



HAL
open science

Modélisation et analyse de systèmes dynamiques inspirés de l'épidémiologie mathématique et déployés sur réseaux complexes

Irmand Leblond Mikiela Ndzoumbou

► **To cite this version:**

Irmand Leblond Mikiela Ndzoumbou. Modélisation et analyse de systèmes dynamiques inspirés de l'épidémiologie mathématique et déployés sur réseaux complexes. Systèmes dynamiques [math.DS]. Normandie Université; Laboratoire de Recherche en Education (Libreville), 2023. Français. NNT : 2023NORMLH15 . tel-04653647

HAL Id: tel-04653647

<https://theses.hal.science/tel-04653647v1>

Submitted on 19 Jul 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Normandie Université



THÈSE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité **MATHEMATIQUES**

Préparée au sein de l'**Université Le Havre Normandie**

En cotutelle internationale avec l'**ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE LIBREVILLE, GABON**

Modélisation et analyse de systèmes dynamiques inspirés de l'épidémiologie mathématique et déployés sur réseaux complexes

Présentée et soutenue par

IRMAND LEBLOND MIKIELA NDZOUMBOU

Thèse soutenue le 09/11/2023

devant le jury composé de :

M. ALAIN MIRANVILLE	PROFESSEUR DES UNIVERSITES - UNIVERSITE POITIERS	Rapporteur du jury
M. YAFIA RADOUANE	PROFESSOR - UNIVERSITE IBN TOFAIL	Rapporteur du jury
M. ARNAUD DUCROT	PROFESSEUR DES UNIVERSITES - Université Le Havre Normandie	Membre du jury
MME CRISTIANA JOAO SOARES DA SILVA	MAÎTRE DE CONFERENCES (HDR) - INSTITUT UNIVERSITAIRE DE LISBONNE	Membre du jury
MME VALENTINA LANZA	MAÎTRE DE CONFERENCES - Université Le Havre Normandie	Membre du jury
M. PIERRE AUGER	DIRECTEUR DE RECHERCHE EMERITE - INST DE RECH POUR LE DEVELOPPEMENT (IRD)	Président du jury
M. MOULAY AHMED AZIZ ALAOUI	PROFESSEUR DES UNIVERSITES - Université Le Havre Normandie	Directeur de thèse
M. ARMEL ANDAMI OVONO	PROFESSOR - ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE LIBREVILLE	Co-directeur de thèse

Thèse dirigée par **MOULAY AHMED AZIZ ALAOUI** (Laboratoire de Mathématiques Appliquées du Havre) et **ARMEL ANDAMI OVONO** (ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE LIBREVILLE)



THÈSE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité Mathématiques

Préparée au sein de l'Université Le Havre Normandie

Modélisation et analyse de systèmes dynamiques inspirés de l'épidémiologie mathématique et déployés sur réseaux complexes

Présentée et soutenue par

Irmand Leblond MIKIELA NDZOUNBOU

Thèse soutenue publiquement le 9 novembre 2023
devant le jury composé de

M. Alain Miranville	Professeur des Universités Université de Poitiers	Rapporteur
M. Radouane Yafia	Professeur des Universités Université Ibn Tofail	Rapporteur
M. Pierre Auger	Directeur de recherche Institut de recherche pour le développement (IRD)	Examineur
M. Arnaud Ducrot	Professeur des Universités Université Le Havre Normandie	Examineur
Mme. Cristiana João Soares da Silva	Maître de conférences HDR Iscte – Instituto Universitário de Lisboa	Examinatrice
M. Moulay Aziz-Alaoui	Professeur des Universités Université Le Havre Normandie	Directeur de thèse
M. Armel Andami Ovono	Maître de Conférences Ecole normale supérieure de Libreville	Codirecteur de thèse
Mme. Valentina Lanza	Maître de Conférences Université Le Havre Normandie	Encadrante de thèse

Thèse co-dirigée par Moulay Aziz-Alaoui et Armel Andami Ovono et encadrée par Valentina Lanza au laboratoire LMAH

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers mon jury de thèse pour leur temps, leur expertise et leur précieuse contribution à l'évaluation de mon manuscrit de thèse. Leurs commentaires et suggestions judicieux ont grandement enrichi mon travail et amélioré la qualité de ma recherche.

Je souhaite également remercier chaleureusement mon équipe de direction, composée de mes deux directeurs de thèse, M. Aziz Alaoui et M. Armel Andami Ovono, ainsi que ma co-encadrante, Mme Valentina Lanza. Leur implication active dans cette aventure académique et leurs conseils ont été déterminants pour la réalisation de ce travail de recherche.

Ma reconnaissance s'adresse également à l'institution académique qui m'a offert l'opportunité de mener cette recherche, ainsi qu'au directeur du laboratoire LMAH, M. Arnaud Ducrot, pour son soutien précieux. Je suis reconnaissant envers tous les enseignants et le personnel qui ont contribué à mon développement académique et professionnel en mettant à ma disposition les ressources nécessaires.

Je tiens également à exprimer ma gratitude envers tous les membres de mon laboratoire de recherche, le LMAH, ainsi que mes collègues et amis qui ont contribué de différentes manières à mon parcours doctoral. Leur soutien moral, leurs discussions stimulantes et leurs encouragements ont été essentiels pour maintenir ma motivation et mon inspiration tout au long de cette expérience.

Je n'oublie pas de mentionner ma famille et mes proches, qui m'ont soutenu de manière inconditionnelle tout au long de cette aventure. Leur amour, leur compréhension et leur soutien ont été une source constante d'inspiration et de réconfort.

Enfin, ces remerciements ne suffisent pas à exprimer toute ma gratitude envers chacun d'entre vous. Votre soutien a été essentiel pour la réalisation de ce travail et je vous en suis profondément reconnaissant.

Table des matières

Introduction	1
1 Rappels	7
1.1 Intégration et Espaces de Sobolev à Valeurs Vectorielles.	7
1.1.1 Intégration à valeurs vectorielles	7
1.2 Définition de l'intégrale	8
1.3 Les Espaces $L^p(X; E)$	8
1.3.1 Définition et Propriétés	8
1.3.2 Dual Topologique de $L^p(X; E)$	10
1.4 Espaces de Sobolev à Valeurs Vectorielles	11
1.4.1 Injection continue	11
1.4.2 Caractérisation de l'espace $W^{1,p}(0, T; L^q(\Omega))$	12
2 Systèmes de réaction-diffusion non locale à compartiments	13
2.1 Introduction	13
2.2 Modèle et positionnement du problème	18
2.3 Existence des solutions	19
2.4 Régularité des solutions	25
2.5 Unicité de la solution	28
2.6 Positivité de la solution	31
2.7 Simulations numériques : Application au modèle panique contrôle reflexe <i>PCR</i>	33
3 Réseau d'équations de réaction-diffusion à compartiments	45
3.1 Introduction	45
3.2 Construction d'un modèle de couplage pour des modèles de réaction-diffusion	46
3.2.1 Modèle 2-1 : 2 nœuds et 1 population par nœud	46
3.3 Couplage dans un réseau de taille finie : une méthode générale de modélisation	51
3.3.1 Quelques conditions sur les termes de couplage	57
3.3.2 Positivité de la solution du modèle couplé dans le cas d'un couplage non-local linéaire	58
3.4 Couplage non local de systèmes de réaction-diffusion à compartiments.	61
3.4.1 Conservation de masse et bornage uniforme	63

Table des matières

3.5	Application : couplage non-local de systèmes SIS de réaction-diffusion	65
3.5.1	Existence, unicité et positivité de la solution du modèle couplé	67
3.5.2	États d'équilibre du modèle couplé	71
3.5.3	Existence globale et bornage de la solution du modèle couplé	74
3.5.4	Simulations numériques	86
4	Contrôle optimal pour un modèle EDO à compartiments	93
4.1	Le modèle Alerte-Panic-Contrôle (APC)	94
4.2	Le modèle APC pour le contrôle optimal	98
4.2.1	Existence et unicité de la solution du problème de contrôle	99
4.2.2	Existence et caractérisation du problème de contrôle optimal	100
4.3	Résultats numériques	105
4.3.1	Scénario 1 : population éparpillée avec une culture à faible risque	107
4.3.2	Scénario 2 : population dense avec une culture à faible risque	109

Introduction

La modélisation des systèmes à compartiments revêt une importance cruciale dans de nombreux domaines, offrant une compréhension approfondie des phénomènes complexes et ouvrant la voie à des applications variées. Que ce soit en biologie, en physique, en écologie, en sciences sociales ou en ingénierie, ces modèles jouent un rôle essentiel dans l'analyse et la prédiction des comportements de divers systèmes. Ils permettent de représenter des interactions entre les différentes entités ou régions constituant un système, en utilisant des équations différentielles, qu'elles soient ordinaires, partielles, à retard ou stochastiques.

Cette thèse vise à développer et à étudier des modèles de systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) à compartiments, en mettant l'accent sur les systèmes de réaction-diffusion. Ces modèles sont des approches qui permettent de représenter des phénomènes complexes en utilisant un réseau interconnecté de nœuds. Chaque nœud représente une entité physique ou une région de l'espace et les interactions entre les nœuds/régions sont régies par des équations qui peuvent être linéaires ou non (on parlera alors dans ce contexte de réseaux d'EDP).

Dans un modèle réseaux d'EDP, les équations aux dérivées partielles sont définies sur chaque nœud/région, décrivant le comportement local de ce nœud/région spécifique. Les conditions aux limites sont spécifiées aux interfaces entre les nœuds voisins, permettant ainsi aux informations de se propager et d'interagir entre les différents nœuds du réseau. Cette approche réseau permet de prendre en compte les interactions spatiales et temporelles non triviales présentes dans les systèmes complexes. Les modèles réseaux d'EDP peuvent conduire à l'étude des propriétés émergentes du système dans son ensemble en examinant comment les interactions locales entre les nœuds influencent le comportement global du système.

Dans le contexte de la dynamique des populations, ces réseaux permettent de modéliser la croissance et la migration des populations d'une région à une autre en utilisant des équations couplées entre les nœuds/régions. De même, en épidémiologie, ces modèles permettent de simuler la propagation d'une maladie à travers un réseau en tenant compte des contacts sociaux et des déplacements des individus entre les nœuds/régions.

Les systèmes couplant des systèmes de réaction-diffusion jouent un rôle crucial en épidémiologie pour modéliser la propagation des maladies et des pandémies. Ces modèles prennent en compte les interactions spatiales, les mouvements de population et les facteurs environnementaux, offrant une représentation réaliste des processus impliqués dans la diffusion des agents pathogènes. Ils permettent de simuler différentes échelles spatiales, locales ou globales, pour évaluer, entre autres, les scénarios de propagation des maladies. Cependant, l'écriture de ces modèles conduit à relever

des défis, défis liés à l'écriture mathématique des termes de couplage et à la vérification du principe de conservation des flux migratoires entre les nœuds/régions. Malgré ces défis, les modèles de couplage d'équations de réaction-diffusion restent des outils précieux pour évaluer les risques, concevoir des stratégies de contrôle efficaces et prendre des décisions éclairées en matière de santé publique dans le contexte des pandémies à l'échelle locale/mondiale. Ainsi, les modèles réseaux offrent une approche puissante pour l'étude des systèmes et des réseaux complexes et analyse des phénomènes émergents, ils apportent des informations précieuses pour comprendre la dynamique de la problématique étudiée.

Dans cette thèse, nous proposons une méthode novatrice de couplage d'équations de réaction-diffusion pour résoudre les problèmes de modélisation (écriture des termes de couplage, vérification du principe de conservation des flux, etc). Il s'agit d'améliorer la représentation des phénomènes épidémiologiques en intégrant de manière rigoureuse les interactions spatiales et les flux migratoires.

Notre approche consiste à prendre en compte les déplacements entre les différents nœuds/régions du réseau en tenant compte de la possibilité de migrer d'une région à une autre, ce qui joue un rôle essentiel dans la diffusion des maladies et la propagation des infections. Cela nous permet de capturer les processus fondamentaux impliqués dans la propagation des maladies et de les relier aux interactions spatiales entre les différentes régions, aidant ainsi à la prise de décision en jouant sur la topologie du réseau (connectivité entre les nœuds, par exemple, en supprimant certains liens).

La première loi de Fick, connue sous le nom de loi de diffusion de Fick, décrit le phénomène de diffusion des particules dans un milieu. Elle établit une relation entre le flux de particules et le gradient de concentration, indiquant la direction et la vitesse de diffusion. Elle s'exprime comme suit :

$$J = -D\nabla C$$

où : J représente le flux de particules, c'est-à-dire la quantité de particules qui traversent une unité de surface par unité de temps, D le coefficient de diffusion, qui caractérise la capacité du milieu à permettre la diffusion, ∇C le gradient de concentration, qui mesure la variation de la concentration de particules dans l'espace.

Cette équation indique que le flux de particules est proportionnel au gradient de concentration et il s'écoule du milieu de haute concentration vers le milieu de faible concentration. Le coefficient de diffusion D détermine la vitesse de diffusion, plus il est élevé, plus la diffusion est rapide.

La loi de Fick peut être utilisée pour modéliser la dispersion et la migration des individus au sein d'une population dans une région. En dynamique de population, nous pouvons considérer la densité de population P comme une variable qui varie dans l'espace et dans le temps. La loi de Fick peut alors être appliquée pour représenter la dispersion des individus dans l'espace en fonction du gradient de densité. Mathématiquement, nous pouvons écrire l'équation de diffusion de Fick pour la dynamique de population comme suit :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D\Delta P$$

où $\frac{\partial P}{\partial t}$ modélise le taux de variation de la densité de population dans le temps, D le coefficient de diffusion qui contrôle la vitesse de dispersion et Δ est l'opérateur laplacien qui mesure la variation spatiale de la densité. Cette équation de diffusion de Fick permet donc de modéliser la

façon dont la densité de population se propage et se répartit dans l'espace au fil du temps. Les individus ont tendance à se déplacer des zones de la région de haute densité vers les zones de la région de faible densité, ce qui conduit à des mouvements migratoires au sein de la population.

L'équation de réaction représente les interactions, dans le temps, entre les individus de la population, incluant des phénomènes tels que la naissance, la mort, la migration, etc. L'équation de réaction générale peut être exprimée comme suit :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = R(P)$$

Où, P représente la concentration d'individus, t le temps et $R(P)$ une fonction qui modélise le comportement temporel (naissance, mort) de la population P .

En combinant l'équation de diffusion de Fick et l'équation de réaction, nous obtenons un système spatio-temporel :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D\Delta P + R(P)$$

Le couplage d'équations aux dérivées partielles consiste à combiner plusieurs équations aux dérivées partielles dans un système cohérent afin de représenter un phénomène complexe impliquant plusieurs variables interdépendantes. On peut distinguer deux types de couplages : local et non local.

- **Un couplage local** : dans notre contexte, il consiste à combiner les équations différentielles de plusieurs variables évoluant dans un **même domaine**. Par exemple, pour modéliser la transmission d'une maladie dans une population composée de susceptibles (S) et d'infectés (I), il est courant d'utiliser le système de réaction-diffusion suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = D\Delta S + f(S, I), \\ \frac{\partial I}{\partial t} = D\Delta I + g(S, I), \end{cases} \quad (1)$$

où S représente la densité de la population saine et I la densité de la population infectée. Les fonctions f et g modélisent respectivement l'évolution des susceptibles et des infectés en l'absence de rencontre entre les deux populations, ainsi que le couplage entre les populations saines et infectées. Ce type de couplage a donné lieu à des modèles à compartiments tels que ceux de Lotka-Volterra, de Holling et bien d'autres, où plusieurs entités interagissent dans un même milieu.

- **Couplage non local** : Il s'agit d'une situation dans laquelle plusieurs régions supposées disjointes (par exemple, des villes, des villages, des communes, etc. d'un même pays) sont connectées (par des voies routières ou autres), et où l'on souhaite étudier la propagation d'une épidémie. Cette situation est souvent modélisée par un **réseau** de systèmes de réaction-diffusion du type (1). On parle alors de réseau complexe ou de système complexe d'équations. Les termes de couplage représentent les flux migratoires et les interactions entre les différentes régions. Ainsi, on obtient un modèle complet pour la dynamique épidémiologique globale sur l'ensemble du réseau :

$$\begin{cases} \frac{\partial S_j}{\partial t} = D\Delta S_j + f_j(S_j, I_j) + C_j^S(S, I, t, x), & t \geq 0, x \in \Omega_j, \\ \frac{\partial I_j}{\partial t} = D\Delta I_j + g_j(S_j, I_j) + C_j^I(S, I, t, x), & t \geq 0, x \in \Omega_j, \\ j \in \{1, \dots, N\} \quad \text{où } N \text{ est le nombre de régions du réseau.} \end{cases} \quad (2)$$

Ici, $S = (S_j)_{1 \leq j \leq N}$ et $I = (I_j)_{1 \leq j \leq N}$, et les fonctions $C_j^S(S, I, t, x)$ modélisent le couplage entre les régions, en prenant en compte les flux des individus susceptibles partant de la position x de la région Ω_j à l'instant t , ainsi que les flux des individus susceptibles provenant d'autres régions du réseau et arrivant en x_j dans Ω_j à l'instant t . Les fonctions $C_j^I(S, I, t, x_j)$ jouent un rôle similaire pour les infectés. Comme le système (2) est un modèle de réseau, il doit satisfaire le principe de conservation des flux, c'est-à-dire :

$$\forall t \geq 0, \quad \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_j} (C_j^S(S, I, t, x) + C_j^I(S, I, t, x)) dx = 0. \quad (3)$$

Ainsi, coupler des EDP de manière non locale revient à donner une expression explicite et cohérente des termes $C_j^S(S, I, t, x)$ et $C_j^I(S, I, t, x)$, tout en s'assurant qu'ils satisfont la condition (3).

Le couplage non local d'EDP est un domaine en plein essor. Plusieurs articles traitent de cette thématique et mettent en évidence son importance ainsi que ses nombreux domaines d'application (voir [2-4, 7, 15, 16, 35]). Cependant, de nombreuses questions restent encore ouvertes concernant le couplage des EDP. Par exemple, on se demande quel comportement peut-on attendre d'un réseau composé de systèmes similaires lorsque les domaines Ω_j sont disjoints (voir [6]). De plus, comment peut-on mieux intégrer les variables d'espace dans la modélisation des couplages ?

Cette thèse est structurée en quatre chapitres. Le chapitre 1 apporte des rappels mathématiques utiles pour la suite de la thèse.

Le chapitre 2 étudie les modèles EDP de type réaction-diffusion à compartiments avec des coefficients de diffusion non locaux. On présente la forme générale de ces systèmes, puis on s'intéresse aux questions d'existence locale et globale des solutions, à leur positivité et à leur régularité. On conclut ce chapitre avec des simulations numériques sur un exemple (système Panique, Contrôle et Réflexe).

Le chapitre 3 est consacré aux réseaux complexes d'équations de réaction-diffusion. Après avoir construit un modèle réseau complexe avec N nœuds, chaque nœud contenant un modèle à compartiments avec m compartiments, nous établissons quelques résultats mathématiques sur ce réseau complexe. Ensuite, nous appliquons ces résultats au cas $N = 2$ en couplant deux modèles *SIS*. Nous examinons les questions d'existence locale et globale des solutions, de positivité et de bornage. Nous proposons également quelques simulations numériques pour un réseau de trois nœuds.

Le chapitre 4 utilise les techniques de modélisation mathématique en épidémiologie et de modèles à compartiments, adaptées à l'analyse des comportements humains en situation de catastrophe. Dans ce cas, l'épidémie est représentée par la panique générée par le mouvement de foule. Nous nous intéressons en particulier au contrôle optimal de ce type de modèle, appelé APC (alerte, panique, contrôle), dans le cas des équations différentielles ordinaires (EDO).

Chaque chapitre propose une analyse et des simulations numériques pour étayer les arguments présentés. L'objectif global est d'améliorer les outils en épidémiologie, de mieux comprendre les mécanismes sous-jacents et de fournir des outils d'aide à la décision.

Chapitre 1

Rappels

1.1 Intégration et Espaces de Sobolev à Valeurs Vectorielles.

1.1.1 Intégration à valeurs vectorielles

En prérequis, je suppose que le lecteur est familiarisé avec la théorie de l'intégrale de Lebesgue pour les fonctions réelles. Ce paragraphe introduit les notions essentielles de l'intégration et des espaces de Sobolev vectoriels. Nous considérons un espace mesuré (X, \mathcal{A}, μ) et un espace de Banach E (sur \mathbb{R}) dont la norme est notée $\|\cdot\|$. Pour une étude approfondie de ces concepts, voir [22].

Définition 1.1.1. Une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ entre deux espaces mesurables est dite mesurable si, pour tout $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Proposition 1.1.2. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables sur l'espace mesuré (X, \mathcal{A}) , à valeurs dans un espace métrique (Y, d) , muni de la distance d . Si $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers f , alors f est mesurable.

Notons $\mathbf{1}_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ la fonction caractéristique d'un ensemble $A \subset X$, c'est-à-dire $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbf{1}_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

Définition 1.1.3. Une fonction simple est une fonction qui prend un nombre fini de valeurs et qui s'annule en dehors d'un ensemble de mesure fini. En d'autres termes, elle est mesurable et peut être écrite comme une combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques. L'ensemble des fonctions simples définies sur l'espace mesuré (X, \mathcal{A}) à valeurs dans un espace de Banach E est noté $S(X; E)$.

Une fonction simple $s \in S(X; E)$ admet donc une unique écriture appelée forme normale donnée par :

$$s = \sum_{i=0}^n a_i \mathbf{1}_{A_i},$$

avec (A_0, \dots, A_n) une partition mesurable de X et (a_1, \dots, a_n) de mesures finies, ($A_0 = s^{-1}(\{0\})$), (a_1, \dots, a_n) sont les valeurs distinctes non nulles en nombre fini et $a_0 = 0$.

Définition 1.1.4. Une fonction $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow E$ est dite μ -mesurable s'il existe une suite $(s_n)_{n \geq 1}$ de fonctions simples de X à valeurs dans E qui converge μ -presque partout vers f .

Théorème 1.1.5. Si $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions μ -mesurables de X à valeurs dans E qui converge μ -presque partout vers f , alors f est μ -mesurable.

1.2 Définition de l'intégrale

Si $s = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$ est une fonction simple, écrite de telle sorte que $(A_i)_{i=1, \dots, n}$ forme une partition de X (avec, éventuellement, certains ensembles vides pour cette partition), on définit son intégrale (un élément de E) par :

$$\int_X s d\mu = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) a_i.$$

Définition 1.2.1. Une fonction $f : X \rightarrow E$ est dite intégrable s'il existe une suite $(s_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{S}(X; E)$ telle que :

$$s_n \xrightarrow{\mu\text{-p.p.}} f$$

et

$$\int_X \|s_n - f\| d\mu \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \longrightarrow +\infty.$$

On note $\mathcal{L}^1(X; E)$ l'ensemble des fonctions $X \rightarrow E$ intégrables. On peut remarquer que $\mathcal{L}^1(X; E)$ est un espace vectoriel de fonctions μ -mesurables. Lorsqu'une suite de fonctions simples $(s_n)_{n \geq 1}$ vérifie les hypothèses de cette définition, on dira qu'elle est approximante pour f .

Proposition 1.2.2. (Critère d'intégrabilité)

$f : X \longrightarrow E$ est intégrable si et seulement si f est μ -mesurable et

$$\int_X \|f\| d\mu < +\infty.$$

Définition 1.2.3. Si $f \in \mathcal{L}^1(X; E)$, alors l'intégrale de f est donnée par :

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n d\mu,$$

où $(s_n)_{n \geq 1}$ est une suite approximante pour f .

Proposition 1.2.4. Soient E et F des espaces de Banach et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue. Si $f \in \mathcal{L}^1(X; E)$, alors $T(f) \in \mathcal{L}^1(X; F)$ et on a :

$$\int_X T(f) d\mu = T \left(\int_X f d\mu \right).$$

1.3 Les Espaces $L^p(X; E)$

1.3.1 Définition et Propriétés

Définition 1.3.1. Soit $1 \leq p < +\infty$, on définit :

$$L^p(X; E) = \left\{ f : X \longrightarrow E, \mu\text{-mesurable, telle que } \int_X \|f\|^p < +\infty \right\} / \text{pp, que l'on munit de la norme}$$

$$\|f\|_{L^p(X; E)} = \left(\int_X \|f\|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

On définit $L^\infty(X; E)$ par :

$\{f : X \rightarrow E, \mu - \text{mesurable, telle qu'il existe } C > 0, \|f(x)\| \leq C \text{ pour } \mu - \text{presque tout } x\} / \text{pp,}$
que l'on munit de la norme

$$\|f\|_{L^\infty(X; E)} = \inf \{C > 0 / \|f(x)\| \mu - \text{presque tout } x\}.$$

Remarque 1.3.2. Il est évident que ces ensembles sont des espaces vectoriels et que les normes définies sont effectivement des normes. Cela peut être démontré facilement en remarquant que, pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, la norme $\|f\|_{L^p(X; E)}$ est équivalente à $\| \|f\| \|_{L^p(X; \mathbb{R}^+)}$, en utilisant les connaissances préalables sur l'intégrale à valeurs réelles, voir [22].

1. Si l'espace E n'est pas spécifié, cela signifie que l'on utilise l'espace \mathbb{R} , ainsi $L^p(X)$ est égal à $L^p(X; \mathbb{R})$.
2. Si E s'injecte continuellement dans F , $L^p(X; E)$ s'injecte continuellement dans $L^p(X; F)$.
3. Soit $1 \leq p < q \leq +\infty$, si $r \in [p, q]$, alors $L^p(X; E) \cap L^q(X; E) \subseteq L^r(X; E)$; si X est de mesure finie, on a $L^q(X; E) \hookrightarrow L^p(X; E)$.
4. Si T est une application linéaire continue qui envoie les éléments de E dans F , alors elle induit naturellement une application linéaire continue, également notée T , qui envoie les éléments de l'espace des fonctions $L^p(X; E)$ dans ceux de l'espace $L^p(X; F)$.
5. Si $B : E \times F \rightarrow G$ est bilinéaire continue et pour $p, q, r \in [1, +\infty]$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, alors B induit une application bilinéaire continue $\tilde{B} : L^p(X; E) \times L^q(X; F) \rightarrow L^r(X; G)$ donnée par $\tilde{B}(f, g)(x) = B(f(x), g(x))$ pour tout $x \in X$.

Théorème 1.3.3. Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, $L^p(X; E)$ est un espace de Banach.

Proposition 1.3.4. Soit $1 \leq p < +\infty$, alors $S(X; E)$ est dense dans $L^p(X; E)$.

Définition 1.3.5. Soit $1 \leq p < +\infty$. On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ de $L^p(X; E)$ est p -équi-intégrable si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

1. $\forall \varepsilon > 0$, il existe $K \subset X$ de mesure finie tel que $\forall n \geq 1$, on a :

$$\int_{X \setminus K} \|f_n\|^p d\mu < \varepsilon,$$

2. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que, $\forall n \geq 1, \forall A \subset X$ tel que $\mu(A) < \delta$, on a

$$\int_A \|f_n\|^p d\mu < \varepsilon.$$

Toute fonction de l'espace $L^p(X; E)$ vérifie ces deux propriétés.

Théorème 1.3.6. (Vitali)

Soit $1 \leq p < +\infty$. Si $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite de $L^p(X; E)$ qui converge μ -presque partout vers une fonction f , alors

$$f_n \rightarrow f \text{ dans } L^p(X; E) \iff (f_n)_{n \geq 1} \text{ est } p\text{-équi-intégrable.}$$

1.3.2 Dual Topologique de $L^p(X; E)$

On considère (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré σ -fini. Pour tout $p \in]1, +\infty[$, on note p' l'exposant conjugué de p . Le dual topologique d'un espace de Banach E est représenté par E' . Si $\|\cdot\|_E$ désigne la norme de E , nous notons $\|\cdot\|_{E'}$ la norme duale sur E' .

Si $E = \mathbb{R}$, on peut identifier le dual de $L^p(X)$ avec $L^{p'}(X)$; plus précisément, l'application T définie par,

$$T : L^{p'}(X) \longrightarrow L^p(X)'$$

$$g \longmapsto T_g, \quad \text{avec} \quad T_g(f) = \int_X g(x)f(x)d\mu(x),$$

est un isomorphisme isométrique.

Dans le cas général, on a le résultat suivant dans $L^p(X; E)$.

Théorème 1.3.7. *Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré σ -fini, $1 \leq p < +\infty$ et E un espace de Banach dont le dual E' est séparable, alors l'application,*

$$T : L^{p'}(X; E') \longrightarrow L^p(X; E)'$$

$$g \longmapsto T_g, \quad \text{avec} \quad T_g(f) = \int_X \langle g(x), f(x) \rangle_{E, E'} d\mu(x),$$

est un isomorphisme isométrique. T est une application linéaire, continue de norme inférieure ou égale à 1 et on a :

$$\|T\|_{(L^p(X; E))'} \leq \|g\|_{L^{p'}(X; E')}.$$

Remarque 1.3.8. Pour $f \in L^p(X; E)$ et $g \in L^{p'}(X; E')$, pour tout $x \in X$ le produit de dualité $\langle g(x), f(x) \rangle_{E, E'}$ remplace le produit $g(x)f(x)$ dans \mathbb{R} .

Cas où E est un espace L^p

Dans les paragraphes suivants, U représente un ouvert dans l'espace \mathbb{R}^s , tandis que Ω désigne un ouvert dans l'espace \mathbb{R}^N . La mesure de Lebesgue en dimension d est notée λ_d .

Proposition 1.3.9. *Soit $1 \leq p \leq +\infty$ et $1 \leq q < +\infty$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $f \in L^p(U; L^q(\Omega))$.
2. $f : U \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable et vérifiant

$$\int_U \left(\int_\Omega |f(x, y)|^q d\lambda_N(y) \right)^{p/q} d\lambda_s(x) < +\infty, \quad (\text{si } p < +\infty),$$

ou bien

$$\exists M \geq 0 \quad \text{tel que} \quad \int_\Omega |f(x, y)|^q d\lambda_N(y) \leq M \quad \text{pour } \lambda_s\text{-presque tout } x \in U \quad (\text{si } p = +\infty).$$

Cas où E est un espace de Sobolev

Un autre cas intéressant est celui où E est un espace de Sobolev.

Proposition 1.3.10. *Soit $1 \leq p < +\infty$ et $1 \leq q < +\infty$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $f \in L^p(U; W^{1,q}(\Omega))$.
2. $f \in L^{loc}(U \times \Omega)$ et vérifie

$$\int_U \left(\int_{\Omega} |f|^q d\lambda_N \right)^{p/q} d\lambda_s < +\infty$$

et vérifie pour $i = 1, \dots, N$, $D_{y_i} f \in L^{loc}(U \times \Omega)$ et vérifie

$$\int_U \left(\int_{\Omega} |D_{y_i} f|^q d\lambda_N \right)^{p/q} d\lambda_s < +\infty.$$

Dans ce cas, on a, pour λ_s -presque tout $x \in U$, $D_i f(x, \cdot) = D_{y_i} f(x, \cdot)$ λ_N -presque partout sur Ω .

1.4 Espaces de Sobolev à Valeurs Vectorielles

Dans tout ce qui suit, E, F, G , etc., sont des espaces de Banach. On note leur norme respective par $\|\cdot\|_E, \|\cdot\|_F, \|\cdot\|_G$, etc.

Définition 1.4.1. Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $p \in [1, +\infty]$. On définit l'espace

$$W^{1,p}(I; E) = \{u \in L^p(I; E) \mid u' \in L^p(I; E)\},$$

que l'on munit de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(I; E)} = \|u\|_{L^p(I; E)} + \|u'\|_{L^p(I; E)}.$$

Proposition 1.4.2. *Si E est séparable et $p < +\infty$, alors $W^{1,p}(I; E)$ est séparable.*

Théorème 1.4.3. *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $W^{1,p}(I; E)$ est un espace de Banach.*

Proposition 1.4.4. *Si $1 < p < +\infty$ et E est séparable réflexif, alors $W^{1,p}(I; E)$ est réflexif.*

1.4.1 Injection continue

On note $C_b^0(I; E)$ l'espace des applications continues bornées $I \rightarrow E$. C'est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme

$$\|u\|_{C_b^0(I; E)} = \sup_{t \in I} \|u(t)\|_E.$$

On note $C^{0,0}(I; E)$ le sous-espace (fermé) de $C_b^0(I; E)$ formé des applications uniformément continues et bornées sur I . Le théorème de prolongement des applications uniformément continues nous dit que toute application de $C^{0,0}(I; E)$ se prolonge de manière unique en une application uniformément continue sur I , on peut donc considérer toute application de $C^{0,0}(I; E)$ comme une application continue $I \rightarrow E$.

Enfin, lorsque $\alpha \in]0, 1]$, on définit l'espace des fonctions Höldériennes d'exposant α par

$$C^{0,\alpha}(I; E) = \{u \in C_b^0(I; E) \mid \exists C > 0 \text{ tel que } \forall (t, t') \in I^2, \|u(t) - u(t')\|_E \leq C|t - t'|^\alpha\},$$

que l'on munit de la norme

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(I;E)} = \|u\|_{C_b^0(I;E)} + \sup_{(t,t') \in I^2, t \neq t'} \|u(t) - u(t')\|_E.$$

C'est un espace de Banach et toutes les fonctions de $C_0^\alpha(I; E)$ sont uniformément continues sur I ; on peut donc voir toute fonction Höldérienne comme une fonction continue $\bar{I} \rightarrow E$.

Lemme 1.4.5. *Si $u \in W^{1,p}(I; E)$, alors u est continue sur I et on a, pour tout $(t_0, t) \in I^2$,*

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t u'(s) ds.$$

Théorème 1.4.6. *Pour chaque valeur de p dans l'intervalle $[1, +\infty]$, l'espace $W^{1,p}(I; E)$ s'injecte de manière continue dans l'espace $C^{0,1-1/p}(I; E)$.*

1.4.2 Caractérisation de l'espace $W^{1,p}(0, T; L^q(\Omega))$

Proposition 1.4.7. *Soit $T > 0$ et Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . Soit $(p, q) \in [1, +\infty[$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes : i) $u \in W^{1,p}(0, T; L^q(\Omega))$, ii) $u \in L_{loc}^1((0, T) \times \Omega)$ et vérifie*

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} |u(t, x)|^q dx \right)^{\frac{p}{q}} dt < +\infty,$$

et $\partial_t u \in L_{loc}^1((0, T) \times \Omega)$ vérifie

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} |\partial_t u(t, x)|^q dx \right)^{\frac{p}{q}} dt < +\infty.$$

Dans ce cas, on a, pour presque tout $t \in]0, T[$, $u'(t)(\cdot) = \partial_t u(t, \cdot)$ presque partout sur Ω .

Chapitre 2

Systèmes de réaction-diffusion non locale à compartiments

2.1 Introduction

Les modèles à compartiments jouent un rôle essentiel dans l'analyse de phénomènes en épidémiologie et en dynamique de population. En épidémiologie, ces modèles permettent de simuler la propagation d'une maladie dans un espace donné et d'étudier son évolution dans le temps. Par exemple, on peut utiliser une équation de réaction-diffusion à compartiments pour modéliser la propagation d'une maladie infectieuse dans une population, en tenant compte de facteurs tels que la transmission de la maladie, les taux de guérison et de décès, ainsi que les comportements individuels influençant la diffusion de la maladie.

Dans le domaine de la dynamique de population, les modèles à compartiments permettent d'étudier la croissance et l'interaction des différentes classes de population. Par exemple, on peut utiliser ces modèles pour étudier l'évolution des populations animales, en prenant en compte des compartiments tels que les individus jeunes, les adultes, les prédateurs et les proies. Ces modèles permettent de comprendre comment les changements dans les taux de naissance, de mortalité et de migration peuvent affecter la dynamique de la population et l'équilibre des écosystèmes.

En ce qui concerne l'épidémiologie, les modèles à compartiments peuvent être utilisés pour étudier diverses maladies infectieuses et évaluer le risque d'épidémie. Par exemple, le modèle SIR (Susceptible-Infecté-guéri) est largement utilisé pour modéliser la propagation de maladies telles que la grippe, le VIH et la COVID-19. Ce modèle divise la population en compartiments de personnes susceptibles d'être infectées, de personnes infectées et de personnes guéries ou immunisées. En utilisant des équations de réaction-diffusion à compartiments, on peut estimer la propagation de la maladie, sa durée et son pic d'activité, ce qui est crucial pour mettre en place des mesures de prévention et de contrôle appropriés.

Outre ces domaines d'application spécifiques, les modèles à compartiments ont une grande variété d'applications dans d'autres domaines tels que l'ingénierie, l'économie et les sciences sociales. On peut les utiliser en effet, pour étudier la diffusion d'innovations technologiques dans une population, la propagation d'opinions, de comportements sociaux ou encore la gestion des ressources naturelles.

Ainsi, la modélisation mathématique des systèmes à compartiments offre un cadre adéquat

pour comprendre et prédire la dynamique des populations, que ce soit dans le contexte de l'épidémiologie ou de la dynamique de population. Ces modèles permettent d'analyser les interactions complexes entre les différents compartiments d'une population, fournissent des outils essentiels pour la planification de mesures de contrôle, l'évaluation des politiques publiques et la prise de décisions éclairées dans un large éventail de domaines.

Un **compartiment** est un réservoir conceptuel dont le contenu (matière, énergie, monnaie, population ...) est quantifiable. De plus, on utilise la représentation symbolique indiquée à la FIGURE 2.1 où F_{in} et F_{out} indiquent respectivement les flux d'entrées et de sorties du compartiment exprimés en quantité de contenu par unité de temps. Ces flux sont toujours positifs par convention.

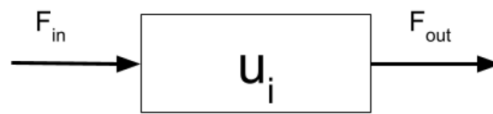


FIGURE 2.1 – Représentation symbolique d'un compartiment, où u_i désigne la quantité contenue dans le compartiment, F_{in} le flux d'entrée et F_{out} le flux de sortie.

Un système à compartiments est constitué par un réseau de compartiments interconnectés et numérotés de 1 à n . Il est généralement représenté par un graphe orienté dont les nœuds correspondent aux compartiments et les arcs aux flux. On a les exemples des modèles suivants très utilisés en épidémiologie.

1. **Modèle SIR** : Dans ce modèle, on considère qu'une maladie se propage au sein d'une population de N individus. La première étape consiste à identifier les différentes étapes de la maladie et de diviser la population en fonction du nombre d'étapes identifiées. Dans le cas du modèle **SIR**, on a trois états possibles pour un individu : sain (**S**), infecté (**I**) et guéri (**R**). Ainsi 3 états ont été identifiés, la population va être divisée en trois compartiments. Le compartiment d'individus sain sera noté (**S**), celui des individus infectés (**I**) et les guéris (**R**). Si l'on note β le taux d'infection pour passer de (**S**) à (**I**) et γ le taux de guérison permettant de passer de (**I**) à (**R**), alors le graphe représentant le système **SIR** est le suivant :

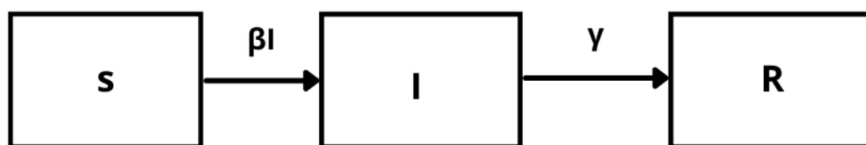


FIGURE 2.2 – Diagramme de transition du système SIR.

2. **Modèle SEIR** : C'est un modèle dans lequel la population est divisée en 4 compartiments, le compartiment des individus sains (**S**), celui des individus exposés à la maladie (**E**), celui

des individus infectés (**I**) et celui des individus guéris (**R**). Si l'on note β le taux d'infection permettant de passer de (**S**) à (**E**), σ le taux d'incubation permettant de passer de (**E**) à (**I**) et γ le taux de guérison pour passer de (**I**) à (**R**), alors le graphe représentant le système (**SEIR**) est le suivant :

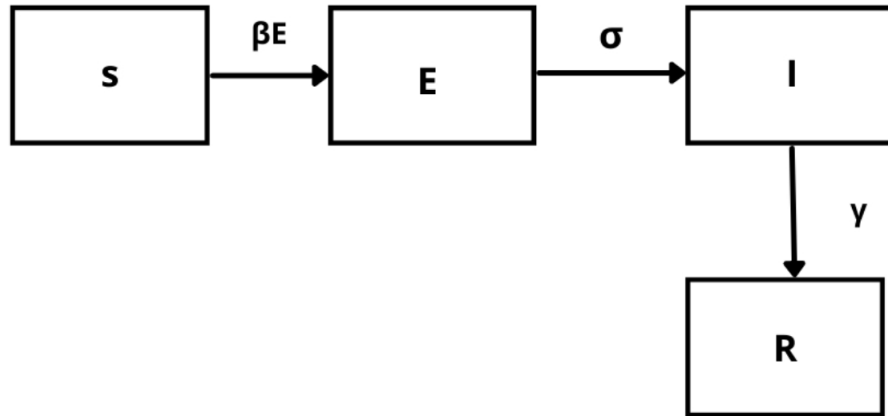


FIGURE 2.3 – Diagramme de transition du système SEIR.

Le travail que nous proposons dans ce chapitre porte sur l'analyse du modèle général d'un système à compartiments dont l'équation est donnée par l'équation suivante (voir [9, 28]) :

$$\frac{du_i}{dt} = f_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_{ij}(t, u)u_j - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_{ji}(t, u)u_i - \theta_i(t, u)u_i \quad i \in \{1 \dots n, \}, \quad n \geq 2. \quad (2.1)$$

L'équation (2.1), modélise la i -ième équation d'évolution d'un système à n compartiments où :

- u_i désigne la quantité contenue dans le compartiment d'indice i . Cette quantité est toujours positive. Par abus de langage, on dit que u_i désigne le niveau du compartiment i . On note $u = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$.

- f_{ji} désigne le flux circulant du compartiment i vers le compartiment j . Cette fonction dépend du temps et de la quantité de "matière" contenue dans le système. Elle est considérée positive par convention

$$f_{ij} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

- f_i désigne le flux circulant du compartiment i vers l'extérieur. C'est une fonction qui dépend du temps et de la quantité de "matière" contenus dans le système. Elle est considérée positive par convention

$$f_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

- f_{i0} désigne le flux circulant de l'extérieur du réseau vers le compartiment i . Il est soit constant, soit fonction du temps (voir [28]). Il est considéré positif par convention

$$f_{i0} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+.$$

Les équations des modèles **SIR** et **SEIR** présentés dans les FIGURE 2.2 et 2.3 peuvent s'écrire sous la forme (2.1). En effet, on a :

1. **SIR**

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} &= -\beta SI, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma R, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma R. \end{cases}$$

2. **SEIR**

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} &= -\beta SE, \\ \frac{dE}{dt} &= \beta SE - \sigma I, \\ \frac{dI}{dt} &= \sigma I - \gamma R, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma R. \end{cases}$$

Dans ce chapitre nous étudions des modèles à compartiments tenant compte d'une diffusion spatiale non locale suivant :

$$\partial_t u_i - \operatorname{div}(D_i \nabla u_i) = f_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_{ij}(t, u) u_j - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_{ji}(t, u) u_i - \theta_i(t, u) u_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (2.2)$$

où D_i dépend de la quantité u_i dans le domaine Ω . On passe du modèle (2.1) au modèle (2.2) en utilisant la loi de Fick voir [38, 49]. Nous allons dans la suite considérer le cas où (2.2) décrit l'évolution dans l'espace de plusieurs populations en interaction. C'est par exemple le cas du modèle de compétition du type Lotka-Volterra [49] ou encore les modèles SIR et SEIR [49, 54]. Ainsi, les différents u_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ représenteront les densités de population.

Suivant le type de modèles (homogène ou inhomogène) que l'on considère, D_i peut être constant (voir [7, 14, 38, 49]), fonction de la variable d'espace (voir [10, 38, 41, 49]) et/ou de la quantité u_i (voir [20, 40]). C'est précisément ce dernier cas (diffusion non locale) qui va nous intéresser dans la suite. Ce choix d'un coefficient de diffusion dépendant de la densité est motivé par de nombreux comportements complexes. On peut citer quelques exemples.

Premièrement, cela peut refléter des processus de diffusion influencés par des interactions sociales ou comportementales au sein de la population étudiée. Par exemple, dans le cadre de la diffusion d'opinions, celle-ci peut être plus rapide entre individus ayant des valeurs similaires, tandis qu'elle peut être plus lente entre individus aux opinions divergentes. En modélisant le coefficient de diffusion comme dépendant de la densité des individus avec des opinions similaires, on peut modéliser des réalités cognitives.

Deuxièmement, elle peut également prendre en compte des phénomènes d'apprentissage ou d'adaptation au sein de la population. Par exemple, dans le cas de la diffusion de connaissances

ou de comportements, la diffusion peut être plus rapide lorsque la densité des individus adoptant cette connaissance ou ce comportement est faible, car les interactions entre ces individus sont plus fréquentes. En modélisant le coefficient de diffusion en fonction de la densité des individus adoptant la quantité étudiée, on peut représenter ces mécanismes d'apprentissage et d'adaptation.

De plus, la dépendance du coefficient de diffusion à la densité peut également prendre en compte des phénomènes de saturation ou de congestion. Par exemple, dans le cas de la diffusion d'une ressource limitée, une densité élevée d'individus utilisant cette ressource peut entraîner une diminution de la vitesse de diffusion, car les interactions et les compétitions entre individus deviennent plus intenses. En introduisant une dépendance du coefficient de diffusion par rapport à la densité des utilisateurs de la ressource, on peut modéliser ces effets de saturation ou de congestion.

Commençant par nous intéresser à une forme particulière du coefficient de diffusion noté D_i . Comme nous l'avons mentionné précédemment, l'équation (2.2) modélise l'évolution dans l'espace de plusieurs populations en interaction (voir [14, 34]). Dans de tels modèles, la diffusion des individus dépend généralement de plusieurs paramètres, tels que l'espace disponible dans le domaine, la présence d'obstacles, et la densité d'individus environnante.

L'idée est de prendre en compte l'influence des événements et des informations reçues par les individus au cours du temps sur leur comportement. Prenons l'exemple du système Panique-Contrôle-Réflexe (PCR), présenté par G. Cantin dans [14]. Ce système est un modèle comportemental pour l'étude de la panique chez des individus confrontés à une situation de catastrophe. En étudiant ce modèle, nous pouvons observer que la diffusion des différentes populations peut varier en fonction de la nature de la catastrophe et de son évolution au fil du temps, notamment en réponse à des modifications du domaine ou des dynamiques des populations environnantes.

Un autre exemple est le modèle mathématique présenté par B. Nicolas dans [8], qui décrit l'évolution de l'épidémie de COVID-19 en France. Bien que ce modèle puisse être considéré comme une équation différentielle ordinaire (EDO), l'intégration de la dimension spatiale dans ce modèle pose un défi intéressant. En particulier, il serait intéressant de prendre en compte les mesures imposées par le gouvernement français à différentes périodes de modélisation de l'épidémie, telles que la règle du « 1 h dans un rayon de 1 km » ou le confinement. Ces mesures pourraient nous aider à comprendre l'évolution de l'épidémie en fonction de la diffusion des populations.

Ainsi, pour modéliser de manière plus réaliste les systèmes de diffusion décrivant l'évolution dans l'espace de plusieurs populations en interaction, il est pertinent d'intégrer des aspects cognitifs au modèle. De manière précise, cela peut être réalisé en faisant dépendre par exemples les coefficients de diffusion D_i de différents paramètres, comme la densité "partielle" de population. un bel exemple est celui où D_i dépendant $\int_{\Omega'} u_i(t, x) dx$ avec $\Omega' \subset \Omega$.

En résumé, en considérant une forme spécifique du coefficient de diffusion D_i qui intègre des aspects cognitifs, nous enrichissons les modèles de diffusion pour mieux décrire l'évolution dans l'espace de plusieurs populations en interaction.

Cette approche permet de prendre en compte les influences des événements, des informations et des comportements cognitifs sur la diffusion des individus. Conduisant ainsi à une modélisation plus réaliste et précise des systèmes complexes. Nous pouvons par exemple choisir le coefficient de diffusion D_i de la manière suivante :

$$D_i = a \left(\int_{B(x, r_i) \cap \Omega} u_i(t, y) dy \right), \quad (2.3)$$

où $r_i > 0$, $B(x, r_i)$ est la boule de centre x et de rayon r_i de \mathbb{R}^d et a est une fonction continue vérifiant certaines conditions.

Si u_i est une densité de population, le terme (2.3) permet de modéliser des phénomènes de diffusion dans lequel la diffusion est contrainte par l'évolution de la population présente dans un voisinage $(B(x, r_i) \cap \Omega)$ du point x . Aussi, (2.3) correspond à la valeur de sa diffusion à l'instant t au point x . Cette valeur dépend de la proportion totale d'individus présents dans le voisinage $B(x, r_i) \cap \Omega$ du point x , représentée par le terme suivant :

$$\int_{B(x, r_i) \cap \Omega} u_i(t, y) dy.$$

Dans les cas elliptique et parabolique, les sources suivantes ([20, 39, 40]) présentent des travaux théoriques sur l'analyse de quelques problèmes similaires.

Si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on choisit r_i tel que $\min_{1 \leq i \leq n} r_i \geq \text{Diam}(\Omega)$ (où $\text{Diam}(\Omega)$ représente le diamètre de Ω), alors

$$D_i = a \left(\int_{\Omega} u_i(t, y) dy \right). \quad (2.4)$$

Ainsi l'on retrouve un cas connu où la diffusion D_i dépend de la population totale d'individu présente dans le tout le domaine (voir [20, 39, 40]).

Si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $r_i = 0$, alors on a une diffusion locale, c'est-à-dire D_i constant. On retrouve le cas de modélisation classique où la diffusion est homogène sur tout le domaine (voir [14, 38, 58]).

Remarque 2.1.1. Pour une modélisation encore plus réaliste du terme de diffusion défini par (2.3), on devrait considérer un terme de diffusion de la forme suivante :

$$D_i = a \left(\int_{B(x, r_i) \cap \Omega} \left(\sum_{i=1}^n u_i(t, y) \right) dy \right), \quad (2.5)$$

puisque pour la population u_i sa diffusion dans $B(x, r_i)$ ne dépend pas que des individus du même type que lui, mais de tous les individus présents dans $B(x, r_i)$ à l'instant t .

Dans ce chapitre, nous allons donc étudier le système (2.2). Dans un premier temps, nous allons regarder le cas où D_i est sous la forme (2.4). Nous allons ainsi nous intéresser à l'existence, l'unicité et l'analyse qualitative d'une solution du problème (2.2). Dans un second temps, on pourra regarder sur un exemple concret le cas où D_i est sous la forme (2.3).

2.2 Modèle et positionnement du problème

Dans toute la suite, on suppose que le problème (2.2) est autonome, c'est-à-dire que pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}, j \neq i$, les fonctions f_{ij} et f_{ji} ne dépendent pas explicitement du temps. De manière générale, c'est seulement dans certains cas particuliers tels que celui de la modélisation de certains phénomènes épidémiologiques saisonniers où nous avons les fonctions f_{ij} et f_{ji} qui dépendent explicitement du temps. Nous noterons dorénavant $f_{ij}(u)$ (respectivement $f_{ji}(u)$) pour décrire les flux qui partent du compartiment $j \rightarrow i$ (respectivement $i \rightarrow j$). Lorsqu'il n'existe aucun flux en provenance de l'extérieur du système vers le compartiment i , on dira que $f_i \equiv 0$.

Dans la suite, on supposera que le flux partant de i vers l'extérieur du système dépend uniquement du temps, ce qui nous fera choisir $\theta_i(t)$ au lieu de $\theta_i(t, u)$.

Soit $d \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert régulier tel que $\partial\Omega$ soit de classe \mathcal{C}^1 . Pour $n \geq 2$, on considère le problème de réaction-diffusion

$$(\mathcal{P}_C) \begin{cases} \partial_t u_i - D_i \Delta u_i + \theta_i(t) u_i = F_i(u), & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_i}{\partial \eta} = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega, \\ u_i(0, x) = u_{i,0}(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.6)$$

avec $u_{i,0} \geq 0$ et les conditions suivantes sur les données :

— Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, les fonctions non linéaires $F_i : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ vérifient les conditions suivantes :

1. F_i est uniformément continue et lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe $K_i > 0$ telle que pour tout $u, v \in \mathbb{R}^n$,

$$|F_i(u) - F_i(v)| \leq K_i \|u - v\|, \quad (2.7)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne dans \mathbb{R}^n .

2. F_i est quasi positive, c'est-à-dire, $F_i(u) \geq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $u_i = 0$.
3. Il existe une constante positive C_F telle que :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+^n, \quad |F_i(u)| \leq C_F \sum_{j=1}^n |u_j|. \quad (2.8)$$

— Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, les coefficients de diffusion sont définis par (2.4), autrement dit :

$$D_i = a \left(\int_{\Omega} u_i(t, x) dx \right),$$

où a est une fonction réelle positive, bornée de classe \mathcal{C}^1 . Il existe donc $a_m, a_M > 0$ telles que :

$$a_m \leq D_i \leq a_M. \quad (2.9)$$

On suppose que a' est bornée et que

$$|a'| \leq K_{D'_i}, \quad (2.10)$$

avec $K_{D'_i}$ est une constante positive.

— Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, θ_i est une fonction réelle positive non-nulle bornée de classe \mathcal{C}^1 dont la dérivée est bornée. On suppose de plus qu'il existe θ_m, θ_M positives telles que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, θ_i ,

$$\theta_m \leq \theta_i(t) \leq \theta_M, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.11)$$

2.3 Existence des solutions

Définition 2.3.1. Un vecteur $u = (u_1, \dots, u_n)$ est appelé solution faible du problème (\mathcal{P}_C) sur $[0, T]$ si :

$$u_i \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)) \quad \text{et} \quad F_i \in L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

avec $u_i(0, \cdot) = u_{i,0}(\cdot)$ et pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_i(T, x) \varphi_i(T, x) dx + \int_0^T \int_{\Omega} u_i \partial_t \varphi_i dt dx + \int_0^T \int_{\Omega} D_i \nabla u_i \nabla \varphi_i dt dx + \int_0^T \int_{\Omega} \theta_i(t) u_i \varphi_i dt dx \\ = \int_0^T \int_{\Omega} F_i(u) \varphi_i dt dx + \int_{\Omega} u_i(0, x) \varphi_i(0, x) dx, \end{aligned}$$

$\forall \varphi_i \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, avec $\partial_t \varphi_i \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$.

Dans cette partie, nous allons utiliser une approche variationnelle basée sur des méthodes de point fixe de Schauder (voir [19, 20, 26, 27, 50]) pour montrer l'existence d'une solution du problème (\mathcal{P}_c) . Pour cela nous commençant par introduire un problème dit auxiliaire à (\mathcal{P}_c) .

Pour tout $w_i \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $i \in \{1, \dots, n\}$, on considère le problème auxiliaire suivant :

$$(\mathcal{P}_A) \quad \begin{cases} \partial_t u_i - a(l(w_i)) \Delta u_i + \theta_i(t) u_i = F_i(u), & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_i}{\partial \eta} = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega, \\ u_i(0, x) = u_{i,0}(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.12)$$

avec $u_{i,0} \in L^2(\Omega)$, $F_i \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ et l est une forme linéaire continue de $L^2(0, T; L^2(\Omega))$. On suppose que la fonction a satisfait les conditions (2.9) et (2.10). La formulation variationnelle du problème (\mathcal{P}_A) est la suivante :

Trouver u_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que :

$$u_i \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \quad \text{et} \quad \partial_t u_i \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \quad (2.13)$$

$u_i(0) = u_{i,0}$, où $u_{i,0}$ est la i ème composante du vecteur u_0 et

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_i \varphi_i dx + a(l(w_i)) \int_{\Omega} \nabla u_i \nabla \varphi_i dx + \int_{\Omega} \theta_i(t) u_i \varphi_i dx = \int_{\Omega} F_i(u) \varphi_i dx, \quad \forall \varphi_i \in H^1(\Omega). \quad (2.14)$$

On a le résultat suivant.

Théorème 2.3.2. *Soient $w_i \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $u_{i,0} \in L^2(\Omega)$ et $F_i \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Supposons que les hypothèses (2.8)-(2.11) soient vérifiées. Alors le problème auxiliaire (\mathcal{P}_A) admet une unique solution $u = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ satisfaisant*

$$u_i \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega)).$$

Démonstration. La preuve se déduit directement d'une adaptation du Théorème 1.1 de [23] au cas où a est une constante. En effet, le fait que a ne dépende pas de u nous permet de satisfaire toutes les conditions du Théorème 1.1 de [23]. □

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $u_{i,0} \in L^2(\Omega)$ et $F_i \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, la formulation variationnelle du problème (\mathcal{P}_C) consiste à chercher une fonction u solution du problème suivant :

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$u_i \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \text{ et } \partial_t u_i \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \quad (2.15)$$

$$u_i(0) = u_{i,0}, \text{ où } u_{i,0} \text{ est la } i\text{ème composante du vecteur } u_0, \quad (2.16)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_i \varphi dx + \int_{\Omega} D_i \nabla u_i \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} \theta_i(t) u_i \varphi dx = \int_{\Omega} F_i(u) \varphi dx, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \quad (2.17)$$

On a le résultat suivant.

Théorème 2.3.3. *Soient $u_{i,0} \in L^2(\Omega)$ et $F_i(u) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Supposons que (2.8)-(2.11) soient vérifiées. Alors le problème (\mathcal{P}_C) admet une solution $u = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ satisfaisant*

$$u_i \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)), \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Démonstration. Soit $w_i \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $i \in \{1, \dots, n\}$. D'après le théorème 2.3.2, le problème variationnel de (\mathcal{P}_A) admet une unique solution u telle que :

$$u_i = T_i(w_i) \text{ et } u_i \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)), \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

où $(T_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille d'opérateurs, définie par :

$$\begin{array}{ccc} T_i : L^2(0, T; L^2(\Omega)) & \longrightarrow & H^1(0, T; H^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)) \\ w_i & \longmapsto & T_i(w_i) = u_i. \end{array}$$

Tout au long de cette preuve, nous allons chercher à appliquer le théorème du point fixe de Schauder (voir [33]) sur l'opérateur T_i , afin de montrer que ce dernier admet un point fixe. Pour cela nous allons considérer C un sous ensemble fermé et convexe de $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ et $T_i : C \longrightarrow C$ tel que T_i soit continue avec $T_i(C)$ relativement compact. Ce qui nous permettra de conclure que T_i possède un point fixe.

En multipliant l'équation principale de (\mathcal{P}_A) par u_i et en intégrant sur Ω , on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u_i, u_i) + a(l(w_i)) (\nabla u_i, \nabla u_i) + \theta_i(t) (u_i, u_i) = (F_i(u), u_i), \quad (2.18)$$

où $(., .)$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

En utilisant (2.9) et (2.11), on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_1 \|u_i\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (F_i(u), u_i), \quad (2.19)$$

avec

$$C_1 = \min \{a_m, \theta_m\}.$$

En appliquant les inégalités de Cauchy Schwarz puis celle de Young à l'équation (2.19) on a :

$$\frac{d}{dt} \|u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2C_1 \|u_i\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{C_1} \|F_i(u)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_1 \|u_i\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.20)$$

Aussi

$$\frac{d}{dt} \|u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_1 \|u_i\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{C_1} \|F_i(u)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.21)$$

En intégrant sur $(0, t)$ avec $t \in [0, T]$ on a

$$\|u_i(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_1 \int_0^t \|u_i\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \leq \frac{1}{C_1} \|F_i(u)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|u_{i,0}\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.22)$$

Ainsi

$$\|u_i\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 \leq R_{i_1}^2, \quad (2.23)$$

avec

$$R_{i_1}^2 = \frac{1}{C_1^2} \|F_i(u)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{C_1} \|u_{i,0}\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.24)$$

D'où

$$\|u_i\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq R_{i_1}^2. \quad (2.25)$$

De plus en multipliant (2.12) par φ puis en appliquant l'inégalité de Cauchy Schwarz, on obtient

$$\langle \partial_t u_i, \varphi \rangle_{H^{-1}, H^1} \leq a_M \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} + \theta_M \|u_i\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \|F_i(u)\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.26)$$

Aussi

$$\langle \partial_t u_i, \varphi \rangle_{H^{-1}, H^1} \leq a_M \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} + \theta_M \|u_i\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} + \|F_i(u)\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}. \quad (2.27)$$

D'où

$$\|\partial_t u_i\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq a_M \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)} + \theta_M \|u_i\|_{L^2(\Omega)} + \|F_i(u)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.28)$$

En prenant $K = \max \{ a_M, \theta_M \}$, (2.28) devient

$$\|\partial_t u_i\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq K \|u_i\|_{H^1(\Omega)} + \|F_i(u)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.29)$$

Ce qui donne

$$\|\partial_t u_i\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq 2 \left(K^2 \|u_i\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|F_i(u)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \quad (2.30)$$

En utilisant (2.23), (2.24) et (2.30), on a

$$\|\partial_t u_i\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}^2 \leq 2 \left(K^2 R_{i_1}^2 + C_1^2 R_{i_1}^2 \right). \quad (2.31)$$

Donc

$$\|\partial_t u_i\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}^2 \leq R_{i_2}^2, \quad (2.32)$$

avec

$$R_{i_2} = \sqrt{2 \left(K^2 R_{i_1}^2 + C_1^2 R_{i_1}^2 \right)}.$$

À partir des estimations (2.23) et (2.32), on déduit que

$$\|u_i\|_{H^1(0,T;H^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))}^2 \leq R_i^2, \quad (2.33)$$

avec $R_i = \sqrt{R_{i_1}^2 + R_{i_2}^2}$.

En remarquant que $R_i \geq R_{i_1}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et en posant $B_i = B(0, R_i)$ la boule fermée de centre 0 et rayon R_i dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ on remarque ainsi que l'opérateur T_i envoie les éléments de B_i dans B_i pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Les boules de l'espace $H^1(0, T; H^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ étant relativement compactes dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ cela permet de montrer que les $T_i(B_i)$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ sont relativement compactes dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ (voir [20]). Il ne reste plus qu'à montrer que l'opérateur T_i est continue de B_i dans B_i .

On considère $(w_{i,m})_{m \geq 0}$ une suite de B_i telle que

$$w_{i,m} \rightarrow w_i, \quad \text{dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.34)$$

Notons $u_{i,m} = T_i(w_{i,m})$ la solution de (\mathcal{P}_A) . De (2.34), on déduit que

$$l(w_{i,m}) \rightarrow l(w_i) \quad \text{dans } L^2(0, T). \quad (2.35)$$

En utilisant le fait que $a \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, (2.25), (2.33) et (2.35) on peut extraire une sous suite que l'on note $u_{i,\tau(m)}$ de $u_{i,m}$ telle que

$$\begin{aligned} u_{i,\tau(m)} &\rightharpoonup u_{i,\infty} \text{ dans } H^1(0, T; H^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)) \\ u_{i,\tau(m)} &\rightarrow u_{i,\infty} \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ a(l(w_{i,m}))\nabla v &\rightarrow a(l(w_i))\nabla v \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \end{aligned}$$

sans perte de généralité on renommera $u_{i,\tau(m)}$, $u_{i,m}$.

Soient $v \in H^1(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}([0, T])$. Alors pour tout $t \in [0, T]$, $\varphi(t)v \in H^1(\Omega)$ et de plus

$$\partial_t(\varphi(t)v) = \varphi'(t)v \quad \text{et} \quad \nabla(\varphi(t)v) = \varphi(t)\nabla v.$$

En prenant pour fonction test $\varphi(t)v$, l'équation (2.14) devient

$$\begin{aligned} - \int_0^T (u_{i,m}, v)\varphi'(t)dt + \int_0^T a(l(w_{i,m}))(\nabla u_{i,m}, \nabla v)\varphi(t)dt + \int_0^T \varphi(t)\theta_i(t)(u_{i,m}, v) \\ = \int_0^T \varphi(t)\langle F_i(u_m), v \rangle dt \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad \varphi \in \mathcal{D}([0, T]). \end{aligned} \quad (2.36)$$

En passant à la limite dans (2.36) on obtient

$$\frac{d}{dt}(u_{i,\infty}, v) + a(l(w_i))(\nabla u_{i,\infty}, \nabla v) + \theta_i(u_{i,\infty}, v) = (F_i, v), \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0, T), \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (2.37)$$

Ainsi

$$u_{i,\infty} \in H^1(0, T; H^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)).$$

De plus, pour presque tout $t \in (0, T)$ et pour tout $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$(u_{i,m}(t), v) - (u_{i,0}, v) = \int_0^t (\partial_t u_{i,m}(s), v) ds. \quad (2.38)$$

Par injection continue de $H^1(0, T; H^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ dans $C([0, T], L^2(\Omega))$ (voir [20]) on déduit en passant à la limite dans (2.38) que

$$(u_{i,\infty}(t), v) - (u_{i,0}, v) = \int_0^t (\partial_t u_{i,\infty}(s), v) ds = (u_{i,\infty}(t), v) - (u_{i,\infty}(0), v).$$

Puisque

$$u_{i,m}(t) \rightarrow u_\infty(t) \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \quad \text{pp } t \in (0, T)$$

alors

$$u_{i,\infty}(0) = u_{i,m}(0) = u_{i,0}.$$

Par unicité de la solution du problème auxiliaire (\mathcal{P}_A) , on conclut que

$$u_{i,\infty} = u_i.$$

Ainsi

$$u_{i,m} = T_i(w_{i,m}) \rightarrow u_{i,\infty} = T_i(w_i) \quad \text{dans} \quad L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Ce qui montre que T_i est un opérateur continu et achève la preuve du théorème. \square

Théorème 2.3.4. Soient $u_{i,0} \in L^2(\Omega)$ et $F_i(u) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Sous les hypothèses du Théorème 2.3.3, la solution $u = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ du problème (2.15)-(2.17) vérifie

$$u_i \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Démonstration. En prenant $\varphi = u_i$ dans (2.17) on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + D_i \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \theta_i(t) \|u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 = (F_i(u), u_i). \quad (2.39)$$

En appliquant l'inégalité de Young et (2.9) à (2.39), on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + D_i \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \theta_m \|u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2\theta_m} \|F_i(u)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.40)$$

D'où

$$\frac{d}{dt} \|u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\theta_m} \|F_i(u)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.41)$$

En intégrant sur $(0, t)$ avec $t \in [0, T]$ on a

$$\|u_i(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\theta_m} \int_0^t \|F_i(u)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \|u_{i,0}\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.42)$$

On en déduit

$$u_i \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),$$

Ce qui achève la preuve. \square

2.4 Régularité des solutions

Théorème 2.4.1. Soient $u_{i,0} \in L^2(\Omega)$ et $F_i(u) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Sous les hypothèses du Théorème 2.3.3, une solution u du problème (2.15)-(2.17) est telle que :

$$u_i \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (2.43)$$

Démonstration. En prenant $\varphi = \partial_t u_i$ dans (2.17), on a

$$\|\partial_t u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + (D_i \nabla u_i, \nabla \partial_t u_i) + (\theta_i(t) u_i, \partial_t u_i) = (F_i(u), \partial_t u_i).$$

De plus

$$(D_i \nabla u_i, \nabla \partial_t u_i) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (D_i \nabla u_i, \nabla u_i) - \frac{1}{2} (D_i' \nabla u_i, \nabla u_i) \quad (2.44)$$

et

$$(\theta_i u_i, \partial_t u_i) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\theta_i u_i, u_i) - \frac{1}{2} (\theta_i' u_i, u_i). \quad (2.45)$$

Des équations (2.44) et (2.45) on a alors :

$$\begin{aligned} \|\partial_t u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(D_i \int_{\Omega} |\nabla u_i|^2 dx + \theta_i \int_{\Omega} |u_i|^2 dx \right) &= (F_i(u), \partial_t u_i) + \frac{1}{2} (\theta_i' u_i, u_i) \\ &+ \frac{1}{2} (D_i' \nabla u_i, \nabla u_i). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \|\partial_t u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(D_i \int_{\Omega} |\nabla u_i|^2 dx + \theta_i \int_{\Omega} |u_i|^2 dx \right) &\leq \|F_i(u)\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_t u_i\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ C_1 \|u_i\|_{H^1(\Omega)}^2, \end{aligned} \quad (2.46)$$

avec

$$C_1 > \frac{1}{2} \max \{ \theta_M', D_M' \},$$

où θ_M' et D_M' sont respectivement les bornes supérieures de θ_i' et D_i' .

En appliquant l'inégalité de Young à (2.46), on a

$$\frac{1}{2} \|\partial_t u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(D_i \int_{\Omega} |\nabla u_i|^2 dx + \theta_i \int_{\Omega} |u_i|^2 dx \right) \leq \frac{1}{2} \|F_i(u)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_1 \|u_i\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

puis en sommant sur i

$$\sum_{i=1}^n \|\partial_t u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{d}{dt} W_{H_2} \leq \sum_{i=1}^n \|F_i(u)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_2 W_{H_1}, \quad C_2 > 0, \quad (2.47)$$

avec

$$W_{H_1} = \sum_{i=1}^n \|u_i\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \text{et} \quad W_{H_2} = \sum_{i=1}^n \left(D_i \int_{\Omega} |\nabla u_i|^2 dx + \theta_i \int_{\Omega} |u_i|^2 dx \right).$$

En utilisant (2.9) et (2.11), l'équation (2.47) devient

$$\sum_{i=1}^n \|\partial_t u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{d}{dt} W_{H_2} \leq \sum_{i=1}^n \|F_i(u)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_3 W_{H_2}, \quad C_3 > 0. \quad (2.48)$$

Aussi

$$\frac{d}{dt} W_{H_2} \leq \sum_{i=1}^n \|F_i(u)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_3 W_{H_2}. \quad (2.49)$$

Puisqu'il existe des constantes positives C_4 et C_5 telles que

$$C_4 W_{H_1} \leq W_{H_2} \leq C_5 W_{H_1}, \quad (2.50)$$

on déduit en utilisant le lemme de Grönwall à l'équation (2.49) que

$$u_i \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

Ce qui achève la preuve du théorème. □

De même on le résultat suivant

Théorème 2.4.2. *On suppose que les hypothèses du Théorème 2.4.1 soient vérifiées. Si de plus $u_{i,0} \in H^1(\Omega)$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Alors une solution u du problème (2.15)-(2.17) vérifie :*

$$u_i \in L^2(0, T; H^2(\Omega)), \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Démonstration. En prenant $\varphi = -\Delta u_i$ dans (2.17), on a

$$-(\partial_t u_i, \Delta u_i) + (\nabla \cdot (D_i \nabla u_i), \Delta u_i) - (\theta_i u_i, \Delta u_i) = -(F_i(u), \Delta u_i). \quad (2.51)$$

En appliquant (2.9), (2.11) et le théorème de Green dans (2.51) on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + a_m \|\Delta u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \theta_m \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} |F_i(u)| |\Delta u_i| dx. \quad (2.52)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz puis l'inégalité de Young dans (2.52)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{a_m}{2} \|\Delta u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \theta_m \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_1 \sum_{j=1}^n \|u_j\|_{L^2(\Omega)}, \quad C_1 > 0. \quad (2.53)$$

Ce qui nous donne

$$\frac{d}{dt} \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_2 \|u_i\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq C_3 \sum_{j=1}^n \|u_j\|_{L^2(\Omega)}, \quad C_2, C_3 > 0. \quad (2.54)$$

En intégrant (2.54) sur $[0, T]$ et en considérant le fait que $u_i \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$, $i \in \{1, \dots, n\}$ on obtient

$$u_i \in L^2(0, T; H^2(\Omega)).$$

Ce qui achève la preuve. □

Théorème 2.4.3. *On suppose que les hypothèses du Théorème 2.4.1 soient vérifiées. Si de plus $\|F_i(u)\|_{L^2(\Omega)}^2$ est localement intégrable tel que*

$$\int_t^{t+r} \|F_i(u)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq a_1, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \text{avec } r, a_1 > 0. \quad (2.55)$$

Alors une solution u du problème (2.15)-(2.17) vérifie :

$$u_i \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega)), \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Démonstration. En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwarz à (2.52), on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + a_m \|\Delta u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \theta_m \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|F_i(u)\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta u_i\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.56)$$

Aussi en appliquant l'inégalité de Young

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{a_m}{2} \|\Delta u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \theta_m \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2a_m} \|F_i(u)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En sommant (2.21) et (2.56) on en déduit

$$\frac{d}{dt} \|u_i\|_{H^1(\Omega)}^2 + K_1 \|u_i\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq K_2 \|F_i(u)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad K_1, K_2 > 0. \quad (2.57)$$

Nous allons enfin appliquer le lemme de Grönwall uniforme à (2.57) (voir[51]).

En intégrant (2.57) sur $]t, t + t_0[$ on obtient :

$$\|u_i(t + t_0)\|_{H^1(\Omega)}^2 + K_1 \int_t^{t+t_0} \|u_i\|_{H^1(\Omega)}^2 ds \leq \int_t^{t+t_0} K_2 \|F_i(u)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \|u_i(t)\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (2.58)$$

Ainsi

$$\int_t^{t+t_0} \|u_i\|_{H^1(\Omega)}^2 ds \leq \frac{K_2}{K_1} a_1 + \frac{1}{K_1} \mu_0^2, \quad (2.59)$$

où $\mu_0 > 0$ est tel que $\|u_i(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \mu_0^2$.

En posant $a_2 = \frac{t_0}{K_1} \mu_0^2$, $a_3 = \frac{K_2}{K_1} a_1 + \frac{1}{K_1} \mu_0^2$ et en appliquant le lemme de Grönwall uniforme à l'inégalité (2.57), on obtient :

$$\|u_i(t + t_0)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \left(\frac{a_3}{t_0} + a_2 \right) \exp(a_1), \quad t \geq 0, t_0 > 0.$$

On en déduit donc que $u_i \in L^\infty(t_0, +\infty, H^1(\Omega))$. De plus en utilisant cette fois le lemme de Grönwall classique à (2.57) on montre que $u_i \in L^\infty(0, t_0; H^1(\Omega))$, ce qui achève la preuve du théorème. \square

2.5 Unicité de la solution

Théorème 2.5.1. Soient $u_{i,0} \in L^2(\Omega)$ et $F_i(u) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $i \in \{1, \dots, n\}$. On suppose de plus que les hypothèses du Théorème 2.3.3 soient vérifiées et que la fonction a soit lipschitzienne de constante Lipschitz K_2 , telle que

$$\|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)} < \frac{\min\{a_m, \theta_m\}}{K_2|\Omega|^{1/2}}, \quad (2.60)$$

où $|\Omega|$ est la mesure de Ω . Alors, le problème (2.15)-(2.17) admet une unique solution.

Démonstration. Soient u et v deux solutions de (2.15)-(2.17). Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on pose,

$$w_i = u_i - v_i, \quad D_{u_i} = a \left(\int_{\Omega} u_i dx \right) \quad \text{et} \quad D_{v_i} = a \left(\int_{\Omega} v_i dx \right).$$

Alors w_i vérifie l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt}(w_i(t), \varphi) + D_{u_i}(\nabla w_i, \nabla \varphi) + \theta_i(t)(w_i, \varphi) = \langle F_i(u) - F_i(v), \varphi \rangle + (D_{v_i} - D_{u_i})(\nabla v_i, \nabla \varphi), \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

En prenant $\varphi = w_i$, on en déduit :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + D_{u_i} \|\nabla w_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \theta_i(t) \|w_i\|_{L^2(\Omega)}^2 = \langle F_i(u) - F_i(v), w_i \rangle + (D_{v_i} - D_{u_i})(\nabla v_i, \nabla w_i). \quad (2.61)$$

En utilisant (2.9), l'équation (2.61) devient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + a_m \|\nabla w_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \theta_i(t) \|w_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} |F_i(u) - F_i(v)| |w_i| dx + |D_{u_i} - D_{v_i}| \|v_i\|_{L^2(\Omega)} \|w_i\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.62)$$

Ainsi,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_1 \|w_i\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} |F_i(u) - F_i(v)| |w_i| dx + |D_{u_i} - D_{v_i}| \|v_i\|_{L^2(\Omega)} \|w_i\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.63)$$

avec $C_1 = \min\{a_m, \theta_m\}$.

Comme la fonction a est lipschitzienne de constante lipschitz K_2 , on a en appliquant l'inégalité de Cauchy Schwarz

$$|D_{u_i} - D_{v_i}| \leq K_2 |\Omega|^{1/2} \|w_i\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.64)$$

où $|\Omega|$ est la mesure de Ω .

De (2.7), (2.63) et (2.64) on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_1 \|w_i\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_2 \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} |w_j| |w_i| dx + K_2 |\Omega|^{1/2} \|w_i\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v_i\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla w_i\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.65)$$

avec $C_2 > 0$.

Ce qui nous donne

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_1 \|w_i\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_2 \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} |w_j| |w_i| dx + K_2 |\Omega|^{1/2} \|\nabla v_i\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla w_i\|_{H^1(\Omega)}. \quad (2.66)$$

En utilisant (2.60), (2.66) devient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_3 \|w_i\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_2 \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} |w_j| |w_i| dx, \quad (2.67)$$

avec $C_3 > 0$.

Ainsi

$$\frac{d}{dt} \|w_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2C_2 \sum_{j=1}^n \|w_j\|_{L^2(\Omega)} \|w_i\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.68)$$

En sommant (2.68) sur i , on en déduit

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n \|w_j\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq C_4 \sum_{j=1}^n \|w_j\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (2.69)$$

avec $C_4 > 0$.

On montre finalement de (2.69) que

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-C_4 t} \sum_{j=1}^n \|w_j\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq 0. \quad (2.70)$$

On a ainsi prouvé que la fonction réelle qui à $t \mapsto e^{-C_4 t} \sum_{j=1}^n \|w_j\|_{L^2(\Omega)}^2$ est décroissante. Or cette

fonction est positive et de premier terme nul (car $u_{i,0} = v_{i,0}$). On en déduit alors que $\|w_i\|_{L^2(\Omega)} = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Ce qui achève la preuve de l'unicité. \square

Remarque 2.5.2. On montre aussi l'unicité dans les cas où la non-linéarité du terme source comporte des termes quadratiques de la forme :

$$F_i(u) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_{ij}(u) u_i u_j,$$

où f_{ij} est régulière et bornée pour tout j . Le modèle *PCR* développé par G. Cantin dans sa thèse (voir [14]) présente ce genre de terme de non-linéarité. Si l'on suppose que f_{ij} vérifient la condition suivante : pour $j = 1, \dots, n$, $j \neq i$ pour $(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$|f_{ij}(u) - f_{ij}(v)| \leq K_1 |u_i - v_i| + K_2 |u_j - v_j|, \quad K_1 \text{ et } K_2 > 0, \quad (2.71)$$

Chapitre 2. Systèmes de réaction-diffusion non locale à compartiments

alors, on établit aisément l'unicité de la solution. Plus concrètement, soient : $u_{i,0} \in L^2(\Omega)^n$ et $f_{ij} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $j \neq i$. On cherche une fonction u solution du problème suivant :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$u_i \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \text{ et } \partial_t u_i \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \quad (2.72)$$

$$u_i(0) = u_{i,0}, \text{ où } u_{i,0} \text{ est la } i\text{ème composante du vecteur } u_0, \quad (2.73)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_i \varphi dx + \int_{\Omega} D_i \nabla u_i \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} \theta_i(t) u_i \varphi dx = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(\int_{\Omega} f_{ij}(u) u_i u_j dx \right) \quad (2.74)$$

En admettant que les conditions pour l'existence du problème (2.72)-(2.74) soient satisfaites, pour la preuve, on utilise le même raisonnement utilisé au théorème 2.4.1 : pour u et v deux solutions de (2.72)-(2.74) issues de la même condition initiale u_0 , en posant $w = u - v$ on montre que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_2 \|w_i\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\langle |f_{ij}(u) u_i u_j - f_{ij}(v) v_i v_j|, w_i \rangle) \\ &+ |D_{u_i} - D_{v_i}|(v_i, w_i), \quad C_2 > 0. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Or, dans ce cas

$$|f_{ij}(u) u_i u_j - f_{ij}(v) v_i v_j| = |f_{ij}(u) u_i u_j - f_{ij}(u) v_i u_j + f_{ij}(u) v_i u_j - f_{ij}(u) v_i v_j + f_{ij}(u) v_i v_j - f_{ij}(v) v_i v_j|.$$

Puisque f_{ij} est bornée alors,

$$|f_{ij}(u) u_i u_j - f_{ij}(v) v_i v_j| \leq C_1 |u_j| |w_i| + C_2 |v_i| |w_j| + |v_i| |v_j| |f_{ij}(u) - f_{ij}(v)|, \quad \text{avec } C_1, C_2 > 0.$$

Sous la condition (2.71), on déduit que

$$|f_{ij}(u) u_i u_j - f_{ij}(v) v_i v_j| \leq C_3 |u_j| |w_i| + C_4 |v_i| |w_j| + C_5 |v_i| |v_j| |w_i| + C_6 |v_i| |v_j| |w_j|,$$

avec $C_3, \dots, C_6 > 0$.

Ainsi en injectant la dernière inégalité dans (2.75) et en appliquant l'inégalité de Cauchy Schwarz, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_2 \|w_i\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_7 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\|w_j\|_{L^2(\Omega)} \|w_i\|_{L^2(\Omega)}) + C_8 \|w_i\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \text{avec } C_7, C_8 > 0.$$

En appliquant l'inégalité de Young, on a :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_2 \|w_i\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_9 \sum_{j=1}^n (\|w_j\|_{L^2(\Omega)}^2), \quad \text{avec } C_9 > 0.$$

De cette inégalité, on peut conclure que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $w_i = 0$ donc $u = v$.

En conclusion, dans cette partie, grâce à la méthode du point fixe de Schauder, on a montré l'existence et l'unicité d'une solution du problème (2.15)-(2.17). De plus, grâce à des estimations a priori, on a pu montrer quelques résultats de régularité pour la solution obtenue. Pour la suite, nous allons maintenant nous intéresser au signe de cette solution. La positivité des solutions est importante dans de nombreux domaines des mathématiques appliquées, notamment en dynamique de population. En effet, la solution de l'équation peut représenter une quantité qui ne pas être négative, d'où une exigence pour rendre le modèle très réaliste est de prouver que ces solutions restent positives en tout temps. L'objectif de la section qui va suivre est de montrer la positivité de ces solutions.

2.6 Positivité de la solution

Définition 2.6.1. Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et $(G_i)_{1 \leq i \leq n}$ des applications définies

$$G_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

On dit que G_i est quasi positive si pour tout $u \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $u_i = 0$ on a :

$$G_i(u) = G_i(u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_n) \geq 0.$$

Remarque 2.6.2. La notion de quasi-positivité est une propriété "naturelle" des systèmes à compartiments. En effet, dans les cas des systèmes à compartiments, spécifiquement en dynamique de population, si u_i représente une densité de population, alors G_i représente la fonction dite de croissance qui modélise les phénomènes de naissance, mort et interaction avec les autres populations.

Tout système à compartiments vérifie la condition de quasi-positivité. En effet, si on considère l'équation de continuité d'un système à n compartiments dont la i ème équation est donnée par

$$\frac{du_i}{dt} = f_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_{ij}(t, u)u_j - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_{ji}(t, u)u_i - \theta_i(t, u)u_i \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad n \geq 2 \quad (2.76)$$

et que l'on note

$$G_i(u) = f_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_{ij}(t, u)u_j - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_{ji}(t, u)u_i - \theta_i(t, u)u_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

On déduit que, G_i est quasi positif, car si $u \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $u_i = 0$ alors

$$G_i(u) = f_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_{ij}(t, u)u_j \geq 0.$$

La notion de quasi-positivité est souvent très utile. En effet, dans le cas systèmes dynamiques à compartiments, elle aide parfois à montrer la positivité de la solution du système. Le théorème qui suit, en est une illustration.

Théorème 2.6.3. Soient $u_{i,0} \in L^2(\Omega)$, $u_{i,0} \geq 0$ et $F_i(u) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Sous les hypothèses des Théorèmes 2.3.3 et 2.5.1, la solution du problème (2.15)-(2.17) est positive.

Pour la preuve, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.6.4. *Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, considérons le problème auxiliaire suivant :*

$$(\mathcal{P}_*) \begin{cases} \partial_t u_i - D_i \Delta u_i + \theta_i(t) u_i = F_i(u^+), & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_i}{\partial \eta} = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega, \\ u_i(0, x) = u_{i,0}(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.77)$$

où $u_i^+ = \max\{0, u_i\}$ et $u_{i,0} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}_+^n)$, avec $\mathbb{R}_+^n := \{u \in \mathbb{R}^n, u_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$.

Pour $u_{i,0} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}_+^n)$ et sous les hypothèses des Théorèmes 2.3.3 et 2.5.1, le problème (\mathcal{P}_*) admet une unique solution positive.

Démonstration. Posons,

$$\mathcal{V}_i = \{v \in \mathbb{R}^n; v_i = 0\} \cap \mathbb{R}_+^n.$$

Soit $\tilde{u}_i \in L^2(0, T; L^2(\Omega, \mathcal{V}_i))$ une solution du problème (\mathcal{P}_*)

En multipliant par \tilde{u}_i^- et en intégrant sur Ω , on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{u}_i^-\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_1 \|\nabla \tilde{u}_i^-\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_2 \|\tilde{u}_i^-\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} F_i(\tilde{u}^+) \tilde{u}_i^- dx, \quad \text{avec } C_1, C_2 > 0. \quad (2.78)$$

Puis en utilisant la quasi positivité F_i

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{u}_i^-\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_2 \|\tilde{u}_i^-\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0. \quad (2.79)$$

En posant

$$W_2^- = \sum_{i=1}^n \|\tilde{u}_i^-\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (2.80)$$

et en sommant l'équation (2.79) sur i , on obtient

$$\frac{d}{dt} W_2^- + C_3 W_2^- \leq 0, \quad \text{avec } C_3 > 0. \quad (2.81)$$

Ainsi

$$\frac{d}{dt} (e^{C_3 t} W_2^-) \leq 0. \quad (2.82)$$

On conclut comme dans l'équation (2.70) que la fonction qui a $t \mapsto (e^{C_3 t} W_2^-(t))$ est décroissante, positive et de premier terme $W_2^-(0)$ qui est nul. Par conséquent

$$\tilde{u}_i^- = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

On a bien

$$\tilde{u}_i \geq 0. \quad (2.83)$$

□

Revenons à la preuve du théorème 2.6.3. Sur l'espace $L^2(0, T; L^2(\Omega, \mathcal{V}_i))$ grâce à l'unicité (voir théorème 2.5.1) le problème auxiliaire (\mathcal{P}_*) et le problème (2.15)-(2.17) sont identiques pour une même condition initiale. Ainsi, ils ont donc la même solution. Aussi puis que la solution du problème auxiliaire (\mathcal{P}_*) est positive (lemme 2.6.4) donc la solution du problème (2.15)-(2.17) est positive.

2.7 Simulations numériques : Application au modèle panique contrôle reflexe *PCR*

Les simulations numériques que nous proposons dans ce travail ont été réalisées sur le modèle *PCR* introduit par Guillaume Cantin dans sa thèse [14]. Le modèle *PCR* décrit différents comportements adoptés par différents individus d'une foule qui subissent une catastrophe (voir [14, 34]). Le modèle considéré est le suivant :

$$\begin{cases} \partial_t r - D_1 \Delta r = \gamma(t)q + B_3 c + B_4 p - B_r r + F(r, c)rc + G(r, p)rp, \\ \partial_t p - D_2 \Delta p = B_2 r + C_2 c - B_p p - G(r, p)rp - H(c, p)cp, \\ \partial_t c - D_3 \Delta c = B_1 r + C_1 p - B_c c - F(r, c)rc + H(c, p)cp - \varphi(t)c, \\ \partial_t q - D_4 \Delta q = -\gamma(t)q, \\ \partial_t b - D_5 \Delta b = \varphi(t)c, \end{cases} \quad (2.84)$$

avec $B_r = B_1 + B_2$, $B_p = C_1 + B_4$, $B_c = B_3 + C_2$.

À notre connaissance, le modèle PCR est le premier à fournir une approche mathématique permettant d'analyser la panique dans de telles situations.

Soit \mathcal{P} une population composée de N individus, tous affectés par un événement catastrophique. À partir du moment initial de cet événement, noté t_0 , nous observons les quantités d'individus en état de panique, en réflexe et en contrôle, notées respectivement $p(t)$, $r(t)$ et $c(t)$, pour tout t supérieur ou égal à t_0 . Avant l'événement, nous considérons les comportements quotidiens de la population, notés $q(t)$, et après l'événement, nous observons les comportements de survie, notés $b(t)$.

Les individus affectés par un événement catastrophique manifestent des comportements de durée limitée et sont soumis à deux types de changements. Tout d'abord, chaque individu subit une évolution comportementale qui lui est propre. Généralement, le réflexe r se manifeste dès le déclenchement de l'événement, puis il évolue vers la panique p ou le contrôle c . Le déroulement des événements peut provoquer un retour temporaire vers le réflexe. Nous désignons par B_1 et B_2 les proportions d'individus qui, à l'instant t , évoluent du réflexe $r(t)$ vers le contrôle $c(t)$ et la panique $p(t)$ respectivement. Les proportions correspondant aux retours du contrôle vers le réflexe et de la panique vers le réflexe sont notées B_3 et B_4 respectivement. Enfin, les proportions des évolutions de la panique vers le contrôle, et du contrôle vers la panique, seront notées C_1 et C_2 respectivement.

Deuxièmement, les individus sont sujets à des phénomènes de contagion émotionnelle au sein de leur entourage. Nous supposons que les interactions rc , rp et cp entraînent des contagions émotionnelles, avec des proportions notées respectivement F , G et H . Contrairement aux modèles épidémiologiques classiques où les contagions entraînent des diminutions et des augmentations de densité, les contagions émotionnelles au sein d'une population touchée par un désastre provoquent des flux, dont l'orientation peut dépendre des proportions d'individus à l'instant t .

Les proportions F , G et H des interactions qui induisent des contagions émotionnelles peuvent donc changer de signe en fonction des densités r , c et p . Elles dépendent des paramètres d'interaction α_i , δ_i et γ_i , avec $i \in 1, 2$.

Tous les coefficients du modèle ci-dessus sont positifs ou nuls. Les fonctions φ et γ sont positives,

bornées et de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Les fonctions d'imitation F , G et H quant à elles, sont bornées, lipschitziennes et leurs définitions sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} F(r, c) = -\alpha_1 \xi\left(\frac{c}{r + \varepsilon}\right) + \alpha_2 \xi\left(\frac{r}{c + \varepsilon}\right), \\ G(r, p) = -\beta_1 \xi\left(\frac{p}{r + \varepsilon}\right) + \beta_2 \xi\left(\frac{r}{p + \varepsilon}\right), \\ H(c, p) = -\gamma_1 \xi\left(\frac{p}{c + \varepsilon}\right) + \gamma_2 \xi\left(\frac{c}{p + \varepsilon}\right), \end{cases} \quad (2.85)$$

avec α_i, β_i et $\gamma_i \geq 0$, $i \in \{1, 2\}$, $\varepsilon \ll 1$ et

$$\xi(s) = \frac{s^2}{1 + s^2}, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (2.86)$$

Nous avons choisi les fonctions φ et γ telles qu'elles sont définies dans [34], c'est-à-dire, $\gamma(t) = \zeta(t, 1, 3)$ et $\varphi(t) = \zeta(t, 40, 70)$ où pour $\tau_0 < \tau_1 \in \mathbb{R}$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\zeta(t, \tau_0, \tau_1) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < \tau_0, \\ 1, & \text{si } t > \tau_1, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{t - \tau_0}{\tau_1 - \tau_0} \pi\right), & \text{si } \tau_0 < t < \tau_1. \end{cases} \quad (2.87)$$

La fonction γ modélise le déclenchement de la catastrophe (l'aléa) et la fonction φ modélise le retour au comportement du quotidien.

Dans les études de G. Cantin [14, 34], le modèle PCR est simulé numériquement en supposant que les fonctions γ , φ , F , G et H sont constantes, ce qui a pour effet de supprimer le caractère non-autonome du modèle. Cependant, dans notre étude, nous prenons en compte le caractère non-autonome du modèle en définissant les fonctions γ et φ selon (2.87) et en conservant les termes non-linéaires déterminés par les fonctions F , G et H tels que définis dans (2.85). En outre, nous introduisons des coefficients de diffusion non locaux pour améliorer la précision de nos simulations. Par conséquent, notre travail s'inscrit dans la continuité logique des travaux préliminaires de G. Cantin sur le modèle PCR avec diffusion.

Dans toutes nos simulations, nous considérons une partition disjointe $\{\Omega_i, 1 \leq i \leq 3\}$ de Ω , et le modèle que nous étudions dans cette section est le suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - D_1(t) \Delta u_1 = \gamma(t) u_4 + B_3 u_3 + B_4 u_2 - B_a u_1 + F(u_1, u_3) u_1 u_3 + G(u_1, u_2) u_1 u_2, \\ \partial_t u_2 - D_2(t) \Delta u_2 = B_2 u_1 + C_2 u_3 - B_p u_2 - G(u_1, u_2) u_1 u_2 - H(u_3, u_2) u_3 u_2, \\ \partial_t u_3 - D_3(t) \Delta u_3 = B_1 u_1 + C_1 u_2 - B_c u_3 - F(u_1, u_3) u_1 u_3 + H(u_3, u_2) u_3 u_2 - \varphi(t) u_3, \\ \partial_t u_4 - D_4(t) \Delta u_4 = -\gamma(t) u_4, \\ \partial_t u_5 - D_5(t) \Delta u_5 = \varphi(t) u_3, \end{cases} \quad (2.88)$$

2.7. Simulations numériques : Application au modèle panique contrôle reflexe PCR

En fixant les valeurs de D_1 , D_4 et D_5 à 4×10^3 , la diffusion des populations u_2 et u_3 est déterminée par les fonctions $D_2(t)$ et $D_3(t)$. Ces fonctions sont définies de manière à maintenir la même monotonie que celle de la densité de population correspondante, ou à l'inverser.

Dans le cas 1, la fonction $D_i(t)$ pour $i = 2, 3$ suit la même monotonie que la densité de population u_i :

$$D_i(t) = 0.4 \exp \left(\int_{\Omega} u_i(t, y) dy \right), \quad 2 \leq i \leq 3. \quad (2.89)$$

Dans le cas 2, la fonction $D_i(t)$ pour $i = 2, 3$ suit la même monotonie que la densité de population u_i mais en considérant uniquement la partie du domaine Ω qui contient la plus grande part de la densité de population observée à l'instant t :

$$D_i(t) = 0.4 \exp \left(\int_{\Omega_0^i} u_i(t, y) dy \right), \quad (2.90)$$

avec

$$\Omega_0^i = \Omega_j \quad \text{si} \quad \int_{\Omega_j} u_i(t, y) dy = \max_{1 \leq k \leq 3} \int_{\Omega_k} u_i(t, y) dy \quad 2 \leq i \leq 3,$$

Dans le cas 3, la fonction $D_i(t)$ pour $i = 2, 3$ est constante :

$$D_i(t) = 0.4, \quad 2 \leq i \leq 3. \quad (2.91)$$

Dans le cas 4, la fonction $D_i(t)$ pour $i = 2, 3$ inverse la monotonie de la densité de population u_i :

$$D_i(t) = 0.4 \exp \left(- \int_{\Omega} u_i(t, y) dy \right), \quad 2 \leq i \leq 3. \quad (2.92)$$

Enfin, dans le cas 5, la fonction $D_i(t)$ pour $i = 2, 3$ inverse la monotonie de la densité de population u_1 et u_2 , en ne considérant que la partie du domaine Ω qui contient la plus grande part de la densité de population observée à l'instant t pour ces deux populations :

$$D_i(t) = 0.4 \exp \left(- \int_{\Omega_0^i} u_i(t, y) dy \right), \quad 2 \leq i \leq 3, \quad (2.93)$$

où Ω_0^i représente la partie du domaine Ω qui contient la plus grande part de la densité de la population observée à l'instant t pour les populations u_1 et u_2 .

Dans la suite, on travaillera avec le jeu de paramètre suivant :

$$B_1 = 0.1, \quad B_2 = 0.3, \quad B_3 = 10^{-3}, \quad B_4 = 10^{-3}, \quad C_1 = 0.1, \quad C_2 = 0.2, \quad \alpha_1 = 0.1, \\ \alpha_2 = 10^{-7}, \quad \beta_1 = 0.1, \quad \beta_2 = 0.3, \quad \gamma_1 = 10^{-4}, \quad \gamma_2 = 7 \times 10^{-5}, \quad \varepsilon = 10^{-4}.$$

La condition initiale que nous avons choisie pour notre étude est basée sur le principe utilisé dans les sources [14, 34]. Selon ce principe, au début de la catastrophe, tous les individus de la population étudiée se trouvent dans un état de routine quotidienne. Par conséquent, si nous notons $u_0 = (q_0, a_0, p_0, c_0, b_0) \in \mathbb{R}_+^5$ la condition initiale, elle doit vérifier les conditions suivantes :

$$\begin{cases} a_0(x) = 0, \\ p_0(x) = 0, \\ c_0(x) = 0, \\ \int_{\Omega} q_0(x) dx = 1, \\ b_0(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.94)$$

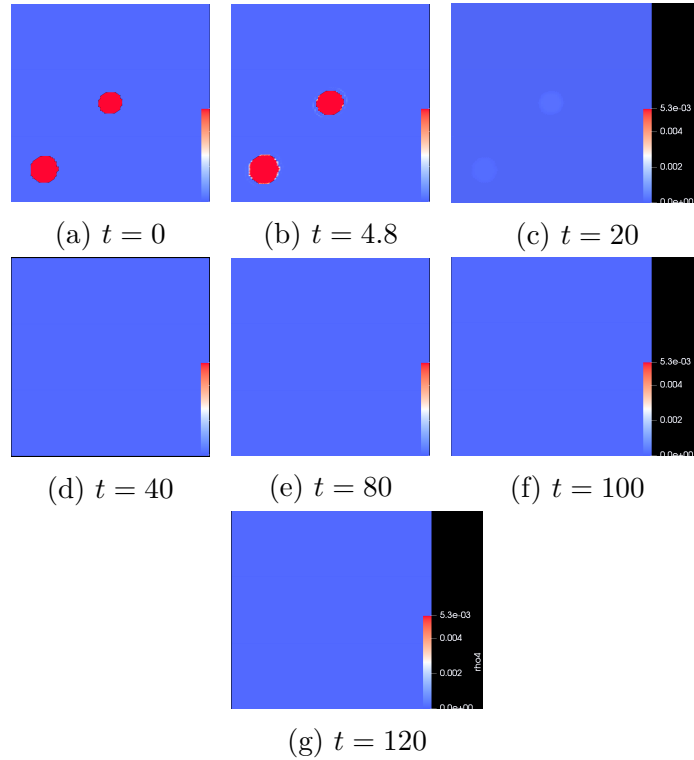


FIGURE 2.4 – Répartition dans l'espace la population en état du quotidien avant la catastrophe (Q).

La résolution numérique du problème a été réalisée sous *FreeFem++*, pour la visualisation, nous avons utilisé les logiciels *ParaView* et *Scilab* et nous avons les résultats numériques ci-dessous.

Les simulations obtenues se rapprochent assez bien des phénomènes observés lors mouvements des foules. En effet, on observe les différentes phases de migrations ci-dessous :

Les figures 2.4 à 2.8 représente la diffusion des différentes population dans le cas 1, c'est à dire

$$D_i(t) = 0.4 \exp \left(\int_{\Omega} u_i(t, y) dy \right), \quad 2 \leq i \leq 3. \quad (2.95)$$

Dans les FIGURE 2.4 et 2.5 on remarque tout d'abord une transition du comportement quotidien vers un état d'alert dans les premiers instants de la catastrophe jusqu'à l'extinction des individus en comportement du quotidien. Puis on remarque des transitions à double sens entre les populations en alerte et en panique, les populations en alerte et en contrôle et les populations en contrôle et en panique (voir les figures 2.5, 2.6 et 2.7). Enfin, on remarque aussi une transition à sens unique des individus ayant un comportement de contrôle vers un comportement de retour au quotidien entre les instants ($t = 40$ et $t = 70$) jusqu'à extinction des individus en comportement de contrôle (voir FIGURE 2.7 et 2.8). En comparant nos résultats avec ceux de [14, 34], on peut remarquer une persistance de la panique due au choix du jeu de paramètres que nous avons choisi (voir les figures 2.6d et 2.6e). On constate qu'avoir des coefficients de diffusion qui dépendent du

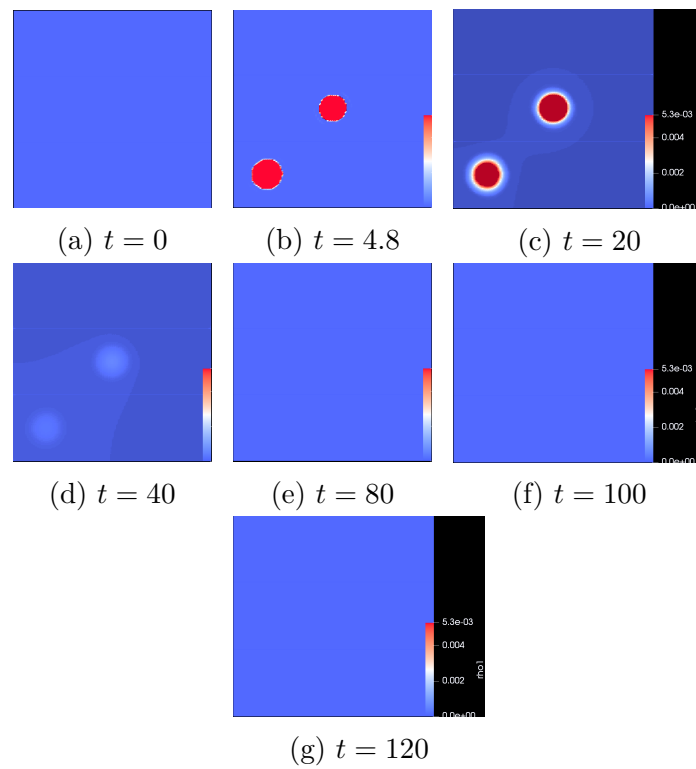


FIGURE 2.5 – Répartition dans l'espace de la population en alerte (A).

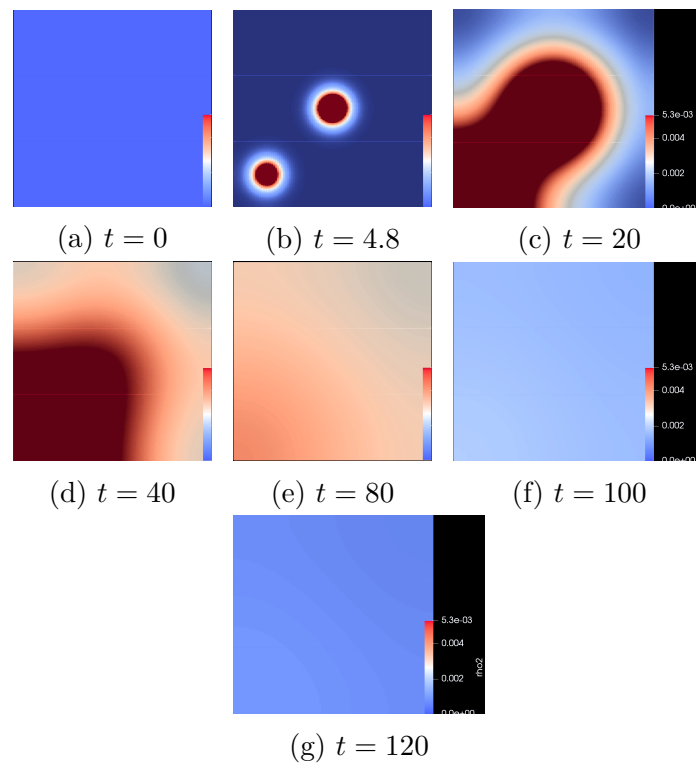


FIGURE 2.6 – Répartition dans l'espace de la population en panique (P).

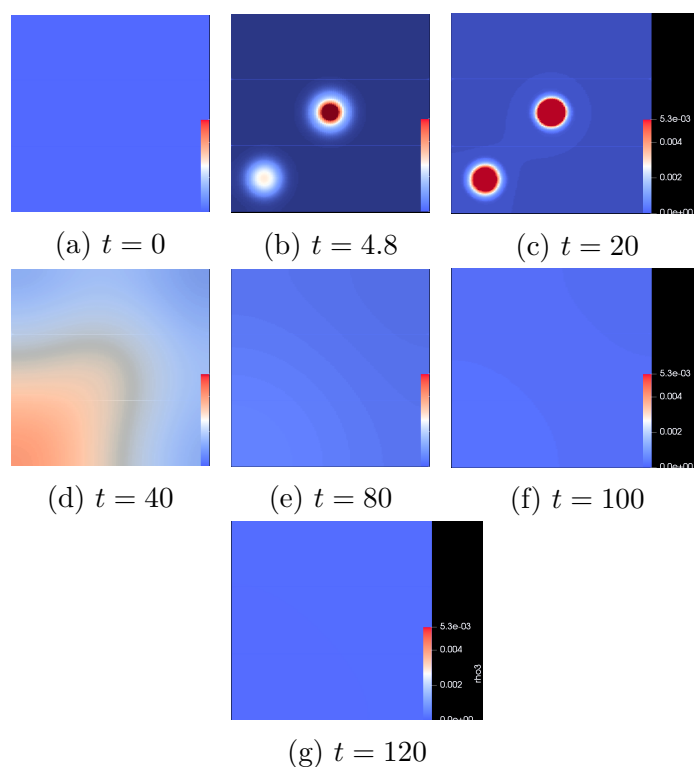


FIGURE 2.7 – Répartition dans l'espace de la population en contrôle (C).

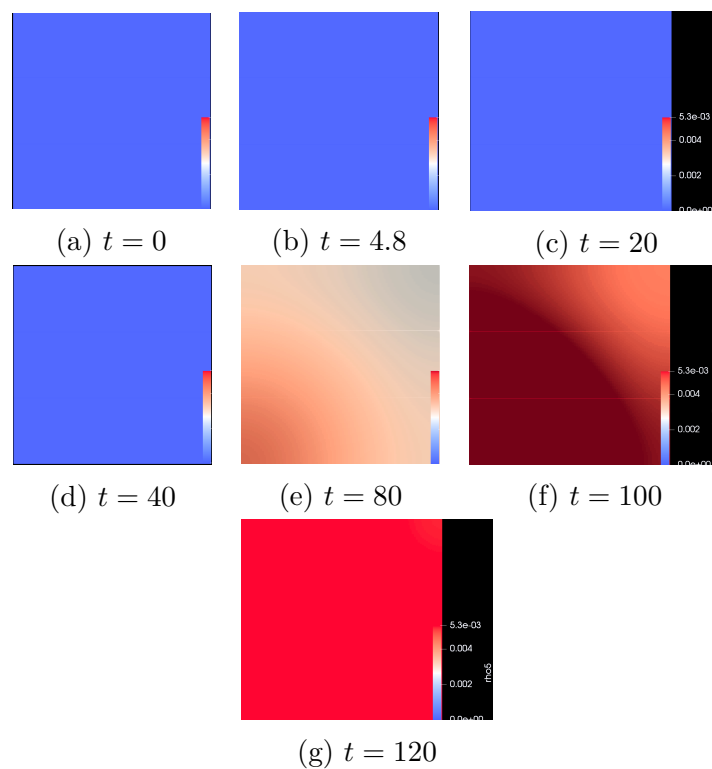


FIGURE 2.8 – Répartition dans l'espace de la population en état du quotidien après la catastrophe (B).

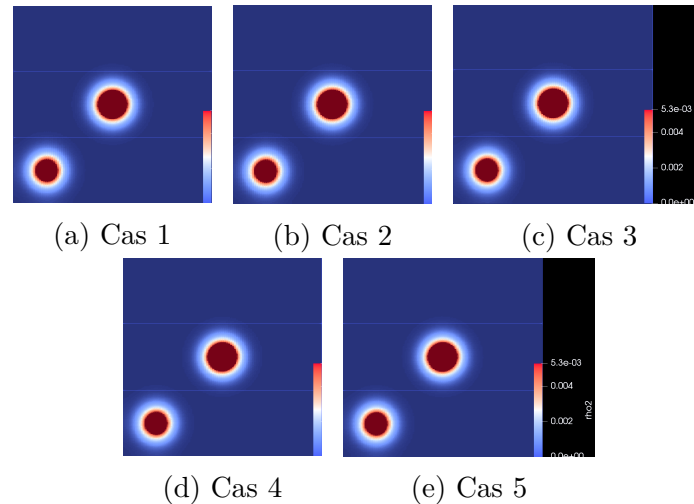


FIGURE 2.9 – Répartition dans l'espace de la population en panique à $t = 4.8$.

temps ne modifie pas la dynamique intrinsèque du modèle.

Toutefois, on verra dans la suite comment le choix de termes de diffusion non locaux a un effet sur la vitesse de diffusion de chaque population.

Les simulations ci-dessous présentent la comparaison à différents instants du temps de la répartition dans l'espace des populations en état de contrôle et panique. Pour une population donnée (en panique ou en contrôle), on considère les expressions des termes de diffusions définis par (2.89)-(2.93).

Notre attention est portée sur les phénomènes que l'on peut observer dans les situations suivantes :

- Le terme de diffusion a la même monotonie que la densité de population associée (cas 1 et 2).
- Le terme de diffusion à la même monotonie inverse à celle de la densité de population associée (cas 4 et 5).
- Le terme de diffusion est une fonction qui dépend de la densité d'individus présents dans la sous partie du domaine la plus peuplée à l'instant t (cas 2 et 5).

Dans toutes les simulations, on considère le cas 3 (diffusion locale) comme référence pour établir nos comparaisons.

Les constats observés dans les cas des populations en état de contrôle ou de panique sont les mêmes : on remarque que dans les cas où le terme de diffusion à une monotonie inverse à celle de la densité de population associée, la population se repartissait dans l'espace lentement tout en restant très concentrée autour de la zone la plus peuplée (voir figures 2.10d, 2.11d,2.10e, 2.11e,2.16d, 2.17d, 2.16e, 2.17e). Dans les cas où la monotonie du terme de diffusion est la même que celle de la densité de population associée, on constate le phénomène inverse. La population recouvre très rapidement la surface et elle a tendance à s'éloigner de la zone la plus concentrée (voir figures 2.10a, 2.11a, 2.10b, 2.11b,2.16a, 2.17a, 2.16b, 2.17b). Les résultats obtenus ne nous permettent pas de faire des conclusions. Si le terme de diffusion est une fonction qui dépend de la densité d'individus présents dans la sous partie du domaine la plus peuplée à l'instant t .

Les figures (2.14a) et (2.20a) donnent respectivement les valeurs de la norme dans $L^1(\Omega)$ à

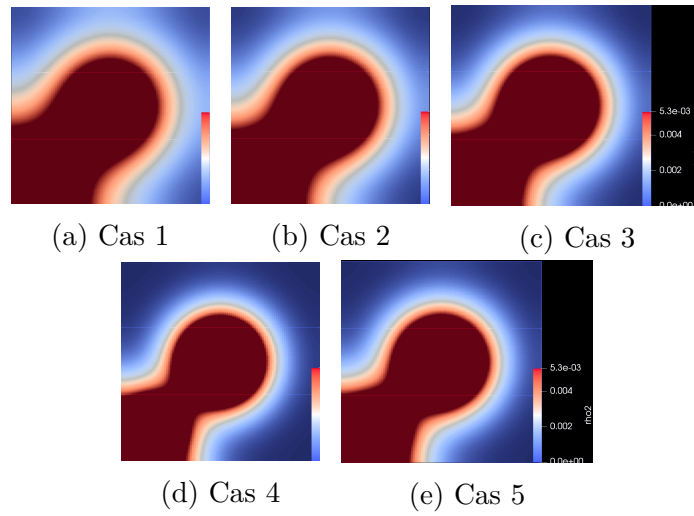


FIGURE 2.10 – Répartition dans l'espace de la population en panique à $t = 20$.

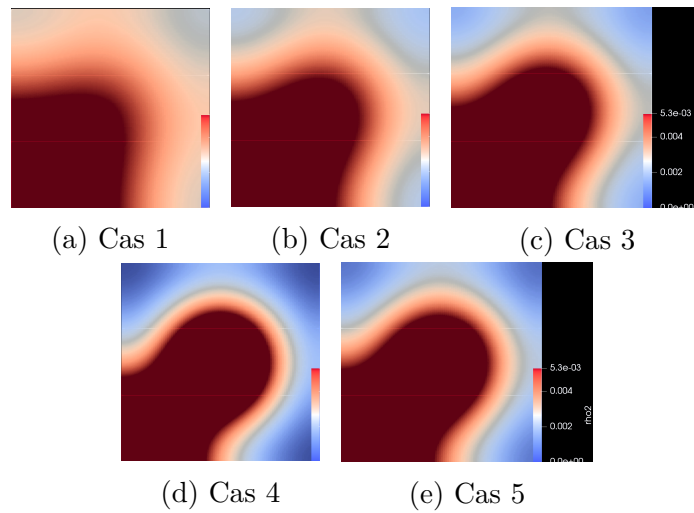


FIGURE 2.11 – Répartition dans l'espace de la population en panique à $t = 40$.

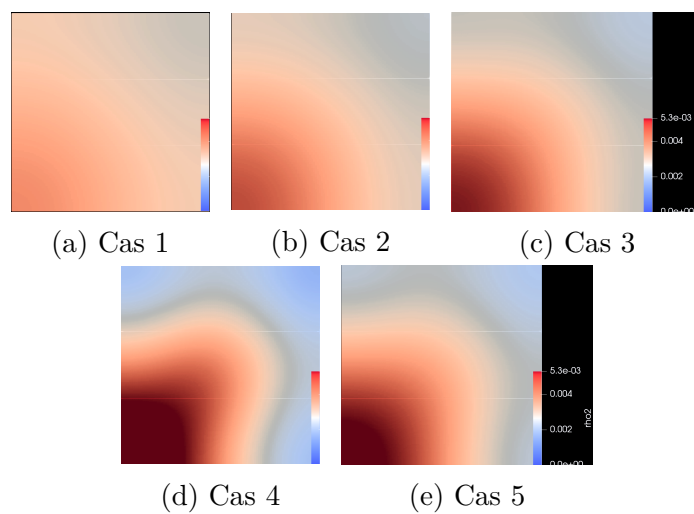


FIGURE 2.12 – Répartition dans l'espace de la population en panique à $t = 80$.

2.7. Simulations numériques : Application au modèle panique contrôle reflexe *PCR*

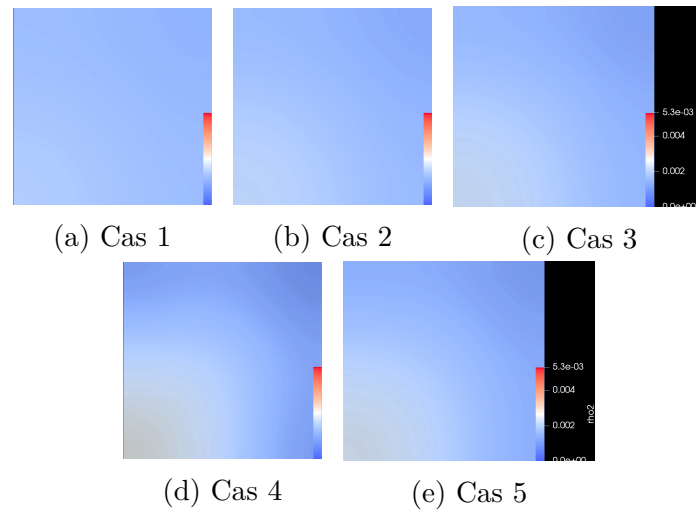


FIGURE 2.13 – Répartition dans l'espace de la population en panique à $t = 100$.

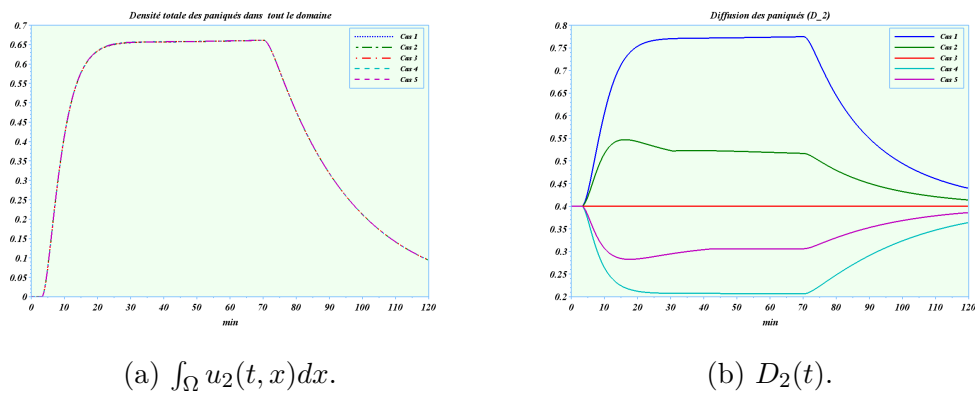


FIGURE 2.14 – Bilan panique.

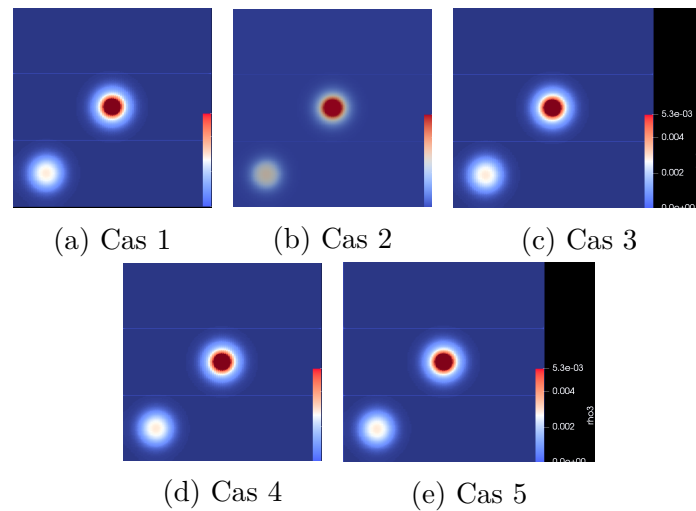


FIGURE 2.15 – Répartition dans l'espace de la population en contrôle à $t = 4.8$.

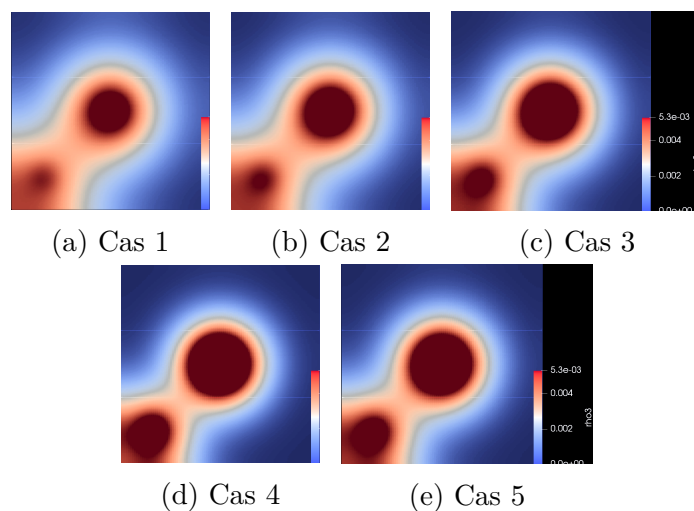


FIGURE 2.16 – Répartition dans l'espace de la population en contrôle à $t = 20$.

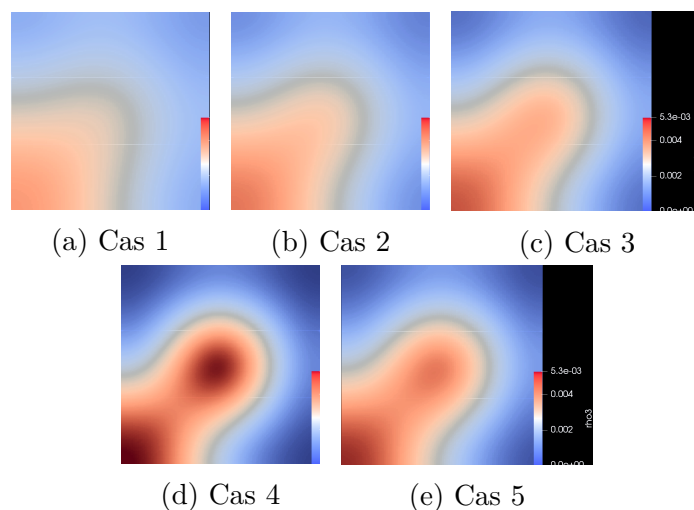


FIGURE 2.17 – Répartition dans l'espace de la population en contrôle à $t = 40$.

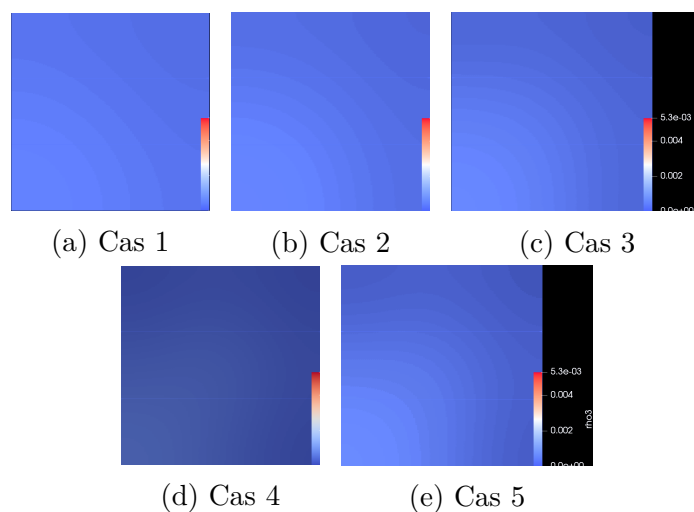


FIGURE 2.18 – Répartition dans l'espace de la population en contrôle à $t = 80$.

2.7. Simulations numériques : Application au modèle panique contrôle reflexe PCR

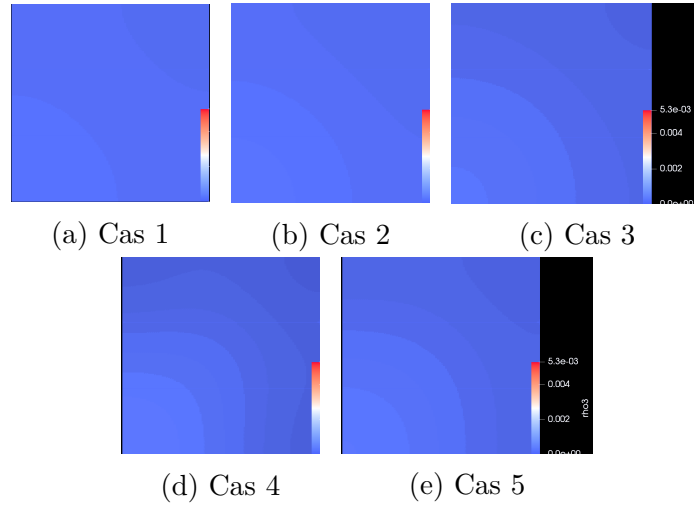
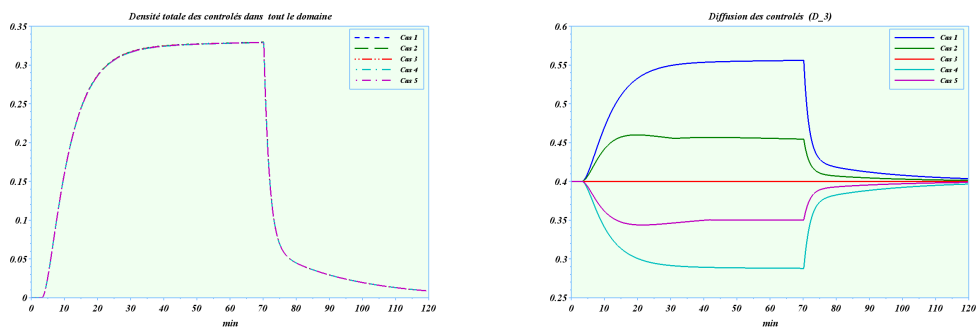


FIGURE 2.19 – Répartition dans l'espace de la population en contrôle à $t = 100$.



(a) $\int_{\Omega} u_3(t, x) dx$.

(b) $D_3(t)$.

FIGURE 2.20 – Bilan contrôle.

l'instant t des populations en panique et contrôle.

Chapitre 3

Réseau d'équations de réaction-diffusion à compartiments

3.1 Introduction

Introduction

En dynamique de population, le couplage consiste à relier différents modèles pour considérer des interactions entre les individus d'une population ou entre des populations d'espèces différentes. Ces interactions peuvent inclure les compétitions, les prédatons, les migrations, etc. Le couplage permet de simuler l'évolution de la population grâce à des informations sur les interactions entre les individus, qui peuvent avoir un impact important sur l'évolution de la population. Il permet également d'étudier les interactions entre différents facteurs environnementaux, telles que la disponibilité de la nourriture, les changements climatiques, les perturbations, etc.

Le travail que nous proposons dans ce chapitre, consiste à proposer un modèle mathématique macroscopique qui modélise les flux migratoires d'une ou plusieurs populations.

Les modèles de flux migratoire en dynamique de population permettent de décrire les interactions entre les facteurs qui influencent les déplacements des individus d'une population et les effets de ces déplacements sur la dynamique de la population. De plus, ils peuvent considérer des facteurs tels que les opportunités économiques, les conditions environnementales, les conflits, les politiques migratoires, etc.

Il existe plusieurs approches pour modéliser des flux migratoires en dynamique de population. Ces approches peuvent inclure une décomposition spatiale comme dans les modèles de métapopulation voir [5], des approches à l'échelle microscopique avec des modèles multi-agents ou des modèles à l'échelle macroscopique (voir [2, 7, 14, 55]).

Il est important de noter que le couplage de modèles en dynamique de population est un domaine de recherche en évolution et que les méthodes développées récemment ont des avancées majeures pour la thématique.

Les modèles macroscopiques qui traitent des flux migratoires, tels que ceux que nous avons rencontrés dans la littérature (voir [2, 7, 14, 55]), font face à des difficultés lorsqu'il s'agit d'intégrer précisément la variable d'espace et de vérifier le principe de conservation des flux. De plus, il est difficile de définir de manière adéquate des modèles couplés sur des domaines disjoints.

Dans ces modèles, les populations se déplacent d'un domaine A vers un domaine B, et ces domaines peuvent avoir des configurations différentes. Cependant, la plupart des modèles considèrent simplement que les domaines ont la même configuration. Cette simplification remet en question de nombreux résultats obtenus lors de l'analyse de ces modèles. Il est essentiel de tenir compte des différences de configuration des domaines pour garantir une modélisation précise et réaliste des flux migratoires.

De plus, certains modèles, comme celui présenté dans [2], utilisent un couplage de l'intérieur d'un neurone vers l'intérieur d'un autre neurone. Cependant, cette approche de couplage ne reflète pas fidèlement la réalité, car les neurotransmetteurs sont émis depuis le bord d'un neurone et reçus par les autres neurones également au niveau de leur bord. Cette divergence entre la modélisation et la réalité peut conduire à des résultats peu fiables et à des conclusions erronées.

La modélisation précise des flux migratoires et des couplages entre populations nécessite donc une approche plus sophistiquée qui tienne compte des configurations spécifiques des domaines et des mécanismes réels de communication entre individus. Des développements théoriques et méthodologiques supplémentaires sont nécessaires pour surmonter ces défis et améliorer la fiabilité des modèles macroscopiques dans l'étude des flux migratoires et des couplages entre populations.

3.2 Construction d'un modèle de couplage pour des modèles de réaction-diffusion

3.2.1 Modèle 2-1 : 2 nœuds et 1 population par nœud

Considérons un réseau constitué de deux nœuds, notés 1 et 2, où évoluent deux populations distinctes, de densité respectivement U_1 et U_2 . Chaque population occupe un domaine d'espace particulier, noté Ω_1 pour U_1 et Ω_2 pour U_2 . Les domaines Ω_1 et Ω_2 sont supposés être bornés, fermés de \mathbb{R}^d , où $1 \leq d \leq 3$. On suppose aussi que les frontières de ces domaines sont suffisamment régulières.

Le choix d'un tel réseau est souvent utilisé pour modéliser des systèmes où les interactions entre les populations ont lieu dans zones géographiques spécifiques, comme c'est le cas pour des écosystèmes fragmentés en plusieurs zones distinctes. En particulier, l'analyse de ce type de réseau permet de comprendre comment la connectivité et la structure spatiale des domaines occupés par les populations peuvent influencer leur dynamique et leur coexistence.

On considère les hypothèses suivantes :

- (\mathcal{H}_1) : Les domaines Ω_1, Ω_2 sont disjoints et ils vérifient la condition suivante $|\Omega_1| \neq 0, |\Omega_2| \neq 0$.
- (\mathcal{H}_2) : La migration est unidirectionnelle. La population de densité U_1 se déplace de Ω_1 vers Ω_2 , mais il n'y a pas de migration dans le sens inverse.
- (\mathcal{H}_3) : La diffusion ne se produit qu'à l'intérieur de chaque domaine, Il n'y a pas d'échange de population à travers les bords de Ω_1 et Ω_2 . Autrement dit, on suppose des conditions aux bords de type Neumann homogène.

Ces hypothèses permettent de simplifier l'étude du système en restreignant les interactions entre les populations aux seuls déplacements de U_1 de Ω_1 à Ω_2 . Elles sont couramment utilisées dans les modèles de migration unidirectionnelle, où l'on cherche à comprendre l'impact de la migration sur la dynamique des populations, en supposant que la migration se fait principalement dans un seul sens. Ces hypothèses peuvent également être relaxées pour étudier des cas plus com-

3.2. Construction d'un modèle de couplage pour des modèles de réaction-diffusion

plexes où la migration est bidirectionnelle ou implique des échanges de populations à travers les frontières des domaines.

Sous les hypothèses énoncées précédemment, il est possible d'établir les équations d'évolution dans les deux domaines Ω_1 et Ω_2 en utilisant les outils de modélisation des phénomènes de réaction-diffusion.

Plus précisément, la variation de la densité de population U_1 dans Ω_1 est gouvernée par la diffusion (locale ou non-locale) de cette population dans le domaine Ω_1 , ainsi que par sa dynamique interne, qui englobe les naissances et les mortalités. En outre, la migration unidirectionnelle de Ω_1 à Ω_2 doit également être prise en compte.

En d'autres termes, l'évolution de la population dans Ω_1 peut être décrite par une équation de type réaction-diffusion avec terme source, où le terme de diffusion traduit la dispersion de la population à l'intérieur de Ω_1 , le terme de réaction représente la dynamique interne de la population, et le terme source reflète les effets de la migration unidirectionnelle.

Il convient de noter que cette description simplifiée peut être étendue pour prendre en compte des interactions plus complexes entre les populations et les domaines, en prenant en compte des termes supplémentaires dans les équations d'évolution.

Nous introduisons une hypothèse supplémentaire :

— (\mathcal{H}_4) : Nous supposons que la diffusion dans Ω_1 (respectivement dans Ω_2) est locale.

Sous les hypothèses $(\mathcal{H}_1) - (\mathcal{H}_4)$, nous pouvons déduire l'équation d'évolution de la densité de population U_1 sur Ω_1 , à savoir :

$$\begin{cases} \partial_t U_1(t, x_1) = D_1 \Delta U_1 + F_1(U_1) - \Lambda_{21}(U_1, x_1), & t > 0, x_1 \in \Omega_1, \\ \partial_{n_1} U_1(t, x_1) = 0, & t > 0, x_1 \in \partial\Omega_1 \end{cases} \quad (3.1)$$

Dans cette équation, $U_1(t, x_1)$ représente la densité de la population présente en $x_1 \in \Omega_1$ à l'instant t . Le coefficient de diffusion de la population est représenté par D_1 , tandis que F_1 représente le processus de création de nouveaux individus dans Ω_1 . Le terme $\Lambda_{21}(U_1, x_1)$ modélise le taux de déplacement des individus de la population de Ω_1 vers Ω_2 depuis $x_1 \in \Omega_1$ à l'instant t .

Remarque 3.2.1. Dans ce contexte, le taux Λ_{21} est une fonction dépendant de $U_1(t, x_1)$ et de la probabilité de migration de Ω_1 vers Ω_2 depuis x_1 .

De plus, notons :

— $\varphi_{21}(U_1)$ la proportion de la densité de population ayant migré de Ω_1 vers Ω_2 à l'instant t .
Pour tout $u \geq 0$ on a les conditions suivantes :

$$(\mathcal{P}_1) : \quad \varphi_{21}(u) \geq 0 \quad \text{et} \quad \varphi_{21}(0) = 0.$$

Cette condition est justifiée par la nature même de la fonction $\varphi_{21}(\cdot)$, qui représente une proportion de densité de population migrante et est donc toujours positive. En outre, en l'absence de population initiale U_1 dans la zone Ω_1 , il est logique de considérer que la proportion de migration vers la zone Ω_2 est nulle, d'où l'énoncé de la deuxième condition de (\mathcal{P}_1) .

De plus, on suppose qu'il existe des constantes positives C et α telles que $0 \leq C \leq 1$ et $0 \leq \alpha \leq 1$ et pour tout $u \geq 0$, on a :

$$(\mathcal{P}_2) : \varphi_{21}(u) \leq C|u|^\alpha. \quad (3.2)$$

La condition (\mathcal{P}_2) découle du fait que la proportion de la densité de population migrant de la zone Ω_1 vers la zone Ω_2 à l'instant t ne peut être supérieure à la densité de population totale présente dans la zone Ω_1 .

- $P_{21}(x_1)$ la probabilité de rejoindre Ω_2 depuis $x_1 \in \Omega_1$. Sous ces notations on peut écrire $\Lambda_{21}(U_i, x_1)$ sous la forme suivante :

$$\Lambda_{21}(U_1, x_1) = \varphi_{21}(U_1) P_{21}(x_1). \quad (3.3)$$

- K_{21} la probabilité de se déplacer de la zone Ω_1 vers la zone Ω_2 . Pour tout $x \in \Omega_1$ et $y \in \Omega_2$ on a :

$$K_{21}(x, y) := \text{la probabilité de se déplacer de } x \text{ vers } y.$$

Dans cette partie, nous allons déterminer l'expression de $P_{21}(x)$ pour tout $x \in \Omega_1$ en utilisant une approche basée sur une variable aléatoire Z opportunément définie. Cette variable aléatoire décrit les déplacements du domaine Ω_1 vers Ω_2 et nous permet de modéliser les mouvements entre les deux domaines. Grâce à cette approche, nous serons en mesure d'obtenir une expression précise de $P_{21}(x)$ pour tout $x \in \Omega_1$. On définit la variable aléatoire Z par :

$$Z(\Omega) = \{(x, y) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \mid K_{21}(x, y) \neq 0\},$$

où $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Pour $(x, y) \in Z(\Omega)$, on a $P(Z = (x, y)) = K_{21}(x, y)$. Soit $x \in \Omega_1$. Alors l'évènement "rejoindre Ω_2 depuis x " est défini par :

$$Z_x := \bigcup_{y \in \Omega_2} \{(x, y) \mid K_{21}(x, y) \neq 0\},$$

et pour tout $x \in \Omega_1$, on a :

$$Z_x \subset \{x\} \times \Omega_2 \subset Z(\Omega).$$

Pour tout $y \in \Omega_2$ tel que $(x, y) \notin Z_x$, on a :

$$P(Z = (x, y)) = K_{21}(x, y) = 0,$$

donc

$$P(Z \in Z_x) = P(Z \in \{x\} \times \Omega_2) = \int_{\Omega_2} K_{21}(x, y) dy.$$

Il en résulte que pour tout $x \in \Omega_1$, $P_{21}(x)$ donnée par :

$$P_{21}(x) = \int_{\Omega_2} K_{21}(x, y) dy. \quad (3.4)$$

Remarque 3.2.2. On peut remarquer que pour tout $x \in \Omega_1$ on a :

$$P(Z \in Z_x) \leq P\left(Z \in \bigcup_{x_1 \in \Omega_1} Z_{x_1}\right) = P(Z \in \Omega_1 \times \Omega_2) = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} K_{21}(x_1, y) dy\right) dx_1 = 1.$$

3.2. Construction d'un modèle de couplage pour des modèles de réaction-diffusion

D'après l'équation (3.4), on peut reformuler l'équation (3.3) de la manière suivante

$$\Lambda_{21}(U_1, x_1) = \varphi_{21}(U_1) \int_{\Omega_2} K_{21}(x_1, y) dy, \quad (3.5)$$

ce qui permet de réécrire (3.1) sous la forme suivante :

$$\partial_t U_1(t, x_1) = D_1 \Delta U_1 + F_1(U_1) - \varphi_{21}(U_1) \int_{\Omega_2} K_{21}(x_1, y) dy, \quad t > 0, \quad x_1 \in \Omega_1. \quad (3.6)$$

Nous allons maintenant étudier l'évolution de la densité de population U_2 dans le domaine Ω_2 . Cette évolution est régie par une équation qui prend en compte plusieurs facteurs : la diffusion locale ou non-locale de la population dans Ω_2 , la dynamique interne de la population (naissance - mortalité) et le flux des migrants accueillis en x_2 (c'est-à-dire la proportion d'individus ayant migré de Ω_1 vers Ω_2 et qui sont accueillis en $x_2 \in \Omega_2$).

Sous les hypothèses $(\mathcal{H}_1) - (\mathcal{H}_4)$, l'équation d'évolution de la population U_2 sur Ω_2 est la suivante :

$$\partial_t U_2(t, x_2) = D_2 \Delta U_2 + F_2(U_2) + \theta_{21}(U_1, x_2), \quad t > 0, \quad x_2 \in \Omega_2, \quad (3.7)$$

où D_2 est le coefficient de diffusion, Δ est l'opérateur laplacien, $F_2(U_2)$ est la dynamique interne de la population et $\theta_{21}(U_1, x_2)$ représente la proportion des migrants accueillis en x_2 . Cette équation permet de modéliser l'évolution de la population dans le domaine Ω_2 dans le temps.

Remarque 3.2.3. $\theta_{21}(U_1, x_2)$ est une fonction qui dépend de la capacité d'accueil en un point x_2 ainsi que de la proportion totale de la densité U_1 d'individus ayant migré de Ω_1 vers Ω_2 à l'instant t . Notons ψ_{21} proportion total de la densité d'individus U_1 ayant migré de Ω_1 vers Ω_2 à l'instant t . Alors, on a

$$\psi_{21}(U_1) = \int_{\Omega_1} \left(\varphi_{21}(U_1) \int_{\Omega_2} K_{21}(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1. \quad (3.8)$$

Notons : $\varepsilon_2(t, x_2, |\Omega_2|)$ la capacité d'accueil en x_2 à l'instant t . $\varepsilon_2(t, x_2, |\Omega_2|)$ est une fonction qui dépend de la probabilité de pouvoir recevoir des individus en x_2 à l'instant t et de Ω_2 .

Dans toute la suite, on considère l'hypothèse suivante :

$$(\mathcal{H}_5) : \quad \varepsilon_2(t, x_2, |\Omega_2|) = \varepsilon_2(|\Omega_2|),$$

c'est à dire, on suppose que la répartition des migrants sur Ω_2 est uniforme en tout point et à tout instant.

On déduit alors que :

$$\theta_{21}(U_1, x_2) = \varepsilon_2(|\Omega_2|) \psi_{21}(U_1). \quad (3.9)$$

Donc (3.7) devient :

$$\partial_t U_2(t, x_2) = D_2 \Delta U_2 + F_2(U_2) + \varepsilon_2(|\Omega_2|) \psi_{21}(U_1), \quad t > 0, \quad x_2 \in \Omega_2,$$

et alors, sous les hypothèses $(\mathcal{H}_1) - (\mathcal{H}_5)$, le modèle couplé des équations d'évolutions des populations U_1 et U_2 est donné par :

$$\begin{cases} \partial_t U_1(x_1) = D_1 \Delta U_1 + F_1(U_1) - \varphi_{21}(U_1) \int_{\Omega_2} K_{21}(x_1, y) dy, & t > 0, x_1 \in \Omega_1 \\ \partial_t U_2(t, x_2) = D_2 \Delta U_2 + F_2(U_2) + \varepsilon_2(|\Omega_2|) \int_{\Omega_1} \left(\varphi_{21}(U_1) \int_{\Omega_2} K_{21}(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1, & t > 0, x_2 \in \Omega_2, \end{cases} \quad (3.10)$$

Selon la loi de conservation des flux, à l'instant t , la proportion totale de la densité d'individus U_1 sortant de Ω_1 est égal à la proportion totale de la densité d'individus U_1 accueillis sur Ω_2 . En utilisant les équations (3.1) et (3.7), on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \Lambda_{21}(U_1, x_1) dx_1 &= \int_{\Omega_2} \theta_{21}(U_1) dx_2. \\ &= \theta_{21}(U_1) |\Omega_2|. \end{aligned}$$

D'après les (3.5) et (3.9), on a :

$$\int_{\Omega_1} \left(\varphi_{21}(U_1) \int_{\Omega_2} K_{21}(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 = \varepsilon_2(|\Omega_2|) |\Omega_2| \int_{\Omega_1} \left(\varphi_{21}(U_1) \int_{\Omega_2} K_{21}(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1,$$

d'où,

$$\varepsilon_2(|\Omega_2|) |\Omega_2| = 1,$$

donc

$$\varepsilon_2(|\Omega_2|) = \frac{1}{|\Omega_2|}.$$

En résumé, en supposant que les hypothèses $(\mathcal{H}_1) - (\mathcal{H}_5)$ sont satisfaites, nous obtenons le modèle couplé suivant :

$$\begin{cases} \partial_t U_1(t, x_1) = D_1 \Delta U_1 + F_1(U_1) - \varphi_{21}(U_1) \int_{\Omega_2} K_{21}(x_1, x_2) dx_2, & t > 0, x_1 \in \Omega_1, \\ \partial_t U_2(t, x_2) = D_2 \Delta U_2 + F_2(U_2) + \frac{1}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_1} \left(\varphi_{21}(U_1) \int_{\Omega_2} K_{21}(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1, & t > 0, x_2 \in \Omega_2, \\ \partial_{\eta_1} U_1(t, x_1) = \partial_{\eta_2} U_2(t, x_2) = 0, & (t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega_1 \times \partial\Omega_2, \end{cases} \quad (3.11)$$

où η_1 et η_2 sont des vecteurs normaux orientés vers l'extérieur des bords Ω_1 et Ω_2 , respectivement. Le modèle obtenu est bien défini et il conserve le flux à chaque instant. On peut remarquer que le modèle (3.11) ne demande aucune hypothèse sur les deux domaines Ω_1 et Ω_2 , mis à part qu'ils soient des domaines bornés \mathcal{C}^1 . Ces deux domaines peuvent donc être différents, de différente forme et taille. Cette approche est donc plus générale par rapport aux modèles couplés présents en littérature [2, 14, 55].

Nous nous intéressons ici au couplage linéaire, qui correspond à la sélection d'une fonction $\varphi_{21}(\cdot)$ linéaire. Plus précisément, nous posons

$$\varphi_{21}(U_1) = mU_1, \quad m > 0.$$

3.3. Couplage dans un réseau de taille finie : une méthode générale de modélisation

Pour tout $x_1 \in \Omega_1$, on choisit K_{21} tel que

$$\int_{\Omega_2} K_{21}(x_1, x_2) dx_2 = 1.$$

Ainsi, le système (3.11) devient :

$$\begin{cases} \partial_t U_1(t, x_1) = D_1 \Delta U_1 + F_1(U_1) - m U_1, & t > 0, x_1 \in \Omega_1, \\ \partial_t U_2(t, x_2) = D_2 \Delta U_2 + F_2(U_2) + \frac{m}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_1} U_1 dx_1, & t > 0, x_2 \in \Omega_2, \\ \partial_{\eta_1} U_1(t, x_1) = \partial_{\eta_2} U_2(t, x_2) = 0, & (t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega_1 \times \partial\Omega_2. \end{cases}$$

3.3 Couplage dans un réseau de taille finie : une méthode générale de modélisation

Nous étudions un réseau composé de n nœuds, où chaque nœud représente un domaine dans lequel une population évolue. Les nœuds sont reliés entre eux par deux types de connexions :

- des connexions intérieures, qui relient l'intérieur d'un domaine à l'intérieur d'un autre domaine ;
- des connexions de bord, qui connectent le bord d'un domaine à l'intérieur d'un autre domaine.

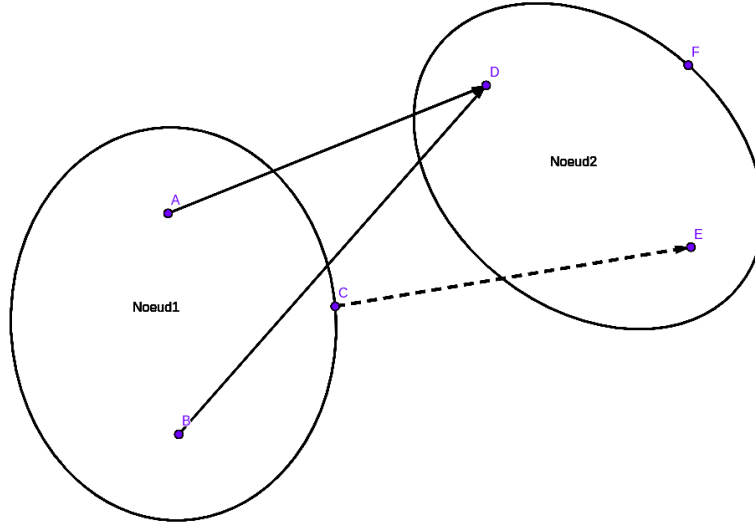


FIGURE 3.1 – Type de connexions entre domaines différents. Les connexions intérieures sont représentées ici en ligne continue et les connexions de bord en pointillé.

Nous posons les hypothèses suivantes :

- $\mathcal{H}_1(\mathbf{n})$: Pour tout entier $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on suppose que Ω_i est un domaine borné, fermé de \mathbb{R}^d , où $1 \leq d \leq 3$. On suppose aussi que le bord $\partial\Omega_i$ est suffisamment régulier et $|\Omega_i| \neq 0$.
- $\mathcal{H}_2(\mathbf{n})$: Pour tout (i, j) appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, on suppose que l'intersection des fermetures de Ω_i et de Ω_j est vide, c'est-à-dire $\bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j = \emptyset$.

- $\mathcal{H}_3(\mathbf{n})$: La distribution des migrants est uniforme sur l'ensemble des centres d'accueil, sans distinction de lieu ou de période.
- $\mathcal{H}_4(\mathbf{n})$: S'il n'y a pas de connexions de bord, il n'y a pas de transfert de flux de population à travers les frontières, ce qui implique une condition de Neumann homogène en l'absence de couplage.

Définition 3.3.1. Pour chaque paire (i, j) d'entiers distincts appartenant à l'intervalle $\llbracket 1, n \rrbracket$, on définit K_{ji} comme étant la probabilité de se déplacer de $\bar{\Omega}_i$ vers Ω_j . Autrement dit, pour tout $(x, y) \in \bar{\Omega}_i \times \Omega_j$, la fonction $K_{ji}(x, y)$ donne la probabilité de se déplacer de x à y .

Remarque 3.3.2. Si i et j sont deux nœuds reliés par une arête allant de i à j , alors selon la Définition 3.3.1, la probabilité d'atteindre Ω_j à partir d'un point x appartenant à $\bar{\Omega}_i$ est donnée par :

$$P_{ji}(x) := \int_{\Omega_j} K_{ji}(x, y) dy. \quad (3.12)$$

La prise en compte de cette probabilité est d'une importance capitale pour résoudre le problème de définition rencontré dans la modélisation du système couplés. Cette probabilité est justifiée par le fait que, dans la réalité, la possibilité de se rendre dans un lieu donné dépend de divers facteurs tels que des facteurs sociaux, économiques et environnementaux. L'hypothèse selon laquelle cette probabilité est définie sur $\bar{\Omega}_i \times \Omega_j$ permet de modéliser les départs depuis Ω_i ainsi que depuis son bord $\partial\Omega_i$, mais exclut les arrivées sur le bord Ω_j . C'est cette même probabilité qui permet d'établir un couplage non local entre les différents nœuds du réseau.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note la densité U_i de population qui évolue sur le domaine Ω_i . La population migre depuis le domaine Ω_i sur différents domaines Ω_j , $j \neq i$ et le domaine Ω_i reçoit des migrants en provenance des $\bar{\Omega}_k$, $k \neq i$, à chaque instant $(j, k \in \llbracket 1, n \rrbracket)$.

Afin de faciliter la lecture et d'assurer une meilleure compréhension, nous utiliserons les notations suivantes tout au long de cette construction.

- Nous noterons par φ_{ji} la fonction qui représente la proportion de la densité d'individus U_i qui se déplace de la région Ω_i vers la région Ω_j à l'instant t . Pour tout point x dans $\Omega_i \setminus \partial\Omega_i$, la proportion de la densité d'individus U_i se trouvant en x et qui se déplace vers Ω_j à l'instant t est donné par :

$$\Lambda_{ji}^I(U_i, x) := \varphi_{ji}(U_i) P_{ji}(x) = \varphi_{ji}(U_i) \int_{\Omega_j} K_{ji}(x, y) dy. \quad (3.13)$$

La proportion totale de la densité d'individus U_i ayant migré de $\bar{\Omega}_i$ vers Ω_j à l'instant t est donnée par :

$$\psi_{ji}^I(U_i(t, \cdot)) := \int_{\Omega_i} \Lambda_{ji}^I(U_i, x) dx = \int_{\Omega_i} \left(\varphi_{ji}(U_i) \int_{\Omega_j} K_{ji}(x, y) dy \right) dx.$$

- g_{ji} modélise la proportion de la densité d'individus U_i qui part de $\partial\Omega_i$ pour Ω_j . Pour tout $x \in \partial\Omega_i$ la proportion d'individus U_i qui part de x pour Ω_j à l'instant t est défini par :

$$\Lambda_{ji}^B(U_i, x) := g_{ji}(U_i) P_{ji}(x) = g_{ji}(U_i) \int_{\Omega_j} K_{ji}(x, y) dy. \quad (3.14)$$

La proportion totale de la densité d'individus U_i ayant migré de $\partial\Omega_i$ vers Ω_j à l'instant t est donnée par :

3.3. Couplage dans un réseau de taille finie : une méthode générale de modélisation

$$\psi_{ji}^B(U_i(t, \cdot)) := \int_{\partial\Omega_i} \Lambda_{ji}^B(U_i, x) dx = \int_{\partial\Omega_i} \left(g_{ji}(U_i) \int_{\Omega_j} K_{ji}(x, y) dy \right) dx.$$

- $\psi_{ji}(U_i(t, \cdot))$ la proportion totale de la densité d'individus U_i ayant effectué le déplacement vers Ω_j à l'instant t , est définie par

$$\psi_{ji}(U_i(t, \cdot)) := \psi_{ji}^I(U_i(t, \cdot)) + \psi_{ji}^B(U_i(t, \cdot)).$$

- $\varepsilon_j(t, y, |\Omega_j|)$ modélise la capacité d'accueil en $y \in \Omega_j$ à l'instant t . Sous l'hypothèse $\mathcal{H}_3(\mathbf{n})$ on peut écrire la relation suivante :

$$\varepsilon_j(t, y, |\Omega_j|) = \frac{1}{|\Omega_j|}.$$

- $\theta_{ji}^I(U_i(t, \cdot))$ représente la proportion de la densité d'individus U_i qui se sont déplacés de $\overset{\circ}{\Omega}_j$ vers Ω_j à l'instant t et qui sont accueillis en un emplacement quelconque de Ω_j . Elle est définie par l'expression suivante :

$$\theta_{ji}^I(U_i(t, \cdot)) := \frac{1}{|\Omega_j|} \psi_{ji}^I(U_i(t, \cdot)) = \frac{1}{|\Omega_j|} \int_{\Omega_i} \left(\varphi_{ji}(U_i) \int_{\Omega_j} K_{ji}(x, y) dy \right) dx, \quad (3.15)$$

où $\varphi_{ji}(U_i)$ est la densité d'individus qui se sont déplacés de Ω_i vers Ω_j à l'instant t .

- $\theta_{ji}^B(U_i(t, \cdot))$ quantifie la proportion de la densité des individus U_i qui se sont déplacés de $\partial\Omega_i$ vers Ω_j à l'instant t et qui sont accueillis en un emplacement quelconque de Ω_j . Elle est définie par :

$$\theta_{ji}^B(U_i(t, \cdot)) := \frac{1}{|\Omega_j|} \psi_{ji}^B(U_i(t, \cdot)) = \frac{1}{|\Omega_j|} \int_{\partial\Omega_i} \left(g_{ji}(U_i) \int_{\Omega_j} K_{ji}(x, y) dy \right) dx \quad (3.16)$$

On considère l'ensemble suivant :

$$E_I := \left\{ (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j, \mid \exists x \in \overset{\circ}{\Omega}_i \mid P_{ji}(x) = \int_{\Omega_j} K_{ji}(x, y) dy \neq 0 \right\}.$$

Cet ensemble représente l'ensemble des nœuds qui sont connectés entre eux par une connexion ayant pour origine l'intérieur du nœud de départ . Par exemple, si $(i, j) \in E_I$, cela signifie que les domaines Ω_i et Ω_j sont connectés dans le sens de i à j . Ainsi, il existe au moins une région dans Ω_i à partir de laquelle il est possible de partir pour atteindre Ω_j . De plus, soit :

$$E_B := \left\{ (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j, \mid \exists x \in \partial\Omega_i \mid P_{ji}(x) = \int_{\Omega_j} K_{ji}(x, y) dy \neq 0 \right\}.$$

Par analogie, cet ensemble représente l'ensemble des nœuds qui sont connectés entre eux par une connexion ayant pour origine le bord du nœud de départ. Par exemple, si $(i, j) \in E_B$, cela signifie que les domaines Ω_i et Ω_j sont connectés dans le sens de i à j . Ainsi, il existe au moins une région dans $\partial\Omega_i$ à partir de laquelle il est possible de partir pour atteindre Ω_j .

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on définit :

- $I_i^{out} := \{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\} \mid (i, j) \in E_I\}$ l'ensemble des nœuds qui sont joignables à partir de l'intérieur du nœud i ;

- $I_i^{in} := \{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\} \mid (j, i) \in E_I\}$ l'ensemble des nœuds depuis l'intérieur desquels on peut rejoindre le nœud i ;
- $B_i^{out} := \{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\} \mid (i, j) \in E_B\}$ l'ensemble des nœuds qui sont joignables depuis le bord de Ω_i ;
- $B_i^{in} := \{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\} \mid (j, i) \in E_B\}$ l'ensemble des nœuds depuis le bord desquels on peut rejoindre le nœud i .

En utilisant ces notations et les hypothèses $\mathcal{H}_1(\mathbf{n})$ à $\mathcal{H}_4(\mathbf{n})$, on en déduit les équations du modèle couplé :

$$\begin{cases} \partial_t U_i = \Delta_i U_i + F_i(U_i) - \sum_{j \in I_i^{out}} \Lambda_{ji}^I(U_i, x) + \sum_{j \in I_i^{in}} \theta_{ij}^I(U_j(t, \cdot)) + \sum_{j \in B_i^{in}} \theta_{ij}^B(U_j(t, \cdot)), & t > 0, x \in \Omega_i, \\ \partial_{\eta_i} U_i = - \sum_{j \in B_i^{out}} \Lambda_{ji}^B(U_i, x), & t > 0, x \in \partial\Omega_i, i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \end{cases} \quad (3.17)$$

où $\Lambda_{ji}^I, \Lambda_{ji}^B, \theta_{ij}^I, \theta_{ij}^B$ sont respectivement définis en (3.13), (3.14), (3.15), (3.16), η_i est un vecteur normal au bord Ω_i orienté vers l'extérieure et F_i le terme source. De plus,

$$\Delta_i = \Delta_{\Omega_i}, \quad \text{c'est à dire que} \quad \Delta_i U_i = \Delta U_i, \quad x \in \Omega_i.$$

Théorème 3.3.3. *Sous les hypothèses $\mathcal{H}_1(\mathbf{n}) - \mathcal{H}_4(\mathbf{n})$, le modèle (3.17) est bien défini et satisfait le principe de conservation des flux, autrement dit :*

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} U_i(t, x_i) dx_i = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} F_i(U_i) dx_i. \quad (3.18)$$

Démonstration. On suppose que (3.17) admet une solution $(U_i)_{1 \leq i \leq n}^T$, alors on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega_i} \partial_t U_i dx_i \right) &= \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega_i} \Delta U_i dx_i + \int_{\Omega_i} F_i(U_i) dx_i - \sum_{j \in I_i^{out}} \int_{\Omega_i} \Lambda_{ji}^I(U_i, x_i) dx_i + \sum_{j \in I_i^{in}} \int_{\Omega_i} \theta_{ij}^I(U_j(t, \cdot)) dx_i \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j \in B_i^{in}} \int_{\Omega_i} \theta_{ij}^B(U_j(t, \cdot)) dx_i. \end{aligned}$$

3.3. Couplage dans un réseau de taille finie : une méthode générale de modélisation

En appliquant la formule de Green, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega_i} \partial_t U_i dx_i \right) &= \sum_{i=1}^n \left(\int_{\partial\Omega_i} \frac{\partial U_i}{\partial \eta_i} d\sigma_i + \int_{\Omega_i} F_i(U_i) dx_i - \sum_{j \in I_i^{out}} \int_{\Omega_i} \Lambda_{ji}^I(U_i, x_i) dx_i \right) \\
&+ \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j \in B_i^{in}} \int_{\Omega_i} \theta_{ij}^B(U_j(t, \cdot)) dx_i + \sum_{j \in I_i^{in}} \int_{\Omega_i} \theta_{ij}^I(U_j(t, \cdot)) dx_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(- \sum_{j \in B_i^{out}} \int_{\partial\Omega_i} \Lambda_{ji}^B(U_i, \sigma_i) d\sigma_i + \int_{\Omega_i} F_i(U_i) dx_i - \sum_{j \in I_i^{out}} \int_{\Omega_i} \Lambda_{ji}^I(U_i, x_i) dx_i \right) \\
&+ \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j \in B_i^{in}} \int_{\Omega_i} \theta_{ij}^B(U_j(t, \cdot)) dx_i + \sum_{j \in I_i^{in}} \int_{\Omega_i} \theta_{ij}^I(U_j(t, \cdot)) dx_i \right) \\
&= - \sum_{i=1}^n \sum_{j \in B_i^{out}} \int_{\partial\Omega_i} \Lambda_{ji}^B(U_i, \sigma_i) d\sigma_i + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} F_i(U_i) dx_i - \sum_{i=1}^n \sum_{j \in I_i^{out}} \int_{\Omega_i} \Lambda_{ji}^I(U_i, x_i) dx_i \\
&+ \sum_{i=1}^n \sum_{j \in I_i^{in}} \int_{\Omega_i} \theta_{ij}^I(U_j(t, \cdot)) dx_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j \in B_i^{in}} \int_{\Omega_i} \theta_{ij}^B(U_j(t, \cdot)) dx_i \\
\\
&= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} F_i(U_i) dx_i - \sum_{(i,j) \in \bigcup_{k \in [1,n]} \{k\} \times B_k^{in}} \int_{\partial\Omega_i} \Lambda_{ji}^B(U_i, \sigma_i) d\sigma_i - \sum_{(i,j) \in \bigcup_{k \in [1,n]} \{k\} \times I_k^{out}} \int_{\Omega_i} \Lambda_{ji}^I(U_i, x_i) dx_i \\
&+ \sum_{(i,j) \in \bigcup_{k \in [1,n]} \{k\} \times I_k^{in}} \int_{\Omega_i} \theta_{ij}^I(U_j(t, \cdot)) dx_i + \sum_{(i,j) \in \bigcup_{k \in [1,n]} \{k\} \times B_k^{in}} \int_{\Omega_i} \theta_{ij}^B(U_j(t, \cdot)) dx_i \\
\\
&= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} F_i(U_i) dx_i - \sum_{(i,j) \in E_B} \int_{\partial\Omega_i} \Lambda_{ji}^B(U_i, \sigma_i) d\sigma_i - \sum_{(i,j) \in E_I} \int_{\Omega_i} \Lambda_{ji}^I(U_i, x_i) dx_i \\
&+ \sum_{(j,i) \in E_I} \int_{\Omega_i} \theta_{ij}^I(U_j(t, \cdot)) dx_i + \sum_{(j,i) \in E_B} \int_{\Omega_i} \theta_{ij}^B(U_j(t, \cdot)) dx_i,
\end{aligned}$$

car :

$$\bigcup_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \{k\} \times B_k^{in} = E_B \quad \text{et} \quad \bigcup_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \{k\} \times I_k^{out} = E_I.$$

Aussi,

$$(i, j) \in \bigcup_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \{k\} \times B_k^{out} \iff (j, i) \in E_B \quad \text{et} \quad (i, j) \in \bigcup_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \{k\} \times I_k^{in} \iff (j, i) \in E_I.$$

Par définition de Λ_{ji}^I , Λ_{ji}^B , θ_{ij}^I , θ_{ij}^B (voir (3.13), (3.14), (3.15)(3.16)), on déduit que :

$$\sum_{(j,i) \in E_I} \int_{\Omega_i} \theta_{ij}^I(U_i(t, \cdot)) dx_i - \sum_{(i,j) \in E_I} \int_{\Omega_i} \Lambda_{ji}^I(U_i, x_i) dx_i = 0$$

et

$$\sum_{(j,i) \in E_B} \int_{\Omega_i} \theta_{ij}^B(U_i(t, \cdot)) dx_i - \sum_{(i,j) \in E_B} \int_{\partial \Omega_i} \Lambda_{ji}^B(U_i, \sigma_i) d\sigma_i = 0.$$

Donc le principe de conservation du flux est vérifié et on a :

$$\sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega_i} \partial_t U_i dx_i \right) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} U_i(t, x_i) dx_i = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} F_i(U_i) dx_i.$$

□

Remarque 3.3.4. La méthode de couplage que nous avons proposée dans ce chapitre, utilisant un opérateur de couplage non local, revêt une importance considérable dans le contexte des travaux antérieurs (voir [7, 14, 55]). Voici quelques points qui soulignent son importance :

- Amélioration de la précision : Les travaux antérieurs sur le couplage d'équations de réaction-diffusion se sont principalement concentrés sur des approches locales, négligeant les interactions à plus grande distance. Cette méthode étendue comble cette lacune en prenant en compte les interactions non locales, ce qui améliore considérablement la précision de la modélisation. Cela permet de capturer des phénomènes plus réalistes et de mieux reproduire les observations expérimentales.
- Adaptabilité à différents domaines : Les travaux antérieurs ont souvent été limités à des configurations spécifiques ou restreintes. En introduisant un opérateur de couplage non local, cette méthode devient plus flexible et peut être appliquée à une variété de situations et de configurations. Cela élargit le champ d'application de la modélisation et permet de traiter des systèmes plus complexes et diversifiés.
- Prise en compte de la conservation des flux : La conservation des flux est un aspect crucial dans de nombreux systèmes physiques. Les travaux antérieurs ont rencontré des difficultés à garantir la conservation des flux lors du couplage d'équations de réaction-diffusion. Cette méthode étendue intègre explicitement cette exigence, assurant ainsi la cohérence physique du modèle et préservant les quantités d'intérêt à travers le couplage non local.
- Potentiel d'applications étendu : Grâce à sa précision accrue et à sa capacité à modéliser des interactions à grande distance, cette proposition de couplage ouvre de nouvelles perspectives pour des applications dans divers domaines scientifiques et techniques. Par exemple, elle

3.3. Couplage dans un réseau de taille finie : une méthode générale de modélisation

peut être utilisée pour étudier la propagation d'informations dans les réseaux sociaux, la dynamique des populations, la diffusion de substances chimiques, la modélisation des écosystèmes, etc.

3.3.1 Quelques conditions sur les termes de couplage

Avant de passer à l'étude théorique du modèle (3.17), on va poser quelques conditions sur les fonctions dans les termes de couplage. Ces conditions, déjà posées dans le cas de deux populations (voir 3.2.1), elles sont naturelles car elles découlent directement du cadre de notre modélisation en dynamique de population.

- Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in I_i^{out}$, on rappelle que $\varphi_{ji}(U_i)$ représente la proportion de la densité de population U_i ayant migré de Ω_i vers Ω_j à l'instant t . Pour tout $u \geq 0$, les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\mathcal{P}_1(n) : \quad \varphi_{ji}(u) \geq 0 \quad \text{et} \quad \varphi_{ji}(0) = 0.$$

La condition $\mathcal{P}_1(n)$ est justifiée par la nature même de la fonction $\varphi_{ji}(\cdot)$, qui représente une proportion de densité de population migrante et est donc toujours positive. De plus, en l'absence de population initiale U_i dans le domaine Ω_i , il est logique de considérer que la proportion de migration vers la zone Ω_j est nulle, d'où l'énoncé de la seconde condition de $\mathcal{P}_1(n)$.

Ainsi, il existe des constantes positives α_{ji} et a_{ji} telles que $0 \leq \alpha_{ji} \leq 1$ et $0 \leq a_{ji} \leq 1$, et pour tout $u \geq 0$, on a :

$$\mathcal{P}_2(n) : \quad \varphi_{ji}(u) \leq \alpha_{ji} |u|^{a_{ji}}. \quad (3.19)$$

La condition $\mathcal{P}_2(n)$ découle du fait que la proportion de la densité de population migrant de la zone Ω_i vers la zone Ω_j à l'instant t ne peut pas être supérieure à la densité de population totale présente dans la zone Ω_i .

- Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in B_i^{out}$, on rappelle que $g_{ji}(U_i)$ modélise la proportion de la densité d'individus U_i qui partent de $\partial\Omega_i$ pour Ω_j . Par analogie, on a les conditions suivantes : Pour tout $u \geq 0$, on a

$$\mathcal{P}_3(n) : \quad g_{ji}(u) \geq 0 \quad \text{et} \quad g_{ji}(0) = 0.$$

Ainsi, il existe des constantes positives $\tilde{\alpha}_{ji}$ et \tilde{a}_{ji} telles

$$\mathcal{P}_4(n) : \quad g_{ji}(u) \leq \tilde{\alpha}_{ji} |u|^{\tilde{a}_{ji}}. \quad (3.20)$$

Dans toute la suite de ce document, on se restreint au cas où pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in I_i^{out}$,

$$\varphi_{ji}(U_i) = \alpha_{ji} U_i \quad (3.21)$$

et pour $j \in B_i^{out}$,

$$g_{ji}(U_i) = \tilde{\alpha}_{ji} U_i.$$

Ainsi, on en déduit les expressions ci-dessous pour (3.13) et (3.14).

$$A_{ji}^I(U_i) = m_{ji} U_i, \quad m_{ji}(x) = \alpha_{ji} P_{ji}(x), \quad x \in \Omega_i$$

et

$$\Lambda_{ji}^B(U_i) = \tilde{m}_{ji} U_i, \quad \tilde{m}_{ji}(x) = \tilde{\alpha}_{ji} P_{ji}(x), \quad x \in \partial\Omega_i.$$

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x \in \Omega_i$ et $y \in \partial\Omega_i$, on pose :

$$m_i(x) = \sum_{j \in I_i^{out}} m_{ji}(x) \quad \text{et} \quad \tilde{m}_i(y) = \sum_{j \in B_i^{out}} \tilde{m}_{ji}(y), \quad (3.22)$$

pù les fonctions m_i et \tilde{m}_i sont positives et bornées. Ainsi, le problème (3.17) se réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t U_i = \Delta_i U_i + F_i(U_i) - m_i(x) U_i + \sum_{j \in I_i^{in}} \theta_{ij}^I(U_j) + \sum_{j \in B_i^{in}} \theta_{ij}^B(U_j), & t > 0, x \in \Omega_i, \\ \partial_{\eta_i} U_i = -\tilde{m}_i(x) U_i, & t > 0, x \in \partial\Omega_i, i \in \llbracket 1, n \rrbracket. \end{cases} \quad (3.23)$$

On rappelle que I_i^{in} est l'ensemble des nœuds sources des connexions entrantes dans le nœud i , connexions issues de l'intérieur et B_i^{in} est l'ensemble des nœuds sources des connexions de bord entrantes dans le nœud i . I_i^{out} est l'ensemble des nœuds qui peuvent accueillir la population de l'intérieur du nœud i et B_i^{out} est l'ensemble des nœuds qui peuvent accueillir la population du bord du nœud i .

3.3.2 Positivité de la solution du modèle couplé dans le cas d'un couplage non-local linéaire

Définition 3.3.5. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. On dit que X_+ est le cône positif de X si X_+ est un sous-ensemble convexe fermé de X satisfaisant les propriétés suivantes :

1. $\forall \lambda \geq 0, u \in X_+, \quad \lambda u \in X_+$;
2. $X_+ \cap -X_+ = \{0\}$.

Définition 3.3.6. Soit L un opérateur sur X , L est positif si et seulement si :

$$LX_+ \subset X_+.$$

Définition 3.3.7. On dit que (X, \leq) est un espace de Banach ordonné si pour $u \in X$,

$$u \geq 0 \iff u \in X_+.$$

3.3. Couplage dans un réseau de taille finie : une méthode générale de modélisation

Pour $t > 0$, posons : $x := (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \prod_{i=1}^n \Omega_i$, $y := (y_i)_{1 \leq i \leq n} \in \prod_{i=1}^n \partial\Omega_i$,

$$U(t, x) = (U_i(t, x_i))_{1 \leq i \leq n}^T, \quad F(U) = (F_i(U_i))_{1 \leq i \leq n}^T, \quad \Lambda^I(U, x) = \left(\sum_{j \in I_i^{out}} \Lambda_{ji}^I(U_j, x_j) \right)_{1 \leq i \leq n}^T,$$

$$\theta^I(U) = \left(\sum_{j \in I_i^{in}} \theta_{ij}^I(U_j(t, \cdot)) \right)_{1 \leq i \leq n}^T, \quad \Lambda^B(U, y) = \left(\sum_{j \in B_i^{out}} \Lambda_{ji}^B(U_j, y_j) \right)_{1 \leq i \leq n}^T, \quad \theta^B(U) = \left(\sum_{j \in B_i^{in}} \theta_{ij}^B(U_j(t, \cdot)) \right)_{1 \leq i \leq n}^T$$

$$\theta(U) = \theta^I(U) + \theta^B(U), \quad \partial_\eta U = (\partial_{\eta_i} U_i)_{1 \leq i \leq n}^T.$$

On se place dans l'espace X , défini par :

$$X := \prod_{i=1}^n \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}_i),$$

et on désigne par X_+ le cône positif de X . (X, \leq) est un espace de Banach ordonné, pour tout $U, V \in X$,

$$U \leq V \iff V - U \in X_+.$$

On considère les fonctions m et \tilde{m} définies par :

$$m(x) := \sup_{i \in [1, n]} m_i(x_i) \quad \text{et} \quad \tilde{m}(y) := \sup_{i \in [1, n]} \tilde{m}_i(y_i), \quad x_i \in \Omega_i, \quad y_i \in \partial\Omega_i,$$

on en déduit que pour tout $U \in X_+$

$$\Lambda^I(U, x) \leq m(x)U(x) \quad \text{et} \quad \Lambda^B(U, y) \leq \tilde{m}(y)U(y), \quad \forall x \in \prod_{i=1}^n \Omega_i, \quad \forall y \in \prod_{i=1}^n \partial\Omega_i. \quad (3.24)$$

On considère sur X l'opérateur linéaire $(A, \mathcal{D}(A))$ défini par :

$$A := \begin{pmatrix} \Delta_{\Omega_1}^R & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \Delta_{\Omega_n}^R \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \mathcal{D}(A) = \prod_{i=1}^n \mathcal{D}(\Delta_{\Omega_i}^R),$$

où on note $\Delta_{\Omega_i}^R$ l'opérateur laplacien sur le domaine Ω_i avec une condition au bord de type Robin.

On note

$$\mathcal{D}(\Delta_{\Omega_i}^R) := \left\{ V \in \bigcap_{p \geq 1} (\mathcal{C}^0(\bar{\Omega}_i) \cap W^{2,p}(\Omega_i)); \frac{\partial V}{\partial \eta_i} = -\tilde{m}_i(y_i)V, \quad y_i \in \partial\Omega_i, \quad \text{et} \quad \Delta V \in \mathcal{C}^0(\Omega_i) \right\}.$$

Donc le système (3.17), devient :

$$\begin{cases} \partial_t U = AU + F(U) - \Lambda^I(U, x) + \theta(U), & t > 0, \quad x \in \prod_{i=1}^n \Omega_i, \\ U(0, x) = U_0(x). \end{cases} \quad (3.25)$$

Théorème 3.3.8. Soit $U_0 \in X_+$. Supposons que U soit une solution de l'équation (3.25) et admettons qu'il existe $a \geq 1$ telle que pour tout $V \in X_+$, $F(V) > -V^a$, c'est à dire

$$\|F(V)\|_X > -\|V\|_X^a,$$

alors $U \geq 0$.

Démonstration. Nous allons utiliser la méthode présentée dans la section "positivité" de [32]. En particulier, nous allons appliquer la proposition 5.3.2.

Pour cela, nous devons vérifier les hypothèses 5.1.1, 5.1.2 et 5.2.1 de [32] pour l'existence d'une solution maximale du problème (3.25), ainsi que l'hypothèse 5.3.1 pour montrer la positivité. Comme nous supposons que le problème (3.25) admet une solution, nous pouvons supposer que les hypothèses 5.1.1, 5.1.2 et 5.2.1 sont vérifiées et nous allons simplement montrer que l'hypothèse 5.3.1 est également vérifiée.

Soit $M > 0$ et $V \in [0, M]$, c'est à dire $V \in X_+$ et $\|V\|_X \leq M$ alors on a :

$$-F(V) + \Lambda^I(V, x) - \theta(V) \leq -F(V) + \Lambda^I(V, x) < V^a + \Lambda^I(V, x), \quad \forall x \in \prod_{i=1}^n \Omega_i,$$

en utilisant l'hypothèse que $F(V) > -V^a$ pour tout V positif. Grâce à (3.24), nous obtenons :

$$-F(V) + \Lambda^I(V, x) - \theta(V) < V^a + m(x)V.$$

Puisque $m(x)$ est bornée, on a :

$$-F(V) + \Lambda^I(V, x) - \theta(V) < (M^{a-1} + m_0)V,$$

pour tout $x \in \prod_{i=1}^n \Omega_i$, avec $m_0 > m(x)$.

Ainsi, nous avons montré que $-F(V) + \Lambda^I(V, x) - \theta(V)$ est majoré par $(M^{a-1} + m_0)V$, qui est positif puisque $M > 0$ et $a \geq 1$. Par conséquent, $-F(V) + \Lambda^I(V, x) - \theta(V)$ est strictement positif pour tout $V \in [0, M]$, ce qui implique que pour $\lambda_M = (M^{a-1} + m_0)$ alors on a :

$$F(V) - \Lambda^I(V, x) + \theta(V) > -\lambda_M V, \quad V \in [0, M].$$

D'après [32], on peut conclure que U est positive. □

Remarque 3.3.9. Il est important de remarquer que la condition pour laquelle la solution du problème couplé soit positive ne dépend pas du couplage. Par conséquent, si la solution de chaque nœud est positive en l'absence de couplage, alors la solution du modèle couplé sera également positive.

3.4 Couplage non local de systèmes de réaction-diffusion à compartiments.

La modélisation vue dans les sections précédentes peut s'étendre facilement au cas où pour chaque nœuds, on a un système de m équations de réaction-diffusion à compartiments.

Nous considérons un ensemble fini Σ de n systèmes de réaction-diffusion à compartiments de taille identique m , c'est-à-dire on a n systèmes de m équations de réaction-diffusion chacun. Dans cette section, on identifie Σ à l'ensemble des n premiers entiers naturels.

Les systèmes considérés, sont tous définis sur un ensemble contenant n domaines deux à deux disjoints. Sous les hypothèses $\mathcal{H}_1(\mathbf{n}) - \mathcal{H}_4(\mathbf{n})$ de la section 3.3, nous couplons de manière linéaire les équations du réseau, ce qui nous permet d'obtenir le modèle couplé suivant pour tout $1 \leq k \leq m$:

$$\begin{cases} \partial_t U_i^k = \Delta_i U_i^k + F_i^k(U_i) - m_i(x_i) U_i^k + \theta_i^k(U(t, \cdot)), & t > 0, x_i \in \Omega_i \\ \partial_{\eta_i} U_i = -\tilde{m}_i(x_i) U_i^k, & t > 0, x_i \in \partial\Omega_i, \quad i \in \Sigma, \end{cases} \quad (3.26)$$

avec

$$m_i(x) = \sum_{j \in I_i^{out}} m_{ji}(x) \quad \text{et} \quad \tilde{m}_i(y) = \sum_{j \in B_i^{out}} \tilde{m}_{ji}(y),$$

où $m_{ji}(\cdot) = \alpha_{ji} P_{ji}(\cdot)$ et $\tilde{m}_{ji}(\cdot) = \tilde{\alpha}_{ji} P_{ji}(\cdot)$, α_{ji} et $\tilde{\alpha}_{ji}$ des constantes positives ou nulles.

On rappelle que

$$I_i^{out} = \{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\} \mid (i, j) \in E_I\}, \quad \text{et} \quad B_i^{out} = \{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\} \mid (i, j) \in E_B\}.$$

Dans ce modèle, U_i^k représente la k -ème composante du vecteur de la variable d'état U_i du nœud i , $U = (U_i)_{1 \leq i \leq n}$, Δ_i est l'opérateur laplacien défini sur Ω_i , et $F_i^k(U_i)$ est le terme source de la k -ème équation du nœud i . De plus on a, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \theta_i^k(U(t, \cdot)) &= \sum_{j \in I_i^{in}} \theta_{ij}^I(U_j^k(t, \cdot)) + \sum_{j \in B_i^{in}} \theta_{ij}^B(U_j^k(t, \cdot)) \\ &= \frac{1}{|\Omega_i|} \left(\sum_{j \in I_i^{in}} \int_{\Omega_j} U_j^k(t, x_j) m_{ij}(x_j) dx_j + \sum_{j \in B_i^{in}} \int_{\partial\Omega_j} U_j^k(t, s_j) \tilde{m}_{ij}(s_j) ds_j \right), \end{aligned}$$

avec

$$U_i = (U_i^k)_{1 \leq k \leq m}^T.$$

Posons :

$$F_i = (F_i^k)_{1 \leq k \leq m}^T, \quad \theta_i = (\theta_i^k)_{1 \leq k \leq m}^T,$$

alors on en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t U_i = \Delta_i U_i + F_i(U_i) - m_i(x_i) U_i + \theta_i(U(t, \cdot)), & t > 0, x_i \in \Omega_i \\ \partial_{\eta_i} U_i = -\tilde{m}_i(x_i) U_i, & t > 0, x_i \in \partial\Omega_i, \quad i \in \Sigma. \end{cases} \quad (3.27)$$

Ensuite, en introduisant les notations suivantes :

$$F = (F_i)_{1 \leq i \leq n}, \quad \theta = (\theta_i)_{1 \leq i \leq n},$$

$$M(x) = \text{diag}(m_i(x_i))_{1 \leq i \leq n}, \quad \tilde{M}(y) = \text{diag}(\tilde{m}_i(y_i))_{1 \leq i \leq n}, \quad x \in \prod_{i=1}^n \Omega_i, \quad y \in \prod_{i=1}^n \partial\Omega_i,$$

on en déduit une écriture plus compacte du modèle couplé sur réseau :

$$\begin{cases} \partial_t U(t, x) = AU + F(U) - M(x) U + \theta(U(t, .)), & t > 0, \quad x \in \prod_{i=1}^n \Omega_i \\ \partial_\eta U_i = -\tilde{M}(x) U_i, & t > 0, \quad x \in \prod_{i=1}^n \partial\Omega_i, \end{cases} \quad (3.28)$$

avec

$$A := \begin{pmatrix} \Delta_{\Omega_1}^R & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \Delta_{\Omega_n}^R \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathcal{D}(A) = \prod_{i=1}^n \mathcal{D}(\Delta_{\Omega_i}^R).$$

Remarque 3.4.1. Dans la suite de cette section on choisit de travailler avec des conditions au bord de type Neumann homogène. Il suffit de supposer pour cela qu'il n'y a pas de départ depuis le bord des domaines, donc $\tilde{M} = 0$.

Nous allons établir quelques propriétés entre les deux systèmes ci-dessous :

$$\begin{cases} \partial_t U_i = \Delta_i U_i + F_i(U_i), & t > 0, \quad x_i \in \Omega_i \\ \partial_{\eta_i} U_i = 0, & t > 0, \quad x_i \in \partial\Omega_i, \quad i \in \Sigma, \end{cases} \quad (3.29)$$

et

$$\begin{cases} \partial_t U(t, x) = AU + F(U) - M(x) U + \theta(U(t, .)), & t > 0, \quad x \in \prod_{i=1}^n \Omega_i \\ \partial_\eta U = 0, & t > 0, \quad x \in \prod_{i=1}^n \partial\Omega_i. \end{cases} \quad (3.30)$$

On vas montrer que si certains résultats sur chaque systèmes isolé du réseau en absence de couplage (3.29), alors ils restent vrai aussi pour le système couplé (3.30).

Proposition 3.4.2. *On considère les systèmes (3.29) et (3.30). Alors on a les implications suivantes :*

1. *Si pour tout $i \in \Sigma$, l'équation (3.29) est linéaire, alors l'équation (3.30) l'est aussi.*
2. *Si pour tout $i \in \Sigma$, l'équation (3.29) est quasi-positive, alors l'équation (3.30) l'est aussi.*
3. *Le modèle couplé est obtenu est un modèle à compartiment.*

Les preuves de ces implications sont directes, ces propriétés sont des conséquences du couplage linéaire.

3.4.1 Conservation de masse et bornage uniforme

Théorème 3.4.3. *Pour tout $i \in \Sigma$, supposons que le système (3.29) vérifie le principe de conservation de masse, c'est-à-dire que pour tout $U_i \in \mathbb{R}_+^m$:*

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^m \int_{\Omega_i} U_i^k(t, x_i) dx_i \right) = \sum_{k=1}^m \int_{\Omega_i} F_i^k(U_i) dx_i = 0. \quad (3.31)$$

Si le système (3.30) admet une solution positive, alors il vérifie le principe de conservation de masse totale. De plus, cette solution positive du système (3.30) est uniformément bornée.

Démonstration. Supposons que (3.30) admet une solution positive U . Alors nous avons :

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} \sum_{k=1}^m U_i^k(t, x_i) dx_i \right) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} \sum_{k=1}^m F_i^k(U_i) dx_i + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} \sum_{k=1}^m (-m_i(x_i) U_i^k + \theta_i^k(U(t, \cdot))) dx_i. \quad (3.32)$$

Par construction le système (3.30) vérifie le principe de conservation des flux. Par conséquent :

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} \sum_{k=1}^m (-m_i(x_i) U_i^k + \theta_i^k(U(t, \cdot))) dx_i = 0. \quad (3.33)$$

Comme pour tout $i \in \Sigma$, le système (3.29) vérifie le principe de conservation de masse, nous en déduisons que :

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} \sum_{k=1}^m F_i^k(U_i) dx_i = 0. \quad (3.34)$$

En somme, nous avons :

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} \sum_{k=1}^m U_i^k(t, x_i) dx_i \right) = 0, \quad (3.35)$$

ce qui signifie que le système (3.30) vérifie le principe de conservation de masse.

De plus, si U est une solution positive de (3.30), d'après (3.35), il existe donc une constante positive N_0 telle que :

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} \sum_{k=1}^m U_i^k(t, x_i) dx_i = N_0, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.36)$$

Ainsi, pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq k \leq m$, nous avons :

$$\int_{\Omega_i} U_i^k(t, x_i) dx_i \leq N_0, \quad t \geq 0,$$

et cela conclut la preuve. □

Corollaire 3.4.4. *Pour tout $i \in \Sigma$, supposons que (3.29) vérifie le principe de conservation de masse et soit g_i une fonction réelle positive et bornée. Si pour tout $i \in \Sigma$ le système suivant :*

$$\begin{cases} \partial_t U_i = \Delta_i U_i + F_i(U_i) - m_i(x_i) U_i + g_i(t), & t > 0, x_i \in \Omega_i \\ \partial_{\eta_i} U_i = -\tilde{m}_i(x_i) U_i, & t > 0, x_i \in \partial\Omega_i, \end{cases} \quad (3.37)$$

admet une solution positive globalement bornée, alors si (3.30) admet une solution positive, elle est globalement bornée.

Remarque 3.4.5. Ce corollaire découle directement du théorème précédent et établit une condition suffisante pour garantir la globalité de la borne pour le système (3.30) à partir de la solution positive globalement bornée du système (3.37). En d'autres termes, si le système (3.37) possède une solution positive globalement bornée en présence du terme source g_i , alors le système (3.30) aura également une solution positive globalement bornée.

On peut retenir de cette sous section, que mes travaux ont exploré le comportement des systèmes de réaction-diffusion couplés dans un réseau. J'ai commencé par définir les équations de réaction-diffusion linéaires couplées pour le réseau, en considérant chaque système individuel ainsi que le modèle global pour le réseau.

J'ai ensuite étudié différentes propriétés et implications des systèmes couplés, notamment leur linéarité, leur quasi-positivité, ainsi que les relations entre les systèmes couplés et non couplés. J'ai également examiné la conservation de la masse et du flux dans les systèmes, démontrant que si les systèmes individuels satisfont ces propriétés, le système couplé les satisfait également.

Une contribution importante de mes travaux est la mise en évidence d'un résultat (corollaire, 3.4.4) clé : si le système non couplé, accompagné d'un terme positif borné supplémentaire, possède une solution globalement bornée et positive, alors le système couplé, avec le même terme, possède également une solution globalement bornée et positive. Cela souligne l'importance de l'ajout de termes positifs bornés pour garantir des solutions positives globalement bornées dans le réseau couplé.

En résumé, mes travaux ont fourni des résultats théoriques et des analyses approfondies sur le comportement des systèmes de réaction-diffusion couplés dans un réseau. Ces résultats contribuent à une meilleure compréhension des propriétés et des implications de tels systèmes, ouvrant ainsi de nouvelles perspectives pour des applications potentielles dans divers domaines, tels que la biologie, la chimie et la physique.

La modélisation et l'étude présentées jusqu'ici sont générales et se prêtent au couplage de modèles issus de différents domaines de recherches, tels que la dynamique des populations ou l'épidémiologie. Toutefois ce travail peut être enrichie en explorant les quelque piste suivantes :

- Intégrer dans le modèle d'équation couplé le temps de trajet lors des déplacements entre les régions ;
- Regarder ces modèles avec des termes d'advection ;
- Regarder le cas des couplages d'équation de réaction-diffusion avec diffusion non locale.

Dans le paragraphe suivant, on va présenter, analyser et étudier numériquement le cas d'un réseau de deux modèles *SIS* couplés non localement.

3.5 Application : couplage non-local de systèmes SIS de réaction-diffusion

Soit Ω un domaine borné dans \mathbb{R}^d avec une frontière lisse $\partial\Omega$ (pour $d \geq 1$). Dans ce paragraphe, nous considérons le modèle proposé par L.J.S. Allen, et ses co-auteurs dans [1].

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = d_S \Delta S - \beta \frac{S I}{S + I} + \gamma I, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \frac{\partial I}{\partial t} = d_I \Delta I + \beta \frac{S I}{S + I} - \gamma I & x \in \Omega, \quad t > 0, \end{cases} \quad (3.38)$$

où $S(x, t)$ et $I(x, t)$ représentent respectivement la densité des individus susceptibles et infectés à la position x et au temps t . Les coefficients de diffusion positifs pour les populations susceptibles et infectées sont notés respectivement d_S et d_I . De plus, $\beta(x)$ et $\gamma(x)$ sont des fonctions Hölder-continues positives sur Ω , qui traduisent les taux de transmission de la maladie et de guérison à la position x .

On peut voir facilement que la population totale du système

$$N = \int_{\Omega} (S + I) dx$$

est constante à chaque instant de temps.

Dans l'article [1], les auteurs démontrent l'existence, l'unicité et la stabilité du point d'équilibre sans maladie (DFE) pour le modèle (3.38). Ils caractérisent le nombre de reproduction de base R_0 et examinent ses relations avec les coefficients de diffusion.

On dit que x est un site à faible risque si le taux de transmission local de la maladie $\beta(x)$ est inférieur au taux de guérison local $\gamma(x)$. Un site à haut risque est défini de manière similaire.

$$H^- = \{x \in \Omega : \beta(x) < \gamma(x)\} \text{ et } H^+ = \{x \in \Omega : \beta(x) > \gamma(x)\}.$$

Soit $R_0(x) = \frac{\beta(x)}{\gamma(x)}$ le nombre de reproduction local en $x \in \Omega$. Alors $R_0(x) < 1$ pour les sites à faible risque ($x \in H^-$) et $R_0(x) > 1$ pour les sites à haut risque ($x \in H^+$). En supposant que H^- et H^+ soient non vides, les auteurs démontrent les résultats suivants :

Théorème 3.5.1. *Soit N soit fixé. Alors il existe un équilibre sans Maladie (DFE), qui est unique et donné par $(\hat{S}, 0) = \left(\frac{N}{|\Omega|}, 0\right)$. Soit*

$$R_0 = \sup_{\phi \in H^1(\Omega), \phi \neq 0} \frac{\int_{\Omega} \beta \phi^2}{\int_{\Omega} (d_I |\nabla \phi|^2 + \gamma \phi^2)}.$$

Si $R_0 < 1$, alors le DFE est globalement asymptotiquement stable, mais si $R_0 > 1$, alors il est instable.

Théorème 3.5.2. *Soit N fixé, alors :*

1. R_0 est une fonction décroissante de d_I , avec $R_0 \rightarrow \max\{\beta(x)/\gamma(x) : x \in \Omega\}$ lorsque $d_I \rightarrow 0$, et $R_0 \rightarrow \frac{\int_{\Omega} \beta}{\int_{\Omega} \gamma}$ lorsque $d_I \rightarrow \infty$.
2. Dans un domaine à faible risque ($\int_{\Omega} \beta < \int_{\Omega} \gamma$), il existe une valeur seuil $d_I^* \in (0, \infty)$ telle que $R_0 > 1$ pour $d_I < d_I^*$ et $R_0 < 1$ pour $d_I > d_I^*$.

3. Dans un domaine à haut risque ($\int_{\Omega} \beta < \int_{\Omega} \gamma$), nous avons $R_0 > 1$ pour tous les d_I .

Par continuité, si H^- et H^+ sont non vides, alors l'ensemble $H^0 = \{x \in \Omega : \beta(x) = \gamma(x)\}$ est aussi non vide.

Théorème 3.5.3. Soit N fixé, alors :

1. Il existe un couple (\tilde{S}, I) dans $C^1(\Omega)$ tel que $(\tilde{S}, 0)$ converge vers $(S^*, 0)$ dans $C^1(\Omega)$ lorsque $d_S \rightarrow 0$, pour $S^*(x) \in C^1(\Omega)$ satisfaisant,

$$S^* \geq 0 \quad \text{sur } \Omega, \quad (3.39)$$

$$S^* = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (3.40)$$

$$\int_{\Omega} S^* = N. \quad (3.41)$$

2. $J_- = \{x \in \Omega : S^*(x) > 0\}$ contient H^- .

3. $J_+ = \{x \in \Omega : S^*(x) = 0\}$ a une mesure positive et est contenu dans H^+ .

4. On suppose que H^0 est composé d'un nombre fini de surfaces C^1 (ou un nombre fini de points en dimension 1). Alors J_- contient H^- , et l'ensemble $J_- \setminus H^-$ a une mesure positive. De plus, si $m = 1$, alors la mesure de $J_- \setminus H^-$ tend vers zéro lorsque $d_I \rightarrow 0$.

Dans la suite on décide de coupler deux modèles de type (3.38), définis sur des domaines disjoints. Ainsi, soient Ω_1 et Ω_2 deux domaines bornés et fermés de \mathbb{R}^d ($1 \leq d \leq 3$) avec des adhérences disjointes. On suppose que $|\Omega_1| \neq 0$ et $|\Omega_2| \neq 0$. Ainsi, en suivant la modélisation du couplage proposée dans les paragraphes précédents, on obtient le modèle couplé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \partial_t S_1 - d_{S_1} \Delta S_1 = -\beta_1 \frac{S_1 I_1}{S_1 + I_1} + \gamma_1 I_1 - m_{21} S_1 P_{21}(x) + \frac{m_{12}}{|\Omega_1|} \int_{\Omega_2} P_{12}(y) S_2(t, y) dy, \\ \partial_t I_1 - d_{I_1} \Delta I_1 = \beta_1 \frac{S_1 I_1}{S_1 + I_1} - \gamma_1 I_1 - m_{21} I_1 P_{21}(x) + \frac{m_{12}}{|\Omega_1|} \int_{\Omega_2} P_{12}(y) I_2(t, y) dy, \\ S_1(0, x) = S_{1,0}(x), \quad I_1(0, x) = I_{1,0}(x), \\ \partial_{\eta_1} S_1 = \partial_{\eta_1} I_1 = 0, \end{array} \right. & \begin{array}{l} (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega_1, \\ (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega_1, \\ x \in \Omega_1, \\ (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega_1, \end{array} \\ \left\{ \begin{array}{l} \partial_t S_2 - d_{S_2} \Delta S_2 = -\beta_2 \frac{S_2 I_2}{S_2 + I_2} + \gamma_2 I_2 - m_{12} S_2 P_{12}(y) + \frac{m_{21}}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_1} P_{21}(x) S_1(t, x) dx, \\ \partial_t I_2 - d_{I_2} \Delta I_2 = \beta_2 \frac{S_2 I_2}{S_2 + I_2} - \gamma_2 I_2 - m_{12} I_2 P_{12}(y) + \frac{m_{21}}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_1} P_{21}(x) I_1(t, x) dx, \\ S_2(0, y) = S_{2,0}(y), \quad I_2(0, y) = I_{2,0}(y), \\ \partial_{\eta_2} S_2 = \partial_{\eta_2} I_2 = 0, \end{array} \right. & \begin{array}{l} (t, y) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega_2, \\ (t, y) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega_2, \\ y \in \Omega_2, \\ (t, y) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega_2. \end{array} \end{array} \right. \quad (3.42)$$

Dans ce modèle, les densités de population des susceptibles et des infectés à l'emplacement x à l'instant t dans Ω_1 sont représentées respectivement par $S_1(t, x)$ et $I_1(t, x)$, tandis que les coefficients de diffusion des susceptibles et des infectés sont respectivement représentés par d_{S_1} et d_{I_1} .

3.5. Application : couplage non-local de systèmes SIS de réaction-diffusion

De même, les densités de population des susceptibles et des infectés à l'emplacement y à l'instant t dans Ω_2 sont représentées respectivement par $S_2(t, y)$ et $I_2(t, y)$, tandis que les coefficients de diffusion des susceptibles et des infectés sont respectivement représentés par d_{S_2} et d_{I_2} . Les taux de transmission de la maladie sur Ω_1 et Ω_2 sont représentés respectivement par β_1 et β_2 , tandis que les taux de guérison de la maladie sur Ω_1 et Ω_2 sont représentés respectivement par γ_1 et γ_2 .

La probabilité qu'un individu à la position $x \in \Omega_1$ puisse migrer vers Ω_2 est représentée par $P_{21}(x)$, tandis que la probabilité qu'un individu à la position $y \in \Omega_2$ puisse migrer vers Ω_1 est représentée par $P_{12}(y)$. La proportion maximale d'individus (susceptibles ou infectés) qui peuvent quitter Ω_1 à l'instant t pour migrer vers Ω_2 est représentée par m_{21} , tandis que la proportion maximale d'individus (susceptibles ou infectés) qui peuvent quitter Ω_2 à l'instant t pour migrer vers Ω_1 est représentée par m_{12} . On suppose qu'il n'y a pas d'infection ni de guérison pendant le déplacement.

3.5.1 Existence, unicité et positivité de la solution du modèle couplé

Afin de montrer l'existence d'une unique solution positive du modèle couplé (3.42), on considère le problème auxiliaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t S_1 - d_{S_1} \Delta S_1 = -\beta_1 \frac{S_1 I_1}{|S_1| + |I_1|} + \gamma_1 I_1 - m_{21} S_1 P_{21}(x) + \frac{m_{12}}{|\Omega_1|} \int_{\Omega_2} P_{12}(y) S_2(t, y) dy, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega_1, \\ \partial_t I_1 - d_{I_1} \Delta I_1 = \beta_1 \frac{S_1 I_1}{|S_1| + |I_1|} - \gamma_1 I_1 - m_{21} I_1 P_{21}(x) + \frac{m_{12}}{|\Omega_1|} \int_{\Omega_2} P_{12}(y) I_2(t, y) dy, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega_1, \\ S_1(0, x) = S_{1,0}(x), \quad I_1(0, x) = I_{1,0}(x), \quad x \in \Omega_1, \\ \partial_{\eta_1} S_1 = \partial_{\eta_1} I_1 = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega_1, \\ \partial_t S_2 - d_{S_2} \Delta S_2 = -\beta_2 \frac{S_2 I_2}{|S_2| + |I_2|} + \gamma_2 I_2 - m_{12} S_2 P_{12}(y) + \frac{m_{21}}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_1} P_{21}(x) S_1(t, x) dx, \quad (t, y) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega_2, \\ \partial_t I_2 - d_{I_2} \Delta I_2 = \beta_2 \frac{S_2 I_2}{|S_2| + |I_2|} - \gamma_2 I_2 - m_{12} I_2 P_{12}(y) + \frac{m_{21}}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_1} P_{21}(x) I_1(t, x) dx, \quad (t, y) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega_2, \\ S_2(0, y) = S_{2,0}(y), \quad I_2(0, y) = I_{2,0}(y), \quad y \in \Omega_2, \\ \partial_{\eta_2} S_2 = \partial_{\eta_2} I_2 = 0, \quad (t, y) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega_2. \end{array} \right. \quad (3.43)$$

La différence entre le problème de départ et le problème auxiliaire est dans les termes d'interaction non linéaire entre les susceptibles et les infectés.

On introduit les notations suivantes :

$$\forall t > 0, \quad U(t, \cdot) = (U_1(t, \cdot), U_2(t, \cdot))^T = (S_1(t, \cdot), I_1(t, \cdot), S_2(t, \cdot), I_2(t, \cdot))^T, \quad U_0 = (S_{1,0}, I_{1,0}, S_{2,0}, I_{2,0})^T.$$

Plaçons nous dans l'espace X défini par :

$$X := \left\{ (U_1, U_2)^T \mid U_1 \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}_1)^2, U_2 \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}_2)^2 \right\}.$$

On considère sur X , l'opérateur linéaire $(A, \mathcal{D}(A))$ défini par :

$$A = \begin{pmatrix} d_{S_1} \Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{I_1} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{S_2} \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{I_2} \Delta \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(\Delta_{\Omega_1})^2 \times \mathcal{D}(\Delta_{\Omega_2})^2,$$

avec

$$\mathcal{D}(\Delta_{\Omega_1}) = \left\{ U \in \left(\mathcal{C}^0(\bar{\Omega}_1) \cap H^2(\Omega_1) \right) \mid \Delta U_1 \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}_1), \frac{\partial U_1}{\partial \eta_1} = 0 \right\}$$

et

$$\mathcal{D}(\Delta_{\Omega_2}) = \left\{ U \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}_2) \cap H^2(\bar{\Omega}_2) \mid \Delta U_2 \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}_2), \frac{\partial U_2}{\partial \eta_2} = 0 \right\}.$$

De plus, on définit l'opérateur non linéaire F sur $\mathcal{D}(A)$ comme suit :

$$F(U) = \begin{pmatrix} -\beta_1 \frac{S_1 I_1}{|S_1| + |I_1|} + \gamma_1 I_1 - m_{21} S_1 P_{21}(x) + \frac{m_{12}}{|\Omega_1|} \int_{\Omega_2} P_{12}(y) S_2(t, y) dy \\ \beta_1 \frac{S_1 I_1}{|S_1| + |I_1|} - \gamma_1 I_1 - m_{21} I_1 P_{21}(x) + \frac{m_{12}}{|\Omega_1|} \int_{\Omega_2} P_{12}(y) I_2(t, y) dy \\ -\beta_2 \frac{S_2 I_2}{|S_2| + |I_2|} + \gamma_2 I_2 - m_{12} S_2 P_{12}(y) + \frac{m_{21}}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_1} P_{21}(x) S_1(t, x) dx \\ \beta_2 \frac{S_2 I_2}{|S_2| + |I_2|} - \gamma_2 I_2 - m_{12} I_2 P_{12}(y) + \frac{m_{21}}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_1} P_{21}(x) I_1(t, x) dx \end{pmatrix}.$$

On suppose que $P_{21} : x \mapsto P_{21}(x) \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}_1)$ et $P_{12} : y \mapsto P_{12}(y) \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}_2)$.

Avec ces notations, le système (3.43) se réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t U(t) - AU(t) = F(U), & t > 0, \\ U(0) = U_0. \end{cases} \quad (3.44)$$

Lemme 3.5.4. *La fonction F est lipschitzienne sur \mathbb{R}^4 .*

Démonstration. Pour montrer ce lemme il suffit de montrer que la fonction : $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x| + |y|} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

est lipschitzienne sur \mathbb{R}^2 .

Soient (x, y) et $(x', y') \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}$, alors on a

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x', y')| &= \left| \frac{xy}{x+y} - \frac{x'y'}{x'+y'} \right| \\ &= \left| \frac{xx'(y-y')}{(x+y)(x'+y')} + \frac{yy'(x-x')}{(x+y)(x'+y')} \right| \\ &\leq |y-y'| + |x-x'| \\ &\leq \|(x, y) - (x', y')\|. \end{aligned}$$

3.5. Application : couplage non-local de systèmes SIS de réaction-diffusion

Par symétrie, on en déduit le même résultat pour (x, y) et $(x', y') \in \mathbb{R}_-^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Soient (x, y) et $(x', y') \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on a

$$\begin{aligned} |f(-x, y) - f(-x', y')| &= \left| \frac{-xy}{x+y} - \frac{-x'y'}{x'+y'} \right| \\ &= \left| \frac{xx'(y-y')}{(x+y)(x'+y')} + \frac{yy'(x-x')}{(x+y)(x'+y')} \right| \\ &\leq |y-y'| + |x-x'| \\ &\leq \|(-x, y) - (-x', y')\|. \end{aligned}$$

Par symétrie on montre que pour (x, y) et $(x', y') \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on a

$$|f(x, -y) - f(x', -y')| \leq \|(x, y) - (x', y')\|.$$

Soit $\varepsilon > 0$, $(x, y) \in]-\varepsilon, \varepsilon[^2$, tel que $(x, y) \neq (0, 0)$ on a

$$\begin{aligned} |f(x, x) - f(y, y)| &\leq \left| \frac{x^2}{2x} - \frac{y^2}{2} \right| \\ &\leq \left| \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right| \\ &\leq \|(x, x) - (y, y)\|. \end{aligned}$$

Donc f est lipschitzienne sur \mathbb{R}^2 , il s'en suit alors que F l'est aussi sur \mathbb{R}^4 . □

Théorème 3.5.5. *Soit $U_0 \in X$, puisque F est lipschitzienne sur \mathbb{R}^4 , alors le problème de Cauchy (3.44) admet une unique solution maximale.*

Démonstration. Le lemme 3.5.4 implique l'existence d'un temps maximal $T_{max} > 0$ tel que le problème de Cauchy (3.44) possède une unique solution locale. Pour des preuves plus détaillées, on peut se référer à [20, 45, 58]. De plus, si $T_{max} < \infty$, alors

$$\lim_{t \rightarrow T_{max}} \|U\|_X = +\infty.$$

□

Théorème 3.5.6. *Supposons que $U_0 \in X_+$. Alors la solution du système auxiliaire (3.43) est positive et satisfait l'équation suivante pour tout $0 \leq t \leq T_{max}$:*

$$\|N_1(t, \cdot)\|_{L^1(\Omega_1)} + \|N_2(t, \cdot)\|_{L^1(\Omega_2)} = N_0,$$

où les fonctions $N_1(t, x)$ et $N_2(t, y)$ sont définies comme suit :

$$N_1(t, x) = S_1(t, x) + I_1(t, x) \quad \text{et} \quad N_2(t, y) = S_2(t, y) + I_2(t, y)$$

et $\|\cdot\|_{L^1(\Omega_1)}$ et $\|\cdot\|_{L^1(\Omega_2)}$ représentent les normes dans les espaces $L^1(\Omega_1)$ et $L^1(\Omega_2)$, respectivement. La constante N_0 est donnée par

$$N_0 = \int_{\Omega_1} (S_{1,0}(x) + I_{1,0}(x)) dx + \int_{\Omega_2} (S_{2,0}(y) + I_{2,0}(y)) dy.$$

Chapitre 3. Réseau d'équations de réaction-diffusion à compartiments

Démonstration. Nous débutons cette preuve en montrant d'abord la positivité de la solution du système (3.44). Nous allons utiliser une méthode présentée dans [32]. Soit $M > 0$, et $U \in [0, M]$, alors pour

$$\lambda_M = \max \{ \gamma_1 + m_{21}, \beta_1 + m_{21}, \beta_2 + m_{12}, \gamma_2 + m_{12} \},$$

on a :

$$F(U) + \lambda_M U \geq 0.$$

D'après [32], on peut en déduire que la solution U du système (3.44) est positive. En résumé, pour toute donnée initiale positive, la solution du système (3.44) est également positive.

En sommant les équations du système (3.43) sur chaque nœud, on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t N_1 - d_{S_1} \Delta S_1 - d_{I_1} \Delta I_1 = -m_{21} P_{21}(x) N_1 + \frac{m_{12}}{|\Omega_1|} \int_{\Omega_2} N_2(t, y) P_{12}(y) dy, \quad t > 0, \quad x \in \Omega_1, \\ \partial_t N_2 - d_{S_2} \Delta S_2 - d_{I_2} \Delta I_2 = -m_{12} P_{12}(y) N_2 + \frac{m_{21}}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_1} N_1(t, x) P_{21}(x) dx, \quad t > 0, \quad y \in \Omega_2, \\ N_1(0, x) = N_{1,0}(x) = S_{1,0}(x) + I_{1,0}(x), \quad x \in \Omega_1, \\ N_2(0, y) = N_{2,0}(y) = S_{2,0}(y) + I_{2,0}(y), \quad y \in \Omega_2, \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta_1}(t, x) = \frac{\partial N_2}{\partial \eta_1}(t, y) = 0 \quad (t, x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega_1 \times \partial\Omega_2, \end{array} \right.$$

avec

$$N_1(t, x) := S_1(t, x) + I_1(t, x) \quad \text{et} \quad N_2(t, y) := S_2(t, y) + I_2(t, y).$$

En intégrant chacune des équations précédentes sur leurs espaces respectifs, on a les estimations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_1} N_1 dx - d_{S_1} \int_{\Omega_1} \Delta S_1 dx - d_{I_1} \int_{\Omega_1} \Delta I_1 dx = -m_{21} \int_{\Omega_1} P_{21}(x) N_1 dx + m_{12} \int_{\Omega_2} N_2(t, y) P_{12}(y) dy, \quad t > 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_2} N_2 dx - d_{S_2} \int_{\Omega_2} \Delta S_2 dx - d_{I_2} \int_{\Omega_2} \Delta I_2 dx = -m_{12} \int_{\Omega_1} P_{12}(y) N_2 dy + m_{21} \int_{\Omega_1} N_1(t, x) P_{21}(x) dx, \quad t > 0. \end{array} \right.$$

En appliquant la formule de Green, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_1} N_1 dx = -m_{21} \int_{\Omega_1} P_{21}(x) N_1 dx + m_{12} \int_{\Omega_2} N_2(t, y) P_{12}(y) dy, \quad t > 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_2} N_2 dy = -m_{12} \int_{\Omega_1} P_{12}(y) N_2 dx + m_{21} \int_{\Omega_1} N_1(t, x) P_{21}(x) dx, \quad t > 0. \end{array} \right.$$

En sommant les équations du précédent système on a :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_1} N_1(t, x) dx + \int_{\Omega_2} N_2(t, y) dx \right) = 0,$$

donc il existe $N > 0$ tel que :

$$\int_{\Omega_1} N_1(t, x) dx + \int_{\Omega_2} N_2(t, y) dx = N.$$

De plus, pour $t = 0$,

$$\int_{\Omega_1} N_1(t, x) dx + \int_{\Omega_2} N_2(t, y) dy = N_0 = \int_{\Omega_1} (S_{1,0}(x) + I_{1,0}(x)) dx + \int_{\Omega_2} (S_{2,0}(y) + I_{2,0}(y)) dy.$$

d'où

$$\forall 0 \leq t \leq T_{max}, \quad \|N_1(t, \cdot)\|_{L^1(\Omega_1)} + \|N_2(t, \cdot)\|_{L^1(\Omega_2)} = N_0.$$

□

Remarque 3.5.7. Étant donné que la solution du problème (3.43) est positive pour toute condition initiale positive, alors la solution du problème (3.42) est elle aussi positive.

3.5.2 États d'équilibre du modèle couplé

Dans cette partie, on s'intéresse aux états d'équilibre du système (3.42). Un des objectifs de la modélisation mathématique en épidémiologie est de prédire la propagation de la maladie et planifier les interventions de santé publique. Dans ce cadre, il est important de comprendre les différentes solutions possibles pour un modèle donné.

Une solution d'équilibre sans maladie (DFE) est une solution où il n'y a pas de maladie présente dans les populations concernées. Cette solution est caractérisée par des conditions telles que le nombre de personnes infectées est égal à zéro, tandis que le nombre de personnes susceptibles d'être infectées est supérieur ou égal à zéro.

En revanche, une solution d'équilibre endémique (EE) se produit lorsque la maladie est présente de manière permanente dans les populations. Cette solution est caractérisée par des conditions telles que le nombre de personnes infectées est supérieur à zéro, tandis que le nombre de personnes susceptibles d'être infectées est supérieur ou égal à zéro dans les deux populations respectives.

Il est important de noter que la transition d'une solution DFE à une solution EE peut être déclenchée par une variété de facteurs, tels que des changements dans la transmission de la maladie ou dans la résistance de la population. Comprendre les conditions qui permettent à une maladie de se propager de manière endémique peut aider les décideurs à planifier des interventions efficaces pour contrôler la propagation de la maladie.

En somme, les solutions d'équilibre sans maladie et endémique sont des concepts clés pour comprendre la propagation des maladies dans différentes populations et peuvent fournir des informations précieuses pour aider les décideurs à concevoir des stratégies de prévention et de contrôle.

Afin de déterminer les équilibres du système (3.42), on cherche les solutions du problème suivant :

$$\begin{cases} 0 = d_{S_1} \Delta S_1^* - \beta_1 \frac{S_1^* I_1^*}{S_1^* + I_1^*} + \gamma_1 I_1^* - m_{21} S_1^* P_{21}(x) + \frac{m_{12}}{|\Omega_1|} \int_{\Omega_2} P_{12}(y) S_2^*(y) dy, & x \in \Omega_1, \\ 0 = d_{I_1} \Delta I_1^* + \beta_1 \frac{S_1^* I_1^*}{S_1^* + I_1^*} - \gamma_1 I_1^* - m_{21} I_1^* P_{21}(x) + \frac{m_{12}}{|\Omega_1|} \int_{\Omega_2} P_{12}(y) I_2^*(y) dy, & x \in \Omega_1, \\ 0 = d_{S_2} \Delta S_2^* - \beta_2 \frac{S_2^* I_2^*}{S_2^* + I_2^*} + \gamma_2 I_2^* - m_{12} S_2^* P_{12}(y) + \frac{m_{21}}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_1} P_{21}(x) S_1^*(x) dx, & y \in \Omega_2, \\ 0 = d_{I_2} \Delta I_2^* + \beta_2 \frac{S_2^* I_2^*}{S_2^* + I_2^*} - \gamma_2 I_2^* - m_{12} I_2^* P_{12}(y) + \frac{m_{21}}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_1} P_{21}(x) I_1^*(x) dx, & y \in \Omega_2. \end{cases} \quad (3.45)$$

Lemme 3.5.8. *On considère les opérateurs suivants : T_1 défini sur $\mathcal{D}(\Delta_{\Omega_1})$ par :*

$$T_1 u = -d_{S_1} \Delta u + m_{21} P_{21}(x) u, \quad x \in \Omega_1,$$

et T_2 défini sur $\mathcal{D}(\Delta_{\Omega_2})$ par :

$$T_2 v = -d_{S_2} \Delta v + m_{12} P_{12}(y) v, \quad y \in \Omega_2.$$

Si pour tout $(x, y) \in \Omega_1 \times \Omega_2$, $P_{21}(x) \neq 0$ et $P_{12}(y) \neq 0$, alors les opérateurs T_1 et T_2 sont inversibles, et il existe $M_1 > 0$ et $M_2 > 0$ telles que :

$$\rho(T_1) \subset]M_1, +\infty[\quad \text{et} \quad \rho(T_2) \subset]M_2, +\infty[.$$

Démonstration. Montrons que T_1 est inversible. Supposons que pour tout $x \in \Omega_1$,

$$P_{21}(x) \neq 0.$$

Soit $\lambda \in \rho(T_1)$ et $u \in \mathcal{D}(\Delta_{\Omega_1})$ la fonction propre associée à λ . On a :

$$T_1 u = \lambda u.$$

En multipliant par u et en intégrant sur Ω_1 la précédente équation, on en déduit que :

$$d_{S_1} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_1)}^2 = \lambda \|u\|_{L^2(\Omega_1)}^2 - m_{21} \int_{\Omega_1} P_{21} |u|^2 dx,$$

où la norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega_1)}$ est la norme dans l'espace $L^2(\Omega_1)$.

En appliquant l'inégalité de Poincaré, on montre que

$$\frac{d_{S_1}}{C_{p_1}^2} \|u\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \leq \lambda \|u\|_{L^2(\Omega_1)}^2 - m_{21} \int_{\Omega_1} P_{21} |u|^2 dx,$$

où $C_{p_1} > 0$ est la constante de l'inégalité de Poincaré.

Puisque u est une fonction propre, alors $u \neq 0$, donc on peut diviser la dernière inégalité par $\|u\|_{L^2(\Omega_1)}^2$ et on a

$$0 < \frac{d_{S_1}}{C_{p_1}^2} \leq \lambda - m_{21} \int_{\Omega_1} P_{21} \frac{|u|^2}{\|u\|_{L^2(\Omega_1)}^2} dx < \lambda.$$

Donc T_1 est inversible et on en déduit $\lambda \in]M_1, +\infty[$, avec $M_1 = \frac{d_{S_1}}{C_{p_1}^2}$. En appliquant le même raisonnement on montre l'inversibilité de T_2 . □

Théorème 3.5.9. *Pour tout N_0 fixé, $(x, y) \in \Omega_1 \times \Omega_2$, on suppose que $P_{21}(x) \neq 0$ et $P_{12}(y) \neq 0$. Le système (3.42) admet un unique DFE, noté $E^* = (S_1^*, 0, S_2^*, 0)$ qui vérifie*

$$\int_{\Omega_1} S_1^*(x) dx + \int_{\Omega_2} S_2^*(y) dy = N_0.$$

De plus, il existe un unique $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\begin{cases} S_1^*(x) = u(x)\mu_1 \\ S_2^*(y) = v(y)\mu_2. \end{cases}$$

3.5. Application : couplage non-local de systèmes SIS de réaction-diffusion

avec u l'unique solution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} T_1 u = 1, & x \in \Omega_1, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta_1} = 0, & x \in \partial\Omega_1, \end{cases}$$

et v l'unique solution de l'équation :

$$\begin{cases} T_2 v = 1, & y \in \Omega_2, \\ \frac{\partial v}{\partial \eta_2} = 0, & y \in \partial\Omega_2. \end{cases}$$

Démonstration. Tout DFE du système (3.45) est solution du système suivant :

$$\begin{cases} 0 = -T_1 S_1^* + \frac{m_{12}}{|\Omega_1|} \int_{\Omega_2} S_2^*(y) P_{12}(y) dy, & x \in \Omega_1, \\ 0 = -T_2 S_2^* + \frac{m_{21}}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_1} S_1^*(x) P_{21}(x) dx, & y \in \Omega_2, \\ \int_{\Omega_1} S_1^*(x) dx + \int_{\Omega_2} S_2^*(y) dy = N_0. \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{cases} S_1^*(x) = T_1^{-1}[1] \frac{m_{12}}{|\Omega_1|} \int_{\Omega_2} S_2^*(y) P_{12}(y) dy \\ S_2^*(y) = T_2^{-1}[1] \frac{m_{21}}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_1} S_1^*(x) P_{21}(x) dx \\ \int_{\Omega_1} S_1^*(x) dx + \int_{\Omega_2} S_2^*(y) dy = N_0, \end{cases} \quad (3.46)$$

où $T_i^{-1}[1]$ signifie l'opérateur T_i^{-1} appliqué à la fonction constante 1, pour $i = 1$ ou $i = 2$. Ces opérateurs existent et sont bien définis d'après le lemme précédent.

Posons :

$$u(x) = T_1^{-1}[1], \quad v(x) = T_2^{-1}[1]$$

et

$$\mu_1 = \frac{m_{12}}{|\Omega_1|} \int_{\Omega_2} S_2^*(y) P_{12}(y) dy, \quad \mu_2 = \frac{m_{21}}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_1} S_1^*(x) P_{21}(x) dx.$$

On peut remarquer que u est l'unique solution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} T_1 u = 1, & x \in \Omega_1, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta_1} = 0, & x \in \partial\Omega_1, \end{cases}$$

et v l'unique solution de l'équation :

$$\begin{cases} T_2 v = 1, & y \in \Omega_2, \\ \frac{\partial v}{\partial \eta_2} = 0, & y \in \partial\Omega_2, \end{cases}$$

Le système (3.46) se réécrit sous la forme suivante

$$\begin{cases} S_1^*(x) = u(x)\mu_1 \\ S_2^*(y) = v(x)\mu_2 \\ \int_{\Omega_1} S_1^*(x)dx + \int_{\Omega_2} S_2^*(y)dy = N_0 \end{cases}$$

d'où le résultat. □

3.5.3 Existence globale et bornage de la solution du modèle couplé

Dans cette partie, nous cherchons à démontrer que la solution du système (3.42) est globalement bornée. Nous considérons Ω , un domaine borné de \mathbb{R}^d ($1 \leq d \leq 3$) avec une frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière. Pour établir ce résultat, nous allons utiliser la méthode proposée par J. Morgan dans [37].

Il est important de souligner l'efficacité de la méthode de J. Morgan pour étudier la propriété de bornitude des systèmes d'équations différentielles partielles non linéaires, même lorsque les coefficients de diffusion varient d'une équation à l'autre.

Cependant, il est à noter que cette méthode ne peut être appliquée directement au système (3.42), car il est défini sur deux domaines disjoints au lieu d'un seul. Cela nécessite de refaire manuellement la démonstration pour le bornage.

Toutefois, comme les termes de couplage sont uniformément bornés, il est possible d'appliquer cette méthode à chaque nœud et d'en déduire les résultats pour le système global (3.42).

Nous considérons le problème suivant

$$\begin{cases} \partial_t U_1 - d_1 \Delta U_1 = -\beta \frac{U_1 U_2}{U_1 + U_2} + \gamma U_2 - K(x)U_1 + C_1(t), & (t, x) \in \mathbb{R}_*^+ \times \Omega, \\ \partial_t U_2 - d_2 \Delta U_2 = \beta \frac{U_1 U_2}{U_1 + U_2} - \gamma U_2 - K(x)U_2 + C_2(t), & (t, x) \in \mathbb{R}_*^+ \times \Omega. \\ U_1(0, x) = U_{1,0}(x), \quad U_2(0, x) = U_{2,0}(x) & x \in \Omega, \\ \partial_\eta U_1 = \partial_\eta U_2 = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.47)$$

où $U_{1,0}$ et $U_{2,0}$ sont continues et positives sur $\bar{\Omega}$, et K , C_1 , et C_2 sont des fonctions positives bornées.

Le système (3.47) est équivalent à chacun des deux sous systèmes de (3.42). En effet, dans le cas du sous système défini sur Ω_1 , il suffit de poser $U_1 = S_1$, $U_2 = I_1$,

$$C_1(\cdot) = \frac{m_{12}}{|\Omega_1|} \int_{\Omega_2} P_{12}(y) S_2(\cdot, y) dy \quad \text{et} \quad C_2(\cdot) = \frac{m_{12}}{|\Omega_1|} \int_{\Omega_2} P_{12}(y) I_2(\cdot, y) dy.$$

Dans le cas du sous système défini sur Ω_2 , il suffit de choisir $U_1 = S_2$, $U_2 = I_2$

$$C_1(\cdot) = \frac{m_{21}}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_1} P_{21}(x) S_1(\cdot, x) dx \quad \text{et} \quad C_2(\cdot) = \frac{m_{21}}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_1} P_{21}(x) I_1(\cdot, x) dx.$$

Le caractère borné des fonctions C_1 et C_2 vient du fait que P_{12} et P_{21} sont des probabilités et du Théorème 3.5.6. En effet, ce théorème nous assure que la solution du système (3.42) est

3.5. Application : couplage non-local de systèmes SIS de réaction-diffusion

positive et uniformément bornée.

Nous allons démontrer l'existence globale du problème (3.47), ce qui nous permettra de déduire l'existence de la solution globale du système (3.43).

Posons :

$$U = (U_1, U_2)^T, \quad F(U) = (f_1(U), f_2(U))^T = \begin{pmatrix} -\beta \frac{U_1 U_2}{U_1 + U_2} + \gamma U_2 - K(x)U_1 + C_1(t) \\ \beta \frac{U_1 U_2}{U_1 + U_2} - \gamma U_2 - K(x)U_2 + C_2(t) \end{pmatrix}$$

et

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}.$$

Avec ces notations, le système (3.47) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t U = D\Delta U + F(U), & t > 0, x \in \Omega, \\ U(0, x) = U_0(x), & x \in \Omega, \\ \partial_\eta U = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.48)$$

avec $U_0(x) = (U_{1,0}(x), U_{2,0}(x))^T$.

Pour établir cette preuve, il est impératif de s'appuyer sur un ensemble de résultats intermédiaires. Ainsi, il est nécessaire de faire appel aux lemmes suivants, qui joueront un rôle clé dans la preuve.

Lemme 3.5.10. *Soit $U_0 \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_+^2)$ et $T_{max} > 0$. Alors, (3.47) admet une unique solution locale positive définie sur $[0, T_{max}[$.*

Lemme 3.5.11. *Soit $U_0 \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_+^2)$ et $T_{max} > 0$. Alors, il existe $h \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[)$ telle que :*

$$\int_0^t \int_{\Omega} (U_1(s, x) + U_2(s, x)) dx ds \leq h(t), \quad \forall 0 < t < T_{max},$$

où U_i sont les composantes de la solution (3.47) pour $i = 1, 2$.

Démonstration. En intégrant la somme des équations du système (3.47) sur Ω , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\int_{\Omega} (U_1(s, x) + U_2(s, x)) dx \right) &\leq - \int_{\Omega} K(x) (U_1(s, x) + U_2(s, x)) dx + |\Omega| (C_1(s) + C_2(s)) \\ &\leq |\Omega| \sup_{t \in [0, T_{max}[} (C_1 + C_2)(t), \quad \forall 0 < s < T_{max}. \end{aligned}$$

En posant, $C(s) = \left(|\Omega| \sup_{t \in [0, T_{max}[} (C_1 + C_2)(t) \right) s + \int_{\Omega} (U_1(0, x) + U_2(0, x)) dx$, on obtient :

$$\int_{\Omega} (U_1(s, x) + U_2(s, x)) dx \leq C(s), \quad 0 < s < T_{max}.$$

Ainsi, on en déduit que pour tout $0 < t < T_{\max}$,

$$\int_0^t \left(\int_{\Omega} (U_1(s, x) + U_2(s, x)) dx \right) ds \leq \int_0^t C(s) ds.$$

Posons $h(t) = \int_0^t C(s) ds = \left(|\Omega| \sup_{t \in [0, T_{\max}[} (C_1 + C_2)(t) \right) \frac{t^2}{2} + \left(\int_{\Omega} (U_1(0, x) + U_2(0, x)) dx \right) t$.

Ainsi,

$$\int_0^t \left(\int_{\Omega} (U_1(s, x) + U_2(s, x)) dx \right) ds \leq h(t), \quad 0 < t < T_{\max},$$

et la fonction h est au moins continue. □

Lemme 3.5.12. *Pour tout $0 < t < T_{\max}$ et pour une donnée initiale $U_0 \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_+^2)$, la solution de l'équation (3.47) satisfait l'inégalité suivante :*

$$\left(\int_0^t \int_{\Omega} (U_1(s, x) + U_2(s, x))^2 dx ds \right)^{1/2} \leq g(t), \quad \forall 0 < t < T_{\max},$$

où $g \in C^0([0; +\infty[)$ est une fonction qui ne dépend que de U_0 et T_{\max} .

Démonstration. On multiplie l'équation 2 du système (3.47) par U_2 et on intègre sur Ω . Puisque la fonction C_2 est bornée, on en déduit, grâce au Lemme 3.5.11, qu'il existe une fonction continue g_2 telle que :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U_2(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + (\gamma - \beta) \|U_2(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \leq g_2(t).$$

Le lemme de Grönwall alors permet de démontrer l'existence d'une fonction G_2 dérivable sur $[0, T]$ telle que :

$$\|U_2(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \leq G_2(t). \tag{3.49}$$

En multipliant la première équation de (3.47) par U_1 puis en intégrant sur Ω , on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U_1(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + d_1 \|\nabla U_1(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \leq \gamma \int_{\Omega} U_1(t, x) U_2(t, x) dx + C_1(t) \|U_1(t, \cdot)\|_{L^1(\Omega)}.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivie de l'inégalité d'Hölder, on en déduit que :

$$\frac{d}{dt} \|U_1(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \leq \gamma \|U_1(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \gamma \|U_2(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + C_1(t) \|U_1(t, \cdot)\|_{L^1(\Omega)}.$$

Le Lemme 3.5.11 et l'inégalité (3.49) permettent d'en déduire qu'il existe une fonction continue g_1 telle que :

$$\frac{d}{dt} \|U_1(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \leq \gamma \|U_1(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + g_1(t).$$

3.5. Application : couplage non-local de systèmes SIS de réaction-diffusion

À nouveau, le lemme de Grönwall permet de démontrer l'existence d'une fonction G_1 dérivable sur $[0, T]$ telle que :

$$\|U_1(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \leq G_1(t). \quad (3.50)$$

En associant (3.49), (3.50) et le lemme 3.5.11, on en déduit qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^0([0; +\infty[)$ telle que :

$$\left(\int_0^t \int_{\Omega} (U_1(s, x) + U_2(s, x))^2 dx ds \right)^{1/2} \leq g(t), \quad \forall 0 < t < T_{max}.$$

□

Lemme 3.5.13. Soit $T > 0$ et $0 \leq \tau < T$, $1 < p < \infty$ et $\theta \in L^p([\tau, T] \times \Omega)$ tels que $\theta \geq 0$ et

$$\left(\int_{\tau}^T \int_{\Omega} \theta^p(t, x) dx dt \right)^{1/p} = 1.$$

Pour tout $i = 1, 2$, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \phi_i = d_i \Delta \phi_i - \phi_i + \theta, & t \in [\tau, T], x \in \Omega, \\ \partial_{\eta} \phi_i = 0, & t \in [\tau, T], x \in \partial\Omega, \\ \phi_i(\tau, x) = 0, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.51)$$

Alors, pour tout $1 \leq i \leq \infty$, il existe une unique solution $\phi_i \in W^{2,1,p}([\tau, T] \times \Omega)$ au problème (3.51). De plus, on a :

- ϕ_i est positive ;
- il existe $C_p > 0$ indépendante de θ telle que

$$\left(\int_{\tau}^T \int_{\Omega} |\Delta \phi_i(t, x)|^p dx dt \right)^{1/p} \leq C_p.$$

Lemme 3.5.14. Considérons le problème (3.51) et soit $1 < p < \infty$. Supposons que ϕ_i ($1 \leq i \leq 2$) soit une solution de ce problème.

- Si $1 < p < \frac{d+2}{2}$, (où d est la dimension de Ω) et $p \leq q \leq p \frac{d+2}{d+2-2p}$, alors il existe $\tilde{C}_p > 0$ tels que

$$\left(\int_{\tau}^T \int_{\Omega} \phi_i^q(t, x) dx dt \right)^{1/q} \leq \tilde{C}_p;$$

- Si $1 < p < \infty$, alors

$$\left(\int_{\Omega} \phi_i^p(T, x) dx \right)^{1/p} \leq p^{1/p};$$

- Si $1 < p < \infty$, alors

$$\left(\int_{\tau}^T \int_{\Omega} \phi_i^p(t, x) dx dt \right)^{1/p} \leq 1 - e^{-(T-\tau)}.$$

Posons $\hat{\theta}(t, x) = \theta(T + \tau - t, x)$ et $\psi_i(t, x) = \phi_i(T + \tau - t, x)$ sur $[\tau, T[\times \bar{\Omega}$. La fonction ψ_i devient l'unique solution du problème suivant

$$\begin{cases} \partial_t \psi_i = -d_i \Delta \psi_i + \psi_i - \hat{\theta}, & t \in [\tau, T[, x \in \Omega, \\ \partial_\eta \psi_i = 0, & t \in [\tau, T[, x \in \partial\Omega \\ \psi_i(T, x) = 0, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.52)$$

Lemme 3.5.15. *Supposons que ψ_i soit une solution du problème (3.52). Alors,*

— *Si $p > (d + 2)/2$, alors il existe $K_{p(T-\tau)} > 0$ tel que :*

$$\int_\tau^T \sup_{x \in \Omega} \psi_i(t, x) dt \leq K_{p(T-\tau)};$$

— *si $1 < p < (d + 2)/2$ et $1 < q < dp/(d - 2)(p - 1)$, alors il existe $K_{p,q,(T-\tau)>0}$ tel que*

$$\left(\int_\Omega |\psi_i(\tau, x)|^q dx \right)^{1/q} \leq K_{p,q,(T-\tau)}.$$

Lemme 3.5.16. *Si $1 \leq r < k$ et s'il existe $0 < \mu < 2$ tel que $r + (2 - \mu)/(d + 2) < 1 + 2k/(d + 2)$, alors il existe $\delta > 1$ et $1 < p < (d + 2)/2$ tel que :*

$$\begin{aligned} - & k = \frac{dp}{(n + 2)(p - 1)} \delta, \\ - & \frac{k}{k - r} \leq \frac{p(d + 2)}{d + 2 - 2p} k, \\ - & \frac{p}{p - 1} \geq \frac{d + 2}{d + \mu} k. \end{aligned}$$

Théorème 3.5.17. *Soient $U_0 \in X_+$ et $T_{max} > 0$. Alors, le système (3.47) admet une unique solution globalement bornée.*

Démonstration. La preuve d'existence et d'unicité de la solution globale pour le système (3.47) est divisée en deux parties. Dans la première, nous utiliserons la proposition 2.4 de [37] pour démontrer la globalité de la solution. Dans la seconde, nous appliquerons la démonstration de la proposition 2.5 de l'article [37] à notre exemple pour établir que la solution est bornée.

1. Existence de la solution globale du système (3.47)

Nous allons commencer par vérifier les hypothèses de la proposition 2.4 de [37] pour le système (3.47). Puisque l'opérateur non linéaire F est quasi positif, il en résulte que \mathbb{R}_+^2 est invariant pour le système (3.47). Nous considérons ensuite l'application $H(z) = z_1 + z_2$ définie sur \mathbb{R}_+^2 , qui nous permettra de montrer que les hypothèses de la proposition 2.4 sont satisfaites. La fonction $H \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}_+)$, et elle vérifie les propriétés suivantes :

- (H_1) : $H(z) = h(z_1) + h(z_2)$ pour tout $z \in \mathbb{R}_+^2$, où h est l'application identité définie de \mathbb{R}_+ vers \mathbb{R}_+ ;
- (H_2) : $H(z) = 0$ si et seulement si $z = 0$;
- (H_2) : $\Delta H(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}_+^2$;
- (H_4) : $H(z) \rightarrow +\infty$ pour tout $|z| \rightarrow \infty$.

3.5. Application : couplage non-local de systèmes SIS de réaction-diffusion

— (H_5) : Pour $L_1 = 0$ et $L_2 > \sup_{t \in [0, T_{max}[} (C_1 + C_2)(t)$, on a :

$$\nabla H(z).F(z) \leq L_1 H(z) + L_2 \quad \forall z \in \mathbb{R}_+^2.$$

En effet

$$\begin{aligned} \nabla H(z).F(z) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\beta \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} + \gamma z_2 - K(x)z_1 + C_1(t) \\ \beta \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} - \gamma z_2 - K(x)z_2 + C_2(t) \end{pmatrix} \\ &= -K(x)H(z) + C_1(t) + C_2(t). \end{aligned}$$

Puisque K , C_1 et C_2 sont des fonctions positives bornées, on en déduit que

$$\nabla H(z).F(z) \leq L_1 H(z) + L_2,$$

avec $L_1 = 0$ et $L_2 > \sup_{t \in [0, T_{max}[} (C_1 + C_2)(t)$.

— (H_6) : On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} f_1(z_1) &= -\beta \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} + \gamma z_2 - K(x)z_1 + C_1(t) \leq \beta z_1 + \gamma z_2 + \sup_{t \in [0, T_{max}[} (C_1 + C_2)(t) \\ &\leq \beta H(z) + \gamma H(z) + \sup_{t \in [0, T_{max}[} (C_1 + C_2)(t) \\ &\leq \max\{\beta, \gamma\} H(z) + \sup_{t \in [0, T_{max}[} (C_1 + C_2)(t). \end{aligned}$$

Aussi,

$$\begin{aligned} f_1(z) + f_2(z) &= -\beta \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} + \gamma z_2 - K(x)z_1 + C_1(t) + \beta \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} - \gamma z_2 - K(x)z_2 + C_2(t) \\ &\leq \sup_{t \in [0, T_{max}[} (C_1 + C_2)(t) \\ &\leq \max\{\beta, \gamma\} H(z) + \sup_{t \in [0, T_{max}[} (C_1 + C_2)(t). \end{aligned}$$

En somme, pour $r = 1$, $K_1 = \max\{\beta, \gamma\}$ et $K_2 > \sup_{t \in [0, T_{max}[} (C_1 + C_2)(t)$, on a

$$\forall 1 \leq j \leq 2, \quad \sum_{i=1}^j a_{ji} h'(z_i) f_i(z) \leq K_1 H(z)^r + K_2.$$

— (H_7) : Pour $q_1 = 1$, $K_3 = \max\{\beta, \gamma\}$, $K_4 > \sup_{t \in [0, T_{max}[} (C_1 + C_2)(t)$ alors on a ,

$$h'(z_i) f_i(z) \leq K_3 H(z)^{q_1} + K_4, \quad \forall z \in \mathbb{R}_+^2, \quad 1 \leq i \leq 2.$$

En effet, on a pour $i = 1$:

$$\begin{aligned} h'(z_1)f_1(z) &= -\beta \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} + \gamma z_2 - K(x)z_1 + C_1(t) \leq \beta z_1 + \gamma z_2 + \sup_{t \in [0, T_{max}[} (C_1 + C_2)(t) \\ &\leq \max\{\beta, \gamma\} H(z) + \sup_{t \in [0, T_{max}[} (C_1 + C_2)(t). \end{aligned}$$

De plus, pour $i = 2$, on a

$$\begin{aligned} h'(z_2)f_2(z) &= \beta \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} - \gamma z_2 - K(x)z_2 + C_2(t) \leq \beta z_2 + \sup_{t \in [0, T_{max}[} (C_1 + C_2)(t) \\ &\leq \max\{\beta, \gamma\} H(z) + \sup_{t \in [0, T_{max}[} (C_1 + C_2)(t). \end{aligned}$$

Les hypothèses (H_1) à (H_7) étant vérifiées pour le système (3.47), nous pouvons utiliser le Lemme 3.5.12 pour appliquer la Proposition 2.4 de [37]. Selon le Lemme 3.5.12, il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^0([0; +\infty[)$ telle que :

$$\left(\int_0^t \int_{\Omega} H(U(x, s))^2 dx ds \right)^{1/2} \leq g(t), \quad \forall 0 < t < T_{max},$$

où U est la solution de (3.47). De plus, en posant $a = 2$, on a $r < 1 + 2a/(d + 2)$, où $r = 1$ est défini dans la propriété (H_6) .

En vertu de la Proposition 2.4 de [37], sous ces conditions, on déduit que $T_{max} = +\infty$. Cela permet de conclure la première partie de la preuve, notamment l'existence globale de la solution du système (3.47).

Passons maintenant à la deuxième partie de la preuve, qui consiste à borner la solution du problème (3.47). Au cours de cette deuxième partie, nous chercherons à établir des bornes pour la solution de (3.47), qui seront cruciales pour la suite de notre analyse.

2. Bornage de la solution globale du système (3.47)

Soit $0 < T < \infty$. D'après le lemme 3.5.12, il existe une fonction $g \in \mathcal{C}([0, +\infty[)$ telle que :

$$\left(\int_0^t \int_{\Omega} H^2(U(s, x)) dx ds \right)^{1/2} \leq g(t), \quad t \in [0, T].$$

Dans la suite de cette démonstration, nous considérons la fonction g croissante.

Rappelons brièvement la propriété (H_6) :

pour $r = 1$, $K_1 = \max\{\beta, \gamma\}$ et $K_2 > \sup_{t \in [0, T_{max}[} (C_1 + C_2)(t)$, on a

$$\forall 1 \leq j \leq 2, \quad \sum_{i=1}^j a_{ji} h'(z_i) f_i(z) \leq K_1 H(z)^r + K_2,$$

avec $h'(z_i) = a_{ji} = 1$ pour $z_i \in \mathbb{R}^+$, $1 \leq j \leq 2$ et $1 \leq i \leq j$.

Posons $a = 2$.

Puisque $1 \leq r < a$ et $r < 1 + 2a/(d + 2)$, alors il existe $0 < \mu < 2$ telle que :

$$r + \frac{2 - \mu}{d + 2} < 1 + \frac{2a}{d + 2}.$$

3.5. Application : couplage non-local de systèmes SIS de réaction-diffusion

D'après le Lemme 3.5.16, il existe $1 < p < \frac{d+2}{2}$ tel que

$$\frac{p}{p-1} \geq a \frac{d+2}{d+\mu}.$$

Notons p_1 le conjugué de p , alors on a

$$p_1 = \frac{p}{p-1}.$$

Pour tout $0 \leq \tau < T$,

$$\left(\int_0^{T-\tau} \int_{\Omega} H^2(U(t, x)) dx dt \right)^{1/2} \leq g(T-\tau).$$

Par changement de variable, on en déduit que :

$$\left(\int_{\tau}^T \int_{\Omega} H^2(U(s-\tau, x)) dx ds \right)^{1/2} \leq g(T-\tau), \quad \forall 0 \leq \tau < T.$$

On a alors

$$\left(\int_{\tau}^T \int_{\Omega} H^2(U(t, x)) dx dt \right)^{1/2} \leq g(T-\tau).$$

Considérons $\{t_{1,i}\}_{i \geq 1}$ une suite telle que, $t_{1,1} > 0$, $1 < t_{1,i+1} - t_{1,i} < 3$ et

$$\left(\int_{\Omega} H^2(U(t_{1,i}, x)) dx dt \right)^{1/2} \leq M_1, \quad \forall i \geq 1,$$

avec $M_1 = g(3)$. Supposons que $T > t_{1,1}$, alors il existe i_0 tel que $t_{1,i_0} < T < t_{1,i_0+1}$. Notons alors $\tau = t_{1,i_0}$, pour $\theta \in L^p([\tau, T] \times \Omega)$ positive telle que :

$$\left(\int_{\tau}^T \int_{\Omega} \theta^p(t, x) dx dt \right)^{1/p} = 1$$

et posons

$$\hat{\theta}(t, x) = \theta(T + \tau - t, x).$$

On considère ψ_2 la solution de (3.52), alors on a :

$$\int_{\tau}^T \int_{\Omega} h(U_1) \hat{\theta} dx dt = \int_{\tau}^T \int_{\Omega} h(U_1) (-\partial_t \psi_2 - d_2 \Delta \psi_2 + \psi_2) dx dt.$$

Par intégration par parties et d'après l'équation d'évolution de U_1 , on a

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^T \int_{\Omega} h(U_1) \hat{\theta} dx dt &= - \left[\int_{\Omega} h(U_1) \psi_2 dx \right]_{\tau}^T + \int_{\tau}^T \int_{\Omega} [d_1 \Delta U_1 + f_1(U)] h'(U_1) \psi_2 dx dt \\ &\quad - d_2 \int_{\tau}^T \int_{\Omega} h(U_1) \Delta \psi_2 dx dt + \int_{\tau}^T \int_{\Omega} h(U_1) \psi_2 dx dt. \end{aligned}$$

Par double intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^T \int_{\Omega} h(U_1) \hat{\theta} dx dt &= - \left[\int_{\Omega} h(U_1) \psi_2 dx \right]_{\tau}^T - d_1 \int_{\tau}^T \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 h''(U_1) \psi_2 dx dt \\ &\quad + d_1 \int_{\tau}^T \int_{\Omega} h(U_1) \Delta \psi_2 dx dt - d_2 \int_{\tau}^T \int_{\Omega} h(U_1) \Delta \psi_2 dx dt \\ &\quad + \int_{\tau}^T \int_{\Omega} h(U_1) \psi_2 dx dt + \int_{\tau}^T \int_{\Omega} f_1(U) h'(U_1) \psi_2 dx dt. \end{aligned}$$

La fonction $h'' = 0$ et ψ_2 est positive d'après le Lemme 3.5.13, alors on a :

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^T \int_{\Omega} h(U_1) \hat{\theta} dx dt &\leq \int_{\Omega} h(U_1(\tau, x)) \psi_2(\tau, x) dx + (d_1 - d_2) \int_{\tau}^T \int_{\Omega} h(U_1) \Delta \psi_2 dx dt \quad (3.53) \\ &\quad + \int_{\tau}^T \int_{\Omega} (f_1(U) h'(U_1) + h(U_1)) \psi_2 dx dt. \end{aligned}$$

En procédant par les mêmes estimations et arguments, nous pouvons en déduire que :

$$\int_{\tau}^T \int_{\Omega} h(U_2) \hat{\theta} dx dt \leq \int_{\Omega} h(U_2(\tau, x)) \psi_2(\tau, x) dx + \int_{\tau}^T \int_{\Omega} (f_2(U_2) h'(U_2) + h(U_2)) \psi_2 dx dt. \quad (3.54)$$

Ainsi, en additionnant les estimations (3.53) et (3.54), et en utilisant la propriété (H_6) , nous pouvons en déduire que :

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^T \int_{\Omega} H(U) \hat{\theta} dx dt &\leq \int_{\Omega} H(U(\tau, x)) \psi_2(\tau, x) dx + (d_1 - d_2) \int_{\tau}^T \int_{\Omega} h(U_1) \Delta \psi_2 dx dt \\ &\quad + \tilde{K}_1 \int_{\tau}^T \int_{\Omega} H(U) \psi_2 dx dt + K_2 \int_{\tau}^T \int_{\Omega} \psi_2 dx dt, \quad \tilde{K}_1 = K_1 + 1. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^T \int_{\Omega} H(U) \hat{\theta} dx dt &\leq \left(\int_{\Omega} H(U(\tau, x))^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\psi_2(\tau, x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\quad + |d_1 - d_2| \left(\int_{\tau}^T \int_{\Omega} H(U)^2 dx dt \right)^{1/2} \left(\int_{\tau}^T \int_{\Omega} |\Delta \psi_2|^2 dx dt \right)^{1/2} \\ &\quad + \tilde{K}_1 \left(\int_{\tau}^T \int_{\Omega} H(U)^2 dx dt \right)^{1/2} \left(\int_{\tau}^T \int_{\Omega} |\psi_2|^2 dx dt \right)^{1/2} \\ &\quad + K_2 \left(\int_{\tau}^T \int_{\Omega} |\psi_2|^2 dx dt \right)^{1/2} ((T - \tau)|\Omega|)^{1/2}. \end{aligned}$$

3.5. Application : couplage non-local de systèmes SIS de réaction-diffusion

D'après les lemmes 3.5.13, 3.5.14 et 3.5.15 , il existe $C_p > 0$ et $C_{p,T-\tau} > 0$ tels que

$$\begin{cases} \left(\int_{\tau}^T \int_{\Omega} |\Delta \psi_2|^2 dx dt \right)^{1/2} \leq C_p, \\ \left(\int_{\Omega} |\psi_2(\tau, x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq C_{p,T-\tau}, \\ \left(\int_{\tau}^T \int_{\Omega} |\psi_2|^2 dx dt \right)^{1/2} \leq (1 - e^{-(T-\tau)}). \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^T \int_{\Omega} H(U) \hat{\theta} dx dt &\leq \left(\int_{\Omega} H(U(\tau, x))^2 dx \right)^{1/2} C_{p,T-\tau} + C_p |d_1 - d_2| \left(\int_{\tau}^T \int_{\Omega} H(U)^2 dx dt \right)^{1/2} \\ &\quad + \left[\tilde{K}_1 \left(\int_{\tau}^T \int_{\Omega} H(U)^2 dx dt \right)^{1/2} + K_2 (3(|\Omega|)^{1/2}) \right] (1 - e^{-(T-\tau)}) \\ &\leq M_1 C_{p,T-\tau} + C_p |d_1 - d_2| g(T - \tau) + \left[\tilde{K}_1 g(T - \tau) + K_2 (3(|\Omega|)^{1/2}) \right] (1 - e^{-(T-\tau)}) \\ &\leq M_1 C_{p,T-\tau} + C_p |d_1 - d_2| M_1 + \left[\tilde{K}_1 M_1 + K_2 (3(|\Omega|)^{1/2}) \right] (1 - e^{-3}). \end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe $M_{T-\tau} > 0$ telle que

$$\int_{\tau}^T \int_{\Omega} H(U(t, x)) \hat{\theta} dx dt \leq M_{T-\tau}.$$

Par dualité, on en déduit alors que :

$$\left(\int_{\tau}^T \int_{\Omega} H^{p_1}(U(t, x)) dx dt \right)^{1/p_1} = \sup_{\theta \in L^p([\tau, T] \times \Omega), \|\theta\|_{L^p} = 1} \int_{\tau}^T \int_{\Omega} H(U(t, x)) \theta dx dt \leq M_{T-\tau}.$$

Il s'en suit alors qu'il existe $\tilde{M}_1 > 0$ telle que

$$\left(\int_{t_{1,i}}^{t_{1,i+1}} \int_{\Omega} H^{p_1}(U(t, x)) dx dt \right)^{1/p_1} \leq \tilde{M}_1, \quad \forall i \geq 1.$$

On sait alors trouver $\{t_{2,i}\}_{i \geq 1}$ une suite telle que $t_{1,2i-1} \leq t_{2,i} \leq t_{1,2i}$ pour tout $i \geq 1$ et

$$\left(\int_{\Omega} H^{p_1}(U(t_{2,i}, x)) dx dt \right)^{1/p_1} \leq \tilde{M}_1, \quad \forall i \geq 1.$$

La suite $\{t_{2,i}\}_{i \geq 1}$ est telle que $1 < t_{2,i+1} - t_{2,i} < 9$ pour tout $i \geq 1$ et existe $\tilde{M}_2 > 0$ telle que

$$\left(\int_{t_{2,i}}^{t_{2,i+1}} \int_{\Omega} H^{p_1}(U(t,x)) dx dt \right)^{1/2} \leq \tilde{M}_2 \quad \forall i \geq 1.$$

On réitère le même raisonnement depuis le début de la preuve en remplaçant a par p_1 . Alors on a $1 \leq r < p_1$ et $r < 1 + 2p_1/(d+2)$, donc il existe $0 < \mu < 2$ (on conserve la valeur de μ précédente) telle que :

$$r + \frac{2 - \mu}{d + 2} < 1 + \frac{2p_1}{d + 2}.$$

D'après le Lemme 3.5.16, il existe $1 < p < \frac{d+2}{2}$ tel que

$$\frac{p}{p-1} \geq \frac{d+2}{d+\mu} p_1.$$

Posons, alors

$$p_2 = \frac{p}{p-1} \geq \left(\frac{d+2}{d+\mu} \right) p_1 \geq \left(\frac{d+2}{d+\mu} \right)^2 a.$$

Alors avec les arguments utilisés plus haut, on montre qu'il existe $M_3 > 0$ telle que,

$$\left(\int_{t_{2,i}}^{t_{2,i+1}} \int_{\Omega} H^{p_2}(U) dx dt \right)^{1/p_2} \leq M_3, \quad \forall i \geq 1.$$

Ainsi pour tout $k \geq 2$, en appliquant le même raisonnement, on montre qu'il existe $M_{k+1} > 0$, p_k vérifiant :

$$p_k \geq \left(\frac{d+2}{d+\mu} \right)^k a,$$

et $\{t_{k,i}\}_{i \geq 1}$ tels que :

- (a) $t_{k,1} > 0$, $1 < t_{k,i+1} - t_{k,i} < 3^k$;
- (b) $\left(\int_{\Omega} H^{p_{k-1}}(U(t_{k,i}, x)) dx dt \right)^{1/2} \leq M_k, \quad \forall i \geq 1$;
- (c) $\left(\int_{t_{k,i}}^{t_{k,i+1}} \int_{\Omega} H^{p_k}(U(t,x)) dx dt \right)^{1/p_k} \leq M_{k+1} \quad \forall i \geq 1.$

La suite $(p_k)_{k \geq 1}$ diverge, car $\frac{d+2}{d+\mu} > 1$. Alors pour tout $b \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ suffisamment grand tel que :

$$p_{k_0} > (d+2) \quad \text{et} \quad 0 < b < 2 - \frac{(d+2)}{p_{k_0}},$$

et

$$\left(\int_{t_{k_0,i}}^{t_{k_0,i+1}} \int_{\Omega} H(U(t,x))^{p_{k_0}} dx dt \right)^{1/p_{k_0}} \leq \tilde{M}_{p_{k_0}},$$

3.5. Application : couplage non-local de systèmes SIS de réaction-diffusion

pour tout $i \geq 1$.

Cela implique, d'après [47], que

$$H(U) \in W^{1,2;p_{k_0}} ([t_{k_0,i}, t_{k_0,i+1}] \times \Omega), \quad i \geq 1.$$

Puisque $0 < b < 2 - \frac{(d+2)}{k_0}$, alors

$$W^{1,2;p_{k_0}} ([t_{k_0,i}, t_{k_0,i+1}] \times \Omega) \hookrightarrow BUC^{b,b/2} ([t_{k_0,i}, t_{k_0,i+1}] \times \bar{\Omega}), \quad i \geq 1,$$

donc

$$H(U) \in BUC^{b,b/2} ([t_{k_0,i}, t_{k_0,i+1}] \times \bar{\Omega}) \implies U_1, U_2 \in BUC^{b,b/2} ([t_{k_0,i}, t_{k_0,i+1}] \times \bar{\Omega}).$$

Nous rappelons la définition de l'ensemble $BUC^{a,a/2}(Q)$, où $a > 0$ et $T > 0$. Soit $Q = (0, T) \times \Omega$, où Ω est un domaine arbitraire dans \mathbb{R}^n . Pour $\alpha \in (0, 1]$, nous définissons

$$[f]_{\alpha;Q} = \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ t,s \in (0,T) \\ (x,t) \neq (y,s)}} \frac{|f(x,t) - f(y,s)|}{|x-y|^\alpha + |t-s|^{\alpha/2}}.$$

Pour $\alpha \in (0, 1]$ et $a = k + \alpha$, nous posons

$$|f|_{a;Q} = \sum_{|\beta|+2j \leq k} \sup_Q |D_x^\beta D_t^j f| + \sum_{|\beta|+2j=k} [D_x^\beta D_t^j f]_{\alpha;Q},$$

ainsi, nous avons :

$$BUC^{a,a/2}(Q) = \{f : |f|_{a;Q} < \infty\}.$$

Il existe alors $N > 0$ tel que $U_1(t, x), U_2(t, x) < N$ quelque soit $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$, ce qui achève la preuve. □

Remarque 3.5.18. En utilisant les hypothèses du théorème précédent sur chaque nœud du système (3.42), nous pouvons démontrer que les solutions de chaque nœud sont globalement bornées. Par conséquent, on peut conclure que la solution du système (3.42) est également globalement bornée.

Remarque 3.5.19. Le système (3.42) étudié ici, est constitué de 2 systèmes SIS couplés. Tous les résultats vus précédemment peuvent s'étendre sans difficultés majeurs à un réseau de n systèmes SIS couplés.

3.5.4 Simulations numériques

Dans cette partie, nous considérons un réseau de 3 systèmes de réaction-diffusion de type SIS, définis sur trois domaines distincts. Le système couplé est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t S_1 - d_{S_1} \Delta S_1 = -f_1(S_1, I_1) - (m_{21} + m_{31})S_1 P_1(x) + \frac{m_{12}}{|\Omega_1|} \int_{\Omega_2} P_2(y) S_2(t, y) dy + \frac{m_{13}}{|\Omega_1|} \int_{\Omega_3} P_3(z) S_3(t, z) dz, \\ \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega_1, \\ \partial_t I_1 - d_{I_1} \Delta I_1 = f_1(S_1, I_1) - (m_{21} + m_{31})I_1 P_1(x) + \frac{m_{12}}{|\Omega_1|} \int_{\Omega_2} P_2(y) I_2(t, y) dy + \frac{m_{13}}{|\Omega_1|} \int_{\Omega_3} P_3(z) I_3(t, z) dz, \\ \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega_1, \\ S_1(0, x) = S_{1,0}(x), \quad I_1(0, x) = I_{1,0}(x), \\ \quad x \in \Omega_1, \\ \partial_{\eta_1} S_1 = \partial_{\eta_1} I_1 = 0, \\ \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega_1, \\ \partial_t S_2 - d_{S_2} \Delta S_2 = -f_2(S_2, I_2) - (m_{12} + m_{32})S_2 P_2(y) + \frac{m_{21}}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_1} P_1(x) S_1(t, x) dx + \frac{m_{23}}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_3} P_3(z) S_3(t, z) dz, \\ \quad (t, y) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega_2, \\ \partial_t I_2 - d_{I_2} \Delta I_2 = f_2(S_2, I_2) - (m_{12} + m_{32})I_2 P_2(y) + \frac{m_{21}}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_1} P_1(x) I_1(t, x) dx + \frac{m_{23}}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_3} P_3(z) I_3(t, z) dz, \\ \quad (t, y) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega_2, \\ S_2(0, y) = S_{2,0}(y), \quad I_2(0, y) = I_{2,0}(y), \\ \quad y \in \Omega_2, \\ \partial_{\eta_2} S_2 = \partial_{\eta_2} I_2 = 0, \\ \quad (t, y) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega_2, \\ \partial_t S_3 - d_{S_3} \Delta S_3 = -f_3(S_3, I_3) - (m_{13} + m_{23})S_3 P_3(z) + \frac{m_{32}}{|\Omega_3|} \int_{\Omega_2} P_2(y) S_2(t, y) dy + \frac{m_{31}}{|\Omega_3|} \int_{\Omega_1} P_1(x) S_1(t, x) dx, \\ \quad (t, z) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega_3, \\ \partial_t I_3 - d_{I_3} \Delta I_3 = f_3(S_3, I_3) - (m_{13} + m_{23})I_3 P_3(z) + \frac{m_{32}}{|\Omega_3|} \int_{\Omega_2} P_2(y) I_2(t, y) dy + \frac{m_{31}}{|\Omega_3|} \int_{\Omega_1} P_1(x) I_1(t, x) dx, \\ \quad (t, z) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega_3, \\ S_3(0, z) = S_{3,0}(z), \quad I_3(0, z) = I_{3,0}(z), \\ \quad z \in \Omega_3, \\ \partial_{\eta_3} S_3 = \partial_{\eta_3} I_3 = 0, \\ \quad (t, z) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega_3, \end{array} \right. \quad (3.55)$$

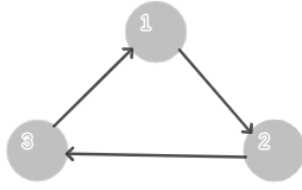
avec

$$f_i(S_i, I_i) = \beta_i \frac{S_i I_i}{S_i + I_i} - \gamma_i I_i,$$

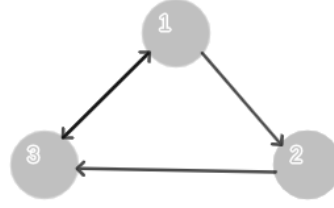
et P_i une probabilité qui suit une lois de Bernoulli, $i = 1, 2, 3$.

Notre intérêt se porte sur l'évolution de la maladie dans le réseau en fonction de sa topologie. Dans les simulations numériques ç-dessous, on considère un réseaux constitué de trois domaines ($\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$) de formes rectangulaires de mêmes dimensions ($l = 4$ et $L = 12$). En particulier, on choisit les domaines suivants :

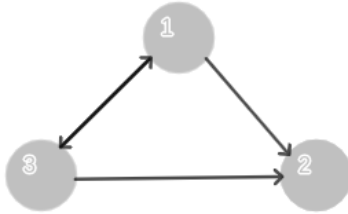
$$\Omega_1 := [0, 12] \times [0, 4], \quad \Omega_2 := [0, 12] \times [-5, -1], \quad \Omega_3 := [0, 12] \times [-10, -6].$$



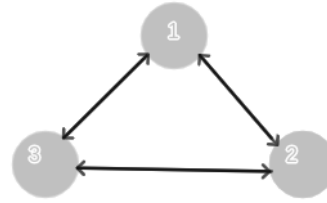
(a) Topologie 1



(b) Topologie 2



(c) Topologie 3



(d) Topologie 4

FIGURE 3.2 – Topologies considérées pour chaque scénario

Ainsi, on définit P_1 , P_2 et P_3 par :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \Omega_1, \quad P_1(x, y) &= \begin{cases} 0.4 & \text{si } |x - a_1| < \frac{L}{2} - 1 \text{ et } |y - b_1| < \frac{l}{2} - 1, \\ 0.6 & \text{si non,} \end{cases} & a_1 = 6, \quad b_1 = 2. \\ \forall (x, y) \in \Omega_2, \quad P_2(x, y) &= \begin{cases} 0.4 & \text{si } |x - a_2| < \frac{L}{2} - 1 \text{ et } |y - b_2| < \frac{l}{2} - 1, \\ 0.6 & \text{si non,} \end{cases} & a_2 = 6, \quad b_2 = -2. \\ \forall (x, y) \in \Omega_3, \quad P_3(x, y) &= \begin{cases} 0.4 & \text{si } |x - a_3| < \frac{L}{2} - 1 \text{ et } |y - b_3| < \frac{l}{2} - 1, \\ 0.6 & \text{si non,} \end{cases} & a_3 = 6, \quad b_3 = -8. \end{aligned}$$

La probabilité de quitter le domaine est donc partout égale, sauf dans une bordure d'épaisseur 1 autour du bord du domaine, afin de créer une inhomogénéité spatiale.

Nous étudions deux scénarios dans les simulations qui vont suivre. Pour chacun des scénarios envisagés, nous examinerons différentes topologies, illustrées dans la FIGURE 3.2 et résumées

Paramètres du couplage	Topologie 1	Topologie 2	Topologie 3	Topologie 4
(m_{21}, m_{31})	$(0.1, 0)$	$(0.1, 0.1)$	$(0.1, 0.1)$	$(0.1, 0.1)$
(m_{12}, m_{32})	$(0, 0.1)$	$(0, 0.1)$	$(0, 0)$	$(0.1, 0.1)$
(m_{13}, m_{23})	$(0.1, 0)$	$(0.1, 0)$	$(0, 0.1)$	$(0.1, 0.1)$

TABLE 3.1 – Valeurs des coefficients du couplage dans les quatre topologies considérées pour chaque scénario.

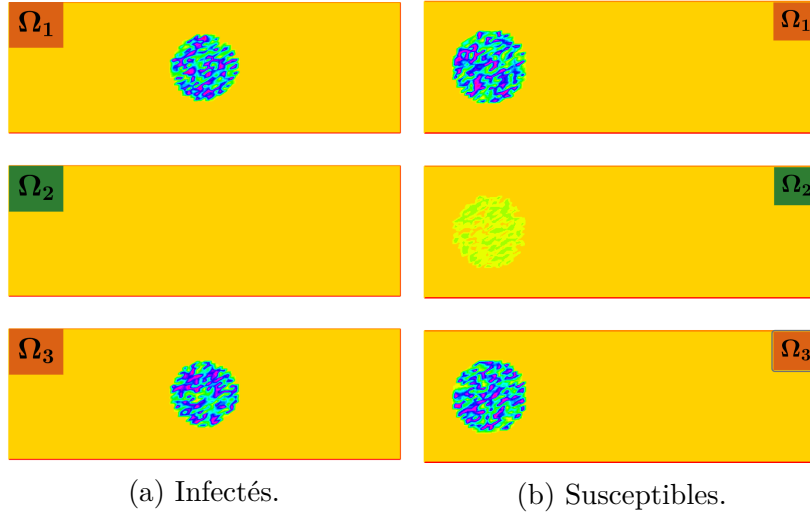


FIGURE 3.3 – Répartition des populations dans leur habitat au temps initial : en rouge les zones infectées et en vert les zones sans infection, cette configuration initiale est la même pour toutes les simulations présentées dans la suite.

dans le tableau 3.1. L'objectif général est de considérer des configurations où deux zones infectées et présentant un équilibre endémique stable sont connectées (unidirectionnellement ou bidirectionnellement), avec une zone non infectée. Dans le premier scénario, dans la zone non infectée l'équilibre endémique est une configuration stable, tandis que dans le deuxième, c'est l'équilibre sans maladie qui est stable.

Pour chacun des deux scénarios, on considère toujours la même configuration initiale, présentée dans la FIGURE 3.3. En particulier, on suppose que, à différence des nœuds 1 et 3, il n'y a aucun infecté dans le nœud 2 à l'instant initial.

— **Scénario 1 :**

On considère un réseaux où en absence de couplage on a des états d'équilibres endémiques stables sur tous les nœuds. Pour cela, d'après le théorème 3.5.2 (voir [1] pour plus de détails), on vas considérer le taux de contagion β supérieur au taux de guérison γ . De plus, on choisit de prendre des valeurs de paramètres identiques sur chaque nœud, voir TABLE 3.2.

Dans le cas de la topologie 1, on remarque que les nœuds 1 et 3 convergent vers la même configuration d'équilibre. Dans le noeud 2, à l'instant initial épargné par l'infection, l'épidémie se développe à cause du flux d'infectés provenant du noeud 1. De plus, puisque la

3.5. Application : couplage non-local de systèmes SIS de réaction-diffusion

topologie est symétrique et les paramètres sont égaux sur chaque nœud, à l'équilibre les deux populations d'infectés et susceptibles se répartissent de façon égale sur les trois nœuds (voir Figure 3.5a). Dans le cas du réseau de topologie 2, dans la Figure 3.4b on voit que le nœud 3 est celui qui à l'équilibre a le plus d'infectés (environ le double de ceux qui sont dans les nœuds 1 et 2). En effet, le nœud 3 est celui qui reçoit le plus, car il présente deux connexions entrantes. Pour ce qui concerne le cas de la topologie 3, on remarque qu'à l'instant final presque tous les infectés sont dans le nœud 2 (voir Fig. 3.4c). Mais en effet toute la population se déplace dans le nœud 2 et donc on assiste à une évacuation des deux nœuds 1 et 3, qui étaient à risque et présentaient tous les infectés au début de la simulation (voir Fig. 3.5c). Enfin, pour la topologie 4, le système converge vers la même configuration d'équilibre de la topologie 1, mais plus rapidement à cause du couplage bidirectionnel. D'après la FIGURE ??, on remarque que la densité totale de susceptibles (respectivement infectés) dans le réseau n'est pas influencée par le choix de la topologie. Ce comportement est du à la conservation des flux et à l'hypothèse qu'il n'y a pas d'infections ni de guérisons pendant les déplacements.

Paramètres	Nœud 1	Nœud 2	Nœud 3
(D_{S_i}, D_{I_i})	(0.3, 0.3)	(0.3, 0.3)	(0.3, 0.3)
β_i	0.3	0.3	0.3
γ_i	0.1	0.1	0.1

TABLE 3.2 – Paramètres pour le scénario 1.

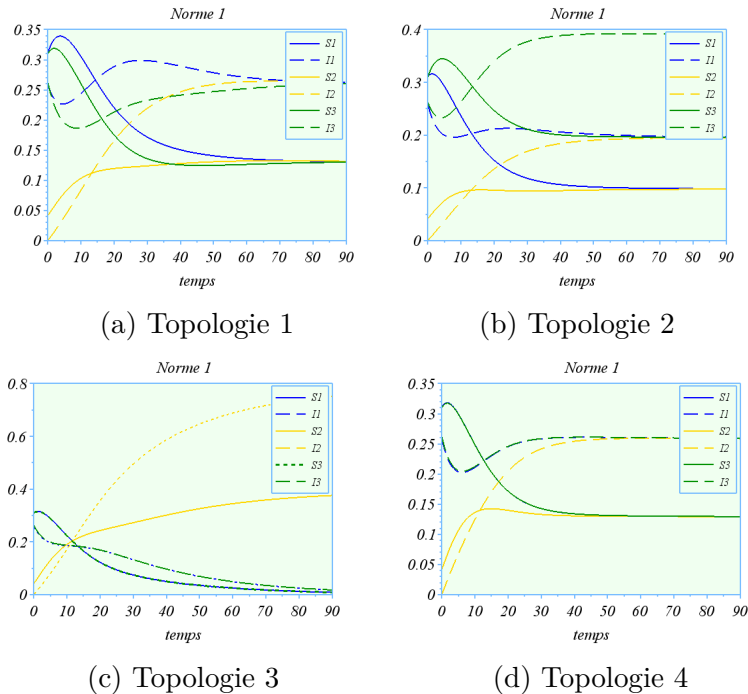


FIGURE 3.4 – Scénario 1 : Évolution des densités des susceptibles (ligne continue) et infectés (en tiret) dans les trois nœuds (nœud 1 en bleu, nœud 2 en jaune et nœud 3 en vert).

— **Scénario 2 :**

On considère un réseaux où, en absence de couplage, on a des états d'équilibre endémiques

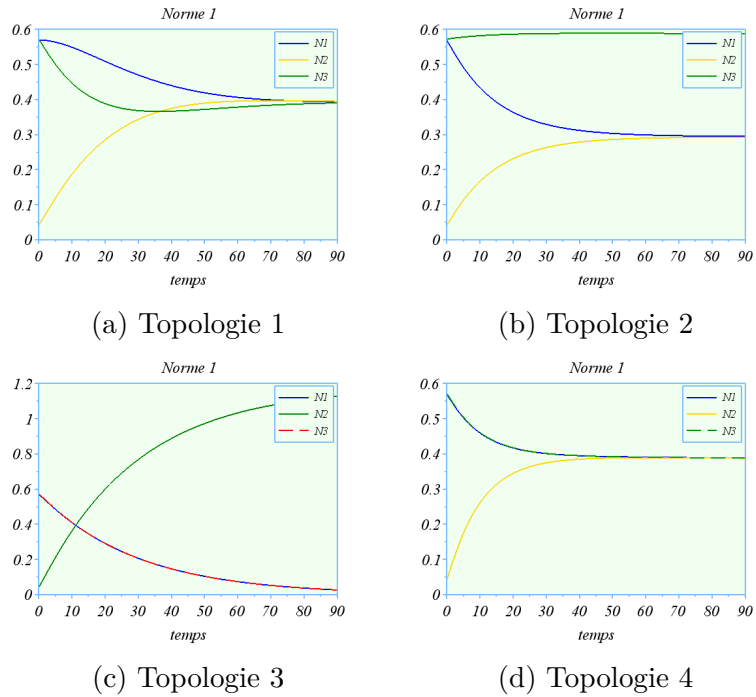


FIGURE 3.5 – Scénario 1 : Évolution des densités totales des populations dans les trois nœuds (nœud 1 en bleu, nœud 2 en jaune et nœud 3 en vert).

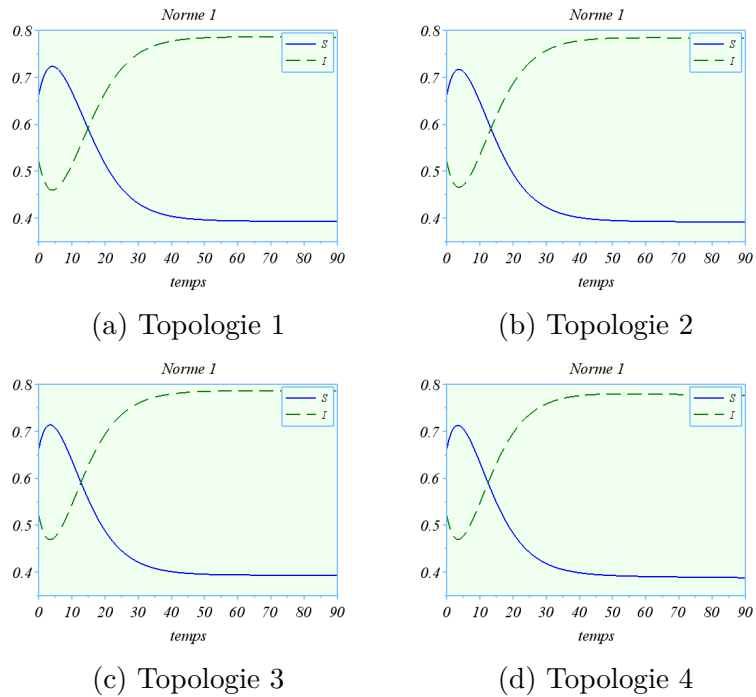


FIGURE 3.6 – Scénario 1 : Évolution globale des densités des susceptibles et infectés du réseau.

3.5. Application : couplage non-local de systèmes SIS de réaction-diffusion

Paramètres	Nœud 1	Nœud 2	Nœud 3
(D_{S_i}, D_{I_i})	(0.3, 0.3)	(0.3, 0.3)	(0.3, 0.3)
β_i	0.3	0.3	0.3
γ_i	0.1	0.6	0.1

TABLE 3.3 – Paramètres pour le scénario 2.

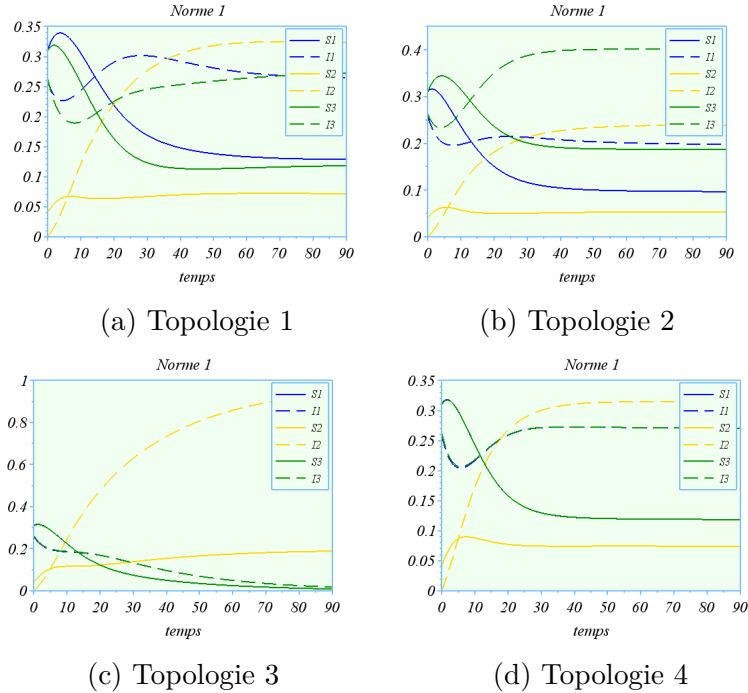


FIGURE 3.7 – Scénario 2 : Évolution des densités des susceptibles (ligne continue) et infectés (en tiret) dans les trois nœuds (nœud 1 en bleu, nœud 2 en jaune et nœud 3 en vert).

stables (le taux d'infection a été choisi supérieur au taux de guérison [1]) sur les nœuds 1 et 3 et un état d'équilibre sans maladie stable (avec un taux d'infection inférieur au taux de guérison) sur le nœud 2. Les valeurs de tous les paramètres choisis pour le scénario 2 sont résumés dans le tableau 3.3.

Dans le cas de la topologie 1, le nœud 2, qui n'avait pas d'infectés et sans couplage était un domaine à bas risque (où le DFE était stable), développe une épidémie et présente le taux le plus élevé d'infectés (voir figure 3.8a). De plus, puisque la topologie est symétrique, à l'équilibre la population globale du réseau est équirépartie sur les trois nœuds à l'instant final (voir Figure 3.9a). Dans le cas de la topologie 2, même dans le Scénario 2, le nœud 3 est celui qui à l'équilibre a le plus d'infectés (voir Figure 3.8b) et aussi le plus de population (voir Figure 3.9b). Pour ce qui concerne le cas de la topologie 3, le fait de supposer Ω_2 un domaine à bas risque, n'a pas d'influence sur le développement de l'épidémie. On a quasiment la même dynamique que celle observée dans le scénario 1.

Dans le cas de la topologie 4, les nœuds 1 et 3 synchronisent immédiatement. A nouveau l'état d'équilibre du réseau est le même de la topologie 1.

De manière générale, on peut constater, quelque soit le scénario 1 ou 2, que la topologie influence le comportement de la solution dans les nœuds, mais très peu d'impact la proportion d'infectés et susceptibles à l'échelle du réseau.

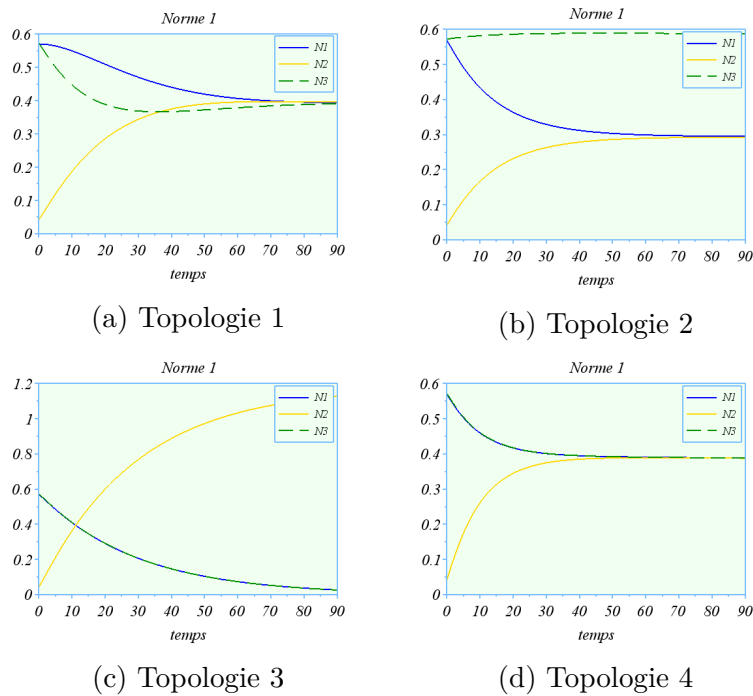


FIGURE 3.8 – Scénario 2 : Évolution des densités totales des populations dans les trois nœuds (nœud 1 en bleu, nœud 2 en jaune et nœud 3 en vert).

Le travail que nous avons mené dans ce chapitre a permis de proposer une approche intéressante pour modéliser des systèmes d'EDPs couplés, ce qui ouvre des champs énormes en modélisation. Ce travail nous a aussi permis d'avoir les premiers résultats généraux qui permettent de transposer des propriétés des modèles isolés au modèle réseau. Cette étude peut être améliorée en considérant, par exemple, le temps de déplacement d'un domaine à l'autre ou une répartition non uniforme des migrants.

Chapitre 4

Contrôle optimal pour un modèle EDO à compartiments

Introduction

Les dernières décennies ont été marquées par une forte augmentation du nombre de catastrophes. Aujourd'hui, des études axées sur la gestion des catastrophes ont permis de mettre en place de nombreux outils qui aident à mieux gérer les crises. Par conséquent, de petites améliorations encourageantes réduisant les dommages (humains, matériels et environnementaux) associés aux catastrophes peuvent être observées.

Cependant, il existe encore une ignorance significative des comportements humains face à des événements catastrophiques. Durant ces dernières années, de nombreuses études ont été menées sur les dynamiques de foule. Plusieurs modèles mathématiques caractérisant ces comportements ont été proposés avec différentes approches et à différentes échelles. On peut par exemple citer des modèles de forces sociales, des modèles granulaires, des modèles d'automates cellulaires, des modèles pouvant être microscopiques ou macroscopiques. Néanmoins, ces modèles ne tiennent pas compte des différents comportements de foule qui peuvent exister, seules les réactions de panique ont pu être considérées, d'autres comportements comme le changement d'état émotionnel, les comportements contrôlés ou ceux de type réflexe n'ont pas, ou très peu, été étudiés.

Depuis quelques années, quelques travaux exploitant le cadre de l'épidémiologie mathématique ont été publiés dans la littérature. Tout d'abord, dans [18, 43, 56], un modèle Panic-Contrôlé-Reflexe (PCR), fondé sur les sciences cognitives et la modélisation mathématique des maladies infectieuses, a été proposé pour décrire la dynamique des différents comportements humains lors d'événements catastrophiques. Cette approche souligne l'importance de la prise en compte du phénomène de contagion émotionnelle dans la modélisation des populations en situation de catastrophe. Toutefois, l'article sur le modèle (PCR) cité ci-dessous présente une analyse et une classification précises des comportements en fonction des différentes régions cérébrales activées et des différentes transitions comportementales.

Dans le présent chapitre, nous considérons encore un modèle à compartiment, mais sans diffusion. Ainsi nous simplifions en considérant un modèle d'équation différentielle ordinaire afin de

s'attaquer au volet contrôle optimal. Le modèle que nous considérons ici sont inspiré du modèle (PCR) [18]. Il s'agit du modèle Alerte-Panic-Contrôle (APC).

Le modèle Contrôle de la Panique Réflexe (PCR) est basé sur la modélisation mathématique des maladies infectieuses, des sciences cognitives et de la géographie des comportements humains. Il vise à décrire comment ces évoluent lors d'événements catastrophiques. Cependant, en raison de l'utilisation des concepts cognitives, il présente certaines difficultés, notamment la difficulté de calibrage du modèle. Ces difficultés limite complique les réponses à certaines questions comme celle sur l'estimation des paramètres. Dans un souci d'amélioration du modèle (PCR), le modèle (APC) (voir [29, 34]) à été proposé. Il se focalise principalement sur l'intensité émotionnelle et la manière dont elle est régulée. Il examine comment les individus réagissent émotionnellement et comportementalement en fonction de leur niveau d'émotion, en s'appuyant sur les recherches menées par les psychologues. Ces chercheurs s'intéressent à l'étude de l'émotion chez les individus et à son évolution temporelle. Ce changement de perspective ne modifie pas fondamentalement la structure mathématique du modèle, bien qu'il supprime certaines interactions, comme celles liées à l'imitation vers l'état d'alerte et remplace les comportements réflexes dans le modèle PCR par les états dit d'alertes dans le modèle (APC).

Ce chapitre propose la construction et l'analyse d'un problème de contrôle optimal pour le modèle APC. Selon [48], plusieurs mesures peuvent être déployées par le personnel institutionnel afin d'améliorer la résilience des populations. Nous considérons donc les trois principales actions que les décideurs peuvent prendre, à savoir la formation de la population, les actions de secouristes sur place et les informations institutionnelles. En résolvant le problème de contrôle optimal, nous en déduisons les meilleures stratégies pour contrôler le développement de la panique et réduire le nombre de décès lors d'un événement catastrophique. Ce travail est l'un des résultats d'une collaboration interdisciplinaire de mathématiciens, géographes, psychologues, informaticiens, personnel opérationnel et parties prenantes en gestion des risques, dans le cadre du projet de recherche ANR Com2SiCa (<https://www.com2sica.cnrs.fr/>).

Le chapitre est organisé comme suit : dans le paragraphe 4.1, nous présentons ce modèle *APC* décrivant la dynamique des différents comportements humains lors des catastrophes, c'est une extension du modèle *PCR* vu comme application dans le Chapitre 2. Dans le paragraphe 4.2, nous proposons trois différentes solutions pour contrôler la dynamique du modèle *APC* ; pour ce faire nous établissons un problème de contrôle optimal que nous analysons et caractérisons grâce au principe du maximum de Pontryagin [11, 52].

4.1 Le modèle Alerte-Panic-Contrôle (APC)

Dans ce paragraphe, nous rappelons brièvement le modèle Alerte-Panic-Contrôle (APC) proposé dans [29, 34]. Les auteurs se sont inspirés des modèles à compartiments de l'épidémiologie mathématique, tels que le modèle SIR (Susceptible-Infected-Recovered). Il décrit la dynamique temporelle de plusieurs réactions comportementales générés par un événement catastrophique, voir [21, 42]. Selon l'intensité de la charge émotionnelle et la capacité d'un individu à la maîtriser, les différents comportements observés ont été regroupés en trois grandes classes : alerte, panique et contrôle.

Par conséquent, les variables d'état du modèle (APC) sont les suivantes :

- $a(t)$ la densité d'individus dans un état d'alerte. Cette classe de comportements correspond aux situations de recherche d'informations, d'identification du danger et autres comporte-

4.1. Le modèle Alerte-Panic-Contrôle (APC)

ments voisins. Première étape que subit l'individu, au début de l'événement, cet état d'alerte est caractérisé par une faible charge émotionnelle et une forte capacité de sa maîtrise.

- $p(t)$ la densité d'individus dans un comportement de panique. Situation à charge émotionnelle élevée pouvant difficilement être régulée, tels que la fuite, la paralysie, le piétinement, la bousculade. La panique collective est préoccupante pour les acteurs opérationnels, car elle peut conduire à des situations à haut risque. Elle peut spontanément se résoudre, mais parfois une intervention énergique externe est nécessaire pour que la population paniquée retrouve un état de calme.
- $c(t)$ la densité d'individus présentant un comportement de contrôle. Dans cet état, l'individu a la capacité de réguler sa charge émotionnelle, bien que celle-ci peut être plus ou moins intense. Cela correspond aux situations de recherche d'aide, de soutiens mutuelles ou d'évacuation. La durée du comportement contrôlé varie de quelques minutes à plusieurs heures, en fonction de l'intervention des acteurs institutionnels et d'urgence.

En outre, nous notons :

- $q(t)$ la densité d'individus dans un comportement de la vie quotidienne avant l'événement ;
- $b(t)$ la densité de population présentant un comportement de la vie quotidienne après la catastrophe ;
- $d(t)$ la densité d'individus qui perdent la vie pendant la catastrophe.

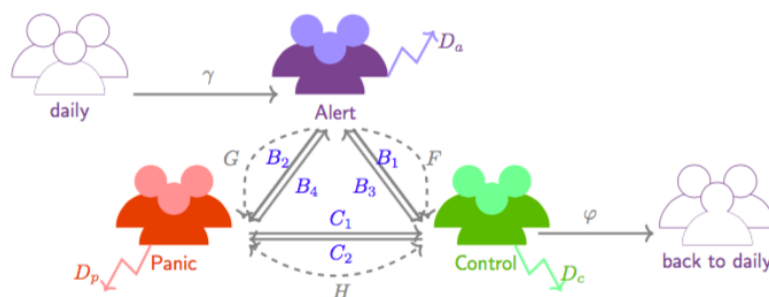


FIGURE 4.1 – Schéma (APC) de transfert d'un compartiment, a , p , c , b , q , à un autre. Les transitions intrinsèques sont représentées par des lignes pleines, tandis que les imitations, pouvant se faire d'un individu à l'autre, par des lignes en pointillés.

Le schéma du modèle APC est représenté dans la Figure 4.1 et les équations mathématiques sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{a}(t) = \gamma(t)q(t) - (B_1 + B_2 + D_a)a(t) - F(a(t), c(t))a(t)c(t) - G(a(t), p(t))a(t)p(t) + B_3c(t) + B_4p(t), \\ \dot{p}(t) = B_2a(t) + C_2c(t) - (B_4 + C_1 + D_p)p(t) + G(a(t), p(t))a(t)p(t) - H(c(t), p(t))c(t)p(t), \\ \dot{c}(t) = B_1a(t) + C_1p(t) - (B_3 + C_2 + D_c)c(t) + F(a(t), c(t))a(t)c(t) + H(c(t), p(t))c(t)p(t) - \varphi(t)c(t), \\ \dot{q}(t) = -\gamma(t)q(t), \\ \dot{b}(t) = \varphi(t)c(t), \\ \dot{d}(t) = D_aa(t) + D_cc(t) + D_pp(t). \end{cases} \quad (4.1)$$

Pendant une catastrophe, les êtres humains n'adoptent pas le même comportement tout au long de l'événement, des séquences de réactions différentes peuvent être observées, voir [21]. Les dynamiques des passages d'un comportement à un autre se manifestent sous deux formes distinctes, les transitions intrinsèques et celles dus à l'imitation. Chaque individu traverse une évolution comportementale qui lui est propre, sous l'effet de diverses influences telles que sa culture, son métabolisme, son niveau d'instruction et sa perception du danger, ce qui donne lieu aux transitions dites intrinsèques. Aussi, d'autres transitions comportementales sont également façonnées par les comportements collectifs environnants, engendrant ainsi des phénomènes de contagion émotionnelle, ce qui engendre des transitions d'imitation.

Typiquement, dès le déclenchement de la catastrophe, un état d'alerte est mis en place. Ensuite, les personnes rentrent dans un comportement de panique ou de contrôle. Le déroulement des événements peut parfois entraîner un retour momentané à l'état précédent.

Les transitions intrinsèques sont modélisées par des termes linéaires et sont représentées par des lignes pleines dans la Figure 4.1. L'imitation ou la contagion émotionnelle sont des facteurs importants dans les processus de changement de comportement, en particulier dans les populations denses, à l'exception des comportements d'alerte qui ne sont pas imitables [25]. Pour modéliser les phénomènes d'imitation, on utilise le principe de la masse dominante. En effet, lorsque des populations avec différents comportements se rencontrent, selon le rapport entre populations, des transitions d'imitation peuvent avoir lieu. Par conséquent, on peut modéliser ces transitions par les fonctions non linéaires suivantes :

$$F(a, c) = \alpha\xi\left(\frac{c}{a + \varepsilon}\right), \quad G(a, p) = \beta\xi\left(\frac{p}{a + \varepsilon}\right), \quad H(c, p) = -H_{c \rightarrow p}(c, p) + H_{p \rightarrow c}(c, p),$$

avec

$$H_{c \rightarrow p}(c, p) = \gamma_1\xi\left(\frac{p}{c + \varepsilon}\right), \quad H_{p \rightarrow c}(c, p) = \gamma_2\xi\left(\frac{c}{p + \varepsilon}\right),$$

et

$$\xi(w) = \frac{w^2}{1 + w^2} \quad w \in \mathbb{R}$$

et $\varepsilon \ll 1$; où F , définie la transition par imitation de l'état d'alerte vers l'état de contrôle, G celle de l'état d'alerte vers l'état de panique et H celle entre contrôle et panique. $H_{x \rightarrow y}(x, y)$ quand à elle définie la transition par imitation du comportement x vers y .

La fonction ξ modélise le fait que la personne a tendance à imiter le comportement de la foule autour d'elle. On modélise le début et la fin des processus de changement d'état émotionnel par les fonctions γ et φ , dont on a quelques exemples ci dessous :

$$\gamma(t) = \zeta(t, 1, 3) \quad \text{et} \quad \varphi(t) = \zeta(t, 40, 70), \quad (4.2)$$

avec ζ défini comme suit :

$$\zeta(t, \tau_0, \tau_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \tau_0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{t - \tau_0}{\tau_1 - \tau_0} \pi\right) & \text{si } \tau_0 \leq t \leq \tau_1 \\ 1 & \text{si } t > \tau_1. \end{cases}$$

Le choix de $\tau_0 = 1$ et $\tau_1 = 3$ pour la fonction γ signifie que l'on suppose que la population commence à rentrer dans un état d'alerte à l'instant $t = 1$ minute et qu'à $t = 3$ minutes, la majorité des personnes ont été affectées par l'événement et ont quitté le compartiment du comportement quotidien. En outre, concernant les paramètres de la fonction φ , le choix de $\tau_0 = 40$ signifie que les comportements pseudo-quotidiens ne peuvent être atteints qu'après 40 minutes à partir du début de l'événement.

Remarque 4.1.1. On remarque facilement qu'une équation du système (4.1) est une combinaison linéaire d'autres équations du système (4.1). En effet,

$$\forall t \geq t_0, \quad \dot{a}(t) + \dot{p}(t) + \dot{c}(t) + \dot{q}(t) + \dot{b}(t) + \dot{d}(t) = 0,$$

nous pouvons donc considérer un modèle réduit composé de seulement cinq équations en termes des variables d'état $x = [a, p, c, q, d]^T$.

Le schéma du modèle APC réduit est donc donné par :

$$\begin{cases} \dot{a}(t) = \gamma(t)q(t) - (B_1 + B_2 + D_a)a(t) - F(a(t), c(t))a(t)c(t) - G(a(t), p(t))a(t)p(t) + B_3c(t) + B_4p(t), \\ \dot{p}(t) = B_2a(t) + C_2c(t) - (B_4 + C_1 + D_p)p(t) + G(a(t), p(t))a(t)p(t) - H(c(t), p(t))c(t)p(t), \\ \dot{c}(t) = B_1a(t) + C_1p(t) - (B_3 + C_2 + D_c)c(t) + F(a(t), c(t))a(t)c(t) + H(c(t), p(t))c(t)p(t) - \varphi(t)c(t), \\ \dot{q}(t) = -\gamma(t)q(t), \\ \dot{d}(t) = D_aa(t) + D_cc(t) + D_pp(t). \end{cases} \quad (4.3)$$

Comme, il est ici supposé qu'au début que toute la population adopte un comportement quotidien q , nous considérons les conditions initiales suivantes :

$$x_0 = (0, 0, 0, 1, 0)^T. \quad (4.4)$$

Enfin, tous les paramètres du modèle peuvent être représentés par le vecteur suivant :

$$\theta = (B_1, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2, D_a, D_c, D_p, \alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2) \in \Theta = (\mathbb{R}_+^*)^6 \times (\mathbb{R}_+)^7.$$

La définition des paramètres et des fonctions du modèle APC est résumée dans les tables 4.1 et 4.2.

Paramètres	Notation
Évolution intrinsèque de l'état d'alerte à l'état de contrôle	B_1
Évolution intrinsèque de l'état d'alerte à l'état de panique	B_2
Évolution intrinsèque de l'état de contrôle à l'état d'alerte	B_3
Évolution intrinsèque de l'état de panique à l'état d'alerte	B_4
Évolution intrinsèque de l'état de panique à l'état de contrôle	C_1
Évolution intrinsèque de l'état de contrôle à l'état de panique	C_2
Taux de mortalité	D_a, D_p, D_c
Imitation de l'état d'alerte à l'état de contrôle	α
Imitation de l'état d'alerte à l'état de panique	β
Imitation de l'état de contrôle à l'état de panique	γ_1
Imitation de l'état de panique à l'état de contrôle	γ_2

TABLE 4.1 – Paramètres du modèle APC.

Fonctions	Notation
Début de la catastrophe	$\gamma(t)$
Sortie de la zone d'impact	$\varphi(t)$
Fonctions d'imitation	F, G, H

TABLE 4.2 – Fonctions dans le modèle APC.

4.2 Le modèle APC pour le contrôle optimal

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux contrôles qui pourraient réduire le phénomène de panique et limiter le nombre de décès lors d'événements catastrophiques. On considère les trois contrôles suivants :

1. u_1 représente l'effet de la formation et de l'expérience de la population. Ce contrôle agit sur la transition intrinsèque entre les comportements d'alerte et contrôle, c'est-à-dire sur le paramètre B_1 . Par conséquent, nous considérons $B_1 + u_1$ au lieu de B_1 dans le système (4.1). Comme $B_1 + u_1$ est un taux de transition, il est supposé que u_1 varie de 0 à 1.
2. u_2 représente les effets des actions du personnel opérationnel présent et qui intervient dans la zone d'impact de la catastrophe. Ils ont un effet apaisant tout au long de l'événement. Ce contrôle favorise l'imitation dans la direction alerte à contrôle et dans la direction panique à contrôle. Par conséquent, ce contrôle agit de la même manière sur les deux transitions, autrement dit sur les fonctions d'imitation F et H . En particulier, il agit sur le paramètre α pour forcer le passage de l'alerte au contrôle. Ainsi, on aura $\alpha + u_2$ dans le système contrôlé. De plus, u_2 agit également sur le paramètre γ_2 pour forcer le passage de la panique au contrôle. Par conséquent, γ_2 est remplacé par $\gamma_2 + u_2$ dans le système contrôlé.
3. u_3 reflète l'effet des informations institutionnelles transmises pendant l'événement, telles que la transmission d'un message ou le déclenchement d'une sirène. Ce contrôle peut être considéré dans le modèle mathématique de la manière suivante. Les personnes n'agiront pas de la même manière en fonction des informations transmises durant l'événement, au regard de leur expérience. Par exemple, les personnes formées sur la façon de réagir à l'arrivée d'un tsunami adopteront des réactions appropriées lorsqu'elles entendront le son spécifique de la sirène pour ce type d'événement. Ainsi, le contrôle u_3 agit partiellement sur la transition

intrinsèque entre Alerte-Contrôle. Nous avons aussi $B_1 + u_1 + \rho u_3 \in [0, 1]$ où $\rho \in]0; 1[$. De plus, u_3 favorise l'imitation dans les directions alerte à contrôle et panique à contrôle, agissant sur les paramètres α et γ_2 .

Ainsi, le système contrôlé s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{a}(t) = \gamma(t) q - (B_1 + u_1 + \rho u_3 + B_2 + D_a) a(t) + B_3 c(t) + B_4 p(t) \\ \quad - \tilde{F}(a(t), c(t), u_2, u_3) a(t) c(t) - G(a(t), p(t)) a(t) p(t), \\ \dot{p}(t) = B_2 a(t) + C_2 c(t) - (B_4 + C_1 + D_p) p(t) \\ \quad + G(a(t), p(t)) a(t) p(t) - \tilde{H}(c(t), p(t), u_2, u_3) c(t) p(t), \\ \dot{c}(t) = (B_1 + u_1 + \rho u_3) a(t) + C_1 p(t) - (B_3 + C_2 + D_c) c(t) \\ \quad + \tilde{F}(a(t), c(t), u_2, u_3) a(t) c(t) + \tilde{H}(c(t), p(t), u_2, u_3) c(t) p(t) - \varphi(t) c(t), \\ \dot{q}(t) = -\gamma(t) q(t), \\ \dot{d}(t) = D_a a(t) + D_c c(t) + D_p p(t). \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Les fonctions F et H définies dans le système (4.1) deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{F}(a, c) = (\alpha + u_2 + u_3) \times \xi \left(\frac{c}{a + \varepsilon} \right) \\ \tilde{H}(c, p) = -\gamma_1 \times \xi \left(\frac{p}{c + \varepsilon} \right) + (\gamma_2 + u_2 + u_3) \times \xi \left(\frac{c}{p + \varepsilon} \right). \end{array} \right. \quad (4.6)$$

4.2.1 Existence et unicité de la solution du problème de contrôle

Dans ce paragraphe, nous montrons que le problème de Cauchy associé au système (4.5) est bien posé. Par la suite, nous utiliserons les notations suivantes :

$$\mathcal{U}_T = \{(u_1, u_2, u_3), u_i \text{ fonction continue par morceaux}, a_i \leq u_i(t) \leq b_i, i = 1, 2, 3, \forall t \in I\}, \quad (4.7)$$

avec a_i et b_i des constantes de l'intervalle $[0, 1]$.

Le problème de Cauchy associé au système (4.5) est bien posé pour tout contrôle $u \in \mathcal{U}_T$, où \mathcal{U}_T est l'ensemble des contrôles admissibles.

Posons $I = [0, T]$, $V = [0, 1]^5$, $x = (a, p, c, q, d)^T \in V$ et $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{U}_T$. Sous ces notations, le système (4.5) se réécrit comme suit :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in I, \quad x \in V \text{ et } u \in \mathcal{U}_T. \quad (4.8)$$

Remarque 4.2.1. $\mathcal{U}_T \subset \mathcal{L}_{loc}^\infty(I; \mathbb{R}_+^3)$ c'est à dire l'ensemble des contrôles \mathcal{U}_T est inclus dans l'espace des fonctions localement intégrables et bornées sur I à valeurs dans \mathbb{R}_+^3 . Ici nous choisirons des fonctions continues par morceaux sur I .

Proposition 4.2.2. *Pour tout $\theta \in \Theta$ et pour tout contrôle $u \in \mathcal{U}_T$, le problème de Cauchy associé à (4.5) admet une solution unique.*

Démonstration. La preuve est immédiate, c'est une application du théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas mesurable (voir théorème ?? en annexe). \square

Proposition 4.2.3. *Considérons l'ensemble compact*

$$K = \left\{ (a, p, c, q, d) \in (\mathbb{R}^+)^5 \mid a + p + c + q + d \leq 1 \right\}.$$

Alors, pour tout contrôle $u \in \mathcal{U}_T$ et pour tout $\theta \in \Theta$, l'ensemble compact K est positivement invariant pour le flot induit par le système (4.5) avec les conditions initiales $x_0 = (0, 0, 0, 1, 0)$.

Démonstration. Soit $\theta \in \Theta$ et $u \in \mathcal{U}_T$. Nous définissons x_u comme la solution du système (4.5) avec une condition initiale x_0 . Ensuite, pour $t \geq 0$, les composantes de x_u satisfont :

$$\dot{a}(t) + \dot{p}(t) + \dot{c}(t) + \dot{q}(t) + \dot{d}(t) = -\varphi(t)c(t) \leq 0.$$

Cela implique que

$$a(t) + p(t) + c(t) + q(t) + d(t) \leq a_0 + p_0 + c_0 + q_0 + d_0,$$

puisque $a_0 + p_0 + c_0 + q_0 + d_0 = 1$, alors

$$a(t) + p(t) + c(t) + q(t) + d(t) \leq 1.$$

\square

4.2.2 Existence et caractérisation du problème de contrôle optimal

Nous souhaitons étudier un problème de contrôle optimal pour le système (4.5), en exploitant le principe du maximum de Pontryagin (voir [52]). À cette fin, nous définissons la fonction objectif (ou coût) suivante :

$$J(u_1, u_2, u_3) = \int_0^T \Phi(u_1, u_2, u_3) dt, \quad (4.9)$$

avec

$$\Phi(u_1, u_2, u_3) = C_p p + C_d d + A_1 u_1^2 + A_2 u_2^2 + A_3 u_3^2. \quad (4.10)$$

Les deux premiers termes de (4.10) représentent le *bénéfice* du volet "comportements de panique" et le coût du décès. De plus, A_1 , A_2 et A_3 correspondent respectivement aux coûts des contrôles pour la formation, les actions des sauveteurs et l'information externe.

Nous souhaitons réduire le phénomène de panique et de limiter le nombre de décès, tout en minimisant le coût des contrôles. Nous cherchons donc à trouver un contrôle optimal $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*) \in \mathcal{U}_T$ tel que

$$\min_{(u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{U}_T} J(u_1, u_2, u_3) = J(u_1^*, u_2^*, u_3^*). \quad (4.11)$$

L'existence d'un contrôle optimal est obtenue grâce au théorème 4.1 du chapitre 3 de [24].

Théorème 4.2.4. *Considérons le problème de contrôle (4.5). Il existe un contrôle optimal $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*) \in \mathcal{U}_T$ tel que*

$$\min_{(u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{U}_T} J(u_1, u_2, u_3) = J(u_1^*, u_2^*, u_3^*). \quad (4.12)$$

Remarque 4.2.5. Pour pouvoir utiliser les résultats de [24] (théorème III.4.1), nous devons vérifier les conditions suivantes :

1. L'ensemble des contrôles et des solutions correspondantes est non vide.
2. L'ensemble des contrôles \mathcal{U}_T est convexe et fermé dans $L^2(0, T)$.
3. Le champ de vecteurs du système d'état est borné par une fonction linéaire du contrôle.
4. L'intégrande de la fonction *objectif* est convexe.
5. Il existe des constantes $c_1, c_2 > 1$ et $\beta > 0$ telles que l'intégrande de la fonction objectif soit bornée par $c_1(|u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2)^{\frac{\beta}{2}} - c_2$.

Démonstration.

1. La première condition est donnée par [31] dans le théorème 9.2.1. Une formulation de ce théorème est donnée dans l'annexe, voir ??.
2. — \mathcal{U}_T est fermé dans $L^2([0, T])$. En effet, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}_T$ et $u \in L^2([0, T])$ tels que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers u dans $L^2([0, T])$.
Posons $u = (u^1, u^2, u^3)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = (u_n^1, u_n^2, u_n^3) \exists a_n^i, b_n^i \in [0, 1]$ tels que :

$$\forall t \in [0, T], a_n^i \leq u_n^i(t) \leq b_n^i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.13)$$

or $\forall i = 1, 2, 3, (a_n^i)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]$ et $(b_n^i)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]$ alors

$\exists (a_{\phi(n)}^i)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_{\phi(n)}^i)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites extraites de $(a_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_{\phi(n)}^i \leq 1 \text{ et } 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_{\phi(n)}^i \leq 1.$$

Posons, pour tout $i = 1, 2, 3,$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{\phi(n)}^i = a^i \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} b_{\phi(n)}^i = b^i.$$

En passant à la limite sur l'inégalité (4.13) on a :

$$\forall t \in [0, T] \quad a^i \leq u^i(t) \leq b^i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Donc $u \in \mathcal{U}_T$.

- \mathcal{U}_T est convexe. En effet, pour $u, v \in \mathcal{U}_T$ et $\theta \in [0, 1]$: d'une part les composantes de $\theta u + (1 - \theta)v$ sont continues par morceaux sur $[0, T]$. D'autre part :

$$\begin{aligned} &\exists (a_u^i, b_u^i) \text{ et } (a_v^i, b_v^i) \in [0, 1] \times [0, 1] \text{ tels que} \\ &\forall t \in [0, T], \quad 0 \leq a_u^i \theta + a_v^i (1 - \theta) \leq u^i(t) \theta + v^i(t) (1 - \theta) \leq b_u^i \theta + b_v^i (1 - \theta) \leq 1, \\ & \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

donc $\theta u + (1 - \theta)v \in \mathcal{U}_T$.

3. Le champ de vecteurs du système (4.8) vérifie la condition 3 puisqu'il est borné. La fonction Φ est convexe, comme somme de fonctions convexes.

4. Finalement,

Pour tout $u \in \mathcal{U}_T$, on a :

$$\begin{aligned} |\Phi(u_1, u_2, u_3)| &= |C_p p + C_d d + A_1 u_1^2 + A_2 u_2^2 + A_3 u_3^2| \\ &\leq |C_p p + C_d d| + |A_1 u_1^2| + |A_2 u_2^2| + |A_3 u_3^2| \\ &\leq |C_p p + C_d d| + \max(A_1, A_2, A_3)(|u_1^2| + |u_2^2| + |u_3^2|) \\ &\leq M + M(|u_1^2| + |u_2^2| + |u_3^2|), \end{aligned}$$

où $M = \max\{C_p + C_d, \max(A_1, A_2, A_3)\}$. Puisque la solution de (4.5) est bornée et que

$$|u_1^2| + |u_2^2| + |u_3^2| \leq 3,$$

alors

$$|\Phi(u)| \leq 4M \leq 4M + 3 - (|u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2) \leq c_2 - c_1(|u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2)^{\frac{\beta}{2}},$$

avec

$$\begin{aligned} c_1 &= 1, \\ c_2 &= 4M + 3, \\ \beta &= 2. \end{aligned}$$

Par conséquent, cette cinquième condition est satisfaite. On en déduit alors l'existence d'un contrôle optimal (u_1^*, u_2^*, u_3^*) qui minimise la fonction objectif $J(u_1, u_2, u_3)$. □

Nous allons à présent nous intéresser à la caractérisation d'un contrôle puisque nous venons d'en montrer l'existence.

Principe du maximum de Pontryagin

Les conditions nécessaires que nous présentons ici, dérivent du principe du maximum de Pontryagin.

Définition 4.2.6. (Espace tangent). Soit M une variété différentielle de classe \mathcal{C}^1 de dimension $0 \leq d \leq n$. En un point $x_1 \in M$, l'espace tangent $T_{x_1}M$ est l'ensemble des vecteurs vitesse des courbes tracées sur M passant par x_1 . Si $M = x_1$ (cible ponctuelle), on a $T_{x_1} = 0$ et si $M = \mathbb{R}^n$ (pas de contrainte de cible), on a $T_{x_1}M = \mathbb{R}^n$.

Théorème 4.2.7. (Principe du maximum). On considère dans \mathbb{R}^n le système de contrôle :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \tag{4.14}$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe \mathcal{C}^1 et où les contrôles sont des applications mesurables et bornées définies sur un intervalle $[0, t_e(u)[$ de \mathbb{R}_+ et à valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Soient M_0 et M_1 deux sous-ensembles de \mathbb{R}^n . On note \mathcal{U} l'ensemble des contrôles admissibles u dont les trajectoires associées relient un point initial de M_0 à un point final de M_1 en temps $t(u) < t_e(u)$. Par ailleurs on définit le coût d'un contrôle u sur $[0, t]$

$$C(t, u) = \int_0^t g(s, x(s), u(s)) ds + h(t, x(t)), \tag{4.15}$$

où $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont \mathcal{C}^1 et $x(\cdot)$ est la trajectoire solution de (4.14) associée au contrôle u . On considère le problème de contrôle optimal suivant : déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_1 et minimisant le coût. Le temps final peut être fixé ou non. Si le contrôle $u \in \mathcal{U}$ associé à la trajectoire $x(\cdot)$ est optimal sur $[0, T]$, alors il existe une application $\lambda(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue appelée vecteur adjoint et un réel $\lambda_0 \leq 0$ tel que le couple $(\lambda(\cdot), \lambda_0)$ est non trivial et tel que, pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial \lambda}(t, x(t), u(t), \lambda(t), \lambda_0), \\ \dot{\lambda}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), u(t), \lambda(t), \lambda_0).\end{aligned}$$

où $H(t, x(t), u(t), \lambda(t), \lambda_0) = \langle \lambda, f(t, x(t), u(t)) \rangle + \lambda_0 g(t, x(t), u(t))$ est l'hamiltonien du système, $\langle \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans \mathbb{R}^n et on a la condition de maximisation presque partout sur $[0, T]$

$$H(t, x(t), u(t), \lambda(t), \lambda_0(t)) = \max_{v \in \Omega} H(t, x(t), v, \lambda(t), \lambda_0(t)). \quad (4.16)$$

Si de plus M_0 et M_1 (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de \mathbb{R}^n ayant des espaces tangents en $x(0) \in M_0$ et $x(T) \in M_1$, alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalité aux deux extrémités (ou juste l'une des deux),

$$\lambda(0) \perp T_{x(0)}M_0 \quad (4.17)$$

et

$$\lambda(T) - \lambda_0 \frac{\partial h}{\partial x}(T, x(T)) \perp T_{x(T)}M_1 \quad (4.18)$$

Remarque 4.2.8. Conditions de transversalité sur le vecteur adjoint

Dans ce paragraphe le temps final pour atteindre la cible peut être fixé ou non. Réécrivons les conditions (4.17) et (4.18) dans le cas du Problème de Lagrange. Dans ce cas le coût s'écrit :

$$C(t, u) = \int_0^t g(s, x(s), u(s)) ds, \quad (4.19)$$

i.e. $h = 0$. Les conditions de transversalité (4.17) et (4.18) sur le vecteur adjoint s'écrivent alors

$$\lambda(0) \perp T_{x(0)}M_0$$

et

$$\lambda(T) \perp T_{x(T)}M_1.$$

Si par exemple $M_0 = x(0)$, la condition (4.17) devient vide. Si au contraire $M_0 = \mathbb{R}^n$, i.e. si le point initial n'est pas fixé, on obtient $\lambda(0) = 0$. De même, si $M_1 = \mathbb{R}^n$, on obtient $\lambda(T) = 0$. Autrement dit, si le point final est libre alors le vecteur adjoint au temps final est nul.

Remarque 4.2.9. Le principe du maximum de Pontryagin est un résultat constructif dans le sens où il permet de déterminer explicitement les expressions des trajectoires optimales et des contrôles leur donnant naissance.

— La réciproque du principe du maximum de Pontryagin est fautive en général : on ne peut s'assurer que toutes les extrémales obtenues soient nécessairement optimales.

- Le couple $(\lambda(\cdot), \lambda_0)$ est nécessairement non trivial, i.e. ces deux quantités ne peuvent s'annuler en même temps, sinon l'hamiltonien $H(t, x(t), u, \lambda(t), \lambda_0)$ n'est pas défini.
- En l'absence de contraintes sur le contrôle, c'est à dire $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$ alors la condition de maximisation (3.2.6) devient :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (4.20)$$

Méthode de pénalisation. Un moyen simple de manipuler des contraintes sur l'état est de résoudre un problème de contrôle optimal modifié, où, comme dans la théorie LQ (voir [53]), on pondère cette contrainte, de manière à la forcer à être vérifiée.

Remarque 4.2.10. La méthode de pénalisation consiste à remplacer un problème de minimisation avec contraintes :

$$\min_{v \in V} J(v) \quad (4.21)$$

par des problèmes de minimisation sans contraintes :

$$\min_{v \in V} (J(v) + \varepsilon^{-1} \psi(v)), \quad (4.22)$$

où $\varepsilon > 0$ et $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}$, tel que la solution u_ε de (4.22) converge, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ vers la solution u de (4.21).

Théorème 4.2.11. *Étant donné un contrôle optimal u^* et les solutions du système d'état correspondant (4.5), il existe des variables adjointes $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ satisfaisant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda}_1 = (\lambda_1 - \lambda_3) \left[B_1 + u_1 + \rho u_3 \right] + (\lambda_1 - \lambda_2) B_2 + (\lambda_1 - \lambda_5) D_a + (\lambda_1 - \lambda_3) \left[\frac{\partial \tilde{F}}{\partial a} a c + \tilde{F} c \right] \\ \quad + (\lambda_1 - \lambda_2) \left[\frac{\partial G}{\partial a} a p + G p \right], \\ \dot{\lambda}_2 = (\lambda_2 - \lambda_1) B_4 + (\lambda_2 - \lambda_5) D_p + (\lambda_2 - \lambda_3) C_1 - C_p + (\lambda_1 - \lambda_2) \left[\frac{\partial G}{\partial p} p a + G a \right] \\ \quad + (\lambda_2 - \lambda_3) \left[\frac{\partial \tilde{H}}{\partial p} p c + \tilde{H} c \right], \\ \dot{\lambda}_3 = (\lambda_3 - \lambda_1) B_3 + (\lambda_3 - \lambda_2) C_2 + (\lambda_3 - \lambda_5) D_c + \lambda_3 \varphi + (\lambda_1 - \lambda_3) \left[\frac{\partial \tilde{F}}{\partial c} a c + \tilde{F} a \right] \\ \quad + (\lambda_2 - \lambda_3) \left[\frac{\partial \tilde{H}}{\partial c} p c + \tilde{H} p \right], \\ \dot{\lambda}_4 = (\lambda_4 - \lambda_1) \gamma, \\ \dot{\lambda}_5 = -C_d \end{array} \right. \quad (4.23)$$

Avec la condition terminale $\lambda_i(T) = 0$ pour $i = 1, \dots, 5$ et en omettant les dépendances des différentes variables et des fonctions pour alléger les notations. De plus, les contrôles optimaux u_1, u_2 et u_3 sont représentés par :

$$\begin{cases} u_1 = \max \left\{ 0, \min \left\{ b_\theta^1, \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2A_1} \right) a \right\} \right\}, & \text{avec } b_\theta^1 = 1 - B_1, \\ u_2 = \max \left\{ 0, \min \left\{ b\theta^2, \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2A_2} \right) \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_2} \times ac + \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2A_2} \right) \frac{\partial \tilde{H}}{\partial u_2} \times pc \right\} \right\}, & \text{avec } b_\theta^2 = 1 - \max(\alpha, \gamma_2), \\ u_3 = \max \left\{ 0, \min \left\{ b\theta^3, \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2A_3} \right) \times \rho a + \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2A_3} \right) \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_3} \times ac + \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2A_3} \right) \frac{\partial \tilde{H}}{\partial u_3} \times pc \right\} \right\}, \\ b_\theta^3 = \min \left\{ b_\theta^2 - u_2, \frac{b_\theta^1 - u_1}{\rho} \right\}. \end{cases} \quad (4.24)$$

Démonstration. La forme du système adjoint et des conditions terminales résultent de l'application du principe du maximum de Pontryagin (voir [52]). Dans notre cas, le lagrangien \mathcal{L} (qui est l'hamiltonien augmenté de termes de pénalité pour les contraintes de contrôle) a la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t, x, u, \lambda) = & \lambda_1(t)\dot{a}(t) + \lambda_2(t)\dot{p}(t) + \lambda_3(t)\dot{c}(t) + \lambda_4(t)\dot{q}(t) + \lambda_5(t)\dot{d}(t) + C_p p(t) + C_d d(t) \\ & + A_1 u_1(t)^2 + A_2 u_2(t)^2 + A_3 u_3(t)^2 \end{aligned}$$

Par conséquent, le système adjoint (4.23) est déduit en différenciant le lagrangien \mathcal{L} par rapport aux états :

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a}, \quad \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c}, \quad \dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p}, \quad \dot{\lambda}_4 = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}, \quad \dot{\lambda}_5 = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d}.$$

Pour obtenir le contrôle optimal, nous différencions également le lagrangien \mathcal{L} par rapport à $u = (u_1, u_2, u_3)$ et le mettons égal à zéro. Nous ajoutons ensuite la solution à \mathcal{U}_T , en tenant compte du fait que les paramètres du système sont des taux de transfert et varient donc de 0 à 1. \square

4.3 Résultats numériques

Afin de déterminer u^* , nous partons d'un contrôle nul et résolvons le système d'état (4.5). Avec la solution obtenue, le système adjoint (4.23) est résolu. Ensuite, en exploitant les solutions des systèmes d'état et adjoint, le contrôle (4.24) est mis à jour et comparé à sa valeur précédente. Nous réitérons l'algorithme jusqu'à ce que la norme de la différence entre les deux contrôles soit aussi petite que souhaitée et que la convergence, soit atteinte.

Dans la suite, nous simulerons une population touchée par une catastrophe de type tsunami sur la plage de la ville de Nice (France) [44]. Un tsunami est supposé être un événement soudain et inattendu, sans signes avant-coureurs [12]. Nous modélisons ces caractéristiques de danger en choisissant des fonctions γ et φ comme dans (4.2). Nous considérons deux situations : une population dense ou une population éparpillée, afin de considérer les différentes pressions touristiques sur le littoral méditerranéen (la plage est principalement peuplée en été). Selon [29, 30], dans le cas d'une population éparpillée, les transitions intrinsèques sont les plus importantes et les coefficients des fonctions d'imitation sont choisis inférieurs à 0,5. Au contraire, pour une population dense, les coefficients des fonctions d'imitation sont supérieurs à 0,5, car les processus d'imitation sont les plus cruciaux. Dans les deux cas, nous supposons une population à culture à faible risque, c'est-à-dire que les transitions intrinsèques les plus significatives sont celles menant à la panique ($B_2 > B_1$ et $C_2 > C_1$).

stratégie	A_1	A_2	A_3
1	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}
2	10^{-2}	10^{-2}	1
3	10^{-2}	1	10^{-2}
4	10^{-2}	1	1
5	1	10^{-2}	10^{-2}
6	1	10^{-2}	1
7	1	1	10^{-2}
8	1	1	1

TABLE 4.3 – Les différentes stratégies étudiées dans les simulations numériques. Le choix $A_i = 0.01$ signifie que le contrôle u_i est supposé peu coûteux, tandis que pour $A_i = 1$, le contrôle u_i supposé coûteux ($i = 1, 2, 3$).

Chaque scénario peut être associé à un ensemble de paramètres du système APC de la forme :

$$\theta = (B_1, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2, D_a, D_c, D_p, \alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \rho) \in \Theta = (\mathbb{R}_+^*)^6 \times (\mathbb{R}_+)^7 \times]0, 1].$$

Ici, nous répondons à la question suivante : *Pour un scénario donné, quelle est la meilleure stratégie (gestion ou bien prévention) pour réduire la panique et limiter les décès ?*

Comme nous l’avons vu dans la définition de la fonction de coût,

$$J = \int_0^T [C_p p(t) + C_d d(t) + A_1 u_1^2 + A_2 u_2^2 + A_3 u_3^2] dt, \quad (4.25)$$

à chaque contrôle (u_1, u_2, u_3) correspond un poids que nous avons respectivement noté A_1, A_2 et A_3 . Pour chaque scénario, une combinaison de ces poids (par exemple $A_1 = 0.01, A_2 = 0.01, A_3 = 1$) définit une stratégie à expliquer. Pour modéliser les différentes stratégies, on adopte le système binaire suivant : pour $i = 1, 2, 3$, on suppose que

- $A_i = 0.01$ si la contrôle u_i est supposée bon marché (ainsi, la stratégie vise principalement à augmenter les efforts sur la contrôle u_i),
- $A_i = 1$ si la contrôle u_i est supposée coûteuse, dans ce cas, la stratégie viserait à faire le moins d’efforts possible sur la contrôle u_i .

Nous rappelons que u_1 est le contrôle concernant la formation de la population, u_2 correspond aux actions du personnel opérationnel sur le site de la catastrophe et u_3 représente le contrôle considérant les communications. Ainsi, une stratégie de gestion impliquant essentiellement des secouristes sur le site correspondent au triplet suivant ($A_1 = 1, A_2 = 0.01, A_3 = 1$), une stratégie de prévention essentiellement fondée sur l’éducation de la population correspond au triplet ($A_1 = 0.01, A_2 = 1, A_3 = 1$) et une stratégie de prévention essentiellement basée sur la communication correspond au triplet ($A_1 = 1, A_2 = 1, A_3 = 0.01$). Pour les deux scénarios (population éparpillée ou dense), nous testons les huit stratégies présentées dans le tableau 4.3.

Dans la série de stratégies, la stratégie 1 ne sera pas prise en compte pour déterminer la meilleure stratégie. Il s’agit d’une stratégie test qui nous permet d’observer les contrôles dans une situation irréaliste où tous les contrôles sont également bon marché.

Comme il est difficile de définir les « coûts » d’une situation de panique et de décès, dans toutes les simulations nous avons fixé les poids C_p et C_d dans (4.25) à $C_p = C_d = 1$.

Afin de déterminer la meilleure stratégie qui réduit la panique, nous examinons la stratégie dont les contrôles nous donnent moins de personnes en état de panique et dont la valeur de la fonction objectif est la plus petite.

Nous notons :

$$I_{\Delta p} = \int_0^T (p(t) - p_c(t))dt \quad (4.26)$$

où p_c et p correspondent respectivement aux densités de personnes en état de panique pour le système avec contrôle (4.5) et pour le système sans contrôle réduit (4.3). Cet indice $I_{\Delta p}$ nous permet de juger de l'efficacité du contrôle : plus la valeur de $I_{\Delta p}$ est élevée, plus les contrôles seront efficaces pour réduire la panique.

De manière similaire, nous introduisons l'indice qui mesure l'efficacité des contrôles de décès :

$$I_{\Delta d} = \int_0^T (d(t) - d_c(t))dt \quad (4.27)$$

Par conséquent, pour chaque scénario, la meilleure stratégie pour réduire la panique correspondra à la stratégie ayant l'indice $I_{\Delta p}$ le plus élevé et la plus faible valeur de la fonction de coût J définie dans (4.25).

De manière analogue, la meilleure stratégie pour réduire les décès correspondra à la stratégie ayant l'indice $I_{\Delta d}$ le plus élevé et la plus faible valeur de la fonction coût J .

4.3.1 Scénario 1 : population éparpillée avec une culture à faible risque

Pour le scénario d'une population éparpillée avec une culture à faible risque, nous choisissons l'ensemble de paramètres suivants :

$$\begin{aligned} B_1 &= 0.1, \quad B_2 = 0.11, \quad B_3 = 10^{-3}, \\ B_4 &= 10^{-3}, \quad C_1 = 0.1, \quad C_2 = 0.2, \\ D_a &= D_c = 10^{-4}, \quad D_p = 1.5 \times 10^{-5}, \\ \alpha &= \beta = \gamma_1 = \gamma_2 = 0.2, \\ \rho &= 0.5. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Selon [29, 30], dans le cas d'une population éparpillée, les processus de transition intrinsèques sont les plus importants, donc les coefficients des fonctions d'imitation sont choisis inférieurs à 0,5. De plus, afin de modéliser une culture à faible risque, c'est-à-dire des transitions intrinsèques les plus significatives vers la panique, nous supposons que $B_2 > B_1$ et $C_2 > C_1$.

Les simulations numériques de la série de stratégies dans la Table 4.3 et leurs résultats représentés dans la Figure 4.2 montrent que la meilleure stratégie pour réduire la panique et les décès pendant la catastrophe est la stratégie numéro 2, ($A_1 = 10^{-2}$, $A_2 = 10^{-2}$, $A_3 = 1$). En effet, cette stratégie est celle avec les valeurs les plus élevées de $I_{\Delta p}$ et $I_{\Delta d}$, combinées avec la plus faible valeur de J . Il est intéressant de noter que cette stratégie consiste en une stratégie mixte combinant la gestion et la prévention fondée sur la formation de la population. Cependant, si l'on préfère une stratégie dont les efforts ne portent que sur un seul contrôle (voir Table 4.3, les stratégies n. 4, 6 et 7), la meilleure stratégie est le numéro 6 correspondant à l'action des secouristes sur place. Dans la Figure 4.2, afin d'avoir tous les indices sur le même graphique, nous avons dû multiplier $I_{\Delta d}$ par cent.

Dans la Figure 4.3, les contrôles optimaux et l'évolution temporelle de la densité de panique et de décès, avec et sans contrôle, sont représentés. Le système contrôlé présente une diminution significative de la densité de panique et de décès par rapport au système sans contrôle. Ici, seuls u_1 et u_2 sont différents de zéro. En effet, pour la stratégie numéro 2, le contrôle u_3 est suppose

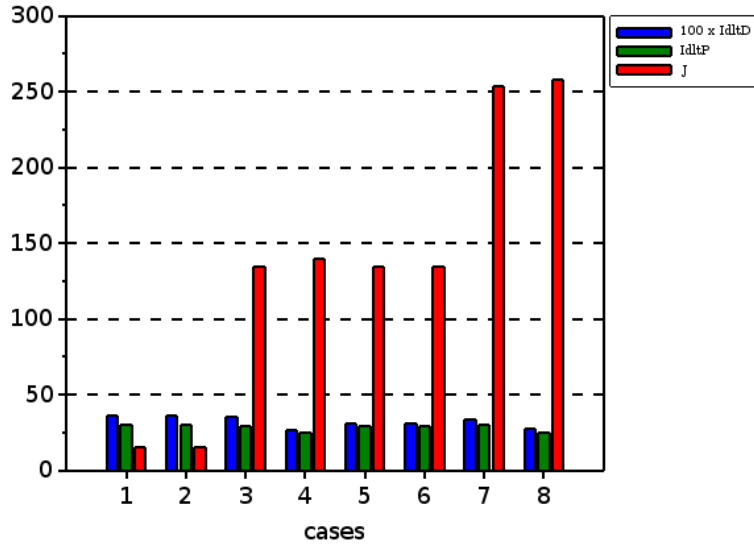


FIGURE 4.2 – $100 \times I_{\Delta d}$ (bleu), $I_{\Delta p}$ (vert) et J (rouge) pour les huit stratégies de contrôle de la Table 4.3 dans le cas d’une population éparpillée avec une culture à faible risque. Les autres paramètres sont fixés comme dans (4.28). La meilleure stratégie pour réduire la panique et les décès est la seconde. Ainsi, elle est celle qui présente les valeurs les plus élevées de $I_{\Delta p}$ et $I_{\Delta d}$ et la plus faible valeur de J .

plus coûteux que les deux autres (voir Table 4.3). De plus, le contrôle u_1 est activé principalement au début de l’événement, tandis que le contrôle u_2 dure jusqu’à ce que la population revienne à un comportement quotidien (consulter les paramètres de la fonction φ dans (4.2)).

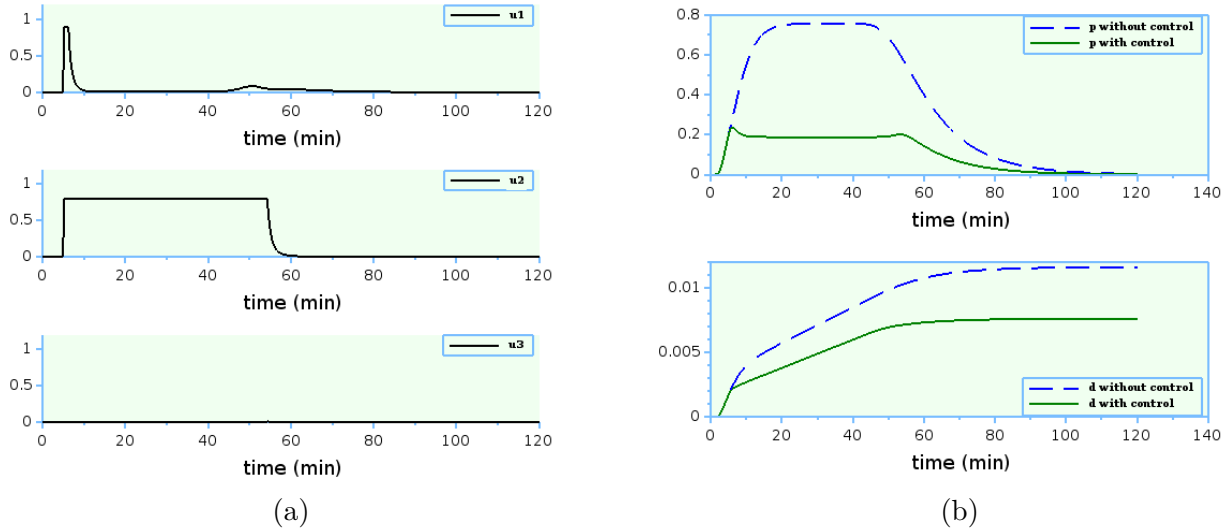


FIGURE 4.3 – Solutions pour la meilleure stratégie dans le cas d’une population éparpillée avec une culture à faible risque : ($A_1 = 10^{-2}$, $A_2 = 10^{-2}$, $A_3 = 1$). (a) contrôles optimaux u_1 , u_2 et u_3 . (b) Au dessus : densité de comportement de panique avec (ligne solide) et sans contrôle (ligne en pointillé). En dessous : densité de décès avec (ligne solide) et sans contrôle (ligne en pointillé).

4.3.2 Scénario 2 : population dense avec une culture à faible risque

Pour le scénario d'une population dense avec une culture à faible risque, nous choisissons l'ensemble de paramètres suivants :

$$\begin{aligned}
 B_1 &= 0,05, \quad B_2 = 0,051, \quad B_3 = B_4 = 10^{-3}, \\
 C_1 &= 0,05, \quad C_2 = 0,01, \quad \rho = 0,5 \\
 D_a &= D_c = 10^{-4}, \quad D_p = 1,5 \times 10^{-5}, \\
 \alpha &= \beta = \gamma_1 = \gamma_2 = 0,7.
 \end{aligned}
 \tag{4.29}$$

Dans le cas d'une population dense, les processus d'imitation sont les plus importants [29,30]. Par conséquent, ici, les coefficients des fonctions d'imitation sont supérieurs à 0,5. Il convient de noter que nous avons toujours les hypothèses $B_2 > B_1$ et $C_2 > C_1$, car nous supposons un niveau de culture à faible risque.

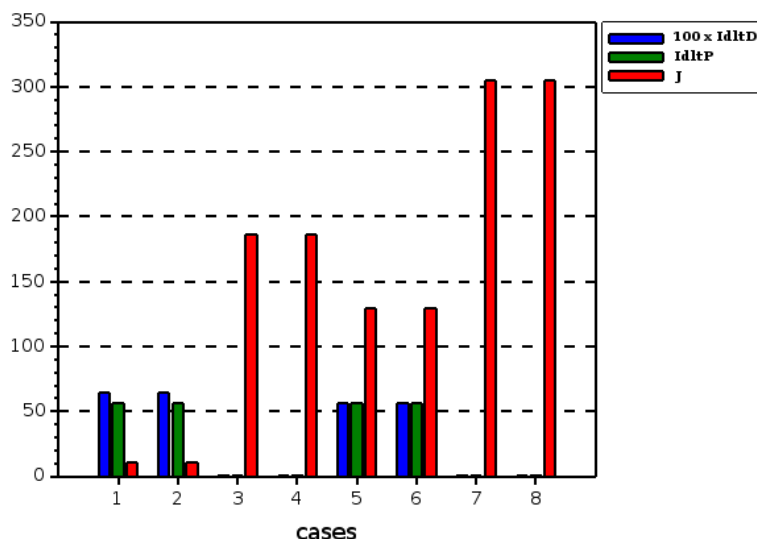


FIGURE 4.4 – $100 \times I_{\Delta d}$ (bleu), $I_{\Delta p}$ (vert) et J (rouge) pour les huit stratégies de contrôle dans le cas d'une population dense avec une culture à faible risque. Les autres paramètres sont définis comme dans (4.29). La meilleure stratégie pour réduire la panique et les décès est la seconde. En effet, c'est celle qui a les valeurs les plus élevées de $I_{\Delta p}$ et $I_{\Delta d}$ et la valeur la plus faible de J .

En testant toutes les stratégies de la Table 4.3, nous constatons qu'en cas de population dense, la meilleure stratégie pour réduire la panique et les décès (voir Figure 4.4) correspond une fois de plus à la stratégie numéro 2, ($A_1 = 10^{-2}$, $A_2 = 10^{-2}$, $A_3 = 1$). Elle combine l'action des secouristes sur place et la formation de la population. La Figure 4.5 montre les contrôles optimaux et la densité de panique et de décès avec et sans contrôle pour une telle stratégie optimale.

De plus, Si on s'intéresse uniquement à un seul contrôle parmi les 3, alors pour le même cas, la meilleure stratégie est la numéro 6 correspondant à l'action du personnel opérationnel.

En conclusion de ce chapitre :

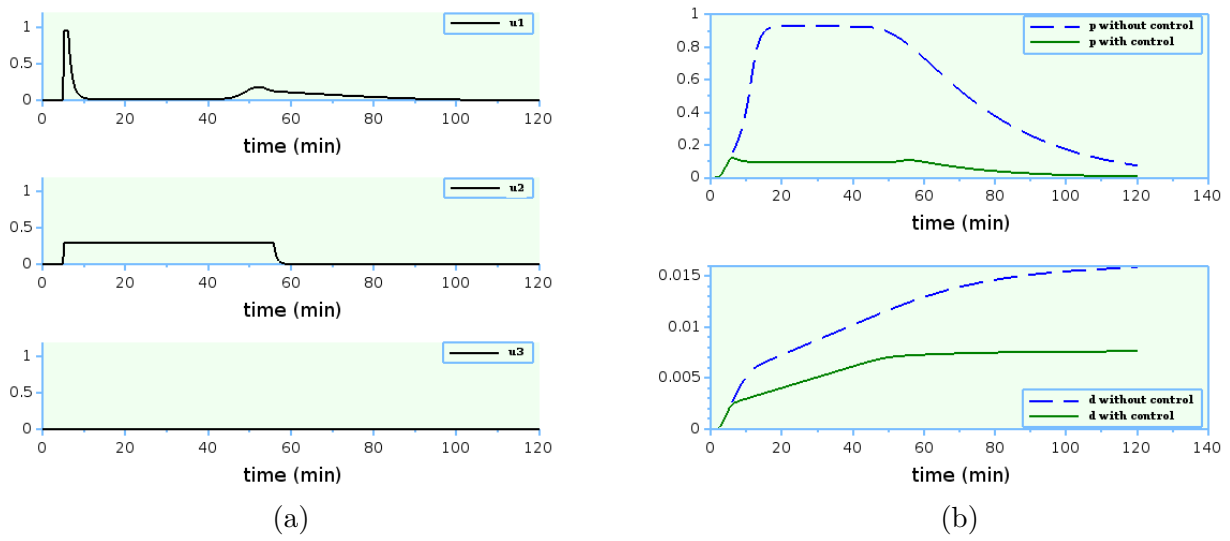


FIGURE 4.5 – Solutions pour la meilleure stratégie dans le cas d’une population dense avec une culture à faible risque : ($A_1 = 10^{-2}$, $A_2 = 10^{-2}$, $A_3 = 1$). (a) Contrôles optimaux u_1 , u_2 et u_3 . (b) Au dessus : densité des comportements de panique avec (ligne pleine) et sans contrôle (ligne pointillée). En dessous : densité des décès avec (ligne pleine) et sans contrôle (ligne pointillée).

- La stratégie optimale pour faire face à des populations dispersées ou denses est de combiner la formation de la population et les actions des secouristes sur place.

- Nous avons formulé un problème de contrôle optimal pour un modèle mathématique décrivant le comportement humain en cas de catastrophe. Nous avons proposé trois différents contrôles, modélisant la formation de la population, les actions des secouristes sur place et les informations institutionnelles et avons déterminé leur caractérisation en exploitant le principe de Pontryagin. Nous avons également présenté plusieurs simulations numériques en considérant différents scénaris de population dans le cas d’une simulation de tsunami sur la côte d’azur française.

- Nos résultats peuvent être utiles pour améliorer les stratégies et les méthodes de gestion des événements catastrophiques soudains et inattendus. Nous avons collaboré avec des experts du comportement humain et de la gestion de crise pour identifier les principaux contrôles qui peuvent avoir un effet sur la dynamique comportementale, nous les avons définis thématiquement et mathématiquement, et avons examiné sur quels paramètres et transitions ils agissent.

- Notre objectif futur est d’implémenter un problème de contrôle optimal sur un modèle spatial APC, comme il est traité dans [17] pour un réseau de modèles PCR (Panic-Control-Reflexe), afin d’approfondir les interactions entre le contexte spatial et les actions des décideurs.

Bibliographie

- [1] L. J. Allen, B. M. Bolker, Y. Lou, and A. L. Nevai, *Asymptotic profiles of the steady states for an sis epidemic reaction-diffusion model*, Discrete and Continuous Dynamical Systems **21** (2008), no. 1, 1.
- [2] B. Ambrosio and MA. Aziz-Alaoui, *Synchronization and control of coupled reaction-diffusion systems of the fitzhugh-nagumo type*, Computers & Mathematics with Applications **64** (2012), no. 5, 934–943.
- [3] B. Ambrosio and M.A. Aziz-Alaoui, *On a coupled time-dependent sir models fitting with new york and new-jersey states covid-19 data*, Biology **9** (2020), no. 6, 135.
- [4] B. Ambrosio, MA. Aziz-Alaoui, and V. L. E Phan, *Large time behaviour and synchronization of complex networks of reaction-diffusion systems of fitzhugh-nagumo type*, IMA Journal of Applied Mathematics **84** (2019), no. 2, 416–443.
- [5] J. Arino and P. Van den Driessche, *Disease spread in metapopulations*, Fields Institute Communications **48** (2006), no. 2006, 1–12.
- [6] M.A. Aziz-Alaoui, G. Cantin, and A. Thorel, *Synchronization of turing patterns in complex networks of reaction-diffusion systems set in distinct domains*, 2023. Submitted.
- [7] MA. Aziz-Alaoui and P. Roy, *Deciphering role of inter and intracity human dispersal on epidemic spread via coupled reaction-diffusion models*, Journal of Applied Mathematics and Computing **66** (2021), no. 1, 769–808.
- [8] N. Bacaër, *Un modèle mathématique des débuts de l'épidémie de coronavirus en france*, Mathematical Modelling of Natural Phenomena **15** (2020), 29.
- [9] G. Bastin, *Sur la modélisation et le contrôle des réseaux dynamiques conservatifs*, Revue E-STA, Special CIFA **3** (2006), no. 2.
- [10] H. R. Beyer, *Beyond partial differential equations : On linear and quasi-linear abstract hyperbolic evolution equations*, 1st ed. 2007..., Lecture Notes in Mathematics 1898, 2007 (eng).
- [11] L. Bittner, *Ls pontryagin, vg boltyanskii, rv gamkrelidze, ef mishechenko, the mathematical theory of optimal processes. viii+ 360 s. new york/london 1962. john wiley & sons. preis 90/-*, Wiley Online Library, 1963.
- [12] L. Boschetti, D. Provitolo, and E. Tric, *A method to analyze territory resilience to natural hazards, the example of the french riviera against tsunami*, Egu general assembly conference abstracts, April 2017, pp. 12935.
- [13] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Théorie et applications **1** (1983), 983.
- [14] G. Cantin, *Study of complex networks of dissipative or conservative dynamic systems in finite or infinite dimension. application to the analysis of human behavior in disaster situations*, Ph.D. Thesis, 2018.
- [15] G. Cantin and MA. Aziz-Alaoui, *Dimension estimate of attractors for complex networks of reaction-diffusion systems applied to an ecological model.*, Communications on Pure & Applied Analysis **20** (2021), no. 2.
- [16] G. Cantin, MA. Aziz-Alaoui, and N. Verdière, *Large-time dynamics in complex networks of reaction-diffusion systems applied to a panic model*, IMA Journal of Applied Mathematics **84** (2019), no. 5, 974–1000.
- [17] G. Cantin, N. Verdière, and V. Lanza, *Synchronization under control in complex networks for a panic model*, International conference on computational science, 2019, pp. 262–275.

Bibliographie

- [18] G. Cantin, N. Verdière, V. Lanza, MA. Aziz-Alaoui, et al., *Mathematical modeling of human behaviors during catastrophic events : stability and bifurcations*, International Journal of Bifurcation and Chaos **26** (2016), no. 10, 1630025.
- [19] A. Cegielski, *Iterative methods for fixed point problems in hilbert spaces*, Vol. 2057, Springer, 2012.
- [20] M. Chipot, *Elements of nonlinear analysis*, Springer Science & Business Media, 2000.
- [21] L. Crocq, *Paniques collectives (les)*, Odile Jacob, 2013.
- [22] J. Droniou, *Intégration et espaces de sobolev à valeurs vectorielles*. (2001).
- [23] W. E. Fitzgibbon, J. Morgan, B. Q. Tang, and H. Yin, *Reaction-diffusion-advection systems with discontinuous diffusion and mass control*, arXiv preprint arXiv :2103.16863 (2021).
- [24] H. Fleming and W. Rishel, *Deterministic and stochastic optimal control*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1975.
- [25] D. T. Gilbert, R. B. Giesler, and K. A. Morris, *When comparisons arise.*, Journal of personality and social psychology **69** (1995), no. 2, 227.
- [26] K. Goebel, *Concise course on fixed point theorems* (2002).
- [27] A. Granas and J. Dugundji, *Fixed point theory*, Vol. 14, Springer, 2003.
- [28] J. A. Jacquez and C. P. Simon, *Qualitative theory of compartmental systems*, SIAM Review **35** (1993), no. 1, 43–79.
- [29] V. Lanza, E. Dubos-Paillard, R. Charrier, N. Verdière, D. Provitolo, O. Navarro, C. Bertelle, G. Cantin, A. Berred, and MA. Aziz-Alaoui, *Spatio-temporal dynamics of human behaviors during disasters : A mathematical and geographical approach*, Complex systems, smart territories and mobility, 2021, pp. 201–218.
- [30] V. Lanza, D. Provitolo, N. Verdière, C. Bertelle, E. Dubos-Paillard, R. Charrier, O. Navarro, MA. Aziz-Alaoui, I. Mikiela, A. Boudoukha, A. Tricot, A. Lindenmann, A. Berred, S. Haule, and E. Tric, *Modeling and analyse of the impact of risk culture on the human behavior during a catastrophic event*. submitted.
- [31] L. Lukes, *Differential equations : classical to controlled*, Chapman and Hall/CRC, 2010.
- [32] P. Magal, S. Ruan, et al., *Theory and applications of abstract semilinear cauchy problems*, Vol. 201, Springer, 2018.
- [33] J. Mawhin, *Le théoreme du point fixe de brouwer : un siecle de métamorphoses*, Sci. Tech. Perspect **2** (2007), no. 10, 1–2.
- [34] I. Mikiela, V. Lanza, and N. Verdière, *Optimal control in a mathematical model of human behavior during a catastrophe*, ECC (European Control Conference) 20, May 2020.
- [35] A. Miranville, G. Cantin, and MA. Aziz-Alaoui, *Bifurcations and synchronization in networks of unstable reaction–diffusion systems*, Journal of Nonlinear Science **31** (2021), 1–34.
- [36] E. Mitidieri, G. Sweers, et al., *Weakly coupled elliptic systems and positivity*, Mathematische Nachrichten **173** (1995), no. 1, 259–286.
- [37] J. Morgan, *Boundedness and decay results for reaction-diffusion systems*, SIAM Journal on Mathematical Analysis **21** (1990), no. 5, 1172–1189.
- [38] J. D. Murray, *Mathematical biology ii : spatial models and biomedical applications*, Vol. 3, Springer New York, 2001.
- [39] A. A. Ovono and A. Rougirel, *Elliptic equations with diffusion parameterized by the range of nonlocal interactions*, Ann. Mat. Pura Appl **189** (2010), no. 1, 163–183.
- [40] A. Ovono A., *Asymptotic behaviour for a diffusion equation governed by nonlocal interactions*, Electron.J.Diff.Equ. **2010** (2010), no. 134, 1–16.
- [41] A. Plouvier, *Sur une classe de problemes d’évolution quasi linéaires dégénérés*, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid **8** (1995), no. 1.
- [42] D. Provitolo, E. Dubos-Paillard, and J. Müller, *Emergent human behaviour during a disaster : Thematic versus complex systems approaches*, European conference on complex system, 2011, pp. 1–11.
- [43] D. Provitolo, E. Dubos-Paillard, N. Verdière, V. Lanza, R. Charrier, C. Bertelle, and MA. Aziz-Alaoui, *Les comportements humains en situation de catastrophe : de l’observation à la modélisation conceptuelle et mathématique*, Cybergeo : European Journal of Geography (2015), 735.

- [44] D. Provitolo, A. Tricot, et al., *Saisir les comportements humains en situation de catastrophes : proposition d'une démarche méthodologique immersive*, Cybergeog : European Journal of Geography (2022). accepted.
- [45] J. Prüss, D. Jan Pruss Halle, et al., *Maximal regularity for evolution equations in L_p -spaces* (2002).
- [46] Z. Qu, *Cooperative control of dynamical systems : Applications to autonomous vehicles*, 2009 (eng).
- [47] P. Quittner and P. Souplet, *Superlinear parabolic problems*, Springer, 2019.
- [48] M. Reghezza-Zitt and S. Rufat, *Resilience imperative : uncertainty, risks and disasters*, Elsevier, 2015.
- [49] L. Roques, *Modèles de réaction-diffusion pour l'écologie spatiale : Avec exercices dirigés*, Editions Quae, 2013.
- [50] J. Schauder, *Der fixpunktsatz in funktionalräumen*, *Studia Mathematica* **2** (1930), no. 1, 171–180.
- [51] R. Temam, *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Vol. 68, Springer Science & Business Media, 2012.
- [52] E. Trélat, *Optimal control and applications to aerospace : some results and challenges*, *Journal of Optimization Theory and Applications* **154** (2012), no. 3, 713–758.
- [53] E. Trélat, *Contrôle optimal : théorie et applications*, 2013.
- [54] R. K. Upadhyay, P. Roy, and V. Rai, *Deciphering dynamics of epidemic spread : the case of influenza virus*, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **24** (2014), no. 05, 1450064.
- [55] P. Van Long Em, *Analyse asymptotique de réseaux complexes de systèmes de réaction-diffusion*, Ph.D. Thesis, 2015.
- [56] N. Verdière, V. Lanza, R. Charrier, D. Provitolo, E. Dubos-Paillard, C. Bertelle, et al., *Mathematical modeling of human behaviors during catastrophic events*, International conference on complex systems and applications le havre, 23 au 26 juin 2014., 2014, pp. 67–74.
- [57] W. Wang and X. Zhao, *Basic reproduction numbers for reaction-diffusion epidemic models*, *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* **11** (2012), no. 4, 1652–1673.
- [58] A. Yagi, *Abstract parabolic evolution equations and their applications*, Springer Monographs in Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg (eng).

