_z$  en général pour l'action de la grande fissure sur la petite par le diamètre de la petite fissure.

Isida et al. (ISI, 1985) ont étudié principalement le cas de fissures elliptiques. Deux cas de fissures disque égales non écartées peuvent servir à la comparaison mais elles sont éloignées ( $S_z/(2a) = 0,5$  et  $1$  et  $S_x/(2a) = 1$  et  $1,5$ ). Par conséquent les facteurs d'interaction sont proches de  $1$  comme dans nos prédictions.

Le chapitre 3 de la thèse de Q. Lan (LAN, 1994) est consacré à l'interaction de fissures disque situées dans un solide isotrope élastique infini. La méthode utilisée généralise celle établie par Collins (COL, 1963). Leur solution est développée pour des fissures de proximité, mais sa précision est limitée par la troncature de leur solution en séries.

Lan définit les FIC par  $k_1 = \frac{K_I}{\sqrt{\pi}}$  où  $K_I$  est la notation classique. Les paramètres géométriques qu'il utilise sont décrits à la figure A1.2\_36.



**Figure A1.2\_36 : deux fissures disque parallèles situées dans un solide infini (LAN, 1994)**

Lan (LAN, 1994) définit deux paramètres adimensionnels  $\varepsilon_f = \frac{a}{f}$  et  $\frac{g}{f}$

$$\lambda_x = \frac{a_1 + a_2}{f}$$

Dans le cas de fissures égales:  $\lambda_x = \frac{2a}{f} = 2\varepsilon_f$

Ce qui donne avec nos notations  $\frac{S_x}{2a} = \frac{1}{2\varepsilon_f} - 1$   $\frac{S_z}{2a} = \frac{g}{f} \cdot \frac{f}{2a} = \frac{g}{f} \cdot \frac{1}{2\varepsilon_f}$

Les résultats sont présentés sous forme graphique à la figure A1.2\_37, tirée de (GRA, 1994). Cette figure n'est pas correcte car  $\varepsilon_f$  ne peut dépasser  $0,5$  pour des fissures coplanaires. Cependant l'allure des courbes est bonne, comme le montre la comparaison des résultats de Lan et Graham à la figure A1.2\_38. Aussi avons-nous reproduit certains résultats de la thèse à titre d'information qualitative.

Les formules de Lan montrent que  $K_{II}$  et  $K_{III}$  dépendent du coefficient de Poisson  $\nu$  mais que  $K_I$  n'en dépend pas. Toutefois, si l'augmentation des FIC avec  $\nu$  peut atteindre  $20\%$  quand le coefficient de Poisson varie entre  $0,15$  et  $0,5$ , cette dépendance est négligeable pour des valeurs de  $\nu$  situées entre  $0,25$  et  $0,35$  (GRA, 1994).

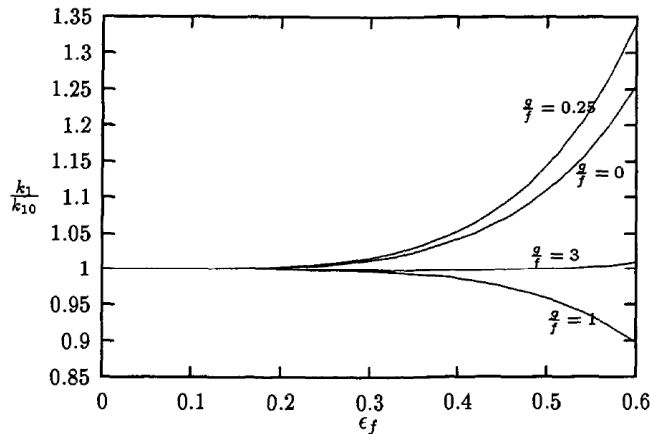


Figure 3.4: Equal uniform normal loadings: variation of the stress intensity factor  $\frac{k_1}{k_{10}}$  with respect to  $\epsilon_f$  at  $\theta = 0$  for various  $\frac{g}{f}$  when  $a = \bar{a} \ll f$ .

**Figure A1.2\_37 : variations du facteur d'interaction pour deux fissures disque parallèles situées dans un solide infini (LAN, 1994)**

Lan ne fournit pas de comparaisons. Notre solution (GA) est comparée ci-dessous (Tableau A1.2\_4) aux résultats pour des fissures coplanaires ( $g=0$ ) en  $\theta = 0$ .

$\epsilon_f$	Q. Lan	GA
0,2	1,0028	1,004
0,45	1,068	1,154

**Tableau A1.2\_4 : comparaison des facteurs d'interactions en mode I pour des fissures disque coplanaires Q. Lan / solution GA**

Pour  $\epsilon_f = 0,455$  Fabrikant obtient 1,168 et notre formule donne 1,172.

Donc les calculs de Lan sous-estiment les interactions.

Nous avons comparé les prédictions de Lan dans le cas hors plan en convertissant les paramètres utilisés par Lan. Le tableau A1.2\_5 donne les correspondances.

$\epsilon_f = \frac{a}{f}$	$S_x/(2a)$	$\frac{g}{f} = 0$	$\frac{g}{f} = 0,25$	$\frac{g}{f} = 1$	$\frac{g}{f} = 3$
0,2	1,5	0	0,625	2,5	7,5
0,3	0,667	0	0,4167	1,6667	5
0,4	0,25	0	0,3125	1,25	3,75
0,45	0,111	0	0,2778	1,1111	3,3333

**Tableau A1.2\_5 : valeurs de  $S_x/(2a)$  en fonction des paramètres  $a/f$  et  $g/f$ .**

La comparaison des résultats de Lan aux nôtres est illustrée à la figure A1.2\_39. L'accord est bon, sauf pour les cas de fissures proches (faible  $S_x$  ou faible  $S_z$ ). Graham et Lan (GRA, 1994) spécifient bien que leur solution est limitée au cas de fissures éloignées ( $a \ll f$ ).

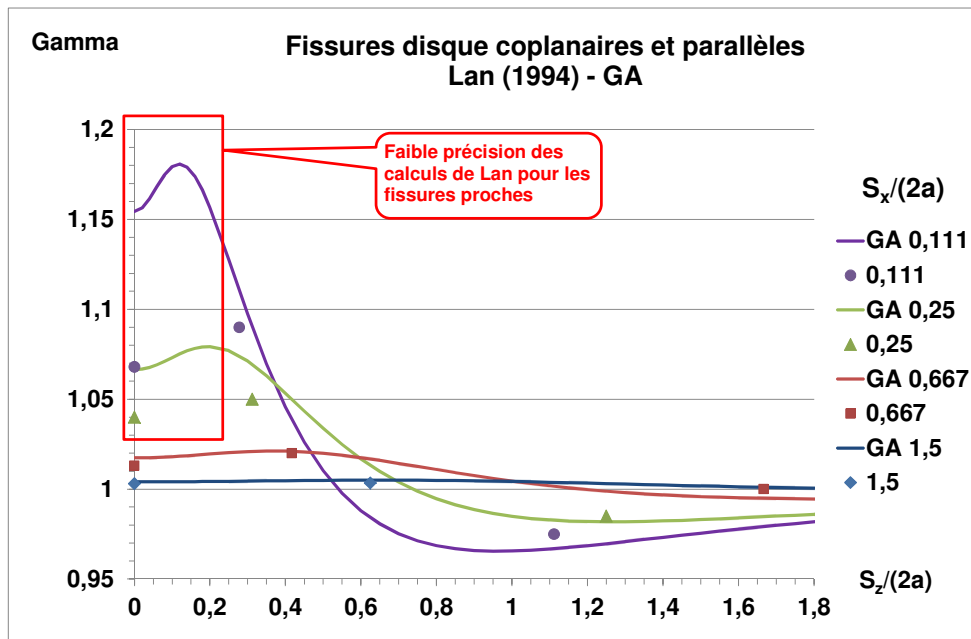


Figure A1.2\_38 : variations du facteur d'interaction pour deux fissures disque parallèles situées dans un solide infini (LAN, 1994) et notre formulation (GA)

Les effets d'interaction hors plan doivent disparaître bien avant que  $g/f$  dépasse 7 comme l'indique l'auteur. Il semble que ce soit le cas pour  $g/f=3$  comme l'illustrent les figures de la thèse de Lan (LAN, 1994 ; GRA, 1994) reproduite aux figures A1.2\_40a et b.

#### Modes II et III

Q. Lan a calculé les facteurs d'interaction en mode I et mode II pour des fissures disque égales coplanaires ou parallèles Figures A1.2\_39a et b.

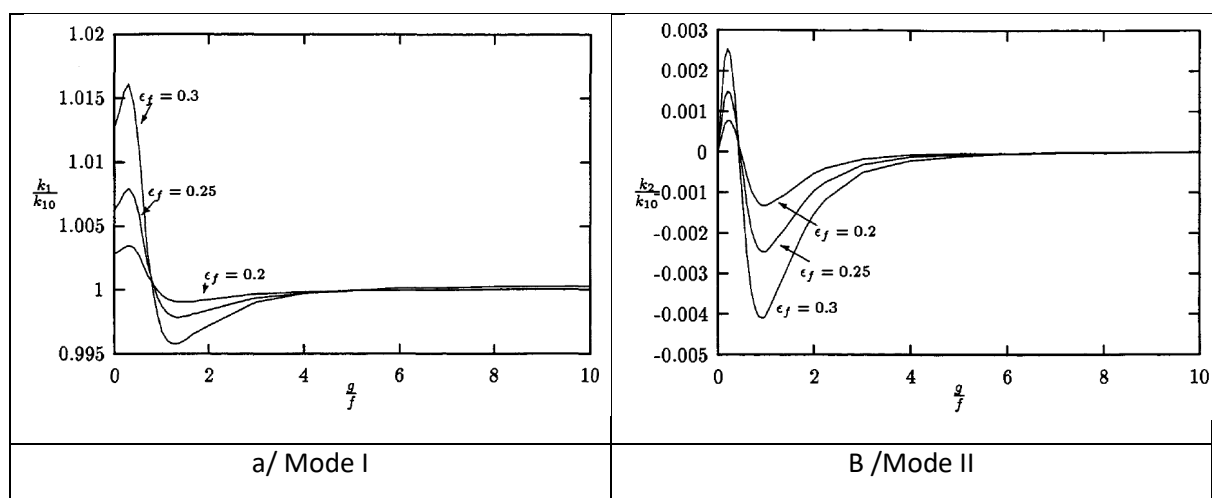


Figure A1.2\_39 : facteurs d'interaction en mode I et mode II pour deux fissures disque égales coplanaires ou situées dans des plans parallèles

La figure A1.2\_39 montre que  $K_{II}$  est faible et quasiment nul dès que  $g/f > 3$ . Le FIC  $K_{II}$  est positif lorsque les fissures sont telles que  $g/f < 1$ , il est négatif pour  $g/f$  entre 1 et 3.

Le FIC mode III a des valeurs légèrement supérieures à celles du mode II et sa variation avec  $g/f$  est opposée à celle du mode II.

### A1.2.2.3. Fissures disque parallèles décalées écrantées

L'interaction de fissures parallèles écrantées est complexe en général car l'écrantage atténue l'amplification de l'interaction. De plus, nous ne pouvons utiliser a formule d'interaction des fissures coplanaires afin de définir la variable  $S_x$ .

Nous avons donc utilisé les formules établies pour des fissures superposées pour définir  $S_x$ . L'idée est de faire passer la fonction  $F_{w,D}$  par le point  $(-1, z_0)$  caractéristique du cas des fissures superposées.

#### Partie écrantée du front

La procédure est similaire à celle des fissures non écrantées, mais la fonction de Westergaard est utilisée dans l'intervalle  $-1 \leq x/a \leq 1$ . Nous décrivons ci-dessous la procédure pour le cas de fissures égales, faute de résultats pour des fissures inégales.

Pour une valeur fixée du facteur d'interaction  $\gamma_0$  de la fissure 1 sur la fissure 2, il faut calculer :

- La valeur correspondante de l'écartement relatif  $S_{z0}/(2a)$  pour deux fissures égales superposées :

$$\gamma_{B\_Su\_eq}(M) = g \left( \frac{S_{z0}}{2a} \right) - \gamma_0 = 0 \quad (A1.2\_39)$$

- La valeur de  $X_0$  telle que

$$FW_D \left( X_0, \frac{S_{z0}}{a} \right) - \gamma_0 = 0 \quad (A1.2\_40)$$

- Les coordonnées  $X, Z$  de l'isovaleur  $FW_D(X, Z) - \gamma_0 = 0$

- L'isovaleur d'interaction avec la fissure parallèle a pour coordonnées :

$$X/2 - X_0/2 - 1 \quad \text{et} \quad Z/2$$

Toutefois, les résultats obtenus pour des fissures bande montre que cette approche sous-estime l'effet d'écran et il est nécessaire d'appliquer sur les coordonnées  $X - X_0$  et  $Y$  un coefficient réducteur compris entre 0,7 et 1. Ce coefficient ne pourra être établi qu'à partir de résultats de calcul aux éléments finis précis.

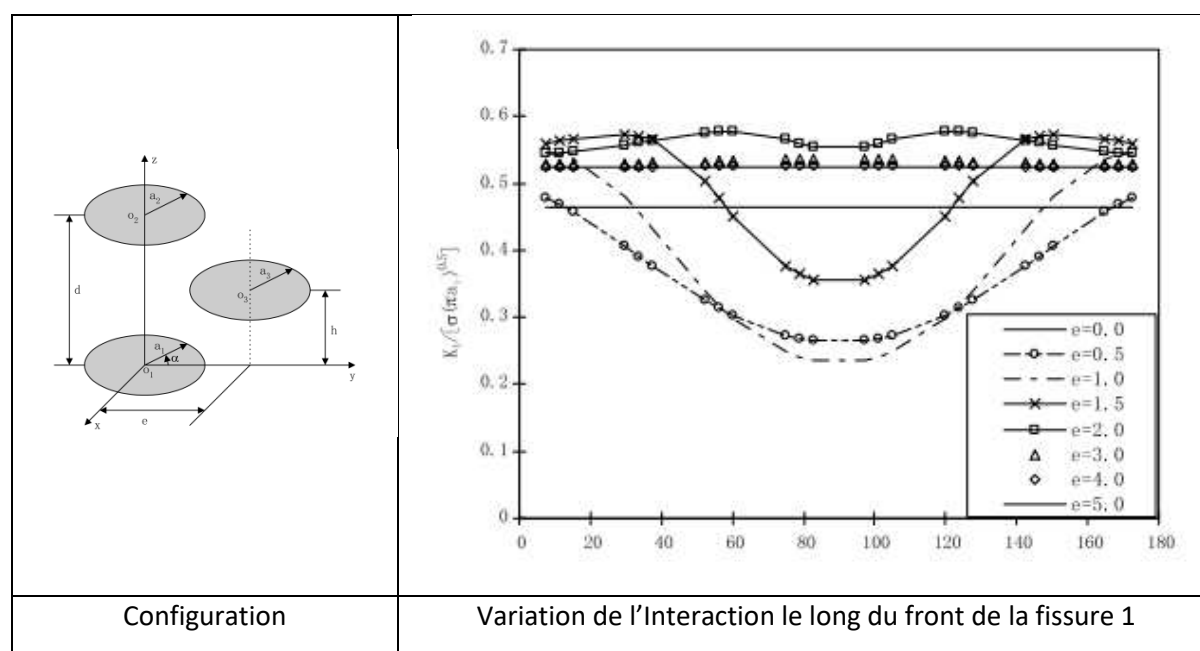
Sur la base de nos résultats obtenus pour des fissures bande, on peut conclure que la mise en œuvre de cette approche permet d'obtenir les facteurs d'interaction aux points d'interaction maximal et minimal.

### Partie non-écrantée du front

La procédure reste à définir. L'estimation est plus complexe car la fissure est soumise à un champ de contraintes fortement variable.

### Ecrantage entre trois fissures

Lo et al. (LOD, 2005) ont calculé par la méthode des équations intégrales les interactions le long du front d'une fissure disque située entre deux fissures disque parallèles d'axe commun pour différents écartements des axes verticaux de ces fissures (Figure A1.2\_40). Les trois fissures ont le même rayon.



**Figure A1.2\_40 : interaction de 3 fissures disque égales parallèles ( $d/a=1$  et  $h/a = 0,5$ )**

Avec nos notations :

$$e = 1 + \frac{S_x}{a} \quad d \text{ ou } h = \frac{S_z}{a}$$

L'angle de variation de l'Interaction, n'est pas  $\alpha$ , mais  $\alpha - 90$  en raison de la symétrie des variations.

L'effet d'écartement horizontal est important :

- La présence des fissures écrantées modifie complètement le profil de variation du facteur d'interaction le long du front de la fissure 1 par rapport au cas des fissures coplanaires.
- Pour  $e = 0$  ( $S_x/(2a) = -1$ ), les 3 fissures sont superposées et l'on retrouve un profil uniforme avec  $\gamma_{D,Co,Su} \approx 0,75$
- Pour  $e = 0,5 ; 1$  (Fissure touchant l'axe des fissures 1 et 2) et 1,5, il y a un effet d'écrantage maximal à  $\alpha = 0$  degrés. A 90 degrés, la fissure n'est plus écrantée. Pour  $e = 1,5$ , le facteur d'interaction maximal passe de 0 degrés à 60, point où la distance entre fissure 3 et 1 ou 2 est minimale.



- Pour  $e = 2$ , le facteur d'interaction est maximal à 30 degrés.
- Pour un écartement élevé ( $e > 3$ ), le facteur d'interaction est pratiquement celui d'une fissure isolée :  $\gamma_{D_{Co}_{Su}} = Cte = 0,582$ .

### A1.2.3. Fissures disque inclinées

Les fissures inclinées par rapport à la direction de traction travaillent en mode mixte. Dans les cas de fissures bande seuls le mode I et II existent et sont indépendants du coefficient de Poisson. Dans le cas de fissure de surface, les 3 modes sont présents et les modes II et III dépendent du coefficient de Poisson. En fonction de la valeur de l'angle, les modes II et III peuvent jouer un rôle important, il faut donc raisonner en termes de K équivalent déduit de la formule d'Irwin (IRW, 1957) :

$$K_{eq} = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2 + \frac{1}{1-\nu} \cdot K_{III}^2} \quad (A1.2\_41)$$

#### A1.2.3.1. Fissures disque inclinées par rapport à l'axe de traction

##### Fissure disque unique inclinée par rapport à l'axe de traction

Les formules des FIC sont fournies par le dictionnaire de Tada-Paris (TPI, 2000). La direction de traction forme un angle  $\beta$  avec le plan de fissure. L'angle polaire  $\varphi$  a pour origine le point le plus sollicité en mode II positif.

$$K_I = \sigma_{app} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \sin^2 \beta \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (A1.2\_42a)$$

$$K_{II} = \sigma_{app} \cdot \frac{4}{\pi \cdot (2-\nu)} \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (A1.2\_42b)$$

$$K_{III} = \sigma_{app} \cdot \frac{4(1-\nu)}{\pi \cdot (2-\nu)} \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta \cdot \sin \varphi \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (A1.2\_42c)$$

Les facteurs de forme sont notés  $F_{I_0}$ , le zéro indiquant qu'il s'agit d'une fissure isolée :

$$F_{I_0} = \frac{2}{\pi} \cdot \sin^2 \beta \quad (A1.2\_43a)$$

$$F_{II_0} = \frac{4}{\pi \cdot (2-\nu)} \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi \quad (A1.2\_43b)$$

$$F_{III_0} = \frac{4(1-\nu)}{\pi \cdot (2-\nu)} \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta \cdot \sin \varphi \quad (A1.2\_43c)$$

$$\frac{F_{III}}{F_{II}} = (1-\nu) \cdot \tan \varphi \quad (A1.2\_43d)$$

Dans le plan de chargement,  $K_{III} = 0$  on a donc :

$$K_{eq,0} = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2} = \sigma_{app} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \sin \beta \cdot \sqrt{\sin \beta + \frac{2}{(2-\nu)} \cdot \cos \beta} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (A1.2_{44})$$

$$F_{eq,0} = \frac{2}{\pi} \cdot \sin \beta \cdot \sqrt{\sin^2 \beta + \frac{2}{(2-\nu)} \cdot \cos^2 \beta} \approx \frac{2}{\pi} \cdot \sin \beta \quad (A1.2_{45})$$

La figure A1.2\_41 illustre la variation des facteurs de forme au point origine.

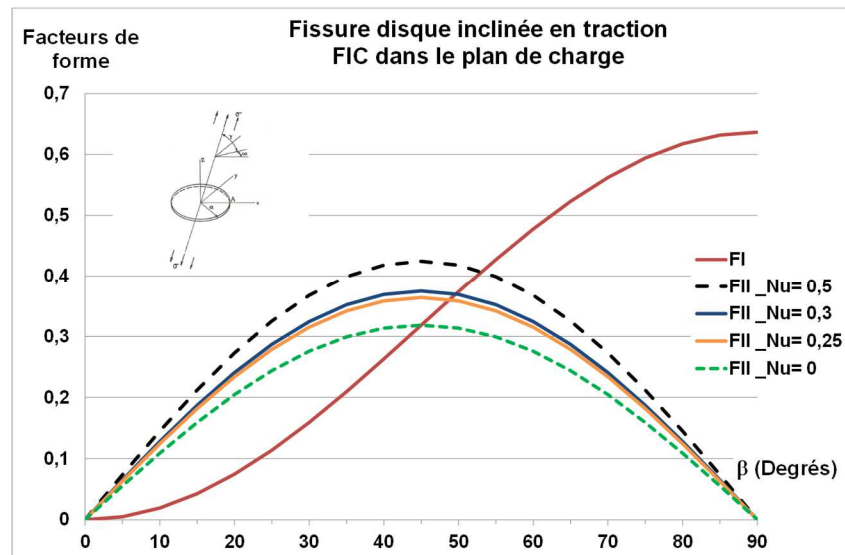


Figure A1.2\_41 : facteurs de forme pour une fissure disque inclinée au point situé dans le plan de chargement en  $\varphi = 0$

Le fait que le facteur de forme équivalent dépende du coefficient de Poisson rend plus difficile la recherche d'une équivalence par projection sur le plan normal à l'axe de charge.

Toutefois au point le plus sollicité, le Facteur de Forme équivalent dépend peu du coefficient de Poisson autour de la valeur 0,3 comme le montre la figure A1.2\_42

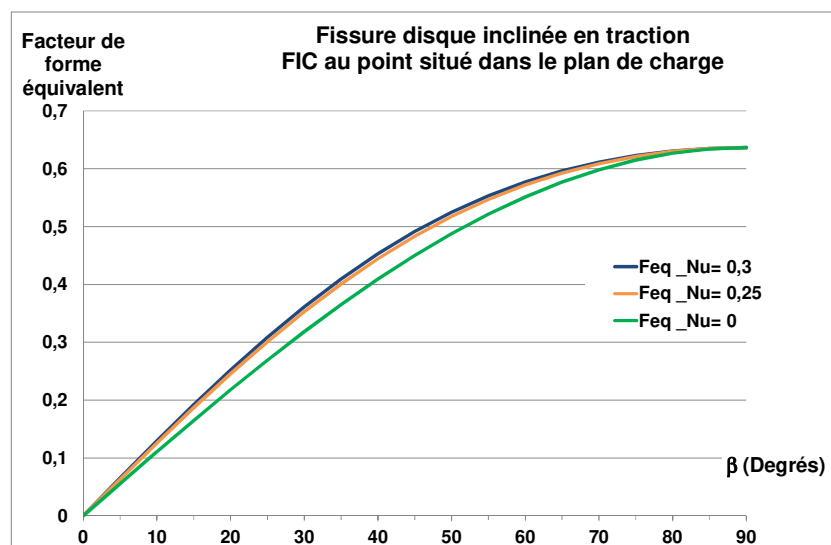


Figure A1.2\_42 : facteurs de forme équivalents pour une fissure disque inclinée au point situé dans le plan de chargement en  $\varphi = 0$

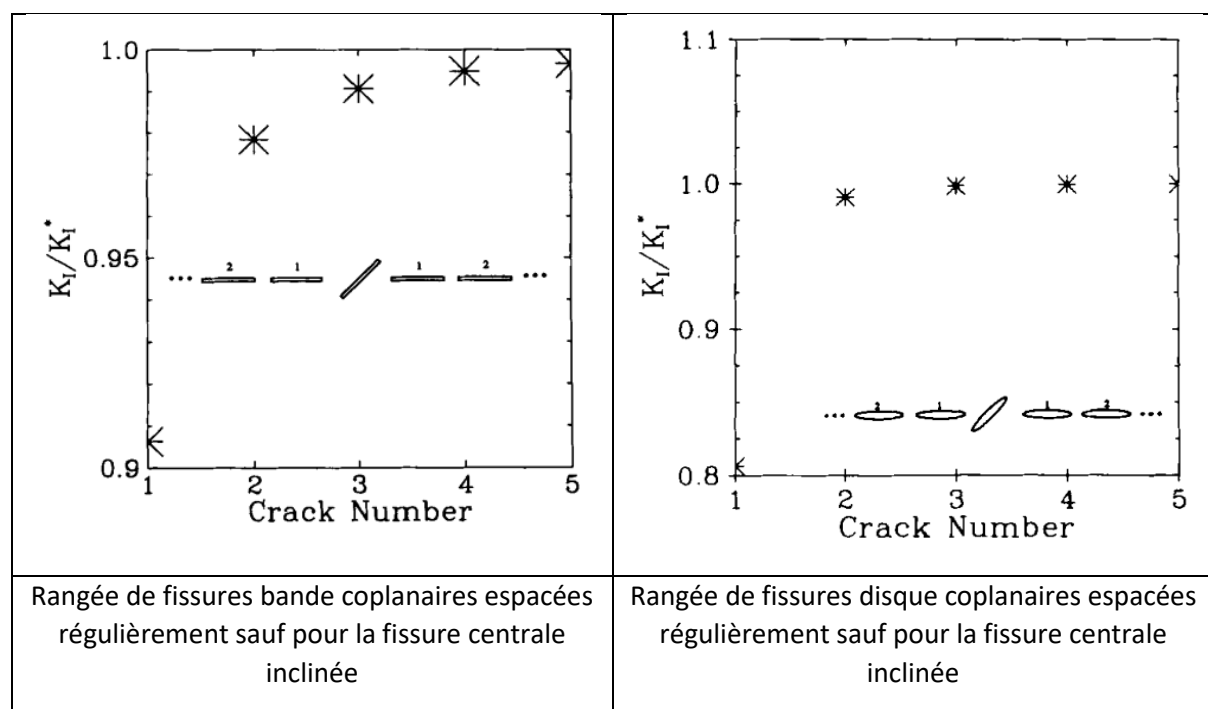
Le défaut projeté sur l'axe normal à l'axe de sollicitation a pour demi-longueur

$$a_{\text{proj}} = a \cdot \sin \beta$$

Le FIC équivalent en mode I est alors  $F_{\text{proj}} = \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{\sin \beta}$

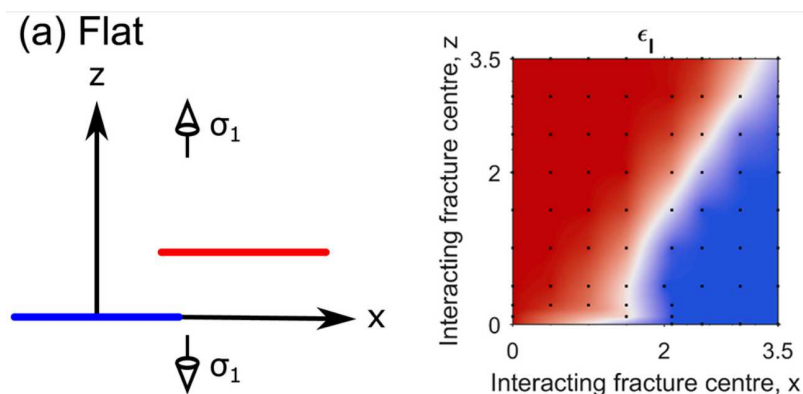
Fissures disque normales à l'axe de traction interagissant avec une à la fissure inclinée

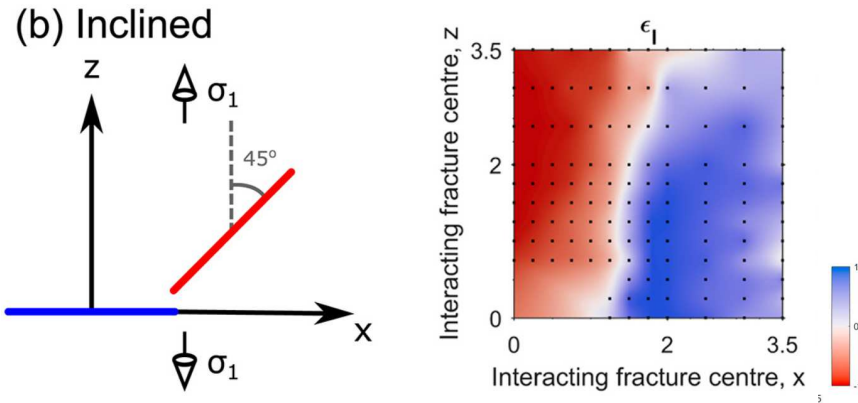
Kachanov (KAC, 1994) a analysé l'effet d'une inclinaison à 45 degrés d'une fissure sur les fissures voisines dans une rangée de 11 fissures égales. Les 10 fissures sont coplanaires et la fissure centrale inclinée. La figure A1.2\_43 compare les effets de la perturbation apportée par l'inclinaison de la fissure centrale montre que l'impact de la perturbation est plus faible dans le cas des fissures disque que ce qui est attendu car l'interaction entre fissures disque est moins forte que pour les fissures bande.



**Figure A1.2\_43 : facteurs d'interaction pour une rangée de fissure périodique perturbée**

La limite d'écrantage est affectée par l'inclinaison des fissures comme le montre la figure A1.2\_44 tirée de l'étude de Thomas et al. (THO, 2017). En utilisant une technique de perturbation des FIC, les auteurs obtiennent des cartes d'interaction qui mettent bien en évidence les effets d'écrantage.



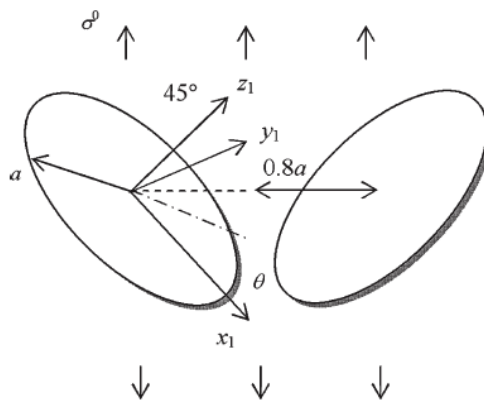


**Figure A1.2\_44 : limite d'écrantage pour des fissures disque inclinées (THO, 2017)**

Le paramètre d'écrantage varie entre -1 (écrantage complet) à +1 (amplification pure).

### A1.2.3.2. Fissures disque inclinées formant un V

La configuration est décrite à la figure A1.2\_45.



**Figure A1.2\_45 : positions des deux fissures disque formant un V situées dans un solide infini (ZHA, 2006)**

M. Kachanov et J.-P. Laures (KAL, 1989) ainsi que S. Zhan et T. Wang (ZHA, 2006) ont étudié cette configuration en considérant un coefficient de Poisson de 0,25. Ils concluent à un faible effet de l'interaction sur les modes II et III. Les résultats de ces auteurs sont très proches. Ceux de Kachanov comportent une coquille pour le FIC en mode II à 30 degrés. Nous avons donc reproduit ceux de Zan à la figure A1.2\_46.

Les résultats de FIC de Kachanov comme ceux de Fabrikant et de Zhan doivent être multipliés par  $\sqrt{2} \cdot \pi$  pour revenir à la notation classique. Mais les résultats de facteurs d'interaction définis par  $\frac{K}{\sigma \cdot \sqrt{a}}$  doivent être multipliés par  $\sqrt{2}$  seulement.

La définition des Facteurs d'Interaction doit être précisée. Pour  $i=I, II$  et III, on a :

$$\gamma_i = \frac{F_i}{F_{i,0}} \quad (A1.2_46)$$

Et  $\gamma_{eq} = \frac{F_{eq}}{F_{eq,0}}$  et non pas  $\gamma_{eq} = \sqrt{\gamma_I^2 + \gamma_{II}^2 + \frac{1}{1-\nu} \cdot \gamma_{III}^2}$

Les valeurs sont données au tableau A1.2\_6.

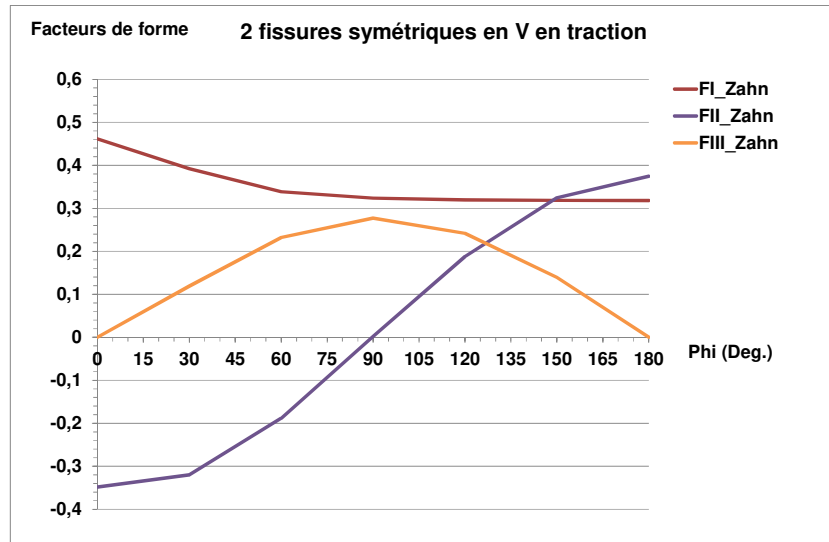


Figure A1.2\_46 : variations des facteurs de forme le long des deux fissures disque formant un V situées dans un solide infini (ZHA, 2006)

Phi (Deg.)	F <sub>I</sub>	γ <sub>I</sub>	F <sub>II</sub>	F <sub>II 0</sub>	γ <sub>II</sub>	F <sub>III</sub>	F <sub>III 0</sub>	γ <sub>III</sub>
0	0,4609	1,448	-0,3484	-0,3638	0,9577	0	0	1
30	0,3918	1,2309	-0,32	-0,315	1,0158	0,1188	0,1364	0,8711
60	0,3385	1,0634	-0,1884	-0,1819	1,0359	0,2321	0,2363	0,9826
90	0,3236	1,0167	0,0022	0	1	0,277	0,2728	1,0152
120	0,3196	1,0041	0,1878	0,1819	1,0328	0,2416	0,2363	1,0226
150	0,3185	1,0007	0,3247	0,315	1,0305	0,1394	0,1364	1,0219
180	0,3182	0,9997	0,3748	0,3638	1,0303	0	0	1

Tableau A1.2\_6 : tableau des résultats de (ZHA, 2006) pour les fissures disque en V à 45 deg.

Le mode II varie de façon anti symétrique par rapport à Phi=90 degrés. Le mode III varie de façon symétrique par rapport à Phi=90 degrés. Aux points les plus proches (θ = 0) comme aux points les plus éloignés le mode III est nul.

Pour cet angle d'inclinaison, les facteurs d'interaction en mode I ont des valeurs élevées aux points les plus proches. Les variations de ces facteurs le long de la circonférence sont illustrées à la figure A1.2\_47.

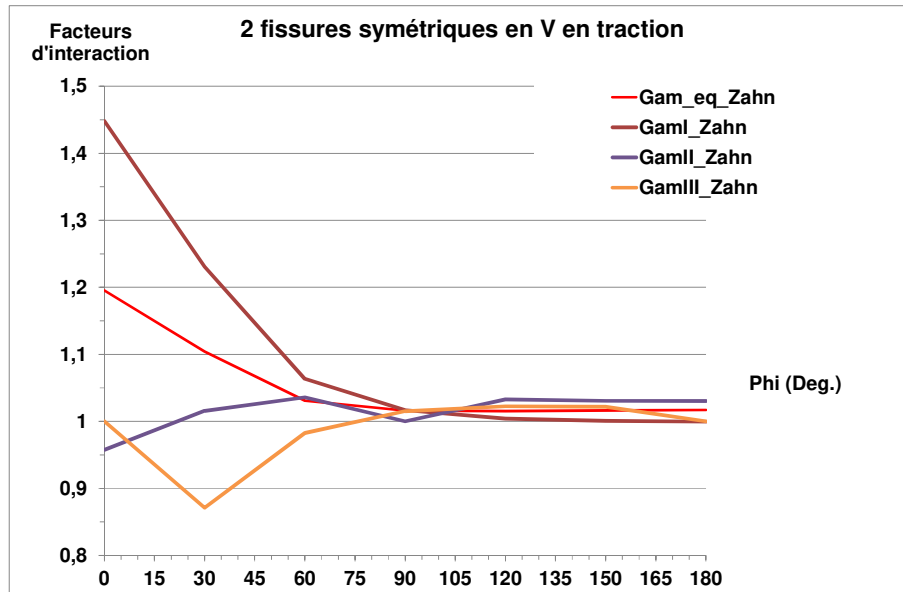


Figure A1.2\_47 : variations des facteurs d'interaction le long des deux fissures disque formant un V situées dans un solide infini (ZHA, 2006)

Les facteurs d'interaction sont pratiquement égaux à l'unité pour les modes II et III. La valeur du facteur en mode II à 30 degrés est étrange.

Au point le plus sollicité  $\gamma_{eq} \cong 1,19$ . Pour le cas considéré, la projection des défauts sur le plan normal à la charge conduit à l'estimation suivante :

$$\frac{S_x}{2a} = \frac{0,8 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos(45 \text{ deg.})} \cong 0,131 \quad (A1.2_47)$$

Ce qui donne, en appliquant la formule pour les fissures disque coplanaires, un facteur d'interaction de 1,131.

Une meilleure estimation du facteur d'interaction équivalent est obtenue en « mettant à plat les fissures » L'écartement des fissures aux points les plus proches vaut :  $\frac{S_x}{2a} = 0,8 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0,093$ . Cette valeur donne un facteur d'interaction de 1,182.

Pour généraliser cette règle, il faudrait d'autres résultats. En particule il faudrait vérifier pour les écartements plus faibles que les modes II et III peuvent être négligés. Les résultats pour les fissures bandes montrent que l'interaction de mode II augmente lorsque l'écartement diminue (UKA, 1991). Toutefois, l'écartement des fissures aux points les plus proches de la configuration considérée vaut :  $\frac{S_x}{2a} = 0,8 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0,093$ . Cette valeur est de l'ordre de la limite au-dessous de laquelle il y a coalescence des fissures ( $S/(2a) = 0,1$  pour des fissures bande colinéaires).

**Donc dans le domaine d'application pratique la règle de « mise à plat des défauts » conduit à une estimation acceptable.**

Pour généraliser la formule aux positions sur la circonférence il faudrait disposer d'une formule donnant la variation de l'interaction de long du front de fissure.

### A1.3. Interaction entre deux fissures elliptiques

Les fissures sont planes et situées dans un massif considéré comme infini sollicité par une traction normale au plan de fissure.

Le problème de l'interaction de deux fissures elliptiques interagissantes comporte un nombre de paramètres beaucoup plus important que pour les fissures bande. Les fissures ont deux dimensions et la courbure varie le long de leur front. Ceci introduit les nouveaux paramètres suivants :

- La forme de fissure exprimée par le rapport d'aspect
- La différence de rapport d'aspect entre deux ellipses
- L'écartement des axes dans les deux directions du plan
- L'orientation des axes
- L'inclinaison des plans de fissures pour des axes non parallèles

Les solutions pour les fissures sollicitées en mode II et III dépendent du coefficient de Poisson. Le coefficient de Poisson vaut 0,3 dans calculs effectués par EDF ou ESI.

En dépit de ces différences par rapport aux cas des fissures bande ou des fissures disque, le modèle proposé conserve ses mêmes fondements :

- Pour des fissures coplanaires :

$$\gamma_{12}(P) = 1 + A \cdot \left[ F_{W\_E\_co} \left( \frac{c}{a}, \lambda_x, \lambda_y \right) - 1 \right] \quad (A1.3\_1)$$

$$\lambda_x = \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 + S_x} \quad \lambda_y = \frac{c_1 + c_2}{c_1 + c_2 + S_y} \quad (A1.3\_2)$$

La fonction de forme A dépend de la taille relative des fissures  $\zeta = \frac{a_1}{a_2}$ , du rapport d'aspect  $\frac{c}{a}$  de la fissure considérée, d'un paramètre décrivant le rapport des courbures aux points d'interaction et de nature (grande ou petite) de la fissure considérée.

- Pour des fissures parallèles :

$$\gamma_{12}(P) = F_{W\_E\_Pa} \left( \frac{c}{a}; \frac{x_D}{l}; \frac{y_D}{l}; \frac{z}{l} \right) \quad (A1.3\_2)$$

La valeur de  $x_D$  et/ou de  $y_D$  comme pour les fissures bande.

La longueur  $l$  est liée à la taille des fissures et doit être cohérente avec la définition des  $\lambda$ .

- Pour des fissures inclinées : application de la règle de rotation pour de ramener au cas de fissures parallèles comme pour les fissures disque.

Il faut donc disposer de la fonction de type Westergaard  $F_{W\_E}$  et déterminer la fonction A. Au total il y a 4 paramètres pour la fonction plus 3 paramètres décrivant les écartements relatifs pour la fonction  $F_{W\_E}$

Pour les fissures enfouies non écrantées, c'est l'interaction au co-vertex qui est la plus pénalisante, point du front où le FIC de la fissure isolée est le plus élevé.

### A1.3.1. Fissures elliptiques coplanaires égales

La Figure A1.3\_1 décrit deux des configurations de fissures coplanaires. Elles subissent une traction normale. Les points au vertex sont appelés A et B et au covertex C et D. Les demi-axes sont nommés a suivant x et c suivant y pour être plus proches des conventions du code RSE-M (RSE-M, 2010). Dans le cas général, les points les plus proches sont désignés par L en raison du lien avec la définition des paramètres d'écartement  $\lambda_x$  et  $\lambda_y$ . L'écartement vertical relatif est mesuré par  $\frac{S_z}{2a}$ . Les fissures sont indexées par les chiffres 1 et 2.

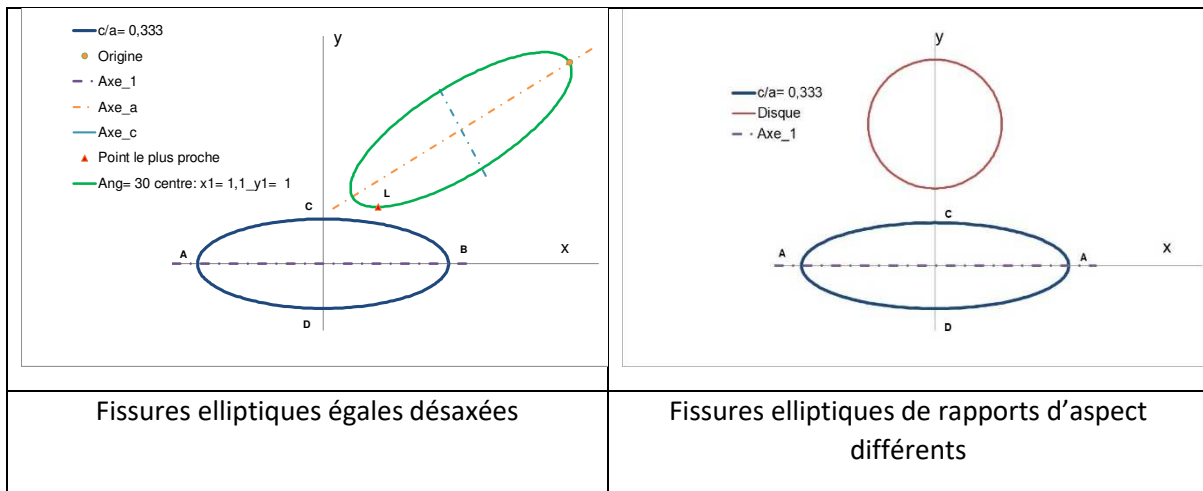


Figure A1.3\_1 : fissures elliptiques coplanaires

Dans notre encodage des fonctions la fissure elliptique a pour grand axe  $2a$  porté par x et l'abscisse curviligne, décrite par l'anomalie excentrique  $\varphi$  a son zéro en pointe de la fissure  $(a, 0, 0)$ .

#### A1.3.1.1. Fissures elliptiques coplanaires égales ayant un axe commun

La Figure A1.3\_2 décrit les deux configurations des fissures ayant un axe commun.

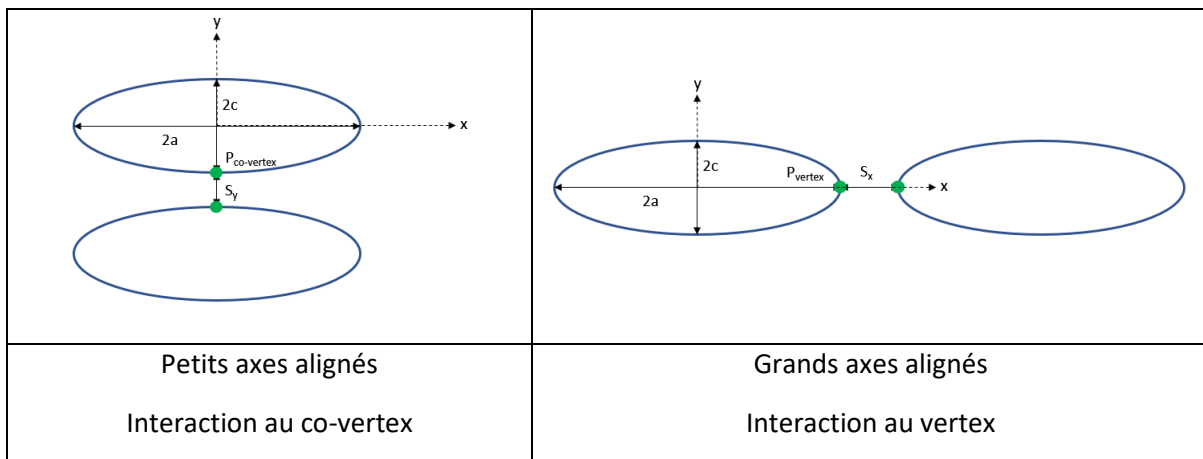


Figure A1.3\_2 : fissures elliptiques coplanaires égales ayant une direction d'axe en commun



Plusieurs études ont traité le problème par calcul numériques, mais très peu de formulations approchées sont disponibles : la solution d'Azuma (AZU, 2017) et l'approche de la taille de fissure équivalente qui a été commentée au chapitre 2 (CHB, 2018).

- Formules empiriques d'Azuma et Li

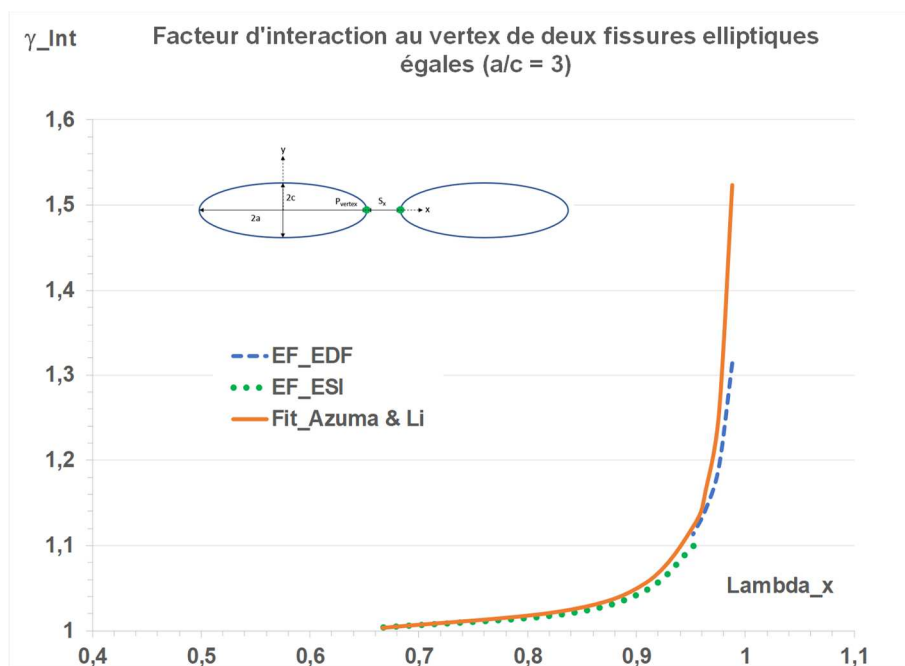
Azuma et Li (AZU, 2017) ont proposé les formules empiriques à partir de leurs résultats de calculs aux éléments finis pour l'interaction de fissures elliptiques égales.

$$\gamma = \begin{cases} 0.99 + 0.04 \frac{\sqrt{a \cdot c}}{S_x} & \text{pour } 0.33 \leq D \leq 4 \\ 1 & \text{pour } D > 4 \end{cases} \quad (A1.3_3)$$

au co-vertex  $D = \frac{S_x}{\sqrt{a \cdot c}}$

Au vertex  $D = \frac{S_x}{c}$

La comparaison de l'application de ces formules à l'interaction au vertex (Figure A1.3\_3) avec les résultats de calculs aux éléments finis d'EDF (DEE, 2018) et ESI (ESI, SYSTUS™) montre une très bonne cohérence.



**Figure A1.3\_3 : facteurs d'interaction pour deux fissures elliptiques coplanaires égales ayant des grands axes alignés**

- Solution approchée pour deux fissures elliptiques coplanaires égales

Le facteur d'interaction est exprimé par la formule suivante :

$$\gamma_{12}(P_1) = \gamma_{21}(P_2) = \gamma(P) = 1 + A \cdot \left[ F_{W-E} \left( \frac{c}{a}, P_{Int} \right) - 1 \right] \quad (A1.3_4)$$

Pour les fissures coplanaires, aux pointes intérieures  $P_{Int}$  en vertex la fonction de calcul par  $F_{W\_E}\left(\frac{c}{a}, \frac{1}{\lambda_x}, 0, 0\right)$ . Au co-vertex,  $F_{W\_E}\left(\frac{c}{a}, P_{Int}\right)$  se calcule par  $F_{W\_E}\left(\frac{c}{a}, 0, \frac{1}{\lambda_y}, 0\right)$ .

### **Fonction de Westergaard pour les fissures elliptiques coplanaires**

La solution exacte du problème d'une fissure elliptique se trouvant dans un solide élastique isotrope infini, a été dérivée par A. Green et I. Sneddon (GRS, 1950) et explicitée plus tard par Kassir (KAS, 1975). La contrainte normale s'exprime comme suit :

$$\frac{\sigma_{zz}(x, y)}{\sigma_{app}} = F_{W\_E\_co} = \frac{1}{E(k)} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{\frac{\xi_E}{c^2} \cdot \left(1 + \frac{\xi_E}{a^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{\xi_E}{c^2}\right)}} + \frac{\text{sn}(u) \cdot \text{cn}(u)}{\text{dn}(u)} - \varepsilon(u, k) \right\} \quad (A1.3\_5)$$

$\varepsilon(u, k)$ ,  $\text{sn}(u)$ ,  $\text{cn}(u)$  et  $\text{dn}(u)$  sont des fonctions elliptiques jacobienes (ABS, 1964).  $\xi_E$  a la dimension du carré d'une coordonnée cartésienne.

Avec :

$$\xi_E = a^2 \cdot \frac{\text{cn}^2(u)}{\text{sn}^2(u)} \quad (A1.3\_6)$$

$E(k)$  est l'intégrale elliptique de seconde espèce telle que  $E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \phi} \cdot d\phi$  (A1.3\_7a)

Les paramètres  $a$  et  $c$  sont les demi-axes de l'ellipse.

$$k = \begin{cases} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{c}\right)^2} & \text{si } \frac{a}{c} \leq 1 \\ \sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2} & \text{si } \frac{c}{a} \leq 1 \end{cases} \quad (A1.3\_7b)$$

$$u = \text{sn}^{-1} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\xi_E}{a^2}}} \right], \text{ ce qui équivaut à } u = \int_0^{\text{sn}(u, k)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2) \cdot (1-k^2 \cdot t^2)}} \quad (A1.3\_8)$$

Avec  $0 \leq k \leq 1$  et  $-1 \leq \text{sn}(u, k) \leq 1$

La variable  $u$  est exprimé par l'intégrale de Legendre de première espèce.

$\xi_E$  varie de 0 à l'infini, donc dans le cas présent,  $\text{sn}(u, k)$  varie de 1 à 0, donc  $u$  varie de  $k$  à 0.

$$\frac{2\xi_E}{a^2} = \left(\frac{r}{a}\right)^2 - \left[1 + \left(\frac{c}{a}\right)^2\right] + \frac{\sqrt{\Delta}}{a^2}$$

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{a^2} = \sqrt{\left[1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{r}{a}\right)^4 - 2\left[1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2\right] \cdot \left(\frac{x-y}{a}\right)^2} \quad (A1.3\_9)$$

### **Fonction de forme A**

La fonction de forme  $A()$  est déterminée par identification avec des résultats numériques jugés fiables. Au moins 4 à 5 espacements sont nécessaires pour effectuer une identification de préférence ans la plage  $0,5 \leq \lambda \leq 0,98$ .

De très nombreux résultats de la littérature (KOB, 1965 ; NIM, 1974 ; AZU, 2017 ; CHA, 2020) ont été utilisés, en plus de ceux obtenus par EDF (DEE, 2018 ; SYSTUS™, 2020), afin d'établir une expression analytique de la fonction  $A$ . Cette expression est lissée sur des résultats de calculs numériques de précisions différentes, nous avons donc accordé plus de poids aux solutions les plus fiables. L'étude de Nisitani (NIM, 1974) ne porte que sur 3 espacements : il a donc fallu ajuster les valeurs en utilisant les résultats pour les fissures bandes ( $a/c = 0$ ) et les fissures disques, connues de façon plus précises.

En utilisant la formule de la moyenne, il est possible de démontrer que les résultats de  $A$  doivent être identiques si la seconde fissure a ses deux axes parallèles à la première (les fissures sont coplanaires et  $\lambda_x$  et  $\lambda_y$  varient) et que les différences de courbure aux points les plus proches sont négligeables. Ceci justifie le fait de moyenniser les résultats de Azuma (AZU 2017).

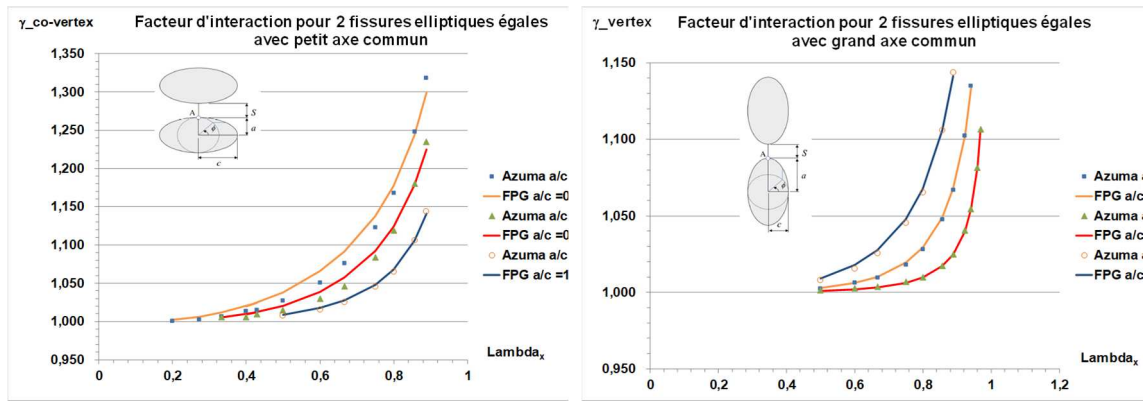
Les valeurs de la fonction  $A$  obtenues à partir de l'analyse des références mentionnées plus haut sont rassemblées au tableau A1.3\_1.

$a/c$	$A_{\text{co-vertex}}$	$A_{\text{vertex}}$	$A_{\text{sélection}}$	Remarques
0	0,368	0,368	0,368	Valeur de $A(0)$
0,125	-	0,35 (KOB, 1965 ; NIM, 1974)	0,354	Valeur ajustée
0,1667	-	0,34 (CHA ; 2020)	0,341	
0,25	0,297 [33]	0,320 (AZU, 2017)	0,309	Moyenne
0,3333	-	0,293 (DEE, 2018)	0,293	Corrections à partir de calculs ESI
0,5	0,270 [33]	0,276 (AZU, 2017)	0,273	Moyenne
1	0,257	0,257	0,257	Valeur de $A(1)$

**Tableau A1.3\_1 : valeurs du facteur  $A$  pour des fissures elliptiques égales coplanaires**

La figure A1.3\_4 compare les résultats de facteurs d'interaction estimés aux vertex et co-vertex de deux ellipses égales (de longueur  $2c$ ), coplanaires, de petit ou grand axe commun, entre calculs éléments finis d'une part (AZU 2017) et formules analytiques d'autre part.

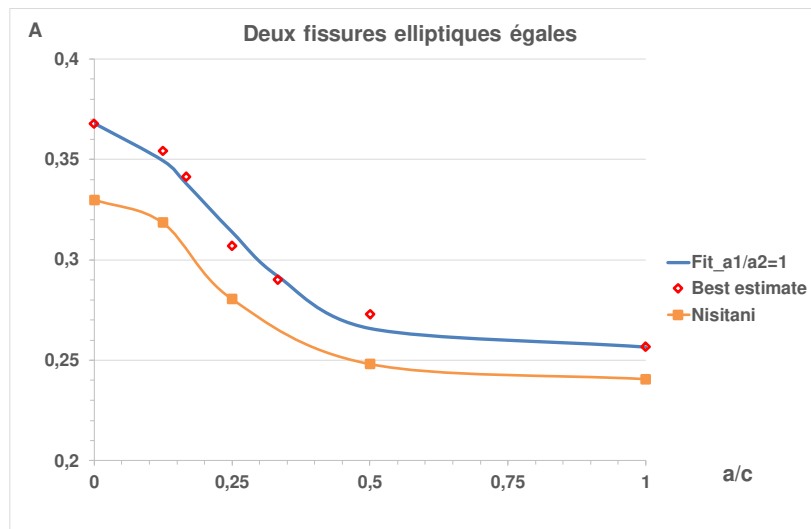
La variation de la fonction  $A$  avec  $a/c$  eut être représentée par une courbe proche d'une sigmoïde dont les bornes sont déterminées par les valeurs de la fonction  $A$  pour  $a/c = 0$  et  $1$  (Cf. Figure A1.3\_5). Un plus grand nombre de calculs éléments finis permettrait d'affiner la précision de cette fonction. Son expression est fournie au § A1.3.2 consacré aux fissures elliptiques coplanaires inégales.



Interaction au co-vertex

Interaction au vertex

**Figure A1.3\_4 : facteurs d'interaction  $\gamma$  en fonction du ratio d'espacement  $\lambda$  pour des fissures elliptiques coplanaires égales – comparaison des résultats de calculs éléments finis aux formules analytiques**

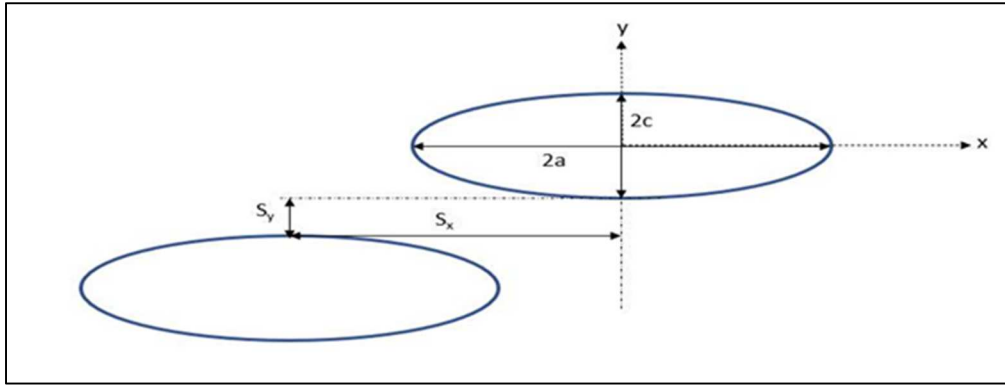


**Figure A1.3\_5 : variations de la fonction A avec le rapport d'aspect des 2 ellipses égales interagissantes**

### A1.3.1.2. Fissures elliptiques coplanaires égales décalées

Dans tous les cas de figure, l'interaction la plus forte entre deux fissures a lieu aux points les plus proches.

La configuration des fissures décalées qui a été validée est décrite à la figure A1.3\_6. Dans ce cas les grands axes sont parallèles.



**Figure A1.3\_6 : fissures elliptiques coplanaires égales de grands axes parallèles décalés**

La formule du facteur d'interaction pour des fissures elliptiques coplanaires (A1.1\_10) est applicable avec A qui ne dépend pas de la position de la fissure car les axes sont parallèles, mais il faut définir les paramètres d'écartement.

Dans le cas de fissures ayant un axe commun le paramètre d'écartement relatif  $\lambda$  est défini comme le rapport des longueurs de fissure à la distance des centres. Par exemple pour deux fissures elliptiques de grands axes  $a_1$  et  $a_2$  :

$$\lambda_x = \frac{a_1 + a_2}{e_x} \quad \text{avec} \quad e_x = a_1 + a_2 + S_x$$

En s'inspirant de l'expression du FIC au point courant de l'ellipse proposée par Tada et Paris (TPI, 1973) (Figure A1.3\_7), le paramètre d'écartement est défini par :

$$\lambda_p = \frac{l_1 + l_2}{e_p} \quad \text{avec} \quad e_p = l_1 + l_2 + S_p \quad (A1.3_{10})$$

Où  $S_p$  est la distance entre les deux points  $P_1$  et  $P_2$ . Et  $l_1$  et  $l_2$  les distances des points  $P_i$  aux points d'intersection de la normale avec les axes des ellipses.

	<p>Avec <math>c</math> et <math>\phi</math> à la place de <math>b</math> et <math>\theta</math> sur la figure ci-contre :</p> $K_{I\infty}(\phi) = \frac{\sigma_{app}}{E(k)} \cdot \sqrt{\pi \cdot c} \cdot \left[ \sin^2 \phi + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \cos^2 \phi \right]^{\frac{1}{4}} \quad (A1.3_{11})$ <p>Distance du point courant suivant la normale à l'axe :</p> $l = c \cdot \left[ \sin^2 \phi + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \cos^2 \phi \right]^{\frac{1}{2}} \quad (A1.3_{12})$ <p>Donc</p> $K_{I\infty}(\phi) = \frac{\sigma_{app}}{E(k)} \cdot \sqrt{\pi \cdot l}$
--	---

**Figure A1.3\_7 : autre expression de K pour une fissure elliptique enfouie (TPI, 1973, part IV)**

Application au cas traité par ESI

La configuration est décrite à la figure A1.3\_8, le maillage à la Figure A1.3\_9.

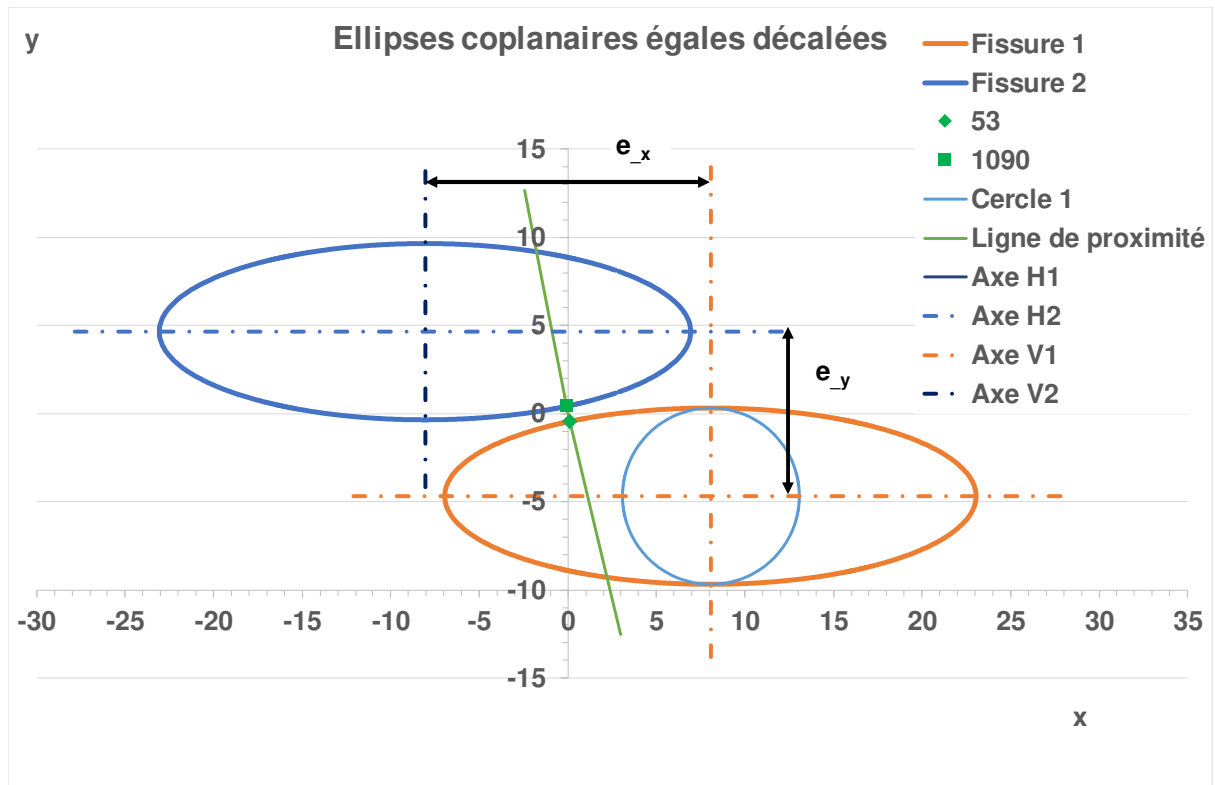


Figure A1.3\_8 : analyse de l'interaction entre fissures décalées

En appliquant le théorème de Thalès,

$$\lambda_p \equiv \lambda_y = \frac{e_y - S_y(P_1, P_2)}{e_y}$$

Si les petits axes étaient parallèles, l'écartement  $e_x$  serait utilisé.

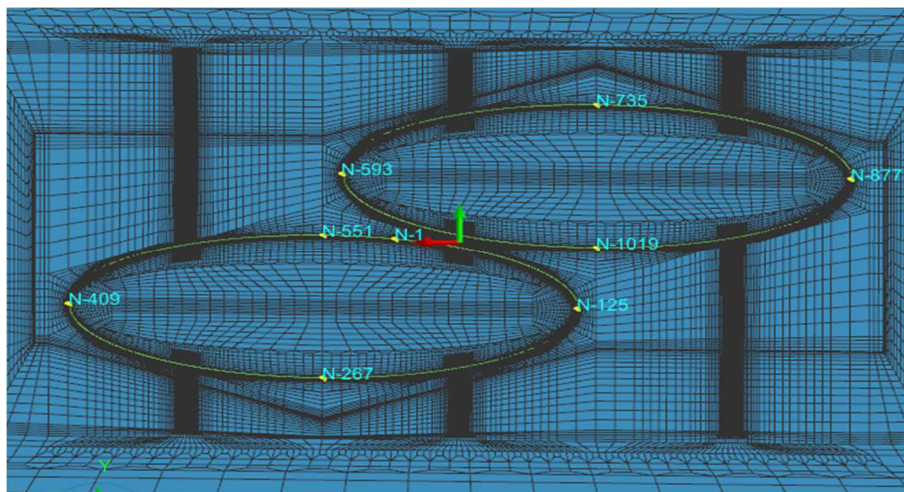
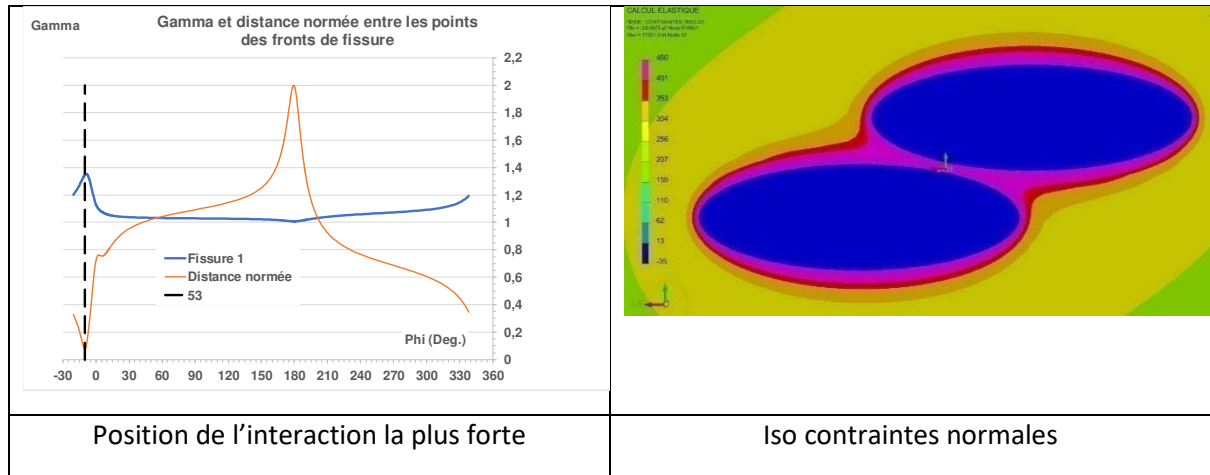


Figure A1.3\_9 : maillage des fissures décalées

Bien que le calcul de la force d'extension de fissure ne semble pas correct sur tout le front, peut-être du fait d'une mauvaise orientation des mailles le long du front, le rapport des FIC calculés sur les fissures interagissantes et la fissure isolée apporte des informations, physiquement acceptables.

La figure A1.3\_10 montre que l'interaction la plus forte a bien lieu aux points les plus proches.



**Figure A1.3\_10 : interaction entre fissures elliptiques égales coplanaires décalées**

Le calcul aux éléments finis donne  $\gamma_{12}(P_1) = \gamma_{21}(P_2) = 1,353$ . Ce qui est légèrement inférieur à la valeur obtenue pour deux fissures égales interagissant au co-vertex pour une même valeur de paramètre d'écartement  $\lambda$ .

Avec la valeur  $A=0,293$  établie pour des fissures égales coplanaires, la formule prédit la même valeur.

Ce traitement des fissures décalées est étendu aux désaxées au § A1.4.1.2 pour l'interaction avec la surface libre.

### A1.3.2. Fissures elliptiques coplanaires inégales

Il y a deux types de différences entre deux ellipses de même orientation : la taille et le rapport d'aspect. C'est le premier type qui a été le plus souvent étudié.

#### A1.3.2.1. Fissures elliptiques coplanaires de tailles différentes

Les effets de différences de taille ont été exprimé par des fonctions de forme A pour les fissures bande et les fissures disque.

ESI a effectué une série de calculs d'interaction entre deux ellipses de même rapport d'aspect  $a/c= 3$  mais de tailles différentes ( $\zeta = 2$ ).

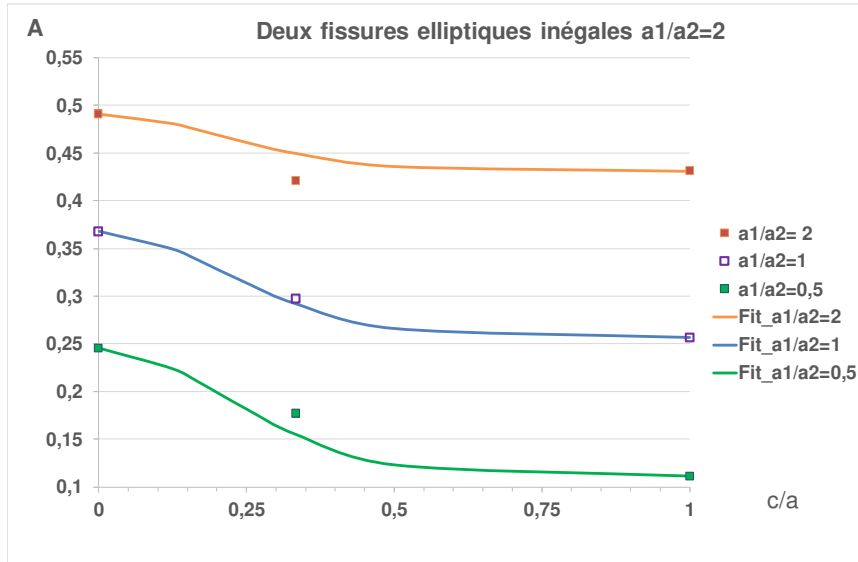
En imposant aux valeurs relatives aux fissures bande et disque les variations  $A(\zeta)$  et en conservant la forme de la sigmoïde établie pour des fissures coplanaires alignées, une fonction  $A\left(\frac{c}{a}, \zeta\right)$  est obtenue telle qu'illustrée à la figure A1.3\_11 et décrite par l'équation suivante :

- Pour  $\frac{c}{a} = 0$   $A\left(\frac{c}{a}, \zeta\right) \equiv A(0, \zeta)$
- Pour  $1 \geq \frac{c}{a} > 0$

$$A\left(\frac{c}{a}, \zeta\right) = \frac{1}{1 + p * \exp\left[q \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^r\right]} + s \quad (A1.3_{13})$$

Avec  $p = \frac{1}{A(0,\zeta) - A(1,\zeta)} - 1$        $s = A(1, \zeta)$        $q = 9,2$        $r = 1,84$

Pour  $\frac{c}{a} > 1$        $\frac{c}{a}$  est change en  $\frac{a}{c}$ .



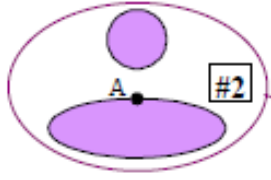
**Figure A1.3\_11 : variations de la fonction A avec le rapport d'aspect et la taille relative des deux ellipses coplanaires interagissantes**

### 3.3.1.1 Fissures elliptiques coplanaires de rapport d'aspect différents

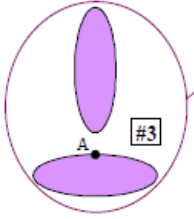
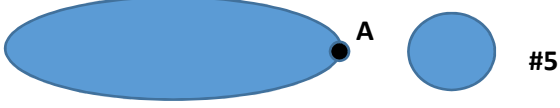
#### Etude de Chapuliot et Blouin

S. Chapuliot et Blouin (CHB, 2018) ont considéré 6 cas de fissures coplanaires elliptiques. Les paramètres sont fournis au tableau A1.3\_2a et b, les résultats au tableau A1.3\_3.

Le détail des configurations avec rapports d'aspect différents est fourni dans le tableau A1.3\_2a. Seul un de ces cas (N°2) a été analysé pour des fissures parallèles. Les auteurs ont aussi considéré les cas parents (nommés 1, 4 et 6 dans l'étude), c.à.d. avec fissures interagissantes égales et même écartement.

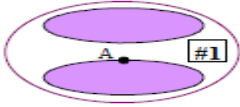
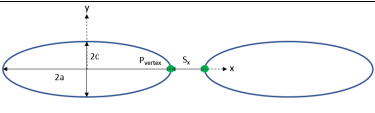
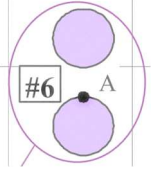
Paramètres	c1/a1	c2/a2	S <sub>x</sub> /(2a <sub>1</sub> )	S <sub>y</sub> /(2a <sub>1</sub> )	S <sub>z</sub> /(2a <sub>1</sub> )
 et 8	1/3	1	0	0,5	0
					0,5



	1/3	3	0	0,5	0
	1/3	1	0,5	0	0

**Tableau A1.3\_2a : écartements relatifs dans le plan pour différentes fissures**

Pour les fissures identiques, la formule établie pour des fissures elliptiques égales coplanaires donne des valeurs très proches des résultats de Chapuliot (Tableau A1.3\_2b).

Cas	Configuration	A	Gam_E	Gam_EF	Ecart
1		0,2923	1,0734	1,0638	0,91%
4		0,2923	1,0264	1,0256	0,07%
6		0,2567	1,0269	1,0344	-0,72%

**Tableau A1.3\_2b : comparaison des facteurs d'interaction prédits et calculés par éléments finis pour des fissures coplanaires égales**

Pour les fissures de rapports d'aspect différents, les écarts par rapport à la formule sont significatifs.

Cas		Gam_E	Gam_EF	Ecart
2	0,2923	1,0736	1,0203	5,21%
3	0,5332	1,1554	1,0226	25,45%
5	0,0972	1,0009	1,0233	-2,18%

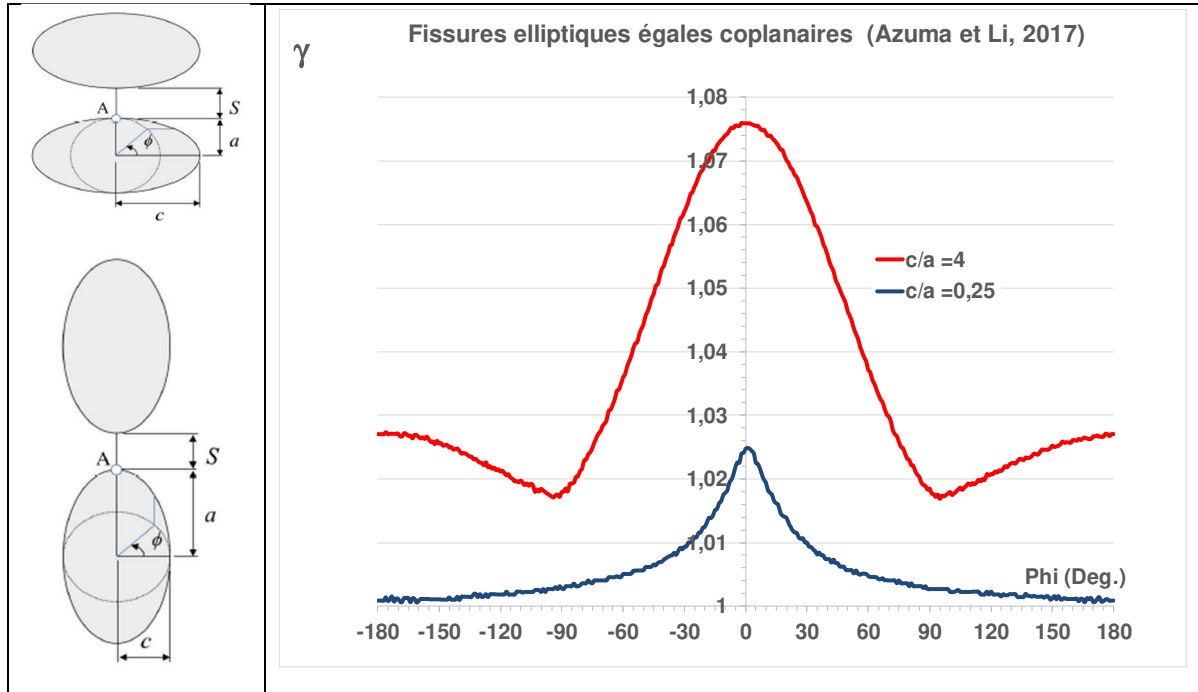
**Tableau A1.3\_3 : comparaison des facteurs d'interaction prédits et calculés par éléments finis pour des fissures coplanaires inégales**

Etudes de Lacroix, Dulieu, Hasegawa et al.

Ces études portent principalement sur des fissures parallèles ou inclinées. Le cas des fissures de rapport d'aspect différents est traité au § consacré aux fissures parallèles dans lequel nous établissons la formulation simplifiée pour ce cas.

### A1.3.3. Variations le long du front

Les variations du facteur d'interaction le long du front de fissures elliptiques diffère notablement suivant la position relative des fissures. La figure A1.3\_12 illustre ce point cas pour l'interaction au vertex et au co-vertex (AZU, 2017).



**Figure A1.3\_12 : variations du facteur d'interaction le long du front de fissures elliptiques égales de petit axe ou grand axe commun ( $a/c=0,25$  et  $4$ )**

Si les fissures sont décalées ou désorientées, les formes des courbes perdent la symétrie.

#### Interaction au vertex pour $a/c = 3$

Les variations le long du front de fissures elliptiques égales de grand axe commun avec un rapport d'aspect de 3 ont été calculées par EDF (DEE, 2018) et ESI (SYSTUS™, 2020). Elles sont représentées à la figure A1.3\_13.

De même que pour les fissures disque l'inversion de la formule du facteur d'interaction pour des fissures égales (A1.3.4) en prenant une valeur de la fonction A de 0,292 fait apparaître un décalage quasi-constant (Figure A1.3\_14a). En apportant la valeur des  $\lambda^*(\phi)$  à la valeur de  $\lambda^*(90^\circ)$  les courbes se confondent presque en une courbe maîtresse (Figure A1.3\_14b).

La valeur  $\lambda^*(90^\circ)$  est celle de la variable  $\lambda_x = \frac{2a}{2a+S_x}$ . La dispersion des résultats pour des points du front éloignés s'explique par une moins grande finesse de maillage dans cette région et par le fait que la procédure d'inversion donne des résultats moins précis pour des faibles valeurs du facteur d'interaction. Au voisinage du co-vertex (0 degrés) les irrégularités de traitement du calcul de G dans les cas traités par ESI.

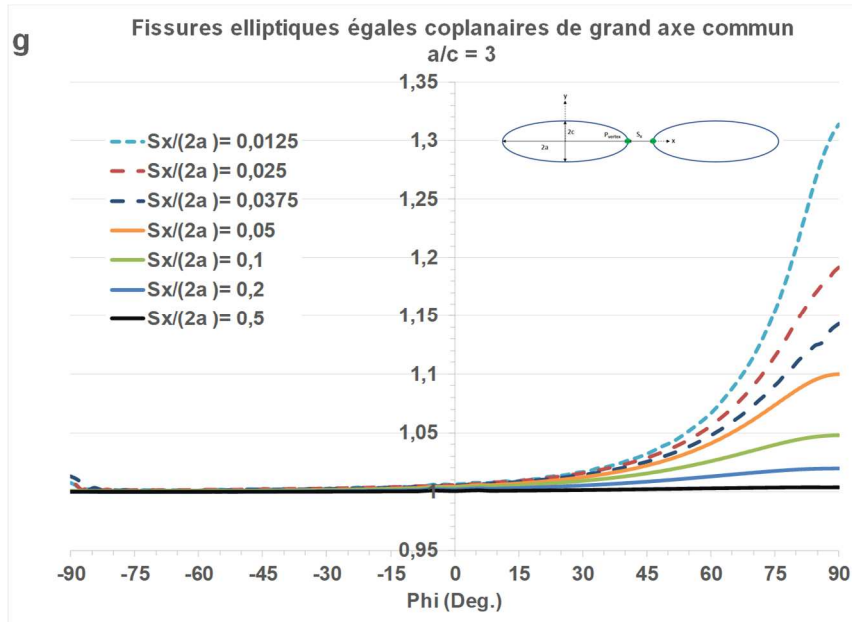


Figure A1.3\_13 : variations du facteur d'interaction le long du front de fissures elliptiques égales de grand axe commun ( $a/c=3$ ). Les résultats de calcul d'EDF sont en pointillés.

L'adimensionnement fait apparaître une courbe maîtresse dont l'expression est la suivante :

$$\lambda^*(S_x, \phi) = \lambda_x \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{E(a/c=3)} \cdot \left(1 - \exp\left(-m \cdot \left(\frac{\phi}{\pi}\right)^2\right)\right)} \quad (A1.3_{14})$$

Où  $\Phi$  est l'anomalie excentrique de l'ellipse, variant de 0 à  $\pi$ . Et  $m=2,71$

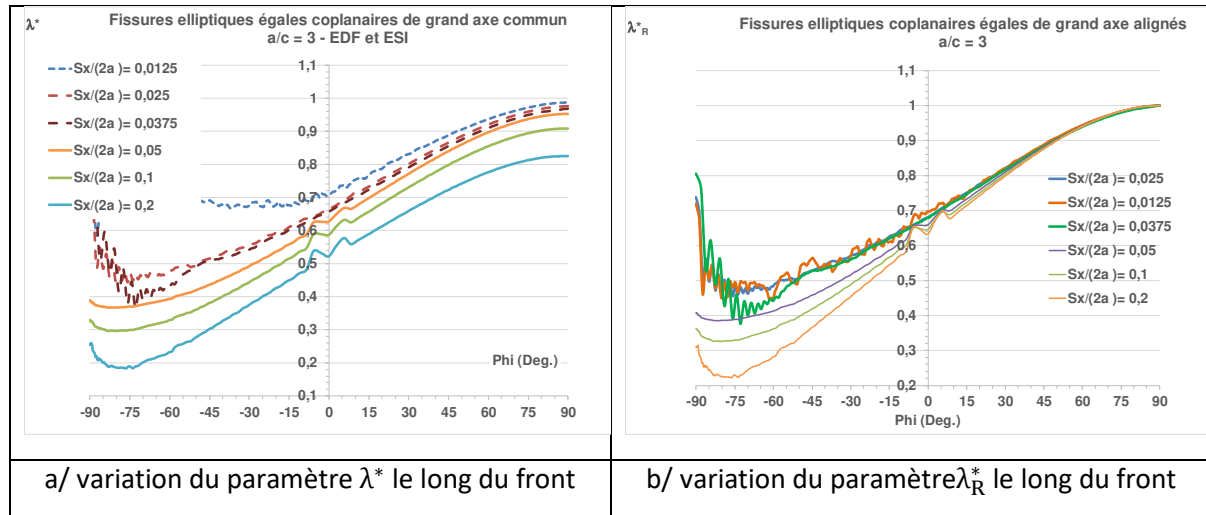


Figure A1.3\_14 : variations des paramètres  $\lambda^*$  et  $\lambda_R^*$  le long du front de fissures elliptiques égales de grand axe commun ( $a/c=3$ ). Les résultats de calcul d'EDF sont en pointillés.

Le paramètre  $m$  est lissé sur les variations relatives aux faibles écartements et l'efficacité de cette approche est validée par la comparaison des variations facteur d'interaction prédits et calculés (Figure A1.3\_15).

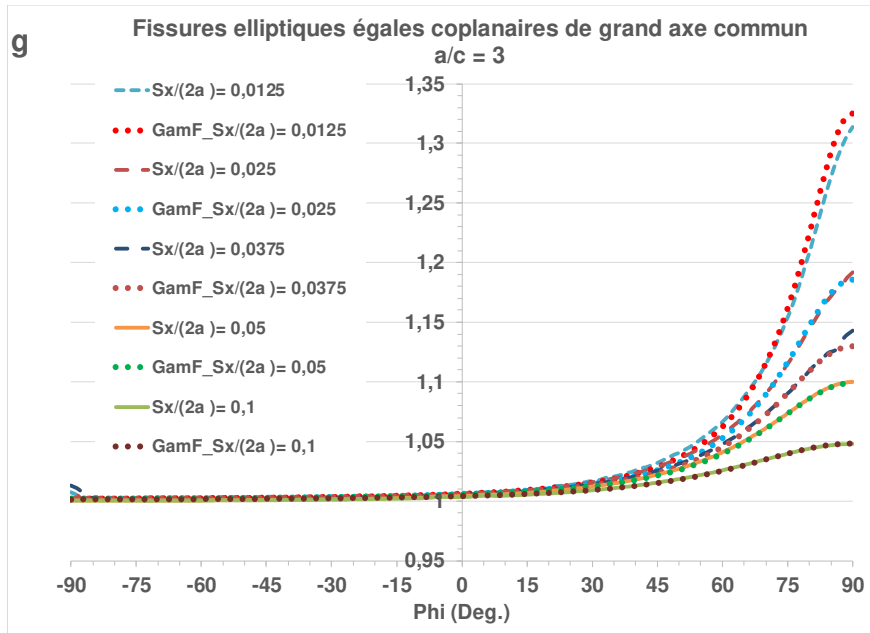


Figure A1.3\_15 : variations du facteur d'interaction le long du front de fissures elliptiques égales de grand axe commun ( $a/c=3$ ) prédites en pointillés et calculées par éléments finis.

Interaction au vertex pour  $a/c = 4$

Azuma et Li (AZU, 2017) ont calculé les variations du facteur d'interaction le long du front pour deux fissures elliptiques ( $a/c=0,25$ ) de grand axe commun. Seul un calcul a été dépouillé le long du front, pour l'écartement relatif  $\hat{S}_x = 0,5$ . De ce fait la valeur de  $m$  est située dans un encadrement [2,33 - 2,9] selon que le lissage est effectué sur une première partie du front ou tout le front. La valeur optimale de 2,62 est retenue (courbe rouge de la Figure A1.3\_16).

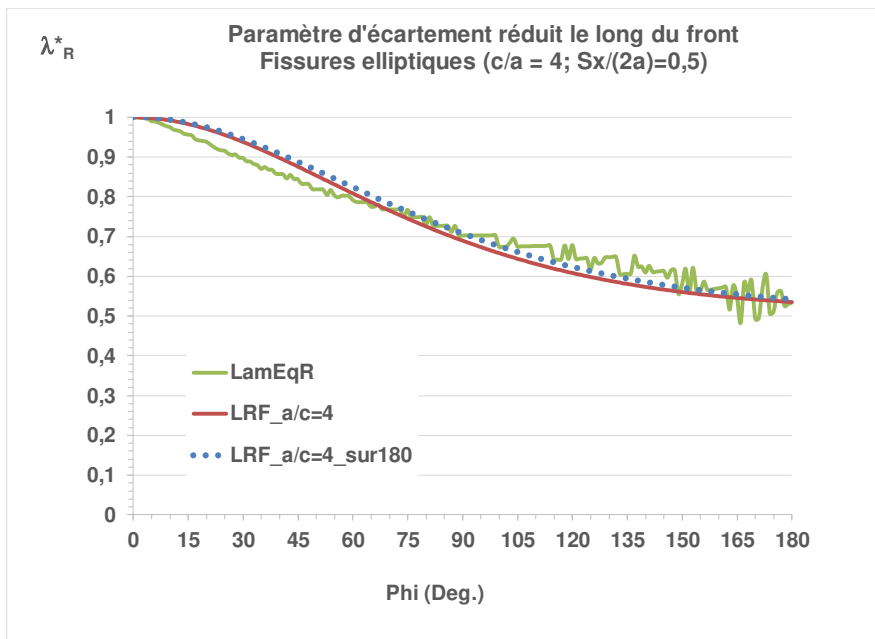


Figure A1.3\_16 : variations des paramètres  $\lambda_R^*$  le long du front de fissures elliptiques égales de grand axe commun ( $a/c=4$ ) obtenus par Azuma et Li (AZU, 2017).

### Interaction au vertex pour $a/c = 6$

Chapuliot (CHA, 2020) a calculé les variations du facteur d'interaction le long du front pour deux fissures elliptiques ( $a/c=6$ ) de grand axe commun en considérant différents écartements. Les résultats sont limités à un quart d'ellipse (Figures A1.3\_17).

La même approche donne les résultats suivants.

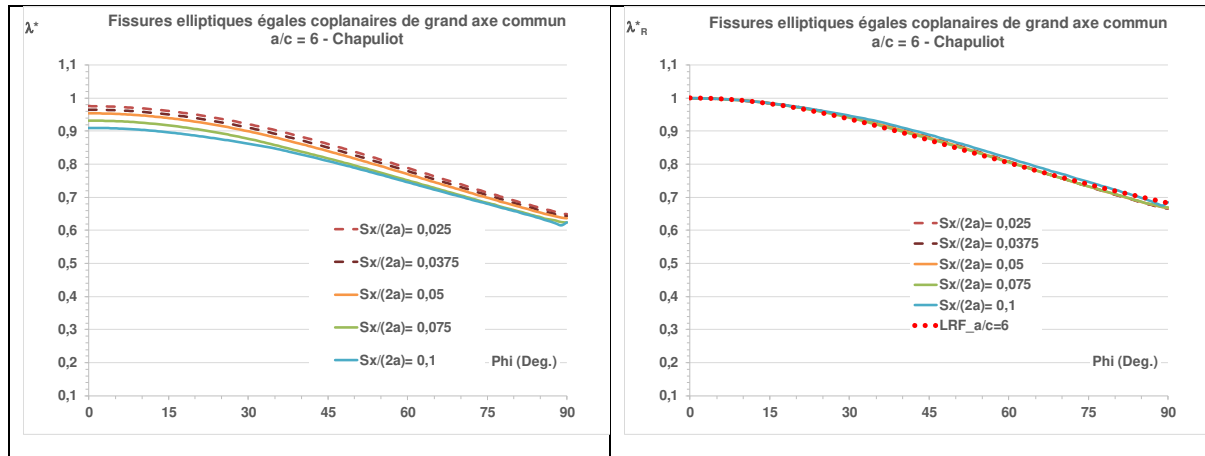


Figure A1.3\_17 : variations des paramètres  $\lambda^*$  et  $\lambda^*_{R}$  le long du front de fissures elliptiques égales de grand axe commun ( $a/c=6$ ) obtenus par Chapuliot (CHA, 2020).

### Interaction au vertex pour $a/c = \text{variable}$

A partir des résultats obtenus pour la fissure disque et les fissures elliptiques égales de grand axe alignés, la fonction suivante  $m(a/c)$  a été établie pour la variation le long du front de fissures elliptiques égales de grand axe alignés (Figure A1.3\_18).

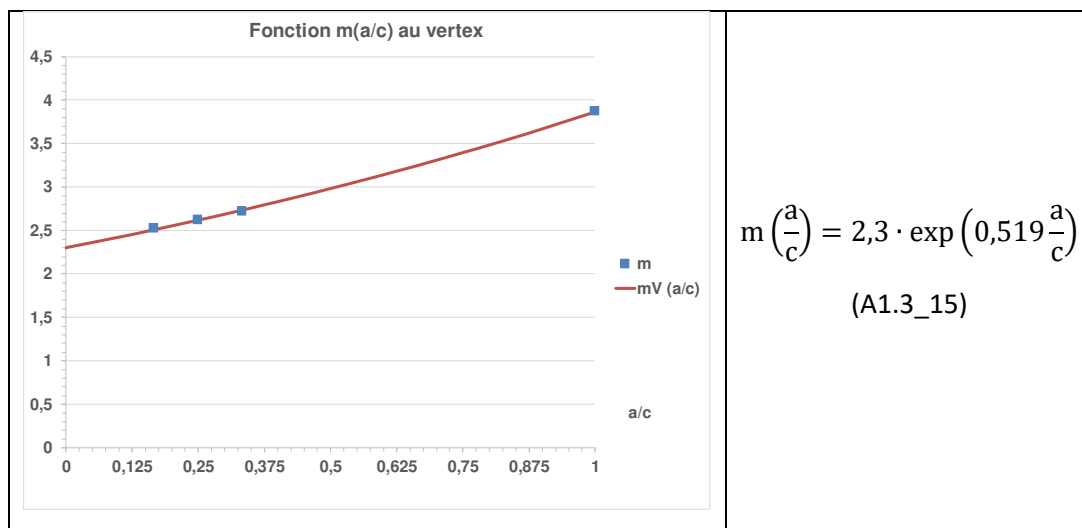
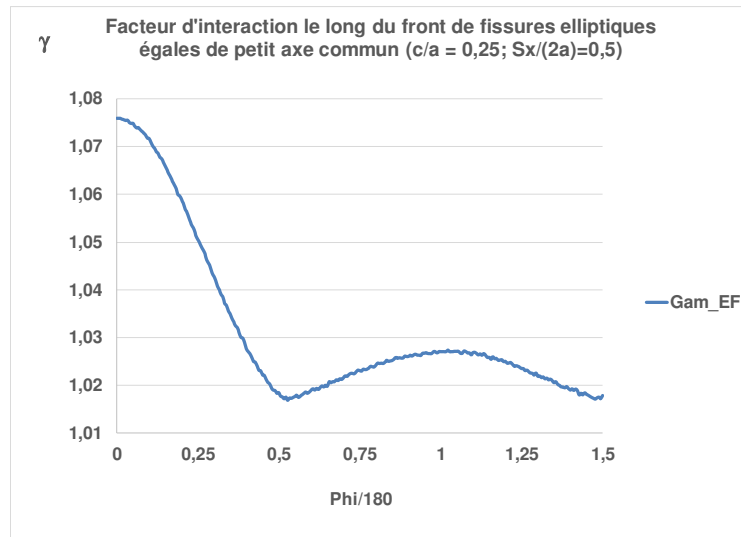


Figure A1.3\_18 : fonction exprimant la variation du coefficient m pour des fissures elliptiques égales de grand axes alignés

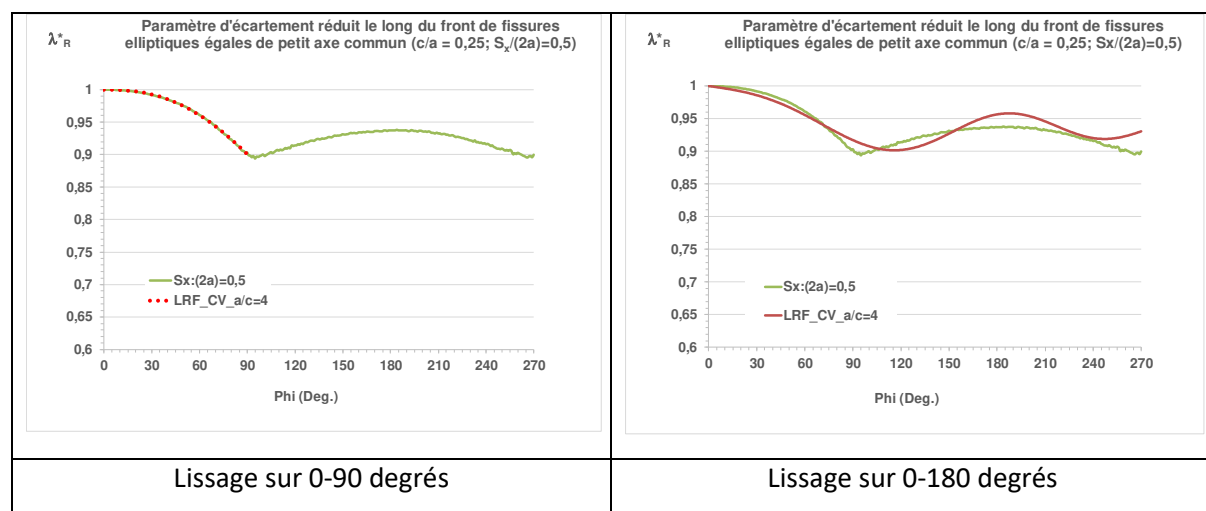
### Interaction au co-vertex pour $a/c = 4$

Le seul résultat disponible pour les variations du facteur d'interaction le long du front pour deux fissures elliptiques de petit axe commun est celui d'Azuma et Li (AZU, 2017). La fissure a un rapport d'aspect  $a/c=0,25$  et l'écartement relatif vaut  $\tilde{S}_x = 0,5$ .



**Figure A1.3\_19 : variations du facteur d'interaction le long du front de fissures elliptiques égales de petit axe commun et de rapport d'aspect  $a/c=4$  (AZU, 2017).**

Contrairement au cas de l'interaction au vertex, la variation du facteur d'interaction le long du front n'est plus monotone décroissante (Figure A1.3\_19). Ceci s'explique par l'effet de la fissure parente sur le point du co-vertex opposé au point le plus proche de l'autre fissure. Les points du vertex sont d'autant plus éloignés que la fissure est plus aplatie. La variation a l'allure d'une exponentielle amortie dont il est difficile de trouver une expression simple (Figure A1.3\_20).



**Figure A1.3\_20 : lissages du paramètre d'écartement réduit le long du front de fissures elliptiques égales de petit axe commun et de rapport d'aspect  $a/c=4$  (AZU, 2017).**

Le lissage sur 90 degrés est obtenu avec le même type de formule que pour l'interaction au vertex.

$$\lambda^*(a/c, S_x, \phi) = \frac{\lambda_x}{1 + \frac{1}{E(a/c=0,25)} \cdot \left(1 - \exp\left(-0,733 \cdot \left(\frac{\phi}{\pi}\right)^{2,55}\right)\right)} \quad (A1.3_{16})$$

Le lissage sur 180 degrés est obtenu avec une exponentielle amortie à trois paramètres  $\lambda_2$  qui est la valeur du second maximum, l'amortissement  $p$  et la pulsation  $\omega_0$ .

$$\lambda^*(a/c, S_x, \phi) = 1 - p + p \cdot \exp(-q \cdot \frac{\phi}{\pi}) \cdot \cos[\omega_a \cdot \phi^{1,5}] \quad (A1.3_{17})$$

Avec  $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - q^2}$  et  $q = -\frac{1}{2\pi} \text{Ln}\left(\frac{1-\lambda_2}{1-p}\right)$   $\lambda_2 = 0,938$

L'optimisation donne  $q = 0,065$  et  $\omega_0 = 1,441$ .

#### Remarques sur l'évolution du facteur d'interaction le long du front de fissure

Au vertex le facteur d'interaction diminue de façon monotone le long du front. L'expression de sa représentation est :

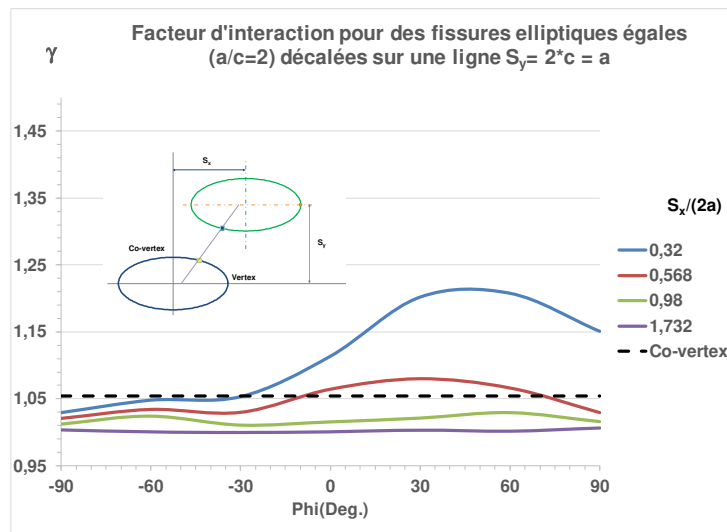
$$\lambda^*(a/c, S_x, \phi) = \frac{\lambda_x}{1 + \frac{1}{E(a/c)} \cdot \left(1 - \exp\left(-m \cdot \left(\frac{\phi}{\pi}\right)^2\right)\right)} \quad (A1.3_{18})$$

Avec

$$m\left(\frac{a}{c}\right) = 2,3 \cdot \exp\left(0,519 \frac{c}{a}\right) \quad a \geq c \quad (A1.3_{19})$$

Au point le plus éloigné, la valeur est  $\frac{\lambda_x}{1 + \frac{1}{E(a/c)}(1 - \exp(-m))}$

#### Interaction de fissures décalées pour $a/c = 2$



**Figure A1.3\_21 : variations du facteur d'interaction le long du front de fissures elliptiques égales de décalées de grands axes parallèles et de rapport d'aspect  $a/c=2$  (ROY, 1994)**

Roy et Chatterjee (ROY, 1994) ont analysé l'interaction entre fissures elliptiques en employant une méthode d'équations intégrales. Ces équations sont résolues par une méthode de perturbation qui perd en précision pour des écartements relatifs faibles. Leurs résultats pour des fissures décalées ont une valeur qualitative : l'effet d'asymétrie de la variation du facteur d'interaction est mis en évidence, mais les valeurs pour les écartements les plus faibles sont surestimés (Figure A1.3\_21).

### A1.3.4. Fissures elliptiques parallèles

Il existe peu d'études consacrées à l'interaction de fissures elliptiques parallèles en dehors de celles d'Isida (ISI, 1985) et de Lacroix – Dulieu - Hasegawa. Ces travaux visent à établir des règles d'interaction de deux fissures elliptiques enfouies (LAC, 2015, 2018) et des fissures de surface, (DUL, 2018). Il s'agit de déterminer si oui ou non les fissures interagissent entre elles ou avec la surface libre (LAC, 2016 thèse) établissant des conditions dépendant des écartements relatifs. Le seuil est fixé à 6% sur la base de l'interprétation des résultats expérimentaux (HAS, 2006, 2009).

#### A1.3.4.1. Fissures elliptiques superposées

Isida et al. (ISI, 1985) ont analysé l'interaction de fissures elliptiques égales superposées en utilisant la méthode des forces de volume. Nishioka et Kato (NIK, 1998) ont conduit le même type d'études en employant la méthode alternée. Les résultats de ces deux études pour deux fissures superposées sont très proches, la méthode alternée donne des valeurs un peu moins précises pour les écartements faibles.

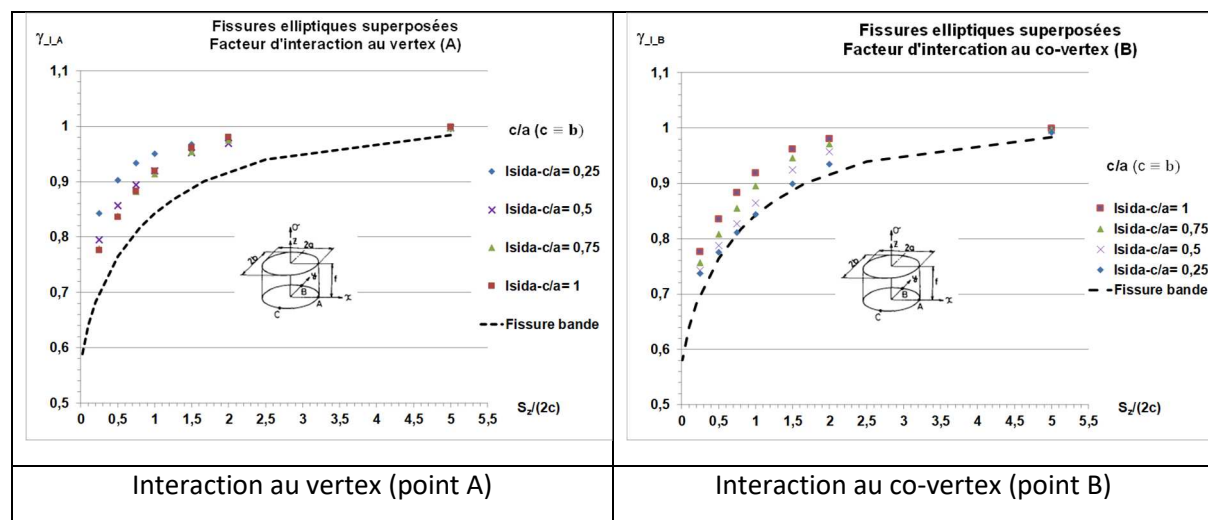


Figure A1.3\_22 : facteurs d'interaction pour des fissures elliptiques égales superposées en fonction de l'écartement vertical relatif et du rapport d'aspect (ISI, 1985)

Les résultats (Figure A1.3.22) mettent en évidence les effets suivants :

- Avec le rapprochement des fissures les facteurs d'interaction diminuent en suivant la même allure que pour les fissures bande. Pour  $S_z = 2c$  l'interaction est négligeable au vertex et au co-vertex pour les fissures de rapport  $c/a > 0,5$ .



- Au vertex la diminution est d'autant plus forte que le rapport d'aspect c/a est élevé : l'écartement affecte moins les fissures allongées.
- Au co-vertex La diminution est d'autant plus forte que le rapport d'aspect est faible : l'effet d'écartement affecte plus les fissures allongées. La forme des fissures influe moins.
- L'écrantage pour les fissures elliptiques est plus faible pour les fissures elliptiques que pour la fissure bande. L'écart est un peu plus faible au co-vertex qu'au vertex.

Un lissage de ces résultats a été établi afin de les comparer aux quelques résultats de fissures écartées et de mieux comprendre les effets d'écrantage. Les deux variables sont l'écartement vertical relatif entre fissures égales  $\tilde{S}_z = \frac{S_z}{2a}$  et l'inverse du rapport d'aspect  $\frac{c}{a}$ . Le grand axe est nommé a. Les formules (équations A1.3\_20 et 21) sont présentées au tableaux A1.3\_4 et A1.3\_5.

$\gamma_{12}\left(\frac{a}{c}, 90\right) = \frac{K_{12}}{\frac{\sigma_{app}}{E(k)} \cdot \sqrt{\pi} \cdot c} = E(k) \cdot F_B$	$F_B = p + q \cdot \frac{c}{a} + r \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^2$
$p = 1 - \frac{0,4027}{1,533 + \left(\tilde{S}_z\right)^{2,107}}$	$q = -0,08748 \cdot \tilde{S}_z^{0,4227} \cdot \text{Exp}\left[-0,0103 + \tilde{S}_z^{-0,388}\right]$
Si $\tilde{S}_z < 1$ alors $r = -0,0245 + \frac{0,0049}{\tilde{S}_z} + \frac{0,0012}{\tilde{S}_z^2}$	
Si $\tilde{S}_z \geq 1$ alors $r = -0,0704 + \frac{0,0061}{\tilde{S}_z} + \frac{0,0456}{\tilde{S}_z^2}$	

**Tableau A1.3\_4 : facteurs d'interaction au vertex (point A, anomalie excentrique = 0 degrés)**

$\gamma_{12}\left(\frac{a}{c}, 0\right) = \frac{K_{12}}{\frac{\sigma_{app}}{E(k)} \cdot \frac{c}{a} \cdot \sqrt{\pi} \cdot c} = E(k) \cdot \sqrt{\frac{a}{c}} \cdot F_A$	$F_A = \frac{p}{q + \tilde{S}_z^{-0,5}}$
$p = 2,9887 + 0,1738 \cdot \frac{a}{c} + 0,0197 \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^2$	$q = 3,8502 + 0,4502 \cdot \frac{a}{c} + 0,1563 \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^2$

**Tableau A1.3\_5 : facteurs d'interaction au co-vertex (point B, anomalie excentrique = 90 degrés)**

En outre les valeurs des formules des facteurs d'interaction sont plafonnées à 1.

La validation de ces formules est illustrée à la figure A1.3\_23.

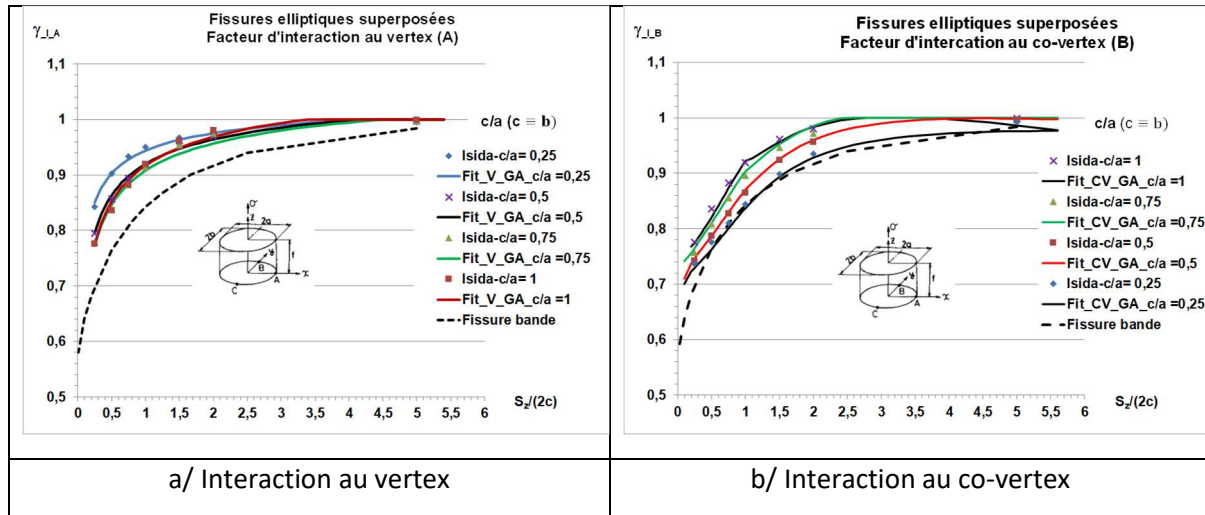


Figure A1.3\_23 : validation des formules de facteurs d'interaction de fissures elliptiques égales superposées

Le lissage est meilleur au vertex.

### A1.3.4.2. Fissures elliptiques parallèles décalées

#### Limite d'écrantage pour des fissures elliptiques

La limite d'écrantage correspond à l'égalité des facteurs d'interaction en un point du front de la première fissure et un point du front de la seconde. Dans le cas des fissures bande, l'intersection des isovalues de facteurs d'interaction associées aux deux points a permis de déterminer la limite d'écrantage, validée par les calculs aux éléments finis. Le paragraphe suivant décrit la façon d'obtenir des isovalues de facteurs d'interaction pour des fissures elliptiques associées à différents points du front de fissure. A cette fin, il est nécessaire d'obtenir les valeurs des facteurs d'interaction au point du front considéré pour des fissures coplanaires ce qui est fourni par les courbes de variation le long du front.

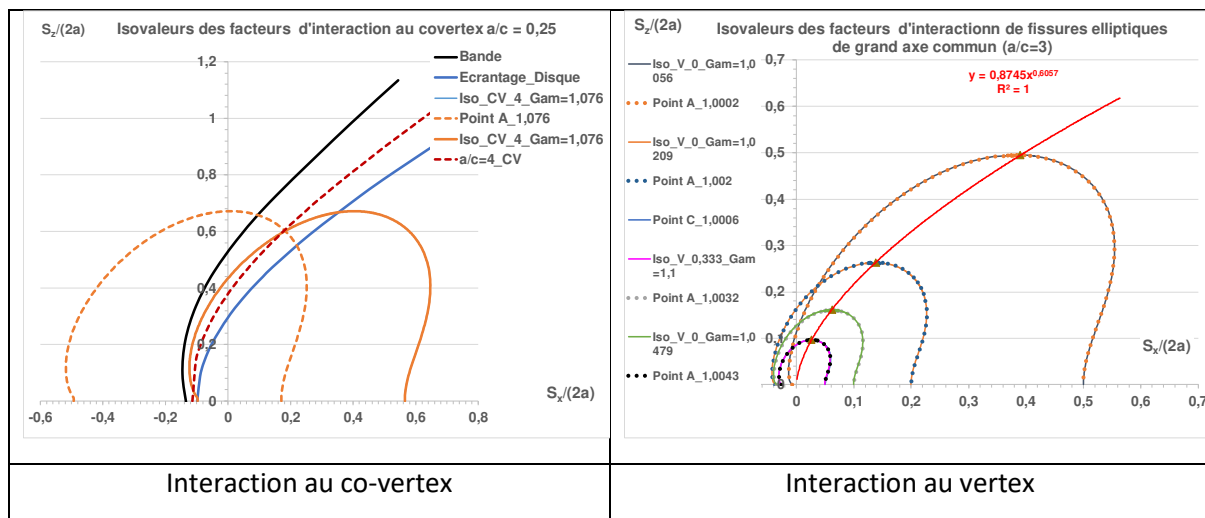


Figure A1.3\_24 : établissement des limites d'écrantage pour des fissures elliptiques égales

Deux exemples sont présentés à la Figure A1.3\_24. Dans le cas de l'interaction au vertex les facteurs sont plus faibles et les isovaleurs sont quasiment confondues et c'est le maximum qui est le point de la courbe de limite d'écrantage.

La Figure A1.3\_25 compare les frontières d'interaction à 2,5% et les points d'écrantage sur ces frontières pour différentes formules de fissures coplanaires. L'effet de forme est considérable. Ceci a été aussi pointé par Lacroix (LAC, 2016). Une comparaison des isovaleurs pour différentes fissures coplanaires entre les évaluations de Lacroix et Dulieu (DUL, 2019) et les nôtres est illustré à la Figure A1.3\_27 du paragraphe suivant. L'effet d'écrantage est illustré à la figure A1.3\_26 pour le cas des fissures elliptiques égales de rapport d'aspect  $a/c = 2$  avec les résultats d'Isida et al. (ISI, 1985).

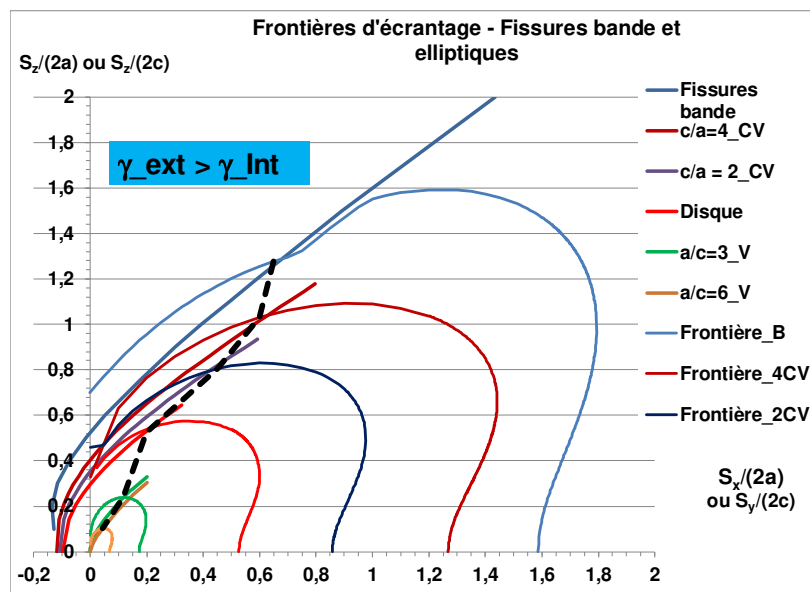


Figure A1.3\_25 : limites d'écrantage et limites d'interaction ( $\beta < 1,025$ ) pour des fissures égales

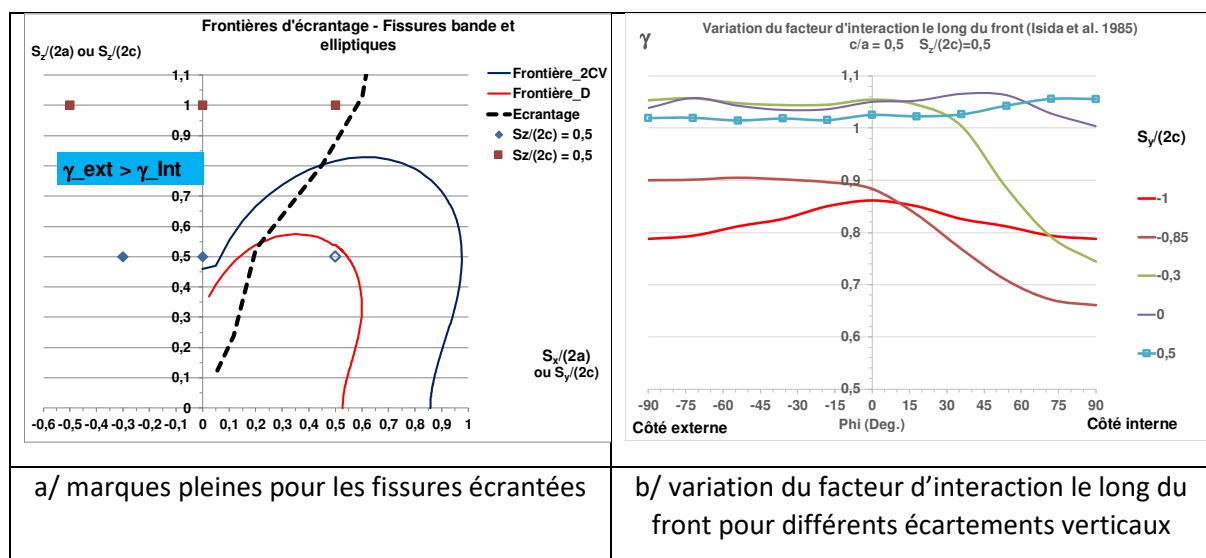


Figure A1.3\_26 : limites d'écrantage et limites d'interaction ( $\beta < 1,025$ ) pour des fissures elliptiques égales de rapport d'aspect  $a/c = 2$

## Fissures elliptiques parallèles non écartées

L'interaction de fissures disque parallèles non écartées en mode I s'analyse de la même façon que celle des fissures bande parallèles non écartées. On considère l'action de la fissure  $a_2$  sur la fissure  $a_1$ .

- L'effet de l'écartement vertical ne dépend pas de la taille relative des fissures
- L'effet de l'écartement vertical est piloté par le paramètre d'écartement relatif  $S_z/(a_1+a_2)$
- La fonction de Westergaard calculée pour la valeur d'écartement relatif  $S_x/(a_1+a_2)$  obtenue à partir de la valeur du facteur d'interaction dans le plan et la valeur de  $S_z/(a_1+a_2)$  traduit l'effet d'interaction hors plan.

On considère l'interaction de la fissure 1 avec la fissure 2 au point le plus sollicité dit pointe interne.

Pour les valeurs de décalages horizontal  $S_x$  et vertical  $S_z$ , la valeur du facteur d'interaction s'obtient de la même façon que pour les fissures bande (§ A1.1.2.1)

L'expression simplifiée du facteur d'interaction est donnée directement par la fonction de Westergaard :

$$\gamma_{12}(P) = F_{W\_E\_Pa} \left( \frac{c}{a}, \frac{x_D}{l}, \frac{y_D}{l}, \frac{S_z}{l} \right) \quad (A1.2\_22)$$

Où la valeur de  $x_D$  ou  $y_D$  est obtenue par identification de  $F_{W\_E\_Co} \left( \frac{c}{a}, \frac{x_D}{l}, \frac{y_D}{l} \right)$  à l'expression correspondante du facteur d'interaction de la fissure coplanaire projetée et  $l = a_1$  ou  $a_2$ .

La fonction  $F_{W\_E}$  établie par Green et Sneddon (GRS, 1950) est applicable hors du plan. Kassir et Sih (KAS, 1975) l'ont étendue aux cas des cisaillements plans et hors plan. Cette solution a été explicitée par R. Warpinski (WAR, 2004) pour la sollicitation de mode I.

Le demi-axe  $a$  est porté par l'axe Ox. Les coordonnées ellipsoïdales sont notées  $\xi, \eta, \zeta$  au lieu de  $\lambda, \mu, \nu$  comme dans les travaux de Green et Sneddon (GRS,1950).

Sur la surface de la fissure  $F_{W\_Epa} = 0$ .

Sinon ( $\xi$  et  $\eta \neq 0$ ) l'expression de la fonction est la suivante :

$$F_{W\_E\_pa} = 1 + \frac{1}{E(k)} \cdot \left\{ \left[ \frac{\text{sn}(u) \cdot \text{dn}(u)}{\text{cn}(u)} - \varepsilon(u, k) \right] - z \cdot \left[ k_c^2 \cdot \frac{\text{sn}^2(u)}{\text{cn}^2(u)} \right] \cdot \frac{du}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} - 2z^2 \cdot \left[ k_c^2 \cdot \frac{\text{sn}(u) \cdot \text{dn}(u)}{\text{cn}^3(u)} \right] \cdot \left( \frac{du}{d\xi} \right)^2 \cdot \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \right. \\ \left. - z^2 \cdot \left[ k_c^2 \cdot \frac{\text{sn}^2(u)}{\text{cn}^2(u)} \right] \cdot \left[ \frac{d^2 u}{d\xi^2} \cdot \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 + \frac{du}{d\xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right] \right\} \quad (A1.3\_23)$$

Où les interviennent les fonctions elliptiques de Jacobi :  $\text{sn}(u)$ ,  $\text{cn}(u)$ ,  $\text{dn}(u)$  et  $\varepsilon(u, k)$  décrites dans (ABS, 1964). Ces fonctions sont continues et dérivables.

Les variables  $\xi, \eta, \zeta$  sont les coordonnées ellipsoïdales dont l'expression en fonction des coordonnées cartésiennes est décrite ci-après. Ces trois coordonnées ( $\xi, \eta, \zeta$ ) vérifient l'équation A1.3\_24).

$$\frac{x^2}{a^2 + \theta} + \frac{y^2}{c^2 + \theta} + \frac{z^2}{\theta} - 1 = 0 \quad (A1.3\_24)$$

Cette équation est de la forme

$$A \cdot \theta^3 + B \cdot \theta^2 + C \cdot \theta + D = 0$$

Avec

$$A = +1$$

$$B = -x^2 - y^2 - z^2 + a^2 + c^2$$

$$C = -c^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 - (a^2 + c^2) \cdot z^2 + a^2 \cdot c^2$$

$$D = -a^2 \cdot c^2 \cdot z^2$$

L'équation (A1.3\_24) a 3 racines réelles qui sont ordonnées de la façon suivante :

$$\infty > \xi \geq 0 \geq \eta \geq -c^2 \geq \zeta \geq -a^2 \quad (\text{A1.3}_{25})$$

Elles sont obtenues par la méthode de Cardan (CAR, 1545).

Les coordonnées ellipsoïdales sont proportionnelles au carré des longueurs (voir A1.3\_8).

$$\xi = a^2 \cdot \left( \frac{\text{cn}(u)}{\text{sn}(u)} \right)^2 \quad \text{soit} \quad u = \text{sn}^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\xi}{a^2}}} \right)$$

Les variables sont adimensionnalisées.

$$\bar{z} = \frac{z}{a} \bar{\xi} = \frac{\xi}{a^2} = \left( \frac{\text{cn}(u)}{\text{sn}(u)} \right)^2 \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{a^2} \bar{\zeta} = \frac{\zeta}{a^2} \quad (\text{A1.3}_{26})$$

$$\text{sn}(u) = \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{\xi}}} \quad \text{cn}^2(u) = \frac{\bar{\xi}}{1 + \bar{\xi}}$$

Les dérivées de  $u$  par rapport à  $\bar{\xi}$  et de  $\bar{\xi}$  par rapport à  $z$  sont données par:

$$\frac{du}{d\bar{\xi}} = -\frac{\text{sn}^3(u)}{2\text{cn}(u) \cdot \text{dn}(u)} \quad (\text{A1.3}_{27a})$$

$$\frac{d^2u}{d\bar{\xi}^2} = -\frac{\text{sn}^2(u)}{2} \cdot \left( 3 + \frac{\text{sn}^2(u)}{\text{cn}^2(u)} + k^2 \cdot \frac{\text{sn}^2(u)}{\text{dn}^2(u)} \right) \cdot \frac{du}{d\bar{\xi}} \quad (\text{A1.3}_{27b})$$

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{z}} = \bar{z} \cdot \frac{(1 + \bar{\xi}) \cdot \left( \left( \frac{c}{a} \right)^2 + \bar{\xi} \right)}{(\bar{\xi} - \bar{\eta}) \cdot (\bar{\xi} - \bar{\zeta})} \quad (\text{A1.3}_{27c})$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial \bar{z}^2} = \frac{1}{2\bar{\xi} \cdot \bar{h}_1^2} \cdot \left\{ 1 - \frac{\bar{z}^2}{\bar{\xi}^2 \cdot \bar{h}_1^2} + \frac{\bar{z}^2}{4\bar{\xi} \cdot \bar{h}_1^4} \cdot \left[ \frac{\bar{x}^2}{\left( \left( \frac{c}{a} \right)^2 + \bar{\xi} \right)^3} + \frac{\bar{y}^2}{(1 + \bar{\xi})^3} + \frac{\bar{z}^2}{\bar{\xi}^3} \right] \right\} \quad (\text{A1.3}_{27d})$$

$$\bar{h}_1^2 = \frac{1}{4\bar{\xi}} \cdot \frac{(\bar{\xi} - \bar{\eta}) \cdot (\bar{\xi} - \bar{\zeta})}{(1 + \bar{\xi}) \cdot \left( \left( \frac{c}{a} \right)^2 + \bar{\xi} \right)} \quad (A1.3\_27e)$$

Fissures elliptiques égales de grand axes alignés et de rapport d'aspect a/c=3

ESI-France (SYSTUS, 2020) a effectué 18 calculs par éléments finis de fissures parallèles égales de grand axe alignés et de rapport d'aspect a/c = 3.

La Figure A1.3\_27 compare les prédictions du facteur d'interaction par la formule simplifiée aux résultats de calculs. L'accord est très bon.

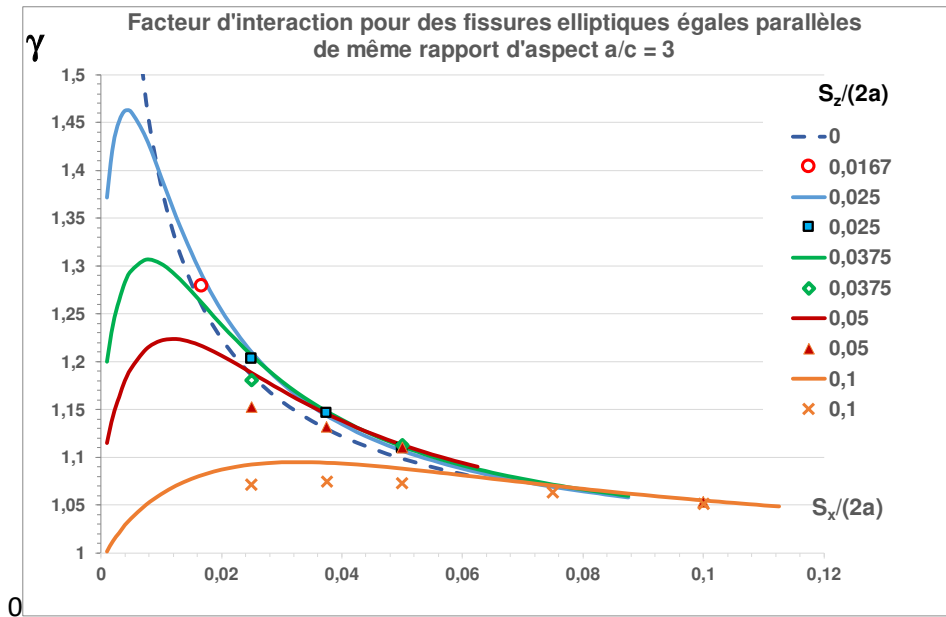


Figure A1.3\_27 : validation des formules de facteurs d'interaction de fissures elliptiques égales de rapport d'aspect a/c = 3 de grand axe commun parallèles

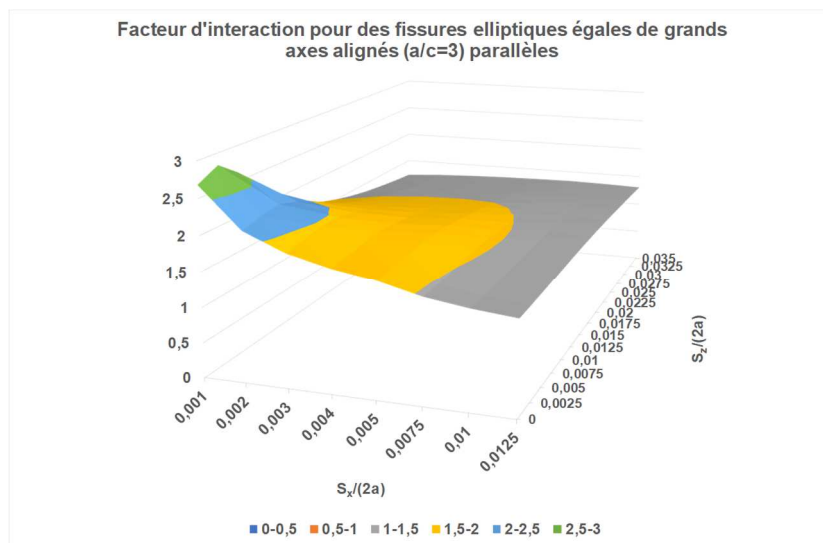


Figure A1.3\_28 : variation des facteurs d'interaction de fissures elliptiques égales de rapport d'aspect a/c = 3 de grand axe commun parallèles

La variation du facteur d'interaction avec les écartements relatifs  $\hat{S}_x$  et  $\hat{S}_z$  est décrite à la figure A1.3\_28.

Le défaut équivalent s'obtient par application de la formule simplifiée ce qui permet de couvrir une large plage de variation des paramètres d'écartement. La figure A1.3\_29 décrit la variation du coefficient d'équivalence en fonction des écartements relatifs horizontaux et verticaux.

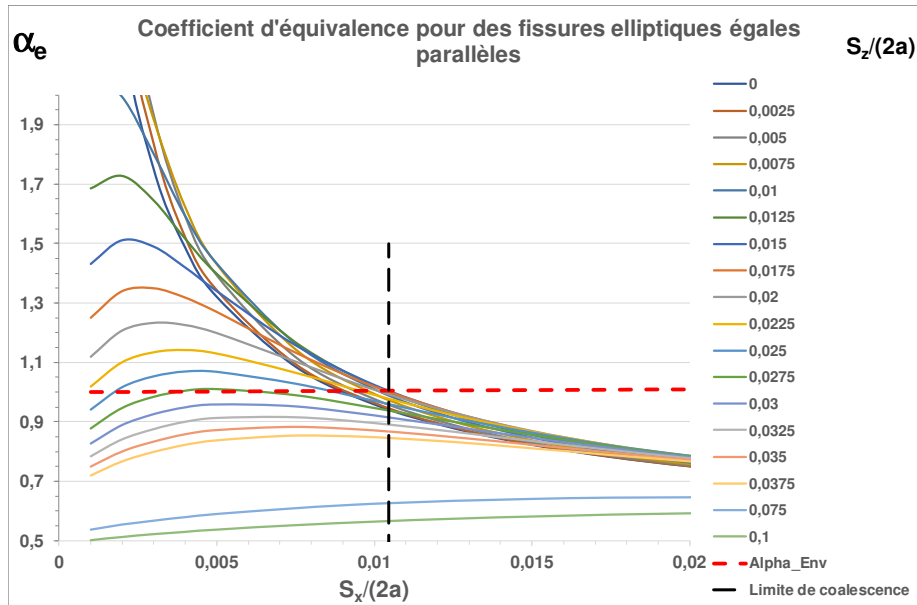


Figure A1.3\_29 : variation des coefficients d'équivalence de fissures elliptiques égales de rapport d'aspect  $a/c = 3$  de grand axe commun parallèles

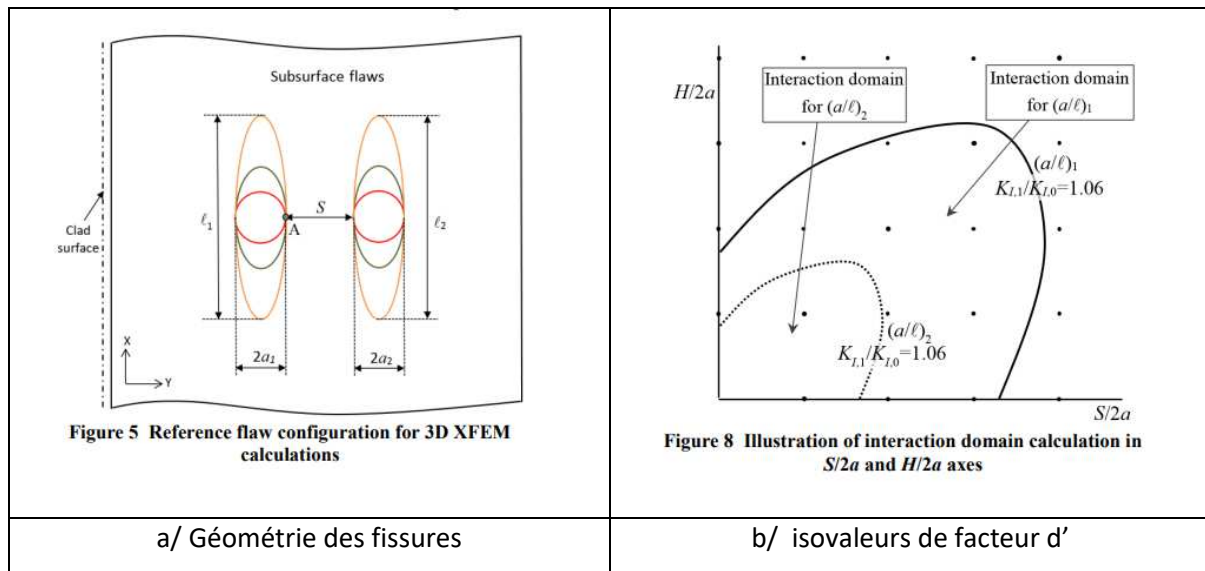
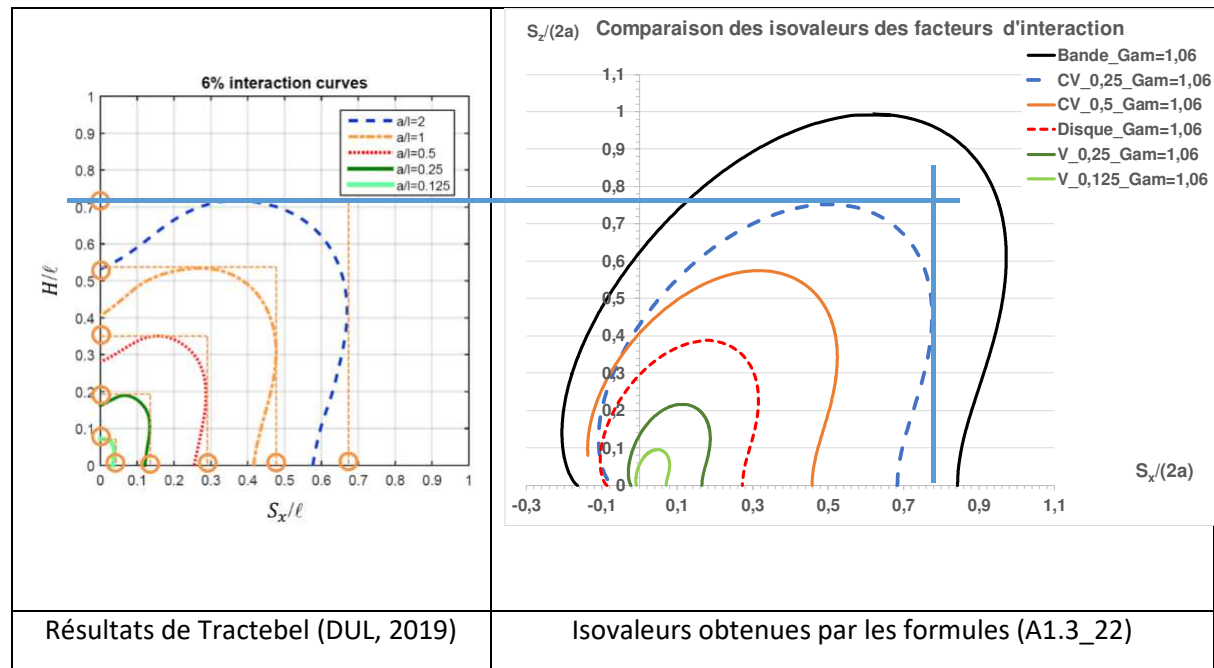


Figure A1.3\_30 : description des données variation des coefficients d'équivalence de fissures elliptiques égales de rapport d'aspect  $a/c = 3$  de grand axe commun parallèles

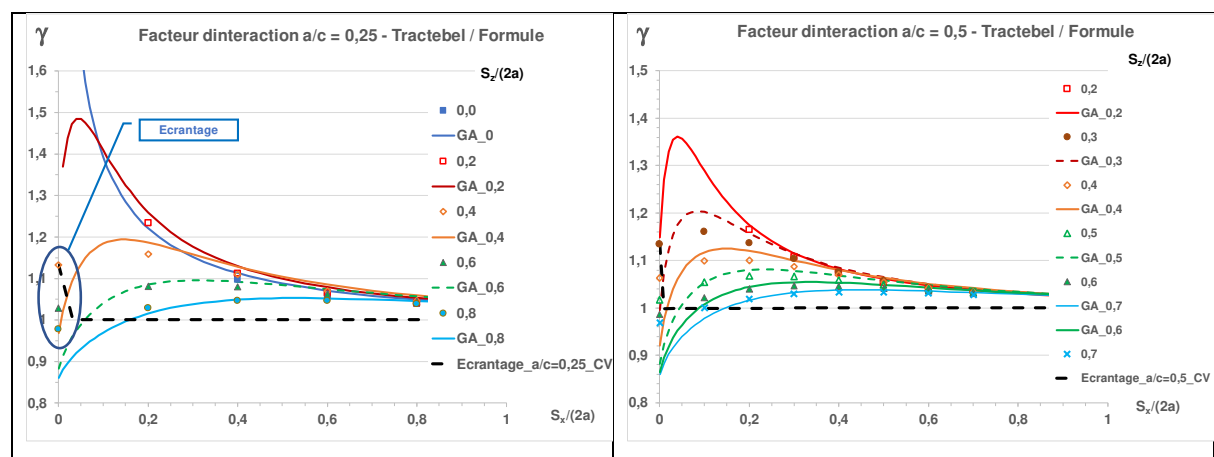
### Fissures elliptiques égales de petits axes alignés

V. Lacroix et P. Dulieu (LAC, 2018, DUL 2019) ont analysé le cas de fissures enfouies de grands et surtout de petits axes alignés à partir de calculs par la méthode des éléments finis étendus X-FEM avec le logiciel Morfeo (MOR, 2014). La figure A1.3\_30b présente les courbes isovaleurs à 1,06 obtenues par interpolation entre résultats de calculs pour des valeurs discrètes d'écartements  $S_x$  et  $S_z$  notés respectivement S et H sur les figures A1.3\_30. Ces domaines d'interaction sont comparés à ceux établis à partir de nos formules (Figure A1.3\_31).



**Figure A1.3\_31 : comparaison des courbes d'interaction à 6% au vertex et au co-vertex pour différentes formes de fissures égales établies par Tractebel et nos formules**

Les formes sont identiques et nos isovaleurs sont légèrement enveloppes de celles obtenues par Tractebel. Ces travaux ont servi de base à la modification des codes ASME et JSME décrite au premier chapitre.



**Figure A1.3\_32 : comparaison des facteurs d'interaction au co-vertex pour des fissures elliptiques parallèles égales établies par Tractebel et nos formules**

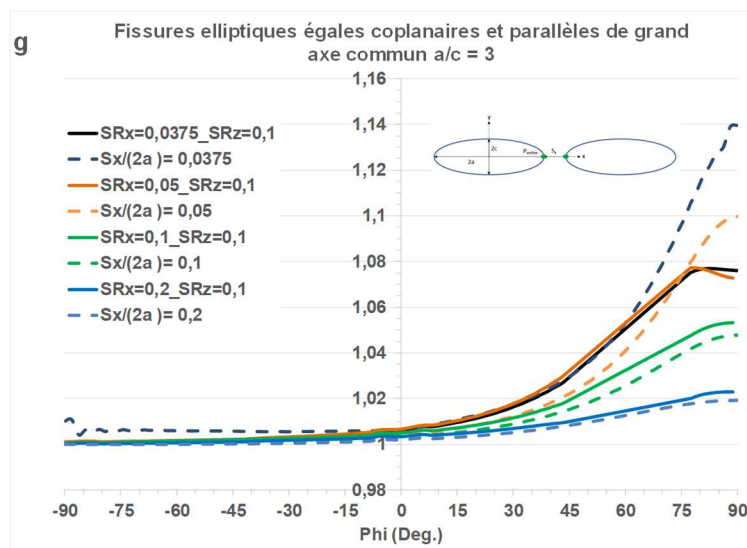


Une autre comparaison est présentée (Figure A1.3\_32 pour des fissures elliptiques parallèles égales en interaction au co-vertex. L'accord est très bon mis à part pour de faibles valeurs de couples  $S_x/(2a)$  faibles et  $S_z/(2a) = 0,3$ .

Dans le cas des ellipses ( $a/c= 0,25$  et  $0,5$ ) interagissantes au co-vertex, il n'y a d'écrantage que pour des écartements  $S_x/(2a)$  très faibles.

#### Variations le long du front de fissures elliptiques égales parallèles

La figure A1.3\_33 compare les variations des facteurs d'interaction le long du front de fissures elliptiques égales coplanaires ou parallèles dont les grands axes sont situés dans un même plan. Les calculs ont été réalisés par ESI-France (SYSTUS, 2020).

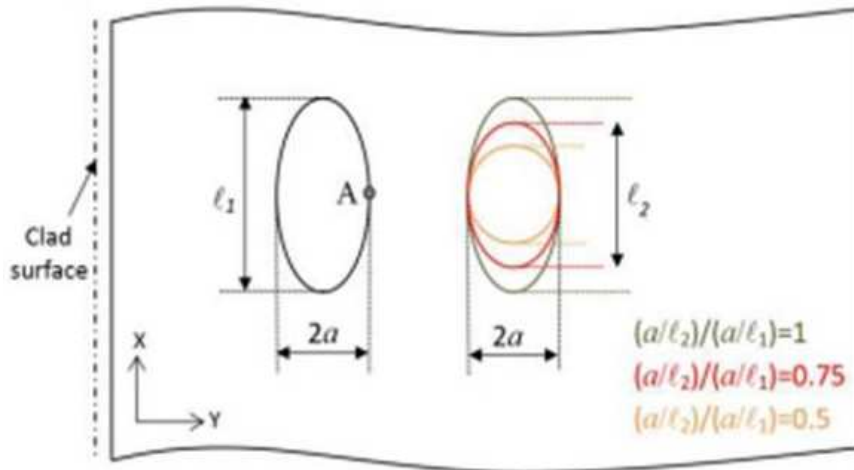


**Figure A1.3\_33 : variation des facteurs d'interaction le long du front de fissures elliptiques égales coplanaires ou parallèles pour un écart vertical relatif  $S_z/(2a) = 0,1$**

Les variations le long du front sont les mêmes que les fissures soient coplanaires ou parallèles, sauf s'il y a écrantage comme pour  $S_z/(2a) = 0,1$  et  $S_x/(2a) = 0,0375$  et  $0,05$ .

#### A1.3.4.3. Fissures elliptiques parallèles de rapport d'aspect différents

V. Lacroix et P. Dulieu (LAC, 2018) ont analysé le cas de fissures de rapport d'aspect différents décrits à la Figure A1.3\_34.



**Figure A1.3\_34 : configurations de fissures elliptiques de rapport d'aspect différents analysées par Tractebel (LAC, 2018)**

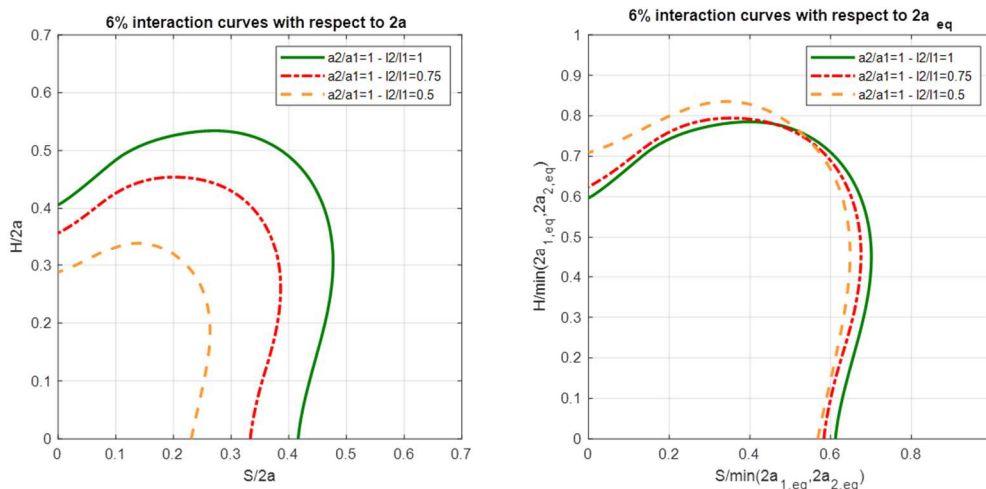
Leurs résultats sont présentés sous forme de diagramme d'interaction (Figure A1.3\_35) et interprétés en utilisant la notion de défaut équivalent proposée par Chapuliot et Blouin (CHB, 2018).

Le défaut équivalent selon cette approche est défini pour l'interaction au co-vertex par :

$$a_{eq} = \frac{a}{[E(k)]^2} \quad (A1.3_28)$$

Cette définition permet de regrouper les domaines d'interaction au co-vertex comme le montre les deux figures A1.3\_35 tirées de (LAC, 2018). Au paragraphe suivant nous reviendrons sur cette équivalence.

L'intégrale elliptique complète de seconde espèce E représente le rapport du quart du périmètre d'une ellipse à son grand axe. Cette fonction dépend uniquement du rapport d'aspect a/c. Cette équivalence est étendue au vertex au paragraphe A1.3.4.3 où il est montré que l'interaction dépend du rayon de courbure rapporté au demi-axe au même point.



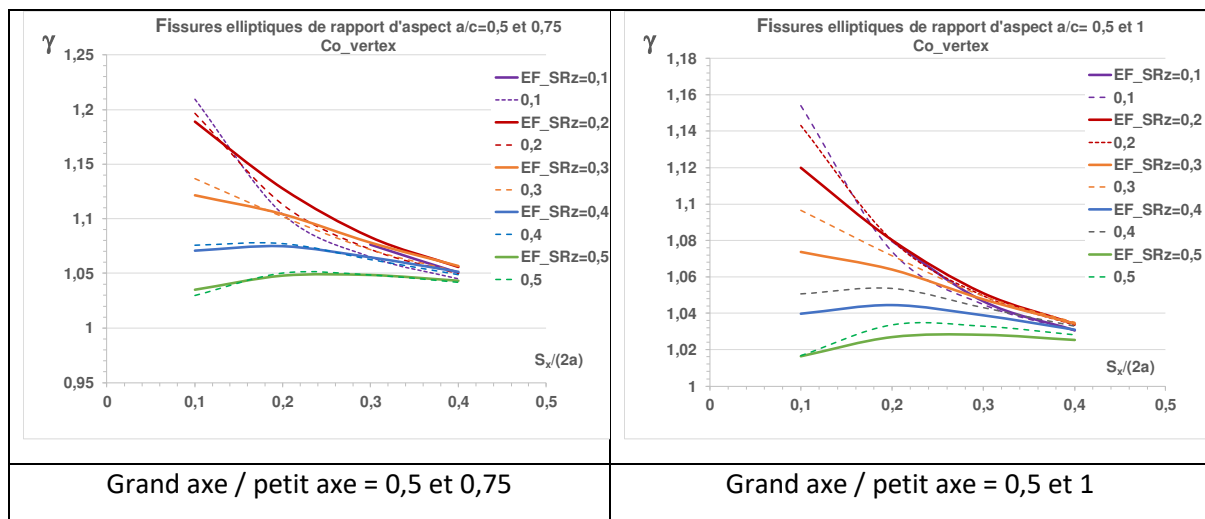
**Figure A1.3\_35 : application de la notion de défaut équivalent au sens de Chapuliot à l'interaction de fissures elliptiques de rapport d'aspect différents (LAC,2018)**

Sur la base des résultats de Chapuliot (CHB, 2018) et de Lacroix et al. (LAC, 2018), nous avons modifié l'expression de la fonction A afin de tenir compte des effets de différence de courbure aux points d'interaction.

Le paramètre choisi est le rapport des rapports des facteurs de forme du FIC de la grande fissure sur celui de la petite :  $RAC = (F_{grande})/(F_{petite})$ . La correction n'est établie que pour la grande fissure. La grande fissure est la fissure isolée qui a le FIC le plus élevé au même point que le point d'interaction.

La fonction est modifiée par un coefficient multiplicateur :

$$A(RAC) = A(RAC = 1) \cdot RAC^{-0,28} \quad (A1.3_{29})$$



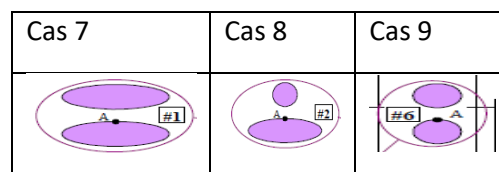
**Figure A1.3\_36 : comparaison des facteurs d'interaction calculés (LAC, 2018) et ceux obtenus par nos formules pour des fissures elliptiques coplanaires de même valeur de petit axe mais de rapport d'aspect différents**

Le facteur de forme du FIC dépend du rapport d'aspect  $a/c$  et du rayon de courbure relatif de l'ellipse au point d'interaction  $\rho/c$ . Le demi petit axe est  $c$ .

$$F(a/c, \phi) = \frac{K_{I\infty}(c, a/c, \phi)}{\sigma_{app} \cdot \sqrt{\pi \cdot c}} = \frac{1}{E(a/c)} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left[\frac{\rho(a/c, \phi)}{c}\right]^{\frac{1}{6}} \quad (A1.3_{30})$$

La comparaison de l'application de cette formule aux calculs de Lacroix et al. (LAC, 2018) pour des interactions au co-vertex est présentée à la figure A1.3\_36. L'accord est satisfaisant.

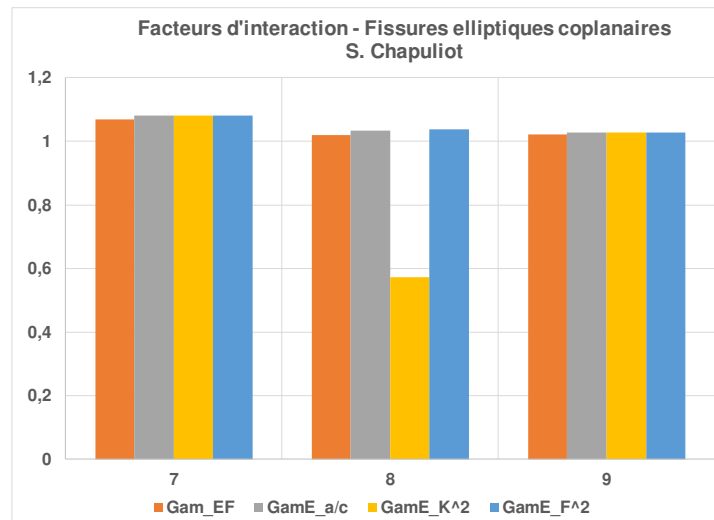
La comparaison avec les résultats de Chapuliot (CHB, 2018) pour des fissures parallèles est illustrée par l'historgramme de la figure A1.3\_37. Les cas sont représentés par les images du tableau ci-dessous.



**Tableau A1.3\_6 : cas d'interaction de fissures parallèles**

Les cas 7 et 9 ne comportent pas de différences de rapport d'aspect, donc il n'y a pas de différences entre les options. Seul le cas 8 est pertinent pour la validation de cette correction de la fonction A, il ne sert qu'à valider le traitement des fissures parallèles égales.

Le rapport du carré des FIC n'est pas adapté (Figure A1.3\_37). Le rapport du carré des facteurs de forme vaut 2 et celui des rapport d'aspect vaut 3. L'effet sur le facteur d'interaction est trop faible pour être discriminant. Il faudrait disposer de calculs avec de plus faibles écartements.



**Figure A1.3\_37 : comparaison des facteurs d'interaction calculés (CHB, 2018) et ceux obtenus par nos formules pour des fissures elliptiques de rapport d'aspect différents**

#### A1.3.4.4. Critères de combinaisons des fissures

Ces critères sont appelés aussi règles de proximité. La version 2013 de la section XI du code ASME B&PV proposait les règles suivantes pour les défauts enfouis plans : un critère d'alignement portant sur  $S_z$  et un critère de combinaison portant sur  $S_x$  et les profondeurs de défauts  $a_1$  et  $a_2$  :

$$\begin{aligned} S_z &\leq 12,5 \text{ mm (1/2 pouce)} \\ S_x &\leq \max(a_1, a_2) \end{aligned} \quad (A1.3_{30})$$

Afin d'améliorer cette règle d'alignement indépendante de la taille de fissure et ces conditions portant sur la profondeur maximale du défaut Lacroix, Dulieu, Hasegawa et al. (LAC, 2018 ; DUL, 2019) ont appliqué l'équivalence proposée par Chapuliot et Blouin (CHB, 2018).

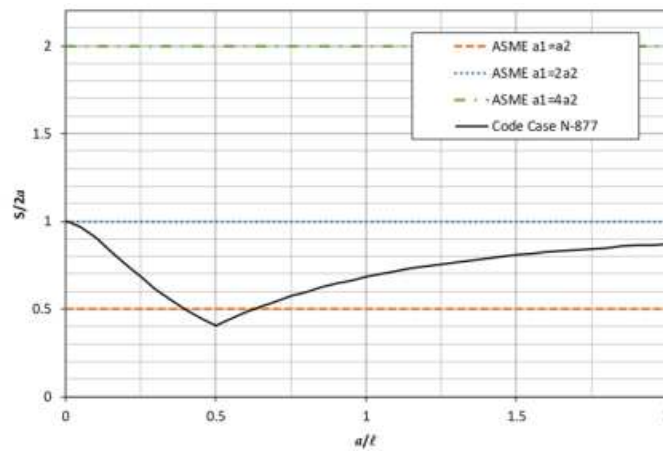
Cette équivalence est fondée sur l'identification du FIC de la fissure elliptique au co-vertex à celui d'une fissure bande. Suivant nos notations  $a$  est le grand axe et  $2c$  le petit axe :

$$K_{I\infty}(\phi) = \frac{\sigma_{app}}{E(k)} \cdot \sqrt{\pi \cdot c} \cdot \left[ \sin^2 \phi + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \cos^2 \phi \right]^{\frac{1}{4}} \equiv \sigma_{app} \cdot \sqrt{\pi \cdot c_{eq}} \quad (A1.3_{31})$$

Au co-vertex  $\phi = 90$  degrés  $\frac{c}{[E(k)]^2} = c_{eq}$

Avec les notations de Chapuliot et Lacroix :  $a_{eq} = \frac{a}{[E(k)]^2}$

Ces études ont abouti à l'écriture du code case N-877-0 de 2018 (LAC'2018) tenant compte du rapport d'aspect. Cette version du critère convient au traitement des fissure d'aspect inférieurs à 1 mais est très conservatrice au-delà (Figure A1.3.38 tirée de DUL, 2019).



**Figure 20 Comparison of combination criterion (on S): original ASME vs. CC N-877 in terms of 2a**

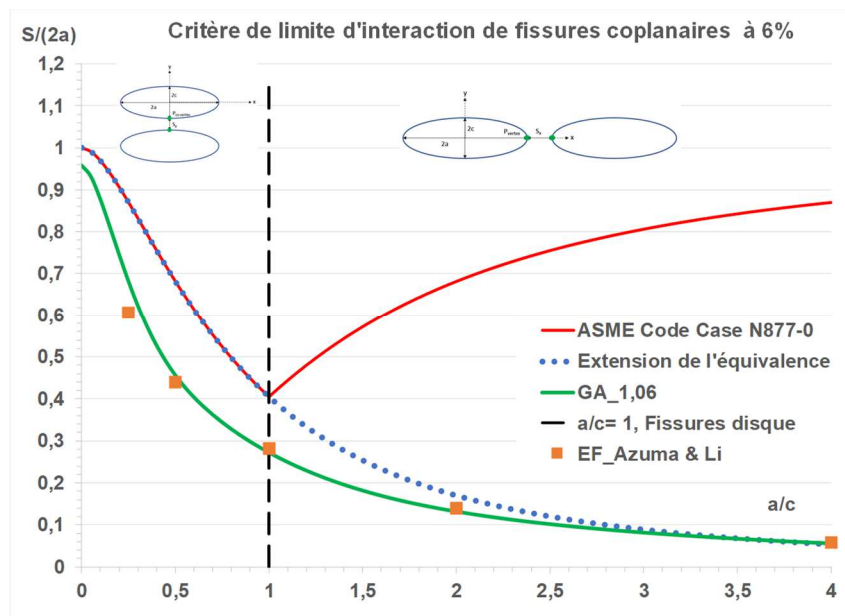
**Figure A1.3\_38 : comparaison des critères de combinaison des défauts portant sur  $S_x$  ou  $S_y$  (DUL, 2019)**

Cette définition doit être adaptée pour l'interaction au vertex.

Au vertex  $\phi = 0$  :  $\frac{c}{[E(k)]^2} \cdot \frac{c}{a} = c_{eq}$  et donc :

$$c_{eq} = \frac{a}{[E(k)]^2} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^2 \quad (A1.3_{32})$$

Ceci donne la courbe en pointillés bleus de la figure A1.3\_39.



**Figure A1.3\_39 : comparaison des critères de combinaison des défauts à partir de l'équivalence et en utilisant nos formules (courbe verte)**

Pour les valeurs de  $S/(2a)$  inférieures à la courbe limite, il y a interaction.

La courbe fondée sur nos formules présente une allure similaire à celle donnée par l'équivalence. Cette courbe est en excellent accord avec les résultats de calculs aux éléments finis d'Azuma et Li (AZU, 2017). La courbe fondée sur l'équivalence est pénalisante et montre son caractère approximatif, mais son établissement n'a pas nécessité des calculs numériques.

Dulieu et al. (DUL, 2019) ont proposé un lissage fondé sur de nombreux résultats de calculs X-FEM.

$$l_{k-eq} = 1.15l_k/[1 + 0.77(a_k/l_k)^{-1.17}] \quad (A1.3\_33)$$

Où  $l_k$  et  $2a_k$  sont les longueur et profondeur de la fissure  $k$ .

Le critère ASME de 2019 s'énonce :

$$\begin{cases} S_x < \min(l_{1-eq}, l_{2-eq}) \\ S_z < \min(l_{1-eq}, l_{2-eq}) \end{cases} \quad (A1.3\_34)$$

Le minimum est pris afin de prendre en compte le cas des fissures inégales.

Ce lissage est proche de la courbe bleue de la courbe fondée sur l'équivalence, mais est dans l'ensemble plus pénalisante. Ceci s'explique en partie parce que le critère ASME de 2019 s'appuie sur les maxima de  $S_x$  ou  $S_y$  des isovaleurs qui sont un peu plus élevés que les valeurs en  $S_z=0$ . Néanmoins cette courbe reste supérieure aux maxima obtenus par nos formules comme le montre la figure A1.3\_40.

Ces courbes illustrent bien le fait que l'interaction au vertex est beaucoup moins sévère que celle au co-vertex.

Si l'on prend en compte l'interaction en  $S_z$ , la courbe des maxima de  $S_z$  obtenus par nos formules se rapproche notablement de la courbe ASME de 2019 (Figure A1.3.40). Notre approche et la codification ASME donnent des critères très proches, la nôtre permet de séparer les cas des fissures coplanaires du cas général comme l'atteste l'écart entre la courbe orange en pointillés et la courbe violette de la figure A1.3\_41.

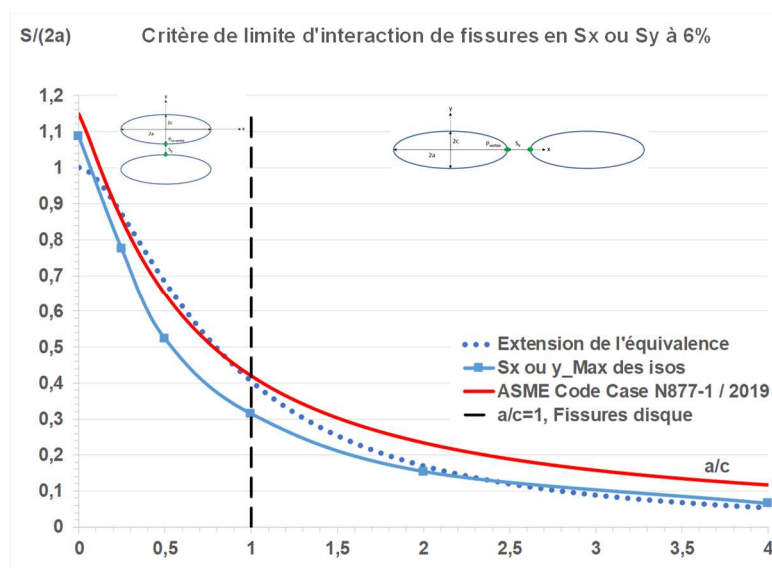
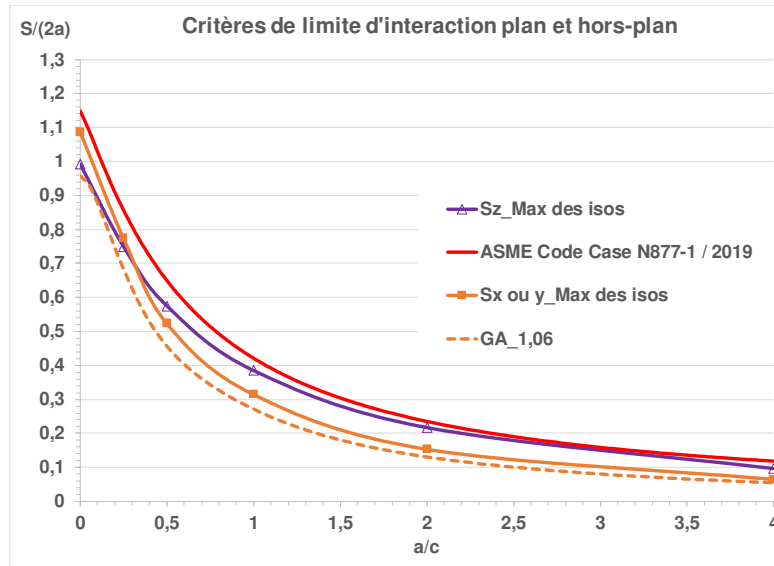


Figure A1.3\_40 : comparaison des critères de combinaison des défauts à partir de l'équivalence et des maxima des valeurs de  $S_x$  ou  $S_y$  des domaines d'interaction



**Figure 3: comparaison des critères de combinaison de l'équivalence et des maxima des valeurs de  $S_x$  ou  $S_y$  et  $S_z$  des domaines d'interaction**

Les critères ASME seront encore amendés en 2020 afin de tenir compte des interactions entre fissure enfouie et fissure de surface. Ceci est présenté au paragraphe A1.4.1.

#### A1.3.4.5. Fissures elliptiques écrantées

Isida et al. (ISI, 1985), Miyazaki et al. (MYA, 1989), Moussa (MOU, 1999, 2000) et Wang (WAN, 2022) ont analysé les effets d'écrantage de fissures elliptiques ou semi-elliptiques.

##### Ecrantage géométrique

Les points d'écrantage géométrique de deux ellipses ayant un axe commun sont définis par les deux conditions, valables pour  $S_x$  négatif ou nul :

$$\begin{aligned} y_1 = y_2 = c_1 \cdot \sin \varphi_1 = c_2 \cdot \sin \varphi_2 \\ a_1 \cdot \cos \varphi_1 + a_2 \cdot \cos \varphi_2 = a_1 + a_2 + S_x \end{aligned} \quad (A1.3_35)$$

La cote  $x_1$  de la ligne d'écrantage géométrique est donnée par la résolution de l'équation :

$$a_1 \cdot \cos \varphi_1 + a_2 \cdot \cos \left\{ A \sin \left[ \frac{c_1}{c_2} \cdot \sin \varphi_1 \right] \right\} = a_1 + a_2 + S_x \quad (A1.3_36)$$

$$x_1 = a_1 \cdot \cos \varphi_1$$

Si les fissures sont égales

$$\varphi_2 = \varphi_1 = \varphi$$

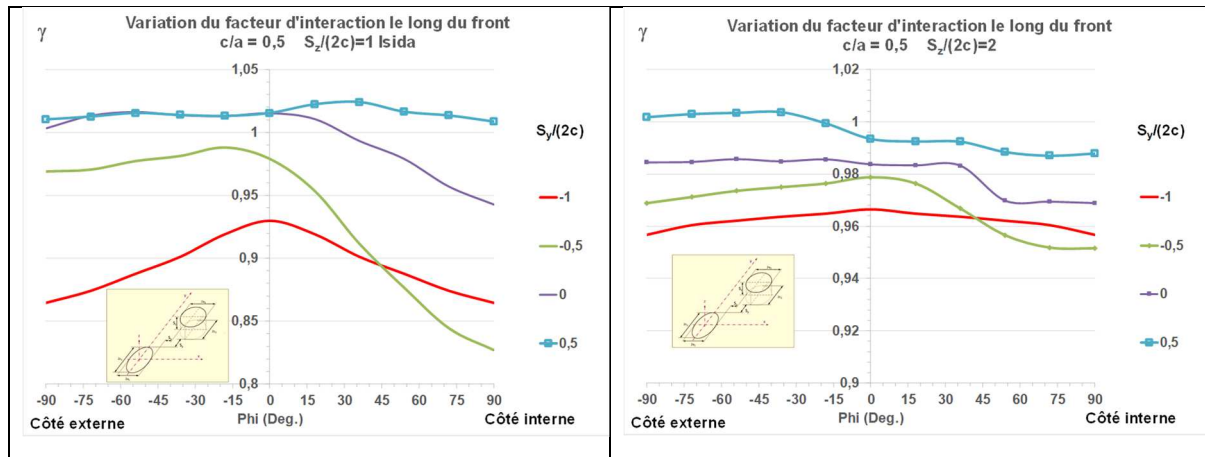
$$x_1 = a \cdot \cos \varphi = a + \frac{S_x}{2} \quad (A1.3_37a)$$

$$\varphi = \text{Acos} \left( 1 + \frac{S_x}{2a} \right)$$





Nous avons transformé ces facteurs d'amplification en ces facteurs d'interaction. Les variations le long du front des fissures de rapport d'aspect  $c/a=0,5$  pour les écartements verticaux  $S_z/(2a) = 0,5, 1$  et  $2$  sont présentées aux figures A1.3\_43 et A1.3\_44.



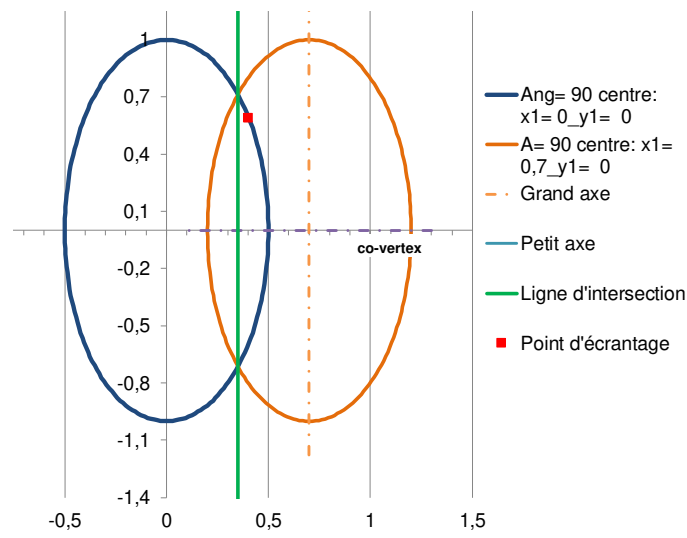
**Figure A1.3\_44 : variation du facteur d'interaction le long du front de fissures elliptiques égales décalées ayant le petit axe en commun pour  $S_z/(2a)=1$  et  $2$**

Pour  $S_z/(2a) = 0,5$  et  $1$  (à la limite) seule la fissure écartée verticalement de  $S_z/(2a) = 0,5$  n'est pas écrantée. Pour  $S_z/(2a) = 2$ , toutes les fissures sont écrantées.

Pour  $S_z/(2a) = 0,5$  et  $S_z/(2a) = -0,3$ , le point pour lequel le facteur d'interaction est égal à 1 est indiqué sur la figure A1.3\_44 qui décrit l'écrantage géométrique en projection sur le plan de la première fissure pour cette configuration.

Il importe de souligner que le facteur d'interaction des fissures écrantées est toujours inférieur à celui des fissures non écrantées.

Les points du front écrantés géométriquement, c.à.d. situés sous la courbe d'écrantage géométrique tracée sur la figure A1.3\_45 ont un facteur d'interaction inférieur à 1.



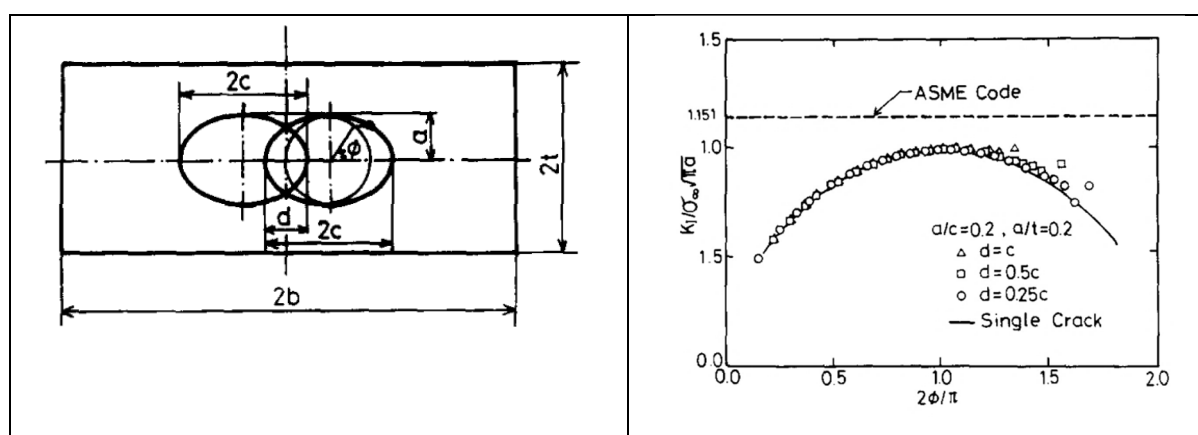
**Figure A1.3\_45 : écrantage géométrique et physique de fissures de petits axes alignés**

### Etude de l'écrantage physique de Miyazaki et al.

L'étude de Miyazaki et al. (MYA, 1989) porte sur l'interaction de fissures elliptiques égales parallèles situées dans une plaque sous traction uniaxiale. Ce travail comporte plusieurs limitations :

- L'approche combine l'utilisation d'éléments frontière et le modèle « Line Spring » pour calculer les FIC. Cette technique ne donne pas de bons résultats pour les fissures profondes et ne permet pas de calculer les valeurs des FIC au vertex.
- Pour des profondeurs relatives « a/épaisseur » la variation le long du front ne peut être comparé à celle obtenue dans un milieu infini.

Nous avons analysé le cas d'une fissure peu profonde ( $a/t = 0,2$ ) illustré à la figure A1.3\_46.

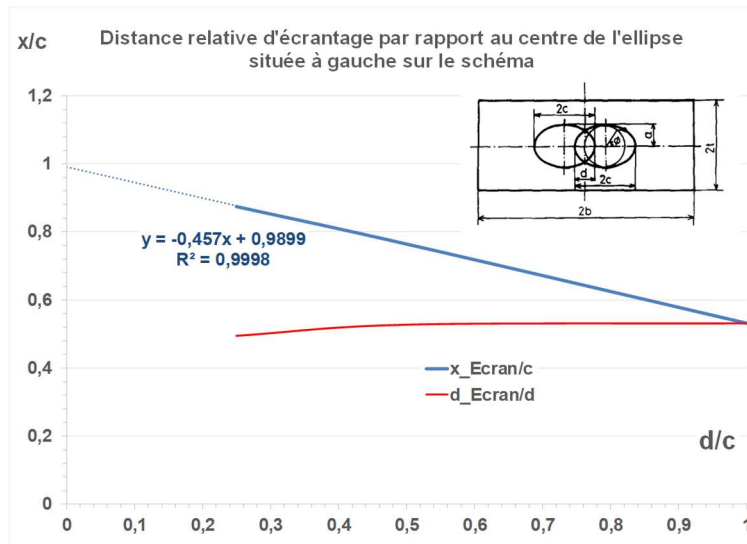


**Figure A1.3\_46 : variation du facteur d'amplification le long du front de fissures elliptiques coplanaires égales ayant le grand axe en commun pour  $S_x/(2c) = -0,25$  ;  $-0,5$  et  $-1$  (MIY, 1989)**

L'écart entre le facteur d'amplification de la fissure interagissante et de la fissure isolée croît lorsque l'écrantage géométrique caractérisé par « d » diminue. Le facteur d'interaction est bien maximal aux points détachés situés au-dessus de la moyenne. Les positions de ces points et les facteurs d'interaction sont donnés au tableau A1.3\_7. Comme dans l'étude d'Isida et al. (ISI, 1985) la valeur du facteur d'interaction diminue avec l'écrantage et la position du point d'interaction maximale suit la position de l'écrantage géométrique tout en étant inférieure (voir courbe rouge de la figure A1.3\_47).

d	0,25	0,5	1
Anomalie Phi (Deg.)	150,91	139,82	122,14
Phi/90	1,677	1,554	1,357
M	0,821	0,911	0,996
Gamma	1,223	1,159	1,094

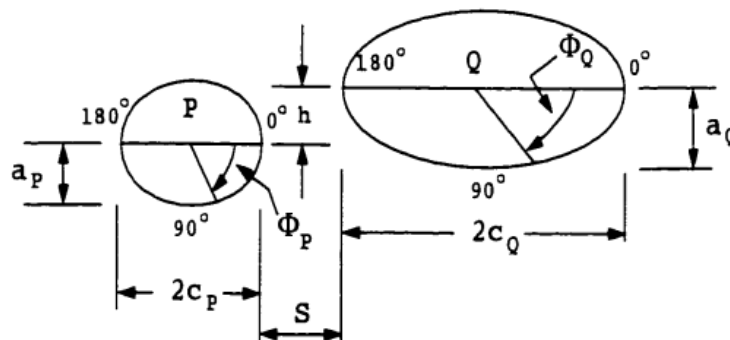
**Tableau A1.3\_7 : effet d'écrantage sur des fissures elliptiques de grands axes alignés**



**Figure A1.3\_47 : écrantage géométrique de fissures de grands axes alignés**

Etude de l'écrantage physique de Moussa

La thèse de Moussa (MOU, 2000) porte sur l'interaction de fissures semi-elliptiques et elliptiques coplanaires ou non coplanaires égales et inégales. L'interaction entre fissure elliptique enfouie et fissure semi-elliptique de surface est aussi analysée. Les cas d'écrantage sont très nombreux (Figure A1.3\_48 où « h » est l'écartement vertical). Cependant les valeurs numériques des facteurs d'interaction ne sont pas fournies. Les calculs sont effectués par éléments finis en couplant un modèle global représentant la plaque parallélépipédique et un sous modèle décrivant la zone fissurée. Un algorithme assure la continuité des déplacements aux nœuds de couplage.



**Figure A1.3\_48 : paramètres relatifs aux deux fissures elliptiques de grands axes alignés**

Seuls les cas de fissures égales et peu profonde par rapport à l'épaisseur de la plaque ( $a/t = 0,2$ ) sont retenus.

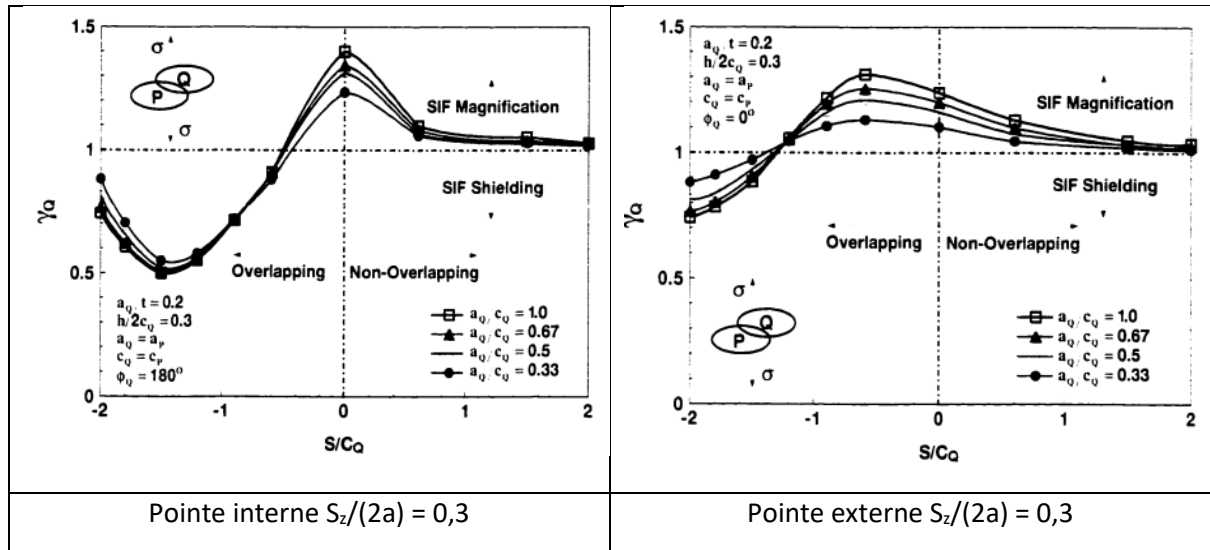


Figure A1.3\_49 : effet du rapport d'aspect de deux fissure elliptiques de grands axes alignés (MOU, 2000)

Le rapport d'aspect a peu d'effet sur le facteur d'interaction en pointe interne (Figure A1.3\_49).

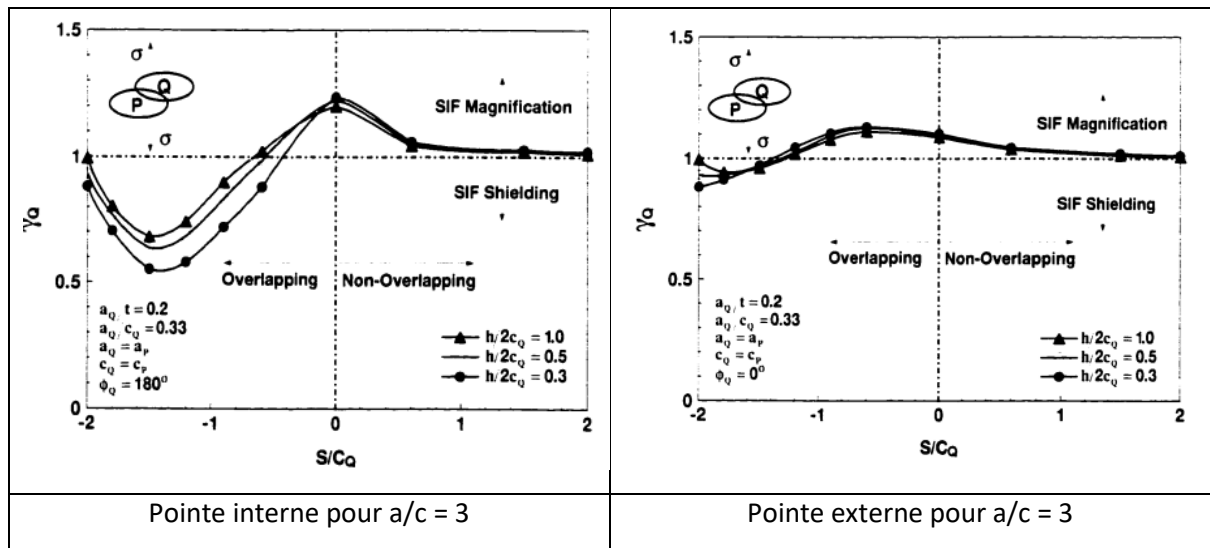


Figure A1.3\_50 : effet d'écartement vertical relatif de deux fissures elliptiques de grands axes alignés (MOU, 2000)

L'écartement vertical a peu d'effet sur le facteur d'interaction en pointe externe (Figure A1.3\_50).

D ces travaux on ne peut déduire les points d'écrantage car les variations le long du front ne sont fournies qu'en trois points (les deux co-vertex et le vertex).

#### Etude de l'écrantage physique de Wang et al.

Wang et al. (WAN, 2022) ont étudié la propagation en fatigue de fissures disque parallèles. La vue latérale de l'évolution de la fissure met en évidence la forme en « crochet » comme dans le cas des fissures bande. La diminution de la vitesse de propagation dans la zone écrantage dans la simulation comme dans l'expérience. L'aire propagée est plus importante pour la fissure supérieure (Figure

A1.3\_51), ce qui est probablement dû à une dissymétrie dans l'expérience comme dans l'algorithme de calcul.

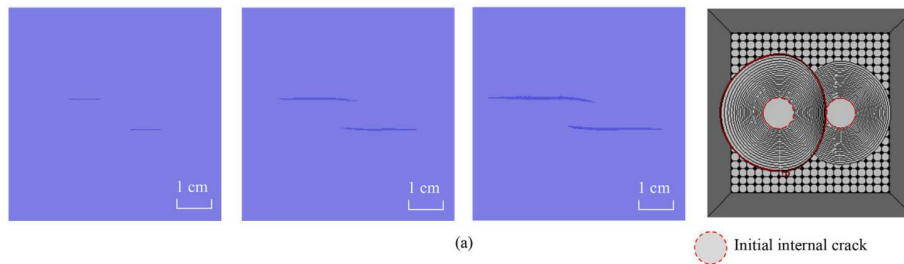


Figure A1.3\_51 : évolution en fatigue de fissures disque parallèles (WAN, 2022)

Facteur d'interaction de fissures écartées

Les facteurs d'interaction des fissures elliptiques (ISI, 1985) sont inférieurs ou proches de ceux des fissures bande que les fissures soient écartées ou non. Ceci est illustré pour l'interaction au point le plus proche (Figure A1.3\_52) et au point le plus éloigné (Figure A1.3\_53). Il est donc pénalisant de retenir les facteurs d'interaction des fissures bande (CHB, 2013 ; CHA, 2020) pour tous les cas de défauts elliptiques.

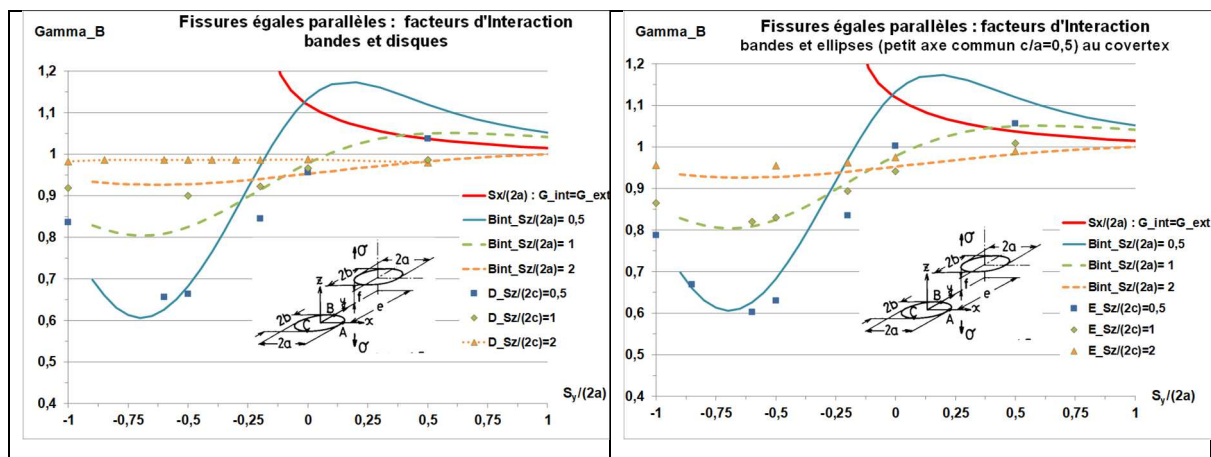


Figure A1.3\_52 : comparaison des facteurs d'interaction internes pour des fissures bande et elliptiques au point B

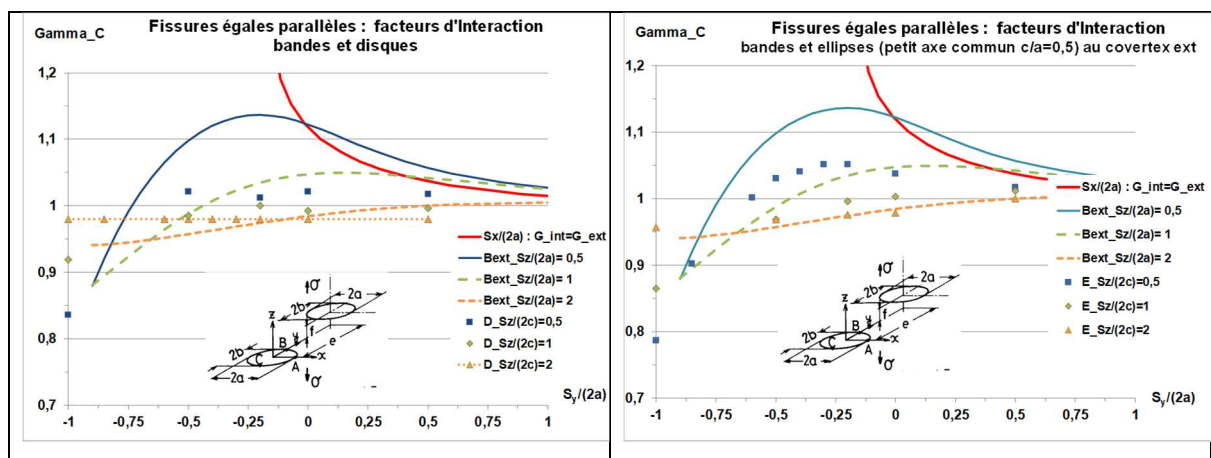


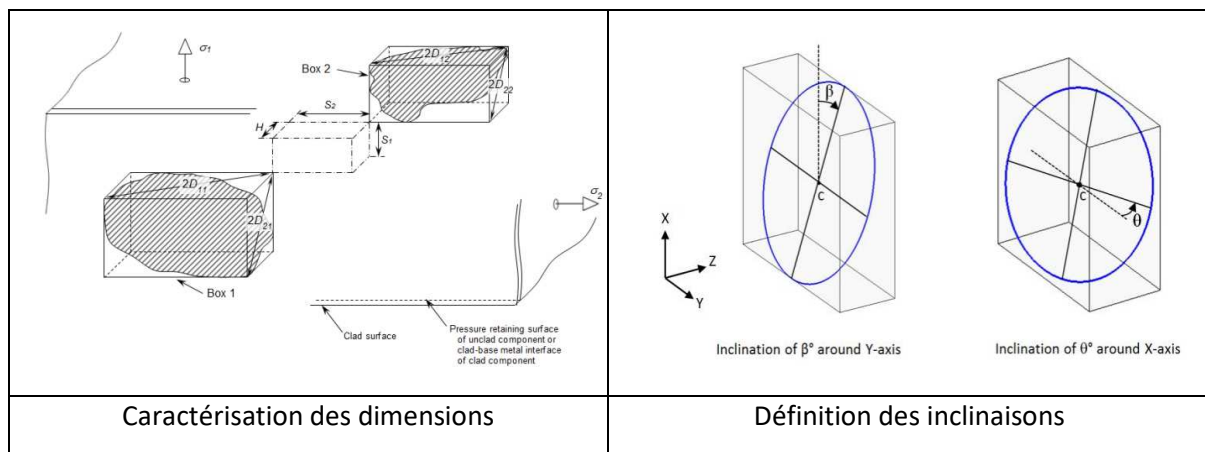
Figure A1.3\_53 : comparaison des facteurs d'interaction externes pour des fissures bande et elliptiques au point C

### A1.3.5. Fissures elliptiques inclinées

Comme retenu pour le cas des fissures bande, les fissures inclinées peuvent être traitées comme des fissures bande coplanaires en les projetant sur le même plan et en conservant le plus petit écartement hors-plan, mesuré avant projection. Cette solution peut sous-estimer l'interaction, aussi nous recommandons d'appliquer la technique proposée pour les fissures disque, qui consiste à faire pivoter la seconde fissure à partir du point le plus proche sur le plan parallèle à la première fissure.

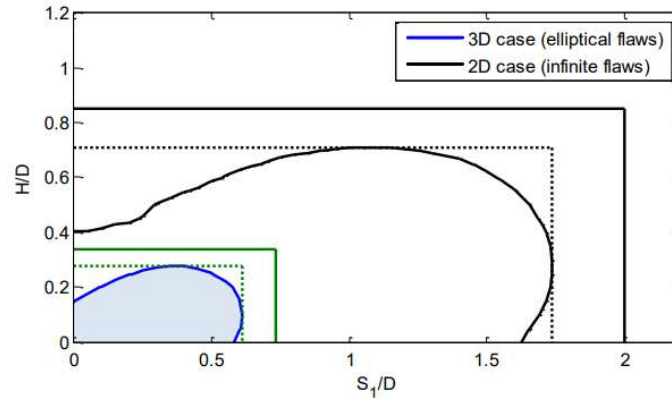
A notre connaissance dans la littérature, à l'exception des travaux de Dulieu et al. (DUL, 2015, LAC, 2015) sur l'interaction de fissures laminaires, les études de fissures inclinées ne portent que sur les fissures disque.

Les dimensions des fissures et leur inclinaison est mesurée en enveloppant les fissures dans un parallélépipède rectangle (Figure A1.3\_54). Le FIC équivalent est déterminé en utilisant la formule d'Irwin, comme préconisé dans le RSE-M (RSEM, 2020). Le tracé du critère est reproduit à la Figure A1.3\_55.



**Figure A1.3\_54 : définition des caractéristiques géométriques des fissures inclinées (DUL, 2015)**

Dans leur étude, les inclinaisons des deux fissures sont considérées comme égales. Les dimensions sont aussi égales, mais la généralisation des résultats aux fissures inégales est assurée en se référant à la taille de la plus petite fissure équivalente. Le massif est sollicité en traction uniaxiale. Le critère d'interaction à 6% est présenté en fonction des écartements rapportés à la demi-diagonale de la plus grande fissure, ce qui peut prêter à confusion car dans le cas de fissures parallèles les écartements sont rapportés aux longueurs.



**Figure A1.3\_55 : critères d'interaction des fissures inclinées (LAC, 2015)**

Cette approche est similaire à notre proposition d'appliquer une projection sur un plan parallèle à la première fissure par rotation de la seconde fissure.

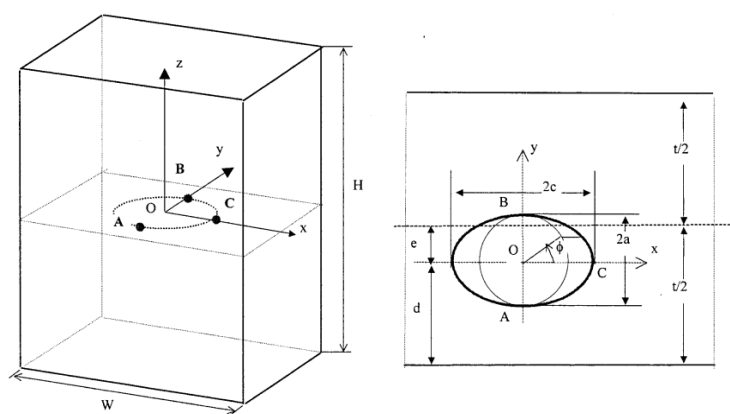
## A1.4. Interaction entre une fissure et un bord libre

L'analyse du comportement des fissures enfouies isolées dans un composant nécessite le traitement de deux problèmes.

1. L'interaction d'une fissure enfouie avec les surfaces, en particulier son effet sur les Facteurs d'Intensité des Contraintes.
2. La transformation d'une fissure enfouie en une fissure de surface. Ce qui pose la question de la tenue du ligament lorsque la fissure enfouie est proche de la surface. Des règles de proximité de la surface ont été établies afin de savoir si la fissure peut être analysée telle qu'elle ou s'il faut la transformer en fissure de surface.

Ces deux problèmes doivent être considérés dans la mise au point de la méthode du défaut équivalent à des défauts multiples. En effet cette méthode demande d'abord la détermination de l'interaction de défauts enfouis et ceux-ci peuvent interagir avec les surfaces s'ils sont proches d'elles. Ensuite la méthode transforme le défaut équivalent à tous les défauts enfouis en un défaut de surface.

Dans ce paragraphe, nous adoptons les notations des codes RCC-M (RCC-M, 2020) et RSE-M (RSE-M, 200,0 2020) comme illustré par la figure A1.4 1.



**Figure A1.4\_1 : notations pour le traitement de l'interaction entre fissure enfouie et surface libre proche (RSE-M, 2010)**

### A1.4.1. Formule de facteur d'interaction entre une fissure enfouie avec une surface libre

La fissure enfouie analysée est considérée proche d'une surface du composant. La présence de cette surface agit de façon similaire à l'action d'une fissure image située symétriquement par rapport à cette surface. Il est donc légitime d'utiliser le même type d'expression que pour deux fissures elliptiques coplanaires.

$$\gamma_{\text{Enf\_Int}} = 1 + A_{\text{Enf}} \cdot [F_{W_{E\_Co}}(c/a, \lambda_x, \lambda_y) - 1] \quad (\text{A1.4}_1)_-$$

La fissure est considérée comme éloignée de tout autre surface.



$F_{W\_E\_Co}$  est la fonction de Westergaard qui donne la contrainte normale à la fissure elliptique dans le plan de la fissure. Le paramètre  $\lambda$  traduit l'éloignement relatif  $a/d$  et  $A$  dépend du rapport d'aspect de l'ellipse.

Le facteur d'interaction devient singulier lorsque la fissure approche de la surface. Cette singularité est prise en compte par la fonction  $F_{W\_E}$ . Ce type de formule permet de décrire le facteur d'interaction sur tout le domaine de variation de  $\lambda$ .

La fonction d'influence  $i_0$  du RSE-M (RSE-M, 2000, 2020) pour une valeur faible de la taille relative de fissure ( $a/W = 0,05$ ) fournit le facteur d'interaction avec la surface pour les fissures elliptiques de grand axe parallèle à la surface. Toutefois cette solution n'est valable que si  $a/d < 0,9$ . En utilisant les résultats de Cook et Erdogan (COE, 1972), une formule prenant en compte la singularité apparaissant à  $a/d = 1$  est établie. Le facteur d'interaction ainsi obtenu pour le co-vertex est validé par comparaison (Figure A1.4\_2) aux résultats de Noguchi et al. (NOG, 1997). Pour des fissures proches de la surface, les résultats de Noguchi sont inférieurs aux prédictions et en particulier ignorent la singularité en  $\lambda = 1$ .

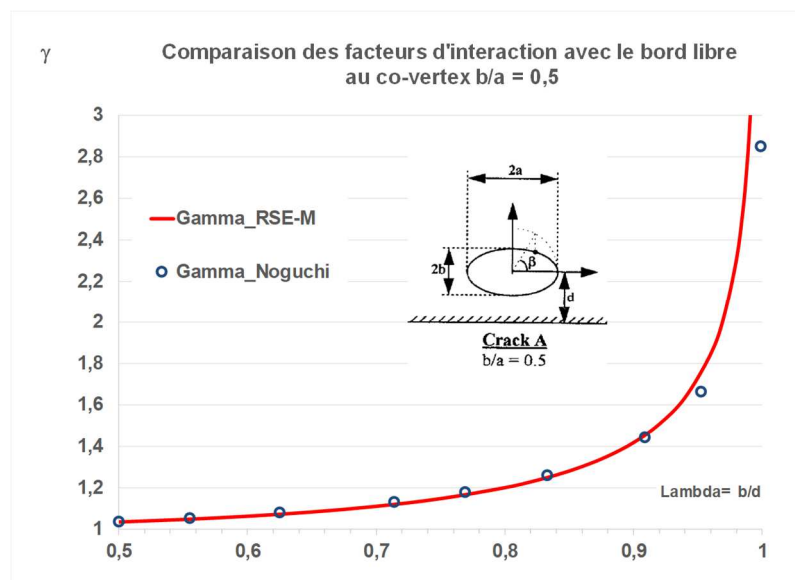
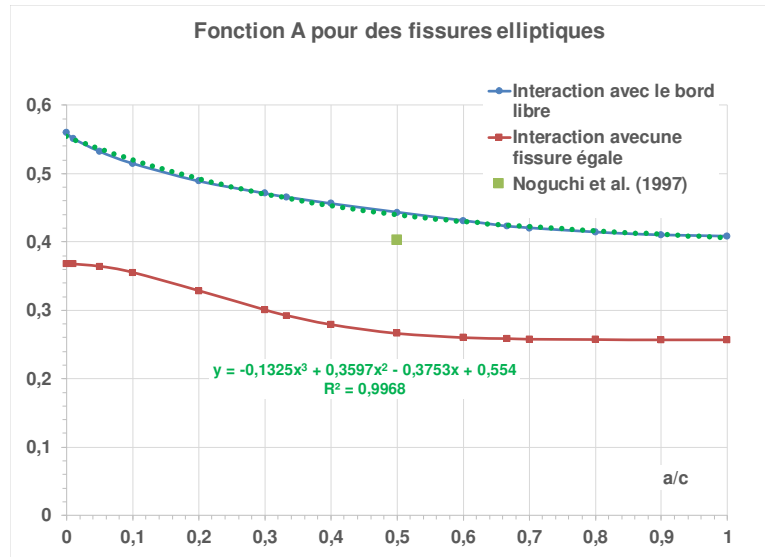


Figure A1.4\_2 : comparaison des facteurs d'interaction entre fissure enfouie et surface libre proche

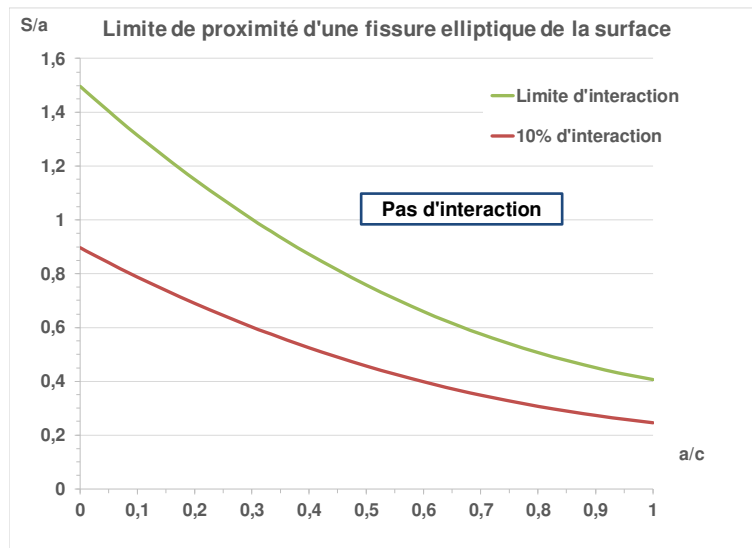
A partir de cette formule il vient l'expression suivante pour  $A_{Surf}$ .

$$A_{Surf} = -0.1325 \cdot (a/c)^3 + 0.3597 \cdot (a/c)^2 - 0.3753 \cdot a/c + 0,554 \quad (A1.4_2)$$



**Figure A1.4\_3 variations comparées de la fonction A avec le rapport d'aspect pour une fissure elliptique interagissant avec el bord libre et pour deux fissures elliptiques coplanaires de petits axes alignés**

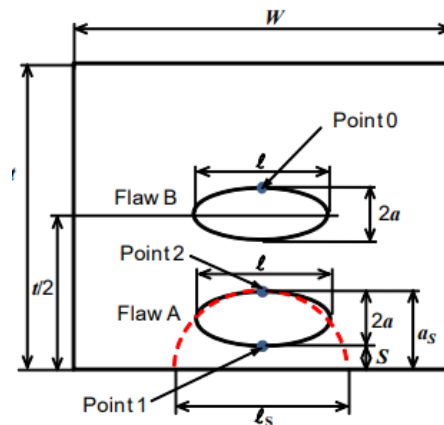
La comparaison des variations de la fonction A avec le rapport d'aspect pour deux fissures enfouies de petit axe alignés dans un milieu infini et pour une fissure proche d'une surface dans un milieu semi-infinie est illustrée à la figure A1.4\_3. Un effet important de la surface libre est encore constatable. Celui-ci s'atténue lorsque le ligament S augmente comme le montre la figure A1.4\_4.



**Figure A1.4\_4 : ligne d'interaction constante en fonction du rapport d'aspect pour une fissure elliptique excentrée : au-dessus de la courbe verte l'interaction avec la surface est négligeable**

### A1.4.1.1. Transformation d'une fissure elliptique avec un bord libre

Ces règles fixent la condition pour laquelle une fissure enfouie proche d'une surface est transformée en fissure de surface. La fissure enfouie est modélisée par une fissure elliptique de grand axe parallèle à la surface de façon à maximiser l'interaction. Ses demi-axes sont  $a$  et  $c$  et le ligament qui la sépare de la surface est noté  $S$  sur la figure A1.4\_5. La fissure de surface a une forme semi-elliptique de profondeur  $a_s = 2a + S$ , sa longueur varie suivant les approches. Ceci est illustré à la figure A1.4\_5.



**Figure A1.4\_5 : plaque à fissure bande excentrée en traction (HAS, 2016)**

Deux questions se posent pour une taille  $a$  connue :

- Quelle est la valeur de  $S/a$  ?
- Quelle est la valeur de la demi-longueur de fissure  $c_s$  ?

Cette approche est cohérente avec la définition du défaut équivalent à deux défauts enfouis. Elle consiste à identifier les FIC de la fissure enfouie au point le plus proche de la surface à celui de la fissure débouchante enveloppe afin de déterminer la taille du ligament minimal admissible.

Pour évaluer la tenue du ligament à la rupture brutale, il suffit de comparer le FIC de la fissure enveloppe au FIC critique  $K_{IC}$ . Cette approche est celle du dossier coudes moulés 2000, établie en considérant des fissures bande.

#### Cas des fissures bande

Les expressions des FIC sont les suivantes :

$$K_S = \sigma_{app} \cdot 1.1215 \cdot \sqrt{\pi \cdot a_s} \quad (A1.4_4a)$$

$$K_E = \sigma_{app} \cdot i_{0E} \left(0, \frac{a}{d}\right) \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (A1.4_4b)$$

Avec  $d = a + S$  et  $S$  le ligament entre le défaut enfoui et la surface libre.

Le paramètre d'interaction avec la surface est  $\lambda = \frac{a}{d} = \frac{a}{a+S}$

Le FIC enveloppe vaut :

$$K_{S_{Env}} = \sigma_{app} \cdot 1.1215 \cdot \sqrt{\pi \cdot (2a + S)} \quad (A1.4_4c)$$

La valeur critique de S est déterminée par :

$$K_{S_{Env}} = K_E$$

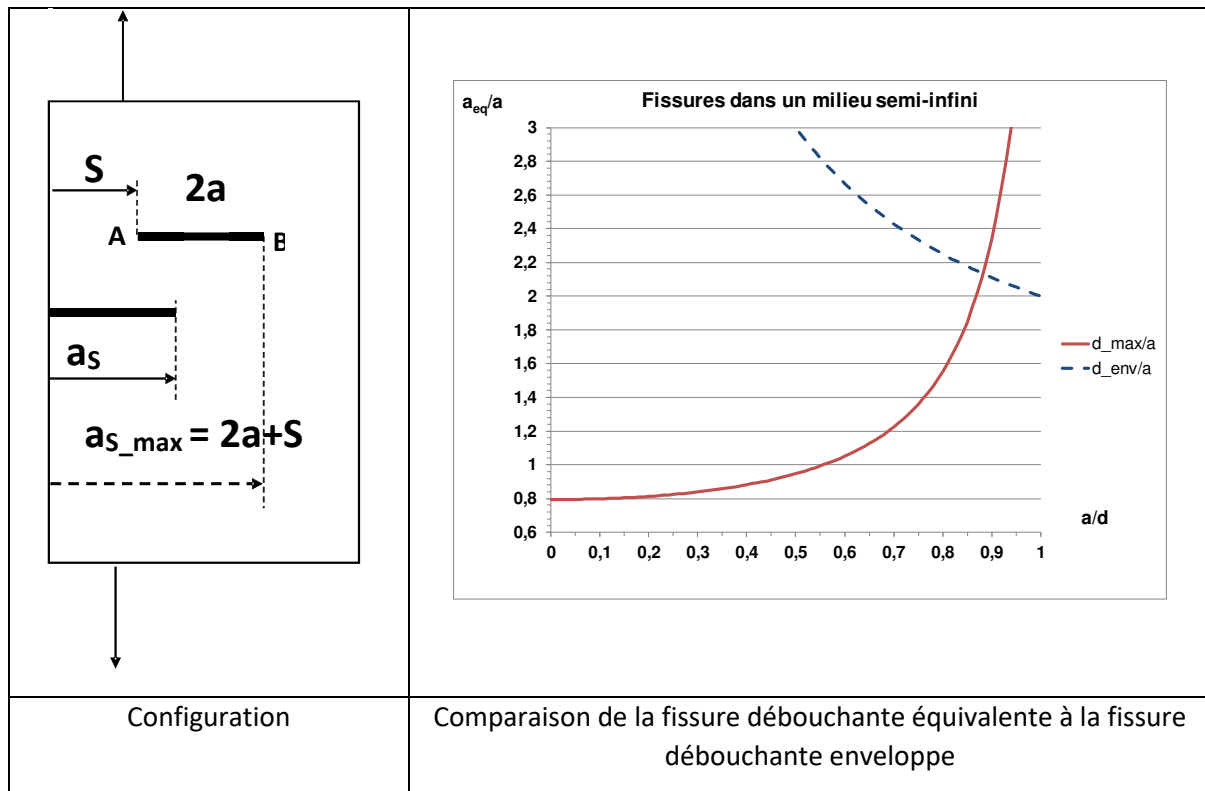
$$1 + \frac{1}{\lambda} = \left[ \frac{i_{0_E}(0, \lambda)}{1.1215} \right]^2$$

Ce qui donne :  $\lambda = 0.88227$  soit  $\frac{2a+S}{a} = 2.133$  ou encore  $\frac{S}{a} = 0.133$

Cela revient à comparer les deux termes de l'équation. Le second terme représente le rapport d'une taille de fissure de surface équivalente, telle que son FIC soit égal à celui de la pointe de fissure enfouie la plus proche de la surface.

$$a_{S_{Eq}} = \left[ \frac{i_{0_E}(0, \lambda)}{1.1215} \right]^2 \cdot a \quad (A1.4_5)$$

La figure A1.4\_6 décrit la configuration et le résultat de la comparaison des variations de FIC unitaires.



**Figure A1.4\_6 : détermination de la fissure bande débouchante enveloppe**

#### Cas des fissures semi-elliptiques et elliptiques enfouies

Dans un milieu semi-infini, les expressions des FIC de la fissure semi-elliptique de surface et de la fissure elliptique enfouie sont les suivantes.

$$K_S = \sigma_{app} \cdot i_{0_S}(a_S/c) \cdot \sqrt{\pi \cdot a_S} \quad (A1.4_6a)$$

$$K_E = \sigma_{app} \cdot i_{0_E}(a/c, a/d) \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (A1.4\_6b)$$

Le coefficient d'influence  $i_{0_S}(a_S/c)$  pour le point en fond de fissure est tabulé dans le code RSE-M. (RSEM, 2000). Elles sont en excellent accord avec les valeurs obtenues par Nisitani et Murakami (NIM, 1974) : l'écart est au maximum de 1,2% et en moyenne de 0,6%, les valeurs du RSEM étant les plus élevées.

La fonction suivante en donne une représentation précise :

$$i_{0_S}(a_S/c) = 1.1215 - 0.1275 \cdot a/c - 1.5647 \cdot (a/c)^2 + 2.2336 \cdot (a/c)^3 - 1.0059 \cdot (a/c)^4 \quad (A1.4\_7)$$

Si  $a/c$  est considéré comme identique pour la fissure en fouie et la fissure semi-elliptique, alors le raisonnement suivi pour la fissure bande peut être reconduit.

$$\text{Le FIC enveloppe vaut : } K_{S\_Env} = \sigma_{app} \cdot i_{0_S}(a/c) \cdot \sqrt{\pi \cdot (2a + S)}$$

Fissure équivalente :

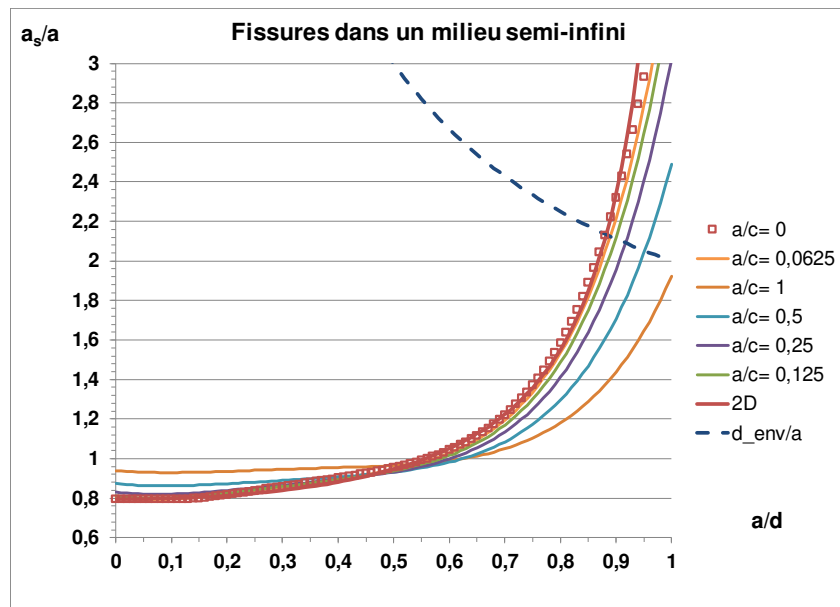
$$\frac{a_S}{a} = \left[ \frac{i_{0_E}(a/c, a/d)}{i_{0_S}(a/c)} \right]^2 \quad (A1.4\_8)$$

Fissure enveloppe :

$$K_{S\_Env} = K_E$$

$$\frac{2a + S}{a} = 1 + \frac{d}{a} = \left[ \frac{i_{0_E}(a/c, a/d)}{i_{0_S}(a/c)} \right]^2 \quad (A1.4\_9)$$

La valeur critique décroît lorsque le rapport d'aspect  $a/c$  varie de 0 (fissure bande) à 1 (fissure disque) comme le montre la figure A1.4\_7.



**Figure A1.4\_7 : comparaison des fissures semi-elliptiques débouchantes équivalentes à la fissure semi-elliptique débouchante enveloppe**

Dans cette approche la longueur de la fissure enveloppe n'est pas déterminée précisément. Physiquement le percement aboutit à une fissure de longueur voisine (ou légèrement supérieure à)

de celle de la fissure enfouie (KIK, 2013). Donc nous retiendrons la longueur proposée dans le code RCC-M (RCC-M, 2017 et 2019) ce qui sera explicité au voir § suivant.

Donc les dimensions de la fissure semi-elliptique enveloppe est :

$$a_S = 2a + S \quad (A1.4_{10a})$$

$$c_S = 1.125 c \quad (A1.4_{10b})$$

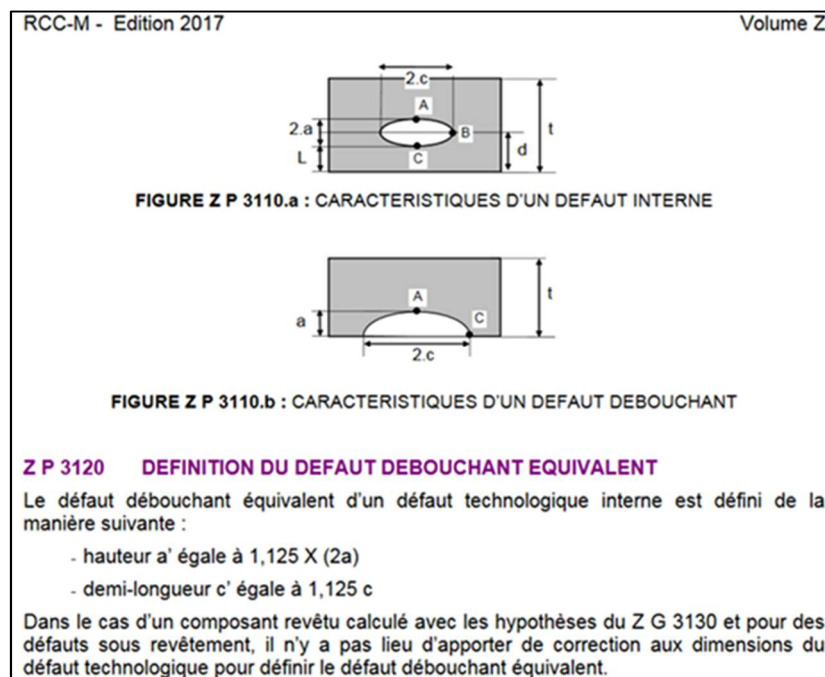
#### Comparaison avec la règle du code RCC-M

Le code RCC-M (RCC-M, 2020) définit le défaut débouchant équivalent de la façon suivante (Figure A1.4\_8) :

$$\frac{a_D}{a} = 2 \cdot 1.125 = 2.25 \quad (A1.4_{11a})$$

Soit

$$\frac{S}{a} = 0.25 \quad (A1.4_{11b})$$



**Figure A1.4\_8 : définition du défaut débouchant équivalent (code RCC-M (RCC-M, 2020))**

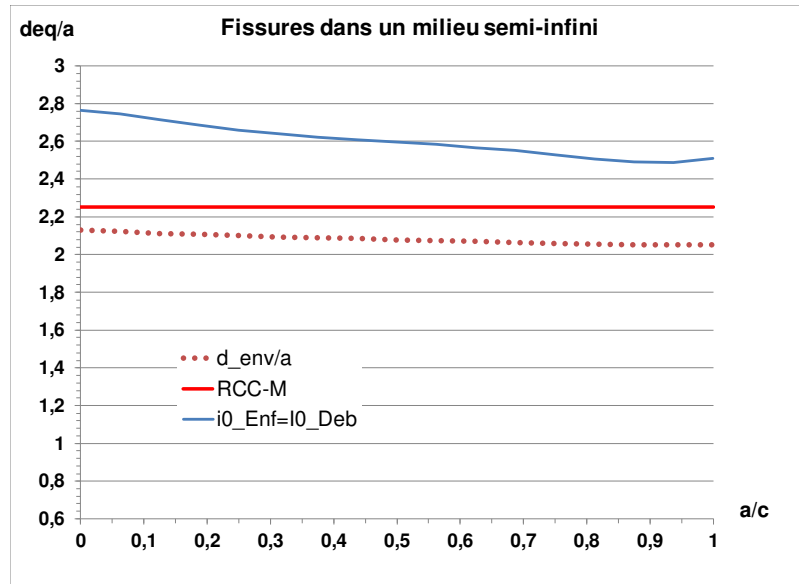


Figure A1.4\_9 : défaut débouchant équivalent

La figure A1.4\_9 compare les tailles de défaut débouchant semi-elliptique équivalent selon le code RCC-M (trait rouge continu) à la détermination par les formules qui tiennent compte du rapport d'aspect (trait pointillé rouge) en suivant la condition du code RCC-M (RCC-M, 2020). La courbe bleue donne une équivalence qui ne tient pas compte de la rupture du ligament.

### A1.4.1.2. Traitement de l'effet de surface libre sur les fissures elliptiques enfouies

#### Fissure de grand axe parallèle à la surface

C'est le cas de la plus forte interaction.

La prise en compte de l'effet de proximité de la surface sur une fissure enfouie s'effectue de trois façons différentes selon la valeur du rapport du ligament  $S$  à la demi-largeur de fissure enfouie  $a$  :

- $S/a < 0,25$  : la fissure est transformée en une fissure semi-elliptique de surface de profondeur  $2,25 \cdot a$  et de demi-longueur longueur  $1,125 \cdot c$ . Cette fissure de surface est équivalente en nocivité à la fissure enfouie déterminée au point suivant (2) pour un rapport  $S/a = 0,25$ .
- $\frac{S_{Lim}}{a} > \frac{S}{a} \geq 0,25$  : il y a une interaction forte au point le plus proche de la surface. La taille de la fissure enfouie est modifiée à  $a/c$  constant.

$$\alpha_e = \frac{\gamma^2}{2}$$

$$\gamma_{Enf\_Int} = 1 + A_{Surf} \cdot \left[ F_{WE} \left( c/a, 1/\lambda, 0 \right) - 1 \right] \quad (A1.4_{12})$$

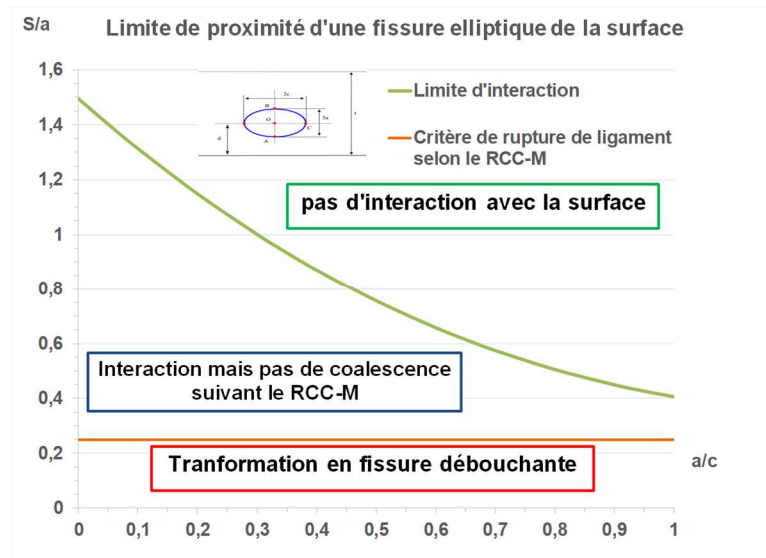
Avec

$$\lambda = \frac{a}{a+S} \text{ et } A_{Surf} = -0.1325 \cdot (a/c)^3 + 0.3597 \cdot (a/c)^2 - 0.3753 \cdot a/c + 0,554$$

Si  $\frac{S}{a} > \frac{S_{Lim}}{a}$  : la fissure enfouie est traitée comme isolée.  
 Avec

$$\frac{S_{Lim}}{a} = 1.4931 - 1.8617 \cdot a/c + 0.7798 \cdot (a/c)^2 \quad (A1.4_{13})$$

Les trois domaines sont présentés à la figure A1.4\_10.



**Figure A1.4\_10 : recharacterisation des fissures enfouies en fonction de la distance relative à la surface S/a et le rapport d'aspect**

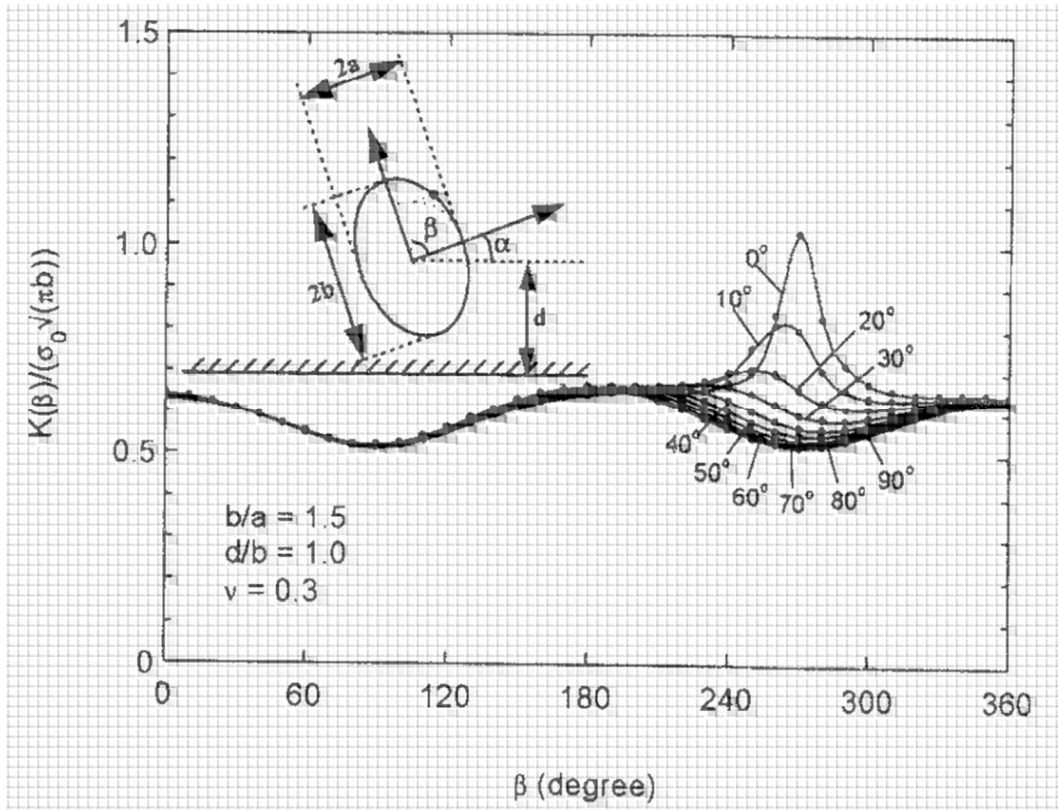
L'interaction du point le plus proche diminue d'autant plus que le rapport d'aspect est faible.

#### Fissure de petit axe parallèle à la surface

C'est le cas de la plus faible interaction. Pour cette raison, il n'y pratiquement pas d'études sur ce sujet. Le facteur d'interaction Nous ne disposons que d'un seul résultat, celui obtenu par Noguchi et al. (NOG, 1997). De plus les résultats de Noguchi sont sous-estimés pour des valeurs  $\lambda > 0,85$  Néanmoins on peut utiliser ces résultats pour obtenir une estimation de la variation du facteur d'interaction au vertex.

La configuration est décrite à la figure A1.4\_11 : le rapport d'aspect b/a vaut 1,5 et La distance du centre de l'ellipse d est fixe et égale au demi-grand axe b. Le facteur d'amplification M est calculé pour différentes valeurs de l'angle  $\alpha$  et de l'angle  $\beta$  en degrés.





**Figure A1.4\_114 : interaction d'une fissure elliptique enfouie ( $c/a = 1,5$ ) avec la surface libre en fonction de l'inclinaison de l'axe pour une position fixée du centre (NOG; 1997)**

Pour  $\alpha = 0$  et  $\beta = 270$  la fissure touche la surface en théorie. Ce cas doit donner une valeur singulière mais le calcul a dû être effectué pour un ligament très petit devant 1. Nous considérons que  $b/d$  vaut 0,99. La valeur de  $M$  est de 1,03 ce qui donne un facteur d'interaction de 2,043.

Pour  $\alpha + \beta = 270$ , et  $\alpha$  faible, l'interaction a lieu presque au vertex. Sur la plage des rotations comprise en 0 et 90 degrés, l'interaction passe du vertex au covertex,

La prévision des facteurs d'interaction est complexe dans le cas des fissures inclinées. En effet il faut évaluer le paramètre d'interaction  $\lambda$  qui est donné par le rapport de la distance entre le point d'interaction  $M$  à l'axe et la distance entre la surface et l'axe, distances évaluées sur la normale au point d'interaction. Il est plus simple de raisonner sur les projections de ces distances sur l'axe vertical notées  $b^*$  et  $d^*$  (Figure A1.4\_12).

La détermination de ces distances et donc de  $\lambda$  est obtenue à partir des équations suivantes :

Le point  $M$  a pour coordonnées pour une rotation d'angle  $\omega$ :

$$\begin{aligned} x_{\text{Min}} &= a \cdot \cos \phi_{\text{Min}} \cdot \cos(-\omega) + c \cdot \sin \phi_{\text{Min}} \cdot \sin(-\omega) \\ y_{\text{Min}} &= -a \cdot \cos \phi_{\text{Min}} \cdot \sin(-\omega) + c \cdot \sin \phi_{\text{Min}} \cdot \cos(-\omega) \\ \phi_{\text{Min}} &= \text{Acot} \left[ -\frac{a}{c} \cdot \tan(\omega) \right] \end{aligned} \quad (\text{A1.3}_46\text{a})$$

Les coordonnées du point d'intersection de l'axe le plus proche de  $M$  et de la normale en  $M$ , appelé point clé sont les suivantes :

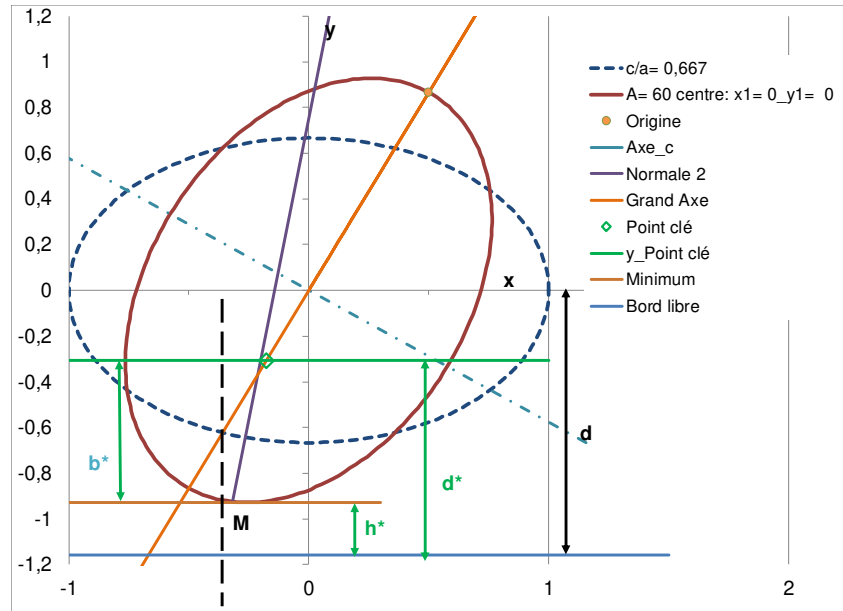
$$y_{Clé} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{a}{c} \right)^2 \cdot \frac{y_{Min}}{x_{Min}} \cdot \tan \left( \omega + \frac{\pi}{2} \cdot p \right) \right] = y_{Min} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{a}{c} \right)^2 \right]$$

$$\begin{cases} p = 1 & \text{si } 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{4} \\ p = 2 & \text{si } \frac{\pi}{4} < \omega \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (A1.4_{13a})$$

$$x_{Clé} = y_{Clé} \tan \left( \omega + \frac{\pi}{2} \right) \quad (A1.4_{13b})$$

La distance  $b^*$  est la projection sur l'axe y de la longueur de fissure effective et  $h^*$  est la distance du point le plus bas à la surface.

$$\begin{aligned} d &= -y_{Min} + h^* \\ b^* &= -y_{Min} + y_{Clé} \\ d^* &= y_{Clé} + d \\ d &= -y_{Min} + d^* - b^* \\ \lambda &= \frac{b^*}{d^*} \end{aligned} \quad (A1.4_{14})$$



**Figure A1.4\_12 : estimation du paramètre d'interaction pour des fissures elliptiques enfouies désorientées par rapport à la surface**

Une fois déterminé  $\lambda$ , l'inversion de la formule ( ) à partir des valeurs obtenues numériquement par Noguchi et al., donne alors une valeur de la fonction A.

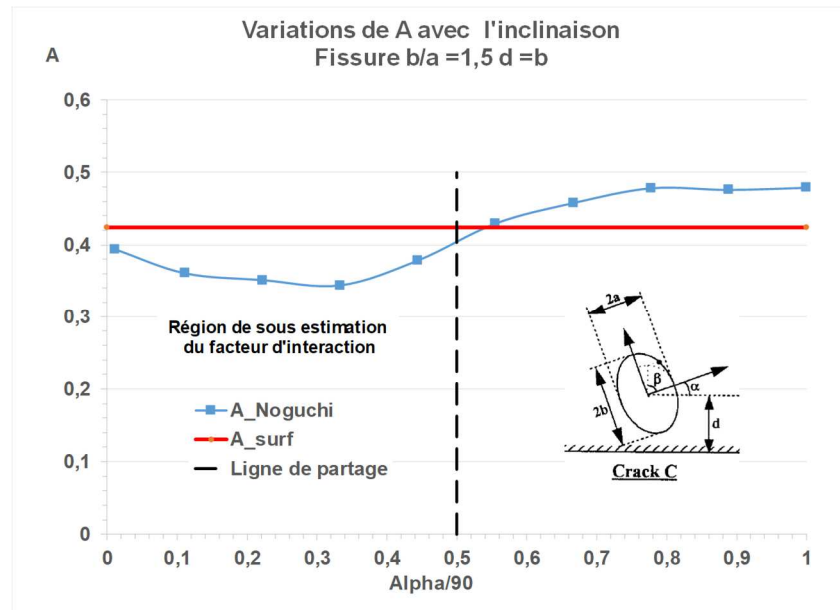
Si l'interaction a lieu au vertex, il faut utiliser l'équation suivante

$$1 + A \cdot \left[ F_{WE} \left( c/a, 1/\lambda, 0 \right) - 1 \right] - \gamma_{Num} = 0 \quad (A1.4_{15})$$

Si la normale intersecte le grand axe, comme tous pour tous les cas de la configuration C sauf pour les angles de rotation très faibles, il faut utiliser l'équation suivante :

$$1 + A \cdot \left[ F_{WE} \left( c/a, 0, 1/\lambda \right) - 1 \right] - \gamma_{Num} = 0 \quad (A1.4_{16})$$

Les valeurs varient peu avec l'angle de rotation et l'écart par rapport à la valeur de 0,424 obtenue dans le cas de l'interaction au covertex pour le même rapport d'aspect (Figure A1.4\_13).



**Figure A1.4\_13 : estimation du paramètre d'interaction A pour une fissure elliptique enfouie désorientée par rapport à la surface**

Les écarts entre cette valeur de 0,424 et celles obtenues en inversant les résultats de Noguchi s'expliquent par des imprécisions des calculs surtout dans le domaine des fissures proches de la surface.

En considérant A comme constant et égal à  $A_{Co\text{-}vertex}$  on peut comparer les valeurs du facteur d'interaction théoriques à celle de Noguchi et al. (Figure A1.4\_14 et 15).

L'accord est très bon pour des angles de rotation  $\alpha > 20$  degrés (Figure A1.4\_14). Mais les calculs de Noguchi ne prennent pas en compte le comportement singulier à l'interface. Le paramètre varie depuis la valeur 1 relative à l'interaction au vertex, que la valeur  $2/3$  qui est le rapport du demi-petit axe a à d.

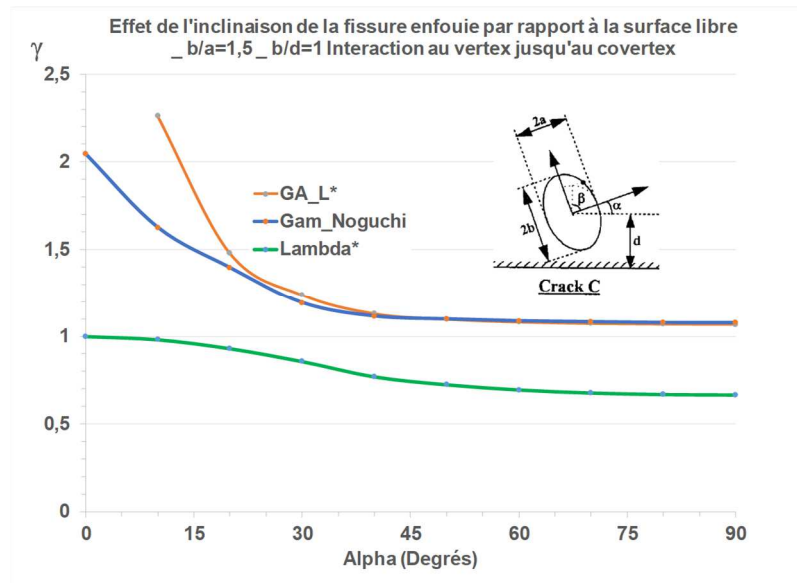


Figure A1.4\_14 : comparaison des facteurs d'interaction prédits et ceux de Noguchi et al. (NOG, 1977)

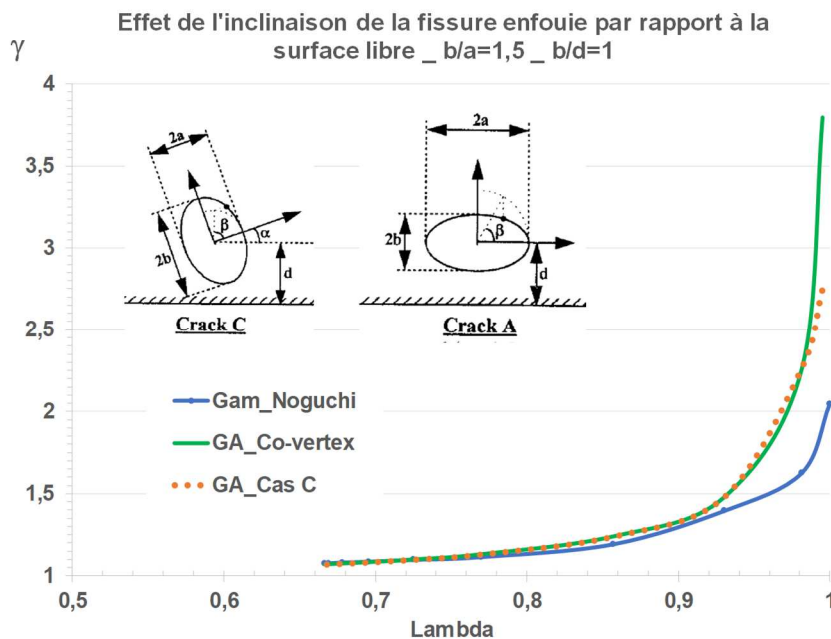
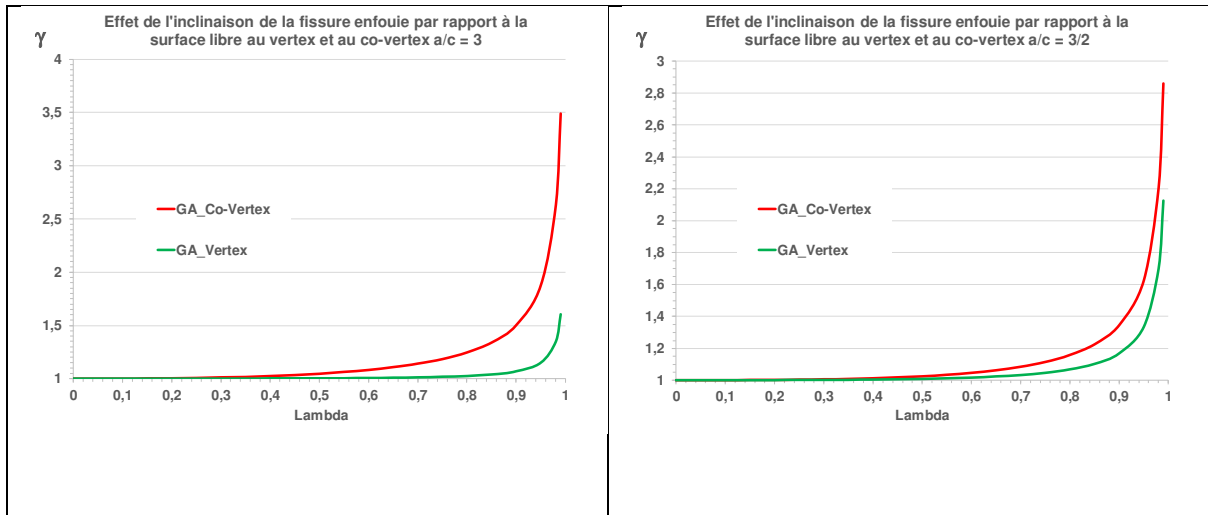


Figure A1.4\_15 : comparaison des facteurs d'interaction prédits pour les fissures de type C et ceux de l'interaction au co-vertex et de Noguchi et al. (NOG, 1997)

Pour les fissures de type C, la variation de l'inclinaison provoque à la fois un éloignement de la surface et un changement de la position du point d'interaction.

L'application de notre solution au cas de l'interaction au vertex et au co-vertex est illustrée à la figure A1.4\_16.



**Figure A1.4\_16 : comparaison des facteurs d'interaction de fissures elliptiques avec la surface libre pour deux rapports d'aspect  $a/c = 3$  et  $3/2$ .**

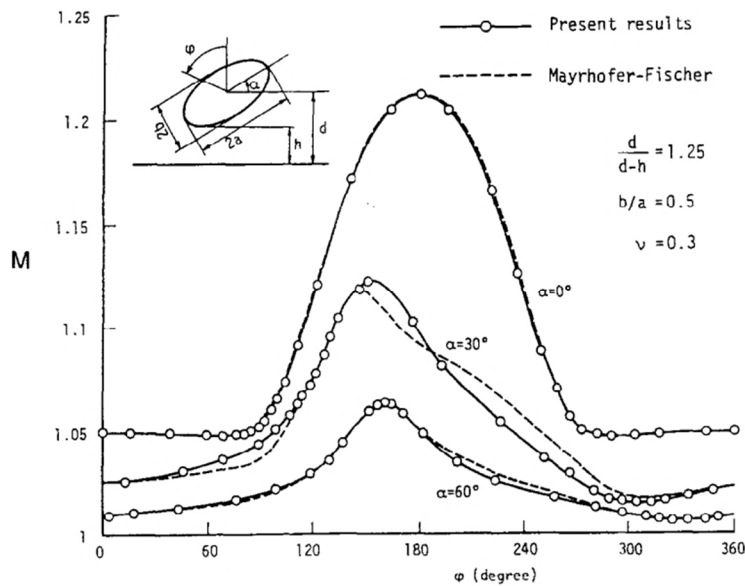
Il est clair que l'interaction au co-vertex est toujours plus forte au co-vertex et que cette différence s'amplifie avec l'augmentation du rapport d'aspect  $a/c$ .

Fissure de grand axe incliné par rapport à la surface

L'interaction du point le plus proche diminue d'autant plus que le rapport d'aspect est faible.

Le bord libre est parallèle à l'axe x.

Noguchi et al. (NOG, 1997) ont étudié le cas de fissures elliptiques proches du bord libre d'axe parallèle et/ou désorientées par rapport au bord libre (Figure A1.4\_17).



**Figure A1.4\_17 : facteur d'interaction du FIC pour des fissures elliptiques enfouies désorientées par rapport à la surface (NOG, 1997)**

Le facteur d'interaction  $\gamma$ , noté M par erreur sur la figure A1.4\_17, diminue fortement lorsque l'angle de l'axe de l'ellipse avec la surface libre augmente.

La condition suivante est imposée :  $\frac{d}{d-h} = 1,25$

Soit :  $\frac{h}{d} = 0,2$  et  $:\frac{-y_{\text{Min}}}{d} = 0,8$ .

Dans ce cas les paramètres  $b^*$  et  $d^*$  de la figure A1.4\_12 sont donnés par les équations suivantes :

$$b^* = -y_{\text{Min}} + y_{\text{Clé}}$$

$$h^* = y_{\text{Min}} + d = -y_{\text{Min}} \cdot \frac{0,2}{0,8} = -0,25y_{\text{Min}}$$

Donc :

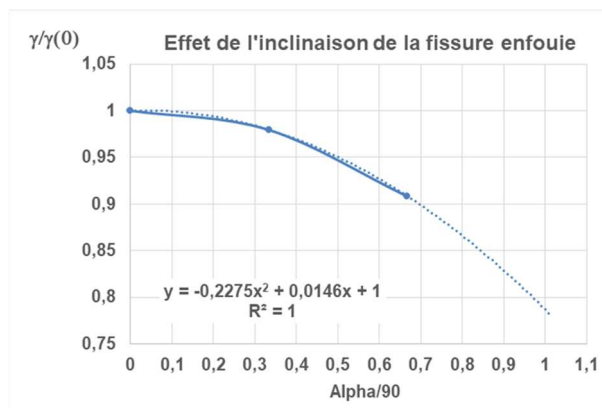
$$\lambda = \frac{b^*}{d^*} = \frac{-y_{\text{Min}} + y_{\text{Clé}}}{-y_{\text{Min}} + y_{\text{Clé}} - 0,25y_{\text{Min}}} = \frac{y_{\text{Min}} - y_{\text{Clé}}}{1,25y_{\text{Min}} - y_{\text{Clé}}} \quad (\text{A1.4}_17)$$

Les valeurs maximales de M sont rapportées à celle correspondant à l'angle  $\alpha=0$  (Tableau A1.4\_1).

$\alpha$	$\alpha/90$	a/c	Condition	$\gamma$	$\gamma/\gamma(0)$	$b^*$	$d^*$	$\lambda$	A	A_Ref	$\frac{\gamma}{\gamma_{\text{Num}} - 1}$
0	0	0,5	Lig/d=0,2	1,215	1	0,5	0,625	0,8	0,4777	<b>0,424</b>	-1,4
30	0,3333	0,5	Lig/d=0,2	1,215	0,9300	0,379	0,544	0,696	0,5149	<b>0,424</b>	-1,6
60	0,6667	0,5	Lig/d=0,2	1,215	0,8765	0,347	0,574	0,606	0,4704	<b>0,424</b>	-0,4
<b>90</b>	<b>1</b>	<b>2/3</b>	<b>Lig=0,01</b>	<b>1,215</b>				<b>0,99</b>	<b>0,404</b>	<b>0,440</b>	<b>4,1</b>

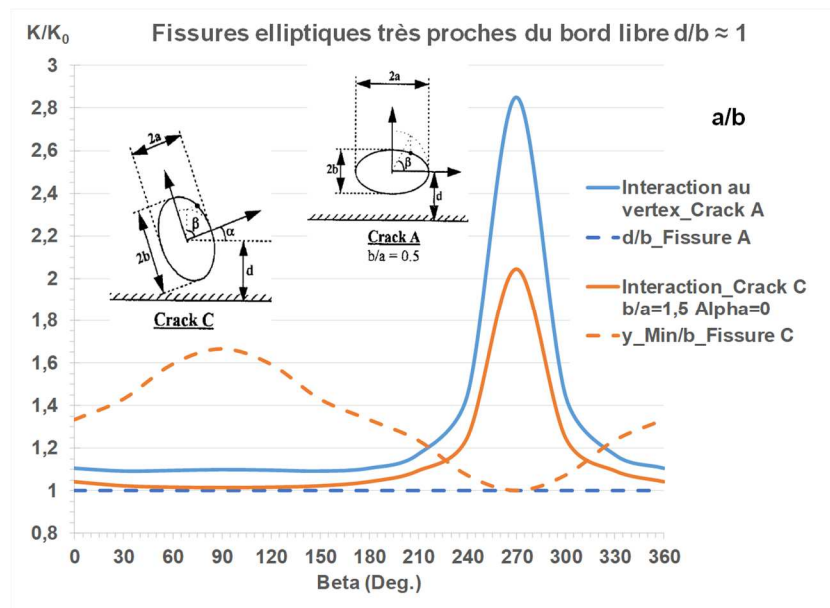
**Tableau A1.4\_1 : estimation des facteurs d'interaction pour des fissures elliptiques enfouies désorientées par rapport à la surface (Lig =h sur la Figure A1.4\_17)**

La figure A1.4\_18 met en évidence une diminution du facteur d'interaction avec l'inclinaison par rapport à la surface libre.



**Figure A1.4\_18: diminution du facteur d'interaction avec l'angle de désorientation des fissures elliptiques enfouies par rapport à la surface**

La figure A1.4\_19 fournit une fonction du facteur d'interaction avec l'angle d'inclinaison.



**Figure A1.4\_19 : variation du facteur d'interaction avec l'angle de désorientation des fissures elliptiques enfouies par rapport à la surface**

La conclusion majeure de ce paragraphe est la désorientation des fissures l'une par rapport à l'autre ou par rapport à la surface n'a pas d'effet sur la fonction A. Les valeurs de la fonction A relatives à l'interaction à la surface sont supérieures à celles de l'interaction entre fissures égales. L'effet de désorientation est pris en compte par la valeur du paramètre  $\lambda$  et la fonction des contraintes normales  $F_{W,E}$ .

#### A1.4.2. Interaction entre une fissure enfouie et une fissure de surface

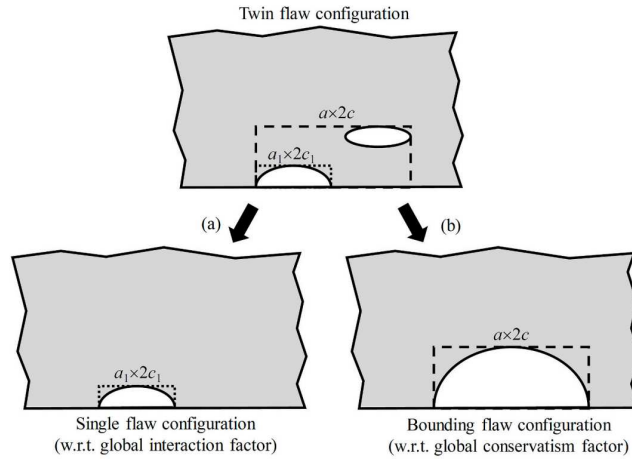
A notre connaissance, dans la littérature, il n'existe pas d'études entre une fissure bande enfouie et une fissure bande débouchante sauf pour l'interaction macro fissure - microfissure. L'interaction entre une fissure bande semi-infinie et une microfissure circulaire a été étudiée en détail par Laures (LAK, 1991). L'auteur montre que l'interaction en 3D est similaire à celle de configurations 2D.

Très peu d'articles sont consacrés à l'analyse de l'interaction entre fissure elliptique enfouie et fissure semi-elliptique de surface.

##### Etude de Samadian et al.

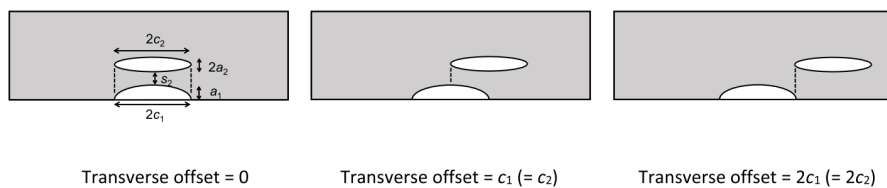
Samadian et al. (SAM, 2022) ont étudié l'interaction entre fissure enfouie et fissure de surface par calcul aux éléments finis. Les fissures sont modélisées par suppression des mailles dans un maillage dense. La force d'extension de fissure est calculée à partir des déplacements d'ouverture de fissure. La structure est un tube pressurisé. L'étude est menée en élasticité et en élasto-plasticité suivant une loi de Ramberg-Osgood.

Le schéma de recharacterisation en une fissure semi-elliptique unique est présenté à la figure A1.4\_20. Ce schéma est conforme à celui adopté dans les codes et standards (voir chapitre 1).



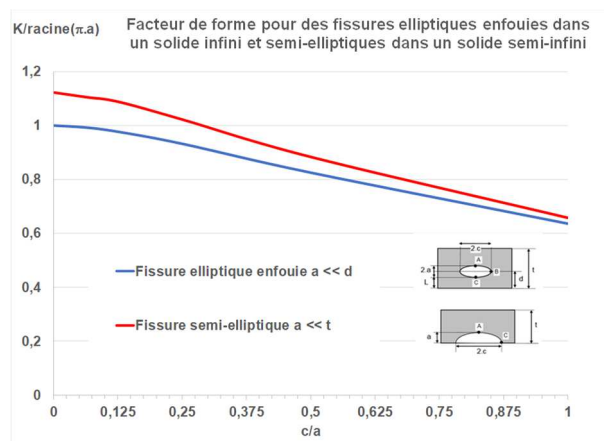
**Figure A1.4\_20 : définition des fissures semi-elliptiques équivalentes à une fissure elliptique enfouie interagissant avec une fissure semi-elliptique.**

L'étude porte sur l'interaction au co-vertex entre une fissure elliptique enfouie de grand axe parallèle à la surface et une fissure de surface semi-elliptique. Les fissures elliptiques et semi-elliptiques ont des grands axes identiques et le même rapport d'aspect. L'effet de décalage des fissures est analysé (Figure A1.4\_21).



**Figure A1.4\_21 : configurations analysées**

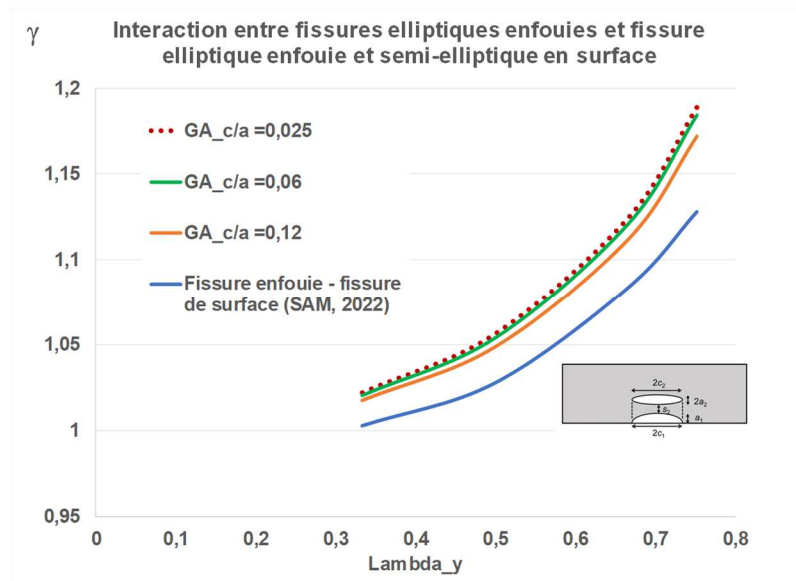
A même longueur et même rapport d'aspect, les fissures semi-elliptiques de surface ont des facteurs d'intensité des contraintes supérieurs à ceux des fissures enfouies (Figure A1.4\_22).



**Figure A1.4\_22 : comparaison des facteurs de forme de fissures enfouies et semi-elliptique de même rapport d'aspect et de même longueur (SAM, 2022)**



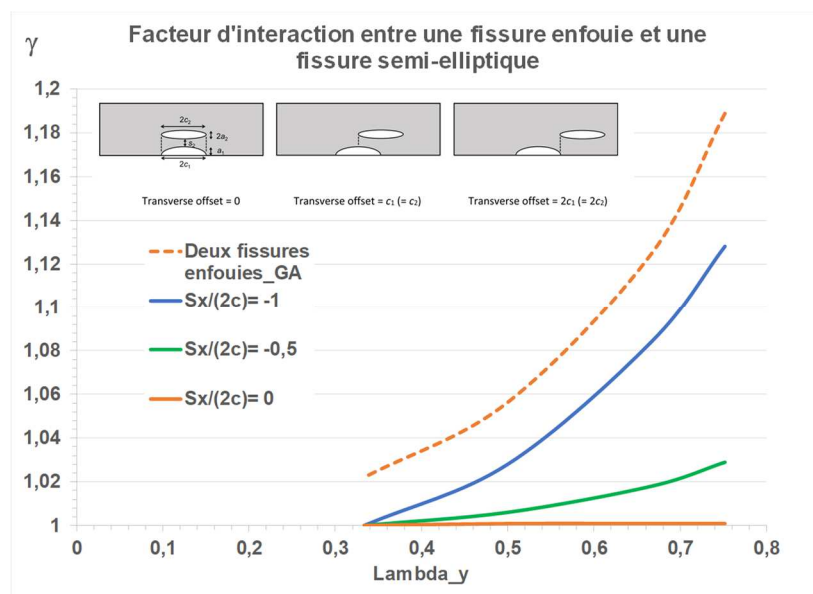
Les valeurs maximales des facteurs d'interaction pour le cas sans décalage sont représentées à la figure A1.4\_23. Aucune information n'est fournie pour savoir pour quelle fissure l'interaction est la plus forte.



**Figure A1.4\_23 : comparaison des facteurs d'interaction entre deux fissures enfouies (formule GA) et fissure enfouie et fissure semi-elliptique avec un petit axe commun (SAM, 2022)**

Les calculs de Samadian et al. (SAM, 2022) sous-estiment les facteurs d'interaction entre fissure enfouie et fissure semi-elliptique. En effet l'interaction est plus forte entre fissure elliptique et fissure semi-elliptique de petits axes alignés comme le montre l'étude de Dulieu et al. (DLH, 2019).

L'effet de décalage du petit axe de la fissure elliptique enfouie par rapport à celui de la fissure de surface est illustré à la figure A1.4\_24. Les valeurs sont sous-estimées, mais cet effet est important. Pour un décalage de valeur égale à la longueur de fissure, l'interaction est négligeable.

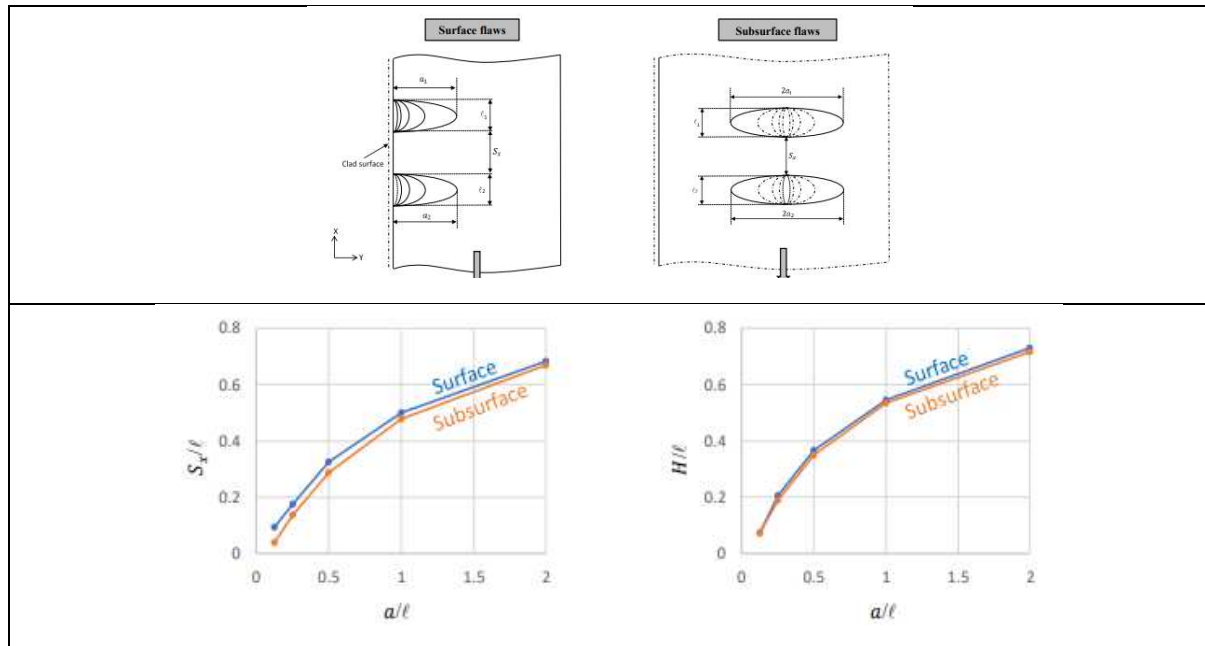


**Figure A1.4\_24 : comparaison des facteurs d'interaction entre fissure semi-elliptique et fissure enfouie tradatée parallèlement à la surface (SAM, 2022)**

### Etude de Dulieu et al.

Dulieu et al. (DLH, 2019) ont apporté une solution complète et fiable au problème de l'interaction entre fissure enfouie et fissure semi-elliptique de surface ayant un axe en commun. Nous les appellerons fissures parentes.

La Figure A1.4\_25 tirée de cet article montre que l'interaction entre une fissure de surface prolate et une fissure enfouie ayant leurs petits axes en commun, est identique à celle de deux fissures enfouies ayant leurs petits axes en commun, pour toutes les combinaisons d'écartements  $S_x/(2a)$  et  $S_z/(2a)$  avec, suivant nos notations,  $l = 2a$ .



**Figure A1.4\_25 : comparaison des facteurs d'interaction entre deux fissures semi-elliptiques et deux fissures enfouies ayant leurs petits axes en commun et leur grand axe normal à la surface (DLH, 2019)**

Il n'en va pas de même si les fissures ont leurs grands axes parallèles à la surface. L'interaction au co-vertex entre la fissure de surface et la fissure enfouie est supérieure à celle de deux fissures enfouies et ce d'autant plus que leur grand axe est supérieur au petit. Ceci est attesté pour toutes les combinaisons d'écartements  $S_x/(2a)$  et  $S_z/(2a)$  avec, suivant nos notations,  $l = 2a$  (Figure A1.4\_26).

En revanche si l'axe parallèle à la surface est le petit axe, les facteurs d'interaction sont les mêmes comme le démontre l'étude de Dulieu et al. (DLH, 2019). Ce qui est conforme avec la tendance observée pour l'interaction avec la surface libre.

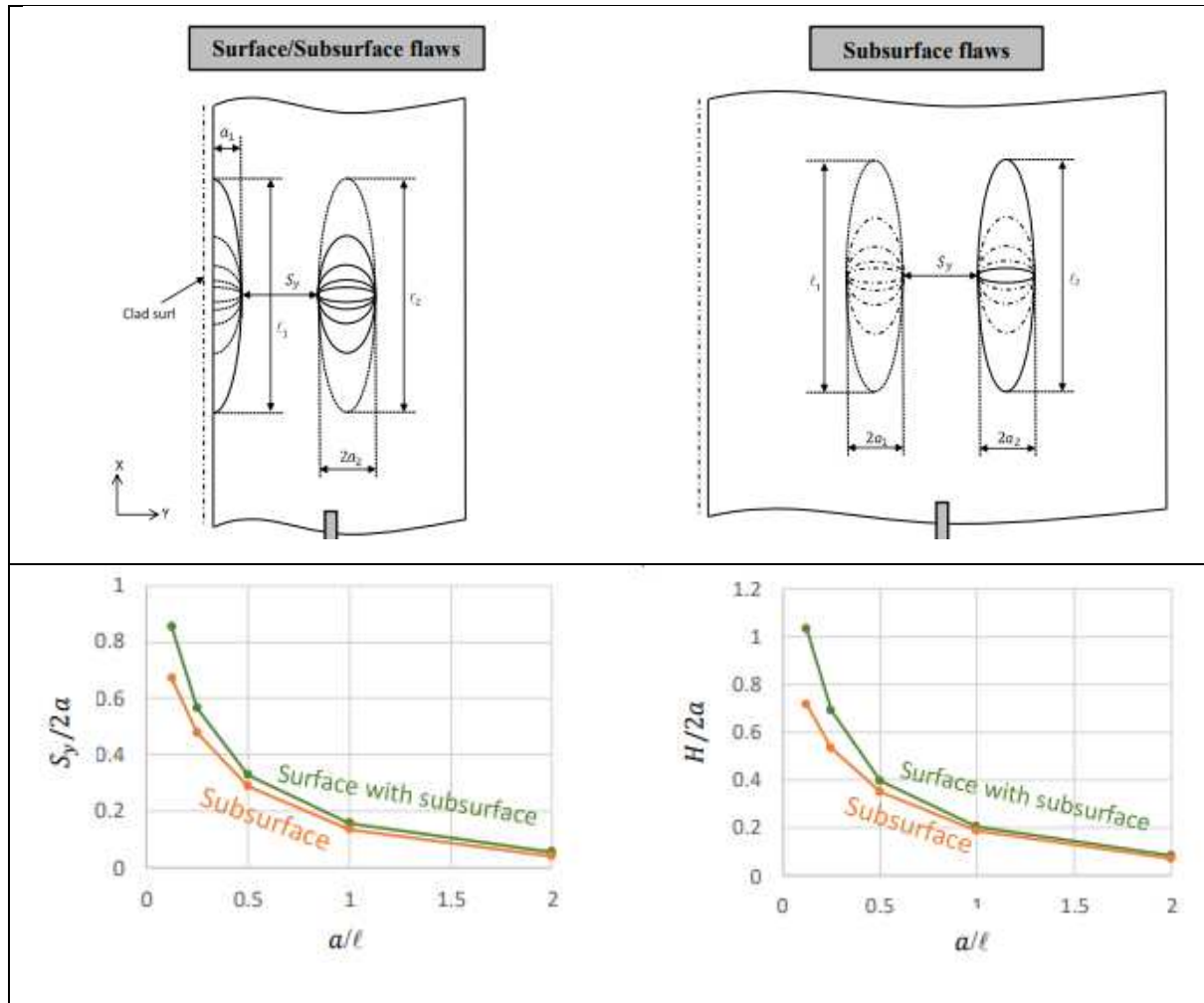


Figure A1.4\_26 : comparaison des facteurs d'interaction entre deux fissure semi-elliptiques et deux fissures enfouies ayant leurs petits axes en commun et leur petit axe normal à la surface (DUL, 2019)

Nous avons utilisé ces résultats pour modifier la fonction A pour des fissures coplanaires en  $A_{E-S}$  de la même manière que pour l'interaction avec la surface libre. Cependant, à la différence de l'interaction avec la surface libre, il y a un effet de la distance  $S_z$  (notée H par Dulieu) entre les plans de la fissure de surface et celui de la fissure enfouie. Nous avons considéré que les effets sur l'interaction dans le plan et hors du plan étaient les mêmes. L'expression du facteur d'interaction est alors :

$$\gamma_{ES} = 1 + A_{ES\_Int} \cdot \left[ F_{W_E} \left( c/a, S_y/(2a), S_z/\frac{2a}{\eta} \right) - 1 \right] \quad (A1.4\_18)$$

La variation de  $A_{ES\_Int}$  est illustrée à la figure A1.4\_27. Les valeurs numériques sont lissées par une fonction qui diminue depuis l'interaction avec la surface pour une fissure bande en surface fonction et l'interaction entre fissures enfouie disque.

$$A_{ES\_Int} = A_E(c/a, 1) - A_{Surf}(c/a, 1) + A_{Surf}(c/a, 1) \cdot c/a \cdot \{\exp[(1 - c/a)^{1,042}]\} \quad (A1.4\_19)$$

Où  $\eta$  est obtenu par l'équation relative aux fissures coplanaires :

$$A_{ES\_Int} \cdot \left[ F_{W_E} \left( c/a, S_y/(2a), 0 \right) - 1 \right] = A_{E\_Int} \cdot \left[ F_{W_E} \left( c/a, S_y/\frac{2a}{\eta}, 0 \right) - 1 \right] \quad (A1.4\_20)$$

Le facteur  $\eta$  vaut 1,19 ce qui signifie que l'effet de fissure de surface revient à réduire l'espacement relatif.

Cette solution est limitée aux fissures non écartées.

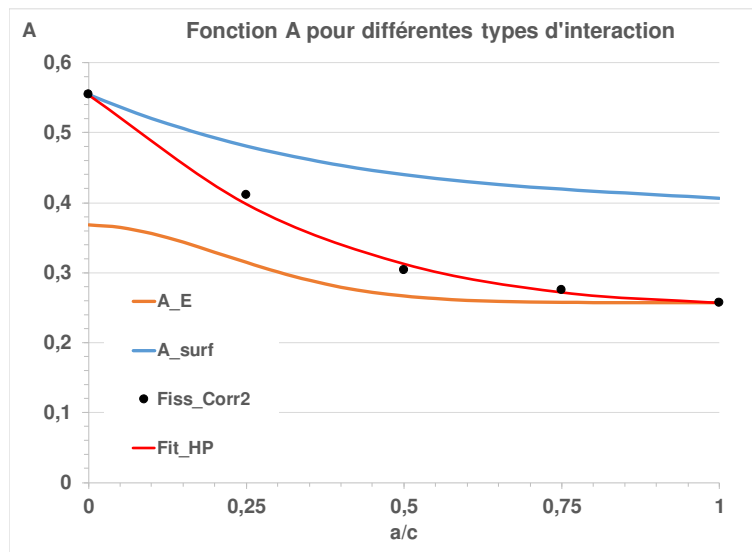


Figure A1.4\_27 : comparaison des fonctions A pour différents types d'interaction

Cette approche est comparée aux résultats de Dulieu et al. à la figure A1.4\_28 pour le cas de la plus forte interaction ( $c/a = 0,25$ ).

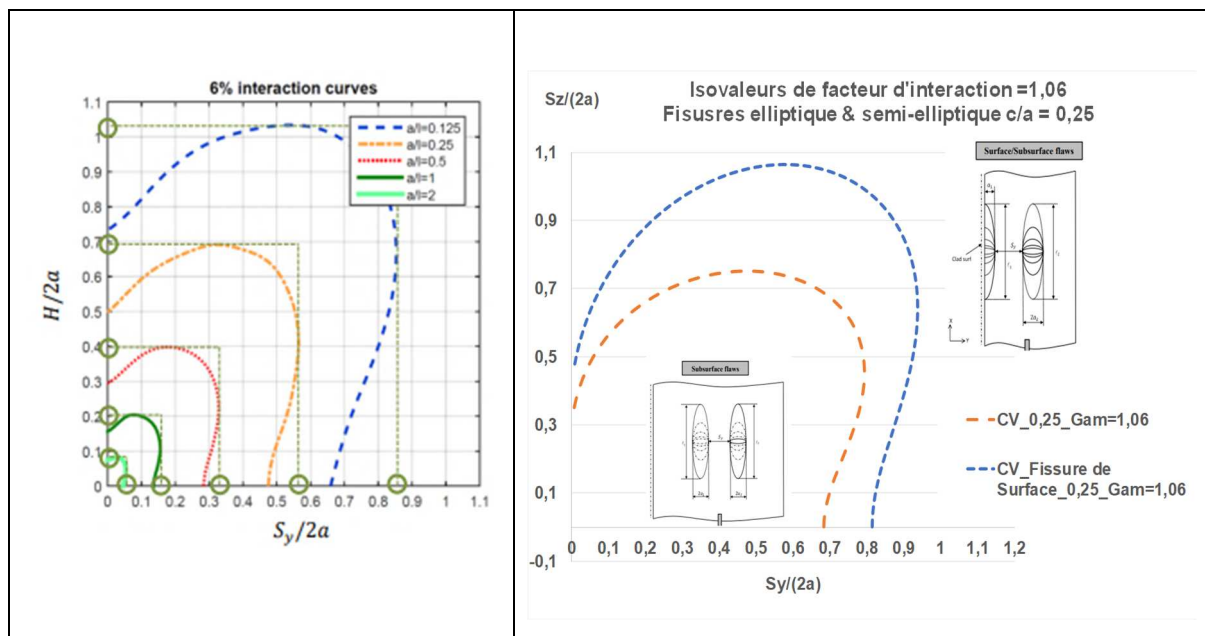


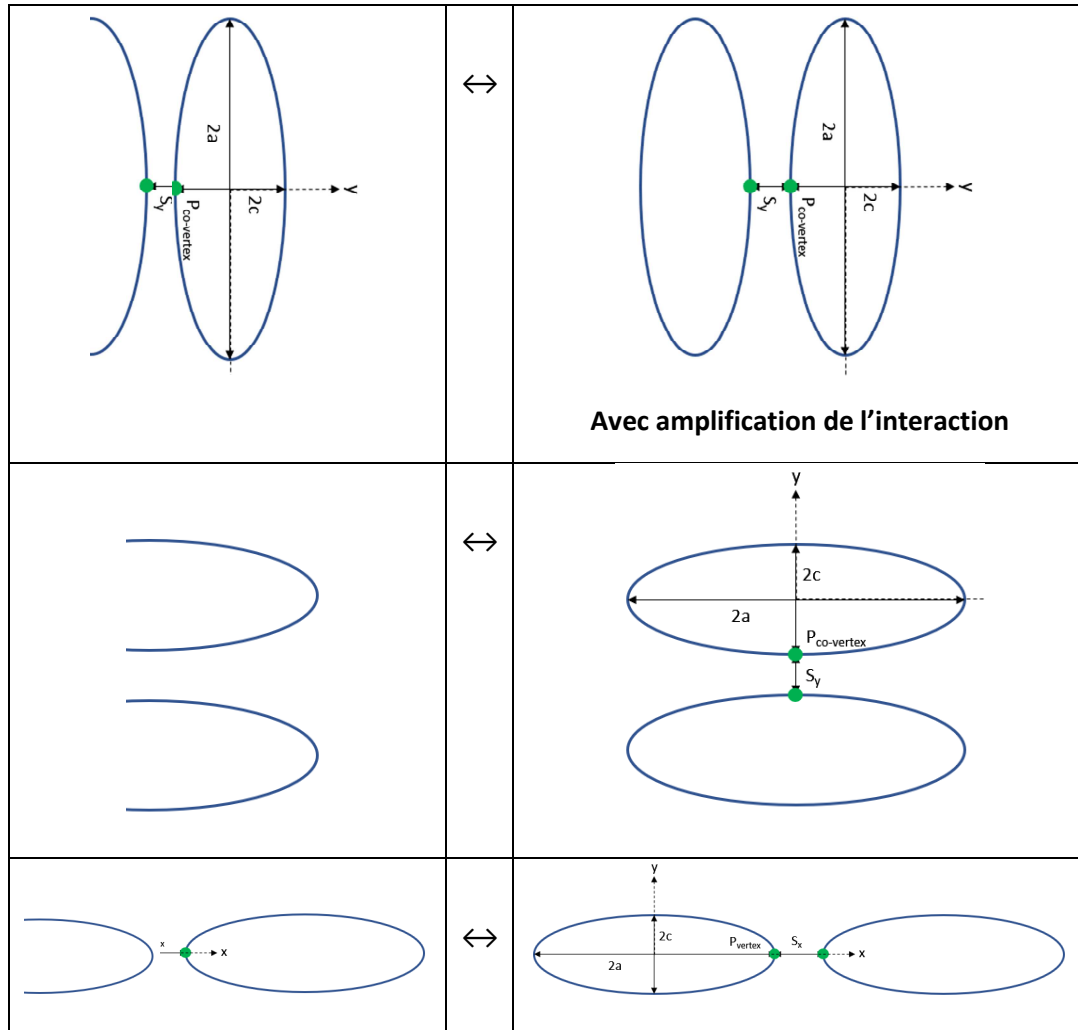
Figure A1.4\_28 : comparaison des isovaleurs de facteur d'interaction de fissures elliptiques enfouies avec une fissure semi-elliptique débouchante

L'accord est bon, mais il faut noter que la fonction  $F_{W,E}$  représente l'effet du champ de contrainte induit par une fissure enfouie isolée, alors qu'il faudrait introduire une fonction représentant l'effet

du champ de contrainte induit par une fissure de surface isolée. La formule A1.4\_20 est purement empirique.

### Conclusions

Le tableau A1.4\_2 résume les façons de traiter les interactions entre fissures enfouies et fissures de surface coplanaires parallèles ayant un axe en commun.



**Tableau A1.4\_2 : équivalences entre l'interaction d'une fissure semi-elliptique de surface et une fissure elliptique en fouie parente et l'interaction de deux fissures elliptiques parentes**

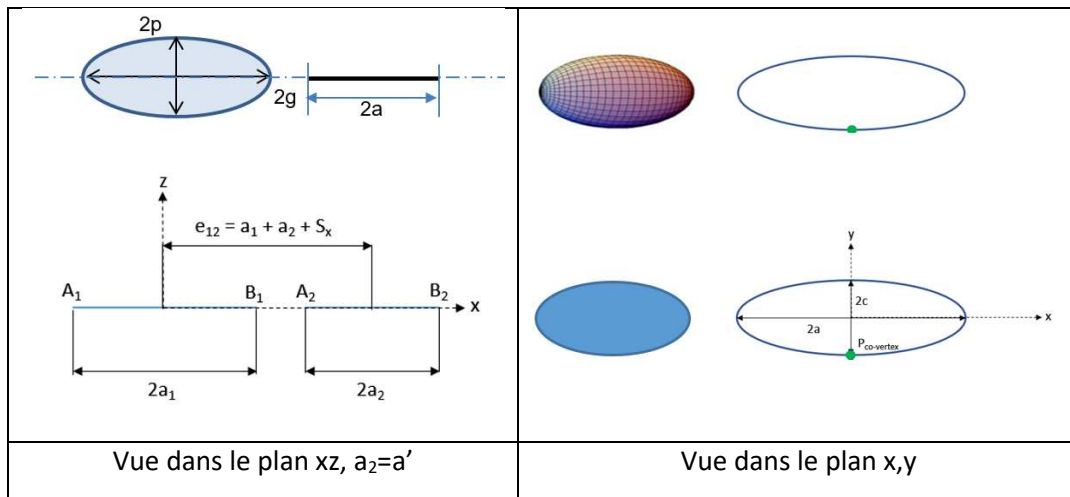
## A1.5. Interaction entre une cavité et une fissure enfouie

L'étude est limitée au cas des défauts dont un plan de symétrie porte la fissure voisine.

### A1.5.1. Caractéristiques de l'interaction cavité - fissure enfouie

L'interaction entre cavité et fissure comporte une voire plusieurs variables supplémentaires par rapport au problème de l'interaction entre deux fissures. Ces variables décrivent le volume de la cavité et comme pour les fissures, des formes simples sont retenues dans la littérature. En bidimensionnel, nous désignons par trous les cavités et leur forme est circulaire ou elliptique. En tridimensionnel les cavités sont sphériques ou ellipsoïdales. Le plan des fissures est le plan  $x, y$  avec le demi-grand axe «  $a$  » porté par  $Ox$ . La cavité est symétrique par rapport à ce plan.

Afin de comparer les interactions cavité – fissure et fissure – fissure une fissure associée à la cavité est définie comme la projection de la cavité sur le plan de la seconde fissure. Cette association est illustrée à la figure A1.5\_1. En bidimensionnel la demi-longueur de la fissure associée est désignée par  $a'$ .



**Figure A1.5.1 : représentation des défauts et leurs fissures associées**

Les trous ou les cavités induisent deux caractéristiques du champ de contraintes en présence d'une fissure comme l'illustrent les cas traités par Hasebe et al. (HAE, 2003) :

1. La concentration de contrainte induite par la cavité augmente le FIC (Figure A1.5\_2a)
2. Lorsque la pointe de fissure approche la cavité, le FIC devient singulier (Figure A1.5\_2b)

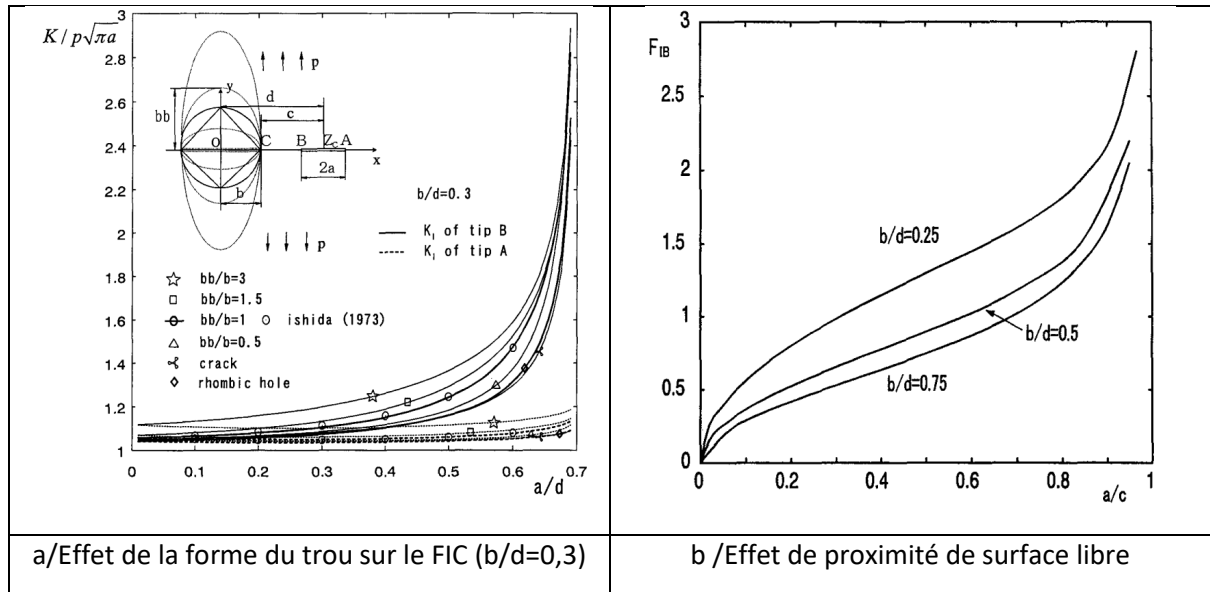


Figure A1.5\_2 : effet de trous sur une fissure bande (HAE, 2003)

Les résultats d'Hasebe et al. conduisent aux conclusions suivantes :

- Plus le trou elliptique, dont la largeur du trou égale la taille de la fissure, est élargi, plus le FIC à la pointe de fissure la plus proche du trou augmente ce qui s'explique par l'augmentation de la zone d'amplification des contraintes.
- Le trou en forme de losange a un effet voisin de celui d'une fissure, car le FIC pour le losange est légèrement plus faible que celui de la fissure (PAA, 2013).
- Dans tous les cas traités l'interaction est plus forte entre trou et fissure et fissure de même largeur que le trou et fissure.
- La singularité du FIC à l'approche du trou favorise la coalescence.

Deux problèmes se posent :

1. Quelle est la forme et la taille de la cavité pour laquelle l'interaction avec une fissure est proche de celle de la fissure associée à cette fissure ?
2. Comment établir une formule décrivant l'interaction entre cavité et fissure ?

Ces deux problèmes sont traités aux paragraphes suivants en se limitant au cas bidimensionnel faute de résultats disponibles en tridimensionnel.

## A1.5.2. Grandes et petites cavités

De nombreuses études ont été consacrées à l'interaction entre trou et fissure (ISI, 1970 ; EGR, 1973, 1974 ; HUC, 1993 ; FRA, 1999 ; YAN, 2005, 2006 ; YIR, 2022). Les méthodes de calcul diffèrent selon les auteurs, mais la qualité de leurs résultats sont voisines ainsi qu'en attestent les deux exemples des multiples comparaisons que nous avons effectuées (Figure A1.5\_3).

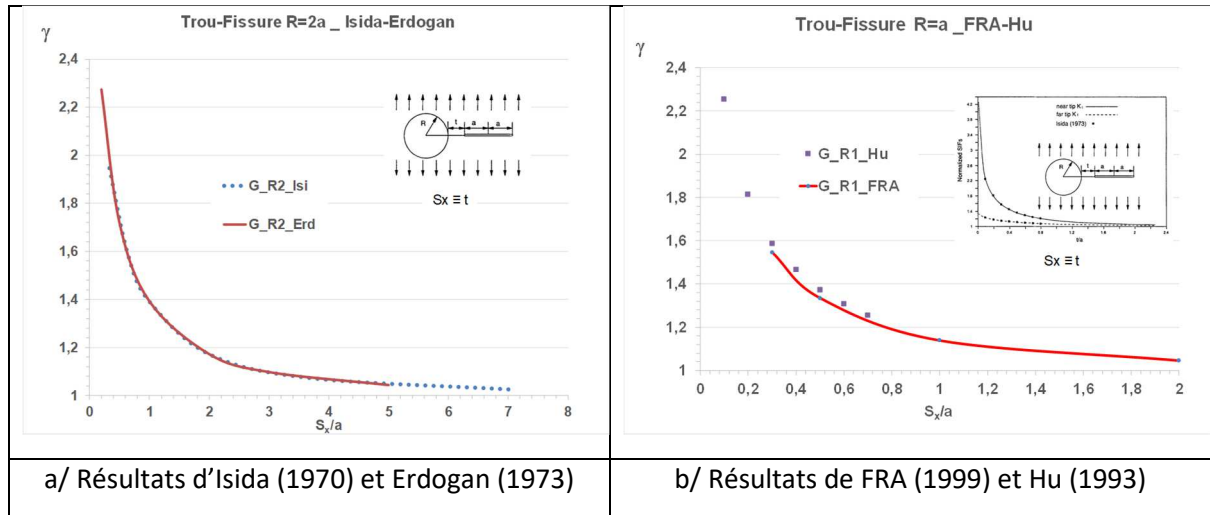


Figure A1.5\_3 : comparaison des facteurs d'interaction trou circulaire - fissure bande

Les résultats de Hu et al. sont quasiment identiques à ceux d'Isida pour  $R/a = 1$ . Les résultats de Framatome (FRA, 1999) sont légèrement inférieurs à ceux de Hu en dépit d'une discrétisation assez fine des maillages de Framatome, peut-être insuffisamment pour des écartements faibles.

L'effet de la taille et de forme du trou sur la fissure sont évalués par le rapport des facteurs d'interaction entre trou et fissure et fissure associée – fissure. Le paramètre d'écartement est défini par :

$$\lambda_x = \frac{a + a'}{e_x} \text{ avec } e_x = a + a' + S_x \quad (A1.5_1)$$

Pour le trou circulaire  $a' = R$  (Figure A1.5\_4a). Les trous elliptiques étudiés ont leur grand axe suivant  $Ox$  donc  $a' = g$  (voir Figure A1.5\_4b).

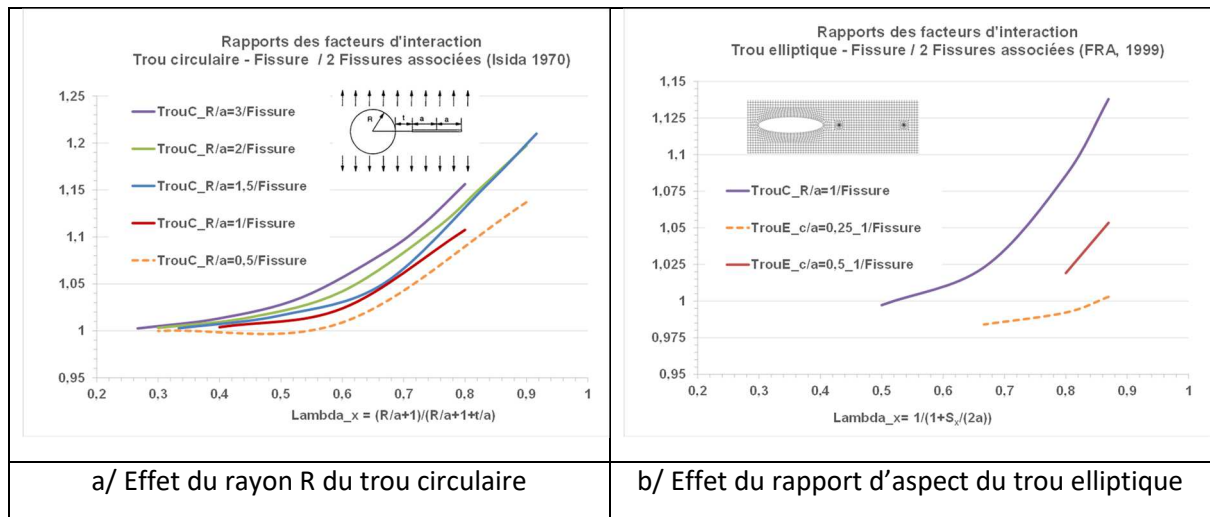
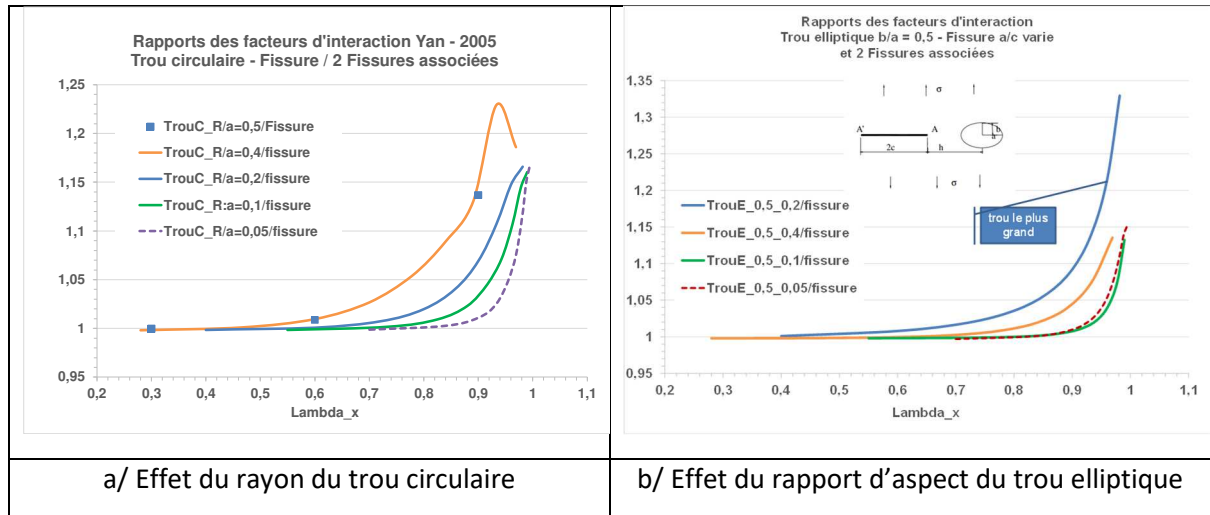


Figure A1.5\_4 : comparaison 1 des facteurs d'interaction trou circulaire / elliptique - fissure bande





**Figure A1.5\_5 : comparaison 2 des facteurs d'interaction petit trou circulaire / elliptique - fissure bande**

La figure A1.5\_4 compare des trous dont la fissure associée a une taille égale à la fissure influencée par le trou.

La figure A1.5\_5 compare des trous dont la fissure associée a une taille plus faible que celle de la fissure influencée par le trou.

Les comparaisons des figures A1.5\_4a et A1.5\_4a montrent que les trous circulaires de rayon inférieur à  $0,2a$  se comportent quasiment comme la fissure associée. Il en va de même si les trous sont elliptiques avec un rapport d'aspect  $p/g < 0,25$  (Figure A1.5\_4b).

### A1.5.3. Extension de l'approche à l'interaction entre une cavité et une fissure enfouie

La méthode qui consiste à remplacer la fonction de Westergaard  $F_w$  par une fonction d'interaction entre cavité et fissure  $F_{CF}$  conduit à l'expression :

$$Y_{CF} = 1 + A_{CF} \cdot [F_{CF}(c/a ; \lambda_x ; \lambda_y ; 0) - 1] \quad (A1.5_2)$$

La fonction  $F_{CF}$  doit tenir compte de la concentration de contrainte qui influe sur le FIC de la fissure. Cette fonction ne dépend que du rapport d'aspect et des paramètres d'écartement. Sa détermination influe sur celle de la fonction A. L'effet de concentration de contrainte induit par un trou circulaire ou elliptique est connu de façon analytique (voir Chapitre I) et paragraphe suivant.

Cependant les études d'Isida (ISI, 1970) et de Hasebe et al. (HAE, 2003) montrent que le FIC devient singulier à l'approche du trou. Ceci est aussi valable en tridimensionnel.

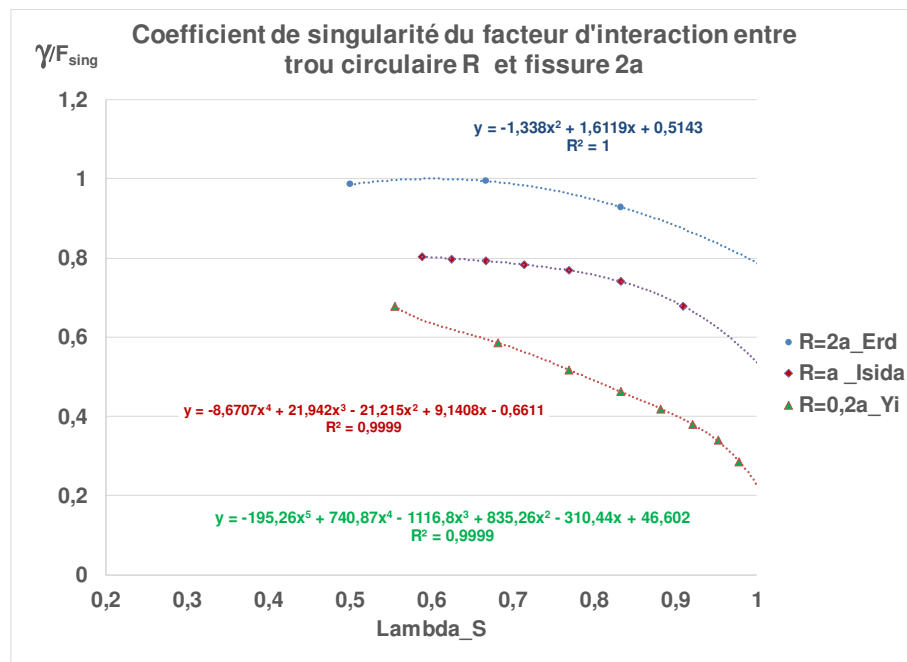
La singularité des facteurs d'intensité des contraintes lorsque le ligament entre la pointe d'une fissure bande tend vers zéro a été caractérisée par Benthem et Koiter (SIH, 1973). Cook et Erdogan (COE, 1972) ont résolu analytiquement le problème de la fissure bande perpendiculaire au bord d'un milieu infini soumise à une pression uniforme sur les lèvres. Ces solutions démontrent l'existence d'une singularité en  $\frac{2}{\sqrt{\pi^2-4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}$  avec  $\lambda = \frac{a}{d}$  où  $a$  est la demi-taille de fissure suivant la normale à la surface et  $d$  la distance du centre de la fissure à la surface.

La singularité du FIC à l'approche de la surface libre dépend de la courbure de la surface. Si celle-ci est nulle, il n'y a plus de singularité, donc la fonction traduisant cette singularité s'écrit :

$$F_{\text{Sing}} = \frac{C_S(\rho/a)}{\sqrt{1 - \lambda_S}} + 1 - C_S(\rho/a) \quad (\text{A1.5}_3)$$

Avec  $\lambda_S = \frac{a}{d}$  à ne pas confondre avec  $\lambda_x = \frac{a+a'}{a+a'+S_x}$

Afin de déterminer la fonction  $C_S$  nous avons utilisé les résultats des facteurs d'interaction calculés pour des valeurs proches de la surface avec des méthodes numériques plus précises dans ce domaine comme celles utilisées par Isida (ISI, 1970, Erdogan (ERD, 1973) et Yi et al. (YIR, 2022).



**Figure A1.5\_6 : détermination des coefficients de singularité des facteurs d'interaction entre trou circulaire et fissure bande**

La figure A1.5\_6 décrit les variations des coefficients de singularité en fonction du paramètre d'écartement. Les valeurs asymptotiques sont données au tableau A1.5\_1. La variation est presque linéaire et nous avons retenu cette hypothèse dans les évaluations de la fonction  $A_{CF}$ . Afin d'étendre le domaine d'application de la formule nous remplaçons R par le rayon en fond de cavité elliptique de demi grand axe g et de rapport d'aspect g/p :

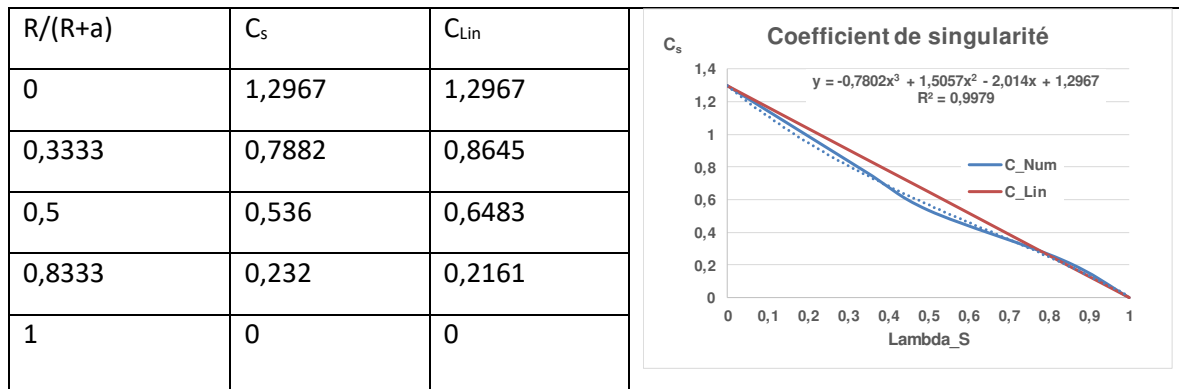
$$\rho = p \cdot \frac{p}{g} \quad (\text{A1.5}_4)$$

La formule du coefficient de singularité est :

$$C_S(\rho/a) = \frac{2}{\sqrt{\pi^2 - 4}} \cdot \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{p}{a} \cdot \frac{p}{g}} \right) \quad (\text{A1.5}_5)$$

Par conséquent la fonction  $F_{CF}$  est définie pour les fissures situées dans le plan de symétrie de la cavité par :

$$F_{CF}(c/a ; \lambda_x ; \lambda_y ; 0) = \left[ \frac{C_S(\rho/a)}{\sqrt{1-\lambda_S}} + 1 - C_S(\rho/a) \right] \cdot F_C(c/a ; \lambda_x ; \lambda_y ; 0) \quad (A1.5_6)$$



**Tableau A1.5\_1 : variations des coefficients de singularité**

La fonction  $F_{CF}$  qui est le rapport de la contrainte agissant sur la fissure à la contrainte appliquée ne peut être réduite à la fonction de concentration de contrainte induite par la cavité considérée comme isolée.

#### A1.5.4. Distribution de contraintes induites par une cavité

Les contraintes induites par une cavité dans un milieu élastique linéaire isotrope sont présentés au chapitre 1 § 1.4. Il est néanmoins intéressant de compléter ce paragraphe par le commentaire apporté par l'ENSMP (EMP, 2007) sur la différence entre un trou elliptique infiniment aplati et une fissure : « Cela est dû à la courbure imposée par la forme elliptique pour tout rapport d'aspect  $\neq 0$ , par opposition au caractère aigu de la fissure ». Les contraintes normales au plan normal à la direction de sollicitation sont très élevées pour une ellipse aplatie, mais finies alors qu'elles sont infinies pour une fissure.

Toutefois si l'ellipse est très aplatie la distribution de contraintes au-delà d'un rayon très faible se confond avec celle en avant de la fissure (Figure A1.5\_7). La direction de bifurcation du défaut sous sollicitation inclinée par rapport à la normale au plan du défaut, prédite par le critère de la contrainte normale maximale diffère selon que le défaut est une ellipse très aplatie et une fissure car les termes interviennent sont ceux de la solution asymptotique. En ce qui concerne l'interaction d'un défaut avec une fissure, le facteur d'interaction est le même que le défaut soit une ellipse très aplatie ou une fissure (Tableau A1.5\_2).

Lambda_x	Ellipse p/g=0 g=0,2a -Fissure 2a_Li	2 fissures 0,4a et 2a	Ellipse/fissure
0,4	1,0038	1,00377	0,0026%
0,6	1,0137	1,01369	0,0011%
0,72	1,0299	1,02991	-0,0010%
0,8	1,0538	1,05384	-0,0039%
0,8571	1,0882	1,08822	-0,0016%
0,9	1,1383	1,13827	0,0030%
0,9333	1,215	1,214996	0,0003%
0,96	1,3466	1,34662	-0,0013%
0,9818	1,642	1,64198	0,0015%

Tableau A1.5\_2 : équivalences entre l'interaction d'une ellipse aplatie de longueur 0,2a et une fissure bande de longueur 2a

### A1.5.5. Interaction entre une cavité et une fissure enfouie en 2D

Plusieurs résultats ont été présentés au chapitre 1 § 1.4.3. Nous les analysons en utilisant notre formulation.

Les facteurs d'interaction entre cavités elliptiques et fissure bande situées sur le grand axe de l'ellipse sont tous supérieurs à ceux de deux fissures bande (Figure A1.5\_8).

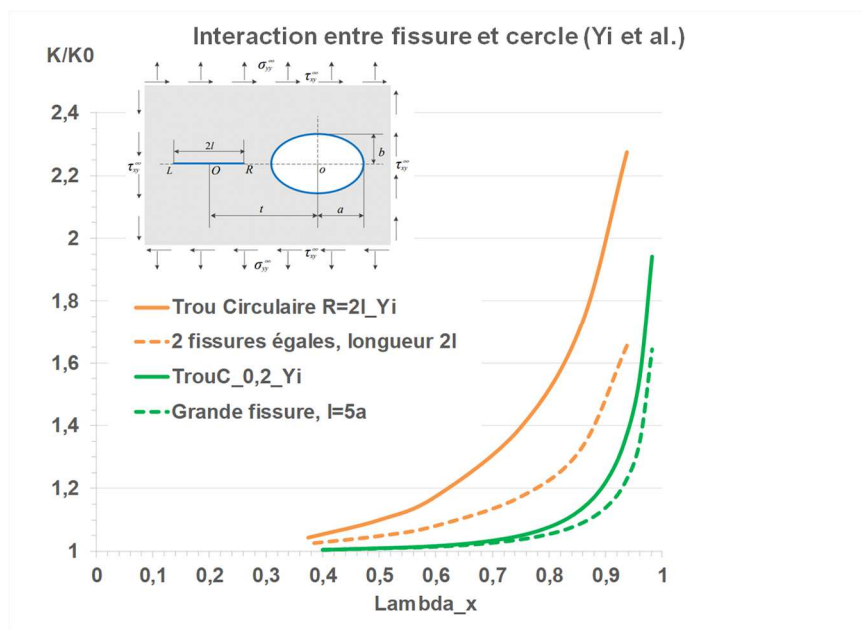


Figure A1.5\_8 : facteurs d'interaction de trous circulaires avec une fissure bande

Nous avons comparé deux types de formules d'interaction trou-fissure : celle de l'équation A1.5.6 (GAC\_Lin sur les légendes des figures) ainsi que la suivante (GAC sur les légendes des figures).

$$\gamma_{CF} = 1 + A_{CF} \cdot [F_{CF}(c/a ; \lambda_x ; \lambda_y; 0) - 1] \quad (35\_7a)$$

Avec

$$F_{CF}(c/a , S_x/(2a) , S_y/(2a); 0) = \frac{F_C(c/a ; \lambda_x ; \lambda_y; 0)}{\sqrt{1 - \lambda_S}} \quad (A1.5\_7b)$$

Les comparaisons de l'application des formules GAC et GAC\_Lin sont présentées pour 8 configurations (Figure A1.5\_9). Les fonctions A correspondantes sont lissées sur ces résultats.

Les lissages sont donnés par les fonctions suivantes :

$$A_{GAC} = 0,8256 \cdot \exp(-3,4456/(1 + p^2/(ag))) \quad (A1.5\_8a)$$

$$A_{GAC\_Lin} = 0,1477 + 0,021 \cdot \exp\left(-\frac{1,6575}{(1 + R/a)}\right) \quad (A1.5\_8b)$$

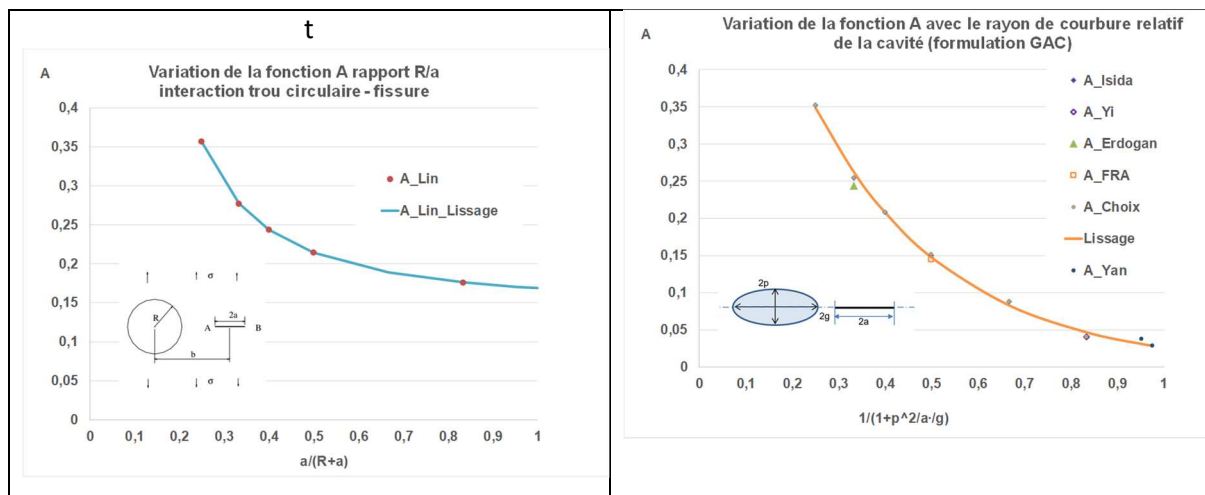


Figure A1.5\_9 : fonction A pour les formulations GAC et GAC\_Lin

#### Interaction entre trou circulaire et fissure de petite taille par rapport au diamètre du trou

Les figures A1.5\_10 et 11 montrent que les deux formules GAC et GAC\_Lin donnent des prédictions identiques et très proches des résultats numériques d'Isida (ISI, 1970), Erdogan (EGR, 1974), Hu (HUC, 1993) ou Framatome (FRA, 1999).

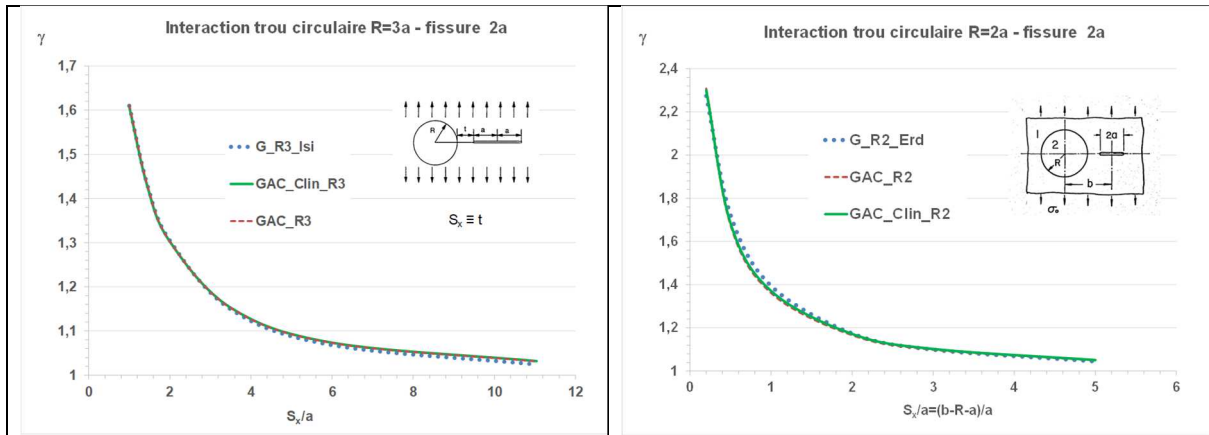


Figure A1.5\_10 : facteurs d'interaction de trous circulaires avec une fissure bande (1)

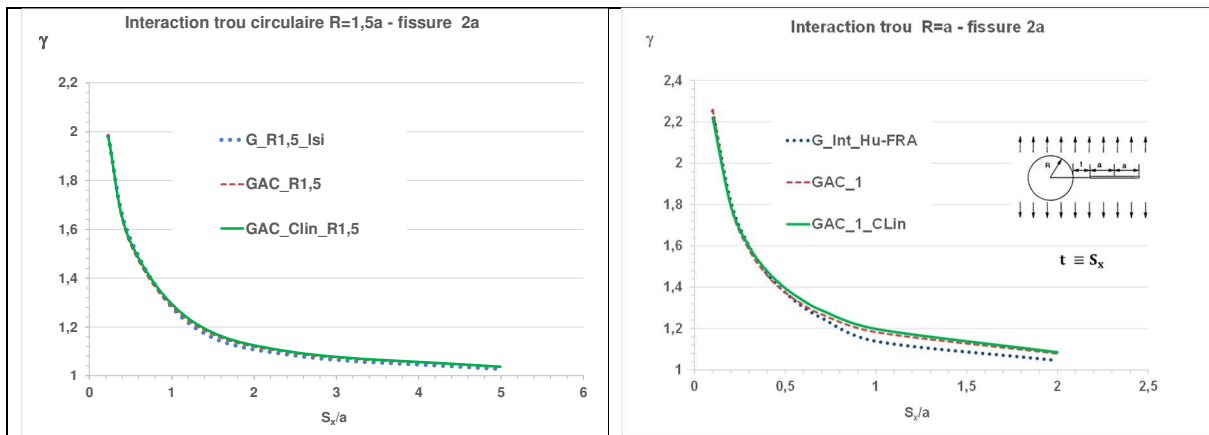


Figure A1.5\_11 : facteurs d'interaction de trous circulaires avec une fissure bande (2)

Interaction entre trou circulaire et fissure de grande taille par rapport au diamètre du trou

Les résultats numériques ont été obtenus par Yan (YAN, 2005, 2006). Les prédictions de la formule GAC donne de meilleures prédictions que la formule GAC\_Lin (Figures A1.5\_12). Si l'on remplace le trou par une fissure alignée de longueur égale à son diamètre, la fissure 1 devient la grande fissure. Cette substitution sous-estime l'interaction pour  $R/a = 0,4$  ( $R$  remplace «  $a$  » dans les notations de Yan et «  $a$  » la demi-longueur de fissure «  $c$  ») mais devient correcte pour  $R/a = 0,1$ .

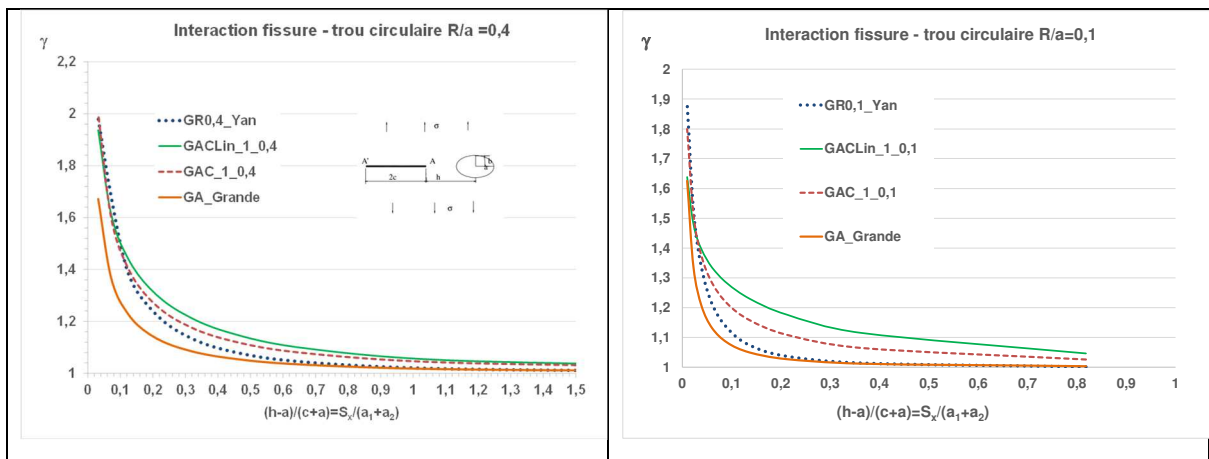


Figure A1.5\_12 : facteurs d'interaction de trous circulaires avec une fissure bande (3)

## Interaction entre trou elliptique et fissure de grande taille par rapport au grand axe

Les résultats numériques ont été obtenus par Yan (YAN, 2005).

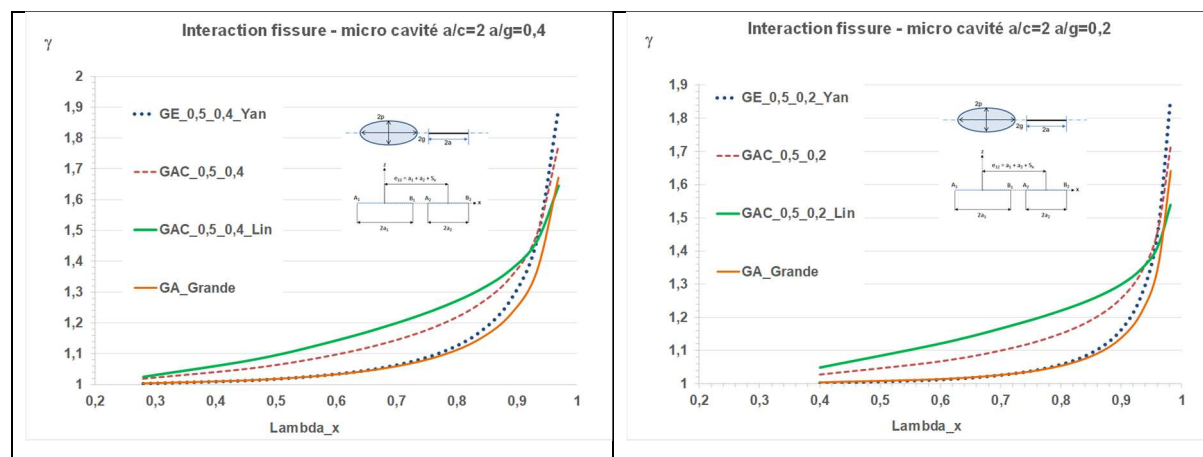


Figure A1.5\_13 : facteurs d'interaction de trous elliptiques avec une fissure bande

La formulation GAC\_Lin ne donne pas de bons résultats pour l'interaction trou elliptique – fissure (Figures A1.5\_12). La configuration peut être remplacée par deux fissures associées ou si l'on souhaite une enveloppe par la formulation GAC.

### A1.5.6. Interaction entre une cavité et une fissure enfouie en 3D

Peu d'études ont été consacrées à l'interaction d'une cavité avec une fissure elliptique. Les résultats de l'article de Xiao et al. (XIA, 1994) sur l'interaction d'une cavité sphérique sur une fissure elliptique ne sont pas corrects : ils ne présentent pas de singularité au voisinage du trou. Les calculs sont fondés sur le principe de superposition à l'ordre 1, c.à.d. sans tenir compte des effets de rétroaction de la fissure sur la cavité et donc sous-estiment l'interaction. Dulieu et al. (DUL, 2016) ont analysé l'interaction d'une fissure disque avec un bord libre entaillé. Les tendances observées pour l'interaction trou-fissure bande sont confirmées mais l'effet de singularité est plus complexe à analyser.

#### A1.5.6.1. Interaction entre une cavité sphérique et une fissure disque

S. Chapuliot (CHA, 2020) a calculé les FIC d'une cavité sphérique interagissant avec une fissure disque ou une fissure elliptique. Le rayon de la cavité est égal au demi-axe de la fissure disque. Les calculs ont été effectués avec le code CAS3M (CAS, 2020).

En projection, la configuration est décrite à la figure A1.5\_14 ainsi que les variations du facteur d'interaction le long du front pour la fissure disque interagissante avec la sphère et les deux disque associés. L'interaction entre sphère et fissure disque de mêmes diamètres est plus forte qu'entre la fissure disque et celle obtenue par projection de la sphère sur le plan de la fissure disque.

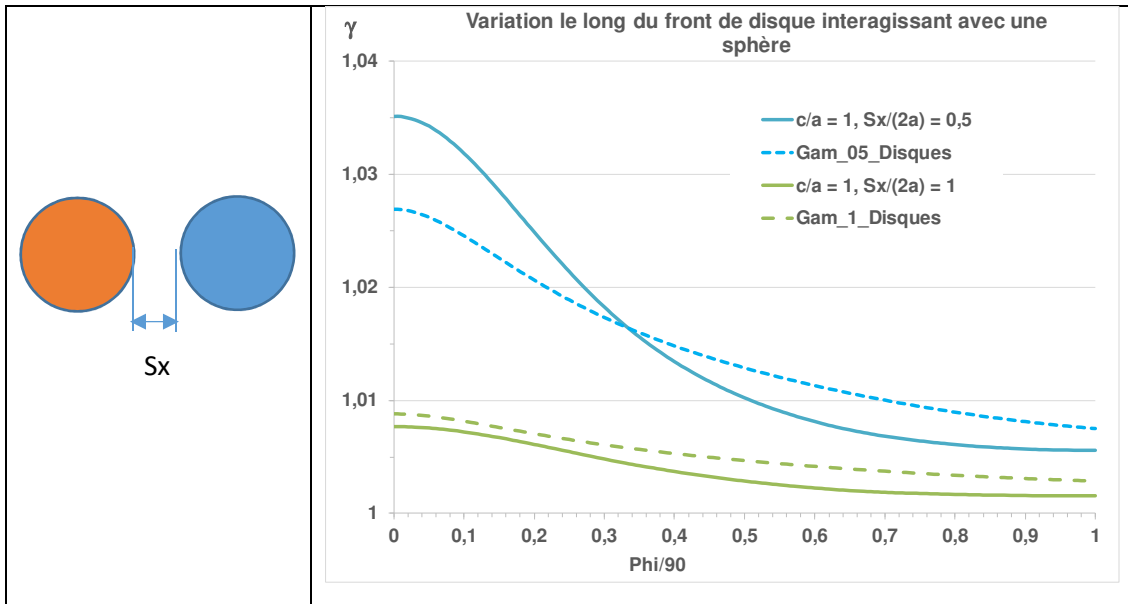


Figure A1.5\_14 : schéma de la projection de cavité sphérique sur le plan de la fissure disque

Les facteurs d'interaction sont faibles et les rapports des facteurs d'interaction cavité-fissure et fissure-fissure sont inférieurs à l'unité dès que la fissure s'éloigne (Figure A1.5\_15a). Les rapports des facteurs d'interaction aux points le plus proches sont inférieurs à ceux obtenus pour l'interaction trou-circulaire-fissure bande (Figure A1.5\_15b).

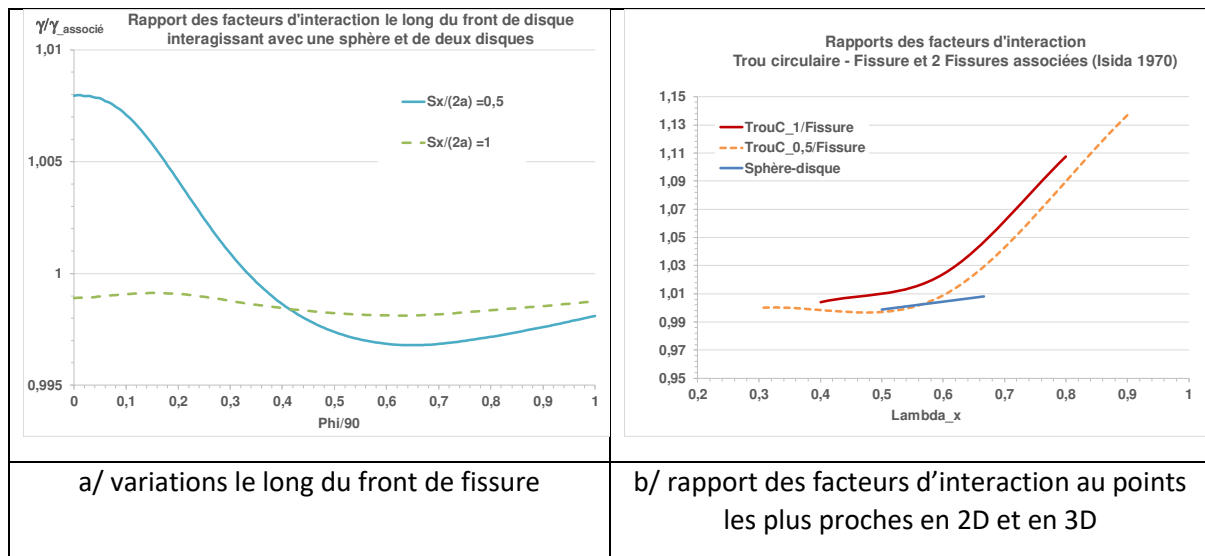
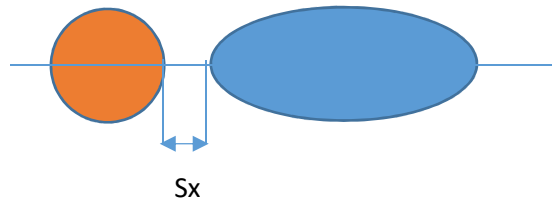


Figure A1.5\_15 : rapport des facteurs d'interaction de cavité sphérique – disque à celui de l'interaction disque-disque

### A1.5.6.2. Interaction entre une cavité sphérique et une fissure elliptique

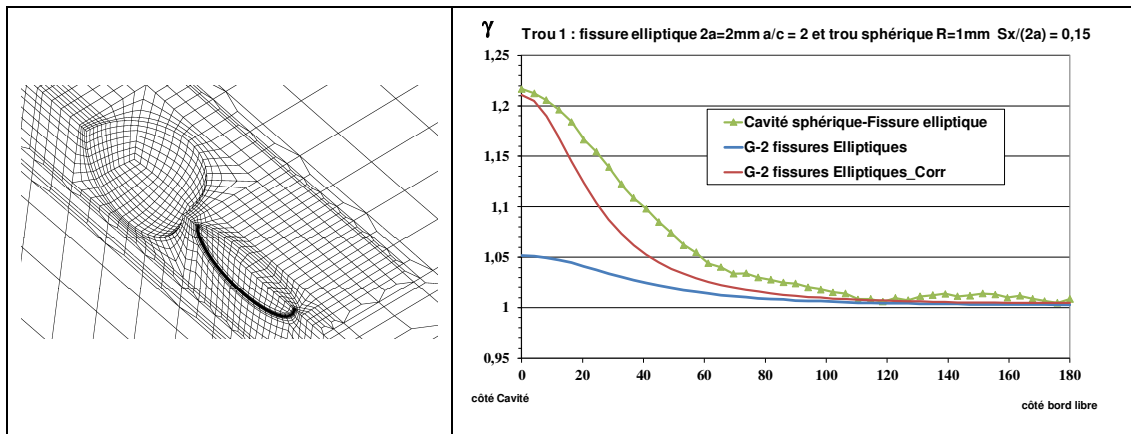
Framatome (FRA, 1999) a réalisé un calcul d'interaction entre cavité sphérique et fissure elliptique. Les calculs ont été effectués avec le code SYSTUS® (SYSTUS, 2020). La configuration est décrite à la figure A1.5\_16.





**Figure A1.5\_16 : schéma de la projection de cavité sphérique sur le plan de la fissure elliptique**

Le maillage de la zone des défauts est présenté à la figure A1.5\_17a.



**Figure A1.5\_17 a et b : maillage de la cavité sphérique de rayon a et de la fissure elliptique de demi grand axe a et de rapport d'aspect  $c/a = 0,5$  et variation du facteur d'interaction le long du front**

Les variations des facteurs d'interaction le long du front de l'ellipse interagissant avec la cavité et de deux ellipses égales à la précédente pour un même écartement  $S/(2a) = 0,15$  sont représentés à la figure A1.5\_17b.

L'interaction sphère de rayon  $R$  – fissure elliptique de demi-longueur  $a=R$  et de rapport d'aspect  $a/c=2$  est très forte par rapport à l'interaction entre deux fissures elliptiques égales ( $a, c$ ). Cette comparaison n'est pas pertinente car elle ne tient pas compte de la différence de taille et de forme de la fissure associée. Nous avons donc calculé le facteur d'interaction aux points de plus proches pour la configuration fissure disque associée à la sphère et fissure elliptique. La valeur est très proche de celle correspondant à l'interaction sphère-fissure elliptique. Toutefois la fonction de variation le long du front ne tient pas compte de ces différences : elle est celle établie pour des fissures elliptiques égales.

### A1.5.6.3. Interaction entre une cavité ellipsoïdale et une fissure elliptique

S. Chapuliot (CHA, 2020) a calculé les FIC d'une cavité ellipsoïdale interagissant avec une fissure elliptique. La fissure associée à la cavité est identique à la fissure sous influence de la cavité : même longueur et rapport d'aspect  $a/c = 3$ . Les calculs ont été effectués avec le code CAS3M (CAS, 2020).

En projection, le maillage et la configuration associée sont décrits à la figure A1.5\_18.

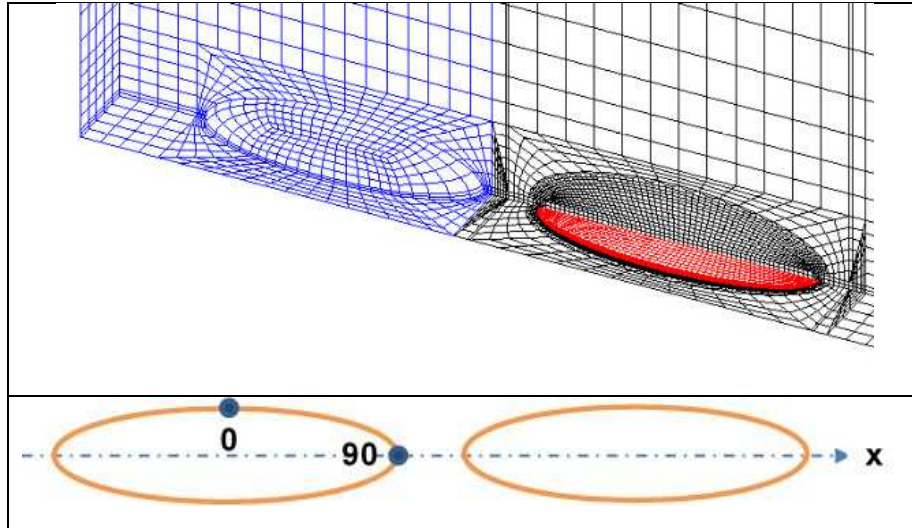


Figure A1.5\_18 : maillage de la cavité ellipsoïdale et la fissure elliptique et schéma des deux fissures associées

Les fissures ont pour grand axes  $2a$  et sont espacées de  $S_x$  : Gam\_01 réfère au facteur d'interaction pour  $S_x/2a=0,1$ .

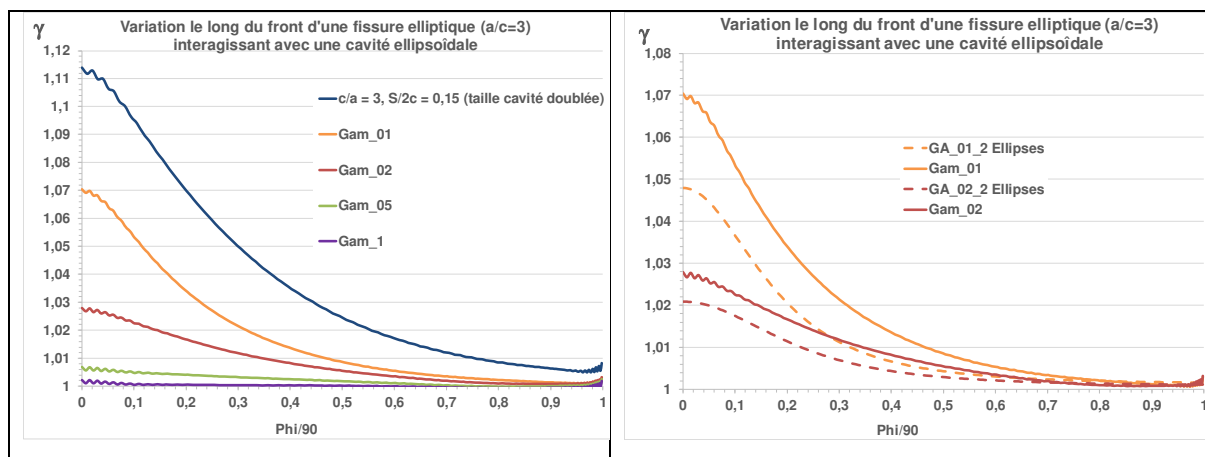
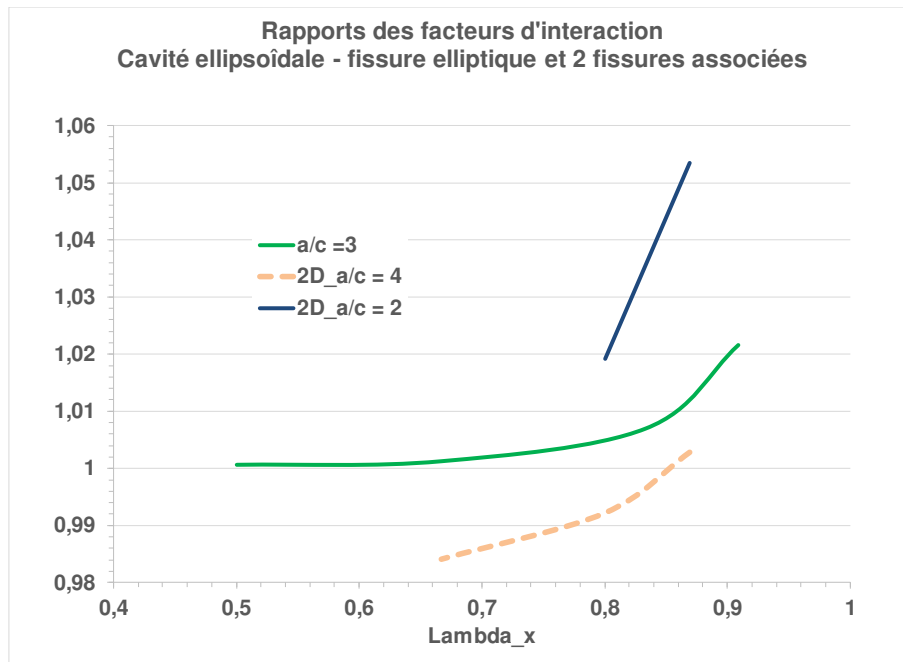


Figure A1.5\_19 : variations des facteurs d'interaction entre cavité ellipsoïdale et la fissure elliptique et des deux fissures associées pour différents écartements  $S_x/(2a)$

Les facteurs d'interaction sont plus élevés pour l'interaction cavité-fissure que pour l'interaction fissure associée-fissure (Figure A1.5\_19). Il faut noter que les variations le long du front sont similaires.



**Figure A1.5\_20 : rapport des facteurs d'interaction de cavité sphérique – disque à celui de l'interaction disque-disque**

Les figures A1.5\_15b et A1.5\_20 montrent que l'interaction cavité-fissure est moins forte en tridimensionnel qu'en bidimensionnel. L'interaction trou-fissure en bidimensionnel s'applique plutôt aux structures perforées comme on en rencontre dans les structures aéronautiques.



## **ANNEXE 2. INTERACTION EN ELASTO-PLASTICITE**



## A2.1. Introduction

Sous l'effet de sollicitations de niveau élevé, les structures se plastifient. Les configurations étudiées dans cette thèse ne sont pas déformées à l'état initial et sont soumises à un chargement unique monotone croissant, le comportement peut donc être décrit en élasticité non-linéaire (LEC, 1988). Les conditions sont donc réunies pour que l'utilisation de la force d'extension de fissure  $J$  introduite par Rice (RIC, 1968) soit valide. Dans le cas d'une structure fissurée soumise à un chargement mécanique primaire,  $J$  est amplifiée par rapport à sa valeur en élasticité linéaire pour le même niveau de charge. Il importe donc d'étudier l'impact de la plastification sur l'interaction de fissures et sur la taille du défaut équivalent.

En élasticité comme en plasticité l'interaction entre un défaut et la structure dépend essentiellement de la taille du ligament entre pointe de fissure et la paroi. Toutefois, en plasticité étendue cette interaction est notablement amplifiée. Même pour des défauts de petite taille centrés dans la section fissurée le fait que le milieu fissuré ne soit pas infini modifie le comportement de la force fissurante  $J$ . Dans le calcul du facteur d'interaction en élastoplasticité, il est donc impératif de tenir compte des dimensions de la structure (cf. § 5.2.2.1).

Le facteur d'interaction comme le coefficient d'équivalence sont définis par un rapport de forces fissurantes l'une calculée pour la fissure soumise à interaction, l'autre pour cette même fissure isolée. Pour les fissures enfouies, le milieu est considéré comme infini. Cette condition est satisfaite dans les approches analytiques (ex : ERD, 1992) ainsi que dans les calculs effectués par la méthode des forces de volume (ex : ISI, 1985). Mais les calculs de structures fissurées sont souvent effectués sur des domaines finis et pour que les résultats soient peu dépendants de la taille relative de fissure par rapport à elle de la section fissurée, il faut que les fissures soient à peu près centrées dans la section et que leurs dimensions soient inférieures à 10 fois celle des dimensions de la section fissurée. Il est recommandé de calculer la fissure isolée dans le même massif.

La détermination du défaut équivalent à deux fissures égales en élasto-plasticité n'est réalisée complètement dans cette thèse que pour le cas de fissures bande. Toutefois, les principes de la démarche sont généralisables aux configurations tridimensionnelles : ils peuvent guider la sélection des cas les plus pertinents pour le traitement de l'interaction de fissures elliptiques. Seul un coefficient équivalent enveloppe est fourni pour des fissures elliptiques.

## A2.2. Interaction entre deux fissures bande

La prédiction du coefficient d'équivalence en élasto-plasticité repose sur deux approches complémentaires :

1. La première approche est fondée sur l'analyse des iso valeurs de contraintes et des résultats de calculs élastoplastiques de coefficients d'équivalence.
2. La seconde approche consiste à appliquer la méthode de la contrainte de référence Ici appliquée pour déterminer une charge de référence. Le lien avec le coefficient d'équivalence est établi. Cette approche permet de montrer que les coefficients dépendent peu de l'écroutissage (cf. § 4.2.7.1). Le calcul du coefficient nécessite toutefois la recherche de fonctions définissant les contraintes de référence pour chaque pointe de fissure. Cette tâche n'a été accomplie que pour des fissures coplanaires égales ; l'étendre aux fissures parallèles inégales demande un très grand nombre de calculs.

L'analyse se place dans le cadre de l'élasticité non-linéaire, pour lequel J est défini. Elle s'appuie sur un très grand nombre de calculs par éléments finis :

- 26 calculs élasto-plastiques effectués en 1999 par Framatome avec le code SYSTUS™ (SYSTUS, 2020) ;
- 70 calculs élasto-plastiques effectués en 2020 par ESI France avec le code SYSTUS™ (SYSTUS, 2020).

L'écart relatif entre les résultats théoriques de calculs élastiques et ceux par éléments finis évalués dans le cas des fissures coplanaires est limité à 1%.

La précision des calculs élasto-plastiques d'ESI France (SYSTUS, 2020) est meilleure que celle des calculs effectués par Framatome (FRA, 1999), essentiellement pour les pointes de fissure les moins sollicitées car les maillages d'ESI France sont considérablement plus fins, en particulier aux pointes les moins sollicitées. Plusieurs calculs de 1999 ont à ce titre été repris pour évaluer les différences, notamment pour les fissures écartées.

Hormis ces derniers cas, les écarts relatifs entre les résultats d'ESI et de Framatome sur le coefficient d'équivalence sont inférieurs à 2% en élasto-plasticité, les effets de maillage jouant moins sur le rapport des J que sur les J eux-mêmes.

### A2.2.1. Calcul du coefficient d'équivalence

De la même manière qu'en élasticité linéaire, il est possible de définir le calcul des coefficients d'équivalence élémentaires avec une loi de comportement élasto-plastique.

Dans le cas bidimensionnel des fissures bande, le coefficient à la pointe  $P_k$  de la fissure (i) est donné par :

$$\alpha_{ep,i,j \neq i, P_k} = \frac{J_{i,j \neq i}(P_k)}{J_0(a_1 + a_2)} \quad (A2.1)$$



Où  $J_0(a_1 + a_2)$  est la valeur de  $J$  au même niveau de chargement pour la fissure unique de demi longueur  $a_1 + a_2$ .

Des formules ont été développées pour le comportement élastique.

Ce paramètre est relié au facteur d'interaction élasto-plastique, nommé  $\iota$ , défini au chapitre 2 :

$$\iota_{ij}(P_k) = \sqrt{\frac{J_{i,j \neq i}(P_k)}{J_{i0}(a_i)}} \quad (\text{cf. 2. 2})$$

$$\alpha_{ep,i,j \neq i,P_k} = \iota_{ij}^2(P_k) \cdot \frac{J_0(a_i)}{J_0(a_1 + a_2)} \cong \frac{a_i}{a_1 + a_2} \cdot \iota_{ij}^2(P_k) \quad (\text{A2. 2})$$

L'identité est vérifiée pour les fissures situées dans un milieu infini.

En 2D, par choix, l'effet de la plasticité est défini par le rapport des coefficients  $\alpha$  calculés en élasto-plasticité et en élasticité :

$$\alpha_{ep,k} = \max_{i,j} \frac{\alpha_{ep,i,j \neq i,P_k}}{\alpha_{el,i,j \neq i,P_k}} \quad (\text{A2.3a}) \quad \text{avec } k = i \text{ ou } j \text{ selon que l'on considère la fissure } i \text{ ou la fissure } j$$

Soit, pour des fissures égales qui sont principalement traitées dans ce document :

$$\alpha_p = \max_{P_k} \frac{\alpha_{ep,k}}{\alpha_{e,k}} \quad (\text{A2.3b})$$

Le coefficient  $\alpha_p$  est l'enveloppe des coefficients concernant les pointes les plus proches, dites internes, et les plus éloignées, dites externes. Les calculs, effectués séparément pour les deux pointes, fournissent six coefficients notés sur les graphes  $\alpha_{e\_Int}$ ,  $\alpha_{ep\_Int}$ ,  $\alpha_{p\_Int}$ ,  $\alpha_{e\_Ext}$ ,  $\alpha_{ep\_Ext}$ ,  $\alpha_{p\_Ext}$  et le coefficient  $\alpha_p$  :

$$\alpha_p = \max_{l=\text{fissure } 1,2} [\max(\alpha_{l,p\_Int}, \alpha_{l,p\_Ext})] \quad (\text{A2.4})$$

### A2.2.2. Choix du niveau de chargement

Le calcul du coefficient d'équivalence s'effectue au chargement maximal. En effet, ce coefficient évolue de manière monotone croissante puis présente un plateau à partir d'un niveau de chargement, marquant l'entrée en plasticité étendue. Ceci est attesté pour les fissures non écartées (Figure **A1.5\_1**) comme pour les fissures écartées en pointe externe (Figure A2\_1). Pour un petit nombre de cas de fissures écartées, on constate la présence d'un maximum en fin de plasticité confinée (ex  $\hat{S}_x = -0,25$ ,  $\hat{S}_x = 1,5$ ) mais la sous-estimation par la valeur du coefficient pour la charge maximale est faible et l'effet d'interaction pour ces cas également très faible.

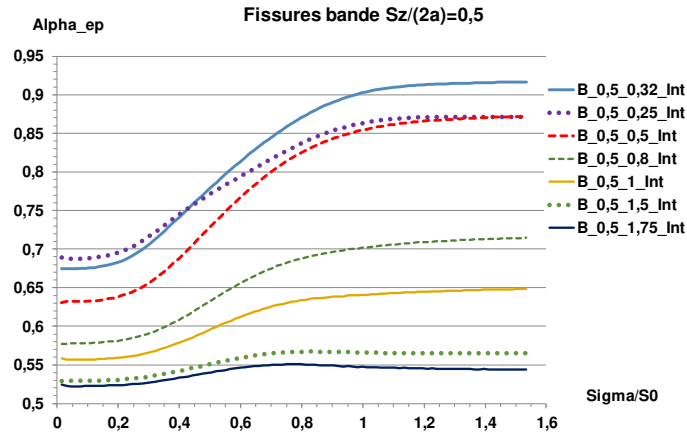


Figure A1.5\_1 : variation du coefficient d'équivalence avec le niveau de chargement pour des fissures non écartées

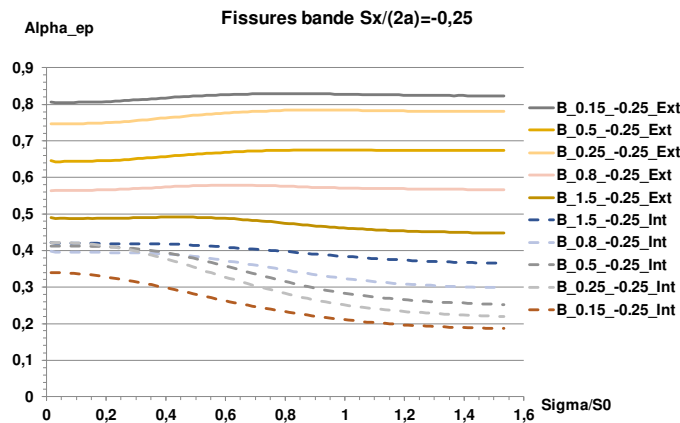


Figure A2\_2 : variation du coefficient d'équivalence avec le niveau de chargement pour des fissures écartées

### A2.2.3. Effets de la plasticité

L'interaction de deux fissures est pilotée par la distribution des contraintes pour une fissure unique, comme l'a prouvé l'analyse en élasticité linéaire.

Toutefois deux différences majeures existent entre les comportements élastique linéaire et plastique :

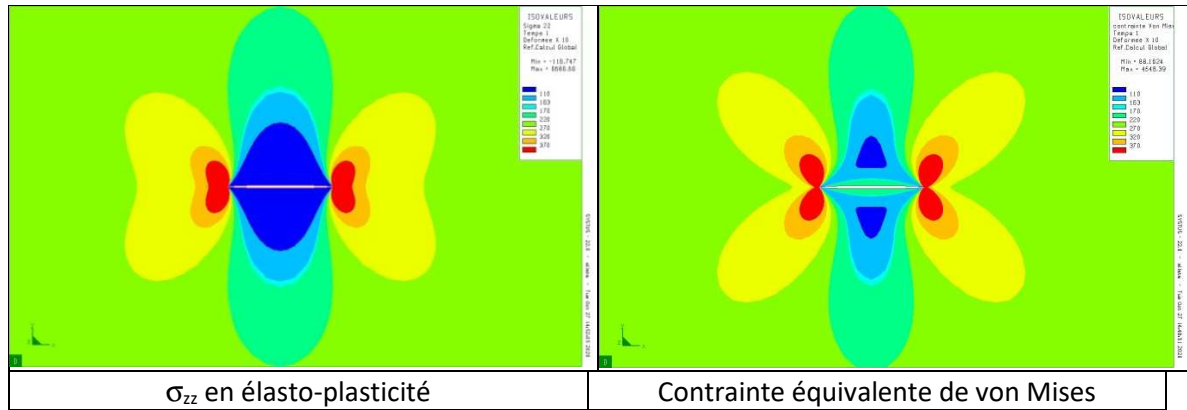
- En élasticité linéaire, la force fissurante  $J$  ne dépend que des contraintes associées aux trois modes d'ouverture - c'est-à-dire que seules les contraintes normales et de cisaillement parallèles à la fissure interviennent.
- En plasticité pure, c'est le critère de plasticité qui gouverne les distributions de contraintes. Dans les études analysées dans ce document le critère de plasticité utilisé est celui de von Mises.

Dans les deux cas Les fissures coplanaires, sont soumises au seul mode I et pour les fissures parallèles, c'est le mode I qui est nettement dominant. Les motifs des distributions de contraintes diffèrent notablement en élasticité et plasticité, ce qu'illustrent les figures A2\_3 et A2\_4.

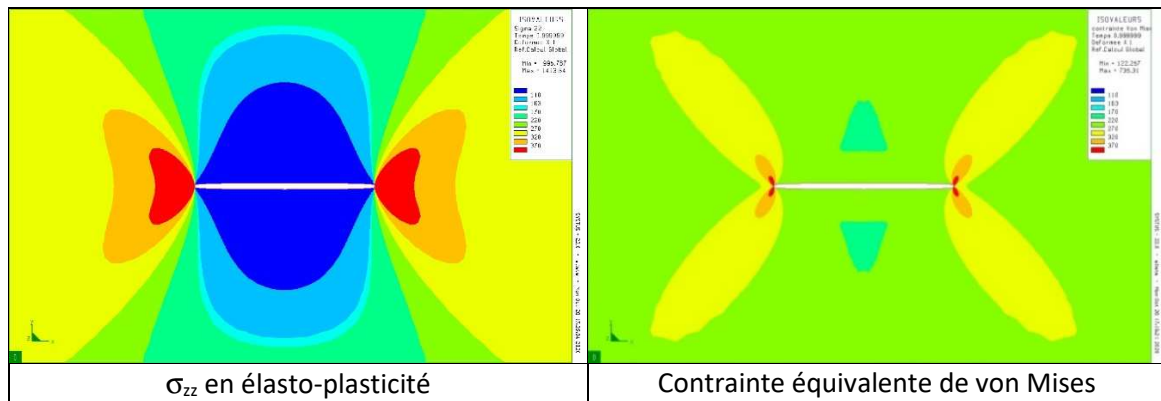
Les calculs élasto-plastiques sont effectués avec mêmes caractéristiques élastiques et le comportement élasto-plastique est régi par la loi de Ramberg-Osgood suivante :

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \cdot \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^n \text{ avec } \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E} \quad E = 174700 \text{ MPa}, \alpha = 1, n = 6, \sigma_0 = 163 \text{ MPa} \quad (A2.5)$$

Les iso valeurs sont issues des calculs effectués par ESI.

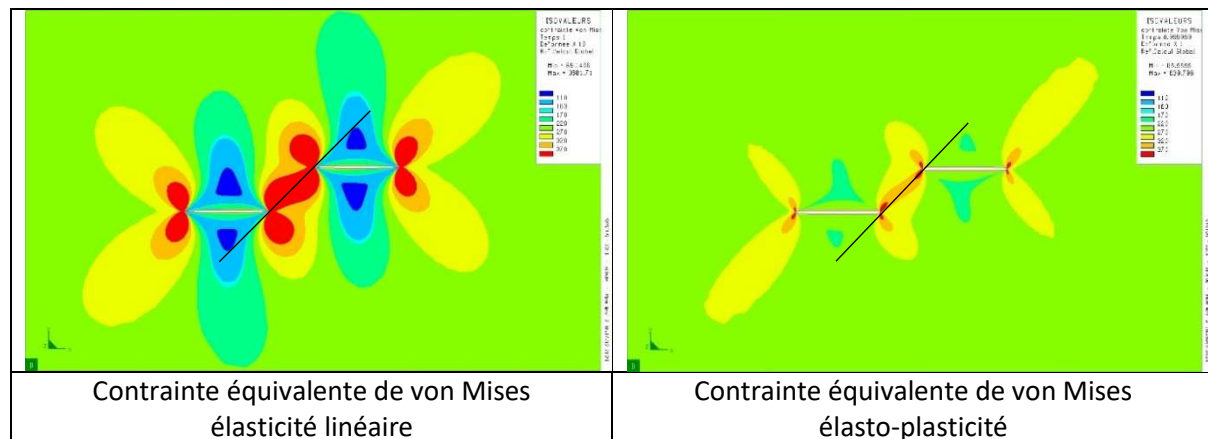


**Figure A2\_3 : iso valeurs de contraintes pour une fissure unique – élasticité linéaire**



**Figure A2\_4 : iso valeurs de contraintes pour une fissure unique – élastoplasticité**

Dans le cas de deux fissures interagissantes, il existe une différence notable entre les niveaux et les distributions de contraintes qui pilotent les forces fissurantes J, ce qu'illustre la figure A1.5\_5 **Figure A2\_5**.



**Figure A2\_5 : iso valeurs de contraintes pour deux fissures égales séparées de  $S_x/2a = S_z/(2a) = 0,5$**

Ces différences de comportement engendrent trois conséquences importantes :

**1. La plasticité décale la limite d'écrantage**

La figure A2\_6 illustre le décalage vers les  $\hat{S}_x$  (définis pour rappel comme le rapport  $\frac{S_x}{a_1+a_2}$ ) positifs de la courbe limite d'écrantage plastique par rapport à la courbe limite d'écrantage élastique. Pour des écarts  $\hat{S}_x > 0,5$  les pentes ont des valeurs proches.

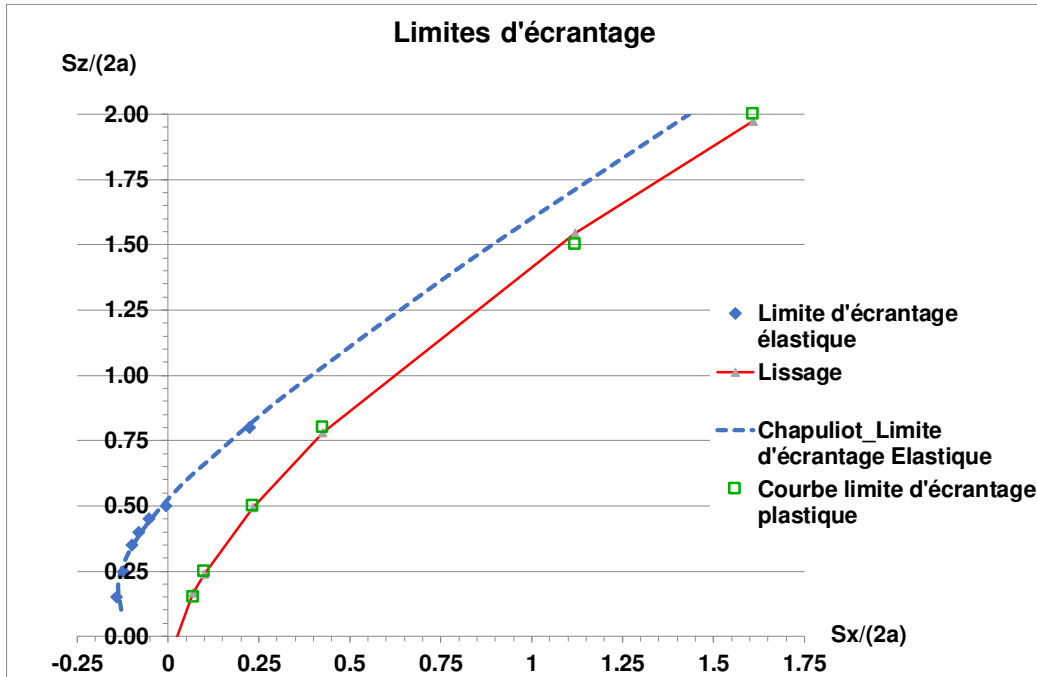


Figure A2\_6 : limites d'écrantage pour  $\alpha_e$  et  $\alpha_p$

Calculer le coefficient enveloppe  $\alpha_p$  nécessite de savoir quelle valeur de  $\alpha_e$  retenir et donc de connaître la courbe limite d'écrantage plastique.

La courbe d'écrantage plastique peut être décrite de façon approchée par l'équation suivante :

$$\hat{S}_z = -0,0307 + 1,4544 \cdot (0,001 + \hat{S}_x)^{0,7236} \tag{A2.6}$$

Avec  $\hat{S}_x = \frac{S_x}{a_1+a_2}$  et  $\hat{S}_z = \frac{S_z}{a_1+a_2}$

La forme du champ suit les lignes de glissement dont l'orientation ne dépend pas de l'écroutissage (Figure A2\_7). Il en va de même pour la limite d'écrantage.

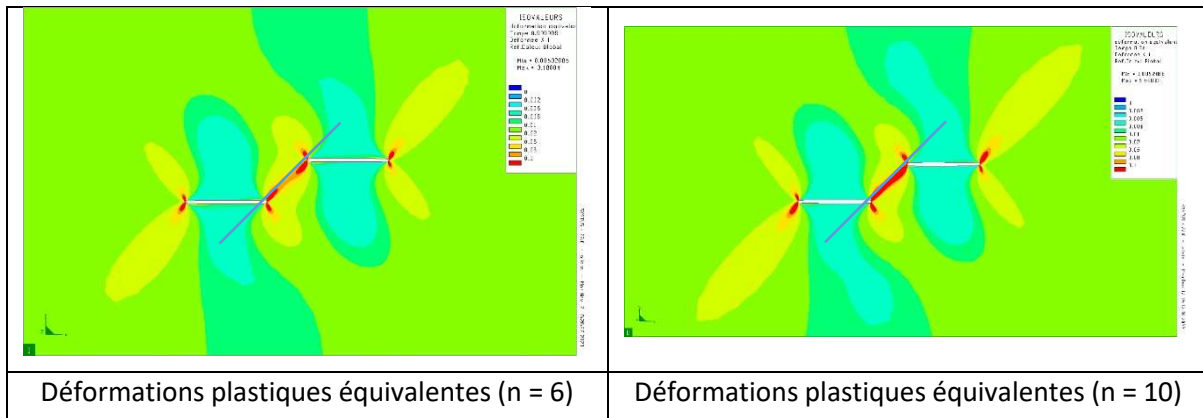


Figure A2\_7 : champs de déformation équivalente pour  $S_x/(2a) = S_z/(2a) = 0,5$  ;  $n = 6$  et  $10$

La plastification est plus intense dans la bande pour  $n = 10$ .

## 2. La plasticité augmente la portée de l'interaction

La figure A2\_8 montre que l'écart entre les valeurs des coefficients  $\alpha$  en élasticité et en élasto-plasticité diminue moins lorsque  $\hat{S}_x$  augmente pour deux fissures parallèles plus éloignées dans la direction normale à ces fissures.

La non-interaction est atteinte lorsque  $\alpha$  vaut 0,5 en élasticité, comme en élasto-plasticité. Cette limite est atteinte plus rapidement en élasticité.

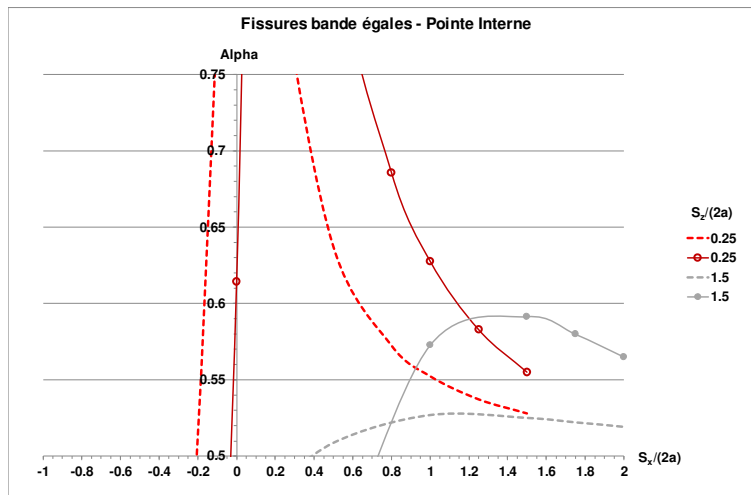


Figure A2\_8: comparaison des coefficients  $\alpha$  en élasticité (courbes en tirets) et en élasto-plasticité (courbes continues)

Une autre illustration est donnée à la figure A2\_9. Lorsque les fissures s'écartent en  $\hat{S}_x = \frac{S_x}{a_1 + a_2} > 0$ , les coefficients  $\alpha_p$  croissent puis décroissent de façon monotone. Lorsque  $\hat{S}_z$  augmente, les maxima sont de moins en moins élevés et se décalent vers les  $\hat{S}_x$  croissants et la décroissance est plus lente.

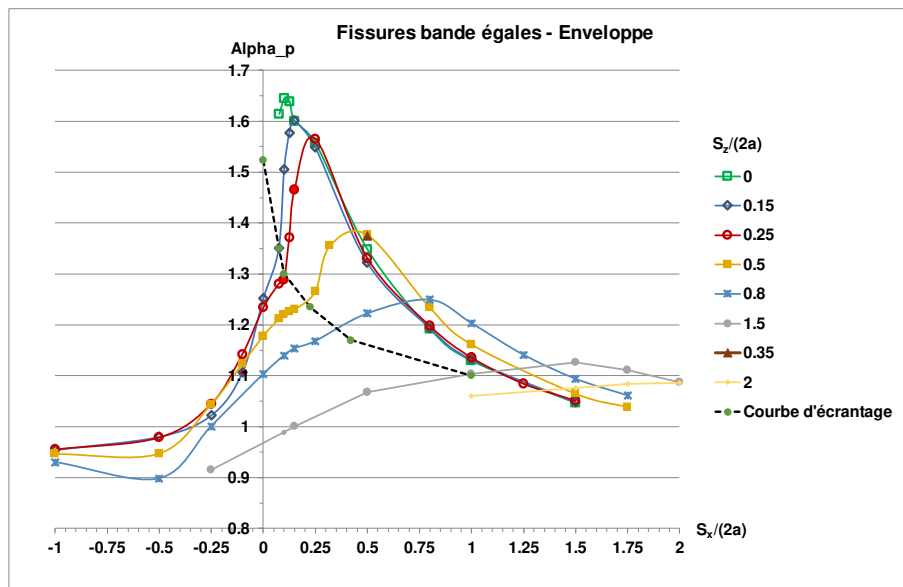


Figure A2\_9 : variation du coefficient  $\alpha_p$  enveloppe

### 3. L'écoulement plastique

#### Fissure isolée

Les milieux fissurés en traction pure présentent des écoulements plastiques en déformations planes de même motif. Celui-ci s'organise autour de lignes de glissement à 45 degrés, caractéristiques de la parfaite plasticité (RIC, 1968).

L'écrouissage augmente la largeur de la bande plastique. Ceci est vérifié quelle que soit la taille de fissure. La figure A2\_10 illustre ces propriétés. Les calculs élasto-plastiques ont été réalisés par E. Debourdeaux (DEB, 2012).

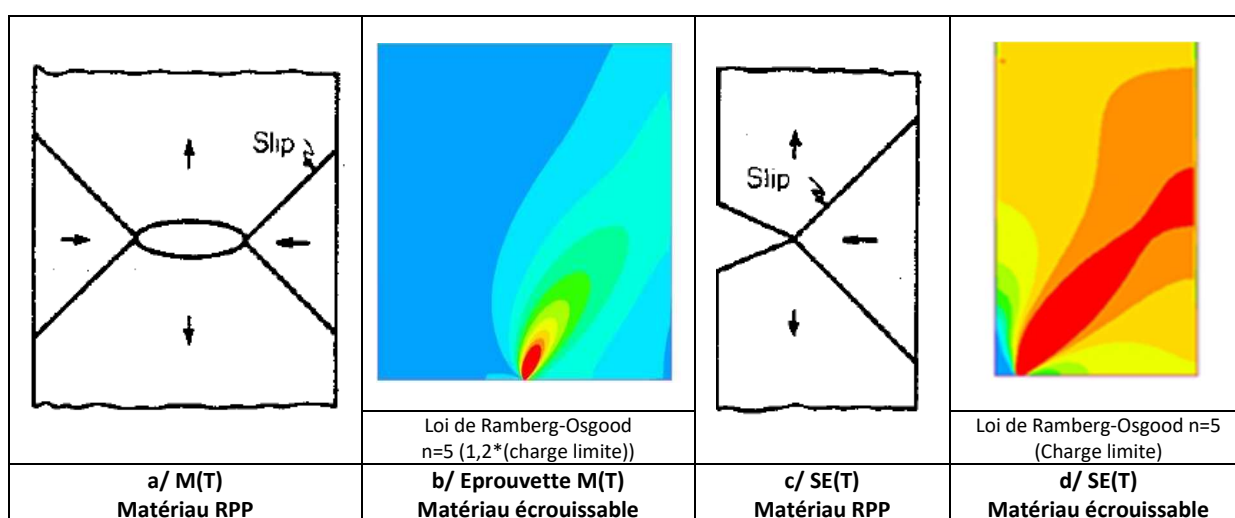


Figure A2\_10 : comparaison des comportements plastiques

a/ Epreuves à fissure centrale M(T): lignes de glissement à 45 degrés

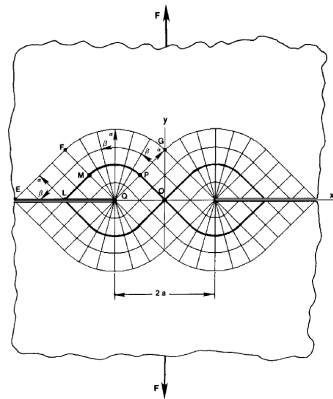
b/ Epreuves à fissure centrale M(T) : déformations équivalentes

c/ Epreuves à fissure latérale SE(T) en rotation bloquée : lignes de glissement à 45 degrés

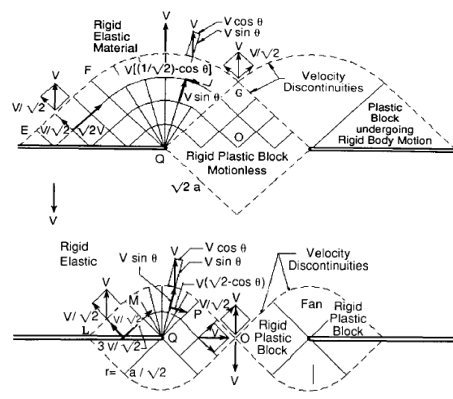
d/ Epreuves à fissure latérale SE(T) en rotation bloquée : déformations équivalentes

#### Deux fissures bande coplanaires

La configuration de fissures interagissantes coplanaires la plus connue est celle de l'éprouvette DE(T), qui comporte deux fissures latérales colinéaires. Le réseau des lignes de glissement est totalement différent : le champ d'écoulement est constitué de pavés de contrainte constante joints par des éventails. Il existe entre les deux pointes de fissure un bloc rigide fixe en forme de losange. Cette solution a été établie à partir des travaux de Prandtl (PRA, 1921) et a été réexaminée par Hill (HIL, 1950). Unger (UNG,1995) a effectué une comparaison détaillée des deux approches. Les champs de contraintes sont identiques, la solution de Hill décrit un champ Rigide Plastique réduit où ne figure pas le losange Rigide Plastique fixe (Figure A2\_11).



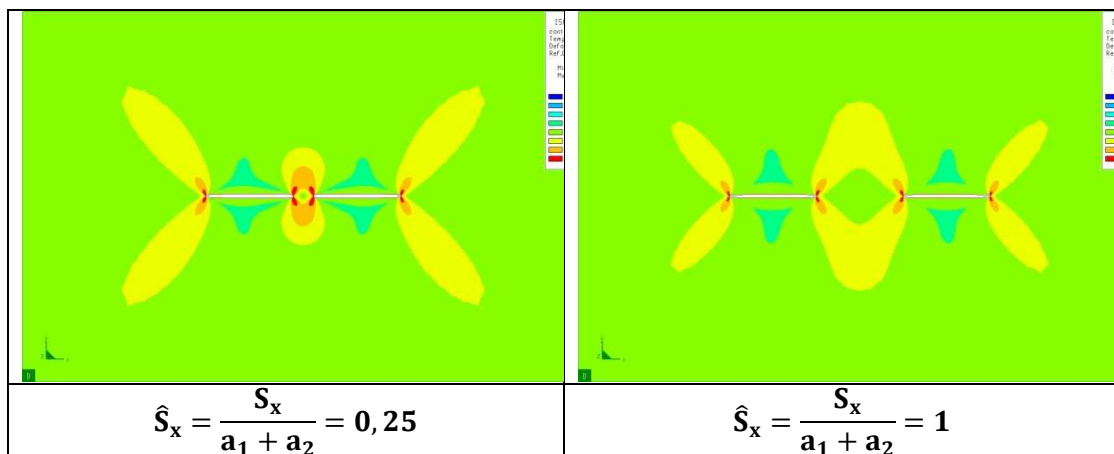
**Eprouvette à deux fissures latérales (DET)**



**Champs de vitesses de Prandtl et de Hill**

**Figure A2\_11 : champ de lignes de glissement de Prandtl-Hill**

Les calculs effectués par ESI France pour des fissures bande coplanaires donnent des résultats similaires (Figure A2\_12).

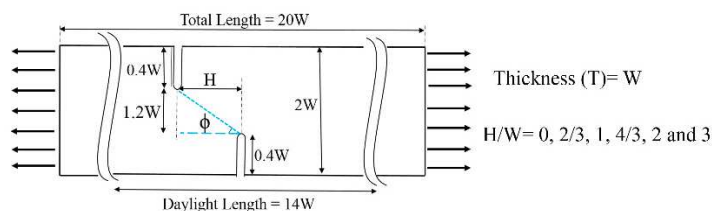


**Figure A2\_12 : iso valeurs de von Mises en élasto-plasticité pour deux fissures bande égales**

### Deux fissures bande parallèles

Peu d'études d'interaction de fissures parallèles ont été menées en plasticité étendue (SAM, 2018) et encore moins en s'appuyant sur des isovalues de contraintes ou de déformations équivalentes.

L'étude de Samadian et al. (SAM, 2018), effectuée sur des éprouvettes à deux entailles latérales égales décalées, montre que la forme des champs de déformations plastiques entre pointes de fissure varie considérablement entre le cas de fissures coplanaires et celui des fissures décalées verticalement (Figure A2\_14). La géométrie de l'éprouvette est décrite à la Figure A2\_13 tirée de l'article comme les figures A2\_14 et figure A2\_15.



**Figure A2\_13 : géométrie de l'éprouvette DE(T) asymétrique**

La correspondance avec nos paramètres est la suivante :

$$S_x = 2W - 2a = 1,2 * W \quad S_x / (2a) = 1,5 \quad S_z / S_x = H / W / 1,2.$$

Les fissures sont assez éloignées.

Le chargement est une traction pure par déplacement imposé, jusqu'à ce que la force chute de 15%. Toutefois les illustrations de la figure A2\_15 sont relatives au niveau de force maximale : il ne se produit pas d'extension de fissure.

La procédure de caractérisation des bandes de déformation équivalente maximale est illustrée à la figure A2\_14.

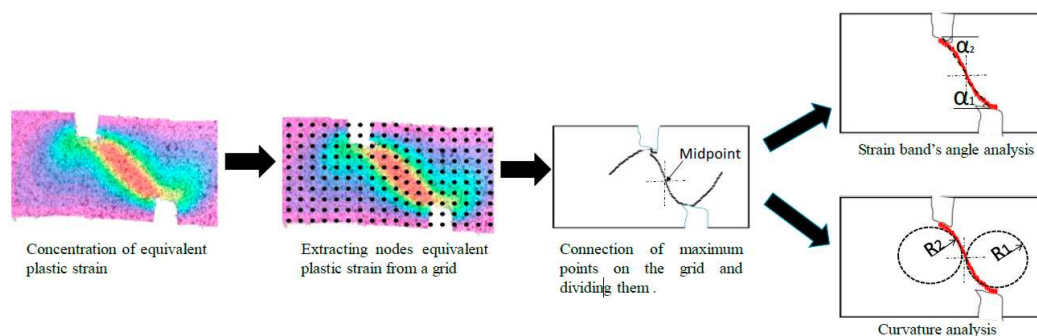


Figure A2\_14 : procédure de caractérisation des bandes de déformations équivalentes

H/W	0	2/3	1	4/3	2	3
$\hat{S}_z$	0	0,833	1,25	1,666	2,5	3,75
$S_z/S_x$	0	0,463	0,833	0,926	1,667	2,5
Iso.						
C						
$\epsilon_{eq}$						

Figure A2\_15: motifs de déformations équivalentes (échelle de 0 à 0,1) et analyse de la courbure C et de l'amplitude de déformations équivalentes le long de la trajectoire de la bande

L'article fournit plusieurs résultats importants :

- La localisation et la forme des bandes restent quasiment constantes au cours des tests.
- Pour les fissures coplanaires, les bandes sont symétriques et presque circulaires.
- Pour  $S_z/S_x = 0,46$  et  $0,83$ , la bande forme une sigmoïde puis devient rectiligne pour  $S_z/S_x = 1,7$ .
- L'angle moyen de la bande est voisin de 45 degrés pour  $S_z/S_x = 0,93$  et pour cette valeur, l'intensité de déformation équivalente apparaît maximale (cf. ligne 'Iso.' de la figure A2\_14).



- La séparation complète des concentrations de déformations intervient pour  $S_z/S_x = 2,5$ .
- Le niveau de déformation équivalente est maximal pour  $S_z/S_x = 0,83$ , mais les résultats manquent pour le cas  $S_z/S_x = 0,93$ .

Lorsque  $S_z/S_x = 1$ , la bande de glissement a la même orientation que pour une fissure isolée : il est donc légitime de penser que c'est pour cette géométrie que l'interaction est maximale.

#### A2.2.4. Charge limite d'une plaque contenant une ou deux fissures bande égales

La structure est une plaque plane contenant deux fissures traversantes égales coplanaires ou parallèles sollicitées par une charge uniaxiale normale au plan des fissures, appliquée aux extrémités de la plaque. La hauteur de plaque est plus élevée que la largeur de plaque augmentée de l'écartement des plans des fissures afin de ne pas introduire de dépendance des charges limites vis-à-vis de la hauteur de plaque.

##### A2.2.4.1. Charge limite d'une plaque contenant une fissure bande

La charge limite d'une plaque en déformations planes contenant une fissure bande a pour expression :

$$Q_{L0} = k_{VM} \cdot \sigma_0 \cdot Z_{pL} = k_{VM} \cdot \sigma_0 \cdot Z_{p_{nc}} \cdot \mu_t \cdot \mu_r \quad \text{avec } k_{VM} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (A2.7)$$

Avec  $Z_{p_{nc}}$  module plastique de la section non fissurée,  $\mu_t$  facteur de triaxialité et  $\mu_r$  facteur de réduction de section.

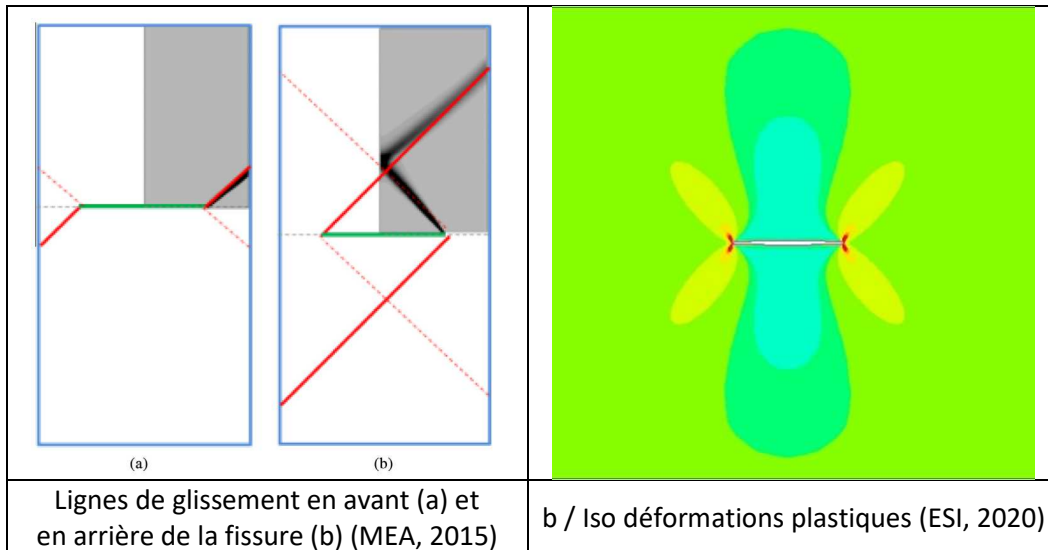
Pour l'éprouvette CCT :

$$Z_{p_{nc}} = 2B \cdot W, \mu_t = 1 \text{ et } \mu_r = 1 - a/W \quad (A2.8)$$

Pour une fissure unique de taille  $4a$  :

$$Q_{L0} = k_{VM} \cdot \sigma_0 \cdot Z_{pL} Z_{p_{L2}} = Z_{p_{nc}} \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{a}{W}\right) \quad (A2.9)$$

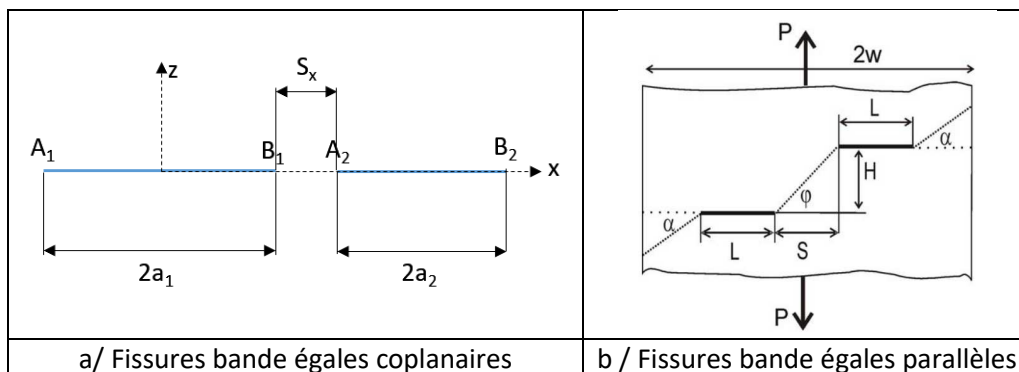
Ces formules sont exactes (MIL, 1988) et le motif des lignes de glissement est décrit à la figure A2\_16.



**Figure A2\_16 : motifs de déformation plastique dans une plaque à fissure centrale**

### A2.2.4.2. Charge limite d'une plaque contenant deux fissures bande égales

La configuration est décrite à la figure A2\_17.

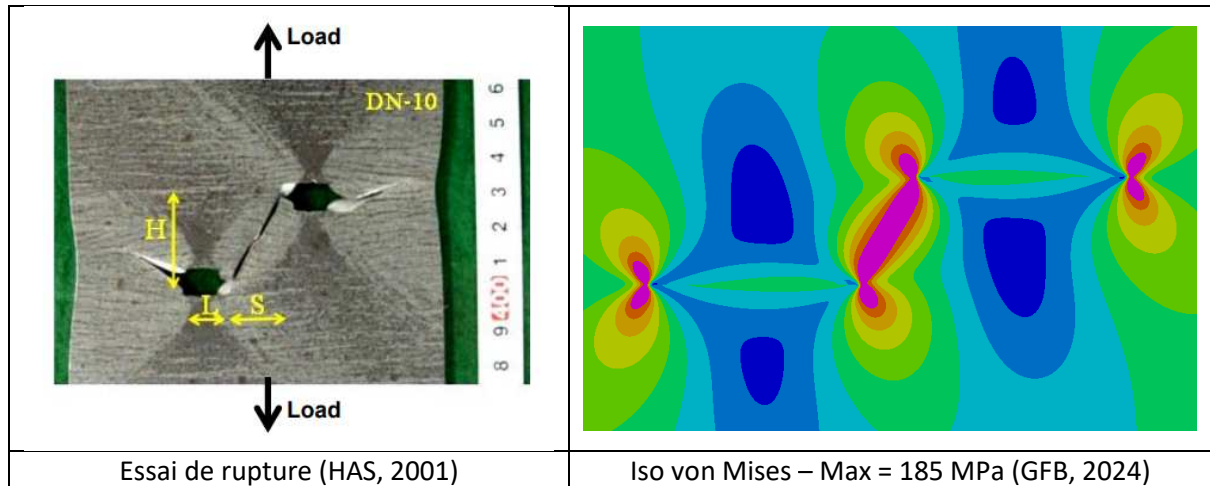


**Figure A2\_17 : schémas décrivant les paramètres des fissures bande**

#### A2.2.4.2.1. Approche cinématique

Cette approche consiste à retenir des champs de vitesses de déformation cinématiquement et plastiquement admissibles. L'application du principe des puissances virtuelles et du principe du travail maximal, conduit à l'obtention d'une borne supérieure de la charge limite (SAL, 1973).

Bezensek (BEZ, 2007) considère le système de lignes de glissement illustré par la figure A2\_18 pour des fissures parallèles.



**Figure A2\_18 : lignes de glissement autour de deux fissures parallèles**

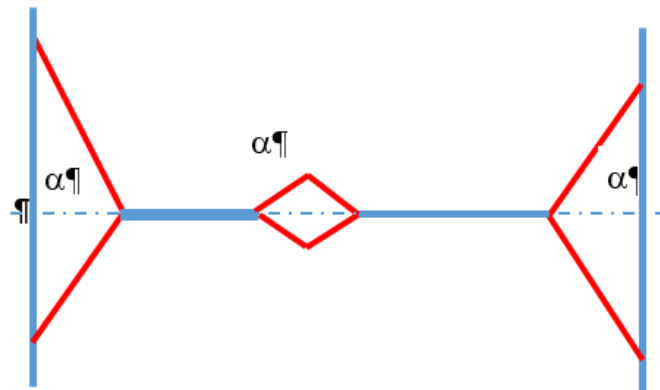
Pour un état de déformation plane, la borne supérieure de la charge limite d'une plaque contenant deux fissures parallèles égales soumise à une traction normale est obtenue par minimisation de l'expression suivante :

$$Q_{L0,2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sigma_0 \cdot B \cdot \left[ \left( W - 2a - \frac{S_x}{2} \right) \cdot \frac{1}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha} + \frac{S_x}{2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi} \right] \quad (A2.10)$$

Les angles  $\alpha$  et  $\varphi$  sont définis à la figure A2\_17b.

### Fissures coplanaires

Bezensek considère que dans ce cas les angles  $\alpha$  et  $\varphi$  sont égaux :



**Figure A2\_19 : lignes de glissement pour 2 fissures bande coplanaires**

Il vient alors :

$$Z_{p,L2} = Z_{p,nc} \cdot \frac{a}{W} \cdot \left[ \left( \frac{W}{a} - 2 \right) \cdot \frac{1}{2 \cos \alpha \cdot \sin \alpha} \right] \quad (A2.11)$$

Avec  $Z_{p,nc} = 2B \cdot W$ . La charge limite est indépendante de l'écartement  $\hat{S}_x$ .

Pour une taille et des écartements fixés, la dérivée par rapport à l'angle  $\alpha$  vaut :

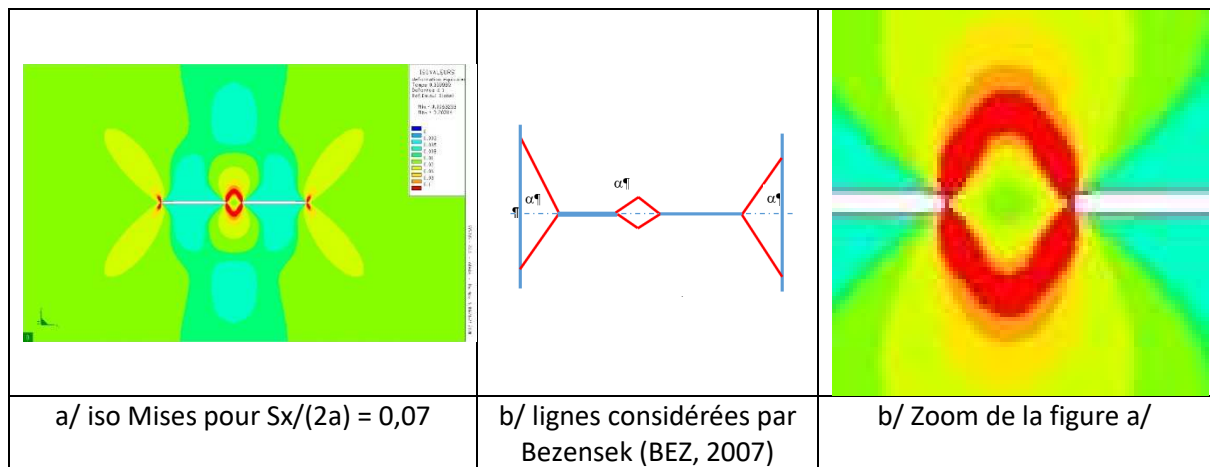
$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 0 \quad \text{donc } \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$Z_{p\_L2} = Z_{p\_nc} \cdot \left(1 - \frac{2a}{W}\right) \quad (\text{A2.12a})$$

$$Q_{L0\_2iso} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sigma_0 \cdot 2B \cdot (W - 2a) \quad (\text{A2.12b})$$

C'est la formule de la section nette pour une fissure isolée de longueur 2a.

La validité de cette formule pour deux fissures coplanaires est discutable. En effet elle ne s'applique que si le motif des lignes de glissement est celui décrit à la figure A2\_19. Or, au moins pour des écartements relatif  $S_x/(2a)$  faibles, le motif entre les points les plus proches (Figures A2\_20 a et c) s'apparente à un champ de Prandtl-Hill (voir § 4.2.3 point 3).



**Figure A2\_20 : motifs de lignes de glissement pour 2 fissures bande coplanaires**

### Fissures parallèles

La borne supérieure de la charge limite en fonction de  $\hat{S}_x = \frac{S_x}{2a}$  et  $\hat{S}_z = \frac{S_z}{2a}$  est donnée par :

$$Z_{p\_L2} = Z_{p\_nc} \cdot \frac{a}{W} \cdot \left[ \left( \frac{W}{a} - 2 - \hat{S}_x \right) \cdot \frac{1}{2 \cos \alpha \cdot \sin \alpha} + \frac{\hat{S}_x}{2 \cos \varphi \cdot \sin \varphi} \right] \quad (\text{cf A2.10})$$

$$\cos \varphi = \frac{\hat{S}_x}{\sqrt{\hat{S}_x^2 + \hat{S}_z^2}} \quad \sin \varphi = \frac{\hat{S}_z}{\sqrt{\hat{S}_x^2 + \hat{S}_z^2}}$$

### Hypothèse de Besensek (BEZ, 2007)

Les champs admissibles sont tels que  $\alpha \equiv \varphi$

$$Z_{p\_L2} = Z_{p\_nc} \cdot \frac{a}{W} \cdot \frac{\hat{S}_x^2 + \hat{S}_z^2}{2\hat{S}_z} \cdot \left[ \left( \frac{W}{a} - 2 - \hat{S}_x \right) \cdot \frac{1}{\hat{S}_x} + 1 \right] \quad (\text{A2.13})$$

Si  $\hat{S}_z = \hat{S}_x$

$$Z_{p\_L2} = Z_{p\_nc} \cdot \left(1 - \frac{2a}{W}\right) = Z_{p\_L2\_Iso} \quad (\text{A2.14})$$

Ce qui est le module plastique pour une fissure de taille 4a.

Le rapport de la charge limite pour deux fissures parallèles à celle de la fissure unique de longueur 4a s'écrit :

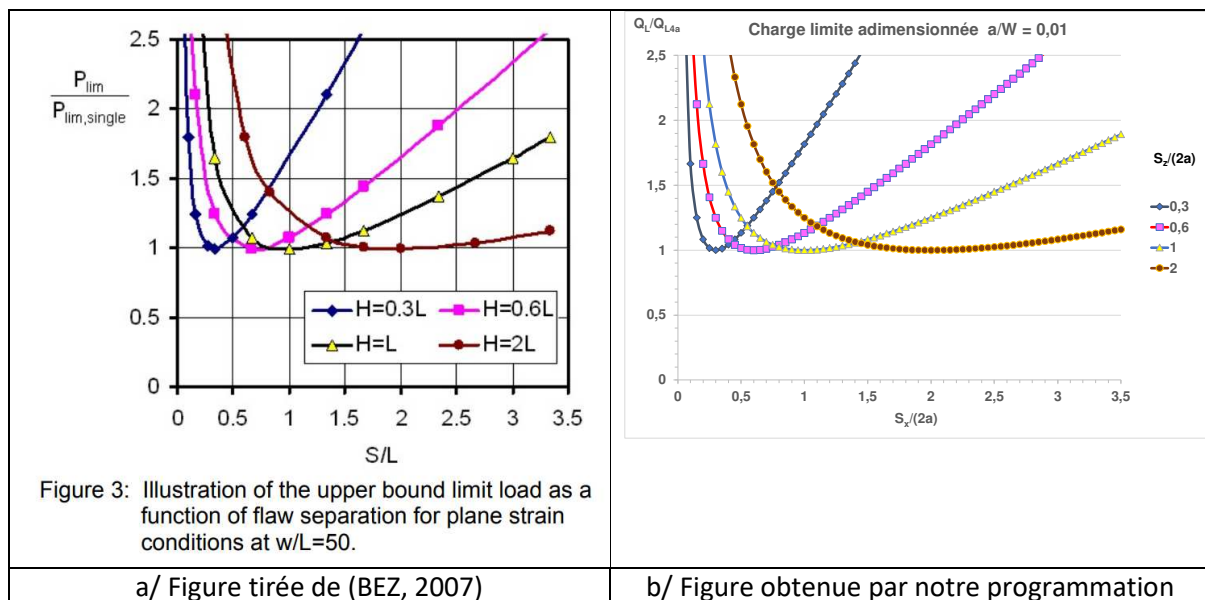
$$\frac{Q_{L0\_2}}{Q_{L0\_2\_Iso}} = \frac{\frac{a}{W} \cdot \frac{\hat{S}_x^2 + \hat{S}_z^2}{2\hat{S}_z} \cdot \left[ \left( \frac{W}{a} - 2 - \hat{S}_x \right) \cdot \frac{1}{\hat{S}_x} + 1 \right]}{1 - \frac{2a}{W}}$$

$$\frac{Q_{L0\_2}}{Q_{L0\_2\_Iso}} = \frac{\hat{S}_x^2 + \hat{S}_z^2}{2\hat{S}_z \cdot \hat{S}_x} \quad (A2.15)$$

Cette fonction est indépendante de la taille relative  $\frac{W}{a}$  !

Si  $\hat{S}_z = \hat{S}_x$   $\frac{Q_{L0\_2}}{Q_{L0\_2\_Iso}} = 1$

Pour tout écartement  $S_z$ , la valeur minimale est obtenue pour  $S_z = S_x$ , celle de la charge limite pour deux fissures coplanaires (Figure A2\_21).

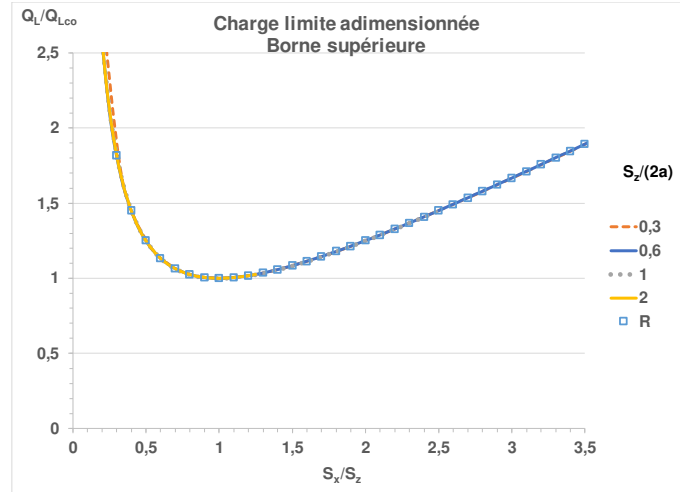


**Figure A2\_21 : borne supérieure de la charge limite pour 2 fissures bande parallèles**

Les courbes des figures A2\_21 a et b sont identiques.

En fonction de  $R = \frac{\hat{S}_x}{\hat{S}_z}$ , on obtient une courbe unique (Figure A2\_22)

$$\frac{Q_{L0\_2}}{Q_{L0}} = \frac{R^2 + 1}{2} \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{2} \cdot \left( R + \frac{1}{R} \right) \quad (A2.16)$$



**Figure A2\_22 : borne supérieure de la charge limite pour 2 fissures bande parallèles en fonction du rapport R des écartements**

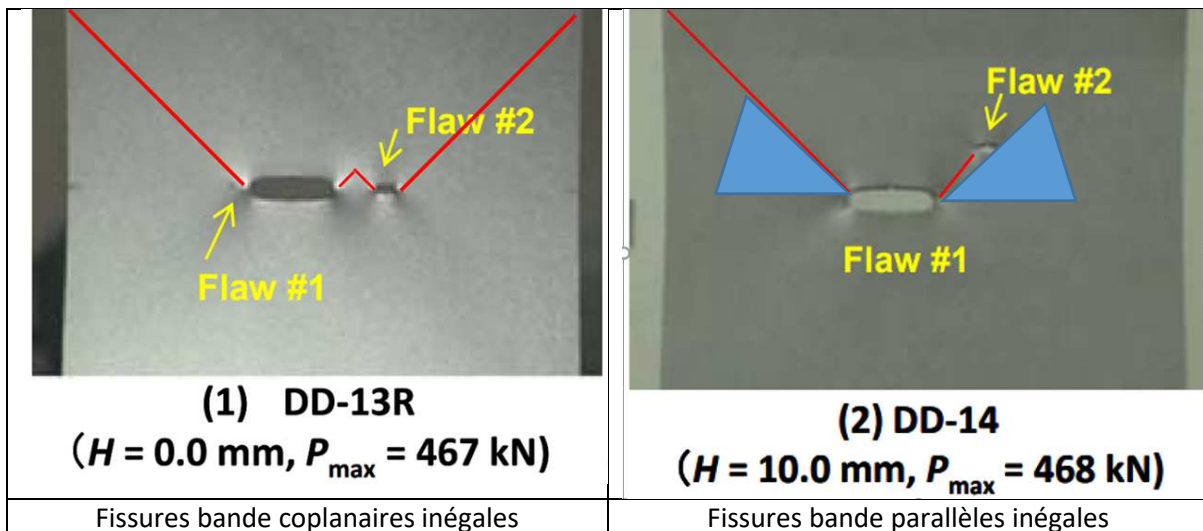
Cette borne supérieure ne donne la valeur exacte que pour  $R=1$  sous l'hypothèse du champ de lignes de glissement retenue par Bezensek. Elle ne devient infinie pour des fissures très proches et pour des fissures éloignées.

$$\frac{Q_{L0,2}}{Q_{L0}} = \frac{\hat{S}_x^2 + \hat{S}_z^2}{2\hat{S}_z} \cdot \frac{1}{\hat{S}_x} = \frac{\hat{S}_x}{2\hat{S}_z} + \frac{\hat{S}_z}{2\hat{S}_x} \quad (A2.17)$$

Pour les fissures proches en  $S_x$ , la charge limite doit rester bornée. Pour des fissures éloignées en  $S_x$  ou en  $S_z$ , la charge limite doit tendre vers celle d'une fissure isolée de longueur  $2a$ .

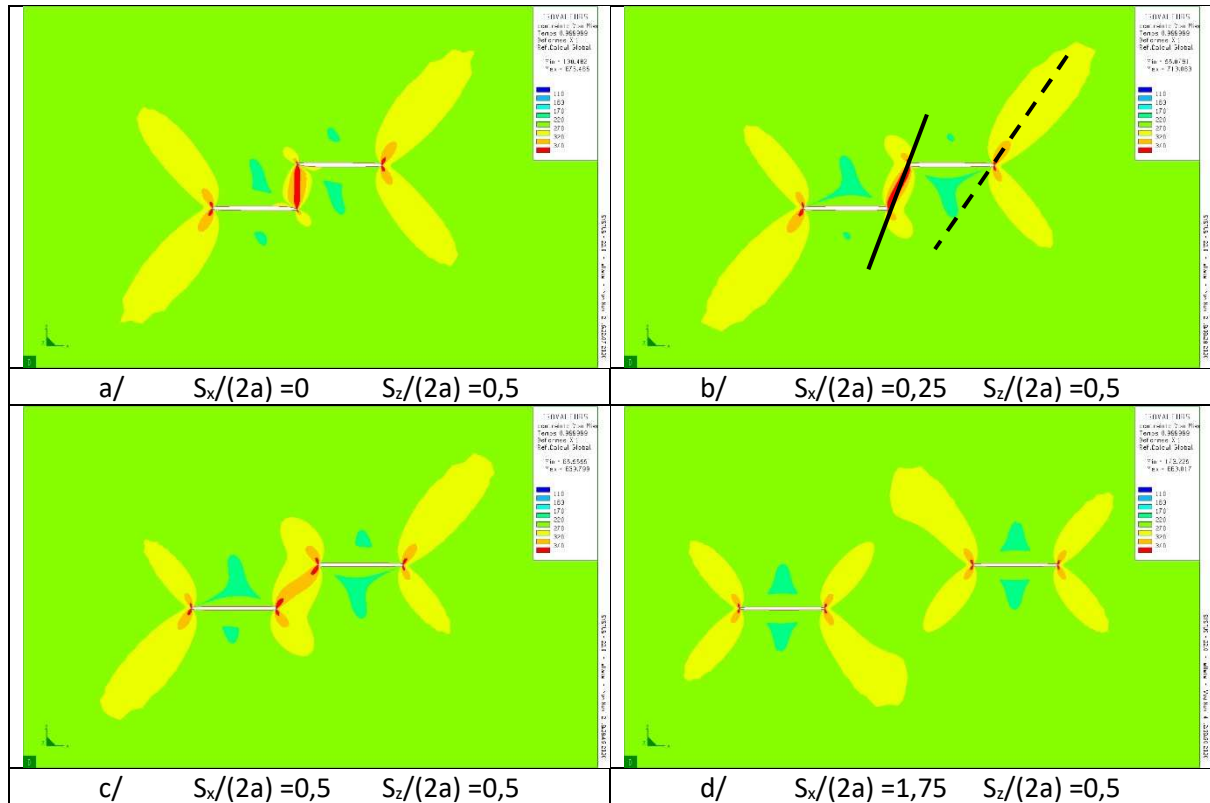
Discussion sur la condition  $\alpha \equiv \varphi$

La condition  $\alpha \equiv \varphi$  imposée pour l'approche cinématique, n'est pas vérifiée dans les cas réels. Sur les photos de la figure A2\_23.



**Figure A2\_23 : déformées des plaques comportant deux fissures traversantes parallèles inégales (HAS, 2011)**

Ceci est plus clair sur les iso mises en plasticité étendue présentés à la figure A2\_24 (SYSTUS, 2020).



**Figure A2\_24 : iso mises des plaques comportant deux fissures traversantes parallèles égales (SYSTUS, 2020)**

Si l'angle  $\alpha$  diffère de  $\varphi$ , alors :

$$Z_{p\_L2} = Z_{p\_nc} \cdot \frac{a}{W} \cdot \left[ \left( \frac{W}{a} - 2 - \hat{S}_x \right) \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{\hat{S}_x^2 + \hat{S}_z^2}{2\hat{S}_z} \right] \quad (A2.18a)$$

Ou sous une autre forme :

$$\frac{Q_{L0\_2}}{Q_{L0\_2\_Iso}} = \frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{1 - 2\frac{a}{W}} \cdot \frac{a}{W} \left[ \frac{\hat{S}_x^2 + \hat{S}_z^2}{2 \cdot \hat{S}_z} - \frac{\hat{S}_x}{\sin 2\alpha} \right] \quad (A2.18b)$$

La fonction rets non bornée en en  $S_x$  et  $S_z$ , il faut donc ajouter une comparaison avec les charges limites de la fissure isolée  $2a$ .

$$Z_{p\_L\_Iso1} = Z_{p\_nc} \cdot \left( 1 - \frac{a}{W} \right)$$

L'analyse des isovaleurs de la contrainte de von Misès conduit aux conclusions suivantes :

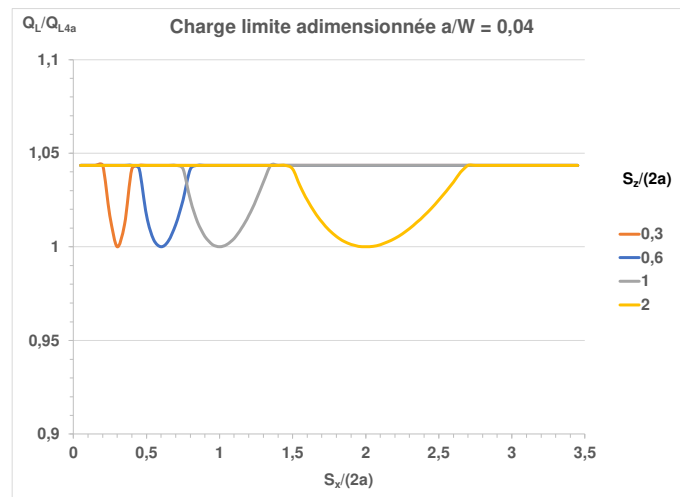
1. Les isovaleurs a et b montrent qu'en général les angles  $\alpha$  et  $\varphi$  sont différents et à l'évidence, les valeurs de ces angles ne peuvent être proches que si  $\varphi$  est voisin de 45 degrés.
2. Sur l'isovaleur c correspondant à  $R=1$  les angles  $\alpha$  et  $\varphi$  sont égaux à 45 degrés.
3. Tous les cas de fissures parallèles font apparaître une légère antisymétrie due au mode II induit par l'interaction.

4. L'isovaleur d montre que pour les fissures éloignées les fissures tendent à se comporter comme des fissures isolées.

La charge limite est la valeur minimale entre/

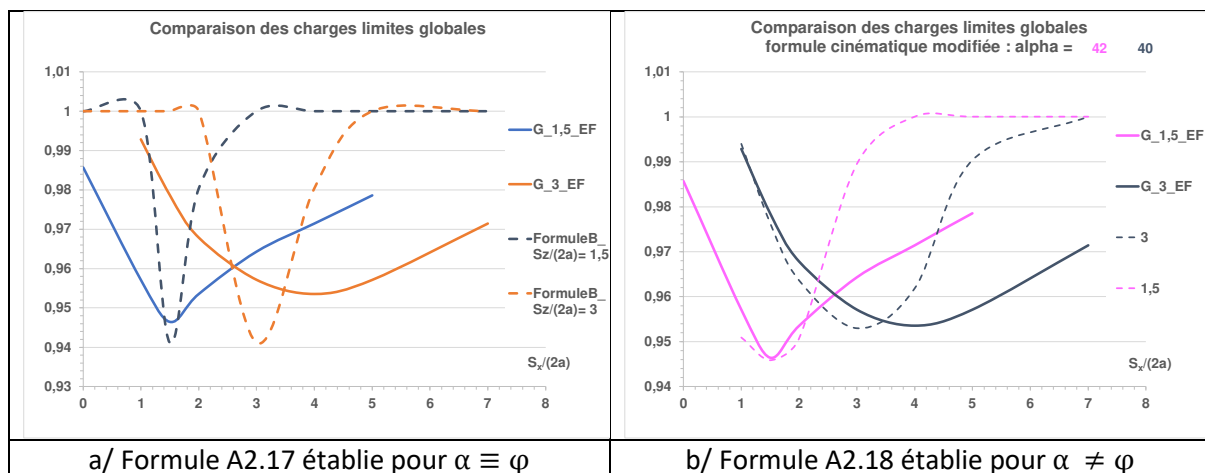
$$Q_{L02} = k_{VM} \cdot \sigma_0 \cdot Z_{pL2} \quad \text{et} \quad Q_{L0} = k_{VM} \cdot \sigma_0 \cdot Z_{pL-Iso1} \quad (A2.19)$$

Le graphe de la charge limite adimensionnée par la charge limite de la fissure isolée de longueur 2a devient (Figure A2\_25) :



**Figure A2\_25 : charge limite d'une plaque comportant deux fissures traversantes parallèles égales (approche cinématique)**

Bezensek (BEZ, 2007) a calculé la charge limite globale par éléments finis. Pour deux écartements verticaux  $S_z/2a = 1,5$  et  $3$ , la figure A2\_26 compare les résultats obtenus par éléments finis et par application des formules de calcul par approche cinématique.



**Figure A2\_26 : charge limite d'une plaque comportant deux fissures traversantes parallèles égales calculées par les formules de l'approche cinématique et par éléments finis (EF)**

La figure A2\_26 montre que l'hypothèse  $\alpha \equiv \varphi$  n'est pas bonne : les minima et les variations sont très différentes de ceux obtenus par éléments finis.



### A2.2.4.2.2. Approche statique

Cette approche consiste à retenir des champs de contraintes statiquement et plastiquement admissibles. La méthode des éléments finis appliquée pour une loi élastique parfaitement plastique permet d’obtenir une borne inférieure de la charge limite.

Feulvarch (GFB, 2024) a calculé la charge limite par éléments finis étendus avec le logiciel SYSTUS (SYSTUS, 2020) plusieurs plaques contenant deux fissures parallèles égales.

La charge limite doit varier entre l’expression pour deux fissures coplanaires égales et celle relative à une fissure isolée. La charge limite peut se mettre sous la forme :

$$Q_{L0} = Q_{L0\_nf} \cdot \left(1 - \psi \left(\frac{S_x}{2a}, \frac{S_z}{2a}\right) \cdot \frac{a}{W}\right) \quad (A2.20)$$

Il s’agit de déterminer la fonction  $\psi \left(\frac{S_x}{2a}, \frac{S_z}{2a}\right)$ .

Pour  $S_z = 0$ ,  $\psi \left(\frac{S_x}{2a}, 0\right)$  est donnée par la solution pour les fissures coplanaires. Elle vaut 2 pour  $S_x = 0$ .

#### Cas des fissures parallèles

Les courbes force – déplacement sont données à la figure A2\_27 pour quelques configurations : la valeur au plateau est celle de la charge limite. Pour plusieurs configurations le calcul n’a pas convergé et les courbes ne présentent pas de plateau.

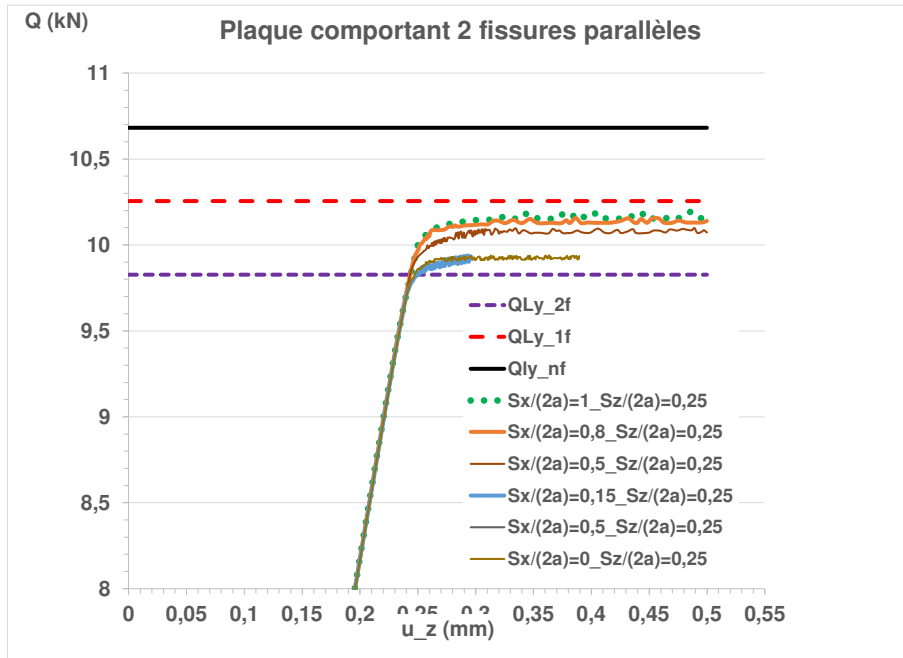


Figure A2\_27 : courbes force – déplacement pour plusieurs configurations de fissures parallèles

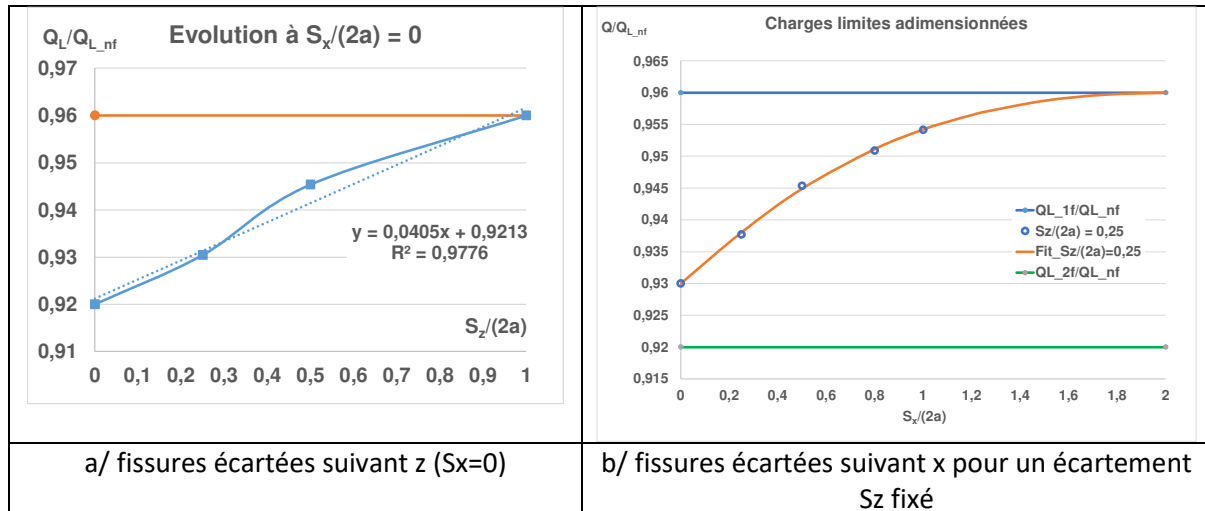


Figure A2\_28 : variations de la charge limite avec les écartements de fissures égales

Pour les fissures dont les pointes internes sont situées sur la même verticale ( $S_x = 0$ . Figure A2\_28a), la charge limite croit quasiment linéairement depuis 0,92, valeur associée aux deux fissures jointes jusque 0,96, valeur associée à la charge limite de la fissure isolée. Cela signifie qu'au-delà, de  $S_z/(2a) = 1$ , les fissures sont indépendantes. Il manque des résultats pour l'attester.

$$\psi\left(0, \frac{S_z}{2a}\right) = 2 - \frac{S_z}{2a} \quad (A2.21)$$

La variation de la charge limite avec  $S_x/(2a)$  pour une valeur de  $S_z/(2a)$  fixé est de type exponentiel comme le montre la figure A2\_28b depuis la valeur pour  $S_x/(2a) = 0$  jusque 1 que l'on estime atteint lorsque l'écartement  $S_x$  est égal à la longueur de fissure.

$$Q_{L0} = Q_{L0,nf} \cdot \left[ 1 - \psi\left(0, \frac{S_z}{2a}\right) \cdot \frac{a}{W} + 0,0416 \cdot \left(\frac{S_x}{2a}\right)^{1,091} \cdot \exp\left(-0,5417 \cdot \frac{S_x}{2a}\right) \right] \quad (A2.22)$$

Cette formule est à compléter par des formules pour d'autres valeurs de  $\frac{S_z}{2a}$ . Mais les calculs nécessaires à ce travail manquent en raison de problème de convergence non résolu à ce jour.

La comparaison avec l'approche cinématique est présentée à la figure A2\_29.

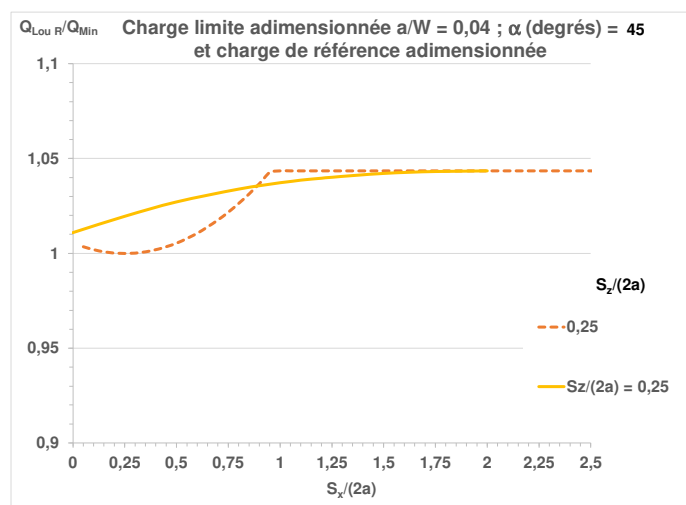


Figure A2\_29 comparaison des charge limites par approches cinématique et statique

La charge limite calculée par approche statique devrait être inférieure à celle calculée par rapport à l'approche cinématique. Cela peut venir du fait que la charge limite minimale dans l'approche cinématique soit surévaluée. Il manque des calculs par approche statique pour des fissures coplanaires pour pouvoir comprendre les résultats de la figure A2\_29.

La formule A2.18 appliquée pour un angle  $\alpha = 39$  degrés fournit un résultat acceptable (Figure A2\_30), ce qui ne signifie pas que la formule A2.18 soit correcte.

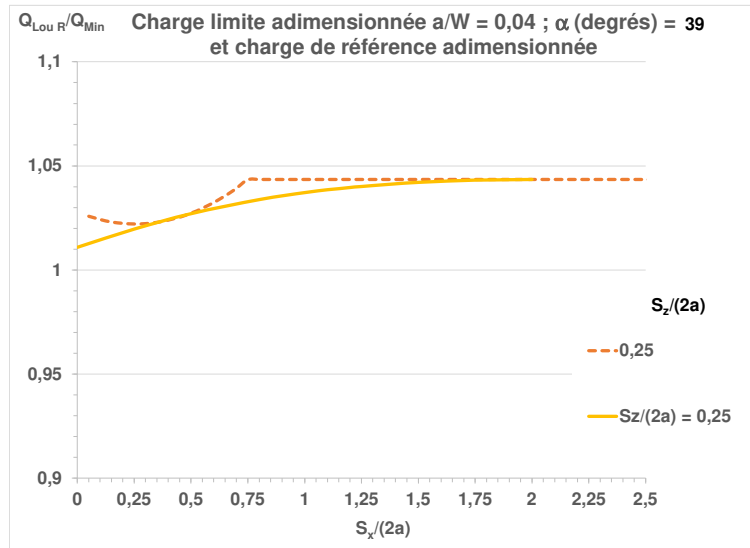


Figure A2\_30 comparaison des charges limites par approches cinématique modifiée et statique

#### A2.2.4.2.3. Charge d'effondrement plastique expérimentale

L'effondrement plastique correspond au début de la ruine d'une section entière d'une structure. La section est alors complètement plastifiée et de nombreux modèles utilisent la charge limite statique établie pour un modèle Elastique Parfaitement Plastique calibrée sur une contrainte d'écoulement relative à la loi de traction du matériau. Souvent cette contrainte d'écoulement est prise comme la moyenne de la limite d'élasticité à 0,2% de déformation et la contrainte ultime. Il s'agit alors d'une charge d'écoulement global.

Afin de caractériser la coalescence, des auteurs comme Moon (MOO, 2004) proposent des modèles de rupture locale caractérisés par la charge maximale atteinte lors de l'essai ou le contact des zones plastiques locales.

Tous ces modèles ont deux points faibles :

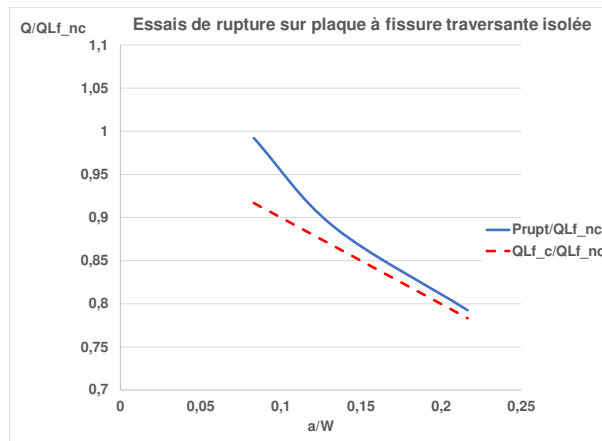
- La difficulté de la prise en compte de l'écroutissage qui augmente la capacité de résistance de la structure et l'extension du domaine d'interaction.
- La non prise en compte des effets de triaxialité qui influent sur la déchirure ductile.

#### Fissures superposées

Seong In Moon et al. (MOO, 2004) ont mené des expériences sur des plaques minces en Inconel 600 contenant deux fissures superposées.

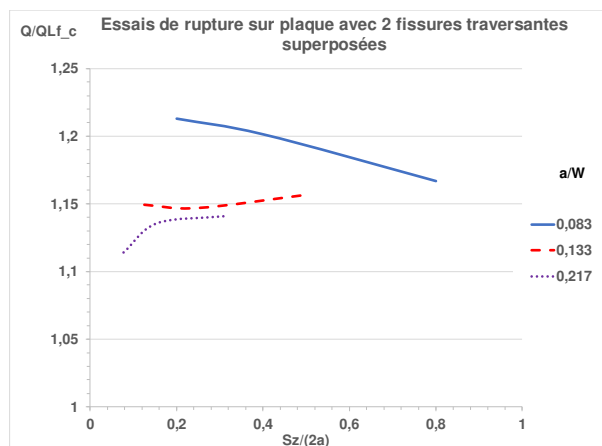
Pour une fissure unique les essais confirment la pertinence de la charge d'effondrement plastique en contrainte planes, calibrée sur la contrainte d'écoulement. Ceci est illustrée à la figure A2\_31.

$$Q_{LF\_Isolée} = k_{VM} \cdot Z_{pL_{Iso1}} \cdot \sigma_f \cdot \left(1 - \frac{a}{W}\right) \text{ avec } \sigma_f = \frac{\sigma_y + \sigma_u}{2} \quad (A2.23)$$



**Figure A2\_31 : charge à rupture et charge limite calibrée à la contrainte d'écoulement pour une plaque comportant une fissure centrale**

L'écart pour les petites fissures s'explique par un effet de triaxialité sur la charge à rupture. Pour les fissures superposées, la charge à rupture est nettement supérieure à la charge limite  $Q_{L0\_Isolée}$  (Figure A2\_32).



**Figure A2\_32 : rapport de la charge à rupture à la charge limite de la fissure isolée calibrée à la contrainte d'écoulement pour une plaque comportant deux fissures superposées**

Pour les couples de petite fissure ( $a/W=0,083$ ), plus la distance entre deux fissures est petite, plus le rapport est élevé. Ceci correspond à l'effet d'écran qui diminue lorsque l'écartement vertical augmente. La figure A2\_33 montre que les zones plastiques à l'extérieur de la partie fissurée sont proches qu'il s'agisse d'une seule fissure ou de deux fissures superposées ( $a/W = 0,04$ ).

C'est l'inverse pour les couples de grandes fissures ( $a/W = 0,133$  et  $0,217$ ). Ceci ne s'explique pas par l'analyse limite simple, il faut tenir compte d'une forte triaxialité entre les 2 fissures.

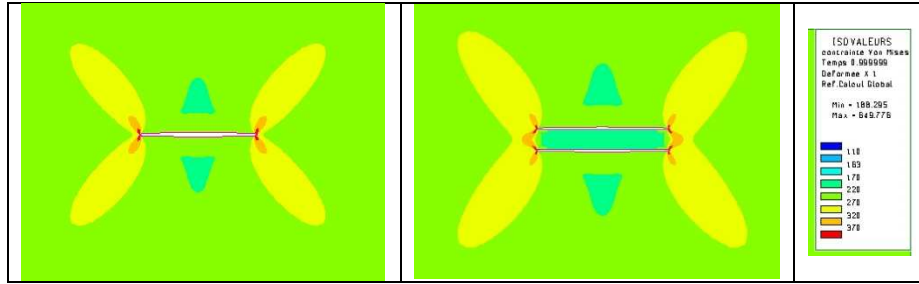


Figure A2\_33 : von Mises pour une fissure et deux fissures superposées ( $S_z/(2a) = 0,15$ ) au même niveau de chargement (ESI, 2020)

Fissures décalées

Miyazaki et al. (MIA, 2009) ont réalisé des essais sur des plaques en acier au carbone SM400A sollicitées en traction. La limite d'élasticité vaut 304 MPa et la contrainte ultime 449 MPa, ce qui donne une contrainte d'écoulement de 376,5 MPa. Les plaques ont une épaisseur de 4,7 mm et une longueur de 600mm. 16 essais de rupture sont effectués sur des plaques percées de deux fissures parallèles réalisées par électro érosion (Tableau A2\_1). D'autres essais portent sur des plaques à trois fissures. Le tableau A2\_2 donne les principales caractéristiques de ces essais analysés par les formules mentionnées ci-après (Formules A2.24). Cette étude a pour objectif de déterminer par une règle fondée sur la notion de charge limite, appelée « règle d'alignement », si deux fissures parallèles doivent être traitées comme coplanaires ou indépendantes vis-à-vis du risque de rupture ductile.

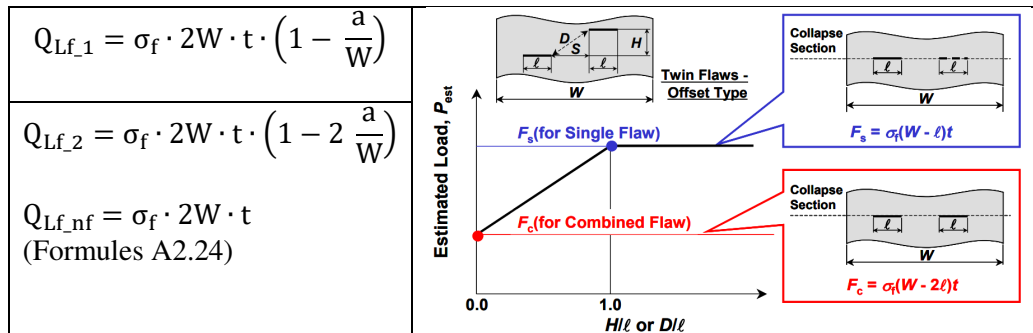


Tableau A2\_1 : charges d'effondrement plastique pour deux fissures égales (MIA, 2009)

La distance D entre les pointes de fissure les plus proches est définie par :

$$D = \sqrt{S_x^2 + S_z^2} \tag{A2.25}$$

Les résultats d'essais conduisent aux conclusions et commentaires suivants :

1. L'effet de l'espacement horizontal relatif a une légère influence sur la force maximale (Tableau A2\_2 essais DNW1-4). Ceci peut s'expliquer par le fait que la plasticité étend le domaine d'interaction suivant la direction normale au chargement (BEZ, 2007).
2. L'effet de l'espacement vertical relatif a une forte influence sur la force maximale. Pour  $S_x/(2a)=0$  la variation de la charge maximale est presque linéaire avec  $S_z/(2a)$  (Figure A2\_35a). Ce qui rejoint le constat effectué pour la charge limite statique (Figure A2\_28a).
3. La charge d'effondrement plastique bilinéaire proposée par Ranganath (RAN, 2007) et modifiée par Miyazaki et al. (Tableau A2\_1) donne une meilleure prévision de la charge maximale (Figure A2\_34).

4. Le choix de D au lieu de  $S_z$  dans la charge d'effondrement plastique de Ranganath modifiée ne peut être tranché par ces essais.
5. L'essai 12 comporte deux fissures dont la taille totale est proche de la largeur de plaque ce qui explique la faiblesse de la charge maximale. Ce point a été noté par Bezensek (BEZ, 2008). En dehors de cet essai, tous les cas de non coalescence correspondent aux valeurs de  $P_{max}/Q_{Lf\_nf}$  les plus élevés, mais pas dans tous les cas au critère  $P_{max} > Q_{Lf\_1}$ .

Ces essais ont été aussi analysés et complétés avec des essais similaires comportant des fissures inégales par Iwamatsu et al. (IWA, 2013). Ces auteurs modifient l'expression de Ranganath (RAN, 2007) en considérant un point de transition  $S_z/2a$  (noté H/l par les auteurs) variable. Afin de choisir le point de transition optimal, les auteurs calculent à partir des résultats d'essais à deux fissures traversantes (20 égales, 16 inégales) un coefficient de corrélation R fondé sur la comparaison des charges maximales et des charges d'effondrement plastique. La figure A2\_35\_b où montre que la corrélation est meilleure quand les fissures sont égales. Pour les fissures égales le point de transition optimal vaut 1,39. Dans le cas des fissures inégales la corrélation est moins bonne et il vaut mieux rapporter  $S_z$  à la moyenne des longueurs de fissure et le point de transition optimal vaut 1,82. Les auteurs concluent en fixant la transition à  $S_z/2a_{max} = 1,5$  ou  $S_z/2a_{moy} = 2$ .

	2a	2W	a/W	$S_z/2a$	$S_x/2a$	$P_{max}/Q_{Lf\_nf}$	$Q_{Lf1}/Q_{Lf\_nf}$	$Q_{Lf2}/Q_{Lf\_nf}$	$Q_{f\_RanG}/Q_{Lf\_nf}$
DN-01	10	108	0,093	1,24	0	1,048	0,907	0,815	0,907
DN-02	10	108	0,093	1,24	0,092	0,954	0,907	0,815	0,907
DN-03	10	108	0,093	1,24	0,181	0,949	0,907	0,815	0,907
DN-04	10	108	0,093	1,24	0,278	0,872	0,907	0,815	0,907
DN-05	10	108	0,093	0,64	0	0,932	0,907	0,815	0,874
DN-06	10	108	0,093	1,7	0,093	0,979	0,907	0,815	0,907
DN-07	10	108	0,093	2,2	0,093	1,001	0,907	0,815	0,907
DN-08	10	108	0,093	1,7	0,157	0,975	0,907	0,815	0,907
DN-09	10	108	0,093	2,2	0,204	0,979	0,907	0,815	0,907
DN-10	18	108	0,167	0,694	0,095	0,777	0,833	0,667	0,782
DN-11	6	108	0,056	2,083	0,185	1,048	0,944	0,889	0,944
DN-12	23	108	0,213	0,861	0,047	0,742	0,787	0,574	0,757
DNW-1	30	180	0,167	0,213	0	1,217	1,389	1,111	1,17
DNW-2	30	180	0,167	0,333	0	1,273	1,389	1,111	1,204
DNW-3	30	180	0,167	0,667	0	1,325	1,389	1,111	1,296
DNW-4	30	180	0,167	1	0,028	1,307	1,389	1,111	1,389

**Tableau A2\_2 : charges d'effondrement plastique pour deux fissures égales (MIA, 2009)**

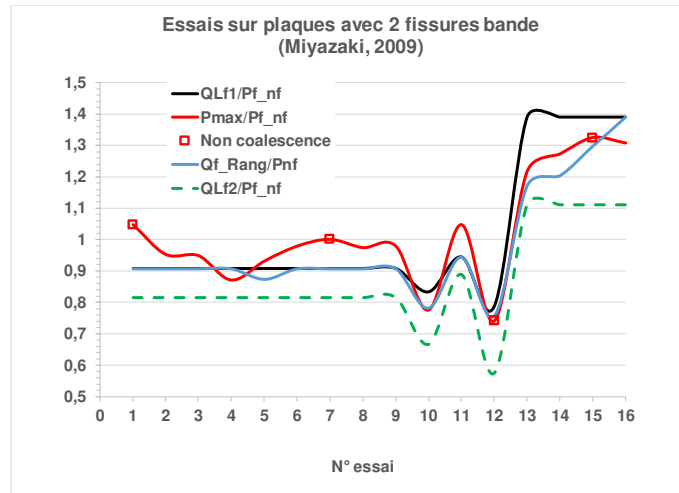


Figure A2\_34 : comparaison des charges maximales aux charges d'effondrement plastique

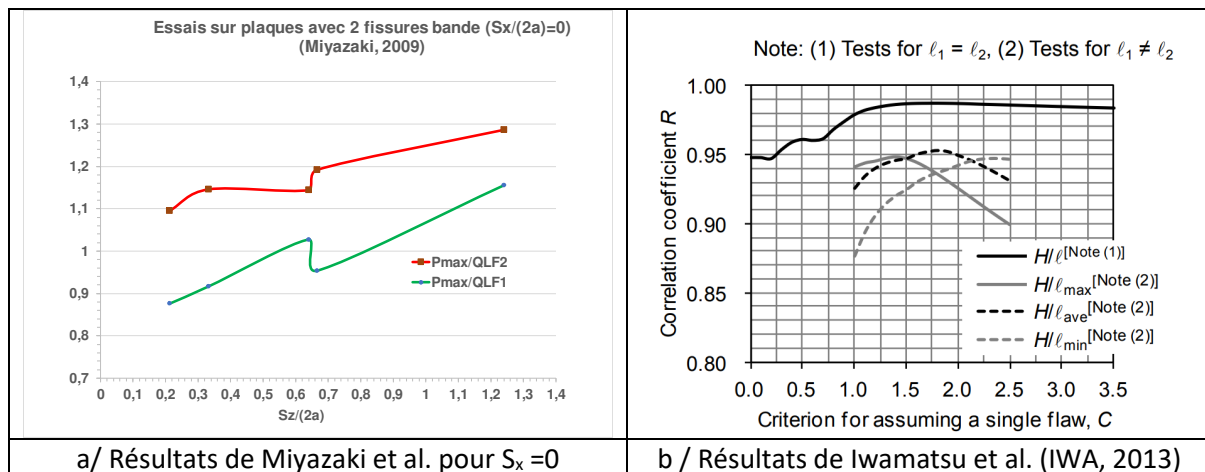


Figure A2\_35 : comparaison des charges maximales aux charges d'effondrement plastique

Les conclusions apportées par toutes ces études à la pertinence des « règles d'alignement » sont les suivantes :

- Il faut rappeler que ces règles ne permettent pas de quantifier l'effet d'interaction.
- Les règles de l'ASME dans son édition de 2007 (ASME, 2007) et du JSME de 2004 (JSME, 2004) sont moins précises que la règle de Ranganath modifiée.
- Dans le cas de trois fissures, la règle de Ranganath modifiée donne de moins bons résultats.

#### A2.2.4.2.4. Charge limite « locale »

Bezensek (BEN, 2003, 2007) a analysé le comportement à rupture de structures simples par l'approche fondée sur la charge limite globale et par une charge limite locale définie comme celle de l'amorçage de la déchirure du ligament entre fissures. Cette charge est plutôt une charge de référence qu'une charge limite car elle dépend de l'écroutissage.

L'article de 2007 analyse le comportement limite d'une plaque mince contenant des fissures traversantes égales parallèles. La borne supérieure de la charge limite globale théorique, pour un

panneau assez large afin de pouvoir négliger les effets de bord libre, est minimale lorsque  $S_x = S_z$ . Ce minimum est indépendant de la séparation des fissures, ce qui n'est pas représentatif de l'effet d'interaction.

La charge limite locale est calculée par éléments finis. La comparaison à des essais montre qu'elle prédit assez bien l'interaction (BEZ, 2007). Ce point est commenté au chapitre 5 (§ 5.6.2.2). Pour un  $S_z$  fixé, le minimum de la charge limite locale est obtenu lorsque  $S_z/S_x=1$ , mais la valeur du minimum est plus faible lorsque l'écartement vertical l'est également (cf. Figure A2\_36) ce qui est pertinent.

Cette propriété ne peut être étendue au cas de faibles valeurs de l'écartement vertical  $S_z$  car la configuration de l'écoulement n'est plus la même.

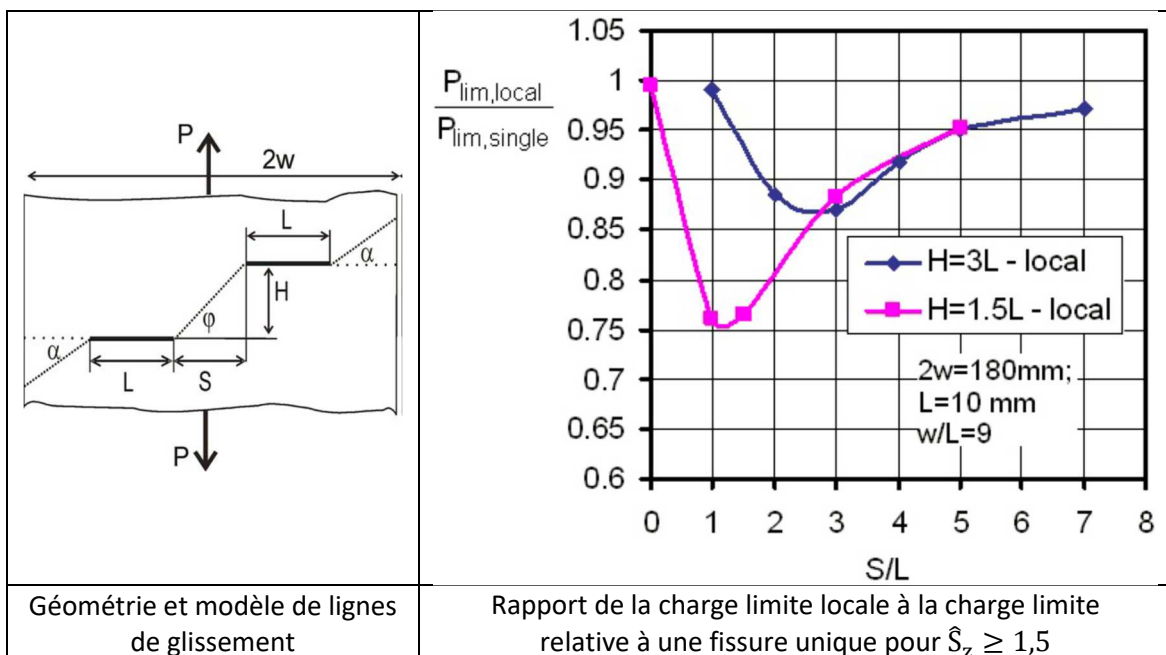


Figure A2\_36 : caractérisation de l'interaction de fissures parallèles par la charge limite locale

La figure A2\_37 compare les charges limites globales et locales obtenues par Bezensek. Deux différences apparaissent :

1. La charge limite locale est presque toujours inférieure à la charge limite globale
2. Le minimum de la charge limite locale est atteint pour une valeur de  $S_x$  légèrement inférieure à  $S_z$ .



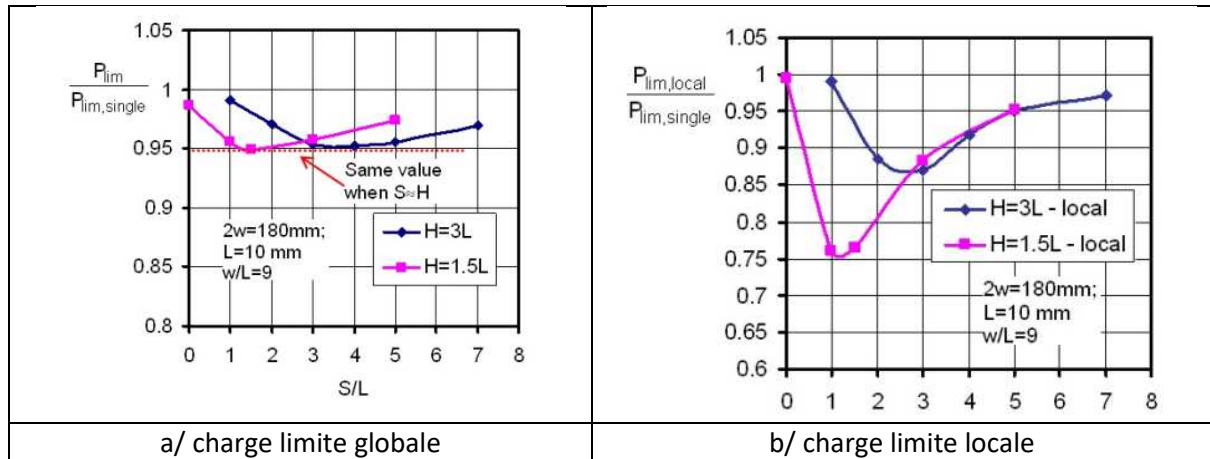


Figure A2\_37 : borne supérieure de la charge limite et charge limite locale pour 2 fissures bande parallèles (BEZ, 2007)

Bezensek (BEZ, 2007) propose comme facteur d'interaction la variable  $1 - P_{lim,local}/P_{lim,global}$ , mais son application aux résultats expérimentaux d'Hasegawa (HAS, 2005) n'est pas convaincante.

#### A2.2.5. Etablissement d'une fonction décrivant l'interaction

L'objectif est de fournir une fonction décrivant les variations du coefficient  $\alpha_p$  enveloppe. A cette fin, l'espace  $(\hat{S}_x; \hat{S}_z)$  a été découpé en 6 domaines sur la base de la prise en compte de l'effet d'écrantage, des variations du coefficient  $\alpha_p$  et de l'analyse des motifs de distributions de contraintes en plasticité (essentiellement les contraintes de von Mises en plasticité). Toutes les isovaleurs sont cadrées de la même façon et établies pour la valeur du chargement maximal.

Les configurations géométriques considérées dans la présente étude sont comprises entre :

$$-1 \leq \hat{S}_x \leq 2 \text{ et } 0 \leq \hat{S}_z \leq 2.$$

Les 6 domaines sont caractérisés dans le tableau A2\_3.

	Ecrantage		Interaction en pointe interne		Perte d'interaction	
Domaine	1	2	3	4	5	6
Effets	2 pointes élastiques	Pointes ext élasto-plastiques	2 pointes élasto-plastiques	2 pointes élasto-plastiques	Pas d'interaction en élasticité	Pas d'interaction en élasto-plasticité
$\alpha_e$	$\leq 0,75$	Croît rapidement	Décroit rapidement	Décroit	$\leq 0,55$	$\leq 0,51$
$\alpha_p$	$\leq 1$	Croît faiblement	Croît rapidement	Décroit	Stabilisation	$\leq 1,05$

Tableau A2\_3 : classification des domaines de variation du coefficient  $\alpha_p$

### Domaine 1 : écrantage entraînant un comportement élastique total

Ce domaine est illustré par les résultats de calculs présentés sur les figures A2\_38 et A2\_39. Le comportement des deux pointes est quasiment élastique.

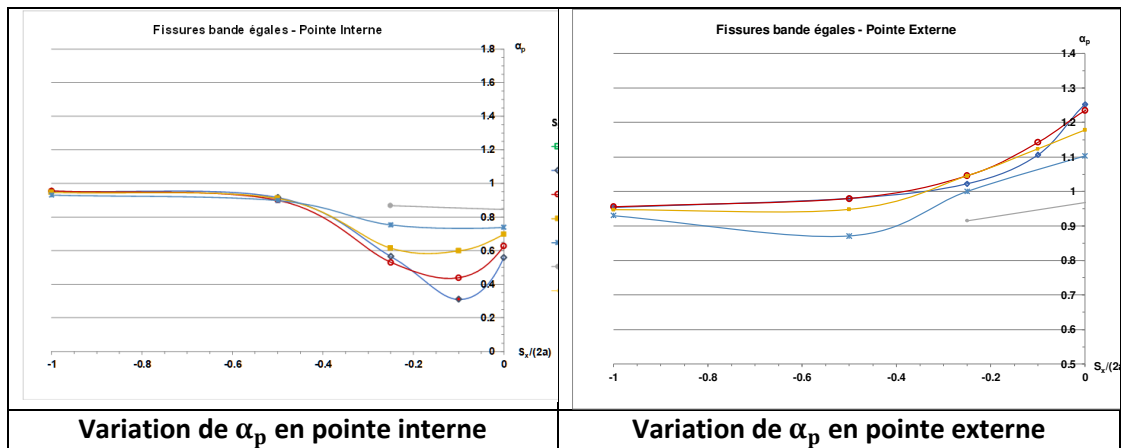


Figure A2\_38 : variation de l'interaction de fissures parallèles aux deux pointes pour  $\hat{S}_x \leq 0$

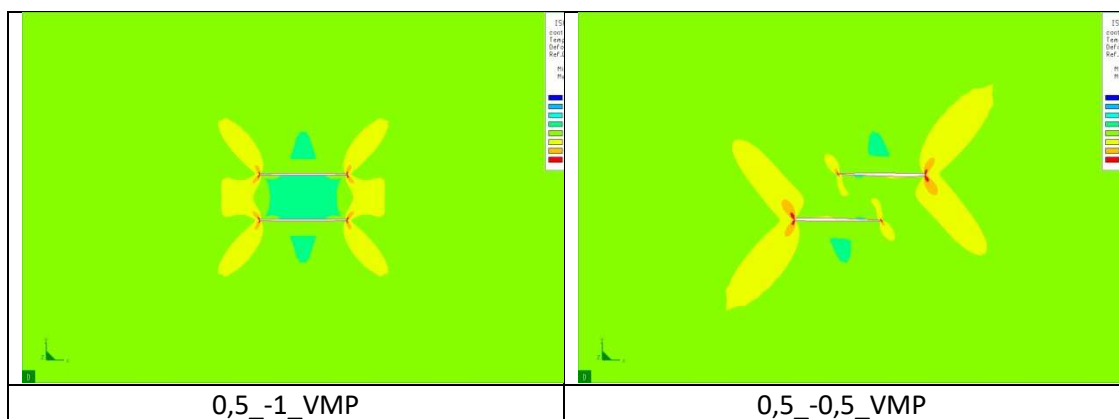


Figure A2\_39 : contraintes élastoplastiques de von Mises pour  $\hat{S}_z = 0,5$   
avec  $\hat{S}_x = -1$  et  $-0,5$

Le domaine est défini par  $-1 \leq \hat{S}_x \leq \hat{S}_{x1}$ .

$\hat{S}_{x1}$  est supérieur à  $-0,5$  et  $\alpha_p$  est légèrement inférieur à  $1$ .

La valeur de  $\hat{S}_{x1}$  est déterminée par l'intersection de la droite décrivant la variation de  $\alpha_p$  dans ce domaine et de la droite  $T_1$  décrite dans le domaine suivant.

Afin de ne pas être trop pénalisant, la valeur  $\alpha_p$  est considérée comme décroissant linéairement entre bornes, suivant l'équation :

$$\alpha_p = \text{Max}\{\text{Min}[0.97 - 0.046 \cdot \hat{S}_z; 0.96]; 0.92\} \quad (A2.26)$$

### Domaine 2 : écrantage entraînant un comportement élastique en pointe interne

Le comportement de la pointe interne uniquement est élastique.

Le comportement de  $\alpha_p$  est décrit par des droites décrivant sa variation jusqu'à la courbe limite d'écrantage (Figure ).

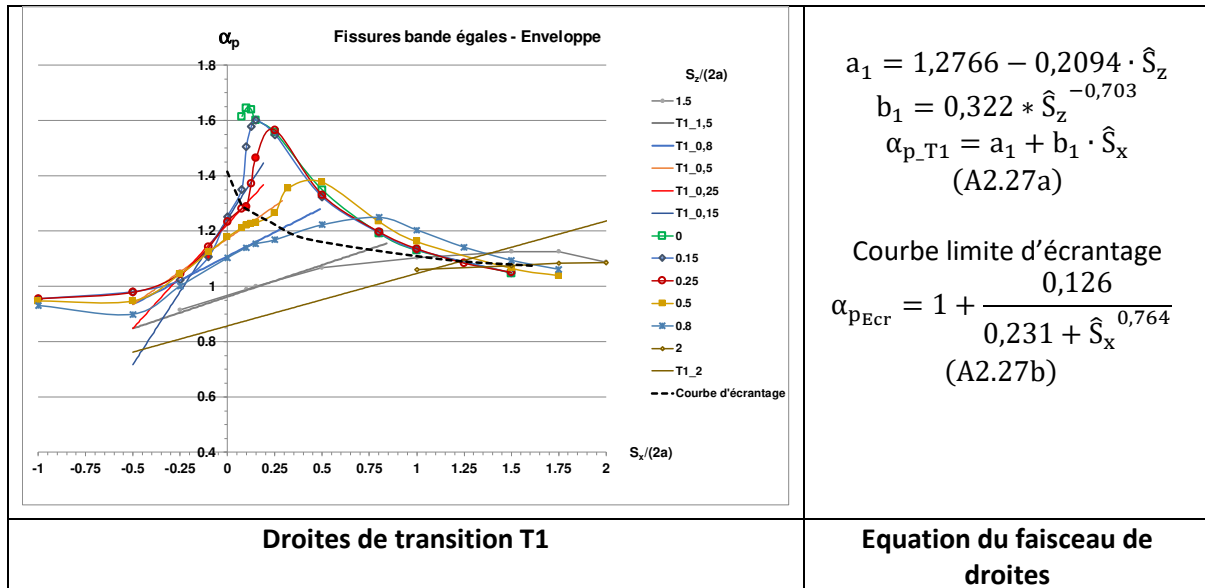


Figure A2\_40 : variation de l'interaction de fissures parallèles aux deux pointes pour  $\hat{S}_x \leq \hat{S}_{x\_Ecr}$

Les isovaleurs de la figure ci-après montrent que les contraintes de von Mises sont nettement plus élevées en pointe interne pour  $\hat{S}_x > 0$ .

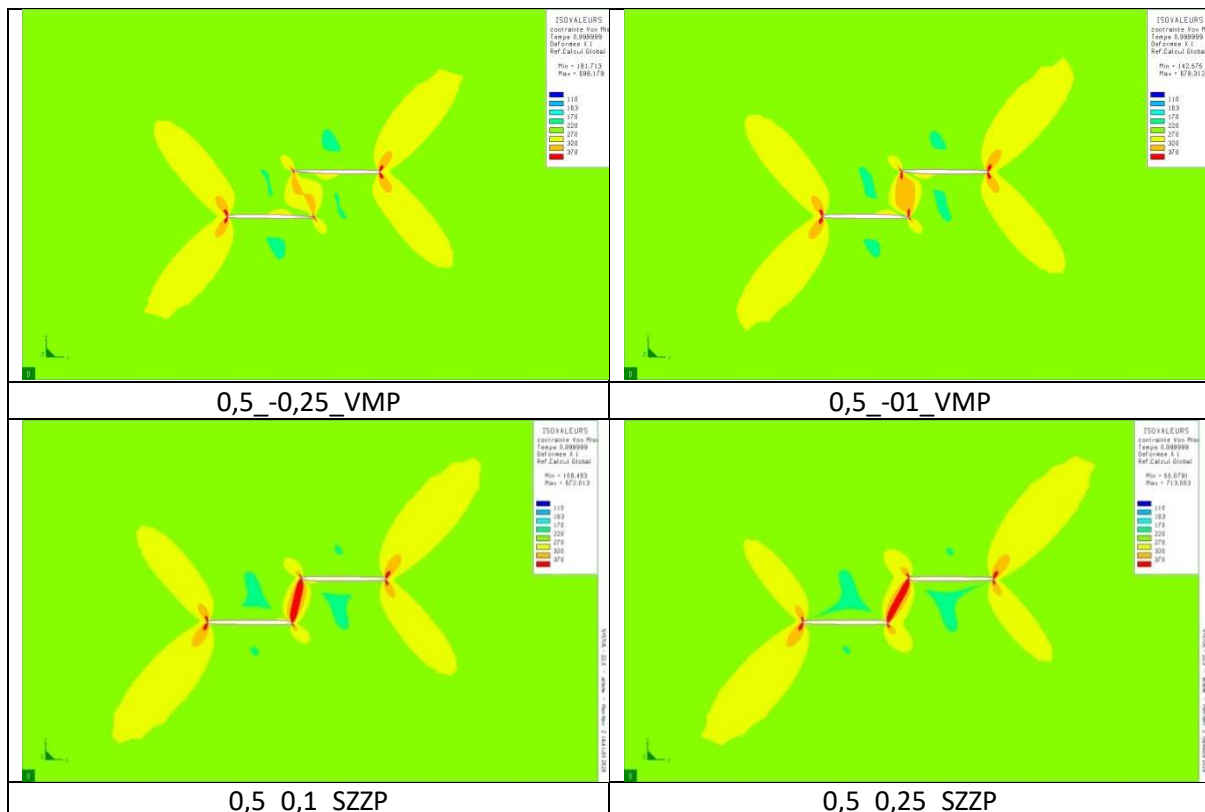
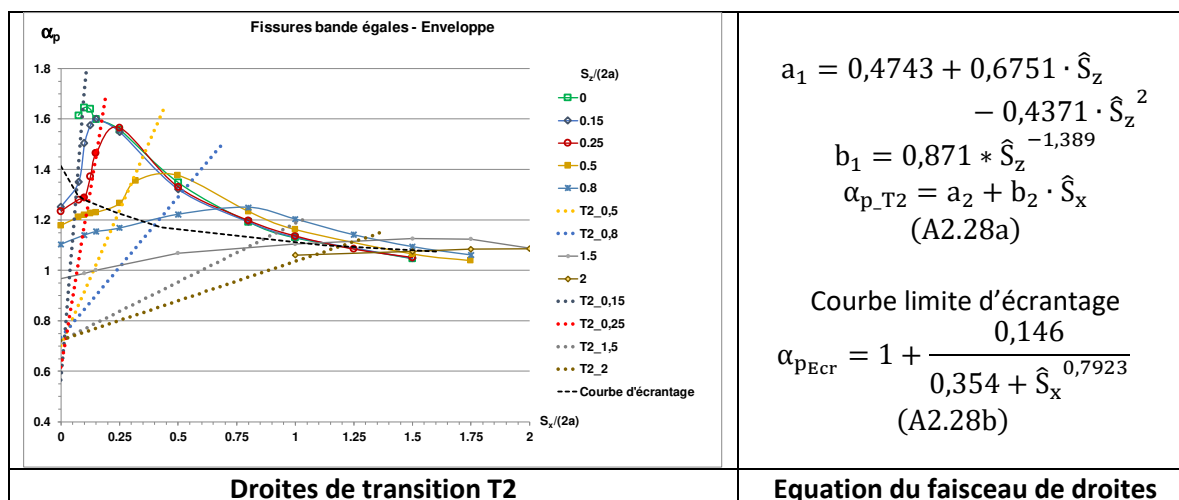


Figure A2\_41 : contraintes de von Mises et contraintes  $\sigma_{zz}$  élasto-plastiques pour  $\hat{S}_z = 0,5$  et  $-0,25 \leq \hat{S}_x \leq 0,25$

Domaine 3 : les fissures sont non écrantées, le comportement plastique domine en pointe interne

Si les deux pointes plastifient, une plastification intense du ligament a lieu entre fissures (cf. figure **A2\_44**) : le coefficient  $\alpha_p$  croît très rapidement.

Le comportement de  $\alpha_p$  est décrit par des droites décrivant sa variation au-delà de la courbe limite d'écrantage. Cette variation est bornée par la valeur du maximum de  $\alpha_p$  (Figure A2-42).



**Figure A2\_42 : variation de l'interaction de fissures parallèles aux deux pointes pour  $\hat{S}_{x\_Ecr} \leq \hat{S}_x$**

Conformément aux conclusions de Besensek (BEZ, 2007), le maximum d'interaction est obtenu lorsque  $S_z/S_x=1$ , hormis pour les valeurs faibles de  $\hat{S}_z$ .

La courbe des maxima de  $\alpha_p$  est lissée par une exponentielle tronquée par une droite pour des  $\hat{S}_z$  faibles :

$$\alpha_{p_{Max_0}} = \text{Max}(1,65 - 0,32 \cdot \hat{S}_z; 1,1)$$

$$\alpha_{p_{Max}} = \text{Max}(1 + 1,4517 \cdot \text{Exp}(-1,9635 \cdot \hat{S}_z, 5302); 1,1; \alpha_{p_{Max_0}}) \quad (A2.29)$$

Cette expression peut être exprimée en fonction de  $\hat{S}_x$  en remplaçant  $\hat{S}_z$  par  $\hat{S}_x$  pour  $\hat{S}_x \leq 1,5$ . Au-delà, la formule doit évoluer, comme suggéré sur la figure A2\_43.

Il manque à cet effet quelques résultats pour écrire une prolongation de la formule.

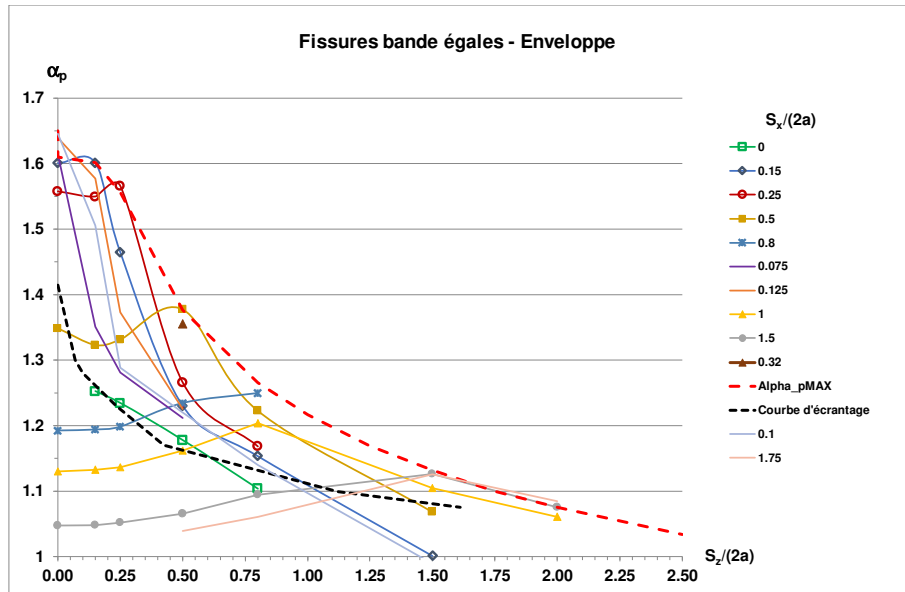


Figure A2\_43 : enveloppe des coefficients  $\alpha_{px}$  pour des fissures parallèles

Les isovaleurs de la figure ci-dessous montrent que les contraintes de von Mises sont nettement plus fortes en pointe interne pour  $0,32 < \hat{S}_x < 0,5$ .

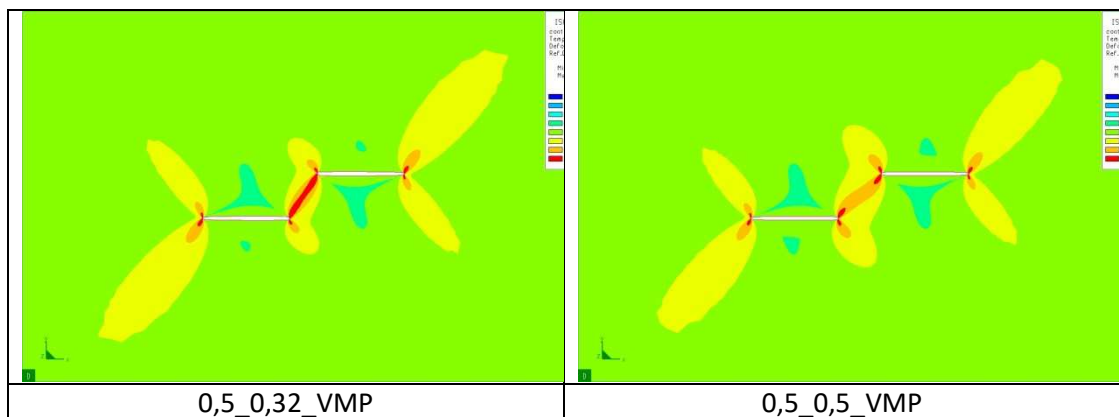


Figure A2\_44 : contraintes élastoplastiques de von Mises pour  $\hat{S}_z = 0,5$  avec  $\hat{S}_x = 0,36$  et  $0,5$

La bande plastique de von Mises relative au cas  $\hat{S}_x = 0,32$  est d'un rouge plus intense que celle de  $\hat{S}_x = 0,5$ . Cependant la valeur de  $\alpha_p$  est maximale pour  $\hat{S}_x = 0,5$  comme l'atteste la courbe de la figure A2\_43.

La valeur de  $\alpha_{ep}$  pour  $\hat{S}_x = 0,32$  est supérieure à celle pour  $\hat{S}_x = 0,5$ .

Les courbes sont plafonnées à  $\alpha_{pMax}$

Domaine 4 : les fissures sont non-écrantées, le comportement plastique devient similaire aux deux pointes

Dans ce domaine  $\alpha_p$  décroît régulièrement en exponentielle. Cette décroissance comporte deux familles : celle des fissures peu éloignées verticalement ( $0 \leq \hat{S}_z \leq 0,3$  environ) et celle des fissures

plus distantes verticalement. Pour les premières, les courbes  $\alpha_p(\hat{S}_x)$  sont communes. Des lissages, présentés à la figure A2\_45, peuvent en être déduits avec les équations suivantes :

$$0 \leq \hat{S}_z \leq 0,25 \quad \alpha_p = 1 + 1,0895 \cdot \exp(-2,0958) \quad (A2.30a)$$

$$: \hat{S}_z > 0,25 \quad \alpha_p = 1 + a \cdot \exp(-b \cdot \hat{S}_x^c) \quad (A2.30b)$$

Avec :  $a = 0,0837 + 1,6692 \cdot \text{Exp}(-2,0845 \cdot \hat{S}_z)$

$b = 35,954 \cdot \hat{S}_z^{1,1954} \cdot \text{Exp}(-4,747 \cdot \hat{S}_z)$  et  $c = 0,2407 \cdot \hat{S}_z^2 + 1,7524 \cdot \hat{S}_z + 0,3454$

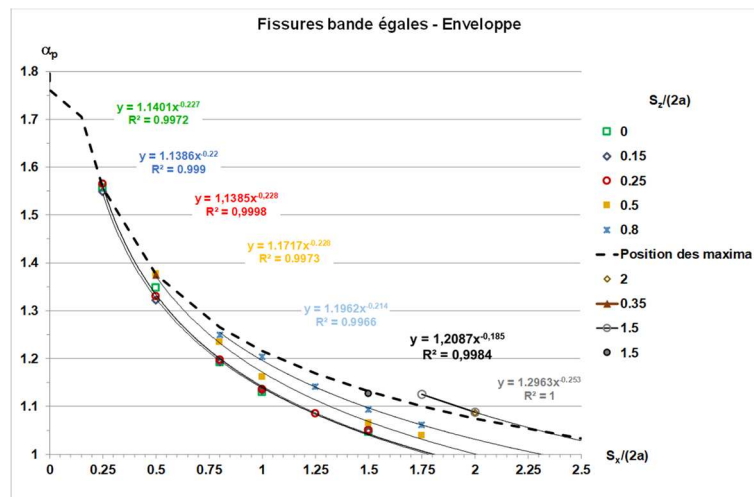


Figure A2\_45 : variation de l'interaction de fissures parallèles aux deux pointes après le maximum de  $\alpha_p$

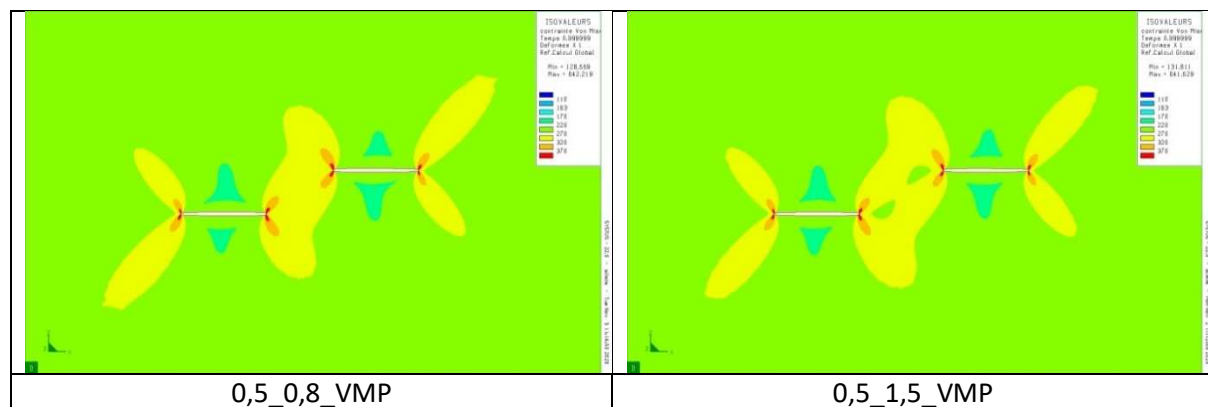
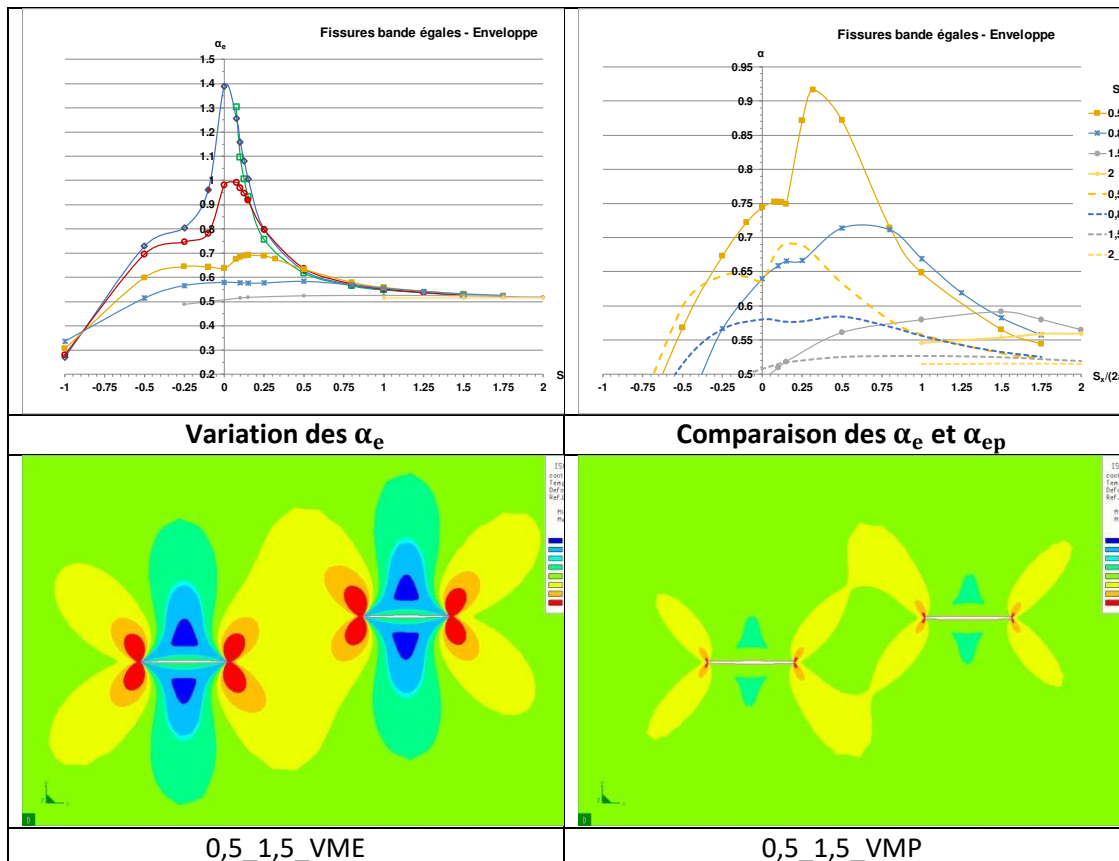


Figure A2\_46 : contraintes élastoplastiques de von Mises pour  $\hat{S}_z = 0,5$  avec  $\hat{S}_x = 0,8$  et  $1,5$

### Domaine 5 : les fissures n'interagissent plus en élasticité

La figure A2\_47 montre que pour  $\hat{S}_x = 1,5$ , et quelle que soit la valeur de  $\hat{S}_z$ , le coefficient  $\alpha_e$  est très proche de la valeur 0,5 pour laquelle il n'existe plus d'interaction en élasticité. En revanche le coefficient  $\alpha_{ep}$  reste supérieur à 0,55 lorsque  $\hat{S}_x \geq 1,5$  et  $\hat{S}_z > 0,5$ .



**Figure A2\_47 : contraintes élastiques et élastoplastiques de von Mises pour  $\hat{S}_z = 0,5$ , avec  $\hat{S}_x = 0,8$  et  $1,5$**

Dans le domaine 6 l'interaction est négligeable.

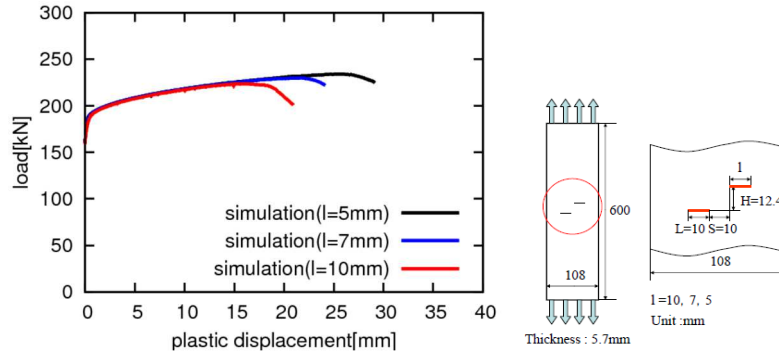
Une synthèse des résultats est présentée au chapitre 5 (§ 5.5.2.1).

### A2.2.6. Effet de taille de fissure

En élasticité, l'interaction maximale correspond au cas où les fissures sont égales (BIS, 2015). Cette propriété est valable en élasto-plasticité, comme le montre l'article de Kikuchi et al. (KIK, 2010)

La figure A2\_48 ci-après compare les courbes force-déplacement de plaques contenant deux fissures décalées verticalement et horizontalement d'un écartement fixe. La première fissure garde une longueur fixe et trois configurations sont considérées, la seconde fissure prenant les longueurs de rapport 1, 0,7 et 0,5 avec la longueur de la première fissure.

En outre, comme en élasticité, sous chargement de traction pure, c'est toujours la plus grande fissure qui se révèle la plus nocive.



**Figure A2\_48 : courbes force-déplacement pour des panneaux comportant deux fissures parallèles de tailles égales ou différentes, à espacement fixe  $\hat{S}_z = 1, 24$  et  $\hat{S}_x = 0, 1$  (KIK, 2010)**

Ces résultats ont été obtenus par simulation de la déchirure ductile par le modèle d'approche locale de Gurson (GUR, 1977). La modélisation a été validée par comparaison à deux essais sur des plaques en traction contenant deux fissures parallèles.

### A2.2.7. Effet d'écroûissage et charge de référence

En élasticité linéaire, l'interaction de fissure ne dépend pas des propriétés mécaniques car elle est caractérisée par un rapport de Facteurs d'Intensité de Contraintes. Les facteurs d'interaction ne dépendent que de caractéristiques géométriques relatives de la pièce fissurée : rapport des tailles de fissure, rapports d'aspect de fissures elliptiques, rapport des tailles de fissure à la distance à la surface.

En élasticité non-linéaire ou en élasto-plasticité, l'interaction définie par un rapport de force fissurante dépend a priori du niveau de chargement. Toutefois un adimensionnement approprié des J évalués le long du front de fissures interagissantes peut rendre cette dépendance faible.

#### A2.2.7.1. Effet d'écroûissage

Framatome (FRA, 1999) et ESI-France (SYSTUS, 2020) ont effectués plusieurs calculs de plaques contenant deux fissures en élasto-plasticité pour deux valeurs de l'exposant d'écroûissage de la loi de Ramberg-Osgood (A2.5). Les autres paramètres étant inchangés.

##### Fissures coplanaires

Framatome (FRA, 1999) a comparé les effets d'écroûissage pour deux cas de fissures coplanaires égales espacées de  $S_x/2a) = 0,15$  et  $0,5$ . Les figures A2\_49 et A2\_50 quantifient l'interaction en termes de facteur d'interaction et de coefficient d'équivalence.

Les valeurs du facteur Iota dépendent de l'écroûissage et ne se stabilisent pas contrairement à celles du coefficient d'équivalence  $\alpha_{ep}$ .



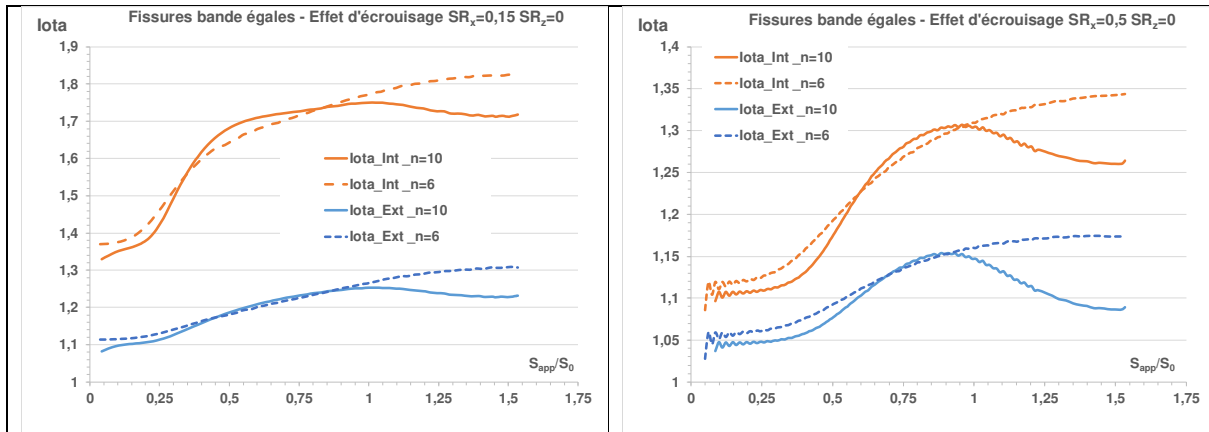


Figure A2\_49 : variations de Iota en fonction du niveau de chargement pour des fissures bande coplanaires espacées de  $S_x/(2a) = 0,15$  et  $0,5$

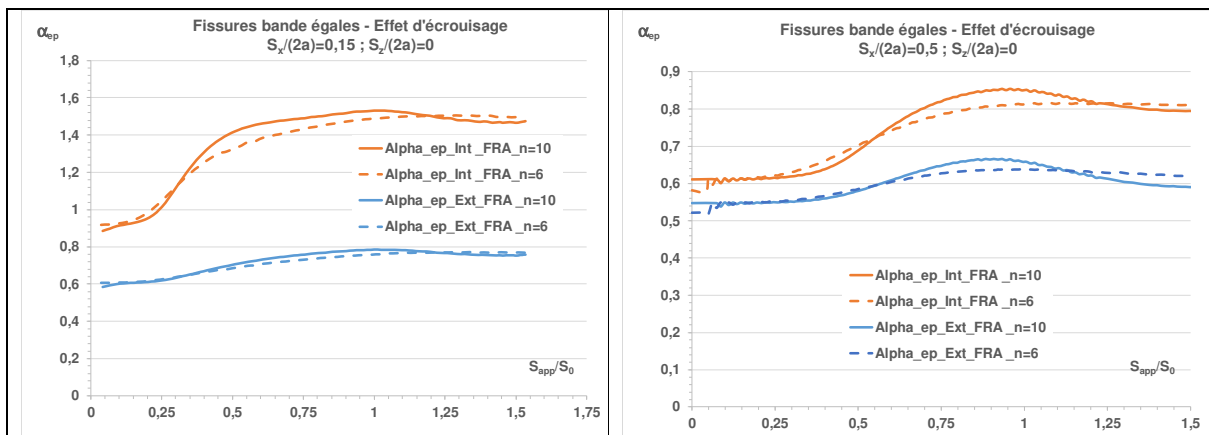


Figure A2\_50 : variations du coefficient d'équivalence en fonction du niveau de chargement pour des fissures bande coplanaires espacées de  $S_x/(2a) = 0,15$  et  $0,5$

Les coefficients  $\alpha_{ep}$  ne dépendent pas de l'écroutissage pour des fissures coplanaires. Ceci est expliqué au paragraphe 4.2.7.2. Ces résultats ont été confirmés par un calcul ESI-France (SYSTUS, 2020) pour un écartement intermédiaire  $S_x/2a) = 0,25$  (Figure A2\_51).

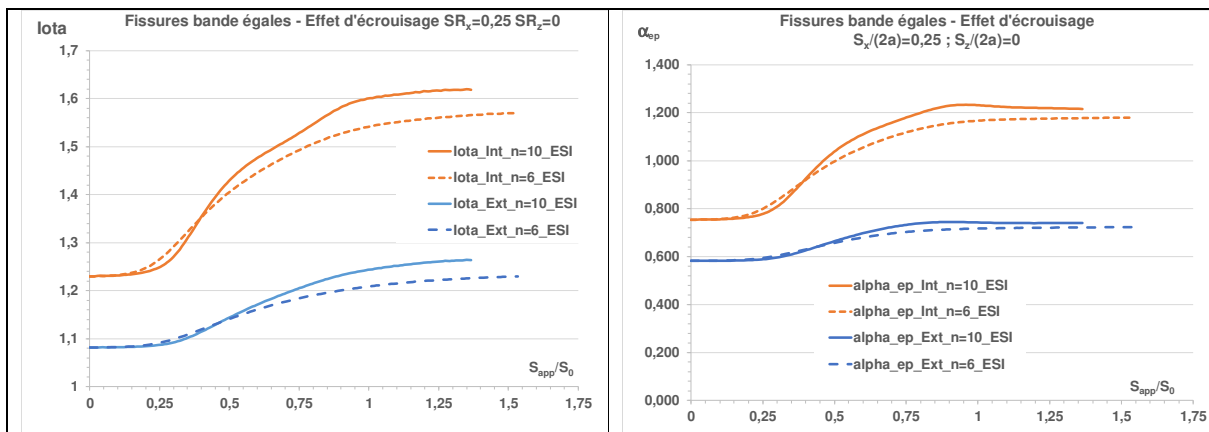
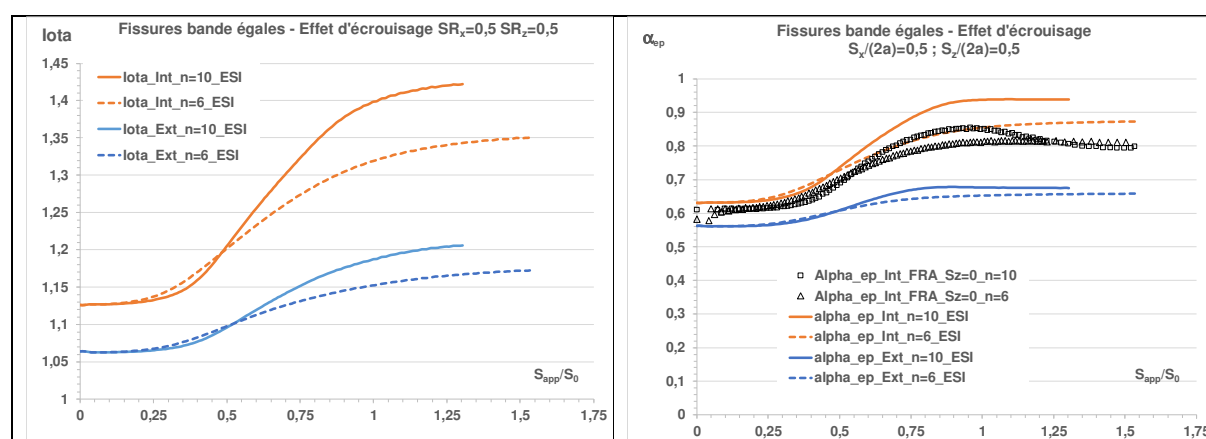


Figure A2\_51 : variations du facteur d'interaction et du coefficient d'équivalence en fonction du niveau de chargement pour deux fissures bande coplanaires espacées de  $S_x/(2a) = 0,25$

## Fissures parallèles

ESI-France (SYSTUS, 2020) a comparé les effets d'écroissage pour deux fissures parallèles égales espacées de  $S_x/(2a) = 0,15$  et  $S_z/(2a) = 0,5$ . Les figures A2\_52 quantifient l'interaction en termes de facteur d'interaction et de coefficient d'équivalence. L'effet d'écroissage est plus faible sur le coefficient d'équivalence que sur le facteur d'interaction  $\iota$ . Ceci s'explique par le fait que le facteur d'interaction est le rapport de  $J$  de la fissure interagissante au  $J$  de la fissure  $2a$ , alors que le coefficient d'équivalence est obtenu par le rapport de  $J$  de la fissure interagissante au  $J$  de la fissure  $4a$ . Or les effets d'écroissage sont sensibles aux tailles de fissure relative à la largeur de plaque et une fissure  $4a$  est plus proche de la configuration à deux fissures égales que la fissure  $2a$ .



**Figure A2\_52 : variations du facteur d'interaction et du coefficient d'équivalence en fonction du niveau de chargement pour deux fissures bande coplanaires espacées de  $S_x/(2a) = S_z/(2a) = 0,5$**

Le cas traité est comparé à la configuration  $S_x/(2a) = S_z/(2a) = 0$  réalisé par Framatome. Pour le coefficient d'équivalence il y a une légère augmentation avec  $n$  pour les fissures parallèles contrairement au cas de fissures coplanaires.

Ceci est difficile à quantifier sur un cas, est être sans doute lié au fait que la charge limite diminue avec l'écartement vertical.

### A2.2.7.2. Charge de référence pour des fissures bande

La charge limite est une quantité globale, déterminée pour un comportement parfaitement plastique. La charge de référence est une grandeur déduite de la force fissurante  $J$ , elle se différencie de la charge limite par trois caractéristiques :

- Elle prend en compte pleinement les effets d'interaction.
- Elle intègre les effets d'écroissage.
- Elle traduit l'effet d'écrantage.

### A2.2.7.2.1. Brève description de la méthode de la charge de référence

La Compagnie General Electric et l'Institut EPRI (KUM, 1981) ont développé une méthode d'estimation de la force fissurante  $J$  fondée sur l'hypothèse de décomposition de la solution une superposition d'une solution élasto-plastique confinée  $J_{e\_corr}$  et d'une solution complètement plastique  $J_p$  :

$$J = J_{e\_corr} + J_p \quad (A2.31)$$

Où  $J_{e\_corr}$  est une correction du  $J$  calculé en élasticité afin de tenir compte de la plasticité confinée. Pour une loi puissance et sous chargement radial, le terme  $J_p$  peut se mettre sous la forme adoptée par GE-EPRI.

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \alpha \cdot \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^n \quad \rightarrow \quad J_p = \alpha \cdot \varepsilon_0 \cdot \sigma_0 \cdot g_1(a, W) \cdot h_1(a/W, n) \cdot \left(\frac{Q}{Q_0}\right)^{n+1} \quad (A2.32)$$

- Les fonctions  $g_i$  ne dépendent que de la géométrie de la structure fissurée. Pour les plaques à fissure traversante de demi-largeur  $W$ , la fonction  $g_i(a, W)$  se réduit à l'expression  $(1 - a/W) \cdot a/W$ .
- Les charges d'adimensionnement  $Q_0$  sont des charges proportionnelles à  $\sigma_0$ . Elles correspondent à la plastification du ligament pour autant que  $\sigma_0$  représente une limite d'élasticité
- Les facteurs de forme  $h_i$  sont calculés par éléments finis en plasticité pure pour des valeurs discrètes de l'exposant d'érouissage  $n$  et de la taille relative de la fissure  $a/W$ . Les résultats sont fournis dans des tables.

R. Ainsworth (AIN, 1984) a appliqué le concept de contrainte de référence au calcul de  $J$  en réécrivant la formule GE-EPRI.

- Le premier terme est décomposé en deux :  $f_1(a_e) \cdot \frac{Q^2}{E'} = J_e + J_z$  où  $J_z$  est un terme correctif négligeable devant  $J_p$  pour  $Q > Q_0$ .
- Le second terme est récrit en utilisant l'expression de  $J_p$  pour  $n=1$  :

$$J_p = \alpha \cdot h_{nu} \cdot J_e \cdot \left(\frac{Q}{Q_{R0}}\right)^{n-1} \quad avec \quad Q_{R0} = Q_0 \cdot \left[\frac{h_1(a/W, 1)}{h_1(a/W, n)}\right]^{\frac{1}{n-1}} \quad (A2.33)$$

$$h_{nu} = \frac{0.75}{1-\nu^2} \quad \text{en déformations planes et } 1 \quad \text{en contraintes planes} \quad (A2.34).$$

R. Ainsworth simplifie les expressions de  $J_z$  et  $J_p$  en identifiant  $h_{nu}$  à l'unité et en supprimant la dépendance  $Q_{R0}$  vis-à-vis de l'érouissage sous réserve que  $Q_0$  soit la charge limite exacte  $Q_{L0\_c}$  et défini la contrainte de référence par

$$\frac{\sigma_{ref}}{\sigma_0} = \frac{Q}{Q_{L0\_c}} \quad (A2.35)$$

Ces choix ont pour avantage de donner une expression très simple de J mais conduisent à sous-estimer J pour de petites fissures ( $2a < W$ ) et ne permet pas de traiter l'écroûssage avec précision. Nous exprimons donc J sous la forme pour la loi de Ramberg-Osgood :

$$J = J_e + J_z + \alpha \cdot h_{nu} \cdot J_e \cdot \left( \frac{Q}{Q_{R0}} \right)^{n-1} \quad \text{avec} \quad Q_{R0} = Q_{R0}(n, a/W) \quad (A2.36)$$

En plasticité étendue, où  $J_z$  est négligeable, la charge de référence  $Q_{R0}$  est obtenue par inversion de la formule de J.

$$Q_{R0} = \lim_{Q \gg Q_{L0,c}} Q \cdot \left[ \frac{\alpha \cdot h_{nu}}{\left( \frac{J}{J_e} - 1 \right)} \right]^{\frac{1}{n-1}} \quad (A2.37)$$

Nous avons donc appliqué cette formule au résultats de calcul de J effectués par Framatome (FRA, 1999) et ESI-France (SYSTUS, 2020).

La charge de référence est adimensionnée par la charge limite de la plaque non fissurée :

$$Q_{L0,nc} = k_{VM} \cdot \sigma_0 \cdot Z_{p,nc} \quad \text{avec} \quad k_{VM} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ en D.P. En traction pure, il vient :}$$

$$\frac{Q_{R0}}{Q_{L0,nc}} = \frac{\sigma_{app}}{k_{VM} \cdot \sigma_0} \cdot \left[ \alpha \cdot h_{nu} \cdot \frac{J_e}{J_p} \right]^{\frac{1}{n-1}} \quad (A2.38)$$

Si l'adimensionnement est effectué par la charge limite de la plaque fissurée, le module  $Z_{p,c}$  est mis sous la forme et  $Z_{p,c} = Z_{p,nc} \cdot \mu_c$

$$\frac{Q_{R0}}{Q_{L0,c}} = \frac{1}{\mu_c} \cdot \frac{Q_{R0}}{Q_{L0,nc}} \quad (A2.39)$$

La charge de référence, comme J est une quantité relative à chaque point du front de fissures, contrairement aux charges d'effondrement plastique et aux charges limites globales, c'est une « charge limite locale » au sens de Bezensek (BEZ, 2007).

#### Relation avec le coefficient d'équivalence et le facteur d'interaction

Le coefficient d'équivalence en élastoplasticité est défini par :

$$\alpha_{ep} = \frac{J_{max}}{J_{Hi}}$$

Où  $H_i$  est le défaut intégré correspond à une enveloppe de la projection sur un même plan des deux défauts joints : par exemple en 2D, un défaut bande de longueur  $a_1 + a_2$ . Pour des fissures non écranées, sous réserve que la fissure équivalente soit inférieure à la fissure enveloppe,  $J_{max} = J_{Int}$ .

Le coefficient d'équivalence est déterminé à la charge maximale, donc on peut négliger les termes  $J_e$  et  $J_z$  devant le terme purement plastique  $\alpha \cdot h_{nu} \cdot \left( \frac{Q}{Q_{R0}} \right)^{n-1}$ . Il vient :

$$\alpha_{ep} \cong \frac{J_{eInt}}{J_{eHi}} \cdot \left( \frac{Q_{R0\_Hi}}{Q_{R0\_Int}} \right)^{n-1} \quad \text{et} \quad \alpha_{ep} \cong \alpha_e \cdot \left( \frac{Q_{R0\_Hi}}{Q_{R0\_Int}} \right)^{n-1} \quad (A2.40)$$

Donc :

$$\alpha_p \cong \left( \frac{Q_{R0\_Hi}}{Q_{R0\_Int}} \right)^{n-1} \quad (A2.41)$$

Dans le cas des fissures bande égaux :  $\alpha_e = \frac{\gamma^2}{2}$

Le facteur d'interaction en élastoplasticité est défini par :  $\iota = \sqrt{\frac{J}{J_{isol}}}$

$$\iota^2 = \frac{J}{J_{isol}} \cong \frac{J_e}{J_{e\_isol}} \cdot \left( \frac{Q_{R0\_Iso}}{Q_{R0\_Int}} \right)^{n-1} \quad (A2.42)$$

Donc la charge de référence est déduite de la charge de référence de la fissure isolée, des rapports de facteurs d'interaction et de l'exposant d'écroissage :

$$Q_{R0} = Q_{R0\_Iso} \cdot \left( \frac{\gamma}{\iota} \right)^{\frac{2}{n-1}} \quad (A2.43)$$

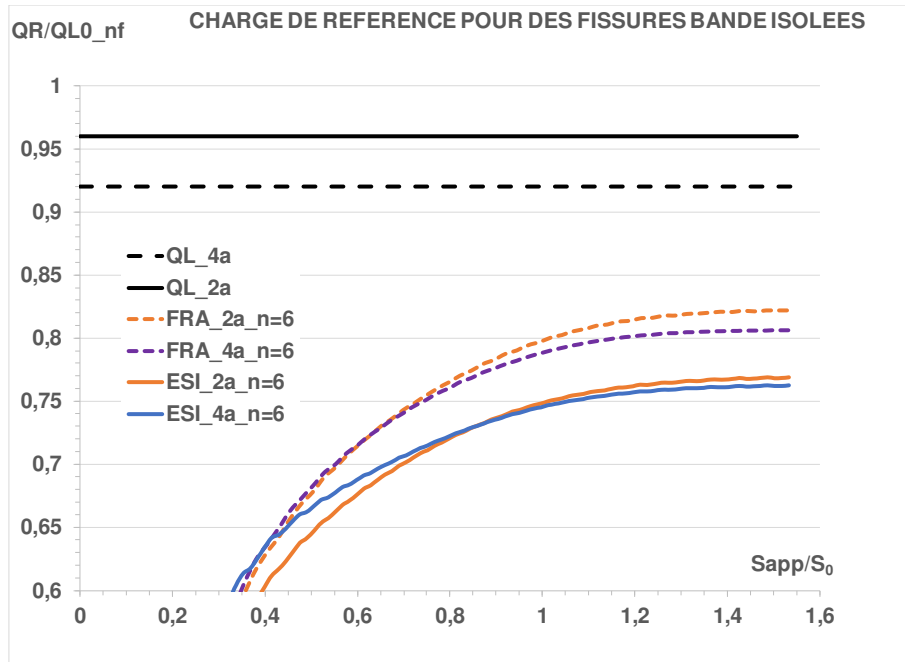
Cette formule est valable en pointe interne comme en pointe externe.

Ces équations démontrent l'équivalence des approches appuyées sur le coefficient d'équivalence, du facteur d'interaction et de la charge de référence. Toutefois leur dépendance vis-à-vis de l'écroissage n'est pas la même. Ce point est examiné au §.2.4.7.3.

#### A2.2.7.2.2. Charge de référence pour des fissures isolées

Framatome en (FRA, 1999) et ESI (ESI,2022) ont calculé les forces d'extension de fissure pour deux longueurs de fissure centrée dans une plaque en traction.

Les calculs de J effectués par Framatome (FRA, 1999) conduisent à des charges de références plus élevées comme le montre la figure A2\_53.



**Figure A2\_53: variation de la contrainte de référence avec le chargement pour une fissure bande isolée**

Les valeurs de la charge de référence sont les suivantes :

	2a	4a	Ratio
QL	0,96	0,92	1,0434
Q <sub>R</sub> _ESI	0,7688	0,7623	1,0085
Q <sub>R</sub> _FRA	0,8218	0,8064	1,0191

**Tableau A2\_4 : charges de référence pour des fissures bande isolées**

Les valeurs de la charge de référence sont nettement inférieures aux charges limites pour les fissures de longueur 2a et 4a. Ceci s'explique par le fait que les fissures sont très courtes et dans ce cas l'écroutissage amplifie les valeurs de J et réduit la charge de référence par rapport à la charge limite correspondante (GIL, 2018).

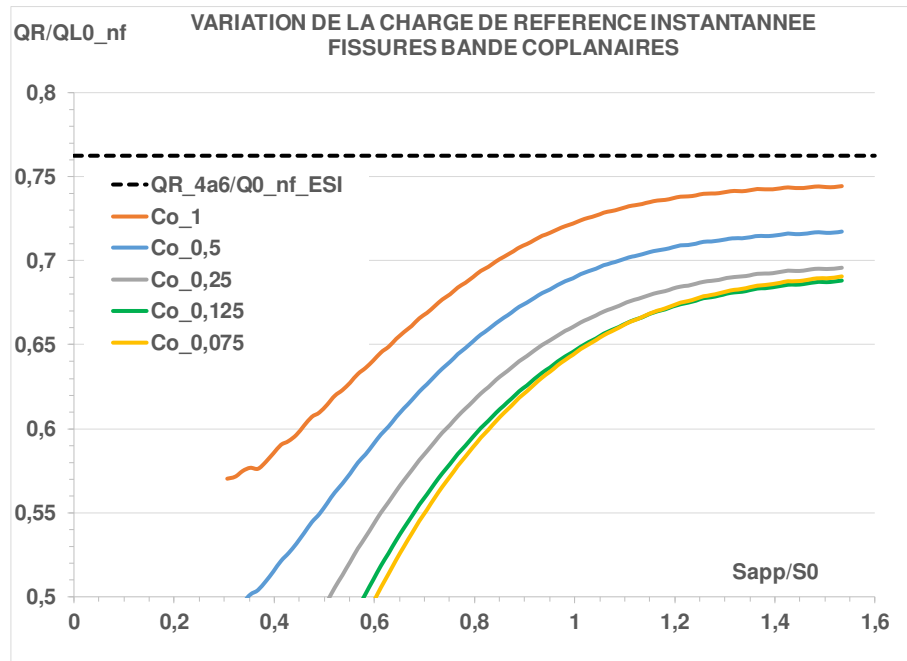
Les valeurs d'ESI sont environ 6% inférieures à celles de Framatome. Les deux maillages sont composés d'éléments quadratiques rectangulaires, sauf autour des la pointe de fissure où les mailles sont triangulaires. Le maillage de 1999 est plus grossier.

Les facteurs d'interaction plastique comme les coefficients d'équivalence font intervenir des rapports de charge de référence. Par conséquent l'impact de la surestimation de la charge de référence pour les fissures isolées comme pour les plaques à deux fissures coplanaires est faible. Comme le montre la bonne concordance des charges de référence pour deux fissures parallèles égales adimensionnées par la charge de référence de la fissure isolée 4a (Figures A2\_57 et A2\_58).

#### 4.1.1.1.1 Charge de référence pour des fissures coplanaires

## Analyse de résultats de ESI-France pour les fissures coplanaires

Le graphe de la figure A2\_54 présente la variation de la charge de référence instantanée avec le chargement pour deux fissures coplanaires. Dans tous les cas le plateau est quasiment atteint. Plus l'écartement est élevé, plus la charge de référence tend vers celle de la fissure isolée de longueur 4a.



**Figure A2\_54 : variations de la charge de référence avec le chargement pour des fissures bande coplanaires**

Cette évolution de la charge de référence avec l'écartement  $S_x$  est illustrée à la figure suivante pour les pointes interne et externe. En pointe externe, la charge de référence est supérieure à celle de la pointe interne et pour des écartements relatifs supérieurs à 1,5 les valeurs tendent à se confondre, ce qui signifie que les fissures n'interagissent plus. Les charges de référence tendent alors vers la charge de référence de la fissure 2a.

En 0 les deux charges doivent être égales à la charge de référence de la fissure isolée 4a, Mais lorsque l'écartement diminue, les deux charges doivent diminuer. Le calcul relatif à l'écartement  $S/(2a) = 0,075$  donne une charge de référence supérieure à celle relative à l'écartement  $S/(2a) = 0,125$  (Figure A2.55a). Ceci signifie, si l'on admet que le calcul est suffisamment précis que l'interaction plastique devient moins forte que l'interaction élastique ce qui est attesté par la comparaison des rapports  $J_p/J_e$ . Il est toutefois difficile de capter cette évolution rapide par calcul aux éléments finis.

Le lissage des valeurs  $Q_R/Q_{L\_ynf}$  ne porte que sur la partie décroissante.

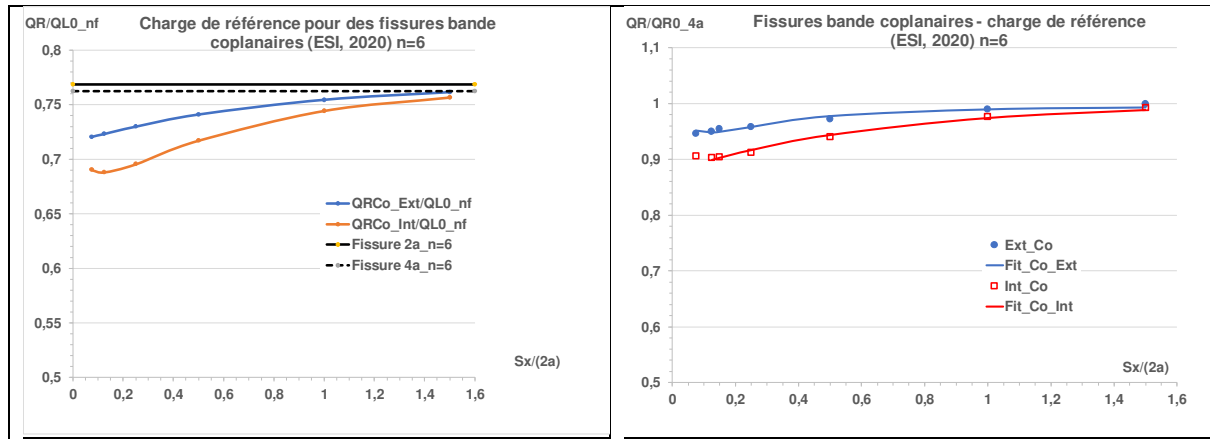


Figure A2\_55 a et b : variations de la charge de référence avec l'écartement

Les lissages des charges de référence sont exprimés par les équations suivantes :

$$\frac{Q_{R0\_Int}}{Q_{R0\_4a}} = 1 - 0,0159 \cdot \exp[-0,0282 \cdot S_x/(2a)] \quad (A2.45)$$

$$\frac{Q_{R0\_Ext}}{Q_{R0\_4a}} = 0,5607 \cdot \exp[0,5832 \cdot S_x/(2a)] \quad (A2.46)$$

La diminution de la charge de référence avec l'écartement s'explique une intensification des déformations et des contraintes permises par l'écroûissage.

#### Analyse de résultats de Framatome pour les fissures coplanaires

Les résultats des calculs ESI seront privilégiés, mais il est utile de faire deux comparaisons avec les calculs réalisés par Framatome (FRA, 1999). La figure A2\_56 compare les charges de référence pour des fissures bande coplanaires égales rapportées à une valeur commune, la charge limite de la plaque non fissurée. Comme pour les fissures isolées, les valeurs obtenues par Framatome sont supérieures à celles obtenues par ESI.

En revanche l'adimensionnement des charges de référence regroupe les courbes (Figure A2\_57), ce qui justifie le traitement groupé des valeurs de  $\frac{Q_{R0}}{Q_{R0\_4a}}$  relatives à différentes configurations et valide les lissages A2\_45 et A2\_46 pour tous les calculs.



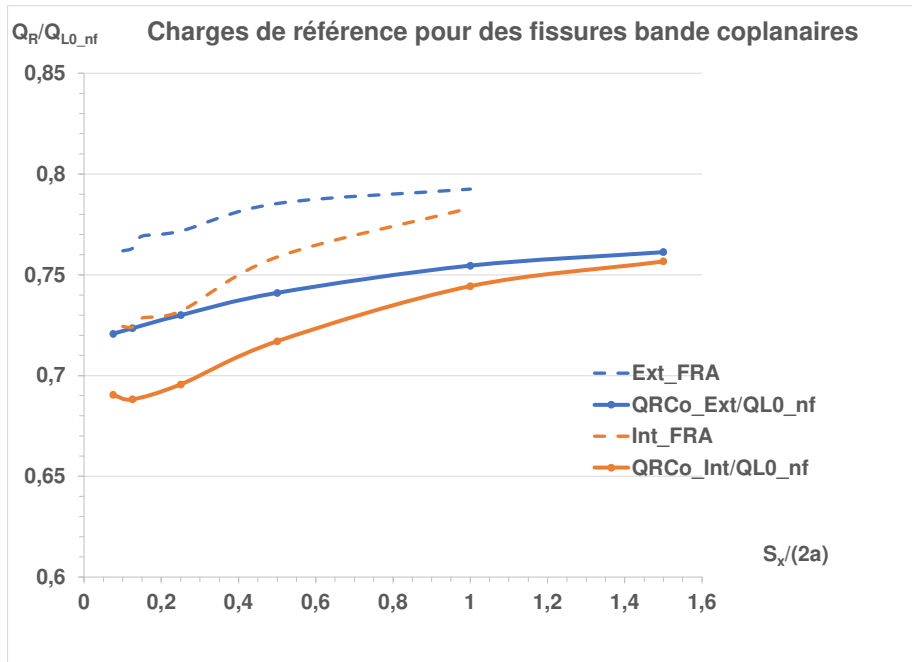


Figure A2\_56 : variations de la charge de référence avec l'écartement adimensionné par la charge limite du solide non fissuré

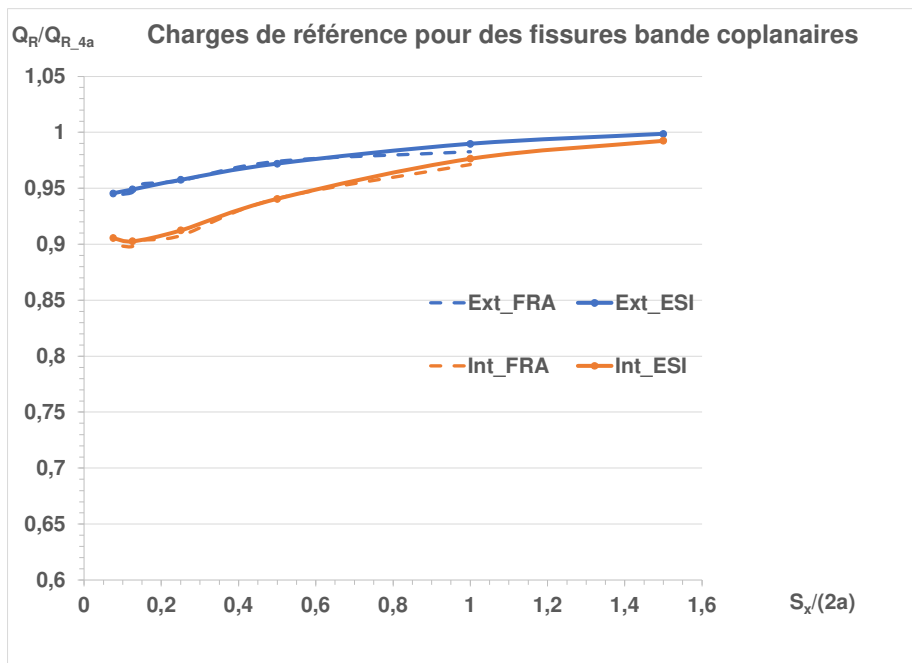


Figure A2\_57 : variations de la charge de référence avec l'écartement adimensionné par la charge de référence de la fissure isolée 4a

### A2.2.7.2.3. Charge de référence pour des fissures parallèles

La figure A2\_58 présente des résultats obtenus pour les mêmes configurations en pointe interne par Framatome (FRA, 1999) et ESI (SYSTUS, 2020). La cohérence des valeurs autorise le regroupement des résultats (Figure A2\_59). Les valeurs de  $S_x/(2a)$  sont indiqués en légende.

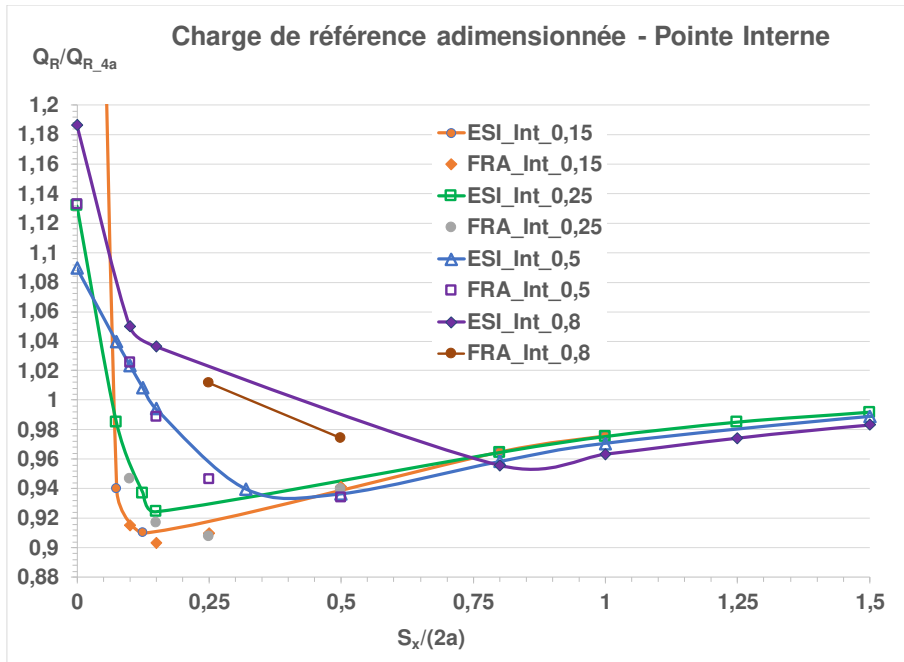


Figure A2\_58 : comparaison des charges de référence adimensionnées obtenues à partir des calculs ESI (SYSTUS, 2020) et Framatome (FRA, 1999)

Le regroupement des résultats pour différents écartements verticaux  $S_z/(2a)$  est présenté à la figure A2\_59.

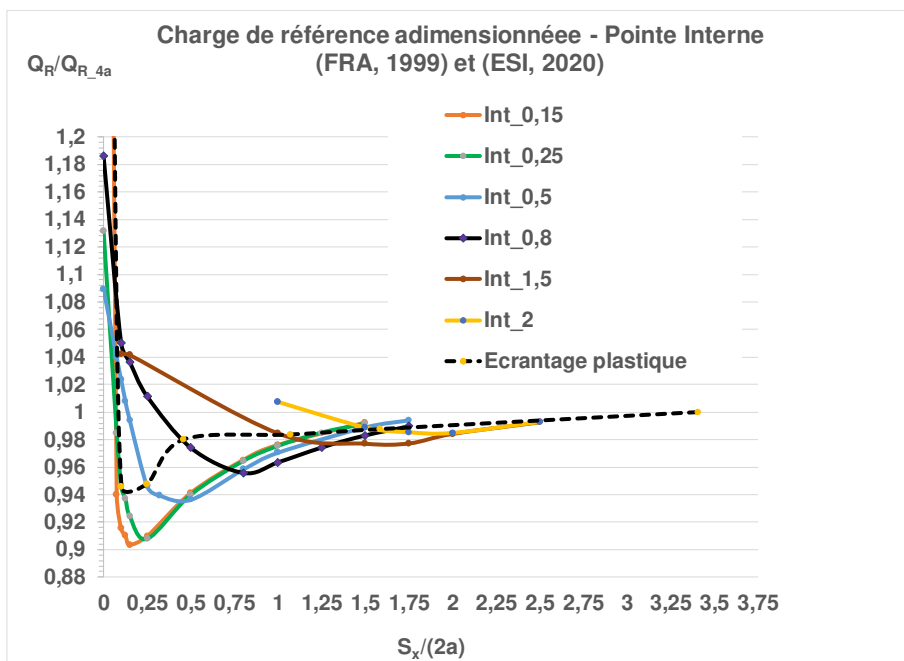
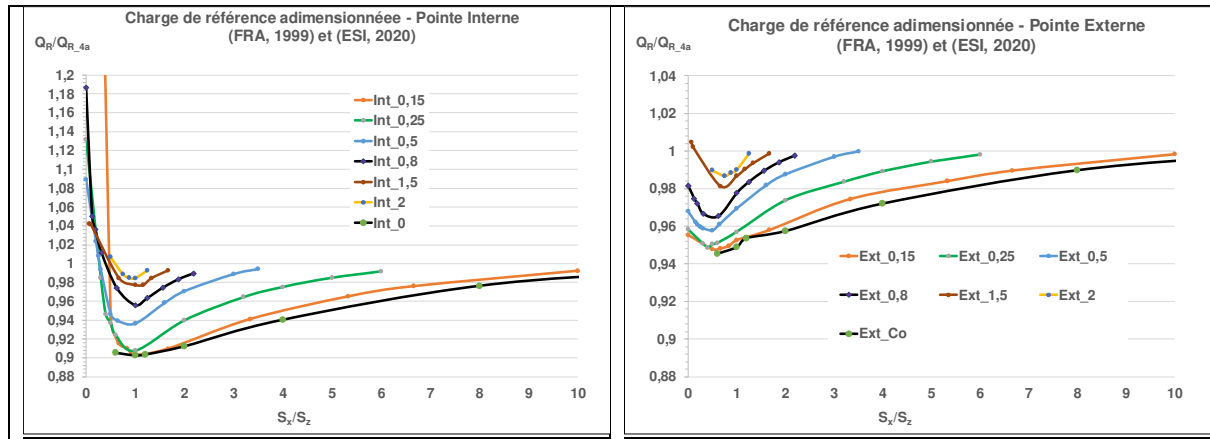


Figure A2\_59 : variations de la charge de référence pour des fissures parallèles avec l'écartement

La figure suivante montre que, comme pour la charge limite, les minimas sont atteints pour  $\hat{S}_x = \hat{S}_z$ .



**Figure A2\_60 : variations de la charge de référence pour différents écartements verticaux avec le rapport  $S_x/S_z$**

Pour les fissures non écartées les charges limites adimensionnées peuvent être représentées dans la partie croissante par des formules de type exponentiel pour chaque valeur de  $S_z/(2a)$ .

$$\frac{Q_{R0\_Int}}{Q_{R0\_4a}} = 1 + p \cdot \exp[q \cdot S_x/(2a)] \quad (A2.47)$$

Mais les variations des coefficients  $p$  et  $q$  sont difficiles à représenter toutes deux par des fonctions simples. Le tableau suivant donne l'exemple d'une variation linéaire de  $q$ , mais les valeurs de  $p$  oscillent.

$S_z/(2a)$	0	0,15	0,25	0,5	0,8	1,5	2
$p$	-0,1292	-0,1074	-0,0949	-0,1381	-0,09362	-0,1217	-0,06447
$q_{Lin}$	-1,8	-1,725	-1,675	-1,55	-1,4	-1,05	-0,8

**Tableau A2\_5 : coefficients de la formule A2.41 en fonction de  $S_z/(2a)$**

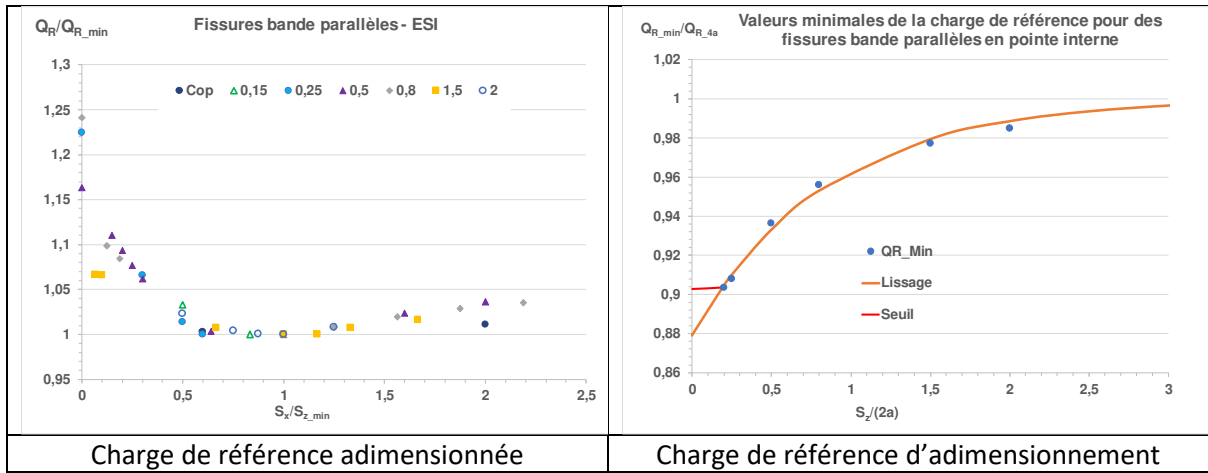
Il est plus intéressant de tirer parti de la propriété mise en évidence pour les charges limites obtenues par approche cinématique (§ 4.2.4.2) et confortée par le fait que les minimas des charges de référence sont atteints pour  $\hat{S}_x = \hat{S}_z$  mis à part pour les petits écartements (Figure A2\_60). La représentation des charges de référence adimensionnées par la charge de référence minimale à  $S_z$  fixé en fonction de  $S_x/S_{x,min}$  permet de regrouper pratiquement toutes les valeurs (Figure A2\_61).  $S_{x,min}$  est la valeur de  $S_x$  associée à la charge de référence minimale. Pour les écartements relatifs  $S_x/(2a)$  supérieurs à 0,125  $S_{x,min}=S_z$ . Pour les fissures avec écartements  $S_x/(2a)$  inférieurs ou égaux à 0,125,  $S_{x,min}/(2a) = 0,125$ .

Soit 
$$S_{x\_Min}/2a = \max(0,125; \hat{S}_z) \quad (A2.48)$$

Les graphes sont tracés pour la fonction d'écroissage  $\mu_e = \frac{Q_{R0}}{Q_{L0\_nc} \cdot \mu_c}$ .

La valeur minimale de  $Q_R$  est donnée par les deux équations avec  $\hat{S}_z = S_z/(2a)$  :

$$\begin{cases} \hat{S}_z \leq 0,2 & \frac{Q_{R0\_min}}{Q_{R0\_4a}} = 0,903 \\ \hat{S}_z > 0,2 & \frac{Q_{R0\_min}}{Q_{R0\_4a}} = 1 - 0,1211 \cdot \exp(-1,1822 \cdot \hat{S}_z) \end{cases} \quad (A2.49)$$



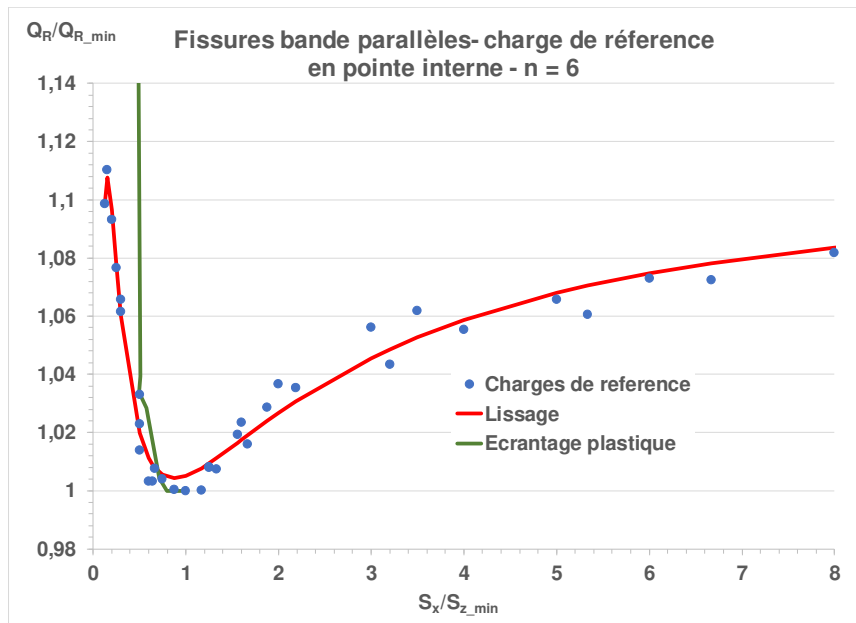
**Figure A2\_61 : variations de la charge de référence avec le rapport  $S_x/S_z$  et variations de la charge d'adimensionnement avec l'écartement vertical**

Ces résultats peuvent être lissés par une fonction inspiré de l'équation d'état des fluides de Van der Walls. La variable est  $s = S_x/S_{x\_min}$ .

$$\frac{Q_{R0\_Int}}{Q_{R0\_min}} = -6,183 + \frac{0,4703}{s - 0,0935} + \frac{7,7585}{s^{0,1231}} - \frac{1}{s^{0,5}} \quad (A2.50)$$

Les deux premiers termes représentent les charges de référence pour des fissures écartées. Les deux autres termes les charges pour des fissures interagissantes. Le dernier terme autorise une légère remontée des effets d'interaction.

Sur la figure A2\_62 est tracée la limite d'écrantage qui sépare les charges de référence des fissures écartées (à gauche de la courbe limite) de celles des fissures interagissantes. Cette courbe se situe avant la verticale  $S_x/S_{z\_min} = 1$  ce qui correspond au fait que la limite d'écrantage dans l'espace ( $S_x, S_z$ ) n'est pas la diagonale comme l'illustre la figure 3.3\_25.



**Figure A2\_61 : variations de la charge de référence adimensionnée avec le rapport  $S_x/S_z$**

La courbe des charges de référence  $\frac{Q_{R0\_Int}}{Q_{R0\_min}} (S_x/S_{z\_min})$  prend des valeurs supérieures à l'unité pour des  $S_x/S_{z\_min}$  élevés car  $Q_{R0\_Int}$  tend vers  $Q_{R0\_4a}$  qui est supérieur à la valeur minimale  $Q_{R0\_min}$  (Figure 4-62). La courbe devrait tendre vers une asymptote à  $\frac{Q_{R0\_4a}}{Q_{R0\_min}} \cong 1,08$ .

Pour des valeurs très faibles de l'écartement  $S_x$  et en particulier pour  $S_x=0$ , la formule A2.49 ne s'applique plus. A partir des calculs d'ESI France, les  $\frac{Q_{R0\_Int}}{Q_{R0\_min}}$  sont obtenues par interpolation linéaire entre la formule suivante établie pour  $s=0$  et la formule A2.50 calculée pour  $s = 0,16$ .

$$\left. \frac{Q_{R0\_Int}}{Q_{R0\_min}} \right|_0 = \max \left( 1,8463 - \frac{0,004294}{\hat{S}_z - 0,2014} + \frac{0,000374}{\hat{S}_z^{4,1773}} - \frac{0,7464}{\hat{S}_z^{-0,00004}}; 1,05 \right) \quad (A2.51)$$

La validation des formules A2.48 à A2.51 est illustrée à la figure A2\_63 pour quatre cas d'écartement vertical.

Les charges de référence adimensionnées par la charge limite de la plaque non fissurée  $Q_{L0\_nf}$  sont évaluées par le produit des trois quantités évaluée par les équations A2.50 ou A2.51, A2.49 et A2.46 :

$$\frac{Q_{R0\_Int}}{Q_{L0\_nf}} = \frac{Q_{R0\_Int}}{Q_{R0\_min}} \cdot \frac{Q_{R0\_min}}{Q_{R0\_4a}} \cdot \frac{Q_{R0\_4a}}{Q_{L0\_nf}} \quad (A2.52)$$

La valeur retenue pour la fissure 4a est :

$$\frac{Q_{R0\_4a}(ESI, n = 6)}{Q_{R0\_nf}} = 0,7623 \quad (A2.44)$$

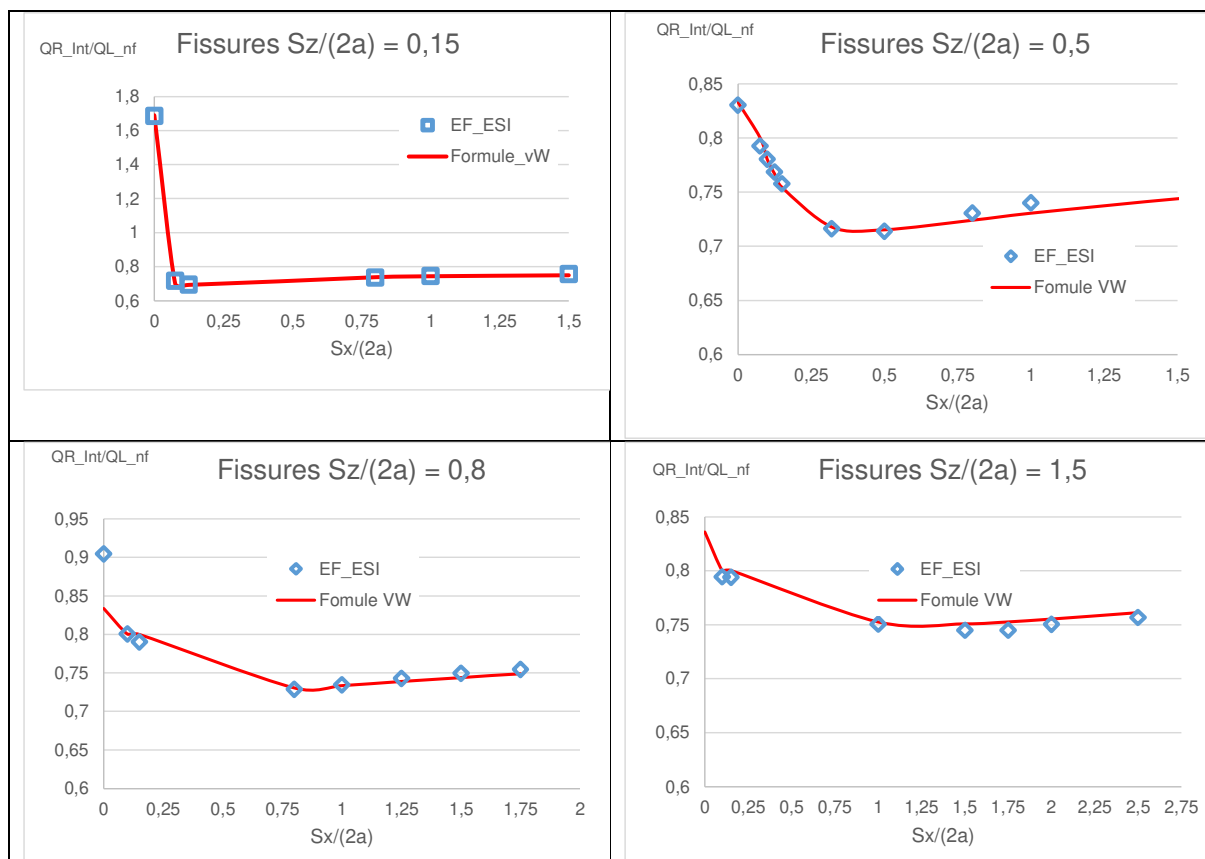
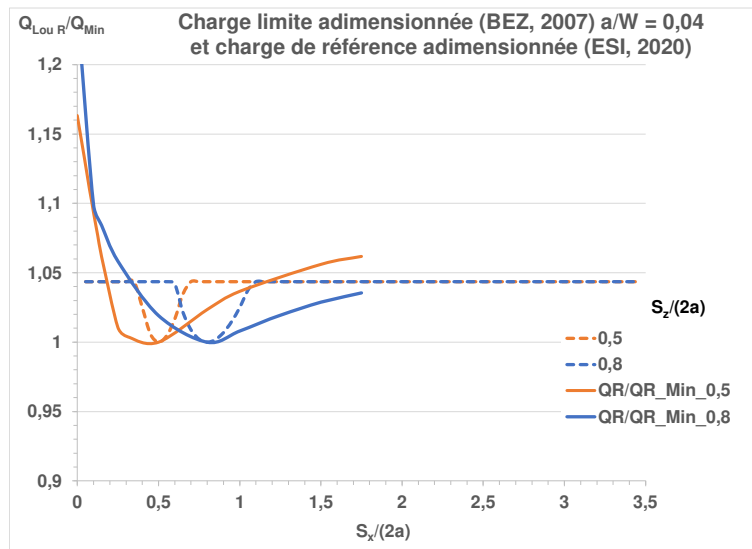


Figure A2\_63 : validations des formules de charge de référence pour la pointe interne de fissures bande parallèles égales

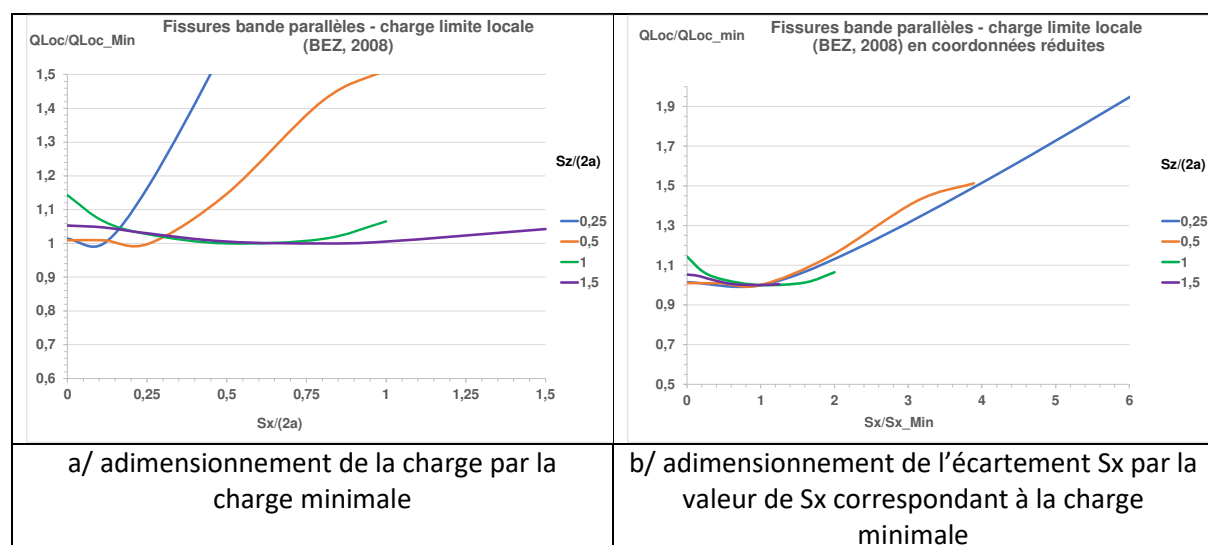
La figure A2\_64 montre que la forme des courbes de charge de référence s'apparente à celle des charges limites obtenues par approche cinématique. La charge de référence est donc pilotée par les champs cinématique. Sa détermination est d'ailleurs obtenue par un rapport de déformations.



**Figure A2\_64 : comparaisons des variations de la charge limite cinématique théorique et de la charge de référence adimensionnée pour l'exposant d'érouissage n=6 avec S<sub>x</sub>/(2a)**

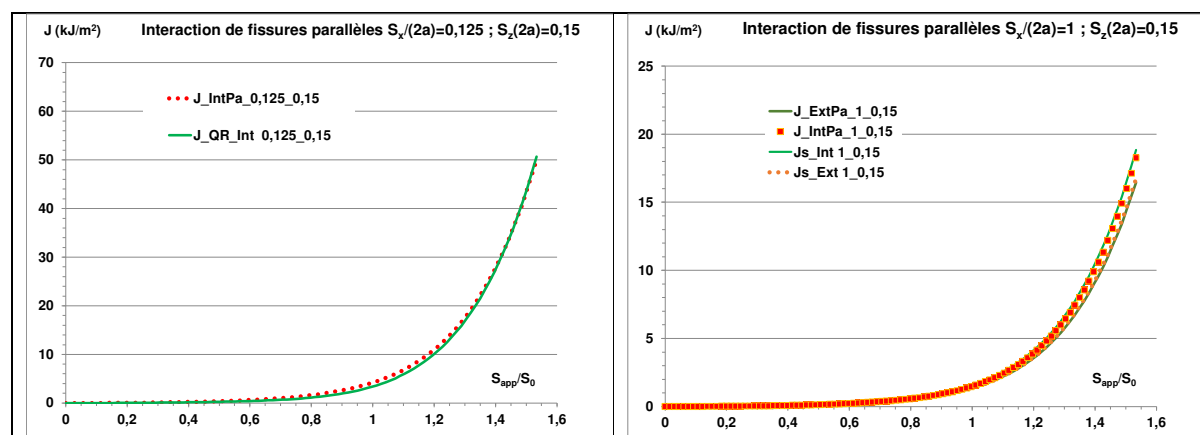
Les charges de référence ne peuvent pas être comparées quantitativement aux « charges limite locales » introduites par Bezensek (BEZ, 2003). En effet les charges limites locales sont évaluées en comparant les efforts de traction et de moment de flexion calculés à partir de l'histoire d'un champ de contraintes local à la surface de charge établie par Rice (RIC, 1972, 1985). La charge de référence est aussi évaluée à partir du champ de contrainte local mais caractérisé par la force fissurante J.

En adimensionnant les valeurs de charges limites locales obtenues par Bezensek (BEZ, 2006) par la charge minimale et l'écartement S<sub>x</sub> par la valeur de S<sub>x</sub> correspondant à la charge minimale (Figure A2\_65), on retrouve les comportements illustrés par les figures A2\_58 et A2\_60. Les approches sont donc similaires, mais la recherche de la charge de référence est plus facile à conduire.



**Figure A2\_65 : charges limites locales pour des fissures bande égales parallèles**

La figure A2\_66 compare les variations de J calculées par éléments finis (ESI, 2020) pour des fissures bande égales parallèles aux prédictions par la méthode de la charge de référence. Deux cas sont choisis parmi les dizaines de configurations de fissure non écartées. Les prédictions n'intègrent pas la correction de zone plastique en plasticité confinée qui joue d'ailleurs un rôle négligeable. La précision est excellente : par exemple pour tous les cas de fissures non écartées et écartées verticalement de  $S_z/2a = 0,15$ , les écarts varient de 1 à 2%.



**Figure A2\_66 : comparaison des variations de J calculées par éléments finis et celles obtenues par la méthode de la charges de référence pour des fissures bande égales parallèles**

### A2.2.8. Effet d'écroûissage sur les grandeurs d'interaction

Le facteur d'interaction et le coefficient d'équivalence en élastoplasticité sont liés aux charges de référence par les formules suivantes.

$$\iota^2 \cong \gamma^2 \cdot \left( \frac{Q_{R0_{Iso}}}{Q_{R0}} \right)^{n-1} \quad \text{et} \quad \alpha_{ep} \cong \alpha_e \cdot \left( \frac{Q_{R0_{Hi}}}{Q_{R0}} \right)^{n-1} \quad (A2.53)$$

Toutes les plaques analysées ont même dimension et sont sollicitées en déformations planes, donc la charge limite en l'absence de fissure est la même pour toutes ces plaques.

$$Q_{L0_{nc}} = k_{VM} \cdot \sigma_0 \cdot Z_{p_{nc}}$$

Les charges de référence ont pour forme :

$$Q_{R0_{c}} = Q_{L0_{nc}} \cdot \mu_R = Q_{L0_{nc}} \cdot \mu_c \cdot \mu_e \quad (A2.54)$$

Où les fonctions

- $\mu_R$  représente l'effet de la fissure sur la charge de référence. Cette fonction est décomposée en un produit de deux fonction afin de faire le lien avec la charge limite.
- $\mu_c$  traduit l'effet de la géométrie de la pièce fissure pour un matériau rigide parfaitement plastique. La charge limite est  $Q_{L0_{c}} = Q_{L0_{nc}} \cdot \mu_c$ .

- $\mu_e$  est une fonction qui dépend à la fois de la géométrie de la pièce fissurée et de l'écroissage de la structure. Cette fonction est quantifiée à partir des calculs de la force fissurante J.

$$\mu_e = \frac{Q_{R0}}{Q_{L0\_nc} \cdot \mu_c} = \frac{1}{\mu_c} \cdot \lim_{Q \gg Q_{L0\_c}} \frac{Q}{Q_{L0\_nc}} \cdot \left[ \frac{\alpha \cdot h_{nu}}{\left(\frac{J}{J_e} - 1\right)} \right]^{\frac{1}{n-1}} \quad (A2.55)$$

Pour les fissures isolées,  $\mu_c$  est connue de façon exacte :  $\mu_c = 1 - \frac{a_1+a_1}{W}$  où W est la demi-largeur de plaque.

### Fissures coplanaires

La fonction  $\mu_c$  est la même que les fissures soient séparées (fissures combinées) ou jointes (fissures isolées). Pour des fissures égales, on a donc :

$$\frac{Q_{R0\_Iso}}{Q_{R0}} = \frac{1 - \frac{a}{W}}{1 - \frac{2a}{W}} \cdot \frac{\mu_{e\_Iso}(a, n)}{\mu_{e\_Com}(2a, n)} \quad \text{et} \quad \frac{Q_{R0\_Hi}}{Q_{R0}} = \frac{\mu_{e\_Iso}(2a, n)}{\mu_{e\_Com}(2a, n)} \quad (A2.56)$$

L'expression de  $Q_{R0\_Iso}/Q_{R0}$  montre que le facteur d'interaction  $\iota$  dépend nécessairement de n (Figure A2\_67).

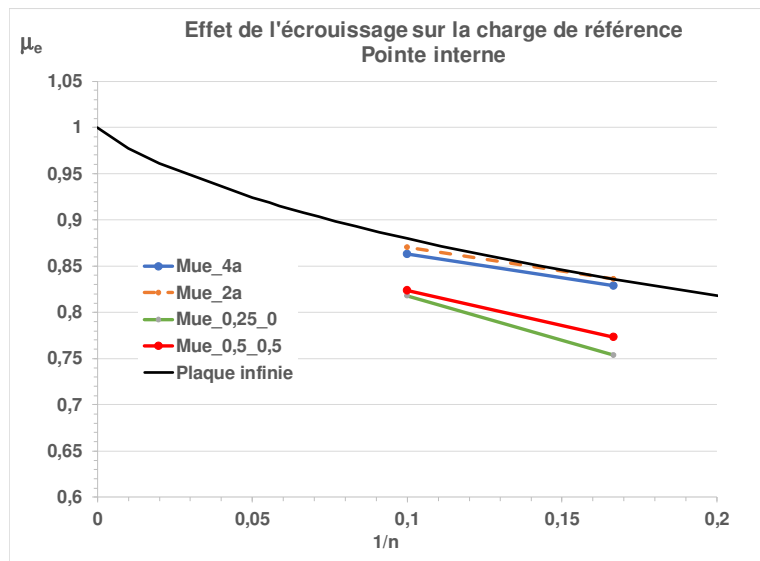


Figure A2\_675 : variations de la fonction  $\mu_e$  avec l'exposant d'écroissage

L'évaluation de l'expression de  $Q_{R0\_Hi}/Q_{R0}$  nécessite de comparer les fonctions  $\mu_e$  pour une fissure isolée 4a et pour les fissures combinées. La figure A2\_67 montre que  $\mu_e$  décroît avec l'inverse de l'exposant d'écroissage et que les pentes pour les fissures combinées sont voisines, ce qui permet de conclure à la faible dépendance du rapport  $Q_{R0\_Hi}/Q_{R0}$  vis-à-vis de n.

La courbe relative à la plaque infinie fissurée sous traction est obtenue à partir de la formule approchée de  $h_1$ , précise pour  $n \leq 5$  au moins : de He et Hutchinson (HET, 1981) :

$$h_1 = \pi \cdot \sqrt{n} \quad (A2.57)$$

D'où la formule :



$$\mu_{e\_Iso}(0, n) \cong \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{n-1}} \quad (A2.58)$$

Cette fonction varie de  $e^{-0,5}$  à 1 lorsque  $n$  varie de 1 à l'infini et constitue la borne supérieure de la fonction d'écroûissage.

Le cas  $\hat{S}_x = \hat{S}_z = 0,5$ , a été sélectionné car il correspond à un cas où la charge limite pour des fissures parallèles est proche de celle des fissures coplanaires.

Le coefficient d'équivalence plastique  $\alpha_p \cong \left(\frac{Q_{R0\_Hi}}{Q_{R0\_Int}}\right)^{n-1}$  (A2\_59) est tracé en fonction de l'exposant d'écroûissage. Pour les fissures coplanaires, le coefficient d'équivalence plastique est quasiment indépendant de l'écroûissage (Figure A2\_68).

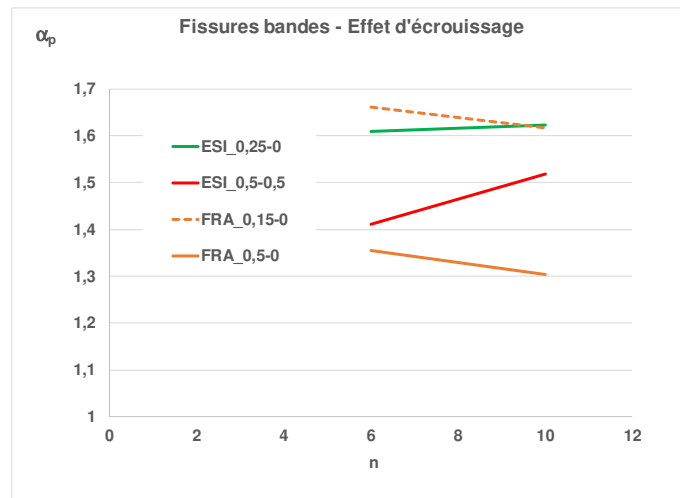


Figure A2\_68 : variations du coefficient d'équivalence plastique avec l'exposant d'écroûissage

#### Fissures parallèles

La dépendance du coefficient d'équivalence vis-à-vis de l'écroûissage vient du fait que l'adimensionnement de la charge de référence des fissures interagissantes est effectué par rapport à la charge de référence de la fissure de longueur  $4a$ .

$$\alpha_{ep} \cong \alpha_e \cdot \left(\frac{Q_{R0\_Hi}}{Q_{R0}}\right)^{n-1} \quad (A2.59)$$

$$Q_{R0\_2a} > Q_{R0\_4a} \quad (A2.60)$$

Cependant la différence entre ces deux charges de référence est faible :

	$Q_{R0\_2a}/Q_{L0\_nf}$	$Q_{R0\_4a}/Q_{L0\_nf}$
FRA	0,8218	0,8064
ESI	0,7688	0,7623

Tableau A2\_66 : charges de référence pour les fissure isolées

L'augmentation de la charge de référence ne contribue que de 4% à l'augmentation de  $\alpha_{ep}$  pour  $n=6$

## A2.3. Défaut équivalent à deux fissures elliptiques

Le cas des fissures disque est traité dans ce paragraphe.

L'interaction en élastoplasticité est mesurée par le coefficient  $\alpha_{ep} = \frac{H_{eq}}{H_i}$  qui est obtenu par le rapport des forces fissurantes  $J$  aux points d'interaction entre fissure unique et fissure intégrée comme décrit au paragraphe 4.3.1 (équation A2\_61).

Contrairement au cas des de fissures bande, aucune formule analytique générale n'a pu être établie pour les variations du coefficient d'équivalence en tridimensionnel. Les formules relatives aux fissures elliptiques ont été obtenues par lissage de résultats calculs aux éléments finis pour un nombre limité de rapport d'aspect. Les formules sont limitées aux cas de fissures égales. Le cas des fissures inégales est traité en considérant l'interaction de deux fissures égales à la plus grande en conservant l'écartement. Nous donnerons cependant quelques résultats de calcul d'interaction de fissures elliptiques inégales.

### A2.3.1. Coefficient d'équivalence en tridimensionnel

Dans le cas tridimensionnel, le coefficient est donné par :

$$\alpha_{ep_{i,j \neq i,P}} = \frac{J_{i,j \neq i}(P)}{J(a_1 + a_2)} \quad (A2.61)$$

Où  $P$  est un des deux points le plus proches sur les fronts des deux fissures.

$J(a_1 + a_2)$  est estimé à partir des facteurs d'interaction élasto-plastiques  $\iota_{ij}(P) = \sqrt{\frac{J_{i,j \neq i}(P)}{J_{io}(P)}}$

$$\alpha_{ep} = \frac{H_{eq}}{H_i} = \frac{J_{ep\_eq}}{J_{ep\_Hi}} = \frac{\zeta}{1 + \zeta} \cdot [\text{Max}(\iota_{12\_Int}; \iota_{12\_Ext})]^2 \quad (A2.62)$$

### A2.3.2. Choix du niveau de chargement

Dans le cas de fissures tridimensionnelles, le coefficient d'équivalence n'évolue pas de façon monotone, mais atteint un plateau en plasticité étendue comme en 2D. Les comportements sont similaires pour les fissures disque et les fissures elliptiques.

#### A2.3.2.1. Coefficient d'équivalence des fissures disque coplanaires

EDF a effectué plusieurs calculs d'interaction de fissures disques coplanaires égales en élasto-plasticité (DEE, 2018). La figure A2\_69 montre que pour tout écartement, le coefficient d'équivalence croit fortement en plasticité confinée, puis décroît et atteint un plateau en plasticité étendue. C'est la

valeur en plasticité étendue qui doit être retenue car les valeurs de J croissent fortement dès que  $S/S_0$  dépasse 2. Cette valeur est obtenue en moyennant les valeurs entre  $S/S_0 = 3,1$  et  $5,2$ .

Les calculs d'EDF et ESI ont été réalisés par éléments finis avec des codes qualifiés (ASTER et SYSTUS) pour les mêmes caractéristiques du matériau, sur des massifs de grande taille par rapport à celles des fissures et pour les mêmes conditions de chargement.

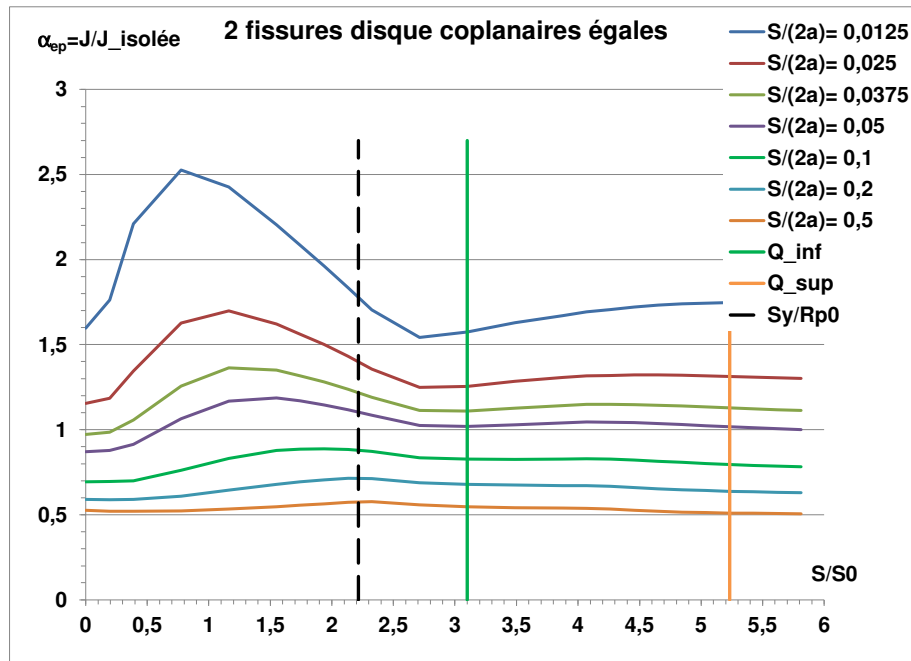


Figure A2\_69 : variations du coefficient d'équivalence élasto-plastique avec la charge pour deux fissures disques égales

### A2.3.2.2. Coefficient d'équivalence des fissures elliptiques coplanaires

Les résultats ne portent que sur les fissures coplanaires de rapport d'aspect  $a/c = 3$ . Les configurations pour les fissures égales et inégales sont décrites à la figure suivante.

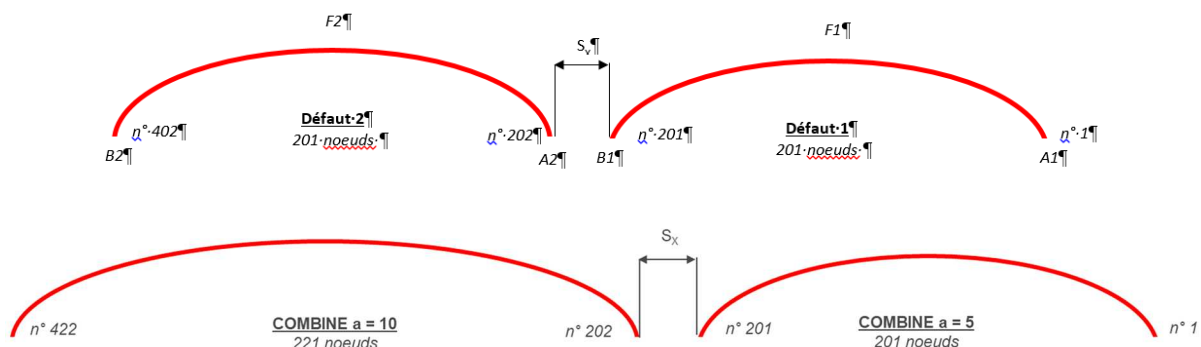
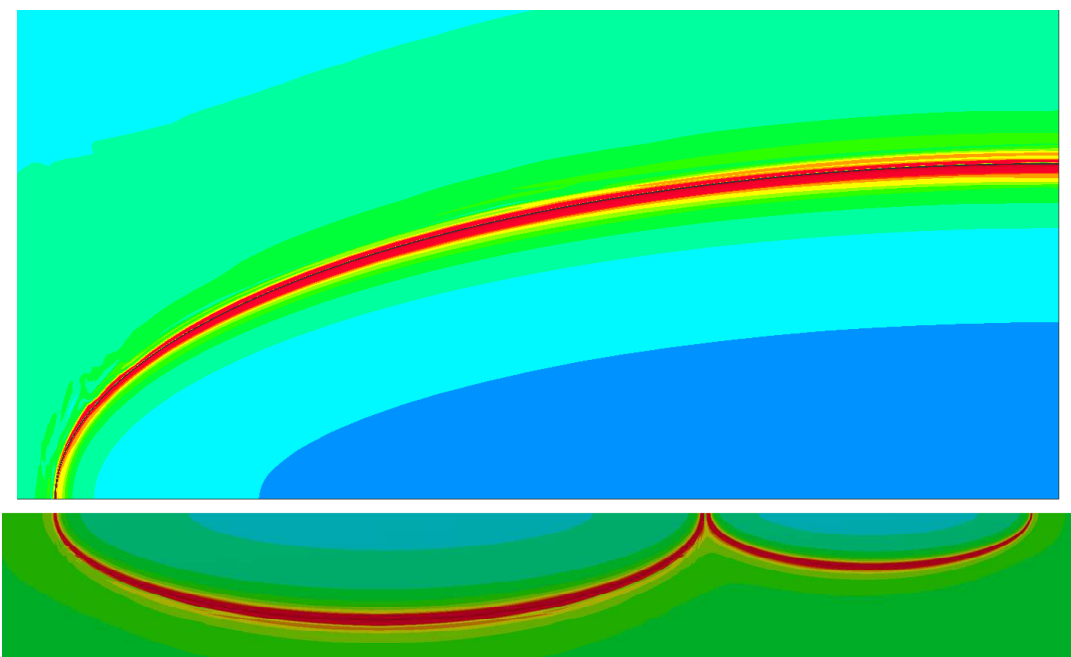


Figure 7 A2\_70 : demi fissures elliptiques égales et inégales

Les interactions varient suivant que les couples de fissures considérés (égales / inégales) et leurs positions relatives (grands ou petits axes communs).

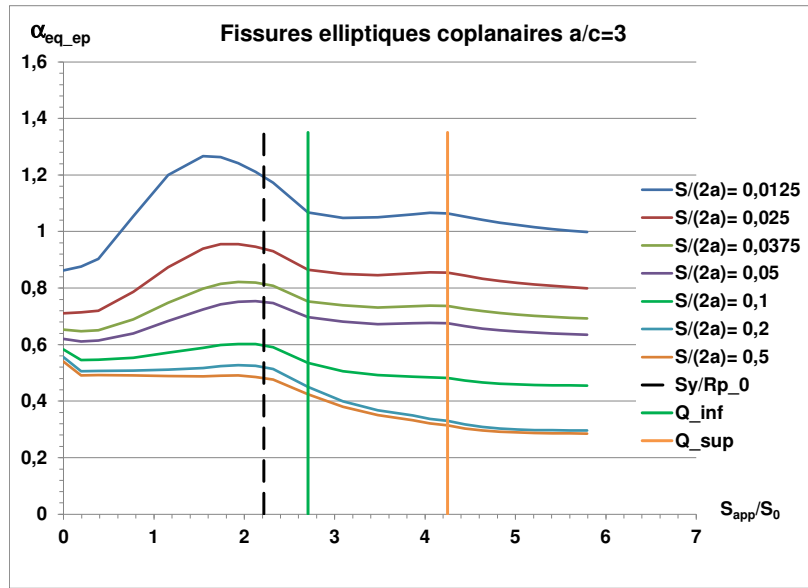
#### A2.3.2.2.1. Coefficient d'équivalence pour une interaction au vertex

Sous chargement uniforme, la force d'extension de fissure pour une fissure isolée est maximale au co-vertex. Dans le cas de deux fissures interagissantes au vertex, l'interaction tend à uniformiser la plasticité le long du front comme le montre la comparaison des déformations équivalentes en plasticité étendue de la figure A2\_71. La plasticité se concentre le long des fronts de fissure en particulier dans le ligament qui sépare les vertex. Il faut aussi noter la plus forte plastification de la grande fissure.



**Figure A2\_71 : déformation totale équivalente en plasticité étendue pour une fissure isolée et deux fissures coplanaires de grand axes alignés**

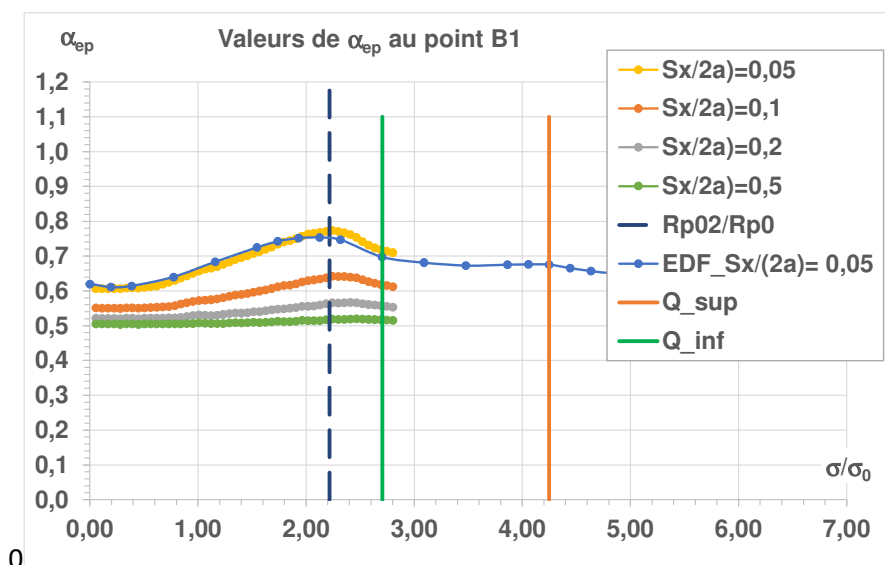
Les calculs EDF (DEE, 2018) montrent que le coefficient croît puis décroît ainsi que l'illustre la figure A2\_72. Par rapport au cas des fissures circulaires, les pics sont un peu décalés vers les valeurs plus élevées de contrainte. La valeur du coefficient d'équivalence est obtenue en moyennant les valeurs entre  $S/S_0 = 2,7$  et  $4,2$ .



**Figure A2\_72 : évolution du coefficient d'équivalence élasto-plastique avec le niveau de chargement pour des fissures elliptiques coplanaires égales au point de plus forte interaction**

Les courbes relatives écartements relatifs supérieures ou égales à 0,1 ne présentent plus de plateaux. Ceci est à une moins bonne qualité des maillages, choix qui s'explique par l'hypothèse qu'une interaction moins forte nécessiterait moins de concentration de mailles dans le ligament et le long du front. Cette hypothèse n'est pas correcte car les quantités qui mesurent l'interaction sont des rapports de grandeurs pour la fissure interagissante et la fissure isolée, faiblement différentes lorsque les écartements sont relativement élevés et don une bonne précision des calculs s'impose.

Les calculs ESI (SYSTUS, 2020) n'ont été effectués que pour des valeurs élevées des écartements pour lesquelles les calculs EDF ne sont pas valides. Les maillages ont été adaptés au cas des écartements plus élevés. Un des cas valide traité par EDF ( $S_x/2a=0,5$ ) a été aussi calculé par ESI. La comparaison illustrée à la figure A2\_73 montre que les évolutions sont similaires à celles calculée par EDF mais les calculs ne sont pas poussés assez loin.

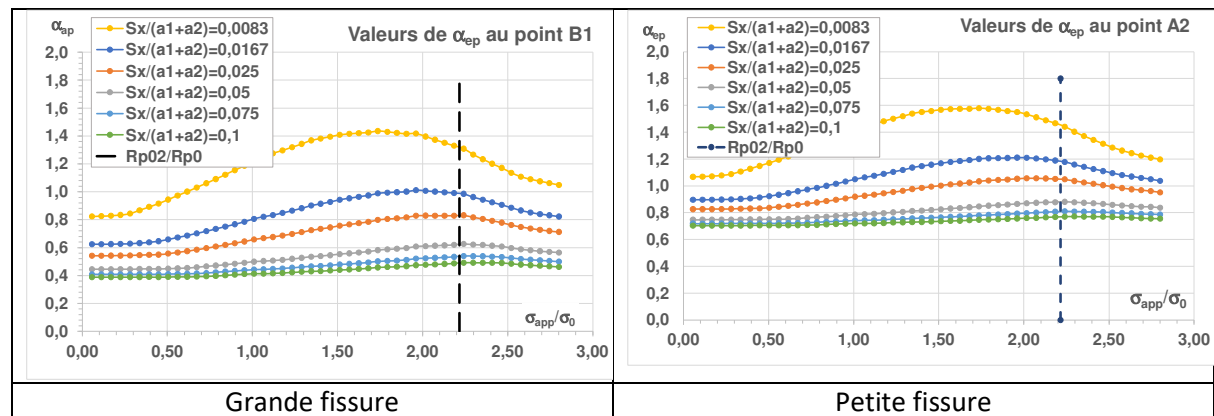


**Figure A2\_73 : évolution du coefficient d'équivalence élasto-plastique avec le niveau de chargement pour des fissures elliptiques coplanaires égales au point de plus forte interaction**

La valeur retenue pour le coefficient d'équivalence doit être la valeur moyenne dans le plateau pour les calculs réalisés par EDF ou la valeur finale pour les calculs effectués par ESI. Pour l'écartement  $S_x=a$ , il n'y a pratiquement plus d'interaction.

### Cas des fissures inégales

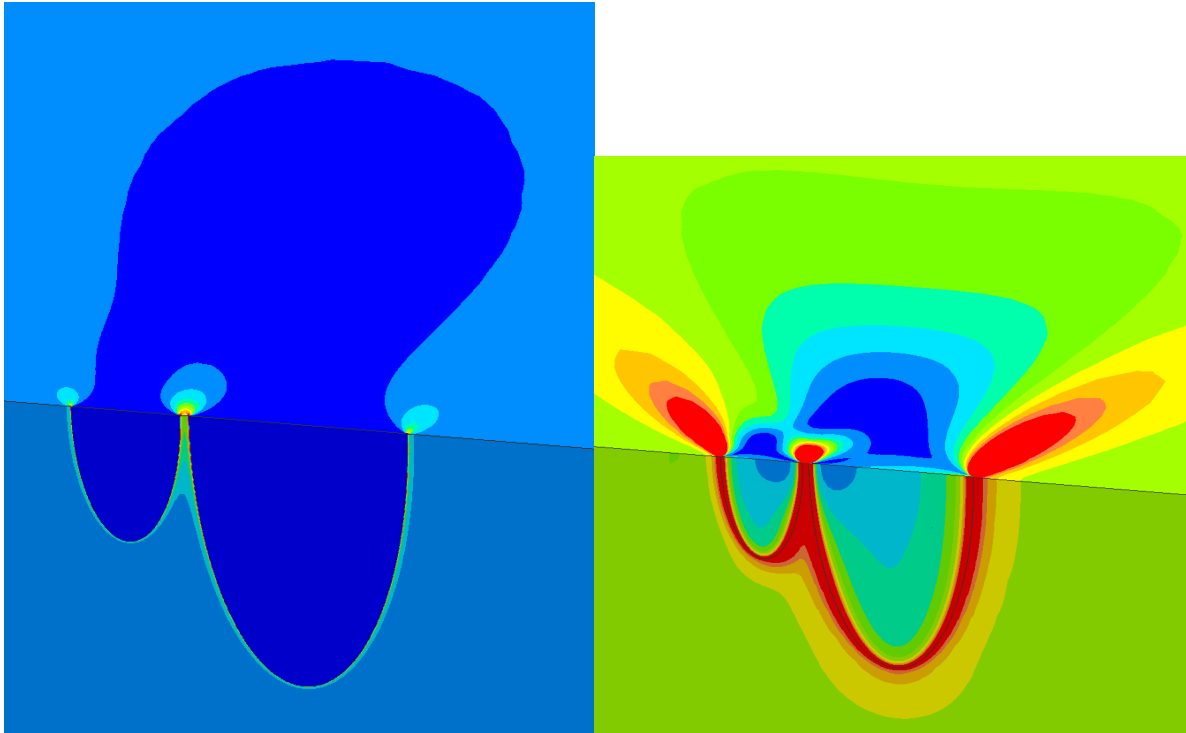
Ce cas a été traité par ESI pour des fissures de rapports d'aspects identiques dont le rapport de taille est 2. La figure A2\_74 montre que les évolutions ont même forme pour les deux fissures mais les valeurs du coefficient d'équivalence de la petite fissure sont toujours supérieures à celle de la grande fissure.



**Figure A2\_74 : évolution du coefficient d'équivalence élasto-plastique avec le niveau de chargement pour des fissures elliptiques coplanaires inégales au vertex**

### A2.3.2.2.2. Coefficient d'équivalence pour une interaction au co-vertex

Dans le cas de deux fissures interagissantes au co-vertex, l'interaction accroît la concentration de contrainte dans le ligament qui sépare les co-vertex. Il faut aussi noter, comme dans le cas de l'interaction au vertex, la plus forte plastification de la grande fissure (Figure A2\_75).



**Figure A2\_75 : déformation totale équivalente en élasticité et déformation plastique équivalente**  
**Fissures inégales ( $a_1/a_2=2$ ) écartement relatif  $S_x/(a_1+a_2) = 0,05$**

### A2.3.3. Formules pour des fissures elliptiques coplanaires

Pour les fissures coplanaires la procédure suivie est la suivante :

1. Lissage des résultats de calculs aux éléments finis afin d'obtenir des fonctions applicables sur tout le domaine de variation de l'écartement  $S_x$  ou  $S_y$ . Dans le cas de fissures inégales de petit axe commun, une pondération des résultats a été réalisée pour obtenir un lissage pour des fissures égales.
2. Validation de ces lissages par comparaison aux résultats éléments finis et à la valeur asymptotique de 0,5.
3. Etablissement d'une fonction d'interpolation entre les lissages afin de disposer d'une fonction  $\alpha_{ep\_Id}(\hat{S}_x \text{ ou } y, a/c)$  pour des fissures identiques.

Les formules présentées dans le Tableau A2\_7 ont été établies pour des fissures identiques.

Les coefficients de ces lissages varient de façon monotone sauf pour les exposants. Avec peu de points calculés par éléments finis, il faut se limiter à des fonctions monotones les plus lisses possible. Le lissage de la configuration  $a/c = 1/3$  avec petits axes alignés a donc été modifié avec pour conséquence une légère perte de précision :

$$0.22 + 0.339 \cdot (\hat{S}_y)^{-0.535} \quad (\text{A2.64})$$

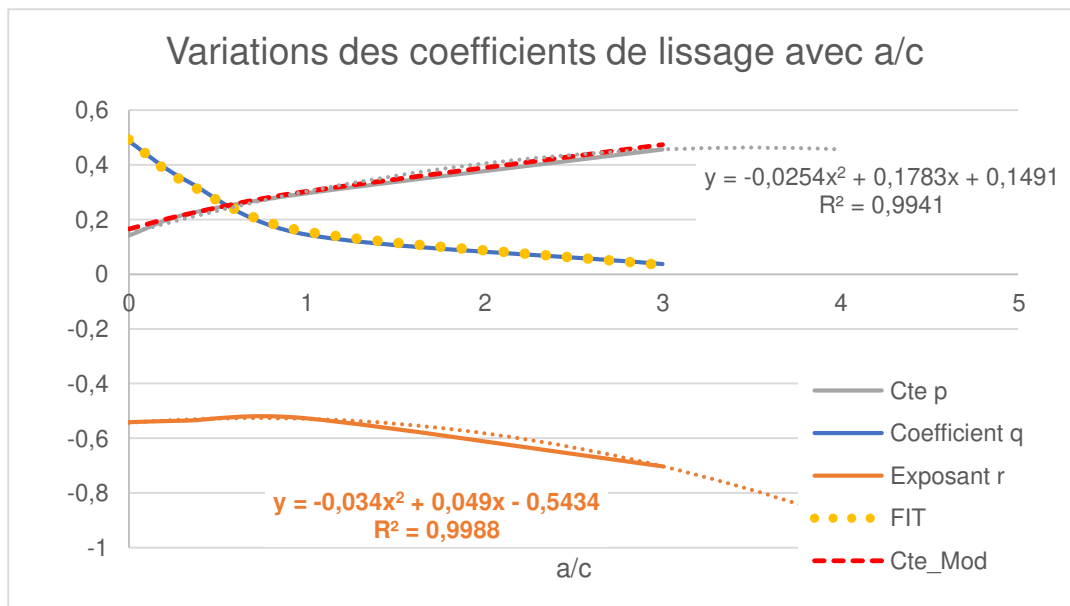
Type de fissure	Formules	Remarques
Fissures bande (a/c= 0)	$0.1406 + 0.4858 \cdot (\hat{S}_x)^{-0.541}$	-
Fissures elliptiques de petit axes alignés (a/c = 1/3)	$0.1585 + 0.2881 \cdot (\hat{S}_y)^{-0.5977}$	Estimation à partir de fissures inégales ( $\zeta = 2$ )
Fissures disque (a/c=1)	$0.2956 + 0.1447 \cdot (\hat{S}_x)^{-0.5266}$	-
Fissures elliptiques de grand axes alignés (a/c=3)	$0.456 + 0.0374 \cdot (\hat{S}_x)^{-0.7022}$	-

**Tableau A2\_7 : formules A2.63 des coefficients élastoplastiques  $\alpha_{ep}$  pour des fissures enfouies coplanaires égales (avec  $\hat{S}_x = \frac{S_x}{a_1+a_2}$  et  $\hat{S}_y = \frac{S_y}{c_1+c_2}$ )**

Les variations des coefficients de lissage sont alors satisfaisantes comme le montre la figure A2\_76. Le Tableau A2\_8 donne les lissages des formules des coefficients.

Des correctifs ont été apportés afin d'améliorer ces formules aux bornes.

Le domaine de validité est  $0 \leq \frac{a}{c} \leq 3.25$ . Pour des rapports d'aspect plus élevés, il faut utiliser la valeurs des coefficients obtenus pour  $\frac{a}{c} = 3.25$ .



**Figure A2\_76 : variations des coefficients de formules A2.63 avec le rapport d'aspect**

$\frac{a}{c} = 0$	$0.1406 + 0.4858 \cdot (\hat{S}_x)^{-0.541}$
Coefficient s pour $\frac{a}{c} > 0$	$p = 0.1491 + 0.1783 \cdot \frac{a}{c} - 0.0254 \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^2 + 0.015 \cdot \exp\left(1 - \frac{a}{c}\right)$ $q = 0.0232 + 0.46835 \cdot \exp\left(-1.2607 \cdot \frac{a}{c}\right)$ $r = -0.5434 + 0.049 \cdot \frac{a}{c} - 0.034 \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^2$

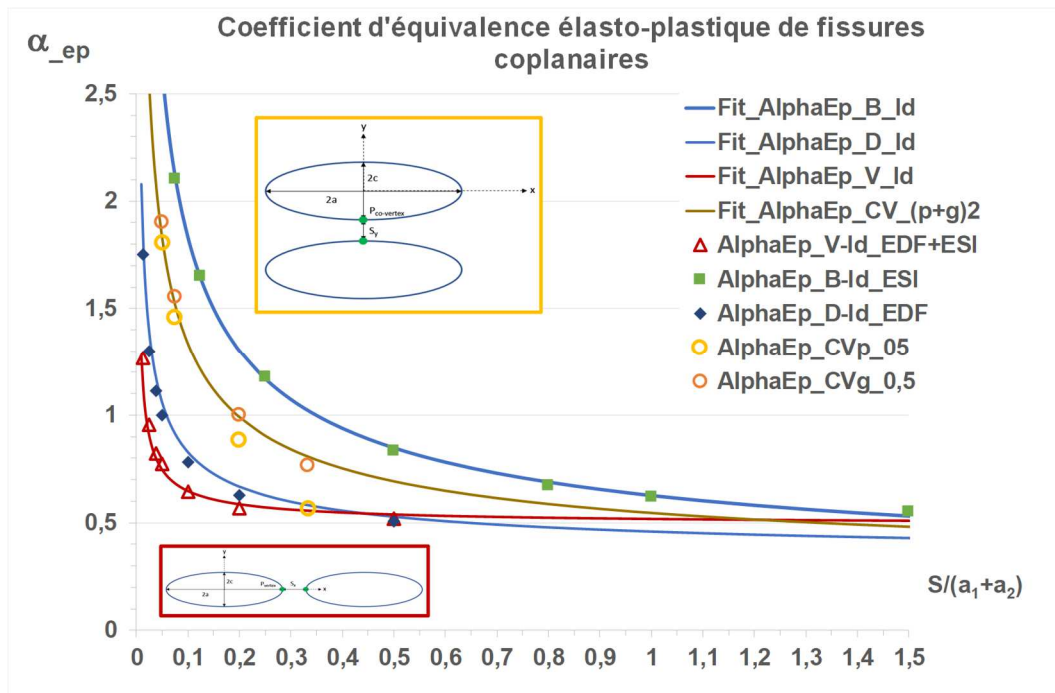


Coefficient $s$ pour $\frac{a}{c} > 2$	$p = 0.1491 + 0.1783 \cdot \frac{a}{c} - 0.0254 \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^2 + 0.015 \cdot \left(1 - \frac{a}{c}\right)$ $q = 0.0232 + 0.46835 \cdot \exp\left(-1.2607 \cdot \frac{a}{c^2}\right)$ $r = -0.5434 + 0.049 \cdot \frac{a}{c} - 0.034 \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^2$ $r = \max\left(-0.46 - 0.075 \cdot \frac{a}{c}; r\right)$
Formule	$\alpha_{ep\_Id} = p + q \cdot (\hat{S}_{x \text{ ou } y})^r$

**Tableau A2\_8 : formules A2.65 des coefficients d'équivalence élastoplastiques pour des fissures enfouies coplanaires égales**

Dans ces formules le rapport d'aspect  $\frac{a}{c}$  varie de 0 pour les fissures bande, à 3 pour les fissures elliptiques de grand axe alignés en passant par 1/3 pour les fissures elliptiques de petit axe alignés et 1 pour les fissures disque.

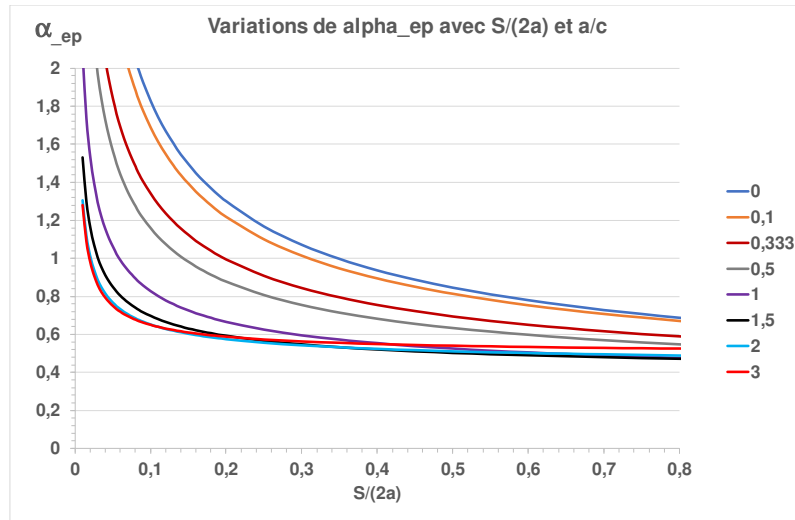
La Figure A2\_77 présente les variations des coefficients d'équivalence pour des fissures coplanaires égales comparées aux résultats de calculs aux éléments finis.



**Figure A2\_77 : validation des coefficients d'équivalence pour des fissures coplanaires**

Les écarts sont en général de moins de 3% pour  $0.95 \geq \lambda \geq 0.2$ , un peu plus au-delà. Autour du cas de la fissure disque, les formules surestiment de 7% environ le coefficient  $\alpha_{ep\_Id}$ .

La validité des interpolations est illustrée sur la Figure A2\_78 qui montre, comme attendu, une décroissance continue des coefficients d'équivalence avec l'écartement et avec l'accroissement du rapport d'aspect.



**Figure A2\_78 : coefficients d'équivalence prédits pour des fissures coplanaires**

Les coefficients d'équivalence pour des fissures inégales sont tels que :

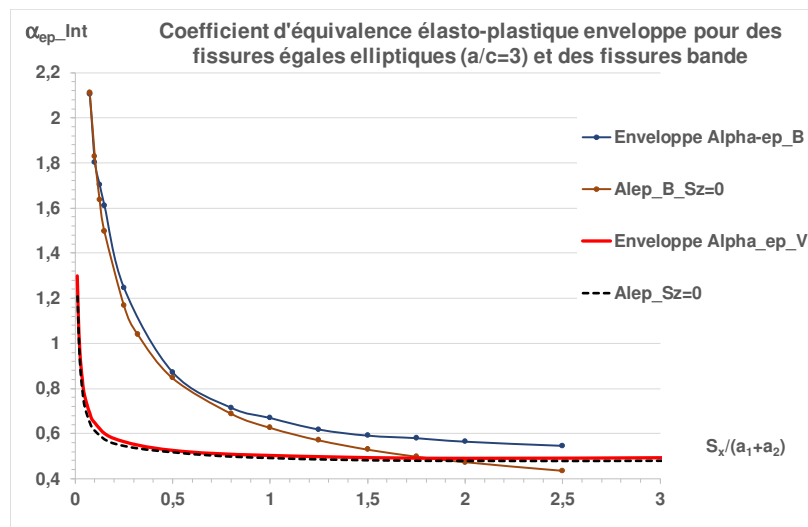
$$\alpha_{ep\_p} \leq \alpha_{ep\_Id} \leq \alpha_{ep\_g} \quad (A2.66)$$

Donc il n'est pas possible de prédire avec cette formule les coefficients des grandes fissures. Il faut remplacer les fissures inégales par des fissure égales.

Le coefficient d'équivalence plastique est obtenu par le rapport  $\alpha_{p\_Id} = \alpha_{ep\_Id} / \alpha_{e\_Id}$

#### A2.3.4. Formules pour des fissures parallèles

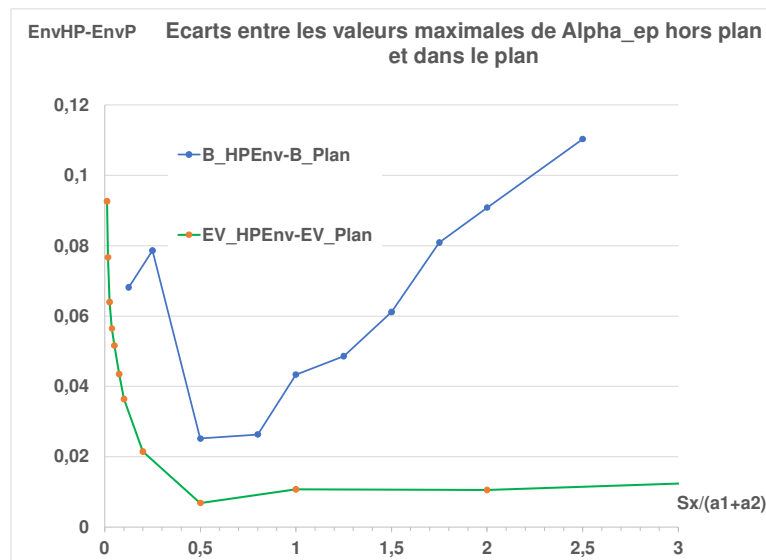
Les valeurs des coefficients d'équivalence élasto-plastiques enveloppe pour des fissures parallèles sont légèrement supérieures à celles des fissures coplanaires comme l'illustre la Figure A2\_79.



**Figure A2\_79 : coefficients d'équivalence élasto-plastiques enveloppe pour des fissures elliptiques parallèles de grands axes alignés et des fissures bande (Alep désigne les enveloppes pour des fissures coplanaires)**

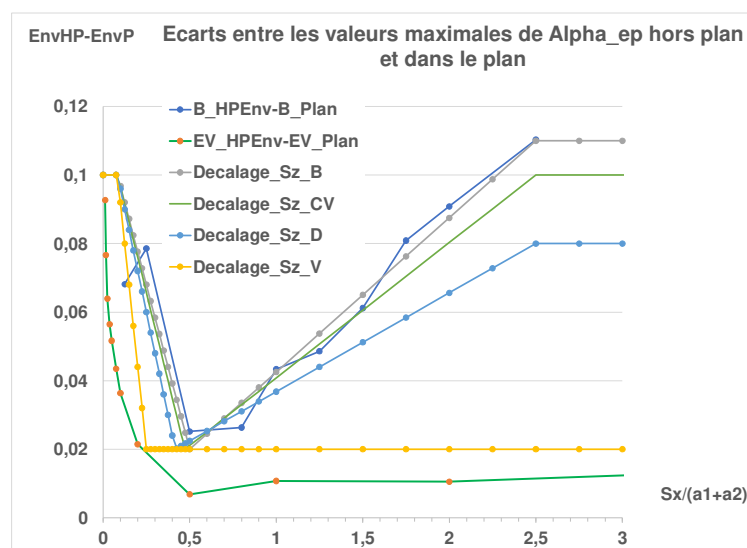
L'application de ces formules au cas Hors Plan nécessite de modifier la fonction  $\alpha_{ep\_Id}$  notamment pour des fissures éloignées ( $Sx/(2a) > 0,5$ ). Ceci est obtenu par un simple décalage des valeurs de  $\alpha_{ep\_Id}$  comme l'illustre la Figure A2\_79.

La différence entre les enveloppes des coefficients d'équivalence élastoplastiques pour des fissures dans le plan et des fissures hors plan est important comme le montre la figure A2\_80. Cet écart est atténué si l'on distingue les types de fissures (Figure A2\_81) : B pour bande, CV pour interaction d'ellipse au co-vertex, D pour disque et V pour interaction d'ellipse au vertex.



**Figure A2\_80 : écarts de coefficients d'équivalence enveloppe des fissures parallèles et des fissures coplanaires**

Les décalages pour les fissures bande sont notablement plus importants que ceux relatifs aux fissures elliptiques de grand axes alignés et de rapport d'aspect  $a/c = 3$ . Afin d'obtenir une formulation plus simple et générale mais pénalisante, une interpolation linéaire par morceaux est décrite à la figure A2\_81 et au Tableau A2\_9.



**Figure A2\_81 : lissage des écarts de coefficients d'équivalence enveloppe des fissures parallèles et des fissures coplanaires**

$\hat{S}_{x \text{ ou } y}$	$\Delta\alpha_{ep}$
$0 \leq \hat{S}_{x \text{ ou } y} \leq \hat{S}_1 = 0.125 \cdot (1 - 1/3)$	0.1
$\hat{S}_1 \leq \hat{S}_{x \text{ ou } y} \leq \hat{S}_2 = 0.5 - a/c * 0.25/3$	$0.1 + (\hat{S}_{x \text{ ou } y} - \hat{S}_1) \cdot (0.1 - 0.02) / (\hat{S}_1 - \hat{S}_2)$
$\hat{S}_2 \leq \hat{S}_{x \text{ ou } y} \leq 2.5$	$0.02 + (\hat{S}_{x \text{ ou } y} - \hat{S}_2) \cdot (\Delta\alpha_1 - 0.02) / (2.5 - \hat{S}_2)$
$\hat{S}_{x \text{ ou } y} \geq 2.5$	$\Delta\alpha_1 = 0.11 - a/c / 3 \cdot (0.11 - 0.02)$

**Tableau A2\_9 : formules A2.67 des lissages enveloppes des décalages des coefficients d'équivalence élastoplastiques pour des fissures parallèles**

L'estimation des coefficients d'équivalence élasto-plastiques enveloppe pour des fissures parallèles s'effectue suivant les étapes suivantes :

1. Calcul du décalage  $\Delta\alpha_{ep}$  pour le rapport d'aspect  $c/a$  et du décalage  $\hat{S}_{x \text{ ou } y}$  ;
2. Pour ces mêmes données d'entrée, calcul des coefficients d'équivalence élastoplastiques  $\alpha_{ep\_Id}$  avec la formule relative aux fissures coplanaires égales ;
3. Somme  $\alpha_{ep\_Id} + \Delta\alpha_{ep}$  au-delà de  $\hat{S}_z = 0.5$ , la somme est bornée à 1 ;
4. Calculer  $\alpha_{e\_Id}$  ;
5. Obtenir coefficient d'équivalence élasto-plastique en divisant  $\alpha_{p\_Id} = \alpha_{ep\_Id} + \Delta\alpha_{ep}$  par  $\alpha_{e\_Id}$  ;

#### Exemple

Soient deux fissures elliptiques de rapport d'aspect  $a/c = 3$

$\hat{S}_x$	$\lambda_x$	$\alpha_{ep\_Id}$				
		0	0,025	0,0375	0,05	0,1
0,025	0,976	1,345	1,367	1,277	1,144	1,004
0,0375	0,964	1,275	1,297	1,294	1,244	1,0153
0,05	0,952	1,280	1,257	1,256	1,251	1,027

**Tableau A2\_10 : valeurs  $\alpha_{ep\_Id}$  calculées par éléments finis**

$\hat{S}_x$	$\lambda_x$	Ecart relatifs en fonction des $\alpha_{ep\_Id}$				
		0	0,025	0,0375	0,05	0,1
0,025	0,976	-3,87%	5,02%	12,38%	25,45%	42,91%
0,0375	0,964	-0,91%	9,49%	9,76%	14,17%	39,91%
0,05	0,952	-3,03%	11,93%	11,98%	12,43%	36,93%

**Tableau A2-11 : écarts relatifs avec les valeurs prédites**

Les A2\_10 et A2\_11 fournissent les résultats calculés pour le cas présenté. Les écarts relatifs sont plus importants pour des fissures éloignées verticalement mais les valeurs sont alors plus faibles.

## A2.4. Charges de référence pour deux fissures elliptiques

La détermination des charges de référence pour des fissures elliptiques se fonde sur des calculs effectués par EDF (DEE, 2018) et ESI (SYSTUS, 2022). Deux difficultés rendent cette détermination plus complexe :

- L'existence d'une charge de référence pour des configurations tridimensionnelles n'est pas garantie. Ceci sera illustré au paragraphe suivant.
- Les calculs sont effectués pour une loi de comportement en plasticité qui n'est pas une loi puissance ce qui enfreint les hypothèses relatives à la validité de l'approche et complique la détermination des charges de référence.

Ce paragraphe est limité au cas de fissures coplanaires.

### A2.4.1. Détermination des charges de référence

La loi de comportement (contrainte Sigma- déformation totale Eps\_t est décrite aux tableaux suivants.

Sigma (MPa)	0	39,876	42,475	58,021	69,206	78,418	86,515	93,919	100,876
Eps_t	0	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0005	0,0006	0,0006

Sigma (MPa)	107,548	114,046	120,454	126,836	133,242	139,716	146,293	153,003	159,874
Eps_t	0,0007	0,0008	0,0008	0,0009	0,001	0,0012	0,0013	0,0015	0,0017

Sigma (MPa)	166,931	174,197	181,691	189,434	197,445	205,742	214,343	223,266	232,528
Eps_t	0,002	0,0024	0,0028	0,0034	0,0041	0,005	0,0061	0,0074	0,0092

Sigma (MPa)	242,146	252,139	262,525	273,322	284,548	296,223	308,367	320,999	334,142
Eps_t	0,0114	0,0142	0,0178	0,0223	0,028	0,0353	0,0445	0,0563	0,0712

Sigma (MPa)	347,81 6	362,04 5	376,85 2	392,25 9	408,29 4	424,98 1	442,34 8	460,42 2	479,23 2
Eps_t	0,0901	0,1141	0,1446	0,1835	0,2328	0,2955	0,3752	0,4766	0,6054

Sigma (MPa)	498,8 1	519,18 7	540,39 4	562,46 7	585,4 4	609,35 1	634,23 8	660,14 1	687,10 2
Eps_t	0,769 1	0,9773	1,242	1,5785	2,006 3	2,5502	3,2417	4,1208	5,2387

Sigma (MPa)	715,16 4	744,3 7	774,77 1	806,41 1	839,34 4	873,62 2	909,29 9	946,43 2	985,08 3
Eps_t	6,6599	8,466 9	10,764 4	13,685 4	17,399 2	22,121 2	28,124 8	35,757 8	45,463 1

**Tableaux A2\_12 : loi de comportement de l'acier austéno-ferritique**

Le module d'Young E vaut 197000 MPa, le coefficient de Poisson 0,3 et la limite d'élasticité  $\sigma_y = 316,4$  MPa.

La méthode de calcul diffère de celle utilisée pour la loi de Ramberg-Osgood. Afin de résoudre le problème pour une loi quelconque, il faut suivre la démarche d'Ainsworth (AIN, 1984).

L'expression A2\_31 tirée de la méthode GE-EPRI est transformée de la façon suivante

$$J_p = \alpha \cdot h_{nu} \cdot J_e \cdot \left( \frac{Q}{Q_{R0}} \right)^{n-1} \quad \text{avec } Q_{R0} = Q_0 \cdot \left[ \frac{h_1(a/W, 1)}{h_1(a/W, n)} \right]^{\frac{1}{n-1}} \quad (A2.68)$$

$h_{nu} = \frac{0.75}{1-\nu^2}$  en déformations planes et 1 en contraintes planes (cf. A2.34).

En prenant comme référence la limite d'élasticité, on peut écrire  $\sigma_{ref} = \sigma_y \cdot \frac{Q}{Q_{Ry}}$

$$\text{Il vient } \alpha \cdot \left( \frac{Q}{Q_{Ry}} \right)^{n-1} = \alpha \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_{ref}} \cdot \left( \frac{\sigma_{ref}}{Q_{Ry}} \right)^n = \frac{E \cdot \varepsilon_{p,ref}}{\sigma_{ref}}$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{h_{nu}} \cdot \frac{J_p}{J_e} = \frac{E \cdot \varepsilon_{p,ref}}{\sigma_{ref}}$$

$$\frac{1}{h_{nu}} \cdot \frac{J_p}{J_e} = \frac{\varepsilon_{ref}}{\varepsilon_{e,ref}} = \mathfrak{F} \left( \frac{\sigma_{ref}}{\sigma_y} \right) \quad (A2.69)$$

Le second terme  $\mathfrak{F}(\sigma_{ref})$  est donné par la loi de comportement plastique.

Donc la charge de référence est obtenue par inversion de la loi de comportement, ce qui complique sa détermination pour une loi connue point par point.

$$Q_{Ry} = \lim_{Q \gg Q_{L0,c}} \frac{Q}{\mathfrak{F}^{-1} \left[ \frac{1}{h_{nu}} \cdot \frac{J - J_e}{J_e} \right]} \quad (A2.70)$$

En pratique on résout l'équation suivante :

$$\frac{J_p}{J_e} - h_{nu} \cdot \mathfrak{F} \left( \frac{\sigma_{ref}}{\sigma_y} \right) = 0 \quad (A2.71)$$

En tridimensionnel, la charge limite sans fissure a pour expression :

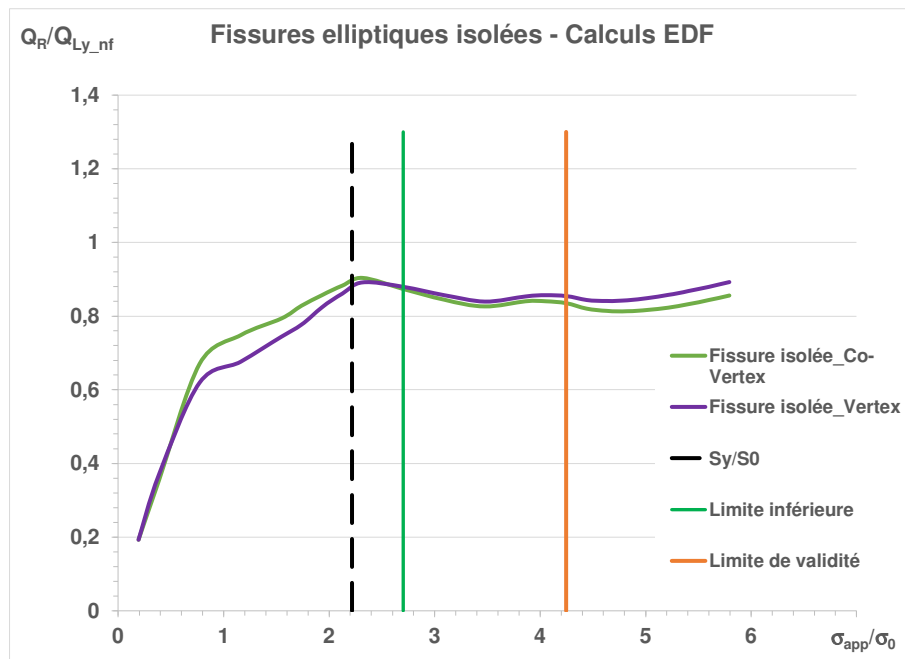
$$Q_{Ly_{nc}} = \sigma_y \cdot Z_{p_{nc}} \quad Z_{p_{nc}} = 2B \cdot W$$

B est l'épaisseur du massif et W la demi-largeur.

La charge de référence instantanée varie avec le chargement, nous appelons charge de référence la valeur limite stabilisée. L'expression évolution de la charge de référence se réfère à la charge de référence instantanée.

#### A2.4.2. Charges de référence pour une fissure elliptique enfouie

La figure A2\_82 compare les évolutions de la charge de référence instantanée calculées pas à pas au vertex et au co-vertex par EDF pour une fissure elliptique isolée de rapport d'aspect  $a/c = 3$ .



**Figure A2\_82 : évolution de la charge de référence pour une fissure elliptique isolée**

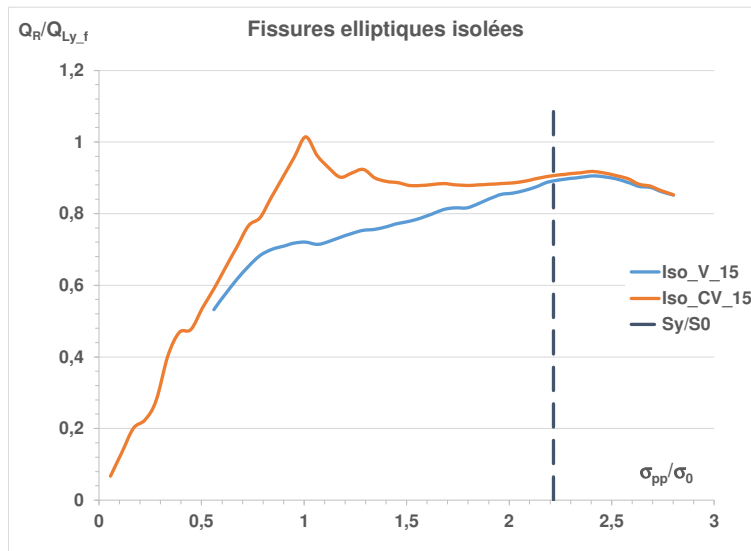
L'évolution de la charge de référence avec le niveau de chargement comporte trois domaines :

1. Une phase de croissance dans le domaine élastique qui se termine par un pic situé à  $\sigma/\sigma_y \cong 1$ .
2. Un plateau compris entre  $1,5 \leq \sigma/\sigma_y \leq 2,37$ .

3. Une phase de plasticité très étendue où les calculs de J perdent leur validité.

L'existence d'un plateau prouve celle de la charge de référence. Il faut noter que les charges de référence au vertex et au co-vertex sont pratiquement les mêmes, ce qui laisse supposer que bien que, pour un niveau de charge donné, les valeurs de  $J_e$  le long du front augmentent en passant du vertex au covertex, l'amplification plastique  $J/J_e$  est constante le long du front.

La figure A2\_83 compare les évolutions de la charge de référence calculées pas à pas au vertex et au co-vertex par ESI pour une fissure elliptique isolée de rapport d'aspect  $a/c = 3$ .



**Figure A2\_83 : évolution de la charge de référence pour une fissure elliptique isolée (configuration traitée par ESI)**

L'évolution de la charge de référence avec le niveau de chargement calculée par ESI-France comporte aussi les trois domaines cités plus haut, mais seule l'amorce du plateau apparaît. Les calculs effectués par ESI n'ont pas été poussés assez loin. La charge de référence est estimée en retenant la valeur extrême. Ce choix est validé par comparaison des évolutions de la charge de référence illustrée à la figure A2\_84 et la proximité des valeurs du tableau A2\_13.

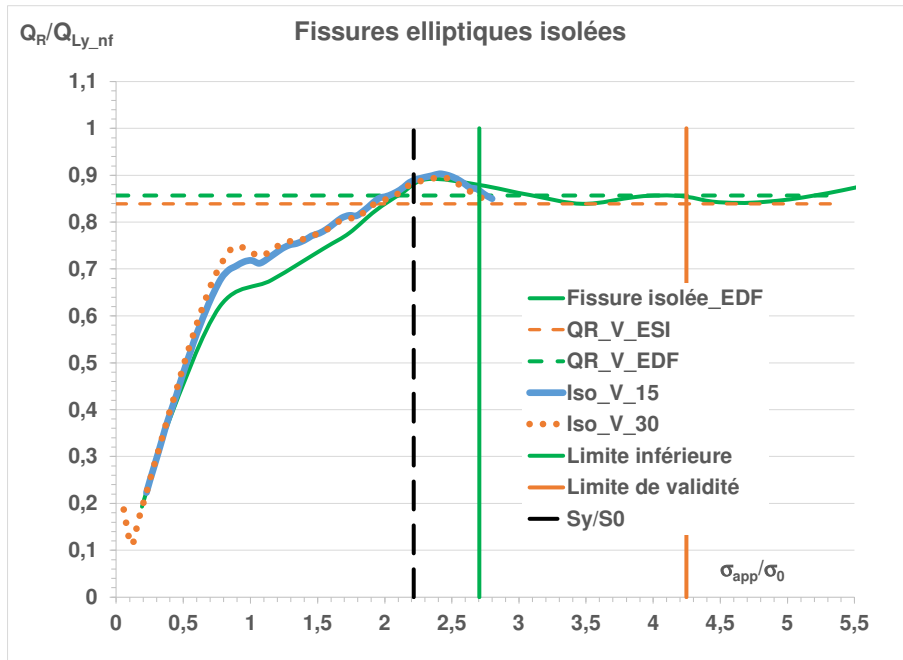
$$Q_{Ly\_nf} = \sigma_y \cdot Z_{p\_nf} \quad Z_{p\_nf} = 4W \cdot t$$

Où  $W$  est la demi largeur du bloc et  $t$  la demi-épaisseur.

	Calculs EDF	Calculs ESI
$Q_{Ly\_nf}$ (kN)	284,76	7119
$Q_{Ry}/Q_{Ly\_nf}$	0,8567	0,8499 – fissure $a = 15$ 0,8392 – fissure $a = 30$

**Tableau A2.13 : charges de référence au vertex adimensionnées pour une fissure elliptique isolée**





**Figure A2\_84 : évolution de la charge de référence pour les fissures elliptiques isolées**

Afin de mesurer l'éventuelle influence de la taille finie des massifs, le tableau A2\_14 compare les charges limites des massifs fissurés en utilisant une charge limite fondée sur l'effet de réduction de section.

$$Q_{Ly_f} = Q_{Ly_{nf}} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{a}{W} \cdot \frac{c}{t}\right) \quad (A2.72)$$

	Calculs EDF	Calculs ESI	Calculs ESI
Bloc	4*30x30 mm	4*150x150 mm	4*150x150 mm
Fissure	a= 3 mm, c=1 mm	a=15 mm, c= 5 mm	a=30 mm, c= 10mm
$Q_{Ly_f}/Q_{Ly_{nf}}$	0,997	0,997	0,989

**Tableau A2\_14 : charges limites pour une fissure elliptique isolée**

Les charges limites sont voisines de celle du massif non fissuré, ce qui montre que les effets de bord sont négligeables. Pour la grande fissure traitée par ESI, a valeur est légèrement plus faible comme attendu.

#### A2.4.3. Charges de référence pour deux fissures elliptiques coplanaires égales

La figure A2\_85 montre les évolutions de la charge de référence calculées pas à pas au vertex par EDF pour deux fissures elliptiques égales de rapport d'aspect  $a/c = 3$ .

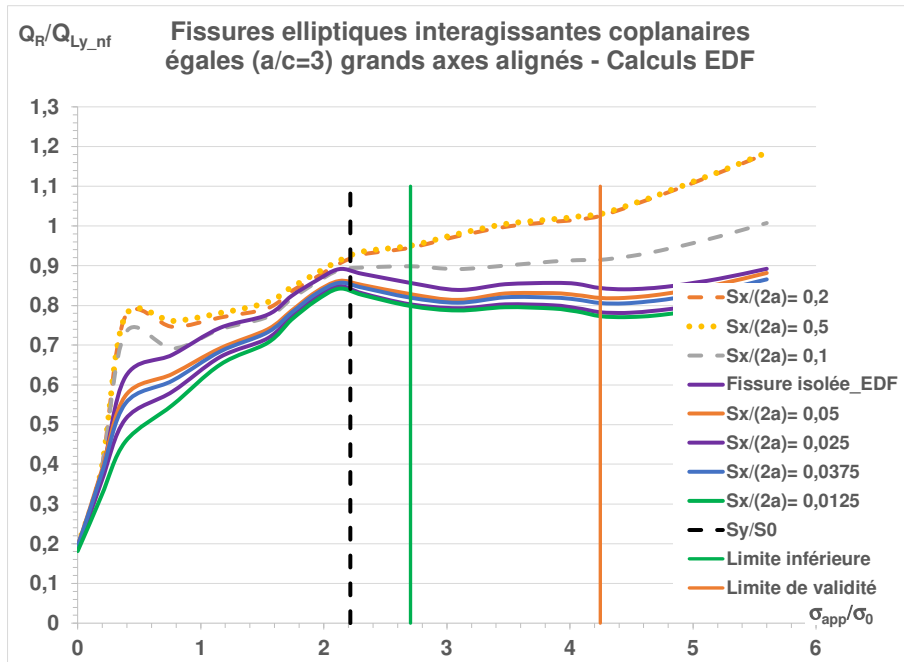


Figure A2\_85 : évolution de la charge de référence pour deux fissures elliptiques interagissantes

Les évolutions relatives aux écartements relatifs  $S_x/(2a) > 0,05$  sont supérieures à celles relative aux fissures isolées et ne présentent pas de plateau. Ces calculs ne permettent pas d'obtenir la valeur de la charge de référence.

Les résultats des calculs ESI-France sont reproduits à la figure A2\_86.

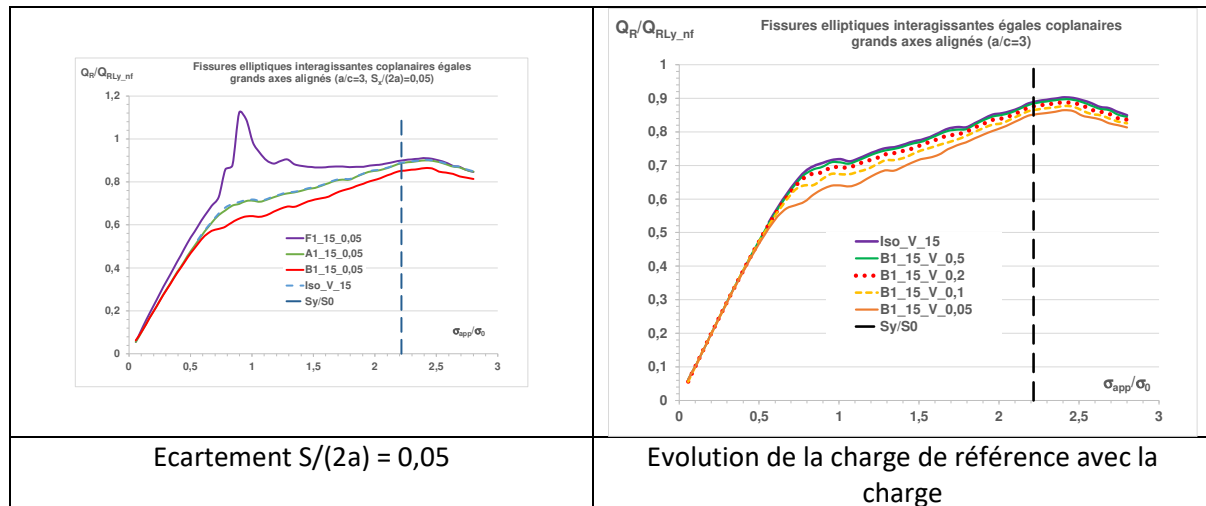
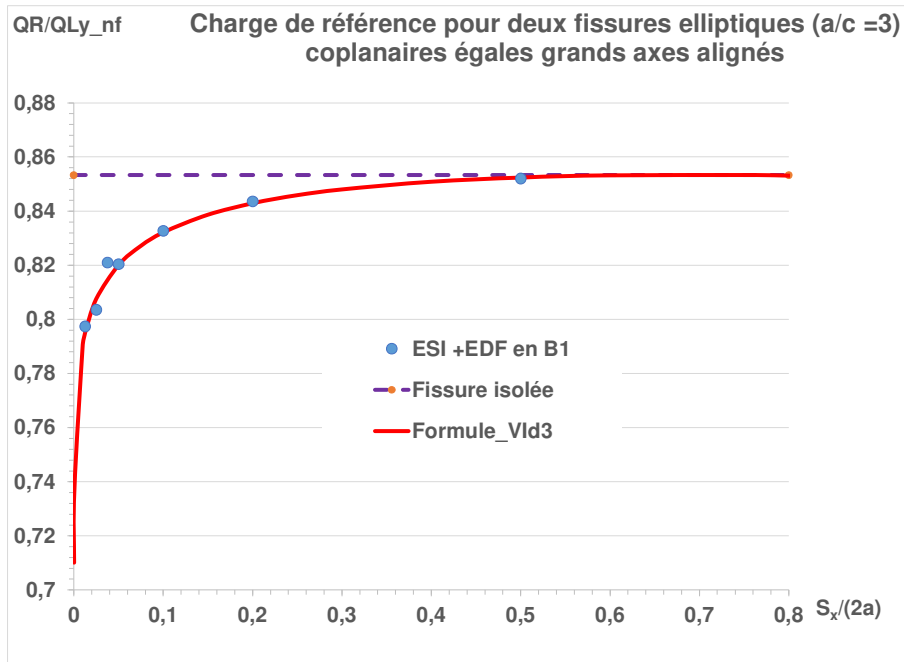


Figure A2\_86 : évolution de la charge de référence pour deux fissures elliptiques interagissantes

Les résultats d'ESI-France complètent ceux d'EDF. Pour chaque écartement les charges de référence au fond et au vertex opposé (point A1) sont confondues. Le point de plus forte plastification sont les points les plus proches (B1 et A2). Les résultats regroupés sont lissés par la formule suivante :

$$Q_{Ry} = p \cdot \hat{S}_x^q \cdot \exp(r \cdot \hat{S}_x^q) \quad (A2.73)$$

Avec  $p=0,8812$ ,  $q=0,0234$ ,  $r=-0,034$



**Figure A2\_87 : évolution de la charge de référence pour deux fissures elliptiques interagissantes**

Les variations des charges de référence présentent toutes une allure en V : rapidement décroissantes pour les écartements très faibles et lentement croissante ensuite pour se rapprocher de l'asymptote relative à la fissure isolée (Figure A2\_88). Ceci s'explique par le fait que la charge de référence doit tendre vers la valeur correspondant à une fissure unique lorsque l'écartement relatif tend vers 0. La valeur de  $S_x/(2a)$  qui sépare ces deux comportements est d'autant plus faible que la courbure de la fissure au point d'interaction est forte, depuis le cas des ellipses de grand axes alignés au cas de la fissure bande.

Des lissages ont été établis pour la partie croissante, les formules sont regroupées dans le tableau A2\_15 ci-après.

Fissure	Point bas	Formule
Bande	$S_x/(2a) > 0,1$	$0,7586 - 0,0718 \cdot \exp(-1,6936 \cdot \hat{S}_x^{1,733})$
Disque	$S_x/(2a) > 0,05$	$0,8412 \cdot \hat{S}_x^{0,0266}$
Ellipses V	$S_x/(2a) > 0,025$	$0,881 \cdot \hat{S}_x^{0,0234} \cdot \exp(r \cdot \hat{S}_x^{-0,034})$

**Tableau A2\_15 : équation des charges de référence en pointe interne pour des fissures égales coplanaires**

La figure A2\_88 compare les points de calcul et les lissages de charges de référence pour des fissures coplanaires égales de différentes formes en fonction de leur écartement relatif.

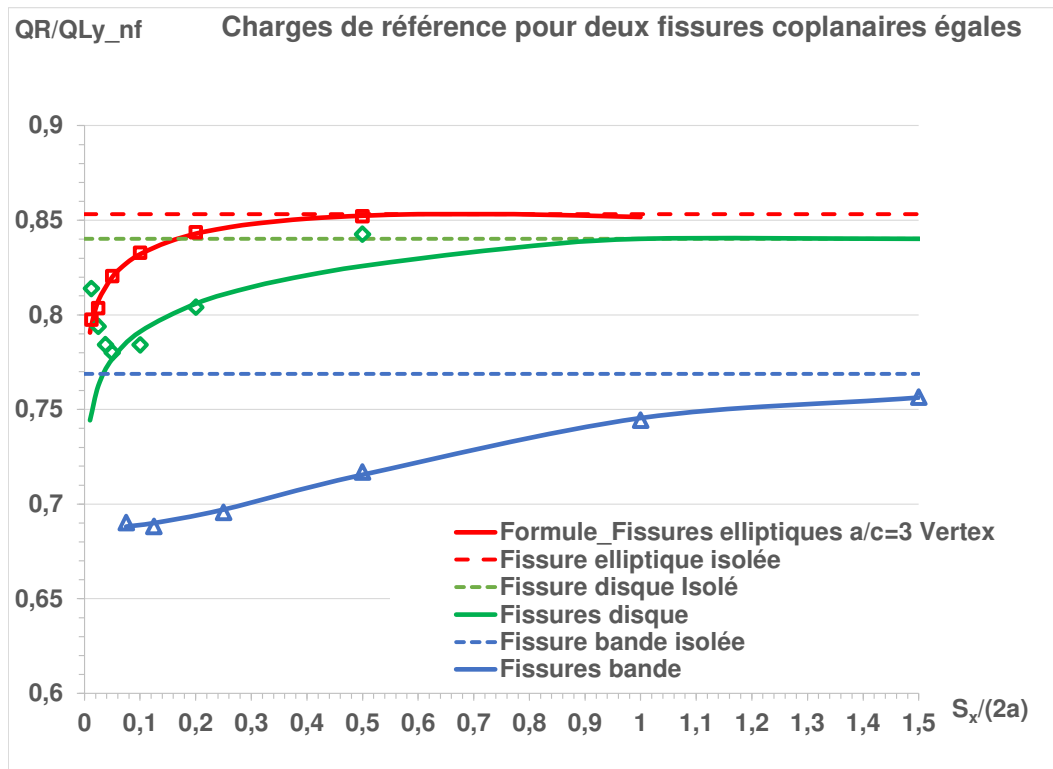


Figure A2\_88 : charges de référence pour deux fissures coplanaires

Nous ne disposons pas de calculs élastoplastiques pour des fissures interagissantes au co-vertex. Le courbe devrait se situer entre celle relative aux fissures disque et celle relative aux fissures bande.

#### A2.4.4. Charges de référence pour deux fissures elliptiques coplanaires inégales

##### Interaction au vertex

La figure A2\_89 compare les évolutions de la charge de référence calculées pas à pas au vertex par ESI-France pour deux fissures elliptiques de rapport d'aspect  $a/c = 3$  et de taille en rapport 2.

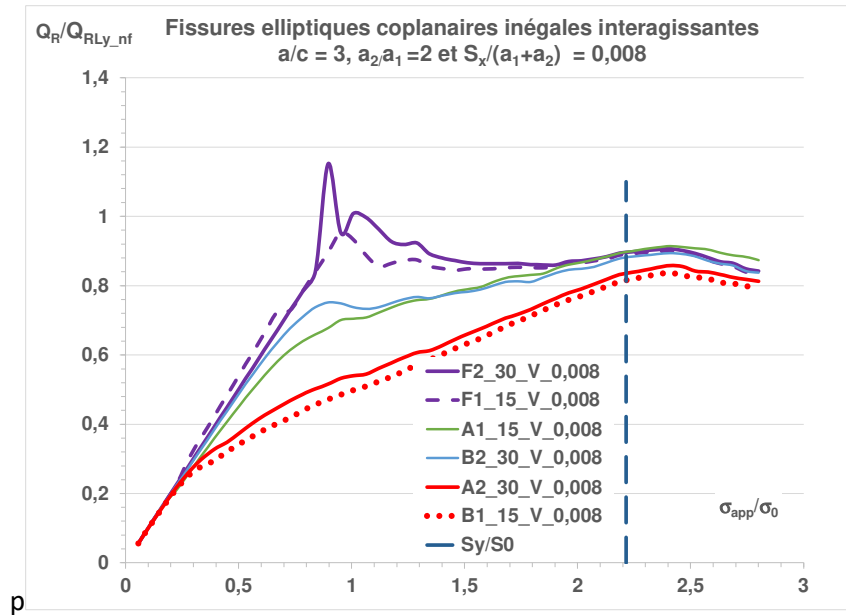


Figure A2\_89 : évolution des charges de référence pour deux fissures coplanaires inégales

Les charges de référence en fond de fissure et au vertex opposé à celui du ligament entre fissures (points A1 et B2) sont identiques et égales à celles de la fissure isolée. Aux points les plus proches les charges de référence sont voisines, celle de la petite fissure étant légèrement inférieure. Ceci signifie que l'amplification plastique est plus forte sur la petite fissure, néanmoins la force fissurante  $J$  est plus élevée pour la grande fissure (Figure A2\_90).

La figure A2\_91 présente les variations de charge de référence avec l'écartement relatif horizontal. Pour les points extrêmes A1 et B2 et les points du co-vertex (F1 et F2) les charges de référence sont constantes et voisines à l'exception du cas de la petite fissure associée au plus fort écartement. La charge de référence de la grande fissure et celle de la petite fissure ont des évolutions similaires. La charge de référence de la grande fissure est toujours supérieure à celle de la petite fissure. Ces résultats sont lissés par deux fonctions dont les variations sont présentées à la figure A2\_91.

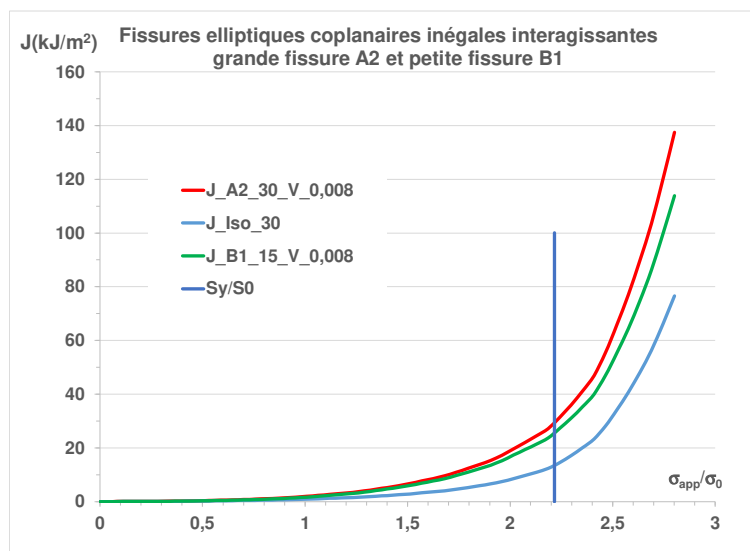


Figure A2\_90 : variations des force fissurantes pour la grande et la petite fissure ( $a_2/a_1=2$ )

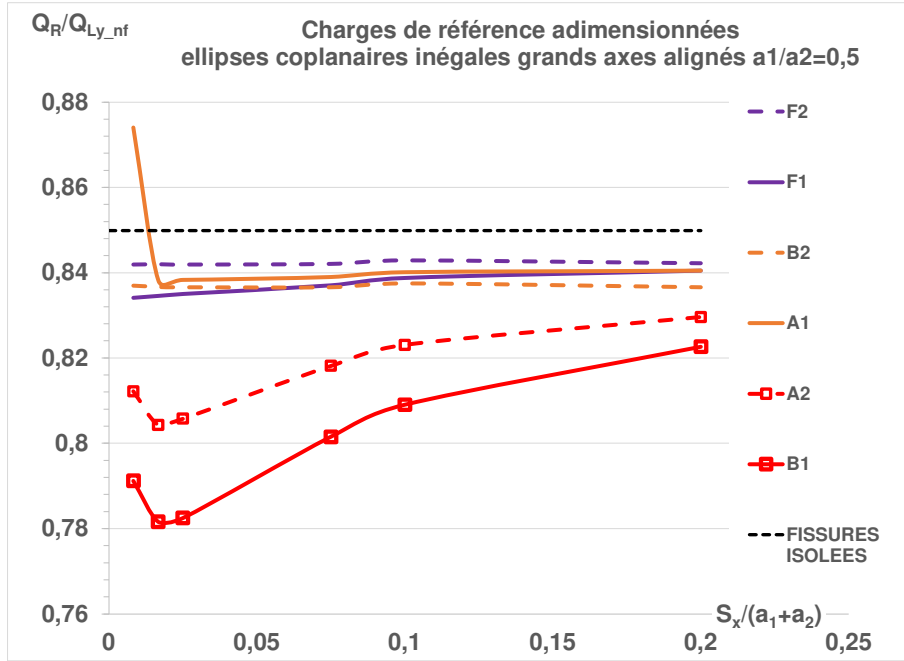


Figure A2\_91 : charges de référence pour la grande et la petite fissure ( $a_2/a_1=2$ )

Les équations des lissages sont les suivantes :

$$Q_{Ry} = p \cdot SR_x^q \cdot \exp(r \cdot SR_x) \quad (A2.74)$$

Avec, pour la grande fissure  $p=0,848$ ,  $q=0,0117$ ,  $r=-0,00292$

Avec, pour la petite fissure  $p=0,8473$ ,  $q=0,0182$ ,  $r=-0,00479$

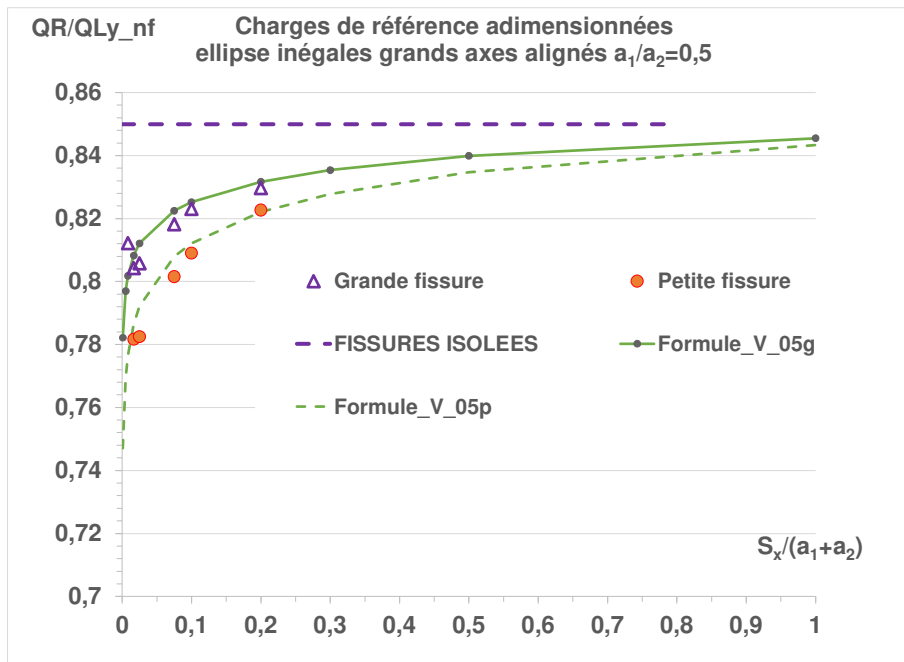


Figure A2\_92 : lissages des charges de référence pour la grande et la petite fissure ( $a_2/a_1=2$ )

### Interaction au co-vertex

Les quelques résultats obtenus par ESI-France ne permettent pas de déterminer directement les charges de référence car les calculs n'ont pas été effectués pour des charges suffisamment élevées (Figure A2\_93).

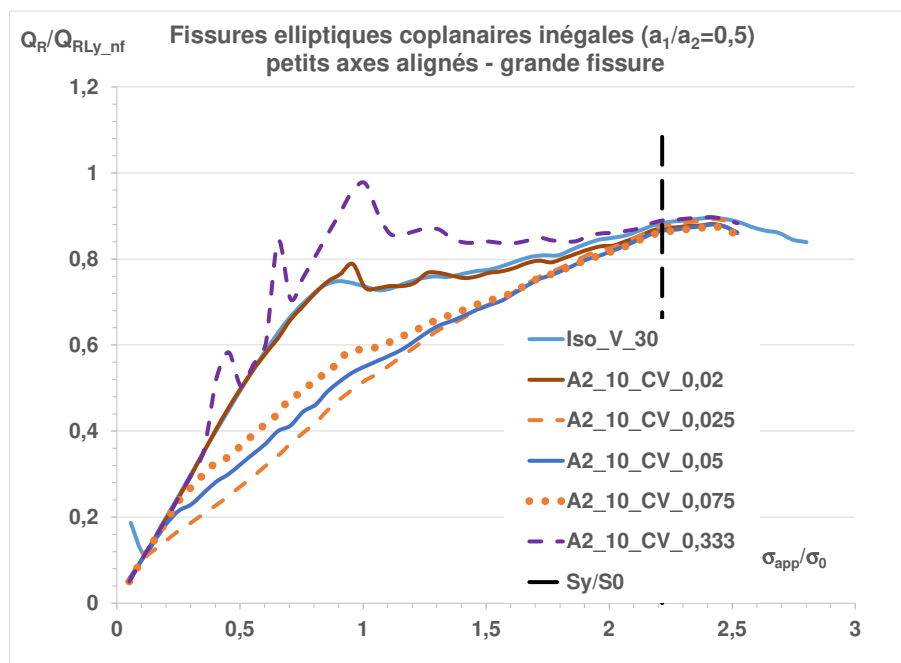
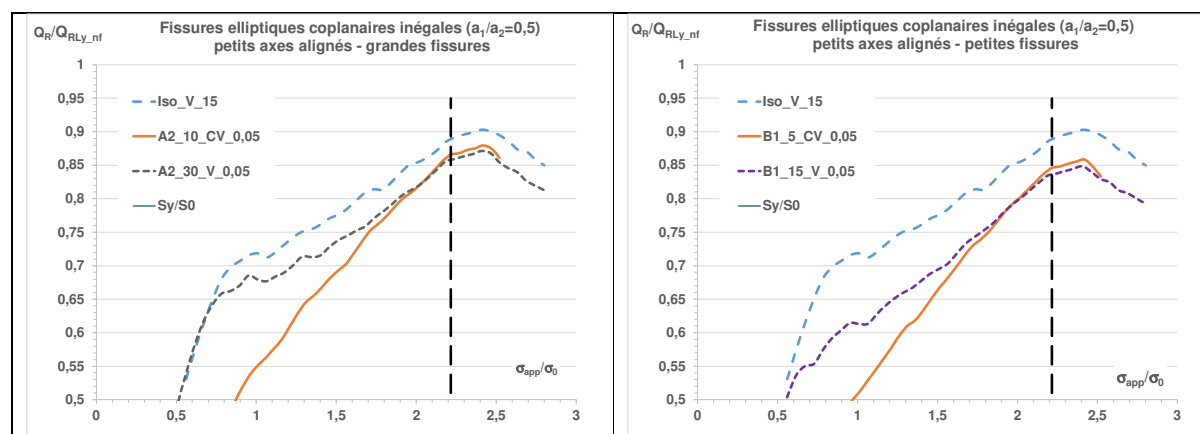


Figure A2\_93 : charges de référence au co-vertex pour la grande fissure ( $a_2/a_1=2$ )

Les évolutions des charges de référence pour des fissures interagissant au vertex et au co-vertex sont similaires (Figure A2\_93) et un facteur correctif pourrait être établi à partir des rapports des maxima si l'on disposait de plus de configurations comparables. Les calculs relatifs aux fissures inégales interagissant au co-vertex sont sujets à caution. La tendance observée sur la figure A2\_94 est que les charges de référence au co-vertex sont légèrement inférieures à celles relatives à une interaction au vertex. Il faudrait reprendre ces calculs pour confirmer ce point.



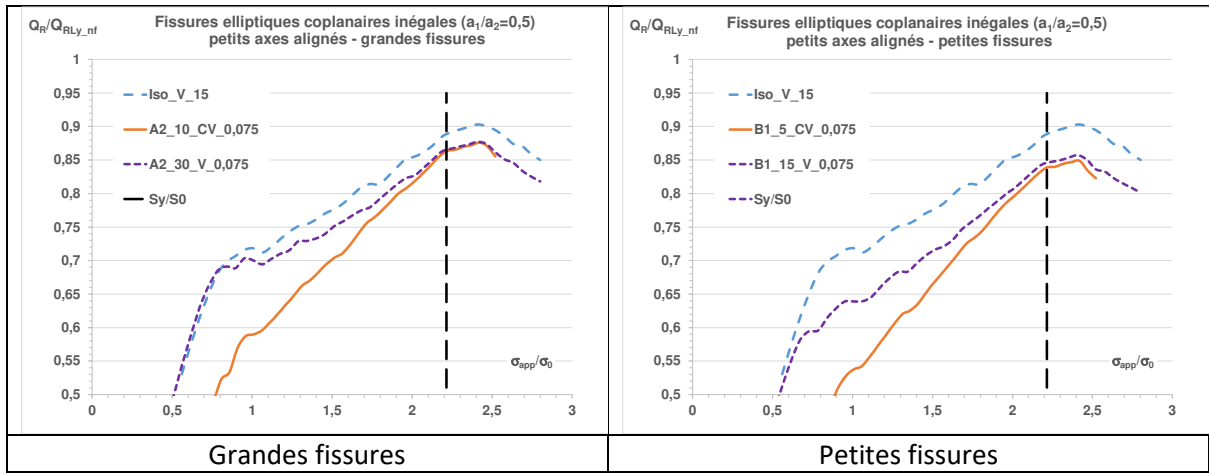


Figure A2\_94 : comparaison des évolutions des charges de référence au vertex et co-vertex et pour la grande et la petite fissure ( $a_2/a_1=2$ )



### **ANNEXE 3. PRECISION DES CALCULS AUX ELEMENTS FINIS - L'EXPERIENCE DE FRAMATOME**



## A3.1. Précision des calculs aux éléments finis

Il s'agit de quantifier l'interaction de deux fissures planes situées dans un massif infini sollicité en traction pure.

### A3.1.1. Evaluation de l'interaction

Le Facteur d'Interaction de fissure est en élasticité le rapport entre d'une part, le facteur d'intensité des contraintes en un point P du front de fissure en présence d'une ou plusieurs fissures et d'autre part, le facteur d'intensité des contraintes au même point P de la même fissure isolée cette fois-ci, obtenus sous chargement identique. En élasto-plasticité, le FIC est remplacé par la force fissurante J.

Dans les deux il est important que ces quantités soient évalués avec des précisions comparables.

La précision de l'évaluation du coefficient d'équivalence est la même que celle du rapport des J.

### A3.1.2. Les effets de la discrétisation

La présente étude se limite au cas des fissures de forme elliptique (et ses cas limites fissure bande et fissure disque) situées dans un massif infini sollicité à l'infini en traction pure. Le calcul numérique par discrétisation (éléments finis ou éléments de frontière) ne respecte pas ces conditions de façon parfaite.

La discrétisation a plusieurs effets sur la qualité des évaluations des facteurs d'interaction :

- Effet des dimensions finies du massif discrétisé.
- Effet de la qualité de la modélisation de la fissure, notamment de la courbure du front de fissure.
- Effet de la qualité du raffinement de la discrétisation autour du front afin de bien reproduire le champ singulier au voisinage de la fissure.
- Précision des méthodes et techniques de calcul des coefficients K ou J du champ singulier.
- Différence des formes et des discrétisations de la fissure en interaction et de la fissure isolée.

Ces effets peuvent être évalués par comparaison à des solutions analytiques, ou par comparaison de calculs effectués sur des maillages de raffinement croissant, mais aussi par analyse de la cohérence des résultats. Quelques exemples sont donnés ci-après.

Les calculs aux éléments finis illustrés dans ce document sont effectués avec les logiciels SYSTUS® et ASTER® (AST, 2017).

#### A3.1.2.1. Les effets des dimensions finies du massif discrétisé

Le cas le plus simple est celui des fissures bande mieux documenté.

### A3.1.2.1.1. Fissures bande

Framatome a réalisé (FRA, 1999) des calculs de facteurs d'interaction en élasto-plasticité. Plusieurs comparaisons permettent d'en estimer l'influence des dimensions finies sur les valeurs du FIC K et de la force fissurante J.

#### Fissure centrale en élasticité dans une plaque en traction

La largeur de plaque 2W vaut 50 mm, la hauteur 2L 200 mm, et la fissure a une longueur 2a de 2mm.

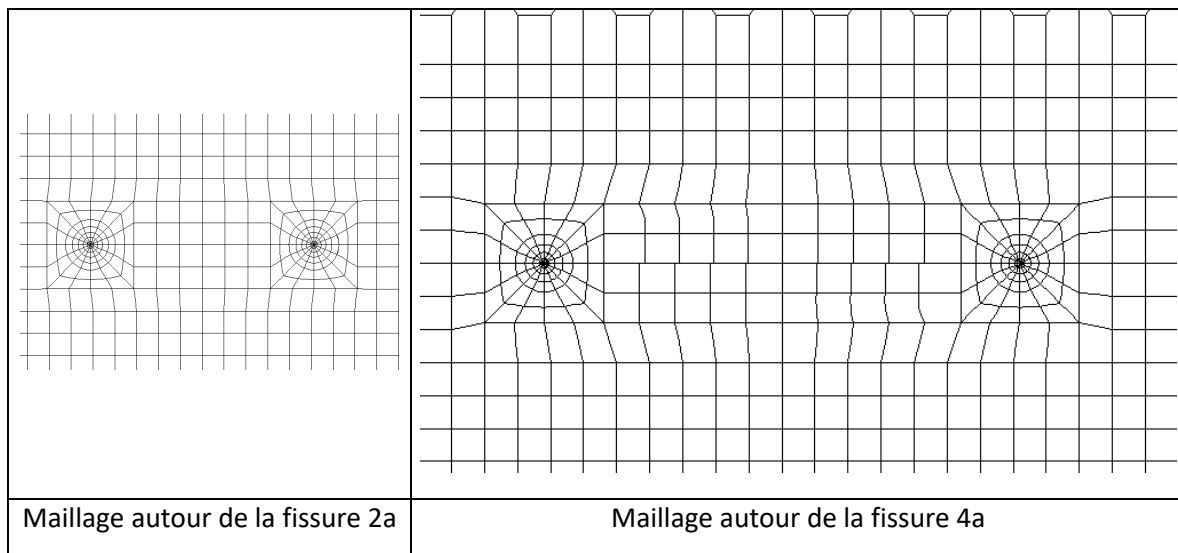
Le facteur de forme est défini par :  $F = \frac{K}{\sigma_{app} \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}$ .

Le tableau A3\_1 montre que l'effet de bord est très faible, de l'ordre de grandeur de la précision (0,1%) de la formule de Feddersen-Tada (TPI, 1973). Il est donc négligeable.

	X=demi-longueur de fissure/W	F(X) (Tada, 1973)	F_EF	F_EF/F_Tada-1 (%)
Fissure 2a	0,04	1,00095	0,99312	-0,78
Fissure 4a	0,08	1,00381	1,00398	0,018

**Tableau A3\_1 : comparaison des facteurs de forme calculés au facteur de forme théorique**

De plus le rapport du facteur de forme calculé par élément fini au facteur de forme théorique n'est pas le même pour la fissure 2a et la fissure 4a. Les raffinements de maillage sont similaires comme le montre la comparaison de la figure A3\_1. Cette différence n'est pas significative : la précision de ces calculs aux éléments finis en élasticité est sans doute de l'ordre de 0,5 à 1% (Figure A3\_2).



**Figure A3\_1 : comparaison des maillages FRA pour les fissures isolées**

#### Deux fissures bande coplanaires en élasticité dans une plaque en traction

La hauteur de la plaque  $2L$  et la largeur  $2W$  sont suffisamment grandes pour que les effets de hauteur ou de largeur relative soit négligeables comme le montre la figure ci-contre, tirée de (TER, 1974).

$$\varepsilon \equiv \frac{S_x + 2a}{L} = \frac{W}{L} \cdot \frac{2a}{W} \cdot \left(1 + \frac{S_x}{2a}\right)$$

ou 
$$\varepsilon \equiv \frac{S_x + 2a}{W} = \frac{2a}{W} \cdot \left(1 + \frac{S_x}{2a}\right)$$

Dans les études de Framatome,

$$\frac{W}{L} = 0,25 \quad \frac{2a}{W} = 0,08 \quad \frac{S_x}{2a} \leq 1$$

Donc

$$\varepsilon \leq 0,08 \cdot 2 = 0.16$$

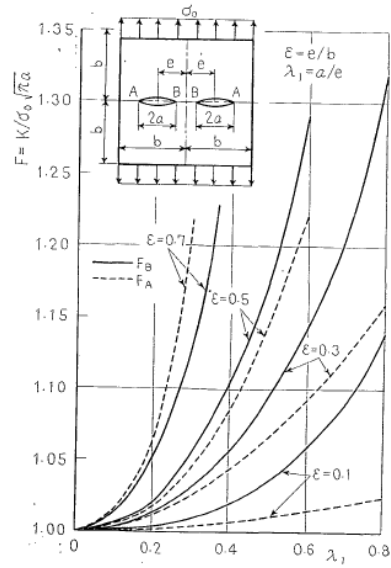


図 4 2個のき裂を持つ正方形板の一樣引張り

Effet de taille relative sur les FIC de deux fissures égales interagissantes

Figure A3\_2 : effet des dimensions finies d'une plaque sur le comportement de deux fissures bande égales centrées

En élasto-plasticité, deux calculs ont été effectués pour des fissures isolées de longueur  $2a$  et  $4a$ . L'effet de bord sur le rapport des  $J$  est de 2% en élasticité et monte à 10% pour un chargement voisin en termes de contrainte appliquée  $\sigma_{app}$  de  $2 \cdot \sigma_y$  (Figure A3\_3).

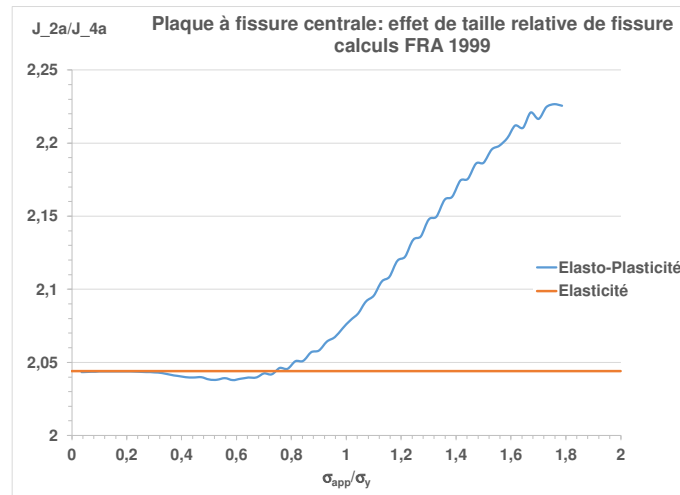
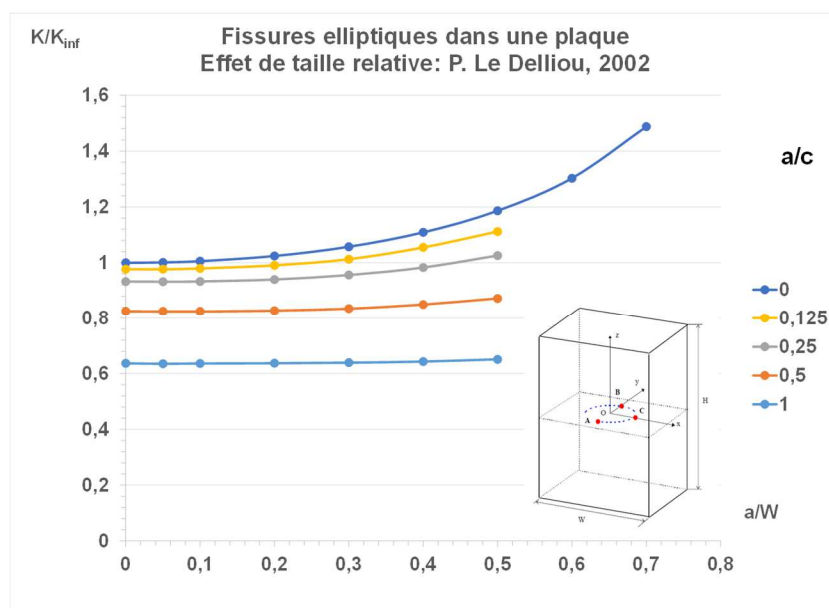


Figure A3\_3 : rapport des forces fissurantes  $J$  pour les deux fissures de tailles  $2a$  et  $4a$

L'effet de bord pour la fissure  $4a$  est représentatif de l'effet produit pour le cas des fissures jumelles. Il est légitime de penser que l'effet de largeur majeure l'interaction mesurée par le rapport de  $J$  pour une fissure interagissante au  $J$  de la fissure isolée.

### A3.1.2.1.2. Fissures elliptiques

En élasticité la plupart des études des effets de dimensions finies portent sur le cas des fissures dont le couvertex est proche d'une surface libre. La publication de P. Le Delliou (DEL, 2002) illustre l'effet de la courbure au couvertex sur l'effet de proximité d'une fissure elliptique enfouie centrée dans une plaque à la surface libre. La largeur de plaque, noté  $W$  dans l'article, et sa hauteur  $H$  sont suffisamment grandes par rapport aux dimensions de la fissure pour que leur effet soit négligeable. La figure A3\_4 présente les variations du rapport du FIC au point B à celui du FIC au même point de cette fissure située dans un massif infini en fonction du rapport noté ici  $a/W$  ( $2a$  est la longueur de l'ellipse et  $2W$  la dimension de la plaque suivant  $y$ ).



**Figure A3\_4 : effet de la taille relative de fissure au couvertex d'une fissure elliptique enfouie dans une plaque en traction**

La Figure A3\_4 montre que l'effet de la dimension du petit axe par rapport à taille de la plaque suivant la même direction diminue lorsque le rapport d'aspect  $a/c$  augmente depuis 0 pour la fissure bande à 1 pour le cercle. Les résultats de P. Le Delliou (DEL, 2002) sont en très bon accord avec ceux d'Isida et Noguchi (ISN, 1984).

Cette tendance se confirme pour les fissures prolates pour les quelles  $a/c$  est inférieur à 1. La Figure A3\_5 représente les résultats de Zhao et al. (ZHW, 1989) pour des calculs effectués sur des plaques avec un effet de taille relative dans les deux directions ( $c/b = 0,2$ ). Une correction a été apportée pour enlever l'effet de  $c/b$  mais cette correction est approximative et les calculs sont peut-être moins précis comme le montre la comparaison pour le disque.

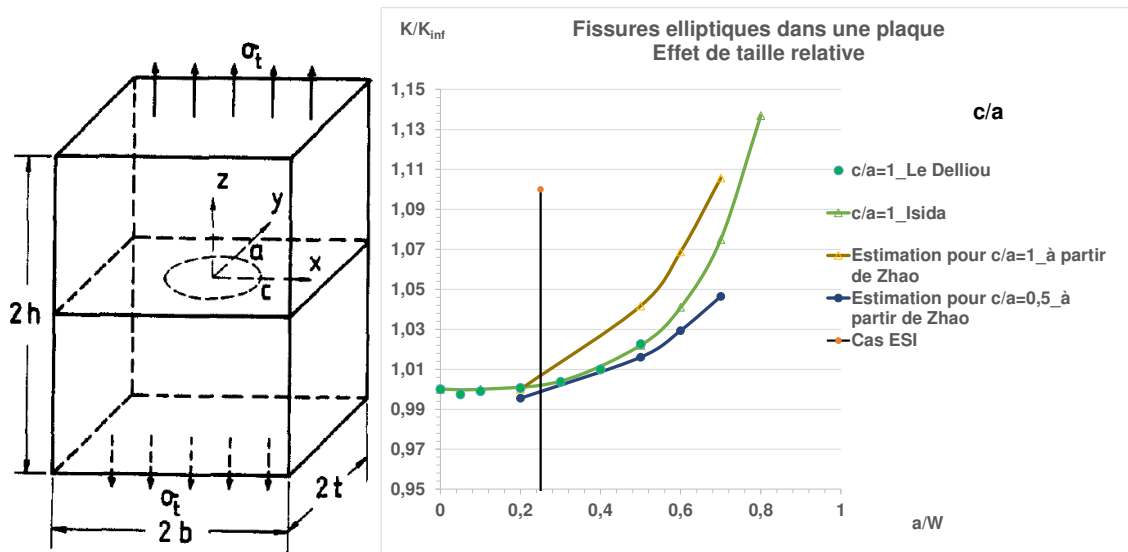


Figure A3\_5 : effet de la taille relative de fissure au vertex d'une fissure elliptique enfouie dans une plaque en traction

Sans faire aucune approximation la figure A3\_6 montre que la réduction de l'effet de taille relative est très nette pour une fissure elliptique allongée dans la direction de la largeur de plaque par rapport au cas du disque. Ceci est confirmé par l'étude de Nagai (NAG, 2015) pour des fissures de surface prolatées.

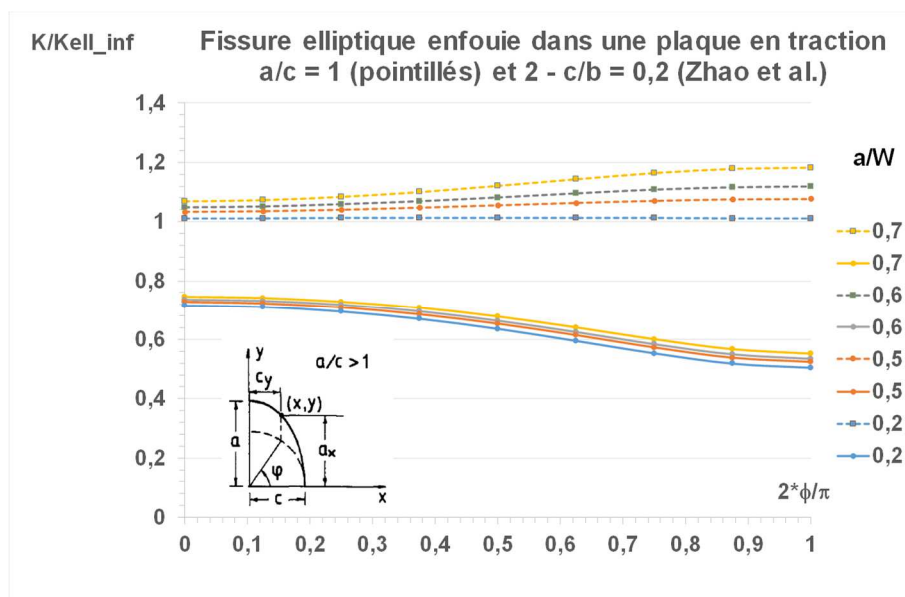


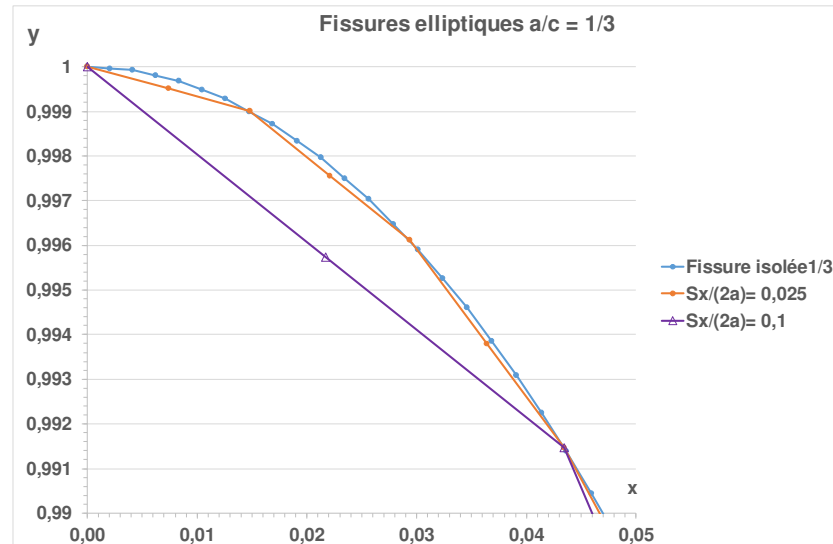
Figure A3\_6 : effet de la taille relative de fissure au vertex de fissures elliptiques enfouies dans une plaque en traction : disque et ellipse prolatae

### A3.1.2.2. Qualité de la modélisation de la fissure

Le problème ne se pose que pour le cas tridimensionnel.

Les éléments sont des hexaèdres à degré d'interpolation quadratique, excepté en point de fissure où le maillage est rayonnant avec des pentaèdres à degré d'interpolation quadratique.

Il faut souligner pour des fissures de même forme, le nombre de points sur le front de fissure doit être suffisamment élevé pour représenter correctement la courbure. Il est recommandé de raffiner la discrétisation au voisinage du vertex surtout pour des fissures dont l'interaction est la plus forte en ce point. La Figure A3\_7 compare trois maillages réalisés par EDF (DEE, 2018) : la fissure isolée est maillée finement, ce n'est pas le cas pour la configuration de fissures éloignées ( $S_x/2a \geq 0,1$ ).



**Figure A3\_7 : comparaison de différentes discrétisations du front de fissure elliptique au vertex de fissures elliptiques enfouies (DEE, 2018)**

On note que pour des éléments quadratiques, seuls les nœuds sommets sont positionnés sur l'ellipse. Par conséquent l'évaluation de  $J$  est moins précise aux nœuds milieux.

### A3.1.2.3. Qualité du raffinement de la discrétisation au voisinage du front de fissure

Les principales recommandations de bonne discrétisation autour du front d'une fissure sont les suivantes :

- Maillage rayonnant autour de chaque point du front dans un plan normal au front
- Maillage fin le long du front, plus fin dans la zone de forte courbure
- Décroissance progressive du raffinement à mesure que l'on s'éloigne du front
- Raffinement important dans la zone susceptible de plastifier
- Pour les fissures interagissantes le raffinement doit être fort y compris pour les cas de fissures éloignées et les fissures écrantées car les valeurs de  $J$  pour la fissure interagissante peuvent être proches de celui de la fissure isolée ce qui demande un raffinement comparable du maillage de ces deux fissures.

Ces conditions sont réunies pour les calculs effectués par ESI France (SYSTUS, 2020) comme l'attestent la figure A3\_8.



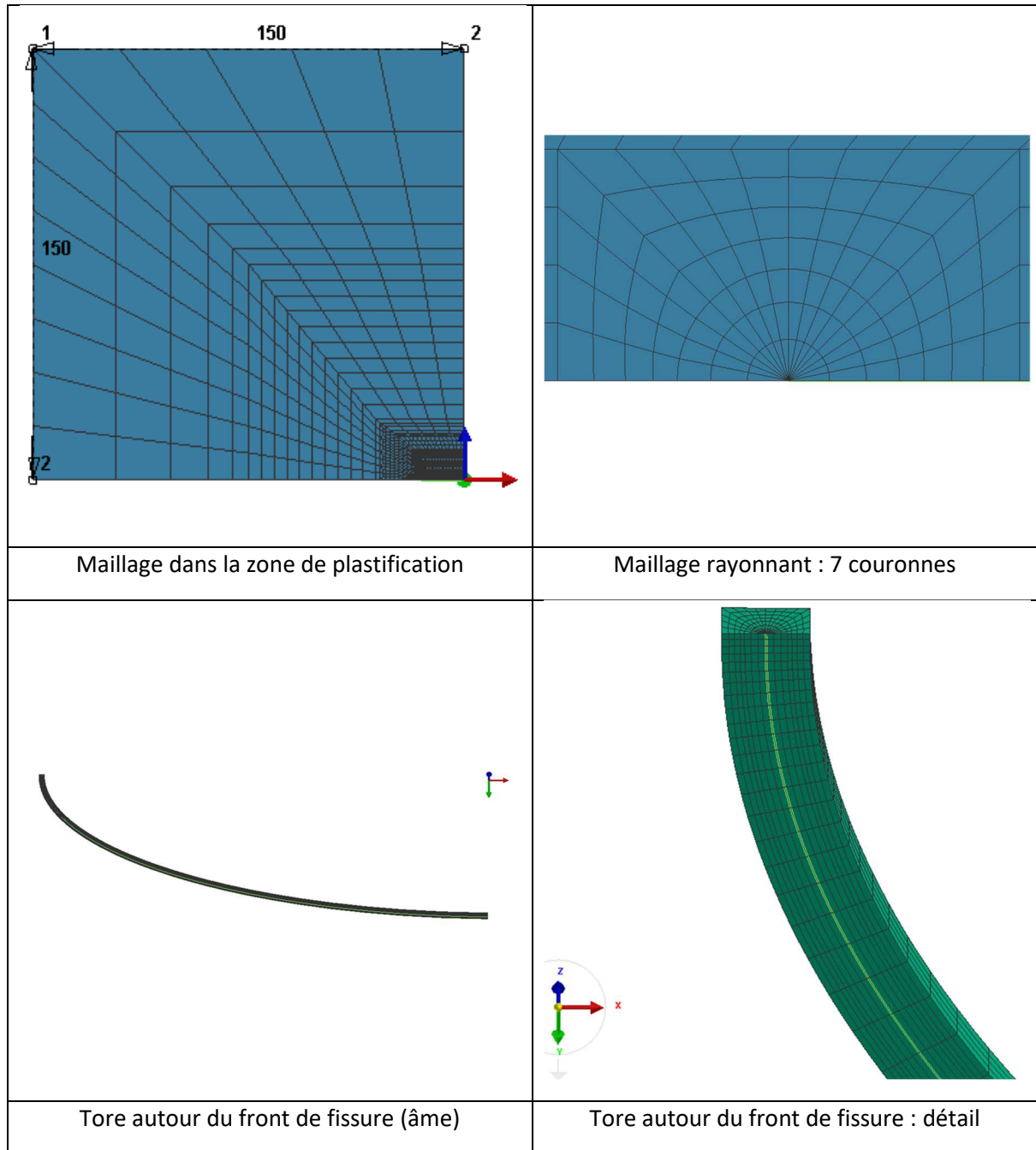


Figure A3\_8 : vues du maillage autour d'une fissure (SYSTUS, 2020)

### A3.1.3. Précision des méthodes de calcul du FIC et de la force fissurante

La méthode G-Thêta (DES, 1981) est utilisée pour calculer le taux de relaxation d'énergie potentielle en chaque nœud du front de fissure. Cette méthode calcule une intégrale sur un volume compris entre deux tores concentriques entourant le front de fissure (Figure A3\_9) en utilisant un champ nommé Thêta constant et égal à 1 dans le premier tore, qui varie de 1 à 0 entre les deux tores et nul à l'extérieur du second tore.

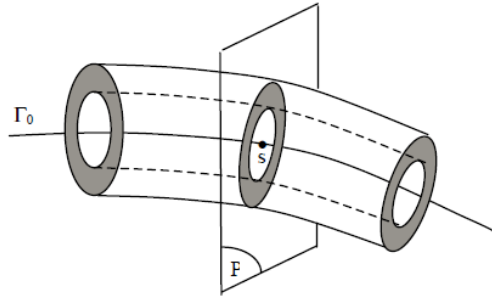


Figure 3: 3D tore around the crack front

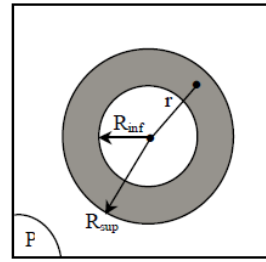


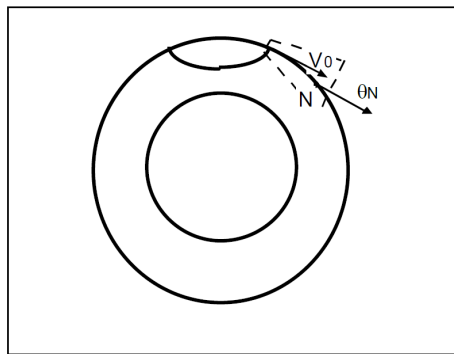
Figure 4: Section of the tore

**Figure A3\_9 : domaine d'intégration de la méthode G-Thêta (GEN, 2005)**

1. Cas où le domaine fissuré comporte au moins un plan de symétrie

Si le front de fissure n'est pas perpendiculaire au plan, comme c'est toujours le cas pour des ellipses discrétisées avec des éléments rectilignes, le champ Thêta ne peut être simultanément normal à l'arête de l'élément et être tangent au plan de symétrie. Les logiciel ASTER recommande de prendre une moyenne entre ces directions (AST, 2017, document U2.05.01). Le problème est le même pour une fissure débouchante et plus la courbure est forte, plus le problème est aigu.

Le logiciel SYSTUS (SYS, 2004) corrige la direction du champ en retenant le vecteur tangent à la surface et non la normale au côté de l'élément (Figure A3\_10).



Si on appelle  $\vec{n}$  le vecteur normal à la structure au point  $N$  et  $\vec{t}$  le vecteur tangent,

Le champ  $\theta$  est modifié de sorte que  $\theta_N \cdot \vec{n} = 0$  ( $\vec{n}$  normal à  $\partial\Omega$ )

$$\theta_N = \theta_{IN} \cdot \vec{t}$$

**Figure A3\_10 : gestion des éléments de surface pour la méthode G-Thêta (SYS, 2004)**

La meilleure façon de traiter le problème est de mailler finement la fissure comme le montre la figure suivante tirée de la thèse d'I. Delvallée (DEV, 1999). Le commentaire de l'autrice est :

« Au point le plus profond (Figure A3\_11), pour un domaine d'intégration constitué de quatre couches de mailles concentriques, quelle que soit la taille de maille en fond de fissure, on n'observe

sensiblement aucune différence sur la valeur numérique de J. Il en est de même pour tous les points du front de fissure à l'exception du point de surface. »

C'est effectivement au point de surface de cette fissure semi-elliptique que le calcul de J est perturbé. Ceci impacte la stabilité du calcul de J en fonction des domaines choisis pour le champ Thêta.

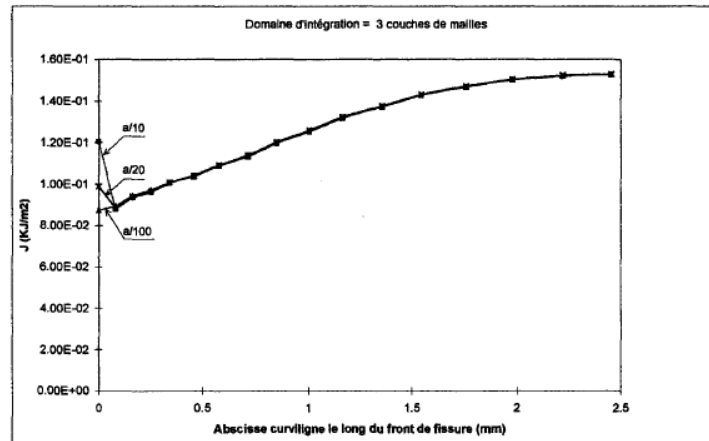


Fig. D10 : Influence de la taille de maille sur J à une pression de 25 MPa

Figure A3\_11 : influence de la taille de maille sur J pour une fissure semi-elliptique dont la moitié est discrétisée (DEV, 1999)

La figure 5-11 montre que le critère de non perturbation de J au points de plans de symétrie peut être défini par :

$$a/d \leq 100 \quad (A3.1)$$

Où a est la demi longueur de fissure et d la dimension de la première maille située en avant du front suivant l'axe formé par l'intersection du plan de fissure et le plan de symétrie.

## 2. Exemple de calcul de K avec surestimation dans le plan de symétrie

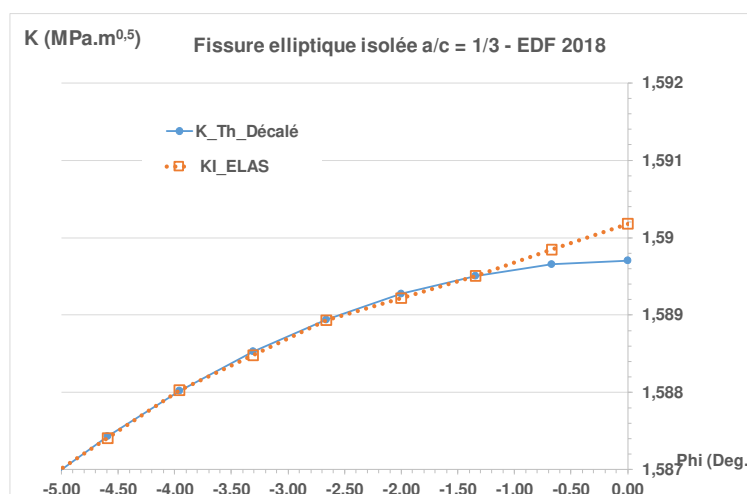


Figure A3\_12 : comparaison des estimations de K au voisinage du plan de symétrie d'un modèle aux éléments finis d'un quart de fissure elliptique aux valeurs théoriques.

### A3.1.4. Différence de discrétisation de la fissure en interaction et la fissure isolée

Il est difficile de traiter ce point de façon indépendante du type de maillage : le maillage choisi par EDF (DEE, 2018) est surtout construit à base de tétraèdres. Au § 2/3 nous examinerons les calculs effectués par d'ESI-France (ECI, 2022) qui utilise principalement des hexaèdres.

EDF (DEE,2018) a effectué plusieurs calculs de faisabilité du calcul de l'interaction de fissures elliptiques coplanaires égales de grands axes alignés en élasto-plasticité. Nous examinons ici le cas des fissures elliptiques d'excentricité  $a/c = 3$ .

Plusieurs de calculs d'interaction de ces fissures ont été réalisés, caractérisés par le nombre de nœuds sur le demi front :

- Un calcul pour une fissure isolée de longueur  $a = 3\text{mm}$  dont le demi-front comporte 401 nœuds.
- Deux calculs pour de faibles écartements relatifs  $S_x/(2a) = 0,0125$  et  $0,025$  pour lesquels les demi-fronts de fissure comportent 301 nœuds.
- Deux calculs pour les écartements relatifs  $S_x/(2a) = 0,0375$  et  $0,05$  dont les demi-fronts de fissure comportent 201 nœuds.
- Trois calcul pour de faibles écartements relatifs  $S_x/(2a) = 0,1, 0,2$  et  $0,5$  pour lesquels les demi-fronts de fissure comportent 101 nœuds.

Les interactions les plus fortes ont lieu au vertex, donc les fronts sont comparés dans cette région à la figure suivante.

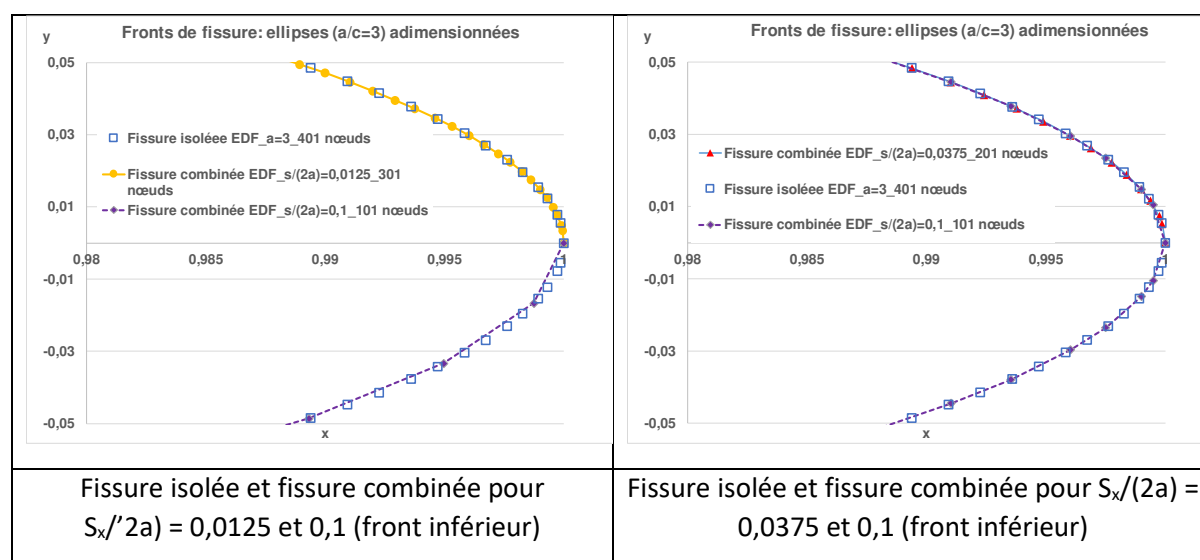


Figure A3\_13 : comparaison des fronts de fissure au voisinage du vertex

Il ressort de ces comparaisons que :

- Tous les fronts sont discrétisés de façon différentes, ce qui oblige à interpoler les résultats des FIC de la fissure isolée pour calculer les facteurs d'interaction.

- Plus l'écartement est important, moins fine est la discrétisation, donc moins précis le calcul du FIC de la fissure combinée.

Le calcul du FIC de la fissure isolée est très précis comme l'atteste la comparaison avec la formule théorique. Hormis aux points extrêmes où la précision est de 0,3%, Le facteur est sous-estimé de 1/1000. Le calcul de K en bord pose question (Figure A3\_14), mais l'impact sur le facteur d'interaction reste faible, comme le montre la figure A3\_15. Au maximum, la courbe du facteur d'interaction devrait avoir une tangente nulle. Il est difficile de trancher, pas commodité nous avons rapporté les FIC de la fissure interagissante à la formule exacte du FIC de la fissure isolée

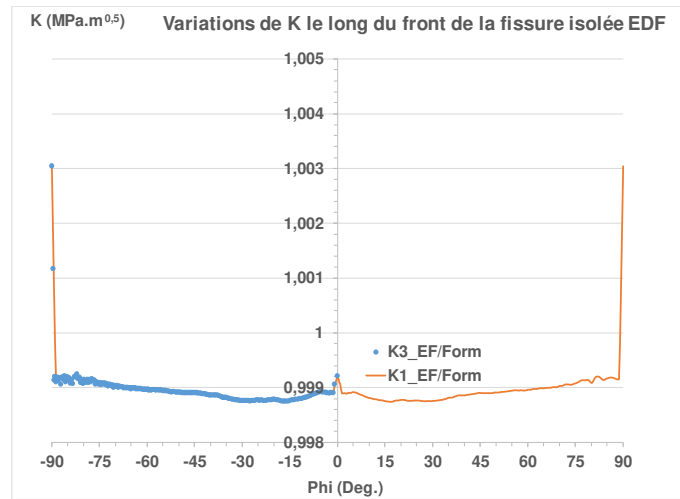


Figure A3\_14 : variations de FIC le long du front de la fissure isolée (DEE, 2018)

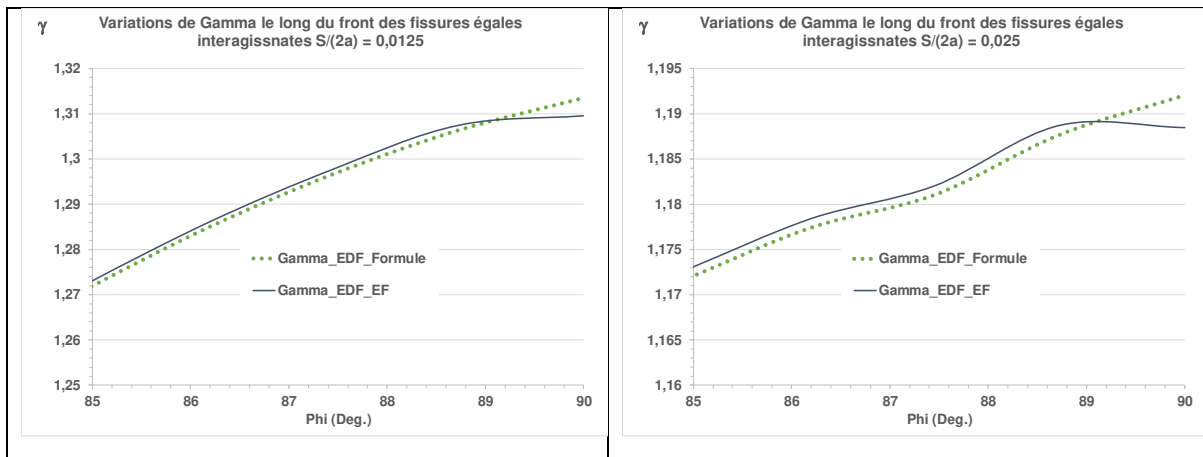


Figure A3\_15 : comparaison des variations de facteur d'interaction au voisinage du vertex

Les conséquences de ces différences de discrétisation sur les variations du facteur d'interaction le long du front sont illustrées à la figure A3\_16.

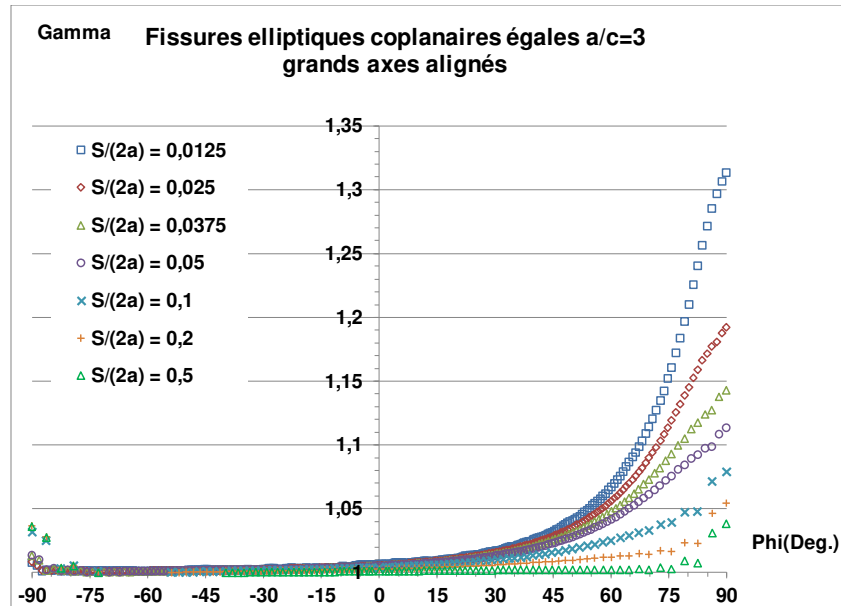


Figure A3\_16 : comparaison des variations du facteur d'interaction le long du front de fissure

Les évolutions du facteur d'interaction le long du front de fissure sont monotones croissantes du point le plus éloigné au point le plus proche de la seconde fissure pour les écartements les plus faibles ( $S_x/(2a) = 0,0125$  et  $0,025$ ). Pour  $S_x/(2a) = 0,0375$  et  $0,05$ , une légère perturbation apparaît au voisinage du vertex. En revanche les variations du facteur d'interaction pour les fissures les plus éloignées ( $S_x/(2a) = 0,1 ; 0,2$  et  $0,5$ ) et les moins bien discrétisées sont très perturbées au voisinage du vertex.

Les 4 configurations pour  $S_x/(2a) = 0,05 ; 0,1 ; 0,2$  et  $0,5$  ont donc été reprises et leurs résultats sont présentés au § suivant.

## A3.2. Evaluation des calculs en élasticité

Les fissures sont placées au milieu d'un bloc dont le huitième est un cube de 150 mm de côté.

Ce paragraphe conclut sur les calculs d'interaction effectués par ESI (ECI, 2022).

### A3.2.1. Vérification du critère de raffinement



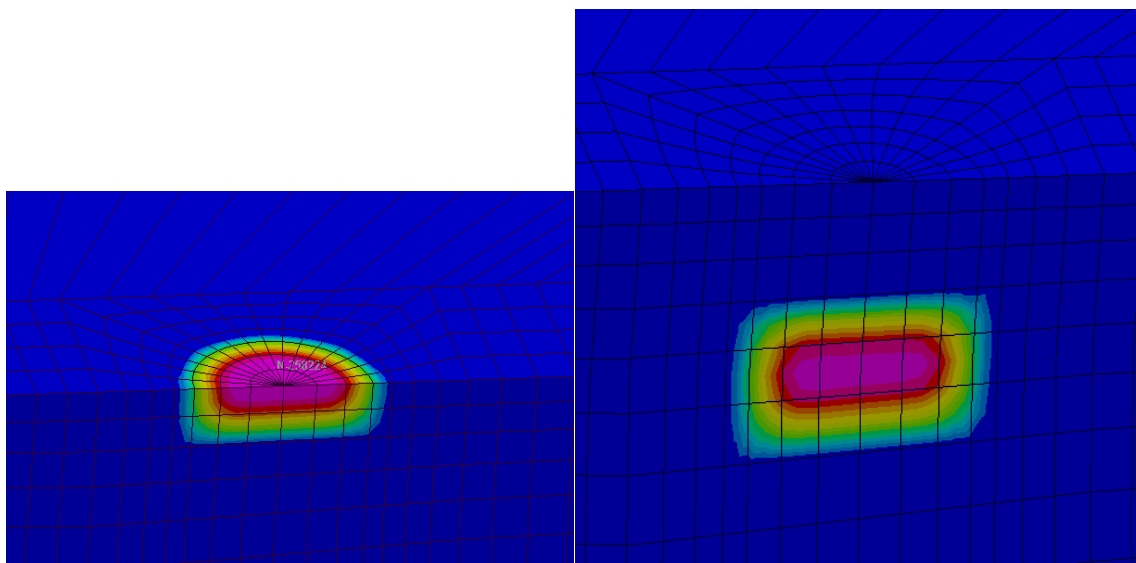
**Figure A3\_17 : taille de maille en avant du front de fissure dans le plan de symétrie**

La taille de maille le long du front de fissure suivant x, illustrée à la figure A3\_17, vaut  $d = 0,016$  mm pour une taille de fissure de 15mm.

Donc  $d/a = 0,0011$  et le critère du paragraphe 3.2.4 est vérifié.

### A3.2.2. Champ thêta

Dans les calculs SYSTUS™ (SYS, 2020), le domaine du champ Thêta est défini par les images de la Figure A3\_18.



**Figure A3\_18 : champs Thêta au voisinage d'un plan de symétrie**

Le domaine le plus éloigné a été choisi, les valeurs de J étant les plus stables.

### A3.2.3. Champs de contraintes au voisinage de la fissure

Les fonctions de Westergaard fournissent le champ des contraintes normales à une fissure isolée située dans un massif infini isotrope élastique. Leur comparaison aux résultats des calculs aux éléments finis pour une fissure isolée permet d'évaluer la précision des calculs aux éléments finis.

#### A3.2.3.1. Fissure bande

La Figure A3\_19 montre que la différence entre les contraintes normales à la fissure calculées par éléments finis et celle calculées par la fonction de Westergaard (voir chapitre 3) est nulle sauf au voisinage du plan de fissure à proximité des pointes de fissure. Dans cette zone les contraintes varient beaucoup et les différences s'expliquent par le fait que par éléments finis les contraintes sont calculées aux points de gauss puis projetées aux nœuds.

La différence entre les contraintes calculées au-delà de  $0,056*a$  et les formules théoriques est de moins de  $1/10000$  fois la contrainte appliquée.

La figure A3\_20 prouve que le comportement singulier en pointe de fissure est très bien reproduit.

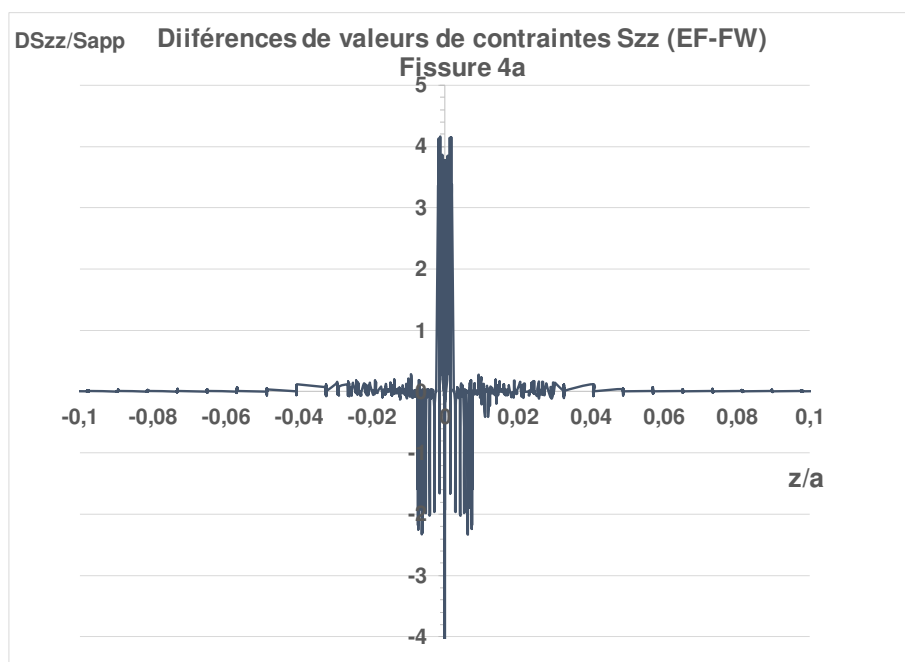


Figure A3\_19 : différence des contraintes calculées par éléments finis aux valeurs théoriques



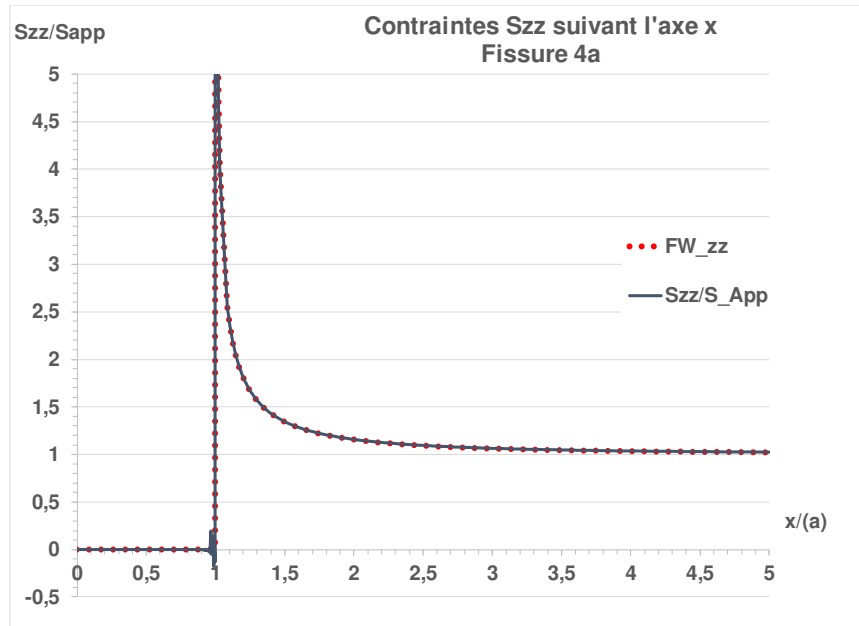


Figure A3\_20 : variation des contraintes normales au plan de fissure calculées par éléments finis et les valeurs théoriques

### A3.2.3.2. Fissure elliptique

La même analyse que pour une fissure bande isolée est reconduite pour une fissure elliptique isolée. La différence entre les contraintes calculées au-delà de  $0,03a$  et les formules théoriques est de moins de  $1/100000$  fois la contrainte appliquée (Figure A3\_21).

La Figure A3\_22 montre que le comportement singulier est bien représenté.

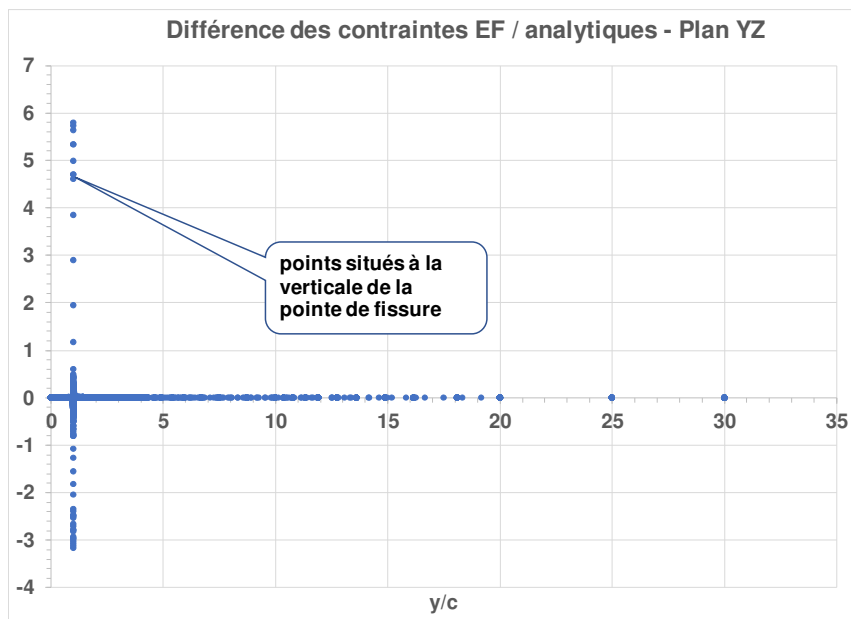


Figure A3\_21 : différence des contraintes calculées par éléments finis aux valeurs théoriques

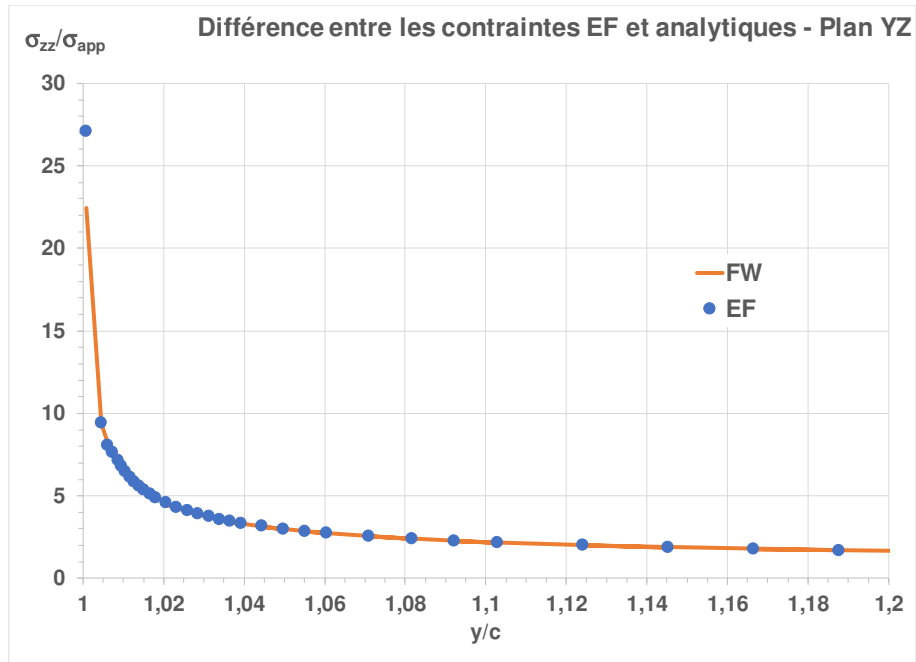


Figure A3\_22 : variation des contraintes normales au plan de fissure calculées par éléments finis et les valeurs théoriques

On en conclut que les calculs éléments finis en élasticité sont très précis : l'écart est inférieur à 1/1000 vis-à-vis des valeurs théoriques.

#### A3.2.4. Comparaison des FIC pour une fissure elliptique isolée

La figure A3\_23 compare les FIC calculés par éléments finis aux valeurs théoriques pour une fissure isolée. L'accord est excellent sauf au voisinage du vertex où la précision est de 0,7%. Le maillage.

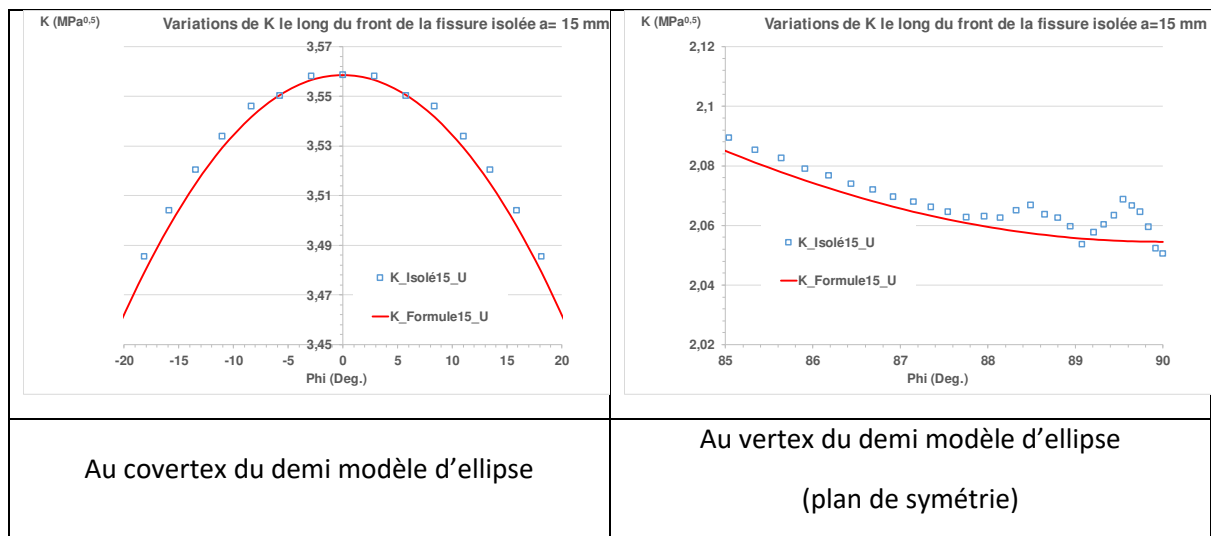
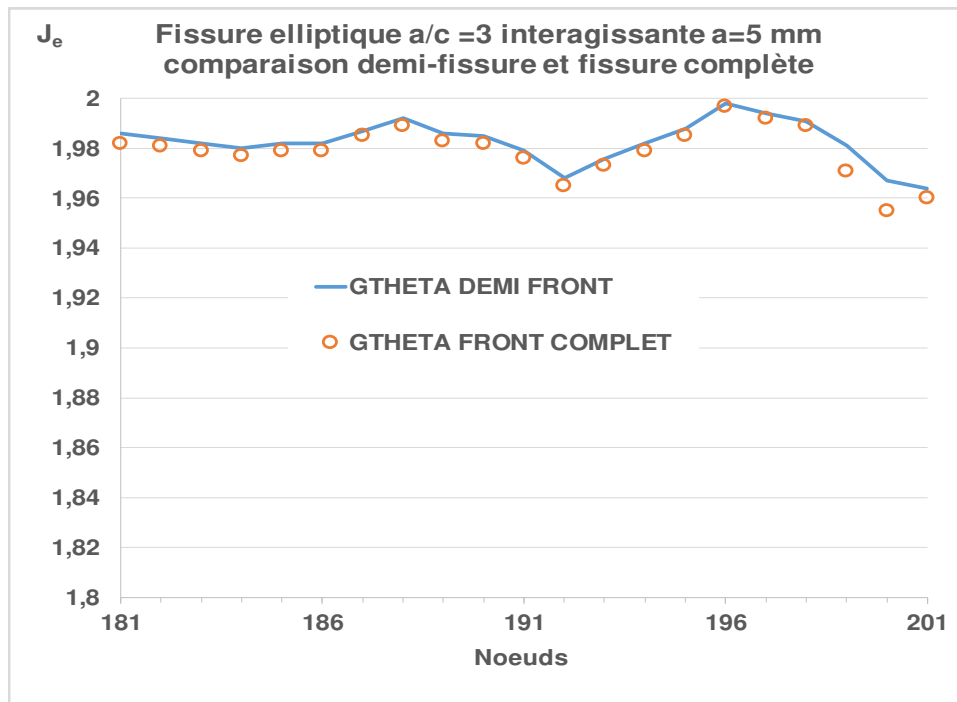


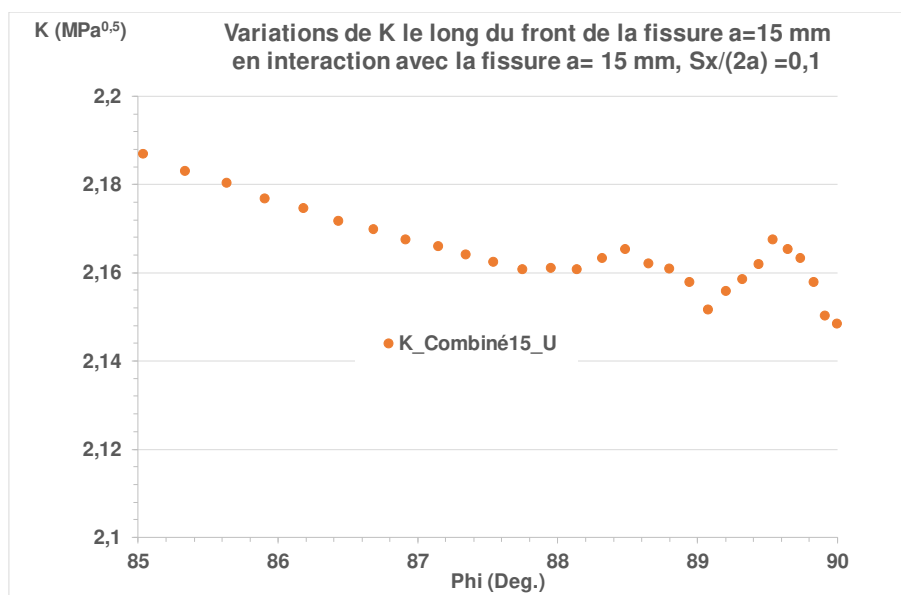
Figure A3\_23 : comparaison des calculs de K par éléments finis et par la formule théorique

On observe de faibles fluctuations à proximité du vertex, là où les champs Thêta sont moins facile à définir. Ce n'est pas un effet de bord comme le montre la comparaison suivante entre demi-modèle et modèle complet de la fissure elliptique (Figure A3\_24).



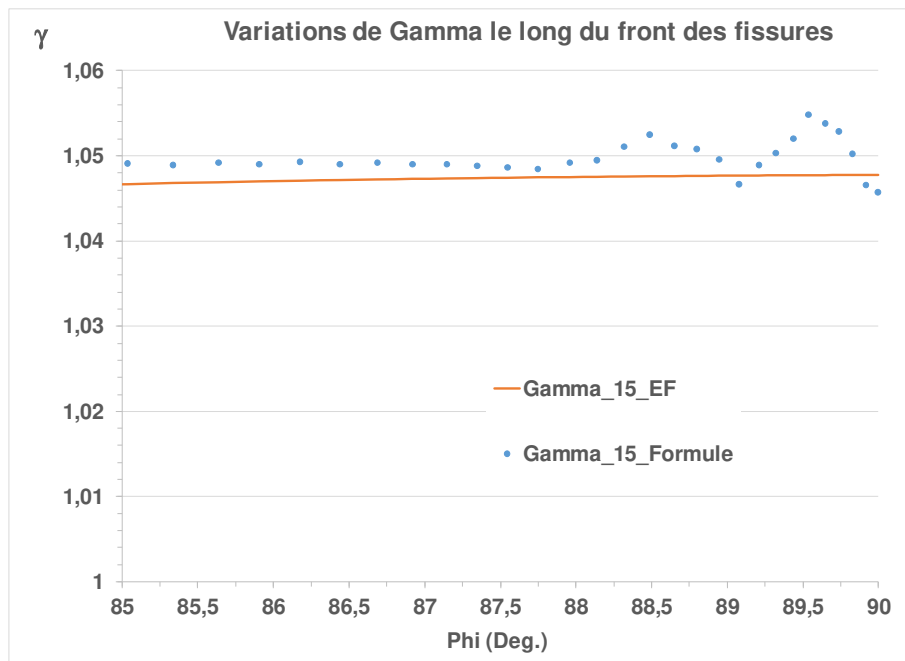
**Figure A3\_24 : comparaison des calculs de J en élasticité par éléments finis sur un demi-modèle et un modèle complet de fissure elliptique**

Cette fluctuation se retrouve dans le cas du calcul du défaut a=15 mm combiné au défaut parent a= 15 mm, séparés de  $S_x=3$  mm (Figure A3\_25).



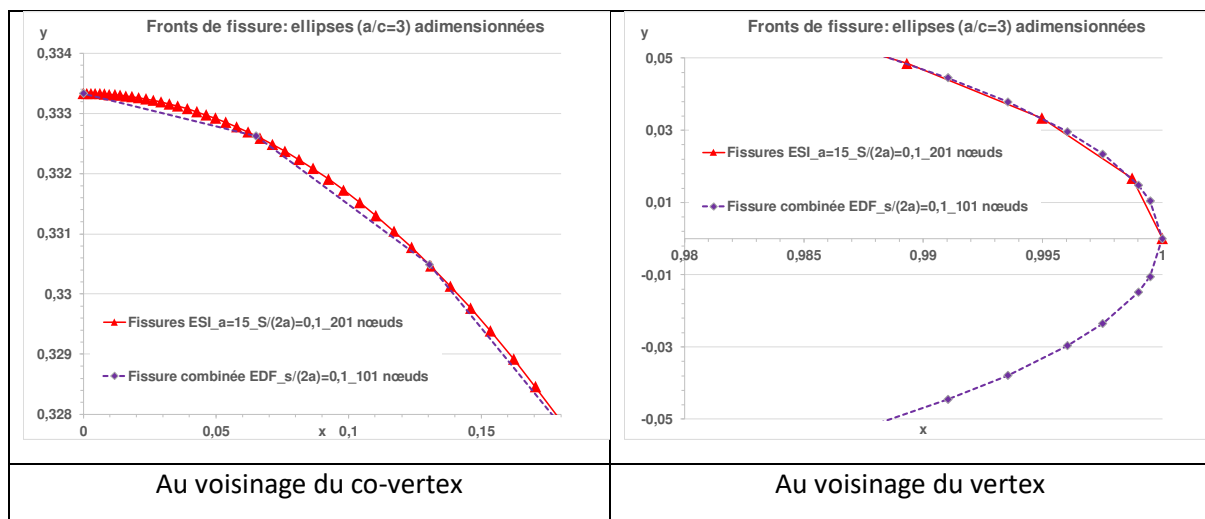
**Figure A3\_25 : calculs de K par éléments finis pour le défaut a= 15 mm en interaction avec le défaut a= 15 mm Pour un écartement relatif  $S_x/(2a) = 0,1$**

En conséquence, Il vaut mieux calculer le facteur d'interaction  $\gamma$  en divisant K par  $K_{EF\_Isolé}$  que par  $K_{Th\_Isolé}$  ainsi que l'illustre la figure A3\_26.

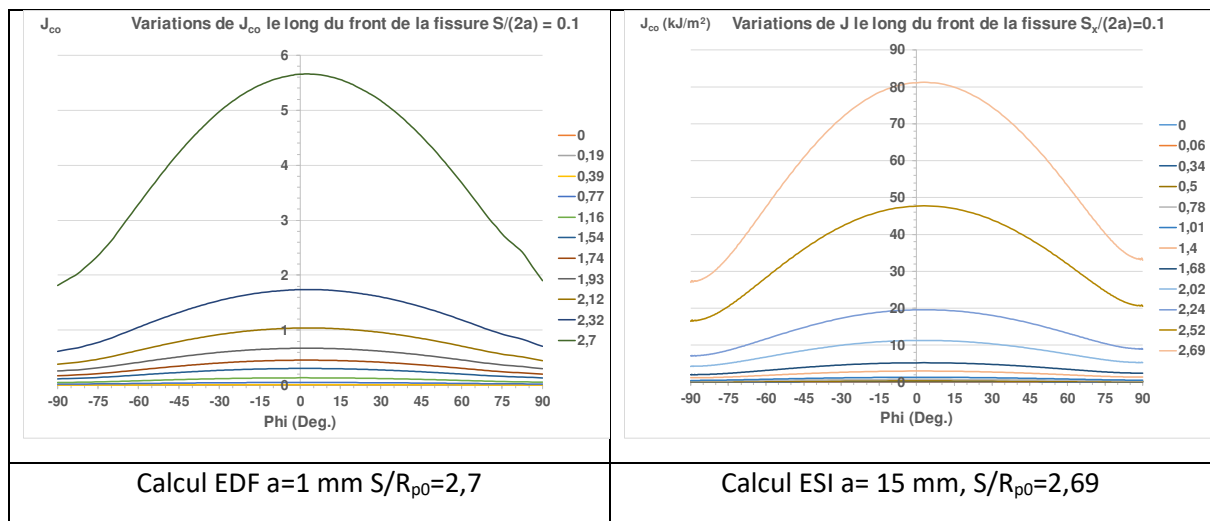


**Figure A3\_26 : calculs du facteur d'interaction par le rapport du FIC au vertex de la fissure interagissante calculé par éléments finis pour les défauts égaux de 15 mm au FIC théorique pour la fissure isolée ou au FIC calculé par éléments finis pour la fissure isolée**

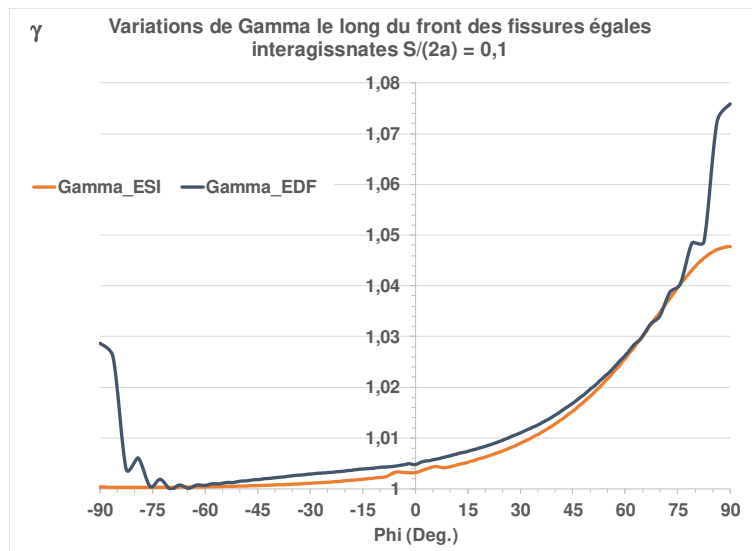
La fissure combinée maillée par EDF (DEE, 2018) comporte moins de nœuds (101) que celle maillée par ESI-France (SYSTUS, 2020) (201 Nœuds), mais le raffinement au vertex est plus important (Figure A3\_27). A priori, les résultats en J devraient être meilleurs pour le maillage EDF (DEE, 2018) et pourtant les variations de J calculées par ESI en élasto-plasticité au voisinage du point le plus proche de la seconde fissure ont meilleure allure que celles du calcul EDF (Figure A3\_28) ce qui s'explique par le choix du maillage tétraédrique par EDF (DEE, 2018).



**Figure A3\_27 : maillages des fissures dans les calculs EDF (DEE, 2018) et ESI-France (ECI, 2022) pour les fissures égales séparées de  $S=0,1 \cdot 2a$**



**Figure A3\_28 : variations de J pour des fissures égales interagissantes dans les calculs EDF (DEE, 2018) et ESI-France (ECI, 2022) pour les fissures égales**



**Figure A3\_29 : comparaison des variations du facteur d'interaction sur le front de fissure pour  $S_x/(2a) = 0,1$**

Les variations du facteur d'interaction obtenues par ESI-France (SYSTUS, 2020) sont monotones croissantes (Figures A3\_29 et A3\_30), excepté au voisinage du co-vertex, point de très faible interaction. Ceci s'explique par le fait de calculer le rapport du FIC en un point d'une fissure interagissant avec une autre au FIC au même point de la fissure isolée en utilisant des maillages identiques pour les deux fissures.

La figure A3\_30 montre que pour les écarts relatifs de 0,1 à 0,5, les résultats EDF (DEE, 2018) sont très dégradés. Le résultat pour  $S_x/(2a) = 0,05$  l'est moins car la différence de raffinement entre le maillage de la fissure isolée et celui de la fissure combinée est moindre.

**La condition principale d'une bonne estimation du facteur d'interaction est d'adopter des maillages identiques pour la fissure isolée et la fissure combinée.**

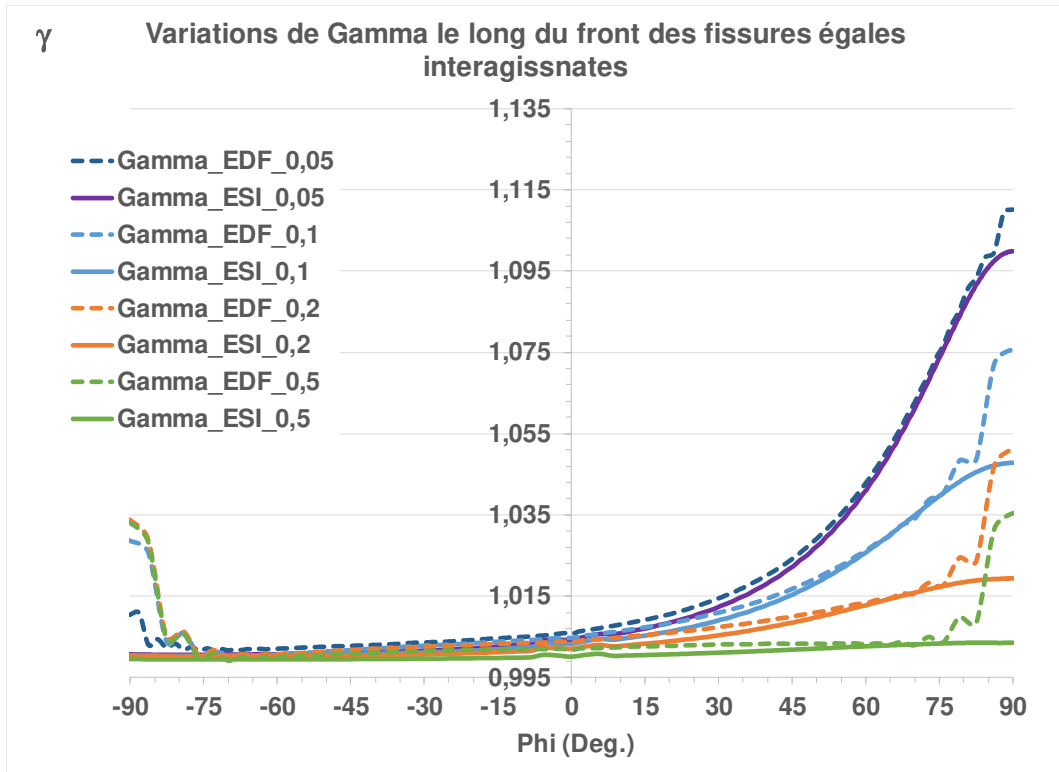


Figure A3\_30 : comparaison des variations du facteur d'interaction sur le front de fissure pour  $S_x/(2a) = 0,05$  à  $0,1$

### A3.3. Evaluation des calculs en élasto-plasticité

Les cas des fissures coplanaires et parallèles sont regroupés.

#### A3.3.1. Fissure bande

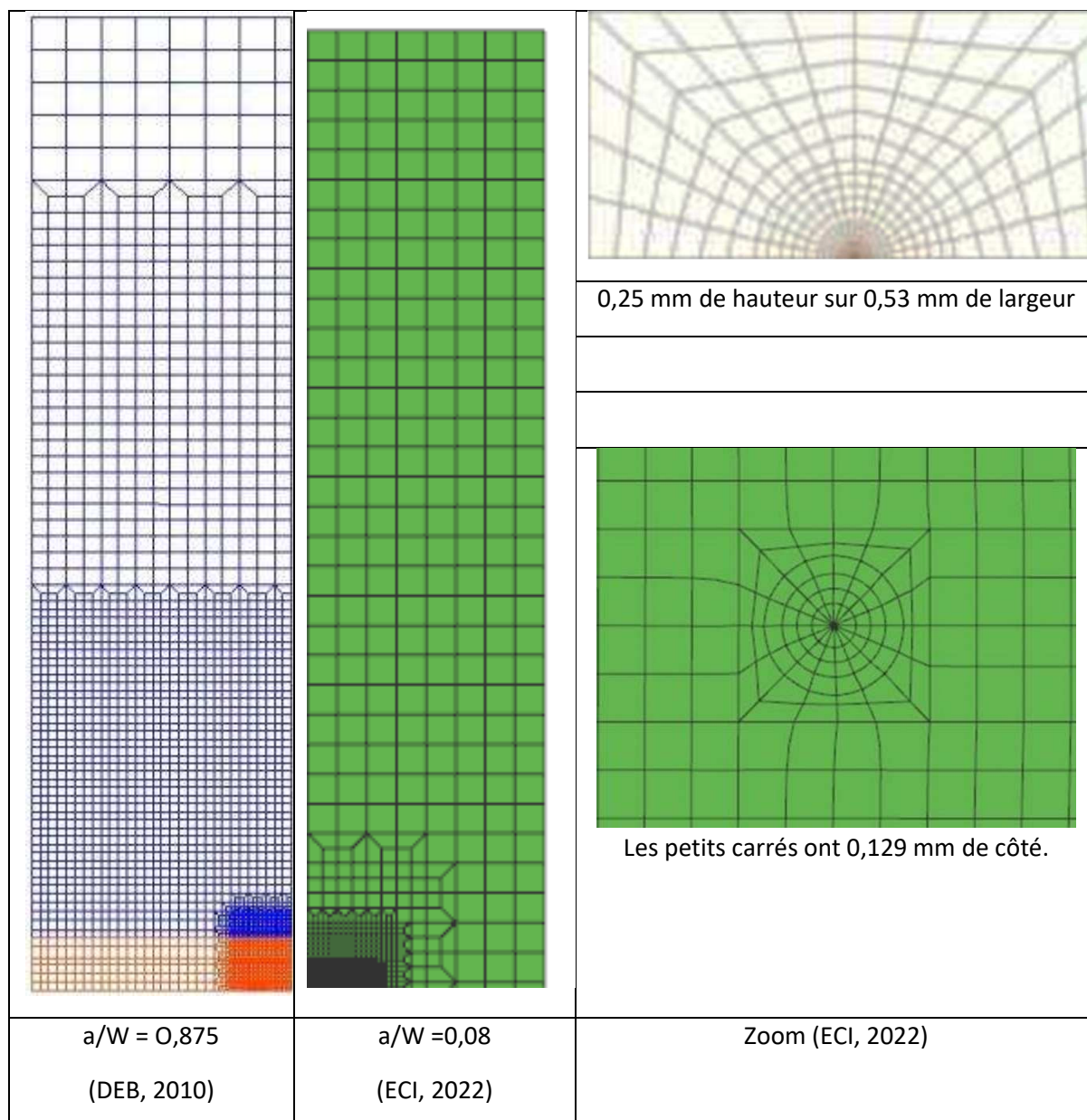
L'interaction des fissures bande en élasto-plasticité a été traité en 1997 par Framatome (FRA, 1999), puis en 2019 par ESI-France (SYSTUS, 2020).

##### A3.3.1.1. Maillages des fissures isolées

Le calcul précis de la force fissurante  $J$  pour des fissures courtes nécessite des maillages extrêmement raffinés car la plasticité est peu confinée dans le ligament. E. Debourdeaux (DEB, 2010) a réalisé des calculs aux éléments finis très précis du panneau à fissure centrale en traction (éprouvette nommée CCT ou M(T)).

Chaque éprouvette est modélisée par un maillage rectangulaire tel que  $W=8$  mm et  $L=30$  mm On a donc  $L/W=3,75$ . Le maillage compte 3226 éléments et 9 940 nœuds. Il est très raffiné en pointe de fissure où le premier élément a une taille de 24,486 microns et son autre particularité est le fort raffinement en avant de la fissure autour de la ligne de glissement à 45 degrés. Ce type de maillage est la référence.

Le maillage réalisé par ESI-France (SYSTUS, 2020) est très fin lui aussi : la taille de maille en pointe est de 0,015 mm, le carré mesure 0,129 mm de côté, la largeur de la demi-plaque est de 25 mm Les maillages sont comparés à la figure A3\_31.



**Figure A3\_31 : comparaison des maillages de fissures bande isolées**

Les raffinements au voisinage de la pointe de fissures sont similaires. Cependant le maillage de référence est beaucoup plus fin dans le ligament.

L'éprouvette modélisée par Framatome (FRA, 1999) est une plaque de largeur 50 mm et de longueur 200mm. Pour la fissure isolée de taille  $2a$ ,  $a$  vaut 1mm. La figure A3\_32 compare les maillages des calculs ESI-France (SYSTUS, 2020) et Framatome (FRA, 1999). Ces deux maillages sont construits de la même façon. Mais le maillage ESI comporte un rectangle très raffiné plus long que celui de Framatome.



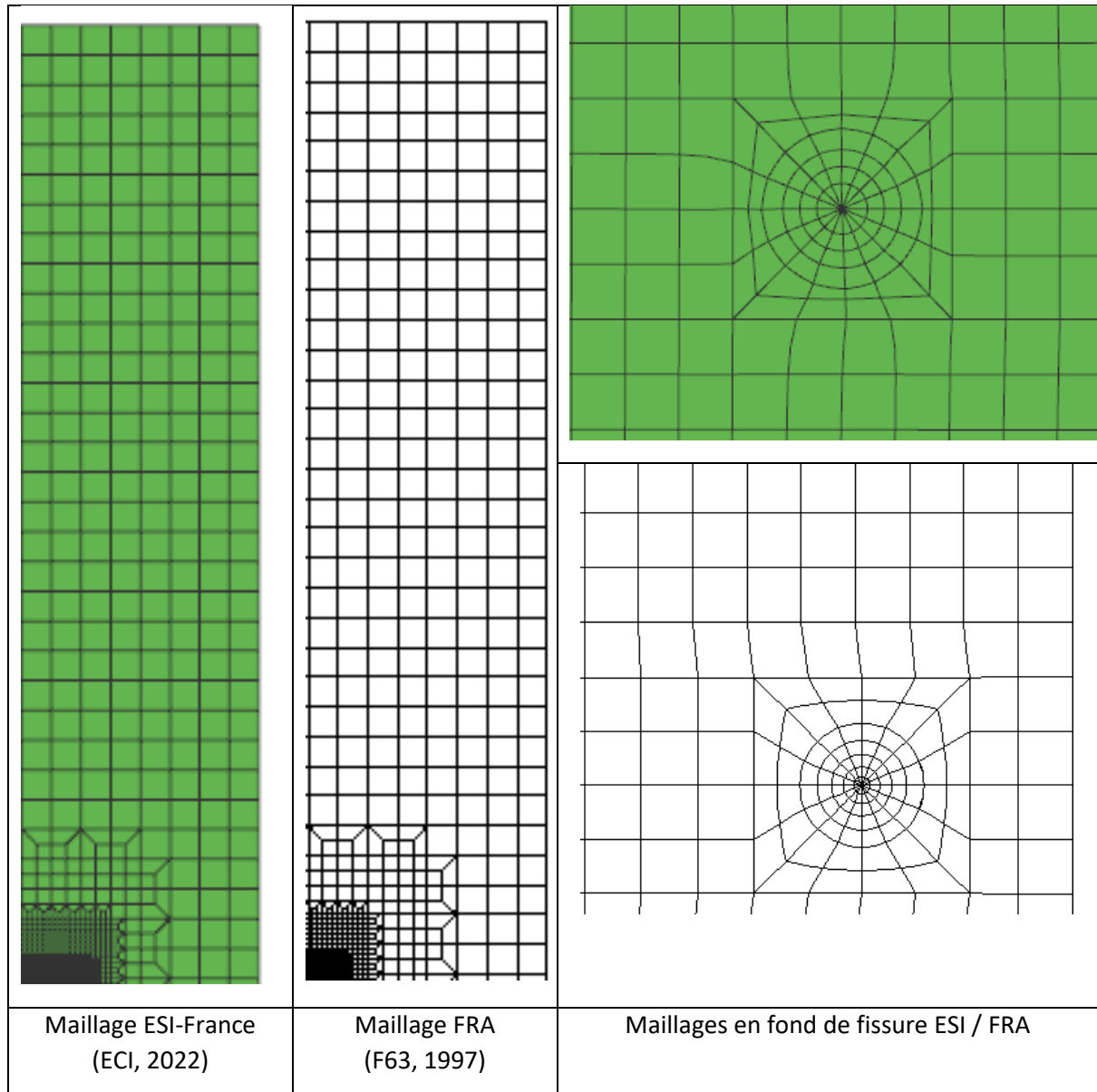


Figure A3\_32 : comparaison des maillages de fissures bande isolées

### A3.3.1.2. Calcul de J pour des fissures isolées

Les lois de comportement des calculs sont de type Ramberg-Osgood. Les calculs de Framatome et d'ESI sont effectués avec la même loi de comportement.

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \cdot \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^n \quad \text{avec } \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}, E = 174700 \text{ MPa}, \alpha = 1, n = 6, \sigma_0 = 163 \text{ MPa} \quad (\text{A3.2})$$

Les tailles relatives de fissures sont identiques et les J en élasticité sont identiques : pour une contrainte et une taille unité  $J_{e_U} = 1,6489 \cdot 10^{-5}$ . Les différences sont de 0,4%.

La figure A3\_33 fait apparaître des différences entre les variations de J/J<sub>e</sub>. Le rapport entre J/J<sub>e</sub> calculé par ESI-France et J/J<sub>e</sub> calculé par Framatome est de 1,25 environ exprimé en termes de taille de fissure.

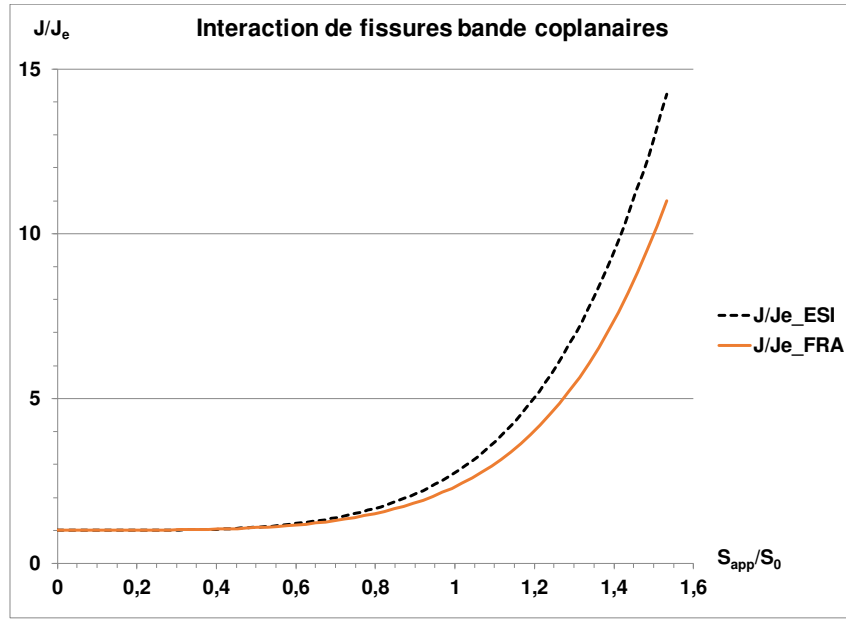


Figure A3\_33 : comparaison des rapports J/J<sub>e</sub> pour des fissures bande isolées

### A3.3.1.3. Calcul de la charge de référence

Le concept et l'application de la charge de référence sont exposés au chapitre 4 (voir aussi GIL 2018).

En élasticité linéaire les coefficients d'équivalence élastiques sont calculés à 0,5% près.

Quelques configurations de fissures bande égales interagissantes ont été traitées par Framatome (FRA, 1999) et ESI-France (SYSTUS, 2020). Le tableau A3\_2 donne les rapports en pourcentage des coefficients d'équivalence plastique  $\alpha_p$  calculés par Framatome à ceux de ESI. .

	0 Ext	0 Int	0,25 Ext	0,25 Int	0,5 Ext	0,5 Int	Max(Abs)
0,125	-0,3	0,5					0,5
0,15			-1,1	1,9	-0,6	1,3	1,9
0,25	-1,2	0,6			-1	1,8	1,8
0,5	-2,3	-1,9					2,3
1	-1,2	-2,7					2,7

Tableau A3\_2 : comparaison des facteurs d'écrouissage

Les calculs FRA (FRA, 1999) sous-estiment en général les coefficients d'équivalence plastique  $\alpha_p$  de 2% environ. Le chiffre de 2,7 % représente un cas de faible interaction. Bien que les J soient calculés de façon moins précise, le rapport de J de la fissure interagissante au J de la fissure isolée est moins affecté par le raffinement insuffisant du ligament car les types de raffinement sont identiques.

Sur la base de la concordance de cas résultats, la précision des calculs ESI-France (SYSTUS, 2020) peut être estimée à 2% ou 3%.

### A3.3.2. Fissure elliptique

La plupart des études sur les fissures elliptiques portent sur leur comportement en élasticité. Plusieurs publications ont proposé des formules de charge limite (LEI, 2004, LIR 2012 ; LVY, 2017). Récemment Y. Li et al. ont proposé des charges de références (LIY, 2018, 2021a et b). Leurs résultats sont analysés ci-après en utilisant la méthode ARS afin de pouvoir comparer des résultats obtenus sur des configurations différentes : les calculs ESI sont effectués pour une fissure petite par rapport à la section et une loi de comportement décrite par morceaux, ceux de Li et al. portent sur des fissures de taille relative plus importantes et utilisent une loi de Ramberg-Osgood. La comparaison avec des solutions de référence en élasticité montre que la précision des calculs est très bonne.

La formulation retenue par Li et al (LIY, 2021a) est la suivante pour le cas de la traction pure :

$$J_p = \alpha \cdot \frac{\sigma_0}{E} \cdot \sigma_0 \cdot t \cdot h_1 \cdot \left( \frac{\sigma_{ref}}{\sigma_0} \right)^{n+1} \quad (A3.3)$$

Li et al reprennent la formule de charge limite de Lei et Budden (LEI, 2004) qui néglige la réduction de section. La quantité  $h_1$  est fonction de la taille relative de fissure  $a/t$  où  $t$  est l'épaisseur de la plaque. Le cas traité ici est celui de la fissure centrée.

En traction pure  $\sigma_{ref} = \sigma_m$ , il vient :

$$J_p = \alpha \cdot \frac{\sigma_0}{E} \cdot \sigma_0 \cdot t \cdot h_1 \cdot \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_0} \right)^{n+1} \quad (A3.4)$$

Evaluation du rapport  $J/J_e$

$$J_p(\alpha = 1, n = 1) = \frac{0.75}{1 - \nu^2} \cdot J_e = \frac{\sigma_0}{E} \cdot \sigma_0 \cdot t \cdot h_{11} \cdot \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_0} \right)^2 \quad (A3.5)$$

Donc

$$\frac{J_p}{J_e} = h_{nu} \cdot \alpha \cdot \frac{h_1}{h_{11}} \cdot \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_0} \right)^{n-1} \quad \text{avec } h_{nu} = \frac{0.75}{1 - \nu^2} \quad (A3.6)$$

Avec notre définition de la contrainte de référence :

$$\frac{J_p}{J_e} = h_{nu} \cdot \alpha \cdot \left( \frac{\sigma_{ref}}{\sigma_0} \right)^{n-1} \quad \text{avec } \sigma_{ref} = \frac{N}{Z_{pR}}, \quad Z_{pR} = Z_{enc} \cdot \mu_c \quad \text{et } \sigma_{ref} = \frac{\sigma_m}{\mu_c} \quad (A3.7)$$

Donc 
$$h_{nu} \cdot \alpha \cdot \frac{h_1}{h_{11}} \cdot \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_0} \right)^{n-1} = h_{nu} \cdot \alpha \cdot \left( \frac{1}{\mu_c} \cdot \frac{\sigma_m}{\sigma_0} \right)^{n-1}$$

Il vient l'expression du facteur de fissure  $\mu_c$  :

$$\mu_c = \left( \frac{h_{11}}{h_1} \right)^{\frac{1}{n-1}} = \mu_c = \mu_r \cdot \mu_e \left( \frac{a}{t}, n \right) \quad (A3.8)$$

Evaluation de  $h_{11}$

$$J_e = (1 - \nu^2) \cdot \frac{K^2}{E} \quad (A3.9)$$

$$K = \sigma_m \cdot f_t \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \text{ et } \sigma_m = \frac{N}{Z_{e\_nc}} = \frac{N}{2W \cdot t} \quad (A3.10)$$

$$\frac{0.75}{1 - \nu^2} \cdot (1 - \nu^2) \cdot \frac{(f_t \cdot \sigma_m)^2 \cdot \pi \cdot a}{E} = \frac{\sigma_0}{E} \cdot \sigma_0 \cdot t \cdot h_{11} \cdot \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_0}\right)^2$$

Donc :

$$h_{11} = 0.75 \cdot f_t^2 \cdot \pi \cdot \frac{a}{t} \quad (A3.11)$$

La comparaison des calculs est possible en utilisant  $\mu_e \left(\frac{a}{t}, n\right)$  La taille relative de la fissure isolée de 15 mm vaut  $a/t=0,1$  où  $W$  est la demi-largeur sur l'axe portant la dimension  $a$ . La loi de comportement des calculs ESI peut être lissée dans le domaine de la plasticité étendue par une fonction puissance de paramètres  $\sigma_0 = 200$  MPa et  $n=3,5$ .

Le facteur d'écroissage diminue avec  $a/t$  et augmente avec  $n$  pour les petites fissures. Ceci explique que les points représentant les calculs ESI-France (SYSTUS, 2020) sur la figure A3\_34 sont proches du résultat de Li (LIY, 2021a) pour  $n=5$  et  $a/t=0,125$ . Au covertex (calcul SYSTUS, 2020) la fissure a une plus petite taille relative ( $c/t=0,033$ ) donc le coefficient  $\mu_e$  est plus élevé.

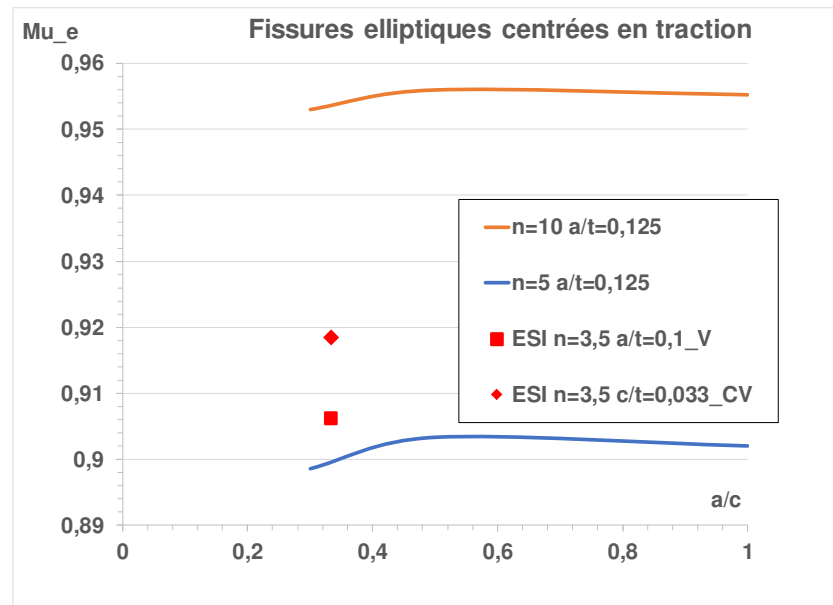


Figure A3\_34 : comparaison des facteurs d'écroissage des calculs ESI-France (SYSTUS, 2020) et de Li et al. (LIY, 2021a)