



HAL
open science

Transformées stabilisatrices de variance pour l'estimation de l'intensité du Shot Noise : application à l'estimation du flux neutronique

Thierry Montagu

► **To cite this version:**

Thierry Montagu. Transformées stabilisatrices de variance pour l'estimation de l'intensité du Shot Noise : application à l'estimation du flux neutronique. Statistiques [math.ST]. Université Côte d'Azur, 2024. Français. NNT : 2024COAZ5015 . tel-04632028

HAL Id: tel-04632028

<https://theses.hal.science/tel-04632028v1>

Submitted on 2 Jul 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

Transformées stabilisatrices de variance pour l'estimation de l'intensité du Shot Noise

Application à l'estimation du flux neutronique

Thierry MONTAGU

Université Côte d'Azur

**Présentée en vue de l'obtention
du grade de docteur en**
Sciences pour l'ingénieur
par la voie de certification en
Validation des Acquis de l'Expérience
d'Université Côte d'Azur

Accompagnée par : André FERRARI, PU,
Université Côte d'Azur
Soutenue le : le 12 Avril 2024

Devant le jury, composé de :
Antoine SOULOUMIAC, HDR, CEA, Uni-
versité Paris-Saclay
Olivier MICHEL, PU, GIPSA Lab, Grenoble
Nadège THIRION-MOREAU, PU, Seatech,
Toulon
Jean-Luc STARCK, HDR, CEA, Université
Paris-Saclay
Jean-Yves TURNERET, HDR, IRIT,
CNRS
Cédric RICHARD, PU, Université Côte
d'Azur

**TRANSFORMÉES STABILISATRICES DE VARIANCE POUR
L'ESTIMATION DE L'INTENSITÉ DU SHOT NOISE**

APPLICATION À L'ESTIMATION DU FLUX NEUTRONIQUE

Variance stabilizing transforms for Shot Noise intensity estimation

Thierry MONTAGU



Jury :

Rapporteurs

Antoine SOULOUMIAC, HDR, CEA, Université Paris-Saclay
Olivier MICHEL, PU, GIPSA Lab, Grenoble

Examineurs

Nadège THIRION-MOREAU, PU, Seatech, Toulon
Jean-Luc STARCK, HDR, CEA, Université Paris-Saclay
Jean-Yves TOURNERET, HDR, IRIT, CNRS
Cédric RICHARD, PU, Université Côte d'Azur

Directeur de thèse

André FERRARI, PU, Université Côte d'Azur

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR

École Doctorale Sciences Fondamentales et Appliquées

Spécialité : Sciences pour l'Ingénieur

présentée et soutenue publiquement
par

Thierry MONTAGU

né le 17 avril 1978, à Blois (Loir-et-Cher)

le 12 avril 2024

**TRANSFORMÉES STABILISATRICES DE VARIANCE POUR L'ESTIMATION DE
L'INTENSITÉ DU SHOT NOISE**

Application à l'estimation du flux neutronique

Accompagné par **André Ferrari**

Université Côte d'Azur
France
2024

Remerciements

J'ai rédigé cette thèse dans le cadre de la validation des acquis de l'expérience pour le doctorat (VAE doctorat) avec l'université de la Côte d'Azur entre le début de l'année 2021 et le début de l'année 2024.

Mes remerciements vont tout d'abord à André Ferrari pour son soutien et ses conseils tout au long de la rédaction de ce manuscrit. Je vous remercie sincèrement de votre bienveillance, de vos encouragements et de vos précieux conseils.

J'adresse également mes remerciements aux membres de mon jury : à Nadège Thirion-Moreau, qui m'a fait l'honneur de le présider, à Cédric Richard, Jean-Luc Starck et Jean-Yves Tourneret qui ont accepté d'en être les examinateurs et à Olivier Michel et Antoine Souloumiac pour avoir relu méticuleusement ce mémoire.

Je ne n'aurai jamais pu aller au bout de ce projet sans mes proches. Pour son soutien inconditionnel, je remercie Sabine, de m'avoir poussé dès l'année 2017 à entreprendre ce projet. Il aura fallu une pandémie et deux confinements pour faire le premier pas administratif. Je ne serai – sans l'ombre d'un doute – jamais parvenu au terme de celui-ci sans toi. Merci de m'avoir supporté (dans tous les sens du terme) et encouragé pendant tous ces mois en assurant sur tout le « reste », un travail non moins colossal !

Je tiens également à remercier mes enfants Charly et Lyne pour leurs encouragements, leurs patiences impressionnantes et leurs très légitimes impatiences. Je vous dédie ce travail.

« Papa, ça aurait été mieux que tu fasses ta thèse quand j'étais petit, comme ça on ne s'en serait pas aperçu ! »

Charly, 9 ans.

« Papa, maintenant que tu as rendu ta thèse, quand est-ce que tu as ta note ? »

Lyne, 8 ans, juste après le dépôt du manuscrit.

Merci à toi Tom (pièce 52 *forever*) pour les précieux conseils, les relectures, les échanges scientifiques, humoristiques et musicaux depuis toutes ces années. Thierry le Chercheur est désormais con...forme à la tradition, et « ça y est on peut plus l'arrêter ! ».

Depuis le centre de la France, j'ai reçu les soutiens de mes parents. Merci à mon frère Benoit et à Delphine depuis le pays du caramel au beurre salé. Un grand merci à ma tante Monique pour son indéfectible enthousiasme scientifique !

Pour son soutien depuis le sud-ouest, je remercie Tania.

Je suis reconnaissant envers la société ECA Robotics (devenue Exail Robotics) d'avoir concouru à hauteur de 20 % du financement de cette formation VAE doctorat, les 80 % ayant été financés par le biais de mon compte personnel formation.

Je tiens également à exprimer ma gratitude à Antoine Souloumiac, Stéphane Normand et Jean-Christophe Trama pour l'intérêt porté à ces travaux dès leur genèse autour des années 2005-2006, ainsi que Stéphane Normand (bis), Mathieu Trocmé, Hassen Hamrita et Mounir Bakkali pour les années 2015-2017.

Résumé

LE Shot Noise est un processus aléatoire qui permet notamment de modéliser fidèlement le nombre d'occurrences des interactions entre particules physiques et leurs détecteurs associés ; ce nombre définit l'intensité du processus. Lorsque l'intensité est faible, il est possible d'individualiser les interactions dont les temps d'arrivées sont modélisés par le processus de Poisson. Dans le cas contraire, les événements ne sont plus discernables (ils « s'empilent »), mais le théorème de Campbell – qui établit les cumulants du Shot Noise – permet de remonter à l'intensité du processus. L'estimation des deux premiers cumulants est réalisée grâce à la moyenne et à la variance empiriques de trajectoires du Shot Noise. Il est remarqué que les variances de ces estimateurs et des estimateurs de l'intensité du Shot Noise correspondants dépendent de leurs moyennes respectives. Cette propriété d'hétéroscédasticité étant observée en théorie et en pratique, une approche par transformées stabilisatrices de variance est proposée via la *Delta method*. Celles-ci sont calculées ainsi que leur biais, et les transformées inverses associées. Leurs propriétés asymptotiques sont vérifiées par des simulations numériques. Dans le cadre applicatif des mesures de flux neutroniques qui reposent sur l'estimation des deux premiers cumulants du Shot Noise et qui ont également pour finalité l'estimation de l'intensité du processus aléatoire, des transformées stabilisatrices de variance sont spécifiquement établies ainsi que leurs biais et leurs transformées inverses. Elles sont finalement combinées à un filtre de Kalman adaptatif pour débruiter le flux neutronique. Des simulations sont menées pour caractériser les performances de filtrage. Le débruitage de signaux réels est également réalisé.

Mots clés : Processus de Poisson, Shot Noise, Pile-up (empilements), Théorème de Campbell, cumulants, k-statistiques, fonction de variance, transformée stabilisatrice de variance, filtre de Kalman adaptatif, CUSUM, mesures nucléaires, flux neutronique.

Abstract

THE Shot noise is a random process that can be used to accurately model the number of occurrences of physical particles impinging their associated detectors; this number is referred to as the intensity of the process. When this number is small, it is possible to individualize the recorded events whose arrival times are modelled thanks to the Poisson process. In the opposite case, the events are no longer discernible (they "pile up"), but Campbell's theorem - which establishes the cumulants of the Shot Noise - still allows to estimate the intensity of the process. The estimation of the two first cumulants is classically achieved with the empirical mean and the empirical variance. It is noted in this work, that the variances of these two estimators and their corresponding estimators of the Shot Noise intensity are functions of their respective means. This property of heteroscedasticity being observed both in theory and practice, an approach by variance stabilizing transforms is proposed using the « Delta method ». These are calculated as well as their bias, and their corresponding inverse transforms. Their asymptotic properties are verified thanks to numerical simulations. In the applicative context of neutron flux measurements, which rely on the estimation of the first two cumulants of the Shot Noise and which also have the purpose of estimating the intensity of this random process, variance stabilizing transforms are specifically established as well as their biases and their inverse transforms. They are finally combined with an adaptive Kalman filter in order to denoise the neutron flux measurements. Numerical simulations are carried out to assess filtering performances. Denoising of real signals is also performed.

Keywords : Poisson process, Shot Noise, pile-up effect, Campbell theorem, cumulants, k-statistics, variance function, variance stabilizing transform, adaptive Kalman filter, CUSUM, nuclear measurement, neutron flux measurement.

Je n'ai jamais rêvé que de ponts,
[. . .] ; je n'ai jamais aimé qu'eux.

L'Art des Ponts - Homo Pontifex
Michel Serres

À mes enfants
À ma femme
À mon frère
À mes parents

Acronymes

AKF	Adaptive Kalman Filter
GAT	Generalized Anscombe Transform
iid	indépendant identiquement distribué
KF	Kalman Filter
QVF	Quadratic Variance Function
VST	Variance Stabilizing Transform
VS-AKF	Variance Stabilized Adaptive Kalman Filter

Table des matières

Acronymes	xiii
Liste des figures	xxi
Liste des tableaux	xxiii
Liste des algorithmes	xxv
1 Introduction générale	1
1.1 Objets de la thèse	1
1.1.1 Plan de la thèse	2
1.2 Contributions	2
1.2.1 Transformées stabilisatrices de variance pour les estimateurs de l'intensité du Shot Noise	2
1.2.2 Application aux mesures neutroniques	3
1.3 Publications	3
1.3.1 Article de revue / journal	3
1.3.2 Brevets	3
1.3.3 Rapports techniques	3
1.4 Autres publications	3
1.4.1 Conférences avec actes	3
1.4.2 Articles de revue / journal	5
1.4.3 Brevets	5
2 Le Shot Noise	7
2.1 Origines du Shot Noise	8
2.2 Définition	9
2.3 Fonctions caractéristiques du Shot Noise	13
2.4 Cumulants du Shot Noise	13
2.4.1 Estimateurs des cumulants : les k-statistiques et leurs variances	15
2.4.2 Variance des k-statistiques du Shot Noise	15
2.4.3 Propriétés asymptotiques des cumulants	16
2.5 Propriétés asymptotiques du Shot Noise	16
2.5.1 Gaussianité asymptotique du Shot Noise	16
2.6 Conclusion du chapitre	20

3	Transformées Stabilisatrices de Variance	21
3.1	Introduction	22
3.1.1	Bref historique	23
3.1.2	Une propriété connexe	24
3.1.3	Travaux récents	24
3.1.4	Usages et applications	26
3.2	Fondements de la stabilisation de variance	31
3.2.1	Méthode « Delta »	31
3.2.2	Théorèmes fondamentaux	32
3.3	Exemples illustratifs	33
3.3.1	Loi de Poisson	33
3.3.2	Moyenne de la loi de Poisson	33
3.3.3	Lois gamma, exponentielle, et χ^2	34
3.4	Formes générales des VST et de leurs inverses	35
3.5	Biais des transformations	36
3.5.1	Généralités	36
3.5.2	Biais de la transformée d'Anscombe	37
3.5.3	Autres approches	38
3.5.4	VST corrigée du biais	39
3.6	Conclusion du chapitre	39
4	Transformées stabilisatrices de variance pour quelques statistiques du Shot Noise	42
4.1	Stabilisation de variance et premier cumulants du Shot Noise	43
4.1.1	Estimateur du premier cumulants	43
4.1.2	Estimateur de l'intensité basé sur $\hat{\kappa}_1$	44
4.2	Stabilisation de variance et deuxième cumulants du Shot Noise	45
4.2.1	Estimateur du deuxième cumulants	45
4.2.2	Estimateur de l'intensité basé sur $\hat{\kappa}_2$	47
4.3	Simulations	48
4.4	Publication	52
4.5	Conclusion du chapitre	59
5	Stabilisation de variance pour les estimateurs du flux neutronique	60
5.1	Courte introduction à la mesure de flux neutronique	61
5.1.1	Généralités sur le neutron	61
5.1.2	Shot Noise, cumulants et mesures neutroniques	61
5.1.3	Chaînes de mesure neutronique	62
5.1.4	Résumé	65
5.2	Voie Impulsions	66
5.2.1	Estimateur de l'intensité du flux	66
5.2.2	Stabilisation de variance pour l'estimateur de la voie « impulsions »	66
5.2.3	Conclusion	67
5.3	Voie Fluctuations	67
5.3.1	Estimateur du flux neutronique	68
5.3.2	Stabilisation de variance pour l'estimateur de la voie fluctuation	69

5.3.3	Conclusion	70
5.4	Voie Courant	70
5.4.1	Estimateur du flux neutronique	71
5.4.2	Transformée de stabilisation de variance et son inverse	71
5.4.3	Conclusion	72
5.5	Conclusion du chapitre	73
6	Estimation en ligne du flux neutronique par combinaison de VST et d'un filtre de Kalman adaptatif	75
6.1	Introduction - Présentation des signaux neutroniques	77
6.2	Présentation du filtre de Kalman	78
6.2.1	Peut-on l'appliquer au flux neutronique ?	79
6.3	Filtre de Kalman adaptatif pour l'estimation du flux neutronique	84
6.3.1	Modèle d'état	84
6.3.2	Adaptation du filtre de Kalman	84
6.3.3	Règle du CUSUM	85
6.3.4	Filtre VS-AKF	87
6.4	Estimation en ligne du flux neutronique sur signaux simulés et réels	90
6.4.1	Simulations	90
6.4.2	Voie Impulsions	91
6.4.3	Voie Fluctuations	98
6.4.4	Voie Courant	104
6.5	Conclusion du chapitre	110
	Conclusion	112
	Annexes	116
	Annexe A Loi et Processus de Poisson	118
A.1	Loi de Poisson	118
A.2	Processus de Poisson	118
A.2.1	Première définition	118
A.2.2	Seconde définition	118
	Annexe B Sur la transformée d'Anscombe	120
B.1	Recherche de VST "optimale"	120
B.2	Établissement de la transformée d'Anscombe	120
B.2.1	Développements limités utiles	120
B.2.2	Calculs	121
	Annexe C Substitutions d'Euler pour le calcul des primitives de la forme $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$	124
C.1	Première substitution d'Euler	124
C.2	Deuxième substitution d'Euler	125
C.2.1	Forme logarithmique	125
C.2.2	Forme inverse hyperbolique	127

C.3	Troisième substitution d'Euler	128
C.4	Calculs de primitive	129
C.5	VST pour la voie fluctuation	129
C.5.1	Établissement de la transformée directe	129
C.5.2	Établissement de la transformée inverse	130
C.6	VST pour le cumulatif d'ordre 2 du Shot Noise	130
C.7	Sur la formule 2.261 dans (Gradshteyn et Ryzhik, 1994)	131
C.7.1	Contexte	131
C.7.2	Formules du §2.261	132
C.7.3	Correction	132
C.7.4	Nouvelles formules dans la 8 ^{ème} édition	134
C.8	Rappels sur les fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses	134
C.8.1	Définitions	134
C.8.2	Liens avec les logarithmes	134
Annexe D	Quelques éléments de physique nucléaire	137
D.1	Rappels de physique atomique	137
D.1.1	Principaux modes de désintégration radioactive	138
D.1.2	Émission de neutrons et rayons γ	138
D.2	Cinétique des neutrons	139
D.2.1	Modèle du réacteur point	139
D.3	Conclusion du chapitre	141
	Références bibliographiques	142

Table des figures

2.1	Trajectoires simulées de Shot Noise d'intensités différentes échantillonnées à 10 MHz.	11
2.2	Empilements des impulsions	12
2.3	Histogrammes des trajectoires de Shot Noise d'intensités différentes	18
3.1	Synthèse visuelle de la stabilisation de variance	40
3.2	Méthodologies d'application des transformées stabilisatrices de variance.	41
4.1	Simulations effectuées pour $\hat{\kappa}_1$ et $\hat{\kappa}_1^*$	50
4.2	Simulations effectuées pour $\hat{\kappa}_2$ et $\hat{\kappa}_2^*$	51
5.1	Schéma de principe d'une chaîne de mesure neutronique	63
5.2	Méthodologie d'application des transformées stabilisatrices de variance pour la voie impulsion.	67
5.3	Méthodologie d'application des transformées stabilisatrices de variance pour la voie Fluctuations.	70
5.4	Méthodologie d'application des transformées stabilisatrices de variance pour la voie courant.	73
6.1	Flux neutronique réel mesuré sur un réacteur expérimental	77
6.2	Exemple de flux neutronique lors d'une chute de barres d'aborbants	83
6.3	Exemple de flux neutronique lors d'un balancement de croix	83
6.4	Flux simulés pour les trois voies de mesure, de formes identiques mais sur des étendues propres à chaque voie de mesure.	91
6.5	Estimation du flux neutronique sur la voie Impulsions par filtre de Kalman non adaptatif avec (en jaune et violet) ou sans (en vert) stabilisation de variance.	93
6.6	Estimation du flux neutronique sur la voie Impulsions par l'algorithme Variance Stabilized Adaptive Kalman Filter (VS-AKF) (échelle linéaire en haut et échelle logarithmique en bas). Les VST utilisées sont la transformée Mean Matching (3.13) (légendé MM-VST) et celle d'Anscombe.	94
6.7	Estimation du flux neutronique (voie Impulsions) : zooms sur des sous-parties du signal de la figure 6.6. Sur le zoom 1 et le zoom 3, les courbes MM-VST et Anscombe sont quasiment confondues.	94
6.8	Innovation du filtre de Kalman et statistiques $g^{(1)}$ et $g^{(2)}$ pour la voie Impulsions	95

6.9	Filtrage de signaux réels sur la voie Impulsions par filtre de Kalman non adaptatifs avec ou sans stabilisation de variance d'un signal réel en mode Impulsions lors d'une chute de barres (à gauche) et lors d'un balancement de croix (à droite); sans VST (courbe verte), combinée avec la MM-VST (courbe jaune), combiné avec la transformée d'Anscombe (courbe violette)	96
6.10	Filtrage de signaux réels par VS-AKF	96
6.11	Innovation de l'Adaptive Kalman Filter (AKF) sans VST et statistiques $g^{(1)}$ et $g^{(2)}$ pour la voie Impulsions lors de la chute de barres.	97
6.12	Innovation du filtre VS-AKF et statistiques $g^{(1)}$ et $g^{(2)}$ pour la voie Impulsions lors du balancement de croix.	97
6.13	Estimation du flux neutronique par l'AKF sur les signaux synthétiques en mode Fluctuations.	99
6.14	Estimation du flux neutronique par le filtre VS-AKF sur les signaux synthétiques en mode Fluctuations.	99
6.15	Estimation du flux neutronique par le VS-AKF sur les signaux synthétiques en mode Fluctuations : Zooms sur quatre portions du signal.	100
6.16	Innovations normalisées pour les filtres VS-AKF (courbe bleue) et AKF sans stabilisation de variance (courbe orange) (à gauche) et statistiques $g^{(1)}$ et $g^{(2)}$ pour une voie Fluctuations.	100
6.17	Données réelles d'une voie Fluctuations	101
6.18	Estimation du flux neutronique (voie Fluctuations) - Zooms sur quatre portions du signal	102
6.19	Innovations normalisées pour les filtres VS-AKF (courbe bleue) et AKF sans stabilisation de variance (courbe orange) (à gauche) et statistiques $g^{(1)}$ et $g^{(2)}$ pour les données réelles d'une voie Fluctuations de la figure 6.17a.	103
6.20	Filtrage des données synthétiques générées pour la voie Courant par le filtre de Kalman sans VST	104
6.21	Estimation du flux neutronique sur la voie Courant par VS-AKF.	105
6.22	Estimation du flux neutronique sur la voie Courant par le VS-AKF. Zoom sur quatre portions du signal de la figure 6.4c.	106
6.23	Innovations normalisées pour les filtres VS-AKF (courbe bleue) et AKF sans stabilisation de variance (courbe orange) (à gauche) et statistiques $g^{(1)}$ et $g^{(2)}$ correspondantes illustrant les instants d'adaptation du filtre sur les données synthétiques (voie Courant)	106
6.24	Comportement du filtre AKF sur les données réelles.	107
6.25	Zoom de la figure 6.24b.	108
6.26	Estimation du flux neutronique sur la voie Courant par le VS-AKF	108
6.27	Estimation du flux neutronique sur la voie Courant par le VS-AKF - Zooms	109
6.28	Innovations normalisées pour les filtres VS-AKF (courbe bleue) et AKF sans stabilisation de variance (courbe orange) (à gauche) et statistiques $g^{(1)}$ et $g^{(2)}$ illustrant les instants d'adaptation du filtre VS-AKF pour les données réelles de la figure 6.24a.	110
6.29	Méthodologie d'application des transformées stabilisatrices de variance pour les trois voies de mesure. Cette méthodologie s'appuie sur l'algorithme 5.	111

A.1	Lien entre le processus de Poisson et Shot Noise	119
C.1	Courrier électronique du 27 juin 2013 envoyé aux professeurs Alan Jeffrey et Dan Zwillinger.	131
C.2	Courrier électronique de réponse du 9 novembre 2013 de Dan Zwillinger.	132

Liste des tableaux

3.1	Quelques statistiques hétéroscédastiques et leurs transformations associées . . .	26
3.2	Quelques domaines d'application des transformées stabilisatrices de variance .	29
3.3	Transformées stabilisatrices de variance usuelles	35
5.1	Fonctions de variances associées à chaque voie de mesure	73
6.1	ARMSE et AMAE obtenues pour les quatre algorithmes sur la voie Impulsions.	93
6.2	ARMSE et AMAE obtenues pour les deux algorithmes AKF et VS-AKF sur la voie Fluctuations.	98
6.3	Erreurs moyennes pour les deux filtres obtenues pour $m = 10000$ tirages Monte-Carlo pour les données synthétiques 6.4c	105
C.1	Fonctions hyperboliques	135
C.2	Fonctions hyperboliques inverses	135
C.4	Liens entre fonction hyperboliques inverse et logarithmes	135
C.3	Relations entre fonctions hyperboliques inverses	136

Liste des Algorithmes

1	Filtre de Kalman	80
2	CUSUM	86
3	CUSUM bilatéral (Gustafsson, 2000, chap. 3, p. 67)	87
4	CUSUM Kalman Filter	88
5	Filtre de Kalman adaptatif proposé (VS-AKF)	89

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Objets de la thèse

Ce mémoire présente des travaux initiés en 2005 et menés entre 2006 et 2016 - de manière très discontinue - au Commissariat à l'Énergie Atomique de Saclay. Ils ont été retravaillés, complétés et étendus entre septembre 2020 et décembre 2023, également de manière discontinue (« hors temps de travail » ou « soirs et week-ends » ou en congés). Les travaux présentés dans ce manuscrit ¹ ont trouvé leurs origines dans des problèmes de mesures nucléaires.

Les mesures nucléaires ont pour but de détecter les caractéristiques des particules physiques, pour les compter et les identifier. Elles sont réalisées pour des problématiques très concrètes dans divers contextes scientifiques, techniques et industriels. Une de ces problématiques est centrale : il s'agit de quantifier l'intensité de sources de rayonnement (α , β , γ , selon les types de radioactivités ou particules concernées neutrons, électrons, muons, etc.), autrement dit de compter les particules incidentes sur un détecteur par unité de temps. C'est précisément le cas pour les mesures neutroniques réalisées de manière permanente pour le contrôle-commande des réacteurs nucléaires.

Étant donnée la structure de la matière et les phénomènes quantiques à l'œuvre en son sein, les outils théoriques permettant de décrire les observations mesurées s'appuient ainsi naturellement sur les probabilités, les processus aléatoires, et les statistiques. Parmi les processus aléatoires, les processus ponctuels, tels que le processus de Poisson, sont incontournables, car ils modélisent fidèlement les données observées issues des interactions entre particules et détecteurs.

Cette thèse est centrée sur le processus aléatoire dénommé Shot Noise, plus particulièrement ses deux premiers cumulants. Ces quantités constituent la base théorique sur laquelle la pratique des mesures neutroniques est fondée, car elles permettent d'accéder à l'intensité notée λ du processus, qui quantifie le nombre d'interactions des particules sur leur détecteur. Basées sur les données mesurées, des estimations de λ sont réalisées ; il est remarqué dans ce mémoire que les estimateurs concernés ont leur variance qui sont fonction de leur moyenne, propriété dénommée *hétéroscédasticité*, notion également centrale dans ce manuscrit et

1. D'autres travaux non présentés ici ont été menés dans la même lignée applicative de l'instrumentation nucléaire (et avec des contraintes similaires) plus particulièrement en spectrométrie X/γ et en imagerie médicale (tomographie par émission de positons) notamment. cf. §*Publications* p.3.

couplée à la *stabilisation de variance* et qui soulève les questions suivantes :

- Q.1** Est-il possible de rendre les variances des estimateurs des cumulants et de l'intensité du Shot Noise stable, indépendamment de leurs valeurs centrales respectives, en établissant des transformations adéquates ?
- Q.2** Cette démarche peut-elle s'appliquer aux grandeurs mises en jeu dans les mesures neutroniques dans l'optique de les débruiter ?

1.1.1 Plan de la thèse

Le premier chapitre de ce document présente une synthèse sur le processus stochastique appelé Shot Noise. Il appartient à la famille des processus ponctuels : dans ce cadre, il s'agit d'un processus de Poisson filtré et marqué. Ses propriétés sont rappelées et les quantités d'intérêt que sont les cumulants de celui-ci sont décrites, ainsi que certaines propriétés asymptotiques.

Le deuxième chapitre introduit la *Delta method* qui permet de construire les transformées stabilisatrices de variance (Variance Stabilizing Transform (**VST**)), comme premier élément de réponse à la question **Q.1**. Un panorama général est dressé. Les aspects théoriques de la *Delta method* et les théorèmes issus des statistiques asymptotiques sont rappelés. Quelques exemples illustratifs sont également présentés.

Les transformées stabilisatrices de variance pour les statistiques basées sur le premier et le deuxième cumulant du Shot Noise sont établies, ainsi que leur propriétés asymptotiques, dans le troisième chapitre, pour répondre à **Q.1**.

Les deux chapitres suivant adressent la question **Q.2**. Ainsi, le quatrième chapitre adresse la construction des transformées stabilisatrices de variance et leurs versions sans biais pour les mesures neutroniques.

Enfin, l'utilisation des transformées établies au chapitre précédent couplées à un filtre de Kalman adaptatif pour l'estimation du flux neutronique fait l'objet du cinquième et dernier chapitre.

1.2 Contributions

1.2.1 Transformées stabilisatrices de variance pour les estimateurs de l'intensité du Shot Noise

Il est remarqué que la variance des estimateurs des deux premiers cumulants sont fonction de leurs moyennes ; cette observation vaut également pour les deux estimateurs « plug-in » de l'intensité λ basés sur les deux estimateurs précédents ; cette propriété porte le nom d'*hétéroscédasticité*. Pour rendre cette variance indépendante de λ , des transformées de stabilisation de variance sont construites à partir de la *Delta Method* pour ces quatre estimateurs. Des « généralisations » de ces transformées sont établies pour les estimateurs utilisés en mesures neutroniques, pour les voies de mesure appelées « Fluctuation » et « Courant », qui sont basées sur ces mêmes statistiques. Le cas particulier de la voie « Impulsions » est également abordé avec une transformée de stabilisation de variance très connue, la transformée d'Anscombe.

1.2.2 Application aux mesures neutroniques

Les mesures neutroniques ont pour objet de quantifier l'intensité λ (liée à la puissance du réacteur nucléaire). La méthodologie de stabilisation est proposée pour :

- application de la transformée d'Anscombe et des transformées pré-citées pour le filtrage du flux neutronique,
- mise au point d'un filtre de Kalman adaptatif pour le débruitage des signaux de mesures neutroniques.

1.3 Publications

Le contenu de ce mémoire a fait l'objet des publications suivantes :

1.3.1 Article de revue / journal

T. Montagu et A. Ferrari, « Variance Stabilizing Transformations for Intensity Estimators of Shot Noise », *IEEE Signal Processing Letters*, t. 30, p. 977-981, juill. 2023.

1.3.2 Brevets

1. T. Montagu, « Procédé de filtrage d'un signal de flux neutronique temporel bruité et dispositif associé », FR2910689, juin 2008.
2. T. Montagu et M. Bakkali, « Method And Device For Processing Neutron Flux Signals, Associated Computer Program Product And Control System », WO2018220295 (A1), déc. 2018.

1.3.3 Rapports techniques

1. T. Montagu, « Estimation du flux neutronique par filtrage de Kalman sur une chaîne grande dynamique », Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives, rapp. tech. 17-0238, 2016.
2. T. Montagu, « Nouveaux procédés de filtrage du flux neutronique », Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives, rapp. tech. 17-0187, 2017.

1.4 Autres publications

D'autres publications sur des thématiques (connexes ou non du Shot Noise) dans les contextes de la spectrométrie γ , de la tomographie par émission de positons, de comptages de particules α/β , de l'électrocardiogramme, sont listées ici par ordre chronologique.

1.4.1 Conférences avec actes

1. L. Eglin, E. Barat, T. Montagu, T. Dautremer et J. Trama, « Ionizing radiation detection using jump markov linear systems », *IEEE/SP 13th Workshop on Statistical Signal Processing, 2005*, juill. 2005, p. 591-596.

2. E. Barat, T. Dautremer, L. Larivière, J. Lefèvre, T. Montagu et J. Trama, « ADONIS : a new system for high count rate HPGe γ -spectrometry », *2006 IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record*, t. 2, oct. 2006, p. 955-958.
3. T. Trigano, F. Roueff, E. Moulines, A. Souloumiac et T. Montagu, « Energy spectrum reconstruction for HPGe detectors using analytical pile-up correction », *2006 IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing Proceedings*, IEEE, t. 3, 2006.
4. E. Barat, C. Comtat, T. Dautremer, T. Montagu et R. Trebossen, « A nonparametric Bayesian approach for PET reconstruction », *2007 IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record*, IEEE, t. 6, 2007, p. 4155-4162.
5. R. Coulon, S. Normand, L. Barbot, T. Domenech, A.-M. Frelin, V. Kondrasovs, E. Barat, T. Montagu, T. Dautremer, J. Lefèvre et al., « Sodium Fast Reactors power monitoring using high resolution and high count rate gamma spectrometry. Simulation study », *2008 IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record*, IEEE, 2008, p. 973-977.
6. E. Barat, T. Dautremer, T. Montagu et S. Normand, « ADONIS: a new concept of X/ γ pulse analyzer », *Animma Conference Record*, t. 210, 2009, p. 2009.
7. R. Coulon, S. Normand, G. Ban, V. Dumarcher, H. P. Brau, L. Barbot, T. Domenech, V. Kondrasovs, G. Corre et A. M. Frelin, « Sodium fast reactor power monitoring using 20 F tagging agent », *2009 1st International Conference on Advancements in Nuclear Instrumentation, Measurement Methods and their Applications*, IEEE, 2009, p. 1-8.
8. R. Coulon, S. Normand, G. Ban, E. Barat, T. Montagu, T. Dautremer, H.-P. Brau, V. Dumarcher, J.-L. Portier, M. Michel et al., « Sodium fast reactor power monitoring and clad failure detection using ADONIS system », *2009 IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record (NSS/MIC)*, IEEE, 2009, p. 1378-1386.
9. R. Coulon, S. Normand, M. Michel, L. Barbot, T. Domenech, K. Boudergui, J.-M. Bourbotte, V. Kondrasovs, A.-M. Frelin-Labalme, H. Hamrita et al., « 20F Power Measurement for Generation IV Sodium Fast Reactors », *European Nuclear Conference*, 2010, p. 274-285.
10. R. Coulon, S. Normand, G. Ban, E. Barat, T. Montagu, T. Dautremer, H.-P. Brau, V. Dumarcher, M. Michel, L. Barbot et al., « Delayed gamma power measurement for sodium-cooled fast reactors », *Nuclear Engineering and Design*, t. 241, n° 1, p. 339-348, 2011.
11. P. Pin, E. Barat, T. Dautremer, T. Montagu et S. Normand, « ADONIS, high count-rate HPGe γ spectrometry algorithm: Irradiated fuel assembly measurement », *2nd International Conference on Advancements in Nuclear Instrumentation, Measurement Methods and their Applications*, juin 2011, p. 1-5.
12. D. Lazaro-Ponthus, E. Barat, C. Le Loirec, T. Dautremer, T. Montagu, D. Patin, L. Guérin et A. Batalla, « Prediction of high-resolution portal images for treatment verification in radiotherapy by coupling Monte Carlo simulations to non-parametric Bayesian denoising », *Third European Workshop on Monte Carlo Treatment Planning (EWG-MCTP 2012)*, 2012.
13. K. Boudergui, F. Lainé, T. Montagu, P. Blanc, A. Deltour et S. Mozziconacci, « An online change of activity in energy spectrum for detection on an early intervention ro-

bot », *2015 4th International Conference on Advancements in Nuclear Instrumentation Measurement Methods and their Applications (ANIMMA)*, IEEE, 2015, p. 1-3.

14. E. Rohée, R. Coulon, F. Carrel, T. Dautremer, E. Barat, T. Montagu, S. Normand et C. Jammes, « Qualitative and quantitative validation of the SINBAD code on complex HPGe gamma-ray spectra », *2015 4th International Conference on Advancements in Nuclear Instrumentation Measurement Methods and their Applications (ANIMMA)*, IEEE, 2015, p. 1-6.

1.4.2 Articles de revue / journal

1. E. Barat, T. Dautremer, T. Montagu et J.-C. Trama, « A bimodal Kalman smoother for nuclear spectrometry », *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, t. 567, n° 1, p. 350-352, 2006
2. T. Trigano, A. Souloumiac, T. Montagu, F. Roueff et E. Moulines, « Statistical pileup correction method for HPGe detectors », *IEEE Transactions on Signal Processing*, t. 55, n° 10, p. 4871-4881, 2007
3. T. Trigano, U. Isserles, T. Montagu et Y. Ritov, « Semiparametric curve alignment and shift density estimation: ECG data processing revisited », *Signal Processing*, IntechOpen, 2010
4. D. Lazaro, E. Barat, C. Le Loirec, T. Dautremer, T. Montagu, L. Guérin et A. Batalla, « Denoising techniques combined to Monte Carlo simulations for the prediction of high-resolution portal images in radiotherapy treatment verification », *Physics in Medicine & Biology*, t. 58, n° 10, p. 3433, 2013
5. T. Trigano, E. Barat, T. Dautremer et T. Montagu, « Fast digital filtering of spectrometric data for pile-up correction », *IEEE Signal Processing Letters*, t. 22, n° 7, p. 973-977, 2014
6. G. H. V. Bertrand, F. Sguerra, C. Dehe-Pittance, F. Carrel, R. Coulon, S. Normand, E. Barat, T. Dautremer, T. Montagu et M. Hamel, « Influence of bismuth loading in polystyrene-based plastic scintillators for low energy gamma spectroscopy », *Journal of Materials Chemistry C*, t. 2, n° 35, p. 7304-7312, 2014
7. E. Rohée, R. Coulon, F. Carrel, T. Dautremer, E. Barat, T. Montagu, S. Normand et C. Jammes, « Benchmark of the non-parametric Bayesian deconvolution method implemented in the SINBAD code for X/ γ rays spectra processing », *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, t. 836, p. 91-97, 2016

1.4.3 Brevets

1. E. Barat, T. Dautremer et T. Montagu, « Procédé d'analyse spectrométrique et dispositif apparenté », US2013197861 (A1), août 2013
2. T. Montagu, E. Barat et B. Monfort, « Method for detecting change of activity in area of energy spectrum », FR2985817, juill. 2013

3. E. Barat, C. Comtat, T. Dautremer, T. Montagu et R. Trebossen, « Method For Determining Functional Volumes For Determining Biokinetics », US2015134296 (A1), mai 2015
4. E. Barat, T. Dautremer et T. Montagu, « Spectrometric Analysis Method And Related Device », JP2016186489 (A), oct. 2018
5. R. Coulon, T. Montagu, V. Schoepf et S. Normand, « System For Measuring Radioactivity in a Gamma Background Noise », US2016231438 (A1), août 2016
6. T. Montagu et M. Bakkali, « Method And Device For Processing Neutron Flux Signals, Associated Computer Program Product And Control System », WO2018220295 (A1), déc. 2018

Chapitre 2

Le Shot Noise

Sommaire

2.1	Origines du Shot Noise	8
2.2	Définition	9
2.3	Fonctions caractéristiques du Shot Noise	13
2.4	Cumulants du Shot Noise	13
2.4.1	Estimateurs des cumulants : les k-statistiques et leurs variances . .	15
2.4.2	Variance des k-statistiques du Shot Noise	15
2.4.3	Propriétés asymptotiques des cumulants	16
2.5	Propriétés asymptotiques du Shot Noise	16
2.5.1	Gaussianité asymptotique du Shot Noise	16
2.6	Conclusion du chapitre	20

CE chapitre présente le processus aléatoire connu sous le nom de *Shot Noise* et ses propriétés principales. Une attention particulière est portée sur les cumulants qui sont au centre de l'application aux mesures neutroniques abordée aux chapitres 5 et 6.

2.1 Origines du Shot Noise

Les premières descriptions physiques du Shot Noise sont dues à (Campbell, 1939) précédé par (Schottky, 1918) (voir la traduction en anglais de ce dernier article (Schottky, 2018)) qui observent l'effet de "shot" (coups) - qu'on traduit en français par "bruit de grenaille", aussi appelé "bruit de Schottky" - de courants électroniques dans des tubes à vide ou de l'agitation thermique des électrons dans les résistances. Cet effet résulte de la superposition d'un grand nombre de « perturbations », c'est-à-dire de porteurs de charges élémentaires, qui surviennent de manière aléatoire¹. Voir également (Mack, 2018) pour l'histoire du Shot Noise.

Norman Campbell a observé les propriétés statistiques de tels bruits et établi que la valeur moyenne du courant $I(t)$ au cours du temps t est telle que

$$\bar{I}(t) = \lambda \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} h(t - t_k) \quad (2.1)$$

et que sa variance

$$\mathbb{E}[I(t) - \bar{I}(t)]^2 = \lambda \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} h^2(t - t_k) \quad (2.2)$$

où λ désigne le nombre moyen d'électrons arrivant sur l'anode chaque seconde et t_k est le temps d'arrivée du $k^{\text{ème}}$ électron sur le détecteur avec une réponse impulsionnelle h . Ces formules fondamentales ont donné le nom au théorème de Campbell. Une description mathématique très complète du Shot Noise est fournie par (Rice, 1977), qui rappelle les propriétés statistiques fondamentales du Shot Noise (cumulants, fonction de corrélation, spectre de Fourier). Le théorème de Campbell, établi pour les deux premiers moments d'ordre 1 (2.1) et 2 (2.2), a été généralisé à tout ordre, par (Rivlin, 1945). On le trouve également décrit dans les ouvrages de référence (Snyder, 1975), (Davenport et Root, 1987, chap. 7), (Papoulis, 1991), (Resnick, 2005), (Kingman, 1993), (Picinbono, 1993).

De nombreuses contributions théoriques et extensions ont découlé de la définition (2.3). Ainsi, le Shot Noise de Campbell et Shottky a été étendu de nombreuses manières : citons par exemple le Power Law Shot Noise (Lowen et Teich, 1990), (Petropulu, Golas et Vishwanathan, 1998), (Kutay et Petropulu, 2000) pour lequel la fonction $h(t)$ prend la forme particulière $h(t) = t^\beta$ (causale), utilisé pour modéliser le rayonnement Cherenkov en physique nucléaire. (Eliazar, 2007) considère des décroissances exponentielles aléatoires. (Picinbono, Bendjaballah et Pouget, 1970) considèrent un processus de Poisson composé pour les temps d'arrivées pour modéliser un tube photomultiplicateur. Les travaux de (On-Ching, Lugannani et Rice, 1978), (Gubner, 1996) et (Sequeira et Gubner, 1997) se concentrent sur l'estimation de la distribution de probabilité et de l'intensité du Shot Noise. (On-Ching, Lugannani et Rice, 1978) s'intéressent également à la distribution des marques. La densité spectrale de puissance du Shot Noise a fait l'objet d'études assez récentes (Brémaud et Massoulié, 2002), (Brémaud et Ridolfi, 2004a), (Brémaud et Ridolfi, 2004b), (Brémaud, Massoulié et Ridolfi, 2005), (Ridolfi, 2004), (Ridolfi et Win, 2006).

1. André Blanc-Lapierre a fondé l'étude des fonctions aléatoires et fait l'étude mathématique de l'effet de grenaille à travers un amplificateur linéaire dans sa thèse (Blanc-Lapierre, 1945).

Après les premières descriptions de bruits électroniques, le Shot Noise est devenu un processus aléatoire très général employé dans de nombreux domaines : en physique (photonique (Quinlan, Fortier, Jiang, Hati, Nelson, Fu, Campbell et Diddams, 2013), microélectronique (description des jonctions (De Jong et Beenakker, 1996), (Macucci et Marconcini, 2016) et plus largement la physique mésoscopique (Kobayashi et Hashisaka, 2021)), lithographie (Mack, 2018), ultrasons (Petropulu, Golas et Vishwanathan, 1998), (Kutay et Petropulu, 2000), (Zha et Qiu, 2006)) ainsi que dans de nombreux autres domaines (télécommunications (Charalambous et Menemenlis, 2001) (Charalambous, Djouadi et Kourtellaris, 2008) (Fontana, 2002) (Ridolfi, 2004), (Ridolfi et Win, 2006), (Koskinen, Tirronen et Virtamo, 2006), biologie (canaux ioniques) (Läuger, 1975), (Crouzy et Sigworth, 1993), neurobiologie (Fesce, Segal et Hurlbut, 1986), (Kawaguchi, Mino et Durand, 2006), (Brigham et Destexhe, 2015), (Privault, 2020), finance (Samorodnitsky, 1996), (Jang et Krvavych, 2004), (Schmidt, 2017)).

Les cumulants du Shot Noise sont utilisés en instrumentation nucléaire pour la mesure des signaux neutroniques permettant de piloter les réacteurs nucléaires. Cet usage sera spécifiquement abordé au chapitre 4. Des travaux basés sur les cumulants du Shot Noise appliqués aux mesures nucléaires ont été menés par (Ousi Benomar, 1994) pour la modélisation statistique d'un détecteur de neutrons (la chambre à fission) et des signaux qui en proviennent, (Trigano, 2006) pour le désempilement statistique d'impulsions, (Trigano, Sepulcre et Ritov, 2017) pour l'estimation de l'intensité par régression parcimonieuse et (Ilhe, 2016) pour l'estimation des marques.

2.2 Définition

Le signal (ou processus) du Shot Noise $X(t)$ au cours du temps t est représenté par

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k h(t - T_k) \quad (2.3)$$

où les termes u_k sont communément appelés les marques du processus, T_k sont les instants d'arrivée (dont le nombre suit la loi de Poisson de paramètre λ , appelé intensité ; voir Annexe A) des impulsions sur le détecteur et $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du système (détecteur, câble, électronique). Dans tout le document, h est supposée **causale** c'est-à-dire $h(t) = 0$ pour tout $t < 0$ et de support fini. Le triplet (intensité λ , densité des marques P_u , fonction h) caractérise complètement le processus aléatoire². À noter que la fonction h n'est pas nécessairement strictement positive : pour une instrumentation donnée, elle dépend du conditionnement analogique du signal et est donc continue. Suivant la nature des filtres utilisés, elle est du type passe-bas ou passe-bande.

Illustration Ce modèle est très fidèle aux signaux réels recueillis sur les chaînes de mesures neutroniques cf. les travaux de (Gwinn et Trenholme, 1963), (Baers, 1989), (Ousi Benomar,

2. Lorsque le processus des temps d'arrivée est le processus de Poisson, on trouve parfois l'appellation "Poisson Shot Noise". Lorsque le processus des temps d'arrivées est plus général que le processus de Poisson, i.e. un processus de renouvellement, certains auteurs parlent du Renewal Shot Noise (Jiwook Jang et Zhao, 2018). On rencontre également l'appellation Shot Noise exponentiel (exponential Shot Noise) qui désigne le Shot Noise pour $h(t)$ de forme exponentielle, à l'instar du Power Law Shot Noise mentionné précédemment. Le Power Law Shot Noise est parfois nommé Fractal Shot Noise.

1994), (Kropík et Matejka, 1999), (Pál, Pázsit et Elter, 2014). Selon l'intensité du processus de Poisson sous-jacent, et la forme de la fonction $h(t)$, le phénomène d'empilement (*pile-up* en anglais) des impulsions peut survenir : on peut observer des impulsions individuelles non empilées 2.1a, des impulsions individuelles qui peuvent parfois s'empiler³ (cf. figure 2.1b et 2.1c) , ou bien lorsque λ est très grand, des impulsions complètement empilées qu'on ne peut plus individualiser ou distinguer (cf. figure 2.1d)). Dans ce dernier exemple $\lambda = 5.10^7$, on peut de plus remarquer que le retour au niveau zéro ne se produit plus, contrairement aux trois autres cas. C'est bien entendu également le cas pour $\lambda \gtrsim 5.10^7$ et les voies *Fluctuation* et *Courant* des chaînes neutroniques en sont l'illustration pratique (cf. 4).

3. La prise en compte des empilements pour les mesures de spectrométrie ont fait l'objet de travaux spécifiques (Eglin, Barat, Montagu, Dautremer et Trama, 2005), (Barat, Dautremer, Larivière, Lefèvre, Montagu et Trama, 2006), (Pin, Barat, Dautremer, Montagu et Normand, 2011), (Trigano, Dautremer, Barat et Souloumiac, 2005), (Trigano, Souloumiac, Moulines et Roueff, 2005), (Trigano, 2006), (Trigano, Sepulcre, Tal et Mashlach, 2010), (Lopatin, Moskovitch, Trigano et Sepulcre, 2012), (Sepulcre, Trigano et Ritov, 2013), (Trigano, Gildin et Sepulcre, 2015), (Trigano, Barat, Dautremer et Montagu, 2015), (Trigano, Sepulcre et Ritov, 2017) permettant de réaliser des mesures spectrométriques pour $0 < \lambda \lesssim 2.10^6$ coups par secondes, l'état de l'art industriel plafonnant à 5.10^5 .

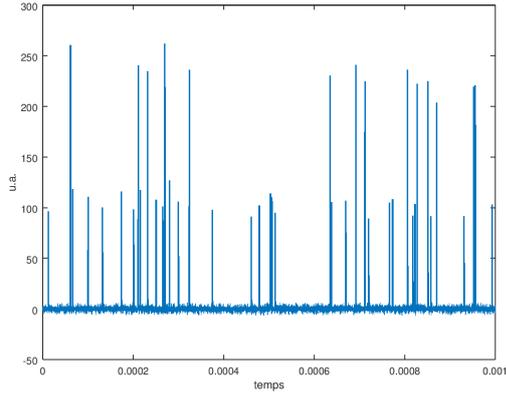
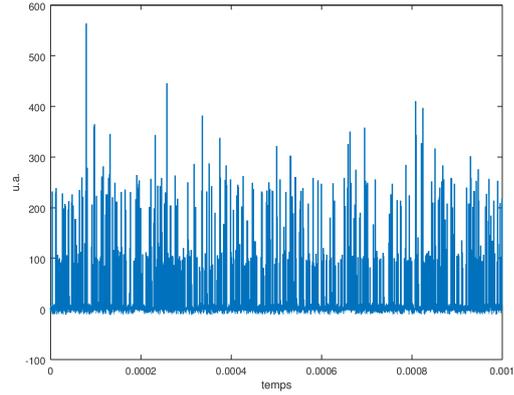
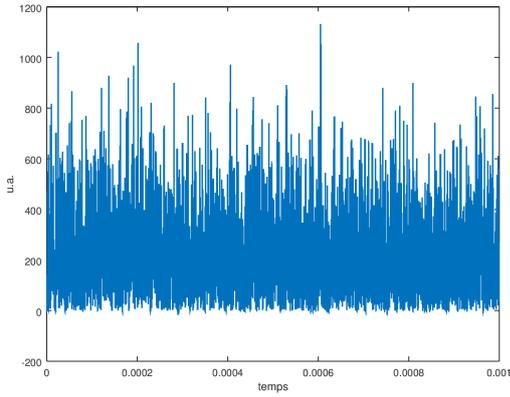
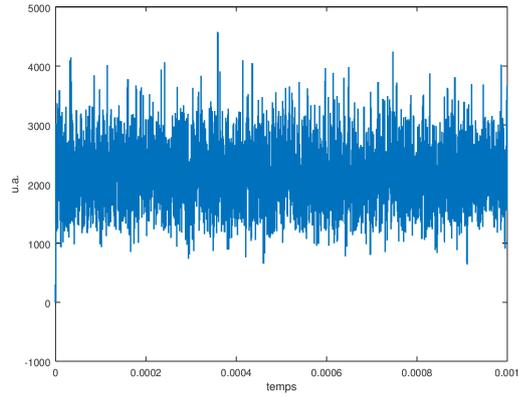
(a) Shot Noise d'intensité $\lambda = 5 \cdot 10^4$.(b) Shot Noise d'intensité $\lambda = 5 \cdot 10^5$.(c) Shot Noise d'intensité $\lambda = 5 \cdot 10^6$.(d) Shot Noise d'intensité $\lambda = 5 \cdot 10^7$.

FIGURE 2.1 – Trajectoires simulées de Shot Noise d'intensités différentes échantillonnées à 10 MHz. La fenêtre temporelle d'observation est de 10^{-3} secondes. Les marques sont générées selon un mélange de lois gaussiennes $0.7\mathcal{N}(100, 10^2) + 0.3\mathcal{N}(225, 20^2)$. La réponse impulsionnelle est de la forme $h(t) = t^{1/3}e^{-t}$, $h = 0$ pour tout $t \leq 0$.

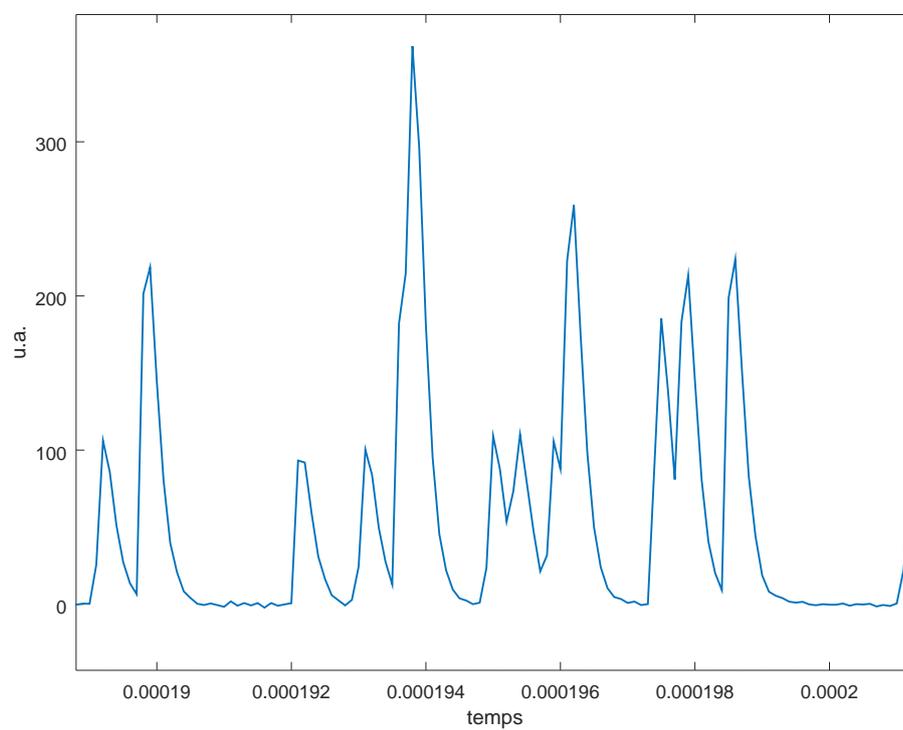


FIGURE 2.2 – Empilements des impulsions : ils surviennent aléatoirement et impliquent deux impulsions ou plus (zoom de la figure 2.1a).

2.3 Fonctions caractéristiques du Shot Noise

La fonction caractéristique ϕ_X d'un processus aléatoire X indexé par le temps t est par définition

$$\phi_X(t, \nu) \triangleq \mathbb{E}[\exp i\nu X(t)], \quad (2.4)$$

à partir de laquelle on obtient les moments du processus selon

$$\mathbb{E}[X(t)^n] = (-i)^n \phi_X^{(n)}(0). \quad (2.5)$$

La seconde fonction caractéristique est par définition le logarithme de l'équation (2.4)

$$\Psi_X(t, \nu) \triangleq \ln \left(\mathbb{E} \left[e^{i\nu X(t)} \right] \right), \quad (2.6)$$

à partir de laquelle on obtient les cumulants d'un processus :

$$\kappa_n^X(t) = (-i)^n \frac{d^n \Psi_X(\nu)}{d\nu^n} \Big|_{\nu=0}. \quad (2.7)$$

Pour le Shot Noise $X(t)$, $t \geq t_0$ inhomogène, c'est-à-dire dont l'intensité varie au cours du temps – autrement dit non stationnaire –, celle-ci s'écrit (Snyder, 1975)

$$\Psi_X(\nu) = \int_0^{+\infty} f_U(u) \int_{t_0}^T \lambda(\tau) \left(e^{i\nu \int_{t_0}^T h(s-\tau) dv(s)} - 1 \right) d\tau du, \quad (2.8)$$

où $f_U(u)$ est la distribution des marques et $v(\cdot)$ est une fonction réelle arbitraire.

Lorsque l'intensité ne dépend pas du temps $\lambda(t) = \lambda$ (processus stationnaire), la formule devient

$$\Psi_X(\nu) = \lambda \int_0^{+\infty} f_U(u) \int_{t_0}^T \left(e^{i\nu \int_{t_0}^T h(s-\tau) dv(s)} - 1 \right) d\tau du. \quad (2.9)$$

Remarque Les fonctions caractéristiques du Shot Noise sont les fonctions permettant de décrire complètement le processus et les quantités qui en découlent (moments et cumulants) car elles peuvent s'écrire simplement. En revanche, la distribution de probabilité du Shot Noise et sa fonction de répartition n'ont pas de formes connues, et les estimateurs découlant de la vraisemblance ne sont donc pas accessibles. Une exception notable est donnée par (Bondesson, 2014) dans le cas du Shot Noise avec une réponse impulsionnelle exponentielle. Les travaux de (Gubner, 1996) s'intéressent notamment à l'estimation de la densité de probabilité du Shot Noise. (Ilhe, Moulines, Roueff et Souloumiac, 2015) cherchent à estimer la loi des marques pour le Shot Noise avec h de forme exponentielle basé sur la seconde fonction caractéristique empirique.

2.4 Cumulants du Shot Noise

À partir de la seconde fonction caractéristique (2.6), on obtient les cumulants, construits comme étant les dérivées à tout ordre en zéro de Ψ_X , qui ont pour expression générale

$$\kappa_n(t) = \mathbb{E}[u^n] \int_0^{+\infty} \lambda(\tau) h^n(t - \tau) dt \quad (2.10)$$

et en particulier à l'ordre 1

$$\kappa_1(t) = \mathbb{E}[u] \int_0^{+\infty} \lambda(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (2.11)$$

et à l'ordre 2

$$\kappa_2(t) = \mathbb{E}[u^2] \int_0^{+\infty} \lambda(\tau) h^2(t - \tau) dt. \quad (2.12)$$

La covariance a pour expression

$$\text{Cov}[X(t_1), X(t_2)] = \mathbb{E}[(X(t_1) - \kappa_1)(X(t_2) - \kappa_1)] = \mathbb{E}[u^2] \int_0^{+\infty} \lambda(\tau) h(t_1 - \tau) h(t_2 - \tau) d\tau. \quad (2.13)$$

Pour un Shot Noise stationnaire, on peut remarquer qu'ils sont proportionnels à l'intensité du processus de Poisson λ , à tout ordre n , au moment d'ordre n des marques, et à l'intégrale de la réponse impulsionnelle h à la puissance n .

$$\kappa_n = \lambda \mathbb{E}[u^n] \int_0^{+\infty} h^n(t) dt \quad (2.14)$$

Le cumuland d'ordre 1,

$$\kappa_1 = \lambda \mathbb{E}[u] \int_0^{+\infty} h(t) dt \quad (2.15)$$

n'est autre que la moyenne du Shot Noise et le cumuland d'ordre 2

$$\kappa_2 = \lambda \mathbb{E}[u^2] \int_0^{+\infty} h^2(t) dt \quad (2.16)$$

est la variance. On peut également exprimer la covariance du Shot Noise qui est telle que

$$\text{Cov}[X(t), X(t + \tau)] = \mathbb{E}[(X(t) - \kappa_1)(X(t + \tau) - \kappa_1)] = \lambda \mathbb{E}[u^2] \int h(t) h(t + \tau) dt. \quad (2.17)$$

On retrouve bien κ_2 pour $\tau = 0$. Ces équations découlent directement du théorème de Campbell⁴ introduit précédemment (équations (2.1) et (2.2)). Les estimateurs correspondant à ces grandeurs théoriques sont rappelés dans la section suivante. Ils serviront à établir les estimateurs correspondants aux trois voies de mesure d'une chaîne neutronique au chapitre 6.

On peut souligner que ce processus est stationnaire si l'intensité du processus de Poisson $\lambda(t)$ est constante au cours du temps et que la fonction $h(t)$ est de forme fixe⁵.

4. L'expression (2.1) est parfois nommée Premier théorème de Campbell et l'expression (2.2) est parfois nommée second théorème de Campbell dans la littérature des chaînes de mesures neutroniques. Selon les auteurs, le théorème de Campbell désigne soit, l'une soit les deux équations, soit les formes généralisées (2.10) (2.14)

5. Autrement dit, du point de vue instrumental, la réponse impulsionnelle reste la même.

Remarque Pour les mesures neutroniques introduites au chapitre 5, on cherche à estimer une intensité qui varie au cours du temps (elle est fonction de la puissance fournie par le cœur du réacteur), la fonction h déterminée par l'électronique d'acquisition et les moments des marques - dépendant des interactions entre les neutrons interagissant avec leur détecteur pour une énergie donnée - étant considérés fixes.

2.4.1 Estimateurs des cumulants : les k-statistiques et leurs variances

2.4.1.1 k-statistiques

Les expressions des estimateurs des cumulants et de leurs variances respectives sont basées sur les *k-statistiques* (Kendall, 1945, chap. 11), (Kenney et Keeping, 1953, §7.9, pp. 99), (Kenney et Keeping, 1954, §7.18, pp. 190). (Halmos, 1946) a démontré qu'elles sont de variance minimale.

Les *k-statistiques* donnent les expressions d'estimateurs non biaisés des cumulants. Ainsi, on a

$$\mathbb{E}[\hat{\kappa}_r] = \kappa_r$$

Avec les notations suivantes,

- s_r est la somme des réalisations x_i supposées indépendantes à la puissance r , $s_r = \sum_{i=1}^n x_i^r$
- κ_r est le cumulants d'ordre r ,
- $\hat{\kappa}_r$ son estimation sur n réalisations indépendantes,

Pour les deux premiers cumulants, on a

$$\hat{\kappa}_1 = \frac{1}{n} s_1 \text{ et } \text{Var}[\hat{\kappa}_1] = \frac{\kappa_2}{n} \quad (2.18)$$

$$\hat{\kappa}_2 = \frac{n}{n-1} \left(\frac{-s_1^2}{n^2} + \frac{s_2}{n} \right) \text{ et } \text{Var}[\hat{\kappa}_2] = \frac{\kappa_4}{n} + \frac{2\kappa_2^2}{n-1} \quad (2.19)$$

Grâce à ces formules d'estimation et le théorème de Campbell (2.14), on peut établir les variances des estimateurs des cumulants du Shot Noise. Pour éviter une surcharge des formules, on pose $u_i = \mathbb{E}[u^i] \int h^i(t) dt$, $i = 1, \dots$. Ces grandeurs u_i sont supposées connues.

2.4.2 Variance des k-statistiques du Shot Noise

Expression de la variance de $\hat{\kappa}_1$ En remplaçant le terme κ_r pour $r = 2$ dans (2.10), on obtient

$$\text{Var}[\hat{\kappa}_1] = \lambda \frac{(\mathbb{E}[u^2] \int h^2(t) dt)}{n} \quad (2.20)$$

$$= \frac{u_2}{n} \lambda \quad (2.21)$$

$$= \frac{u_2}{u_1 n} \kappa_1 \quad (\text{d'après 2.15}) \quad (2.22)$$

La variance du cumulants d'ordre 1 du Shot Noise est donc proportionnelle à l'intensité.

Expression de la variance de $\hat{\kappa}_2$ En remplaçant les termes κ_r pour $r = 2, 4$ dans l'expression (2.19), on obtient

$$\text{Var}[\hat{\kappa}_2] = \frac{2u_2^2}{n-1}\lambda^2 + \frac{u_4}{n}\lambda \quad (2.23)$$

$$= \frac{2}{n-1}\kappa_2^2 + \frac{u_4}{u_2 n}\kappa_2 \quad (\text{d'après 2.16}) \quad (2.24)$$

La variance du cumulante d'ordre 2 du Shot Noise varie donc selon un polynôme d'ordre 2 de l'intensité.

2.4.3 Propriétés asymptotiques des cumulants

Des résultats de gaussianité asymptotique peuvent être consultés dans les travaux de (Dandawate et Giannakis, 1993) et (Dandawate et Giannakis, 1995). De plus, (Prasad et Menicucci, 2004) ont établi les bornes de Cramer-Rao pour les k -statistiques

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\kappa}_1) &= \frac{\sigma^2}{n} \\ \text{Var}(\hat{\kappa}_2) &\gtrsim \frac{2\sigma^4}{n} \end{aligned} \quad (2.25)$$

qui montrent que $\hat{\kappa}_1$ est efficace pour tout n . $\hat{\kappa}_2$ est asymptotiquement efficace (propriété symbolisée par le symbole \gtrsim) lorsque $n \rightarrow \infty$.

2.5 Propriétés asymptotiques du Shot Noise

Les études théoriques sur le Shot Noise se concentrent sur divers types de convergences asymptotiques. La normalité asymptotique a été établie par (Roberts, 1966). Lorsque le processus de comptage sous-jacent n'est plus indépendant identiquement distribué (iid) comme dans le cas du processus de Poisson, le Shot Noise peut converger vers des processus non gaussiens. Pour des Shot Noise non négatifs ($h(t) > 0$), (Tamborrino et Lansky, 2021) établissent la convergence vers des processus d'Ornstein-Uhlenbeck non gaussiens. Selon la forme de la fonction h , la propriété de dépendance à long terme peut apparaître et le Shot Noise se retrouve alors lié au mouvement brownien fractionnaire et aux processus à longues dépendances (voir (Fay, Roueff et Soulier, 2007), (Ramirez-Perez et Serfling, 2001), (Eliazar et Klafter, 2009)); les travaux de (Baccelli et Biswas, 2015) et (Pang et Taqqu, 2019) ont établi ces liens pour le Power-Law Shot Noise. Un panorama des liens du Shot Noise avec les distributions stables peut être appréhendé dans (Bondesson, 2014). Plus largement, (Barndorff-Nielsen, Resnick et Mikosch, 2001) utilisent le Shot Noise pour la description des processus de Lévy et leur simulation (voir aussi (Yuan et Kawai, 2021)).

Dans cette section sont rassemblés divers résultats de convergences asymptotiques (loi forte des grands nombres, théorèmes centraux limite) concernant le Shot Noise stationnaire ($\lambda(t) = \lambda$) pour $\lambda \rightarrow \infty$ et pour $n \rightarrow \infty$.

2.5.1 Gaussianité asymptotique du Shot Noise

Une propriété d'intérêt premier pour les signaux considérés dans le chapitre 4 est la normalité asymptotique lorsque $\lambda \rightarrow \infty$. En repartant des articles de (Roberts, 1966) et

(Rice, 1977), la fonction caractéristique s'écrit, par définition,

$$\phi_X(\nu) = \mathbb{E} \left\{ e^{i\nu X} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu x} P_X(x) dx \quad (2.26)$$

et on obtient la loi de probabilité P_X par la transformée de Fourier inverse

$$P_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu x} \phi(\nu) d\nu. \quad (2.27)$$

Par ailleurs, on peut exprimer la seconde fonction caractéristique explicitement en fonction des cumulants

$$\ln \phi_X(\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_n}{n!} (i\nu)^n. \quad (2.28)$$

En remplaçant (2.28) dans l'argument de l'exponentielle de (2.27), il vient

$$P_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-i\nu x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_n}{n!} (i\nu)^n \right] d\nu. \quad (2.29)$$

Par intégration terme à terme de la série

$$\begin{aligned} P_X &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\nu \kappa_2)^n \exp \left[-i\nu \kappa_2 x - \frac{\nu^2 \kappa_2}{2} \right] d\nu \\ &= (i\nu \kappa_2)^n \kappa_2^{-1} \xi^n(x) \end{aligned} \quad (2.30)$$

où on a posé $x = \frac{X - \kappa_1}{\kappa_2^{1/2}}$ et $\xi^{(n)}$ sont les fonctions de base (dérivées à tout ordre de la densité gaussienne)

$$\xi^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^n}{d\alpha^n} \left[\exp \left(-\frac{\alpha^2}{2} \right) \right] \quad (2.31)$$

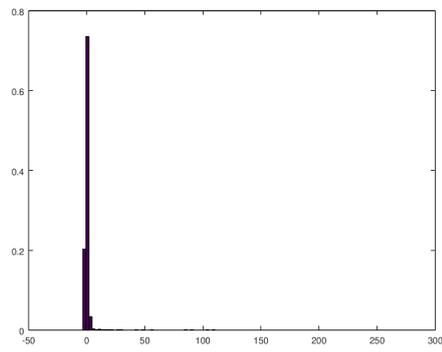
En développant l'intégrale en série (et constituant ainsi un développement de Edgeworth), on obtient

$$\begin{aligned} P_X(x) &= \frac{\xi^{(0)}}{\kappa_2^{1/2}} - \frac{\kappa_3 \xi^{(3)}}{3! \kappa_2^2} + \left[\frac{\kappa_4 \xi^{(4)}}{4! \kappa_2^{5/2}} + \frac{\kappa_3 \xi^{(6)}}{6! \kappa_2^{7/2}} \right] \\ &\quad - \left[\frac{\kappa_5 \xi^{(5)}}{5! \kappa_2^3} + \frac{35 \kappa_3 \kappa_4 \xi^{(7)}}{7! \kappa_2^4} + \frac{280 \kappa_3^3 \xi^{(9)}}{9! \kappa_2^5} \right] \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (2.32)$$

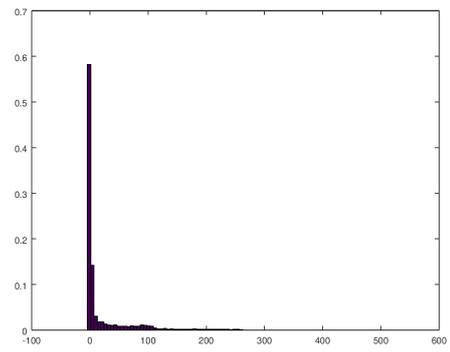
dont le premier terme est la loi normale pondérée par $1/\sqrt{\lambda}$ et les termes suivants tendent plus rapidement vers zéro lorsque $\lambda \rightarrow \infty$.

On peut appréhender cette propriété par la simulation de trajectoires et en traçant l'histogramme correspondant à chaque trajectoire simulées précédemment figure 2.1. On peut remarquer que la gaussienne se dessine assez lentement, ce qui suppose que les retours à zéro du processus soient très peu probables.

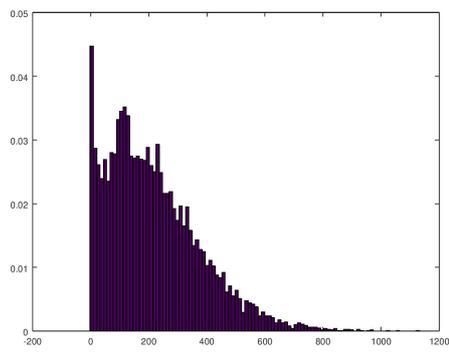
Un autre théorème de convergence a été établi par (Papoulis, 1971) pour un Shot Noise non homogène et non marqué (c'est-à-dire sans les termes u_k dans l'équation (2.3)) :



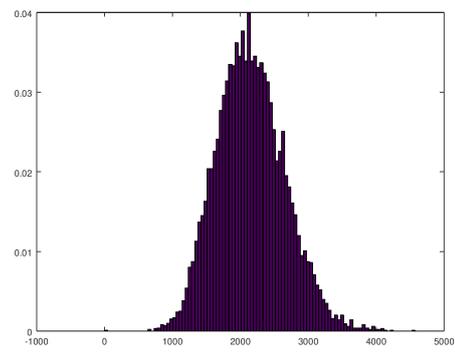
(a) $\lambda = 5 \cdot 10^4$



(b) $\lambda = 5 \cdot 10^5$



(c) $\lambda = 5 \cdot 10^6$



(d) $\lambda = 5 \cdot 10^7$

FIGURE 2.3 – Histogrammes des trajectoires de Shot Noise d'intensités différentes (tracés à partir des trajectoires de la figure 2.1).

Théorème 2.5.1. *Soit $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$ un Shot Noise tel que $X(t) = \sum_{T_k: T_k \leq t} h(t, T_k)$ où les T_k sont des instants issus d'un processus de Poisson inhomogène⁶ de paramètre $\lambda(t)$ pour une fonction h réelle et causale*

$$\tilde{X}(t) := \frac{X(t) - \kappa_1(t)}{\sqrt{\kappa_2(t)}} \quad (2.33)$$

Soit F la fonction de répartition de $\tilde{X}(t)$ et G la fonction de répartition d'une variable aléatoire centrée réduite. Si $\int_{\mathbb{R}} |h|^3(t) dt < \infty$, alors

$$|F(x, t) - G(x)| < \frac{4}{3} \left(\frac{2\pi \left(\int_{\mathbb{R}} \lambda(\tau) |h(t, \tau)|^3 dt \right)^2}{\left(\int_{\mathbb{R}} \lambda(\tau) |h(t, \tau)|^2 dt \right)^3} \right)^{1/2}. \quad (2.34)$$

Ce théorème montre la convergence du Shot Noise centré et réduit vers une loi gaussienne centrée réduite. En considérant le cas particulier où $\lambda(t) = \lambda$ et $h(t, \tau) = h(t - \tau)$ pour tout $t, \tau \in \mathbb{R}$, on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - G(x)| \leq \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \frac{\int_{\mathbb{R}} |h|^3(t) dt}{\left(\int_{\mathbb{R}} |h|^2(t) dt \right)^{3/2}}. \quad (2.35)$$

La convergence est en $\lambda^{-1/2}$.

Enfin, lorsque le système est à bande limitée, c'est-à-dire lorsque la fonction de transfert $H(\omega)$ est nulle au delà d'une certaine pulsation de coupure ω_c et que $\lambda(t) = \lambda$, (Papoulis, 1971) a également montré que

$$|F(x) - G(x)| \leq \frac{4}{3} (2\omega_c/\lambda)^{1/2} < 2 (\omega_c/\lambda)^{1/2}. \quad (2.36)$$

Il en résulte que $F(x)$ converge vers une loi normale centrée réduite si $\omega_c/\lambda \rightarrow 0$ quelle que soit la forme de $h(t)$. (Heinrich et Schmidt, 1985, sec. 3) ont étendu ce résultat pour le Shot Noise de réponse impulsionnelle h et de distribution de marques U indépendantes lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$ au cas multidimensionnel.

(Lund, McCormick et Xiao, 2004) ont établi les théorèmes suivants pour un Shot Noise stationnaire échantillonné

Théorème 2.5.2 (Loi forte des grands nombres). *Pour un Shot Noise $X_t, t \geq 0$ avec $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\int_0^\infty |h(u)| du < \infty$, alors*

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda \mathbb{E}[X] \int_0^\infty h(u) du \quad \text{presque sûrement}$$

Théorème 2.5.3 (Théorème central limite). *Pour un Shot Noise $X_t, t \geq 0$ avec $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ et h non dégénérée et $\int_0^\infty u |h(u)| du < \infty$, alors*

$$\frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n]}{\sqrt{\text{Var}[\bar{X}_n]}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1)$$

6. c'est-à-dire dépendant du temps, ou bien, autrement dit, non stationnaire.

2.6 Conclusion du chapitre

Après avoir rappelé le modèle du Shot Noise et le théorème de Campbell établissant les cumulants à tout ordre, nous avons montré que les estimateurs des cumulants du Shot Noise - basés sur les k-statistiques, qui sont des estimateurs non biaisés - présentent une variance qui est fonction de l'intensité λ du processus de Poisson sous-jacent. Cette propriété d'hétéroscédasticité de ces statistiques sera prise en compte au chapitre 4 pour estimer le flux neutronique. Par ailleurs, les résultats de convergence asymptotiques lorsque $\lambda \rightarrow \infty$ ont également été rappelés. Cette propriété est prise en compte grâce aux transformées stabilisatrices de variance (qui permettent de rendre la variance "stable", c'est-à-dire constante). Celles-ci sont introduites dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Transformées Stabilisatrices de Variance

Sommaire

3.1	Introduction	22
3.1.1	Bref historique	23
3.1.2	Une propriété connexe	24
3.1.3	Travaux récents	24
3.1.4	Usages et applications	26
3.2	Fondements de la stabilisation de variance	31
3.2.1	Méthode « Delta »	31
3.2.2	Théorèmes fondamentaux	32
3.3	Exemples illustratifs	33
3.3.1	Loi de Poisson	33
3.3.2	Moyenne de la loi de Poisson	33
3.3.3	Lois gamma, exponentielle, et χ^2	34
3.4	Formes générales des VST et de leurs inverses	35
3.5	Biais des transformations	36
3.5.1	Généralités	36
3.5.2	Biais de la transformée d'Anscombe	37
3.5.3	Autres approches	38
3.5.4	VST corrigée du biais	39
3.6	Conclusion du chapitre	39

DANS ce chapitre sont abordées les transformées stabilisatrices de variance (en anglais, variance stabilizing transform (abrégé VST dans tout ce mémoire)) et les notions de statistique asymptotique sur lesquelles elles sont fondées.

3.1 Introduction

Transformer les données est une tâche très commune dans les sciences et l'ingénierie : les transformées de Laplace et Fourier, par exemple - pour ne citer qu'elles - sont des outils incontournables en physique, automatique, traitement du signal et des images et en statistiques. Elles permettent, par exemple, de représenter les données sur des bases (de Fourier ou d'ondelettes, par exemple) présentant un intérêt pour l'interprétation d'un phénomène observé ou d'un modèle (cf. par exemple (Vidakovic, 1999)). Dans le domaine des statistiques, selon (Ruppert, 2001), transformer des données a en général pour objectif(s) :

1. d'induire une relation simple entre la variable observée et la/les variable(s) prédictrice(s) dans les tâches de régression,
2. de stabiliser la variance, c'est-à-dire rendre la variance constante (par rapport à un paramètre de la loi initiale) pour appliquer des tests statistiques ou effectuer une régression,
3. d'induire une distribution particulière des données, typiquement gaussienne ou symétrique.

Parmi ces buts recherchés, le deuxième peut s'appliquer dans le traitement des signaux (ou images) présentant une variance signal-dépendante, et consiste à transformer ce signal dont la variance n'est pas constante pour modifier cette propriété statistique et la rendre constante, par exemple par rapport à sa moyenne : il s'agit d'une transformée stabilisatrice de variance.

Le problème de la stabilisation de variance s'énonce simplement : pour une variable aléatoire X , il s'agit de trouver une fonction \mathcal{T} telle que la variable aléatoire transformée $\mathcal{T}(X)$ soit de variance constante. Cette fonction \mathcal{T} est appelée transformée stabilisatrice de variance, et rend la variance conditionnelle indépendante du paramètre de la loi initiale ; en termes statistiques la variable aléatoire $\mathcal{T}(x)$ devient *homoscédastique*¹ (c'est-à-dire de variance constante) par opposition à la variable X dite *hétéroscédastique* (c'est-à-dire de variance variable). Par extension, un signal dont la variance varie en fonction du signal lui-même deviendra un signal de variance constante (stable ou stabilisée) après application d'une transformée stabilisatrice de variance (Variance Stabilizing transform, **VST**, en anglais). Autrement dit, une transformation « bien choisie » de certaines quantités aléatoires – variables aléatoires elles-mêmes ou statistiques d'échantillons – permet de stabiliser la variance².

L'intérêt pratique de trouver une telle fonction est d'appliquer sur le signal transformé un très grand nombre d'algorithmes élaborés dans le cadre de modèles faisant l'hypothèse d'une variance constante. Cette hypothèse est typiquement faite pour les problèmes de régression (linéaire ou non), où on suppose classiquement que les données sont entachées d'un bruit blanc gaussien additif de variance constante connue. Une application préalable d'une VST permet de se ramener à ce cadre théorique usuel.

1. Vient du grec ancien $\sigma\kappa\epsilon\delta\alpha\sigma\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma$, *skedasticos*, qui peut être dispersé ou dissipé.

2. Un lien pourra être établi avec la transformée de Lamperti utilisée pour rendre stationnaire certains processus aléatoires générés par les équations différentielles stochastiques correspondantes, cf. (Iacus, 2008, sec. 1.11, p.40).

3.1.1 Bref historique

La première transformée de stabilisation de variance est usuellement³ attribuée à (Fisher, 1915) pour le coefficient de corrélation (de Pearson) ρ , cf. (Hotelling, 1953) pour une étude complète. Il s’agit de la \mathcal{Z} -transformée de Fisher (Anderson, 2003, chap. 4) qui prend la forme suivante :

$$\mathcal{Z}(\rho) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \rho}{1 - \rho} \right) = \tanh^{-1} \rho. \quad (3.1)$$

Les suivantes ont été introduites pour des variables aléatoires discrètes modélisées par la loi de Poisson (fonction racine carrée) et la loi binomiale (fonction arcsinus) (Tippett, 1934, Appendix III)⁴, (Bartlett, 1936), (Curtiss, 1943), (Anscombe, 1948), et la loi binomiale négative (Anscombe, 1948). Pour ces variables aléatoires, la variance est en effet une fonction de l’espérance μ . Typiquement, pour la loi de Poisson $\mathcal{P}_X(\mu)$ de paramètre μ , espérance et variance sont égales

$$\mathbb{E}[X] = \text{Var}[X] = \mu$$

et la VST établie par (Anscombe, 1948) est une transformée où \mathcal{T} est la racine carrée

$$\mathcal{A}(x) = 2\sqrt{x + \frac{3}{8}}, \quad x \geq 0 \quad (3.2)$$

où x est la réalisation de la variable aléatoire $Y \sim \mathcal{P}$ qui suit la loi de Poisson (cf. annexe B).

Une (autre) transformation incontournable a été introduite par (Box et Cox, 1964) :

$$\mathcal{BC}(x, \nu) = \begin{cases} \frac{x^\nu - 1}{\nu}, & \nu \neq 0 \\ \ln(x), & \nu = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Pour $\nu = 1/2$, on retrouve bien sûr la transformée en racine carrée. Pour $\nu \neq 0$, la transformée en puissance y^ν est décalée et réduite, et telle qu’elle converge vers $\ln y$ lorsque ν tends vers 0. Elle constitue ainsi une famille englobant les fonctions de puissance, racine carrée et logarithmique introduites antérieurement par (Wilson et Hilferty, 1931), (Bartlett, 1936), (Bartlett, 1947).

Toutes ces transformées sont initialement développées et utilisées pour se ramener à un modèle connu et pour lesquelles les tables de calcul (de l’époque) sont disponibles : le modèle gaussien de variance constante. Il était alors plus aisé - au vu des moyens de calcul de l’époque - de fournir un intervalle de confiance ou de réaliser un test statistique après avoir appliqué une telle transformation. Cet usage de se ramener au modèle gaussien homoscedastique perdure encore aujourd’hui (cf. l’ouvrage de (Kulinskaya, Morgenthaler et Staudte, 2008) où les VST sont utilisées pour les statistiques de test. Le §3.1.3 détaille un peu plus les usages actuels.

3. Les travaux de (Gorroochurn, 2020) pointent toutefois vers un écrit de Roger Cotes en 1722 et un autre de Carl Friedrich Gauss en 1809.

4. Les données modélisées sont des comptages effectués dans l’industrie textile. (Tippett, 1934) cite en note de bas de page la transformée de Fisher pour le coefficient de corrélation. (Beall, 1942) transforme des données agronomiques (nombres d’insectes en fonction de l’insecticide) et introduit une transformée arcsinus hyperbolique.

3.1.2 Une propriété connexe

De nombreux auteurs font mention d'une propriété supplémentaire liée à l'application d'une VST : les données transformées se répartissent selon la loi gaussienne (*gaussianization* ou *normalization* en anglais). Cette propriété émane du théorème 3.2.1, introduit plus loin §3.2.2. (Efron, 1982) cite ainsi la \mathcal{Z} -transformée de Fisher et la transformée d'Anscombe : « Fisher's transformation for the correlation coefficient is stabilizing as well as normalizing. [...] The \tanh^{-1} transformation produces nearly stable variance as well as normality. For other families (of transformation) there is tension between the twin goals of stabilization and normalization. For example, in the Poisson family, $\sqrt{x + 3/8}$ is an excellent variance stabilizer, while $x^{2/3}$ is an excellent normalizer ». Ces travaux établissent d'une part des critères théoriques reliant les divers types de transformées entre elles, et les liens existant entre stabilisation de variance et gaussianisation d'autre part. On pourra aussi utilement se reporter aux travaux de (Carroll, 1980), (Chen et Deo, 2004), (Cai, 2019) et aux ouvrages (Carroll et Ruppert, 1988), (McCullagh et Nelder, 1989)⁵.

3.1.3 Travaux récents

Les premières VST développées entre [1930 - 1960] ont été améliorées en termes de performances et étendues (ajout de paramètre(s) tenant compte de diverses natures de données) : (Murthagh, Starck et Bijaoui, 1995), généralisent ainsi la transformée d'Anscombe en prenant en compte un bruit gaussien se superposant au processus de Poisson et (Zhang, Fadili et Starck, 2006), (Zhang, 2007, chap. 5, sec. 5.3), (Zhang, Fadili et Starck, 2008) prennent en compte des données Poisson et des données Poisson filtrées auxquelles s'ajoute un bruit gaussien (la VST est nommée Generalized Anscombe Transform (GAT)). En régression non-paramétrique par transformée en ondelettes, (Donoho, 1993, sec. 4) applique préalablement la transformée d'Anscombe (3.2) sur des réalisations de variables poissonniennes puis la transformée inverse (notée \mathcal{A}^{-1})

$$\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}(x)) = \left(\frac{\mathcal{A}(x)}{2}\right)^2 - \frac{1}{8} \quad (3.4)$$

(Yeo et Johnson, 2000), (Kelmansky, Martínez et Leiva, 2013), (Charitidou, Fouskakis et Ntzoufras, 2015) ont étendu la famille de transformations de (Box et Cox, 1964) et ces derniers ont adopté une approche bayésienne pour l'estimation des paramètres de cette extension ; voir (Atkinson, Riani et Corbellini, 2021) pour une synthèse. (Tsai, Liou, Simak et Cheng, 2017) considèrent de nouvelles transformées hyperboliques pour gaussianiser les données. La \mathcal{Z} -transformée de Fisher est revisitée par (Fosdick et Perlman, 2016).

Pour des données poissonniennes, d'autres VST ont été proposées (Freeman et Tukey, 1950), (Veevers et Tweedie, 1971), (Bar-Lev et Enis, 1988), (Bar-Lev et Enis, 1990). Un retour sur la transformée d'Anscombe a été effectué par (Foi, Trimeche, Katkovnik et Egiazarian, 2008 ; Mäkitalo et Foi, 2009 ; Mäkitalo et Foi, 2011a ; Mäkitalo et Foi, 2011b ; Foi, 2011) pour la photographie numérique, et (Foi, 2009), (Guan, 2009), (Wang, Lyu et Yu, 2021) reposent le problème de trouver la transformation \mathcal{T} comme un problème d'optimisation (voir aussi

5. D'autres transformées visant à symétriser la distribution des données peuvent être consultées dans ce même ouvrage, ainsi que (DasGupta, 2008, chap. 4).

6. Voir §3.5

(Breiman et Friedman, 1985), (Tibshirani, 1988)). Pour le cas des très faibles intensités, la transformée d’Anscombe inverse a été ré-établie et tient compte du biais introduit par la transformée d’Anscombe (Mäkitalo et Foi, 2011b), (Mäkitalo et Foi, 2013). (Mäkitalo et Foi, 2014), (Mäkitalo, 2015), (Azzari et Foi, 2017) cherchent à construire des VST sous forme polynomiale et sous forme de fraction rationnelle (grâce aux approximants de Padé). (Wang, Lyu et Yu, 2021) améliorent les travaux de (Foi, 2009) par optimisation convexe.

Les cas du mélange de bruits gaussien et Poisson a été abordé par (Murthagh, Starck et Bijaoui, 1995), (Starck, Murthagh et Bijaoui, 1998), qui ont établi une généralisation de la transformée d’Anscombe notée \mathcal{A}_g (elle est parfois abrégée GAT, Generalized Anscombe Transform)

$$\mathcal{A}_g(x) = \begin{cases} \frac{2}{\alpha} \sqrt{\alpha x + \frac{3}{8} \alpha^2 + b - \alpha \mu}, & x > -\frac{3}{8} \alpha - \frac{b}{\alpha} + \mu \\ 0, & x \leq -\frac{3}{8} \alpha - \frac{b}{\alpha} + \mu \end{cases} \quad (3.5)$$

L’inverse de cette transformée est revisitée par (Mäkitalo et Foi, 2013).

Les travaux pionniers s’appliquent sur des réalisations de variables aléatoires supposées suivre telle ou telle loi de probabilité : Poisson, binomiale, binomiale négative (Anscombe, 1948), gamma/χ^2 , Rayleigh, ... Le tableau 3.1 recense les principales lois pour lesquelles des VST ont été établies. On peut remarquer *a contrario* que la transformée introduite par (Fisher, 1915) s’applique sur une statistique de l’échantillon considéré – en l’occurrence, le coefficient de corrélation – et pas sur l’échantillon lui-même ; cette remarque vaut également pour (Sarno, 1998) (VST pour le coefficient de Gini), (Wood, 1970) (VST pour les coefficients de concordance).

Le cas des données Poisson filtrées est abordé par (Zhang, Fadili et Starck, 2008), qui construisent la VST

$$\mathcal{T}(y) := b \cdot \text{sgn}(y + c) |y + c|^{1/2}, \quad y \geq 0. \quad (3.6)$$

et recherchent, avec la même finalité que dans (Anscombe, 1948), les paramètres b et c qui la rendent précise au second ordre (en annulant le terme d’ordre 1 de la variance asymptotique). Ils établissent également les lois asymptotiques des variables transformées (cf. §3.2.2).

Une autre voie pour construire des VST a été explorée dans le domaine des ondelettes au début des années 2000 (Fryzlewicz et Nason, 2004a ; Fryzlewicz et Nason, 2001 ; Fryzlewicz et Nason, 2004b ; Fryzlewicz et Delouille, 2005 ; Fryzlewicz, Sapatinas et Subba Rao, 2006 ; Fryzlewicz, Delouille et Nason, 2007 ; Fryzlewicz, 2008 ; Fryzlewicz, 2013 ; Fryzlewicz, 2018), pour les séries temporelles. Les travaux de (Fryzlewicz et Nason, 2004a) (étendus en deux dimensions par (Fadili, Mathieu et Desvignes, 2004)) s’appuient sur une VST introduite par (Fisz, 1955). Combinée à l’ondelette de Haar, la transformée ainsi construite s’appelle la transformée de Haar-Fisz. (Zhang, Fadili et Starck, 2006), (Zhang, Fadili, Starck et Olivo-Marin, 2007), (Zhang, Fadili et Starck, 2008), (Starck, Murthagh et Fadili, 2015) s’appuient sur une transformée multi-échelles en racine carrée construite pour des données Poisson et des données Poisson filtrées entachées d’un bruit gaussien modélisant des images de microscopie de fluorescence et d’astronomie. Cette transformée, construite à partir de l’équation 3.6 et des coefficients de la transformée en ondelettes non décimée, améliore la transformée de Haar-Fisz pour des intensités λ très faibles (typiquement rencontrées dans les images astronomiques, par exemple). Nous n’abordons pas ces transformées dans ce mémoire.

Pour les statistiques d'échantillons autres que la moyenne, outre le coefficient de corrélation et la \mathcal{Z} -transformée (3.1) établie par Fisher, les coefficients de concordance (ρ de Spearman et τ de Kendall) exhibent également la propriété d'hétéroscédasticité et des VST ont pu être établies, cf. tableau 3.1. C'est également le cas pour le coefficient de Gini (connu en économétrie pour mesurer les inégalités de revenus). Sans considération de loi particulière, les fonctions de variance quadratiques (en anglais, Quadratic Variance Function (QVF)) donnent lieu à la transformée arcinus hyperbolique (qui peut aussi être exprimée sous une forme logarithmique 3.1, C.8). Enfin, pour deux tâches fondamentales en statistique que sont la construction d'intervalles de confiance d'une part et des tests statistiques d'autre part, les VST permettent de construire des intervalles de confiance plus justes comme le démontrent les travaux de (Tibshirani, 1988) et (Lahiri, 1997) combinant VST et la méthode de rééchantillonnage du Bootstrap, et de pouvoir comparer statistiquement des quantités n'ayant pas la même variance : (Kulinskaya, Morgenthaler et Staudte, 2010, chap. 17, 18 et 21) appliquent des versions stabilisées en variance des tests du χ^2 , de Student, de Welch ou sur les probabilités binomiales. Voir aussi (Tsai, Liou, Simak et Cheng, 2017) pour le test de Fisher.

(Wang, Shrestha, Robertson et Pokhrel, 2012) ont introduit une transformée 'ln sinh' pour des données hydrologiques. Une famille de transformées hyperboliques a été construite par (Tsai, Liou, Simak et Cheng, 2017), et appliquée dans les travaux de (Oryshchenko et Smith, 2019), (Takahama, Dillner, Weakley, Reggente, Bürki, Lbadaoui-Darvas, Debus, Kuzmiakova et Wexler, 2019), (Marulanda, Bello, Cifuentes et Reneses, 2020), (Maroñas, Hamelijnc, Knoblauch et Damoulas, 2021). Les VST que nous établirons au chapitre 4 seront appliquées sur des statistiques du Shot Noise : sa moyenne et sa variance empiriques.

3.1.4 Usages et applications

Ce paragraphe dresse un panorama des quantités aléatoires pouvant faire l'objet d'une stabilisation de variance (cf. tableau 3.1) et de montrer les applications qui y sont liées (cf. tableau 3.2).

Les travaux les plus connus en traitement du signal et des images sont centrés sur la transformée d'Anscombe (et ses extensions) pour la loi de Poisson, mais des VST ont également été établies pour la loi de Student, la loi gamma, la loi du χ^2 , la loi de Rayleigh, la loi de Weibull, et la loi gaussienne généralisée. Voir tableau 3.1.

TABLE 3.1 – Quelques statistiques hétéroscédastiques et leurs transformations associées

Loi ou Statistique	Transformée	Auteurs
Coefficient de corrélation	\tanh^{-1}	(Fisher, 1915), (Hotelling, 1953), (Wood, 1970), (Konishi, 1985), (Hayakawa, 1987) (Fujisawa, 2000), (Fosdick et Perlman, 2016)
Coefficients de concordance	\tanh^{-1}	(Wood, 1970)

Poisson	racine carrée	(Tippett, 1934), (Bartlett, 1936), (Anscombe, 1948), (Tukey et Moore, 1954) (Laubscher, 1960b), (Donoho, 1993), (Guan, 2009)
Poisson	transformée « Beta »	(Tweedie et Veevers, 1968) (Murthagh, Starck et Bijaoui, 1995), (Foi, Trimeche, Katkovnik et Egiazarian, 2008) (Zhang, Fadili et Starck, 2006), (Zhang, Fadili et Starck, 2008), (Tepper, Giovannucci et Pnevmatikakis, 2018)
Poisson + Gaussien	racine carrée (GAT)	(Anscombe, 1948), (Guan, 2009)
Binomiale	arcsin	(Anscombe, 1948), (Guan, 2009)
Binomiale négative	asinh	(Anscombe, 1948), (Fisz, 1955), (Guan, 2009)
Coefficient de Gini	$\ln(\sqrt{\quad})$	(Arsenault et Denis, 1981), (Arsenault et Denis, 1983), (Sarno, 1998)
Gamma	racine carrée	(Prucnal et Saleh, 1981), (Fisz, 1955)
χ^2	racine carrée	(Bennett, 1956)
χ^2 décen- trée		(Bennett, 1956), (Bar-Lev et Boukai, 2007), (Pieciak, Vegas Sánchez-Ferrero et Aja-Fernández, 2016), (Pieciak, Aja-Fernandez et Vegas-Sanchez-Ferrero, 2017)
Rayleigh	logarithme	(Prucnal et Goldstein, 1987) (Mäkitalo, Foi, Fevralev et Lukin, 2010)
Rice	racine carrée	(Pieciak, Aja-Fernandez et Vegas-Sanchez-Ferrero, 2017)
Weibull	logarithme	(Prucnal et Goldstein, 1987)
Gaussienne généralisée	$\operatorname{acotanh}(x)$	(Song, 2013)
Logit		(Bennett, 1955), (Bennett, 1956), (Bennett, 1957) (Durbin, Hardin, Hawkins et Rocke, 2002), (Huber, Heydebreck, Poustka et Vingron, 2002), (Huber, Von Heydebreck, Sueltmann, Poustka et Vingron, 2003), (Rocke et Durbin, 2003), (Durbin et Rocke, 2004)
QVF	arcsinus hyperbolique	(DiCiccio et Tibshirani, 1987), (Tibshirani, 1988), (Lahiri, 1997)
Bootstrap		(Lahiri, 1997)
	$\operatorname{gpower}(x,p) = \frac{(x+\sqrt{x^2+1})^p-1}{p}$	(Kelmansky, Martínez et Leiva, 2013)
t-Student décentrée		(Poch, 1953), (Laubscher, 1960a), (Pieciak, Vegas Sánchez-Ferrero et Aja-Fernández, 2016)
loi F (Fi- sher)		(Laubscher, 1960a)

Le tableau 3.2 quant à lui, rassemble les applications des VST dans divers domaines. Les applications principales se concentrent sur le débruitage de données Poisson (comptages) qui modélisent fidèlement les phénomènes d'interactions entre photons (de diverses origines,

natures et énergies correspondantes) et leurs détecteurs associés (typiquement les photons γ en astronomie, les photons X en imagerie médicale, les photons de fluorescence ou les électrons en microscopie⁷, les neutrons en neutronographie). Une VST est appliquée préalablement à une opération de convolution dans les travaux de (Chaux, Blanc-Féraud et Zerubia, 2007). Notamment, en regard de l'application développée au chapitre 6, un débruitage par application de la GAT est appliquée en neutronographie par (Shuang, Wei-jing et Jia-ning, 2015). Voir également (Zhang, Song et Dai, 2017) en microscopie ptychographique. Dans les applications "-omiques" et les technologies de micro-plaques d'analyses interrogées par laser (*microarray* en anglais), la fonction de variance (introduite par (Rocke et Durbin, 2003)) donne lieu à une VST particulière (appelée glog, pour *logarithme généralisé*, qui peut prendre la forme d'une fonction arcsinus hyperbolique).

7. Voir (Kervrann, Sorzano, Acton, Olivo-Marin et Unser, 2016) pour une synthèse.

TABLE 3.2 – Quelques domaines d’application des transformées stabilisatrices de variance

Domaine d’application	Tâche	Auteurs
Astronomie ⁸	débruitage (Poisson)	(Murthagh, Starck et Bijaoui, 1995), (Zhang, Fadili et Starck, 2006), (Zhang, 2007), (Starck, Murtagh et Fadili, 2010)
Microscopie de fluorescence	débruitage (Poisson)	(Boulanger, 2007), (Zhang, Fadili et Starck, 2006), (Zhang, Fadili, Starck et Olivo-Marin, 2007), (Zhang, 2007), (Chaux, Blanc-Féraud et Zerubia, 2007), (Bertero, Boccacci, Desiderà et Vicidomini, 2009), (Boulanger, Kervrann, Bouthemy, Elbau, Sibarita et Salamero, 2010), (Luisier, Blu et Unser, 2010), (Zhang et Hirakawa, 2017)
Imagerie médicale	débruitage	(Kasturi, Walkup et Krile, 1983), (Lai, Cruvinel et Levada, 2007), (Sureau, 2008), (Mäkitalo et Foi, 2011b), (Ma, Liang, Fan, Liu, Huang, Chen et Lu, 2012), (Sid Ahmed, Messali, Poyer, Lumbroso-Le Rouic, Desjardins, Cassoux, Thomas, Marco et Lemaitre, 2018), (Piecniak, Vegas Sánchez-Ferrero et Aja-Fernández, 2016), (Piecniak, Aja-Fernandez et Vegas-Sanchez-Ferrero, 2017), (Borges, Brochi, Xu, Foi, Vieira et Azevedo-Marques, 2020)
Imagerie Radar	débruitage	(Mäkitalo, Foi, Fevralev et Lukin, 2010), (Deledalle, Denis, Tabti et Tupin, 2017), (Deledalle, Denis et Tupin, 2018)
Imagerie Infrarouge	débruitage	(Shen, Chen, Liu, Lou, Yu, Wang et Chen, 2018)
Imagerie Hyperspectrale	compression d’image	(Zemliachenko, Kozhemiakin, Uss, Abramov, Ponomarenko, Lukin, Vozel et Chehdi, 2014)
Imagerie	choix de modèle de bruit / débruitage / reconstruction	(Decker, Lee et Verlysen, 2009), (Luisier, Blu et Unser, 2010), (Rodriguez, 2011), (Shuang, Wei-jing et Jian-ning, 2015), (Ding, Zhang, Li, Xiao et Zhou, 2017), (Shin, Kim et Lee, 2017), (Bria, Marrocco, Borges, Molinara, Marchesi, Mordang, Karssemeijer et Tortorella, 2018), (Zhang, Zhang, Liu et Wang, 2019)

suite page suivante

Table 3.2 – suite de la page précédente

Domaine d'application	Tâche	Auteurs
Photonique	comptages	(Prucnal et Teich, 1982), (Matsuo, Teich et Saleh, 1983), (Teich, 1985), (Prucnal et Goldstein, 1987)
Génomique ⁹ , Protéomique, Métabolomique	calibration / dé-bruitage	(Huber, Heydebreck, Poustka et Vingron, 2002), (Durbin, Hardin, Hawkins et Rocke, 2002), (Rocke et Durbin, 2003), (Inoue, Nishimura, Hori, Nakahara, Saito, Yoshihara et Amari, 2004), (Dunning, Ritchie, Barbosa-Morais, Tavaré et Lynch, 2008), (Dazard et Rao, 2012), (Zhang, Wen, Washburn et Florens, 2015), (Gibbons, Proft, Struhl et Roth, 2005), (Motakis, Nason, Fryzlewicz et Rutter, 2006), (Lin, Du, Huber et Kibbe, 2007), (Purohit, Rocke, Viant et Woodruff, 2004), (Kelmansky, Martínez et Leiva, 2013), (Hahne, Huber, Gentleman et Falcon, 2008), (Zhang, Wen, Washburn et Florens, 2015)
Géophysique	estimation / pré-diction	(Stanley, 2006a; Stanley, 2006b), (Bagnall, Whittle, Studley, Pettipher, Tekiner et Bull, 2006), (Woodruff et Slevogt, 2015)
Économétrie	estimation / pré-diction	(Sarno, 1998), (Tiefelsdorf, Griffith et Boots, 1999), (Uniejewski, Weron et Ziel, 2017)
Statistique	tests statistiques	(Bartlett, 1936), (Budescu et Appelbaum, 1981), (Kwan et Sim, 1996), (Brown et Zhao, 2002), (Chen et Deo, 2004), (Kulinskaya, Morgenthaler et Staudte, 2008), (Morgenthaler et Staudte, 2012)
Statistique	estimation, régression	(Lord, 1972), (Lord, 1974), (McLean, Ruggirello, Banfield, Gonzalez et Bialer, 1990), (Nishida et Kanazawa, 2015)
Biologie	estimation	(McLean, Ruggirello, Banfield, Gonzalez et Bialer, 1990); (Verrel, 2010)

8. Voir l'article de (Willett, 2007) pour une synthèse sur les méthodes de débruitage en astronomie.

9. Voir (Sebastiani, Gussoni, Kohane et Ramoni, 2003) pour une synthèse.

3.2 Fondements de la stabilisation de variance

La stabilisation de variance est fondée - historiquement - sur un développement de Taylor de la variance d'une variable aléatoire. Elle s'appelle *Delta method*¹⁰ dans la littérature en langue anglaise.

3.2.1 Méthode « Delta »

On considère une grandeur aléatoire X d'espérance μ et de variance $g(\mu)$, g étant communément et très justement appelée *fonction de variance*¹¹. Trouver une VST, c'est trouver une fonction monotone¹² $Y = \mathcal{T}(X)$ telle que $\text{Var}[Y]$ soit constante. Pour trouver une telle transformée, la fonction $\mathcal{T}(X)$ est approximée par le développement de Taylor (appelée *Delta method* dans la littérature)

$$Y = \mathcal{T}(X) \simeq \mathcal{T}(\mu) + \mathcal{T}'(\mu)(X - \mu) + o_P(r)$$

où \mathcal{T}' est la dérivée de \mathcal{T} , est un « reste stochastique » négligeable $o_P(r)$. La variance de l'approximation est de la forme

$$\text{Var}[Y] \simeq (\mathcal{T}'(\mu))^2 g(\mu)$$

qu'on impose égale à une constante *cste*. On peut ainsi trouver \mathcal{T} en résolvant une équation différentielle du type

$$\mathcal{T}'(\mu) = \frac{\text{cste}}{\sqrt{g(\mu)}}$$

autrement dit trouver une primitive de \mathcal{T}'

$$\mathcal{T}(X) = \int^X \frac{\text{cste}}{\sqrt{g(\mu)}} d\mu, \quad g(\mu) \neq 0. \quad (3.7)$$

En choisissant arbitrairement $\text{cste} = 1$ et en spécifiant la fonction g , on peut ainsi trouver (si elle existe sous une forme connue) une primitive qui constitue la transformée stabilisatrice de variance, abrégée VST. La formule explicite de la transformation faisant intervenir l'intégrale figure dans l'article de (Bartlett, 1947). On renvoie aux travaux de (Curtiss, 1943) et (Bar-Lev et Enis, 1990) pour les conditions d'existence de l'intégrale.

Remarque Cette méthode n'est valide que pour des valeurs de μ éloignées de 0.

10. La *Delta method* est une technique (parmi de nombreuses autres) utilisée en statistiques asymptotiques pour trouver la loi asymptotique d'une variable aléatoire transformée et se retrouve dans les ouvrages de statistique mathématique de référence tels que (Lehmann, 1998, chap. 2), (Van der Vaart, 2000, chap. 3), (Bickel et Doksum, 2001, chap. 5), (DasGupta, 2008, chap. 4).

11. C'est le qualificatif utilisé en statistique. Le lecteur intéressé pourra consulter les travaux de (Morris, 1982), (Morris, 1983) qui établissent les liens entre les fonctions de variance quadratiques (QVF) et les familles exponentielles naturelles dont découlent, par construction, les distributions normale, Poisson, gamma, binomiale, binomiale négative. Voir également (Letac et Mora, 1990), (Antoniadis et Sapatinas, 2001), (Antoniadis, Besbeas et Sapatinas, 2001), (Brown, Cai et Zhou, 2010), (Cai, 2019).

12. (Foi, 2009) aborde la construction de VST en relâchant cette contrainte.

Remarque La « Delta method » est également utilisée pour simplement approximer la variance d'une fonction de variables aléatoires lorsque la variance exacte ne peut pas s'exprimer analytiquement. Par exemple, on peut montrer que la variance d'un ratio de variables aléatoires $f(X, Y) = \frac{X}{Y}$ (exemple issu de (Kendall, 1945)),

$$\text{Var} \left[\frac{X}{Y} \right] \approx \frac{1}{\mathbb{E}^2[Y]} \text{Var}(X) + 2 \frac{-\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}^3[Y]} \text{Cov}(X, Y) + \frac{\mathbb{E}^2[X]}{\mathbb{E}^4[Y]} \text{Var}[Y] \quad (3.8)$$

Remarque Le développement de Taylor peut être étendu à des ordres supérieurs à 1 selon les contextes ; voir par exemple (Elston, 1999) pour l'usage d'un développement de Taylor à l'ordre 2.

3.2.2 Théorèmes fondamentaux

La méthode de construction d'une VST de la section 3.2.1 est plus largement englobée par le théorème suivant, qui donne la distribution asymptotique de $Y = \mathcal{T}(X_n)$

Théorème 3.2.1 (« Delta Theorem », (DasGupta, 2008), chap.3, p. 40). *Soit Z_n une suite de variables aléatoires telles que*

$$\sqrt{n}(Z_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, g(\theta)), \quad g(\theta) > 0$$

Soit $\mathcal{T} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en θ avec $\mathcal{T}'(\theta) \neq 0$. Alors

$$\sqrt{n}(\mathcal{T}(X_n) - \mathcal{T}(\theta)) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, [\mathcal{T}'(\theta)]^2 g(\theta))$$

Grâce à ce théorème, il est aisé de trouver la variance de la distribution asymptotique d'une variable aléatoire $Y = \mathcal{T}(X_n)$. Et, si on souhaite de plus fixer la variance de la distribution asymptotique de $\mathcal{T}(X_n)$, on pose

$$[\mathcal{T}'(\theta)]^2 \sigma^2(\theta) = \text{cste.}$$

où cste est une constante arbitraire usuellement fixée à 1. Des exemples illustrant la méthode de construction et l'application du théorème 3.2.1 sont présentés dans la section suivante. Un second théorème sur les moments des quantités transformées s'énonce comme suit, \bar{X} désignant la moyenne empirique des observations i.i.d. $X_i, i = 1 \dots n$

Théorème 3.2.2 (Méthode Delta pour la moyenne (DasGupta, 2008), chap. 3, p. 44). *Pour X_1, X_2, \dots des observations supposées i.i.d. de moment d'ordre 4 fini. Soit $\mathbb{E}(X_1) = \mu$ et $\text{Var}(X_1) = \sigma^2$. Soit \mathcal{F} une fonction scalaire dont les quatre premières dérivées sont uniformément bornées. Alors*

1. $\mathbb{E}[\mathcal{F}(\bar{X})] = \mathcal{F}(\mu) + \frac{\mathcal{F}''(\mu)\sigma^2}{2n} + O(n^{-2})$
2. $\text{Var}[\mathcal{F}(\bar{X})] = \frac{(\mathcal{F}'(\mu))^2\sigma^2}{n} + O(n^{-2})$

Voir également (Bickel et Doksum, 2001) pour une preuve. Le premier point de ce théorème permet d'estimer le biais introduit par une transformation d'une variable aléatoire ou d'une statistique. Ce point est abordé §3.5.

3.3 Exemples illustratifs

Pour illustrer les notions et théorèmes précédents, on calcule ici des VST liées à la loi de Poisson et à la loi Gamma. Les variances asymptotiques et les lois asymptotiques sont également établies.

3.3.1 Loi de Poisson

Soit X_1, \dots, X_n n réalisations indépendantes où chaque $X_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{P}(\lambda)$. Les deux premiers moments de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ sont tels que

$$\mathbb{E}[X] = \lambda, \quad \text{Var}[X] = \lambda. \quad (3.9)$$

Pour cette loi, en reprenant les notations des paragraphes précédents, on a $\mu = \lambda$, la fonction de variance g est telle que $g(\mu) = \mu$ et

$$\mathcal{T}(X) = \int^X \frac{\text{cste}}{\sqrt{\mu}} d\mu = 2 \text{ cste } \sqrt{X}$$

est une VST. En appliquant le théorème 3.2.1, on trouve aisément la variance asymptotique, puisque

$$[\mathcal{T}'(\mu)]^2 \times g(\mu) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\mu}} \right)^2 \times \mu = \frac{1}{4}.$$

Ainsi, la variance asymptotique de \sqrt{Y} est $\frac{1}{4}$ (on a arbitrairement pris $\text{cste} = \frac{1}{2}$); la variance asymptotique de $2\sqrt{Y}$ vaut 1 (ce qui n'est pas surprenant puisqu'on a dans ce cas arbitrairement pris $\text{cste} = 1$); ainsi, les distributions asymptotiques sont respectivement

$$\sqrt{X} - \sqrt{\lambda} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4}\right) \quad \text{et} \quad 2\sqrt{X} - 2\sqrt{\lambda} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Remarque Cette VST pour la loi de Poisson a initialement été construite par (Bartlett, 1936), puis affinée par (Anscombe, 1948) qui a établi l'équation 3.2.

3.3.2 Moyenne de la loi de Poisson

En reconsidérant l'exemple précédent pour stabiliser la moyenne empirique \bar{X}_n de X_1, \dots, X_n , où les réalisations X_i sont indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Poisson de paramètre λ . Les moments de \bar{X}_n sont tels que

$$\text{Var}[\bar{X}_n] = g(\mathbb{E}[\bar{X}_n]) \quad \text{avec} \quad g(\mu) = \frac{\mu}{n}.$$

Une VST pour la moyenne empirique s'écrit donc

$$\mathcal{T}(Y = \bar{X}_n) = \sqrt{n} \int^X \frac{1}{\sqrt{\mu}} d\mu = \sqrt{4n\bar{X}_n}$$

où on a pris arbitrairement $\text{cste} = 1$. Cette approximation n'est clairement pas valable lorsque $\mu \rightarrow 0$. Asymptotiquement la variance de $\sqrt{\bar{X}_n}$ vaut 1, puisque

$$[\mathcal{T}'(\mu)]^2 \times g(\mu) = \left(\frac{n}{\sqrt{n\mu}} \right)^2 \times \frac{\mu}{n} = 1$$

et la loi asymptotique pour la moyenne est

$$\sqrt{n}(2\sqrt{\bar{X}_n} - 2\sqrt{\lambda}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

3.3.3 Lois gamma, exponentielle, et χ^2

Loi gamma Les deux premiers moments de la loi Gamma(α, θ) ayant pour densité

$$f(x; \alpha, \theta) = \frac{\theta^{-\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0,$$

avec $\theta > 0$, $\alpha > 0$, α étant connu, sont tels que $\mathbb{E}(X) = \alpha\theta$, $\text{Var}(X) = \alpha\theta^2$. Avec les notations précédentes, $\mu = \alpha\theta$, et la fonction de variance g s'écrit $g(\mu) = \alpha\mu^2$. Une VST s'écrit

$$\mathcal{T}(X) = \int^X \frac{1}{\sqrt{\alpha\mu^2}} d\mu = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ln X.$$

Comme $[\mathcal{T}'(\mu)]^2 \times g(\mu) = \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\mu^2}} \right)^2 \times \alpha\mu^2 = 1$, la loi asymptotique de $\ln X$ est

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ln X - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ln \alpha\theta \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

et la loi asymptotique de $\ln \bar{X}_n$ est

$$\sqrt{n} \left(\ln \bar{X}_n - \ln \alpha\theta \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \frac{1}{\alpha} \right).$$

Loi exponentielle La loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre λ étant un cas particulier de loi gamma $\mathcal{E}(\lambda) = \text{Gamma}(1, 1/\lambda)$, les moments et la fonction de variance ont pour expressions $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$, $\text{Var}(Y) = \frac{1}{\lambda^2}$, $g(\mu) = \mu^2$. Une VST pour cette loi s'écrit

$$\mathcal{T}(X) = \ln X.$$

La loi asymptotique de $\ln X$ est

$$\ln X - \ln \frac{1}{\lambda} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Loi du χ^2 La loi du $\chi^2(\nu)$ est un autre cas particulier de la loi gamma paramétrée Gamma($\nu/2, 2$), pour laquelle $\mathbb{E}(X) = \nu$, $\text{Var}(X) = 2\nu$ et $g(\mu) = 2\mu$. Une VST s'écrit dans ce cas

$$\mathcal{T}(X) = \int^X \frac{1}{\sqrt{2\nu}} d\nu = \sqrt{2X},$$

et la loi asymptotique de $\sqrt{2X}$ est

$$\sqrt{2X} - \sqrt{2\mu} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

3.4 Formes générales des VST et de leurs inverses

Comme illustré par les exemples du paragraphe précédent, suivant la nature de la fonction $g(\mu)$ - qui indique comment la variance varie en fonction de la moyenne -, on trouve dans la littérature diverses VST établies par de nombreux auteurs rassemblées dans le tableau 3.3. Ce tableau recense les formes générales des transformées directement accessibles par application du §3.2.1 et de la résolution de l'équation différentielle qui en découle (par recherche de primitive). On peut remarquer que ce sont des fonctions croissantes. La transformée inverse¹³ correspondante se déduit en général facilement.

Fonction de variance $g(\mu)$	VST $Y = \mathcal{T}(X)$	VST inverse $X = \mathcal{T}^{-1}(Y)$
μ	$2\sqrt{X}$	$\left(\frac{Y}{2}\right)^2$
$a_1\mu + a_0, \quad a_1 > 0$	$\frac{2}{a_1}\sqrt{a_1X + a_0}$	$\frac{1}{a_1}\left(\frac{a_1^2}{4}Y^2 - a_0\right)$
μ^2	$\ln X$	$\exp Y$
$a_0 - a_2\mu^2, \quad a_0 > 0, a_2 > 0$	$\frac{1}{\sqrt{a_0}} \arcsin \frac{X\sqrt{a_0}}{\sqrt{a_2}}$	$\sqrt{\frac{a_2}{a_0}} \sin(Y\sqrt{a_0})$
$\mu - \mu^2$	$\arcsin 2X - 1$	$\frac{1}{2}(\sin Y + 1)$
$a_2\mu^2 + a_0$	$\frac{1}{\sqrt{a_2}} \operatorname{asinh}\left(\frac{\sqrt{a_2}X}{\sqrt{a_0}}\right)$	$\frac{a_0}{a_2} \sinh y\sqrt{a_2}$
$a_2\mu^2 + a_1\mu, \quad a_2 > 0$	$\frac{\ln\left(2\sqrt{a_2}\sqrt{a_2X^2+a_1X+2a_2X+a_1}\right)}{\sqrt{a_2}}$	$\frac{\frac{1}{4}e^{2Y\sqrt{a_2}} - \frac{a_1}{2}e^{Y\sqrt{a_2}} + \frac{a_1^2}{4}}{a_2e^{Y\sqrt{a_2}}}$
$a_2\mu^2 + a_1\mu + a_0, \quad a_2 > 0$	$\frac{\ln\left(2\sqrt{a_2}\sqrt{a_2X^2+a_1X+a_0+2a_2X+a_1}\right)}{\sqrt{a_2}}$	$\frac{\frac{1}{4}e^{2Y\sqrt{a_2}} - \frac{a_1}{2}e^{Y\sqrt{a_2}} + \frac{a_1^2}{4} + a_2a_0}{a_2e^{Y\sqrt{a_2}}}$
$(1 - \mu^2)^2$	$\ln \frac{1+X}{1-X} = \operatorname{atanh}(X)$	$\frac{e^Y - 1}{e^Y + 1} = \tanh(Y)$

TABLE 3.3 – Transformées stabilisatrices de variance usuelles (tableau inspiré en partie de (Bartlett, 1947), (Stanley, 2006c) et (Barnes, 1952)). Voir également (Rojas-Perilla, 2018, p. 19, p. 31.). Compte tenu des liens existants entre les fonctions hyperboliques inverses et la fonction logarithme, certaines transformations peuvent prendre des formes différentes équivalentes (cf. tableau C.4).

13. C'est un abus de langage provenant de l'anglais, l'adjectif français adéquat pour désigner une telle fonction est *réciproque*. Toutefois, l'usage de « transformée » ou « transformation » appelle assez naturellement l'emploi de l'adjectif « inverse », à l'instar de « transformée de Fourier » et « transformée de Fourier inverse ». Et les chapitres suivants vont montrer que VST et VST inverses peuvent ne pas être des fonctions réciproques si on tient compte du biais qu'elles peuvent induire.

Remarque Si les transformées inverses (fonctions réciproques) sont algébriquement justes, le fait de manipuler des quantités aléatoires induit potentiellement un biais. Cet aspect est abordé dans la section suivante.

Remarque Selon le contexte d'utilisation des VST, les transformées inverses ne sont pas nécessairement utiles. C'est typiquement le cas pour le débruitage d'images où seul l'aspect visuel compte, et que les valeurs contenues après codage des valeurs des pixels (sur un espace de couleurs, par exemple) dans chaque pixel ne reflètent plus une quantité physique. À l'opposé, lorsque le codage « image » reflète directement une quantité physique (ou un événement physique), le praticien peut vouloir revenir dans l'espace non transformé après avoir effectué le débruitage, comme dans le cas des images astronomiques ou de microscopie.

3.5 Biais des transformations

Le biais considéré dans ce paragraphe est la différence entre l'espérance mathématique d'une statistique d'échantillon de données transformées par une VST notée \mathcal{T} et la valeur théorique de cette dernière

$$\text{Biais}(\mathcal{T}(\bar{X})) = \mathbb{E}[\mathcal{T}(\bar{X})] - \mathcal{T}(\mu) = \frac{\mathcal{T}''(\mu)\sigma^2}{2n} \quad (3.10)$$

La correction du biais introduit par une transformation non linéaire (« normalizing transformation ») a été abordée par (Neyman et Scott, 1960). La méthode est limitée aux transformations définies pour des nombres positifs ; cette restriction est levée dans les travaux de (Strimbu, Amarioarei et Paun, 2017).

3.5.1 Généralités

Il est connu dès les travaux d'(Anscombe, 1948) que transformer des quantités aléatoires par une fonction non linéaire peut induire un biais ; les travaux de (Mäkitalo et Foi, 2011b ; Mäkitalo et Foi, 2013) repartent d'ailleurs de cette observation pour construire les transformées d'Anscombe inverses (généralisées ou non) (voir §3.5.2 et section 5.2).

L'évaluation du biais n'est pas nécessairement abordée dans les travaux qui s'appuient sur des VST : c'est typiquement le cas de certains travaux de débruitage d'image (cf. tableau 3.2). Deux explications peuvent être invoquées :

1. en imagerie, si les valeurs des pixels ne correspondent pas directement à des quantités physiques (tel qu'un codage d'échelle de couleurs « simple »), la VST inverse n'est pas nécessaire : la VST directe est appliquée préalablement au débruitage proprement dit et seul compte le rendu visuel de l'image débruitée (a contrario, la transformée d'Anscombe et son inverse sont utilisées en astrophysique, où chaque pixel contient une quantité liée à un événement physique d'interaction d'une particule et de son détecteur),
2. la procédure de la figure 3.2, p. 41 s'applique entièrement dans de bonnes conditions, c'est-à-dire 1) une fonction de variance correspondant fidèlement aux données, 2) un grand nombre de données, 3) ces données étant éloignées des valeurs où le/les paramètres

de la fonction de variance ne posent pas problème (typiquement les faibles valeurs de λ pour des données poissonniennes) ; ces conditions réunies ont de bonnes chances de rendre le biais négligeable.

3.5.2 Biais de la transformée d'Anscombe

Dans le cas des données Poisson, (Anscombe, 1948) évalue le biais à $\simeq \frac{1}{8}$ pour les données Poisson transformées par \mathcal{A} définie en (3.2). On peut le confirmer en utilisant le théorème 3.2.2, avec $\mathcal{T}(x) = \mathcal{A}(x) = \sqrt{x + 3/8}$. Pour la moyenne de n données distribuées suivant la loi de Poisson, $\mu = \sigma^2 = \lambda$, $\mathcal{T}''(\bar{X}_n) = -\frac{1}{4n\lambda^{3/2}}$, et on a

$$E[\mathcal{T}(\bar{X})] = \sqrt{\lambda} - \frac{1}{8n} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \quad (3.11)$$

Dans le cas $n = 1$,

$$E[\mathcal{T}(x)] = \sqrt{\lambda} - \frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \quad (3.12)$$

on retrouve que le biais est de l'ordre de $\frac{1}{8}$ pour $\lambda \approx 1$ (Anscombe, 1948).

Ce biais est retranché à la transformée inverse (3.4) qui est donc asymptotiquement non biaisée lorsque $\lambda \rightarrow \infty$. Les travaux de (Mäkitalo et Foi, 2009), (Mäkitalo et Foi, 2011a), (Mäkitalo et Foi, 2011b) revisitent l'inversion la transformée d'Anscombe et de la transformée d'Anscombe généralisée (GAT) (Mäkitalo et Foi, 2013) et montrent qu'il n'est pas nécessairement simple de construire une transformée inverse non biaisée. Le problème se pose essentiellement pour les valeurs faibles de l'intensité λ de la loi de Poisson, où le biais introduit par la transformée directe peut être important. La transformée d'Anscombe et ses transformées inverses sont abordées au chapitre 5, section 5.2.

Dans la lignée des travaux d'(Anscombe, 1948), (Brown, Cai et Zhou, 2010), (Brown, Cai, Zhang, Zhao et Zhou, 2010), (Cai, 2019) introduisent une transformée directe non biaisée (au prix d'une variance moins stable pour les faibles valeurs de λ) appelée *Mean-Matching VST* (MM-VST) (cf. annexe B) dans le cadre de la régression non paramétrique, selon le procédé

$$\mathcal{T}^{\text{MM}}(x) = x^* = \sqrt{x + \frac{1}{4}} \rightarrow \text{Régression gaussienne homoscedastique} \rightarrow \mathcal{T}^{-1} = (x^*)^2. \quad (3.13)$$

La transformée inverse est ainsi simplifiée. L'approche MM-VST permet de construire une VST non biaisée à l'ordre deux sur des données modélisées suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Ainsi, pour une constante $c \geq 0$, les expressions de l'espérance et de la variance asymptotiques sont

$$\mathbb{E}[\sqrt{X + c}] = \lambda^{\frac{1}{2}} + \frac{4c - 1}{8} \cdot \lambda^{-\frac{1}{2}} - \frac{16c^2 - 24c + 7}{128} \cdot \lambda^{-\frac{3}{2}} + o\left(\lambda^{-\frac{3}{2}}\right) \quad (3.14)$$

$$\text{Var}[\sqrt{X + c}] = \frac{1}{4} + \frac{3 - 8c}{32} \cdot \lambda^{-1} + \frac{32c^2 - 52c + 17}{128} \cdot \lambda^{-2} + o\left(\lambda^{-2}\right) \quad (3.15)$$

Les auteurs choisissent ainsi $c = 1/4$ pour minimiser le biais 3.14 et définissent ainsi un type de transformation qu'ils nomment « mean-matching VST ». En effet, en remplaçant $c = \frac{1}{4}$

dans 3.14 et 3.15, on obtient

$$\mathbb{E} \left(\sqrt{X + \frac{1}{4}} \right) = \lambda^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{64} \lambda^{-\frac{3}{2}} + o \left(\lambda^{-\frac{3}{2}} \right) \quad (3.16)$$

$$\text{Var} \left(\sqrt{X + \frac{1}{4}} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{32} \lambda^{-1} + \frac{3}{64} \lambda^{-2} + o \left(\lambda^{-2} \right). \quad (3.17)$$

L'espérance (3.16) est très proche de $\sqrt{\lambda}$, d'où l'appellation « mean-matching », car le second terme du membre de droite est nul ; ce n'est pas le cas de la transformée d'Anscombe. On retrouve bien sûr la transformée d'Anscombe pour $c = \frac{1}{8}$; cette dernière stabilise mieux la variance que la MM-VST car le second terme du membre de droite dans (3.17) s'annule.

3.5.3 Autres approches

Fondés sur les travaux (Neyman et Scott, 1960), le problème de correction du biais de transformation est abordé dans des travaux récents (Tiefelsdorf, 2013), (Pu et Tiefelsdorf, 2017), (Strimbu, Amarioarei et Paun, 2017), (Strimbu, Amarioarei, McTague et Paun, 2017), (Amarioarei, Paun et Strimbu, 2020), (Strimbu, Amarioarei et Paun, 2021). Dans ces travaux, les transformations ne sont pas spécifiquement des VST mais des transformations non linéaires plus générales appliquées préalablement pour simplifier une tâche de régression.

Exemple Pour des variables Y_i présentant une hétéroscédasticité quadratique, la transformée logarithmique permet de stabiliser la variance et de gaussianiser les erreurs. Un modèle de régression linéaire sur une échelle logarithmique s'écrit alors

$$\ln(Y_i) = ax_i + \varepsilon_i \quad (3.18)$$

avec Y_i la variable de sortie, x_i la variable d'entrée et ε_i le terme d'erreur, $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ i.i.d., pour la $i^{\text{ème}}$ observation. L'espérance de la variable transformée est simplement $\mathbb{E}[\ln(Y_i)] = ax$, mais dans l'échelle originale, $Y_i = \exp(ax_i) \exp(u_i)$, et l'espérance est donc donnée par $\mathbb{E}[Y_i] = \exp(ax_i) \mathbb{E}[\exp(u_i)]$. En calculant (on omet l'indice i)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp(u)] &= \int \exp(u) dF_u = \int \exp(u) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}u^2\right) du \\ &= \exp\left(\sigma^4 / (2\sigma^2)\right) \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(u - \sigma^2)^2\right) du}_{=1} \end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{E}[\exp(u)] = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right). \quad (3.19)$$

On retrouve ainsi le terme de correction de biais pour la transformée logarithmique¹⁴ pour des log-erreurs supposées gaussiennes ; cf. (Strimbu, Amarioarei, McTague et Paun,

14. (Neyman et Scott, 1960) établissent également les corrections de biais (bc) pour l'arcsinus

$$\text{bc} = \frac{\mathbb{E}[Y]}{\mathbb{E}[\mathcal{F}^{-1}(\widehat{\mathcal{F}}(Y))]} = \frac{2(\bar{Y}|x)}{1 + (2\bar{Y}|x - 1)e^{\sigma^2/2}},$$

2017), (Ramírez-Aldana et Naranjo, 2021). La loi lognormale est spécifiquement abordée dans (Strimbu, 2012).

Concernant la transformée de Box Cox (3.3), son inverse est considérée par (Freeman et Modarres, 2006) (voir également les références dans cet article). On peut également citer (Stow, Reckhow et Qian, 2006) pour une approche bayésienne.

Le paragraphe suivant présente un théorème spécifique aux transformations (non linéaires) stabilisatrices de variance.

3.5.4 VST corrigée du biais

Cette dernière évaluation du biais occasionnée par une VST et sa correction repose sur le théorème suivant, qui donne la formule pour construire une VST corrigée du biais jusqu'à l'ordre deux :

Théorème 3.5.1 (VST corrigée du biais, (DasGupta, 2008), chap. 4, p. 55). *Soit $\mathcal{T}(\theta) = \int \frac{1}{\sigma(\theta)} d\theta$ une VST. Alors, une VST corrigée du biais, notée \mathcal{T}^{bc} , jusqu'au second ordre est telle que*

$$\mathcal{T}^{bc}(\hat{\theta}) = \mathcal{T}(\hat{\theta}) + \frac{\sigma'(\hat{\theta})}{2} - \frac{b(\hat{\theta})}{\sigma(\hat{\theta})}. \quad (3.20)$$

Exemple Pour des données poissonniennes, la transformée d'Anscombe pour la moyenne (3.2) corrigée du biais devient

$$\mathcal{A}^{bc}(\bar{X}) = \sqrt{\lambda + \frac{3}{8n}} + \frac{\sqrt{\lambda}}{4n} + \frac{1}{8n\lambda}. \quad (3.21)$$

Pour $n = 1$, on a

$$\mathcal{A}^{bc}(X) = \sqrt{\lambda + \frac{3}{8}} + \frac{\sqrt{\lambda}}{4} + \frac{1}{8\lambda} \quad (3.22)$$

et on retrouve le terme de biais $\frac{1}{8\lambda}$ calculé précédemment (3.12). Le second terme n'est pas trivial et dépend de λ .

Ce théorème sera utilisé pour établir les VST corrigées du biais dans les chapitres 4 et 5.

3.6 Conclusion du chapitre

Certaines transformations non linéaires de quantités aléatoires de variance variable permettent de rendre leur variance fixe, en même temps qu'elles « gaussianisent » ces mêmes quantités : elles sont appelées transformées stabilisatrices de variance (abrégées VST en anglais).

Effectuer de telles transformations a notamment pour objectif de pouvoir appliquer à leur suite une méthode établie dans le cadre du modèle additif gaussien, que ce soit pour estimer

et pour la racine carrée

$$bc = \mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[\mathcal{F}^{-1}(\widehat{\mathcal{F}}(Y))] = \sigma^2.$$

Des généralisations de ces formules sont établies dans (Strimbu, Amarioarei, McTague et Paun, 2017).

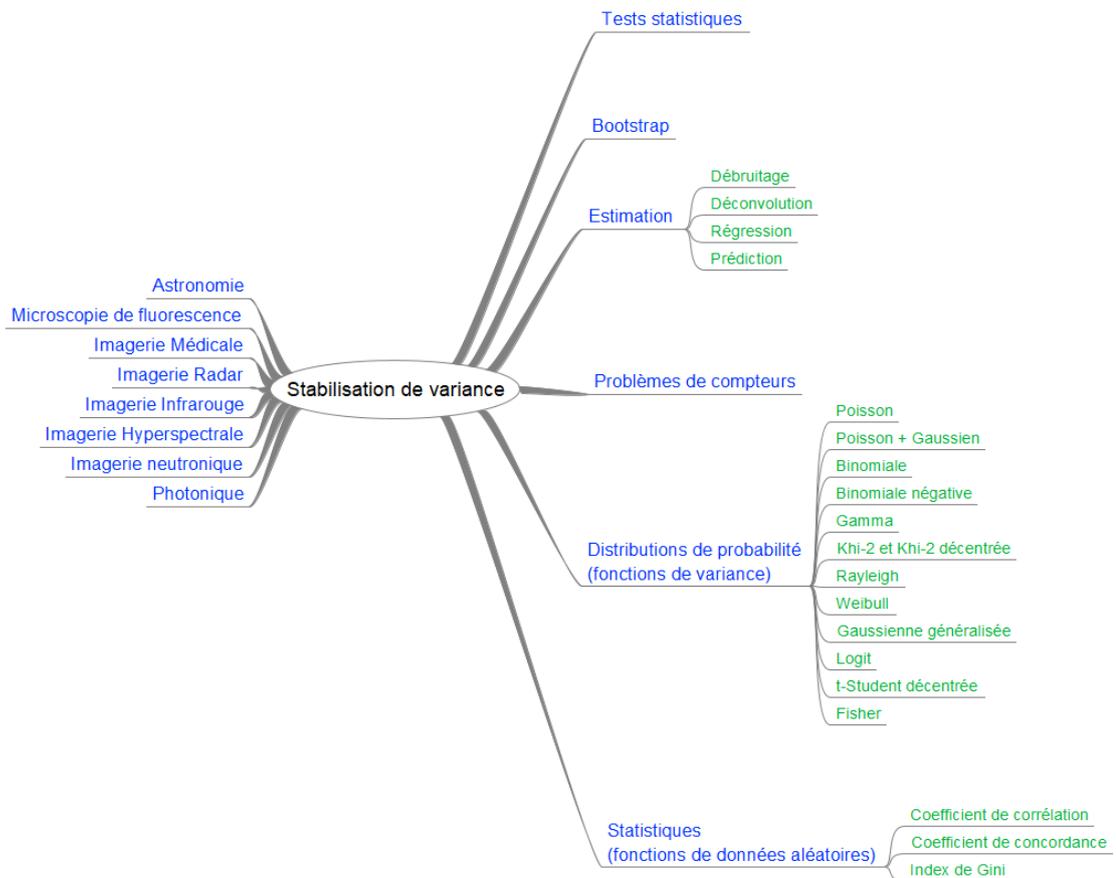


FIGURE 3.1 – Synthèse visuelle de la stabilisation de variance

une quantité, une fonction par une méthode de régression ou effectuer un test statistique. Toutes ces activités reposent sur un constat préalable : le cadre d'application initial de la méthode considérée n'est pas respecté, car la variance du modèle usuellement supposée fixe ne l'est pas. Sur les données transformées qui vérifient (asymptotiquement) à nouveau le cadre du modèle additif gaussien, un très grand nombre de méthodes s'appliquent ainsi. La transformation inverse appliquée *in fine* permet de revenir à l'espace des données initiales. Ce procédé est résumé sur la figure 3.2.

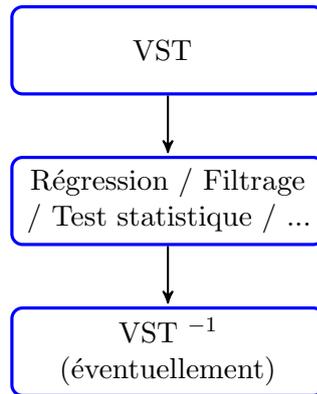


FIGURE 3.2 – Méthodologies d'application des transformées stabilisatrices de variance.

Chapitre 4

Transformées stabilisatrices de variance pour quelques statistiques du Shot Noise

Sommaire

4.1 Stabilisation de variance et premier cumulants du Shot Noise	43
4.1.1 Estimateur du premier cumulants	43
4.1.2 Estimateur de l'intensité basé sur $\hat{\kappa}_1$	44
4.2 Stabilisation de variance et deuxième cumulants du Shot Noise	45
4.2.1 Estimateur du deuxième cumulants	45
4.2.2 Estimateur de l'intensité basé sur $\hat{\kappa}_2$	47
4.3 Simulations	48
4.4 Publication	52
4.5 Conclusion du chapitre	59

COMME rappelé au chapitre 2, les quantités naturelles (issues de la seconde fonction caractéristique) pour le Shot Noise sont ses cumulants dont les estimateurs sont des quantités hétéroscédastiques. Les transformées de stabilisation de variance pour des statistiques liées aux premiers cumulants du Shot Noise (moyenne et variance et deux estimateurs de l'intensité basés sur ces derniers) sont établies grâce à la Delta Method. Les principaux résultats sont listés dans les sections 4.1 et 4.2. Pour les deux estimateurs de l'intensité (utilisés dans le chapitre 6), une publication a été acceptée le 28 mai 2023 par la revue IEEE Signal Processing Letters et fait l'objet de la section 4.4 et fait l'objet de la section 4.4.

Les VST et leurs biais et les VST corrigées du biais pour $\hat{\kappa}_1$ et $\hat{\kappa}_2$ ont été établies par l'auteur dans le cadre de la VAE doctorat. Il en va de même pour les biais et les VST corrigées du biais pour $\hat{\lambda}_1$ et $\hat{\lambda}_2$.

4.1 Stabilisation de variance et premier cumulant du Shot Noise

4.1.1 Estimateur du premier cumulant

D'après le théorème de Campbell, le cumulant d'ordre 1 du Shot Noise stationnaire est tel que

$$\kappa_1 = \lambda \mathbb{E}[u] \int h(t) dt = \lambda u_1 \quad (4.1)$$

L'estimateur du cumulant d'ordre 1, noté $\hat{\kappa}_1$, du Shot Noise échantillonné avec une période d'échantillonnage T_e (c'est-à-dire la moyenne empirique, introduite section 2.4.1, équation 2.18)

$$\hat{\kappa}_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X(t_0 + kT_e). \quad (4.2)$$

est non biaisé et sa variance vaut (d'après (2.22))

$$\text{Var}[\hat{\kappa}_1] = \frac{u_2}{u_1 n} \kappa_1. \quad (4.3)$$

La variance du cumulant d'ordre 1 du Shot Noise est donc proportionnelle à sa moyenne.

VST La fonction de variance s'écrit donc $g(\kappa_1) = \frac{u_2}{nu_1} \kappa_1$. Une VST peut être obtenue en calculant une primitive

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\kappa_1}(Y = \hat{\kappa}_1) &= \int^{\hat{\kappa}_1} \frac{1}{\sqrt{g(\kappa_1)}} d\kappa_1 \\ \kappa_1^* &= \frac{2nu_1}{u_2} \sqrt{\frac{u_2}{nu_1} \hat{\kappa}_1} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Biais D'après le théorème 3.2.2, avec $\mathcal{T}_{\kappa_1}''(\hat{\kappa}_1) = -\frac{u_2}{2nu_1 \left(\frac{u_2 \hat{\kappa}_1}{nu_1}\right)^{\frac{3}{2}}}$, le biais est tel que

$$\text{Biais}(\hat{\kappa}_1) = -\frac{\sqrt{u_1 u_2}}{4\sqrt{n \hat{\kappa}_1}}. \quad (4.5)$$

De signe négatif, il est d'autant plus petit en valeur absolue que n et $\hat{\kappa}_1$ sont grands.

VST corrigée du biais D'après le théorème 3.5.1, avec le terme de biais donné par (4.5), et $\sigma' = \left(\sqrt{g(\kappa_1)}\right)'$, on obtient la transformée corrigée du biais suivante

$$\mathcal{T}_{\kappa_1}^{bc}(\hat{\kappa}_1) = \mathcal{T}_{\kappa_1}(\hat{\kappa}_1) + \frac{\sqrt{u_2}}{4\sqrt{nu_1 \hat{\kappa}_1}} + \frac{u_1}{4\hat{\kappa}_1}. \quad (4.6)$$

VST inverse L'inverse algébrique est simplement

$$\mathcal{T}_{\kappa_1}^{-1}(\kappa_1^*) = \frac{u_2}{4n^2 u_1} \kappa_1^{*2}. \quad (4.7)$$

Loi asymptotique En appliquant le théorème 3.2.1, la variance asymptotique vaut 1 puisque

$$[\mathcal{T}'_{\kappa_1}(\kappa_1)]^2 \times g(\kappa_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{u_2 \kappa_1}{n u_1}}} \right)^2 \times \frac{u_2}{n u_1} \kappa_1 = 1$$

et la loi asymptotique pour cet estimateur est

$$\sqrt{n} \left(\kappa_1^* - \frac{2n u_1}{u_2} \sqrt{\frac{u_2}{n u_1} \kappa_1} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1). \quad (4.8)$$

4.1.2 Estimateur de l'intensité basé sur $\hat{\kappa}_1$

Pour un Shot Noise défini par l'équation (2.3), l'intensité λ s'écrit

$$\lambda_1 = \frac{\mathbb{E}[X(t)]}{\mathbb{E}[u] \int h(t) dt}, \quad (4.9)$$

et l'estimateur naturel de l'intensité du processus λ_1 basé sur $\hat{\kappa}_1$ s'écrit :

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{\hat{\kappa}_1}{u_1}, \quad u_1 \neq 0, \quad (4.10)$$

où $\hat{\kappa}_1$ est l'estimateur du cumulatif d'ordre 1 (cf. section précédente). Le facteur $u_1 = \mathbb{E}[u] \int h(t) dt$ étant supposé connu et constant au cours du temps, l'estimateur est non biaisé

$$\mathbb{E}[\hat{\lambda}_1] = \lambda, \quad (4.11)$$

et sa variance vaut

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{\lambda}_1] &= \frac{\text{Var}[\hat{\kappa}_1]}{u_1^2} \\ &= \frac{1}{n} \frac{u_2}{u_1^2} \lambda. \end{aligned} \quad (4.12)$$

La variance de l'estimateur de l'intensité basé sur $\hat{\kappa}_1$ est donc proportionnelle à l'intensité du Shot Noise.

VST La fonction de variance s'écrivant $g(\lambda) = \frac{1}{n} \frac{u_2}{u_1^2} \lambda$, une VST peut être obtenue comme précédemment en calculant une primitive telle que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\lambda_1}(Y = \hat{\lambda}_1) &= \int^{\hat{\lambda}_1} \frac{1}{\sqrt{g(\lambda)}} d\lambda \\ \lambda_1^* &= \frac{2u_1^2}{u_2} \sqrt{\frac{u_2}{u_1^2} n \hat{\lambda}_1} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Une VST pour cet estimateur s'écrit

$$\mathcal{T}_{\lambda_1}(Y = \hat{\lambda}_1) = \frac{2|u_1|}{\sqrt{u_2}} \sqrt{n \hat{\lambda}_1}. \quad (4.14)$$

Biais Par application du théorème 3.2.2, $\mathcal{T}_{\lambda_1}''(\lambda) = -\frac{n^2|u_1|u_2}{2(nu_2\lambda)^{\frac{3}{2}}}$, le biais vaut

$$\text{Biais}(\lambda) = \frac{-u_1\sqrt{u_2}}{4n^{\frac{3}{2}}\sqrt{\lambda}}. \quad (4.15)$$

Il est de signe négatif et d'autant plus petit que n et λ sont grands.

VST corrigée du biais D'après le théorème 3.5.1, avec le terme de biais donné par (4.15), et $\sigma' = \left(\sqrt{g(\lambda_1)}\right)'$, on obtient la transformée corrigée du biais suivante

$$\mathcal{T}_{\lambda_1}^{bc} = \mathcal{T}_{\lambda_1} + \frac{\sqrt{u_2}}{4\sqrt{n}|u_1|\sqrt{\lambda}} + \frac{u_1^2}{4n^2\lambda}. \quad (4.16)$$

VST inverse La VST inverse est donnée par

$$\mathcal{T}_{\lambda_1}^{-1}(\lambda_1^*) = \frac{u_2}{4nu_1^2}\lambda_1^{*2}. \quad (4.17)$$

Loi asymptotique En appliquant le théorème 3.2.1 avec $Z_n = \hat{\lambda}_1$, $\theta = \lambda$, la variance asymptotique vaut 1 puisque

$$[\mathcal{T}'_{\lambda_1}(\hat{\lambda}_1)]^2 \times g(\lambda) = \left(\frac{nu_1^2}{u_2\lambda}\right) \times \frac{u_2\lambda}{u_1^2n} = 1$$

et la loi asymptotique pour cet estimateur est

$$\sqrt{n} \left(\lambda_1^* - \frac{2u_1^2}{u_2} \sqrt{\frac{u_2}{u_1^2}n\lambda} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1). \quad (4.18)$$

4.2 Stabilisation de variance et deuxième cumulant du Shot Noise

4.2.1 Estimateur du deuxième cumulant

Le cumulant d'ordre 2 est tel que

$$\kappa_2(t) = \lambda(t)\mathbb{E}[u^2] \int h^2(t)dt = \lambda u_2. \quad (4.19)$$

L'estimateur du cumulant d'ordre 2 noté $\hat{\kappa}_2$ du Shot Noise échantillonné avec une période d'échantillonnage T_e (c'est une k-statistique, introduite section 2.4.1)

$$\hat{\kappa}_2 = \frac{n}{n-1} \sum_{k=1}^n \left(X(t_0 + kT_e) - n^{-1} \sum_{m=1}^{m=n} X(t_0 + kT_e) \right)^2. \quad (4.20)$$

qui est par construction non biaisé $\mathbb{E}[\hat{\kappa}_2] = \kappa_2$ et sa variance vaut (cf. équation (2.24))

$$\text{Var}[\hat{\kappa}_2] = \frac{2}{n-1}\kappa_2^2 + \frac{1}{n}\frac{u_4}{u_2}\kappa_2. \quad (4.21)$$

La variance du cumulant d'ordre 2 du Shot Noise varie donc selon une fonction quadratique de lui-même (autrement dit, il s'agit d'une QVF).

VST La fonction de variance s'écrivant $g(\hat{\kappa}_2) = \frac{2}{n-1} \hat{\kappa}_2^2 + \frac{1}{n} \frac{u_4}{u_2} \kappa_2$, une VST peut être obtenue comme précédemment en calculant une primitive telle que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\kappa_2}(Y = \hat{\kappa}_2) &= \int^{\hat{\kappa}_2} \frac{1}{\sqrt{g(\hat{\kappa}_2)}} d\kappa_2 \\ \hat{\kappa}_2^* &= \sqrt{\frac{n-1}{2}} \ln \left(2 \sqrt{\frac{2}{n-1}} \sqrt{\frac{2}{n-1} \hat{\kappa}_2^2 + \frac{1}{n} \frac{u_4}{u_2} \hat{\kappa}_2} + \frac{4}{n-1} \hat{\kappa}_2 + \frac{1}{n} \frac{u_4}{u_2} \right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Remarque Une forme équivalente de (4.22) basée sur la fonction arcsinus hyperbolique est établie en annexe C.

Biais D'après le théorème 3.2.2, avec $\mu = \kappa_2$ et $\sigma^2 = g(\hat{\kappa}_2)$,

$$\mathcal{T}_{\kappa_2}''(\kappa_2) = - \frac{\sqrt{n-1} \sqrt{n} (4n u_2^2 |u_2| \hat{\kappa}_2 + (n-1) |u_2| u_4)}{\hat{\kappa}_2 \sqrt{2n u_2^2 \hat{\kappa}_2 + (n-1) u_4} (4n u_2^2 \hat{\kappa}_2^2 + (2n-2) u_4 \hat{\kappa}_2)},$$

le biais vaut

$$\text{Biais}_{\hat{\kappa}_2^*}(\hat{\kappa}_2) = - \frac{\sqrt{n-1} |u_2| (4n u_2^2 \hat{\kappa}_2 + (n-1) u_4) (2u_2 \hat{\kappa}_2^2 + u_4 \hat{\kappa}_2 - n u_2)}{4u_2 \sqrt[3]{n \hat{\kappa}_2} (2n u_2^2 \hat{\kappa}_2 + (n-1) u_4)}. \quad (4.23)$$

VST corrigée du biais D'après le théorème 3.5.1, on obtient

$$\mathcal{T}_{\kappa_2}^{bc} = \mathcal{T}_{\kappa_2}(\hat{\kappa}_2) + (4.25) + (4.26). \quad (4.24)$$

avec les deux termes

$$\frac{(n-1) u_4 + 4\hat{\kappa}_2 n u_2}{4\sqrt{\hat{\kappa}_2} (n-1) n u_2 \sqrt{(n-1) u_4 + 2\hat{\kappa}_2 n u_2}} \quad (4.25)$$

et

$$- \frac{(n-1)^{\frac{3}{2}} |u_2| (4n u_2^2 \hat{\kappa}_2 + (n-1) u_4) (2u_2 \hat{\kappa}_2^2 + u_4 \hat{\kappa}_2 - n u_2)}{4\sqrt{n} ((n-1) u_4 + 2n u_2) \hat{\kappa}_2^{\frac{5}{2}} (2n u_2^2 \hat{\kappa}_2 + (n-1) u_4)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.26)$$

VST inverse Une VST inverse s'écrit simplement d'après le tableau 3.3

$$\mathcal{T}_{\kappa_2}^{-1}(\hat{\kappa}_2) = \frac{\frac{1}{4} e^{2\hat{\kappa}_2 \sqrt{\frac{2}{n-1}}} - \frac{1}{2n u_2^2} e^{\hat{\kappa}_2 \sqrt{\frac{2}{n-1}}} + \frac{u_4^2}{4n^2 u_2^2}}{\frac{2}{n-1} e^{\hat{\kappa}_2 \sqrt{\frac{2}{n-1}}}}. \quad (4.27)$$

Loi asymptotique

$$\sqrt{n} (\kappa_2^* - \mathcal{T}_{\kappa_2}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1). \quad (4.28)$$

4.2.2 Estimateur de l'intensité basé sur $\hat{\kappa}_2$

Pour un Shot Noise défini par l'équation (2.3), l'intensité λ peut également s'écrire¹

$$\lambda_2 = \frac{\mathbb{E}[X^2(t)]}{\mathbb{E}[u^2] \int h^2(t) dt}, \quad (4.29)$$

et l'estimateur naturel de l'intensité du processus λ_2 basé sur $\hat{\kappa}_2$ s'écrit :

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{\hat{\kappa}_2}{u_2}, \quad u_2 \neq 0, \quad (4.30)$$

où $\hat{\kappa}_2$ est l'estimateur du cumulant d'ordre 2 de la section précédente. Le facteur $u_2 = \mathbb{E}[u^2] \int h^2(t) dt$ étant supposé connu et constant au cours du temps, l'estimateur est non biaisé car $\hat{\kappa}_2$ est une k-statistique

$$\mathbb{E}[\hat{\lambda}_2] = \lambda, \quad (4.31)$$

et sa variance vaut

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{\lambda}_2] &= \frac{\text{Var}[\hat{\kappa}_2]}{u_2^2} \\ &= \frac{2}{n-1} \lambda^2 + \frac{1}{n} \frac{u_4}{u_2^2} \lambda. \end{aligned} \quad (4.32)$$

La variance de l'estimateur de l'intensité basé sur $\hat{\kappa}_2$ est donc également un polynôme d'ordre 2 de l'intensité du Shot Noise (QVF).

VST La fonction de variance s'écrivant $g(\lambda) = \frac{2}{n-1} \lambda^2 + \frac{1}{n} \frac{u_4}{u_2^2} \lambda$, une VST peut être obtenue comme précédemment en calculant une primitive telle que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\lambda_2}(Y = \hat{\lambda}_2) &= \int^{\hat{\lambda}_2} \frac{1}{\sqrt{g(\lambda)}} d\lambda \\ \lambda_2^* &= \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2}} \ln \left(2 \sqrt{\frac{2}{n-1}} \sqrt{\frac{2}{n-1} \hat{\lambda}_2^2 + \frac{u_4}{n} \hat{\lambda}_2 + \frac{4}{n-1} \hat{\lambda}_2 + \frac{u_4}{n}} \right) \quad (\text{cf. tableau 3.3}). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Les liens entre logarithmes et fonctions hyperboliques (rappelés en annexe C.8) permettent d'écrire (4.33) sous la forme suivante

$$\lambda_2^* = \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2}} \operatorname{asinh} \left(\frac{4n}{(n-1)u_4} \hat{\lambda}_2^2 + 1 \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{u_4}{n} \right) \quad (\text{cf. équation (C.40)}). \quad (4.34)$$

Approximations Pour n suffisamment grand,

$$\mathcal{T}_{\lambda_2} \approx \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \operatorname{asinh} \left(\frac{4}{u_4} \hat{\lambda}_2^2 + 1 \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{u_4}{n} \right), \quad (4.35)$$

Si, de plus, $n \approx u_4$, $\log(\frac{u_4}{n}) \approx 0$, on a alors

$$\mathcal{T}_2 \approx \sqrt{\frac{n}{2}} \operatorname{asinh} \left(\frac{4}{n} \hat{\lambda}_2^2 + 1 \right). \quad (4.36)$$

1. On peut généraliser à tout ordre grâce au théorème de Campbell.

Biais D'après le théorème 3.2.2, avec $\mu = \lambda_2$ et $\sigma^2 = (4.32)$, on a

$$\mathcal{T}_{\lambda_2}'' = -\frac{\sqrt{n-1} \sqrt{n} (4n\lambda_2 + (n-1) u_4)}{\sqrt{\lambda_2} \sqrt{2n\lambda_2 + (n-1) u_4} (4n\lambda_2^2 + (2n-2) u_4\lambda)}, \quad (4.37)$$

et le biais vaut

$$\text{Biais} = -\frac{\sqrt{n-1} (8n^2 u_2^2 \lambda_2^2 + ((2n^2 - 2n) u_2^2 + 4n^2 - 4n) u_4\lambda_2 + (n^2 - 2n + 1) u_4^2)}{\sqrt{n} \sqrt{\lambda_2} \sqrt{2n\lambda_2 + (n-1) u_4} ((8n^3 - 8n^2) u_2^2 \lambda_2 + (4n^3 - 8n^2 + 4n) u_2^2 u_4)}. \quad (4.38)$$

Pour n assez grand,

$$\text{Biais} = -\frac{(4\lambda + u_4) \left(\frac{2\lambda^2}{n} + \frac{u_4\lambda}{n u_2^2} \right)}{2\sqrt{n} \sqrt{\lambda} \sqrt{2\lambda + u_4} (4\lambda^2 + 2u_4\lambda)} \quad (4.39)$$

VST corrigée du biais

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\lambda_2}^{bc} &= \mathcal{T}_{\lambda_2} + \frac{1}{2n} \frac{u_4}{u_2^2} \\ &+ \frac{8n^2 u_2^2 |u_2| \lambda^2 + ((2n^2 - 2n) u_2^2 + 4n^2 - 4n) |u_2| u_4\lambda + (n^2 - 2n + 1) |u_2| u_4^2}{\sqrt{2n\lambda + (n-1) u_4} \sqrt{2n u_2^2 \lambda + (n-1) u_4} (8n^2 u_2^2 \lambda^2 + (4n^2 - 4n) u_2^2 u_4\lambda)} \end{aligned} \quad (4.40)$$

VST inverse Une VST inverse s'écrit

$$\mathcal{T}_{\lambda_2}^{-1}(\lambda_2^*) = \frac{\frac{1}{2} \exp\left(\frac{2\sqrt{2}\lambda_2^*}{\sqrt{n-1}}\right)^2 - \frac{u_4}{2n^2} \exp\left(\frac{\sqrt{2}\lambda_2^*}{\sqrt{n-1}}\right) + \frac{u_4^2}{4n^2 c_2^4}}{\frac{2}{n-1} \exp\left(\frac{\sqrt{2}\lambda_2^*}{\sqrt{n-1}}\right) + \frac{2u_4}{n(n-1)c_2^2}}. \quad (4.41)$$

ou bien

$$\mathcal{T}_{\lambda_2}^{-1}(\lambda_2^*) = \sqrt{\frac{(n-1)u_4}{4n} \left(\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} \left[\lambda_2^* - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{u_4}{n}\right) \right] \right) - 1 \right)} \quad (4.42)$$

Loi asymptotique

$$\sqrt{n}(\lambda_2^* - \mathcal{T}_{\lambda_2}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1). \quad (4.43)$$

4.3 Simulations

Des trajectoires du Shot Noise ont été générées avec différentes intensités λ avec une période d'échantillonnage $T_s = 10^{-5}$ s. Pour chaque intensité, $\hat{\kappa}_1$ et $\hat{\kappa}_2$ et leurs variances respectives sont estimées. Les marques u ont été générées suivant une loi uniforme $\mathcal{U}(0, 300)$ de moyenne 150. La réponse impulsionnelle $h(t) = \exp(-t)$, $t > 0$ et $u_1 = 150$, $u_2 = 150^2/2$. L'ensemble des résultats obtenus sont représentés sur les figures 4.1 et 4.2.

La figure 4.1a montre la relation linéaire entre $\hat{\kappa}_1$ et sa variance comme attendu (équation (4.3)) et une régression linéaire des variances estimées avec $n = 3950$ échantillons. On

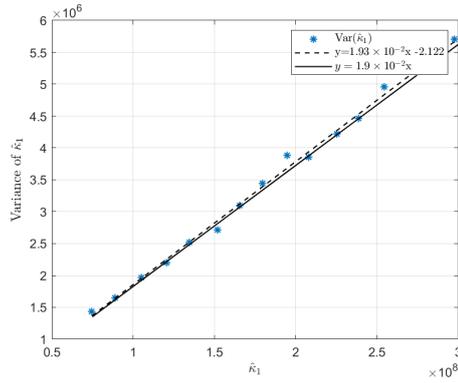
peut observer une bonne concordance entre les valeurs théoriques (1.9×10^{-2}) et estimées (1.93×10^{-2}) de la pente. La figure 4.2a montre la relation quadratique entre $\hat{\kappa}_2$ et sa variance comme prévu par l'équation (4.20) et une régression quadratique (pour $n = 3950$ échantillons également). Le coefficient du monôme d'ordre 2 ($= 9.995 \times 10^{-4}$) est très proche de celui estimé ($= 1.295 \times 10^{-3}$).

La stabilisation de la variance par rapport à λ peut être observée dans les sous-figure (b) des figures 4.1 et 4.2 respectivement : la variance des deux quantités transformées $\hat{\kappa}_1^*$ et $\hat{\kappa}_2^*$ atteint la valeur théorique asymptotique 1. Les boîtes à moustaches ont été obtenues avec 100000 simulations Monte Carlo avec $n = 3950$ échantillons de Shot Noise.

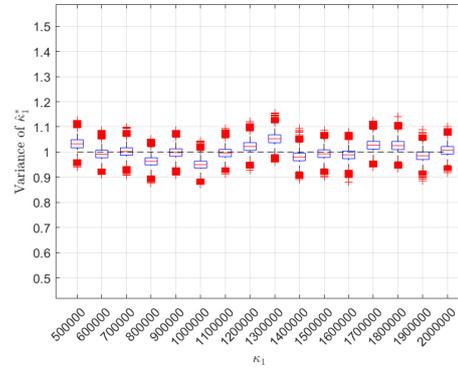
La stabilisation de la variance par rapport à n est illustrée dans les figures 4.1c et 4.2c pour $\hat{\kappa}_1^*$ et $\hat{\kappa}_2^*$ respectivement. Plus les données sont nombreuses, plus la variance est stable. Pour les deux quantités, une bonne stabilisation de la variance est obtenue à partir de $n = 1000$ et au-delà.

Les mêmes simulations ont été menées dans la publication du §4.4 pour $\hat{\lambda}_1^*$ et $\hat{\lambda}_2^*$.

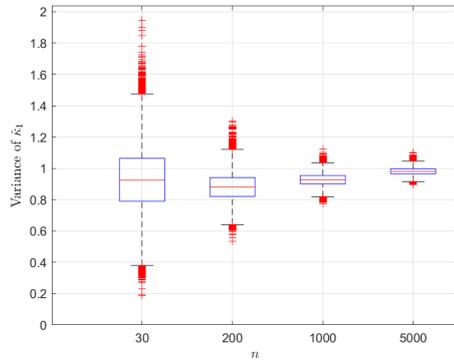
Enfin le biais des transformées a été évalué pour $n = 2000$ et son évolution en fonction de κ_1 et κ_2 sur les figures 4.1d et 4.2d respectivement. Pour les paramètres de simulation considérés, les valeurs sont très faibles.



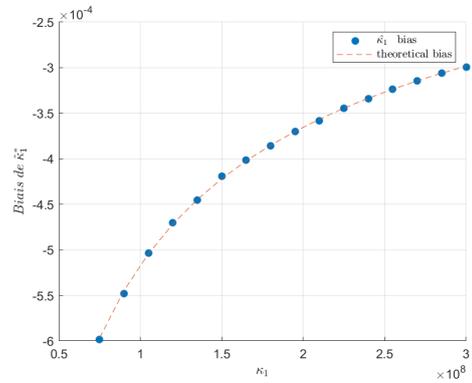
(a) Variation linéaire de la variance de $\hat{\kappa}_1$ en fonction de λ pour $n = 2000$.



(b) Stabilisation de variance de $\hat{\kappa}_1^*$.

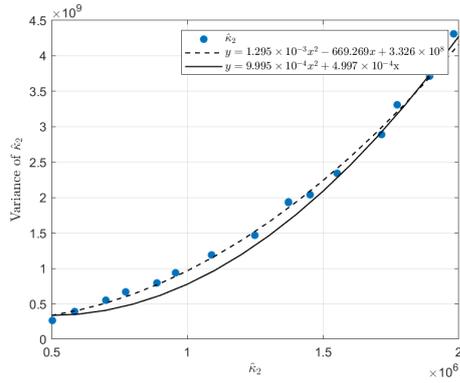


(c) Convergence de la variance de $\hat{\kappa}_1^*$ en fonction de n pour $\lambda = 2.10^6$ fixé.

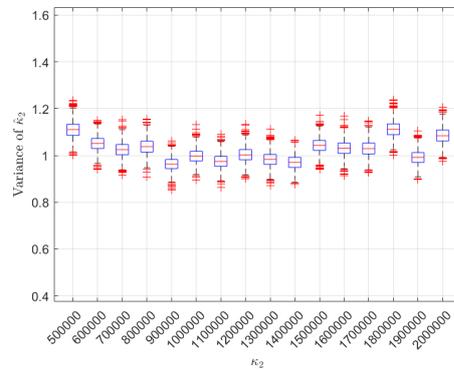


(d) Biais de la transformée en fonction de κ_1 pour $n = 2000$.

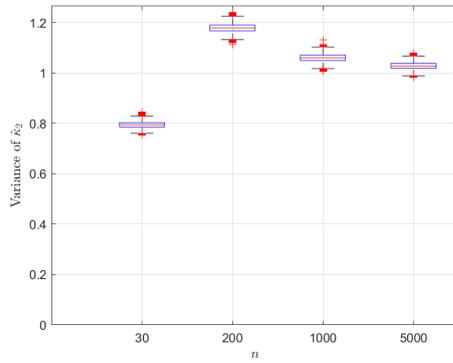
FIGURE 4.1 – Simulations effectuées pour $\hat{\kappa}_1$ et $\hat{\kappa}_1^*$.



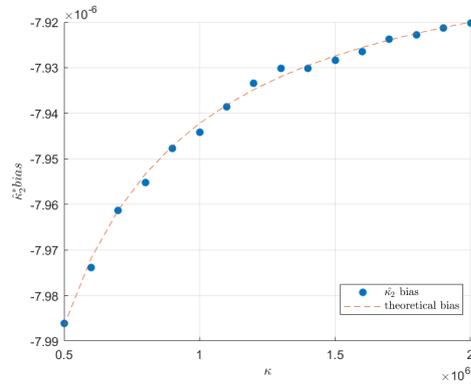
(a) Variation quadratique de la variance de $\hat{\kappa}_2$ en fonction de λ pour $n = 2000$.



(b) Stabilisation de variance de $\hat{\kappa}_2^*$.



(c) Convergence de la variance de $\hat{\kappa}_2^*$ en fonction de n pour $\lambda = 2.10^6$ fixé.



(d) Biais de la VST en fonction de κ_2 pour $n = 2000$.

FIGURE 4.2 – Simulations effectuées pour $\hat{\kappa}_2$ et $\hat{\kappa}_2^*$.

4.4 Publication

Cette publication reprend de manière détaillée les résultats établis aux §4.1.2 et §4.2.2. La question de l'éventuelle corrélation des données y est abordée, et des conditions suffisantes d'application des VST sont établies grâce à la formule de Bartlett (Porat, 1994, Théorème 4.1). Des simulations numériques illustrent les propriétés statistiques des estimateurs $\hat{\lambda}_1$ et $\hat{\lambda}_2$ et de leurs versions homoscédastiques λ_1^* et λ_2^* suite à l'application des VST correspondantes. Les résultats obtenus sont résumés ici :

- le lien linéaire entre $\hat{\lambda}_1$ et sa variance empirique pour $\lambda \in [5 \times 10^5, 2 \times 10^6]$ est observé en simulation, comme attendu ; la régression linéaire sur les points obtenus montre une bonne correspondance entre les valeurs théoriques et les valeurs estimées ;
- le lien quadratique entre $\hat{\lambda}_2$ et sa variance empirique est également vérifié en simulation sur la même plage de valeurs de λ , comme attendu ; le coefficient du monôme d'ordre 2 est très proche de celui estimé ;
- les variances des quantités homoscédastiques λ_1^* et λ_2^* se concentrent autour de la valeur théorique attendue, soit 1.
- L'examen du comportement des VST en fonction du nombre de données n est également apprécié par simulation, et montre que pour $\lambda = 2 \times 10^6$ fixé plus n est grand, plus la variance est stable.

L'évaluation du biais n'a pas été présentée dans l'article ; mais les courbes pour λ_1^* et λ_2^* sont similaires à celles obtenues figures 4.1d, 4.2d.

Variance Stabilizing Transformations for Intensity Estimators of Shot Noise

Thierry Montagu, André Ferrari

Abstract—This paper considers two estimators of the intensity λ of the Shot Noise process for high values of λ . They are based on the first and the second empirical cumulants of the Shot Noise. For both statistics, it is shown that their respective variance grows respectively linearly and quadratically with λ . We construct Variance Stabilizing Transforms (and their corresponding inverse transforms) for both estimators thanks to the Delta method so as to make their respective variance constant (regardless of λ). Asymptotic distributions of the variance stabilized estimators are established. Finally, variance stabilization property is validated by Monte-Carlo simulations.

Index Terms—Shot Noise, variance stabilization, Delta theorem, intensity estimator, pile-up effect, Campbell theorem, k -statistics, asymptotic normality.

I. INTRODUCTION

THE continuous time Shot Noise process is a well known stochastic process stemming from physics [1], [2]. This stochastic process can also be found in other application domains such as telecommunications [3], [4], biology (see [5] and references therein), and finance [6] as well. It is defined by:

$$X(t) = \sum_k u_k h(t - \tau_k)$$

where $h(t)$ is a known nonzero causal integrable function with finite support, representing a causal impulse response function ($h(t) = 0$ for all $t < 0$). The u_k are independent identically distributed (i.i.d.) random variables called *marks* of the Shot Noise and τ_k are arrival times of an (unobserved) Poisson process with intensity λ (see [7] for thorough details). John Gubner's works [8], [9] focused on Shot Noise probability distributions and intensity estimation [10], [11]. The estimation of the density of marks is sought in [12], [13].

We focus on the estimation of the intensity parameter λ which reflects the number of events (“shots”, like particles impinging a detector) that can occur in time: the higher λ , the more “shots” can be observed. As a direct consequence, the higher λ , the more likely events can occur simultaneously or at least very close to one another. As each pulse occurring at τ_k are each observed through $h(t - \tau_k)$, the larger the support of h , the more likely the two signals can superimpose and

sum: this phenomenon is known as “pile-up” effect. For recent works focusing on the estimation of the intensity of the Shot Noise with piled-up events using sparse signal representation of nuclear measurements see [14], [15]. In this work, we consider (very) high intensity regime, where all event pile-up so that one can not distinguish any single one.

We consider two estimators of the intensity λ for a stationary discretely sampled high intensity Shot Noise. The respective variances of these estimators are shown to increase with λ , a property called heteroskedasticity in statistics. One way to deal with heteroskedasticity is to seek to make the variance “stable” (constant) by constructing a Variance Stabilizing Transform (VST) [16], [17], [18]. Such a transformation makes the variance of the quantity of interest constant and asymptotically gaussian. One well known VST is the Anscombe transform [19] for the mean of Poisson random variables. Using a VST \mathcal{T} may require the knowledge of the inverse transform \mathcal{T}^{-1} (defined as $\mathcal{T}^{-1}(\mathcal{T}(x)) = x$). This is typically the case in signal/image processing where the denoising process is usually $[\mathcal{T} \rightarrow \text{Denoising} \rightarrow \mathcal{T}^{-1}]$ (see [20] for instance). Many applications make use of VST for Poisson denoising in signal processing [21, sec. 4], and in image processing such as astronomical imaging [22], radar imaging [23], biological imaging [24], [25], [26], [27], [28] or medical imaging [29], [30], [31].

The main contributions in this work are the variance stabilizing transforms established for two intensity estimators of the Shot Noise process. More precisely it is first noted that the respective variance of the first two cumulants estimators of the Shot Noise are linear and quadratic functions of the intensity λ in section II. Consequently, the two intensity estimators considered here inherit this property. Based on the Delta method, we derive two variance stabilizing transforms \mathcal{T}_1 and \mathcal{T}_2 (and their inverses) in section III which lead to two intensity estimators with constant variances. Asymptotic distributions of these variance-stabilized estimators are established in section IV and validated by Monte-Carlo simulations in section V.

II. INTENSITY ESTIMATORS

We consider a (very) high intensity discretely sampled Poisson Shot Noise process $X(kT_s) = X(k)$ assuming without loss of generality a sampling period $T_s = 1$. By high intensity, we mean that individual pulses $u_k h(k - \tau_k)$ can not be individually distinguished [32], [33]. Let define $c_k = \mathbb{E}[u_k^j] \sum_n h^j(n)$ and assume c_1 and c_2 are known. Let

This is the author's version of the manuscript accepted for publication in IEEE Signal Processing Letters, Volume 30, August 2023. The codes are included at the end of this document. The paper can be found in its final format at IEEE Signal Processing Letters website dot : 10.1109/SP.2023.3299191. Personal use of this material is permitted. Permission from IEEE must be obtained for all other uses, in any current or future media, including eprinting/republishing this material for advertising or promotional purposes, creating new collective works, for resale or redistribution to servers or lists, or reuse of any copyrighted component of this work in other works.

T. Montagu was formerly with CEA Saclay and is now research engineer at Exail Robotics, 83130 La Garde, France (e-mail: thierry.montagu@gmail.com, thierry.montagu@exail.com).

A. Ferrari is with Université Côte d'Azur, CNRS, Observatoire de la Côte d'Azur, France (e-mail: Andre.Ferrari@univ-cotedazur.fr).

κ_j denote the order j cumulant of $X(k)$ given by the Campbell theorem [7], [34, p. 223]

$$\kappa_j = \lambda c_j.$$

We seek to estimate λ based on the ‘‘plugin’’ intensity estimators:

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\hat{\kappa}_j}{c_j} \quad (1)$$

for $j = 1$ and $j = 2$, and $c_j \neq 0$. These estimators, named first and second order intensity estimators in the following, are typically used in neutronics [35], [36], [37], [38].

A. First order estimator

We set $j = 1$ in (1) and use the empirical mean estimator for n observations

$$\hat{\kappa}_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X(k).$$

We seek an expression of the variance of $\hat{\kappa}_1$ taking into account that the samples $X(k)$ may be correlated. Correlation may stem from large support of h , since the covariance function of X is [34, p. 223]

$$\gamma(m) = \lambda \mathbb{E}[u_k^2] \sum_{k \geq m} h(k)h(k-m). \quad (2)$$

Property 1. *Assuming that the impulse response $h(k)$ verifies $\exists 0 < \rho < 1, C > 0$ such that $\forall k \geq 0, |h(k)| \leq C\rho^k$, we have as $\rho \rightarrow 0$:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \text{var}[\hat{\kappa}_1] = \kappa_2 + o(1).$$

Proof. Recall that (see [39, sec 4.2])

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \text{var}[\hat{\kappa}_1] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma(m)$$

with $\gamma(m)$ given by (2). Using the upper bound on $|h(k)|$ we obtain:

$$|\gamma(m)| \leq \lambda C^2 \mathbb{E}[u_k^2] \frac{\rho^m}{1 - \rho^2} \quad (3)$$

and

$$\left| \sum_{m \neq 0} \gamma(m) \right| \leq \lambda C^2 \mathbb{E}[u_k^2] \frac{2\rho}{(1 - \rho^2)(1 - \rho)}$$

and consequently as $\rho \rightarrow 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \text{var}[\hat{\kappa}_1] = \gamma(0) + o(1)$$

where $\gamma(0) = \kappa_2 = \lambda c_2$. \square

Property 1 suggests to approximate $\text{var}[\hat{\kappa}_1]$ for n sufficiently large and a sufficiently fast decay of the impulse response $h(k)$ by:

$$\text{var}[\hat{\kappa}_1] = \frac{\kappa_2}{n} = \lambda \frac{c_2}{n} \quad (4)$$

which is a linear function of λ . From (1), we clearly have $\mathbb{E}[\hat{\lambda}_1] = \lambda$, and as a first order approximation

$$\text{var}[\hat{\lambda}_1] = \frac{\lambda}{n} \frac{c_2}{c_1^2} \quad (5)$$

showing that the variance of $\hat{\lambda}_1$ is proportional to λ . We use this expression in section III-B.

B. Second order estimator

We set $j = 2$ in (1) and consider the empirical variance estimator:

$$\hat{\kappa}_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X(k) - \hat{\kappa}_1)^2.$$

It is asymptotically unbiased (and, since it is a k -statistic, no other cumulant estimator with a smaller variance exist [40]). We seek an expression of the variance of $\hat{\kappa}_2$ as in the previous section.

Property 2. *Assuming that the impulse response $h(k)$ verifies $\exists 0 < \rho < 1, C > 0$ such that $\forall k \geq 0, |h(k)| \leq C\rho^k$ we have*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \text{var}[\hat{\kappa}_2] = 2\kappa_2^2 + 2\kappa_4 + o(\rho)$$

Proof. According to [39, Th. 4.1], the asymptotic variance of the empirical variance (Bartlett formula) is:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \text{var}[\hat{\kappa}_2] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2\gamma^2(m) + \text{Cum}_4(m, m, 0). \quad (6)$$

where $\text{Cum}_4(m, m, 0)$ is an order 4 cumulant of X .

In an analogous way to the proof of Property 1, (3) implies:

$$\left| \sum_{m \neq 0} \gamma^2(m) \right| \leq \lambda^2 C^4 \mathbb{E}[u_k^2]^2 \frac{2\rho^2}{(1 - \rho^2)^3}. \quad (7)$$

Following the proof of (8) in [34, p. 223] we can show:

$$\text{Cum}_4(m, m, 0) = \lambda \mathbb{E}[u_k^4] \sum_{k \geq m} h^2(k)h^2(k-m) \quad (8)$$

which implies

$$\begin{aligned} |\text{Cum}_4(m, m, 0)| &\leq \lambda C^4 \mathbb{E}[u_k^4] \frac{\rho^{2m}}{1 - \rho^4} \\ \left| \sum_{m \neq 0} \text{Cum}_4(m, m, 0) \right| &\leq \lambda C^4 \mathbb{E}[u_k^4] \frac{2\rho^2}{(1 - \rho^2)(1 - \rho^4)} \end{aligned} \quad (9)$$

Replacing (7) and (9) in (6) leads to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \text{var}[\hat{\kappa}_2] = 2\gamma^2(0) + \text{Cum}_4(0, 0, 0) + o(\rho).$$

with $\text{Cum}_4(0, 0, 0) = \kappa_4 = \lambda c_4$. \square

In an analogous way to the first order estimator, Property 2 shows that for n sufficiently large and a sufficiently fast decay of the impulse response $h(k)$

$$\text{var}[\hat{\kappa}_2] = \frac{2\lambda^2 c_2^2}{n} + \frac{\lambda c_4}{n} \quad (10)$$

and the variance of $\hat{\lambda}_2$ is a second order polynomial function of λ

$$\text{var}[\hat{\lambda}_2] = \frac{2\lambda^2}{n} + \frac{\lambda c_4}{n c_2^2}, \quad (11)$$

which we will use in section III-C.

III. VARIANCE STABILIZING TRANSFORMS

A. Background

A VST is a data transformation whose main aim is to render the variance independent of the mean and provide constant (stable) variance. VST were introduced in the pioneering works [41], [42], [19]. For a statistic Z_n with mean $E[Z_n] = \mu$ and variance $\text{var}[Z_n] = g(\mu)$ where g is a continuous function, let define the VST \mathcal{T} as $Y_n = \mathcal{T}(Z_n)$. Using the Delta method (see for example [17]) for \mathcal{T} around the mean μ , we have $\mathcal{T}(Z_n) \approx \mathcal{T}(\mu) + \mathcal{T}'(\mu)(Z_n - \mu)$, whose variance writes $\text{var}[Y_n] \approx (\mathcal{T}'(\mu))^2 g(\mu)$. Equaling this last expression to an arbitrary fixed constant C^2 , set to 1 in the following, a VST $\mathcal{T}(Z_n)$ can be found by finding the primitive of $\mathcal{T}'(Z_n) \approx Cg^{-1/2}(Z_n)$

$$\mathcal{T}(Z_n) = \int^{Z_n} \frac{1}{\sqrt{g(x)}} dx. \quad (12)$$

B. VST for the first order estimator

Here $Z_n = \hat{\lambda}_1$ and $g(\lambda)$ is given by (5). Applying (12) gives

$$\lambda_1^* = \mathcal{T}_1(\hat{\lambda}_1) = \frac{2c_1}{\sqrt{c_2}} \sqrt{n\hat{\lambda}_1}. \quad (13)$$

The inverse algebraic transformation (obtained by squaring (13) then isolating $\hat{\lambda}_1$) is

$$\hat{\lambda}_1 = \mathcal{T}_1^{-1}(\lambda_1^*) = \frac{c_2}{4nc_1^2} \lambda_1^{*2}.$$

C. VST for the second order estimator

Here $Z_n = \hat{\lambda}_2$, the variance function g is given by (11). Applying (12) gives [43, formula 2.261]

$$\sqrt{\frac{n}{2}} \ln \left(2\sqrt{\frac{2}{n} \left(\frac{2x^2}{n} + \frac{c_4 x}{nc_2^2} \right) + \frac{4x}{n} + \frac{c_4}{nc_2^2}} \right) \quad (14)$$

$$\lambda_2^* = \mathcal{T}_2(\hat{\lambda}_2) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \times \ln \left(\frac{2\sqrt{2}}{n} \sqrt{2\hat{\lambda}_2^2 + \frac{c_4}{c_2^2} \hat{\lambda}_2} + \frac{4}{n} \hat{\lambda}_2 + \frac{c_4}{nc_2^2} \right). \quad (15)$$

The inverse algebraic transform (obtained after taking exponential of (15) and isolating $\hat{\lambda}_2$) writes

$$\hat{\lambda}_2 = \mathcal{T}_2^{-1}(\lambda_2^*) = \frac{\sqrt{n} \left(\exp \left(\frac{2\sqrt{2}\lambda_2^*}{\sqrt{n}} \right)^2 - \frac{2c_4}{nc_2^2} \exp \left(\frac{\sqrt{2}\lambda_2^*}{\sqrt{n}} \right) + \frac{c_4^2}{n^2 c_2^4} \right)}{\sqrt{32} \exp \left(\frac{\sqrt{2}\lambda_2^*}{\sqrt{n}} \right)}.$$

IV. ASYMPTOTIC PROPERTIES

The Delta theorem [16, chap. 2] allows to establish asymptotic distributions of VST for a sequence of statistics Z_n such that ($\xrightarrow{\mathcal{D}}$ denoting convergence in distribution)

$$\sqrt{n}(Z_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, g(\theta)), g'(\theta) \neq 0.$$

Moreover, if the process is linear (see [44, chap. 7]), asymptotic distributions of $\hat{\kappa}_1$ and $\hat{\kappa}_2$ are gaussian with covariances given by (4) and (10). We will assume this hypothesis holds in the following.

A. First order estimator

Assuming the empirical first cumulant of the stationary Shot Noise is asymptotically gaussian distributed and Property 1 holds:

$$\sqrt{n}(\hat{\kappa}_1 - \mu) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \lambda c_2)$$

as $n \rightarrow \infty$. In the same way the first order intensity estimator (see [45])

$$\sqrt{n}(\hat{\lambda}_1 - \lambda) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(0, \lambda \frac{c_2}{c_1^2} \right).$$

According to the Delta theorem with $Z_n = \hat{\lambda}_1$, $\theta = \lambda$, and \mathcal{T}_1 given by (13), one obtains

Theorem 1. *Under the previous hypothesis,*

$$\sqrt{n}(\lambda_1^* - \mathcal{T}_1(\lambda_1)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1).$$

B. Second order estimator

Assuming the empirical second cumulant of the stationary Shot Noise is asymptotically gaussian distributed (see [46], [18, Th. 7.5.1]) and Property 2 holds:

$$\sqrt{n}(\hat{\kappa}_2 - \kappa_2) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 2\kappa_2^2 + \kappa_4)$$

with $2\kappa_2^2 = 2\lambda^2 c_2^2$, as $n \rightarrow \infty$. The second order intensity estimator is also asymptotically gaussian according to

$$\sqrt{n}(\hat{\lambda}_2 - \lambda) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(0, 2\lambda^2 + \frac{c_4}{c_2^2} \lambda \right).$$

With $Z_n = \hat{\lambda}_2$, $\theta = \lambda$, \mathcal{T}_2 given by (15), one obtains according to the Delta theorem

Theorem 2. *Under the previous hypothesis,*

$$\sqrt{n}(\lambda_2^* - \mathcal{T}_2(\lambda_2)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1).$$

V. NUMERICAL EXPERIMENTS

In this section, we illustrate thanks to computer simulations the heteroskedasticity property of $\hat{\lambda}_1$ and $\hat{\lambda}_2$ and the variance stabilization achieved by \mathcal{T}_1 and \mathcal{T}_2 wrt λ and n .

A. Setup

Shot Noise sample paths were generated with different intensities λ ranging from $5 \cdot 10^5$ to $2 \cdot 10^6$, with sampling period $T_s = 10^{-5}$ s. For each intensity, $\hat{\lambda}_1$ and $\hat{\lambda}_2$ are estimated as well as their respective variance. $\mathcal{T}_1(\hat{\lambda}_1)$ and $\mathcal{T}_2(\hat{\lambda}_2)$ are applied in order to stabilize variance for each λ .

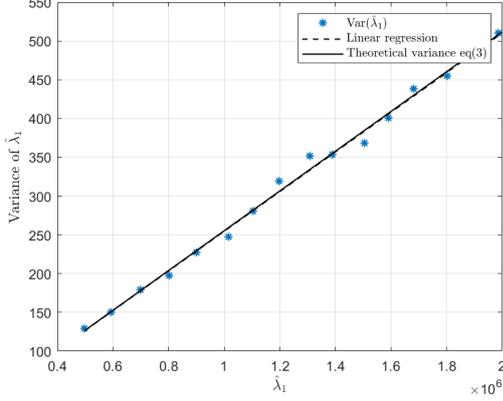


Figure 1. Linear variation of the variance of $\hat{\lambda}_1$ as a function of λ with $n = 2000$.

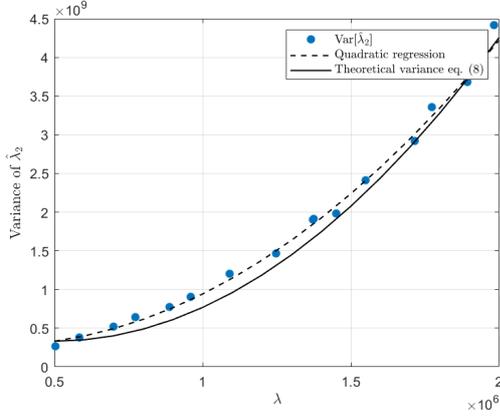


Figure 2. Quadratic variation of the variance of $\hat{\lambda}_2$ as a function of λ with $n = 2000$.

B. Parameter settings

The impulse response is $h(t) = \exp(-t)$, $t > 0$. Marks u_k were generated following a uniform distribution $\mathcal{U}(0, 300)$ with mean 150, so $c_1 = 150$, $c_2 = 150^2/2$.

C. Results

Figure 1 shows the linear relation between $\hat{\lambda}_1$ and its variance as expected by (4) and a linear regression of the estimated variances with $n = 2000$ Shot Noise samples. A good agreement between the theoretical/estimated values of the slope can be noticed. Figure 2 shows the quadratic relation between $\hat{\lambda}_2$ and its variance as expected by (10) and a quadratic regression (again with $n = 2000$ Shot Noise samples). The coefficient of order 2 monomial ($\frac{2}{n-1} = 10^{-3}$) is very close to the estimated one ($= 9.995 \times 10^{-4}$).

Variance stabilization wrt λ can be observed on the bottom of figure 3 and figure 4 for $\hat{\lambda}_1$ and $\hat{\lambda}_2$ respectively: variance of both transformed quantities $\hat{\lambda}_1^*$ and $\hat{\lambda}_2^*$ attain the asymptotic theoretical value 1. Boxplots were obtained based on 100000 Monte Carlo simulations with $n = 2000$ Shot Noise samples.

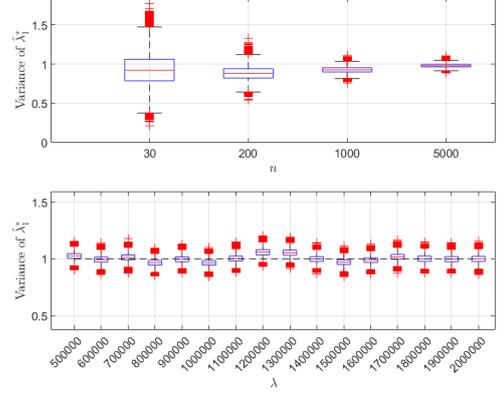


Figure 3. Top: Variance convergence for \mathcal{T}_1 as a function of n for (fixed) $\lambda = 2.10^6$. Bottom: Variance stabilization of $\hat{\lambda}_1^* = \mathcal{T}_1(\hat{\lambda}_1)$ for $n = 2000$. The dashed line corresponds to the theoretical asymptotic value of the variance after applying VST .

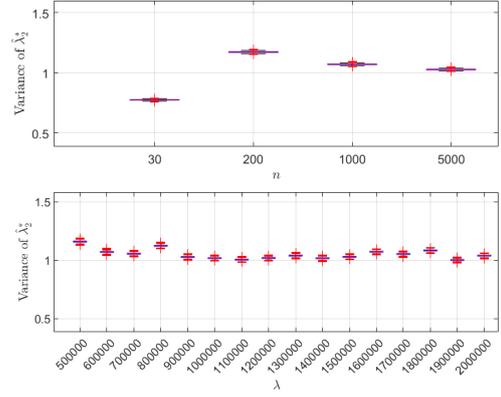


Figure 4. Top: Variance convergence for \mathcal{T}_2 as a function of n for (fixed) $\lambda = 2.10^6$. Bottom: Variance stabilization of $\hat{\lambda}_2^* = \mathcal{T}_2(\hat{\lambda}_2)$ for $n = 2000$. The dashed line corresponds to the theoretical asymptotic value of the variance after applying VST .

Variance stabilization wrt n is shown on top of figure 3 and 4 for $\hat{\lambda}_1$ and $\hat{\lambda}_2$ respectively: the more data the more stable the variance. For both quantities, good variance stabilization is obtained from $n = 1000$ and beyond.

VI. CONCLUSION

We have proved that the two intensity estimators $\hat{\lambda}_1$ and $\hat{\lambda}_2$ of a Shot Noise process are heteroskedastic quantities whose variances vary linearly and quadratically, respectively. Variance stabilizing transforms \mathcal{T}_1 and \mathcal{T}_2 (and their inverse) were built, and asymptotic normality theorems were established. Numerical experiments were conducted in order to characterize their statistical properties. The VST-based denoising process of [20] adapted with \mathcal{T}_1 and \mathcal{T}_2 (and their inverses) targets typical real heteroskedastic neutron measurement signals based on Shot Noise empirical mean and variance (see [36], [38]). Application of this process is planned in a forthcoming work.

REFERENCES

- [1] N. Campbell, "The fluctuation theorem. (shot effect)," *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 35, no. 1, pp. 127–129, 1939.
- [2] W. Schottky, "Über spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitätsleitern," *Annalen der Physik*, vol. 362, no. 23, pp. 541–567, 1918.
- [3] C. Charalambous and N. Menemenlis, "Statistical analysis of the received signal over multipath fading channels via generalization of shot-noise," in *IEEE International Conference on Communications*, vol. 7, 2001, pp. 2246–2250.
- [4] A. Ridolfi and M. Win, "Ultrawide bandwidth signals as shot noise: a unifying approach," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 24, no. 4, pp. 899–905, Apr 2006.
- [5] N. Privault, "Nonstationary shot noise modeling of neuron membrane potentials by closed-form moments and Gram–Charlier expansions," *Biological Cybernetics*, vol. 114, no. 4–5, pp. 499–518, 2020.
- [6] T. Schmidt, *Shot-noise processes in finance*. Cham: Springer International Publishing, 2017, no. 1, pp. 367–385.
- [7] J. Rice, "On generalized shot noise," *Advances in Applied Probability*, vol. 9, no. 3, pp. 553–565, 1977.
- [8] J. Gubner and M. Hayat, "A method to recover counting distributions from their characteristic functions," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 3, no. 6, pp. 184–186, Jun 1996.
- [9] J. A. Gubner, "Computation of Shot-Noise Probability Distributions and Densities," *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 17, no. 3, pp. 750–761, 1996.
- [10] R. Sequeira and J. Gubner, "Intensity estimation from shot-noise data," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, no. 6, pp. 1527–1531, Jun 1995.
- [11] —, "Blind intensity estimation from shot-noise data," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, no. 2, pp. 421–433, 1997.
- [12] P. Ilhe, É. Moulines, F. Roueff, and A. Souloumiac, "Nonparametric estimation of mark's distribution of an exponential shot-noise process," *Electronic Journal of Statistics*, vol. 9, no. 2, pp. 3098 – 3123, 2015. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1214/15-EJS1103>
- [13] P. Ilhe, F. Roueff, E. Moulines, and A. Souloumiac, "Nonparametric estimation of a shot-noise process," in *2016 IEEE Statistical Signal Processing Workshop (SSP)*, Jun 2016, pp. 1–4.
- [14] T. Trigano, Y. Sepulcre, and Y. Ritov, "Sparse reconstruction algorithm for nonhomogeneous counting rate estimation," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 65, no. 2, pp. 372–385, 2017.
- [15] C. Mclean, M. Pauley, and J. H. Manton, "Non-parametric decompounding of pulse pile-up under gaussian noise with finite data sets," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 68, pp. 2114–2127, 2020.
- [16] E. Lehmann, *Elements of Large-Sample Theory*, ser. Springer Texts in Statistics. Springer, 1998.
- [17] P. J. Bickel and K. A. Doksum, *Mathematical Statistics: basic ideas and selected topics*, 2nd ed. Prentice Hall, 2001, vol. 1.
- [18] P. Sen, J. Singer, and A. C. Pedrosa de Lima, *From Finite Sample to Asymptotic Methods in Statistics*, 1st ed. Cambridge University Press, 2009.
- [19] F. Anscombe, "The transformation of Poisson, binomial and negative-binomial data," *Biometrika*, vol. 15, pp. 246–254, 1948.
- [20] M. Mäkitalo and A. Foi, "Optimal inversion of the generalized Anscombe transformation for Poisson-gaussian noise," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 22, no. 1, pp. 91–103, Jan 2013.
- [21] D. L. Donoho, "Nonlinear Wavelet Methods for Recovery of Signals, Densities, and Spectra from Indirect and Noisy Data," in *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*. American Mathematical Society, 1993, pp. 173–205.
- [22] F. Murthagh, J.-L. Starck, and A. Bijaoui, "Image restoration with noise suppression using a multiresolution support," *Astronomy and Astrophysics Supplement*, vol. 112, pp. 179–189, 1995.
- [23] C. A. Deledalle, L. Denis, S. Tabti, and F. Tupin, "MuLoG, or How to Apply Gaussian Denoisers to Multi-Channel SAR Speckle Reduction?" *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 26, no. 9, pp. 4389–4403, 2017.
- [24] L. R. Borges, M. A. da Costa Vieira, and A. Foi, "Unbiased Injection of Signal-Dependent Noise in Variance-Stabilized Range," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 23, no. 10, pp. 1494–1498, Oct 2016.
- [25] L. Azzari and A. Foi, "Variance stabilization for noisy+estimate combination in iterative Poisson denoising," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 23, no. 8, pp. 1086–1090, Aug 2016.
- [26] —, "Variance stabilization in Poisson image deblurring," in *IEEE 14th International Symposium on Biomedical Imaging (ISBI 2017) - Melbourne, Australia*, 2017, pp. 728–731.
- [27] Y. Zhang, Y. Zhu, E. Nichols, Q. Wang, S. Zhang, C. Smith, and S. Howard, "A poisson-gaussian denoising dataset with real fluorescence microscopy images," in *2019 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, June 2019, pp. 11 702–11 710.
- [28] M. Wang, B. Lyu, and G. Yu, "ConvexVST: A Convex Optimization Approach to Variance-stabilizing Transformation," in *Proceedings of the 38th International Conference on Machine Learning*, ser. Proceedings of Machine Learning Research, M. Meila and T. Zhang, Eds., vol. 139. PMLR, 18–24 Jul 2021, pp. 10 839–10 848. [Online]. Available: <https://proceedings.mlr.press/v139/wang21.html>
- [29] T. Pieciak, S. Aja-Fernandez, and G. Vegas-Sanchez-Ferrero, "Non-Stationary Rician Noise Estimation in Parallel MRI Using a Single Image: A Variance-Stabilizing Approach," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 39, no. 10, pp. 2015–2029, 2017.
- [30] A. Bria, C. Marrocco, L. R. Borges, M. Molinara, A. Marchesi, J.-J. Mordang, N. Karssemeijer, and F. Tortorella, "Improving the Automated Detection of Calcifications using Adaptive Variance Stabilization," *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 37, Aug 2018.
- [31] X. Ma, K. Uğurbil, and X. Wu, "Denoise magnitude diffusion magnetic resonance images via variance-stabilizing transformation and optimal singular-value manipulation," *NeuroImage*, vol. 215, p. 116852, 2020.
- [32] A. Papoulis, "High Density Shot Noise and Gaussianity," *Journal of Applied Probability*, vol. 8, no. 1, pp. 118–127, 1971.
- [33] L. Heinrich and V. Schmidt, "Normal convergence of multidimensional shot noise and rates of this convergence," *Advances in Applied Probability*, vol. 17, no. 4, pp. 709–730, Dec. 1985.
- [34] D. L. Snyder, *Random Point Processes*, 2nd ed. Wiley-Interscience, 1975.
- [35] R. A. DuBridge, "Campbell theorem - system concepts and results," *IEEE Transactions on Nuclear Science*, vol. 14, no. 1, pp. 241–246, Feb 1967.
- [36] I. Lux and A. Baranyai, "Higher order Campbell techniques for neutron flux measurement. I. Theory," *Nuclear Instruments and Methods*, vol. 202, pp. 469–475, 1982.
- [37] —, "Higher order Campbell techniques for neutron flux measurement. II. Correlated Campbelling," *Nuclear Instruments and Methods*, vol. 202, pp. 477–480, 1982.
- [38] L. Vermeeren, M. Weber, L. Oriol, S. Breaud, P. Filliatre, B. Geslot, C. Jammes, S. Normand, and B. Lescop, "Experimental verification of the fission chamber gamma signal suppression by the campbelling mode," *IEEE Transactions on Nuclear Science*, vol. 58, no. 2, pp. 362–369, 2011.
- [39] B. Porat, *Digital processing of random signals: theory and methods*. Prentice Hall, 1994.
- [40] P. R. Halmos, "The Theory of Unbiased Estimation," *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 17, no. 1, pp. 34 – 43, 1946.
- [41] R. A. Fisher, "Frequency distribution of the values of the correlation coefficient in samples from an indefinitely large population," *Biometrika*, vol. 10, no. 4, pp. 507–521, 1915.
- [42] M. S. Bartlett, "The square root transformation in analysis of variance," *Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society*, vol. 3, no. 1, pp. 68–78, 1936.
- [43] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 5th ed. Academic Press, 1994.
- [44] P. J. Brockwell and R. A. Davis, *Time Series : Theory and Methods*, 2nd ed. Springer, 1991.
- [45] F. Liese and V. Schmidt, "Asymptotic Properties of Intensity Estimators for Poisson Shot-Noise Processes," *Journal of Applied Probability*, vol. 28, no. 3, pp. 568–583, 1991.
- [46] A. Dandawate and G. Giannakis, "Asymptotic properties and covariance expressions of kth-order sample moments and cumulants," in *Proceedings of 27th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, vol. 2, Nov 1993, pp. 1186–1190.

4.5 Conclusion du chapitre

Les estimateurs des cumulants $\hat{\kappa}_1$ et $\hat{\kappa}_2$ sont des quantités hétéroscédastiques, et en conséquence, les estimateurs de l'intensité du Shot Noise $\hat{\lambda}_1$ et $\hat{\lambda}_2$ portent également cette propriété. Par application de la « Delta method », les VST et leurs biais, permettant d'établir les VST corrigées du biais, ainsi que les VST inverses ont été établies pour ces quatre quantités. Cette démarche est poursuivie dans le chapitre suivant pour les estimateurs du flux neutronique.

Chapitre 5

Stabilisation de variance pour les estimateurs du flux neutronique

Sommaire

5.1	Courte introduction à la mesure de flux neutronique	61
5.1.1	Généralités sur le neutron	61
5.1.2	Shot Noise, cumulants et mesures neutroniques	61
5.1.3	Chaînes de mesure neutronique	62
5.1.4	Résumé	65
5.2	Voie Impulsions	66
5.2.1	Estimateur de l'intensité du flux	66
5.2.2	Stabilisation de variance pour l'estimateur de la voie « impulsions »	66
5.2.3	Conclusion	67
5.3	Voie Fluctuations	67
5.3.1	Estimateur du flux neutronique	68
5.3.2	Stabilisation de variance pour l'estimateur de la voie fluctuation	69
5.3.3	Conclusion	70
5.4	Voie Courant	70
5.4.1	Estimateur du flux neutronique	71
5.4.2	Transformée de stabilisation de variance et son inverse	71
5.4.3	Conclusion	72
5.5	Conclusion du chapitre	73

Basé sur les chapitres 3 et 4, on établit dans ce chapitre les transformées de stabilisation de variance pour les estimateurs du flux neutronique basés sur les cumulants du Shot Noise. Les VST corrigées du biais ont été établies par l'auteur dans le cadre de la VAE doctorat, et étend les travaux antérieurs (Montagu et Bakkali, 2018), (Montagu et Ferrari, 2023).

5.1 Courte introduction à la mesure de flux neutronique

5.1.1 Généralités sur le neutron

Le neutron est un élément constitutif du noyau atomique (comme le proton). Comme son nom l'indique, sa charge est nulle. Cette neutralité électrique implique l'insensibilité aux interactions coulombiennes et donc que le neutron interagit avec les noyaux de la matière rencontrée. De nombreuses applications découlent de cette propriété physique allant de la maîtrise de l'énergie nucléaire à son utilisation comme sonde à l'échelle microscopique (étude fine de la matière) ou macroscopique (caractérisation de fûts de déchets radioactifs, contrôle de matières nucléaires ou illicites, détection de nappes d'eau, d'hydrocarbures, contrôle de soudures par neutronographie). Son énergie conditionne sa manière d'interagir avec la matière. Pour les neutrons dits « thermiques », les énergies typiques sont inférieures à l'électron-volt. Les énergies des neutrons rapides s'étendent de quelques MeV à quelques dizaines de MeV. Il existe quatre familles d'interactions du neutron avec la matière :

- la diffusion inélastique,
- la diffusion élastique,
- la capture neutron-gamma,
- la fission.

L'application adressée dans ce chapitre concerne la mesure de neutrons de fission dans le cœur de réacteurs nucléaires munis de chambres à fission, un type de détecteurs de neutrons aujourd'hui couramment utilisé, cf. les ouvrages de référence (Knoll, 2010, chap. 14, IV), (Landsberger et Tsoulfanidis, 2015, chap. 14), et les travaux récents (Kropik, 2000), (Geslot, Berhouet, Oriol, Bréaud, Jammes, Filliatre et Villard, 2009), (Vermeeren, Weber, Oriol, Breaud, Filliatre, Geslot, Jammes, Normand et Lescop, 2011), (Jammes, Filliatre, Geslot, Domenech et Normand, 2012), (Lamirand, Geslot, Wagemans, Borms, Malambu, Casoli et al., 2014), (Ušpuras, Arahmane, Hamzaoui et El Moursli, 2017), (Jahan, Rahman et Huda, 2017), (Kim, Vista, Cho et Chong, 2020), (Zhong, Li, Hu, Cao, Zhou, Lin et al., 2020), (Yang, Cao, Zhao, Zhang, Li, Wu, Zhang, Zhong, Hu et Zhang, 2022). Les progrès réalisés sur ces capteurs, outre la modélisation et la compréhension de leur fonctionnement, portent sur l'extension de leur gamme de fonctionnement, leur miniaturisation, la tenue à de plus hautes températures dans les environnements in-core et les nouvelles problématiques liées à la fusion (voir (Giot, Vermeeren, Lyoussi, Reynard-Carette, Lhuillier, Mégret, Deconinck et Goncalves, 2017, sec. 2)). Le matériaux fissile constituant l'électrode (ou les deux électrodes) peut être de l'Uranium, du Thorium, du Plutonium, du Neptunium selon les cas, de forme cylindrique ou planaire. Les chambres à fission peuvent être utilisées dans trois modes de mesures : le mode impulsion, le mode fluctuation (ou « Campbelling ») et le mode courant. Ces aspects sont abordés dans la section 5.1.3.

5.1.2 Shot Noise, cumulants et mesures neutroniques

Le Shot Noise peut potentiellement modéliser l'interaction de nombreuses particules telles que les photons, les électrons, etc. sur leur détecteur associé¹. La particule considérée

1. ou dans le détecteur même : (Ousi Benomar, 1994), (Pontes et Ferreira, 2006) modélisent les signaux d'une chambre à fission grâce aux cumulants du Shot Noise.

ici est le neutron. Le théorème de Campbell trouve une application « canonique » avec les mesures neutroniques puisqu’il constitue le fondement théorique de l’estimation de l’intensité du processus permettant de remonter à la grandeur d’intérêt : le flux neutronique en neutrons. $cm^{-2}.s^{-1}$. Cette grandeur est proportionnelle à l’intensité λ , dont les valeurs se trouvent typiquement entre 10^5 et 10^{15} neutrons. $cm^{-2}.s^{-1}$: ainsi, $\hat{\lambda}_2$ est employé pour $\lambda \lesssim 10^{10}$ et $\hat{\lambda}_1$ pour $\lambda \gtrsim 10^8$ (il y a en général recouvrement entre les différents modes de mesure cf. Figure 5.1).

Nous rappelons dans les sections suivantes les estimateurs classiquement utilisés pour estimer le flux sur les trois voies de mesures impulsion / fluctuation / courant (cf. (Lyoussi, 2010), (Lescop, Pasdeloup, Falaise, Lefevre, Nguyen, Sudres et Trama, 2000), (Souloumiac, 2011))

5.1.3 Chaînes de mesure neutronique

La neutronique des réacteurs nucléaires s’intéresse aux réactions en chaînes ayant lieu dans le combustible. Ces réactions sont des fissions qui s’effectuent selon le schéma de réaction en chaîne : des neutrons provoquent des fissions de noyaux, qui à leur tour donnent des neutrons, qui à leur tour provoquent des fissions, et ainsi de suite. La production d’énergie par les fissions induites est l’objectif recherché. C’est le nombre de neutrons créés lors de ces réactions qui conditionne la cinétique de la réaction. Pour un réacteur nucléaire en régime de fonctionnement nominal, on cherche à mesurer précisément l’énergie fournie par les fissions. Pour la conduite et la sûreté des réacteurs nucléaires, il est nécessaire de mesurer l’énergie produite. Cette mesure est réalisée notamment² par le monitoring du flux de neutrons. Le flux neutronique – en nombre de neutrons par $cm^2 s^{-1}$ – est monitoré en permanence dans les centrales, puisqu’il mesure le nombre de fissions ayant lieu par unité de temps. L’instrumentation neutronique (interne ou externe) a pour fonction de mesurer le flux neutronique. Ces mesures peuvent s’effectuer dans le cœur même (mesures *in-core*) (Mourlevat, 2001) ou bien à l’extérieur du cœur du réacteur (mesures *ex-core*) (Burel, 1999)³. Diverses chaînes de mesures de conceptions (et performances) différentes existent dans le monde comme en témoignent les travaux de (Lescop, Pasdeloup, Falaise, Lefevre, Nguyen, Sudres et Trama, 2000), (Lescop, Normand, Trama, Laribiere, Nguyen, Souloumiac, Delacour, Blandin, Cantonnet et Pasdeloup, 2004), (Cibils, Busto, Gonella, Martinez, Chielens, Otero, Nuñez et Tropea, 2008), (Izarra, Elter et Jammes, 2016), (Kim, Vista, Cho et Chong, 2020), (Barbot, Fourmentel, Izarra, Destouches, Villard, Moline et Hamrita, 2020), (Zhu, Liu, He, Wen, Zhou, Mou et al., 2021), (Yang, Cao, Zhao, Zhang, Li, Wu, Zhang, Zhong, Hu et Zhang, 2022).

Selon les phases de fonctionnement du réacteur, la dynamique du flux neutronique peut être très large : elle varie typiquement de 10^{-2} à 10^{14} neutrons. $cm^{-2}.s^{-1}$ soit 16 décades, ce qui est considérable. Mesurer le flux sur une telle plage de fonctionnement n’est pas sans poser de réels problèmes technologiques. Les chambres à fission sont des technologies de capteur usuellement choisies dans ce contexte.

Concrètement, une chaîne de mesure neutronique est constituée :

2. La température, par exemple, est aussi un reflet de l’énergie produite dans le cœur.

3. Des flux de neutrons sont également mesurés dans les réacteurs à fusion : ils sont en effet issus de la fusion du deutérium et du tritium.

- d'un détecteur de neutrons (chambre à fission ou compteurs proportionnels),
- d'un câble coaxial,
- d'un ensemble de conditionnement du signal,
- d'un ensemble de traitement,
- de systèmes d'affichage, d'alarmes.

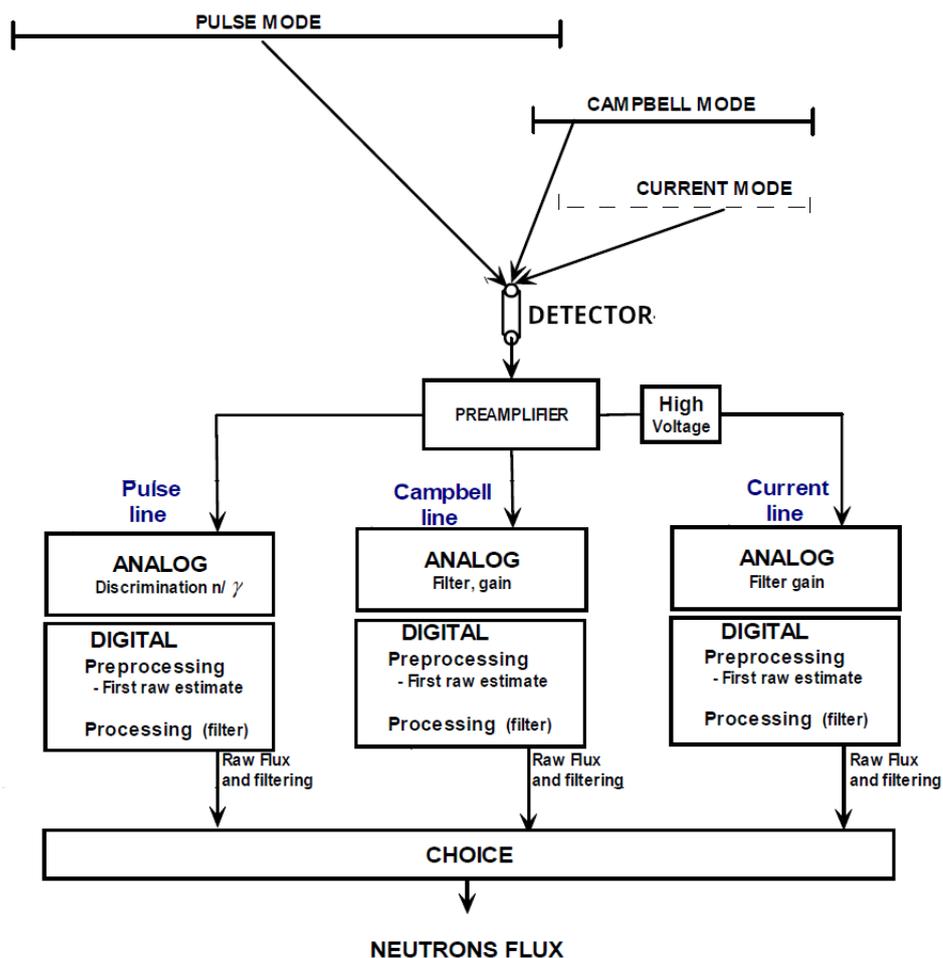


FIGURE 5.1 – Schéma de principe d'une chaîne de mesure neutronique (chaîne *in-core* IRINA, d'après (Lescop, Padeloup, Falaise, Lefevre, Nguyen, Sudres et Trama, 2000). Le détecteur employé est une chambre à fission.).

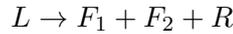
Pour couvrir la gamme de fonctionnement, chaque détecteur est associé à des électroniques de conditionnement différentes selon la nature du signal délivré :

- les circuits pour les impulsions (« pulse mode ») pour les intensités entre $[10^0 - 10^6]$,
- les circuits pour les mesures de fluctuation (« Campbell mode ») pour les intensités entre $[5 \cdot 10^4 - 10^{10}]$,

- les circuits pour les mesures de courant (« current mode ») pour les intensités entre $[10^7 - 10^{14}]$.

Une description des principes électroniques peut être consultée dans la thèse ([Ousi Benomar, 1994](#), chap. 2). Ces trois modes de mesures permettent d’embrasser la très grande dynamique du fonctionnement d’un réacteur. Ils se recouvrent sur certaines plages d’intensité du flux neutronique, sur lesquelles s’effectuent les transitions d’un mode à l’autre (cf. Figure 5.1). Toutefois, selon les réacteurs et les concepteurs des chaînes de mesure, ces trois modes ne sont pas nécessairement présents.

Remarque sur les chambres à fission Les chambres à fission sont construites avec des matériaux fissiles. Soumis à un flux de neutrons externe (celui qu’on cherche à mesurer), ces derniers libèrent des neutrons et des photons γ par fission. Parmi les réactions nucléaires, la fission désigne la coupure d’un noyau lourd L en deux noyaux de masse F_1 et F_2 d’environ la moitié de la masse du noyau initial .



R regroupe le reliquat possible de telle ou telle réaction : des neutrons émis (dits prompts ou rapides) et un rayonnement γ immédiat. L’énergie libérée par cette réaction est principalement de l’énergie cinétique portée par les deux fragments F_1 et F_2 , mais aussi celle des éventuels neutrons et photons γ émis instantanément. Ces photons γ viennent perturber la mesure instrumentale, et constituent une composante de bruit dont on cherche en pratique à s’affranchir. Une pratique courante consiste à fixer un seuil (appelé seuil de discrimination) pour ne retenir que les neutrons (cf. ([Blanc de Lanaute, 2012](#)) pour plus de détails, et les travaux de ([Ousi Benomar, 1994](#)) pour une méthode de séparation des γ et des neutrons basée sur les cumulants).

5.1.3.1 Mode impulsion

Dans ce mode, la chaîne de mesure délivre un signal de comptage, c’est-à-dire un nombre d’interactions par unité de temps. Pour des détails instrumentaux, voir ([Lyoussi, 2010](#), chap. 3 et chap. 5). On parle communément de « coups » par seconde, c’est-à-dire qu’il est constitué du nombre de neutrons entrés en collision avec le détecteur pendant la période d’échantillonnage. Chaque neutron ayant interagi avec le détecteur est indirectement représenté par une impulsion électrique. Le taux de comptage des impulsions est proportionnel au flux neutronique.

Le nombre moyen d’impulsions par seconde \mathfrak{N}

$$\mathfrak{N} = \varepsilon_N \phi \quad \text{c/s.}$$

où ε_N est la sensibilité du détecteur aux neutrons ϕ est le flux neutronique en neutrons $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$. Le nombre de coups enregistrés pendant une fenêtre de comptage sont très fidèlement modélisés par la loi de Poisson de paramètre λ . Le signal de comptage est un processus de Poisson non stationnaire d’intensité $\lambda(t)$ variant dans le temps. Dans ce mode de mesure, on ne construit pas d’estimateur reposant sur le théorème de Campbell pour mesurer l’intensité du processus, car on peut accéder/remonter aux impacts individuels des particules sur le détecteur.

5.1.3.2 Mode fluctuation ou « Campbelling »

Ce mode de mesure se base sur les fluctuations du courant autour de sa moyenne - autrement dit, c'est une mesure de variance - pour remonter à l'intensité du flux neutronique incident. Il est utilisé sur certains réacteurs expérimentaux où sont utilisés des détecteurs du type chambre à fissions. Voir (Lyoussi, 2010, chap. 5) pour les aspects capteurs et instrumentation associée. Ce mode prend le relais du mode Impulsion lorsque le taux de comptage dépasse $\simeq 10^6$ coups par secondes et que le phénomène d'empilement devient tel qu'il n'est plus possible de fournir une valeur fiable (non biaisée) de celui-ci. C'est le théorème de Campbell qui permet de remonter à l'intensité du processus aléatoire (Kropík et Matejka, 1999), via $\hat{\lambda}_2$ (4.29). Dans la littérature, ce mode est appelé « Campbelling ».

$$\text{Var}[I] = \varepsilon_F \cdot \text{Cste} \cdot \Phi_F$$

où ε_F est la sensibilité du détecteur en mode fluctuation en A^2s pour un flux neutronique unitaire et Φ_F le flux neutronique en neutrons $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$.

Ce mode est connu pour son pouvoir intrinsèque de sélectivité des neutrons vis-à-vis des photons γ (ces derniers perturbent la mesure).

5.1.3.3 Mode courant

Dans ce mode de mesure, c'est le courant circulant dans le détecteur qui est mesuré. Le courant moyen est proportionnel au flux neutronique incident

$$\bar{I} = \varepsilon_I \cdot \Phi_I$$

ε_I est la sensibilité du détecteur en mode courant en $A \cdot \text{flux neutronique unitaire}^{-1}$ et Φ_I est le flux neutronique en neutrons $\cdot \text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$.

Ce courant contient la moyenne de l'information portée par un ensemble d'impulsions élémentaires sur une fenêtre de temps. Bien que chaque impulsion ne soit pas accessible, comme pour le mode fluctuation, on peut remonter à l'intensité du processus par le théorème de Campbell, via $\hat{\lambda}_1$ (4.9). Voir (Lyoussi, 2010, chap. 5) pour l'instrumentation correspondante.

5.1.4 Résumé

Les mesures neutroniques sont fondées sur la prise en compte de la nature statistique des observations :

- le processus de Poisson pour la voie Impulsions,
- le Shot Noise et le théorème de Campbell pour les voies fluctuations et courant.

Pour toutes ces voies, le paramètre fondamental est l'intensité du processus de Poisson λ : il reflète l'activité du réacteur. Une différence fondamentale est qu'il est porté directement par les observations dans le mode Impulsions, alors que sur les deux autres voies, le processus de Poisson correspondant n'est pas observé directement. Cette différence donne logiquement lieu à des estimateurs $\hat{\lambda}$ de natures différentes ($\hat{\lambda}_I$, $\hat{\lambda}_F$, $\hat{\lambda}_C$), de la même grandeur λ .

5.2 Voie Impulsions

5.2.1 Estimateur de l'intensité du flux

Sur cette voie - autrement appelée voie « comptages » -, l'estimateur $\hat{\lambda}_I$ consiste à compter les impulsions individuelles, reflétant l'interaction d'un neutron avec la matière fissile constituant la chambre à fission. Il se définit de la manière suivante : si on a compté un nombre \mathfrak{N} d'impulsions durant un temps de mesure T_M alors

$$\hat{\lambda}_I = \frac{\mathfrak{N}}{T_M} \quad \text{en neutrons/s} \quad (5.1)$$

car il est usuellement supposé (et vérifié en pratique) que \mathfrak{N} suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_I T_M$

$$\mathfrak{N} \sim \mathcal{P}(\lambda_I T_M).$$

Cet estimateur « naturel » est également l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ (Foata et Fuchs, 2002, chap. 4). La variance théorique de l'estimateur de λ associée à l'estimateur $\hat{\lambda}_I$ vaut

$$\text{Var}(\hat{\lambda}_I) = \text{Var}\left(\frac{\mathfrak{N}}{T_M}\right) = \frac{1}{T_M^2} \text{Var}(\mathfrak{N}) = \frac{1}{T_M^2} T_M \lambda_I = \frac{\lambda_I}{T_M}. \quad (5.2)$$

Pour la voie Impulsions, les données sont ainsi constituées de données discrètes (« coups ») au cours du temps distribuées selon la loi de Poisson - c'est un Processus de Poisson -, la transformée d'Anscombe (Anscombe, 1948) et son inverse peuvent donc s'appliquer (cf. Brevet (Montagu, 2008)).

Remarque Cet estimateur est en pratique potentiellement biaisé du fait du phénomène d'empilement d'impulsions.

5.2.2 Stabilisation de variance pour l'estimateur de la voie « impulsions »

Pour stabiliser la variance d'une variable aléatoire poissonnienne, on a établi au §3.3.1 que la racine carrée constituait une VST. Cette transformée introduite par (Bartlett, 1936) a été améliorée par (Anscombe, 1948). La transformée d'Anscombe $\mathcal{A}(x)$ pour une réalisation x_I de loi de Poisson sur la voie Impulsions, a pour expression

$$x_I^* = \mathcal{A}(\hat{\lambda}_I) = 2\sqrt{\hat{\lambda}_I + \frac{3}{8}}. \quad (5.3)$$

L'inverse de cette transformée établie par (Anscombe, 1948), (Mäkitalo et Foi, 2011b) et tenant compte du biais est

$$x_I = \mathcal{A}^{-1}(x_I^*) = \frac{x_I^{*2}}{4} - \frac{1}{8}. \quad (5.4)$$

Les travaux de (Mäkitalo et Foi, 2011b; Borges, Brochi, Xu, Foi, Vieira et Azevedo-Marques, 2020) ont affiné cette transformée inverse pour des valeurs d'intensité très faibles

($\lambda < 4$). Une expression de la transformée inverse d'Anscombe exacte a été établie par (Mäkitalo et Foi, 2011b) et s'écrit

$$x_I = \frac{1}{4}x_I^{\star 2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}x_I^{\star -1} - \frac{11}{8}x_I^{\star -2} + \frac{5}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}x_I^{\star -3}. \quad (5.5)$$

En pratique (5.5) s'avérera surtout utile lorsque le réacteur est à très faible puissance. Pour tous les autres cas, (5.3) et (5.4) seront « suffisantes ». La figure 5.2 résume la méthodologie basée sur la stabilisation pour le voie Impulsions.

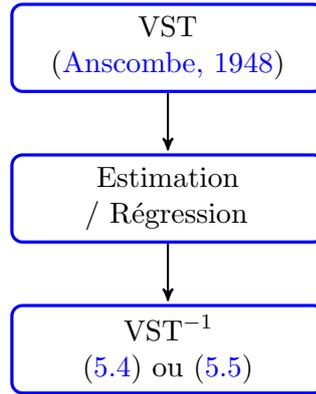


FIGURE 5.2 – Méthodologie d'application des transformées stabilisatrices de variance pour la voie impulsion.

Loi asymptotique D'après le théorème 3.2.1 avec $Z_n = \hat{\lambda}_I$, $\theta = \lambda_I$, et $\mathcal{T}_I = (5.3)$,

$$\sqrt{n} \left(\lambda_I^{\star} - \mathcal{A}(\hat{\lambda}_I) \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1). \quad (5.6)$$

5.2.3 Conclusion

En regard de la nature « poissonnienne » des données acquises sur la voie Impulsions, la transformée d'Anscombe et son inverse asymptotiquement non biaisée peuvent s'appliquer sur la voie Impulsions.

5.3 Voie Fluctuations

Dans cette section est abordée la voie fluctuation, qui correspond à une mesure de la variance du Shot Noise, à un facteur de calibration⁴ et un bruit additif près. Le signal sur cette voie X_F au cours du temps (t) est représenté par le Shot Noise d'intensité $\lambda = \lambda(t)$

$$X_F(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k h_F(t - T_k) + b_F(t) \quad (5.7)$$

4. Voir (Geslot, Unruh, Filliatre, Jammes, Di Salvo, Breaud et Villard, 2012) pour des travaux récents sur cette étape préalable à l'intégration de la chaîne de mesure.

où $b_F(t)$ est un bruit blanc centré stationnaire à l'ordre 2 de variance σ_F^2 . h_F désigne la réponse impulsionnelle de l'électronique de la voie fluctuation (elle est en général différente de la voie courant).

La VST corrigée du biais a été établie par l'auteur dans le cadre de la VAE doctorat, et étend les travaux antérieurs (Montagu et Bakkali, 2018), (Montagu et Ferrari, 2023).

5.3.1 Estimateur du flux neutronique

L'estimateur usuel de λ pour la voie fluctuation s'écrit :

$$\hat{\lambda}_F = \frac{\hat{\kappa}_2(t)}{\mathbb{E}(u^2) \int h_F^2(t) dt} = \frac{\hat{\kappa}_2(t)}{u_2} \quad (5.8)$$

Cet estimateur est biaisé

$$\mathbb{E}[\hat{\lambda}_F] = \lambda + \frac{\sigma_F^2}{u_2^2}, \quad u_2 > 0 \quad (5.9)$$

L'estimateur $\hat{\lambda}_F$ est similaire, au bruit additif près, à l'estimateur $\hat{\lambda}_2$ introduit §4.2.2.

Remarques En pratique, ce mode de mesure est biaisé par un talon de bruit en limite basse de la gamme de mesure. Au delà de ce talon, la linéarité théorique de l'estimateur en fonction de λ est constatée en pratique (Baers, 1989) (Filliatre, Jammes, Elter, Izarra, Hamrita, Bakkali, Galli, Cantonnet et Nappe, 2017), (Zeinalov, Sidorova, Sedyshev, Shvetsov, Lee et Nam, 2020). (Vermeeren, Weber, Oriol, Breaud, Filliatre, Geslot, Jammes, Normand et Lescop, 2011), (Zhu, Liu, He, Wen, Zhou, Mou et al., 2021) et de nombreux autres auteurs vérifient l'apport de l'ordre 2 pour la suppression des γ induits par les fissions dans le détecteur lui-même.

. La variance théorique de l'estimateur de λ_F associée à l'estimateur $\hat{\kappa}_2$ est une fonction quadratique de l'intensité puisque (d'après (4.21))

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{\lambda}_F] &= \frac{1}{u_2^2} \text{Var}[\hat{\kappa}_2] \\ &= \alpha_F \lambda_F^2 + \beta_F \lambda_F + \gamma_F, \end{aligned} \quad (5.10)$$

où $\hat{\kappa}_2$ est défini par (2.16) et sa variance par (2.24), avec

$$\alpha_F = \frac{2}{n-1}, \quad \beta_F = \frac{1}{n} \frac{\mathbb{E}[u^4] \int h_F^4(k) dt}{\mathbb{E}[u^2]^2 (\int h_F(t)^2 dt)^2} = \frac{1}{n} \frac{u_4}{u_2^2},$$

et

$$\gamma_F = \frac{2\sigma_b^4}{\mathbb{E}[u^2]^2 (\int h_F(t)^2 dt)^2} = \frac{2\sigma_b^4}{u_2^2}.$$

En pratique nous avons constaté $\alpha_F \propto 10^{-6}$ et $\beta_F \propto 10^0$, mais ces valeurs pourront varier d'un détecteur à l'autre et selon la chaîne de mesure (natures des composants électroniques, circuits de conditionnement, etc.).

5.3.2 Stabilisation de variance pour l'estimateur de la voie fluctuation

On rappelle l'espérance et la variance de l'estimateur $\hat{\lambda}_F$

$$\mathbb{E}[\hat{\lambda}_F] = \lambda_F,$$

et la fonction de variance

$$g_F(\lambda) = \alpha_F \lambda^2 + \beta_F \lambda + \gamma_F. \quad (5.11)$$

On doit donc trouver une primitive de

$$\hat{\lambda}_F^* = h(\hat{\lambda}_F) = \int^{\hat{\lambda}_F} \frac{d\lambda}{\sqrt{g_F(\lambda)}}. \quad (5.12)$$

Les primitives de (5.12) sont données par (Gradshteyn et Ryzhik, 1994, p. 99)⁵ (voir également annexe C pour le détail du calcul).

$$\mathcal{T}_F(\hat{\lambda}_F) = \hat{\lambda}_F^*(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_F}} \log \left(2\sqrt{\alpha_F(\alpha_F \hat{\lambda}_F^2(t) + \beta_F \hat{\lambda}_F(t) + \gamma_F)} + 2\alpha_F \hat{\lambda}_F(t) + \beta_F \right) \quad (5.13)$$

à condition que $\alpha_F > 0$, $2\alpha_F + \beta_F^2 > \sqrt{\beta_F^2 - 4\alpha_F\gamma_F}$. Et d'après (C.40), on a également

$$(5.13) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_F}} \operatorname{asinh} \left(\frac{2\alpha_F \hat{\lambda}_F + \beta_F}{\sqrt{\beta_F^2 - 4\alpha_F\gamma_F}} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\beta_F^2 - 4\alpha_F\gamma_F \right), \quad (5.14)$$

à condition que $\beta_F^2 - 4\alpha_F\gamma_F > 0$.

Biais de \mathcal{T}_F La dérivée seconde de \mathcal{T}_F s'exprime suivant

$$\mathcal{T}_F''(\hat{\lambda}_F) = - \frac{4\sqrt[3]{\alpha_F} (2\alpha_F \hat{\lambda}_F + \beta_F)}{\sqrt[3]{(\beta_F^2 - 4\alpha_F\gamma_F) \left(\frac{(2\alpha_F \hat{\lambda}_F + \beta_F)^2}{\beta_F^2 - 4\alpha_F\gamma_F} + 1 \right)}}. \quad (5.15)$$

Le biais a finalement pour expression

$$\text{Biais}_F(\hat{\lambda}_F) = - \frac{2\sqrt[3]{\alpha_F} (2\alpha_F \hat{\lambda}_F + \beta_F) (\alpha_F \hat{\lambda}_F^2 + \beta_F \hat{\lambda}_F + \gamma_F)}{n \sqrt[3]{(\beta_F^2 - 4\alpha_F\gamma_F) \left(\frac{(2\alpha_F \hat{\lambda}_F + \beta_F)^2}{\beta_F^2 - 4\alpha_F\gamma_F} + 1 \right)}}. \quad (5.16)$$

Il est d'autant plus faible que n est grand.

VST corrigée du biais D'après le théorème 3.5.1 avec $\mathcal{T} = \mathcal{T}_F$, $\text{Biais}_F = (5.16)$, et $\sigma'(\hat{\lambda}_F) = \frac{2\alpha_F \hat{\lambda}_F + \beta_F}{2\sqrt{\alpha_F \hat{\lambda}_F^2 + \beta_F \hat{\lambda}_F + \gamma_F}}$, la VST corrigée du biais pour la voie fluctuation a pour expression :

$$\mathcal{T}_F^{bc}(\hat{\lambda}_F) = \mathcal{T}_F + \frac{2\alpha_F \hat{\lambda}_F + \beta_F}{4\sqrt{\alpha_F \hat{\lambda}_F^2 + \beta_F \hat{\lambda}_F + \gamma_F}} + \frac{2\alpha_F^{\frac{3}{2}} (2\alpha_F \hat{\lambda}_F + \beta_F) \sqrt{\alpha_F \hat{\lambda}_F^2 + \beta_F \hat{\lambda}_F + \gamma_F}}{n \sqrt[3]{(\beta_F^2 - 4\alpha_F\gamma_F) \left(\frac{(2\alpha_F \hat{\lambda}_F + \beta_F)^2}{\beta_F^2 - 4\alpha_F\gamma_F} + 1 \right)}}. \quad (5.17)$$

5. Une correction a été apportée à cette formule, cf. annexe C.7.

VST inverse La transformée inverse a pour expression (cf. §C.5.2 en annexe) :

$$\mathcal{T}_F^{-1}(\hat{\lambda}_F^*) = \hat{\lambda}_F = \frac{\frac{1}{4}e^{2\hat{\lambda}_F^*(t)\sqrt{\alpha_F}} - \frac{\beta_F}{2}e^{\hat{\lambda}_F^*(t)\sqrt{\alpha_F}} + \frac{\beta_F^2}{4} - \alpha_F\gamma_F}{\alpha_F e^{\hat{\lambda}_F^*(t)\sqrt{\alpha_F}}} \quad (5.18)$$

ou bien sous forme hyperbolique

$$\hat{\lambda}_F = \frac{1}{2\alpha_F} \left(\sqrt{4\alpha_F\gamma_F - \beta_F^2} \sinh \left[\sqrt{\alpha_F} \left(\lambda_F^* - \frac{1}{2} \ln \left(\beta_F^2 - 4\alpha_F\gamma_F \right) \right) \right] \right). \quad (5.19)$$

Loi asymptotique Par application du théorème 3.2.1, avec $Z_n = \hat{\lambda}_F$, $\theta = \lambda$, et $\mathcal{T} = \mathcal{T}_F$, on a la convergence

$$\sqrt{n} \left(\hat{\lambda}_F^* - \mathcal{T}_F(\lambda_F) \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1). \quad (5.20)$$

5.3.3 Conclusion

En regard de la fonction de variance quadratique associée à cette voie de mesure et au cumuland d'ordre 2 qui sous tend l'estimateur du flux neutronique, une VST prend la forme d'une log-racine carrée ou arcsinus hyperbolique. Comme elle concerne le deuxième cumuland du Shot Noise, on peut proposer la dénomination « deuxième transformée de Campbell ».

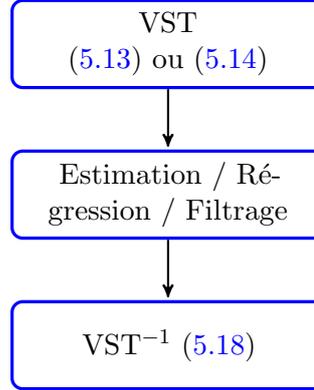


FIGURE 5.3 – Méthodologie d'application des transformées stabilisatrices de variance pour la voie Fluctuations.

5.4 Voie Courant

Le signal sur cette voie $X_C(t)$ au cours du temps (t) est représenté par

$$X_C(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k h_c(t - T_k) + b_c(t) \quad (5.21)$$

où h_c est la réponse impulsionnelle de l'électronique de la voie courant, et $b_c(t)$ est un bruit blanc centré stationnaire à l'ordre 2 de variance σ_c^2 .

Remarque Le fait de considérer une réponse impulsionnelle h_C sur cette voie différente de la voie Fluctuation est justifiée par une réalité pratique : les circuits électroniques de conditionnement sont effectivement différents en pratique.

5.4.1 Estimateur du flux neutronique

L'estimateur naturel du flux neutronique λ_C pour la voie courant s'écrit :

$$\hat{\lambda}_C = \frac{\hat{\kappa}_1}{\mathbb{E}(u) \int h_C(t) dt} \quad (5.22)$$

où $\hat{\kappa}_1$ est l'estimateur du cumulatif d'ordre 1 (la moyenne empirique, introduite section 2.4.1) du Shot Noise échantillonné avec une période d'échantillonnage T_e

$$\hat{\kappa}_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_C(t_0 + kT_e). \quad (5.23)$$

Le facteur $(\mathbb{E}[u] \int h_C(t) dt)^{-1}$ est estimé à partir d'une calibration préalable et est supposé fixe au cours du temps⁶. L'estimateur (5.22) est biaisé

$$\mathbb{E}[\hat{\lambda}_C] = \lambda + \frac{\sigma_C^2}{u_1}, \quad u_1 > 0. \quad (5.24)$$

et sa variance

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{\lambda}_C] &= \frac{\text{Var}[\hat{\kappa}_1] + \sigma_C^2}{(\mathbb{E}(u) \int h_C(t) dt)^2} \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{\lambda (\mathbb{E}(u^2) \int h_C^2(t) dt) + \sigma_C^2}{(\mathbb{E}(u) \int h_C(t) dt)^2} \right) \\ &= \frac{1}{n} (\alpha_C \lambda + \beta_C \sigma_C^2). \end{aligned} \quad (5.25)$$

où on a posé $\alpha_C = \frac{\mathbb{E}(u^2) \int h_C^2(t) dt}{(\mathbb{E}(u) \int h_C(t) dt)^2}$ et $\beta_C = (\mathbb{E}(u) \int h_C(t) dt)^{-2}$. La variance de l'estimateur du flux neutronique sur la voie courant est donc une fonction affine de l'intensité du Shot Noise. En pratique nous avons constaté $\alpha_C \propto 10^2$ et $\beta_C \propto 10^9$, mais ces valeurs pourront varier d'un détecteur à l'autre et selon la chaîne de mesure.

5.4.2 Transformée de stabilisation de variance et son inverse

Le paragraphe précédent a permis d'établir que la fonction de variance pour la voie courant s'écrit

$$g_C(\lambda) = \frac{1}{n} (\alpha_C \lambda + \beta_C \sigma_C^2). \quad (5.26)$$

6. En pratique, celui-ci peut varier car la fonction h a évolué du fait du vieillissement du détecteur. Une recalibration est alors nécessaire.

On peut désormais établir la VST correspondante. La primitive s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_C(Y = \hat{\lambda}_C) &= \int^{\hat{\lambda}_C} \frac{1}{\sqrt{g_C(\lambda)}} d\lambda \\ \lambda_C^* &= \frac{2\sqrt{n}}{\alpha_C} \sqrt{\alpha_C \hat{\lambda}_C + \beta_C \sigma_C^2}, \quad \alpha_C \neq 0, \quad \hat{\lambda}_C \geq -\frac{\beta_C \sigma_C^2}{\alpha_C}\end{aligned}\quad (5.27)$$

Biais de \mathcal{T}_C Avec $\mathcal{T}_C''(\lambda) = -\frac{\alpha_C \sqrt{n}}{2(\alpha_C \lambda + \beta_C \sigma_C^2)^{\frac{3}{2}}}$, après calcul d'après (3.10), le biais s'exprime

$$\text{Biais}(\lambda) = -\frac{\alpha_C}{4n^{\frac{3}{2}} \sqrt{\alpha_C \hat{\lambda}_C + \beta_C \sigma_C^2}}. \quad (5.28)$$

Il est d'autant plus faible que n et $\hat{\lambda}_C$ sont grands.

VST corrigée du biais D'après le théorème 3.5.1 avec $\mathcal{T} = \mathcal{T}_C$, $b = (5.28)$, et $\sigma' = \frac{\alpha_C}{\left(2n\sqrt{\frac{\alpha_C \lambda + \beta_C \sigma_C^2}{n}}\right)}$, la transformée corrigée du biais pour la voie courant est telle que

$$\mathcal{T}_C^{bc} = \mathcal{T}_C + \frac{\alpha_C}{4\sqrt{n}(\alpha_C \lambda + \beta_C \sigma_C^2)} + \frac{\alpha_C}{4\sqrt{n}\sqrt{\alpha_C \lambda + \beta_C \sigma_C^2}} \quad (5.29)$$

Transformée inverse La transformée inverse s'exprime simplement

$$\mathcal{T}_C^{-1}(\lambda_C^{*2}) = \hat{\lambda}_C = \left(\frac{\alpha_C}{4n}\right) \lambda_C^{*2} - \frac{\beta_C}{\alpha_C} \sigma_C^2. \quad (5.30)$$

Loi asymptotique En appliquant le théorème 3.2.1, la variance asymptotique vaut 1 puisque

$$[\mathcal{T}_C'(\lambda)]^2 \times g(\lambda) = \left(\frac{n}{\alpha_C \lambda + \beta_C \sigma_C^2}\right) \times \frac{\alpha_C \lambda + \beta_C \sigma_C^2}{n} = 1$$

L'application du théorème 3.2.1, avec $Z_n = \hat{\lambda}_C$, $\theta = \lambda$, et $\mathcal{T}_C = (5.27)$, permet d'établir qu'asymptotiquement

$$\sqrt{n} \left(\lambda_C^* - \frac{2}{\alpha_C} \sqrt{\alpha_C \lambda + \beta_C \sigma_C^2} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1). \quad (5.31)$$

5.4.3 Conclusion

En regard de la fonction de variance linéaire associée à cette voie, une VST prend la forme d'une racine carrée. Comme elle concerne le premier cumulatif du Shot Noise, on peut proposer la dénomination « première transformée de Campbell ». On peut également remarquer la proximité (de forme) de cette transformée avec la transformée d'Anscombe généralisée (pour des données {Poisson + bruit gaussien}) établie par (Murthagh, Starck et Bijaoui, 1995), car elle comprend également un terme de bruit additif.

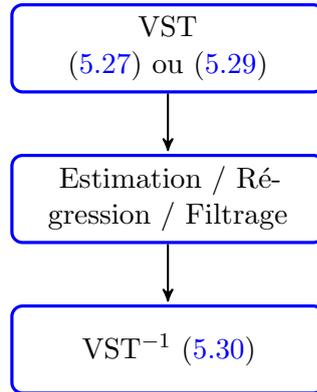


FIGURE 5.4 – Méthodologie d’application des transformées stabilisatrices de variance pour la voie courant.

5.5 Conclusion du chapitre

En se penchant sur les modes de mesure des chaînes neutroniques, nous avons établi que les trois modes de mesure manipulent des quantités aléatoires dont la variance varie en fonction de l’intensité du flux de neutrons incidents sur la détecteur. Autrement dit, les trois voies de mesures sont concernées par la propriété d’hétéroscédasticité.

Ainsi,

- pour la voie Impulsions (ou comptages), la variance varie linéairement en fonction du flux,
- pour la voie Fluctuation, la variance varie quadratiquement en fonction du flux,
- pour la voie Courant, la variance varie linéairement en fonction du flux.

Les propriétés statistiques sont rassemblées dans le tableau 5.1. Les VST correspondantes, et leurs inverses ont été établies et sont rassemblées dans le tableau 5.1.

Voie	Fonction de variance	Équation	VST	VST ⁻¹
Impulsion	$g_I(\lambda) = \lambda$	(3.9)	(5.3)	(5.4) ou (5.5)
Fluctuation	$g_F(\lambda) = \alpha_F \lambda^2 + \beta_F \lambda + \gamma_F$	(5.11)	(5.13) ou (5.14)	(5.18)
Courant	$g_C(\lambda) = \alpha_C \lambda + \beta_C \sigma_C^2$	(5.26)	(5.29)	(5.30)

TABLE 5.1 – Fonctions de variances associées à chaque voie de mesure

Ces constatations (et les VST qui en découlent) figurent dans les travaux antérieurs (Montagu, 2008), (Montagu, 2016), (Montagu, 2017), (Montagu et Bakkali, 2018). Des constatations et vérifications expérimentales sont effectuées depuis (Lux et Baranyai, 1982a) ; le lien explicite entre la théorie (cumulants du Shot Noise et la variance des estimateurs associés) et l’expérience figure dans (Elter, 2016, chap. 4) suite à la collaboration avec Mounir Bakkali (Bakkali, 2015). Ces VST ayant été établies, leur application préalablement à un

filtre ou une méthode de régression, puis l'application *in fine* de la transformée inverse sont abordées dans le chapitre suivant.

Chapitre 6

Estimation en ligne du flux neutronique par combinaison de VST et d'un filtre de Kalman adaptatif

Sommaire

6.1	Introduction - Présentation des signaux neutroniques	77
6.2	Présentation du filtre de Kalman	78
6.2.1	Peut-on l'appliquer au flux neutronique ?	79
6.3	Filtre de Kalman adaptatif pour l'estimation du flux neutronique	84
6.3.1	Modèle d'état	84
6.3.2	Adaptation du filtre de Kalman	84
6.3.3	Règle du CUSUM	85
6.3.4	Filtre VS-AKF	87
6.4	Estimation en ligne du flux neutronique sur signaux simulés et réels	90
6.4.1	Simulations	90
6.4.2	Voie Impulsions	91
6.4.3	Voie Fluctuations	98
6.4.4	Voie Courant	104
6.5	Conclusion du chapitre	110

DANS le chapitre 5 ont été établies les VST pour les trois voies Impulsions-Fluctuations-Courant des chaînes de mesures neutroniques. L'application préalable d'une transformation qui stabilise la variance a pour objectif de s'affranchir de la variabilité caractéristique du signal point de fonctionnement du réacteur (c'est-à-dire du niveau de puissance et de la valeur du flux neutronique correspondante) pour appliquer un algorithme de filtrage. Le flux neutronique mesuré est en effet intrinsèquement de variance variable (hétéroscédastique) quelle que soit la voie de mesure considérée, comme démontré dans les sections 5.2, 5.3 et 5.4. Appliquer de telles transformations permet de 1) rendre la variance constante et 2) rendre le signal gaussien (asymptotiquement) sur chacune des voies de mesure. Ce chapitre se concentre sur l'estimation en ligne par filtrage de Kalman adaptatif, dont l'application est rendue possible grâce à une transformée stabilisatrice de variance pour la voie considérée. La

combinaison des [VST](#) (et leurs inverses respectives) et du filtre de Kalman pour l'estimation du flux neutronique a fait l'objet des deux brevets ([Montagu, 2008](#)), ([Montagu et Bakkali, 2018](#)). *L'ensemble des simulations ont été réalisées pendant la VAE Doctorat [2022 - 2023].*

6.1 Introduction - Présentation des signaux neutroniques

Le flux neutronique désigne la quantité de neutrons impactant un détecteur par unité de surface et de temps. Il est typiquement mesuré en nombre de neutrons par cm^{-2}/s . Cette quantité reflète typiquement le niveau de puissance d'un cœur de réacteur nucléaire, et l'estimer correctement est cardinal pour le pilotage du réacteur.

Les signaux monitorés sur les chaînes de mesures présentées section 5.1.3 ont pour origine les interactions entre les neutrons et leur(s) détecteur(s). La physique des neutrons appliquée aux réacteurs nucléaires s'intéresse notamment à la cinétique de ceux-ci, et de leurs précurseurs. Le flux de neutrons est influencé par plusieurs facteurs, tels que la vitesse des neutrons, la probabilité qu'un neutron soit absorbé par un noyau, et la probabilité qu'un neutron soit produit par la fission (cf. annexe D). La puissance du réacteur est proportionnelle au flux neutronique. Quelle que soit la voie de mesure, on peut distinguer sur les signaux mesurés 6.1 :

- les phases de divergence du réacteur lors desquelles le flux (et donc la puissance délivrée) augmente,
- les phases stationnaires où le flux est constant,
- les décroissances vers des flux plus faibles (et donc des baisses de puissance).

L'unité de mesure nv indiquée sur les figures est l'unité utilisée en neutronique, où n est la concentration de neutrons par cm^{-3} multipliée par v la vitesse en cm s^{-1} , qui revient à un nombre de neutrons par cm s^{-1} .

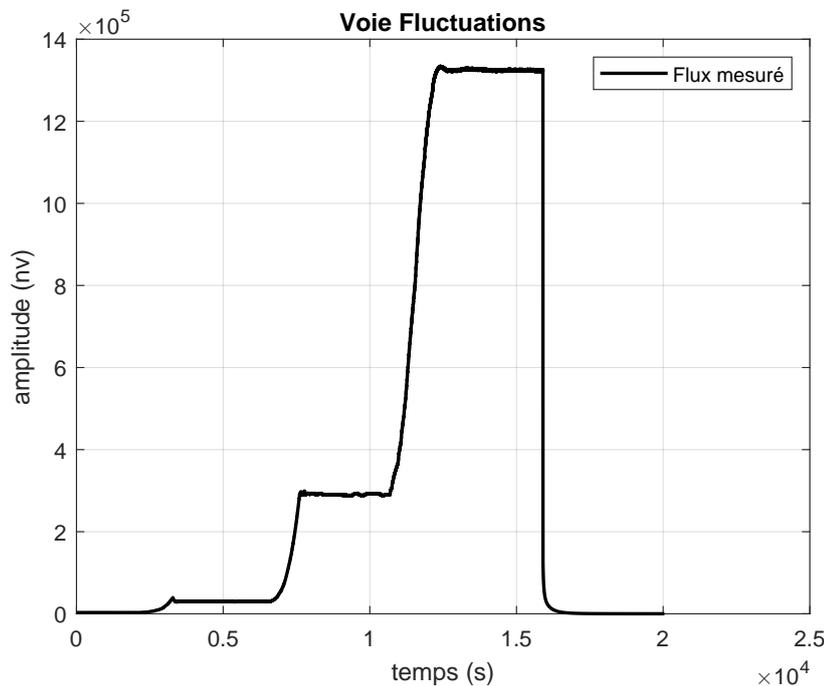


FIGURE 6.1 – Flux neutronique réel mesuré sur un réacteur expérimental

L'enchaînement au cours du temps de ces phases est conditionné par la physique et

l'opérateur qui « pilote » le réacteur. Ces phases peuvent être décrites – de manière simplifiée – à l'aide du modèle du « réacteur point »¹. Selon ce modèle, un réacteur nucléaire peut être représenté par un point unique, qui représente l'ensemble du réacteur (ce qui est très réducteur, la réalité est bien plus complexe). Cf. Annexe D.

Bruits entachant les signaux

Les trois modes de mesure et leurs spécificités respectives ont été présentés §5.1.3. Le bruit d'origine électronique (amplificateurs et composants) est évidemment présent. Sur la voie Courant, deux courants dus aux rayonnements γ et aux particules α (issus de réactions nucléaires internes au détecteur) viennent s'ajouter au courant dû aux neutrons. Des dispositifs électroniques permettent de s'affranchir au moins en partie de ces derniers. La réalité expérimentale indique donc de considérer des bruits additionnels de variances σ_F^2 et σ_C^2 caractéristiques de chaque voie.

Contraintes matérielles et choix associés

Le cadre du travail (de 2006) présenté ci-après a été contraint par les hypothèses suivantes :

- le système existant dispose de peu de mémoire ;
- les algorithmes existants demandent assez peu de temps de calcul, et il est exclu de modifier le calculateur ;

Pour satisfaire ces caractéristiques et contraintes, le choix du filtre de Kalman apparaît pertinent, car :

- il est récursif et demande donc peu de mémoire par construction,
- il est basé sur un modèle d'état, ce qui laisse de larges possibilités pour choisir un modèle pertinent pour les signaux neutroniques,
- il peut être rendu adaptatif assez aisément.

Le filtre de Kalman fait l'objet de la section 6.2. L'algorithme pour l'estimation du flux neutronique est présenté 6.3.

6.2 Présentation du filtre de Kalman

Le filtre de Kalman est l'estimateur linéaire optimal (au sens de la variance minimale) de l'état x du système dynamique discret linéaire et gaussien, formé par les équations suivantes :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{w}_k \quad \text{équation d'état,} \quad (6.1)$$

$$y_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad \text{équation d'observation.} \quad (6.2)$$

où $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^m$, lorsque les matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , les bruits d'état et d'observation et l'état initial $\hat{x}_{0|0}$ et sa covariance $\mathbf{P}_{0|0}$ sont connus. \mathbf{A} est la matrice de transition de l'état, \mathbf{w}_k le bruit d'état, y_k est l'observation, \mathbf{C} est la matrice d'observation,

1. Ce modèle simplifié peut être utilisé pour décrire le comportement des neutrons dans un réacteur nucléaire : les neutrons sont produits, absorbés et diffusés à partir de ce point unique. Il permet de comprendre comment les neutrons sont produits et interagissent avec la matière fissile du réacteur.

\mathbf{v}_k est le bruit d'observation. \mathbf{w}_k et \mathbf{v}_k sont modélisés comme des bruits gaussiens centrés et blancs :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbf{w}_k] &= 0, \mathbb{E}[\mathbf{v}_k] = 0, \mathbb{E}[\mathbf{w}_k \mathbf{v}_k^T] = 0, \\ \text{Cov}[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_i^T] &= \mathbf{Q}_k \delta_i \\ \text{Cov}[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_i^T] &= \mathbf{R}_k \delta_i \\ \delta_i &= \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}\end{aligned}$$

Le filtre de Kalman fournit récursivement, à chaque pas discret k , l'estimation de l'état prédit $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$, l'estimation filtrée $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}$, l'erreur de prédiction ε_k et les covariances de prédiction $\mathbf{P}_{k+1|k}$ et d'estimation $\mathbf{P}_{k+1|k+1}$. L'état filtré $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}$ est estimé à partir de l'état prédit $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ et de l'erreur de prédiction (aussi appelée *innovation*) ε_k pondérée par le gain K_k selon les équations récursives (algorithme 1) qu'on trouve dans les ouvrages de référence tels que (Jazwinski, 1970). Le gain de Kalman (6.8) ainsi écrit est le ratio entre la matrice de covariance de l'état prédit $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ et de la mesure prédite $\hat{y}_{k+1|k}$ et la matrice de covariance de l'innovation (6.7).

Remarque Pour l'implantation sur ordinateur, la formulation de la matrice de covariance de l'état filtré (6.11) présente l'inconvénient de ne pas garantir les propriétés de symétrie et de positivité de la matrice de covariance. On lui préfère la formule de Joseph qui somme deux matrices symétriques définies positives :

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1} = (\mathbb{I}_n - K_{k+1} \mathbf{C}) \mathbf{P}_{k+1|k} (\mathbb{I}_n - K_{k+1} \mathbf{C})^T + K_{k+1} \mathbf{R} K_{k+1}.$$

6.2.1 Peut-on l'appliquer au flux neutronique ?

Le filtre Kalman est en effet construit pour des processus gaussiens de matrice de covariances d'état et d'observation connues mais non nécessairement constantes par hypothèse. On examine ici la pertinence d'y coupler les transformées de stabilisation de variance (et leurs inverses) existantes (la transformée d'Anscombe (3.2)) ou bien celles établies au chapitre 5.

Retour sur les origines du filtre de Kalman

Le filtre de Kalman est introduit dans la publication fondatrice par R. E. Kalman, « A new approach to linear filtering and prediction problems », *Transactions of the ASME – Journal of basic Engineering*, t. 82, n° D, p. 35-45, 1960. Dans cet article, Rudolph Kalman résout notamment le problème du filtrage linéaire, alors résolu par le filtre de Wiener (dans le domaine fréquentiel). Le cadre de résolution est celui des moindres carrés (introduits par Gauss en 1795, puis Legendre en 1806. cf. (Sorenson, 1970), (Singpurwalla, Polson et Soyer, 2018)). Le filtre de Kalman n'est autre qu'un filtre de Wiener en temps comme l'établissent (Anderson et Moore, 1971). Pour établir le filtre, la fonction de coût à optimiser (approche

Algorithme 1 : Filtre de Kalman

Initialisation

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|-1} = \mathbb{E}(x_0) \quad (6.3)$$

$$\mathbf{P}_{0|-1} = \text{Cov}(x_0) \quad (6.4)$$

Prédiction

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \quad \triangleright \text{état prédit} \quad (6.5)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \mathbf{A} \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{Q} \mathbf{B}^T \quad \triangleright \text{covariance de l'état prédit} \quad (6.6)$$

Mise à jour

$$S_{k+1} = \mathbf{C} \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{C}^T + \mathbf{R} \quad \triangleright \text{covariance de l'innovation} \quad (6.7)$$

$$K_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{C}^T S_{k+1}^{-1} \quad \triangleright \text{gain de Kalman} \quad (6.8)$$

$$\varepsilon_{k+1} = y_{k+1} - \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} \quad \triangleright \text{innovation} \quad (6.9)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + K_{k+1} \varepsilon_{k+1} \quad \triangleright \text{état filtré} \quad (6.10)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1} = (\mathbb{I}_n - K_{k+1} \mathbf{C}) \mathbf{P}_{k+1|k} \quad \triangleright \text{covariance de l'état filtré} \quad (6.11)$$

dite « déterministe »)

$$J_n = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_0 - a)^T \mathbf{P}_0 (\mathbf{x}_0 - a) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (y_i - \mathbf{C}_i \mathbf{x}_i)^T \mathbf{R}_i^{-1} (y_i - \mathbf{C}_i \mathbf{x}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} w_i^T \mathbf{Q}_i^{-1} w_i \quad (6.12)$$

sous la contrainte

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_{k,k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}$$

est une généralisation du problème des moindres carrés pondérés. Les nombreux liens avec les moindres carrés sont remarqués par (Kailath, 1974), et les liens avec les algorithmes de moindres carrés récurrents (*Recursive Least Squares*, RLS) sont établis par (Sayed et Kailath, 1994), (Haykin, Sayed, Zeidler, Yee et Wei, 1997), (Sayed, 2003); voir (Kailath, Sayed et Hassibi, 2000), (Sayed, 2008) pour une vision complète.² Mais le filtre de Kalman se distingue foncièrement des moindres carrés récurrents par l'étape de prédiction fondée sur la dynamique de l'état du système (6.5) (et sa covariance associée (6.6)), et la propagation des incertitudes liées à l'état *et* à l'observation. On peut remarquer dans cette fonction de coût (6.12) que les matrices de covariances \mathbf{R} et \mathbf{Q} et les matrices de transition \mathbf{A} et d'observation \mathbf{C} sont indexées sur les instants d'échantillonnage : leur connaissance à chaque instant k permet donc de d'estimer l'état \mathbf{x} avec le filtre de Kalman conventionnel (cf. l'algorithme 1, en remplaçant \mathbf{A} par \mathbf{A}_k , \mathbf{C} par \mathbf{C}_k , \mathbf{R} par \mathbf{R}_k et \mathbf{Q} par \mathbf{Q}_k). \mathbf{R}_k et \mathbf{Q}_k ne sont malheureusement pas connues ou mal connues à chaque instant dans de nombreuses applications, et en particulier dans celle considérée ici.

Le point de vue probabiliste bayésien pour le filtre de Kalman est adopté dès (Ho et Lee, 1964), (Jazwinski, 1970), et est désormais plus commun (Bar-Shalom, Li et Kirubarajan,

2. (Mandic, Kanna et Constantinides, 2015) montrent les liens entre le filtre de Kalman et l'algorithme Least Mean Square (LMS).

2001), (Simo Särkkä, 2013). L'hypothèse de gaussianité est requise pour établir le filtre, et dans le cadre bayésien, l'état *a posteriori* et sa matrice de covariance correspondante s'établissent aisément comme l'espérance et la covariance *a posteriori* d'une distribution gaussienne à partir de la vraisemblance gaussienne et de l'*a priori* sur l'état initial \hat{x}_0 , également gaussien. On peut réécrire le modèle d'état en introduisant explicitement les lois gaussiennes impliquées

$$Y_0|X_0 \sim \mathcal{N}(\mathbf{C}\mathbf{x}_0, \mathbf{R}_0)$$

pour $k \geq 1$,

$$X_k|X_{k-1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{A}_{k,k-1}\mathbf{x}_k, \mathbf{Q}_k),$$

$$Y_k|X_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{C}_k\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k)$$

où la matrice de covariance de l'état \mathbf{Q}_k et la matrice de covariance de l'observation \mathbf{R}_k sont supposées connues à tout instant k . Pour une construction du filtre de Kalman purement bayésienne, voir (Gurajala, Choppala, Meka et Teal, 2021). Pour le modèle d'état (6.1), (6.2), le filtre de Kalman fournit une estimée de l'état $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ mais suppose foncièrement un modèle d'état exact (paramètres de la dynamique du système, caractéristiques statistiques du bruit, et conditions initiales). En pratique, le modèle est toujours une approximation d'un système réel et dans une grande majorité des cas les matrices \mathbf{A} et \mathbf{C} sont fixées par le modélisateur, et les matrices de covariance \mathbf{R} et \mathbf{Q} contiennent également des entrées (termes de variance et covariance) supposées connues. Une mauvaise connaissance de ces matrices peut fournir de mauvaises estimations $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}$ et/ou prédictions $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$, et modifier ou sélectionner – autrement dit adapter – les paramètres en ligne pour améliorer le comportement du filtre amène aux filtres de Kalman adaptatifs.

Application aux signaux neutroniques

Pour l'estimation du flux neutronique, l'hypothèse de gaussianité du bruit d'observation \mathbf{v} est vérifiée en pratique sauf pour la voie Impulsions à bas flux (observations poissoniennes). En revanche, pour les trois modes de mesure, l'hypothèse d'homoscédasticité n'est pas valable et la matrice R ne peut pas être considérée fixe au cours du temps. L'application des VST permettent de retrouver le cadre gaussien requis. Une démarche similaire a été adoptée en imagerie neutronique : (Shuang, Wei-jing et Jia-ning, 2015) appliquent la transformée d'Anscombe préalablement au filtre de débruitage.

Retour sur l'hétéroscédasticité Introduite au chapitre 3, et constatée pour les estimateurs du flux neutronique du chapitre 5, la propriété d'hétéroscédasticité est bien connue en économétrie, notamment pour la régression de séries temporelles (voir par exemple (Hill, Griffiths et Lim, 2017, chap. 8)). Dans le cadre de la régression, l'hétéroscédasticité est diagnostiquée sur les résidus et le recours aux moindres carrés ordinaires est alors déconseillé. Elle est usuellement traitée hors ligne dans le cadre des moindres carrés pondérés, cadre dans lequel les observations sont pondérées par des variances adaptées à chacune d'elle. Une fonction de variance peut, selon les cas, être choisie par le modélisateur. Une autre manière consiste à utiliser une VST (usuellement racine carrée ou logarithme) pour se ramener au cadre des moindres carrés ordinaires dans lequel le bruit est supposé gaussien de variance

constante ; autrement dit, les hypothèses de gaussianité et d'homoscédasticité sont requises pour appliquer les moindres carrés ordinaires, et l'application préalable d'une VST le permet.

Stabilisation de variance La démarche d'établir des VST pour les mesures neutroniques permet ainsi de :

1. stabiliser la variance pour rendre les signaux homoscédastiques quelle que soit l'intensité λ (et donc quel que soit le niveau de puissance du réacteur),
2. gaussianiser les signaux.

Ces deux propriétés découlent du théorème 3.2.1 et permettent l'application du filtre de Kalman, qui est optimal pour un modèle d'état linéaire et gaussien. L'application préalable d'une transformée de stabilisation de variance permet en effet d'écrire un modèle d'état « simple », évitant ainsi l'estimation de la variance de l'observation R_k , variant à chaque instant k ³. Après application d'une VST, on peut fixer la variance de l'observation y_k à une valeur constante (stabilisée) choisie (et pas nécessairement de valeur égale à 1) dans la matrice R^* , qui ne nécessite plus d'être estimée en ligne, permettant ainsi de respecter les contraintes préalables imposées §6.1.

Le filtrage du flux neutronique par filtrage de Kalman requiert donc la prise en compte de la propriété d'hétéroscédasticité sur chaque voie de mesure : ceci est réalisé par l'application préalable de la transformée de stabilisation de variance pour la voie considérée (Impulsions, Fluctuations, Courant) et sera montré à partir de simulations et sur signaux réels §6.4.

Changements abrupts / non linéarités Une autre difficulté vient s'ajouter au filtrage du flux neutronique : la présence « naturelle » de changements abrupts liés à la combinaison de la physique des neutrons et du pilotage du réacteur par un opérateur humain. Le pilotage est typiquement effectué à l'aide de barres de contrôle (ou barre de commande), constitué d'absorbants de neutrons. Ces changements abrupts peuvent notamment s'expliquer par la cinétique des neutrons, abordée dans l'annexe D. La figure 6.2 illustre un changement abrupt : celui-ci survient autour de $t = 40$ sec suite à une action de l'opérateur de faire chuter (de haut en bas) les barres d'absorbants de neutrons, pour éteindre la réaction de fissions ayant cours dans le réacteur. Cette action se traduit expérimentalement par une diminution drastique du nombre de neutrons mesurés en quelques secondes, amenant le flux initial de ≈ 12000 nv à quelques nv.

Le second exemple 6.3 illustre les conséquences d'une action de l'opérateur appelée « balancement de barre » sur le flux neutronique, celles-ci alternant au cours du temps positions hautes et basses, qui induisent les variations de flux neutronique observées.

Les deux exemples des figures 6.2 et 6.3 sont des mesures issues d'une voie comptage sur un réacteur expérimental. Sur les voies Fluctuations et Courant, la physionomie des signaux rencontrés est la même, car la physique sous-jacente est identique. On cherche à établir dans la section suivante un modèle d'état permettant de décrire simplement ces signaux, tout en prenant en compte la présence de changements abrupts.

3. D'une manière générale, estimer une matrice de covariance en ligne n'est pas nécessairement aisé dans la mesure où il faut pouvoir garantir ses propriétés (symétrique et définie positive), et peut amener à recourir à des décompositions matricielles (formes « racine carrées » basées sur la décomposition de Cholesky notamment).

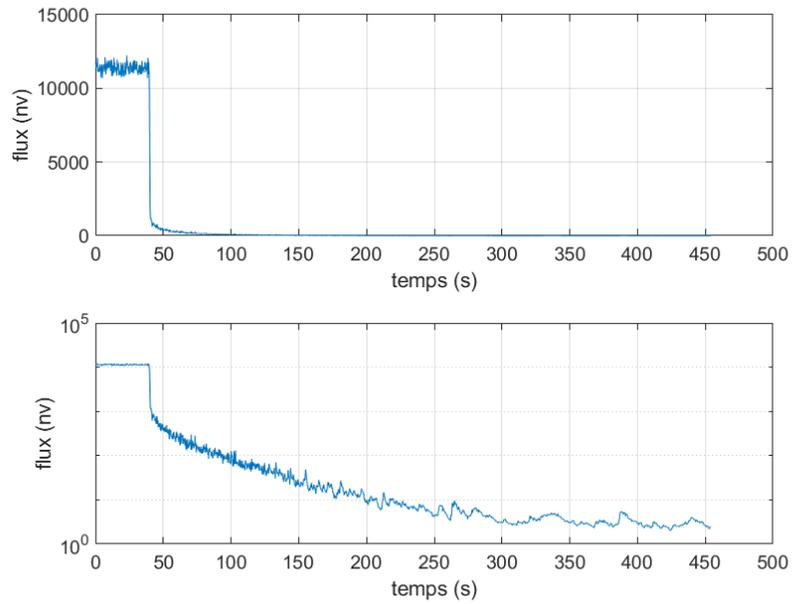


FIGURE 6.2 – Exemple de flux neutronique lors d’une chute de barres d’aborbants en fonction du temps (échelle linéaire en haut, échelle log en bas)

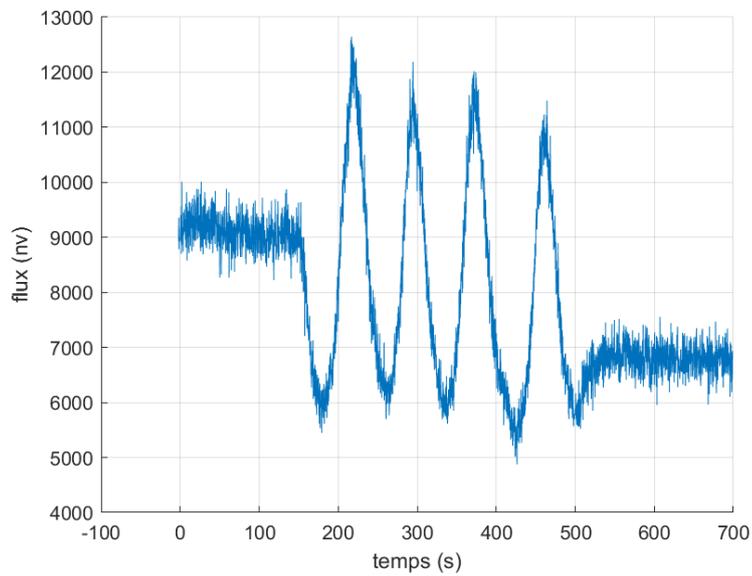


FIGURE 6.3 – Exemple de flux neutronique lors d’un balancement de croix en fonction du temps

6.3 Filtre de Kalman adaptatif pour l'estimation du flux neutronique

Les mesures de flux neutronique sont entachées de bruit(s) et on cherche donc à les débruiter pour obtenir une estimée de l'intensité λ , qui est reliée à la puissance du réacteur. Dans cette section, on construit l'algorithme permettant de filtrer les flux neutroniques mesurés.

6.3.1 Modèle d'état

Ayant préalablement appliqué une VST du chapitre 5, l'observation y_k à l'instant k étant transformée en y_k^* et devenant ainsi asymptotiquement gaussienne de variance stable, on pose le modèle d'état suivant

$$y_k^* = \mu_k + \epsilon_k \quad (6.13)$$

$$\mu_{k+1} = \mu_k + \nu_k + \zeta_k \quad (6.14)$$

$$\nu_{k+1} = \nu_k + \xi_k \quad (6.15)$$

L'équation d'observation (6.13) modélise le flux neutronique μ_k bruité par ϵ_k . Classiquement, on suppose un comportement de marche aléatoire $\mu_{k+1} = \mu_k + \zeta_k$. Une pente ν_k qui s'ajoute au flux μ_k possède également un comportement de marche aléatoire (6.14). Les bruits $\epsilon_k, \zeta_k, \xi_k$ sont supposés gaussiens et centrés de variances respectives $\sigma_\epsilon^2, \sigma_\zeta^2, \sigma_\xi^2$. L'observation est scalaire et le vecteur d'état \mathbf{x} a donc deux composantes $\mathbf{x}_k = [\mu_k, \nu_k]^T$ et le modèle sous forme matricielle s'écrit

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{w}_k \quad (6.16)$$

$$y_k^* = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + v_k \quad (6.17)$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sigma_\xi^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\zeta^2 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

et on modélise $\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(0, R^*)$ et $\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q})$ avec $\mathbf{Q} = \mathbb{I}_2$.

Ce modèle linéaire est appelé « Local Linear Trend » dans (Durbin et Koopman, 2012). Comme son nom l'indique, il est linéaire et représente une observation μ_k bruitée, à laquelle s'ajoute une tendance locale ν_k . En tant que modèle linéaire, il ne permet pas en soi de modéliser les signaux rencontrés en pratique en mesures neutroniques qui présentent des changements abrupts (cf. 6.2.1). On propose de le rendre adaptatif en utilisant la règle de CUSUM qui est fondée sur l'innovation (6.9) du filtre de Kalman.

6.3.2 Adaptation du filtre de Kalman

Rendre le filtre de Kalman adaptatif signifie le rendre capable de s'adapter à des observations ou des perturbations qui rendent le modèle d'état caduque sur un laps de temps donné; le but est alors d'adapter les paramètres du filtre pour prendre en compte ces perturbations (au sens large) et d'adapter les paramètres du filtre pour continuer à fournir une estimation de

l'état la meilleure possible. De nombreuses approches pour rendre un filtre Kalman adaptatif existent selon les perturbations rencontrées (non linéarités, changement de variance dans les bruits d'observation ou dans les bruits d'état, etc.) Ces adaptations du filtre de Kalman sont connues depuis longtemps (Sage et Husa, 1969), (Mehra, 1970), (Brow et Rutan, 1985). Voir par exemple (Särkkä et Nummenmaa, 2009), (Huang, Zhang, Wu, Li et Chambers, 2018) pour des nouvelles approches. Dans un domaine connexe des mesures neutroniques, voir par exemple (Barat, Dautremer, Montagu et Trama, 2006) pour un filtre de Kalman adaptatif en spectrométrie γ : l'adaptation est réalisée par un critère sur l'innovation et le niveau de seuil correspondant, et permet de « switcher » d'un mode « bruit » à un mode « signal ». On peut noter l'utilisation du filtre de Kalman pour certains détecteurs de neutrons (Self Powered Neutron Detectors, SPND) dans les travaux de (Ali, Hamzah, Idris et Rabir, 2018), (Peng, Li, Zhao, Gong et Wang, 2014), (Peng, Cai, Li et Wang, 2016), (Zarei, 2021), (Lys et Kanyuka, 2022) : dans ces travaux, la physique du détecteur est prise en compte dans le modèle d'état. Les flux neutroniques *in core* ou *ex core* requerraient de modéliser finement la cinétique des neutrons du réacteur considéré, et toute sa complexité : le modèle d'état (6.13),(6.14),(6.15) se veut générique (et de dimensions réduites pour des raisons de contraintes *hardware*) et cherche à éviter la modélisation physique d'un réacteur particulier. Selon les problématiques rencontrées, les adaptations peuvent supposer :

- H1** Q connue et fixée, et R inconnue,
- H2** R connue et fixée, et Q inconnue,
- H3** Q et R inconnues.

Les propriétés de l'innovation ε_{k+1} du filtre de Kalman ont été établies par (Kailath, 1974) : il s'agit d'un processus :

- blanc,
- stationnaire,
- de moyenne nulle,
- et de covariance $\mathbf{C}\mathbf{P}_{k+1|k}\mathbf{C}^T + \mathbf{R}$ (6.7).

En regard de ces propriétés, un test de la « blancheur » de l'innovation (la règle des « trois sigma » par exemple, voir notamment (Niedzwiecki et Cisowski, 1996)) permet de détecter un écart ou une sortie du modèle d'état. Cette détection effectuée, on peut alors adapter le modèle en changeant un ou plusieurs de ces paramètres dans les matrices qui le composent, et typiquement les matrices de covariance d'état et d'observation (Bianchi et Tinnirello, 2003). Cette adaptation des matrices de covariance influe directement sur le gain de Kalman (cf. (6.8)). L'application préalable d'une VST permet de restreindre l'adaptation au cas **H2**.

6.3.3 Règle du CUSUM

Introduite par (Page, 1954), la règle du CUSUM⁴ permet de détecter un changement dans une suite d'observations indépendantes. La détection d'un changement peut se ramener à un test d'hypothèses

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &: \theta = \theta_0 && \text{Hypothèse nulle (pas de changement)} \\ \mathcal{H}_1 &: \theta = \theta_1 && \text{Hypothèse alternative (présence d'un changement)} \end{aligned}$$

4. Cette « règle » est un cas particulier du *Sequential Probability Ratio Test (SPRT)* également introduit dans (Page, 1954)

où θ désigne par exemple la moyenne ou la variance des observations. On renvoie à (Basseville et Nikiforov, 1993, chap. 2) pour rappel du cadre statistique de la décision (test de Neyman-Pearson) pour les tests hors ligne. On se concentre ici sur la prise de décision séquentielle avec la mise en œuvre du test du CUSUM très efficace pour détecter l'apparition de rupture dans un signal, en particulier dans l'innovation du filtre de Kalman). On peut trouver la combinaison du filtre de Kalman et du CUSUM dans les travaux de (Bianchi et Timirello, 2003), (Severo, 2006), (Fang, Huang, Huang, Yang, Li et Cheng, 2020), (O'Brien, Trevizan et Rao, 2021). Ce test repose foncièrement (et historiquement) sur le ratio de la log-vraisemblance (lorsque celle-ci est connue) utilisé pour confronter les deux hypothèses \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 , qui suppose la connaissance des lois de probabilité p_{θ_0} et p_{θ_1} . g_n est la statistique du test d'hypothèses et peut être calculé récursivement :

$$g_k = g_{k-1} + \log \frac{p_{\theta_1}(X_k)}{p_{\theta_0}(X_k)} \quad (6.18)$$

Sans la connaissance des lois p_{θ_0} et p_{θ_1} , on parle parfois de *CUSUM non paramétrique* (cf. (Verdier, 2007)) et la règle du CUSUM s'écrit en pratique (algorithme 2)

$$g_k = g_{k-1} + s_k - \nu \quad (6.19)$$

où ν est un paramètre de centrage, et s_k est une statistique liée à l'innovation (usuellement, et selon les applications s_k est soit l'innovation elle-même ε_k , l'innovation normalisée $\tilde{\varepsilon}_k$, le carré de l'innovation ε_k^2 , ou ce dernier normalisé $\tilde{\varepsilon}_k^2$).

Algorithme 2 : CUSUM

$$g_k = g_{k-1} + s_k - \nu \quad (6.20)$$

$$\text{et alarme si } g_k > h > 0 \text{ et } g_k = 0. \quad (6.21)$$

Dans (6.20), ν est usuellement appelé « paramètre de dérive » ou paramètre de centrage. Plus ν est petit, plus le test est sensible aux variations de s_k . On définit également le « seuil d'alarme » h . La détection du changement envoie une alarme quand $g_k > h$. Après une alarme, g_k est ramené à la valeur zéro. Plus h est élevé, plus la probabilité qu'une fausse alarme soit détectée est faible, mais plus le temps nécessaire pour détecter un changement d'état est long. Les paramètres h et ν sont fixés à des valeurs constantes.

Le test CUSUM {6.20, 6.21} est monolatéral pour détecter un changement abrupt de θ positif, i.e. pour $\theta_1 > \theta_0$. Les valeurs prises par s_k pouvant être positives ou négatives dans les signaux de mesures neutroniques, un test bilatéral se construit à l'aide de deux tests en parallèle, basés sur $g_k^{(1)}$ et $g_k^{(2)}$ tels que

$$\begin{aligned} g_k^{(1)} &= \max(g_{k-1}^{(1)} + s_k^{(1)} - \nu, 0) \\ g_k^{(2)} &= \max(g_{k-1}^{(2)} + s_k^{(2)} - \nu, 0). \end{aligned} \quad (6.22)$$

avec typiquement $s_k^{(1)} = \varepsilon_k$ et $s_k^{(2)} = -\varepsilon_k$. Le second test peut être vu comme ayant $-y_k$ entrée. Comme conditions initiales, on fixe $g_0^{(1)} = 0$ et $g_0^{(2)} = 0$. La règle de décision se traduit suivant

$$\begin{cases} (g^{(1)} > h) \text{ ou } (g^{(2)} > h) \rightarrow \text{on accepte } H_1 \\ (g^{(1)} < h) \text{ ou } (g^{(2)} < h) \rightarrow \text{on accepte } H_0 \end{cases} \quad (6.23)$$

et donne lieu à l'algorithme 3.

Algorithme 3 : CUSUM bilatéral (Gustafsson, 2000, chap. 3, p. 67)

$$g_k^{(1)} = g_{k-1}^{(1)} + \varepsilon_k - \nu \quad (6.24)$$

$$g_k^{(2)} = g_{k-1}^{(2)} - \varepsilon_k - \nu \quad (6.25)$$

$$\text{alarme si } g_k^{(1)} > h \text{ ou } g_k^{(2)} > h \text{ et } g_k^{(1)} = 0, g_k^{(2)} = 0. \quad (6.26)$$

Cette règle s'insère dans le filtre de Kalman (cf. algorithme 4) et est également utilisée dans le filtre construit pour le débruitage en ligne du flux neutronique dans la section suivante avec les innovations normalisées, soit $s_k^{(1)} = \tilde{\varepsilon}_k$ et $s_k^{(2)} = -\tilde{\varepsilon}_k$.

6.3.4 Filtre VS-AKF

Pour les mesures neutroniques, l'adaptation a pour but de rendre le filtre « robuste » aux changements abrupts non modélisés dans l'état du système linéaire {6.1, 6.2}. Le filtre de Kalman adaptatif (AKF) proposé s'appuie sur :

- les VST : la transformée d'Anscombe et celles du chapitre 5, et leurs inverses,
- le CUSUM bilatéral (alg. 3) de la section 6.3.3.

En effet, la VST préalablement appliquée évite d'avoir à adapter le filtre au changement de la variance de l'observation (qui est fonction du signal observé). Le seuil h opère sur les statistiques $g_k^{(1)}$ et $g_k^{(2)}$, basées sur l'innovation normalisée du filtre de Kalman. $g_k^{(1)}$ et $g_k^{(2)}$ constituent des versions filtrées de cette dernière. Ainsi, le seuil d'alarme h indique un écart au modèle. À l'instar de (Bianchi et Timirello, 2003), le test CUSUM permet de détecter le changement dans les observations, et le modèle d'état 6.1, 6.2 est adapté en modifiant les composantes de la matrice \mathbf{Q} . Ainsi,

- en absence de changement

$$Q = Q_{\mathcal{H}_0} = \begin{bmatrix} 10^{-6} & 0 \\ 0 & 10^{-4} \end{bmatrix},$$

- à l'inverse, en présence de changement,

$$Q = Q_{\mathcal{H}_1} = \begin{bmatrix} 10^{12} & 10^8 \\ 10^8 & 10^{12} \end{bmatrix}.$$

En présence de changement, les grandes valeurs contenues dans $Q_{\mathcal{H}_1}$ ont une influence directe sur le gain de Kalman (6.8) et dégrade donc la qualité d'estimation : c'est un compromis incontournable au regard du caractère brusque des changements observés.

La synthèse de ces adaptations est résumée par l'algorithme 5 nommé VS-AKF (pour *Variance Stabilized Adaptive Kalman Filter*).

Algorithme 4 : CUSUM Kalman Filter

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|-1} = \mathbb{E}(x_0)$$

$$\mathbf{P}_{0|-1} = \text{Cov}(x_0)$$

À chaque instant k

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \mathbf{A} \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{Q} \mathbf{B}^T$$

$$\varepsilon_k = y_k^* - \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} \quad \triangleright \text{innovation}$$

$$S_k = \mathbf{C} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{C}^T + R \quad \triangleright \text{covariance de l'innovation}$$

$$\tilde{\varepsilon}_k = \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{S_k}} \quad \triangleright \text{innovation normalisée}$$

$$g_k^{(1)} = \max(g_{k-1}^{(1)} + \tilde{\varepsilon}_k - \nu, 0) \quad \triangleright \text{1re statistique du CUSUM}$$

$$g_k^{(2)} = \max(g_{k-1}^{(2)} - \tilde{\varepsilon}_k - \nu, 0) \quad \triangleright \text{2e statistique du CUSUM}$$

$$\text{Si } g_k^{(1)} > h \text{ ou } g_k^{(2)} > h \quad \triangleright \text{Tests CUSUM}$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \mathbf{A} \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{Q}_{\mathcal{H}_1} \mathbf{B}^T$$

$$g_k^{(1)} = 0, \quad g_k^{(2)} = 0$$

Sinon

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \mathbf{A} \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{Q}_{\mathcal{H}_0} \mathbf{B}^T$$

Fin Si

$$K_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{C}^T S_{k+1}^{-1}$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1} = (\mathbb{I}_n - K_k \mathbf{C}) \mathbf{P}_{k|k-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + K_k \varepsilon_k$$

Algorithme 5 : Filtre de Kalman adaptatif proposé (VS-AKF)

Après initialisation de $\hat{\mathbf{x}}_{0|-1}$ et $\mathbf{P}_{0|-1}$, à chaque instant k ,

1. Appliquer une transformation stabilisant la variance au signal de flux y_k pour obtenir le signal transformé $y_k^* = \text{VST}(y_k)$
2. Faire l'itération du filtre de Kalman adaptatif

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \\ \mathbf{P}_{k+1|k} &= \mathbf{A} \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{Q} \mathbf{B}^T \\ \varepsilon_k &= y_k^* - \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} && \triangleright \text{innovation} \\ S_k &= \mathbf{C} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{C}^T + R^* && \triangleright \text{covariance de l'innovation} \\ s_k &= \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{S_k}} && \triangleright \text{innovation normalisée} \\ g_k^{(1)} &= \max(g_{k-1}^{(1)} + s_k - \nu, 0) && \triangleright \text{1ère statistique du CUSUM} \\ g_k^{(2)} &= \max(g_{k-1}^{(2)} - s_k - \nu, 0) && \triangleright \text{2nde statistique du CUSUM} \\ \text{Si } g_k^{(1)} > h \text{ ou } g_k^{(2)} > h && \triangleright \text{Tests CUSUM} \\ \mathbf{P}_{k+1|k} &= \mathbf{A} \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{Q}_{\mathcal{H}_1} \mathbf{B}^T \\ g_k^{(1)} &= 0, \quad g_k^{(2)} = 0 \\ \text{Sinon} \\ \mathbf{P}_{k+1|k} &= \mathbf{A} \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{Q}_{\mathcal{H}_0} \mathbf{B}^T \\ \text{Fin Si} \\ K_{k+1} &= \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{C}^T S_{k+1}^{-1} \\ \mathbf{P}_{k+1|k+1} &= (\mathbb{I}_n - K_k \mathbf{C}) \mathbf{P}_{k|k-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + K_k \varepsilon_k \end{aligned}$$

3. Appliquer la transformée inverse VST^{-1} à $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}$
-

6.4 Estimation en ligne du flux neutronique sur signaux simulés et réels

On évalue dans cette section les capacités de filtrage de l'algorithme 5 à l'aide de simulations numériques et sur signaux réels pour chaque voie de mesure.

6.4.1 Simulations

Méthodologie

L'évaluation du filtre VS-AKF construit dans la section 6.3 repose sur la méthodologie (Monte Carlo) suivante :

1. génération de signaux représentatifs pour chaque voie de mesure ;
2. mise en œuvre du filtre VS-AKF sur ces signaux générés ;
3. calcul de l'erreur quadratique et de l'erreur absolue moyenne.

Ces 3 étapes sont répétées 10 000 fois pour obtenir deux critères moyens d'évaluation de la performance du filtre. Selon la voie de mesure, une comparaison est effectuée avec d'autres filtres de Kalman, adaptatifs ou non, avec ou sans application de VST et de VST inverse.

Génération des signaux

Pour chaque voie de mesure Impulsions/Fluctuations/Courant,

1. on génère un flux théorique échantillonné $\phi(k)$ selon un scénario donné,
2. basé sur ce profil on génère entre les instants 0 et T des réalisations du flux correspondant ce flux théorique étant généré à partir des équations du réacteur point (cf. D.2.1),
 - (a) pour la voie Impulsions, des tirages selon une loi de Poisson $\mathcal{P}(\phi(k))$ indépendants, centrés sur $\phi(k)$
 - (b) pour la voie Fluctuations, des tirages selon une loi gaussienne $\mathcal{N}(\phi(k), g_F(\phi(k)))$
 - (c) pour la voie Courant, des tirages selon une loi gaussienne $\mathcal{N}(\phi(k), g_C(\phi(k)))$

La physique des neutrons étant la même sur les trois voies de mesure, on peut simuler le même profil pour celles-ci. Les signaux générés ont toutefois des propriétés statistiques différentes, comme rappelé §5.1.4. Le flux théorique présente :

1. un plateau,
2. un premier saut d'amplitude moyenne,
3. une rampe correspondant à une montée en puissance (divergence du réacteur),
4. rampe immédiatement suivie d'une chute de barres d'absorbants, réalisant un retour rapide à une puissance inférieure de plusieurs ordre de grandeur .

Pour le modèle d'état linéaire considéré, ce scénario peut être considéré comme un « pire cas ». Le choix de ce scénario identique sur les trois voies de mesures a pour but de montrer l'intérêt de la stabilisation de variance.

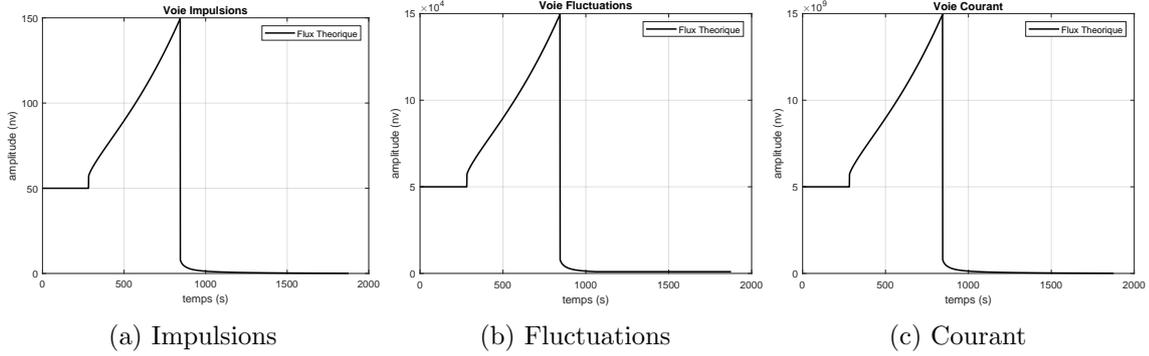


FIGURE 6.4 – Flux simulés pour les trois voies de mesure, de formes identiques mais sur des étendues propres à chaque voie de mesure.

Initialisations

$$\text{On initialise } \hat{x}_{0|-1} = \phi_0, \mathbf{P}_{0|-1} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}^2 & 0 \\ 0 & 10^{-4} \end{bmatrix}.$$

Évaluation de la qualité du filtrage

Les critères de qualité choisis sont les moyennes de la racine de l'erreur quadratique moyenne (*Root Mean Square Error*, ARMSE) et de l'erreur absolue moyenne (*Mean Absolute Error*, AMAE) pour T échantillons temporels et sur M répliques, notées ARMSE et AMAE (A pour *Average*)

$$\text{ARMSE} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left(\sqrt{\frac{1}{T} \sum_{k=1}^T (\phi_k^{\text{théorique}} - \hat{x}_k)^2} \right). \quad (6.27)$$

$$\text{AMAE} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left(\frac{1}{T} \sum_{k=1}^T |\phi_k^{\text{théorique}} - \hat{x}_k| \right). \quad (6.28)$$

Pour les M signaux répliqués, le filtre de Kalman est initialisé avec $\hat{x}_{0|-1} = \phi_0$ et $\mathbf{P}_{0|-1}$. Le scénario de flux généré est représenté sur la figure 6.4 pour chaque voie de mesure.

Remarque Les figures présentées dans les sections suivantes représenteront souvent les signaux avec les deux échelles linéaire et logarithmique pour rendre compte de la dynamique expérimentale : plusieurs ordres de grandeurs peuvent en effet différer entre le minimum et le maximum des valeurs pour une voie de mesures donnée.

6.4.2 Voie Impulsions

Dans le cas de la voie Impulsions, la VST est donnée par l'équation (5.3) et la VST inverse par (5.4) ou (5.5). On met également en œuvre la *Mean Matching VST* \mathcal{T}^{MM} (3.13) dont l'inverse est simplement la fonction x^2 . À ma connaissance, cette dernière VST n'a pas

été utilisée pour débruiter des signaux de comptages, tâche qui est usuellement réalisée avec la transformée d'Anscombe.

La transformée d'Anscombe corrigée du biais (3.22) s'est révélée inapplicable du fait du dernier terme en λ^{-1} et n'est donc pas présentée dans cette section.

Deux types de filtres de Kalman pour le modèle d'état {(6.16),(6.17)} sont considérés et comparés :

- le filtre de Kalman conventionnel (Kalman Filter (KF)), sans adaptation, algorithme 1,
- le filtre de Kalman adaptatif (VS-AKF), algorithme 5.

Au total, les combinaisons {VST + Filtre de Kalman} suivantes sont évaluées sur données synthétiques :

1. le filtre de Kalman conventionnel sans VST (KF),
2. le filtre de Kalman Adaptatif (AKF) sans VST,
3. le filtre de Kalman conventionnel avec VST (VS-KF),
 - (a) MM-VST + KF
 - (b) Anscombe + KF
4. le filtre de Kalman Adaptatif avec VST,
 - (a) MM-VST + AKF = VS-AKF
 - (b) Anscombe + AKF = VS-AKF

Paramètres de simulation

On utilise les VST d'Anscombe $\sqrt{x + \frac{3}{8}}$ et la MM-VST $\sqrt{x + \frac{1}{4}}$ qui stabilisent la variance de la donnée transformée à la valeur théorique de 0.25, donc on fixe la variance de l'observation dans l'AKF à $R^* = 0.25$.

Résultats sur données synthétiques

Les figures 6.5, 6.6, 6.7, 6.8, et les chiffres du tableau 6.1 montrent que :

- le filtre de Kalman conventionnel sans VST (légendé No-VST KF, figure 6.5) est incapable de fournir une estimation du flux en dehors du plateau (qui correspond au modèle), comme le montre la figure 6.5. Pour le premier changement abrupt à la fin du plateau, un temps est nécessaire pour qu'il « raccroche » aux données ; ce temps est décuplé pour prendre en compte le second changement abrupt, et voit apparaître un « undershoot » grossier ;
- le filtre de Kalman conventionnel (non adaptatif) avec VST (légendé VST KF, figure 6.5) fournit une estimation bien meilleure : la VST permet de conserver une bonne estimation après le premier saut ; le phénomène d'« undershoot » est réduit mais toujours présent, ainsi que le délai pour raccrocher et reprendre en compte les données sur la partie stationnaire après la chute de barres.
- l'algorithme 5 (légendé VS-AKF) débruite les signaux tout en s'adaptant aux changements abrupts, sans « undershoot » ni retard important, avec les deux VST \mathcal{T}^{MM} (légendée MM) et la transformée d'Anscombe \mathcal{A} ,

- l'innovation normalisée du filtre **VS-AKF** représentée sur la figure 6.8 n'est pas stationnaire sur toute la durée du signal ; plus précisément, elle est stationnaire sur les 1000 premiers échantillons,
- les RMSE et MAE (cf. tableau 6.1) penchent en faveur de la MM-VST, version à biais nul de la transformée d'Anscombe, dont l'apport se manifeste particulièrement sur la partie finale du signal (zoom 4, figure 6.7) lorsque le flux neutronique est très faible.

Tous les résultats ont été obtenus avec les paramètres $\nu = 0.1$ et $h = 5$ pour le CUSUM.

TABLE 6.1 – ARMSE et AMAE obtenues pour les quatre algorithmes sur la voie Impulsions.

Voie Impulsions	RMSE	MAE
MM-VST KF	2.5072×10^3	6.8105×10^4
Anscombe KF	2.5142×10^3	6.8572×10^4
MM-VST AKF	2.6643×10^3	7.0121×10^4
Anscombe AKF	2.6673×10^3	7.0171×10^4

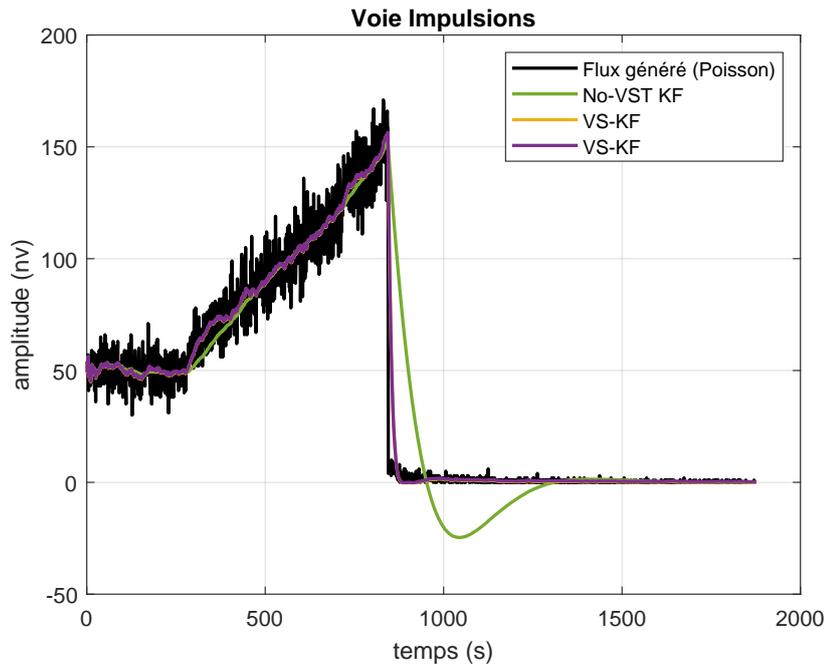


FIGURE 6.5 – Estimation du flux neutronique sur la voie Impulsions par filtre de Kalman non adaptatif avec (en jaune et violet) ou sans (en vert) stabilisation de variance.

Résultats sur données réelles

La figure 6.9a montre qu'un filtre de Kalman non adaptatif et sans VST (courbe verte) est incapable de fournir une estimation fiable ; elle est même biaisée sur le plateau qui précède la chute de barre. Cette incapacité a déjà été observée sur données simulées. Un filtre de Kalman

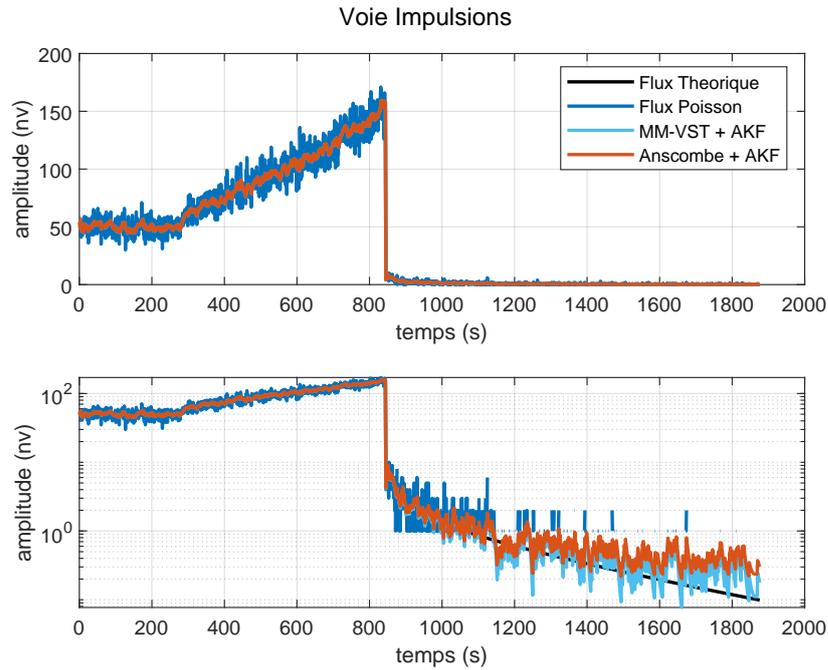


FIGURE 6.6 – Estimation du flux neutronique sur la voie Impulsions par l'algorithme VS-AKF (échelle linéaire en haut et échelle logarithmique en bas). Les VST utilisées sont la transformée Mean Matching (3.13) (légendé MM-VST) et celle d'Anscombe.

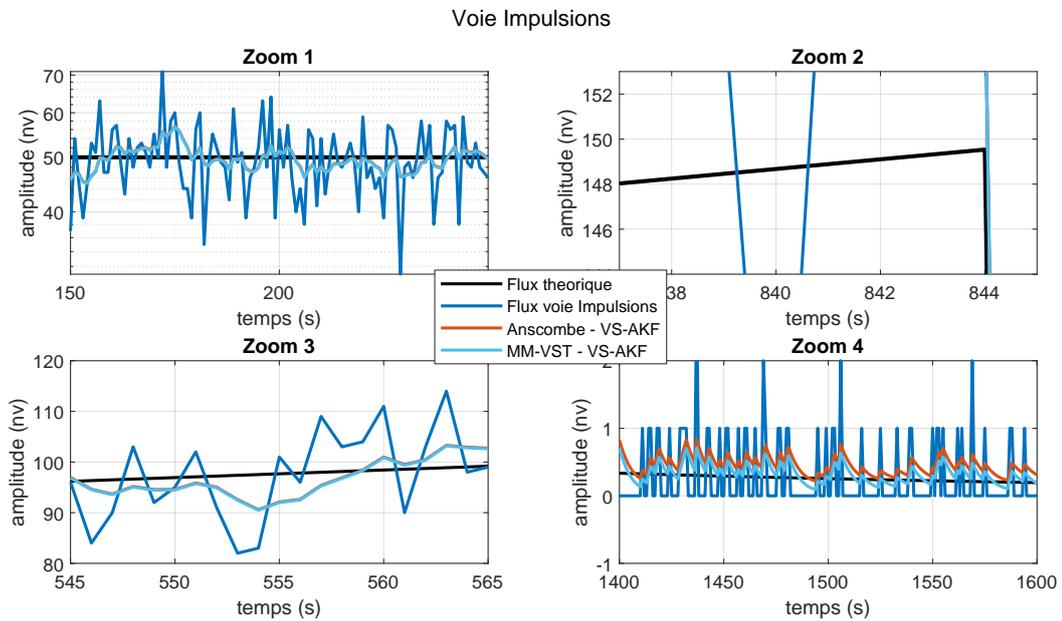


FIGURE 6.7 – Estimation du flux neutronique (voie Impulsions) : zooms sur des sous-parties du signal de la figure 6.6. Sur le zoom 1 et le zoom 3, les courbes MM-VST et Anscombe sont quasiment confondues.

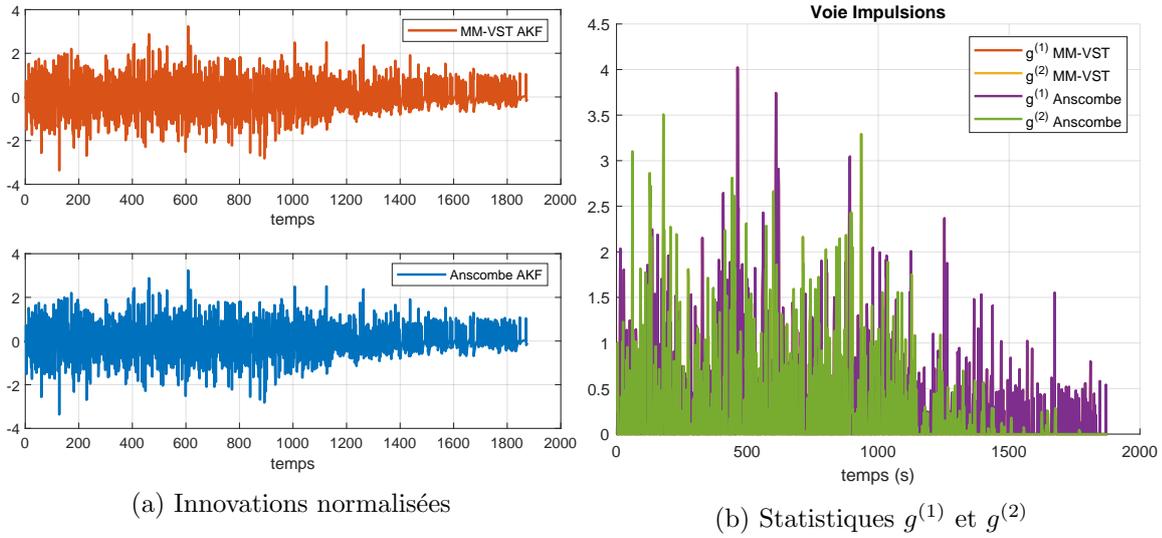


FIGURE 6.8 – Innovation du filtre de Kalman (à gauche) et statistiques $g^{(1)}$ et $g^{(2)}$ pour la voie Impulsions (à droite) - (les courbes violette et verte sont respectivement superposées sur les courbes rouge et jaune).

non adaptatif couplé à une stabilisation de variance fournit une estimation bien meilleure, mais présente – comme sur les données simulées – un retard et un « undershoot » caractéristiques d'un filtre linéaire faisant face à une non linéarité brutale. Les mêmes écueils sont visibles sur la figure 6.9b pour le filtre de Kalman sans VST (courbe verte). Les changements sur ce signal étant moins abrupts, les « overshoot » ou « undershoot » sont moins prononcés. L'apport de la stabilisation de variance est majeur pour les deux types de signaux traités.

Les figures 6.10a, 6.11a, 6.11b et les figures 6.10b, 6.12a, 6.12b représentent le comportement du filtre VS-AKF avec la transformée d'Anscombe et la MM-VST sur les données réelles des figures 6.2 et 6.3. On peut visuellement constater l'absence d'« undershoot » lors de la chute de barres fig. 6.10a, et un débruitage du signal de balancement de croix sans « undershoot », ni « overshoot », comme précédemment constaté sur les données simulées.

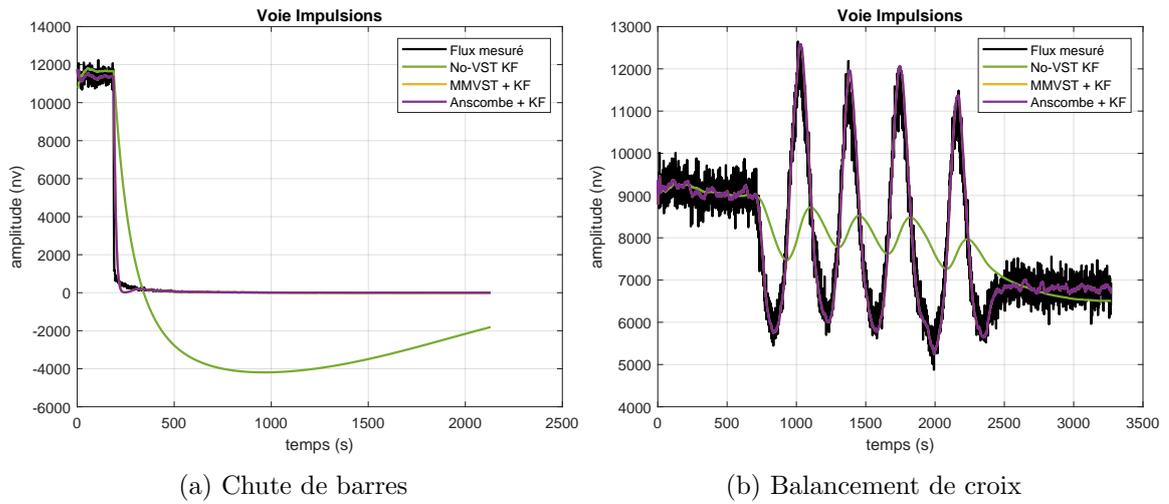


FIGURE 6.9 – Filtrage de signaux réels sur la voie Impulsions par filtre de Kalman non adaptatifs avec ou sans stabilisation de variance d'un signal réel en mode Impulsions lors d'une chute de barres (à gauche) et lors d'un balancement de croix (à droite); sans VST (courbe verte), combinée avec la MM-VST (courbe jaune), combiné avec la transformée d'Anscombe (courbe violette)

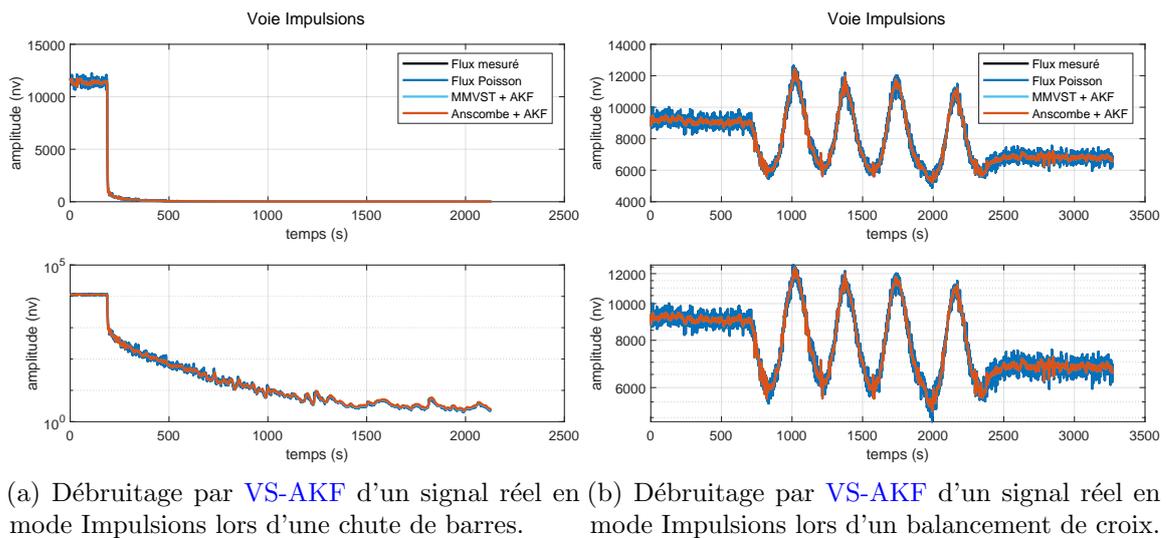


FIGURE 6.10 – Filtrage de signaux réels par VS-AKF

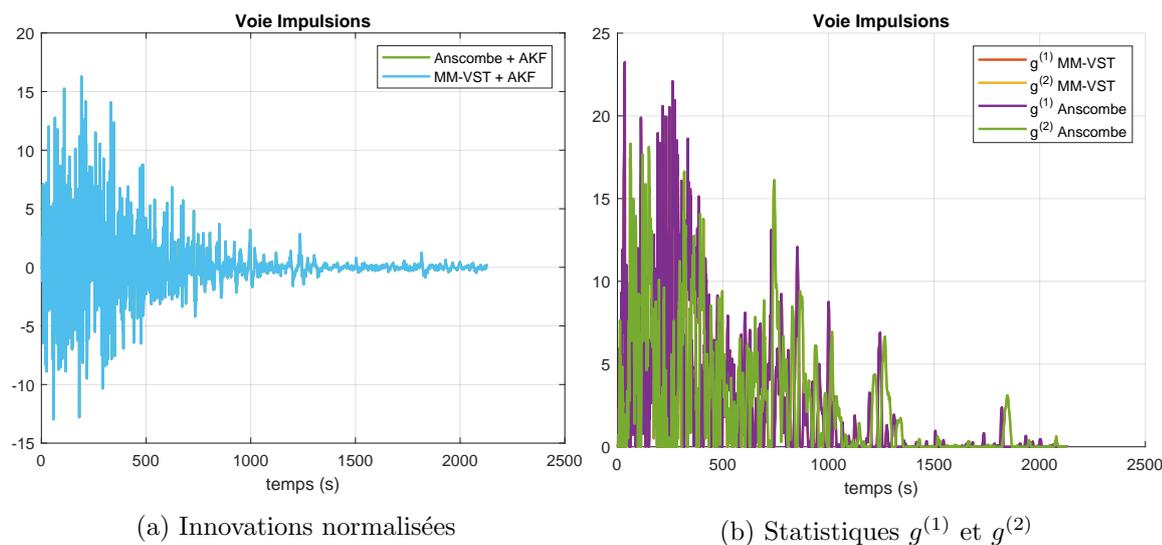


FIGURE 6.11 – Innovation de l'AKF sans VST et statistiques $g^{(1)}$ et $g^{(2)}$ pour la voie Impulsions lors de la chute de barres.

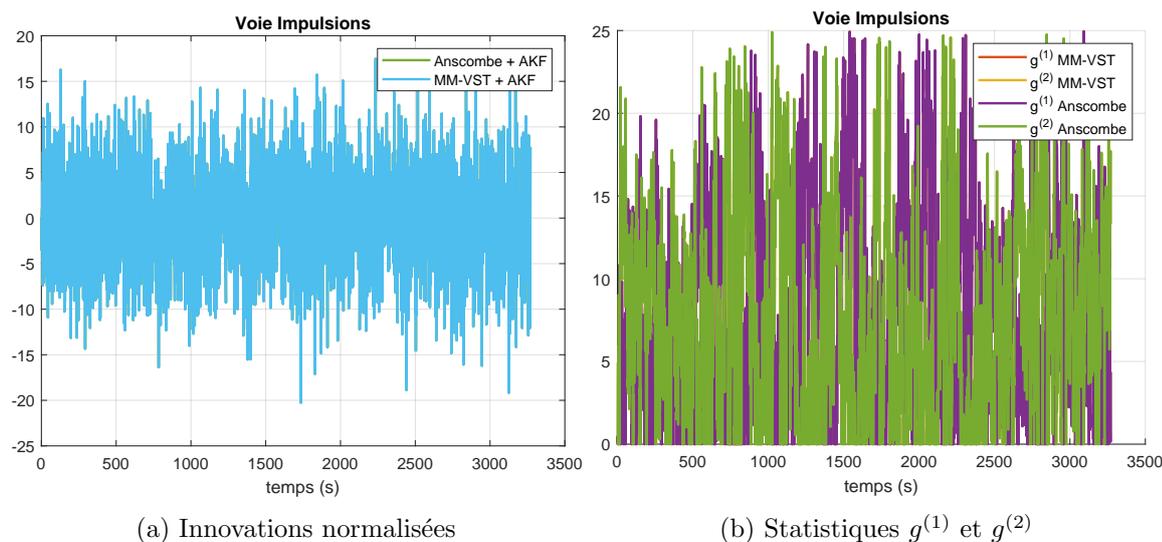


FIGURE 6.12 – Innovation du filtre VS-AKF et statistiques $g^{(1)}$ et $g^{(2)}$ pour la voie Impulsions lors du balancement de croix.

Les innovations des deux VS-AKF (6.12) sont proches de celles attendues : centrées et stationnaires, à l'opposé de celles (6.11) de l'AKF sans VST.

Conclusions

L'algorithme VS-AKF permet de fournir une estimation du flux neutronique sur la voie Impulsions en tenant compte de l'hétéroscédasticité du signal et des changements abrupts. Au regard des critères de qualité choisis, la transformée MM-VST et son inverse sont plus

performantes que la transformée d'Anscombe et son inverse asymptotiquement non biaisée. À faible flux, la MM-VST combinée à l'AKF fournit une estimation moins biaisée. À fort flux, les résultats sont similaires. Ces constatations semblent également valables sur les données réelles.

6.4.3 Voie Fluctuations

La VST pour la voie Fluctuations est donnée par l'équation (5.13) ou (5.14) et la VST inverse par (5.18). Deux types de filtres de Kalman pour le modèle d'état {(6.16),(6.17)} sont considérés et comparés :

- le filtre de Kalman adaptatif (AKF) sans VST, algorithme 4,
- le filtre de Kalman adaptatif avec VST (VS-AKF), algorithme 5.

Paramètres de simulation

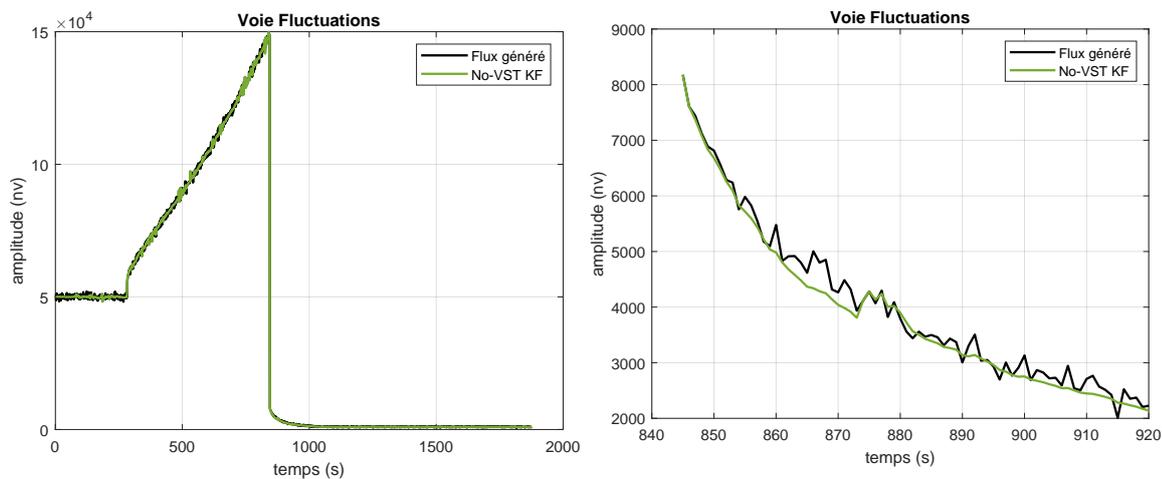
Les paramètres d'entrée sont fixés avec les valeurs suivantes : $\alpha_F = 2 \times 10^{-6}$, $\beta_F = 1 \times 10^1$, $\sigma_F = 1 \times 10^{-2}$. $R^* = \hat{\sigma}_{[1:200]}^2$, $\hat{\sigma}_{[1:200]}^2$ désignant la variance empirique estimée sur les 200 premiers échantillons.

Résultats sur données synthétiques

Les figures 6.13, 6.14, 6.18, 6.19, montrent que le comportement du filtre est sensiblement le même que celui observé sur la voie Impulsions.

TABLE 6.2 – ARMSE et AMAE obtenues pour les deux algorithmes AKF et VS-AKF sur la voie Fluctuations.

Voie	AKF		VS-AKF	
	ARMSE	AMAE	ARMSE	AMAE
Fluctuations				
Erreur	$2.605\,369 \times 10^6$	$7.156\,565\,2 \times 10^7$	$2.605\,369 \times 10^6$	$7.156\,565\,2 \times 10^7$



(a) Estimation du flux neutronique par l'AKF (b) Estimation du flux neutronique par l'AKF : zoom sur la fin de la chute de barres.

FIGURE 6.13 – Estimation du flux neutronique par l'AKF sur les signaux synthétiques en mode Fluctuations.

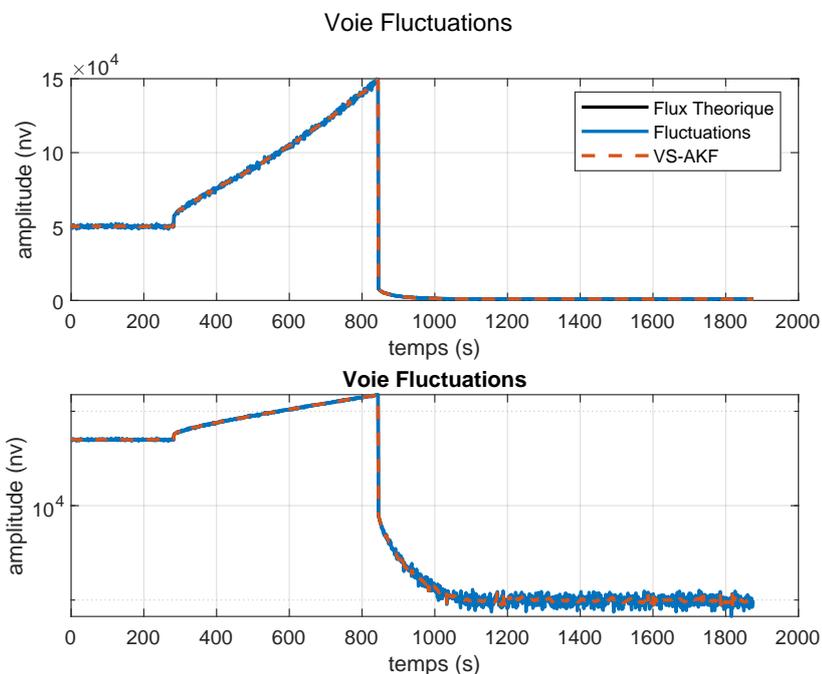


FIGURE 6.14 – Estimation du flux neutronique par le filtre VS-AKF sur les signaux synthétiques en mode Fluctuations.

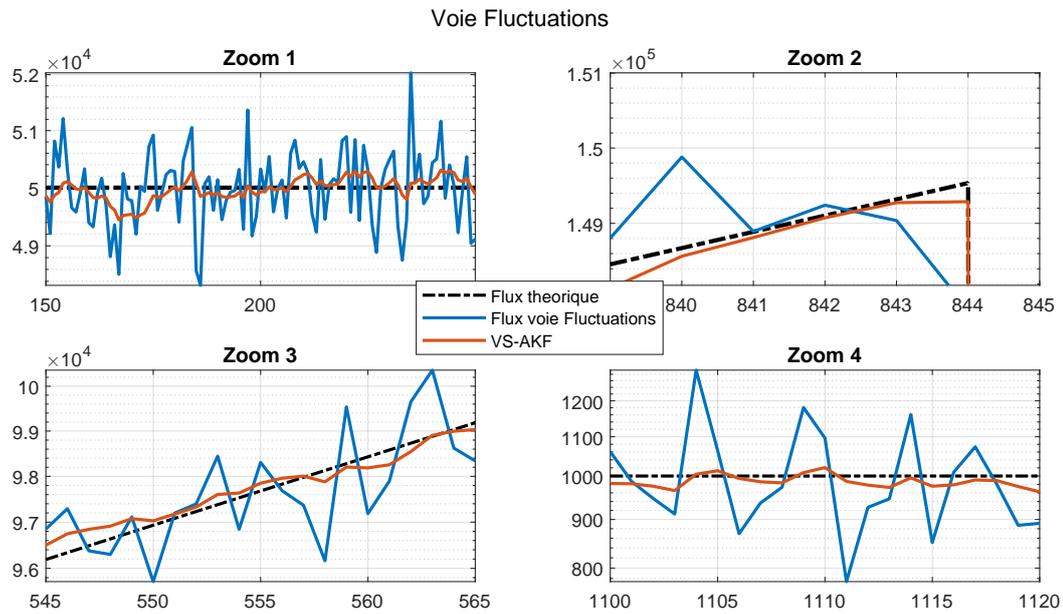


FIGURE 6.15 – Estimation du flux neutronique par le VS-AKF sur les signaux synthétiques en mode Fluctuations : Zoons sur quatre portions du signal.

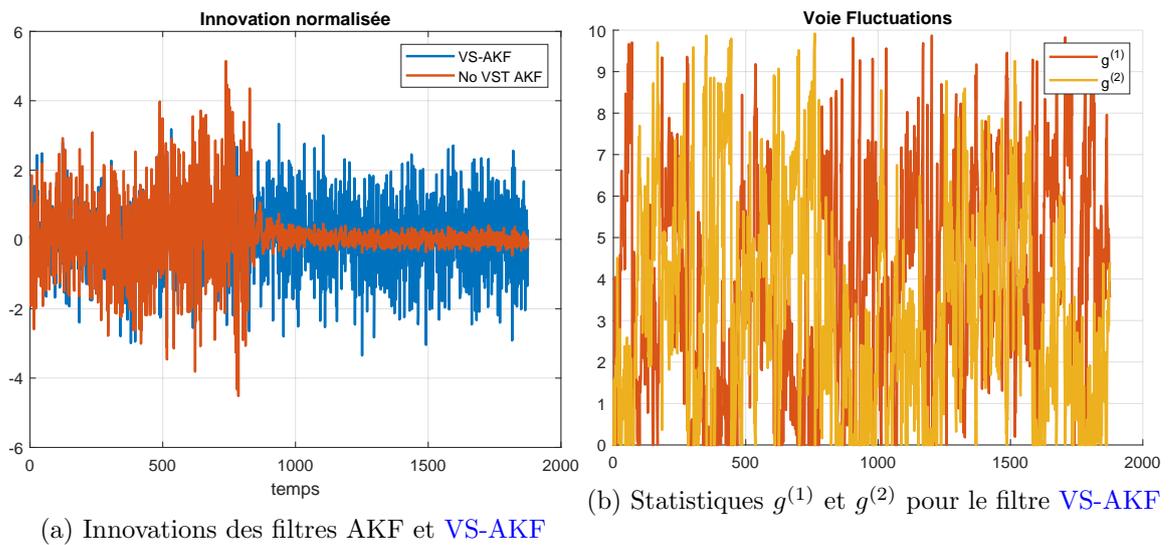


FIGURE 6.16 – Innovations normalisées pour les filtres VS-AKF (courbe bleue) et AKF sans stabilisation de variance (courbe orange) (à gauche) et statistiques $g^{(1)}$ et $g^{(2)}$ pour une voie Fluctuations.

- Le filtre de Kalman sans VST et non adaptatif est incapable de fournir une estimation du flux en dehors du plateau et n'est pas représenté dans cette section : son comportement est sans surprise le même que pour la voie Impulsions ;
- L'AKF sans VST (légendé No-VST AKF) fournit une bonne estimation du flux neutro-

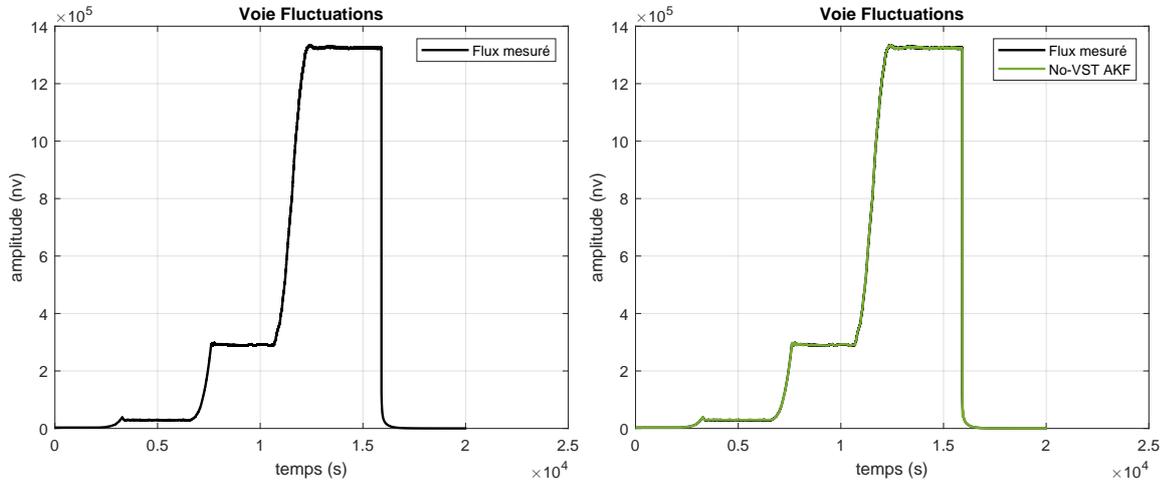
nique, comme le montre la figure 6.13a. Un très léger « undershoot » apparaît lors de la chute de barres (fig. 6.13b) ;

- Le VS-AKF (fig. 6.14 et 6.15) fournit également une bonne estimation du flux neutronique.
- L’innovation normalisée de l’AKF sans VST sur la figure 6.16a montre une non stationnarité flagrante, traduisant l’inadaptation de ce filtre au signal observé. *A contrario*, celle du VS-AKF est conforme à une innovation normalisée typique d’un filtre dont le modèle d’état représente correctement le signal observé.

Les critères numériques de qualité du tableau 6.2 sont de manière surprenante similaires (pour ces signaux générés). Tous les résultats ont été obtenus avec les paramètres $\nu = 0$ et $h = 6$ pour le CUSUM.

Résultats sur données réelles

Les données réelles mesurées sur un réacteur expérimental sont représentées sur la figure 6.17a, qui représente trois montées en puissance du réacteur suivies de paliers de puissance, et se terminent par une chute de barres. Le comportement du filtre VS-AKF est similaire à celui observé en simulation et montre sa capacité à suivre les tendances et à converger rapidement après un changement abrupt sur les figures 6.17a et 6.18.



(a) Flux neutronique réel d’un réacteur expérimental . (b) Estimation du flux neutronique par l’AKF

FIGURE 6.17 – Données réelles d’une voie Fluctuations

Le résultat du filtrage de l’AKF sans stabilisation de variance est représenté sur la figure 6.13b, et montre sur les parties zoomées qu’il ne parvient pas à s’adapter aux changements trop bruts, et peut parfois présenter le phénomène d’« undershoot » sur la chute de barres.

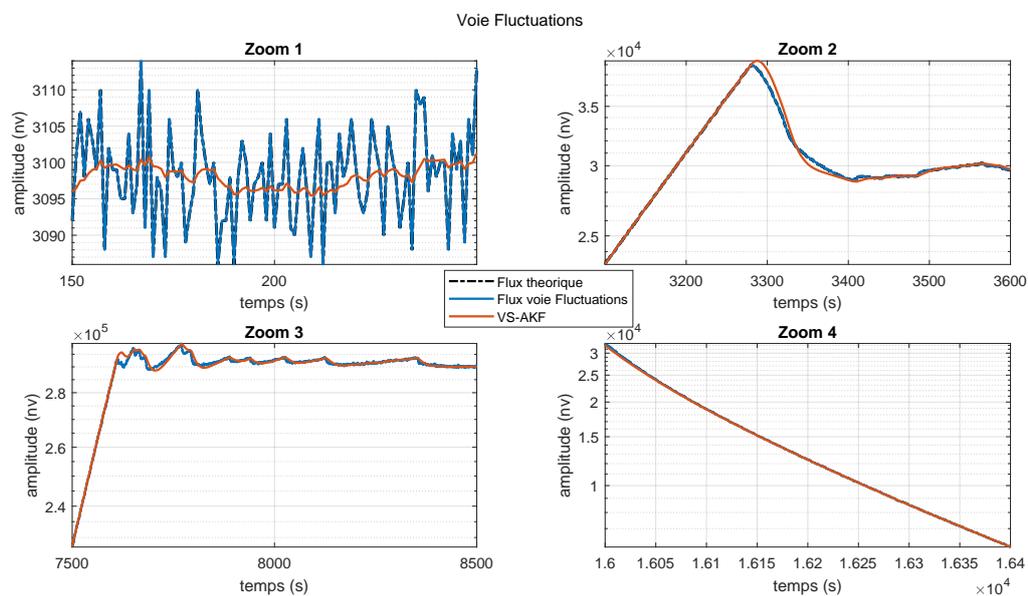


FIGURE 6.18 – Estimation du flux neutronique (voie Fluctuations) - Zooms sur quatre portions du signal

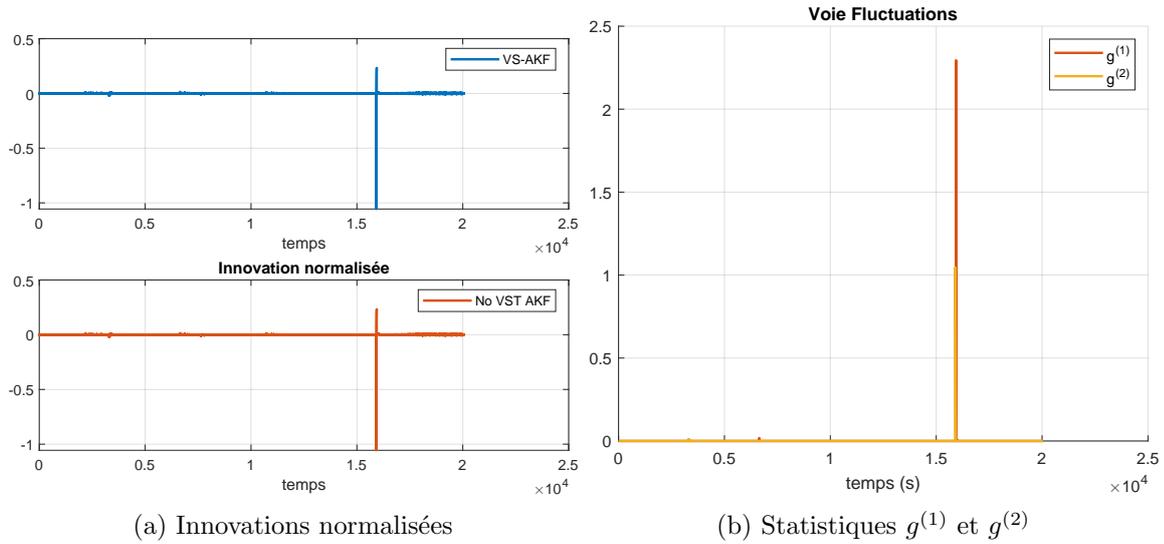


FIGURE 6.19 – Innovations normalisées pour les filtres **VS-AKF** (courbe bleue) et **AKF** sans stabilisation de variance (courbe orange) (à gauche) et statistiques $g^{(1)}$ et $g^{(2)}$ pour les données réelles d'une voie Fluctuations de la figure 6.17a.

Conclusions

Pour la voie Fluctuations, le **VS-AKF** fournit une estimation du flux neutronique en tenant compte de l'hétéroscédasticité du signal et des changements abrupts. En regard de l'innovation normalisée, le modèle et le filtre associé semblent décrire correctement le signal observé. Les paramètres ν et h sont très proches de ceux choisis pour la voie Impulsions.

6.4.4 Voie Courant

Pour la voie Courant, on applique la VST définie par (5.29) et la VST inverse (5.30).

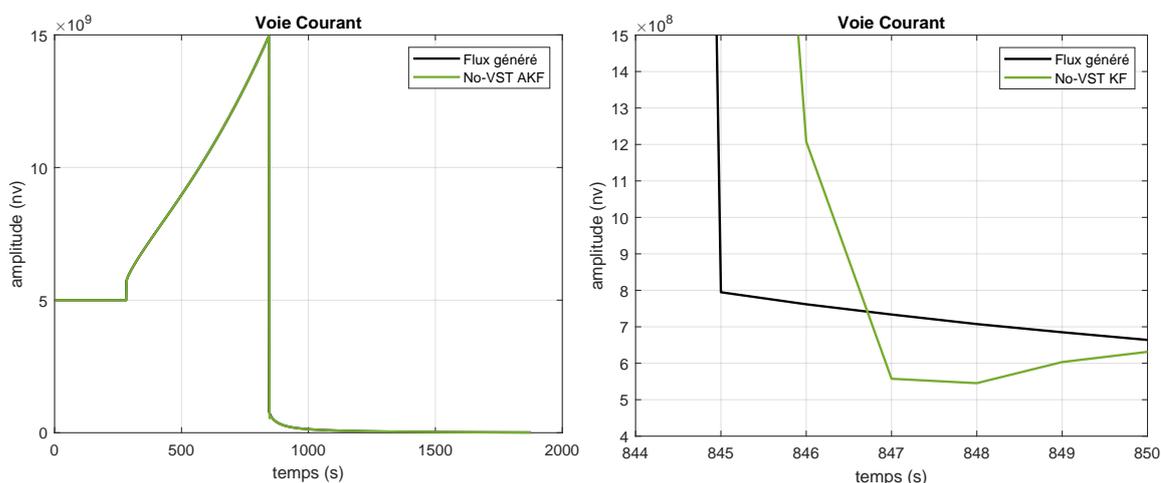
Paramètres de simulation

Les paramètres d'entrée prennent les valeurs suivantes : $\alpha_C = 1 \times 10^{-2}$, $\beta_C = 1 \times 10^{-2}$, $\sigma_C = 1 \times 10^{-2}$.

Résultats sur données synthétiques

Les figures 6.20, 6.21, 6.22, 6.23, montrent que le comportement du filtre est sensiblement le même que celui observé sur la voie Fluctuations.

- Le filtre de Kalman sans VST et non adaptatif est incapable de fournir une estimation du flux en dehors du plateau et n'est pas représenté dans cette section : son comportement est sans surprise le même que pour la voie Impulsions et Fluctuations ;
- L'AKF sans VST (légendé No-VST AKF) fournit une estimation assez correcte du flux neutronique, comme le montre la figure 6.20a, excepté lors des transitions brutes, où le filtre raccroche avec un délai notable. Un léger « undershoot » apparaît lors de la chute de barres (fig. 6.20b) ;
- Le VS-AKF (fig. 6.21 et 6.22) fournit une bonne estimation du flux neutronique.
- L'innovation normalisée de l'AKF sans VST sur la figure 6.23a n'est absolument pas stationnaire, traduisant l'inadaptation de ce filtre au signal observé. *A contrario*, celle du VS-AKF est plus proche d'une innovation normalisée stationnaire.



(a) Filtre de Kalman non adaptatif sans VST. (b) Zoom de la figure 6.20a : Le phénomène d'« undershoot » est présent.

FIGURE 6.20 – Filtrage des données synthétiques générées pour la voie Courant par le filtre de Kalman sans VST

Les critères numériques de qualité du tableau 6.3 corroborent les constatations précédentes en faveur du **VS-AKF**. Tous les résultats ont été obtenus avec les paramètres $\nu = 0.01$ et $h = 5$ pour le CUSUM.

Voie Courant	No VS-AKF		VST-AKF	
	ARMSE	AMAE	ARMSE	AMAE
Erreur estimée	9.3435×10^7	2.0967×10^9	4.1682×10^7	1.0142×10^9

TABLE 6.3 – Erreurs moyennes pour les deux filtres obtenues pour $m = 10000$ tirages Monte-Carlo pour les données synthétiques 6.4c

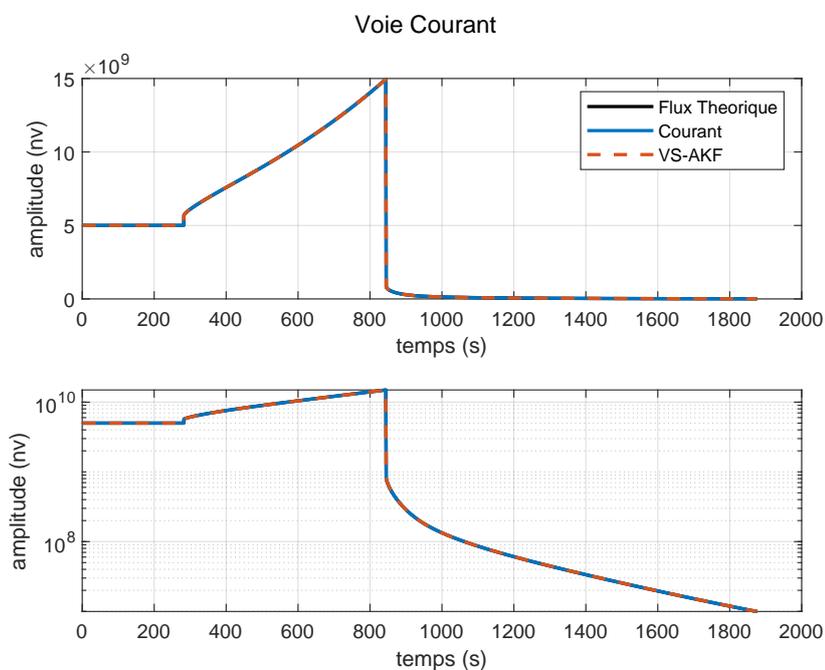


FIGURE 6.21 – Estimation du flux neutronique sur la voie Courant par **VS-AKF**.

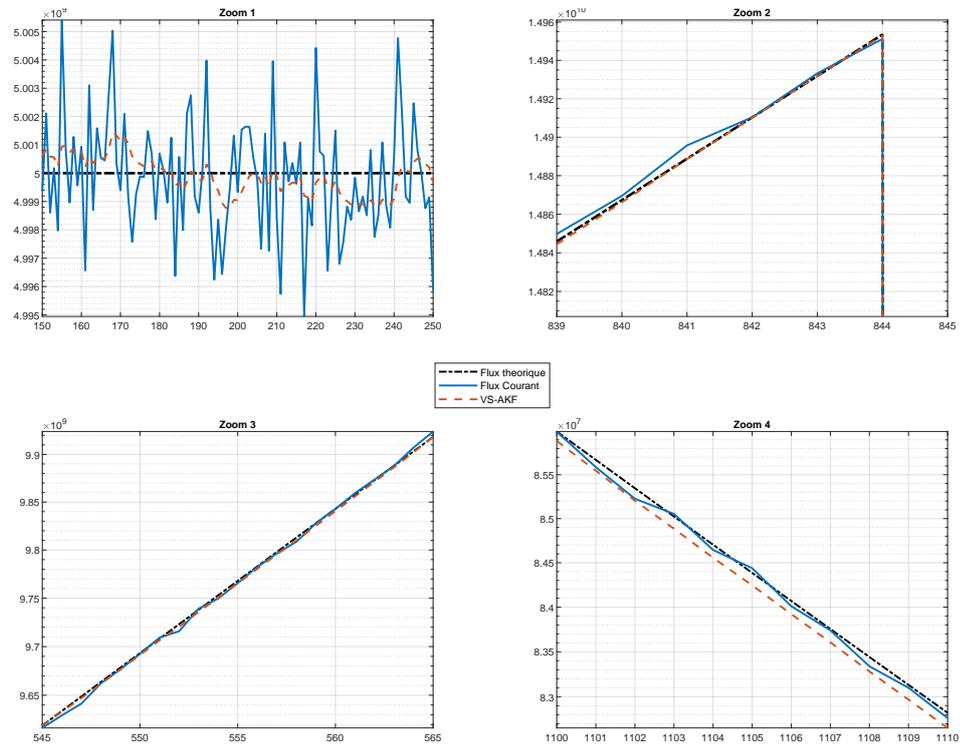


FIGURE 6.22 – Estimation du flux neutronique sur la voie Courant par le VS-AKF. Zoom sur quatre portions du signal de la figure 6.4c.

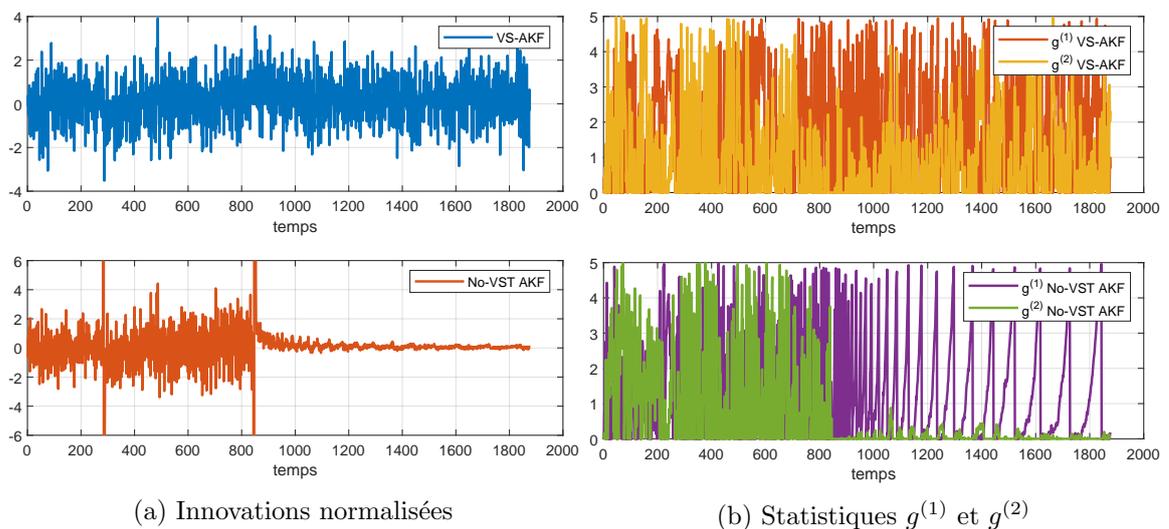
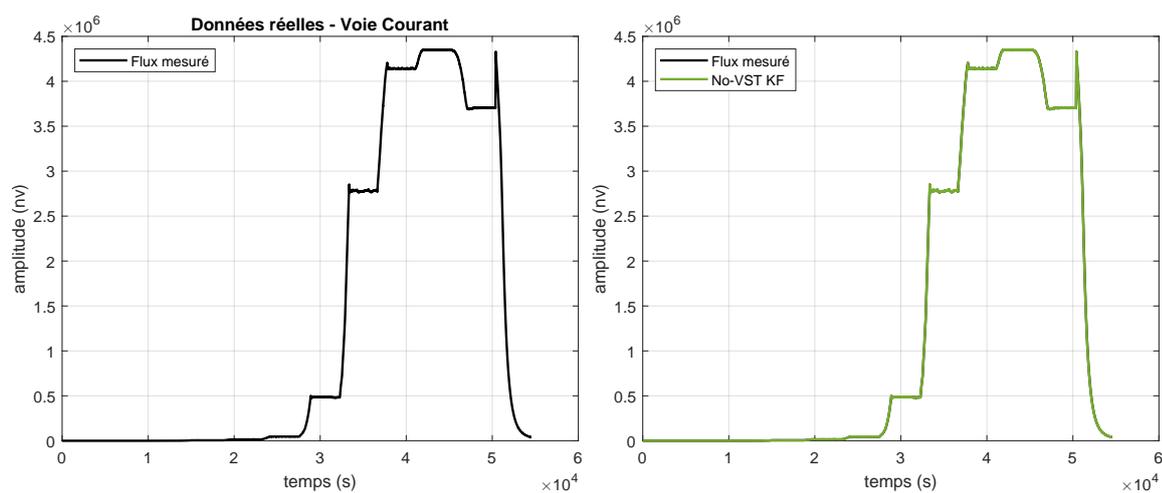


FIGURE 6.23 – Innovations normalisées pour les filtres VS-AKF (courbe bleue) et AKF sans stabilisation de variance (courbe orange) (à gauche) et statistiques $g^{(1)}$ et $g^{(2)}$ correspondantes illustrant les instants d'adaptation du filtre sur les données synthétiques (voie Courant)

Résultats sur données réelles

Les données réelles mesurées sur un réacteur expérimental sont représentées sur la figure 6.24a, et présentent trois montées en puissance du réacteur suivie de paliers de puissance, et se terminent par une chute de barres.

Comme attendu, l'AKF peut suivre la dynamique du signal mais n'est pas capable de débiter comme le montre la figure 6.25, puisqu'il n'a pas la connaissance de l'évolution de la variance des observations.



(a) Données expérimentales d'une voie Courant issues d'un réacteur expérimental.

(b) Filtrage des données réelles de 6.24a.

FIGURE 6.24 – Comportement du filtre AKF sur les données réelles.

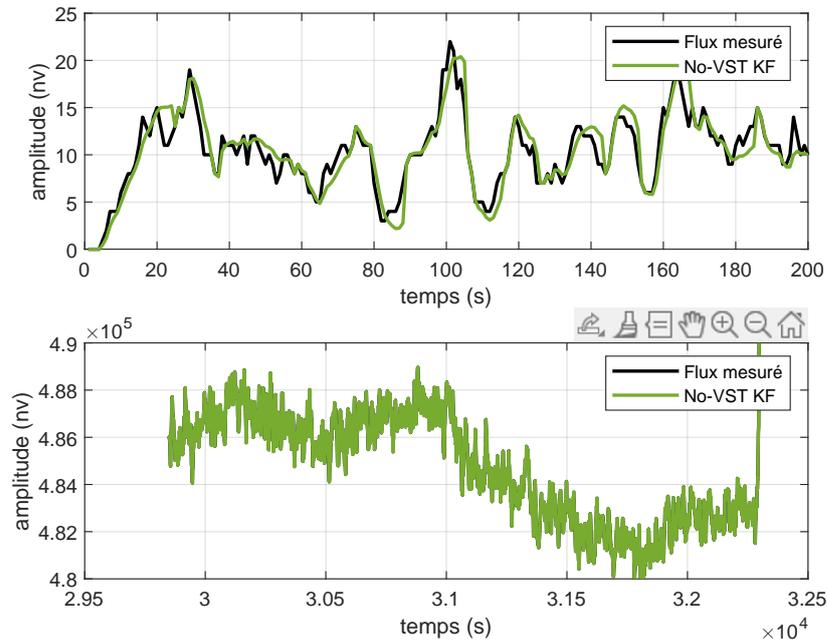


FIGURE 6.25 – Zoom de la figure 6.24b.

Le comportement du filtre **VS-AKF** est similaire à celui observé en simulation et montre sa capacité à suivre les tendances et à converger rapidement après un changement abrupt voir figures 6.26 et 6.27.

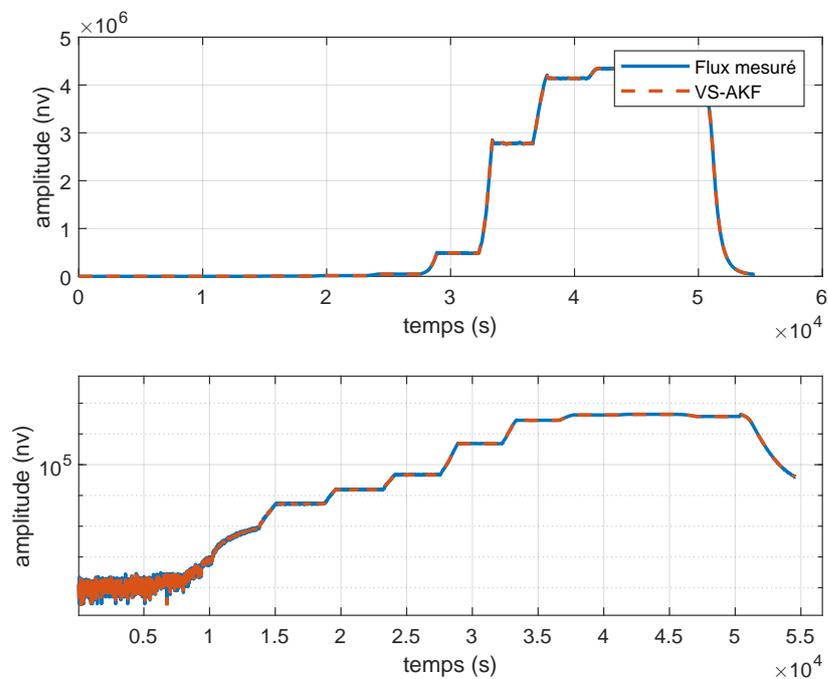


FIGURE 6.26 – Estimation du flux neutronique sur la voie Courant par le **VS-AKF**

6.4. Estimation en ligne du flux neutronique sur signaux simulés et réels

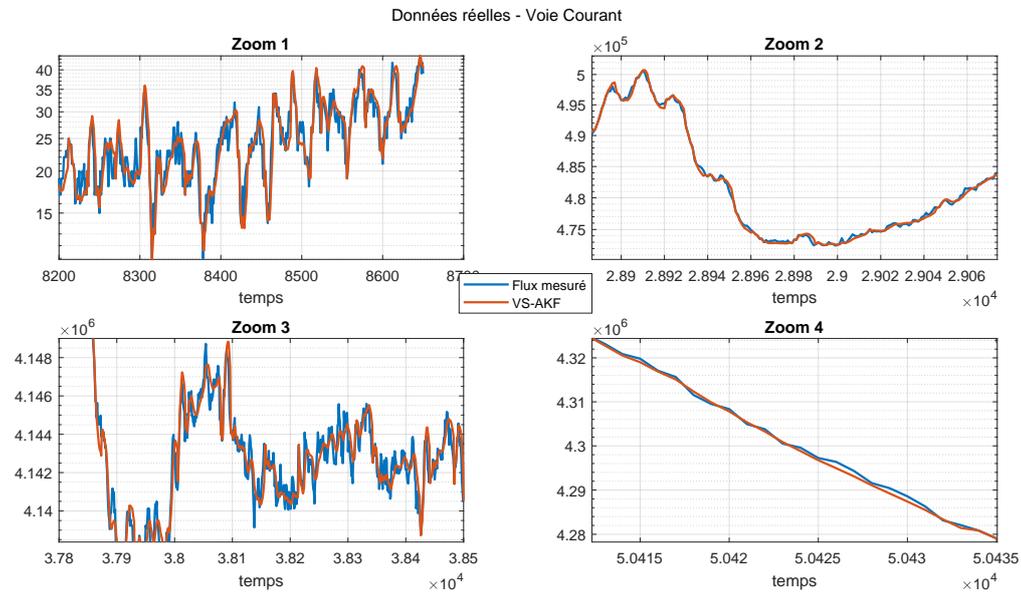


FIGURE 6.27 – Estimation du flux neutronique sur la voie Courant par le VS-AKF - ZOOMS

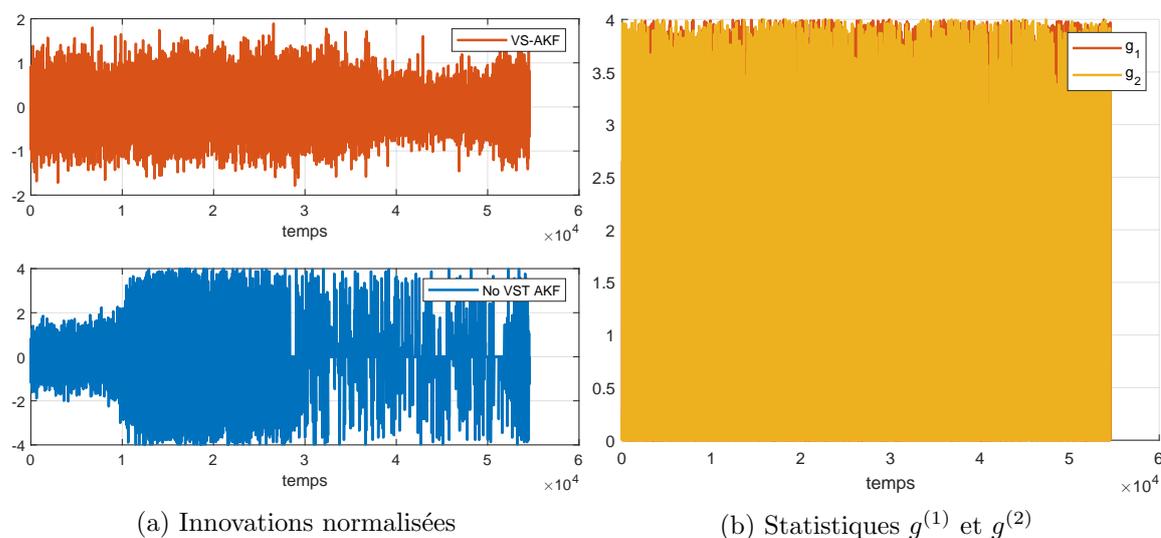


FIGURE 6.28 – Innovations normalisées pour les filtres **VS-AKF** (courbe bleue) et AKF sans stabilisation de variance (courbe orange) (à gauche) et statistiques $g^{(1)}$ et $g^{(2)}$ illustrant les instants d'adaptation du filtre **VS-AKF** pour les données réelles de la figure 6.24a.

Conclusions

Comme constaté précédemment pour la voie Impulsions et la voie Fluctuations, le **VS-AKF** fournit une bonne estimation du flux neutronique. Le comportement est similaire sur les données synthétiques et réelles. Les changements abrupts sont pris en compte par les deux statistiques du CUSUM et l'hétéroscédasticité est prise en compte par la VST.

6.5 Conclusion du chapitre

Du point de vue du traitement statistique du signal, ces signaux neutroniques présentent deux caractéristiques majeures :

1. la propriété d'hétéroscédasticité, c'est-à-dire que la variance varie en fonction du niveau de la puissance du réacteur. Elle s'observe expérimentalement sur les trois voies de mesures ;
2. des changements de régime parfois abrupts, liés à la physique des neutrons et au pilotage du réacteur par l'opérateur.

L'algorithme **VS-AKF**⁵ proposé prend en compte ces caractéristiques de deux manières :

1. en appliquant une transformée stabilisatrice de variance permettant de traiter des signaux de variance constante et rendus - par cette même transformée - gaussiens (cf. chap. 3) ; cette étape préalable permet d'appliquer des filtres construits pour le cadre gaussien de variance constante (c'est-à-dire une grande majorité des filtres),

5. À ma connaissance, à la date des travaux (2016), cette approche combinant VST et filtre de Kalman adaptatif basé sur un modèle d'état linéaire non physique, ne figurait pas dans l'état de l'art de l'estimation récursive du flux neutronique, comme en atteste le brevet déposé (Montagu et Bakkali, 2018).

2. en construisant un filtre capable de s'adapter aux changements abrupts.

Les contraintes préalables à ces travaux ont été prises en compte :

1. filtrer « en ligne », via un filtre récursif, pour obtenir une estimation du flux à chaque pas de temps,
2. éviter de modéliser la physique (car complexe, il n'est pas nécessairement aisé de l'insérer simplement dans un modèle d'état et elle peut de surcroît varier selon le type de réacteur).

Les résultats obtenus pour les trois voies de mesure montrent l'intérêt de la stabilisation de variance en complément de l'adaptation de la matrice de covariance d'état Q grâce au CUSUM ; l'algorithme **VS-AKF** permet ainsi d'estimer (de manière sous-optimale) des signaux neutroniques par nature non-linéaires et hétéroscédastiques sur la base d'un modèle d'état linéaire de faible dimension. Grâce à l'innovation normalisée s_k , les choix des valeurs de ν et du seuil h assez proches d'un mode de mesure à l'autre. Ce sont les deux seuls paramètres à régler ; toutes choses égales par ailleurs, ils permettent de réaliser un compromis entre performance de filtrage (augmentation du rapport signal à bruit) et vitesse d'adaptation au changement.

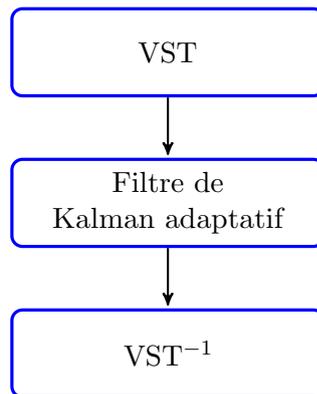


FIGURE 6.29 – Méthodologie d'application des transformées stabilisatrices de variance pour les trois voies de mesure. Cette méthodologie s'appuie sur l'algorithme 5.

Conclusion générale

Résumé des travaux

Le Shot Noise possède des propriétés statistiques singulières sous-tendues par le processus de Poisson sous-jacent, portées notamment par ses cumulants. Ayant remarqué que les variances des deux premiers estimateurs des cumulants (moyenne et variance) variaient avec l'intensité λ du processus de Poisson, des transformées stabilisatrices de variance ont été construites via la « Delta Method » pour ces deux estimateurs de l'intensité au chapitre 4. Les distributions asymptotiques ont été établies.

En considérant les estimateurs utilisés dans les chaînes de mesures neutroniques, les VST construites au chapitre 4 ont été adaptées et tiennent compte de la réalité physique et expérimentale. Elles font l'objet du chapitre 5. Les biais des transformations ont été calculés et les VST sans biais construites pour les voies Fluctuations et Courant.

L'application de la méthodologie $VST \rightarrow$ filtrage $\rightarrow VST^{-1}$ aux signaux de mesures neutroniques a été appliquée pour le débruitage en ligne de ces signaux à l'aide d'un filtre de Kalman au chapitre 6, l'application de ce dernier étant permise par la propriété de « gaussianisation » des VST. Des transformées tenant compte de la réalité expérimentale ont été établies sur la base de celles du chapitre 4. L'application de cette méthodologie basée sur la stabilisation de variance a été appliquée à l'estimation du flux neutronique pour les trois voies de mesures (Impulsions, Fluctuations, Courant) rencontrées sur les chaînes de mesures neutroniques.

Le but - à la date des premiers travaux - était de trouver un compromis entre le matériel (cibles hardware des années 2000), cohérence entre théorie et observations, facilité d'implantation et performance d'une méthode de filtrage récursif. Un nouveau compromis entre algorithme(s) de filtrage du flux neutronique et moyens de calculs pourrait sans doute être trouvé aujourd'hui. Une initiative récente ([Elter, Bakkali, Jammes et Pázsit, 2016](#)), ([Elter, Izarra, Filliatre, Jammes et Pázsit, 2016](#)) d'évaluation d'une chaîne neutronique de nouvelle génération en témoigne.

Perspectives

Calibration des VST

Appliquer une VST sur les voies Fluctuations et Courant nécessite en théorie de connaître les paramètres des fonctions de variance associées à chaque voie. Une méthodologie pour estimer ces paramètres devrait être mise en place, à l'instar de ([Boulanger, 2007](#)), ([Mäkitalo](#)

et Foi, 2014), (Azzari, Rodrigues Borges et Foi, 2018) afin de garantir des performances de débruitage. L'influence de ces paramètres sur les paramètres du CUSUM (h et ν) doit être évaluée.

Conséquences de l'hétéroscédasticité

Le fait d'avoir remarqué la propriété d'hétéroscédasticité des estimateurs d'intensité ouvre potentiellement la voie à l'application de nombreuses méthodes d'estimation du flux neutronique : filtres particuliers pour l'estimation de la 'volatilité' (c'est-à-dire la variance), méthodes semi-paramétriques (Menictas et Wand, 2015), les extensions du filtre de Kalman prenant intrinsèquement en compte la non-gaussianité des observations et/ou adaptant leurs matrices de covariance, qui peuvent potentiellement éviter une calibration des VST (voir à ce sujet (Zhang, Sidoti, Bienkowski, Pattipati, Bar-Shalom et Kleinman, 2020) pour une revue complète). Comme extension du filtre de Kalman, l'IMM (Interacting Multiple Model, voir (Bar-Shalom, Li et Kirubarajan, 2001)) pourrait être potentiellement utilisé avec trois filtres pour trois modèles correspondant aux phases de pilotage du réacteur divergence / constance / décroissance de la puissance – au prix d'une augmentation du nombre d'opérations à effectuer par le calculateur –. Pour tenir compte des propriétés physiques intrinsèques au signal neutronique, des approches parcimonieuses pourraient être envisagées : le signal présente en effet des caractéristiques intrinsèques liées à la cinétique des neutrons qui pourraient être prises en compte en cherchant par exemple à décomposer celui-ci sur une base pertinente (apprentissage de dictionnaire).

Estimation en ligne L'approche par filtre de Kalman adaptatif pourrait éventuellement être raffinée en comparant ce filtre avec d'autres filtres récursifs adaptatifs et d'autres « règles » que le CUSUM. L'intérêt ou non d'un seuil adaptatif (comme dans (Verdier, 2007)) ou d'un approche « sans seuil » par le test MLR (Marginalized Likelihood Ratio, (Gustafsson, 2000)) pourrait être évalué. Enfin, l'estimation du flux par filtre de Kalman étendu (EKF) ayant été abordée dans (Lescop, Pasdeloup, Falaise, Lefevre, Nguyen, Sudres et Trama, 2000), (Lescop, Normand, Trama, Laribiere, Nguyen, Souloumiac, Delacour, Blandin, Cantonnet et Pasdeloup, 2004), ou plus récemment par (Kim, Vista, Cho et Chong, 2020), l'intérêt du couplage avec une VST pourrait être abordée, et les conséquences sur la stabilité du filtre étudiée.

Estimation sur fenêtre glissante L'estimation du flux neutronique sur fenêtre éventuellement glissante de taille variable serait une possibilité à envisager. La gestion des non-linéarités (changements abrupts) dans les signaux de flux pourrait toutefois s'avérer difficile.

Les travaux de (Shmaliy et Zhao, 2022) comme extension optimale des filtres à réponse impulsionnelle finie (optimal FIR filtering) peuvent constituer une alternative aux filtres de Kalman. Une approche par décomposition en ondelettes pourrait également être envisagée. Cette approche a été initiée dans le cadre du stage de Cédric Seguin (Seguin, 2009) que j'ai encadré pour l'estimation du flux sur la voie Impulsions, basé sur (Donoho, 1993). Une implantation sur FPGA a été réalisée.

Estimation hors-ligne Dans la continuité du filtrage de Kalman développé dans ce manuscrit, un lisseur de Kalman adaptatif pourrait être envisagé. Les méthodes de régressions non paramétriques (transformée en ondelettes (Mallat, 2000), processus Gaussien (Rasmussen et Williams, 2006)) ou semi-paramétriques (Ruppert, Wand et Carroll, 2003) pourraient être combinées à la stabilisation de variance. Également, une approche non paramétrique par transformée en ondelettes (Haar-Fisz \rightarrow Régression non paramétrique \rightarrow Haar-Fisz inverse) pourrait être évaluée dans la lignée de (Montagu, 2008). On peut noter l'utilisation de la VST de (Yeo et Johnson, 2000) en neutronique dans les travaux de (Lartaud, Humbert et Garnier, 2023) couplée à un processus gaussien (Rasmussen et Williams, 2006) comme méthode de régression.

Estimation conjointe du flux neutronique et de la vitesse de variation Une extension naturelle des travaux peut consister à estimer conjointement le flux neutronique et sa vitesse de variation⁶ en augmentant le vecteur d'état du filtre Kalman. La vitesse de variation n'est autre que la dérivée du flux, qu'un modèle d'état peut naturellement prendre en compte. Ce modèle d'état apparaît dans (Montagu et Bakkali, 2018), mais n'a pas fait l'objet d'une étude approfondie.

Nouvelles chaînes de mesures

Cumulants d'ordres supérieurs De nombreux auteurs exploitent le théorème de Campbell et s'appuient sur les cumulants d'ordres supérieurs du Shot Noise pour mesurer le flux neutronique⁷ dans les chaînes de mesures dès les années 1960 : (DuBridge, 1967), (Trenholme et Keefe, 1967), (Lux et Baranyai, 1982a), (Lux et Baranyai, 1982b), (Gwinn et Trenholme, 1963), (Baers, 1989), (Baers, Rivero Gutierrez, Carrillo Mendoza et Jimenez Santana, 1990), (Baers, Rivero Gutierrez, Carrillo Mendoza et Jimenez Santana, 1993). Plus récemment, (Pál, Pázsit et Elter, 2014), (Izarra, Elter et Jammes, 2016), (Elter, Bakkali, Jammes et Pázsit, 2016), (Elter, Izarra, Filliatre, Jammes et Pázsit, 2016) ont testé les cumulants d'ordre 3, 4 et 5. L'intérêt principal des cumulants d'ordres supérieurs à deux est de supprimer tout bruit gaussien additif.

L'estimateur moins classique $\hat{\lambda}_3$

$$\hat{\lambda}_3(t) = \frac{\hat{\kappa}_3(t)}{\mathbb{E}(u^3) \int h_F^3(t) dt} = \frac{\hat{\kappa}_3(t)}{u_3}, \quad (6.29)$$

basé sur l'estimateur $\hat{\kappa}_3$ du cumulants d'ordre 3 comme alternative à la variance $\hat{\kappa}_2$ semble présenter de meilleures propriétés en pratique comme le rapportent les travaux de (Baers, 1989 ; Baers, Rivero Gutierrez, Carrillo Mendoza et Jimenez Santana, 1990 ; Baers, Rivero Gutierrez, Carrillo Mendoza et Jimenez Santana, 1993), (Filliatre, Jammes, Elter, Izarra, Hamrita, Bakkali, Galli, Cantonnet et Nappe, 2017 ; Bakkali, 2015 ; Elter, Bakkali, Jammes et Pázsit, 2016 ; Elter, Izarra, Filliatre, Jammes et Pázsit, 2016 ; Elter, 2016).

6. c'est-à-dire la dérivée du flux à un facteur d'échelle près.

7. L'utilisation de statistiques d'ordres supérieurs en physique n'est pas cantonné à la neutronique. Les cumulants d'ordre 3 et 4 se retrouvent notamment en physique quantique (Roche, Kociak, Guéron, Kasumov, Reulet et Bouchiat, 2002), (Hägele et Schefczik, 2018), en physique mésoscopique (Kobayashi et Hashisaka, 2021), pour les phénomènes électriques membranaires des neurones (Brigham et Destexhe, 2015), en spectroscopie de fluorescence (FCS, Fluorescence Correlation Spectroscopy), par exemple.

La variance théorique de l'estimateur de $\hat{\lambda}_3$ associée à l'estimateur $\hat{\kappa}_3$ est une fonction cubique de l'intensité (voir (Kendall, 1945) pour la k-statistique associée) telle que

$$\text{Var}[\hat{\lambda}_3] = \frac{1}{u_3^2} \text{Var}[\hat{\kappa}_3] \quad (6.30)$$

où $\hat{\kappa}_3$ est défini par (B.18). Une VST pour le cumulatif d'ordre 3 dont la variance est un polynôme d'ordre 3 pourrait-elle être construite, c'est-à-dire s'exprimer sous la forme d'une fonction connue dans la mesure où la primitive de $\frac{1}{\sqrt{\alpha_3 \lambda_3^3 + \beta_2 \lambda_3^2 + \gamma_1 \lambda_3 + \delta_3}}$ ne semble pas triviale ?

Stabilisation de variance pour les quantités et méthodes utilisées en neutronique Les méthodologies propres à la mesure neutronique visent à caractériser le comportement physique du réacteur. Ces méthodes dites de « bruit neutronique » (cf. (Uhrig, 1970), (Williams, 1974)) s'appuient sur les mesures des voies Impulsions/Fluctuations/Courant et construisent des quantités telles que le coefficient de variation (variance to mean ratio (Kitamura, Pázsit et Misawa, 2018), aussi appelé facteur de Fano) ou la fonction de corrélation. Voir (Chapelle, 2014) pour des travaux récents. Le problème de l'estimation en ligne conjointe du flux neutronique et de la réactivité à partir du flux bruité est un problème (inverse) pouvant être modélisé par un modèle d'état s'appuyant sur le modèle de cinétique ponctuelle (voir (Mishra, Shimjith et Tiwari, 2020) et les références citées). Les gains potentiels des VST établies au chapitre 5 pourraient être explorés.

Autres transformées de stabilisation de variance

VST multi-échelles Des extensions des VST aux transformées multi-échelles MSVST ont été construites : il s'agit de la transformée de Haar-Fisz⁸ (Fryzlewicz, 2003), (Fryzlewicz et Nason, 2004a), (Fryzlewicz et Delouille, 2005), (Fryzlewicz, Delouille et Nason, 2007), (Nason, 2014), et la MSVST construite dans (Zhang, Fadili et Starck, 2006), (Zhang, Fadili, Starck et Olivo-Marin, 2007), (Zhang, Fadili et Starck, 2008). J'ai utilisé la transformée de Haar-Fisz dans (Montagu, 2008) pour la voie impulsion. Les extensions aux voies Fluctuations et Courant sont directes en regard des travaux de (Fryzlewicz, 2008) et s'écrivent en spécifiant les fonctions de variance (5.11) et (5.26). La transformée DDHFm également introduite par (Fryzlewicz et Nason, 2004a) mériterait une évaluation de ses performances sur les signaux neutroniques, car elle a l'intérêt de ne pas nécessiter de connaître précisément la fonction de variance, celle-ci étant estimée à partir des données. Enfin, les MSVST construites par (Zhang, Fadili et Starck, 2006) peuvent également être adaptées à la problématique des mesures neutroniques. Ces transformées mériteraient des études approfondies. Leurs extensions 2D/3D pour l'imagerie neutronique pourraient être envisagées.

8. (Jansen, 2006) généralise cette approche à d'autres ondelettes que l'ondelette de Haar. Voir également (Luisier, Blu et Unser, 2010), (Reynaud-Bouret et Rivoirard, 2010). (Antoniadis, Besbeas et Sapatinas, 2001), (Antoniadis et Sapatinas, 2001) s'intéressent spécifiquement aux fonctions de variance quadratique et cubique.

Annexes

Annexe A

Loi et Processus de Poisson

A.1 Loi de Poisson

On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si X suit (i.e. est distribuée selon) une loi de Poisson de paramètre λ .

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^{+*}, k = 0, 1, \dots$$

En particulier, le nombre d'événements k , sur un intervalle de temps T s'écrit

$$P(X = k, T) = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{(-\lambda T)} \quad (\text{A.1})$$

A.2 Processus de Poisson

On rappelle ici la définition du processus de Poisson tirée de (Foata et Fuchs, 2002, chap. 3).

A.2.1 Première définition

Définition A.2.1. *Processus de Poisson.* Un processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est appelé processus de Poisson, de densité $\lambda > 0$, s'il vérifie les propriétés suivantes :

1. $N(0) = 0$;
2. le processus est à accroissements indépendants ;
3. le nombre de tops se produisant dans un intervalle de temps de longueur $t \geq 0$ suit la loi de Poisson de paramètre λt , c'est-à-dire, pour tout $s \geq 0$ et tout $t \geq 0$, on a :

$$P\{N(s+t) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad (n \geq 0) \quad (\text{A.2})$$

A.2.2 Seconde définition

Définition A.2.2. Soit $(T_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de même paramètre $\lambda > 0$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n T_k$ pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $t \in \mathbb{R}^+$:

$$N_t = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}}. \quad (\text{A.3})$$

On dit que le processus $(N_t)_{t \leq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre λ .

Théorème A.2.1. Pour tout $t \leq 0$, la loi de N_t est la loi de Poisson de paramètre λt .

La figure A.1 fait le lien entre le processus de Poisson (utilisé par exemple pour modéliser la voie Impulsions d'une chaîne de mesures neutroniques aux chapitres 5 et 6) et le Shot Noise.

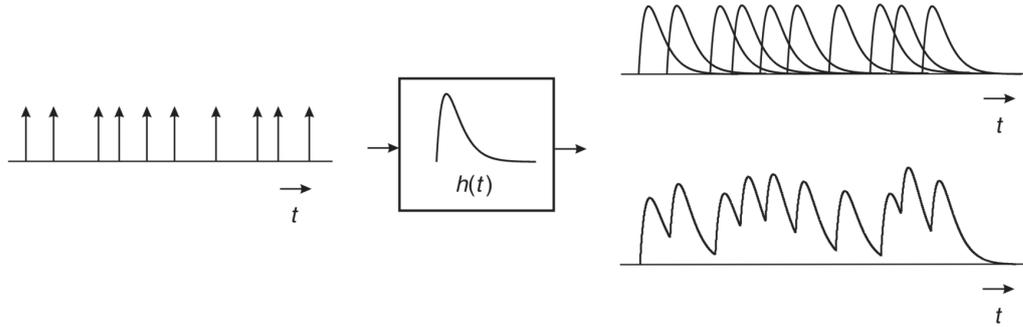


FIGURE A.1 – Lien entre le processus de Poisson et Shot Noise (adapté de (Papoulis, 1991)) : le système linéaire invariant de réponse impulsionnelle $h(t)$ provoque une mise en forme des événements (impacts de particules) survenant selon le processus de Poisson. Voir §Illustration, chapitre 2 pour le phénomène d'empilement.

Annexe B

Sur la transformée d'Anscombe

B.1 Recherche de VST "optimale"

Le tableau 3.3 recense les formes générales des transformées directement accessibles par application du 3.2.1 et de la résolution de l'équation différentielle qui en découle (par recherche de primitive). Ces transformées stabilisent la variance (et "gaussianisent" les données), mais pas nécessairement "correctement" sur tout le domaine des données d'entrée ; autrement dit, la variance n'atteint pas la valeur prévue pour le choix de la constante *cste* pour certaines valeurs d'entrée . Il est par exemple constaté pour la loi de Poisson, que la transformée de Bartlett (racine carrée) est valable pour $\lambda \geq 4$. Cette transformée a été améliorée par (Anscombe, 1948), (Veevers et Tweedie, 1943), (Mäkitalo et Foi, 2011b), (Mäkitalo et Foi, 2013) pour stabiliser la variance "au mieux" pour les petites valeurs de λ et réduire le biais de la transformée inverse.

La section suivante revient sur cette transformée et sa transformée inverse, détaille les calculs à l'origine de cette VST pour comprendre comment elle améliore la stabilisation de variance.

B.2 Établissement de la transformée d'Anscombe

La démarche développée dans (Anscombe, 1948) est reprise ici dans son intégralité. On considère la transformation suivante

$$y = \sqrt{x + c}$$

où x est distribuée suivant une loi de Poisson de paramètre λ , et c est une constante strictement positive. L'établissement de la transformée d'Anscombe repose sur un développement limité de $\sqrt{x + c}$ autour de la moyenne λ . On pose $t = x - \lambda$ et $m' = \lambda + c$.

B.2.1 Développements limités utiles

$$\sqrt{m + c} = \sqrt{m \left(1 + \frac{c}{m}\right)} = \sqrt{m} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{c}{m} - \frac{1}{8} \frac{c^2}{m^2}\right) \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{1}{m'} = \frac{1}{m} \left(1 - \frac{c}{m} + \frac{c^2}{m^2} \right) \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{1}{m'^2} = \frac{1}{(m+c)^2} = \frac{1}{m^2} \left(1 - 2\frac{c}{m} + 3\frac{c^2}{m^2} \right) \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{1}{m'^3} = \frac{1}{(m+c)^3} = \frac{1}{m^3} \left(1 - 3\frac{c}{m} + 6\frac{c^2}{m^2} \right) \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}\sqrt{1+\frac{c}{m}}} \approx \frac{1}{\sqrt{m}} \left(1 - \frac{1}{2}\frac{c}{m} + \frac{3}{8}\frac{c^2}{m^2} \right)$$

$$\frac{1}{(m+c)^{3/2}} = \frac{1}{m^{3/2}} \left(1 - \frac{3}{2}\frac{c}{m} + \frac{15}{8}\frac{c^2}{m^2} \right)$$

B.2.2 Calculs

Le développement en série de Taylor de y s'écrit pour $t \geq m'$:

$$\sqrt{m'+t} = \sqrt{m'} + \frac{t}{2\sqrt{m'}} - \frac{t^2}{8m'^{3/2}} + \frac{t^3}{16m'^{5/2}} \quad (\text{B.5})$$

$$y = \sqrt{m'} \left(1 + \frac{1}{2}\frac{t}{m'} - \frac{1}{8}\frac{t^2}{m'^2} + \frac{1}{16}\frac{t^3}{m'^3} - \frac{5}{128}\frac{t^4}{m'^4} \right). \quad (\text{B.6})$$

Les moments de t sont tels que

$$\mathbb{E}[t] = 0, \quad \mathbb{E}[t^2] = \lambda, \quad \mathbb{E}[t^3] = \lambda, \quad \mathbb{E}[t^4] = 3\lambda^2 + \lambda,$$

ce qui permet d'établir $\mathbb{E}[y]$, $\mathbb{E}[y^2]$,

Calcul de $\mathbb{E}[y]$ D'où en prenant l'espérance de y ,

$$\mathbb{E}[y] = \sqrt{m'} \left(1 - \frac{\lambda}{8m'^2} + \frac{\lambda}{16m'^3} - \frac{5}{128}\frac{(3\lambda^2 + \lambda)}{m'^4} \right) + o\left(\frac{1}{m'^4}\right). \quad (\text{B.7})$$

Calcul de $\mathbb{E}[y]^2$

$$\mathbb{E}[y] = \sqrt{m'} \left[\overbrace{1 - \frac{\mu_2}{8m'^2}}^{=a} + \overbrace{\frac{\mu_3}{16m'^3} - \frac{5\mu_4}{128m'^4} + \dots}^{=b} \right] \quad (\text{B.8})$$

$$\mathbb{E}[y]^2 = m' [a^2 + 2ab + b^2] \quad (\text{B.9})$$

$$= m' \left[1 - \frac{\mu_2}{4m'^2} + \frac{\mu_2^2}{64m'^4} + 2 \left(1 - \frac{\mu_2}{8m'^2} \right) \left(\frac{\mu_3}{16m'^3} - \frac{5\mu_4}{128m'^4} \right) \right] + o\left(\frac{1}{m'^4}\right)$$

$$= m' \left[1 - \frac{\mu_2}{4m'^2} + \frac{\mu_3}{8m'^3} - \frac{5\mu_4}{64m'^4} + \frac{\mu_2^2}{64m'^4} - \frac{\mu_2\mu_3}{64m'^5} + \frac{5\mu_2\mu_4}{512m'^6} \right] + o\left(\frac{1}{m'^5}\right).$$

Calcul de $\text{Var}[y]$

$$\begin{aligned}\text{Var}[y] &= \mathbb{E}[y^2] - \mathbb{E}[y]^2 \\ &= m' - m' \left[1 - \frac{\mu_2}{4m'^2} + \frac{\mu_3}{8m'^3} - \frac{5\mu_4}{64m'^4} + \frac{\mu_2^2}{64m'^4} \right] + o\left(\frac{1}{m'^4}\right) \\ &= \frac{\mu_2}{4m'} - \frac{\mu_3}{8m'^2} - \frac{\mu_2^2 - 5\mu_4}{64m'^3} - \frac{\mu_2\mu_3}{64m'^4} + \frac{5\mu_2\mu_4}{512m'^5} + o\left(\frac{1}{m'^5}\right)\end{aligned}\quad (\text{B.10})$$

Espérance et Variance en fonction de λ et c En utilisant (B.1), (B.2), (B.3) dans (B.7), il vient

$$\mathbb{E}[\sqrt{X+c}] = \lambda^{\frac{1}{2}} + \frac{4c-1}{8} \cdot \lambda^{-\frac{1}{2}} - \frac{16c^2-24c+7}{128} \cdot \lambda^{-\frac{3}{2}} + o\left(\lambda^{-\frac{3}{2}}\right)\quad (\text{B.11})$$

En remplaçant (B.1), (B.2), (B.3), (B.4) dans (B.10), il vient

$$\text{Var}[\sqrt{X+c}] = \frac{1}{4} + \frac{3-8c}{32} \cdot \lambda^{-1} + \frac{32c^2-52c+17}{128} \cdot \lambda^{-2} + o\left(\lambda^{-2}\right)\quad (\text{B.12})$$

Choix de c et propriétés induites (Bartlett, 1936 ; Bartlett, 1947) constate que $c = \frac{1}{2}$ stabilise "mieux" la variance que $c = 0$ pour des valeurs de λ petites. (Anscombe, 1948) construit une transformée en reprenant les constatations de Bartlett : le coefficient $c = \frac{3}{8}$ est donc choisi pour annuler le deuxième terme (ordre 1) dans le développement de Taylor. Le choix $c = 3/8$ permet d'établir que

$$\mathbb{E}\left[2\sqrt{x+\frac{3}{8}}\right] = 2\sqrt{\lambda} - \frac{1}{4}\lambda^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{32}\lambda^{-3/2} + o\left(\lambda^{-\frac{3}{2}}\right)\quad (\text{B.13})$$

et que pour cette valeur, le second terme de 3.15 s'annule

$$\text{Var}\left[2\sqrt{x+\frac{3}{8}}\right] = 1 + \frac{1}{16}\lambda^{-2} + o\left(\lambda^{-2}\right).\quad (\text{B.14})$$

La transformée d'Anscombe stabilise ainsi la variance asymptotiquement à l'ordre 2. C'est en ce sens qu'on parle de VST "optimale". (Brown, Cai et Zhou, 2010), (Cai, 2019) cherchent c pour minimiser le biais induit par la transformée. Ils choisissent ainsi $c = 1/4$ pour minimiser le biais B.11 et définissent ainsi un type de transformation qu'ils nomment "mean-matching VST ". On établit pour $c = \frac{1}{4}$ que

$$\mathbb{E}\left(\sqrt{X+\frac{1}{4}}\right) = \lambda^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{64}\lambda^{-\frac{3}{2}} + o\left(\lambda^{-\frac{3}{2}}\right)\quad (\text{B.15})$$

$$\text{Var}\left(\sqrt{X+\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{32}\lambda^{-1} + \frac{3}{64}\lambda^{-2} + o\left(\lambda^{-2}\right).\quad (\text{B.16})$$

Transformée inverse Étant donné y défini précédemment, la transformée algébrique inverse est simplement donnée par

$$x = \left(\frac{y}{2}\right)^2 - c. \quad (\text{B.17})$$

Mais une relecture attentive de l'article ([Anscombe, 1948](#)) donne la transformée inverse

$$x = \left(\frac{y}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}. \quad (\text{B.18})$$

[Anscombe](#) a évalué le biais de la transformée, et en a tenu compte. En regard des travaux de ([Mäkitalo, Foi, Fevraleev et Lukin, 2010](#)), ([Mäkitalo et Foi, 2013](#)), cette transformée inverse n'est qu'asymptotiquement exacte pour λ suffisamment grand. Les mêmes auteurs ont établi une transformée inverse exacte.

Annexe C

Substitutions d'Euler pour le calcul des primitives de la forme $\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}}$

Ayant à calculer une primitive $I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ pour trouver une VST au chapitre 5 dont le calcul est détaillé §C.5, le premier réflexe est de se tourner vers un logiciel de calcul formel et/ou de vérifier dans un livre de tables d'intégrales que le résultat existe et est cohérent. C'est dans la bible du calcul intégral de (Gradshteyn et Ryzhik, 1994) qu'on trouve le résultat au numéro de formule 2.261 et, en début de la section 2.25, §2.251 la mention des techniques d'intégration pour le calcul de ce type d'intégrale. Parmi celles-ci figurent les trois substitutions d'Euler¹ :

1. $\sqrt{a + bx + cx^2} = xt \pm \sqrt{a}$ pour $a > 0$,
2. $\sqrt{a + bx + cx^2} = t \pm x\sqrt{c}$ pour $c > 0$,
3. $\sqrt{c(x - r_1)(x - r_2)} = t(x - r_1)$ où r_1 et r_2 sont les racines réelles de $a + bx + cx^2$.

Le but de tels changements de variables est de s'affranchir de la racine carrée dans l'expression à intégrer. Cette partie est inspirée de (Planetmaths, 2021) et (Wikipedia contributors, 2023). Pour des compléments, voir (Lucht, 2016).

Remarque Les notations sont celles de Gradshteyn et Ryzhik qui ne sont pas les notations habituelles : le polynôme d'ordre 2 « usuel » $ax^2 + bx + c$ et son déterminant $b^2 - 4ac$, sont dans cet ouvrage définis par $a + bx + cx^2$ et $\Delta = 4ac - b^2$, qui l'opposé du déterminant « usuel ».

C.1 Première substitution d'Euler

Ce premier changement de variable s'écrit

$$\sqrt{a + bx + cx^2} = xt \pm \sqrt{a} \quad \text{pour } a > 0. \quad (\text{C.1})$$

1. Voir la toute récente publication (Cieśliński et Jurgielewicz, 2023) pour l'interprétation géométrique des substitutions d'Euler et l'introduction d'une quatrième substitution !

En élevant au carré chaque membre de l'égalité, on a

$$d + bx + cx^2 = x^2t^2 \pm 2xt\sqrt{a} + d$$

d'où on obtient $x(t)$ tel que

$$x(t) = \frac{\pm 2t\sqrt{a} - b}{c - t^2}. \quad (\text{C.2})$$

En remplaçant x dans le second membre de C.1, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{a + bx + cx^2} &= xt \pm \sqrt{a} = \frac{2t\sqrt{a} - b}{c - t^2} t\sqrt{a} = \frac{(2t\sqrt{a} - b)t}{c - t^2} \pm \frac{\sqrt{a}(c - t^2)}{c - t^2} \\ &= \frac{\pm \sqrt{a}t^2 - bt \pm \sqrt{ac}}{c - t^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Pour le calcul de l'intégrale, on calcule préalablement

$$\frac{dx}{dt} = 2 \frac{\pm \sqrt{a}t^2 - bt \pm c\sqrt{a}}{(c - t^2)^2}. \quad (\text{C.4})$$

Grâce aux équations C.3 et C.4

$$\begin{aligned} \int^x \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} &= \int^{t(x)} \frac{\cancel{c - t^2}}{\pm \sqrt{a}t^2 - bt \pm \sqrt{ac}} \times 2 \frac{\pm \sqrt{a}t^2 - bt \pm \sqrt{ac}}{(c - t^2)^2} dt \\ &= 2 \int^{t(x)} \frac{dt}{c - t^2} = -2 \int^{t(x)} \frac{dt}{t^2 - c} \\ &= \frac{2}{\sqrt{c}} \tanh^{-1} \frac{t}{\sqrt{c}}. \end{aligned}$$

On trouve donc

$$I_{\pm} = \frac{2}{\sqrt{c}} \tanh^{-1} \left(\frac{\sqrt{R} \pm \sqrt{a}}{x\sqrt{c}} \right) + \text{cste} \quad (\text{C.5})$$

C.2 Deuxième substitution d'Euler

C.2.1 Forme logarithmique

En reprenant la même démarche qu'au paragraphe précédent pour le changement de variable suivant

$$\sqrt{a + bx + cx^2} = \pm x\sqrt{c} + t. \quad (\text{C.6})$$

$$\cancel{cx^2} + bx + c = \cancel{cx^2} - 2xt\sqrt{c} + t^2,$$

d'où on obtient

$$x(t) = \frac{t^2 - a}{b + 2t\sqrt{c}}.$$

Annexe C. Substitutions d'Euler pour le calcul des primitives de la forme $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$

Lorsque le signe " + " se trouve devant $x\sqrt{c}$ dans l'expression C.6, on obtient

$$x(t) = \frac{t^2 - a}{b - 2t\sqrt{c}}$$

et

$$x(t) = \frac{t^2 - a}{b + 2t\sqrt{c}}$$

lorsque le signe " - " précède $x\sqrt{c}$.

D'où en remplaçant x dans le second membre C.6

$$\sqrt{cx^2 + bx + a} = -x\sqrt{c} + t = \frac{a - t^2}{b + 2t\sqrt{c}}\sqrt{c} + t.$$

ou bien

$$\sqrt{cx^2 + bx + a} = x\sqrt{c} + t = \frac{t^2 - a}{b - 2t\sqrt{c}}\sqrt{c} + t.$$

$$dx = 2 \frac{-\sqrt{ct^2} + bt - a\sqrt{c}}{(b - 2\sqrt{ct})^2} dt \quad (\text{C.7})$$

$$\begin{aligned} \int^x \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} &= \int^{t(x)} 2 \frac{\sqrt{ct^2} + bt + a\sqrt{c}}{(b + 2\sqrt{ct})^2} \times \frac{b + 2\sqrt{ct}}{\sqrt{ct^2} + bt + a\sqrt{c}} dt \\ &= 2 \int^{t(x)} \frac{dt}{b + 2\sqrt{ct}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{c}} \int^{t(x)} \frac{dt}{t + \frac{b}{2\sqrt{c}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left(t + \frac{b}{2\sqrt{c}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left(\sqrt{a+bx+cx^2} + \sqrt{cx} + \frac{b}{2\sqrt{c}} \right). \\ &= \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left(2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2} + 2cx + b \right) \end{aligned}$$

Finalement,

$$I_{\pm} = \frac{\pm 1}{\sqrt{c}} \ln \left[\pm 2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2} + 2cx + b \right] + \text{cste}. \quad (\text{C.8})$$

On peut s'interroger sur l'influence du signe du changement de variable $\pm x\sqrt{c} + t$ sur les

deux primitives I_+ et I_- :

$$\begin{aligned}
 I_+ - I_- &= \left(\frac{1}{\sqrt{c}} \ln[2\sqrt{c}\sqrt{R} + 2cx + b] \right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{c}} \ln[-2\sqrt{c}\sqrt{R} + 2cx + b] \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left[(2\sqrt{c}\sqrt{R} + 2cx + b)(-2\sqrt{c}\sqrt{R} + 2cx + b) \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left[(2cx + b)^2 - 4cR \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left[(2cx + b)^2 - 4c(a + bx + cx^2) \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left[4c^2x^2 + 4cbx + b^2 - 4ca + 4cbx - 4c^2x^2 \right] . \\
 &= \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left[b^2 - 4ca \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{c}} \ln [-\Delta] \text{ avec } \Delta < 0
 \end{aligned}$$

Ces 2 intégrales diffèrent donc d'une constante qui vaut $\frac{1}{\sqrt{c}} \ln -\Delta$.

C.2.2 Forme inverse hyperbolique

Une forme de primitive pour I peut s'obtenir grâce à l'identité (cf. annexe C.8)

$$\operatorname{asinh} y = \ln \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right), \quad y \in] -\infty, +\infty[.$$

Asymptotiquement, $\operatorname{asinh} y \stackrel{+\infty}{\sim} \log 2y$.

En posant $y = \frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}} = \frac{2cx+b}{\sqrt{\Delta}}$, qui implique $\Delta > 0$, on obtient après calcul,

$$y + \sqrt{y^2 + 1} = \frac{2\sqrt{c}\sqrt{R} + 2cx + b}{\sqrt{\Delta}}$$

et donc

$$\operatorname{asinh} \left(\frac{2cx + b}{\sqrt{\Delta}} \right) = \ln \left(\frac{2\sqrt{c}\sqrt{R} + 2cx + b}{\sqrt{\Delta}} \right) \quad \text{toujours avec } \Delta > 0. \quad (\text{C.9})$$

On a donc

$$I = \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{asinh} \left(\frac{2cx + b}{\sqrt{\Delta}} \right) \quad (\text{C.10})$$

qui est bien égale à l'équation C.8 à une constante près. On peut vérifier en dérivant l'équation

Annexe C. Substitutions d'Euler pour le calcul des primitives de la forme $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$

C.21 (ou C.10) que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{asinh} \frac{2cx+b}{\sqrt{\Delta}} \right) &= \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{4ac-b^2} \sqrt{\frac{(2cx+b)^2}{4ac-b^2} + 1}} \\ &= \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{4ac-b^2} \sqrt{\frac{4c^2 x^2 + 4bcx + 4ac}{4ac-b^2}}} \\ &= \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{4c^2} \sqrt{R}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{R}} \end{aligned}$$

C.3 Troisième substitution d'Euler

On introduit les racines réelles r_1 et r_2 du polynôme $a+bx+cx^2$ et on peut écrire

$$a+bx+cx^2 = c(x-r_1)(x-r_2) = (x-r_1)^2 t^2.$$

et par symétrie, on a également

$$a+bx+cx^2 = (x-r_2)^2 t^2.$$

Avec ce troisième changement de variable tel que,

$$t(x) = \sqrt{a+bx+cx^2}/(x-r_1) = \sqrt{c(x-r_1)(x-r_2)}/(x-r_1) = \sqrt{c} \sqrt{\frac{x-r_2}{x-r_1}} \quad (\text{C.11})$$

on obtient

$$\begin{aligned} t^2 &= c(x-r_2)/(x-r_1) \\ t^2(x-r_1) &= c(x-r_2) \\ x(t^2-c) &= (r_1 t^2 - cr_2) \end{aligned}$$

d'où

$$x(t) = \frac{r_1 t^2 - cr_2}{t^2 - c}. \quad (\text{C.12})$$

De plus,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2c(r_2 - r_1)t}{(t^2 - c)^2}.$$

En remplaçant x , on a

$$\begin{aligned} \sqrt{a+bx+cx^2} &= (x-r_1)t \\ &= \left(\frac{cr_2 - r_1 t^2}{c - t^2} - r_1 \right) t \\ &= \frac{2c(r_2 - r_1)}{t^2 - c} \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable, I s'écrit

$$\begin{aligned}
 I &= \int^t \frac{\cancel{(t^2 - c)}}{c\cancel{(r_1 - r_2)}t} \times \frac{2c\cancel{(r_2 - r_1)}}{(t^2 - c)^2} dt \\
 &= -2 \int^t \frac{1}{t^2 - c} dt \\
 &= \frac{2}{\sqrt{c}} \tanh^{-1} \frac{t}{\sqrt{c}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{c}} \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{x - r_2}{x - r_1}} \right) \\
 &= \frac{2}{\sqrt{c}} \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{x - r_1}{x - r_2}} \right) \text{ par symétrie.}
 \end{aligned}$$

C.4 Calculs de primitive

Les primitives sont de la forme

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} &= \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left[2cx + b + 2\sqrt{c}\sqrt{a + bx + cx^2} \right] + \text{constante} \quad c > 0 \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} &\doteq \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left[2cx + b + 2\sqrt{c}\sqrt{a + bx + cx^2} \right] \\
 &\doteq \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left[\frac{2cx + b + 2\sqrt{c}\sqrt{a + bx + cx^2}}{\sqrt{4ac - b^2}} \right]
 \end{aligned}$$

La deuxième ligne contient l'ajout d'une constante qui vaut $-\frac{1}{\sqrt{c}} \ln \sqrt{4ac - b^2} = -\frac{1}{\sqrt{c}} \ln \sqrt{\Delta}$.

C.5 VST pour la voie fluctuation

Pour la voie fluctuation, la fonction de variance g_F est quadratique

$$g_F(\mu) = \alpha_F \lambda^2 + \beta_F \lambda + \gamma_F$$

On doit donc trouver une primitive de

$$h(\hat{\lambda}_F) = \int^{\hat{\lambda}_F} \frac{d\lambda}{\sqrt{g_F(\lambda)}}$$

C.5.1 Établissement de la transformée directe

Les primitives sont données par les équations C.41.

Forme logarithmique

$$\hat{\lambda}_F^*(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_F}} \log \left(2\sqrt{\alpha_F(\alpha_F \hat{\lambda}_F^2(t) + \beta_F \hat{\lambda}_F(t) + \gamma_F) + 2\alpha_F \hat{\lambda}_F(t) + \beta_F} \right), \quad \alpha_F > 0. \quad (\text{C.13})$$

C.13 généralise le tableau de (Bartlett, 1947). On trouve par ailleurs cette formule dans (Stanley, 2006b).

Annexe C. Substitutions d'Euler pour le calcul des primitives de la forme $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$

Forme hyperbolique

$$\hat{\lambda}_F^*(t) = \operatorname{asinh} \left(\frac{2\alpha_F \hat{\lambda}_F + \beta_F}{\sqrt{4\alpha_F \gamma_F - \beta_F^2}} \right), \quad 4\alpha_F \gamma_F - \beta_F^2 > 0 \quad (\text{C.14})$$

Pour la voie fluctuation, γ_F est positif (c'est un terme de variance d'un bruit).

C.5.2 Établissement de la transformée inverse

Forme exponentielle On pose

$$\begin{aligned} y &= \frac{e^{\hat{\lambda}_F^*(t)\sqrt{\alpha_F}}}{2} \\ &= \sqrt{\alpha_F(\alpha_F \hat{\lambda}_F^2(t) + \beta_F \hat{\lambda}_F(t) + \gamma_F) + \alpha_F \hat{\lambda}_F(t) + \frac{\beta_F}{2}} \end{aligned}$$

En isolant le terme en racine à droite de l'égalité, et en prenant le carré des deux côtés de l'égalité, il vient

$$\begin{aligned} \alpha_F(\alpha_F \hat{\lambda}_F^2(t) + \beta_F \hat{\lambda}_F(t) + \gamma_F) &= \left(y - \left(\alpha_F \hat{\lambda}_F(t) + \frac{\beta_F}{2} \right) \right)^2 \\ \alpha_F^2 \hat{\lambda}_F^2(t) + \alpha_F \beta_F \hat{\lambda}_F(t) + \alpha_F \gamma_F &= y^2 - 2y \left(\alpha_F \hat{\lambda}_F(t) + \frac{\beta_F}{2} \right) + \left(\alpha_F \hat{\lambda}_F(t) + \frac{\beta_F}{2} \right)^2 \\ \alpha_F^2 \hat{\lambda}_F^2(t) + \alpha_F \beta_F \hat{\lambda}_F(t) + \alpha_F \gamma_F &= y^2 - 2y \left(\alpha_F \hat{\lambda}_F(t) + \frac{\beta_F}{2} \right) + \alpha_F^2 \hat{\lambda}_F^2(t) + \alpha_F \beta_F \hat{\lambda}_F(t) + \frac{\beta_F^2}{4} \\ \alpha_F \gamma_F &= y^2 - 2y \left(\alpha_F \hat{\lambda}_F(t) + \frac{\beta_F}{2} \right) + \frac{\beta_F^2}{4} \\ -\alpha_F \gamma_F + y^2 + \frac{\beta_F^2}{4} &= 2y \left(\alpha_F \hat{\lambda}_F(t) + \frac{\beta_F}{2} \right) \\ \frac{y^2 - \alpha_F \gamma_F + \frac{\beta_F^2}{4}}{2y} &= \alpha_F \hat{\lambda}_F(t) + \frac{\beta_F}{2}, \quad y \neq 0 \\ \hat{\lambda}_F(t) &= \frac{1}{\alpha_F} \left(\frac{y^2 - \alpha_F \gamma_F + \frac{\beta_F^2}{4}}{2y} - \frac{\beta_F}{2} \right), \quad y \neq 0 \text{ et } \alpha_F \neq 0. \end{aligned}$$

D'où,

$$\hat{\lambda}_F(t) = \frac{\frac{1}{4} e^{2\hat{\lambda}_F^*(t)\sqrt{\alpha_F}} + \frac{\beta_F^2}{4} - \alpha_F \gamma_F}{\alpha_F e^{\hat{\lambda}_F^*(t)\sqrt{\alpha_F}}} - \frac{\beta_F}{2\alpha_F} \quad (\text{C.15})$$

C.6 VST pour le cumulatif d'ordre 2 du Shot Noise

La publication du chapitre 4 considère le cumulatif d'ordre 2 du Shot Noise 4.4, qui est un cas particulier de (C.13) pour lequel $\gamma_F = 0$. Avec $\alpha = \frac{2}{n}$, et $\beta = \frac{c_4}{nc_2^2}$, la VST s'écrit

$$\lambda_2^* = \mathcal{T}_2(\hat{\lambda}_2) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \ln \left(2\sqrt{\frac{2}{n} \left(\frac{2}{n} \hat{\lambda}_2^2 + \frac{c_4}{nc_2^2} \hat{\lambda}_2 \right)} + \frac{4}{n} \hat{\lambda}_2 + \frac{c_4}{nc_2^2} \right). \quad (\text{C.16})$$

qu'on peut également écrire

$$\lambda_2^* = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{2}{n} \sqrt{4\hat{\lambda}_2^2 + \frac{2c_4}{c_2^2} \hat{\lambda}_2} + \frac{4}{n} \hat{\lambda}_2 + \frac{c_4}{nc_2^2} \right). \quad (\text{C.17})$$

$$4\hat{\lambda}_2^2 + \frac{2c_4}{c_2^2} \hat{\lambda}_2 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_2 \geq -\frac{c_4}{2c_2^2}$$

La VST corrigée du biais vaut

$$\mathcal{T}_2^{bc}(\hat{\lambda}_2) = \mathcal{T}_2 + \frac{2\alpha\hat{\lambda} + \beta}{4\sqrt{\alpha\lambda_2^2 + \beta\hat{\lambda}_2 + \gamma}} + \frac{2\alpha^{\frac{3}{2}} (2\alpha\hat{\lambda}_2 + \beta) \sqrt{\alpha\hat{\lambda}_2^2 + \beta\hat{\lambda} + \gamma}}{n \sqrt[3]{(\beta^2 - 4\alpha\gamma) \left(\frac{(2\alpha\hat{\lambda}_2 + \beta)^2}{\beta^2 - 4\alpha\gamma} + 1 \right)}}. \quad (\text{C.18})$$

La VST inverse est, d'après (C.15) :

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{e^{2\hat{\lambda}_2^*(t)\sqrt{\alpha}} + \beta^2}{4\alpha e^{\hat{\lambda}_2^*(t)\sqrt{\alpha}}} - \frac{c_4}{2c_2^2} \quad (\text{C.19})$$

C.7 Sur la formule 2.261 dans (Gradshteyn et Ryzhik, 1994)

C.7.1 Contexte

J'ai constaté une erreur dans les conditions des formules du §2.261 de (Gradshteyn et Ryzhik, 1994) de l'exemplaire auquel j'ai eu accès (il s'agit de la 5^{ème} édition) et j'ai adressé un courriel le 27 juin 2013 à l'éditeur (fig. C.1). Le professeur Daniel Zwillinger en charge de la 8^{ème} édition m'a répondu le 9 novembre 2013 (fig. C.2), me confirmant l'erreur repérée sur les conditions de validité. Après un rappel des formules de l'édition de 1994, je propose une démonstration pour corriger celle-ci.

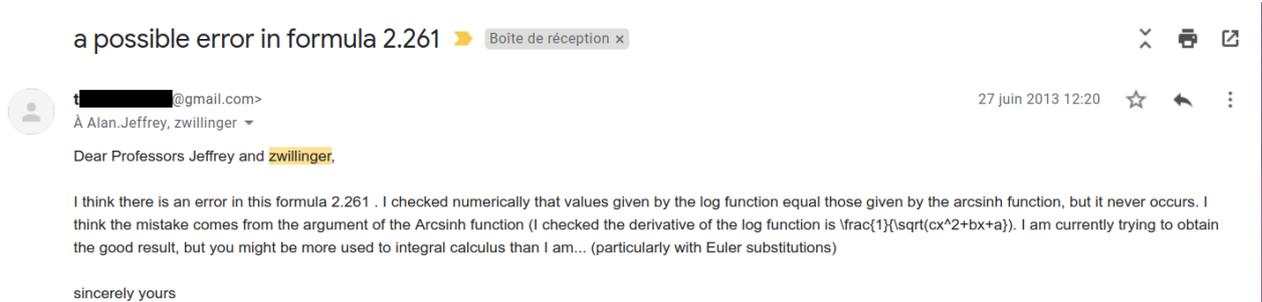


FIGURE C.1 – Courrier électronique du 27 juin 2013 envoyé aux professeurs Alan Jeffrey et Dan Zwillinger.

Annexe C. Substitutions d'Euler pour le calcul des primitives de la forme $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$

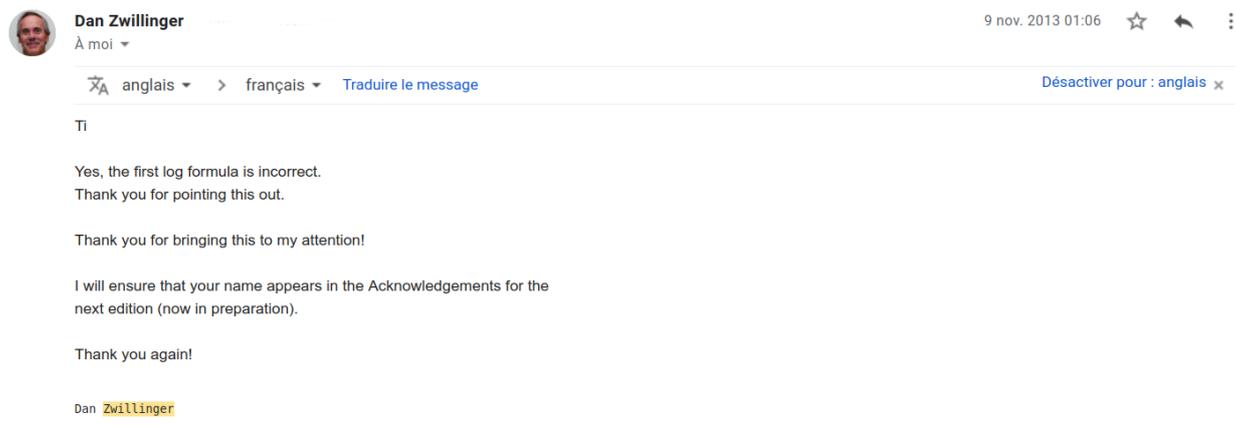


FIGURE C.2 – Courrier électronique de réponse du 9 novembre 2013 de Dan Zwillinger.

C.7.2 Formules du §2.261

Avec $R = a + bx + cx^2$ et $\Delta = 4ac - b^2$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln(2\sqrt{cR} + 2cx + b) \quad [c > 0] \quad (\text{C.20})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{asinh} \frac{2cx + b}{\sqrt{\Delta}} \quad [c > 0, \Delta > 0] \quad (\text{C.21})$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{2cx + b}{\sqrt{-\Delta}} \quad [c < 0, \Delta < 0] \quad (\text{C.22})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \ln(2cx + b) \quad [c > 0, \Delta = 0] \quad (\text{C.23})$$

Toutes ces expressions sont égales à une constante près.

C.7.3 Correction

Conditions sur C.20

On considère la racine figurant dans l'argument de la fonction \ln de l'équation C.20 :

$$\sqrt{cR} = \sqrt{c(cx^2 + bx + a)} \quad (\text{C.24})$$

$$= \sqrt{c} \sqrt{c \left(x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} \right)} \quad \text{avec } c > 0 \quad (\text{C.25})$$

$$= \sqrt{c} \sqrt{c \left(x^2 + \frac{2b}{2c}x + \frac{b^2}{4c^2} - \frac{b^2}{4c^2} + \frac{a}{c} \right)} \quad \text{avec } c > 0 \quad (\text{C.26})$$

$$= \sqrt{c} \sqrt{c \left[\left(x + \frac{b}{2c} \right)^2 + \frac{\Delta}{4c^2} \right]} \quad \text{avec } c > 0 \quad (\text{C.27})$$

$$= c \sqrt{\left(x + \frac{b}{2c} \right)^2 + \frac{\Delta}{4c^2}} \quad \text{avec } c > 0 \quad (\text{C.28})$$

$$= c \sqrt{\left(\frac{2cx + b}{2c} \right)^2 + \frac{\Delta}{4c^2}} \quad \text{avec } c > 0 \quad (\text{C.29})$$

$$= c \sqrt{\frac{1}{4c^2} ((2cx + b)^2 + \Delta)} \quad \text{avec } c > 0 \quad (\text{C.30})$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(2cx + b)^2 + \Delta} \quad \text{avec } c > 0 \quad (\text{C.31})$$

et à condition que $(2cx + b)^2 + \Delta > 0$ ou de manière équivalente $2cx + b > \sqrt{-\Delta}$, ce qui implique que $\Delta < 0$. Cette dernière condition signifie que R a 2 racines réelles. La condition $2cx + b > \sqrt{-\Delta}$ ne figure pas dans (Gradshteyn et Ryzhik, 1994).

Relation entre forme logarithmique et inverse hyperbolique

L'argument du logarithme vaut donc

$$2\sqrt{cR} + 2cx + b = \sqrt{(2cx + b)^2 + \Delta} + 2cx + b \quad \text{avec } 2cx + b > \sqrt{-\Delta} \text{ et } \Delta < 0 \quad (\text{C.32})$$

$$= \sqrt{\Delta \left(\frac{(2cx + b)^2 + 1}{\Delta} \right)} + 2cx + b \quad (\text{C.33})$$

$$= \sqrt{-\Delta} \sqrt{\left(\frac{2cx + b}{\sqrt{-\Delta}} \right)^2 + 1} + 2cx + b \quad (\text{C.34})$$

$$= \sqrt{-\Delta} \sqrt{\left(\frac{2cx + b}{\sqrt{-\Delta}} \right)^2 + 1} + \sqrt{-\Delta} \frac{2cx + b}{\sqrt{-\Delta}} \quad (\text{C.35})$$

$$(\text{C.36})$$

Annexe C. Substitutions d'Euler pour le calcul des primitives de la forme $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$

d'où, en posant $X = \frac{2cx+b}{\sqrt{-\Delta}}$,

$$\frac{1}{\sqrt{c}} \ln(2\sqrt{cR} + 2cx + b) = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln(\sqrt{-\Delta}(\sqrt{X^2+1} + X)) \quad (\text{C.37})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \left[\ln(\sqrt{X^2+1} + X) + \frac{1}{2} \ln -\Delta \right] \quad (\text{C.38})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{asinh}(X) + \frac{1}{2} \ln -\Delta \quad (\text{C.39})$$

Ainsi, on a l'égalité dans les conditions suivantes

$$\frac{1}{\sqrt{c}} \ln\left(\frac{2\sqrt{cR} + 2cx + b}{\sqrt{-\Delta}}\right) = \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{asinh}(X) + \frac{1}{2} \ln -\Delta \quad [c > 0, 2cx + b > \sqrt{-\Delta}, \Delta < 0]. \quad (\text{C.40})$$

C.7.4 Nouvelles formules dans la 8^{ème} édition

Toujours avec $R = a + bx + cx^2$ et $\Delta = 4ac - b^2$,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{R}} &= \frac{1}{\sqrt{c}} \ln(2\sqrt{cR} + 2cx + b) && [c > 0, \quad 2cx + b > \sqrt{-\Delta}, \quad \Delta < 0] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{c}} \ln(2\sqrt{cR} - 2cx - b) && [c > 0, \quad 2cx + b < -\sqrt{-\Delta}, \quad \Delta < 0] \\ &= \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{2cx + b}{\sqrt{\Delta}}\right) && [c > 0, \quad \Delta > 0] \\ &= \frac{1}{\sqrt{c}} \ln(2cx + b) && [c > 0, \quad \Delta = 0] \\ &= \frac{-1}{\sqrt{-c}} \operatorname{arcsin}\left(\frac{2cx + b}{\sqrt{-\Delta}}\right) && [c < 0, \quad \Delta < 0] \end{aligned} \quad (\text{C.41})$$

Toutes ces expressions étant égales à une constante près.

C.8 Rappels sur les fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

C.8.1 Définitions

$$\cosh^{-1} z = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}, \quad \sinh^{-1} z = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}}, \quad \tanh^{-1} z = \int_0^z \frac{dt}{1 - t^2}$$

C.8.2 Liens avec les logarithmes

En considérant la fonction arcsinus hyperbolique, on a

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2},$$

TABLE C.1 – Fonctions hyperboliques

Fonction hyperbolique	Domaine de définition	à valeurs dans	Propriété remarquable
$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	impaire
$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$(-\infty, +\infty)$	$[1, +\infty)$	paire
$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$	impaire

TABLE C.2 – Fonctions hyperboliques inverses

Fonction hyperbolique inverse	Domaine de définition	à valeurs dans	Propriété remarquable
$\sinh^{-1} x$	$(-\infty + \infty)$	$(-\infty + \infty)$	impaire
$\cosh^{-1} x$	$[1, +\infty)$	$(-\infty + \infty)$	paire
$\tanh^{-1} x$	$[-1, 1]$	$(-\infty + \infty)$	impaire

d'où on tire

$$\begin{aligned}
 e^y - 2x - e^{-y} &= 0 \\
 e^{2y} - 2xe^y - 1 &= 0 \\
 e^y &= \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} \\
 &= x \pm \sqrt{x^2 + 1}
 \end{aligned}$$

et finalement

$$y = \log \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right).$$

En procédant de même, on peut retrouver les relations pour les fonctions arcosinus hyperbolique et arctangente hyperbolique. L'ensemble des relations est disponible dans le tableau C.4.

TABLE C.4 – Liens entre fonction hyperboliques inverse et logarithmes

Fonction hyperbolique inverse	Forme logarithmique
$\sinh^{-1} x = \operatorname{arcsinh} x$	$\ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$
$\cosh^{-1} x = \operatorname{arccosh} x$	$\ln \left(x \pm \sqrt{x^2 - 1} \right)$
$\tanh^{-1} x = \operatorname{arctanh} x$	$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$

TABLE C.3 – Relations entre fonctions hyperboliques inverses

Fonction	$\sinh^{-1} x$	\cosh^{-1}	\tanh^{-1}
$\sinh^{-1} x =$	$\sinh^{-1} x$	$\pm \cosh^{-1} \sqrt{x^2 + 1}$	$\tanh^{-1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cosh^{-1} x =$	$\pm \sinh^{-1} \sqrt{x^2 - 1}$	$\cosh^{-1} x$	$\pm \tanh^{-1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$
$\tanh^{-1} x =$	$\pm \sinh^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\cosh^{-1} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\tanh^{-1} x$

Annexe D

Quelques éléments de physique nucléaire

UNE particule est au centre des travaux présentés dans la suite de ce mémoire : le neutron. On rappelle dans ce chapitre son origine, ses principales propriétés physiques et les moyens mis en œuvre pour les mesurer. Le but est de présenter au lecteur les problématiques usuelles des mesures nucléaires, à savoir mesurer un taux de comptage (un nombre de particules par unité de temps) et réaliser une spectrométrie (c'est-à-dire mesurer et classer les énergies dans un histogramme dénommé "spectre"). Pour des informations plus complètes, on pourra se reporter aux ouvrages de référence ([Landsberger et Tsoufanidis, 2015](#)), ([Knoll, 2010](#)).

D.1 Rappels de physique atomique

Le modèle atomique contient trois types de particules :

- des électrons (de charge négative),
- des protons (de charge positive),
- des neutrons (électriquement neutre).

Protons et neutrons constituent le noyau de l'atome et sont entourés du cortège de couches électroniques. Pour un noyau de l'élément M , un atome neutre - autrement dit, non ionisé - contient Z électrons et A nucléons. On le note A_ZM et comporte $N = A - Z$ neutrons.

Les *isotopes* sont des éléments comportant le même nombre de protons Z mais un nombre de neutrons N différent. Les *isobares* sont les noyaux ayant le même nombre de masses, les *isotones* les noyaux ayant le même nombre de N , les *isomères* les noyaux identiques mais dans des états d'énergie différents.

Des isotopes fréquemment rencontrés sont le Césium ${}^{137}_{55}\text{Cs}$, le Cobalt ${}^{60}_{27}\text{Co}$, le Technecium 99 métastable ${}^{99m}_{43}\text{Tc}$, l'Américium ${}^{241}_{95}\text{Am}$, l'Europium ${}^{152}_{63}\text{Eu}$, l'Uranium ${}^{235}_{92}\text{U}$.

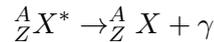
Les photons sont issus de la perturbation du cortège électronique. Les neutrons proviennent du noyau.

D.1.1 Principaux modes de désintégration radioactive

Le phénomène de radioactivité est un phénomène physique de désintégration spontanée des noyaux des atomes. Il existe différentes modalités de désintégration brièvement décrits et listés ici.

D.1.1.1 Radioactivité γ

Pour la radioactivité γ , la réaction est telle que



C'est typiquement un phénomène d'isomérisme nucléaire.

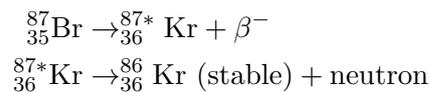
D.1.1.2 Autres radioactivités

D'autres type de réactions nucléaires existent ; elles sont mentionnées ci-après mais ne seront pas détaillées. Le lecteur intéressé pourra se reporter à (Knoll, 2010) ou (Landsberger et Tsoufanidis, 2015). Elles se nomment :

- Radioactivité Alpha (émission d'un noyau d'Hélium ${}^4_2\text{He}$),
- Radioactivité Bêta (émission d'un électron ou d'un positon et d'un neutrino),
- Capture électronique (interaction d'un électron du cortège électronique avec le noyau avec production d'un neutrino).

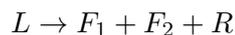
D.1.2 Émission de neutrons et rayons γ

Un petit nombre de radionucléides peuvent émettre un neutron pour se stabiliser. Ils portent le nom de *précurseurs de neutrons*. Le krypton 87 est un de ces éléments, provenant d'une désintégration Bêta⁻ :



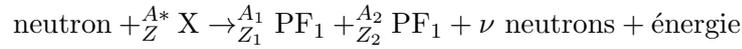
D.1.2.1 Fissions nucléaires

Fission spontanée Parmi les réactions nucléaires, la fission désigne la coupure d'un noyau lourd L en deux noyaux de masse F_1 et F_2 d'environ la moitié de la masse du noyau initial . Ce processus spontané est décrit par la réaction suivante

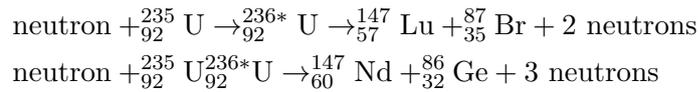


R regroupe le reliquat possible de telle ou telle réaction : des neutrons émis (dits prompts ou rapides) et un rayonnement γ immédiat. L'énergie libérée par cette réaction est principalement de l'énergie cinétique portée par les deux fragments F_1 et F_2 , mais aussi celle des éventuels neutrons et photons γ émis instantanément.

Fissions induites Un neutron peut provoquer la fission d'un noyau lourd : on parle de fission induite. Ce processus est le fondement des réacteurs nucléaires, dans lesquels on trouve typiquement l'uranium 235 qui, percuté par un neutron, fissionne en produits de fissions.



Les neutrons ν sont appelés neutrons prompts. À titre d'illustration pour l'uranium 235, les réactions s'écrivent



Types de neutrons émis On classe distingue

- neutrons instantanés de fission,
- photons γ instantanés de fission,
- photons γ retardés émis par les produits de fission (ils sont retardés car émis avec un retard par rapport à la fission, du fait d'une émission β qui précède l'émission du neutron),
- neutrons retardés émis par les précurseurs,
- les photoneutrons.

Les neutrons sont également classés selon leurs énergies :

- supérieures à 100 keV, les neutrons sont dit rapides,
- entre 0.5 et 100 keV, neutrons intermédiaires,
- inférieures à 0.5 keV, les neutrons sont dits thermiques (c'est-à-dire en équilibre énergétique avec leur milieu).

Dans le cœur d'un réacteur nucléaire, les trois types de radioactivités neutrons, γ et α coexistent. L'ouvrage de référence (Reuss, 2008) pourra utilement être consulté pour plus de détails sur la physique des neutrons.

D.2 Cinétique des neutrons

D.2.1 Modèle du réacteur point

Le modèle du réacteur point (voir par exemple (Reuss, 2008, chap. 4)) prend également en compte les réactions de capture de neutron, qui se produisent lorsqu'un neutron est absorbé par un noyau et se transforme en un autre noyau. Ces réactions peuvent avoir un impact sur le flux de neutrons et sur la stabilité du réacteur.

Dans ce modèle, il y a trois types de neutrons présents dans le réacteur :

- les neutrons "libres" : ce sont des neutrons qui sont en train de se déplacer dans le réacteur et qui sont disponibles pour réagir avec d'autres noyaux.

- les neutrons "absorbés" : ce sont des neutrons qui ont réagi avec un noyau et qui ont été absorbés par celui-ci.
- les neutrons "émis" : ce sont des neutrons qui ont été émis par un noyau suite à une réaction nucléaire.

Le modèle du réacteur point permet de comprendre comment les différents types de neutrons interagissent entre eux et comment ils affectent la réaction en chaîne dans le réacteur. Les neutrons produits par fission sont considérés comme étant instantanément réabsorbés par le combustible, sans tenir compte de leur temps de vie ou de leur vitesse. Il permet de calculer comment le nombre de neutrons dans le réacteur évolue en fonction du temps, et comment cette évolution est influencée par différents paramètres.

Il est fréquent de le trouver écrit ainsi, avec 6 groupes de précurseurs de neutrons c_i qui disparaissent selon $\lambda_i c_i$ et sont produits selon le terme $\frac{\beta_i}{\Lambda} n(t)$, où $n(t)$ désigne le nombre de neutrons au cours du temps (c'est le flux neutronique). Les termes β_i désignent les proportions de neutrons retardés

$$\begin{aligned}\frac{dn(t)}{dt} &= \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(t) \\ \frac{dc_1(t)}{dt} &= \frac{\beta_1}{\Lambda} n(t) - \lambda_1 c_1(t) \\ \frac{dc_2(t)}{dt} &= \frac{\beta_2}{\Lambda} n(t) - \lambda_2 c_2(t) \\ \frac{dc_3(t)}{dt} &= \frac{\beta_3}{\Lambda} n(t) - \lambda_3 c_3(t) \\ \frac{dc_4(t)}{dt} &= \frac{\beta_4}{\Lambda} n(t) - \lambda_4 c_4(t) \\ \frac{dc_5(t)}{dt} &= \frac{\beta_5}{\Lambda} n(t) - \lambda_5 c_5(t) \\ \frac{dc_6(t)}{dt} &= \frac{\beta_6}{\Lambda} n(t) - \lambda_6 c_6(t)\end{aligned}$$

soit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{dn(t)}{dt} \\ \frac{dc_1(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dc_6(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(\rho(t)-\beta)}{\Lambda} & \lambda_1 & \dots & \lambda_6 \\ \frac{\beta_1}{\Lambda} & -\lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta_6}{\Lambda} & 0 & \dots & -\lambda_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n(t) \\ c_1(t) \\ \vdots \\ c_6(t) \end{pmatrix}$$

Les paramètres β_i , λ_i , Λ varient selon la composition du combustible. Selon ce modèle, il existe une certaine quantité de matière fissile, telle que l'uranium ou le plutonium, nécessaire pour maintenir une réaction en chaîne de fission nucléaire stable. Si la quantité de matière fissile est inférieure à cette quantité critique, la réaction en chaîne ne peut pas être maintenue et le réacteur s'arrête. Si la quantité de matière fissile est supérieure à la quantité critique, la réaction en chaîne est maintenue de manière stable et le réacteur peut fonctionner de manière contrôlée.

Le modèle du réacteur point peut être utilisé pour évaluer le niveau de puissance du réacteur qui change en fonction du temps, et comment le réacteur peut être contrôlé en

utilisant des barres de contrôle (constituées d'absorbants de neutrons, dont le plus connu est le Bore) : c'est le paramètre ρ appelé réactivité.

Bien qu'utile pour comprendre le comportement d'un réacteur nucléaire de manière générale, il s'agit d'un modèle simplifié. De nombreux autres facteurs physiques entrent en compte et peuvent influencer sur le comportement d'un réacteur nucléaire dans la réalité (la température notamment) ; un réacteur nucléaire a des dimensions spatiales (géométrie du cœur, répartition spatiale des matériaux absorbants, ...) et les processus nucléaires qui y ont lieu sont distribués dans l'espace et le temps. Par conséquent, le modèle du réacteur point ne peut pas être considéré comme une représentation exacte du comportement réel d'un réacteur nucléaire. Il suffit néanmoins pour générer des signaux représentatifs de ceux qui peuvent être mesurés par les chaînes de mesures neutroniques, et il a été utilisé pour générer les signaux synthétiques du chapitre 6.

De nombreuses approches existent pour résoudre numériquement ces équations différentielles couplées (voir par exemple les références citées dans (Suescún-Díaz et Espinosa-Paredes, 2019)).

D.3 Conclusion du chapitre

Les processus physiques au niveau atomique liés à la fission du noyau ou au réarrangement du cortège électronique donnent lieu à l'émission de deux principaux types de particules : les neutrons ou les photons. L'utilisation de ces mêmes processus physiques au sein des détecteurs de rayonnements pour la génération de signaux électriques (charge, tension, courant), amplifiés pour les besoins de mesure, permettent de mesurer le nombre de particules incidentes sur le détecteur. Les signaux générés amplifiés, conditionnés puis numérisés portent les informations sur les processus physiques nucléaires originels d'intérêt : un comptage ou un ensemble {comptage + énergie correspondante}. Quel que soit le type de particule, ces signaux sont très fidèlement représentés par le processus aléatoire appelé "Shot Noise", qui fait l'objet du chapitre 2.

Références bibliographiques

- [1] N. S. M. Ali, K. Hamzah, F. M. Idris et M. H. Rabir, « Thermal neutron flux measurement using self-powered neutron detector (SPND) at out-core locations of TRIGA PUSPATI Reactor (RTP) », *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, t. 298, n° 1, p. 012027, jan. 2018.
- [2] A. Amarioarei, M. Paun et B. Strimbu, « Development of Nonlinear Parsimonious Forest Models Using Efficient Expansion of the Taylor Series: Applications to Site Productivity and Taper », *Forests*, t. 11, n° 4, 2020.
- [3] B. D. O. Anderson et J. B. Moore, « The Kalman-Bucy Filter as a True Time-Varying Wiener Filter », *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, t. SMC-1, n° 2, p. 119-128, avr. 1971.
- [4] T. W. Anderson, *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, 3rd ed. Wiley, New York, 2003.
- [5] F. Anscombe, « The transformation of Poisson, binomial and negative-binomial data », *Biometrika*, t. 15, p. 246-254, 1948.
- [6] A. Antoniadis, P. Besbeas et T. Sapatinas, « Wavelet Shrinkage for Natural Exponential Families with Cubic Variance Functions », *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A (1961-2002)*, t. 63, n° 3, p. 309-327, 2001.
- [7] A. Antoniadis et T. Sapatinas, « Wavelet Shrinkage for Natural Exponential Families with Quadratic Variance Functions », *Biometrika*, t. 88, 3 sept. 2001.
- [8] H. H. Arsenault et M. Denis, « Integral expression for transforming signal-dependent noise into signal-independent noise », *Optics Letters*, t. 6, 5 1981.
- [9] H. H. Arsenault et M. Denis, « Image processing in signal-dependent noise », *Canadian Journal of Physics*, t. 61, 2 fév. 1983.
- [10] A. C. Atkinson, M. Riani et A. Corbellini, « The Box–Cox Transformation: Review and Extensions », *Statistical Science*, t. 36, n° 2, p. 239-255, 2021.
- [11] L. Azzari, L. Rodrigues Borges et A. Foi, « Denoising of Photographic Images and Video - Fundamentals Open Challenges and New Trends » M. Bertalmio. 2018, chap. Modeling and estimation of signal-dependent and correlated noise.
- [12] L. Azzari et A. Foi, « IEEE 14th International Symposium on Biomedical Imaging (ISBI 2017) - Melbourne, Australia - Variance stabilization in Poisson image deblurring », 2017.

-
- [13] F. Baccelli et A. Biswas, « On Scaling Limits of Power Law Shot-Noise Fields », *Stochastic Models*, t. 31, 2 avr. 2015.
- [14] L. Baers, « Variance and higher order signal moments in neutron flux measurements. », *Nuclear Instr. and Methods in. Physics Research A*, t. 275, p. 403-410, 1989.
- [15] L. Baers, T. Rivero Gutierrez, R. Carrillo Mendoza et G. Jimenez Santana, « Novel Use of the Third and the Modified Fourth Order Central Signal Moments for Neutron Flux Measurements », *Kernenergie*, t. 33, n° 6, p. 267-270, 1990.
- [16] L. Baers, T. Rivero Gutierrez, R. Carrillo Mendoza et G. Jimenez Santana, « Use of Higher Order Signal Moments and High Speed Digital Sampling Technique for Neutron Flux Measurement », *IEEE Transactions on Nuclear Science*, t. 40, n° 4, août 1993.
- [17] A. Bagnall, I. Whittle, M. Studley, M. Pettipher, F. Tekiner et L. Bull, « Variance Stabilizing Regression Ensembles for Environmental Models », *The 2006 IEEE International Joint Conference on Neural Network Proceedings, Vancouver, BC, Canada, 2006*.
- [18] M. Bakkali, « Développement d'une chaîne neutronique grande dynamique destinée au réacteur nucléaire embarqué », CEA, rapport interne 14-0608, 2015.
- [19] S. Bar-Lev et P. Enis, « On the classical choice of variance stabilizing transformations and an application for a Poisson variate », *Biometrika*, t. 75, n° 4, p. 803-804, 1988.
- [20] S. Bar-Lev et P. Enis, « On the construction of classes of variance stabilizing transformations », *Statistics and Probability Letters*, t. 10, p. 95-100, 1990.
- [21] S. Bar-Lev et B. Boukai, « Variance stabilizing transformations for the noncentral chi-square distribution », *Journal of Probability and Statistical Science*, t. 5, n° 2, p. 113-122, jan. 2007.
- [22] Y. Bar-Shalom, X. R. Li et T. Kirubarajan, *Estimation with applications to tracking and navigation: theory algorithms and software*. John Wiley & Sons, 2001.
- [23] E. Barat, C. Comtat, T. Dautremer, T. Montagu et R. Trebossen, « Method For Determining Functional Volumes For Determining Biokinetics », US2015134296 (A1), mai 2015.
- [24] E. Barat, T. Dautremer, L. Larivière, J. Lefèvre, T. Montagu et J. Trama, « ADONIS : a new system for high count rate HPGe γ -spectrometry », *2006 IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record*, t. 2, oct. 2006, p. 955-958.
- [25] E. Barat, T. Dautremer et T. Montagu, « Procédé d'analyse spectrométrique et dispositif apparenté », US2013197861 (A1), août 2013.
- [26] E. Barat, T. Dautremer et T. Montagu, « Spectrometric Analysis Method And Related Device », JP2016186489 (A), oct. 2018.
- [27] E. Barat, T. Dautremer, T. Montagu et J.-C. Trama, « A bimodal Kalman smoother for nuclear spectrometry », *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, t. 567, n° 1, p. 350-352, 2006.

- [28] E. Barat, C. Comtat, T. Dautremer, T. Montagu et R. Trebossen, « A nonparametric Bayesian approach for PET reconstruction », *2007 IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record*, IEEE, t. 6, 2007, p. 4155-4162.
- [29] E. Barat, T. Dautremer, T. Montagu et S. Normand, « ADONIS: a new concept of X/ γ pulse analyzer », *Animma Conference Record*, t. 210, 2009, p. 2009.
- [30] L. Barbot, D. Fourmentel, G. de Izarra, C. Destouches, J.-F. Villard, Y. Moline et H. Hamrita, « MONACO v2: Multipurpose and Integrated Data Acquisition System for On-line Neutron and Gamma Measurements », *EPJ Web of Conferences*, t. 225, p. 03012, jan. 2020.
- [31] O. E. Barndorff-Nielsen, S. I. Resnick et T. Mikosch, « Series Representations of Lévy Processes from the Perspective of Point Processes ». 2001.
- [32] H. Barnes, « The Use of Transformations in Marine Biological Statistics », *ICES Journal of Marine Science*, t. 18, n° 1, p. 61-71, avr. 1952.
- [33] M. S. Bartlett, « The Square Root Transformation in Analysis of Variance », *Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society*, t. 3, n° 1, p. 68-78, 1936.
- [34] M. S. Bartlett, « The Use of Transformations », *Biometrics*, t. 3, 1 mars 1947.
- [35] M. Basseville et I. V. Nikiforov, *Detection of abrupt changes: theory and application*. Prentice Hall Englewood Cliffs, 1993, t. 104.
- [36] G. Beall, « The Transformation of Data from Entomological Field Experiments so that the Analysis of Variance Becomes Applicable », *Biometrika*, t. 32, 3-4 avr. 1942.
- [37] B. M. Bennett, « On the cumulants of the logarithmic generalized variance and variance ratio », *Scandinavian Actuarial Journal*, t. 1955, 1-2 jan. 1955.
- [38] B. M. Bennett, « On the variance stabilizing properties of certain logarithmic transformations », *Trabajos de Estadística Y de Investigación Operativa*, t. 7, 3 oct. 1956.
- [39] B. M. Bennett, « On the variance stabilizing properties of certain transformations-II », *Trabajos de Estadística Y de Investigación Operativa*, t. 8, 2 juin 1957.
- [40] M. Bertero, P. Boccacci, G. Desiderà et G. Vicidomini, « Image deblurring with Poisson data: from cells to galaxies », *Inverse Problems*, t. 25, n° 12, p. 123006, 2009.
- [41] G. H. V. Bertrand, F. Sguerra, C. Dehe-Pittance, F. Carrel, R. Coulon, S. Normand, E. Barat, T. Dautremer, T. Montagu et M. Hamel, « Influence of bismuth loading in polystyrene-based plastic scintillators for low energy gamma spectroscopy », *Journal of Materials Chemistry C*, t. 2, n° 35, p. 7304-7312, 2014.
- [42] G. Bianchi et I. Tinnirello, « Kalman filter estimation of the number of competing terminals in an IEEE 802.11 network », *IEEE INFOCOM 2003. Twenty-second Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies (IEEE Cat. No.03CH37428)*, t. 2, mars 2003, 844-852 vol.2.
- [43] P. J. Bickel et K. A. Doksum, *Mathematical statistics: basic ideas and selected topics*, 2nd ed. Prentice Hall, 2001, t. Volume 1.

-
- [44] N. Blanc de Lanaute, « Développement et optimisation de méthodes de mesures neutroniques par chambre à fission auprès de réacteurs expérimentaux. Maîtrise, traitement et réduction des incertitudes », français, thèse de doct., Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2012.
- [45] A. Blanc-Lapierre, « Sur certaines fonctions aléatoires stationnaires. Application à l'étude des fluctuations dues à la structure électronique de l'électricité », Doctorat d'État, École Normale Supérieure, 1945.
- [46] L. Bondesson, « Shot-Noise Processes and Distributions », *Wiley StatsRef: Statistics Reference Online*, n° 3, p. 1-5, 2014.
- [47] L. R. Borges, M. A. Brochi, Z. Xu, A. Foi, M. A. Vieira et P. M. Azevedo-Marques, « Noise modeling and variance stabilization of a computed radiography (CR) mammography system subject to fixed-pattern noise », *Physics in Medicine and Biology*, t. 65, n° 22, p. 1-14, 2020.
- [48] K. Boudergui, F. Lainé, T. Montagu, P. Blanc, A. Deltour et S. Mozziconacci, « An online change of activity in energy spectrum for detection on an early intervention robot », *2015 4th International Conference on Advancements in Nuclear Instrumentation Measurement Methods and their Applications (ANIMMA)*, IEEE, 2015, p. 1-3.
- [49] J. Boulanger, « Estimation non-paramétrique et contributions à l'analyse de séquences d'images : modélisation, simulation et estimation du trafic intra-cellulaire dans les séquences de vidéo-microscopie », Thèse de doctorat, 2007, 196 p.
- [50] J. Boulanger, C. Kervrann, P. Bouthemy, P. Elbau, J.-B. Sibarita et J. Salamero, « Patch-Based Nonlocal Functional for Denoising Fluorescence Microscopy Image Sequences », *IEEE Transactions on Medical Imaging*, t. 29, n° 2, p. 442-454, 2010.
- [51] G. Box et D. Cox, « An analysis of transformations », *Journal of the Royal Statistical Society : Series B*, t. 26, p. 211-46, 1964.
- [52] L. Breiman et J. H. Friedman, « Estimating Optimal Transformations for Multiple Regression and Correlation », *Journal of the American Statistical Association*, t. 80, 391 sept. 1985.
- [53] P. Bremaud et A. Ridolfi, « Power spectra of UWB time-hopping modulated signals: a Shot Noise approach », *International Symposium on Information Theory, 2004. Proceedings*, 2004.
- [54] P. Bremaud et A. Ridolfi, « Power spectra related to UWB communications », *IEEE 2004 IEEE International Conference on Communications*, Paris, France, 2004.
- [55] P. Brémaud et L. Massoulié, « Power Spectra of General Shot Noises and Hawkes Point Processes with a Random Excitation », *Advances in Applied Probability*, t. 34, 1 mars 2002.
- [56] P. Brémaud, L. Massoulié et A. Ridolfi, « Power spectra of random spike fields and related processes », *Advances in Applied Probability*, t. 37, 4 déc. 2005.
- [57] A. Bria, C. Marrocco, L. R. Borges, M. Molinara, A. Marchesi, J.-J. Mordang, N. Karssemeijer et F. Tortorella, « Improving the Automated Detection of Calcifications using Adaptive Variance Stabilization », *IEEE Transactions on Medical Imaging*, t. 37, 8 août 2018.

- [58] M. Brigham et A. Destexhe, « Nonstationary filtered shot-noise processes and applications to neuronal membranes », *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, t. 91, n° 6, p. 1-12, 2015.
- [59] S. D. Brow et S. C. Rutan, « Adaptive Kalman filtering », *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, t. 90, n° 6, p. 403-407, 1985.
- [60] L. D. Brown, T. T. Cai et H. H. Zhou, « Nonparametric regression in exponential families », *The Annals of Statistics*, t. 38, n° 4, p. 2005-2046, 2010.
- [61] L. Brown, T. Cai, R. Zhang, L. Zhao et H. Zhou, « The Root-Unroot Algorithm for Density Estimation as Implemented via Wavelet Block Thresholding », *Probability Theory and Related Fields*, t. 146, p. 401-433, mars 2010.
- [62] L. D. Brown et L. H. Zhao, « A test for the Poisson distribution », *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A*, p. 611-625, 2002.
- [63] D. V. Budescu et M. I. Appelbaum, « Variance Stabilizing Transformations and the Power of the F Test », *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, t. 6, 1 jan. 1981.
- [64] J.-P. Burel, « Instrumentation hors cœur des réacteurs », *Techniques de l'ingénieur Instrumentation et contrôle-commande des installations nucléaires*, t. base documentaire : TIB202DUO. N° ref. article: bn3451, 1999.
- [65] T. Cai, « Gaussianization Machines for Non-Gaussian Function Estimation Models », *Statistical Science*, t. 34, n° 4, p. 635-656, 2019.
- [66] N. Campbell, « The fluctuation theorem. (Shot effect) », *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, t. 35, 1 jan. 1939.
- [67] R. J. Carroll, « A Robust Method for Testing Transformations to Achieve Approximate Normality », *Journal of the Royal Statistical Society*, t. 42, p. 71, 1980.
- [68] R. J. Carroll et D. Ruppert, *Transformation and Weighting in Regression* (Monographs on Statistics and Applied Probability). Springer US, 1988.
- [69] A. Chapelle, « Mesures de bruit neutronique auprès des réacteurs Caliban, Godiva IV, Planet et Flattop, Détermination des paramètres cinétiques et des incertitudes associées », Theses, Université de Caen Normandie, mai 2014.
- [70] C. Charalambous et N. Menemenlis, « Statistical analysis of the received signal over multipath fading channels via generalization of shot-noise », *Communications, 2001. ICC 2001. IEEE International Conference on*, t. 7, 2001, 2246-2250 vol.7.
- [71] C. D. Charalambous, S. M. Djouadi et C. Kourtellaris, « Statistical Analysis of Multipath Fading Channels Using Generalizations of Shot Noise », *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, t. 2008, n° 1, p. 186 020, juill. 2008.
- [72] E. Charitidou, D. Fouskakis et I. Ntzoufras, « Bayesian transformation family selection: Moving toward a transformed Gaussian universe », *Canadian Journal of Statistics*, t. 43, 4 déc. 2015.
- [73] C. Chaux, L. Blanc-Féraud et J. Zerubia, « Wavelet-based restoration methods: application to 3D confocal microscopy images », *Wavelets XII*, International Society for Optics et Photonics, t. 6701, 2007.

-
- [74] W. W. Chen et R. S. Deo, « Power transformations to induce normality and their applications », *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, t. 66, 1 2004.
- [75] Y. On-Ching, R. Lugannani et S. Rice, « Series Approximations for the Amplitude Distribution and Density of Shot Processes », *IEEE Transactions on Communications*, t. 26, 1 jan. 1978.
- [76] R. M. Cibils, A. Busto, J. L. Gonella, R. Martinez, A. J. Chielens, J. M. Otero, M. Nuñez et S. E. Tropea, « Wide Range Neutron Flux Measuring Channel for Aerospace Application », *AIP Conference Proceedings*, t. 969, n° 1, p. 316-325, 2008.
- [77] J. Cieśliński et M. Jurgielewicz, « On Geometric Interpretations of Euler's Substitutions », *Symmetry*, t. 15, p. 1932, oct. 2023.
- [78] R. Coulon, T. Montagu, V. Schoepf et S. Normand, « System For Measuring Radioactivity in a Gamma Background Noise », US2016231438 (A1), août 2016.
- [79] R. Coulon, S. Normand, G. Ban, E. Barat, T. Montagu, T. Dautremer, H.-P. Brau, V. Dumarcher, M. Michel, L. Barbot et al., « Delayed gamma power measurement for sodium-cooled fast reactors », *Nuclear Engineering and Design*, t. 241, n° 1, p. 339-348, 2011.
- [80] R. Coulon, S. Normand, G. Ban, E. Barat, T. Montagu, T. Dautremer, H.-P. Brau, V. Dumarcher, J.-L. Portier, M. Michel et al., « Sodium fast reactor power monitoring and clad failure detection using ADONIS system », *2009 IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record (NSS/MIC)*, IEEE, 2009, p. 1378-1386.
- [81] R. Coulon, S. Normand, G. Ban, V. Dumarcher, H. P. Brau, L. Barbot, T. Domenech, V. Kondrasovs, G. Corre et A. M. Frelin, « Sodium fast reactor power monitoring using 20 F tagging agent », *2009 1st International Conference on Advancements in Nuclear Instrumentation, Measurement Methods and their Applications*, IEEE, 2009, p. 1-8.
- [82] R. Coulon, S. Normand, M. Michel, L. Barbot, T. Domenech, K. Boudergui, J.-M. Bourbotte, V. Kondrasovs, A.-M. Frelin-Labalme, H. Hamrita et al., « 20F Power Measurement for Generation IV Sodium Fast Reactors », *European Nuclear Conference*, 2010, p. 274-285.
- [83] R. Coulon, S. Normand, L. Barbot, T. Domenech, A.-M. Frelin, V. Kondrasovs, E. Barat, T. Montagu, T. Dautremer, J. Lefèvre et al., « Sodium Fast Reactors power monitoring using high resolution and high count rate gamma spectrometry. Simulation study », *2008 IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record*, IEEE, 2008, p. 973-977.
- [84] S. Crouzy et F. Sigworth, « Fluctuations in ion channel gating currents. Analysis of nonstationary shot noise », *Biophysical Journal*, t. 64, 1 jan. 1993.
- [85] J. H. Curtiss, « On transformations used in the analysis of variance », *Ann. Math. Statist.*, t. 14, n° 2, p. 107-122, 1943.
- [86] A. Dandawate et G. Giannakis, « Asymptotic properties and covariance expressions of kth-order sample moments and cumulants », *Proceedings of 27th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, t. 2, nov. 1993, p. 1186-1190.

- [87] A. Dandawate et G. Giannakis, « Asymptotic theory of mixed time averages and kth-order cyclic-moment and cumulant statistics », *IEEE Transactions on Information Theory*, t. 41, n° 1, p. 216-232, jan. 1995.
- [88] A. DasGupta, *Asymptotic theory of statistics and probability* (Springer texts in statistics), 1^{re} éd. Springer-Verlag New York, 2008.
- [89] W. J. Davenport et W. Root, *An introduction to the theory of random signals and noise*. Wiley-IEEE, 1987.
- [90] J.-E. Dazard et J. S. Rao, « Joint adaptive mean–variance regularization and variance stabilization of high dimensional data », *Computational Statistics & Data Analysis*, t. 56, 7 2012.
- [91] M. J. M. De Jong et C. W. J. Beenakker, « Semiclassical theory of shot noise in mesoscopic conductors », *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, t. 230, n° 1-2, p. 219-248, 1996.
- [92] A. de Deckerk, J. A. Lee et M. Verlysen, « Variance stabilizing transformations in patch-based bilateral filters for poisson noise image denoising », *IEEE 2009 Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society - Minneapolis*, 2009.
- [93] C. A. Deledalle, L. Denis, S. Tabti et F. Tupin, « MuLoG, or How to Apply Gaussian Denoisers to Multi-Channel SAR Speckle Reduction? », *IEEE Transactions on Image Processing*, t. 26, n° 9, p. 4389-4403, 2017.
- [94] C.-A. Deledalle, L. Denis et F. Tupin, « MuLoG: A Generic Variance-Stabilization Approach for Speckle Reduction in SAR Interferometry and SAR Polarimetry », *2018 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS)- Valencia, Spain (2018.7.22-2018.7.27)*, 2018.
- [95] T. DiCiccio et R. Tibshirani, « Bootstrap Confidence Intervals and Bootstrap Approximations », *Journal of the American Statistical Association*, t. 82, n° 397, p. 163-170, 1987.
- [96] L. Ding, H. Zhang, B. Li, J. Xiao et J. Zhou, « Image noise estimation based on principal component analysis and variance-stabilizing transformation », *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, t. 10668 LNCS, p. 58-69, Chapter 6 2017.
- [97] D. L. Donoho, « Nonlinear Wavelet Methods for Recovery of Signals, Densities, and Spectra from Indirect and Noisy Data », *In Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, American Mathematical Society, 1993, p. 173-205.
- [98] R. A. DuBridge, « Campbell Theorem - System Concepts and Results », *Nuclear Science, IEEE Transactions on*, t. 14, n° 1, p. 241-246, fév. 1967.
- [99] M. J. Dunning, M. E. Ritchie, N. L. Barbosa-Morais, S. Tavaré et A. G. Lynch, « Spike-in validation of an Illumina-specific variance-stabilizing transformation », *BMC Research Notes*, t. 1, p. 1-6, 2008.
- [100] B. P. Durbin et D. M. Rocke, « Variance-stabilizing transformations for two-color microarrays », *Bioinformatics*, t. 20, 5 mars 2004.

-
- [101] B. Durbin, J. Hardin, D. Hawkins et D. Rocke, « A variance-stabilizing transformation for gene-expression microarray data », *Bioinformatics*, t. 18, n° Suppl. 1, S105-S110, 2002.
- [102] J. Durbin et S. J. Koopman, *Time Series Analysis by State Space Methods*. Oxford University Press, mai 2012.
- [103] B. Efron, « Transformation theory : how normal is a family of a distribution ? », *Ann. Statist.*, t. 10, n° 2, p. 323-339, 1982.
- [104] L. Eglin, E. Barat, T. Montagu, T. Dautremer et J. Trama, « Ionizing radiation detection using jump markov linear systems », *IEEE/SP 13th Workshop on Statistical Signal Processing, 2005*, juill. 2005, p. 591-596.
- [105] I. Eliazar, « Shot noise systems with random relaxations », *Physical Review E*, t. 76, n° 4, p. 1-10, 4 oct. 2007.
- [106] I. Eliazar et J. Klafter, « A unified and universal explanation for Lévy laws and 1/f noises », *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, t. 106, n° 30, p. 12 251-12 254, 2009.
- [107] H. T. R. Elston, « The Approximate Variance of a Function of Random Variables », *Biometrical Journal*, t. 41, 3 juin 1999.
- [108] Z. Elter, M. Bakkali, C. Jammes et I. Pázsit, « Performance of Higher Order Campbell methods, Part I: review and numerical convergence study », *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, t. 821, p. 66-72, 2016.
- [109] Z. Elter, G. de Izarra, P. Filliatre, C. Jammes et I. Pázsit, « Performance of Higher Order Campbell methods, Part II: calibration and experimental application », *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, t. 835, p. 86-93, 2016.
- [110] Z. Elter, « Neutron monitoring based on the higher order statistics of fission chamber signals », in english, PhD Thesis, Chalmers University of Technology, 2016.
- [111] J. Fadili, J. Mathieu et M. Desvignes, « La transformation de Fisz pour l'estimation de l'image des intensités d'un bruit Poissonien dans le domaine des ondelettes », *Traitement du Signal*, t. 21, n° 4, p. 313-327, 2004.
- [112] K. Fang, Y. Huang, Q. Huang, S. Yang, Z. Li et H. Cheng, « An Event Detection Approach Based on Improved CUSUM Algorithm and Kalman Filter », *2020 IEEE 4th Conference on Energy Internet and Energy System Integration (EI2)*, oct. 2020, p. 3400-3403.
- [113] G. Fay, F. Roueff et P. Soulier, « Estimation of the Memory Parameter of the Infinite Source Poisson Process », *Bernoulli*, t. 13, n° 2, p. 473-491, 2007.
- [114] R. Fesce, J. R. Segal et W. P. Hurlbut, « Fluctuation analysis of nonideal shot noise. Application to the neuromuscular junction. », *The Journal of general physiology*, t. 88, n° 1, p. 25-57, 1986.

- [115] P. Filliatre, C. Jammes, Z. Elter, G. de Izarra, H. Hamrita, M. Bakkali, G. Galli, B. Cantonnet et J. Nappe, « Dependability of the fission chambers for the neutron flux monitoring system of the french GEN-IV SFR (FR17) », *IAEA - International Conference on Fast Reactors and Related Fuel Cycles Next Generation Nuclear Systems for Sustainable Development - Jun 2017, Yekaterinburg, Russia.*, 2017.
- [116] R. A. Fisher, « Frequency Distribution of the Values of the Correlation Coefficient in Samples from an Indefinitely Large Population », *Biometrika*, t. 10, n° 4, p. 507-521, 1915.
- [117] M. Fisz, « The limiting distribution of a function of two independent random variables and its statistical applications. », *Colloquium Mathematicum*, t. 3, p. 138-146, 1955.
- [118] D. Foata et A. Fuchs, *Processus stochastiques: Processus de Poisson, chaines de Markov et martingales*. Dunod, 2002.
- [119] A. Foi, « Optimization of variance-stabilizing transformations », *preprint, submitted*, 2009.
- [120] A. Foi, « Noise estimation and removal in MR imaging: The variance-stabilization approach », *Biomedical Imaging: From Nano to Macro, 2011 IEEE International Symposium on*, avr. 2011, p. 1809-1814.
- [121] A. Foi, M. Trimeche, V. Katkovnik et K. Egiazarian, « Practical Poissonian-Gaussian Noise Modeling and Fitting for Single-Image Raw-Data », *Image Processing, IEEE Transactions on*, t. 17, n° 10, p. 1737-1754, oct. 2008.
- [122] R. Fontana, « An insight into UWB interference from a shot noise perspective », *Ultra Wideband Systems and Technologies, 2002. Digest of Papers. 2002 IEEE Conference on*, p. 309-313, 2002.
- [123] B. K. Fosdick et M. D. Perlman, « Variance-stabilizing and Confidence-stabilizing Transformations for the Normal Correlation Coefficient with Known Variances », *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, t. 45, 6 juill. 2016.
- [124] J. Freeman et R. Modarres, « Inverse Box-Cox: The power-normal distribution », *Statistics & Probability Letters*, t. 76, n° 8, p. 764-772, 2006.
- [125] M. F. Freeman et J. W. Tukey, « Transformations Related to the Angular and the Square Root », *Annals of Mathematical Statistics*, t. 21, p. 607, 1950.
- [126] P. Fryzlewicz, « Wavelet Techniques for Time Series and Poisson Data », PhD thesis, University of Bristol, 2003.
- [127] P. Fryzlewicz, « High-dimensional volatility matrix estimation via wavelets and thresholding », *Biometrika*, t. 100, n° 4, p. 921-938, 2013.
- [128] P. Fryzlewicz, « Likelihood ratio Haar variance stabilization and normalization for Poisson and other non-Gaussian noise removal », *Statistica Sinica*, t. 28, n° 4, p. 2885-2901, jan. 2018.
- [129] P. Fryzlewicz et V. Delouille, « A data-driven Haar-Fisz transform for multiscale variance stabilization », *Proceedings of the 13th IEEE/SP Workshop on Statistical Signal Processing*, juill. 2005, p. 539-544.

-
- [130] P. Fryzlewicz et G. P. Nason, « Poisson intensity estimation using wavelets and the Fisz transformation. », University of Bristol, UK, Department of Mathematics, rapp. tech. 01-10, 2001.
- [131] P. Fryzlewicz et G. P. Nason, « A Haar-Fisz algorithm for Poisson intensity estimation », *Journal of Computational and Graphical Statistics*, t. 13, n° 3, p. 621-638, 2004.
- [132] P. Fryzlewicz et G. P. Nason, « Some comments on the Haar-Fisz algorithm for Poisson intensity estimation », Statistics Group, Department of Mathematics, University of Bristol, Technical Report 03-04, 2004.
- [133] P. Fryzlewicz, T. Sapatinas et S. Subba Rao, « A Haar-Fisz technique for locally stationary volatility estimation », *Biometrika*, 2006.
- [134] P. Fryzlewicz, « Data-driven wavelet-Fisz methodology for nonparametric function estimation », *Electronic Journal of Statistics*, t. 2, n° none, p. 863-896, 2008.
- [135] P. Fryzlewicz, V. Delouille et G. P. Nason, « GOES-8 X-ray sensor variance stabilization using the multiscale data-driven Haar-Fisz transform », *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, t. 56, p. 99-116, 1 2007.
- [136] H. Fujisawa, « Variance stabilizing transformation and studentization for estimator of correlation coefficient », *Statistics & Probability Letters*, t. 47, 3 2000.
- [137] B. Geslot, F. Berhouet, L. Oriol, S. Bréaud, C. Jammes, P. Filliatre et J.-F. Villard, « Development and manufacturing of special fission chambers for in-core measurement requirements in nuclear reactors », *2009 1st International Conference on Advancements in Nuclear Instrumentation, Measurement Methods and their Applications*, 2009, p. 1-4.
- [138] B. Geslot, T. C. Unruh, P. Filliatre, C. Jammes, J. Di Salvo, S. Breaud et J.-F. Villard, « Method to Calibrate Fission Chambers in Campbell Mode », *IEEE Transactions on Nuclear Science*, t. 59, n° 4, p. 1377-1381, août 2012.
- [139] F. D. Gibbons, M. Proft, K. Struhl et F. P. Roth, « Chipper: discovering transcription-factor targets from chromatin immunoprecipitation microarrays using variance stabilization », *Genome Biology*, t. R96 (6), 11 2005.
- [140] M. Giot, L. Vermeeren, A. Lyoussi, C. Reynard-Carette, C. Lhuillier, P. Mégret, F. Deconinck et B. Goncalves, « Nuclear instrumentation and measurement: a review based on the ANIMMA conferences », *EPJ Nuclear Sciences & Technologies*, t. 3, p. 33, 2017.
- [141] P. Gorroochurn, « Who Invented the Delta Method, Really? », *The Mathematical Intelligencer*, t. 42, n° 3, p. 46-49, sept. 2020.
- [142] I. S. Gradshteyn et I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 5th. Academic Press, 1994.
- [143] Y. Guan, « Variance stabilizing transformations of Poisson, binomial and negative binomial distributions », *Statistics & Probability Letters*, t. 79, 14 2009.
- [144] J. A. Gubner, « Computation of Shot-Noise Probability Distributions and Densities », *SIAM Journal on Scientific Computing*, t. 17, n° 3, p. 750-761, 1996.

- [145] R. Gurajala, P. B. Choppala, J. S. Meka et P. D. Teal, « Derivation of the Kalman filter in a Bayesian filtering perspective », *2021 2nd International Conference on Range Technology (ICORT)*, août 2021, p. 1-5.
- [146] F. Gustafsson, *Adaptive filtering and change detection*. Wiley, 2000.
- [147] D. Gwinn et W. Trenholme, « A log N and period amplifier utilizing statistical fluctuation signals from a neutron detector », *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, t. NS-10, n° 2, p. 1-9, 1963.
- [148] D. Hägele et F. Schefczik, « Higher-order moments, cumulants, and spectra of continuous quantum noise measurements », *Physical Review B*, t. 98, n° 20, p. 205 143, 2018.
- [149] F. Hahne, W. Huber, R. Gentleman et S. Falcon, « Fold Changes, Log Ratios, Background Correction, Shrinkage Estimation, and Variance Stabilization », *Bioconductor Case Studies*. 2008, t. 10.1007/978-0-387-77240-0.
- [150] P. R. Halmos, « The Theory of Unbiased Estimation », *The Annals of Mathematical Statistics*, t. 17, n° 1, p. 34-43, 1946.
- [151] T. Hayakawa, « Normalizing and variance stabilizing transformations of multivariate statistics under an elliptical population », *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, t. 39, 1 1987.
- [152] S. Haykin, A. H. Sayed, J. R. Zeidler, P. Yee et P. C. Wei, « Adaptive tracking of linear time-variant systems by extended RLS algorithms », *IEEE Transactions on signal processing*, t. 45, n° 5, p. 1118-1128, 1997.
- [153] L. Heinrich et V. Schmidt, « Normal convergence of multidimensional shot noise and rates of this convergence », *Advances in Applied Probability*, t. 17, n° 4, p. 709-730, 4 déc. 1985.
- [154] R. Hill, W. Griffiths et G. Lim, *Principles of Econometrics*, 5th. John Wiley & Sons, 2017.
- [155] Y.-C. Ho et R. C. K. Lee, « A Bayesian Approach to Problems in Stochastic Estimation and Control », *IEEE Transactions on Automatic Control*, t. 9, p. 333-339, nov. 1964.
- [156] H. Hotelling, « New Light on the Correlation Coefficient and its Transforms », *Journal of the Royal Statistical Society Series B (Methodological)*, t. 15, 2 1953.
- [157] Y. Huang, Y. Zhang, Z. Wu, N. Li et J. A. Chambers, « A Novel Adaptive Kalman Filter With Inaccurate Process and Measurement Noise Covariance Matrices », *IEEE Transactions on Automatic Control*, t. 63, p. 594-601, 2018.
- [158] W. Huber, H. von Heydebreck A.and Sultmann, A. Poustka et M. Vingron, « Variance stabilization applied to microarray data calibration and to the quantification of differential expression », *Bioinformatics*, t. 18, Suppl 1 juill. 2002.
- [159] W. Huber, A. Von Heydebreck, H. Suelmann, A. Poustka et M. Vingron, « Parameter estimation for the calibration and variance stabilization of microarray data », *Statistical Applications in Genetics and Molecular Biology*, t. 2, 1 jan. 2003.
- [160] S. M. Iacus, *Simulation and inference for stochastic differential equations: with R examples*. Springer, 2008, t. 486.

-
- [161] P. Ilhe, « Estimation statistique des éléments d'un processus shot-noise », thèse de doct., Telecom ParisTech, 2016.
- [162] P. Ilhe, É. Moulines, F. Roueff et A. Souloumiac, « Nonparametric estimation of mark's distribution of an exponential shot-noise process », *Electronic Journal of Statistics*, t. 9, n° 2, p. 3098-3123, 2015.
- [163] M. Inoue, S.-I. Nishimura, G. Hori, H. Nakahara, M. Saito, Y. Yoshihara et S.-I. Amari, « Improved Parameter Estimation for Variance-Stabilizing Transformation of Gene-Expression Microarray Data », *Journal of Bioinformatics and Computational Biology*, t. 2, 4 déc. 2004.
- [164] G. de Izarra, Z. Elter et C. Jammes, « Design of a high order Campbell mode measurement system using open source hardware », *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, t. 839, déc. 2016.
- [165] N. Jahan, M. Rahman et M. Huda, « Neutron Flux Signal Acquisition from Plant Instrumentation Channel of Research Reactor for Reactivity Calculation », *World Journal of Nuclear Science and Technology*, t. 7, p. 145-154, 2017.
- [166] C. Jammes, P. Filliatre, B. Geslot, T. Domenech et S. Normand, « Assessment of the High Temperature Fission Chamber Technology for the French Fast Reactor Program », *IEEE Transactions on Nuclear Science*, t. 59, n° 4, p. 1351-1359, 2012.
- [167] J. W. Jang et Y. Krvavych, « Arbitrage-free premium calculation for extreme losses using the shot noise process and the Esscher transform », *Insurance: Mathematics and Economics*, t. 35, n° 1, p. 97-111, 2004.
- [168] M. Jansen, « Multiscale Poisson data smoothing », *Journal Of The Royal Statistical Society*, t. 68, 1 2006.
- [169] A. H. Jazwinski, *Stochastic Processes and Filtering Theory*. New York, 1970, t. 64.
- [170] A. D. Jiwook Jang et H. Zhao, « Moments of renewal shot-noise processes and their applications », *Scandinavian Actuarial Journal*, t. 2018, n° 8, p. 727-752, 2018.
- [171] T. Kailath, « A view of three decades of linear filtering theory », *IEEE Transactions on information theory*, t. 20, n° 2, p. 146-181, 1974.
- [172] T. Kailath, A. H. Sayed et B. Hassibi, *Linear estimation*. Prentice Hall, 2000.
- [173] R. E. Kalman, « A new approach to linear filtering and prediction problems », *Transactions of the ASME – Journal of basic Engineering*, t. 82, n° D, p. 35-45, 1960.
- [174] R. Kasturi, J. F. Walkup et T. F. Krile, « Image Restoration By Transformation of Signal-Dependent Noise To Signal-Independent Noise », *Applied Optics*, t. 22, n° 22, p. 410-415, 1983.
- [175] M. Kawaguchi, H. Mino et D. M. Durand, « Information Transmission in Hippocampal CA1 Neuron Models in the Presence of Poisson Shot Noise: the Case of Periodic Sub-threshold Spike Trains », *Engineering in Medicine and Biology Society, 2006. EMBS '06. 28th Annual International Conference of the IEEE*, p. 4196-4199, sept. 2006.

- [176] D. M. Kelmansky, E. J. Martínez et V. Leiva, « A new variance stabilizing transformation for gene expression data analysis », *Statistical Applications in Genetics and Molecular Biology*, t. 12, 6 jan. 2013.
- [177] T. W. Kendall, *The Advanced Theory of Statistics*, 2nd. Charles Griffin & Company Limited, London, 1945, t. 1.
- [178] J. F. Kenney et E. S. Keeping, *Mathematics of Statistics*, 2nd ed. Princeton, NJ. Van Nostrand, 1953, t. II.
- [179] J. F. Kenney et E. S. Keeping, *Mathematics of Statistics*, 3rd ed. Princeton, NJ. Van Nostrand, 1954, t. I.
- [180] C. Kervrann, C. Sorzano, S. T. Acton, J.-C. Olivo-Marin et M. Unser, « A Guided Tour of Selected Image Processing and Analysis Methods for Fluorescence and Electron Microscopy », *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, t. 10, n° 1, p. 6-30, fév. 2016.
- [181] Y. B. Kim, F. P. Vista, S. B. Cho et K. T. Chong, « Digitalization of the Ex-Core Neutron Flux Monitoring System for APR1400 Nuclear Power Plant », *Applied Sciences*, t. 10, n° 23, 2020.
- [182] J. F. C. Kingman, *Poisson Processes* (Oxford Studies in Probability). Oxford University Press, USA, 1993.
- [183] Y. Kitamura, I. Pázsit et T. Misawa, « Determination of prompt neutron decay constant by time-domain fluctuation analyses of detector current signals », *Annals of Nuclear Energy*, t. 120, oct. 2018.
- [184] G. F. Knoll, *Radiation Detection and Measurement*, 4th. Wiley, 2010.
- [185] K. Kobayashi et M. Hashisaka, « Shot Noise in Mesoscopic Systems: From Single Particles to Quantum Liquids », *Journal of the Physical Society of Japan*, t. 90, n° 10, p. 102001, 2021.
- [186] S. Konishi, « Normalizing and variance stabilizing transformations for intraclass correlations », *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, t. 37, 1 1985.
- [187] H. Koskinen, T. Tirronen et J. Virtamo, « Exact distribution of Poisson shot noise with constant marks under power-law attenuation », *Electronics Letters*, t. 42, 21 2006.
- [188] M. Kropik, « Neutron Flux Measurement Utilizing Campbell Technique », *International Conference Nuclear Energy in Central Europe, Bled, Slovenia*, sept. 2000.
- [189] M. Kropík et M. Matejka, « Neutron flux measurement channel utilizing the Campbell technique », *Kerntechnik*, t. 64, n° 5-6, p. 274-277, 1999.
- [190] E. Kulinskaya, S. Morgenthaler et R. G. Staudte, *Meta Analysis: A Guide to Calibrating and Combining Statistical Evidence* (Wiley Series in Probability and Statistics). Wiley-Interscience, 2008.
- [191] E. Kulinskaya, S. Morgenthaler et R. G. Staudte, « Variance Stabilizing the Difference of Two Binomial Proportions », *The American Statistician*, t. 64, 4 nov. 2010.

-
- [192] M. Kutay et A. Petropulu, « Power-law shot noise model for the ultrasound RF echo », *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2000. ICASSP '00. Proceedings. 2000 IEEE International Conference on*, t. 6, 3787-3790 vol.6, 2000.
- [193] A. C. C. Kwan et A.-B. Sim, « Portmanteau tests of randomness and Jenkins' variance-stabilizing transformation », *Economics Letters*, t. 50, 1 1996.
- [194] S. N. Lahiri, « Variance stabilizing transformations, studentization and the bootstrap », *Journal of Statistical Planning and Inference*, t. 61, 1 1997.
- [195] M. A. Laia, P. E. Cruvinel et A. L. Levada, « Filtragem de projeções tomográficas da ciência do solo utilizando transformada de Anscombe e Kalman », *DINCON'07, São José do Rio Preto*, 2007.
- [196] V. Lamirand, B. Geslot, J. Wagemans, L. Borms, E. Malambu, P. Casoli et al., « Miniature Fission Chambers Calibration in Pulse Mode: Interlaboratory Comparison at the SCK – CEN BR1 and CEA Caliban Reactors », *IEEE Transactions on Nuclear Science*, t. 61, n° 4, p. 2306-2311, 2014.
- [197] S. Landsberger et N. Tsoulfanidis, *Measurement and Detection of Radiation*, fourth. CRC Press, 2015.
- [198] P. Lartaud, P. Humbert et J. Garnier, « Multi-output Gaussian processes for inverse uncertainty quantification in neutron noise analysis », *preprint*, 2023.
- [199] N. F. Laubscher, « Normalizing the Noncentral t and F Distributions », *The Annals of Mathematical Statistics*, t. 31, n° 4, p. 1105-1112, 1960.
- [200] N. F. Laubscher, « On the stabilization of the Poisson variance », *Trabajos de Estadística Y de Investigacion Operativa*, t. 11, 3 oct. 1960.
- [201] P. Läuger, « Shot noise in ion channels », *Biochimica et Biophysica Acta (BBA) - Biomembranes*, t. 413, 1 nov. 1975.
- [202] D. Lazaro, E. Barat, C. Le Loirec, T. Dautremer, T. Montagu, L. Guérin et A. Batalla, « Denoising techniques combined to Monte Carlo simulations for the prediction of high-resolution portal images in radiotherapy treatment verification », *Physics in Medicine & Biology*, t. 58, n° 10, p. 3433, 2013.
- [203] D. Lazaro-Ponthus, E. Barat, C. Le Loirec, T. Dautremer, T. Montagu, D. Patin, L. Guérin et A. Batalla, « Prediction of high-resolution portal images for treatment verification in radiotherapy by coupling Monte Carlo simulations to non-parametric Bayesian denoising », *Third European Workshop on Monte Carlo Treatment Planning (EWG-MCTP 2012)*, 2012.
- [204] E. Lehmann, *Elements of Large-Sample Theory* (Springer Texts in Statistics). Springer, 1998.
- [205] B. Lescop, S. Normand, J. C. Trama, L. Laribiere, T. Nguyen, A. Souloumiac, P. Delacour, C. Blandin, B. Cantonnet et P. Pasdeloup, « A new system for in-core wide range neutron monitoring », *IEEE Symposium Conference Record Nuclear Science 2004.*, t. 3, oct. 2004, p. 1567-1570.

- [206] B. Lescop, P. Padeloup, J. Falaise, J. Lefevre, T. Nguyen, C. Sudres et J. C. Trama, « Marine: a fast fully digitalized wide range neutron monitor system », *2000 IEEE Nuclear Science Symposium. Conference Record (Cat. No.00CH37149)*, t. 1, 2000, 5/86-5/90 vol.1.
- [207] G. Letac et M. Mora, « Natural real exponential families with cubic variance functions », *The Annals of Statistics*, t. 18, n° 1, p. 1-37, 1990.
- [208] S. M. Lin, P. Du, W. Huber et W. A. Kibbe, « Model-based variance-stabilizing transformation for Illumina microarray data », *Nucleic Acids Research*, t. 36, 2 nov. 2007.
- [209] M. Lopatin, N. Moskovitch, T. Trigano et Y. Sepulcre, « Pileup attenuation for spectroscopic signals using a sparse reconstruction », *2012 IEEE 27th Convention of Electrical and Electronics Engineers in Israel*, nov. 2012, p. 1-5.
- [210] F. M. Lord, « Variance-Stabilizing Transformation of the Stepped-Up Reliability Coefficient », *ETS Research Bulletin Series*, t. 1972, 2 déc. 1972.
- [211] F. M. Lord, « Variance Stabilizing Transformation of the Stepped-up Reliability Coefficient », *Journal of Educational Measurement*, t. 11, 1 1974.
- [212] S. B. Lowen et M. C. Teich, « Power-Law Shot Noise », *IEEE Transactions on Information Theory*, t. 36, n° 6, p. 1302-1318, 1990.
- [213] P. Lucht. « The Euler Substitutions ». (oct. 2016), adresse : <http://user.xmission.com/~rimrock/Documents/The%20Euler%20Substitutions.pdf> (visité le 10/2021).
- [214] F. Luisier, T. Blu et M. Unser, « Image denoising in mixed Poisson–Gaussian noise », *IEEE Transactions on image processing*, t. 20, n° 3, p. 696-708, 2010.
- [215] R. Lund, W. P. McCormick et Y. Xiao, « Limiting properties of Poisson shot noise processes », *Journal of Applied Probability*, t. 41, n° 3, p. 911-918, 2004.
- [216] I. Lux et A. Baranyai, « Higher order Campbell techniques for neutron flux measurement: I. Theory », *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*, t. 202, 3 1982.
- [217] I. Lux et A. Baranyai, « Higher order Campbell techniques for neutron flux measurement: II. Correlated Campbelling », *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*, t. 202, 3 1982.
- [218] A. Lyoussi, *Détection de rayonnements et instrumentation nucléaire* (Collection Génie Atomique). INSTN - EDP Sciences, 2010.
- [219] S. Lys et A. Kanyuka, « Algorithms for processing self-powered neutron detector signals important for determination of local parameters in each part of the VVER core », *EPJ Nuclear Sciences & Technologies*, t. 8, p. 17, 2022.
- [220] J. Ma, Z. Liang, Y. Fan, Y. Liu, J. Huang, W. Chen et H. Lu, « Variance analysis of X-ray CT sinograms in the presence of electronic noise background », *Medical Physics vol. 39 iss. 7Part1*, t. 39, 7 juin 2012.
- [221] C. A. Mack, « Shot noise: a 100-year history, with applications to lithography », *Journal of Micro/Nanolithography, MEMS, and MOEMS*, t. 17, n° 04, p. 1, 2018.

- [222] M. Macucci et P. Marconcini, « Origin of shot noise in mesoscopic cavities », *Fluctuation and Noise Letters*, t. 15, n° 3, p. 1-12, 2016.
- [223] M. Mäkitalo et A. Foi, « On the inversion of the Anscombe transformation in low-count Poisson image denoising », *Proc. Int. Workshop on Local and Non-Local Approx. in Image Process.*, Tuusula, Finland, août 2009, p. 26-32.
- [224] M. Mäkitalo et A. Foi, « Optimal Inversion of the Anscombe Transformation in Low-Count Poisson Image Denoising », *Image Processing, IEEE Transactions on*, t. 20, n° 1, p. 99-109, jan. 2011.
- [225] M. Mäkitalo, « Optimization of polynomial and rational variance-stabilizing transformations », mém. de mast., Tampere University of Technology, mai 2015, p. 62.
- [226] M. Mäkitalo et A. Foi, « A Closed-Form Approximation of the Exact Unbiased Inverse of the Anscombe Variance-Stabilizing Transformation », *IEEE Transactions on Image Processing*, t. 20, n° 9, p. 2697-2698, sept. 2011.
- [227] M. Mäkitalo et A. Foi, « Optimal Inversion of the Generalized Anscombe Transformation for Poisson-Gaussian Noise », *IEEE Transactions on Image Processing*, t. 22, n° 1, p. 91-103, jan. 2013.
- [228] M. Mäkitalo et A. Foi, « Noise Parameter Mismatch in Variance Stabilization, With an Application to Poisson-Gaussian Noise Estimation », *IEEE Transactions on Image Processing*, t. 23, n° 12, p. 5348-5359, déc. 2014.
- [229] M. Mäkitalo, A. Foi, D. Fevrale et V. Lukin, « Denoising of single-look SAR images based on variance stabilization and nonlocal filters », *IEEE 2010 International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory*, 2010.
- [230] S. Mallat, *Une exploration des signaux en ondelettes*. Editions de l'Ecole polytechnique, 2000.
- [231] D. Mandic, S. Kanna et A. Constantinides, « On the Intrinsic Relationship Between the Least Mean Square and Kalman Filters [Lecture Notes] », *Signal Processing Magazine, IEEE*, t. 32, p. 117-122, nov. 2015.
- [232] J. Maroñas, O. Hamelijnck, J. Knoblauch et T. Damoulas, « Transforming Gaussian Processes With Normalizing Flows », *Proceedings of The 24th International Conference on Artificial Intelligence and Statistics* A. Banerjee et K. Fukumizu, sér. Proceedings of Machine Learning Research, t. 130, PMLR, avr. 2021, p. 1081-1089.
- [233] G. Marulanda, A. Bello, J. Cifuentes et J. Reneses, « Wind Power Long-Term Scenario Generation Considering Spatial-Temporal Dependencies in Coupled Electricity Markets », *Energies*, t. 13, n° 13, 2020.
- [234] K. Matsuo, M. C. Teich et B. E. A. Saleh, « Thomas point process in pulse, particle, and photon detection », *Applied Optics*, t. 22, 12 1983.
- [235] P. McCullagh et J. A. Nelder, *Generalized linear models* (CRC Monographs on Statistics & Applied Probability), 2^e éd. Chapman et Hall, 1989.
- [236] A. M. McLean, D. A. Ruggirello, C. Banfield, M. A. Gonzalez et M. Bialer, « Application of a variance-stabilizing transformation approach to linear regression of calibration lines », *Journal of Pharmaceutical Sciences*, t. 79, 11 1990.

- [237] R. Mehra, « On the identification of variances and adaptive Kalman filtering », *IEEE Transactions on automatic control*, t. 15, n° 2, p. 175-184, 1970.
- [238] M. Menictas et M. Wand, « Variational Inference for Heteroscedastic Semiparametric Regression », *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, t. 57, p. 119-138, mars 2015.
- [239] A. Mishra, S. Shimjithb et A. Tiwari, « Simultaneous Estimation of Neutron Flux and Reactivity in Nuclear Reactors », *IEEE Transactions on Nuclear Science*, t. 67, 8 août 2020.
- [240] T. Montagu, « Procédé de filtrage d'un signal de flux neutronique temporel bruité et dispositif associé », FR2910689, juin 2008.
- [241] T. Montagu, « Estimation du flux neutronique par filtrage de Kalman sur une chaîne grande dynamique », Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives, rapp. tech. 17-0238, 2016.
- [242] T. Montagu, « Nouveaux procédés de filtrage du flux neutronique », Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives, rapp. tech. 17-0187, 2017.
- [243] T. Montagu et M. Bakkali, « Method And Device For Processing Neutron Flux Signals, Associated Computer Program Product And Control System », WO2018220295 (A1), déc. 2018.
- [244] T. Montagu, E. Barat et B. Monfort, « Method for detecting change of activity in area of energy spectrum », FR2985817, juill. 2013.
- [245] T. Montagu et A. Ferrari, « Variance Stabilizing Transformations for Intensity Estimators of Shot Noise », *IEEE Signal Processing Letters*, t. 30, p. 977-981, juill. 2023.
- [246] S. Morgenthaler et R. G. Staudte, « Advantages of Variance Stabilization », *Scandinavian Journal of Statistics*, t. 39, 2012.
- [247] C. N. Morris, « Natural Exponential Families with Quadratic Variance Functions », *The Annals of Statistics*, t. 10, n° 1, p. 65-80, 1982.
- [248] C. N. Morris, « Natural Exponential Families with Quadratic Variance Functions: Statistical Theory », *The Annals of Statistics*, t. 11, n° 2, p. 515-529, 1983.
- [249] E. Motakis, G. Nason, P. Fryzlewicz et G. Rutter, « Variance stabilization and normalization for one-color microarray data using a data-driven multiscale approach », *Bioinformatics*, t. 22, n° 20, p. 2547-2553, 2006.
- [250] J.-L. Mourlevat, « Instrumentation interne des réacteurs », *Techniques de l'ingénieur Instrumentation et contrôle-commande des installations nucléaires*, t. base documentaire : TIB202DUO. N° ref. article : bn3452, 2001.
- [251] F. Murthagh, J.-L. Starck et A. Bijaoui, « Image restoration with noise suppression using a multiresolution support », *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, t. 112, p. 179-89, 1995.
- [252] G. P. Nason, « Multiscale variance stabilization via maximum likelihood », *Biometrika*, t. 2, mai 2014.

- [253] J. Neyman et E. L. Scott, « Correction for Bias Introduced by a Transformation of Variables », *The Annals of Mathematical Statistics*, t. 31, n° 3, p. 643-655, 1960.
- [254] M. Niedzwiecki et K. Cisowski, « Adaptive scheme for elimination of broadband noise and impulsive disturbances from AR and ARMA signals », *IEEE Transactions on Signal Processing*, t. 44, n° 3, p. 528-537, mars 1996.
- [255] K. Nishida et Y. Kanazawa, « On Variance-Stabilizing Multivariate Non Parametric Regression Estimation », *Communication in Statistics- Theory and Methods*, t. 44, 10 mai 2015.
- [256] V. O'Brien, R. D. Trevizan et V. S. Rao, « Detecting False Data Injection Attacks to Battery State Estimation Using Cumulative Sum Algorithm », *2021 North American Power Symposium (NAPS)*, IEEE, 2021, p. 01-06.
- [257] V. Oryshchenko et R. J. Smith, « Improved density and distribution function estimation », *Electronic Journal of Statistics*, t. 13, n° 2, p. 3943-3984, 2019.
- [258] K. Ousi Benomar, « Modélisation et traitement des signaux issus des détecteurs neutroniques : séparation neutrons/gammas », français, Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud Orsay, 1994.
- [259] E. S. Page, « Continuous Inspection Schemes », *Biometrika*, t. 41, n° 1/2, p. 100-115, 1954.
- [260] L. Pál, I. Pázsit et Z. Elter, « Comments on the stochastic characteristics of fission chamber signals », *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, t. 763, p. 44-52, 2014.
- [261] G. Pang et M. S. Taqqu, « Nonstationary self-similar Gaussian processes as scaling limits of power-law shot noise processes and generalizations of fractional Brownian motion », *High Frequency*, t. 2, 2 mars 2019.
- [262] A. Papoulis, « High density shot noise and gaussianity », *Journal of Applied Probability*, t. 8, 1 mars 1971.
- [263] A. Papoulis, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw-Hill Companies, 1991.
- [264] X. Peng, Y. Cai, Q. Li et K. Wang, « Comparison of reactivity estimation performance between two extended Kalman filtering schemes », *Annals of Nuclear Energy*, t. 96, p. 76-82, 2016.
- [265] X. Peng, Q. Li, W. Zhao, H. Gong et K. Wang, « Robust filtering for dynamic compensation of self-powered neutron detectors », *Nuclear Engineering and Design*, t. 280, p. 122-129, 2014.
- [266] A. P. Petropulu, T. Golas et G. Vishwanathan, « Power-law shot noise and its application on modeling of ultrasound echoes », *Time-Frequency and Time-Scale Analysis, 1998. Proceedings of the IEEE-SP International Symposium on*, p. 193-196, oct. 1998.
- [267] B. Picinbono, C. Bendjaballah et J. Pouget, « Photoelectron shot noise », *Journal of Mathematical Physics*, t. 11, n° 7, p. 2166-2176, 1970.

- [268] B. Picinbono, *Random signals and systems*. Prentice-Hall, Inc., 1993.
- [269] T. Pieciak, S. Aja-Fernandez et G. Vegas-Sanchez-Ferrero, « Non-Stationary Rician Noise Estimation in Parallel MRI Using a Single Image: A Variance-Stabilizing Approach », *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, t. 39, n° 10, p. 2015-2029, 2017.
- [270] T. Pieciak, G. Vegas Sánchez-Ferrero et S. Aja-Fernández, « Variance Stabilization of Noncentral-Chi Data: Application to Noise Estimation in MRI », avr. 2016.
- [271] P. Pin, E. Barat, T. Dautremer, T. Montagu et S. Normand, « ADONIS, high count-rate HPGe γ spectrometry algorithm: Irradiated fuel assembly measurement », *2nd International Conference on Advancements in Nuclear Instrumentation, Measurement Methods and their Applications*, juin 2011, p. 1-5.
- [272] Planetmaths. « Euler's substitutions for integration ». (2021), adresse : <https://planetmath.org/eulerssubstitutionsforintegration>.
- [273] F. A. Poch, « Sobre la distribucion t no central generalizaciones y distribuciones relacionadas », *Trabajos de Estadistica Y de Investigacion Operativa*, t. 4, 2 juin 1953.
- [274] E. W. Pontes et A. Ferreira, « Using cumulants and spectra to model nuclear radiation detectors », *Nuclear Science, IEEE Transactions on*, t. 53, n° 3, p. 1292-1298, juin 2006.
- [275] B. Porat, *Digital processing of random signals: theory and methods*. Prentice Hall, 1994.
- [276] S. Prasad et N. Menicucci, « Fisher information with respect to cumulants », *IEEE Transactions on Information Theory*, t. 50, 4 avr. 2004.
- [277] N. Privault, « Nonstationary shot noise modeling of neuron membrane potentials by closed-form moments and Gram-Charlier expansions », *Biological Cybernetics*, t. 114, n° 4-5, p. 499-518, 2020.
- [278] P. R. Prucnal et E. L. Goldstein, « Exact variance-stabilizing transformations for image-signal-dependent Rayleigh and other Weibull noise sources », *Applied Optics*, t. 26, n° 6, p. 1038-1041, 1987.
- [279] P. R. Prucnal et M. C. Teich, « Multiplication Noise in the Human Visual System at Threshold : 2. Probit Estimation of Parameters », *Biological Cybernetics*, t. 43, p. 87-96, 1982.
- [280] P. R. Prucnal et B. E. A. Saleh, « Transformation of image-signal-dependent noise into image-signal-independent noise », *Optics Letters*, t. 6, 7 1981.
- [281] X. Pu et M. Tiefelsdorf, « A Variance-Stabilizing Transformation to Mitigate Biased Variogram Estimation in Heterogeneous Surfaces with Clustered Samples », *Advances in Geocomputation* D. A. Griffith, Y. Chun et D. J. Dean, Cham : Springer International Publishing, 2017, p. 271-280.
- [282] P. V. Purohit, D. M. Rocke, M. R. Viant et D. L. Woodruff, « Discrimination Models Using Variance-Stabilizing Transformation of Metabolomic NMR Data », *OmicS A Journal of Integrative Biology*, t. 8, 2 juill. 2004.

-
- [283] F. Quinlan, T. M. Fortier, H. Jiang, A. Hati, C. Nelson, Y. Fu, J. C. Campbell et S. A. Diddams, « Exploiting Shot Noise correlations in the photodetection of ultrashort optical pulse trains », *Nature Photonics*, t. 7, n° 4, p. 290-293, 2013.
- [284] R. Ramírez-Aldana et L. Naranjo, « Random intercept and linear mixed models including heteroscedasticity in a logarithmic scale: Correction terms and prediction in the original scale », *PLOS ONE*, t. 16, n° 4, p. 1-21, avr. 2021.
- [285] F. Ramirez-Perez et R. Serfling, « Shot Noise on Cluster Processes with Cluster Marks, and Studies of Long Range Dependence », *Advances in Applied Probability*, t. 33, 3 sept. 2001.
- [286] C. Rasmussen et C. Williams, *Gaussian Process for Machine Learning*. jan. 2006.
- [287] S. I. Resnick, *Adventures in Stochastic Processes*. Birkhäuser Boston, 2005.
- [288] P. Reuss, *Neutron Physics*. EDP Sciences, 2008.
- [289] P. Reynaud-Bouret et V. Rivoirard, « Near optimal thresholding estimation of a Poisson intensity on the real line », *Electronic Journal of Statistics*, t. 4, n° none, p. 172-238, 2010.
- [290] J. Rice, « On Generalized Shot Noise », *Advances in Applied Probability*, t. 9, n° 3, p. 553-565, 1977.
- [291] A. Ridolfi et M. Z. Win, « Ultrawide bandwidth signals as shot noise: a unifying approach », *Selected Areas in Communications, IEEE Journal on*, t. 24, n° 4, p. 899-905, avr. 2006.
- [292] A. Ridolfi, « Power spectra of random spikes and related complex signals with application to communications », thèse de doct., Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2004.
- [293] R. Rivlin, « An extension of Campbell's Theorem of random fluctuations », *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, t. 36, n° 261, p. 688-693, 1945.
- [294] J. B. Roberts, « On the response of a simple oscillator to random impulses », *Journal of Sound and Vibration*, t. 4, 1 1966.
- [295] P. E. Roche, M. Kociak, S. Guéron, A. Kasumov, B. Reulet et H. Bouchiat, « Very low shot noise in carbon nanotubes », *European Physical Journal B*, t. 28, n° 2, p. 217-222, 2002.
- [296] D. M. Rocke et B. Durbin, « Approximate variance-stabilizing transformations for gene-expression microarray data », *Bioinformatics*, t. 19, 8 mai 2003.
- [297] P. Rodriguez, « Noise model discrimination for digital images based on variance-stabilizing transforms and on local statistics: Preliminary results », *IEEE 2011 45th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers - Pacific Grove, CA, USA*, 2011.

- [298] E. Rohée, R. Coulon, F. Carrel, T. Dautremer, E. Barat, T. Montagu, S. Normand et C. Jammes, « Qualitative and quantitative validation of the SINBAD code on complex HPGe gamma-ray spectra », *2015 4th International Conference on Advancements in Nuclear Instrumentation Measurement Methods and their Applications (ANIMMA)*, IEEE, 2015, p. 1-6.
- [299] E. Rohée, R. Coulon, F. Carrel, T. Dautremer, E. Barat, T. Montagu, S. Normand et C. Jammes, « Benchmark of the non-parametric Bayesian deconvolution method implemented in the SINBAD code for X/ γ rays spectra processing », *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, t. 836, p. 91-97, 2016.
- [300] N. Rojas-Perilla, « The Use of Data-Driven Transformations and Their Applicability in Small Area Estimation », PhD thesis, Freie Universität Berlin, 2018, p. 208.
- [301] D. Ruppert, « Transformations of Data », *International Encyclopedia of Social and Behavioral Sciences*. 2001.
- [302] D. Ruppert, M. P. Wand et R. J. Carroll, *Semiparametric regression*. Cambridge university press, 2003.
- [303] A. P. Sage et G. W. Husa, « Adaptive filtering with unknown prior statistics », *IEEE Transactions on Automatic Control*, p. 760-769, 1969.
- [304] G. Samorodnitsky, « A class of shot noise models for financial applications », *Athens Conference on Applied Probability and Time Series Analysis* C. C. Heyde, Y. V. Prohorov, R. Pyke et S. T. Rachev, New York, NY : Springer New York, 1996, p. 332-353.
- [305] S. Särkkä et A. Nummenmaa, « Recursive Noise Adaptive Kalman Filtering by Variational Bayesian Approximations », *Automatic Control, IEEE Transactions on*, t. 54, p. 596-600, avr. 2009.
- [306] E. Sarno, « A variance stabilizing transformation for the Gini concentration ratio », *Statistical Methods & Applications*, t. 7, 1 avr. 1998.
- [307] A. Sayed, *Fundamentals of Adaptive Filtering* (IEEE Press). Wiley, 2003.
- [308] A. Sayed et T. Kailath, « A state-space approach to adaptive RLS filtering », *IEEE Signal Processing Magazine*, t. 11, n° 3, p. 18-60, juill. 1994.
- [309] A. H. Sayed, *Adaptive Filters*. Wiley, 2008, p. 1-786.
- [310] T. Schmidt, « Shot-noise processes in finance », *From Statistics to Mathematical Finance: Festschrift in Honour of Winfried Stute* D. Ferger, W. González Manteiga, T. Schmidt et J.-L. Wang, 1. Cham : Springer International Publishing, 2017, p. 367-385.
- [311] W. Schottky, « Über spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitätsleitern », *Annalen der Physik*, t. 362, 23 1918.
- [312] W. Schottky, « On spontaneous current fluctuations in various electrical conductors », *Journal of Micro/Nanolithography, MEMS, and MOEMS*, t. 17, n° 4, p. 1-11, 2018.
- [313] P. Sebastiani, E. Gussoni, I. S. Kohane et M. F. Ramoni, « Statistical Challenges in Functional Genomics », *Statistical Science*, t. 18, 1 fév. 2003.

-
- [314] C. Seguin, « Estimation du flux neutronique par transformée en ondelettes pour la conduite et la sûreté des réacteurs nucléaires », mém. de mast., Université Bretagne Sud, août 2009.
- [315] Y. Sepulcre, T. Trigano et Y. Ritov, « Sparse Regression Algorithm for Activity Estimation in γ Spectrometry », *IEEE Transactions on Signal Processing*, t. 61, n° 17, p. 4347-4359, sept. 2013.
- [316] R. E. Sequeira et J. A. Gubner, « Blind intensity estimation from shot-noise data », *IEEE Transactions on Signal Processing*, t. 45, n° 2, p. 421-433, 1997.
- [317] J. Severo Milton and Gama, « Change Detection with Kalman Filter and CUSUM », *Discovery Science* L. Todorovski, N. Lavrač et K. P. Jantke, Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2006, p. 243-254.
- [318] Y. Shen, Y. Chen, Q. Liu, S. Lou, W. Yu, X. Wang et H. Chen, « Improved Anscombe transformation and total variation for denoising of lowlight infrared images », *Infrared Physics & Technology*, t. 93, sept. 2018.
- [319] Y. Shin, G. Kim et G. Lee, « Improving image reconstruction algorithm for rotating modulation collimators using a variance stabilizing transform », *Journal of Instrumentation*, t. 12, 1 jan. 2017.
- [320] Y. Shmaliy et S. Zhao, *Optimal and Robust State Estimation: Finite Impulse Response (FIR) and Kalman Approaches*. août 2022.
- [321] Q. Shuang, Z. Wei-jing et S. Jia-ning, « Neutron radiographic image restoration using BM3D frames and nonlinear variance stabilization », *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, t. 789, p. 95-100, juill. 2015.
- [322] S. Sid Ahmed, Z. Messali, F. Poyer, L. Lumbroso-Le Rouic, L. Desjardins, N. Cassoux, C. D. Thomas, S. Marco et S. Lemaitre, « Iterative Variance Stabilizing Transformation Denoising of Spectral Domain Optical Coherence Tomography Images Applied to Retinoblastoma », *Ophthalmic Research*, mars 2018.
- [323] Simo Särkkä, *Bayesian Filtering and Smoothing* (IMS Textbooks). Cambridge University Press, 2013.
- [324] N. D. Singpurwalla, N. G. Polson et R. Soyer, « From Least Squares to Signal Processing and Particle Filtering », *Technometrics*, t. 60, n° 2, p. 146-160, 2018.
- [325] D. L. Snyder, *Random Point Processes*. Wiley-Interscience, 1975.
- [326] K.-S. Song, « Asymptotic Relative Efficiency and Exact Variance Stabilizing Transformation for the Generalized Gaussian Distribution », *IEEE Transactions on Information Theory*, t. 59, 7 juill. 2013.
- [327] H. W. Sorenson, « Least-squares estimation: from Gauss to Kalman », *IEEE spectrum*, t. 7, n° 7, p. 63-68, 1970.
- [328] A. Souloumiac, « Performances des estimateurs « courant » et « fluctuation » de débit de fluence neutronique », CEA, Rapport interne 11-0546, 2011.

- [329] C. R. Stanley, « Numerical transformation of geochemical data: 1. Maximizing geochemical contrast to facilitate information extraction and improve data presentation », *Geochemistry Exploration Environment Analysis*, t. 6, 1 fév. 2006.
- [330] C. R. Stanley, « Numerical transformation of geochemical data: 2. Stabilizing measurement error to facilitate data interpretation », *Geochemistry Exploration Environment Analysis*, t. 6, 1 fév. 2006.
- [331] C. R. Stanley, « Numerical transformation of geochemical data: 2. Stabilizing measurement error to facilitate data interpretation », *Geochemistry Exploration Environment Analysis*, t. 6, 1 fév. 2006.
- [332] J.-L. Starck, F. D. Murtagh et A. Bijaoui, *Image Processing and Data Analysis : The Multiscale Approach*, 1st. 1998.
- [333] J.-L. Starck, F. D. Murtagh et J. M. Fadili, *Sparse Image and Signal Processing*. Cambridge University Press, 2010.
- [334] J.-L. Starck, F. Murtagh et J. Fadili, *Sparse Image and Signal Processing: Wavelets and Related Geometric Multiscale Analysis*, 2nd. Cambridge University Press, 2015.
- [335] C. A. Stow, K. H. Reckhow et S. S. Qian, « A Bayesian approach to retransformation bias in transformed regression », *Ecology*, t. 87, n° 6, p. 1472-1477, 2006.
- [336] B. Strimbu, « Correction for bias of models with lognormal distributed variables in absence of original data », *Annals of Forest Research*, t. 55, n° 2, p. 265-279, 2012.
- [337] B. M. Strimbu, A. Amarioarei, J. P. McTague et M. M. Paun, « A posteriori bias correction of three models used for environmental reporting », *Forestry: An International Journal of Forest Research*, t. 91, n° 1, p. 49-62, août 2017.
- [338] B. M. Strimbu, A. Amarioarei et M. Paun, « A parsimonious approach for modeling uncertainty within complex nonlinear relationships », *Ecosphere*, t. 8, n° 9, e01945, 2017.
- [339] B. M. Strimbu, A. Amarioarei et M. Paun, « Nonlinear parsimonious forest modeling assuming normal distribution of residuals », *European Journal of Forest Research*, t. 140, n° 3, p. 659-674, juin 2021.
- [340] D. Suescún-Díaz et G. Espinosa-Paredes, « On the numerical solution of the point reactor kinetics equations », *Nuclear Engineering and Technology*, t. 52, déc. 2019.
- [341] F. Sureau, « Exploitation de corrélations spatiales et temporelles en tomographie par émission de positrons », Thèse de doctorat, Université Paris Sud - Paris XI, juin 2008.
- [342] S. Takahama, A. M. Dillner, A. T. Weakley, M. Reggente, C. Bürki, M. Lbadaoui-Darvas, B. Debus, A. Kuzmiakova et A. S. Wexler, « Atmospheric particulate matter characterization by Fourier transform infrared spectroscopy: a review of statistical calibration strategies for carbonaceous aerosol quantification in US measurement networks », *Atmospheric Measurement Techniques*, t. 12, n° 1, p. 525-567, 2019.
- [343] M. Tamborrino et P. Lansky, « Shot noise, weak convergence and diffusion approximations », *Physica D: Nonlinear Phenomena*, t. 418, p. 132-145, 2021.
- [344] M. C. Teich, « Normalizing Transformations for Dead-Time-Modified Poisson Counting Distributions », *Biol. Cybern.*, t. 53, p. 121-124, 1985.

-
- [345] M. Tepper, A. Giovannucci et E. Pnevmatikakis, « Anscombe Meets Hough: Noise Variance Stabilization Via Parametric Model Estimation », *ICASSP, IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing - Proceedings*, t. 2018-April, n° 3, p. 1703-1707, 2018.
- [346] R. Tibshirani, « Estimating Transformations for Regression via Additivity and Variance Stabilization », *Journal of the American Statistical Association*, t. 83, 402 juin 1988.
- [347] M. Tiefelsdorf, D. A. Griffith et B. Boots, « A variance-stabilizing coding scheme for spatial link matrices », *Environment and Planning A*, t. 31, 1 1999.
- [348] M. Tiefelsdorf, « Note on the reverse Box-Cox transformation, A note on switching between transformed and untransformed regression systems », unpublished lecture notes, 2013.
- [349] L. H. C. Tippett, « 2—Statistical methods in textile research. part 2—uses of the binomial and Poisson distributions », *Journal of the Textile Institute Transactions*, t. 26, 1 jan. 1934.
- [350] W. M. Trenholme et D. J. Keefe, « A Neutron Flux Measuring Channel Covering Ten Decades of Reactor Power with a Single Fixed-Position Detector », *IEEE Transactions on Nuclear Science*, t. 14, n° 1, p. 253-260, fév. 1967.
- [351] T. Trigano, E. Barat, T. Dautremer et T. Montagu, « Fast Digital Filtering of Spectrometric Data for Pile-up Correction », *IEEE Signal Processing Letters*, t. 22, n° 7, p. 973-977, juill. 2015.
- [352] T. Trigano, T. Dautremer, E. Barat et A. Souloumiac, « Pile-up correction algorithms for nuclear spectrometry », *Proceedings. (ICASSP '05). IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, t. 4, mars 2005, p. 441-444.
- [353] T. Trigano, I. Gildin et Y. Sepulcre, « Pileup Correction Algorithm using an Iterated Sparse Reconstruction Method », *IEEE Signal Processing Letters*, t. 22, n° 9, p. 1392-1395, sept. 2015.
- [354] T. Trigano, U. Isserles, T. Montagu et Y. Ritov, « Semiparametric curve alignment and shift density estimation: ECG data processing revisited », *Signal Processing*, IntechOpen, 2010.
- [355] T. Trigano, Y. Sepulcre et Y. Ritov, « Sparse Reconstruction Algorithm for Nonhomogeneous Counting Rate Estimation », *IEEE Transactions on Signal Processing*, t. 65, n° 2, p. 372-385, jan. 2017.
- [356] T. Trigano, Y. Sepulcre, M. Tal et Y. Mashiach, « On a sparse regression algorithm for activity estimation in Gamma spectrometry », *2010 IEEE 26-th Convention of Electrical and Electronics Engineers in Israel*, nov. 2010, p. 000 268-000 272.
- [357] T. Trigano, A. Souloumiac, E. Moulines et F. Roueff, « Non parametric inference for pile-up correction in nuclear spectrometry », *IEEE/SP 13th Workshop on Statistical Signal Processing, 2005*, juill. 2005, p. 745-750.
- [358] T. Trigano, « Traitement statistique du signal spectrométrique », Thèse de doctorat, Telecom ParisTech, 2006.

- [359] T. Trigano, E. Barat, T. Dautremer et T. Montagu, « Fast digital filtering of spectrometric data for pile-up correction », *IEEE Signal Processing Letters*, t. 22, n° 7, p. 973-977, 2014.
- [360] T. Trigano, F. Roueff, E. Moulines, A. Souloumiac et T. Montagu, « Energy spectrum reconstruction for HPGe detectors using analytical pile-up correction », *2006 IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing Proceedings*, IEEE, t. 3, 2006.
- [361] T. Trigano, A. Souloumiac, T. Montagu, F. Roueff et E. Moulines, « Statistical pileup correction method for HPGe detectors », *IEEE Transactions on Signal Processing*, t. 55, n° 10, p. 4871-4881, 2007.
- [362] A. C. Tsai, M. Liou, M. Simak et P. E. Cheng, « On hyperbolic transformations to normality », *Computational Statistics & Data Analysis*, t. 115, nov. 2017.
- [363] J. W. Tukey et P. G. Moore, « “Answer to Query 112” », *Biometrics*, t. 10, p. 562, 1954.
- [364] M. C. K. Tweedie et A. Veevers, « The Inversion of Cumulant Operators for Power-Series Distributions, and the Approximate Stabilization of Variance by Transformations », *Journal of the American Statistical Association*, t. 63, n° 321, p. 321-328, mars 1968.
- [365] R. E. Uhrig, *Random Noise Technique in Nuclear Reactor Systems*. Ronald Press, 1970.
- [366] B. Uniejewski, R. Weron et F. Ziel, « Variance Stabilizing Transformations for Electricity Spot Price Forecasting », *IEEE Transactions on Power Systems*, 2017.
- [367] E. Ušpuras, H. Arahmane, E.-M. Hamzaoui et R. C. El Moursli, « Neutron Flux Monitoring Based on Blind Source Separation Algorithms in Moroccan TRIGA MARK II Reactor », *Science and Technology of Nuclear Installations*, p. 1-8, mars 2017.
- [368] A. W. Van der Vaart, *Asymptotic statistics* (Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics), CUP. Cambridge University Press, 2000.
- [369] A. Veevers et M. C. K. Tweedie, « Variance-Stabilizing Transformation of a Poisson Variate by a Beta Function », *Applied Statistics*, t. 20, n° 3, p. 304-308, 1943.
- [370] A. Veevers et M. C. K. Tweedie, « Variance-Stabilizing Transformation of a Poisson Variate by a Beta Function », *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, t. 20, 3 1971.
- [371] G. Verdier, « Détection Statistique de Rupture de Modèle dans les Systèmes Dynamiques - Application à la Supervision de Procédés de Dépollution Biologique », Theses, Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, nov. 2007.
- [372] L. Vermeeren, M. Weber, L. Oriol, S. Breaud, P. Filliatre, B. Geslot, C. Jammes, S. Normand et B. Lescop, « Experimental Verification of the Fission Chamber Gamma Signal Suppression by the Campbell Mode », *IEEE Transactions on Nuclear Science*, t. 58, n° 2, p. 362-369, 2011.

- [373] J. Verrel, « Distributional properties and variance-stabilizing transformations for measures of uncontrolled manifold effects », *Journal of Neuroscience Methods*, t. 191, 2 2010.
- [374] B. Vidakovic, *Statistical Modeling by Wavelets* (Wiley Series in Probability and Statistics), 1^{re} éd. Wiley-Interscience, 1999.
- [375] M. Wang, B. Lyu et G. Yu, « ConvexVST: A Convex Optimization Approach to Variance-stabilizing Transformation », *Proceedings of the 38th International Conference on Machine Learning* M. Meila et T. Zhang, sér. Proceedings of Machine Learning Research, t. 139, PMLR, juill. 2021, p. 10 839-10 848.
- [376] Q. J. Wang, D. L. Shrestha, D. E. Robertson et P. Pokhrel, « A log-sinh transformation for data normalization and variance stabilization », *Water Resources Research*, t. 48, 5 mai 2012.
- [377] Wikipedia contributors, *Euler substitution* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*, [Online; accessed 21-January-2024], 2023.
- [378] R. Willett, « Multiscale analysis of photon-limited astronomical images », *Statistical Challenges in Modern Astronomy IV*, t. 371, 2007, p. 247.
- [379] M. Williams, *Random Processes in Nuclear Reactors*. Pergamon, 1974.
- [380] E. B. Wilson et M. M. Hilferty, « The Distribution of Chi-square », *Proceedings of the National Academy of Sciences*, t. 17, 12 déc. 1931.
- [381] J. T. Wood, « A Variance Stabilizing Transformation for Coefficients of Concordance and for Spearman's Rho and Kendall's Tau », *Biometrika*, t. 57, 3 déc. 1970.
- [382] D. L. Woodruff et G. Slevogt, « Variance stabilizing transformation of wind forecast errors », *Wind Energy*, 2015.
- [383] L. Yang, H.-R. Cao, J.-L. Zhao, Z.-H. Zhang, Q. Li, G.-B. Wu, Y.-Q. Zhang, G.-Q. Zhong, L.-Q. Hu et Z.-J. Zhang, « Development of a wide-range and fast-response digitizing pulse signal acquisition and processing system for neutron flux monitoring on EAST », *Nuclear Science and Techniques*, t. 33, n^o 3, p. 35, mars 2022.
- [384] I.-K. Yeo et R. Johnson, « A new family of power transformations to improve normality or symmetry », *Biometrika*, t. 87, déc. 2000.
- [385] S. Yuan et A. Kawai, « Numerical aspects of shot noise representation of infinitely divisible laws and related processes », *arxiv preprint*, 2021.
- [386] M. Zarei, « A Kalman filtering of the Self-Powered Neutron Detector current to determine excess reactivity », *Radiation Physics and Chemistry*, t. 188, p. 109 602, 2021.
- [387] S. Zeinalov, O. Sidorova, P. Sedyshev, V. Shvetsov, Y. Lee et U.-W. Nam, « Thermal neutron intensity measurement with fission chamber in current, pulse and Campbell modes », *EPJ Web Conf.*, t. 231, p. 05 009, 2020.
- [388] A. N. Zemliachenko, R. A. Kozhemiakin, M. L. Uss, S. K. Abramov, N. N. Ponomarenko, V. V. Lukin, B. Vozel et K. Chehdi, « Lossy compression of hyperspectral images based on noise parameters estimation and variance stabilizing transform », *Journal of Applied Remote Sensing*, t. 8, 1 août 2014.

- [389] D. Zha et T. Qiu, « A new algorithm for shot noise removal in medical ultrasound images based on alpha-stable model », *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, t. 20, n° 6, p. 251-263, 2006.
- [390] B. Zhang, M. J. Fadili et J.-L. Starck, « Multi-scale variance stabilizing transform for multi-dimensional Poisson count image denoising », *Proceedings of the ICASSP Conference*, t. II, Toulouse, mai 2006, p. 81-84.
- [391] B. Zhang, M. J. Fadili, J.-L. Starck et J.-C. Olivo-Marin, « Multiscale variance stabilizing transform for mixed-Poisson-Gaussian processes and its applications in bioimaging », *Proceedings of the ICASSP Conference*, 2007.
- [392] B. Zhang, « Contributions à la microscopie à fluorescence en imagerie biologique : modélisation de la PSF, restauration d'images et détection super-résolutive », thèse de doctorat, Télécom ParisTech, nov. 2007.
- [393] B. Zhang, J. M. Fadili et J. L. Starck, « Wavelets, Ridgelets, and Curvelets for Poisson Noise Removal », *IEEE Transactions on Image Processing*, t. 17, 7 juill. 2008.
- [394] J. Zhang et K. Hirakawa, « Improved Denoising via Poisson Mixture Modeling of Image Sensor Noise », *IEEE Transactions on Image Processing*, t. 26, 4 avr. 2017.
- [395] L. Zhang, D. Sidoti, A. Bienkowski, K. R. Pattipati, Y. Bar-Shalom et D. L. Kleinman, « On the Identification of Noise Covariances and Adaptive Kalman Filtering: A New Look at a 50 Year-Old Problem », *IEEE Access*, t. 8, p. 59 362-59 388, 2020.
- [396] M. Zhang, F. Zhang, Q. Liu et S. Wang, « VST-Net: Variance-stabilizing transformation inspired network for Poisson denoising », *Journal of Visual Communication and Image Representation*, t. 62, juill. 2019.
- [397] Y. Zhang, Z. Wen, M. P. Washburn et L. Florens, « Improving Label-Free Quantitative Proteomics Strategies by Distributing Shared Peptides and Stabilizing Variance », *Analytical Chemistry*, t. 87, 9 mai 2015.
- [398] Y. Zhang, P. Song et Q. Dai, « Fourier ptychographic microscopy using a generalized Anscombe transform approximation of the mixed Poisson-Gaussian likelihood », *Optics Express*, t. 25, 1 jan. 2017.
- [399] G. Zhong, K. Li, L. Hu, H. Cao, R. Zhou, S. Lin et al., « Development of a wide-range neutron flux monitoring system in EAST », *Journal of Instrumentation*, t. 15, n° 05, P05011, mai 2020.
- [400] R. Zhu, Z. Liu, Z. He, X. Wen, X. Zhou, X. Mou et al., « Design and performance of an wide-range real-time NFM system using higher order Campbell mode », *Journal of Instrumentation*, t. 16, P07025, juill. 2021.