



**HAL**  
open science

# Dynamique spectrale de l'interaction entre l'agitation induite par les bulles et la turbulence

Gabriel Ramirez

► **To cite this version:**

Gabriel Ramirez. Dynamique spectrale de l'interaction entre l'agitation induite par les bulles et la turbulence. Autre [cond-mat.other]. Université de Toulouse, 2024. Français. NNT : 2024TLSEP053 . tel-04649383

**HAL Id: tel-04649383**

**<https://theses.hal.science/tel-04649383v1>**

Submitted on 16 Jul 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Doctorat de l'Université de Toulouse

préparé à Toulouse INP

---

Dynamique spectrale de l'interaction entre l'agitation induite  
par les bulles et la turbulence

---

Thèse présentée et soutenue, le 13 juin 2024 par

**Gabriel RAMIREZ**

**École doctorale**

MEGEP - Mécanique, Energétique, Génie civil, Procédés

**Spécialité**

Dynamique des fluides

**Unité de recherche**

IMFT - Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse

**Thèse dirigée par**

Frédéric RISSO et Alan BURLLOT

**Composition du jury**

M. Martin OBLIGADO, Président, Ecole centrale de Lille

M. Markus UHLMANN, Rapporteur, Karlsruher Institut für Technologie

M. Sergio CHIBBARO, Rapporteur, Université Paris-Saclay

M. Adrien TOUTANT, Examineur, Université de Perpignan Via Domitia

Mme Barbara BIGOT, Examinatrice, CEA Cadarache

M. Guillaume BOIS, Examineur, CEA Paris-Saclay

M. Frédéric RISSO, Directeur de thèse, CNRS Occitanie Ouest

M. Alan BURLLOT, Co-directeur de thèse, CEA Paris-Saclay

**Membres invités**

M. Rémi Zamansky, CNRS Occitanie Ouest

---

# Résumé :

## Dynamique spectrale de l'interaction entre l'agitation induite par les bulles et la turbulence

De nombreux écoulements, naturels comme industriels, mettent en jeu une phase dispersée, solide, liquide ou gazeuse, dans un fluide porteur. Dans cette thèse, nous nous intéressons à la dynamique des écoulements turbulents contenant des bulles millimétriques, afin d'améliorer la compréhension des scénarios d'accidents concernant les réacteurs à eau pressurisée. Ces écoulements présentent des fluctuations radicalement différentes des écoulements monophasiques. Celles-ci résultent à la fois de l'agitation induite par les bulles (*BIA* pour "Bubble Induced Agitation") et de la turbulence induite par le cisaillement (*SIT* pour "Shear-Induced Turbulence"). Notre objectif est de comprendre comment ces deux mécanismes se combinent, à l'aide de simulations numériques directes (*DNS*) effectuées dans une boîte périodique.

L'interaction entre *BIA* et *SIT* dépend du rapport entre les énergies de ces deux contributions, mais aussi de la plage de nombres d'onde où l'énergie de chacune est distribuée. Nous avons choisi de représenter la *SIT* par une turbulence homogène isotrope stationnaire (*HIT* pour "Homogeneous-Isotropic Turbulence") obtenue par un forçage aléatoire des grandes échelles. La *BIA* est produite par un essaim homogène de bulles en ascension, dont le diamètre est choisi pour se situer dans la gamme d'échelles de la zone inertielle de la *HIT*. La puissance produite par le forçage de la *HIT* est maintenue constante, tandis que la puissance injectée à travers les bulles par la force de flottabilité est modifiée en changeant la fraction volumique de gaz :  $\alpha = 0, 0.03, 0.06$  et  $0.12$ .

Les statistiques des fluctuations sont analysées en détail, en portant un intérêt particulier à la dynamique, dans le domaine spectral, de l'énergie cinétique et des termes de son bilan. Un soin particulier a été apporté à la justification de la pertinence des spectres des champs décrivant le mélange diphasique, en présence des singularités aux interfaces causées par la tension de surface et la discontinuité de la masse volumique. Dans les simulations de la *BIA* pure (sans forçage de la *HIT*), les fluctuations sont dominées par les sillages des bulles en interaction. L'énergie produite par la flottabilité est concentrée autour de la taille des bulles, transportée vers les petites échelles par les termes d'inertie et de tension de surface, puis dissipée par les termes visqueux. L'absence de séparation d'échelle entre la production et la dissipation est responsable d'une évolution en  $\kappa^{-3}$  sur une plage limitée du nombre d'onde  $\kappa$ . Les simulations couplées, en présence de *HIT* et de *BIA*, correspondent à des situations où le rapport entre la production par les bulles et celle par le forçage turbulent est plus ou moins grand que l'unité, selon la valeur de  $\alpha$ . Dans tous les cas, le mouvement de bulles et les fluctuations du liquide à des échelles plus grandes que les bulles sont dominés par la *HIT*. En revanche, la *BIA* imprime sa marque aux échelles plus petites en gardant une dynamique propre, peu influencée par la *HIT*.

Ces résultats ouvrent des pistes concrètes à l'amélioration des modèles de turbulence en écoulement à bulles qui incluent une description des contributions de la *BIA* et de la *SIT*.

**Mots-clefs :** écoulement à bulles, agitation induite par les bulles, turbulence, analyse spectrale

---

# Abstract:

## Spectral dynamics of the interaction between bubble induced agitation and turbulence

Many industrial flows, as well as natural flows, set a dispersed phase evolving in a carrier fluid. In order to improve the understanding of pressurised water reactors accidental scenario, we study the dynamics of flows laid with millimetric bubbles. The fluctuations in these flows, resulting both from Bubble Induced Agitation (*BIA*) and from Shear-Induced Turbulence (*SIT*), are distinctly different from monophasic flow fluctuations. The goal is to understand how these two contributions entangle through Direct Numerical Simulation (*DNS*) taking place in a tri-periodic box.

The interaction between *BIA* and *SIT* is driven not only by the energy ratio between the two contributions, but also by the scales at which these two energies are spread. The *SIT* is represented by a stationary Homogeneous-Isotropic Turbulence (*HIT*) generated by random forcing at large scales. The *BIA* comes from the collective motion of a homogeneous bubble swarm whom bubble diameter is chosen to fit in the inertial sub-range of the *HIT*. Power production from the *HIT* is forced to be constant, while power injection from the bubble buoyancy is tuned through the gas volume fraction :  $\alpha = 0, 0.03, 0.06, 0.12$ .

Fluctuation statistics are precisely analysed, with a particular focus on spectral dynamics of the fluctuation kinetic energy and its budget. A close look was given to the relevance of diphasic mixture spectra, including singularities at the interfaces due to surface tension and density discontinuity. For the pure *BIA* simulations (without *HIT*), fluctuations are dominated by the bubble wakes interacting with each other. The energy coming from the buoyancy is generated at the bubble scale, transported towards smaller scales by inertial terms and by surface tension, and it is dissipated by the viscous terms. The absence of scale separation between energy production and dissipation triggers the  $\kappa^{-3}$  evolution of the energy spectra on a limited  $\kappa$  wave number bandwidth. Coupled simulations, with *HIT* and *BIA*, correspond to situations in which the ratio between the production from the bubble and the production from the turbulent forcing is above or beneath unity, according to the value of  $\alpha$ . In any case, bubble motion and liquid fluctuations at larger scales than the bubble are dominated by *HIT*. Conversely, *HIT* has little influence at small scales, where *BIA* imposes its own dynamics.

These results strongly pave the way for improving turbulent bubbly flow models taking into account both contributions, *BIA* and *HIT*.

**Key words:** bubbly flow, bubble induced agitation, turbulence, spectral analysis



---

## Remerciements :

Je remercie tout d'abord mes encadrants Alan, Guillaume et Rémi et mon directeur Frédéric pour leur implication durant cette thèse. La bienveillance des uns, la grande maîtrise technique et scientifique des autres, les remarques pertinentes de chacun et la direction assurée avec fermeté lorsqu'il le fallait sont les ingrédients qui ont permis de mener ce travail à terme.

Je tiens aussi à exprimer ma gratitude envers Markus Uhlmann et Sergio Chibbaro qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, ainsi qu'à Adrien Toutant et Barbara Bigot d'avoir fait partie de mon jury et à Martin Obligado d'avoir accepté la responsabilité de présider ce jury. J'ai apprécié vos commentaires et vos questions pertinentes.

Ma reconnaissance va ensuite aux collègues du CEA avec qui j'ai eu le plaisir d'échanger pendant ces années, et qui m'ont fait progresser.

Commençons par Élie Saikali prêt à discuter, donner des conseils, et surtout toujours présent pour donner un coup de pouce lorsqu'il s'agit de mettre les mains dans le code ! Merci à Aymeric, pour les conseils de tous types en ce qui concerne les machines. Merci ensuite à la TMA et notamment à Nabil pour sa patience et pour sa maîtrise des installations TRUST sur toutes machines. Julie, je te remercie pour tous ces ~~interrogatoires~~ moments d'échanges, qui m'ont beaucoup aidé quand le moral n'allait pas fort, merci pour tes bons conseils, ton humeur acidulé et ta gentillesse.

Merci à Pauline R., Andrew et Clément avec qui j'ai démarré mon aventure au LMSF et merci en particulier à Antonin, super co-bureau, pour le soutien réciproque dans les moments délicats de nos thèses respectives. Merci à Nicolas, Aurore et Mathis pour ces séances de natation de très haut niveau. Mes pensées vont aussi à Nathalie, Téo, Jiayi, Loïc, Sanae, Matthieu, Capucine, qui ont rejoint l'aventure par la suite et qui ont su apporter tantôt du soleil, de la sérénité, de la joie, de l'humour ou de la folie pendant ces années au labo. Merci à Andjib et Grégoire d'incarner la nouvelle génération de thésard qui se frotte à TrioIJK, merci pour vos questions et pour les échanges stimulants.

Je vous remercie tous pour les bons moments passés ensembles, qu'ils aient été festifs, conviviaux, sportifs, ou sérieux.

J'ai eu la chance de commencer cette aventure en partageant mon quotidien avec Olivier et Léa, couple de colocataires incroyables, un peu déjantés par moments, mais toujours très intéressants. Merci pour les dahls de lentilles, pour le passage à Quiberon, pour le TwinIt . Je remercie aussi les colocataires avec qui j'ai terminé cette aventure, Mathis et Sébastien. Merci à Mathis de nous avoir lancé dans la Triban life, merci pour les bons petits plats et pour tous les petits soins apportés au quotidien. Merci à vous deux pour tous les moments partagés ensemble.

Je souhaite remercier chaleureusement Brice, Pierre-Paul, Eliot, Marie, Robin, Amélie, Thomas, Arthur et Pauline L., ces amis qui m'ont offert un bol d'air frais, une oreille attentive ou juste de quoi oublier quand il le fallait. Merci beaucoup pour ces moments de joie et de complicité partagés au cours de ces années.

Enfin, je tiens à remercier ma famille pour les encouragements, merci aux cousins, cousines, oncles et tantes. Merci papa pour le support, merci maman pour l'accueil quand ça a été nécessaire, merci Sami d'avoir été le grand frère qui m'a fait progresser, et de m'avoir donné ce goût pour les sciences. Merci Kilian L. pour le modèle d'implication et de persévérance que tu incarnes si justement et qui m'ont été forts utiles pendant ces années. Je vous dois beaucoup dans le succès de cette thèse.

# Sommaire

Liste des symboles	7
Introduction générale	9
<b>1 Contexte et position du problème</b>	<b>11</b>
1.1 Contexte industriel	11
1.2 Équations diphasiques, locales et instantanées	13
1.3 État de l’art	15
1.4 Présentation des cas étudiés	18
<b>2 Outil numérique</b>	<b>21</b>
2.1 Code de calcul TrioIJK	22
2.2 Paramètres numériques	26
2.3 Forçage	28
2.4 Discrétisation du bilan	32
2.5 Convergences	35
2.6 Conclusion du chapitre	47
<b>3 Spectral analysis of dispersed multiphase flows in the presence of fluid interfaces</b>	<b>51</b>
<b>4 Essaim de bulles statistiquement homogène et stationnaire</b>	<b>93</b>
4.1 Essaim de bulles de référence	93
4.2 Simulations à différentes fractions volumiques de gaz	110
4.3 Conclusion	121
<b>5 Essaim de bulles statistiquement homogène dans un milieu turbulent</b>	<b>123</b>
5.1 Moments statistiques	124
5.2 PDF des vitesses	129
5.3 Spectre d’énergie de la vitesse	130
5.4 Représentation spectrale du bilan d’énergie	134
5.5 Combinaison linéaire pour isoler l’interaction	134
5.6 Conclusion du chapitre	136
<b>Conclusion générale</b>	<b>141</b>

<b>Annexes</b>	<b>145</b>
A.1 Outils de description des écoulements . . . . .	145
A.2 Simulations d'un essaim de bulles sans forçage dans des domaines de tailles différentes	152
A.3 Raffinement du maillage pour la simulation couplée . . . . .	155
A.4 Obtention de la partie régulière des termes du bilan spectral . . . . .	156

# Liste des symboles

La liste suivante décrit la majorité des symboles qui seront utilisés dans le document.

## Propriétés physiques

$\Delta x$	taille de la maille (en $m$ )
$\ell$	échelle intégrale (en $m$ )
$\ell_P$	échelle de production d'énergie par le forçage (en $m$ )
$\kappa$	nombre d'onde (en $m^{-1}$ )
$\kappa_b$	nombre d'onde associé au diamètre des bulles $2\pi/d_b$ (en $m^{-1}$ )
$\mu$	viscosité dynamique (en $Pa.s$ )
$\rho$	masse volumique (en $kg.m^{-3}$ )
$\sigma$	tension superficielle (en $N.m^{-1}$ )
$d_b$	diamètre de bulle (en $m$ )
$L$	longueur du domaine (en $m$ )

## Grandeurs physiques

$\epsilon_\mu$	taux volumique de dissipation (en $W.m^{-3}$ )
$f$	forçage à grande échelle (en $m.s^{-1}$ )
$S$	spectre 3D d'énergie cinétique (en $m^1.s^{-2}$ )

## Opérateurs statistiques

$\langle q \rangle$	moyenne temporelle de $q$
$\langle q \rangle_{[t_0, t_1]}$	moyenne temporelle de $q$ sur l'intervalle $[t_0, t_1]$
$\langle q \rangle_{\delta t}$	moyenne temporelle de $q$ sur l'intervalle de longueur $\delta t$
$\bar{q}$	moyenne spatiale de $q$
$\bar{q}^k$	moyenne de phase de $q_k$
$q'$	fluctuation de $q$ (par rapport à $\bar{q}$ ).
$q_k'$	fluctuation de $q_k$ (par rapport à $\bar{q}^k$ ).
$\sigma^2(q_k)$	variance de $q_k$ Eqs.(10) et (11)
$\mu_n(q_k)$	moment statistique centré réduit d'ordre $n$ de $q_k$ Eqs.(12) à (15)
$[q]_{\mathcal{I}}$	saut de $q_k$ à l'interface $\mathcal{I}$

**Acronymes**

BIA	Bubble Induced Agitation
BIT	Bubble Induced Turbulence
CFD	Computational Fluid Dynamics
DNS	Direct Numerical Simulation
HIT	Homogeneous Isotropic Turbulence
LBD	Localised Body Disturbance
PDF	Probability Density Function
RANS	Reynolds Averaged Navier-Stokes
SIT	Shear Induced Turbulence
VoF	Volume of Fluid

# Introduction générale

Les écoulements à phase dispersée dans lesquels un ensemble de particules, de gouttes, ou de bulles peuplent un fluide porteur sont omniprésents dans les écoulements naturels (nuages, pluies, fumées volcaniques) et industriels (sprays, écoulements bouillants). Les deux phases forment un système complexe dont les dynamiques sont fortement couplées.

La compréhension des écoulements à bulles est un enjeu majeur pour le Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives (CEA) qui cherche à garantir des niveaux de sûreté toujours plus élevés pour les installations nucléaires. Des écoulements diphasiques peuvent survenir dans une centrale nucléaire de type REP, volontairement dans un générateur de vapeur ou involontairement dans un assemblage combustible. La modélisation de l'ébullition relève d'un double enjeu de conception et de sûreté pour améliorer le rendement d'un générateur de vapeur et garantir la tenue la sécurité du cœur du réacteur. Un aspect majeur de la dynamique de l'ébullition est notamment la modélisation du mouvement des bulles générées lors du démarrage de l'ébullition. Le mouvement de ces bulles, que ce soit dans un écoulement diabatique ou adiabatique, provient de deux sources. La première est la flottabilité qui met en mouvement ces dernières. Pour un nombre de Reynolds de bulle (basé sur le diamètre des bulles et leur vitesse d'ascension moyenne) de l'ordre de la centaine au moins, chaque bulle génère un fort sillage qui interagit avec les sillages voisins. Ensemble, ils peuvent générer une instabilité collective de l'écoulement, le tout donnant lieu à des fluctuations aux propriétés spécifiques, que nous appelons BIA (pour *Bubble Induced Agitation*). La seconde est l'application d'un gradient de pression le long de la conduite, qui mettra en mouvement le fluide porteur. En l'absence de bulles et pour des forts gradients de pression, le nombre de Reynolds est élevé, l'écoulement devient instable et génère de la turbulence par frottement à la paroi, on parle de SIT (pour *Shear Induced Turbulence*). En présence de bulles, la SIT est responsable du mouvement aléatoire de celles-ci qui, à leur tour, modifient l'écoulement du fluide porteur. Les mécanismes régissant ces deux types d'agitation, et leur interaction notamment, sont encore mal compris. C'est pourquoi nous nous intéressons dans cette thèse aux caractéristiques des écoulements à bulles soumis à ces deux sources de mouvement, la flottabilité et la SIT.

Pour dépasser des limitations expérimentales, qui ne permettent pas aujourd'hui une mesure complète de la dynamique des interfaces, de l'écoulement au voisinage direct des bulles et de l'écoulement à l'intérieur des bulles, nous choisissons de nous appuyer sur les résultats de simulations numériques directes (DNS pour *Direct Numerical Simulation*) d'essaim de bulles. Dans ces simulations, toutes les échelles de l'écoulement, ainsi que la dynamique des interfaces sont résolues. En contrepartie, la complexité des écoulements réalisables en DNS est limitée. Dans nos simulations, la SIT est produite par un forçage aléatoire des grandes échelles, reproduisant les caractéristiques d'une turbulence homogène isotrope (HIT pour *Homogeneous Isotropic Turbulence*). Les paramètres du forçage permettent de contrôler précisément l'intensité et les échelles de la SIT. La BIA est produite par l'ascension d'un essaim de bulles dans un domaine périodique sans paroi. Toutes les bulles sont de même volume, ne peuvent ni coalescer, ni se fragmenter. Une attention particulière est apportée à ce que la répartition des bulles reste homogène, pour éviter qu'un gradient de concentration des bulles à grande échelle ne produise un entraînement préférentiel du fluide porteur dans la zone à forte concentration, générant ainsi un cisaillement à grande échelle et donc potentiellement une deuxième source de SIT. En conclusion, les simulations DNS de cette thèse permettent de contrôler précisément la SIT d'une part et la BIA d'autre part.

Notre étude repose sur deux critères visant à assurer l'interaction entre la BIA et la SIT. D'une

part, nous souhaitons que les échelles sur lesquelles sont distribuées les énergies de chacune de ces contributions se superposent. D'autre part, nous voulons que les énergies des deux contributions soient d'ordres de grandeur comparables à ces échelles. Pour la SIT, l'énergie est produite aux grandes échelles, et pour un nombre de Reynolds assez élevé une gamme d'échelles se développe dans laquelle l'énergie est transférée de façon inertielle vers les petites échelles sans se dissiper. Cette zone inertielle est caractéristique de la SIT à grand nombre de Reynolds. En BIA, l'énergie est toujours produite autour des échelles du diamètres de bulle  $d_b$ , ce qui se traduit par un pic de la production d'énergie. Pour les échelles plus petites que  $d_b$ , les spectres d'énergies normalisés par leur variance se superposent pour un vaste choix de paramètres expérimentaux. Ainsi, dans les simulations de cette thèse, le diamètre des bulles est placé au cœur de la gamme d'échelles de la zone inertielle de la SIT. L'intensité de la SIT est maintenue constante, tandis que l'intensité de la BIA est variée en changeant uniquement le nombre de bulles. Pour les écoulements à bulles, la phase porteuse est interrompue par la présence des interfaces des bulles. Une analyse spectrale pertinente dans un domaine de ce type est difficile à mettre en œuvre et nous préférons considérer le domaine total, composé de la phase porteuse, de la phase dispersée et des interfaces. Sur ce domaine, les singularités des champs à la traversée des interfaces impriment leurs marques sur les quantités spectrales. Dans cette thèse nous proposons une méthode pour une étude rigoureuse des conséquences des singularités et une méthode pratique pour bâtir des spectres interprétables physiquement.

Le manuscrit se structure de la façon suivante. Dans le chapitre 1, nous présentons le contexte industriel et scientifique de cette thèse. Nous y présentons aussi les cas étudiés dans la suite du manuscrit. Le code de calcul utilisé, le choix de la discrétisation du bilan spectral et la justification du choix des paramètres se trouvent au chapitre 2. La validation des simulations se trouve aussi au chapitre 2. Dans le chapitre 3, nous analysons théoriquement l'effet des singularités des champs décrivant les écoulements à bulles sur les spectres d'énergie et sur le bilan spectral d'énergie. Dans ce chapitre nous proposons notamment une méthode pour séparer les parties singulières des parties régulières. Les DNS d'essais de bulles sans forçage sont analysées au chapitre 4. Dans le chapitre 5 les mêmes simulations auxquelles nous ajoutons le forçage SIT sont comparées aux simulations du chapitre 4 et une méthode pour mesurer l'interaction entre la BIA et la SIT y est proposée. Le manuscrit se clôt par une synthèse des conclusions et la présentation de perspectives.

# Chapitre 1

## Contexte et position du problème

### Sommaire

---

<b>1.1 Contexte industriel</b>	<b>11</b>
1.1.1 Le CEA	11
1.1.2 Le rôle de la simulation numérique pour la mécanique des fluides	12
<b>1.2 Équations diphasiques, locales et instantanées</b>	<b>13</b>
<b>1.3 État de l’art</b>	<b>15</b>
1.3.1 Discrétisation et résolution numérique des équations	15
1.3.2 Essaims homogènes de bulles	16
<b>1.4 Présentation des cas étudiés</b>	<b>18</b>

---

### 1.1 Contexte industriel

#### 1.1.1 Le Commissariat à l’Énergie Atomique et aux énergies alternatives

Le CEA est un organisme de recherche scientifique français qui tient une position originale, dont le rôle est d’éclairer la décision publique et de donner les moyens scientifiques et technologiques aux entreprises et collectivités pour mieux maîtriser quatre sujets de sociétés majeurs que sont : la transition énergétique, la transition numérique, la santé du futur et la sécurité/défense. Le CEA est donc très actif et à la pointe en terme de recherche fondamentale dans de nombreux domaines, et dispose aussi d’une expérience de développements technologiques très nombreux et variés destinés à être transférés aux partenaires industriels de l’organisme. Le CEA est fortement engagé dans la formation au niveau supérieur avec l’INSTN, au niveau scolaire, avec par exemple, la sensibilisation de plus de 15 000 jeunes aux sciences en 2020, et il est engagé pour l’insertion professionnelle avec notamment une politique pro-active de contrat d’alternances (1 000 contrats en 2021). Organisme unique en Europe et dans le monde, le CEA fait référence en terme de transfert de savoirs et compétences de la recherche vers l’industrie.

Pour répondre aux enjeux de la transition énergétique, le CEA développe, à l’Institut des Sciences Appliquées et de la Simulation pour les énergies bas carbone (ISAS), une science prédictive pour les systèmes de production d’énergie bas carbone combinant nucléaire et renouvelable. Cet institut évalue, au travers des activités de son Département de Modélisation des Systèmes et Structures (DM2S) en particulier, des structures et des systèmes de production d’énergie à travers l’expérimentation, la modélisation et la simulation dans les disciplines de thermomécanique, de neutronique (physique des cœurs de réacteur nucléaire), de thermohydraulique et mécanique des fluides.

Au DM2S, les activités en thermohydraulique et en mécanique des fluides sont portées par le service dédié : le STMF (pour Service de Thermohydraulique et de Mécanique des Fluides). Ces



activités s'appuient sur deux démarches scientifiques, parallèles et complémentaires : la réalisation d'expériences d'une part, et la simulation numérique d'autre part. Ces deux démarches se complètent de manière indispensable : les résultats des calculs de simulation sont confrontés aux données acquises lors des expériences ; en retour, les simulations aident à concevoir les maquettes et installations expérimentales. Cette boucle expérience / simulation est complétée par une étape de réflexion et de formulation de théorie ou de modèles.

### 1.1.2 Le rôle de la simulation numérique pour la mécanique des fluides

Pour engager pleinement le nucléaire dans sa transition numérique, le CEA porte le projet Réacteur Numérique. Réplique numérique et fonctionnelle d'une centrale nucléaire, ce projet permettra de réaliser des études en amont, notamment en terme de sûreté des installations en mettant en scène des scénarios critiques sur la centrale. Ce jumeau numérique pourra aussi servir pour les études amont de conception et de dimensionnement de centrales et permettra de faciliter l'exploitation du parc nucléaire. Le STMF apporte à ce projet des outils de simulation et ses compétences sur les phénomènes thermohydrauliques. La démarche scientifique adoptée par le service repose sur une approche multi-échelle permettant de prendre en compte la diversité des grandeurs caractéristiques dans les installations nucléaires. Ces échelles s'étendent depuis l'échelle millimétrique mise en œuvre dans la Simulation Numérique Directe (DNS pour Direct Numerical Simulation) des interfaces et des inclusions des écoulements multiphasiques, jusqu'à l'échelle système correspondant à des modélisations d'ensemble des circuits et composants et de leurs interactions.

L'agitation induite par les bulles et son interaction avec la turbulence, sujet de cette thèse, s'inscrivent donc dans le cadre de la recherche aux échelles fines, point de départ de la remontée d'échelles pour la thermo-hydraulique, qui est encore aujourd'hui majoritairement alimentée par les résultats expérimentaux.

#### La remontée d'échelle pour la thermo-hydraulique

La démarche de remontée d'échelle consiste à s'appuyer sur les résultats des plus petites échelles alimentés par des résultats expérimentaux en majorité, et de plus en plus, issus des DNS, pour simuler des écoulements industriels, à grande échelle. Les paragraphes qui suivent donnent des détails sur les différentes échelles de cette démarche, de la plus grande échelle à la plus petite.

#### **Approche moyennées**

L'échelle système : Il s'agit de la plus grande échelle simulée en CFD (pour *Computational Fluid Dynamics*) pour nos réacteurs. À cette échelle, chaque système de la centrale (générateur de vapeur, cœur du réacteur, circuit primaire, ...) est décrit par un modèle 0D, ou par un modèle 1D avec très peu de degrés de libertés. Cette échelle permet de simuler le fonctionnement d'une centrale nucléaire complète sur un ordinateur de bureau, et d'estimer des températures de cœurs ou des pressions en fonctions de paramètres d'entrée en un temps de calcul raisonnable. Les modèles utilisés à cette échelle sont alimentés par les résultats d'expériences et par des moyennes de résultats d'études à une échelle plus fine, dite échelle composant.

L'échelle composant : Cette échelle intermédiaire, qui est aussi une échelle moyennée, capture certains détails des écoulements dans le système. Pour simuler l'écoulement dans une conduite, l'objectif est de masquer l'hétérogénéité des grandeurs sur la section, en rendant uniquement compte de son évolution le long de la conduite. Le comportement d'un système peut être simulé, moyennant un coût de calcul important. Les modèles utilisés pour alimenter ces simulations sont issus de résultats d'expériences.

Approches RANS (pour *Reynolds Averaged Navier-Stokes*) et Euler-Euler : Les modèles de cette approche s'appuient sur les moyennes statistiques des grandeurs de l'écoulement. En théorie, la moyenne d'ensemble s'obtient en réalisant un très grand nombre de fois le même écoulement exactement, et en moyennant ses caractéristiques sur tout le domaine, sur toute la durée et sur toutes les réalisations. En pratique, l'hypothèse d'ergodicité permet de confondre la moyenne d'ensemble avec la moyenne spatio-temporelle évaluée sur une seule réalisation. Cette moyenne permet de décomposer une variable  $q(\mathbf{x}, t)$  locale et instantanée en sa partie fluctuante  $q'(\mathbf{x}, t)$  et

sa partie moyenne  $\bar{q}$ , avec  $\overline{q'} = 0$ . Il s'agit de la décomposition de Reynolds :

$$q(\mathbf{x}, t) = q'(\mathbf{x}, t) + \bar{q} \quad (1.1)$$

L'évolution des grandeurs moyennes permet d'accéder à une compréhension générale de l'écoulement. En appliquant cette moyenne aux équations de Navier-Stokes, on s'affranchit des détails de l'écoulement et l'on peut simuler des écoulements discrétisés sur un maillage grossier, sans résoudre précisément toutes les fluctuations. Ces équations ainsi moyennées font apparaître un nouveau terme  $\overline{u'u'}$ , qui est une corrélation d'ordre deux répondant à une nouvelle équation d'évolution, faisant apparaître à son tour une corrélation d'ordre supérieur. Le système à résoudre compte alors plus d'inconnues que d'équations, il n'est plus fermé. La détermination du modèle adéquat adapté à l'évolution de cette corrélation  $\overline{u'u'}$  pour la configuration étudiée constitue un défi de cette échelle de simulation.

La modélisation à cette échelle pour les écoulements diphasiques, approche à deux fluides ou Euler-Euler, fait appel aux moyennes des caractéristiques pour chaque phase  $k$  séparément. On introduit une moyenne spécifique pour chaque phase, appelée moyenne de phase  $\bar{q}^k$  :

$$\bar{q}^k = \frac{\overline{\chi_k q}}{\chi_k}, \quad (1.2)$$

où  $\chi_k$  est l'indicatrice de la phase  $k$ , fonction Heaviside de l'espace à trois dimensions, qui vaut un en tout point dans la phase  $k$  et zéro ailleurs. De la même façon que pour le cas monophasique, l'application de ces moyennes de phase aux équations de Navier-Stokes fait apparaître des termes de corrélation des fluctuations et des termes de transferts aux interfaces qui nécessitent d'être modélisés avec soin pour que les simulations donnent des résultats pertinents.

Les modèles pour fermer les termes apparaissant avec ces moyennes sont historiquement alimentés par des résultats d'expériences. Depuis quelques décennies maintenant, la montée en puissance et la fiabilité du calcul scientifique permettent à la DNS de prendre le relais, en rendant possible la simulations fine de cas toujours plus complexes à des coût toujours plus faibles.

### Échelle locale et instantanée

L'échelle DNS : À cette échelle de simulation, les équations de Navier-Stokes sont résolues à tout instant, et en tout point de la simulation. Ces équations sont valides dans le cadre de la mécanique des milieux continus et doivent être résolues aux plus petites échelles jusqu'à la coupure visqueuse. Extrêmement coûteuses, ces simulations DNS sont limitées à l'étude d'écoulements relativement simples qui servent avant tout à alimenter les modèles incorporés dans les simulations moyennées, en améliorant la compréhension de mécanismes fondamentaux.

Dans cette thèse, différentes DNS diphasiques sont réalisées et analysées, dans le but d'alimenter les modèles de turbulence Euler-Euler existants.

## 1.2 Équations diphasiques, locales et instantanées

Dans chaque phase séparément, les équations de Navier-Stokes pour un fluide Newtonien incompressible soumis au champ de gravité sont résolues :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{u} + \mathit{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\mathit{grad}(p) + \mathit{div}(2\mu S) + \rho \mathbf{g}, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \mathit{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1.4)$$

avec  $S$  le tenseur des taux de déformation,  $p$  la pression,  $\mathbf{g}$  l'accélération de la gravité. Dans chaque phase, la masse volumique  $\rho_l$  ou  $\rho_g$  est constante et uniforme donc la deuxième égalité se réécrit  $\mathit{div}(\mathbf{u}) = 0$ . Les interfaces sont considérées d'épaisseur et de masse nulle, et nous faisons l'hypothèse qu'aucun changement de phase n'a lieu. L'hypothèse de continuité assure l'absence de saut de la vitesse à la traversée d'une interface :

$$[\mathbf{u}]_{\mathcal{I}} = 0, \quad (1.5)$$

et la conservation de la quantité de mouvement se traduit par la relation de saut des contraintes aux interfaces :

$$[-p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{S}]_{\mathcal{I}} \cdot \mathbf{n} = \sigma B\mathbf{n}\delta_{\mathcal{I}} + \underbrace{\mathbf{grad}_{\mathcal{I}}(\sigma)}_{=0}, \quad (1.6)$$

où  $[q]_{\mathcal{I}} = q_l(\mathbf{x}, t) - q_g(\mathbf{x}, t)$  correspond au saut de valeur en traversant l'interface  $\mathcal{I}$  d'épaisseur nulle, avec  $q_k$  la variable  $q$  évaluée dans la phase  $k$ ,  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal à l'interface (arbitrairement orienté de la phase gazeuse vers la phase liquide) et  $B = -\text{div}_{\mathcal{I}}(\mathbf{n})$  est le double de la courbure locale de l'interface définie avec la divergence à la surface  $\text{div}_{\mathcal{I}}$ .  $\delta_{\mathcal{I}}$  est la distribution 3D de Dirac à l'interface  $\mathcal{I}$  et  $\mathbf{I}$  est la matrice identité. La tension de surface  $\sigma$  sera supposée constante tout au long du manuscrit, aucune contribution d'effet Marangoni  $\mathbf{grad}_{\mathcal{I}}(\sigma)$  ne sera prise en compte. Les interfaces, qui sont internes au système, transmettent de la quantité de mouvement d'une phase à l'autre via le travail de la force interfaciale  $\mathbf{f}_{\sigma} = \sigma B\mathbf{n}\delta_{\mathcal{I}}$  (Eq. (1.6)).

L'expression des équations de Navier-Stokes généralisées à un mélange diphasique (dans le formalisme Euler-Euler) s'obtient alors en multipliant les équations (1.3) et (1.4) par l'indicatrice de phase  $\chi_k$  qui répond à une équation de transport :

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{grad}(\chi_k) = 0, \quad (1.7)$$

ce qui permet d'écrire pour la conservation de la masse (1.4) :

$$\chi_k \frac{\partial}{\partial t} \rho_k + \chi_k \text{div}(\rho_k \mathbf{u}_k) = \frac{\partial}{\partial t} \chi_k \rho_k + \text{div}(\chi_k \rho_k \mathbf{u}_k) = 0, \quad (1.8)$$

et pour la conservation de la quantité de mouvement (1.3) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \chi_k \rho_k \mathbf{u}_k + \mathbf{div}(\chi_k \mathbf{u}_k \otimes \rho_k \mathbf{u}_k) = & -\mathbf{grad}(\chi_k p) + \mathbf{div}(2\chi_k \mu_k \mathbf{S}_k) + \chi_k \rho_k \mathbf{g} \\ & - \mathbf{grad}(\chi_k) \cdot (Ip_k - 2\mu_k \mathbf{S}_k) \end{aligned} \quad (1.9)$$

avec  $I$  le tenseur identité. En sommant (1.8) sur les deux phases, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1.10)$$

et en sommant (1.9) sur les deux phases aussi, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{u} + \mathbf{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = & -\mathbf{grad}(p) + \mathbf{div}(2\mu \mathbf{S}) + \rho \mathbf{g} \\ & - (\mathbf{grad}(\chi_l) \cdot (Ip_l - 2\mu_l \mathbf{S}_l) + \mathbf{grad}(\chi_g) \cdot (Ip_g - 2\mu_g \mathbf{S}_g)), \end{aligned} \quad (1.11)$$

où cette fois  $\mathbf{u}, p, \mathbf{S}, \mu, \rho$  décrivent le mélange diphasique :

$$\mathbf{u} = \sum_k \chi_k \mathbf{u}_k, \quad p = \sum_k \chi_k p_k, \quad \mathbf{S} = \sum_k \chi_k \mathbf{S}_k, \quad \mu = \sum_k \chi_k \mu_k, \quad \rho = \sum_k \chi_k \rho_k. \quad (1.12)$$

Le gradient de l'indicatrice de phase  $\mathbf{grad}(\chi_k)$  s'écrit  $\mathbf{grad}(\chi_k) = -\mathbf{n}_{\mathcal{I}}\delta_{\mathcal{I}}$  où  $\delta_{\mathcal{I}}$  est une distribution de Dirac de mesure non nulle sur les interfaces. Ainsi, en utilisant la relation de saut de quantité de mouvement (Eq. (1.6)) dans (1.11), on obtient l'équation du bilan de quantité de mouvement en écriture monofluide :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{u} + \mathbf{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\mathbf{grad}(p) + \mathbf{div}(2\mu \mathbf{S}) + \rho \mathbf{g} + \sigma B\mathbf{n}\delta_{\mathcal{I}}. \quad (1.13)$$

En utilisant la conservation de la masse (1.10), l'équation du bilan de quantité de mouvement devient :

$$\rho \frac{D}{Dt} \mathbf{u} = -\mathbf{grad}(p) + \mathbf{div}(2\mu \mathbf{S}) + \rho \mathbf{g} + \sigma B\mathbf{n}\delta_{\mathcal{I}}, \quad (1.14)$$

avec  $\frac{D}{Dt} \mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}(\mathbf{u})$  la dérivée particulaire de la vitesse, qui correspond à l'accélération d'une particule fluide. Pour nos écoulements diphasiques sans changement de phase, une particule fluide ne change pas de phase au cours du temps, ainsi une particule fluide dans la phase liquide à un instant donné restera dans cette phase.

## 1.3 État de l'art

### 1.3.1 Discrétisation et résolution numérique des équations

La difficulté de la résolution numérique des équations locales et instantanées (1.10), (1.13) et (1.7) pour les écoulements à bulles réside dans la résolution des interfaces qui se déplacent au cours du temps. Pour résoudre correctement ces écoulements, différentes méthodes ont été imaginées, qui peuvent se regrouper en trois grandes familles.

**Maillage mobile (approche Lagrangienne)** : Dans cette méthode les interfaces sont des frontières du maillage, les mailles se déplaçant avec les interfaces. Le traitement des conditions aux limites aux interfaces est précis et simplement mis en place. Mais cette approche se limite aux écoulements où les interfaces se déforment peu et ne changent pas de topologie (pas de coalescence, pas de fragmentation) à cause de la complexité qu'apporte la gestion de ces phénomènes.

**Maillage fixe (approche eulérienne)** : Cette famille de méthodes utilise un unique maillage fixe. Les interfaces ne coïncident avec aucune frontière du domaine, et pour rendre compte de leur présence, ces méthodes transportent une fonction dont la valeur dépend de la phase.

- Les méthodes de type VoF (pour Volume of Fluid) transportent une fonction couleur  $C$  qui est nulle dans une phase et qui vaut un dans l'autre. Différentes techniques de reconstruction des interfaces à partir de la répartition de cette fonction  $C$  ont été mises au point. En méthode VoF, l'advection de la fonction couleur s'accompagne souvent d'une diffusion numérique, qu'il faut alors corriger pour que l'interface reste d'épaisseur nulle.
- Les méthodes de type Level-Set se distinguent des précédentes en utilisant une fonction de classe  $C^\infty$  pour décrire la position des phases. Cette fonction est négative dans une phase, positive dans l'autre et la position des interfaces correspondent aux points où cette fonction est nulle. Contrairement à la fonction couleur des méthodes VoF, la fonction Level-Set est continue et régulière et peut donc être advectée sans difficulté par une méthode de résolution d'équation hyperbolique.
- Les méthodes à champ de phase se distinguent en considérant des interfaces d'épaisseurs non-nulles qui sont décrites par une équation d'équilibre thermodynamique. La fonction de champ de phase  $c$ , évolue selon une équation d'advection-diffusion, avec un terme de diffusion non linéaire (équation de Cahn-Hilliard avec advection). Pour contrecarrer la diffusion de l'interface, une partie antidiffusive, qui fait appel à une fonction d'énergie libre, est ajoutée. Un ajustement judicieux des coefficients permet de limiter l'épaisseur de l'interface à l'ordre d'une maille, en pratique.

**Un maillage fixe et un maillage mobile (approche Euler-Lagrange)** : Plutôt que d'advecter une fonction et de déduire la position des interfaces à l'aide des valeurs prises par cette fonction, la famille de méthode Front-Tracking (ou FT) utilise des marqueurs pour suivre la position des interfaces. Ces marqueurs sont connectés entre eux pour former le maillage surfacique des interfaces, qui est advecté à la vitesse du fluide environnant. Différentes techniques FT se distinguent par la manière et l'ordre dans lequel les informations sont échangées entre le maillage mobile (lagrangien) et le maillage fixe (eulérien). Cette approche a été utilisée pour la première fois dans les travaux de DALY [11] qui a calculé une tension de surface à partir de marqueur sur l'interface, mais le terme Front-Tracking a été introduit dans l'ouvrage de RICHTMYER et al. [49] et les travaux successifs de Glimm [22, 20, 21, 23] ont permis de développer l'idée originale en une méthodologie générale. Aujourd'hui, les travaux de Tryggvason [66, 17, 65] font référence dans ce domaine. Contrairement aux approches eulériennes, l'approche Front-Tracking ne rend pas automatiquement compte de la coalescence ou de la fragmentation, bien qu'il soit tout à fait possible de la prendre en compte, moyennant une complexité accrue du code de résolution.

Dans le cadre de cette thèse, nous utilisons le module TrioIJK du code de calcul open source TrioCFD développé au STMF pour réaliser nos simulations DNS d'essais de bulles. Ce code utilise une méthode de Front-Tracking pour résoudre les équations de conservation. Le détail de la résolution est reporté en section 2.1.

### 1.3.2 Essaims homogènes de bulles

Les essaims de bulles font partie de la famille des écoulements à phase dispersée dans lesquels un ensemble de corps (bulles, gouttes, particules) peuplent une phase continue. La dynamique de ces écoulements est rendue très complexe par la présence de cette phase, en interaction avec le fluide porteur.

Une situation particulièrement fondamentale et intéressante est celle d'un essaim homogène de bulles en ascension sous l'effet de la pesanteur. Dans ce cas, la dynamique de l'écoulement est entièrement régie par le mouvement relatif des bulles par rapport au fluide et peut être caractérisé par un jeu de huit paramètres :  $\rho_l$  la masse volumique du liquide (fluide porteur),  $\rho_g$  la masse volumique de la phase gazeuse,  $\mu_l$  la viscosité dynamique du liquide,  $\mu_g$  la viscosité dynamique du gaz,  $g$  l'accélération de la gravité,  $d_b$  le diamètre des bulles et  $\sigma$  la tension superficielle. Un ensemble de cinq nombres sans dimension suffit donc à caractériser ces écoulements. Une caractéristique essentielle de cette configuration d'écoulement est la vitesse moyenne relative  $u_r$  des bulles par rapport au fluide porteur. En substituant  $u_r$  à  $g$  dans la liste des paramètres régissant l'écoulement, il est judicieux d'introduire les cinq nombres adimensionnels suivants pour en analyser les différents régimes : le

nombre de Reynolds des bulles,  $Re_b = \frac{\rho_l u_r d_b}{\mu_l}$ , qui détermine la nature de l'écoulement autour de celles-ci, le nombre de Weber,  $We = \frac{\rho_l u_r^2 d_b}{\sigma}$ , qui maîtrise la déformation des bulles, le rapport des masses volumiques,  $\phi_\rho = \frac{\rho_l}{\rho_g}$ , le rapport des viscosités,  $\phi_\mu = \frac{\mu_l}{\mu_g}$ , et la fraction volumique de gaz  $\alpha$ .

Lorsque  $Re_b$  est grand (à partir de  $Re_b \geq 100$ ), d'importants sillages se développent derrière les bulles, et pour des fractions volumiques supérieures à 1%, ces sillages sont profondément modifiés par leurs interactions. Celles-ci sont responsables, d'une part, de la décroissance exponentielle de la perturbation de vitesse dans les sillages (RISSO et al. [55]) et déclenchent, d'autre part, une instabilité collective de l'écoulement provoquant l'apparition de fluctuations turbulentes (RIBOUX et al. [47] et ALMÉRAS et al. [1]). Dans ces conditions, les fluctuations du liquide, que nous appellerons BIA (pour *Bubble Induced Agitation*), sont la combinaison de deux contributions de natures différentes. La première, qui correspond au contournement des bulles par le fluide (couche limite et perturbation potentielle) et à leur sillage, est désignée par le terme LBD (pour *Localised Body Disturbance*). La seconde contribution, nommée BIT (pour *Bubble Induced Turbulence*), résulte de l'instabilité de l'écoulement au sein d'un réseau d'obstacles et de leur sillage en interaction. Alors que la LBD est très anisotrope et localisée autour des bulles, la BIT est plus isotrope et répartie de façon homogène dans l'écoulement comme le montrent les travaux de RIBOUX et al. [47], AMOURA et al. [2], LE ROY DE BONNEVILLE et al. [28] et ZAMANSKY et al. [70].

De nombreux travaux expérimentaux (LANCE et al. [27], ZENIT et al. [71], RISSO et al. [53], GARNIER et al. [19], MARTÍNEZ MERCADO et al. [34], ROIG et al. [58] et RIBOUX et al. [48]) et numériques (SMERKA [62], BUNNER et al. [7] et ROGHAI et al. [57]) ont mis en lumière les caractéristiques particulières de la BIA qui sont résumées dans la synthèse de RISSO [52]. La vitesse moyenne d'ascension des bulles décroît en augmentant la fraction volumique, la variance des fluctuations du liquide est proportionnelle à l'énergie cinétique moyenne des bulles  $\alpha u_r^2$  avec un coefficient de proportionnalité dépendant des paramètres. Les PDF des vitesses du liquide sont anisotropes, et présentent différents régimes d'évolution exponentielles, la composante verticale montrant des fluctuations positives beaucoup plus intenses que les fluctuations négatives. Le travail de modélisation de RISSO [51] donne une interprétation détaillée de ces régimes. Le spectre d'énergie cinétique  $\mathcal{S}$  décroît comme  $\kappa^{-3}$  pour les nombres d'ondes  $\kappa$  supérieurs à  $\kappa_b = \frac{2\pi}{d_b}$  tandis que le bilan spectral d'énergie cinétique montre que la production d'énergie par la flottabilité est maximale autour de  $\kappa_b$  (PANDEY et al. [40] et ZAMANSKY et al. [70]).

Les mécanismes responsables du régime d'évolution de  $\mathcal{S}$  en  $\kappa^{-3}$  ne sont pas totalement expliqués à ce jour. Dans leur travail pionnier, LANCE et al. [27] expliquent cette tendance par un équilibre spectral local entre la production d'énergie cinétique  $\mathcal{P}$ , supposée inversement proportionnelle au nombre d'onde  $\kappa$ , et la densité spectrale de dissipation  $\mathcal{D}$  proportionnelle au produit du spectre d'énergie par le carré du nombre d'onde. Depuis, les travaux numériques de RIBOUX et al. [47], où l'écoulement à travers un essaim homogène de sources fixes de quantité de mouvement est analysé,

ont montré qu'un régime en  $\kappa^{-3}$  est présent à la fois dans le spectre de la LBD et dans celui de la BIT. Plus récemment, les travaux expérimentaux de AMOURA et al. [2] ont confirmé cela en analysant l'écoulement à travers un essaim homogène de sphères fixes. Le travail de modélisation de RISSO [50] montre comment les perturbations correspondant à la LBD peuvent engendrer une plage d'évolution du spectre en  $\kappa^{-3}$  dont les bornes correspondent aux tailles extrémales des perturbations. Récemment, les travaux numériques de ZAMANSKY et al. [70], montrent que le régime en  $\kappa^{-3}$  se caractérise par un taux de cisaillement constant, proportionnel au taux de cisaillement moyen dans les sillages des bulles, et que ce régime est en fait une zone de transition entre les grandes échelles dominées par la production d'énergie cinétique par les bulles et les petites échelles dominées par les effets dissipatifs, sans que la densité spectrale de la dissipation ne soit en équilibre avec la densité spectrale de la production sur cette gamme d'échelle, invalidant l'interprétation de LANCE et al. [27]. Pour comprendre les mécanismes qui dictent cette répartition d'énergie cinétique, ZAMANSKY et al. [70] se sont intéressés au bilan spectral d'énergie cinétique qui peut s'écrire de façon générale, à l'état stationnaire :  $\mathcal{P}(\kappa) - \mathcal{D}(\kappa) + \mathcal{T}(\kappa) = 0$ , avec  $\mathcal{P}$  qui correspond à la densité spectrale de production d'énergie,  $\mathcal{D}$  qui correspond à la densité spectrale du taux de dissipation d'énergie et  $\mathcal{T}$  qui regroupe les contributions qui ne font que transférer de l'énergie entre les échelles, sans en produire ni en dissiper, à savoir les puissances des termes d'interfaces et d'inertie. La production par la flottabilité est concentrée aux grandes échelles, avec un pic vers les échelles autour de la taille des bulles, la dissipation s'étale aux petites échelles, avec un maximum à une échelle légèrement plus petite que la bulle. Le terme  $\mathcal{T}$  transfère globalement de l'énergie des grandes vers les petites échelles.

### Essaim homogène de bulles au sein d'un écoulement turbulent

Dans de nombreux écoulements, la BIA n'est pas la seule source d'agitation, comme dans le cas des écoulements en conduite à grand nombre de Reynolds, où le frottement pariétal génère de la turbulence, désignée par SIT (pour *Shear-Induced Turbulence*), qu'il y ait des bulles ou non. Pour caractériser ces écoulements combinant BIA et SIT, RENSEN et al. [46] proposent d'utiliser le rapport entre l'énergie cinétique causée par les bulles, estimée par celle du mouvement moyen relatif entre les phases, et de l'énergie cinétique fluctuante de la turbulence monophasique pré-existante, qui forme le paramètre de bubble  $b = \frac{\alpha u_r^2}{2u'^2}$ . Un certain nombre d'études ont considéré la situation fondamentale où un essaim de bulles est en ascension dans une turbulence homogène isotrope (HIT pour *Homogeneous Isotropic Turbulence*). Cette configuration a été obtenue expérimentalement en plaçant l'essaim de bulles dans une turbulence de grille : PRAKASH et al. [44] et ALMÉRAS et al. [1]. Elle a été aussi étudiée à l'aide de simulations numériques par PANDEY et al. [39] en plaçant les bulles dans une turbulence forcée aux grandes échelles.

Rappelons que le spectre d'énergie de la HIT suit, comme en BIA, une évolution en puissance du nombre d'onde. L'analogie s'arrête ici puisque la tendance est en  $\kappa^{-5/3}$ , et que ce régime est caractéristique des échelles pour lesquelles l'énergie des grandes échelles cascade vers les petites échelles de façon inertielle, sans aucune production ni dissipation d'énergie mécanique. L'étendue de ce régime, appelé régime inertiel, augmente avec le nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor  $\lambda = \sqrt{15\nu u'^2/\epsilon}$ ,  $Re_\lambda = \frac{\rho u' \lambda}{\mu}$  où  $u'$  est l'écart-type de vitesse (POPE [43]). Les travaux cités ci-dessus balaient une gamme de  $\alpha$  entre 0.5 et 13%, avec un nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor entre 80 et 360 pour l'écoulement témoin sans bulles, ce qui place le paramètre  $b$  entre 0.1 et 4. Dans les travaux expérimentaux, le régime en  $\kappa^{-5/3}$  de la HIT s'interrompt avant l'apparition du régime en  $\kappa^{-3}$  de la BIA, situé à des nombres d'ondes plus grands. Cette situation n'est donc pas favorable à une interaction entre les deux mécanismes de production de fluctuations. Les simulations numériques de PANDEY et al. [39], proposent, en plus des spectres d'énergie, une description des termes du bilan d'énergie. Cependant, la gamme d'échelles où la BIA et la HIT sont en interaction reste assez étroite ici aussi. De plus, l'application d'un filtre gaussien pour filtrer les champs avant de calculer les spectres et le fait que les termes du bilan spectral d'énergie soient présentés sous la forme de spectres cumulés limitent fortement les conclusions pouvant être tirées sur les mécanismes physiques.

Bien que ne concernant pas l'interaction entre BIA et HIT, il nous semble pertinent de mentionner l'étude de CRIALESI-ESPOSITO et al. [10] qui présente des DNS de gouttes placées dans une HIT

obtenue par forçage aux grandes échelles (forçage 'ABC' (MININNI et al. [37])). Dans ce cas, les deux phases ont la même densité et la gravité n'est pas prise en compte. Il n'y a pas de vitesse relative entre les phases et donc pas de BIA. Une autre différence avec notre étude est que les processus de fragmentation et de coalescence sont pris en compte. Cependant, il est intéressant de constater que la présence des gouttes amplifie le transfert d'énergie des grandes vers les petites échelles. On peut donc se demander si ce mécanisme est assez général pour se retrouver dans la situation qui nous intéresse, c'est-à-dire lorsque des bulles en ascension sont une source d'agitation qui s'ajoute à celle du forçage turbulent responsable de la HIT.

Aujourd'hui, les mécanismes d'interaction entre turbulence monophasique (SIT) et l'agitation induite par les bulles (BIA) restent donc encore très peu compris, même dans le cas où la turbulence monophasique est homogène et isotrope (HIT). En particulier, on souhaiterait savoir si les effets de la BIA et la SIT auront plutôt tendance à se renforcer l'un l'autre, à s'annuler, ou bien simplement à se cumuler. La réponse à cette question peu très bien dépendre du rapport entre les énergies de ces deux contributions et des échelles que l'on considère.

## 1.4 Présentation des cas étudiés

Pour étudier la dynamique spectrale de la BIA et son interaction avec une turbulence monophasique SIT, nous analyserons différentes simulations DNS. En ce qui concerne la BIA seule, nous simulerons dans un domaine périodique dans les trois directions, des essais contenant des bulles de volume constant et de diamètres initial  $d_b = 1mm$ , réparties de façon homogène et isotrope et soumises uniquement à la gravité,  $g = 9.81m.s^{-2}$ . Dans un souci de séparation des effets, ces bulles ne se fragmentent pas, ne coalescent pas et leur tension superficielle est uniforme et vaut  $\sigma = 1.806 \times 10^{-2} N.m^{-1}$ . Les masses volumiques sont identiques à celles de l'expérience DEBORA (MANON [33]), dans laquelle du fréon R12 à 15 bar et à température de saturation permet de simuler un écoulement réacteur eau/vapeur à 100 bar :  $\rho_l = 1171.3kg.m^{-3}$ ,  $\rho_v = 87.545kg.m^{-3}$ . Les viscosités dynamiques des deux fluides sont choisies égales, ce qui simplifiera l'analyse spectrale, comme discuté au chapitre 3, et elles valent  $\mu = 3.73 \times 10^{-4} Pa.s$ . Pour étudier l'interaction de la BIA avec une turbulence monophasique, nous simulons les mêmes essais de bulles, auxquels nous choisissons d'ajouter un forçage extérieur  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ , inspiré des travaux de CHOUPEPE et al. [9] et ESWARAN et al. [18] qui s'applique sur tout le domaine. Ce forçage stochastique calculé dans l'espace spectral n'est actif qu'aux grandes échelles, ce qui permet de reproduire, sur un cas monophasique, les caractéristiques d'une HIT. Comme justifié au chapitre 2 et confirmé au chapitre 5, nous choisissons précisément les paramètres de ce forçage d'une part pour superposer la zone inertielle de la HIT à la gamme en  $\kappa^{-3}$  de la BIA et d'autre part pour que les énergies de la HIT et de la BIA soient comparables à ces échelles.

Pour toutes les simulations, le gradient de pression hydrostatique, le mouvement moyen des bulles et les fluctuations de vitesses à l'échelles des bulles ne déforment que faiblement les bulles, comme l'indiquent respectivement les valeurs du nombre de Bond  $Bo = \frac{\Delta\rho g d_b^2}{\sigma}$ , du nombre de Weber des grandes échelles  $We = \frac{\rho_l u_r^2 d_b}{\sigma}$  et du nombre de Weber à l'échelle de la bulle  $We_{d_b} = 2 \frac{\rho_l \epsilon^{2/3} d_b^{5/3}}{\sigma}$  (PERRARD et al. [42], VELA-MARTÍN et al. [67] et RISSO et al. [54]), qui sont rapportées dans les tableaux (1.1) et (1.2). La valeur du nombre de Reynolds de bulles,  $Re_b > 200$ , et de la fraction volumique de gaz,  $\alpha > 1\%$ , nous assure le développement des instabilités collectives de sillages et leurs interactions. Le nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor  $Re_\lambda = \frac{\rho_l u' \lambda}{\mu_l}$  nous permet d'anticiper le développement d'une zone inertielle étendue, pour le cas monophasique (HIT) au moins.

	$Ar$	$Bo$	$\mathbf{f}$	$\alpha$	$L/d_b$	$d_b/\Delta x$
HIT	–	–	✓	0	32	28
BIA	299	0.6	X	3; 6; 12	16	28
TBIA			✓	3; 6; 12	32	14; 28*

Tableau 1.1: Paramètres adimensionnels des cas simulés. Le nombre d'Archimède vaut  $Ar = \frac{\rho_l d_b}{\mu_l}$  avec l'échelle de vitesse  $u \sim \sqrt{\frac{\Delta\rho}{\rho_l} g d_b}$  estimée avec les paramètres d'entrée uniquement. Le nombre de Bond vaut  $Bo = \frac{\Delta\rho g d^2}{\sigma}$ . \* : Le raffinement  $d_b = 28\Delta x$  n'est disponible que pour  $\alpha = 6\%$  en TBIA.

		$\alpha$	$Re_b$	$We$	$We_{d_b}$	$Re_\lambda$
HIT	HIT	0	–	–	–	177
	B3	3	493	1.5	0.15	38
BIA	B6	6	414	1.1	0.20	43
	B12	12	339	0.8	0.27	44
TBIA	TB3	3	306	0.6	0.25	166
	TB6	6	283	0.5	0.28	150
	TB12	12	311	0.6	0.33	140

Tableau 1.2: Nombres adimensionnels, pour les simulations principales de cette thèse. Le nombre de Reynolds de bulles vaut  $Re_b = \frac{\rho_l u_r d_b}{\mu_l}$ , le nombre de Weber des grandes échelles vaut  $We = \frac{\rho_l u_r^2 d_b}{\sigma}$ , le nombre de Weber à l'échelles de la bulle vaut  $We_{d_b} = 2 \frac{\rho_l \epsilon^{2/3} d_b^{5/3}}{\sigma}$ , le nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor  $\lambda$  vaut  $Re_\lambda = \frac{\rho_l u' \lambda}{\mu_l}$ .





# Chapitre 2

## Outil numérique

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Code de calcul TrioIJK</b>	<b>22</b>
2.1.1	Présentation générale du code	22
2.1.2	Algorithme de résolution	23
2.1.3	Schéma de discrétisation en temps	24
2.1.4	Gestion des interfaces	25
<b>2.2</b>	<b>Paramètres numériques</b>	<b>26</b>
2.2.1	Géométrie	26
2.2.2	Répulsion entre les bulles	27
2.2.3	Synthèse des paramètres numériques	28
<b>2.3</b>	<b>Forçage</b>	<b>28</b>
2.3.1	Forçage linéaire	29
2.3.2	Forçage à partir d'un spectre complet	29
2.3.3	Forçage stochastique sur les premiers modes spectraux	29
2.3.4	Choix des paramètres du forçage	30
2.3.5	Synthèse sur le forçage pour la simulation d'un écoulement de type turbulence homogène isotrope	32
<b>2.4</b>	<b>Discrétisation du bilan</b>	<b>32</b>
2.4.1	Discrétisation temporelle du terme instationnaire	32
2.4.2	Cohérence avec les autres termes du bilan	34
2.4.3	Instants relevés	35
<b>2.5</b>	<b>Convergences</b>	<b>35</b>
2.5.1	Convergence vers un état statistiquement stationnaire	36
2.5.2	Convergence statistique	36
2.5.3	Convergence en maillage	38
2.5.4	Répulsion entre les bulles	42
2.5.5	Effet de la présence de nappes sur les spectres	46
<b>2.6</b>	<b>Conclusion du chapitre</b>	<b>47</b>

---

Dans le cadre de ce travail, l'étude de la physique des essaims de bulles homogènes s'appuie sur l'analyse de différentes simulations numériques. Ce chapitre vise à expliquer les points techniques essentiels à la réalisation et à l'analyse de ces simulations. Tout d'abord, le code de calcul utilisé pour réaliser ces simulations est présenté. Les paramètres numériques des simulations mises en place sont ensuite justifiés. L'algorithme de forçage, indispensable pour mettre en place l'interaction entre la turbulence et l'agitation induite par les bulles, est détaillé avant de décrire la discrétisation numérique de la représentation spectrale du bilan d'énergie cinétique (présenté en annexe A.1.2). Enfin, la convergence des simulations est présentée en détail.

## 2.1 Code de calcul TrioIJK

Cette section présente le code utilisé pour réaliser les simulations analysées par la suite. Les principales caractéristiques du code et de l'utilisation qui en est faite sont expliquées avant de détailler l'algorithme de résolution du pas de temps. Les schémas de discrétisation temporelle, puis les algorithmes propres à la gestion des interfaces sont ensuite présentés.

### 2.1.1 Présentation générale du code

Les simulations numériques de cette thèse sont produites avec le module TrioIJK du logiciel Open Source de simulation numérique TrioCFD (<https://trio CFD.cea.fr/>) développé au sein du Service de Thermohydraulique et de Mécanique des Fluides de la Direction des Énergies du Commissariat à l'Énergie Atomique et aux énergies alternatives (CEA - DES/STMF). Ce code est basé sur la plateforme HPC TRUST (TrioU Software for Thermohydraulics) (<https://cea-trust-platform.github.io>), écrit en C++. TrioCFD est un code massivement parallèle (simulation à  $10^9$  mailles), dédié à des études scientifiques industrielles et de recherche variées.

Les simulations produites dans cette thèse sont des simulations numériques directes (DNS<sup>1</sup> pour *Direct Numerical Simulation*), c'est-à-dire qu'aucune modélisation n'est ajoutée aux équations résolues par le code. Pour que la simulation soit correcte, il faut donc que la discrétisation du domaine permette une résolution la plus fine possible (voir section 2.2).

Le code résout les équations mono-fluide de KATAOKA [26] (voir également la thèse de MATHIEU [36] pour la mise en œuvre dans TrioCFD) :

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho \partial_t (\mathbf{u}) + \rho \operatorname{div} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\operatorname{grad}(P) + \rho \mathbf{g} + \operatorname{div} (2\mu S) + \sigma B \mathbf{n}_{\mathcal{I}} \delta_{\mathcal{I}}, \quad (2.2)$$

$$\partial_t \chi + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} (\chi) = 0 \quad (2.3)$$

où chaque variable mono fluide  $q$  est définie comme  $q = \sum_k \chi_k q_k$ , avec  $\chi_k$  l'indicatrice de la phase  $k$ .  $S = (1/2) (\operatorname{grad}(\mathbf{u}) + \operatorname{grad}^T(\mathbf{u}))$  est le tenseur des taux de déformation,  $B = -\operatorname{div}_{\mathcal{I}}(\mathbf{n})$  est le double de la courbure locale de l'interface,  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal à l'interface, orienté de la phase gazeuse vers la phase liquide,  $\delta_{\mathcal{I}}$  est la distribution 3D de Dirac à l'interface  $\mathcal{I}$ .

Le module TrioIJK utilise une méthode de Front-Tracking pour suivre les interfaces entre les deux fluides. Dans cette méthode, les interfaces sont matérialisées par un maillage surfacique lagrangien qui évolue au sein d'un maillage eulérien fixe. Le maillage de l'interface est transporté par une interpolation du champ de vitesse  $\mathbf{u}$ . Ce maillage lagrangien différencie les méthodes Front-Tracking des autres méthodes de résolution d'écoulements diphasiques (Volume of Fluid, Level-set, ...). La stabilité du maillage surfacique est la principale difficulté de cette méthode. Pour assurer la stabilité de ce maillage et en garantir la qualité, une attention particulière est portée aux algorithmes de remaillage et de lissage de l'interface. De plus la résolution du module TrioIJK fait appel à des algorithmes inspirés de méthodes VoF pour la conservation du volume : le champ de l'indicatrice eulérienne  $\chi$  est construit sur le maillage eulérien à partir du maillage lagrangien. Cette variable est notamment utilisée pour conserver précisément la masse des deux phases.

Pour répondre aux objectifs de cette thèse, un module permettant d'imposer un forçage évoluant au cours du temps est introduit dans le module TrioIJK. Ce forçage prend la forme d'un terme source  $\rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  dans l'équation (2.2) résolue par le code. Un choix judicieux des échelles forcées, de l'orientation, de l'amplitude et de l'évolution temporelle de ce forçage permet de simuler un écoulement monophasique ayant des caractéristiques semblables à une turbulence homogène isotrope (HIT pour *Homogeneous Isotropic Turbulence*) ESWARAN et al. [18] et a été validé pour un écoulement fluide-particules CHOUPEPE et al. [9]. L'équation d'évolution de ce terme source, ainsi que la valeur des paramètres de ce forçage sont présentées au paragraphe 2.3.

Une légère dérive de la quantité de mouvement a été constatée pour les simulations d'un essaim de bulles soumis uniquement à un champ de gravité  $\mathbf{g}$  dans un domaine tri-périodique, car la

<sup>1</sup>on appelle DNS bien que toutes les couches limites ne sont pas exactement résolues, suivant la définition donnée par POPE [43, p. 344].

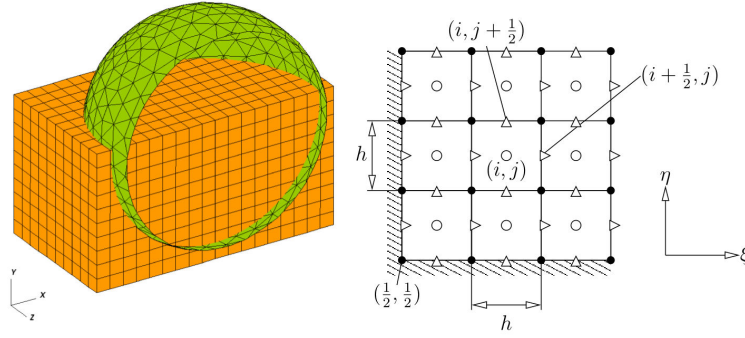


Figure 2.1: Illustration de la méthode mixte FT/VoF de TrioCFD et TrioIJK (maillage lagrangien en vert et maillage eulerien en orange) ; structure décalée du maillage eulerien en 2D [4].

formulation employée ne conserve pas strictement la quantité de mouvement. L'erreur sur la quantité de mouvement est minimale à chaque pas de temps, mais elle est toujours de même signe; l'erreur se cumule donc. Cette accumulation d'erreur fausse la simulation. Ainsi, une correction de quantité de mouvement est ajoutée. Cette correction, appliquée à la fin de la résolution de chaque pas de temps, prend la forme d'une vitesse uniforme appliquée dans tout le domaine dont la valeur évolue au cours du temps. Cette correction n'induit donc pas de vitesse de glissement entre les phases. Nous avons vérifié qu'à chaque instant la valeur de cette correction est très inférieure à la valeur de chacun des autres termes de l'équation résolue par le code (Eq. (2.2)).

### 2.1.2 Algorithme de résolution

Nous présentons ici les cinq étapes majeures de la résolution d'un pas de temps par le module IJK de TrioCFD. Ces étapes sont : (i) l'advection des marqueurs d'interfaces par la vitesse, (ii) la prédiction de l'incrément de vitesse, (iii) le calcul des forces interfaciales, (iv) la correction de cet incrément par le gradient de pression, (v) l'ajustement de la quantité de mouvement par une correction en vitesse.

Dans un premier temps, l'indicatrice, les propriétés physiques  $\rho$ ,  $\mu$ , la courbure  $B/2$  et les vecteurs normaux aux interfaces  $\mathbf{n}_{\mathcal{I}}$  sont évalués à partir des positions  $\mathbf{x}_{\mathcal{I}}^n$  des marqueurs du maillage surfacique lagrangien. Le terme source interfacial à l'instant  $n$ ,  $S_{\sigma}^n = \sigma B^n \mathbf{n}_{\mathcal{I}}^n$  est alors évalué, puis les marqueurs sont advectés par le champ de vitesse  $\mathbf{u}^n$ . La position des interfaces au temps suivant  $\mathbf{x}_{\mathcal{I}}^{n+1}$  est ainsi obtenue après correction par le remaillage et par l'algorithme de conservation du volume de chaque bulle.

Dans un deuxième temps, l'incrément de vitesse  $\delta \mathbf{u}^*$  est calculé en résolvant les contributions d'advection, de diffusion, de gravité et de forçage extérieur à partir des champs de vitesse  $\mathbf{u}^n$ , de densité  $\rho^n$  de viscosité  $\mu^n$  du temps  $n$  :

$$\delta \mathbf{u}^* = \frac{1}{\rho^n} \left( \underbrace{\rho^n \operatorname{div}(\mathbf{u}^n \otimes \mathbf{u}^n)}_{\text{advection}} + \underbrace{\mu^n \operatorname{div}(2 S^n)}_{\text{diffusion}} \right) + \underbrace{\mathbf{f}^n}_{\text{forçage}} + \underbrace{\mathbf{g}}_{\text{gravité}}. \quad (2.4)$$

Les termes d'advection et de diffusion sont calculés en utilisant un schéma spatial centré d'ordre deux. Le forçage est directement calculé par la transformation inverse de Fourier (Eq. (2.24)) de la solution des équations (2.18) et (2.19) (section 2.3). Il s'agit de l'étape de prédiction.

Dans un troisième temps, la contribution des forces interfaciales  $S_{\sigma}^n$  est calculée à partir des positions  $\mathbf{x}_{\mathcal{I}}^n$  et du champ  $\mathbf{u}^n$  puis elle est ajoutée à l'incrément de vitesse  $\delta \mathbf{u}^*$ . Le champ de vitesse est mis à jour :

$$\mathbf{u}^{**} = \mathbf{u}^n + \Delta t \times \left( \delta \mathbf{u}^* + \frac{1}{\rho^n} S_{\sigma}^n \right). \quad (2.5)$$

Dans un quatrième temps, pour corriger cette prédiction du champ de vitesse  $\mathbf{u}^{**}$ , l'équation de Poisson (équation elliptique sur la pression) est résolue de sorte à imposer une solution à divergence nulle :

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}^{**}) = \operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho^n} \mathbf{grad}(p^{n+1})\right). \quad (2.6)$$

Le gradient de pression est maintenant connu et peut être retranché à la prédiction  $\mathbf{u}^{**}$  pour former la vitesse intermédiaire  $\mathbf{u}^+$ . Il s'agit de l'étape de correction

$$\mathbf{u}^+ = \mathbf{u}^{**} - \frac{1}{\rho^n} \mathbf{grad}(p^{n+1}). \quad (2.7)$$

Enfin, une correction de vitesse  $\mathbf{c}^+$  est déterminée à partir de la quantité de mouvement cible  $\mathbf{Q}_{cible} = (Q_{x,cible}, Q_{y,cible}, Q_{z,cible})$ ,

$$\mathbf{c}^+ = \frac{1}{\rho^{n+1}} \left( \overline{\rho^{n+1} \mathbf{u}^+} - \mathbf{Q}_{cible} \right), \quad (2.8)$$

où  $\bar{\phantom{x}}$  désigne la moyenne spatiale. Le vecteur  $\mathbf{c}^+$  est uniforme. L'ajustement de la correction de quantité de mouvement est fait par :

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^+ - \mathbf{c}^+. \quad (2.9)$$

### 2.1.3 Schéma de discrétisation en temps

Maintenant que la résolution d'un incrément temporel a été détaillée, on peut s'intéresser au schéma temporel de résolution de la simulation. Les schémas temporels disponibles dans le module TrioIJK sont le schéma Euler explicite et le schéma de Runge-Kutta 3 explicite (RK3). L'écriture de l'équation (2.5) correspond à un schéma Euler explicite. Toutes nos simulations utilisent le schéma RK3, sauf s'il est explicitement dit le contraire. Dans TrioIJK, le schéma RK3 est mis en œuvre en utilisant la méthode de [68] qui permet de ne pas demander beaucoup plus d'espace mémoire qu'un schéma Euler explicite tout en ayant une meilleure précision.

Pour ce schéma RK3, la résolution d'un pas de temps se fait en trois étapes, chacune en quatre temps :

#### Étape 0 :

$$1) \mathbf{F}_0 = \delta \mathbf{u}_0^* \quad (2.10)$$

$$2) \mathbf{u}_0^+ = \mathbf{u}^n + \Delta t_0 (\mathbf{F}_0 + \mathbf{S}_\sigma^0 / \rho^0) \quad (2.11)$$

3) projection et correction de  $\mathbf{u}_0^+$

4) déplacement des marqueurs d'interfaces,  
et mise à jour des propriétés de champs

#### Étape 1 :

$$1) \mathbf{F}_1 = \delta \mathbf{u}_1^* - \frac{5}{9} \mathbf{F}_0 \quad (2.12)$$

$$2) \mathbf{u}_1^+ = \mathbf{u}_0^+ + \Delta t_1 \left( \frac{9}{4} \mathbf{F}_1 + \mathbf{S}_\sigma^1 / \rho^1 \right) \quad (2.13)$$

3) projection et correction de  $\mathbf{u}_1^+$

4) déplacement des marqueurs d'interfaces,  
et mise à jour des propriétés de champs

**Étape 2 :**

$$1) \mathbf{F}_2 = \delta \mathbf{u}_2^* - \frac{153}{128} \mathbf{F}_1 \quad (2.14)$$

$$2) \mathbf{u}_2^+ = \mathbf{u}_1^+ + \Delta t_2 \left( \frac{32}{15} \mathbf{F}_2 + \mathbf{S}_\sigma^2 / \rho^2 \right) \quad (2.15)$$

- 3) projection et correction de  $\mathbf{u}_2^+$
- 4) déplacement des marqueurs d'interfaces,  
et mise à jour des propriétés de champs

Les sous-pas de temps  $\Delta t_0$ ,  $\Delta t_1$  et  $\Delta t_2$  sont des fractions du pas de temps total  $\Delta t$ . Ils sont donnés par  $\Delta t_0 = \frac{1}{3} \Delta t$ ,  $\Delta t_1 = \frac{5}{12} \Delta t$  et  $\Delta t_2 = \frac{1}{4} \Delta t$ . Les coefficients devant  $\mathbf{F}_0$ ,  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$ ,  $\Delta t_0$ ,  $\Delta t_1$  et  $\Delta t_2$  sont choisis selon [68]. Les incréments de vitesse  $\delta \mathbf{u}_0^*$ ,  $\delta \mathbf{u}_1^*$  et  $\delta \mathbf{u}_2^*$  sont calculés en utilisant l'étape de prédiction (2.4) détaillée plus haut. Pour  $\delta \mathbf{u}_1^*$ , la vitesse  $\mathbf{u}^n$  dans l'équation (2.4) est remplacée par  $\mathbf{u}_0^+$ . Pour  $\delta \mathbf{u}_2^*$ , elle est remplacée par  $\mathbf{u}_1^+$ . Les forces interfaciales  $\mathbf{S}_\sigma^0$ ,  $\mathbf{S}_\sigma^1$ , et  $\mathbf{S}_\sigma^2$  et les densités  $\rho^0$ ,  $\rho^1$  et  $\rho^2$  aux sous-pas de temps sont calculés à partir des positions des marqueurs aux sous-pas de temps concernés.

Quelques manipulations numériques permettent de réécrire l'équation (2.5) pour le schéma RK3 que nous utilisons :

$$\mathbf{u}^+ = \mathbf{u}^n + \Delta t \left( \alpha_0 \delta \mathbf{u}_0^+ + \beta_0 \frac{\mathbf{S}_\sigma^0}{\rho^0} + \alpha_1 \delta \mathbf{u}_1^+ + \beta_1 \frac{\mathbf{S}_\sigma^1}{\rho^1} + \alpha_2 \delta \mathbf{u}_2^+ + \beta_2 \frac{\mathbf{S}_\sigma^2}{\rho^2} \right), \quad (2.16)$$

où  $\alpha_0 = 0.16$ ,  $\alpha_1 = 0.3$ ,  $\alpha_2 = 0.53$ ,  $\beta_0 = \frac{1}{3}$ ,  $\beta_1 = \frac{5}{12}$  et  $\beta_2 = \frac{1}{4}$ .

### 2.1.4 Gestion des interfaces

Intéressons-nous à la gestion des interfaces par le code, qui sont résolues par la méthode de Front-Tracking [66]. Elles sont matérialisées par un maillage lagrangien surfacique composé de triangles. Au cours de la simulation, plusieurs algorithmes corrigent les positions des marqueurs qui constituent les interfaces afin d'assurer la bonne qualité de ce maillage.

Pour atténuer les aspérités de la surface des bulles qui apparaissent à des échelles non résolues, un algorithme de lissage est utilisé. Une équation de diffusion de la courbure est résolue pour homogénéiser cette courbure. L'algorithme de lissage peut augmenter artificiellement la tension de surface. Un algorithme de remaillage est utilisé pour que les triangles qui composent le maillage lagrangien soient équilibrés : dans la mesure du possible, l'algorithme forme des triangles équilatéraux sans modifier la forme de la bulle. Cet algorithme peut ajouter ou supprimer des marqueurs d'interface pour arriver à ces fins.

L'advection des marqueurs de l'interface, ainsi que l'application des algorithmes précédents peut introduire une petite erreur sur le volume des bulles. Un algorithme de correction de volume est utilisé pour déplacer les marqueurs dans la direction normale à l'interface, de manière homogène sur l'ensemble de la bulle. Un algorithme de barycentrage est utilisé pour déplacer les sommets des mailles lagrangiennes au barycentre formé par les centres des sommets voisins.

La coalescence de bulles n'est pas souhaitée dans nos simulations. Cependant, dans une simulation comptant plusieurs bulles, il se peut que certaines d'entre elles se chevauchent. En plus d'être non physique, cette situation peut provoquer une instabilité numérique. Pour cette raison, nous activons la force de répulsion entre les bulles  $\mathbf{f}_{rep}$  introduite dans BOIS [5]. Les paramètres contrôlant cette force de répulsion sont discutés au paragraphe 2.2.2.

En conclusion, le code de calcul utilisé pour réaliser nos simulations a été utilisé et validé dans les travaux de BOIS [5], DU CLUZEAU [16] et SONOLET [63]. Nous pouvons désormais nous intéresser aux choix de valeurs pour les paramètres numériques des simulations mises en place dans ce travail.

## 2.2 Paramètres numériques

Dans cette section, les paramètres numériques d'importance pour les simulations mises en place sont discutés. Dans un premier temps, les paramètres de géométrie et de résolution sont présentés et justifiés. Dans un deuxième temps, le choix des paramètres pour régler la répulsion entre les bulles est expliqué. La justification des valeurs de paramètres pour le forçage  $\mathbf{f}$  ne se trouvent pas dans cette section mais sont déportés à la section suivante (Sec. 2.3), qui présente en détail et qui justifie la méthode choisie pour ce forçage.

### 2.2.1 Géométrie

L'écoulement est résolu sur un domaine cubique de côté  $L$ , pour lequel tous les bords sont périodiques. Les équations résolues par le code sont discrétisées sur un maillage cartésien régulier qui découpe le domaine en  $N^3$  mailles cubiques. La taille de maille est donnée par  $\Delta x = L/N$ . Le choix des valeurs de la taille du domaine  $L$  et de la taille de maille  $\Delta x$  résulte d'un compromis entre le coût de calcul et la qualité des simulations. Dans les deux paragraphes qui suivent, la taille de maille et la taille du domaine de calcul sont situés par rapport à la HIT, produite par le forçage  $\mathbf{f}$ . De façon similaire, dans les deux paragraphes suivants, la taille de maille et la taille du domaine de calcul sont situés par rapport à la BIA (pour *Bubble Induced Agitation*). Le paragraphe qui suit rappelle comment la HIT doit être située par rapport à la BIA en termes d'échelles pour répondre à la question qui nous anime. Cela permet d'écrire un critère entre le forçage  $\mathbf{f}$ , utilisé pour la HIT, et la taille de bulle  $d_b$ , caractéristique pour la BIA. L'avant-dernier paragraphe conclue sur les critères retenus et le dernier paragraphe liste l'ensemble des couples  $(L, N = L/\Delta x)$  utilisés pour les différentes simulations.

Pour remplir nos objectifs, les essais de bulles sont simulés en milieu turbulent, obtenu en imposant le forçage  $\mathbf{f}$  (présenté en section 2.3), et en milieu non turbulent. Pour que cette turbulence soit correctement résolue, la taille de maille,  $\Delta x$  doit être de l'ordre de grandeur de l'échelle de Kolmogorov  $\eta$ . De plus, nous souhaitons que le diamètre de bulle,  $d_b$ , se situe au cœur du régime inertiel de la turbulence monophasique pour que la BIA interagisse pleinement avec la HIT. Cette condition revient à imposer que la micro-échelle de Taylor  $\lambda$  soit plus petite que le diamètre de bulle :  $\lambda < d_b$ .

Par ailleurs, pour des raisons liées au forçage  $\mathbf{f}$  expliquées à la section suivante (2.3.4), le domaine simulé doit être deux fois plus grand que les échelles forcées de production turbulente,  $\ell_P$ , qui coïncident avec l'échelle intégrale  $\ell$  :  $L = 2\ell_P$ .

En considérant les paramètres physiques donnés à la section 1.4, une résolution de 80 mailles par diamètre de bulle,  $d_b = 80\Delta x$ , serait nécessaire pour résoudre exactement toutes les échelles du champ de vitesse dans nos essais de bulles (INNOCENTI et al. [25]). Cependant, les travaux de PANDEY et al. [40] et DU CLUZEAU et al. [15] montrent qu'à partir d'une résolution  $d_b = 20\Delta x$ , les statistiques de l'écoulement évoluent peu avec le maillage. Dans la section (2.5), nous montrons qu'une résolution minimale de  $d_b = 14\Delta x$  est suffisante pour l'analyse d'une partie des statistiques qui nous intéressent dans cette thèse. Cependant cette résolution ne suffit pas à la résolution exacte du bilan spectral d'énergie cinétique pour tous les taux de vide étudiés. Ainsi, le critère de résolution retenu vis-à-vis de la résolution des essais est  $d_b = 28\Delta x$ . Cette condition impose donc  $\eta \simeq d_b/28$ .

Les bords du domaine sont périodiques. Si le sillage d'une bulle est plus long que la taille  $L$  du domaine, cette bulle entre en interaction directe avec son propre sillage. Cette situation n'est pas physique, nous voulons donc l'éviter. En notant  $x$  la distance verticale au centre de la bulle, le sillage fin d'une bulle sphérique seule en ascension dans un fluide au repos à nombre de Reynolds élevé décroît comme  $x^{-1}$  (MOORE [38]). Si la bulle est déformée et son sillage est turbulent, ce dernier décroît comme  $x^{-2/3}$  (RISSO [50] et TENNEKES et al. [64, section 4.2]). La marque du sillage d'une bulle seule peut donc s'étendre très loin derrière celle-ci. Heureusement le sillage d'une bulle dans un essaim est beaucoup plus court. Les interactions collectives entre les sillages, à l'œuvre dans un essaim de bulles, leur impose une décroissance exponentielle (RISSO et al. [55] et RISSO [51]). Ce raccourcissement est dû aux interactions entre les sillages des bulles voisines causant la

diffusion et l'annihilation des vorticités de signe opposé, comme l'expliquent HUNT et al. [24]. Les travaux expérimentaux de RISSO et al. [53] ont montré que les fluctuations de vitesse à une distance  $x = 5d_b$  en aval d'une bulle dans un essaim sont dominées par les fluctuations homogènes plutôt que par le sillage de cette bulle. Pour prévenir qu'une bulle n'interagisse avec son propre sillage, le critère  $L > 5d_b$  est donc retenu.

Par ailleurs, pour les simulations dans lesquelles le forçage  $\mathbf{f}$  est actif, une grande attention est apportée à ce que les échelles de production de turbulence n'imposent pas directement la dynamique aux échelles de la bulle mais que le champ de turbulence vu à l'échelle des bulles résulte uniquement du processus de cascade inertielle de l'énergie cinétique (Sec. 1.4 et Sec. 2.3). On prendra donc soin de placer l'échelle de production de turbulence  $\ell_P$  à au moins une décade de l'échelle des bulles  $d_b$ . Dans l'idéal,  $\ell_P$  doit être aussi loin que possible de l'échelle des bulles, cependant, le coût CPU augmente fortement à mesure que  $\ell_P$  et  $d_b$  sont positionnés loin l'un de l'autre. Nous nous limitons donc à un rapport 15 entre ces deux échelles :  $\ell_P = 15d_b$ . Comme  $L = 2\ell_P$ , cette condition impose  $L \geq 30d_b$  pour les simulations où le forçage est actif.

Pour résumer, une résolution satisfaisante des écoulements d'essaim de bulles nécessite  $d_b = 28\Delta x$ . Pour les simulations d'essaims de bulles en milieu turbulent, la séparation entre les échelles de production de turbulence et les échelles de production d'agitation induite par les bulles impose  $L = 30d_b$ . Pour respecter ces deux critères, le domaine doit donc être discrétisé par un minimum de  $N^3 = 840^3$  éléments. Pour les simulations en milieu non turbulent, un domaine  $L = 15d_b$  suffit. Sur ce domaine, le critère de résolution impose une discrétisation par un minimum de  $N^3 = 420^3$  mailles pour ces simulations.

Les écoulements d'essaims de bulles en milieu turbulent sont simulés sur un domaine de côté  $L = 32d_b$  discrétisé en  $N^3 = 432^3$  mailles cubiques, ce qui ne permet pas de respecter strictement le critère de résolution précédent. L'essaim de bulles à 6% de taux de vide en milieu turbulent est aussi simulé pour une discrétisation de  $N^3 = 864^3$  mailles cubiques sur le même domaine, respectant le critère de résolution. Les écoulements d'essaims de bulles sans forçage extérieur sont simulés sur un domaine de côté  $L = 16d_b$  discrétisé en  $N^3 = 432^3$  mailles cubiques, ce qui respecte le critère de résolution. L'essaim de bulles à 6% de taux de vide est aussi simulé pour une discrétisation de  $N^3 = 216^3$  et de  $N^3 = 108^3$  éléments sur le même domaine, ainsi que pour une discrétisation de  $N^3 = 432^3$  éléments sur un domaine de côté  $L = 32d_b$ . L'ensemble des cas simulés sont regroupés au tableau 2.1.

## 2.2.2 Répulsion entre les bulles

Nous avons choisi de ne pas simuler la coalescence des bulles et d'étudier un essaim de bulles de volume unique et constant. Deux bulles qui se rencontrent ne peuvent que rebondir l'une sur l'autre. Pour une taille de maille  $\Delta x \geq 14d_b$ , la rencontre de deux bulles peut conduire à leur recouvrement partiel : certains marqueurs de la première bulle se trouvent à l'intérieur de la deuxième bulle. Une fois dans cette position, ces deux bulles qui se chevauchent ne se séparent généralement pas (sauf en cas d'action forte du remaillage). En plus de ne pas être physique, cette situation peut provoquer une instabilité numérique. Pour cette raison, la force de répulsion entre les bulles  $f_{rep}$  introduite dans [5] est activée :

$$\mathbf{f}_{rep} = \mathbf{grad}(\chi_l) \times \max\left(0, I_{rep} \frac{\delta_{rep} - d_{min}}{\delta_{rep}}\right), \quad (2.17)$$

où  $d_{min}$  est la distance minimale entre les interfaces des bulles,  $\delta_{rep}$  est la distance entre deux interfaces de deux bulles différentes à partir de laquelle cette force est active,  $I_{rep}$  est le paramètre régissant l'intensité de cette répulsion. La valeur de ces paramètres est choisie par essai-erreur pour prévenir tout recouvrement de bulles lors des simulations. Le tableau (2.2) rapporte leur valeur pour différentes simulations. La principale motivation pour inclure cette force répulsive est d'assurer la stabilité numérique de la simulation.



		L	N	$\alpha$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}_{rep}$
BIA	sB6-M0	$16d_b$	108	6%	non	oui
	sB6-M1	$16d_b$	216	6%	non	oui
	sB6-M2	$16d_b$	432	6%	non	oui/non
	sB3-M2	$16d_b$	432	3%	non	non
	sB12-M2	$16d_b$	432	12%	non	non
	B3-M1	$32d_b$	432	3%	non	oui
	B6-M1	$32d_b$	432	6%	non	oui
B12-M1	$32d_b$	432	12%	non	oui	
TBIA	TB3-M1	$32d_b$	432	3%	C	oui
	TB6-M1	$32d_b$	432	6%	C	oui
	TB12-M1	$32d_b$	432	12%	C	oui
BIA	B6-M2	$32d_b$	864	6%	non	non
TBIA	TB6-M2	$32d_b$	864	6%	C	non
HIT	T180-M2	$32d_b$	432	0%	C	–
	T270-M2	$32d_b$	432	0%	D	–

Tableau 2.1: Paramètres numériques des simulations.  $L$  est la longueur du côté du domaine de simulation,  $N$  est le nombre de mailles par côté,  $\alpha$  est la taux de vide,  $\mathbf{f}$  correspond au forçage imposé. Les simulations sur domaine de côté  $L = 16d_b$  sont préfixées d'un s. Le niveau de raffinement de maillage utilisé se retrouve en suffixe du nom de la simulation ( $M0$ ,  $M1$  ou  $M2$ ). Dans le nom de simulation, la lettre T indique que le forçage  $\mathbf{f}$  est activé, et la lettre B indique que les bulles sont présentes. Dans la colonne du forçage  $\mathbf{f}$ , la lettre C signifie que les paramètres  $T_L$  et  $\sigma$  valent  $0.28s$  et  $0.252$  respectivement, et la lettre D signifie que les paramètres  $T_L$  et  $\sigma$  valent  $0.28s$  et  $0.063$  respectivement (voir Sec. 2.3). Les paramètres correspondant à la lettre C induisent un nombre de Reynolds basé sur la micro-échelle de Taylor  $Re_\lambda = 177$  pour la simulation monophasique, et les paramètres correspondant à la lettre D induisent  $Re_\lambda = 274$ .

### 2.2.3 Synthèse des paramètres numériques

Les essais sans forçage sont simulés sur un domaine de taille  $L = 16d_b$ , les essais avec forçage sont simulés sur un domaine de taille  $L = 32d_b$ . La taille de maille  $\Delta x$  vaut  $\Delta x = 28d_b$  dans la majorité des cas. Lorsque cette résolution n'est pas essentielle, la taille de maille est réduite  $\Delta x = 14d_b$ . Pour une résolution telle que  $\Delta x = 14d_b$ , il est nécessaire d'activer une répulsion artificielle entre les bulles. Cette répulsion est activée localement pour des interfaces de bulles distantes de  $4\Delta x$  ou moins. L'intensité de cette répulsion varie entre  $0.07\Delta\rho g$  et  $0.88\Delta\rho g$ .

## 2.3 Forçage pour la simulation d'un écoulement de type turbulence homogène isotrope

Le choix de la méthode de forçage pour produire les caractéristiques de la HIT n'est pas anodin. L'objectif est de superposer les échelles inertielles de la HIT aux échelles de production d'énergie par l'agitation induite par les bulles (BIA). Pour que l'interaction entre la BIA et le régime inertiel de la HIT soit représentative d'un écoulement physique, le forçage ne doit pas se faire directement sur les échelles de production de la BIA. La dynamique de la turbulence aux échelles de la bulle doit uniquement être le fruit des équations de Navier-Stokes, sans aucun terme source forcé. Dit autrement, si la turbulence aux échelles de la taille de la bulle résulte uniquement de la dégénération d'échelles plus grandes par les processus inertiels à l'œuvre, l'interaction résultante correspond bien à ce que l'on souhaite étudier. Pour respecter ce critère, il faut que l'échelle forcée de production turbulente  $\ell_P$  soit au minimum de l'ordre de dix diamètres de bulle :  $\ell_P \simeq 10d_b$ . L'échelle forcée de production  $\ell_P$  coïncide avec l'échelle intégrale  $\ell$  de l'écoulement.

		$I_{rep}/(\Delta\rho g)$	$\delta_{rep}/(\Delta x)$
BIA	sB6-M0	0.35	1
	sB6-M1	0.35	2
	sB6-M2	0.35	4
	B3-M1	0.32	2
	B6-M1	0.32	2
	B12-M1	0.88	2
TBIA	TB3-M1	0.32	2
	TB6-M1	0.32	2
	TB12-M1	0.88	2

Tableau 2.2: Paramètres de la force  $\mathbf{f}_{rep} = \mathbf{grad}(\chi_l) \times \max\left(0, I_{rep} \frac{\delta_{rep} - d_{min}}{\delta_{rep}}\right)$  (Eq. 2.17).  $\chi_l$  est l'indicatrice de phase liquide,  $I_{rep}$  correspond à l'intensité de la répulsion,  $\delta_{rep}$  est la distance maximale entre deux interfaces à partir de laquelle la répulsion s'active et  $d_{min}$  est le minimum des distances aux marqueurs des autres bulles.

### 2.3.1 Forçage linéaire

Le choix d'un forçage linéaire [32, 31] où le champ de fluctuations de vitesse  $\mathbf{u}$  est multiplié par une constante  $Q > 1$  pour former un terme source de turbulence  $\mathbf{f} = Q\mathbf{u}$  n'est donc pas envisageable ici, bien que ce forçage montre de bons résultats pour synthétiser une turbulence homogène isotrope en écoulement monophasique [59]. En effet, l'écoulement dans un essaim de bulles porte son maximum d'énergie cinétique fluctuante aux échelles de la taille de la bulle. Ainsi, amplifier les fluctuations de vitesses dans un essaim de bulles revient à injecter de l'énergie directement à l'échelle de la bulle.

### 2.3.2 Forçage à partir d'un spectre complet

Le choix d'un forçage défini à partir d'un spectre classique de turbulence monophasique [41, Eq.54] dans le domaine spectral, imposé par transformée de Fourier inverse dans le domaine de résolution du code ne correspond pas non plus au besoin de notre étude. En effet, en forçant un spectre complet de turbulence ([56] section Initial conditions, pp. 51-53), les échelles du régime inertiel, parmi lesquelles se trouvent les échelles de la bulle, sont aussi imposées de façon synthétique.

### 2.3.3 Forçage stochastique sur les premiers modes spectraux

Le terme source utilisé pour produire la turbulence est directement inspiré des travaux de ESWARAN et al. [18] et de CHOUIPPE et al. [9]. Pour maîtriser exactement les échelles dans lesquelles l'énergie est injectée artificiellement, le terme source est défini dans le domaine spectral. Seules les plus grandes échelles de l'écoulement sont explicitement forcées : le terme source  $\hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\kappa})$  est nul pour  $\|\boldsymbol{\kappa}\| > \kappa_{inj}$ , avec  $\|\boldsymbol{\kappa}\| = \kappa$  la norme du nombre d'onde  $\boldsymbol{\kappa}$  et  $\kappa_{inj}$  une valeur de nombre d'onde à déterminer. Le nombre d'onde  $\kappa = 0$  n'est pas forcé. Dans le domaine spectral, chacune des six composantes du vecteur complexe aléatoire  $\hat{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\kappa})$  (trois pour sa partie réelle, trois pour sa partie complexe) prend la forme d'un processus d'Uhlenbeck-Orstein :

$$\hat{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\kappa}, t^{n+1}) = \hat{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\kappa}, t^n) \left(1 - \frac{\Delta t}{T_L}\right) + \mathbf{e}(\boldsymbol{\kappa}, t^n) \left(2\sigma^2 \frac{\Delta t}{T_L}\right)^{1/2}, \quad (2.18)$$

avec  $\Delta t$  le pas de temps numérique,  $t^n = n\Delta t$  le temps,  $T_L$  le temps caractéristique du processus,  $\sigma^2$  sa variance et  $\mathbf{e}$  un vecteur complexe aléatoire de l'espace spectral dont les six composantes sont des variables aléatoires chacune tirée selon une loi normale ( $\mathcal{N}(0, 1)$ ). Le terme source de l'espace spectral  $\hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\kappa})$  résulte de la projection de  $\hat{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\kappa})$  dans l'espace des vecteurs à divergence nulle :

$$\hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\kappa}) = \hat{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\kappa}) - \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\|\boldsymbol{\kappa}\|} \boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\kappa}). \quad (2.19)$$

Le terme source de l'espace physique  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  se définit en appliquant la transformée de Fourier inverse à  $\widehat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\kappa})$ , qui ne balaie que les modes de l'espace spectral tels que  $\|\boldsymbol{\kappa}\| \leq \kappa_{inj}$  :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \iiint_{\|\boldsymbol{\kappa}\| \leq \kappa_{inj}} \widehat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x}} d\boldsymbol{\kappa}, \quad (2.20)$$

avec  $i$  la variable complexe. Dans la mise en place numérique et parallélisée de ce calcul, il est important de souligner qu'en associant chaque processeur à un sous-domaine de l'espace physique, tous les processeurs reçoivent le même vecteur  $\widehat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\kappa})$  qui est utilisé pour calculer le terme de forçage sur chaque sous-domaine propre. Signalons aussi que le calcul discret de la transformée de Fourier inverse de  $\widehat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\kappa})$  :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{ijk}) = \sum_{l \leq N_{max}} \sum_{m \leq N_{max}} \sum_{n \leq N_{max}} \left( \widehat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\kappa}_{lmn}) e^{i(\boldsymbol{\kappa}_{lmn} \cdot \mathbf{x}_{ijk})} \right), \quad (2.21)$$

est une opération de complexité  $\mathcal{O}(N_{max}^3)$  répétée en chaque point de l'espace, avec  $N_{max}$  le nombre de mode recevant une contribution non nulle, dans les trois directions spectrales. Les indices  $i, j, k, l, m, n$  marquent les indices du vecteur position  $\mathbf{x}$  et du vecteur d'onde  $\boldsymbol{\kappa}$ . En notant  $N_i, N_j$  et  $N_k$  le nombre de points vu par un seul processeur dans les trois directions de l'espace, le calcul de  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_{ijk})$  est donc une opération de complexité  $\mathcal{O}(N_{max}^3 N_i N_j N_k)$ . En suivant la méthode de CHOUÏPPE et al. [9], nous séparons ce calcul en trois étapes :

$$\mathbf{A}_{mni} = \sum_l \left( \widehat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\kappa}_{lmn}) e^{i\boldsymbol{\kappa}_{1,l} \cdot \mathbf{x}_{1,i}} \right) \quad (2.22)$$

$$\mathbf{B}_{nij} = \sum_m \left( \mathbf{A}_{mni} e^{i\boldsymbol{\kappa}_{2,m} \cdot \mathbf{x}_{2,j}} \right) \quad (2.23)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{ijk}) = \sum_n \left( \mathbf{B}_{nij} e^{i\boldsymbol{\kappa}_{3,n} \cdot \mathbf{x}_{3,k}} \right) \quad (2.24)$$

de complexités respectives  $\mathcal{O}(N_{max}^3 N_i)$ ,  $\mathcal{O}(N_{max} N_i N_j N_k)$  et  $\mathcal{O}(N_{max} N_i N_j)$ , ce qui réduit considérablement le coût de calcul. Enfin, le terme source  $\rho \mathbf{f}$  est ajouté au membre de droite de l'équation de conservation de quantité de mouvement (2.2).

### 2.3.4 Choix des paramètres du forçage

Le choix des paramètres définissant la turbulence ( $\kappa_{inj}, T_L, \sigma^2$ ) s'appuie sur la double contrainte : (i) le régime inertiel de la turbulence forcée doit englober les échelles de la taille de la bulle, (ii) aux échelles de la taille de la bulle, l'énergie fluctuante produite par le forçage doit être d'amplitude comparable à celle de l'énergie fluctuante apportée par l'écoulement dans l'essaim de bulles.

Les échelles de production turbulente  $\ell_P$  sont de l'ordre de grandeur de l'échelle moyenne à laquelle le forçage est actif. En limitant le forçage aux nombres d'ondes  $\kappa_1 = 2\pi/L$ ,  $\kappa_2 = 2 \times 2\pi/L$  et  $\kappa_3 = 3 \times 2\pi/L$ , l'échelle de production turbulente sera de l'ordre de  $\ell_P = 2\pi/\kappa_m = L/2$  avec  $\kappa_m = \frac{1}{3}(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)$ . Ces échelles de production coïncident avec l'échelle intégrale  $\ell$ . Les plus grandes échelles appartenant au régime inertiel sont légèrement plus petites que  $\ell$ . Le choix des échelles forcées fixe donc la taille des plus grandes structures du régime inertiel. La taille des plus petites structures, apparentant au régime inertiel, est dictée par le couple  $(T_L, \sigma^2)$ .

Considérons la simulation d'un écoulement monophasique dans le domaine de côté  $L = 0.0317m$  discrétisé en  $N^3 = 864^3$  éléments (maillage M2), pour le fluide de densité  $\rho_l = 1171.3kg.m^{-3}$ , et de viscosité dynamique  $\mu_l = 3.73 \times 10^{-4}Pa.s$ . La gravité est nulle, seul le forçage  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  est actif. Le choix du couple  $(T_L, \sigma^2)$  revient à choisir le nombre  $Re_\lambda$  de l'écoulement. Ce nombre adimensionnel détermine à la fois l'étendue du régime inertiel de la turbulence et le niveau d'énergie fluctuante de cette turbulence.

Pour la simulation T270-M2 (Tab. (2.1)), les paramètres  $T_L$  et  $\sigma$  valent  $0.28s$  et  $2.52 \times 10^{-1}$  respectivement. Pour ce couple de paramètres, le nombre de Reynolds des échelles de Taylor vaut  $Re_\lambda = 274$ . La figure (2.2a) compare le spectre d'énergie 3D de la vitesse pour la simulation

T270-M2, tracé en trait plein bleu, aux spectres pour les trois simulations d'essaims de bulles sans forçage : sB3-M2, sB6-M2 et sB12-M2, tracés en pointillés mauves. Ces quatre spectres sont normés par l'intégrale du spectre d'énergie de la simulation monophasique T270 :  $\mathcal{S}^* = \mathcal{S} / \int \mathcal{S}_{T270}(\kappa) d\kappa$ .

Le trait vertical noir marque le nombre d'onde associé au diamètre de bulle  $\kappa_b = \frac{d_b}{2\pi}$ . Le régime inertiel de la turbulence (T270) est souligné par la pente  $\kappa^{-5/3}$  en trait pâle et épais. Cette figure montre bien que le régime inertiel de la simulation T270 englobe les échelles de la taille de bulle : le critère (i) est satisfait. En revanche, on voit bien qu'autour des échelles de la taille des bulles,  $0.7\kappa_b < \kappa < 2\kappa_b$ , le spectre de la turbulence monophasique est cinq à dix fois plus élevé que les spectres des simulations d'essaims de bulles, la simulation T270 porte entre cinq et dix fois plus d'énergie. Pour une simulation d'essaim de bulles avec forçage  $\mathbf{f}$  pour lequel  $(T_L, \sigma)$  vaut  $(0.28s, 2.52 \times 10^{-1})$ , la dynamique de la turbulence monophasique dominerait totalement la dynamique de l'agitation induite par les bulles et aucune interaction ne serait constatée. Le critère (ii) n'est pas respecté pour ce couple de valeurs.

Pour satisfaire ce deuxième critère, nous choisissons de réduire le paramètre de diffusion d'un facteur quatre, tout en conservant le temps de corrélation  $T_L$  à l'identique, pour simuler le même écoulement : il s'agit de la simulation T180-M2. Pour ce couple de paramètres  $(T_L, \sigma) = (0.28s, 6.3 \times 10^{-2})$ , le nombre de Reynolds des échelles de Taylor vaut  $Re_\lambda = 177$ . La figure (2.2b) compare le spectre d'énergie 3D de la vitesse pour la simulation T180-M2, tracé en trait plein bleu, aux spectres pour les trois simulations d'essaims de bulles sans forçage (pointillés mauves). Ces quatre spectres sont normés par l'intégrale du spectre d'énergie de la simulation T180,  $\mathcal{S}^* = \mathcal{S} / \int \mathcal{S}_{T180}(\kappa) d\kappa$ . Cette figure montre bien que le régime inertiel de la simulation T180 englobe les échelles de la taille de bulle : le critère (i) est satisfait. De plus, on voit bien que pour  $0.7\kappa_b < \kappa < 2\kappa_b$ , l'amplitude du spectre de la turbulence monophasique est très proche de celle des spectres des simulation sB3, sB6, sB12, la simulation de turbulence monophasique porte une énergie cinétique de l'ordre de grandeur de celle apportée par l'agitation induite par les bulles. Le critère (ii) est aussi respecté. Le choix  $\kappa_{xinj} = \kappa_{yinj} = \kappa_{zinj} = 3 \times 2\pi/L$ ,  $T_L = 0.28s$ ,  $\sigma = 6.3 \times 10^{-2}$  permet bien de respecter les deux contraintes imposées pour étudier l'interaction entre l'agitation induite par les bulles et la turbulence.

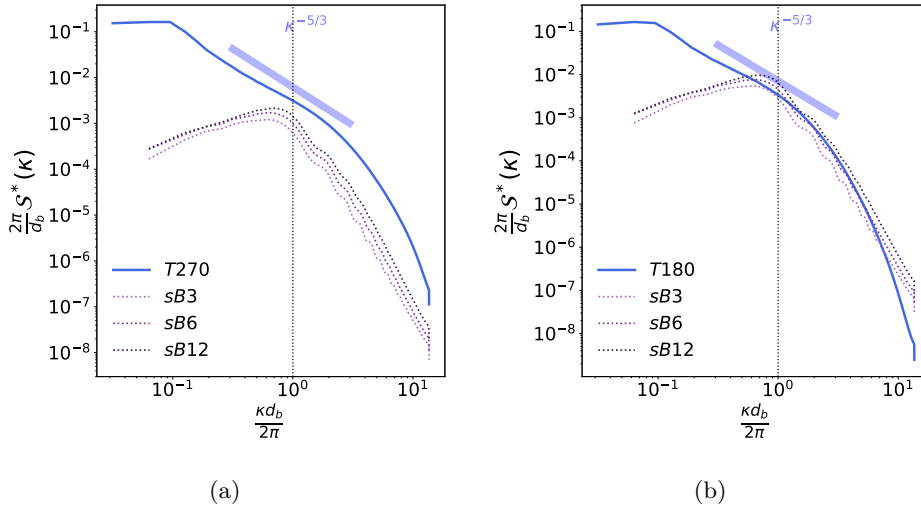


Figure 2.2: Spectre 3D d'énergie cinétique  $\mathcal{S}$  pour les simulations de turbulences monophasiques T270 en trait plein à gauche et T180 en trait plein à droite. Spectre 3D d'énergie cinétique pour les simulations d'essaim de bulles sans forçage, à 3% (sB3), 6% (sB6) et 12% (sB12) de taux de vide en pointillés. Les spectres sont normés par l'intégrale du spectre de la simulation monophasique correspondante :  $\mathcal{S}^* = \mathcal{S} / \int \mathcal{S}_{T270} d\kappa$  (gauche),  $\mathcal{S}^* = \mathcal{S} / \int \mathcal{S}_{T180} d\kappa$  (droite) et  $\int \mathcal{S}_{T270} d\kappa < \int \mathcal{S}_{T180} d\kappa$

### 2.3.5 Synthèse sur le forçage pour la simulation d'un écoulement de type turbulence homogène isotrope

En conclusion, le forçage  $\mathbf{f}$  utilisé pour faire interagir la BIA avec la SIT, que nous représentons par une HIT, est défini par un processus stochastique d'Uhlenbeck-Ornstein dans le plan spectral. Ce forçage est actif sur les trois premiers modes spectraux et ses paramètres  $\sigma$  et  $T_L$  (Eq. (2.18)) sont choisis pour que l'énergie fluctuante de la turbulence soit du même ordre de grandeur que l'énergie fluctuante de l'agitation induite par les bulles pour  $\kappa_b < \kappa < 4\kappa_b$  : on retiendra  $(T_L, \sigma) = (0.28s, 6.3 \times 10^{-2})$  et dans la suite du manuscrit, la simulation T180 sera désignée simulation HIT.

## 2.4 Discrétisation de la densité spectrale du bilan d'énergie cinétique

Pour comprendre les mécanismes de transferts d'énergie dans les essaims de bulles, la répartition spectrale du bilan d'énergie cinétique est étudiée. La représentation spectrale de ce bilan s'écrit :

$$\widehat{\mathbf{u}}^* \cdot \widehat{\partial_t \rho \mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{u}}^* \cdot \widehat{div(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})} = \widehat{\mathbf{u}}^* \cdot \widehat{grad(p)} + \widehat{\mathbf{u}}^* \cdot \widehat{div(\mu 2S)} + \widehat{\mathbf{u}}^* \cdot \widehat{\rho \mathbf{g}} + \widehat{\mathbf{u}}^* \cdot \widehat{\rho \mathbf{f}_\sigma} + \widehat{\mathbf{u}}^* \cdot \widehat{\rho \mathbf{f}}, \quad (2.25)$$

où chaque terme de l'équation est ensuite intégré sur des coquilles sphériques de l'espace spectral de rayon  $\kappa = \|\boldsymbol{\kappa}\|$  centrées sur l'origine, comme expliqué en annexe A.1.2. Les simulations numériques sont le résultat de résolutions discrètes, en temps et en espace, des équations de Navier-Stokes. Nous devons donc discrétiser ce bilan spectral d'énergie cinétique.

Nous nous concentrons sur la discrétisation temporelle. Considérons l'équation (2.25) et notons par un exposant  $n$  l'instant auquel les quantités sont évaluées, avec  $0 < n < N_t$ . Hormis pour le terme instationnaire  $\widehat{\mathbf{u}}^* \cdot \widehat{\partial_t \rho \mathbf{u}}$ , l'instant  $n$  est déterminé sans ambiguïté pour tous les autres termes qui ne font pas intervenir de dérivée temporelle. La vitesse  $\mathbf{u}$  est évaluée à l'instant  $n$  : elle est notée  $\mathbf{u}^n$ . De même, la densité, la pression, le tenseur des taux de déformation, la force interfaciale et la force imposée sont notées  $\rho^n$ ,  $p^n$ ,  $\mathbf{S}^n$ ,  $\mathbf{f}_\sigma^n$  et  $\mathbf{f}^n$  respectivement. Le champ de gravité et le champ de viscosité dynamique sont constants et uniformes, l'exposant  $n$  n'est pas ajouté pour ne pas alourdir les notations. Chaque terme de l'équation (2.25), intégré sur les coquilles sphériques de l'espace spectral, sont évalués aux différents instants  $(0; 1; \dots; N_t)$ , puis moyennés sur ces instants.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons au schéma temporel choisi pour discrétiser le terme instationnaire du bilan (2.25), puis nous discuterons rapidement la cohérence de cette discrétisation avec les autres termes du bilan. Enfin, le choix des instants relevés pour évaluer ce bilan d'énergie est justifié.

### 2.4.1 Discrétisation temporelle du terme instationnaire

À chaque instant, le champ de vitesse  $\mathbf{u}$ , de pression  $p$  et la position des marqueurs des interfaces  $\mathbf{x}_{\mathcal{I}}$  sont résolus. Pour évaluer le terme instationnaire du bilan spectral d'énergie cinétique, le code dispose donc des vitesses et densités aux instants résolus  $(0; 1; \dots; N_t)$ .

La question qui se pose est celle du schéma temporel utilisé pour approcher l'accélération,  $(\partial_t \rho \mathbf{u})^n$  à l'instant  $n$  en cohérence avec la vitesse  $\mathbf{u}^n$  au même instant. Pour éviter toute confusion avec le schéma temporel de résolution du calcul, nous parlerons de méthode de construction du terme instationnaire plutôt que de schéma temporel de discrétisation, pour désigner la discrétisation de l'accélération  $(\partial_t \rho \mathbf{u})^n$ .

Considérons la simulation monophasique HIT dans laquelle le forçage  $\mathbf{f}$  est actif et la gravité  $\mathbf{g}$  est nulle. Choisissons dans un premier temps le schéma Euler explicite comme schéma temporel pour la résolution de la simulation. Pour cette simulation, une méthode décentrée explicite pour construire le terme instationnaire du bilan (2.25) semble adaptée. Notons  $Inst_E^n$  l'approximation

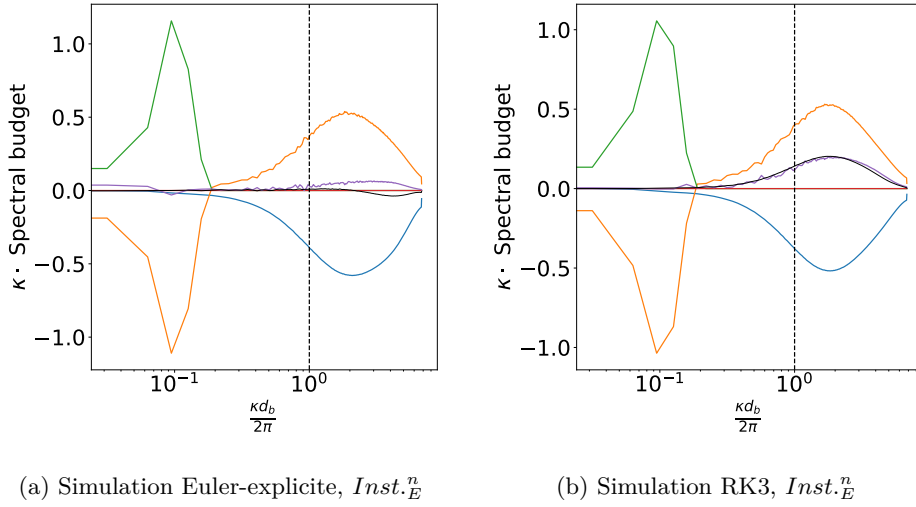


Figure 2.3: Bilan spectral compensé par  $\kappa$  obtenu pour la simulation de turbulence monophasique (HIT) résolue avec schéma Euler explicite, à gauche, et avec schéma RK3, à droite. ■ : Terme de production turbulente, ■ : terme de dissipation visqueuse, ■ : terme d'advection et ■ terme instationnaire (Eq. (2.20)). ■ : résidu.

au temps  $n$  du terme instationnaire par cette méthode :

$$Inst_E^n = 2\text{Re} \left( \mathcal{F}(\mathbf{u}^n)^* \cdot \mathcal{F} \left( \frac{\rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1} - \rho^n \mathbf{u}^n}{t^{n+1} - t^n} \right) \right), \quad (2.26)$$

où  $\mathcal{F}(\cdot)$  représente la transformée de Fourier,  $\mathcal{F}(\cdot)^*$  représente son complexe conjugué, et  $\text{Re}(z)$  correspond à la partie réelle du complexe  $z$ . La figure (2.3a) montre le bilan spectral de cette simulation où le terme instationnaire est discrétisé selon (2.26). Le résidu de ce bilan est presque nul à toutes les échelles. Cette discrétisation convient pour cette simulation.

Le schéma de résolution temporel utilisé pour toutes les simulations diphasiques est le schéma RK3 présenté plus haut (Sec. 2.1). Pour valider notre discrétisation sur une simulation résolue avec ce schéma, considérons de nouveau la simulation HIT résolue avec un schéma temporel de type RK3.

La figure (2.3b) présente le bilan spectral de cette simulation où le terme instationnaire est discrétisé selon (2.26). Cette fois-ci le résidu n'est pas nul pour  $0.6\kappa_b < \kappa < 7\kappa_b$ . Sur cette plage, le résidu est exactement superposé au terme instationnaire en violet. Pour ce bilan, l'erreur est entièrement portée par le terme instationnaire. Changeons la méthode de construction de ce terme pour un schéma centré. L'approximation au temps  $n + 1/2$  du terme instationnaire par ce schéma est notée  $Inst_C^{n+1/2}$  :

$$Inst_C^{n+1/2} = 2\text{Re} \left( \mathcal{F} \left( \frac{\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n}{2} \right)^* \cdot \mathcal{F} \left( \frac{\rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1} - \rho^n \mathbf{u}^n}{t^{n+1} - t^n} \right) \right). \quad (2.27)$$

La figure (2.4b) montre l'évolution spectrale du bilan de cette simulation où le terme instationnaire est discrétisé selon l'équation (2.27). Cette méthode de construction annule le résidu à tous les nombres d'ondes pour une simulation résolue avec le schéma RK3. La construction correcte pour évaluer le terme instationnaire issu d'une simulation résolue avec un schéma RK3 correspond donc à  $Inst_C^{n+1/2}$  (Eq. (2.27)). Nous soulignons que la construction du terme instationnaire selon (2.27) n'est pas adaptée pour une simulation résolue par un schéma Euler explicite. En effet, le résidu du bilan où le terme instationnaire est construit selon (2.27) avec une résolution Euler explicite, tracé sur la figure (2.4a), est plus élevé que celui de la figure (2.3a), où le terme instationnaire est construit selon (2.26) pour la même résolution.

Le bilan spectral est donc très sensible au décalage temporel entre la vitesse  $\mathbf{u}^n$  et l'accélération

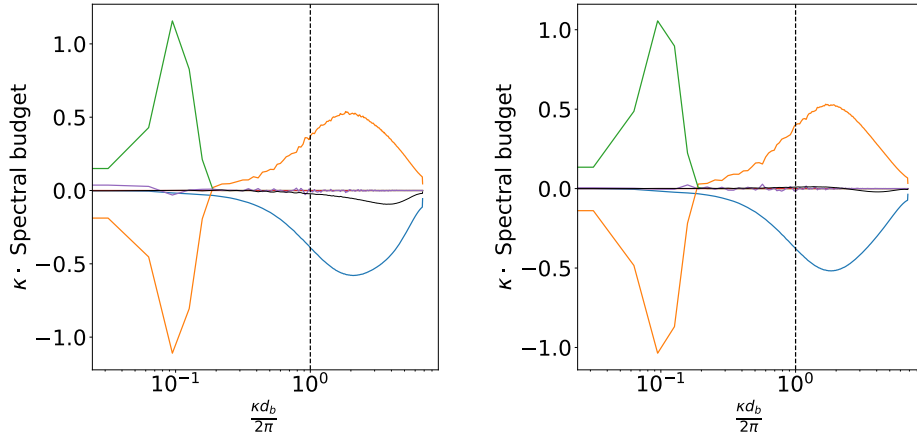
(a) Simulation Euler-explicite,  $Inst.C^{n+1/2}$ (b) Simulation RK3,  $Inst.C^{n+1/2}$ 

Figure 2.4: Bilan spectral compensé par  $\kappa$  obtenu pour la simulation de turbulence monophasique (HIT) résolue avec schéma Euler explicite à gauche et avec schéma RK3 à droite. ■ : Terme de production turbulente, ■ : terme de dissipation visqueuse, ■ : terme d'advection et ■ terme instationnaire (Eq. (2.21)). ■ : résidu.

$(\partial_t \rho \mathbf{u})^n$  dans l'évaluation discrète du terme instationnaire. Le terme instationnaire sera construit de manière centrée (Eq. (2.27)) dans la suite.

## 2.4.2 Cohérence avec les autres termes du bilan

Chaque terme  $T$  de l'équation (2.25) est composé de deux facteurs  $T^n = a_T^n \cdot b_T^n$ . Nous venons de montrer que le terme instationnaire est très sensible au décalage temporel entre ses facteurs  $a_{Inst}^n$  et  $b_{Inst}^n$ . En revanche le bilan n'est pas sensible au décalage temporel entre les différents termes qui le composent. En effet, dans la version discrétisée de (2.25) tous les termes autres que le terme instationnaire ne font intervenir qu'un seul instant et peuvent être évalués à l'instant  $n$  à l'instant  $n+1$  ou interpolé linéairement à l'instant  $n+1/2$  :

$$T^n = a^n \cdot b^n \quad (2.28)$$

$$T^{n+1} = a^{n+1} \cdot b^{n+1} \quad (2.29)$$

$$T^{n+1/2} = \frac{1}{2} (T^n + T^{n+1}), \quad (2.30)$$

sans que l'évolution spectrale du terme ne change.

Le terme instationnaire Eq. (2.27) est évalué à l'instant  $n+1/2$ . Par souci de cohérence, tous les autres termes de l'équation (2.25) sont interpolés linéairement à l'instant  $n+1/2$ . Ainsi, le bilan



discrétisé s'écrit :

$$\begin{aligned}
0 = 2\text{Re} & \left( -\mathcal{F} \left( \frac{\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n}{2} \right)^* \cdot \mathcal{F} \left( \frac{\rho^{n+1}\mathbf{u}^{n+1} - \rho^n\mathbf{u}^n}{t^{n+1} - t^n} \right) \right. \\
& - \frac{1}{2} \left( \mathcal{F}(\mathbf{u}^n)^* \cdot \mathcal{F}(\text{div}(\rho^n\mathbf{u}^n\mathbf{u}^n)) + \mathcal{F}(\mathbf{u}^{n+1})^* \cdot \mathcal{F}(\text{div}(\rho^{n+1}\mathbf{u}^{n+1}\mathbf{u}^{n+1})) \right) \\
& - \frac{1}{2} \left( \mathcal{F}(\mathbf{u}^n)^* \cdot \mathcal{F}(\text{grad}(\mathbf{p}^n)) + \mathcal{F}(\mathbf{u}^{n+1})^* \cdot \mathcal{F}(\text{grad}(\mathbf{p}^{n+1})) \right) \\
& + \frac{1}{2} \left( \mathcal{F}(\mathbf{u}^n)^* \cdot \mathcal{F}(\text{div}(\mu_2\mathbf{S}^n)) + \mathcal{F}(\mathbf{u}^{n+1})^* \cdot \mathcal{F}(\text{div}(\mu_2\mathbf{S}^{n+1})) \right) \\
& + \frac{1}{2} \left( \mathcal{F}(\mathbf{u}^n)^* \cdot \mathcal{F}(\rho^n\mathbf{g}) + \mathcal{F}(\mathbf{u}^{n+1})^* \cdot \mathcal{F}(\rho^{n+1}\mathbf{g}) \right) \\
& + \frac{1}{2} \left( \mathcal{F}(\mathbf{u}^n)^* \cdot \mathcal{F}(\mathbf{S}_s^n) + \mathcal{F}(\mathbf{u}^{n+1})^* \cdot \mathcal{F}(\mathbf{S}_s^{n+1}) \right) \\
& + \frac{1}{2} \left( \mathcal{F}(\mathbf{u}^n)^* \cdot \mathcal{F}(\rho^n\mathbf{f}^n) + \mathcal{F}(\mathbf{u}^{n+1})^* \cdot \mathcal{F}(\rho^{n+1}\mathbf{f}^{n+1}) \right) \\
& \left. \right) \tag{2.31}
\end{aligned}$$

### 2.4.3 Instants relevés

Le code résout, à chaque pas de temps, les champs de vitesse  $\mathbf{u}$ , de pression  $p$  et la position des marqueurs des interfaces  $\mathbf{x}_I$ . En théorie, il est donc possible de calculer la représentation spectrale discrétisée du bilan d'énergie cinétique (Eq. (2.25)) pour chaque pas de temps. En pratique, seuls les champs décorrélés nous intéressent. En effet, les champs de deux instants séparés d'un seul pas de temps  $\Delta t$  portent essentiellement la même information. Ce n'est donc pas utile de traiter les informations des champs espacés d'un seul pas temporel de résolution. Par ailleurs, les équations (2.26), (2.27) approximent une dérivée temporelle par différences finies. Pour que l'erreur de cette approximation soit minimale, il est essentiel que les instants utilisés dans ces différences finies soient le plus proche possible.

Ainsi, pour limiter les calculs en ne traitant que des champs peu corrélés tout en évaluant précisément la dérivée temporelle de  $\partial_t \rho \mathbf{u}$ , deux pas de temps consécutifs tous les  $M$  pas de temps de résolution sont utilisés pour déterminer le bilan spectral d'énergie cinétique. C'est-à-dire que les champs de vitesse utilisés sont les champs  $u^{n \cdot M}, u^{(n+1) \cdot M}$  où  $M$  est un paramètre fixé. Pour  $M = 1000$ , les instants traités sont donc : (0; 1; 1000; 1001; 2000; 2001; ...;  $Nt - 1; Nt$ ).

## 2.5 Convergences

Pour les écoulements étudiés, les bulles sont disposées aléatoirement dans le domaine au temps initial, le fluide étant initialement au repos. Les bulles et le fluide se mettent en mouvement sous l'effet de la gravité, sous l'effet d'un forçage imposé, ou sous l'effet des deux contributions. Aux premiers instants, la vitesse relative  $u_r = \bar{u}^l - \bar{u}^g$ , l'énergie cinétique et la dissipation moyennées sur l'espace évoluent fortement dans le temps. Il s'agit du régime transitoire. Au bout d'un certain temps ces grandeurs cessent d'évoluer en moyenne, et fluctuent autour de leur valeur moyenne : l'écoulement a atteint un *régime statistiquement stationnaire*.

Dans les deux sous-sections qui suivent, le temps du régime transitoire et la détermination de l'intervalle minimum à considérer sont détaillés pour la simulation d'essaim de bulles à 6% de taux de vide, soumis uniquement à la gravité, dans un domaine tri-périodique de côté  $L = 1.585 \times 10^{-2} m = 16d_b$ , résolu avec une taille de maille  $\Delta x$  telle que  $d_b = 28\Delta x$  : il s'agit de la simulation sB6-M2 (voir Tab. (2.1)). Une fois ces questions de convergences temporelles vues, nous nous intéresserons à la convergence en maillage. Pour ce faire, les résultats des simulations sB6-M2, sB6-M1 et sB6-M0 seront comparés. Enfin, l'effet de la répulsion entre les bulles, essentiel pour une résolution M1 ou M0, sera étudié dans la dernière sous-section. Dans cette section, la moyenne spatiale de  $q(\mathbf{x}, t)$  se note  $\bar{q}(t)$  et sa moyenne temporelle se note  $\langle q \rangle(\mathbf{x})$ .



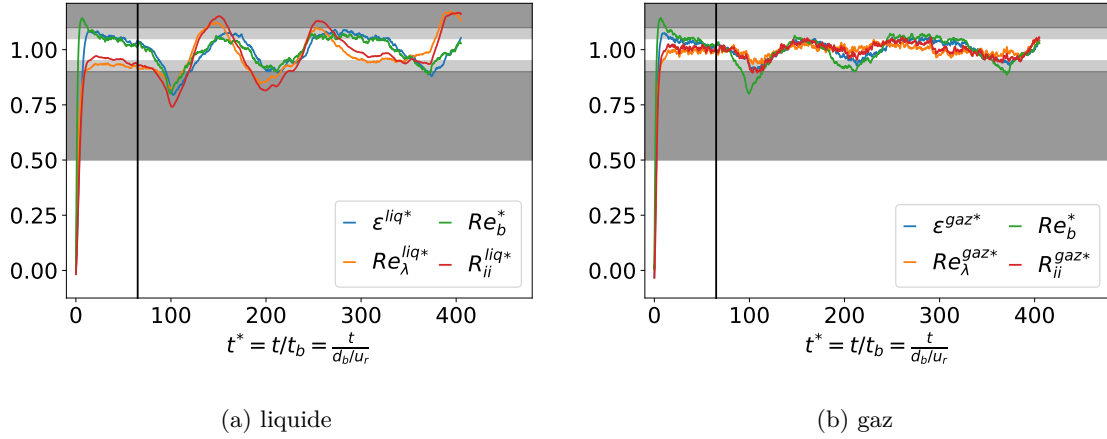


Figure 2.5: Évolution temporelle de  $\epsilon^{liq*}$ ,  $Re_\lambda^{liq*}$ ,  $Re_b^{liq*}$  et  $k^{liq*}$  (gauche) et de  $\epsilon^{gaz*}$ ,  $Re_\lambda^{gaz*}$ ,  $Re_b^{gaz*}$  et  $k^{gaz*}$  (droite), pour la simulation sB6-M2, où la répulsion entre les bulles  $\mathbf{f}_{rep}$  est active. L'étoile ( $q^*$ ) signale que la grandeur  $q$  est adimensionnée.  $t^*$  est le temps adimensionné par le temps de bulle  $t_b$ .  $\overline{\epsilon_\mu^l}$ ,  $\overline{Re_\lambda^l}$ ,  $\overline{k^l}$ ,  $\overline{\epsilon_\mu^g}$ ,  $\overline{Re_\lambda^g}$ ,  $\overline{k^g}$  et  $\overline{Re_b}$  sont adimensionnés par leur valeur moyenne sur l'intervalle  $t \in [65; 410]t_b$  (Tab. 2.3) pour donner  $\epsilon^{liq*}$ ,  $Re_\lambda^{liq*}$ ,  $k^{liq*}$ ,  $\epsilon^{gaz*}$ ,  $Re_\lambda^{gaz*}$ ,  $k^{gaz*}$  et  $Re_b^{gaz*}$ . La barre verticale matérialise la séparation entre le régime transitoire et le régime statistiquement stationnaire à  $t_0 = 65t_b$ . Les bandes gris claires mettent en valeur les régions  $0.90 < y < 0.95$  et  $1.05 < y < 1.1$ . Les bandes gris foncés mettent en valeur les régions  $y < 0.90$  et  $y > 1.1$ .

### 2.5.1 Convergence vers un état statistiquement stationnaire

La figure (2.5a) montre l'évolution temporelle des moyennes spatiales du nombre de Reynolds de bulle  $\overline{Re_b}$ , du nombre de Reynolds des échelles de Taylor dans le liquide  $\overline{Re_\lambda^l}$ , de la dissipation dans le liquide  $\overline{\epsilon_\mu^l} = 2\mu \overline{S_{ij}^l : S_{ij}^l}$  et de l'énergie cinétique turbulente dans le liquide  $\overline{k^l} = \frac{1}{2}\sigma^2(u_l)$ . Ces grandeurs sont toutes normées par la moyenne sur l'intervalle  $t \in [80; 410]t_b$ . Les valeurs utilisées sont rapportées tableau (2.3).

Aux premiers instants, entre  $t = 0t_b$  et  $t = 5t_b$ , toutes ces grandeurs évoluent très fortement. Cette évolution brutale s'atténue rapidement. Pour les temps compris entre  $t = 5t_b$  et  $t = 65t_b$ , le nombre de Reynolds et la dissipation diminuent linéairement avec le temps, l'énergie cinétique turbulente et le nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor marquent un plateau. La fin de ce plateau marque la fin du régime transitoire de l'écoulement, notons  $t_{tra} = 65t_b$ , la durée du régime transitoire. Pour  $t > 65t_b$  toutes les grandeurs précédentes oscillent avec une amplitude de 10% autour de leur valeur moyenne respective. Ces oscillations se produisent à grande période  $T = 100t_b$ . Ce régime d'évolution définit le régime statistiquement stationnaire.

La figure (2.5b) montre l'évolution de ces mêmes grandeurs, pour le gaz :  $\overline{Re_\lambda^g}$ ,  $\overline{\epsilon_\mu^g}$ ,  $\overline{k^g}$ . Les trois régimes décrits précédemment se distinguent de la même manière pour la phase gazeuse. Toutes les grandeurs évoluent très vite entre  $t = 0t_b$  et  $t = 5t_b$ . Pour les temps intermédiaires  $5t_b < t < 65t_b$  la dissipation gazeuse diminue aussi linéairement avec le temps tandis que l'énergie cinétique dans le gaz et le nombre de Reynolds basé sur les échelles de Taylor marquent un plateau. Une fois dans le régime statistiquement stationnaire, les grandeurs de la phase gazeuse oscillent aussi avec une période de  $T = 100t_b$ , et avec une amplitude plus faible que pour le liquide, de seulement 5% de leur valeur moyenne respective.

### 2.5.2 Convergence statistique

Une fois le régime statistiquement stationnaire atteint, les grandeurs mesurées dans l'écoulement évoluent encore de plus de 5% autour de leur valeur moyenne. On s'attend à ce que ces fluctuations

	$\langle \overline{Re_b} \rangle$ $\emptyset$	$\langle \overline{Re_\lambda}^X \rangle$ $\emptyset$	$\langle \overline{k}^X \rangle$ $m^2 \cdot s^{-2}$	$\langle \overline{\epsilon}^X \rangle$ $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-3}$
<i>liq.</i> : $-l$	470	29.7	0.00304	64.27
<i>gaz</i> : $-g$		17.2	0.0150	346.6

Tableau 2.3: Valeurs des moyennes spatio-temporelles de  $\epsilon$ ,  $Re_\lambda$ ,  $Re_b$ ,  $k$  dans chaque phase, pour la simulation sB6-M2, où la répulsion entre les bulles  $\mathbf{f}_{rep}$  est active.

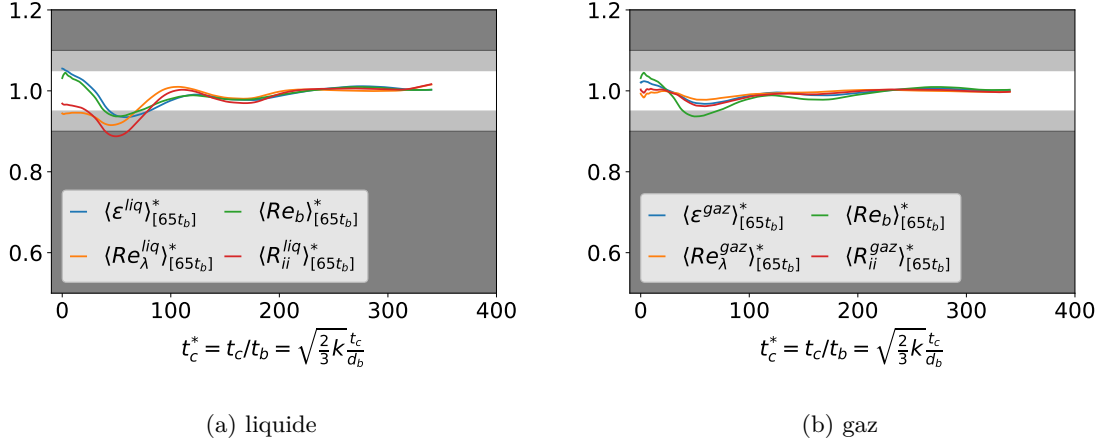


Figure 2.6: Évolution des moyennes cumulées (Eq. 2.32) de  $\epsilon^{liq*}$ ,  $Re_\lambda^{liq*}$ ,  $Re_b^{liq*}$  et  $k^{liq*}$  (gauche) et de  $\epsilon^{gaz*}$ ,  $Re_\lambda^{gaz*}$ ,  $Re_b^{gaz*}$  et  $k^{gaz*}$  (droite) pour la simulation sB6-M2, où la répulsion entre les bulles  $\mathbf{f}_{rep}$  est active.  $t_c^*$  est le temps de cumul adimensionné par le temps de bulle  $t_b$ .  $t_c^* = 0$  correspond à  $t^* = t_0^*$ . Les grandeurs  $\overline{\epsilon}_\mu^l$ ,  $\overline{Re}_\lambda^l$ ,  $\overline{k}^l$ ,  $\overline{\epsilon}_\mu^g$ ,  $\overline{Re}_\lambda^g$ ,  $\overline{k}^g$  et  $\overline{Re}_b$  sont adimensionnés par leur valeur moyenne sur l'intervalle  $t \in [65; 410]t_b$  (Tab. 2.3) pour donner  $\epsilon^{liq*}$ ,  $Re_\lambda^{liq*}$ ,  $k^{liq*}$ ,  $\epsilon^{gaz*}$ ,  $Re_\lambda^{gaz*}$ ,  $k^{gaz*}$  et  $Re_b^{gaz*}$ . Les bandes gris claires mettent en valeur les régions  $0.90 < y < 0.95$  et  $1.05 < y < 1.1$ . Les bandes gris foncés mettent en valeur les régions  $y < 0.90$  et  $y > 1.1$ .

soient plus petites dans un domaine de calcul plus grand. Il s'agit maintenant d'établir l'intervalle de temps minimum à considérer pour que les valeurs moyennes de la simulation sB6 ne dépendent plus du temps.

### Longueur de la fenêtre

Pour déterminer cet intervalle minimum, intéressons-nous à la moyenne cumulée qui est définie par :

$$\langle q \rangle_{[t_0]}(t_c) = \frac{1}{t_c} \int_{t_0}^{t_c} q(t) dt, \quad (2.32)$$

où  $q$  désigne n'importe quelle quantité. Nous choisirons pour instant de départ  $t_0$ , le temps du régime transitoire  $t_{tra}$ . Le temps de cumul est noté  $t_c$ . La figure (2.6) montre l'évolution de la moyenne cumulée du nombre de Reynolds de bulle  $\langle \overline{Re_b} \rangle_{[t_{tra}]}$ , du nombre de Reynolds de l'échelle de Taylor dans chaque phase  $\langle \overline{Re}_\lambda^l \rangle_{[t_{tra}]}$ ,  $\langle \overline{Re}_\lambda^g \rangle_{[t_{tra}]}$ , de la dissipation dans chaque phase  $\langle \overline{\epsilon}_\mu^l \rangle_{[t_{tra}]}$ ,  $\langle \overline{\epsilon}_\mu^g \rangle_{[t_{tra}]}$  et de l'énergie cinétique turbulente dans chaque phase  $\langle \overline{k}^l \rangle_{[t_{tra}]}$ ,  $\langle \overline{k}^g \rangle_{[t_{tra}]}$  en fonction du temps de cumul adimensionné  $t_c^*$ . Une moyenne calculée sur un intervalle de  $80t_b$  ou plus reste confinée entre +5% et -5% de la valeur moyenne. L'intervalle minimum de prise de moyenne pour cette simulation est donc  $80t_b$ . Nous choisissons de retenir  $t_f = 105t_b$  comme intervalle de prise de moyenne. Pour conforter ce choix, nous pouvons observer l'évolution de la moyenne glissante de  $\overline{\epsilon}_\mu^l$ ,  $\overline{Re}_\lambda^l$ ,  $\overline{k}^l$  et de  $\overline{\epsilon}_\mu^g$ ,  $\overline{Re}_\lambda^g$ ,  $\overline{k}^g$  et de  $\overline{Re}_b$ , sur une fenêtre de  $t_f = 105t_b$ . La figure (2.7) montre l'évolution temporelle de la moyenne glissante adimensionnée de ces grandeurs, moyennées

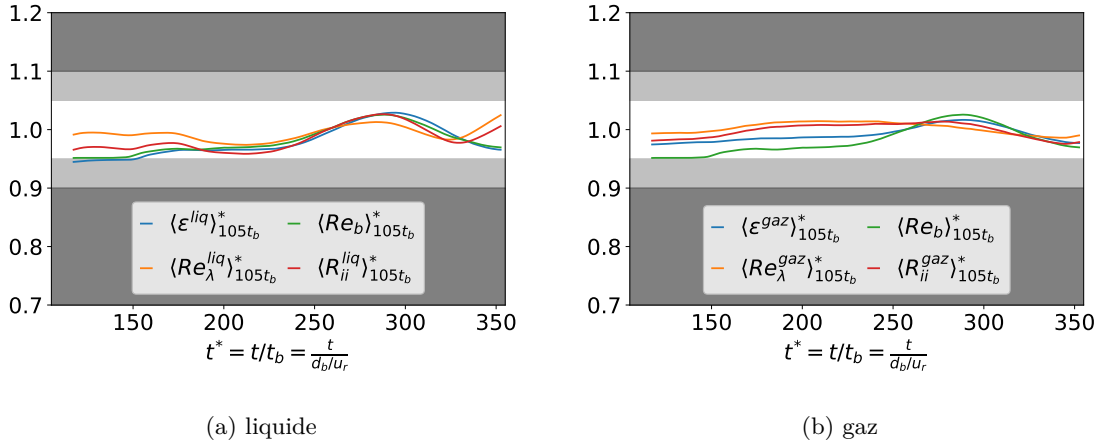


Figure 2.7: Évolution des moyennes glissantes de  $\epsilon^{liq*}$ ,  $Re_\lambda^{liq*}$ ,  $Re_b^{liq*}$  et  $k^{liq*}$  (gauche) et de  $\epsilon^{gaz*}$ ,  $Re_\lambda^{gaz*}$ ,  $Re_b^{gaz*}$  et  $k^{gaz*}$  (droite) pour la simulation sB6-M2, où la répulsion entre les bulles  $\mathbf{f}_{rep}$  est active.  $t_c^*$  est le temps de cumul adimensionné par le temps de bulle  $t_b$ .  $t_c^* = 0$  correspond à  $t^* = t_0^*$ . Les grandeurs  $\overline{\epsilon}_\mu^l$ ,  $\overline{Re}_\lambda^l$ ,  $\overline{k}^l$ ,  $\overline{\epsilon}_\mu^g$ ,  $\overline{Re}_\lambda^g$ ,  $\overline{k}^g$  et  $\overline{Re}_b$  sont adimensionnés par leur valeur moyenne sur l'intervalle  $t \in [65; 410]t_b$  (Tab. 2.3) pour donner  $\epsilon^{liq*}$ ,  $Re_\lambda^{liq*}$ ,  $k^{liq*}$ ,  $\epsilon^{gaz*}$ ,  $Re_\lambda^{gaz*}$ ,  $k^{gaz*}$  et  $Re_b^{gaz*}$ . Les bandes gris claires mettent en valeur les régions  $0.90 < y < 0.95$  et  $1.05 < y < 1.1$ .

sur un intervalle glissant de  $t_f = 105t_b$ , et pour des instants relevés à partir de  $t = t_{tra}$ . Cette représentation confirme que les choix précédents permettent d'évaluer les moyennes des grandeurs macroscopiques sans ambiguïté, à 5% près.

L'estimation de la durée du régime transitoire  $t_{tra}$  et de la durée de fenêtre minimale  $t_f$  a été menée de la même façon pour toutes les autres simulations de cette thèse.

### 2.5.3 Convergence en maillage

La convergence en maillage est abordée dans cette sous-section. Le côté du domaine de calcul pour la simulation sB6 vaut  $L = 16d_b$ . Il est discrétisé par  $N^3$  mailles cubiques. Trois valeurs de  $N^3$ , définissant trois maillages ( $M0$ ,  $M1$  et  $M2$ ) sont utilisées. Le maillage  $M0$  compte  $N^3 = 108^3$  mailles, le maillage  $M1$  en compte  $N^3 = 216^3$  et le maillage  $M2$  en compte  $N^3 = 432^3$ . La taille de maille de ces trois maillage est  $\Delta x \approx d_b/7$ ,  $\Delta x \approx d_b/14$  et  $\Delta x \approx d_b/28$  respectivement pour  $M0$ ,  $M1$  et  $M2$ . Tout d'abord, les variations de la vitesse relative, des fluctuations de la composante verticale de vitesse et des moments statistiques centrés d'ordre trois et quatre pour la composante verticale de la vitesse en fonction du maillage sont discutées. Ensuite, les fonctions de densités de probabilités de la composante verticale de vitesses centrées et réduites  $u_x^*$  sont comparées pour les trois maillages. Puis les spectres d'énergie  $\mathcal{S}$  sont comparés pour les trois maillages. Enfin, le bilan spectral d'énergie cinétique, (rappelé en annexe A.1.2), pour le maillage  $M1$  et pour le maillage  $M2$  sont comparés.

La vitesse relative  $u_r$  est bien reproduite avec le maillage le plus grossier, en effet, elle varie de 7% seulement entre le maillage  $M0$  et le maillage  $M2$  comme rapporté dans le tableau (2.4). Pour jauger l'effet du raffinement de maillage sur les fluctuations de la composante verticale de vitesses  $u_x'$ , on choisit de comparer le rapport de l'énergie cinétique fluctuante sur l'énergie cinétique moyenne associée aux bulles,  $\sigma^2(u_x)/\alpha u_r^2$ , avec  $\sigma^2(u_x)$  la variance de la composante verticale de la vitesse (voir annexe A.1.1, Eq. (10) et Eq. (11)). Le tableau (2.4) montre que dans la phase liquide, la variance normée par  $\alpha u_r^2$  évolue seulement de 5% entre le maillage  $M0$  et le maillage  $M2$  tandis que dans la phase gazeuse, ce rapport varie de plus de 15% entre les maillage  $M0$  et  $M1$  et varie encore de 10% entre les maillages  $M1$  et  $M2$ . Cependant, comme la phase gazeuse ne compte que pour 6% du volume totale du fluide, cette forte évolution avec le maillage ne se retrouve pas sur l'évolution de la variance du mélange qui évolue de moins de 2% entre le maillage  $M0$  et le

sB6		M0	M1	M2
	$\langle u_r \rangle (m/s)$	0.138	0.146	0.148
<i>liq.</i>	$\sigma^2(u_{l,x})/\alpha u_r^2$	1.43	1.36	1.38
	$\mu_3(u_{x,l})$	1.08	0.74	0.57
	$\mu_4(u_{x,l})$	4.86	4.53	4.85
<i>gaz.</i>	$\sigma^2(u_{g,x})/\alpha u_r^2$	4.92	5.72	6.36
	$\mu_3(u_{x,g})$	-0.28	-0.25	-0.26
	$\mu_4(u_{x,g})$	2.66	2.71	2.64
<i>mel.</i>	$\sigma^2(u_x)/\alpha u_r^2$	2.67	2.59	2.62
	$\mu_3(u_x)$	1.82	1.80	1.76
	$\mu_4(u_x)$	7.45	8.12	8.42

Tableau 2.4: Pour la simulation sB6 à trois niveaux de raffinement en maillage : vitesse relative  $u_r$ , variance de la vitesse verticale  $\sigma^2(u_x)$  normée par  $\alpha u_r^2$ , coefficient de dissymétrie  $\mu_3$  et coefficient d'aplatissement  $\mu_4$ , pour la composante verticale de vitesse.

maillage  $M2$ . Ainsi, l'énergie cinétique moyenne est correctement capturée par le maillage le plus grossier  $M0$ , tout comme l'énergie cinétique fluctuante dans la phase liquide. Cependant, l'énergie cinétique fluctuante dans la phase gazeuse évolue fortement entre les trois niveaux de raffinement. La résolution précise de l'écoulement à l'intérieur de la phase gazeuse demanderait un raffinement beaucoup plus élevé [25].

Pour aller plus loin dans l'analyse, le tableau (2.4) permet aussi de comparer pour les trois maillages, le coefficient de dissymétrie  $\mu_3$  (moment centré d'ordre trois, ou *skewness* en anglais) et le coefficient d'aplatissement  $\mu_4$  (moment centré d'ordre quatre ou *kurtosis* ou *flatness* en anglais) des fluctuations des vitesses verticales dans les deux phases, et dans le mélange. La valeur de ces moments centrés est sensible aux fortes fluctuations de vitesses, et donc aux détails de l'écoulement. Dans cette sous-section, nous nous limitons à la comparaison des valeurs de ces coefficients entre les maillages  $M0$ ,  $M1$  et  $M2$ . La dissymétrie des fluctuations de vitesse verticale dans le gaz varie seulement de 9% entre le maillage  $M0$  et le maillage  $M2$  (alors que la variance des fluctuations varie de plus de 25%) et varie de plus de 25% entre chaque maillage dans le liquide. La dissymétrie des fluctuations de vitesses verticales dans le mélange, c'est-à-dire dans tout le domaine sans distinction de phase, varie très peu entre les trois maillages. En effet, on ne relève qu'un écart de 3% entre le maillage  $M0$  et le maillage  $M2$  dans le tableau (2.4). Le coefficient d'aplatissement des fluctuations de vitesse verticale varie de moins de 1% dans chaque phase séparément, entre le maillage  $M0$  et le maillage  $M2$ . En considérant le mélange des deux phases, le coefficient d'aplatissement varie respectivement de 8% et de 3% entre le maillage  $M0$  et le maillage  $M1$  et entre le maillage  $M1$  et le maillage  $M2$  : le niveau de raffinement intermédiaire  $M1$  est nécessaire pour obtenir un coefficient d'aplatissement correct. Ainsi, les coefficients de dissymétrie et d'aplatissement pour les fluctuations de vitesses du mélange varient peu entre le maillage intermédiaire  $M1$  et le maillage fin  $M2$  (hormis pour la dissymétrie dans le liquide). Le maillage intermédiaire suffit pour reproduire correctement les moments statistiques d'ordres trois et quatre pour les fluctuations de vitesse verticale du mélange.

Maintenant, nous comparons les fonctions de densité de probabilité (PDF) des vitesses verticales dans la phase liquide, dans la phase gazeuse et dans le mélange. Les figures (2.8)(a,b,c) présentent les PDF de la composante verticale de la vitesse centrée et réduite  $u_x^* = (u_x - \langle u_x \rangle) / \sigma(u_x)$  pour la phase liquide, pour la phase gazeuse et pour le mélange, pour les trois maillages. Les PDF sont présentées sous forme semi-logarithmique pour mettre en évidence les échelles de vitesse les moins probables, puisque c'est sur ces échelles que les différences entre les trois maillages sont le plus notables. La PDF de la composante verticale de la vitesse dans la phase gazeuse n'est pas sensible au raffinement comme le montre la figure (2.8b). Dans la phase liquide, seules les fluctuations négatives sont sensibles au maillage : la figure (2.8a) marque une différence entre les maillages  $M0$ ,  $M1$  et  $M2$  pour  $u^* \leq -2.0$  seulement. Plus le maillage est fin, plus les fluctuations négatives de la composante verticale de vitesse dans le liquide sont probables. Ces fluctuations négatives de  $u_{l,x}$

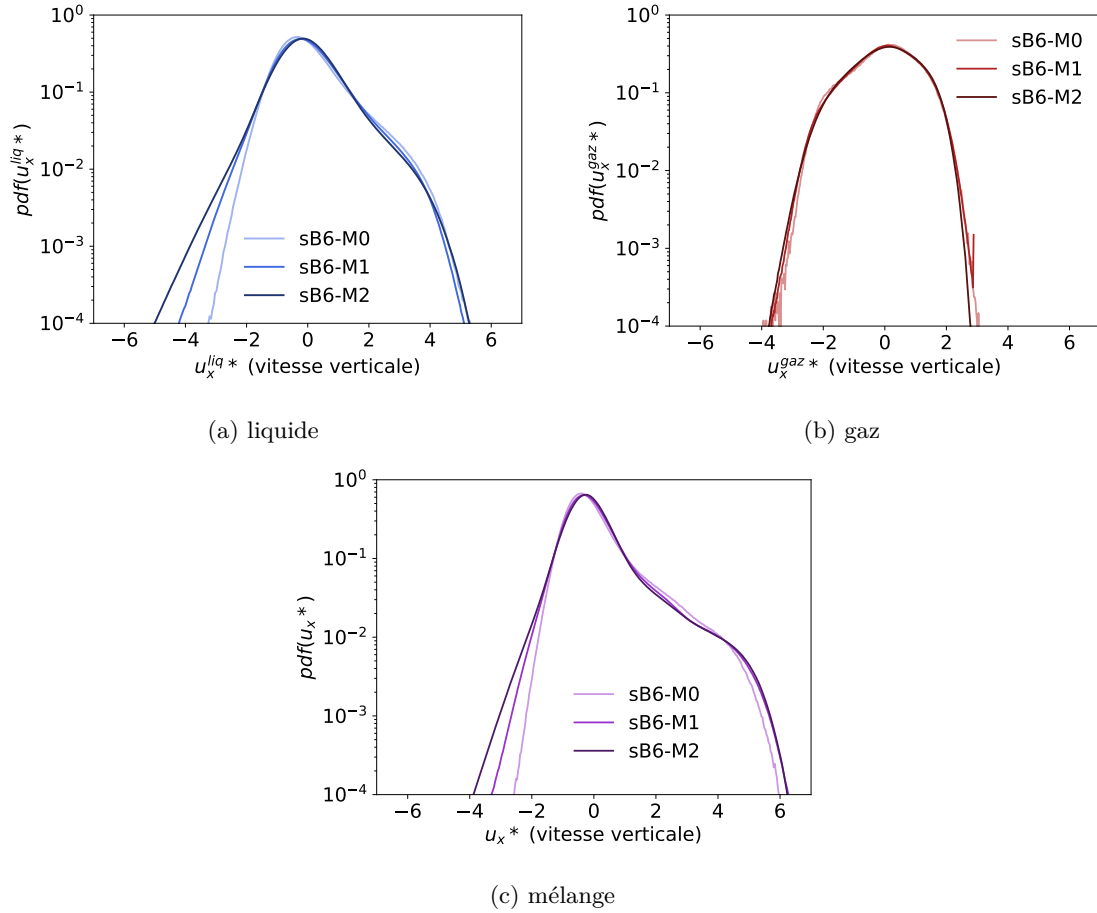


Figure 2.8: Fonction de densité de probabilité des vitesses verticales centrées et réduites  $u_x^* = (u_x - \langle u_x \rangle) / \sigma(u_x)$  pour la simulation sB6 d'un essaim de bulles, sans forçage, à 6% de taux de vide dans le domaine de côté  $L = 16d_b$ , pour les maillages  $M0$  (trait clair),  $M1$  (trait moyen) et  $M2$  (trait foncé). Les tracés sont en échelle semi-logarithmique.

se produisent majoritairement aux équateurs des bulles<sup>2</sup>, là où la couche limite est la plus fine et montre les gradients les plus forts (voir Sec. 4.1.1). Cette tendance se retrouve naturellement sur les PDF de la composante verticale de vitesse pour le mélange.

Intéressons-nous désormais aux fluctuations des composantes horizontales de la vitesse. Le tableau (2.5) montre la valeur de la variance de  $u_y$  normée par  $\alpha u_r^2$  dans la phase liquide, dans la phase gazeuse et dans le mélange, pour les trois maillages considérés. En comparant ces valeurs aux variances normées du tableau (2.4), on voit que les fluctuations de la composante horizontale de vitesse sont entre 15 et 30 fois moins intenses que celles de la composante verticale. La variance normée évolue de moins de 3% entre le maillage  $M0$  et le maillage  $M2$  quelque soit la phase. Le maillage  $M0$  suffit à reproduire correctement la variance des composantes horizontales de vitesse dans les deux phases et dans le mélange, et ces composantes de vitesse portent très peu d'énergie par rapport à la composante verticale. Nous ne discuterons donc pas les moments d'ordres supérieurs de ces fluctuations. Nous ne discuterons pas non plus des PDF des fluctuations des composantes horizontales de la vitesse.

Nous nous intéressons maintenant à la convergence des grandeurs spectrales avec le maillage, en commençant par la convergence en maillage du spectre d'énergie  $\mathcal{S}$  (voir section A.1, Eq. (32) pour sa définition). La figure (2.9) présente en échelle logarithmique le spectre d'énergie  $\mathcal{S}(\kappa) / \sigma^2(u)$

<sup>2</sup>l'équateur de bulle est le périmètre de bulle dans le plan orthogonal à sa vitesse relative instantanée, passant par le centre de la bulle.

sB6		M0	M1	M2
	$\langle u_r \rangle (m/s)$	0.138	0.146	0.148
<i>liq.</i>	$\sigma^2(u_{l,y})/\alpha u_r^2$	$7.42 \times 10^{-2}$	$6.92 \times 10^{-2}$	$7.25 \times 10^{-2}$
<i>gaz.</i>	$\sigma^2(u_{g,y})/\alpha u_r^2$	$36.6 \times 10^{-2}$	$31.7 \times 10^{-2}$	$36.1 \times 10^{-2}$
<i>mel.</i>	$\sigma^2(u_y)/\alpha u_r^2$	$9.17 \times 10^{-2}$	$8.41 \times 10^{-2}$	$8.99 \times 10^{-2}$

Tableau 2.5: Pour la simulation sB6 à trois niveaux de raffinement en maillage : vitesse relative  $u_r$  et variance normée de la vitesse horizontale  $s^2(u_y)$ .

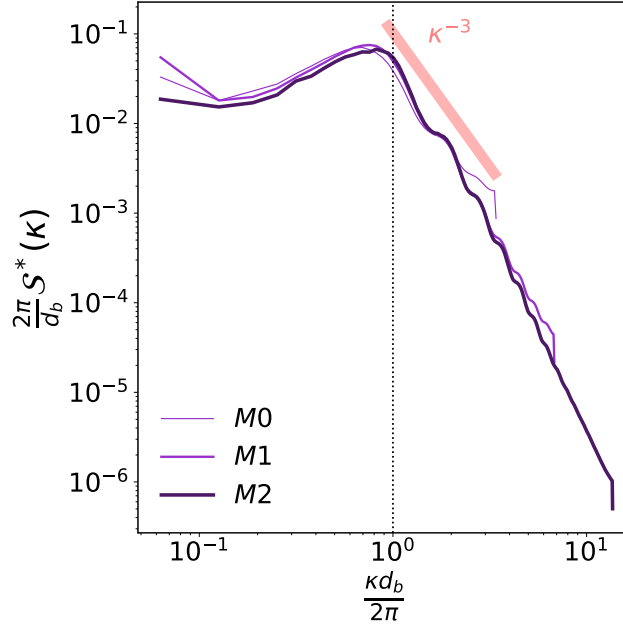


Figure 2.9: Spectre d'énergie  $S/\sigma^2(u)$  pour la simulation sB6 aux trois maillages.

pour les trois maillages considérés, en fonction du nombre d'onde sans dimension  $\kappa d_b/(2\pi)$ . Le maillage fin  $M2$  résout des échelles quatre fois plus petites que le maillage  $M0$ , son spectre se prolonge donc jusqu'à des nombres d'onde quatre fois plus grands. Pour les trois maillages, les tendances du spectre d'énergie sont similaires. Le spectre croît de  $\kappa = 0.1\kappa_b$  à  $\kappa \sim 0.8\kappa_b$  où il atteint son maximum. Puis pour  $\kappa \geq 0.8\kappa_b$  le spectre suit une évolution proportionnelle à  $\kappa^{-3}$ . Sur cette plage les trois maillages présentent des oscillations de même période. Les spectres des maillages  $M1$  et  $M2$  se superposent entre  $\kappa = 0.8\kappa_b$  et  $\kappa = 4\kappa_b$ . Le maillage intermédiaire  $M1$  reproduit correctement l'énergie aux échelles de taille  $\frac{1}{4}d_b$  et plus grandes avec la même précision que la maillage  $M2$ . L'écart entre ces deux maillages aux échelles plus petites que  $\frac{1}{4}d_b$  reste très faible.

Jusqu'à présent, le maillage  $M1$  reproduit les mêmes statistiques que le maillage  $M2$ , à l'exception du coefficient de dissymétrie de la composante verticale de vitesse dans la phase liquide  $\mu_3(u_{l,x})$ . Au vu des grandeurs analysées, le maillage  $M1$  est donc suffisant. Déterminons si ce maillage suffit aussi pour produire la représentation spectrale du bilan d'énergie cinétique, (introduit en section A.1.2, et 2.4). La figure (2.10) présente, pour le maillage  $M1$  en traits discontinus et pour le maillage  $M0$  en traits pleins, la représentation spectrale du bilan d'énergie cinétique. Les bilans sont présentés sous forme semi-logarithmique pour mettre en évidence les plus petits nombres d'onde. Chaque terme de ces bilans est multiplié par le nombre d'onde  $\kappa$  pour faciliter la comparaison des aires sous les courbes de ces termes. Les aires sous les courbes sont homogènes à des puissances. L'interprétation physique de ce bilan est reportée à la section 4.1.4, on se contente ici de commenter l'effet du maillage. Le terme de production par flottabilité (tracé rouge) est identique pour les deux

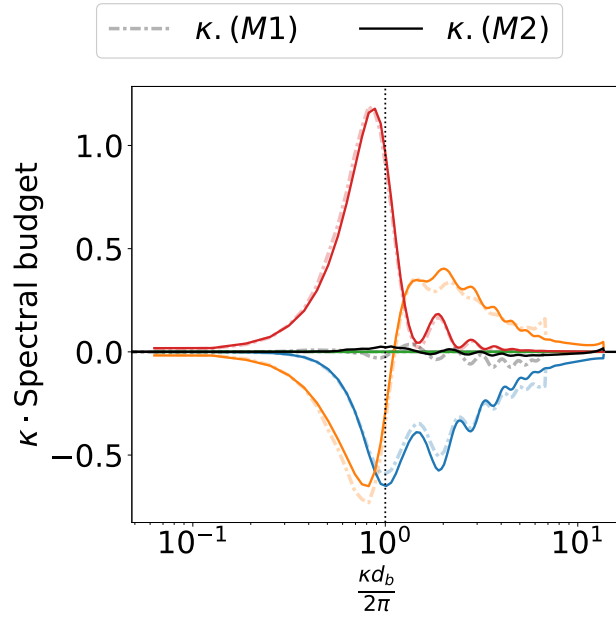


Figure 2.10: Représentation spectrale du bilan d'énergie cinétique compensé par  $\kappa$ , pour la simulation sB6 d'un essaim de bulles, sans forçage, à 6% de taux de vide, domaine de côté  $L = 16d_b$ , maillage  $M1$  (traits discontinus) et maillage  $M2$  (traits pleins). ■ : Terme de production par flottabilité en rouge. ■ : Terme de dissipation visqueuse. ■ : Termes de transferts. ■ : Résidu.

résolutions. Comme attendu, le raffinement fait tendre la dissipation (tracé bleu) vers zéro. L'effet de la résolution est aussi marqué pour le terme de transfert (tracé orange). Ce dernier tend vers zéro aux grands nombres d'ondes pour le maillage  $M2$ , alors qu'il est coupé avant de s'annuler pour le maillage  $M1$ . Le résidu (tracé noir), qui est la somme des trois termes précédents n'oscille presque pas pour le maillage  $M2$ . Pour le maillage  $M1$  au contraire, ses oscillations sont visibles aux nombres d'ondes qui ont le plus d'intérêt pour notre étude, à savoir  $\kappa_b < \kappa < 3\kappa_b$ . De plus, le résidu est nul à toutes les échelles pour le maillage fin, ce qui est gage de la précision de la résolution de l'écoulement. Le cas  $M1$ , quant à lui, montre un résidu non nul aux échelles qui ont le plus d'intérêt pour notre étude ( $\kappa_b < \kappa < 3\kappa_b$ ). Pour conclure, le maillage fin  $M2$  permet une résolution très satisfaisante du bilan spectral d'énergie.

Les simulations d'essaims de bulles avec forçage  $\mathbf{f}$  doivent être simulées dans un domaine de côté  $L = 32d_b$  pour les raisons expliquées au paragraphe 2.2. À ce jour, seul l'essai à 6% de taux de vide sera simulé avec la même résolution que le maillage  $M2$ . Les essais à 3% et à 12% de taux de vide seront simulés avec la résolution correspondant au maillage  $M1$  qui donne des résultats très satisfaisants pour la plupart des grandeurs.

#### 2.5.4 Répulsion entre les bulles

Nous avons vu à la section 2.2 que pour les maillage  $M0$  et  $M1$ , c'est-à-dire pour une taille de maille  $\Delta x \geq 14d_b$ , la rencontre de deux bulles peut conduire à leur recouvrement partiel, ce qui n'est pas physique, et peut provoquer une instabilité numérique. Pour des raisons de coût de calcul, les simulations d'essai de bulles à 3% et à 12% de taux de vide, avec forçage  $\mathbf{f}$  (TB3 et TB12), sont simulés avec une résolution correspondant au maillage  $M1$ . Il nous reste donc à étudier l'effet de cette répulsion  $\mathbf{f}_{rep}$  sur les statistiques et sur les grandeurs spectrales utilisées pour décrire ces écoulements. La simulation sB6 sur le maillage fin  $M2$ , avec répulsion  $\mathbf{f}_{rep}$  entre les bulles est comparée à la même simulation pour laquelle  $\mathbf{f}_{rep}$  est désactivée. Tout d'abord, l'influence de la répulsion  $\mathbf{f}_{rep}$  sur les valeurs moyennes de  $Re_b$ ,  $Re_\lambda$ ,  $k$  et  $\epsilon_\mu$  est étudiée. Ensuite, l'effet de la



sB6		$\delta_{rep} = 4\Delta x$	$\delta_{rep} = 0\Delta x$
	$\langle Re_b \rangle$	471	417
<i>liq.</i>	$\langle Re_\lambda \rangle^l$	30	31
	$\langle \bar{k} \rangle^l$	$3.12 \times 10^{-3}$	$3.09 \times 10^{-3}$
	$\langle \bar{\epsilon}_\mu \rangle^l$	64.3	60.5
<i>gaz.</i>	$\langle Re_\lambda \rangle^g$	17	18
	$\langle \bar{k} \rangle^g$	$1.50 \times 10^{-2}$	$1.32 \times 10^{-2}$
	$\langle \bar{\epsilon}_\mu \rangle^g$	346	259

Tableau 2.6: Valeurs des moyennes spatio-temporelles  $Re_b, Re_\lambda, k, \epsilon_\mu$  par phase pour les simulations sB6-M2, avec répulsion entre les bulles  $\mathbf{f}_{rep}$  (gauche) et sans répulsion entre les bulles (droite).

répulsion sur l'évolution temporelle de ces grandeurs est analysé, ce qui nous conduit à observer la disposition des bulles de l'écoulement au cours du temps. Après, nous évaluons l'effet de la répulsion sur les fonctions de densité de probabilités des vitesses. Enfin, le spectre d'énergie cinétique et le bilan spectral d'énergie cinétique pour ces deux simulations est comparé.

On s'intéresse en premier lieu à l'effet de  $\mathbf{f}_{rep}$  sur les grandeurs moyennes de  $Re_b, Re_\lambda, k$  et  $\epsilon_\mu$ . Le tableau (2.6) fournit les valeurs de ces grandeurs moyennes dans les deux phases pour la simulation avec répulsion ( $\delta_{rep} = 4\Delta x$ ) et pour la simulation sans répulsion ( $\delta_{rep} = 0\Delta x$ ). Le nombre de Reynolds de bulle  $Re_b$  varie seulement de 12% entre les deux cas. Dans la phase liquide, les moyennes varient de moins de 10% entre les deux cas. Dans la phase gazeuse, l'énergie cinétique  $k$  et la dissipation  $\epsilon_\mu$  varient respectivement de 12% et de 28% en supprimant la répulsion. Ainsi, la répulsion  $\mathbf{f}_{rep}$  affecte peu les grandeurs moyennes du liquide qui contribuent à la majeure partie des grandeurs du mélange. La phase gazeuse dissipe 1.3 fois plus d'énergie lorsque la répulsion est activée.

Pour aller plus loin dans l'analyse, nous comparons l'évolution temporelle de  $Re_b, Re_\lambda, k$  et  $\epsilon_\mu$  pour nos deux cas. La figure (2.11) montre l'évolution temporelle de ces grandeurs dans chaque phase pour la simulation sans répulsion. Ces grandeurs sont toutes normées par leur valeur moyenne (Tab. (2.6)). Sans répulsion  $\mathbf{f}_{rep}$ , l'oscillation de grande amplitude et de grande période observée sur les figures (2.5) et (2.12) disparaît totalement pour toutes les grandeurs tracées, dans le liquide comme dans le gaz. La répulsion modifie peu les valeurs moyennes, à l'exception du nombre de Reynolds de bulle  $Re_b$ , mais a un effet non négligeable sur la dynamique temporelle de l'écoulement.

Pour comprendre l'origine de ces oscillations qui apparaissent en activant  $\mathbf{f}_{rep}$ , la disposition des bulles aux instants des extrema de  $Re_b, k, \epsilon_\mu, Re_\lambda$  est comparée à la disposition des bulles aux instants de leur minima. Pour la simulation avec répulsion, la figure (2.12) met en évidence les instants correspondants aux extrema de  $\overline{Re_b}, \bar{k}^l, \bar{\epsilon}_\mu^l, \overline{Re_\lambda}, \bar{k}^g, \bar{\epsilon}_\mu^g$  et  $\overline{Re_\lambda}^g$  en marquant d'une pastille bleue les minima, qui sont à  $t = 200t_b$  et à  $t = 372t_b$ , et en marquant d'une pastille rouge les maxima, qui sont à  $t = 161t_b$  et à  $t = 277t_b$ , avec  $t_b = 6.66 \times 10^{-2}s$ . Les figures (2.13)(a,b,c,d) montrent la position des bulles dans le plan  $(z, x)$ , à ces quatre instants. La gravité est dans la direction  $-\mathbf{e}_x$ . Les positions sont marquées par des disques de diamètres  $d_b$  dont la couleur fonce avec le taux de présence local  $p$ . Pour une bulle à la position  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , ce taux de présence local est calculé à partir des bulles ayant leur coordonnée  $x$  et  $z$  proche de  $x_0$  et  $z_0$ , quelle que soit leur coordonnée  $y$ . La valeur de  $p$  est déterminée en utilisant une méthode d'estimation par noyau gaussien sur les coordonnées  $x$  et  $z$ , dont le paramètre de lissage est calculé par une méthode de Scott ([61]). Le taux de présence local  $p$  a uniquement un intérêt qualitatif pour mettre en lumière le regroupement préférentiel des bulles : sa valeur précise n'est pas discutée. Le disque rouge sert de référence : il ne représente aucune bulle. Les figures (2.13b) et (2.13d) montrent bien que les bulles sont arrangées en nappes horizontales aux instants qui correspondent aux minima de toutes les grandeurs :  $t = 200t_b$  et  $t = 372t_b$ . Au contraire, les figures (2.13a) et (2.13c) montrent que les bulles sont réparties de façon assez uniforme aux instants qui correspondent aux maxima :  $t = 161t_b$  et  $t = 277t_b$ . De la même façon, pour voir si les bulles forment un arrangement particulier pour la simulation sans répulsion, la disposition des bulles à différents instants est observée. Les figures



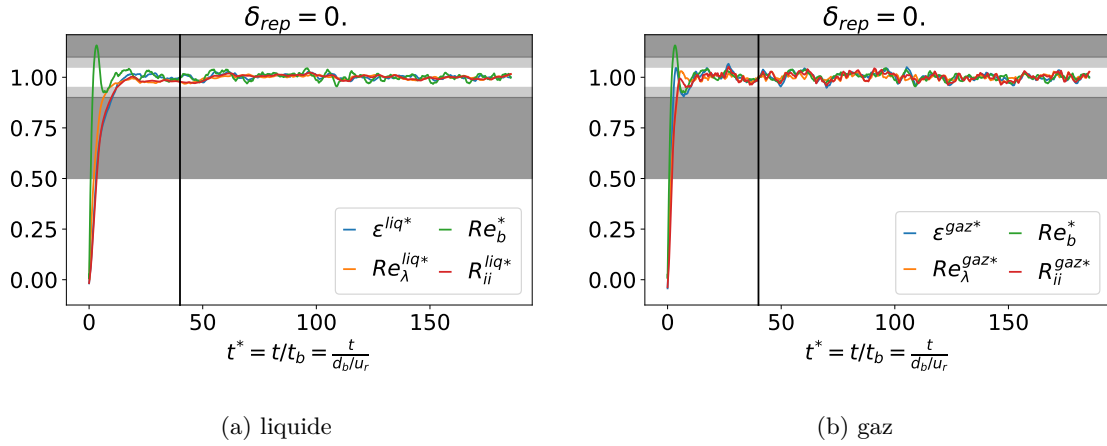


Figure 2.11: Évolution temporelle de  $\epsilon^{liq*}$ ,  $Re_\lambda^{liq*}$ ,  $Re_b^{liq*}$  et  $k^{liq*}$  (gauche) et de  $\epsilon^{gaz*}$ ,  $Re_\lambda^{gaz*}$ ,  $Re_b^{gaz*}$  et  $k^{gaz*}$  (droite), pour la simulation sB6-M2, où la répulsion entre les bulles  $\mathbf{f}_{rep}$  est inactive. L'étoile ( $q^*$ ) signale que la grandeur  $q$  est adimensionnée.  $t^*$  est le temps adimensionné par le temps de bulle  $t_b$ .  $\bar{\epsilon}^l$ ,  $\overline{Re_\lambda}^l$ ,  $\bar{k}^l$ ,  $\bar{\epsilon}^g$ ,  $\overline{Re_\lambda}^g$ ,  $\bar{k}^g$  et  $\overline{Re_b}$  sont adimensionnés par leur valeur moyenne sur l'intervalle  $t \in [65; 410]t_b$  (Tab. 2.6) pour donner  $\epsilon^{liq*}$ ,  $Re_\lambda^{liq*}$ ,  $k^{liq*}$ ,  $\epsilon^{gaz*}$ ,  $Re_\lambda^{gaz*}$ ,  $k^{gaz*}$  et  $Re_b^{gaz*}$ . La barre verticale matérialise la séparation entre le régime transitoire et le régime statistiquement stationnaire à  $t_0 = 45t_b$ . Les bandeaux gris clairs mettent en valeur les régions  $0.90 < y < 0.95$  et  $1.05 < y < 1.1$ . Les bandeaux gris foncés mettent en valeur les régions  $y < 0.90$  et  $y > 1.1$ .

(2.14)(a,b) montrent la position des bulles dans le plan  $(z, x)$  à  $t = 161t_b$  et à  $t = 200t_b$ . Pour aucun de ces deux instants les bulles ne forment de nappes : la répartition des bulles est relativement homogène. La répulsion entre les bulles est donc responsable de l'arrangement périodique des bulles en nappes horizontales. La formation de ces nappes est associée aux oscillations de  $u_r$ ,  $k$  et  $\epsilon_\mu$  (Fig. (2.12)). Les statistiques étudiées dans cette thèse sont prises sur des temps plus long que le temps de formation et d'éclatement de ces nappes.

Pour mieux comprendre les conséquences de la répulsion  $\mathbf{f}_{rep}$  sur l'écoulement, on peut s'intéresser fonctions de densité de probabilité (PDF) des vitesses. La figure (2.15c) montre que la PDF de la composante verticale de vitesse dans la phase gazeuse  $u_x^{gaz*}$  change peu avec la répulsion. Pour la phase liquide, la figure (2.15b) montre que les fluctuations extrêmes ( $|u_y^{liq*}| > 4$ ) sont réduites lorsque la force de répulsion est désactivée. De même, les fluctuations négatives de la composante verticale de vitesse  $u_x^{liq*} < -1.8$  dans la phase liquide sont réduites en activant la répulsion, comme on le voit sur la figure Fig. (2.15a)). Au contraire, les fluctuations positives  $u_x^{liq*} > 3.5$  dans le liquide augmentent quand la répulsion est active (Fig. (2.15a)). Ainsi, en laissant les bulles se toucher, les fortes fluctuations du liquide sont réduites, à l'exception des fluctuations positives dans la direction horizontale. L'écoulement à l'intérieur de chaque bulle est peu modifié par la répulsion.

Nous analysons maintenant les grandeurs spectrales, en commençant par le spectre d'énergie cinétique  $\mathcal{S}$ . Dans la suite nous nous intéressons au spectre d'énergie adimensionné  $\mathcal{S}^*$  qui est obtenu en normant  $\mathcal{S}$  par l'intégrale du spectre d'énergie dans le cas sB6 avec répulsion  $\mathbf{f}_{rep}$  :  $\int \mathcal{S}_\delta d\kappa$ . La figure (2.16) présente le spectre d'énergie adimensionné  $\mathcal{S}^*$  pour la simulation dans laquelle  $\mathbf{f}_{rep}$  est désactivée ( $\delta_{rep} = 0$ ), et pour la simulation dans laquelle elle est activée ( $\delta_{rep} = 4\Delta x$ ). Pour les nombres d'ondes  $\kappa$  plus petit que  $0.7\kappa_b$ , la répulsion artificielle a pour conséquence de réduire l'énergie cinétique. Pour  $\kappa \geq \kappa_b$ , c'est-à-dire pour les échelles plus petites que la taille de la bulle, le spectre d'énergie cinétique est insensible à la répulsion. Pour les nombres d'ondes proches de  $\kappa_b$ , la répulsion entre les bulles translate le maximum du spectre d'énergie de  $\kappa = 0.6\kappa_b$  à  $\kappa = 0.9\kappa_b$ . Ainsi, en empêchant les bulles de se toucher, les échelles contenant le plus d'énergie passent de  $\lambda = 1.67d_b$  à  $\lambda = 1.11d_b$ . L'effet de  $\mathbf{f}_{rep}$  sur le spectre d'énergie est faible.

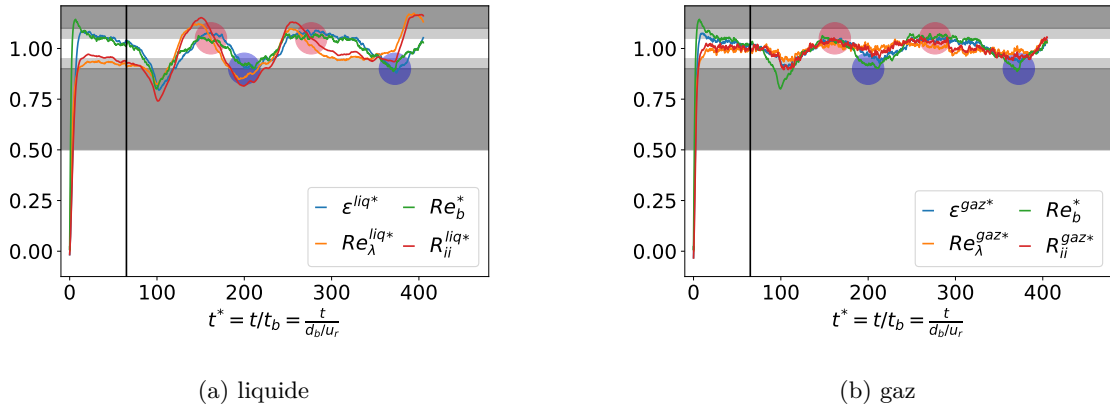


Figure 2.12: Évolution temporelle de  $\epsilon^{liq*}, Re_\lambda^{liq*}, Re_b^{liq*}$  et  $k^{liq*}$  (gauche) et de  $\epsilon^{gaz*}, Re_\lambda^{gaz*}, Re_b^{gaz*}$  et  $k^{gaz*}$  (droite), pour la simulation sB6-M2, où la répulsion entre les bulles  $\mathbf{f}_{rep}$  est inactive. L'étoile ( $q^*$ ) signale que la grandeur  $q$  est adimensionnée.  $t^*$  est le temps adimensionné par le temps de bulle  $t_b$ .  $\bar{\epsilon}^l, \overline{Re}_\lambda^l, \bar{k}^l, \bar{\epsilon}^g, \overline{Re}_\lambda^g, \bar{k}^g$  et  $\overline{Re}_b$  sont adimensionnés par leur valeur moyenne sur l'intervalle  $t \in [65; 410]t_b$  (Tab. 2.6) pour donner  $\epsilon^{liq*}, Re_\lambda^{liq*}, k^{liq*}, \epsilon^{gaz*}, Re_\lambda^{gaz*}, k^{gaz*}$  et  $Re_b^{gaz*}$ . La barre verticale matérialise la séparation entre le régime transitoire et le régime statistiquement stationnaire à  $t_0 = 45t_b$ . Les bandeaux gris clairs mettent en valeur les régions  $0.90 < y < 0.95$  et  $1.05 < y < 1.1$ . Les bandeaux gris foncés mettent en valeur les régions  $y < 0.90$  et  $y > 1.1$ . Les pastilles rouges marquent  $t = 161t_b$  et  $t = 277t_b$ . Les pastilles bleues marquent  $t = 200t_b$  et  $t = 372t_b$ .

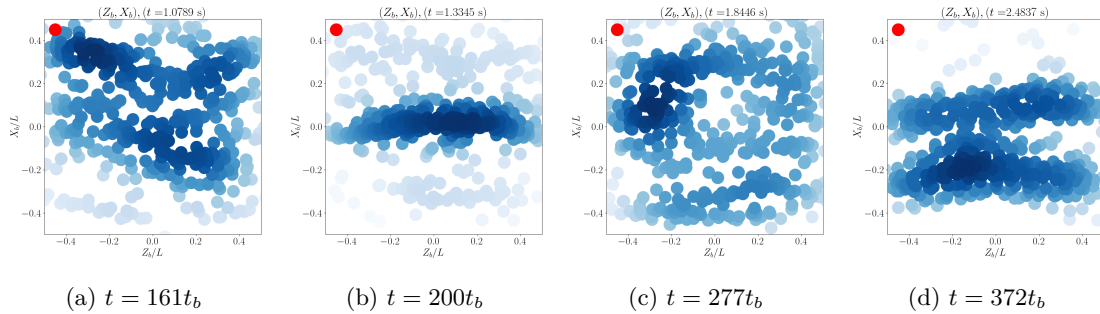


Figure 2.13: Positions des centres de bulles à différents instants pour la simulation sB6-M2, où la répulsion entre les bulles  $\mathbf{f}_{rep}$  est activée.

Enfin, intéressons-nous à l'impact de la force de répulsion sur la représentation spectrale du bilan d'énergie cinétique. La figure (2.17) montre le bilan spectral d'énergie cinétique pour la simulation sB6 avec répulsion ou sans répulsion. Chaque terme de ces bilans est multiplié par le nombre d'onde  $\kappa$ . Les aires sous les courbes sont homogènes à des puissances. La répulsion réduit l'intensité des termes aux grandes échelles, rapproche la position du maximum du terme de gravité et le minimum du terme de transfert de  $\kappa_b = \frac{2\pi}{d_b}$  et amplifie les oscillations des termes de gravité et de dissipation. L'effet de la répulsion sur le résidu du bilan, en noir, est négligeable.

Pour les simulations d'essaim de bulles avec forçage  $\mathbf{f}$ , le maillage M1 avec une taille de maille  $\Delta x \geq d_b/14$  est utilisé. Pour ce niveau de raffinement, la répulsion artificielle entre les bulles est essentielle. Son impact sur les statistiques de l'écoulement est maintenant connu. Cette répulsion fait augmenter de 30% la dissipation  $\epsilon_\mu$  dans le gaz et modifie très peu les valeurs moyennes de  $k, Re_b, Re_\lambda$  dans le liquide. Les vitesses verticales dans le liquide montrent moins de fluctuations négatives et plus de fluctuations positives. Les vitesses horizontales dans le liquide fluctuent moins. Les vitesses verticales dans le gaz sont peu modifiées par cette force. Le spectre d'énergie est presque insensible à la présence de  $\mathbf{f}_{rep}$  pour  $\kappa > \kappa_b$ . Le bilan spectral d'énergie est peu sensible à

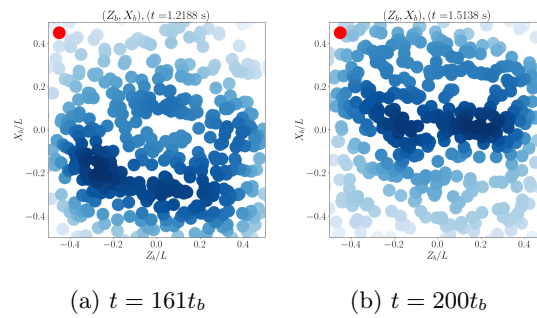


Figure 2.14: Positions des centres de bulles à différents instants pour la simulation sB6-M2, où la répulsion entre les bulles  $f_{rep}$  est désactivée.

la présence de cette force.

### 2.5.5 Effet de la présence de nappes sur les spectres

Le travail de cette thèse se concentre sur la compréhension de la répartition spectrale de l'énergie cinétique pour un essaim de bulles homogène en espace. La figure (2.18) présente le spectre d'énergie  $S$  pour les quatre instants décrits à la figure (2.13) où des nappes apparaissent et disparaissent. Les champs de vitesse à ces quatre instants ont le même spectre d'énergie. Les fluctuations de la disposition des bulles ont un effet secondaire sur la répartition spectrale d'énergie cinétique des fluctuations et ne seront donc plus discutées.

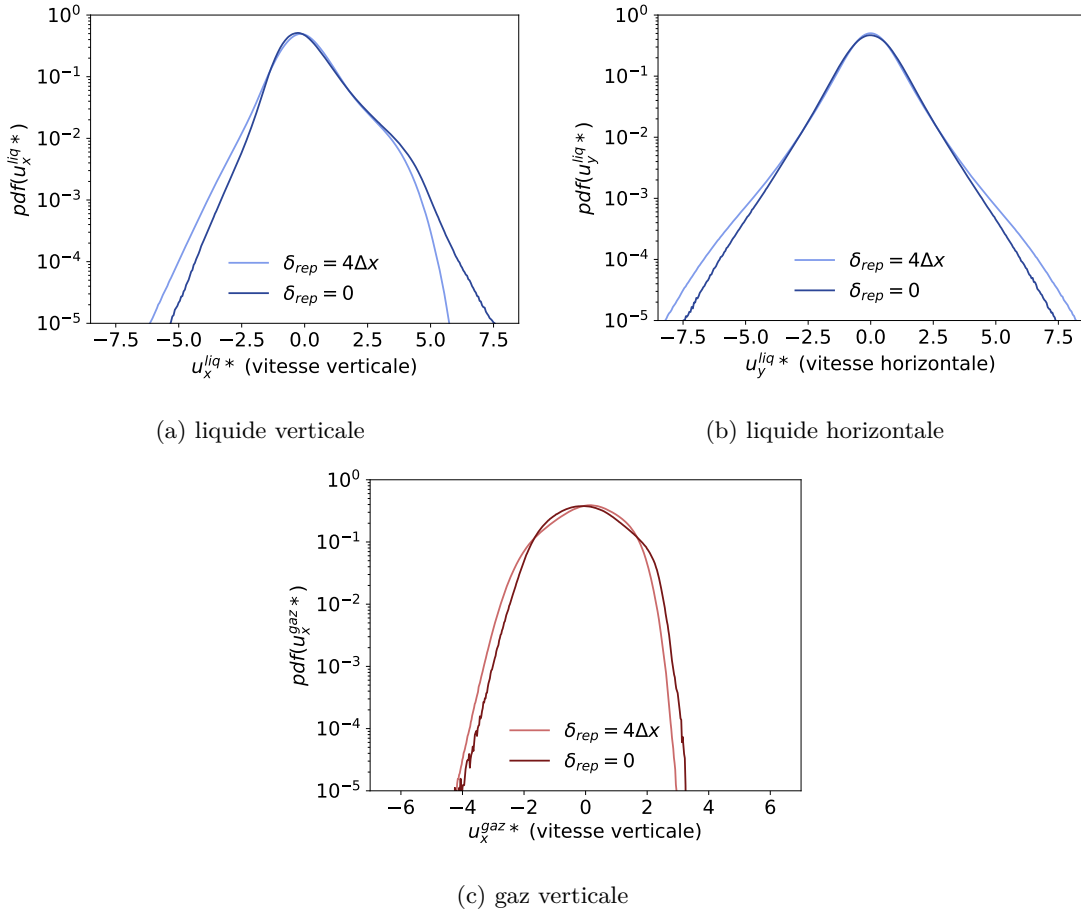


Figure 2.15: fonctions de densité de probabilité de la composante verticale de la vitesse centrée et réduite  $u_x^*$  pour les simulations sB6-M2, avec répulsion artificielle entre les bulles  $\mathbf{f}_{rep}$  ( $\delta_{rep} = 4\Delta x$ ), et sans répulsion artificielle entre les bulles ( $\delta_{rep} = 0\Delta x$ ).

## 2.6 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons présenté le code de calcul utilisé pour simuler les essais de bulles étudiés dans ce travail. Les équations sont résolues par un algorithme de type prédiction-corrrection, les interfaces sont gérées en Front-Tracking. Par la suite, les compromis qui guident le choix des valeurs de paramètres numériques ont été expliqués. Les paramètres de géométrie, de résolution de l'écoulement et du forçage  $\mathbf{f}$  de SIT sont choisis pour que les échelles de production de la BIA se situent au cœur du régime inertiel de la SIT forcée. À ces échelles, nous souhaitons de plus que l'énergie apportée par la BIA soit du même ordre de grandeur que celle apportée par la SIT. L'algorithme de forçage, qui permet de reproduire les caractéristiques d'un écoulement de HIT a été détaillé. Ensuite, les précautions liées à la discrétisation de la représentation spectrale du bilan d'énergie cinétique ont été étudiées. Enfin, la convergence des résultats a été éprouvée. La convergence vers un état statistiquement stationnaire a été évaluée, puis la convergence des statistiques a été détaillée, pour ensuite analyser la convergence des résultats avec le maillage. En dernier lieu, l'effet de la répulsion inter-bulles  $\mathbf{f}_{rep}$  a été étudiée en détail.

Dans la suite, nous ne nous intéressons plus à la vitesse relative instantanée, mais uniquement à sa valeur moyenne. Pour alléger les notations,  $u_r$  correspondra à la valeur moyenne de la vitesse relative. De même, la notation  $Re_b$  correspondra à la valeur moyenne du nombre de Reynolds de bulle, jusqu'alors notée  $\langle Re_b \rangle$ .

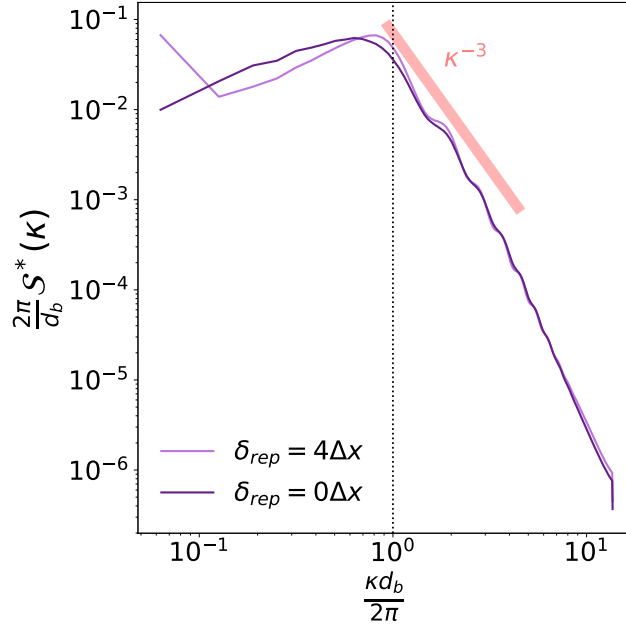


Figure 2.16: Spectres d'énergies adimensionnés  $\mathcal{S}^*$  pour les simulations sB6-M2 avec répulsion artificielle entre les bulles  $f_{rep}$  ( $\delta_{rep} = 4\Delta x$ ) et sans répulsion  $f_{rep}$  ( $\delta_{rep} = 0$ ). L'adimensionnement est fait en divisant  $\mathcal{S}(\kappa)$  par l'intégrale du spectre  $\int \mathcal{S}(\kappa) d\kappa$  dans le cas avec répulsion.

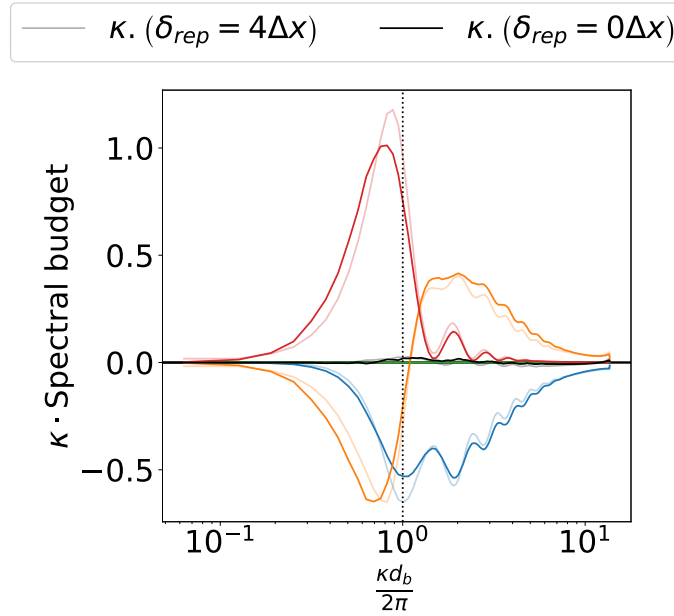


Figure 2.17: Représentation spectrale du bilan d'énergie cinétique pour les simulations d'essais de bulles, sans forçage, à 6% de taux de vide, domaine de côté  $L = 16d_b$ , maille de côté  $\Delta x = d_b/28$ , avec et sans répulsion artificielle entre les bulles. Les termes sont normés par la puissance de flottabilité  $P_{flo}$ . ■ : terme de production par la flottabilité, ■ : terme de dissipation visqueuse, ■ : terme de transfert total ■ : résidu.

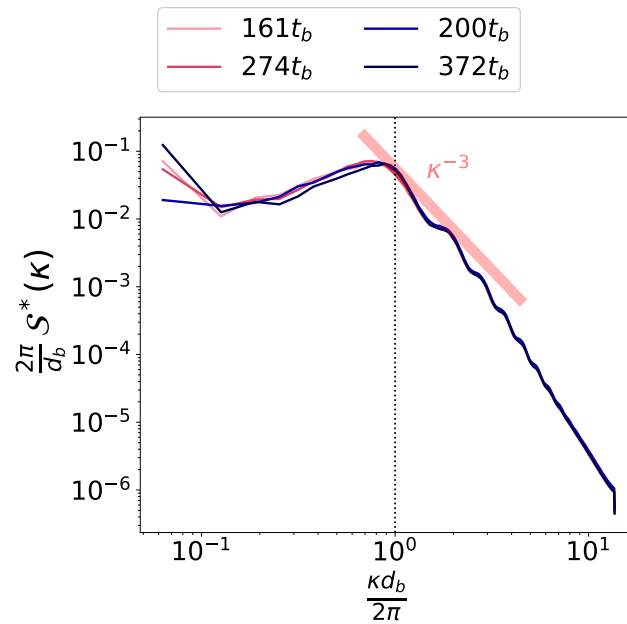


Figure 2.18: Pour les instants  $t = 161t_b$ ,  $t = 200t_b$ ,  $t = 274t_b$  et  $t = 372t_b$ , spectres d'énergies adimensionnés  $S^*$  pour la simulation d'essaim de bulles sans forçage, à 6% de taux de vide, domaine de côté  $L = 16d_b$ , maille de côté  $\Delta x = d_b/28$ , avec répulsion artificielle entre les bulles.



## Chapitre 3

# Spectral analysis of dispersed multiphase flows in the presence of fluid interfaces

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'analyse spectrale d'un écoulement diphasique à phase dispersée. En particulier, nous justifions la pertinence de l'approche qui consiste à traiter les champs dans leur totalité, y compris à la traversée des interfaces. Nous montrons que les singularités des champs, dues aux sauts des propriétés et à la tension de surface, se répercutent sur les spectres physiques à travers les interfaces. Pour le cas d'un essaim homogène de bulles en ascension sous l'effet de la gravité, la partie singulière des grandeurs spectrales n'est pas négligeable, et en particulier pour des bulles quasi-sphériques, toutes de même diamètre  $d$ , la partie singulière des termes du bilan spectral d'énergie peut être séparée de sa partie régulière, ce qui permet de mener une analyse physique pertinente pour le bilan d'énergie. Le contenu de ce chapitre fait l'objet d'une soumission à l'International Journal of Multiphase Flow RAMIREZ et al. [45]. Pour cette raison, il apparaît sous la forme du manuscrit soumis.



# Spectral analysis of dispersed multiphase flows in the presence of fluid interfaces

Gabriel Ramirez<sup>a,b</sup>, Alan Burlot<sup>b</sup>, Rémi Zamansky<sup>a</sup>, Guillaume Bois<sup>b</sup>,  
Frédéric Risso<sup>a</sup>,

<sup>a</sup>*Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT), Université de Toulouse and  
CNRS, Toulouse, France*

<sup>b</sup>*DEN-Service de thermo-hydraulique et de mécanique des fluides (STMF), CEA, Université  
Paris-Saclay, Gif-sur-Yvette, France*

---

## Abstract

### For the Special 50th Anniversary Issue of IJMF

Spectral analysis of dispersed two-phase flows is highly desirable to reveal the interplay of the various flow scales, much larger or much smaller than the size of the dispersed bodies. This is a challenging task as the matching conditions at the body interfaces generate singularities in the fields describing the two-phase mixture. The nature of these singularities and their consequences on the spectra are theoretically analyzed for bubble or droplet flows. Results of direct numerical simulations are reported and spatial spectra of the mixture velocity, the flow forces and their power are examined. The regular part of the spectral densities of energy production, dissipation and transfers between scales are separated from their singular part. The resulting spectral energy balance, free of the footprint of the singularities, is found in agreement with coarse-grained simulations where the interfaces are filtered out before solving the Navier-Stokes equations. These results pave the way for the spectral analysis of more complex turbulent dispersed flows.

*Keywords:* Dispersed Flows, Bubbles, Droplets, Turbulence,  
Body-Induced-Agitation, Spectral Analysis

---

April 6, 2024

## 1 1. Introduction

2 The dynamics of dispersed multiphase flows are controlled by the interactions  
3 between a population of bodies - either droplets, bubbles or solid particles - and  
4 a fluid phase in which they are randomly distributed. The bodies have a great  
5 impact on flow fluctuations either by modulating a pre-existing shear-induced  
6 turbulence (Balachandar and Eaton, 2010; Brandt and Coletti, 2022) or by  
7 directly inducing agitation through their motion relative to the fluid (Risso,  
8 2018). Spectral analysis is a powerful tool to understand turbulence, since two-  
9 point correlations give access to the flow structure. Applied to multiphase flows,  
10 it should reveal the interplay between scales and lead to a better modeling. In  
11 particular, our objective is to determine the spectral density of the power of all  
12 the forces that contribute to the energy balance, distinguishing between rate of  
13 production, dissipation and transfer between scales. However, the question of  
14 how to achieve this in the presence of numerous sharp interfaces between the  
15 carrier and dispersed phases is not trivial.

16 Since the pioneering work of Lance and Bataille (1991), many experimen-  
17 tal works have reported one-dimensional spectra of the liquid phase velocity in  
18 bubbly flows. Different methods were used to deal with the interruptions by the  
19 bubbles: removing the parts of the signal belonging to the gas phase and filling  
20 the gaps by a smooth function (Lance and Bataille, 1991), retaining only parts  
21 of the signals between two bubbles which are not interrupted (Martínez Mercado  
22 et al., 2010; Mendez-Diaz et al., 2013; Roghair et al., 2011; Prakash et al., 2016;  
23 Alméras et al., 2017), measuring the flow just behind a rising bubble swarm  
24 (Riboux et al., 2010). A few numerical studies have proposed spectral analysis  
25 of the velocity field of the carrying phase in order to make direct comparisons  
26 with experiments (Roghair et al., 2011). However, spectra obtained from Di-  
27 rect Numerical Simulations (DNS) of dispersed two-phase flows are generally  
28 calculated by considering the entire flow field without distinguishing between  
29 carrying and dispersed phases (Tryggvason et al., 2002; Lucci et al., 2010; Dodd  
30 and Ferrante, 2016; Pandey and Ramadugu, 2020; Innocenti et al., 2021; Pandey

31 et al., 2022; Crialesi-Esposito et al., 2022).

32 The question of whether the spectral analysis should take into account the  
33 entire flow mixture or only the carrying phase deserves to be discussed. In this  
34 work, we focus on numerical simulations where the flow is known everywhere and  
35 consider the case of a statistically homogeneous dispersed flow in a large periodic  
36 domain, which is well suited to a spectral description in the  $\mathbf{k}$ -wavenumber  
37 domain.

38 We examine first the option of building spectra of the continuous phase only,  
39 and immediately set aside the method of filling the region occupied by the dis-  
40 persed phase by an arbitrary smooth field. Considering a region of the flow that  
41 is never crossed by an interface ensures that the field of any physical quantity  
42 is smooth. However, the surface of the bodies are now boundaries from which  
43 momentum and energy are supplied to the system under study. All the local  
44 statistical quantities, such as velocity variance, energy dissipation rate, pres-  
45 sure gradient or inertial forces, depend on the distance to those boundaries. In  
46 such a heterogeneous flow, an average spatial spectrum  $S(\mathbf{k})$  cannot represent  
47 a meaningful spectral density of any of these fields. This would make no more  
48 sense than constructing a spatial spectrum from the velocity along a line per-  
49 pendicular to a wall in a channel flow. An attempt to overcome this limitation  
50 has been done by Freund and Ferrante (2019) who analyzed DNS results of a  
51 droplet laden flow. They used wavelets, a tool developed to deal with inho-  
52 mogeneous fields by allowing the construction of spectra,  $S(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ , that depend  
53 also on the location  $\mathbf{x}$ . For each wavenumber, the domain was decomposed  
54 into three regions in contact but without intersections: an intermediary region  
55  $I$  crossed by the interfaces, a region  $C$  fully located in the continuous phase  
56 and a region  $D$  fully located in the droplets. Vector  $\mathbf{x}$  was only used to deter-  
57 mine to which region belongs a given point and three spectra,  $S_I(\mathbf{k})$ ,  $S_C(\mathbf{k})$  and  
58  $S_D(\mathbf{k})$ , one for each region, were calculated. Since the spectra depend only on  
59  $\mathbf{k}$ , they still face the inconsistency of describing highly heterogeneous fields. A  
60 more sophisticated use of wavelets preserving the double dependency in  $\mathbf{x}$  and  
61  $\mathbf{k}$  could lead to a relevant description, but has yet to be developed for the study

62 of dispersed multiphase flows. In this work, we stay with the conclusion that,  
63 in the context of a homogenized description based on spectra depending only  
64 on the wavenumber, it is not relevant to consider the flow field of the carrying  
65 phase only.

66 The remaining option is to consider the flow of the entire mixture. Since  
67 it is statistically homogeneous, the use of the Fourier transform is appropriate.  
68 However, the fields of the physical quantities under investigation experience  
69 singularities at the interfaces between the phases. These singularities are due  
70 to the presence of jumps across the interface of some physical properties, such  
71 as density and viscosity, and to surface tension. They are of several kinds,  
72 such as the discontinuities of the velocity derivatives or the Dirac delta function  
73 that describes the pressure gradient. These singularities may have a strong  
74 footprint on the spectra. In particular, they can generate oscillations, which  
75 were very early reported on the velocity spectra of dispersed two phase flows  
76 with large bubbles (Tryggvason et al., 2002) or solid particles (Lucci et al., 2010).  
77 These oscillations are associated with the Gibbs phenomenon, familiar in signal  
78 processing, and well exemplified by the sine cardinal function, which is the  
79 Fourier transform of a gate. Their signature also contains a power-law decay at  
80 large wavenumbers, which must not be confused with a dynamical phenomenon  
81 (Risso, 2011). The spectra of any flow-field quantity contains a regular part  
82 that describes the smooth variations in the bulk phases and a singular part that  
83 accounts for interfacial singularities.

84 In what follows, we focus on droplets or bubbles in a fluid, which means that  
85 the dynamics of the two phases are described by the Navier-Stokes equations  
86 and the interface by an interfacial tension. A similar analysis could be carried  
87 out for solid particles in a fluid, but it is out of the scope of the present work.  
88 Our objective is to examine the consequences of the presence of interfacial sin-  
89 gularities on spectra. The singular part of a spectrum is sometimes qualified  
90 as spurious, since it complicates the physical interpretation. However, in the  
91 context of the analysis of the mixture fields, it is a part of the mathematical  
92 solution of the physical problem. The possibility of separating the regular and

93 singular part is a central question that motivates this work.

94 This paper is organized as follows. Section 2 presents the dynamics equa-  
95 tions of the mixture flow and examines the nature of the different interfacial  
96 singularities. Section 3 analyzes the spectral signatures of basic singularities  
97 caused by droplet or bubble interfaces. Section 4 reports results of direct nu-  
98 merical simulations and discusses the spectral density of the velocity, of the  
99 terms of the Navier-Stokes equations and of the terms of the energy balance.  
100 Section 5 compares with results of coarse-grained simulations, where interfacial  
101 singularities are filtered out before solving the Navier-Stokes equations. Sec-  
102 tion 6 summarizes the main findings and concludes.

## 103 2. Equations of motion of a two-phase mixture and field singularities

104 In this section, we examine the nature of the singularities encountered by  
105 the fields describing the flow, which are due to the presence of fluid interfaces.

106 We decided to analyze the spectral distribution of the entire mixture. For  
107 this reason, we write the equations of motion of the fluids as a single set of  
108 partial differential equations for the velocity  $\mathbf{u}$  and pressure  $P$ , which is valid  
109 throughout both phases. This means that the matching of the dynamic condi-  
110 tions between the two phases at the interfaces have to be inserted within the  
111 Navier-Stokes equations for the mixture. Because that matching involves jumps  
112 of stresses through the interfaces, the use of generalized functions (Gelfand and  
113 Shilov, 1964), known as distributions, is required. Note that this approach is  
114 known as one-fluid sharp interface methods in the context of numerical simula-  
115 tions of two-phase flow (Kataoka, 1986; Lalanne et al., 2015).

116 We consider a population of fluid particles, either drops or bubbles, dispersed  
117 in another fluid. The two fluids are immiscible and form a two-phase mixture,  
118 without phase change. The interfaces between the phases are massless, of zero  
119 thickness and entirely characterized by a surface tension  $\sigma$ . The density and  
120 viscosity of the two fluids are different, but constant in each phase. In the  
121 following, the carrier phase, dispersed phase and interfaces are distinguished by

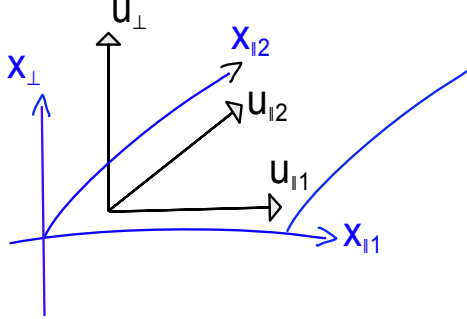


Figure 1: Local coordinates nearby an interface

122 the subscripts  $c$ ,  $d$  and  $s$ , respectively. We introduce the indicator function,  $\chi$ ,  
 123 which is equal to one in the dispersed phase and to zero in the carrying phase.  
 124 The density  $\rho$  and the viscosity  $\mu$  of the mixture can be written:

$$\rho = \rho_c + (\rho_d - \rho_c)\chi, \quad (1)$$

$$\mu = \mu_c + (\mu_d - \mu_c)\chi. \quad (2)$$

In the context of continuum mechanics, in the absence of phase change, the velocity field is continuous. The mass conservation is

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = D_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3)$$

125 Because  $\rho$  is constant in each phase and no fluid particle crosses interfaces,  
 126 the material derivative ( $D_t = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ ) of the density is zero and the velocity  
 127 field is divergence-free:  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . This result has further consequences for the  
 128 differentiability of  $\mathbf{u}$ . Let's consider a portion of the interface and name  $x_{||1}$  and  
 129  $x_{||2}$  the local coordinates along the interface, and  $x_{\perp}$  the coordinate orthogonal  
 130 to it (fig. 1). Since  $\mathbf{u}$  is continuous across the interface, the four strain-rate  
 131 components  $\partial_{||\xi} u_{||\eta}$  (with  $\xi$  and  $\eta$  equal to 1 or 2) are equal on both sides of the  
 132 interface and thus have no discontinuity. Then, considering that  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , we  
 133 get that the normal strain rate  $\partial_{\perp} u_{\perp} = -\partial_{||1} u_{||1} - \partial_{||2} u_{||2}$  is continuous too.  
 134 Thus, the only derivatives of  $\mathbf{u}$  that can present a discontinuity are the shear-  
 135 rate components  $\partial_{\perp} u_{||\xi}$ , the regularity of which is prescribed by the shear-stress

136 matching across the interface and will be discussed later.

The momentum equations are formally written as the classic Navier-Stokes equations with a non-constant viscosity in which surface tension is taken into account by adding an interfacial force:

$$-\rho D_t \mathbf{u} - \nabla P + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{S}) + \mathbf{F}_\sigma = 0, \quad (4)$$

where  $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$  is the strain-rate tensor. The interfacial force is written as

$$\mathbf{F}^\sigma = -\sigma \nabla^S \cdot \mathbf{n} \nabla \chi + \nabla^S \sigma \int_{\mathbf{x}_s} \delta_{3D}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|) dS, \quad (5)$$

where  $\mathbf{n}$  is unit normal to the interface pointing outward from the dispersed phase,  $\nabla^S$  is the two-dimensional gradient operator on the interface,  $\mathbf{x}_s$  is any point on the interface  $S$  and  $\delta_{3D}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|) = \delta(x - x_s)\delta(y - y_s)\delta(z - z_s)$  with  $\delta$  the Dirac delta function. The surface divergence  $\nabla^S \cdot \mathbf{n}$  of the normal vector is twice the mean curvature  $\kappa$  of the interface and the gradient of the indicator function can also be written in terms of the Dirac delta function as

$$\nabla \chi = -\mathbf{n} \int_{\mathbf{x}_s} \delta_{3D}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|) dS. \quad (6)$$

137 The first term of eq. 5 corresponds to the interfacial jump of the normal stress  
 138 due to the capillary pressure:  $-2\sigma\kappa$ . The second term accounts for the interfa-  
 139 cial jump of the shear stress due to the Marangoni effect:  $\partial_{\|\xi} \sigma$ .

140 Let us examine the nature of the singularities of various fields of interest. A  
 141 field  $V$  can be decomposed in a regular singularity-free part  $V_{reg}$  and interfacial  
 142 jumps  $[V_{irreg}^{(p)}]$  of its successive derivatives of order  $p$ :

$$V(\mathbf{x}) = V_{reg}(\mathbf{x}) + \sum_{p \geq p_{min}}^{p_{max}} [V_{irreg}^{(p)}(\mathbf{x} = \mathbf{x}_s)], \quad \text{with } p_{min} \geq -1. \quad (7)$$

143 The integer  $p_{min}$  is the order of the lowest derivative that is discontinuous, which  
 144 characterizes the strongest singularity of  $V$ . The sum may continue to infinity  
 145 or stop at a finite value  $p_{max}$ , which then characterizes the less sharp singularity.  
 146 At this point, it is worth mentioning that the regularity of the solutions of the  
 147 Navier-Stokes equations is a very hard mathematical issue, which is still an

	Regular part	$p \geq 1$ (continuous)	$p = 0$ Heaviside type	$p = -1$ Dirac type
Buoyancy: $\rho \mathbf{g}$	✓		✓	
Inertia: $-\rho D_t \mathbf{u}$	✓		✓	
Interfacial force: $\mathbf{F}_\sigma$				✓
Pressure gradient: $-\nabla P$	✓	✓	✓	✓
Viscous diffusion: $\nabla \cdot (2\mu \mathbf{S})$	✓	✓	✓	✓ if $\mu_c \neq \mu_d$ or $\nabla^S \sigma \neq 0$

Table 1: Interfacial discontinuities (eq. 7) involved in each terms of the momentum equations (eq. 4). A check mark means that the corresponding discontinuity-type is present.

148 open question even in the case of a single-phase flow (Onsager, 1949; Duchon  
149 and Robert, 2000; Dubrulle, 2019). As the aim of the present work is to examine  
150 the practical consequences of the presence of fluid interfaces on the spectra of  
151 the fields, we shall concentrate on the lower values of  $p$ , which correspond to the  
152 more severe singularities with the strongest consequences. Note that  $p_{min} = 1$   
153 corresponds to a field that is continuous whereas its derivative experiences a  
154 jump across the interface. Handling values of  $p$  that are less than unity means  
155 that we consider the word 'derivative' in a broader sense. Indeed, we have to  
156 deal with the cases where the function itself is discontinuous ( $p_{min} = 0$ ) or is  
157 the derivative of a discontinuous function ( $p_{min} = -1$ ). For instance,  $\chi$ , as  
158 well as  $\rho$  and  $\mu$ , is a pure step function of Heaviside type, characterized by  
159  $p_{min} = p_{max} = 0$ .

160 Table 1 lists the type of discontinuities which are expected to be involved in  
161 the various terms of the momentum equations, according to the decomposition  
162 defined by eq. 7. For the balance to be satisfied, every singularity appearing in  
163 one term of the momentum equations must cancel out with singularities of the  
164 same order in the other terms. In other words, the sum of the terms in each  
165 column must be zero. We examine now the volume forces of the momentum



166 equations one by one.

167 The buoyancy force  $\rho\mathbf{g}$  is the product of the density and the acceleration of  
 168 gravity; it is thus of pure Heaviside type. Check marks are therefore present  
 169 only in the columns corresponding to the regular part and the  $p = 0$  singularity.

170 Since a fluid particle never crosses an interface and the velocity is continuous,  
 171 its acceleration  $D_t\mathbf{u}$  is expected to be regular. However, because it involves the  
 172 density, the nature of the singularity of the inertial force  $\rho D_t\mathbf{u}$  is the same as  
 173 that of the buoyancy force.

174 Eqs. 5-6 show that  $\mathbf{F}^\sigma$  is of pure Dirac type and associated with  $p_{min} =$   
 175  $p_{max} = -1$ . A check mark is therefore present only in the  $p = -1$  column. Note  
 176 that this is the only term without a regular part, as it is not defined outside the  
 177 interfaces.

The pressure gradient has generally both Heaviside and Dirac singularities.  
 This is easy to show by considering the elementary case of an interface of con-  
 stant  $\sigma$  between two fluids at rest in a constant gravity field: for example a  
 droplet pending at the tip of a capillary tube. Eq. 4 simplifies to

$$\nabla P = -\rho\mathbf{g} - 2\sigma\kappa\nabla\chi, \quad (8)$$

178 where the pressure gradient has to balance both the Heaviside-type buoyancy  
 179 force and the Dirac-type interfacial force. The first corresponds to the jump in  
 180 the hydrostatic pressure:  $\partial P_d/\partial z - \partial P_c/\partial z = -(\rho_d - \rho_c)g$ . The second accounts  
 181 for the Laplace pressure jump:  $P_d - P_c = -2\kappa\sigma$ .

182 As regards the viscous force,  $\nabla \cdot (2\mu\mathbf{S})$ , the fact that the viscosity, which is  
 183 discontinuous, appears under a differential operator immediately suggests the  
 184 presence of a Dirac-type singularity. However, it is interesting to analyze its  
 185 significance by distinguishing again between the tangential and normal direc-  
 186 tions, and by considering its two possible origins, namely: a viscosity jump or  
 187 a Marangoni stress.

As we have shown before,  $\partial_\perp u_\perp$  is continuous across the interface. Therefore,  
 the jump of the normal viscous stress through the interface is equal to  $2(\mu_d -$   
 $\mu_c)\partial_\perp u_\perp$ . This means that the existence of a viscosity difference between the

phases is sufficient to generate a finite jump in the viscous stress, which leads the viscous volume force in the momentum equation to include a Dirac-type contribution. The matching of the normal stresses at interface is written

$$2(\mu_d - \mu_c)\partial_{\perp}u_{\perp} + (P_d - P_c) + 2\kappa\sigma = 0, \quad (9)$$

188 which shows that even in the case of vanishing surface tension, a jump in viscos-  
 189 ity is sufficient to generate a pressure jump. On the other hand, when  $\nabla^S\sigma \neq 0$ ,  
 190 the Marangoni stress is responsible for a jump in the tangential shear stress.  
 191 Finally, it thus turns out that the viscous volume force contains a Dirac-type  
 192 singularity ( $p_{min} = -1$ ) if either  $\mu_d - \mu_c \neq 0$  or  $\nabla^S\sigma \neq 0$ . Since the pressure  
 193 gradient involves a Heaviside-type discontinuity ( $p = 0$ ), we can expect that the  
 194 viscous force also does so to satisfy the equilibrium of the normal stresses at  
 195 the interface under flow conditions. Then, as we see no reason why the second  
 196 derivative of viscous stress should be the same on both sides of the interface in  
 197 the general case, we have added check marks in the  $p \geq 1$  columns of pressure  
 198 gradient and viscous force.

199 To end this section, we conclude with the velocity field. We have already  
 200 shown that all partial derivatives of  $u$  are continuous except the shear-rate  
 201 components  $\partial_{\perp}u_{\parallel\xi}$ . Therefore, if  $\mu_d - \mu_c = 0$  and  $\nabla^S\sigma = 0$ , the continuity of  
 202 the shear stress ensures that of the shear-rate, so all the velocity derivatives are  
 203 continuous and  $\mathbf{u}$  is characterized by  $p_{min} \geq 2$ . Otherwise, in the general case,  
 204  $p_{min} = 1$ .

### 205 **3. Spectral signatures of basic singularities caused by droplet or bub-** 206 **ble interfaces**

In this section we examine the spectral signature of singularities of various orders  $p$ . The energy density spectrum  $E_V$  of a scalar field  $V(\mathbf{x})$  is defined as follows. First, we take the three dimensional Fourier transform of  $V(\mathbf{x})$ :

$$\widehat{V}(\mathbf{k}) = \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}V(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \quad (10)$$

Second, we multiply it by its complex conjugate (\*) and sum over shells  $\mathcal{A}_w$  of constant  $\|\mathbf{k}\|$ :

$$E_V(k) = \int_{\|\mathbf{w}\|=k} \widehat{V}(\mathbf{w}) \cdot \widehat{V}^*(\mathbf{w}) d\mathcal{A}_w, \quad (11)$$

207 (depending on whether  $V$  is a scalar or a vector, the operation “.” is a multi-  
208 plication of numbers or a scalar product).

209 *3.1. Analytical results for spherical interfaces*

We introduce the indicator function  $\mathcal{H}_{\text{sphere}}$  of a ball (interior of a sphere) as a reference Heaviside-type field, and the indicator function  $\delta_{\text{sphere}}$  of a sphere (surface of a ball) as a Dirac-type field. These fields are respectively representative of the density and the interfacial force of a two-phase mixture of spherical droplets. Their Fourier transforms are

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\text{sphere}}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi}{\|\mathbf{k}\|^3} (\sin(R\|\mathbf{k}\|) - R\|\mathbf{k}\|\cos(R\|\mathbf{k}\|)) \quad (12)$$

and

$$\widehat{\delta}_{\text{sphere}}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi R}{\|\mathbf{k}\|} \sin(R\|\mathbf{k}\|) \quad (13)$$

where  $R$  is the sphere radius (Gelfand and Shilov, 1964). Their spectra are

$$E_{\mathcal{H}_{\text{sphere}}}(k) = \frac{(4\pi)^2}{k^4} (\sin(Rk) - Rk \cos(Rk))^2, \quad (14)$$

and

$$E_{\delta_{\text{sphere}}}(k) = (4\pi R)^2 \sin^2(Rk). \quad (15)$$

210 The spectra of the two cases present oscillations of period  $k_b = \pi/R$ , correspond-  
211 ing to  $\sin^2(Rk)$ . On the one hand, the oscillations of  $E_{\delta_{\text{sphere}}}$  keep constant phase  
212 and amplitude for all  $k$ . On the other hand,  $E_{\mathcal{H}_{\text{sphere}}}$  behaves as  $R^6 k^2$  at small  
213  $k$  and as  $k^{-2} \cos^2(Rk)$  at large  $k$ , which means it cancels out for both  $k = 0$  and  
214  $k = \infty$ .

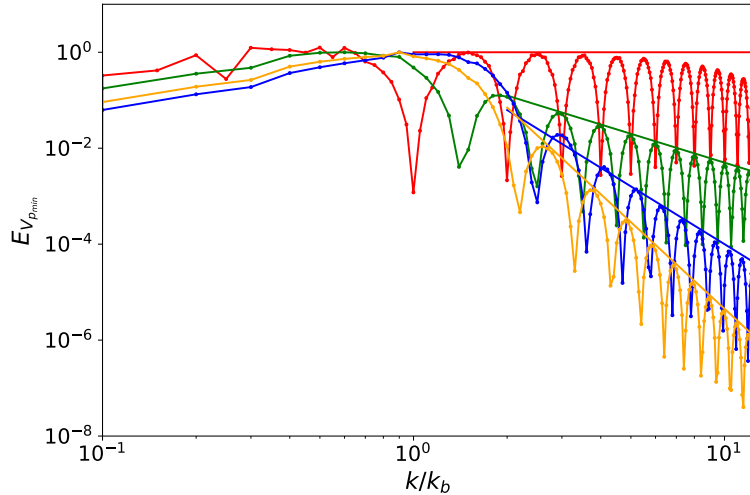


Figure 2: Numerical spectra of three-dimensional scalar fields of various singularity orders:  $p_{min} = -1$  (red),  $p_{min} = 0$  (green),  $p_{min} = 1$  with  $J_1 = 1$  (blue),  $p_{min} = 2$  with  $J_2 = 10$  (orange). The straight lines correspond to  $k^{-2-2p_{min}}$ .

### 215 3.2. Numerical results for spherical interfaces

216 We have numerically computed the spectra of basic singular scalar fields  
 217  $V_{p_{min}}$ , characterized by a value  $p_{min}$  from 0 to 2, defined as follows:

$$V_{-1}(\mathcal{X}) = \delta(\mathcal{X}), \quad (16)$$

$$V_0(\mathcal{X}) = (1 - \mathcal{H}(\mathcal{X})), \quad (17)$$

$$V_1(\mathcal{X}) = (\mathcal{X}^2 - 1)((J_1/2 + 1)\mathcal{X}^2 - 1)(1 - \mathcal{H}(\mathcal{X})), \quad (18)$$

$$V_2(\mathcal{X}) = (\mathcal{X}^2 - 1)^2((J_2/8 - 1)\mathcal{X}^2 + 1)(1 - \mathcal{H}(\mathcal{X})), \quad (19)$$

218 where  $H$  is the classic Heaviside function (equal to zero for  $x \leq 1$  and to one  
 219 for  $x > 1$ ),  $\mathcal{X}$  is the normalized distance from the center  $\mathbf{x}_c$  of the sphere:  
 220  $\mathcal{X} = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c\|/R$ .  $V_{-1}$  and  $V_0$  correspond to  $\delta_{\text{sphere}}$  and  $\mathcal{H}_{\text{sphere}}$ . Then, it is  
 221 easy to check that  $V_1$  and  $V_2$  have the expected level of singularity provided  $J_1$   
 222 and  $J_2$  are finite. Indeed, both are regular inside the sphere and zero outside,  
 223 while at the interfaces:  $V_1 = 0$  and  $V_1'$  undergoes a jump  $J_1$ ;  $V_2 = V_2' = 0$   
 224 and  $V_2''$  undergoes a jump  $J_2$ . (In contrast with  $\delta_{\text{sphere}}$  and  $\mathcal{H}_{\text{sphere}}$ ,  $V_1$  and

225  $V_2$  do not correspond to a pure singularity of order  $p = 1$  or  $2$ , which means  
 226 that  $p_{max} \neq p_{min}$ .) These four fields have been mapped on a three-dimensional  
 227 regular grid of spacing  $\Delta = R/25$ , which implies that numerical interfaces have a  
 228 non zero thickness. Then, the spectrum of each of them is computed numerically  
 229 by making use of the discrete Fourier transform.

230 Fig. 2 shows the spectra of  $V_{-1}$ ,  $V_0$ ,  $V_1$  and  $V_2$  as functions of the wavenumber  
 231  $k$  normalized by  $k_b$ . The numerical spectrum of  $\delta_{\text{sphere}}$  is in agreement with the  
 232 analytical result (eq.15), except at large  $k$  where the numerical approximation of  
 233 the delta function becomes rough. However, the numerical spectrum of  $\mathcal{H}_{\text{sphere}}$   
 234 remains accurate beyond  $k = 10k_b$ , so we can trust as well the numerical spectra  
 235 of  $V_1$  and  $V_2$  in the considered range of wavenumbers.

236 The conclusions obtained from the analytical expressions of  $E_{\delta_{\text{sphere}}}$  and  
 237  $E_{\mathcal{H}_{\text{sphere}}}$  can be generalized to larger values of  $p_{min}$ . All spectra show oscil-  
 238 lations of period  $k_b$  and a final power-law decay. At wavenumbers much smaller  
 239 than  $1/R$ , they all show a similar pattern and behave as  $k^2$  as  $k$  tends towards  
 240 zero. At large  $k$ , the spectrum behaves as  $k^{-2p-2} \sin^2(R\|\mathbf{k}\| + \phi)$ . At this stage,  
 241 two main conclusions can be drawn. On the one hand, the decay is controlled  
 242 by the order of the singularity: the more regular the function, the lower  $p_{min}$ ,  
 243 the faster the decay. On the other hand, the period of the oscillations and the  
 244 wavenumber where the singularity spectrum is maximum are controlled by the  
 245 droplet size, whatever the nature of the discontinuity.

246 The power-law decay generated by an interface singularity of a field should  
 247 not be confused with the power-law subrange exhibited by a regular physical  
 248 field, such as the inertial  $k^{-5/3}$  of single-phase flow turbulence or the  $k^{-3}$  of  
 249 bubble-induced agitation (Lance and Bataille, 1991; Risso, 2018). Such physi-  
 250 cal subranges always have a cutoff at a certain wavenumber: the Kolmogorov  
 251 microscale in the case of turbulence (Pope, 2000), the size of smaller bubble  
 252 disturbances in the model of bubble-induced spectrum by Risso (2011). A sin-  
 253 gularity power-law never stops and always exceeds the regular part of a physical  
 254 signal at large wavelengths.

255 At scales close to the size of a droplet, the question of which one dominates

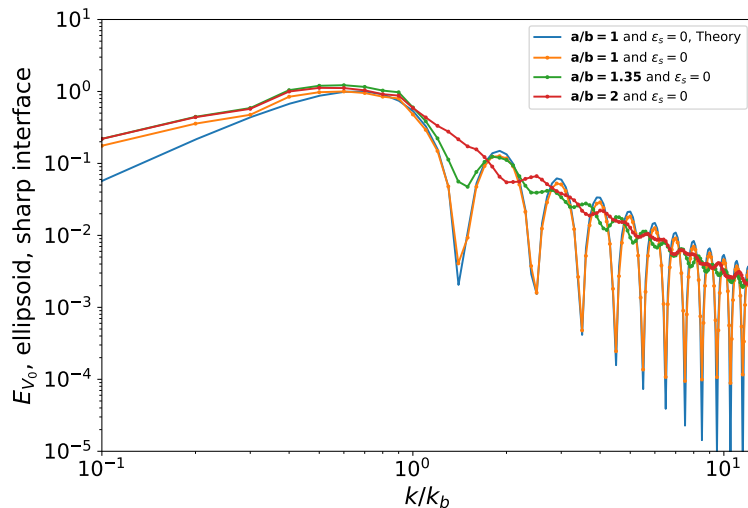


Figure 3: Numerical spectra of the indicator function of oblate ellipsoidal balls ( $p_{min} = 0$ , Heaviside type) of various aspect ratios  $a/b$ .

256 in a physical signal between the regular part or the singularity has no general  
 257 answer and must be examined in each specific situation.

### 258 3.3. Effects of deviation from sphericity and of interface thickness

259 In real situations, droplets or bubbles are often not spherical. Also, spatial  
 260 resolution is finite, which means that a fluid interface can never be described  
 261 by a surface of zero thickness. In particular, numerical simulations based on  
 262 the sharp-interface formulation have to deal with finite-size meshes that contain  
 263 the two phases. In this section, we examine the consequences on the spectrum  
 264 of a singularity of the drop non-sphericity, defined by an aspect ratio  $a/b$ , and  
 265 of a finite interface thickness,  $\epsilon_s$ . In what follows,  $R$  is defined as the radius of  
 266 a sphere of the same volume and all calculations have been performed on the  
 267 same mesh as that used in the previous section.

268 We begin with the case of the Heaviside singularity ( $p_{min} = 0$ ). Figure. 3  
 269 shows numerical spectra  $E_{V_0}$  obtained by considering an oblate ellipsoidal in-  
 270 terface with  $a/b = 1.35$  and 2, which is still sharp ( $\epsilon_s = 0$ ), together with

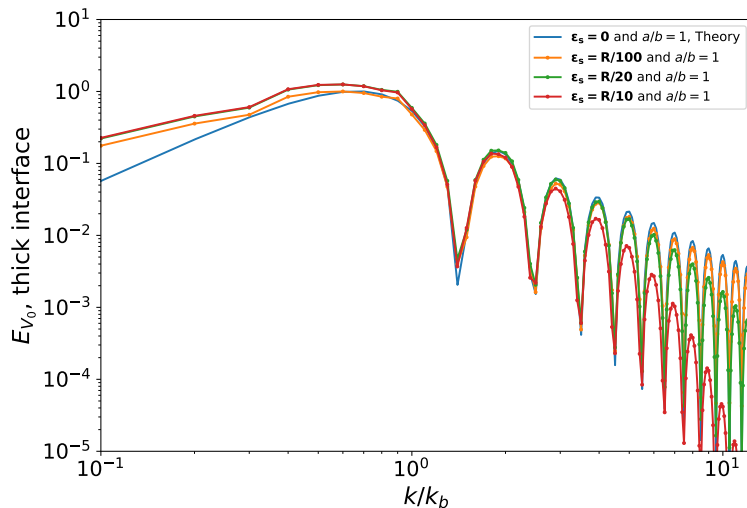


Figure 4: Numerical spectra of the indicator function of spherical balls ( $p_{min} = 0$ , Heaviside Type) with smooth interface of various thicknesses  $\epsilon_s$ .

271 the theoretical result (eq. 15) and the numerical result for a sphere (fig. 2).  
 272 Deformation clearly dampens oscillations, and the greater  $a/b$ , the lower the  
 273 oscillation amplitude. This is easily understood by noting that, for an ellip-  
 274 soid, the distance  $2\beta$  between two diametrically opposed points on the interface  
 275 varies between  $2a$  and  $2b$  depending on the direction considered. The three-  
 276 dimensional spectrum therefore mixes oscillations of various periods  $\pi/\beta$ , which  
 277 cannot remain in phase as  $k$  increases, causing them to cancel each other out.  
 278 The same phenomenon should occur if we consider a population of drops of  
 279 different sizes, with the variation of  $R$  from drop to drop substituting for the  
 280 variation of  $2\beta$  with direction. However, this process has no effect on the base-  
 281 line of the spectrum, the decays of which remains the same.

282 Figure. 4 presents numerical  $E_{V_0}$  obtained by considering a spherical in-  
 283 terface of finite thickness. The interface has been smoothly extended over a  
 284 thickness  $\epsilon_s$  by replacing the Heaviside function in eq. 17 by an error function:  
 285  $V_0(\mathcal{X}) = 1 - \{\text{erf}[(\mathcal{X} - 1)/\epsilon_s]\}/2$ . For  $\epsilon_s = R/100$ , the interface thickness is

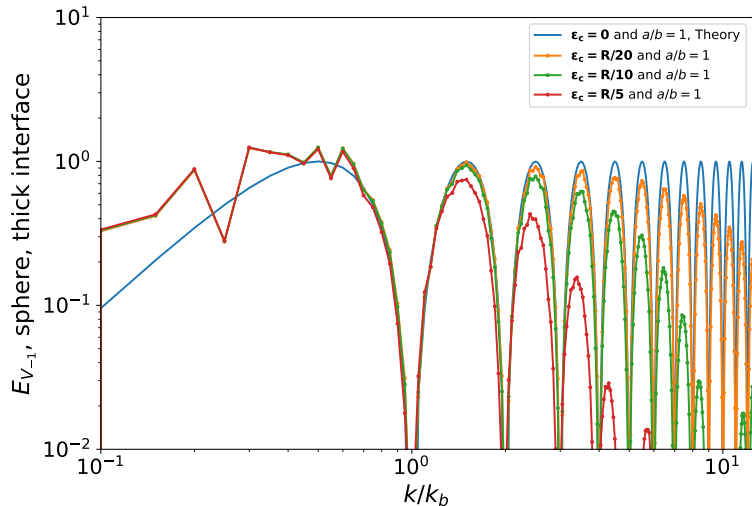


Figure 5: Numerical spectra of the indicator function of spheres ( $p_{min} = -1$ , Dirac type) of various thicknesses  $\epsilon_s$ .

286 below the grid resolution  $\Delta = R/25$ , and the numerical result is the same as  
 287 that of fig. 3, and in agreement with the theory. The effect of  $\epsilon_s$  becomes visible  
 288 when it becomes larger than  $\Delta$ . A finite thickness affects the small scales by  
 289 increasing the final decay of the spectrum, without having any effect on the  
 290 oscillations. However, it has no impact on the scales that are much larger than  
 291  $\epsilon_s$ . This means that a very strong localized gradient of a regular field, such as  
 292 that of the velocity in a large-Reynolds number boundary layer of thickness  $\epsilon_{BL}$   
 293 around a drop, would generate a similar spectral signature as a velocity jump  
 294 at scales much larger than  $\epsilon_{BL}$ . We can also wonder whether singularities as-  
 295 sociated with intermittency (Le Berre et al., 2023) could also affect turbulence  
 296 spectra in a similar way.

297 Now, we examine the case of the Dirac singularity ( $p_{min} = -1$ ). The Dirac  
 298 delta function in 16 is replaced by finite boxcar function of height  $\epsilon_s$  and width  
 299  $1/\epsilon_s$ . Figure 5 shows the numerical spectra for spherical interfaces of various  
 300 thicknesses, while fig. 6 shows the same results for oblate ellipsoids of aspect  
 301 ratio  $a/b = 2$ . The conclusions are the same as for the Heaviside singular-



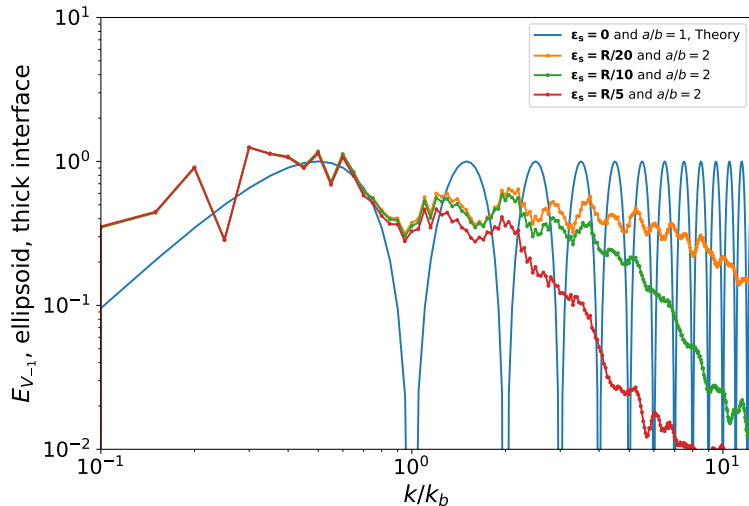


Figure 6: Numerical spectra of the indicator function of an oblate ellipsoids ( $p_{min} = -1$ , Dirac type,  $a/b = 2$ ) with a smooth interface of various thicknesses  $\epsilon_s$ .

302 ity. Increasing the interface thickness causes a faster decay of the spectrum  
 303 at large wavenumber. Increasing the deformation generates a damping of the  
 304 oscillations.

### 305 3.4. Spectral signatures of singularities in physical cases

306 We showed in the previous section (2) that a finite jump in the fluid prop-  
 307 erties (density or viscosity) across the interface or a non-zero interfacial ten-  
 308 sion causes singularities in the fields that characterize the flow. In the present  
 309 section (3), we examined the signature of basic singularities of various orders  
 310 corresponding to fluid interfaces of droplets. For spherical drops having all the  
 311 same radius  $R$ , the spectrum of the interface singularities is maximum close to  
 312  $k_b = \pi/R$ , shows oscillations of period  $k_b$  and decays at small scales as  $k^{-2p-2}$ .  
 313 For polydisperse or deformed drops the oscillations may be absent, while the  
 314 baseline of the singularity spectrum is still present.

315 A real physical field is more complex, since it includes a contribution from  
 316 the regular part that accounts for the dynamics in the bulk phases, in addition

317 to singular contributions that account for the interfaces. Is it possible to dis-  
318 tinguish between the regular and the singular parts? First of all, we may try to  
319 attribute the presence of oscillations as  $\sin^2(kR + \phi)$  to the singular part. This  
320 first approach has two limitations. On the one hand, for drops moving at large  
321 Reynolds number relative to the carrying phase, oscillations may be due to the  
322 presence of a dynamic boundary layer at the drop surface. On the other hand,  
323 spectra calculated from DNS of highly deformed drops with a broad size dis-  
324 tribution immersed in a turbulent field by Crialesi-Esposito et al. (2022) show  
325 no oscillations, for the reason explained above. Secondly, we can rely on small  
326 scales to detect the singular part. In principle, the singular part undergoes a  
327 never-ending power-law decay as  $k$  approaches infinity. It must therefore even-  
328 tually emerge from the regular part, which has a physical cutoff, corresponding  
329 to the Kolmogorov microscale in a turbulent flow. However, the dissipative  
330 range is most of the time not resolved, which means that we need to detect the  
331 singular contribution at larger scales.

332 At this stage, it is therefore difficult to anticipate a general method for  
333 distinguishing the regular part from the singular part, which would probably  
334 have to be done on a case-by-case basis. Furthermore, even if such a distinction  
335 can be made, the question of its physical relevance remains open.

#### 336 4. Direct numerical simulations of bubble-induced agitation

337 In the previous section, we examined the theoretical consequences of basic  
338 jump conditions on the spectrum of some reference fields. We are now interested  
339 in analyzing their practical effects on the spectrum of physical fields, such as  
340 the mixture velocity and the volume forces involved in the momentum balance.  
341 Since the spectrum of interface discontinuities is significant for wavelengths of  
342 the order of the drop size  $R$  and smaller, it has negligible consequences when  
343 most of the energy is contained at scales much larger than  $R$ , as in the case  
344 of droplets or bubbles smaller than the Kolmogorov microscale in a turbulent  
345 field. On the other hand, the case of a swarm of rising bubbles in an otherwise

346 quiescent fluid is particularly impacted, since the energy of the fluctuations is  
347 generated by the bubbles at scales close to  $R$ .

348 The fluid velocity in both phases can hardly be measured in experiments.  
349 Most of the time, only the velocity field of the outer phase is measured in two-  
350 phase dispersed flows. In addition, the flow in the close vicinity of bubbles  
351 or droplets is often removed because of spurious measurements. On the other  
352 hand, DNS using sharp interface methods provide exhaustive information on all  
353 physical fields at any location. In what follows, we analyze in detail the results  
354 of DNS of a homogeneous swarm of bubbles rising at high Reynolds number.

#### 355 *4.1. Presentation of the simulations*

356 Bubbles having all the same size are initially homogeneously distributed  
357 over a triperiodic cubic domain and then rise under the action of buoyancy.  
358 After an initial transient, the flow statistics cease to evolve in time. All sub-  
359 sequent results are obtained in this statistically steady state. The simulations  
360 are carried out with the open-source TRUST/TrioCFD code, which uses of a  
361 front-tracking method to solve the continuity and Navier-Stokes equations in  
362 the sharp-interface form (3, 4) across the entire domain, including both the gas  
363 and liquid phases. The code has been described in detail and validated for high-  
364 Reynolds-number bubbly flow with parameters similar to those of the present  
365 work in du Cluzeau et al. (2019, 2022).

366 The physical parameters are:  $\mu_c = \mu_d = 3.73 \times 10^{-4}$  Pa.s,  $\rho_c = 1.1713 \times$   
367  $10^3$  kg/m<sup>3</sup>,  $\rho_d = 87.545$  kg/m<sup>3</sup>,  $\sigma = 18.05 \times 10^{-3}$  N/m,  $d = 2R = 10^{-3}$  m,  
368  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>. This gives an Archimedes number  $Ar = \frac{\rho_c d \sqrt{(1-\rho_d/\rho_c)gd}}{\mu_c} \approx 300$   
369 and a Bond number  $Bo = (\rho_c - \rho_d)gd^2/\sigma \approx 0.6$ , corresponding to slightly  
370 deformed bubbles in a flow regime dominated by inertia. The density ratio,  
371  $\rho_d/\rho_c \approx 1/13$ , and viscosity ratio,  $\mu_d/\mu_c = 1$ , are outside the range expected for  
372 bubbly flow at common room temperature and pressure. Note also that surface  
373 tension is kept constant. These conditions have been chosen to simplify the  
374 entanglement of the various singularities in the analysis of the spectrum of the  
375 various terms. In particular, the theoretical analysis suggests that a viscosity

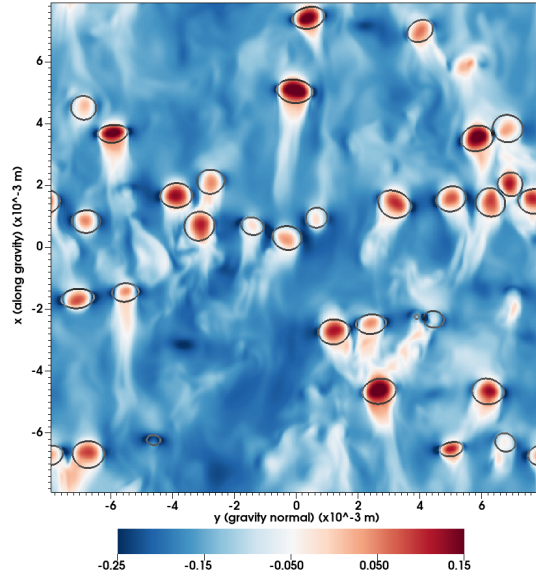


Figure 7: Snapshot showing the vertical velocity in a vertical plane ( $\alpha = 6\%$ , refined mesh)

376 ratio equal to unity should ensure a more regular velocity and, together with a  
 377 constant  $\sigma$ , to a more regular viscous force.

378 The simulations are performed on a  $432^3$  regular mesh in a cubic domain  
 379 of side  $L = 31.7 \times 10^{-3}$  m or  $L = 15.85 \times 10^{-3}$  m. In the larger domain, the  
 380 mesh-grid spacing is thus  $\Delta = 73.5 \times 10^{-6}$  m, while in the smaller domain it is  
 381  $\Delta = 36.77 \times 10^{-6}$  m.

382 Two gas volume fractions have been considered:  $\alpha = 0.03$  and  $0.06$ . A  
 383 snapshot of the flow is shown in fig. 7. The case  $\alpha = 0.03$  has been solved  
 384 on the larger domain ( $L = 32d$ ) with the lower resolution ( $\Delta = d/14$ ). It  
 385 gives the following overall statistics for the two-phase mixture: average bubble  
 386 relative velocity  $u_r = 0.17$  m/s, half the variance of the mixture velocity  $K_m =$   
 387  $5.4 \times 10^{-2} u_r^2$  and dissipation rate per unit volume  $\epsilon_m = 7.45 \times 10^{-3} \rho_c u_r^3/d$ .  
 388 The average bubble Reynolds number, Weber number and aspect ratio are:  
 389  $Re = \frac{\rho_c d u_r}{\mu_c} = 528$ ,  $We = \frac{\rho_c d u_r^2}{\sigma} = 1.83$  and  $a/b = 1.39$ .

390 The case  $\alpha = 0.06$  has been solved on both the larger domain ( $L = 32d$ ,  
 391  $\Delta = d/14$ ) and the smaller domain with a better resolution ( $L = 16d$ ,  $\Delta =$   
 392  $d/27$ ). The lower resolution gives:  $u_r = 0.150$  m/s,  $K_m = 11.2 \times 10^{-2} u_r^2$ ,  
 393  $\epsilon_m = 18.5 \times 10^{-3} \rho_c u_r^3/d$ ,  $Re = 470$ ,  $We = 1.45$  and  $a/b = 1.33$ . The greater  
 394 resolution gives:  $u_r = 0.147$  m/s,  $K_m = 11.8 \times 10^{-2} u_r^2$ ,  $\epsilon_m = 22.0 \times 10^{-3} \rho_c u_r^3/d$ ,  
 395  $Re = 462$ ,  $We = 1.40$  and  $a/b = 1.37$ . Rigorously, even our finest resolution is  
 396 not enough to exactly capture the boundary layer around the bubbles at such  
 397 a Reynolds number (Innocenti et al., 2021), which explains small differences  
 398 between the two resolutions. In the literature, such a limitation is encountered  
 399 in many numerical simulations involving a large number of dispersed particles.  
 400 This is not a serious limitation for the aim of the present work, which is to  
 401 analyze the spectral signature of interface discontinuities, as we shall see later  
 402 when comparing the results of our coarse and refined meshes.

#### 403 *4.2. Spectrum of density and velocity*

404 In a numerical simulation, even in the case where the mesh grid is fitted  
 405 to follow the interface, the fields are described with a finite resolution  $\Delta$ . The  
 406 consequences for the spectrum have been discussed in section 3.3 where an  
 407 interface of finite thickness has been considered. A coarser resolution leads to a  
 408 faster decrease in the spectral footprint of the singularities. In addition, with the  
 409 front tacking method used here, the two-dimensional mesh that describes the  
 410 interface differs from the three-dimensional one on which is discretized the bulk  
 411 flow. In a cell containing both phases, the values of the density and viscosity  
 412 are interpolated between those of the two phases. This is also the case with  
 413 common other sharp-interface methods, such as VOF or Level-Set. The effect  
 414 of a region where the mixture is described by a fluid with intermediate properties  
 415 can hardly be anticipated, but it may redistribute the singularities between the  
 416 different terms of the momentum balance in a way that probably depends on  
 417 the numerical scheme.

418 Let us consider first the spectra of two simpler fields: the density  $\rho$ , which  
 419 is only impacted by the finite resolution, and the velocity  $u$ , which is affected

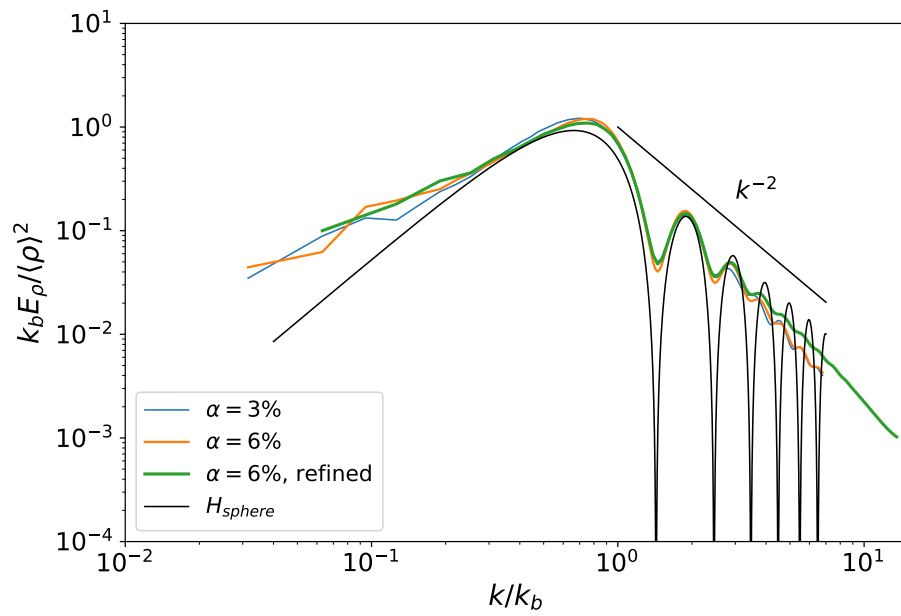


Figure 8: Normalized spectrum of the density (DNS results)

420 by both the finite resolution and by the way the continuity and Navier-Stokes  
 421 equations are solved. Note that the spectra are normalized by using  $k_b$  and their  
 422 variance  $\langle(\cdot)^2\rangle$ , in order to ease comparison between the two volume fractions.

423 Figure 8 shows the spectrum of the density for the three different simulations  
 424 and the analytical solution  $E_{\mathcal{H}_{\text{sphere}}}$  (eq. 14). Whatever the volume fraction or  
 425 the resolution, the spectrum shows oscillations as  $\sin^2(Rk)$  in agreement with  
 426 the analytical solution. Oscillation amplitudes are smaller due to departure  
 427 from sphericity. Cases  $\alpha = 3\%$  and  $\alpha = 6\%$  at the coarser resolution match at  
 428 all wavenumbers and agree at large scales with the case at finer resolution. The  
 429 coarser cases show a decay in agreement with the theoretical  $k^{-2}$  up to  $k = 3k_b$ ,  
 430 while the finer case follows it up to  $6k_b$ , showing that halving the mesh spacing  
 431 actually halves the scale from which the interface begins to be seen as less sharp  
 432 than it should be. Regarding the density, the numerical spectrum behaves as  
 433 predicted by the theory.

434 Figure 9 shows the spectrum  $E_u$  of the velocity. The spectra of the three  
 435 cases are very similar, featuring oscillations with a period  $k_b$ . We note only  
 436 differences at very large scales due to finite domain size, and at very small scales  
 437 close to the Nyquist wavenumber. This indicates that the velocity spectrum is  
 438 very robust to changes in resolution. The spectrum reaches a maximum near  $k_b$ ,  
 439 followed by a  $k^{-3}$  subrange, which is known as a signature of the bubble-induced  
 440 agitation (Risso, 2018). Then, it shows a steeper decay as  $k^{-4}$  for  $k > 3k_b$ ,  
 441 followed by an even steeper one as  $k^{-n}$ , with  $4 < n < 5$ , for  $k > 6k_b$ . Under  
 442 present conditions, with no viscosity jump or interfacial tension gradient, the  
 443 predictions for  $u$  are  $p_{min} = 2$ , which corresponds to a final decay as  $k^{-6}$ . The  
 444 fact that  $u$  is less regular than expected is probably a consequence of numerical  
 445 approximations in the cells crossed by the interface.

#### 446 4.3. Spectrum of the terms of the momentum equations

447 We examine now the spectra of the five terms involved in the momentum  
 448 balance (4) from the DNS at  $\alpha = 6\%$  with either the coarse or the refined  
 449 resolution: buoyancy  $(\rho - \rho_m)\mathbf{g}$ , interfacial force  $\mathbf{F}_\sigma$ , pressure gradient  $-\nabla P$ ,

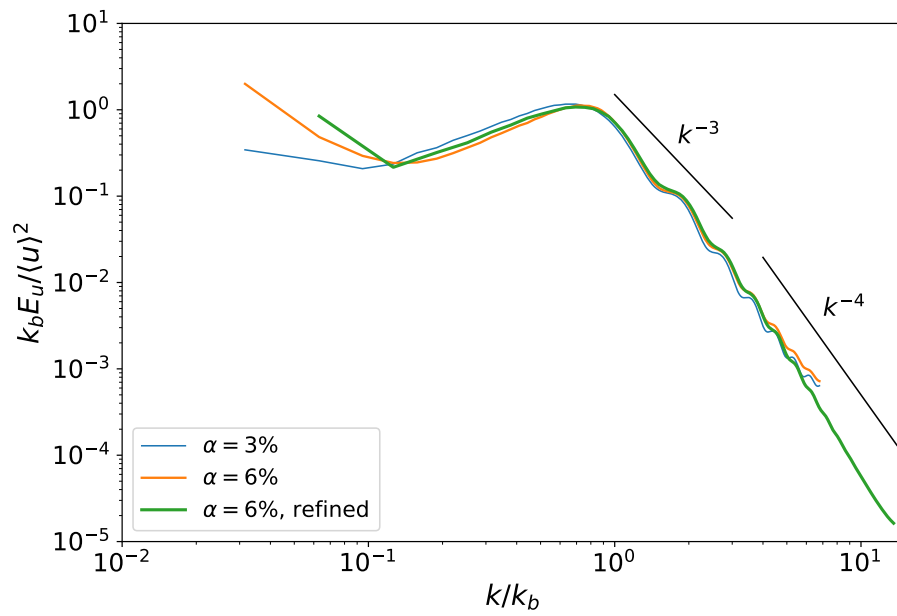


Figure 9: Normalized spectrum of the velocity (DNS results)



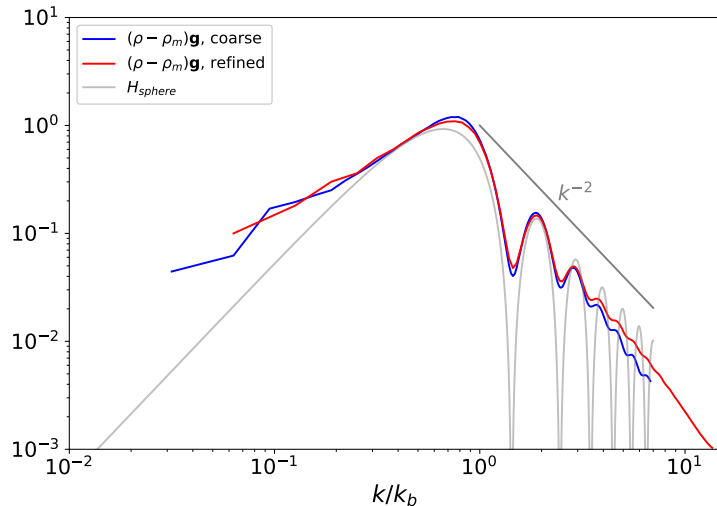


Figure 10: Normalized spectrum  $E_{(\rho - \rho_m)\mathbf{g}}$  of buoyancy force at  $\alpha = 6\%$  (DNS results)

450 inertia  $-\rho D_t \mathbf{u}$  and viscous diffusion  $\nabla \cdot (2\mu \mathbf{S})$ . Note that  $\rho_m = (1 - \alpha)\rho_c + \alpha\rho_d$  is  
 451 the average mixture density and we have chosen to include the mean hydrostatic  
 452 pressure gradient  $\rho_m \mathbf{g}$  in the buoyancy term so that it takes into account all the  
 453 external forces acting on the two-phase system. In this section, all spectra are  
 454 normalized using  $k_b$  and the variance of  $(\rho - \rho_m)\mathbf{g}$ . It is worth recalling that  
 455 the spectrum is quadratic in the quantity considered, so that the balance of the  
 456 five terms does not lead to a simple constraint on their spectra. When only two  
 457 terms are in equilibrium, their spectrum is the same, but it is not as simple for  
 458 more terms.

459 Since  $\mathbf{g}$  is constant, the spectrum of  $(\rho - \rho_m)\mathbf{g}$  (fig. 10) is similar to that of  
 460  $\rho$  (fig. 8) and leads to the same conclusions.

461 Figure 11 presents the spectra of  $\mathbf{F}_\sigma$  and  $-\nabla P$ . At large scales, for wavenum-  
 462 bers smaller than  $\approx 2k_b$ , both are independent of the mesh refinement. At small  
 463 scales, the Dirac-type singularity introduced by interfacial tension gives a con-  
 464 stant intensity. We indeed observe a plateau of the baseline before a cut-off due  
 465 to the finite resolution, which appears at a smaller  $k$  at lower resolution. Still,

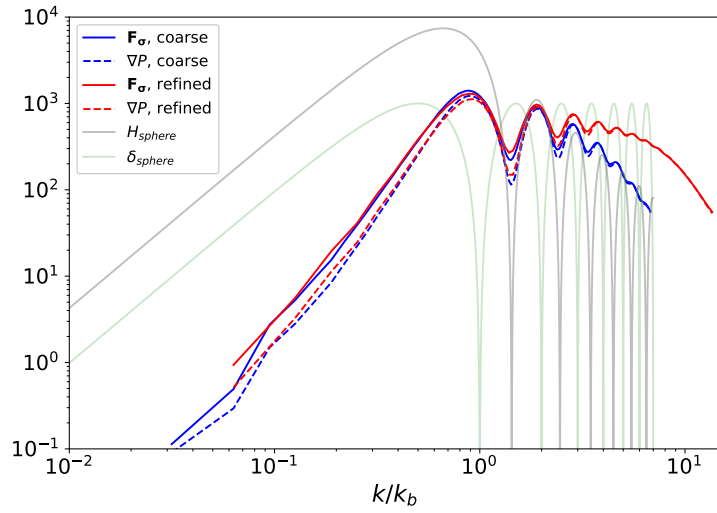


Figure 11: Normalized spectra  $E_{\nabla P}$  of pressure gradient, and  $E_{\mathbf{F}_\sigma}$  of interfacial force at  $\alpha = 6\%$  (DNS results)

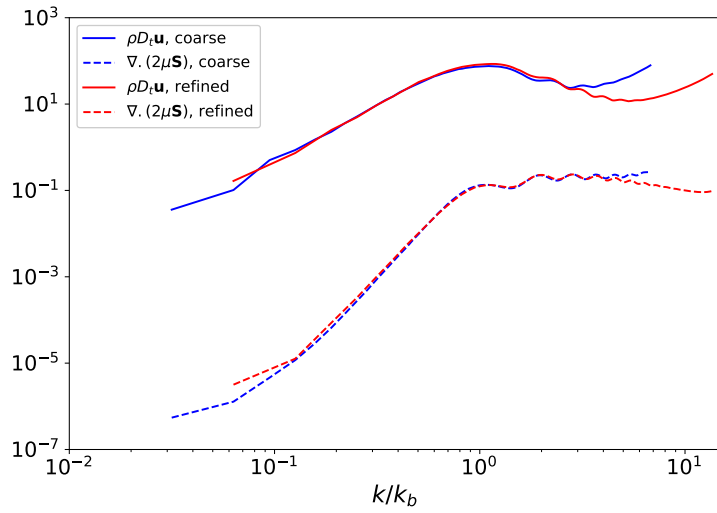


Figure 12: Normalized spectra  $E_{\rho D_t \mathbf{u}}$  of inertia, and  $E_{\nabla \cdot (2\mu \mathbf{S})}$  of viscous force at  $\alpha = 6\%$  (DNS results)

466 at small scales, the spectra of  $\mathbf{F}_\sigma$  and  $-\nabla P$  are identical, which confirms that  
 467 the Dirac-type singularities cancel out entirely between the interfacial force and  
 468 the pressure gradients, in agreement with the equilibrium of normal stresses at  
 469 the interface. The theoretical spectra  $E_{\mathcal{H}_{\text{sphere}}}$  and  $E_{\delta_{\text{sphere}}}$  are also reported. It  
 470 turns out that the oscillations of the pressure gradient are in phase with  $E_{\mathcal{H}_{\text{sphere}}}$   
 471 at large scales and with  $E_{\delta_{\text{sphere}}}$  at small scales, which underlines the fact that  
 472 pressure undergoes both a jump in its value and its derivative across the in-  
 473 terface. So far, the spectra of the forces are in agreement with the theoretical  
 474 predictions of section 3.

475 The spectra of the terms that explicitly involve the velocity,  $-\rho D_t \mathbf{u}$  and  
 476  $\nabla \cdot (2\mu \mathbf{S})$ , shows a somewhat different picture (fig. 12). Both are independent of  
 477 the mesh refinement and show no small-scale decay, a behavior associated with  
 478 the presence of a Dirac-type singularity. This unexpected behavior of the forces  
 479 involving velocity derivatives is consistent with the fact, noted earlier, that  $u$   
 480 is less regular than expected ( $p_{min} < 2$ ). The small-scale plateaus reached by  
 481  $E_{\rho D_t \mathbf{u}}$  and  $E_{\nabla \cdot (2\mu \mathbf{S})}$  are lower than those of  $E_{\nabla P}$  and  $E_{\mathbf{F}_\sigma}$ , suggesting that a  
 482 part of the Dirac-like singularity of the latter two is redirected to the former  
 483 two due to the approximate numerical treatment near the interface.

484 In summary, this section leads to the following conclusions. The spectral  
 485 signature of the singularities is as predicted by theory for buoyancy, pressure  
 486 gradient and interfacial force, but different for inertia and viscous force due to  
 487 numerical approximations in the cells crossed by the interface. However, all  
 488 spectra are remarkably independent of the mesh spacing, the effect of which  
 489 is only significant at the small scales where the effect of singularities becomes  
 490 dominant.

#### 491 4.4. Energy budget in the spectral domain

The spectral energy balance of the kinetic energy of the two-phase mixture  
 can be obtained in the same way as for a single-phase flow. The Fourier trans-  
 form (eq. 10) of each term in the Navier-Stokes equation (eq. 4) is calculated,  
 and contracted with the complex conjugate  $\widehat{\mathbf{u}}^*$  of the Fourier transform of the

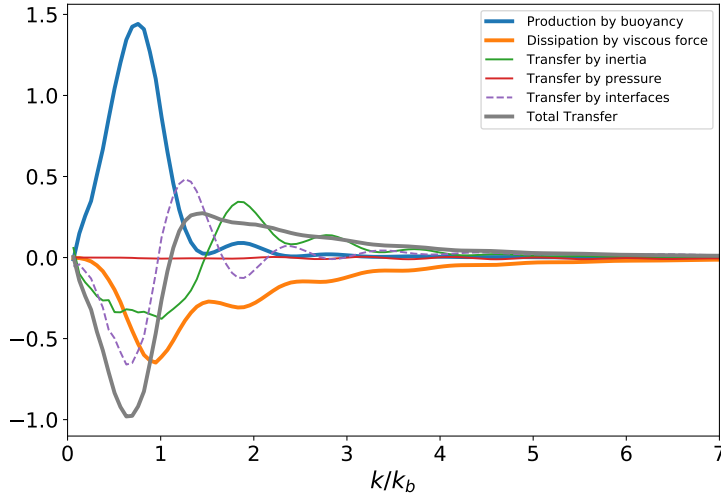


Figure 13: Normalized spectral density of the terms of the energy balance for the refined grid at  $\alpha = 6\%$  (DNS results)

velocity:

$$\underbrace{+\widehat{\mu\nabla^2\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{u}}^*}}_{\text{Dissipation}} + \underbrace{+(\widehat{\rho - \rho_m})\widehat{\mathbf{g}\cdot\hat{\mathbf{u}}^*}}_{\text{Production}} - \underbrace{\widehat{\rho D_t\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{u}}^*}}_{\text{Inertia}} - \underbrace{\widehat{\nabla P\cdot\hat{\mathbf{u}}^*}}_{\text{Pressure}} + \underbrace{\widehat{\mathbf{F}_\sigma\cdot\hat{\mathbf{u}}^*}}_{\text{Transfers}} = 0. \quad (20)$$

Each term is a complex-valued field in the wavenumber vector  $\mathbf{k}$ . We take its real part and integrate it over shells of constant  $k = \|\mathbf{k}\|$  (eq. 11) to finally obtain a real-valued function of  $k$ . This means we will not be examining flow anisotropy in what follows.

Note that according to the Plancherel's theorem, each term  $\mathbf{T}$  of the momentum equation satisfies the relation:  $\int \mathbf{T}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x})dx^3 = \int \widehat{\mathbf{T}(\mathbf{k})}\cdot\widehat{\mathbf{u}(\mathbf{k})}^* dk^3$ , which means that the integral over the wavenumbers of each term of the spectral balance 20 is equal to the average power of  $\mathbf{T}$ . In particular, the first term can be expressed with the velocity spectrum as  $\mu k^2 E_u$ , and, its integral over  $k$ , noted  $-\epsilon$ , is equal to the dissipation rate of kinetic energy. It can thus be interpreted as the spectral density of the dissipation rate.

Since we are considering a statistical steady state, the integral over  $k$  of the

504 second term is equal to  $\epsilon$  and corresponds to the rate of energy supplied to the  
505 system by external forces. The buoyancy term therefore represents the spectral  
506 density of the production rate of kinetic energy.

507 The integral over  $k$  of each of the three remaining terms is zero, which means  
508 that inertia, pressure and interfacial forces do not contribute to the total amount  
509 of power, their role being to transfer energy between scales. Note that it is only  
510 true in steady state for the interfacial forces.

511 Before examining the DNS results, it is useful to comment on a specificity  
512 of the inertia term when the densities of the two phases are different, as it  
513 was misinterpreted by one of the few previous works that dealt with such a  
514 situation (Pandey and Ramadugu, 2020). The inertia term can be split into  
515 two parts as  $-\widehat{\rho D_t \mathbf{u}} \cdot \widehat{\mathbf{u}}^* = -\widehat{\rho \partial_t \mathbf{u}} \cdot \widehat{\mathbf{u}}^* - \widehat{\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}} \cdot \widehat{\mathbf{u}}^*$ . When density is constant,  
516  $\rho$  can be taken out of the Fourier-transform operator and the first term of the  
517 right-hand-side can be re-written  $\partial_t(\frac{\widehat{\mathbf{u}} \cdot \widehat{\mathbf{u}}^*}{2})$ , which is zero at steady state. On the  
518 other hand, when  $\rho$  is not constant,  $-\widehat{\rho \partial_t \mathbf{u}} \cdot \widehat{\mathbf{u}}^*$  does not vanishes at steady state  
519 and contributes to the transfer of energy between the scales. It is important  
520 to stress that while  $-\widehat{\rho D_t \mathbf{u}} \cdot \widehat{\mathbf{u}}^*$  is Galilean invariant (for  $\|\mathbf{k}\| > 0$ ), the two  
521 parts of its decomposition are not. This is not a problem when  $\rho$  is constant,  
522 since we can always choose the reference frame where the average velocity is  
523 zero. However, it means that this decomposition is irrelevant in the present  
524 case involving two phases with different densities moving at different velocities.  
525 Pandey and Ramadugu (2020) adopted a different perspective. They decided  
526 to decompose the fluid acceleration term into a Eulerian time derivative and a  
527 convective part in a way so that the former term vanishes in steady state. For  
528 each term  $T$  of the Navier-Stokes equations, they defined its spectral density  
529 as:  $\widehat{T} \cdot \widehat{\mathbf{u}}^* + \frac{\widehat{T}}{\rho} \cdot \widehat{\rho \mathbf{u}}$ . The Eulerian time-derivative term is now written  $\partial_t(\widehat{\rho \mathbf{u}} \cdot \widehat{\mathbf{u}}^*)$ ,  
530 which is indeed zero in steady state. However, this comes at a high price, as the  
531 physical meaning of  $\mathbf{T}/\rho$  terms is unclear, while the division by  $\rho$  strengthens  
532 singularities and their effect on the spectrum. What's more, their mathematical  
533 relevance is uncertain, in particular regarding  $\mathbf{F}^\sigma/\rho$ , which does not represent  
534 the interfacial stress jump and involves a ratio between the Dirac and Heaviside

535 distributions. We therefore see no advantage in adopting this approach and use  
536 the classic method defined by eq. 20.

537 Figure 13 presents the spectral energy budget 20, where all spectra have  
538 been normalized using  $k_b$  and  $\epsilon$ . Oscillations with a period  $k_b$  of significant  
539 amplitudes are visible on all terms, indicating that the singular parts are far  
540 from being negligible.

541 The production term shows a large positive and almost symmetric peak  
542 around  $k = 0.75k_b$ . Beyond  $k = 1.5k_b$ , it becomes a secondary term dominated  
543 by oscillations of decaying amplitude. Between  $k = 0$  and  $1.5k_b$ , production  
544 is balanced by dissipation, inertia and interfacial tension. In contrast with  
545 the turbulence of a single-phase flow, transfer here is ensured to a comparable  
546 extent by inertia and interfacial force, while the role of the pressure gradient  
547 remains negligible. However, the inertial and interfacial contributions exhibit  
548 very strong oscillations, causing them to change sign and making it difficult  
549 to understand them separately. The physical interpretation of the balance is  
550 simplified if inertia, interfacial force and pressure gradient are added together  
551 to construct the total transfer term, represented by the grey line in the figure.  
552 This makes clear the existence of two regimes, both corresponding to an energy  
553 transfer from large to small scales. Before the production peak ( $0 \leq k \leq 0.75k_b$ ),  
554 the energy supplied by the work of buoyancy is mainly balanced by the transfer  
555 term, which transports energy to smaller scales. After the dissipation peak ( $k \geq$   
556  $k_b$ ), the energy supplied from larger scales by the transfer term is dissipated.  
557 This picture is close to single-phase flow turbulence, with the notable difference  
558 that there is no scale separation between the peak of production and the peak of  
559 dissipation, which explains the absence of a  $k^{-5/3}$  inertial subrange. It should  
560 also be noted that there is no subrange where production and dissipation are in  
561 equilibrium, in contrast to what was postulated by Lance and Bataille (1991)  
562 to explain the existence of the  $k^{-3}$  subrange.

563 The total transfer possesses another property, which is of major interest  
564 for the purpose of the present work. It has no oscillations., indicating that  
565 the singularities of its three components cancel each other out, leaving only the

566 regular part. Since the sum of the production and dissipation terms balances the  
567 transfer term, their singularities are the opposite of each other. It is therefore  
568 sufficient to identify the singular part of one of them to obtain two distinct,  
569 regular and singular spectral energy balances.

570 Since buoyancy acts on the bubble scale, it does not supply energy at scales  
571 that are significantly smaller than  $R$ . Consequently, the regular part of the  
572 production spectrum must decay very fast after  $k_b$ . The DNS spectrum plotted  
573 in log scale in fig. 14a shows that the decay after the peak is interrupted by  
574 strong oscillations on a power-law decaying baseline, which can be attributed  
575 to the singular part. The regular part of the production spectrum can thus  
576 be obtained by low-pass filtering of the DNS spectrum. This has been done  
577 in fig. 14a, where the blue line shows the production spectrum multiplied by a  
578 sharp filter,  $\exp(-(k/k_c)^4)$ , with  $k_c = 1.3k_b$ . (Changing the cutoff wavenumber  
579  $k_c$ , slightly changes the result in the vicinity of  $k_c$ , but has no effect beyond).  
580 The singular part (grey dashed line), obtained as the difference between the total  
581 spectrum and the regular part, combines several types of singularities since its  
582 oscillations slowly evolves from a  $\cos^2(kR)$  behavior to a  $\sin^2(kR)$  behavior, and  
583 its power decay from a slope  $-3$  to  $-4$ .

584 In contrast with production, the dissipation is only expected to experience a  
585 viscous cutoff at scales much smaller than the bubbles, so there is no easy way  
586 to distinguish between its singular and regular parts. Nevertheless, as noted  
587 above, its singular part is the opposite of that of the production spectrum and  
588 its regular part is obtained by subtracting it from the total dissipation spectrum.  
589 Figure 14b shows a log plot of the total dissipation spectrum, as well as its  
590 regular and singular parts obtained in that way. The regular part shows a clear  
591  $k^{-1}$  evolution in the range from  $k = 0.8k_b$  (just after the production peak) to  
592  $2-3 k_b$ .

593 Provided the pressure gradient, inertia and interfacial contributions are con-  
594 sidered all together in a total transfer term, we eventually obtain two separate  
595 energy budgets, one for the regular part, the other for the singular part. The  
596 production (fig. 14a) and the dissipation (fig. 14b) involve both a regular and a

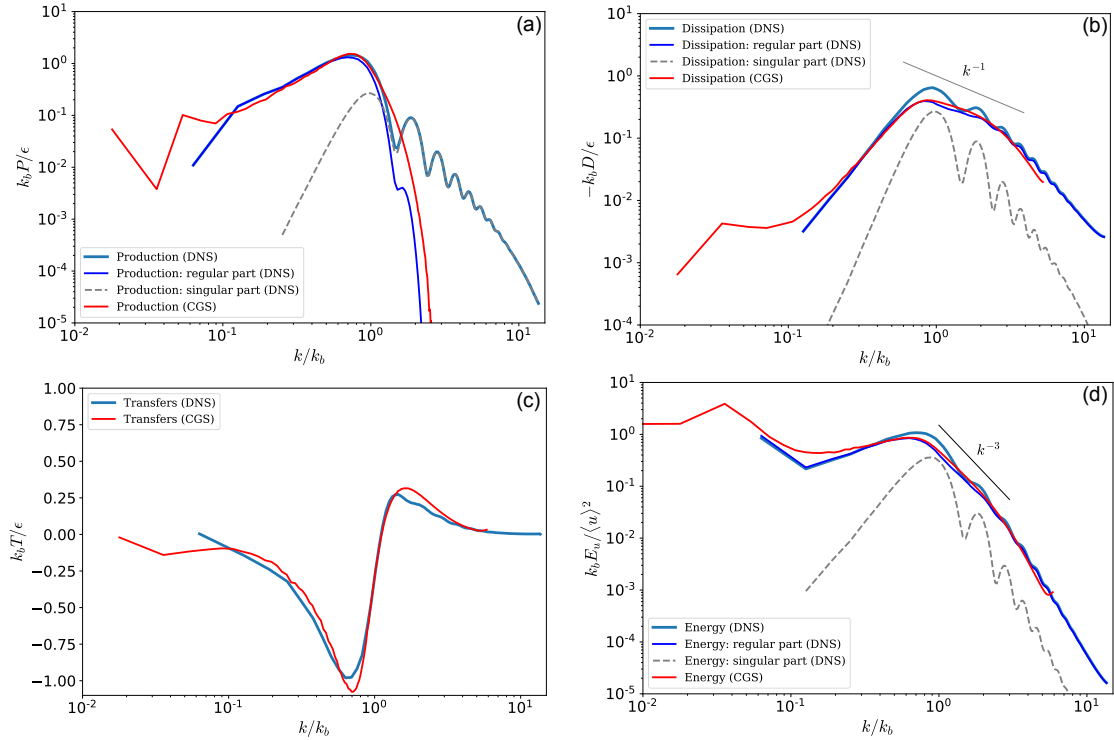


Figure 14: Normalized spectral density of the terms of the energy balance and energy spectrum. DNS at  $\alpha = 6\%$  and CGS at  $\alpha = 7.5\%$ . (a): Production, (b): Dissipation, (c): Transfers, (d): Energy.

597 singular part, while the total transfer (fig. 14b) is regular.

598 Finally, the singular and regular parts of the velocity spectrum are obtained  
 599 by dividing the corresponding part of the dissipation spectrum by  $\mu k^2$ . The  
 600 regular part shows a  $k^{-3}$  evolution in the region where the dissipation spectrum  
 601 shows a  $k^{-1}$  behavior.

## 602 5. Comparison with Coarse-Grained simulations

603 In this work, the Navier-Stokes equations have been directly solved without  
 604 additional modelling and the effect of the singularities due to the presence of  
 605 the interfaces have been filtered *a posteriori* out from the numerical results.



606 An opposite approach is to filter the flow in the region close to the interfaces  
607 before solving the Navier-Stokes equations. In this case, all fields are regular.  
608 Such coarse-grained simulations (CGS) were introduced by Riboux et al. (2013)  
609 to model the agitation generated by a flow through an array of fixed bubbles  
610 and extended to simulate freely moving bubbles by Le Roy De Bonneville et al.  
611 (2021). The case of a homogeneous swarm of rising bubbles has been extensively  
612 investigated by this method in Zamansky et al. (2023), where a detailed analysis  
613 of the spectral energy budget was provided. In this section, we compare these  
614 CGS spectra to the DNS spectra presented in the previous section.

Here we briefly present the CGS simulations, focusing on elements that are useful for understanding the comparison with the DNS. A detailed description of the method is available in Le Roy De Bonneville et al. (2021); Zamansky et al. (2023). The carrying phase fills the entire domain without interruption. Its dynamics is described by the continuity and Navier-Stokes equations for an incompressible fluid of constant density and viscosity. The presence of the bubbles is accounted for in the Navier-Stokes equations by a forcing term  $\mathbf{f}_{b \rightarrow f}$ ,

$$\mathbf{f}_{b \rightarrow f}(\mathbf{x}, t) = - \sum_{b=1}^{N_b} \mathbf{F}_{f \rightarrow b} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b(t)), \quad (21)$$

where a Gaussian kernel,

$$G(\xi) = \frac{1}{(2\pi\sigma_G^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\|\xi\|^2}{2\sigma_G^2}\right), \quad (22)$$

615 is used to distribute the force  $-\mathbf{F}_{f \rightarrow b}$  exerted on the fluid by each bubble  $b$ . The  
616 location  $\mathbf{x}_b$  of each bubble is calculated by solving Newton's second law, where  
617 the force  $\mathbf{F}_{f \rightarrow b}$  exerted by the fluid included drag, added-mass, buoyancy and  
618 Tchen forces, calculated by using classic expressions involving both the bubble  
619 velocity and the fluid velocity at the bubble location. The main difference  
620 between the DNS and CGS approaches lies in the forcing added to the Navier-  
621 Stokes equations. In DNS,  $\mathbf{F}_\sigma$  is localized at the interfaces, while, in CGS,  $\mathbf{f}_{b \rightarrow f}$   
622 is spread over a region of scale  $\sigma_G$ .

623 The CGS simulations have been carried out in a triperiodic cubic domain

624 of dimension  $L = 70d$ , on a regular mesh of spacing  $\Delta = d/15$ . The spatial  
625 resolution is thus the same as that of the coarse DNS mesh, but the momentum  
626 supplied by the bubble is here filtered at a scale of the order of that of the  
627 bubble, since  $2\sigma_G = 0.28d$ . The physical parameters are those of air bubbles of  
628 diameter  $d = 2.5$  mm rising in water. The results reported here correspond to a  
629 volume fraction  $\alpha = 7.5\%$ , and a bubble Reynolds number  $Re = 760$ .

630 The spectra are determined from the fluid pressure and velocity fields com-  
631 puted by the CGS. The spectral densities of energy ( $E_u$ ) and dissipation ( $\mu\nabla^2\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{u}}^*$ )  
632 are obtained exactly as in the DNS. The buoyancy force is applied to the bub-  
633 bles, which then transfer it to the fluid through the momentum forcing  $\mathbf{f}_{b\rightarrow f}$ .  
634 The production spectrum is thus calculated from the work of the coupling force:  
635  $\widehat{\mathbf{f}_{b\rightarrow f}\cdot\hat{\mathbf{u}}^*}$ . The spectral transfers are, as in a single-phase flow, ensured by iner-  
636 tia ( $-\rho\widehat{D_t\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{u}}^*}$ ) and pressure ( $-\widehat{\nabla P}\cdot\hat{\mathbf{u}}^*$ ), with a vanishing contribution of the  
637 pressure in homogeneous flow condition.

638 Normalized CGS spectra have been reported in fig. 14 (red lines). Since  $\rho$   
639 and  $\mu$  are constant and the coupling force  $\widehat{\mathbf{f}_{b\rightarrow f}}$  is smooth, CGS spectra do not  
640 have a singular part. The agreement between CGS spectra and the regular part  
641 of DNS spectra is remarkable and constitutes a cross-validation of both. On the  
642 one hand, the spreading of the momentum transferred from the bubble to the  
643 fluid over a region of comparable size to that of the bubble is confirmed to be  
644 significantly relevant, not only at scales larger than the filtering threshold, but  
645 also at significantly smaller scales. On the other hand, this gives us confidence in  
646 the method used to separate the regular and singular parts of the DNS spectra.

## 647 6. Conclusion

648 The spectral analysis of dispersed two-phase flows is complicated by the  
649 presence of interfaces between the two phases, across which some quantities are  
650 discontinuous. This difficulty can be circumvented by considering subdomains  
651 containing only one of the two phases, but at the price of the severe limitation:  
652 transfers of momentum and energy between phases cannot be described, making

653 it impossible to construct a spectral balance. Analyzing fields extending over  
654 the entire domain is therefore a much more fruitful approach to understand the  
655 physical mechanisms underlying the dynamics of turbulent fluctuations.

656 In the case of bubbles or droplets transported by a carrying phase, the com-  
657 bination of jumps of density, viscosity and stresses across the interface leads  
658 the various fields characterizing the dynamics of flow mixture to experience sin-  
659 gularities, which can be ordered from the less to the most regular by means  
660 of integer  $p$ : Dirac delta function ( $p = -1$ ), Heaviside step function ( $p = 0$ ),  
661 discontinuity of the first derivatives ( $p = 1$ ), discontinuity of the second deriva-  
662 tives ( $p = 2$ )... It is important to stress that a given field has generally various  
663 interfacial singularities. For example, the pressure gradient generally contains a  
664 Dirac singularity caused by interfacial tension ( $\kappa\sigma$ ) and a Heaviside singularity  
665 caused by the jump in the gravity force ( $\rho\mathbf{g}$ ). A field can be characterized by  
666 its most severe singularity,  $p_{min}$ . The velocity field is generally continuous but  
667 its derivatives are not, leading to  $p_{min} = 1$ .

668 The spectrum of any field combines a regular part, which represents the  
669 smooth evolution outside the interface, and a singular part, which reflects inter-  
670 facial singularities. At large wavenumbers, the spectrum of a singularity of order  
671  $p$ , follows a power-law decay as  $-2p - 2$ . Therefore there exists a wavenumber  
672 above which, the spectrum of a physical field is dominated by its singular part,  
673 and it ends up by being dominated by its most severe singularity, of order  $p_{min}$ .  
674 The wavenumbers where the singular part begins to become significant depends  
675 on the amplitude of the regular part relative to that of the singular part, and the  
676 way it evolves with  $k$ . When the interfaces are the surface of droplets or bubbles,  
677 the singular part of the spectrum reaches a maximum at a wavelength close to  
678 the droplet scale and follows a power-law at smaller scales. When the droplets  
679 are spheres of the same radius  $R$ , the spectrum of the singularities shows oscil-  
680 lations as  $\sin^2(Rk + \phi)$ , of period  $k_b = \pi/R$ . These oscillations vanish when the  
681 droplets are deformed or their size distributions is broad.

682 In a dispersed two-phase flow, the singular part of the spectra is therefore  
683 expected to be important for wavenumbers larger than  $k_b$ . For instance, it

684 is insignificant on the major part of the turbulent spectra in the case of a  
685 turbulent flow laden with droplets of size smaller than the Kolmogorov micro-  
686 scale. However, it cannot be neglected when the droplet size is in the energetic  
687 wavelength range. In this work, we have investigated the case where its impact  
688 is the most important, a swarm of bubbles rising at a high Reynolds number,  
689 since the fluctuating energy is produced in a range around  $k_b$ . In addition,  
690 we have considered almost spherical bubbles of a single diameter  $d$ , for which  
691 the oscillations of the spectrum at a period  $k_b$  are a visible signature of the  
692 singular part. We also chose the same viscosity for the two phases to simplify  
693 the analysis.

694 A homogeneous rising swarm, at volume fractions  $\alpha = 3\%$  and  $6\%$  and  
695 Reynolds number  $Re = 500$ , has been computed by Direct Numerical Simula-  
696 tions using a front tracking of the interfaces, with a mesh grid spacing  $\Delta = d/14$   
697 or  $d/27$ . The conclusions reached are independent of  $\alpha$  and  $\Delta$ . The numeri-  
698 cal spectra of the velocity and of all the terms of the momentum equations  
699 clearly show the signature of singularities of order  $p = -1$  (Dirac type),  $p = 0$   
700 (Heaviside type) and  $p \geq 1$  (continuous fields). Buoyancy, pressure gradient  
701 and interfacial forces show the singularities predicted by the theory. However,  
702 the two terms that explicitly imply velocity, namely inertia and viscous forces,  
703 are less regular than they should be. This indicates that, even though the mo-  
704 mentum balance is locally satisfied everywhere, the numerical treatment in the  
705 meshes that are crossed by an interface, redistributes the singularities between  
706 the different terms, leading to a less regular velocity field.

707 The spectral power densities of all the forces contributing to the energy bal-  
708 ance were determined, in the same way as usually done in turbulence studies.  
709 This budget is made of five terms. The buoyancy term corresponds to the pro-  
710 duction of kinetic energy. The viscous term corresponds to the dissipation of  
711 kinetic energy into heat. The integral over the wavenumbers of the production  
712 term is the opposite of that of the dissipation term and equal to the dissi-  
713 pation rate of energy  $\epsilon$ . The inertia, interfacial tension and pressure-gradient  
714 terms transfer energy between scales without contributing to the total amount

715 of power. It turns out that the singular part cancels out when we add the three  
716 transfer terms together, leading to a regular total transfer term. Then, taking  
717 advantage of the fact that the regular part of the production term decreases  
718 very sharply beyond  $k_b$ , its singular and regular parts can be separated. Since  
719 the singular part of the dissipation term must balance the singular part of the  
720 production term, we end up with two separate budgets, one for the regular  
721 part, one for the singular part. These results have been compared with those  
722 of Coarse-Grained Simulations, in which the momentum transfer between the  
723 bubbles and the fluid are filtered before the Navier-Stokes equations are solved.  
724 The CGS spectra are found to be in remarkable agreement with the regular part  
725 of the DNS spectra, validating both approaches to obtain the regular part of  
726 the spectra.

727 This work proves that it is relevant to analyze DNS spectra of bubbly flows  
728 computed by considering the fields over the entire domain. In the case of homo-  
729 geneous bubble-induced agitation, it has been possible to separate the regular  
730 and singular parts of the spectral energy budget thanks to the two following  
731 properties: (1) the singular parts of the transfer terms cancels out when we add  
732 them, and (2) the production term decay very sharply after  $k_b$ . The question  
733 now is under which conditions these two properties are valid. In a future work,  
734 we shall address the case of coupled forced isotropic homogeneous turbulence  
735 and bubble-induced agitation.

### 736 **Acknowledgement**

737 For the purpose of Open Access, a CC-BY public copyright licence has been  
738 applied by the authors to the present document and will be applied to all sub-  
739 sequent versions up to the Author Accepted Manuscript arising from this sub-  
740 mission.

741 **References**

- 742 E. Alm eras, Varghese Mathai, Detlef Lohse, and F Toschi. Experimental in-  
743 vestigation of the turbulence induced by a bubble swarm rising within inci-  
744 dent turbulence. Journal of Fluid Mechanics, 825:1091–1112, July 2017. doi:  
745 10.1017/jfm.2017.410. Publisher: Cambridge Univ Press.
- 746 S Balachandar and J K Eaton. Turbulent Dispersed Multiphase Flow. Annual  
747 Review of Fluid Mechanics, Vol 43, 42(1):111–133, January 2010. doi: 10.  
748 1146/annurev.fluid.010908.165243.
- 749 L. Brandt and F. Coletti. Particle-Laden Turbulence: Progress and Perspec-  
750 tives. Annual Review of Fluid Mechanics, 54(1):159–189, January 2022. ISSN  
751 0066-4189, 1545-4479. doi: 10.1146/annurev-fluid-030121-021103.
- 752 M. Cialesi-Esposito, M. E. Rosti, S. Chibbaro, and L. Brandt. Modulation  
753 of homogeneous and isotropic turbulence in emulsions. Journal of Fluid  
754 Mechanics, 940:A19, June 2022. doi: 10.1017/jfm.2022.179.
- 755 M. S Dodd and A. Ferrante. On the interaction of Taylor length scale size  
756 droplets and isotropic turbulence. Journal of Fluid Mechanics, 806:356–412,  
757 November 2016. doi: 10.1017/jfm.2016.550. Publisher: Cambridge Univ  
758 Press.
- 759 A du Cluzeau, G Bois, and A Toutant. Analysis and modelling of Reynolds  
760 stresses in turbulent bubbly up-flows from direct numerical simulations.  
761 Journal of Fluid Mechanics, 866:132–168, March 2019. doi: 10.1017/jfm.  
762 2019.100. Publisher: Cambridge Univ Press.
- 763 A. du Cluzeau, G. Bois, N. Leoni, and A. Toutant. Analysis and modeling of  
764 bubble-induced agitation from direct numerical simulation of homogeneous  
765 bubbly flows. Physical Review Fluids, 7(4):044604, April 2022. doi: 10.1103/  
766 PhysRevFluids.7.044604.
- 767 B. Dubrulle. Beyond kolmogorov cascades. Journal of Fluid Mechanics, 867,  
768 mar 2019.

- 769 J. Duchon and R. Robert. Inertial energy dissipation for weak solutions of  
770 incompressible euler and navier-stokes equations. Nonlinearity, 13(1):249,  
771 2000.
- 772 A. Freund and A. Ferrante. Wavelet-spectral analysis of droplet-laden isotropic  
773 turbulence. Journal of Fluid Mechanics, 875:914–928, September 2019. ISSN  
774 0022-1120, 1469-7645. doi: 10.1017/jfm.2019.515.
- 775 I. M. Gelfand and G. E. Shilov. Generalized Functions Vol 1 Properties And  
776 Operations. Academic Press - New York and London, 1964.
- 777 A. Innocenti, A. Jaccod, S. Popinet, and S. Chibbaro. Direct numerical simu-  
778 lation of bubble-induced turbulence. Journal of Fluid Mechanics, 918, July  
779 2021. ISSN 0022-1120, 1469-7645. doi: 10.1017/jfm.2021.288.
- 780 I. Kataoka. Local instant formulation of two-phase flow. International  
781 Journal of Multiphase Flow, 12(5):745–758, September 1986. doi: 10.1016/  
782 0301-9322(86)90049-2.
- 783 B. Lalanne, L. Villegas Rueda, S. Tanguy, and F. Risso. On the computation of  
784 viscous terms for incompressible two-phase flows with Level Set/Ghost Fluid  
785 Method. Journal Of Computational Physics, 301:289–307, November 2015.  
786 doi: 10.1016/j.jcp.2015.08.036. Publisher: Elsevier Inc.
- 787 M Lance and J Bataille. Turbulence in the liquid-phase of a uniform bubbly air  
788 water-flow. J. Fluid Mech., 222(-1):95–118, January 1991.
- 789 M. Le Berre, T. Lehner, and Y. Pomeau. Singularities in turbulent flows: How  
790 to observe them? Physica D: Nonlinear Phenomena, 443:133563, 2023.
- 791 F. Le Roy De Bonneville, R. Zamansky, F. Risso, A. Boulin, and J.-F. Haquet.  
792 Numerical simulations of the agitation generated by coarse-grained bubbles  
793 moving at large Reynolds number. Journal of Fluid Mechanics, 926:A20,  
794 November 2021. ISSN 0022-1120, 1469-7645. doi: 10.1017/jfm.2021.670.

- 795 F. Lucci, A. Ferrante, and S. Elghobashi. Modulation of isotropic turbulence  
796 by particles of Taylor length-scale size. Journal of Fluid Mechanics, 650:5–55,  
797 May 2010. ISSN 0022-1120, 1469-7645. doi: 10.1017/S0022112009994022.
- 798 J Martínez Mercado, D Chehata G, D Van Gils, C Sun, and D Lohse. On  
799 bubble clustering and energy spectra in pseudo-turbulence. J. Fluid Mech.,  
800 650:287–306, March 2010.
- 801 S Mendez-Diaz, J C Serrano-García, R Zenit, and J A Hernández-Cordero.  
802 Power spectral distributions of pseudo-turbulent bubbly flows. Phys Fluids,  
803 25(4):043303, 2013.
- 804 L. Onsager. Statistical hydrodynamics. Il Nuovo Cimento, 6(2):279–287, 1949.
- 805 V. Pandey and P. Ramadugu, R.and Perlekar. Liquid velocity fluctuations and  
806 energy spectra in three-dimensional buoyancy-driven bubbly flows. Journal  
807 of Fluid Mechanics, 884:R6, February 2020. doi: 10.1017/jfm.2019.991. Pub-  
808 lisher: Cambridge Univ Press.
- 809 V. Pandey, D. Mitra, and P. Perlekar. Turbulence modulation in buoyancy-  
810 driven bubbly flows. Journal of Fluid Mechanics, 932:A19, February 2022.  
811 ISSN 0022-1120, 1469-7645. doi: 10.1017/jfm.2021.942.
- 812 S. B. Pope. Turbulent Flows. Cambridge University Press, 2000.
- 813 V N Prakash, J Martínez Mercado, L van Wijngaarden, E Mancilla, Y Tagawa,  
814 D Lohse, and C Sun. Energy spectra in turbulent bubbly flows. J. Fluid  
815 Mech., 791:174–190, February 2016.
- 816 G Riboux, F Risso, and D Legendre. Experimental characterization of the  
817 agitation generated by bubbles rising at high Reynolds number. J. Fluid  
818 Mech., 643:509–539, January 2010.
- 819 G. Riboux, D. Legendre, and . Risso. A model of bubble-induced turbulence  
820 based on large-scale wake interactions. Journal of Fluid Mechanics, 719:362–  
821 387, January 2013. doi: 10.1017/jfm.2013.12. Publisher: Cambridge Univ  
822 Press.



- 823 F Risso. Theoretical model for  $k^{-3}$  spectra in dispersed multiphase flows. Phys  
824 Fluids, 23(1):011701, 2011.
- 825 F. Risso. Agitation, Mixing, and Transfers Induced by Bubbles. Annual Review  
826 of Fluid Mechanics, Vol 43, 50(1):25–48, January 2018.
- 827 I Roghair, J M Mercado, M Van Sint Annaland, H Kuipers, C Sun, and D Lohse.  
828 Energy spectra and bubble velocity distributions in pseudo-turbulence: Nu-  
829 merical simulations vs. experiments. Int. J. Multiph. Flow, 37(9):1093–1098,  
830 2011.
- 831 G Tryggvason, Bernard Bunner, and Gretar Tryggvason. Dynamics of homoge-  
832 neous bubbly flows Part 2. Velocity fluctuations. Journal of Fluid Mechanics,  
833 466(0):53–84, September 2002. doi: 10.1017/S0022112002001180. Publisher:  
834 Cambridge Univ Press.
- 835 R Zamansky, F Le Roy De Bonneville, and F Risso. Turbulence induced by a  
836 swarm of rising bubbles from coarse-grained simulations. submitted to the  
837 Journal of Fluid Mechanics, 2023.

# Chapitre 4

## Essaim de bulles statistiquement homogène et stationnaire

### Sommaire

---

<b>4.1 Essaim de bulles de référence</b> . . . . .	<b>93</b>
4.1.1 Géométrie, paramètres physiques et numériques . . . . .	94
4.1.2 Statistiques des bulles . . . . .	94
4.1.3 Statistiques des phases . . . . .	97
4.1.4 Analyse dans le plan spectral . . . . .	104
4.1.5 Synthèse des caractéristiques de la simulation à $\alpha = 6\%$ . . . . .	109
<b>4.2 Simulations à différentes fractions volumiques de gaz</b> . . . . .	<b>110</b>
4.2.1 Géométrie, paramètres physiques et numériques . . . . .	111
4.2.2 Statistiques des bulles . . . . .	111
4.2.3 Statistiques des phases . . . . .	113
4.2.4 Analyse dans le plan spectral . . . . .	118
4.2.5 Synthèse sur l'effet du taux de vide . . . . .	120
<b>4.3 Conclusion</b> . . . . .	<b>121</b>

---

Dans ce chapitre, l'écoulement produit par un essaim de bulles homogène uniquement soumis au champ de pesanteur est étudié. Ce cas permet d'étudier uniquement l'agitation induite par les bulles (BIA pour *bubble induced agitation*) en l'absence de toute autre cause de fluctuations. La connaissance de la BIA en situation homogène est une étape indispensable à la description de l'agitation et du mélange dans les écoulements à bulles plus complexes, dont elle constitue parfois la plus importante contribution aux échelles proches ou plus petites que les bulles.

Ce chapitre se divise en deux parties. Dans la première, la simulation de référence sB6, à 6% de fraction volumique de gaz  $\alpha$  est définie puis analysée. Cette simulation constitue le point de comparaison pour les autres simulations du chapitre. Dans la deuxième partie, l'effet de la fraction volumique  $\alpha$  est analysé, en comparant des essais homogènes à  $\alpha = 3\%$  (sB3) et à  $\alpha = 12\%$  de taux de vide (sB12) à la simulation de référence à  $\alpha = 6\%$ .

### 4.1 Simulation de référence à une fraction de gaz de 6%

Dans cette partie on s'intéresse aux mécanismes de production de fluctuations par les bulles pour  $\alpha = 6\%$  (sB6). Il faut que le nombre de Reynolds de bulles  $Re_b$  soit supérieur à 200 pour que des sillages importants se développent derrière les bulles, et il faut que la fraction volumique de gaz  $\alpha$  soit au moins de l'ordre de 1% pour que ces sillages interagissent entre eux (Sec. 1.3.2). La fraction de gaz dans l'essai,  $\alpha = 6\%$ , et le nombre de Reynolds de bulle,  $Re_b = 468$ , assurent que la

BIA se développera dans cet essaim. On ne considérera que le régime statistiquement stationnaire. L'analyse de ce cas a pour objectif d'évaluer les effets de l'agitation induite par les bulles et de servir de point de référence pour les comparaisons qui suivent dans les prochaines sections et dans les prochains chapitres.

#### 4.1.1 Géométrie, paramètres physiques et numériques

Le domaine d'écoulement est un cube de côté  $L = 15.9 d_b$ , avec  $d_b$  le diamètre de bulle. Dans ce cube, sont initialement disposées aléatoirement  $N_b = 457$  bulles sphériques de diamètre  $d_b = 0.001m$ ; la fraction volumique de gaz est  $\alpha = 6\%$ . Les coordonnées des centres des bulles sont tirées selon une loi uniforme, puis, si une bulle recouvre une de ses voisines, sa position est tirée de nouveau, de manière à ce qu'elle ne recouvre aucune autre bulle, les coordonnées suivent donc une loi de Poisson-Disk [6]. Les bulles se déforment sous l'effet des interactions hydrodynamiques exercées sur leur interface. Les bulles et le fluide sont initialement au repos et se mettent en mouvement sous l'action de la gravité :  $\mathbf{g} = (-g, 0, 0)$ . Sur les six bords du domaine, une condition de périodicité est imposée.

Les densités sont inspirées de l'expérience DEBORA MANON [33] dans laquelle du fréon R12 à 15 bars et à température de saturation permet de simuler un écoulement réacteur eau/vapeur à 100 bar :  $\rho_l = 1171.3kg.m^{-3}$ ,  $\rho_g = 87.545kg.m^{-3}$ . Les viscosités dynamiques des deux fluides sont choisies égales, afin de limiter l'effet des singularités sur les spectres, comme discuté au chapitre 3, et elles valent  $\mu_l = \mu_g = \mu = 3.73 \times 10^{-4}Pa.s$ . L'accélération de la gravité vaut  $g = 9.81m.s^{-2}$ . Le nombre d'Archimède <sup>1</sup> vaut  $Ar = \sqrt{\frac{\Delta\rho}{\rho_l}}gd_b\frac{d}{\nu_l} = 300$ . Cette valeur permet d'anticiper un nombre de Reynolds de bulle de l'ordre de  $Re_b = 300$ , assez élevé pour garantir une BIA turbulente RISSO [52]. La tension superficielle est choisie de sorte que les bulles se déforment peu sous l'effet de la pression hydrostatique :  $\sigma = 1.806 \times 10^{-2}N.m^{-1}$ . Le nombre de Bond vaut  $Bo = \frac{\Delta\rho g d_b^2}{\sigma} = 0.60$ .

Le domaine est discrétisé par  $N^3 = 432^3$  mailles cubiques. En notant  $\Delta x$  le côté d'une maille, cette discrétisation spatiale correspond à  $d_b \approx 28\Delta x$ , et est désigné par M2 (voir section 2.5.3). Bien que cette résolution ne suffise pas pour assurer une résolution précise de la couche limite autour de chaque bulle à  $Ar = 300$ , elle reste très satisfaisante pour simuler correctement les mécanismes régissant l'agitation au cœur de l'essaim de bulles. Cette simulation correspond à la simulation sB6-M2 du tableau (2.1). Pour alléger le texte, cette simulation sera appelée sB6 dans ce chapitre et ses paramètres sont rapportés dans le tableau (4.1).

	$N_b$	$d_b$ (m)	$L/d_b$	$\Delta x/d_b$	$\alpha$	$g$ ( $m.s^{-2}$ )	$\rho_l$ ( $kg.m^{-3}$ )	$\rho_g$ ( $kg.m^{-3}$ )	$\mu$ ( $Pa.s$ )	$\sigma$ ( $N.m^{-1}$ )
sB6	457	0.001	16	1/28	0.06	9.81	1171	87.55	$3.73 \times 10^{-4}$	$1.81 \times 10^{-2}$

Tableau 4.1: Paramètres de la simulation sB6.  $N_b$  est le nombre de bulles,  $d_b$  le diamètre de bulles,  $L$  la longueur du côté du domaine cubique,  $\alpha$  le taux de vide,  $g$  la constante de gravité,  $\rho_l$  la masse volumique du liquide,  $\rho_g$  celle du gaz,  $\mu$  la viscosité dynamique des fluides (identique dans les deux phases :  $\mu_l = \mu_v$ ),  $\sigma$  la tension superficielle et  $\Delta x$  la taille de maille (qui est cubique).

Les résultats exposés dans cette première partie sont validés en annexe A.2 pour un essaim identique, simulé dans un domaine de calcul deux fois plus grand ( $L = 32d_b$ ), ce qui confirme l'indépendance à la taille du domaine et valide le choix des paramètres, justifié en section 2.2.

#### 4.1.2 Statistiques des bulles

Sous l'effet de la gravité, les bulles ont un mouvement global ascendant et un mouvement relatif les unes par rapport aux autres. La figure (4.1) montre la position des bulles à l'instant  $t = 1.22s$  (gauche) et à l'instant  $t = 1.51s$  (droite) dans le plan  $(z, x)$ . Comme dans la section 2.2.2, figure

<sup>1</sup>qui est analogue à un nombre de Reynolds où l'échelle de vitesse  $u \sim \sqrt{\frac{\Delta\rho}{\rho_l}}gd_b$  s'estime à partir de la gravité  $g$ , du diamètre de bulle  $d_b$  et des masses volumiques.

(2.13), les positions sont marquées par des disques de diamètres  $d_b$  dont la couleur fonce avec le taux de présence local  $p$ . La gravité agit selon la direction  $x$ . Cette figure montre que la répartition des bulles est assez homogène. Les bulles semblent préférentiellement former des nappes horizontales. Cet agencement témoigne de la prévalence des effets d'interactions potentielles sur les effets d'entraînement par les sillages BUNNER et al. [7, p.49] et MARTÍNEZ-MERCADO et al. [35, p.289]. Cette observation peut être complétée en calculant dans l'état statistiquement stationnaire,

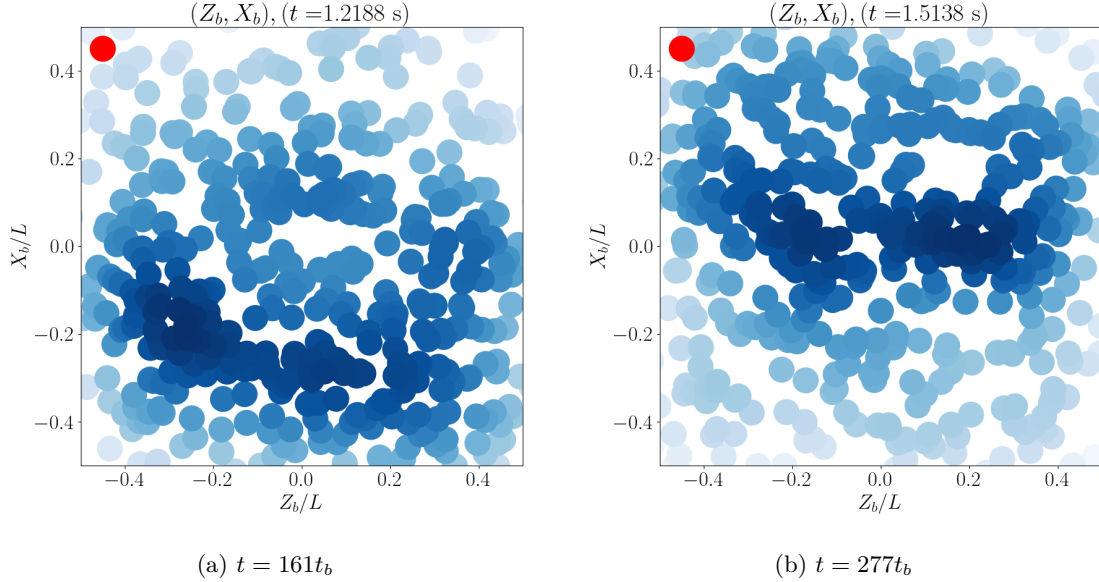


Figure 4.1: Instantané des position de toutes les bulles projetées sur le plan  $(x, z)$ . Un disque bleu symbolise la présence d'une bulle, plus ce disque est foncé, plus il y a de bulles autour. Ce dégradé permet d'apprécier la présence des bulles dans la troisième direction du domaine ( $y$ ). Le disque rouge, sert de référence : il ne représente aucune bulle.

l'auto-corrélation de la fluctuation locale de la fraction volumique de gaz  $\alpha'$  introduit en annexe A.1 (Eq. (25)). L'auto-corrélation dans la direction de la gravité  $x$  s'écrit :

$$\mathcal{C}^*(\delta) = \frac{1}{L\langle\alpha'\alpha'\rangle} \int_{-L/2}^{L/2} \alpha'(x)\alpha'(x+\delta)dx, \text{ avec} \quad (4.1)$$

$$\alpha(x) = \frac{1}{L^2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \chi_g(x, y, z) dy dz, \quad (4.2)$$

$$\alpha'(x) = \alpha(x) - \langle\alpha\rangle \quad (4.3)$$

Où  $\chi_g$  est l'indicatrice de phase gazeuse. La figure (4.2) trace cette fonction d'auto-corrélation pour la direction verticale ( $x$ ) en trait plein et pour les directions horizontales ( $y$  et  $z$ ) en traits discontinus. Nous nous intéressons uniquement aux espacements  $\delta$  plus grands que le diamètre de bulle  $d_b$ . Dans les directions horizontales, l'auto-corrélation  $\mathcal{C}^*(\delta)$  fluctue autour d'une valeur constante pour  $\delta > d_b$ . Dans la direction verticale, cette fonction atteint son minimum pour  $\delta = 8d_b$ . Dans un domaine de simulation deux fois plus grand, cette fonction d'auto-corrélation  $\mathcal{C}^*(\delta)$  atteint aussi son minimum pour  $\delta = 8d_b$ , voir annexe A.2, Fig. (16). L'étude de l'auto-corrélation de  $\alpha'$  confirme que la répartition des bulles est globalement homogène dans les plan horizontaux, et montre leur légère tendance à se concentrer sur des plans horizontaux, espacés de  $16d_b$  dans notre cas. À noter que dans leur simulation Front-Tracking, BUNNER et al. [8] observent aussi un alignement préférentiel horizontal des bulles pour un régime d'écoulement très différent ( $Re_b = 30$ ,  $\alpha = 24\%$ ). L'espace entre deux nappes de bulles est de  $4d_b$  dans leur étude (pour un domaine de simulation de côté  $L \approx 4d_b$ ).

Pour analyser le mouvement des bulles, nous regardons dans un premier temps, la moyenne de la vitesse des bulles et ses moments statistiques d'ordres deux, trois et quatre, calculés dans

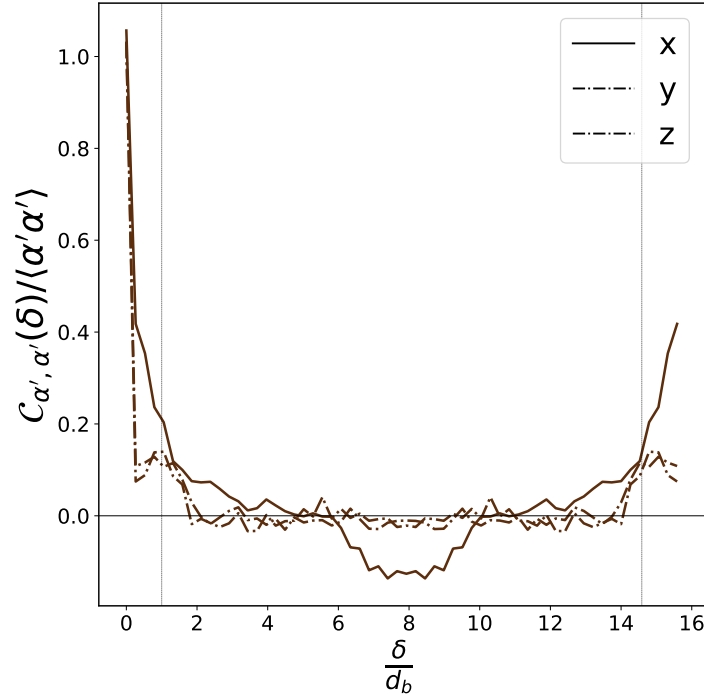


Figure 4.2: Corrélation moyenne de la fraction de vide locale (Eq. 4.1) dans la direction  $x$  (trait plein) et dans les directions  $y$  et  $z$  (traits discontinus).

l'état statistiquement stationnaire, qui sont présentés dans le tableau (4.2). Les variances des composantes horizontales et verticales de la vitesse des bulles,  $\sigma^2(u_{b,x})$  et  $\sigma^2(u_{b,y})$ , sont égales, mais leurs moments centrés réduits d'ordres supérieurs diffèrent. En effet, ils sont proches de ceux d'une gaussienne pour la composante horizontale de vitesses ( $\mu_3(u_{b,y}) = 0$ ,  $\mu_4(u_{b,y}) \approx 3$ ), tandis que pour la direction verticale, le coefficient de dissymétrie  $\mu_3$  est positif, comme pour les observations expérimentales de MARTÍNEZ MERCADO et al. [34] et de RIBOUX et al. [48] et le coefficient d'aplatissement  $\mu_4$  est inférieur à 3 contrairement à MARTÍNEZ MERCADO et al. [34], qui s'intéresse à des fractions volumiques ne dépassant pas  $\alpha = 0.74\%$ , ce qui limite fortement les interactions entre les sillages.

sB6		$u_r$	$\sigma^2(m^2.s^{-2})$	$\mu_3$	$\mu_4$
bulle	$u_{b,x}$	0.132	$1.99 \times 10^{-3}$	$3.24 \times 10^{-1}$	2.44
	$u_{b,y}$	0	$2.00 \times 10^{-3}$	$5.16 \times 10^{-3}$	2.76

Tableau 4.2: Moyenne, variance et moments centrés réduits d'ordre 3 et 4 des PDF des vitesses des bulles

Pour aller plus loin dans l'analyse du mouvement des bulles, observons les fonctions de densité de probabilité (PDF pour *probability density function*) des vitesses des bulles centrées et réduites ( $u_b^* = (u_b - \langle u_b \rangle) / \sigma(u_b)$ ), avec  $u_b$  la vitesse des bulles, calculée à partir des positions successives de leur centre de masse. La figure (4.3) présente cette fonction en échelle semi-logarithmique pour la composante horizontale des fluctuations de vitesses (Fig. (4.3a)) et pour la composante verticale des fluctuations de vitesses (Fig. (4.3b)). La PDF de la composante horizontale suit une distribution gaussienne, en accord avec les résultats numériques de PANDEY et al. [40, Fig. 5] (reportés en tirets verts), et de ROGHAIR et al. [57, Fig. 6] qui simulent tous deux des essais avec  $\alpha > 1\%$ . Cette tendance ne correspond pas aux résultats expérimentaux de MARTÍNEZ MERCADO et al. [34] à  $\alpha < 1\%$ . Les fluctuations positives de la PDF de la composante verticale de la vitesse des

bulles décroissent beaucoup plus vite que pour une distribution gaussienne alors qu'aucun écart à la gaussienne n'est visible dans la simulation numérique de PANDEY et al. [40] qui simule l'écoulement d'un essaim à 1.7% de fraction volumique, à un nombre de Reynolds  $Re_b = 465$  et d'Atwood  $At = 0.8$  comparables à ceux du cas sB6 (Tab. (4.1)) mais dont le rapport de viscosité est différent de l'unité.

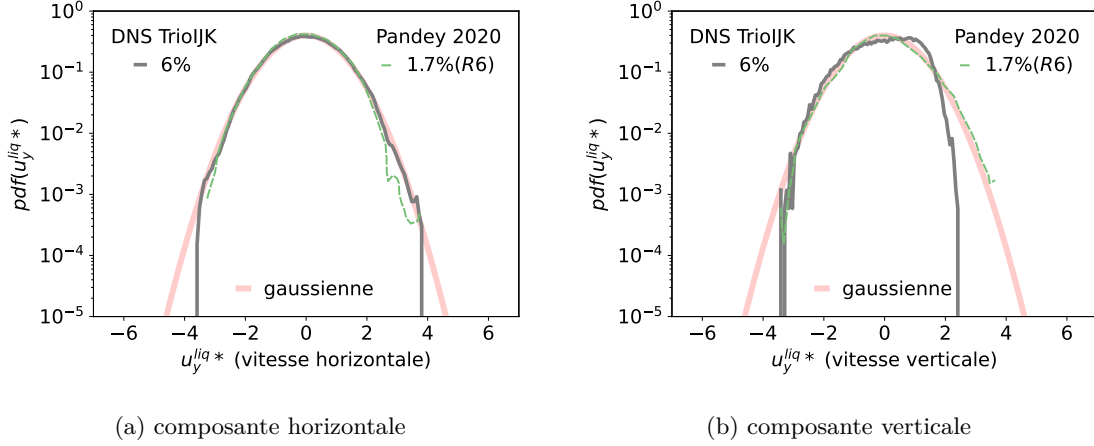


Figure 4.3: Fonction de densité de probabilité des vitesses des bulles centrées et réduites  $u_b^* = (u_b - \langle u_b \rangle) / \sigma(u_b)$  pour les cas sB6 en gris et pour la simulation R6 de PANDEY et al. [40] ( $\alpha = 1.7\%$ ,  $Re_b = 462$ ) en tirets verts.

En résumé, les bulles ont une légère tendance à s'accumuler selon des plans horizontaux et sont réparties de façon homogène dans chaque plan horizontal. Les vitesses horizontales des bulles sont distribuées selon une loi gaussienne, ce qui n'est pas le cas pour leur vitesse verticale. Les quelques différences avec les résultats de la littérature s'expliquent probablement par les différences de paramètres physiques entre les différentes études.

### 4.1.3 Statistiques des phases

Nous nous intéressons maintenant à l'écoulement dans chacune des deux phases. Nous analysons les propriétés des fluctuations dans le liquide et dans le gaz, ce qui permet de distinguer les fluctuations à l'extérieur des bulles de celles à l'intérieur des bulles, ce qui n'est pas visible sur les statistiques de bulles.

#### Instantané des champs de vitesse

Pour commencer, observons sur la figure (4.4a), la composante verticale de la vitesse instantanée  $u_x(\mathbf{x}, t)$  dans le plan  $(x, z)$ , à  $y = 0$  à un instant du régime statistiquement stationnaire et dans le repère du laboratoire, où  $\overline{u_x}^l = 0$ . Les intersections des interfaces des bulles avec ce plan sont marquées en noir. Les zones où la vitesse est nulle sont mises en évidence en gris. Une zone rouge correspond à une vitesse ascendante ( $u_x > 0$ ), une zone bleue correspond à une vitesse descendante ( $u_x < 0$ ). La vitesse du fluide à l'intérieur des bulles, en amont et en aval de celles-ci, est toujours positive. De part et d'autres de ces dernières, la vitesse est négative. Ce champ est donc anisotrope avec la présence de structures allongées, qui manifestent la présence des sillages derrière les bulles. Les plus fortes fluctuations positives dans le liquide surviennent en aval des bulles, dans leur sillage proche, tandis que les plus fortes fluctuations négatives dans le liquide surviennent au voisinage direct des interfaces de bulles, le long de leur périmètre orthogonal à leur vitesse relative, que nous appelons équateur. À noter que les bulles se déplaçant aussi perpendiculairement au plan de la figure (4.4a), un sillage peut être présent dans le plan de coupe sans que la bulle associée ne soit interceptée, et inversement. Pour distinguer facilement les bulles remontant l'essaim des bulles

descendant l'essaim, la figure (4.4b) montre la composante verticale de la vitesse instantanée dans le repère de l'essaim, où  $\overline{u_x^g} = 0$ . Les bulles remontant l'essaim ont une vitesse verticale positive dans la majeure partie de leur volume, avec les zones telles que  $u_x = 0$  (soulignées par le contour gris) à l'extérieur de celles-ci. Les bulles descendant l'essaim ont une vitesse majoritairement négative dans leur volume, avec les zones de vitesse nulle (soulignées par le contour gris) à l'intérieur de celles-ci.

De la même façon, une des composantes horizontales de la vitesse instantanée  $u_z(\mathbf{x}, t)$  est montrée sur la figure (4.5). Notons d'abord qu'à l'inverse de la composante verticale, la répartition des structures de cette composante de vitesse ne semble pas montrer de direction privilégiée. Par ailleurs, l'échelle de couleur nous permet de voir que les fluctuations des vitesses horizontales sont moins marquées que celles des vitesses verticales. Les fluctuations les plus fortes surviennent près des interfaces des bulles. Sans distinguer le signe, les plus fortes fluctuations horizontales sont distribuées le long de deux couronnes perpendiculaires à la gravité, suivant l'interface des bulles. La première est à mi-chemin entre le point amont et l'équateur de la bulle, et la deuxième est à mi-chemin entre le point aval et l'équateur de la bulle.

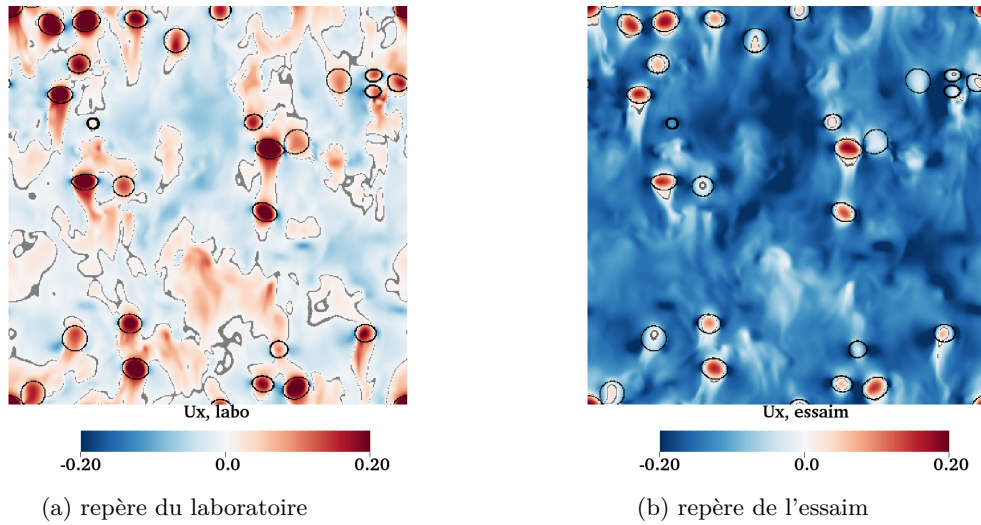


Figure 4.4: Instantané de la composante verticale de la vitesse  $u_x$  dans le plan  $(z, x)$ , à  $t = 205t_b$ . Vitesse verticale dans le repère du laboratoire ( $\overline{u_x^l} = 0$ ) à gauche, et dans le repère de l'essaim ( $\overline{u_x^g} = 0$ ) à droite. Les interfaces des bulles sont en noir. Les zones grises mettent en évidence les vitesses nulles.

Pour observer plus en détail cet instantané de la composante verticale de la vitesse  $u_x(\mathbf{x}, t)$ , la figure (4.6) la montre dans le repère du laboratoire le long du segment vertical  $BD$  (Fig. (4.6b)) et le long du segment horizontal  $AC$  (Fig. (4.6c)). On note clairement que la vitesse  $u_x$  est plus élevée dans les bulles (portions rouges) que dans le liquide (portions bleues). La figure (4.6b) montre que l'écoulement marque bien un point d'arrêt en amont de la première bulle ( $x \approx 3d_b$ ) et que le sillage en aval de celle-ci est bien reproduit ( $0 < x < 2d_b$ ). Le sillage de la deuxième bulle n'est pas relevé, il n'est pas aligné avec le segment  $BD$ . Un zoom de cette figure pour  $-2d_b < x < 4d_b$  se trouve sur la figure (4.7a). La figure (4.6c) montre que la vitesse change de signe à l'intérieur des bulles plutôt qu'à l'extérieur de celles-ci, ce qui signifie qu'il n'y aurait pas de couche limite significative autour des bulles. Un zoom de cette figure pour  $0 < y < 6d_b$  se trouve en figure (4.7b). Soulignons que l'interprétation des vitesses à partir de ces segments est très délicate car elle est sensible à l'endroit où l'on croise les bulles.

### Moments statistiques du champ de vitesse

Après cette description qualitative, faite à partir de quelques champs instantanés, nous passons à l'interprétation des moments statistiques des vitesses de la phase liquide et des vitesses de la phase



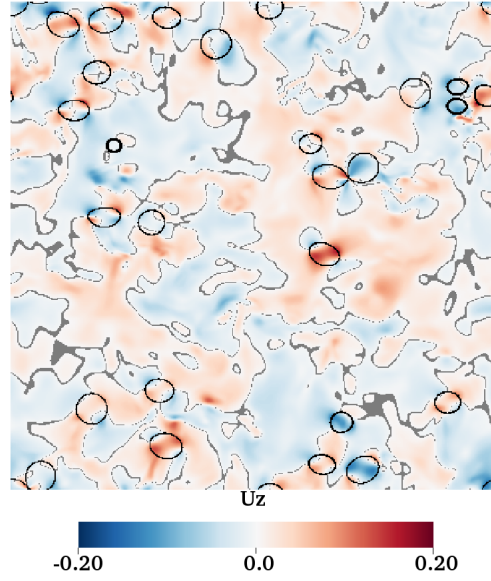


Figure 4.5: Instantané de la composante horizontale de la vitesse  $u_z$  dans le plan  $(z, x)$ . Les interfaces des bulles sont en noir. Les zones grises mettent en évidence les vitesses nulles.

gazeuse.

La variance  $\sigma^2$ , le coefficient de dissymétrie  $\mu_3$  et le coefficient d'aplatissement  $\mu_4$  sont rapportés dans le tableau (4.3). Dans le gaz comme dans le liquide, les rapports d'anisotropie  $\sigma^2(u_{g,x})/\sigma^2(u_{g,y})$  et  $\sigma^2(u_{g,x})/\sigma^2(u_{g,z})$  sont de l'ordre de 2 (voir annexe A.1.1, Eq.(11) pour  $\sigma^2(u_g)$ ). La variance dans le gaz se compose de la variance du mouvement solide des bulles, et de la variance interne du gaz ne participant pas au mouvement des bulles. Cette variance est donc plus élevée que celle des bulles. En effet, la variance de la composante verticale est 3.5 fois plus importante pour les fluctuations dans le gaz  $\sigma^2(u_{g,x})$  que pour la vitesse des bulles  $\sigma^2(u_{b,x})$ , et pour la composante horizontale elle est 1.5 fois plus importante pour les fluctuations dans le gaz  $\sigma^2(u_{g,y})$  que pour les bulles  $\sigma^2(u_{b,z})$ . La variance de la composante verticale de vitesse dans le liquide  $\sigma^2(u_{l,x})$  est légèrement plus faible que pour la vitesse des bulles  $\sigma^2(u_{b,x})$ , et elle est 15 fois plus faible que  $u_r^2$ . Par symétrie de l'écoulement dans la direction horizontale, le coefficient de dissymétrie  $\mu_3$  est nul dans la direction  $z$ . Le coefficient de dissymétrie de la composante verticale de la vitesse  $\mu_3(u_x)$  est positif dans les deux phases et il est d'ordre 1 dans le liquide, alors qu'il est un ordre de grandeur plus faible dans le gaz. Dans la phase gazeuse, le coefficient d'aplatissement  $\mu_4$  des vitesses est proche de 3 tandis qu'il est supérieur à 3 dans la phase liquide : les fluctuations extrêmes des vitesses dans le liquide sont plus probables que pour une distribution gaussienne. En effet, on verra dans les sections suivantes que les PDF des fluctuations de vitesses suivent des tendances exponentielles.

		$\langle u \rangle (m.s^{-1})$	$\sigma^2(u') (m^2.s^{-2})$	$\mu_3$	$\mu_4$
gaz	$u_{g,x}$	0	$6.99 \times 10^{-3}$	$1.06 \times 10^{-1}$	2.55
	$u_{g,y}$	0	$3.19 \times 10^{-3}$	$-6.13 \times 10^{-3}$	3.03
liquide	$u_{l,x}$	-0.132	$1.52 \times 10^{-3}$	1.04	5.57
	$u_{l,y}$	0	$0.79 \times 10^{-3}$	$2.71 \times 10^{-3}$	5.00

Tableau 4.3: Moyenne, variance et moments centrés réduits d'ordres trois et quatre des PDF de vitesses de la phase liquide et de la phase gazeuse. La direction verticale est la direction  $x$ .

L'étude de ces moments statistiques montre que le carré de la vitesse relative  $u_r^2$  est grand devant la variance dans le liquide. La composante verticale de la vitesse porte 2 fois plus d'énergie que la



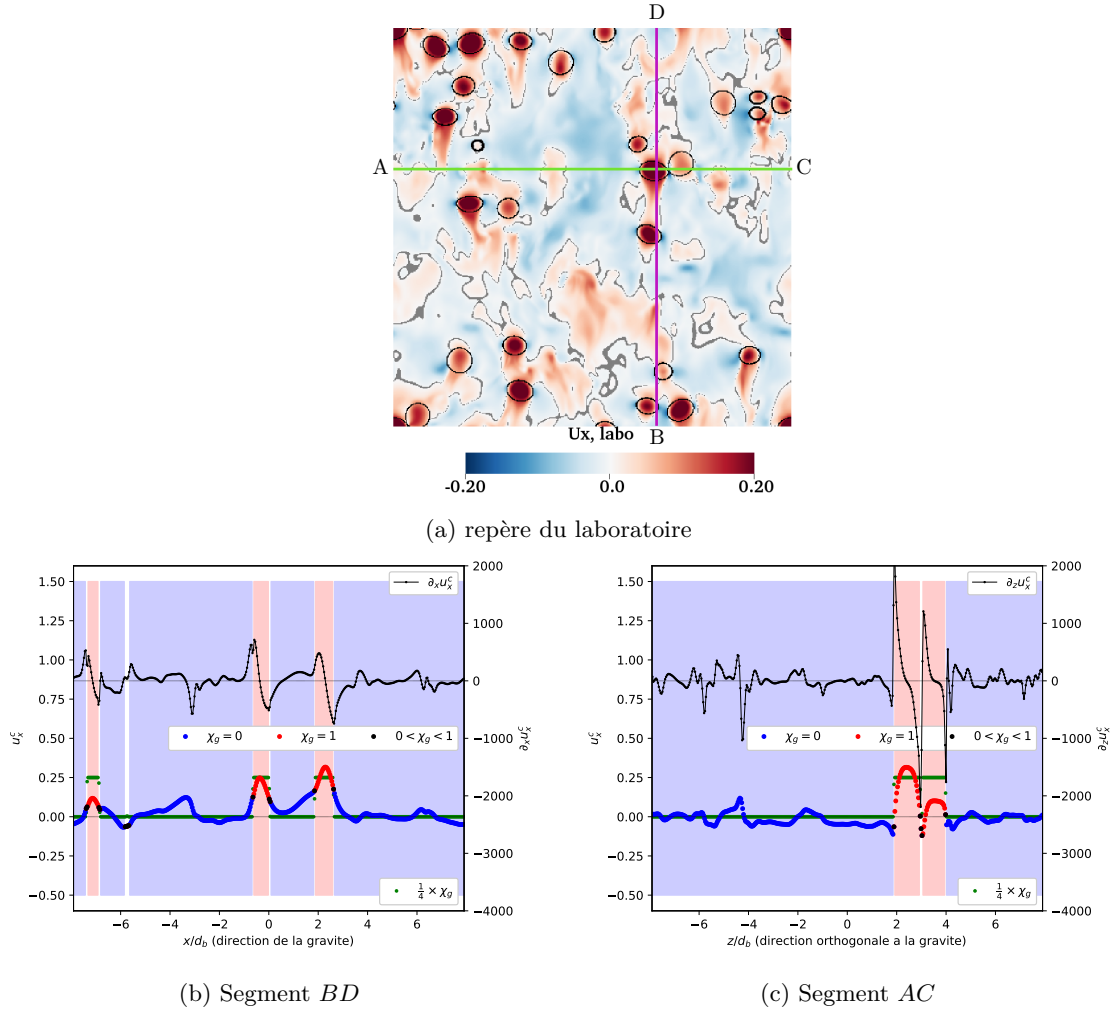


Figure 4.6: Instantané de la vitesse verticale  $u_x$ , à  $t = 205t_b$ , dans le repère du laboratoire ( $\bar{u}^l = 0$ ). Vitesse dans le plan  $(x, z)$ , tel que  $y = 0$  en haut. Les interfaces des bulles sont en noir. Les zones grises mettent en évidence les vitesses nulles. Vitesse  $u_x$ , et dérivée  $\partial_x u_x$  de cette vitesse le long du segment  $BD$  à gauche. Vitesse  $u_x$ , et dérivée  $\partial_z u_x$  de cette vitesse le long du segment  $AC$  à droite. La vitesse le long des segments  $AC$  et  $BD$  est colorée par l'indicatrice de phase (rouge dans le gaz, bleu dans le liquide). Les dérivées de la vitesse sont en noir et se lisent sur l'axe de droite.

composante horizontale de la vitesse. Cette étude montre aussi que la composante horizontale de la vitesse dans la phase gazeuse est proche d'une distribution gaussienne, ce qui n'est pas le cas dans la phase liquide, dans laquelle les fluctuations extrêmes des vitesses sont beaucoup plus probables que pour une distribution gaussienne, et les fluctuations de la composante verticale de la vitesse ne sont pas symétriques.

### Fonctions de densité de probabilité

Les figures (4.8a) et (4.8b) comparent les PDF des vitesses des bulles et des vitesses dans le gaz, pour les composantes verticale et horizontale de la vitesse, respectivement. Ces PDF sont présentées en échelle semi-logarithmique, pour amplifier les écarts des fluctuations aux faibles probabilités. Notons sur la figure (4.8a) que les fluctuations positives dans le gaz sont légèrement plus probables que les fluctuations négatives, en accord avec le coefficient  $\mu_3(u_{g,x})$  positif, relevé au tableau (4.3). De plus, la figure (4.8a) montre que les PDF des vitesses dans le gaz diffèrent de celles des bulles, pour les fluctuations telles que  $0 < u_x^* < 3$ . La figure (4.8b) montre que la composante horizontale

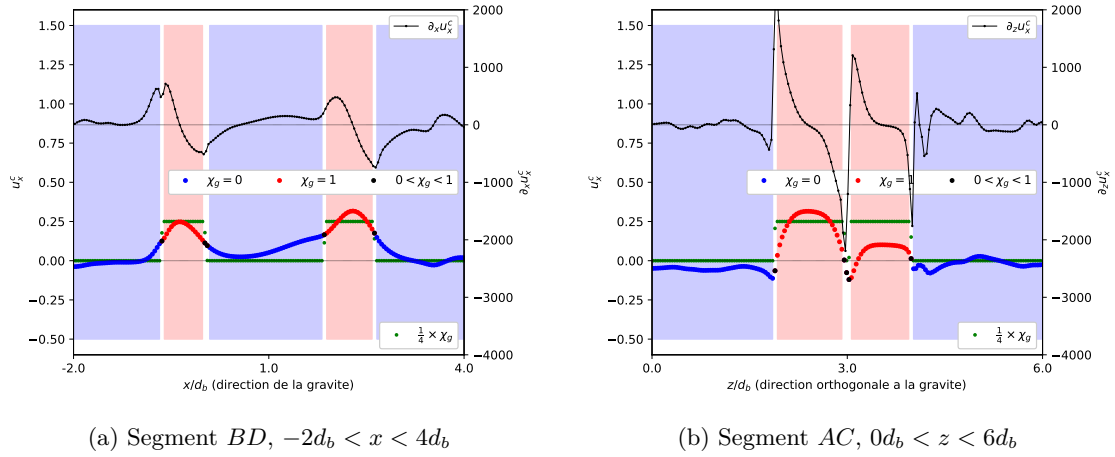


Figure 4.7: Instantané de la vitesse verticale  $u_x$  et des dérivées  $\partial_x u_x$  et  $\partial_z u_x$ , à  $t = 205t_b$ , dans le repère du laboratoire ( $\bar{u}^l = 0$ ). Vitesse  $u_x$ , et dérivée  $\partial_x u_x$  de cette vitesse le long du segment vertical  $BD$  à gauche. Vitesse  $u_x$ , et dérivée  $\partial_z u_x$  de cette vitesse le long du segment horizontale  $AC$  à droite. La vitesse le long des segments  $AC$  et  $BD$  est colorée par l'indicatrice de phase (rouge dans le gaz, bleu dans le liquide). Les dérivées de la vitesse sont en noir et se lisent sur l'axe de droite.

de la vitesse dans la phase gazeuse  $u_y^{g*}$  (rouge) comme celle des vitesses des bulles  $u_y^{b*}$  (gris), suit une loi normale (vert clair), en accord avec les résultats numériques de PANDEY et al. [40]. On notera un très léger écart pour les fluctuations extrêmes, qui sont très peu probables.

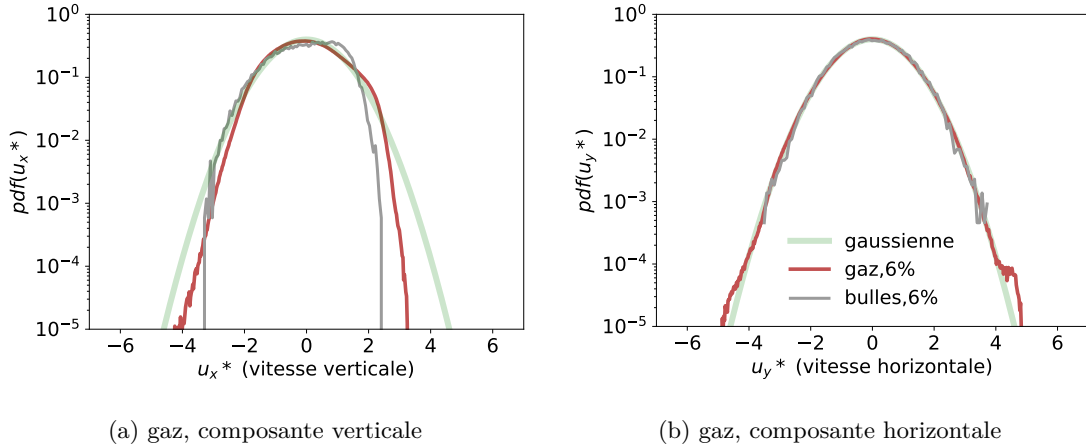


Figure 4.8: Fonctions de densité de probabilité des vitesses centrées et réduites de la phase gazeuse  $u_g^*$  pour la simulation de référence sB6.

Contrairement aux PDF des vitesses des bulles et des vitesses dans le gaz, les PDF des vitesses centrées réduites du liquide,  $u_{l,x}^*$  et  $u_{l,y}^*$ , qui sont tracées sur les figures (4.9a) et (4.9b), montrent des tendances exponentielles. La figure (4.9a) montre clairement que les fluctuations de la composante horizontale (en trait bleu) sont symétriques, et suivent une tendance exponentielle  $e^{-a|u_y^*|}$  (trait rouge), ce qui est en accord avec les observations expérimentales de RIBOUX et al. [48] (tirets verts). Comme souligné précédemment (Sec. 4.1.3), les plus fortes fluctuations du champ de la composante horizontale de la vitesse surviennent le long des couronnes perpendiculaires à la gravité qui se situent à mi-chemin entre l'amont de la bulle et son équateur, et à mi-chemin entre l'aval de la bulle et son équateur. Ces fortes fluctuations confinées au voisinage direct des bulles correspondent aux perturbations de vitesse dues à l'écoulement potentiel autour des bulles et se manifestent via la tendance exponentielle des plus fortes fluctuations, c'est-à-dire pour  $|u_{l,y}^*| > 4$  sur la figure (4.9a)

RISSE [51]. La partie centrale des PDF, c'est-à-dire pour  $|u_{l,y}^*| < 4$  est attribuée à la turbulence produite par les interactions entre les sillages (BIT) LE ROY DE BONNEVILLE [29] et RISSE [51, p.75]. Les fluctuations de la composante verticale de la vitesse de la phase liquide ne sont pas symétriques et suivent différentes tendances exponentielles, comme le montre la figure (4.9b). Une fois de plus, les fluctuations de vitesse les plus fortes surviennent au voisinage direct des interfaces de bulles (Sec. 4.1.3), et sont concentrées à l'équateur des bulles (périmètre perpendiculaire à la gravité), là où l'écoulement autour des bulles est proche de la solution potentielle. Ainsi, les fluctuations négatives les plus fortes sont attribuées à l'écoulement potentiel autour de bulles, en accord avec RISSE [51]. Les travaux de RIBOUX et al. [47], AMOURA et al. [2] et RISSE [51] permettent d'attribuer les zones d'évolutions exponentielles pour  $0 < u_{l,x}^* < 4$  (pente rose et pente jaune) à la perturbation de vitesse provoquée par le passage des sillages derrière les bulles. Les fluctuations positives plus fortes (pente marron) correspondent à des événements très rares.

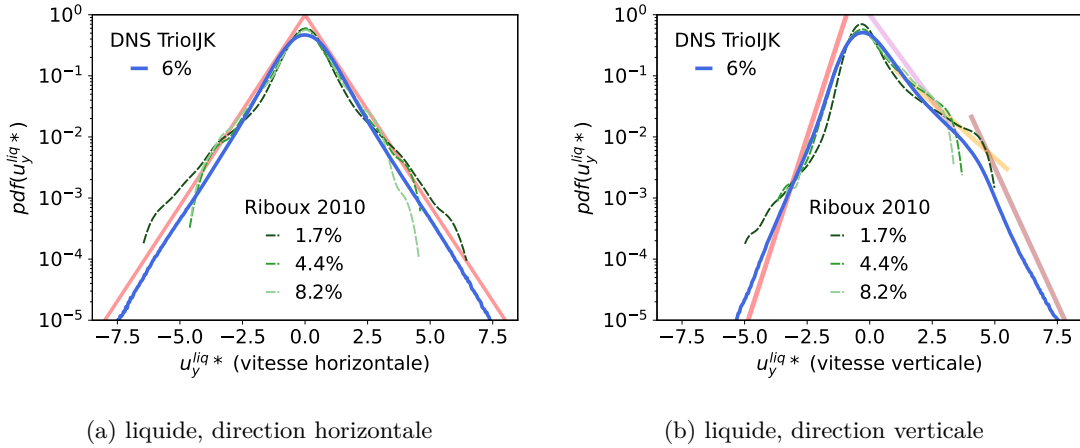


Figure 4.9: Fonctions de densité de probabilité des vitesses centrées et réduites de la phase liquide  $u_l^*$  pour la simulation de référence sB6 ( $\alpha = 6\%$ ) en bleu et pour les résultats expérimentaux de RIBOUX et al. [48] en tirets vert. Les pentes en rouge, jaune, rose et marron en traits pleins et épais marquent les tendances exponentielles suivies par les PDF.

Nous nous intéressons maintenant aux statistiques des fluctuations de vitesse du mélange, c'est-à-dire sans distinguer la phase dans laquelle est relevée la vitesse, comme définie comme en annexe A.1.1, Eq. (19) :

$$PDF(u) = (1 - \alpha)PDF_l(u_l) + \alpha PDF_g(u_g), \quad (4.4)$$

avec  $PDF_l$  la PDF des fluctuations dans la phase liquide et  $PDF_g$  celle des fluctuations de vitesse dans la phase gazeuse. La moyenne est donnée par :

$$\langle u_x \rangle = \alpha u_r + \langle u_{l,x} \rangle, \text{ direction verticale}, \quad (4.5)$$

$$\langle u_y \rangle = \alpha \langle u_g \rangle + (1 - \alpha) \langle u_l \rangle = 0, \text{ direction horizontale}, \quad (4.6)$$

$$(4.7)$$

la variance par :

$$\sigma^2(u_x) = \alpha(1 - \alpha)u_r^2 + \alpha\sigma^2(u_g) + (1 - \alpha)\sigma^2(u_l), \text{ direction verticale}, \quad (4.8)$$

$$\sigma^2(u_y) = \alpha\sigma^2(u_g) + (1 - \alpha)\sigma^2(u_l), \text{ direction horizontale}, \quad (4.9)$$

et le coefficient de dissymétrie  $\mu_3$  comme le coefficient d'aplatissement  $\mu_4$  s'expriment aussi comme des combinaisons de la vitesse relative, des variances et des moments centrés d'ordre 3 et 4 de chaque phase. Les valeurs de ces moments, qui sont reportés dans le tableau (4.4), montrent que la variance  $\sigma^2$  et le coefficient d'aplatissement  $\mu_4$  pour le mélange est plus élevé que pour la phase liquide, quelle que soit la composante de vitesse. Ce tableau montre aussi que l'anisotropie des variances

		$\langle u \rangle (m.s^{-1})$	$\sigma^2(u') (m^2.s^{-2})$	$\mu_3$	$\mu_4$
mélange	$u_x$	-0.124	$2.84 \times 10^{-3}$	1.99	9.17
	$u_y$	0	$9.31 \times 10^{-4}$	$-7.13 \times 10^{-4}$	5.49

Tableau 4.4: Moyenne, variance et moments centrés réduits d'ordres 3 et 4 des PDF de vitesses du mélange. La direction verticale est la direction  $x$ .

$\sigma^2(u_x)/\sigma^2(u_y)$  pour le mélange vaut trois, alors que pour la phase liquide ou pour la phase gazeuse séparément, ce rapport n'est que de deux. Le coefficient de dissymétrie de la composante verticale de vitesse est aussi plus élevé pour le mélange que pour chacune des deux phases séparément.

Nous nous intéressons maintenant à la fonction de densité de probabilité des fluctuations de vitesses centrées et réduites du mélange  $u^*$ . La figure (4.10a) représente en violet la PDF de la composante horizontale de la vitesse du mélange  $u_y^* = (u_y - \langle u_y \rangle) / \sigma(u_y)$ . À des fins de comparaisons, la PDF pondérée pour le liquide  $(1 - \alpha)PDF_l(u_y^*)$  et la PDF pondérée pour le gaz  $\alpha PDF_g(u_y^*)$  sont tracées en bleu et en rouge respectivement. Il faut bien noter que pour les tracés de  $PDF_l(u_y^*)$  et  $PDF_g(u_y^*)$ , la vitesse  $u_y$  est normée par l'écart-type du mélange, non pas celui du liquide ni du gaz. La figure (4.10a) montre que les fluctuations horizontales du mélange sont totalement dominées par celles de la phase liquide. De la même façon, la figure (4.10b) représente la PDF des vitesses verticales centrées réduites du mélange  $u_x^* = (u_x - \langle u_x \rangle) / \sigma(u_x)$ , et les PDF pondérées pour les deux phases. La vitesse relative entre les deux phases est clairement mise en évidence par le décalage en abscisses entre les PDF pondérées pour le liquide (bleu) et pour le gaz (rouge). Cette figure montre aussi que les fluctuations du mélange sont dominées par celles de la phase liquide pour des fluctuations  $u_x^*$  inférieures à 1 : les PDFs des fluctuations de la vitesse du mélange et de la phase liquide sont superposées pour les fluctuations verticales inférieures à 1. À l'opposé, les fortes fluctuations positives verticales pour le mélange sont dominées par celles de la phase gazeuse, pour  $u_x^* > 4$ . Soulignons que pour  $1 < u_x^* < 6$  nous retrouvons une évolution exponentielle de la PDF, qui n'est pas directement attribuable aux sillages attachés aux bulles, contrairement aux PDF verticales de la phase liquide, mais qui résulte de la somme pondérée des effets du liquide et du gaz pour  $1 < u_x^* < 3$  puis qui résulte uniquement de la dynamique du gaz pour  $3 < u_x^* < 6$ .

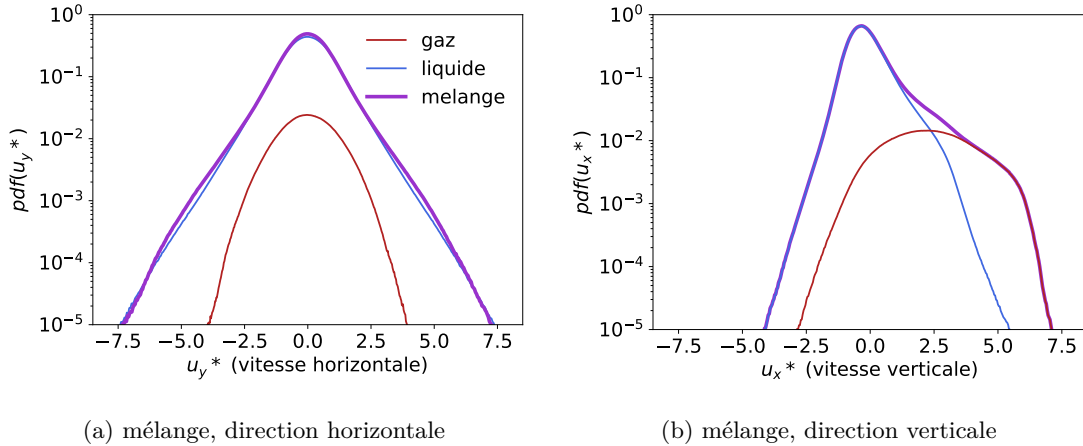


Figure 4.10: Fonctions de densité de probabilité des vitesses centrées et réduites  $u^*$  pour la simulation de référence sB6 d'un essaim de bulles, sans forçage, à 6% de taux de vide, sur le domaine de côté  $L = 16d_b$ , maille de côté  $\Delta x = d_b/28$ .

En résumé, la composante horizontale des fluctuations de vitesse est symétrique pour les deux phases et montre un comportement exponentiel aux fortes fluctuations dans la phase liquide et un comportement gaussien dans la phase gazeuse. Ce comportement exponentiel témoigne de l'écoulement potentiel autour des bulles. La PDF des fluctuations de la composante horizontale

de la vitesse est totalement dominée par celle des vitesses liquides. La composante verticale des fluctuations de vitesse dans le gaz est légèrement asymétrique avec des fluctuations positives légèrement plus probables que les fluctuations négatives et elle est très asymétrique dans le liquide avec des fluctuations positives beaucoup plus probables que les fluctuations négatives. Les différentes pentes exponentielles témoignent, pour la phase liquide, de l'écoulement potentiel proche des bulles, de la turbulence et du développement de leur sillage en aval.

#### 4.1.4 Analyse dans le plan spectral

Nous nous intéressons désormais aux statistiques spectrales de l'énergie cinétique. Dans ce qui suit, nous détaillons d'abord les spectres 1D de l'énergie cinétique (voir annexe A.1.2), pour ensuite nous intéresser au spectre 3D de l'énergie cinétique. Enfin, nous étudierons la décomposition spectrale du bilan d'énergie cinétique (voir annexe A.1.2). Ici, la transformée de Fourier de la quantité  $q$  est notée  $\hat{q}$  et  $\hat{q}^*$  est son complexe conjugué.

#### Spectres d'énergie

Comparons dans un premier temps les spectres unidirectionnels  $S_{ii}(\kappa_j)$  du champ de vitesse pour la simulation de référence. Pour rappel, le spectre unidirectionnel  $S_{ii}(\kappa_j)$  est obtenu en intégrant la densité spectrale d'énergie

$$E_{ii}(\boldsymbol{\kappa}) = \hat{u}_i \cdot \hat{u}_i^* \quad (4.10)$$

sur le plan perpendiculaire à la direction  $j$ . C'est-à-dire que les spectres unidirectionnels de la composante verticale de la vitesse dans les directions horizontales  $\mathcal{S}_{xx}(\kappa_y)$  et  $\mathcal{S}_{xx}(\kappa_z)$  s'écrivent :

$$\mathcal{S}_{xx}(\kappa_y) = \iint E_{xx}(\boldsymbol{\kappa}) d\kappa_x d\kappa_z, \quad (4.11)$$

$$\mathcal{S}_{xx}(\kappa_z) = \iint E_{xx}(\boldsymbol{\kappa}) d\kappa_x d\kappa_y, \quad (4.12)$$

et le spectre de la composante verticale de la vitesse dans la direction verticale s'écrit :

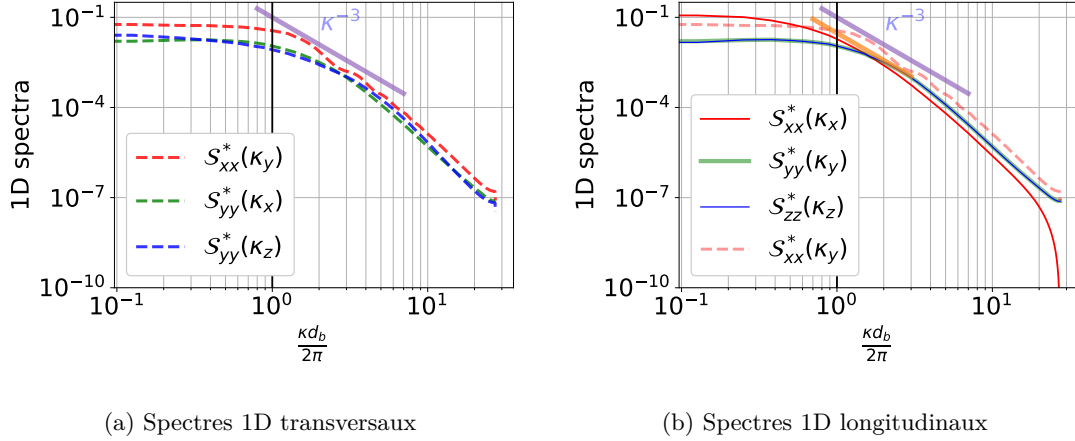
$$\mathcal{S}_{xx}(\kappa_x) = \iint E_{xx}(\boldsymbol{\kappa}) d\kappa_y d\kappa_z. \quad (4.13)$$

Les spectres 1D  $\mathcal{S}_{ii}(\kappa_j)$  sont appelés spectres transverses si  $i \neq j$ , et sont appelés spectres longitudinaux si  $i = j$ . Soulignons que les spectres sont calculés à partir du champ de vitesse du mélange. Remarquons que  $\int \mathcal{S}_{ii}(\kappa_j) d\kappa_j$  est égal à la variance de la composante  $i$  de la vitesse du mélange,  $\sigma^2(u_i)$ . Dans la suite, nous considérons des spectres normalisés de cette façon :  $S_{ii}^*(\kappa_j) = \kappa_b \mathcal{S}_{ii}(\kappa_j) / \sigma^2(u)$ , où  $\sigma^2(u) = \sigma^2(u_x) + \sigma^2(u_y) + \sigma^2(u_z)$  est la variance des fluctuations de vitesse du mélange (et  $\frac{1}{2}\sigma^2(u) = k$  est l'énergie cinétique par unité de masse du mélange) et  $\kappa_b = \frac{2\pi}{d_b}$  est le nombre d'onde associé au diamètre de bulle. Les directions  $y$  et  $z$  sont symétriques pour notre écoulement, donc les spectres  $\mathcal{S}_{ii}^*(\kappa_y)$  et  $\mathcal{S}_{ii}^*(\kappa_z)$  sont égaux.

La figure (4.11a) montre l'évolution des spectres transverses. On y voit que le spectre transverse de la composante verticale de la vitesse  $\mathcal{S}_{xx}^*(\kappa_y)$ , en rouge, a toujours une amplitude supérieure à celle des spectres transverses des composantes horizontales de vitesse  $\mathcal{S}_{yy}^*(\kappa_x)$  et  $\mathcal{S}_{yy}^*(\kappa_z)$ , en vert et en bleu respectivement. Le spectre transverse de la composante verticale de la vitesse  $\mathcal{S}_{xx}^*(\kappa_x)$  montre une évolution proportionnelle à  $\kappa^{-3}$  pour  $1\kappa_b \leq \kappa \leq 4\kappa_b$  (trait épais violet). La figure (4.11b) montre l'évolution des spectres longitudinaux et reporte  $\mathcal{S}_{xx}^*(\kappa_y)$ . Pour les nombres d'ondes supérieurs à  $\kappa_b$ , les spectres longitudinaux sont dominés par le spectre transverse  $\mathcal{S}_{xx}^*(\kappa_y)$  (tirets rouges claires). Les quatre spectres montrent un plateau aux grandes échelles ( $\kappa < 0.2\kappa_b$ ) dont la valeur est plus élevée pour les spectres de la composante verticale de la vitesse  $\mathcal{S}_{xx}^*(\kappa_x)$  et  $\mathcal{S}_{xx}^*(\kappa_y)$  (rouge) que pour ceux des composantes horizontales  $\mathcal{S}_{yy}^*(\kappa_y)$  et  $\mathcal{S}_{zz}^*(\kappa_z)$ , (vert et bleu

respectivement). Le spectre longitudinal de la composante verticale de la vitesse  $\mathcal{S}_{xx}^*(\kappa_x)$  montre une plage d'évolution proportionnelle à  $\kappa^{-3}$  pour  $0.8\kappa_b < \kappa < 2\kappa_b$  (trait épais orange).

Les figures (4.11a) et (4.11b) montrent ainsi qu'aux grandes échelles l'écoulement est anisotrope, avec la majeure partie de l'énergie qui est portée par la composante verticale de la vitesse, tandis qu'aux petites échelles ( $\kappa > 2\kappa_b$ ) cet écart se réduit, l'écoulement devient plus isotrope. Le spectre longitudinal de la composante verticale de la vitesse  $\mathcal{S}_{xx}^*(\kappa_x)$  montre une évolution proportionnelle à  $\kappa^{-3}$  pour des échelles plus grandes et sur une gamme plus courte de nombres d'ondes que pour le spectre transverse de la composante verticale de la vitesse  $\mathcal{S}_{xx}^*(\kappa_y)$ .



(a) Spectres 1D transversaux

(b) Spectres 1D longitudinaux

Figure 4.11: Spectres 1D de la vitesse pour la simulation de référence sB6. Les spectres de la composante verticale de la vitesse  $u_x$  sont en rouge, les spectres des composantes horizontales de vitesse  $u_y$  et  $u_z$  sont en vert et en bleu respectivement. Les spectres longitudinaux sont en trait plein, les spectres transverses sont en traits discontinus.

Intéressons-nous maintenant au spectre 3D de l'énergie cinétique  $\mathcal{S}$ . Pour rappel, ce spectre s'obtient en sommant les densités spectrales  $E_{xx}$ ,  $E_{yy}$  et  $E_{zz}$  calculées à partir du champ de vitesse du mélange et en les intégrant sur des coquilles sphériques de rayon  $\kappa = |\boldsymbol{\kappa}|$  :

$$\mathcal{S}(\kappa) = \oint_{\kappa=|\boldsymbol{\kappa}|} \frac{1}{2} (E_{xx} + E_{yy} + E_{zz}) d^2\boldsymbol{\kappa}. \quad (4.14)$$

Dans la suite, nous considérons le spectre normalisé de la même façon que les spectres 1D.

La figure (4.12) montre la partie régulière du spectre 3D de l'énergie cinétique  $\mathcal{S}_r(\kappa)$ , tel qu'introduit au chapitre précédent, (figure (14d)). La pente  $\kappa^{-3}$  est reportée en rouge. Le spectre 3D  $\mathcal{S}^*(\kappa)$  atteint son maximum pour des nombres d'ondes de l'ordre de  $0.7\kappa_b$  et montre une décroissance proportionnelle à  $\kappa^{-3}$  pour des nombres d'ondes allant jusqu'à  $4\kappa_b$ .

### Représentation spectrale du bilan d'énergie

Intéressons-nous maintenant aux mécanismes qui dictent la répartition spectrale de l'énergie cinétique. Pour comprendre sa dynamique, nous allons analyser les termes de son bilan, introduit dans la section A.1.2.

Pour rappel, nous considérons d'abord la transformée de Fourier des équations de Navier-Stokes,

$$\widehat{\rho D_t \mathbf{u}} = -\widehat{\mathbf{grad}(p)} + 2\mu \widehat{\mathbf{div}(S_{ij})} + \widehat{\rho \mathbf{g}} + \widehat{\mathbf{f}_\sigma}, \quad (4.15)$$

multipliée par le conjugué de la transformée de Fourier du champ de vitesse :

$$\widehat{\mathbf{u}}^* \cdot \widehat{\rho D_t \mathbf{u}} = -\widehat{\mathbf{u}}^* \cdot \widehat{\mathbf{grad}(p)} + 2\mu \widehat{\mathbf{u}}^* \cdot \widehat{\mathbf{div}(S_{ij})} + \widehat{\mathbf{u}}^* \cdot \widehat{\rho \mathbf{g}} + \widehat{\mathbf{u}}^* \cdot \widehat{\mathbf{f}_\sigma}, \quad (4.16)$$

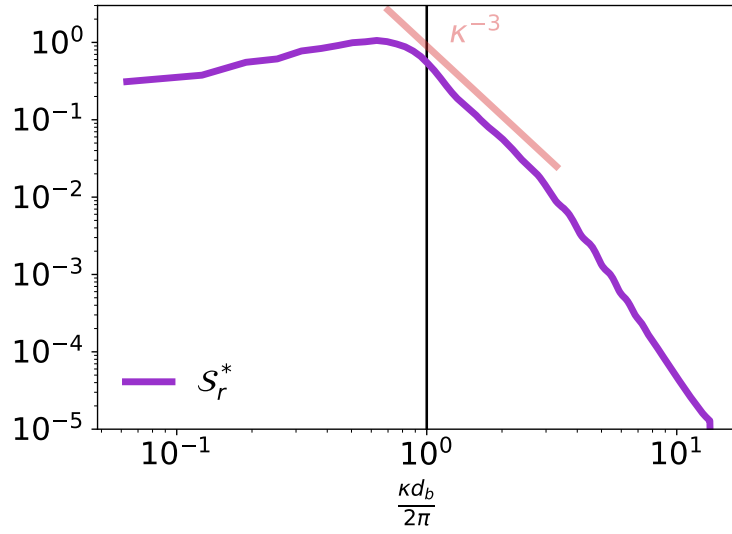


Figure 4.12: Partie régulière du spectre 3D de la vitesse pour la simulation de référence sB6.

ce qui nous donne une équation d'évolution d'une densité spectrale d'énergie cinétique par unité de volume. Les termes de cette équation sont fonction du vecteur d'onde  $\boldsymbol{\kappa}$ . Chaque terme de cette équation est intégré sur la sphère de rayon  $\kappa = |\boldsymbol{\kappa}|$  pour obtenir la représentation spectrale choisie et ne dépendant donc plus que du module  $\kappa$  de  $\boldsymbol{\kappa}$ . Cette équation s'écrit :

$$0 = Int(\kappa) + Prs(\kappa) + Dsp(\kappa) + Grv(\kappa) + W_\sigma(\kappa), \quad (4.17)$$

Avec :

- $Int(\kappa) = - \oint_{\kappa=|\boldsymbol{\kappa}|} (\widehat{\mathbf{u}}^* \cdot \widehat{\rho D_t \mathbf{u}}) d^2 \kappa$  le terme d'inertie qui se décompose en une partie instationnaire  $Inst(\kappa) = - \oint_{\kappa=|\boldsymbol{\kappa}|} (\widehat{\mathbf{u}}^* \cdot \widehat{\rho \partial_t \mathbf{u}}) d^2 \kappa$  (soigneusement calculée selon les conclusions de la section 2.4) et une partie d'advection  $Adv = - \oint_{\kappa=|\boldsymbol{\kappa}|} (\widehat{\mathbf{u}}^* \cdot \widehat{\rho \mathbf{div}(\mathbf{u}\mathbf{u})}) d^2 \kappa$ ;
- $Prs(\kappa) = - \oint_{\kappa=|\boldsymbol{\kappa}|} (\widehat{\mathbf{u}}^* \cdot \widehat{\mathbf{grad}(p)}) d^2 \kappa$  le terme de pression;
- $Dsp(\kappa) = 2\mu \oint_{\kappa=|\boldsymbol{\kappa}|} (\widehat{\mathbf{u}}^* \cdot \widehat{\mathbf{div}(S_{ij})}) d^2 \kappa$  le terme de diffusion visqueuse;
- $Grv(\kappa) = \oint_{\kappa=|\boldsymbol{\kappa}|} (\widehat{\mathbf{u}}^* \cdot \widehat{(\rho - \rho_m) \mathbf{g}}) d^2 \kappa$  le terme de flottabilité et
- $W_\sigma(\kappa) = \oint_{\kappa=|\boldsymbol{\kappa}|} (\widehat{\mathbf{u}}^* \cdot \widehat{\mathbf{f}_\sigma}) d^2 \kappa$  le terme d'interface.

Remarquons qu'en intégrant encore une fois selon  $d\kappa$  on obtient des termes homogènes à des puissances volumiques. De plus, en utilisant le théorème de Plancherel il est possible d'établir une correspondance entre les intégrales des termes de (4.17) selon  $d\kappa$  et les intégrales sur le volume des termes du bilan d'énergie cinétique dans le domaine physique

$$\mathbf{u} \cdot D_t \rho \mathbf{u} = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}(p) + 2\mu \mathbf{u} \cdot \mathbf{div}(S_{ij}) + \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{g} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_\sigma, \quad (4.18)$$

Ainsi,  $\int Dsp(\kappa) d\kappa$  est égal à  $\iiint_{\mathcal{V}} 2\mu \mathbf{u} \cdot \mathbf{div}(S_{ij}) d^3 x$ , ce qui correspond à la puissance volumique dissipée par la viscosité, ou taux de dissipation sur tout le volume  $\varepsilon \times \mathcal{V}$ .  $\int Grv(\kappa) d\kappa$  est égal à  $\iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{u} \cdot (\rho - \rho_m) \mathbf{g} d^3 x$ , ce qui correspond à la puissance volumique produite par la flottabilité  $\mathcal{P}_G$ . Par ailleurs, les intégrales des termes d'interfaces  $W_\sigma(\kappa)$ , de pression  $Prs(\kappa)$  et d'inertie  $Int(\kappa)$  sont nulles, car elles contribuent uniquement à une redistribution de l'énergie au sein du système,



pas à un échange avec l'extérieur. Ces trois termes correspondent à des transferts d'énergie entre les échelles. En accord avec le chapitre précédent, un filtre exponentiel  $e^{-(\kappa/\kappa_c)^n}$ , avec  $\kappa_c = 1.4\kappa_b$  et  $n = 8$ , est utilisé pour corriger le terme de flottabilité  $Grv$ , qui permet de corriger à son tour le terme de dissipation  $Dsp$ , pour ainsi étudier uniquement la partie régulière de ces termes,  $Dsp_r$  et  $Grv_r$ , respectivement. Dans ce qui suit, les termes sont adimensionnés en les multipliant par  $\frac{2\pi}{d_b} / \int Grv_r(\kappa) d\kappa$ , ces termes sont marqués d'une étoile en exposant :  $Grv^*$ ,  $Dsp^*$ ,  $Trs^*$  ...

Analysons maintenant la répartition spectrale des termes de l'équation (4.17), pour la simulation de référence sB6. La figure (4.13a) présente, en fonction du nombre d'onde adimensionnel  $\frac{\kappa d_b}{2\pi}$ , l'évolution de la partie régulière du terme de production par la flottabilité  $Grv_r^*$ , du terme de dissipation  $Dsp_r^*$  et de leur somme, qui sont tous d'amplitude très faible à partir de  $\kappa = 5\kappa_b$ . Pour mettre en évidence les nombres d'ondes plus grands que  $5\kappa_b$ , nous choisissons de représenter sur la figure (4.13b) ces termes, multipliés par  $\frac{\kappa d_b}{2\pi}$ , en échelle logarithmique pour les abscisses et en échelle linéaire pour les ordonnées<sup>2</sup>. Pour les nombres d'ondes inférieurs à  $0.5\kappa_b$  la somme (orange) est dominée par le terme de flottabilité  $Grv_r^*$  (vert) et, à partir de  $\kappa = 0.2\kappa_b$ , la flottabilité ne produit plus d'énergie et la somme est entièrement déterminée par le terme de dissipation (bleu). Par ailleurs, les termes de production et de dissipation, sont très faibles pour les nombres d'ondes plus petits que  $0.11\kappa_b$ . Le terme de flottabilité  $Grv_r^*$  est positif à toutes les échelles, et il est principalement concentré entre  $0.1\kappa_b$  et  $1.2\kappa_b$ , le terme de dissipation est négatif pour tous les nombres d'ondes. Malgré un léger décalage, il est intéressant de constater que le maximum de production et le minimum de dissipation ont lieu tous deux près de  $\kappa = \kappa_b$ . La figure (4.13) montre qu'en BIA, l'énergie cinétique est entièrement produite aux échelles proches du diamètre de bulle, que cette énergie est fortement dissipée pour des échelles légèrement plus petites, est que cette dissipation se poursuit jusqu'aux échelles dix fois plus petites que la taille de bulle.

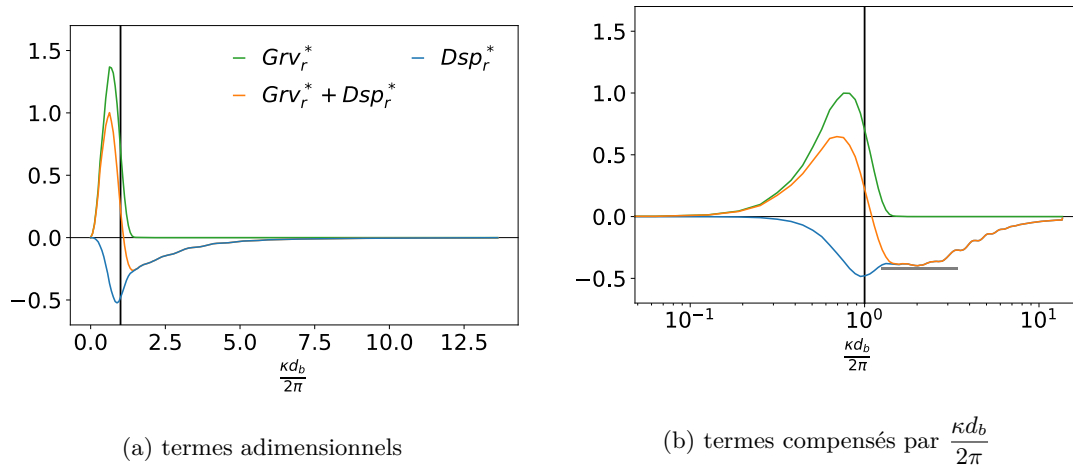


Figure 4.13: ■ : partie régulière du terme de production par la flottabilité  $Grv_r$ , ■ : partie régulière du terme de dissipation  $Dsp_r$ , pour la simulation de référence sB6. Leur somme est en orange ■.

Intéressons-nous maintenant aux termes de transferts  $Prs$ ,  $W_\sigma$ . Comme expliqué au chapitre 3, le terme de transfert par la pression  $Prs$  et le terme de transfert par les forces interfaciales  $W_\sigma$  sont les deux seuls termes à présenter une discontinuité de type Dirac ( $p = -1$ ), en sommant ces termes ce type de discontinuité doit donc disparaître. La figure (4.14a) montre que jusqu'à  $\kappa = 5\kappa_b$  au moins, le terme de pression  $Prs^*$  (rouge) est négligeable devant le terme d'interfaces  $W_\sigma^*$  (marron). On voit de plus que le terme  $W_\sigma^*$  oscille autour de zéro, en étant d'abord négatif ou nul pour  $\kappa < \kappa_b$ , qu'il s'annule à  $\kappa = \kappa_b$  puis qu'il devient positif pour  $\kappa_b < \kappa < 1.3\kappa_b$ . Une fois de plus, pour  $\kappa > 5\kappa_b$ , les deux termes tracés en figure (4.14a) sont d'amplitudes très faibles. Ainsi, nous

<sup>2</sup>En échelle semi-logarithmique nous préférons représenter les termes multipliés par le nombre d'onde adimensionnel  $\frac{\kappa d_b}{2\pi}$  ce qui permet de conserver les aires sous les courbes.



choisissons aussi de représenter ces termes, multipliés par  $\frac{\kappa d_b}{2\pi}$ , en échelle semi-logarithmique, sur la figure (4.14b). Cette figure montre bien que le terme d'interface est nul pour les nombres d'ondes inférieurs à  $0.2\kappa_b$  et que le terme de pression  $Prs^*$  est très faible pour tous les nombres d'ondes inférieurs à  $2\kappa_b$ . Les oscillations de ces deux termes ne se compensent qu'à partir de  $\kappa = 5\kappa_b$ , et leur somme tend vers zéro aux grands nombres d'ondes, alors que chacun pris indépendamment reste non nul. Ainsi, la figure (4.14) montre que le travail des interfaces des bulles puise de l'énergie aux échelles plus grandes que la taille de bulle, la restituant aux échelles plus petites. Le travail des forces de pression n'existe qu'aux petites échelles, permettant de régulariser la singularité de type Dirac causée par la force interfaciale.

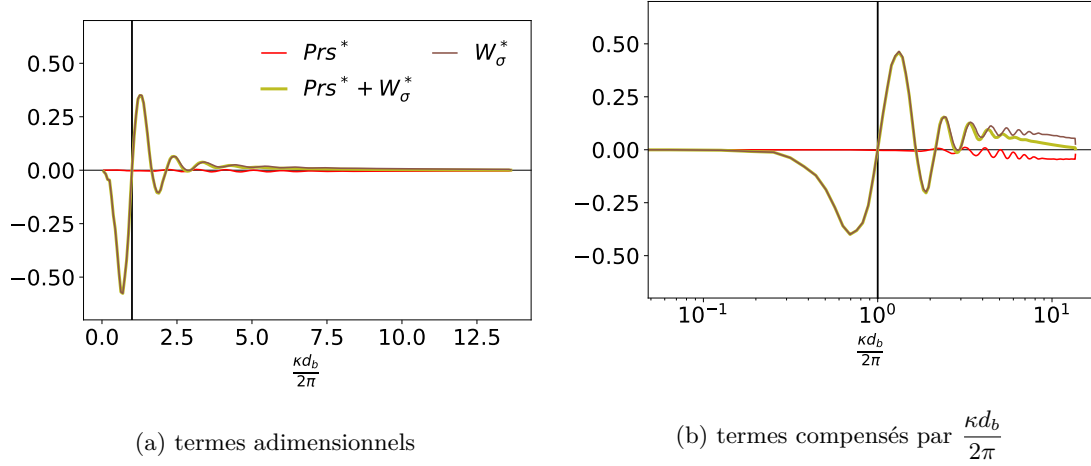


Figure 4.14: ■ : terme de transfert par la pression  $Prs$ ; ■ : terme de transfert par les interfaces  $W_\sigma$  pour la simulation de référence sB6. ■ : somme de ces termes.

Le dernier terme de transfert de l'équation bilan (4.17) est le terme d'inertie  $Int^*$ , qui est tracé sur la figure (4.15a) en échelle linéaire et sur la figure (4.15b) en échelles semi-logarithmiques, dans sa version multipliée par  $\frac{\kappa d_b}{2\pi}$ . Il est important de souligner que, bien que ce terme puisse se décomposer en une partie d'advection  $Adv^*$  et une partie instationnaire  $Inst^*$ , cette décomposition n'est pas pertinente, car ces deux parties dépendent du repère dans lequel elles sont évaluées, contrairement à leur somme. Notons que dans le cas où la densité serait uniforme dans tout le domaine, le terme instationnaire s'écrirait  $\frac{1}{2}\rho \oint_{\kappa=|\kappa|} (\hat{\mathbf{u}}^* \cdot \mathbf{u}) d^2\kappa$ , qui est bien nul en régime stationnaire. Or, ce n'est pas le cas ici, car la densité n'a pas la même valeur dans les deux phases et elle ne peut donc pas être sortie de la transformée de Fourier. Dans notre cas, ce terme instationnaire n'est donc pas nul. La figure (4.15b) montre que le terme d'inertie est très faible pour  $\kappa < 0.1\kappa_b$ , négatif jusqu'à  $\kappa = 1.6\kappa_b$ , puis qu'il atteint son maximum à  $\kappa = 2\kappa_b$  et décroît en oscillant, pour s'annuler aux grands nombres d'ondes. Au total, les mécanismes inertiels puisent aussi de l'énergie à grande échelle pour la restituer à petite échelle, tout comme les mécanismes de forces interfaciales et de pression.

Comparons le transfert par la pression et la force interfaciales  $Prs^* + W_\sigma^*$  au transfert par inertie  $Int^*$ . La figure (4.16), qui représente l'évolution de ces deux termes ainsi que celle de leur somme, montre que les transferts se concentrent principalement entre  $0.15\kappa_b$  et  $10\kappa_b$ . Cette figure montre clairement que les oscillations de ces deux modes de transferts (en violet pour l'inertie et en marron pour la pression et les interfaces) se compensent très bien : le transfert total  $Trs^*$  (orange) est débarrassé des oscillations, qui traduisent les singularités de chacune de ses contributions. Il est utile de rappeler ici que le terme d'inertie  $Int^*$  fait intervenir la dérivée particulière de la vitesse  $D_t\mathbf{u}$ . Or, une particule fluide ne traverse jamais d'interface. Donc, la dérivée  $D_t\mathbf{u}$  n'est jamais discontinue, et la seule partie singulière du terme d'inertie vient de la discontinuité du champ de densité  $\rho$ .

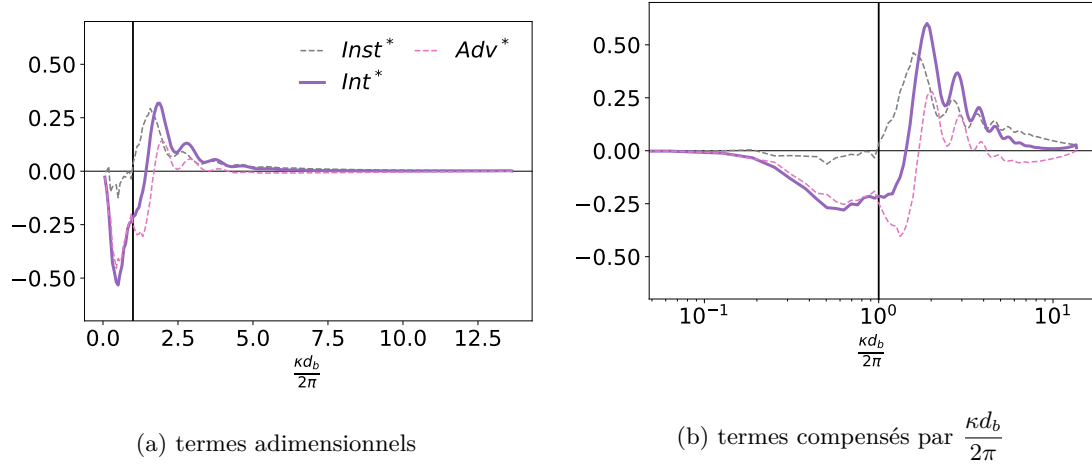


Figure 4.15: Terme de transfert par effets d’inertie  $Int$  en violet (■) et sa décomposition pour la simulation de référence sB6. Le terme instationnaire  $Inst$  est en trait discontinu gris (■), le terme d’advection  $Adv$  est en trait discontinu rose (■).

L’énergie cinétique est-elle transférée des grandes échelles vers les petites échelles, ou bien des petites vers les grandes ? Pour répondre à cette question, nous comparons les intégrales partielles du terme de transfert total  $Trs^*$  de part et d’autre de chaque nombre d’onde  $\kappa_0$ . L’intégrale partielle du terme de transfert  $P(\kappa_0) = -\int_0^{\kappa_0^*} Trs(\kappa)d\kappa$  correspond à la puissance fournie au nombre d’onde  $\kappa_0^*$  par tous les nombres d’ondes inférieurs à  $\kappa_0^*$ . Cette intégrale partielle est illustrée par l’aire marron sur la figure (4.17a). L’évolution de cette intégrale partielle avec  $\kappa_0^*$  est toujours positive, comme montré en figure (4.17b), ce qui signifie qu’à chaque nombre d’onde  $\kappa_0^*$ , tous les nombres d’ondes inférieurs à  $\kappa_0^*$  fournissent une puissance nette. L’intégrale du terme de transfert  $\int_0^\infty Trs(\kappa)d\kappa$  est nulle, donc cette puissance est transférée aux plus grands nombres d’onde,  $\kappa > \kappa_0^*$ .

Pour donner une vision globale de l’équilibre entre les termes du bilan d’énergie cinétique (4.17), les figures (4.18a) et (4.18b) montrent tous les termes sur la même figure, en échelles linéaire et échelles semi-logarithmique, respectivement. Ces deux figures montrent que la production, la dissipation et le transfert d’énergie cinétique sont significatifs pour des nombres d’ondes compris entre  $0.11\kappa_b$  et  $10\kappa_b$ . Pour les nombres d’ondes plus petits que  $\kappa_b$ , le bilan d’énergie cinétique (4.17) s’équilibre essentiellement entre la production par la flottabilité  $Grv$  et le transfert total  $Trs$ . Pour les nombres d’ondes intermédiaires,  $\kappa_b < \kappa < 1.4\kappa_b$ , les termes de production par la flottabilité  $Grv$  la dissipation  $Dsp$  et le transfert  $Trs$  participent tous au bilan, le transfert changeant de signe dans cette gamme. Pour les nombres d’ondes plus grands que  $1.4\kappa_b$ , le bilan d’énergie cinétique (4.17) s’équilibre entre la dissipation et le transfert total. Rappelons ici que le spectre d’énergie (4.14) tracé en figure (4.12) suit une tendance en  $\kappa^{-3}$  pour  $0.8\kappa_b < \kappa < 3\kappa_b$ , qui correspond à un plateau pour le terme de dissipation multiplié par  $\kappa$ .

#### 4.1.5 Synthèse des caractéristiques de la simulation à $\alpha = 6\%$

La simulation d’essaim de bulles sB6 qui sert de référence a été présentée et analysée. Cette simulation reproduit l’écoulement d’un essaim homogène de bulles de diamètre  $d_b = 1mm$ , à  $\alpha = 6\%$ . La phase gazeuse est treize fois moins dense que la phase liquide, les deux phases ont la même viscosité dynamique  $\mu$  et les interfaces ont une tension superficielle  $\sigma = 1.8 \times 10^{-2}N.m$ . L’écoulement se met en place sous le seul effet de la gravité.

Une fois le régime transitoire passé, une légère tendance à l’alignement des bulles selon des plans horizontaux est observée, comme pour les simulations potentielles de SMEREKA [62], YURKOVETSKY et al. [69] et SANGANI et al. [60]. La composante verticale du champ de vitesse est anisotrope. La composante horizontale du champ de vitesse est isotrope et fluctue moins que la précédente. Les PDF des fluctuations des composantes horizontales de vitesse sont symétriques, suivent une

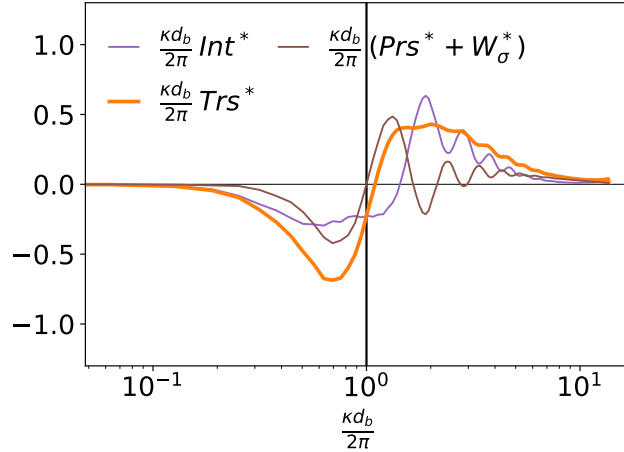


Figure 4.16: Termes de transfert pour la simulation de référence sB6. En violet ■ : le terme d’inertie  $Int$ , en marron ■ : le terme de pression et d’interfaces, en orange ■ : leur somme  $Trs$ .

tendance gaussienne dans le gaz et une tendance exponentielle dans le liquide. Les fortes fluctuations de la vitesse liquide sont produites par les sillages et l’écoulement dans le voisinage des bulles (LBD). Les PDF des fluctuations des composantes horizontales de la vitesse du mélange sont dominées par les PDF des fluctuations des composantes horizontales de la vitesse de la phase liquide. Les PDF de fluctuations de la composante verticale de toutes les vitesses sont asymétriques avec des fluctuations positives plus fréquentes que les fluctuations négatives. Pour la phase liquide, les tendances classiques des PDF de fluctuations de la composante verticale de la vitesse dans un essaim de bulles sont reproduites [48, 51]. Les PDF des fluctuations de la composante verticale de la vitesse pour le mélange sont une composition des PDF des fluctuations de la composante verticale de la vitesse de la phase liquide et de la phase gazeuse.

L’étude des spectres unidirectionnels d’énergie cinétique a montré que les spectres de la composante verticale de vitesse dominant à partir de l’échelle de la bulle et pour les échelles plus petites. Le spectre longitudinal et le spectre transversal de la composante verticale de la vitesse montrent chacun une plage d’évolution en  $\kappa^{-3}$ , tendance qui se retrouve sur le spectre 3D d’énergie cinétique pour  $0.8\kappa_b < \kappa < 3\kappa_b$ . L’étude du bilan spectral d’énergie cinétique montre que les échelles de production d’énergie cinétique et les échelles de dissipation d’énergie cinétique se superposent partiellement. Les échelles produisant de l’énergie cinétique sont confinées autour de l’échelle de la bulle  $\kappa_b$ , tandis que la dissipation se poursuit à des échelles un ordre de grandeur plus petit que la bulle. Les mécanismes inertiels et les mécanismes de travail des forces interfaciales participent chacun à transférer l’énergie cinétique des grandes échelles vers les petites échelles. En résumé, aux grandes échelles ( $\kappa < \kappa_b$ ), on observe un équilibre entre la production et le transfert, tandis qu’aux petites échelles ( $\kappa > 1.4\kappa_b$ ) on observe un équilibre entre le transfert et la dissipation. Une évolution en  $\kappa^{-1}$  du terme de dissipation, équivalente à une évolution en  $\kappa^{-3}$  du spectre de la vitesse, débute lors de la transition entre ses deux régimes ( $\sim 0.8\kappa_b$ ) pour se poursuivre dans la région d’équilibre entre le transfert et la dissipation, jusqu’à  $3\kappa_b$  environ.

Maintenant que nous avons dressé un tableau complet des caractéristiques de notre écoulement de référence sB6, nous pouvons nous intéresser à l’effet de la fraction volumique de gaz sur ces différentes caractéristiques.

## 4.2 Simulations à différentes fractions volumiques de gaz

Les sillages des bulles et leurs interactions sont un mécanisme essentiel de la BIA. En augmentant la fraction volumique de gaz  $\alpha$ , à diamètre de bulle  $d_b$  constant, le nombre des sillages augmente et

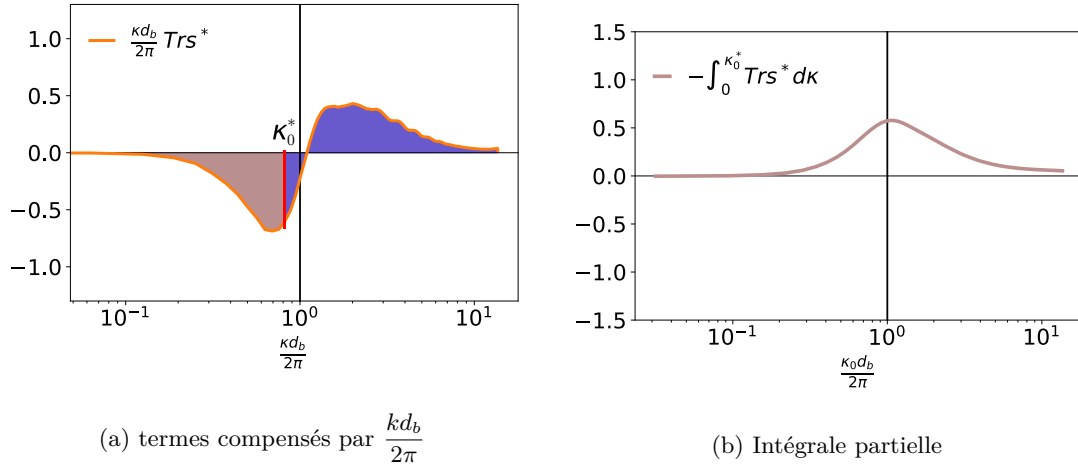


Figure 4.17: Transferts pour la simulation de référence sB6. Terme de transfert total  $Trs$  en orange ■. Intégrale partielle  $-P(\kappa_0^*) = \int_0^{\kappa_0^*} Trs(\nu) d\nu$  en marron ■, Intégrale partielle  $P(\kappa_0^*) = \int_{\kappa_0^*}^{\infty} Trs^*(\nu) d\nu$  en bleu ■, avec  $\kappa_0^* = \frac{k_0 d_b}{2\pi}$ .

l'on s'attend à une modification de leurs interactions. Dans cette section, on s'intéresse à l'effet de la fraction volumique sur les caractéristiques de la BIA.

#### 4.2.1 Géométrie, paramètres physiques et numériques

Pour étudier l'effet de la fraction volumique  $\alpha$  indépendamment de tous les autres paramètres, nous comparons la simulation de référence sB6 aux simulations sB3 et sB12 qui se différencient uniquement par leur fraction volumique :  $\alpha = 3\%$  et  $\alpha = 12\%$  respectivement. Le tableau (4.5) regroupe les paramètres de ces simulations. La géométrie du domaine de calcul et les conditions aux limites (périodicité sur chaque bord) sont identiques pour les trois cas.

	$N_b$	$d_b$ (m)	$L$ (m)	$\Delta x$ (m)	$\alpha$	$g$ ( $m.s^{-2}$ )	$\rho_l$ ( $kg.m^{-3}$ )	$\rho_g$ ( $kg.m^{-3}$ )	$\mu$ ( $Pa.s$ )	$\sigma$ ( $N.m^{-1}$ )
sB3	228	0.001	$16d_b$	$d_b/28$	0.03	9.81	1171.3	87.545	$3.73 \times 10^{-4}$	$1.806 \times 10^{-2}$
sB6	457	0.001	$16d_b$	$d_b/28$	0.06	9.81	1171.3	87.545	$3.73 \times 10^{-4}$	$1.806 \times 10^{-2}$
sB12	913	0.001	$16d_b$	$d_b/28$	0.12	9.81	1171.3	87.545	$3.73 \times 10^{-4}$	$1.806 \times 10^{-2}$

Tableau 4.5: Paramètres des simulations sB3, sB6 et sB12.  $N_b$  est le nombre de bulles,  $d_b$  le diamètre de bulles,  $L$  la longueur du côté du domaine cubique,  $\alpha$  le taux de vide,  $g$  la constante de gravité,  $\rho_l$  la masse volumique du liquide,  $\rho_g$  celle du gaz,  $\mu$  la viscosité dynamique des fluides (identique dans les deux phases),  $\sigma$  la tension superficielle et  $\Delta x$  la taille de la maille (qui est cubique).

#### 4.2.2 Statistiques des bulles

Pour comparer la disposition des bulles en régime établi, de la même façon qu'en figure (4.1), la figure (4.19) montre la disposition des bulles dans le plan  $(z, x)$ , pour la simulation sB3 à gauche, pour la simulation de référence sB6 au milieu et pour la simulation sB12 à droite. Les bulles sont toujours réparties de façon relativement homogène dans le domaine, avec une légère tendance à s'aligner selon des plans horizontaux. Cette tendance n'est pas sensible à la fraction volumique pour  $3\% < \alpha < 12\%$ .

Les premiers moments statistiques de la vitesse des bulles sont présentés dans le tableau (4.6).

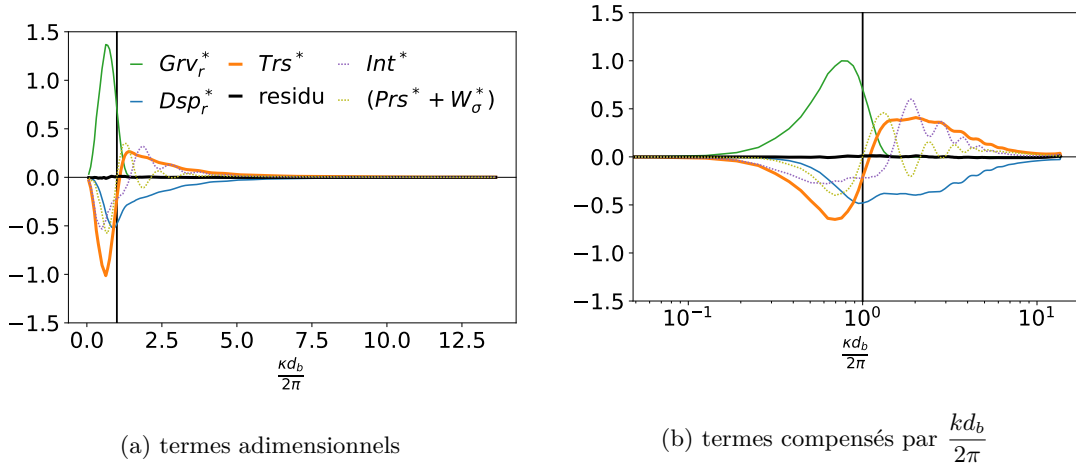


Figure 4.18: Bilan spectral pour la simulation de référence sB6. En vert ■ : terme de production  $Grv_r$ , en bleu ■ : terme de dissipation  $Dsp_r$ , en orange ■ : terme de transfert  $Trs$ , et les termes de sa décomposition  $Int$  ■ et  $Prs + W_\sigma$  ■, en noir ■ : résidu  $Grv_r + Dsp_r + Trs$

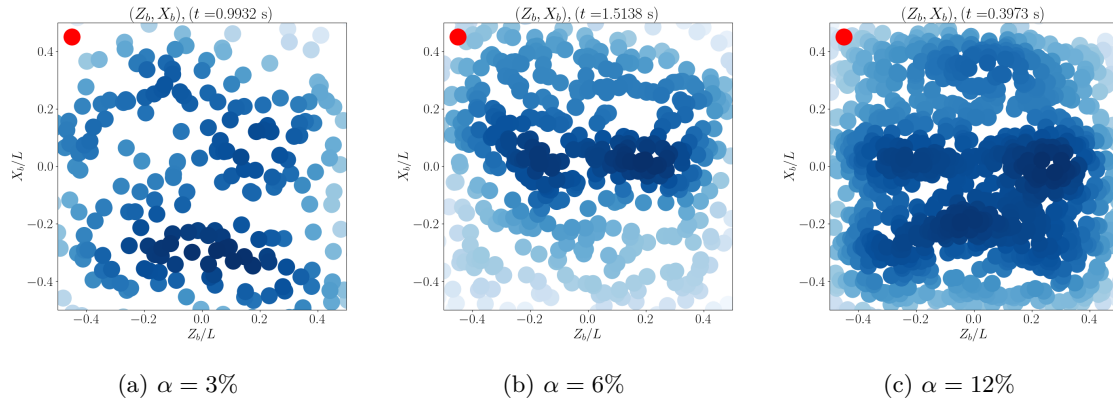


Figure 4.19: Instantané des positions de toutes les bulles projetées dans le plan  $(z, x)$ . Cas sB3 ( $\alpha = 3\%$ ) à gauche, sB6 ( $\alpha = 6\%$ ) au milieu et sB12 ( $\alpha = 12\%$ ) à droite. Un disque bleu symbolise la présence d'une bulle, plus ce disque est foncé, plus il y a de bulles autour. Ce dégradé permet d'apprécier la présence des bulles dans la troisième direction du domaine  $(y)$ . Le disque rouge, sert de référence : il ne représente aucune bulle.

La vitesse relative  $u_r$ , qui correspond à la vitesse moyenne d'ascension des bulles dans le repère du laboratoire, diminue en augmentant  $\alpha$ , en accord avec les travaux expérimentaux RIBOUX et al. [48], ZENIT et al. [71], ROIG et al. [58] et GARNIER et al. [19] et avec les travaux numériques ROGHAI et al. [57]. Dans un essai, les bulles constituent des obstacles qui réduisent la section d'écoulement du liquide, celui-ci est alors accéléré localement, conduisant la force de traînée sur les bulles à augmenter. Plus il y a de bulles, plus la section de passage disponible pour le liquide se réduit, plus les bulles sont freinées : en augmentant la fraction volumique  $\alpha$ , la vitesse relative  $u_r$  diminue. Cet effet est appelé *hindrance effect* en anglais.

La variance de la composante horizontale des vitesses des bulles  $\sigma^2(u_{b,y})$  est insensible à  $\alpha$  et reste toujours proche de  $2 \times 10^{-3} m^2.s^{-2}$ . De plus, cette composante de vitesse a les mêmes moments statistiques centrés qu'une distribution gaussienne quel que soit le taux de vide :  $\mu_3 \approx 0$  et  $\mu_4 \approx 3$ . Au contraire, les moments centrés réduits de la composante verticale de la vitesse des bulles  $u_{b,x}$  sont sensibles au taux de vide et diffèrent de ceux d'une distribution gaussienne. La variance  $\sigma^2(u_{b,x})$  décroît linéairement avec le taux de vide, et l'on remarque que le coefficient de dissymétrie  $\mu_3$ , est significativement négatif à  $\alpha = 3\%$  et  $6\%$ , tandis qu'il est positif à  $\alpha = 12\%$ . Le

coefficient d'aplatissement reste proche de 3.

<i>bulles</i>		$\alpha = 3\%$	$\alpha = 6\%$	$\alpha = 12\%$
	$u_r (m/s)$	$1.69 \times 10^{-1}$	$1.49 \times 10^{-1}$	$1.32 \times 10^{-1}$
	$\sigma^2 (m/s)^2$	$2.16 \times 10^{-3}$	$1.99 \times 10^{-3}$	$1.46 \times 10^{-3}$
$u_{b,x}$	$\mu_3$	$-8.83 \times 10^{-1}$	$-3.24 \times 10^{-1}$	$1.73 \times 10^{-1}$
	$\mu_4$	3.03	2.44	2.78
	$\sigma^2 (m/s)^2$	$1.79 \times 10^{-3}$	$2.00 \times 10^{-3}$	$1.86 \times 10^{-3}$
$u_{b,y}$	$\mu_3$	$7.11 \times 10^{-3}$	$5.16 \times 10^{-3}$	$4.92 \times 10^{-3}$
	$\mu_4$	2.84	2.76	2.77

Tableau 4.6: Vitesse relative  $u_r$ , variance  $\sigma^2$  et moments centrés réduits  $\mu_3$  d'ordre 3  $\mu_4$  d'ordre 4, des fluctuations de la vitesse des bulles  $u_b$  pour les simulations sB3, sB6 et sB12.

Pour aller plus loin dans l'analyse, comparons les PDF des vitesses des bulles centrées réduites ( $u_b^* = (u_b - \langle u_b \rangle) / \sigma(u_b)$ ) pour les trois simulations sB3, sB6, sB12, qui sont tracées en échelle semi-logarithmique sur les figures (4.20a) et (4.20b). Sur la gamme de fluctuations relevée ( $|u_b^*| < 4$ ), on voit que le taux de vide n'a pas d'influence sur la PDF de la composante horizontale de vitesses des bulles (4.20a), les trois PDF (en teintes de gris) suivent une évolution gaussienne (en trait rouge et épais). Au contraire, on voit sur la figure (4.20b) que la fraction volumique influence la PDF de la composante verticale. Pour une fraction volumique de 12%, la distribution est gaussienne pour les fluctuations négatives, et non gaussienne pour les fluctuations positives, qui sont moins probables. En diminuant la fraction volumique, l'écart à la gaussienne s'accroît.

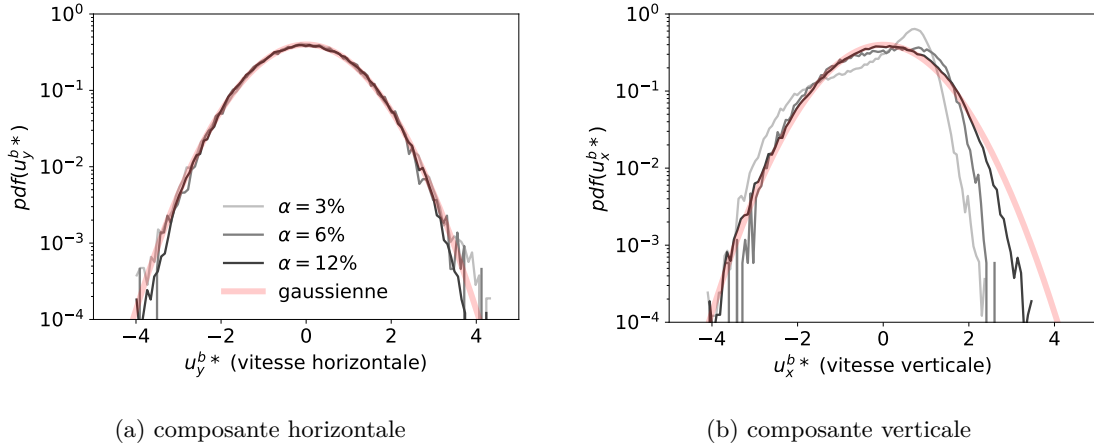


Figure 4.20: Fonction de densité de probabilité des vitesses des bulles centrées et réduites  $u_b^* = (u_b - \langle u_b \rangle) / \sigma(u_b)$  pour la simulation sB3 en trait clair, pour la simulation sB6 en trait moyen et pour la simulation sB12 en trait foncé

### 4.2.3 Statistiques des phases

Intéressons-nous maintenant à l'influence de la fraction volumique sur les propriétés des fluctuations dans le gaz et dans le liquide.

#### Instantanés du champ de vitesse

Comparons les champs instantanés de la composante verticale de vitesse  $u(\mathbf{x}, t)$  pour les trois essais, comme montré en figure (4.21), dans le repère du laboratoire, où  $\overline{u_x^l} = 0$ , et dans le plan  $(z, x)$  à  $y = 0$ . Pour  $\alpha = 3\%$  et pour  $\alpha = 6\%$ , la vitesse du fluide dans les bulles est toujours positive.



Pour  $\alpha = 12\%$ , elle peut être négative à l'intérieur des bulles dans la région proche de leur équateur, mais reste généralement positive. La comparaison de (4.21a), (4.21b) et de (4.21c) montre que les sillages derrière les bulles se raccourcissent en augmentant  $\alpha$ , ou au moins qu'il sont moins alignés avec le plan de coupe, et notamment que la zone de forte vitesse positive dans le sillage est extrêmement courte, voire absente derrière les bulles de l'essaim à 12% de taux de vide. Aux trois fractions volumiques comparées, de part et d'autre de l'équateur des bulles, la composante verticale de la vitesse est généralement négative. Remarquons aussi que la figure (4.21c) montre plus d'alternances de couleurs que la figure (4.21a) : plus le taux de vide augmente, plus la taille des zones de vitesses de même signe diminue. Pour compléter cette comparaison, la figure (4.22)

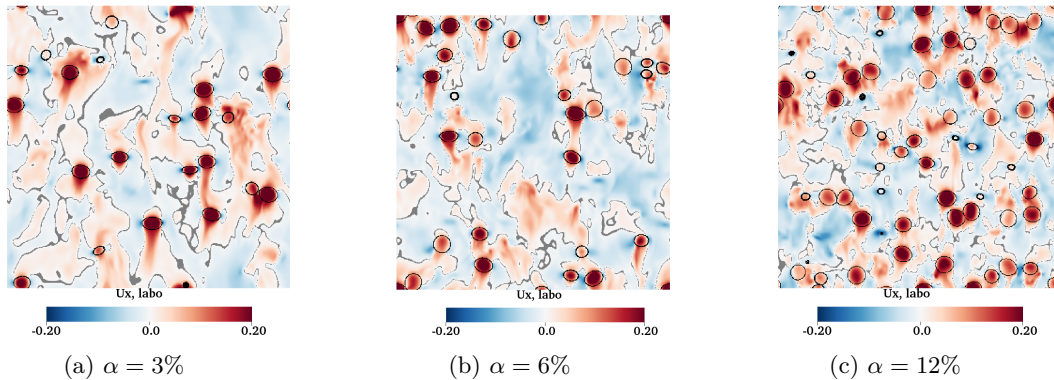


Figure 4.21: Instantané de la vitesse verticale  $u_x$  dans le plan  $(z, x)$  à  $y = 0$ , dans le repère de laboratoire ( $\overline{u_x^l} = 0$ ), pour la simulation sB3 à gauche, sB6 au milieu et sB12 à droite. Les interfaces des bulles sont en noir. Les zones grises mettent en évidence les vitesses nulles.

montre des instantanés de la composante horizontale de la vitesse  $u_z(\mathbf{x}, t)$  dans le même plan que précédemment. Pour les trois fractions volumiques, les fluctuations sont moins intenses dans la direction horizontale que dans la direction verticale, comme nous l'avons constaté au taux de vide de référence  $\alpha = 6\%$ . Si les champs de la vitesse horizontale  $u_z(\mathbf{x}, t)$  ne montrent pas de direction privilégiée pour  $\alpha = 6\%$  et pour  $\alpha = 12\%$ , on remarque que pour  $\alpha = 3\%$ , les zones de vitesse de même signe montrent des formes légèrement allongées dans la direction verticale. La répartition du champ de vitesse  $u_z(\mathbf{x}, t)$  proche de la bulle est relativement similaire dans les trois cas : les fortes fluctuations sont distribuées le long de deux couronnes perpendiculaires à la gravité, suivant l'interface. Ces deux couronnes sont à mi-chemin entre l'amont de la bulle et son équateur et à mi-chemin entre l'équateur et le point aval de la bulle. Encore une fois, la taille des zones de vitesses de même signe diminue en augmentant le taux de vide.

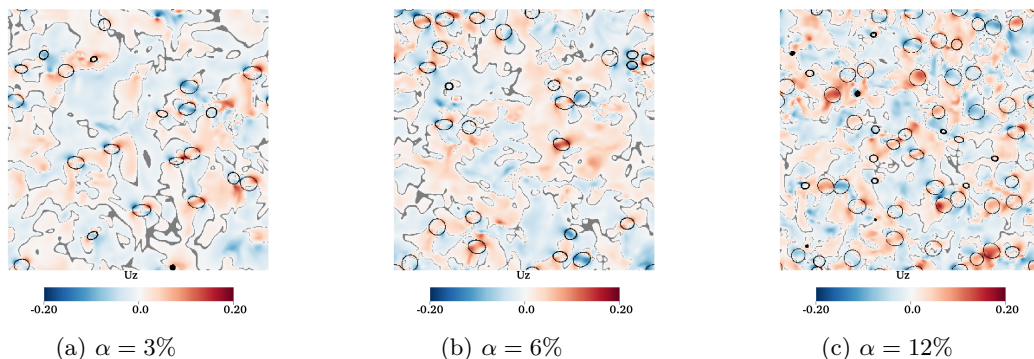


Figure 4.22: Instantané de la vitesse horizontale  $u_z$  dans le plan  $(z, x)$  à  $y = 0$ , pour la simulation sB3 à gauche, sB6 au milieu et sB12 à droite. Les interfaces des bulles sont en noir. Les zones grises mettent en évidence les vitesses nulles.

### Statistiques du champ de vitesse dans le gaz

Nous nous intéressons maintenant à l'effet de la fraction volumique sur les moments statistiques de la phase gazeuse, qui sont donnés dans le tableau (4.7). Les coefficients d'aplatissement et de dissymétrie de la composante horizontale de la vitesse dans le gaz  $u_{g,y}$  sont proches de ceux d'une distribution gaussienne, quelle que soit la fraction de gaz :  $\mu_3 \approx 0$ ,  $\mu_4 \approx 3$ . La variance de cette composante de la vitesse diminue avec  $\alpha$ . Le coefficient d'aplatissement  $\mu_4$  de la composante verticale de la vitesse du gaz augmente avec  $\alpha$ , en restant toujours inférieur à 3. Son coefficient de dissymétrie  $\mu_3$  augmente aussi avec le taux de vide, en étant négatif pour  $\alpha = 3\%$  et positif pour  $\alpha = 6\%$  et  $\alpha = 12\%$ , alors que pour la composante verticale de la vitesse des bulles, ce coefficient est positif uniquement pour  $\alpha = 12\%$ . Enfin, notons que le rapport de la variance de la composante verticale de la vitesse et la variance de la composante horizontale,  $\sigma^2(u_{g,x})/\sigma^2(u_{g,y})$ , est toujours supérieur à 2, et diminue avec la fraction volumique de gaz  $\alpha$ .

gaz		$\alpha = 3\%$	$\alpha = 6\%$	$\alpha = 12\%$
$u_r$	(m/s)	$1.57 \times 10^{-1}$	$1.32 \times 10^{-1}$	$1.08 \times 10^{-1}$
	$\sigma^2$ (m/s) <sup>2</sup>	$8.44 \times 10^{-3}$	$6.99 \times 10^{-3}$	$5.16 \times 10^{-3}$
$u_{g,x}$	$\mu_3$	$-1.03 \times 10^{-1}$	$1.07 \times 10^{-1}$	$1.69 \times 10^{-1}$
	$\mu_4$	2.37	2.55	2.83
	$\sigma^2$ (m/s) <sup>2</sup>	$3.40 \times 10^{-3}$	$3.19 \times 10^{-3}$	$2.47 \times 10^{-3}$
$u_{g,y}$	$\mu_3$	$2.46 \times 10^{-2}$	$-6.13 \times 10^{-3}$	$-2.09 \times 10^{-2}$
	$\mu_4$	2.89	3.03	3.08

Tableau 4.7: vitesse relative, variance  $\sigma^2$  et moments centrés réduits d'ordre 3  $\mu_3$  et 4  $\mu_4$  des fluctuations de vitesses dans le gaz  $u_{g,x}$  et  $u_{g,y}$  pour les simulations sB3, sB6 et sB12.

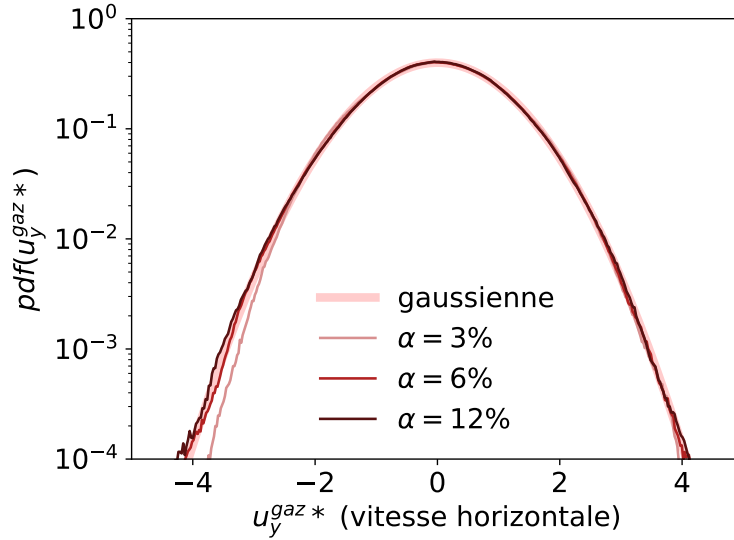


Figure 4.23: Fonction de densité de probabilité des fluctuations de la composante horizontale des vitesses dans la phase gazeuse, centrées et réduites  $u_y^{g*} = (u_{y,g} - \langle u_{y,g} \rangle) / \sigma(u_{g,y})$ , pour la simulation sB3 en trait clair, pour la simulation sB6 en trait moyen et pour la simulation sB12 en trait foncé.

La figure (4.23), qui montre en échelle semi-logarithmique les PDF centrées réduites de la composante horizontale des vitesses dans la phase gazeuse  $u_y^{g*} = (u_{y,g} - \langle u_{y,g} \rangle) / \sigma(u_{g,y})$ , confirme que les fluctuations de cette vitesse (tracés fins en teinte de rouge) suivent une distribution gaussienne (tracé épais et rouge pâle) quelque soit le taux de vide. Au contraire, comme on peut le voir sur la figure (4.24), la distribution de la PDF de la composante verticale des vitesses dans le gaz dépend



de la fraction volumique, comme pour la vitesse des bulles, et elle s'approche aussi de la distribution gaussienne en augmentant la fraction volumique, avec une variance plus importante que pour la vitesse des bulles cependant. Pour les trois fractions volumiques, les PDF pour le gaz se superposent à partir de  $u_x > 0.2$ .

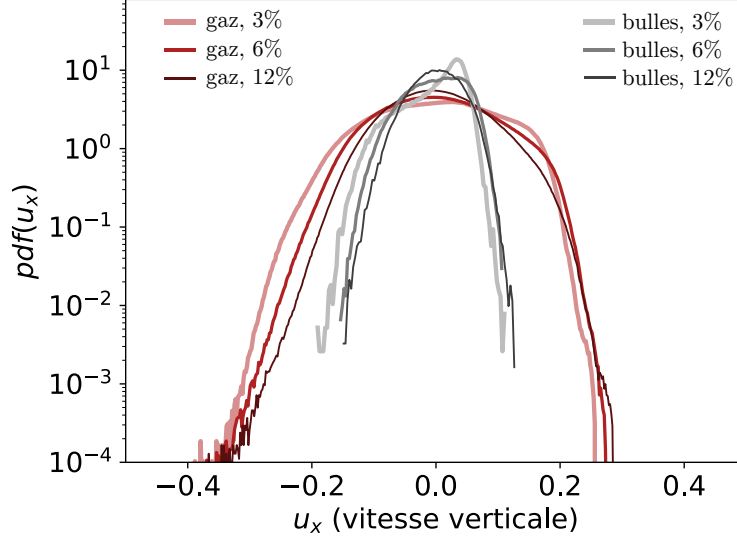


Figure 4.24: PDF des vitesses des bulles (gris) et des vitesses du gaz (rouge) pour les trois fractions volumiques  $\alpha = 3\%$  (épais),  $\alpha = 6\%$  (moyen) et  $\alpha = 12\%$  (fin). Les PDF sont centrées sur la vitesse moyenne des bulles  $\langle u_{b,x} \rangle$  et ne sont pas réduites.

Les statistiques de vitesses dans le gaz pour les simulations sB3, sB6 et sB12 permettent de conclure que la PDF de la composante horizontale de vitesse dans le gaz suit une évolution gaussienne à toute fraction volumique de gaz, et sa variance dépend de la fraction volumique. La distribution de la PDF de la composante verticale de vitesse dans le gaz dépend de la fraction volumique, en se rapprochant d'une évolution gaussienne à  $\alpha = 12\%$ .

### Statistiques du champ de vitesse dans le liquide

Pour décrire comment la dynamique évolue avec le taux de vide, nous étudions l'évolution des moments statistiques des vitesses de la phase liquide et l'évolution des PDF des ces vitesses pour les trois essais simulés.

Le tableau (4.8) regroupe la vitesse relative  $u_r$ , la variance  $\sigma^2$ , le coefficient de dissymétrie  $\mu_3$  et le coefficient d'aplatissement  $\mu_4$  pour les vitesses du liquide  $u_{l,x}$  et  $u_{l,y}$ . Le rapport de la variance de la composante verticale de la vitesse sur la variance de la composante horizontale,  $\sigma^2(u_{l,x})/\sigma^2(u_{l,y})$ , diminue avec la fraction volumique, et reste proche de 2. Le rapport  $\sigma^2(u_{l,x})/\alpha u_r^2$  diminue avec  $\alpha$  et est proche de 1.45. Le coefficient de dissymétrie  $\mu_3$  est positif pour la composante verticale de la vitesse et diminue avec  $\alpha$ . Le coefficient d'aplatissement  $\mu_4$  diminue avec la fraction volumique quelque soit la composante de la vitesse, et vaut 4 pour  $\alpha = 12\%$ .

La figure (4.25a), qui montre en échelle semi-logarithmique la PDF centrée et réduite des fluctuations de la composante horizontale de vitesses dans le liquide  $u_y^{l*} = (u_{l,y} - \langle u_{l,y} \rangle) / \sigma(u_{l,y})$ , confirme que les PDF des fluctuations de vitesses horizontales de la phase liquide (en teintes de bleu) sont symétriques à toutes les fractions volumiques, et l'on voit qu'elles suivent toutes la même tendance exponentielle (trait rouge) pour les fluctuations modérées,  $|u_y^{l*}| < 4$ , de la même manière que dans les expériences eau-air à  $\alpha < 5\%$  de RIBOUX et al. [48, Figure 12]. Pour les fluctuations extrêmes, la pente de la tendance exponentielle diminue en diminuant la fractions volumique (trait orange), cette tendance s'observe aussi pour les résultats numériques de PANDEY et al. [40], reportés sur la figure (traits discontinus verts) qui travaille à nombre de Reynolds de bulle et à fraction

liquide		$\alpha = 3\%$	$\alpha = 6\%$	$\alpha = 12\%$
	$u_r(m/s)$	$1.57 \times 10^{-1}$	$1.32 \times 10^{-1}$	$1.08 \times 10^{-1}$
	$\sigma^2(m/s)^2$	$1.13 \times 10^{-3}$	$1.52 \times 10^{-3}$	$1.95 \times 10^{-3}$
$u_{x,l}$	$\mu_3$	1.57	1.04	$6.54 \times 10^{-1}$
	$\mu_4$	8.39	5.57	4.02
	$\sigma^2(m/s)^2$	$4.83 \times 10^{-4}$	$7.86 \times 10^{-4}$	$1.07 \times 10^{-3}$
$u_{y,l}$	$\mu_3$	$5.94 \times 10^{-3}$	$2.71 \times 10^{-3}$	$-2.01 \times 10^{-2}$
	$\mu_4$	7.26	5.00	3.96

Tableau 4.8: Vitesse relative, variance  $\sigma^2$  et moments centrés réduits d'ordre 3 et 4 des fluctuations de vitesses dans le liquide  $u_{l,x}$  et  $u_{l,y}$  pour les simulations sB3, sB6 et sB12.

volumique comparables ( $Re_b = 462$  à  $\alpha = 2.6\%$ , et  $Re_b = 465$  à  $\alpha = 1.7\%$ ). RISSO [51] interprète la première pente exponentielle comme correspondant à la turbulence (BIT) alors que la seconde correspond à l'écoulement dans le voisinage des bulles (LBD). Nous avons vu en figure (4.22) que les valeurs les plus fortes surviennent au contact des bulles, et la figure (4.25a) montre qu'en diminuant le nombre de bulles, nous augmentons la probabilité de relever des fluctuations extrêmes.

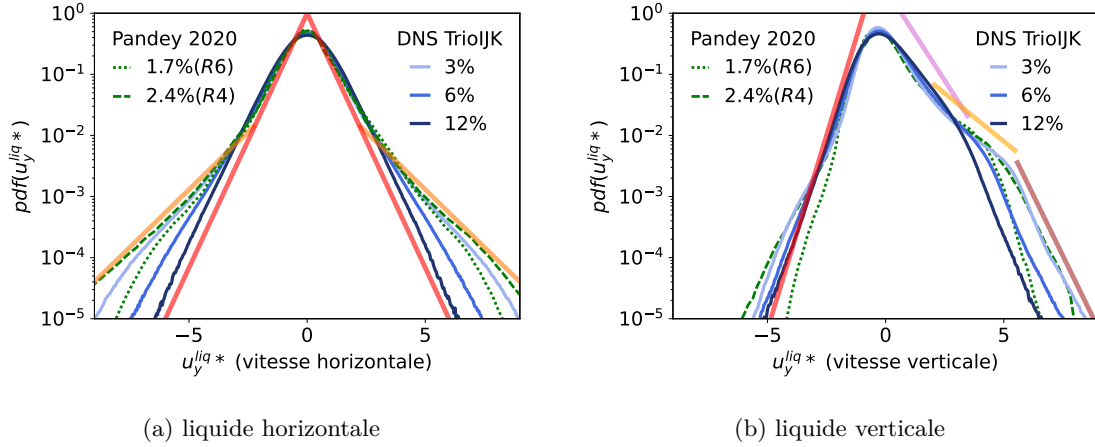


Figure 4.25: PDF de la composante horizontale des vitesses dans la phase liquide, centrées et réduites  $u_y^{l*} = (u_{l,y} - \langle u_{l,y} \rangle) / \sigma(u_{l,y})$  (gauche) et PDF des fluctuations de la composante verticale des vitesses dans la phase liquide, centrées et réduites  $u_x^{l*} = (u_{l,x} - \langle u_{l,x} \rangle) / \sigma(u_{l,x})$  (droite). La simulation sB3 est tracée en trait clair, la simulation sB6 en trait moyen et la simulation sB12 en trait foncé. Comparaison avec les résultats numériques de PANDEY et al. [40] en tirets. Les pentes en rouge, jaune, rose et marron en traits pleins et épais marquent les tendances exponentielles suivies par les PDF.

Les PDF centrées et réduites de la composante verticale de la vitesse pour la phase liquide  $u_x^{l*}$  qui sont tracées sur la figure (4.25b) confirment que les PDF ne sont pas symétriques, avec des fluctuations fortement positives plus probables que les fluctuations négatives ( $\mu_3 > 0$ ). Pour les trois fractions volumiques, les fluctuations négatives de vitesse montrent deux pentes exponentielles successives. Pour  $-3 < u_{l,x} < 0$ , ce sont les fluctuations turbulentes BIT qui dominent. Pour  $u_{l,x} < -3$  ce sont les perturbations LBD dans le voisinage proche des bulles, essentiellement d'origine potentielle et situé près de l'équateur des bulles. Les fluctuations positives présentent trois pentes différentes, la première (rose) est identiquement suivie par toutes les PDF, la deuxième (jaune) est prolongée pour des fluctuations plus fortes en diminuant la fraction volumique, la troisième pente (marron) est similaire pour toutes les PDF. D'après RISSO [51], la première ( $0 < u_{l,x} < 3$ ) correspond à la turbulence (BIT), la seconde ( $3 < u_{l,x} < 5$ ) aux sillages (LBD) et la troisième ( $u_{l,x} > 5$ ) à l'écoulement potentiel devant les bulles (LBD).

### Synthèse de l'évolution des statistiques de vitesse dans les phases en fonction du taux de vide

Les PDF et les moments statistiques des fluctuations de vitesses montrent que l'écoulement dans le gaz est peu affecté par la fraction volumique de gaz et tend à se comporter comme une distribution gaussienne pour  $\alpha = 12\%$ .

L'écoulement de la phase liquide est sensible à  $\alpha$ , avec une nette réduction des fluctuations extrêmes pour la composante horizontale de la vitesse et une nette réduction des fluctuations extrêmes et positives pour la composante verticale de la vitesse, quand  $\alpha$  augmente. Les parties centrales des PDF centrées réduites de vitesses de la phase liquide sont presque insensibles à  $\alpha$  alors que leurs parties extérieures correspondant aux fluctuations les plus fortes sont sensibles à la fraction volumique. Cela signifie que les faibles fluctuations et les fortes fluctuations répondent à des mécanismes différents, faisant intervenir des lois d'échelles différentes comme l'explique RISSO [52].

#### 4.2.4 Analyse dans le plan spectral

Penchons-nous maintenant sur les statistiques spectrales. Dans les sous-sections suivantes, nous nous intéressons d'abord aux spectres 1D et 3D de l'énergie cinétique  $\mathcal{S}$ , puis nous nous intéresserons à la décomposition spectrale du bilan d'énergie cinétique.

#### Spectre d'énergie cinétique

Les évolutions des spectres 1D d'énergie cinétique  $\mathcal{S}_{ii}(\kappa_j)$  pour les cas à  $\alpha = 3\%$  et à  $12\%$  de taux de vide montrent les mêmes tendances que celles relevées pour la simulation de référence à  $\alpha = 6\%$  (Fig. (4.11a) et Fig. (4.11b)) et ne sont pas retracés ici. Les résultats expérimentaux de RIBOUX et al. [48, Figure 18] montrent aussi une indépendance des spectres unidirectionnels à la fraction volumique  $\alpha$ .

Nous nous intéressons maintenant à l'évolution du spectre 3D normalisé de l'énergie cinétique  $\mathcal{S}^*(\kappa) = \mathcal{S}(\kappa)/\int \mathcal{S}d\kappa$  (Eq. (4.14)), dont l'évolution est tracée en figure (4.26a) en échelles logarithmiques. Sa partie régulière, obtenue en utilisant le filtre  $e^{(1.4\kappa/\kappa_d)^8}$  sur le terme de flottabilité (voir annexe A.4 pour la démarche complète), est tracée en figure (4.26b). Pour les trois fractions volumiques, le spectre 3D  $\mathcal{S}^*$  ne varie quasiment pas et atteint son maximum autour de  $\kappa = 0.7\kappa_b$ . Les trois spectres montrent une plage de nombre d'onde pour laquelle il décroît comme  $\kappa^{-3}$  avec des oscillations dont l'amplitude s'estompe en augmentant la fraction de gaz. La plage en  $\kappa^{-3}$  est plus visible sur la partie régulière du spectre, où l'on voit que son étendue ne dépend pas de  $\alpha$ .

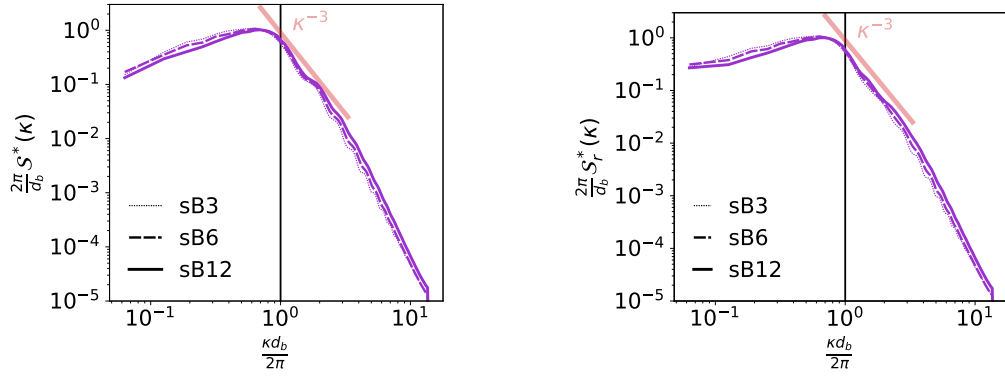
#### Représentation spectrale du bilan d'énergie

Comparons maintenant les termes de la représentation spectrale du bilan d'énergie cinétique aux différentes fractions volumiques. Nous rappelons l'équation bilan utilisée (4.17):  $0 = Int(\kappa) + Prs(\kappa) + Dsp(\kappa) + Grv(\kappa) + W_\sigma(\kappa)$ . Comme précédemment, les termes du bilan sont adimensionnés par le facteur  $\frac{2\pi}{d_b} / \int Grv(\kappa) d\kappa$ , dont la valeur est donnée dans le tableau (Tab. (4.9)).

	$\alpha = 3\%$	$\alpha = 6\%$	$\alpha = 12\%$
$\int Grv(\kappa)d\kappa (W.m^{-3})$	48.4	79.3	122.2

Tableau 4.9: Intégrale du terme de gravité pour les simulations sB3, sB6 et sB12.

La figure (4.27) montre pour les trois fractions de gaz, en échelle semi-logarithmique, la partie régulière multipliée par  $\frac{\kappa d_b}{2\pi}$  des termes  $Grv_r^*$  et  $Dsp_r^*$  et le terme de transfert  $Trs^* = Trs_r^*$ , dont la partie singulière est quasiment nulle. L'effet de  $\alpha$  sur ces termes est léger : le comportement



(a) Spectre adimensionnel

(b) Partie régulière du spectre adimensionnel

Figure 4.26: Spectre 3D de vitesse  $\mathcal{S}$  (gauche), et sa partie régulière  $\mathcal{S}_r$  (droite) pour les simulation sB3, sB6 et sB12. La partie régulière est obtenue en utilisant le filtre  $e^{(1.4\kappa/\kappa_b)^8}$  sur le terme de flottabilité (voir A.4) pour les trois fractions volumiques.

pour les trois fractions de gaz est similaire à ce qui a été décrit plus haut pour la simulation de référence (Sec. 4.1.1). Aux trois fractions volumiques, le terme de dissipation  $Dsp_r^*$  multiplié par  $\kappa$  (en bleu) montre une plage d'évolution constante (trait gris), qui coïncide avec la plage d'évolution du spectre d'énergie  $\mathcal{S}$  en  $\kappa^{-3}$ . En augmentant  $\alpha$ , le maximum normalisé de production par la flottabilité  $Grv_r^*$  (en vert) augmente un peu en amplitude et se rapproche légèrement de  $\kappa_b$ , et la dissipation  $Dsp_r^*$  aux petites échelles ( $\kappa > 2\kappa_b$ ) augmente en amplitude, tandis qu'elle diminue légèrement pour les plus grandes échelles de dissipation ( $0.5\kappa_b < \kappa < 1.1\kappa_b$ ). En augmentant  $\alpha$ , les marques des singularités du champ de vitesse qui ne sont pas totalement corrigées s'estompent.

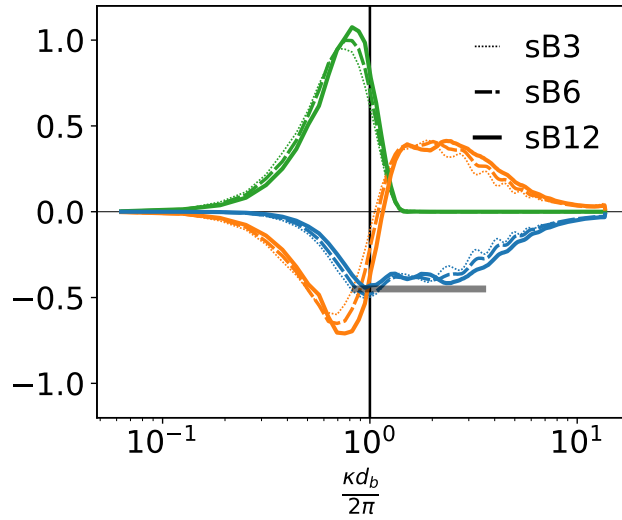


Figure 4.27: Partie régulière du terme adimensionnel et compensé de production par la flottabilité  $\frac{\kappa d_b}{2\pi} Grv_r^* = \kappa Grv_r / \int Grv_r(\kappa) d\kappa$  en vert ■, du terme de dissipation  $\frac{\kappa d_b}{2\pi} Dsp_r^* = \kappa Dsp_r / \int Grv_r(\kappa) d\kappa$  en bleu ■, et du terme de transfert  $\frac{\kappa d_b}{2\pi} Trs^*$  en orange ■, pour les simulations sB3, sB6 et sB12.

Intéressons-nous à la dépendance à  $\alpha$  des termes de transfert  $Prs, W_\sigma$  et  $Int$ , qui constituent

le terme de transfert total  $Trs^*$ . Nous choisissons d'examiner à la somme  $Prs + W_\sigma$  plutôt que chacun des deux séparément. La figure (4.28) montre une fois de plus que la fraction volumique modifie peu l'évolution de ces termes. Quel que soit  $\alpha$ , les termes  $(Prs + W_\sigma)^*$  et  $Int^*$  oscillent en opposition de phase et l'amplitude de ces oscillations diminue avec la fraction volumique, sans que leur phase ni leur fréquence ne change. Le premier nombre d'onde pour lequel le transfert par pression et interfaces  $\frac{\kappa d_b}{2\pi} (Prs^* + W_\sigma^*)$  (en marron) change de signe augmente légèrement avec la fraction volumique, tandis que le premier nombre d'onde pour lequel le transfert par inertie  $\frac{\kappa d_b}{2\pi} Int^*$  (en violet) change de signe, n'est absolument pas modifié par la fraction volumique. La somme de ces deux termes de transferts (en orange) est, elle aussi, assez peu sensible à  $\alpha$ . Son amplitude loin de  $\kappa_b$  augmente légèrement avec  $\alpha$ .

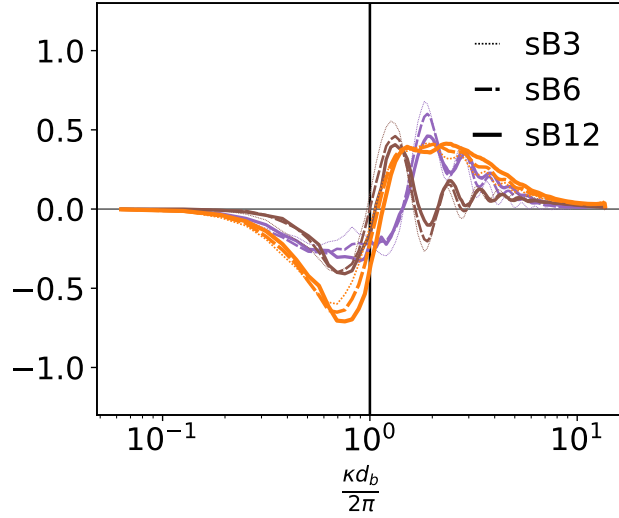


Figure 4.28: Terme de transfert par travail des gradients de pression et par travail des forces d'interfaces  $\frac{\kappa d_b}{2\pi} (Prs^* + W_\sigma^*)$  en marron ■, terme de transfert par inertie  $\frac{\kappa d_b}{2\pi} Int^*$  en violet ■, somme de ses deux termes  $\frac{\kappa d_b}{2\pi} Trs^*$  en orange ■ pour les simulations sB3, sB6 et sB12.

#### 4.2.5 Synthèse sur l'effet du taux de vide

Dans les sections précédentes, nous avons comparé un certain nombre de caractéristiques pour trois essais de bulles :  $\alpha = 3\%$ ,  $\alpha = 6\%$  et  $\alpha = 12\%$ . Ces trois cas correspondent aux simulations sB3, sB6 et sB12, respectivement (Tab. (2.1), (4.5)).

Cette comparaison montre que la légère tendance à la formation de nappes horizontales n'est pas altérée par la fraction volumique de gaz, et que les PDF des fluctuations de la composante horizontale de la vitesse des bulles et de la vitesse dans le gaz suivent une distribution gaussienne. Les PDF de la composante verticale des vitesses des bulles et des vitesses dans le gaz sont très différentes d'une distribution gaussienne pour l'essai à 3% de gaz, et elles tendent vers une distribution gaussienne à mesure que la fraction volumique augmente, accompagnées d'une réduction de leur variance. Les PDF des fluctuations de vitesse de la phase liquide montrent une nette dépendance à  $\alpha$ , avec notamment une forte réduction des occurrences de fluctuations extrêmes en augmentant la fraction volumique. Les PDF des vitesses du liquide suivent une succession de régimes exponentiels, dont les exposants ne varient pas avec la fraction de gaz, ce qui traduit que la nature des différents mécanismes est inchangée, seule leur importance relative varie. L'augmentation de la fraction volumique de gaz réduit la vitesse relative, l'anisotropie de l'écoulement et augmente la variance

des fluctuations dans le liquide.

Bien que l'effet de la fraction de gaz se note sur les moments statistiques et sur les PDF des vitesses liquides, sur le plan spectral, l'effet de la fraction volumique est remarquablement discret. On relève une très légère réduction de la taille des structures de production d'énergie cinétique avec l'augmentation de  $\alpha$ , et une augmentation de la dissipation pour les plus petites structures.

### 4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, les caractéristiques de l'*agitation induite par les bulles*, ou BIA, et ses mécanismes à différentes échelles de longueur ont été étudiés à partir de simulations numériques directes d'un essaim de bulles en ascension sous l'effet de la gravité. Pour ce faire, nous avons d'abord étudié précisément l'écoulement de référence d'un essaim de bulles homogène à une fraction volumique de gaz de  $\alpha = 6\%$ . Nous avons ensuite étudié l'effet de  $\alpha$ , en comparant avec les résultats pour un écoulement à  $\alpha = 3\%$  (simulation sB3) et  $\alpha = 12\%$  (simulation sB12).

Les bulles ont une légère tendance à s'agencer selon des plans horizontaux quel que soit  $\alpha$ , et la PDF de leur vitesse horizontale suit une tendance gaussienne dont la variance est indépendante de  $\alpha$ . La PDF de leur vitesse verticale dévie d'une distribution gaussienne à  $\alpha = 3\%$ , et se rapproche d'un comportement gaussien en augmentant la fraction volumique.

Les structures de la composante horizontale de vitesse ne montrent pas de direction privilégiée et les PDF de la composante horizontale de vitesse qui sont symétriques, suivent une tendance gaussienne dans le gaz (comme pour les bulles), et suivent une tendance exponentielle dans le liquide. Les PDF des fluctuations de la composante horizontale de la vitesse du mélange sont dominées par les PDF des fluctuations de la phase liquide.

Les structures de la composante verticale de la vitesse sont allongées dans la direction verticale et les PDF de la composante verticale des vitesses du gaz et du liquide sont non gaussiennes et asymétriques, avec des fluctuations positives plus probables que les fluctuations négatives. Les PDF du liquide montrent différentes tendances exponentielles témoignant des contributions de la turbulence (BIT) et des perturbations dans le voisinage des bulles (LBD) correspondant. Les tendances classiques sont reproduites, comme décrit dans les travaux de RISSO [51] et RIBOUX et al. [48]. Les PDF des fluctuations de la composante verticale de la vitesse du mélange sont dominées par la phase liquide pour les fluctuations négatives et par la phase gazeuse pour les fluctuations positives.

La vitesse relative entre les phases diminue avec  $\alpha$ , comme les variances de chacune des composantes de la vitesse dans la phase gazeuse, tandis qu'elles augmentent dans la phase liquide. À l'inverse de la variance, le coefficient d'aplatissement est fortement réduit pour les vitesses de la phase liquide lorsque le taux de vide augmente : les fluctuations extrêmes dans le liquide sont fortement réduites quand la fraction volumique augmente. Pour les vitesses de la phase gazeuse, ce coefficient varie peu avec  $\alpha$ .

Le spectre 3D de l'énergie cinétique montre une plage d'évolution en  $\kappa^{-3}$ , caractéristique de la BIA, pour des nombres d'ondes allant de  $\kappa \approx 0.8\kappa_b$  à  $\kappa \approx 3\kappa_b$  et il atteint son maximum pour  $\kappa \approx 0.7\kappa_b$ . La fraction de gaz a une influence presque nulle sur ce spectre. Les spectres unidirectionnels de la composante verticale de vitesse dominent ceux des composantes horizontales. Ces spectres unidirectionnels montrent chacun une plage d'évolution en  $\kappa^{-3}$ , comme le spectre 3D.

L'amplitude des termes du bilan d'énergie cinétique augmente avec  $\alpha$  sans changer l'évolution de ces termes. Les échelles de production d'énergie cinétique se situent autour de l'échelle de la bulle ( $1/\kappa_b$ ), les échelles de dissipation de cette énergie s'étendent quant à elles de l'échelle de la bulle jusqu'à des échelles un ordre de grandeur plus petites. Le transfert d'énergie cinétique entre les échelles, qui s'effectue des grandes structures vers les petites structures, s'opère par les mécanismes inertiels d'une part et par les mécanismes de travail des forces interfaciales d'autre part. La plage d'évolution en  $\kappa^{-3}$  pour le spectre d'énergie, qui correspond à une plage d'évolution en  $\kappa^{-1}$  pour le terme de dissipation, débute au moment où la production d'énergie par les bulles s'effondre et se poursuit dans le régime où transfert et dissipation sont en équilibre.



## Chapitre 5

# Essaim de bulles statistiquement homogène dans un milieu turbulent

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Moments statistiques</b>	<b>124</b>
<b>5.2</b>	<b>PDF des vitesses</b>	<b>129</b>
<b>5.3</b>	<b>Spectre d'énergie de la vitesse</b>	<b>130</b>
<b>5.4</b>	<b>Représentation spectrale du bilan d'énergie</b>	<b>134</b>
<b>5.5</b>	<b>Combinaison linéaire pour isoler l'interaction</b>	<b>134</b>
<b>5.6</b>	<b>Conclusion du chapitre</b>	<b>136</b>

---

L'objectif de ce chapitre est d'étudier à l'aide de simulations numériques directes (DNS pour *Direct Numerical Simulations*) la manière dont l'agitation induite par les bulles (BIA pour *Bubble Induced Agitation*) interagit avec la turbulence induite par le cisaillement (SIT pour *Shear-Induced Agitation*), que RENSEN et al. [46] proposent de caractériser par le rapport de l'énergie cinétique apportée par la BIA,  $\frac{1}{2}\alpha u_r^2$ , sur celle apportée par la SIT,  $u_0'^2$ , avec  $\alpha$  la fraction volumique de gaz,  $u_r$  la vitesse relative et  $u_0'^2$  la vitesse fluctuante en SIT. Ce rapport s'appelle le paramètre de bubblance  $b$  :

$$b = \frac{\frac{1}{2}\alpha u_r^2}{u_0'^2}. \quad (5.1)$$

Pour un paramètre de bubblance  $b < 1$ , on s'attend à ce que l'écoulement soit dominé par la SIT, et pour  $b > 1$ , on s'attend à ce que ce soit la BIA qui domine. Dans leurs travaux expérimentaux, PRAKASH et al. [44], ALMÉRAS et al. [1] et RENSEN et al. [46] utilisent ce paramètre pour caractériser leurs écoulements. Cependant, pour ces trois études, la coupure visqueuse de la SIT dans le plan spectral se produit à des échelles plus grandes que le diamètre de bulles. En effet, la plage d'évolution du spectre d'énergie  $\mathcal{S}(\kappa)$  proportionnelle à  $\kappa^{-5/3}$  des cas sans bulles ( $b = 0$ ) se situe à des échelles plus grandes, et disjointes de celles de la plage d'évolution proportionnelle à  $\kappa^{-3}$ , caractéristiques de la BIA (Fig.6 p.13, Fig.7 p.11 et Fig.25 p.31 respectivement). Pour ces trois études, aux échelles de production d'énergie par la SIT, les bulles n'ont pas encore imprimé leur dynamique, tandis qu'aux plus petites échelles, où les bulles impriment enfin leur dynamique propre, c'est la SIT qui a été dissipée par la viscosité. À aucune échelle les deux phénomènes sont d'intensité comparable, leur interaction est donc faible, voire inexistante.

Pour palier ce défaut, nous plaçons dans nos simulations le diamètre des bulles  $d_b$  au cœur de la zone inertielle de la SIT, ce qui nous assure l'existence d'une gamme d'échelles dans laquelle les mécanismes de BIA et les mécanismes de SIT coexistent et interagissent potentiellement. Au lieu



de nous limiter au paramètre global de bubblance,  $b$ , qui compare des niveaux d'énergie globaux, nous comparerons les énergies apportées par chaque contribution à chaque échelle pour nous assurer qu'autour de l'échelle de la bulle, l'énergie produite par la SIT et celle produite par la BIA sont d'ordres de grandeur comparables :

$$\mathcal{S}_{SIT}(\kappa_b) \sim \mathcal{S}_{BIA}(\kappa_b), \quad (5.2)$$

avec  $\mathcal{S}(\kappa)$  le spectre d'énergie. Dans cette étude, l'énergie apportée par la SIT sera fixée alors que l'énergie apportée par la BIA sera modifiée en faisant varier la fraction volumique de gaz  $\alpha$ .

Dans nos simulations, la BIA sera produite par l'ascension d'un essaim homogène de bulles de volume fixé, correspondant à un diamètre équivalent  $d_b$  fixé et la SIT sera produite par un forçage stochastique défini dans le domaine spectral, actif sur les trois modes de plus grande longueur d'onde correspondant à notre domaine de calcul et reproduisant les caractéristiques d'une turbulence homogène isotrope stationnaire (HIT pour *Homogeneous Isotropic Turbulence*) dont les paramètres  $\sigma = 6.3 \times 10^{-2}$  et  $T_L = 0.28s$  sont présentés à la section 2.3.4. Les paramètres des fluides sont les mêmes qu'au chapitre précédent. Les masses volumiques sont  $\rho_l = 1171.3kg.m^{-3}$  et  $\rho_g = 87.545kg.m^{-3}$  pour le liquide et le gaz, respectivement. La viscosité dynamique est uniforme dans tout le domaine et vaut  $\mu_l = \mu_g = \mu = 3.73 \times 10^{-4}Pa.s$ . L'accélération de la gravité vaut  $g = 9.81m.s^{-2}$  et le diamètre de bulle vaut  $d_b = 0.001m$ . Trois fractions volumiques sont simulées :  $\alpha = 0.03, 0.06, 0.12$ . Pour les simulations avec forçage, le côté du domaine d'écoulement vaut  $L = 0.0317m$ , et il vaut  $L = 0.0158m$  pour les simulations sans. Pour la simulation T180 de SIT pure, c'est-à-dire avec forçage et sans les bulles, le domaine est discrétisé sur un maillage M2 de 28 mailles par diamètre de bulles. Pour la simulation TB6 à 6% de fraction volumique avec forçage, une simulation sur le même maillage M2 est réalisée, ainsi qu'une simulation sur le maillage M1 qui est deux fois plus grossier. La comparaison de cette simulation sur ces deux maillages se trouve en annexe A.3. Les simulations avec forçage à  $\alpha = 3\%$  (TB3) et  $\alpha = 12\%$  (TB12) ne sont disponibles que sur le maillage provisoire M1 à ce jour. Des simulations plus raffinées sur le maillage M2 sont en cours pour les cas  $\alpha = 3\%$  et  $\alpha = 12\%$ , mais ne sont malheureusement pas encore disponibles au moment de la rédaction de ce document. L'annexe A.3 qui compare les résultats obtenus sur les maillages M1 et M2 pour le cas  $\alpha = 6\%$  montrent que le maillage M1 fournit des résultats imparfaits, mais dont il est possible de tirer des conclusions intéressantes. Dans le cadre de ce mémoire, nous supposons qu'il en est de même pour les cas à  $\alpha = 3$  et  $12\%$ .

Des instantanés de la composante verticale de vitesse  $u_x$  et d'une composante horizontale de vitesse  $u_z$  pour la simulation de SIT pure pour la simulation de BIA pure à  $\alpha = 6\%$  et pour la simulation couplée à  $\alpha = 6\%$ , sont présentés sur la figure (5.1), de haut en bas. La vitesse relative  $u_r$ , les variances de la vitesse des bulles  $\sigma^2(u_b)$ , de la vitesse du liquide  $\sigma^2(u_l)$ , de la vitesse du gaz  $\sigma^2(u_g)$  et de la vitesse du mélange  $\sigma^2(u)$ , pour la simulation de SIT pure (TBIA,  $\alpha = 0\%$ ), pour les simulations couplées (TBIA,  $\alpha > 0\%$ ) et pour les simulations sans forçage (BIA) sont données dans le tableau (5.1) et seront commentées au cours des sections suivantes. Ce tableau montre aussi que la présence de bulles réduit l'échelle intégrale  $\ell$ , et ce d'autant plus qu'il y a plus de bulles. Le nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor  $Re_\lambda$  diminue aussi avec  $\alpha$ . Au contraire, le taux de dissipation volumique  $\varepsilon_\mu$  augmente avec la fraction volumique.

## 5.1 Moments statistiques

### Dynamique des bulles

Le mouvement des bulles est la seule cause de BIA. Commençons donc par décrire le mouvement moyen de celles-ci. Pour les écoulements de BIA pure, la vitesse moyenne d'ascension des bulles, ou vitesse relative  $u_r$ , est une fonction décroissante de la fraction volumique  $\alpha$ , comme le montrent les travaux expérimentaux de RIBOUX et al. [48], ZENIT et al. [71] et MARTÍNEZ-MERCADO et al. [35]. Dans ces travaux, la vitesse relative suit grossièrement une évolution  $u_r = V_0 (1 - \alpha^{0.49})$ , avec  $V_0$  déterminé par les conditions expérimentales, tandis que dans nos simulations de BIA pure, la tendance suivie par  $u_r$  est légèrement différente, mais reste une fonction décroissante de  $\alpha$ , comme le montre la figure (5.2) (disques verts ● et tracé violet). Cette différence s'explique par le rapport

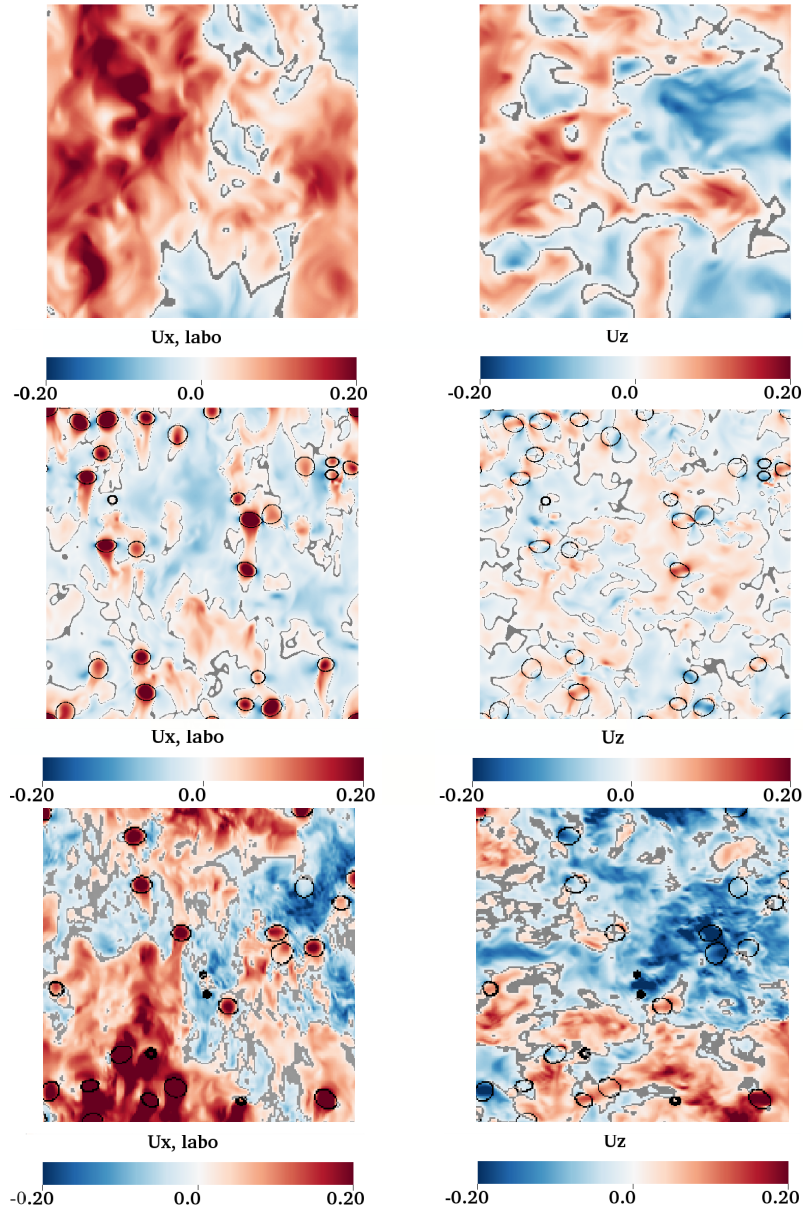


Figure 5.1: Instantané de la composante verticale de la vitesse  $u_x$  (colonne gauche) et de la composante horizontale de la vitesse  $u_z$  (colonne droite) dans le plan  $(z, x)$  à  $y = 0$ , dans le repère du laboratoire ( $\overline{u_x^l} = 0$ ), pour la simulation T180 de SIT pure (sans bulles) en haut, sB6 de BIA pure (sans forçage) au milieu et pour la simulation couplée TB6 en bas. Les interfaces des bulles sont en noir. Les zones grises mettent en évidence les vitesses nulles.

des densités  $\rho_l/\rho_v$  qui vaut 13 dans nos cas et qui est autour de 1000 pour les expériences, et surtout par le rapport des viscosités  $\mu_l/\mu_g$  qui vaut 1 dans nos cas tandis qu'il est compris entre 54 pour les écoulements eau-air et 300 lorsque l'eau est mélangée à de la glycérine (MARTÍNEZ-MERCADO et al. [35]). À la différence des écoulements de BIA pure, pour les écoulements couplés (TBIA), aucune évolution de la vitesse relative  $u_r$  avec  $\alpha$  n'est relevée, comme on peut le voir sur la figure (5.2), carrés oranges  $\square$ , en accord avec les résultats expérimentaux de MARTÍNEZ MERCADO et al. [34] qui sont à fraction volumique très faible  $0.28\% < \alpha < 0.74\%$ . De ce fait, pour un  $\alpha$  donné, la BIA ne peut servir de référence pour le niveau d'énergie de la contribution BIA dans un écoulement couplé TBIA.

Considérons maintenant l'agitation des bulles, évaluée à partir des variances de leurs vitesses, qui

			$\alpha = 0\%$	$\alpha = 3\%$	$\alpha = 6\%$	$\alpha = 12\%$
	$u_r(m/s)$	TBIA	–	$99.1 \times 10^{-3}$	$90 \times 10^{-3}$	$97.3 \times 10^{-3}$
		BIA	–	$157 \times 10^{-3}$	$132 \times 10^{-3}$	$108 \times 10^{-3}$
bulles	$\sigma^2(u_{b,x})(m/s)^2$	TBIA	–	$7.11 \times 10^{-3}$	$6.26 \times 10^{-3}$	$4.96 \times 10^{-3}$
		BIA	–	$2.16 \times 10^{-3}$	$1.99 \times 10^{-3}$	$1.46 \times 10^{-3}$
	$\sigma^2(u_{b,y})(m/s)^2$	TBIA	–	$8.96 \times 10^{-3}$	$8.86 \times 10^{-3}$	$8.31 \times 10^{-3}$
		BIA	–	$1.18 \times 10^{-3}$	$2.00 \times 10^{-3}$	$1.86 \times 10^{-3}$
gaz	$\sigma^2(u_{g,x})(m/s)^2$	TBIA	–	$11.5 \times 10^{-3}$	$9.84 \times 10^{-3}$	$8.82 \times 10^{-3}$
		BIA	–	$8.44 \times 10^{-3}$	$6.99 \times 10^{-3}$	$5.16 \times 10^{-3}$
	$\sigma^2(u_{g,y})(m/s)^2$	TBIA	–	$11.6 \times 10^{-3}$	$10.8 \times 10^{-3}$	$9.93 \times 10^{-3}$
		BIA	–	$3.40 \times 10^{-3}$	$3.19 \times 10^{-3}$	$2.47 \times 10^{-3}$
liquide	$\sigma^2(u_{x,l})(m/s)^2$	TBIA	$6.31 \times 10^{-3}$	$6.22 \times 10^{-3}$	$6.23 \times 10^{-3}$	$5.30 \times 10^{-3}$
		BIA	–	$1.13 \times 10^{-3}$	$1.52 \times 10^{-3}$	$1.95 \times 10^{-3}$
	$\sigma^2(u_{y,l})(m/s)^2$	TBIA	$6.96 \times 10^{-3}$	$7.45 \times 10^{-3}$	$8.08 \times 10^{-3}$	$7.35 \times 10^{-3}$
		BIA	–	$0.48 \times 10^{-3}$	$0.79 \times 10^{-3}$	$1.07 \times 10^{-3}$
mélange	$\sigma^2(u_x)(m/s)^2$	TBIA	$6.31 \times 10^{-3}$	$7.51 \times 10^{-3}$	$6.91 \times 10^{-3}$	$6.81 \times 10^{-3}$
		BIA	–	$2.07 \times 10^{-3}$	$2.84 \times 10^{-3}$	$3.61 \times 10^{-3}$
	$\sigma^2(u_y)(m/s)^2$	TBIA	$6.96 \times 10^{-3}$	$7.38 \times 10^{-3}$	$8.24 \times 10^{-3}$	$7.66 \times 10^{-3}$
		BIA	–	$0.57 \times 10^{-3}$	$0.93 \times 10^{-3}$	$0.12 \times 10^{-3}$
$\varepsilon_\mu(W.m^{-3})$	TBIA	79.4	95.9	131	153	
	BIA	–	44.0	72.4	110	
$\ell(m)$	TBIA	$15.0 \times 10^{-3}$	$14.0 \times 10^{-3}$	$10.7 \times 10^{-3}$	$7.92 \times 10^{-3}$	
	BIA	–	$1.66 \times 10^{-3}$	$1.74 \times 10^{-3}$	$0.8 \times 10^{-3}$	
$Re_\lambda$	TBIA	177	166	150	140	
	BIA	–	38	43	44	

Tableau 5.1: Vitesse relative et variance  $\sigma^2$  des vitesses des bulles  $u_{b,x}$  et  $u_{b,y}$ , des vitesses dans le gaz  $u_{g,x}$  et  $u_{g,y}$ , des vitesses dans le liquide  $u_{l,x}$  et  $u_{l,y}$ , et des vitesses dans le mélange  $u_x$  et  $u_y$ . Dissipation  $\varepsilon_\mu = \mu \langle s_{ij} s_{ij} \rangle$  pour le mélange, échelle intégrale  $\ell = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon_\mu / \rho_m}$  et nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor  $\lambda$ ,  $Re_\lambda = \frac{\rho_l u' \lambda}{\mu}$ .

est plus de trois fois plus importante en présence de forçage (cas TBIA) que sans forçage (cas BIA), comme le montre la comparaison de ces variances (BIA en disques  $\bullet$  et TBIA en carrés vides  $\square$ ) sur la figure (5.3a). L'agitation des bulles n'est que de l'ordre de quelques pourcents de leur mouvement moyen en BIA,  $\sigma^2(u_{b,x})_{BIA}/u_{r,BIA}^2 \sim 0.08$ , tandis qu'en TBIA, cette agitation est de l'ordre de 80% du mouvement moyen,  $\sigma^2(u_{b,x})_{TBIA}/u_{r,TBIA}^2 \sim 0.8$  : en activant le forçage, l'agitation des bulles devient grande devant leur mouvement d'ensemble. Dans les deux cas, la variance de la vitesse verticale des bulles diminue en augmentant la fraction volumique, alors que la variance de la composante horizontale est beaucoup moins sensible à  $\alpha$ . Pour les cas BIA, la variance de la composante verticale de vitesse  $\sigma^2(u_{b,x})$  est plus importante que celle de la composante horizontale  $\sigma^2(u_{b,y})$ , comme le montre la figure (5.3b). Cela suggère que l'agitation d'une bulle donnée provient plutôt de son interaction avec les bulles qui la précèdent plutôt que de l'instabilité de son propre sillage. L'agitation des bulles devient isotrope à mesure que la fraction de gaz augmente, comme le montrent les disques bleus ( $\bullet$ ) sur la figure (5.3b) : ce qui peut s'expliquer par le fait qu'en augmentant  $\alpha$ , le temps passé par une bulle dans les sillages des bulles précédentes diminue. Pour les cas couplés TBIA, c'est le contraire : la variance de la composante horizontale  $\sigma^2(u_{b,y})$  domine celle de la composante verticale  $\sigma^2(u_{b,x})$  et le rapport  $\sigma^2(u_{b,x})/\sigma^2(u_{b,y})$  s'éloigne de l'unité en augmentant  $\alpha$ . La superposition de la SIT à la BIA modifie fondamentalement le comportement des bulles.

### Agitation de la phase liquide et du mélange

Nous nous intéressons maintenant à l'agitation dans la phase liquide, évaluée à partir de la variance des vitesses. Les travaux expérimentaux de ZENIT et al. [71] montrent que pour un

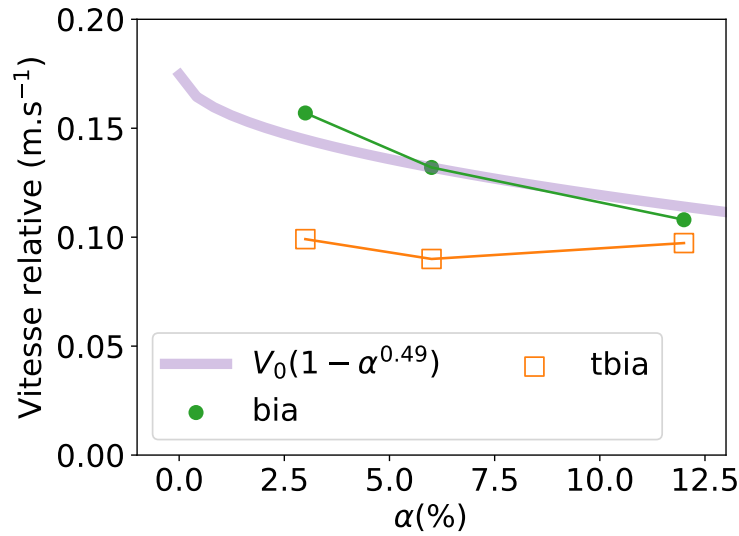
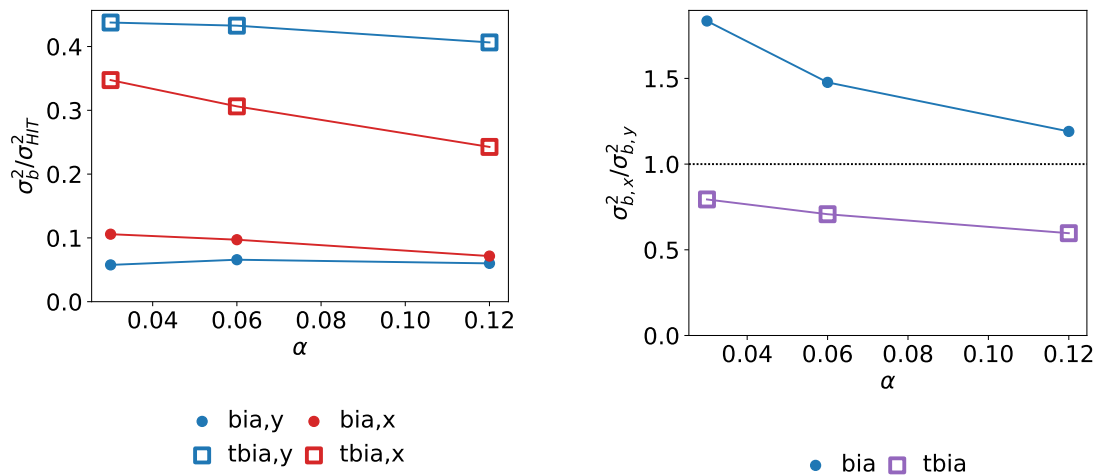


Figure 5.2: Évolutions des vitesses relatives  $u_r$  en fonction de la fraction volumique de gaz  $\alpha$ . En vert (●): simulation de BIA (sB3, sB6, sB12). En orange (□): simulations couplées TBIA (TB3, TB6, TB12), et comparaison avec la relation (3.1) issue de RIBOUX et al. [48] pour des bulles d'air de 2.5mm de diamètre dans de l'eau.



(a) variances des vitesses des bulles par rapport à  $\sigma_{HIT}^2$ . (b) anisotropie des variances des vitesses des bulles

Figure 5.3: Variations des vitesses des bulles  $\sigma^2(u_b)$  pour les simulations de BIA ● et pour les simulations à effets couplés TBIA □.

écoulement de BIA pure, l'agitation dans le liquide est proportionnelle à l'énergie cinétique moyenne des bulles  $\alpha u_r^2$  (Fig. 15) pour une large gamme de taux de vide  $0.01 < \alpha < 0.16$  pour des bulles d'air de 1.5mm de diamètre dans de l'eau. Les travaux de MARTÍNEZ-MERCADO et al. [35] étendent cette conclusion pour des écoulements où le fluide porteur est rendu plus visqueux que l'eau en ajoutant de la glycérine (Fig. 13). La figure (5.4) montre que cette tendance se retrouve dans nos simulations de BIA pure (tracé vert et disques bleus clairs ●). Le coefficient de proportionnalité  $\sigma^2/\alpha u_r^2$  est différent dès lors que les paramètres fluides sont différents. La même tendance se retrouve théoriquement en considérant le cas d'un écoulement potentiel autour de bulles sphériques qui n'interagissent pas (BIESHEUVEL et al. [3]), avec un coefficient de proportionnalité très faible

par rapport aux résultats expérimentaux et aux résultats de nos simulations. La figure (5.4) permet d'apprécier que la variance du mélange,  $\sigma^2(u) = \sigma^2(u_x) + 2\sigma^2(u_y)$ , calculée sur tout le domaine, c'est-à-dire en comptabilisant aussi l'agitation à l'intérieur des bulles, est aussi proportionnelle à  $\alpha u_r^2$  (tracé noir et disques bleus ●), avec un coefficient de proportionnalité 1.5 fois plus grand que pour la variance du liquide uniquement. Cela signifie que l'agitation à l'intérieur des bulles est importante et suit la même tendance avec  $\alpha$  que l'agitation à l'extérieur de celles-ci.

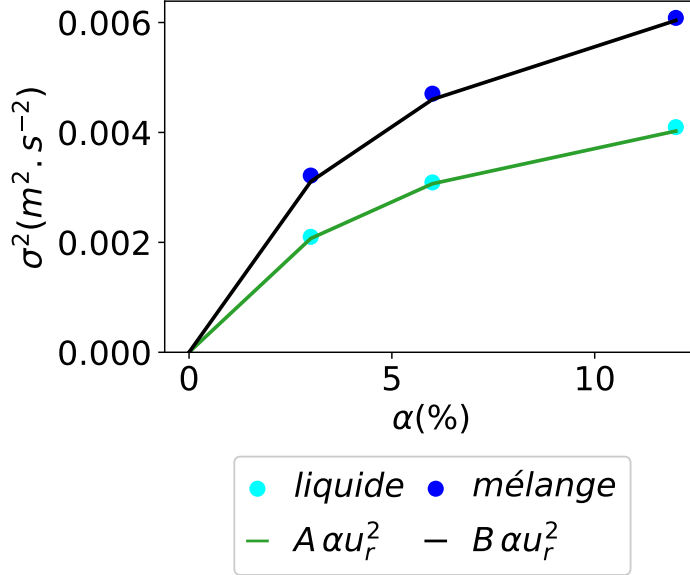


Figure 5.4: Variance  $\sigma^2(u) = \sigma^2(u_x) + 2\sigma^2(u_y)$  de la vitesse du liquide (●) et du mélange (●) pour le cas de BIA pure. Les évolutions proportionnelles à l'énergie cinétique moyenne  $\alpha u_r^2$  sont tracées. Les coefficients de proportionnalité sont  $A = 2.8$  et  $B = 4.2$ .

La figure (5.5) trace de nouveau la variance dans le liquide (●) et la variance pour le mélange de liquide et de gaz (●) du cas de BIA pure. Sur cette figure, nous ajoutons les variances du cas TBIA pour le liquide (◇) et pour le mélange (◇) auxquelles nous avons soustrait la variance de la HIT, mesurée sur la simulation sans bulles (T180) qui est indépendante de  $\alpha$ . Ainsi, les symboles carrés montrent que la contribution des bulles à la variance du cas couplé TBIA est seulement de l'ordre de 10% de l'agitation apportée par le forçage et qu'elle n'évolue pas avec  $\alpha$ . On remarque de plus qu'à  $\alpha = 12\%$ , la contribution des bulles à la TBIA est négative pour le liquide : la présence des bulles conduit à une réduction de l'agitation du liquide. L'agitation engendrée par les bulles, dans le cas couplé TBIA, ne suit donc pas du tout une évolution proportionnelle à  $\alpha u_r^2$ . L'énergie cinétique du mouvement relatif moyen  $\frac{1}{2}\alpha u_r^2$ , l'énergie cinétique fluctuante des bulles  $\frac{1}{2}\sigma^2(u_b)$ , celle du liquide  $\frac{1}{2}\sigma^2(u_l)$  et celle du mélange  $\frac{1}{2}\sigma^2(u)$  montrent des tendances très différentes pour le cas de BIA pure et pour le cas couplé TBIA; la présence du forçage pour les cas couplés rend le mouvement moyen, comme les fluctuations, insensibles à la fraction de gaz.

#### Bilan intégral de puissance pour le mélange

Pour le cas de BIA pure, la seule force extérieure au système composé du mélange de liquide et de gaz, vient de la gravité qui génère une force de flottabilité sur les bulles. En moyenne, le travail de cette force vaut  $\alpha \Delta \rho u_r g$ . La puissance volumique totale dégagée par le travail de cette force  $\mathcal{G} = \frac{1}{V} \iiint \mathbf{u} \cdot (\rho - \rho_m) \mathbf{g} dV$  suit bien l'évolution moyenne  $\alpha \Delta \rho u_r^{BIA} g$ , comme le montrent les disques verts ● sur la figure (5.6). Pour le cas couplé, la puissance associée à la flottabilité en carrés verts □ suit aussi l'évolution moyenne  $\alpha \Delta \rho u_r^{TBIA} g$ , mais avec une vitesse relative  $u_r^{TBIA}$  constante (Fig. (5.4)), d'où l'évolution linéaire avec  $\alpha$ . Pour ce cas TBIA, au travail de la flottabilité  $Grv$

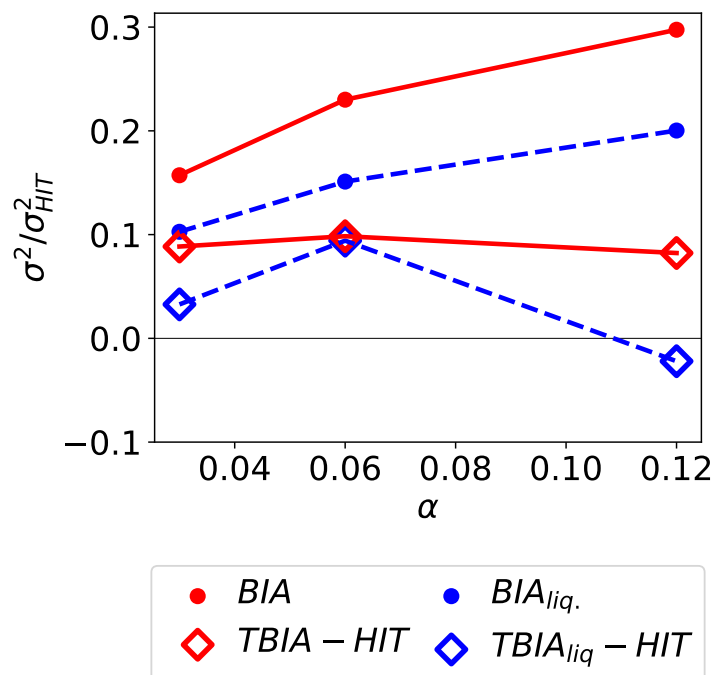


Figure 5.5: Variance du liquide et du mélange pour le cas BIA (●,●), et pour la contribution des bulles au cas couplé,  $\sigma_{TBIA}^2 - \sigma_{HIT}^2$ , (◇,◇). Les variances sont normées par celle du cas de SIT pure ( $\sigma_{HIT}^2$ ).

s'ajoute celui du forçage HIT,  $\mathcal{W}_{HIT} = \frac{1}{V} \iiint \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_{hit} dV$ , (carrés rouges □) qui est constant avec la fraction volumique, comme annoncé précédemment. La gamme de fraction volumique choisie,  $0.03 \leq \alpha \leq 0.12$ , nous permet de passer pour le cas couplé TBIA, d'une situation où la puissance fournie par la flottabilité domine celle apportée par le forçage HIT, à la situation inverse. L'équilibre entre ces deux sources de puissances  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{W}_{HIT}$  se situe pour une fraction volumique autour de 8%.

On notera que cette conclusion, obtenue en considérant les puissances injectées par les bulles et le forçage turbulent ne se retrouve pas en considérant les énergies fluctuantes. En effet, la variance des fluctuations du mélange du cas TBIA est insensible à la fraction de gaz et, à  $\alpha = 12\%$ , la contribution des bulles à l'agitation totale est même négative (Fig. (5.5)).

## 5.2 PDF des vitesses

L'agitation de la phase gazeuse peut se décomposer en deux parties. La première correspond l'agitation due au mouvement interne du gaz dans les bulles qui ne participe pas au mouvement de rotation et de translation de celles-ci. La deuxième partie correspond aux déplacements des bulles. L'agitation du gaz  $\sigma^2(u_g)$  est donc naturellement plus élevée que l'agitation des bulles  $\sigma^2(u_b)$ , comme le confirme le tableau (5.1). Pour le cas de BIA pure, l'agitation dans le gaz est au moins 2 fois plus grande que l'agitation des bulles, tandis que pour le cas couplé l'agitation du gaz n'est que 1.3 fois plus grande que celle des bulles. L'ajout du forçage diminue l'importance relative de l'agitation interne du gaz. Comme montré au chapitre précédent, la PDF de la vitesse des bulles pour le cas BIA s'éloigne visiblement de la gaussienne à faible fraction de gaz  $\alpha$ , et cet écart diminue en augmentant  $\alpha$ . La PDF pour la phase gazeuse s'éloigne moins de la gaussienne au même  $\alpha$ , et se rapproche aussi de la gaussienne en augmentant  $\alpha$ . La figure (5.7), qui compare les PDF centrées et réduites des vitesses dans le gaz (rouge) et des vitesses des bulles (gris) pour le cas de BIA pure (trait continu) et pour les cas couplé TBIA (trait discontinu), montre que l'ajout du forçage turbulent tend à faire converger toutes ces PDF vers une loi gaussienne, à l'instar de l'augmentation de la fraction volumique.



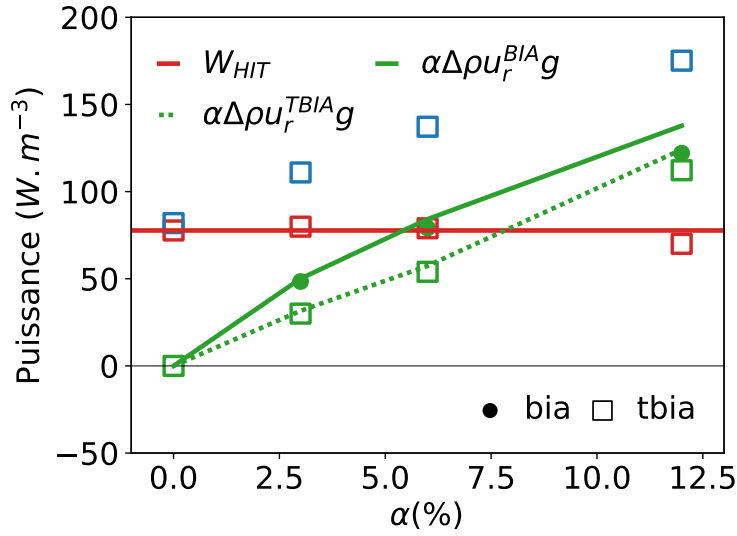


Figure 5.6: Puissances volumiques des termes du bilan d'énergie, en carrés vides  $\square$  pour les simulations de TBIA et en disques remplis  $\bullet$  pour les simulations de BIA. En vert  $\blacksquare$  : puissance produite par flottabilité, en rouge  $\blacksquare$  : puissance produite par le forçage, en bleu  $\blacksquare$  : puissance dissipée. En BIA pure, la puissance dissipée est égale à la puissance produite par la flottabilité.

Pour les vitesses de la phase liquide, l'effet du forçage HIT est spectaculaire. En effet, alors que la puissance injectée par la flottabilité est comparable à celle produite par le forçage HIT, la figure (5.8) montre que la succession d'évolutions en exponentielles, classique en BIA pure, disparaît complètement au profit d'une distribution gaussienne, caractéristique du cas de SIT pure, dès lors que le forçage est actif. Ce remplacement de tendances est particulièrement remarquable à  $\alpha = 12\%$ , alors que la puissance injectée par la flottabilité des bulles est supérieure à celles du forçage.

Toutes ces comparaisons montrent que pour les variances des vitesses, comme pour la structure des PDF de vitesses, l'effet des bulles est totalement dominé pas celui du forçage, quand bien même leurs puissances respectives sont du même ordre de grandeur. Pour comprendre ce rapport de force entre les deux phénomènes en jeu, il est impératif d'étudier la répartition spectrale des énergies et des puissances pour nos différents cas.

### 5.3 Spectre d'énergie de la vitesse

Les spectres d'énergies des cas de BIA pure, de SIT pure (HIT) et pour les cas couplés TBIA sont tracés dans la colonne de gauche des figures (5.9a), (5.9b) et (5.9c) pour  $\alpha = 3\%$ ,  $6\%$  et  $\alpha = 12\%$ , respectivement. Ici, tous les spectres ont été normalisés par la variance du cas HIT (TBIA et  $\alpha = 0\%$  dans le tableau (5.1)). Pour les cas avec des bulles, les champs contiennent des singularités qui se retrouvent sur les spectres, comme expliqué au chapitre 3. Pour rappel, en BIA pure, la partie singulière du terme de flottabilité  $Grv$ , peut être obtenue en appliquant un filtre passe-bas exponentiel  $e^{(\kappa/\kappa_c)^n}$ . La partie singulière correspond au reste :  $Grv_s = Grv - e^{(\kappa/\kappa_c)^n} Grv$ . La partie singulière du terme de transfert étant observée négligeable, la partie singulière du terme de dissipation est opposée à la partie singulière du terme de gravité. Donc, la partie régulière de la dissipation est obtenue par addition avec  $Grv_s$  :  $Dsp_r = Dsp + Grv_s$ . La partie régulière du spectre d'énergie s'obtient alors comme  $\mathcal{S}_r = \kappa^{-2} Dsp_r / \mu$ . On observe que les singularités du terme de flottabilité sont identiques entre la BIA et la TBIA (voir figure 19, en annexe A.4). En conséquence, la même opération est appliquée aux termes de flottabilité et de dissipation de la TBIA. En SIT pure, les champs sont tous réguliers, aucune manipulation n'est nécessaire. Les parties régulières des spectres sont ainsi tracées dans la colonne de droite des figures (5.9a), (5.9b) et (5.9c).

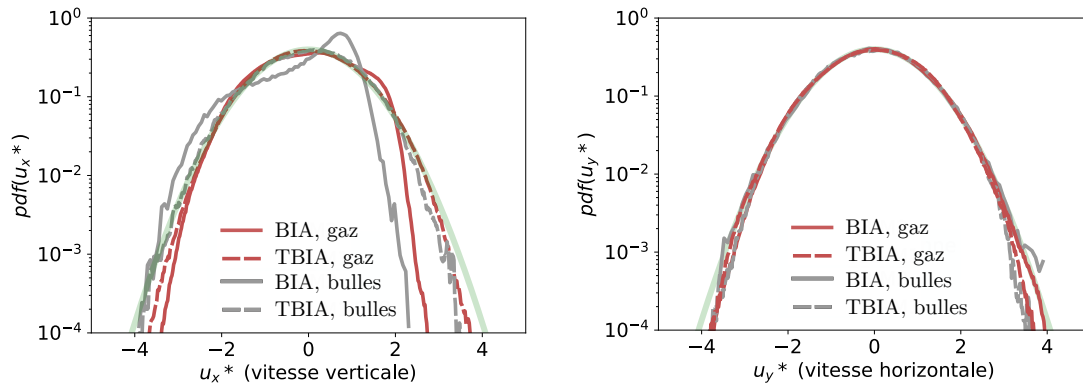
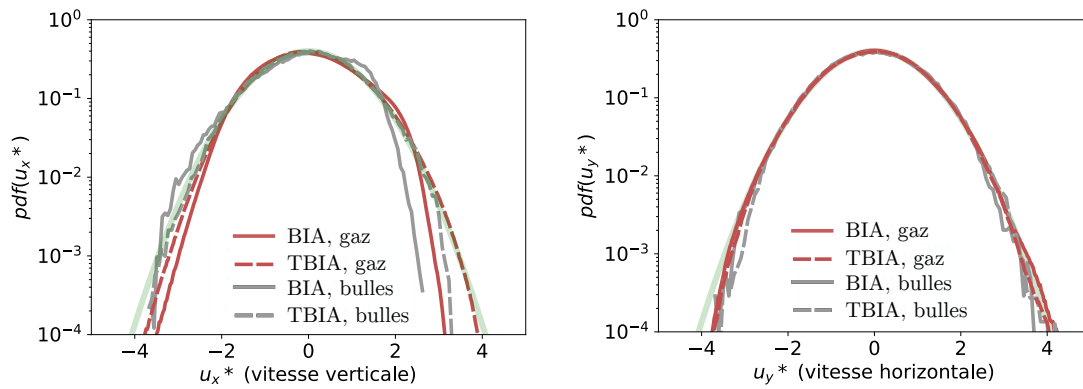
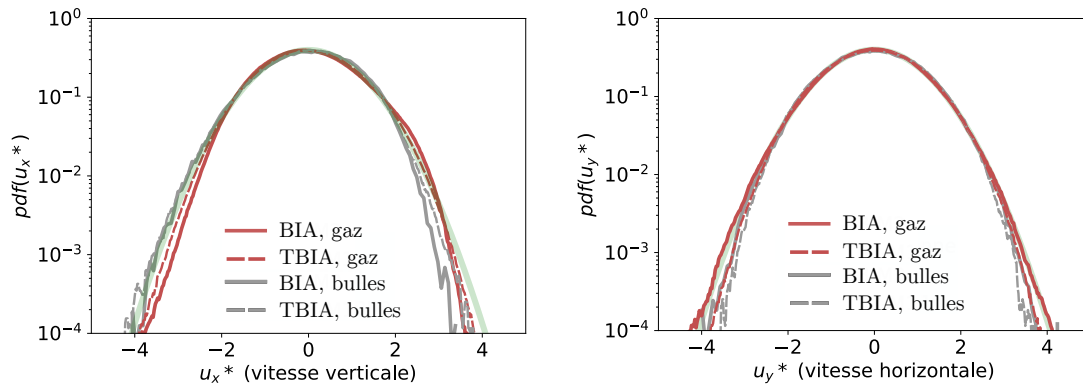
(a) Essaim de bulle à  $\alpha = 3\%$ (b) Essaim de bulles à  $\alpha = 6\%$ (c) Essaims de bulles à  $\alpha = 12\%$ 

Figure 5.7: PDF centrees reduites de la composante verticale (gauche) et d'une composante horizontale (droite) des vitesses des bulles  $u_b^*$  en gris et de la vitesse dans la phase gazeuse  $u_g^*$  en rouge. La tendance gaussienne est en trait vert clair.

À grande échelle ( $\kappa < \kappa_b$ ), la structure de l'écoulement en TBIA est identique à celle du cas de SIT pure pour  $\alpha = 3\%$  et  $\alpha = 6\%$ , comme le montre la superposition des courbes vertes et rouges de la figure (5.9). À  $\alpha = 12\%$ , on constate que le spectre du cas couplé est inférieur au cas HIT autour de  $\kappa = 0.2\kappa_b$ . À cette échelle, l'énergie de la phase liquide est dominante et cette diminution d'énergie est probablement la cause de la réduction de la variance du liquide  $\sigma^2(u_l)$  pour cette fraction de gaz (Fig. (5.5)). Cet effet est probablement lié à une modification du transfert entre les échelles causé par la présence des bulles. Aux échelles comparables à la taille des bulles ( $\kappa \sim \kappa_b$ ),



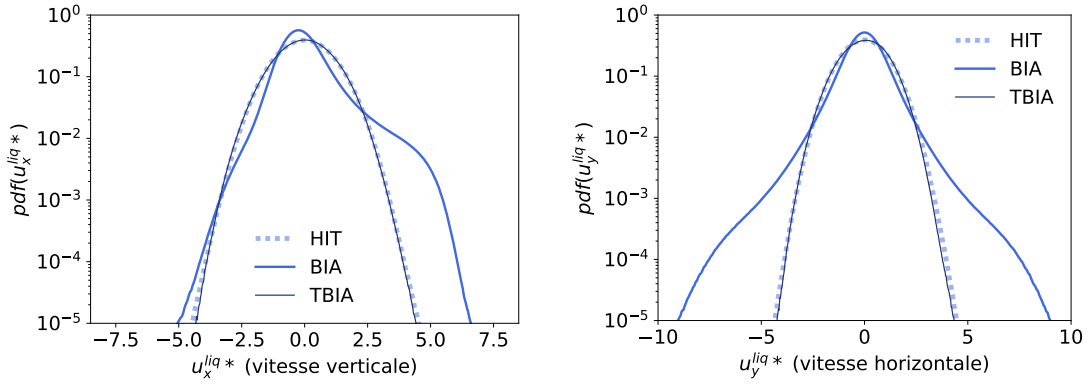
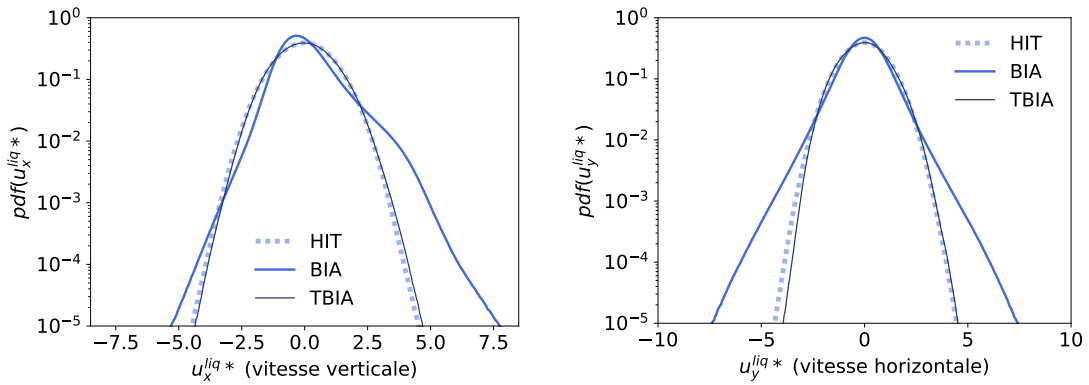
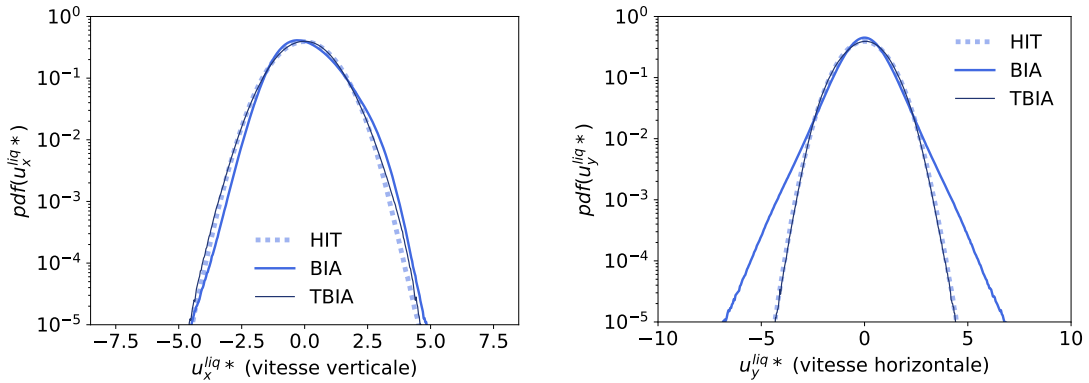
(a) Essais de bulles à  $\alpha = 3\%$ .(b) Essais de bulles à  $\alpha = 6\%$ (c) Essais de bulles à  $\alpha = 12\%$ 

Figure 5.8: PDFs centrées réduites de la composante verticale de la vitesse dans la phase liquide  $u_x^{liq*}$  (gauche) et d'une des composantes horizontales de la vitesse dans la phase liquide  $u_y^{liq*}$  (droite).

l'injection d'énergie par ces dernières se traduit par un pic du spectre en BIA, que l'on retrouve en TBIA, et l'augmentation de la fraction de gaz s'accompagne d'une augmentation de ce pic. En passant de  $\alpha = 3\%$  à  $\alpha = 12\%$ , on passe d'une situation où l'énergie injectée par les bulles seules à cette échelle est inférieure à celle de la SIT, à la situation inverse, comme attendu en considérant les évolutions des puissances de la flottabilité,  $\mathcal{G}$ , et de la HIT,  $\mathcal{W}_{HIT}$ , (Fig. (5.6)). Aux petites échelles ( $\kappa > \kappa_b$ ), la présence des bulles modifie radicalement le spectre : le niveau d'énergie est augmenté quel que soit  $\alpha$  et sa décroissance avec le nombre d'onde  $\kappa$  est moins forte que pour le cas HIT, pour suivre la tendance du cas de BIA pure, proportionnelle à  $\kappa^{-3}$ . Bien que les PDF

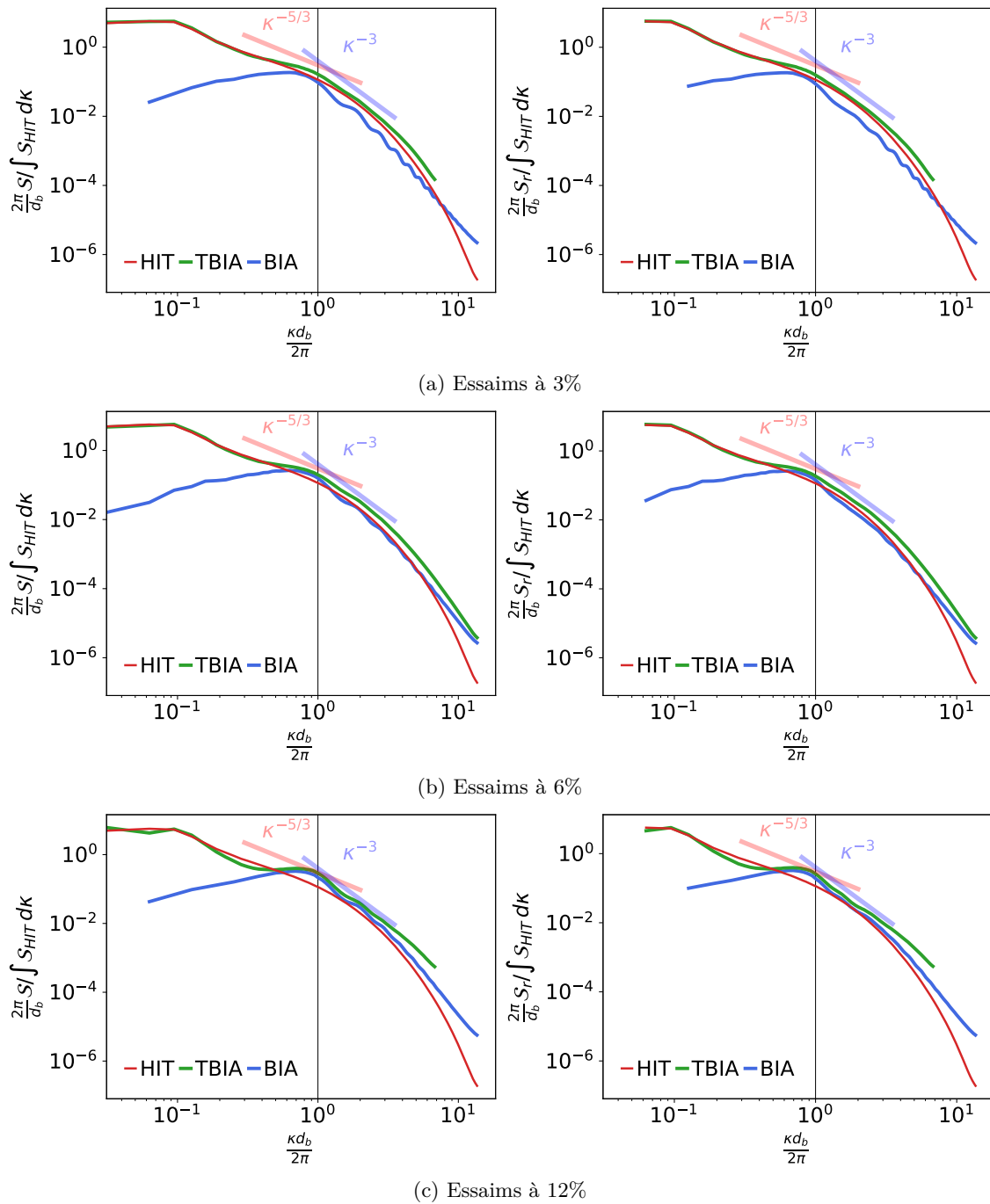


Figure 5.9: Spectres d'énergie du mélange sans traitement à gauche et partie régulière du spectre d'énergie à droite.

des cas couplés se superposent à la PDF du cas HIT et que leurs moments soient proches de ce cas, la HIT ne domine pas la dynamique de l'écoulement à toutes les échelles. Si elle domine aux plus grandes échelles, à partir des échelles comparables à  $d_b$ , la contribution de la BIA apporte une énergie comparable celle de la SIT. Ce résultat confirme la pertinence des paramètres pour étudier l'interaction entre la BIA et la SIT.

## 5.4 Représentation spectrale du bilan d'énergie

L'évolution des termes du bilan spectral d'énergie cinétique, tous multipliés par le nombre d'onde  $\kappa$  et normalisés par la production totale de puissance par le forçage SIT,  $\mathcal{W}_{HIT}$ , qui est indépendante de la fraction volumique de gaz  $\alpha$ , est tracée en figure (5.10a) pour le cas de BIA pure et en figure (5.10b) pour le cas de HIT et pour le cas couplé. Pour rappel, en BIA pure, les bilans sont proches de l'auto-similarité : en normant les termes du bilan par la puissance intégrale injectée par flottabilité  $\mathcal{G}(\alpha)$  comme précédemment ((4.27), chapitre 4) plutôt que par celle du forçage  $\mathcal{W}_{HIT}$ , leur évolution devient presque indépendante de la fraction de gaz  $\alpha$ . En effet, quel que soit  $\alpha$ , le pic de production par la flottabilité se situe à des échelles légèrement plus grandes que  $\kappa_b$ , et s'annule à partir de  $1.4\kappa_b$ . Indépendamment de la correction exponentielle (voir figure (20a) en annexe A.4), ce terme de flottabilité s'étale de  $\kappa = 0.1\kappa_b$  à  $\kappa = 1.5\kappa_b$ , et la puissance qu'il injecte commence à être dissipée autour du même nombre d'onde,  $\kappa \sim 0.4\kappa_b$ , pour les trois fractions de gaz. En revanche, la coupure de la dissipation, et la fin du régime proportionnel à  $\kappa^{-1}$  manifesté par un plateau sur la figure, sont repoussées vers les plus petites échelles en augmentant  $\alpha$ . L'ajout du forçage SIT à l'écoulement se traduit sur le bilan du cas couplé TBIA, sur la figure (5.10b), par la présence de deux sources nettes de puissance. La première, en rouge, correspond à la puissance liée au forçage SIT dont l'intégrale (Fig. (5.6)) et la répartition spectrale ne changent pas avec la fraction de gaz. En particulier, ce terme est actif sur une gamme d'échelles disjointe de celle du forçage par la flottabilité, démontrant ainsi la pertinence de nos choix de paramètres assurant que les échelles de production par la flottabilité ne sont pas directement modifiées par le forçage SIT. La deuxième source nette de puissance, en vert, qui correspond à la puissance liée à la flottabilité, ressemble de près à ce qui est observé en BIA pure : les échelles concernées et la distribution de la puissance sur celles-ci est similaire, seule l'amplitude et donc la puissance totale injectée changent à  $\alpha$  donné entre le cas BIA et le cas TBIA, comme discuté précédemment (Fig. (5.6)). De plus, le pic de production par la flottabilité survient à des échelles où la dissipation du cas de SIT pure est encore faible (pointillés bleus) : notre choix de paramètres place bien l'injection de puissance par les bulles avant les échelles dissipatives de la HIT, comme souhaité. La dissipation du cas couplé TBIA, résultant des deux contributions, devient maximale dès l'échelle de la bulle à cause des mécanismes de la BIA, puis se poursuit par un plateau qui s'étend vers les petites échelles à mesure que  $\alpha$  augmente. La dissipation aux petites échelles croît avec  $\alpha$  et l'on voit que la résolution provisoire M1 atteint ses limites pour  $\alpha = 12\%$ . Le terme de transfert (en orange) répond aussi aux deux contributions. Ainsi, aux grandes échelles, il s'oppose totalement au pic du forçage SIT, puisque les mécanismes BIA y sont inactifs. En revanche, autour du pic de production par la BIA ( $\kappa \sim \kappa_b$ ), où la production par le forçage SIT est nulle, le transfert résulte d'une combinaison, dépendant de la fraction de gaz, entre le transfert par la BIA ((5.10a)) et celui de la HIT (en pointillés oranges). À  $\alpha = 3\%$ , les transferts en HIT et en BIA s'opposent et sont de même amplitude, donc le transfert du cas couplé est nul. À  $\alpha = 6\%$  et à  $\alpha = 12\%$ , le transfert de la BIA domine celui de la HIT et le transfert résultant montre donc un pic négatif qui s'oppose à la production de la flottabilité. Pour les échelles plus petites, la production de la BIA s'annule à son tour, et le transfert s'oppose totalement à la dissipation qui combine les effets des deux contributions.

## 5.5 Combinaison linéaire pour isoler l'interaction

Dans quelle mesure ces deux contributions interagissent-elles ? Comment quantifier cette interaction ? Dans le cas avec forçage et dans le cas sans forçage, la production de puissance par la flottabilité, à  $\alpha$  donné, ne diffère que par son amplitude, directement due à la réduction de la vitesse relative  $u_r$  par l'activation du forçage. Ainsi, en faisant coïncider les amplitudes du terme de flottabilité entre le cas BIA et le cas couplé pour chaque fraction volumique, on construit la référence à bulles et sans forçage correspondant au cas couplé. Le cas de SIT pure constituant déjà la référence sans bulles pour le cas couplé quelque soit  $\alpha$ , on peut alors tenter d'isoler les contributions de la BIA, de la HIT seule et de leur interaction dans le cas de la TBIA. Sur la colonne gauche de la figure (5.11) les termes du bilan de la BIA sont multipliés par le coefficient  $C = \mathcal{G}^{TBIA}/\mathcal{G}^{BIA}$  pour obtenir le bilan 'C.BIA' (en tirets) pour lequel le terme de production par la flottabilité coïncide avec celui du cas

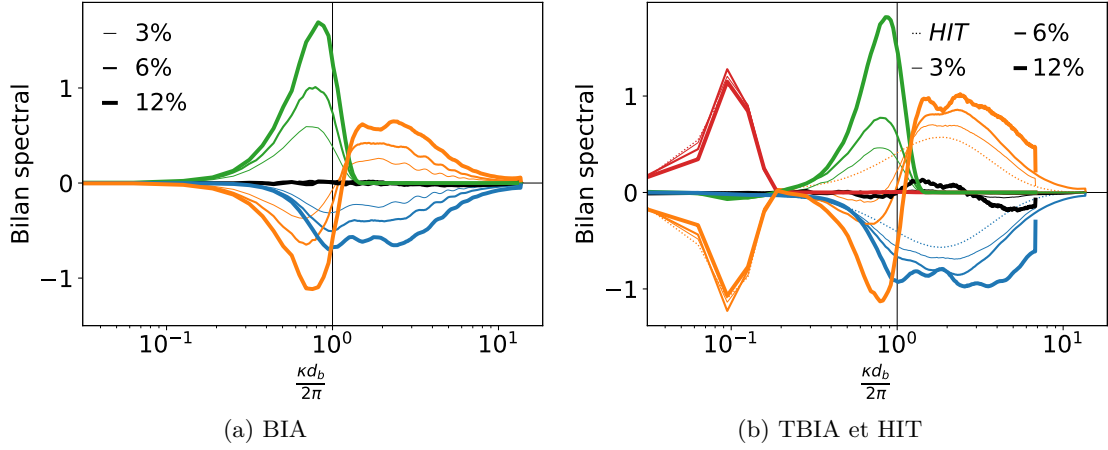


Figure 5.10: Termes du bilan d'énergie cinétique, parties régulières adimensionnées par  $\mathcal{W}_{HIT}$ , et multipliées par  $\kappa$ .

couplé (en trait continu). Soulignons que dans nos deux cas, la puissance de la flottabilité vérifie  $\mathcal{G} = \alpha u_r \Delta \rho g$ , et donc que leur rapport est égal à celui des vitesses relatives :  $C = u_r^{TBIA} / u_r^{BIA}$ , avec  $u_r^{TBIA}$  qui est indépendant de  $\alpha$ . Sur la colonne droite de la figure (5.11), le bilan 'C.BIA' est sommé avec le bilan du cas de SIT pure pour reconstruire un bilan tenant compte des deux contributions, mais qui ignore les éventuelles interactions entre celles-ci. Ce bilan combiné (en tirets) est comparé au bilan de la simulation couplée TBIA (en trait continu). À  $\alpha = 3\%$ , alors que la production par la BIA est dominée par celle de la HIT, ces deux bilans se superposent remarquablement bien. À  $\alpha = 6\%$ , la production par la BIA est proche de celle de la HIT, et les deux bilans se superposent encore. À  $\alpha = 12\%$ , alors que la production par la BIA est 1.5 fois plus importante que celle de la HIT, on constate une différence significative sur les termes de dissipation et de transfert à partir de  $\kappa_b$  : La dissipation du cas couplé TBIA est inférieure à celle du bilan combiné, 'HIT+C.BIA', autour de l'échelle de la bulle mais se prolonge nettement plus vers les petites échelles.

De la même façon que pour les termes du bilan d'énergie, on reconstruit sur la figure (5.12) le spectre d'énergie qui tient compte des deux contributions séparées mais pas des interactions (en violet), que l'on compare au spectre du cas couplé (en vert). À  $\alpha = 3\%$  et à  $\alpha = 6\%$ , la combinaison linéaire des spectres à effets séparés correspond remarquablement bien au spectre du cas couplé, et en particulier pour  $\kappa > \kappa_b$  alors que les énergies des deux contributions séparées sont comparables. À  $\alpha = 12\%$ , cette reconstruction surestime la valeur du spectre autour de  $\kappa = 0.3\kappa_b$ , comme on pouvait s'y attendre au regard des spectres en colonne gauche de la figure (5.9) où le spectre du cas HIT est très supérieur au spectre du cas TBIA. À partir de  $\kappa = \kappa_b$ , le spectre du cas couplé suit une pente en  $\kappa^{-3}$  sur une plus grande plage d'échelles.

En additionnant les termes des simulations HIT et BIA pure (corrigée pour tenir compte du changement de vitesse relative), nous avons construit un cas de référence non couplé pour la TBIA. Pour le spectre d'énergie, comme pour les termes de son bilan, cette référence est très proche du cas couplé à faible fraction de gaz, ce qui suggère que cette approche est pertinente. Pour observer uniquement l'interaction entre la BIA et la HIT, on montre sur la figure (5.13) la différence entre le cas couplé TBIA (avec interaction) et le cas combiné (sans interaction), pour le terme de dissipation uniquement, étant donné que le terme de transfert est simplement son opposé et que le spectre d'énergie se retrouve en multipliant le terme de dissipation par  $\kappa^{-2}/\mu$ . L'interaction consiste en un déficit de dissipation pour  $\kappa < 2\kappa_b$ , qui présente un minimum autour de  $\kappa_b$  et en un excédent pour  $\kappa > 2\kappa_b$ .

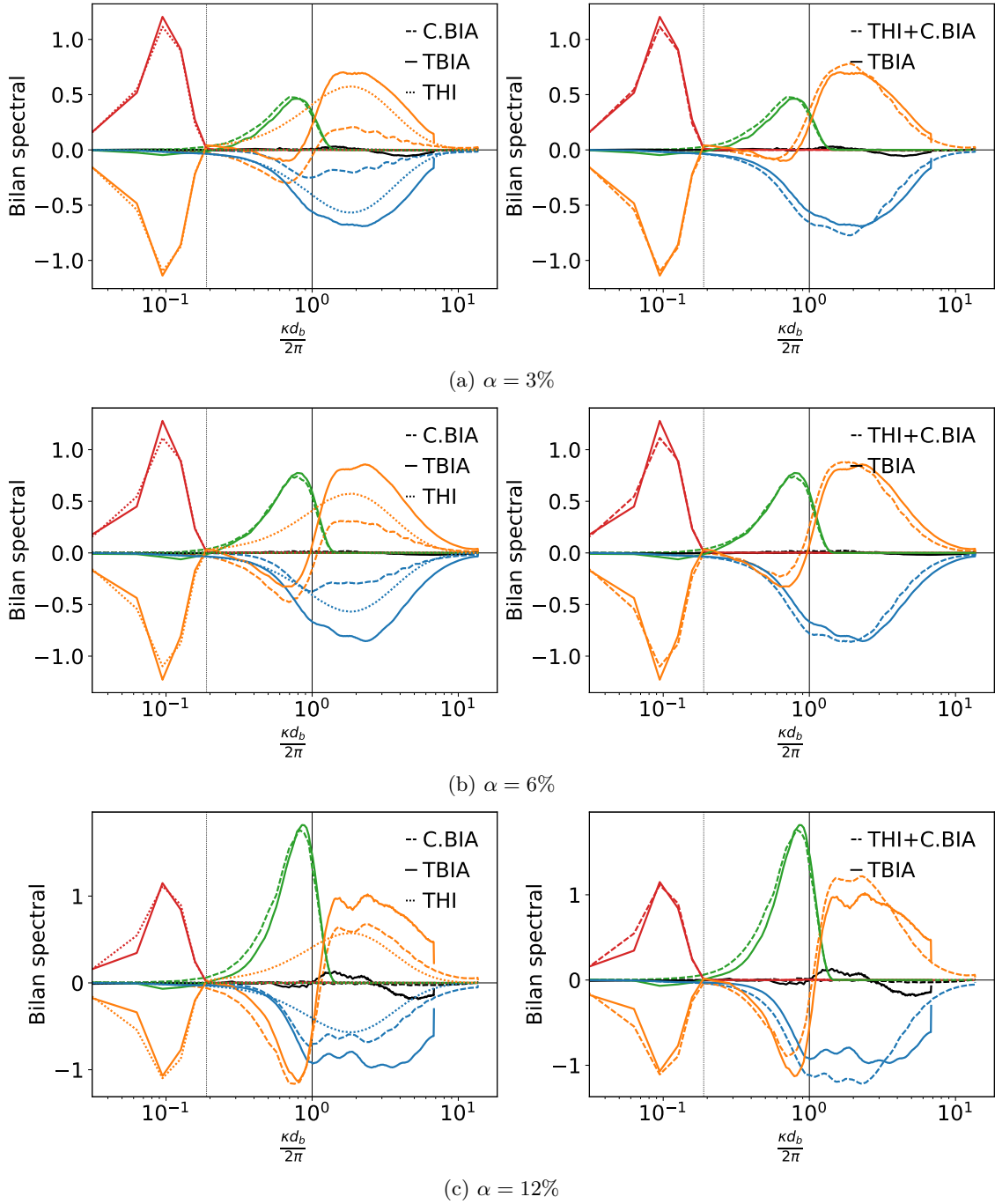


Figure 5.11: Termes du bilan d'énergie cinétique, parties régulières, adimensionnées par  $\int W_{f,HIT}$ , et multiplié par  $\kappa$ . Le facteur  $C$  vaut  $C = \int G_{TBIA}d\kappa / \int G_{BIA}d\kappa$ .

## 5.6 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre nous avons ajouté un forçage aux grandes échelles pour superposer une turbulence homogène isotrope aux essais de bulles en ascension à  $\alpha = 3, 6$  et  $12\%$ , de manière à ce que le pic d'injection d'énergie par les bulles soit situé dans la zone inertielle universelle de la HIT. Les paramètres des simulations ont été ajustés de manière à ce que la puissance injectée par les bulles soit inférieure à celle injectée par le forçage HIT à  $\alpha = 3\%$  et  $6\%$ , mais supérieure à  $\alpha = 12\%$ . Dans tous les cas, la vitesse moyenne relative entre les phases et les variances des fluctuations de vitesse

des deux phases, comme du mélange, sont dominées par la HIT. Il en est de même de leur PDF. Cela provient du fait que la majeure partie de l'énergie fluctuante est portée par les échelles plus grandes que la bulle. En revanche, les bulles imposent leur dynamique aux échelles plus petites que  $d_b$ . Ainsi, avec ou sans forçage, la production totale par la flottabilité reste bien prédite par  $\alpha\Delta\rho g u_r$ . Dans le plan spectral, le terme de production devient alors indépendant de la fraction de gaz, à  $u_r$  donné. Tant que la contribution de HIT domine celle de la BIA, ce qui correspond à une production par la SIT supérieure à la production par la flottabilité, la densité spectrale de dissipation s'obtient en combinant linéairement les deux contributions séparées ; cela traduit une interaction faible. Dès que la contribution de la BIA domine, l'interaction devient forte et la simple combinaison linéaire ne suffit plus. Cette interaction se traduit par un transfert de la dissipation vers les petites échelles. On retiendra néanmoins que pour la modélisation du taux de dissipation  $\epsilon_\mu$ , la connaissance de la vitesse relative est suffisante pour prédire la contribution des bulles, que l'interaction soit négligeable ou non.

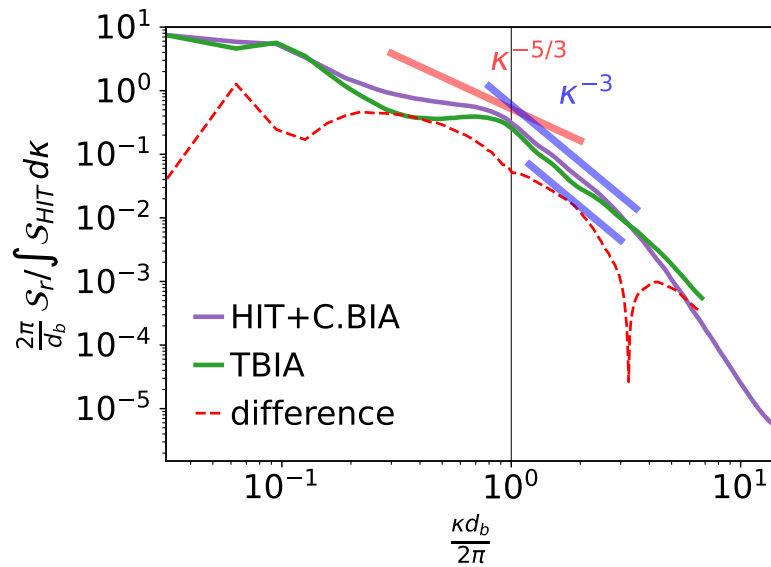
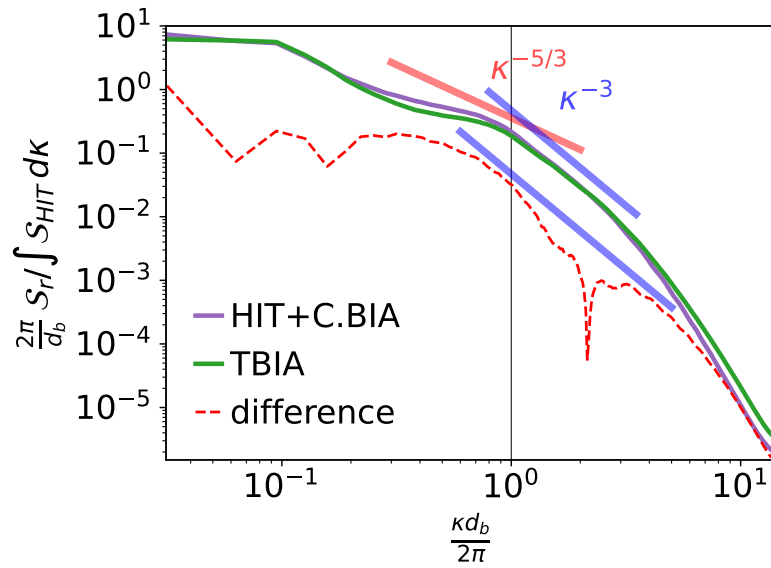
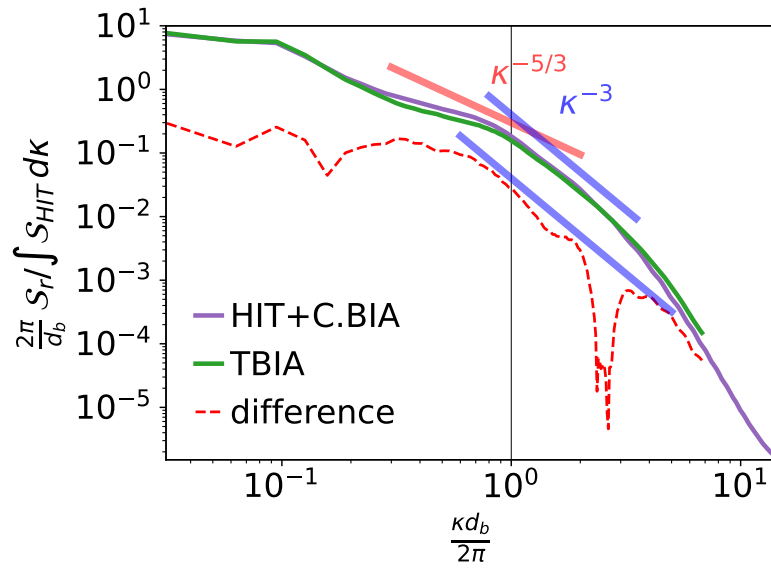


Figure 5.12: Spectres d'énergie, partie régulière, adimensionnée par  $\int \mathcal{S}_{HIT} d\kappa$ . Le facteur C vaut  $C = \int G_{TBIA} d\kappa / \int G_{BIA} d\kappa$ .

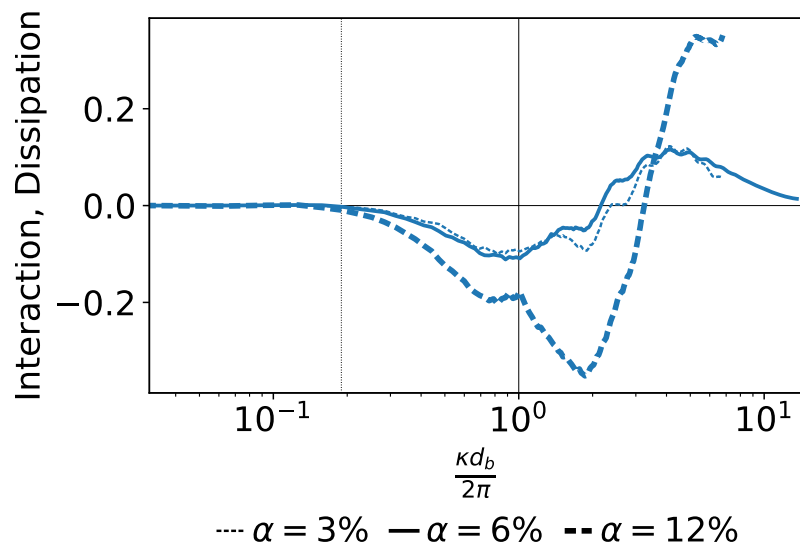


Figure 5.13: Différence entre la TBIA et le bilan combiné HIT+C.BIA pour le terme de dissipation :  $Dsp_{HIT+C.BIA} - Dsp_{TBIA}$ . Les termes sont normés par  $\mathcal{W}_{HIT}$ , et toujours multipliés par  $\kappa$ . Seules les parties régulières sont considérées.





# Conclusion générale

## Synthèse

Dans le cadre de cette thèse nous nous sommes intéressés à l'étude par simulation numérique directe (DNS) à l'agitation induite par les bulles, ou BIA, et à son interaction avec une turbulence monophasique induite par cisaillement, ou SIT, avec une attention particulière à la dynamique spectrale de ces écoulements. Ce travail s'inscrit dans la démarche du CEA à développer, à terme, des jumeaux numériques des centrales nucléaires, notamment pour garantir de plus hauts niveaux de sécurité du parc nucléaire actuel. Pour étudier cette interaction, il est d'abord essentiel de choisir précisément les paramètres caractérisant la BIA et la SIT. La BIA est produite par un essaim homogène de bulles en ascension sous l'effet de la gravité. La SIT est produite par un forçage aléatoire aux grandes échelles et correspond à une turbulence homogène isotrope, ou HIT, avec un spectre en  $\kappa^{-5/3}$  qui débute à une échelle plus grande que le diamètre des bulles. Ceci permet d'étudier l'interaction entre la BIA et la SIT dans la région où la SIT adopte un comportement universel indépendant de son mode de production. Nous avons ensuite proposé une méthode innovante pour conduire l'analyse spectrale de la dynamique d'un essaim de bulles, malgré les singularités des champs en jeu. Enfin, nous avons analysé les résultats de nos simulations DNS d'essaims de bulles sans SIT que nous avons ensuite comparés aux mêmes simulations avec SIT, pour proposer une caractérisation spectrale de l'interaction de ces deux contributions.

Après avoir présenté, dans le chapitre 1, le contexte industriel et scientifique de l'étude, et après y avoir présenté les cas simulés, nous avons présenté dans le chapitre 2 les détails du module IJK du code de calcul TrioCFD utilisé pour réaliser nos DNS. Le module utilise un algorithme de prédiction-corréction pour résoudre les équations fluides et un algorithme de Front-Tracking pour le suivi des interfaces. Nous avons présenté dans ce chapitre la mise en place du forçage à grandes échelles, développé dans cette thèse pour produire la HIT et nous justifions que pour que l'interaction entre la BIA et la HIT soit pertinente, le diamètre de bulles doit se situer au cœur de la gamme de nombre d'ondes de la zone inertielle de la HIT. Le niveau d'énergie de la HIT à ces échelles étant fixé par notre choix de paramètres pour le forçage, nous choisissons celui de la BIA en variant la fraction volumique uniquement. Enfin, la convergence des simulations d'essaims de bulles a été confirmée.

Dans le chapitre 3, nous avons justifié de conduire l'analyse spectrale de l'écoulement en considérant l'ensemble du domaine, composé du mélange des deux phases. Les champs présentent alors des singularités à la traversée des interfaces, qui peuvent s'ordonner à l'aide d'un entier  $p$  croissant avec le niveau de régularité du champ. Les singularités se manifestent sur les grandeurs spectrales en imposant une évolution en  $\kappa^{-2p-2}$  à grand nombre d'onde  $\kappa$ , et pour des interfaces décrivant des bulles sphériques de diamètre  $d_b$ , les singularités impriment aussi des oscillations en  $\sin^2(\kappa d_b/2 + \phi)$ . Pour les simulations DNS d'essaims de bulles à grand nombre de Reynolds de bulle  $Re_b$  et à diamètre de bulle fixé, les spectres des termes du bilan de quantité de mouvement montrent tous des singularités que l'on justifie théoriquement, hormis pour celui d'inertie et pour celui de force visqueuse, qui marquent une plus forte singularité qu'attendu. On explique cet écart à la théorie par la redistribution des singularités entre les différentes forces dans les cellules traversées par une interface. De manière analogue, les densités spectrales de puissance des forces contribuant au bilan d'énergie, désignées comme termes du bilan spectral d'énergie, présentent tous des singularités, à la nuance près que la partie singulière de la somme du terme de transfert

par inertie, par les interfaces et par la pression s'annule. Nous remarquons de plus que la partie régulière du terme de production par la flottabilité s'effondre aux échelles plus petites que  $d_b$ . La partie singulière du terme de dissipation étant observée être opposée à celle du terme de production, la partie régulière de chaque terme du bilan spectral d'énergie peut être isolée.

Dans le chapitre 4, nous analysons les propriétés des écoulements d'essaims de bulles sans forçage, à différentes fractions volumiques,  $\alpha = 3, 6$  et  $12\%$ , afin de nous concentrer sur la dynamique de la BIA pure. Les bulles montrent une légère tendance à la formation de plans horizontaux, et les PDF de leur vitesse sont bien décrites par une distribution gaussienne avec leur vitesse moyenne d'ascension qui diminue avec  $\alpha$ . Les composantes horizontales des vitesses dans le liquide et dans le gaz sont symétriques, avec une nette domination pour le mélange des fluctuations des vitesses du liquide, dont les PDF aux fortes fluctuations suivent un comportement exponentiel sensible à  $\alpha$ . La composante verticale de vitesse dans le liquide est fortement asymétrique avec des fluctuations positives plus probables que les fluctuations négatives et sa PDF reproduit les tendances classiques en BIA, témoignant de l'écoulement au voisinage direct des bulles, de leur sillage et des instabilités collectives de l'écoulement. Pour le mélange, les fluctuations négatives des vitesses sont dominées par celles du liquide, tandis que les fluctuations positives sont dominées par celles du gaz, qui suivent une distribution gaussienne. Une fois adimensionné, le spectre 3D de la vitesse du mélange, comme les termes du bilan spectral d'énergie sont remarquablement peu sensibles à  $\alpha$ . Le spectre atteint un maximum autour du nombre d'onde  $\kappa_b$  correspondant à l'échelle des bulles, et suit une tendance en  $\kappa^{-3}$  pour les nombres d'ondes supérieurs à  $\kappa_b$ . L'analyse du bilan spectral d'énergie montre que la production par la flottabilité, qui est concentrée autour de l'échelle des bulles, et la dissipation, qui s'étend de l'échelle des bulles jusqu'aux plus petites échelles résolues, se superposent partiellement. Le régime proportionnel à  $\kappa^{-3}$  pour le spectre d'énergie commence lorsque la production s'effondre et il se poursuit pour les échelles plus petites, où le transfert équilibre la dissipation.

Enfin, dans le chapitre 5, nous avons ajouté le forçage à grande échelle produisant la HIT aux écoulements d'essaims de bulles précédents. Le pic d'injection d'énergie par les bulles se situe dans la zone inertielle de la HIT et la puissance injectée par celles-ci est inférieure à celle produite par la HIT à  $\alpha = 3$  et  $6\%$  et elle lui est supérieure à  $\alpha = 12\%$ . La vitesse moyenne entre les phases, les variances des fluctuations de vitesse, ainsi que leurs PDF sont totalement dominées par la SIT, ce qui s'explique par le fait que l'énergie cinétique fluctuante est majoritairement portée par les échelles plus grandes que les bulles. Aux échelles plus petites, en revanche, l'agitation induite par les bulles imprime sa marque sur la dynamique. La production par la flottabilité est toujours prédite par  $\alpha \Delta \rho g u_r$ , la répartition spectrale de ce terme étant remarquablement insensible au forçage. Ainsi, le taux de dissipation  $\epsilon$  peut se déduire à partir de la connaissance de  $u_r$ , indépendamment de la présence du forçage. Lorsque l'énergie injectée par la flottabilité est inférieure à celle produite par la SIT, l'interaction de la BIA avec la SIT est faible et une simple combinaison linéaire des contributions séparées prédit correctement le bilan des simulations avec forçage. Dans la situation inverse, la combinaison linéaire ne suffit plus, une partie de la dissipation étant transférée vers les plus petites échelles.

## Perspectives

Dans ce travail, nous avons effectué différentes simulations DNS. De manière plus générale, les résultats obtenus fournissent des informations utiles pour la mise à l'épreuve et l'amélioration des modèles LES (Large Eddy Simulation) CSG (Coarse-Grained Simulation) LE ROY DE BONNEVILLE et al. [28] et de modèles RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) DU CLUZEAU et al. [13] pour les écoulements à bulles.

Pour le cas de la BIA seule, les conclusions de cette thèse confirment l'absence de plage spectrale où la production d'énergie cinétique  $\mathcal{P}$  serait en équilibre avec la dissipation  $\mathcal{D}$ , comme récemment montré dans les travaux de ZAMANSKY et al. [70]. Ce résultat fort, qui invalide l'hypothèse historique de LANCE et al. [27], doit permettre de ré-examiner les modèles Euler-Euler (DEEN et al. [12] et LIAO et al. [30]) pour les rendre plus prédictifs. Comme nous l'avons montré, la dynamique des petites échelles est fortement marquée par la présence des bulles. Ainsi, l'établissement de bilans spectraux à partir de résultats DNS d'écoulements à bulles constitue un outil utile à la modélisation

des fermetures de sous-maille des modèles LES.

Ce travail a montré que la superposition des termes du bilan spectral des cas BIA et HIT séparés est valide tant que la flottabilité des bulles injecte moins d'énergie que le forçage turbulent aux grandes échelles. Dans ces conditions, la modélisation de la dynamique des écoulements couplés peut se faire en modélisant chacune des deux sources d'agitation de façon découplée. En revanche, lorsque l'injection d'énergie par la flottabilité des bulles est supérieure à la production d'énergie de la HIT, la dissipation issue de la combinaison linéaire des deux surestime la dissipation pour  $\kappa_b < \kappa < 2\kappa_b$  et la sous-estime pour  $\kappa > 2\kappa_b$ . La modélisation ne peut plus se faire de façon découplée et doit tenir compte de ce transfert de dissipation vers les plus petites échelles. Par ailleurs, ce travail a montré que le taux de dissipation  $\epsilon$  se déduit directement de la vitesse relative entre les phases, et de la puissance de la HIT, quel que soit le rapport entre les deux. Ce résultat est directement utilisable dans les modèles RANS ou LES pour déterminer la valeur de  $\epsilon$ .

Soulignons que, dans ce travail, nous n'avons pas étudié les statistiques de l'écoulement autour d'une bulle au sein de l'essaim. Ces statistiques pourraient permettre une séparation des perturbations moyennes dans le voisinage des bulles (LBD) et de la turbulence induite par les bulles (BIT), à l'instar de ce qui été fait par RIBOUX et al. [47], AMOURA et al. [2] et DU CLUZEAU et al. [14]. Elles seraient aussi utiles pour vérifier les résultats de CGS de ZAMANSKY et al. [70] qui concluent que le taux de cisaillement du sillage moyen détermine l'échelle de fréquence caractéristique u régime en  $\kappa^{-3}$ .

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à des écoulements d'essaims de bulles homogènes en présence d'une turbulence homogène elle aussi. Or, dans les écoulements de nombreuses situations industrielles ou naturelles, les bulles sont réparties de façon inhomogène. Cette inhomogénéité de concentration cause une inhomogénéité de masse volumique du mélange à bulles qui engendre des cellules de convection naturelle responsables de gradients de vitesse à grandes échelles et enfin de turbulence de cisaillement (SIT). Une étude similaire à celle de cette thèse, mais considérant un essaim de bulles inhomogène est donc souhaitable.

Par ailleurs, l'étude spectrale conduite dans ce travail s'est essentiellement appuyée sur des spectres 3D ne distinguant ni la direction du vecteur vitesse ni celle du nombre d'onde. Ces conclusions sont donc limitées en ce qui concerne l'anisotropie des fluctuations. De futurs travaux devront être consacrés à explorer cette voie à la manière de ce qui a été fait par ZAMANSKY et al. [70].



# Annexes

## A.1 Outils de description des écoulements

Dans cette section, nous présentons les outils utilisés pour analyser les écoulements simulés.

### A.1.1 Statistiques de l'espace physique

Les champs étudiés dans nos simulations dépendent du temps  $t$  et de la position à laquelle ils sont relevés, qui est repérée par le vecteur de l'espace  $\mathbf{x}$ . Ces champs sont caractérisés dans l'espace physiques à travers leurs statistiques.

**Moyennes et fluctuations :** Soit  $q$  un champ de l'espace et du temps, la moyenne spatiale de  $q$ , notée  $\bar{q}$  s'écrit :

$$\bar{q}(t) = \frac{1}{\mathcal{V}} \iiint q(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad (3)$$

avec  $\mathcal{V}$  le volume sur lequel on intègre. La moyenne de phase  $\bar{q}^k$  s'écrit :

$$\bar{q}^k(t) = \frac{\overline{\chi_k q}}{\overline{\chi_k}}, \quad (4)$$

avec  $\chi_k$  l'indicatrice de la phase  $k$ . La moyenne temporelle, notée  $\langle q \rangle$  se définit :

$$\langle q \rangle(\mathbf{x}) = \frac{1}{T} \int q(\mathbf{x}, t) dt, \quad (5)$$

Avec  $T$  l'intervalle temporel d'intégration. Ces deux moyennes peuvent être combinées pour former la moyenne spatio-temporelle. Pour valider la convergence temporelle de nos simulations, nous faisons aussi appel à la moyenne temporelle cumulée  $\langle q \rangle_{[t_0]}$  et à la moyenne temporelle glissante  $\langle q \rangle_{\delta t}$  définies respectivement par :

$$\langle q \rangle_{[t_0]}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} q(\mathbf{x}, \tau) d\tau, \quad (6)$$

et :

$$\langle q \rangle_{\delta t}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{t} \int_{t-\delta t/2}^{t+\delta t/2} q(\mathbf{x}, \tau) d\tau. \quad (7)$$

Nous considérons que l'hypothèse d'ergodicité est valide pour tous les écoulements étudiés ici. Ainsi, à partir du chapitre 3, nous confondrons la moyenne statistique à la moyenne spatio-temporelle. Sauf s'il est explicitement écrit le contraire, les notations  $\bar{q}^k$  et  $\langle q \rangle_k$  incarnent la moyenne statistique par phase (combinaison de la moyenne par phase et de la moyenne temporelle), et les notations  $\bar{q}$  et  $\langle q \rangle$  incarnent la moyenne statistique (combinaison de la moyenne sur tout l'espace et de la moyenne temporelle). La grandeur  $q$  évaluée dans la phase  $k$  uniquement sera notée  $q_k = \chi_k q$ . Notons que  $\bar{q}^k = \overline{q^k}$ .

À partir de ces moyennes, on peut définir les fluctuations :

$$q'(\mathbf{x}, t) = q(\mathbf{x}, t) - \bar{q}, \quad (8)$$

$$q'_k(\mathbf{x}, t) = q_k(\mathbf{x}, t) - \bar{q}^k, \quad (9)$$

avec  $\langle q' \rangle = 0$  et  $\overline{q_k'^k} = 0$ . Les premières sont les fluctuations par rapport au mélange, les secondes sont les fluctuations par rapport à la phase  $k$ .

**Moments statistiques d'ordres 2, 3, et 4 :** Nous pouvons alors définir la variance de la quantité  $q$  pour le mélange :

$$\sigma^2(q) = \langle q'q' \rangle \quad (10)$$

Et la variance de la quantité  $q_k$  pour chaque phase :

$$\sigma_k^2(q_k) = \overline{q_k'q_k'^k} = \langle q_k'q_k' \rangle_k, \quad (11)$$

pour alléger le texte,  $\sigma_k^2(q_k)$  sera simplement écrit  $\sigma^2(q_k)$  : la variance de  $q_k$  sera toujours calculée en utilisant la moyenne statistique de phase.

Pour décrire les caractéristiques de l'écoulement, nous ferons aussi appel au coefficient de symétrie, ou moment centré d'ordre trois, noté  $\mu_3$  :

$$\mu_3(q) = \left\langle \left( \frac{q'}{\sigma(q')} \right)^3 \right\rangle, \text{ pour le mélange et} \quad (12)$$

$$\mu_{3,k}(q_k) = \left\langle \left( \frac{q_k'}{\sigma(q_k')} \right)^3 \right\rangle_k, \text{ dans chaque phase} \quad (13)$$

et au coefficient d'aplatissement, ou moment centré d'ordre quatre, noté  $\mu_4$  :

$$\mu_4(q) = \left\langle \left( \frac{q'}{\sigma(q')} \right)^4 \right\rangle, \text{ pour le mélange et} \quad (14)$$

$$\mu_{4,k}(q_k) = \left\langle \left( \frac{q_k'}{\sigma(q_k')} \right)^4 \right\rangle_k \text{ dans chaque phase.} \quad (15)$$

Une fois de plus, l'indice  $k$  de  $\mu_{3,k}$  et  $\mu_{4,k}$  sera implicite dès lors que l'on évalue les moments d'une grandeur phasique  $q_k$ .

**Fonction de densité de probabilité :** Pour décrire la structure des statistiques de  $q$  dans l'espace physique, nous utilisons sa fonction de densité de probabilité (PDF pour Probability Density Function). Dans chaque phase séparément, la PDF de  $q$  sera notée  $PDF_k(q_k)$ . Pour le mélange, elle sera notée  $PDF(q)$ . Justifions que la PDF pour le mélange peut s'exprimer à partir des PDF dans chaque phase :  $PDF(q) = \alpha PDF_g(q_g) + (1 - \alpha) PDF_l(q_l)$ , avec  $\alpha = \bar{X}_g$  :

Soit  $Q$  la variable aléatoire associée à la quantité  $q$ , les valeurs que peut prendre  $Q$  sont notées  $v$ . Soit  $X$  la variable aléatoire associée au tirage de la phase  $\chi$ , notons  $x$  les valeur que peut prendre  $X$ . Si  $x$  vaut 1, le tirage correspond à un tirage dans la phase liquide par exemple, si  $x$  vaut 0 il s'agit d'un tirage dans la phase gazeuse par exemple.  $X$  ne peut prendre aucune autre valeur. Intéressons-nous à la probabilité que la variable aléatoire  $Q$  prenne la valeur  $v$ ,  $p(Q = v)$ :

$$p(Q = v) = p((Q = v) \cap (X = 1 \cup_d X = 0)), \quad (16)$$

$$p(Q = v) = p(Q = v \cap X = 1) + p(Q = v \cap X = 0), \quad (17)$$

$$p(Q = v) = p(Q = v|X = 1)p(X = 1) + p(Q = v|X = 0)p(X = 0), \quad (18)$$

Avec  $p(Q = v|X = 1)$  la probabilité que  $Q$  vaille  $v$  sachant que l'on est dans la phase 1, et  $p(X = 1)$  la probabilité d'être dans la phase 1. C'est à dire que la probabilité que  $Q$  vaille  $v$  correspond à la somme pondérée des probabilités que  $Q$  vaille  $v$  en sachant dans quelle phase le tirage est effectué. Autrement dit, la fonction de densité de probabilité de la quantité  $q$  pour le mélange se déduit des fonctions de densité de probabilité de chaque phase:

$$PDF(Q) = (1 - \alpha)PDF_l(Q) + (\alpha)PDF_g(Q) \quad (19)$$

Dans la suite, la variable aléatoire  $Q$  et la quantité  $v$  qu'elle représente seront confondues.

La relation (19) permet de déduire les moments des variables du mélange à partir des moments des variables de chaque phase. En écrivant les moments à partir de l'intégrale des fonctions de densités de probabilité, on a directement pour la moyenne :

$$\begin{aligned}\langle q \rangle &= \int q PDF(q) dq = (1 - \alpha) \int q PDF_l(q) dq + \alpha \int q PDF_g(q) dq \\ &= (1 - \alpha) \langle q \rangle_l + \alpha \langle q \rangle_g,\end{aligned}\quad (20)$$

Et pour la variance  $\sigma^2$  :

$$\sigma^2(q) = \int (q - \langle q \rangle)^2 PDF(q) dq \quad (21)$$

$$= \int q^2 PDF(q) dq - \underbrace{\langle q \rangle^2}_{=1} \int PDF(q) dq \quad (22)$$

$$= \alpha (\sigma^2(q_g) + \langle q \rangle_g^2) + (1 - \alpha) (\sigma^2(q_l) + \langle q \rangle_l^2) - \underbrace{((1 - \alpha) \langle q \rangle_l + \alpha \langle q \rangle_g)^2}_{\langle q \rangle^2} \quad (23)$$

Que l'on écrit :

$$\sigma^2(q) = \alpha(1 - \alpha) (\langle q \rangle_g - \langle q \rangle_l)^2 + \alpha \sigma^2(q_g) + (1 - \alpha) \sigma^2(q_l) \quad (24)$$

Si l'on s'intéresse à la vitesse verticale  $u_x$ , ces égalités donnent  $\langle u_x \rangle = \alpha u_r + \langle u_x \rangle_l$  pour la moyenne et  $\sigma^2(u_x) = \alpha(1 - \alpha) u_r^2 + \alpha \sigma^2(u_{g,x}) + (1 - \alpha) \sigma^2(u_{l,x})$  pour la variance, avec  $u_r = \langle u \rangle_g - \langle u \rangle_l$  la vitesse relative.

### A.1.2 Représentation spectrale du bilan d'énergie cinétique

Dans ce travail nous cherchons à caractériser la dynamique de nos écoulements à bulles en fonction des échelles des structures en jeu.

**Auto-corrélation :** La fonction d'autocorrélation du champ scalaire  $q$  permet d'obtenir simplement des informations sur sa structure spatiale. En considérant que  $q$  ne dépend que de  $x$ , son autocorrélation se définit :

$$C_{qq}(\delta) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} q(x)q(x + \delta) dx. \quad (25)$$

Une valeur fortement positive de  $C_{qq}(\delta)$  signifie que  $q(x)$  et  $q(x + \delta)$  ont tendance à être en phase, tandis qu'une valeur négative signifie que  $q(x)$  et  $q(x + \delta)$  ont tendance à être en opposition. Une valeur nulle de  $C_{qq}(\delta)$  signifie que la valeur de  $q(x)$  ne donne pas d'information sur la valeur de  $q(x + \delta)$ , ces deux valeurs sont décorrélatées. La valeur en zéro  $C_{qq}(0)$  correspond à la valeur moyenne du carré du champ scalaire  $q$  :  $\langle q \cdot q \rangle$ .

Le champ de vitesse  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  est un champ vectoriel de l'espace dépendant de la position de l'espace  $\mathbf{x}$ . L'autocorrélation de ses fluctuations dépend donc à la fois des composantes à corrélérer  $u_x$ ,  $u_y$  ou  $u_z$  et de la direction du décalage  $\delta_x$ ,  $\delta_y$  ou  $\delta_z$ . En notant  $C_{u_i u_j}(\delta_k)$  la corrélation des fluctuations des vitesses  $u'_i$  et  $u'_j$ , les corrélations  $C_{u_i u_i}(\delta_j)$  pour  $i \neq j$  sont des corrélations transverses de vitesse (Fig. (14), droite) et les corrélations  $C_{u_i u_i}(\delta_i)$  sont des corrélations longitudinales de vitesse (Fig. (14), gauche). Lorsque  $C_{u_i u_i}(\delta_j)$  est intégrable et à intégrale finie, son intégrale  $\int_0^\infty C_{u_i u_i}(\delta_j) d\delta$  définit l'échelle intégrale  $\ell$ , qui est une mesure des plus grandes structures cohérentes dans l'écoulement.

**Spectre des vitesses :** Le spectre de vitesse est une grandeur définie à partir de la densité spectrale d'énergie  $E_{ii}$  et il donne accès à la répartition de l'énergie dans l'écoulement en fonction des échelles. La densité spectrale d'énergie  $E_{ij}$  se définit comme la transformée de Fourier de



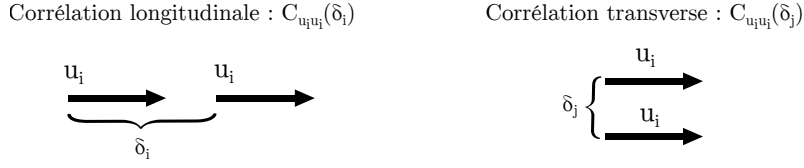


Figure 14: Illustration corrélation longitudinale (gauche) et corrélation transverse (droite).  $u_i$  est la composante  $i$  du vecteur vitesse,  $\delta_i$  est la composante  $i$  de la distance de corrélation,  $\delta_j$  en est la composante  $j$ .

l'autocorrélation des fluctuations vitesses :

$$E_{lm}(\boldsymbol{\kappa}) = \mathcal{F}(C_{u_l u_m}(\boldsymbol{\delta}))(\boldsymbol{\kappa}) \quad (26)$$

$$= \int e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\delta}} \cdot C_{u_l u_m}(\boldsymbol{\delta}) d\boldsymbol{\delta} \quad (27)$$

$$= \mathcal{F}(u_i)(\boldsymbol{\kappa}) \cdot \mathcal{F}^*(u_j)(\boldsymbol{\kappa}), \quad (28)$$

avec  $i$  la variable complexe, l'exposant  $\cdot^*$  qui marque le complexe conjugué, et où la dernière égalité est obtenue en utilisant le théorème de Wiener-Kitchine. Dans la suite, la transformée de Fourier sera notée  $\hat{\cdot}$  ou  $\mathcal{F}(\cdot)$ .  $E_{ij}(\boldsymbol{\kappa})$  est la contribution du vecteur d'onde  $\boldsymbol{\kappa}$  à l'autocorrélation  $C_{u_i u_j}(\boldsymbol{\delta})$ .

Cette grandeur est liée à l'énergie cinétique fluctuante  $k$  par l'égalité de Parseval :

$$\iiint \sum_i (E_{ii}(\boldsymbol{\kappa})) d\kappa_x d\kappa_y d\kappa_z = \iiint \sum_i (\widehat{u'_i} \widehat{u'_i}^*) d\kappa_x d\kappa_y d\kappa_z \quad (29)$$

$$= \iiint \sum_i (u'_i u'_i) dx dy dz \quad (30)$$

$$= \iiint \sigma^2(u) dx dy dz = 2\mathcal{V} k, \quad (31)$$

avec  $\mathcal{V}$  le volume du domaine d'écoulement. La grandeur  $\mathcal{E}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{2} \sum_i E_{ii}(\boldsymbol{\kappa})$  s'identifie comme la contribution du vecteur d'onde  $\boldsymbol{\kappa}$  à l'énergie cinétique fluctuante  $k$ . En intégrant  $\frac{1}{2}\mathcal{E}(\boldsymbol{\kappa})$  sur des sphères de rayon  $\kappa = |\boldsymbol{\kappa}|$ , on définit le spectre 3D d'énergie  $\mathcal{S}$  cinétique :

$$\mathcal{S}(\kappa) = \oint_{\kappa=|\boldsymbol{\kappa}|} \mathcal{E}(\boldsymbol{\kappa}) d^2 \boldsymbol{\kappa}. \quad (32)$$

$\mathcal{S}$  est la contribution du nombre d'onde  $\boldsymbol{\kappa}$  à l'énergie cinétique fluctuante  $k$ . En intégrant  $\mathcal{E}(\boldsymbol{\kappa})$  sur des sphères, les contributions spectrales des corrélations longitudinales et des corrélations transverses sont sommées sans distinction. Pour discriminer ces contributions, nous nous intéressons aussi à l'intégrale de la densité spectrale d'énergie  $E_{ij}$  sur des plans de l'espace spectral. On est alors en mesure de définir les spectres unidirectionnels longitudinaux :

$$\mathcal{S}_{ii}(\kappa_i) = \iint E_{ii}(\boldsymbol{\kappa}) d\kappa_j d\kappa_l, \quad (33)$$

qui sont les contributions du vecteur d'onde  $\boldsymbol{\kappa} \mathbf{e}_i$  à la corrélation longitudinale  $C_{u_i u_i}(\delta \mathbf{e}_i)$  (Fig. (15), gauche). De façon similaire, les spectres transversaux :

$$\mathcal{S}_{ii}(\kappa_j) = \iint E_{ii}(\boldsymbol{\kappa}) d\kappa_i d\kappa_l, \quad (34)$$

sont les contributions du vecteur d'onde  $\boldsymbol{\kappa} \mathbf{e}_j$  à la corrélation transverse  $C_{u_i u_i}(\delta \mathbf{e}_j)$  (Fig. (15), droite).

#### Bilan d'énergie cinétique dans l'espace physique :

Pour accéder à la dynamique de l'écoulement, nous nous intéressons à l'équation bilan de l'énergie cinétique.

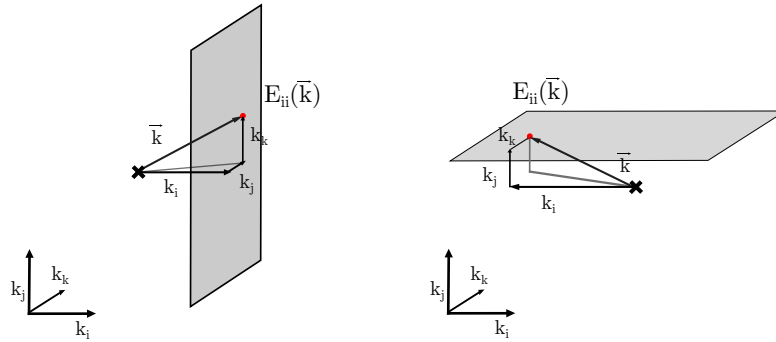
Spectre 1D d'énergie cinétique :  $S_{ii}(k_i)$ Spectre 1D d'énergie cinétique :  $S_{ii}(k_j)$ 

Figure 15: Illustration spectre longitudinal d'énergie (gauche) et spectre transverse d'énergie (droite).

On veut transporter l'énergie cinétique du mélange  $k = \frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$  dans notre écoulement où la densité est constante par phase mais différente entre les deux phases ( $\rho_l \neq \rho_v$ ). On s'intéresse donc à l'équation bilan de  $D_t k$ , avec :

$$D_t k = \partial_t k + \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}(k) = \partial_t k + \mathit{div}(k\mathbf{u}).$$

D'une part :

$$\partial_t k = \partial_t \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{u} = \mathbf{u} \partial_t \rho \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \partial_t \mathbf{u}$$

D'autre part :

$$\mathit{div}(k\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathit{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \cdot \mathit{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$$

Ainsi :

$$D_t k = \mathbf{u} (\partial_t \rho \mathbf{u} + \mathit{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})) + \rho \mathbf{u} (\partial_t \mathbf{u} + \mathit{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}))$$

Ainsi, l'équation de transport de  $k$  s'obtient en multipliant d'une part l'équation (1.13) par le vecteur vitesse  $\mathbf{u}$  :

$$\underbrace{\mathbf{u} \cdot \partial_t(\rho \mathbf{u})}_{-Inst.^1} = \underbrace{-\mathbf{u} \cdot \mathit{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})}_{Adv.^1} - \underbrace{\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}(p)}_{Prs.^1} + \underbrace{\mathbf{u} \cdot \mathit{div}(2\mu \cdot S)}_{Dsp.^1} + \underbrace{\mathbf{u} \cdot \rho \cdot \mathbf{g}}_{Grv.^1} + \underbrace{\mathbf{u} \cdot \sigma \cdot \mathbf{B}}_{W\sigma^1} + \underbrace{\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}^{THI}}_{WHIT^1}, \quad (35)$$

en multipliant d'autre part l'équation sur la vitesse par la quantité de mouvement  $\rho \mathbf{u}$ :

$$\underbrace{\rho \mathbf{u} \cdot \partial_t(\mathbf{u})}_{-Inst.^2} = \underbrace{-\rho \mathbf{u} \cdot \mathit{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})}_{Adv.^2} - \underbrace{\rho \mathbf{u} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \mathbf{grad}(p)}_{Prs.^2} + \underbrace{\rho \mathbf{u} \cdot \frac{1}{\rho} \mathit{div}(2\mu \cdot S_{ij})}_{Dsp.^2} + \underbrace{\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}}_{Grv.^2} + \underbrace{\rho \mathbf{u} \cdot \frac{\sigma \cdot \mathbf{B}}{\rho}}_{W\sigma^2} + \underbrace{\rho \mathbf{u} \cdot \frac{1}{\rho} \mathbf{F}^{THI}}_{WHIT^2}. \quad (36)$$

puis et en sommant ces deux équations :

$$\begin{aligned}
\underbrace{\partial_t(\rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}_{\partial_t k} &= - \underbrace{(\rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{div}(\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}))}_{Adv = \mathbf{div}(k\mathbf{u})} \\
&\quad - \underbrace{\left(\rho\mathbf{u} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \mathbf{grad}(p) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}(p)\right)}_{Prs} + \\
&\quad \underbrace{\left(\rho\mathbf{u} \cdot \frac{1}{\rho} \mathbf{div}(2\mu \cdot S_{ij}) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{div}(2\mu \cdot S)\right)}_{Dsp} + \underbrace{(\rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{u} \cdot \rho \cdot \mathbf{g})}_{Grv} + \\
&\quad \underbrace{\left(\rho\mathbf{u} \cdot \frac{\sigma \cdot \mathbf{B}}{\rho} + \mathbf{u} \cdot \sigma \cdot \mathbf{B}\right)}_{W_\sigma} + \underbrace{\left(\rho\mathbf{u} \cdot \frac{1}{\rho} \mathbf{F}^{THI} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}^{THI}\right)}_{W_{HIT}}
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
D_t k &= - \underbrace{\left(\rho\mathbf{u} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \mathbf{grad}(p) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}(p)\right)}_{Prs} + \\
&\quad \underbrace{\left(\rho\mathbf{u} \cdot \frac{1}{\rho} \mathbf{div}(2\mu \cdot S) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{div}(2\mu \cdot S)\right)}_{Dsp} + \underbrace{(\rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{u} \cdot \rho \cdot \mathbf{g})}_{Grv} + \\
&\quad \underbrace{\left(\rho\mathbf{u} \cdot \frac{\sigma \cdot \mathbf{B}}{\rho} + \mathbf{u} \cdot \sigma \cdot \mathbf{B}\right)}_{W^\sigma} + \underbrace{\left(\rho\mathbf{u} \cdot \frac{1}{\rho} \mathbf{F}^{THI} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}^{THI}\right)}_{W_{HIT}}
\end{aligned} \tag{38}$$

Si cette façon de faire est satisfaisante puisqu'elle donne l'équation d'évolution de l'énergie cinétique  $k$ , il ne nous échappe pas que la signification physique des termes de l'équation (36) est incertaine, notamment en ce qui concerne le terme d'interface  $W_\sigma^2$  qui fait intervenir le ratio d'une grandeur qui n'est définie qu'aux interfaces  $\sigma\mathbf{B}$  par la densité  $\rho$  qui subit un saut de valeur exactement aux interfaces.

### Bilan d'énergie cinétique dans l'espace spectral

Pour décomposer cette dynamique en fonction des échelles de l'écoulement, nous utilisons la Transformée de Fourier directe. Le bilan de quantité de mouvement s'écrit :

$$\partial_t \rho\mathbf{u} + \mathbf{div}(\mathbf{u} \otimes \rho\mathbf{u}) = -\mathbf{grad}(p) + \mathbf{div}(2\mu \cdot S) + \rho \cdot \mathbf{g} + \sigma \cdot \mathbf{B} + \mathbf{F}^{THI} \tag{39}$$

La densité spectrale d'énergie s'écrit :  $E = 2Re(\widehat{\mathbf{u}} \cdot \widehat{\rho\mathbf{u}})$ . La densité spectrale de puissance sera notée :  $Ps = \partial_t(E)$ . La transformée de Fourier porte sur les variables d'espace, elle commute donc avec la dérivée partielle en temps. En introduisant  $Ps_1 = 2Re(\widehat{\mathbf{u}} \cdot \partial_t(\widehat{\rho\mathbf{u}}))$  et  $Ps_2 = 2Re(\widehat{\rho\mathbf{u}} \cdot \partial_t(\widehat{\mathbf{u}}))$ , on note de même que pour la partie précédente :  $Ps = Ps_1 + Ps_2$ .

L'équation de conservation de la quantité de mouvement dans l'espace spectral, multipliée par  $\widehat{\mathbf{u}}$ , donne :

$$\begin{aligned}
\underbrace{\widehat{\mathbf{u}}^* \cdot \partial_t \widehat{\rho\mathbf{u}}}_{Inst. s1} + \underbrace{\widehat{\mathbf{u}}^* \cdot \widehat{\mathbf{div}(\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})}}_{Adv. s1} &= \underbrace{\widehat{\mathbf{u}}^* \cdot \widehat{\mathbf{grad}(p)}}_{Prs. s1} + \underbrace{\widehat{\mathbf{u}}^* \cdot \widehat{\mathbf{div}(2\mu \cdot S)}}_{Dsp. s1} + \\
&\quad \underbrace{\widehat{\mathbf{u}}^* \cdot \widehat{\rho \cdot \mathbf{g}}}_{Grv. s1} + \underbrace{\widehat{\mathbf{u}}^* \cdot \widehat{\sigma \cdot \mathbf{B}}}_{W_{\sigma, s1}} + \underbrace{\widehat{\mathbf{u}}^* \cdot \widehat{\mathbf{F}^{THI}}}_{W_{HIT, s1}}.
\end{aligned} \tag{40}$$

Le double de la partie réelle de cette équation correspond à l'équation pour  $Ps_1$ .

L'équation de conservation de la quantité de mouvement la transformée de Fourier de la vitesse,

multipliée par  $\widehat{\rho u}$ , donne :

$$\underbrace{\widehat{\rho u}^* \cdot \widehat{\partial_t(u)}}_{-\text{Inst.}^{s2}} + \underbrace{\widehat{\rho u}^* \cdot \widehat{\text{div}(u \otimes u)}}_{\text{Adv.}^{s2}} = \underbrace{-\widehat{\rho u}^* \cdot \frac{1}{\rho} \widehat{\text{grad}(p)}}_{\text{Prs.}^{s2}} + \underbrace{\widehat{\rho u}^* \cdot \frac{1}{\rho} \widehat{\text{div}(2\mu \cdot S_{ij})}}_{\text{Dsp.}^{s2}} + \underbrace{\widehat{\rho u}^* \cdot \widehat{g}}_{\text{Grv.}^{s2}} + \underbrace{\widehat{\rho u}^* \cdot \frac{1}{\rho} \widehat{\sigma \cdot B}}_{W\sigma^{s2}} + \underbrace{\widehat{\rho u}^* \cdot \frac{1}{\rho} \widehat{F^{THI}}}_{WHIT^{s2}} \quad (41)$$

Le double de la partie réelle de cette équation correspond à l'équation pour  $P_{s2}$ . L'équation (41) fait intervenir une fois de plus la quantité  $\frac{1}{\rho} \sigma B$  qui est mal définie. La signification physique de cette équation est donc incertaine. Pour cette raison, nous préférons travailler avec l'équation (40) seulement, dont la définition de chaque terme est correctement posée. Pris séparément, les termes  $\text{Inst.}^1 = -u \cdot \partial_t \rho u$  et  $\text{Adv.}^1 = -u \cdot \text{div}(\rho u \otimes u)$  dépendent du repère choisi, tandis que leur somme, qui correspond au terme d'inertie  $\text{Int}^1$ , n'en dépend plus. Pour cette raison, nous préférons travailler avec  $\text{Int.}^1 = \text{Inst.}^1 + \text{Adv.}^1$  et avec  $\text{Int.}^{s1} = \text{Inst.}^{s1} + \text{Adv.}^{s1}$  dans le domaine spectral. Enfin, le bilan spectral d'énergie correspond à l'intégrale sur des sphères de rayon  $\kappa = |\kappa|$  des termes de l'équation (40).

### A.1.3 Fluctuations

En évaluant l'énergie cinétique des fluctuations phase par phase, nous devons choisir le repère de référence pour calculer les fluctuations de vitesse. Considère-t-on les fluctuations par rapport au mélange ou par rapport à chaque phase ?

- (1)  $\rho_k u' u'$  est l'énergie cinétique des fluctuations de la phase k par rapport au mélange, avec  $u' = u - \bar{u}$  :
- (2)  $\rho_k u'_k u'_k$  est l'énergie cinétique des fluctuations de la phase k par rapport à la phase k, avec  $u'_k = u_k - \bar{u}^k$  :

La différence entre ces deux énergies est non nulle et vaut  $\rho_k (2u(\bar{u}^k - \bar{u})) + \rho_k (\bar{u} \bar{u} - \bar{u}^k \bar{u}^k)$ . On choisit d'écrire le bilan d'énergie cinétique avec les premières fluctuations,  $\rho_k u' u'$ , et non les deuxièmes.

#### Énergie cinétique des fluctuations et spectre d'énergie

Justifions que le choix du repère dans lequel est évaluée la vitesse n'affecte que le mode 0 de son spectre. Le repère étant fixé, décomposons la vitesse  $u$  en une partie constante  $u_1$ , qui ne correspond pas forcément à sa moyenne, et une partie fluctuante  $u_2(x)$  :  $u(x) = u_1 + u_2(x)$ . L'autocorrelation de la vitesse s'écrit :

$$\mathcal{C}_{uu}(r) = \mathcal{C}_{u_1, u_1}(r) + 2\mathcal{C}_{u_1, u_2}(r) + \mathcal{C}_{u_2, u_2}(r) \quad (42)$$

$$\mathcal{C}_{uu}(r) = u_1 u_1 \cdot \mathcal{C}_{1,1}(r) + 2u_1 \mathcal{C}_{1, u_2}(r) + \mathcal{C}_{u_2, u_2}(r), \quad (43)$$

avec  $\mathcal{C}_{1,1}(r) = \mathcal{V}$  et  $\mathcal{C}_{1, u_2}(r) = \bar{u}_2$ , qui vaut zéro ou une constante en fonction du repère. En utilisant le théorème de Wiener-Khintchine :

$$\widehat{u} \cdot \widehat{u}^* = \mathcal{F}(\mathcal{C}_{u, u}(r)) = \mathcal{F}(u_1 \cdot u_1 \cdot \mathcal{V}) + 2u_1 \mathcal{F}(\bar{u}_2) + \mathcal{F}(\mathcal{C}_{u_2, u_2}(r)), \quad (44)$$

$$\widehat{u} \cdot \widehat{u}^* = u_1 u_1 \mathcal{V} \delta(0) + 2u_1 \bar{u}_2 \delta(0) + \widehat{u}_2 \cdot \widehat{u}_2^*, \quad (45)$$

Avec  $\delta(0)$  la distribution de Dirac, de mesure non-nulle en 0 uniquement. Travailler avec la vitesse totale au lieu de travailler avec la vitesse fluctuante pour construire le spectre d'énergie impacte le mode 0, et uniquement le mode 0, en ajoutant un terme proportionnel à  $u_1 (u_1 \mathcal{V} + \bar{u}_2)$  sur ce mode. Dans cette thèse, le bilan d'énergie cinétique est écrit avec les fluctuations par rapport au mélange :  $\rho_k u' u'$ .

Remarquons par ailleurs que :

$$\int \hat{u} \cdot \hat{u}^* d\kappa = \langle uu \rangle(r=0) = \overline{uu} \quad : \text{énergie cinétique} \quad (46)$$

$$\int \langle uu \rangle dr = \hat{u} \cdot \hat{u}^*(\kappa=0) \quad : \text{différent de l'énergie cinétique} \quad (47)$$

## A.2 Simulations d'un essaim de bulles sans forçage dans des domaines de tailles différentes

Dans cette section nous validons les résultats pour un essaim simulé dans un domaine de plus grande taille. Cela permet d'une part d'étendre le domaine de nombre d'ondes pour lesquels les conclusions précédentes sont valides, et permet d'autre part de transposer ou non les conclusions précédentes sur un domaine de calcul dans lequel le forçage  $\mathbf{f}$  peut être activé. En effet, comme expliqué en section 2.2, dans une simulation couplée d'essaim de bulles avec forçage  $\mathbf{f}$ , pour que les échelles imposées par le forçage n'agissent pas directement sur les échelles caractéristiques de la BIA, il est impératif que le côté du domaine de calcul soit de l'ordre de  $L = 32d_b$ . Étendre les conclusions précédentes à un domaine de calcul de côté  $L = 32d_b$  c'est donc valider les résultats de cette section sur un domaine dans lequel nous pouvons mettre en place l'interaction entre l'*agitation induite par les bulles* et la *turbulence*.

Pour arriver à nos fins, nous allons comparer les résultats de la simulation de référence sB6-M2 à ceux de la simulation B6-M2 (Tab. (2.1)). Les deux écoulements comparés sont simulés sur le maillage le plus fin, de résolution M2, ainsi, pour alléger les notations, la simulation sB6-M2 sera notée sB6, et la simulation B6-M2 sera notée B6 dans les prochains paragraphes. Les paramètres de ces simulations sont rappelés au tableau (2).

	$N_b$	$d_b$ (m)	$L/d_b$	$\Delta x/d_b$	$\alpha$	$g$ (m.s <sup>-2</sup> )	$\rho_l$ (kg.m <sup>-3</sup> )	$\rho_g$ (kg.m <sup>-3</sup> )	$\mu$ (Pa.s)	$\sigma$ (N.m <sup>-1</sup> )
sB6	457	0.001	16	$d_b$	0.06	9.81	1171.3	87.545	$3.73 \times 10^{-4}$	$1.806 \times 10^{-2}$
B6	3650	0.001	32	$d_b$	0.06	9.81	1171.3	87.545	$3.73 \times 10^{-4}$	$1.806 \times 10^{-2}$

Tableau 2: Paramètres des simulations sB6 et B6.  $N_b$  est le nombre de bulles,  $d_b$  le diamètre de bulles,  $L$  la longueur du côté du domaine cubique,  $\alpha$  le taux de vide,  $g$  la constante de gravité,  $\rho_l$  la masse volumique du liquide,  $\rho_g$  celle du gaz,  $\mu$  la viscosité dynamique des fluides (identique dans les deux phases),  $\sigma$  la tension superficielle et  $\Delta x$  la taille de maille (qui est cubique).

### A.2.1 Répartition des bulles et moments statistiques

Comme le montre la figure (16) la corrélation verticale de la fraction locale de gaz  $\mathcal{C}_{\alpha'\alpha'}(\delta_x)$  (gauche) et la corrélation horizontale  $\mathcal{C}_{\alpha'\alpha'}(\delta_y)$  (droite) présentent les mêmes tendances pour le cas sB6 et pour le cas B6, avec notamment un minimum local de  $\mathcal{C}_{\alpha'\alpha'}(\delta_x)$  autour de  $\delta_x = 7d_b$ . Comme prévu, le domaine de calcul de côté  $L = 16d_b$  est suffisamment grand pour ne pas influencer la disposition des bulles. La vitesse relative  $u_r$  et les premiers moments de la vitesse horizontale des bulles ne sont pas influencés par la taille du domaine de calcul, comme le montre le tableau (3). La variance et le coefficient d'aplatissement de la vitesse verticale des bulles  $u_{b,x}$  augmentent avec la taille du domaine de calcul.

### A.2.2 Moments statistiques et fonctions de densités de probabilités dans les phases

La tableau (4), qui regroupe les premiers moments des vitesses de la phase liquide  $u_l$  et de la vitesse de la phase gazeuse  $u_g$ , montre que la taille du domaine de simulation n'a pas d'influence

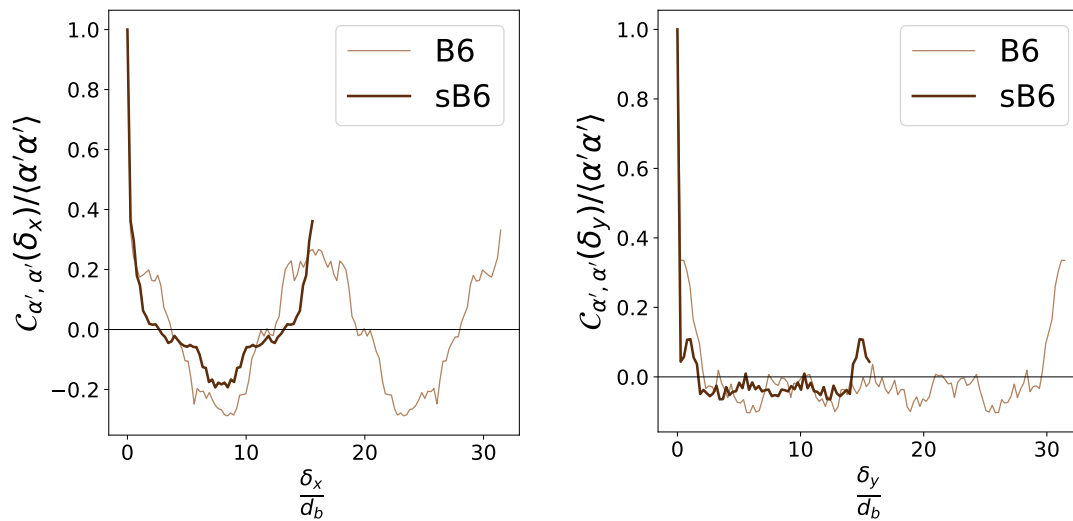


Figure 16: Corrélation moyenne de la fraction de vide locale (Eq. 4.1) dans la direction verticale  $x$  (gauche) et dans la direction horizontale  $y$  (droite).

<i>bulles</i>		B6	sB6
$u_r$	(m/s)	$1.33 \times 10^{-1}$	$1.32 \times 10^{-1}$
$\sigma^2$	(m/s) <sup>2</sup>	$2.66 \times 10^{-3}$	$1.99 \times 10^{-3}$
$\mu_3$	$u_{b,x}$	$-3.60 \times 10^{-1}$	$-3.24 \times 10^{-1}$
$\mu_4$		2.73	2.44
$\sigma^2$	(m/s) <sup>2</sup>	$1.49 \times 10^{-3}$	$1.35 \times 10^{-3}$
$\mu_3$	$u_{b,y}$	$-3.12 \times 10^{-3}$	$8.43 \times 10^{-3}$
$\mu_4$		2.81	2.85

Tableau 3: Moyenne, variance  $\sigma^2$  et moments centrés réduits  $\mu_3$  d'ordre 3  $\mu_4$  d'ordre 4, des fluctuations de la vitesse des bulles.

significative sur ces résultats. Le tableau (5), confirme cette conclusion pour les statistiques du mélange. Les différences relevées entre les deux simulations sont toujours de moins de 5%.

Comparons maintenant les PDF des fluctuations des vitesses. La figure (17a) montre la PDF centrée réduite de la composante horizontale de la vitesse du mélange  $u^*$  pour les simulations B6 et sB6. À des fins de comparaisons, la figure montre aussi la PDF pondérée pour la phase liquide  $(1 - \alpha) PDF_l(u^*)$  et la PDF pondérée pour le gaz  $\alpha PDF_g(u^*)$ . On voit que la PDF du mélange (en violet), la PDF pondérée pour le liquide (en bleu) et celle pour le gaz (en rouge) sont identiques pour les simulations B6 et sB6. La figure (17b) montre la PDF centrée réduite de la composante verticale de la vitesse du mélange  $u^*$  pour les simulations B6 et sB6. De même les PDF pondérées  $(1 - \alpha) PDF_l$  et  $\alpha PDF_g$  sont aussi tracées sur la figure. Une fois de plus, il n'y a pas de différence significative entre les PDF de la simulation B6 et celles de la simulation sB6. Il n'y a donc aucune influence de la taille du domaine de calcul sur les PDF des vitesses.

### A.2.3 Analyse spectrale

Pour la simulation B6, le côté  $L$  du domaine de calcul est deux fois plus grand que pour la simulation sB6. Par conséquent, le premier nombre d'onde non nul  $\kappa_0 = \frac{2\pi}{L}$  est deux fois plus petit pour le cas B6 ( $\kappa_0^{B6} = \frac{2\pi}{32d_b}$ ) que pour le cas sB6 ( $\kappa_0^{sB6} = \frac{2\pi}{16d_b}$ ). La résolution, (la taille de maille,)  $\Delta x$ ,

<i>liquide</i>		B6	sB6	<i>gaz</i>	
$u_r(m/s)$		$1.33 \times 10^{-1}$	$1.32 \times 10^{-1}$	$u_r(m/s)$	
$\sigma^2(m/s)^2$		$1.57 \times 10^{-3}$	$1.52 \times 10^{-3}$		
$\mu_3$	$u_{l,x}$	1.03	1.04	$u_{g,x}$	
$\mu_4$		5.44	5.57		
$\sigma^2(m/s)^2$		$7.89 \times 10^{-4}$	$7.86 \times 10^{-4}$		
$\mu_3$	$u_{l,y}$	$1.54 \times 10^{-2}$	$2.71 \times 10^{-3}$	$u_{g,y}$	
$\mu_4$		5.08	5.08		

Tableau 4: Moyenne, variance  $\sigma^2$  et moments centrés réduits  $\mu_3$  d'ordre 3  $\mu_4$  d'ordre 4, des fluctuations de la vitesse  $u_l$  dans la phase liquide et de la vitesse  $u_g$  dans la phase gazeuse, pour les simulations B6 et sB6.

<i>mélange</i>		B6	sB6
$u_r(m/s)$		$1.33 \times 10^{-1}$	$1.32 \times 10^{-1}$
$\sigma^2(m/s)^2$		$2.89 \times 10^{-3}$	$2.84 \times 10^{-3}$
$\mu_3$	$u_x$	1.97	1.99
$\mu_4$		9.07	9.17
$\sigma^2(m/s)^2$		$9.40 \times 10^{-4}$	$9.31 \times 10^{-4}$
$\mu_3$	$u_y$	$2.62 \times 10^{-2}$	$-7.13 \times 10^{-4}$
$\mu_4$		5.59	5.49

Tableau 5: Moyenne, variance  $\sigma^2$  et moments centrés réduits  $\mu_3$  d'ordre 3  $\mu_4$  d'ordre 4, des fluctuations de la vitesse du mélange  $u$ .

est identique dans les deux cas. Par conséquent, le plus grand nombre d'onde résolu  $\kappa_{max} = \frac{2\pi}{\Delta x}$  est le même pour les deux cas.

Observons dans un premier temps la partie régulière du spectre d'énergie cinétique  $\mathcal{S}_r$  pour les deux simulations B6 et sB6, qui est tracé sur la figure (18a). On voit que les deux spectres sont identiques pour  $0.2\kappa_b < \kappa < \kappa_{max}$ . On voit aussi que les spectres pour la simulation B6 (en pointillés) prolongent bien pour des nombres d'ondes deux fois plus petits les tendances de la simulation sB6 (en trait plein).

La figure (18b) montre en représentation semi-logarithmique les termes adimensionnels compensés de l'équation bilan (4.17) pour les deux simulations. Une fois de plus, il n'y a aucune différence notable entre les deux simulations : chacun des termes du bilan issu de la simulation sB6 (en trait plein) est superposé au terme correspondant pour la simulation B6 (en pointillées). Les courbes de la simulation B6 se prolongent bien pour des nombres d'ondes deux fois plus petits que pour la simulation sB6, comme attendu, et sur cette plage,  $\kappa \leq \kappa_0^{sB6}$ , tous les termes du bilan sont nuls.

En conclusion, l'extension du domaine de calcul ne change pas le comportement du spectre 3D d'énergie cinétique  $\mathcal{S}$ , ni les termes du bilan spectral d'énergie cinétique, pour les nombres d'ondes déjà résolus par le cas de référence sB6.

## A.2.4 Synthèse

Nous avons comparé les statistiques de la simulation de référence sB6 à celles de la simulation B6. Le côté du domaine de calcul  $L$  de la simulation B6 est deux fois plus grand que pour le cas de référence sB6, les nombres d'ondes résolus s'étendent donc vers les petits nombres d'ondes. La comparaison des statistiques, aussi bien dans le plan physique que dans le plan spectral montre que les résultats sont identiques pour les deux simulations. Les conclusions des sections précédentes s'étendent donc jusqu'à  $\kappa_0^{B6} = \frac{2\pi}{32d_b}$ . On suppose que pour  $\alpha = 3\%$  et  $\alpha = 12\%$  il en est de même : la taille du domaine de simulation ne jouera pas.

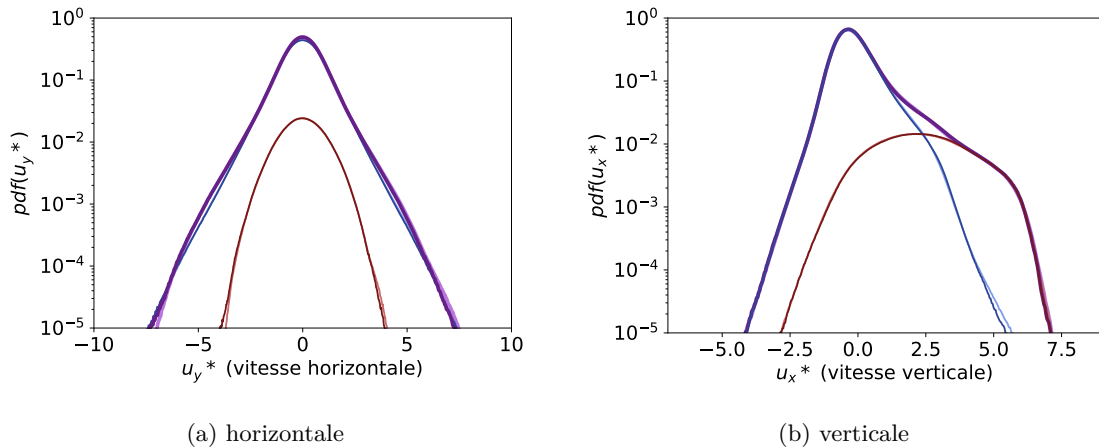


Figure 17: Fonction de densité de probabilité des vitesses de mélange centrées et réduites  $u_b^* = u_b - \langle u_b \rangle / \langle u_b' u_b' \rangle^{1/2}$

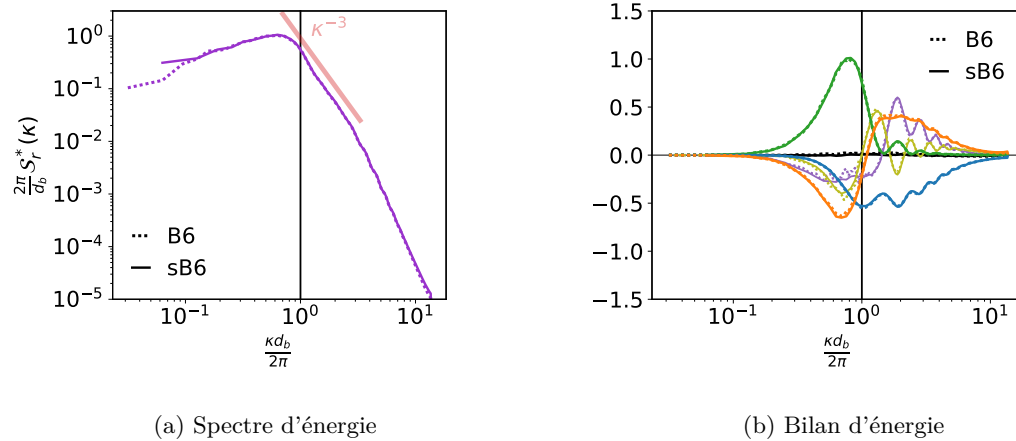


Figure 18: À gauche : partie régulière du spectre de d'énergie cinétique  $S_r$ . À droite : termes du bilan d'énergie cinétique, production  $Grv$  (vert ■), dissipation  $Dsp$  (bleu ■), transfert total  $Trs$  (orange ■), transfert par pression et interfaces (vert clair ■), transfert par inertie  $Int$  (violet ■). Le cas sB6 est en trait plein, le cas B6 est en pointillés.

### A.3 Raffinement du maillage pour la simulation couplée

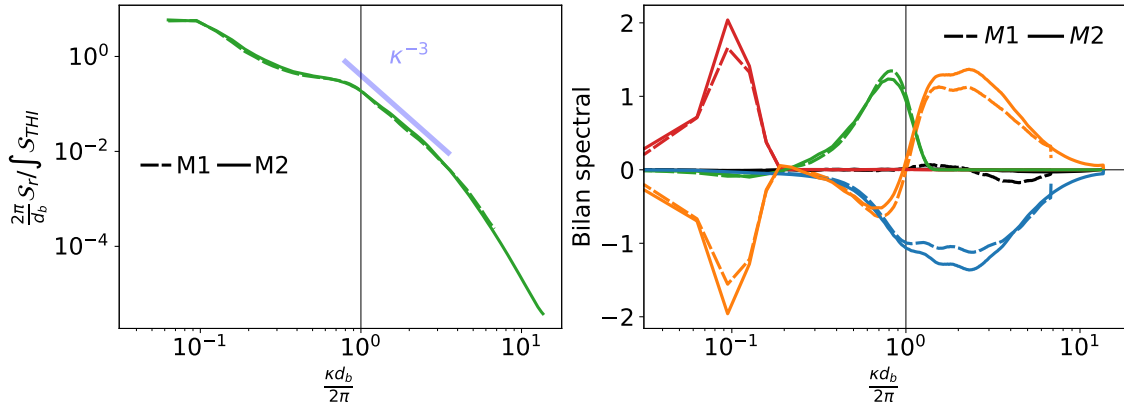
La simulation couplée TBIA est simulée sur un maillage de résolution M2 correspondant à une discrétisation de 28 mailles par diamètre de bulles  $d_b$  et sur un maillage M1 deux fois plus grossier, correspondant à la seule résolution disponible à ce jour pour les simulations couplées à  $\alpha = 3\%$  et à  $\alpha = 12\%$ . Tous les autres paramètres sont identiques et peuvent être trouvés en première section du chapitre 5. Dans cette annexe, on évalue l'influence de la résolution du maillage sur les résultats du chapitre 5 pour le cas à  $\alpha = 6\%$ .

La comparaison de la vitesse relative et des variances à partir des valeurs du tableau (6), tout comme la comparaison des spectres d'énergie sur la figure (19a), montrent que le maillage M1 donne des résultats très proches de ceux obtenus avec le maillage M2, et donc que ce maillage intermédiaire est suffisant pour tirer des conclusions pertinentes. Cet accord entre les deux niveaux de raffinement est légèrement mis en défaut par la différence constatée entre les termes de dissipation (en bleu) sur la figure (19), qui sont du même ordre de grandeur que l'interaction (voir section 5.5, 5.13, chapitre 5), sans toutefois remettre en cause les conclusions du chapitre 5.



$\sigma^2$			$\alpha = 6\%$ (M1)	$\alpha = 6\%$ (M2)
	$u_r (m/s)$	TBIA	0.100	0.090
bulles	$\sigma^2(u_{b,x}) (m/s)^2$	TBIA	$6.35 \times 10^{-3}$	$6.26 \times 10^{-3}$
	$\sigma^2(u_{b,y}) (m/s)^2$	TBIA	$8.56 \times 10^{-3}$	$8.86 \times 10^{-3}$
gaz	$\sigma^2(u_{g,x}) (m/s)^2$	TBIA	$10.7 \times 10^{-3}$	$9.84 \times 10^{-3}$
	$\sigma^2(u_{g,y}) (m/s)^2$	TBIA	$10.7 \times 10^{-3}$	$10.8 \times 10^{-3}$
liquide	$\sigma^2(u_{l,x}) (m/s)^2$	TBIA	$6.16 \times 10^{-3}$	$6.23 \times 10^{-3}$
	$\sigma^2(u_{l,y}) (m/s)^2$	TBIA	$7.54 \times 10^{-3}$	$8.08 \times 10^{-3}$

Tableau 6: Vitesse relative et variance  $\sigma^2$  des vitesses des bulles  $u_{b,x}$  et  $u_{b,y}$ , des vitesses dans le gaz  $u_{g,x}$  et  $u_{g,y}$  et des vitesses dans dans le liquide  $u_{l,x}$  et  $u_{l,y}$ .



(a) Partie régulière du spectre d'énergie

(b) Bilan spectral d'énergie cinétique

Figure 19: Comparaison des simulations couplées à  $\alpha = 6\%$ , pour une résolution de 28 mailles par diamètre de bulle  $d_b$  (M2) et pour le maillage M1 deux fois plus grossier.

## A.4 Obtention de la partie régulière des termes du bilan spectral

Dans le chapitre 3, nous avons montré comment les singularités des champs de vitesse, de masse volumique et la tension interfaciale sont responsables de singularités sur les termes du bilan spectral d'énergie cinétique :

$$Grv + W_{HIT} + Trs + Dsp = 0 \quad (48)$$

Les parties singulières des termes sont indépendantes de leur partie régulière et il convient donc de séparer cette équation bilan en deux équations :

$$Grv_r + W_{HIT,r} + Trs_r + Dsp_r = 0 \quad (49)$$

$$Grv_s + W_{HIT,s} + Trs_s + Dsp_s = 0 \quad (50)$$

où chaque terme  $T$  du bilan (48) vérifie  $T = T_r + T_s$ . Nous justifions au chapitre 3, en BIA pure les parties régulières et singulières vérifient :

$$Grv_r^{BIA} = Grv^{BIA} e^{(\kappa/\kappa_c)^n} \quad (51)$$

$$Trs_s^{BIA} = 0 \quad (52)$$

et donc :

$$Dsp_s^{BIA} = Dsp^{BIA} + (1 - e^{(\kappa/\kappa_c)^n}) Grv^{BIA}. \quad (53)$$

Nous souhaitons étendre cette approche au cas couplé TBIA. La figure (20) montre que le terme de flottabilité (en vert) est identique en BIA et en TBIA : il s'annule toujours à  $\kappa = 1.4\kappa_b$  et il se réduit à sa partie singulière pour  $\kappa > 1.4\kappa_b$ . Comme en BIA pure, que le terme de transfert est régulier. Par ailleurs, le terme de production par le forçage SIT (en rouge) qui est concentré aux grandes échelles ( $\kappa \sim 0.1\kappa_b$ ) est régulier lui aussi. Par conséquent, les parties régulières se séparent des parties singulières de la même manière en TBIA qu'en BIA :

$$Grv_r^{TBIA} = Grv^{TBIA} e^{(\kappa/\kappa_c)^n} \quad (54)$$

$$Trs_s^{TBIA} = 0; \quad W_{HIT,s} = 0 \quad (55)$$

et donc :

$$Dsp_s^{TBIA} = Dsp^{TBIA} + (1 - e^{(\kappa/\kappa_c)^n}) Grv^{TBIA}. \quad (56)$$

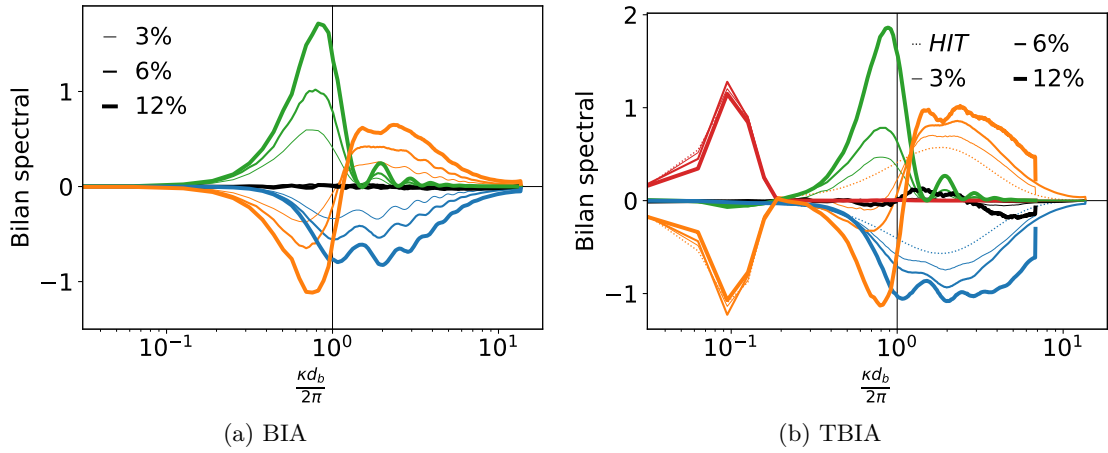


Figure 20: Termes du bilan brut d'énergie cinétique, adimensionnés par  $\mathcal{W}_f$ , et multipliés par  $\kappa$ .  
HIT



# Bibliographie

- [1] Elise ALMÉRAS, Varghese MATHAI, Detlef LOHSE et Chao SUN. “[Experimental investigation of the turbulence induced by a bubble swarm rising within incident turbulence](#)”. *Journal of Fluid Mechanics* 825 (2017), p. 1091-1112.
- [2] Zouhir AMOURA, Cédric BESNACI, Frédéric RISSO et Véronique ROIG. “[Velocity fluctuations generated by the flow through a random array of spheres: a model of bubble-induced agitation](#)”. *Journal of Fluid Mechanics* 823 (2017). Publisher: Cambridge University Press, p. 592-616.
- [3] A. BIESHEUVEL et L. Van WIJNGAARDEN. “[Two-phase flow equations for a dilute dispersion of gas bubbles in liquid](#)”. *Journal of Fluid Mechanics* 148 (1984), p. 301-318.
- [4] Guillaume BOIS. “[Transferts de masse et d’énergie aux interfaces liquide / vapeur avec changement de phase: proposition de modélisation aux grandes échelles des interfaces](#)”. Thèse de doct. Université de Grenoble, 2011.
- [5] Guillaume BOIS. “[Direct numerical simulation of a turbulent bubbly flow in a vertical channel: Towards an improved second-order reynolds stress model](#)”. *Nuclear Engineering and Design* 321 (2017), p. 92-103.
- [6] Robert BRIDSON. “[Fast Poisson disk sampling in arbitrary dimensions](#)”. *ACM SIGGRAPH 2007 sketches*. SIGGRAPH07: Special Interest Group on Computer Graphics and Interactive Techniques Conference. San Diego California : ACM, 2007, p. 22.
- [7] Bernard BUNNER et Grétar TRYGGVASON. “[Dynamics of homogeneous bubbly flows Part 1. Rise velocity and microstructure of the bubbles](#)”. *Journal of Fluid Mechanics* 466 (2002), p. 17-52.
- [8] Bernard BUNNER et Grétar TRYGGVASON. “[Dynamics of homogeneous bubbly flows Part 2. Velocity fluctuations](#)”. *Journal of Fluid Mechanics* 466 (2002), p. 53-84.
- [9] Agathe CHOUÏPPE et Markus UHLMANN. “[Forcing homogeneous turbulence in direct numerical simulation of particulate flow with interface resolution and gravity](#)”. *Physics of Fluids* 27.12 (2015). \_eprint: <https://doi.org/10.1063/1.4936274>, p. 123301.
- [10] Marco CRIALESI-ESPOSITO, Marco Edoardo ROSTI, Sergio CHIBBARO et Luca BRANDT. “[Modulation of homogeneous and isotropic turbulence in emulsions](#)”. *Journal of Fluid Mechanics* 940 (2022). Publisher: Cambridge University Press, A19.
- [11] Bart J. DALY. “[Numerical Study of the Effect of Surface Tension on Interface Instability](#)”. *The Physics of Fluids* 12.7 (1969), p. 1340-1354.
- [12] N G DEEN, T SOLBERG et B H HJERTAGER. “[Large eddy simulation of the Gas–Liquid flow in a square cross-sectioned bubble column](#)”. *Chemical Engineering Science* (2001).
- [13] A. DU CLUZEAU, G. BOIS, N. LEONI et A. TOUTANT. “[Analysis and modeling of bubble-induced agitation from direct numerical simulation of homogeneous bubbly flows](#)”. *Physical Review Fluids* 7.4 (2022), p. 044604.
- [14] A. DU CLUZEAU, G. BOIS et A. TOUTANT. “[Analysis and modelling of Reynolds stresses in turbulent bubbly up-flows from direct numerical simulations](#)”. *Journal of Fluid Mechanics* 866 (2019). Publisher: Cambridge University Press, p. 132-168.
- [15] A. DU CLUZEAU, G. BOIS, Adrien TOUTANT et J.-M. MARTINEZ. “[On bubble forces in turbulent channel flows from direct numerical simulations](#)”. *Journal of Fluid Mechanics* 882 (2020). Publisher: Cambridge University Press (CUP), A27.

- [16] Antoine DU CLUZEAU. “Modélisation physique de la dynamique des écoulements à bulles par remontée d’échelle à partir de simulations fines”. Thèse de doct. Université de Perpignan, 2019.
- [17] Asghar ESMAEELI et Grétar TRYGGVASON. “A direct numerical simulation study of the buoyant rise of bubbles at  $O(100)$  Reynolds number”. *Physics of Fluids* 17.9 (2005), p. 093303.
- [18] V. ESWARAN et S. B. POPE. “An examination of forcing in direct numerical simulations of turbulence”. *Computers & Fluids* 16.3 (1988), p. 257-278.
- [19] C GARNIER, M LANCE et J.L MARIE. “Measurement of local flow characteristics in buoyancy-driven bubbly flow at high void fraction”. *Experimental Thermal and Fluid Science* 26.6 (2002), p. 811-815.
- [20] J. GLIMM, M.J. GRAHAM, J. GROVE, X.L. LI, T.M. SMITH, D. TAN, F. TANGERMAN et Q. ZHANG. “Front tracking in two and three dimensions”. *Computers & Mathematics with Applications* 35.7 (1998), p. 1-11.
- [21] James GLIMM, John W. GROVE, Xiao Lin LI, Keh-ming SHYUE, Yanni ZENG et Qiang ZHANG. “Three-Dimensional Front Tracking”. *SIAM Journal on Scientific Computing* 19.3 (1998), p. 703-727.
- [22] James GLIMM, Christian KLINGENBERG, Oliver MCBRYAN, Bradley PLOHR, David SHARP et Sara YANIV. “Front tracking and two-dimensional Riemann problems”. *Advances in Applied Mathematics* 6.3 (1985), p. 259-290.
- [23] James GLIMM, Xiao Lin LI, Yingjie LIU et Ning ZHAO. “Conservative front tracking and level set algorithms”. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 98.25 (2001), p. 14198-14201.
- [24] J. C. R. HUNT et I. EAMES. “The disappearance of laminar and turbulent wakes in complex flows”. *Journal of Fluid Mechanics* 457 (2002), p. 111-132.
- [25] Alessio INNOCENTI, Alice JACCOD, Stéphane POPINET et Sergio CHIBBARO. “Direct numerical simulation of bubble-induced turbulence”. *Journal of Fluid Mechanics* 918 (2021), A23.
- [26] I. KATAOKA. “Local instant formulation of two-phase flow”. *International Journal of Multiphase Flow* 12.5 (1986), p. 745-758.
- [27] M. LANCE et J. BATAILLE. “Turbulence in the liquid-phase of a uniform bubbly air–water flow”. *Journal of Fluid Mechanics* 222 (1991). Publisher: Cambridge University Press, p. 95-118.
- [28] F. LE ROY DE BONNEVILLE, R. ZAMANSKY, F. RISSO, A. BOULIN et J.-F. HAQUET. “Numerical simulations of the agitation generated by coarse-grained bubbles moving at large Reynolds number”. *Journal of Fluid Mechanics* 926 (2021), A20.
- [29] Florian LE ROY DE BONNEVILLE. “Modélisation numérique de l’agitation et du mélange dans les écoulements à bulles. Application aux phénomènes de convection dans un bain de corium”. Thèse de doctorat. Toulouse, INPT, 2020.
- [30] Yixiang LIAO, Tian MA, Eckhard KREPPER, Dirk LUCAS et Jochen FRÖHLICH. “Application of a novel model for bubble-induced turbulence to bubbly flows in containers and vertical pipes”. *Chemical Engineering Science* 202 (2019), p. 55-69.
- [31] Aurore LOISY et Aurore NASO. “Interaction between a large buoyant bubble and turbulence”. *Physical Review Fluids* 2 (2017). Publisher: American Physical Society, p. 14606.
- [32] T. S. LUNDGREN. “Linearly forced isotropic turbulence”. *Center for Turbulence Research, Annual Research Brief* (2003). Publisher: Cambridge University Press, p. 461-473.
- [33] Etienne MANON. “Contribution à l’analyse et à la modélisation locale des écoulements bouillants sous-saturés dans les conditions des réacteurs à eau sous pression”. 2000ECAP0696. Thèse de doct. 2000, 1 vol. (284 p.)
- [34] Julián MARTÍNEZ MERCADO, Daniel CHEHATA GÓMEZ, Dennis VAN GILS, Chao SUN et Detlef LOHSE. “On bubble clustering and energy spectra in pseudo-turbulence”. *Journal of Fluid Mechanics* 650 (2010), p. 287-306.
- [35] Julián MARTÍNEZ-MERCADO, Carlos A. PALACIOS-MORALES et Roberto ZENIT. “Measurement of pseudoturbulence intensity in monodispersed bubbly liquids for  $10 < Re < 500$ ”. *Physics of Fluids* 19.10 (2007), p. 103302.

- 
- [36] Benoît MATHIEU. “Etudes physique, expérimentale et numérique des mécanismes de base intervenant dans les écoulements diphasiques”. Thèse de doct. 2003. 242 p.
- [37] P. D. MININNI, A. ALEXAKIS et A. POUQUET. “Large-scale flow effects, energy transfer, and self-similarity on turbulence”. *Physical Review E* 74.1 (2006), p. 016303.
- [38] D. W. MOORE. “The boundary layer on a spherical gas bubble”. *Journal of Fluid Mechanics* 16.2 (1963), p. 161-176.
- [39] Vikash PANDEY, Dhruvadhitya MITRA et Prasad PERLEKAR. “Turbulence modulation in buoyancy-driven bubbly flows”. *Journal of Fluid Mechanics* 932 (2022). Publisher: Cambridge University Press, A19.
- [40] Vikash PANDEY, Rashmi RAMADUGU et Prasad PERLEKAR. “Liquid velocity fluctuations and energy spectra in three-dimensional buoyancy-driven bubbly flows”. *Journal of Fluid Mechanics* 884 (2020). Publisher: Cambridge University Press, R6.
- [41] Yih-Ho PAO. “Structure of Turbulent Velocity and Scalar Fields at Large Wavenumbers”. *The Physics of Fluids* 8.6 (1965), p. 1063-1075.
- [42] Stéphane PERRARD, Aliénor RIVIÈRE, Wouter MOSTERT et Luc DEIKE. “Bubble deformation by a turbulent flow”. *Journal of Fluid Mechanics* 920 (2021), A15.
- [43] Stephen B. POPE. *Turbulent flows / Stephen B. Pope,...* Publication Title: Turbulent flows / Stephen B. Pope,... Cambridge : Cambridge University Press, 2000.
- [44] Vivek N. PRAKASH, J. MARTÍNEZ MERCADO, Leen VAN WIJNGAARDEN, E. MANCILLA, Y. TAGAWA, Detlef LOHSE et Chao SUN. “Energy spectra in turbulent bubbly flows”. *Journal of Fluid Mechanics* 791 (2016), p. 174-190.
- [45] Gabriel RAMIREZ, Alan BURLLOT, Rémi ZAMANSKY, Guillaume BOIS et Frédéric RISSO. “Spectral analysis of dispersed multiphase flows in the presence of fluid interfaces” (2023).
- [46] Judith RENSEN, Stefan LUTHER et Detlef LOHSE. “The effect of bubbles on developed turbulence”. *Journal of Fluid Mechanics* 538.-1 (2005), p. 153.
- [47] Guillaume RIBOUX, Dominique LEGENDRE et Frédéric RISSO. “A model of bubble-induced turbulence based on large-scale wake interactions”. *Journal of Fluid Mechanics* 719 (2013), p. 362-387.
- [48] Guillaume RIBOUX, Frédéric RISSO et Dominique LEGENDRE. “Experimental characterization of the agitation generated by bubbles rising at high Reynolds number”. *Journal of Fluid Mechanics* 643 (2010), p. 509-539.
- [49] Robert D. RICHTMYER et K. W. MORTON. “Difference Methods for Initial-Value Problems”. *SIAM Review* 10.3 (1968), p. 381-383.
- [50] Frédéric RISSO. “Theoretical model for k-3 spectra in dispersed multiphase flows”. *Physics of Fluids* 23.1 (2011), p. 011701.
- [51] Frédéric RISSO. “Physical interpretation of probability density functions of bubble-induced agitation”. *Journal of Fluid Mechanics* 809 (2016), p. 240-263.
- [52] Frédéric RISSO. “Agitation, Mixing, and Transfers Induced by Bubbles”. *Annual Review of Fluid Mechanics* 50.1 (2018), p. 25-48.
- [53] Frédéric RISSO et Kjetil ELLINGSEN. “Velocity fluctuations in a homogeneous dilute dispersion of high-Reynolds-number rising bubbles”. *Journal of Fluid Mechanics* 453 (2002), p. 395-410.
- [54] Frédéric RISSO et Jean FABRE. “Oscillations and breakup of a bubble immersed in a turbulent field”. *Journal of Fluid Mechanics* 372 (1998), p. 323-355.
- [55] Frédéric RISSO, Véronique ROIG, Zouhir AMOURA, Guillaume RIBOUX et Anne-Marie BILLET. “Wake attenuation in large Reynolds number dispersed two-phase flows”. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 366.1873 (2008). Sous la dir. d'Ian EAMES, p. 2177-2190.
- [56] S ROGALLO. “Numerical Experiments in Homogeneous Turbulence” (1981).

- [57] Ivo ROGHAIR, Julián Martínez MERCADO, Martin Van SINT ANNALAND, Hans KUIPERS, Chao SUN et Detlef LOHSE. “Energy spectra and bubble velocity distributions in pseudo-turbulence: Numerical simulations vs. experiments”. *International Journal of Multiphase Flow* 37.9 (2011), p. 1093-1098.
- [58] V. ROIG et A. Larue DE TOURNEMINE. “Measurement of interstitial velocity of homogeneous bubbly flows at low to moderate void fraction”. *Journal of Fluid Mechanics* 572 (2007), p. 87-110.
- [59] Carlos ROSALES et Charles MENEVEAU. “Linear forcing in numerical simulations of isotropic turbulence: Physical space implementations and convergence properties”. *Physics of Fluids* 17.9 (2005). \_eprint: <https://doi.org/10.1063/1.2047568>, p. 095106.
- [60] A. S. SANGANI, S. S. OZARKAR, Y. H. TSANG et D. L. KOCH. “Flow of Bubbly Liquids in a Vertical Pipe: Theory and Experiments”. *IUTAM Symposium on Computational Approaches to Multiphase Flow*. Sous la dir. de S. BALACHANDAR et A. PROSPERETTI. T. 81. Series Title: Fluid Mechanics and Its Applications. Dordrecht : Springer Netherlands, 2006, p. 381-392.
- [61] David W. SCOTT. *Multivariate Density Estimation: Theory, Practice, and Visualization*. 1<sup>re</sup> éd. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 1992.
- [62] Peter SMERKA. “On the motion of bubbles in a periodic box”. *Journal of Fluid Mechanics* 254 (1993), p. 79-112.
- [63] Aymeric SONOLET. “Simulation et modélisation des transferts thermiques au sein des écoulements turbulents diphasiques à bulles”. Thèse de doct. 2023.
- [64] H. TENNEKES et John L. LUMLEY. *A first course in turbulence*. Cambridge, Mass : MIT Press, 1972. 300 p.
- [65] Gretar TRYGGVASON et Jiakai LU. “Direct numerical simulations of multiphase flows: Opportunities and challenges”. INTERNATIONAL CONFERENCE OF NUMERICAL ANALYSIS AND APPLIED MATHEMATICS ICNAAM 2019. Rhodes, Greece, 2020, p. 030002.
- [66] Gretar TRYGGVASON, Ruben SCARDOVELLI et Stephane ZALESKI. *Direct Numerical Simulations of Gas-Liquid Multiphase Flows*. 2010.
- [67] Alberto VELA-MARTÍN et Marc AVILA. “Deformation of drops by outer eddies in turbulence”. *Journal of Fluid Mechanics* 929 (2021), A38.
- [68] J.H WILLIAMSON. “Low-storage Runge-Kutta schemes”. *Journal of Computational Physics* 35.1 (1980), p. 48-56.
- [69] Yevgeny YURKOVETSKY et John F. BRADY. “Statistical mechanics of bubbly liquids”. *Physics of Fluids* 8.4 (1996), p. 881-895.
- [70] R ZAMANSKY, F LE ROY DE BONNEVILLE et F RISSO. *Turbulence induced by a swarm of rising bubbles from coarse-grained simulations*. en. 2023.
- [71] Roberto ZENIT, Donald L. KOCH et Ashok S. SANGANI. “Measurements of the average properties of a suspension of bubbles rising in a vertical channel”. *Journal of Fluid Mechanics* 429 (2001), p. 307-342.



**Titre :** Dynamique spectrale de l'interaction entre l'agitation induite par les bulles et la turbulence

**Mots clés :** Diphasique, Simulation directe numérique, Turbulence, Analyse spectrale

**Résumé :** De nombreux écoulements, naturels comme industriels, mettent en jeu une phase dispersée, solide, liquide ou gazeuse, dans un fluide porteur. Dans cette thèse, nous nous intéressons à la dynamique des écoulements turbulents contenant des bulles millimétriques, afin d'améliorer la compréhension des scénarios d'accidents concernant les réacteurs à eau pressurisée. Ces écoulements présentent des fluctuations radicalement différentes des écoulements monophasiques. Celles-ci résultent à la fois de l'agitation induite par les bulles (BIA pour "Bubble Induced Agitation") et de la turbulence induite par le cisaillement (SIT pour "Shear-Induced Turbulence"). Notre objectif est de comprendre comment ces deux mécanismes se combinent, à l'aide de simulations numériques directes (DNS) effectuées dans une boîte périodique.

L'interaction entre BIA et SIT dépend du rapport entre les énergies de ces deux contributions, mais aussi de la plage de nombres d'onde où l'énergie de chacune est distribuée. Nous avons choisi de représenter la SIT par une turbulence homogène isotrope stationnaire (HIT pour "Homogeneous-Isotropic Turbulence") obtenue par un forçage aléatoire des grandes échelles. La BIA est produite par un essaim homogène de bulles en ascension, dont le diamètre est choisi pour se situer dans la gamme d'échelles de la zone inertielle de la HIT. La puissance produite par le forçage de la HIT est maintenue constante, tandis que la puissance injectée à travers les bulles par la force de flottabilité est modifiée en changeant la fraction volumique de gaz :  $\alpha = 0, 0.03, 0.06$  et  $0.12$ .

Les statistiques des fluctuations sont analysées en détail, en portant un intérêt particulier à la dynamique, dans le domaine spectral, de l'énergie cinétique et des termes de son bilan. Un soin particulier a été apporté à la justification de la pertinence des spectres des champs décrivant le mélange diphasique, en présence des singularités aux interfaces causées par la tension de surface et la discontinuité de la masse volumique. Dans les simulations de la BIA pure (sans forçage de la HIT), les fluctuations sont dominées par les sillages des bulles en interaction. L'énergie produite par la flottabilité est concentrée autour de la taille des bulles, transportée vers les petites échelles par les termes d'inertie et de tension de surface, puis dissipée par les termes visqueux. L'absence de séparation d'échelle entre la production et la dissipation est responsable d'une évolution en  $k^{-3}$  sur une plage limitée du nombre d'onde  $k$ . Les simulations couplées, en présence de HIT et de BIA, correspondent à des situations où le rapport entre la production par les bulles et celle par le forçage turbulent est plus ou moins grand que l'unité, selon la valeur de  $\alpha$ . Dans tous les cas, le mouvement de bulles et les fluctuations du liquide à des échelles plus grandes que les bulles sont dominés par la HIT. En revanche, la BIA imprime sa marque aux échelles plus petites en gardant une dynamique propre, peu influencée par la HIT.

Ces résultats ouvrent des pistes concrètes à l'amélioration des modèles de turbulence en écoulement à bulles qui incluent une description des contributions de la BIA et de la SIT.

**Title:** Spectral dynamics of the interaction between bubble induced agitation and turbulence

**Key words:** Bubbly flow, DNS, Turbulence, Spectral analysis

**Abstract:** Many industrial flows, as well as natural flows, involve a dispersed phase moving through a carrier fluid. In order to improve the understanding of accidental scenarios of pressurized water reactors, we study the dynamics of flows with millimeter-sized bubbles. The fluctuations which develop are distinctly different from those observed in single-phase flows. They result both from the Bubble Induced Agitation (BIA) and the Shear-Induced Turbulence (SIT). In this work, we carry out Direct Numerical Simulations (DNS) in a periodic domain in order to understand how these two contributions entangle. The interaction between BIA and SIT depends on the energy ratio between them, but also on the range of scales where their energy is distributed. The SIT is represented by a stationary Homogeneous Isotropic Turbulence (HIT) generated by a random forcing at large scales. The BIA comes from the collective motion of a homogeneous swarm of bubbles, the diameter of which is chosen to fit within the inertial subrange of the HIT. The power produced by the HIT forcing is set constant, while power injected by the work of buoyancy is varied by changing the gas volume fraction:  $\alpha = 0, 0.03, 0.06, 0.12$ . The statistics of the fluctuations are analyzed in detail, with a particular focus on the spectral dynamics of the fluctuating kinetic energy and its budget. The relevance of the spectra of fields describing the two-phase mixture, in the presence of singularities at the interfaces due to surface tension and density discontinuities, has been closely examined. For the pure BIA case (without HIT), the fluctuations are dominated by the interacting bubble wakes. The energy coming from the buoyancy is generated at the bubble scale, transported towards smaller scales by inertial terms and by surface tension, and dissipated by the viscous terms. The absence of a scale separation between energy production and dissipation leads to a  $\kappa^{-3}$  evolution of the energy spectra on a limited range of wavenumbers  $\kappa$ . Then, the coupled simulations, with HIT and BIA, have been designed such that the ratio between the production by the bubbles and the production by the turbulent forcing is either below or above unity, according to the value of  $\alpha$ . In any case, the bubble motion and the liquid fluctuations at scales larger than the bubbles are dominated by the HIT. Conversely, HIT has little influence at small scales, where BIA has a strong impact. These results pave the way for improving turbulent bubbly flow models that take into account both contributions, BIA and HIT.