



HAL
open science

Modélisation, analyse mathématique et simulation numérique de grandes flottes de drones autonomes.

Axel Maupoux

► **To cite this version:**

Axel Maupoux. Modélisation, analyse mathématique et simulation numérique de grandes flottes de drones autonomes.. Mathématiques [math]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2023. Français. NNT : 2023TOU30303 . tel-04639007

HAL Id: tel-04639007

<https://theses.hal.science/tel-04639007v1>

Submitted on 8 Jul 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

**En vue de l'obtention du
DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE
Délivré par l'Université Toulouse 3 - Paul Sabatier**

**Présentée et soutenue par
Axel MAUPOUX**

Le 18 décembre 2023

**Modélisation, analyse mathématique et simulation numérique de
grandes flottes de drones autonomes**

Ecole doctorale : **EDMITT - Ecole Doctorale Mathématiques, Informatique et
Télécommunications de Toulouse**

Spécialité : **Mathématiques et Applications**

Unité de recherche :
IMT : Institut de Mathématiques de Toulouse

Thèse dirigée par
Claudia NEGULESCU et Guillaume DUFOUR

Jury

Mme Pauline LAFITTE, Rapporteur
M. Philippe HELLUY, Rapporteur
M. Philippe THIEULLEN, Examineur
Mme Claudia NEGULESCU, Directrice de thèse
M. Guillaume DUFOUR, Co-directeur de thèse
M. Pierre DEGOND, Président

Were it so easy...

Arbiter

Remerciements

Je remercie tout d'abord Pauline Lafitte et Philippe Helluy d'avoir accepté de rapporter cette thèse, pris le temps de la lire, et montré tant d'intérêt pour mes travaux.

Je remercie ensuite Pierre Degond d'avoir présidé mon jury de thèse, ainsi que tout le jury, notamment Philippe Thieullen qui n'a pas encore été cité, d'avoir accepté de se prêter à cet exercice. Je me dois aussi de remercier Franck Hervy d'avoir chaperonné mon cas auprès de l'AID.

Merci à l'ONERA et à l'AID d'avoir financé ma thèse, et aux équipes de l'IMT et de l'ONERA de m'avoir accueilli.

Je remercie particulièrement ma direction, Claudia et Guillaume, pour m'avoir accompagné, supporté (dans tous les sens du terme) et soutenu dans ces presque quatre années pas faciles tous les jours. À leurs côtés, j'ai énormément appris sur les mathématiques, les relations humaines, et sur moi-même.

Je pense également à Marie-Hélène Vignal, pour m'avoir offert son aide et partagé son expérience.

Sans les efforts de toutes ces personnes, ce manuscrit n'aurait jamais pu voir le jour, et je les en remercie encore chaleureusement.

J'aimerais maintenant donner mes plus distingués remerciements aux personnes suivantes :

Je pense d'abord aux permanents avec qui j'ai pu discuter, pour leurs sages conseils sur la vie. Sans oublier le doctorant qui hurle plein de choses bizarres et qui chante dans un bureau pas trop loin, pour m'avoir offert des séances de méditation régulières.

Ensuite viennent les tableaux de plusieurs personnes, pour m'avoir permis de les couvrir de pleins de choses n'ayant rien à voir avec les mathématiques.

Il reste enfin tous collègues de bureaux divers et variés que j'ai plus ou moins côtoyés, et qui ont apporté un peu de vie dans ces longs moments de solitude, quand cela fait trois fois que l'on se dit que c'est la bonne, mais que le théorème que l'on regarde méchamment depuis plusieurs semaines est toujours faux.

Voici maintenant les meilleurs, la crème de la crème, qui méritent des remerciements particuliers et un flot intarissable d'éloges :

À "Stella", qui est venu à mon secours le soir de la soumission du manuscrit pour un problème LaTeX insoluble. Merci de m'avoir permis de dormir en paix !

À la section sport mécanique de l'ONERA, pour avoir ravivé la flamme de ma passion pour le sport mécanique et le karting. Nous nous reverrons sur la piste !

Aux collègues que j'ai côtoyé de plus près, rangés par ordre alphabétique pour éviter tout classement et toute jalousie : Adrien, Arthur, Dung, Étienne, Gabriel, Maëlys, Matthias, Matthias 2, (le grand) Michaelis, Timothée. C'est vous qui m'avez donné

l'envie de revenir tous les jours et permis d'aller au bout. J'espère que ces nouvelles amitiés perdureront, et que je pourrai vous aider lorsque votre tour sera venu.

À Bruno d'être arrivé au bon moment pour me donner un coup de main.

Aux copains Gauthier, Roland, Enguerrand, Bruno (non un autre), Thomas, Pierre et tous ceux que j'ai moins vu ces derniers temps, pour toujours avoir été partants pour une ou deux, et parfois beaucoup plus de parties, pour avoir lancé des discussions passionnantes à l'heure à laquelle j'allais dormir, et m'avoir soutenu dans les moments les plus difficiles.

À mes parents, qui ont supporté mes humeurs, fait plein de bonnes choses à manger, et se sont inquiétés pour moi pendant tout ce temps. Des bisous. Aux chiens aussi. Ah, et à ma sœur, que je n'ai pas trop vu.

Enfin à ma Chouquette, la plus belle d'entre toutes, sans qui je ne serais pas là aujourd'hui. Tu as échappé à mon discours enflammé après le verdict du jury, mais tu ne t'échapperas pas ici : tu es celle qui m'a sauvé au moment où j'étais au plus bas. Celle qui a su trouver ce qu'il y a de bon en moi. Celle qui d'un sourire me donne la force d'aller plus loin. Tu as illuminé ma vie, et je ne t'en remercierai jamais assez. Je resterai à tes côtés aussi longtemps qu'il me sera permis, et te soutiendrai quoi qu'il arrive.

J'espère un jour avoir l'opportunité de rendre la pareille à toutes ces personnes. Surtout, n'oubliez pas d'aller manger à 11h30, c'est important.

Table des matières

Notations	vii
Introduction	1
1 Modélisation microscopique : choix et étude d'un modèle de consensus	5
1.1 Définition de l'essaim de drones et notations	6
1.1.1 Caractéristiques des drones	6
1.1.2 Notations	8
1.1.3 Modélisation des contraintes des drones	9
1.1.4 Modèle d'essaim de drones	11
1.2 Choix d'un modèle de consensus pour de grandes flottes de drones . . .	13
1.2.1 Modèle de Vicsek	13
1.2.2 Modèle de Vicsek continu	14
1.2.3 Modèle de Cucker-Smale	15
1.2.4 Modèle d'attitude corporelle	15
1.2.5 Autres modèles de consensus	16
1.3 Étude bibliographique des variantes du modèle de Cucker-Smale	16
1.3.1 Modèle de Cucker-Smale	17
1.3.2 Modèle de Cucker-Smale singulier	18
1.3.3 Multi-agrégation pour le modèle de Cucker-Smale	19
1.3.4 Équilibrage de la force de communication	22
1.3.5 Graphe de communication non-complet	23
1.3.6 Incertitudes	25
1.4 Conclusion du chapitre	26
2 Développement d'une stratégie d'évitement des collisions par utilisation du flot optique	29
2.1 Définition du flot optique et modèle associé	30
2.2 Évitement de collision chez les flottes se repérant par flot optique . . .	32
2.2.1 Existence d'une distance minimale entre agents pour tout temps	33
2.2.2 Preuve du résultat	34
2.3 Généralisation du résultat à des variantes du modèle incorporant des effets propres aux drones	39
2.3.1 Diminution des hypothèses sur la force de communication	39
2.3.2 Graphe de communication limité	40
2.3.3 Incertitudes sur le flot optique	41
2.3.4 Loi de commande supplémentaire générale	45

2.3.5	Exemple de collision à l'infini pour une force de suivi de position	46
2.3.6	Existence d'une distance minimale pour une force de suivi de vitesse	47
2.3.7	Extension à une force d'attraction et de répulsion	48
2.4	Conclusion du chapitre	49
3	Enrichissement du modèle microscopique et simulations numériques	51
3.1	Imposer une formation de vol : modèle trois-zones	52
3.1.1	Présentation du modèle trois-zones	52
3.1.2	Existence, unicité et comportement en temps long des solutions	54
3.1.3	Étude de la vitesse de convergence du système	58
3.1.3.1	Cas de deux drones	60
3.1.3.2	Cas général	63
3.1.4	Ajout d'une force complémentaire pour réduire les oscillations .	65
3.1.5	Étude de la formation de vol en fonction du potentiel d'interaction	69
3.1.6	Illustration numérique de l'instabilité de la formation en réseau	73
3.1.6.1	Modèle trois-zones	73
3.1.6.2	Modèle trois-zones-croisé	74
3.1.7	Étude numérique de la formation en disque en fonction du potentiel d'interaction	76
3.1.7.1	Influence du nombre de drones	77
3.1.7.2	Influence du seuil d'interaction du potentiel quadratique	77
3.1.7.3	Influence du rapport entre attraction et répulsion	78
3.2	Ajout de forces externes à la flotte	80
3.2.1	Alignement vers une vitesse cible	80
3.2.2	Convergence vers une cible en position	81
3.2.3	Évitement d'obstacles	84
3.3	Simulations complémentaires	85
3.3.1	Présentation du solveur microscopique	85
3.3.2	Étude des performances du solveur en fonction du nombre de drones	87
3.4	Conclusion du chapitre	88
4	Modélisation macroscopique : changement d'échelle	91
4.1	Changement d'échelle formel pour les modèles microscopiques	92
4.1.1	Limite de champ moyen : étude de l'effet moyen de la flotte sur un drone	92
4.1.2	Limite hydrodynamique : étude des états moyens de la flotte . .	94
4.1.3	Présentation des forces macroscopiques	96
4.2	Quantification de la déviation entre échelles pour le modèle trois-zones croisé	97
4.2.1	Présentation du résultat	98
4.2.2	Étude de l'écart entre les vitesses	100
4.2.3	Étude de l'écart entre les densités	102
4.2.4	Étude des convergences et preuve du résultat	103
4.3	Étude de la conservation des comportements du modèle lors du changement d'échelle	105

4.3.1	Caractérisation de la limite en temps long et agrégation pour le modèle trois-zones-croisé macroscopique	106
4.3.2	Étude de la convergence exponentielle pour le modèle trois-zones	111
4.3.3	Phénomène de concentration pour le modèle trois-zones macroscopique avec potentiel quadratique	113
4.4	Conclusion du chapitre	114
5	Validation numérique des modèles à l'échelle macroscopique	117
5.1	Présentation du solveur macroscopique	117
5.2	Validation du solveur macroscopique par comparaison avec le solveur microscopique	120
5.2.1	Outil de comparaison des échelles	120
5.2.2	Comparaison des échelles	121
5.3	Conclusion du chapitre	125
6	Nouveau modèle d'occupation de zone	127
6.1	Représentation de l'occupation de zone avec une densité cible de drones	128
6.1.1	Définition du modèle	128
6.1.2	Comportement en temps long	129
6.1.3	Avantages et inconvénients du modèle	130
6.2	Modèle d'occupation de zone avec inertie	131
6.2.1	Inspiration d'après un modèle d'aérosol	131
6.2.2	Définition du nouveau modèle macroscopique	132
6.2.3	Définition du modèle microscopique	133
6.3	Étude du comportement en temps long du nouveau modèle	134
6.4	Étude des changement d'échelles entre les modèles	139
6.4.1	Déviations entre les systèmes à une et à deux équations	139
6.4.2	Limite d'inertie nulle	141
6.5	Simulations numériques du modèle	144
6.5.1	Comparaison des simulations micro- et macroscopiques	144
6.5.2	Recherche des paramètres de reconstruction optimaux	147
6.5.3	Étude de l'impact de la forme de la cible sur son recouvrement .	151
6.5.4	Étude de l'évitement des collisions	154
6.5.5	Stabilité de la formation finale	155
6.6	Conclusion du chapitre	156
	Conclusion	159
	Références	163

Notations

N	Nombre de drones
$V := (v_i)_{i=1}^N$	Collection des vitesses des drones
$X := (x_i)_{i=1}^N$	Collection des position des drones
$v_c := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N v_j$	Centre de vitesse de la flotte
$x_c := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j$	Centre de masse de la flotte
$i \in \llbracket 1, N \rrbracket$	Indice du drone i
K	Énergie cinétique
P	Énergie potentielle
R_c	Portée de communication des drones
R_s	Distance de sécurité des drones
R_v	Portée de vision des drones
α_v	Angle de vision des drones
χ	Énergie corrective
$\rho^N(t, x) := \int_{\mathbb{R}^d} f^N dv$	Densité empirique
$f^N(t, x, v) := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{x_j(t)}(x) \delta_{v_j(t)}(v)$	Mesure empirique associée à la flotte
r_M	Distance inter-drone maximale au cours du temps
r_m	Distance inter-drone minimale au cours du temps
$v_{ij} = v_i - v_j$	Vitesse relative des drones i et j
x_i	Position du drone i
$x_{ij} = x_i - x_j$	Position relative des drones i et j
v_i	Vitesse du drone i
w_i	Orientation du drone i
ψ	Force de communication du modèle de Cucker-Smale
φ	Potentiel d'interaction du modèle trois-zones

Introduction

Ces dernières années, les drones ont intégré notre quotidien et, hors des utilisations à but récréatif, sont employés pour gagner en efficacité dans de multiples domaines d'application, comme la surveillance du vieillissement d'un pont [91, 49], ou pour observer la qualité d'un champ à ensemercer [2, 53]. Avec la baisse des coûts de fabrication et la maîtrise croissante de leur navigation, les applications impliquant un plus grand nombre de drones commencent à être de plus en plus nombreuses. Nous pouvons par exemple citer le cas des ballets aériens se multipliant dans les grandes villes, pour remplacer des feux d'artifices ou des publicités, comme illustrés dans la figure 1. Dans cette application, les trajectoires des drones sont calculées à l'avance.



FIGURE 1 – Ballet aérien d'approximativement 1500 drones pour le festival Duanwu le 22/06/2023 à Shenzhen [75] (gauche). Publicité pour la licence Halo avec 400 drones, le 15/03/2022 à Austin [50] (droite).

La petite taille, l'agilité et le faible coût de fabrication des drones, par rapport à des véhicules aériens classiques capables d'embarquer des humains comme les avions ou les hélicoptères, permettent d'imaginer des tâches beaucoup plus complexes, avec un nombre de drones élevé. Ces missions tirant parti de leurs spécificités de navigation et de leur aspect non critique, c'est-à-dire que la perte d'un drone peut être acceptable selon la mission. Par exemple, là où nous utilisons des images satellites et des passages en hélicoptère pour rechercher un avion écrasé en mer ou en montagne, une flotte de drones pourrait être déployée afin de balayer une plus grande surface. Ou encore, lors d'accidents dans des usines chimiques ou nucléaires, l'intervention de personnel humain, même si elle reste parfois indispensable, pose des problèmes de sécurité évidents. L'utilisation préalable d'une flottille de drones pour reconnaître les environs, voire déblayer certaines parties, permettrait de limiter les risques pour les sauveteurs, et de localiser des blessés plus rapidement.

Cependant, avec un nombre de drones important et des missions de plus en plus complexes, il devient impossible de recourir à des pilotes, ou de même de calculer à l'avance les trajectoires des drones à cause du coût de ce type de calcul et de la difficulté à intégrer à l'avance tous les événements (ou les interactions) que vont rencontrer les

drones. Il faut donc automatiser ces flottes. Par automatiser nous entendons que les drones doivent être autonomes et prendre leurs décisions eux-même, en fonction de leur état et de leur environnement proche perçu. En effet, il n'est plus question de calculer en avance la trajectoire des drones, mais plutôt de leur donner des lois de commande, qui leur permettent de décider quel comportement adopter en fonction de différents stimuli extérieurs. Par exemple, si nos drones sont équipés de caméras et repèrent un point d'intérêt, ils s'y dirigeront. À contrario, en cas de détection d'obstacle ou d'un autre drone à proximité, une manoeuvre doit être enclenchée pour prévenir le risque de collision et donc de perte du drone.

Il est important de noter que nous considérons que les calculs et la prise de décision se font à bord de chaque drone. Ils ne sont pas chacun en liaison avec une unité de contrôle centrale, qui prendrait l'ensemble des décisions pour la flotte. Cette dernière est dite décentralisée, ce qui veut dire que tous les drones sont indépendants. Ils peuvent toutefois communiquer entre eux pour échanger des informations.

Puisque nous voulons utiliser un nombre important d'agents, il est crucial de limiter les coûts de production et de perte, de limiter le temps de calcul, d'échange et d'interprétation de données. Par conséquent, nous considérons que nos drones ont une faible puissance de calcul, et leurs lois de commande devront être simples pour s'y adapter. De la même manière, le nombre de lois de commandes devra être le plus limité possible.

Ainsi, le comportement global de la flotte et l'accomplissement de ses objectifs émergent du comportement de chaque drone, issus de leurs lois de commande propre, et de leur interaction.

L'enjeu principal est donc de calibrer les différents paramètres de la flotte et des lois de commande des drones, afin de s'assurer qu'une mission donnée sera accomplie dans les temps voulus. Pour cela, nous voulons valider numériquement que la flotte fait ce que nous attendons d'elle. Les simulations pourraient aussi bien permettre de déterminer les valeurs que doivent prendre les lois de commande, que les caractéristiques techniques des drones nécessaires à l'accomplissement de la mission. Afin de pouvoir optimiser les paramètres de la flotte, ces simulations devront être le plus rapide possible, puisqu'il sera nécessaire d'en faire un nombre conséquent pour balayer plusieurs plages de paramètres.

À la base de ces simulations se trouve un modèle mathématique permettant de représenter la dynamique de la flotte de drones. Il existe dans la littérature beaucoup de modèles de comportement de drones, voire de flottes de drones [99, 34, 38, 48, 79, 5, 76, 78], dont les comportements sont démontrés théoriquement ou observés numériquement, comme l'alignement des vitesses en temps long. Toutefois, ces modèles et ces études s'intéressent généralement qu'à un seul comportement à la fois, et n'étudient pas leurs interactions. Ces interactions pourraient conduire à des comportements dangereux pour la flotte, ou l'empêcher d'accomplir sa mission, si deux lois de commande ont des effets contradictoires.

C'est ce qui justifie cette étude. Elle consiste à développer un modèle simple d'évolution de grandes flottes de drones. Ce modèle doit permettre la représentation d'une variété de comportements et la considération des limitations techniques des drones. De plus la simulation du vol de la flotte doit être le plus rapide possible, afin d'optimiser les paramètres à utiliser.

Cette thèse s'articule autour de trois thématiques étroitement liées, qui sont la

modélisation mathématique des lois de commande et leur définition, l'étude théorique des modèles obtenus, et leur simulation numérique efficace.

Le chapitre 1 est une revue des modèles de grande population les plus couramment utilisés. Parmi ces modèles, nous choisirons le plus simple d'expression présentant les caractéristiques les plus intéressantes, afin de nous en servir de base pour ajouter des comportements plus complexes par la suite. Le critère de simplicité d'expression est nécessaire en raison de la faible puissance de calcul de nos drones. Nous commencerons le chapitre en définissant clairement les caractéristiques de nos agents, avant de présenter les modèles et de faire notre choix. Nous concluons le chapitre avec une étude bibliographique approfondie du modèle choisi, afin d'en connaître les limites.

L'objectif du chapitre 2 sera d'étudier la capacité du modèle choisi dans le chapitre 1 à garantir que les drones n'entreront pas en collision au cours du vol. Pour cela, nous ferons le rapprochement entre ce modèle et l'utilisation d'une technologie de navigation appelée *flot optique*. Nous étudierons l'évitement des collisions dans un cas général, avant de nous intéresser à des variations modélisant les contraintes techniques des drones, comme leur capacité de communication, ou certains types de missions comme le suivi d'une cible.

Le chapitre 3 sera dédié à l'enrichissement de notre modèle choisi et étudié dans les précédents chapitres. Nous définirons dans la première partie une loi de commande pour donner une formation de vol à la flotte de drones. Nous étudierons le comportement en temps long du modèle obtenu, avant d'étudier numériquement les propriétés des formations. Nous présenterons dans le reste du chapitre quelque lois de commandes centrées sur les objectifs et l'environnement des drones.

À travers les simulations que nous effectuerons, nous constaterons que le coût des simulations croît beaucoup avec le nombre de drones à considérer. Nous avons alors deux choix pour pallier ce problème : optimiser l'algorithme de calcul, ou changer de niveau de description. Nous opterons pour le second, afin de passer d'un niveau de description microscopique où nous considérons la dynamique de tous les drones, à un niveau macroscopique ne s'intéressant qu'à la dynamique de la densité locale de drones au sein de la flotte. Ainsi le coût des simulations numériques ne dépendra plus du nombre d'agent, mais seulement de la précision spatiale requise pour l'accomplissement de la mission de la flotte. L'analyse développée dans les premiers chapitres sera la base de cette description macroscopique, puisqu'elle correspond à l'évolution en temps réel des drones. Cependant, pour savoir si la flotte remplit son objectif ou non, nous pouvons nous contenter d'un modèle macroscopique. Nous rappelons que l'un des objectifs de la thèse est de fournir un modèle rapide à simuler pour pouvoir calibrer les différents paramètres des lois de commande.

Ainsi, nous verrons dans le chapitre 4 comment passer d'une échelle de description micro- à macroscopique. Nous présenterons comment effectuer ce passage formellement, puis montrerons comment rapprocher les deux modèles obtenus. Une fois cela terminé, nous démontrerons que les comportements de la flotte ont été conservés lors du passage.

Le chapitre 5 servira à présenter comment nous simulons les modèles macroscopiques, puis à valider numériquement le résultat du chapitre 4, en illustrant le fait que le modèle macroscopique est une bonne représentation du modèle microscopique. Pour cela, nous comparerons des simulations numériques d'un même modèle selon les deux approches (micro- et macroscopique), via une reconstruction locale de la densité de la flotte dans le cas des simulations micro.

La description macroscopique nous offrant de nouvelles variables pour la modélisation de l'essaim, nous pouvons tirer parti de ces dernières pour modéliser des objectifs opérationnels. Ainsi, dans le chapitre 6, nous définissons un nouveau modèle d'occupation de zone. Nous nous sommes inspirés d'un modèle existant [105], qui présente le défaut de ne pas s'écrire sous la forme d'une loi de commande simple. Nous proposons une variation de ce modèle en introduisant une loi de commande appropriée qui, dans la limite de drones avec une inertie négligeable, revient au modèle initial de [105]. Nous étudions le comportement en temps long de notre modèle, ainsi que ses liens avec le modèle de référence. Nous concluons le manuscrit avec des expériences numériques pour étudier plus en profondeur le modèle, notamment l'influence de ses paramètres, et l'effet de la forme de la zone cible sur sa couverture.

Chapitre 1

Modélisation microscopique : choix et étude d'un modèle de consensus

Sommaire

1.1	Définition de l'essaim de drones et notations	6
1.1.1	Caractéristiques des drones	6
1.1.2	Notations	8
1.1.3	Modélisation des contraintes des drones	9
1.1.4	Modèle d'essaim de drones	11
1.2	Choix d'un modèle de consensus pour de grandes flottes de drones	13
1.2.1	Modèle de Vicsek	13
1.2.2	Modèle de Vicsek continu	14
1.2.3	Modèle de Cucker-Smale	15
1.2.4	Modèle d'attitude corporelle	15
1.2.5	Autres modèles de consensus	16
1.3	Étude bibliographique des variantes du modèle de Cucker-Smale	16
1.3.1	Modèle de Cucker-Smale	17
1.3.2	Modèle de Cucker-Smale singulier	18
1.3.3	Multi-agrégation pour le modèle de Cucker-Smale	19
1.3.4	Équilibrage de la force de communication	22
1.3.5	Graphe de communication non-complet	23
1.3.6	Incertitudes	25
1.4	Conclusion du chapitre	26

Nous voulons dans cette thèse développer un modèle d'essaim de drones permettant de prendre en compte un très grand nombre d'individus, tout en préservant certains impératifs opérationnels, tels que l'évitement des collisions tout au long de la durée de leur mission. L'objectif n'est alors pas de montrer que la loi de commande implémentée dans le circuit de guidage de chaque drone lui permet d'atteindre son but, mais plutôt de garantir que l'essaim dans son ensemble pourra satisfaire aux exigences de la mission.

Dans cette optique, ce premier chapitre consiste à sélectionner, dans la bibliographie existante, un modèle de consensus, qui servira de fondement pour intégrer des

comportements plus complexes. Le critère de simplicité de l'expression du modèle a été privilégié pour notre choix. En effet, étant donné que les drones considérés ne disposent pas d'une grande puissance de calcul et doivent réagir rapidement, l'adoption de lois de commande trop sophistiquées n'est pas réalisable.

Dans la section 1.1, nous entamons notre étude en définissant le type de drone que nous prenons en considération, les notations qui lui sont associées, ainsi que les contraintes prises en compte et leur modélisation.

Dans la deuxième section 1.2, nous procédons à l'étude bibliographique qui nous permet de choisir le modèle de consensus. Nous justifions également pourquoi nous sélectionnons ce comportement comme base pour notre étude.

Enfin, dans la section 1.3, nous menons une étude théorique approfondie du modèle choisi, ainsi que de ses variantes, dans le but d'illustrer la richesse de ce modèle et la robustesse du consensus face aux perturbations de la flotte.

Dans l'ensemble du manuscrit, le terme "microscopique" fait référence au fait que nous modélisons individuellement chaque drone de la flotte, en contraste avec ce qui sera réalisé dans le chapitre 4 où nous considérerons une approche "macroscopique" dans laquelle le comportement global de la flotte est étudié sans se pencher sur les détails individuels des drones.

1.1 Définition de l'essaim de drones et notations

Le but de cette thèse est de modéliser l'évolution au cours du temps d'une grande flotte de drones autonomes, qui doivent s'organiser et coopérer pour accomplir diverses tâches. Pour atteindre cet objectif, une définition rigoureuse du type de drone pris en considération et de leurs interactions entre eux et avec l'environnement est essentielle.

1.1.1 Caractéristiques des drones

Tout au long de ce manuscrit, nous utiliserons indifféremment les termes "drone", "agent" ou "individu" pour désigner un drone. Nous portons notre attention sur des drones qui ont la capacité de se déplacer dans toutes les directions et sont capables de vol stationnaire, comme les drones quadrotors. Ces drones peuvent également être équipés de divers capteurs tels que des caméras, LIDAR / RADAR pour la localisation et la détection d'obstacles, ainsi que des moyens de communication tels que la radio ou le bluetooth pour permettre les échanges d'informations au sein de la flotte.

Le but de cette modélisation est de créer des modèles pour de grandes flottes de drones autonomes, capables de mener à bien des missions complexes, y compris dans des environnements dangereux ou éloignés. Ces missions pourraient inclure des scénarios en environnements cloisonnés où la communication avec les drones est difficile (comme dans un réseau de grottes ou dans un environnement sous-marin) ou dans des situations très éloignées, comme la recherche d'un avion perdu en mer. Dans ce contexte, la flotte de drones doit être entièrement autonome, c'est-à-dire qu'une fois les drones lancés, ils ne peuvent plus communiquer avec une unité centrale qui les pilote. Cela signifie que les drones doivent être capables de prendre des décisions seuls, en utilisant uniquement leurs capacités de perception et de communication locale pour accomplir leurs missions de manière coordonnée sans supervision directe.

Cependant, l'utilisation de nombreux drones implique un risque élevé de perte de



FIGURE 1.1 – Exemple de drone quadrotor, pris de [1].

certains d'entre eux. Par conséquent, il est crucial de minimiser l'embarquement de technologie sur les drones, ce qui se traduit par la nécessité de concevoir des lois de commande simples, de limiter la quantité de données à disposition et de s'assurer de leur qualité, ainsi que de garantir la réactivité des drones. Cette simplicité dans le design des lois de commande et des systèmes embarqués est essentielle pour optimiser la gestion de la flotte, car cela permet de réduire les coûts et d'améliorer la fiabilité. Dans cette optique, nous discuterons plus précisément dans la section 1.1.3 des contraintes exactes que nous prendrons en compte.

En outre, en raison du risque de perte de certains drones en cours de mission, nous considérons que tous les drones doivent être interchangeables et identiques. Ainsi, nous ne leur attribuons pas de rôles spécifiques. L'attribution de rôles clés, sautant d'un individu à l'autre, peut être une piste pour poursuivre cette étude. Cette approche permet de faciliter la gestion de la flotte et de garantir que tout drone peut remplir n'importe quelle tâche nécessaire pendant la mission. Cependant, nous ne prenons pas en compte la variation de la quantité de drones au cours d'un vol, bien que cette question soit importante d'un point de vue opérationnel. Nous pouvons toujours supposer qu'à la perte ou l'ajout d'un drone, les agents se rendent compte du changement. Nous utilisons alors un nouveau modèle, avec de nouvelles conditions initiales correspondant à l'état final de la flotte avant sa modification. L'objectif actuel est de développer des modèles et des stratégies qui garantissent la coopération efficace d'une flotte donnée. Toutefois, l'approche macroscopique que nous verrons au chapitre 4 ne se soucie plus du nombre d'agents constituant la flotte.

Maintenant que le type de drone est défini, nous nous intéressons à leur évolution. Étant donné qu'ils ne sont pas pilotés, ces drones doivent prendre des décisions de manière autonome. Pour cela, ils sont équipés de lois de commande spécifiques. Chacune de ces lois de commande correspond à la réponse que le drone aura face à un stimulus donné. Par exemple, le drone peut avoir une loi de commande associée à la détection d'obstacles : s'il observe un obstacle trop proche à l'aide de sa caméra, il s'en éloignera. Il est important de noter que, bien que les drones puissent échanger des

informations telles que leurs positions ou leurs vitesses, chacun possède ses propres lois de commande et prend des décisions de manière autonome, sans se concerter avec les autres membres de la flotte. Cela présente un défi de conception : à partir du comportement global souhaité pour la flotte afin de remplir la mission, il est nécessaire de créer des lois de commande individuelles pour chaque drone qui permettront d'obtenir le comportement désiré à l'échelle de l'ensemble de la flotte. Tout au long de l'étude, il est primordial de garder à l'esprit ce défi de design. Nous insistons sur le fait que la trajectoire de chaque drone n'est pas précalculée, mais résulte plutôt de la réponse autonome de l'agent à son environnement, à sa mission spécifique et à ses interactions avec les autres membres de la flotte.

1.1.2 Notations

Passons maintenant à la représentation mathématique des drones ainsi qu'aux notations associées.

La flotte sera constituée d'un nombre constant de drones, noté N , évoluant dans un espace en $d = 2$ ou 3 dimensions. Tous les drones étant identiques, chacun est associé à un indice $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Chaque drone est caractérisé par sa position $x_i(t) \in \mathbb{R}^d$, sa vitesse $v_i(t) \in \mathbb{R}^d$, et son orientation $w_i(t) \in \mathbb{R}^d$. En effet, étant donné que nos drones peuvent se déplacer dans toutes les directions, leur direction d'intérêt peut différer de leur vitesse. Par exemple, la direction dans laquelle regarde une caméra à bord du drone peut ne pas être alignée avec le déplacement du drone. Cependant, sauf indication contraire pour l'étude d'un modèle spécifique, nous supposons que w_i est équivalent à v_i , soit $w_i(t) \equiv v_i(t)$.

Nous noterons $X(t) := \{x_i(t)\}_{i=1}^N$ et $V(t) := \{v_i(t)\}_{i=1}^N$ les collections respectives des positions et des vitesses de la flotte. Pour ces super-vecteurs, nous utiliserons les normes

$$|U|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^N |u_i|^2}, \quad |U|_\infty := \max_{1 \leq i \leq N} |u_i|.$$

Il sera nécessaire d'étudier les positions et les vitesses relatives, donc nous utiliserons les abréviations suivantes :

$$x_{ij}(t) := x_i(t) - x_j(t), \quad v_{ij}(t) := v_i(t) - v_j(t), \quad r_{ij}(t) := |x_{ij}(t)|,$$

où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{R}^d . Il est important de noter que le double indice ij n'est symétrique que dans le cas de la distance relative r_{ij} .

Enfin, nous utiliserons les centres de masse et de vitesse, définis par

$$x_c(t) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t), \quad v_c(t) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i(t).$$

Nous pourrions être amenés à considérer les valeurs maximales en amplitude des positions et des vitesses par rapport à ces centres :

$$D_X(t) := \max_{i=1, \dots, N} |x_i - x_c|(t), \quad D_V(t) := \max_{i=1, \dots, N} |v_i - v_c|(t),$$

ou les diamètres en position et vitesse de la flotte :

$$\mathcal{D}(t) := \max_{i,j} r_{ij}(t), \quad \mathcal{V}(t) := \max_{i,j} |v_{ij}|(t).$$

1.1.3 Modélisation des contraintes des drones

Avec ces notations établies, nous allons d'abord modéliser les contraintes techniques propres aux drones. Nous proposons un schéma récapitulatif des notations à la fin du paragraphe dans la figure 1.2.

Taille des drones : Nous prenons en compte la taille du drone en définissant une distance de sécurité $R_s > 0$. Si un objet ou un obstacle se trouve à une distance inférieure de R_s du drone, cela entraîne une collision et le drone est perdu. En particulier au sein de la flotte, s'il existe un temps tel que $r_{ij}(t) \leq R_s$, alors les drones i et j seront perdus.

Communications limitées : En ce qui concerne les limites de communication entre les drones, nous définissons la portée de communication du drone $R_c > 0$. Au-delà de cette portée, les drones ne peuvent plus "se voir" les uns les autres, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent plus échanger d'informations directement. Par défaut, dans cette étude, nous supposons que la taille du domaine d'évolution de la flotte est plus petit que leur portée de communication. Ainsi, les drones peuvent toujours se voir, ce qui correspond à un graphe de communication complet. Nous supposons donc sans perte de généralité que $R_c = +\infty$. Nous pouvons nous permettre une telle hypothèse, puisqu'en cas d'obstruction visuelle, les drones peuvent toujours communiquer par radio. Cependant, nous étudierons certains scénarios où $R_c < \infty$, ce qui soulève des questions de connectivité de la flotte.

Champ de vision : L'angle de vue des caméras des drones est limité. Nous définissons ainsi le champ de vision du drone, caractérisé par deux variables. Tout d'abord la portée de vision $R_v > 0$, qui représente la distance maximale à laquelle le drone peut détecter des objets. Elle est à différencier de la portée de communication, puisque cette dernière ne vient pas des mêmes capteurs : les drones communiquent typiquement à longue portée par radio, mais se repèrent par une caméra à faible résolution, ce qui limite leur capacité à percevoir les objets éloignés. La deuxième variable utilisée est l'angle de vision $\alpha_v \in [0, \pi]$, qui définit l'ouverture angulaire du champ de vision du drone. Un objet situé à la position x est considéré dans le champ de vision du drone i dont le capteur est orienté selon w_i si et seulement si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\langle x - x_i, w_i \rangle \geq \cos(\alpha_v) |x - x_i| |w_i|.$$

Tout comme pour la portée de communication, nous supposons par défaut que le champ de vision est complet, c'est-à-dire $R_v = +\infty$ et $\alpha_v = \pi$. Toutefois, lorsque la question de la connectivité se posera, nous examinerons plus en détail ces caractéristiques pour des situations spécifiques.

Délai : La faible puissance de calcul, la vitesse d'échange d'informations et les limitations liées à la qualité des composants comme une faible bande passante ou un faible taux de rafraîchissement de la caméra, font que l'information disponible pour les drones à un instant t peut être celle de l'instant $t - \tau$, où $\tau \geq 0$ est le délai de traitement et de communication de l'information. Dans un premier temps, nous considérons que le temps de réaction des drones est bien inférieur à leur vitesse d'évolution, c'est-à-dire que $\tau = 0$.

Inertie : Deux grands types de modèles sont disponibles dans la littérature. Les modèles du premier ordre, où la vitesse des agents est prescrite, correspondant à une vitesse se modifiant infiniment vite. Dans un modèle du premier ordre, la vitesse v_i est simplement donnée par

$$v_i(t) = F(t, X(t), V(t)).$$

Cependant cette formulation n'est pas compatible avec des conditions réelles. En effet, en raison de la puissance moteur limitée et de la masse du drone, v_i ne peut évoluer qu'à une vitesse limitée. Cela justifie l'utilisation d'un modèle du second ordre, basé sur la seconde loi de Newton, où nous décrivons l'évolution de la vitesse au cours du temps par

$$m_i v_i'(t) = F(t, X(t), V(t)).$$

$m_i > 0$ est la masse du drone, que nous supposons égale à 1, puisque tous les drones sont identiques et que la masse ne change pas la nature de la dynamique de l'essaim. F est une force, décrivant comment la vitesse d'un agent évolue en fonction de l'état de l'essaim et de l'environnement. Plus l'inertie des drones est supposée faible, plus la force est grande et plus la vitesses des agents converge rapidement vers son équilibre. Nous imaginons bien que dans la limite d'inertie nulle, nous retrouvons un modèle d'ordre un. Par ailleurs, nous adimensionnons l'équation en multipliant les forces par une constante, qui sera égale à 1 dans tout le manuscrit par simplicité. En intégrant l'accélération dans le modèle du second ordre, nous prenons en considération la dynamique de la vitesse du drone et ses limites physiques.

Incertitudes : Nous distinguons deux types d'incertitudes. Les incertitudes internes, liées à la précision limitée des capteurs embarqués sur le drone, ce qui entraîne des perturbations sur les quantités mesurées telles que la position ou la vitesse des autres drones. Les incertitudes externes quant à elles proviennent des conditions environnementales, comme par exemple les prises au vent. Ce bruit global affecte l'évolution de la vitesse v_i du drone, introduisant des fluctuations dans son mouvement. Ces bruits peuvent être représentés sous forme de processus stochastiques ou de perturbations aléatoires pour tenir compte de la nature aléatoire de ces variations. Nous ne nous intéresserons pas à ces questions dans ce manuscrit. Nous étudierons toutefois deux modèles incluant des incertitudes dans les sections 1.3.6 et 2.3.3. L'incorporation de bruit à nos modèles constitue une perspective d'évolution intéressante.

Autonomie : Un drone a une durée de vie moyenne $T_{vie} > 0$, qui peut être influencée par plusieurs facteurs tels qu'une batterie à autonomie limitée, la résistance aux conditions environnementales comme les environnements radioactifs par exemple, et d'autres contraintes spécifiques. Cependant, dans un souci de simplification et puisque nous ne nous intéressons pas à des cas dans lesquels l'autonomie est impactée par les interactions directes avec le reste de l'essaim (en dehors des collisions bien évidemment), nous supposons que l'autonomie excède le temps de réalisation de la mission. Ceci revient à considérer que $T_{vie} = +\infty$, et signifie que nous ne prenons pas en compte pour le moment les aspects liés à la durée de vie et aux dégradations éventuelles du drone au fil du temps. Ces considérations plus complexes pourront être modélisées en ajoutant une variable de description correspondant à l'âge du drone (ou sa durée de vue restante), voire en modélisant T_{vie} avec une variable stochastique, comme ce qui a été fait dans [65].

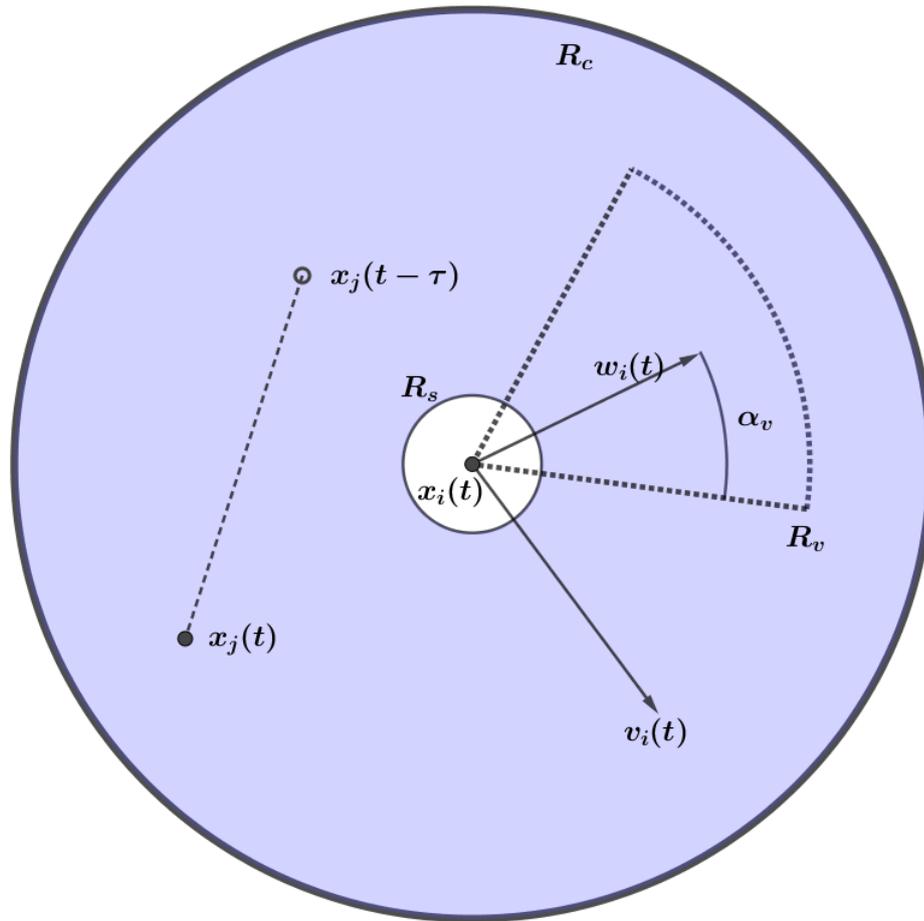


FIGURE 1.2 – Schéma récapitulant les différentes quantités associées au drone i .

Maintenant que nous avons fixés le type de drones à considérer, passons à la description du modèle d'évolution de la flotte.

1.1.4 Modèle d'essaim de drones

Il ne nous reste plus qu'à décrire le modèle d'évolution de la flotte de drones. Nous avons vu que la contrainte d'inertie nous impose de prendre en compte l'évolution de $v_i(t)$, nous considérons que tous les drones sont soumis à la seconde loi de Newton : la somme des forces exercées sur un drone est égale au produit de sa masse par son accélération. Chaque force correspond alors à une loi de commande spécifique. Nous distinguons trois types de forces :

Les forces **extérieures** : Le drone réagit à son environnement et prend des décisions pour lui-même sans coordination avec les autres drones. Il peut, par exemple, éviter un obstacle ou ajuster sa trajectoire en cas de vent violent.

Les forces d'**interaction** : Les drones se repèrent les uns par rapport aux autres et vont interagir de différentes manières. Ils peuvent chercher à s'éloigner les uns des autres pour éviter les collisions, se disperser pour couvrir une zone plus large, ou encore s'organiser dans une certaine formation de vol. Même s'ils communiquent pour échanger des informations, il est important de rappeler qu'ils ne conviennent pas

collectivement d'un plan d'action. Chaque drone prend individuellement une décision, et c'est la combinaison de ces décisions individuelles qui entraîne l'organisation et le comportement global de toute la flotte.

Les forces **propres** : chaque drone a des motivations identiques, mais qui ne s'expriment pas de la même manière. Ces motivations peuvent être liées à l'état de sa batterie ou son intégrité physique qui forceraient un agent à quitter le vol, ou encore à un objectif de mission à accomplir.

Nous rappelons que d'après le principe d'interchangeabilité de nos drones, toutes ces forces dépendent de l'état du drone considéré ainsi que de son environnement, mais jamais explicitement de son indice.

Voyons donc comment modéliser un comportement. Si par exemple nous voulons éviter les collisions entre drones, nous leur donnons une loi de commande associée à ce comportement, engendrant une force dans le modèle. La difficulté réside dans le choix approprié de l'expression de cette force pour que, lorsqu'elle est appliquée à chaque drone individuellement, l'ensemble de la flotte adopte le comportement désiré. En effet, une approche possible pour l'évitement des collisions est d'utiliser une force de répulsion entre les drones, similaire à la force électrostatique entre deux atomes. Cette force est inversement proportionnelle à la distance séparant deux atomes, et le long de la droite passant par leur noyau. Si nous nous en inspirons pour un modèle jouet à deux drones, nous pouvons imaginer que la force de répulsion appliquée au drone 1 est donnée par

$$F_1(t) = \exp(-\lambda r_{12}(t))x_{21}(t), \quad \lambda > 0.$$

Cependant il faut bien proportionner la force, sinon les agents se repoussent trop fortement. Si λ est trop grand, la "flotte" se disperse excessivement, les drones se retrouvant ainsi hors de portée de communication les uns avec les autres. Nous voyons donc qu'il est délicat de choisir la forme que prennent les forces, mais surtout de choisir la valeur de leurs paramètres. Nous nous pencherons sur cette question dans la section 3.3.1.

Ainsi, le modèle d'évolution de la flotte de N agents s'écrit pour chaque drone $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$:

$$\begin{cases} x'_i(t) &= v_i(t), \\ v'_i(t) &= F_{ext}(t, x_i(t), v_i(t)) \\ &\quad + F_{int}(t, X(t), V(t)) \\ &\quad + F_{pro}(t, x_i(t), v_i(t)). \end{cases}$$

Le premier comportement que nous allons incorporer dans ce modèle est le consensus, afin que la flotte puisse s'organiser une fois lancée. C'est l'objet de la section suivante.

1.2 Choix d'un modèle de consensus pour de grandes flottes de drones

Le premier comportement que nous cherchons à incorporer dans la flotte est un consensus. Le consensus est un phénomène courant dans les modèles de populations, tels que les bancs de poissons qui forment des tourbillons, les troupeaux qui se déplacent dans la même direction, ou encore les nuées d'oiseaux qui adoptent différentes configurations. On parle de consensus lorsque la valeur d'une certaine quantité propre à chaque individu est la même ou presque identique dans toute la population. L'incorporation du comportement de consensus dans le modèle servira de base sur laquelle nous ajouterons d'autres comportements. En effet, lors d'un consensus les drones convergent vers une configuration globale cohérente, en se rapprochant les uns des autres et en s'alignant sur une trajectoire commune. Cela permettra à la flotte de travailler ensemble de manière efficace pour différentes tâches ultérieures. De plus, si les drones commencent par converger vers un consensus, cela simplifie la tâche d'un point de vue pratique puisqu'il n'y a plus à se préoccuper de la manière dont ils sont lancés : ils s'organisent seuls et n'ont donc pas besoin d'être placés manuellement dans une configuration initiale spécifique.

Le consensus que nous étudions ici est un consensus sur les vitesses, également connu sous le nom de *flocking* dans la littérature, que nous traduirons par *agrégation*. Dans ce comportement, les drones convergent vers une configuration où ils voyagent tous dans la même direction à la même vitesse. Dans notre formalisme, il est défini de la façon suivante :

Définition 1 (*Agrégation*)

Une flotte de drones $\{(x_i, v_i)(t)\}_{i=1}^N$ s'agrège si :

i) Le diamètre des positions $\mathcal{D}(t)$ est uniformément borné en temps :

$$\mathcal{D}(t) := \max_{i,j} r_{ij}(t), \quad \sup_{t \geq 0} \mathcal{D}(t) < \infty,$$

ii) Le diamètre des vitesses $\mathcal{V}(t)$ tend vers 0 asymptotiquement :

$$\mathcal{V}(t) := \max_{i,j} |v_{ij}|(t), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{V}(t) = 0.$$

Nous allons donc faire une étude bibliographique recensant les modèles d'agrégation existants afin de choisir notre modèle de base. Le critère de choix principal que nous prendrons en compte est la simplicité du modèle, afin de s'assurer qu'il corresponde à nos contraintes de faible puissance de calcul et soit adapté au grand nombre d'agents dans la flotte.

1.2.1 Modèle de Vicsek

Le modèle d'agrégation de Vicsek, l'un des plus anciens dans ce domaine [99], étudie le comportement de plusieurs agents se propulsant dans une direction spécifique à une vitesse constante, à intervalle de temps réguliers, tout en étant soumis à un bruit ambiant, dans un espace en deux dimensions. Pour chaque agent $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, le système s'exprime en utilisant les notations définies dans la section 1.1.2 et pour un pas de

temps $\Delta t > 0$ comme suit :

$$\begin{cases} w_i(t + \Delta t) = \frac{1}{\sum_{j=1}^N \mathbb{1}(r_{ij} \leq R_c)} \sum_{j=1}^N w_j(t) \mathbb{1}(r_{ij} \leq R_c) + \eta_i(t), \\ v_i(t + \Delta t) = v_0 w_i(t + \Delta t), \end{cases} \quad (1.1)$$

où $v_0 > 0$ est l'amplitude constante de la vitesse et $\eta_i(t)$ est un angle choisi uniformément dans $[-\eta\pi, \eta\pi]$, $\eta > 0$. En d'autres termes, à chaque pas de temps les drones vont voyager à vitesses v_0 dans la direction moyenne de la flotte à portée de communication, modifiée par un bruit $\eta_i(t)$. Ce type de modèle est utilisé pour représenter des poissons battant des nageoires à intervalle régulier par exemple [94].

Le modèle de Vicsek a été principalement étudié numériquement. Les simulations ont montré [99, 57, 102] qu'il existe une transition de phase en fonction de l'amplitude du bruit et de la portée de communication. Lorsque le bruit est trop fort ou la portée de communication est trop faible, la flotte ne peut pas communiquer efficacement, ce qui l'empêche de s'agréger en un consensus cohérent. Au contraire, lorsque le bruit est faible et que la portée de communication est suffisante, le consensus est atteint, et les drones parviennent à s'organiser et à se déplacer de manière coordonnée. L'article original fournit des estimations des seuils de transition, qui permettent de déterminer les valeurs critiques de l'amplitude du bruit et de la portée de communication au-delà desquelles le consensus devient possible.

L'aspect temps discret du modèle rend l'analyse complexe, et nous voulons être capables de fournir des estimations de convergence vers l'équilibre par exemple. c'est pourquoi nous ne choisissons pas ce modèle et préférons des alternatives continues, afin de fournir des résultats théoriques.

1.2.2 Modèle de Vicsek continu

Cette version plus récente du modèle de Vicsek est une alternative en temps continu du modèle original [41]. Il s'écrit sous la forme suivante, pour $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$

$$\begin{cases} v_i(t) = v_0 w_i(t), \\ w'_i(t) = (\text{Id} - w_i \otimes w_i)(t) \overline{w}_i(t), \\ \overline{w}_i(t) := \frac{J_i(t)}{|J_i(t)|}, \quad J_i(t) := \sum_{j=1}^N w_j(t) \mathbb{1}(r_{ij} \leq R_c). \end{cases} \quad (1.2)$$

L'opérateur $(\text{Id} - w_i \otimes w_i)$ sert à assurer que l'orientation w_i reste dans la sphère unité.

Ce modèle n'est pas très étudié à cette échelle de modélisation, mais plutôt à l'échelle mesoscopique ou macroscopique, sujet du chapitre 4. Or nous voulons pouvoir apporter des preuves théoriques ici à l'échelle microscopique. De plus, il est beaucoup plus complexe à simuler que son homologue en temps discret, à cause des normalisations à effectuer pour chaque drone à chaque pas de temps. Nous préférons donc un autre modèle continu.

1.2.3 Modèle de Cucker-Smale

Certainement le modèle de consensus le plus étudié, le modèle de Cucker-Smale [34, 35] brille par sa simplicité. Dans le même esprit que le modèle de Vicsek, chaque agent va adapter sa vitesse en fonction de celle de ses voisins. Le modèle est le suivant : pour $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ et pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$\begin{cases} x'_i(t) = v_i(t), \\ v'_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi(r_{ij}) v_{ji}(t). \end{cases} \quad (1.3)$$

Chaque drone calcule donc la moyenne des vitesses relatives par rapport à la sienne, pondérée par une fonction ψ . La fonction ψ représente la force de communication entre les drones. Cette fonction est choisie de manière décroissante pour refléter le fait que plus un drone est éloigné, moins il est facile de communiquer avec lui, et son influence en est donc diminuée. Nous montrerons dans la section 1.3.1 ci-dessous que si la force de communication ψ permet aux drones éloignés de communiquer suffisamment, alors le diamètre des vitesses $\mathcal{V}(t)$ décroît exponentiellement vite vers 0.

Le modèle de Cucker-Smale permet donc d'atteindre rapidement le consensus au sein de la flotte, ce qui réduit le temps de vol consacré à s'organiser et économise ainsi des ressources importantes. De plus, le consensus obtenu se révélera robuste face à divers facteurs externes tels que le bruit ou la perte de communication. Ce sera l'objet de la section 1.3. Sa simplicité en fait un meilleur candidat que les modèles de Vicsek vus précédemment. D'ailleurs, il est montré dans [11] que le modèle de Vicsek continu est un cas particulier du modèle de Cucker-Smale à l'échelle macroscopique. C'est pourquoi c'est le modèle que nous retenons pour le moment.

1.2.4 Modèle d'attitude corporelle

Au lieu de simplement s'intéresser à la vitesse v_i ou une direction w_i d'un agent, nous pouvons nous intéresser à son attitude corporelle totale. Ceci correspond au triplet des axes de tangage, lacet et roulis chez un avion. Le modèle récent proposé dans [38] identifie ce triplet à une matrice de $SO(3)$. Plus précisément, notons $A_i \in SO(3)$ la matrice de rotation du drone i , associant à un repère de référence $(e_k)_{k=1}^d$ le repère propre au drone $(A_i e_k)_{k=1}^d$, porté par la position du drone x_i . Similairement au modèle de Cucker-Smale, les agents vont chercher à aligner leur attitude corporelle avec celle de leur voisin. Le modèle s'écrit donc :

$$\begin{cases} x'_i(t) = A_i(t) e_1, \\ A'_i(t) = P \left(\sum_{j=1}^N A_j(t) \right). \end{cases} \quad (1.4)$$

A_i étant la matrice permettant de passer du repère de référence au repère propre du drone i , $A_i e_1$ correspond à l'axe de tangage, c'est-à-dire la direction dans laquelle voyage le drone. P est un opérateur garantissant que A_i reste dans $SO(3)$, que nous ne donnons pas ici. Le même modèle est présenté différemment dans un autre article [39].

Il n'existe pas encore d'étude rigoureuse de l'asymptotique de ce modèle en temps long, et il est beaucoup plus complexe que les précédents. De plus, une telle approche est plus adaptée à des agents ayant un profil asymétrique, comme les oiseaux et les avions. Les drones tels que nous les avons choisis sont parfaitement symétriques dans leur dynamique. Nous n'étudierons donc pas ce modèle. Il reste néanmoins intéressant pour des agents asymétriques, surtout s'il est possible de reproduire toutes les études faites sur le modèle de Cucker-Smale.

1.2.5 Autres modèles de consensus

Bien sûr, il existe d'autres modèles de consensus. Un des plus connus est le modèle de Kuramoto [73, 72, 44], qui modélise la synchronisation d'oscillateurs couplés. À l'instar du modèle de Cucker-Smale, les différents agents du système mettent à jour leur phase en faisant la moyenne des phases du groupe entier. L'application la plus visuelle est la synchronisation de métronomes posés sur une planche à roulettes. Nous ne pouvons pas modéliser ainsi un drone, donc nous n'en parlerons pas. Un autre modèle est le modèle de D'Orsogna [48, 54, 98],

$$\begin{cases} x'_i(t) = v_i(t), \\ v'_i(t) = (\alpha - \beta|v_i|^2)v_i(t) - \frac{1}{N} \sum_{j=1, j \neq i}^N \nabla_{x_i} \varphi(|x_i - x_j|). \end{cases} \quad (1.5)$$

$\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ est un potentiel d'interaction, représentant généralement une attraction et une répulsion, et $\alpha, \beta > 0$ sont les coefficients de propulsion et de friction respectivement. Ce modèle couple ces deux derniers effets, et dispose ainsi d'une riche collection d'états d'équilibre. Cependant, la plupart de ces équilibres sont des tourbillons, où les drones tournent en rond à une vitesse asymptotique constante $\sqrt{\alpha/\beta}$. Ces formations coûtent beaucoup plus d'énergie à maintenir que l'agrégation, c'est pourquoi nous ne retenons pas ce modèle.

Par ailleurs il est courant de s'inspirer de ce que l'on trouve dans la nature [14]. Il existe également des modèles pour les bancs de poissons [43, 83, 33], les oiseaux [97] ou le déplacement de cellules [23]. Plus généralement, une revue de modèles est disponible dans [20]. Nous n'avons présenté que les modèles les plus pertinents pour les flottes de drones.

En conclusion, parmi les modèles que nous avons présentés, nous arrêtons notre choix sur le modèle de Cucker-Smale pour notre étude de modélisation des flottes de drones autonomes. Il offre un équilibre entre efficacité, simplicité, et robustesse, permettant ainsi une représentation réaliste et pratique de la coordination et de la coopération au sein de la flotte. Nous allons donc l'étudier théoriquement et dégager toutes ses propriétés.

1.3 Étude bibliographique des variantes du modèle de Cucker-Smale

L'étude plus détaillée du modèle de Cucker-Smale permettra d'explorer ses propriétés dynamiques et de mieux comprendre les mécanismes de coordination et d'agrégation des drones au sein de la flotte. Cette étude bibliographique nous permettra

également de découvrir les différentes variantes du modèle, qui illustreront la richesse et la robustesse de cette simple formulation.

1.3.1 Modèle de Cucker-Smale

Nous rappelons l'expression du modèle introduit dans [34] :

$$\begin{cases} x_i'(t) = v_i(t), \\ v_i'(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi(r_{ij}) v_{ji}(t). \end{cases} \quad (1.6)$$

Les hypothèses de travail sur la force de communication ψ sont les suivantes :

$$\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+), \quad \psi(r) > 0, \quad \psi'(r) \leq 0 \quad \forall r \geq 0. \quad (1.7)$$

Elles correspondent au fait que la fonction est décroissante et que toutes les interactions se font avec le même signe. L'exemple utilisé dans l'article original est

$$\psi(r) = \frac{\alpha}{(1+r^2)^{\beta/2}}, \quad \alpha > 0, \quad \beta \geq 0. \quad (1.8)$$

Le résultat original a été généralisé depuis [62], et prend la forme suivante :

Théorème 1 (Agrégation dans le modèle de Cucker-Smale)

Soit $\{(x_i, v_i)\}_{i=1}^N$ une solution de (1.6) dans le référentiel des centres de masse et de vitesse, pour ψ vérifiant (1.7) et des conditions initiales telles que $x_{ij}(0) \neq 0$ pour tout $1 \leq i \neq j \leq N$.

Si $|V(0)|_2 < \int_{|X(0)|_2}^{\infty} \psi(r) dr$, alors il existe une constante $d_M > 0$ telle que

$$\forall t \geq 0, \quad |X(t)|_2 \leq d_M, \quad |V(t)|_2 \leq |V(0)|_2 \exp(-\psi(d_M)t).$$

En particulier, si ψ n'est pas intégrable à l'infini, le résultat est vrai pour toute condition initiale.

Une variante utilisant la norme infinie a été démontrée dans [28]. Comme nous sommes dans le référentiel centré, ce résultat indique que les vitesses convergent vers leur moyenne. Or cette dernière est constante au cours du temps, donc en réalité tous les drones $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ vérifient

$$v_i(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} v_c(0).$$

Nous observons plusieurs choses dans ce résultat. Premièrement, c'est grâce à l'intégrale de ψ que nous pouvons quantifier s'il y a agrégation ou non. Si ψ n'est pas intégrable à l'infini, alors la fonction est assez grande loin de 0, ce qui se traduit par le fait que les drones communiquent suffisamment entre eux même éloignés pour pouvoir s'aligner. Si toutefois ce n'est pas le cas, le théorème nous dit que si la distribution initiale de drones est telle que les agents ne sont pas trop dispersés dans l'espace et avec des vitesses assez faibles, alors ils resteront dans un volume restreint où ψ est assez grand pour assurer l'agrégation. Cependant si l'hypothèse du théorème n'est plus vérifiée, alors il se peut que plusieurs groupes de drones se forment, avec des vitesses d'agrégation différentes, comme nous le verrons en section 1.3.3.

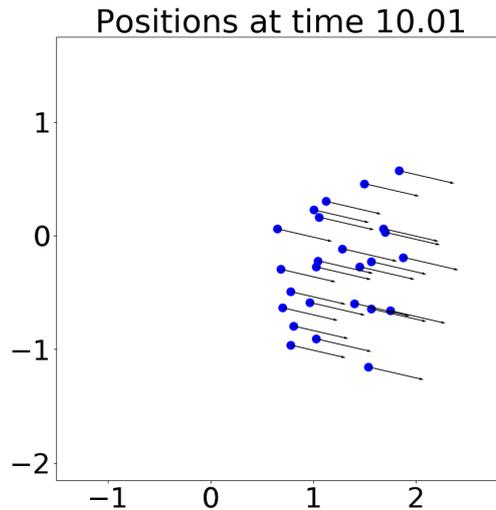


FIGURE 1.3 – Exemple de formation finale de 25 drones soumis au modèle de Cucker-Smale avec $\psi(r) = 1/(1 + r^2)$.

Ce que nous remarquons également, c'est qu'il n'y a aucune contrainte sur la position des drones dans ce modèle. La contrainte ne porte que sur les vitesses, bien qu'elle soit pondérée par les distances relatives. Ainsi, une fois les drones lancés et alignés, ils ne font que translater à vitesse $v_c(0)$, sans formation de vol particulière, comme illustré dans la figure 1.3. Pour cette figure, nous lançons $N = 25$ drones répartis sur une grille uniforme carrée de côté 1, avec des vitesses aléatoires tirées uniformément sur $[0, 1]^2$, pour une force de communication $\psi(r) = 2/(1 + r^2)$. Le reste des détails de la simulation se trouve en section 3.3.1. Le contrôle de la formation demande une force supplémentaire dans le modèle. Nous utiliserons par exemple une force d'attraction-répulsion, qui sera étudiée dans la section 3.1.

1.3.2 Modèle de Cucker-Smale singulier

Comme nous venons de le voir, l'intégrale à l'infini de la force de communication ψ joue un rôle important pour l'agrégation. Mais qu'en est-il de l'intégrabilité près de 0? Par exemple pour

$$\psi(r) = \frac{\alpha}{r^\beta}, \quad \alpha > 0, \quad \beta \geq 1,$$

dont l'intégrale en 0 est infinie. Cette question a été étudiée dans [3, 18]. Leur résultat est le suivant :

Théorème 2 (Agrégation pour le modèle de Cucker-Smale singulier[18])

Soit $\{(x_i, v_i)\}_{i=1}^N$ une solution de (1.6) dans le référentiel des centres de masse et de vitesse, pour ψ vérifiant (1.7) et des conditions initiales telles que $x_{ij}(0) \neq 0$ pour tout $1 \leq i \neq j \leq N$.

S'il existe $r_0 > 0$ tel que $\int_0^{r_0} \psi(r) dr = \infty$, alors (1.6) admet une unique solution globale, et les agents n'entrent pas en collision :

$$\forall t \geq 0, \quad \forall 1 \leq i \neq j \leq N, \quad x_i(t) \neq x_j(t).$$

De plus, le théorème d'agrégation 1 s'applique toujours.

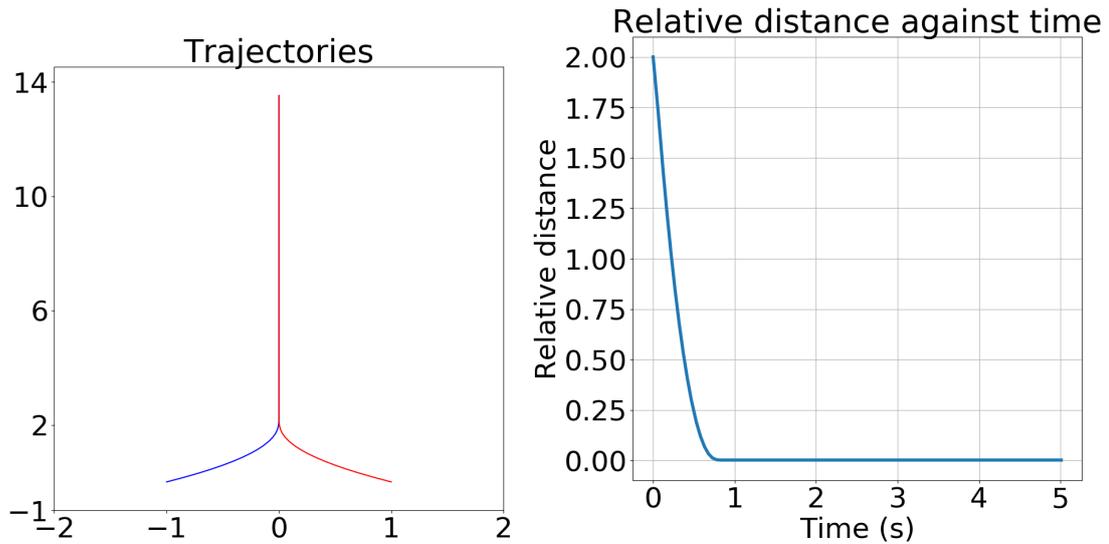


FIGURE 1.4 – Trajectoires de deux drones pour $\psi(r) = 1/r^{1/2}$ (gauche), et leur distance relative au cours du temps (droite).

Ainsi, l'intégrabilité de ψ près de l'origine semble contrôler l'aspect collisionnel de la flotte de drones. Nous pouvons réécrire le résultat ainsi : il existe une fonction positive $r_m(t) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$ telle que $r_m(t) \leq \min_{1 \leq i \neq j \leq N} r_{ij}(t)$ pour tout $t \geq 0$. Cependant, en étudiant les estimations dans la preuve, nous nous rendons compte que rien n'empêche les agents de se rapprocher autant qu'ils veulent, sans pour autant se toucher. C'est-à-dire qu'il se peut que $\lim_{t \rightarrow \infty} r_m(t) = 0$, et qu'il y ait collision à l'infini. De plus le consensus en vitesse dans le modèle de Cucker-Smale se met en place exponentiellement vite, donc ce rapprochement est rapide. Une telle diminution de la distance relative est inacceptable. En effet, les drones ne sont pas limités à des points, mais occupent un volume et ont une distance de sécurité $R_s > 0$. Pire encore, si ψ est singulière mais pas d'intégrale infinie à l'origine, comme pour $\psi(r) = 1/r^\beta$, $0 < \beta < 1$, les agents peuvent entrer en collision et rester collés [85, 86]. Nous illustrons une telle collision dans la figure 1.4. Nous lançons deux drones aux positions $(\mp 1, 0)$ avec une vitesse $(\pm 2.7, 2.7)$, pour une force de communication $\psi(r) = 1/\sqrt{r}$. Le reste des détails de la simulation se trouve en section 3.3.1.

Ce problème sera étudié dans le prochain chapitre centré sur l'évitement des collisions dans la flotte. Nous voyons ici que le modèle de Cucker-Smale seul peut amener à des situations périlleuses pour la flotte si la fonction ψ est mal choisie, ou que les conditions initiales sont mal préparées.

1.3.3 Multi-agrégation pour le modèle de Cucker-Smale

Voyons ce qu'il se passe lorsque nous ne sommes pas dans les hypothèses des théorèmes précédents.

Nous avons par exemple cette étude [27], qui s'intéresse à la double agrégation dans modèle de Cucker-Smale original. Les auteurs ont montré le résultat suivant.

Théorème 3 (Double agrégation pour le modèle de Cucker-Smale[27])

Soit $\{(x_i, v_i)\}$ une solution de (1.6) pour ψ vérifiant (1.7), et considérons deux sous groupes d'agents $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 := (x_i^\alpha, v_i^\alpha)_{i=1}^{N_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$. Soient des conditions initiales bien préparées en fonction de ψ dans le sens où il y a quasiment agrégation dans chaque groupe et qu'ils sont assez éloignés :

$$|V|_2(0) < \frac{\min(N_1, N_2)}{N} \int_{|X|_2(0)}^{\infty} \psi(\sqrt{2}s) ds, \quad 4\sqrt{2}|V|_2(0) < |v_c^1 - v_c^2|_2(0),$$

$$\int_{\Delta(0)}^{\infty} \psi(s) ds \lesssim |v_c^1 - v_c^2|_2(0) \sqrt{|V|_2(0)}, \quad \Delta(0) := \min_{\substack{i \in [1, N_1] \\ k \in [1, N_2]}} |x_i^1 - x_k^2|(0).$$

Alors chaque groupe s'agrège en temps long dans des directions différentes. Plus précisément, chaque groupe est borné autour de son centre de masse, leurs vitesses s'alignent sur des vecteurs différents, et la distance entre les groupes est minorée par une fonction linéaire en temps :

$$\forall \alpha = 1, 2, \quad \exists d_M^\alpha > 0, F_\alpha(t), \text{ t.q. } \forall t \geq 0, \quad i \in [1, N_1], \quad k \in [1, N_2],$$

$$|X^\alpha|_2(t) \leq d_M^\alpha, \quad |V^\alpha|_2(t) \leq F(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, \quad |x_i^1 - x_k^2|(t) \gtrsim t + \Delta(0).$$

La première hypothèse est une inégalité similaire à celle du théorème d'agrégation original, assurant l'agrégation dans chaque groupe. Les suivantes prennent la forme de plusieurs relations entre les positions initiales, les vitesses initiales et ψ , assurant que les deux groupes ne se croisent pas en cours de vol.

La vitesse de consensus de chaque groupe est estimée, et dépend des conditions initiales ainsi que de l'entièreté du vol. Nous donnons un exemple de formation finale dans la figure 1.5.

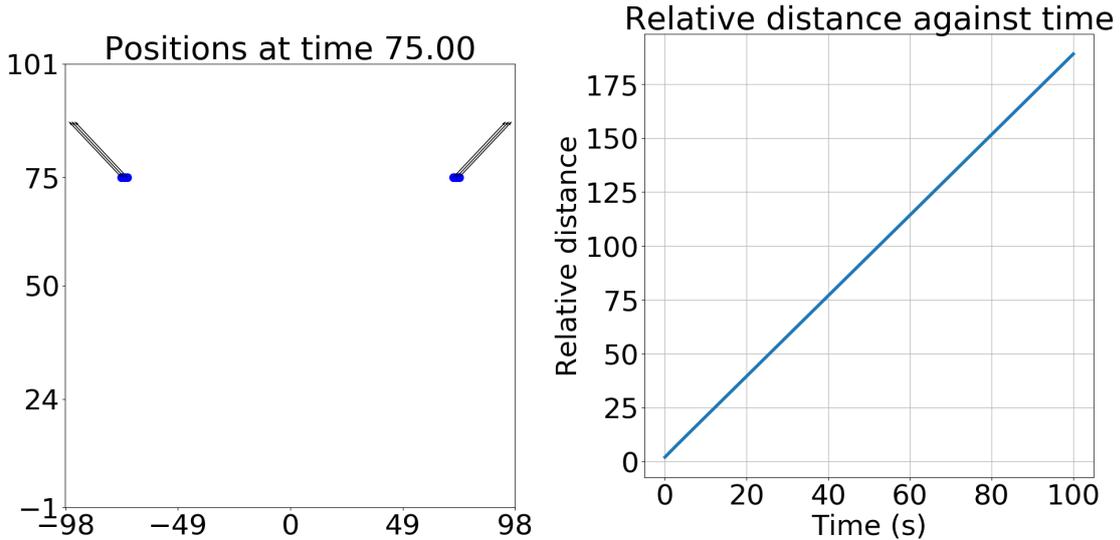


FIGURE 1.5 – Exemple de formation finale pour 6 drones avec $\psi(r) = 0.5/(1 + r^2)$ (gauche), et la distance relative entre les drones intérieurs au cours du temps (droite).

Nous divisons 6 drones en deux groupes. Le groupe de gauche avec les abscisses $-3, -2, -1$ et ordonnée 0, avec une vitesse $(-1, 1)$. Le groupe de droite avec les abs-

cisses 1, 2, 3 et ordonnée 0, avec une vitesse (1, 1). La force de communication choisie est $\psi(r) = 0.5/(1+r^2)$. Le reste des détails de la simulation se trouve en section 3.3.1. Nous observons que les deux groupes sont agrégés, et que la distance qui les sépare augmente de façon linéaire avec le temps.

Le consensus est donc maintenu même si les conditions initiales sont mal préparées pour une agrégation totale. Ce résultat est encourageant, si par exemple la flotte se retrouve scindée en plusieurs parties suite à un imprévu.

À contrario, [60] s'intéresse à deux groupes d'individus $\mathcal{G}_\alpha := (x_i^\alpha, v_i^\alpha)_{i=1}^{N_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$ tous deux soumis à un modèle de Cucker-Smale différent. L'interaction entre ces deux groupes est elle aussi régie par un troisième modèle de Cucker-Smale :

$$\begin{cases} (x_i^1)'(t) = v_i^1(t), & (x_k^2)'(t) = v_k^2(t), & i = 1, \dots, N_1, \quad k = 1, \dots, N_2, \\ (v_i^1)'(t) = \frac{K_1}{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} \psi_1(r_{ij}^1) v_{ji}^1 + \frac{K_d}{N_2} \sum_{j=1}^{N_2} \psi_d(|x_i^1 - x_j^2|) (v_j^2 - v_i^1), \\ (v_k^2)'(t) = \frac{K_2}{N_2} \sum_{j=1}^{N_2} \psi_2(r_{kj}^2) v_{jk}^2 + \frac{K_d}{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} \psi_d(|x_k^2 - x_j^1|) (v_j^1 - v_k^2). \end{cases} \quad (1.9)$$

$K_1, K_2, K_3 \geq 0$ sont les coefficients d'équilibrage entre les forces de Cucker-Smale de chaque groupe et la force d'interaction entre les deux groupes. En particulier si $K_d = 0$, alors les deux groupes sont complètement indépendants. En fonction de l'équilibrage, le modèle fera s'agréger les deux groupes ensemble ou séparément :

Théorème 4 (Mono-agrégation pour le modèle (1.9)[60])

Soit $\{(x_i, v_i)\}_{i=1}^N$ une solution de (1.9) dans le référentiel des centres de masse et de vitesse, pour $\psi_{1,2,d}$ vérifiant (1.7) et $\psi_{1,2,d}(r) \leq 1$ pour tout $r \geq 0$. Soient de plus des conditions initiales telles que $x_{ij}(0) \neq 0$ pour tout $1 \leq i \neq j \leq N$.

Si $|V(0)|_2 < K_d \int_{|X(0)|_2}^{\infty} \psi_d(\sqrt{2N}r) dr$, alors il existe une borne $d_M > 0$ telle que

$$\forall t \geq 0, \quad |X(t)|_2 \leq d_M, \quad |V(t)|_2 \leq |V(0)|_2 \exp\left(-K_d \psi_d(\sqrt{2N}d_M)t\right).$$

Théorème 5 (Multi-agrégation pour le modèle (1.9)[60])

Soit $(x_{\alpha i}, v_{\alpha i})_{i=1}^{N_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$ une solution de (1.9) pour $\psi_{1,2,d}$ vérifiant (1.7) et $\psi_{1,2,d}(r) \leq 1$ pour tout $r \geq 0$. Soient des conditions initiales bien préparées en fonction des ψ dans le sens où il y a quasiment agrégation dans chaque groupe et qu'ils sont assez éloignés :

$$2\lambda_0 := |v_c^1(0) - v_c^2(0)| > 0, \quad D_X^1(0), D_X^2(0) \leq \lambda_0/4,$$

$$\min_{\substack{i \in \llbracket 1, N_1 \rrbracket \\ k \in \llbracket 1, N_2 \rrbracket}} \langle x_k^1 - x_i^2, v_c^1 - v_c^2 \rangle(0) \geq 0.$$

Soient de plus des coefficients K_1, K_2 assez grands en fonction des conditions initiales et de ψ_1, ψ_2, ψ_d , et K_d assez petit en fonction des conditions initiales et de ψ_d , telles que :

$$|V^\alpha|_2(0) + \frac{K_d}{\lambda_0} \sqrt{2N|V|_2} \int_0^\infty \psi_d(s) ds < K_\alpha \int_{|X^\alpha|(0)}^\infty \psi_\alpha(\sqrt{2N_\alpha}s) ds,$$

$$K_d < \lambda_0^2 / \left(12\sqrt{2N}|V|_2(0) \int_0^\infty \psi_d(s) ds \right).$$

Sous ces conditions, chaque groupe s'agrège en temps long dans des directions différentes. Plus précisément, chaque groupe est borné autour de son centre de masse, leurs vitesses s'alignent sur des vecteurs différents, et la distance entre les groupes est minorée par une fonction linéaire en temps :

$$\forall \alpha = 1, 2, \exists d_M^\alpha > 0, F_\alpha(t), \text{ t.q. } \forall t \geq 0, i \in \llbracket 1, N_1 \rrbracket, k \in \llbracket 1, N_2 \rrbracket,$$

$$|X^\alpha|_2(t) \leq d_M^\alpha, |V^\alpha|_2(t) \leq F(t) \rightarrow_{t \rightarrow \infty} 0, |v_i^1 - v_k^2|(t) \geq \lambda_0, |x_i^1 - x_k^2|(t) > \lambda_0 t.$$

Nous voyons avec le premier résultat que si K_d est grand, nous retrouvons le résultat standard 1 pour le modèle de Cucker-Smale. La dynamique d'interaction entre les groupes efface totalement leur dynamique propre au profit d'une agrégation globale. Le second résultat nous montre, comme nous pouvions nous y attendre, que si l'interaction entre les deux groupes est assez faible, ils s'agrègeront de manière indépendante. D'ailleurs, si $K_d = 0$, les conditions pour l'agrégation des deux groupes sur K_1 et K_2 se réduisent exactement à $|V^\alpha(0)|_2 < K_\alpha \int_{|X^\alpha(0)|_2}^\infty \psi_\alpha(\sqrt{2N_\alpha}r) dr$, ce qui correspond au résultat original pour le modèle de Cucker-Smale pour chaque groupe. Ce résultat est plus fin que le précédent résultat de multi-agrégation, dans le sens où la manière d'interagir au sein d'un groupe et entre les deux groupes sont différentes. Nous pouvons alors imaginer utiliser ce dernier résultat pour étudier la manière dont deux flottes se regroupent après avoir été séparées, et qu'elles aient mis à jour leur modèle en fonction. Bien que la vitesse vers laquelle converge chaque groupe n'a pas été étudiée dans [60], nous pouvons supposer que c'est la vitesse moyenne de chaque groupe, pondérée par les coefficients d'interaction K_1, K_2, K_d . Le lecteur intéressé pourra lire la suite de ces travaux pour un modèle plus général dans [54] ou une version avec un modèle d'ordre 1 dans [58].

1.3.4 Équilibrage de la force de communication

Un reproche fait au modèle original de Cucker-Smale est que le facteur $1/N$ devant la force atténue la dynamique d'un drone en fonction du nombre total d'agents, même si elle n'est régie en majeure partie que par les plus proches voisins. Comme dans la section précédente, nous pouvons nous attendre à ce que deux flottes éloignées soient sujettes à deux modèles de Cucker-Smale distincts, plutôt qu'un modèle commun amorti. C'est pourquoi [79] propose de rééquilibrer la force d'interaction ψ de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_i'(t) = v_i(t), \\ v_i'(t) = \frac{1}{\sum_{k=1}^N \psi(r_{ik})} \sum_{j=1}^N \psi(r_{ij}) v_{ji}(t). \end{cases} \quad (1.10)$$

Ce terme de remplacement quantifie comment l'agent i est influencé par le reste de la flotte. Si par exemple $\psi(r) = \mathbb{1}(r \leq R_c)$, le terme devient le nombre de drones à portée de communication, à la place du nombre total de drones.

Les interactions n'étant plus symétriques, les auteurs ont du modifier les outils usuels pour arriver au même résultat d'agrégation que pour le modèle d'origine :

Théorème 6 (Agrégation pour le modèle de Cucker-Smale rééquilibré[79])

Soit $\{(x_i, v_i)\}$ une solution de (1.10) pour ψ vérifiant (1.7). Si les conditions initiales et ψ sont telles que

$$\mathcal{V}(0) < \int_{\mathcal{D}(0)} \psi^2(r) dr,$$

alors la flotte s'agrège en temps long.

Ce travail montre l'importance de la réflexion sur la manière d'équilibrer le potentiel de chaque force, de la même manière qu'il faut équilibrer les forces entre elles.

1.3.5 Graphe de communication non-complet

Après avoir étudié le modèle de Cucker-Smale en jouant avec la force de communication ψ , nous allons étudier comment le consensus est affecté par des pertes de communication. En effet, jusqu'à présent nous supposons que tous les drones étaient capables de tous communiquer entre eux en tout temps. En situation réelle, ce peut ne pas être le cas. Par exemple un obstacle peut obstruer les communications en faisant perdre le signal radio, faire sortir des drones du champ de vision d'un agent, ou provoquer une extension trop importante de la flotte par rapport au rayon de communication. De plus, les capacités de communication d'un drone pouvant être limitées, nous pouvons imaginer qu'un agent ne puisse communiquer qu'avec ses k plus proches voisins. On appelle cela la *distance topologique*. Ces modèles ont été étudiés au cas par cas, souvent en temps discret, ou encore numériquement [76, 4, 103, 77, 64, 93, 15]. Cependant, un résultat plus récent prend en compte tous ces scénarios [47].

L'idée commune à toutes ces études est d'étudier le *graphe de communication de la flotte*. Un graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ est un ensemble fini de sommets $\mathcal{V} = \{1, \dots, n\}$ reliés par des arêtes $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, constituées des paires des indices reliés. Nous disons que deux sommets sont voisins s'il existe une arête les reliant, et nous notons \mathcal{N}_i l'ensemble des voisins de l'agent i . Dans tous les modèles présentés jusque là, tous les drones étaient voisins les uns des autres, le graphe associé à la flotte était *complet*. Si nous prenons en compte des capacités de communication plus réduites comme dit plus haut, certains drones ne sont plus voisins. De plus, la relation de voisin n'est pas symétrique : si les drones se repèrent par caméra et qu'ils sont les uns derrière les autres, celui du fond voit tout le monde, alors que le drone en tête ne voit personne.

Le point clé du résultat est que les drones doivent suffisamment communiquer au cours du temps, afin d'échanger assez d'information pour qu'ils puissent tous s'aligner. Ceci est obtenu en supposant qu'il existe un *spanning tree* dans le graphe, c'est-à-dire qu'il existe au moins un sommet appelé *racine* pouvant atteindre n'importe quel autre, quitte à passer par des sommets intermédiaires. Autrement dit, qu'il existe un sommet tel que pour tout autre sommet, il existe un ensemble d'arêtes les reliant, comme illustré dans la figure 1.6. Notons h la plus petite taille d'arbre dans le graphe \mathcal{G} , qui correspond à la distance à parcourir depuis une racine jusqu'au sommet le plus éloigné.

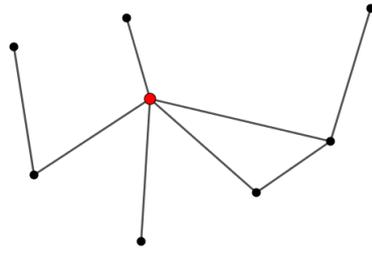


FIGURE 1.6 – Exemple de spanning tree dans un graphe. Le sommet rouge est un exemple de racine.

Le modèle de Cucker-Smale est modifié ainsi. Pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$:

$$\begin{cases} x'_i(t) = v_i(t), \\ v'_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \psi(r_{ij}) v_{ji}(t). \end{cases} \quad (1.11)$$

Le résultat de consensus pour graphes de communication réduits est alors le suivant :

Théorème 7 (*Agrégation pour graphe de communication réduit*[47])

Considérons une solution de (1.11) où la force de communication ψ satisfait (1.7), et telle qu'il existe un spanning tree dans son graphe de communication. S'il existe une constante $\rho > 0$ telle que

$$h\mathcal{A}(0) < \psi(0)\delta\rho,$$

où $\delta > 0$ est donnée explicitement en fonction des propriétés du spanning tree, des conditions initiales et de ρ , alors il y a agrégation exponentiellement vite.

Nous remarquons en particulier que si ψ est singulière comme dans la section 1.3.2, la condition est toujours vérifiée. Ainsi, si les conditions de vol permettent de maintenir une telle architecture de graphe au cours du temps, le consensus est préservé. Toutefois, c'est une hypothèse à priori, et ce théorème ne donne pas de condition pour préserver un tel graphe au cours du temps. Cet aspect est bien plus complexe, et n'est pas encore étudié en toute généralité. Nous avons cependant des résultats au cas par cas, comme dans [76] pour la distance topologique. L'auteur y propose des bornes sur les conditions initiales, garantissant le maintien d'un spanning tree tout au long du vol, et ainsi une agrégation exponentielle.

Nous remarquons enfin que la vitesse moyenne du groupe n'est jamais estimée. En effet, elle va dépendre de quels drones vont interagir le plus. On peut supposer qu'elle ressemblera à la vitesse moyenne initiale, pondérée par la "présence" de chaque drone au cours du vol.

Nous concluons de cette section que les contraintes techniques considérées au début du chapitre telles que les capacités limitées de communications en portée comme en volume ou le champ de vision peuvent être prises en compte pour le modèle de Cucker-Smale, tout en préservant le consensus. Les études citées ici pourraient être poursuivies

pour étendre ce type de résultat aux modèles à plusieurs forces qui suivront, mais ce n'est pas l'objet de ce travail.

1.3.6 Incertitudes

Les derniers effets que nous allons voir sont liés aux incertitudes sur les données disponibles pour les drones. Comme nous l'avons dit dans la discussion en début de chapitre, le temps d'envoi, de réception et de traitement des données peu donner lieu à un décalage entre les données qu'un drone a sur lui-même et celles sur le reste de la flotte. Voici comment s'écrit le modèle de Cucker-Smale incorporant un délai $\tau \geq 0$, pour $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$:

$$\begin{cases} x'_i(t) = v_i(t), \\ v'_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi(|x_i(t) - x_j(t - \tau)|)(v_j(t - \tau) - v_i(t)), \end{cases} \quad (1.12)$$

muni de conditions initiales continues $\{(x_i(s), v_i(s))\}_{i=1}^N$ pour tout $s \in [-\tau, 0]$. Voici un exemple de résultat disponible pour ce modèle :

Théorème 8 (Agrégation pour le modèle de Cucker-Smale avec délai[74])

Considérons une solution de (1.12) où la force de communication ψ satisfait (1.7) pour un certain $\tau \geq 0$.

Si $\int_a^\infty \psi(r)dr = \infty$ pour un certain $a > 0$, alors il y a agrégation exponentiellement vite, vers la vitesse

$$v_\infty = \frac{1}{1 + \tau} v_c(0) + \frac{1}{N(1 + \tau)} \sum_{i=1}^N (x_i(0) - x_i(-\tau)).$$

Nous remarquons que la vitesse finale dépend de l'ensemble de la trajectoire initiale, et que si le délai τ est nul, alors nous retrouvons comme limite la vitesse moyenne du groupe à l'instant 0, comme auparavant. Par ailleurs, ce même article couvre le cas du délai dans le modèle présenté dans la section 1.3.4, tout comme [29]. Le lecteur intéressé pourra trouver des résultats connexes dans [25, 88].

Une autre source d'incertitude possible sont les facteurs environnementaux imprévisibles. Par exemple une violente rafale de vent peut venir décaler un drone peu après la mesure de sa position par un de ses voisins, et ainsi fausser la donnée à disposition. Si la perturbation est relativement faible et homogène au cours du temps, nous pouvons imaginer des solutions de post-traitement de l'information. Ceci prend du temps et peut alors être modélisé grâce à un retard comme ce que nous venons de voir. Si les perturbations sont trop fortes ou qu'il n'y a pas de traitement du signal, il est courant d'utiliser un bruit blanc $dW_i(t)$ pour modéliser ce type d'incertitude, comme dans [61, 26].

$$\begin{cases} dx_i(t) = v_i(t)dt, \\ dv_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi(r_{ij})v_{ji}(t)dt + d\sqrt{D}dW_i(t). \end{cases} \quad (1.13)$$

Comme cette thèse ne se concentre pas sur l'étude de tels systèmes, nous passerons les détails techniques et nous contenterons d'une description des résultats. Il y a deux résultats d'agrégation dans [61]. Premièrement, si $\psi \equiv 1$, alors il y a agrégation au sens 1. Deuxièmement, si ψ est seulement bornée inférieurement au dessus de 0, alors les vitesses ne s'alignent pas totalement, elles se rassemblent exponentiellement vite dans un intervalle où elles fluctuent, et dont la fluctuation est contrôlée par l'amplitude du bruit D . Comme nous pouvions nous y attendre, nous avons donc "presque" agrégation. Nous remarquons que les deux potentiels ψ vérifient l'hypothèse récurrente de la non-intégrabilité à l'infini. La différence entre les deux résultats suggère que cette condition est d'autant plus importante par rapport au cas déterministe. Pour le lecteur intéressé, [96] et les références incluses présentent des variations intéressantes autour de ce modèle.

Il existe une autre façon d'incorporer le bruit dans le modèle qui pourrait être intéressante à étudier dans le futur. Au lieu de placer le bruit sur la loi de commande entière, nous pourrions le placer sur les positions et vitesses elles-même, c'est-à-dire remplacer x_j et v_j par $\hat{x}_j := x_j + B_j$ et $\hat{v}_j := v_j + \tilde{B}_j$, avec B_j, \tilde{B}_j des bruits blancs. Cela n'a pas été fait à ma connaissance.

Une étape intermédiaire, que nous explorerons dans la section 2.3.3 du prochain chapitre, serait de considérer la pire perturbation possible des données. Nous nous intéresserons par exemple à ce qu'il se passe si la distance relative entre les drones r_{ij} n'est connue qu'à un petit facteur près, c'est-à-dire considérer le système pour un $\varepsilon > 0$

$$\begin{cases} x'_i(t) = v_i(t), \\ v'_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi(\tilde{r}_{ij}(t)) v_{ji}(t), \\ \forall t \geq 0, \quad \tilde{r}_{ij}(t) \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon] r_{ij}(t). \end{cases} \quad (1.14)$$

Nous retenons de toute cette section que le consensus sur l'alignement des vitesses est très résistant face à des modifications de paradigme dans le modèle de Cucker-Smale, ce qui en fait le candidat de choix comme base pour notre modélisation incorporant de nombreux effets en simultané. De plus, sa vitesse de convergence exponentielle vers le consensus permet une rapide mise en place de la flotte de drones, ce qui est une autre propriété utile en pratique pour économiser des ressources et du temps de vol. Nous avons également vu que même un modèle à l'apparence simple nécessite une étude approfondie pour connaître ses limites.

1.4 Conclusion du chapitre

Dans ce premier chapitre, nous avons défini comment nos drones sont modélisés : ils sont tous identiques, en totale autonomie, et prennent des décisions basées sur leurs lois de commandes, issues des mesures qu'ils prennent de leur environnement. Nous avons également détaillé leurs limitations techniques, telles que leur portée de communication, leur champ de vision ou leur faible puissance de calcul.

Nous avons ensuite procédé à une étude bibliographique afin de choisir un modèle de consensus, qui nous servira de base pour la suite. Nous nous sommes arrêtés sur le modèle de Cucker-Smale, puisqu'il est le plus simple de formulation parmi les modèles

présentés, et qu'il est facile à étudier théoriquement. Nous avons rappelé que des drones soumis à un tel modèle convergent vers un état dit agrégé où ils ont tous la même vitesse, et que cet état est atteint exponentiellement vite. Ceci n'est possible que si les conditions initiales et la force de communication du modèle vérifient une certaine relation, donnée dans le théorème 1.

Nous avons terminé le chapitre sur une étude bibliographique des variantes du modèle de Cucker-Smale, qui nous a permis de constater que ce phénomène d'agrégation est robuste à de nombreux types de perturbations, ainsi qu'à l'incorporation des contraintes que nous avons défini dans la première partie. La flotte de drones converge exponentiellement vite vers son équilibre même si les conditions du théorème 1 ne sont pas vérifiées, mais que des sous groupes d'individus sont presque agrégés (théorèmes 3,5). C'est aussi le cas si nous rééquilibrions la force de communication, afin qu'elle tienne compte de l'influence de la flotte entre sous groupes éloignés (théorème 6), ou du délai engendré par le temps de traitement et de communication des informations (théorème 8). Enfin, il y a toujours agrégation exponentiellement vite si nous réduisons la capacité des drones à communiquer entre eux, que ce soit par limitation du nombre d'individus qu'il leur est possible de considérer à chaque instant, ou par obstruction temporaire du champ de vision (théorème 7).

Toutefois, nous avons aussi insisté sur les limitations de notre cadre de travail. Nous considérons ici une flotte où tous les individus sont identiques, et leur nombre est fixé. Nous avons proposé de poursuivre l'étude en s'intéressant à des flottes où certains rôles clés seraient distribués de manière dynamique, comme l'élection d'un leader, ou bien d'incorporer la durée de vie des drones, engendrant une flotte de taille variable au cours du temps.

De plus, nous ne nous intéressons pas au bruit. Étudier la robustesse de nos résultats face à un bruit blanc pourra être une poursuite intéressante du point de vue pratique. Nous avons également proposé une modélisation du bruit alternative, ne portant plus sur la loi de commande entière, mais directement sur les positions et les vitesses utilisées pour calculer ces lois.

Maintenant que nous avons choisi et étudié notre modèle de base, nous allons nous intéresser à notre premier comportement essentiel dans une flotte de drones, à savoir l'évitement des collisions.

Chapitre 2

Développement d'une stratégie d'évitement des collisions par utilisation du flot optique

Sommaire

2.1	Définition du flot optique et modèle associé	30
2.2	Évitement de collision chez les flottes se repérant par flot optique	32
2.2.1	Existence d'une distance minimale entre agents pour tout temps	33
2.2.2	Preuve du résultat	34
2.3	Généralisation du résultat à des variantes du modèle incorporant des effets propres aux drones	39
2.3.1	Diminution des hypothèses sur la force de communication	39
2.3.2	Graphe de communication limité	40
2.3.3	Incertitudes sur le flot optique	41
2.3.4	Loi de commande supplémentaire générale	45
2.3.5	Exemple de collision à l'infini pour une force de suivi de position	46
2.3.6	Existence d'une distance minimale pour une force de suivi de vitesse	47
2.3.7	Extension à une force d'attraction et de répulsion	48
2.4	Conclusion du chapitre	49

Dans le précédent chapitre, nous avons défini nos drones et choisi le modèle de consensus de Cucker-Smale comme base pour notre futur modèle incorporant de nombreux comportements. Lors de l'étude des propriétés du modèle de Cucker-Smale, nous avons remarqué que l'évitement des collisions n'était garanti que pour un horizon de temps fini. Or l'évitement de collision est une question vitale, puisque perdre des drones en vol serait un gâchis de ressources, et serait dangereux pour des missions en environnement civil. C'est pourquoi nous étudions cette première application concrète : l'évitement de collision chez les flottes se repérant grâce au flot optique.

Nous donnerons dans la première section 2.1 la définition du flot optique, et verrons que le modèle mathématique associé n'est autre qu'un modèle de Cucker-Smale singulier.

Dans la section suivante 2.2 nous présenterons et démontrerons le résultat principal de ce chapitre, à savoir l'existence d'une distance minimale entre les drones valable pour tout temps dans ce modèle.

Nous terminerons avec une grande section 2.3 où nous généraliserons le résultat à de nombreuses variantes du modèle prenant en compte les contraintes techniques des drones.

2.1 Définition du flot optique et modèle associé

Pour mettre au point une solution d'évitement de collision, nous pouvons commencer par étudier ce qui est fait dans la Nature. Il a par exemple été observé dans [95] qu'une quantité appelée le *flot optique* est essentiel au vol d'animaux et d'insectes près d'obstacles. Le flot optique est une mesure de la vitesse de déplacement d'un objet dans une succession d'images, capturées par une caméra ou un œil. Dans le contexte de navigation de drones, le flot optique a déjà été utilisé pour faire atterrir des agents sur des plateformes mobiles [67], ou agréger plusieurs individus [78]. Le flot optique semble donc être un candidat d'intérêt pour l'évitement de collision chez les drones.

Plus précisément, si notre drone i observe un plan $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ se situant à une distance $r > 0$ se déplaçant à la vitesse v , le flot optique d'un point $P \in \mathcal{P}$ est la cinématique du point p correspondant à la projection de P sur l'espace tangent de la surface du capteur optique du drone, comme représenté dans la figure 2.1. Cependant, puisque cet objet vit dans l'espace tangent d'une surface, il est nécessaire de faire la moyenne du flot optique sur un ensemble de points du plan afin d'en tirer une loi de commande [66].

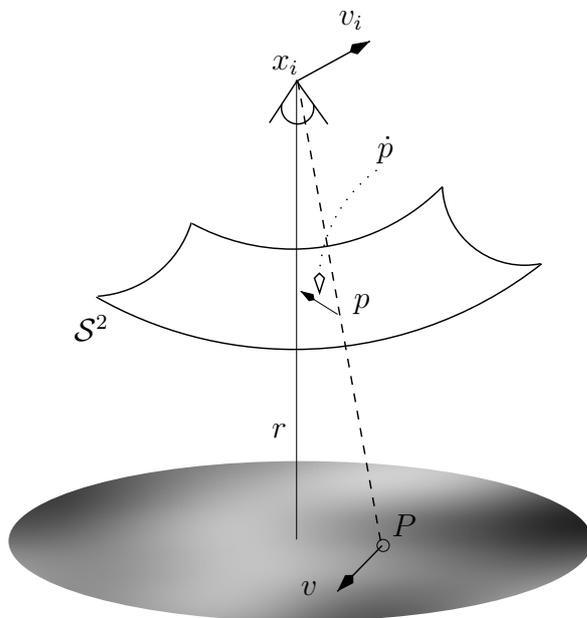


FIGURE 2.1 – Définition du flot optique \dot{p} du point P observé par le drone i .

Ainsi, pour appliquer cela à la détection et l'évitement d'un autre drone j , nous utilisons le plan contenant x_j orthogonal à la direction $x_i - x_j$, et si nos drones sont équipés de caméras comme dans [67], les auteurs ont montré que le flot optique moyen

mesuré par le drone i voyant un drone j est

$$w_{ij} := \frac{v_j - v_i}{|x_i - x_j|} = \frac{v_{ji}}{r_{ij}}.$$

La mesure obtenue n'est pas simplement la vitesse relative entre les agents, mais la vitesse relative pondérée par la distance relative, à cause de la projection sur la caméra. Nous remarquons que w_{ij} est naturellement antisymétrique par rapport à ses indices. Le drone i n'a donc ainsi accès qu'à ses données propres de position et vitesse x_i, v_i et, comme interaction possible avec tout autre drone j perçu, la quantité w_{ij} .

Cette méthode est avantageuse puisque l'incertitude sur la mesure du flot optique est additive sur w_{ij} , donc la singularité en r_{ij} sera capturée, même si la distance relative est proche de 0. En effet, dans notre cas un drone imprécis mesurera

$$\frac{v_{ji}}{r_{ij}} + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

et ce terme est toujours singulier en r_{ij} . Alors que si nous avons

$$\frac{v_{ji}}{r_{ij} + \varepsilon},$$

si r_{ij} tend vers 0, le flot optique serait borné, ce qui empêcherait l'évitement des collisions. Nous étudierons ce qu'il se passe si le flot optique est sous-ou sur-évalué en section 2.3.3. Dans un premier temps, nous allons supposer que tous les drones sont capables de se voir, ou de communiquer par radio, ce qui veut dire que pour tout drone i , w_{ij} est supposé disponible quelque soit j , et que ces mesures sont exactes. Nous généraliserons la discussion à des cas où certaines communications ne sont pas possibles en section 2.3.2.

Construisons un modèle du second ordre comme ceux que nous avons étudié dans le chapitre précédent, utilisant le flot optique. Afin de prendre en compte tous les drones visibles par un agent, nous choisissons la force associée au flot optique dans le modèle comme étant la moyenne des flots optiques mesurés, ce qui donne le modèle suivant : pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$\begin{cases} x'_i(t) = v_i(t), \\ v'_i(t) = F_i^{FO}(t, X(t), V(t)) := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N w_{ij}(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{r_{ij}} (v_j - v_i)(t). \end{cases} \quad (2.1)$$

Nous reconnaissons alors le modèle de Cucker-Smale présenté dans le chapitre précédent, dans sa version singulière avec une force de communication $\psi(r) = 1/r$. Nous rappelons que la masse des drones est supposée identique pour tous les agents et est normalisée à 1, car sa valeur ne change pas la nature de la dynamique d'essaim. L'équation est alors adimensionnée par une constante, que nous choisissons égale à un pour simplifier les notations.

Étudions la capacité de ce modèle à prévenir les collisions entre drones.

2.2 Évitement de collision chez les flottes se repérant par flot optique

Nous venons de voir que le modèle associé au flot optique (2.1) est un modèle de Cucker-Smale singulier, comme présenté dans la section 1.3.2. Nous avons vu que ce modèle n'impose pas de contrainte sur les positions des drones. Il y a agrégation dans le sens de la définition 1, c'est-à-dire que les vitesses de tous les drones vont s'aligner, en particulier dans ce cas précis sur la vitesse moyenne de la condition initiale. Nous avons également vu qu'en fonction de la force de communication ψ dans le modèle général, il pouvait y avoir collision. Voyons alors si le cas particulier du flot optique permet de les éviter.

Notons qu'il existe d'autres façons d'éviter les collisions. Nous pourrions utiliser une force supplémentaire de répulsion binaire : si deux drones sont trop proches, alors ils doivent se repousser tels des aimants. Cependant cela demanderait l'introduction d'une force supplémentaire et augmenterait la complexité des calculs, ce qui ne va pas dans le sens de la simplicité que nous nous sommes imposé pour nos drones à faible puissance de calcul. Cette approche a tout de même été approfondie dans la section 3.1 du chapitre suivant. Nous y montrerons que la force de répulsion maintient une distance fixe entre les drones si le potentiel d'interaction est assez singulier en fonction des conditions initiales. Le lecteur peut également se référer à [28, 81] pour ce point précis.

Revenons au flot optique. Les résultats sur l'évitement de collision pour le modèle de Cucker-Smale actuellement disponibles sont de deux types. Soit il est seulement garanti que la flotte ne se contracte pas en un point (voir par exemple [62]), ce qui n'empêche pas les collisions, soit l'attention est portée sur les conditions initiales, en montrant que si les drones sont dès le départ dans une configuration favorable, c'est-à-dire avec des vitesses presque alignées, alors ils n'auront pas le temps d'entrer en collision [3]. Plus particulièrement pour le modèle de Cucker-Smale singulier, la question de l'évitement de collision a été étudiée en temps discret [89], ou alors sur des cas très particuliers en dimension 1 ou avec deux agents, n'incluant pas le cas du flot optique $\psi(r) = 1/r$ [104]. Un résultat plus récent et prometteur [18] donne une condition sur la force de communication ψ pour un évitement de collision en temps fini quelque soit la condition initiale. Nous rappelons le résultat principal de cet article, déjà présenté dans la section 1.3.2 :

Théorème 9 (Agrégation pour le modèle de Cucker-Smale singulier[18])

Soit $\{(x_i, v_i)\}_{i=1}^N$ une solution de (1.6) dans le référentiel des centres de masse et de vitesse, pour ψ vérifiant (1.7) et des conditions initiales telles que $x_{ij}(0) \neq 0$ pour tout $1 \leq i \neq j \leq N$.

Si $\int_0^{r_0} \psi(r) dr = \infty$ pour n'importe quel $r_0 > 0$, alors (1.6) admet une unique solution globale, et les agents n'entrent pas en collision :

$$\forall t \geq 0, \quad \forall 1 \leq i \neq j \leq N, \quad x_i(t) \neq x_j(t).$$

De plus, le théorème d'agrégation 1 s'applique toujours.

Nous avons commenté que le résultat peut se réécrire ainsi : il existe $0 \leq r_m(t) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$ telle que $r_m(t) \leq \min_{1 \leq i \neq j \leq N} r_{ij}(t)$ pour tout $t > 0$, mais il se peut que

$\lim_{t \rightarrow \infty} r_m(t) = 0$, donc qu'il y ait collision à l'infini. De plus le consensus en vitesse dans le modèle de Cucker-Smale se met en place exponentiellement vite, donc ce rapprochement est rapide. Une telle diminution de la distance relative est inenvisageable. En effet, les drones ne sont pas limités à des points, mais occupent un volume et ont une distance de sécurité $R_s > 0$ en-deçà de laquelle les drones entrent en collision. Le résultat précédent devient alors : soit $T = \sup_{t > 0} (r_m(t) < R_s)$. Alors, pour tout $t < T$, il ne peut y avoir collision entre deux éléments de l'essaim. Pire encore, si ψ est singulière mais pas d'intégrale infinie à l'origine (comme pour $\psi(r) = 1/r^\beta, 0 < \beta < 1$), les agents peuvent entrer en collision et rester collés [85, 86].

Nous proposons une extension du théorème 9 pour pallier ces défauts.

2.2.1 Existence d'une distance minimale entre agents pour tout temps

Basons nous sur le résultat précédent. En proposant une hypothèse supplémentaire, nous pouvons utiliser les propriétés d'agrégation du système pour mieux estimer les vitesses relatives au cours du temps, ce qui nous permet d'établir l'existence d'une distance minimale uniforme en temps entre tous les drones. Cette distance ne dépend plus que des conditions initiales et de ψ . Nous verrons dans la section suivante que ce résultat se généralise à plusieurs variantes du modèle de Cucker-Smale. Ce résultat, issu d'un travail en collaboration avec Bruno Hérisse de l'ONERA, s'applique à une classe plus large de forces de communication que celle du flot optique $\psi(r) = 1/r$:

Théorème 10 (*Existence d'une distance de sécurité entre agents*)

Soit $\psi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ une fonction décroissante, non intégrable proche de 0 et l'infini. Pour toutes conditions initiales telles que $x_{ij}(0) \neq 0$ pour tout $1 \leq i \neq j \leq N$, il existe pour le modèle de Cucker-Smale (1.6) une borne inférieure $d_m > 0$ indépendante du temps sur toutes les distances relatives :

$$\exists d_{min} > 0, \forall t \geq 0, \min_{i \neq j} r_{ij}(t) \geq d_{min}.$$

Illustrons numériquement ce résultat avant de le démontrer. Reprenons les conditions initiales qui donnaient lieu à une collision dans l'exemple du modèle de Cucker-Smale singulier avec une singularité trop faible. Nous initialisons deux drones aux positions $(\mp 1, 0)$ avec une vitesse $(\pm 2.7, 2.7)$, pour une force de communication $\psi(r) = 2/r$. Le reste des détails de la simulation se trouve en section 3.3.1. Contrairement à ce que nous avons observé en figure 1.4, nous observons dans la figure 2.2 qu'il n'y a plus de collision, et qu'il y a une distance strictement positive entre les drones grâce à la nouvelle forme de ψ .

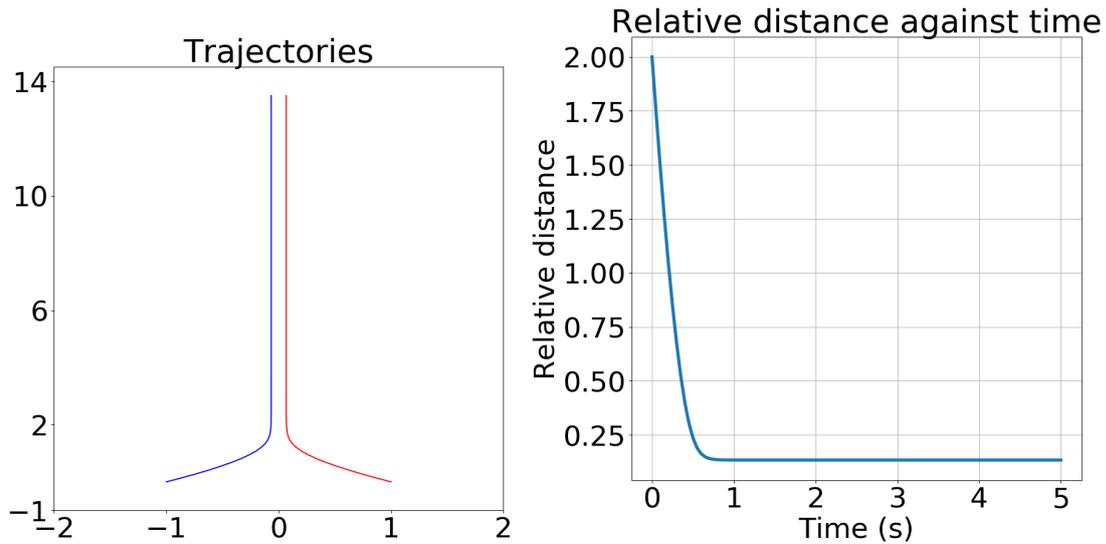


FIGURE 2.2 – Trajectoires de deux drones pour $\psi(r) = 2/r$ (gauche), et leur distance relative au cours du temps (droite).

2.2.2 Preuve du résultat

Commençons par rappeler le résultat de convergence exponentielle des vitesses dans le modèle de Cucker-Smale, qui est central dans la preuve :

Théorème 11 (*Alignement exponentiel des vitesses*[62])

Considérons une solution du modèle de Cucker-Smale (1.6) dans le référentiel des centres de masse et de vitesse. Si ψ n'est pas intégrable à l'infini, alors il existe $r_M > 0$ tel que pour tout temps $t \geq 0$:

$$|X|_2(t) \leq r_M, \quad |V|_2(t) \leq |V(0)|_2 \exp(-\psi(r_M)t).$$

r_M est défini comme le plus grand réel satisfaisant

$$|V(0)|_2 = \int_{|X(0)|_2}^{r_M} \psi(s) ds. \quad (2.2)$$

En particulier, nous en déduisons la convergence exponentielle des positions relatives vers leur équilibre :

Lemme 1

Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent, nous avons pour tout $t \geq 0$ et $i, j \in \llbracket 1, N \rrbracket$:

$$|x_{ij}(t) - x_{ij}(\infty)| \leq \frac{|V(0)|_2}{\psi(r_M)} \exp(-\psi(r_M)t).$$

Démonstration : Nous utilisons simplement l'inégalité suivante, vraie pour tout

$t, s \geq 0$ et $i, j \in \llbracket 1, N \rrbracket$:

$$\begin{aligned} |(x_i - x_j)(t) - (x_i - x_j)(t + s)| &\leq \left| \int_{t+s}^t |v_i - v_j|(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \frac{|v_0|_2}{\psi(r_M)} |1 - e^{-\psi(r_M)s}| e^{-\psi(r_M)t}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre s vers l'infini pour conclure. \blacksquare

Passons à la preuve du résultat en soi. En suivant les calculs de [18], nous savons qu'il n'y a pas de collision en temps fini si $R_s = 0$, pour des drones limités à des points. De plus, nous en apprenons qu'il existe une unique solution globale à (2.1).

La preuve se base sur un raisonnement par l'absurde : supposons qu'il ne puisse pas exister de distance minimale entre tous les drones pour tout temps. Il existe alors une suite d'instant $\{(t_n)\}_{\mathbb{N}}$ convergeant vers l'infini et une suite d'indices $\{(i, j)_n\}_{\mathbb{N}}$ tels que $r_{ij}^n(t_n)$ converge vers 0. L'ensemble d'indices étant fini, nous pouvons supposer, quitte à extraire une sous-suite, que la convergence est vraie pour la paire (l, m) . Nous étudions alors l'ensemble des indices qui entrent en collision avec le drone l à l'infini :

$$\mathcal{L} := \{j \in \llbracket 1, N \rrbracket \mid \exists \{(t_n)\}_{\mathbb{N}} \text{ t.q. } r_{lj}(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0\}. \quad (2.4)$$

Le reste de la preuve consiste à étudier une fonctionnelle dépendant de ψ . Cette fonctionnelle sera singulière par construction, mais grâce à la vitesse exponentielle d'alignement des vitesses, nous pourrons la borner uniformément pour tout temps, et arriver à une contradiction.

Commençons par deux lemmes techniques. Grâce à la vitesse de convergence exponentielle, la caractérisation de \mathcal{L} peut être simplifiée :

Lemme 2 (Caractérisation des éléments de \mathcal{L})

Soit $\{(x_i, v_i)\}_{i=1}^N$ la solution de (2.1), et \mathcal{L} l'ensemble des indices de collision défini en (2.4). La distance relative entre les éléments de cet ensemble converge vers 0 à l'infini :

$$\forall i, j \in \mathcal{L}, r_{ij}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

Démonstration : Montrons d'abord que pour tout $i \in \mathcal{L}$, $r_{il}(t)$ tend vers 0. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite $\{(s_n)\}_{\mathbb{N}}$ tels que $r_{il}(s_n) \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par définition de \mathcal{L} , il existe une suite $\{(t_p)\}_{\mathbb{N}}$ telle que $r_{il}(t_p)$ converge vers 0. En intégrant \dot{r}_{il} entre s_n et t_p , nous obtenons

$$r_{il}(s_n) \leq r_{il}(t_p) + \frac{|V_0|_2}{\psi(r_M)} \exp(-\psi(r_M)t_p).$$

Comme le membre de droite tend vers 0, il existe p assez grand tel que ce membre de droite soit plus petit que $\varepsilon/2$. Nous prenons alors n assez grand pour que $s_n \geq t_p$ pour trouver $r_{il}(s_n) < \varepsilon/2$, ce qui contredit la première hypothèse. Pour étendre le résultat à toute paire d'indices, nous utilisons simplement l'inégalité triangulaire. \blacksquare

Le second lemme technique nous montre qu'à partir d'un certain temps, les éléments de \mathcal{L} qui entrent en collision sont au moins à une certaine distance du reste de la flotte :

Lemme 3 (Séparabilité de la flotte)

Soit $\{(x_i, v_i)\}_{i=1}^N$ l'unique solution de (2.1), et \mathcal{L} l'ensemble des indices de collision défini en (2.4). Les agents de cet ensemble sont séparés d'une distance $\mu > 0$ du reste de la flotte à partir d'un certain temps $T > 0$:

$$\exists \mu > 0, \exists T > 0, \forall t \geq T, \forall i \in \mathcal{L}, \forall j \notin \mathcal{L}, r_{ij}(t) \geq \mu.$$

Démonstration : Puisqu'il y a agrégation, tous les r_{ij} convergent. En particulier, pour tout $j \notin \mathcal{L}$, r_{jl} converge vers un certain $l_j > 0$. Ainsi, il existe un temps $T_j > 0$ tel que $r_{jl}(t) \geq l_j/2$ pour tout $t \geq T_j$. En parallèle, si $i \in \mathcal{L}$, r_{il} tend vers 0, donc il existe un temps \tilde{T}_i tel que $r_{il}(t) \leq l_j/4$ pour $t \geq \tilde{T}_i$. Nous avons donc pour $t \geq T := \max_{k=1, \dots, N} \{T_k, \tilde{T}_k\}$

$$r_{ij}(t) \geq r_{jl}(t) - r_{il}(t) \geq l_j/4 \geq \mu := \min_{j=1, \dots, N} l_j/4.$$

■

Équipés de ces deux lemmes techniques, définissons les quantités que nous contrôlerons durant la preuve :

$$|X|_{\mathcal{L}}(t) := \sqrt{\sum_{i,j \in \mathcal{L}} r_{ij}(t)^2}, \quad |V|_{\mathcal{L}}(t) := \sqrt{\sum_{i,j \in \mathcal{L}} |v_i - v_j|^2}. \quad (2.5)$$

D'après notre hypothèse de départ, $|\mathcal{L}| \geq 2$ et $|X|_{\mathcal{L}}$ converge vers 0 quand t tend vers l'infini. Étudions l'évolution en temps des deux normes sur \mathcal{L} . Commençons par prouver que

$$\frac{d}{dt}|X|_{\mathcal{L}} \leq |V|_{\mathcal{L}}. \quad (2.6)$$

En effet,

$$2|X|_{\mathcal{L}} \frac{d}{dt}|X|_{\mathcal{L}} = \frac{d}{dt}|X|_{\mathcal{L}}^2 = 2 \sum_{i,j \in \mathcal{L}} \langle x_i - x_j, v_i - v_j \rangle \leq 2 \sum_{i,j \in \mathcal{L}} r_{ij} |v_i - v_j| \leq 2|X|_{\mathcal{L}}|V|_{\mathcal{L}}.$$

Intéressons nous maintenant à l'évolution de $|V|_{\mathcal{L}}$ pour $t \geq T$, où T est le temps de séparabilité de la flotte dans le lemme 3. Pour ces calculs, nous séparons la flotte en deux :

$$\frac{d}{dt}|V|_{\mathcal{L}}^2 = A_{\mathcal{L}} + \tilde{A}_{\mathcal{L}}, \quad (2.7)$$

avec

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{L}} &= \frac{2}{N} \sum_{\substack{i,j \in \mathcal{L} \\ k \in \mathcal{L} \setminus \{i,j\}}} \langle v_i - v_j, \psi(r_{ik})(v_k - v_i) - \psi(r_{jk})(v_k - v_j) \rangle, \\ \tilde{A}_{\mathcal{L}} &= \frac{2}{N} \sum_{\substack{i,j \in \mathcal{L} \\ k \notin \mathcal{L}}} \langle v_i - v_j, \psi(r_{ik})(v_k - v_i) - \psi(r_{jk})(v_k - v_j) \rangle. \end{aligned}$$

Pour le premier terme, nous commençons par échanger les indices i et j dans la deuxième partie de la somme :

$$A_{\mathcal{L}} = \frac{4}{N} \sum_{\substack{i,j \in \mathcal{L} \\ k \in \mathcal{L} \setminus \{i,j\}}} \psi(r_{ik}) \langle v_i - v_j, v_k - v_i \rangle.$$

Ensuite nous divisons la triple somme en deux, puis nous échangeons les indices i et k dans la deuxième moitié de la somme :

$$A_{\mathcal{L}} = -\frac{2}{N} \sum_{\substack{i,j \in \mathcal{L} \\ k \in \mathcal{L} \setminus \{i,j\}}} \psi(r_{ik}) |v_k - v_i|^2.$$

Enfin nous utilisons le fait que $r_{ik} \leq |X|_{\mathcal{L}}$ pour $i, k \in \mathcal{L}$:

$$A_{\mathcal{L}} \leq -\frac{2|\mathcal{L}|}{N} \psi(|X|_{\mathcal{L}}) |V|_{\mathcal{L}}^2. \quad (2.8)$$

Pour le second terme, Nous insérons d'abord $\pm v_j$ dans $v_k - v_i$, ce qui nous donne

$$\tilde{A}_{\mathcal{L}} = -\frac{2}{N} \sum_{\substack{i,j \in \mathcal{L} \\ k \notin \mathcal{L}}} \underbrace{\psi(r_{ik}) |v_i - v_j|^2}_{\geq 0} + \frac{2}{N} \sum_{\substack{i,j \in \mathcal{L} \\ k \notin \mathcal{L}}} \left(\psi(r_{ik}) - \psi(r_{jk}) \right) \langle v_i - v_j, v_k - v_j \rangle$$

Ensuite nous utilisons le fait que ψ soit $L^\psi(\mu)$ Lipschitz sur $[\mu, \infty)$, avec le lemme 3 :

$$\tilde{A}_{\mathcal{L}} \leq \frac{2}{N} \sum_{\substack{i,j \in \mathcal{L} \\ k \notin \mathcal{L}}} L^\psi(\mu) r_{ij} |v_i - v_j| |v_k - v_j|$$

Nous concluons en utilisant la décroissance exponentielle de $|v_{kj}|$ et $|X|_{\mathcal{L}} \leq |X|_2$ du lemme 1 :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\mathcal{L}} &\leq 2 \frac{N - |\mathcal{L}|}{N} L^\psi(\mu) |V(0)|_2 e^{-\psi(r_M)t} \sum_{i,j \in \mathcal{L}} r_{ij} |v_i - v_j| \\ &\leq 2 \frac{N - |\mathcal{L}|}{N} L^\psi(\mu) |V(0)|_2 e^{-\psi(r_M)t} |X|_{\mathcal{L}} |V|_{\mathcal{L}} \\ &\leq 2|\mathcal{L}| \frac{N - |\mathcal{L}|}{N} L^\psi(\mu) \frac{|V(0)|_2^2}{\psi(r_M)} e^{-2\psi(r_M)t} |V|_{\mathcal{L}}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

En combinant (2.7), (2.8) et (2.9), nous obtenons

$$\frac{d}{dt} |V|_{\mathcal{L}} \leq -C_0 a(t) |V|_{\mathcal{L}} + C_1 b(t), \quad (2.10)$$

avec

$$C_0 = \frac{|\mathcal{L}|}{N}, \quad C_1 = |\mathcal{L}| \frac{N - |\mathcal{L}|}{N} \frac{|V(0)|_2^2}{\psi(r_M)} L^\psi(\mu), \quad (2.11)$$

$$a(t) = \psi(|X|_{\mathcal{L}}), \quad b(t) = \exp(-2\psi(r_M)t). \quad (2.12)$$

Si nous notons $c(t) := \exp\left(-C_0 \int_T^t a(s) ds\right)$ et $V_T := V(T)$, alors l'inégalité de Gronwall donne pour $t \geq T$:

$$|V|_{\mathcal{L}}(t) \leq \left[|V_T|_{\mathcal{L}} + C_1 \int_T^t b(s)c^{-1}(s) ds \right] c(t). \quad (2.13)$$

Nous sommes maintenant prêts à montrer la contradiction. Soit Ψ une primitive de ψ . Notons que

$$a(t)c(t) = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{C_0} c(t) \right). \quad (2.14)$$

Nous avons alors pour $t \geq T$, d'après (2.6), (2.13), (2.14) et une intégration par partie :

$$\begin{aligned} |\Psi(|X(t)|_{\mathcal{L}}) - \Psi(|X(T)|_{\mathcal{L}})| &\leq \int_T^t \psi(|X|_{\mathcal{L}}) \left| \frac{d}{dt} |X|_{\mathcal{L}} \right| ds \\ &\leq \int_T^t \psi(|X|_{\mathcal{L}}) |V|_{\mathcal{L}} ds \\ &\leq \int_T^t a(s)c(s) \left(|V_T|_{\mathcal{L}} + C_1 \int_T^s b(\tau)c^{-1}(\tau) d\tau \right) ds \\ &= - \int_T^t -\frac{1}{C_0} c(s) C_1 b(s) c^{-1}(s) ds \\ &\quad + \left[-\frac{1}{C_0} c(s) \left(|V_T|_{\mathcal{L}} + C_1 \int_T^s b(\tau)c^{-1}(\tau) d\tau \right) \right]_{s=T}^t \\ &\leq \frac{C_1}{C_0} \int_T^t \exp\left(-2\psi(r_M)s\right) ds + \frac{|V_T|_2}{C_0} \\ &\leq \frac{C_1}{2C_0\psi(r_M)} e^{-2\psi(r_M)T} + \frac{|V_0|_2}{C_0} \\ &< \infty. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Or par hypothèse de collision, $|X(t)|_{\mathcal{L}}$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini. Puisque $|\Psi(|X(t)|_{\mathcal{L}})|$ est uniformément bornée en temps mais que ψ est singulière à l'origine, nous avons contradiction lorsque t tend vers l'infini. Nous avons donc montré l'existence d'une distance minimale entre tous les drones d_{min} .

Il est tentant de vouloir d'estimer cette distance minimale en répétant les mêmes étapes, mais cela ne donne rien d'utilisable en pratique. Voyons pourquoi en essayant avec un nouvel ensemble \mathcal{L}

$$\mathcal{L} := \{j \in \llbracket 1, N \rrbracket \mid r_{lj}(t) \xrightarrow[t \rightarrow T]{} d_{min} \text{ ou } r_{mj}(t) \xrightarrow[t \rightarrow T]{} d_{min}\}. \quad (2.16)$$

Cette fois-ci, (l, m) est la paire d'indice qui réalise la distance minimale d_{min} au sein de la flotte à un certain temps T . Il y a tout de même quelque ajustements à faire, puisque $|X|_{\mathcal{L}}$ ne tend plus vers 0.

En majorant $|x|_{\mathcal{L}}$ par r_M et en choisissant Ψ telle que

$$\Psi(r) = \int_{|X_0|_{\mathcal{L}}}^r \psi(s) ds,$$

l'estimation principale devient

$$|\Psi(|X|_{\mathcal{L}}(T))| \leq \alpha L^\psi(d_-) + C, \quad \alpha = \frac{N-2}{2} \frac{r_M}{\psi(r_M)} |V_0|_2, \quad C = \frac{N}{2\sqrt{2}} |V_0|_2.$$

En fonction de l'ordre des bornes de l'intégrale dans Ψ , nous pouvons utiliser respectivement

$$\begin{cases} |X_0|_{\mathcal{L}} \leq |X_0|_2, \\ |X(T)|_{\mathcal{L}} \geq 2d_{min}, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} |X_0|_{\mathcal{L}} \geq 2d_{min}, \\ |X(T)|_{\mathcal{L}} \leq 3Nd_{min}, \end{cases}$$

selon si $|X_0|_{\mathcal{L}} \leq |X(T)|_{\mathcal{L}}$ ou l'inverse, afin d'obtenir

$$\left| \int_{2d_{min}}^{\min(3Nd_{min}, |X_0|_2)} \psi(s) ds \right| \leq \alpha L^\psi(d_-) + C.$$

Nous voyons que cette relation est implicite, ce qui la rend peu commode à calculer, et nous ne pouvons pas garantir qu'elle définisse une région de d_{min} admissibles intéressante. De plus, cette expression tient compte des pires situations possibles, ce qui rendrait la borne peu intéressante en pratique. Par exemple, si $\psi(r) = 1/r$ dans le cas du flot optique, nous obtenons en supposant que d_{min} est suffisamment petit

$$\log\left(\frac{3N}{2}\right) \leq \frac{\alpha}{d_{min}} + C.$$

Ceci ne nous donne pas de borne inférieure sur la distance minimale !

Nous venons de voir le résultat d'évitement de collision pour le modèle de Cucker-Smale original. Voyons si le résultat est robuste en reproduisant l'étude sur des modèles plus complexes, incorporant d'autres contraintes propres aux flottes de drones.

2.3 Généralisation du résultat à des variantes du modèle incorporant des effets propres aux drones

À l'instar de la section 1.3 pour le modèle de CS, étudions si l'absence de collision est toujours garantie pour quelque variantes du modèle.

2.3.1 Diminution des hypothèses sur la force de communication

Nous pouvons relâcher les hypothèses sur ψ en en demandant plus aux conditions initiales. En effet, le consensus en vitesse prend toujours place si [62]

$$|V(0)|_2 \leq \int_{|X(0)|_2}^{\infty} \psi(s) ds. \tag{2.17}$$

Ceci permet de relâcher l'hypothèse sur l'intégrabilité à l'infini de ψ . Pour ce qui est de l'intégrabilité en 0, nous pourrions demander une condition similaire, de sorte que

l'intégrale dans l'estimation 2.14 n'explose plus. L'intégrale passe alors à un ε près au dessus de la borne trouvée, majorée de sorte à se débarrasser de la dépendance en \mathcal{L} et T . Cependant la borne dépend de l'expansion maximale de la flotte au cours du vol r_M , qui n'est pas connue a priori, donc cette condition sur l'intégrale de ψ en 0 ne serait pas utilisable en pratique.

Ces deux conditions alternatives sont toujours disponibles pour tous les résultats qui suivent quand leur variante infinie est utilisée.

2.3.2 Graphe de communication limité

Le premier nouvel aspect que nous allons étudier est le manque de communication au sein de la flotte. En effet, si certaines caméras sont obstruées ou endommagées, certains drones pourraient ne pas se voir entre eux. Considérons le même modèle qu'en section 1.3.5 :

$$\begin{cases} x'_i(t) = v_i(t), \\ v'_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \psi(r_{ij}) v_{ji}(t), \end{cases} \quad (2.18)$$

où \mathcal{N}_i est l'ensemble des drones avec lesquels l'agent i peut communiquer ou qu'il peut voir.

Pour rappel de la section 1.3.5, nous associons un graphe de communication à la flotte lorsque certains drones ne peuvent plus communiquer entre eux. Dans cette section, nous avons vu que si les drones communiquent assez au cours du temps, il y a toujours agrégation asymptotiquement. Plus précisément, il est nécessaire d'avoir un *spanning tree* dans le graphe pour tout temps, c'est-à-dire qu'il existe un drone connecté à tous les autres par un chemin de longueur quelconque. Bien sûr, il faut également que les conditions initiales soient bien préparées en fonction de la force de communication ψ .

Nous généralisons ici notre résultat sur l'existence d'une distance minimale uniforme en temps à des flottes n'ayant pas un graphe de communication complet :

Théorème 12 (*Distance de sécurité pour graphe de communication limité*)

Soit $\psi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ une fonction décroissante, non intégrable proche de 0 et l'infini. Considérons une solution de (2.18) ayant un *spanning tree* dans son graphe de communication pour tout temps. Pour toutes conditions initiales telles que $x_{ij}(0) \neq 0$ pour tout $1 \leq i \neq j \leq N$, il existe pour le modèle (2.18) une borne inférieure $d_m > 0$ indépendante du temps sur toutes les distances relatives :

$$\exists d_{min} > 0, \forall t \geq 0, \min_{i \neq j} r_{ij}(t) \geq d_{min}.$$

Démonstration : Nous remarquons d'abord que nous avons pas besoin de l'hypothèse sur l'équilibre entre les conditions initiales et ψ du théorème d'agrégation pour graphes limités, puisqu'elle est toujours vérifiée pour ψ singulier. Nous savons donc qu'il y a agrégation exponentiellement vite à une certaine vitesse $\alpha > 0$. Nous reprenons les mêmes arguments que pour la preuve principale, à savoir que nous supposons qu'il y a une collision en temps fini T avec le drone l , donnant lieu à l'ensemble des drones entrant en collision \mathcal{L} . Nous supposons que tous les drones dans \mathcal{L} ont des

communications complètes, puisqu'ils sont sur une trajectoire de collision, quitte à le supposer à partir d'un certain temps. \mathcal{L} est donc inclus dans les voisins \mathcal{N}_i des drones $i \in \mathcal{L}$. Notons alors N_i le complémentaire de \mathcal{L} dans \mathcal{N}_i : $\mathcal{N}_i = \mathcal{L} \sqcup N_i$. Comme les preuves des lemmes 2 et 3 sont les mêmes, nous passons directement à l'étude de $|V|_{\mathcal{L}}$:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |V|_{\mathcal{L}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i,j \in \mathcal{L}} \left\langle v_i - v_j, \sum_{k \in \mathcal{N}_i} \psi(r_{ik})(v_k - v_i) - \sum_{k \in \mathcal{N}_j} \psi(r_{jk})(v_k - v_j) \right\rangle.$$

Comme avant nous séparons les sommes en deux en isolant $k \in \mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{L}} &:= \frac{1}{N} \sum_{\substack{i,j \in \mathcal{L} \\ k \in \mathcal{L} \setminus \{i,j\}}} \langle v_i - v_j, \psi(r_{ik})(v_k - v_i) - \psi(r_{jk})(v_k - v_j) \rangle, \\ \tilde{A}_{\mathcal{L}} &:= \frac{1}{N} \sum_{i,j \in \mathcal{L}} \left\langle v_i - v_j, \sum_{k \in N_i} \psi(r_{ik})(v_k - v_i) - \sum_{k \in N_j} \psi(r_{jk})(v_k - v_j) \right\rangle. \end{aligned}$$

Les calculs sont exactement les mêmes pour $A_{\mathcal{L}}$, nous montrons ici les quelques adaptations nécessaires pour $\tilde{A}_{\mathcal{L}}$. Après avoir injecté $\pm v_k$ dans $v_k - v_i$, nous utilisons simplement la décroissance de ψ , au lieu de son caractère Lipschitz. Nous concluons en utilisant la décroissance exponentielle de $|v_{kj}|$:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\mathcal{L}} &= -\frac{1}{N} \sum_{\substack{i,j \in \mathcal{L} \\ k \in N_i}} \underbrace{\psi(r_{ik})|v_i - v_j|^2}_{\geq 0} \\ &\quad + \frac{1}{N} \sum_{i,j \in \mathcal{L}} \left\langle v_i - v_j, \sum_{k \in N_i} \psi(r_{ik})(v_k - v_j) - \sum_{k \in N_j} \psi(r_{jk})(v_k - v_j) \right\rangle \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{\substack{i,j \in \mathcal{L} \\ k \in N_i}} \psi(r_{ik})|v_i - v_j||v_k - v_j| + \frac{1}{N} \sum_{\substack{i,j \in \mathcal{L} \\ k \in N_j}} \psi(r_{jk})|v_i - v_j||v_k - v_j| \\ &\leq \frac{2\psi(\mu)(N - |\mathcal{L}|)}{N} e^{-\alpha t} \sum_{i,j \in \mathcal{L}} |v_i - v_j| \\ &\leq \frac{4\psi(\mu)(N - |\mathcal{L}|)}{N} e^{-\alpha t} |V|_{\mathcal{L}}, \end{aligned}$$

La fin de la preuve est similaire à celle du théorème 10. ■

2.3.3 Incertitudes sur le flot optique

Un autre type de problème pouvant survenir en vol est l'imprécision des données à disposition. Comme discuté dans la partie modélisation, un capteur peut être défaillant ou peu performant, ou des conditions météorologiques peuvent dégrader l'information à disposition. Voyons donc ce qu'il se passe si le flot optique est perturbé. Pour cela, considérons le modèle suivant :

$$\begin{cases} x'_i(t) = v_i(t), \\ v'_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi(\tilde{r}_{ij}(t))v_{ji}(t), \\ \forall t > 0, \tilde{r}_{ij}(t) \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]r_{ij}(t). \end{cases} \quad (2.19)$$

Nous n'ajoutons pas un bruit à la loi de commande complète, comme ce qui est fait traditionnellement, car ce type de systèmes n'est pas au centre de la thèse. À la place, nous considérons que le flot optique est connu à une constante multiplicative près de petite taille. C'est donc une erreur relative et non absolue, ce qui permet de préserver l'orientation de la force exercée sur les agents. Cela correspond à une modélisation de "pire cas" : au lieu de modéliser exactement où la mesure est par rapport à la vraie quantité, nous étudions ce qu'il se passe si nous savons qu'elle est sur ou sous-estimée d'au plus $1 \pm \varepsilon$.

Nous supposons par simplicité que la quantité r_{ij} est symétrique. Ce type de système n'est pas étudié dans la littérature. En effet, si nous considérons que $R_s = 0$, alors même si ce modèle modifie la valeur de la distance minimale obtenue pour un horizon de temps fini, cette distance reste strictement positive et l'évitement est quand même garanti. Dans notre cas, nous voulons une estimation uniforme pour tout temps, donc l'effet de cette incertitude n'est plus négligeable. L'adaptation du théorème 10 dans ce cadre s'écrit :

Théorème 13 (*Distance de sécurité pour le modèle à incertitude*)

Soit $\psi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ une fonction décroissante, non intégrable proche de 0 et l'infini. Pour tout $\varepsilon > 0$ et toutes conditions initiales telles que $x_{ij}(0) \neq 0$ pour tout $1 \leq i \neq j \leq N$, il existe pour le modèle (2.19) une borne inférieure $d_m > 0$ indépendante du temps sur toutes les distances relatives :

$$\exists d_{min} > 0, \forall t \geq 0, \min_{i \neq j} r_{ij}(t) \geq d_{min}.$$

Par ailleurs, la condition sur l'intégrabilité de ψ à l'infini peut être réduite en

$$2(1 + \varepsilon)|V|_2(0) \leq \int_{2(1+\varepsilon)|X|_2(0)}^{\infty} \psi(s)ds. \quad (2.20)$$

Bien que le résultat d'existence d'une distance minimale soit toujours vrai, les estimations sont très fortement dégradées dès que ε grandit, comme peuvent en témoigner la condition (2.20) et les estimations dans la preuve. Cela vient de la singularité de ψ , qui peut absorber toute imprécision, mais fera reculer la distance de sécurité en conséquence.

La preuve étant encore une fois similaire, nous allons d'une part voir comment retrouver l'agrégation exponentielle pour ce système, puis mettre en évidence les points à modifier dans les estimations pour la distance de sécurité.

Nous aurons besoin du résultat d'agrégation pour le modèle (2.19). Voici sa preuve :

Théorème 14 (*Agrégation pour le modèle de Cucker-Smale à incertitude*)

Considérons une solution du modèle de Cucker-Smale (2.19) dans le référentiel des centres de masse et de vitesse. Si les conditions initiales et ψ vérifient

$$2(1 + \varepsilon)|V|_2(0) \leq \int_{2(1+\varepsilon)|V|_2(0)}^{\infty} \psi(s)ds,$$

alors il existe $r_M > 0$ tel que pour tout temps $t \geq 0$:

$$|X|_2(t) \leq r_M, \quad |V|_2(t) \leq |V|_2(0) \exp\left(-\psi(2(1 + \varepsilon)r_M)t\right).$$

La constante r_M est définie comme le plus grand réel satisfaisant

$$2(1 + \varepsilon)|V|_2(0) = \int_{2(1+\varepsilon)|X|_2(0)}^{2(1+\varepsilon)r_M} \psi(s)ds.$$

Démonstration : Comme \tilde{r}_{ij} est symétrique, le centre de vitesse est toujours préservé. En effet, en inversant les indices dans la double somme nous avons :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i \right) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \psi(\tilde{r}_{ij})(v_j - v_i) = \frac{1}{2N^2} \sum_{i,j=1}^N \psi(\tilde{r}_{ij})(\pm v_j - \pm v_i) = 0.$$

Nous pouvons translater le système dans le référentiel associé. Nous considérons donc les variables $\tilde{v}_i := v_i - v_c$ et $\tilde{x}_i := x_i - x_c$. Cependant, nous n'utiliserons pas la notation tilde pour gagner en lisibilité. Nous avons donc $\sum_{i=1}^N v_i \equiv 0$. Ainsi, nous pouvons étudier les variations de $|X|_2$ et $|V|_2$. Pour les positions, nous utilisons simplement l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N |x_i|^2 = \sum_{i=1}^N \langle x_i, v_i \rangle = \langle X, V \rangle \leq |X|_2 |V|_2, \quad (2.21)$$

d'où

$$\frac{d}{dt} |X|_2(t) \leq |V|_2(t). \quad (2.22)$$

Ensuite pour les vitesses, nous commençons par une symétrisation :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N |v_i|^2 = \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N \psi(\tilde{r}_{ij}) \langle v_i, v_j - v_i \rangle = \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N \psi(\tilde{r}_{ij}) \langle v_i - v_j, v_j - v_i \rangle.$$

Pour la suite, nous avons besoin d'estimer \tilde{r}_{ij} en fonction de $|X|_2$:

$$\tilde{r}_{ij} \leq (1 + \varepsilon)r_{ij} \leq (1 + \varepsilon)(|x_i| + |x_j|) \leq \sqrt{2}(1 + \varepsilon)\sqrt{|x_i|^2 + |x_j|^2} \leq 2(1 + \varepsilon)|X|_2,$$

puisque pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$, $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 2(a^2 + b^2)$ d'après l'inégalité de Young. Puisque ψ est décroissante, nous en déduisons que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N |v_i|^2 \leq -\frac{1}{2N} \psi(2(1 + \varepsilon)|X|_2) \sum_{i,j=1}^N |v_i - v_j|^2. \quad (2.23)$$

Mais

$$\sum_{j=1}^N |v_i - v_j|^2 = \sum_{j=1}^N \left(|v_i|^2 + |v_j|^2 - 2 \langle v_i, v_j \rangle \right) = N|v_i|^2 + |V|_2^2 - 2 \left\langle v_i, \underbrace{\sum_{j=1}^N v_j}_{=0} \right\rangle,$$

d'où

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N |v_i|^2 \leq -\psi(2(1 + \varepsilon)|X|_2) |V|_2^2. \quad (2.24)$$

Nous en concluons que

$$\frac{d}{dt}|V|_2 \leq -\psi(2(1+\varepsilon)|X|_2)|V|_2. \quad (2.25)$$

Nous pouvons maintenant définir

$$E(t) := |V|_2(t) + \frac{1}{2(1+\varepsilon)}\Psi(2(1+\varepsilon)|X|_2(t)), \quad (2.26)$$

où Ψ est une primitive de ψ , et nous remarquons immédiatement que cette fonctionnelle est décroissante. Anisi, pour tout $t \geq 0$

$$\begin{aligned} |V|_2(0) &\geq |V|_2(t) + \frac{1}{2(1+\varepsilon)}\left(\Psi(2(1+\varepsilon)|X|_2(t)) - \Psi(2(1+\varepsilon)|X|_2(0))\right) \\ &\geq \frac{1}{2(1+\varepsilon)} \int_{2(1+\varepsilon)|X|_2(0)}^{2(1+\varepsilon)|X|_2(t)} \psi(r) dr. \end{aligned}$$

Définissons alors r_M comme le plus grand réel satisfaisant

$$2(1+\varepsilon)|V|_2(0) = \int_{2(1+\varepsilon)|X|_2(0)}^{2(1+\varepsilon)r_M} \psi(r) dr,$$

qui existe grâce à la stricte positivité de ψ . En effet, elle implique que

$$\delta \mapsto \frac{1}{2(1+\varepsilon)} \int_{2(1+\varepsilon)|X|_2(0)}^{2(1+\varepsilon)\delta} \psi(r) dr$$

va de 0 à $1/2(1+\varepsilon) \int_{2(1+\varepsilon)|V|_2(0)}^{\infty} \psi(r) dr \geq |V|_2(0)$ pour δ allant de $|X|_2(0)$ à l'infini.

Supposons pour finir qu'il existe un temps $t_* > 0$ tel que $|X|_2(t_*) > r_M$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} |V|_2(0) &\geq \frac{1}{2(1+\varepsilon)} \int_{2(1+\varepsilon)|X|_2(0)}^{2(1+\varepsilon)|X|_2(t)} \psi(r) dr \\ &> \frac{1}{2(1+\varepsilon)} \int_{2(1+\varepsilon)|X|_2(0)}^{2(1+\varepsilon)r_M} \psi(s) ds \\ &= |V|_2(0), \end{aligned}$$

ce qui contredit notre hypothèse. Nous en déduisons donc que pour tout temps $t \geq 0$, $|X|_2(t) \leq r_M$. En utilisant cette nouvelle inégalité dans (2.25) et en utilisant le lemme de Gronwall, nous pouvons conclure la preuve. \blacksquare

Démonstration du théorème 13 : Revenons à la preuve sur l'existence d'une distance de sécurité entre drones. Nous reprenons la stratégie usuelle en supposant qu'il y a une collision en temps fini au temps T , donnant lieu à l'ensemble des drones entrant en collision

$$\mathcal{L} := \{j \in \llbracket 1, N \rrbracket \mid \exists \{(t_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ t.q. } r_{lj}(t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\}.$$

Les preuves des lemmes 2 et 3 sont toujours les mêmes, ainsi que les estimations. Un facteur $1 + \varepsilon$ se glisse parmi elles, voici l'estimation finale, nous permettant de conclure en prenant $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} |\Psi(|X(t)|_{\mathcal{L}})| - |\Psi(|X(T)|_{\mathcal{L}})| &\leq 2(1 + \varepsilon) \frac{N - |\mathcal{L}|}{|\mathcal{L}|} \frac{\psi((1 + \varepsilon)\mu)}{\psi(2(1 + \varepsilon)r_M)} |V|_2(0) \\ &\quad + (1 + \varepsilon) \frac{N}{|\mathcal{L}|} |V|_2(0). \end{aligned}$$

■

2.3.4 Loi de commande supplémentaire générale

Intéressons nous maintenant à des modèles incorporant des comportements supplémentaires au modèle (2.1). Voici d'abord un cas très général, avec une loi de commande de la forme

$$\dot{v}_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \psi(r_{ij})(v_j - v_i)(t) + F(t, x_i, v_i), \quad (2.27)$$

où F est $2\gamma_x$ et $2\gamma_v$ Lipschitz par rapport à sa deuxième et troisième variable respectivement :

$$\begin{aligned} \exists \gamma_x, \gamma_v > 0, \forall t \geq 0, \forall u, v, w \in \mathbb{R}^d, \\ |F(t, u, v) - F(t, w, v)| &\leq 2\gamma_x |u - w|, \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$|F(t, u, v) - F(t, u, w)| \leq 2\gamma_v |v - w|. \quad (2.29)$$

Cette forme est motivée par des forces d'attraction vers une cible, que nous étudierons juste après.

Pour le modèle (2.27), nous avons le résultat suivant :

Théorème 15 (Absence de collision pour une loi de commande)

Soit $\psi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ une fonction décroissante et non intégrable près de 0, et F satisfaisant (2.28)-(2.29). Pour toutes conditions initiales telles que $x_{ij}(0) \neq 0$ pour tout $1 \leq i \neq j \leq N$, il n'y a pas de collision en temps fini pour le modèle (2.27). Il peut y avoir collision à l'infini.

Comme nous le verrons dans les sections qui suivent, il se peut que selon la force F , nous puissions retrouver une distance minimale comme dans le théorème 10, ou au contraire donner un contre exemple spécifique de collision à l'infini. Le théorème 15 est un donc un strict minimum donné par la singularité de ψ , et nous avons besoin de plus de détails sur F pour aller plus loin.

Démonstration : Comme les arguments et les calculs sont les mêmes, nous renvoyons à la preuve du théorème 10 en section 2.2.2 pour les détails. Puisqu'il n'y a plus convergence exponentielle des positions et des vitesses vers l'équilibre, nous noterons C_x (resp. $C_v(t)$) une borne sur $|X|_2$ (resp. $|V|_2$). Nous laissons C_v dépendre du temps pour rester dans le cadre du théorème 10. Si nous supposons à nouveau qu'il y a

collision avec le drone l au temps T , nous définissons l'ensemble \mathcal{L} des agents entrant en collision avec le drone l au temps T . Comme dans (2.10), nous avons

$$\frac{d}{dt}|V|_{\mathcal{L}} \leq - \left(\frac{|\mathcal{L}|}{N} \psi(|X|_{\mathcal{L}}) - \gamma_v \right) |V|_{\mathcal{L}} + \left(\frac{N - |\mathcal{L}|}{N} L^\psi(\mu) C_v + \gamma_x \right) C_x,$$

qui donne après application du lemme de Gronwall et l'intégration de Ψ

$$\begin{aligned} |\Psi(|X|_{\mathcal{L}}(t))| &\leq C_x e^{\gamma_v T} (N - 2) L^\psi(\mu) \int_0^T C_v(s) ds + \frac{N|V(0)|_2}{2} \\ &\quad + C_x N e^{\gamma_v T} \gamma_x T + |\Psi(|X(0)|_{\mathcal{L}})|. \end{aligned}$$

Nous passons à la limite $t \rightarrow T$ pour conclure. ■

Nous remarquons que l'ajout de F apporte un nouveau facteur $e^{\gamma_v T}$ et un terme en $\gamma_x T$. L'argument présenté nous permet de conclure qu'il n'y a pas de collision jusqu'au temps $T < \infty$, mais si nous voulons obtenir l'existence d'une distance minimale, nous avons besoin d'une estimation indépendante de T . Pour cela, C_v doit au moins être $L^1(\mathbb{R}^+)$; cette fonction est habituellement exponentiellement décroissante dans ce que nous avons vu jusqu'à présent. De plus, il faut que cette estimation soit indépendante du terme en γ_x , puisqu'avec les estimations actuelles ce terme explose quand $t \rightarrow T$. Nous allons voir dans la section suivante que ce n'est pas toujours possible.

2.3.5 Exemple de collision à l'infini pour une force de suivi de position

Enquêtons plus loin sur un premier modèle de suivi de position, donné par

$$\dot{v}_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \psi(r_{ij})(v_j - v_i) + \gamma_x(x_{tar}(t) - x_i), \quad (2.30)$$

où $x_{tar} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$ décrit l'évolution de la position de la cible au cours du temps, et $\gamma_x > 0$ l'amplitude de la force associée. Dans ce modèle, tous les drones sont attirés par le point x_{tar} , mais rien ne peut les faire s'éloigner les uns des autres. Pour cela, il faudrait ajouter une force de répulsion. Par conséquent, nous pouvons fournir un exemple de collision à l'infini, ce qui empêche toute amélioration du théorème 15 pour le modèle (2.30).

Considérons un exemple simple en dimension 1, avec deux drones. Ces deux agents sont initialement positionnés à $-r_0$ et $r_0 > 0$ respectivement, avec pour vitesse $v_0 > 0$ et $-v_0$. De plus, nous choisissons comme cible le point 0. Ainsi, les deux drones sont à équidistance de la cible entre eux, et se font face. Notons x et v les position et vitesse relative des deux agents, de sorte que $x \geq 0$ et $v \leq 0$. Le système (2.30) s'écrit alors

$$\dot{v}(t) = -\psi(x(t))v(t) - \gamma_x x(t).$$

Si nous supposons qu'il existe une distance minimale $\delta > 0$, alors pour tout $t \geq 0$

$$\dot{v}(t) \leq -\psi(\delta)v(t) - \gamma_x \delta.$$

Considérons alors la dichotomie suivante : soit pour tout temps, $v(t) \in [-\frac{\gamma_x \delta}{\psi(\delta)}, 0)$, soit il existe un temps $t_0 > 0$ tel que $v(t_0) < -\frac{\gamma_x \delta}{\psi(\delta)}$, ce qui impliquerait $v(t) \leq -\frac{\gamma_x \delta}{\psi(\delta)}$ pour tout $t \geq t_0$. Dans les deux cas, nous obtenons l'existence de $c > 0$ et $t_* > 0$ tels que $v(t) \leq -c$ pour tout $t \geq t_*$, ce qui contredit le fait que x est borné inférieurement. Il ne peut donc pas y avoir de distance minimale entre les deux drones dans ce modèle, et ce quelque soit ψ . Nous généraliserons ce résultat dans la section 3.2.2, où nous montrerons que pour (2.30), tous les drones convergent vers une même position exponentiellement vite.

Nous venons ainsi de voir ce qui se passe quand nous ne pouvons pas nous débarrasser du terme en $\gamma_x T$ dans l'estimation du théorème 15 : la force d'alignement a beau ralentir de plus en plus les drones, ce résidu force la convergence de la distance minimale entre drones vers 0.

2.3.6 Existence d'une distance minimale pour une force de suivi de vitesse

Si au lieu de suivre un point, les drones s'alignent sur une vitesse, ce qui correspond par exemple à un cas où l'essaim cherche à s'aligner sur le comportement d'un élément leader de la flotte, nous pouvons retrouver une distance minimale comme pour le théorème 10. Voici le modèle associé :

$$\dot{v}_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \psi_{ij}(v_j - v_i) + \gamma_v(v_{tar}(t) - v_i), \quad (2.31)$$

où $v_{tar} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$ décrit la trajectoire de la vitesse à suivre, et $\gamma_v > 0$ est l'amplitude de la force associée.

Théorème 16 (Distance de sécurité pour le suivi de vitesse)

Soit $\psi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ décroissante et non intégrable près de 0 et l'infini. Pour toute conditions initiales telles que $x_{ij}(0) \neq 0$ pour tout $1 \leq i \neq j \leq N$, il existe pour le modèle (2.31) une borne inférieure $d_{min} > 0$ sur toutes les distances relatives, uniforme en temps :

$$\exists d_{min} > 0, \forall t \geq 0, \min_{i \neq j} r_{ij}(t) \geq d_{min}.$$

Démonstration : D'après le théorème 15 nous savons qu'une solution globale existe, sans collision en temps fini. Afin de reproduire les calculs du théorème 10 et conclure, nous devons montrer que les vitesses du système s'alignent exponentiellement vite. Nous utilisons les inégalités standard pour ce genre de systèmes dans le référentiel des centres de masse et de vitesse, comme nous l'avons fait pour montrer le théorème 14, afin d'obtenir les inéquations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} |X|_2(t) \leq |V|_2(t), \\ \frac{d}{dt} |V|_2(t) \leq -(\psi(|X|_2(t)) + \gamma_v) |V|_2(t). \end{cases} \quad (2.32)$$

Définissons l'énergie $E(t) = |V|_2 + \Psi(|X|_2)$, où Ψ est une primitive de ψ . Nous avons alors $\frac{d}{dt}E(t) \leq -\gamma_v|V|_2(t) \leq 0$. Ainsi,

$$|V(0)|_2 \geq |V(t)|_2 + \int_{|X(0)|_2}^{|X(t)|_2} \psi(s) ds.$$

Si $|X|_2$ n'était pas borné supérieurement, nous aurions une contradiction avec la non intégrabilité de ψ . Nous en déduisons que pour tout temps t , $|X(t)|_2 \leq r_M$, d'où

$$\frac{d}{dt}|V|_2 \leq -(\psi(r_M) + \gamma_v)|V|_2,$$

c'est-à-dire $|V|_2$ converge exponentiellement vite vers 0. Nous appliquons ensuite exactement les mêmes calculs que pour le théorème 10 pour conclure sur l'existence d'une distance minimale entre tous les drones. ■

Nous voyons ici ce qui se passe quand les termes comportant γ_v décroissent assez vite pour être intégrables dans l'estimation du théorème 15 : leur contributions peuvent être bornées indépendamment de l'horizon temporel, et ainsi n'entravent pas la force d'alignement qui stoppe les drones à temps.

2.3.7 Extension à une force d'attraction et de répulsion

Nous avons vu que le modèle d'attraction à une position (2.30) nécessite une force de répulsion entre drones pour éviter la convergence de toute la flotte sur un même point. Étudions donc le modèle de Cucker-Smale avec une force d'attraction et répulsion, plus communément appelé modèle trois zones :

$$\dot{v}_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \psi(r_{ij})(v_j - v_i) + \frac{1}{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \varphi'(r_{ij})(t) \frac{x_j - x_i}{r_{ij}}. \quad (2.33)$$

Ce modèle sera étudié en plus de détail dans la section 3.1. φ est une fonction potentiel déterminant si la force est attractive ou répulsive, selon le signe de sa dérivée. Nous pouvons montrer qu'il n'y a pas de collision pour des conditions initiales bien préparées, ou si le potentiel de répulsion est singulier (voir [28]), ce qui ne repose que sur la force d'attraction-répulsion, et pas sur le flot optique.

Si nous appliquons ce que nous venons de voir à ce modèle, nous pouvons reproduire le théorème 15 :

Théorème 17

Soit $\psi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ une fonction décroissante et non intégrable près de 0, et $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$. Pour toutes conditions initiales telles que $x_{ij}(0) \neq 0$ pour tout $1 \leq i \neq j \leq N$, il n'y a pas de collision en temps fini pour le modèle (2.33).

Démonstration : Les calculs sont toujours les mêmes, l'estimation finale est

$$|\Psi(|X|_{\mathcal{L}}(t))| \leq |\Psi(|X(0)|_{\mathcal{L}})| + \frac{1}{C_0} \left(\int_0^t b(s) ds + |V(0)|_2 \right), \quad (2.34)$$

avec $C_0 > 0$, et

$$b(t) := \frac{N - |\mathcal{L}|}{N} L^\psi(\mu) |X|_{\mathcal{L}} C_v(t) + \frac{2|\mathcal{L}|}{N} F_{\mathcal{L}}(t),$$

$$F_{\mathcal{L}}(t) := \sqrt{\sum_{i \in \mathcal{L}} |F_i|^2}, \quad F_i := \sum_{k=1}^N \varphi'(r_{ik}) \frac{x_k - x_i}{r_{ik}}.$$

■

Afin d'aller plus loin et de retrouver le théorème 10, nous avons besoin d'éléments supplémentaires. Nous observons dans l'estimation finale que nous avons besoin d'informations sur l'intégrabilité de C_v et de $F_{\mathcal{L}}$. Nous nous sommes intéressés au premier cas, correspondant à la convergence du système vers l'équilibre. En effet, il est à l'heure actuelle ignoré si ce système converge exponentiellement vite vers l'agrégation, malgré toutes les observations numériques. Ce résultat, qui semble intuitif, n'est malgré tout pas démontré dans le cas général. Des éléments de réponse, ainsi que la preuve dans des cas spécifiques, seront apportés dans la section 3.1.3.

Nous voyons donc que si les questions en suspens sont résolues, le flot optique permet d'assurer l'existence d'une distance de sécurité dans ce modèle, et la force d'attraction-répulsion peut alors être utilisée pour imposer une formation de vol, ou empêcher la convergence de la flotte sur un point lors du suivi d'une position.

2.4 Conclusion du chapitre

Dans ce second chapitre, nous avons constaté que l'évolution d'une flotte de drones se repérant grâce au flot optique peut être représentée par un modèle de Cucker-Smale singulier. Nous avons ensuite montré dans le théorème 10 que pour toute condition initiale, il existe une distance minimale uniforme en temps entre tous les drones d'une flotte soumise à ce modèle. Ceci est une amélioration par rapport à la littérature existante, qui jusqu'ici ne garantissait l'évitement de collision que sur des intervalles de temps finis.

Nous avons ensuite généralisé ce résultat aux variantes du modèle incorporant les limitations techniques de nos drones, que nous avons défini dans le chapitre précédent : le théorème 12 nous donne l'existence d'une distance de sécurité dans le cas où les communications entre drones sont limitées, et le théorème 13 dans le cas où le flot optique est connu à une incertitude multiplicative près.

Nous nous sommes également intéressés à la même problématique pour le modèle à flot optique soumis à des forces supplémentaires. Nous avons reproduit le résultat de la littérature dans un cadre de force général dans le théorème 15. Nous avons terminé sur un contre-exemple de force où il y a collision dans la section 2.3.5, et sur un exemple de force où nous pouvons retrouver l'existence d'une distance de sécurité dans le théorème 16.

En conclusion, ce résultat est robuste, et nous pouvons supposer que tant que la modification apportée au modèle ne rompt pas la convergence exponentielle vers le consensus, et n'apporte pas d'effet contradictoire à l'alignement des vitesses, il sera toujours vrai. Dans cette optique, nous pourrions également étudier l'incorporation

de délai ou d'un leader, mais aussi d'obstacles, qui pourraient être considérés comme des drones immobiles, mais à ne pas prendre en compte dans la moyenne pour l'alignement. Cependant, l'adaptation à ce type de modèles ne sera pas immédiate, car les interactions entre drones ne seront plus symétriques. Par exemple, dans le cas du délai, le coefficient $\psi(r_{ij})$ n'est plus symétrique, x_j étant en retard sur x_i . Ainsi, toute l'analyse présentée reste valide, sauf au moment d'étudier les interactions dans \mathcal{L} , l'ensemble des drones supposés entrer en collision pour la preuve par l'absurde. Il faudrait reprendre finement l'analyse de la convergence vers le consensus propre à ce modèle et l'adapter à cet endroit.

Par ailleurs, fournir une estimation utilisable en pratique de la distance de sécurité reste un problème ouvert.

Nous avons ainsi terminé l'étude du modèle de Cucker-Smale et ses variantes. Ajoutons maintenant des comportements supplémentaires à la flotte.

Chapitre 3

Enrichissement du modèle microscopique et simulations numériques

Sommaire

3.1	Imposer une formation de vol : modèle trois-zones	52
3.1.1	Présentation du modèle trois-zones	52
3.1.2	Existence, unicité et comportement en temps long des solutions	54
3.1.3	Étude de la vitesse de convergence du système	58
3.1.4	Ajout d'une force complémentaire pour réduire les oscillations	65
3.1.5	Étude de la formation de vol en fonction du potentiel d'interaction	69
3.1.6	Illustration numérique de l'instabilité de la formation en réseau	73
3.1.7	Étude numérique de la formation en disque en fonction du potentiel d'interaction	76
3.2	Ajout de forces externes à la flotte	80
3.2.1	Alignement vers une vitesse cible	80
3.2.2	Convergence vers une cible en position	81
3.2.3	Évitement d'obstacles	84
3.3	Simulations complémentaires	85
3.3.1	Présentation du solveur microscopique	85
3.3.2	Étude des performances du solveur en fonction du nombre de drones	87
3.4	Conclusion du chapitre	88

Jusqu'à présent, nous avons étudié un modèle de consensus, qui sous condition permet de garantir l'évitement des collisions entre drones. Cependant, il manque à ce modèle une caractéristique essentielle, une formation de vol. En effet, les drones sont désordonnés une fois agrégés, puisque le modèle ne contraint pas les positions des agents. De plus, nous voulons que cette flotte accomplisse certaines missions. Ce chapitre est donc dédié à la modélisation de ces caractéristiques et à l'étude des modèles obtenus.

Dans la première section 3.1, nous définirons la force permettant d'imposer une formation de vol à la flotte. Nous étudierons théoriquement le modèle, avant d'explorer

numériquement les propriétés des différentes formations.

Ensuite, nous ajouterons dans la section 3.2 des forces liées à l'environnement et aux objectifs des drones. Nous étudierons également les modèles obtenus.

Nous concluons le chapitre par la section 3.3, en étudiant l'impact du nombre de drones sur le temps de calcul de nos simulations.

3.1 Imposer une formation de vol : modèle trois-zones

Certains travaux s'intéressent à des modèles où la formation de vol est imposée manuellement. La méthode la plus courante est d'exercer un contrôle forçant les drones à se positionner par rapport à des voisins pré-déterminés [31, 5]. Cette deuxième approche est favorable à la décentralisation, puisqu'il n'y a pas de contrôle extérieur au cours du vol. De plus, elle permet de choisir la formation de vol. Cependant, cette approche repose sur le fait que tous les agents sont identifiés. Or, pour nos grandes flottes, nous voulons des agents interchangeable, au cas où il y ait des pertes en vol, ou que deux flottes fusionnent. La modélisation précédente entraînerait une rupture de la formation, et les drones seraient perdus si un agent venait à manquer. Nous allons voir une stratégie totalement décentralisée, où les drones se placent par rapport à leurs voisins proches, quels qu'ils soient.

Comme nous l'avons annoncé plusieurs fois, une force d'attraction-répulsion est le moyen le plus simple de donner une formation de vol à un ensemble d'agents de manière automatisée. En effet, munis d'une force d'interaction, les drones vont chercher à s'éloigner les uns des autres à cause de la répulsion, mais vont aussi s'attirer une fois éloignés. Seule, cette force provoquerait une oscillation infinie de la flotte, mais la force d'alignement que nous avons étudié dans les chapitres précédents est là pour dissiper de l'énergie, et faire voyager les drones dans la même direction, réduisant petit à petit les oscillations. À l'état final, les drones vont donc chercher à être dans une disposition équilibrant l'attraction et la répulsion.

Dans cette section, nous allons démontrer ce que nous venons d'annoncer, avant d'étudier numériquement les formations de vol.

3.1.1 Présentation du modèle trois-zones

Définition cette nouvelle force, que nous ajouterons au modèle de Cucker-Smale. Nous nous intéressons à une force d'attraction-répulsion pour chaque drone $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$:

$$F_{int}^i = -\frac{1}{N} \sum_{j=1, j \neq i}^N \nabla_{x_i} [\varphi(r_{ij})] = \frac{1}{N} \sum_{j=1, j \neq i}^N \varphi'(r_{ij}) \frac{x_{ji}}{r_{ij}}, \quad (3.1)$$

où φ est le potentiel d'interaction, qui vérifie

$$\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+), \quad \text{et} \quad \varphi(r) \geq 0, \quad \forall r \geq 0. \quad (3.2)$$

La première hypothèse est utile pour que (3.1) soit bien définie, mais n'est pas nécessaire en pratique ; \mathcal{C}^1 par morceaux suffit. La seconde hypothèse sert à fixer la constante du potentiel, puisque nous n'utilisons que sa dérivée. La positivité est commode pour les preuves.

Dans la suite, quand nous manipulerons des forces d'interactions, nous utiliserons systématiquement la forme donnée par la dernière égalité de (3.1). Grâce à cette forme, nous remarquons que la force d'interaction est dirigée selon l'axe entre x_i et x_j . Son intensité et son orientation est déterminée par $\varphi'(r_{ij})$: si φ est décroissante alors la force est répulsive, alors que si elle est croissante, la force est attractive, comme illustré en figure 3.1.

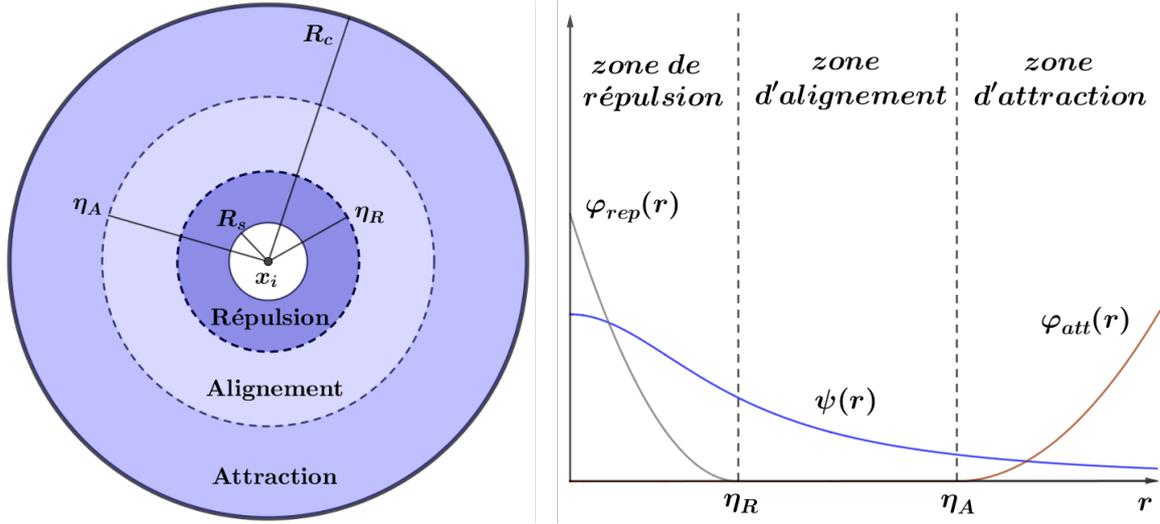


FIGURE 3.1 – Illustration de l'intensité relative des forces dans le modèle trois-zones.

Afin de reproduire les trois zones du schéma, avec une répulsion à courte portée, et une attraction à longue portée, nous voulons donc des potentiels décroissants près de 0, et croissant à partir d'un certain point. Voici quelque exemples.

L'exemple le plus répandu est le potentiel quadratique, grâce à sa simplicité :

$$\varphi(r) = \frac{1}{2}(r - \eta)^2. \quad (3.3)$$

$\eta > 0$ est le seuil d'interaction, puisque $\varphi'(r) = r - \eta$ aura un signe différent selon la position de r par rapport à η .

Nous pouvons également opter pour un potentiel singulier en 0 :

$$\varphi(r) = \frac{r^2}{2} + \frac{1}{r} - \frac{3}{2}. \quad (3.4)$$

La singularité en 0 permet d'éviter les collisions en toutes conditions comme nous le verrons après. Le seuil d'interaction ici est 1, mais peut être modifié en changeant d'échelle avec $\tilde{\varphi}(r) = \varphi(r/\eta)$.

Nous pouvons aller plus loin dans la personnalisation, en découplant attraction et répulsion :

$$\varphi(r) = \frac{F_A}{q}(r - \eta_A)_-^q + \frac{F_R}{p}(r - \eta_R)_+^p. \quad (3.5)$$

F_A et F_R sont les intensités relatives des deux composantes, p, q déterminent la pente du potentiel, et $\eta_A \geq \eta_R$ délimitent les zones d'attraction et de répulsion sur les intervalles $[0, \eta_R]$ et $[\eta_A, \infty]$. Un tel potentiel peut être utilisé pour affiner le contrôle

sur la formation par rapport au potentiel quadratique. Nous illustrerons cela en section 3.1.5.

Nous utiliserons par défaut le potentiel quadratique, puisqu'il a une expression simple et possède tous les attributs que nous avons listé.

Nous utiliserons donc dans le reste du chapitre le modèle suivant, communément appelé modèle trois-zones, en raison des trois forces d'alignement, de répulsion et d'attraction qui sont d'intensité différentes selon la distance entre deux drones, comme illustré dans la figure 3.1 :

$$\begin{cases} x'_i(t) = v_i(t), \\ v'_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi(r_{ij})v_{ji}(t) + \frac{1}{N} \sum_{j=1, j \neq i}^N \varphi'(r_{ij}) \frac{x_{ji}}{r_{ij}}(t), \end{cases} \quad (3.6)$$

pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Commençons par étudier le modèle dans sa globalité.

3.1.2 Existence, unicité et comportement en temps long des solutions

Avant de nous pencher sur les formations de vol offertes par le modèle trois-zones, étudions ses propriétés analytiques. Nous utilisons le modèle (3.6), et nous nous plaçons comme d'habitude dans le référentiel des centres de masse et de vitesse, ce qui ne modifie pas l'équation. Nous aurons besoin pour l'étude à suivre de l'énergie du système, définie par

$$E(t) := K(t) + P(t) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N |v_i|^2(t) + \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \varphi(r_{ij})(t). \quad (3.7)$$

Ces deux énergies correspondent à l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système.

Le comportement en temps long du modèle est toujours l'agrégation, comme pour le modèle de Cucker-Smale. Cependant l'apparition de l'agrégation ne dépend plus ici de la forme de ψ , puisque la force d'attraction assure que les drones sont toujours assez proches, et communiquent donc suffisamment pour que les drones s'alignent :

Théorème 18 (Agrégation pour le modèle trois-zones)

Soit $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ une force de communication strictement positive et décroissante. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ un potentiel d'interaction positif vérifiant (3.2) et tel que $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r) = \infty$. Pour toute condition initiale vérifiant $NE(0) < \varphi(0)$, il existe une unique solution globale au système (3.6), qui s'agrège en temps long.

Plus précisément, il existe deux constantes $r_m, r_M > 0$ telles que pour tout $i, j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et $t \geq 0$,

$$0 < r_m \leq r_{ij}(t) \leq r_M < \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v_i(t) = 0.$$

En particulier, il n'y a pas de collisions pendant le vol. Si de plus φ est singulier, alors la condition $NE(0) < \varphi(0)$ est toujours vérifiée.

Il faut comprendre $v_i(t) \rightarrow 0$ comme $v_i(t) \rightarrow v_c(0)$, puisque nous sommes dans le référentiel du centre de vitesse.

Nous voyons dans ce théorème que la force de répulsion peut bien entendu servir à éviter les collisions. Nous l'utilisons plutôt ici pour imposer la formation de vol à la flotte. En effet, l'aspect évitement des collisions de la force de répulsion n'est pas nécessaire d'après ce que nous avons déjà vu. Nous avons montré que si la force de communication est singulière - ce qui correspond au flot optique étudié au chapitre 2 - l'hypothèse sur les conditions initiales n'est plus nécessaire pour l'évitement des collisions dans le modèle de Cucker-Smale. Nous avons aussi vu en section 2.3.7 qu'il semblerait que ce soit aussi le cas pour le modèle trois-zones, bien que nous n'ayons pas pu le prouver.

En outre, choisir l'alignement ou la répulsion singulier pour éviter les collisions revient à choisir le type de rebond entre drones : l'alignement donne des "collisions" inélastiques, la répulsion des "collisions" élastiques, comme illustré dans la figure 3.2. La figure vient de l'expérience suivante : nous initialisons deux drones aux positions $(-1, 0)$ et $(1, 0)$, avec une vitesse respective $(1, 1)$ et $(-1, 0)$. Nous étudions leur évolution dans l'intervalle de temps $[0, 4]$ avec un pas de temps constant $\Delta t = 0.001s$. Le reste des détails de la simulation se trouve en section 3.3.1. Nous comparons l'évolution des deux drones soumis à une seule force dans deux cas. Dans le premier cas nous observons une "collision" inélastique s'il n'y a qu'une force d'alignement avec $\psi(r) = 0.5/r$, ou une "collision" élastique s'il n'y a qu'une force d'interaction avec $\varphi(r) = 0.5 \log(r)$.

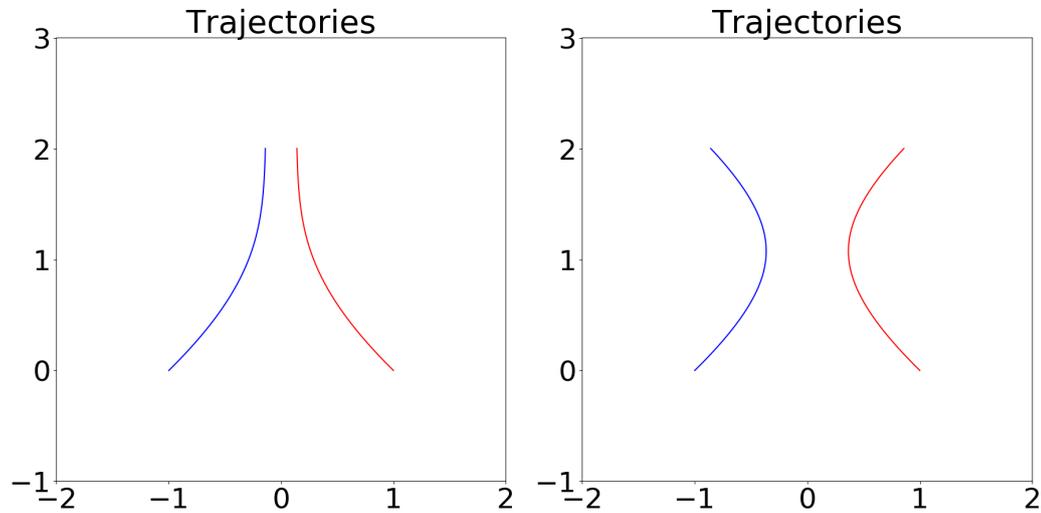


FIGURE 3.2 – Trajectoires de deux drones au cours du temps soumis à une force, initialement placés en $(\pm 1, 0)$. Illustration d'une "collision" inélastique pour un alignement singulier (gauche), "collision" élastique pour une répulsion singulière (droite).

Démonstration du théorème 18 : L'existence et l'unicité d'une solution locale au modèle trois-zones (3.6) est une conséquence de la régularité de ψ et φ d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz. Pour prolonger indéfiniment l'existence des solutions, nous allons montrer que ces dernières n'explosent pas en temps fini. Les sources d'explosion sont les singularités éventuelles des potentiels. En particulier pour la force d'interaction (3.1), nous voyons qu'il y a une division par r_{ij} . Les collisions, ou encore l'échappée d'un drone à l'infini, sont des sources de singularité. Pour empêcher cela, étudions

l'évolution de l'énergie du système. Pour la simplicité des notations, nous considérons que les termes en $1/r_{ij}$ sont nuls si $i = j$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &= \sum_{i=1}^N \left\langle v_i, \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi(r_{ij})v_{ji} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \varphi'(r_{ij}) \frac{x_{ji}}{r_{ij}} \right\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N \varphi'(r_{ij}) \frac{\langle x_{ij}, v_{ij} \rangle}{r_{ij}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N \left\langle v_i, \psi(r_{ij})v_{ji} + \varphi'(r_{ij}) \frac{x_{ji}}{r_{ij}} \right\rangle + \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N \varphi'(r_{ij}) \frac{\langle x_{ij}, v_{ij} \rangle}{r_{ij}} \end{aligned}$$

En remarquant que le membre de droite du premier produit scalaire est antisymétrique en i, j , nous pouvons diviser la double somme en deux, et échanger les indices dans une des moitiés :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &= \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N \left\langle v_i - v_j, \psi(r_{ij})v_{ji} + \varphi'(r_{ij}) \frac{x_{ji}}{r_{ij}} \right\rangle + \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N \varphi'(r_{ij}) \frac{\langle x_{ij}, v_{ij} \rangle}{r_{ij}} \\ &= -\frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N \psi(r_{ij})|v_{ij}|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Nous voyons donc que l'énergie est décroissante au cours du temps, et cette décroissance est uniquement régie par la force de communication ψ . En effet, la dérivée de P est compensée par une partie de celle de K . Ceci correspond au fait que s'il n'y avait que la force d'attraction-répulsion, alors nous aurions un système qui oscille indéfiniment, tel un pendule non amorti. Cependant dans notre modèle, la force d'alignement vient dissiper de l'énergie au cours du temps, et c'est ce qui va permettre au système de se stabiliser.

Nous savons donc que l'énergie au cours du temps est bornée par sa valeur initiale. En particulier

$$E(0) \geq E(t) \geq \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N \varphi(r_{ij}) \geq \frac{1}{N} \varphi(r_{i_0 j_0})$$

pour toute paire $i_0 \neq j_0$. Comme $NE(0) < \varphi(0)$, nous savons que $\varphi(r_{i_0 j_0}) < \varphi(0)$, et par ailleurs $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r) = \infty$. Ceci implique que le long des trajectoires, φ est bornée, donc les drones sont piégés dans un puits de potentiel : il existe deux constantes $r_m, r_M > 0$ bornant toutes les distances relatives pour tout temps. La figure 3.3 illustre comment trouver ces bornes.

Il n'y a donc pas de collision, et les solutions sont globales. Il ne reste plus qu'à montrer que les vitesses convergent. Pour cela, nous allons montrer que l'énergie cinétique K est intégrable et uniformément continue. Il en suivra que $\lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = 0$, donc que les vitesses convergent vers leur centre.

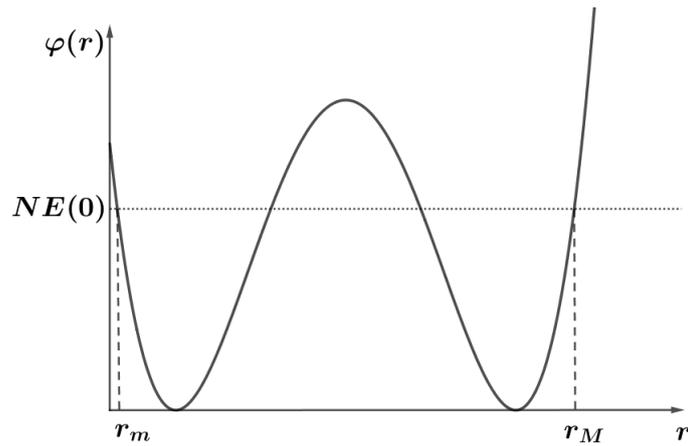


FIGURE 3.3 – Illustration de la dérivation des bornes r_m, r_M sur les distances relatives : le potentiel φ est borné le long des trajectoires par $NE(0)$.

Premièrement, étudions l'intégrabilité de K :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}E(t) &= -\frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N \psi(r_{ij})|v_{ij}|^2 \\
 &\leq -\frac{\psi(r_M)}{2N} \sum_{i,j=1}^N |v_{ij}|^2 \\
 &= -\frac{\psi(r_M)}{2N} \sum_{i,j=1}^N (|v_i|^2 + |v_j|^2 - 2\langle v_i, v_j \rangle) \\
 &= -2\psi(r_M)K(t) - \frac{\psi(r_M)}{2N} \sum_{i=1}^N \left\langle v_i, \sum_{j=1}^N v_j \right\rangle \\
 &= -2\psi(r_M)K(t).
 \end{aligned}$$

Nous en déduisons par intégration que

$$\int_0^\infty K(s)ds \leq \frac{E(0)}{2\psi(r_M)}.$$

Ensuite penchons nous sur l'uniforme continuité :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}K(t) &= -\frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N \psi(r_{ij})|v_{ij}|^2 - \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N \varphi'(r_{ij}) \frac{\langle x_{ij}, v_{ij} \rangle}{r_{ij}} \\
 &\leq 2\psi(r_M)E(0) + |\varphi'|_{L^\infty(r_m, r_M)} \sqrt{E(0)} < \infty.
 \end{aligned}$$

■

Maintenant que nous avons confirmé que le système converge, nous allons nous intéresser à la vitesse de convergence vers l'équilibre.

3.1.3 Étude de la vitesse de convergence du système

Pourquoi s'intéresser à la vitesse de convergence d'un système vers l'équilibre ? En pratique, cela nous donne une estimation du temps qu'il faut à la flotte pour se mettre en formation, ou accomplir son objectif. Il est donc crucial, pour entre autres minimiser les coûts en ressources, de pouvoir estimer la vitesse de convergence en fonction des différents paramètres de la flotte.

Comme le modèle trois-zones est basé sur le modèle de Cucker-Smale, nous pourrions nous attendre à retrouver une convergence exponentielle vers l'équilibre. Cependant comparons un exemple de convergence de l'énergie dans le modèle de Cucker-Smale et dans le modèle trois-zones dans la figure 3.4. Pour cela, utilisons 49 drones répartis sur une grille carrée de côté un, avec des vitesses choisies aléatoirement uniformément dans $[-2.5, 2.5]^2$. Les simulations se déroulent respectivement sur les intervalles $[0, 10]$ et $[0, 15]$ avec un pas de temps constant $\Delta t = 0.001s$. Nous utilisons les potentiels $\psi(r) = 1/(1+r^2)$ et $\varphi(r) = 0.5(r-1)^2$. Le reste des détails des simulations se trouve en section 3.3.1.

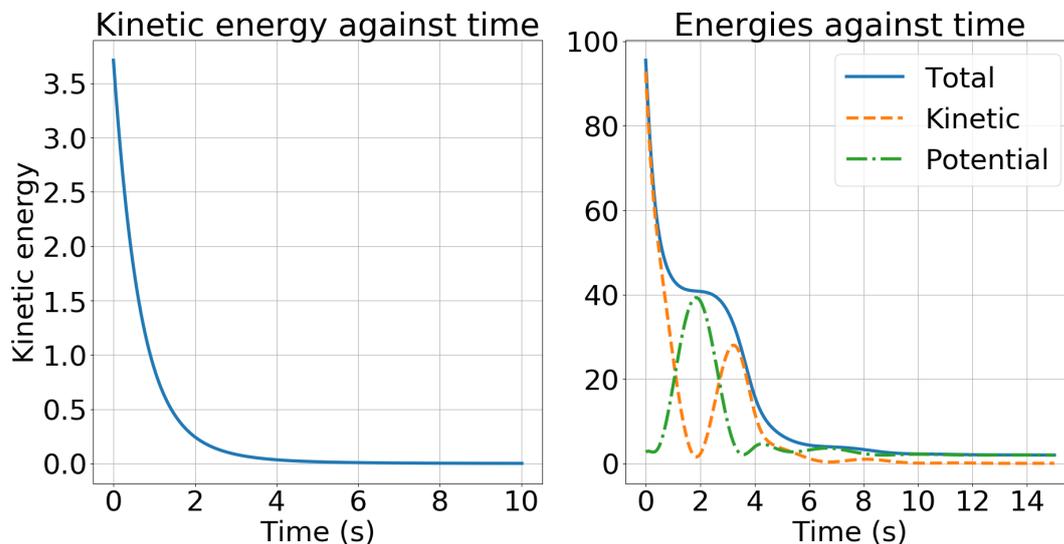


FIGURE 3.4 – Exemples d'évolution de l'énergie K dans le modèle de Cucker-Smale (gauche), et de $K + P$ dans le modèle trois-zones (droite).

Si à gauche la courbe de l'énergie est une exponentielle, à droite ce n'est pas le cas. Nous voyons une fonction décroissante avec des paliers. Ces paliers correspondent aux moments où la flotte est le plus contractée ou étendue dans les oscillations qu'apportent la force d'attraction-répulsion. En terme d'énergie, cela correspond aux moments où l'énergie potentielle est maximale, et va être convertie en énergie cinétique, comme nous pouvons le constater dans la figure 3.4. Toutefois, nous voyons que la courbe d'énergie du modèle trois-zones ressemble globalement à une exponentielle décroissante.

Dans le but d'estimer la vitesse de convergence du système, étudions plus en détail l'évolution de l'énergie du modèle trois-zones. Le premier point à remarquer est qu'elle ne converge pas vers 0. En effet, à l'équilibre l'énergie cinétique s'annule, et les drones sont dans une configuration minimisant l'énergie potentielle. Cette valeur minimale n'est pas forcément 0, selon le potentiel choisi ou les conditions initiales pouvant mener

à différents équilibres.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) := E_\infty = P(\infty) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \varphi(r_{ij})(\infty).$$

Cette valeur E_∞ n'étant pas connue à l'avance, nous ne pouvons pas l'utiliser pour montrer explicitement la convergence vers un équilibre précis. Nous pouvons seulement tenter de maîtriser l'énergie translatée $E(t) - E_\infty$ par une exponentielle convergeant vers 0.

De plus, nous rappelons que

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N \psi(r_{ij}) |v_{ij}|^2 \leq -2\psi(r_M) K(t),$$

donc l'énergie décroît toujours, sauf lorsque $K(t)$ s'annule. Il nous faudrait donc récupérer un terme en P dans l'estimation de décroissance d'énergie, afin de reconstituer E dans le membre de droite. Nous pourrions ainsi utiliser le lemme de Gronwall, et conclure à une décroissance exponentielle.

Pour obtenir une estimation de la vitesse de convergence du modèle trois-zones, nous aimerions donc capturer la décroissance exponentielle du système en définissant une autre fonctionnelle de Lyapunov G s'inspirant de E . La principale différence sera que cette nouvelle fonctionnelle G sera décroissante même lorsque $K(t) = 0$. Plus précisément, nous voudrions définir G équivalente à E et que G décroisse exponentiellement vite vers 0, c'est-à-dire qu'il existe des constantes $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ telles que pour tout temps t ,

$$C_1 G(t) \leq E(t) - E_\infty \leq C_2 G(t), \quad G(t) \leq C_3 \exp(-C_4 t).$$

Cette problématique a déjà été étudiée pour de nombreux types de systèmes, et a mené à la notion de coercivité. Considérons $L : D(L) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire dans un espace de Hilbert, donnant lieu au système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u = -Lu, & t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (3.8)$$

L est alors dit coercif s'il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $h \in D(L) \cap (\text{Ker} L)^\perp$

$$(Lh, h)_H \geq \lambda |h|_H^2.$$

Ainsi, l'énergie canonique associée au système est naturellement exponentiellement décroissante :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|_H^2 = -(Lu, u)_H \leq -\lambda |u|_H^2.$$

Cependant, il se peut que le système converge exponentiellement vite vers son équilibre, sans que l'opérateur associé soit coercif. Nous parlons alors d'hypocoercivité. Pour montrer qu'un système est hypocoercif, la stratégie consiste à définir une nouvelle entropie, généralement l'énergie du système plus un terme correctif. Nous renvoyons vers [100, 45, 52] pour des revues sur l'hypocoercivité.

Dans notre cas qui n'est pas coercif, le problème est que la variation de l'énergie $\frac{d}{dt}E$ ne capture pas les échanges entre l'énergie potentielle et cinétique, elle n'a qu'une partie dissipative issue de K . Nous allons donc ajouter un terme mélangeant les positions et les vitesses, afin de lisser les oscillations de E aux moments où $K(t) = 0$, et ajouter un terme en P dans les estimations. C'est ce que nous avons fait dans la section 2.3.5 sans le mentionner, afin de montrer la convergence exponentielle vers la cible du modèle de suivi de position.

Nous introduisons donc le terme correctif suivant :

$$\chi(t) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\varphi'(r_{ij})}{r_{ij}} \langle x_{ij}, v_{ij} \rangle (t), \quad (3.9)$$

et la nouvelle énergie G , avec $\alpha > 0$ à choisir correctement pour que $G - E_\infty$ décroisse exponentiellement vite, est donnée par :

$$G(t) := E(t) + \alpha \chi(t). \quad (3.10)$$

Toutefois, nous n'avons pas réussi à montrer cette convergence pour le modèle trois-zones en toute généralité. Nous l'avons fait pour deux drones en dimension quelconque, ce qui nous conforte dans le choix de notre terme correctif, mais nous n'avons pas réussi à terminer certaines estimations dans le cas général à N drones. Nous avons tenté autre chose que nous présenterons dans la section 3.1.4. Nous présentons maintenant la preuve terminée pour deux drones, avant de montrer le point bloquant pour N drones.

3.1.3.1 Cas de deux drones

Si nous n'avons que deux drones, nous pouvons montrer que le modèle trois-zones est hypocoercif :

Proposition 1 (*Hypocoercivité du modèle trois-zones pour deux drones*)

Soit ψ une force de communication constante strictement positive. Soit $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^+)$ un potentiel d'interaction positif tel que $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r) = \infty$ et

$$0 \leq C_1 \varphi(r) \leq (\varphi'(r))^2 \leq C_2 \varphi(r), \quad \forall r \geq r_m > 0,$$

pour deux constantes $C_1, C_2 > 0$ et où r_m est la distance minimale absolue entre deux drones au cours du temps donnée par le théorème 18.

Considérons une "flotte" de deux drones ($N = 2$), avec une condition initiale vérifiant $NE(0) < \varphi(0)$. Alors il y a agrégation exponentiellement vite pour le modèle (3.6).

La condition sur φ est une sorte d'hypothèse de convexité, qui sert à assurer que les drones soient confinés dans un puits de potentiel. Elle est purement technique et sert dans les estimations. Elle est en particulier vérifiée pour notre potentiel quadratique de défaut, ou le potentiel singulier présentés en début de section 3.1.

Démonstration : D'après le théorème 18, nous avons existence d'une unique solution globale s'agréant en temps long. Notons $x := x_{12}$, $v := v_{12}$ et $r := r_{12}$. Le

système (3.6) s'écrit alors pour tout temps $t \geq 0$

$$\begin{cases} x'(t) = v(t), \\ v'(t) = -\psi v(t) - \frac{\varphi'(r(t))}{r(t)} x(t). \end{cases} \quad (3.11)$$

L'énergie d'équilibre est ici $E_\infty = 0$, puisqu'en effet à l'infini nous avons

$$0 = \frac{\varphi'(r(\infty))}{r(\infty)} x(\infty),$$

ce qui impose $\varphi'(r(\infty)) = 0$, et par équivalence avec φ , $E_\infty = 0$. Étudions donc notre fonctionnelle d'énergie modifiée G :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}G(t) &= \frac{d}{dt}E(t) + \alpha \frac{d}{dt} \left(\frac{\varphi'(r)}{r} \langle x, v \rangle \right) \\ &= -\frac{\psi}{2}|v|^2 + \alpha \left(\frac{r\varphi''(r) - \varphi'(r)}{r^2} \right) \langle x, v \rangle r'(t) \\ &\quad + \alpha \frac{\varphi'(r)}{r} \left(|v|^2 + \left\langle x, -\psi v - \frac{\varphi'(r)}{r} x \right\rangle \right) \\ &= -\frac{\psi}{2}|v|^2 + \alpha \left(\frac{r\varphi''(r) - \varphi'(r)}{r^3} \right) \langle x, v \rangle^2 \\ &\quad + \alpha \left[\frac{\varphi'(r)}{r} |v|^2 - \psi \frac{\varphi'(r)}{r} \langle x, v \rangle - (\varphi'(r))^2 \right] \\ &\leq \left[-\frac{\psi}{2} + \alpha \left(\left| \frac{r\varphi''(r) - \varphi'(r)}{r} \right| + \left| \frac{\varphi'(r)}{r} \right| \right) \right] |v|^2 - \psi \alpha \chi(t) - \alpha C_1 P(t). \end{aligned}$$

Comme nous sommes dans le référentiel de centre de vitesses, $v_1 = -v_2$, donc $|v|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2 - 2 \langle v_1, v_2 \rangle = 2(|v_1|^2 + |v_2|^2)$. Ainsi,

$$\frac{d}{dt}G(t) \leq -\min(2(\psi - 2\alpha\gamma), \psi, \alpha C_1)G(t), \quad (3.12)$$

où

$$\gamma = \sup_{r \in (r_m, r_M)} \left(\left| \frac{r\varphi''(r) - \varphi'(r)}{r} \right| + \left| \frac{\varphi'(r)}{r} \right| \right).$$

Pour que le min soit positif, nous avons la condition $\psi > 2\alpha\gamma$. Remarquons que γ est déterminé à partir des conditions initiales et de ψ . Nous devons donc fixer α selon la condition en fonction de l'état de départ de la flotte. Grâce au lemme de Gronwall, nous concluons que G converge exponentiellement vite vers 0.

Montrons maintenant que E est majorée par G en utilisant l'inégalité de Young :

$$\begin{aligned} \chi(t) &= \frac{\varphi'(r)}{r} \langle x, v \rangle \\ &\geq -|\varphi'(r)||v| \\ &\geq -\frac{1}{2}((\varphi'(r))^2 + |v|^2) \\ &\geq -\frac{C_2}{2}P(t) - 2K(t). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\min(1 - 2\alpha, 1 - \alpha C_2/2)E(t) \leq G(t).$$

Ceci rajoute deux conditions sur α : $2\alpha < 1$ et $\alpha C_2 < 2$. ■

Pour aller plus loin, nous pouvons chercher à trouver le α assurant la convergence la plus rapide. Pour cela, nous cherchons à maximiser $\min(2(\psi - 2\alpha\gamma), \psi, \alpha C_1)$. La figure 3.5 illustre le raisonnement qui suit. Nous cherchons l'intersection des deux fonctions affines en α , qui se fait en $\alpha_1 = 2\psi/(C_1 + 4\gamma)$. Soit l'intersection est sous le niveau ψ , et le α optimal est α_1 , soit l'intersection se fait au dessus de ψ , et le α optimal est l'intersection entre la fonction constante à ψ et la fonction décroissante, qui se fait en $\alpha_2 = \psi/(4\gamma)$. Le coefficient optimal est donc

$$\alpha_* = \begin{cases} \frac{2\psi}{c_1 + 4\gamma}, & \text{si } c_1 < 4\gamma, \\ \frac{\psi}{4\gamma} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.13)$$

Il reste à s'assurer que α_* satisfait les inégalités imposées, d'où

$$\alpha = \min\left(\alpha_*, \frac{1}{2}, \frac{2}{C_2}\right).$$

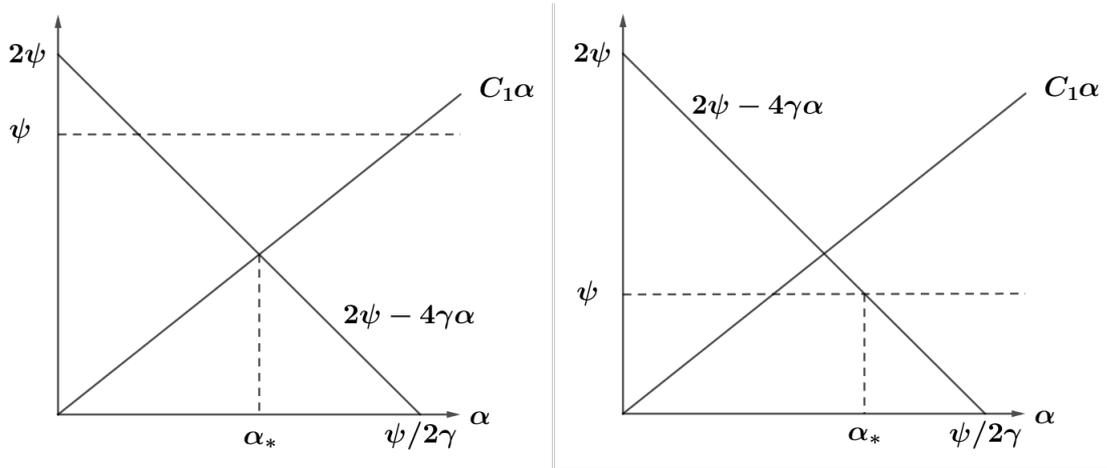


FIGURE 3.5 – Maximisation du taux de convergence dans le cas $c_1 < 2\gamma$ (gauche), et dans le cas $c_1 > 2\gamma$ (droite).

Illustrons tout ceci numériquement. Fixons les potentiels

$$\psi(r) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi(r) = 0.5(r - 1)^2,$$

ce qui nous donne $C_1 = C_2 = 1/2$, et

$$\gamma = \frac{1}{r_m} + \max\left(\left|1 - \frac{1}{r_m}\right|, \left|1 - \frac{1}{r_M}\right|\right).$$

Pour les conditions initiales, nous plaçons deux drones aux positions $(-1, 0)$ et $(1, 0)$ avec les vitesses respectives $(0.5, 0.5)$ et $(-0.5, 0.5)$. La simulation se déroule sur l'intervalle de temps $[0, 10]$ avec un pas de temps constant $\Delta t = 0.001s$, et le reste des détails se trouve en section 3.3.1.

Nous remarquons sur la figure 3.6 que la courbe représentant l'énergie est strictement décroissante : l'énergie corrigée G est dissipée en permanence tandis que l'on observe l'existence de plateaux pour l'énergie totale E .

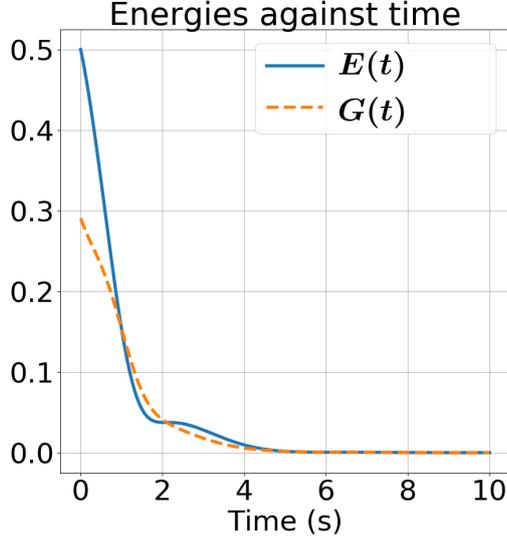


FIGURE 3.6 – Évolution de l'énergie E et de l'énergie corrigée G en fonction du temps pour deux drones.

Voyons maintenant comment cela se passe dans le cas général avec N drones.

3.1.3.2 Cas général

Le résultat précédent ne se généralise malheureusement encore pas au cas général à N drones. Nous pouvons le montrer pour un potentiel purement attractif :

Proposition 2 (*Agrégation exponentielle pour le modèle trois-zones*)

Soit ψ une force de communication constante strictement positive. Soit $\varphi(r) = r^2/2$ le potentiel d'interaction purement attractif.

Alors il y a agrégation exponentiellement vite pour toute condition initiale non-collisionnelle pour le modèle (3.6).

En effet, pour ce potentiel d'interaction, nous connaissons déjà l'état d'équilibre ainsi que son énergie : tous les drones sont attirés vers le centre de masse de la flotte, puisqu'il n'y a plus de répulsion pour les arrêter !

Démonstration : Si nous reproduisons les calculs, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\chi(t) &\leq \frac{1}{N} \sup_{r \in (r_m, r_M)} \left(\left| \frac{r\varphi''(r) - \varphi'(r)}{r} \right| + \left| \frac{\varphi'(r)}{r} \right| \right) \sum_{i,j=1}^N |v_{ij}|^2 \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N \frac{\varphi'(r_{ij})}{r_{ij}} \left\langle x_{ij}, \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \psi(r_{ik})v_{ki} - \psi(r_{jk})v_{kj} \right\rangle \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N \frac{\varphi'(r_{ij})}{r_{ij}} \left\langle x_{ij}, \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\varphi'(r_{ik})}{r_{ik}} x_{ki} - \frac{\varphi'(r_{jk})}{r_{jk}} x_{kj} \right\rangle \quad (3.15)$$

Nous pouvons donc estimer cela de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\chi(t) &\leq \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N |v_{ij}|^2 + \frac{1}{N} \psi \sum_{i,j=1}^N \langle x_{ji}, v_{ji} \rangle - \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N r_{ij}^2 \\ &= E_k(t) - \psi\chi(t) - E_p(t). \end{aligned}$$

Nous pouvons alors réutiliser le lemme de Gronwall pour conclure, en choisissant une constante de correction α dans $E(t) - \alpha\chi(t)$ appropriée. ■

Afin que la preuve marche dans le cas général, nous aimerions que les membres de droite des produits scalaires de (3.14) et (3.15) soient proportionnels respectivement à $\psi(r_{ij})v_{ji}$ et $\frac{\varphi'(r_{ij})}{r_{ij}}x_{ji}$. En effet, nous retomberions alors exactement dans le cas à deux drones. Ce résultat revient à dire que la différence des forces exercées sur le drones i et le drone j est proportionnelle à la force entre i et j , c'est-à-dire qu'il y aurait une symétrie dans la distribution des forces. Nous imaginons bien que c'est le cas, étant donné que tout le système est symétrique, mais le prouver est une autre affaire. D'autant plus qu'une telle symétrie s'observerait plutôt en moyenne, et pas pour tout temps. Il se pourrait donc qu'il faille totalement changer d'approche pour ce modèle.

Nous pouvons préciser un peu plus le problème. Si nous reprenons ψ constante, et que nous symétrisons le dernier terme, l'inégalité peut se réécrire :

$$\frac{d}{dt}\chi(t) \leq \frac{C}{N} \sum_{i,j=1}^N |v_{ij}|^2 - 2\psi\chi(t) - 2 \left| \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N \frac{\varphi'(r_{ij})}{r_{ij}} x_{ij} \right|^2.$$

Il ne manquerait plus qu'à estimer le troisième terme en fonction de P pour conclure. Ce troisième terme n'est rien d'autre que la norme au carré de la force d'attraction-répulsion appliquée au drone i . Cette force peut s'écrire sous la forme d'un produit de convolution discret, entre $\nabla\varphi(|\cdot|)$ et une "densité discrète". Cela sera plus flagrant à l'échelle macroscopique du chapitre 4, et nous discuterons dans la section 4.3.2 d'une possible solution pour estimer la norme de la force en fonction de P , se basant sur cette force en produit de convolution. Nous ne savons pas comment adapter cette solution au modèle microscopique.

Nous pouvons tout de même observer numériquement que le terme d'énergie correctif a l'effet escompté pour le cas général. Dans la figure 3.7, pour certains α , la nouvelle énergie n'a plus de paliers, et a une allure plus exponentielle, similairement à ce que nous avons vu dans la figure 3.6. Pour cette figure, nous prenons les potentiels $\psi(r) = 1/(1+r^2)$ et $\varphi(r) = 0.5(r-1)^2$. Pour les conditions initiales, nous répartissons 49 drones sur une grille carrée de côté un, avec des vitesses choisies aléatoirement uniformément dans $[-2.5, 2.5]^2$. Nous sommes encore sur l'intervalle de temps $[0, 10]$ avec un pas de temps constant $\Delta t = 0.001s$. Nous fixons $\alpha = 0.085$, ceci étant la valeur donnant le meilleur résultat visuellement. Le reste des détails de la simulation se trouve en section 3.3.1.

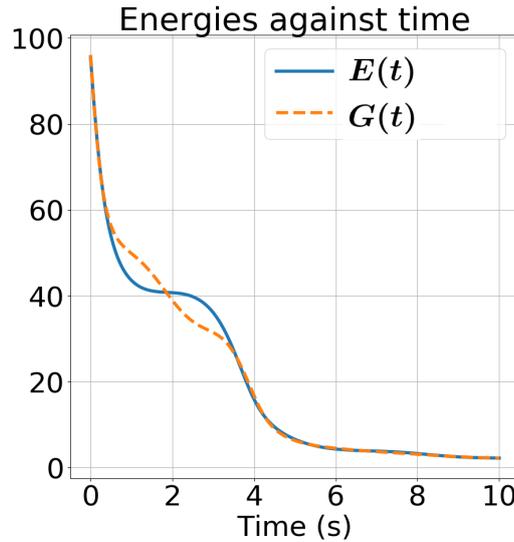


FIGURE 3.7 – Évolution de l'énergie E et de l'énergie corrigée G en fonction du temps pour 49 drones pour une correction $\alpha = 0.085$.

Si cette estimation de décroissance exponentielle venait à être montrée, nous aurions d'une part l'assurance que la flotte converge rapidement vers son équilibre (ce que nous observons déjà numériquement). D'autre part, nous pourrions terminer la preuve de l'évitement de collision par flot optique dans le modèle trois-zones, dans la section 2.3.7 du chapitre précédent. Toutefois, nous avons observé que le terme correctif d'énergie atténue les oscillations du système. Inspirons-nous en pour en faire une force avec le même effet.

3.1.4 Ajout d'une force complémentaire pour réduire les oscillations

Grâce à l'étude de la vitesse de convergence du système vers son équilibre, nous avons pu observer qu'une flotte soumise à (3.6) oscille beaucoup autour de son centre de masse avant de se stabiliser. De telles oscillations ont tendance à gâcher de l'énergie, et si un incident arrive pendant les phases de contraction de la flotte, le risque de collision est plus important.

Nous avons vu que le terme correctif d'énergie réduit les oscillations de l'énergie, mais elle n'a aucune influence sur les drones en vol. C'est pourquoi nous allons ajouter une nouvelle force inspirée de ce terme correctif, qui aura pour but d'annuler les oscillations des drones, de sorte qu'ils se mettent en position directement. Voici son expression :

$$F_{int}^i(t) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\varphi''(r_{ij})}{r_{ij}^2} \langle x_{ij}, v_{ij} \rangle x_{ji}(t). \quad (3.16)$$

Cette force ne modifie pas non plus la trajectoire des centres de masse et de vitesse. C'est une force d'attraction-répulsion qui dépend de l'angle entre les positions relatives et les vitesses relatives : si les drones voyagent dans des directions les éloignant, la force les rapproche et inversement (voir figure 3.8). Il se trouve que ce type de force est très rarement utilisé dans la littérature. C'est une généralisation de ce que l'on peut trouver en [82].

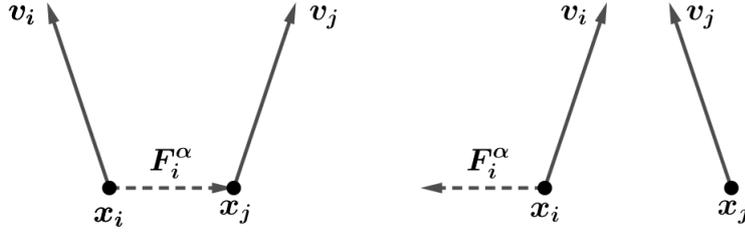


FIGURE 3.8 – Illustration de l'effet de la force croisée sur deux drones.

Le modèle trois-zones-croisé, qui est le modèle trois-zones augmenté de cette nouvelle forces, s'écrit de la manière suivante pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$:

$$\begin{cases} x_i'(t) = v_i(t), \\ v_i'(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi(r_{ij}) v_{ji} + \frac{1}{N} \sum_{j=1, j \neq i}^N \varphi'(r_{ij}) \frac{x_{ji}}{r_{ij}} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\varphi''(r_{ij})}{r_{ij}^2} \langle x_{ij}, v_{ij} \rangle x_{ji}. \end{cases} \quad (3.17)$$

Le choix de l'expression de cette nouvelle force a une inspiration physique. Considérons le potentiel quadratique $\varphi(r) = (r - \eta)^2/2$, où $\eta > 0$ est la distance d'équilibre dans le cas de deux drones. La nouvelle force est formulée afin de faire apparaître une dynamique de type "oscillateur amorti" pour la quantité $r_{ij} - \eta$, telle que nous pouvons l'observer dans le cas de deux drones en dimension 1. En effet, si nous notons $x := x_{12}$, $v := v_{12}$, $r := r_{12}$ et $e := \varphi'(r) = r - \eta$, alors nous avons

$$e'' + \varphi''(r)e' + \varphi''(r)e = \varphi'''(r)r', \quad (3.18)$$

qui se réduit en remplaçant avec le potentiel quadratique à

$$r'' + r' + (r - \eta) = 0.$$

Les termes en e' et r' , qui nous font passer des équations d'un pendule à celles d'un pendule amorti, sont apportés par cette nouvelle force. Nous reviendrons plus tard sur le choix de l'expression de cette force.

Étudions donc les propriétés de ce modèle. Le modèle trois-zones-croisé a le même résultat d'agrégation que le modèle trois-zones :

Théorème 19 (Agrégation pour le modèle trois-zones-croisé)

Soit $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ une force de communication strictement positive et décroissante. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+)$ un potentiel d'interaction convexe positif tel que $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r) = \infty$.

Pour toute condition initiale vérifiant $NE(0) < \varphi(0)$, il existe une unique solution globale au système (3.17), qui s'agrège en temps long.

Plus précisément, il existe deux constante $r_m, r_M > 0$ telles que pour tout $i, j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et $t \geq 0$,

$$0 < r_m \leq r_{ij}(t) \leq r_M < \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v_i(t) = 0.$$

En particulier, il n'y a pas de collisions pendant le vol. Si de plus φ est singulier, alors la condition est toujours vérifiée.

La convexité de φ est une hypothèse naturelle, vérifiée par tous les potentiels montrés jusqu'à présent, traduisant le fait que les drones vont être piégés dans un puits de potentiel. La preuve du théorème est strictement la même que pour le théorème 18 : la seule différence est le terme associé à la force qui s'ajoute dans la dérivée de l'énergie $E(t) = K(t) + P(t)$:

$$-\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\varphi''(r_{ij})}{r_{ij}^2} \langle x_{ij}, v_{ij} \rangle^2 \leq 0. \quad (3.19)$$

Comme ce terme est négatif, l'énergie du système est toujours décroissante, et ne change pas les autres calculs ou arguments.

Cependant, ce nouveau terme ne règle pas les problèmes que nous avons pour montrer la convergence exponentielle du système vers l'équilibre : il ne s'estime pas facilement en fonction de P . Le fait que le résultat ne soit pas immédiat peut s'expliquer de la façon suivante. Si nous repensons au choix de l'expression de la force, nous voyons dans l'équation (3.18) que cette généralisation de la force croisée par rapport au potentiel quadratique donne une équation d'oscillateur amorti excité. Ceci représente une perte par rapport à l'idée de départ, qui était d'avoir un oscillateur amorti.

Néanmoins l'expression de la dissipation d'énergie associée à cette force donnée en (3.19) est similaire aux termes que nous retrouvons dans les compensations énergétiques apportées par χ dans la section précédente, donc contribuent à une dissipation plus rapide et moins oscillante de l'énergie. Pourtant cela ne suffit pas à fournir les estimations nécessaires à la preuve de convergence exponentielle. Nous nous permettons donc à l'avenir de librement changer φ'' par n'importe quel autre potentiel ϕ .

Si nous ne pouvons pas prouver que le système n'oscille plus grâce à cette force, nous pouvons l'observer numériquement, comme nous l'avions prévu. Dans la figure 3.9, nous traçons l'évolution de l'énergie E pour le modèle trois-zones-croisé, en faisant varier l'intensité de la force croisée (3.16). C'est-à-dire que dans le modèle (3.17), nous multiplions la force (3.16) par un coefficient α , et nous effectuons plusieurs vols avec les mêmes conditions initiales, mais en faisant varier α .

Pour cette figure, nous prenons les potentiels $\psi(r) = 1/(1+r^2)$ et $\varphi(r) = 0.5(r-1)^2$. Pour les conditions initiales, nous plaçons 49 drones sur une grille carrée de côté dix, ayant tous la même vitesse (1,1). Nous sommes toujours sur l'intervalle de temps $[0, 10]$ avec un pas de temps constant $\Delta t = 0.001s$. Nous traçons l'énergie pour $\alpha = 0, 0.1, 1, 10$. Le reste des détails de la simulation se trouve en section 3.3.1.

Nous voyons sur le premier graphe que les oscillations de l'énergie disparaissent au fur et à mesure que α augmente. En vol, cela se traduit par la convergence plus directe de chaque drone vers sa position finale, au lieu d'osciller autour. Cependant, si α devient trop grand, le temps que la flotte met pour converger augmente. Ceci s'explique par le fait que la nouvelle force fait s'aligner les drones plus vite, ce qui fait brutalement chuter l'énergie cinétique du système. Ensuite, les drones se rapprochent de leur position d'équilibre en essayant de voyager le plus parallèle possible, ce qui limite leur vitesse de convergence.

En étudiant plus précisément l'énergie du modèle avec $\alpha = 1$ dans la deuxième partie de la figure 3.9, nous voyons que comme nous l'avions annoncé, le nouveau

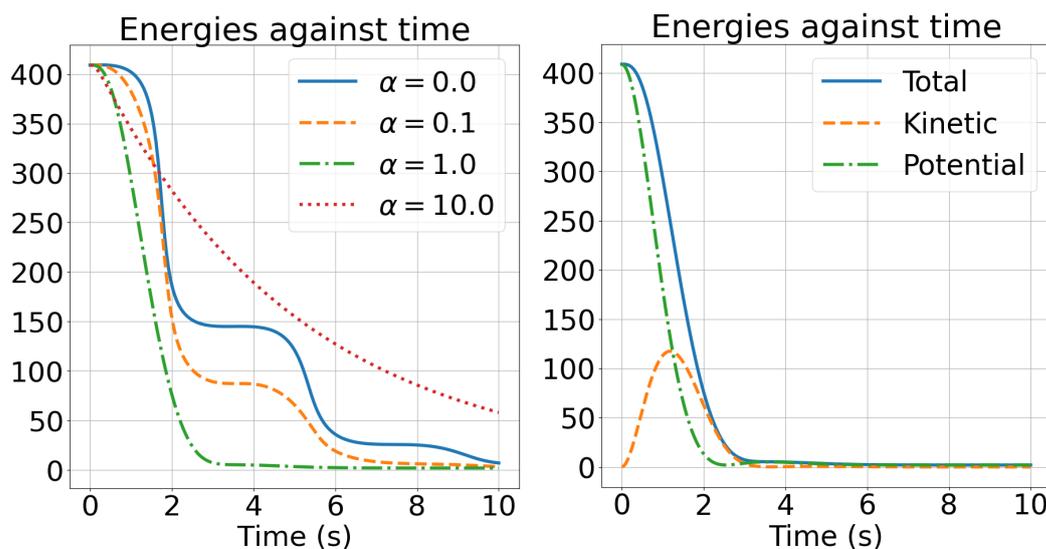


FIGURE 3.9 – Évolution de l'énergie E au cours du temps pour le modèle trois-zones-croisé et différentes intensités de force croisée, $N = 49$ (gauche). Détails des énergies pour $\alpha = 1$ (droite).

terme empêche l'énergie cinétique de trop absorber d'énergie potentielle. Ceci corrobore nos explications précédentes. Si le coefficient α est bien choisi, nous pouvons donc accélérer la mise en formation, en réduisant la phase de mouvement inutile.

Toutefois, nous devons relativiser l'efficacité de cette force par rapport à l'intensité de la force d'alignement. Si nous répétons l'expérience en multipliant ψ respectivement par 0.1 et 10, nous obtenons les évolutions d'énergie de la figure 3.10. Nous voyons

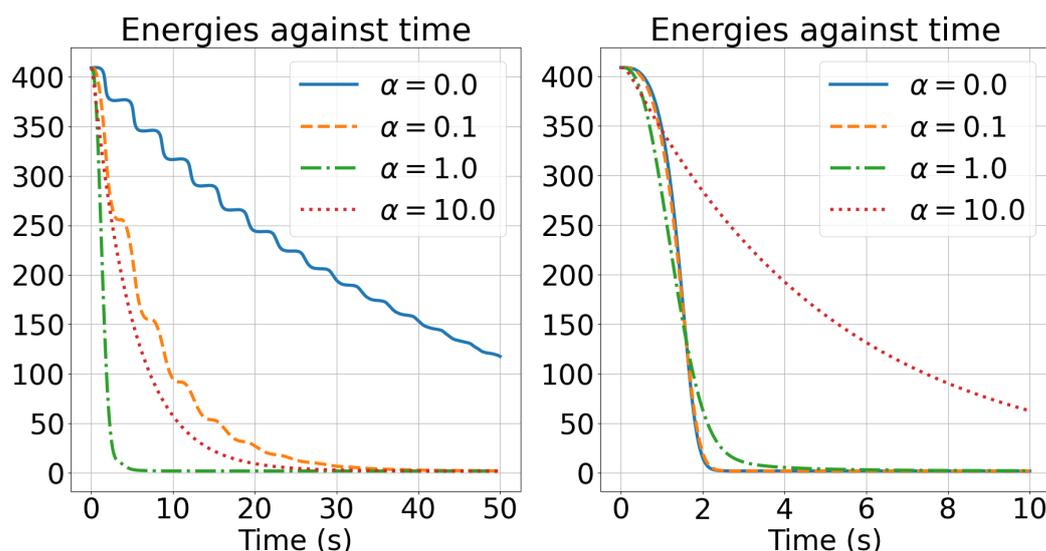


FIGURE 3.10 – Évolution de l'énergie E au cours du temps pour le modèle trois-zones-croisé et différentes intensités de force croisée, $N = 49$, $\psi(r) = 0.1/(1+r^2)$ (gauche), $\psi(r) = 10/(1+r^2)$ (droite).

sur ces figures que si l'alignement est faible, alors la force croisée est encore plus efficace qu'avant, même pour l'amplitude $\alpha = 10$ qui était auparavant trop grande. Au

contraire, si l'alignement est très fort, alors la présence de la force croisée aura tendance à seulement ralentir la convergence. Nous pouvons toutefois observer que dans ce cas, la force croisée peut être utilisée pour amortir le rapprochement des drones.

En conclusion, la force croisée permet bien de réduire les oscillations du modèle trois-zones. Cependant, l'identification de l'intensité optimale de la force est délicate, puisqu'elle dépend fortement de la force de communication ψ utilisée.

Maintenant que nous avons étudié l'évolution en temps du modèle trois-zones, nous allons nous intéresser à ses positions d'équilibres ; autrement dit les formations de vol qui émergent de ce modèle.

3.1.5 Étude de la formation de vol en fonction du potentiel d'interaction

Nous rappelons que nous avons ajouté une force d'interaction au modèle de Cucker-Smale afin de donner une formation de vol à la flotte de drones, puisque ce modèle seul ne contraint pas les positions, ce qui résulte en des flottes désorganisées. De plus, nous avons ajouté une autre force permettant de réduire les oscillations que nous avons observé durant les vols du modèle trois-zones. Maintenant que nous avons étudié théoriquement le modèle trois-zones-croisé (3.17) ainsi obtenu, nous allons dans cette section brièvement étudier quelques formations d'équilibre issues de ce modèle.

À l'équilibre, les drones vérifient pour tout $i, k \in \llbracket 1, N \rrbracket$

$$v_i = v_k, \quad \text{et} \quad \sum_{j=1, j \neq i}^N \nabla_{x_i} \varphi(r_{ij}) = \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\varphi'(r_{ij})}{r_{ij}} x_{ij} = 0.$$

Autrement dit, l'équilibre du modèle trois-zones-croisé est atteint lorsque les drones voyagent tous avec la même vitesse, et qu'ils sont disposés de sorte à équilibrer les forces d'attraction et de répulsion entre eux. Nous remarquons que puisque la force croisée (3.16) dépend de la vitesse relative des drones, elle n'impacte pas l'équilibre, de sorte que les équilibres du modèle trois-zones et trois-zones-croisé sont les mêmes. De plus, la force d'alignement dissipe de l'énergie au cours du temps, afin d'atteindre l'équilibre comme nous l'avons vu dans la section précédente, mais la force de communication ψ n'intervient pas dans les équations définissant l'équilibre. Ce dernier est donc entièrement déterminé par le potentiel d'interaction φ . Le but de cette section est donc de comprendre le lien entre le choix du potentiel φ et la formation d'équilibre obtenue.

Commençons par regarder quelque exemples de formations à l'équilibre afin de dégager les propriétés sur lesquelles nous allons nous pencher. Dans la figure 3.12, nous disposons les formations d'équilibre obtenues pour quatre potentiels différents. Les expressions de ces potentiels, pour un seuil d'interaction $\eta > 0$ à choisir, sont données par :

$$\varphi_{quad}(r) = \frac{1}{2}(r - \eta)^2, \quad \varphi_{circ}(r) = r^2 \left(\log \left(\frac{r}{\eta} \right) - \frac{1}{2} \right) + \frac{\eta^2}{2},$$

$$\varphi_{cris}(r) := \begin{cases} 10(r-\eta)^2, & 0 \leq r \leq \eta \\ \frac{1}{3}(r-\eta)^2, & \eta \leq r \leq \eta+1 \\ 1 - \frac{2}{3(r-\eta)}, & r \geq \eta+1 \end{cases}, \quad \varphi_{ann}(r) := \begin{cases} \frac{1}{10}(r-\eta)^2, & 0 \leq r \leq \eta \\ \frac{1}{3}(r-\eta)^2, & \eta \leq r \leq \eta+1 \\ 1 - \frac{2}{3(r-\eta)}, & r \geq \eta+1 \end{cases}.$$

La figure 3.11 montre le profil de ces potentiels pour $\eta = 1$.

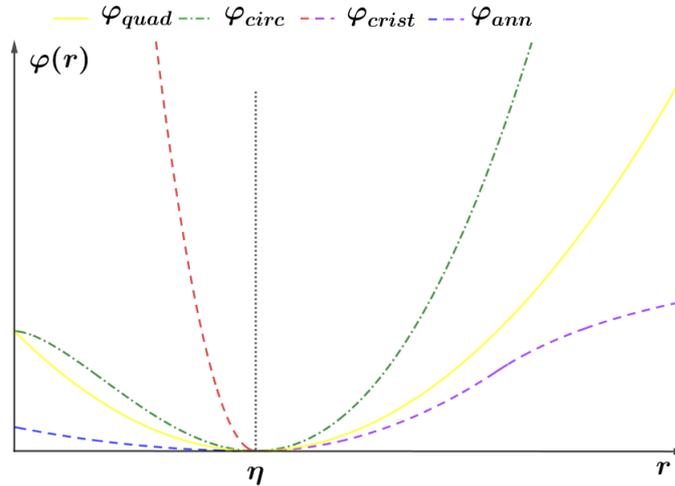


FIGURE 3.11 – Graphe des potentiels d’interactions $\varphi_{quad}, \varphi_{circ}, \varphi_{cris}, \varphi_{ann}$ pour un seuil d’interaction $\eta = 1$.

Nous avons choisi ces potentiels afin d’avoir différents rapports entre la répulsion et l’attraction. Nous voyons que φ_{quad} est équilibré, puisque le potentiel est symétrique autour de $r = \eta$. φ_{circ} a beau avoir une allure similaire à φ_{quad} , la force qui en résulte est différente, puisque c’est la dérivée du potentiel qui est utilisée. Ainsi, le fait que $\varphi'_{circ}(r) = 2r \log(r/\eta)$ s’annule en 0 fait que la répulsion entre deux drones qui se rapprochent s’amointrit. Les deux derniers potentiels sont les mêmes, à ceci près que la constante devant la partie répulsive est divisée par 100 en passant de φ_{cris} à φ_{ann} . La partie attractive quand à elle augmente beaucoup moins vite que dans les exemples précédents et est bornée.

Voici en figure 3.12 les formations d’équilibre, obtenues pour 100 drones. La force de communication utilisée est $\psi(r) = 1/(1+r^2)$, et le seuil d’interaction $\eta = 5$. Ces drones sont initialement immobiles et répartis sur une grille carrée régulière de côté 10 donnée en figure 3.13(b). Nous translatons le 45ème drone de $-(1, 1)$ afin de briser la symétrie de la formation. Dans le cas du potentiel φ_{cris} , les drones sont initialement répartis sur le réseau donné dans la figure 3.13(a). Puisque c’est une formation d’équilibre, ils n’ont pas bougé durant le vol. La distance entre deux drones voisins est $\delta = 5$. Nous utilisons un pas de temps constant $\Delta t = 0.001s$. Le reste des détails de la simulation est donné dans la section 3.3.1.

Dans les figures 3.12(a) et (b), nous voyons respectivement que pour φ_{quad} , tous les drones sont répartis dans un disque de rayon légèrement inférieur à $\eta = 5$, et pour φ_{circ} sur un cercle parfait de rayon légèrement inférieur au précédent, à quelques exceptions près.

Nous en déduisons qu’une attraction infinie tend à accumuler les drones dans un disque, ce qui s’explique par le fait que l’attraction est dominante à longue portée. Selon

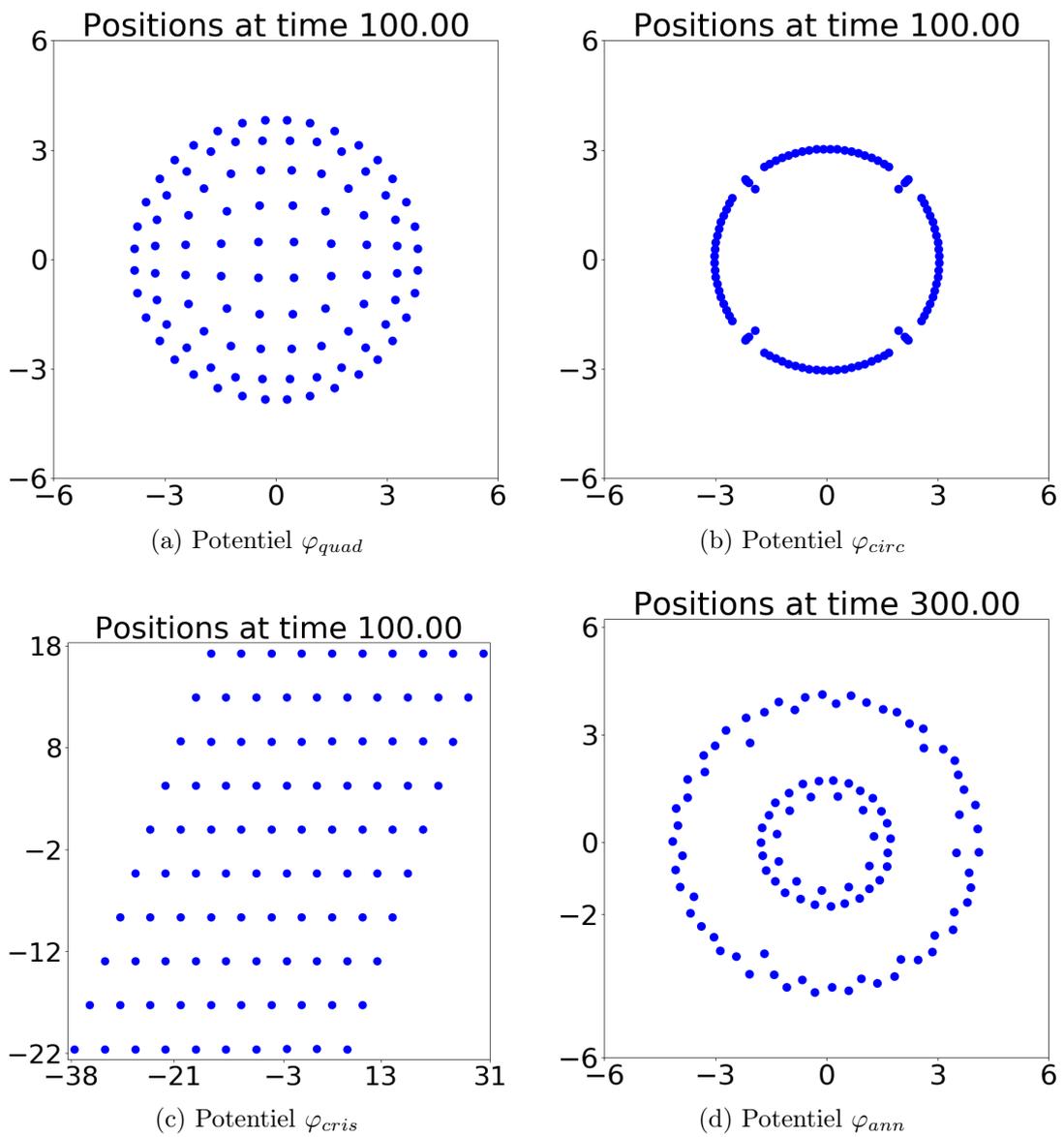


FIGURE 3.12 – Équilibres obtenus pour différents potentiels d’interactions, pour un seuil d’interaction $\eta = 5$.

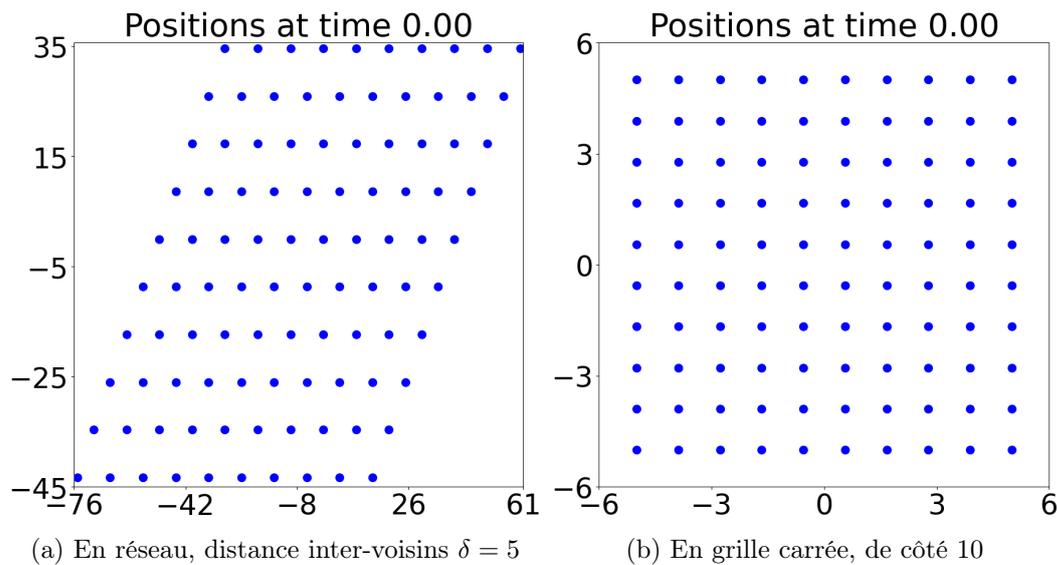


FIGURE 3.13 – Les deux types de conditions initiales utilisées pour $N = 100$ drones.

la force de répulsion, les drones sont plus ou moins répartis à l'intérieur, jusqu'au cas extrême où les drones sont répartis sur un cercle.

Enfin, les formations d'équilibre pour φ_{cris} et φ_{ann} données en figure 3.12(c) et (d) sont respectivement un réseau et deux cercles concentriques dont le plus grand est de rayon légèrement inférieur à 5, comme les précédents.

Nous observons donc que si l'attraction est bornée, alors elle ne force plus la flotte à être dans un disque, et les drones ont la possibilité de se placer à distance η des voisins les plus proches, ce qui engendre un réseau. Cependant, si la répulsion est trop faible, alors la formation en réseau ne peut être tenue, et nous retombons dans le cas précédent.

Nous avons ainsi deux types de formations qui se dégagent : les formations sur un disque et sur un réseau. Les propriétés qui nous intéressent dans une formation sont donc d'abord l'utilité de la forme en soit, qui va varier selon la mission de la flotte. En effet, toutes les formations ne sont pas intéressantes. Typiquement, pour couvrir une zone, la formation en cercle n'est pas utile, puisque les drones sont forcés à être proches, et le centre de la zone délimitée n'est pas couvert. À l'inverse, une formation en réseau garanti une bonne répartition dans l'espace des drones. Sans mission précise à évaluer, nous ne pouvons pas juger ce point.

La deuxième propriété qui nous intéresse est l'espacement entre les drones. Nous aimerions avoir un contrôle sur le rayon de la flotte, ou sa densité locale, ce qui change du tout au tout selon le type de formation utilisé.

Enfin, nous nous intéressons à la stabilité de la formation. Nous avons vu avec le dernier exemple que si la force d'attraction est trop diminuée, alors la formation en réseau ne peut être maintenue. Nous pouvons donc nous demander si des perturbations des positions des drones à l'équilibre risquent de rompre ce dernier, et de nous faire changer de type de formation.

3.1.6 Illustration numérique de l'instabilité de la formation en réseau

Intéressons nous d'abord à la stabilité du réseau pour le potentiel d'interaction φ_{cris} . Nous allons répéter des expériences entre le modèle trois-zones et trois-zones-croisé, qui ont les mêmes équilibres, afin d'illustrer l'importance de la dynamique de la flotte dans l'équilibre qu'elle atteint en temps long. Nous fixons $N = 36$ drones sur le réseau donné dans la figure 3.13(a), avec une distance inter-voisins $\delta = 5$, et utilisons $\eta = 5$ dans le potentiel d'interaction.

Comme nous l'avons dit plus haut, les drones les plus proches sont à la distance à laquelle la force s'annule, et la force d'attraction est assez faible à longue portée pour leur permettre d'y rester. Cette formation est donc un équilibre. Nous allons la perturber de différentes manières, afin d'évaluer sa stabilité sur l'intervalle de temps $[0, 100]$.

3.1.6.1 Modèle trois-zones

Commençons par étudier la stabilité de la formation en réseau avec le modèle trois-zones. Perturbons d'abord la position d'un élément de la flotte. Si nous décalons le 15ème élément, au centre de la formation, de $-(1, 1)$, alors la flotte retourne sur la formation en réseau, comme nous l'illustrons dans la figure 3.14(a). Par contre, si nous déplaçons le drone du coin supérieur droit de $-(1, 1)$, alors l'élément est éjecté de la flotte : il y a trop de répulsion, comme nous le voyons dans la figure 3.14(b).

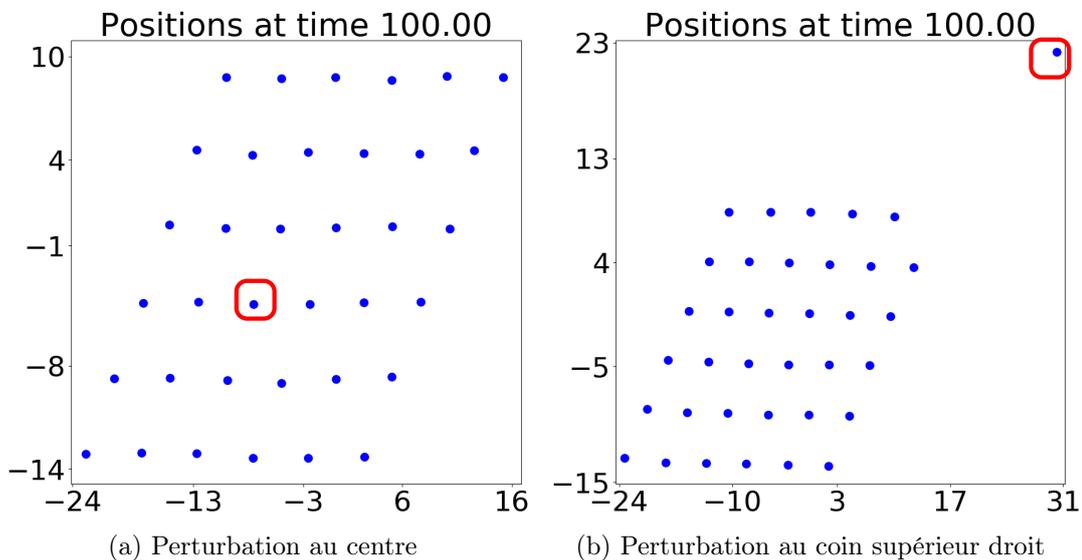


FIGURE 3.14 – Positions des drones au bout de 100 secondes pour différents éléments perturbés, encadrés en rouge.

Perturbons maintenant l'ensemble de la flotte. Si nous prenons une distance inter-voisins $\delta = 6$, alors la flotte cherche à retrouver le réseau, mais la formation finale en sera une déformation, comme nous l'illustrons dans la figure 3.15(a). Par ailleurs, si nous prenons cette fois $\delta = 4$, alors la flotte se disperse totalement, encore une fois à cause d'une trop forte répulsion, comme le montre la figure 3.15(b).

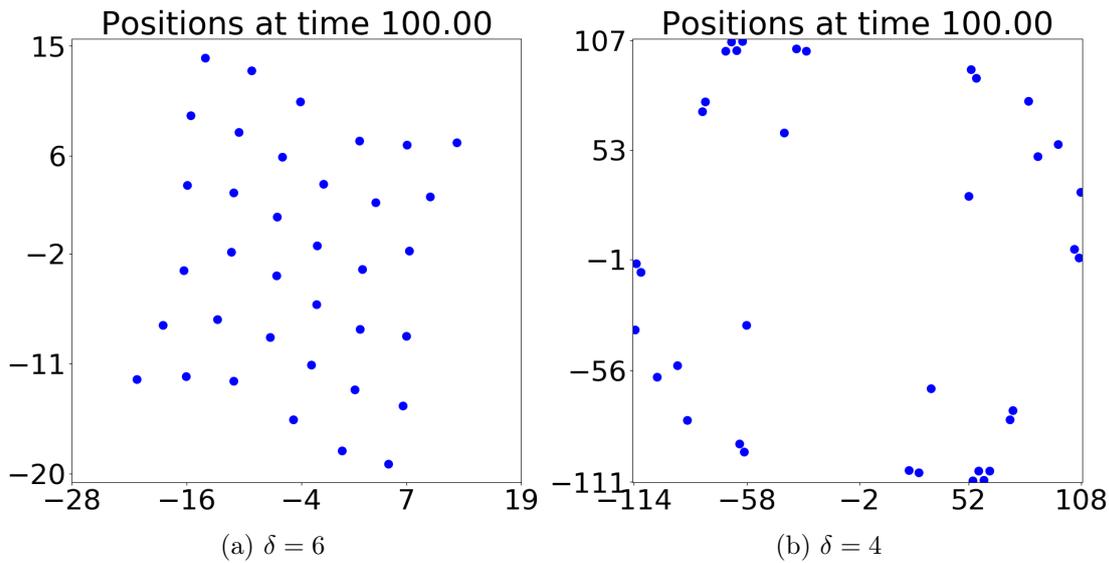


FIGURE 3.15 – Positions des drones au bout de 100 secondes pour une taille de réseau initial différente de celle de l'état d'équilibre.

Utilisons enfin des conditions initiales différentes du réseau d'équilibre. Une grille carrée uniforme comme donnée en figure 3.13(b) permet d'avoir une formation similaire, sans pour autant être identique. Nous donnons dans la figure 3.16 l'état final de la flotte. Si le carré initial est de côté 25, alors la flotte se déforme beaucoup et a du mal à converger : même au bout du double de temps, la flotte oscille toujours. Si le carré initial est de côté 6, alors la flotte se disperse totalement, comme en témoignent les bornes de la figure 3.16(b). Ces deux phénomènes s'expliquent par un mauvais équilibrage des forces : dans le premier cas il n'y a pas assez d'attraction pour plaquer rapidement les drones extérieurs à la flotte, et dans le second trop de répulsion pour une formation aussi serrée, ou alors pas assez d'attraction pour les empêcher de partir au loin.

Nous déduisons de toutes ces expériences que le réseau est un équilibre instable du modèle trois-zones. Cet équilibre n'est pas fiable, puisque si la flotte se fait perturber par un obstacle par exemple, elle risque d'être totalement dispersée dans le pire des cas. Peut être existe-t-il un potentiel plus robuste pour cela. Néanmoins, reproduisons les mêmes expériences avec le modèle trois-zones-croisé.

3.1.6.2 Modèle trois-zones-croisé

Dans cette section, nous nous questionnons à nouveau sur la stabilité de la formation en réseau, mais cette fois-ci pour le modèle trois-zones-croisé. Nous utiliserons la force croisée avec un potentiel constant à 1 :

$$F_{int}^i(t) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{r_{ij}^2} \langle x_{ij}, v_{ij} \rangle x_{ji}(t).$$

Nous utilisons toujours la formation initiale en réseau donnée en figure 3.13(a) avec $N = 36$ drones. Nous regroupons dans la figure 3.17 les résultats les plus pertinents des

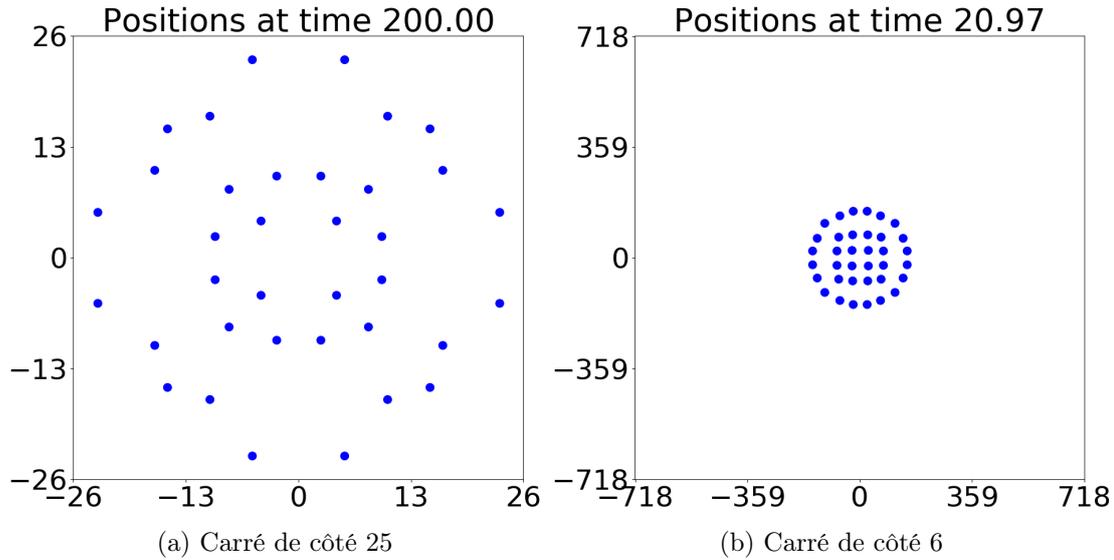


FIGURE 3.16 – Positions des drones au bout de 100 secondes pour une condition initiale répartie sur un carré uniforme.

expériences. Si nous perturbons à nouveau l'élément central ou le coin supérieur droit de $-(1, 1)$ (figure 3.17(a)), alors la formation en réseau est maintenue, contrairement au cas précédent. Ceci s'explique par le fait que la force croisée freine les drones et les empêche de tourner trop brusquement, comme nous l'avons expliqué à sa définition, en section 3.1.4.

Si nous changeons la taille du réseau initial, avec une distance inter-voisins initiale de $\delta = 6$ ou $\delta = 4$, alors le réseau est également maintenu. Cependant, si nous comprimons trop la formation avec $\delta = 1$, alors la flotte se stabilisera sur un réseau légèrement déformé, comme nous le voyons dans la figure 3.17(b).

Ensuite, si nous utilisons à nouveau la condition initiale en carré de la figure 3.13(b) avec $N = 36$ drones, à la place du réseau, nous observons une différence : si le côté du carré est de longueur 2, alors la flotte s'élargira, mais la formation ne sera pas en réseau, comme nous le voyons dans la figure 3.17(c). Ceci s'explique par la symétrie de la condition initiale.

Enfin, nous avons remarqué que avec une condition initiale en réseau, avec $\eta = \delta = 1$ alors le comportement change complètement : au lieu d'être à l'équilibre, la flotte se déforme et atteint une formation irrégulière, avec une distance entre drones proches toujours proche de η , visible dans la figure 3.17(d). Ceci suggère que la stabilité de la formation est également sensible au nombre de drones par rapport à la distance qui doit les séparer. Ici, il y aurait trop de drones pour maintenir une formation aussi serrée.

En conclusion, bien que la force croisée stabilise les formations, puisque elle empêche de grands mouvements, si la condition initiale est loin d'un réseau parfait, alors la régularité de la formation finale chute. Nous n'avons donc pas les moyens de prédire précisément si le réseau sera maintenu en fonction des paramètres. Peut-être faudrait-il une autre force complètement différente, pour garantir une répartition en réseau ou homogène. La force que nous étudierons dans le chapitre 6 semble être un bon candidat, mais nous ne nous sommes pas intéressés à cet aspect.

La formation en disque sera donc plus prévisible, même si nous ne contrôlons

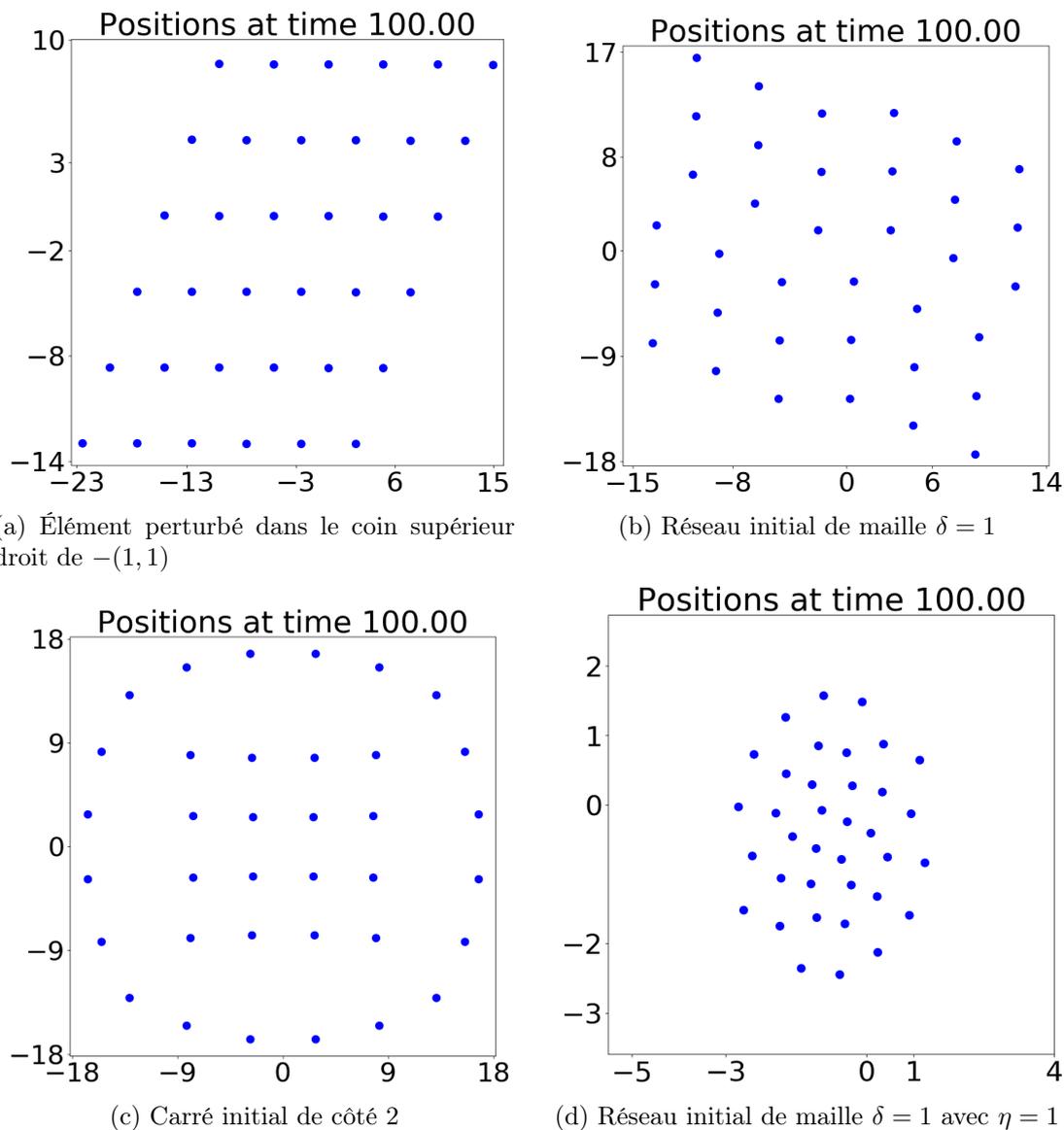


FIGURE 3.17 – Positions des drones au bout de 100 secondes pour différentes perturbations des conditions initiales.

pas précisément la position des drones, à l’opposé du réseau. Voici pourquoi nous l’utiliserons dans la suite. En pratique, puisque nous voulons une flotte décentralisée et autonome, nous ne nous intéressons pas à leur distribution précise, tant qu’ils évitent les collisions. Or le flot optique vu dans le chapitre 2 semble être capable d’empêcher les collisions au cours du temps dans ce modèle. Nous pouvons aussi choisir un potentiel d’interaction φ singulier pour avoir le même résultat, la question des collisions ne se pose donc pas. Étudions maintenant les propriétés de cette formation en disque.

3.1.7 Étude numérique de la formation en disque en fonction du potentiel d’interaction

Dans cette section, nous allons nous intéresser à l’évolution des propriétés de la formation en disque en fonction des paramètres du modèle. Dans tout ce qui suit,

nous initialisons les drones sur une grille régulière comme en figure 3.13(b), couvrant le carré $[-1, 1]^2$, avec une vitesse nulle.

3.1.7.1 Influence du nombre de drones

Comment évolue le disque lorsque le nombre d'agents N augmente ? Par exemple, avec le potentiel quadratique que nous utilisons par défaut, le volume n'augmente pas avec le nombre de drones, comme montré dans la proposition 3. Les drones sont donc de plus en plus concentrés dans un même volume ! Ainsi, si nous voulons espérer avoir une distance de sécurité entre agents soumis à ce potentiel, nous ne pouvons pas en utiliser plus d'un certain nombre.

Proposition 3 (*Concentration des drones pour le potentiel quadratique*)

Soit $\{(x_i, v_i)\}$ la solution du modèle trois-zones-croisé (3.17) muni du potentiel d'interaction quadratique $\varphi_{quad}(r) = (r - \eta)^2/2$, et sous les hypothèses du théorème 18.

Pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, nous avons à l'équilibre

$$|x_i(\infty) - x_c(\infty)| \leq \eta.$$

Démonstration : En effet, à l'équilibre le système est réduit à

$$0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\varphi'(r_{ij})}{r_{ij}} x_{ji}.$$

En utilisant le potentiel quadratique, nous obtenons

$$0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_{ji} - \frac{\eta}{N} \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{x_{ji}}{r_{ij}} = x_c - x_i - \frac{\eta}{N} \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{x_{ji}}{r_{ij}},$$

et nous concluons en passant $x_c - x_i$ de l'autre côté de l'inégalité puis en passant à la norme. ■

Nous illustrons le phénomène en figure 3.18. Pour les potentiels $\psi(r) = 1/(1 + r^2)$ et $\varphi(r) = 0.5(r - 1)^2$, nous utilisons successivement 100, 256 et 400 drones. Le reste des détails de la simulation se trouve en section 3.3.1. Nous observons que la flotte est confinée dans une sphère de rayon légèrement inférieur à 1, comme annoncé par la proposition 3. De plus, nous remarquons que les drones ont tendance à se concentrer sur le bord du disque.

C'est une propriété bien différente de la formation en réseau, pour laquelle la taille de la flotte est "proportionnelle" au nombre de drones, comme montré en figure 3.19.

3.1.7.2 Influence du seuil d'interaction du potentiel quadratique

Nous venons de voir dans la proposition 3 que pour le potentiel quadratique φ_{quad} , la flotte à l'équilibre est confinée dans un disque de rayon η autour de son centre de masse. Nous pouvons donc nous demander si cette borne est pessimiste, ou si au

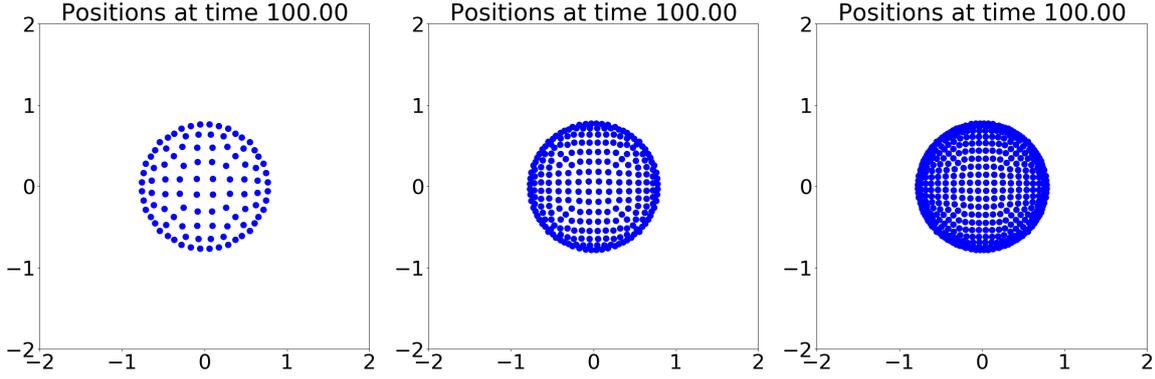


FIGURE 3.18 – Illustration du phénomène de concentration pour le potentiel quadratique avec les équilibres de 100, 256 et 400 drones pour le modèle trois-zones-croisé.

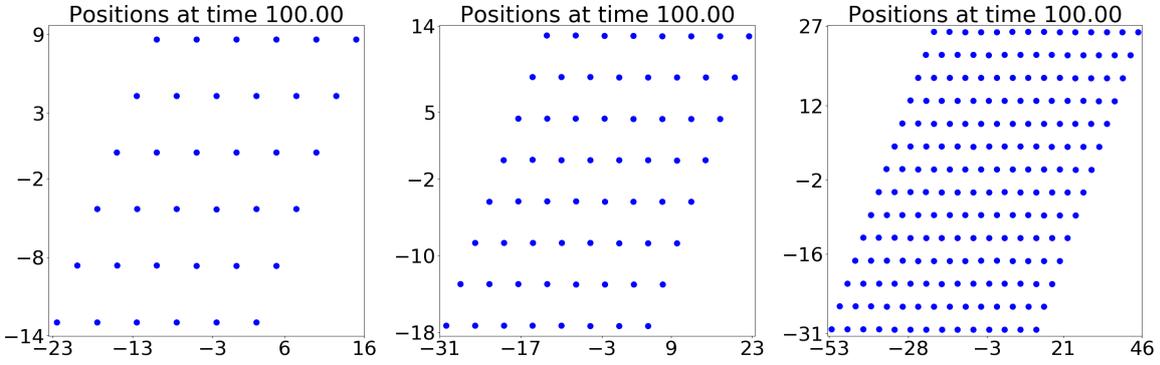


FIGURE 3.19 – Illustration de l'augmentation de la taille de la flotte pour le potentiel φ_{cris} avec les équilibres de 36, 64 et 196 drones pour le modèle trois-zones-croisé.

contraire elle est optimale. Cela reviendrait à dire que, pour un nombre de drones fixé, le diamètre de la flotte à l'équilibre sera toujours proche de η .

Pour déterminer cela, nous utilisons $N = 100$ drones avec un seuil d'interaction $\eta \in \{0.5k, k \in \llbracket 1, 20 \rrbracket\}$, puis $\eta \in \{50 + 10k, k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket\}$ afin d'explorer des valeurs extrêmes, sur l'intervalle de temps $[0, 50]$. Nous observons alors dans la figure 3.20 une augmentation linéaire du rayon de la flotte en fonction du seuil d'interaction.

Le coefficient d'accroissement vaut 0.78 dans les deux cas. Ainsi plus η est grand, plus la flotte s'étale, mais de moins en moins loin. Nous avons obtenu exactement les mêmes résultats pour $N = 400$ drones, donc nous en déduisons que la borne de la propriété 3 est presque optimale.

3.1.7.3 Influence du rapport entre attraction et répulsion

Modifions légèrement le potentiel quadratique afin de séparer l'intensité de la répulsion et de l'attraction :

$$\varphi_{mixt}(r) = \begin{cases} \frac{F_R}{2}(r - \eta)^2, & \text{si } r \leq \eta, \\ \frac{F_A}{2}(r - \eta)^2, & \text{si } r \geq \eta. \end{cases}$$

Comme équilibre ne change pas si le potentiel d'interaction est multiplié par une constante, l'équilibre est déterminé par η et le rapport F_A/F_R . Ceci est une quantifi-

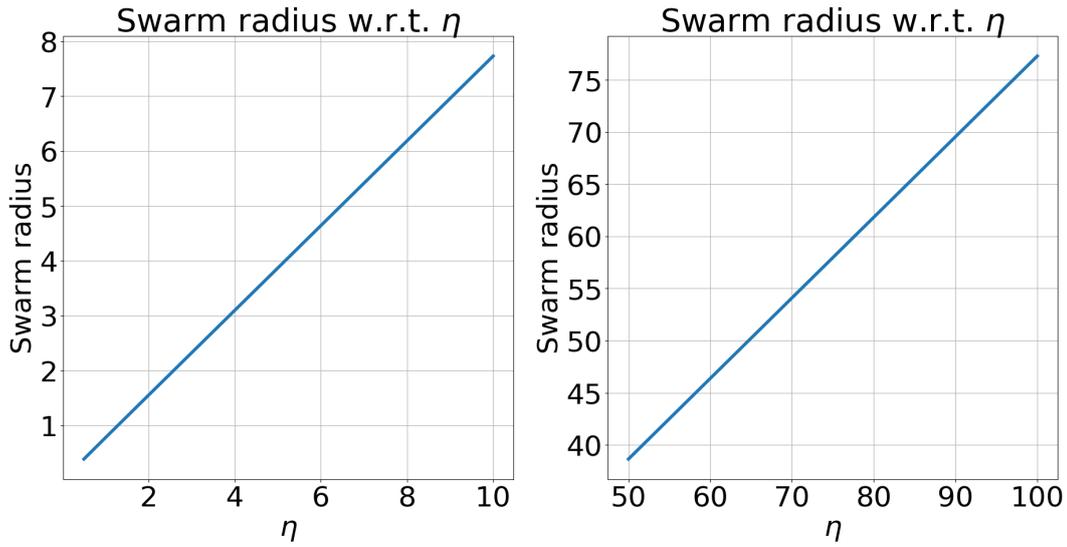


FIGURE 3.20 – Évolution du rayon d’une flotte de $N = 100$ drones à l’équilibre en fonction du seuil d’interaction η sur deux plages différentes.

cation de ce que nous illustrons depuis le début : la formation dépend de l’équilibre entre attraction et répulsion.

Afin d’étudier l’influence de ce rapport, nous fixons $N = 100$, $\eta = 5$ et $F_R = 1$, et faisons varier F_A , qui prend les trois valeurs $F_A = 0.1, 1.0, 10.0$. Nous présentons dans la figure 3.21 les formations d’équilibre associées.

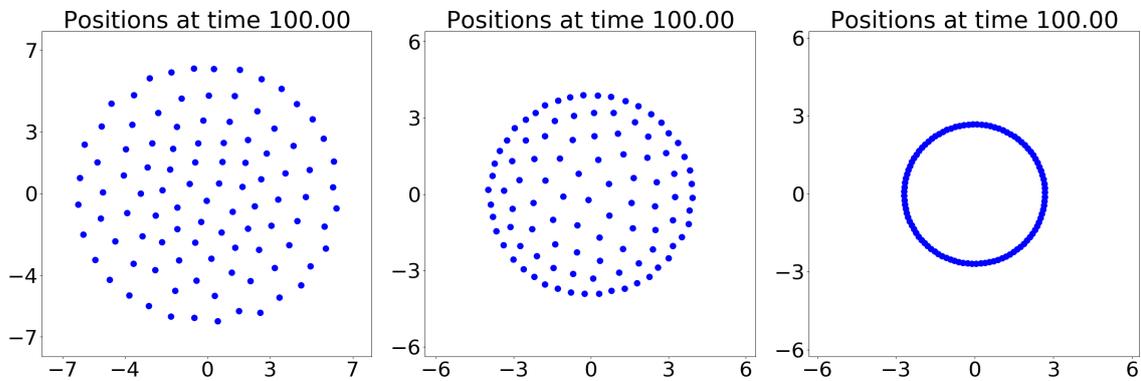


FIGURE 3.21 – Évolution de l’équilibre d’une flotte de $N = 100$ drones en fonction du rapport entre l’attraction et la répulsion F_A/F_R . De gauche à droite, ce rapport vaut 0.1, 1.0 et 10.0.

Cette expérience confirme que si nous avons beaucoup de répulsion avec $F_A = 0.1$, alors la flotte se concentre au bord du disque. Au contraire s’il y a peu de répulsion, elle s’étale. Remarquons que le rayon de la flotte change et dépasse η , ce qui montre que cette modification brise la proposition de confinement 3. En jouant sur le rapport entre attraction et répulsion, nous passons donc continûment d’un cas extrême où tous les drones sont sur le bord, au point où les drones sont plus ou moins répartis uniformément dans le disque.

Nous avons vu dans les dernières sections que la formation d’équilibre est très sensible à l’équilibrage de l’attraction et de la répulsion, et ceci peut mener à des

comportements indésirables tel que la dispersion totale de la flotte pour des attractions trop faibles. Bien que la force croisée limite ces effets, un utilisateur doit être prudent avant de lancer une flotte suivant un tel modèle.

En conclusion, la taille de l'essaim à l'équilibre est majoritairement donnée par le seuil d'interaction η , alors que la répartition et la concentration des drones dans le volume délimité est régie par le rapport entre l'attraction et la répulsion, que ce soit pour une formation en réseau ou en disque.

Cependant, ceci est propre à notre problématique en 2D avec ces potentiels et cette force d'attraction-répulsion. Par exemple dans [12] est étudié un modèle du premier ordre avec attraction-répulsion : pour $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et $a > 0$, $-\tanh(a) < b < 1$,

$$x'_i(t) = -\frac{1}{N} \sum_{j=1, j \neq i}^N \varphi\left(\frac{r_{ij}^2}{2}\right) x_{ji}, \quad \varphi(r) = \frac{\tanh(a(1 - \sqrt{2r})) + b}{\sqrt{2r}}.$$

Ici, b représente l'intensité de la répulsion à l'origine, et a la pente de transition entre répulsion et attraction. Les auteurs de l'article étudient les formations d'équilibre à la surface d'une sphère dans \mathbb{R}^d , et fournissent un très beau diagramme de phase des formations en fonction de a et b , où l'on peut voir des distributions uniformes ou bien plus complexes n'ayant rien à voir avec nos réseaux ou nos disques.

Maintenant que nous avons un modèle de base stable, dans le sens où le modèle trois-zones-croisé arrive rapidement à un consensus sur les vitesses tout en ayant une formation de vol régulière, nous pouvons y ajouter d'autres comportements, modélisant l'environnement ou des objectifs.

3.2 Ajout de forces externes à la flotte

Nous allons maintenant modéliser plusieurs effets externes à la flotte un par un. Pour cela, nous donnerons la force choisie, ainsi qu'un résultat théorique ou numérique illustrant ses effets.

3.2.1 Alignement vers une vitesse cible

Commençons par nous intéresser à une force d'alignement de l'essaim sur une vitesse extérieure v_T . Plus précisément, nous utiliserons

$$F_{ext}(t, v) = \gamma_v(v_T(t) - v), \quad (3.20)$$

où $\gamma_v > 0$ est la constante de rappel vers la vitesse cible $v_T \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$. Ceci correspond à un guidage de la flotte par alignement avec un leader ou plus généralement une cible à suivre dont on peut mesurer la vitesse relative avec l'agent. Ce modèle simple fait bien ce que nous lui demandons :

Théorème 20 (Alignement vers une vitesse cible)

Une flotte $\{(x_i, v_i)\}_{i=1}^N$ soumise à un modèle du second ordre équipé uniquement de la force (3.20) de suivi de vitesse s'agrège exponentiellement vite à une constante

près vers sur une vitesse cible variable au cours du temps $v_T \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$:

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad |v_i - v_T|(t) \leq |v_i - v_T|(0)e^{-\gamma_v t} + \frac{|v_T'|_\infty}{\gamma_v}.$$

En particulier si la vitesse cible est constante au cours du temps, alors la convergence est totale.

Comme nous pouvions nous y attendre, nous voyons avec la constante dans l'estimation du théorème que l'écart entre la vitesse d'un drone et la vitesse cible est proportionnel à l'accélération de la cible, mais est aussi inversement proportionnel à γ_v . Ainsi, même si la cible change rapidement, utiliser un grand γ_v permet de limiter cet écart.

Nous observons également que dans le modèle pourvu uniquement de la force (3.20), les drones sont découplés. Cela ne garanti pas l'absence de collision entre drones, ce qui devra être réglé à l'aide d'une autre force. Heureusement, nous avons montré dans le chapitre précédent en section 2.3.6 que le flot optique est compatible avec cette force et règle ce problème.

Démonstration : Pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, nous calculons l'évolution de la distance entre v_i et v_T :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v_i - v_T)(t) &= -\gamma_v(v_T - v_i)(t) - v_T'(t) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}((v_i - v_T)e^{\gamma_v t})(t) &= -v_T'(t)e^{\gamma_v t} \\ \Rightarrow (v_i - v_T)(t) &= (v_i - v_T)(0)e^{-\gamma_v t} - \int_0^t v_T'(s)e^{\gamma_v(s-t)} ds \\ \Rightarrow |v_i - v_T|(t) &\leq |v_i - v_T|(0)e^{-\gamma_v t} + \frac{|v_T'|_\infty}{\gamma_v} \end{aligned}$$

■

3.2.2 Convergence vers une cible en position

Inspirons nous de la force de cible en vitesse pour définir une force similaire sur la position des drones. Nous introduisons la force

$$F_{ext}(t, x) = \gamma_x(x_T(t) - x) \quad (3.21)$$

où $\gamma_x > 0$ est la constante de rappel vers la position cible $x_T \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$. Cependant cette force pose plusieurs problèmes.

Premièrement, les trajectoires des centres de masse et de vitesse sont périodiques si la cible est immobile, comme montré dans le lemme suivant. Par conséquent, les drones oscillent autour de la cible, avec des oscillations proportionnelles à l'éloignement initial avec la cible, puisque le système est similaire à un pendule non amorti. Pour résoudre ce problème, nous pouvons ajouter une force de friction qui ralentirait peu à peu la flotte jusqu'à son arrêt complet, à la manière d'un pendule amorti.

Lemme 4 (Trajectoires périodiques)

Une flotte $\{(x_i, v_i)\}_{i=1}^N$ soumise à un modèle du second ordre équipé de la force

(3.21) de suivi de position d'une cible immobile voit ses centre de masse et de vitesse $(x_c, v_c)(t)$ suivre une trajectoire périodique.

Démonstration : Les équations des centres s'écrivent

$$\begin{pmatrix} x_c \\ v_c \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ v_c \end{pmatrix}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_x x_T \end{pmatrix}.$$

Comme le carré de la matrice du système vaut $-\gamma_x Id$, nous obtenons avec la formule de Duhamel :

$$\begin{pmatrix} x_c \\ v_c \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} \cos & \frac{1}{\sqrt{\gamma_x}} \sin \\ -\sqrt{\gamma_x} \sin & \cos \end{pmatrix} (\sqrt{\gamma_x} t) \begin{pmatrix} x_c \\ v_c \end{pmatrix}(0) + \begin{pmatrix} (1 - \cos(\sqrt{\gamma_x} t))x_T \\ \gamma \sin(\sqrt{\gamma_x} t)x_T \end{pmatrix}.$$

■

Le second problème est qu'encore une fois, rien n'empêche les drones d'entrer en collision, en particulier autour de la cible vers laquelle ils sont attirés. Pour régler cet autre problème, nous pourrions ajouter une force de répulsion pour garantir l'absence de collisions, comme fait en section 3.1. Nous pourrions aussi vouloir utiliser le flot optique, comme pour la cible en vitesse. Cependant avec ce modèle les drones convergent toujours sur la cible, exponentiellement vite :

Théorème 21 (Compression de la flotte pour cible avec alignement)

Une flotte $\{(x_i, v_i)\}_{i=1}^N$ sujette à un modèle du second ordre équipé de la force (3.21) de suivi de position et de la force d'alignement (2.1) de potentiel $\psi \equiv 1$ se contracte exponentiellement vite sur son centre de masse :

$$\exists C > 0, \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad |x_i - x_c|(t) + |v_i - v_c|(t) \lesssim (|x_i - x_c|(0) + |v_i - v_c|(0))e^{-Ct}.$$

En particulier le théorème précédent s'applique toujours, donc le centre de masse a une trajectoire périodique.

Démonstration : Nous pouvons reproduire la même preuve que pour le théorème précédent pour montrer que le centre de masse x_c converge vers x_T , puisque par symétrie, la force de Cucker-Smale se simplifie dans l'étude de $(x_c - x_T)(t)$. Pour les vitesses, nous allons simplement montrer qu'elles s'alignent, sans caractériser la limite. En effet, le centre de vitesse aura toujours une trajectoire périodique. Posons alors

$$\begin{aligned} K(t) &:= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N |v_i - v_c|(t), \\ P(t) &:= \frac{\gamma_x}{2} \sum_{i=1}^N |x_i - x_c|(t), \\ \chi(t) &:= \beta \sum_{i=1}^N \langle x_i - x_c, v_i - v_c \rangle(t), \\ E(t) &:= (K + P + \chi)(t). \end{aligned}$$

avec $\beta > 0$ que nous choisirons plus tard.

Calculons $\frac{d}{dt}E(t)$, en remarquant que $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (v_j - v_i) = v_c - v_i$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(K + P + \chi)(t) &= \sum_{i=1}^N \left\langle v_i - v_c, \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (v_j - v_i) + \gamma_x(x_T - x_i) - \gamma_x(x_T - x_c) \right\rangle \\
&\quad + \gamma_x \sum_{i=1}^N \langle x_i - x_c, v_i - v_c \rangle \\
&\quad + \beta \sum_{i=1}^N |v_i - v_c|^2 \\
&\quad + \beta \sum_{i=1}^N \left\langle x_i - x_c, \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (v_j - v_i) + \gamma(x_c - x_i) \right\rangle \\
&= -(1 - \beta) \sum_{i=1}^N |v_i - v_c|^2 + 0 \\
&\quad - \beta \sum_{i=1}^N \langle x_i - x_c, v_i - v_c \rangle - \beta \gamma_x \sum_{i=1}^N |x_i - x_c|^2 \\
&= -2(1 - \beta)K(t) - 2\beta P(t) - \chi(t) \\
&\leq -2\min(1 - \beta, \beta)E(t).
\end{aligned}$$

Ainsi, si $0 < \beta < 1$, les coefficients sont positifs, et nous en déduisons que E décroît exponentiellement vite vers 0 d'après le lemme de Gronwall. Nous concluons grâce à l'estimation suivante. Par inégalité de Cauchy-Schwarz et de Young, nous savons que E majore $K + P$ pour tout temps t :

$$E(t) = K(t) + P(t) + \chi(t) \geq (1 - \beta)K(t) + \left(1 - \frac{\beta}{\gamma_x}\right) P(t).$$

Donc si $\beta < \gamma_x$, les positions et vitesses convergent toutes vers leur centre respectif. Nous choisissons donc $\beta < \min(1, \gamma_x)$ le plus grand possible pour maximiser la vitesse de convergence. ■

Troisième et dernier problème, l'expression de F_{ext} choisie n'est pas adaptée au cas où il y aurait plusieurs cibles en simultané. En effet, si nous ajoutons une force pour chaque cible, nous pouvons factoriser l'expression et obtenir une nouvelle cible correspondant au barycentre des cibles, pondéré par le coefficient γ_x associé à chaque point. Pour résoudre ce problème, nous pourrions utiliser une forme plus générale de la force,

$$F_{ext}(t, x) = -\nabla_x \varphi_T(|x - x_T(t)|), \quad (3.22)$$

où φ_T est un potentiel d'attraction. Nous retrouvons notre force pour $\varphi_T(r) = r^2/2$. Si nous utilisons à la place un potentiel décroissant, comme $\varphi(r) = (r + 1)e^{-r}$, nous pourrions piéger les drones une fois proches de la cible. Nous voyons alors numériquement que la flotte se concentrera sur la cible la plus proche du centre de masse

initialement (si la flotte n'est pas lancée vers une autre cible). Ceci n'est pas satisfaisant si nous voulons occuper toutes les cibles à la fois, puisque seul un point est occupé.

En conclusion, cette force fonctionne bien pour un drone, mais n'est pas applicable à une flotte directement, à cause du risque de collision et des oscillations autour de la cible. Les moyens de régler ces problèmes vont à l'encontre des principes de simplicité que nous nous sommes imposés, et demanderaient de nombreux équilibrages entre les nouvelles forces à ajouter. C'est pour cela que nous n'utiliserons pas cette force en pratique, mais plutôt le nouveau modèle développé dans le chapitre 6, qui répond à toutes ces problématiques à la fois.

3.2.3 Évitement d'obstacles

En situation réelle, les drones n'évoluent pas dans un espace vide avec leur cible. Leur trajet sera ponctué d'obstacles. Afin de pouvoir calculer des stratégies d'évitement, nous discrétisons tous les obstacles continus, comme les murs par exemple, et nous notons Σ l'ensemble des points d'obstacles ainsi obtenus. Malheureusement, les murs et les arbres ne sont pas équipés d'émetteurs radio pour communiquer leur position aux drones. Les drones utilisent donc leurs propres capteurs, vidéo ou LIDAR, afin de repérer les points d'obstacles dans leur champ de vision, comme il a été défini dans la section 1.1.3, et dont nous rappelons la définition ici : un point $x \in \mathbb{R}^d$ est dans le champ de vision ν_i du drone $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ dont le capteur est orienté selon $w_i \in \mathbb{R}^d$ si et seulement si

$$\langle x - x_i, w_i \rangle \geq \cos(\alpha_v) \|x - x_i\| \|w_i\|, \quad |x_i - x| \leq R_v,$$

où R_v est la portée de vision du drone, et α_v son angle de vision.

Nous avons alors de nombreuses manières de traiter les points d'obstacles dans le champ de vision. La façon la plus simple d'éviter un obstacle est d'utiliser une force de répulsion par rapport aux points de Σ , de la même manière que nous évitons les collisions entre drones. Si nous reproduisons ce que nous avons avec le modèle trois-zones, nous pouvons utiliser la force suivante, qui consiste à faire la moyenne des forces de répulsion issues des points perçus :

$$F_i^{obs} = -\frac{1}{1 + \#(\Sigma \cap \nu_i)} \sum_{z \in \Sigma \cap \nu_i} \nabla \phi(|x_i - z|),$$

avec ϕ un potentiel de répulsion. Cependant cette méthode est difficile à mettre en place. En effet, si l'environnement est complexe, ou que les drones ont un grand champ de vision, ils percevront des points d'obstacles non pertinents, comme un arbre derrière un mur, ou un point derrière eux. Afin de pallier ce problème, nous pourrions utiliser des techniques de lancer de rayon, mais cela dépasse le cadre de ce travail.

Une autre solution est de ne considérer que le point de $\Sigma \cap \nu_i$ le plus proche du drone. Cela réduit le nombre de calculs et règle le problème de simulation d'obstacles cachés entre eux. La force associée prend alors la forme

$$F_i^{obs} = -\frac{1}{2} \nabla \phi(|x_i - z|), \quad z := \operatorname{argmin}_{z_j \in \Sigma \cap \nu_i} |x_i - z_j|.$$

C'est la force que nous utiliserons pour nos simulations.

Des techniques plus complexes que la simple répulsion ont été développées pour éviter les obstacles. Nous avons par exemple l'effet inverse, avec une force de contournement, qui a été développé dans [84]. Nous pourrions également tenter d'adapter ce que nous avons développé dans le chapitre précédent, à savoir l'utilisation du flot optique, en considérant les points de Σ comme des drones fixes, pour éviter les collisions. Ces points ne seront toutefois pas développés plus avant dans le cadre de cette thèse.

Il existe encore de nombreuses forces différentes propres à chaque mission que nous pourrions vouloir donner à la flotte. Ou alors de nombreuses variations d'une même force, comme pour la force de Cucker-Smale ou d'attraction à un point, le choix du potentiel d'interaction étant illimité, et changeant la dynamique. Nous nous arrêtons ici pour le moment, mais nous étudierons une force liée à un objectif particulier au chapitre 6 : l'occupation d'une zone.

Nous allons conclure ce chapitre en présentant le solveur que nous avons utilisé, ainsi que des simulations numériques de ces modèles.

3.3 Simulations complémentaires

3.3.1 Présentation du solveur microscopique

Nous avons réalisé dans ce chapitre des simulations sur l'intervalle $[0, T]$ d'une flotte de N drones évoluant dans un espace en deux dimensions. Nous avons utilisé le schéma numérique Runge-Kutta 4 [13]. Le simulateur créé pour l'occasion est un code séquentiel en C++ extrêmement modulaire, dans le sens où tout est écrit en programmation orientée objet. Il est donc facile de simuler plusieurs flottes, ayant chacune leur propre modèle. De plus, cette architecture permet d'ajouter de futures forces sans altérer la boucle principale, mais aussi de calculer seulement celles dont la flotte a besoin, réduisant le plus possible les calculs séquentiels. Le simulateur actuel ne demande donc que peu de modifications pour ajouter des effets comme la perte ou l'ajout de drones en cours de vol. L'interface pour définir les paramètres et les forces à utiliser, ainsi que pour le post-traitement a été réalisée en Python, pour une prise en main plus rapide.

Nous concluons ce chapitre avec une simulation incorporant plusieurs des forces que nous venons de présenter. Une flotte de $N = 36$ drones initialement immobile et répartie uniformément sur un carré de côté 1 veut atteindre une cible placée en $(10, 1.5)$, qui se situe à la sortie d'un tunnel. Cette flotte est soumise au modèle trois-zones-croisé. Voici un tableau récapitulant les constantes et les potentiels que nous utilisons dans la simulation :

Objet	Notation	Valeur
Nombre de drones	N	36
Temps de simulation	T	200
Pas de temps	Δt	0.001
Force d'alignement	$\psi(r)$	$1/(1+r^2)$
Seuil d'interaction	η	1.0
Potentiel d'attraction - répulsion	$\varphi(r)$	$0.5(r-\eta)^2$
Rappel cible position	γ_x	0.2
Potentiel d'évitement d'obstacle	$\phi(r)$	$1.0/2r^2$
Portée de vision d'obstacle	R_v	100
Angle de vision d'obstacle	α_v	$\pi/2$

Nous présentons dans la figure 3.22 l'évolution dans la flotte au cours du temps.

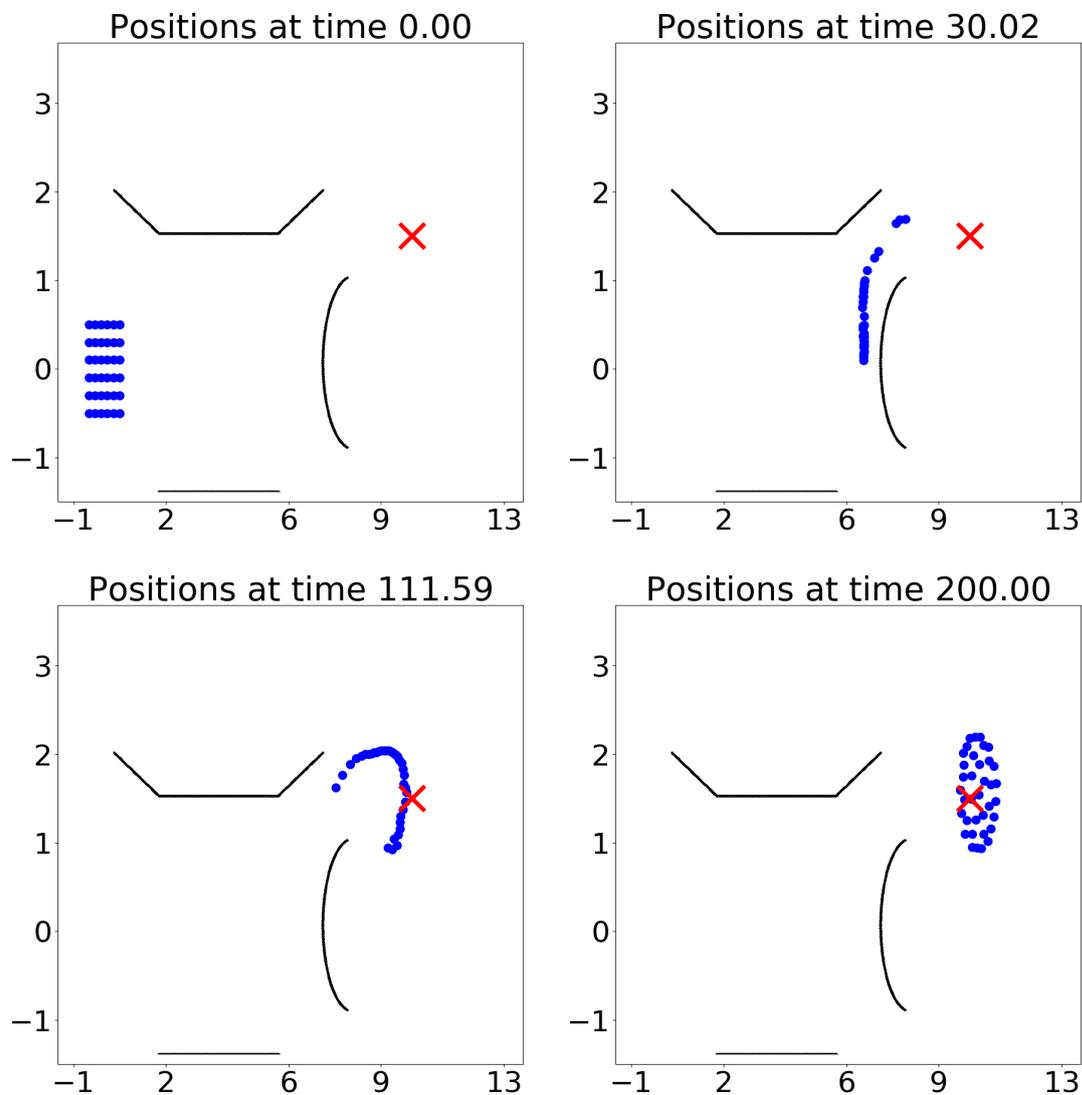


FIGURE 3.22 – Évolution au cours du temps d'une flotte soumise au modèle trois-zones-croisé devant atteindre une cible après un tunnel.

3.3.2 Étude des performances du solveur en fonction du nombre de drones

D'après la forme du modèle, et notamment dans les forces d'interactions binaires utilisant des doubles sommes, nous pouvons nous attendre à ce que le coût de calcul augmente drastiquement avec le nombre d'individus. Nous l'observons lors de l'exécution des simulations. Nous allons illustrer cette augmentation de la complexité du calcul avec l'expérience qui suit. Le but n'est pas d'évaluer les performances de notre algorithme, qui est simple de conception, mais bien d'illustrer le phénomène d'explosion du temps de calcul.

Répartissons nos drones immobiles uniformément sur une grille carrée de côté 2. Nous allons utiliser les potentiels $\psi(r) = 1/(1+r^2)$ et $\varphi(r) = 0.5(r-1)^2$. Nous traçons le temps CPU utilisé pour la simulation du modèle trois-zones et trois-zones-croisé sur l'intervalle $[0, 10]$ en fonction de N dans la figure 3.23. La machine utilisée est équipée d'un processeur Intel Xeon W-1250P CPU 4.10GHz et de 32Go de RAM. Nous avons lancé une simulation pour $N \in \{(10 + 5k)^2, k \in \llbracket 0, 6 \rrbracket\}$.

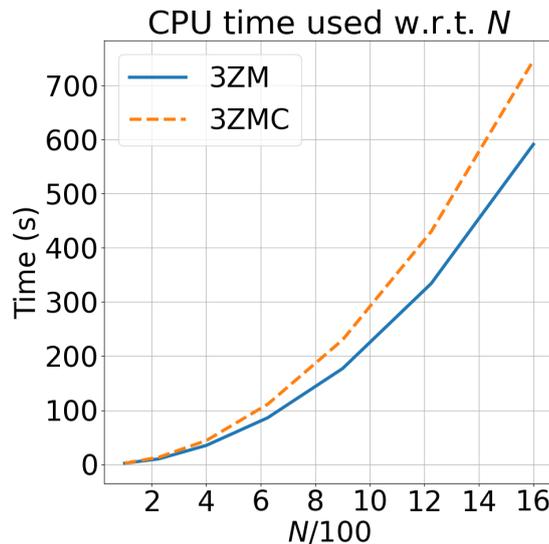


FIGURE 3.23 – Temps d'utilisation CPU en fonction du nombre de drones pour une expérience fixée, pour le modèle trois-zones (3ZM) et trois-zones-croisé (3ZMC).

Nous constatons que le coût est de plus en plus prohibitif, alors que notre but est de simuler de grandes flottes. De plus, la simulation était cantonnée aux dix premières secondes d'un vol du modèle trois-zones-croisé. Ce vol était donc court, sans obstacle ni objectif à réaliser, ce qui aurait encore plus augmenté le temps de calcul. Avec seulement 600 drones, le temps de calcul est déjà dix fois supérieur au temps de vol.

L'algorithme utilisé ici n'est toutefois pas particulièrement optimisé et n'inclut pas de stratégie de parallélisation. Nous pourrions par exemple répartir la charge de calcul des trajectoires sur plusieurs coeurs de calcul ou diviser l'espace en plusieurs zones. Cela pose toutefois de nouveaux problèmes d'efficacité pour implémenter les interactions entre drones.

Nous ne choisissons pas d'explorer cette voie d'optimisation, mais plutôt celle du changement d'échelle théorique. En pratique, ce qui nous intéresse est de savoir si les

drones accomplissent leur mission. Nous n'avons pas besoin de connaître leur position ou leur vitesse individuelle à chaque instant. Une fois que nous avons prouvé théoriquement que les drones n'entrent pas en collision, grâce au flot optique ou à une force de répulsion appropriée, nous pouvons nous contenter d'observer des quantités moyennes associées la flotte, comme la densité locale.

La pertinence de cette échelle de modélisation est justifiée par le phénomène de concentration que nous avons vu dans la proposition 3, et par l'expérience suivante. Regardons les tracés d'énergie issus de l'expérience précédente dans la figure 3.24 pour $N = 100, 256, 400$. Nous translatons vers le bas ces énergies par leur valeurs finale afin de comparer l'allure et les temps de convergence. Nous observons qu'à part augmenter la quantité d'énergie, l'augmentation du nombre de drones n'altère sensiblement aucune de ces deux propriétés. Par exemple, les oscillations du modèle trois-zones ne sont pas modifiées ni amorties.

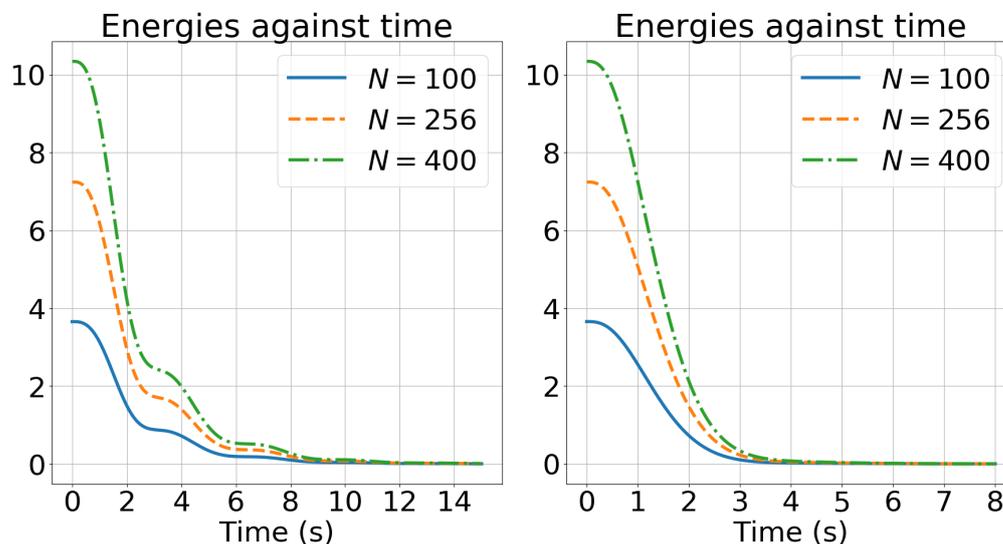


FIGURE 3.24 – Énergie E au cours du temps du modèle trois-zones (gauche) et trois-zones-croisé (droite) pour différentes tailles d'essaim.

Le phénomène de concentration et l'observation de l'énergie suggèrent qu'un modèle avec beaucoup de drones ressemble qualitativement à un modèle avec peu de drones. En poussant le raisonnement à la limite $N \rightarrow \infty$, nous obtiendrions une nouvelle représentation de la flotte, indépendante du nombre d'individus. La dérivation d'un tel modèle sera l'objet du chapitre suivant.

3.4 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre nous avons terminé d'étoffer le modèle de base que nous avons étudié dans les deux précédents chapitres. Pour cela, nous avons d'abord ajouté une force d'interaction nous permettant de contrôler la formation de vol des drones. Nous avons montré que le modèle trois-zones ainsi obtenu garanti l'agrégation sous une condition sur l'état initial de la flotte dans le théorème 18.

Nous avons ensuite étudié la vitesse de convergence vers l'équilibre de ce modèle, afin de la comparer à la convergence exponentielle du modèle de Cucker-Smale. Nous

avons pu montrer que le système est hypocoercif, donc converge exponentiellement vite, seulement dans les cas simples de deux drones ou d'un potentiel d'interaction purement attractif dans les propositions 1 et 2. Nous avons détaillé les mêmes calculs pour le cas général, et mis en lumière les points bloquants. Le point principal est que la force d'interaction rend le système oscillant, à la manière d'un pendule. Ces oscillations sont retranscrites dans l'énergie, et la méthode d'hypocoercivité consiste à définir une nouvelle énergie du système les harmonisant. C'est pourquoi cela fonctionne pour deux drones, qui s'apparentent à un pendule, ou une force attractive, qui n'est plus oscillante. Cependant, les innombrables interactions du cas général sont plus délicates à harmoniser.

Inspirés par la méthode d'hypocoercivité, nous avons développé une nouvelle force reproduisant l'effet stabilisateur de la nouvelle d'énergie. Cette dernière ne changeait pas la dynamique des drones, seulement l'évolution de la fonctionnelle d'énergie. Grâce à la nouvelle force croisée, nous observons une réduction significative des oscillations du modèle trois-zones - devenu le modèle trois-zones-croisé - dans les expériences numériques de la section 3.1.4. Cette réduction se traduit par un temps de convergence vers l'équilibre fortement diminué et la disparition complète des oscillations du système. Nous avons également mis en valeur le fait que trouver l'amplitude optimale de cette force pour une accélération maximale, ainsi que la quantification du gain en vitesse de convergence, sont intimement liés au reste des potentiels et aux conditions initiales. Ainsi, le choix de ces paramètres demanderait une étude plus spécifique, qui n'est pas l'objet de ce travail. Nous avons aussi montré que le système a les mêmes propriétés d'existence et d'agrégation que le modèle trois-zones dans le théorème 19.

Une fois fixés sur le modèle trois-zones-croisé, nous avons étudié les formations de vol à l'équilibre de ce modèle dans la section 3.1.5. Nous avons d'abord illustré la dépendance de la formation au potentiel d'interaction. La propriété du potentiel la plus influente est l'équilibre entre l'attraction et la répulsion. Le reste de la section est une brève étude numérique des deux catégories de formations qui se dégagent de nos observations.

Nous avons observé dans la section 3.1.6 qu'un potentiel borné permet l'apparition de formations en réseau. Or cette formation n'est pas stable pour le modèle trois-zones si le potentiel d'interaction n'est pas bien choisi. Nous avons également observé que la force croisée permet de stabiliser ces formations, mais qu'il y a toujours risque de la perdre. Nous en avons conclu qu'avec ce type de potentiel, et sans étude plus approfondie du phénomène, il est difficile de prévoir la fiabilité de la formation en réseau. C'est pourquoi nous nous sommes concentrés sur le second type de formation.

La formation en disque quant à elle a des propriétés plus prévisibles, même si nous ne contrôlons plus la position de chaque drone. Nous avons étudié dans la section 3.1.7 l'évolution du disque en fonction des paramètres du modèle.

La propriété qui distingue le plus la formation en disque de celle en réseau est le fait que lorsque le nombre de drones augmente, le volume du disque reste constant. Ceci est démontré pour le potentiel quadratique dans la proposition 3, qui est le potentiel par défaut que nous utilisons pour sa simplicité d'expression. Le rayon de la flotte est majoré par le seuil d'interaction utilisé. Nous avons observé numériquement que cette majoration est presque optimale.

En conclusion, les liens entre la forme du potentiel d'interaction et la formation finale de la flotte sont clairs. Cependant cette étude numérique n'est que superficielle et est loin d'être complète. Il faudrait la reproduire pour chaque potentiel que nous voudrions utiliser, pour quantifier précisément les propriétés de la formation en fonction des paramètres pour une utilisation sur le terrain. En particulier pour la formation en réseau qui est intéressante du point de vue opérationnel. Une poursuite intéressante serait d'étudier théoriquement la stabilité des équilibres que nous avons mis en valeur. Toutefois ce n'est pas l'objet de cette thèse, donc nous porterons notre attention ailleurs.

La fin de ce chapitre était consacrée à la définition et l'étude de forces liées à l'environnement et aux objectifs de la flotte. Nous avons montré qu'une simple force d'alignement sur une vitesse cible fonctionne comme nous nous y attendions dans le théorème 20. Pourtant l'équivalent en suivi de position donne des comportements indésirables, comme la concentration de l'entièreté des drones à la même position si cette force est couplée à celle d'alignement. Ceci a été montré dans le théorème 21. Ce résultat montre en particulier que l'interaction entre les différentes forces de notre modèle peut avoir des effets secondaires imprévus et dangereux pour les drones. De plus, cela nous décourage d'utiliser cette force, et une autre force pour occuper une zone précise de l'espace bien plus efficace sera développée dans le chapitre 6. Enfin, nous avons proposé quelques stratégies d'évitement d'obstacle.

Dans une dernière section, nous avons mis en évidence le fait que les simulations deviennent coûteuses quand le nombre de drones augmente. Bien que notre algorithme ne soit pas à la pointe de la technologie, le temps de calcul augmentera toujours avec le nombre de drones quelque soient les optimisations effectuées. C'est pourquoi nous choisissons de changer d'échelle de représentation. À cette nouvelle échelle, les équations ne dépendront plus du nombre de drones, nous libérant ainsi de cette dépendance. Ce choix est justifié par plusieurs observations suggérant que qualitativement, une flotte aura les mêmes propriétés qu'elle soit lancée avec peu ou beaucoup de drones.

Le prochain chapitre sera donc dédié à la dérivation d'un nouveau modèle indépendant du nombre de drones permettant de modéliser les comportements que nous venons de voir.

Chapitre 4

Modélisation macroscopique : changement d'échelle

Sommaire

4.1	Changement d'échelle formel pour les modèles microscopiques	92
4.1.1	Limite de champ moyen : étude de l'effet moyen de la flotte sur un drone	92
4.1.2	Limite hydrodynamique : étude des états moyens de la flotte	94
4.1.3	Présentation des forces macroscopiques	96
4.2	Quantification de la déviation entre échelles pour le modèle trois-zones croisé	97
4.2.1	Présentation du résultat	98
4.2.2	Étude de l'écart entre les vitesses	100
4.2.3	Étude de l'écart entre les densités	102
4.2.4	Étude des convergences et preuve du résultat	103
4.3	Étude de la conservation des comportements du modèle lors du changement d'échelle	105
4.3.1	Caractérisation de la limite en temps long et agrégation pour le modèle trois-zones-croisé macroscopique	106
4.3.2	Étude de la convergence exponentielle pour le modèle trois-zones	111
4.3.3	Phénomène de concentration pour le modèle trois-zones macroscopique avec potentiel quadratique	113
4.4	Conclusion du chapitre	114

Nous venons de voir dans le chapitre précédent que le coût en temps de calcul de notre modèle explose avec le nombre de drones. L'objectif de ce chapitre est de dériver un modèle ne présentant plus ce problème lorsque le nombre d'agents est important. Bien entendu, nous voulons que ce nouveau modèle conserve les comportements principaux qui émergent dans le précédent, comme l'agrégation, ou le suivi de cible.

Pour cela, nous allons changer d'échelle de représentation, afin d'obtenir un modèle macroscopique. Nous effectuons en section 4.1 le passage formel de notre ancien modèle vers le nouveau, en deux temps. Nous commencerons par passer à la "limite de champ moyen", ce qui revient à étudier l'effet moyen de la flotte sur un drone, au lieu

de considérer chaque interaction binaire. Ceci correspond à l'échelle de description mésoscopique. La deuxième étape consiste à étudier les moments de la limite de champ moyen, c'est-à-dire se limiter à l'étude des quantités moyennes associées à la flotte, comme la densité locale de drones. Nous donnerons pour terminer la formulation de toutes les forces vues jusqu'à présent dans notre nouveau modèle.

Ensuite nous quantifierons la déviation entre ces deux modèles, afin de juger de la qualité de l'approximation que nous effectuons. Nous adapterons les résultats de [21] à notre nouvelle force croisée dans la section 4.2.

Enfin, nous étudierons dans la section 4.3 si les comportements du premier modèle développés dans le chapitre 3, tels que l'agrégation ou la convergence vers une cible, sont conservés dans ce nouveau modèle macroscopique.

4.1 Changement d'échelle formel pour les modèles microscopiques

Cette section est dédiée à la dérivation formelle d'un modèle macroscopique approximant nos modèles microscopiques, afin de palier le problème des simulations numériques trop coûteuses pour de nombreux drones. Cette dérivation formelle permet de savoir simplement quel est le meilleur candidat pour l'approximation. La section 4.2 sera dédiée à la preuve du rapprochement entre les deux modèles.

4.1.1 Limite de champ moyen : étude de l'effet moyen de la flotte sur un drone

La première manière de réduire la complexité algorithmique du modèle microscopique est de changer de point de vue. Au lieu de calculer pour chaque drone l'influence de tous les autres membres de la flotte, nous pouvons nous cantonner à une seule contribution "moyenne", résultant de la flotte globale. Ce nouveau point de vue est appelé échelle mésoscopique. Ce n'est pas encore l'échelle macroscopique que nous avons mentionné plusieurs fois dans les chapitres précédents.

Dans ce qui suit, nous allons étudier formellement le changement d'échelle du modèle de Cucker-Smale avec retard $\tau \geq 0$ et champ de vision $R_v > 0, \alpha_v \in [0, \pi]$, afin d'avoir un aperçu complet de la manière de déterminer les équations fluides d'un modèle microscopique. Le modèle de départ est donné par :

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \begin{cases} x'_i(t) = v_i(t), \\ v'_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \psi(|x_i(t) - x_j(t - \tau)|)(v_j(t - \tau) - v_i(t)), \\ \mathcal{V}_i := \{j \in \llbracket 1, N \rrbracket, r_{ij} \leq R_v, \langle x_{ji}, v_i \rangle \geq \alpha_v r_{ij} |v_i|\}. \end{cases} \quad (4.1)$$

Afin de passer à l'échelle mésoscopique, nous allons étudier l'évolution de la mesure empirique associée à la flotte au cours du temps. Soient $\{(x_i, v_i)\}_{i=1}^N$ les positions et vitesses des agents d'une flotte. Sa mesure empirique est définie par

$$f^N(t, x, v) := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{x_j(t)}(x) \delta_{v_j(t)}(v), \quad (4.2)$$

où δ est la mesure de Dirac. Le support de la mesure empirique est la collection des points $(x_i, v_i)(t)$, correspondant aux trajectoires des drones. Elle représente donc la probabilité de trouver un de nos drones au temps t à la position x et à la vitesse v .

Pour changer d'échelle, nous allons étudier son évolution au sens des distributions. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ une fonction régulière à support compact. Nous utilisons la notation \langle, \rangle pour dénoter l'application d'une mesure à une fonction. Tout d'abord, nous remarquons que nous pouvons écrire la force de Cucker-Smale sous la forme d'une intégrale contre f^N :

$$\begin{aligned} F^N(t, x_i, v_i) &:= \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \psi(|x_i(t) - x_j(t - \tau)|)(v_j(t - \tau) - v_i(t)) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \psi(|x_i(t) - y|)(w - v_i(t)) \mathbb{1}_{\nu(x_i, v_i)}(y) f^N(t - \tau, y, w) dy dw, \\ \nu(x, v) &:= \{y \in \mathbb{R}^d \mid (|x - y| \leq R_v), (\langle y - x, v \rangle \geq \alpha_v |x - y| |v|)\}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

La dérivée en temps au sens des distributions de f^N se détermine alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \langle \partial_t f^N(t), \varphi \rangle &:= \frac{d}{dt} \langle f^N(t), \varphi \rangle \\ &= \frac{d}{dt} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(x_i(t), v_i(t)) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\nabla_x \varphi(x_i, v_i) \cdot v_i(t) + \nabla_v \varphi(x_i, v_i) \cdot F^N(t, x_i, v_i) \right) \\ &= \langle \nabla_x \varphi \cdot v, f^N \rangle + \langle \nabla_v \varphi \cdot F^N, f^N \rangle \\ &= - \langle \varphi, \operatorname{div}_x(v f^N) \rangle - \langle \varphi, \operatorname{div}_v(F^N f^N) \rangle \\ &= - \langle \varphi, v \cdot \nabla_x f^N + \operatorname{div}_v(F^N f^N) \rangle \end{aligned}$$

Ces calculs sont généraux, quelles que soient les forces F appliquées au système microscopique. Nous en déduisons que f^N est solution au sens des distributions de

$$\partial_t f^N + v \cdot \nabla_x f^N + \operatorname{div}_v(F f^N) = 0. \quad (4.4)$$

Nous venons de reformuler le modèle microscopique grâce à la mesure empirique f^N . La suite du raisonnement est de faire tendre le nombre d'agents N vers l'infini, afin de véritablement changer d'échelle, et d'obtenir une alternative continue de f^N . La difficulté du changement d'échelle réside dans le fait de montrer que f^N converge vers une limite f , et que cette limite est solution de l'équation (4.4).

Cette méthode s'appelle la limite de champ moyen du modèle microscopique, et est un problème ouvert sur la plupart des modèles. C'est pour cela que nous admettrons la convergence de f^N pour tous nos modèles, et c'est ce point précis qui fait que notre dérivation n'est que formelle.

Le lecteur intéressé pourra se plonger dans [41, 9] pour la limite rigoureuse du modèle de Vicsek présenté en section 1.2.1, les références [62, 59, 80] couvrent la limite rigoureuse pour le modèle de Cucker-Smale, [29] sa variante avec délai, et [17, 10, 8] étudient cette limite pour d'autres modèles. Les articles [38, 39] présentent une

méthode légèrement différente pour la limite formelle du modèle d'attitude corporelle de la section 1.2.4.

Nous ne nous intéressons pas non plus à la question de l'existence de solutions pour ces équations. [16] présente des résultats d'existence pour une grande variété de modèles, incluant celui présenté dans la section 3.1.1.

En admettant la convergence de la mesure empirique f^N , nous avons donc à disposition une mesure de probabilité f , représentant la probabilité de trouver au temps t un drone à la position x et à la vitesse v , solution de

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \operatorname{div}_v(F^m f) = 0, \quad (4.5)$$

où F^m est donnée par

$$F^m(t, x, v) := \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \psi(|x - y|)(w - v) \mathbb{1}_{\nu(x, v)}(y) f(t - \tau, y, w) dy dw \quad (4.6)$$

correspondant à la force de Cucker-Smale avec retard et champ de vision à l'échelle mésoscopique. Comme les calculs effectués sont généraux, F peut représenter n'importe quelle force, et cette équation est elle aussi commune à tous les modèles que nous avons présenté, une fois F^m adapté.

Cependant, connaître la distribution de probabilité des vitesses ne nous intéresse pas pour nos applications. Une connaissance moyenne de la vitesse du groupe nous suffit. De plus, si nous voulions simuler numériquement cette distribution en vitesse, nous aurions toujours un grand espace de phase $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, en temps, en position, et en vitesse, ce qui nécessiterait des méthodes numériques plus complexes pour garantir la rapidité des simulations de vol. Or ceci est un des objectifs de notre modélisation : être capable de simuler rapidement le vol de la flotte afin de garantir que les paramètres utilisés permettent l'accomplissement de la mission. Nous allons donc passer à un niveau d'abstraction supplémentaire dans la section suivante.

4.1.2 Limite hydrodynamique : étude des états moyens de la flotte

Dans la section précédente, nous avons vu que l'échelle mésoscopique ne nous satisfait pas pour les simulations numériques, à cause du surplus d'information dû à la dépendance en vitesse des solutions au modèle. Nous pouvons en fait nous contenter des états moyens de la flotte, les questions que nous nous posons sont plutôt : Quelle est la densité locale de drones à tel endroit ? Quel est le champ de vitesse moyen de la flotte ici ?

Cette description est appelée échelle macroscopique. Ce modèle a beaucoup moins de variables à simuler que le modèle microscopique, au prix d'une grande perte d'information : nous ne savons plus où sont les drones, donc nous n'avons plus la distance qui les sépare, ni leur vitesse. Nous savons seulement où la flotte est située et comment elle se déplace.

Comme dans la section précédente, nous nous intéressons au passage formel pour le modèle de Cucker-Smale avec retard et champ de vision (4.1), en partant du modèle mésoscopique associé (4.5). Encore une fois, nous verrons dans la section 4.2 une autre

méthode nous permettant de quantifier l'écart entre le modèle microscopique et le modèle macroscopique.

Afin de passer aux états moyens de la flotte, nous étudions les moments en vitesse de la densité de probabilité f . Nous définissons alors

$$\rho^m(t, x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, v) dv, \quad (\rho u)^m(t, x) := \int_{\mathbb{R}^d} v f(t, x, v) dv, \quad u^m(t, x) := \frac{(\rho u)^m}{\rho^m}(t, x),$$

que nous appelons densité et champ de vitesse moyens. En intégrant (4.5) contre dv et $v dv$, nous obtenons respectivement :

$$\partial_t \rho^m(t, x) + \operatorname{div}_x \left(\int_{\mathbb{R}^d} v f(t, x, v) dv \right) + \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{div}_v (f F^m)(t, x, v) dv = 0$$

et

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t (\rho u)^m(t, x) + \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{div}_x (v \cdot v f(t, x, v)) dv + \int_{\mathbb{R}^d} v \sum_{i=1}^d \partial_{v_i} (f F_i^m)(t, x, v) dv \\ &= \partial_t (\rho u)^m(t, x) + \operatorname{div}_x \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, v) v \otimes v dv \right) - \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \partial_{v_i} v f F_i^m(t, x, v) dv. \end{aligned}$$

Or en développant

$$P^m(t, x) := \int_{\mathbb{R}^d} (u^m - v) \otimes (u^m - v)(t, x) f(t, x, v) dv,$$

nous obtenons

$$P^m(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} v \otimes v f(t, x, v) dv - \rho^m u^m \otimes u^m(t, x).$$

Ainsi, les équations sur ρ^m, u^m s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_t \rho^m(t, x) + \operatorname{div}((\rho u)^m)(t, x) = 0, \\ \partial_t (\rho u)^m(t, x) + \operatorname{div}(\rho^m u^m \otimes u^m)(t, x) + \operatorname{div} P^m(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} f F^m(t, x, v) dv. \end{cases} \quad (4.7)$$

Nous avons cependant un problème : le terme P^m et le terme de force s'écrivent forcément en fonction de f , faisant possiblement intervenir des moments supérieurs de f . Avec ces dépendances générales en v , nous ne pouvons rien faire de plus sans connaître la forme de f . Nous n'avons donc pas un système fermé dans les moments de f ρ^m, u^m , et avons besoin d'une hypothèse de fermeture pour le système (4.7).

La fermeture la plus courante est la fermeture mono cinétique. Elle consiste à supposer que f s'approxime comme

$$f(t, x, v) \simeq \rho(t, x) \delta_{u(t, x)}(v), \quad (4.8)$$

où ρ est une densité et u un champ de vitesse moyen. Cela correspond à une mesure de probabilité où les drones sont répartis dans l'espace selon une densité, et voyagent tous à la vitesse $u(t, x)$ selon leur position.

Une alternative est la fermeture Maxwellienne avec une température normalisée à 1 :

$$f(t, x, v) \simeq \rho(t, x) \exp(-|u(t, x) - v|^2/2),$$

où les drones sont répartis dans l'espace selon une densité ρ , et leur vitesse est répartie selon une loi normale, centrée sur une vitesse moyenne $u(t, x)$.

Nous ne nous intéresserons qu'à la fermeture monocinétique car elle est plus simple, et parce qu'il y a beaucoup à étudier dans les modèles obtenus, notamment leurs propriétés qualitatives. Nous avons donc choisi de nous limiter à l'une des deux fermetures. Toutefois il pourrait être intéressant de reprendre les études de ce chapitre et des suivants avec la fermeture Maxwellienne, et de comparer les deux approches.

C'est en choisissant la fermeture que ce changement d'échelle est formel. Avec la fermeture monocinétique, le terme de pression s'annule, et notre système d'équations s'écrit alors

$$\begin{aligned} \rho^m \simeq \rho, \quad (\rho u)^m(t, x) &\simeq \int_{\mathbb{R}^d} v \rho(t, x) \delta_{u(t, x)}(v) dx dv = \rho u(t, x), \quad P^m \simeq 0, \\ \begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) = \rho(t, x) F(t, x), \end{cases} \end{aligned} \quad (4.9)$$

où le terme de force s'écrit maintenant

$$F(t, x) := \int_{\mathbb{R}^d} \psi(|x - y|)(u(t - \tau, y) - u(t, x)) \mathbb{1}_{\nu(x, u(t, x))}(y) \rho(t - \tau, y) dy.$$

Comme à l'échelle mésoscopique, ces calculs sont généraux, et le terme de force F peut être quelconque.

Bien que la méthode que nous utiliserons dans la section suivante pour rapprocher les modèles micro et macroscopique ressemble à une des manières de rapprocher les modèles meso et macroscopique, nous renvoyons vers [55, 42, 37, 69] pour le passage pour des modèles de Vicsek en temps discret ou continu, [70] pour le modèle de Cucker-Smale avec le potentiel ajusté vu en section 1.3.4, [71, 22, 40] pour des variantes du modèles de Cucker-Smale, ou encore [36, 38, 39] pour une limite formelle pour le modèle d'attitude corporelle. [20] est une belle revue des différentes techniques utilisées sur une grande variété de modèles de population.

Maintenant que nous savons formellement trouver quel modèle macroscopique permet d'approximer notre modèle microscopique, et avant de montrer rigoureusement comment passer de l'un à l'autre, voyons comment s'écrivent toutes les forces que nous avons présenté dans la section 3.2 à l'échelle macroscopique.

4.1.3 Présentation des forces macroscopiques

En répétant les calculs de la section précédente, voici l'expression de chaque force sous sa forme macroscopique :

— Force de Cucker-Smale :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(|x - y|)(u(t, y) - u(t, x)) \rho(y) dy, \quad (4.10)$$

où $\psi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$ est la force de communication.

— Force d'attraction-répulsion :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\varphi'(|x-y|)}{|x-y|} (y-x)\rho(y)dy, \quad (4.11)$$

où $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+)$ est le potentiel d'interaction.

— Force croisée :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\varphi''(|x-y|)}{|x-y|^2} \langle x-y, u(x)-u(y) \rangle (y-x)\rho(y)dy. \quad (4.12)$$

— Force de suivi de position et de vitesse :

$$\gamma_x(x_T(t)-x) + \gamma_v(v_T(t,x)-u(t,x)), \quad (4.13)$$

où $\gamma_x, \gamma_v > 0$ sont leur intensité respectives.

— Force de friction et de propulsion :

$$-\gamma u(t,x) + \beta |u(t,x)|^2 u(t,x), \quad (4.14)$$

où $\gamma, \beta > 0$ sont respectivement les intensité de friction et de propulsion.

— Force d'évitement d'obstacle moyenne :

$$-\int_{\mathbb{R}^d} \nabla \varphi_{obs}(|y-z|) \mathbb{1}_{\nu(y,u(t,y))}(z) \rho(t,y) dy, \quad (4.15)$$

où φ_{obs} est le potentiel d'interaction face à un obstacle, ν est le champ de vision d'un drone, défini en (4.3), et z est un point d'obstacle quelconque.

— Force d'évitement d'obstacle le plus proche :

$$-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \varphi_{obs}(|y-z_0(y)|) \rho(t,y) dy, \quad (4.16)$$

où $z_0(x)$ est l'obstacle le plus proche du point x parmi les obstacles Σ , défini comme

$$z_0(x) := \operatorname{argmin}_{z \in \Sigma \cap \nu(x,u(t,x))} |x-z|.$$

Montrons maintenant comment rigoureusement passer d'une échelle à l'autre.

4.2 Quantification de la déviation entre échelles pour le modèle trois-zones croisé

Maintenant que nous avons formellement dérivé un modèle macroscopique à partir du modèle microscopique, nous allons montrer sous hypothèse de régularité que ce dernier converge dans un certain sens vers le modèle macroscopique lorsque le nombre de drones tend vers l'infini. Plus précisément, nous allons quantifier l'écart entre les deux modèles au cours du temps en fonction de l'écart entre les conditions initiales. La méthode présentée dans cette section est simple et systématique. Elle a été introduite dans [21] pour le modèle trois-zones agrémenté d'autres effets tels que la friction ou un potentiel de confinement. Nous l'avons appliquée à la nouvelle force croisée que

nous avons défini dans la section 3.1.4, donnée sous forme macroscopique par (4.12). Le modèle que nous étudions est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho(t, x) + \operatorname{div}(\rho u)(t, x) = 0, \\ \partial_t(\rho u)(t, x) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u)(t, x) = \rho(t, x)(F^{croi} + F^{CS} + F^{AR})(t, x) \\ F^{croi}(t, x) := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\varphi''(|x-y|)}{|x-y|^2} \langle x-y, u(t, x) - u(t, y) \rangle (y-x) \rho(t, y) dy, \\ F^{CS}(t, x) := \int_{\mathbb{R}^d} \psi(|x-y|)(u(t, y) - u(t, x)) \rho(y) dy, \\ F^{AR}(t, x) := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\varphi'(|x-y|)}{|x-y|} (y-x) \rho(y) dy. \end{array} \right. \quad (4.17)$$

4.2.1 Présentation du résultat

Le point clé que nous allons utiliser pour comparer les deux échelles de modélisation est que les deux mesures $f^N(t, x, v)$ et $\rho(t, x)\delta_{u(t, x)}(v)$ sont solutions de la même équation à l'échelle mésoscopique (4.5). En effet, nous l'avons montré pour f^N dans la section 4.1.1, et nous le montrons ici pour $\rho\delta_u$.

Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ une fonction test. Alors en utilisant les équations sur ρ et u nous avons

$$\begin{aligned} \langle \partial_t(\rho\delta_u), \phi \rangle &= \frac{d}{dt} \left(\iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \rho(t, x) \delta_{u(t, x)}(v) \phi(x, v) dx dv \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \rho(t, x) \phi(x, u(t, x)) dx + \int_{\mathbb{R}^d} \rho(t, x) \partial_t u(t, x) \cdot \nabla_v \phi(x, u(t, x)) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{div}_x(\rho u)(t, x) \phi(x, u(t, x)) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_v \phi \cdot \left(- \partial_t \rho u(t, x) - \operatorname{div}_x(\rho u \otimes u)(t, x) + \rho(t, x) F(t, x) \right) dx. \end{aligned}$$

Après une intégration par partie dans le premier terme, nous rassemblons les termes pour trouver :

$$\begin{aligned} \langle \partial_t(\rho\delta_u), \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \rho u(t, x) \cdot \nabla_x [\phi(x, u(t, x))] dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_v \phi(x, u(t, x)) \cdot (\operatorname{div}_x(\rho u)u - \operatorname{div}_x(\rho u \otimes u)) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_v \phi(x, u(t, x)) \rho(t, x) F(t, x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \rho u(t, x) \cdot \nabla_x \phi(x, u(t, x)) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_v \phi(x, u(t, x)) \left(\rho \nabla_x u u(t, x) + \operatorname{div}_x(\rho u)u - \operatorname{div}_x(\rho u \otimes u) \right) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_v \phi(x, u(t, x)) \rho(t, x) F(t, x) dx \end{aligned}$$

Ceci se traduit en terme de distribution en :

$$\begin{aligned} \left\langle \partial_t(\rho\delta_u), \phi \right\rangle &= \langle \rho\delta_u, v \cdot \nabla_x \phi \rangle + 0 + \langle \rho\delta_u, \nabla_v \phi \cdot F^m \rangle \\ &= - \langle v \cdot \nabla_x(\rho\delta_u), \phi \rangle - \langle \operatorname{div}_v(\rho\delta_u F^m), \phi \rangle \end{aligned}$$

Maintenant que nous avons deux solutions d'une même équation, nous définissons les outils qui nous permettrons de les comparer :

$$\mathcal{E}^N(t) := \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N |u(t, x_i(t)) - v_i(t)|^2 = \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |u(t, y) - w|^2 f^N(t, y, w) dy dw \quad (4.18)$$

est une fonctionnelle comparant la vitesse moyenne de la flotte aux positions des drones par rapport à leur vitesse réelle. Pour comparer les densités, nous définissons la densité microscopique

$$\rho^N(t, x) := \int_{\mathbb{R}^d} f^N(t, x, v) dv,$$

et nous utiliserons

$$d_{BL}(\mu, \nu) := \sup_{\phi \in \Theta} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) (\mu(dx) - \nu(dx)) \right| \quad (4.19)$$

où Θ est l'ensemble des fonction bornées et Lipschitziennes de constante 1 :

$$\Theta := \left\{ \phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \mid \|\phi\|_{L^\infty} \leq 1, \quad \|\phi\|_{Lip} := \sup_{x \neq y} \left| \frac{\phi(x) - \phi(y)}{x - y} \right| \leq 1 \right\}.$$

De plus, afin de pouvoir considérer des potentiels d'interaction singuliers, nous aurons besoin de

$$\mathcal{F}(t) := \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \Delta} \varphi(|x - y|) (\rho^N - \rho)(x) (\rho^N - \rho)(y) dx dy, \quad (4.20)$$

où Δ est la diagonale de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Nous voyons ici que si f^N converge vers une limite monocinétique $\rho\delta_u$ comme nous l'avions supposé dans la partie formelle, alors \mathcal{E}^N , $d_{BL}(\rho_t, \rho_t^N)$ et \mathcal{F}^N tendent vers 0 lorsque le nombre de drones N tend vers l'infini.

Le résultat comparant les deux échelles pour un modèle incorporant la force croisée (4.12) est le suivant.

Théorème 22 (Comparaison des échelles pour le modèle croisé)

Soit $T > 0$ le temps d'existence maximal de l'unique solution $(\rho, u) \in \mathcal{C}([0, T]; \mathcal{P}(\Omega)) \times L^\infty(0, T; \mathcal{W}^{1, \infty}(\Omega))$ du modèle trois-zones-croisé macroscopique (4.17). Supposons que la force de communication ψ et φ vérifient respectivement (1.7) et (3.2), et que de plus φ'' soit bornée et lipschitz.

Alors il existe $\beta < 0$ tel que pour tout temps $0 \leq t < T$,

$$\mathcal{E}^N(t) + d_{BL}^2(\rho_t^N, \rho_t) + \mathcal{F}^N(t) \lesssim \mathcal{E}^N(0) + d_{BL}^2(\rho_0^N, \rho_0) + \mathcal{F}^N(0) + N^\beta.$$

De plus, si les conditions initiales sont choisies telles que le membre de droite tende vers 0, alors nous avons également

$$f^N \rightharpoonup \rho \delta_u, \quad \int_{\mathbb{R}^d} v f^N dv \rightharpoonup \rho u, \quad \int_{\mathbb{R}^d} (v \otimes v) f^N dv \rightharpoonup \rho u \otimes u, \quad L^\infty(0, T; \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)).$$

La contribution en \mathcal{F}^N et N^β vient de la force d'attraction-répulsion, et est due au fait que nous supposons que φ' n'est pas lipschitz. Dans le cas contraire, la fonctionnelle \mathcal{F}^N n'est pas nécessaire.

La deuxième partie du théorème nous indique que si nous préparons bien les conditions initiales, alors les variables de l'échelle microscopique convergent sur tout intervalle de temps fini vers les variables de l'échelle macroscopique. Ce résultat peut être vu d'une autre manière, qui nous intéresse en pratique : si nous avons suffisamment de drones et que nous préparons les conditions initiales de sorte que le membre de droite de l'inégalité du théorème soit assez petit, alors l'écart entre les deux modèles restera petit au cours du temps. Autrement dit, le modèle macroscopique sera une représentation satisfaisante du modèle microscopique.

Tout comme pour les calculs formels effectués dans les sections précédentes, les calculs que nous allons effectuer sont adaptables au cas par cas facilement, et les estimations propres à chaque force peuvent s'ajouter les unes aux autres. C'est pour cela que nous nous concentrerons sur les calculs associés à la force croisée (4.12). Le résultat original prend en compte entre autres les forces de Cucker-Smale et d'interaction, et en ajoutant nos estimations à celles de [21], nous obtenons le résultat pour le modèle trois-zones-croisé, ou toute combinaison possible des forces que nous avons présenté. Les spécificités dues à \mathcal{F}^N sont présentées dans [92]. La force croisée présente toutes les difficultés rencontrées dans l'étude d'une force, donc nous présentons les estimations essentielles pour toute adaptation. Cependant, nous verrons un modèle particulier dans le chapitre suivant, qui nécessitera un léger remaniment de l'estimation de \mathcal{E}^N .

La démonstration va se faire en trois étapes. Premièrement nous allons étudier la fonctionnelle des vitesses \mathcal{E}_N , puis celle des densités $d_{BL}(\rho_t, \rho_t^N)$, avant de combiner deux estimations obtenues afin de retrouver l'inégalité du théorème. Enfin nous nous pencherons sur la question des convergences.

4.2.2 Étude de l'écart entre les vitesses

Nous allons montrer l'estimation suivante :

Proposition 4

Sous les hypothèses du théorème 22, il existe $\beta < 0$ tel que pour tout temps $0 \leq t < T$,

$$\mathcal{E}^N(t) + \mathcal{F}^N(t) \lesssim \mathcal{E}^N(0) + \mathcal{F}^N(0) + \int_0^t d_{BL}^2(\rho_s^N, \rho_s) ds + N^\beta.$$

Nous rappelons que nous ne conduisons les calculs comme s'il n'y avait que la force croisée (4.12), puisque les estimations des autres forces sont dans la référence originale [21] et [92] pour la partie en \mathcal{F}^N , et quelles peuvent être simplement ajoutées aux

nôtres. Par ailleurs, ces dernières présentent toutes les difficultés possibles, donc elles illustrent toutes les techniques utilisées. Afin d'alléger les notations, nous ne noterons pas les dépendances en temps.

Démonstration :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{E}^N &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\langle u(x_i) - v_i, \nabla u(v_i - u(x_i)) \right\rangle \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\langle u(x_i) - v_i, \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\varphi''(|x_i - y|)}{|x_i - y|^2} \langle x_i - y, u(x_i) - u(y) \rangle \rho(y)(y - x_i) dy \right\rangle \\ &- \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\langle u(x_i) - v_i, \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\varphi''(r_{ij})}{r_{ij}^2} \langle x_{ij}, v_{ij} \rangle x_{ji} \right\rangle \end{aligned}$$

En insérant $\pm \rho^N(y)$ au niveau de $\rho(t, y)$ dans le second terme, ainsi que $\pm u(t, x_j(t))$ dans $v_{ij}(t)$ dans le dernier terme, nous obtenons quatre termes à estimer :

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}^N(t) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4,$$

$$S_1 := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\langle u(x_i) - v_i, \nabla u(v_i - u(x_i)) \right\rangle,$$

$$S_2 := -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\langle u(x_i) - v_i, \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\varphi''(r_{ij})}{r_{ij}^2} \langle x_{ij}, u(x_j) - v_j \rangle x_{ji} \right\rangle,$$

$$S_3 := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\langle u(x_i) - v_i, \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\varphi''(|x_i - y|)}{|x_i - y|^2} \langle x_i - y, u(x_i) - v_i \rangle \rho^N(y)(y - x_i) dy \right\rangle,$$

$$S_4 := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\langle u(x_i) - v_i, \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\varphi''(|x_i - y|)}{|x_i - y|^2} \langle x_i - y, u(x_i) - u(y) \rangle (\rho - \rho^N)(y)(y - x_i) dy \right\rangle$$

Nous estimons les trois premiers termes en utilisant les normes infinies de ∇u et φ'' :

$$\begin{aligned} S_1 &\leq 2\|\nabla u\|_{L^\infty} \mathcal{E}^N, \\ S_2 &\leq \|\varphi''\|_{L^\infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |u(x_i) - v_i| \right)^2 \leq 2\|\varphi''\|_{L^\infty} \mathcal{E}^N, \\ S_3 &\leq \frac{1}{N} \|\varphi''\|_{L^\infty} \sum_{i=1}^N |u(x_i) - v_i|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \rho^N(y) dy = 2\|\varphi''\|_{L^\infty} \mathcal{E}^N. \end{aligned}$$

Pour S_4 , nous remarquons que si $y \mapsto y/|y|$ est multipliée par une fonction bornée et lipschitz qui s'annule en 0, alors le produit est aussi borné et lipschitz. En effet, pour une telle fonction f et pour $x, y \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} |f(x)x/|x| - f(y)y/|y|| &= |f(x)x/|x| \pm f(y)x/|x| - f(y)y/|y|| \\ &\leq \|f\|_{Lip}|x - y| + |f(y)| \left| \frac{|y|x \pm |x|x - |x|y}{|x||y|} \right| \\ &\leq \|f\|_{Lip}|x - y| + 2\frac{|f(y) - f(0)|}{|y - 0|}|x - y| \\ &\leq 3\|f\|_{Lip}|x - y|. \end{aligned}$$

D'après nos hypothèses sur φ'' et u , nous avons donc

$$S_4 \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |u(x_i) - v_i| C d_{BL}(\rho_t, \rho_t^N) \leq C' (\mathcal{E}^N + d_{BL}^2(\rho_t, \rho_t^N)).$$

Ainsi, nous pouvons conclure grâce au lemme de Gronwall. ■

4.2.3 Étude de l'écart entre les densités

Nous allons montrer que

Proposition 5

Soit $T > 0$ le temps d'existence maximal de l'unique solution $(\rho, u) \in \mathcal{C}([0, T]; \mathcal{P}(\Omega)) \times L^\infty(0, T; \mathcal{W}^{1, \infty}(\Omega))$ du modèle trois-zones-croisé macroscopique (4.17).

Alors pour tout temps $0 \leq t < T$,

$$d_{BL}^2(\rho_t^N, \rho_t) \lesssim d_{BL}^2(\rho_0^N, \rho_0) + \int_0^t \mathcal{E}^N(s) ds.$$

Ce résultat est complètement indépendant de la forme de l'équation, étant donnée qu'il ne se base que sur l'équation de conservation de la masse. Ainsi, nous reprenons telles quelles les estimations de [21], que nous incluons pour que le manuscrit soit complet.

Démonstration : Nous commençons par définir les caractéristiques η , qui sont bien définies d'après la régularité de u :

$$\eta'(t, x) = u(t, \eta(t, x)).$$

Par intégration le long de ces caractéristiques, nous constatons que la densité peut s'écrire

$$\rho(t, \eta(t, x)) = \rho(x) \exp \left(- \int_0^t \rho(s, \eta(s, x)) \operatorname{div} u(s, \eta(s, x)) ds \right),$$

ce qui permet d'écrire le changement de variable suivant, pour $\phi \in \Theta$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(\eta(t, x)) \rho_0(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) \rho(t, x) dx. \quad (4.21)$$

Le long de ces caractéristiques, nous avons également

$$\begin{aligned} |x_i(t) - \eta(t, x_i(0))| &= |x_i(t) - x_i(0) + \eta(0, x_i(0)) - \eta(t, x_i(0))| \\ &= \left| \int_0^t v_i(s) - u(s, \eta(s, x_i(0))) ds \right| \\ &\leq \int_0^t |v_i(s) - u(s, x_i(s))| ds \\ &\quad + \int_0^t |u(s, x_i(s)) - u(s, \eta(s, x_i(0)))| ds \\ &\leq \int_0^t |v_i(s) - u(s, x_i(s))| ds \\ &\quad + \|\nabla u\|_{L^\infty} \int_0^t |x_i(s) - \eta(s, x_i(0))| ds. \end{aligned}$$

D'après le lemme de Gronwall intégral, nous en déduisons que

$$\begin{aligned} |x_i(t) - \eta(t, x_i(0))| &\leq 0 + \int_0^t |v_i(s) - u(s, x_i(s))| e^{(t-s)\|\nabla u\|_{L^\infty}} ds \\ &\leq e^{T\|\nabla u\|_{L^\infty}} \int_0^t |v_i(s) - u(s, x_i(s))| ds \end{aligned} \quad (4.22)$$

De plus, d'après l'inégalité de Jensen, pour tout $a \in \mathbb{R}^N$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_0^t a_i(s) ds \leq \frac{1}{N} \int_0^t \sqrt{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N a_i^2(s)} ds = \int_0^t \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i^2(s)} ds \leq \sqrt{\int_0^t \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i^2(s) ds},$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_0^t |v_i(s) - u(s, x_i(s))| ds &\leq \sqrt{\int_0^t \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |v_i(s) - u(s, x_i(s))|^2 ds} \\ &= \sqrt{\int_0^t 2\mathcal{E}_N(s) ds}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Nous pouvons donc calculer pour $\phi \in \Theta$ en utilisant (4.21) et (4.22) :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \phi(\rho - \rho_N)(t, x) dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \left(\phi(t, x)(\rho(t, x) - \rho_N(t, x)) \pm \phi(\eta(t, x))\rho_N(0, x) \right) dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^d} \phi(\eta(t, x))(\rho_0 - \rho_N(0)) dx \right| \\ &\quad + \left| \int_{\mathbb{R}^d} \left(\phi(\eta(t, x))\rho_N(0) - \phi(x)\rho_N(x) \right) dx \right| \\ &\leq d_{BL}(\rho_0, \rho_N(0)) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\phi(\eta(x_i(0))) - \phi(x_i(t))| \\ &\leq d_{BL}(\rho_0, \rho_N(0)) + \frac{\|\nabla \phi\|_{L^\infty}}{N} \sum_{i=1}^N |x_i(t) - \eta(t, x_i(0))| \\ &\leq d_{BL}(\rho_0, \rho_N(0)) + C \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_0^t |v_i(s) - u(s, x_i(s))| ds. \end{aligned}$$

Nous retrouvons l'inégalité désirée en passant au carré et en utilisant (4.23). ■

Nous combinons les estimations dans la section suivante.

4.2.4 Étude des convergences et preuve du résultat

Afin d'obtenir l'inégalité du théorème 22, nous additionnons simplement les deux estimations des propositions 4 et 5, et utilisons le lemme de Gronwall sous forme intégrale.

Pour montrer les convergences du théorème 22, nous utiliserons la proposition suivante, qui estime la distance entre nos quantités micro et macroscopiques en fonction de nos fonctionnelles \mathcal{E}^N et $d_{BL}(\rho^N, \rho)$:

Proposition 6

Soit $T > 0$ le temps d'existence maximal de l'unique solution $(\rho, u) \in \mathcal{C}([0, T]; \mathcal{P}(\Omega)) \times L^\infty(0, T; \mathcal{W}^{1, \infty}(\Omega))$ du modèle trois-zones-croisé macroscopique (4.17).

Alors pour tout temps $0 \leq t < T$, nous avons les estimations sur les quantités suivantes :

— *Mesure empirique :*

$$\partial_{BL}^2(f^N, \rho \delta_u) \lesssim \mathcal{E}^N(t) + d_{BL}^2(\rho_t^N, \rho_t),$$

— *Quantité de mouvement :*

$$d_{BL} \left(\rho u_t, \int_{\mathbb{R}^d} v f^N(t, \cdot, v) dv \right) \lesssim \sqrt{\mathcal{E}^N(t)} + d_{BL}(\rho_t^N, \rho_t),$$

— *Énergie :*

$$d_{BL} \left(\rho u \otimes u_t, \int_{\mathbb{R}^d} v \otimes v f^N(t, \cdot, v) dv \right) \lesssim \mathcal{E}^N(t) + \sqrt{\mathcal{E}^N(t)} + d_{BL} \rho_t^N, \rho_t).$$

Il suffit alors de préparer les conditions initiales de sorte que $\mathcal{E}^N(t), d_{BL}(\rho_t^N, \rho_t)$ soient nuls pour tout temps comme expliqué dans le théorème 22 pour obtenir la convergence des quantités d'intérêt. Tout comme le résultat sur les densités, les estimations de la proposition viennent de la conservation de la masse, donc sont communes à tous les modèles que nous avons présenté.

Démonstration : Nous utiliserons systématiquement l'écriture de \mathcal{E}^N sous la forme d'une intégrale contre f^N . Nous rappelons que le produit de deux fonction $f, g \in L^\infty \cap \text{Lip}$ est toujours Lipschitz, dont la constante peut être estimée par

$$\|fg\|_{Lip} \leq \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{Lip} + \|f\|_{Lip} \|g\|_{L^\infty}.$$

Commençons par prouver la première inégalité. Pour tout $\phi \in L^\infty \cap \text{Lip}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, nous allons simplement insérer le terme $\pm \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x, u(t, x)) \rho^N(t, x) dx$:

$$\begin{aligned} \left| \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \phi(x, v) (f^N - \rho \delta_{u(t, x)}) dx dv \right| &= \left| \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} (\phi(x, v) - \phi(x, u(t, x))) f^N dx dv \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x, u(t, x)) (\rho^N(t, x) - \rho(t, x)) dx \right| \\ &\leq \|\phi\|_{Lip} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |v - u(t, x)| f^N dx dv \\ &\quad + (\|\phi\|_{L^\infty} + \|\phi\|_{Lip} \|u\|_{Lip}) d_{BL}(\rho_t^N, \rho_t) \\ &\leq \|\phi\|_{Lip} \sqrt{\iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |v - u(t, x)|^2 f^N dx dv} \\ &\quad + (\|\phi\|_{L^\infty} + \|\phi\|_{Lip} \|u\|_{Lip}) d_{BL}(\rho_t^N, \rho_t). \end{aligned}$$

Pour les deux autres inégalités, nous considérons cette fois $\phi \in \Theta$. Pour la seconde nous insérons $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) u(t, x) \rho^N(t, x) dx$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) \left(\rho u(t, x) - \int_{\mathbb{R}^d} v f^N dv \right) dx \right| &\leq \|\phi\|_{L^\infty} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |v - u(t, x)| f^N dx dv \\ &\quad + (\|\phi u\|_{L^\infty} + \|\phi u\|_{Lip}) d_{BL}(\rho_t^N, \rho_t) \\ &\leq \|\phi\|_{L^\infty} \sqrt{\iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |v - u(t, x)|^2 f^N dx dv} \\ &\quad + (\|\phi u\|_{L^\infty} + \|\phi u\|_{Lip}) d_{BL}(\rho_t^N, \rho_t). \end{aligned}$$

Pour la troisième, nous utilisons le fait que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} v \otimes v f^N dv - \rho u \otimes u(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^d} (v - u(t, x)) \otimes (v - u(t, x)) f^N dv \\ &\quad + u(t, x) \otimes \left(-\rho u(t, x) + \int_{\mathbb{R}^d} v f^N dv \right) \\ &\quad + \left(-\rho u(t, x) + \int_{\mathbb{R}^d} v f^N dv \right) \otimes u(t, x) \\ &\quad + (\rho - \rho^N) u \otimes u(t, x), \end{aligned}$$

afin d'écrire

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} v \otimes v f^N dv - \rho u \otimes u(t, x) \right) dx \right| &\leq \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |v - u(t, x)|^2 f^N dx dv \\ &\quad + 2\|\phi u\|_{L^\infty \cap Lip} d_{BL} \left(\rho u, \int_{\mathbb{R}^d} v f^N(t, \cdot, v) dv \right). \end{aligned}$$

■

Maintenant que nous avons un moyen systématique de passer de l'échelle microscopique à macroscopique, nous allons vérifier que nous n'avons pas perdu les choses essentielles : les comportements de la flotte.

4.3 Étude de la conservation des comportements du modèle lors du changement d'échelle

En passant de l'échelle micro à macroscopique, il est important de vérifier que nous avons toujours les comportements que nous voulions prescrire à la flotte. Nous ne nous intéressons pas à l'échelle mésoscopique, et le lecteur pourra consulter [24, 63] pour des preuves d'agrégation exponentielle pour le modèle de Cucker-Smale à cette échelle. Les références [87, 29, 79] contiennent respectivement des preuves d'agrégation pour une variante contrôlée, une avec délai, une avec force de communication normalisée comme vue en section 1.3.4. Dans [6], les auteurs s'intéressent à un autre modèle, où les particules voyagent à vitesse commune s'ils entrent collision, comme nous avons discuté dans le cas du modèle de Cucker-Smale singulier en section 1.3.2. Nous n'étudierons pas non plus les formations d'équilibre. Dans [19], les auteurs se sont par exemple intéressés aux formations dans le modèle de D'Orsogna aux niveaux méso et macroscopique.

4.3.1 Caractérisation de la limite en temps long et agrégation pour le modèle trois-zones-croisé macroscopique

Le comportement en temps long du modèle de Cucker-Smale macroscopique a déjà été étudié dans [63], et même avec du délai dans [30]. Pour montrer qu'il y a agrégation (définition 1), les auteurs ont simplement étudié les vitesses moyennes relatives. Ils n'ont donc pas caractérisé la limite de la vitesse moyenne.

À l'échelle microscopique, nous avons montré que la vitesse de chaque drone converge vers la vitesse moyenne du groupe à l'origine (théorème 18). Cela n'a pas été écrit à l'échelle macroscopique, nous allons donc compléter les résultats existants. Nous utiliserons d'une part une approche L^∞ pour le modèle de Cucker-Smale seul, afin de montrer que la convergence vers l'équilibre est toujours exponentielle, puis une approche L^2 pour le modèle trois-zones-croisé, qui n'a pas été étudié.

Nous étudions donc d'abord le modèle de Cucker-Smale macroscopique :

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t, x) + \operatorname{div}(\rho u)(t, x) = 0 \\ \partial_t (\rho u)(t, x) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u)(t, x) = \rho(t, x) \int_{\mathbb{R}^d} \psi(|x - y|)(u(t, y) - u(t, x)) \rho(t, y) dy. \end{cases} \quad (4.24)$$

Nous définissons la masse et les centres de masse et de vitesse macroscopiques comme

$$M := \int_{\mathbb{R}^d} \rho(t, y) dy, \quad \rho_c(t) := \frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}^d} y \rho(t, y) dy, \quad u_c := \frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}^d} u(t, y) \rho(t, y) dy. \quad (4.25)$$

Il est aisé de vérifier que ces centres correspondent à la limite formelle des centres microscopiques x_c et v_c quand le nombre de drones tend vers l'infini. De même, il vient immédiatement que

$$\rho'_c(t) = u_c(t), \quad u'_c(t) = 0.$$

Nous définissons les caractéristiques η associées au système :

$$\partial_t \eta(t, x) := u(t, \eta(t, x)),$$

et nous allons étudier les quantités suivantes :

$$d_X(t) := \sup_{x \in \operatorname{supp}(\rho(t))} |\eta(t, x) - \rho_c(t)|, \quad d_V(t) := \sup_{x \in \operatorname{supp}(\rho(t))} |u(t, \eta(t, x)) - u_c|.$$

Voici le théorème identifiant la limite du modèle de Cucker-Smale macroscopique :

Théorème 23 (Limite du modèle de Cucker-Smale macroscopique)

Soit (ρ, u) une solution du modèle de Cucker-Smale macroscopique (4.24) telle que $\nabla u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Soit ψ la force de communication du modèle choisie positive et décroissante.

Supposons que ψ et les conditions initiales vérifient

$$d_V(0) \leq M \int_{d_X(0)}^{\infty} \psi(2s) ds.$$

Alors pour tout temps $t \geq 0$,

$$d_X(t) \leq r_M, \quad d_V(t) \leq d_V(0) \exp(-M\psi(2r_M)t).$$

r_M est défini comme le plus grand réel satisfaisant

$$d_V(0) = M \int_{d_X(0)}^{r_M} \psi(2s) ds.$$

Nous retrouvons le fait que les drones sont confinés dans un volumes, et que leurs vitesses convergent vers le centre de vitesse initial.

Démonstration : Montrons d'abord que

$$d'_X(t) \leq d_V(t).$$

Soit $x \in \text{supp}\{\rho\}$ quelconque. Nous avons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\eta(t, x) - \rho_c(t)|^2 = \langle \eta(t, x) - \rho_c(t), u(t, \eta(t, x)) - u_c \rangle,$$

donc

$$\frac{d}{dt} |\eta(t, x) - \rho_c(t)| \leq |u(t, \eta(t, x)) - u_c| \leq d_V(t).$$

Comme cela est vérifié pour tout x , nous déduisons que l'inégalité est vraie pour $d_X(t)$.
Montrons maintenant que

$$d'_V(t) \leq -M\psi(2d_X(t))d_V(t). \quad (4.26)$$

Dans le support de ρ , l'équation sur la quantité de mouvement se réduit à une équation sur la vitesse

$$\partial_t u(t, x) + \nabla u \cdot u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(|x - y|)(u(t, y) - u(t, x))\rho(t, y) dy.$$

Nous avons alors pour x dans le support de ρ

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t, \eta(t, x)) - u_c|^2 &= \langle u(\eta(x)) - u_c, -\nabla u \cdot u(\eta(x)) \rangle \\ &\quad + \left\langle u(\eta(x)) - u_c, \int_{\mathbb{R}^d} \psi(|\eta(x) - y|)(u(y) - u(\eta(x)))\rho(y) dy \right\rangle \\ &\quad + \langle u(\eta(x)) - u_c, \nabla u \cdot u(\eta(x)) \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\eta(x) - y)\rho(y) \langle u(\eta(x)) - u_c, u(y) \pm u_c - u(\eta(x)) \rangle dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\eta(x) - y)\rho(y) \left(\langle u(\eta(x)) - u_c, u(y) - u_c \rangle - |u(\eta(x)) - u_c|^2 \right) dy. \end{aligned}$$

Or si x réalise le supremum dans $d_V(t)$,

$$\langle u(t, \eta(t, x)) - u_c, u(t, y) - u_c \rangle \leq |u(t, \eta(t, x)) - u_c|^2,$$

ce qui veut dire que l'intégrande est négative, d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t, \eta(t, x)) - u_c|^2 &\leq -\psi(2d_X) |u(\eta(x)) - u_c|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \rho(y) dy \\ &\quad + \psi(2d_X) \left\langle u(\eta(x)) - u_c, \int_{\mathbb{R}^d} (\rho(y)u(y) - u_c) dy \right\rangle \\ &= -M\psi(2d_X(t)) |u(\eta(x)) - u_c|^2 + 0, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé dans la dernière égalité le fait que

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\rho(t, y)u(t, y) - u_c) dy = \pm M u_c = 0.$$

Nous pouvons à présent définir l'énergie

$$E(t) := d_V(t) + M \int_{d_X(0)}^{d_X(t)} \psi(2s) ds,$$

et montrer qu'elle est décroissante grâce aux deux inégalités précédentes :

$$E'(t) = d'_V(t) + M\psi(2d_X(t))d'_X(t) \leq \pm M\psi(2d_X(t))d'_V(t) = 0.$$

Nous en déduisons que pour tout temps

$$d_V(0) \geq d_V(t) + M \int_{d_X(0)}^{d_X(t)} \psi(2s) ds.$$

Définissons donc $r_M > 0$ comme étant le plus grand réel satisfaisant

$$d_V(0) = M \int_{d_X(0)}^{r_M} \psi(2s) ds,$$

dont l'existence est garantie par la positivité de ψ . Cette dernière assure que la fonction $\delta \mapsto M \int_{d_X(0)}^{\delta} \psi(2s) ds$ est croissante de 0 vers $M \int_{d_X(0)}^{\infty} \psi(2s) ds \geq d_V(0)$. Montrons alors que pour tout temps t , $d_X(t) \leq r_M$. En effet, si nous supposons qu'il existe un temps t_* auquel ce ne serait pas le cas, nous aurions une contradiction puisque

$$d_V(0) \geq M \int_{d_X(0)}^{d_X(t_*)} \psi(2s) ds > M \int_{d_X(0)}^{r_M} \psi(2s) ds = d_V(0).$$

Nous pouvons alors terminer en majorant $d_X(t)$ dans (4.26) et en utilisant le lemme de Gronwall. ■

Montrons maintenant le résultat pour le modèle trois-zones-croisé avec une méthode d'énergie L^2 :

Théorème 24 (Limite du modèle trois-zones-croisé macroscopique)

Soit (ρ, u) une solution du modèle trois-zones-croisé macroscopique (4.17). Soit ψ la force de communication du modèle choisie bornée inférieurement par $\psi_{\min} > 0$ et décroissante.

Soit φ le potentiel d'interaction choisi convexe, vérifiant (3.2) et tel que

$$(\varphi'(r))^2 \leq C\varphi(r), \quad \forall r \geq 0.$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(t, x) - u_c|^2 \rho(t, x) dx \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

L'hypothèse $\psi \geq \psi_{min} > 0$ est nécessaire car nous ne pouvons pas estimer la fonction ψ comme nous l'avons fait dans l'approche L^∞ . Nous discuterons après la preuve plus précisément du problème. Les hypothèses sur φ sont des hypothèses de convexités que nous avons déjà utilisé, assurant que les drones soient pris dans un puit de potentiel. Nous observons que nous n'avons plus de restriction sur les conditions initiales ou l'intégrale de ψ . Ceci est dû au fait que ψ soit minorée, donc les drones communiquent assez à longue portée. Une illustration numérique de la convergence du modèle est disponible en figure 5.3 dans le chapitre suivant.

Démonstration : Définissons la fonctionnelle Γ que nous pouvons écrire de plusieurs manières :

$$\Gamma(t) := \frac{1}{4M} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |u(t, x) - u(t, y)|^2 \rho(x) \rho(y) dy \quad (4.27)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |u(t, x) - u_c|^2 \rho(t, x) dx \quad (4.28)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |u(t, x)|^2 \rho(x) dx - \frac{M}{2} |u_c|^2. \quad (4.29)$$

Nous passons de la première à la seconde forme en insérant $\pm u_c$ dans la norme, et de la seconde à la troisième en développant la norme. Les calculs sont similaires à ce qui a été fait pour la preuve du théorème précédent. Nous appelons

$$E_k(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |u(t, x)|^2 \rho(x) dx - \frac{M}{2} |u_c|^2$$

la dernière forme que nous utiliserons pour les calculs. Elle correspond à l'énergie cinétique du système. Définissons alors l'énergie potentielle :

$$E_p(t) := \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \varphi(|x - y|) \rho(x) \rho(y) dx dy. \quad (4.30)$$

Nous allons donc étudier l'évolution en temps de ces énergies, en commençant par l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_k(t) &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{div}(\rho u) |u|^2(t, x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} \rho(t, x) \langle u, -\nabla u u \rangle(t, x) dx \\ &+ \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \psi(|x - y|) \langle u(t, x), u(t, y) - u(t, x) \rangle \rho(t, x) \rho(t, y) dx dy \\ &+ \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{\varphi'(|x - y|)}{|x - y|} \langle u(t, x), y - x \rangle \rho(t, x) \rho(t, y) dx dy \\ &+ \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{\varphi''(|x - y|)}{|x - y|^2} \langle u(x), y - x \rangle \langle x - y, u(x) - u(y) \rangle \rho(x) \rho(y) dx dy \end{aligned}$$

Les deux premiers termes s'annulent, et nous utilisons la technique de symétrisation déjà vue plusieurs fois pour modifier les autres lignes :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E_k(t) &= -\frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \psi(|x-y|) |u(t,y) - u(t,x)|^2 \rho(t,x) \rho(t,y) dx dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{\varphi'(|x-y|)}{|x-y|} \langle u(t,x) - u(t,y), y-x \rangle \rho(t,x) \rho(t,y) dx dy \\ &\quad - \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{\varphi''(|x-y|)}{|x-y|^2} \langle x-y, u(x) - u(y) \rangle^2 \rho(x) \rho(y) dx dy. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Étudions maintenant l'évolution de l'énergie potentielle :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E_p(t) &= -\frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \varphi(|x-y|) \operatorname{div}_x(\rho u)(t,x) \rho(t,y) dx dy \\ &\quad - \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \varphi(|x-y|) \operatorname{div}_y(\rho u)(t,y) \rho(t,x) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \nabla_x(\varphi(|x-y|))(u(t,y) - u(t,x)) \rho(t,x) \rho(t,y) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{\varphi'(|x-y|)}{|x-y|} \langle y-x, u(t,y) - u(t,x) \rangle \rho(t,x) \rho(t,y) dx dy \end{aligned}$$

Nous en déduisons que l'énergie $E(t) := E_k(t) + E_p(t)$ vérifie

$$\begin{aligned} E'(t) &= -\frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \psi(|x-y|) |u(t,y) - u(t,x)|^2 \rho(t,x) \rho(t,y) dx dy \\ &\quad - \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{\varphi''(|x-y|)}{|x-y|^2} \langle x-y, u(t,x) - u(t,y) \rangle^2 \rho(t,x) \rho(t,y) dx dy. \end{aligned}$$

L'énergie est donc décroissante. En utilisant de plus la minoration de ψ , nous avons en utilisant les différentes formes de Γ

$$E'(t) \leq -2M\psi_{\min}E_k(t). \quad (4.32)$$

Nous en déduisons que E_k est intégrable :

$$\int_0^t E_k(s) ds \leq \frac{E(0) - E(t)}{2M\psi_{\min}} \leq \frac{E(0)}{2M\psi_{\min}} < \infty.$$

Montrons de plus qu'elle est uniformément continue. D'après (4.31) et l'inégalité de Young :

$$\begin{aligned} E'_k(t) &\leq \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{\varphi'(|x-y|)}{|x-y|} \langle u(t,x) - u(t,y), y-x \rangle \rho(t,x) \rho(t,y) dx dy \\ &\leq \frac{1}{4} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \rho(t,x) \rho(t,y) \left(|u(t,x) - u(t,y)|^2 + (\varphi')^2(|x-y|) \right) dx dy \\ &\leq ME_k(t) + \frac{C}{2} E_p(t) \\ &\lesssim E(0) < \infty. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que l'énergie cinétique temps vers 0 en temps long. En utilisant la deuxième forme de $\Gamma(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |u(t,x) - u_c|^2 \rho(t,x) dx$, puisque l'intégrande est positive, nous concluons que la vitesse moyenne u converge vers la vitesse moyenne de la flotte à l'origine u_c là où la densité n'est pas nulle. ■

L'hypothèse $\psi(r) \geq \psi_{min}$ est utilisée pour montrer que l'énergie cinétique est intégrable dans (4.32). Ce point est crucial pour montrer que les vitesses convergent. Nous présentons une idée afin d'améliorer le résultat et avoir le même niveau de précision qu'à l'échelle microscopique avec le théorème 18. Il faudrait tout d'abord travailler avec un support de ρ borné.

Cette hypothèse est tout à fait raisonnable, puisqu'elle est plus représentative de notre problème. Nos drones ne sont pas censés se disperser à l'infini, mais être contenus dans un volume. Si nous pouvions montrer que le support de ρ est borné autour de ρ_c uniformément en temps par une constante $D > 0$, alors nous pourrions reprendre les calculs de la preuve avec $\psi_{min} = \psi(2D)$, et il n'y aurait plus besoin de supposer que ψ est minorée.

Montrer que le support est borné est cependant délicat. Si nous tentons de reproduire le raisonnement de l'échelle microscopique, en utilisant le fait que $E_p \leq E(0)$, et le fait que $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r) = \infty$, alors nous pouvons seulement en déduire que les valeurs de ρ décroissent vers 0 plus vite que φ n'explode à l'infini. La preuve du fait que le support de ρ est borné autour de ρ_c utilisée pour le modèle de Cucker-Smale n'est pas adaptable non plus, puisque nous avons besoin que nos énergies utilisent la double intégrale en x et y pour les forces d'attraction-répulsion et croisée afin de montrer qu'elles sont dissipatives. Sinon nous nous retrouvons avec des produits scalaires signés, dont nous ne pouvons rien faire.

Voilà qui conclue cette section sur le comportement en temps long de nos modèles, estimons maintenant leur vitesse de convergence vers leur équilibre.

4.3.2 Étude de la convergence exponentielle pour le modèle trois-zones

De la même manière que nous l'avons vu dans la section 3.1.3, nous nous intéressons à la vitesse de convergence du modèle trois-zones vers son équilibre. Une fois encore, ce résultat n'est disponible que pour une certaine classe de potentiels d'interaction :

Proposition 7 (Agrégation exponentielle pour le modèle trois-zones)

Soit (ρ, u) une solution du modèle trois-zones macroscopique (4.17). Soit ψ la force de communication du modèle choisie constante positive strictement. Soit φ le potentiel d'interaction purement attractif $\varphi(r) = r^2/2$.

Alors il y a agrégation exponentiellement vite.

Démonstration : Nous savons que l'évolution de l'énergie du système E est contrôlée par l'énergie cinétique d'après (4.32). Afin d'avoir une décroissance exponentielle, nous introduisons un terme d'énergie correctif

$$\chi(t) := \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle \nabla \varphi(|x - y|), u(t, x) - u(t, y) \rangle \rho(t, x) \rho(t, y) dx dy. \quad (4.33)$$

Étudions son évolution au cours du temps :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\chi(t) &= \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle \nabla \varphi(|x-y|), u(x) - u(y) \rangle \left(-\rho(y) \operatorname{div}_x(\rho u)(x) - \rho(x) \operatorname{div}_y(\rho u)(y) \right) dx dy \\
&+ \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle \nabla \varphi(|x-y|), \nabla u(u(y) - u(x)) \rangle \rho(x) \rho(y) dx dy \\
&+ \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \left\langle \nabla \varphi(|x-y|), \psi \int_{\mathbb{R}^d} \rho(z) (u(z) - u(x) - (u(z) - u(y))) dz \right\rangle \rho(x) \rho(y) dx dy \\
&+ \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle \nabla \varphi(|x-y|), -\nabla \varphi * \rho(x) + \nabla \varphi * \rho(y) \rangle \rho(x) \rho(y) dx dy
\end{aligned}$$

En symétrisant les intégrales en x et y , nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\chi(t) &= - \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle \nabla \varphi(|x-y|), u(x) - u(y) \rangle \rho(y) \operatorname{div}_x(\rho u)(x) dx dy \\
&- \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle \nabla \varphi(|x-y|), \nabla u u(x) \rangle \rho(x) \rho(y) dx dy \\
&- \frac{\psi M}{2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle \nabla \varphi(|x-y|), u(x) - u(y) \rangle \rho(x) \rho(y) dx dy \\
&- \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \rho(x) |\nabla \varphi * \rho|^2(x) dx dy \\
&:= S_1 + S_2 + S_3 + S_4.
\end{aligned}$$

En développant le produit de convolution dans S_4 , et en symétrisant par rapport aux variables x et y , nous avons

$$\begin{aligned}
S_4 &= - \iiint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \rho(x) \rho(y) \rho(z) \langle x-y, x-z \rangle dx dy dz \\
&= - \frac{M}{2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \rho(x) \rho(y) |x-y|^2 dx dy \\
&= -ME_p(t).
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Le troisième terme est simplement un multiple du terme correctif :

$$S_3 = -\psi M \chi(t).$$

Le premier demande une intégration par partie :

$$\begin{aligned}
S_1 &= \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \nabla_x \left(\frac{\varphi'(|x-y|)}{|x-y|} \langle x-y, u(x) - u(y) \rangle \right) \rho u(x) \rho(y) dx dy \\
&= \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{\varphi''(|x-y|)}{|x-y|^2} \langle x-y, u(x) - u(y) \rangle \langle x-y, u(x) \rangle \rho(x) \rho(y) dx dy \\
&- \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{\varphi'(|x-y|)}{|x-y|^3} \langle x-y, u(x) - u(y) \rangle \langle x-y, u(x) \rangle \rho(x) \rho(y) dx dy \\
&+ \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{\varphi'(|x-y|)}{|x-y|} \langle u(x), u(x) - u(y) \rangle \rho(x) \rho(y) dx dy \\
&+ \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{\varphi'(|x-y|)}{|x-y|} \langle \nabla u(x)(x-y), u(x) \rangle \rho(x) \rho(y) dx dy.
\end{aligned}$$

En symétrisant à nouveau, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{\varphi''(|x-y|)|x-y| - \varphi'(|x-y|)}{|x-y|^3} \langle x-y, u(x) - u(y) \rangle^2 \rho(x)\rho(y) dx dy \\ &\quad + \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{\varphi'(|x-y|)}{|x-y|} |u(x) - u(y)|^2 \rho(x)\rho(y) dx dy - S_2 \\ &= E_k(t) - S_2, \end{aligned}$$

où nous utilisons l'expression de φ pour la dernière ligne. Ainsi,

$$\frac{d}{dt} \chi(t) = E_k(t) - \psi M \chi(t) - M E_p(t).$$

Nous n'avons plus qu'à choisir une constante α pour que l'énergie corrigée $E(t) + \alpha \chi(t)$ soit exponentiellement décroissante, comme fait dans la preuve de la proposition 1. ■

Comme pour la preuve du théorème précédent, si nous pouvons borner φ sur le support de ρ uniformément en temps, nous aurions simplement besoin de l'hypothèse

$$E_p(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x) \varphi * \rho(x) dx \leq C_p \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x) |\nabla \varphi * \rho|^2(x) dx.$$

Cette nouvelle condition est un mélange entre l'équivalence entre φ et $(\varphi')^2$ et l'inégalité de Poincaré. Elle est vraie pour le potentiel d'interaction purement attractif $\varphi(r) = r^2/2$ d'après (4.34), mais le prouver pour un autre potentiel reste complexe.

Passons à la dernière propriété que nous allons étudier.

4.3.3 Phénomène de concentration pour le modèle trois-zones macroscopique avec potentiel quadratique

Un autre parallèle que nous pouvons faire entre les deux échelles est la manière dont les drones sont confinés lorsque nous utilisons le potentiel d'attraction-répulsion quadratique. En effet, nous avons vu dans la proposition 3 qu'à l'échelle microscopique, le modèle trois-zones à l'équilibre muni du potentiel d'interaction quadratique $\varphi(r) = (r - \eta)^2/2, \eta > 0$ vérifie pour tout drone $i, |x_i(\infty) - x_c(\infty)| \leq \eta$. La version macroscopique est donnée par la proposition suivante :

Proposition 8 (Concentration de la masse pour le potentiel quadratique)

Soit (ρ, u) une solution du modèle trois-zones-croisé macroscopique (4.17). Quelle que soit la force de communication ψ , et pour le potentiel d'interaction quadratique $\varphi(r) = (r - \eta)^2/2$, pour tout x dans le support de ρ à l'équilibre, nous avons

$$|x - \rho_c(\infty)| \leq \eta.$$

Une illustration numérique est disponible en figure 5.3 dans le chapitre suivant.

Démonstration : En effet, pour x dans le support de ρ à l'équilibre, nous avons

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|x-y|-\eta}{|x-y|} (y-x)\rho(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} y\rho(y)dy - x \int_{\mathbb{R}^d} \rho(y)dy - \eta \int_{\mathbb{R}^d} \frac{y-x}{|x-y|} \rho(y)dy \\ &= M(\rho_c - x) - \eta \int_{\mathbb{R}^d} \frac{y-x}{|x-y|} \rho(y)dy \end{aligned}$$

Nous concluons en prenant la norme de l'égalité ci-dessus. ■

En conclusion, nous retrouvons exactement les mêmes comportements de flotte que nous avons à l'échelle microscopique. Cette échelle est donc satisfaisante pour représenter nos flottes de drones. Nous nous intéresserons au modèle de suivi de vitesse fluide dans le chapitre 6.

4.4 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons présenté comment passer des modèles microscopiques des chapitres précédents, à des modèles macroscopiques. D'abord formellement dans la section 4.1, par limite de champ moyen et intégration des moments, ce qui permet de facilement trouver quel modèle macro correspond au modèle microscopique de départ.

Le cœur du chapitre était la section 4.2, dans laquelle nous montré comment rapprocher les deux échelles de modélisation pour notre modèle trois-zones-croisé. La méthode utilisée est assez souple pour être adaptée à de nombreux types de forces, mais aussi à certains effets comme le bruit. Ceci pourra faire l'objet de futurs travaux. Le théorème 22 qui contient le résultat de passage d'une échelle à l'autre nous indique plus précisément que si les conditions initiales d'une flotte microscopique ressemblent aux conditions initiales fluides dans le sens spécifié dans le théorème, alors la déviation entre les deux modèles sera faible. Autrement dit, si nous avons suffisamment de drones, alors le modèle macroscopique représente correctement l'évolution du modèle microscopique au cours du temps. Ceci est une validation rigoureuse de notre choix de changement d'échelle pour pallier au coût grandissant des simulations numériques du modèle microscopique avec le nombre de drones.

La dernière section 4.3 était dédiée à prouver que ce nouveau modèle macroscopique possède toujours les propriétés qualitatives du modèle microscopique associé. Ainsi, nous avons montré dans les théorèmes 23 et 24 que les modèles de Cucker-Smale et trois-zones-croisé s'agrègent en temps long. De plus, nous avons identifié la limite du modèle, qui se concentre autour du centre de masse, et s'aligne sur le centre de vitesse macroscopique.

Nous avons également étudié la vitesse de convergence du modèle trois-zones-croisé dans cette section. Nous avons eu les mêmes difficultés qu'à l'échelle microscopique, et n'avons été capables d'estimer cette vitesse de convergence que dans le cas d'un potentiel d'interaction attractif dans la proposition 7. Enfin, nous avons montré dans la proposition 8 que pour le potentiel quadratique, la densité à l'équilibre est confinée dans un disque de rayon égal au seuil d'interaction, exactement comme à l'échelle microscopique.

Nous reportons l'étude du modèle de suivi de vitesse au chapitre 6. De plus, les formations à l'équilibre du modèle macroscopique seront qualitativement les mêmes qu'à l'échelle microscopique, donc nous ne les avons pas étudiées ici.

Cette étude ouvre la voie sur de nouveaux travaux. Tout d'abord, le résultat du théorème 24 peut être amélioré. Nous avons dû supposer que la force de communication de la force d'alignement était minorée. Ceci était dû au manque d'estimation uniforme sur l'évolution du support de la densité. Si une telle estimation venait à être prouvée, nous aurions un résultat plus précis, à l'instar du théorème 19 de l'échelle microscopique.

Ensuite, nous avons utilisé la fermeture monocinétique pour changer d'échelle. Ce faisant, nous nous sommes débarrassés du terme de pression dans les équations. Ainsi, utiliser une autre fermeture comme la Maxwellienne permettrait de considérer plus d'effets. Il serait également intéressant de comparer quantitativement les modèles obtenus avec les deux fermetures, afin de voir si les solutions différencieraient grandement ou non, et si nous pourrions donc nous contenter de la fermeture monocinétique pour des applications futures.

Grâce à ce nouveau type de modèle, le coût de simulation est constant en fonction du nombre de drones. Nous allons donc dans le prochain chapitre vérifier numériquement que le changement d'échelle permet en effet de remplir notre objectif de simulations plus rapides et fidèles de grandes flottes de drones.

Chapitre 5

Validation numérique des modèles à l'échelle macroscopique

Sommaire

5.1	Présentation du solveur macroscopique	117
5.2	Validation du solveur macroscopique par comparaison avec le solveur microscopique	120
5.2.1	Outil de comparaison des échelles	120
5.2.2	Comparaison des échelles	121
5.3	Conclusion du chapitre	125

Le but de ce court chapitre est de vérifier numériquement si les modèles macroscopiques sont comparables à leur contre partie microscopique. Ainsi, nous illustrerons le résultat du théorème 22 du chapitre 4, qui évalue théoriquement l'écart entre les deux échelles de modélisation.

Dans une première section 5.1, nous détaillerons le schéma numérique que nous utiliserons, avant de procéder aux expériences numériques de comparaison dans la section 5.2.

5.1 Présentation du solveur macroscopique

Cette première section est dédiée à la présentation du schéma numérique utilisé pour nos simulations macroscopiques du modèle suivant, pour une force quelconque F :

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t, x) + \operatorname{div}(\rho u)(t, x) = 0, \\ \partial_t(\rho u)(t, x) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u)(t, x) = \rho(t, x)F(t, x). \end{cases}$$

Nous considérons un domaine rectangulaire $\Omega = [O_x, O_x + L_x] \times [O_y, O_y + L_y] \subset \mathbb{R}^2$ équipé d'un maillage cartésien.

Ses deux intervalles sont discrétisés en $N_x, N_y \in \mathbb{N}^*$ sous-intervalles, avec un pas homogène $\Delta x = L_x/N_x$ et $\Delta y = L_y/N_y$. Pour $i, j \in \llbracket 0, N_x - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, N_y - 1 \rrbracket$,

$$x_{i,j} := (O_x + \Delta x/2 + i\Delta x, O_y + \Delta y/2 + j\Delta y)$$

est le centre de la cellule $K_{i,j}$.

Nous effectuons les simulations sur un intervalle de temps $[0, T]$ discrétisé en $N_T \in \mathbb{N}^*$ intervalles, définissant un pas homogène $\Delta t = T/N_T$. Notons $t^n := n\Delta t$, $n \in \llbracket 0, N_T \rrbracket$ les temps associés. Nous notons $\rho_{i,j}^n, u_{i,j}^n$ les valeurs de la densité et de la vitesse sur ces cellules au temps t^n . Un schéma récapitulatif est disponible en figure 5.1.

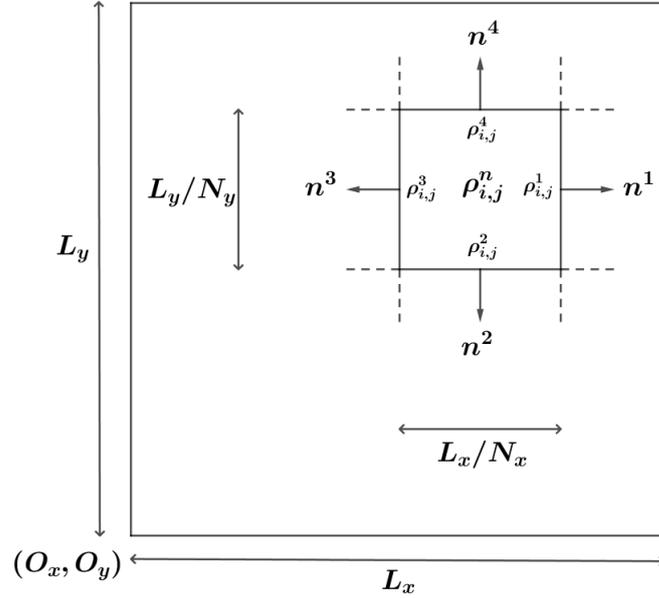


FIGURE 5.1 – Illustration des différentes notations du maillage utilisé.

Nous allons utiliser une méthode de volumes finis. Nous nous intéressons donc à nos équations sous forme intégrale, qui s'écrivent pour une force quelconque F sur toute cellule $K_{i,j}$, pour tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{cases} \partial_t \int_{K_{i,j}} \rho(t, x) dx + \int_{\partial K_{i,j}} \rho \langle u, n \rangle (t, x) dS(x) = 0 \\ \partial_t \int_{K_{i,j}} \rho u(t, x) dx + \int_{\partial K_{i,j}} \rho \langle u, n \rangle u(t, x) dS(x) = \int_{K_{i,j}} \rho F(t, x) dx, \end{cases} \quad (5.1)$$

où dS est une mesure sur le bord de la cellule, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire sur \mathbb{R}^d .

Nous avons utilisé la formule de Green pour remanier les intégrales de divergence en intégrales sur le bord du domaine, et le fait que pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}^d$,

$$a \otimes b \cdot c = \langle b, c \rangle a.$$

Il ne reste qu'à choisir un schéma en temps et en espace, et une manière de connaître les valeurs de ρ, u au bord des cellules.

Afin d'avoir un schéma global d'ordre deux, nous choisissons comme schéma temporel la méthode Runge-Kutta 2, et un schéma de type MUSCL pour l'espace. Nous utiliserons le limiteur de type minmod proposé dans [51], que nous explicitons plus loin. Une théorie générale de ce type de schéma est disponible dans [56].

Nous illustrons la réduction de la diffusion numérique en passant de la méthode décentralisée amont classique à la méthode MUSCL dans la figure 5.2. Dans cette

expérience illustrative, nous initialisons dans $\Omega = [-20, 20]^2$ la densité en un carré uniforme de masse 1 à vitesse $(1, 1)$. Nous n'utilisons pas de force, nous regardons uniquement l'effet du transport. Nous utilisons $N_x = N_y = 60$ intervalles de discrétisation. Avec un pas de temps $\Delta t = 0.001s$, nous voyons qu'au temps $T = 10s$, le schéma MUSCL a permis de réduire la diffusion de la densité.

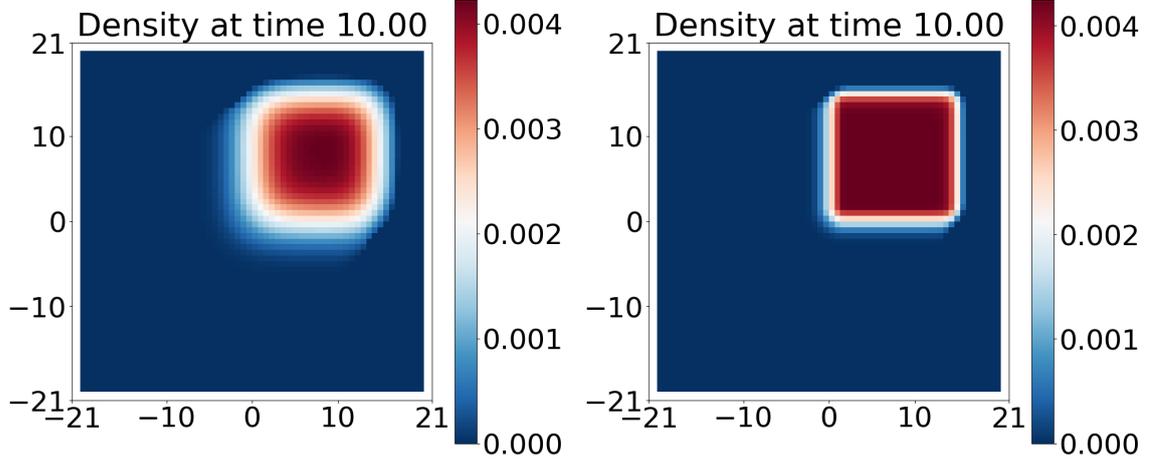


FIGURE 5.2 – Illustration de la diffusion numérique pour la densité au bout de dix secondes d'une flotte carrée sans force initialement à vitesse $(1, 1)$, pour un schéma décentré amont d'ordre un (gauche), et un schéma MUSCL (droite).

Détaillons le schéma que nous allons utiliser. Nous omettons les notations relatives au temps pour alléger la lecture, tant que nous sommes concentrés sur la partie spatiale du schéma. Nous présentons la méthode utilisée seulement sur la première équation de (5.1) portant sur ρ , puisqu'elle est la même pour les deux composantes de $u = (u_x, u_y)$.

Comme le maillage est cartésien, la normale sur le bord de la cellule n ne prend que les quatre valeurs suivantes, numérotées de 1 à 4 selon le côté du rectangle considéré, dans le sens horaire en commençant par la droite (voir figure 5.1) :

$$n^1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n^2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad n^3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n^4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Afin d'extrapoler les valeurs au bord $\rho_{i,j}^k, k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, nous approximons son gradient :

$$\nabla \rho_{i,j} := \left(\frac{\rho_{i+1,j} - \rho_{i-1,j}}{2\Delta x}, \frac{\rho_{i,j+1} - \rho_{i,j-1}}{2\Delta y} \right).$$

Nous limitons le gradient pour éviter l'apparition d'instabilités en cas de fortes variations ou d'extremum local. Le choix de limitation est libre. Nous utilisons celui de [51] et définissons le gradient limité comme

$$\widetilde{\partial_x \rho_{i,j}} := \min \left(1, 2 \frac{\rho_{i,j}^{max} - \rho_{i,j}}{|\partial_x \rho_{i,j}| \Delta x}, 2 \frac{\rho_{i,j} - \rho_{i,j}^{min}}{|\partial_x \rho_{i,j}| \Delta x} \right) \partial_x \rho_{i,j}. \quad (5.2)$$

où

$$\rho_{i,j}^{max} := \max_{z=i-1, i, i+1} \rho_{z,j}.$$

Nous définissons de la même manière les contreparties avec min et y . Ainsi, le gradient total limité est donné par

$$\widetilde{\nabla}\rho_{i,j} := (\widetilde{\partial}_x\rho_i, \widetilde{\partial}_y\rho_i).$$

Avec ce gradient limité, nous extrapolons les valeurs au bord pour chaque face $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$:

$$\rho_{i,j}^k := \rho_{i,j} + \frac{\Delta x \mathbb{1}_{k=1,3} + \Delta y \mathbb{1}_{k=2,4}}{2} \left\langle \widetilde{\nabla}\rho_{i,j}, n^k \right\rangle.$$

Maintenant que nous avons des valeurs de ρ au bord des cellules, nous pouvons utiliser un schéma décentré amont, tenant compte du fait que la densité entre ou sort par les différents côtés du rectangle. Les flux $F_{i,j}^k$, des faces $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ de la cellule $K_{i,j}$ sont donnés par :

$$\begin{cases} F_{i,j}^1 := -\rho_{i,j}^1 \max(0, u_{x,i,j}^1) - \rho_{i+1,j}^3 \min(0, u_{x,i+1,j}^3), \\ F_{i,j}^2 := \rho_{i,j}^2 \min(0, u_{y,i,j}^2) + \rho_{i,j-1}^4 \max(0, u_{y,i,j-1}^4), \\ F_{i,j}^3 := \rho_{i,j}^3 \min(0, u_{x,i,j}^3) + \rho_{i-1,j}^1 \max(0, u_{x,i-1,j}^1), \\ F_{i,j}^4 := -\rho_{i,j}^4 \max(0, u_{y,i,j}^4) - \rho_{i,j+1}^2 \min(0, u_{y,i,j+1}^2). \end{cases}$$

Le schéma global pour l'équation sur la densité s'écrit donc, pour $n \in \llbracket 0, T/\Delta t \rrbracket$:

$$\begin{cases} \rho_{i,j}^{n+1/2} := \rho_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y} \sum_{k=1}^4 (\Delta x \mathbb{1}_{k=1,3} + \Delta y \mathbb{1}_{k=2,4}) F_{i,j}^k, \\ \rho_{i,j}^{n+1} := \frac{\rho_{i,j}^n + \rho_{i,j}^{n+1/2}}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x \Delta y} \sum_{k=1}^4 (\Delta x \mathbb{1}_{k=1,3} + \Delta y \mathbb{1}_{k=2,4}) \widetilde{F}_{i,j}^k, \end{cases} \quad (5.3)$$

où les $\widetilde{F}_{i,j}^k$ sont les équivalents de $F_{i,j}^k$ calculés à partir de $\rho_{i,j}^{n+1/2}, u_{i,j}^{n+1/2}$.

Le simulateur macroscopique a la même architecture modulaire que le simulateur microscopique présenté en section 3.3.1, avec tous ses avantages de représentation et d'extension possibles. C'est un algorithme séquentiel en C++ orienté objet, capable de représenter les mêmes forces qu'à l'échelle microscopique. Nous avons tout de même développé une méthode de suivi du support de la densité, afin de réduire la quantité de calculs effectués, surtout dans les produits de convolution. L'interface Python de pré- et post-traitement est commune avec le simulateur microscopique.

Maintenant que nous sommes équipés d'un solveur macroscopique, comparons les simulations des deux échelles.

5.2 Validation du solveur macroscopique par comparaison avec le solveur microscopique

5.2.1 Outil de comparaison des échelles

Afin de comparer les deux modèles micro et macroscopiques, nous aimerions définir une quantité représentant la densité "microscopique". Nous avons défini la densité

empirique dans le chapitre précédent, $\rho^N(t, x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i(t)}(x)$. Cependant, cette mesure n'est pas exploitable visuellement.

La méthode la plus simple pour obtenir une densité microscopique exploitable au temps t serait de prendre le maillage de la simulation fluide, de compter le nombre de drones à l'instant t dans chaque cellule, et de normaliser le tout.

Bien que cela fonctionne, cette méthode est limitée. Il faut utiliser un grand nombre de drones pour que le résultat soit représentatif, puisqu'avec un maillage trop fin de l'espace, nous risquons de n'avoir qu'un drone par maille. Nous pourrions tenter de comptabiliser chaque drone également sur les cellules avoisinantes, en croix ou en diamant, mais le problème persisterait. D'un côté, cela est logique et corrobore le résultat du théorème 22, qui nous informe qu'il faut un grand nombre de drones pour que le modèle macroscopique représente correctement le modèle microscopique. D'un autre côté, nous ne pouvons pas utiliser trop de drones pour nos figures, au risque qu'elles soient illisibles.

Pour pallier cela, nous utilisons une régularisation de la mesure empirique, par convolution avec une gaussienne. Nous remplaçons ainsi la densité empirique ρ^N par une reconstruction de la densité $\hat{\rho}$. Cette dernière permet de lisser l'approximation et de toujours avoir une représentation exploitable, même s'il n'y a qu'un drone par cellule. La densité reconstruite $\hat{\rho}$ est définie comme ceci :

$$\begin{cases} \hat{\rho}(t, x) := \frac{1}{Nh^d} \sum_{j=1}^N K\left(\frac{x - x_j(t)}{h}\right), \\ K(x) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right). \end{cases} \quad (5.4)$$

Le paramètre h contrôle la largeur de la gaussienne sur chaque drone. Cette reconstruction joue un rôle important car elle doit être adaptée aux échelles caractéristiques de variation spatiale de la densité. Ce point sera développé dans le prochain chapitre.

Passons maintenant aux simulations.

5.2.2 Comparaison des échelles

Nous avons démontré dans le théorème 22 de la section 4.2 que le modèle fluide est fidèle au cours du temps au modèle microscopique si les deux conditions initiales sont proches. Nous entendons proches dans le sens où les vitesses des drones sont proches de la vitesse moyenne locale de la flotte, et si la densité empirique est proche de la densité fluide.

Nous allons illustrer numériquement cette ressemblance en comparant une simulation micro et macroscopique du modèle trois-zones-croisé.

Considérons le modèle trois-zones-croisé avec une force de communication $\psi(r) = 1/(1+r^2)$ et un potentiel d'interaction $\varphi(r) = (r-5)^2/2$. Pour le modèle microscopique, les conditions initiales sont les suivantes : les $N = 49$ drones sont répartis sur une grille carrée de côté 2 centrée à l'origine, avec la même vitesse $(1, 1)$. La condition initiale macroscopique est alors la densité reconstruite à l'origine $\rho_0 = \hat{\rho}_0$ avec une vitesses uniforme $(1, 1)$. La taille du domaine de simulation est déterminé par les positions minimales et maximales des drones au long du vol. Nous utilisons un pas de temps $\Delta t = 0.001s$, jusqu'au temps $T = 10s$.

Nous donnons dans la figure 5.3 les états au cours du temps de la flotte dans une simulation des deux modèles ainsi que de la densité reconstruite, pour une résolution $N_x = N_y = 100$, et pour un paramètre de reconstruction $h = 1.0$. Détaillons comment les résultats diffèrent d'un modèle à l'autre.

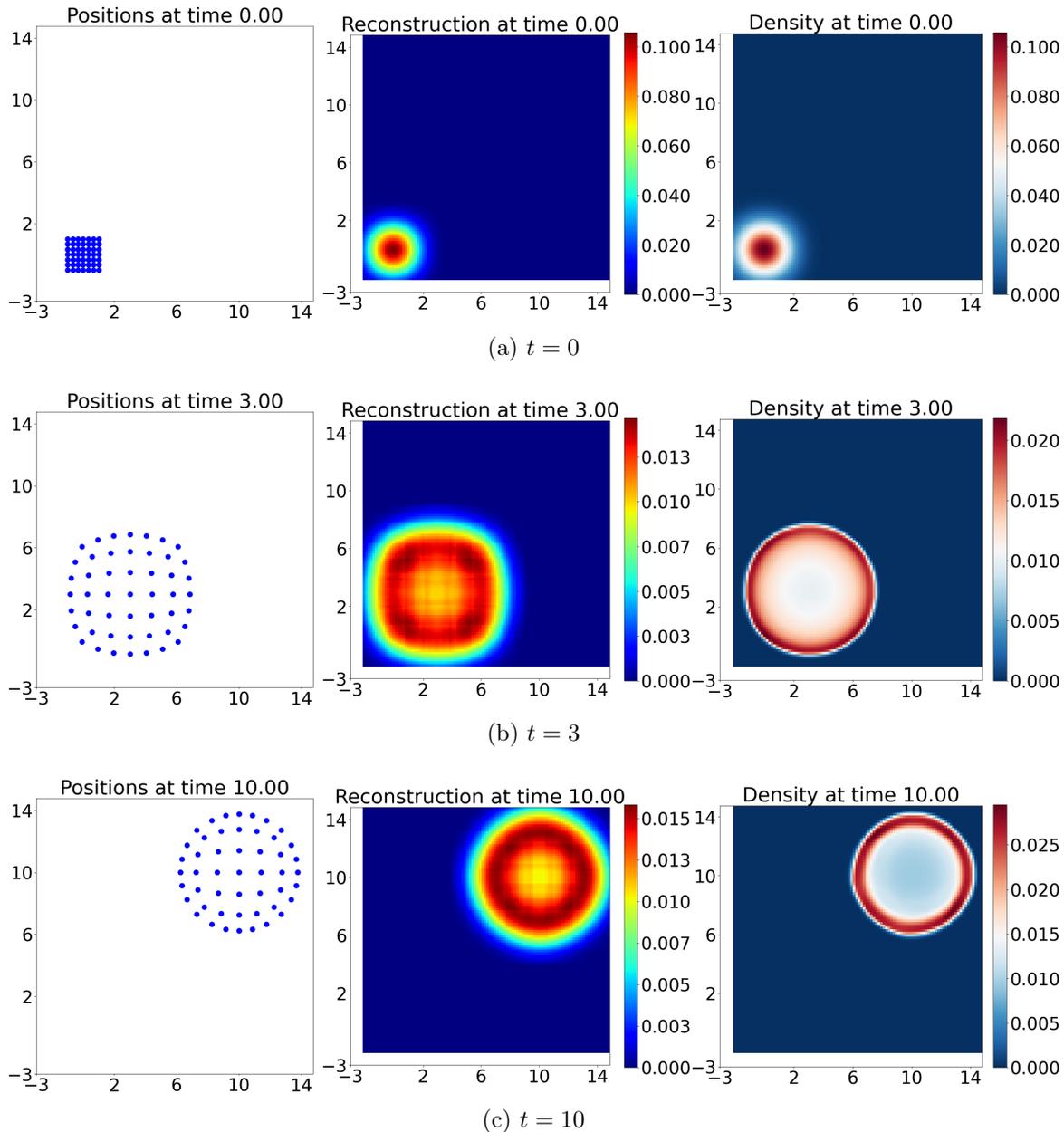


FIGURE 5.3 – États au cours du temps des deux échelles de la flotte soumise au modèle trois-zones-croisé. De gauche à droite : la flotte microscopique, la densité reconstruite $\hat{\rho}$ et la densité macroscopique ρ . $h = 1$, $N_x = N_y = 100$.

Nous observons tout d'abord que la forme de la flotte est parfaitement capturée, les disques ont le même rayons, et la densité se concentre sur le bord du disque, comme nous l'avions observé dans le chapitre 3. Ceci est cohérent avec le phénomène de concentration de l'échelle microscopique observé et discuté avec la figure 3.18, poussé à la limite $N \rightarrow \infty$.

Ensuite, nous remarquons que l'épaisseur de la couronne de densité dans la recons-

truction est plus large que celle de l'échelle macroscopique. Cela est dû au paramètre de reconstruction h qui est trop grand. En le diminuant, nous nous rapprochons du cas où il n'y a pas assez de drones localement pour obtenir une moyenne lisse, comme illustré en figure 5.4, où $h = 0.5$ a été divisé par 2, et $N_x = N_y = 50$.

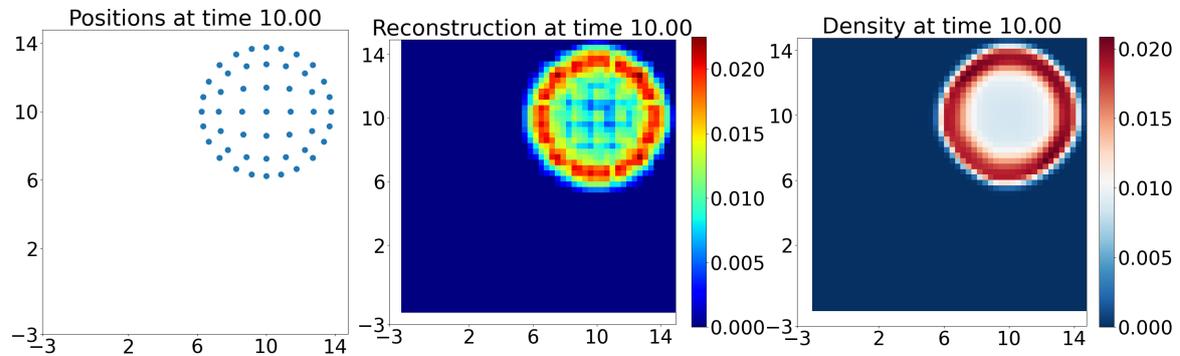


FIGURE 5.4 – État final des deux échelles de la flotte soumise au modèle trois-zones-croisé. De gauche à droite : la flotte microscopique, la densité reconstruite $\hat{\rho}$ et la densité macroscopique ρ . $h = 0.5$, $N_x = N_y = 50$.

Il y a donc un équilibre à trouver entre N et h afin d'obtenir une représentation correcte, ce qui encore une fois va dans le sens du théorème 22. L'optimisation de ces paramètres aura son importance dans le prochain chapitre, dans lequel nous utiliserons la reconstruction de la densité dans une loi de commande. Nous reviendrons donc plus loin dans cette section sur l'étude de l'influence des paramètres sur la reconstruction.

La figure 5.4 nous montre également qu'avec une résolution bien plus faible, la ressemblance est toujours satisfaisante : afin d'observer les propriétés qualitatives du modèle microscopique, il n'y a pas besoin d'utiliser une résolution macroscopique très précise.

Ceci est d'autant plus bénéfique puisque le coût de calcul augmente avec la résolution macroscopique. En effet, les forces d'interaction internes demandent le calcul d'un produit de convolution. C'est la même raison pour laquelle le coût explose avec le nombre de drones à l'échelle microscopique.

Nous avons donc changé la source de la limitation numérique en changeant d'échelle. À l'échelle microscopique, nous sommes limités par le nombre de drones, ce qui est une limite opérationnelle, alors qu'à l'échelle macroscopique, nous sommes limités par la résolution choisie, ce qui est une limitation de représentation. Ainsi, une fois la résolution choisie, nous n'avons plus de limitation en ce qui concerne notre flotte. Nous pouvons donc représenter n'importe quelle taille de flotte avec un coût constant à l'échelle macroscopique.

Toutefois, nous avons seulement illustré cette tendance. Nous n'étions pas dans un cas où nous rentabilisons l'approche macroscopique. Dans ce cas avec un nombre extrêmement réduit de 49 drones, les simulations micro-, macro- à basse résolution et macroscopique à haute résolution ont respectivement pris 1, 174 et 2123 secondes. C'est en utilisant par exemple $N = 625$ drones à l'échelle microscopique que nous atteignons un temps de calcul de 172 secondes, et que nous commençons à gagner en vitesse.

Néanmoins, les deux algorithmes n'ont pas le même niveau d'optimisation, donc cette comparaison est à considérer avec prudence. De plus, les possibilités d'optimisations algorithmiques auront peut être différents impacts selon le modèle, la décomposition de domaine et la parallélisation à l'échelle macroscopique étant des méthodes particulièrement efficaces. Ainsi cette comparaison permet d'illustrer le fait que les simulations macroscopiques peuvent être plus avantageuses pour les grandes flottes, mais cette comparaison n'est certainement pas une quantification des gains effectués.

Revenons sur le choix de N et h dans la reconstruction de la densité, afin qu'elle soit la plus proche possible de la densité macroscopique. Pour mesurer cela, nous traçons dans la figure 5.5 la norme L^2 au cours du temps de $\hat{\rho} - \rho$ pour plusieurs choix de résolution macroscopique et de paramètres de reconstruction, avec le même jeu de conditions initiales qu'au dessus.

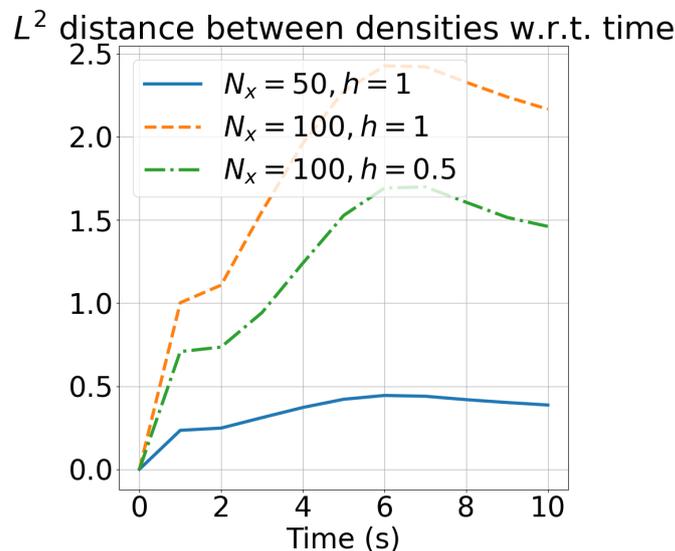


FIGURE 5.5 – Évolution de $\|\hat{\rho} - \rho\|_{L^2(\Omega)}$ au cours du temps pour le modèle trois-zones-croisé avec différents paramètres de reconstruction.

Nous voyons qu'en augmentant la résolution de la simulation macroscopique sans modifier le paramètre h , l'écart entre les deux densités augmente. Cet écart diminue si nous diminuons h en restant à haute résolution. Nous obtenons les mêmes résultats si nous augmentons le nombre de drones N au lieu de diminuer h . Cela vient du fait que d'un côté, la densité reconstruite se rapproche de la densité théorique lorsque h tend vers 0 et N tend vers l'infini, et que de l'autre côté la densité simulée se rapproche de la densité théorique lorsque N_x, N_y tendent vers 0.

Ainsi, augmenter la résolution améliorera la qualité de la densité macroscopique, sans améliorer la densité reconstruite, et l'écart entre les deux se creuse. Si nous voulons que les deux soient similaires, nous devons donc équilibrer les paramètres N, h et N_x, N_y .

En conclusion, nous avons vu que l'échelle macroscopique représente correctement l'échelle microscopique, et pour un coût moindre dans le cas de flottes de très grande taille.

5.3 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons utilisé un schéma numérique de la littérature pour mener des expériences à l'échelle macroscopique. Le but était d'illustrer le résultat du chapitre 4 nous indiquant que les deux échelles de représentation micro- et macroscopique sont proches si le nombre de drones est grand.

Nous avons pu constater que les propriétés qualitatives du modèle microscopique sont conservées : la formation en disque du modèle trois-zones-croisé est conservée, avec le même rayon et la même distribution de masse.

De plus, nous avons illustré brièvement que la simulation macroscopique est plus rapide lorsque le nombre de drones à l'échelle microscopique est très grand, se rapprochant du millier. À cette nouvelle échelle, le coût ne dépend que de la résolution de maillage choisie, au lieu du nombre de drones : nous avons donc fait passer la limitation de la simulation vers une considération visuelle, plutôt qu'opérationnelle. L'objectif de simuler rapidement le vol de grandes flottes de drones est donc rempli.

Ceci est toutefois à mettre en perspective avec le fait que nos deux algorithmes n'ont pas le même niveau d'optimisation, et sont donc difficilement comparables du point de vue de leurs performances. L'optimisation de ces algorithmes n'est pas l'objectif de cette thèse, donc nous ne proposons pas de comparaison quantitative, et concluons seulement que cette approche de changement d'échelle est crédible. En particulier, la parallélisation et la décomposition de domaine sont deux techniques d'optimisation qui pourraient permettre des gains de temps significatifs pour les simulations macroscopiques, ce qui renforcerait d'autant plus l'intérêt de cette approche.

Grâce à ce nouveau type de modèle, nous avons accès à de nouvelles inconnues pour modéliser une flotte de drones : sa densité locale et sa vitesse moyenne. Nous allons voir comment les utiliser pour développer un comportement plus complexe que ce que nous avons vu jusqu'à présent : une stratégie d'occupation de zone.

Chapitre 6

Nouveau modèle d'occupation de zone

Sommaire

6.1 Représentation de l'occupation de zone avec une densité cible de drones	128
6.1.1 Définition du modèle	128
6.1.2 Comportement en temps long	129
6.1.3 Avantages et inconvénients du modèle	130
6.2 Modèle d'occupation de zone avec inertie	131
6.2.1 Inspiration d'après un modèle d'aérosol	131
6.2.2 Définition du nouveau modèle macroscopique	132
6.2.3 Définition du modèle microscopique	133
6.3 Étude du comportement en temps long du nouveau modèle	134
6.4 Étude des changement d'échelles entre les modèles	139
6.4.1 Déviation entre les systèmes à une et à deux équations	139
6.4.2 Limite d'inertie nulle	141
6.5 Simulations numériques du modèle	144
6.5.1 Comparaison des simulations micro- et macroscopiques	144
6.5.2 Recherche des paramètres de reconstruction optimaux	147
6.5.3 Étude de l'impact de la forme de la cible sur son recouvrement	151
6.5.4 Étude de l'évitement des collisions	154
6.5.5 Stabilité de la formation finale	155
6.6 Conclusion du chapitre	156

Nous avons vu dans les chapitres précédents une autre manière de représenter les flottes de drones, avec un modèle macroscopique décrivant l'évolution en temps de la densité et/ou la vitesse moyenne des individus. Grâce à ces nouvelles inconnues, nous pouvons définir de nouvelles lois de commande tirant profit de ces variables uniquement accessibles à des agents tels que les drones. Ce chapitre est donc centré sur l'élaboration d'une force pour remplir un objectif opérationnel : occuper une zone d'intérêt.

Nous verrons d'abord dans la section 6.1 ce qui a déjà été fait dans ce sens dans la littérature, avant de proposer quelques extensions en définissant un nouveau modèle dans la section 6.2.

Nous étudierons les propriétés de ce modèle dans la section 6.3 avant de conclure par l'étude des liens entre notre modèle et ceux de la littérature dans la section 6.4.

L'ultime section 6.5 sera dédiée à des expériences numériques sur le modèle, afin d'en dégager les propriétés qualitatives.

6.1 Représentation de l'occupation de zone avec une densité cible de drones

Nous avons vu dans la section 3.2.2 un modèle de suivi de cible simple, mais qui présente de nombreux problèmes. Tout d'abord, tous les drones convergent vers un même point, ce qui provoque la perte de la flotte. Nous devons alors ajouter une force d'attraction-répulsion pour imposer une formation à la flotte et régler ce problème. Par ailleurs, la cible n'est peut être pas à portée de détection de la flotte au départ. Il faudrait donc dans ce cas là ajouter une force de dispersion jusqu'à trouver la cible. De plus, nous avons également montré dans la section 3.2.2 que le centre de masse de la flotte a une trajectoire périodique autour de la cible, donc une force pour stabiliser la flotte autour de l'objectif serait nécessaire. Tout ceci contribue à complexifier le modèle de lois de commande, tout en limitant le lien entre ces lois et l'objectif final de répartition des drones sur une zone identifiée à l'avance.

En nous inspirant de la modélisation fluide vue plus tôt, il est possible d'interpréter la mission de la couverture de zone comme l'adaptation de la densité locale des drones à une densité cible. Il est possible pour un drone de reconstruire localement la densité de la flotte via la connaissance de ses plus proches voisins et de leur distance, ce qui va être mis à profit dans ce chapitre. En considérant que l'on peut accéder à la valeur de la densité de la flotte, un modèle d'occupation de zone ne présentant pas les effets négatifs cités plus haut a été développé dans [105].

6.1.1 Définition du modèle

Nous allons nous inspirer du modèle proposé dans [105]. Dans cet article, les auteurs proposent un modèle de flotte de drones dont l'objectif est d'occuper une zone. Ils représentent leur zone cible par une densité $\rho_D(t, x)$ donnée. Cette approche est très pratique pour un utilisateur, puisqu'elle offre une grande flexibilité dans le choix de la forme de la zone cible. Nous pouvons par exemple imiter le modèle de suivi de position de la section 3.2.2 mentionné au dessus, en utilisant $\rho_D(t, x) := K(|x - x_T(t)|)$, où K est une gaussienne et $x_T(t)$ représente la position cible au cours du temps. Nous pouvons également imaginer des formes très complexes, données par des équations paramétriques ou des indicatrices, auxquelles nous ajoutons un cut-off pour obtenir la régularité souhaitée.

Le modèle présenté dans l'article est le suivant, où l'inconnue ρ représente la densité de la flotte et est solution de l'équation de dérive-diffusion suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t, x) + \operatorname{div}(\rho v_T)(t, x) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ n(x) \cdot \rho v_T(t, x) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \end{cases} \quad (6.1)$$

avec une condition initiale ρ_0 , $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné \mathcal{C}^1 de normale extérieure n , et

la vitesse cible donnée par

$$v_T(t, x) := -\alpha(t, x) \frac{\nabla(\rho - \rho_D)}{\rho}(t, x), \quad (6.2)$$

où $\alpha > 0$ est une fonction bornée, et représente l'intensité d'attraction vers la cible.

La vitesse cible v_T est construite pour faire voyager les drones dans la direction qui diminue le plus l'écart entre la densité de la flotte ρ et la densité cible ρ_D . Ceci permet à la densité ρ de recouvrir la cible en temps long, comme nous allons le voir dans la section suivante. La condition au bord sert à garantir que les drones restent dans le domaine pour tout temps.

Ce modèle diffère du type de modèle proposé jusqu'à présent. Ici le modèle n'a qu'une équation, qui étudie la variation de la densité au cours du temps, mais pas celle de la vitesse. Nous verrons en section 6.1.3 pourquoi ce type de modèle ne nous convient pas.

6.1.2 Comportement en temps long

L'article propose un premier résultat de régularité dans le cas où v_T est un champ de vitesse quelconque donné, qui ne dépend plus de ρ_D :

Théorème 25 (Existence, régularité et positivité des solutions[105])

Soit $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$, et supposons que pour tout $t \geq 0$, nous avons $v_T(t, \cdot) \in L^\infty(\Omega)$ donné. Alors il existe une unique solution faible $\rho \in H^1(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$ à (6.1), dont la masse est conservée au cours du temps, i.e.

$$\forall t > 0, \int_{\Omega} \rho_0(x) dx = \int_{\Omega} \rho(t, x) dx.$$

Si de plus $\nabla v_T \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$, alors $\rho_0 \geq 0$ ou $\rho_0 > 0$ impliquent respectivement $\rho(t, \cdot) \geq 0$ ou $\rho(t, \cdot) > 0$ pour presque tout $t \geq 0$.

L'enjeu est donc, pour adapter cela au système (6.1), d'avoir assez de régularité sur α et ρ_D pour entrer dans les hypothèses du théorème. Les auteurs contournent le problème en utilisant dans v_T une approximation \mathcal{C}^∞ de ρ , ce qui ne nous intéresse pas ici.

Voyons maintenant le comportement en temps long de ce modèle :

Théorème 26 (Comportement en temps long du modèle[105])

Supposons en plus des hypothèses du théorème 25 que $\forall t > 0, \forall x \in \Omega$, nous avons $0 < C_\alpha \leq \alpha(t, x) < \infty$. Supposons de plus que $\rho_D \in W^{2,\infty}(\Omega)$ ne dépend pas du temps, que ρ solution de (6.1) est strictement positive dans tout le domaine, et que la densité ainsi que la densité cible ont la même masse :

$$\int_{\Omega} (\rho_D - \rho_0)(x) dx = 0.$$

Alors la densité de la flotte converge vers la densité cible dans L^2 exponentiellement vite :

$$\exists C_1, C_2 > 0 \text{ t.q. } \forall t > 0, \quad \|\rho(t, \cdot) - \rho_D\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 e^{-C_2 t}.$$

Nous présentons la preuve de ce résultat ici afin de montrer l'intérêt du choix de v_T , ainsi que donner l'idée derrière ce que nous ferons pour notre nouveau modèle.

Démonstration : Notons $\phi := \rho - \rho_D$, qui vérifie :

$$\begin{cases} \partial_t \phi(t, x) = \operatorname{div}(\alpha \nabla \phi)(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ n(x) \cdot \alpha \nabla \phi(t, x) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.3)$$

C'est ici que nous voyons l'intérêt du choix de v_T : la différence entre la densité de la flotte et la densité cible est solution d'une équation de diffusion. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \phi^2(t, x) dx \right) &= \int_{\Omega} \phi \partial_t \phi(t, x) dx = \int_{\Omega} \phi \operatorname{div}(\alpha \nabla \phi)(t, x) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \alpha \phi \nabla \phi(t, x) \cdot n(x) dS - \int_{\Omega} \alpha |\nabla \phi|^2(t, x) dx \\ &\leq -C_{\alpha} \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq -\tilde{C} \|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Nous utilisons pour le passage à la deuxième ligne le théorème de Green, suivi des conditions au bord et de la minoration de α , avant de conclure avec l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, puisque l'intégrale de ϕ est constamment nulle. Nous terminons la preuve avec un simple lemme de Gronwall. ■

Discutons maintenant du modèle dans l'optique de notre travail.

6.1.3 Avantages et inconvénients du modèle

Commençons par énoncer les points positifs sur ce modèle. Tout d'abord, le fait de représenter la zone cible par une densité est une méthode très souple, puisque le choix de forme est illimité et simple à mettre en place, la seule restriction dans le théorème 26 étant que $\rho_D \in W^{2,\infty}(\Omega)$.

De plus, grâce à une seule loi de commande, tous les problèmes évoqués en début de section issus du modèle de suivi de cible sont réglés : il n'y a pas de concentration en un point, le vol est quasi stationnaire une fois sur la cible, les drones se dispersent tant que la cible n'est pas détectée etc.

Par ailleurs, cette loi peut remplacer n'importe quel modèle de contrôle de formation. En effet, au lieu de forcer chaque drone à aller à une position spécifique dans l'espace pour représenter une forme, que ce soit une position absolue ou relative à d'autres drones (voir par exemple [31]), les drones s'organisent selon leur perception de leur environnement. Ceci a l'avantage d'être robuste par rapport au nombre total d'éléments, et donc supporte la perte ou l'introduction de drones en cours de vol, et de ne pas supposer à l'avance le positionnement exact (ou même relatif) des drones.

Cependant, il y a plusieurs problèmes avec le type de modèle (6.1). Puisqu'il ne modélise pas la dynamique de la vitesse de déplacement des drones, nous ne pouvons pas ajouter à ce modèle toutes les forces que nous avons vu dans le chapitre 3.

De plus, ces modèles ne prennent pas en compte l'inertie des drones. En effet, ces modèles consistent à imposer la vitesse de déplacement, donc ils supposent qu'il est possible de la changer infiniment vite selon le contrôle utilisé. Nous ne pouvons pas négliger l'inertie de nos drones même si ces derniers sont de taille et de masse réduite, ce qui nous conforte dans le choix d'un modèle à deux équations, modélisant à la fois l'évolution de la densité et de la vitesse de la flotte.

Enfin, tous les résultats ne sont montrés que pour le modèle macroscopique. En pratique, les drones se basent sur une approche microscopique. Si nous nous basons sur les étapes dans les limites formelles de la section 4.1 pour retrouver le modèle microscopique associé, nous proposons pour tout drone $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ de la flotte le modèle suivant :

$$x'_i(t) = v_T(x_i(t)). \quad (6.4)$$

Or la vitesse cible v_T définie en (6.2) utilise la densité de la flotte. Pour utiliser cette loi de commande à l'échelle microscopique, les drones doivent donc calculer une densité approximative $\hat{\rho}$, que nous substituerons à ρ dans v_T comme nous le décrirons en section 6.2.3.

Avec cette nouvelle expression de force, il est alors bien plus complexe de montrer théoriquement que les positions des drones convergent de sorte à remplir la zone cible. Nous devons donc commencer par nous intéresser au modèle faisant intervenir la quantité macroscopique ρ . Se posera ensuite la question de savoir si $\hat{\rho}$ approxime assez bien ρ pour que les deux échelles de représentation soient proches, et qu'il y ait toujours convergence vers la cible à l'échelle microscopique. Ceci va dépendre de la méthode choisie pour construire $\hat{\rho}$, et du nombre de drones. Ce point sera approfondi dans la section 6.5.2.

Bien que le modèle présente quelques défauts par rapport à notre modélisation, son principe de base est très prometteur. Nous allons donc dans la section suivante adapter ce modèle à notre cadre.

6.2 Modèle d'occupation de zone avec inertie

Nous avons vu que le modèle (6.1) n'est pas compatible avec notre cadre de travail utilisant un modèle à deux équations et des forces. Adaptons l'idée du modèle (6.1) en nous inspirant d'un modèle existant pour décrire les aérosols.

6.2.1 Inspiration d'après un modèle d'aérosol

Un aérosol est une collection de gouttelettes plongée dans un fluide ambiant. Un modèle décrivant un tel système est proposé dans [68], utilisant les équations d'Euler et une force de rappel de la vitesse, où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert :

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t, x) + \operatorname{div}(\rho u)(t, x) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \partial_t(\rho u)(t, x) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u)(t, x) = \rho \frac{v - u}{\tau}(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ n(x) \cdot \rho u(t, x) \geq 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \end{cases} \quad (6.5)$$

où (ρ, u) représentent la densité et la vitesse moyenne des gouttelettes, et v est la vitesse moyenne du fluide ambiant. Cette dernière est en général prescrite, soit étant connue d'après des expérimentations, soit comme solution d'une équation comme Navier-Stokes. La constante $\tau > 0$ représente l'inertie, le temps caractéristique de rappel de la vitesse des gouttelettes vers la vitesse ambiante. Ce système est l'équivalent macroscopique du modèle de suivi de cible en vitesse que nous avons défini en section 3.2.1.

Un résultat de régularité pour les solutions de (6.5) est donné dans [68]. Pour cela, définissons pour tout $t \geq 0$

$$\Omega_t := \{x \in \Omega, \rho(t, x) > 0\}. \quad (6.6)$$

Théorème 27 (Régularité des solutions au modèle d'aérosol[68])

Supposons le domaine $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et lipschitzien. Pour tout $T > 0$, supposons que

- i) $\rho_0 \in L^1(\Omega)$,
- ii) $\|u_0\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq 1/(2d\tau)$,
- iii) $\|v\|_{L^\infty([0,T], W^{1,\infty}(\Omega))} \leq 1/(4d\tau)$.

Alors il existe un temps $T^* > 0$ et une unique solution (ρ, u) à (6.5) sur $[0, T^*)$, telle que

- i) $\rho \in L^\infty([0, T^*), L^1(\Omega))$,
- ii) $u \in L^\infty([0, T^*), W^{1,\infty}(\Omega_t))$
- iii) Ω_t reste un ouvert, de frontière Lipschitzienne pour tout $t < T^*$.

Pour adapter ce modèle à l'occupation d'une zone, nous devons donc choisir un contrôle v satisfaisant ces hypothèses. Avant de présenter notre modèle, nous rappelons le résultat suivant de [68] lorsque τ tend vers 0 :

Théorème 28 (Limite du modèle pour $\tau \rightarrow 0$ [68])

Sous les hypothèses du théorèmes 27, soient $T > 0$ fixé, et (ρ^τ, u^τ) une famille de solutions vérifiant le théorème 27 sur l'intervalle $[0, T]$. Dans la limite $\tau \rightarrow 0$, nous avons

- i) $\rho^\tau \rightharpoonup \rho$ faiblement au sens des mesures, où ρ est solution de

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0,$$

- ii) $\mathbb{1}_{\Omega_t^\tau}(u^\tau - v) \rightarrow 0$ dans $L^p(\Omega) \forall p < \infty$.

Nous voyons donc que si l'inertie tend vers 0 dans ce modèle d'aérosol, le système de type Euler (modèle à deux équations) dégénère vers l'équation de dérive-diffusion (modèle à une équation), avec une vitesse de toutes les gouttelettes identique à celle du gaz environnant. Cela suggère que cette approche donnera une bonne généralisation du modèle d'occupation de zone original (6.1).

6.2.2 Définition du nouveau modèle macroscopique

Nous allons donc utiliser ce modèle, où les gouttelettes seront remplacées par nos drones, et la vitesse du fluide ambiant par le champ de vitesse du modèle d'occupation

de zone (6.1). Voici notre nouveau modèle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho(t, x) + \operatorname{div}(\rho u)(t, x) = 0, \\ \partial_t(\rho u)(t, x) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u)(t, x) = \rho \frac{v_T - u}{\tau}(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega_t \\ v_T(t, x) := -\alpha(t, x) \frac{\nabla(\rho - \rho_D)}{\rho}(t, x), \\ n(x) \cdot \rho u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \end{array} \right. \quad (6.7)$$

Il ne nous reste plus qu'à montrer que ce modèle possède les propriétés annoncées de convergence en temps long. Avant cela, voyons le modèle équivalent à l'échelle microscopique.

6.2.3 Définition du modèle microscopique

Connaissant les étapes utilisées dans la limite formelle pour passer de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique présentées dans la section 4.1, nous pourrions proposer le modèle microscopique suivant, associé au modèle macroscopique (6.7), donné pour tout élément $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ de la flotte :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_i(t) = v_i(t), \\ v'_i(t) = \frac{v_T(x_i(t)) - v_i(t)}{\tau}. \end{array} \right. \quad (6.8)$$

Toutefois, comme mentionné pour le modèle à une équation, il n'est pas possible en pratique d'utiliser l'expression exacte de v_T définie dans (6.7), puisque ce champ de vitesse est calculé à partir de la densité macroscopique. Cette densité macroscopique n'est pas disponible pour les drones, et donc ne peut être utilisée pour définir une loi de commande. Nous n'utiliserons donc pas le système (6.8). À la place, nous remplaçons dans v_T la densité macroscopique ρ par une approximation $\hat{\rho}$ défini comme suit, où N est le nombre de drones dans la flotte :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\rho}(t, x) := \frac{1}{Nh^d} \sum_{j=1}^N K\left(\frac{x - x_j(t)}{h}\right) = G_h * \rho_t^N(x), \\ K(x) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right), \\ G_h(x) := K(x/h)/h^d, \\ \rho_t^N(x) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i(t)}(x). \end{array} \right. \quad (6.9)$$

L'approximation de la densité est une moyenne de gaussiennes centrées aux positions des différents drones, dont la largeur de dôme est contrôlée par le paramètre h . Elle est en particulier toujours strictement positive. Ainsi le modèle microscopique que nous

étudierons s'écrit pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$:

$$\begin{cases} x'_i(t) = v_i(t), \\ v'_i(t) = \frac{\hat{v}_T(x_i(t)) - v_i(t)}{\tau}, \\ v_T(\hat{\rho})(t, x) := -\alpha(t, x) \frac{\nabla(\hat{\rho} - \rho_D)}{\hat{\rho}}(t, x). \end{cases} \quad (6.10)$$

Nous avons donc quatre modèles à disposition. D'après les changements d'échelles vus au chapitre 4, et le résultat 28 sur la limite à inertie nulle pour le modèle d'aérosol, nous pouvons supposer que les quatre modèles sont reliés de la façon représentée en figure 6.1.

$$\begin{array}{ccc} (6.10) & \xrightarrow{N \rightarrow \infty} & (6.7) \\ \downarrow \tau \rightarrow 0 & & \downarrow \tau \rightarrow 0 \\ (6.4) & \xrightarrow{N \rightarrow \infty} & (6.1) - (6.2) \end{array}$$

FIGURE 6.1 – Diagramme des convergences attendues entre les modèles.

La question que nous nous posons maintenant est de savoir si notre modèle qui correspond aux vrais drones en vol (6.10) est correctement approximé par (6.1)-(6.2), ou si l'inertie a un trop grand rôle, et que seul (6.7) est satisfaisant.

Nous examinerons ces liens dans la section 6.4. Avant cela, nous allons étudier le comportement en temps long de notre nouveau modèle macroscopique.

6.3 Étude du comportement en temps long du nouveau modèle

Voyons si comme pour le modèle original, ce modèle permet de recouvrir une zone.

En ce qui concerne le modèle microscopique (6.10), à l'instar du modèle microscopique à une équation, il est difficile de montrer que les positions convergent de sorte à recouvrir la zone cible. Nous nous contenterons donc, comme dans l'article original [105], du résultat pour le modèle macroscopique (6.7). Intéressons nous d'abord au champ de vitesse, avec une vitesse cible v_T quelconque :

Théorème 29 (Convergence de la vitesse vers la vitesse cible)

Sous les hypothèses du théorème 27, soient $\tau > 0$ fixé et (ρ, u) une solution de (6.7). Supposons que cette solution existe pour tout temps $t > 0$, et est telle que $\rho \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; \mathcal{M}(\Omega))$ et $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$. Soit v_T une vitesse de contrôle quelconque appartenant à $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$.

Alors la vitesse u converge en temps long uniformément vers la vitesse cible v_T à une erreur d'ordre τ près : pour tout temps $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|u - v_T(t)\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq (\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v_T\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)})e^{-t/\tau} \\ &\quad + \|v_T\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^+ \times \Omega)}(1 + \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)})\tau. \end{aligned}$$

En particulier si la cible est constante au cours du temps, alors $\|u - v_T(t)\|_{L^\infty(\Omega)}$ tend vers 0.

Ce résultat est général, dans le sens où il est vrai pour toute cible en vitesse $v_T \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$.

Démonstration : Grâce à la régularité de u , nous pouvons définir les caractéristiques η solution de :

$$\frac{d}{dt}\eta(t, x) = u(t, \eta(t, x)).$$

Le long de ces courbes, la densité reste positive. En effet,

$$\frac{d}{dt}\rho(t, \eta(t, x)) = \partial_t \rho(t, x) + \left\langle \nabla_x \rho, \frac{d}{dt} \eta \right\rangle (t, x) = -\rho(t, \eta(t, x)) \operatorname{div} u(t, \eta(t, x)),$$

et donc

$$\rho(t, \eta(t, x)) = \rho_0(x) \exp \left(\int_0^t \operatorname{div} u(s, \eta(s, x)) ds \right).$$

Nous pouvons donc réécrire l'équation sur la quantité de mouvement comme

$$\partial_t u(t, x) + \nabla u u(t, x) = \frac{v_T - u}{\tau}(t, x).$$

Cette vitesse vérifie le long des caractéristiques

$$\frac{d}{dt}(u(t, \eta(t, x))) = \partial_t u(t, x) + \nabla_x u \frac{d}{dt} \eta(t, x) = \frac{v_T(t, \eta(t, x)) - u(t, \eta(t, x))}{\tau},$$

d'où

$$u(t, \eta(t, x)) = u_0(x) e^{-t/\tau} + e^{-t/\tau} \int_0^t v_T(s, \eta(s, x)) \frac{e^{s/\tau}}{\tau} ds.$$

Introduisons $v_T(t, \eta(t, x))$ dans l'intégrale, afin d'obtenir

$$\begin{aligned} u(t, \eta(t, x)) &= e^{-t/\tau} \int_0^t (v_T(s, \eta(s, x)) - v_T(t, \eta(t, x))) \frac{e^{s/\tau}}{\tau} ds \\ &\quad + u_0(x) e^{-t/\tau} + v_T(t, \eta(t, x)) e^{-t/\tau} \int_0^t \frac{e^{s/\tau}}{\tau} ds. \end{aligned}$$

Puisque $e^{-t/\tau} \int_0^t \frac{e^{s/\tau}}{\tau} ds = 1 - e^{-t/\tau}$, nous pouvons soustraire $v_T(t, \eta(t, x))$ des deux côtés de l'égalité, puis passer à la norme pour poursuivre sur les calculs suivants :

$$\begin{aligned} |u(t, \eta(t, x)) - v_T(t, \eta(t, x))| &\leq e^{-t/\tau} \int_0^t |v_T(s, \eta(s, x)) - v_T(t, \eta(t, x))| \frac{e^{s/\tau}}{\tau} ds \\ &\quad + \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} e^{-t/\tau} + \|v_T\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)} e^{-t/\tau} \\ &\leq \|v_T\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^+ \times \Omega)} \int_0^t (|t-s| + |\eta(s, x) - \eta(t, x)|) \frac{e^{(s-t)/\tau}}{\tau} ds \\ &\quad + (\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v_T\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)}) e^{-t/\tau} \\ &\leq \|v_T\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^+ \times \Omega)} (1 + \|u\|_{L^\infty(\Omega)}) \int_0^t |t-s| \frac{e^{(s-t)/\tau}}{\tau} ds \\ &\quad + (\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v_T\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)}) e^{-t/\tau} \\ &\leq (\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v_T\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)}) e^{-t/\tau} \\ &\quad + \|v_T\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^+ \times \Omega)} (1 + \|u\|_{L^\infty(\Omega)}) \tau, \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
\int_0^t (t-s) \frac{e^{(s-t)/\tau}}{\tau} ds &= - \int_t^0 r \frac{e^{-r/\tau}}{\tau} dr \\
&= -te^{-t/\tau} + 0 - \int_0^t -e^{-r/\tau} dr \\
&= -te^{-t/\tau} - \tau e^{-t/\tau} + \tau \\
&\leq \tau.
\end{aligned}$$

Nous retrouvons bien le fait que le terme venant des variations de v_T est proportionnel à l'inertie.

Par ailleurs, nous remarquons que si nous supposons de plus que v_T est constant en temps et en espace, ce terme ne serait absent dans l'égalité, et nous aurions convergence uniforme de u vers v_T . Ici, nous avons convergence uniforme à une constante proportionnelle à τ près. ■

Nous pouvons maintenant montrer que la densité du modèle converge vers la densité cible en temps long :

Théorème 30 (Convergence de la densité vers la densité cible)

Sous les hypothèses du théorème 27, soient $\tau > 0$ fixé et (ρ, u) une solution de (6.7). Supposons que cette solution existe pour tout temps $t > 0$, et est telle que $\nabla \rho \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$ et $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$.

Soit une cible $\rho_D(x)$ indépendante du temps telle que $\nabla \rho_D \in L^2(\Omega)$. Soit $\alpha(t, x)$ minorée par $\alpha_{min} > 0$.

Si ρ_0 a la même masse que la cible :

$$\int_{\Omega} \rho_0(x) dx = \int_{\Omega} \rho_D(x) dx,$$

alors la densité ρ converge exponentiellement vite dans $L^2(\Omega)$ vers la densité cible à une constante proportionnelle à τ près : il existe deux constantes $a, C > 0$ telles que pour tout temps $t \geq 0$,

$$\|\rho - \rho_D\|_{L^2(\Omega)}^2(t) \leq \|\rho - \rho_D\|_{L^2(\Omega)}^2(0) e^{-at} + C\tau \left(1 + \frac{1}{a\tau - 1} e^{-t/\tau}\right) \xrightarrow[\tau \rightarrow 0]{t \rightarrow \infty} 0.$$

Nous voyons que la densité de la flotte converge exponentiellement vite dans un voisinage autour de la densité cible, qui dépend de l'inertie des drones. L'écart entre la densité cible est proportionnelle à $\sqrt{\tau}$. La démonstration de ce dernier résultat est incluse dans la preuve du théorème suivant, qui généralise la convergence au cas où la densité cible dépend du temps et si les masses initiales ne sont pas égales.

Théorème 31 (Convergence de la densité vers la densité cible généralisée)

Sous les hypothèses du théorème 27, soient $\tau > 0$ et (ρ, u) une solution de (6.7). Supposons que cette solution existe pour tout temps $t > 0$, et est telle que $\nabla \rho \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$ et $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$.

Soit une cible $\rho_D \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^1(\Omega))$ telle que $\partial_t \rho_D \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$ mais aussi $\nabla \rho_D \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$. Supposons de plus que sa masse soit constante au cours du temps :

$$\forall t > 0, \quad \int_{\Omega} \rho_D(t, x) dx = \int_{\Omega} \rho_D(0, x) dx.$$

Soit $\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$ minorée par $\alpha_{\min} > 0$. Notons $\gamma > 0$ le rapport des masses entre la densité et la densité cible :

$$\int_{\Omega} \rho(t, x) dx := \gamma \int_{\Omega} \rho_D(t, x) dx.$$

Alors la densité ρ converge exponentiellement vite dans $L^2(\Omega)$ vers la densité cible à une constante proportionnelle à τ et à l'écart des masses $|\gamma - 1|$ près : il existe trois constantes $a, C_1, C_2 > 0$ telles que pour tout temps $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|\rho - \gamma \rho_D\|_{L^2(\Omega)}^2(t) &\leq \|\rho - \gamma \rho_D\|_{L^2(\Omega)}^2(0) e^{-at} + C_1 (|\gamma - 1| + \|\partial_t \rho_D\|_{L^\infty(\Omega)}) \\ &\quad + C_2 \tau \left(1 + \frac{1}{a\tau - 1} e^{-t/\tau} \right). \end{aligned}$$

Ce résultat est bien plus précis que celui disponible pour le modèle initial (6.1) disponible en 26. Nous voyons que la densité de la flotte converge exponentiellement vite autour de la densité cible, mais qu'elle n'atteint pas cette dernière totalement. La convergence se fait à une constante près proportionnelle à $\sqrt{\tau}$ quand le temps caractéristique de réaction τ tend vers 0.

Nous remarquons dans ce cas que si la masse initiale de drones ne correspond pas à la masse de la cible, alors une constante proportionnelle à $\sqrt{|\gamma - 1|}$ apparaît. En pratique il se peut que nous perdions ou que nous ajoutions des drones pendant le vol, ce qui correspondrait à un γ dépendant du temps. Ce scénario demanderait des estimations supplémentaires, pour quantifier les variations de l'écart de masse au court du temps. Cependant, ce dernier point peut être mitigé en supposant que les drones communiquent entre eux et calculent le rapport de masse γ à chaque changement de population, afin de mettre à jour leur densité cible en utilisant $\tilde{\rho}_D = \rho_D/\gamma$, tant que ces variations de masse restent sporadiques.

De la même manière, nous pourrions étudier le cas où la masse de la cible est variable. Nous supposons ici qu'en pratique, les drones connaissent leur cible (soit a priori, soit via des données issues de capteurs), et donc que la masse totale de la cible peut être ajustée de manière dynamique dans la loi de commande, tant que les variations de masse sont lentes.

Nous remarquons enfin que si la densité cible est immobile, que la masse initiale est celle de la cible, et que l'inertie tend vers 0, alors la convergence est totale, et nous retombons sur le résultat précédent et de celui du modèle à une équation.

Démonstration : Comme pour le modèle original (6.1), nous allons étudier la norme

L^2 de la différence entre la densité et la densité cible. Si $\int_{\Omega} \rho = \gamma \int_{\Omega} \rho_D$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\rho - \gamma \rho_D|^2(t, x) dx &= \int_{\Omega} (\rho - \gamma \rho_D) (-\operatorname{div}(\rho u + \rho v_T - \rho v_T))(t, x) dx \\
&\quad + \int_{\Omega} (\rho - \gamma \rho_D) \partial_t \rho_D(t, x) dx \\
&= - \int_{\Omega} (\rho - \gamma \rho_D) \operatorname{div}(\rho v_T)(t, x) dx \\
&\quad - \int_{\Omega} (\rho - \gamma \rho_D) \operatorname{div}(\rho(u - v_T))(t, x) dx \\
&\quad + \int_{\Omega} (\rho - \gamma \rho_D) \partial_t \rho_D(t, x) dx \\
&= \int_{\Omega} (\rho - \gamma \rho_D) \operatorname{div}(\alpha(t, x) \nabla(\rho - \rho_D + \gamma \rho_D - \gamma \rho_D))(t, x) dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \nabla(\rho - \gamma \rho_D) \rho(u - v_T)(t, x) dx \\
&\quad + \int_{\Omega} (\rho - \gamma \rho_D) \partial_t \rho_D(t, x) dx \\
&= - \int_{\Omega} \alpha(t, x) |\nabla(\rho - \gamma \rho_D)|^2(t, x) dx \\
&\quad - \int_{\Omega} \alpha(t, x) \nabla(\rho - \gamma \rho_D) \nabla(\gamma \rho_D - \rho_D)(t, x) dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \nabla(\rho - \gamma \rho_D) \rho(u - v_T)(t, x) dx \\
&\quad + \int_{\Omega} (\rho - \gamma \rho_D) \partial_t \rho_D(t, x) dx.
\end{aligned}$$

Or d'après le théorème 29, $\|u - v_T\|_{L^\infty(\Omega)}(t) \leq C_1 e^{-t/\tau} + C_2 \tau$, et $C_1, C_2 > 0$ donc d'après le théorème de Poincaré-Wirtinger, puisque nous nous sommes assurés que ρ et $\gamma \rho_D$ aient la même masse, nous avons avec la constante de Poincaré $C_p > 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\rho - \gamma \rho_D|^2(t, x) dx &\leq -\alpha_{\min} C_p \int_{\Omega} (\rho - \gamma \rho_D)^2(t, x) dx \\
&\quad + |\gamma - 1| \|\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)} \|\nabla(\rho - \gamma \rho_D)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \rho_D\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \|\rho\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(\rho - \gamma \rho_D)\|_{L^2(\Omega)} \|u - v_T\|_{L^\infty(\Omega)}(t) \\
&\quad + \|\rho - \gamma \rho_D\|_{L^1(\Omega)} \|\partial_t \rho_D\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)},
\end{aligned}$$

et en renommant $f(t) := \|\rho - \gamma \rho_D\|_{L^2(\Omega)}^2(t)$:

$$f'(t) \leq -af(t) + b|\gamma - 1| + (C_1 e^{-t/\tau} + C_2 \tau) \frac{c}{C_1} + e \|\partial_t \rho_D\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)}, \quad (6.11)$$

où

$$\begin{aligned}
a &:= 2\alpha_{\min} C_p, \quad b := 2\|\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)} \|\nabla(\rho - \gamma \rho_D)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))} \|\nabla \rho_D\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))}, \\
c &:= 2C_1 \|\rho\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))} \|\nabla(\rho - \gamma \rho_D)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))}, \quad e := 2\|\rho - \gamma \rho_D\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L^1(\Omega))}.
\end{aligned}$$

Nous concluons enfin avec le lemme de Gronwall

$$\begin{aligned}
f(t) &\leq f(0)e^{-at} + e^{-at} \int_0^t (b|\gamma - 1| + (C_1 e^{-s/\tau} + C_2 \tau) \frac{c}{C_1} + e \|\partial_t \rho_D\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)}) e^{as} ds \\
&= f(0)e^{-at} + (b|\gamma - 1| + c \frac{C_2}{C_1} \tau + e \|\partial_t \rho_D\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)}) \frac{1 - e^{-at}}{a} + c \frac{e^{-t/\tau} - e^{-at}}{a - 1/\tau} \\
&\leq f(0)e^{-at} + \frac{b}{a} |\gamma - 1| + \frac{e}{a} \|\partial_t \rho_D\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)} + \frac{c C_2}{a C_1} \tau + \frac{c}{a\tau - 1} \tau e^{-t/\tau}.
\end{aligned}$$

■

Maintenant que nous avons montré que notre nouveau modèle macroscopique a bien le comportement que nous avons prévu, étudions le lien entre ce modèle et les autres présentés comme décrit dans la figure 6.1.

6.4 Étude des changement d'échelles entre les modèles

6.4.1 Déviation entre les systèmes à une et à deux équations

Cette section est dédiée au passage du modèle micro- au modèle macroscopique pour les systèmes à deux équations. La distance sur les vitesses \mathcal{E}^N , sur les mesures d_{BL} ainsi que le sens de la convergence dans le théorème ont été définis en section 4.2. La notation $a \lesssim b$ décrit l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $a \leq Cb$.

Théorème 32 (Comparaison des échelles du modèle d'occupation de zone)

Sous les hypothèses du théorème 27, soit $T > 0$ le temps d'existence maximal de l'unique solution $(\rho, u) \in \mathcal{C}([0, T]; \mathcal{P}(\Omega)) \times L^\infty(0, T; \mathcal{W}^{1, \infty}(\Omega))$ du modèle d'occupation de zone (6.7).

Supposons qu'il existe deux bornes inférieures sur ρ et $\hat{\rho}$, uniformes en temps, en espace et en N notées respectivement $\rho_{min} > 0$ et $\hat{\rho}_{min}$.

Alors pour tout temps $0 \leq t < T$,

$$\mathcal{E}^N(t) + d_{BL}^2(\rho_t^N, \rho_t) \lesssim \mathcal{E}^N(0) + d_{BL}^2(\rho_0^N, \rho_0) + d_{BL}^2(\mathcal{G}_h, \delta_0).$$

De plus, si les conditions initiales sont choisies telles que le membre de droite tende vers 0, alors nous avons également

$$f^N \rightharpoonup \rho \delta_u, \quad \int_{\mathbb{R}^d} v f^N dv \rightharpoonup \rho u, \quad \int_{\mathbb{R}^d} (v \otimes v) f^N dv \rightharpoonup \rho u \otimes u, \quad L^\infty(0, T; \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)).$$

Démonstration : La preuve suit la même trame que pour celle du théorème 22,

donc nous commençons par l'étude de \mathcal{E}^N .

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{E}^N(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N |u(t, x_i(t)) - v_i(t)|^2 \right) \\
&= -\frac{1}{N\tau} \sum_{i=1}^N |u(t, x_i(t)) - v_i(t)|^2 \\
&\quad + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle u(t, x_i(t)) - v_i(t), -\nabla u(u(t, x_i(t)) - v_i(t)) \rangle \\
&\quad + \frac{1}{N\tau} \sum_{i=1}^N \langle u(t, x_i(t)) - v_i(t), v_T(\rho)(x_i) - v_T(\hat{\rho})(x_i) \rangle \\
&= -\frac{2}{\tau} \mathcal{E}^N(t) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle u(t, x_i(t)) - v_i(t), -\nabla u(u(t, x_i(t)) - v_i(t)) \rangle \\
&\quad - \frac{1}{N\tau} \sum_{i=1}^N \frac{\alpha(t, x_i(t))}{\rho \hat{\rho}(t, x_i(t))} \langle u(t, x_i(t)) - v_i(t), (\hat{\rho} - \rho) \nabla(\rho - \rho_D) + \rho \nabla(\rho - \hat{\rho}) \rangle \\
&\leq -2 \left(\frac{1}{\tau} - \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)} \right) \mathcal{E}^N(t) \\
&\quad + \frac{\|\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)}}{\rho_{\min} \hat{\rho}_{\min}} \frac{1}{N\tau} \sum_{i=1}^N |u(t, x_i(t)) - v_i(t)| \|\nabla(\rho - \rho_D)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)} |\hat{\rho} - \rho|(t, x) \\
&\quad + \frac{\|\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)}}{\rho_{\min} \hat{\rho}_{\min}} \frac{1}{N\tau} \sum_{i=1}^N |u(t, x_i(t)) - v_i(t)| \|\rho\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)} |\nabla(\rho - \hat{\rho})|(t, x).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
|\hat{\rho} - \rho|(x) &= |G_h * (\rho^N - \rho) + \rho * (G_h - \delta_0)|(x) \\
&\leq \|G_h\|_{L^\infty \mathbb{R}} d_{BL}(\rho_t^N, \rho_t) + \|\rho\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)} d_{BL}(G_h, \delta_0),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|\nabla(\hat{\rho} - \rho)|(x) &= |\nabla \rho * (G_h - \delta_0) + G_h * \nabla(\rho^N - \rho)| \\
&\leq \|\nabla \rho\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)} d_{BL}(G_h, \delta_0) + \|\nabla G_h\|_{L^\infty(\mathbb{R})} d_{BL}(\rho_t^N, \rho_t).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{E}^N(t) &\leq -2 \left(\frac{1}{\tau} - \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)} \right) \mathcal{E}^N(t) \\
&\quad + \frac{1}{N\tau} \sum_{i=1}^N |u(t, x_i(t)) - v_i(t)| \left(C_1 d_{BL}(\rho_t^N, \rho_t) + C_2 d_{BL}(G_h, \delta_0) \right) \\
&\leq -2 \left(\frac{1}{\tau} - \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)} \right) \mathcal{E}^N(t) \\
&\quad + \frac{1}{2N\tau} \sum_{i=1}^N |u(t, x_i(t)) - v_i(t)|^2 + \frac{1}{2\tau} \left(C_1 d_{BL}(\rho_t^N, \rho_t) + C_2 d_{BL}(G_h, \delta_0) \right)^2 \\
&\leq -\left(\frac{1}{\tau} - 2\|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)} \right) \mathcal{E}^N(t) + \frac{1}{\tau} \left(C_1^2 d_{BL}^2(\rho_t^N, \rho_t) + C_2^2 d_{BL}^2(G_h, \delta_0) \right).
\end{aligned}$$

Nous en déduisons avec l'inégalité de Gronwall que

$$\mathcal{E}^N(t) \lesssim \mathcal{E}^N(0)e^{-at} + d_{BL}^2(G_h, \delta_0) + \int_0^t d_{BL}^2(\rho^N, \rho)(s)ds.$$

La deuxième partie de la preuve est la même que celle vue en section 4.2.3, donc nous renvoyons à cette section pour montrer que

$$d_{BL}^2(\rho^N, \rho)(t) \lesssim d_{BL}^2(0) + \int_0^t \mathcal{E}^N(s)ds.$$

En additionnant les deux inégalités, et en appliquant le lemme de Gronwall intégral, nous pouvons conclure la preuve. Les convergences sont la conséquence du théorème 4.2.4. ■

6.4.2 Limite d'inertie nulle

Passons à la comparaison entre les modèles à une et deux équations. Afin de différencier les variables des équations macroscopiques avec et sans inertie, nous utiliserons les exposant τ et 0. Ainsi (ρ^τ, u^τ) est solution de (6.7) tandis que (ρ^0, u^0) est solution de (6.1). De même nous différencierons v_T^τ et v_T^0 .

Le but de cette section est de comparer les trajectoires des deux modèles macroscopiques partant des mêmes conditions initiales. Ces dernières seront une densité $\rho_0(x)$ donnée, et $v_T^0(0, x)$ pour la vitesse du modèle à inertie.

Nous allons d'abord étudier la convergence de la densité lorsque l'inertie tend vers 0 :

Théorème 33 (Réduction de la densité dans la limite d'inertie nulle)

Sous les hypothèses du théorème 27, soient $\tau > 0$, (ρ^τ, u^τ) une solution de (6.7), et (ρ, u) une solution de (6.1)-(6.2). Supposons que ces solutions existent pour tout temps $t > 0$. Supposons de plus que les densités et les vitesses sont telles que $\nabla \rho \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$ et $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$. Soient une cible $\rho_D(x)$ indépendante du temps telle que $\nabla \rho_D \in L^2(\Omega)$, et $\alpha(t, x)$ minorée par $\alpha_{min} > 0$.

Alors il existe une constante $C_\tau > 0$ telle que pour tout temps $t \geq 0$,

$$\int_{\Omega} |\rho^0 - \rho^\tau|^2(t, x)dx \leq C_\tau \tau.$$

Démonstration : Notons $\phi(t, x) := \rho^0 - \rho^\tau$. Elle est solution de

$$\partial_t \phi + \operatorname{div}(\rho^0 v_T^0 - \rho^\tau u^\tau) = 0. \quad (6.12)$$

En insérant $\pm \rho^\tau v_T^\tau$ dans la divergence, nous obtenons

$$\begin{aligned} \partial_t \phi(t, x) &= -\operatorname{div}(\rho^\tau (v_T^\tau))(t, x) - \operatorname{div}(\rho^0 v_T^0 - \rho^\tau v_T^\tau)(t, x) \\ &= -\operatorname{div}(\rho^\tau (v_T^\tau))(t, x) + \operatorname{div}(\alpha \nabla \phi)(t, x). \end{aligned}$$

Nous pouvons donc étudier la norme $L^2(\Omega)$ de ϕ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi^2(t, x)dx &= - \int_{\Omega} \alpha(t, x) |\nabla \phi|^2(t, x)dx + \int_{\Omega} \nabla \phi \rho^\tau (v_T^\tau - u^\tau)(t, x)dx \\ &\leq -\alpha_{min} C_p \int_{\Omega} \phi^2(t, x)dx + \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)} \|\rho^\tau\|_{L^2(\Omega)} \|v_T^\tau - u^\tau\|_{L^\infty(\Omega)}(t), \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Poincaré. Nous utilisons maintenant le théorème 29 pour avoir pour tout $t \geq 0$

$$\|v_T^\tau - u^\tau\|_{L^\infty(\Omega)}(t) \leq C_1 e^{-t/\tau} + C_2 \tau.$$

D'après le lemme de Gronwall, avec des calculs similaires aux preuves précédentes, nous avons la dernière inégalité

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi^2(t, x) dx &\leq e^{-2\alpha_{\min} C_p t} \int_{\Omega} \phi^2(0, x) dx \\ &\quad + \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)} \|\rho^\tau\|_{L^2(\Omega)} \left(\frac{C_2}{\alpha_{\min} C_p} + \frac{2C_1}{2\alpha_{\min} C_p \tau - 1} \right) \tau \end{aligned}$$

Comme nous avons les mêmes conditions initiales pour les deux systèmes, $\phi(0, \cdot) \equiv 0$, le théorème est démontré. \blacksquare

Notons que ce résultat montre une convergence en moyenne de l'essaim. Il est possible de démontrer un résultat similaire en norme L^∞ , mais sous la condition d'hypothèses plus restrictives concernant la régularité de u^τ et v_T^τ :

Théorème 34

Sous les hypothèses du théorème 27, soient $\tau > 0$ et (ρ^τ, u^τ) une solution de (6.7). Soit de plus (ρ, u) une solution de (6.1). Supposons que ces solutions existent pour tout temps $t > 0$,

Supposons que les densités et les vitesses sont telles que $\nabla \rho \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$ et $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$.

Soient une cible $\rho_D(x)$ indépendante du temps telle que $\nabla \rho_D \in L^2(\Omega)$, et $\alpha(t, x)$ minorée par $\alpha_{\min} > 0$.

Supposons de plus que pour tout temps $t \geq 0$:

$$\|u^\tau - v_T^\tau\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}(t) \lesssim f(t) + \tau,$$

où $f(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

Alors il existe une constante $C_\tau > 0$ telle que pour tout temps $t \geq 0$ et $x \in \Omega$,

$$|\rho^0 - \rho^\tau|(t, x) \leq C_\tau \tau.$$

Démonstration : La preuve est similaire à la précédente. Cette fois-ci, nous ajoutons $\pm \rho^\tau v_T^0$ dans la divergence de (6.12) et développons la divergence :

$$\partial_t \phi + v_T^0 \nabla \phi = -\phi \operatorname{div} v_T^0 + \operatorname{div}(\rho^\tau (u^\tau - v_T^\tau)).$$

Le long de la caractéristique en v_T^0 : $\partial_t \eta(t, x) = v_T^0(t, \eta(t, x))$, nous avons

$$\frac{d}{dt} \left(\phi(t, \eta(t, x)) \exp \left(\int_0^t \operatorname{div} v_T^0(s, x) ds \right) \right) = \operatorname{div}(\rho^\tau (u^\tau - v_T^\tau))(t, x) \exp \left(\int_0^t \operatorname{div} v_T^0(s, x) ds \right).$$

Le lemme de Gronwall permet alors d'obtenir

$$\phi(t, \eta(t, x)) = 0 + \int_0^t \operatorname{div}(\rho^\tau (u^\tau - v_T^\tau))(s, \eta(s, x)) \exp \left(- \int_s^t \operatorname{div} v_T^0(\sigma, x) d\sigma \right) ds$$

et donc

$$|\phi(t, \eta(t, x))| \lesssim \|u^\tau - v_T^\tau\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}(t).$$

D'après notre hypothèse technique, nous en déduisons le résultat. ■

Passons donc à la convergence des vitesses :

Théorème 35 (Réduction de la vitesse dans la limite d'inertie nulle)

Sous les hypothèses du théorème 27, soient $\tau > 0$ et (ρ^τ, u^τ) une solution de (6.7). Soit de plus (ρ, u) une solution de (6.1). Supposons que ces solutions existent pour tout temps $t > 0$. Supposons de plus que les densités et les vitesses sont telles que $\nabla^3 \rho \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$ et $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$.

Soient une cible $\rho_D(x)$ indépendante du temps telle que $\nabla \rho_D \in L^2(\Omega)$, et $\alpha(t, x)$ minorée par $\alpha_{min} > 0$.

Alors il existe une constante $C_\tau > 0$ telle que pour tout temps $t \geq 0$,

$$\int_{\Omega} |v_T^0 - u^\tau|^2(t, x) dx \leq C_\tau \tau.$$

Démonstration : Remarquons d'abord que

$$v_T^\tau - v_T^0 = -\frac{\alpha}{\rho^\tau} \nabla(\rho^\tau - \rho^0) - \frac{\alpha}{\rho^\tau \rho^0} \nabla(\rho_0 - \rho_D)(\rho^0 - \rho^\tau)$$

L'écart entre les vitesses des modèles macroscopiques est donc décomposé comme suit :

$$|u^\tau - v_T^0| \leq |u^\tau - v_T^\tau| + |v_T^\tau - v_T^0|$$

Étudions alors sa norme L^2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u^\tau - v_T^0|^2(t, x) dx &\leq \int_{\Omega} \left(|u^\tau - v_T^\tau|^2 + |v_T^\tau - v_T^0|^2 \right)(t, x) dx \\ &\leq \|u^\tau - v_T^\tau\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)}^2 |\Omega| \\ &\quad + \frac{\|\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)}^2}{2(\rho_{min}^\tau \rho_{min}^0)^2} \int_{\Omega} |\nabla(\rho_0 - \rho_D)(\rho^0 - \rho^\tau)|^2(t, x) dx \\ &\quad + \frac{\|\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)}^2}{2(\rho_{min}^\tau)^2} \int_{\Omega} |\nabla(\rho^\tau - \rho^0)|^2(t, x) dx \end{aligned}$$

Si α est constant, alors $\nabla \rho^0$ converge vers $\nabla \rho_D$ dans L^2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla(\rho^0 - \rho_D)|^2(t, x) dx &= \int_{\Omega} \nabla(\rho^0 - \rho_D) \nabla \operatorname{div}(\alpha \nabla(\rho^0 - \rho_D))(t, x) dx \\ &= -\alpha \int_{\Omega} |\Delta(\rho^0 - \rho_D)|^2(t, x) dx \\ &\leq -\alpha C_p \int_{\Omega} |\nabla(\rho^0 - \rho_D)|^2(t, x) dx \end{aligned}$$

En particulier l'écart entre les fonctions converge presque partout à une sous-suite près vers 0, donc est il borné dans L^∞ par une constante qui ne dépend pas du temps ou de τ . Nous avons donc

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u^\tau - v_T^0|^2(t, x) dx \leq f(\tau) + C \int_{\Omega} \left((\rho^0 - \rho^\tau)^2 + |\nabla(\rho^0 - \rho^\tau)|^2 \right)(t, x) dx$$

Nous avons vu dans le théorème 33 que la première norme L^2 est majorée par τ . Voici l'estimation pour le gradient utilisant la même stratégie :

$$\partial_t \nabla(\rho_0 - \rho^\tau) = -\nabla \operatorname{div}(\rho^0 v_T^0 + \rho^\tau v_T^\tau - \rho^\tau v_T^\tau - \rho^\tau u^\tau) = \nabla \operatorname{div}(\alpha \nabla(\rho^0 - \rho^\tau)) - \nabla \operatorname{div}(\rho^\tau (v_T^\tau - u^\tau)).$$

Il suit donc que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla(\rho^0 - \rho^\tau)|^2(t, x) dx &= \int_{\Omega} \nabla(\rho^0 - \rho^\tau) \nabla \operatorname{div}(\alpha \nabla(\rho^0 - \rho^\tau))(t, x) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \nabla(\rho^0 - \rho^\tau) \nabla \operatorname{div}(\rho^\tau (v_T^\tau - u^\tau))(t, x) dx \\ &= -\alpha \int_{\Omega} |\Delta(\rho^0 - \rho^\tau)|^2(t, x) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \Delta(\rho^0 - \rho^\tau) \left(\rho^\tau \operatorname{div}(v_T^\tau - u^\tau) + \nabla \rho^\tau (v_T^\tau - u^\tau) \right)(t, x) dx \\ &\leq -\alpha C_p \int_{\Omega} |\nabla(\rho^0 - \rho^\tau)|^2(t, x) dx \\ &\quad + \|v_T^\tau - u^\tau\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)} \int_{\Omega} \left| \operatorname{div}(\rho^\tau \Delta(\rho^0 - \rho^\tau)) + \nabla \rho^\tau \right|(t, x) dx \end{aligned}$$

Donc la norme du gradient est bornée par une fonction de τ qui tend vers 0. ■

Ce modèle exhibe donc bien toutes les propriétés attendues.

6.5 Simulations numériques du modèle

Dans cette dernière section, nous allons procéder à différentes expériences numériques pour étudier les propriétés qualitatives du modèle d'occupation de zone.

6.5.1 Comparaison des simulations micro- et macroscopiques

Comme nous l'avons fait dans le chapitre précédent, nous allons illustrer numériquement le résultat du théorème 32, nous indiquant que le modèle macroscopique d'occupation de zone est proche de son équivalent microscopique. L'intérêt de cette expérience est double : elle permet aussi de constater qu'à l'échelle microscopique, les drones occupent bien la zone cible.

En effet, nous n'avons pu montrer la convergence de la flotte vers sa cible qu'à l'échelle macroscopique dans le théorème 31. Pour cela, nous étudierons l'influence du paramètre de reconstruction h , et donc le problème de l'approximation de ρ par $\hat{\rho}$

Nous choisissons une cible immobile gaussienne, donnée par

$$\rho_D(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_D} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\sigma_D}\right).$$

Nous utiliserons le schéma numérique Runge-Kutta 4 pour le modèle microscopique (6.10), et le schéma MUSCL défini dans le chapitre 5 pour le modèle macroscopique (6.7). Nous utiliserons les paramètres suivants :

Objet	Notation	Valeur
Nombre de drones	N	49
Temps de simulation	T	100
Pas de temps	Δt	0.001
Intervalles en espace	$N_x = N_y$	50
Variance de la cible	σ_D	10
Paramètre d'inertie	τ	0.5
Amplitude de la vitesse cible	α	10
Variance de la reconstruction	h	1.0

Pour les conditions initiales, nous répartissons $N = 49$ drones immobiles sur une grille carrée de côté 10 centré à l'origine. La condition initiale macroscopique est la densité reconstruite à l'origine $\hat{\rho}_0$. Les bornes du domaine de simulation fluide sont déterminées par les positions maximales et minimales que prennent les drones tout au long du vol. Les conditions initiales sont données en figure 6.2.

Les figures sont divisées en trois parties. La première représente l'état de la flotte microscopique soumise au modèle (6.10), avec en fond la densité cible ρ_D . La deuxième partie représente la densité reconstruite $\hat{\rho}$ définie en (6.9) à partir du modèle microscopique. La troisième partie représente la densité du modèle macroscopique (6.7).

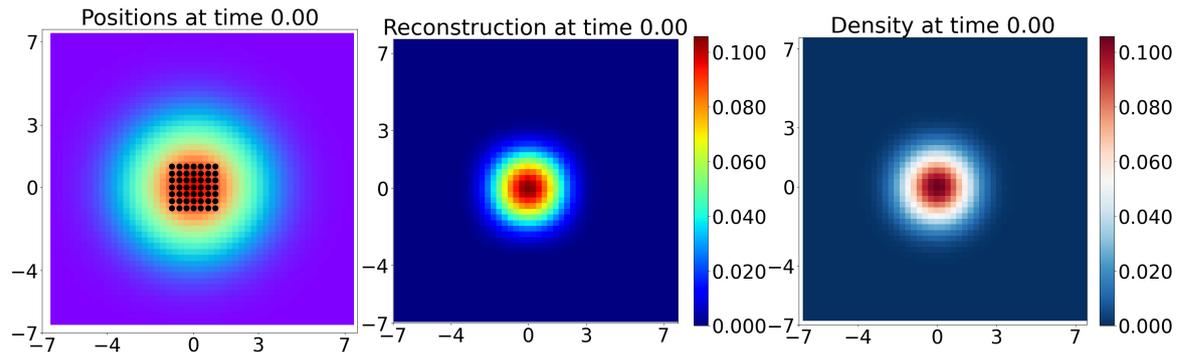


FIGURE 6.2 – État initial des différentes échelles de représentation d'une flotte pour la force d'occupation d'une zone gaussienne. De gauche à droite : le modèle microscopique avec la cible en fond, la densité reconstruite $\hat{\rho}$, et la densité macroscopique ρ .

Nous donnons en figure 6.3 l'évolution de la flotte jusqu'au temps final $T = 100$ s. Nous voyons que la zone est recouverte de manière homogène par la flotte, et que les deux densités sont semblables à la densité cible.

Plus précisément, à l'échelle macroscopique, le centre et la périphérie de la cible sont respectés, alors que dans la reconstruction, le centre est trop large, et la densité s'étale plus loin. Ceci s'explique, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, par un choix du paramètre de reconstruction h trop grand. Nous voyons qu'ici, puisque nous utilisons cette reconstruction dans la loi de commande, il est nécessaire d'étudier l'influence de ce paramètre sur la couverture de la zone. Ce sera l'objet de la prochaine section.

Nous précisons la notion de convergence vers la cible en donnant dans la figure 6.4 l'évolution de la norme $L^2(\Omega)$ entre ces densités et la densité cible au cours du temps.

Nous observons que conformément à l'énoncé du théorème 30, la norme de la différence converge vers une constante, et non pas vers 0, à cause de l'inertie τ et de l'approximation réalisée par $\hat{\rho}$.

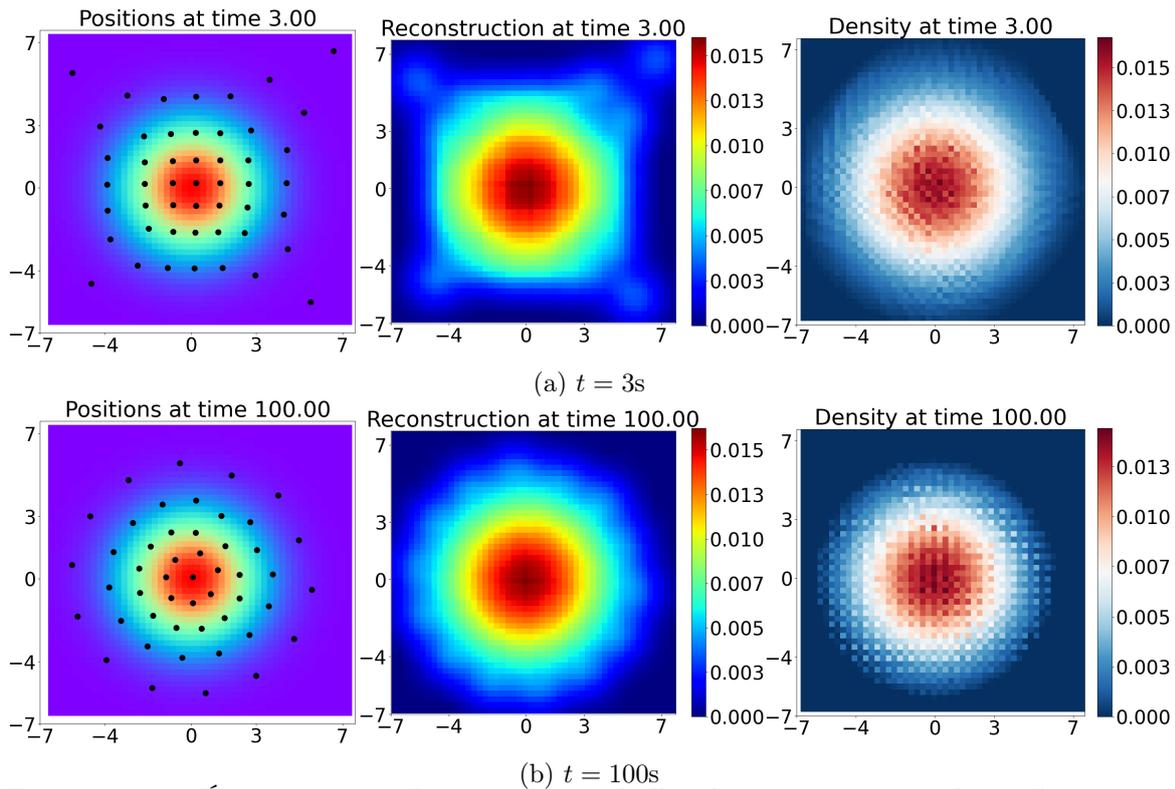


FIGURE 6.3 – États au cours du temps des échelles de représentation d’une flotte pour la force d’occupation d’une zone gaussienne. De gauche à droite : le modèle microscopique avec la cible en fond, la densité reconstruite $\hat{\rho}$, et la densité macroscopique ρ .

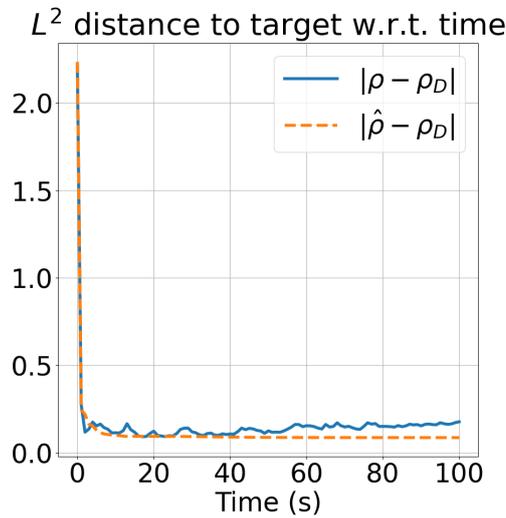


FIGURE 6.4 – Évolution de l’écart en norme L^2 entre la densité reconstruite $\hat{\rho}$ (courbe pointillée) ou la densité macroscopique ρ (courbe pleine) et la densité cible ρ_D .

Nous constatons donc que comme annoncé, le modèle macroscopique donne une représentation satisfaisante de la flotte de drones. Or, pour une mission d’occupation de zone, la position précise de chaque drone n’est pas importante. Ceci, couplé au fait que le calcul de la densité approximée $\hat{\rho}$ nécessaire pour l’échelle microscopique est très coûteux et proportionnel à la taille de la flotte, nous conforte dans l’utilisation du modèle macroscopique pour effectuer rapidement des simulations de vol de grandes

flottes afin d'optimiser à l'avance les différents paramètres du modèle.

Comme annoncé plus haut, nous allons nous intéresser dans la section suivante aux deux paramètres jouant sur le positionnement des drones sur la zone, h et N .

6.5.2 Recherche des paramètres de reconstruction optimaux

En pratique, nous avons besoin de calibrer les paramètres de la flotte microscopique en fonction de la cible. Les deux paramètres qui joueront sur la position des drones à l'équilibre, et donc la qualité de leur occupation de la cible, sont le nombre de drones N et la largeur de la gaussienne pour la reconstruction de la densité h . En effet, nous ne pouvons pas recouvrir une piscine avec un million de drones, ou occuper un bras de mer avec une dizaine d'agents, à moins qu'ils soient extrêmement proches ou éloignés.

Afin d'illustrer cette dépendance, nous allons étudier plusieurs simulations d'occupation de zone à l'échelle microscopique vers une cible. Nous allons faire varier N et h , et comparer l'écart entre la densité reconstruite et la densité cible à l'équilibre en norme L^2 en calculant la quantité

$$\mathcal{P} := \|\hat{\rho}(\infty) - \rho_D\|_{L^2(\Omega)}.$$

Le but est de savoir s'il existe une paire (N, h) minimisant cet écart.

Nous allons initialement répartir les drones immobiles sur une grille carrée comme en figure 6.2, mais cette fois-ci le carré sera de côté 1. Nous utiliserons un pas de temps $\Delta t = 0.001s$, et réutilisons la cible gaussienne ρ_D de la section précédente, avec une variance $\sigma_D = 1$. Le graphe de la figure 6.5 représente l'évolution de \mathcal{P} en fonction de $h \in [0.1, 1.5]$, pour plusieurs valeurs de $N \in \{9, 25, 49, 100\}$.

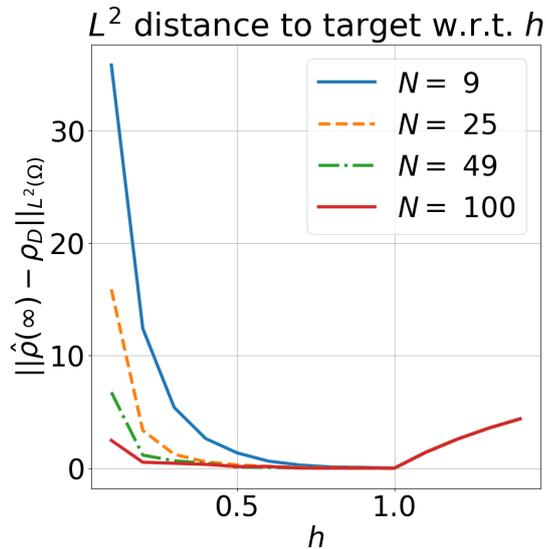


FIGURE 6.5 – Évolution de l'écart entre la densité reconstruite $\hat{\rho}$ et la densité cible ρ_D en norme L^2 à l'équilibre en fonction du paramètre de reconstruction h , pour plusieurs tailles de flotte.

Nous remarquons tout d'abord que toutes les courbes se rejoignent au point où $h = 1$. Ceci vient du fait que plus h augmente, et plus la gaussienne de la reconstruction \mathcal{G}_h se rapproche de la densité cible ρ_D . Ainsi, au moment critique où $h = \sigma_D$, il est

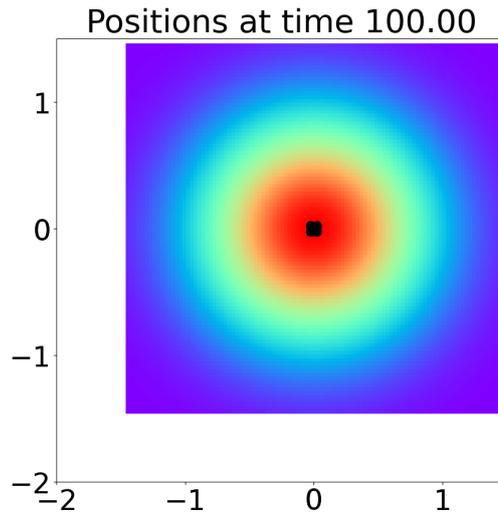


FIGURE 6.6 – Répartition des drones sur la cible colorée dans le cas $N = 100$, $h = 1$.

plus efficace pour tous les drones d'être à la même position, de sorte que $\hat{\rho} = \rho_D$. Nous représentons la formation finale pour ce cas dans la figure 6.6. Si $h > 1$, alors les drones convergent toujours sur la même position, mais $\hat{\rho}$ ne correspond plus à ρ_D , et l'écart en norme L^2 se creuse.

Ceci nous montre que pour obtenir une occupation de zone réaliste, nous avons besoin de choisir h très petit devant σ_D . En d'autres termes, nous avons besoin que h soit plus petit que les variations de ρ_D , sinon il sera impossible de capturer ces dernières.

Le second point que nous pouvons observer dans la figure 6.5 est que pour une petite valeur de h fixée, \mathcal{P} diminue lorsque N augmente. Ceci correspond au fait que plus h est petit et N grand, et plus la reconstruction est fidèle au modèle macroscopique. Nous donnons dans la figure 6.7 l'évolution de \mathcal{P} pour $h = 0.1$ en fonction de N . Nous voyons qu'en effet, \mathcal{P} converge rapidement vers une faible constante strictement positive. Nous n'atteignons pas 0 à cause de l'inertie et de l'approximation effectuée.

Nous donnons dans la figure 6.8 la formation des drones correspondant à l'expérience précédente lorsqu'un petit h est choisi et que nous augmentons le nombre de drones.

Nous voyons que pour cette faible valeur de h , augmenter N améliore la qualité de l'occupation. En effet, au départ dans la figure 6.8(a), $N = 25$ drones ne suffisent pas à couvrir la zone, alors que dans la figure 6.8(b), $N = 100$ drones permettent de couvrir toute la surface. Cependant, la variation de ρ_D n'est pas bien capturée dans ce cas : nous observons que les drones au centre sont légèrement plus serrés. Cette tendance est beaucoup plus marquée dans le cas $N = 400$ que nous pouvons observer dans la figure 6.8(c), où nous voyons clairement une différence de densité entre le centre de la cible et le bord. Les quelques drones loin de la cible ont été placés ici lors de la phase de dispersion. Or quand ils sont aussi loin de la cible, puisque h est petit et que ρ_D est faible, ils mettront beaucoup de temps à revenir sur le cœur de la cible.

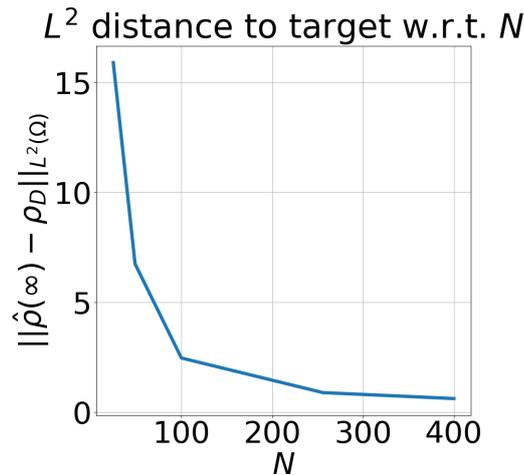


FIGURE 6.7 – Évolution de l'écart entre la densité reconstruite $\hat{\rho}$ et la densité cible ρ_D en norme L^2 à l'équilibre en fonction du nombre de drones N pour $h = 0.1$.

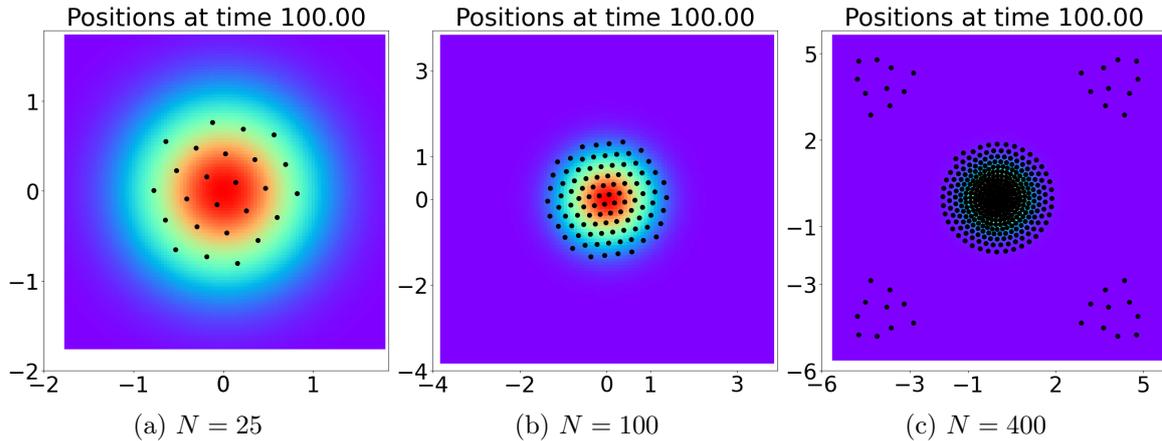


FIGURE 6.8 – Formation finale du modèle d'occupation de zone microscopique selon le nombre de drones N pour $h = 0.1$.

En conclusion, il faut calibrer N et h en fonction de la complexité de la zone cible. Si la densité cible varie beaucoup, un petit h sera nécessaire pour permettre aux drones d'être plus rapprochés. Cela leur permettra de retranscrire les variations de densité fines. Cependant, afin de couvrir l'intégralité de la zone, un grand nombre de drones sera nécessaire. Au contraire, si la densité cible est presque constante, un plus grand h peut être choisi, et il ne sera pas nécessaire d'employer beaucoup d'agents. Dans ce cas de densité cible gaussienne, il n'y a donc pas de paire (N, h) optimale, et plus nous raffinons, mieux la cible est couverte au sens L^2 .

Toutefois, il n'y a pas que ces paramètres à optimiser. Il reste les paramètres d'inertie τ et l'amplitude α . Ils interviennent sur la vitesse de convergence vers la cible, et pas sur l'équilibre de la flotte. Il est également intéressant d'optimiser cette vitesse de convergence, pour couvrir le plus rapidement possible la zone cible, et ainsi économiser des ressources. C'est ici que la simulation macroscopique intervient, puisqu'elle est plus rapide que sa contrepartie microscopique pour un grand nombre de drones. Nous pourrions donc tester à l'avance de nombreux paramètres τ, α , et choisir ceux donnant la meilleure vitesse de convergence. Ensuite, nous pourrions

réaliser des simulations à l'échelle microscopique pour optimiser la couverture de la zone avec les paramètres N, h .

Ce temps de convergence de la flotte vers son équilibre est en général très long, à cause de la première phase du vol pendant laquelle les drones se dispersent afin de trouver la cible. En effet, lorsque $\rho_D = 0$, la flotte ne fait que s'espacer. Cela est particulièrement visible dans le modèle à une équation, qui se réduit si α est constante et si $\rho_D(t, x) = 0$ à $\partial_t \rho(t, x) = \alpha \Delta \rho(t, x)$, qui est une équation de diffusion, comme nous l'avons vu dans la preuve du théorème 26.

Pour accélérer la phase de recherche, nous voulons maximiser le coefficient α lorsque ρ_D est petit, et revenir à un niveau normal lorsque la zone cible est proche. Cela permet également d'accélérer la convergence des drones éloignés de la cible sans affecter les drones qui seraient déjà dessus. Nous proposons donc le coefficient suivant, qui dépend de la densité cible ρ_D , qui entre dans les hypothèses des théorèmes que nous avons proposé :

$$\alpha(t, x) := \alpha_0 + (\alpha_{max} - \alpha_0)e^{-\lambda \rho_D(t, x)}. \quad (6.13)$$

$0 < \alpha_0 < \alpha_{max}$ sont respectivement la limite à l'infini de α et sa valeur maximale, atteinte lorsque la densité cible est nulle. Comme α décroît avec ρ_D , la plus petite valeur du coefficient est atteinte lorsque ρ_D est maximale :

$$\alpha_{min} = \alpha(\|\rho_D\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}).$$

Si nous voulons choisir explicitement le minimum du coefficient, nous pouvons jouer sur λ , en choisissant α_{min} et en fixant

$$\lambda = \frac{1}{\|\rho_D\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}} \log \left(\frac{\alpha_{max} - \alpha_0}{\alpha_{min} - \alpha_0} \right).$$

Un graphe récapitulatif est donné dans la figure 6.9.

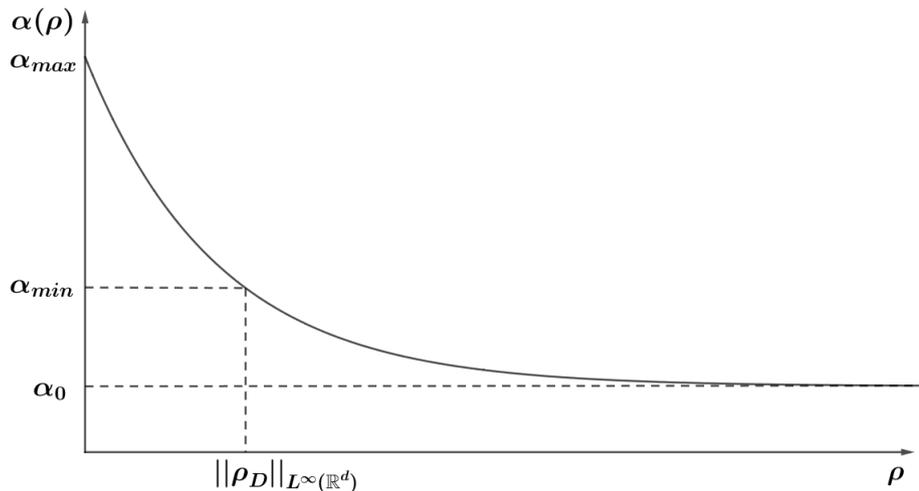


FIGURE 6.9 – Illustration de la fonction α pour accélérer la convergence vers la cible.

Cependant toute cette optimisation des paramètres dépend de la forme de la cible. Si nous n'étudions pas ici de méthode d'optimisation systématique de ces paramètres, nous proposons dans la section suivante d'observer comment se comporte la flotte en cas de forme de cible plus complexe.

6.5.3 Étude de l'impact de la forme de la cible sur son recouvrement

Étudions la qualité de la convergence du modèle microscopique (6.10) vers la cible en fonction de différentes propriétés de la zone.

Dans ce but, nous allons d'abord utiliser une cible en forme de disque de rayon \tilde{R} pour étudier l'impact d'une cible à support compact à longue distance, c'est-à-dire :

$$\rho_{dis}(x) = \frac{3}{\pi \tilde{R}^2} \left(\frac{|x|^2}{\tilde{R}^2} - 1 \right)^2 \mathbb{1}(|x| < \tilde{R}).$$

Dans ce cas, nous plaçons $N = 49$ drones sur un carré de côté 10, centré en $-(5, 5)$, afin d'étudier le comportement de la flotte si elle est initialement loin d'une cible à support compact. Nous voyons dans la figure 6.10 que seuls les drones initialement proches de la cible se sont positionnés correctement, alors que le reste de la flotte s'est dispersé. Nous pouvons nous y attendre, puisque comme dit plus haut, dès que la densité cible est nulle en une position de l'espace, les drones s'espacent puis s'arrêtent, faute de gradient qui leur indique une direction à suivre.

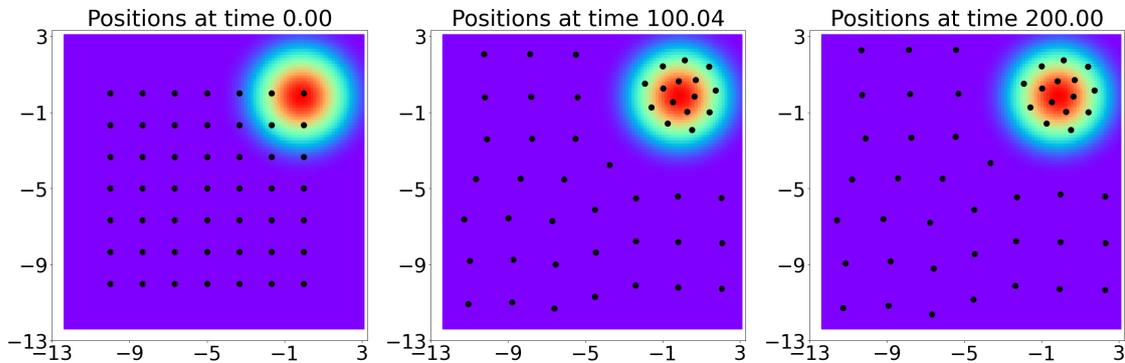


FIGURE 6.10 – Formation du modèle d'occupation de zone pour la cible ρ_{dis} au cours du temps.

Si nous comparons avec la même expérience avec une cible gaussienne dans la figure 6.11, nous voyons bien que tous les drones convergent dessus, puisque la densité cible est strictement positive sur tout l'espace. Nous en déduisons que si nous connaissons la position approximative d'une cible à support compact, il est nécessaire de guider la flotte vers la cible, pour accélérer la couverture de cette dernière. Si la position de la cible est inconnue, alors la force initiale reste suffisante, puisque les drones se dispersent jusqu'à la retrouver, mais cela peut requérir beaucoup de temps selon la vitesse de diffusion de l'essaim.

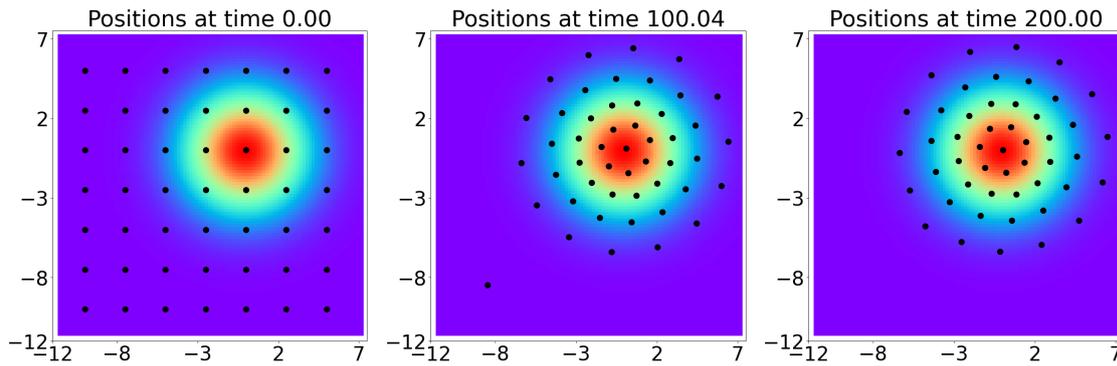


FIGURE 6.11 – Formation du modèle d'occupation de zone pour la cible ρ_D au cours du temps.

Étudions ensuite une cible en anneau ρ_{ann} , pour voir comment les drones se répartissent s'il y a un trou dans la cible. Si l'anneau s'étend entre $0 < r_2 < r_1$, alors nous notons $R := (r_1 - r_2)/2, \eta := (r_1 + r_2)/2$, et la densité cible est donnée par

$$\rho_{ann}(x) = \frac{15}{32\pi R\eta} \left(\left(\frac{|x| - \eta}{R} \right)^2 - 1 \right)^2 \mathbb{1}(r_2 < |x| < r_1).$$

Nous disposons les $N = 49$ drones immobiles sur une grille carrée de côté 2 centrée à l'origine, et choisissons $r_1 = 15, r_2 = 7$. Ainsi, nous voyons dans la figure 6.12 que les drones, initialement dans la zone intérieure de l'anneau où ρ_{ann} est nulle, se dispersent puis remplissent la zone. Cependant, nous voyons qu'il reste des drones au centre. Ceci est dû à la condition initiale.

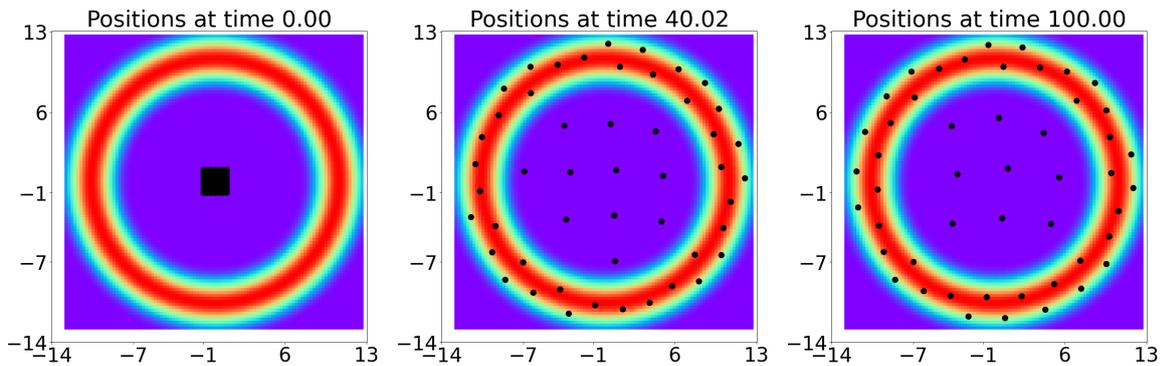


FIGURE 6.12 – Formation du modèle d'occupation de zone pour la cible ρ_{ann} au cours du temps, avec une condition initiale en carré de côté 2.

En effet, nous voyons que tous les drones peuvent tenir dans la zone si nous les posons initialement sur un cercle de rayon 10, comme illustré en figure 6.13. La raison pour laquelle les drones restent au centre dans le premier cas est qu'ils sont assez éloignés entre eux pour ne plus avoir à se disperser, et qu'ils sont à un endroit où la cible est nulle, donc aucune force n'agit sur eux.

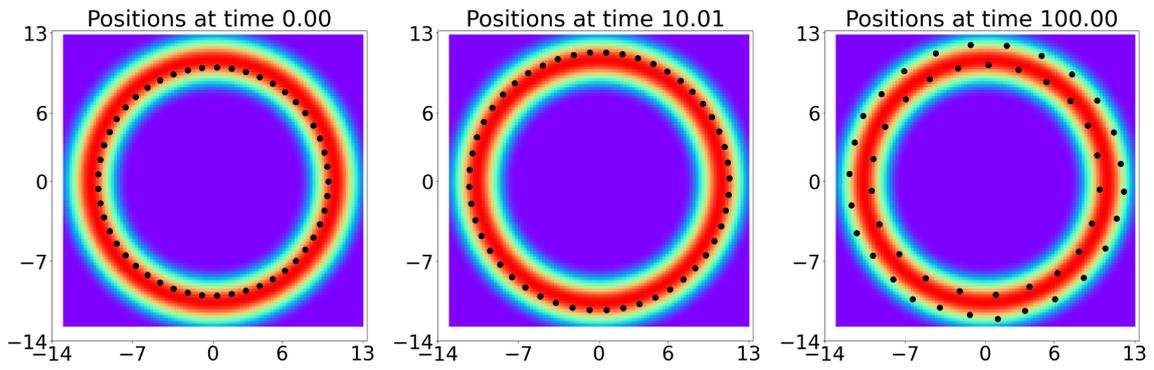


FIGURE 6.13 – Formation du modèle d’occupation de zone pour la cible ρ_{ann} au cours du temps, avec une condition initiale circulaire de rayon 10.

Pour finir, utilisons une cible ρ_{coi} présentant des points singuliers, pour déterminer si une cible moins régulière est aussi bien couverte que les autres. La densité associée est donnée par :

$$\rho_{coi}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathcal{C}, \\ \exp(-0.01(d\mathcal{C}(x))^2), & \text{sinon.} \end{cases},$$

où $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ est la forme délimitée par la courbe Γ si dessous, et $d\mathcal{C}(x)$ représente la distance entre le bord de \mathcal{C} et x .

$$\Gamma = \{(16 \sin^3(s), 13 \cos(s) - 5 \cos(2s) - 2 \cos(3s) - \cos(4s)), s \in [0, 2\pi)\}.$$

Dans ce dernier cas, nous prenons une condition initiale en grille carrée de côté 40. Ici, la cible présente un coin à remplir en bas, et une singularité à éviter en haut. Nous pourrions nous attendre à ce que ces zones ne piègent pas correctement les drones. Or nous voyons dans la figure 6.14 qu’un drone est envoyé en bas peupler le coin, et que la zone singulière est bien remplie, sans débordement. L’artefact visuel dans la partie supérieure de la cible est dû à la manière de tracer la zone, par une méthode de lancer de rayons qui intersectent la courbe Γ .

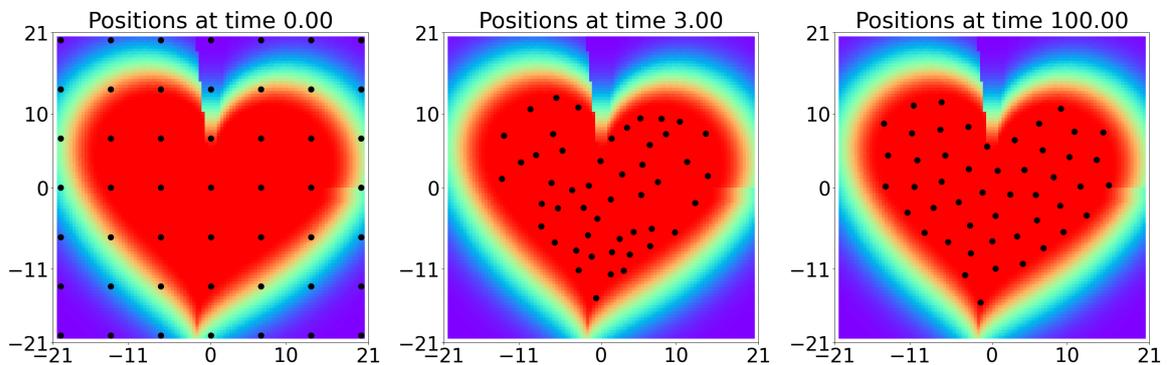


FIGURE 6.14 – Formation du modèle d’occupation de zone pour la cible ρ_{coi} au cours du temps.

Si la régularité de la zone joue un rôle dans l’étude théorique du modèle, en pratique, tant qu’il n’y a pas de forme particulièrement compliquée, alors la zone sera

occupée. Une optimisation des paramètres permettra un recouvrement plus précis, et un temps de convergence vers la cible réduit.

Une fois à l'équilibre, nous remarquons que les drones sont espacés de manière très régulière. Discutons de la possibilité d'éviter les collisions en vol dans la section suivante.

6.5.4 Étude de l'évitement des collisions

Nous observons dans les simulations et plus particulièrement à l'équilibre que les drones ont tendance à s'espacer et à se répartir de manière homogène dans l'espace. Ce modèle permet-il à lui seul d'éviter les collisions entre agents ? Il n'y a pas d'argument théorique simple qui permet d'affirmer que cela sera le cas. En revanche, nous pouvons montrer que si nous ajoutons une force de mimétisme singulière, à l'instar de ce que nous avons fait dans le chapitre 2, alors il n'y a pas de collision en temps fini pour le modèle microscopique associé (6.14), où v_T est défini dans (6.10) :

$$\begin{cases} x'_i(t) = v_i(t), \\ v'_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \psi(r_{ij}(t))v_{ji}(t) + \frac{v_T(x_i(t)) - v_i(t)}{\tau}. \end{cases} \quad (6.14)$$

Théorème 36

Soit $\{(x_i, v_i)\}_{i=1}^N$ une solution de (6.14), où v_T est défini dans (6.10), pour ψ positive, continue et décroissante, et des conditions initiales telles que $x_{ij}(0) \neq 0$ pour tout $1 \leq i \neq j \leq N$.

S'il existe $r_0 > 0$ tel que $\int_0^{r_0} \psi(r)dr = \infty$, et si nous supposons que

$$\forall T > 0, \exists C > 0 \text{ t.q. } \forall t < T, \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad |v_T(x_i(t))| < C,$$

alors les agents n'entrent pas en collision :

$$\forall t \geq 0, \quad \forall 1 \leq i \neq j \leq N, \quad x_i(t) \neq x_j(t).$$

Afin d'obtenir notre résultat amélioré donnant l'existence d'une distance de sécurité uniforme en temps, il nous faudrait plus de connaissances sur la vitesse de convergence vers l'équilibre du modèle microscopique. La preuve est identique à celle du théorème 17 dans le chapitre 2, nous en indiquons seulement les éléments principaux.

Démonstration : Comme nous l'avons fait à plusieurs reprises, supposons qu'il y a une collision avec le drone l au temps fini T , et définissons l'ensemble des drones entrant en collision comme

$$\mathcal{L} := \{j \in \llbracket 1, N \rrbracket \mid \exists (t_n)_{n=1}^\infty, r_{lj}(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0\}.$$

Si nous étudions l'évolution de $|V|_{\mathcal{L}}(t) = \sqrt{\sum_{i,j \in \mathcal{L}} |v_{ij}(t)|^2}$, seul un terme est ajouté

par la force d'occupation de zone, que nous estimons de la façon suivante :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\tau} \sum_{i,j \in \mathcal{L}} |v_i - v_j|^2 + \frac{1}{\tau} \sum_{i,j \in \mathcal{L}} \langle v_i - v_j, v_T(x_i) - v_T(x_j) \rangle &\leq \frac{1}{\tau} \sqrt{\sum_{i,j \in \mathcal{L}} |v_i - v_j|^2} \\ &\quad \times \sqrt{\sum_{i,j \in \mathcal{L}} |v_T(x_i) - v_T(x_j)|^2} \\ &\leq \frac{1}{\tau} |V|_{\mathcal{L}} C_{\tau}. \end{aligned}$$

En suivant le même raisonnement que précédemment, il ne reste plus qu'à évaluer une primitive Ψ de ψ le long de $|X|_{\mathcal{L}} = \sqrt{\sum_{i,j \in \mathcal{L}} r_{ij}^2(t)}$. Pour tout $t \in [t_0, T]$,

$$|\Psi(|X(t)|_{\mathcal{L}})| \leq |\Psi(|X(t_0)|_{\mathcal{L}})| + \frac{N(|V(t_0)|_{\mathcal{L}} + CT)}{4|\mathcal{L}|} < \infty,$$

et nous concluons sur une contradiction grâce à la singularité de l'intégrale de ψ en 0. ■

Un autre résultat proche serait de montrer que ce modèle empêche la flotte de s'écrouler sur elle-même. C'est-à-dire montrer qu'il est impossible que tous les drones se retrouvent à la même position. Pour cela, nous aurions besoin de déterminer une borne uniforme sur $\|\hat{\rho}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)}$ en fonction des conditions initiales, telle que pour tout drone $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $\hat{\rho}(x_i) < 1$. Ceci empêcherait les drones de tous s'empiler à la même position, et de concentrer toute la densité au même point.

Un tel argument ne permettrait pas de démontrer l'absence de collision au cours du temps. En effet, nous caractériserions alors une borne $0 < C < 1$ telle que $\|\hat{\rho}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}(t) \leq C$ impliquerait que les agents sont assez espacés. Cependant, si deux drones venaient à occuper la même position en entrant en collision, rien n'empêche le pic de densité obtenu d'être négligeable devant l'accumulation du reste de la densité de la flotte pour un grand nombre de drones.

6.5.5 Stabilité de la formation finale

Maintenant que nous savons comment se comporte ce modèle, ajoutons un effet lié à l'environnement afin d'étudier la robustesse de la formation du modèle microscopique (6.10) sur la cible face à des perturbations.

Nous allons simplement utiliser un point d'obstacle $x_{obs}(t)$ se déplaçant avec une trajectoire circulaire :

$$x_{obs}(t) = 1.5(\cos(10t), \sin(10t)).$$

Nous utiliserons comme potentiel de répulsion face à un obstacle $\phi(r) = r^2/2$, et comme cible un disque ρ_{dis} de rayon 5. Nous plaçons initialement les $N = 49$ drones immobiles sur une grille carrée centrée sur l'origine, de côté 4. Les paramètres de la force sont $h = 0.5$, $\alpha = 10$ et $\tau = 0.5$. Nous donnons en figure 6.15 quelques répartitions de la flotte au cours du temps.

Nous constatons que faire passer un obstacle à travers la zone ne perturbe pas son occupation, et que les drones évitent l'obstacle. Bien sûr, il est possible de créer un

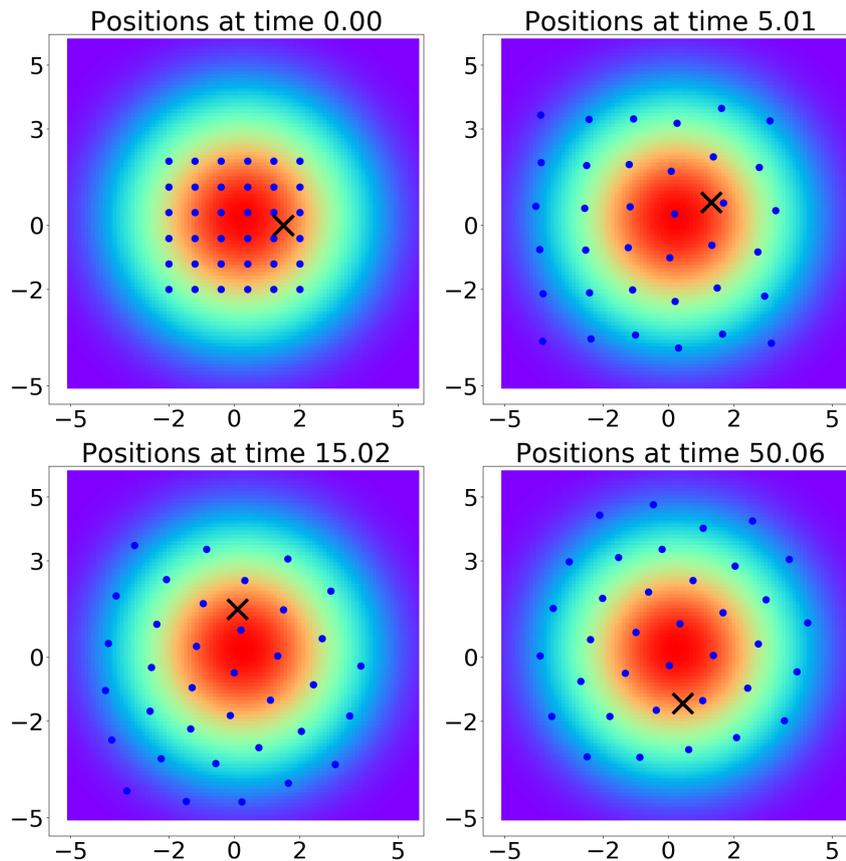


FIGURE 6.15 – Formations au cours du temps du modèle d'occupation de zone en présence d'une cible, représentée par une croix.

obstacle se déplaçant assez vite pour percuter nos drones. Tout est question d'équilibre entre les forces, comme nous l'avons détaillé dans le chapitre 3. Néanmoins, ce résultat numérique suggère que malgré la présence d'obstacles, la zone sera toujours majoritairement occupée si les forces sont équilibrées.

6.6 Conclusion du chapitre

Ce dernier chapitre était consacré à l'élaboration et l'étude d'un modèle permettant d'occuper une zone définie par une densité cible ρ_D . Notre modèle est inspiré de la littérature. Nous avons adapté les idées existantes à notre cadre utilisant un modèle à deux équations, de type Euler.

Nous avons montré dans les théorèmes 30 et 31 qu'à l'échelle macroscopique, la densité de la flotte converge en temps long dans L^2 vers la densité cible, à une constante près. Nous avons démontré que cette constante est proportionnelle à l'inertie, à la différence de masse entre la flotte et la cible, ou encore à la vitesse de la cible si cette dernière est en mouvement. En pratique, la zone est recouverte et la différence est minime.

Dans la section 6.4, nous avons montré les liens entre les échelles micro- et macroscopique, mais aussi établi le lien avec le modèle de la littérature dont nous nous sommes inspirés. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 4, les deux échelles de représentation sont proches si le nombre de drones est assez important. De plus, notre

modèle à deux équations se réduit au modèle à une équation lorsque le paramètre d'inertie τ tend vers 0.

Grâce aux simulations numériques de la section 6.5, nous avons pu dégager plusieurs propriétés de notre modèle. Tout d'abord, nous avons vu l'intérêt des simulations macroscopiques. En effet, elles sont plus efficaces pour ce modèle, puisque nous ne nous intéressons pas à la position des drones, seulement à la qualité de la couverture de la zone cible. Les simulations microscopiques sont ici extrêmement coûteuses, à cause du besoin de calculer une densité locale à partir des positions des drones, tandis que les simulations macroscopiques nous donnent un accès direct à cette quantité, et ne dépendent que de la finesse du maillage. Nous avons donc accompli l'objectif de la thèse : avoir une méthode permettant de représenter efficacement les grandes flottes de drones, afin de pouvoir les simuler rapidement pour optimiser les paramètres de la flotte avant la mission.

Les simulations ont également permis de mettre en évidence le besoin opérationnel d'optimiser le nombre de drones N et le paramètre de reconstruction de la densité h en fonction de la densité cible. En effet, si les variations dans l'espace de la densité cible sont grandes, il est nécessaire de diminuer h pour que les drones puissent se rapprocher. Cela permet à la densité reconstruite d'avoir des variations plus grandes, et ainsi mieux correspondre à la densité cible.

Si le but est simplement de placer des drones dans une zone, sans s'occuper de la densité locale, alors le choix de h et N est à la discrétion de l'opérateur. Dans ce cas, les drones se répartissent pour occuper le plus d'espace possible. Le paramètre h sert alors à fixer la distance entre les drones, et le nombre d'agents N déterminera la surface couverte.

Enfin, nous avons pu confirmer qu'une zone avec une forme moins régulière avec des coins, ou encore un trou, est correctement occupée grâce à ce modèle. C'est aussi le cas si des obstacles sont présents sur la zone.

Le travail effectué sur ce modèle peut être poursuivi de nombreuses manières. Tout d'abord, il manque à l'heure actuelle un résultat d'existence de solution pour notre modèle d'occupation de zone macroscopique. L'écueil principal réside dans les exigences de régularité sur ρ imposées par notre modèle qui fait intervenir le gradient de ρ dans la définition de la vitesse cible.

Ensuite, nous n'avons pas de preuve de comportement en temps long à l'échelle microscopique. Une piste à explorer serait de relier la densité reconstruite à la densité empirique. Nous pourrions alors utiliser l'équation cinétique résolue par cette dernière afin d'étudier une possible convergence vers la densité cible.

Toujours à l'échelle microscopique, nous pourrions nous intéresser à l'évolution de la flotte dans le cas où les drones ne peuvent reconstituer qu'une fraction de la densité avec leurs plus proches voisins. Ceci serait plus représentatif d'une situation réelle, et allégerait le coût de calcul associé à la reconstruction.

Une autre problématique laissée en suspens est la question de l'évitement des collisions. Comme les drones ont tendance à se répartir uniformément dans l'espace, nous pourrions peut être montrer que les collisions sont évitées en vol. Nous remarquons que cette force permet d'obtenir une formation de vol en réseau de manière plus systématique et fiable qu'avec la force du chapitre 3.

D'autres généralisations intéressantes seraient de se pencher sur l'ajout de délai,

de bruit, ou encore d'étudier ce qu'il se passe si la masse de la cible ou de la flotte sont variables au cours du temps. Cela permettrait de représenter une flotte perdant ou gagnant des agents au cours du temps, ou une cible plus dynamique, comme un autre essaim de drones.

Tout ceci ouvre la porte à des applications plus complexes de cette force en pratique, pour gérer la formation de la flotte autour d'un leader, défendre une zone contre un envahisseur, ou encore neutraliser un essaim de drones malveillant. Par exemple, une zone en forme de croissant peut capturer et contrôler un intrus. Si des drones sont détruits dans l'opération, d'autres peuvent les remplacer et permettre au croissant de maintenir sa présence, sans avoir besoin de changer les lois de commande ou les paramètres de la flotte.

Conclusion

Ce travail est dédié au développement d'un modèle d'évolution de flottes de drones autonomes. Ce modèle devait permettre de considérer les limitations techniques propres aux drones, comme la nécessité d'éviter les collisions, ou le fait d'avoir une capacité de communication limitée. Nous étions plus particulièrement intéressés par de grandes flottes, qui évoluent de manière décentralisée. Cela implique de nombreux drones identiques embarquant peu de technologies, et devant prendre des décisions eux-mêmes par leurs lois de commandes, à partir de leurs observations. Par conséquent, le modèle devait être simple.

Comme nous avons détaillé les résultats et les problèmes ouverts en fin de chaque chapitre, nous proposons ici un récapitulatif des points importants du manuscrit.

Résultats

Dans le chapitre 1, après avoir défini et décrit comment modéliser nos drones, nous avons identifié dans la bibliographie un modèle microscopique simple de consensus pour servir de base à notre modèle complet. Nous avons sélectionné un modèle de type Cucker-Smale, puisqu'il est très simple d'expression, et qu'il permet, en l'absence d'autres forces, d'aligner exponentiellement vite les drones sur une vitesse commune. De plus, plusieurs études ont déjà été menées sur des variantes incorporant des limitations techniques propres aux drones, comme un graphe de communication non complet.

Nous avons ensuite approfondi l'étude de ce modèle en étudiant quelques caractéristiques complémentaires. En effet, nous nous sommes ensuite intéressés dans le chapitre 2 à l'évitement de collision pour des flottes de drones se repérant grâce au flot optique. Ces flottes peuvent être représentées par un modèle de Cucker-Smale. En particulier, nous avons montré que dans le cas du flot optique, il existe une distance inter-drones minimale, strictement positive et uniforme en temps entre les drones. Ceci améliore les résultats connus, qui ne démontraient l'existence d'une telle distance que sur des intervalles de temps finis, ce qui pouvait donner lieu à des collisions en temps long. De plus, nous avons généralisé notre résultat aux cas où le graphe de communication de la flotte n'est pas complet, s'il y a une incertitude sur la mesure du flot optique, ou si nous ajoutons d'autres lois de commandes particulières.

Une fois notre modèle de base étudié, nous avons ajouté d'autres lois de commande à notre flotte dans le chapitre 3. L'ajout le plus intéressant pour consolider le modèle de base était la loi d'attraction-répulsion, permettant de donner une formation de vol à la flotte, c'est-à-dire la distribution des drones dans l'espace à l'équilibre en temps long. En étudiant ses propriétés, nous avons ajouté une troisième loi de commande, donnant ainsi le modèle trois-zones-croisé. Cette loi de commande a permis de réduire les oscillations des drones dues à la loi d'attraction-répulsion, mais aussi d'accélérer la

convergence de la flotte vers sa formation de vol. Nous avons ensuite mis en évidence les liens entre le potentiel d'interaction et la formation de vol qui en découle.

En effectuant les simulations de nos modèles, nous avons constaté la rapide montée en temps de calcul lorsque le nombre de drones augmente. Nous avons également constaté que le comportement global d'une flotte reste le même lorsque plus d'agents sont employés. Ceci nous a suggéré de changer d'échelle de représentation, pour représenter plus simplement une flotte, et gagner en temps de calcul sur des missions complexes avec de nombreux agents.

Le chapitre 4 était donc dédié à l'obtention de ce type de modèle, appelé macroscopique, ainsi qu'à la comparaison théorique entre cette nouvelle échelle de représentation avec l'échelle microscopique utilisée jusqu'à présent. Nous y avons adapté une technique existante à notre nouvelle loi de commande. Le résultat obtenu a confirmé que les deux échelles de modélisations sont proches si le nombre de drones utilisé est grand. Nous avons de plus montré les propriétés qualitatives les plus importantes des modèles microscopiques, comme la forme de la flotte ou son comportement en temps long, sont préservées en passant d'une échelle de représentation à l'autre.

Nous avons effectué des simulations numériques pour mieux comparer les échelles de représentations micro et macroscopique dans le chapitre 5. Nous avons ainsi validé les résultats du chapitre 4, et mis en avant le fait que pour de très grandes flottes, la simulation fluide est plus rapide que sa contrepartie microscopique.

Enfin, grâce aux nouvelles variables de modélisation apportées par l'échelle macroscopique, nous avons défini un nouveau modèle permettant d'occuper une zone définie par une densité cible. Nous nous sommes inspirés d'un modèle récent utilisant cette stratégie d'occupation, mais qui ne correspond pas tout à fait à notre cadre de travail. C'est pourquoi nous l'avons étendu en introduisant la notion d'inertie des drones pour définir une loi de commande appropriée. L'étude théorique de notre modèle effectuée dans le chapitre 6 a permis de montrer que la zone cible est couverte en temps long, mais aussi d'établir les liens avec le modèle de la littérature. Nous avons également utilisé le flot optique étudié dans le chapitre 2 pour montrer qu'il n'y a pas de collision si nous ajoutons la loi de commande associée.

Nous avons constaté dans l'étude numérique du modèle que les simulations à l'échelle macroscopique sont plus rapides qu'à l'échelle microscopique, ce qui confirme l'intérêt du changement d'échelle de représentation vu au chapitre 4. Nous avons également mis en évidence la nécessité d'optimiser les paramètres propres à ce modèle à l'échelle microscopique, pour éviter des formations catastrophiques où tous les drones convergent vers le même point de l'espace. Enfin, nous avons montré que ce modèle permet d'occuper des zones aux contours irréguliers comme des anneaux ou des formes avec des angles.

Problèmes ouverts

Cette étude a ses limites, que nous avons identifiées au fur et à mesure dans les conclusions des chapitres. Pour aller plus loin, il peut en particulier être intéressant de poursuivre l'étude au cas de flottes à taille variable, avec des drones ayant une durée de vie limitée. Cela nécessitera de déterminer s'il y a besoin de revoir l'équilibre entre les différentes lois de commande au cours d'un vol.

Un deuxième axe de poursuite sera d'incorporer du bruit dans nos modèles, pour

représenter des perturbations environnementales, ou des erreurs de mesure. Nous avons entamé cette voie avec le modèle utilisant le flot optique, mais pas pour le modèle d'occupation de zone.

Pour continuer sur le flot optique, il est possible de généraliser notre résultat d'existence d'une distance minimale entre drones du chapitre 2 à d'autres modèles. L'incorporation de délai ou d'un drone leader serait un premier pas, qui nécessiterait de mélanger adroitement les preuves de comportement en temps long de leur modèle respectif avec celui que nous avons présenté. Toutefois, la limitation principale de notre résultat est que l'estimation d'une borne inférieure sur cette distance minimale est un problème ouvert.

En ce qui concerne le modèle trois-zones-croisé du chapitre 3, l'étude théorique de la formation de vol obtenue en fonction du potentiel d'interaction, ainsi que sa stabilité, sont des problèmes ouverts que nous n'avons pas explorés. Nous avons aussi vu que ce modèle est hypocoercif dans des cas spécifiques, sans réussir à le montrer dans un cadre général. Montrer que ce système converge exponentiellement vite vers son équilibre a un intérêt opérationnel important, pour économiser des ressources en vol.

Pour ce qui est du changement d'échelle de modélisation, nous avons du faire un choix de fermeture du système d'équations macroscopique. En utilisant la fermeture la plus simple, nous avons fait une forte approximation. Il serait donc intéressant d'étudier d'autres fermetures, et de comparer qualitativement le modèle obtenu avec celui que nous avons utilisé, afin de voir si l'approximation effectuée est grossière ou non.

Pour finir, nous avons plusieurs pistes pour approfondir nos connaissances sur le modèle d'occupation de zone proposé dans le chapitre 6. Tout d'abord, nous n'avons pas étudié la question de l'existence de solutions au modèle. Ensuite, nous n'avons aucun résultat théorique à l'échelle microscopique. Enfin, l'incorporation d'effets tels que le bruit ou le délai permettrait d'obtenir un modèle plus représentatif des contraintes appliquées à nos drones. Cette loi de commande a de nombreuses applications pratiques, allant de la définition de la formation de vol autour d'un leader, jusqu'à la neutralisation d'une flotte de drones malveillante, ou la protection d'une zone sensible.

En résumé, cette thèse était exploratoire, et ouvre par conséquent de nombreuses pistes pour des travaux ultérieurs. Le sujet de la modélisation de grandes flottes de drones autonomes est très riche, et utile pour de nombreuses applications : le domaine continuera de susciter de plus en plus d'intérêt.

Références

- [1] « Image de drone quadrotor ». https://www.frandroid.com/bons-plans/718142_dji-mavic-mini-amazon-propose-une-belle-reduction-pour-ce-drone-grand-
- [2] S. AHIRWAR, R. SWARNKAR, S. BHUKYA and G. NAMWADE. « Application of drone in agriculture ». *International Journal of Current Microbiology and Applied Sciences*, 8(01) :2500–2505, 2019.
- [3] S. AHN, H. CHOI, S.-Y. HA and H. LEE. « On collision-avoiding initial configurations to Cucker-Smale type flocking models ». *Communications in Mathematical Sciences*, 10, 06 2012.
- [4] X. AI, S. SONG and K. YOU. « Second-order consensus of multi-agent systems under limited interaction ranges ». *Automatica*, 68 :329–333, 2016.
- [5] J. ALONSO-MORA, E. MONTIJANO and T. NÄGELI. « Distributed multi-robot formation control in dynamic environments ». *Autonomous Robots*, 43 :1079–1100, 2019.
- [6] V. AYOT, S. BRULL and P. THIEULLEN. « A Velocity Alignment Collision Model for Spatially Homogeneous Kinetic Collective Dynamics ». *Journal of Statistical Physics*, 190(2) :28, February 2023.
- [7] R. BAILO, J. CARRILLO and P. DEGOND. « Pedestrian models based on rational behavior ». *Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology*, pages 259–292, 01 2018.
- [8] A. BLANCHET and P. DEGOND. « Kinetic Models for Topological Nearest-Neighbor Interactions ». *Journal of Statistical Physics*, 169(5) :929–950, oct 2017.
- [9] F. BOLLEY, J. A. CAÑIZO and J. A. CARRILLO. « Mean-field limit for the stochastic Vicsek model ». *Applied Mathematics Letters*, 25(3) :339–343, mar 2012.
- [10] F. BOLLEY, J. A. CAÑIZO and J. A. CARRILLO. « Stochastic Mean-Field Limit : Non-Lipschitz Forces and Swarming ». *Math Models Methods Appl Sci*, 21, 09 2010.
- [11] M. BOSTAN and J. A. CARRILLO. « Asymptotic Fixed-Speed Reduced Dynamics for Kinetic Equations in Swarming ». *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 23, 02 2012.
- [12] J. BRECHT, D. UMINSKY, T. KOLOKOLNIKOV and A. BERTOZZI. « Predicting pattern formation in particle interactions ». *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 13 :30–3, 01 2011.
- [13] C.-E. BRÉHIER. « Introduction to numerical methods for Ordinary Differential Equations ». Lecture - Cours donné à Pristina (Kosovo), en décembre 2016, dans

- le cadre de l'école de recherche Franco-Kosovarde en Mathématiques, December 2016.
- [14] S. CAMAZINE, J.-L. DENEUBOURG, N. R. FRANKS, J. SNEYD, G. THERAULAZ and E. BONABEAU. *Self-Organization in Biological Systems*, volume 38. Princeton University Press, 2001.
- [15] M. CAMPERI, A. CAVAGNA, I. GIARDINA, G. PARISI and E. SILVESTRI. « Spatially balanced topological interaction grants optimal cohesion in flocking models ». *Interface focus*, 2 :715–725, 08 2012.
- [16] J. A. CAÑIZO, J. A. CARRILLO and J. ROSADO. « A well-posedness theory in measures for some kinetic models of collective motion ». *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 21(03) :515–539, mar 2011.
- [17] J. CARRILLO, Y.-P. CHOI, M. HAURAY and S. SALEM. « Mean-field limit for collective behavior models with sharp sensitivity regions ». *Journal of the European Mathematical Society*, 21, 10 2015.
- [18] J. CARRILLO, Y.-P. CHOI, P. MUCHA and J. PESZEK. « Sharp conditions to avoid collisions in singular Cucker-Smale interactions ». *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, 37, 09 2016.
- [19] J. CARRILLO, M. DORSOGNA and V. PANFEROV. « Double milling in self-propelled swarms from kinetic theory, preprint UAB ». *Kinet. Relat. Models*, 2 :363–378, 06 2009.
- [20] J. CARRILLO, M. FORNASIER, G. TOSCANI and F. VECIL. « Particle, Kinetic, and Hydrodynamic Models of Swarming ». *Mathematical Modeling of Collective Behavior in Socio-Economic and Life Sciences*, pages 297–336, 06 2010.
- [21] J. A. CARRILLO and Y.-P. CHOI. « Mean-Field Limits : From Particle Descriptions to Macroscopic Equations ». *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 241(3) :1529–1573, jun 2021.
- [22] J. A. CARRILLO, Y.-P. CHOI and J. JUNG. « Quantifying the hydrodynamic limit of Vlasov-type equations with alignment and nonlocal forces ». *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 31(2) :327–408, February 2021.
- [23] J. A. CARRILLO, A. COLOMBI and M. SCIANNA. « Adhesion and volume constraints via nonlocal interactions determine cell organisation and migration profiles ». *Journal of Theoretical Biology*, 445 :75–91, 2018.
- [24] J. A. CARRILLO, M. FORNASIER, J. ROSADO and G. TOSCANI. « Asymptotic Flocking Dynamics for the Kinetic Cucker–Smale Model ». *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 42(1) :218–236, 2010.
- [25] M. CARTABIA. « Cucker-Smale model with time delay ». *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 42(5) :2409–2432, 2022.
- [26] P. CATTIAUX, F. DELEBECQUE and L. PÉDÈCHES. « Stochastic Cucker–Smale models : Old and new ». *The Annals of Applied Probability*, 28(5) :3239 – 3286, 2018.
- [27] J. CHO, S.-Y. HA, F. HUANG, C. JIN and D. KO. « Emergence of bi-cluster flocking for the Cucker-Smale model ». *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 26, 02 2016.

- [28] Y.-P. CHOI, S.-Y. HA and Z. LI. « Emergent Dynamics of the Cucker–Smale Flocking Model and Its Variants ». *Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology*, 1 :299–331, 04 2017.
- [29] Y.-P. CHOI and J HASKOVEC. « Cucker-Smale model with normalized communication weights and time delay ». *Kinetic and Related Models*, 10, 08 2016.
- [30] Y.-P. CHOI and J. HASKOVEC. « Hydrodynamic Cucker–Smale Model with Normalized Communication Weights and Time Delay ». *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 51, 07 2017.
- [31] Y.-P. CHOI, D. KALISE, J. PESZEK and A. PETERS. « A Collisionless Singular Cucker–Smale Model with Decentralized Formation Control ». *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 18(4) :1954–1981, 2019.
- [32] Y.-L. CHUANG, M. R. D’ORSOGNA, D. MARTHALER, A. L. BERTOZZI and L. S. CHAYES. « State transitions and the continuum limit for a 2D interacting, self-propelled particle system ». *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 232(1) :33–47, aug 2007.
- [33] I. D. COUZIN, J. KRAUSE, R. JAMES, G. D. RUXTON and N. R. FRANKS. « Collective Memory and Spatial Sorting in Animal Groups ». *Journal of Theoretical Biology*, 218(1) :1–11, 2002.
- [34] F. CUCKER and S. SMALE. « Emergent Behavior in Flocks ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 52 :852 – 862, 06 2007.
- [35] F. CUCKER and S. SMALE. « On the mathematics of emergence ». *Japan J Math*, 2 :197–227, 03 2007.
- [36] P. DEGOND. « Mathematical models of collective dynamics and self-organization ». *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (ICM 2018)*, pages 3925–3946.
- [37] P. DEGOND, G. DIMARCO, T. MAC and N. WANG. « Macroscopic models of collective motion with repulsion ». *Communications in Mathematical Sciences*, 13, 04 2014.
- [38] P. DEGOND, A. FROUVELLE and S. MERINO-ACEITUNO. « A new flocking model through body attitude coordination ». *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 27(06) :1005–1049, 2017.
- [39] P. DEGOND, A. FROUVELLE, S. MERINO-ACEITUNO and A. TRESCASES. « Quaternions in Collective Dynamics ». *Multiscale Modeling & Simulation*, 16(1) :28–77, 2018.
- [40] P. DEGOND, J.-G. LIU, S. MOTSCH and V. PANFEROV. « Hydrodynamic models of self-organized dynamics : Derivation and existence theory ». *Methods and Applications of Analysis*, 20, 09 2011.
- [41] P. DEGOND and S. MOTSCH. « Continuum limit of self-driven particles with orientation interaction ». *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 18, 11 2007.
- [42] P. DEGOND and S. MOTSCH. « Macroscopic limit of self-driven particles with orientation interaction ». *Comptes Rendus Mathématique*, 345(10) :555–560, 2007.

- [43] P. DEGOND and S. MOTSCH. « Large Scale Dynamics of the Persistent Turning Walker Model of Fish Behavior ». *Journal of Statistical Physics*, 131(6) :989–1021, apr 2008.
- [44] H. DIETERT and B. FERNANDEZ. « The mathematics of asymptotic stability in the Kuramoto model ». *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 474, 12 2018.
- [45] J. DOLBEAULT, C. MOUHOT and C. SCHMEISER. « Hypocoercivity for linear kinetic equations conserving mass ». *Transactions of the American Mathematical Society*, 367 :3807–3828, 2010.
- [46] J.-G. DONG and L. QIU. « Cucker-Smale Flocking Under General Interaction Topologies ». *IFAC-PapersOnLine*, 48(11) :540–544, 2015. 1st IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems MICNON 2015.
- [47] J.-G. DONG and L. QIU. « Flocking of the Cucker-Smale Model on General Digraphs ». *IEEE Transactions on automatic control*, 62(10) :5234–5239, 2017.
- [48] M. R. D’ORSOGNA, Y. L. CHUANG, A. L. BERTOZZI and L. S. CHAYES. « Self-Propelled Particles with Soft-Core Interactions : Patterns, Stability, and Collapse ». *Phys. Rev. Lett.*, 96 :104302, Mar 2006.
- [49] The drone LIFE. « The Major Advantages of Using Drones for Bridge Inspections ». <https://thedronelifenj.com/drone-bridge-inspection/>. Accessed : 16/10/2023.
- [50] Sky Elements drone SHOWS. « Photo du show de drones pour la licence Halo ». <https://skyelementsdrones.com/case-study/sxsw-halo-drone-show-202/>.
- [51] G. DUFOUR and P. VILLEDIEU. « A second-order multi-fluid model for evaporating sprays ». *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 39(5) :931–963, 2005.
- [52] G. DUJARDIN, F. HÉRAU and P. LAFITTE. « Coercivity, hypocoercivity, exponential time decay and simulations for discrete Fokker-Planck equations ». *Numerische Mathematik*, 144, 03 2020.
- [53] Flying EYE. « Les drones pour l’agriculture ». <https://www.flyingeye.fr/les-drones-pour-lagriculture/>, note = Accessed : 16/10/2023.
- [54] D. FANG, S.-Y. HA and S. JIN. « Emergent behaviors of the Cucker–Smale ensemble under attractive–repulsive couplings and Rayleigh frictions ». *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 29(07) :1349–1385, jun 2019.
- [55] A. FROUVILLE. « A continuum model for alignment of self-propelled particles with anisotropy and density-dependent parameters ». *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 22(07) :1250011, may 2012.
- [56] E. GODLEWSKI and P.-A. RAVIART. *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, NY, 1996.
- [57] G. GRÉGOIRE and H. CHATÉ. « Onset of Collective and Cohesive Motion ». *Physical Review Letters*, 92(2), jan 2004.
- [58] S.-Y. HA, E. JEONG, J.-H. KANG and K. KANG. « Emergence of Multi-Cluster Configurations from Attractive and Repulsive Interactions ». *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 22, 08 2012.

- [59] S.-Y. HA, J. KIM and X. ZHANG. « Uniform stability of the Cucker-Smale model and its application to the Mean-Field limit ». *Kinetic & Related Models*, 11 :1157–1181, 01 2018.
- [60] S.-Y. HA, D. KO, Y. ZHANG and X. ZHANG. « Emergent dynamics in the interactions of Cucker-Smale ensembles ». *Kinetic and Related Models*, 10 :689–723, 12 2016.
- [61] S.-Y. HA, K. LEE and D. LEVY. « Emergence of time-asymptotic flocking in a stochastic Cucker-Smale system ». *Communications in Mathematical Sciences*, 7(2) :453 – 469, 2009.
- [62] S.-Y. HA and JI-G. LIU. « A simple proof of the Cucker-Smale flocking dynamics and mean-field limit ». *Communications in Mathematical Sciences*, 7 :297–325, 06 2009.
- [63] S.-Y. HA and E. TADMOR. « From particle to kinetic and hydrodynamic descriptions of flocking ». *Kinetic and Related Models*, 1 :415–435, 2008.
- [64] J. HASKOVEC. « Flocking dynamics and mean-field limit in the Cucker–Smale-type model with topological interactions ». *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 261 :42–51, oct 2013.
- [65] Y. HE and X. MU. « Cucker–Smale flocking subject to random failure on general digraphs ». *Automatica*, 106 :54–60, 2019.
- [66] B. HÉRISSE. « *Asservissement et Navigation Autonome d’un drone en environnement incertain par flot optique* ». PhD thesis, Université Nice Sophia Antipolis, 2010.
- [67] B. HÉRISSE, T. HAMEL, R. MAHONY and F.-X. RUSSOTTO. « Landing a VTOL Unmanned Aerial Vehicle on a Moving Platform Using Optical Flow ». *IEEE Transactions on Robotics*, 28(1) :77–89, February 2012.
- [68] P.-E. JABIN. « Various levels of models for aerosols ». *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 12(07) :903–919, 2002.
- [69] N. JIANG, L. XIONG and T.-F. ZHANG. « Hydrodynamic limits of the kinetic self-organized models ». *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 48 :3383–3411, 01 2016.
- [70] M.-J. KANG and A. F VASSEUR. « Asymptotic analysis of Vlasov-type equations under strong local alignment regime ». *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 25(11) :2153–2173, 2015.
- [71] T. KARPER, A. MELLET and K. TRIVISA. « Hydrodynamic limit of the kinetic Cucker-Smale flocking model ». *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 25, 05 2012.
- [72] Y. KURAMOTO. « Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators ». In Huzihiro ARAKI, editor, *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*, pages 420–422, Berlin, Heidelberg, 1975. Springer Berlin Heidelberg.
- [73] Y. KURAMOTO. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Dover Books on Chemistry Series. Dover Publications, 2003.
- [74] Y. LIU and J. WU. « Flocking and asymptotic velocity of the Cucker–Smale model with processing delay ». *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 415(1) :53–61, 2014.

- [75] AV MAGAZINE. « Photo du festival Duanwu ». <https://www.avinteractive.com/territories-news/apac/the-1500-drone-dragon-that-danced-in-the-shenzhen-sky-26-06-2023/>.
- [76] S. MARTIN. « Multi-agent flocking under topological interactions ». *Systems & Control Letters*, 69, 11 2013.
- [77] S. MARTIN, A. GIRARD, A. FAZELI and A. JADBABAIE. « Multiagent Flocking Under General Communication Rule ». *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 1(2) :155–166, 2014.
- [78] N. MOSHTAGH, N. MICHAEL, A. JADBABAIE and K. DANIILIDIS. « Vision-Based, Distributed Control Laws for Motion Coordination of Nonholonomic Robots ». *IEEE Transactions on Robotics*, 25(4) :851–860, Aug 2009.
- [79] S. MOTSCH and E. TADMOR. « A New Model for Self-organized Dynamics and Its Flocking Behavior ». *Journal of Statistical Physics*, 144(5) :923–947, aug 2011.
- [80] R. NATALINI and T. PAUL. « On The Mean Field limit for Cucker-Smale models ». *Discrete & Continuous Dynamical Systems - B*, 27, 01 2021.
- [81] J. PARK and S.-Y. HA. « Cucker-Smale Flocking With Inter-Particle Bonding Forces ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 55 :2617 – 2623, 12 2010.
- [82] J. M. PARK, H. J. KIM and S.-Y. HA. « Cucker-Smale Flocking With Inter-Particle Bonding Forces ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55 :2617–2623, 2010.
- [83] J. K. PARRISH, S. V. VISCIDO and D. GRÜNBAUM. « Self-Organized Fish Schools : An Examination of Emergent Properties ». *The Biological Bulletin*, 202(3) :296–305, 2002.
- [84] C. PARZANI and F. FILBET. « On a three dimensional vision based collision avoidance model ». *Journal of statistical physics*, 168(3) :680–706, 2017.
- [85] J. PESZEK. « Existence of piecewise weak solutions of a discrete Cucker-Smale’s flocking model with a singular communication weight ». *Journal of Differential Equations*, 257, 02 2013.
- [86] J. PESZEK. « Discrete Cucker–Smale Flocking Model with a Weakly Singular Weight ». *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 47, 12 2014.
- [87] B. PICCOLI, F. ROSSI and E. TRÉLAT. « Control to Flocking of the Kinetic Cucker–Smale Model ». *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 47, 11 2014.
- [88] C. PIGNOTTI and E. TRÉLAT. « Convergence to consensus of the general finite-dimensional Cucker-Smale model with time-varying delays ». *Communications in Mathematical Sciences*, 16, 07 2017.
- [89] L. RU, Y. LIU and X. WANG. « New conditions to avoid collisions in the discrete Cucker-Smale model with singular interactions ». *Applied Mathematics Letters*, 114 :106906, 2021.
- [90] I. SANTOS. « *Fonctions de navigation stochastiques : application à la planification robuste de trajectoires d’avions* ». PhD thesis, Toulouse III Paul Sabatier, 2019. 2019TOU30013.
- [91] J. SEO, L. DUQUE and J. WACKER. « Drone-enabled bridge inspection methodology and application ». *Automation in construction*, 94 :112–126, 2018.

- [92] S. SERFATY. « Mean field limit for Coulomb-type flows ». *Duke Mathematical Journal*, 169(15), oct 2020.
- [93] Y. SHANG and R. BOUFFANAIS. « Influence of the number of topologically interacting neighbors on swarm dynamics ». *Scientific reports*, 4 :4184, 02 2014.
- [94] C. SIRE. « Social interactions and collective states in fish schools ». November 2017. <http://xsys.fr/wp-content/uploads/2017/11/Sire-Fish-Interactions.pdf>.
- [95] M.V. SRINIVASAN, S.W. ZHANG, J. S. CHAHL, E. BARTH and S. VENKATESH. « How honeybees make grazing landings on flat surfaces ». *Biological Cybernetics*, 83 :171–183, 2000.
- [96] T. V. TON, N. T. H. LINH and A. YAGI. « Flocking and non-flocking behavior in a stochastic Cucker-Smale system ». *Analysis and Applications*, 12(01) :63–73, dec 2013.
- [97] J. TONER and Y. TU. « Long-Range Order in a Two-Dimensional Dynamical XY Model : How Birds Fly Together. ». *Physical review letters*, 75 23 :4326–4329, 1995.
- [98] F. VECIL, P. LAFITTE and J. ROSADO. « A numerical study of attraction/repulsion collective behavior models : 3D particle analyses and 1D kinetic simulations ». *Physica D Nonlinear Phenomena*, 260 :127–144, 10 2013.
- [99] T. VICSEK, A. CZIRÓK, E. BEN-JACOB, I. COHEN and O. SHOCHET. « Novel Type of Phase Transition in a System of Self-Driven Particles ». *Phys. Rev. Lett.*, 75 :1226–1229, Aug 1995.
- [100] C. VILLANI. « Hypocoercivity ». *Mem. Amer. Math. Soc.*, 202, 10 2006.
- [101] T. YASUDA, A. ADACHI and K. OHKURA. « Self-organized flocking of a mobile robot swarm by topological distance-based interactions ». In *2014 IEEE/SICE International Symposium on System Integration*, pages 106–111, 2014.
- [102] C. YATES, R. BAKER, R. ERBAN and P. MAINI. « Refining self-propelled particle models for collective behaviour ». *Canadian Applied Mathematics Quarterly*, 01 2010.
- [103] X. YIN, Z. GAO, D. YUE and Y. FU. « Convergence of velocities for the short range communicated discrete-time Cucker–Smale model ». *Automatica*, 129 :109659, 2021.
- [104] X. YIN, D. YUE and Z. CHEN. « Asymptotic behavior and collision avoidance in the Cucker-Smale model ». *IEEE Trans. Automat. Control*, 65 :3112–3119, 2019.
- [105] T. ZHENG, Q. H. and H. LIN. « Transporting Robotic Swarms Via Mean-Field Feedback Control ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 67(8) :4170–4177, aug 2022.

Modélisation, analyse mathématique et simulation numérique de grandes flottes de drones autonomes

Ces dernières années, les drones sont employés pour gagner en efficacité dans de multiples domaines d'application, comme la surveillance du vieillissement d'un pont. Avec la baisse des coûts de fabrication et la maîtrise croissante de leur navigation, les applications à grand nombre de drones commencent à être imaginées, pour remplacer les alternatives coûteuses, comme les hélicoptères. Cependant cela requiert d'automatiser la flotte. Son comportement global et l'accomplissement de ses objectifs émergent alors du comportement de chaque drone, en totale indépendance, et de leur interaction. L'enjeu principal est donc de calibrer les différents paramètres de la flotte, afin de s'assurer qu'une mission donnée sera accomplie. Pour cela, nous voulons valider numériquement un modèle mathématique représentant la flotte.

L'objectif de cette thèse est de développer un tel modèle, représentant une variété de comportements et de limitations techniques propres aux drones. Dans ce but, nous étudierons les modèles de consensus déjà connus, comme celui de Cucker-Smale et ses dérivés, et feront le lien avec des technologies embarquées dans les drones, telles que la navigation par flot optique. Nous comparerons également les échelles de descriptions micro- et macroscopiques. La première permet une description précise avec un fort coût de simulation pour de grandes flottes, alors que la seconde a un coût moindre, mais décrit de manière globale le mouvement des drones. Enfin nous proposerons un nouveau modèle permettant à une flotte d'occuper une zone, en se basant sur des quantités macroscopiques.

Mots-clés Flotte de drones, dynamique des populations, Cucker-Smale, contrôle décentralisé, flocking, occupation de zone, évitement de collisions, analyse mathématique, simulations numériques.

Modeling, mathematical analysis and numerical simulation of large autonomous drone swarms

In the recent years, drones have been used to improve efficiency in several fields, such as bridge damage monitoring. As their manufacturing cost decrease, and our ability to guide them improve, complex missions involving a large amount of drones are imagined to replace expensive alternatives, such as helicopters. However, such large drone swarms need to be automated. Their behavior and the completion of their objectives then emerge from the interaction between all drones in the swarm. The main concern is then to balance the swarm's parameters, to ensure its objectives are completed. To this end, we want to numerically validate a mathematical model representing the swarm.

This thesis objective is to develop such a model, representing several drone-specific behaviors and technical limitations. For this, we study existing consensus models, such as the Cucker-Smale one, and model technologies embarked in drones, like optical flow navigation. We also compare the micro and macroscopic modeling scales. The former allows a precise description with a high simulation cost, while the latter gives a broad description with a reduced simulation cost. To conclude, we give a new model allowing a swarm to occupy a given area, based on the macroscopic description.

Keywords Drone swarm, population dynamics, Cucker-Smale, decentralized control, flocking, zone occupation, collision avoidance, mathematical analysis, numerical simulations.