



HAL
open science

Ablation d'un matériau de protection thermique en régime turbulent

Maxime Stuck

► **To cite this version:**

Maxime Stuck. Ablation d'un matériau de protection thermique en régime turbulent. Sciences de l'ingénieur [physics]. ISAE Toulouse, 2023. Français. NNT : 2023ESAE0069 . tel-04654531

HAL Id: tel-04654531

<https://theses.hal.science/tel-04654531v1>

Submitted on 19 Jul 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE)*

Présentée et soutenue le *mardi 12 décembre 2023* par :

Maxime Stuck

Ablation d'un matériau de protection thermique en régime turbulent

JURY

FRANÇOIS CHARRU	Professeur – Université de Toulouse	Président
HÉLOÏSE BEAUGENDRE	Professeure – INRIA Bordeaux	Rapporteure
SOFIANE BENHAMADOUCHE	Maître de conférence – EDF R&D	Rapporteur
RÉMI MANCEAU	Directeur de recherche – LMAP Pau	Examineur
FRANÇOIS CHEDEVERGNE	Directeur de recherche – ONERA	Directeur de thèse
MARINA OLAZABAL-LOUMÉ	Directrice de recherche – CEA/CESTA	Directrice de thèse
JACQUES COUZI	Ingénieur de recherche – CEA/CESTA	Invité

École doctorale et spécialité :

MEGEP : Dynamique des fluides

Unité de Recherche :

Équipe d'accueil ISAE-ONERA EDyF – CEA/CESTA

Directeur(s) de Thèse :

François Chedevergne et Marina Olazabal-Loumé

Rapporteurs :

Héloïse Beaugendre et Sofiane Benhamadouche

CEA/CESTA
15 Av. des Sablières
33116 Le Barp CEDEX

ONERA, site de Toulouse
2 Av. Édouard Belin
31055 Toulouse CEDEX 4

Manuscrit de thèse

Ablation d'un matériau de protection thermique en régime turbulent

Directeur de thèse : François Chedevergne (ONERA DMPE/STAT)

Directrice de thèse : Marina Olazabal-Loumé (CEA/CESTA)

Encadrant CEA/CESTA : Jacques Couzi (CEA/CESTA)

Maxime STUCK

CEA/CESTA
ONERA

La version numérique de ce document permet une navigation aussi aisée que possible dans les différentes parties: les tables des matières, références aux équations figures et tables, les références bibliographiques ainsi que les symboles du texte listés dans la nomenclature sont des liens hypertextes renvoyant à l'élément adéquat (cliquer sur un symbole dans le texte renvoie à son entrée dans la nomenclature). La plupart des logiciels de lecture proposent des raccourcis clavier pour revenir à la page courante (par exemple **Alt+←** pour Adobe Reader).

À Maminou, à Momé
À Popé, à Fanfan

« Si l'on peut trouver moins que rien, c'est que rien vaut déjà quelque chose. »

Raymond Devos, *Parler pour ne rien dire*

Remerciements

Mille cent trente-cinq jours – soit un peu plus de trois ans – se sont écoulés entre le début de ma thèse et ma soutenance. En autant de jours, j’ai eu l’occasion de rencontrer beaucoup de monde que je vais essayer de remercier sans que ce chapitre ne devienne le plus long de ce manuscrit !

Paradoxalement, je vais commencer par le mille cent trente-cinquième jour – les plus matheux d’entre vous auront compris qu’il s’agit du jour de ma soutenance. Je voudrais ainsi remercier très chaleureusement Héloïse Beaugendre et Sofiane Benhamadouche d’avoir assumé la charge de rapporter ce travail de thèse. Je vous remercie pour vos commentaires complets et détaillés, qui ont guidé la préparation de ma soutenance. Un grand merci également à Rémi Manceau d’avoir complété ce jury, et à François Charru, de l’avoir présidé. J’ai beaucoup apprécié nos riches échanges, votre bienveillance et votre retour si positif sur mon travail.

Comment ne pas continuer ces remerciements sans évoquer mes encadrants de thèse ? Jacques, sans toi, cette thèse n’aurait même pas existé ; merci de m’avoir partagé ta passion pour ces fameux coups de gouge, que l’on finit par voir partout ! La réussite d’une thèse tient d’abord aux relations entre le doctorant et ses directeurs de thèse, tant d’un point de vue personnel que professionnel. Je crois que de ce côté là, je n’aurais pas pu espérer mieux. François, Marina, je ne saurais assez vous remercier pour votre confiance, votre gentillesse, votre écoute... Vous avez su m’accompagner tout au long de ces trois ans, me rassurer dans mes périodes de doute, me faire grandir scientifiquement et humainement pour finalement m’amener à ce 12 décembre 2023. Mais je ne pense pas que cette expérience, si enrichissante soit elle, aurait eu la même saveur sans les moments de partage et les liens plus personnels que nous avons pu tisser pendant ces trois années. Je pourrais encore continuer longtemps à essayer d’exprimer ce que vous représentez pour moi mais finalement, un seul mot résume tout ça : merci.

Mille cent trente-cinq jours, c’est aussi la durée que j’ai passée entre deux villes, entre l’ONERA et le CEA, entre le Stade Toulousain et l’Union Bordeaux-Bègles. Malgré une arrivée à l’ONERA en plein confinement, qui m’a privé de repas de Noël, JDD en présentiel et autres joyusetés chères au DMPE, je ne peux me plaindre de l’accueil que j’ai eu au sein des unités HEAT, puis STAT. Je souhaite remercier tout particulièrement Thomas pour nos discussions sur tout et rien devant une Dejbox, Yann pour m’avoir appris les règles de la coinche, ainsi que (dans le désordre) Julien, Jean-Michel, Fabien, Estelle, Victor, Rémi, Olivier, Elena, Xavier, Nicolas, Maxime, Adèle, Jose, etc... Je ne pourrais malheureusement pas tous vous citer mais je vous remercie chacun très sincèrement pour tous les moments partagés. Pour finir avec les permanents (car oui, tu es une permanente...), je voudrais remercier Morgane, auto-proclamée co-directrice de thèse, grâce à qui je n’ai raté aucun des potins de l’ONERA pendant que j’étais au CEA. Garde ta bonne humeur et ta gentillesse et continue à me tenir au courant malgré le décalage horaire !

Dans cette véritable fabrique à doctorants qu’est le DMPE, on a l’occasion de voir passer bon nombre de thésards avec qui partager galères, parties d’échec et bières. Je souhaite avant tout remercier Philippe, co-bureau idéal au vu de sa résilience, qualité nécessaire pour supporter ma bonne humeur matinale. Lorsqu’on arrive en thèse, on est accueillis par les anciens, ces doctorants qui ont roulé leur bosse, et dont l’immense sagesse nous permet de comprendre ce qui nous attends. Merci à Thomas, Félix, Nicolas, Marie, Arthur (la team Chede ne s’est pas vraiment améliorée à la pétanque et au palais vendéen malheureusement...), Adrien, Ludo, Alexis, Lola, Valentin, Yann... Merci également à tous les doctorants de ma génération et de la nouvelle, de m’avoir toujours fait sentir chez moi à l’ONERA malgré mon départ en terre ennemie : Léo, Hippolyte, Max, Baptiste, Bastien, Erwann, Basile, Melissa, Victoria, Yohann, et tous les autres que j’ai moins connu. Bon courage à ceux qui vont soutenir bientôt.

Mon arrivée au CEA ne souffre pas de la comparaison avec l'ONERA. Là encore, je vous remercie tous pour votre accueil, qui m'aura permis de rapidement prendre mes marques dans mon nouveau labo. Un immense merci à Chantal, Axelle et Yolanda, à Fabien, Céline, Damien, Simon, Jean-Philippe, Matthieu, Laurent, Jérôme, Justine, Stéphane, Elena, Vivien, Sébastien, Alexis, Lucille etc... Je garde d'excellents souvenirs de nos échanges à la pause café, au Chai du château d'Eyran, et de temps en temps, au bureau ! Je souhaite également remercier très chaleureusement Pierre-Henri pour son soutien permanent et son aide précieuse dans ma recherche de post-doc, ainsi que Geneviève et Xavier.

Au CEA, j'ai eu la chance de rencontrer un groupe qui s'est soudé dans la deuxième salle café, un bureau maudit où tout sérieux est devenu impossible. Je ne peux écrire ces remerciements et partir sans une pensée émue pour l'ensemble des doctorants et post-doctorants que j'ai rencontré ici. Merci Julien, pour nos longues discussions, scientifiques ou non, et tes conseils dans ton bureau/salle café, merci Joane pour ta joie de vivre, qui aura compensé mon manque de caféine dans les trajets en train du matin, merci Camille gentil·le et Camille méchant·e (je ne préciserai pas qui est qui, vous vous reconnaîtrez !), merci à Claire (et Rainette), qui n'aura pas réussi à me traîner à Arkose, à Lucas, futur collègue américain à la NNSA, à Bruno et Benoît, avec qui je portais fièrement les couleurs béarnaises. Benoît, le pic du midi d'Ossau n'est peut être pas la plus haute montagne des Pyrénées mais c'est la plus belle ! Merci également à Florent, Roxane, Alexis (×3), Mathias, Nicolas, Samuel, Amandine, Clément, Gabriel... Je finirai ici par le groupe de chercheurs le plus hipster de Bordeaux, spécialistes des chatons et des lasers, désormais tous docteurs : merci Arthur, pas pour ta coupe de cheveux, et aux yeux sous le canapé qui s'appellent (il paraît) Riley, et à la délégation italo-bretonne, Corentin et Sara, association détonante de beurre salé et d'huile d'olive.

Je voudrais également glisser un mot pour les amis qui me supportent et me soutiennent depuis le lycée ou l'école d'ingé. Merci aux Poutes, à l'Asson, aux Guyanais, aux basketteurs forts (facile ce jeu). Merci à Vivien pour le soutien mutuel dans les périodes de doute et les Fifas-boucherie qui permettent d'évacuer, et félicitations aux nouveaux docteurs, Vivi (encore), Yohanna, Arthur, Lucas, Flo et force à ceux qui finissent.

Je voudrais désormais remercier l'ensemble de ma famille, sans qui je ne serais pas qui je suis. Merci à tous les Nouël et les Stuck, et en particulier à Fic pour le Airbnb et les Gin tonic. Une pensée pour mes grands-parents, Popé, Momé, Fanfan et Maminou, à qui je dédie ce travail de thèse. Je sais que vous êtes tous les quatre très fiers de moi. Enfin, je remercie mes parents, ainsi que Yoann et Manon (et Nala et Grisouille), de me supporter tous les jours depuis 26 ans. Vous m'avez amené jusque là.

Enfin, je terminerai par exprimer toute ma gratitude et mon amour à la femme qui partage ma vie. Nono, sans toi je ne sais pas si j'aurais réussi à finir. Ton soutien au quotidien m'aura permis de rédiger sereinement. Ce n'est pas facile de vivre avec quelqu'un qui rédige sa thèse, et je te remercie du fond du coeur pour tout ce que tu as fait pour moi. Je t'aime.

Résumé

Lors de sa rentrée dans l’atmosphère, la surface de la pointe avant d’un véhicule spatial est soumise à des pressions et des flux thermiques très intenses (parfois supérieurs à 10 MW/m^2). Afin de garantir l’intégrité du corps de rentrée dans de telles conditions, des systèmes de protection thermique, généralement à base de matériaux céramiques, ont dû être développés. Les températures et flux de chaleurs extrêmes que doit supporter cette protection entraînent l’oxydation et la sublimation du carbone qui la compose, conduisant à son ablation. La dissipation d’énergie due à cette perte de masse retarde alors l’échauffement du corps de rentrée. On observe durant ce processus d’ablation l’apparition de creusements macroscopiques semblables à des coups de gouge (que l’on nomme *scallops* en anglais). Ces structures, liées à un couplage entre la couche limite turbulente qui se développe à la surface de l’objet et la paroi érodable, provoquent une augmentation des transferts thermiques pariétaux à la surface du corps de rentrée, ce qui tend à accélérer la dégradation de la protection thermique.

Des creusements similaires peuvent également apparaître dans une grande variété d’environnements géophysiques où une paroi érodable est cisailée par un écoulement de fluide. Dans ces situations, l’écoulement est incompressible, et il existe une corrélation empirique, proposée par [Thomas \(1979\)](#), permettant de relier la taille des motifs aux caractéristiques de la couche limite turbulente. L’objectif de cette thèse est de comprendre le rôle de la turbulence dans la croissance des coups de gouge lors des premiers instants de leur formation. Dans un premier temps, une simulation couplée aérothermique-ablation a été menée à partir d’un essai en vol disponible dans la littérature ([Hochrein et Wright, 1976](#)), et a permis de faire le lien entre les coups de gouge rencontrés lors de l’ablation d’un bouclier thermique et la corrélation de [Thomas \(1979\)](#). Dans un second temps, les creusements sont vus comme une déformation sinusoïdale harmonique de la paroi. L’approche historique ([Thorsness et al., 1978](#); [Charru et al., 2013](#); [Claudin et al., 2017](#)) utilisée pour étudier la croissance de motifs périodiques a été reprise et des études de réponses linéaires forcées d’une région interne de couche limite turbulente se développant sur une paroi ondulée ont ainsi été réalisées. Leur comparaison avec des simulations RANS (Reynolds Averaged Navier–Stokes), une base de données DNS (Direct Numerical Simulations) et les résultats expérimentaux d’[Hanratty et al. \(Zilker et al., 1977; Abrams et Hanratty, 1985; Frederick et Hanratty, 1988\)](#) ont montré la mise en défaut de l’hypothèse de Boussinesq pour une certaine gamme de longueurs d’onde de la déformation de la paroi, et ses conséquences sur la prévision de l’émergence d’une longueur d’onde privilégiée lors de la régression de la paroi. Il a également été mis en avant qu’un modèle de turbulence au second ordre permet de retrouver les résultats de référence, notamment en ce qui concerne le cisaillement et le flux thermique à la paroi, illustrant l’importance de la modélisation des tensions de Reynolds diagonales mal représentées par l’hypothèse de Boussinesq. En s’inspirant des travaux d’[Hanratty](#), des corrections *ad-hoc* ont ensuite été proposées et, malgré les limites de cette approche, ont prouvé leur efficacité pour améliorer les performances des modèles de turbulence au premier ordre. Enfin, pour conclure ces travaux, une étude préliminaire s’est intéressée à l’extension en trois dimensions des analyses linéaires dans le but d’étudier l’influence d’une éventuelle courbure de la paroi.

Mots clés : Couche limite turbulente, Réponse linéaire forcée, Reynolds Averaged Navier–Stokes, Aérodynamique, Ablation

Abstract

During re-entry into the atmosphere, the surface of a spacecraft's nosetip is subjected to very intense pressure and heat flux (higher than 10 MW/m^2 in some cases). To guarantee the integrity of the re-entry body under such conditions, thermal protection systems, usually based on ceramic materials, had to be developed. The extreme temperatures and heat fluxes encountered by this protection lead to oxidation and sublimation of the carbon composing it, resulting in its ablation. The dissipation of energy due to this loss of mass then delays the heating of the re-entry body. During the ablation process, scallop-like patterns appear. These structures, related to a coupling between the turbulent boundary layer developing on the surface of the object and the erodible wall, cause increased wall heat transfer, thereby accelerating the degradation of the thermal protection.

Similar patterns can also occur in a wide variety of geophysical environments where an erodible wall is sheared by a fluid flow. In these situations, the flow is incompressible, and there exists an empirical correlation, proposed by [Thomas \(1979\)](#), connecting pattern size to turbulent boundary layer features. The aim of this thesis is to understand the role of turbulence in the growth of scallops during the first instants of their formation. As a first step, a coupled aerothermal-ablation simulation was carried out on the basis of a flight test available in the literature ([Hochrein et Wright, 1976](#)), and enabled to establish a connection between the patterns encountered during heat shield ablation and the [Thomas \(1979\)](#) correlation. Secondly, the ripple patterns are seen as a harmonic sinusoidal deformation of the wall. The historical approach ([Thorsness et al., 1978](#); [Charru et al., 2013](#); [Claudin et al., 2017](#)) used to study the growth of periodic patterns was taken up, and studies of forced linear responses of an inner region of a turbulent boundary layer growing on a corrugated wall were carried out. Their comparison with RANS (Reynolds Averaged Navier–Stokes) simulations, a DNS (Direct Numerical Simulations) database and experimental results from Hanratty and co-workers ([Zilker et al., 1977](#); [Abrams et Hanratty, 1985](#); [Frederick et Hanratty, 1988](#)) highlighted the failure of the Boussinesq hypothesis for a specific range of wavelengths of the wall deformation, and its consequences in predicting the emergence of a preferred wavelength during wall regression. It was shown that a second-order turbulence model can recover the reference results, particularly with regard to shear stress and heat flux at the wall. This illustrates the importance of the difference between diagonal Reynolds stresses, poorly represented by the Boussinesq hypothesis. Drawing on Hanratty's work, *ad-hoc* corrections were then proposed and, despite the limitations of this approach, proved their effectiveness in improving the performance of first-order turbulence models. Finally, to conclude this work, a preliminary study looked at the three-dimensional extension of linear analyses to investigate the influence of potential wall curvature.

Keywords: Turbulent boundary layer, Forced linear response, Reynolds Averaged Navier–Stokes, Aerodynamic, Ablation

Table (réduite) des matières

Remerciements	v
Résumé	vii
Abstract	ix
Introduction	xiii
I. État de l'art	1
1. Observation et caractérisation des « coups de gouge »	3
1.1. Ablation d'un bouclier thermique pendant la phase de rentrée atmosphérique	4
1.2. Apparition des « coups de gouge »	7
1.3. Corrélation de Thomas (1979)	12
Bilan	15
2. Description et modélisation d'un écoulement turbulent	17
2.1. Rappels sur la turbulence	18
2.2. Modélisation de la turbulence	22
2.3. Description d'une couche limite turbulente de plaque plane	27
Bilan	36
3. Étude de l'influence d'une déformation sinusoïdale de la paroi sur la structure de la région interne de la couche limite turbulente	37
3.1. Études théoriques et expérimentales	38
3.2. Principales conclusions et discussion	44
Bilan	52
II. Démarche et travaux effectués	53
4. Simulation numérique de l'essai en vol TATER	55
4.1. Reconstruction numérique de l'essai TATER	56
4.2. Grandeurs caractéristiques lors de l'apparition des coups de gouge	61
Bilan	66
5. Étude de la réponse linéaire forcée de la région interne d'une couche limite turbulente incompressible	67
5.1. Études de réponses linéaires forcées	68
5.2. Calculs RANS avec CEDRE	75
5.3. Comparaison entre simulations, mesures et analyses linéaires	79
Bilan	86
6. Étude de la stabilité d'une surface ablatée et de l'influence de la fermeture turbulente sur la prévision des transferts thermiques	87
6.1. Retour sur les analyses linéaires	88
6.2. Simulations RANS et données de référence	90
6.3. Phase et amplitude du flux thermique	92
6.4. Stabilité d'une surface régressive	94
Bilan	97

7. Développement de corrections pour la prise en compte des effets de la déformation de la paroi dans un modèle à deux équations	99
7.1. Fonctionnement de la correction d’Hanratty	100
7.2. Influence de la déformation sur la structure de la région interne	103
7.3. Correction des modèles à viscosité turbulente	105
7.4. Limitations inhérentes à ce type de corrections	116
Bilan	117
8. Ouverture : étude préliminaire sur l’extension en trois dimensions des analyses linéaires	119
8.1. Préambule	120
8.2. Extension des analyses linéaires	121
8.3. Simulations RANS en trois dimensions	124
8.4. Comparaison des résultats et discussion	125
Bilan	128
Conclusion	129
Rappel du contexte et des objectifs de l’étude	129
Bilan et discussion	129
Perspectives	131
A. Opérateurs et propriétés mathématiques	135
A.1. L’opérateur ∇	135
A.2. Propriétés de la moyenne d’ensemble	135
B. Extension des analyses linéaires en trois dimensions	137
B.1. Équations de Navier–Stokes en coordonnées cylindriques	137
B.2. Composantes du tenseur des contraintes	138
B.3. Système linéaire à résoudre	138
B.4. Résultats de l’étude préliminaire pour toutes les configurations	140
Table (exhaustive) des matières	143
Table des figures	147
Nomenclature	153
Bibliographie	155

Introduction

Contexte

Lorsqu'un objet (appelons-le corps de rentrée) pénètre dans l'enveloppe gazeuse entourant un corps céleste (appelons-la l'atmosphère), il s'engage dans une phase mouvementée de son histoire : la rentrée atmosphérique. Pour un véhicule provenant d'une orbite terrestre, la vitesse de rentrée atteint la dizaine de kilomètres par seconde. Après la traversée des couches les plus hautes de l'atmosphère, le corps de rentrée rencontre un milieu de plus en plus dense. Dès lors, aux vitesses considérées, le volume de gaz en amont de l'objet est fortement comprimé et on observe l'apparition d'un choc détaché. Cet écoulement hypersonique possède une importante énergie cinétique qui se dissipe sous forme d'énergie thermique. En effet, dans l'environnement en aval du choc, la surface de l'engin est soumise à des conditions de pression, de température, et des flux thermiques très intenses. À de telles températures, les espèces chimiques présentes dans l'atmosphère (par exemple le dioxygène de l'atmosphère terrestre) possèdent un fort caractère oxydant. Afin de garantir la survivabilité du corps de rentrée dans cet environnement physico-chimique extrême, il est nécessaire d'utiliser une protection thermique adaptée. Si un système réutilisable, dont le principe repose sur la dissipation de l'énergie par transferts radiatif et conducteur, peut être envisagé pour des objets manœuvrants soumis à des flux thermiques modérés, on utilise généralement des protections ablatives. Celles-ci sont le plus souvent constituées de matériaux céramiques à base de carbone, connus pour leur bonne résistance aux chocs thermiques. Aux températures de fonctionnement, la surface du bouclier thermique est le siège de réactions d'oxydation et de sublimation du carbone. L'ensemble de ces réactions conduit à l'ablation de la protection, réaction endothermique qui dissipe l'énergie thermique du véhicule, retardant l'échauffement du corps de rentrée.

On peut alors observer, pendant ce processus d'ablation, l'apparition de creusements macroscopiques liés à un couplage entre l'écoulement turbulent et la paroi érodable, semblables à des « coups de gouge ». Ces structures particulières sont remarquables de par leur forme caractéristique et leur régularité, comme illustré sur la figure 1. L'apparition de ce motif sur le corps de rentrée modifie notamment les transferts thermiques à la surface de la protection, et impacte par conséquent le recul de la paroi durant l'ablation. Or, l'un des principaux enjeux lors du dimensionnement des boucliers thermiques consiste à trouver le meilleur compromis possible entre minimisation de la masse et limitation de l'échauffement de la structure interne du corps de rentrée à la température admissible. La compréhension des phénomènes relatifs à l'apparition des coups de gouge et leur prise en compte dans la phase de conception des systèmes de protection thermique constituent ainsi un axe de réflexion important afin de se rapprocher de cet idéal.

Problématiques scientifiques

Ces travaux de thèse, réalisés entre l'Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales (ONERA) de Toulouse et le Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives (CEA-CESTA), s'inscrivent dans cette optique de compréhension des différents phénomènes liés à l'interaction entre l'écoulement et le corps de rentrée. En effet, l'ablation endothermique de la protection est à ce jour l'une des solutions les plus simples et les plus efficaces pour garantir l'intégrité du véhicule, et est largement utilisée dans de nombreuses configurations. Cependant, le dimensionnement correct du bouclier thermique reste conditionné à une connaissance précise des flux thermiques à sa surface. Or, la formation de rugosités inhérentes au processus d'ablation a tendance à augmenter les flux thermiques à la paroi et la prise en compte des phénomènes associés est donc nécessaire. Dans ce contexte, de nombreux auteurs se sont intéressés – et s'intéressent encore – à la dégradation du matériau et son interaction avec le fluide pendant la phase de rentrée atmosphérique.

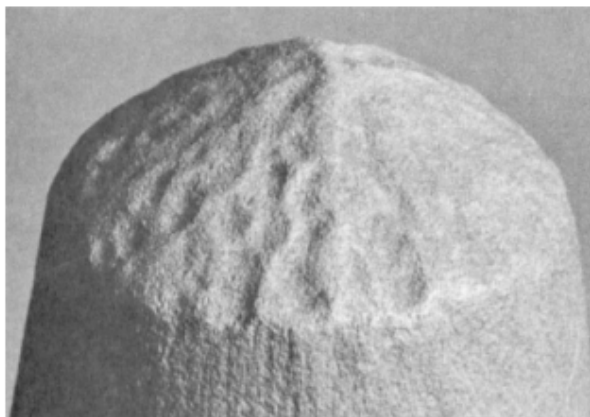


FIGURE 1. – Coups de gouges sur la pointe avant de l’essai en vol TATER (Hochrein et Wright, 1976).

Les coups de gouge ont ainsi été observés sur la surface de la pointe avant d’un corps de rentrée dès les années 1970, grâce à l’essai en vol américain Talos-Terrier-Recruit (TATER). En particulier, Hochrein et Wright (1976) se sont penchés pour la première fois sur les caractéristiques géométriques de ces motifs. Différentes mesures de pression, température, et flux thermiques ont notamment permis de reconstruire l’historique de régression de la paroi, et donc d’identifier les coups de gouge comme la manifestation d’une ablation en régime d’écoulement turbulent. Par la suite, l’apparition de ces creusements sur différents matériaux ablatifs (Grabow et White, 1973, 1975; Mateer et Larson, 1969) a été confirmée lors de plusieurs essais en soufflerie. Fait étonnant de prime abord – mais, comme nous le verrons dans la suite de ce manuscrit, pas si anecdotique – des motifs très similaires peuvent être rencontrés dans une grande variété de situations en apparence assez différentes. Outre le cas des regmaglyptes, nom donné aux coups de gouge que l’on observe sur certaines météorites (Krinov, 1974; Lin et Qun, 1987) (toujours dans un contexte de rentrée atmosphérique), on peut citer les motifs qui peuvent se former dans des grottes de glaces (Pflitsch *et al.*, 2017), sur de la tuyauterie (Schafinger *et al.*, 1995) voire sur du sable (Best, 2005; Charru *et al.*, 2013).¹ Dans la littérature, une importante proportion des études s’intéresse à ces motifs que l’on peut observer dans une multitude d’environnements géophysiques. En particulier Thomas (1979) a affirmé que l’origine de cette géométrie est due uniquement à la structure de l’écoulement turbulent, et non à la paroi érodable elle-même. Autrement dit, même si le type de phénomène responsable de l’ablation de la paroi dépend du matériau considéré, la taille et la forme des creusements qui apparaissent ne dépendent eux que de l’écoulement de fluide au dessus de cette paroi. Thomas (1979) a ainsi déterminé une relation empirique entre la longueur visqueuse de la couche limite² et la taille caractéristique des coups de gouge à partir d’un grand nombre de situations géophysiques différentes.

Historiquement, les problématiques d’ablation différentielle ont été entre autres abordées à travers l’étude de la réponse de l’écoulement à une petite déformation de la paroi. Concernant le régime turbulent, les progrès les plus significatifs proviennent des travaux expérimentaux d’Hanratty et de ses co-auteurs (Abrams et Hanratty, 1985; Frederick et Hanratty, 1988; Zilker *et al.*, 1977). Des mesures en canal hydraulique sur une paroi ondulée de faible amplitude ont notamment permis d’observer un phénomène de relaxation en espace de la contrainte de cisaillement à la paroi pour certaines longueurs d’onde, c’est-à-dire un déphasage de la réponse du cisaillement par rapport à la déformation de la paroi. La confrontation de ces mesures à une étude de réponses linéaires forcées (Thorsness *et al.*, 1978) a également montré que cette relaxation n’est pas prédite par le modèle de longueur de mélange utilisé, à moins d’introduire une correction du modèle dépendant d’un gradient de pression déphasé. Cette correction a par la suite été mise en œuvre avec

1. Le lecteur intéressé pourra se référer au chapitre 1 pour plus d’informations concernant les coups de gouges dans différents contextes.

2. Voir chapitre 2 pour les définitions relatives à la couche limite.

succès, entre autre, par [Charru *et al.* \(2013\)](#) et [Claudin *et al.* \(2017\)](#) afin d'étudier la formation d'ondulations sur une paroi érodable dans différentes situations (rides de sables, grottes de glace, etc...).

Cette étude s'inscrit dans la continuité de cette démarche et consiste à identifier les mécanismes physiques responsables de l'apparition des coups de gouge sur la surface d'un matériau de protection thermique pendant la phase de rentrée atmosphérique afin de les prendre en compte dans la modélisation de l'écoulement turbulent autour du corps de rentrée.

Organisation du manuscrit

Ce mémoire est divisée en deux parties. La première partie, constituée de trois chapitres, propose un état de l'art de l'étude de la formation des coups de gouge. Tout d'abord, le chapitre 1 présente une revue des connaissances actuelles sur la formation des coups de gouge, que ce soit dans le contexte de la rentrée atmosphérique ou dans les environnements géophysiques évoqués ci-dessus. Nous montrerons notamment l'influence supposée de la turbulence dans les mécanismes d'apparition de ces motifs. Le chapitre 2 introduit les notions de base concernant la caractérisation et la modélisation des écoulements turbulents, nécessaire à la bonne compréhension de notre étude. Une attention particulière est notamment apportée à la description d'une couche limite turbulente, configuration principalement étudiée dans ce manuscrit. Enfin, le chapitre 3 s'intéresse à l'impact d'une petite déformation de la paroi sur une couche limite turbulente, suivant l'approche historique utilisée pour étudier la formation de motifs apparaissant sur une paroi érodable. Les travaux expérimentaux d'Hanratty *et al.* ([Abrams et Hanratty, 1985](#); [Frederick et Hanratty, 1988](#); [Zilker *et al.*, 1977](#)) y sont notamment exposés en détails, ainsi que le principe des études de réponses linéaires forcées d'une couche limite turbulente, à travers la revue très complète de [Charru *et al.* \(2013\)](#).

La seconde partie, constituée quant à elle de cinq chapitres, est dédiée à la présentation de la démarche et des travaux effectués au cours de cette thèse. Le chapitre 4 présente ainsi la reconstitution numérique de l'essai expérimental TATER justifiant certaines hypothèses simplificatrices utilisées dans la suite comme première approche. Dans le chapitre 5, une étude de réponses linéaires forcées d'une couche limite turbulente incompressible est réalisée, et comparée aux résultats expérimentaux d'Hanratty *et al.* ([Abrams et Hanratty, 1985](#); [Frederick et Hanratty, 1988](#); [Zilker *et al.*, 1977](#)). Des simulations RANS³ ont également été utilisées afin de comprendre l'influence de la fermeture turbulente dans la configuration étudiée. Ces différentes études sont étendues, dans le chapitre 6, à l'influence de la fermeture turbulente sur la prévision des flux thermiques lorsqu'une couche limite turbulente est soumise à une petite perturbation de la paroi. La stabilité d'une surface régressive est notamment considérée, afin de faire le lien avec la corrélation empirique de Thomas. Enfin, le chapitre 7 est consacré au développement de corrections pour la prise en compte dans les modèles de turbulence RANS des effets de gradient de pression induits par la déformation de la paroi. Une discussion sur les stratégies de simulation RANS à adopter pour la prévision de l'apparition des coups de gouge est également proposée. Enfin, un travail préliminaire concernant l'extension en trois dimensions des études de réponses linéaires forcées est proposé au chapitre 8 en guise d'ouverture.

3. Voir chapitre 2 pour plus de détails sur la démarche RANS.

Première partie

État de l'art

Observation et caractérisation des « coups de gouge »

L'objectif principal de ce premier chapitre est de présenter en détail le contexte de notre étude. Nous nous intéresserons donc dans un premier temps à l'ensemble des phénomènes physiques que va subir le corps de rentrée, et en particulier ceux conduisant à l'ablation de la protection thermique. Nous verrons ensuite que pendant ce processus d'ablation, on observe sur la surface du bouclier thermique l'apparition de creusements tridimensionnels que l'on nomme « coups de gouge ». S'il n'existe que peu de données expérimentales provenant de véritables essais en vol, de nombreux auteurs ont recréé les conditions d'apparition de ces motifs sur des matériaux de substitution lors d'essais en soufflerie. On distinguera notamment les coups de gouge du *cross-hatching*, phénomène lié au caractère supersonique de l'écoulement, et *a priori* indépendant de l'apparition des motifs particuliers qui nous occupent. Nous verrons de plus que ces coups de gouge sont également susceptibles d'apparaître dans des environnements très divers, et notamment dans des cas d'écoulements incompressibles. Bien que de tailles complètement différentes, et pouvant se développer sur des matériaux distincts, ces structures sont toutes reliées par la corrélation empirique de [Thomas \(1979\)](#) entre la longueur visqueuse de l'écoulement δ_ν^a et leur longueur caractéristique λ .

a. Définition dans le chapitre 2.

Sommaire

1.1. Ablation d'un bouclier thermique pendant la phase de rentrée atmosphérique	4
1.1.1. Conditions rencontrées par un objet	4
1.1.2. Matériaux utilisés	5
1.1.3. Processus d'ablation	6
1.2. Apparition des « coups de gouge »	7
1.2.1. Dans un contexte de rentrée atmosphérique	8
1.2.2. Analogie avec d'autres situations géophysiques	10
1.3. Corrélation de Thomas (1979)	12
Bilan	15

1.1. Ablation d'un bouclier thermique pendant la phase de rentrée atmosphérique

Afin de protéger un objet destiné à rentrer dans l'atmosphère, deux stratégies peuvent être employées pour le système de protection thermique : les systèmes réutilisables et les systèmes ablatifs. Nous ne nous intéresserons ici qu'à ces derniers, principalement utilisés dans le cas des corps balistiques et sondes spatiales qui motivent notre étude. Pour de telles utilisations, le véhicule est refroidi par ablation, c'est-à-dire que le matériau est consommé de manière endothermique pendant la phase de rentrée, en raison des conditions extrêmes rencontrées par le véhicule. Ce phénomène libère une partie de l'énergie reçue et maintient l'objet à une température acceptable, permettant de garantir la survie de sa structure.

1.1.1. Conditions rencontrées par un objet

Du fait des lois de la mécanique orbitale, un objet provenant de l'orbite terrestre rentre dans l'atmosphère à des vitesses extrêmement élevées – de l'ordre de la dizaine de kilomètres par seconde. Pour des objets terrestres, l'entrée dans l'atmosphère se fait à une altitude voisine d'une centaine de kilomètres, et le choix de la trajectoire est primordial : une pente trop faible entraînerait un *rebond atmosphérique* tandis qu'une pente trop forte mettrait en danger l'intégrité du véhicule. Pour un objet balistique, cette trajectoire, dite *trajectoire d'Allen* (Gallais, 2007) se calcule facilement à partir des conditions initiales de vitesse V_0 et de pente γ (voir figure 1.1). Quelques exemples de conditions de rentrée atmosphérique sont présentés dans le tableau 1.1.

Objet	Masse (kg)	Vitesse (km/s)	Pente (degré)	Flux maximal (MW.m^{-2})
Apollo 4	5425	11.140	7.07	5.3
Stardust	45.2	12.799	8.21	11
Genesis	205.6	10.77	9	7
Météorite Tcheliabinsk	1.2×10^7	19.020	18.2	Inconnu

TABLE 1.1. – Exemples d'objets entrés dans l'atmosphère terrestre (altitude voisine de 100 km). Sources : Duffa (2013); Borovivcka *et al.* (2013).

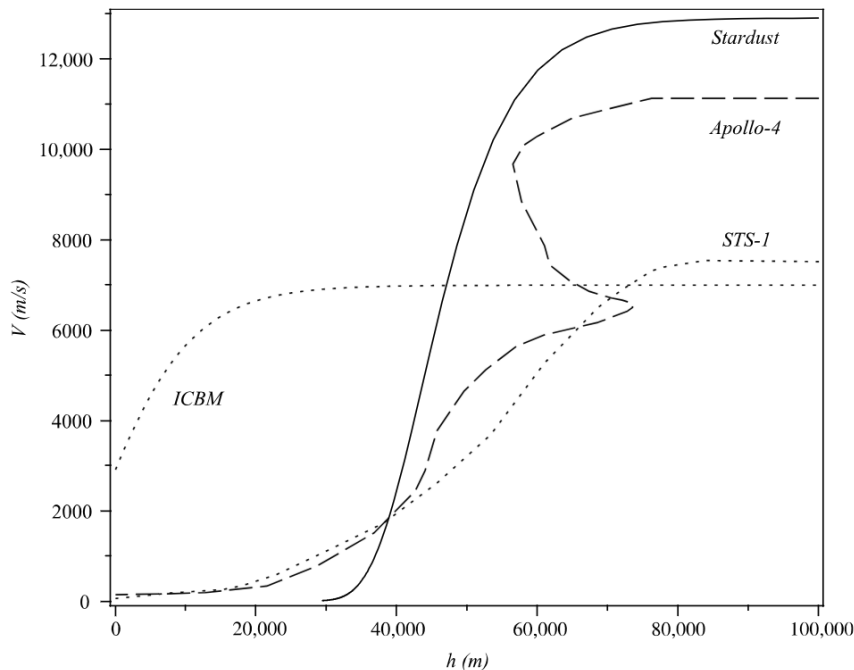


FIGURE 1.1. – Trajectoires de rentrées de sondes spatiales. Extrait de Duffa (2013).

À mesure qu'il s'enfonce dans l'atmosphère, le corps de rentrée passe peu à peu d'un environnement de densité très faible, dans lequel le libre parcours moyen des particules est grand devant la taille de l'objet¹, à un environnement beaucoup plus dense. Les interactions entre les molécules de gaz ne peuvent alors plus être négligées et il se forme autour du véhicule un écoulement que l'on peut décrire par les principes de la mécanique des milieux continus. Aux vitesses considérées, supérieures à la célérité du son, l'air en amont de l'objet est alors fortement comprimé, et un choc détaché apparaît (voir figure 1.2). Il en résulte, dans l'environnement en aval du choc, des conditions très sévères, menant à des flux thermiques à la paroi proches de la dizaine de $\text{MW}\cdot\text{m}^{-2}$ (voire supérieurs), des températures de quelques milliers de Kelvin, et des pressions de plusieurs dizaines de bars (Anderson, 2006). Dans le cas des corps balistiques non portants qui nous intéressent, on utilise généralement des protections thermiques ablatives afin de garantir l'intégrité de l'objet et de sa structure face à cet environnement extrême.



FIGURE 1.2. – Choc détaché observé en soufflerie sur une maquette de capsule de rentrée, pour un nombre de Mach $M = 4$. Extrait de Duffa (2013).

1.1.2. Matériaux utilisés

Pour les boucliers thermiques

Lors de la rentrée, la surface de la protection thermique est portée à une température avoisinant les 2000 K à 4000 K. Pour être utilisé dans de telles conditions, un matériau doit par conséquent posséder différentes caractéristiques le rendant à même de résister à cet environnement : en particulier, sa température de dégradation se doit d'être suffisamment élevée. Les matériaux céramiques à base de carbone et/ou de silicium se sont alors rapidement distingués en raison de leur résistance aux hautes températures. De plus, leur légèreté est un atout conséquent, ce dernier point étant également un critère primordial, notamment en raison des coûts associés à la propulsion de l'objet. De plus, de tels matériaux possèdent un fort caractère endothermique lorsqu'ils se subliment, à très haute température. Autrement dit, la consommation d'énergie lors de cette réaction est importante, ce qui représente un avantage certain et améliore l'efficacité de la protection.

Cependant, la tenue mécanique de ces matériaux pose problème : leur fragilité ne les rend pas utilisables tels quels. C'est pourquoi les matériaux composites à matrice céramique ont finalement été retenus. Ils sont constitués de fibres de carbone ou de carbure de silicium SiC , et d'une matrice céramique à base de carbone ou de polymères, ce qui permet d'améliorer significativement leur résistance mécanique (Duffa, 2013).

1. Cette phase de la rentrée obéit aux lois de la mécanique des milieux raréfiés, et n'est pas étudiée dans ce mémoire.

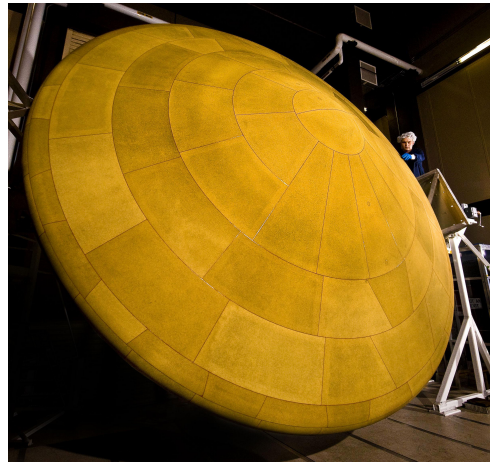


FIGURE 1.3. – Bouclier thermique ablatif de la sonde spatiale Mars Science Laboratory. Source : NASA. ²

Lors de tests au sol

Historiquement, bien que de nombreux essais en vol de corps de rentrée aient pu être effectués, une grande partie sont classifiés et on n'en retrouve que peu dans la bibliographie ouverte, l'essai TATER (Hochrein et Wright, 1976; McAlees et Maydew, 1985) faisant figure d'exception. Une large proportion de la littérature concernant l'étude expérimentale de l'ablation s'appuie sur des essais au sol, moins coûteux et permettant d'étudier *in situ* les phénomènes liés à l'ablation, ce qui ne peut-être fait directement sur les tests en vol (excepté en cas de récupération de l'objet, ce qui est rare). Pour des raisons pratiques, on peut alors utiliser dans des essais en soufflerie des matériaux de substitution (ou matériaux « fantômes ») qui s'ablatent pour des températures et des flux de chaleur moins élevés que ceux rencontrés lors de la rentrée atmosphérique. Parmi ceux-ci, on peut citer le téflon (Laganelli et Zempel, 1970; White et Grabow, 1973) et le camphre (Larson et Mateer, 1968; Williams, 1971; Baker, 1972). Cependant, l'extrapolation des mesures correspondantes à des conditions représentatives est délicate. Des essais plus pertinents peuvent être réalisés dans des installations au Jet de Plasma (Duffa, 2013) : on teste alors les matériaux qui seront utilisés par la suite en conditions réelles, tel que le graphite (White et Grabow, 1973) (la pointe avant de l'essai TATER (Hochrein et Wright, 1976) est ainsi constituée de graphite) pour des flux thermiques et des températures bien plus proches de ceux rencontrés pendant une véritable rentrée atmosphérique.

1.1.3. Processus d'ablation

Le bilan de l'énergie appliquée à la protection thermique permet de distinguer trois phénomènes responsables de la dissipation de la chaleur reçue par l'objet : une partie est ré-émise par rayonnement de la surface, une partie est absorbée par conduction thermique au sein de la protection et enfin, une partie est consommée pendant le processus d'ablation du matériau. Ce bilan est illustré par le schéma 1.4.

Le terme d'ablation désigne l'ensemble des réactions physico-chimiques subies par le matériau lors de la phase de rentrée atmosphérique et menant à la régression de la paroi. On peut distinguer les réactions de surface (réactions d'oxydation et de nitruration, sublimation) et les réactions volumiques (pyrolyse de la résine du composite).

Pour des températures suffisamment élevées (quelques centaines de Kelvin pour les matériaux fantômes utilisés en souffleries et jusqu'à 4000 K dans le cas d'une rentrée atmosphérique), la surface du matériau est consommée soit par réaction chimique avec les molécules de fluide, soit par changement de phase. Dans le cas des composites céramiques qui équipent les objets qui

2. <http://photojournal.jpl.nasa.gov/catalog/PIA12117>

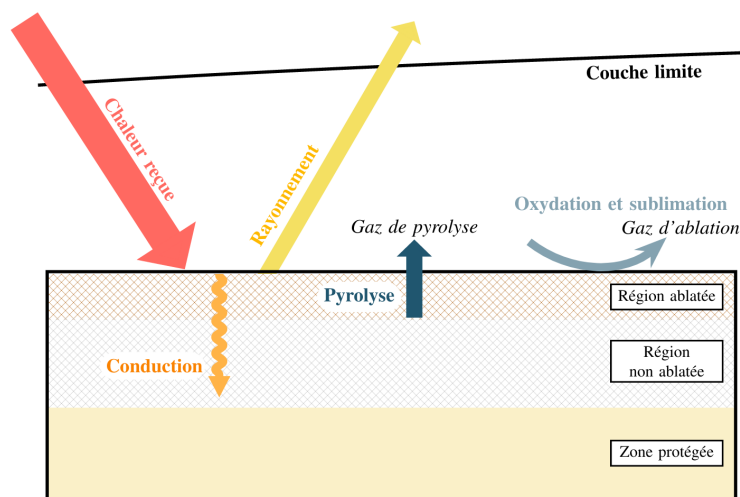


FIGURE 1.4. – Schéma illustrant la dissipation d'énergie au sein de la protection par rayonnement, conduction et ablation (oxydation, sublimation et pyrolyse).

nous intéressent, les atomes de carbone vont ainsi réagir avec les atomes d'oxygène et d'azote de l'air (réactions d'oxydation et de nitruration), pour former notamment du monoxyde de carbone (forme stable du gaz carbonique à haute température) et du monoxyde d'azote. Ces réactions sont exothermiques et donc défavorables dans le bilan d'énergie. Cependant, le matériau de protection est également soumis à des transformations physiques endothermiques, en particulier, la sublimation du carbone (changement d'état de l'état solide à l'état gazeux directement).

De plus, sous l'effet des hautes températures, la résine du matériau composite se décompose par un phénomène de pyrolyse. Ces réactions se caractérisent par la production de *gaz de pyrolyse* qui migrent vers la surface de la protection avant d'être injectés dans la couche limite.

Les réactions de pyrolyse et la sublimation du matériau composite étant des phénomènes hautement endothermiques, ils permettent de diminuer la température interne de la protection. De plus, l'injection des *gaz d'ablation*³, c'est-à-dire du produit des réactions d'oxydation, de sublimation et de pyrolyse dans la couche limite forme une couche protectrice entre l'écoulement extérieur et la paroi, améliorant l'efficacité de la protection. Enfin, la dégradation du composite par pyrolyse augmente sa porosité, ce qui, en diminuant sa conductivité thermique, permet encore une fois de limiter sa température interne.

1.2. Apparition des « coups de gouge »

La régression de la paroi n'étant pas homogène lors de ce processus d'ablation, on peut observer, à la surface du matériau de protection, l'apparition de « rugosités » de différentes tailles caractéristiques. On s'intéresse ici au cas particulier de creusements macroscopiques réguliers semblables à des « coups de gouge » (*scallops* en anglais) qui se forment sur la pointe avant de l'objet. Une première thèse réalisée conjointement au CEA-CESTA et au LCTS⁴ (Lambole, 2019) s'est intéressée aux conditions d'apparition et de propagation de ces motifs et a fait le lien avec des structures similaires que l'on peut observer dans une grande variété d'environnements. Peu de données en vol permettant d'observer les coups de gouge existents et sont disponibles dans la littérature, la référence principale dans ce domaine étant l'essai TATER, présenté ci-après. Cependant, un certain nombre d'essais au sol ont permis de confirmer et d'étudier l'apparition de ce motif particulier.

3. C'est ce que l'on appelle le *soufflage*. Voir notamment la thèse de Marchenay (2021).

4. Laboratoire des composites thermostrostructuraux, Université de Bordeaux.

1.2.1. Dans un contexte de rentrée atmosphérique

Essais en vol

L'apparition de coups de gouge sur des matériaux de protection thermique a historiquement été observée lors d'essais en vol réalisés aux États-Unis dans les années 1970 et élaborés afin d'étudier le recul de la paroi d'une pointe avant, l'objet étant par la suite récupéré au sol. En particulier, les travaux de Hochrein et Wright (1976) et de McAlees et Maydew (1985) se sont appuyés sur les données de l'essai en vol TATER (Talos-Terrier Recruit). Ce lanceur instrumenté a été conçu pour atteindre des vitesses élevées à basse altitude dans le but de réaliser des vols d'essais nécessaires à la conception de pointes avant et de boucliers thermiques de véhicules hypersoniques. Les conditions (trajectoire, vitesse) de cet essai sont détaillées dans le chapitre 4, dans lequel nous utilisons les mesures effectuées lors de ce vol pour valider certaines hypothèses retenues en première approche dans la suite de notre étude.

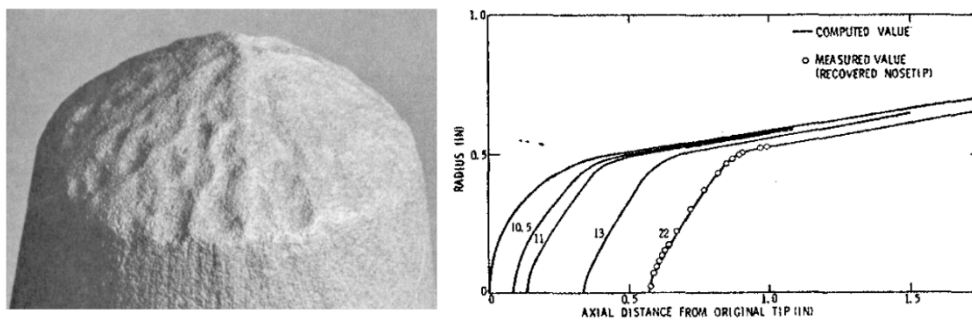


FIGURE 1.5. – Photographie de la pointe avant de l'essai TATER après le vol, présentant des coups de gouge (gauche) et historique du recul de la paroi, obtenu par simulation (droite). Tiré de Hochrein et Wright (1976).

Le lanceur a été équipé d'une pointe avant de type *sphère-cône* en graphite d'environ 1.27 cm de rayon. La figure 1.5 montre une photographie de la pointe avant ablatée récupérée à la suite de l'essai ainsi que les simulations ayant permis de reconstruire l'historique de régression de la paroi pendant le vol, qui a duré environ 45 secondes avant que le parachute ne se déploie.

L'essai TATER a notamment permis de montrer la modification globale de la géométrie de la pointe avant, qui adopte peu à peu une forme conique. Les coups de gouge apparaissent alors sur les faces du cône et sont la manifestation d'un écoulement complètement turbulent (Grabow et White, 1975; Hochrein et Wright, 1976; Duffa, 2013) autour du corps de rentrée. En effet, dans le cas de l'essai TATER, McAlees et Maydew (1985) identifient que la transition de la couche limite d'un régime d'écoulement laminaire à un régime d'écoulement turbulent se fait environ 2.5 secondes seulement après le début du vol. Après cela, les auteurs considèrent que le lanceur TATER est dans sa globalité, et pour toute la durée du vol, soumis à un régime turbulent. Or, d'après Hochrein et Wright (1976), les coups de gouges sont apparus aux alentours de 10 secondes après le début du vol et se sont amplifiés pendant environ 6 secondes.

Longueur λ	1.9 mm
Largeur w	1.9 mm
Profondeur d	0.254 mm

TABLE 1.2. – Dimensions caractéristiques des coups de gouge relevées par Hochrein et Wright (1976) sur la pointe avant de l'essai TATER (valeurs moyennes).

Ainsi, l'essai TATER procure de rares informations expérimentales en provenance d'un test en vol concernant l'ablation d'un matériau de protection thermique en régime turbulent. En particulier, il permet d'étudier l'évolution de la géométrie de la pointe avant, et notamment

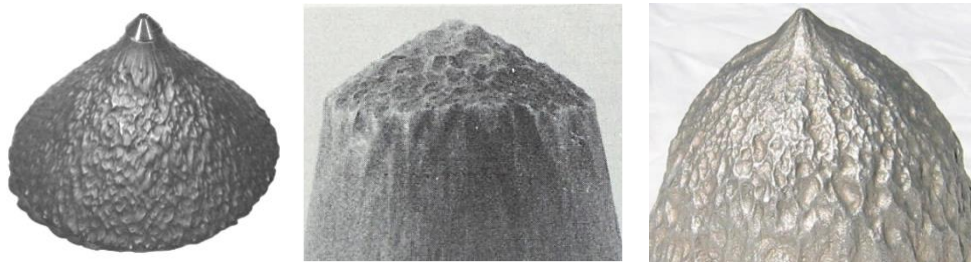


FIGURE 1.6. – Coups de gouge observés sur différents essais en soufflerie. De gauche à droite : camphre (Larson et Mateer, 1968), graphite (Shimizu *et al.*, 1974), téflon (Amar et Powars, 2011).

l'apparition des coups de gouges, auparavant uniquement observés lors d'essais en souffleries. Les dimensions caractéristiques moyennes de ces motifs sont résumées dans le tableau 1.2.

Essais au sol

De nombreux essais au sol ont permis de confirmer l'apparition de coups de gouge sur un matériau ablatable. En particulier, un programme mis en place par la NASA dans les années 1970, le programme PANT (PASSive Nositip Technology) (Wool, 1975), a été consacré à l'étude expérimentale des phénomènes aérothermodynamiques subis par un objet de rentrée, et leur modélisation.

De nombreux essais expérimentaux réalisés en soufflerie dans le cadre du programme PANT ont ainsi pu confirmer l'apparition des coups de gouge sur différents matériaux de substitution (Larson et Mateer, 1968; Laganelli et Nestler, 1969; Mateer et Larson, 1969; Williams, 1971; Baker, 1972; Laganelli et Zempel, 1970; White et Grabow, 1973; Shimizu *et al.*, 1974; Grabow et White, 1975). Ces différents travaux expérimentaux ont en particulier permis de montrer le rôle de la couche limite turbulente dans la formation de ces motifs. Leur impact sur l'écoulement, et notamment sur les flux thermiques par rapport à une configuration de paroi lisse a été également étudié dans le cadre de ce programme. En particulier, Derbidge et Wool (1974) montrent expérimentalement que les flux de chaleur sur une paroi ablatée présentant des coups de gouge sont plus élevés que sur paroi lisse, et comparent cette augmentation de flux à celle que l'on peut observer sur paroi rugueuse, en précisant toutefois qu'il ne s'agit pas du même phénomène.

Le *cross-hatching*

Ces différentes études expérimentales ont également permis de comprendre l'enchaînement des événements menant à la formation des coups de gouge. De nombreux auteurs se sont ainsi penchés sur l'apparition d'un motif différent : le *cross-hatching* (Canning *et al.*, 1968; Nachtsheim et Larson, 1971; Lees *et al.*, 1972; Stock et Ginoux, 1973; Swigart, 1974). Dans certains cas, on observe en effet la formation de hachures croisées de faible profondeur, caractéristiques d'un

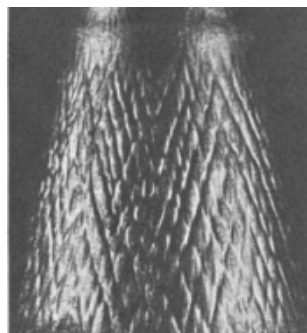


FIGURE 1.7. – Phénomène de *cross-hatching* sur un essai en cire (Stock et Ginoux, 1973).



FIGURE 1.8. – Regmaglyptes sur des météorites ferreuses. La taille caractéristique des creusements observés est de l'ordre de quelques centimètres. Gauche : météorite Willamette (American Museum of Natural History)⁴, droite : météorite Gibeon (haut)⁵, météorite Murnpeowie (bas)⁶.

écoulement supersonique (figure 1.7). Différents auteurs considèrent que ces hachures dégènerent ensuite en coups de gouge lorsque l'écoulement devient pleinement turbulent (White et Grabow, 1973; Stock et Ginoux, 1973; Swigart, 1974; Duffa, 2013).

Notons toutefois que ce phénomène est à distinguer des coups de gouge qui, comme nous le verrons par la suite, peuvent également apparaître dans des environnements où l'écoulement est subsonique et où le *cross-hatching* ne peut donc pas être observé. Ce dernier ne sera pas étudié dans ce travail de thèse et est présenté ici à titre indicatif.

Le cas des météorites

L'apparition de structures type « coups de gouge » sur des objets de rentrée n'est pas limitée au cas de pointes avant d'objets artificiels (Krinov, 1974; Lin et Qun, 1987). On observe en effet sur certaines météorites des creusements similaires que l'on nomme *regmaglyptes* (voir figure 1.8). Ces observations illustrent notamment le fait que l'apparition des coups de gouge n'est pas limitée aux matériaux céramiques puisque les météorites considérées ici sont généralement composées de roche ou de métal (fer, nickel...). Dans le cas des météorites ferreuses, le processus d'ablation débute à des températures moins élevées (inférieures à 1800 K), ce qui a pour conséquence de favoriser la fusion de la surface de la météorite avant sa sublimation. On peut notamment citer les travaux de Lin et Qun (1987) qui ont mis en évidence l'influence du nombre de Reynolds de la couche limite sur le type de motifs observés, montrant là encore que les regmaglyptes observées sur les météorites étudiées sont la manifestation d'un écoulement pleinement turbulent.

1.2.2. Analogie avec d'autres situations géophysiques

La formation de creusements lors de l'érosion d'une surface cisailée par un écoulement de fluide se retrouve également dans des situations bien moins extrêmes que les cas de rentrée atmosphérique. En effet, on retrouve des motifs en forme de coups de gouge dans de nombreux environnements géophysiques et industriels dans lesquels l'écoulement considéré est incompressible et les mécanismes d'érosion multiples. On peut notamment citer les travaux de Schaffinger

5. Photo : M. Stuck.

6. Source : <https://www.meteorite-recon.com/home/meteorite-documentaries/gibeon-iron-meteorites>

7. Photo : James St. John, <https://www.flickr.com/photos/47445767@N05/5868072482>

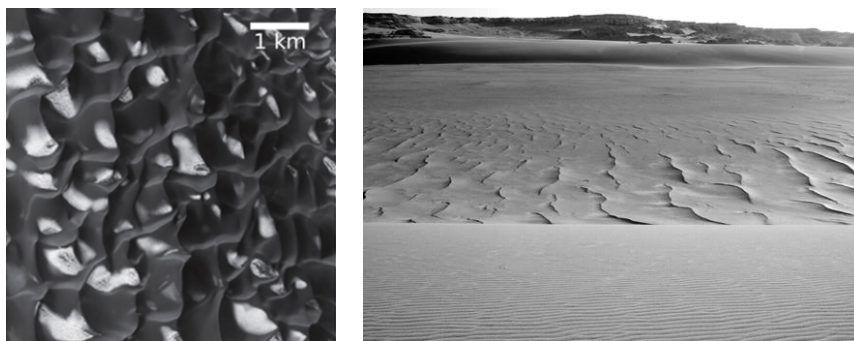


FIGURE 1.9. – Gauche : photographie de dunes martiennes, extrait de Bourke *et al.* (2010). Droite : rides de sable de différentes tailles dans le désert égyptien, extrait de Yizhaq *et al.* (2012).

et al. (1995) et de Stevenson *et al.* (2001) dans le cas d’ondulations de surface apparaissant dans des écoulements de conduite de type industriel. Cependant, une part importante de la littérature s’intéressant à ce type de motifs traite de deux situations bien particulières : les dunes et rides de sable et les coups de gouge observés dans un contexte géologique, sur les parois de grottes de glace et de roche.

Dunes et rides de sable

De nombreux auteurs se sont penchés sur le cas de la formation de dunes et de rides de sable, que ce soit dans des lits de rivière (Seminarà, 2010; Doré *et al.*, 2016), dans des déserts, terrestres ou non (Bourke *et al.*, 2010; Durán *et al.*, 2019), ou sur des aires côtières (Blondeaux, 2001; Best, 2005). Ce contexte a également motivé un certain nombre d’études expérimentales et théoriques (Benjamin, 1959; Blumberg et Curl, 1974; Bushuk *et al.*, 2019), dont de nombreuses contributions proviennent des travaux de Charru, Andreotti, Claudin et leurs co-auteurs (Charru et Hinch, 2000; Charru et Mouilleron-Arnould, 2002; Claudin et Andreotti, 2006; Charru et Hinch, 2006; Luchini et Charru, 2010; Claudin *et al.*, 2011; Durán *et al.*, 2012; Charru *et al.*, 2013; Claudin *et al.*, 2017). Dans ce contexte, la modification de la géométrie de la paroi se fait par transport de sédiments ; les grains de sable sont arrachés à la surface pour être redéposés un peu plus loin. Il n’y a pas de perte de matière, contrairement au cas de l’ablation d’un système de protection thermique. On peut alors observer l’apparition de motifs de longueurs très diverses : de quelques centimètres pour les plus petites rides subaquatiques au kilomètre pour les plus grandes dunes de sable (voir figure 1.9).

Les travaux menés pour expliquer l’apparition de ces motifs sur des lits de sable ont notamment permis de montrer l’influence du cisaillement à la paroi dans le transport de sédiments par l’écoulement turbulent se développant au dessus de cette surface. Ce point sera largement discuté dans le chapitre 3 de cet état de l’art, en s’appuyant particulièrement sur la revue très complète de Charru *et al.* (2013).

Structures karstiques et glacières

On retrouve également ce type de creusements résultant de l’érosion hydrochimique et hydraulique de paroi de grottes constituées de roches solubles, principalement carbonatées (c’est-à-dire à base de calcite $CaCO_3$ comme le calcaire, la craie, le marbre...). On parle dans ce cas de *géomorphologie karstique*, favorisée par l’écoulement d’une eau possédant une forte teneur en dioxyde de carbone : le gaz carbonique réagit avec la roche carbonatée pour former des ions hydrogénéocarbonate. Lors de la *karstification*, les roches carbonatées sont érodées par *solvatation*⁸ selon

8. Dissolution d’une espèce chimique dans un solvant.

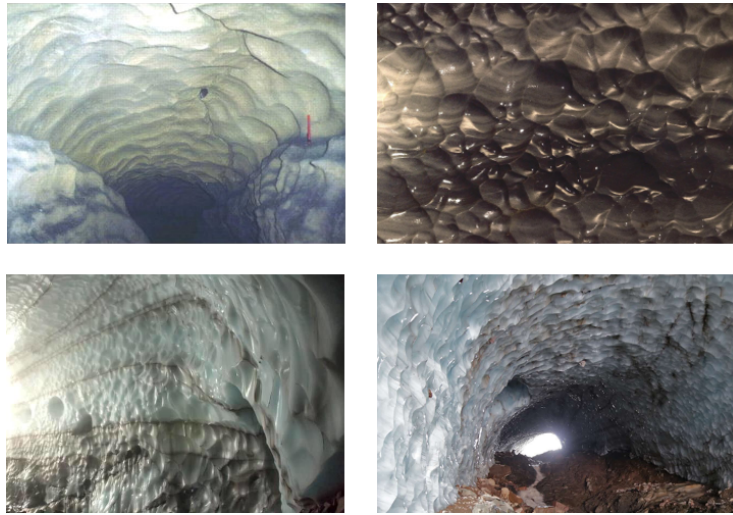
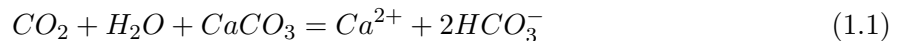


FIGURE 1.10. – Coups de gouge sur les paroi de grottes de roche (haut) et de glace (bas). Haut : grotte des Puits (calcaire), Moselle, France, extrait de [Losson et Quinif \(2001\)](#) (gauche) et grotte de Korallgrottan, Suède (marbre), extrait de [Sundqvist et al. \(2007\)](#) (droite); bas : caverne glacière au Mont Saint-Helens, USA, extrait de [Anderson et al. \(1998\)](#) (gauche) et caverne de glace au glacier Sandy, USA, extrait de [Pflitsch et al. \(2017\)](#) (droite).

l'équation de bilan suivante :



Ce processus d'érosion peut alors former des motifs de type coups de gouge comme l'ont observé par exemple [Losson et Quinif \(2001\)](#) et [Sundqvist et al. \(2007\)](#) sur des parois de grottes calcaires et de marbre.

Le même phénomène se produit également dans des cavernes de glaciers ([Anderson et al., 1998](#); [Pflitsch et al., 2017](#)). Dans ces situations, l'érosion des parois de la grotte est due au passage d'un écoulement d'air provoquant la fonte de la glace, ce qui crée des structures dites *pseudokarstiques*. Là encore, les dimensions des motifs observées varient de quelques centimètres à parfois plus d'un mètre. Contrairement aux dunes de sable, on a, dans le cas de l'apparition de structures géologiques, perte de matière par fusion (glace) ou réaction chimique (roche), ce qui nous rapproche du contexte de la rentrée atmosphérique. Quelques exemples de coups de gouge sur des parois de grottes de roche et de glace sont présentés sur la figure 1.10.

1.3. Corrélation de Thomas (1979)

Bien qu'intrigante, la formation de creusements similaires dans tant de situations géophysiques en apparence bien différentes ne serait qu'une curiosité si l'analogie était limitée à une simple ressemblance géométrique. Or, malgré la grande diversité des exemples cités ci-dessus, caractérisée par des matériaux et des mécanismes d'érosion variés et une grande gamme d'échelle de longueur, ces motifs sont tous reliés par la *corrélation empirique de Thomas (1979)*. À partir de données provenant d'observations dans des environnements naturels et des conduites industrielles, complétées par des expériences en laboratoire reproduisant des écoulements géophysiques, [Thomas \(1979\)](#) propose en effet une relation empirique entre la taille caractéristique longitudinale λ des coups de gouge observés et la longueur visqueuse δ_ν de la couche limite. Comme nous le verrons plus en détail dans le chapitre 2, la longueur visqueuse δ_ν est définie comme le rapport entre la

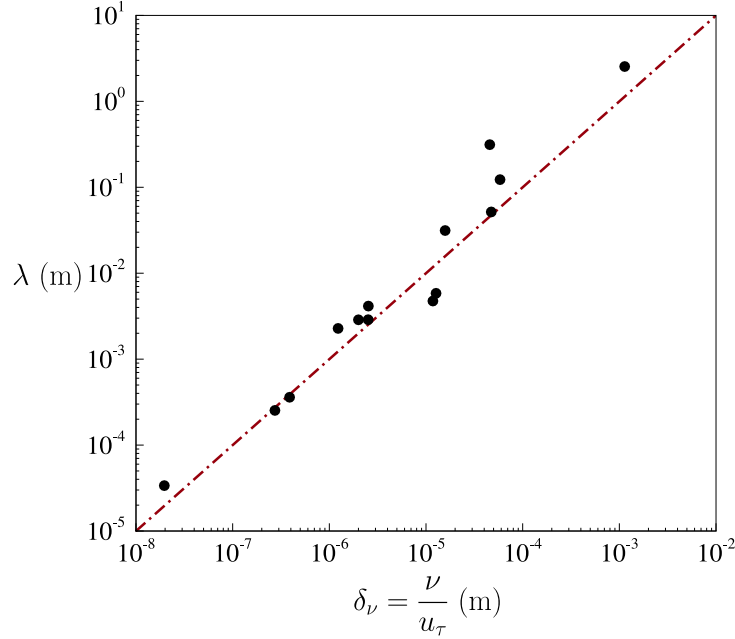


FIGURE 1.11. – Corrélation empirique de [Thomas \(1979\)](#) entre la taille caractéristique longitudinale des coups de gouge λ et la longueur visqueuse δ_ν . Les symboles sont les données expérimentales compilées par Thomas et la ligne rouge représente la corrélation empirique $\lambda = 1000 \frac{\nu}{u_\tau}$.

viscosité cinématique du fluide ν et la vitesse de frottement u_τ de l'écoulement associé :

$$\delta_\nu = \frac{\nu}{u_\tau} \quad (1.2)$$

Elle caractérise la hauteur de la sous-couche visqueuse de la couche limite turbulente se développant sur la surface considérée. Les données compilées par [Thomas \(1979\)](#) concernent des écoulements d'eau à différentes températures et d'air sur des matériaux très divers : roches calcaires, glace, plâtre, métaux, surfaces granulaires...

À travers sa corrélation empirique (reproduite sur la figure 1.11), [Thomas \(1979\)](#) propose une discussion sur le rôle de la turbulence dans la formation d'ondulations de surface et de coups de gouge sur un matériau érodable. Selon lui, la morphologie de la paroi ainsi obtenue est directement liée à la structure de la couche limite turbulente plutôt qu'aux propriétés physiques du matériau ablaté, bien que le mécanisme d'érosion diffère suivant les cas considérés.

Comme évoqué précédemment, la corrélation de [Thomas \(1979\)](#) montre notamment que la taille des motifs observés peut être très variable : de 10 μm dans le cas de motifs formés par l'impact d'un jet sur de l'aluminium au mètre dans le cas de structures pseudokarstiques observées sur de la glace. Une seconde observation intéressante pouvant être faite à partir de ces travaux est que la taille des coups de gouge semble diminuer lorsque la vitesse de l'écoulement augmente ; autrement dit, plus le nombre de Reynolds de l'écoulement augmente, plus les structures seront de petite dimension. À partir de ses données expérimentales, [Thomas \(1979\)](#) propose la relation suivante entre la longueur d'onde caractéristique des coups de gouge λ et la longueur visqueuse δ_ν :

$$\lambda = 1000\delta_\nu = 1000 \frac{\nu}{u_\tau} \quad (1.3)$$

Soit, en grandeur adimensionnées : $\lambda^+ = \frac{\lambda u_\tau}{\nu} = 1000$. En considérant le nombre d'onde $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$ des ondulations de surface, on a $\alpha^+ = \frac{\alpha \nu}{u_\tau} \approx 6.3 \times 10^{-3}$.

Une seconde hypothèse intéressante émise par [Thomas \(1979\)](#) à partir de ses observations

est que la longueur d'onde λ étant déterminée par une longueur caractéristique de l'écoulement turbulent, l'origine de ces creusements provient d'instabilités linéaires. Lorsque la déformation de la paroi devient suffisamment prononcée, des interactions non-linéaires voire des décollements apparaissent et viennent modeler les creusements pour leur donner leur allure caractéristique en forme de coup de gouge ; cependant, la taille globale des motifs est fixée par les échelles de longueur présentes dans la couche limite turbulente, qui répond aux microscopiques irrégularités de surface de la paroi.

Bilan

Dans ce chapitre, nous avons présenté le contexte global de cette thèse, motivée par l'étude de la formation de creusements macroscopiques type *coups de gouge* sur la surface de pointes avant de véhicules de rentrée. Ces structures ont d'abord été observées sur quelques rares essais en vol, réalisés principalement par la NASA dans les années 1970. On s'appuyera notamment dans la suite de notre étude sur les données provenant de l'essai expérimental TATER ([Hochrein et Wright, 1976](#); [McAlees et Maydew, 1985](#)). Cependant, les difficultés évidentes de mise en œuvre de telles expériences ont poussé de nombreux auteurs, notamment dans le cadre du programme PANT, à étudier en soufflerie l'ablation de pointes avant en régime de rentrée hypersonique. Il a fallu pour cela utiliser des matériaux dits « fantômes », pour lesquels les phénomènes d'ablation se produisent à des flux thermiques plus faibles que dans un cas réel de rentrée. Ces campagnes expérimentales ont permis de confirmer la formation des coups de gouge, et ont également montré leur impact sur l'écoulement, avec en particulier une augmentation des flux de chaleur à l'apparition des creusements.

Nous avons également vu que ce type de motifs apparaît dans une grande variété de situations où un écoulement interagit avec une paroi érodable. Dans un contexte de rentrée atmosphérique, la formation de structures appelées *regmaglyptes* sur la surface de météorites rappelle beaucoup les coups de gouge observés sur les pointes avant des objets de rentrée. On retrouve aussi un certain nombre de creusements similaires dans divers environnements géophysiques, pour lesquels les conditions de l'écoulement, alors incompressible, sont bien moins sévères que dans un cas de rentrée atmosphérique. On peut notamment citer la formation de rides et dunes de sable (subaquatiques ou terrestres) par transport de sédiment, mais également de certaines structures karstiques ou pseudokarstiques sur les parois de grottes rocheuses ou glacières. L'analogie entre ces différents motifs est particulièrement intéressante car ils sont reliés par la corrélation empirique de [Thomas \(1979\)](#), vérifiée par certains auteurs ([Claudin et al., 2017](#); [Bushuk et al., 2019](#)). Cette corrélation, établie en compilant un certain nombre de données expérimentales issues de ces situations géophysiques et complétées par des données obtenues en laboratoire, attribue la formation des coups de gouge à la structure de l'écoulement turbulent se développant au dessus d'une paroi érodable. En effet, selon [Thomas \(1979\)](#), ces motifs peuvent être vus comme l'empreinte des tourbillons de l'écoulement turbulent. Un des objectifs de cette thèse va donc être de vérifier s'il est possible de généraliser la corrélation empirique de [Thomas \(1979\)](#), en s'intéressant notamment au rôle de la turbulence dans la formation des coups de gouge.

Description et modélisation d'un écoulement turbulent

Plusieurs auteurs mettent en avant le rôle de la turbulence dans l'apparition et la propagation des coups de gouge dans différents environnements géophysiques, comme nous l'avons vu au chapitre précédent. Ce chapitre a pour but d'effectuer quelques rappels sur les écoulements turbulents, nécessaires à la bonne compréhension de ce manuscrit. On s'intéressera principalement à des configurations de couche limite turbulente incompressible et à la description des écoulements de canal plan, configurations les plus étudiées dans la suite de cette étude. Pour cela, dans un premier temps, on présentera les équations de Navier–Stokes et l'obtention des équations RANS (Reynolds Averaged Navier–Stokes) par la décomposition de Reynolds. En effet, les équations du mouvement moyen ainsi obtenues serviront de base pour les simulations et les études de réponses linéaires forcées effectuées par la suite. Ces équations moyennées ne formant pas un système fermé, leur résolution nécessite la mise en place de modèles pour calculer les tensions de Reynolds, termes traduisant l'influence de la turbulence sur le mouvement moyen et apparaissant lors de la dérivation des équations RANS. Une deuxième section est dédiée à la présentation des modèles utilisés dans cette étude. Enfin, une dernière section est consacrée à la description d'une couche limite turbulente incompressible. On attachera une attention particulière à la structure de la région interne, et sa comparaison avec un écoulement de canal plan.

Sommaire

2.1. Rappels sur la turbulence	18
2.1.1. Généralités	18
2.1.2. Équations de Navier-Stokes et moyenne de Reynolds	20
2.1.3. Équations du mouvement moyen, ou équations RANS	21
2.2. Modélisation de la turbulence	22
2.2.1. Modélisation au premier ordre	23
2.2.2. Modélisation au second ordre	25
2.3. Description d'une couche limite turbulente de plaque plane	27
2.3.1. Équations de la couche limite	28
2.3.2. Paramètres caractéristiques et définition des grandeurs de paroi	28
2.3.3. Structure d'une couche limite turbulente incompressible	29
2.3.4. Influence d'un gradient de pression sur la structure de la couche limite	32
2.3.5. Analogie entre une région interne de couche limite et un écoulement de canal plan	34
Bilan	36

2.1. Rappels sur la turbulence

Pendant la phase de rentrée atmosphérique, les conditions d'écoulement autour de l'objet varient. En particulier, à basse altitude, lorsque l'atmosphère se densifie, le milieu devient continu, c'est-à-dire qu'il se caractérise par un libre parcours moyen des particules de fluide petit devant une dimension caractéristique de l'objet¹. Cela revient à considérer une particule élémentaire de fluide comme suffisamment petite au regard de l'écoulement et suffisamment grande par rapport à l'échelle moléculaire. La densité croissant en se rapprochant du sol, l'écoulement passe alors rapidement d'un régime laminaire à un régime complètement turbulent, dans lequel les transferts d'énergie sont exacerbés. Comme nous l'avons vu précédemment, plusieurs auteurs suggèrent que les coups de gouge sont la manifestation d'une ablation en régime complètement turbulent, que ce soit dans un contexte de rentrée atmosphérique (Hochrein et Wright, 1976) ou dans des environnements géophysiques (Thomas, 1979). Bien qu'on puisse intuitivement appréhender ce qu'est la turbulence, il est néanmoins complexe d'en donner une définition précise. Ce chapitre vise à effectuer quelques rappels sur la description et la modélisation d'un écoulement turbulent. On portera notamment un intérêt particulier aux configurations de couche limite et de canal, afin de présenter les notions de base essentielles à la compréhension de notre étude. Les définitions et développements mathématiques présentés ici sont majoritairement inspirés des ouvrages de Cousteix (1989) et Pope (2000).

2.1.1. Généralités

On distingue généralement trois régimes pour décrire le mouvement d'un fluide, liquide ou gazeux : le régime laminaire, le régime de transition, et le régime turbulent. On doit une des premières observations de ces régimes d'écoulement au physicien irlandais Osborne Reynolds en 1883, qui a étudié le mouvement d'un fluide dans une conduite cylindrique (Reynolds, 1883). À l'aide d'un colorant, il observe que pour un fluide donné, dans une conduite donnée, le comportement des lignes de courant change en fonction de la vitesse de l'écoulement (voir figure 2.1²). À faible vitesse, celles-ci restent parfaitement parallèles à l'axe de la conduite. C'est ce qu'on appelle le régime laminaire. Lorsqu'on augmente progressivement la vitesse du fluide, l'écoulement devient peu à peu instationnaire, mais reste dans un premier temps organisé. Ce régime, dit de transition, n'est pas stable et dérive rapidement vers un régime beaucoup plus chaotique et désorganisé : le régime turbulent. Cette expérience montre en particulier que la turbulence n'est pas une propriété du fluide mais bien un régime de l'écoulement ; il n'existe par conséquent pas de grandeur physique pour la décrire. En revanche, on peut définir un nombre sans dimension, appelé nombre de Reynolds, afin de caractériser l'écoulement d'un fluide donné dans une configuration donnée :

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (2.1)$$

avec L et U respectivement une longueur et une vitesse caractéristiques de l'écoulement, et ν la viscosité cinématique du fluide. Le nombre de Reynolds représente notamment le rapport des forces d'inertie sur les forces visqueuses. Un écoulement turbulent se caractérise ainsi par un grand nombre de Reynolds, qui traduit la prépondérance des effets inertiels sur les effets visqueux.

L'observation des écoulements turbulents dans une grande variété de situations, qu'il s'agisse d'un torrent de montagne ou d'une fumée de cheminée, nous permet d'appréhender quelques caractéristiques propres de la turbulence. On comprend ainsi intuitivement la nature instationnaire, tridimensionnelle et rotationnelle de l'écoulement. Plus précisément, Cousteix (1989) et Pope (2000) définissent un certain nombre de critères permettant de qualifier un tel écoulement. Une propriété importante de la turbulence est le caractère aléatoire des fluctuations spatiales et temporelles des différentes grandeurs physiques (vitesse, pression... etc). Ainsi, en considérant qu'il est possible de représenter ces grandeurs par des variables aléatoires, on dispose d'un

1. En pratique, cela correspond à une altitude inférieure à 70 km.

2. <https://ensta-paris.hal.science/cel-01228137/file/coursdeturbulence.pdf>

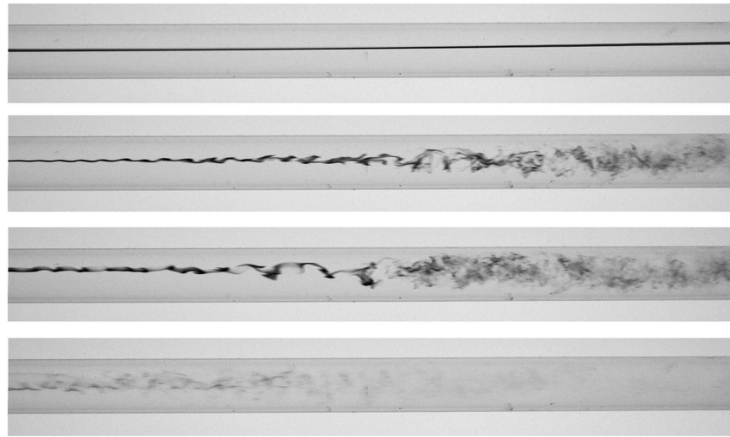


FIGURE 2.1. – Expérience de Reynolds : visualisation du régime d'écoulement à l'aide d'un colorant dans une conduite cylindrique. De haut en bas : régimes laminaire, transitoire, puis turbulent. Extrait : ENSTA-ParisTech (Cadot, 2013).

ensemble d'outils statistiques permettant leur description mathématique. La présentation d'une partie de ces outils fera l'objet de la section 2.1.2. Parmi les autres propriétés fondamentales de la turbulence, on peut citer la non-linéarité des équations régissant le mouvement du fluide³, la coexistence d'une large gamme d'échelles de longueur et de vitesse différentes (on montre notamment que l'échelle de longueur des mouvements turbulents ne peut pas être infiniment petite ; la plus petite échelle est alors appelée échelle de Kolmogorov (1941)), une forte capacité de mélange, une forte dissipation et une non prévisibilité.

Principaux enjeux liés à la description de la turbulence

La plupart des écoulements d'intérêt dans un contexte industriel sont turbulents. Il existe un vrai besoin d'être en capacité de prévoir les caractéristiques d'un tel écoulement. Outre l'approche théorique, on dispose aujourd'hui de deux approches complémentaires : l'approche expérimentale et l'approche numérique. Nous ne traiterons dans ce manuscrit que de cette dernière. Une des problématiques liée à la prévision des écoulements turbulents réside dans la présence d'une large gamme d'échelles de longueur et de vitesse. Idéalement, pour représenter parfaitement l'ensemble du spectre d'énergie turbulente, on peut résoudre l'ensemble des structures tourbillonnaires, jusqu'à l'échelle de Kolmogorov, en résolvant directement les équations de Navier–Stokes : c'est l'approche *DNS* pour *Direct Numerical Simulation*.

La dimension de Kolmogorov η est définie comme l'échelle de longueur à partir de laquelle l'écoulement devient purement visqueux. À cette échelle, l'énergie cinétique de l'écoulement est entièrement dissipée sous l'effet de la viscosité, et il n'existe donc pas de tourbillon plus petit. Cependant, la résolution complète de l'ensemble de ces structures pose des problèmes de coût de calcul : la taille des mailles est imposée par l'échelle de Kolmogorov, et le domaine de calcul doit inclure les plus grosses structures. En particulier, on peut montrer que le nombre de mailles d'un calcul DNS dépend du nombre de Reynolds associé aux grandes structures de la turbulence. Ainsi, l'approche DNS reste, encore aujourd'hui, limitée à des configurations simples et des nombres de Reynolds modérés, et n'est utilisée que pour de la recherche fondamentale.

Une manière de réduire ces coûts numériques est de ne faire cette résolution complète que pour les plus grosses structures de la turbulence. On applique alors un filtre aux équations de Navier–Stokes et les structures plus petites que le maillage sont modélisées. Cette approche, dite *LES* pour *Large Eddy Simulation*, permet d'obtenir une bonne résolution des plus grandes échelles turbulentes tout en limitant les coûts de calculs associés. Cependant, ces derniers restent relativement élevés.

3. Il s'agit des équations de Navier–Stokes, que nous présentons dans la section 2.1.2

L'approche encore largement utilisée dans un contexte industriel est l'approche *RANS*, pour *Reynolds Averaged Navier–Stokes*. Ici, on ne résout plus les champs instantanés des différentes grandeurs de l'écoulement mais on s'intéresse aux grandeurs moyennes. Cette approche nécessite la mise en place de modèles pour la fermeture du système d'équations obtenu en moyennant les équations de Navier–Stokes, et reste un domaine actif de la recherche. Elle est présentée en détail dans la section suivante. Notons que des méthodes hybrides combinant les approches RANS et LES sont également développées et utilisées dans des codes industriels (par exemple dans le code Saturne, développé à EDF (Benhamadouche *et al.*, 2006)), permettant d'obtenir une bonne résolution des fluctuations turbulentes dans des zones d'intérêt.

2.1.2. Équations de Navier–Stokes et moyenne de Reynolds

En faisant l'hypothèse de milieu continu, on peut effectuer un bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie sur une particule élémentaire de fluide. Les équations ainsi obtenues forment les équations de Navier–Stokes, qui s'écrivent, pour un fluide newtonien incompressible, non soumis à la gravité :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.2a)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (2.2b)$$

$$\rho \frac{\partial h_t}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \cdot h_t = -\nabla \cdot (p\mathbf{u}) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u} - \boldsymbol{\Phi}) \quad (2.2c)$$

avec \mathbf{u} le vecteur vitesse, ρ la masse volumique, p la pression, $\boldsymbol{\tau}$ le tenseur des contraintes, d'ordre 2, h_t l'enthalpie totale et $\boldsymbol{\Phi}$ le flux thermique. Les propriétés de l'opérateur ∇ sont rappelées en annexe A.1.

Comme évoqué dans la section précédente, les écoulements turbulents ne sont pas prévisibles. En effet, une variation infinitésimale de l'état initial affecte durablement le champ turbulent. Pour connaître parfaitement les caractéristiques d'un écoulement donné, il faudrait connaître avec une précision infinie les conditions d'entrée du système, ce qu'on ne peut évidemment pas obtenir. Toutefois, dans le cas d'écoulements de type industriel, on va plutôt s'intéresser aux grandeurs moyennes, qui elles ne sont pas impactées par les infimes variations de cet état initial. Ainsi, on considère que chaque grandeur f représentative de l'écoulement, dépendante du vecteur position \mathbf{X} et du temps t , peut se décomposer en la somme de sa partie moyenne \bar{f} et d'une fluctuation turbulente f' :

$$f(\mathbf{X}, t) = \bar{f} + f' \quad (2.3)$$

Soit f_k , avec $k \in \llbracket 1; N \rrbracket$, les valeurs prises par la fonction f au cours de N réalisations de l'écoulement dans les mêmes conditions. En écoulement incompressible, on utilise généralement la moyenne d'ensemble, ou moyenne de Reynolds, notée $\bar{\square}$ ⁵. Pour une grandeur f quelconque, elle est définie par :

$$\bar{f} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum f_k(\mathbf{X}, t)}{N} \quad (2.4)$$

On peut alors définir la fluctuation turbulente f'_k de la grandeur f comme étant l'écart entre la valeur prise par f pour une réalisation donnée k et sa valeur moyenne :

$$f'_k = f_k - \bar{f} \quad (2.5)$$

Une conséquence immédiate de cette définition est que la moyenne d'ensemble d'une fluctuation

4. Nous n'en parlons pas plus dans ce manuscrit.

5. Les propriétés principales de la moyenne de Reynolds, et utilisées pour la dérivation des équations RANS, sont rappelées en annexe A.2.

turbulente est nulle : $\overline{f_k'} = 0$. Avec ces définitions, la décomposition (2.3) ainsi obtenue est appelée décomposition de Reynolds.

2.1.3. Équations du mouvement moyen, ou équations RANS

Supposons l'écoulement incompressible. Les équations RANS (Reynolds Averaged Navier–Stokes) du mouvement moyen sont obtenues en introduisant la décomposition de Reynolds dans les équations du mouvement instantanées (2.2), puis en appliquant une moyenne de Reynolds aux équations obtenues. Dans ce chapitre, ainsi que dans la suite du mémoire, on adoptera la convention de sommation d'Einstein (*i.e* la répétition d'un indice dans un même terme indique la sommation par rapport à cet indice). Les indices i, j et k représenteront les trois directions de l'espace x, y et z et on notera également u, v et w les composantes longitudinales, transverses et normales du vecteur vitesse. La décomposition de Reynolds pour les vitesses, la pression et l'enthalpie totale donne :

$$u_i = \overline{u_i} + u_i' \quad p = \overline{p} + p' \quad h_t = \overline{h_t} + h_t' \quad (2.6)$$

L'équation de continuité devient :

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_k} + u_k')} = 0 \quad (2.7)$$

Soit

$$\frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k} = 0 \quad (2.8)$$

Le tenseur des contraintes visqueuses $\boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij})$ s'écrit en fonction de la viscosité du fluide et du vecteur vitesse :

$$\tau_{ij} = \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 2\nu S_{ij} \quad (2.9)$$

avec $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ le tenseur taux de déformation \mathbf{S} . En effectuant la même manipulation pour le bilan de quantité de mouvement, on obtient :

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} - \overline{u_i' u_j'} \right) \quad (2.10)$$

Et pour l'équation de l'énergie pour l'enthalpie totale :

$$\frac{\partial \overline{h_t}}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial \overline{h_t}}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p u_k}}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_j \tau_{jk}} - \overline{\Phi_k} - \overline{u_k' h_t'} \right) \quad (2.11)$$

Les équations (2.8) et (2.10) forment les équations du mouvement moyen, ou *équations RANS*. Elles sont complétées par l'équation de l'énergie pour l'enthalpie totale (2.11). L'application de la moyenne d'ensemble aux équations de Navier–Stokes a pour effet de faire disparaître les fluctuations, de moyenne nulle, des équations. L'influence des fluctuations turbulentes sur l'écoulement moyen se traduit alors à travers l'apparition du terme $-\overline{u_i' u_j'}$ provenant de la non-linéarité des équations de Navier–Stokes.

Ce terme représente une tension apparente liée à la turbulence, que l'on nomme *tension de Reynolds*. Elle se combine aux forces de pression et de viscosité et exprime le transfert de quantité de mouvement lié aux fluctuations turbulentes. On définit le tenseur de Reynolds $\mathbf{R} = (R_{ij})$ de la façon suivante :

$$R_{ij} = -\overline{\rho u_i' u_j'} \quad (2.12)$$

Ce tenseur est symétrique et positif, c'est à dire que $\overline{u_i' u_j'} = \overline{u_j' u_i'}$. Ses composantes diagonales, *i.e* $\overline{u_i'^2}$, sont appelées *contraintes normales*.

De même, l'équation de l'énergie fait apparaître un terme similaire, $-\overline{u_i' h_t'}$ que l'on peut

interpréter comme un terme de flux thermique turbulent.

Pour un écoulement quelconque tridimensionnel, il y a quatre équations qui régissent le mouvement du fluide : l'équation de continuité et le bilan de quantité de mouvement dans les trois directions de l'espace. Or, en plus des trois composantes de vitesse et de la pression, les tensions de Reynolds sont des inconnues supplémentaires. Le système d'équations ((2.8), (2.10)) est ouvert et ne suffit pas à calculer l'écoulement moyen. Pour le fermer, les tensions de Reynolds doivent être modélisées. Ces modèles sont regroupés sous le terme générique de *fermeture turbulente* et font appel à un certain nombre d'hypothèses⁶. De la même façon, l'équation de l'énergie n'est plus fermée et il faut modéliser le flux thermique turbulent $-u_i'h_t'$.

Énergie cinétique turbulente

L'énergie cinétique turbulente, généralement notée \mathcal{K} , est définie comme la demi trace du tenseur de Reynolds, à la densité près :

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'} = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \quad (2.13)$$

Physiquement, l'énergie cinétique turbulente représente l'énergie cinétique moyenne par unité de masse des tourbillons dans l'écoulement turbulent. Elle peut être produite par plusieurs phénomènes (cisaillement du fluide, frottement, influence de forces externes...). Elle est ensuite transférée des grandes structures de la turbulence jusqu'à l'échelle de Kolmogorov (principe de la cascade turbulente) afin d'y être dissipée par les forces de viscosité du fluide. Ce processus de production, transport/diffusion, dissipation peut être résumé grâce à une équation de transport :

$$\frac{D\mathcal{K}}{Dt} + \nabla \cdot \mathcal{T} = \mathcal{P} - \varepsilon \quad (2.14)$$

Avec

- $\frac{D\mathcal{K}}{Dt} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} + u_i \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x_i}$, la dérivée particulaire de \mathcal{K} , qui contient notamment le transport d'énergie cinétique turbulente par advection,
- $\nabla \cdot \mathcal{T}$ contient le terme de transport turbulent, de diffusion par la pression et de diffusion visqueuse. \mathcal{T} est défini par l'équation :

$$\mathcal{T}_i = \frac{1}{2} \overline{u_i' u_j' u_j'} + \frac{\overline{u_i' p'}}{\rho} - 2\nu \overline{u_j' S_{ij}}, \quad (2.15)$$

- \mathcal{P} , le terme de production d'énergie cinétique turbulente. Il s'exprime :

$$\mathcal{P} = -\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}, \quad (2.16)$$

- $\varepsilon = 2\nu \overline{s_{ij}' s_{ij}'}$, le terme de dissipation d'énergie cinétique turbulente.

Cette équation sert notamment de base à certains modèles de turbulence faisant intervenir l'énergie cinétique turbulente.

2.2. Modélisation de la turbulence

Pour comprendre le problème de fermeture des équations RANS, on peut écrire une équation de transport pour chaque composante du tenseur de Reynolds. Ces équations sont obtenues en faisant la différence entre les bilans de quantité de mouvement pour les composantes moyennes et instantanées de vitesse $\overline{u_i}$ et u_i , puis en moyennant l'équation obtenue. Le détail des calculs

6. Voir section 2.2.

n'est pas précisé ici par souci de concision. On obtient une équation de la forme :

$$\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial t} + \mathcal{C}_{ij} = \mathcal{P}_{ij} + \phi_{ij} + \mathcal{D}_{ij}^\nu + \mathcal{D}_{ij}^\mathcal{T} + \mathcal{D}_{ij}^p + \varepsilon_{ij} \quad (2.17)$$

Avec

$$\mathcal{C}_{ij} = \overline{u_k} \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_k} \quad \text{le terme d'advection} \quad (2.18a)$$

$$\mathcal{P}_{ij} = -\overline{u_i' u_k'} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} - \overline{u_k' u_j'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \quad \text{le terme de production} \quad (2.18b)$$

$$\phi_{ij} = -\frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right) \quad \text{le terme de redistribution} \quad (2.18c)$$

$$\mathcal{D}_{ij}^\nu = \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_k \partial x_k} \quad \text{le terme de diffusion moléculaire} \quad (2.18d)$$

$$\mathcal{D}_{ij}^\mathcal{T} = \frac{\partial \overline{u_i' u_j' u_k'}}{\partial x_k} \quad \text{le terme de diffusion turbulente} \quad (2.18e)$$

$$\mathcal{D}_{ij}^p = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{p'}{\rho} (u_i' \delta_{jk} + u_j' \delta_{ik}) \quad \text{le terme de diffusion par la pression} \quad (2.18f)$$

$$\varepsilon_{ij} = 2\nu \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k} \quad \text{le taux de dissipation} \quad (2.18g)$$

L'obtention de ces équations fait apparaître de nouvelles inconnues dans le système, notamment dans les termes ϕ_{ij} , $\mathcal{D}_{ij}^\mathcal{T}$, \mathcal{D}_{ij}^p et ε_{ij} , à travers l'apparition de la corrélation pression-vitesse, et des corrélations triples de vitesse. De nouvelles équations de transport peuvent être établies pour ces nouvelles corrélations, introduisant elles-mêmes de nouvelles corrélations qui sont autant d'inconnues supplémentaires au système, et ainsi de suite. On peut ainsi montrer que les équations RANS ne peuvent pas être résolues de façon exacte et nécessitent la mise en place de modèles de fermeture pour ces inconnues. On distingue principalement deux stratégies : les stratégies dites au premier ordre, qui se contentent de modéliser les tensions de Reynolds directement, sans faire appel aux équations (2.17), et les approches au second ordre, pour lesquelles les tensions de Reynolds sont calculées à l'aide de ces équations. Ce sont alors les termes ϕ_{ij} , $\mathcal{D}_{ij}^\mathcal{T}$, \mathcal{D}_{ij}^p et ε_{ij} qui sont modélisés. Certains modèles au premier et au second ordre sont présentés dans la suite de cette section.

2.2.1. Modélisation au premier ordre

Cette classe consiste à modéliser les tensions de Reynolds à partir d'une grandeur scalaire appelée *viscosité turbulente* et notée μ_t ⁷. Dans la suite de ce manuscrit, ces modèles seront appelés *modèles à viscosité turbulente*, et on utilisera l'abréviation *EVM*⁸. Par analogie avec le tenseur des contraintes visqueuses, Boussinesq (1877) suppose en effet que le tenseur de Reynolds est proportionnel au tenseur taux de déformation S_{ij} *via* μ_t :

$$R_{ij} = \mu_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho \mathcal{K} \delta_{ij} \quad (2.19)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker⁹. Les modèles de turbulence au premier ordre permettent alors d'évaluer la viscosité turbulente. Le principal avantage de ces modèles est le faible coût numérique associé, au détriment de la précision du résultat. Ils sont souvent représentatifs des

7. Notons que μ_t a la dimension d'une viscosité dynamique. De façon analogue, on notera $\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho}$ la viscosité turbulente lorsque celle-ci aura la dimension d'une viscosité cinématique.

8. Eddy Viscosity Model.

9. $\delta_{ij} = 1$ pour $i = j$, 0 sinon.

applications pour lesquelles ils ont été développés et il existe généralement beaucoup de sous-variantes de ces modèles adaptées à des configurations précises. Dans la suite de cette section, on présentera les modèles utilisés dans cette étude. Cette liste n'est évidemment pas exhaustive : il existe beaucoup d'autres modèles, chacun ayant leurs spécificités, avantages et inconvénients. On distingue notamment les modèles algébriques, les modèles à une équation de transport (type Spalart-Allmaras (Spalart et Allmaras, 1992)), qui ne seront pas détaillés ici, et les modèles à deux équations de transport.

Modèles à zero équation de transport, ou modèles algébriques

Par analogie avec la théorie cinétique des gaz, Prandtl (1925) suppose que l'on peut introduire une échelle de longueur l dite *longueur de mélange*. Si on considère un écoulement bidimensionnel de vitesse $u(z)$, on remarque que le temps caractéristique que cette échelle de longueur forme avec une échelle de vitesse caractéristique u_c est du même ordre de grandeur que le cisaillement moyen :

$$\frac{u_c}{l} \sim \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \quad (2.20)$$

En généralisant, cette hypothèse permet d'écrire la viscosité turbulente $\nu_t = u_c l = l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|$. L'hypothèse de Boussinesq devient :

$$-\overline{u_i' u_j'} = l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right| \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (2.21)$$

L'expression de la longueur de mélange est spécifique à un problème donné. Bien qu'elle donne des résultats satisfaisants dans les configurations simples, bidimensionnelles ou seul le terme de cisaillement est prépondérant, (couche limite, canal) et a historiquement été très utilisée pour l'étude des écoulements de paroi, l'approche de longueur de mélange n'est cependant que peu adaptée à des configurations tridimensionnelles plus complexes.

Modèles à deux équations de transport

Des approches dites à deux équations de transport ont été développées afin de réduire l'empirisme due à la formulation algébrique de la viscosité turbulente. Celle-ci est alors évaluée à partir du transport de deux grandeurs caractéristiques de la turbulence. Parmi les plus courants, on peut citer le modèle $\mathcal{K} - \varepsilon$ (Jones et Launder, 1972), le modèle $\mathcal{K} - \omega$ (Wilcox, 1988, 2008) et le modèle $\mathcal{K} - \omega$ SST (Shear Stress Transport) (Menter, 1994). On ne s'intéressera ici qu'à la version BSL (BaSeLine model) du $\mathcal{K} - \omega$ de Menter (1994). Comme son nom l'indique, les deux quantités transportées sont l'énergie cinétique turbulente \mathcal{K} et la dissipation spécifique ω . La viscosité turbulente est alors reconstruite à partir d'une analyse dimensionnelle et s'exprime :

$$\nu_t = \frac{\mathcal{K}}{\omega} \quad (2.22)$$

Pour un écoulement incompressible, les équations de transport pour l'énergie cinétique turbulente et la dissipation spécifique s'écrivent sur le modèle *Production + Diffusion - Dissipation* :

$$\rho \frac{D\mathcal{K}}{Dt} = \mathcal{P} - \beta^* \rho \omega \mathcal{K} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_{\mathcal{K}} \mu_t) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x_j} \right] \quad (2.23a)$$

$$\rho \frac{D\omega}{Dt} = \frac{\gamma}{\nu_t} \mathcal{P} - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_{\omega} \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \quad (2.23b)$$

Le terme de production d'énergie cinétique turbulente est évalué à partir de l'hypothèse de Bousinesq :

$$\mathcal{P} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \left[\mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho \mathcal{K} \delta_{ij} \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2.24)$$

Les coefficients γ , $\sigma_{\mathcal{K}}$, σ_{ω} , β et β^* sont les coefficients de fermeture du modèle. Leur valeur est fixée pour retrouver notamment le comportement asymptotique d'une couche limite turbulente. En particulier, on peut montrer qu'il existe une relation unique entre les différents coefficients :

$$\gamma = \frac{\beta}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega} \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}} \quad (2.25)$$

La valeur de $\beta^* = 0.09$ est fixée de manière à respecter la relation de Bradshaw *et al.* (1967) entre le cisaillement τ et l'énergie cinétique turbulente \mathcal{K} . La valeur de β en est déduite afin de retrouver la décroissance de la turbulence homogène isotrope : $\beta = 5\beta^*/6 = 0.0750$. Les coefficients $\sigma_{\mathcal{K}}$ et σ_{ω} sont fixés à 0.5 afin de retrouver le comportement de la région de sillage de la couche limite, et la constante de von Kármán κ à 0.41 donne la pente du profil de vitesse dans la zone logarithmique.

Fermeture du flux thermique turbulent dans les modèles au premier ordre

Dans le cas des approches au premier ordre, la fermeture du flux thermique turbulent $-\overline{u_i' h_t'}$ qui apparaît lorsqu'on moyenne l'équation de l'énergie se fait généralement par une approche de simple gradient (*SGDH* pour *Simple Gradient Diffusion Hypothesis*). Le flux turbulent est considéré comme proportionnel au gradient de température moyenne (Θ), via une diffusivité turbulente notée \mathcal{D}_t :

$$\overline{u_i' h_t'} = -\mathcal{D}_t \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \quad (2.26)$$

La diffusivité turbulente s'exprime en fonction de la viscosité turbulente et du nombre de Prandtl turbulent Pr_t , généralement pris égal à 0.9 :

$$\mathcal{D}_t = \frac{\rho \nu_t}{Pr_t} \quad (2.27)$$

2.2.2. Modélisation au second ordre

Les approches au premier ordre, bien qu'intéressantes en terme de coût de calcul, sont cependant mises en défaut par de nombreux types d'écoulements complexes. Une stratégie plus précise, mais restant plus raisonnable en coût de calcul qu'une approche LES, est de considérer une équation de transport pour chacune des tensions de Reynolds, en rajoutant au système d'équations RANS les équations (2.17). Ces équations n'étant pas non plus fermées, il est nécessaire d'en modéliser les termes qui ne sont pas exacts. Ces modèles sont regroupés sous l'appellation *modèles aux tensions de Reynolds* (*DRSM* pour *Differential Reynolds Stress Model* en anglais) et permettent notamment une meilleure prise en compte de l'anisotropie de la turbulence. Dans cette section, nous présenterons le modèle EB-RSM (Elliptic Blending Reynolds Stress Model) (Manceau et Hanjalić, 2002; Manceau, 2015), utilisé dans notre étude car conçu pour représenter des écoulements de paroi avec une bonne fidélité. Si on reprend l'équation (2.17), seuls le terme d'advection (\mathcal{C}_{ij}), le terme de production (\mathcal{P}_{ij}) et le terme de diffusion visqueuse (\mathcal{D}_{ij}^v) sont exacts. Les autres doivent être modélisés.

Modèle pour le terme de redistribution ϕ_{ij} et le terme de diffusion par la pression

Les termes de redistribution et de diffusion par la pression sont modélisés ensemble et regroupés sous le terme ϕ_{ij}^* qui est décomposé en une partie proche paroi ϕ_{ij}^w et une partie loin de la paroi ϕ_{ij}^h :

$$\phi_{ij}^* = (1 - f_b) \phi_{ij}^w + f_b \phi_{ij}^h \quad (2.28)$$

La fonction f_b est une fonction de mélange qui vaut zéro à la paroi et tend vers 1 à mesure que l'on s'en éloigne. Plus spécifiquement, on prend $f_b = \iota^3$, où ι est une variable sans dimension régie par une équation elliptique :

$$\iota - L^2 \nabla^2 \iota = 1 \quad (2.29)$$

L est une longueur caractéristique proportionnelle à l'échelle de longueur $\ell = \frac{\mathcal{K}^{3/2}}{\varepsilon}$ et bornée par la dimension de Kolmogorov $\eta = \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}}$ pour éviter à L de s'annuler à la paroi (Durbin, 1991) :

$$L = C_L \max \left(\frac{\mathcal{K}^{3/2}}{\varepsilon}, C_\eta \eta \right) \quad (2.30)$$

Le terme de redistribution en proche paroi s'exprime :

$$\phi_{ij}^w = -5 \frac{\varepsilon}{\mathcal{K}} \left[\overline{u_i' u_k'} n_j n_k + \overline{u_j' u_k'} n_i n_k - \frac{1}{2} \overline{u_k' u_l'} n_k n_l (n_i n_j + \delta_{ij}) \right] \quad (2.31)$$

où n_i est la composante i du vecteur normal à la paroi \mathbf{n} . La partie homogène du terme de redistribution, ϕ_{ij}^h , est modélisée suivant l'approche de Speziale *et al.* (1991), en étant décomposée en une partie *rapide* ϕ_{ij}^r et une partie *lente* ϕ_{ij}^l :

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^h = \phi_{ij}^r + \phi_{ij}^l = & - \left(g_1 + g_1^* \frac{\mathcal{P}}{\varepsilon} \right) \varepsilon b_{ij} + \left(g_3 - g_3^* \sqrt{b_{kl} b_{kl}} \right) \mathcal{K} S_{ij} \\ & + g_4 \mathcal{K} \left(b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{lm} S_{lm} \delta_{ij} \right) \\ & + g_5 \mathcal{K} (W_{jk} + b_{jk} W_{ik}) \end{aligned} \quad (2.32)$$

avec S_{ij} le tenseur taux de déformation introduit précédemment, $W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right)$ le tenseur de rotation $\mathbf{W} = (W_{ij})$ et $b_{ij} = \frac{\overline{u_i' u_j'}}{2\mathcal{K}} - \frac{1}{3} \delta_{ij}$ le tenseur d'anisotropie.

Modèle pour le terme de diffusion turbulente \mathcal{D}_{ij}^T

La diffusion turbulente \mathcal{D}_{ij}^T est modélisée à l'aide d'une hypothèse de gradient généralisée (GGDH pour *Generalized Gradient Diffusion Hypothesis*), d'après Daly et Harlow (1970) :

$$\mathcal{D}_{ij}^T = \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{C_\mu}{\sigma \mathcal{K}} \overline{u_l' u_m'} T \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_m} \right) \quad (2.33)$$

où T est un temps caractéristique, borné par l'échelle de Kolmogorov $\tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2}$, donné par :

$$T = \max \left(\frac{\mathcal{K}}{\varepsilon}, C_T \tau_\eta \right) \quad (2.34)$$

Modèle pour la dissipation ε_{ij}

Le tenseur taux de dissipation est modélisé uniquement à partir de sa composante isotrope, la composante déviatorique du tenseur ε_{ij} étant considérée incluse dans le terme de redistribution. Cependant, à proximité de la paroi, l'expérience montre que le taux de dissipation est grandement anisotrope et cette approximation n'est plus valable. La composante isotrope de la dissipation est donc complétée par un modèle spécifique pour la région de proche paroi, à l'aide de la fonction

de raccord f_b :

$$\varepsilon_{ij} = (1 - f_b) \frac{\overline{u_i' u_j'}}{\mathcal{K}} \varepsilon + \frac{2}{3} f_b \varepsilon \delta_{ij} \quad (2.35)$$

Le taux de dissipation ε est calculé à l'aide d'une équation de transport similaire à celles utilisées dans les modèles à deux équations de type $\mathcal{K} - \varepsilon$:

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{C'_{\varepsilon_1} \mathcal{P} - C_{\varepsilon_2} \varepsilon}{T} + \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon} \overline{u_l' u_m'} T \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_m} \right) + \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_k \partial x_k} \quad (2.36)$$

avec $C'_{\varepsilon_1} = C_{\varepsilon_1} \left[1 + A_1 (1 - f_b) \frac{\mathcal{P}}{\varepsilon} \right]$.

Fermeture du flux thermique turbulent pour les modèles au second ordre

Plusieurs approches peuvent être utilisées dans les modèles au second ordre concernant la fermeture du flux thermique turbulent. Dans le cas de l'EB-RSM, la modélisation privilégiée en l'absence de flottabilité est une hypothèse de gradient généralisée (GGDH) (Daly et Harlow, 1970) faisant intervenir le temps turbulent ξ_t :

$$-\overline{u_i' h_t'} = c_\theta \xi_t \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial h}{\partial x_j} \quad (2.37)$$

Des modèles plus complexes ont également été développés, notamment pour les applications de convection naturelle (Dehoux *et al.*, 2017; Mangeon *et al.*, 2020), que nous ne traiterons pas ici.

Valeurs des coefficients

$$\begin{aligned} g_1 = 3.4 ; g_1^* = 1.8 ; g_3 = 0.8 ; g_3^* = 1.3 ; g_4 = 1.25 ; g_5 = 0.4 ; \\ C_\mu = 0.21 ; \sigma_{\mathcal{K}} = 1.0 ; C_T = 6.0 ; \\ C_L = 0.133 ; C_\eta = 80.0 ; \\ C_{\varepsilon_1} = 1.44 ; C_{\varepsilon_2} = 1.83 ; A_1 = 0.065 ; \sigma_\varepsilon = 1.15 ; c_\theta = 0.22. \end{aligned}$$

2.3. Description d'une couche limite turbulente de plaque plane

Lorsqu'un écoulement se développe sur une paroi, on observe une zone d'interaction entre la paroi et le fluide loin du corps, où l'écoulement est dit libre. En effet, la condition d'adhérence impose une vitesse nulle du fluide à la paroi, tandis qu'à l'infini, celle-ci est égale à la vitesse de l'écoulement libre. Il existe une région proche de la paroi dans laquelle la vitesse de l'écoulement augmente jusqu'à atteindre la vitesse de l'écoulement libre. Dans le cas d'un fluide peu visqueux, les variations de vitesse sont contenues dans une petite épaisseur proche de la paroi, que l'on définit alors comme la *couche limite*. Cette épaisseur, notée δ , augmente le long de la direction longitudinale. On appelle L la longueur de développement de la couche limite. Plusieurs définitions de l'épaisseur de couche limite peuvent être considérées, la plus intuitive d'entre elles étant la distance à la paroi pour laquelle la vitesse longitudinale atteint 99% (ou 99.5%) de la vitesse de l'écoulement libre. Grâce à une analyse d'échelle, les équations RANS dans la couche limite peuvent s'écrire de façon simplifiée.

Hypothèses

On se place dans le cas d'un écoulement moyen bidimensionnel plan, stationnaire et incompressible qui se développe avec une vitesse U_∞ au dessus d'une plaque plane immobile. On note x , y et z les directions respectivement longitudinale, transverse et normale à la paroi, et u , v , w les vitesses associées à ces trois directions. En particulier, on considère la direction y comme

étant une direction d'invariance de l'écoulement (*i.e.* $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ et $v = 0$). On se place dans le cas d'une couche mince, c'est à dire vérifiant $\frac{\delta}{L} \ll 1$. Notons u et l les échelles caractéristiques de vitesse et de longueur de la turbulence. L'hypothèse de couche mince implique notamment que les structures turbulentes les plus grosses sont petites devant la longueur de développement de la couche limite :

$$l \ll L \quad (2.39)$$

De plus, une analyse d'échelle¹⁰ amène à la conclusion :

$$\frac{u}{l} = \frac{U_\infty}{L} \quad (2.40)$$

Cette hypothèse exprime le fait que le temps de diffusion par la turbulence est égal au temps de convection. On utilise ces deux hypothèses pour simplifier les équations RANS et obtenir les équations de couche limite (équations de Prandtl). C'est ce qu'on nomme *l'approximation de couche limite*.

2.3.1. Équations de la couche limite

L'approximation de couche limite permet de négliger un certain nombre de termes dans les bilans de masse et de quantité de mouvement. La démarche complète est présentée en détail dans les ouvrages de Cousteix (1989) et Pope (2000). Les équations RANS de couche limite pour un écoulement bidimensionnel statistiquement stationnaire s'écrivent :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (2.41a)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{u'w'} \right) \quad (2.41b)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \quad (2.41c)$$

Remarquons que le terme $\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{u'w'}$ représente la tension totale τ , qui est définie comme la somme de la tension turbulente (ou tension de Reynolds) $\tau_t = -\rho \overline{u'w'}$ et de la tension visqueuse $\tau_\nu = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$.

2.3.2. Paramètres caractéristiques et définition des grandeurs de paroi

Contrainte de cisaillement pariétale

À la paroi, la condition d'adhérence impose une vitesse nulle. Par conséquence, $\overline{u'w'}_p = 0$. La contrainte de cisaillement pariétale τ_w est donc due uniquement à la contribution visqueuse :

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (2.42)$$

Cette expression traduit notamment la prédominance des effets visqueux au voisinage de la paroi, contrairement au cas d'un écoulement libre, où les effets visqueux sont négligeables devant les effets inertiels. Intuitivement, on comprend ainsi que la viscosité ν et la contrainte de cisaillement sont des paramètres importants pour décrire l'écoulement en proche paroi. On peut, à partir de ces paramètres, définir des *échelles visqueuses*, c'est-à-dire des échelles de vitesse et de longueur adaptées à la région de proche paroi.

10. Voir Cousteix (1989), chapitre 7 pour plus de détails.

Vitesse de frottement, longueur visqueuse et grandeurs de paroi

On définit notamment la *vitesse de frottement* u_τ à partir de la contrainte de cisaillement pariétale et de la masse volumique ρ :

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (2.43)$$

De la même façon, on définit la *longueur visqueuse* δ_ν de la façon suivante :

$$\delta_\nu = \frac{\nu}{u_\tau} \quad (2.44)$$

À partir de ces deux échelles visqueuses, on peut définir deux variables sans dimension, notées avec un +, appelées *variables de paroi*, ou *variables internes* :

$$\bar{u}^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau} \quad z^+ = \frac{z u_\tau}{\nu} \quad (2.45)$$

On définit également un nombre de Reynolds, dit *de frottement*, à partir de ces échelles caractéristiques :

$$R_\tau = \delta^+ = \frac{u_\tau \delta}{\nu} \quad (2.46)$$

Ces variables sont particulièrement utiles pour décrire la région interne – c'est à dire la région en très proche paroi – de la couche limite.

2.3.3. Structure d'une couche limite turbulente incompressible

Une couche limite peut être décomposée en deux régions distinctes : la région interne, en très proche paroi, dans laquelle les effets visqueux ne sont pas négligeables et sont en compétition avec les effets inertiels, et la région externe, dans laquelle les effets inertiels prennent le pas sur les effets visqueux, qui peuvent être négligés. Cette description de la couche limite est une conséquence de l'analyse expérimentale du frottement total τ (Figure 2.2) qui montre que la contrainte turbulente $-\overline{\rho u'w'}$ en est la contribution principale, sauf à proximité immédiate de la paroi, où la viscosité acquiert un rôle dominant.

Dans ce manuscrit, seule la région interne sera étudiée. On présentera brièvement la région externe avant de s'attarder en détail sur la description de la structure de l'écoulement au voisinage immédiat de la paroi.

Région externe

Dans cette région, la contrainte visqueuse est négligeable devant la contrainte turbulente. Les échelles de vitesse et de longueur pertinentes dans cette région sont δ , l'épaisseur de couche limite, et la vitesse de frottement u_τ . En effet, l'expérience montre que dans cette région, la contrainte turbulente $-\overline{u'w'}$ est de l'ordre de u_τ^2 . Le profil de vitesse est donné par la *loi des vitesses déficitaires* :

$$\frac{U_\infty - \bar{u}}{u_\tau} = \varphi\left(\frac{z}{\delta}\right) \quad (2.47)$$

avec φ une fonction qui peut dépendre de nombreux paramètres (nombre de Reynolds, gradient de pression, conditions en amont...).

Principe de similitude de paroi de Townsend (1976)

Townsend (1976) a introduit en 1976 l'hypothèse de similitude de paroi, qui stipule notamment qu'en dehors de la sous-couche visqueuse¹¹, la structure de la turbulence est indépendante de la topologie de la paroi et de la viscosité du fluide, pourvu que le nombre de Reynolds considéré soit

11. Voir description de la région interne de la couche limite turbulente.

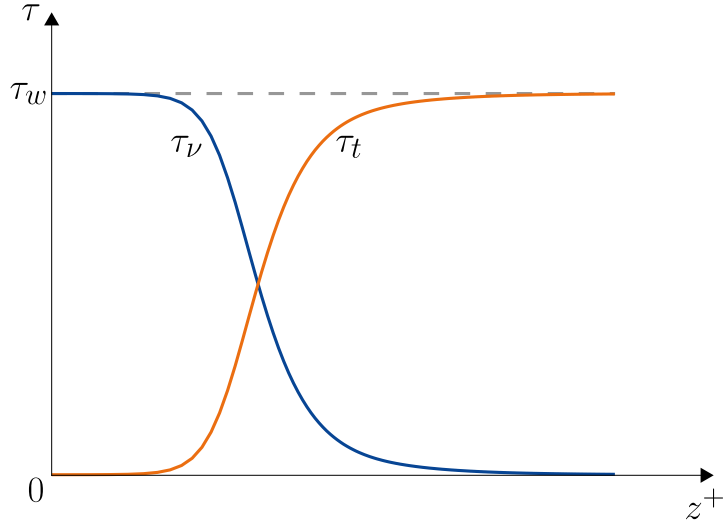


FIGURE 2.2. – Contrainte totale τ , turbulente $\overline{u'w'}$ (orange) et visqueuse $\frac{1}{R_\tau} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$ (bleu) au sein d'une couche limite se développant sur une plaque plane à gradient de pression nul.

suffisamment grand. La paroi n'influence alors que la vitesse de frottement u_τ . Une conséquence de cette hypothèse de similitude est que le profil de vitesse dans la région externe de la couche limite, une fois adimensionné par u_τ suit la même loi déficitaire quelque soit la surface considérée. Cette hypothèse nous permet de justifier la comparaison d'un écoulement de canal avec une région interne de couche limite : cette dernière n'est en effet pas influencée par l'écoulement de la région externe.

Région interne

L'action de la viscosité est limitée à une zone très mince proche de la paroi, que l'on nomme *région interne*. On peut faire l'hypothèse que la structure de l'écoulement n'est pas influencée par les conditions loin de la paroi ; en particulier, la vitesse de l'écoulement libre U_∞ et l'épaisseur de couche limite δ n'influent pas sur le comportement de la vitesse près de la paroi. Du fait de la faible épaisseur de la région interne, on suppose généralement que le frottement total τ y est constant et égal à sa valeur à la paroi τ_w . On peut alors considérer que la vitesse moyenne de l'écoulement ne dépend que de la distance à la paroi z , de la valeur du frottement pariétal τ_w , de la masse volumique du fluide ρ et de sa viscosité dynamique μ :

$$\bar{u} = f(\tau_w, \rho, \mu, z) \quad (2.48)$$

Si l'on réécrit cette relation en variables internes, on obtient ce qu'on appelle la *loi de paroi* :

$$\bar{u}^+ = f(z^+) \quad (2.49)$$

Très proche de la paroi, c'est-à-dire lorsque z^+ est très faible, la contrainte turbulente est négligeable. Le frottement pariétal est donné par la contrainte visqueuse :

$$\tau_w = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (2.50)$$

Soit, en variable de paroi, après intégration :

$$\bar{u}^+ = z^+ \quad (2.51)$$

Le profil de vitesse est donc linéaire en très proche paroi. En pratique, cette relation est vérifiée pour $z^+ < 5$ (Cousteix, 1989). On nomme cette région la *sous-couche linéaire*, ou *sous-couche visqueuse*. Si l'on s'éloigne suffisamment de la paroi, la contrainte turbulente acquiert de l'importance, jusqu'à ce que la contrainte visqueuse devienne négligeable. Sous l'hypothèse d'un frottement total constant égal au frottement paroi dans la région interne, on a alors :

$$-\overline{u'w'} = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (2.52)$$

Pour en déduire la forme du profil de vitesse, on utilise l'hypothèse de Boussinesq (1877). Dans la région interne, celle-ci se réduit à $-\overline{u'w'} = \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$. L'équation (2.52) devient :

$$\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (2.53)$$

Considérons un modèle de longueur de mélange. L'expérience montre que le comportement de cette longueur de mélange dans la région interne est linéaire et celle-ci peut s'écrire $l = \kappa z$ avec κ le coefficient de proportionnalité entre l et la distance à la paroi z . Cette constante s'appelle *constante de von Kármán* et sa valeur varie entre 0.38 et 0.42 selon les mesures. Notons que pour décrire entièrement la région interne de la couche limite, on associe généralement à cette expression une fonction d'amortissement de van Driest (Pope, 2000), notée F_{VD} :

$$F_{VD}(z^+) = 1 - \exp\left(-\frac{z^+}{A^{0+}}\right) \quad (2.54)$$

Cette fonction permet de reproduire le comportement asymptotique de l'écoulement en très proche paroi. La longueur de mélange s'écrit alors :

$$l^+ = \kappa z^+ \left[1 - \exp\left(-\frac{z^+}{A^{0+}}\right) \right] \quad (2.55)$$

avec $A^{0+} = 26$ le nombre de van Driest. Finalement, loin de la sous-couche visqueuse, en variable de paroi, le comportement asymptotique du gradient de vitesse est donné par la relation :

$$\frac{\partial \bar{u}^+}{\partial z^+} = \frac{1}{\kappa z^+} \quad (2.56)$$

En intégrant, on obtient la *loi logarithmique* :

$$\bar{u}^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(z^+) + C \quad (2.57)$$

avec C une constante voisine de 5. En pratique, la loi logarithmique est valable pour $z^+ > 100$. La région comprise entre $z^+ = 5$ et $z^+ = 100$, entre la sous-couche visqueuse et la zone logarithmique est la *zone tampon*, dans laquelle les profils de vitesse linéaire et logarithmique se raccordent. Cette structure de la région interne de la couche limite est illustrée sur la figure 2.3.

Selon la théorie développée précédemment, la loi de paroi $\bar{u}^+ = f(z^+)$ est universelle, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas des conditions dans lesquelles peuvent se développer la couche limite. C'est évidemment le cas pour la loi linéaire (2.51) mais l'universalité de la loi logarithmique (2.57) n'est pas triviale. En effet, l'existence de cette loi est établie pour une région suffisamment éloignée de la paroi pour que les effets inertiels prédominent sur les effets visqueux. Cependant, on doit également être suffisamment proche de la paroi pour qu'elle reste indépendante des conditions de développement de la couche limite ; c'est-à-dire pour des distances à la paroi z suffisamment faibles devant l'épaisseur de couche limite δ . Autrement dit, z doit être d'un ordre de grandeur différent des grandeurs caractéristiques des régions internes (*i.e* la longueur visqueuse δ_ν) et externe (*i.e* l'épaisseur de couche limite δ) : $\delta_\nu \ll z \ll \delta$. Expérimentalement, on observe que la

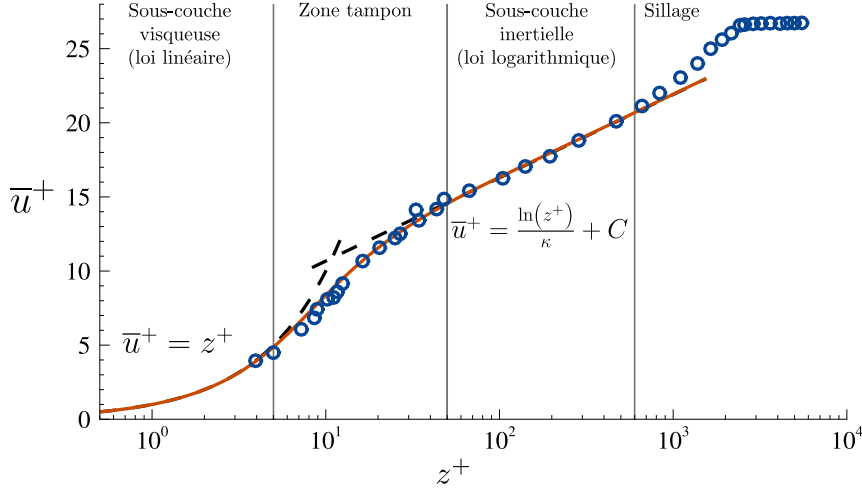


FIGURE 2.3. – Profil de vitesse moyenne en variable de paroi dans la région interne de la couche limite. Identification de la structure de la région interne (sous-couche visqueuse, zone tampon et sous-couche inertielle (zone logarithmique)). Symboles : mesures de Klebanoff (1955) ($R_{e_\theta} = 8000$), ligne pleine : loi de paroi.

loi logarithmique est valable pour $z^+ > 100$ et pour $\frac{z}{\delta} < 0.1$, ce qui implique des nombres de Reynolds de frottement R_τ supérieurs à 180.

2.3.4. Influence d'un gradient de pression sur la structure de la couche limite

Dans cette section, et dans la suite du manuscrit, une couche limite soumise à un gradient de pression nul sera dite ZPG (Zero Pressure Gradient), adverse, APG (Adverse Pressure Gradient) et favorable, FPG (Favorable Pressure Gradient). L'universalité de la loi logarithmique pour une couche limite soumise à un gradient de pression fait encore débat aujourd'hui. Bien que certains auteurs (Huang et Bradshaw (1995), Catris et Aupoix (2000)) considèrent que la loi logarithmique reste inchangée dans une telle situation, et n'observent qu'une réduction de celle-ci, Nickels (2004), Nagib et Chauhan (2008) et Knopp *et al.* (2021) notent eux une modification des constantes κ et C par rapport au cas ZPG.

Reprenons le bilan de quantité de mouvement dans la région interne d'une couche limite turbulente soumise à un gradient de pression :

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \quad (2.58)$$

Au dessus de la sous-couche visqueuse, dans la zone logarithmique, les effets de la viscosité moléculaire sont négligeables devant le transport turbulent. De cette façon, la contrainte totale τ se réduit à la contrainte turbulente τ_t . On peut alors intégrer le bilan de quantité de mouvement pour un gradient de pression constant sur toute la hauteur de couche limite, c'est à dire constant en z :

$$\tau_t - \tau_w = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} z \quad (2.59)$$

En utilisant la viscosité turbulente ν_t et l'hypothèse de Boussinesq pour exprimer le cisaillement turbulent, on obtient, en variable de paroi : $\frac{\tau_t}{\tau_w} = \nu_t^+ \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial z^+}$ et $\bar{p}^+ = \frac{\nu}{\rho u_\tau^3} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$. Le bilan de quantité de mouvement devient :

$$\nu_t^+ \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial z^+} = 1 + \bar{p}^+ z^+ \quad (2.60)$$

Soit, en considérant le comportement asymptotique de la viscosité turbulente dans la zone loga-

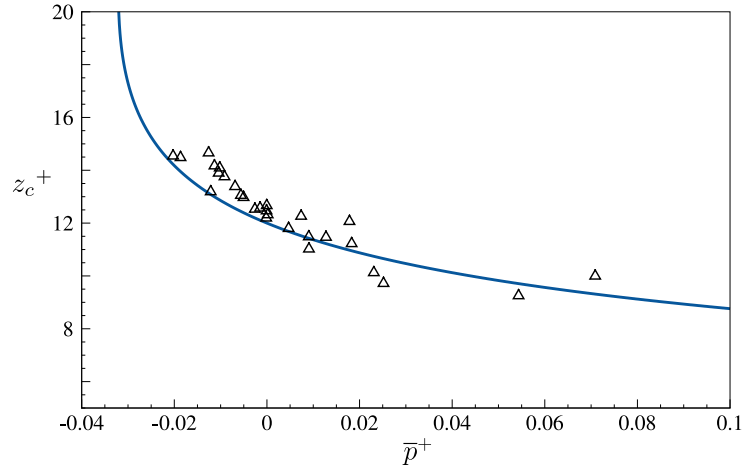


FIGURE 2.4. – Évolution de z_c^+ en fonction du gradient de pression \bar{p}^+ . Comparaison entre le modèle de Nickels (2004) (2.63) et des données de DNS en configuration de couche limite et de canal (Spalart, 1986; Nagano *et al.*, 1993; Eggels *et al.*, 1994; Loulou *et al.*, 1997; Skote *et al.*, 1998). Retracer à partir de Nickels (2004).

rithmique :

$$\frac{\partial \bar{u}^+}{\partial z^+} = \frac{\sqrt{1 + \bar{p}^+ z^+}}{\kappa z^+} \quad (2.61)$$

Influence sur l'épaisseur de la sous-couche visqueuse

Nickels (2004) propose de modifier la loi de paroi en cohérence avec l'équation (2.61). Il montre que l'influence du gradient de pression sur la loi logarithmique est une conséquence d'une dépendance de la hauteur de la sous-couche visqueuse à ce gradient de pression : les constantes κ et C s'en trouvent modifiées. Clauser (1956) puis Nickels (2004) proposent une comparaison de la sous-couche visqueuse avec une couche limite laminaire : il s'agit de deux types d'écoulement de paroi dominés par des effets visqueux. Lorsque le nombre de Reynolds de la couche limite laminaire atteint une certaine valeur, des instabilités apparaissent et la transition vers la turbulence débute. Nickels (2004) suggère que la sous-couche visqueuse croît jusqu'à ce qu'à une certaine distance z_c^+ de la paroi, le nombre de Reynolds local atteigne une valeur critique. De façon similaire au cas de la couche limite laminaire, des instabilités apparaissent alors, générant de la turbulence et donc la « transition » vers la zone logarithmique, dominée par les effets inertiels. Dans le cas sans gradient de pression, Clauser (1956) et Nickels (2004) proposent $z_c^+ = R_c = 12$. Ces valeurs sont cohérentes avec des données de DNS (Spalart, 1988).

Bien qu'on ne puisse pas formellement comparer une couche limite laminaire et une couche limite turbulente, ce raisonnement permet de comprendre intuitivement la dépendance de z_c^+ au gradient de pression : dans le cas d'une couche limite laminaire, la présence d'un APG diminue la valeur du nombre de Reynolds critique pour laquelle les instabilités apparaissent, et la présence d'un FPG l'augmente. Similairement, dans le cas d'une couche limite turbulente, en présence d'un APG, la « transition » vers la zone logarithmique (c'est à dire le début de la zone tampon) débutera pour des valeurs plus faibles de z_c^+ tandis qu'à l'inverse, en présence d'un FPG, elle débutera pour des valeurs de z_c^+ plus élevées.

À partir du bilan de quantité de mouvement (2.61), Nickels (2004) définit le nombre de Reynolds critique R_c :

$$R_c = \frac{u_T z_c}{\nu} \quad \text{avec} \quad u_T = u_\tau \sqrt{1 + \bar{p}^+ z_c^+} \quad (2.62)$$

R_c est supposé avoir une valeur universelle égale à 12 pour tout écoulement de paroi. On en déduit l'équation suivante pour z_c^+ :

$$\bar{p}^+ z_c^+{}^3 + z_c^+{}^2 - R_c^2 = 0 \quad (2.63)$$

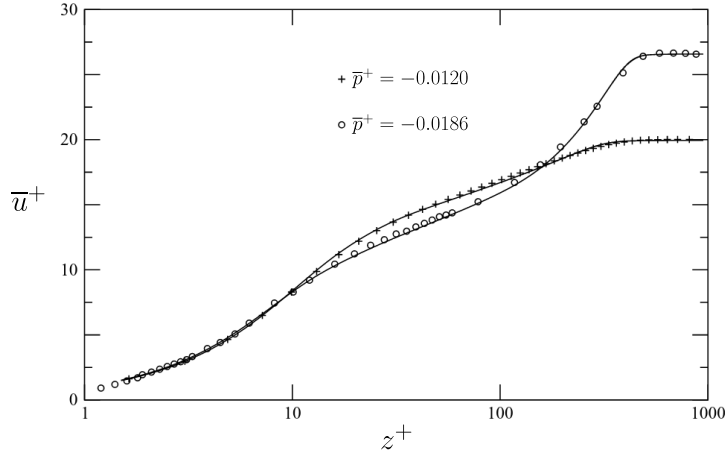


FIGURE 2.5. – Comparaison des valeurs données par l'expression (2.65) avec des données de DNS dans les cas FPG (Spalart, 1986) et APG (Nagano *et al.*, 1993). Figure extraite de Nickels (2004).

L'évolution de z_c^+ en fonction de \bar{p}^+ est tracée sur la figure 2.4, retracée à partir de Nickels (2004).

Nouvelle loi logarithmique

D'après la définition donnée par Nickels (2004) du nombre de Reynolds critique R_c , la présence d'un gradient de pression affecte non seulement l'échelle de longueur z_c mais également l'échelle de vitesse u_T . Cette échelle de vitesse représente l'échelle de vitesse des tourbillons qui apparaissent lorsque le nombre de Reynolds critique R_c est atteint. Il s'agit par conséquent de l'échelle de vitesse des tourbillons présents dans la région logarithmique. La loi de paroi devient :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u_T}{\kappa_0 \nu} \quad (2.64)$$

où κ_0 représente la valeur de la constante de von Kármán dans le cas ZPG. Si on compare avec la loi de paroi écrite sous sa forme traditionnelle, *i.e* en faisant intervenir la vitesse de frottement : $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u_\tau}{\kappa \nu}$, on doit donc voir κ comme une fonction du gradient de pression :

$$\frac{\kappa}{\kappa_0} = \frac{u_\tau}{u_T} = \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{p}^+ z_c^+}} \quad (2.65)$$

Cette expression traduit les variations de pente de la loi logarithmique d'une couche limite turbulente soumise à un gradient de pression adverse ou favorable. Elle a été confrontée avec succès à des données de DNS (Spalart, 1986; Nagano *et al.*, 1993; Vinuesa *et al.*, 2018) et expérimentales (Knopp *et al.*, 2021) qui ont permis de confirmer ces variations de pente (voir figure 2.5).

La prise en compte des effets de gradient de pression dans des simulations RANS appliquées à des écoulements de paroi est une problématique complexe, notamment pour les raisons évoquées par Spalart (2015) (voir chapitre 7). De nombreux modèles sont encore développés aujourd'hui (Kalitzin *et al.*, 2005; Romanelli *et al.*, 2023) dans le but de traiter ces problématiques.

2.3.5. Analogie entre une région interne de couche limite et un écoulement de canal plan

On considère désormais un écoulement turbulent se développant dans un canal plan de hauteur $2\delta_c$. Les directions longitudinales et normales à la paroi sont respectivement nommées x et z . On suppose l'écoulement pleinement développé dans la direction x , c'est-à-dire statistiquement

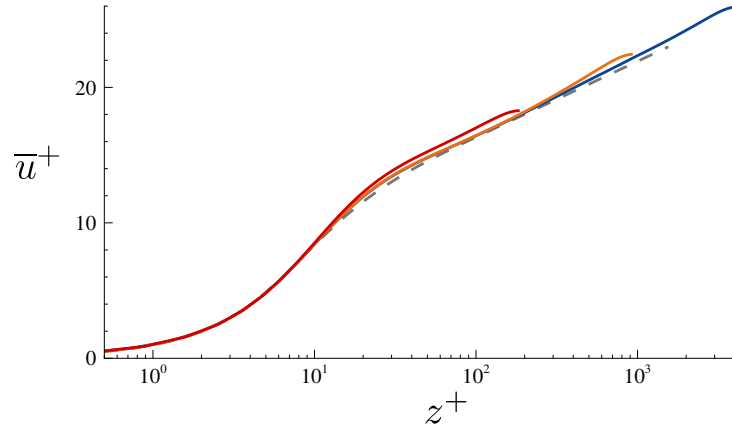


FIGURE 2.6. – Profils de vitesse moyenne en canal pour $R_\tau = 180$ (rouge), $R_\tau = 950$ (orange) et $R_\tau = 4200$ (bleu). Ligne pointillée : loi de paroi. Reproduit à partir des DNS de Jiménez *et al.* (2010).

stationnaire et unidimensionnel. En canal, le nombre de Reynolds de frottement R_τ est défini à partir de la demi-hauteur de canal δ_c et de la vitesse de frottement u_τ :

$$R_\tau = \frac{u_\tau \delta_c}{\nu} \quad (2.66)$$

Les équations RANS de continuité et de quantité de mouvement s'écrivent :

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (2.67a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \quad (2.67b)$$

La condition d'adhérence à la paroi imposant $w(z=0) = 0$, on déduit de l'équation de continuité que $w = 0$. Le bilan de quantité de mouvement donne quant à lui :

$$\tau_{xz} = \tau_w + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} z \quad (2.68)$$

Soit, avec $\tau_{xz}(y = 2\delta_c) = -\tau_w$:

$$\bar{p}^+ = -\frac{1}{\delta_c^+} = -\frac{1}{R_\tau} \quad (2.69)$$

Profil de vitesse en canal

Le profil de vitesse en canal présente des similitudes avec une région interne de couche limite turbulente. Pour des nombres de Reynolds R_τ suffisamment grands, on retrouve notamment une zone logarithmique développée. La figure 2.6 montre des profils de vitesse obtenus par Jiménez *et al.* (2010) avec des calculs DNS pour différents R_τ . On remarque notamment que la pente de la zone logarithmique n'est pas celle attendue pour le nombre de Reynolds le plus faible (courbe rouge), contrairement aux R_τ plus élevés : plus le nombre de Reynolds de frottement est élevé, plus la sous-couche inertielle est marquée.

Afin de retrouver le comportement asymptotique de la longueur de mélange en canal, Nikuradse (1937) propose l'expression suivante, qui est également souvent associée à la fonction d'amortissement de van Driest (2.54) :

$$l(z) = \delta_c \left[0.14 - 0.08 \left(1 - \frac{z}{\delta_c} \right)^2 - 0.06 \left(1 - \frac{z}{\delta_c} \right)^4 \right] \quad (2.70)$$

Bilan

Cet état de l'art a permis d'effectuer quelques rappels sur les écoulements turbulents et les outils mathématiques et statistiques utilisés dans la suite de ce manuscrit, notamment sur les équations RANS du mouvement moyen. Certains modèles de turbulence y sont également présentés.

Les configurations de couche limite et de canal ont en particulier été abordées, et la description de la région interne de la couche limite a été vue en détail. Nous avons introduit les grandeurs caractéristiques d'une région interne. Les équations décrivant cette région ont été développées, et une analyse asymptotique du comportement de l'écoulement a permis de définir la loi de paroi, utilisée pour décrire la structure de la région interne de la couche limite. Nous avons également discuté de l'universalité de la loi de paroi, et notamment de la zone logarithmique.

Enfin, nous avons étudié l'influence d'un gradient de pression sur la région interne de la couche limite à travers les travaux de Nickels (2004). Il a été montré que la présence d'un gradient de pression impacte directement l'épaisseur de la sous-couche visqueuse, ce qui a des conséquences immédiates sur la pente et l'ordonnée à l'origine de la loi logarithmique. Ces observations de Nickels (2004) sont cohérentes avec les études numériques et expérimentales de Nagib et Chauhan (2008), Spalart (1988, 1986), Nagano *et al.* (1993) et Knopp *et al.* (2021). Nickels (2004) développe un modèle pour la prise en compte des effets de gradient de pression adverse et favorable sur la valeur du coefficient de von Kármán κ , modèle repris plus tard par Knopp (2016).

Étude de l'influence d'une déformation sinusoidale de la paroi sur la structure de la région interne de la couche limite turbulente

Nous avons vu dans le chapitre 1 que dans un contexte d'écoulement incompressible, la taille longitudinale des coups de gouge peut être reliée – du moins empiriquement – à la longueur visqueuse, une échelle de longueur caractéristique de la couche limite turbulente se développant sur la surface ablatée. Le chapitre 2 effectue quelques rappels sur la description des écoulements turbulents qui seront nécessaires à la bonne compréhension de ce manuscrit. Afin de s'intéresser désormais aux conditions d'apparition des coups de gouge et au rôle exact de la turbulence dans la corrélation de Thomas, le problème est dans un premier temps réduit à l'étude d'un écoulement stationnaire, incompressible et bidimensionnel. Une première approche peut ainsi être de considérer les creusements observés comme une petite déformation sinusoidale de la paroi. On cherche donc à étudier l'impact de cette perturbation sur la structure de la région interne de la couche limite. Hanratty et ses co-auteurs ([Zilker et al., 1977](#); [Abrams et Hanratty, 1985](#); [Frederick et Hanratty, 1988](#)) ont ainsi réalisé des mesures en canal hydraulique d'un écoulement turbulent se développant au dessus d'une paroi ondulée de faible amplitude. Ces travaux expérimentaux ont permis de montrer l'apparition d'un déphasage et d'un amortissement de la contrainte de cisaillement pariétale par rapport aux ondulations de la paroi pour une certaine gamme de longueurs d'onde. Des études de la réponse linéaire d'une couche limite turbulente soumise à une petite perturbation de la paroi ([Thorsness et al., 1978](#); [Charru et al., 2013](#); [Claudin et al., 2017](#)) mettent en avant la nécessité d'utiliser une correction *ad-hoc* proposée par [Thorsness et al. \(1978\)](#) et faisant appel à un gradient de pression relaxé pour retrouver le comportement du cisaillement avec un modèle de longueur de mélange pour les longueurs d'onde considérées. La réponse de l'écoulement à la déformation de la paroi peut être divisée en trois régimes ([Charru et Hinch, 2000](#)), en fonction de la longueur d'onde des ondulations de la paroi et qui dépendent de la profondeur de pénétration de la perturbation au sein de la couche limite. Le régime pour lequel on observe le pic de déphasage du cisaillement sera nommé *régime visqueux peu profond*, ou, plus simplement, *régime de transition*.

Sommaire

3.1. Études théoriques et expérimentales	38
3.1.1. Réponse linéaire forcée d'une région interne d'une couche limite turbulente	38
3.1.2. Travaux expérimentaux d'Hanratty <i>et al.</i>	43
3.2. Principales conclusions et discussion	44
3.2.1. Observations expérimentales	44
3.2.2. Comparaison avec les études de réponse linéaire forcée	45
3.2.3. Étude du transport d'un scalaire passif	47
Bilan	52

3.1. Études théoriques et expérimentales

Historiquement, l'apparition de motifs réguliers lors de l'ablation ou de l'érosion d'une paroi cisailée par un écoulement turbulent a été étudiée expérimentalement (Zilker *et al.*, 1977; Abrams et Hanratty, 1985; Frederick et Hanratty, 1988) et théoriquement (Thorsness *et al.*, 1978; Charru et Hinch, 2000; Charru *et al.*, 2013; Claudin *et al.*, 2017) en s'intéressant à la réponse d'une couche limite turbulente soumise à une petite déformation sinusoïdale de la paroi, ce qui paraît pertinente pour étudier l'apparition de ce type de motifs (comme illustré sur la figure 3.1). En effet, une paroi bidimensionnelle quelconque peut toujours être représentée par une somme infinie de sinus de longueurs d'onde différentes. Or, dans le cas d'une analyse linéaire, les différentes contributions de chacune de ces déformations sinusoïdales sont considérées indépendantes. La réponse linéaire de l'écoulement à une déformation quelconque de la paroi peut être obtenue en sommant les différentes contributions correspondant aux déformations sinusoïdales décrivant la paroi. Cette section est dédiée à la présentation de ces travaux expérimentaux et théoriques. Les méthodes historiques seront présentées, ainsi que les principales conclusions émanant de ces études.

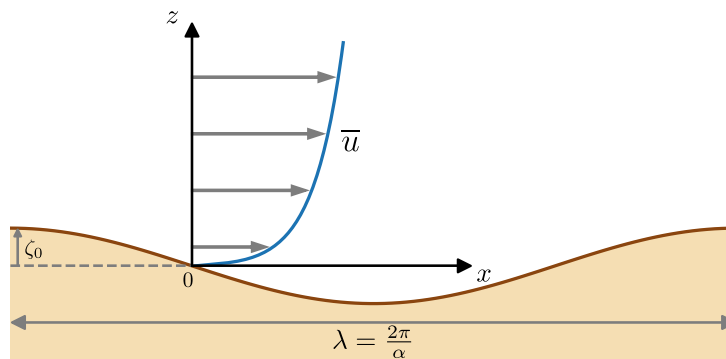


FIGURE 3.1. – Développement d'une couche limite turbulente incompressible sur une paroi subissant une petite déformation sinusoïdale harmonique d'amplitude ζ_0 et de longueur d'onde λ .

3.1.1. Réponse linéaire forcée d'une région interne d'une couche limite turbulente

Études historiques

La réponse linéaire d'un écoulement se développant au-dessus d'une paroi perturbée a d'abord été étudiée par Benjamin (1959), et consiste à linéariser puis résoudre l'équation d'Orr-Sommerfeld pour un écoulement laminaire. Thorsness *et al.* (1978) se sont par la suite intéressés au problème en considérant un écoulement turbulent. Bien que s'inspirant de la méthode mise en place par Benjamin (1959), les travaux de Thorsness *et al.* (1978) introduisent une légère modification dans l'équation d'Orr-Sommerfeld avant que celle-ci ne soit linéarisée. En effet, là où historiquement, des coordonnées cartésiennes étaient utilisées, Thorsness *et al.* (1978) proposent un changement de variable afin de transposer le problème dans un système de coordonnées attaché à la paroi, qu'ils nomment « coordonnées de couche limite ». L'écoulement de base est alors déplacé dans ce nouveau repère, c'est-à-dire qu'il est interpolé en $z = \zeta(x)$ (ζ étant la fonction décrivant le profil de la paroi). L'impact de cette modification sur les résultats obtenus a été analysé en détail par Luchini et Charru (2019).

Nous présentons dans la suite de ce chapitre le formalisme utilisé par Fourriere *et al.* (2010), Charru *et al.* (2013) et Claudin *et al.* (2017) dans le cadre de l'étude de la formation des dunes et rides de sable. La méthode revient à utiliser le principe de la décomposition de Reynolds afin de linéariser directement les équations de Navier-Stokes pour obtenir les champs de fluctuations de vitesse et de contraintes de Reynolds. Bien que le système soit linéarisé en coordonnées cartésiennes, la modification introduite par Thorsness *et al.* (1978) consistant à interpoler l'écoulement

de base à la paroi est conservée et les résultats obtenus par Fourriere *et al.* (2010), Charru *et al.* (2013) et Claudin *et al.* (2017) sont équivalents à ceux d'Hanratty *et al.* (Zilker *et al.*, 1977; Thorsness *et al.*, 1978; Abrams et Hanratty, 1985; Frederick et Hanratty, 1988).

Contexte

On s'intéresse ici à la réponse linéaire forcée d'une région interne d'une couche limite turbulente se développant sur une paroi ondulée (figure 3.1) : en première approximation, les coups de gouge sont vus comme une petite déformation sinusoïdale harmonique de la paroi. On considère donc ici une couche limite bidimensionnelle, stationnaire et incompressible qui se développe sur une paroi dont le profil oscille autour d'une valeur moyenne $z = 0$. On note ζ_0 et $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$ respectivement l'amplitude et le nombre d'onde de la déformation. Le profil de la paroi est donné par la partie réelle de la fonction :

$$\zeta(x) = \zeta_0 e^{i\alpha x} \quad (3.1)$$

Dans la suite de ce manuscrit, la notation $\bar{\square}$ introduite au chapitre précédent pour la moyenne de Reynolds sera omise pour les grandeurs moyennes, exceptées pour les corrélations $\overline{u'_i u'_j}$. Les équations de Navier–Stokes incompressibles, bidimensionnelles et stationnaires s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_{zz} - \frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx} - \tau_{zz}) \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\tau_{zz} - \frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.2)$$

avec $\tau_{ij} = \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \overline{u'_i u'_j}$ le tenseur des contraintes divisé par la masse volumique ρ , incluant le tenseur de Reynolds $R_{ij} = -\overline{u'_i u'_j}$ et la partie visqueuse $\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. On définit le nombre de Reynolds associé au nombre d'onde α de la déformation de la paroi : $\mathcal{R} = \frac{u_\tau}{\nu \alpha} = \frac{1}{\alpha^+}$, ainsi que la distance à la paroi adimensionnée $\eta = \alpha z$. On notera également $\square_{,\eta} = \frac{d\square}{d\eta}$ par souci de concision. Cette notation sera utilisée dans toute la suite de ce manuscrit.

Toutes les quantités dans le système d'équations (3.2) sont adimensionnées en variables de paroi à l'aide de la vitesse de frottement u_τ et de la viscosité cinématique ν . Dans la suite, le signe +, généralement utilisé pour noter les quantités exprimées en variable de paroi, est omis.

La fermeture turbulente est obtenue à partir de l'hypothèse de Boussinesq, en utilisant un modèle de longueur de mélange de Prandtl avec un amortissement en proche paroi de van Driest (équation (2.55)). Le tenseur des contraintes s'écrit donc, pour un écoulement incompressible :

$$\tau_{ij} = 2(\nu + \nu_t) S_{ij} - \frac{1}{3} \mathcal{K} \delta_{ij} \quad (3.3)$$

Pour un modèle de longueur de mélange, l'énergie cinétique peut être exprimée à partir de la relation $\mathcal{K} = \chi^2 l^2 |S|^2$. La constante χ est une constante phénoménologique comprise entre 2 et 3 qui peut être estimée à partir de la relation de Bradshaw *et al.* (1967) pour les couches limites turbulentes. Sa valeur n'a pas d'importance ici puisqu'on considèrera principalement la différence $\tau_{xx} - \tau_{zz} = 2(\nu + \nu_t) (S_{xx} - S_{zz})$.

Décomposition des variables du problème

Pour étudier la réponse linéaire de la couche limite turbulente à la petite perturbation de la paroi (3.1), les équations de Navier–Stokes bidimensionnelles, incompressibles et stationnaires sont linéarisées au premier ordre par rapport au petit paramètre adimensionnel $\alpha \zeta_0 \ll 1$. En

effet, comme nous le verrons plus en détail dans la suite, d'après les observations expérimentales de Zilker *et al.* (1977), un comportement linéaire de l'écoulement est attendu tant que $\zeta_0 u_\tau / \nu < 27$ et que $2\zeta_0 / \lambda < 0.033$. Afin de linéariser les équations du mouvement, toutes les quantités q sans dimension du problème sont décomposées en une partie moyenne sur x , notée $\langle \square \rangle^1$, et une partie fluctuante, notée $\hat{\square}$, qui ne dépendent que de la distance normalisée à la paroi η :

$$q(x, \eta) = \langle q \rangle(\eta) + \alpha \zeta_0 e^{i\alpha x} \hat{q}(\eta) \quad (3.4)$$

Plus précisément, on introduit les notations suivantes pour les champs de vitesse et des tensions de Reynolds :

$$\begin{aligned} u &= u_\tau \left(\langle u \rangle + \alpha \zeta_0 \hat{u} e^{i\alpha x} \right) \\ w &= u_\tau \alpha \zeta_0 \hat{w} e^{i\alpha x} \\ \tau_{xz} &= u_\tau^2 \left(1 + \alpha \zeta_0 \hat{\tau}_{xz} e^{i\alpha x} \right) \\ \tau_{xx} &= u_\tau^2 \left(-\frac{1}{3} \chi^2 + \alpha \zeta_0 \hat{\tau}_{xx} e^{i\alpha x} \right) \\ \tau_{zz} &= u_\tau^2 \left(-\frac{1}{3} \chi^2 + \alpha \zeta_0 \hat{\tau}_{zz} e^{i\alpha x} \right) \\ \tau_{zz} - p/\rho &= -p_0/\rho + u_\tau^2 \left(-\frac{1}{3} \chi^2 - \alpha \zeta_0 \hat{\tau}_p e^{i\alpha x} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Modèle de longueur de mélange et correction d'Hanratty

La fermeture turbulente du système d'équations est obtenue grâce à un modèle de longueur de mélange. Celle-ci, rendue sans dimension grâce au nombre d'onde α , est d'abord décomposée comme les autres variables en une partie moyenne adimensionnelle $\langle l \rangle$ (donnée par l'équation (3.15)) et une fluctuation \hat{l} qui ne dépendent que de η :

$$\alpha l = \langle l \rangle + \alpha \zeta_0 \hat{l} e^{i\alpha x} \quad (3.6)$$

Comme nous le verrons dans la section suivante, Hanratty *et al.* (Zilker *et al.*, 1977; Thorsness *et al.*, 1978; Abrams et Hanratty, 1985; Frederick et Hanratty, 1988) ont remarqué expérimentalement la mise en défaut du modèle de longueur de mélange (2.55), en particulier en ce qui concerne la phase et l'amplitude du cisaillement à la paroi τ_w . Pour pallier ce problème, Thorsness *et al.* (1978) propose, à partir des travaux de Loyd *et al.* (1970), une correction du modèle à travers une dépendance du nombre de van Driest (3.7a) à un gradient de pression dit *effectif*, noté Δp_{eff} , qui est régi par l'équation de relaxation (3.7b) :

$$A = A^0 (1 + b_H \Delta p_{eff}) \quad (3.7a)$$

$$\frac{d\Delta p_{eff}}{dx} = \frac{\Delta p - \Delta p_{eff}}{a_H} \quad (3.7b)$$

Dans la suite, on notera \mathcal{C} le gradient de pression adimensionné : $\mathcal{C} = \frac{\nu \Delta p_{eff}}{\rho u_\tau^3}$. $A^0 = 26$ est le nombre de van Driest usuellement utilisé, et $b_H = \frac{1}{A^0} \frac{\partial A}{\partial \mathcal{C}} = 35$ représente la variation relative de A par rapport au gradient de pression Δp_{eff} . Le paramètre de relaxation a_H est généralement pris aux alentours de 2000 dans la littérature (Abrams et Hanratty, 1985; Charru *et al.*, 2013). Un des défauts de cette correction vient de l'équation (3.7b), car Thorsness *et al.* (1978) ne lui donnent pas de justification physique, son intérêt reposant uniquement sur sa capacité à reproduire les observations expérimentales. Dans la suite de ce manuscrit, cette correction sera nommée *correction d'Hanratty*.

1. Il s'agit d'une moyenne spatiale.

Dans notre étude, nous utiliserons une version modifiée de cette correction, proposée par [Charru et al. \(2013\)](#), et incluant la contrainte de Reynolds τ_{xx} dans l'équation (3.7b). Après linéarisation, celle-ci devient :

$$(\mathcal{R} + a_H) \mathcal{C} = i (\hat{\tau}_{xx} - \hat{\tau}_{zz} - \hat{\tau}_p) \quad (3.8)$$

La fluctuation de la longueur de mélange est obtenue à partir d'un développement de Taylor au premier ordre en $\eta_0 = \alpha \zeta_0 e^{i\alpha x}$: $\hat{l} = - \left. \frac{d\langle l \rangle}{d\eta} \right|_{\eta-\eta_0}$. Après dérivation, on obtient :

$$\hat{l}(\eta) = \kappa \left[-1 + \exp \left(-\frac{\mathcal{R}\eta}{A^0} \right) \left(1 - \eta \frac{\partial \mathcal{R}\eta/A}{\partial \eta} \right) \right] \quad (3.9)$$

Notons qu'au premier ordre, A et \mathcal{R} sont des fonctions de η : A dépend en effet de la correction d'Hanratty présentée ci-dessus et \mathcal{R} dépend des variations relatives de la vitesse de frottement u_τ dues à la déformation de la paroi. En effet, par définition, $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = u_\tau (1 + \alpha \zeta_0 \hat{\tau}_{xz} e^{i\alpha x})^{\frac{1}{2}}$. Autour de $\eta - \eta_0$, on a :

$$\mathcal{R}|_{\eta-\eta_0} = \mathcal{R}^0 (1 + \eta_0 \hat{\tau}_{xz} (\eta - \eta_0))^{1/2} \quad (3.10)$$

et

$$A|_{\eta-\eta_0} = A^0 (1 + \eta_0 b_H \mathcal{C} (\eta - \eta_0)) \quad (3.11)$$

A^0 et \mathcal{R}^0 sont respectivement le nombre de van Driest et le nombre de Reynolds à l'ordre dominant : A^0 est pris égal à 26 et \mathcal{R}^0 sera simplement noté \mathcal{R} dans la suite, sa contribution à l'ordre 1 dépendant directement de la fluctuation $\hat{\tau}_{xz}$ de la contrainte de cisaillement.

Après simplifications à l'aide de développements limités en η_0 , la fluctuation de la longueur de mélange \hat{l} s'exprime, à l'ordre 1 :

$$\hat{l}(\eta) = \kappa \left[-1 + \exp \left(-\frac{\mathcal{R}\eta}{A^0} \right) \left(1 - \frac{\mathcal{R}\eta}{A^0} + \frac{\mathcal{R}\eta^2}{A^0} \left(\frac{\hat{\tau}_{xz}}{2} - b_H \mathcal{C} \right) \right) \right] \quad (3.12)$$

Écoulement de base

À l'ordre dominant, l'écoulement de base est donné par la solution au problème de couche limite et plus précisément dans la région interne de cette couche limite, que l'on considère pleinement développée dans la direction longitudinale. Le bilan de quantité de mouvement se réduit, en variables adimensionnelles, à :

$$\langle \tau_{xz} \rangle_{,\eta} = 0 \quad (3.13)$$

Soit :

$$\left(\mathcal{R}^{-1} + \langle \nu_t \rangle \right) \langle u \rangle_{,\eta} = 1 \quad (3.14)$$

Le modèle de longueur de mélange (2.55) donne, à l'ordre dominant :

$$\langle l \rangle = \kappa \eta \left[1 - \exp \left(-\frac{\mathcal{R}\eta}{A^0} \right) \right] \quad (3.15)$$

La viscosité turbulente s'écrit donc $\langle \nu_t \rangle = \langle l \rangle^2 \left| \langle u \rangle_{,\eta} \right|$. Le bilan de quantité de mouvement devient :

$$\langle l \rangle^2 \langle u \rangle_{,\eta}^2 + \mathcal{R}^{-1} \langle u \rangle_{,\eta} = 1 \quad (3.16)$$

Soit :

$$\langle u \rangle_{,\eta} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \langle l \rangle^2 \mathcal{R}^2}}{2 \langle l \rangle^2 \mathcal{R}} \quad (3.17)$$

avec, en $\eta = 0$ (*i.e* à la paroi), $\langle u \rangle_{,\eta}(0) = \mathcal{R}$. Le profil de vitesse à l'ordre dominant est obtenu par intégration de l'équation (3.17) et représente une région interne de couche limite turbulente

(cf. figure 2.3).

Linéarisation des équations de Navier–Stokes

En utilisant la décomposition des variables (3.4), les équations de Navier–Stokes sont linéarisées par rapport à la petite perturbation $\alpha\zeta_0$. Le tenseur de Reynolds est exprimé grâce à l'hypothèse de Boussinesq, en utilisant le modèle de longueur de mélange présenté dans la section précédente. La linéarisation de l'équation de continuité est détaillée ici à titre d'exemple. Les équations de quantité de mouvement longitudinales et transverses sont linéarisées de façon similaire. L'équation de continuité en régime stationnaire, incompressible et bidimensionnel s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.18)$$

En décomposant les variables de vitesse :

$$\frac{\partial (\langle u \rangle + \alpha\zeta_0 \hat{u} e^{i\alpha x})}{\partial x} + \alpha \frac{\partial (\alpha\zeta_0 \hat{w} e^{i\alpha x})}{\partial \eta} = 0 \quad (3.19)$$

Soit, à l'ordre 1 :

$$\hat{w}_{,\eta} = -i\hat{u} \quad (3.20)$$

De façon analogue, on peut linéariser les bilans de quantité de mouvement longitudinal et transverse de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{xz,\eta} &= i \langle u \rangle \hat{u} + \hat{w} \langle u \rangle_{,\eta} + i\hat{\tau}_p - i(\hat{\tau}_{xx} - \hat{\tau}_{zz}) \\ \hat{\tau}_{p,\eta} &= -i \langle u \rangle \hat{w} + i\hat{\tau}_{xz} \end{aligned} \quad (3.21)$$

L'hypothèse de Boussinesq permet d'obtenir deux relations supplémentaires, pour le cisaillement τ_{xz} et la différence des tensions diagonales $\tau_{xx} - \tau_{zz}$:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{xz} &= \left(2 \langle l \rangle^2 \langle u \rangle_{,\eta} + \mathcal{R}^{-1} \right) (\hat{u}_{,\eta} + i\hat{w}) + 2 \langle l \rangle \langle u \rangle_{,\eta}^2 \hat{l} \\ \hat{\tau}_{xx} - \hat{\tau}_{zz} &= \frac{4i\hat{u}}{\langle u \rangle_{,\eta}} \end{aligned} \quad (3.22)$$

On obtient finalement un système de quatre équations :

$$\begin{cases} \hat{u}_{,\eta} = -i\hat{w} + \frac{\hat{\tau}_{xz} - 2 \langle l \rangle \langle u \rangle_{,\eta}^2 \hat{l}}{\mathcal{R}^{-1} + 2 \langle l \rangle^2 \langle u \rangle_{,\eta}} \\ \hat{w}_{,\eta} = -i\hat{u} \\ \hat{\tau}_{xz,\eta} = \left(i \langle u \rangle + \frac{4}{\langle u \rangle_{,\eta}} \right) \hat{u} + \hat{w} \langle u \rangle_{,\eta} + i\hat{\tau}_p \\ \hat{\tau}_{p,\eta} = -i \langle u \rangle \hat{w} + i\hat{\tau}_{xz} \end{cases} \quad (3.23)$$

Pour résoudre ce système, quatre conditions aux limites sont nécessaires. Nous considérons simplement la région interne de la couche limite turbulente, le modèle de longueur de mélange n'étant pas valable au-delà. De plus, on fait une hypothèse de taille semi-infinie pour cette région interne, en allant de la paroi ($z^+ = 0$) à $z^+ \rightarrow \infty$. Par conséquent, on impose un champ de perturbation nul à la frontière supérieure : suffisamment loin de la paroi, $i.e \eta \rightarrow \infty$, l'écoulement n'est plus affecté par la déformation imposée. Par conséquent, les fluctuations de vitesse verticale et de cisaillement doivent tendre vers 0. De plus, la condition d'adhérence impose un champ de

vitesse nul à la paroi :

$$\begin{aligned}
 \hat{\tau}_{xz}(\infty) &= 0 \\
 \hat{w}(\infty) &= 0 \\
 \hat{u}(0) &= -\langle u \rangle_{,\eta}(0) = -\mathcal{R} \\
 \hat{w}(0) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.24}$$

3.1.2. Travaux expérimentaux d'Hanratty *et al.*

Dans ce manuscrit, lorsqu'il sera fait mention des travaux (expérimentaux) d'Hanratty et de ses co-auteurs sans plus de précision (notamment *via* la formule Hanratty *et al.*), il sera fait référence aux études de Zilker *et al.* (1977), Abrams et Hanratty (1985), et Frederick et Hanratty (1988). L'ensemble de ces articles présente plusieurs campagnes de mesures de vitesse et de cisaillement réalisées dans un canal hydraulique turbulent de section rectangulaire de hauteur $h = 5.08$ cm, de largeur $l = 60.96$ cm et de longueur $L = 8.38$ m. Le montage expérimental utilisé est schématisé sur la figure 3.2, extraite de Zilker *et al.* (1977). La section d'essai est constituée

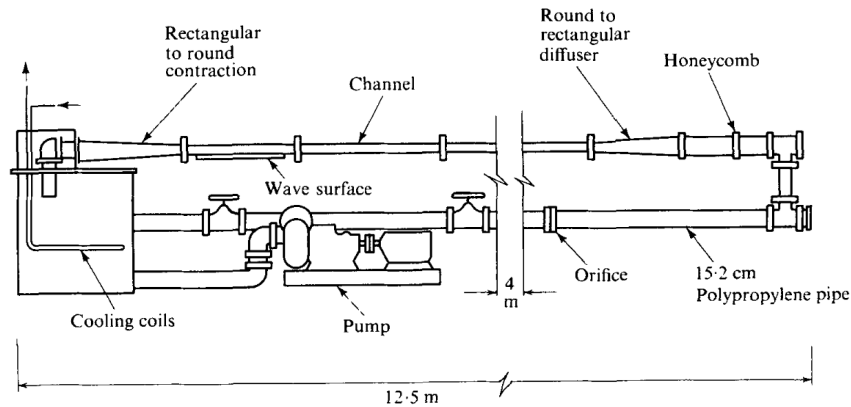


FIGURE 3.2. – Canal hydraulique utilisé dans les expériences d'Hanratty *et al.* Figure extraite de Zilker *et al.* (1977).

d'une plaque amovible de 68.58 cm de long, permettant de tester différentes géométries, et se situe à l'extrémité aval du canal. À partir de mesures de vitesse réalisées sur une plaque plane, Zilker *et al.* (1977) ont pu vérifier que la longueur du canal amont à la zone d'essai était suffisante pour y assurer un écoulement turbulent pleinement développé. En particulier, ils ont pu retrouver la loi logarithmique du profil de vitesse pour des débits suffisamment importants, pour des mesures faites à $z^+ \geq 30$.

Les essais ont été réalisés sur différentes plaques amovibles possédant chacune dix ondulations régulières d'une longueur d'onde $\lambda = 5.08$ cm et d'amplitude ζ_0 variable² : les mesures ont ainsi été réalisées sur quatre types d'ondulations de paroi, pour des rapports $\frac{2\zeta_0}{\lambda}$ égaux à 0.0125, 0.014, 0.03125 et 0.05. À géométrie fixe, en faisant varier le débit de l'écoulement dans le canal, Hanratty *et al.* modifient le nombre de Reynolds de frottement R_τ de l'expérience à travers la vitesse de frottement u_τ . Les variations de la vitesse de frottement u_τ ainsi obtenues permettent de modifier également le nombre de Reynolds \mathcal{R} , qui régit la réponse forcée de l'écoulement. On peut alors réaliser une étude paramétrique de la réponse de l'écoulement en fonction de \mathcal{R} , c'est-à-dire de α^+ , sans changer la longueur d'onde physique de la paroi. La gamme de nombres d'onde considérée va de $\alpha^+ = 0.0003$ à $\alpha^+ = 0.01$. Nous verrons par la suite que nous utiliserons une idée similaire lors des simulations qui ont été réalisées dans le cadre de cette étude.

Hanratty et ses co-auteurs vont ainsi réaliser plusieurs séries de mesures pour différentes amplitudes et différentes longueurs d'onde des ondulations de la paroi. La vitesse et le cisaillement

2. Ici, l'amplitude ζ_0 désigne la moitié de la distance entre le minimum et le maximum d'une ondulation.

pariétal ont été obtenus par mesures électrochimiques (Zilker *et al.*, 1977; Abrams et Hanratty, 1985) et par vélocimétrie Doppler (LDV pour Laser Doppler Velocimetry) (Frederick et Hanratty, 1988).³

3.2. Principales conclusions et discussion

3.2.1. Observations expérimentales

Comportement linéaire

Les mesures de pression et de cisaillement montrent un comportement linéaire de la réponse de l'écoulement à la petite déformation de la paroi pour une amplitude des ondulations $\zeta_0^+ = \frac{\zeta_0 u_\tau}{\nu}$ inférieure à 27 et un rapport entre amplitude et longueur d'onde $2\zeta_0/\lambda$ inférieur à 0.033. Pour ces valeurs d'amplitude et de longueur d'onde des perturbations, Hanratty *et al.* montrent que la réponse de l'écoulement peut être décrite fidèlement par une seule harmonique ayant une longueur d'onde identique au profil de la surface (voir figure 3.3a). Pour $\zeta_0^+ \geq 27$ et $2\zeta_0/\lambda > 0.033$, le comportement observé n'est plus linéaire et le profil du cisaillement ne peut plus être décrit par une seule harmonique (voir figure 3.3b).

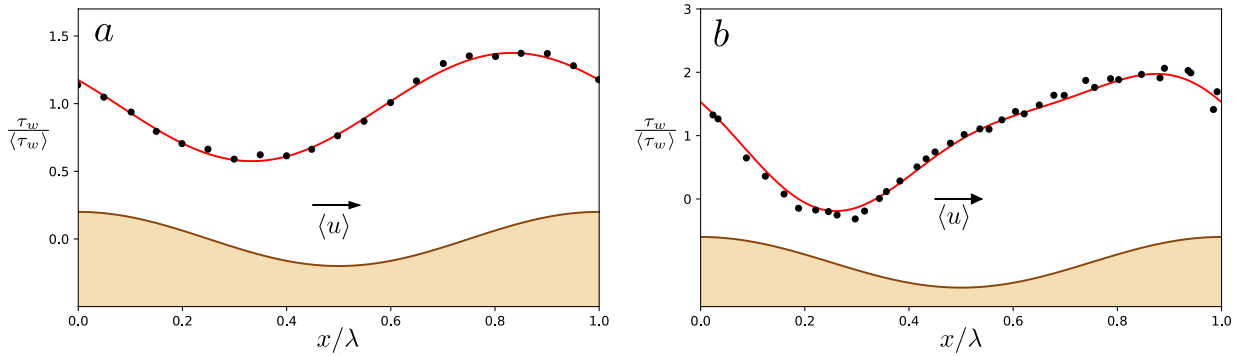


FIGURE 3.3. – Profil de cisaillement paroi. Symboles : mesures d'Hanratty *et al.*, ligne pleine : tracé de la fonction (3.25). (a) : $\alpha^+ = 0.00566$ et $\zeta_0^+ = 7.8$ (soit $2\zeta_0/\lambda = 0.014$) et $N = 1$, (b) : $\alpha^+ = 0.00303$ et $\zeta_0^+ = 51.9$ (soit $2\zeta_0/\lambda = 0.05$) et $N = 2$.

Le profil mesuré de la contrainte de cisaillement à la paroi est tracé sur la figure 3.3a pour $\alpha^+ = 0.00566$ et $\zeta_0^+ = 7.8$ (soit $2\zeta_0/\lambda = 0.014$) et sur la figure 3.3b pour $\alpha^+ = 0.00303$ et $\zeta_0^+ = 51.9$ (soit $2\zeta_0/\lambda = 0.05$). Les courbes rouges sont des tracés de la fonction :

$$\frac{\tau_w}{\langle \tau_w \rangle} = \sum_{n=0}^N a_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{\lambda} + \psi_n\right) \quad (3.25)$$

Dans le cas de la figure 3.3a, le cisaillement mesuré peut être décrit par la fonction (3.25) avec $N = 1$, ce qui correspond à une unique harmonique de même longueur d'onde que le profil de la paroi : le comportement observé est bien linéaire. À l'inverse, sur la figure 3.3b, on a besoin de deux harmoniques pour retrouver le profil de cisaillement obtenu expérimentalement, c'est-à-dire que $N = 2$ dans l'expression de la fonction (3.25) : la réponse de l'écoulement à la déformation de la paroi est non-linéaire.

Zilker *et al.* (1977) observent également que l'écart avec un comportement linéaire augmente non seulement lorsque l'amplitude des ondulations augmente, mais également lorsque le nombre de Reynolds imposé dans le canal hydraulique augmente (la taille du canal et la viscosité du fluide étant fixes, cela revient à augmenter la vitesse de l'écoulement). Autrement dit, le rapport entre les coefficients a_1 et a_2 de la première et de la deuxième harmonique utilisés pour s'accorder avec

3. Ces techniques expérimentales ne seront pas décrites en détail dans ce manuscrit. Le lecteur intéressé est renvoyé vers la bibliographie adéquate pour plus d'informations.

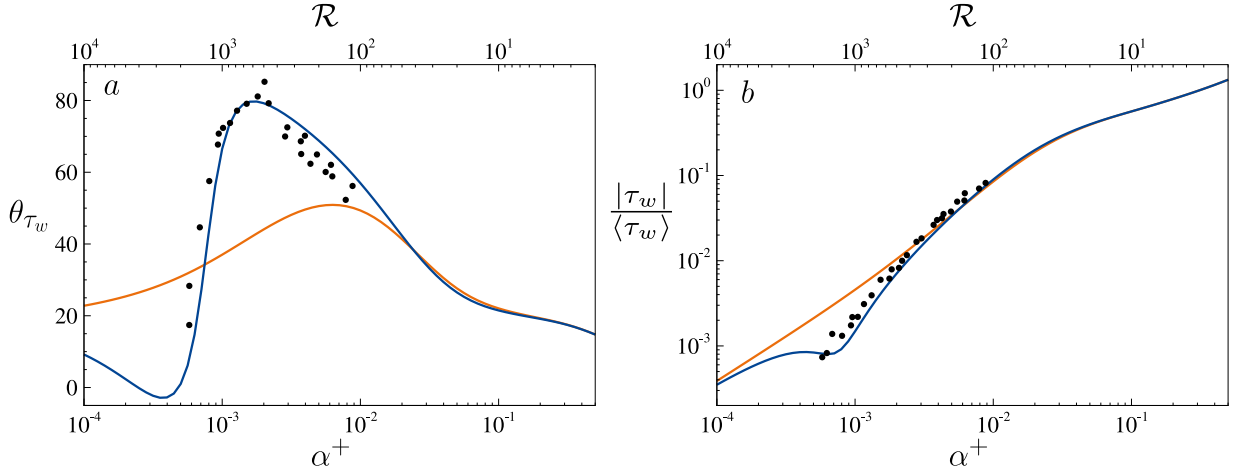


FIGURE 3.4. – Phase θ_{τ_w} (a) et amplitude $\frac{|\tau_w|}{\langle \tau_w \rangle}$ (b) du cisaillement parié en fonction du nombre d'onde adimensionné α^+ . Symboles : données expérimentales d'Hanratty *et al.*, lignes pleines : études de réponses linéaires forcées avec (bleu) et sans (orange) la correction d'Hanratty \mathcal{C} ($a_H = 1650$ et $b_H = 33$).

les observations expérimentales augmente. Zilker *et al.* (1977) notent qu'un écart significatif à une variation sinusoidale est obtenu lorsqu'une analyse de Fourier donne $a_2/a_1 \geq 0.116$, et en concluent qu'un comportement non-linéaire est observé à partir de $\zeta_0^+ \geq 27$.

On se placera dans la suite de notre étude dans des cas où la déformation de la paroi respecte les critères de linéarité identifiés par Zilker *et al.* (1977) pour que les études de réponses linéaires forcées puissent décrire correctement les configurations étudiées. Cela nous permettra également de garder pertinente la comparaison avec la base de données expérimentales d'Hanratty *et al.*

Déphasage et amortissement du cisaillement pariétal par rapport au profil de la paroi

Les résultats les plus remarquables des études expérimentales menées par Hanratty et ses co-auteurs concernent la réponse de la contrainte de cisaillement pariétale τ_w à la déformation de la surface. Celle-ci présente, dans le régime linéaire, un comportement inattendu pour une certaine gamme de nombre d'onde. En effet, si la figure 3.3a illustre bien la linéarité de la réponse du cisaillement pariétal à la déformation de la paroi, elle montre également l'apparition d'un déphasage de la fluctuation de la contrainte par rapport au profil de la paroi (ici pour un nombre d'onde $\alpha^+ = 0.00566$, soit pour $\mathcal{R} \approx 180$). En particulier, en faisant varier les conditions d'écoulement, Hanratty et ses co-auteurs remarquent expérimentalement que ce déphasage, qui sera noté θ_{τ_w} dans la suite, dépend du nombre d'onde α^+ des oscillations de la déformation, qui présente un pic (jusqu'à 90°) pour une gamme spécifique de longueurs d'onde ($0.00015 < \alpha^+ < 0.02$) (voir figure 3.4a). Pour cette même gamme de longueurs d'onde, on constate également un amortissement de l'amplitude $\frac{|\tau_w|}{\langle \tau_w \rangle}$ de la contrainte de frottement, qui s'atténue à mesure que le nombre d'onde diminue (voir figure 3.4b).

3.2.2. Comparaison avec les études de réponse linéaire forcée

Les données expérimentales sont comparées dans cette section aux études de la réponse linéaire forcée, et tracées sur les figures 3.4a et 3.4b en ce qui concerne la phase et l'amplitude du cisaillement à la paroi. Il est immédiatement apparent que le pic de déphasage observé expérimentalement n'est pas correctement prédit par le modèle de longueur de mélange standard (courbes oranges) (c'est-à-dire en utilisant l'expression (3.12) avec $b_H = 0$). En revanche, la correction proposée par Thorsness *et al.* (1978) (courbes bleues) permet d'obtenir de façon remarquable un bien meilleur accord avec les données expérimentales, tant pour la phase que pour l'amplitude du

cisaillement paroi. Ici, les constantes retenues pour la correction d'Hanratty sont celles d'Abrams et Hanratty (1985) : $b_H = 33$ et $a_H = 1650$. Notons que Frederick et Hanratty (1988) proposent $b_H = 35$ et $a_H = 1800$ tandis que Charru *et al.* (2013) utilisent $b_H = 35$ et $a_H = 2000$. Les résultats obtenus avec chacun de ces couples de constantes diffèrent quelque peu mais restent équivalents au regard de la dispersion des mesures. Cette dépendance du nombre de van Driest à un gradient de pression déphasé en espace traduit, d'après Charru *et al.* (2013), les variations d'épaisseur de la sous-couche visqueuse. En effet, pour $0.00015 < \alpha^+ < 0.02$, la perturbation ne pénètre que partiellement au sein de la région inertielle : ni les effets visqueux, ni les fluctuations turbulentes ne peuvent être négligées. Sur la face aval d'une ondulation, l'écoulement est accéléré tandis qu'à l'inverse, il est ralenti sur la face amont. Cela crée un gradient de pression tantôt négatif (favorable) tandis positif (adverse), résultant en une variation périodique de la sous-couche visqueuse de la région interne de la couche limite.

De la profondeur de pénétration de la perturbation dans la couche limite

L'importance de la profondeur de pénétration de la perturbation dans la couche limite sur ce problème a été largement discutée par Charru et Hinch (2000). En particulier, trois régimes de réponse de l'écoulement à la déformation de la paroi peuvent être identifiés.

Le premier régime, nommé *régime visqueux peu profond* par Charru et Hinch (2000), correspond aux petites valeurs de \mathcal{R} (grands nombres d'onde). Pour $\mathcal{R} < 50$, la perturbation de vorticit   reste confin  e    la sous-couche visqueuse, dans laquelle le profil de vitesse est lin  aire. Charru et Hinch (2000) d  finissent la profondeur de p  n  tration de la perturbation δ_i pour ces nombres de Reynolds comme   tant le rapport entre l'advection longitudinale ($\propto \mathcal{K} (u_\tau^2/\nu) \delta_i$) et la diffusion visqueuse ($\propto \nu/\delta_i^2$) :

$$\delta_i \propto \delta_\nu \mathcal{R}^{1/3} \quad (3.26)$$

Le d  phasage de la contrainte de cisaillement dans ce r  gime est une cons  quence directe du bilan de quantit   de mouvement. En effet, ce dernier se r  duit, dans le cas d'un canal plan avec une paroi sinuso  dalement d  form  e,    l'expression ⁴ :

$$\frac{\partial (\langle \tau_{xz} \rangle + \alpha \zeta_0 e^{i\alpha x} \hat{\tau}_{xz})}{\partial \eta} = \frac{\partial (\langle p \rangle + \alpha \zeta_0 e^{i\alpha x} \hat{p})}{\partial x} \quad (3.27)$$

En int  grant doublement ce bilan de quantit   de mouvement entre la paroi (en $\eta = 0$) et la hauteur de canal (en $\eta = 1$) et sur une demi p  riode d'oscillation de la paroi (entre 0 et $\lambda/2$), on obtient :

$$-\langle \tau_{xz} \rangle(0) \frac{\lambda}{2} - \frac{2i\zeta_0}{\alpha} \hat{\tau}_{xz}(0) = \Delta \langle p \rangle - 2\zeta_0 \Delta \hat{p} \quad (3.28)$$

$\Delta \langle p \rangle = \langle p \rangle \left(\frac{\lambda}{2} \right) - \langle p \rangle(0)$ est le gradient de pression int  gral et $\Delta \hat{p} = \hat{p} \left(\frac{\lambda}{2} \right) - \hat{p}(0)$ la fluctuation correspondante. La variation de la g  om  trie due    l'ondulation de la paroi sur une demi p  riode implique un   largissement de la section, et donc, d'apr  s le principe de Bernoulli, une diminution de la vitesse de l'  coulement et une augmentation de la pression. On en d  duit notamment que $\Delta \hat{p} \neq 0$, et en particulier que sa partie r  elle n'est pas nulle : les ondulations de la paroi causent une variation p  riodique du gradient de pression le long de l'ondulation. Par cons  quent, la partie imaginaire de $\hat{\tau}_{xz}(0) = \hat{\tau}_w$ ne peut pas   tre nulle : il y a bien apparition d'un d  phasage du cisaillement    la paroi. Sur la demi p  riode $\left[\frac{\lambda}{2}; \lambda \right]$, un raisonnement similaire peut   tre tenu, avec simplement inversion du signe dans l'  quation (3.28). Ici, les fluctuations turbulentes n'ont pas d'influence sur la cr  ation d'un d  phasage de la contrainte de cisaillement. Pour cette raison, la fermeture turbulente n'a pas d'importance pour ces valeurs de \mathcal{R} . C'est d'ailleurs confirm   par les

4. Les notations utilis  es sont les m  mes que pour l'  tude de r  ponse lin  aire forc  e.

résultats des études de réponse linéaire forcée puisque, comme le montre la figure 3.4, les modèles de longueur de mélange corrigé et non corrigé par Hanratty prédisent le même comportement de τ_w pour $\mathcal{R} < 50$. Notons que la déformation sinusoidale de la paroi implique l'apparition d'une composante continue non nulle au second ordre du cisaillement τ_w . Celle-ci sera toujours négligée dans les analyses linéaires qui se limitent au développement au premier ordre.

Le troisième régime correspond aux grands nombres de Reynolds, pour $\mathcal{R} > 10000$ (c'est à dire aux ondulations de grandes longueurs d'onde), nommé par Charru et Hinch (2000) le *régime non-visqueux*. Comme le sous-entend cette dénomination, la perturbation de vorticité dans ce régime s'étend au-delà de la sous-couche visqueuse, jusque dans la région inertielle. Les effets dus aux fluctuations turbulentes y sont alors prépondérants devant les effets visqueux et ne peuvent donc plus être négligés. Cependant, des mesures de vitesse dans ce régime (Finnigan *et al.*, 1990; Poggi *et al.*, 2007; Claudin *et al.*, 2013) ont confirmé l'augmentation linéaire de la longueur de mélange avec la distance à la paroi dans la zone logarithmique. Les simulations numériques de la région interne de la couche limite sont peu affectées par le choix de la fermeture turbulente tant que l'évolution linéaire de la longueur de mélange est conservée dans la zone logarithmique (Ayotte *et al.*, 1994).

Le régime intermédiaire, que Charru et Hinch (2000) nomment *regime visqueux profond*, et que nous nommerons *regime transitionnel*⁵, correspond aux nombres de Reynolds \mathcal{R} compris entre 50 et 10000. Dans ce régime, la perturbation de vorticité diffuse plus profondément dans la région interne de la couche limite, jusque dans la zone tampon. Les effets inertiels et les effets visqueux y sont en compétition, et le choix de la fermeture turbulente a une grande influence sur le champ de perturbations obtenu. Les études de réponses linéaires forcées montrent la mise en défaut du modèle de longueur de mélange dans ce régime, qui ne parvient pas à retrouver les résultats expérimentaux en ce qui concerne la phase et l'amplitude du cisaillement. Thorsness *et al.* (1978), puis Abrams et Hanratty (1985) et Frederick et Hanratty (1988) montrent alors la nécessité d'utiliser la correction d'Hanratty \mathcal{C} pour améliorer les résultats, et en particulier reproduire l'évolution de θ_{τ_w} en fonction de $\alpha^+ = \mathcal{R}^{-1}$. Cependant, comme expliqué par Abrams et Hanratty (1985) et Mao et Hanratty (1986), l'introduction de cette correction n'est pas totalement satisfaisante car elle décrit le phénomène observé de façon purement empirique. L'équation de relaxation utilisée pour obtenir le gradient de pression « effectif » dépend du paramètre arbitraire a_H et aucune justification physique n'est apportée. Un certain nombre de zones d'ombre restent à éclaircir afin de comprendre les mécanismes physiques régissant l'écoulement dans ce régime, que l'on s'attachera à étudier dans la suite de ce manuscrit.

3.2.3.  tude du transport d'un scalaire passif

Parmi les différentes situations géophysiques évoquées dans le chapitre 1 et pour lesquelles on observe l'apparition de coups de gouge, on retrouve un certain nombre de mécanismes physiques responsables de l'érosion du matériau de surface (transport de sédiment, sublimation, dissolution, fusion, oxydation, etc...). Une première approche possible pour étudier ces phénomènes est de les décrire par advection-diffusion d'un scalaire passif. Celui-ci peut alors représenter une température, afin de considérer des phénomènes de fusion ou de sublimation, mais également la concentration d'une espèce chimique qui serait responsable de l'oxydation de la surface érodée. Cette approche a notamment été combinée aux travaux d'Hanratty au moyen d'analyses linéaires par Claudin *et al.* (2017), en incorporant les effets de rugosité de la paroi. La dynamique de l'écoulement est résolue à l'aide du système (3.23), pour lequel le modèle de longueur de mélange utilisé est présenté dans la section suivante. L'écoulement étant supposé incompressible, on fait l'hypothèse que l'équation de transport du scalaire n'est pas couplée au bilan de quantité de mouvement.

5.   ne pas confondre avec la transition laminaire turbulent, il s'agit d'un régime de réponse de l'écoulement à la déformation de la paroi.

Modèle de longueur de mélange incluant les effets de rugosité

Bien que les effets de rugosité de la paroi ne soient pas étudiés au cours de cette thèse, le modèle utilisé par Claudin *et al.* (2017) est présenté ici par souci d'exhaustivité. Afin de prendre en compte d'éventuels effets de rugosité, le modèle de longueur de mélange considéré par Claudin *et al.* (2017) diffère légèrement du modèle présenté précédemment (2.55) :

$$l = \kappa (z + rd - \zeta(x)) \left[1 - \exp \left(- \frac{\sqrt{\tau_{xz}/\rho} (z + sd - \zeta(x))}{A\nu} \right) \right] \quad (3.29)$$

La rugosité de la paroi est représentée par le diamètre du grain de sable équivalent d . $r = 1/30$ et $s = 1/3$ sont deux nombres sans dimensions, calibrés à partir de données expérimentales (Schultz et Flack, 2009; Flack et Schultz, 2010). On définit le nombre de Reynolds basé sur le diamètre de l'élément rugueux : $\mathcal{R}_d = \frac{du_\tau}{\nu}$. Le diamètre de rugosité est adimensionné par le nombre d'onde α : $\alpha d = \mathcal{R}_d/\mathcal{R}$. La longueur de mélange pour l'écoulement de base devient :

$$\langle l \rangle = \kappa \left(\eta + r \frac{\mathcal{R}_d}{\mathcal{R}} \right) \left[1 - \exp \left(\frac{-\mathcal{R} \left(\eta + s \frac{\mathcal{R}_d}{\mathcal{R}} \right)}{A^0} \right) \right] \quad (3.30)$$

À l'ordre 1, le modèle inclut également la correction d'Hanratty :

$$\hat{l}(\eta) = \kappa \left[-1 + \exp \left(- \frac{\mathcal{R} \left(\eta + s \frac{\mathcal{R}_d}{\mathcal{R}} \right)}{A^0} \right) \left(1 - \frac{\mathcal{R} \left(\eta + r \frac{\mathcal{R}_d}{\mathcal{R}} \right)}{A^0} + \frac{\mathcal{R} \left(\eta + r \frac{\mathcal{R}_d}{\mathcal{R}} \right) \left(\eta + s \frac{\mathcal{R}_d}{\mathcal{R}} \right)}{A^0} \left(\frac{\hat{\tau}_{xz}}{2} - b_{HC} \right) \right) \right] \quad (3.31)$$

Cette expression de la longueur de mélange est complètement équivalente à l'équation (3.12) pour $\mathcal{R}_d = 0$.

Transport d'un scalaire

On considère un scalaire passif ϕ transporté par l'écoulement et qui représente par exemple la concentration d'une espèce chimique ou la température, dont la dynamique est modélisée par l'équation d'advection-diffusion suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = 0 \quad (3.32)$$

\mathbf{f} est le flux associé, défini comme la somme d'un terme convectif et d'un terme diffusif :

$$\mathbf{f} = \mathbf{u}\phi - D\nabla\phi \quad (3.33)$$

Le coefficient de diffusion D est pris proportionnel à la viscosité turbulente, avec les nombres de Prandtl (pour la température) turbulent Pr_t et visqueux Pr_ν , ou Schmidt (pour les transferts de matière, respectivement β_t et β_ν) constants :

$$D = \frac{l^2 |S|}{\beta_t} + \frac{\nu}{\beta_\nu} \quad (3.34)$$

Une valeur typique pour les liquides et les gaz du nombre de Schmidt turbulent est 0.7 (respectivement 0.9 pour le nombre de Prandtl turbulent). La diffusivité moléculaire β_ν peut prendre des valeurs allant de 1 (diffusion de particules dans un gaz idéal) à 10^3 (diffusion de molécules ou d'ions dans un liquide). À l'état de base, l'écoulement est considéré stationnaire et homogène dans

la direction longitudinale, de telle sorte que l'équation (3.32) se réduit à $\frac{\partial f_z}{\partial z} = 0$, soit $f = f_0$ constant. L'évolution verticale du scalaire transporté est donnée par l'équation (3.35), dans le cas du transport de la concentration d'une espèce chimique (équation similaire avec les nombres de Prandtl pour la température) :

$$\left(\frac{l^2 |S|}{\beta_t} + \frac{\nu}{\beta_\nu} \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} = -f_0 \quad (3.35)$$

Pour résoudre cette équation, une condition limite à la paroi est nécessaire. Celle-ci dépend de la nature du scalaire transporté mais peut s'écrire de manière générique $\phi(0) = \phi_0$.

Équations linéarisées

Le transport du scalaire ϕ est linéarisé à partir de l'équation (3.35) de manière similaire à ce qui a été fait pour les équations de quantité de mouvement. Claudin *et al.* (2017) prennent l'exemple pour la suite du transport de la concentration d'une espèce chimique. Toutefois, les développements concernant la température sont identiques, une fois les équations adimensionnées (Chedevergne *et al.*, 2023). La concentration du scalaire est adimensionnée par f_0/u_τ et on utilise la décomposition (3.4) : $\phi - \phi_0 = \frac{f_0}{u_\tau} (\langle \phi \rangle + \alpha \zeta_0 e^{i\alpha x} \hat{\phi})$. Le flux f , constant à l'état de base, est lui adimensionné par f_0 : $f = f_0 (1 - \alpha \zeta_0 e^{i\alpha x} \hat{f})$. L'écoulement de base est donné par l'équation :

$$\left(\frac{\langle l \rangle^2 \langle u \rangle_{,\eta}}{\beta_t} + \frac{\mathcal{R}^{-1}}{\beta_\nu} \right) \langle \phi \rangle_{,\eta} + 1 = 0 \quad (3.36)$$

À partir de l'équation (3.34), le coefficient de diffusion s'exprime :

$$D = \frac{u_\tau}{\alpha} \left[\frac{\langle l \rangle^2 \langle u \rangle_{,\eta}}{\beta_t} + \frac{\mathcal{R}^{-1}}{\beta_\nu} \right] + \left[\frac{1}{\beta_t} (\hat{u}_{,\eta} + i\hat{w}) \langle l \rangle^2 + 2 \langle l \rangle \langle u \rangle_{,\eta} {}^2\hat{l} \right] \alpha \zeta_0 e^{i\alpha x} \quad (3.37)$$

La linéarisation de l'équation (3.35) donne :

$$\hat{f}_{,\eta} = i \langle \phi \rangle \hat{u} + \left(i \langle u \rangle + \frac{\langle l \rangle^2 \langle u \rangle_{,\eta}}{\beta_t} + \frac{\mathcal{R}^{-1}}{\beta_\nu} \right) \hat{\phi} \quad (3.38)$$

Avec, à partir de la définition (3.33) du flux, et du coefficient de diffusion linéarisé (3.37) :

$$\hat{f} = \left(\frac{\langle l \rangle^2 \langle u \rangle_{,\eta}}{\beta_t} + \frac{\mathcal{R}^{-1}}{\beta_\nu} \right) \hat{\phi}_{,\eta} + \left[\frac{1}{\beta_t} (\hat{u}_{,\eta} + i\hat{w}) \langle l \rangle^2 + 2 \langle l \rangle \langle u \rangle_{,\eta} {}^2\hat{l} \right] \langle \phi \rangle_{,\eta} - \hat{w} \langle \phi \rangle \quad (3.39)$$

Deux conditions limites doivent être spécifiées pour résoudre le système formé par les équations (3.38, 6.3). Pour les problèmes de dissolution, Claudin *et al.* (2017) utilisent une loi de type Hertz-Knudsen qui lie le flux f à la concentration ϕ de l'espèce à la surface :

$$f = \mathcal{A}(\phi_{sat} - \phi) \quad (3.40)$$

\mathcal{A} désigne une constante de réaction cinétique, typiquement de l'ordre de 10^{-5} m/s pour les problèmes de dissolution, et ϕ_{sat} la concentration de saturation. Cette condition, linéarisée, donne :

$$\hat{f}(0) = \frac{\mathcal{A}}{u_\tau} (\langle \phi \rangle_{,\eta}(0) + \hat{\phi}(0)) \quad (3.41)$$

De plus, loin de la paroi, le flux est considéré constant, c'est-à-dire que $\hat{f}(\infty) = 0$.

Régression de la paroi

On s'intéresse désormais à la régression de la paroi : le profil de celle-ci devient une fonction du temps. De plus, on considère que le temps d'évolution de la surface est grand devant les temps caractéristiques de l'écoulement. Les dérivées temporelles dans les équations de Navier–Stokes sont donc négligées et la dynamique de l'écoulement ainsi que le transport d'un scalaire sont toujours résolus à partir des équations dérivées dans ce chapitre (système (3.23), équations (3.38) et (6.3)). L'évolution temporelle de la paroi est exprimée en fonction d'un taux d'accroissement temporel σ et d'une fréquence angulaire Ω :

$$\zeta(x, t) = \zeta_0 e^{\sigma t + i\Omega t + i\alpha x} \quad (3.42)$$

En considérant la régression de la paroi proportionnelle au flux f , on a, à l'ordre 1 :

$$\sigma + i\Omega = f_0 \alpha \hat{f}(0) \quad (3.43)$$

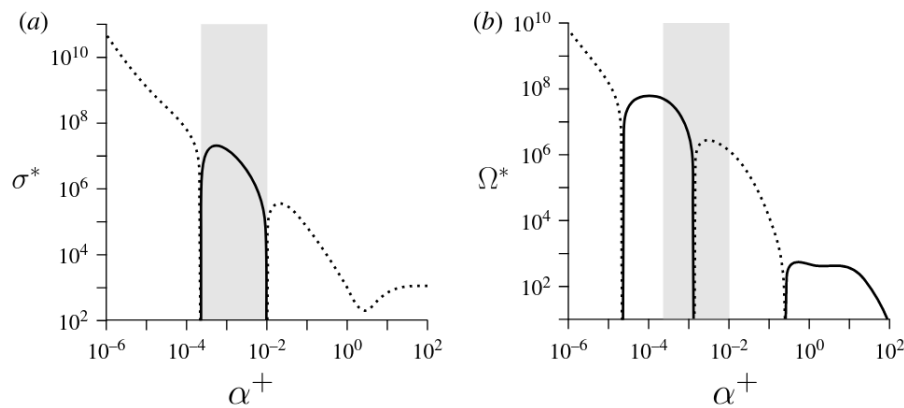


FIGURE 3.5. – Taux d'amplification temporel σ^* (a) et fréquence angulaire Ω^* (b) adimensionnés en fonction du nombre d'onde α^+ . Lignes pleines : valeurs positives, lignes pointillées : valeurs négatives ($-\sigma$ et $-\Omega$ sont tracés dans ce cas là). Valeurs calculées à partir de $\beta_\nu = 1000$ et $\mathcal{R}_d = 10$, figure extraite de Claudin *et al.* (2017).

Les résultats de Claudin *et al.* (2017) sont reproduits sur la figure 3.5. L'érosion de la paroi étant proportionnelle au flux de matière f , lui même contrôlé par la concentration ϕ et le coefficient de diffusion D , le mécanisme d'érosion peut être décrit de la façon suivante. Pour de grands nombres d'onde α^+ , le coefficient de diffusion est constant car la perturbation de vorticité est confinée à la sous-couche visqueuse. Les fluctuations turbulentes n'interviennent pas dans la diffusion de l'espée chimique, dominée par les effets visqueux. Dans ce régime, on observe un taux d'accroissement temporel négatif : la concentration de l'espée chimique est maximale au niveau d'une crête et minimale dans un creux de la déformation de la paroi. Le coefficient de diffusion étant constant, le flux y est maximal également, et le taux d'érosion est plus important au niveau d'une crête plutôt qu'au niveau d'un creux. Il y a donc un effet stabilisateur puisque la déformation de la paroi va avoir tendance à s'atténuer. De même, pour de petits nombres d'onde, on a $\sigma < 0$. Cette fois, le coefficient de diffusion n'est plus constant, mais contrôlé par les fluctuations turbulentes. Cependant, dans ce régime, la turbulence est plus importante au niveau des crêtes : le mécanisme d'érosion va là encore avoir un effet stabilisateur.

Dans le régime transitionnel, on trouve toutefois un taux d'amplification temporel positif. Cette fois, en raison de l'influence du gradient de pression, la turbulence est maximale au niveau des creux et minimale au niveau des crêtes de la déformation. Celle-ci va s'amplifier et émerger lors de l'érosion de la surface.

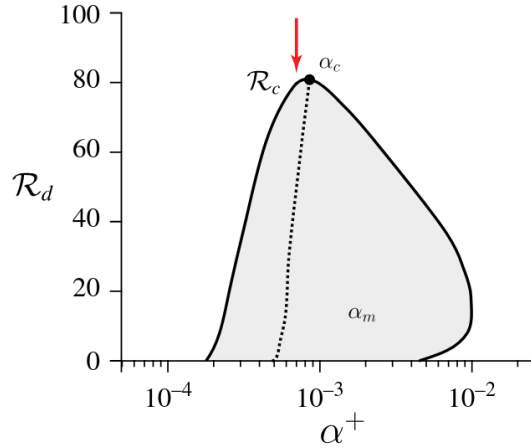


FIGURE 3.6. – Évolution de la zone d’instabilité en fonction de \mathcal{R}_d et α^+ , pour $\beta_\nu = 1000$ et de petites valeurs de \mathcal{A}/u_τ . Zone grise : $\sigma > 0$, ligne pleine : $\sigma = 0$, ligne pointillée : localisation du mode le plus instable (*i.e* pour σ maximal). Figure extraite de Claudin *et al.* (2017).

Influence de la rugosité

Claudin *et al.* (2017) se sont également penchés sur l’influence de la rugosité de la paroi sur l’amplification de la déformation. Le résultat majeur de cette étude, illustré sur la figure 3.6, est que la zone d’instabilité identifiée ci-dessus pour laquelle le taux d’accroissement temporel de la paroi est positif se réduit lorsque le nombre de Reynolds rugueux \mathcal{R}_d augmente, jusqu’à disparaître lorsque celui-ci atteint une valeur critique, notée \mathcal{R}_c . Le nombre d’onde correspondant au mode le plus instable (*i.e* pour lequel la valeur de σ est maximale), noté α_c , évolue peu, passant de $\alpha_c = 5 \times 10^{-4}$ pour $\mathcal{R}_d = 0$ à $\alpha_c = 9 \times 10^{-4}$ pour $\mathcal{R}_d = \mathcal{R}_c$. Pour cette longueur d’onde, \mathcal{R}_c est d’environ 80. À mesure que l’instabilité se développe et que la paroi croît, la rugosité apparente augmente. En convertissant la déformation de la paroi en une hauteur de grain de sable équivalent d , Claudin *et al.* (2017) trouvent que la valeur $\mathcal{R}_d = \mathcal{R}_c \approx 80$ est atteinte pour $\alpha\zeta_0 \approx 0.16$. Claudin *et al.* (2017) en concluent que l’augmentation de la rugosité de la paroi a un caractère stabilisant. De plus, la valeur $\alpha\zeta_0 \approx 0.16$ étant supérieure à la valeur identifiée par Zilker *et al.* (1977) et Charru *et al.* (2013) pour espérer un comportement linéaire de l’écoulement, cela suggère que l’on sort du régime de réponse linéaire avant la stabilisation complète de la paroi par effet rugueux. Ce phénomène n’est pas exploré plus en détail par Claudin *et al.* (2017), qui proposent en particulier de s’intéresser à l’évolution de la rugosité de la paroi au cours du temps pour de futures études.

Conclusion

Les résultats présentés par Claudin *et al.* (2017) ne permettent toutefois pas de mettre en lumière l’existence d’une unique longueur d’onde correspondant à la taille des coups de gouge, et que l’on pourrait rapprocher des valeurs données par Thomas (1979) ($\alpha^+ = 6.3 \times 10^{-3}$, soit $\mathcal{R} = 160$). Claudin *et al.* (2017) identifient ainsi une vaste gamme de nombres d’onde ($10^{-4} < \alpha^+ < 10^{-2}$) pour lesquels le taux d’accroissement est positif, avec une longueur d’onde la plus instable (taux d’accroissement maximal) située aux alentours de $\alpha^+ = 5 \times 10^{-4}$, inférieure d’une décade à la valeur déterminée empiriquement par Thomas (1979).

Bilan

Historiquement, de nombreuses études expérimentales et théoriques ont été menées afin de comprendre l'influence d'une petite déformation sinusoïdale de la paroi sur l'écoulement. Les travaux fondateurs d'Hanratty *et al.* ont permis de mettre en avant un phénomène de déphasage de la contrainte de cisaillement pariétale par rapport à la paroi qu'un modèle de turbulence de type longueur de mélange ne permet pas de retrouver. Une dépendance du nombre de van Driest à un gradient de pression *effectif* régi par une équation de relaxation mise en place par Thorsness *et al.* (1978), et utilisée par la suite par Charru *et al.* (2013) permet de corriger efficacement le modèle de longueur de mélange. Cependant, cette correction est introduite empiriquement, et malgré son efficacité dans les études de réponses linéaires forcées, elle ne permet pas d'expliquer les mécanismes physiques sous-jacents.

Ces travaux ont été repris plus tard dans le cadre de l'étude de l'apparition d'ondulations de surface sur des parois érodables (Fourriere *et al.*, 2010; Charru *et al.*, 2013; Claudin *et al.*, 2017), mettant en lumière la nécessité de prendre en compte le phénomène de relaxation de la contrainte de cisaillement observée par Hanratty *et al.* Claudin *et al.* (2017) ont ainsi utilisé cette correction afin de s'intéresser au transport d'un scalaire passif (température, concentration d'une espèce chimique) dont le flux serait responsable de la régression de la paroi. Bien qu'ils aient identifié une gamme de nombres d'onde instables, pour lesquels le taux d'amplification temporel de la déformation de la paroi est positif, ces résultats ne permettent pas de retrouver les valeurs de la corrélation de Thomas (1979).

Ce chapitre clôture l'état de l'art de ce manuscrit. La suite est consacrée à la démarche mise en place et aux résultats obtenus.

Deuxième partie

Démarche et travaux effectués

Simulation numérique de l'essai en vol TATER

L'objectif de ce chapitre est d'identifier les conditions d'apparition des coups de gouge sur la pointe avant d'un véhicule de rentrée. Pour cela, on se base sur l'essai en vol TATER (Hochrein et Wright, 1976; McAlees et Maydew, 1985), présenté dans le chapitre 1. Des simulations numériques de l'essai ont été réalisées en utilisant le code Navier–Stokes du CEA-CESTA. Pour cela, il a fallu recréer, à partir des données disponibles dans la littérature, une trajectoire et des conditions de vol représentatives de l'essai TATER. En raison du caractère confidentiel de l'essai TATER à l'époque où il a été mené, un certain nombre d'hypothèses ont du être émises afin de compléter les données publiées. Une comparaison entre les données expérimentales disponibles et la simulation a ensuite permis de conclure sur la représentativité globale de l'état de l'écoulement autour du corps de rentrée obtenu par la simulation. Une fois validée, cette simulation a pu fournir des informations concernant les conditions de l'écoulement aux premiers instants de l'apparition des coups de gouge sur la pointe avant de l'objet, et notamment des ordres de grandeurs caractéristiques de la couche limite. Avec les hypothèses émises pour retranscrire cet essai le plus fidèlement possible, les données obtenues ont permis de comparer favorablement la taille caractéristique longitudinale des coups de gouges observés sur l'essai TATER à la corrélation de Thomas (1979). On a également pu vérifier que, en première approche, l'incompressibilité de la région interne de la couche limite peut être supposée. Cette hypothèse nous permet de justifier l'intérêt d'étudier le lien entre longueur d'onde caractéristique longitudinale des creusements et longueur visqueuse, hypothèse émise par la corrélation de Thomas (1979).

Sommaire

4.1. Reconstruction numérique de l'essai TATER	56
4.1.1. Géométrie	56
4.1.2. Reconstruction de la trajectoire de l'essai	56
4.1.3. Paramètres de calcul	57
4.1.4. Représentativité de la simulation	58
4.2. Grandeurs caractéristiques lors de l'apparition des coups de gouge	61
4.2.1. Champs de pression et de nombre de Mach autour de l'objet	61
4.2.2. Ordres de grandeur dans la couche limite	62
4.2.3. Comparaison des coups de gouge de l'essai TATER avec la corrélation de Thomas (1979)	63
Bilan	66

4.1. Reconstruction numérique de l'essai TATER

Ce chapitre a pour but de reconstruire numériquement l'essai en vol TATER (Hochrein et Wright, 1976; McAlees et Maydew, 1985), présenté dans le chapitre 1, car celui-ci constitue l'un des rares essais en vol disponibles dans la littérature permettant d'observer l'apparition des coups de gouge sur la surface de l'objet. Nous disposons pour cela du code Navier-Stokes du CEA-CESTA, et nous allons réaliser un calcul couplé aérothermique-ablation dans une configuration inspirée de l'essai TATER, le long d'une trajectoire reconstruite à partir des données disponibles dans la littérature.

4.1.1. Géométrie

La stratégie retenue est de réaliser une simulation bidimensionnelle axisymétrique sur une géométrie de type *sphère-cône* représentant la pointe avant de l'essai TATER. D'après les données disponibles dans la littérature (Hochrein et Wright, 1976; McAlees et Maydew, 1985), la partie sphérique de la pointe avant est de rayon 1.27 cm avec un cône dont le demi-angle est de 9° (voir figure 4.1).

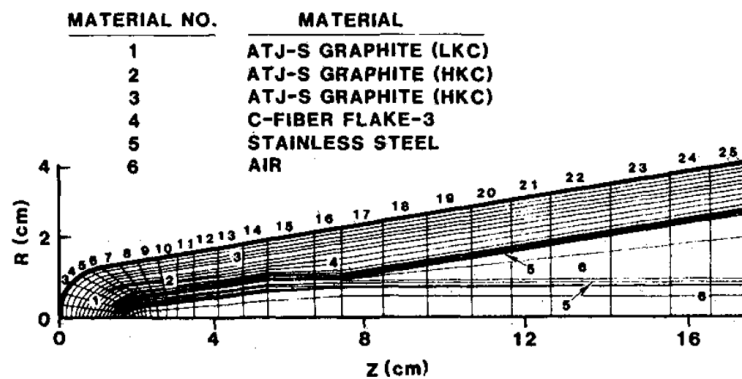


FIGURE 4.1. – Géométrie de l'essai TATER, figure extraite de McAlees et Maydew (1985).

Pour tenir compte de l'ablation de l'objet dans ces simulations, il a été nécessaire de mailler non seulement le domaine fluide, mais également l'objet. Le calcul ainsi réalisé est parallélisé sur une configuration de maillage multi-blocs structuré.

4.1.2. Reconstruction de la trajectoire de l'essai

Afin de mener le calcul, la trajectoire suivie par l'essai TATER a dû être reconstruite. Il s'agit d'une trajectoire ascendante, mais les conditions rencontrées sont représentatives des mécanismes d'ablation à l'œuvre lors des phases de rentrée (Hochrein et Wright, 1976; McAlees et Maydew, 1985). La trajectoire de l'objet est décrite par l'évolution de son altitude au cours du temps et par l'écoulement à l'infini amont correspondant (vitesse, pression, température...). Les altitudes et vitesses correspondant à la trajectoire de l'objet ont pu être extraites des différentes publications relatives à l'essai TATER (Hochrein et Wright, 1976; Kryvoruka, 1976; McAlees et Maydew, 1985), et sont tracées sur la figure 4.2. En revanche, les conditions de pression et de température, dépendant de la météo du jour, n'ont jamais été publiées. Or, d'après Hochrein et Wright (1976), l'essai a eu lieu le 14 août 1973, sur le site d'essai de Tonopah, dans le Nouveau-Mexique. Les archives de la *National Oceanic and Atmospheric Administration*¹ indiquent que ce jour là, la température au sol était d'environ 35°C . L'altitude maximale atteinte par le lanceur TATER n'excédant pas les 5 km, nous pouvons estimer l'évolution de la température le long de la trajectoire à partir d'un modèle d'atmosphère standard, dans lequel la température décroît linéairement

1. <https://www.weather.gov/>

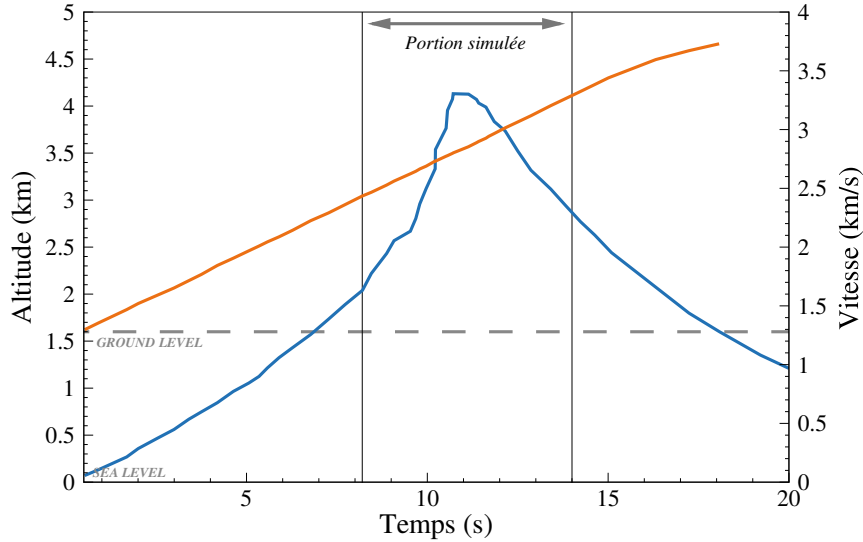


FIGURE 4.2. – Trajectoire de l'essai TATER en fonction du temps. Bleue : vitesse, en km/s, orange : altitude en km. Les tirets représentent l'altitude du site de l'essai, par rapport au niveau de la mer.

en fonction de l'altitude, diminuant de 6.5° C tous les 1000 m. Dans ces conditions, l'évolution de la pression est quant à elle donnée par la formule (4.1) :

$$p = p_0 \exp\left(\frac{-7g}{2C_p T_0} z\right) \quad (4.1)$$

avec p_0 la pression au niveau du sol, estimée en fonction des conditions du jour à 855 hPa², g l'accélération de la pesanteur, prise égale à 9.81 m/s^2 , $C_p = 1006 \text{ J/kg/K}$ la capacité calorifique de l'air à pression constante, z la hauteur par rapport au sol, en m et T_0 la température au sol, en K. Ces différentes estimations ont ainsi permis de reconstruire une trajectoire que nous pensons représentative de celle de l'essai TATER. Les informations disponibles dans la littérature traitant de cet essai n'étant pas exhaustives, il est toutefois impossible de dire *a priori* si cette trajectoire est pleinement satisfaisante. C'est pourquoi nous nous attacherons dans un premier temps à vérifier la cohérence de la simulation réalisée par rapport aux données publiées par Hochrein et Wright (1976) et McAlees et Maydew (1985).

4.1.3. Paramètres de calcul

Présentation du code aérothermique du CEA-CESTA

Le code d'aérothermique utilisé dans cette étude, développé au CEA-CESTA (Loridan *et al.*, 2023), permet le couplage d'un solveur Navier–Stokes (pour la partie fluide) et d'un module de conduction de la chaleur permettant de calculer la réponse thermique du solide. Ce code permet de traiter des cas supers et hypersoniques bidimensionnels, plans ou axisymétriques, mais également des géométries 3D. En ce qui concerne la partie fluide, le code résout les équations de Navier–Stokes pour des écoulements en équilibre chimique (l'air est considéré comme une espèce unique) ou non (en considérant des écoulements multi-espèces). Dans tous les cas, on suppose l'équilibre thermique du fluide. D'un point de vue numérique, le code est conçu pour des maillages multi-blocs structurés. Les flux non-visqueux, discrétisés à partir d'un schéma de Roe modifié pour être adapté à la capture d'un choc et au traitement multi-espèces, sont obtenus à l'aide d'une

2. Notons que le site d'essai se situe à une altitude d'environ 1600 m, ce qui explique, en plus des conditions anticycloniques du jour, cette valeur d'environ 0.85 bar retenue pour la pression atmosphérique au sol dans notre estimation.

formulation volumes finis. Les flux visqueux sont quant à eux décrits grâce à un schéma aux différences finies au second ordre, et l'intégration temporelle des équations de Navier–Stokes est résolue à travers un schéma implicite. Le solveur permettant d'obtenir la réponse thermique du matériau résout quant à lui l'équation de diffusion de l'énergie, et est lui aussi conçu pour des maillages multi-blocs structurés. Les flux thermiques sont également discrétisés *via* un schéma aux différences finies au second ordre. Si la résolution à l'intérieur du solide reste stationnaire, avec un schéma implicite, la diffusion thermique est elle considérée instationnaire.

Les simulations considérant l'ablation du matériau reposent sur un couplage entre fluide et thermique. Étant donné que l'écoulement est considéré stationnaire, contrairement à la conduction de la chaleur dans l'objet, ce couplage est principalement régi par les échelles de temps liées à la régression de la surface lors de l'ablation. Plusieurs options pour calculer le taux de recul de la paroi sont possibles, en fonction du choix de modélisation du gaz dans le solveur fluide. Dans notre cas, l'air étant considéré comme une unique espèce, l'équilibre chimique est supposé. Les effets de soufflage ne sont alors pris en compte que dans le modèle d'ablation pour calculer la récession de la paroi et ajuster le flux thermique pariétal utilisé comme condition limite, et l'injection des gaz d'ablation dans la couche limite est négligée. À chaque pas de temps, un taux d'ablation est ainsi estimé, permettant de calculer une nouvelle géométrie. Les méthodes numériques présentées dans ce paragraphe sont détaillées par [Loridan et al. \(2023\)](#).

Paramètres de simulation

Une simulation numérique de l'essai le long de la trajectoire reconstruite a été réalisée sur une portion représentative des conditions de rentrée atmosphérique menant à l'apparition des coups de gouge. Pour des raisons de temps de calcul, seule une portion réduite de la trajectoire a été simulée, entre 8.2 s et 14 s. En effet, l'objectif de ces simulations est d'obtenir un aperçu des conditions de l'écoulement lorsqu'apparaissent les coups de gouge. Or, d'après [Hochrein et Wright \(1976\)](#), ces motifs se sont formés dans le cas de l'essai TATER aux alentours de 10 secondes après le lancement. De plus, [Hochrein et Wright \(1976\)](#) montrent, comme rappelé au chapitre 1 de ce manuscrit, que la transition vers la turbulence a lieu très tôt, à peine 2.5 s à 5 s après le début du vol. C'est pourquoi nous considérons un écoulement pleinement turbulent autour de l'objet dans nos simulations. Le modèle de turbulence utilisé est un modèle Baldwin-Lomax ([Baldwin et Lomax, 1978](#)), modèle algébrique à zéro équation de transport reposant sur un principe de longueur de mélange. L'augmentation des flux thermiques pariétaux due à la rugosité de la paroi est prise en compte à travers la corrélation de Powars (voir [Amar et Powars \(2011\)](#)), prise avec une hauteur de rugosité équivalente de 50 μm et effective aux temps longs ($t > 11$ s). Enfin, le matériau utilisé dans les simulations est un matériau de type graphite dont la masse volumique est égale à 1750 kg/m^3 .

4.1.4. Représentativité de la simulation

L'objectif de ce paragraphe est de s'assurer de la représentativité de la simulation réalisée par rapport à l'essai TATER. On va pour cela utiliser les quelques données publiées par [Hochrein et Wright \(1976\)](#) et [McAlees et Maydew \(1985\)](#), pour s'assurer de la cohérence de la simulation d'un point de vue global, avant, dans la section suivante, de s'intéresser plus en détail aux conditions d'écoulement au moment où apparaissent les coups de gouge. Dans la littérature, la plupart des résultats expérimentaux exposés proviennent de l'analyse de l'objet récupéré à la fin de l'essai, et les considérations traitant de l'évolution de la pointe avant le long de la trajectoire proviennent de simulations réalisées *a posteriori*. Cependant, de rares mesures, notamment de recul de la paroi au point d'arrêt, ont pu être obtenues en fonction du temps, c'est-à-dire le long de la trajectoire, grâce à quelques capteurs placés à l'intérieur de l'objet.

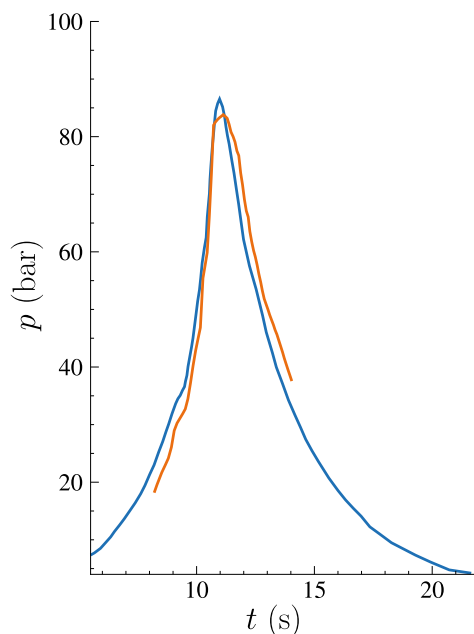


FIGURE 4.3. – Pression au point d'arrêt (bar) en fonction du temps. En bleu, la pression calculée par McAlees et Maydew (1985), en orange, notre simulation.

Pression au point d'arrêt

Une première façon de s'assurer de la bonne représentativité des simulations par rapport à l'essai réel est de comparer la pression d'arrêt calculée à partir des mesures par Hochrein et Wright (1976) et McAlees et Maydew (1985) avec celle obtenue dans la simulation. La pression d'arrêt, ou pression au point d'arrêt est définie comme étant la pression au point où la vitesse locale du fluide est nulle. Dans notre cas, il s'agit de la pression située au niveau de la pointe avant, sur l'axe de symétrie. Son évolution en fonction du temps est tracée sur la figure 4.3. Dans la première portion de la trajectoire, entre $t = 8.2$ s et $t = 11$ s environ, le calcul Navier–Stokes donne une pression au point d'arrêt très similaire à celle fournie par Hochrein et Wright (1976), bien que légèrement sous-estimée au début. Dans la simulation, le pic observé est toutefois moins marqué que sur les données de référence, la valeur maximale atteinte étant légèrement inférieure, là encore. Dans la seconde portion de la trajectoire, entre $t = 11$ s et $t = 14$ s, la tendance est bien conservée, même si l'écart est un peu plus conséquent entre la simulation et les données de Hochrein et Wright (1976). Cependant, au vu des hypothèses qu'il a été nécessaire de faire pour reconstruire les conditions de vol de l'essai, nous estimons que l'accord entre la pression au point d'arrêt calculée par Hochrein et Wright (1976) et McAlees et Maydew (1985) et celle simulée est tout à fait acceptable. Cette comparaison valide notamment le choix de la trajectoire, la pression au point d'arrêt dépendant directement des conditions de vol choisies.

Recul de la paroi au point d'arrêt

La pointe avant de l'objet de vol TATER a été équipée d'un capteur acoustique permettant de mesurer le recul de la paroi au niveau du point d'arrêt, au cours du temps. Ces mesures ont été comparées à des simulations réalisées par Hochrein et Wright (1976) et McAlees et Maydew (1985). La figure 4.4 confronte la régression de la paroi au niveau du point d'arrêt obtenue dans notre simulation avec les données fournies par McAlees et Maydew (1985). On constate un écart entre notre simulation et celle de Hochrein et Wright (1976), avec notamment un taux d'ablation à $t = 14$ s inférieur d'environ 20%. Plusieurs facteurs peuvent expliquer cet écart. Dans un premier temps, nous pouvons souligner la difficulté à reproduire fidèlement les conditions de vol de l'essai TATER, puisqu'il a fallu faire un certain nombre d'hypothèses pour pallier le manque de données disponibles. Il est également important d'avoir conscience que dans notre simulation,

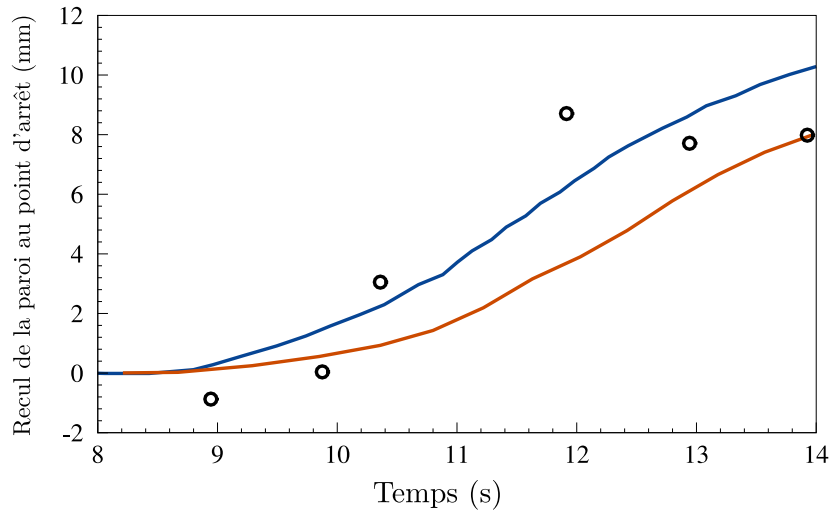


FIGURE 4.4. – Recul de la paroi au point d'arrêt (mm) en fonction du temps (s). En bleu, la simulation de McAlees et Maydew (1985), en orange, notre simulation. Les symboles noirs sont les mesures enregistrées sur l'essai TATER.

nous avons considéré un modèle de rugosité simple largement utilisé dans la littérature, faisant appel à une hauteur de rugosité équivalente constante. Or, Hochrein et Wright (1976) et McAlees et Maydew (1985) prennent une hauteur de rugosité variable, qui dépend notamment d'une corrélation empirique (Grabow et White, 1975) construite pour tenter de reproduire globalement l'augmentation des flux thermiques due à la rugosité de la paroi et celle due à l'apparition des coups de gouge. La régression de la paroi étant liée aux flux thermiques *via* le modèle d'ablation, le modèle de rugosité utilisé peut également influencer le recul de la paroi au point d'arrêt aux temps longs. Cependant, toujours d'après Hochrein et Wright (1976), les effets de rugosité n'interviennent pas (ou peu) au début de l'ablation de la pointe avant, notamment au moment où apparaissent les coups de gouge, ce que semblent confirmer les simulations. Enfin, notons que les données expérimentales de recul du point d'arrêt proviennent d'un capteur acoustique, corrigé par la température mesurée dans l'objet. Aucune estimation des erreurs de mesures associées à cette procédure n'est proposée par les auteurs. Les résultats obtenus par notre simulation ne semblent pas en désaccord avec ces données au regard de leur dispersion. Considérant tout ceci, et gardant à l'esprit notre volonté d'évaluer des ordres de grandeurs caractéristiques de la couche limite se développant autour de l'objet lorsque les coups de gouge apparaissent, avant que la rugosité ne semble jouer un rôle prépondérant, nous pouvons conclure que notre simulation est cohérente avec ce que nous savons de l'essai TATER et nos objectifs. C'est pourquoi la simulation n'a pas été davantage approfondie aux temps plus longs ($t > 11$ s).

Conclusion sur la représentativité des simulations réalisées

La comparaison des résultats de la simulation avec les données disponibles dans la littérature, malheureusement peu nombreuses concernant ce type d'essai en vol, montre, malgré un bon accord général, quelques différences. Celles-ci peuvent s'expliquer par le nombre d'hypothèses importantes qu'il a été nécessaire de formuler, qu'il s'agisse du matériau de l'objet, de la reconstruction de la trajectoire, ou de l'influence de la rugosité de la paroi dans l'intervalle de temps étudié. Il aurait probablement été possible d'affiner la simulation afin de coller au mieux aux données publiées par Hochrein et Wright (1976) et McAlees et Maydew (1985), notamment pour les temps t supérieurs à 11 s. Cependant, l'objectif de ce chapitre n'est pas de reproduire exactement l'essai TATER d'un point de vue numérique mais bien d'obtenir des simulations cohérentes avec les données disponibles, qui nous fournissent un certain nombre d'ordres de grandeurs permettant de mieux comprendre les conditions aérodynamiques dans lesquels l'objet évolue lorsque les coups de gouges apparaissent à sa surface, aux alentours de $t = 10$ s. En ce sens, au vu du peu de

données expérimentales dont nous disposons, les résultats de la simulation s'avèrent satisfaisants et semblent assez représentatifs des conditions d'écoulement rencontrées par l'objet le long de la trajectoire, en particulier aux premiers instants de l'ablation de la pointe avant.

4.2. Grandeurs caractéristiques lors de l'apparition des coups de gouge

Maintenant que la simulation dans son ensemble nous paraît cohérente, nous pouvons désormais nous intéresser plus en détail aux conditions de l'écoulement qui entourent l'objet au moment où apparaissent les coups de gouge. D'après Hochrein et Wright (1976), ces creusements se forment aux alentours de 10 s après le début du vol. L'objectif de cette section est d'évaluer les ordres de grandeur caractéristiques de la couche limite qui se développe autour de l'objet, afin de comparer les coups de gouge de l'essai TATER à la corrélation de Thomas (1979). Celle-ci étant initialement établie à partir de mesures effectuées dans des contextes d'écoulement incompressible, on s'intéressera spécifiquement aux variations de masse volumique dans la zone de proche paroi.

4.2.1. Champs de pression et de nombre de Mach autour de l'objet

Afin de comprendre les conditions d'écoulement lors de l'apparition des coups de gouge, les champs de différentes grandeurs importantes de l'écoulement sont analysés dans cette section. Nous nous intéresserons ici à un instant bien précis, à $t = 10.5$ s, qui correspond, d'après Hochrein et Wright (1976), au début de la formation des coups de gouge³.

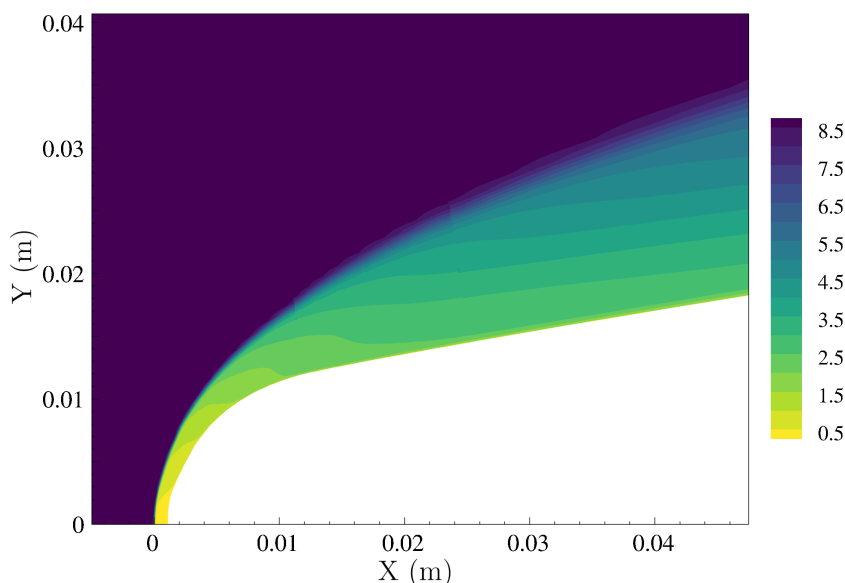
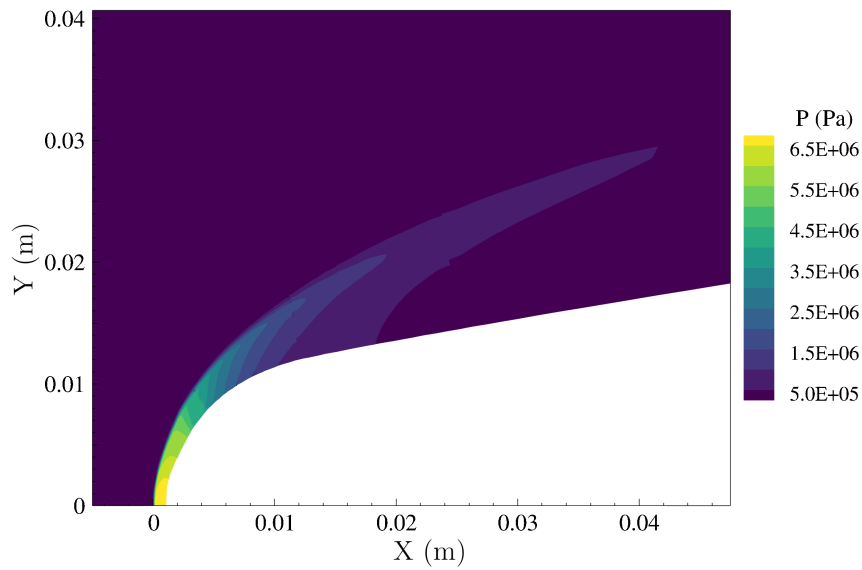


FIGURE 4.5. – Champ de nombre de Mach à $t = 10.5$ s.

Les champs de pression et de nombre de Mach, représentés respectivement sur les figures 4.5 et 4.6, mettent en avant, comme attendu, la présence d'un choc détaché en amont du point d'arrêt, caractéristique d'un écoulement hypersonique rencontrant un corps émoussé. On peut noter que la simulation prévoit un angle de choc relativement important. Du fait de cet angle important, les nombres de Mach en aval du choc sont relativement faibles. En effet, en régime hypersonique, ils tendent vers 0.3 au voisinage du point d'arrêt, derrière le choc droit, et pour une géométrie sphérique, l'écoulement devient sonique à la paroi aux alentours de 45° , ce que nous pouvons

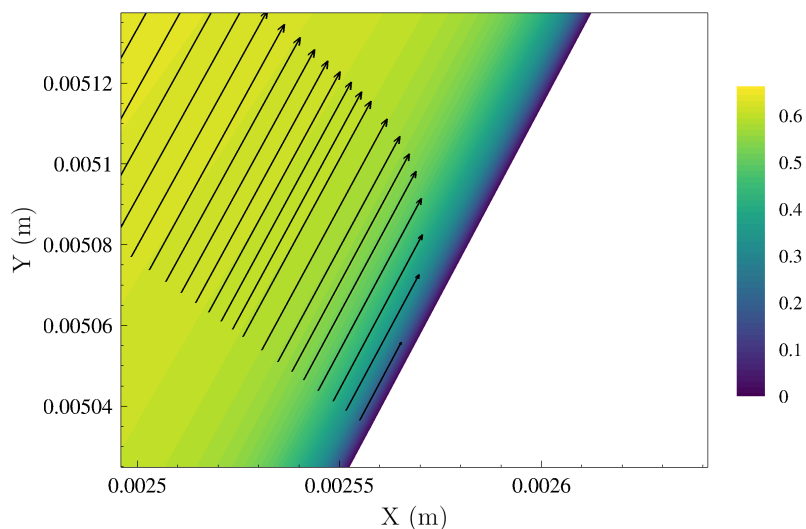
3. Nous ne traiterons dans cette section que de cet instant là, représentatif des conditions d'écoulement lors de l'apparition des coups de gouge. Notons tout de même que les conclusions et observations que nous faisons à cet instant là semblent rester valables pour toute la durée de la simulation à partir du moment où l'ablation débute, aux alentours de $t = 9$ s, et nous n'observons pas de différences majeures en fonction de l'instant étudié.


 FIGURE 4.6. – Champ de pression (en Pa) autour de l'objet, à $t = 10.5$ s.

effectivement observer ici. Nous nous attendons donc à ce que les effets de compressibilité soient plutôt modérés, en tout cas dans la zone proche de la paroi, à l'endroit où apparaissent les coups de gouge. Afin de nous en assurer, la section suivante est dédiée à l'étude des champs de nombre de Mach et de masse volumique dans la couche limite.

4.2.2. Ordres de grandeur dans la couche limite

On s'intéresse désormais plus en détail aux ordres de grandeurs du nombre de Mach M et de la masse volumique ρ dans la couche limite, toujours à un instant donné, aux alentours de 10.5 s après le début du vol. Pour cela, les champs de Mach et de masse volumique sont tracés sur les figures 4.7 et 4.8, respectivement, qui sont centrées dans la zone où on observe l'apparition des coups de gouge (correspondant à l'encart noir sur les figures 4.5 et 4.6). Les vecteurs vitesse y sont également représentés, permettant d'identifier visuellement la couche limite.


 FIGURE 4.7. – Champ de nombre de Mach dans la couche limite, à $t = 10.5$ s. Les flèches noires sont les vecteurs vitesse, permettant d'identifier la couche limite.

Les figures montrent que dans la couche limite, l'écoulement est subsonique, avec un nombre de Mach inférieur à $M = 0.8$. Bien qu'on ne puisse pas considérer l'écoulement comme incompressible

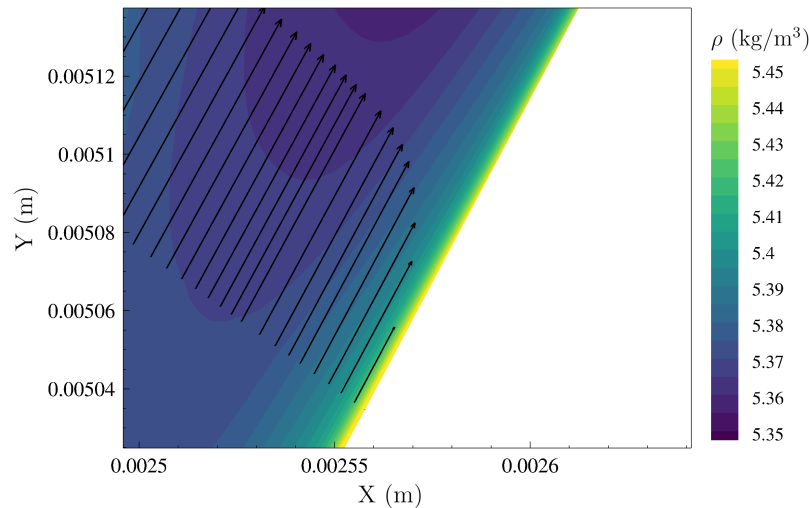


FIGURE 4.8. – Champ de masse volumique (en kg/m^3) dans la couche limite, à $t = 10.5$ s. Les flèches noires sont les vecteurs vitesse, permettant d'identifier la couche limite.

dans cette région, les effets de compressibilité devraient y être modérés. Pour confirmer cela, le champ de masse volumique est tracé sur la figure 4.8. La masse volumique varie peu, autour d'une valeur moyenne d'environ 5 kg/m^3 . La simulation donne ainsi des gradients de masse volumique assez faibles dans la zone proche de la paroi, avec des variations de l'ordre de 10%.

En conclusion, cette simulation justifie l'approche suivie dans la suite de notre étude. Les effets de compressibilité étant modérés, on peut évaluer les grandeurs caractéristiques de la couche limite afin d'estimer la longueur visqueuse δ_ν de cette dernière. Ceci nous permettra ensuite de comparer les coups de gouge apparaissant sur les pointes avant de véhicules hypersoniques à ceux relatifs à des contextes où l'écoulement est incompressible. C'est pourquoi dans la section suivante, nous allons confronter les données de l'essai TATER et de la simulation à la corrélation de [Thomas \(1979\)](#), construites pour des coups de gouge n'ayant pas de rapport avec la problématique de la rentrée atmosphérique.

4.2.3. Comparaison des coups de gouge de l'essai TATER avec la corrélation de [Thomas \(1979\)](#)

Le but de cette section est de déterminer comment les coups de gouge observés sur la pointe avant de l'essai TATER se comparent à la corrélation de [Thomas \(1979\)](#), présentée au chapitre

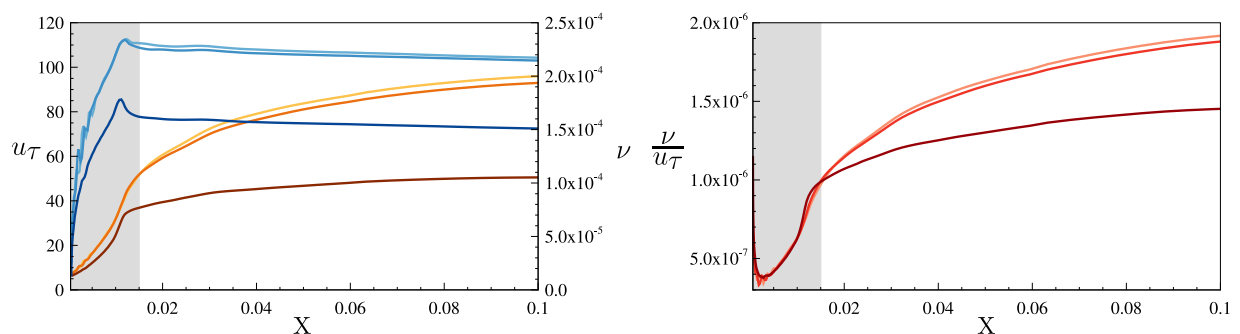


FIGURE 4.9. – Gauche : profils de vitesse de frottement u_τ (bleu), en m/s et de viscosité cinématique ν (orange), en m^2/s le long de la paroi, à 9 s, 10.5 s et 11 s. Droite : profils de δ_ν , en m, le long de la paroi aux mêmes instants. Les couleurs foncées à claires indiquent un temps croissant. La partie grisée représente approximativement l'endroit où apparaissent les coups de gouge.

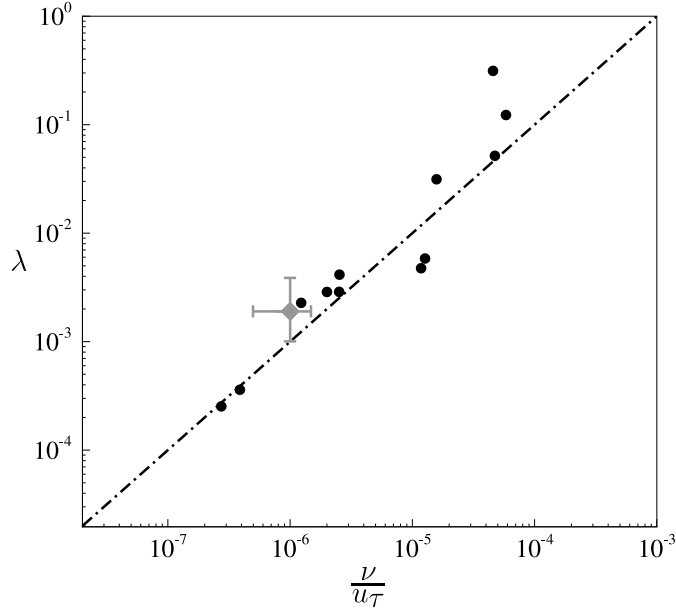


FIGURE 4.10. – Corrélation entre la taille caractéristique des creusements, λ (en m) et la longueur visqueuse $\delta_\nu = \frac{\nu}{u_\tau}$ (en m) de la couche limite. Ronds noirs : données expérimentales de [Thomas \(1979\)](#), tirets-pointillés noirs : corrélation de [Thomas \(1979\)](#). Losange gris : point correspondant aux coups de gouge de l'essai TATER, la longueur visqueuse étant tirée des simulations.

1 de ce manuscrit. La corrélation de [Thomas \(1979\)](#), construite à partir de données issues de contextes où l'écoulement est considéré incompressible, relie la taille caractéristique longitudinale des creusements à la longueur visqueuse de la couche limite δ_ν . Le principal intérêt de l'essai TATER pour notre étude est de fournir de rares informations sur la taille de coups de gouge apparaissant dans le cadre d'un véritable essai en vol. Ce sont alors ces données que nous allons essayer de comparer à la corrélation de [Thomas \(1979\)](#), afin de vérifier si celle-ci peut être pertinente dans un contexte de rentrée atmosphérique. Cependant, dans la littérature, nous ne disposons d'aucune information concernant la longueur visqueuse de la couche limite se développant sur la surface de la pointe avant. Nous utiliserons nos simulations, qui ont été menées avec cet objectif en tête, pour déterminer δ_ν . Rappelons que cette longueur visqueuse est définie par le rapport entre la vitesse de frottement u_τ et la viscosité cinématique ν du fluide (1.2). Nous pouvons calculer la vitesse de frottement directement d'après sa définition (2.43), ayant accès au cisaillement pariétal τ_w et à la masse volumique ρ dans les résultats de simulations. De même, la viscosité cinématique est obtenue à partir de la viscosité dynamique μ et de la masse volumique ρ .

Les vitesses de frottement et viscosités cinématiques ainsi extraites de la simulation sont tracées à trois temps, 9 s, 10.5 s et 11 s sur la figure 4.9 (gauche), tandis que les longueurs visqueuses correspondantes sont présentées sur la figure 4.9 (droite). La longueur visqueuse évolue entre 5×10^{-7} m et 1.5×10^{-6} m le long de la paroi, dans la zone où apparaissent les coups de gouge. Si elle n'est vraisemblablement pas constante le long de l'objet, elle reste cependant du même ordre de grandeur. Quant aux mesures de la taille caractéristique longitudinale des coups de gouge relevés sur la pointe avant de l'objet, récupérées après le vol, rappelons qu'[Hochrein et Wright \(1976\)](#) donnent une longueur moyenne égale à 1.9 mm, avec une maximale égale à 4 mm environ et une minimale égale à 1 mm. Avec les longueurs visqueuses que nous avons obtenues dans la simulation, nous pouvons estimer la longueur d'onde moyenne des motifs (adimensionnée) λ^+ :

$$\lambda^+ = \frac{\lambda}{\delta_\nu} \approx 1900 \quad (4.2)$$

soit $\alpha^+ \approx 3.3 \times 10^{-3}$. Compte tenu de la dispersion des mesures de [Thomas \(1979\)](#), on peut en déduire un bon accord avec sa corrélation ($\lambda^+ \approx 1000$, soit $\alpha^+ \approx 6.3 \times 10^{-3}$). On peut s'en convaincre un peu plus en plaçant le point correspondant à l'essai TATER sur cette corrélation, et on voit que, malgré l'écart avec la valeur donnée par [Thomas \(1979\)](#), il se trouve dans la même zone que les données expérimentales (voir figure 4.10).

Bilan

Dans ce chapitre, nous proposons d'analyser l'essai en vol historique TATER, qui procure des informations quasiment uniques sur l'apparition de coups de gouge sur la pointe avant d'un objet de rentrée. Un certain nombre d'hypothèses ont été nécessaires pour reconstruire les conditions de vol de l'essai, en raison du peu de données disponibles, probablement pour des raisons de confidentialité, dans la littérature traitant de cet essai. Néanmoins, quelques mesures de recul de la paroi au point d'arrêt et de température ayant été publiées, nous avons pu dans un premier temps nous assurer de la cohérence de nos simulations, conçues non pas pour reproduire parfaitement l'essai TATER mais pour fournir des informations raisonnablement représentatives des conditions de vol de l'objet. L'analyse des simulations a permis d'isoler les conditions d'écoulement à l'endroit où apparaissent les coups de gouge, et d'identifier la couche limite se développant à la surface de l'objet. Les champs de Mach et de masse volumique dans cette couche limite ont permis de montrer que l'écoulement y est subsonique et que les gradients de masse volumique sont relativement modérés, avec des variations inférieures à 10%. De plus, nos simulations ont permis d'obtenir une estimation de la longueur visqueuse de la couche limite, grâce à laquelle nous avons pu comparer la taille caractéristique longitudinale des coups de gouge donnée par [Hochrein et Wright \(1976\)](#) sur la pointe avant de l'essai TATER avec les données expérimentales de la corrélation empirique de [Thomas \(1979\)](#), montrant un excellent accord. Cette comparaison entre des motifs apparaissant dans un contexte de rentrée atmosphérique, où l'écoulement est hypersonique et compressible, et des creusements correspondant à des situations d'écoulement incompressible, ainsi que le côté modéré des effets de compressibilité observés dans la couche limite justifie la suite de notre étude. Nous allons en effet reprendre les études présentées au chapitre 3 et nous intéresser à la réponse d'une couche limite turbulente incompressible à une petite déformation de la paroi, partant de l'hypothèse formulée par [Thomas \(1979\)](#) selon laquelle la taille caractéristique des coups de gouge est imprimée par la couche limite turbulente dès les premiers instants de formation de ces creusements.

Étude de la réponse linéaire forcée de la région interne d'une couche limite turbulente incompressible

Dans le chapitre précédent, la reconstruction numérique de l'essai TATER nous a permis de comparer la taille caractéristique de coups de gouges observés sur un véritable essai en vol avec la corrélation de [Thomas \(1979\)](#), construite à partir de données récoltées dans des contextes où les écoulements sont incompressibles. Par ailleurs, l'analyse des ordres de grandeur de la région interne de la couche limite dans les résultats de simulation nous montre que, bien que l'écoulement soit compressible dans cette région, les effets de compressibilité y semblent relativement modérés. Ainsi, afin d'étudier plus en détail le rôle de la turbulence suggéré par [Thomas \(1979\)](#) dans la sélection de la longueur d'onde longitudinale caractéristique des creusements, nous effectuerons en première approche une hypothèse d'incompressibilité de la région interne de la couche limite. Cela nous permettra notamment de reprendre les analyses linéaires de la région interne effectuées par [Charru et al. \(2013\)](#), présentées dans le chapitre 3. Dans ce chapitre, des simulations RANS ont été menées dans une configuration de canal périodique plan afin d'y être comparées avec les études de réponses linéaires forcées et les mesures d'Hanratty. Des simulations numériques directes ont également été réalisées en parallèle de ces travaux de thèse et constituent une base de données de référence supplémentaire. L'analyse de différentes fermetures turbulentes et du champ de perturbation a ainsi permis de montrer la mise en défaut de l'hypothèse de Boussinesq dans le régime transitionnel.

Sommaire

5.1. Études de réponses linéaires forcées	68
5.1.1. Linéarisation avec le modèle $\mathcal{K} - \omega$	68
5.1.2. Manipulation de la correction d'Hanratty pour corriger $\tau_{xx} - \tau_{zz}$	70
5.1.3. Résolution numérique	71
5.1.4. De la pertinence de la comparaison entre configurations de canal et de couche limite	74
5.2. Calculs RANS avec CEDRE	75
5.2.1. Présentation de la plateforme CEDRE	75
5.2.2. Configuration	76
5.2.3. Validation des simulations RANS au début du régime transitionnel	78
5.3. Comparaison entre simulations, mesures et analyses linéaires	79
5.3.1. Présentation de la base de données de DNS	79
5.3.2. Validation des calculs RANS et DNS à l'ordre dominant	80
5.3.3. Phase et amplitude de la contrainte cisaillement	80
5.3.4. Champ des perturbations de vitesse	81
5.3.5. De l'importance du terme de diffusion turbulente dans le bilan de quantité de mouvement	83
Bilan	86

Les résultats des analyses linéaires de la littérature posent la question de l'importance du choix de la fermeture turbulente dans le régime transitionnel¹ pour retrouver le comportement de la contrainte de cisaillement observé expérimentalement. Pour mieux comprendre l'influence de ce choix, ce chapitre est découpé en 3 sections. Dans un premier temps, nous allons reprendre les études linéaires présentées dans le chapitre 3 à partir de la méthode utilisée par *Charru et al. (2013)*. Nous présenterons également dans une deuxième section des simulations RANS, réalisées dans une configuration de canal périodique avec une paroi ondulée de faible amplitude en faisant appel à deux stratégies de fermeture turbulente différentes. Enfin, dans une troisième section, les résultats de ces différentes études seront comparés entre eux et confrontés à la base de données expérimentales provenant des travaux d'*Hanratty et al.* ainsi qu'aux résultats de DNS (*Chedevigne et al., 2023*) afin de conclure sur le rôle de la fermeture turbulente dans le régime transitionnel et notamment l'usage de l'hypothèse de Boussinesq.

5.1. Études de réponses linéaires forcées

Outre le modèle de longueur de mélange déjà évoqué, des études de réponses linéaires forcées ont également été réalisées avec la version BSL du modèle $\mathcal{K}-\omega$ SST de *Menter (1994)*. Le limiteur SST n'étant pas activé dans une région interne de couche limite, ce suffixe sera omis dans la suite de ce manuscrit par souci de concision. La linéarisation du système d'équations correspondant est présentée dans cette section. Sans précision supplémentaire, les notations utilisées dans l'ensemble de ce chapitre sont celles déjà introduites dans le chapitre 3. De plus, nous verrons qu'une légère modification du système d'équations dérivé dans le chapitre 3 permet d'illustrer le rôle de la fermeture turbulente.

5.1.1. Linéarisation avec le modèle $\mathcal{K}-\omega$

Écoulement de base

Comme précédemment, à l'ordre dominant, l'écoulement de base est donné par la solution au problème de couche limite. Pour rappel, le bilan de quantité de mouvement se réduit à :

$$\left(\mathcal{R}^{-1} + \langle \nu_t \rangle\right) \langle u \rangle_{,\eta} = 1 \quad (5.1)$$

À l'ordre 0, la partie homogène de la viscosité turbulente sans dimension $\langle \nu_t \rangle$ est évaluée à partir du modèle $\mathcal{K}-\omega$ présenté au chapitre 2 :

$$\langle \nu_t \rangle = \frac{\langle \mathcal{K} \rangle}{\langle \omega \rangle} \quad (5.2)$$

avec $\langle \mathcal{K} \rangle$ et $\langle \omega \rangle$ étant les versions moyennées spatialement de l'énergie cinétique turbulente et de la dissipation spécifique (respectivement). Les équations de transport correspondantes (2.23a) et (2.23b), prises sous leur forme incompressible, stationnaire et bidimensionnelle, sont moyennées et donnent :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\mathcal{R}^{-1} + \sigma_{\mathcal{K}} \langle \nu_t \rangle \right) \langle \mathcal{K} \rangle_{,\eta} \right] - \beta^* \langle \omega \rangle \langle \mathcal{K} \rangle + \langle \nu_t \rangle \langle u \rangle_{,\eta}^2 = 0 \quad (5.3a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\mathcal{R}^{-1} + \sigma_{\omega} \langle \nu_t \rangle \right) \langle \omega \rangle_{,\eta} \right] - \beta \langle \omega \rangle^2 + \gamma \langle u \rangle_{,\eta}^2 = 0 \quad (5.3b)$$

Le problème de couche limite est résolu par intégration du système formé par les équations (5.1, 5.3a, 5.3b)². Trois conditions aux limites sont nécessaires pour résoudre ce système. À la paroi,

1. Aussi appelé *régime visqueux profond* par *Charru et Hinch (2000)*, il correspond à des nombres de Reynolds \mathcal{R} compris entre 50 et 10000. C'est dans cette gamme de nombres de Reynolds que l'on observe le pic de déphasage du cisaillement. Défini en détail au chapitre 3, à ne pas confondre avec la transition laminaire turbulent.

2. Les méthodes numériques employées pour les analyses linéaires sont présentées en section 5.1.3.

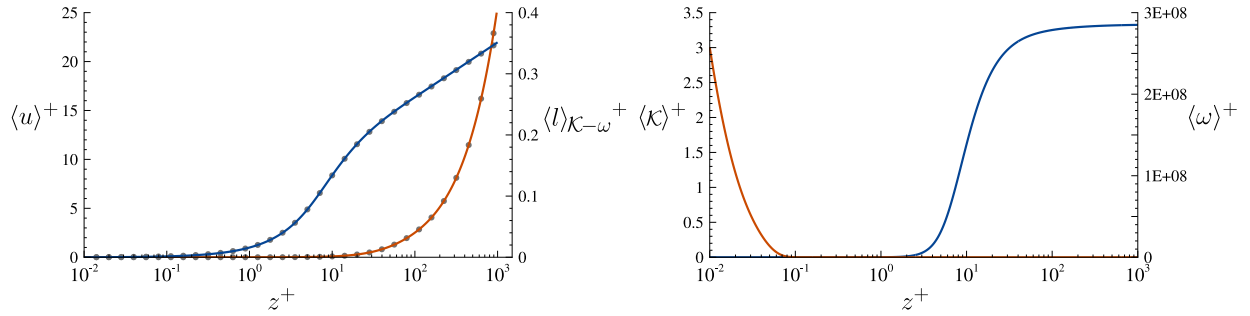


FIGURE 5.1. – Gauche : comparaison des solutions au problème de couche limite entre le modèle $\mathcal{K} - \omega$ (lignes pleines) et le modèle de longueur de mélange (cercles gris). Bleu : $\langle u \rangle^+$, orange : $\langle l \rangle_{\mathcal{K}-\omega}^+$. Droite : profils d'énergie cinétique turbulente (bleu) $\langle \mathcal{K} \rangle^+$ et de dissipation spécifique $\langle \omega \rangle^+$ (orange).

la condition d'adhérence impose une vitesse moyenne $\langle u \rangle$ et une énergie cinétique turbulente moyenne $\langle \mathcal{K} \rangle$ nulles. De plus, comme expliqué par [Menter \(1994\)](#), [Wilcox \(1988\)](#) montre que l'équation pour la dissipation spécifique donne :

$$\omega \longrightarrow \frac{6\nu}{\beta z^2} \quad \text{lorsque } z \longrightarrow 0 \quad (5.4)$$

On utilisera, en variables adimensionnées, la condition à la paroi suivante : $\langle \omega \rangle(0) = \frac{6}{\beta \mathcal{R} \eta^2}$. Afin de faciliter l'analyse linéaire et la comparaison avec le modèle de longueur de mélange, la viscosité turbulente peut être exprimée sous la forme d'une longueur de mélange équivalente, notée $\langle l \rangle_{\mathcal{K}-\omega}$:

$$\begin{aligned} \nu_t &= l^2 |S| \Rightarrow \langle \nu_t \rangle = \langle l \rangle_{\mathcal{K}-\omega}^2 \langle u \rangle_{,\eta} \\ \langle l \rangle_{\mathcal{K}-\omega} &= \sqrt{\frac{\langle \nu_t \rangle}{\langle u \rangle_{,\eta}}} = \sqrt{\langle \nu_t \rangle (\langle \nu_t \rangle + \mathcal{R}^{-1})} \end{aligned} \quad (5.5)$$

La solution au problème de couche limite donnée par le modèle $\mathcal{K} - \omega$, et qui nous permettra d'obtenir l'écoulement de base pour les analyses linéaires correspondantes, est tracée sur la figure 5.1 (*gauche*), et comparée avec la solution donnée par le modèle de longueur de mélange. L'énergie cinétique turbulente $\langle \mathcal{K} \rangle^+$ et la dissipation spécifique $\langle \omega \rangle^+$ sont elles tracées sur la figure 5.1 (*droite*). On notera notamment que l'on retrouve le comportement asymptotique de l'énergie cinétique turbulente donnée par la relation de [Bradshaw et al. \(1967\)](#) :

$$\langle \mathcal{K} \rangle^+ \xrightarrow{z^+ \rightarrow +\infty} \frac{1}{0.31} \quad (5.6)$$

Longueur de mélange équivalente

Afin de réaliser l'étude de réponse linéaire forcée à l'aide de ce modèle $\mathcal{K} - \omega$, on utilise, comme pour le modèle de longueur de mélange (cf chapitre 3), un développement de Taylor à l'ordre 1 sur la longueur de mélange équivalente $\langle l \rangle_{\mathcal{K}-\omega}$, par rapport au petit paramètre $\eta_0 = \alpha \zeta_0$. La fluctuation $\hat{l}_{\mathcal{K}-\omega}$ s'obtient par dérivation de la partie homogène de la longueur de mélange correspondante :

$$\hat{l}_{\mathcal{K}-\omega} = - \left. \frac{d \langle l \rangle_{\mathcal{K}-\omega}}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_0} \quad (5.7)$$

Similairement à ce qui a été fait pour le modèle de longueur de mélange, on considère qu'au premier ordre, le nombre de Reynolds \mathcal{R} varie en fonction de la vitesse de frottement u_τ , ce qui

fait apparaître dans l'expression finale de $\hat{l}_{\mathcal{K}-\omega}$ une contribution dépendante du cisaillement $\hat{\tau}_{xz}$:

$$\hat{l}_{\mathcal{K}-\omega} = -\frac{1}{2} \frac{\left(\langle \nu_t \rangle_{,\eta} (\langle \nu_t \rangle + \mathcal{R}^{-1}) + \langle \nu_t \rangle \left(\langle \nu_t \rangle_{,\eta} - \frac{\hat{\tau}_{xz}}{2}\right)\right)}{\sqrt{\langle \nu_t \rangle} (\langle \nu_t \rangle + \mathcal{R}^{-1})} \quad (5.8)$$

La dérivée $\langle \nu_t \rangle_{,\eta}$ de la viscosité turbulente est obtenue numériquement à partir des dérivées de l'énergie cinétique turbulente $\langle \mathcal{K} \rangle$ et de la dissipation spécifique $\langle \omega \rangle$. L'analyse linéaire est réalisée en résolvant le système (3.23) en considérant la longueur de mélange équivalente moyenne $\langle l \rangle_{\mathcal{K}-\omega}$ et sa fluctuation $\hat{l}_{\mathcal{K}-\omega}$, soit, pour rappel :

$$\begin{cases} \hat{u}_{,\eta} = -i\hat{w} + \frac{\hat{\tau}_{xz} - 2\langle l \rangle_{\mathcal{K}-\omega} \langle u \rangle_{,\eta} {}^2 \hat{l}_{\mathcal{K}-\omega}}{\mathcal{R}^{-1} + 2\langle l \rangle_{\mathcal{K}-\omega}^2 \langle u \rangle_{,\eta}} \\ \hat{w}_{,\eta} = -i\hat{u} \\ \hat{\tau}_{xz,\eta} = \left(i\langle u \rangle + \frac{4}{\langle u \rangle_{,\eta}}\right) \hat{u} + \hat{w} \langle u \rangle_{,\eta} + i\hat{\tau}_p \\ \hat{\tau}_{p,\eta} = -i\langle u \rangle \hat{w} + i\hat{\tau}_{xz} \end{cases} \quad (5.9)$$

Les conditions aux limites utilisées pour la résolution de ce nouveau système sont les mêmes que celles présentées au chapitre 3 pour le modèle de longueur de mélange (voir équations (3.24)). Les résultats de l'ensemble des analyses linéaires ainsi que des simulations RANS sont présentés et comparés avec les données expérimentales d'Hanratty *et al.* dans la section 5.3.

5.1.2. Manipulation de la correction d'Hanratty pour corriger $\tau_{xx} - \tau_{zz}$

Principe

Dans cette section, nous considérons dans un premier temps l'analyse linéaire réalisée avec le modèle de longueur de mélange (2.55). Comme nous le verrons dans la section 5.3, le système (3.23) peut être réécrit afin d'illustrer la capacité de la correction d'Hanratty à compenser la mise en défaut de l'hypothèse de Boussinesq en corrigeant le terme de diffusion turbulente $\tau_{xx} - \tau_{zz}$ dans le bilan de quantité de mouvement. Pour cela, on utilisera le modèle de longueur de mélange (2.55) dans sa forme standard, c'est-à-dire sans modification du nombre de van Driest. Pour l'écoulement de base, la longueur de mélange $\langle l \rangle$ à l'ordre dominant est toujours donnée par l'équation (3.15), et sa fluctuation à l'ordre 1, notée \hat{l}_0 pour éviter la confusion, s'exprime simplement :

$$\hat{l}_0 = \kappa \left[-1 + \exp\left(-\frac{\mathcal{R}\eta}{A^0}\right) \left(1 - \frac{\mathcal{R}\eta}{A^0} + \frac{\mathcal{R}\eta^2}{A^0} \frac{\hat{\tau}_{xz}}{2}\right) \right] \quad (5.10)$$

On utilise cette expression de la longueur de mélange afin de modéliser la contrainte de cisaillement τ_{xz} . Originellement, la différence des tensions diagonales de Reynolds $\tau_{xx} - \tau_{zz}$ est également modélisée à partir de l'hypothèse de Boussinesq, et est considérée proportionnelle à $\frac{\partial u}{\partial x}$. Comme vu dans le chapitre 3, cela mène à la relation :

$$\hat{\tau}_{xx} - \hat{\tau}_{zz} = \frac{4i\hat{u}}{\langle u \rangle_{,\eta}} \quad (5.11)$$

Avec cette hypothèse, dans un écoulement cisailé simple, les tensions diagonales sont égales, ce qui est généralement faux dans une couche limite turbulente. On considère cependant usuellement dans ces cas simples que c'est une approximation acceptable à l'ordre dominant. Nous verrons dans la suite que, dans le cas qui nous occupe, ce n'est pas le cas au premier ordre, et notamment en raison de la dépendance au $\frac{\partial u}{\partial x}$. Ici, on modélise la contribution manquante de la différence des tensions de Reynolds diagonales dans le bilan de quantité de mouvement (correspondant à la

partie anisotrope non prise en compte par l'hypothèse de Boussinesq) à travers une longueur de mélange, notée \hat{l}_{xx-zz} , de telle sorte que le système (3.23) devient ³ :

$$\begin{cases} \hat{u}_{,\eta} = -i\hat{w} + \frac{\hat{\tau}_{xz}^* - 2\langle l \rangle \langle u \rangle_{,\eta} {}^2 \hat{l}_0}{\mathcal{R}^{-1} + 2\langle l \rangle^2 \langle u \rangle_{,\eta}} \\ \hat{w}_{,\eta} = -i\hat{u} \\ \hat{\tau}_{xz,\eta}^* = i\langle u \rangle \hat{u} + \hat{w} \langle u \rangle_{,\eta} + i\hat{\tau}_p - i(\hat{\tau}_{xx} - \hat{\tau}_{zz}) + \left(\hat{l}_{xx-zz} \langle u \rangle_{,\eta} \right)^2 \\ \hat{\tau}_{p,\eta} = -i\langle u \rangle \hat{w} + i\hat{\tau}_{xz} \end{cases} \quad (5.12)$$

On désignera par $\hat{\tau}_{xz}^*$ le cisaillement évalué de cette façon, afin de le différencier de celui donné par le système (3.23).

Expression de \hat{l}_{xx-zz}

Considérons le système original (3.23), incluant la correction d'Hanratty dans la fluctuation de la longueur de mélange \hat{l} . Cette longueur de mélange peut être décomposée en deux parties, faisant apparaître d'un côté la fluctuation de la forme standard de ce modèle (*i.e.* \hat{l}_0), et d'un autre côté une contribution incluant la correction d'Hanratty, que l'on notera \hat{l}_1 :

$$\hat{l} = \hat{l}_0 + \hat{l}_1 \quad (5.13)$$

Avec :

$$\hat{l}_1 = -\kappa \exp\left(-\frac{\mathcal{R}\eta}{A^0}\right) \frac{\mathcal{R}\eta^2}{A^0} b_H \mathcal{C} \quad (5.14)$$

La première équation du système (3.23), qui correspond pour rappel à l'expression linéarisée du cisaillement τ_{xz} exprimé avec l'hypothèse de Boussinesq, peut alors se réécrire :

$$\hat{u}_{,\eta} = -i\hat{w} + \frac{\left(\hat{\tau}_{xz} - 2\langle l \rangle \langle u \rangle_{,\eta} {}^2 \hat{l}_1 \right) - 2\langle l \rangle \langle u \rangle_{,\eta} {}^2 \hat{l}_0}{\mathcal{R}^{-1} + 2\langle l \rangle^2 \langle u \rangle_{,\eta}} \quad (5.15)$$

On a donc, par identification avec le système (5.12) :

$$\hat{\tau}_{xz}^* = \hat{\tau}_{xz} - 2\langle l \rangle \langle u \rangle_{,\eta} {}^2 \hat{l}_1 \quad (5.16)$$

Cette petite manipulation nous permet, après dérivation et comparaison avec le bilan de quantité de mouvement, de relier \hat{l}_{xx-zz} à l'échelle de longueur \hat{l}_1 contenant la contribution de la correction d'Hanratty :

$$\hat{l}_{xx-zz}^2 = -2\hat{l}_0 \hat{l}_1 + 2\langle l \rangle \hat{l}_{1,\eta} + 4\langle l \rangle \hat{l}_1 \frac{\left(\langle u \rangle_{,\eta} \right)_{,\eta}}{\langle u \rangle_{,\eta}} \quad (5.17)$$

Cette légère modification donne, comme nous le verrons dans la section 5.3, des résultats similaires à ceux donnés par le système original (3.23), avec un petit ajustement de la constante b_H . Le même exercice peut être fait à partir du système (5.9), avec le modèle $\mathcal{K}-\omega$, en incorporant directement la contribution de \hat{l}_{xx-zz} au bilan de quantité de mouvement. Cela permet d'illustrer notamment la mise en défaut de l'hypothèse de Boussinesq : le terme de diffusion turbulente ne peut plus être négligé du fait de l'anisotropie des tensions normales dans le régime transitionnel.

5.1.3. Résolution numérique

Afin de résoudre numériquement les systèmes (3.23, 5.9, 5.12), deux stratégies ont été considérées. Dans un premier temps, la stratégie présentée par Charru *et al.* (2013) a été reproduite

3. Là encore, on utilisera évidemment les conditions aux limites (3.24).

dans un code basé sur une méthode de volumes finis, puis une seconde stratégie basée sur une méthode de collocation spectrale a ensuite été développée. Nous présentons ces deux méthodes en nous appuyant sur l'exemple du système (3.23), les cas des systèmes (5.9, 5.12) étant quasiment identiques de ce point de vue là. Notons que l'écoulement de base est résolu en amont par intégration numérique, en utilisant l'une ou l'autre méthode suivant la discrétisation utilisée. Les deux types de discrétisation donnant des résultats similaires, on utilisera dans la plupart des cas le code basé sur la méthode de collocation spectrale, plus rapide, sauf pour le cas du modèle $\mathcal{K} - \omega$, pour lequel la méthode volumes finis permet une résolution des équations de transport de l'énergie cinétique turbulente et de la dissipation spécifique plus immédiate.

Afin de simplifier la lecture, le système (3.23) est d'abord écrit sous une forme matricielle, que l'on qualifiera de *compacte*, en introduisant le vecteur d'inconnues $\mathbf{X}^t = (\hat{u}, \hat{w}, \hat{\tau}_{xz}, \hat{\tau}_p)$:

$$\frac{d\mathbf{X}}{d\eta} = \mathcal{B}\mathbf{X} + \mathcal{S} \quad (5.18)$$

De façon générale, on notera $\mathbf{X}^{(k)}$ la $k^{\text{ième}}$ composante du vecteur \mathbf{X} , k appartenant ici à $\llbracket 1, 4 \rrbracket$. La matrice \mathcal{B} et le vecteur solution \mathcal{S} s'écrivent :

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & -i & \frac{1}{\mathcal{R}^{-1} + 2(l)^2 \langle u \rangle_{,\eta}} & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ \left(i \langle u \rangle + \frac{4}{\langle u \rangle_{,\eta}} \right) & \langle u \rangle_{,\eta} & 0 & i \\ 0 & -i \langle u \rangle & i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{S} = \begin{pmatrix} -\frac{2(l)\langle u \rangle_{,\eta}^2 i}{\mathcal{R}^{-1} + 2(l)^2 \langle u \rangle_{,\eta}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

Méthode de Charru *et al.* (2013)

La solution complète du système différentiel (5.18) est obtenue par superposition linéaire de toutes les solutions au système homogène (*i.e* avec $\mathcal{S} = \mathbf{0}$) et d'une solution particulière, notée \mathbf{X}_s . La solution s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_s + \hat{\tau}_{xz}(0)\mathbf{X}_{xz} + \hat{\tau}_p(0)\mathbf{X}_p \quad (5.20)$$

où \mathbf{X}_{xz} et \mathbf{X}_p sont les solutions du système homogène et vérifient :

$$\frac{d\mathbf{X}_{xz}}{d\eta} = \mathcal{B}\mathbf{X}_{xz} \quad \text{avec} \quad \mathbf{X}_{xz}^t(0) = (0, 0, 1, 0), \quad (5.21)$$

$$\frac{d\mathbf{X}_p}{d\eta} = \mathcal{B}\mathbf{X}_p \quad \text{avec} \quad \mathbf{X}_p^t(0) = (0, 0, 0, 1) \quad (5.22)$$

Quant à la solution particulière \mathbf{X}_s , elle vérifie :

$$\frac{d\mathbf{X}_s}{d\eta} = \mathcal{B}\mathbf{X}_s + \mathcal{S} \quad \text{avec} \quad \mathbf{X}_s^t(0) = (\hat{u}(0), 0, 0, 0) \quad (5.23)$$

Les conditions aux limites à la paroi sont ainsi automatiquement satisfaites. Les conditions à l'infini, c'est-à-dire $\hat{\tau}_{xz}(\infty) = 0$ et $\hat{w}(\infty) = 0$, permettent d'obtenir deux relations supplémentaires pour les tensions de Reynolds à la paroi $\hat{\tau}_{xz}(0)$ et $\hat{\tau}_p(0)$, en exprimant la décomposition (5.20) à l'infini :

$$\hat{w}(\infty) = 0 = \mathbf{X}_s^{(2)}(\infty) + \hat{\tau}_{xz}(0)\mathbf{X}_{xz}^{(2)}(\infty) + \hat{\tau}_p(0)\mathbf{X}_p^{(2)}(\infty) \quad (5.24a)$$

$$\hat{\tau}_{xz}(\infty) = 0 = \mathbf{X}_s^{(3)}(\infty) + \hat{\tau}_{xz}(0)\mathbf{X}_{xz}^{(3)}(\infty) + \hat{\tau}_p(0)\mathbf{X}_p^{(3)}(\infty) \quad (5.24b)$$

L'infini étant numériquement représenté par une distance η_∞ suffisamment grande pour que le champ de perturbation totale y soit nul, en pratique, les valeurs des deuxièmes et troisièmes

composantes des vecteurs \mathbf{X}_s , \mathbf{X}_{xz} et \mathbf{X}_p à l'infini sont les résultats de la résolution numérique en η_∞ , le tout étant ensuite bouclé jusqu'à convergence. Dans notre cas, les équations sont résolues avec une méthode d'intégration d'Euler tandis que [Charru et al. \(2013\)](#) utilisent un schéma Runge-Kutta d'ordre 4, avec un pas logarithmique.

Méthode de collocation spectrale

La méthode de collocation spectrale⁴ consiste à projeter le vecteur inconnu \mathbf{X} sur une base de polynômes interpolateurs, qui sont ici des polynômes de Chebyshev, définis sur $[-1, 1]$. Le domaine $[0, +\infty[$ est ramené à l'espace $[-1, 1]$. On prend là encore une distance η_∞ à la paroi suffisamment grande pour que le champ de perturbation soit nul en $z = \eta_\infty$. On utilise pour cela la transformation $r = \left(\frac{2\eta}{\eta_\infty} - 1\right)$ pour passer du domaine $[0, \eta_\infty]$ au domaine $[-1, 1]$. La projection de \mathbf{X} s'écrit :

$$\mathbf{X}^{(k)}(r) = \sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{X}}_i^{(k)} \lambda_i(r) \quad \text{avec } k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket \quad (5.25)$$

avec

$$\lambda_i(r) = \left(\frac{1-r^2}{r-r_i}\right) (-1)^i \frac{T'_N(r)}{N^2 c_i} \quad \text{où } r_i = \cos\left(\frac{i\pi}{N}\right), \quad i \in [0, N] \quad (5.26)$$

$T_n(\theta) = \cos(n\theta)$ est le polynôme de Chebyshev de degré n . Le coefficient c_i vaut 2 si $i = 0$ ou N , et 1 sinon. Les points r_i sont les points de Gauss-Lobatto, ou points de collocation. Une propriété des polynômes interpolateurs est qu'ils prennent la valeur 1 en ces points, et donc la projection (5.25) y coïncide exactement avec la fonction $\mathbf{X}^{(k)}$. Ainsi, trouver les inconnues $\bar{\mathbf{X}}_i^{(k)}$ aux $N + 1$ points de collocation, c'est connaître la fonction $\mathbf{X}^{(k)}$ en $N + 1$ points de l'espace. Avec une discrétisation suffisamment fine, on trouve une excellente approximation de la fonction recherchée sur tout l'espace. De plus, les polynômes interpolateurs permettent d'exprimer très simplement les dérivées de la fonction $\mathbf{X}^{(k)}$, par l'intermédiaire d'une matrice de dérivation qui n'est fonction que des points de collocation. Dans le cas des polynômes de Chebyshev, la matrice de différentiation $D = (D_{ij})$ s'écrit :

$$D_{i,j} = \begin{cases} \frac{2N^2 + 1}{6} & \text{si } i = j = 0, \\ \frac{-r_i}{2(1-r_i^2)} & \text{si } i = j \neq 0, N, \\ \frac{c_i (-1)^{i+j}}{c_j (r_i - r_j)} & \text{si } i \neq j, i, j \neq 0, N, \\ -\frac{2N^2 + 1}{6} & \text{si } i = j = N, \end{cases} \quad (5.27)$$

Une dérivée quelconque d'ordre p de $\mathbf{X}^{(k)}$ aux points de collocation s'écrit, en fonction de D et des inconnues $\bar{\mathbf{X}}^{(k)}$:

$$\frac{d^p \mathbf{X}^{(k)}}{dr^p} = D^p \bar{\mathbf{X}}^{(k)} \quad (5.28)$$

Seule la dérivée première nous intéresse dans notre cas, et donc le système matriciel (5.18) se discrétise de la façon suivante, en appliquant la transformation inverse pour repasser dans le domaine $[0, +\infty[$:

$$(D - \mathcal{B}) \mathbf{X} = \mathcal{S} \quad (5.29)$$

4. Cette méthode est présentée de façon détaillée dans la thèse de [Chedevergne \(2007\)](#).

avec \mathcal{D} la matrice de différentiation du système global, diagonale par blocs et construite à partir de la matrice $\frac{2}{\eta_\infty}D$. La résolution du système est ensuite obtenue simplement dans le logiciel MATLAB par inversion de la matrice $\mathcal{D} - \mathcal{B}$:

$$\mathbf{X} = (\mathcal{D} - \mathcal{B})^{-1} \mathcal{S} \quad (5.30)$$

5.1.4. De la pertinence de la comparaison entre configurations de canal et de couche limite

Nous l'avons vu dans le chapitre 3, les études de réponses linéaires forcées de la littérature (Thorsness *et al.*, 1978; Charru *et al.*, 2013; Claudin *et al.*, 2017) se basent toutes sur un écoulement de couche limite, et sont comparées directement avec les expériences d'Hanratty, en canal. Une telle stratégie pose la question de la pertinence de la comparaison des expériences, en configuration de canal (et de même, des calculs RANS présentés dans la suite de ce chapitre) avec les analyses linéaires, en configuration de couche limite. Les écoulements turbulents de couche limite et de canal sont différents : ils présentent notamment des conditions aux limites différentes, les uns étant des écoulements internes (canal) et les autres, des écoulements externes (couche limite). Or, dans les analyses linéaires, nous ne considérons que des régions internes de couche limite. Afin de pouvoir comparer proprement les expériences et les simulations avec les analyses linéaires, il convient de vérifier si la région au centre du canal altère le champ de perturbations par rapport à une solution semi-infinie de région interne de couche limite. On peut dans un premier temps supposer que, pour une vitesse de frottement u_τ , une géométrie et une hauteur caractéristique (hauteur de couche limite et demi-hauteur de canal) identiques, les régions internes considérées ne présenteront pas de différence.

En limitant notre étude au cas de la région interne, le champ de perturbation dans les analyses linéaires est implicitement considéré indépendant du nombre de Reynolds de frottement R_τ , ne dépendant que du nombre d'onde adimensionné des ondulations $\alpha^+ = \mathcal{R}^{-1}$. Or l'influence du nombre de Reynolds de frottement en configuration de canal ne peut pas forcément être négligé : la figure 2.6 du chapitre 2 illustre par exemple l'incidence de R_τ sur le profil de vitesse longitudinal de l'écoulement. On peut raisonnablement se demander si R_τ impacte significativement la réponse de l'écoulement à la déformation de la paroi, c'est-à-dire si les résultats obtenus en canal par Hanratty peuvent être comparés sans risque avec les analyses linéaires, réalisées en configuration de couche limite.

Pour répondre à cette question, des analyses linéaires ont été menées avec une formulation du modèle de longueur de mélange adaptée à une configuration de canal de demi-hauteur δ_c . L'écoulement de base est obtenu à partir de la formule de Nikuradse (2.70), associée à un amortissement de van Driest (2.54) en proche paroi, qui porte lui la correction d'Hanratty :

$$\langle l \rangle (\eta) = \alpha \delta_c \left[0.14 - 0.08 \left(1 - \frac{\eta}{\alpha \delta_c} \right)^2 - 0.06 \left(1 - \frac{\eta}{\alpha \delta_c} \right)^4 \right] \left[1 - \exp \left(-\frac{\mathcal{R}\eta}{A} \right) \right] \quad (5.31)$$

À l'ordre 1, la fluctuation \hat{l} correspondante s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \hat{l}(\eta) = & - \left[0.16 \left(1 - \frac{\eta}{\alpha \delta_c} \right) + 0.24 \left(1 - \frac{\eta}{\alpha \delta_c} \right)^3 \right] \left[1 - \exp \left(-\frac{\mathcal{R}\eta}{A^0} \right) \right] \\ & - \alpha \delta_c \left[0.14 - 0.08 \left(1 - \frac{\eta}{\alpha \delta_c} \right)^2 - 0.06 \left(1 - \frac{\eta}{\alpha \delta_c} \right)^4 \right] \\ & \times \left[\frac{\mathcal{R}}{A^0} - \frac{\mathcal{R}\eta}{A^0} \left(\frac{\hat{\tau}_{xz}}{2} - b_H \mathcal{C} \right) \right] \exp \left(-\frac{\mathcal{R}\eta}{A^0} \right) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Avec $\alpha \delta_c = \pi$, qui correspond à la configuration expérimentale d'Hanratty *et al.*, et $a_H = 2000$ (valeur proposée par Charru *et al.* (2013)), on constate que pour retrouver des résultats similaires en écoulement de canal, on doit fixer b_H à 40, contre 35 dans les analyses linéaires réalisées en

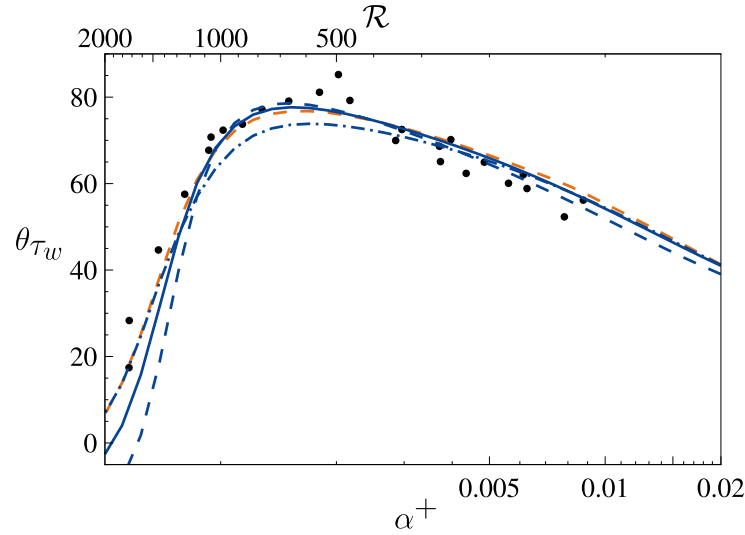


FIGURE 5.2. – Résultats des analyses linéaires en configuration de canal (lignes bleues) pour $\alpha\delta_c = 2\pi$ et $b_H = 35$ (- · - ·), $\alpha\delta_c = \pi$ et $b_H = 40$ (—) et $\alpha\delta_c = \pi/2$ et $b_H = 45$ (- - -), comparées aux mesures d’Hanratty (symboles) et à l’étude de réponse linéaire forcée en configuration de couche limite (- - - orange) avec $a_H = 2000$ et $b_H = 35$.

configuration de couche limite. Étant donné que la valeur de b_H n’est pas déterminée et considérant la dispersion des mesures, les résultats donnés par les deux configurations semblent satisfaisants. De plus, on remarque que si l’on augmente ou diminue la valeur de $\alpha\delta_c$, la valeur de b_H doit également être ajustée : il semble ainsi y avoir une vraie influence du nombre de Reynolds de frottement, mais celle-ci peut-être compensée par b_H . Enfin, les deux configurations de canal et de couche limite donnent des résultats proches, quelle que soit la valeur de $\alpha\delta_c$ pour une valeur commune $b_H = 35$ pour $\mathcal{R} < 500$: dans le régime transitionnel, l’influence de R_τ est faible et on en conclut que les études de réponses linéaires forcées réalisées en configuration de couche limite peuvent raisonnablement être comparées aux expériences et aux calculs RANS dans le régime transitionnel. La figure 5.2 illustre l’ensemble de ces conclusions. De plus, on montrera dans la suite que le domaine d’intérêt est limité à des nombres de Reynolds inférieurs à $\mathcal{R} = 500$, domaine dans lequel la dépendance à R_τ est limitée (Chedevergne *et al.*, 2023).

5.2. Calculs RANS avec CEDRE

5.2.1. Présentation de la plateforme CEDRE

Présentation générale

La plateforme CEDRE, développée à l’ONERA, est une plateforme multiphysique conçue pour résoudre des problèmes industriels et de recherche dans les domaines de l’énergétique et de la propulsion. Ce logiciel, présentée en détail par Refloch *et al.* (2011), s’appuie sur une approche multi-solveur : le code est organisé comme un ensemble de solveurs spécifiquement développés pour traiter une physique particulière et pouvant être couplés pour des problématiques multiphysiques. On retrouve par exemple les solveurs CHARME (solveur Navier–Stokes), ACACIA (conduction thermique), SPIREE (écoulements multi-phasiques, approche Eulérienne), SPARTE (écoulements multi-phasique, approche Lagrangienne), FILM (films liquides), REA et ASTRE (transferts radiatifs). Cette organisation permet de s’adapter à un large éventail de domaines tels que l’aérodynamique, l’aérothermique, la combustion, le givrage, l’aéroacoustique, etc... (voir Scherrer *et al.* (2011) pour des exemples d’applications). Devant notamment répondre aux besoins industriels, le code est conçu pour des maillages non-structurés et des calculs massivement parallèles, permettant de gérer des géométries complexes dans des configurations instationnaires

et multiphysiques tout en accordant une attention particulière à la réduction des coûts de calculs.

Le solveur Navier–Stokes CHARME

Nous présenterons uniquement le solveur Navier–Stokes CHARME, ce dernier étant le seul utilisé dans cette thèse⁵. Il s'agit d'un solveur basé sur une méthode de volumes finis, et régi par les équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement et d'énergie pour chacune des espèces présentes dans le milieu. Il est adapté aussi bien à des écoulements incompressibles (à de faibles nombres de Mach) que fortement compressibles (écoulements hypersoniques par exemple). La prise en compte de la turbulence dans les écoulements étudiés peut se faire *via* des approches RANS ou LES. Concernant les calculs RANS, plusieurs modèles de turbulence sont disponibles, parmi lesquels on retrouve le modèle au premier ordre $\mathcal{K} - \omega$ SST de Menter (1994) et le modèle d'ordre 2 EB-RSM de Manceau (2015), que nous utiliserons dans la suite.

La discrétisation spatiale est obtenue par une méthodologie de type MUSCL⁶, décrite en détail par Courbet *et al.* (2011). De nombreux schémas sont disponibles pour la reconstruction des flux numériques (nous utiliserons un schéma HLLC⁷ (Toro, 2013) par la suite), ainsi que pour la discrétisation temporelle. Nous utiliserons un schéma implicite de type GMRES⁸. De plus, nos simulations sont conduites sans limiteurs de gradients ni de face, ce qui permet de capter les fluctuations de petites amplitudes, sans introduire de bruit numérique.

5.2.2. Configuration

Afin de compléter les analyses linéaires, des simulations RANS ont été menées avec le solveur CHARME du code CEDRE. La configuration et la validation de ces calculs sont présentées dans cette section, et les résultats obtenus seront ensuite comparés aux études de réponses linéaires forcées et aux données expérimentales dans la section 5.3.

Domaine numérique

Le domaine numérique, schématisé sur la figure 5.3, est un canal périodique plan de hauteur $2\delta_c = 2$ m. Un profil sinusoïdal de longueur d'onde $\lambda = 2$ m et d'amplitude $\zeta_0 = 0.005$ m compose la paroi inférieure uniquement, de façon à reproduire les conditions expérimentales d'Hanratty *et al.* Dans une telle configuration, le nombre d'onde α de l'ondulation est égal à π . On impose une force pour entraîner l'écoulement de telle sorte que la vitesse de friction u_τ soit égale à 1 m/s et un flux thermique constant est appliqué aux parois. Cette condition limite permet de faire des simulations sans transfert de chaleur, car elle permet d'obtenir des champs de température quasiment homogènes. Dans le chapitre 6, nous nous intéresserons aux flux thermiques. D'autres conditions aux limites seront considérées, avec notamment ajout d'un terme source afin d'équilibrer le bilan d'énergie. L'écoulement est considéré incompressible, les fluctuations de masse volumique obtenues étant de trois ou quatre ordres de grandeur inférieures aux fluctuations de vitesse et de pression.

La stratégie numérique adoptée s'inspire de la stratégie expérimentale d'Hanratty *et al.* : à géométrie fixe, une étude paramétrique de la réponse de l'écoulement est réalisée en fonction du nombre de Reynolds \mathcal{R} . Comme dans les expériences, on agit sur un autre paramètre que la géométrie pour faire varier $\alpha^+ = \mathcal{R}^{-1}$. Adimensionné en variables de paroi, le nombre d'onde α^+ s'écrit $\frac{\pi\nu}{u_\tau}$. La viscosité permet alors de modifier le nombre de Reynolds \mathcal{R} . Huit valeurs du nombre d'onde α^+ ont été simulées, couvrant l'ensemble du régime transitionnel, pour lequel le pic de déphasage du cisaillement à la paroi est observé, et correspondant aux nombres de Reynolds $\mathcal{R} \approx \{100, 150, 200, 300, 400, 500, 700, 1000\}$. Une simulation à $\mathcal{R} = 130$ a également été menée,

5. Pour plus d'informations quant aux autres solveurs évoqués ci-dessus, nous renvoyons le lecteur intéressé vers la présentation exhaustive de Refloch *et al.* (2011).

6. Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws.

7. Harten-Lax-van Leer Contact.

8. Generalized Minimal RESidual.

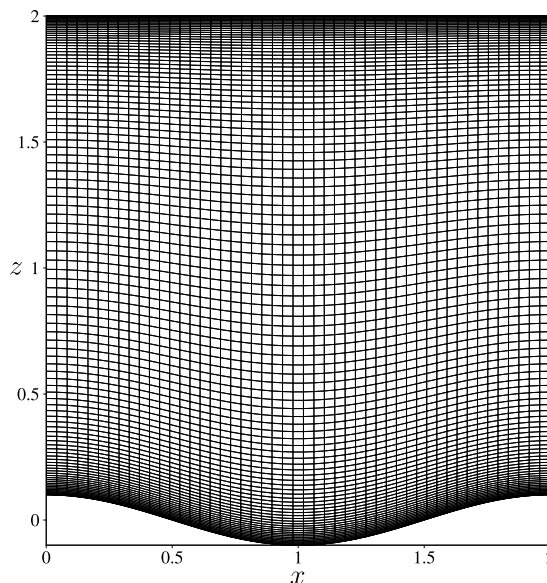


FIGURE 5.3. – Domaine numérique pour les calculs RANS. Le nombre de points est réduit et le profil sinusoïdal est d’une amplitude bien plus grande que dans les simulations afin de rendre la figure plus lisible.

permettant de valider la procédure numérique grâce à une comparaison avec les données expérimentales très complètes fournies par [Frederick et Hanratty \(1988\)](#) pour ce nombre de Reynolds. Cette comparaison est présentée au paragraphe 5.2.3.

Choix de l’écoulement de canal pour les simulations

Les deux configurations candidates pour mener les simulations RANS étaient les configurations de canal et de couche limite. Comme présenté au paragraphe précédent, le choix s’est finalement porté sur la configuration de canal. Il s’est imposé pour deux raisons : la première et principale concerne la volonté de reproduire fidèlement les conditions expérimentales d’[Hanratty *et al.*](#), réalisées en canal hydraulique (voir chapitre 3). Les paramètres du canal ont été choisis en ce sens, et notamment le produit $\alpha\delta_c$ fixé à π similairement à la configuration expérimentale. Cependant, simuler un écoulement de couche limite resterait intéressant, notamment dans l’optique de la comparaison avec les analyses linéaires (nous verrons d’ailleurs dans le paragraphe suivant la pertinence de la comparaison des simulations en canal avec les analyses linéaires basées sur un écoulement de couche limite). Toutefois, simuler un tel écoulement nécessite la prise en compte du développement entier de la couche limite dans la direction longitudinale, ce qui augmente significativement la taille du domaine, et par conséquent le coût de calcul associé. À l’inverse, l’écoulement de canal est supposé établi et on peut donc, en se limitant à une petite portion périodique (ici sur une longueur d’onde) avoir accès à l’écoulement de canal entièrement développé. On réduit ainsi significativement les coûts numériques engendrés.

Fermeture turbulente

Afin de caractériser l’influence de l’hypothèse de Boussinesq, deux séries de simulations ont été réalisées en faisant appel à deux modèles de turbulence différents⁹. Une première série a ainsi été réalisée avec le modèle $\mathcal{K} - \omega$ SST ([Menter, 1994](#)), afin de rester cohérent avec les analyses linéaires. Dans le but de s’affranchir du concept de viscosité turbulente, et ainsi mettre en lumière l’influence de l’hypothèse de Boussinesq, le modèle EB-RSM ([Manceau, 2015](#)) a été ensuite utilisé dans une seconde série de simulations.

9. Ces deux modèles sont présentés en détail dans le chapitre 2.

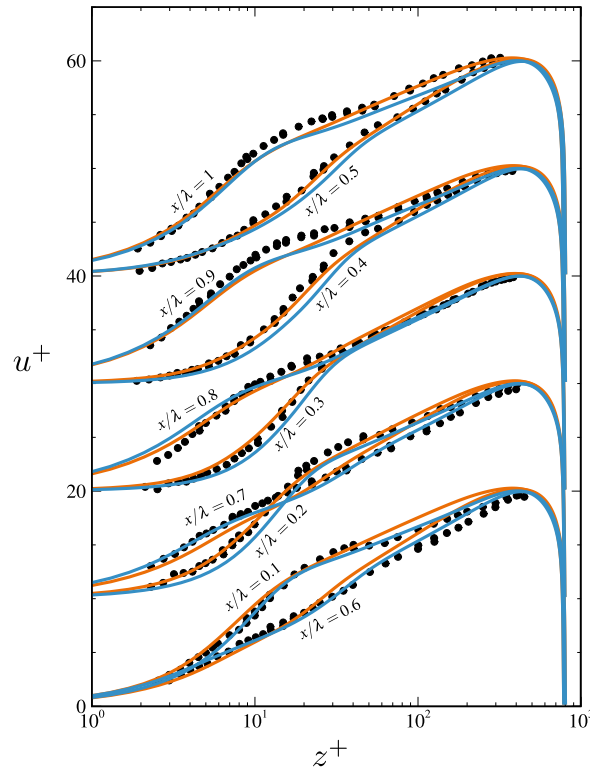


FIGURE 5.4. – Profils de vitesses mesurés et simulés pour $\mathcal{R} = 130$, à dix positions x/λ différentes le long de l'ondulation. Les symboles reproduisent les données expérimentales de Frederick et Hanratty (1988), les courbes bleues pleines sont les simulations RANS avec le modèle EB-RSM et les courbes en tiret oranges, avec le modèle $\mathcal{K} - \omega$ SST.

5.2.3. Validation des simulations RANS au début du régime transitionnel

Afin de valider la procédure numérique, deux simulations ont été menées à $\mathcal{R} = 130$. Pour cette valeur de nombre de Reynolds, Frederick et Hanratty (1988) procurent un ensemble de données concernant la dynamique de l'écoulement assez complet. Pour un nombre de Reynolds aussi proche du début du régime transitionnel, la fermeture turbulente ne devrait pas avoir un impact significatif, comme cela est déjà suggéré par les analyses linéaires de la littérature (voir chapitre 3).

Dans les simulations, l'amplitude de l'ondulation de la paroi est fixée à $\zeta_0^+ = 12.3$. Cette valeur étant inférieure au critère identifié pour par Zilker *et al.* (1977), on s'attend à obtenir une réponse linéaire de l'écoulement par rapport à la déformation de la paroi. Les profils de vitesses longitudinaux, mesurés et simulés, sont tracés et comparés à différentes positions le long de l'ondulation sur la figure 5.4. Comme attendu, les profils obtenus avec l'un et l'autre des deux modèles de turbulence sont en bon accord avec les données expérimentales, sans qu'un modèle en particulier ne paraisse reproduire plus fidèlement les mesures que l'autre.

Les données fournies par Frederick et Hanratty (1988) permettent également une comparaison intéressante avec le profil de la contrainte de cisaillement à la paroi τ_w (voir figure 5.5). De même que pour les profils de vitesse, les deux modèles procurent un bon accord avec les données expérimentales. En particulier, le comportement linéaire attendu est immédiatement vérifié, et la phase et l'amplitude du cisaillement sont correctement reproduits. On observe toutefois une légère différence entre les deux modèles, le modèle $\mathcal{K} - \omega$ semblant sous-estimer légèrement le déphasage par rapport au modèle EB-RSM, sans que cette différence ne soit suffisante pour conclure sur une meilleure représentativité d'un modèle par rapport à l'autre. Le modèle EB-RSM donne également une amplitude légèrement supérieure à celle du modèle $\mathcal{K} - \omega$. Nous verrons que cette tendance se conserve pour l'ensemble des valeurs de \mathcal{R} étudiées. Comme attendu, pour $\mathcal{R} = 130$ la fermeture

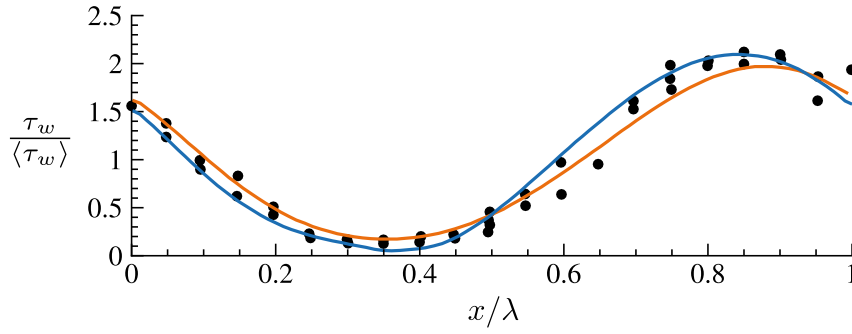


FIGURE 5.5. – Profils cisaillement pariétal mesuré et simulés pour $\mathcal{R} = 130$, à dix positions x/λ différentes le long de l'ondulation. Les symboles reproduisent les données expérimentales de [Frederick et Hanratty \(1988\)](#), les courbes pleines sont les simulations RANS avec les modèles EB-RSM (bleu) et $\mathcal{K} - \omega$ SST (orange).

turbulente n'a pas d'impact significatif sur la prévision de la réponse linéaire de l'écoulement à la petite déformation de la paroi, et la procédure numérique adoptée reproduit fidèlement les expériences d'Hanratty *et al.*

5.3. Comparaison entre simulations, mesures et analyses linéaires

5.3.1. Présentation de la base de données de DNS

En parallèle de ces travaux de thèse, une base de données de simulations numériques directes a été construite avec le code JAGUAR, développé conjointement entre l'ONERA et le CERFACS, afin de compléter les mesures d'Hanratty *et al.* Il s'agit notamment d'apporter un certain nombre d'informations sur les flux thermiques à la paroi, les expériences d'Hanratty *et al.* n'en fournissant aucune de ce type. L'analyse de ces données concernant les flux et températures à la paroi, et leur comparaison avec les simulations RANS fera l'objet du chapitre suivant. Dans ce chapitre, nous utiliserons ces simulations dans le but de valider les conclusions émises lors de la comparaison entre les analyses linéaires, les simulations RANS, et les mesures.

Le domaine sur lequel les DNS ont été menées est un canal de longueur 3λ , de hauteur $2\delta_c$ et de largeur $6\delta_c$. Le profil de la paroi inférieur est donné par la fonction $\zeta_0 \cos(\alpha x)$, et quatre valeurs de \mathcal{R} prises dans le régime transitionnel ont été étudiées : $\mathcal{R} = \{100, 150, 200, 300\}$. Les DNS ne reproduisent toutefois pas exactement le canal expérimental d'Hanratty *et al.*, avec un produit $\alpha\delta_c = \pi/2$ deux fois plus petit. Cependant, nous avons vu dans la section précédente que la phase du cisaillement n'est que peu affectée par ce changement de $\alpha\delta_c$ pour $\mathcal{R} < 500$, et ce choix est un

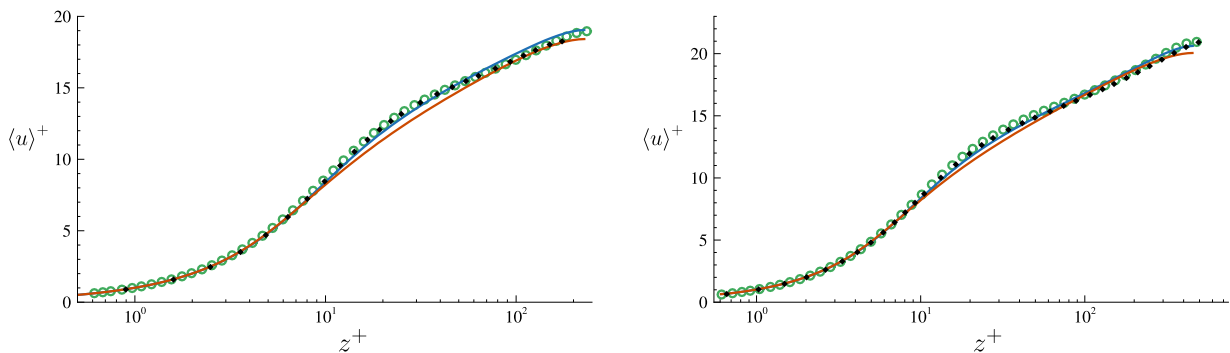


FIGURE 5.6. – Profils de vitesse moyens. Les symboles noirs représentent les DNS de [Hoyas et Jiménez \(2008\)](#), la courbe orange, les simulations RANS avec le modèle $\mathcal{K} - \omega$ et la courbe bleue avec le modèle EB-RSM. Les DNS sont représentées par les symboles verts. Gauche : $\mathcal{R} = 150$, droite : $\mathcal{R} = 300$.

compromis entre coût numérique et représentativité. Des simulations RANS ont également été menées dans des conditions identiques. Cette base de donnée a fait l'objet d'un article dans le *Journal of Fluid Mechanics* (Chedevergne *et al.*, 2023), où elle est présentée en détail. Cet article présente également une partie des conclusions de ce chapitre et du suivant.

5.3.2. Validation des calculs RANS et DNS à l'ordre dominant

Les profils de vitesse à l'ordre dominant sont tous comparables, et ce quelque soit le nombre de Reynolds \mathcal{R} considéré. Notons toutefois que, comme usuellement avec le modèle $\mathcal{K} - \omega$, le profil de vitesse moyen correspondant est sous estimé dans la région tampon. L'ensemble des résultats numériques présentés ici sont cohérents avec les DNS de référence de Hoyas et Jiménez (2008), obtenus dans un canal non déformé, validant la procédure numérique. De plus, cela montre également que l'écoulement à l'ordre 0 n'est pas impacté par la petite déformation de la paroi, ce qui va rendre possible la comparaison avec les analyses linéaires. Les profils de vitesse moyens obtenus grâce aux simulations RANS et aux DNS pour $\mathcal{R} = 150$ et $\mathcal{R} = 300$ sont ainsi comparés, dans un but illustratif, aux DNS de Hoyas et Jiménez (2008) réalisées à des nombres de Reynolds de frottement respectivement égaux à 180 et 550 sur la figure 5.6.

5.3.3. Phase et amplitude de la contrainte cisaillement

Les résultats des différentes études présentées dans les paragraphes précédents sont résumés sur les figures 5.7a et 5.7b, et comparés aux données expérimentales d'Hanraty *et al.* ainsi qu'aux études de réponses linéaires forcées de la littérature (voir chapitre 3).

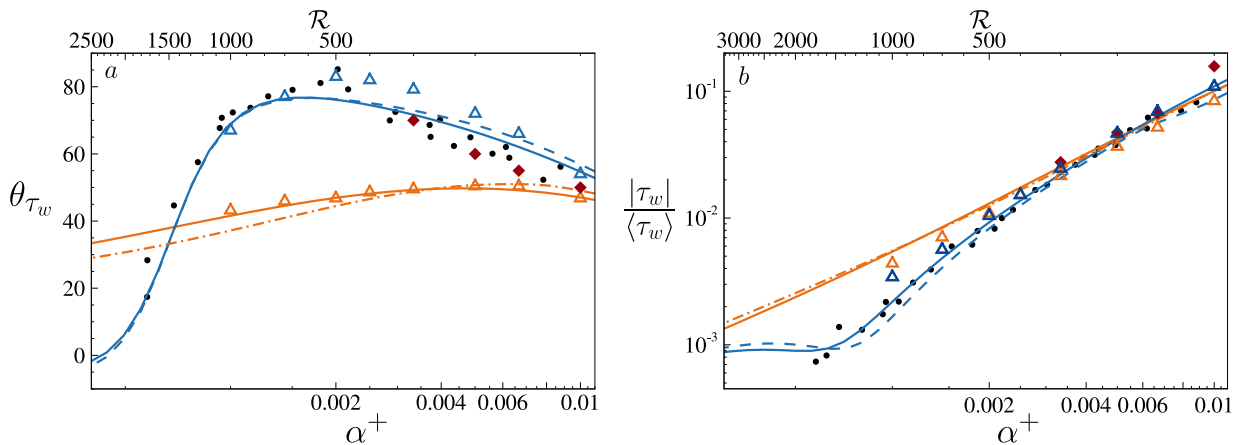


FIGURE 5.7. – Phase θ_{τ_w} (a) et amplitude $\frac{|\tau_w|}{\langle \tau_w \rangle}$ (b) du cisaillement paroi en fonction du nombre d'onde adimensionné α^+ , dans le régime transitionnel. Cercles noirs : mesures d'Hanraty, losanges rouges : DNS, triangles : simulations RANS avec le modèle $\mathcal{K} - \omega$ (orange) et le modèle EB-RSM (bleu). Analyses linéaires avec le modèle de longueur de mélange sans (orange, - - ·) et avec (bleu, —) la correction d'Hanraty, avec le système modifié (5.12) (bleu, - - -) et avec le modèle $\mathcal{K} - \omega$ (orange, —).

Plusieurs observations immédiates découlent de ces résultats. Dans un premier temps, on observe que les DNS sont comme attendu en accord avec les mesures d'Hanraty : on y observe les mêmes niveaux de déphasage et d'amortissement. De plus, on peut rapidement vérifier que l'analyse linéaire faisant appel au modèle $\mathcal{K} - \omega$ est tout à fait cohérente avec les simulations RANS correspondantes, bien que l'amplitude du cisaillement semble légèrement surestimée dans les analyses linéaires par rapport aux calculs. Cependant, le comportement global du cisaillement reste le même : l'amortissement du cisaillement que l'on peut observer à mesure que le nombre d'onde diminue est mal évalué par le modèle $\mathcal{K} - \omega$, que ce soit *via* les simulations ou *via* l'analyse

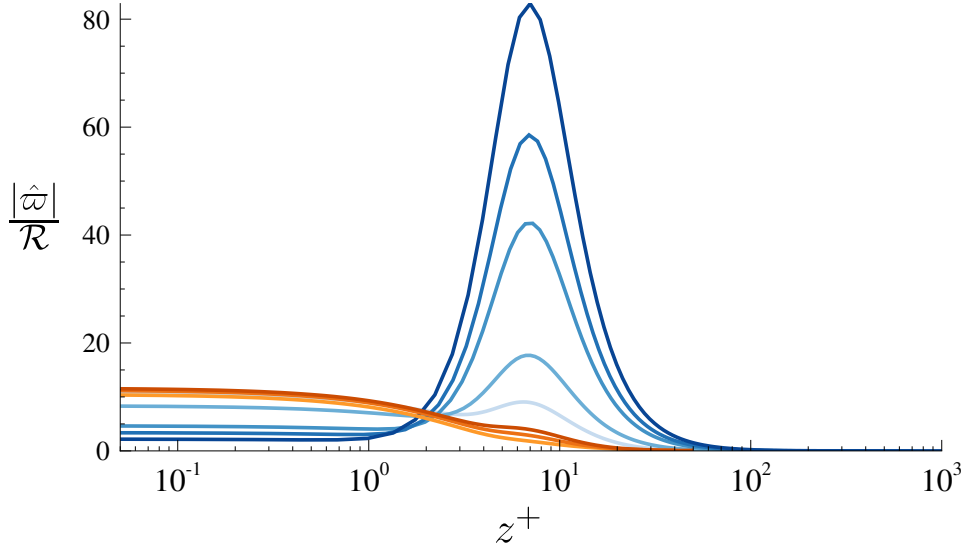


FIGURE 5.8. – Profils de perturbation de vorticité en dehors (orange) et dans (bleu) le régime transitionnel. Les courbes orange claire à orange foncé indiquent un nombre de Reynolds \mathcal{R} croissant, parmi $\mathcal{R} = \{30, 40, 50\}$ et bleue claire à bleue foncée, un nombre de Reynolds croissant parmi $\mathcal{R} = \{100, 200, 300, 500, 700, 1000\}$.

linéaire. De plus, comme attendu, le comportement du modèle $\mathcal{K} - \omega$ est très proche de celui du modèle de longueur de mélange standard. Le pic de déphasage du cisaillement n'est notamment pas correctement évalué par ces modèles, tous deux basés sur l'hypothèse de Boussinesq. En revanche, les simulations RANS avec le modèle EB-RSM sont en bien meilleur accord avec les observations expérimentales. À ce stade, nous pouvons énoncer une première conjecture : dans le régime transitionnel, on observe la mise en défaut de l'hypothèse de Boussinesq. Cette conjecture expliquerait la mauvaise représentation du cisaillement par les modèles à viscosité turbulente, contrairement aux modèles aux tensions de Reynolds. Le résultat de l'étude de réponse linéaire forcée avec le système (5.12), où la correction d'Hanratty a été déplacée afin de corriger la différence des tensions de Reynolds, est cohérent avec notre conjecture : une conséquence de la mise en défaut de l'hypothèse de Boussinesq est de négliger l'influence du terme de diffusion turbulente $\frac{\partial(\tau_{xx} - \tau_{zz})}{\partial x}$ dans le bilan de quantité de mouvement. La petite manipulation réalisée pour écrire le système (5.12) illustre la capacité de la correction d'Hanratty à compenser cette mise en défaut de l'hypothèse de Boussinesq.

5.3.4. Champ des perturbations de vitesse

L'objectif de cette section est de vérifier la conjecture énoncée au paragraphe précédent. Pour cela, nous allons tout d'abord mettre en avant le rôle de la perturbation de vorticité, puis nous caractériserons l'influence de la fermeture turbulente sur la prévision du champ de perturbations. Nous regarderons enfin la contribution du terme de diffusion turbulente $\frac{\partial\tau_{xx} - \tau_{zz}}{\partial x}$ dans le bilan de quantité de mouvement, contribution supposée directement proportionnelle à $\frac{\partial u}{\partial x}$ par l'hypothèse de Boussinesq.

Profondeur de pénétration de la perturbation de vorticité

Comme nous l'avons vu au chapitre 3, Charru et Hinch (2000) définissent la profondeur de pénétration de la perturbation δ_i à partir de la vorticité ; c'est-à-dire comme étant la distance à la paroi pour laquelle la perturbation de vorticité devient négligeable. Pour rappel, la vorticité

ϖ est défini comme le rotationnel¹⁰ du champ de vitesse de l'écoulement :

$$\varpi = \nabla \wedge \mathbf{u} \quad (5.33)$$

Pour un écoulement bidimensionnel, ne subsiste que la composante transverse de la vorticité, que l'on notera simplement $\varpi = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$. Après linéarisation, la perturbation de vorticité est donc donnée, à l'ordre 1, par :

$$\hat{\varpi} = \hat{u}_{,\eta} - i\hat{w} \quad (5.34)$$

  partir des analyses linéaires faisant intervenir la correction d'Hanratty, on peut tracer cette perturbation de vorticité pour plusieurs nombres de Reynolds dans et en dehors du régime transitionnel. La figure 5.8 montre ainsi les profils de perturbation de vorticité, normalisés par le nombre de Reynolds, pour $\mathcal{R} = \{30, 40, 50\}$, en dehors du régime transitionnel (en orange) et pour $\mathcal{R} = \{100, 200, 300, 500, 700, 1000\}$ dans le régime transitionnel (en bleu).

On observe immédiatement dans le régime transitionnel un pic de vorticité, dont la localisation semble indépendante du nombre de Reynolds \mathcal{R} , aux alentours de $z^+ = 7$, dans la zone tampon. Les profils tendent ensuite peu à peu vers zéro au-delà de la zone tampon.   l'inverse, bien que l'on devine le début de l'apparition de ce pic pour $\mathcal{R} = 50$, en dehors du régime de transition, les profils tendent directement vers zéro. On peut définir, dans le régime transitionnel, une zone de vorticité, correspondant à la région dans laquelle la vorticité n'est pas nulle et dont l'influence ne peut être négligée, et une zone dite de *non-vorticité*, dans laquelle la vorticité n'agit plus, loin de la paroi. Nous verrons notamment dans la section suivante que, dans la zone de vorticité, les perturbations de vitesse sont impactées et on observe l'apparition d'un déphasage, tandis qu'en dehors de cette région, la phase des perturbations est globalement constante. Un autre point notable concerne l'augmentation de δ_i avec le nombre de Reynolds \mathcal{R} : la perturbation de vorticité diffuse de plus en plus loin au sein de la région interne, jusqu'au-delà de la zone tampon pour les valeurs les plus élevées de \mathcal{R} .

Influence de la fermeture turbulente sur le champ de perturbation de vitesse

Les profils des perturbations de vitesse ont été extraits des simulations RANS   différentes positions x/λ le long de l'ondulation, et sont comparés à la base de données de DNS sur la figure 5.9, pour $\mathcal{R} = 150$ et $\mathcal{R} = 300$. Comme attendu, on observe dans un premier temps que l'amplitude des perturbations est divisée par deux lorsque le nombre de Reynolds est multiplié par deux. Cette observation est cohérente avec les développements linéaires puisque, d'après la décomposition (3.4), pour chaque quantité q , la fluctuation $\frac{q^+ - \langle q \rangle^+}{\zeta_0^+}$ est proportionnelle à $\alpha^+ = \mathcal{R}^{-1}$. De plus, le rôle de la vorticité est illustré ici de façon immédiate : en dehors de la zone de vorticité identifiée au paragraphe précédent (zone grisée sur la figure 5.9), les perturbations, bien que non nulles, évoluent peu. De plus, la phase du champ de perturbation n'est pas altérée par la déformation de la paroi, l'ordonnancement des profils correspondant à leur position le long de l'ondulation. En revanche, dans la zone de vorticité, on observe non seulement un pic des perturbations de vitesse autour de $z^+ = 10$, en cohérence avec celui de la perturbation de vorticité, mais également une modification de l'ordre des profils de perturbation, qui se croisent en raison de l'apparition du déphasage du champ de perturbation dans cette zone.

La figure 5.9 montre également l'influence de la fermeture turbulente pour prévoir le champ de perturbation dans la zone de vorticité. On voit en effet que le modèle EB-RSM procure un excellent accord avec les données de DNS, quelque soit le nombre de Reynolds concerné. Le modèle $\mathcal{K} - \omega$, quant à lui, donne également une très bonne prévision du champ perturbé en dehors de la zone de vorticité. Cependant, dans la zone de vorticité, bien que le comportement global des profils de perturbation soit correctement reproduit, on note tout de même un moins bon accord avec les données de DNS que pour le modèle EB-RSM. En particulier, les profils

¹⁰. Voir annexe A.1

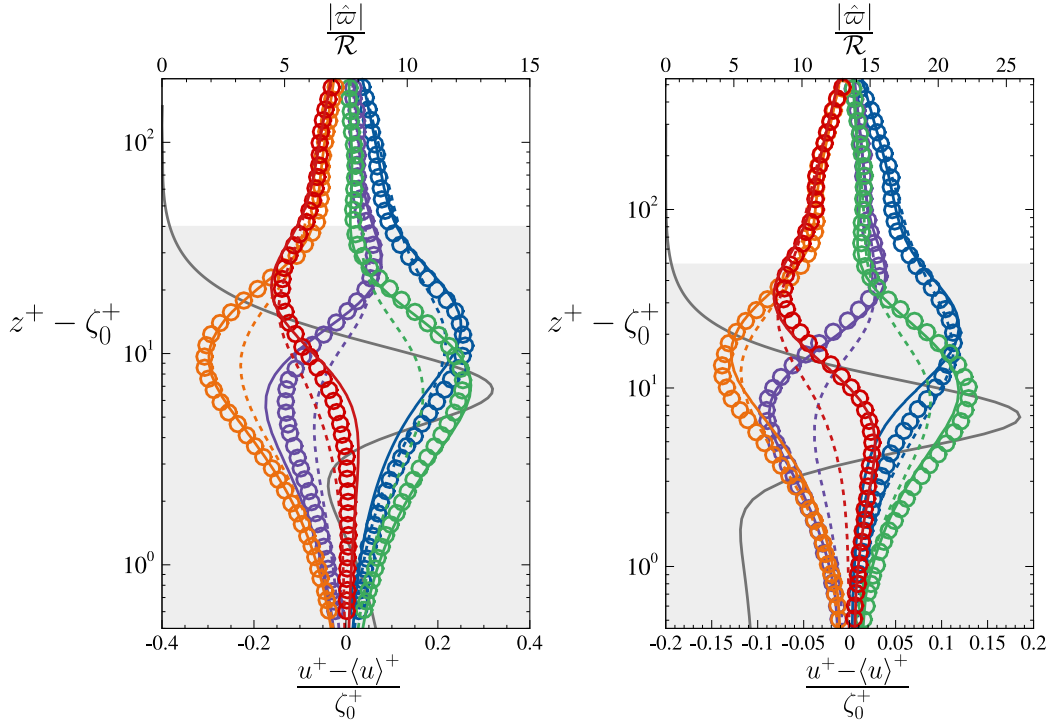


FIGURE 5.9. – Profils de perturbation de vitesse à $x/\lambda = 0.0$ (bleu), $x/\lambda = 0.2$ (violet), $x/\lambda = 0.4$ (vert), $x/\lambda = 0.6$ (orange) et $x/\lambda = 0.8$ (rouge). Symboles : DNS, traits pleins : simulations RANS avec le modèle EB-RSM, traits pointillés : simulations RANS avec le modèle $\mathcal{K} - \omega$. Ligne pleine grise : profil de perturbation de vorticité (tiré des analyses linéaires), la zone grisée représentant la région de vorticité. Gauche : $\mathcal{R} = 150$, droite : $\mathcal{R} = 300$.

donnés par le modèle $\mathcal{K} - \omega$ présentent un pic d'amplitude plus faible et légèrement décalé. Ces différences s'accroissent lorsque le nombre de Reynolds \mathcal{R} augmente, résultant en une mauvaise représentation du champ de perturbation, et notamment de la phase du cisaillement pariétal. Ainsi, dans la zone de vorticité, le champ perturbé est fortement impacté par la déformation de la paroi, et les deux fermetures turbulentes donnent des résultats différents, l'approche basée sur l'hypothèse de Boussinesq étant mise en défaut.

5.3.5. De l'importance du terme de diffusion turbulente dans le bilan de quantité de mouvement

À l'ordre dominant

À l'ordre dominant, le modèle $\mathcal{K} - \omega$ néglige la contribution du terme de diffusion turbulente dans le bilan de quantité de mouvement. En effet, avec l'hypothèse de Boussinesq, la différence des tensions diagonales est donnée par la relation :

$$\langle \tau_{xx} - \tau_{zz} \rangle^+ = 4 \left\langle \nu_t^+ \frac{\partial u^+}{\partial x^+} \right\rangle = 0 \quad (5.35)$$

À l'inverse, le modèle EB-RSM procure une bien meilleure prévision de ce terme, fournissant notamment une contribution non nulle, comme illustré sur la figure 5.10 pour $\mathcal{R} = 300$. On peut constater que le modèle $\mathcal{K} - \omega$ donne une bonne estimation de τ_{xz} . En revanche, les résultats du modèle EB-RSM montrent que la différence des tensions diagonales n'est pas nulle, contrairement à ce qui est prévu par l'hypothèse de Boussinesq.

Cependant, dans le bilan de quantité de mouvement, la contribution de la différence des tensions diagonales intervient à travers sa dérivée dans la direction longitudinale. Or, à l'ordre 0,

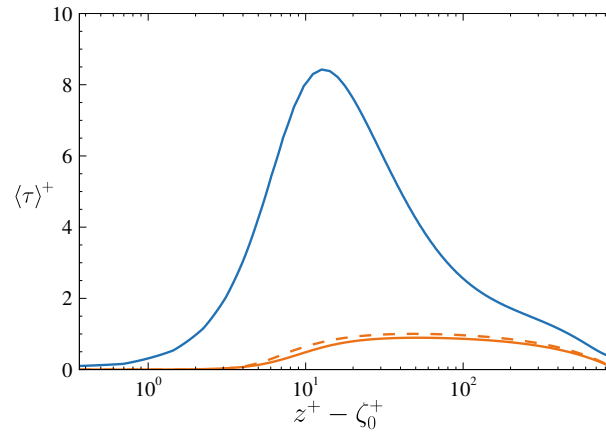


FIGURE 5.10. – Profils moyens de $\langle \tau_{xz} \rangle^+$ (orange) et $\langle \tau_{xx} - \tau_{zz} \rangle^+$ (bleu) tels que donnés par les simulations RANS à $\mathcal{R} = 300$. Ligne pointillée : modèle $\mathcal{K} - \omega$, ligne pleine : modèle EB-RSM.

l'écoulement est supposé entièrement établi dans cette direction : toutes les dérivés correspondantes sont nulles. Ce n'est pas le cas de $\frac{\partial \langle \tau_{xz} \rangle^+}{\partial z^+}$, qui représente la contribution principale dans le bilan de quantité de mouvement. À l'ordre dominant, l'utilisation de l'hypothèse de Boussinesq ne pose pas de problème, et le modèle $\mathcal{K} - \omega$ procure alors une approximation correcte des différentes quantités de l'écoulement de base.

À l'ordre 1

Les profils de perturbation $\frac{\partial (\tau_{xz}^+ - \langle \tau_{xz} \rangle^+)}{\partial z^+}$ et $\frac{\partial (\tau_{xx}^+ - \tau_{zz}^+ - \langle \tau_{xx} - \tau_{zz} \rangle^+)}{\partial x^+}$ donnés par les modèles EB-RSM et $\mathcal{K} - \omega$ sont tracés à différentes positions le long de l'ondulation sur la figure 5.11. Contrairement à ce qu'il se passe à l'ordre dominant, on peut observer immédiatement que la contribution du terme de diffusion turbulente au premier ordre est du même ordre de grandeur que la contribution de $\frac{\partial \langle \tau_{xz} \rangle^+}{\partial z^+}$ dans la zone de vorticité. En effet, en dehors de la région de vorticité, les profils de perturbation de $\frac{\partial \langle \tau_{xx} - \tau_{zz} \rangle^+}{\partial x^+}$ tendent rapidement vers zéro, contrairement à ceux de $\frac{\partial \langle \tau_{xz} \rangle^+}{\partial z^+}$. Loin de la paroi, l'hypothèse de Boussinesq semble être une approximation raisonnable des différentes contributions intervenant dans le bilan de quantité de mouvement. En revanche, au premier ordre, ce n'est plus le cas dans la zone de vorticité non nulle, proche de la paroi. Avec l'hypothèse de Boussinesq, dans le modèle $\mathcal{K} - \omega$, le terme $\frac{\partial (\tau_{xx}^+ - \tau_{zz}^+)}{\partial x^+}$ est proportionnel $\frac{\partial}{\partial x^+} \left[4\nu_t^+ \frac{\partial u^+}{\partial x^+} \right]$. Or, la figure 5.11 montre que ce dernier terme est d'environ deux ordres de grandeur inférieur à la perturbation de la différence des tensions diagonales prévue par le modèle EB-RSM. Dans tous les cas, dans la zone d'intérêt à vorticité non nulle, le terme $\frac{\partial u^+}{\partial x^+}$ est d'ordre 1 et la contribution à l'ordre dominant de ν_t^+ , du fait de l'amortissement de van Driest, tend vers zéro proche de la paroi : le produit $\nu_t^+ \frac{\partial u^+}{\partial x^+}$ s'annule donc dans cette zone, comme illustré par la figure 5.11. Au premier ordre, cela revient à négliger la contribution du terme de diffusion turbulente dans le bilan de quantité de mouvement, notamment dans la zone de vorticité non nulle. L'équilibre du bilan de quantité de mouvement est modifié dans cette zone où apparaissent les déphasages du champ de perturbation, dont la manifestation sur la contrainte de cisaillement pariétale a été observée expérimentalement par Hanratty *et al.* Ces résultats sont

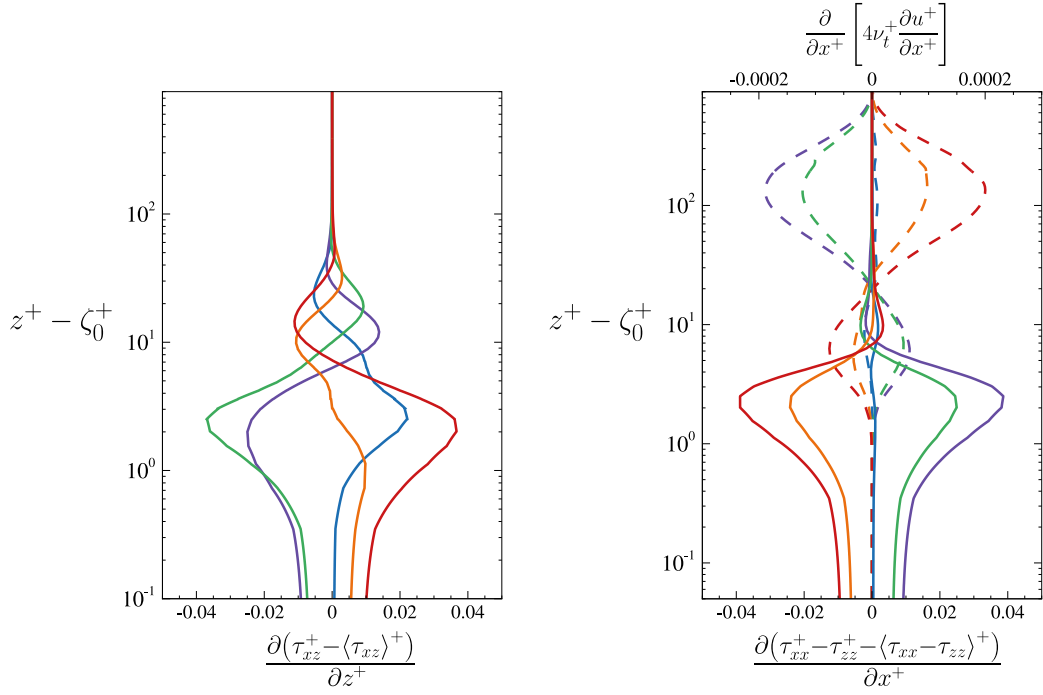


FIGURE 5.11. – Profils de perturbations $\frac{\partial(\tau_{xz}^+ - \langle \tau_{xz} \rangle^+)}{\partial z^+}$ (gauche) et $\frac{\partial(\tau_{xx}^+ - \tau_{zz}^+ - \langle \tau_{xx} - \tau_{zz} \rangle^+)}{\partial x^+}$ (droite) à $\mathcal{R} = 300$, donnés par le modèle EB-RSM (lignes pleines), à $x/\lambda = 0.0$ (bleu), $x/\lambda = 0.2$ (violet), $x/\lambda = 0.4$ (vert), $x/\lambda = 0.6$ (orange) et $x/\lambda = 0.8$ (rouge). Sur la figure de droite, en pointillés, les profils de $\frac{\partial}{\partial x^+} \left[4\nu_t^+ \frac{\partial u^+}{\partial x^+} \right]$ donnés par le modèle $\mathcal{K} - \omega$ sont tracés aux mêmes positions x/λ . L'échelle correspondante est sur l'axe supérieur.

confirmés par la base de données de DNS (Chedevergne *et al.*, 2023).

En conclusion de ce chapitre, les différentes études menées nous ont permis de caractériser l'influence de la fermeture turbulente sur la prévision du champ de perturbation. La mise en défaut de l'hypothèse de Boussinesq a rapidement été identifiée comme une conjecture plausible permettant d'expliquer l'incapacité des modèles de longueur de mélange standard et $\mathcal{K} - \omega$ à reproduire les observations expérimentales. Cette conjecture a pu être vérifiée à partir de l'étude du champ de perturbation dans la région proche de la paroi, grâce à une comparaison des calculs RANS avec une base de données de référence provenant de simulations numériques directes. Nous montrons ainsi que la correction d'Hanratty agit comme un palliatif pour compenser l'insuffisance de l'hypothèse de Boussinesq à travers une modification de la viscosité turbulente (corrigeant directement le cisaillement). Or, nous avons vu que le terme problématique est le terme de diffusion turbulente. Pour mettre au point des corrections pour des approches RANS, qui font l'objet du chapitre 7, nous adopterons une stratégie différente, qui ne se base pas sur la viscosité turbulente.

Bilan

Dans ce chapitre, les études de réponses linéaires forcées de la littérature ont été reprises et déclinées sous différentes versions, en faisant notamment appel à un modèle $\mathcal{K}-\omega$, afin d'y être comparées aux mesures expérimentales d'Hanratty présentées au chapitre 3. Des simulations RANS réalisées avec différentes fermetures turbulentes ont également été menées, dans une configuration de canal similaire au montage expérimental. Les analyses linéaires étant basées sur une configuration de région interne de couche limite turbulente, l'influence du nombre de Reynolds de frottement a pu être caractérisée à partir d'une analyse linéaire réalisée en configuration de canal, permettant de valider la comparaison de ces deux approches dans le régime transitionnel. Les résultats de ces différentes études ont permis d'expliquer l'incapacité des modèles de longueur de mélange standard (c'est-à-dire ne faisant pas appel à la correction d'Hanratty) et $\mathcal{K}-\omega$ à prévoir correctement le déphasage de la contrainte de cisaillement observé expérimentalement, illustrant la mise en défaut de l'hypothèse de Boussinesq dans le régime transitionnel. Afin de valider cette conjecture, le champ de perturbation a été analysé, mettant notamment en lumière l'existence d'une *zone de vorticité*. Dans cette région proche de la paroi, dans laquelle la perturbation de vorticité n'est pas nulle, les profils de perturbation de vitesse montrent l'apparition d'un déphasage du champ perturbé. L'analyse des différentes contributions intervenant dans le bilan de quantité de mouvement nous a ensuite permis de démontrer la mise en défaut de l'hypothèse de Boussinesq dans cette région de vorticité non nulle, qui néglige l'impact du terme de diffusion turbulente au premier ordre. Le rôle et le fonctionnement de la correction d'Hanratty pour pallier ce défaut dans le modèle de longueur de mélange sera discuté en détail dans le chapitre 7.

Étude de la stabilité d'une surface ablatée et de l'influence de la fermeture turbulente sur la prévision des transferts thermiques

Le chapitre 5 nous a permis de montrer, grâce à l'étude des perturbations de vitesse, la mise en défaut de l'hypothèse de Boussinesq, et par conséquent l'influence importante du choix de la fermeture turbulente pour prévoir les caractéristiques de l'écoulement dans le régime transitionnel. Dans les applications d'ablation, la régression de la paroi est le plus souvent régie par les transferts thermiques à la paroi. Ce chapitre a pour but d'étendre les analyses du chapitre précédent au bilan d'énergie et aux transferts thermiques. La base de données de simulations numériques directes permet notamment de compléter les mesures de vitesses d'Hanratty *et al.* et d'obtenir des informations sur les flux de chaleur, dans une configuration canal proche des expériences. L'équation de l'énergie exprimée pour l'enthalpie totale a ainsi été linéarisée en s'inspirant des travaux de Claudin *et al.* (2017) présentés dans le chapitre 3. Ces nouvelles études de réponses linéaires forcées ont été complétées par des simulations RANS faisant intervenir différentes fermetures turbulentes. Ces travaux ont permis de montrer l'impact du choix de la fermeture turbulente ainsi que le rôle de la correction d'Hanratty dans la prévision des flux thermiques. La stabilité d'une surface ablatée a ensuite été étudiée à l'aide des différentes fermetures turbulentes considérées. Les résultats obtenus ont permis de montrer que lors de la régression de la surface, l'émergence d'une longueur d'onde particulière de la déformation de la paroi est favorisée. On peut rapprocher cette longueur d'onde de la corrélation de Thomas (1979), illustrant, à travers l'influence de l'hypothèse de Boussinesq, le rôle de la turbulence dans la sélection d'une longueur d'onde particulière lors du recul de la paroi. Un article paru dans le *Journal of Fluid Mechanics* (Chedevergne *et al.*, 2023) présente les développements et conclusions qui font l'objet de ce chapitre (ainsi qu'une partie des conclusions du précédent) et la base de données de DNS établie en marge de ces travaux de thèse.

Sommaire

6.1. Retour sur les analyses linéaires	88
6.1.1. Équation de l'énergie pour l'enthalpie totale	88
6.1.2. Linéarisation de l'équation de l'énergie et du flux thermique normal	89
6.2. Simulations RANS et données de référence	90
6.2.1. Validation des simulations RANS à l'ordre dominant	90
6.2.2. Champ de perturbation de température	91
6.3. Phase et amplitude du flux thermique	92
6.3.1. Comparaison des analyses linéaires avec les calculs Navier-Stokes	92
6.3.2. Conclusion sur l'influence de la fermeture turbulente	94
6.4. Stabilité d'une surface régressive	94
Bilan	97

Dans le cadre des applications d'ablation et d'érosion qui motivent notre étude, qu'elles soient liées au contexte de la rentrée atmosphérique ou, plus généralement, aux nombreux environnements géophysiques évoqués au chapitre 1 de ce manuscrit, il est nécessaire, pour étudier la régression de la paroi, de s'intéresser aux transferts de masse et/ou d'énergie. Les considérations soulevées dans ce chapitre 6, inspirées des travaux de Claudin *et al.* (2017), restent suffisamment générales pour représenter un certain nombre d'applications. En effet, nous nous concentrons ici sur l'équation de l'énergie (2.2c) pour l'enthalpie totale dans le but de pouvoir comparer les études linéaires aux simulations RANS et DNS. Or, pour de grandes valeurs de flux thermiques pariétaux ϕ_w , typiques des cas rencontrés dans le contexte de la rentrée atmosphérique, la dissipation peut être négligée dans l'équation (2.2c). Celle-ci se réduit alors à une simple équation d'advection-diffusion. Cette équation, identique à l'équation de dissolution (3.35) proposée par Claudin *et al.* (2017)¹ est représentative d'une grande variété d'applications. Elle est notamment adaptée à nos applications d'ablation rencontrées dans le contexte de la rentrée atmosphérique, où, comme nous allons le supposer dans ce chapitre, la vitesse de régression de la paroi peut être directement reliée au flux thermique pariétal ou à la concentration d'un oxydant par exemple².

6.1. Retour sur les analyses linéaires

6.1.1. Équation de l'énergie pour l'enthalpie totale

Dans le but d'étendre les études menées au chapitre précédent à l'analyse du bilan d'énergie et des transferts thermiques, les analyses linéaires précédemment réalisées sont reprises en incluant la linéarisation de l'équation de l'énergie. Afin de pouvoir les comparer aux simulations RANS et à la base de données de DNS, on considère l'enthalpie totale $h_t = h + \frac{u_i u_i}{2}$, vue dans une première approche comme un scalaire passif. L'équation de l'énergie (2.2c) peut s'écrire sous la forme :

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial x_i} - \overline{u_i' h'} + \tau_{ij} u_j - h_t u_i \right) = 0 \quad (6.1)$$

Le flux thermique normal à la paroi, noté f , est donné par l'expression suivante :

$$f = \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial z} - \overline{w' h'} + u \tau_{xz} + w \tau_{zz} - w h_t = 0 \quad (6.2)$$

Le flux thermique turbulent $-\overline{w' h'}$ est modélisé à l'aide d'une hypothèse de simple gradient (SGDH)³. La différence entre l'approche développée dans notre étude et celle de Claudin *et al.* (2017) réside dans le modèle de longueur de mélange utilisé pour cela. Cette longueur de mélange, que nous noterons l_θ , diffère du modèle proposé par Claudin *et al.* (2017), qui considèrent que cette dernière peut simplement être prise identique à celle utilisée pour la dynamique de l'écoulement (équation (2.55)). Le flux thermique turbulent est donné par :

$$-\overline{w' h'} = \frac{l_\theta^2}{Pr_t} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial z} \quad (6.3)$$

Avec $Pr_t = 0.9$ le nombre de Prandtl turbulent, et la longueur de mélange l_θ prise sous la forme proposée par Cebeci et Smith (1974), qui sépare les fonctions d'amortissement de la vitesse et de l'enthalpie, permettant de distinguer les comportements proches de la paroi de ces deux variables :

$$l_\theta = \kappa z \left[1 - \exp \left(-\frac{z \sqrt{\tau_{xz}}}{\nu A} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \left[1 - \exp \left(-\frac{z \sqrt{\tau_{xz}}}{\nu A_\theta} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.4)$$

1. Voir chapitre 3.

2. Voir chapitre 1 pour plus de détails sur les mécanismes menant à l'ablation d'un corps de rentrée.

3. Voir chapitre 2.

6.1.2. Linéarisation de l'équation de l'énergie et du flux thermique normal

Afin de réaliser l'expansion linéaire de l'équation (6.1), l'enthalpie h et le flux normal f , adimensionnés par la vitesse de frottement u_τ , et la longueur de mélange l_θ , adimensionnée par le nombre d'onde α , sont exprimés suivant la décomposition (3.4) :

$$\begin{aligned} h &= u_\tau^2 \left(\langle h \rangle + \alpha \zeta_0 \hat{h} e^{i\alpha x} \right) \\ f &= u_\tau^3 \left(\langle f \rangle + \alpha \zeta_0 \hat{f} e^{i\alpha x} \right) \\ \alpha l_\theta &= \langle l_\theta \rangle + \alpha \zeta_0 \hat{l}_\theta e^{i\alpha x} \end{aligned} \quad (6.5)$$

À l'ordre dominant

En notant $\phi_w^* = \frac{\langle \phi_w \rangle}{\rho u_\tau^3}$ le flux thermique à la paroi adimensionné (à l'ordre 0), l'enthalpie moyenne est obtenue à partir de l'équation :

$$\left(\frac{\langle l_\theta \rangle^2 \langle u \rangle_\eta}{Pr_t} + \frac{\mathcal{R}^{-1}}{Pr} \right) \langle h \rangle_\eta + \langle u \rangle + \phi_w^* = 0 \quad (6.6)$$

La partie homogène de la longueur de mélange, $\langle l_\theta \rangle$, s'exprime, à l'ordre 0 :

$$\langle l_\theta \rangle = \kappa \eta \left[1 - \exp \left(-\frac{\mathcal{R}\eta}{A^0} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \left[1 - \exp \left(-\frac{\mathcal{R}\eta}{A_\theta^0} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.7)$$

À l'ordre dominant, la valeur de A_θ^0 est prise égale à 30, proche de la valeur préconisée par Cebeci et Smith (1974) pour un nombre de Prandtl turbulent $Pr_t = 0.9$.

Au premier ordre

La linéarisation de la longueur de mélange est obtenue comme précédemment à l'aide d'un développement de Taylor autour de la perturbation $\eta_0 = \alpha \zeta_0$. Comme ce que nous avons fait au chapitre 3, nous prenons en compte les variations relatives de \mathcal{R} et A en fonction respectivement de la vitesse de frottement et de la correction d'Hanratty \mathcal{C} (relations (3.10) et (3.11)). De même, ici, la correction d'Hanratty est incluse de façon similaire dans le paramètre A_θ de la fonction d'amortissement de l'enthalpie, que l'on considère également dépendant de la vitesse de frottement en introduisant le paramètre ε_θ .

$$A_\theta|_{\eta-\eta_0} = A_\theta^0 \left(1 + \eta_0 \left(b_{H_\theta} \mathcal{C}(\eta - \eta_0) + \varepsilon_\theta (\hat{\tau}_{xz}(\eta - \eta_0))^{1/2} \right) \right) \quad (6.8)$$

La dépendance à la correction d'Hanratty est la même que pour la longueur de mélange l , c'est-à-dire que dans la suite de notre étude, nous prendrons $b_{H_\theta} = b_H = 33$. Le meilleur accord avec les résultats de DNS et des simulations RANS avec le modèle EB-RSM est obtenu pour $\varepsilon_\theta = 4$. Finalement, la fluctuation \hat{l}_θ s'exprime :

$$\begin{aligned} \hat{l}_\theta &= -\kappa \left[1 - \exp \left(-\frac{\mathcal{R}\eta}{A^0} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \left[1 - \exp \left(-\frac{\mathcal{R}\eta}{A_\theta^0} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\exp \left(-\frac{\mathcal{R}\eta}{A^0} \right)}{1 - \exp \left(-\frac{\mathcal{R}\eta}{A^0} \right)} \left(\frac{\mathcal{R}\eta}{A^0} + \frac{\mathcal{R}\eta^2}{A^0} \left(\frac{\hat{\tau}_{xz}}{2} - b_H \mathcal{C} \right) \right) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\exp \left(-\frac{\mathcal{R}\eta}{A_\theta^0} \right)}{1 - \exp \left(-\frac{\mathcal{R}\eta}{A_\theta^0} \right)} \left(\frac{\mathcal{R}\eta}{A_\theta^0} + \frac{\mathcal{R}\eta^2}{A_\theta^0} \left((1 - \varepsilon_\theta) \frac{\hat{\tau}_{xz}}{2} - b_{H_\theta} \mathcal{C} \right) \right) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Le système d'équations à résoudre pour déterminer les fluctuations \hat{h} et \hat{f} de l'enthalpie et du flux est dérivé à partir de la linéarisation des équations (6.1) et (6.2) de la même façon que ce qui a été fait jusque là pour l'ensemble des analyses linéaires.

$$\hat{h}_{,\eta} = \left[\hat{f} + \hat{w} \left(\langle h \rangle + \frac{1}{2} \langle u \rangle^2 \right) - \left(\hat{\tau}_{xz} \langle u \rangle - \frac{1}{3} \chi^2 \hat{w} + \hat{u} \right) - \frac{\langle h \rangle_{,\eta}}{Pr_t} \left(2 \langle l_\theta \rangle \hat{l}_\theta \langle u \rangle_{,\eta} + \langle l_\theta \rangle^2 (\hat{u}_{,\eta} + i \hat{w}) \right) \right] \left(\frac{\langle l_\theta \rangle^2 \langle u \rangle_{,\eta}}{Pr_t} + \frac{\mathcal{R}^{-1}}{Pr} \right)^{-1} \quad (6.10)$$

$$\hat{f}_{,\eta} = \left(i \langle u \rangle \frac{\langle l_\theta \rangle^2 \langle u \rangle_{,\eta}}{Pr_t} + \frac{\mathcal{R}^{-1}}{Pr} \right) \hat{h} + \frac{3}{2} i \langle u \rangle^2 \hat{u} + i \hat{u} \langle h \rangle - i \left(\hat{\tau}_{xx} \langle u \rangle - \frac{1}{3} \chi^2 \hat{u} + \hat{w} \right) \quad (6.11)$$

On associe à ces équations une condition à la paroi de type Dirichlet, où l'enthalpie est imposée, de telle sorte que la comparaison avec les simulations RANS et DNS soit cohérente, et on considère que le flux à l'infini est nul :

$$\begin{aligned} \hat{h}(0) &= - \langle h \rangle_{,\eta} (0) \\ \hat{f}(\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

On obtient un système de six équations fermées composé du système (3.23) et des équations (6.10) et (6.11), que l'on résout avec la méthode de collocation spectrale introduite au chapitre 5. Les résultats de l'analyse linéaire sont présentés dans la section 6.3 et serviront par la suite à calculer la vitesse de régression de la paroi dans la section 6.4.

6.2. Simulations RANS et données de référence

Les mesures d'Hanratty ne procurent pas d'information sur les flux thermiques à la paroi, cette limitation ayant par ailleurs motivé la construction de la base de données de DNS présentée au chapitre précédent (section 5.3.1). C'est pourquoi les données de référence utilisées dans ce chapitre seront principalement issues des simulations DNS, auxquelles nous comparerons les résultats des calculs RANS réalisés dans des conditions identiques. Comme évoqué au chapitre précédent, la condition limite considérée pour ces derniers calculs a été modifiée. Une température constante est désormais imposée aux parois, et un terme source, constant et homogène, est ajouté afin d'équilibrer le bilan d'énergie pour une valeur de flux pariétal donnée.

6.2.1. Validation des simulations RANS à l'ordre dominant

Les simulations DNS ayant été validées sur la figure 5.6 au chapitre précédent grâce à une comparaison avec les DNS issues des travaux de Hoyas et Jiménez (2008), nous nous en servons ici pour confirmer la bonne représentativité des calculs RANS concernant les profils de température. Cette grandeur nous intéresse car, au vu des conditions dans lesquelles ont été menées les simulations, elle peut être directement assimilée à un scalaire passif. De plus, le fluide simulé est l'air, considéré dans les calculs RANS et DNS comme un gaz parfait, et les champs de température obtenus sont peu élevés. Par conséquent, la capacité thermique spécifique C_p du fluide peut ici être supposée constante. Ainsi, les profils de température extraits des simulations sont directement proportionnels aux profils d'enthalpie grâce à la relation $h_t - h_{tw} = C_p \Theta$ (en notant Θ la différence de température avec la paroi et h_{tw} l'enthalpie à la paroi), facilitant la comparaison avec les analyses linéaires.

La différence de température Θ définie ci-dessus est adimensionnée⁴ par la température de frottement, $\Theta_\tau = \frac{-\phi_w}{\rho C_p u_\tau}$. Les profils de température moyen $\langle \Theta \rangle^+$ sont tracés sur la figure 6.1, qui propose une comparaison entre les DNS et les calculs RANS réalisés avec les modèles $\mathcal{K} - \omega$ et

4. Ce que l'on notera comme précédemment par un +.

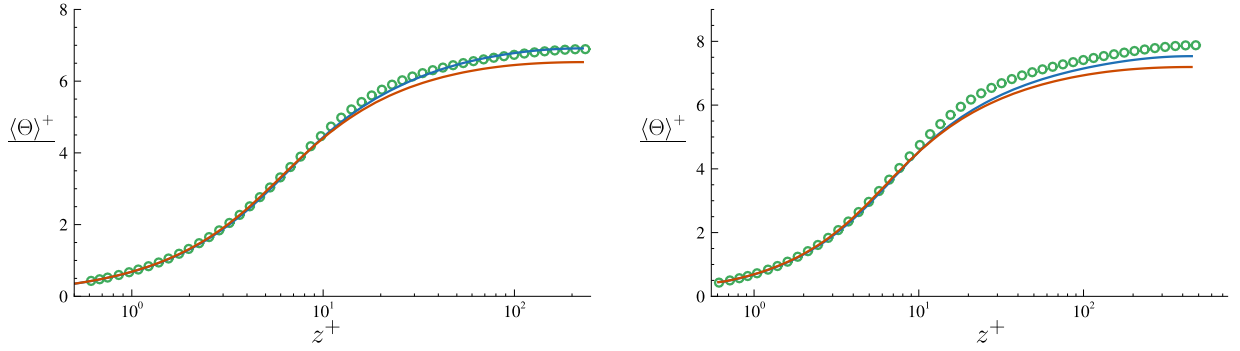


FIGURE 6.1. – Profils de température moyens. La courbe orange représente les simulations RANS avec le modèle $\mathcal{K}-\omega$ et la courbe bleue avec le modèle EB-RSM. Les DNS sont représentées par les symboles verts. Gauche : $\mathcal{R} = 150$, droite : $\mathcal{R} = 300$.

EB-RSM combinée à l’hypothèse GGDH. On peut noter que les profils des DNS sont reproduits plutôt correctement par la fermeture au second ordre, même si une légère différence apparaît pour les plus hauts nombres de Reynolds étudiés. Comme en ce qui concerne les profils de vitesse moyenne, le modèle $\mathcal{K}-\omega$ est un peu moins fidèle. En particulier, on observe une tendance similaire à sous estimer les résultats de DNS dans les zones tampon et logarithmique. Cette caractéristique est toutefois plus marquée que sur les profils de vitesse et l’écart semble augmenter lorsque \mathcal{R} augmente. Dans l’ensemble, ces résultats sont cohérents et valident les simulations RANS.

6.2.2. Champ de perturbation de température

Comme pour la dynamique de l’écoulement, bien que la tendance globale donnée par les modèles $\mathcal{K}-\omega$ et EB-RSM par rapport aux DNS soit correcte à l’ordre dominant, on observe bien plus de différences à l’ordre de la perturbation. Les profils de perturbations de la température $\frac{\Theta^+ - \langle \Theta \rangle^+}{\zeta_0^+}$ sont extraits des simulations RANS, de façon similaire que ce qui a été fait au chapitre 5. Là encore, comme attendu, l’amplitude de la perturbation est divisée par deux lorsque le nombre de Reynolds \mathcal{R} est doublé, en cohérence avec les développements linéaires et ce que nous avons vu au chapitre précédent. Les conclusions tirées de l’analyse des perturbations de vitesse au chapitre 5 restent valables quand nous nous penchons sur les profils de perturbations de température, bien qu’on puisse toutefois observer quelques différences notables. En effet, les figures 6.2 gauche et droite illustrent bien la division entre une zone de vorticité, dans laquelle les profils de perturbations se croisent, indiquant l’apparition d’un déphasage du champ perturbé, et la zone de vorticité nulle dans laquelle les perturbations, bien que différentes de zéro, évoluent peu et sont en phase avec le profil de la paroi. Le pic que l’on peut noter sur les profils de perturbations de vitesse, situé autour de $z^+ = 10$, est toujours visible, bien que moins marqué : l’amplitude des perturbations reste importante loin de la paroi, dans la zone de vorticité.

La prévision des profils de perturbations par les simulations RANS montre que les deux modèles, comme pour les profils de perturbations de vitesse, procurent une tendance générale en bon accord avec les résultats de DNS. Cependant, le modèle EB-RSM se montre moins précis quand il s’agit de retrouver le champ de perturbations de température, par rapport à ses performances concernant les perturbations de vitesse, illustrant les limites de l’hypothèse de gradient généralisée (GGDH) utilisée ici (Daly et Harlow, 1970). Il reste cependant meilleur que le modèle $\mathcal{K}-\omega$, qui présente également un écart plus important avec les données de référence que lorsqu’il s’agissait du champ de vitesse. Les mêmes conclusions que nous avons eues quant à la comparaison des deux modèles restent valables : le modèle EB-RSM procure une bonne estimation globale des profils de perturbations de température, contrairement au modèle $\mathcal{K}-\omega$, qui, comme au chapitre précédent, tend à sous-estimer non seulement l’amplitude mais aussi le déphasage des perturbations par rapport aux résultats de DNS et du modèle au second ordre. Au chapitre précédent, nous avons pu utiliser ces résultats pour expliquer les observations que nous avons faites quant à l’influence

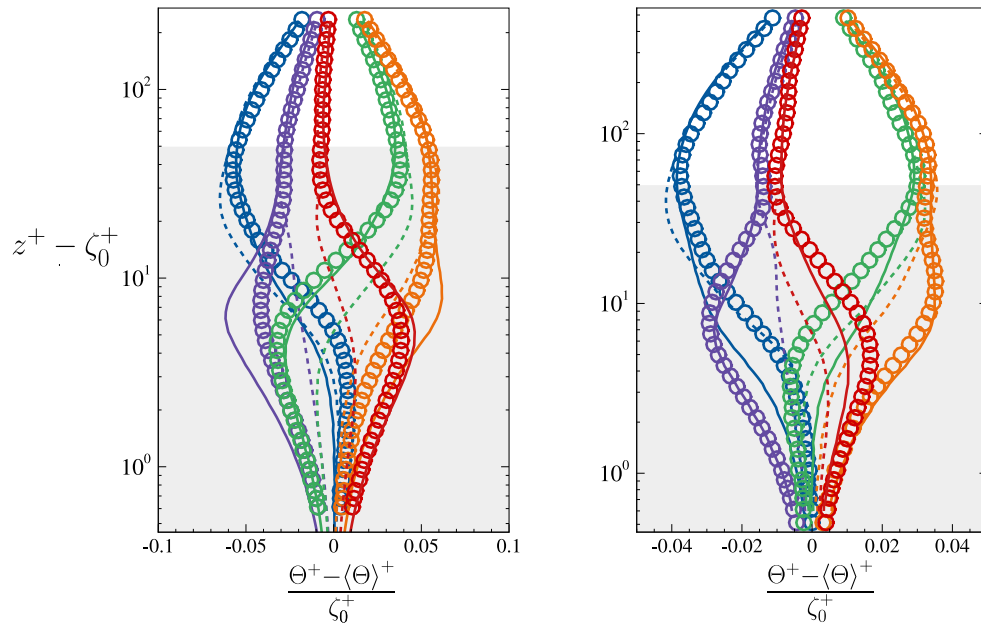


FIGURE 6.2. – Profils de perturbation de température à $x/\lambda = 0.0$ (bleu), $x/\lambda = 0.2$ (violet), $x/\lambda = 0.4$ (vert), $x/\lambda = 0.6$ (orange) et $x/\lambda = 0.8$ (rouge). Symboles : DNS, traits pleins : simulations RANS avec le modèle EB-RSM, traits pointillés : simulations RANS avec le modèle $\mathcal{K} - \omega$. La zone grisée représente la région de vorticité. Gauche : $\mathcal{R} = 150$, droite : $\mathcal{R} = 300$.

de la fermeture turbulente pour retrouver la phase et l'amplitude du cisaillement à la paroi. Ces conclusions concernant les profils de perturbations de température ont, comme pour la dynamique de l'écoulement, une incidence sur l'amplitude et le déphasage du flux thermique pariétal.

6.3. Phase et amplitude du flux thermique

Dans cette section, nous nous intéressons plus particulièrement à la prévision des flux thermiques à la paroi, grandeur que l'on suppose généralement directement proportionnelle à la vitesse de récession de la paroi dans les cas d'ablation qui nous occupent.

6.3.1. Comparaison des analyses linéaires avec les calculs Navier-Stokes

Une autre démonstration de l'influence de la fermeture turbulente peut être faite en comparant la phase et l'amplitude du flux thermique à la paroi issues des simulations RANS et des DNS avec les analyses linéaires. Comme précisé en début de ce chapitre, nous pouvons négliger le terme de dissipation dans l'équation (2.2c) car les flux thermiques moyens ϕ_w rencontrés sont élevés. C'est le cas en pratique lorsque $|\phi_w^*|$ est supérieur à 100. Dans la suite de cette section, nous prendrons $\phi_w^* = -400$ pour les simulations et les analyses linéaires. Les évolutions de la phase θ_{ϕ_w} et de l'amplitude du flux thermique $\left| \frac{\phi_w^+ - \langle \phi_w^+ \rangle}{\zeta_0^+} \right|$ sont tracées sur la figure 6.3 pour les différentes études menées.

 volution de θ_{ϕ_w}

Une première remarque que nous pouvons faire concernant l'évolution de la phase du flux thermique (figure 6.3 gauche) est que les résultats obtenus avec le modèle EB-RSM semblent suivre correctement la tendance observée sur les données de référence – bien qu'ils semblent surestimer légèrement ce déphasage. Ce n'est pas le cas du modèle $\mathcal{K} - \omega$. Non seulement ce dernier sous-estime θ_{ϕ_w} mais il ne suit pas non plus l'évolution procurée par les DNS : le déphasage du

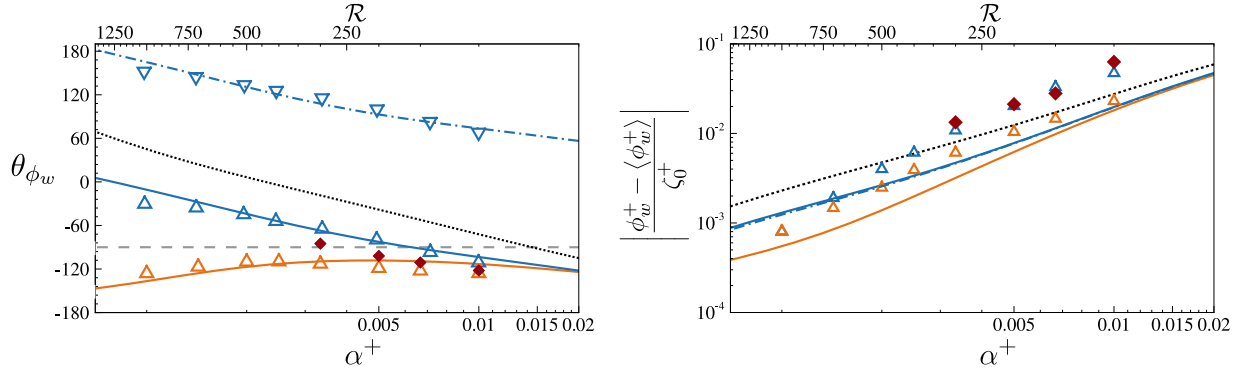


FIGURE 6.3. – Phase (gauche) et amplitude (droite) du flux thermique pour $\phi_w^* = -400$. Comparaisons entre les DNS (losanges rouges), les simulations RANS avec les modèles EB-RSM (triangles bleus) et $\mathcal{K} - \omega$ (triangles oranges), et les analyses linéaires (traits pleins). En orange : avec une hypothèse de turbulence gelée (*i.e.* $A^0 = 26$, $A_\theta^0 = 30$, $b_H = b_{H_\theta} = 0$ et $\varepsilon_\theta = 1$ et la contribution en $\hat{\tau}_{xz}$ nulle), et en bleu avec toutes les corrections activées (*i.e.* $A^0 = 26$, $A_\theta^0 = 30$, $b_H = b_{H_\theta} = 35$ et $\varepsilon_\theta = 4$). En pointillés-tirets bleus, même configuration mais avec $\phi_w^* = 400$, les triangles inversés étant les simulations correspondantes avec le modèle EB-RSM. En pointillés noirs : résultat obtenu par Claudin *et al.* (2017) (correspond au cas $A^0 = 26$, $A_\theta^0 = 26$, $b_H = b_{H_\theta} = 35$ et $\varepsilon_\theta = 0$). Le trait en tirets gris représente la ligne à -90° .

flux thermique semble presque constant, toujours inférieur à -90° , pour $\mathcal{R} < 500$, puis diminue pour des nombres de Reynolds plus élevés, contrairement à ce que prévoit le modèle EB-RSM. Ce qui est intéressant ici, c'est qu'on retrouve ce comportement dans l'étude de réponse linéaire forcée réalisée avec une hypothèse de turbulence gelée ; c'est-à-dire en ne prenant pas en compte les contributions issues de la dépendance en $\hat{\tau}_{xz}$ et de la correction d'Hanratty \mathcal{C} dans la longueur de mélange \hat{l}_θ . Plus spécifiquement, ceci revient à prendre $A^0 = 26$, $A_\theta^0 = 30$, $b_H = b_{H_\theta} = 0$ et $\varepsilon_\theta = 1$, et à retirer la contribution due à la fluctuation du cisaillement dans la longueur de mélange \hat{l} de la partie dynamique (système (3.23)). Lorsque nous incluons la correction d'Hanratty dans l'analyse linéaire, qui est donc comptée deux fois, pour A et pour A_θ , l'évolution de θ_{ϕ_w} semble plus proche des résultats obtenus avec le modèle EB-RSM, bien que surestimée. C'est notamment ce qu'avait fait Claudin *et al.* (2017), prenant $\hat{l}_\theta = \hat{l}$, ce qui revient à avoir $A^0 = A_\theta^0 = 26$, $b_H = b_{H_\theta} = 35$ et $\varepsilon_\theta = 0$. Les valeurs de θ_{ϕ_w} sont dans ce cas surestimées d'environ 40° . Pour avoir un meilleur accord avec les données EB-RSM, il a été nécessaire d'ajouter la dépendance de A_θ au cisaillement (voir relation (6.8)), en prenant $\varepsilon_\theta = 4$. Enfin, une simulation RANS avec le modèle EB-RSM et une analyse linéaire ont permis de montrer que, pour un flux ϕ_w suffisamment grand, lorsque le signe de ϕ_w^* change, les angles du flux thermique sont déphasés de 180° .

Ces observations sont cohérentes avec l'ensemble des conclusions que nous avons eues jusque là, notamment avec l'analyse de l'évolution de θ_{τ_w} : dans le régime transitionnel, les modèles basés sur l'hypothèse de Boussinesq ne permettent pas de retrouver la bonne évolution de θ_{ϕ_w} . On montre de plus ici que la correction d'Hanratty, même si initialement conçue pour corriger la dynamique de l'écoulement, a également un impact positif sur la prévision du flux thermique pariétal, bien qu'insuffisant. Une correction supplémentaire, liée à une dépendance de A_θ à $\hat{\tau}_{xz}$, est nécessaire pour les analyses linéaires, les meilleurs résultats ayant été obtenus pour $\varepsilon_\theta = 4$.

Évolution de $\left| \frac{\phi_w^+ - \langle \phi_w^+ \rangle}{\zeta_0^+} \right|$

Nous pouvons observer plus d'écarts entre les différentes études en ce qui concerne les fluctuations de l'amplitude du flux de chaleur à la paroi, tracés sur la figure 6.3 droite. Les simulations RANS illustrent encore une fois que, conformément à tout ce que nous avons vu jusque là, le

modèle EB-RSM se montre plutôt performant pour reproduire les données de référence, contrairement au modèle $\mathcal{K} - \omega$, bien que l'écart entre les deux modèles semble se réduire à mesure que \mathcal{R} augmente. En revanche, pour la première fois, le comportement des analyses linéaires diffère de celui des calculs RANS, procurant notamment des valeurs plus faibles de $\left| \frac{\phi_w^+ - \langle \phi_w^+ \rangle}{\zeta_0^+} \right|$. Ainsi, malgré une tendance à la baisse globalement similaire, on observe un écart non négligeable entre l'hypothèse de turbulence gelée et le modèle $\mathcal{K} - \omega$. Ces différences sont encore plus marquées entre l'étude de réponse linéaire forcée menée avec toutes les corrections activées et le modèle EB-RSM. Même si les deux approches prévoient un amortissement de l'amplitude de flux thermique à mesure que α^+ diminue, la pente calculée avec l'analyse linéaire est moins importante que ce que donnent les DNS et la modélisation au second ordre. Cela peut être due à la stratégie de fermeture du flux thermique turbulent : comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, le modèle aux tensions de Reynolds fait pour cela appel à une hypothèse de gradient généralisée (GGDH) (Daly et Harlow, 1970), tandis que dans les analyses linéaires, nous avons utilisé, à travers l'expression (6.3), une hypothèse de simple gradient (SGDH). Les résultats obtenus par Claudin *et al.* (2017) ne permettent pas d'obtenir un meilleur accord, et sont même plus éloignés des résultats des simulations RANS et DNS.

6.3.2. Conclusion sur l'influence de la fermeture turbulente

L'ensemble des résultats présentés dans ce chapitre, ainsi que ceux du précédent, illustrent l'influence de la fermeture turbulente pour reproduire, dans des simulations RANS, le comportement à la fois de la dynamique et de la thermique de l'écoulement. Les conséquences de l'utilisation de l'hypothèse de Boussinesq dans le régime transitionnel se retrouvent, comme l'avaient montré indirectement Thorsness *et al.* (1978) et Charru *et al.* (2013) et comme il a été vu au chapitre 5, sur la phase et l'amplitude du cisaillement, mais également du flux thermique. L'usage de la correction d'Hanratty, conçue pour corriger le comportement du cisaillement τ_{xz} , permet de compenser la mauvaise représentation des tensions de Reynolds diagonales τ_{xx} et τ_{zz} . Bien qu'elle ait également un impact positif sur l'équation de l'énergie, les résultats discutés dans la section précédente montrent qu'elle ne suffit pas à compenser les approximations faites dans la modélisation du flux thermique turbulent, l'hypothèse de simple gradient utilisée dans les analyses linéaires et le modèle $\mathcal{K} - \omega$ semblant bien moins représentative que l'hypothèse GGDH de la fermeture au second ordre. Il est toutefois intéressant de noter que bien qu'elle ait été conçue pour corriger la mise en défaut de l'hypothèse de Boussinesq, la correction d'Hanratty permet également d'améliorer les résultats des études de réponses linéaires forcées pour la prévision des transferts de chaleur. Bien qu'elle soit insuffisante, la dépendance de A_θ à $\hat{\tau}_{xz}$ permet, en prenant $\varepsilon_\theta = 4$ d'obtenir une estimation correcte de la phase du flux thermique θ_{ϕ_w} . Il n'a cependant pas été possible d'améliorer les résultats concernant l'amplitude $\left| \frac{\phi_w^+ - \langle \phi_w^+ \rangle}{\zeta_0^+} \right|$ dans les analyses linéaires, montrant les limites de la correction d'Hanratty à ce niveau là.

6.4. Stabilité d'une surface régressive

On reprend désormais, avec les mêmes hypothèses, l'étude de la régression de la paroi initialement menée par Claudin *et al.* (2017) et présentée dans le chapitre 3 de ce manuscrit. Comme nous l'avons alors vu, toute surface quelconque peut être décomposée en une série de profils sinusoïdaux, et la réponse linéaire de l'écoulement correspond à la superposition des réponses de chaque profil sinusoïdal constituant la paroi. Le profil de la paroi ζ (3.42) s'écrit donc en fonction d'un taux d'accroissement temporel σ et d'une fréquence angulaire Ω . L'évolution temporelle de

la paroi $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ est supposée proportionnelle au flux pariétal ϕ_w , soit, à l'ordre 1⁵ :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = (\sigma + i\Omega) \zeta_0 e^{\sigma t + i\Omega t + i\alpha x} \propto \alpha \zeta_0 \hat{f}(0) e^{i\alpha x} \quad (6.13)$$

Le taux d'amplification temporel est normalisé par le flux thermique à la paroi ϕ_w , la masse volumique ρ du fluide et un facteur de proportionalité, noté r , en s^2/m^2 , représentant le taux de régression de la paroi : $\sigma^* = \sigma \phi_w / r \rho$. En écrivant le flux en fonction d'une amplitude et d'un déphasage, soit $\hat{f}(0) = |f(0)| e^{i(\alpha x + \theta_{\phi_w})}$, σ^* est donné par :

$$\sigma^* = -\alpha |f(0)| e^{i\theta_{\phi_w}} \quad (6.14)$$

Dans les analyses linéaires, $\alpha |f(0)|$ représente la fluctuation du flux thermique pariétal $\left| \frac{\phi_w^+ - \langle \phi_w^+ \rangle}{\zeta_0^+} \right|$.

Dans les simulations RANS, le taux d'amplification σ^* est donné par l'expression :

$$\sigma^* = - \left| \frac{\phi_w^+ - \langle \phi_w^+ \rangle}{\zeta_0^+} \right| \cos(\theta_{\phi_w}) \quad (6.15)$$

Prenons le cas d'un flux thermique à la paroi ϕ_w négatif. Le signe du taux d'amplification temporel de la paroi σ^* correspond alors au signe de $\cos(\theta_{\phi_w})$: lorsque θ_{ϕ_w} est compris entre -270° et -90° , σ^* est négatif. Le changement de signe s'opère à $\theta_{\phi_w} = -90^\circ$, et le taux d'amplification temporel devient positif pour θ_{ϕ_w} compris entre -90° et 90° ⁶.

Pour savoir pour quels nombres d'onde σ^* est positif, la ligne à -90° est tracée sur la figure 6.3 (gauche). Dans un premier temps, cette figure montre que pour les simulations RANS impliquant le modèle $\mathcal{K} - \omega$ et les analyses linéaires avec l'hypothèse de turbulence gelée, cette ligne n'est jamais franchie, : le taux d'amplification temporel reste toujours négatif. À l'inverse, dans les simulations RANS avec le modèle EB-RSM et les études de réponses linéaires forcées réalisées avec l'ensemble des corrections activées, σ^* change de signe aux alentours de $\alpha^+ \approx 0.006$ ($\mathcal{R} \approx 170$), et de $\alpha^+ \approx 0.004$ ($\mathcal{R} \approx 250$) dans les DNS. Plus précisément, pour tous les nombres d'onde inférieurs à la valeur pour laquelle σ^* change de signe, θ_{ϕ_w} reste supérieur à -90° , et le taux d'amplification temporel reste alors positif. De façon un peu abusive, mais pour faciliter leur dénomination, nous qualifierons les longueurs d'onde correspondantes à un taux d'amplification temporel positif d'« instables ».

On trace désormais σ^* comme une fonction du nombre d'onde α^+ sur la figure 6.4. Comme attendu, lorsque l'hypothèse de Boussinesq est utilisée dans les analyses linéaires (sans corrections) et dans les simulations RANS, le taux d'amplification temporel reste toujours négatif dans le régime transitionnel. En revanche, en ce qui concerne les autres approches, dans la zone de nombres d'ondes « instables » où σ^* est positif, du fait de sa proportionnalité à α^+ , le taux d'amplification temporel diminue rapidement après avoir atteint un pic, et tend vers 0 lorsque le nombre d'onde diminue. L'émergence de la longueur d'onde correspondant à ce pic pour lequel σ^* est maximal va être privilégiée lors de la régression de la paroi. On ne peut malheureusement pas l'observer sur les DNS car le nombre de Reynolds le plus haut simulé, pour des raisons de coûts numériques, est $\mathcal{R} = 300$, trop faible pour commencer à entrevoir la diminution de σ^* . Sa position semble cependant légèrement décalée par rapport aux résultats issus du modèle EB-RSM, probablement car la phase du flux thermique franchit la ligne à -90° pour un nombre d'onde inférieur.

Comparaison avec la corrélation de Thomas (1979)

Nous avons vu à la fin du chapitre 1 que Thomas (1979) avait proposé une corrélation empirique, à partir de mesures relevées dans diverses situations, entre la taille caractéristique des

5. La partie homogène correspond à la régression globale de la paroi, qui est uniforme.

6. Dans le cas où ϕ_w est positif, c'est l'inverse : σ^* est positif lorsque θ_{ϕ_w} est compris entre 90° et 270° .

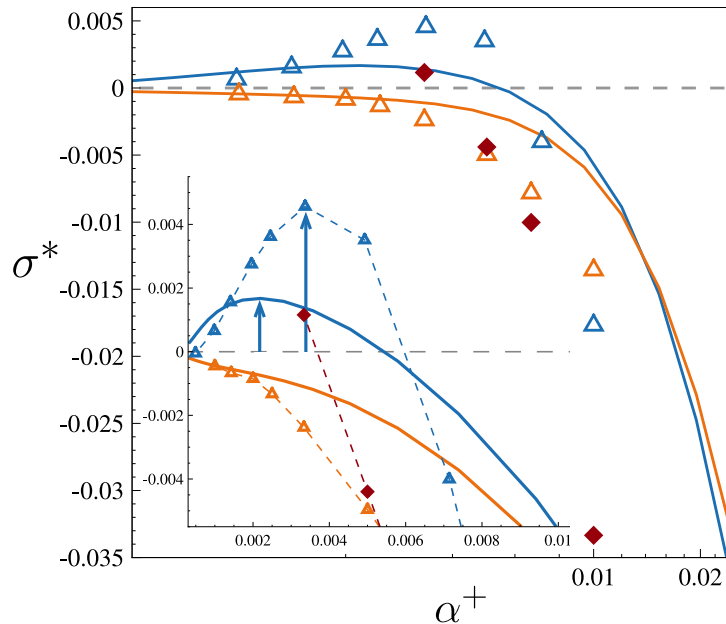


FIGURE 6.4. – Taux d'amplification temporel normalisé $\sigma^* = \sigma/\phi_w$, en fonction du nombre d'onde α^+ en échelle logarithmique, et linéaire, zoomée sur le pic (encart). Comparaisons entre les simulations RANS avec le modèle $\mathcal{K}-\omega$ (triangles oranges), le modèle EB-RSM (triangles bleus), les DNS (losanges rouges) et les analyses linéaires (ligne orange : avec une hypothèse de turbulence gelée (*i.e.* $A^0 = 26$, $A_\theta^0 = 30$, $b_H = b_{H_\theta} = 0$ et $\varepsilon_\theta = 0$ et la contribution en $\hat{\tau}_{xz}$ nulle); ligne bleu : avec toutes les corrections activées (*i.e.* $A^0 = 26$, $A_\theta^0 = 30$, $b_H = b_{H_\theta} = 35$ et $\varepsilon_\theta = 4$)). Les flèches bleues sur l'encart dénotent la position du pic d'instabilité.

coups de gouge et la longueur visqueuse δ_ν de la couche limite. Nous nous proposons ici de comparer les valeurs des longueurs d'ondes les plus « instables » relevées sur la figure 6.4 avec cette corrélation. Pour rappel, la corrélation de Thomas est donnée pour une longueur d'onde λ^+ d'environ 1000, ce qui correspond à un nombre d'onde α^+ d'environ 6.3×10^{-3} . Ici, nous relevons un pic d'instabilité localisé, pour le modèle EB-RSM, à $\alpha^+ \approx 4 \times 10^{-3}$, soit $\lambda^+ \approx 1550^8$, et pour l'analyse linéaire réalisée avec toutes les corrections activées, à $\alpha^+ \approx 2.2 \times 10^{-3}$, soit $\lambda^+ \approx 2850^9$. Par rapport à la zone identifiée par Claudin *et al.* (2017), inférieure d'une décade à la corrélation de Thomas (1979) (ils donnent $\alpha^+ \approx 5 \times 10^{-4}$), ces valeurs sont en bien meilleur accord avec cette dernière, surtout en considérant la dispersion des mesures utilisées par Thomas (1979). La longueur d'onde instable prévue par le modèle EB-RSM est particulièrement satisfaisante, en cohérence avec le fait qu'il s'agit de l'approche qui a donné les meilleurs résultats par rapport aux données de référence (issues des DNS et des expériences d'Hanratty *et al.*). La valeur que procure l'analyse linéaire est plus éloignée de la corrélation de Thomas (1979), bien qu'elle reste du même ordre de grandeur, illustrant encore une fois les limites de cette approche mises en lumière dans la section 6.3. La figure 7.12, au chapitre suivant, illustre entre autres cette comparaison entre la corrélation de Thomas (1979) et les positions des modes instables que nous avons identifiés ici.

7. Correspondant à $\mathcal{R} \approx 160$.

8. $\mathcal{R} \approx 250$.

9. $\mathcal{R} \approx 454$.

Bilan

L'ensemble des résultats présentés dans les deux chapitres 5 et 6 montrent l'influence critique du choix de la fermeture turbulente pour correctement prévoir à la fois la dynamique et la thermique d'une couche limite se développant sur une paroi déformée par une ondulation de faible amplitude. La comparaison des simulations RANS, des DNS, et des analyses linéaires a permis de clarifier l'implication des différents termes dans les équations de Navier–Stokes, montrant en particulier l'importance du terme de diffusion turbulente dans le bilan de quantité de mouvement. En particulier, nous avons identifié, aux alentours de la zone tampon de la région interne, l'existence d'une zone de vorticité dans laquelle les perturbations de vitesse et de température se déphasent par rapport au profil de la paroi. Dans le régime transitionnel, l'apparition de ces déphasages n'est pas correctement prévu par l'hypothèse de Boussinesq, en raison de la mauvaise représentation de la différence des tensions de Reynolds $\tau_{xx} - \tau_{zz}$, tandis qu'une approche au second ordre procure de bien meilleurs résultats par rapport aux données de référence. Dans les analyses linéaires, l'utilisation d'une correction, proposée par Hanratty, s'avère nécessaire pour retrouver le comportement observé expérimentalement et dans les DNS. Les conséquences de cette mise en défaut de l'hypothèse de Boussinesq sont particulièrement frappantes lorsqu'on s'intéresse à la régression de la paroi, puisque les approches basées sur cette dernière se montrent incapables de prévoir un taux d'amplification temporel positif de la régression de la paroi. Au contraire, l'approche au second ordre ainsi que les analyses linéaires faisant appel à la correction d'Hanratty permettent d'obtenir un pic montrant que l'émergence d'une longueur d'onde particulière est privilégiée lors de la régression de la paroi, illustrant le rôle crucial du choix de la fermeture turbulente dans ce type de problèmes.

Développement de corrections pour la prise en compte des effets de la déformation de la paroi dans un modèle à deux équations

Dans ce chapitre, nous présentons le développement de différentes corrections permettant de pallier la mise en défaut de l'hypothèse de Boussinesq, démontrée dans le chapitre 5, et adaptées à un modèle à deux équations de transport du type $\mathcal{K} - \omega$. Les résultats des simulations RANS réalisées avec le modèle EB-RSM seront utilisés comme référence. On cherchera dans un premier temps à comparer les réponses à la déformation de la paroi des modèles EB-RSM et $\mathcal{K} - \omega$, afin d'identifier des paramètres pertinents pour le modèle $\mathcal{K} - \omega$ susceptibles d'accueillir des corrections permettant de reproduire le comportement du modèle EB-RSM dans le régime transitionnel. On montrera notamment l'influence du gradient de pression créé par la déformation de la paroi sur la pente des profils de vitesse locaux à différentes stations le long de l'ondulation, dans la zone logarithmique. Afin de prendre en compte ces effets sur la structure de la région interne de la couche limite turbulente, différentes corrections ont été établies, inspirées en particulier des travaux de Nickels (2004) et de Knopp (2016). La stratégie générale adoptée consiste à modifier l'équilibre des coefficients du modèle $\mathcal{K} - \omega$, initialement calibrés pour retrouver les caractéristiques de la couche limite turbulente sur paroi plane et sans gradient de pression. Ces différentes corrections ont été testées grâce à des études de réponses linéaires forcées et des simulations RANS, et leur efficacité à reproduire le comportement attendu de la contrainte de cisaillement pariétal dans le régime transitionnel a pu être démontrée. L'impact de ces corrections, qui ne traitent que de la dynamique de l'écoulement, sur les flux thermiques, a également été évalué. Cependant, l'utilisation de ce type de correction présente certaines limites, et une discussion concernant les stratégies RANS à adopter pour ce problème est également proposée. Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'un article paru dans le *European Journal of Mechanics - B/Fluids* (Stuck et al., 2024).

Sommaire

7.1. Fonctionnement de la correction d'Hanratty	100
7.1.1. Un palliatif pour compenser la mise en défaut de l'hypothèse de Boussinesq	100
7.1.2. Rôle et origine des constantes proposées par Hanratty	101
7.2. Influence de la déformation sur la structure de la région interne	103
7.2.1. Remarques sur les profils de vitesse	103
7.2.2. Identification d'un paramètre de modélisation	104
7.3. Correction des modèles à viscosité turbulente	105
7.3.1. Adaptation de la correction de Nickels (2004) pour les analyses linéaires	105
7.3.2. Mise en place de corrections pour les simulations RANS	109
7.3.3. Amélioration de la prévision du cisaillement et du flux thermique	112
7.3.4. Stabilité d'une surface régressive	114
7.4. Limitations inhérentes à ce type de corrections	116
Bilan	117

7.1. Fonctionnement de la correction d’Hanratty

7.1.1. Un palliatif pour compenser la mise en défaut de l’hypothèse de Boussinesq

Comme nous l’avons vu dans les chapitres 5 et 6, le choix de la fermeture turbulente pour retrouver les résultats de référence est crucial. En particulier, nous avons montré que la mise en défaut des modèles EVM dans le régime transitionnel provient de la mauvaise représentation du terme de diffusion turbulente longitudinal par l’hypothèse de Boussinesq. Pour compenser la contribution manquante dans le bilan de quantité de mouvement, Hanratty *et al.* proposent, pour les analyses linéaires, la correction du modèle de longueur de mélange que nous avons présentée au chapitre 3 et utilisée au chapitre 5.

Les simulations RANS réalisées avec le modèle EB-RSM ont montré que le terme de diffusion turbulente $\frac{\tau_{xx} - \tau_{zz}}{\partial x}$ est de l’ordre de la perturbation $\alpha\zeta_0$. Ainsi, à l’ordre dominant, l’approximation de Boussinesq est acceptable : même si contrairement à celui des DNS et des calculs EB-RSM, le profil de $\langle \tau_{xx} - \tau_{zz} \rangle$ donné par les simulations $\mathcal{K} - \omega$ est nul, l’écoulement étant établi dans la direction longitudinale, sa dérivée par rapport à x (qui intervient dans le bilan de quantité de mouvement) est elle bien nulle. En revanche, à l’ordre 1, les résultats montrent que $\frac{\tau_{xx} - \tau_{zz}}{\partial x}$ contribue de façon non négligeable dans le bilan de quantité de mouvement, et l’approximation due à l’hypothèse de Boussinesq n’est plus suffisante à l’ordre 1. Bien que la correction d’Hanratty permette d’améliorer significativement les résultats du modèle de longueur de mélange, à travers une modification de cette dernière – c’est-à-dire de la viscosité turbulente associée – elle agit toutefois directement sur la contrainte de cisaillement τ_{xz} et ne corrige donc pas le bon terme. Si l’on reprend le bilan de quantité de mouvement longitudinal :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{zz} - p) + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial (\tau_{xx} - \tau_{zz})}{\partial x} \quad (7.1)$$

Dans ce bilan, lorsque l’on néglige le terme de diffusion turbulente (en rouge), l’équilibre de quantité de mouvement n’est pas correctement retranscrit, impactant le terme en bleu $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$. En agissant sur la longueur de mélange, la correction d’Hanratty \mathcal{C} corrige directement la contrainte de cisaillement τ_{xz} , dont la valeur à la paroi est mal estimée. Cependant, elle ne modifie en rien le terme de diffusion turbulente, qui est mal modélisé et pas du bon ordre de grandeur. Son rôle est de compenser la mise en défaut de l’hypothèse de Boussinesq en rééquilibrant le bilan de quantité de mouvement, sans toucher au terme problématique. En ce sens, elle peut être vue comme un palliatif *ad-hoc* à l’insuffisance de l’hypothèse de Boussinesq.

Cette correction empirique a historiquement été utilisée avec succès dans les différentes analyses linéaires de la littérature ainsi que de cette étude. Le chapitre 6 a en outre montré son efficacité à agir non seulement sur la dynamique de l’écoulement (à travers la contrainte de cisaillement), mais également sur la thermique, améliorant significativement la prévision des flux thermiques dans les analyses linéaires réalisées avec l’équation de l’énergie. L’objectif de ce chapitre est désormais d’étendre l’usage de ces corrections aux simulations RANS, qui sont en l’état peu adaptées pour ce type d’applications. En effet, l’utilisation d’un gradient de pression n’est pas préconisée pour la modélisation de la turbulence, pour plusieurs raisons (voir Spalart (2015)). En particulier, cette grandeur n’intervenant pas dans l’équation de vorticité, elle ne peut pas modifier directement la turbulence. Par conséquent, un modèle RANS ne devrait pas réagir à un gradient de pression et altérer un champ turbulent en fonction. Ici, il s’agit d’un moyen simple et pragmatique de prendre en compte les effets de $\frac{\partial u}{\partial x}$ dus à la déformation de la paroi, qui peut être utilisé sans risque dans des analyses linéaires, mais ne peut pas être adapté pour des simulations RANS. Il s’agit par conséquent ici d’établir des corrections ayant un impact similaire sur la prévision du cisaillement par un EVM, mais ne faisant pas intervenir un tel gradient de pression.

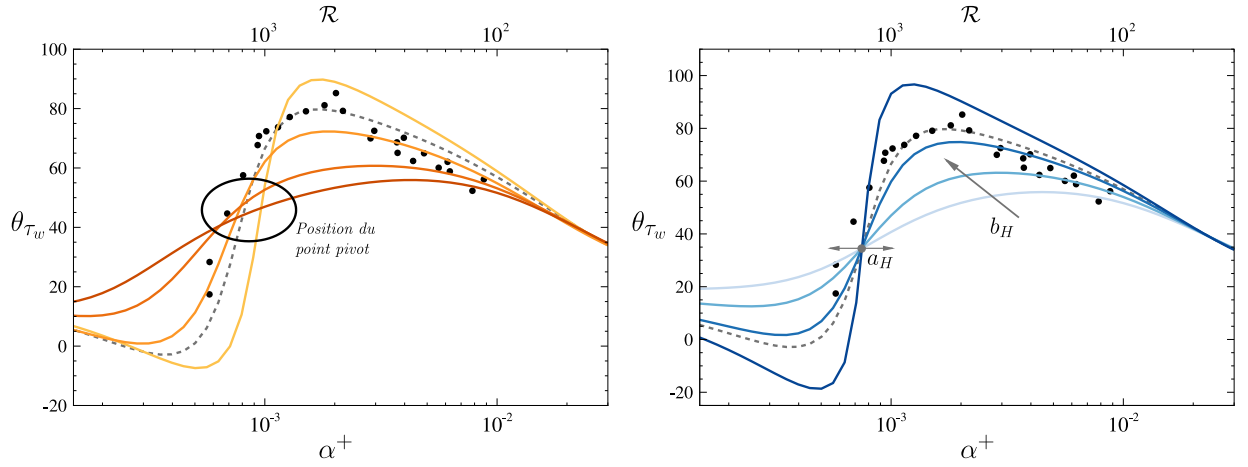


FIGURE 7.1. – Phase du cisaillement en fonction de α^+ . Symboles : mesures d'Hanratty *et al.*, lignes pleines : analyses linéaires avec $b_H = 30$ et $a_H = \{1200, 2000, 3000, 5000\}$ (orange), et avec $a_H = 1650$ et $b_H = \{10, 20, 30, 40\}$ (bleu). Les couleurs claires vers les couleurs foncées indiquent des valeurs croissantes de a_H et b_H .

7.1.2. Rôle et origine des constantes proposées par Hanratty

Dans un premier temps, nous proposons ici d'étudier comment la correction d'Hanratty est construite, et notamment le rôle des deux constantes a_H et b_H y intervenant. Nous discuterons également de l'utilisation du gradient de pression relaxé. Nous rappelons ici l'expression de la correction d'Hanratty telle qu'elle est présentée au chapitre 3 (équations (3.7a) et (3.7b)) :

$$A = A^0 (1 + b_H \Delta p_{eff}) \quad (7.2a)$$

$$\frac{d\Delta p_{eff}}{dx} = \frac{\Delta p - \Delta p_{eff}}{a_H} \quad (7.2b)$$

Du rôle des constantes a_H et b_H

Le rôle de chacune des deux constantes a_H et b_H est illustré sur la figure 7.1. Dans un premier temps, le paramètre de relaxation a_H permet de régler la position du point pivot afin de contrôler la chute du pic de déphasage du cisaillement à la paroi. On constate notamment que plus la valeur de a_H est faible, plus le déphasage se décale vers les grands nombres d'onde (*i.e.* vers les petites longueurs d'onde). La valeur communément utilisée dans la littérature se situe, comme nous l'avons vu précédemment, aux alentours de 2000. Une fois cette valeur fixée pour retrouver les données expérimentales, la constante b_H agit tout simplement comme un facteur d'amplification qui permet d'ajuster l'amplitude de la correction afin d'obtenir le meilleur accord possible avec les mesures.

Comportement du cisaillement pour $\mathcal{R} > 1000$

Plusieurs interrogations émergent alors de ces observations. Si le rôle de b_H est assez clair et ne pose pas de problème de compréhension majeur, la fonction de a_H est plus complexe. Derrière cette constante, les phénomènes physiques en jeu restent obscurs : on peut en effet se demander ce que permet de représenter cette constante. La diminution brutale du déphasage, qui coïncide avec un amortissement du cisaillement plus important pour cette gamme de nombres de Reynolds \mathcal{R} (voir figure 3.4b), apparaît pour des nombres de Reynolds de frottement relativement élevés. Rappelons que les expériences ont eu lieu en écoulement de canal tandis que les analyses linéaires sont basées sur une configuration de couche limite. Or, nous avons vu au chapitre 5 que l'influence du nombre de Reynolds de frottement ne peut pas forcément être négligée dans cette partie du régime transitionnel. La comparaison des configurations de canal et de couche limite y est-elle

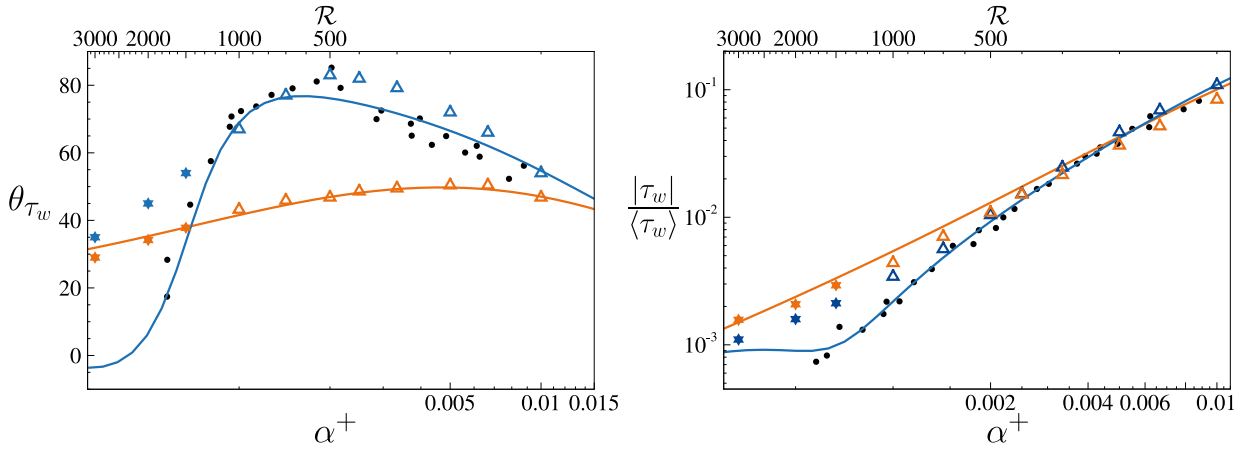


FIGURE 7.2. – Phase (gauche) et amplitude (droite) du cisaillement en fonction de α^+ . Cercles noirs : mesures d’Hanratty *et al.*, triangles : simulations RANS avec les modèles EB-RSM (bleu) et $\mathcal{K} - \omega$ (orange) et présentées au chapitre 5, étoiles : simulations RANS avec les modèles EB-RSM (bleu) et $\mathcal{K} - \omega$ (orange) pour $\mathcal{R} = \{1500, 2000, 3000\}$, lignes pleines : analyse linéaire avec correction d’Hanratty et $(a_H, b_H) = (1650, 33)$ (bleu) et avec le modèle $\mathcal{K} - \omega$ (orange).

toujours pertinente ? Les mécanismes physiques sous-jacents à cette diminution du déphasage, que l’on ne connaît pas, sont reproduits par la correction d’Hanratty à travers la constante a_H . Or, cette dernière a la dimension d’une longueur, et sa valeur adimensionnée, autour de 2000, est intrigante car elle est bien supérieure aux ordres de grandeurs des échelles de longueurs caractéristiques que l’on retrouve dans une région interne de couche limite turbulente. S’agit-il d’un artifice permettant de rendre compte d’interactions avec la région externe ?

Afin d’apporter quelques éléments de réponse à ces questions, des simulations RANS supplémentaires ont été menées dans la même configuration que précédemment, pour des valeurs de nombre de Reynolds pour lesquelles on observe ce phénomène : $\mathcal{R} = \{1500, 2000, 3000\}$, toujours avec les modèles $\mathcal{K} - \omega$ et EB-RSM. La prévision du déphasage et de l’amplitude du cisaillement par ces deux modèles, pour les valeurs de \mathcal{R} considérées, est tracée sur la figure 7.2. Le comportement du modèle $\mathcal{K} - \omega$ était attendu : les résultats des simulations restent tout à fait cohérents avec l’analyse linéaire correspondante, et la tendance observée jusque là est conservée. De même que le pic de déphasage n’est pas correctement reproduit pour $\mathcal{R} < 1000$, on ne retrouve pas non plus la chute de θ_{τ_w} à plus haut \mathcal{R} . La tendance du modèle à surestimer l’amplitude à mesure que le nombre de Reynolds augmente (c’est-à-dire lorsque α^+ diminue) est également confirmée.

En revanche, alors que pour $\mathcal{R} < 1000$, le modèle EB-RSM procure un bon accord avec les données expérimentales, que ce soit pour la phase ou l’amplitude du cisaillement, on observe pour $\mathcal{R} > 1000$ l’apparition d’un écart significatif entre les simulations RANS et les mesures. Comme on pouvait déjà le voir pour les simulations à $\mathcal{R} = 700$ et à $\mathcal{R} = 1000$, le modèle EB-RSM prévoit bien une diminution de la phase du cisaillement lorsque le nombre de Reynolds augmente. Cependant, les simulations aux nombres de Reynolds supérieurs à 1000 montrent que, bien que ce comportement se confirme, la chute du déphasage n’est pas aussi brutale que ce que l’on observe expérimentalement. L’amplitude obtenue pour le cisaillement est globalement plus proche des mesures que ce que donne le modèle $\mathcal{K} - \omega$, bien que, là encore, pour $\mathcal{R} > 1000$, aucun des deux modèles ne parvient à capturer correctement l’amortissement du cisaillement mesuré ; l’amplitude est surestimée par l’ensemble des simulations RANS réalisées dans cette partie du régime transitionnel.

Hypothèses

Les résultats des simulations RANS, comparés au comportement de la correction d’Hanratty pour $\mathcal{R} > 1000$ nous apportent quelques pistes et hypothèses concernant le comportement singu-

lier du cisaillement. Si l'on résume les conclusions de notre étude, nous avons vu que, dans cette gamme de nombre de Reynolds :

- le nombre de Reynolds de frottement y est relativement important dans les expériences d'Hanratty *et al.* (les mesures ayant été effectuées dans un canal rectangulaire de hauteur $2\delta_c$, avec $\delta_c\alpha = \pi$, le nombre de Reynolds de frottement vaut : $R_\tau = \pi\mathcal{R}$, et est donc supérieur à 3000 dans cette zone). Il impacte de façon non négligeable la réponse de l'écoulement à la déformation de la paroi,
- les modèles RANS sont tous mis en défaut,
- la constante a_H de la correction d'Hanratty, permettant de retrouver artificiellement ce comportement, est supérieure aux ordres de grandeurs caractéristiques de la région interne de la couche limite turbulente.

À ce stade, il n'est pas possible de conclure formellement sur les mécanismes physiques qui entrent en jeu pour ces hauts nombres de Reynolds, pour lesquels des DNS ne sont pas envisageables en raison des coûts numériques engendrés. Cependant, une hypothèse nous paraît pertinente et serait intéressante à étudier en profondeur. Au vu des conclusions énoncées ci-dessus, nous pouvons en effet supposer que les phénomènes observés sont la manifestation d'interactions entre la région interne et la région externe de la couche limite turbulente. Plus particulièrement, la valeur importante de a_H nous amène à envisager la présence de grandes structures turbulentes dans la région externe, qui, pour de hauts nombres de Reynolds de frottement, ont une influence directe sur la région interne. En particulier, à haut nombre de Reynolds, le pic de τ_{xx} augmente (Mathis *et al.*, 2009; Marusic *et al.*, 2010), ce qui va impacter directement $\tau_{xx} - \tau_{zz}$ et modifier son rôle dans le bilan de quantité de mouvement. C'est pourquoi on peut raisonnablement envisager que le comportement observé dans les expériences est un effet haut Reynolds, que les modèles RANS ne peuvent pas reproduire. En effet, ce type de phénomène n'est pas prévu par l'approche RANS car celle-ci est construite pour donner un résultat indépendant du nombre de Reynolds dans la région interne. Ceci expliquerait la mise en défaut du modèle EB-RSM lorsque le nombre de Reynolds de frottement devient trop élevé. Cependant, les résultats obtenus par la correction d'Hanratty montrent qu'il est possible de reproduire artificiellement les conséquences de ces interactions. Notons également que, pour les applications d'érosion qui nous occupent, la longueur d'onde la plus instable identifiée au chapitre précédent et permettant de retrouver la corrélation de Thomas se situe bien en amont, pour des nombres de Reynolds plus faibles pour lesquels l'approche au second ordre reste satisfaisante. Dans la suite de ce chapitre, nous nous appuyerons sur les analyses linéaires et les simulations RANS réalisées avec le modèle EB-RSM pour établir des corrections visant à compenser la mise en défaut de l'hypothèse de Boussinesq dans un modèle $\mathcal{K} - \omega$, à la manière de ce qui avait été proposé par Hanratty *et al.*

7.2. Influence de la déformation sur la structure de la région interne

Nous avons vu dans le chapitre 5 l'influence de la déformation de la paroi sur les fluctuations de vitesse (figure 5.9). Une autre manière de voir les effets de la perturbation sur le champ de vitesse est de s'intéresser aux profils de vitesse à différentes stations le long de l'ondulation. Ce changement de point de vue va notamment nous permettre de mieux comprendre comment la déformation de la paroi altère la structure de la région interne de la couche limite turbulente, nous menant à l'identification de paramètres pertinents susceptibles de porter une éventuelle correction dans notre approche RANS basée sur l'hypothèse de Boussinesq

7.2.1. Remarques sur les profils de vitesse

Une première observation qui peut être faite à partir des profils de vitesse locaux dans la région interne de la couche limite turbulente concerne la pente de la zone logarithmique. Comme nous l'avons identifié dans le chapitre 5, les effets de la déformation de la paroi sont particulièrement marqués dans la zone de vorticité, aux alentours de $z^+ = 7$; c'est d'ailleurs dans cette zone que les simulations RANS menées avec le modèle $\mathcal{K} - \omega$ présentent un écart significatif à l'ordre 1 par

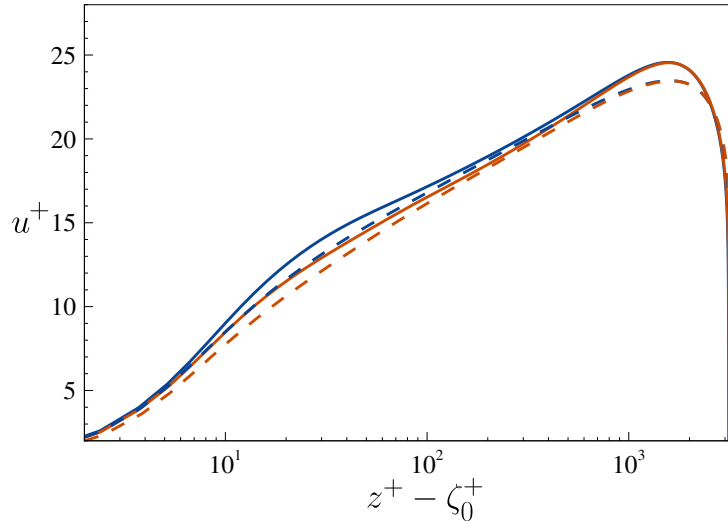


FIGURE 7.3. – Profils locaux de vitesse à $x/\lambda = 0$ (bleu) et $x/\lambda = 0.5$ (orange) donnés par les modèles EB-RSM (traits pleins) et $\mathcal{K} - \omega$ (tirets), à $\mathcal{R} = 500$.

rapport aux données de référence (voir notamment la figure 5.9). La zone de vorticit e identifi ee se situe dans la zone tampon, en amont de la zone logarithmique du profil de vitesse de la r egion interne. La figure 7.3 montre les profils de vitesse locaux tels que données par les simulations RANS avec les mod eles EB-RSM et $\mathcal{K} - \omega$ pour $\mathcal{R} = 500$.

On observe imm ediatement que suivant la position  a laquelle on se place le long de l'ondulation, le profil de vitesse local est modifiée. Si la sous-couche visqueuse n'est pas impact ee par la d eformation de la paroi, d es que les effets inertiels ne peuvent plus  etre n eglig es devant les effets visqueux, dans la zone tampon et au-del a, la perturbation induite par l'ondulation influence directement le profil de vitesse. Une cons equence semble  etre une modification du profil de vitesse dans la r egion logarithmique ; en particulier sa pente. La figure 7.3 illustre  egalement les diff erences que l'on peut observer entre les pr evisions du mod ele $\mathcal{K} - \omega$ et du mod ele EB-RSM, notamment au niveau des zones tampon et logarithmique. En conclusion, la d eformation de la paroi semble modifier le comportement des profils de vitesse loin de la paroi, et les approches au premier et au second ordre procurent des estimations diff erentes de ces comportements.

7.2.2. Identification d'un param etre de mod elisation

Afin de mieux comprendre l'influence de la fermeture turbulente sur la pr evision de la pente du profil logarithmique, on s'int eresse ici plus en d etail  a la constante de von K arm an κ . Pour ce faire, on peut s'appuyer sur la fonction dite de diagnostic de la pente du profil de vitesse, not ee Ξ ( osterlund *et al.*, 2000; Zanoun *et al.*, 2003; Knopp, 2016) :

$$\Xi = \left(z^+ \frac{\partial u^+}{\partial z^+} \right)^{-1} \quad (7.3)$$

L'inverse de la fonction de diagnostic Ξ est tracée pour diff erentes positions x/λ le long de l'ondulation sur la figure 7.4 pour $\mathcal{R} = 500$, dans le r egime transitionnel, pour les simulations RANS r ealis ees avec les mod eles $\mathcal{K} - \omega$ et EB-RSM. Dans les zones tampon et logarithmique, les m emes conclusions peuvent  etre tir ees de l'observation des courbes que celles faites au chapitre 5 : dans la zone de vorticit e, les courbes se croisent, symbole de l'apparition du d ephaseage. De plus, comme nous l'avions d ej a remarqu e sur la figure 5.9 sur les profils de perturbation de vitesse, les r esultats obtenus avec le mod ele $\mathcal{K} - \omega$ sont d'amplitude plus faible et en retard par rapport aux donn ees du mod ele EB-RSM, d enotant une  evolution plus lente des profils, r esultant en un d ephaseage de ces profils moins important. Les diff erences que nous avons pu voir sur les profils de vitesse entre les deux mod eles montrent effectivement une diff erence dans la pr evision

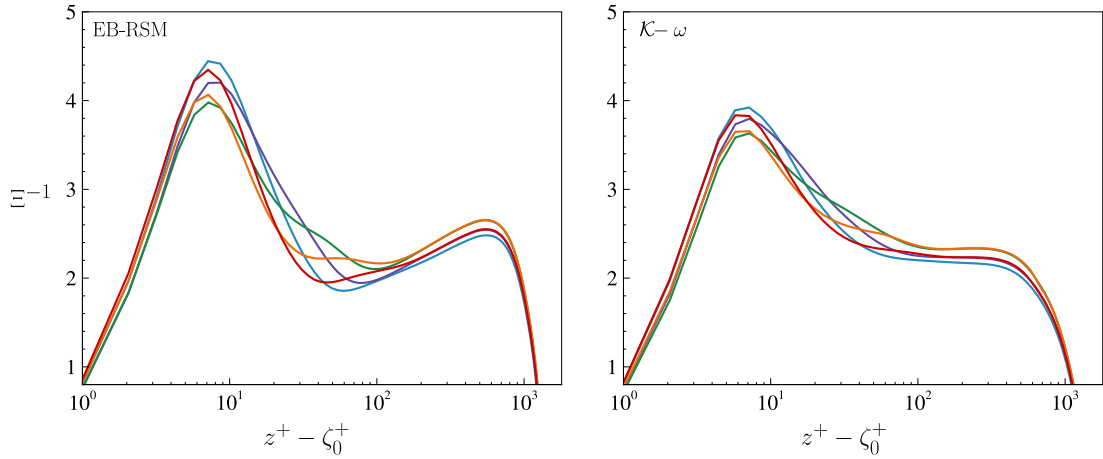


FIGURE 7.4. – Inverse de la fonction de diagnostic Ξ à $x/\lambda = 0.0$ (bleu), $x/\lambda = 0.2$ (violet), $x/\lambda = 0.4$ (vert), $x/\lambda = 0.6$ (orange) et $x/\lambda = 0.8$ (rouge). Simulations RANS avec les modèles EB-RSM (gauche) et $\mathcal{K} - \omega$ (droite) à $\mathcal{R} = 500$.

de la réponse à la déformation de la paroi, finalement menant à des déphasages du cisaillement pariétal différents. Ces observations faites, nous nous proposons de mettre en place une stratégie de correction du modèle $\mathcal{K} - \omega$ basée sur l'évolution de la constante de von Kármán le long de l'ondulation. L'établissement de cette stratégie pour construire des corrections adaptées à la fois aux analyses linéaires et aux simulations RANS fait l'objet de la section suivante.

7.3. Correction des modèles à viscosité turbulente

Dans cette section, nous proposons une stratégie globale de correction des modèles basés sur l'hypothèse de Boussinesq, que nous adapterons d'un côté pour les analyses linéaires, et de l'autre pour les simulations RANS. Cette stratégie repose sur une modification des constantes du modèle considéré dans le but de reproduire les comportements observés dans la section précédente. Afin de rester cohérents avec les simulations effectuées jusqu'ici, nous nous baserons sur un modèle $\mathcal{K} - \omega$, bien que le principe proposé puisse être adapté à d'autres modèles à viscosité turbulente.

7.3.1. Adaptation de la correction de Nickels (2004) pour les analyses linéaires

Les observations précédentes concernant l'évolution de la pente de la zone logarithmique en fonction de la position le long de l'ondulation incitent à considérer κ comme un paramètre pertinent pouvant accueillir une éventuelle correction. Cette option est aussi la plus universelle, le coefficient de von Kármán intervenant dans une grande partie des modèles de turbulence au premier ordre, là où la correction proposée par Hanratty est limitée à un modèle de longueur de mélange faisant intervenir la fonction d'amortissement de van Driest.

Prise en compte du gradient de pression d'Hanratty

La correction proposée initialement par Hanratty montre notamment l'influence que peut avoir le gradient de pression sur le phénomène de déphasage de la contrainte de cisaillement que nous cherchons à reproduire. Une première idée que nous pouvons développer est de prendre en compte les effets de ce gradient de pression sur la loi de paroi. Pour cela nous nous proposons d'intégrer le gradient de pression relaxé d'Hanratty dans le bilan de quantité de mouvement, à la manière de ce qu'a fait Nickels (2004)¹. Finalement, la relation obtenue provient de l'équation (2.65) de Nickels (2004), écrite pour le gradient de pression d'Hanratty (3.7b) :

1. Voir chapitre 2.

$$\kappa = \frac{\kappa_0}{\sqrt{1 + b_{H_1} z_c^+ \Delta p_{eff}^+}} \quad (7.4a)$$

$$\frac{d\Delta p_{eff}^+}{dx} = \frac{\Delta p^+ - \Delta p_{eff}^+}{a_H} \quad (7.4b)$$

κ_0 représente la constante de von Kármán correspondant au cas ZPG² et une constante notée b_{H_1} est également introduite. Son rôle, similaire à celui de la constante b_H dans la correction originale d'Hanratty, sera illustré dans la suite de ce paragraphe. Rappelons que z_c^+ est donné par la relation polynomiale suivante¹, avec, d'après Nickels (2004), $R_c = 12$:

$$\Delta p_{eff}^+ z_c^{+3} + z_c^{+2} - R_c^2 = 0 \quad (7.5)$$

Dans la suite, cette correction sera nommée *correction de Nickels (2004)*, et l'exposant + sera omis par souci de concision.

Intégration dans les études de réponses linéaires forcées

Afin de valider notre approche basée sur une modification de la constante de von Kármán, les analyses linéaires réalisées avec les modèles de longueur de mélange standard et $\mathcal{K} - \omega$ sont reprises en y incorporant la correction de Nickels (2004). Comme nous l'avons vu au chapitre 2, Knopp (2016) a déjà montré que cette correction peut être adaptée à un modèle de type $\mathcal{K} - \omega$ pour la prise en compte de forts gradients de pression. Dans un premier temps, l'expression (7.4) est linéarisée par rapport au paramètre $\eta_0 = \alpha \zeta_0$. Dans ce contexte, le gradient de pression Δp_{eff} est noté \mathcal{C} et est donné par la relation (3.8). La linéarisation de (7.4a) donne :

$$\kappa = \kappa_0 \left(1 - \eta_0 b_{H_1} \frac{z_c}{2} \mathcal{C} \right) \quad (7.6)$$

On peut alors écrire κ sous la forme $\langle \kappa \rangle + \eta_0 \hat{\kappa}$, comme toutes les quantités linéarisées du problème, avec à l'ordre dominant $\langle \kappa \rangle = \kappa_0$ et au premier ordre $\hat{\kappa} = -b_{H_1} \frac{\kappa_0 z_c}{2} \mathcal{C}$.

Dans le modèle de longueur de mélange

L'intégration de la correction de Nickels (2004) dans le modèle de longueur de mélange est assez immédiate, la constante de von Kármán intervenant directement dans l'expression (2.55). La fluctuation de la longueur de mélange s'écrit, après un développement de Taylor au premier ordre autour de $\eta - \eta_0$:

$$\hat{l} = \kappa_0 \left[-1 + \exp\left(-\frac{\mathcal{R}\eta}{A^0}\right) \left(1 - \frac{\mathcal{R}\eta}{A^0} + \frac{\mathcal{R}\eta^2}{A^0} \frac{\hat{\tau}_{xz}}{2} \right) \right] + \hat{\kappa}\eta \left[1 - \exp\left(-\frac{\mathcal{R}\eta}{A^0}\right) \right] \quad (7.7)$$

La correction d'Hanratty est finalement simplement « déplacée », n'étant désormais plus vu comme la composante au premier ordre du nombre de van Driest. Le système (3.23) est ensuite résolu avec cette nouvelle expression de \hat{l} . Les résultats obtenus pour différents couples de constantes (a_H, b_{H_1}) sont présentés sur les figures 7.5a et b, respectivement pour la phase et l'amplitude du cisaillement pariétal.

Les premières analyses linéaires réalisées avec $b_{H_1} = 1$ et le paramètre de relaxation a_H prise égale à 1650, en cohérence avec la valeur proposée par Abrams et Hanratty (1985) procurent une légère amélioration, toutefois insuffisante pour retrouver un bon accord avec les données expérimentales. Des essais ont donc été menés par la suite en augmentant le facteur d'amplification b_{H_1} dont le rôle apparaît immédiatement très similaire à celui de la constante b_H de la correction d'Hanratty originelle. On constate alors au cours de l'augmentation du facteur b_{H_1} que la position

2. Zero Pressure Gradient, voir chapitre 2.

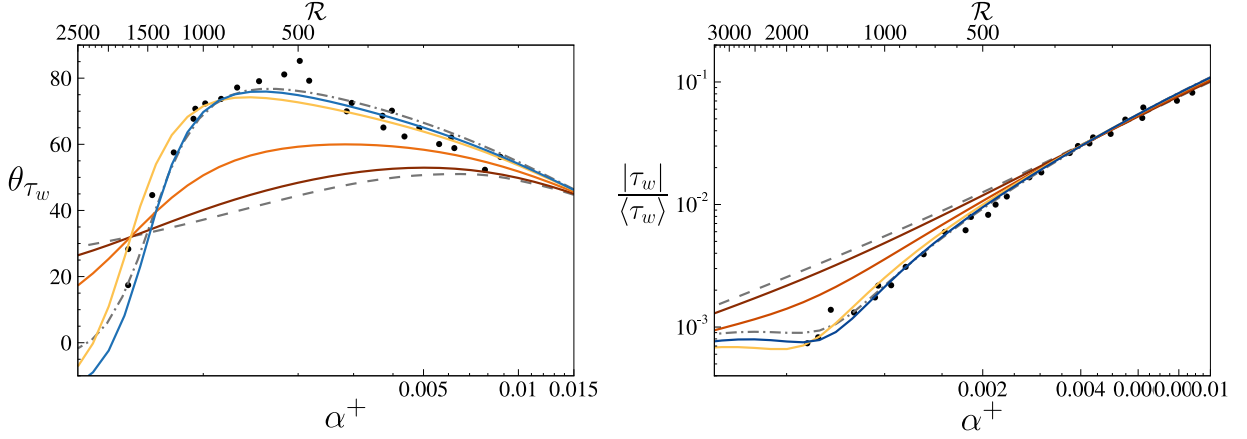


FIGURE 7.5. – Phase (gauche) et amplitude (droite) du cisaillement. Comparaison des analyses linéaires menées avec la correction de Nickels (2004) pour différents couples (a_H, b_{H_1}) avec les mesures d’Hanratty. Orange (du plus foncé au plus clair) : $(1650, 1)$, $(1650, 3)$ et $(1650, 5)$, bleu : $(1350, 4.65)$. Tirets-pointillés gris : analyse linéaire avec la correction d’Hanratty originale, tirets gris : analyse linéaire avec le modèle de longueur de mélange standard.

du point pivot dans la redescente du pic de déphasage est située, pour $a_H = 1650$, à des nombres d’onde α^+ trop faibles : dans ce cas, il faut diminuer le paramètre de relaxation. Finalement, nous proposons pour obtenir le meilleur accord avec les données expérimentales le couple de valeurs $(a_H, b_{H_1}) = (1350, 4.65)$, bien que de nombreux autres couples fournissent un accord acceptable.

Dans le modèle $\mathcal{K} - \omega$

Contrairement au cas précédent, l’intégration de la correction de Nickels (2004) dans les analyses linéaires appliquées au modèle $\mathcal{K} - \omega$ n’est pas triviale. En effet, nous avons vu au chapitre 5 que pour réaliser l’étude de réponse linéaire forcée à l’aide de ce modèle, nous avons dû l’exprimer, au premier ordre, sous la forme d’un modèle de longueur de mélange équivalent, que nous avons noté $l_{\mathcal{K}-\omega}$, la linéarisation des équations de transport de l’énergie cinétique turbulente et de la dissipation spécifique n’ayant pas permis d’obtenir des résultats satisfaisants. Afin d’incorporer la correction au modèle $\mathcal{K} - \omega$, on cherche à exprimer la fluctuation de la longueur de mélange équivalente du modèle corrigé sous la forme suivante :

$$\hat{l}_{\mathcal{K}-\omega} = \hat{l}_{\mathcal{K}-\omega}^0 + \hat{l}_c \quad (7.8)$$

Dans cette section, $l_{\mathcal{K}-\omega}^0$ fera référence à la version standard du modèle, c’est-à-dire non corrigé, et on notera l_c la contribution correspondant à la correction que nous souhaitons ajouter. Pour trouver l_c , une approche possible consiste à exprimer le terme de production de la dissipation spécifique de deux façons différentes. Pour rappel, ce terme de production s’écrit dans l’équation de transport de ω : $\frac{\gamma}{\nu_t} \mathcal{P}$, avec \mathcal{P} la production d’énergie cinétique turbulente³. La correction sur κ peut en effet être vue de deux façons différentes. Tout d’abord, modifier κ revient à réévaluer l’équilibre entre les coefficients de fermeture du modèle *via* la relation constitutive (2.25)⁴, ce qui modifie directement γ , qui peut s’écrire lui aussi sous la forme d’une partie moyenne et d’une partie fluctuante : $\gamma = \langle \gamma \rangle + \eta_0 \hat{\gamma}$. D’un autre côté, κ intervient dans l’équation de transport de la dissipation spécifique ω (2.23b), impactant dès lors \mathcal{K} et ω , ce qui va directement changer la viscosité turbulente au premier ordre, qui s’écrit : $\nu_t = \langle \nu_t \rangle + \eta_0 \hat{\nu}_t$. Or, quelque soit le point de vue adopté, la production de la dissipation spécifique doit rester la même, conduisant à la relation :

3. Voir chapitre 2.

4. C’est d’ailleurs la stratégie que nous appliquerons dans la section suivante, pour la mise en place de corrections adaptées aux simulations RANS. La relation constitutive γ est également rappelée.

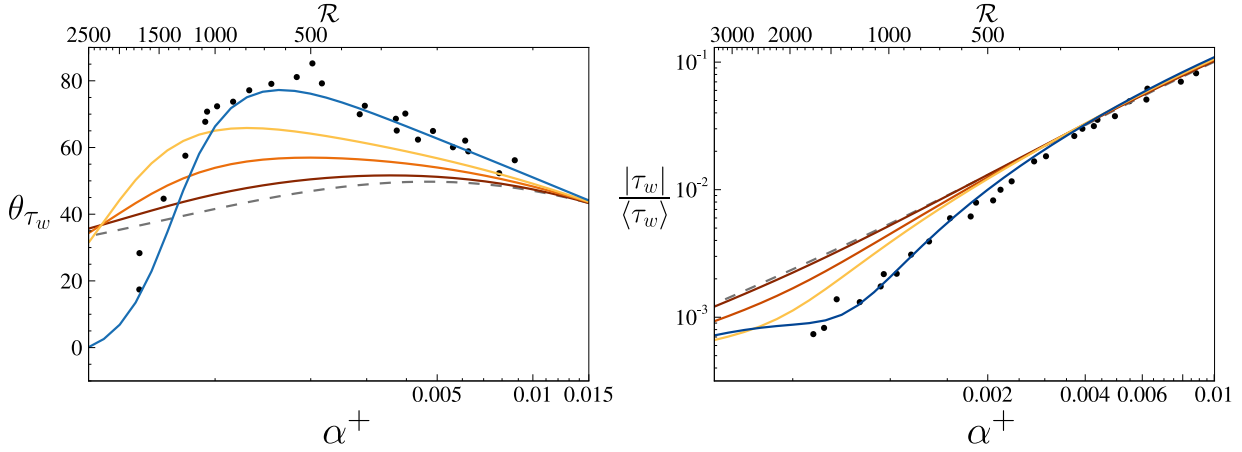


FIGURE 7.6. – Phase (gauche) et amplitude (droite) du cisaillement. Comparaison des analyses linéaires menées avec la correction de Nickels (2004) pour différents couples (a_H, b_{H_1}) avec les mesures d’Hanratty. Orange (du plus foncé au plus clair) : $(1650, 1)$, $(1650, 3)$ et $(1650, 5)$, bleu : $(750, 5)$. Tirets gris : analyse linéaire avec le modèle $\mathcal{K} - \omega$ standard.

$$\frac{\langle \gamma \rangle + \eta_0 \hat{\gamma}}{\langle \nu_t \rangle} \mathcal{P} = \frac{\langle \gamma \rangle}{\langle \nu_t \rangle + \eta_0 \hat{\nu}_t} \mathcal{P} \quad (7.9)$$

Après linéarisation, on obtient finalement la relation suivante pour maintenir l’égalité :

$$\hat{\nu}_t = -\frac{\hat{\gamma}}{\langle \gamma \rangle} \langle \nu_t \rangle \quad (7.10)$$

avec à l’ordre dominant $\langle \gamma \rangle$ donné par la relation (2.25), et la fluctuation $\hat{\gamma} = -\frac{2\sigma_\omega \kappa_0 \hat{\kappa}}{\sqrt{\beta^*}}$ obtenue après linéarisation de cette dernière. La fluctuation $\hat{l}_{\mathcal{K}-\omega}$ est ensuite redérivée suivant le principe développé au chapitre 5, mais en prenant cette fois en compte la fluctuation de la viscosité turbulente $\hat{\nu}_t$ due à la modification de κ :

$$\hat{l}_{\mathcal{K}-\omega} = \underbrace{-\frac{1}{2} \left(\frac{\langle \nu_t \rangle_{,\eta} (\langle \nu_t \rangle + \mathcal{R}^{-1}) + \langle \nu_t \rangle \left(\langle \nu_t \rangle_{,\eta} - \frac{\hat{\tau}_{zz}}{2} \right)}{\sqrt{\langle \nu_t \rangle (\langle \nu_t \rangle + \mathcal{R}^{-1})}} \right)}_{\hat{l}_{\mathcal{K}-\omega}^0} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\hat{\nu}_t (\langle \nu_t \rangle + \mathcal{R}^{-1}) + \langle \nu_t \rangle \hat{\nu}_t}{\sqrt{\langle \nu_t \rangle (\langle \nu_t \rangle + \mathcal{R}^{-1})}}}_{\hat{l}_c} \quad (7.11)$$

Les analyses linéaires menées avec cette correction montrent un comportement similaire à ce qui a déjà été observé précédemment (voir figure 7.6). Comme pour son équivalent en longueur de mélange, le facteur d’amplification doit être augmenté jusqu’à 5 environ pour atteindre des niveaux de déphasage et d’amortissement en accord avec les mesures d’Hanratty. On se rend également compte que, là encore, la position du point pivot obtenue avec $a_H = 1650$ se situe à des nombres d’onde α^+ de l’ondulation bien trop faibles. L’écart est plus important que ce qui avait été observé pour le modèle de longueur de mélange, signifiant que le paramètre de relaxation doit être plus diminué que ce qui avait été fait dans le cas précédent. Les valeurs retenues pour obtenir un bon accord avec les mesures d’Hanratty sont $a_H = 750$ et $b_{H_1} = 5$.

Pour conclure sur la correction de Nickels (2004)

En conclusion de cette section, une correction inspirée des travaux de Nickels (2004) et d’Hanratty a été développée pour les analyses linéaires. À partir d’une dépendance de la constante de von Kármán κ au gradient de pression relaxé d’Hanratty, nous avons pu proposer une correction

fonctionnant de manière similaire à celle historiquement utilisée dans les études de réponses linéaires forcées. L'intérêt ici est de disposer d'une correction universelle, qui peut être adaptée à une grande variété de modèles de turbulence, là où on était précédemment limité à un modèle de longueur de mélange faisant intervenir la fonction d'amortissement de van Driest. De plus, les résultats obtenus avec cette correction appuient l'hypothèse faisant de κ un paramètre adéquat sur lequel intervenir dans un modèle de viscosité turbulente. La section suivante est désormais dédiée au développement de corrections similaires adaptées à des simulations RANS.

7.3.2. Mise en place de corrections pour les simulations RANS

La correction de Nickels (2004) développée pour les analyses linéaires dans le paragraphe précédent n'est pas forcément adaptée pour les simulations RANS, pour des raisons similaires à la correction originale proposée par Hanratty pour le modèle de longueur de mélange. Le gradient de pression n'est en effet pas un paramètre pertinent pour la modélisation de la turbulence (Spalart, 2015) car il n'intervient pas dans l'équation de vorticité. Une autre approche est nécessaire.

De façon générale, les modèles standards à deux équations de transport sont calibrés pour reproduire les comportements asymptotiques dans la zone logarithmique et la région de sillage d'une couche limite turbulente sans gradient de pression. Rappelons qu'en ce qui concerne le modèle $\mathcal{K} - \omega$, l'énergie cinétique turbulente \mathcal{K} et la dissipation spécifique ω sont données par les équations de transport (2.23a) et (2.23b). Comme nous l'avons vu au chapitre 2, ces équations font intervenir un certain nombre de coefficients de fermeture, notés γ , β , β^* , $\sigma_{\mathcal{K}}$ et σ_{ω} , qui sont tous reliés par une relation constitutive (2.25) (Wilcox, 1988), que nous rappelons ici :

$$\gamma = \frac{\beta}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega}\kappa^2}{\sqrt{\beta^*}} \quad (7.12)$$

Les valeurs originales de ces constantes, initialement proposées par Wilcox (1988) puis reprises par Menter (1994) dans le cadre de la version *baseline* du modèle $\mathcal{K} - \omega$, ont été choisie pour reproduire le comportement de la couche limite turbulente⁵. Comme nous l'avons expliqué à ce moment là, la valeur de β^* est fixée par des arguments physiques provenant notamment des comportements de l'énergie cinétique turbulente et de la contrainte de cisaillement dans la zone logarithmique (relation de Bradshaw *et al.* (1967)), et la valeur de β est définie pour retrouver la décroissance de la turbulence homogène isotrope. Bien que la constante de von Kármán κ soit également choisie pour reproduire le comportement du profil de vitesse dans la région logarithmique, nous avons vu dans la section précédente que la pente de la loi logarithmique, égale à $\frac{1}{\kappa}$, fluctue le long de l'ondulation. Par conséquent, si on considère κ comme indéterminée, deux options peuvent être considérées pour recalibrer l'équation (2.25) : une modification de κ , ou une modification de σ_{ω} . La stratégie que nous nous proposons d'étudier ici est de vérifier si une dépendance de ces constantes à la position le long de l'ondulation (*i.e*   x/λ) permet d'améliorer les résultats du modèle $\mathcal{K} - \omega$, que ce soit pour la partie dynamique de l'écoulement (conséquences sur le cisaillement) ou pour la partie thermique (conséquences sur les flux de chaleur).

Modification de la constante de von Kármán

La première option explorée consiste en une modification de la constante de von Kármán pour prendre en compte les effets du gradient de pression induit par la déformation de la paroi sur le comportement asymptotique du profil de vitesse. C'est le choix le plus cohérent qui s'offre à nous compte tenu des conclusions que nous avons tirées de l'étude des profils de vitesse le long de l'ondulation. De plus, nous avons montré dans la section précédente à l'aide des études de réponses linéaires forcées qu'une correction appliquée sur la constante de von Kármán permet d'obtenir d'excellents résultats sur les modèles de longueur de mélange et $\mathcal{K} - \omega$, validant l'approche consistant à reproduire les effets de la déformation de la paroi sur les profils de vitesse.

5. Ces valeurs sont rappelées au chapitre 2.

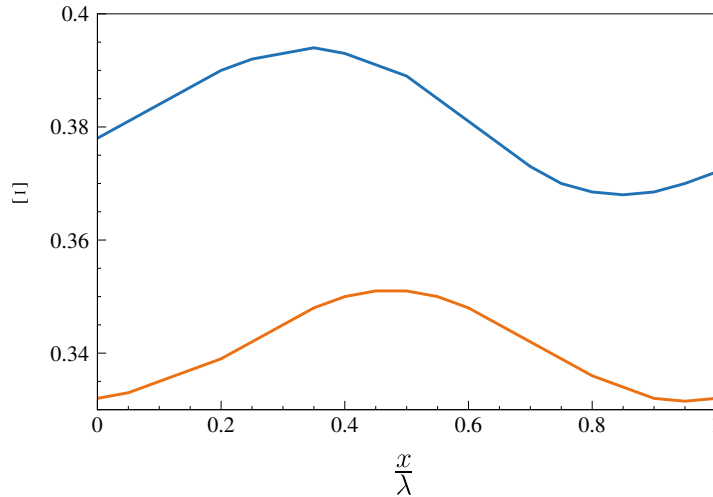


FIGURE 7.7. – Évolution de la fonction Ξ à $z^+ = 100$ à partir des modèles EB-RSM (bleu) et $\mathcal{K} - \omega$ (orange), à $\mathcal{R} = 500$.

Considérons dans un premier temps que, la déformation de la paroi étant de faible amplitude, la réponse de l'écoulement est linéaire. Nous supposons ici que la constante de von Kármán fluctue similairement autour d'une valeur moyenne, reproduisant ainsi le comportement observé des profils de vitesse, qui oscillent autour d'un profil moyen :

$$\kappa = \kappa_0 + \alpha \zeta_0 \kappa_1 \cos \left(2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \theta_\kappa \right) \right) \quad (7.13)$$

Afin de mieux comprendre comment les modèles EB-RSM et $\mathcal{K} - \omega$ estiment les variations du nombre de von Kármán apparent en fonction de la position le long de l'ondulation, on s'appuie sur la fonction de diagnostic (7.3). La figure 7.7 montre ainsi l'évolution de la fonction de diagnostic le long de l'ondulation, pour une valeur z^+ constante, prise arbitrairement égale à 100 au début de la zone logarithmique, pour $\mathcal{R} = 500$. En effet, pour une zone logarithmique bien définie, la fonction de diagnostic doit théoriquement y être constante ; or dans nos simulations, du fait des faibles nombres de Reynolds, ce comportement asymptotique n'est pas atteint et la région logarithmique n'est pour cette raison pas complètement développée. C'est pour cela qu'il est délicat de définir précisément une valeur de κ correspondante : c'est pourquoi nous n'observons pas de partie parfaitement constante sur les figures 7.4 droite et gauche. Néanmoins, nous nous intéressons principalement à la différence entre les modèles EB-RSM et $\mathcal{K} - \omega$, et la comparaison des fonctions de diagnostic à $z^+ = 100$ va nous permettre d'appréhender ces différences. Il convient cependant de rester prudent quant aux valeurs obtenues qui ne peuvent pas forcément être prises pour une estimation correcte des valeurs de κ_1 et θ_κ . Notons que les conclusions présentées ici pour $z^+ = 100$ restent valables pour $z^+ \in [100; 300]$, correspondant environ à l'étendue de la zone logarithmique observée sur les profils de vitesse.

Comme attendu, la figure 7.7 illustre le fait que l'on observe bien un comportement linéaire de la fonction de diagnostic à z^+ fixé, que nous noterons κ_p , par rapport à la petite déformation de la paroi. Cependant, les deux modèles procurent des résultats assez différents, notamment sur le déphasage : si le modèle $\mathcal{K} - \omega$ ne prévoit un déphasage que d'une vingtaine de degrés, le modèle EB-RSM donne lui un déphasage d'une cinquantaine de degrés, soit environ 30° de différence. En outre, le modèle $\mathcal{K} - \omega$ semble sous-estimer les variations de κ_p par rapport au modèle EB-RSM.

Finalement, une étude approfondie de l'évolution de la fonction Ξ pour les deux modèles nous a permis d'estimer des valeurs cohérentes pour κ_1 et de θ_κ , qui dépendent du nombre de Reynolds \mathcal{R} . Cette correction a été testée dans des simulations RANS réalisées avec CEDRE dans une configuration identique à celle décrite au chapitre 5, et les valeurs de κ_1 et de θ_κ à utiliser pour obtenir les meilleurs résultats possibles ont pu être ajustées. Ces valeurs sont résumées dans la table 7.1 avec celles retenues pour la correction sur σ_ω .

Modification de σ_ω

La correction proposée sur le coefficient de von Kármán modifie directement l'équilibre (2.25). Autrement dit, la valeur de γ correspondante est directement impactée par cette correction. Comme nous l'avons vu précédemment, un autre paramètre ajustable dans cette relation est σ_ω . Afin de retrouver une évolution similaire de γ sans modifier κ , nous pouvons également choisir de faire porter cette correction par σ_ω :

$$\sigma_\omega = \sigma_{\omega_0} + \alpha\zeta_0\sigma_{\omega_1} \cos\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \theta_{\sigma_\omega}\right)\right) \quad (7.14)$$

Les valeurs de σ_{ω_1} et θ_{σ_ω} à tester ont été estimées à partir de la relation constitutive (2.25), puis, grâce à des simulations RANS, ajustées pour obtenir le meilleur accord possible avec les données expérimentales. Ces valeurs *ad-hoc* sont résumées dans la table 7.1 en fonction du nombre de Reynolds \mathcal{R} .

Corrections proposées pour κ et σ_ω

Les valeurs finalement retenues pour les corrections sur σ_ω et sur κ sont résumés dans le tableau 7.1 et sur la figure 7.8. Les phases des deux corrections θ_κ et θ_{σ_ω} sont prises constantes, respectivement égales à -23° et 29° .

\mathcal{R}	100	150	200	300	400	500	700	1000
κ_1	0.020	0.025	0.030	0.34	0.036	0.039	0.028	0.021
σ_{ω_1}	0.055	0.06	0.075	0.11	0.12	0.13	0.12	0.05

TABLE 7.1. – Valeurs utilisées pour les amplitudes des modifications de κ et σ_ω .

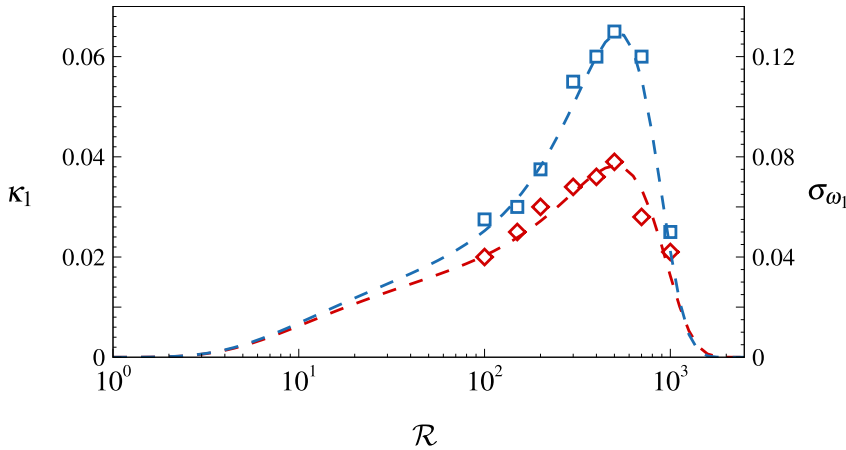


FIGURE 7.8. – Valeurs utilisées pour les modifications de κ et σ_ω . Bleu : σ_{ω_1} et rouge : κ_1 . Tirets : fonctions (7.15b) et (7.15a).

À partir de ces valeurs déterminées empiriquement, nous proposons les deux fonctions de \mathcal{R} suivantes pour κ_1 et σ_{ω_1} :

$$\kappa_1 = 0.039 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{R} - 500}{380}\right)^2 - \frac{10}{\mathcal{R}}\right) \quad (7.15a)$$

$$\sigma_{\omega_1} = 0.132 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{R} - 520}{320}\right)^2 - \frac{10}{\mathcal{R}}\right) \quad (7.15b)$$

Ces fonctions ont été choisies de façon non seulement à correspondre aux valeurs choisies pour

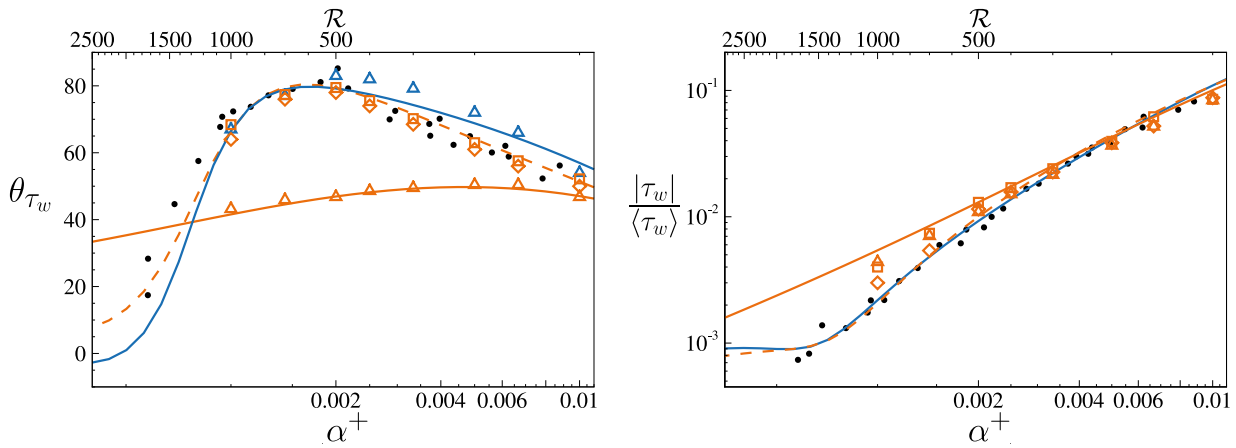


FIGURE 7.9. – Phase (gauche) et amplitude (droite) du cisaillement. Simulations RANS menées avec un modèle $\mathcal{K} - \omega$ modifié à l’aide des corrections sur κ (losanges oranges) et σ_ω (carrés oranges). Pour comparaison, sont également représentées : les mesures d’Hanratty (symboles noirs), les simulations RANS avec les modèles EB-RSM (triangles bleus) et $\mathcal{K} - \omega$ standard (triangles oranges), et les analyses linéaires menées avec les modèles $\mathcal{K} - \omega$ standard (ligne orange) et incluant la correction de Nickels (2004) (tirets oranges) et de longueur de mélange incluant la correction d’Hanratty (ligne bleu).

κ_1 et σ_{ω_1} , mais également de telle sorte qu’elles s’annulent en dehors du régime transitionnel, afin de retrouver le comportement du modèle standard lorsque le phénomène de déphasage de la contrainte de cisaillement n’apparaît pas.

Ces corrections sont ensuite intégrées dans le solveur CHARME du code CEDRE, et les résultats des simulations RANS correspondantes sont présentés dans la section 7.3.3. Il ne s’agit pas de modèles à proprement parler mais de corrections *ad-hoc*, similaires à celle proposée par Thorsness *et al.* (1978), qui dépendent de la position le long de l’ondulation. Elles suffisent cependant, comme nous allons le voir dans la suite de ce chapitre, à répondre aux objectifs de cette thèse, c’est-à-dire à montrer la possibilité de compenser la mise en défaut de l’hypothèse de Boussinesq dans un modèle à viscosité turbulente à travers la stratégie proposée. Cette stratégie, basée sur la modification de l’équilibre des constantes de fermeture du modèle $\mathcal{K} - \omega$ constitue une piste à explorer dans l’objectif de développer un véritable EVM procurant une prévision correcte du cisaillement et du flux thermique dans le régime transitionnel.

7.3.3. Amélioration de la prévision du cisaillement et du flux thermique

Les résultats des simulations RANS menées avec le modèle $\mathcal{K} - \omega$ incluant chacune des deux corrections (7.15a) et (7.15b) sont présentés dans cette section. On attachera une attention particulière non seulement à la prévision du cisaillement pariétal, pour lequel ces corrections ont été conçues, mais également à la prévision des flux thermiques. En effet, nous avons montré dans le chapitre 6 que, bien qu’insuffisante, la correction d’Hanratty permet d’améliorer les résultats des analyses linéaires concernant la prévision des flux thermiques. Nous regarderons notamment si les corrections développées sur le même principe permettent également de se rapprocher des résultats obtenus à l’aide du modèle EB-RSM sur la prévision de la thermique.

Phase et amplitude du cisaillement à la paroi

Afin de tester les corrections, des simulations RANS ont été menées dans les mêmes configurations que précédemment (voir chapitre 5). Les résultats de ces simulations sont tracés, concernant la phase et l’amplitude du cisaillement à la paroi, sur la figure 7.9 (droite et gauche, respectivement). Il apparaît immédiatement que les deux corrections proposées améliorent significativement

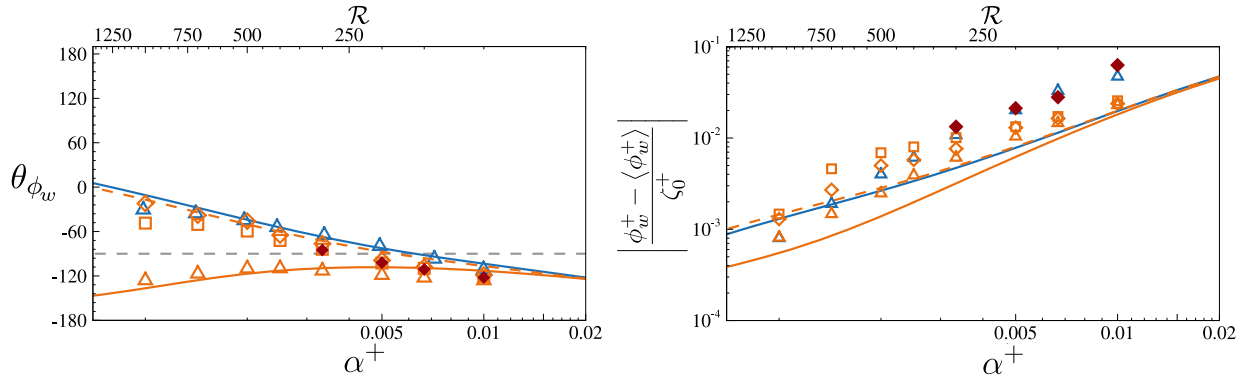


FIGURE 7.10. – Phase (gauche) et amplitude (droite) du flux thermique pour $\phi_w^* = -400$. Simulations RANS menées avec un modèle $\mathcal{K} - \omega$ modifié à l’aide des corrections sur κ (losanges oranges) et σ_ω (carrés oranges). Pour comparaison, sont également représentées : les DNS (losanges rouges), les simulations RANS avec les modèles EB-RSM (triangles bleus) et $\mathcal{K} - \omega$ standard (triangles oranges), et les analyses linéaires (lignes). En orange : trait plein, avec une hypothèse de turbulence gelée (*i.e.* $A^0 = 26$, $A_\theta^0 = 30$, $b_H = b_{H_\theta} = 0$ et $\varepsilon_\theta = 0$ et la contribution en $\hat{\tau}_{xz}$ nulle), et en tirets, avec la correction de Nickels (2004) ; en bleu : avec toutes les corrections activées (*i.e.* $A^0 = 26$, $A_\theta^0 = 30$, $b_H = b_{H_\theta} = 35$ et $\varepsilon_\theta = 4$). Le trait en tirets gris représente la ligne à -90° .

le comportement du modèle $\mathcal{K} - \omega$. C’est particulièrement le cas en ce qui concerne le déphasage du cisaillement à la paroi. On voit que les deux corrections donnent des résultats similaires, proches de ceux obtenus avec le modèle $\mathcal{K} - \omega$ incluant la correction de Nickels (2004) dans les analyses linéaires, et reproduisant fidèlement le pic de déphasage observé expérimentalement. La prévision de l’amplitude du cisaillement est également légèrement améliorée, même si l’effet est moins visible que sur θ_{τ_w} . On remarque toutefois que la correction proposée sur la constante de von Kármán permet de mieux approcher l’amortissement de l’amplitude situé aux alentours de $\mathcal{R} = 1000$, là où la correction sur σ_ω procure une estimation plus proche de celle du modèle $\mathcal{K} - \omega$ standard.

Les résultats exposés sur la figure 7.9 permettent de valider la stratégie de correction du modèle $\mathcal{K} - \omega$ pour les simulations RANS. Le principe d’une modification de la constante de von Kármán, déjà efficace dans les analyses linéaires avec la correction de Nickels (2004) semble en particulier améliorer significativement la prévision de la dynamique de l’écoulement dans le régime transitionnel par un modèle de type $\mathcal{K} - \omega$.

Phase et amplitude du flux thermique à la paroi

Bien que les corrections présentées ci-dessus aient été conçues pour retrouver la dynamique de l’écoulement, sans considération pour la thermique, nous avons vu au chapitre 6 que la correction d’Hanratty, qui fonctionne sur un principe similaire, a déjà une influence positive sur la prévision du flux thermique. Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à l’impact de nos corrections dans les simulations RANS sur la thermique de l’écoulement, qui, rappelons-le, est d’un intérêt primordial lorsqu’on s’intéresse au recul de la paroi dans des cas d’ablation ou d’érosion. Pour le flux thermique à la paroi ϕ_w , les seules données de référence dont nous disposons sont issues des DNS menées en parallèle de la thèse, les expériences d’Hanratty ne procurant aucune information à ce niveau là. Les simulations RANS réalisées au chapitre 6 ont été reprises en incluant les corrections développées dans les sections précédentes (équations 7.15a) et (7.15b)). La phase θ_{ϕ_w} et l’amplitude $\left| \frac{\phi_w^+ - \langle \phi_w^+ \rangle}{\zeta_0^+} \right|$ du flux thermique pariétal ainsi obtenues sont tracées sur la figure 7.10, et comparées aux données issues des DNS, à celles provenant des simulations RANS menées avec les modèles standards, et à celles des analyses linéaires. En ce qui concerne le déphasage du

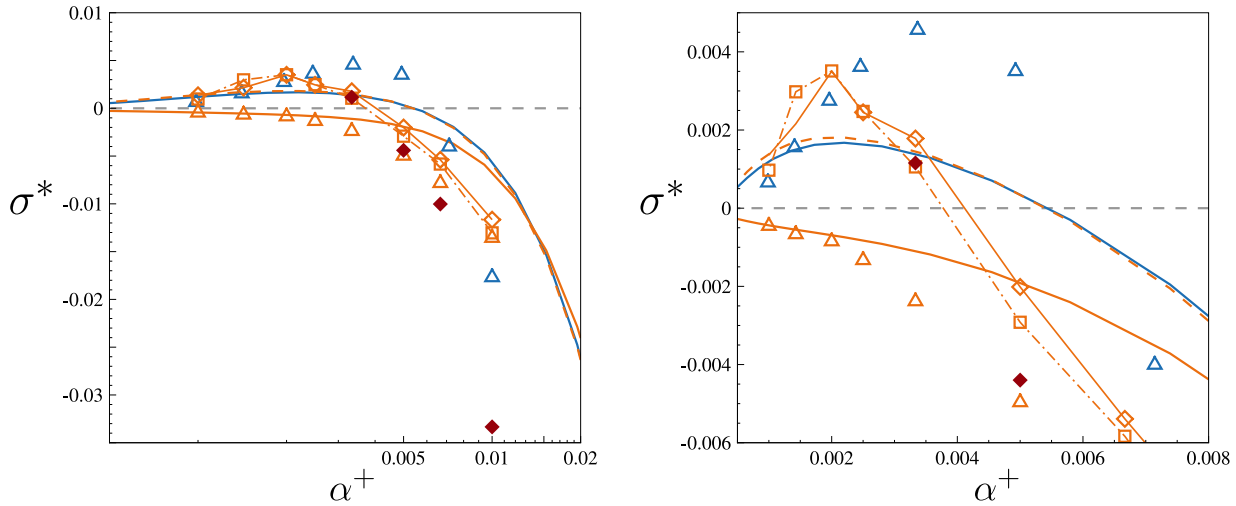


FIGURE 7.11. – Taux d’amplification temporel normalisé $\sigma^* = \sigma/\phi_w$, en fonction du nombre d’onde α^+ en échelle logarithmique (gauche), et linéaire, zoomée sur le pic (droite). Simulations RANS menées avec un modèle $\mathcal{K} - \omega$ modifié à l’aide des corrections sur κ (losanges oranges) et σ_ω (carrés oranges). Pour comparaison, sont également représentés : les DNS (losanges rouges), les simulations RANS avec les modèles EB-RSM (triangles bleus) et $\mathcal{K} - \omega$ standard (triangles oranges), et les analyses linéaires (lignes). En orange : trait plein, avec une hypothèse de turbulence gelée (*i.e.* $A^0 = 26$, $A_\theta^0 = 30$, $b_H = b_{H_\theta} = 0$ et $\varepsilon_\theta = 0$ et la contribution en $\hat{\tau}_{xz}$ nulle), et en tirets, avec la correction de Nickels (2004) ; en bleu : avec toutes les corrections activées (*i.e.* $A^0 = 26$, $A_\theta^0 = 30$, $b_H = b_{H_\theta} = 35$ et $\varepsilon_\theta = 4$).

flux, on peut observer que les deux corrections proposées donnent des résultats équivalents, bien qu’un léger écart apparaît lorsque \mathcal{R} augmente. L’accord avec les DNS ainsi qu’avec le modèle EB-RSM semble très bon. Pour $\mathcal{R} > 300$, le manque de données de référence nous empêche de conclure formellement sur l’amélioration obtenue. Cependant, compte tenu de la tendance observée pour $\mathcal{R} < 300$ (qui reste en bon accord avec le modèle EB-RSM), nous pouvons supposer que l’évolution de θ_{ϕ_w} reste bien meilleure que celle obtenue par le modèle $\mathcal{K} - \omega$ standard. Ce qu’il est très intéressant de noter, c’est que contrairement à ce que donne le modèle $\mathcal{K} - \omega$ dans sa forme standard, la ligne à -90° est désormais traversée par l’évolution de θ_{ϕ_w} à mesure que \mathcal{R} augmente. Or, nous avons montré au chapitre 6 l’importance de cette caractéristique lorsqu’il s’agit de retrouver une longueur d’onde pour laquelle le taux d’amplification temporel de la paroi σ est positif. À l’inverse, lorsqu’on s’intéresse à l’amplitude du flux, les limites de ce type de correction apparaissent. Comme nous avons pu l’observer avec les analyses linéaires, pour lesquelles la correction d’Hanratty ne permet pas d’obtenir une évolution satisfaisante de l’amplitude, les corrections développées de la même manière ne suffisent pas à améliorer significativement le comportement observé sur les DNS et les simulations avec le modèle EB-RSM. L’effet de la correction de Nickels (2004) développée ci-dessus a également été étudié à travers une étude de réponse linéaire forcée. Comme attendu, cette correction incluse dans \hat{l}_θ de la même manière que dans \hat{l} donne des résultats très proches de la version originale avec toutes les corrections activées.

7.3.4. Stabilité d’une surface régressive

Le même exercice que nous avons fait au chapitre précédent concernant la stabilité de la surface lors de sa régression peut être mené avec le modèle $\mathcal{K} - \omega$ incluant les deux corrections (7.15a) et (7.15b) ainsi qu’avec l’étude de réponse linéaire forcée incluant la correction de Nickels (2004)⁶. Le taux d’amplification temporel normalisé σ^* obtenu avec ces corrections est tracé sur

6. Là encore, nous ne considérerons que la version longueur de mélange, pour des raisons de simplicité.

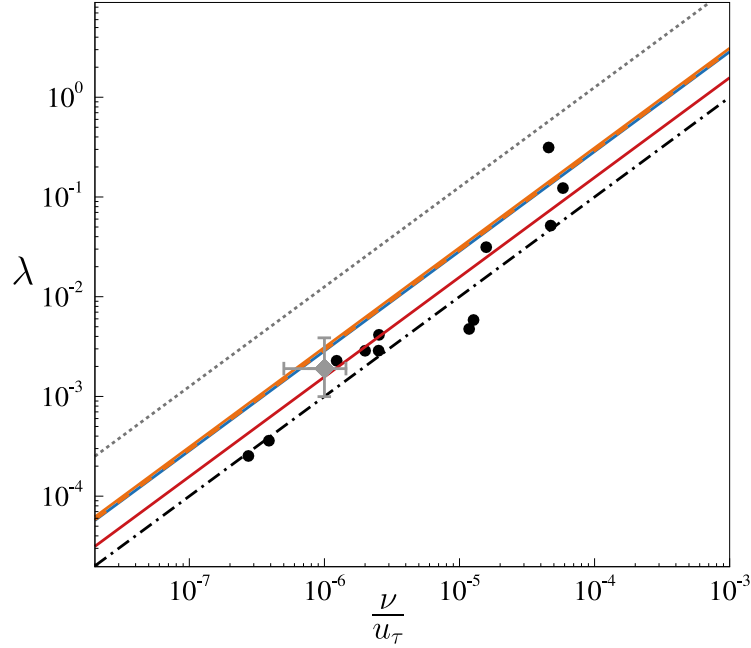


FIGURE 7.12. – Corrélation entre la taille caractéristique des creusements et la longueur visqueuse $\delta_\nu = \frac{\nu}{u_\tau}$ de la couche limite. Symboles : données expérimentales de [Thomas \(1979\)](#), tirets-pointillés noirs : corrélation de [Thomas \(1979\)](#). Comparaison avec la position du pic prévu par le modèle EB-RSM (trait rouge), par [Claudin et al. \(2017\)](#) (pointillés gris), par le modèle $\mathcal{K} - \omega$ incluant les corrections (trait orange) et par les analyses linéaires avec la correction d’Hanratty (trait bleu) et de [Nickels \(2004\)](#) (tirets oranges). Le losange gris correspond aux coups de gouges observés sur l’essai TATER (voir chapitre 4).

la figure 7.11. On voit immédiatement que le comportement du modèle $\mathcal{K} - \omega$ à ce niveau là est bien amélioré par rapport à la version non corrigée. En particulier, la phase θ_{ϕ_w} obtenue avec les corrections coupe désormais la ligne à -90° , autorisant un taux d’amplification temporel positif⁷. Plus précisément, sur la figure 7.11, on voit que σ^* présente désormais un pic, avec une longueur d’onde dont l’émergence va être favorisée. Les résultats rappellent ceux du modèle EB-RSM, bien que la localisation de ce pic diffère légèrement, plus proche de celui donné par l’étude de réponses linéaires forcées incluant la correction d’Hanratty, dont les résultats sont presque identiques à ceux de l’analyse linéaire faite avec la correction de [Nickels \(2004\)](#). La comparaison avec les données de la corrélation de [Thomas \(1979\)](#) reste toutefois largement acceptable, notamment au regard de la dispersion de ces mesures. En résumé, comme nous l’avons vu au chapitre précédent, le modèle EB-RSM donne un pic situé à $\alpha^+ = 4 \times 10^{-3}$ ($\mathcal{R} \approx 250$), tandis que l’analyse linéaire donne $\alpha^+ = 2.2 \times 10^{-3}$ ($\mathcal{R} \approx 454$). Le modèle $\mathcal{K} - \omega$ avec les corrections donnent un même pic situé à environ $\alpha^+ = 2 \times 10^{-3}$ ($\mathcal{R} \approx 500$), et l’analyse linéaire avec la correction de [Nickels \(2004\)](#) donne $\alpha^+ = 2.15 \times 10^{-3}$ ($\mathcal{R} \approx 465$). Ces valeurs sont parfaitement cohérentes avec la corrélation initialement proposée par [Thomas \(1979\)](#) et en excellent accord avec la dimension caractéristique trouvée dans le cas de l’essai TATER au chapitre 4. La figure 7.12 résume ces conclusions en comparant ces valeurs à la corrélation de [Thomas \(1979\)](#).

En conclusion, ce type de correction initialement dédié à l’amélioration de la dynamique de l’écoulement permet déjà d’obtenir des résultats plus proches des mesures de référence ([Thomas, 1979](#)) ainsi que des données tirées des simulations faites avec le modèle EB-RSM (chapitre 6) en ce qui concerne la thermique. Ceci confirme encore une fois qu’une partie du phénomène

7. Voir chapitre précédent.

responsable de l'émergence d'une longueur d'onde plus instable que les autres est bien issue de la dynamique de la couche limite. Cependant, elles montrent également leurs limites, en particulier lorsqu'on s'intéresse à l'amplitude du flux. Une meilleure modélisation des flux thermiques semble également nécessaire pour complètement prendre en compte la physique de la région interne de la couche limite. Néanmoins, l'impact positif de ces corrections sur la prévision des flux suffit déjà à obtenir des résultats intéressants quant à la longueur d'onde émergeant lors de la régression de la paroi (figure 7.12).

7.4. Limitations inhérentes à ce type de corrections

Bien qu'ayant prouvé leur efficacité dans les analyses linéaires et les simulations RANS pour reproduire le comportement du cisaillement, les corrections présentées dans ce chapitre souffrent du même type de limitations que la correction d'Hanratty. Premièrement, la correction d'Hanratty est construite pour corriger directement le cisaillement à travers une modification de la viscosité turbulente. Or, nous avons vu précédemment que le terme mal représenté est la différence des tensions diagonales $\tau_{xx} - \tau_{zz}$, et la correction d'Hanratty n'agit pas sur la bonne quantité. En ce sens, elle peut être vue comme un palliatif compensant artificiellement la mise en défaut de l'hypothèse de Boussinesq. La correction de Nickels (2004) règle en partie ce problème : bien que n'agissant pas directement sur la différence des tensions diagonales, elle cherche à en reproduire les conséquences sur les variations de pente observées sur les profils de vitesse dans la zone logarithmique dues au gradient de pression induit par la déformation de la paroi.

Toutefois, les corrections de Nickels (2004) et d'Hanratty possèdent le même défaut les rendant inapplicables à des simulations RANS en l'état. L'usage d'un gradient de pression n'est en effet pas préconisé pour la modélisation de la turbulence (Spalart, 2015) car ce dernier n'entre pas dans l'équation de la vorticité. Si la flexibilité des analyses linéaires nous permet certaines libertés, il n'est pas souhaitable d'intégrer ces corrections telles quelles dans un code RANS. De plus, l'équation de relaxation (3.7b) proposée par Hanratty peut également être remise en cause : du propre aveu de ses concepteurs, « no physical justification is given, so the merit of this equation is to be judged by its usefulness » (Mao et Hanratty, 1986). En réalité, le gradient de pression est un moyen pratique de prendre en compte les conséquences de la contribution du gradient de vitesse $\frac{\partial u}{\partial x}$ induit par la déformation de la paroi. D'ailleurs, un tel gradient de pression n'intervient pas dans le modèle EB-RSM, ce qui ne l'empêche pas de procurer un bien meilleur accord avec les données expérimentales, car il est construit pour reproduire directement l'anisotropie de la turbulence.

Un autre point problématique, plus général et philosophique, réside dans la nature même des modèles de turbulence considérés : comme il a été montré au chapitre 5, les mauvais résultats obtenus avec les modèles au premier ordre proviennent de la mauvaise représentation du tenseur de Reynolds par l'hypothèse de Boussinesq. Nous cherchons, avec les corrections proposées, à pallier ce problème dans un modèle à viscosité turbulente. Or, à travers la mise en défaut de l'hypothèse de Boussinesq dans le régime transitionnel, c'est le concept de viscosité turbulente qui est directement remis en question ici. Les stratégies évoquées ne règlent pas un défaut de modélisation mais se contentent d'artificiellement le compenser pour reproduire les résultats expérimentaux. En ce sens, nous avons montré qu'avec le modèle EB-RSM, une approche au second ordre semble physiquement beaucoup plus cohérente (sauf à \mathcal{R} très élevé).

Cependant, pour des raisons de praticité de mise en œuvre et de limitation des coûts numériques associés, les modèles à viscosité turbulente restent attractifs par rapport aux modèles aux tensions de Reynolds pour des applications industrielles. C'est pourquoi, malgré le point soulevé au paragraphe précédent, nous avons tout de même proposé une stratégie de correction des modèles au premier ordre.

Bilan

Malgré les excellents résultats que procure le modèle EB-RSM, pour des raisons de simplicité et de limitation des coûts de calculs, une approche de type modèle à viscosité turbulente reste attractive pour prévoir le comportement d'une couche limite turbulente soumise à une petite déformation de la paroi. Pour cette raison, ce chapitre a été dédié au développement de corrections adaptées à des modèles à viscosité turbulente, dans le but de compenser, à la manière de la correction d'Hanratty, la mise en défaut de l'hypothèse de Boussinesq. Nous nous sommes pour cela attaché dans un premier temps à comprendre le fonctionnement de la correction d'Hanratty, particulièrement adaptée aux analyses linéaires et faisant appel au modèle de longueur de mélange. Ensuite, l'étude de l'influence de la déformation de la paroi sur les profils de vitesses, tracés à différentes positions le long de l'ondulation, nous a permis d'identifier la constante de von Kármán comme étant un paramètre pertinent susceptible d'accueillir une éventuelle correction. À partir de ces observations, une première correction utilisable dans les analyses linéaires a été développée à partir des travaux de [Nickels \(2004\)](#) et [Knopp \(2016\)](#), combinée avec le gradient de pression relaxé d'Hanratty. Contrairement à une modification du nombre de van Driest, une telle correction n'est plus limitée au seul modèle de longueur de mélange et a pu être introduite non seulement sur ce dernier mais également sur un modèle $\mathcal{K} - \omega$. Cependant, l'usage d'un gradient de pression en fait une correction délicate à adapter à des simulations RANS, comme rappelé par [Spalart \(2015\)](#). C'est pourquoi nous avons également développé deux autres corrections *ad-hoc*, dont le principe repose sur une modification de l'équilibre des coefficients de fermeture du modèle $\mathcal{K} - \omega$ afin de reproduire le comportement observé. Ces corrections, incorporées dans le code CEDRE de l'ONERA ont pu montrer leur efficacité à reproduire le déphasage et l'amortissement du cisaillement pariétal dans le régime transitionnel. Leur impact sur la prévision des flux thermique a également été étudié, montrant une nette amélioration, qui permet de retrouver de façon acceptable les résultats de référence de [Thomas \(1979\)](#).

Ouverture : étude préliminaire sur l’extension en trois dimensions des analyses linéaires

Dans ce dernier chapitre, qui fait office d’ouverture, nous proposons une étude préliminaire concernant l’extension aux configurations tridimensionnelles des études de réponses linéaires forcées. Nous reprenons ici le travail qui a été fait notamment au chapitre 5 en ajoutant une dimension afin de nous pencher sur l’influence d’un éventuel effet de courbure de la paroi. Nous considérons pour cela un système de coordonnées cylindriques, nous permettant de considérer une paroi courbée, qui serait déformée par une perturbation sinusoïdale harmonique dans les directions longitudinale et tangentielle. Ces analyses linéaires seront ensuite confrontées à des simulations RANS menées avec le modèle EB-RSM en configuration de canal, ce dernier ayant prouvé tout au long de notre étude sa faculté à reproduire fidèlement le champ de perturbation dans l’écoulement. Le manque de données de référence, expérimentales ou numériques, ne nous permet malheureusement pas de proposer des conclusions définitives quant à l’influence du rayon de courbure de la paroi. Cependant, la cohérence des résultats des simulations par rapport aux analyses linéaires permet de considérer cette approche comme prometteuse pour étudier cette problématique.

Sommaire

8.1. Préambule	120
8.1.1. Motivation	120
8.1.2. Configuration en trois dimensions	120
8.2. Extension des analyses linéaires	121
8.2.1. Écoulement de base	121
8.2.2. Linéarisation des équations	122
8.3. Simulations RANS en trois dimensions	124
8.4. Comparaison des résultats et discussion	125
Bilan	128

8.1. Préambule

8.1.1. Motivation

Toutes les études menées jusque-là l'ont été en deux dimensions, en ne considérant que la longueur d'onde longitudinale des creusements. Or les coups de gouges sont par nature des motifs tridimensionnels, caractérisés non seulement par une longueur d'onde longitudinale mais également par une longueur caractéristique transverse. Nous avons vu dans notre étude la pertinence de la corrélation de [Thomas \(1979\)](#), qui suggère que la taille des coups de gouge dans la direction de l'écoulement est fixée dès les premiers instants de leur formation par les grandeurs caractéristiques de la couche limite turbulente. Une question naturelle en découle dès lors que l'on s'interroge sur la longueur caractéristique transverse des motifs observés : cette dernière peut-elle résulter de mécanismes similaires ?

En s'intéressant de plus près à l'analogie évoquée dans le chapitre 1, on peut remarquer que les rides de sables apparaissant sur un sol relativement plat forment un motif quasiment bidimensionnel. En revanche, les coups de gouge que l'on observe dans des grottes de glace ou sur la pointe avant d'un véhicule de rentrée se forment sur une surface courbée (voir figure 8.1). La longueur d'onde transverse des coups de gouge serait-elle due au rayon de courbure de la paroi, qui propagerait la perturbation également dans la direction tangentielle ? C'est cette question qui a motivé l'étude présentée dans ce chapitre. Nous n'aurons pas ici la prétention d'y répondre, mais nous nous proposons dans un premier temps de vérifier si le principe des analyses linéaires pourrait permettre d'étudier ces phénomènes. Pour cela, nous allons étendre les études de réponses linéaires forcées en trois dimensions, dans une configuration permettant d'étudier l'influence d'un rayon de courbure dans la direction transverse à l'écoulement, que nous désignerons comme la direction tangentielle. Nous comparerons alors les résultats de ces analyses linéaires à des simulations RANS réalisées avec le modèle EB-RSM.

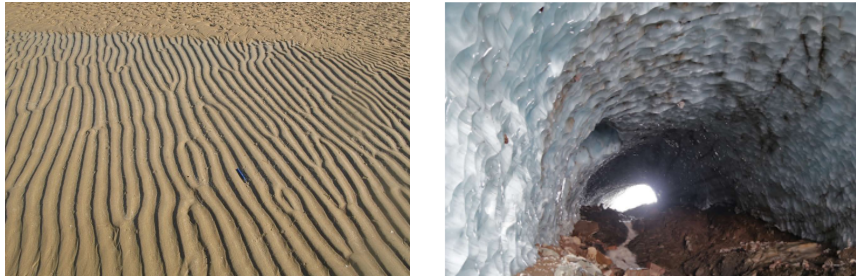


FIGURE 8.1. – Rides de sables bidimensionnelles apparaissant sur un sol plan¹(gauche), coups de gouges tridimensionnels apparaissant sur les parois courbées d'une grotte de glace ([Pffitsch et al., 2017](#)).

8.1.2. Configuration en trois dimensions

La configuration dans laquelle nous proposons d'étendre les études de réponses linéaires forcées en trois dimensions est illustrée sur le schéma 8.2. De la même manière qu'en 2D, la déformation de la paroi est vue comme une perturbation sinusoïdale harmonique, qui se propage dans les directions longitudinale et transverse. Comme on souhaite étudier l'influence d'une courbure de la paroi dans la direction tangentielle, on passera dans la suite dans un système de coordonnées cylindriques (x, r, ψ) . La déformation de la paroi dans la direction tangentielle est définie par un rayon de courbure r_0 et un angle ψ_0 , permettant de fixer la longueur de l'arc de cercle du domaine étudié. À partir des travaux d'[Hochrein et Wright \(1976\)](#) (voir chapitre 1), on peut remarquer que la taille caractéristique transverse des coups de gouge est du même ordre que la taille longitudinale. On suppose donc ici que la longueur d'onde tangentielle de la déformation

1. Photo extraite du site internet <https://geologyistheway.com/>.

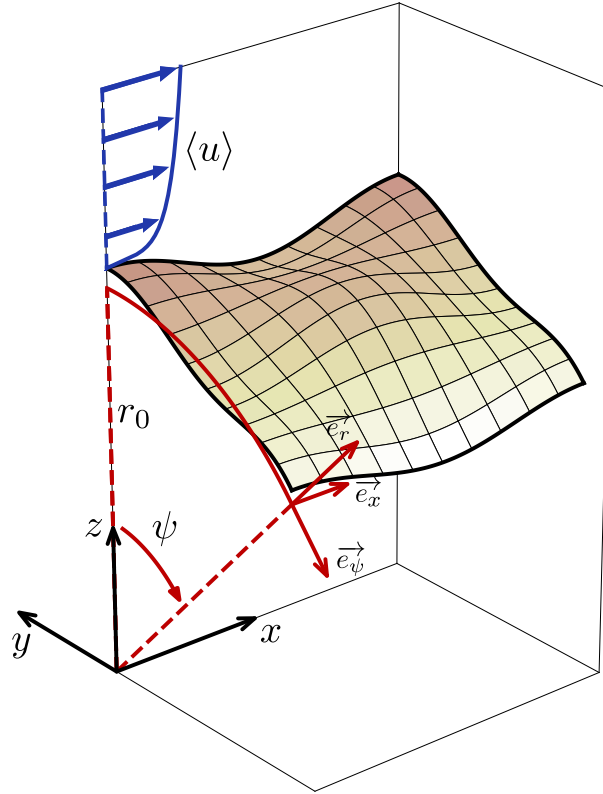


FIGURE 8.2. – Schéma illustrant la configuration 3D étudiée, et le passage en coordonnées cylindriques. Pour plus de lisibilité, l'amplitude de la déformation est amplifiée par rapport à celle considérée dans les analyses linéaires et les simulations RANS présentées ci-après.

de la paroi est égale à la longueur d'onde longitudinale. On souhaite avoir une longueur d'arc de cercle égale à la longueur d'onde longitudinale λ , ce qui nous donne $\psi_0 = \lambda/r_0$ ¹. Le profil de la paroi est alors donné par la fonction :

$$\zeta = \zeta_0 \cos(\alpha x) \cos(m\psi) \quad (8.1)$$

m est une grandeur exprimée en rad^{-1} , qui est l'analogue d'un nombre d'onde. Pour avoir une déformation identique dans les directions longitudinale et tangentielle, on doit avoir en particulier $m = r_0\alpha$.

Pour rester cohérent avec les simulations RANS menées jusqu'ici, on prendra dans ce chapitre $\lambda = 2$ m. Dans ce contexte, on retiendra trois configurations d'étude : $r_0 = \{0.8, 1.5, 5\}$ m, et deux nombres de Reynolds : $\mathcal{R} = 300$ et $\mathcal{R} = 500$.

8.2. Extension des analyses linéaires

8.2.1. Écoulement de base

L'écoulement de base est une région interne de couche limite turbulente incompressible, se développant dans l'axe d'un cylindre infini, de rayon r_0 . Le bilan de quantité de mouvement en coordonnées cylindriques se réduit à, avec $r \in [0 + \infty[$:

$$\frac{\partial}{\partial r} ((r + r_0)\tau_{xr}) = 0 \quad (8.2)$$

1. La variable ψ évolue donc entre 0 et ψ_0 .

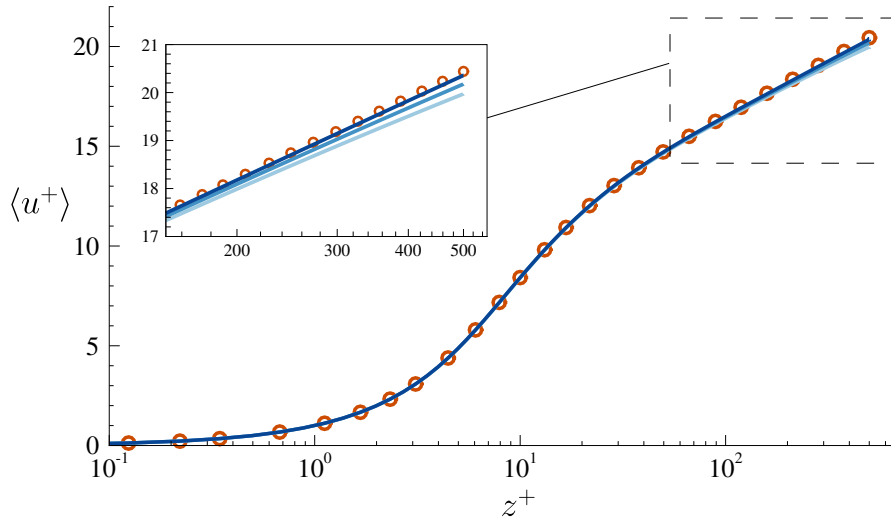


FIGURE 8.3. – Profils de vitesse moyen à l'état de base, à $\mathcal{R} = 500$, obtenus avec un modèle de longueur de mélange. Les symboles représentent le profil sur plaque plane, les couleurs de foncées à claires un rayon de courbure décroissant ($r_0 = \{0.8, 1.5, 5\}$ m).

Avec un modèle de longueur de mélange, le profil de vitesse à l'équilibre $\langle u \rangle^2$ est donc donné par intégration de l'expression :

$$\langle u \rangle_{,\eta} = \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{4r_0}{r+r_0} \langle l \rangle^2 \mathcal{R}^2}}{2 \langle l \rangle^2 \mathcal{R}} \quad (8.3)$$

Lorsque r_0 tend vers l'infini, on retrouve comme attendu la solution dans la région interne de la couche limite sans gradient de pression. En pratique, l'influence du rayon de courbure sur le profil de vitesse moyen n'est visible que dans la région logarithmique, lorsque le rayon de courbure est très petit – soit quand la courbure est importante. De plus, à l'ordre dominant, l'écoulement est supposé établi dans l'axe du cylindre et axisymétrique, c'est-à-dire que les vitesses moyennes tangentielle $\langle u_\psi \rangle$ et radiale $\langle u_r \rangle$ sont nulles. Les profils de vitesse obtenus par intégration de l'expression (8.3) sont tracés sur la figure 8.3 pour les trois configurations étudiées, et un nombre de Reynolds égal à 500 (on observe exactement le même comportement à $\mathcal{R} = 300$). La courbure de la paroi provoque, lorsque la hauteur de la couche limite δ devient grande devant le rayon de courbure r_0 , un infléchissement du profil dans la zone logarithmique, jusqu'à la disparition de celle-ci (à partir de $\frac{\delta}{r_0} > 10$ environ d'après plusieurs auteurs (Willmarth et Yang, 1970; Rao et Keshavan, 1972)). Cet effet, documenté dans la littérature (Luxton *et al.*, 1984; Snarski et Lueptow, 1995), reste toutefois minime pour les configurations que nous avons choisies.

8.2.2. Linéarisation des équations

Comme en deux dimensions, les analyses linéaires sont réalisées en considérant une petite déformation de la paroi dans les directions longitudinale et tangentielle. On exprime la déformation de la paroi dans la direction transverse grâce au changement de variable $\tilde{\psi} = r_0 \psi$. Cela permet de faire apparaître le nombre d'onde α_ψ de la déformation transverse. Bien que ce dernier sera pris égal à α dans nos exemples, nous distinguerons ces deux nombres d'onde dans cette section, pour garder la généralité de l'approche. Les équations de Navier–Stokes³ incompressibles sont linéarisées par rapport au petit paramètre $(\alpha + \alpha_\psi) \zeta_0$, et chaque quantité q du problème est décomposée en une partie moyenne $\langle q \rangle$ et une partie fluctuante \hat{q} :

2. C'est désormais une moyenne en x et en ψ .

3. Les équations de Navier–Stokes écrites en coordonnées cylindriques, sous leur forme incompressible, sont rappelées en annexe B.1.

$$q = \langle q \rangle + (\alpha + \alpha_\psi) \zeta_0 e^{i(\alpha x + \alpha_\psi \tilde{\psi})} \hat{q} \quad (8.4)$$

De façon analogue à ce qui avait été fait en deux dimensions, on introduit les notations suivantes pour les composantes du champ de vitesse et de tensions de Reynolds en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} u_x &= u_\tau \left(\langle u \rangle + (\alpha + \alpha_\psi) \zeta_0 e^{i(\alpha x + \alpha_\psi \tilde{\psi})} \hat{u}_x \right) \\ u_r &= u_\tau (\alpha + \alpha_\psi) \zeta_0 e^{i(\alpha x + \alpha_\psi \tilde{\psi})} \hat{u}_r \\ u_\psi &= u_\tau (\alpha + \alpha_\psi) \zeta_0 e^{i(\alpha x + \alpha_\psi \tilde{\psi})} \hat{u}_\psi \\ \tau_{rr} &= u_\tau^2 \left(-\frac{1}{3} \chi^2 + (\alpha + \alpha_\psi) \zeta_0 e^{i(\alpha x + \alpha_\psi \tilde{\psi})} \hat{\tau}_{rr} \right) \\ \tau_{xx} &= u_\tau^2 \left(-\frac{1}{3} \chi^2 + (\alpha + \alpha_\psi) \zeta_0 e^{i(\alpha x + \alpha_\psi \tilde{\psi})} \hat{\tau}_{xx} \right) \\ \tau_{\psi\psi} &= u_\tau^2 \left(-\frac{1}{3} \chi^2 + (\alpha + \alpha_\psi) \zeta_0 e^{i(\alpha x + \alpha_\psi \tilde{\psi})} \hat{\tau}_{\psi\psi} \right) \\ \tau_{\psi r} &= u_\tau^2 (\alpha + \alpha_\psi) \zeta_0 e^{i(\alpha x + \alpha_\psi \tilde{\psi})} \hat{\tau}_{\psi r} \\ \tau_{xr} &= u_\tau^2 \left(1 + (\alpha + \alpha_\psi) \zeta_0 e^{i(\alpha x + \alpha_\psi \tilde{\psi})} \hat{\tau}_{xr} \right) \\ \tau_{\psi x} &= u_\tau^2 (\alpha + \alpha_\psi) \zeta_0 e^{i(\alpha x + \alpha_\psi \tilde{\psi})} \hat{\tau}_{\psi x} \\ \tau_{rr} - p/\rho &= -p_0/\rho + u_\tau^2 \left(-\frac{1}{3} \chi^2 - (\alpha + \alpha_\psi) \zeta_0 e^{i(\alpha x + \alpha_\psi \tilde{\psi})} \hat{\tau}_p \right) \end{aligned} \quad (8.5)$$

La linéarisation des équations de Navier–Stokes (B.1), (B.2), (B.3) et (B.4) donne quatre équations au premier ordre. Les composantes du tenseur de Reynolds sont exprimées à l’aide de l’hypothèse de Boussinesq⁴, en faisant appel au modèle de longueur de mélange (3.12), fournissant deux équations supplémentaires et quatre relations permettant de fermer le système. Dans la suite, on notera $\eta_0 = \alpha r_0$ le rayon de courbure adimensionné. Ainsi, à l’ordre 1, le bilan de continuité donne une équation pour $\hat{u}_{r,\eta}$:

$$\hat{u}_{r,\eta} + \frac{1}{\eta + \eta_0} (\hat{u}_r + i\alpha_\psi r_0 \hat{u}_{\psi,\eta}) + i\hat{u}_x = 0 \quad (8.6)$$

De même, la linéarisation des bilans de quantité de mouvement dans les directions x , r et ψ donne trois équations pour $\hat{\tau}_{xr,\eta}$, $\hat{\tau}_{\psi r,\eta}$ et $\hat{\tau}_{p,\eta}$:

$$\hat{u}_{r,\eta} \langle u \rangle_{,\eta} + i \langle u \rangle \hat{u}_x = \frac{1}{\eta + \eta_0} (\hat{\tau}_{xr} + i\alpha_\psi r_0 \hat{\tau}_{\psi x}) + \hat{\tau}_{xr,\eta} - i(\hat{\tau}_p + \hat{\tau}_{rr} - \hat{\tau}_{xx}) \quad (8.7)$$

$$i \langle u \rangle \hat{u}_r = \frac{1}{\eta + \eta_0} (\hat{\tau}_{rr} - \hat{\tau}_{\psi\psi} + i\alpha_\psi r_0 \hat{\tau}_{\psi r}) - \hat{\tau}_{p,\eta} + i\hat{\tau}_{xr} \quad (8.8)$$

$$i \langle u \rangle \hat{u}_\psi = \frac{1}{\eta + \eta_0} (2\hat{\tau}_{\psi r} + i\alpha_\psi r_0 (\hat{\tau}_{\psi\psi} - \hat{\tau}_{rr} - \hat{\tau}_p)) + \hat{\tau}_{\psi r,\eta} + i\hat{\tau}_{\psi x} \quad (8.9)$$

Enfin, on exprime le tenseur des contraintes de Reynolds à l’aide de l’hypothèse de Boussinesq (voir annexe B.2), et ces expressions, une fois linéarisées, permettent d’obtenir deux équations supplémentaires, pour $\hat{u}_{x,\eta}$ et $\hat{u}_{\psi,\eta}$, et quatre relations pour $\hat{\tau}_{\psi x}$, $\hat{\tau}_{rr} - \hat{\tau}_{\psi\psi}$ et $\hat{\tau}_{rr} - \hat{\tau}_{xx}$:

$$\hat{\tau}_{xr} = \left(2 \langle l \rangle^2 \langle u \rangle_{,\eta} + \mathcal{R}^{-1} \right) (\hat{u}_{,\eta} + i\hat{w}) + 2 \langle l \rangle \langle u \rangle_{,\eta} {}^2 \hat{l} \quad (8.10)$$

$$\hat{\tau}_{\psi r} = \left(\langle l \rangle^2 \langle u \rangle_{,\eta} + \mathcal{R}^{-1} \right) \left(\hat{u}_{\psi,\eta} + \frac{1}{\eta + \eta_0} (i\alpha_\psi r_0 \hat{u}_r - \hat{u}_\psi) \right) \quad (8.11)$$

4. Voir annexe B.2.

$$\hat{\tau}_{\psi x} = i \left(\langle l \rangle^2 \langle u \rangle_{,\eta} + \mathcal{R}^{-1} \right) \left(\hat{u}_{\psi} + \frac{\alpha_{\psi} r_0}{\eta_0} \hat{u}_x \right) \quad (8.12)$$

$$\hat{\tau}_{rr} - \hat{\tau}_{\psi\psi} = 2 \left(\langle l \rangle^2 \langle u \rangle_{,\eta} + \mathcal{R}^{-1} \right) \left(\hat{u}_{r,\eta} + \frac{1}{\eta + \eta_0} (i\alpha_{\psi} r_0 \hat{u}_{\psi} - \hat{u}_r) \right) \quad (8.13)$$

$$\hat{\tau}_{rr} - \hat{\tau}_{xx} = 2 \left(\langle l \rangle^2 \langle u \rangle_{,\eta} + \mathcal{R}^{-1} \right) (\hat{u}_{r,\eta} - i\hat{u}_x) \quad (8.14)$$

Finalement, on obtient un système linéaire qui peut se réduire sous la forme compacte :

$$\frac{d\mathbf{X}}{d\eta} = \mathcal{B}\mathbf{X} + \mathcal{S} \quad (8.15)$$

Avec $\mathbf{X}^t = (\hat{u}_x, \hat{u}_r, \hat{u}_{\psi}, \hat{\tau}_{xr}, \hat{\tau}_p, \hat{\tau}_{\psi r})$, que l'on peut résoudre facilement avec la méthode de collocation spectrale présentée au chapitre 5. La matrice \mathcal{B} et le vecteur solution \mathcal{S} sont écrits explicitement en annexe B.3. De façon similaire à ce qui avait été fait en deux dimensions, on utilise pour conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{xz}(\infty) &= 0 \\ \hat{u}_r(\infty) &= 0 \\ \hat{u}_{\psi}(\infty) &= 0 \\ \hat{u}_x(0) &= -\langle u \rangle_{,\eta}(0) = -\mathcal{R} \\ \hat{u}_r(0) &= 0 \\ \hat{u}_{\psi}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (8.16)$$

8.3. Simulations RANS en trois dimensions

Afin de valider l'approche présentée dans la section précédente, des simulations RANS ont également été menées dans les trois configurations et pour les deux nombres de Reynolds \mathcal{R} définis dans la section 8.1.2 (voir figure 8.4), c'est-à-dire pour les trois rayons de courbure $r_0 = \{0.8, 1.5, 5\}$ m. Rappelons que $\lambda = \lambda_{\psi} = 2$ m. Comme en deux dimensions, on choisit, pour des raisons pratiques, de simuler un écoulement de canal turbulent établi qui respecte la condition $\alpha\delta = \pi$. Les analyses linéaires ont également été déclinées dans cette version, sans que de grandes différences ne soient observées par rapport à une configuration de couche limite (voir chapitre 5, section 5.1.4 pour la discussion détaillée en deux dimensions de cette problématique).

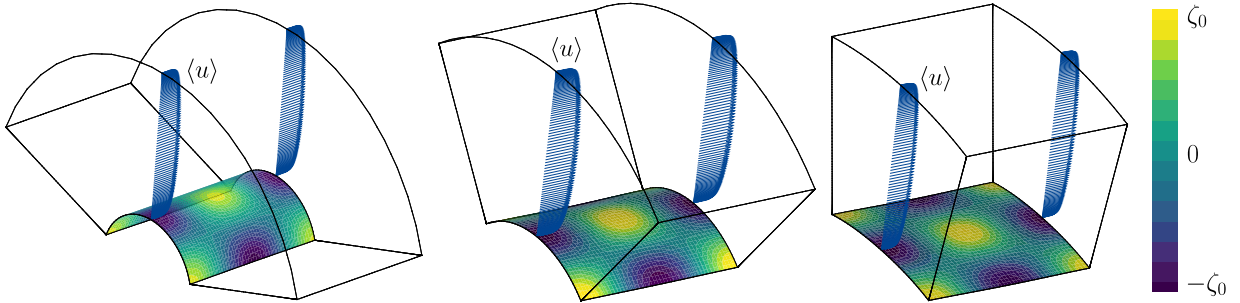


FIGURE 8.4. – Configurations de canal pour les calculs RANS. De gauche à droite : $r_0 = 0.8$ m, $r_0 = 1.5$ m et $r_0 = 5$ m. La déformation de la paroi est illustrée par les contours sur la paroi inférieure, entre $-\zeta_0$ et ζ_0 .

Ces simulations ont été menées avec le solveur CHARME du code CEDRE avec des paramètres similaires à ceux utilisés en deux dimensions et présentés au chapitre 5. Le but étant de valider l'extension en trois dimensions des analyses linéaires, le modèle EB-RSM a été choisi en raison

de ses bonnes performances sur les cas en deux dimensions. Une condition de périodicité est appliquée sur les faces amont, aval, gauche et droite.

8.4. Comparaison des résultats et discussion

Dans cette section, la fluctuation du cisaillement à la paroi $\frac{\tau_{xr}^+ - \langle \tau_{xr} \rangle^+}{\zeta_0^+}$ est projetée dans un plan cartésien (x, y) , permettant une comparaison aisée entre les résultats de l'analyse linéaire et des simulations. Les conclusions que nous tirerons de cette comparaison n'étant pas très différentes pour les trois rayons de courbure étudiés, nous omettrons ici le cas $r_0 = 1.5$ m, assez proche du cas à $r_0 = 0.8$ m, mais qui est néanmoins présenté en annexe B.4. Les tracés en trois dimensions, plus représentatifs mais moins lisibles, se trouvent eux en annexe B.4.

Reconstruction du champ de fluctuations à partir des analyses linéaires

Afin de faciliter la comparaison avec les simulations RANS, le champ de perturbation de la contrainte de cisaillement à la paroi a été reconstruit à partir des études de réponses linéaires forcées. Pour cela, on peut écrire la déformation de la paroi sous sa forme complexe grâce à la relation suivante :

$$\zeta_0 \cos(\alpha x) \cos(\alpha_\psi \tilde{\psi}) = \Re \left[\frac{\zeta_0}{2} \left(e^{i(\alpha x + \alpha_\psi \tilde{\psi})} + e^{i(\alpha x - \alpha_\psi \tilde{\psi})} \right) \right] \quad (8.17)$$

Le champ de fluctuations $\frac{\tau_{xr}^+ - \langle \tau_{xr} \rangle^+}{\zeta_0^+}$ de la contrainte de cisaillement est donc obtenu grâce aux résultats de deux analyses linéaires, pour les perturbations $e^{i(\alpha x + \alpha_\psi \tilde{\psi})}$ et $e^{i(\alpha x - \alpha_\psi \tilde{\psi})}$, la réponse de l'analyse linéaire correspondant au membre de droite de l'expression (8.17) étant égale à la somme des réponses de ces deux perturbations, par principe de superposition. Finalement, le champ de perturbation $\frac{\tau_{xr}^+ - \langle \tau_{xr} \rangle^+}{\zeta_0^+}$ est donné par :

$$\frac{\tau_{xr}^+ - \langle \tau_{xr} \rangle^+}{\zeta_0^+} = \Re \left[\left(\alpha^+ + \alpha_\psi^+ \right) \frac{\zeta_0^+}{2} \left(e^{i(\alpha x + \alpha_\psi \tilde{\psi})} \hat{\tau}_{xr}^< + e^{i(\alpha x - \alpha_\psi \tilde{\psi})} \hat{\tau}_{xr}^> \right) \right] \quad (8.18)$$

où $\hat{\tau}_{xr}^<$ et $\hat{\tau}_{xr}^>$ correspondent aux réponses de la couche limite aux deux perturbations $e^{i(\alpha x + \alpha_\psi \tilde{\psi})}$ et $e^{i(\alpha x - \alpha_\psi \tilde{\psi})}$.

Comparaison entre les analyses linéaires et les simulations

Les contours des champs de fluctuations de la contrainte de cisaillement pariétale obtenus par les analyses linéaires sont comparés avec les résultats des simulations RANS pour les configurations à $r_0 = 0.8$ m et $r_0 = 5$ m sur les figures 8.5 et 8.6, pour les deux nombres de Reynolds $\mathcal{R} = 300$ et $\mathcal{R} = 500$. Plusieurs conclusions peuvent être tirées de ces comparaisons. La tendance générale qui se dégage immédiatement des 6 configurations étudiées est que l'amplitude de la perturbation est toujours légèrement surestimée dans les analyses linéaires par rapport aux résultats de simulation. On peut également remarquer que cet écart est plus important pour $\mathcal{R} = 300$ (de l'ordre de 20%) par rapport à $\mathcal{R} = 500$ (de l'ordre de 10%). Concernant le déphasage, comme en deux dimensions, il est plus important pour $\mathcal{R} = 500$ que pour $\mathcal{R} = 300$. Pour obtenir un bon accord avec les simulations, il a été nécessaire, dans les analyses linéaires, d'augmenter la valeur du facteur d'amplification de la correction d'Hanratty, b_H . Pour $r_0 = 5$ m et $r_0 = 1.5$ m, la valeur $b_H = 45$ a été choisie, proche de celle utilisée en deux dimensions tandis que pour $r_0 = 0.8$ m, la constante b_H a du être augmentée aux alentours de 50 pour retrouver un déphasage comparable à celui des simulations. Finalement, pour les cas $r_0 = 0.8$ m et à $r_0 = 1.5$ m, les déphasages de τ_{xr} à la paroi restent relativement constants et sont ainsi d'environ 75° pour $\mathcal{R} = 300$ et de

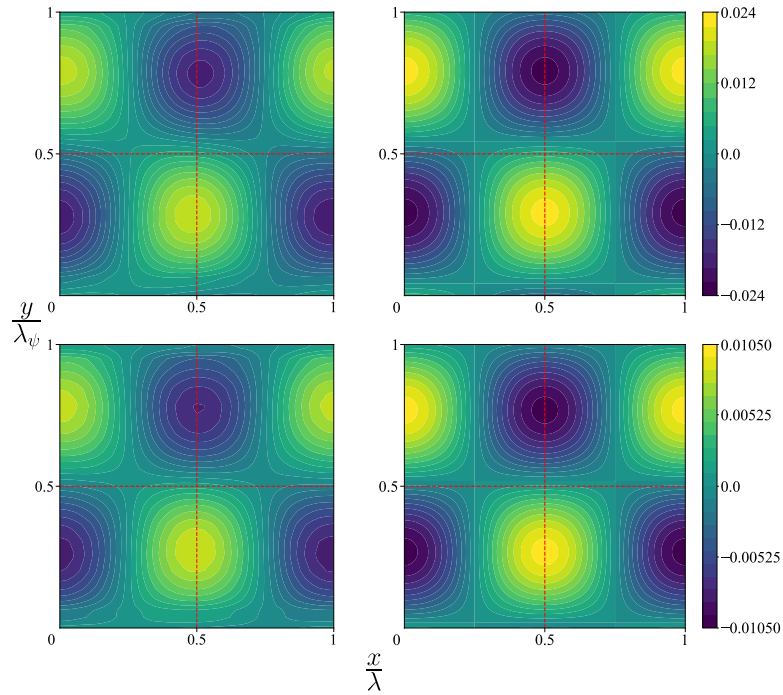


FIGURE 8.5. – Contours de la fluctuation du cisaillement $\frac{\tau_{xr}^+ - \langle \tau_{xr} \rangle^+}{\zeta_0^+}$ projetée sur un plan (x, y) , à $\mathcal{R} = 300$ (haut) et $\mathcal{R} = 500$ (bas), pour $r_0 = 0.8$ m. Gauche : simulation RANS, droite : analyse linéaire.

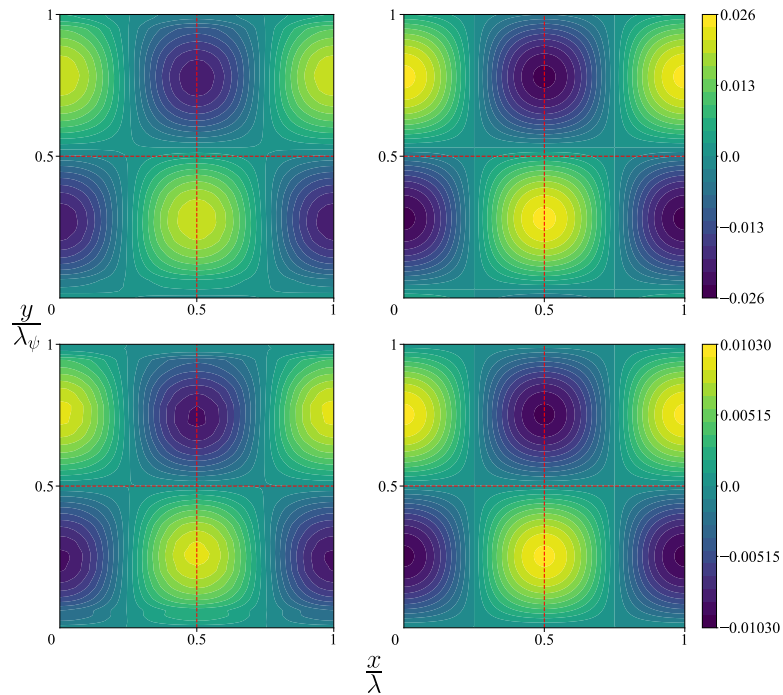


FIGURE 8.6. – Contours de la fluctuation du cisaillement $\frac{\tau_{xr}^+ - \langle \tau_{xr} \rangle^+}{\zeta_0^+}$ projetée sur un plan (x, y) , à $\mathcal{R} = 300$ (haut) et $\mathcal{R} = 500$ (bas), pour $r_0 = 5$ m. Gauche : simulation RANS, droite : analyse linéaire.

83° pour $\mathcal{R} = 500$. Cependant, ces valeurs augmentent lorsque le rayon de courbure augmente à $r_0 = 5$ m, pour tendre vers 80° à $\mathcal{R} = 300$ et 90° à $\mathcal{R} = 500$. Notons que bien que la contrainte $\tau_{r\theta}$ contribue également au frottement pariétal, elle est d'amplitude bien plus faible que τ_{xr} et représente moins de 1% du frottement total dans toutes les configurations étudiées.

L'influence du rayon de courbure sur le déphasage du cisaillement à la paroi peut être appréhendé sur la figure 8.7. À partir des résultats des analyses linéaires, menées avec $b_H = 30$ constant, sont tracés sur cette figure les contours des déphasages θ_{τ_w} dans le plan $(\mathcal{R}_\psi, \mathcal{R}) = (1/\alpha_\psi^+, 1/\alpha^+)$, pour deux rayons de courbure $\alpha^+ r_0^+ = 0.8\pi$ et $\alpha^+ r_0^+ = 100\pi$, correspondant respectivement à une courbure importante et une courbure très faible de la paroi. La courbure de la paroi tend à resserrer la gamme des nombres de Reynolds \mathcal{R} du régime transitionnel vers des valeurs de \mathcal{R} plus basses. Les deux figures montrent un léger décalage du régime transitionnel vers des nombres de Reynolds \mathcal{R} supérieurs à mesure que \mathcal{R}_ψ augmente. On peut également noter que les valeurs du déphasage θ_{τ_w} diminue lorsque la courbure augmente, en cohérence avec ce que nous avons observé sur les cas particuliers des figures 8.5 et 8.6. À grand rayon de courbure, on remarque que l'on tend, pour les petites valeurs de \mathcal{R}_ψ , vers la solution obtenue dans la configuration bi-dimensionnelle. La ligne $\alpha = \alpha_\psi$ est représentée sur les figures 8.7 de droite et de gauche. À ce stade, il est difficile de tirer des conclusions sur l'égalité des longueurs d'onde longitudinale et tangentielle constatées sur les coups de gouge. On peut simplement remarquer que la ligne $\alpha = \alpha_\psi$ se rapproche des lignes d'iso-déphasage pour $\mathcal{R}_\psi < \mathcal{R}$ lorsque la courbure augmente. Pour mieux comprendre le rapport entre les longueurs d'onde longitudinale et transverse, l'exercice que nous avons fait au chapitre 6 sur l'équation de l'énergie et la modélisation de la régression de la paroi doit être repris en incluant une courbure de la paroi. Évidemment, cela devra s'accompagner de la création de données de référence (simulations haute-fidélité, expériences...). Bien que nécessitant des investigations plus approfondies, ces résultats donnent des pistes de réflexion intéressantes quant à l'influence du rayon de courbure sur l'apparition lors de la formation des coups de gouge.

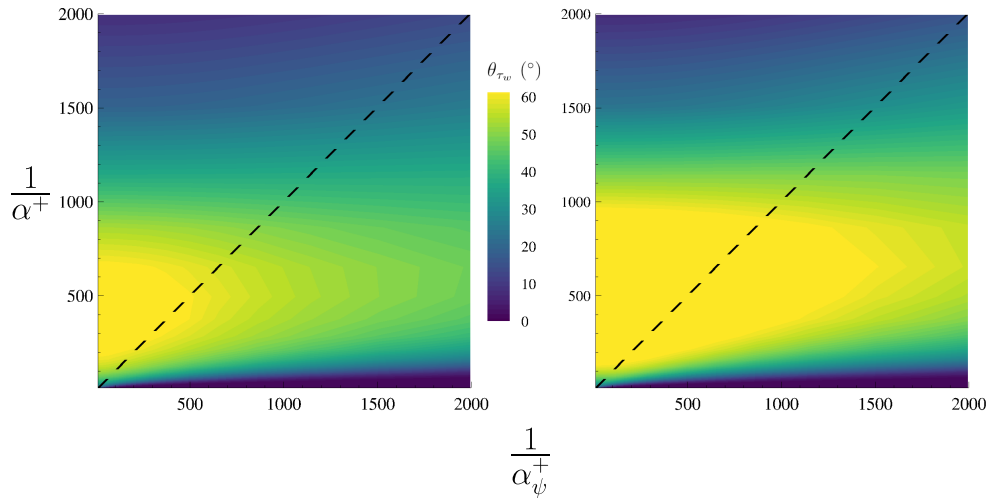


FIGURE 8.7. – Contours du déphasage θ_{τ_w} du cisaillement à la paroi dans le plan (α_ψ, α) , pour $\alpha^+ r_0^+ = 0.8\pi$ (gauche) et $\alpha^+ r_0^+ = 100\pi$ (droite). La ligne pointillée noire correspond à $\alpha^+ = \alpha_\psi^+$. Obtenu à partir de l'analyse linéaire.

Pour conclure, nous montrons à travers cette étude préliminaire que les analyses linéaires peuvent être étendues en trois dimensions et restent un outil efficace pour étudier la propagation de la perturbation dans la direction transverse. Comme en deux dimensions, la correction d'Hanratty est nécessaire pour retrouver des résultats comparables à ceux fournis par le modèle EB-RSM. Cependant, afin de poursuivre ce type d'études pour comprendre la formation de creusement tridimensionnels lors de l'érosion de la paroi, il est nécessaire de disposer de données de référence, qu'elles soient expérimentales ou issues de simulations haute fidélité (LES ou DNS), en particulier sur le rapport α/α_ψ .

Bilan

Ce chapitre d'ouverture avait pour but de présenter une étude préliminaire concernant la possibilité d'étendre en trois dimensions le principe des analyses linéaires afin d'étudier l'influence d'un éventuel effet de courbure de la paroi. Pour cela, les équations de Navier–Stokes sous leur forme incompressible, exprimées en coordonnées cylindriques, ont été linéarisées par rapport à une déformation bi-sinusoidale harmonique de la paroi de faible amplitude se propageant dans les directions longitudinale et transverse. La courbure de la paroi a été prise en compte à travers un rayon de courbure, noté r_0 . Ces analyses linéaires ont été confrontées à des simulations RANS menées sur trois géométries différentes (pour trois rayons de courbure différents) et deux nombres de Reynolds ($\mathcal{R} = 300$ et $\mathcal{R} = 500$) à l'aide du modèle EB-RSM, choisi pour ses excellentes performances en deux dimensions. La comparaison des études de réponses linéaires forcées et des simulations a montré, à l'aide de la correction d'Hanratty, que le principe des analyses linéaires peut être étendu en trois dimensions et reste un outil efficace pour reproduire le comportement observé dans les simulations RANS. Afin de poursuivre ce type d'étude avec l'objectif de mieux comprendre l'apparition d'une longueur caractéristique transverse sur les motifs observés lors de l'érosion de la paroi, il est toutefois nécessaire de disposer de données de référence provenant d'études expérimentales ou numériques (LES ou DNS).

Conclusion

Rappel du contexte et des objectifs de l'étude

Ces travaux de thèse s'inscrivent dans le contexte de l'étude et de la modélisation des phénomènes liés à l'interaction entre un écoulement turbulent et un véhicule de rentrée atmosphérique. On s'intéresse exclusivement ici à l'apparition de creusements macroscopiques tridimensionnels, appelés *coups de gouge*, lors de l'ablation du matériau de protection thermique, et notamment au rôle de la turbulence au sein de la couche limite dans leur formation. L'apparition de tels motifs sur la surface de l'objet a en effet pour conséquence une augmentation des transferts thermiques entre l'écoulement et le corps de rentrée, ce qui tend à accélérer la dégradation de la protection. C'est pourquoi la prise en compte des phénomènes relatifs à l'apparition des coups de gouge revêt un caractère important dans l'optique d'un dimensionnement optimal des boucliers thermiques.

L'objectif concret de cette thèse consiste tout d'abord à étudier la croissance de telles structures dans les premiers instants de leur formation, lors de l'ablation de la protection. Dans ces premiers instants, la déformation de la paroi est de faible amplitude, et les interactions entre la couche limite turbulente et la paroi sont linéaires. Des travaux précédents ayant suggéré un lien entre la taille des creusements et les caractéristiques de la couche limite turbulente, nous avons centré notre étude sur la compréhension de ces interactions. L'approche RANS (Reynolds Averaged Navier–Stokes) étant privilégiée dans des contextes industriels, et notamment lors des phases de dimensionnement des protections thermiques, un deuxième objectif de notre étude est de mettre au point des stratégies de modélisation RANS permettant de reproduire les phénomènes liés aux interactions entre la paroi déformée et la couche limite turbulente.

Bilan et discussion

Dans un premier temps, afin de comprendre les conditions d'écoulement dans lesquelles évolue l'objet lors de l'apparition des coups de gouge, nous nous sommes attachés à reproduire numériquement un des rares essais en vol traitant de cette problématique disponible dans la littérature (Hochrein et Wright, 1976; McAlees et Maydew, 1985). Plusieurs hypothèses ayant dû être faites afin de reconstruire la trajectoire suivie par l'essai, il a fallu tout d'abord valider la représentativité de notre simulation, réalisée sur une portion représentative des conditions de rentrée atmosphérique menant à l'apparition des coups de gouge. L'idée de cette simulation, outre le fait d'obtenir un aperçu global de l'écoulement autour du corps de rentrée, était notamment d'acquies un certain nombre d'informations relatives aux caractéristiques de la couche limite dans la zone dans laquelle apparaissent les coups de gouge. Une des conclusions majeures qui en résulte est que malgré des conditions amont hypersoniques, les effets de compressibilité dans la région en aval du choc, et plus particulièrement dans la couche limite, y sont modérés. De plus, grâce aux données fournies par les simulations, il a été possible de comparer favorablement les coups de gouge liés à la rentrée atmosphérique à ceux observés dans des contextes où l'écoulement est incompressible, au travers de la corrélation de Thomas (1979).

Ces conclusions ont motivé l'axe d'étude suivi dans ce manuscrit, qui s'intéresse à la réponse linéaire de la région interne de la couche limite turbulente à une petite déformation sinusoïdale harmonique de la paroi. On peut pour cela s'appuyer sur des résultats expérimentaux provenant des travaux d'Hanratty *et al.* (Zilker *et al.*, 1977; Abrams et Hanratty, 1985; Frederick et Hanratty, 1988), qui mettent en exergue l'apparition d'un déphasage inattendu de la contrainte de cisaillement à la paroi par rapport à la petite déformation. Les analyses linéaires historiquement utilisées pour étudier ces problématiques (Thorsness *et al.*, 1978; Charru *et al.*, 2013; Claudin *et al.*, 2017) ont été reprises et complétées par des simulations RANS faisant appel à différentes fermetures turbulentes. La comparaison de ces travaux expérimentaux et numériques à une base de données DNS (Direct Numerical Simulations) établie en marge de cette thèse et complétant

les travaux expérimentaux d'Hanratty *et al.* a permis notamment d'expliquer l'incapacité des modèles à viscosité turbulente à retrouver le comportement attendu de la fluctuation du cisaillement à la paroi. La mise en défaut de l'hypothèse de Boussinesq dans la configuration considérée a ainsi pu être démontrée, illustrant le rôle crucial du terme de diffusion turbulente $\frac{\partial(\tau_{xx} - \tau_{zz})}{\partial x}$ à l'ordre de la perturbation, dans le bilan de quantité de mouvement. Plus précisément, le champ de perturbations de la région interne de la couche limite a pu être divisé en une *zone de vorticité* et une *zone de vorticité nulle*. Dans cette dernière, la perturbation de vorticité est nulle, et bien que ce ne soit pas le cas des perturbations de vitesse, celles-ci sont en phase avec la déformation de la paroi. Il s'agit de la région dans laquelle les perturbations de vitesse tendent vers zéro, conduisant à un retour vers l'état moyen. Les deux modèles de turbulence utilisés, au premier et au second ordre, reproduisent fidèlement ces comportements.   l'inverse, dans la zone de vorticité, située au voisinage immédiat de la paroi, la fluctuation de la vorticité n'est pas nulle et présente un pic de plus en plus marqué à mesure que le nombre de Reynolds \mathcal{R} augmente dans le régime transitionnel. Les perturbations de vitesse y évoluent rapidement et atteignent une valeur maximale, située autour du pic de vorticité. On note également dans cette zone l'apparition du déphasage du champ perturbé, qui se traduit *in fine* sur le cisaillement à la paroi. Le modèle $\mathcal{K} - \omega$ tend à sous estimer cette évolution rapide des perturbations de vitesse, avec pour conséquence de sous-évaluer le déphasage par rapport aux prévisions du modèle EB-RSM, en bien meilleur accord avec les DNS de référence. Les fluctuations à l'ordre un du terme de diffusion turbulente telles que prévues par le modèle aux tensions de Reynolds montrent qu'elles sont du même ordre de grandeur que celles de $\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}$. Or l'hypothèse de Boussinesq considère les tensions diagonales τ_{xx} et τ_{zz} égales à l'ordre dominant. En raison de cette mauvaise représentation du tenseur de Reynolds, les modèles à viscosité turbulente négligent la contribution de $\frac{\partial(\tau_{xx} - \tau_{zz})}{\partial x}$ dans le bilan de quantité de mouvement, ce qui explique leur mise en défaut dans le régime transitionnel, qui peut être compensé dans les analyses linéaires par la correction d'Hanratty.

Dans les cas d'ablation qui motivent notre étude, la vitesse de récession de la paroi est souvent considérée proportionnelle au flux à la paroi, qu'il s'agisse d'un transfert de chaleur, ou de concentration d'un oxydant, suivant le mécanisme physique responsable de l'ablation du matériau. Afin d'étudier l'influence des phénomènes mis en lumière au chapitre précédent sur la prévision de ce flux à la paroi, on considère l'équation de l'énergie écrite pour l'enthalpie totale, et réduite, pour les larges valeurs de flux rencontrées dans nos applications, à l'équation de transport d'un scalaire passif. Cette équation est alors linéarisée de la même manière que ce qui a été fait précédemment pour les équations de continuité et de quantité de mouvement, et ces nouvelles analyses linéaires sont comparées aux simulations RANS et aux DNS de référence. Les conclusions rappelées au paragraphe précédent concernant le champ de perturbations de vitesses peuvent être désormais étendues au champ de perturbations de température, ce qui se traduit, là encore, par une mauvaise estimation de la phase et de l'amplitude du flux thermique à la paroi par les modèles à viscosité turbulente. Le modèle EB-RSM, bien que moins performant que lorsqu'il s'agit du champ de vitesse, procure tout de même des résultats bien plus représentatifs des données de référence. Si la correction d'Hanratty permet là encore d'améliorer les résultats des analyses linéaires, elle se montre toutefois insuffisante pour obtenir un accord pleinement satisfaisant.   partir de ces résultats, le taux d'amplification temporel de la paroi peut être étudié. Ce taux d'amplification temporel tel que calculé à l'aide des modèles $\mathcal{K} - \omega$ et de longueur de mélange non corrigé est toujours négatif. En revanche, le modèle au second ordre ainsi que les analyses linéaires incluant la correction d'Hanratty donnent un taux d'amplification temporel positif dans une partie du régime transitionnel, permettant de dégager une longueur d'onde pour laquelle ce taux est maximal. L'émergence de cette longueur d'onde va être favorisée lors du recul de la paroi, et sa valeur se compare favorablement à la pente de la corrélation empirique de Thomas (1979), validant l'hypothèse émise par ce dernier sur le rôle de la turbulence dans la sélection de la longueur caractéristique. Ces résultats font l'objet d'un article (Chedevergne *et al.*, 2023) publié dans *Journal of Fluid Mechanics*.

Malgré les excellents résultats procurés par le modèle au second ordre, il existe toujours un besoin, pour des applications industrielles, de modèles plus simples à mettre en œuvre et permettant de limiter les coûts numériques associés. Les modèles à viscosité turbulente restent donc une approche privilégiée dans ce contexte. Or, la correction d’Hanratty, jusque là uniquement utilisée dans des analyses linéaires, montre qu’il est possible de construire des corrections permettant de pallier la mise en défaut de l’hypothèse de Boussinesq, responsable de l’échec de ces modèles. La comparaison des profils de vitesse instantanés fournis par les modèles au premier et au second ordre, tracés à différentes positions le long de l’ondulation, a permis de définir une stratégie de construction de corrections adaptées à des modèles de type $\mathcal{K} - \omega$. À partir de cette stratégie, basée sur une modification des coefficients du modèle pour reproduire le comportement asymptotique des profils de vitesse, différentes corrections adaptées aux analyses linéaires ou aux simulations RANS ont été établies, inspirée notamment des travaux de [Thorsness et al. \(1978\)](#), [Nickels \(2004\)](#) et [Knopp \(2016\)](#). Ces corrections représentent une façon pragmatique d’améliorer les résultats du modèle $\mathcal{K} - \omega$ concernant à la fois le cisaillement et le flux thermique à la paroi, et de retrouver un taux d’amplification temporel positif montrant l’émergence d’une longueur d’onde spécifique. Cependant, nous restons conscients des limites de ce type de corrections *ad-hoc*, qui agissent comme des palliatifs compensant la mauvaise représentation du tenseur de Reynolds sans le corriger directement. La stratégie générale de modification des coefficients du modèle $\mathcal{K} - \omega$ représente toutefois une piste encourageante pour le développement d’un modèle à viscosité turbulente permettant de prévoir fidèlement le comportement de l’écoulement dans le régime transitionnel. Cependant, nous restons convaincus qu’une approche basée sur une modélisation au second ordre, qui a prouvé tout au long de cette thèse sa capacité à reproduire les données de référence, est la plus prometteuse pour ce type de problèmes. Un article paru dans le *European Journal of Mechanics - B/Fluids* ([Stuck et al., 2024](#)) résume l’ensemble des corrections développées ici.

En guise de conclusion, et pour revenir au contexte de cette thèse, nous pouvons désormais proposer un scénario possible d’apparition des coups de gouges. En fonction des conditions d’écoulement la rugosité présente à l’échelle microscopique inhérente à la paroi érodable déstabilise la couche limite turbulente qui se développe à sa surface. D’un point de vue mathématique, une paroi quelconque, rugueuse, peut être décrite par une somme infinie de cosinus de longueurs d’onde différentes. Lors de la phase de croissance linéaire de la paroi, une sélection de la longueur d’onde la plus « instable » est faite. Cette longueur d’onde correspondant, d’après la corrélation de [Thomas \(1979\)](#), à la taille caractéristique des creusements, on en conclut ainsi que la réponse linéaire de l’écoulement, lorsque la déformation de la paroi est d’amplitude suffisamment faible, fixe la longueur des futurs coups de gouges. Les interactions non-linéaires apparaissant lorsque l’amplitude de la déformation devient trop importante vont ensuite modéliser ces motifs, leur donnant leur forme caractéristique semblable à des coups de gouge, mais ne modifient pas, comme supposé par [Thomas \(1979\)](#), la sélection de longueur d’onde faite dans la phase de croissance linéaire de la paroi.

Perspectives

Bien que ces travaux de thèse aient permis d’éclaircir les mécanismes favorisant l’émergence d’une longueur d’onde particulière, qui correspond à la taille caractéristique des coups de gouge, et d’illustrer le rôle crucial du choix de la fermeture turbulente dans ce type de problème, trois axes de recherche restent, de notre point de vue, intéressants à poursuivre pour comprendre de manière plus exhaustive encore la formation et la propagation des coups de gouge sur la surface d’un corps de rentrée ainsi que leur impact sur la couche limite. Cette étude se limite en effet à la réponse *linéaire* d’une couche limite turbulente *incompressible* et *bidimensionnelle*.

Sans aller plus loin dans la démonstration, [Thomas \(1979\)](#) formule l’hypothèse que les interactions non-linéaire pouvant apparaître lorsque croît l’amplitude de l’ondulation pourrait donner aux coups de gouge, lors du processus d’érosion, leur forme effilée si caractéristique. Un certain nombre d’études ([Curl, 1966](#); [Camporeale et Ridolfi, 2012](#)), principalement expérimentales ([Lee](#)

et al., 2014; Bushuk *et al.*, 2019) se sont penchées sur ce problème dans le cas de coups de gouge apparaissant sur des parois de glace, dans de nombreux environnements géophysiques. Ces travaux mettent en avant un phénomène de décollement de la couche limite, avec formation d'une bulle de recirculation, sur le côté aval de la bosse formant le creusement. Dans le cas de la rentrée atmosphérique, il serait pertinent d'étudier l'influence d'une telle géométrie sur la couche limite turbulente, et notamment quantifier l'augmentation des flux de chaleur en résultant. Cet objectif nécessite la recherche de solutions de référence quant à la modification des flux thermiques due à la présence de coups de gouge sur la paroi, afin d'en déduire en particulier l'impact réel de ces structures sur le taux d'ablation subi par le bouclier thermique. Néanmoins, ces solutions de référence, qu'elles soient expérimentales ou numériques, restent difficiles d'accès. De plus, il nous semble nécessaire de se pencher de plus près sur les éventuels effets de compressibilité que nous avons négligé dans notre étude en première approche, notamment pour isoler le rôle de la turbulence. Cela pourrait, à terme, permettre d'adapter les modèles de turbulence à des écoulements plus proches d'un cas de rentrée atmosphérique afin de disposer d'un outil capable de prendre en compte l'influence des coups de gouges dans une simulation d'écoulement hypersonique.

Enfin, notre étude s'est limitée à deux dimensions, afin de comprendre dans un premier temps le lien entre la couche limite turbulente et la taille caractéristique longitudinale des creusements. Cependant, il s'agit, comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, d'un motif tridimensionnel, également défini par une dimension transverse. Nous proposons dans le chapitre 8 d'étendre le principe des analyses linéaires à trois dimensions, pour étudier l'effet d'un éventuel rayon de courbure de la paroi. Grâce à une comparaison avec des simulations RANS faisant appel au modèle EB-RSM, nous avons pu valider cette approche, qui semble prometteuse pour comprendre l'apparition d'une longueur d'onde transverse. Cependant, le manque de données de référence (expériences ou simulations haute fidélité) ne nous permet pas de pousser plus loin cette étude préliminaire, qui constitue un axe de réflexion intéressant pour complètement comprendre la formation des coups de gouge, d'abord dans un contexte d'écoulement incompressible, puis, à terme, hypersonique.

Annexes

Opérateurs et propriétés mathématiques

A.1. L'opérateur ∇

L'opérateur ∇ est un opérateur différentiel linéaire, défini, en coordonnées cartésiennes $\{x, y, z\}$ dans la base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ par :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \quad (\text{A.1})$$

Soit f un champ scalaire et \mathbf{A} un champ vectoriel. On a alors les propriétés suivantes :

1. Le produit de ∇ et de f correspond au gradient de f :

$$\mathbf{grad} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \quad (\text{A.2})$$

2. Le produit scalaire entre ∇ et \mathbf{A} correspond à la divergence de \mathbf{A} :

$$\text{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.3})$$

3. Le produit vectoriel entre ∇ et \mathbf{A} correspond au rotationnel de \mathbf{A} :

$$\mathbf{rot} \mathbf{A} = \nabla \wedge \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (\text{A.4})$$

La répétition de l'opérateur ∇ fait apparaître des dérivées secondes. En particulier, on a la relation suivante :

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f \quad (\text{A.5})$$

avec Δf le laplacien de f .

A.2. Propriétés de la moyenne d'ensemble

Soit f_k ($k \in \llbracket 1, N \rrbracket$) les valeurs prises par la variable aléatoire f au cours de N réalisations indépendantes du même évènement. La moyenne d'ensemble \bar{f} est définie par :

$$\bar{f} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum f_k}{N} \quad (\text{A.6})$$

Soit g une deuxième variable aléatoire et a une constante. La moyenne d'ensemble vérifie alors les propriétés suivantes :

1. Linéarité : $\overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g}$
2. Projectivité : $\overline{f g} = \bar{f} \bar{g}$
3. $\overline{a f} = a \bar{f}$

4. Commutativité avec la dérivation : $\overline{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}$ et $\overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}$

5. Commutativité avec l'intégration : $\overline{\int f dx_i dt} = \int \bar{f} dx_i dt$

Extension des analyses linéaires en trois dimensions

B.1. Équations de Navier–Stokes en coordonnées cylindriques

Dans le système de coordonnées cylindriques (x, r, ψ) défini sur le schéma B.1, on note u_x , u_r et u_ψ les composantes du vecteur vitesse moyenne et τ_{ij} , avec $i, j = (x, r, \psi)$ le tenseur des contraintes totales. Les équations de Navier–Stokes incompressibles et stationnaires exprimées dans ce système sont présentées ci-après.

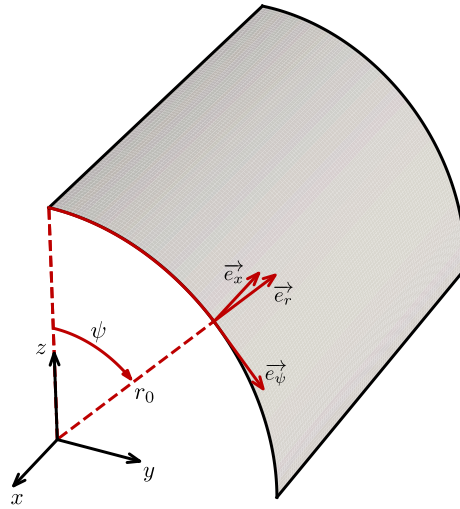


FIGURE B.1. – Système de coordonnées cylindriques.

Équation de continuité

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} + \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.1})$$

Équation de quantité de mouvement

En r

$$\rho \left[u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\psi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \psi} - \frac{u_\psi^2}{r} + u_x \frac{\partial u_r}{\partial x} \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial(r \tau_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\psi r}}{\partial \psi} + \frac{\partial \tau_{xr}}{\partial x} - \frac{\tau_{\psi \psi}}{r} - \frac{\partial p}{\partial r} \quad (\text{B.2})$$

En ψ

$$\rho \left[u_r \frac{\partial u_\psi}{\partial r} + \frac{u_\psi}{r} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} - \frac{u_r u_\psi}{r} + u_x \frac{\partial u_\psi}{\partial x} \right] = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \tau_{r\psi})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\psi\psi}}{\partial \psi} + \frac{\partial \tau_{x\psi}}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \psi} \quad (\text{B.3})$$

En x

$$\rho \left[u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{u_\psi}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \psi} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{xr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{x\psi}}{\partial \psi} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{B.4})$$

B.2. Composantes du tenseur des contraintes

En coordonnées cylindriques et avec l'hypothèse de Boussinesq, les composantes du tenseur des contraintes s'écrivent :

$$\tau_{rr} = (\mu + \mu_t) \left[2 \frac{\partial u_r}{\partial r} \right] - \frac{2}{3} \rho k \quad (\text{B.5})$$

$$\tau_{\psi\psi} = (\mu + \mu_t) \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} + \frac{u_r}{r} \right) \right] - \frac{2}{3} \rho k \quad (\text{B.6})$$

$$\tau_{xx} = (\mu + \mu_t) \left[2 \frac{\partial u_x}{\partial x} \right] - \frac{2}{3} \rho k \quad (\text{B.7})$$

$$\tau_{\psi r} = \tau_{r\psi} = (\mu + \mu_t) \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\psi}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \psi} \right] \quad (\text{B.8})$$

$$\tau_{\psi x} = \tau_{x\psi} = (\mu + \mu_t) \left[\frac{\partial u_\psi}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \psi} \right] \quad (\text{B.9})$$

$$\tau_{xr} = \tau_{rx} = (\mu + \mu_t) \left[\frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x} \right] \quad (\text{B.10})$$

B.3. Système linéaire à résoudre

Le système à résoudre au chapitre 8 s'écrit sous forme matricielle de la façon suivante, avec $\mathbf{X}^t = (\hat{u}_x, \hat{u}_r, \hat{u}_\psi, \hat{\tau}_{xr}, \hat{\tau}_p, \hat{\tau}_{\psi r})$ et $m = \alpha_\psi r_0$.

$$\frac{d\mathbf{X}}{d\eta} = \mathcal{B}\mathbf{X} + \mathcal{S} \quad (\text{B.11})$$

Avec $\mathcal{S} =$

$$\begin{pmatrix} -\frac{2\langle l \rangle \langle u \rangle_{,\eta}^2 \hat{l}}{\mathcal{R}^{-1} + 2\langle l \rangle^2 \langle u \rangle_{,\eta}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

et $\mathcal{B} =$ Voir page suivante.

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & \frac{1}{\mathcal{R}^{-1}+2\langle l \rangle^2 \langle u \rangle, \eta} & 0 & 0 \\ -i & -\frac{1}{\eta+\eta_0} & 0 & -\frac{im}{\eta+\eta_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{im}{\eta+\eta_0} & 0 & \frac{1}{\eta+\eta_0} & 0 & 0 & \frac{1}{\langle l \rangle^2 \langle u \rangle, \eta + \mathcal{R}^{-1}} \\ i \langle u \rangle + \left(\langle l \rangle^2 \langle u \rangle, \eta + \mathcal{R}^{-1} \right) \left(4 + \frac{m^2}{(\eta+\eta_0)^2} \right) & \left(\langle u \rangle, \eta - \frac{2i \langle l \rangle^2 \langle u \rangle, \eta + \mathcal{R}^{-1}}{(\eta+\eta_0)} \right) & \frac{3m \langle l \rangle^2 \langle u \rangle, \eta + \mathcal{R}^{-1}}{(\eta+\eta_0)} & 0 & -\frac{1}{\eta+\eta_0} & i & 0 \\ -\frac{2i \langle l \rangle^2 \langle u \rangle, \eta + \mathcal{R}^{-1}}{(\eta+\eta_0)} & -\left(i \langle u \rangle + \frac{4 \langle l \rangle^2 \langle u \rangle, \eta + \mathcal{R}^{-1}}{(\eta+\eta_0)^2} \right) & -\frac{4im \langle l \rangle^2 \langle u \rangle, \eta + \mathcal{R}^{-1}}{(\eta+\eta_0)^2} & 0 & i & 0 & \frac{im}{\eta+\eta_0} \\ \frac{3m \langle l \rangle^2 \langle u \rangle, \eta + \mathcal{R}^{-1}}{\eta+\eta_0} & -\frac{4im \langle l \rangle^2 \langle u \rangle, \eta + \mathcal{R}^{-1}}{(\eta+\eta_0)^2} & \left(\langle l \rangle^2 \langle u \rangle, \eta + \mathcal{R}^{-1} \right) \left(1 + \frac{4m^2}{(\eta+\eta_0)^2} \right) + i \langle u \rangle & 0 & 0 & \frac{im}{\eta+\eta_0} & -\frac{2}{\eta+\eta_0} \end{pmatrix} \quad (\text{B.13})$$

B.4. Résultats de l'étude préliminaire pour toutes les configurations

Résultats projetés en deux dimensions pour le cas $r_0 = 1.5$ m

Dans cette annexe, nous présentons la figure correspondant au cas $r_0 = 1.5$ m, qui montre la fluctuation du cisaillement $\frac{\tau_{xr}^+ - \langle \tau_{xr} \rangle^+}{\zeta_0^+}$ projetée dans un plan cartésien (x, y) .

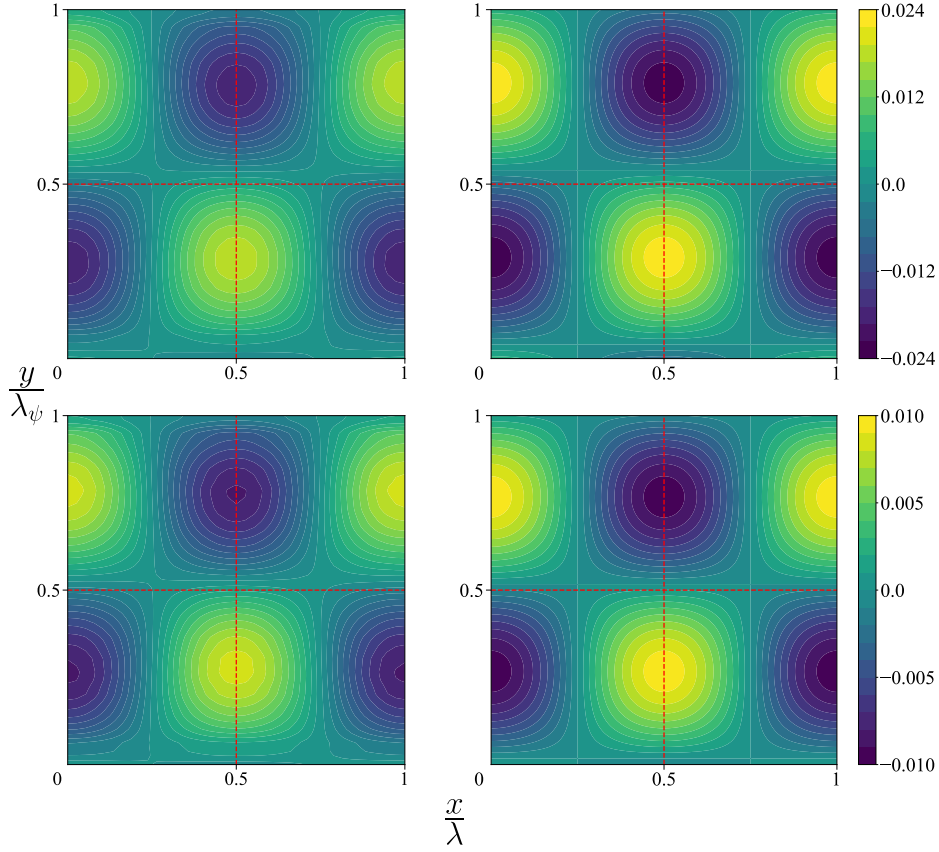


FIGURE B.2. – Contours de la fluctuation du cisaillement $\frac{\tau_{xr}^+ - \langle \tau_{xr} \rangle^+}{\zeta_0^+}$ projetée sur un plan (x, y) , à $\mathcal{R} = 300$ (haut) et $\mathcal{R} = 500$ (bas) à $r_0 = 1.5$ m. Gauche : analyse linéaire, droite : simulation RANS.

Résultats tracés en trois dimensions

La fluctuation du cisaillement $\frac{\tau_{xr}^+ - \langle \tau_{xr} \rangle^+}{\zeta_0^+}$ à la paroi issue des simulations RANS et des analyses linéaires dans toutes les configurations étudiées est affichée dans cette annexe.

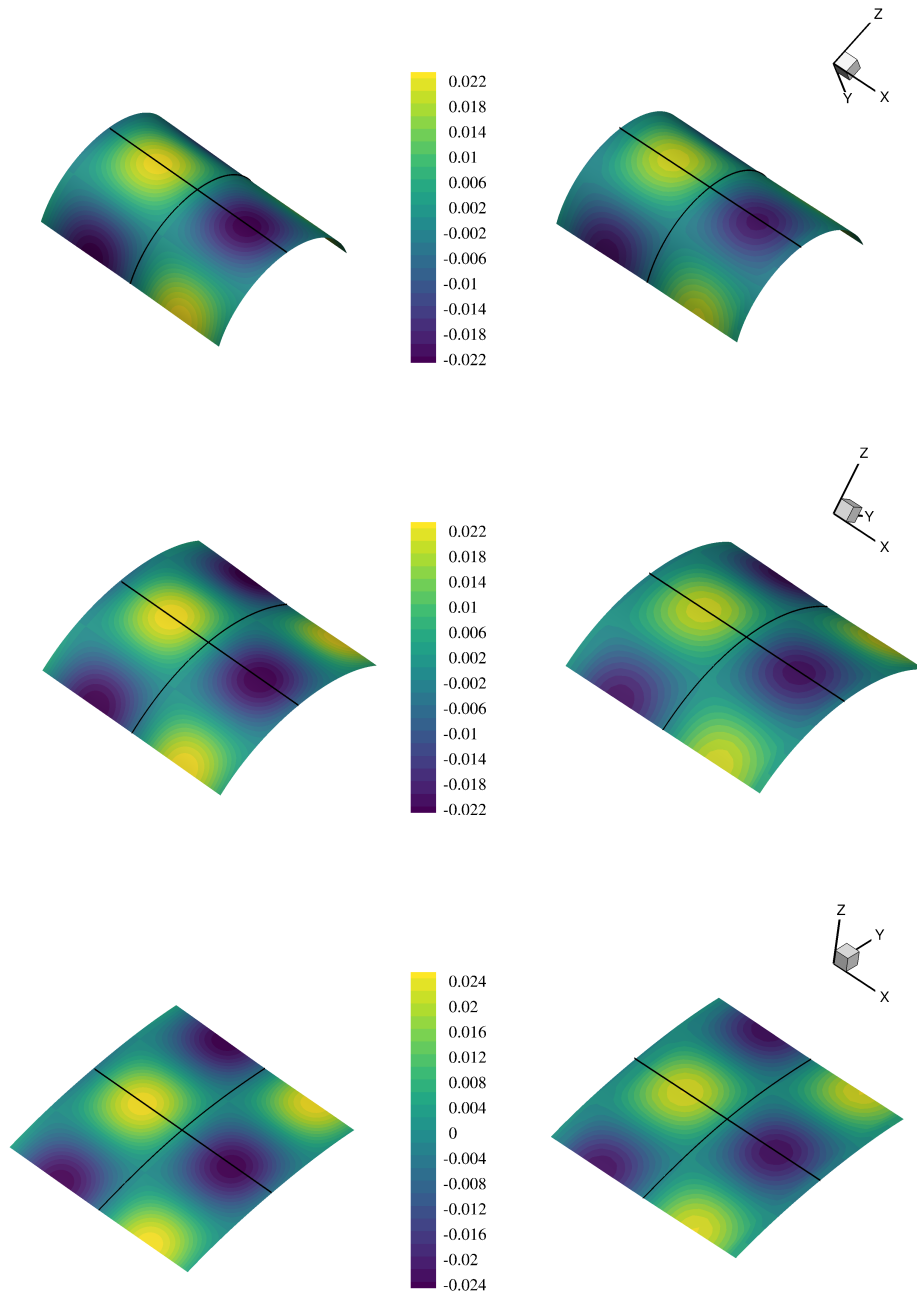


FIGURE B.3. – Fluctuation du cisaillement $\frac{\tau_{xr}^+ - \langle \tau_{xr} \rangle^+}{\zeta_0^+}$ sur la paroi inférieure, pour $\mathcal{R} = 300$.
Gauche : analyse linéaire, droite : simulation RANS. De haut en bas, $r_0 = \{0.8, 1.5, 5\}$ m.

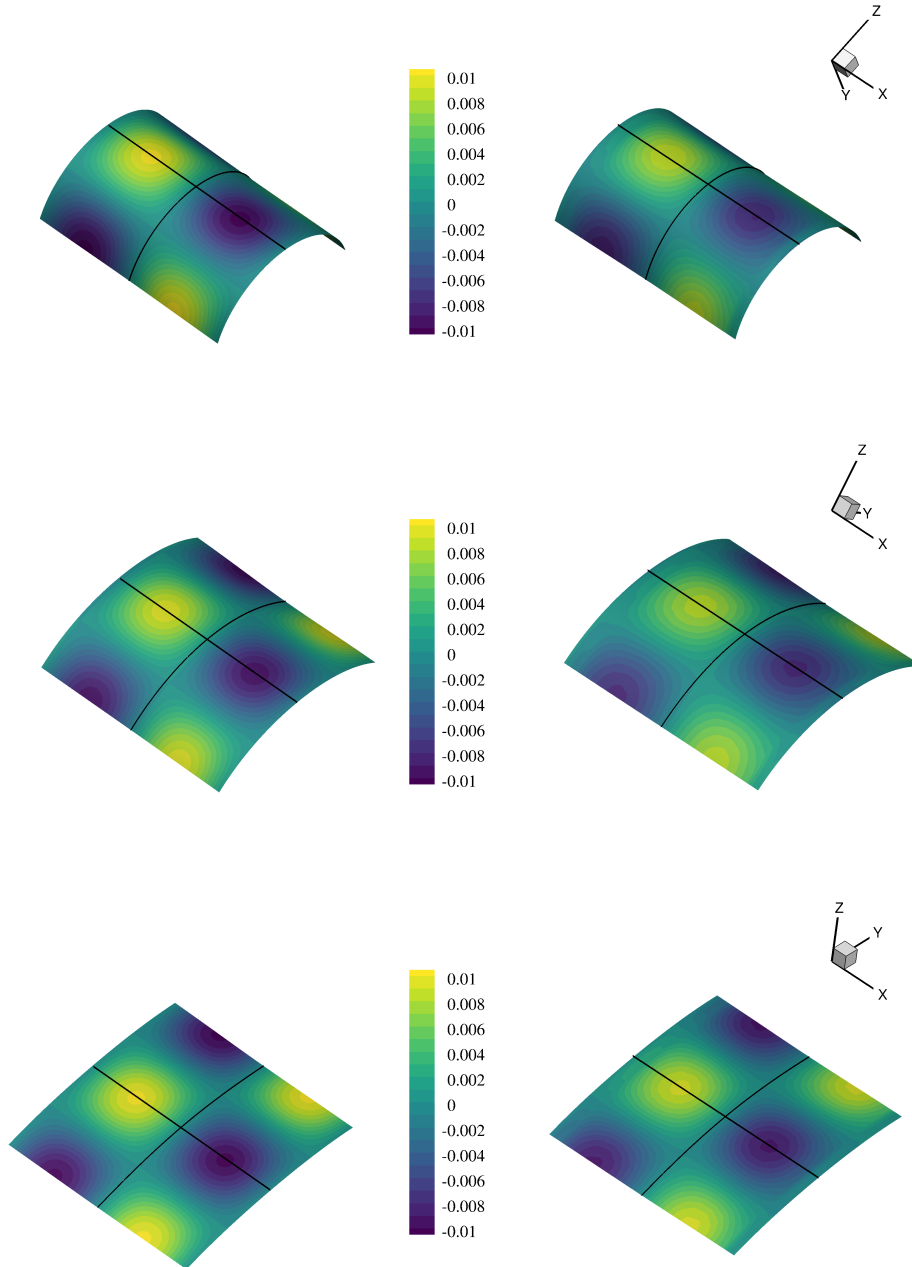


FIGURE B.4. – Fluctuation du cisaillement $\frac{\tau_{xr}^+ - \langle \tau_{xr} \rangle^+}{\zeta_0^+}$ sur la paroi inférieure, pour $\mathcal{R} = 500$.
 Gauche : analyse linéaire, droite : simulation RANS. De haut en bas,
 $r_0 = \{0.8, 1.5, 5\}$ m.

Table (exhaustive) des matières

Remerciements	v
Résumé	vii
Abstract	ix
Introduction	xiii
I. État de l'art	1
1. Observation et caractérisation des « coups de gouge »	3
1.1. Ablation d'un bouclier thermique pendant la phase de rentrée atmosphérique	4
1.1.1. Conditions rencontrées par un objet	4
1.1.2. Matériaux utilisés	5
1.1.3. Processus d'ablation	6
1.2. Apparition des « coups de gouge »	7
1.2.1. Dans un contexte de rentrée atmosphérique	8
1.2.2. Analogie avec d'autres situations géophysiques	10
1.3. Corrélation de Thomas (1979)	12
Bilan	15
2. Description et modélisation d'un écoulement turbulent	17
2.1. Rappels sur la turbulence	18
2.1.1. Généralités	18
2.1.2. Équations de Navier-Stokes et moyenne de Reynolds	20
2.1.3. Équations du mouvement moyen, ou équations RANS	21
2.2. Modélisation de la turbulence	22
2.2.1. Modélisation au premier ordre	23
2.2.2. Modélisation au second ordre	25
2.3. Description d'une couche limite turbulente de plaque plane	27
2.3.1. Équations de la couche limite	28
2.3.2. Paramètres caractéristiques et définition des grandeurs de paroi	28
2.3.3. Structure d'une couche limite turbulente incompressible	29
2.3.4. Influence d'un gradient de pression sur la structure de la couche limite	32
2.3.5. Analogie entre une région interne de couche limite et un écoulement de canal plan	34
Bilan	36
3. Étude de l'influence d'une déformation sinusoidale de la paroi sur la structure de la région interne de la couche limite turbulente	37
3.1. Études théoriques et expérimentales	38
3.1.1. Réponse linéaire forcée d'une région interne d'une couche limite turbulente	38
3.1.2. Travaux expérimentaux d'Hanratty <i>et al.</i>	43
3.2. Principales conclusions et discussion	44
3.2.1. Observations expérimentales	44
3.2.2. Comparaison avec les études de réponse linéaire forcée	45
3.2.3. Étude du transport d'un scalaire passif	47
Bilan	52
II. Démarche et travaux effectués	53
4. Simulation numérique de l'essai en vol TATER	55
4.1. Reconstruction numérique de l'essai TATER	56
4.1.1. Géométrie	56
4.1.2. Reconstruction de la trajectoire de l'essai	56
4.1.3. Paramètres de calcul	57

4.1.4.	Représentativité de la simulation	58
4.2.	Grandeurs caractéristiques lors de l'apparition des coups de gouge	61
4.2.1.	Champs de pression et de nombre de Mach autour de l'objet	61
4.2.2.	Ordres de grandeur dans la couche limite	62
4.2.3.	Comparaison des coups de gouge de l'essai TATER avec la corrélation de Thomas (1979)	63
	Bilan	66
5.	Étude de la réponse linéaire forcée de la région interne d'une couche limite turbulente incompressible	67
5.1.	Études de réponses linéaires forcées	68
5.1.1.	Linéarisation avec le modèle $\mathcal{K} - \omega$	68
5.1.2.	Manipulation de la correction d'Hanratty pour corriger $\tau_{xx} - \tau_{zz}$	70
5.1.3.	Résolution numérique	71
5.1.4.	De la pertinence de la comparaison entre configurations de canal et de couche limite	74
5.2.	Calculs RANS avec CEDRE	75
5.2.1.	Présentation de la plateforme CEDRE	75
5.2.2.	Configuration	76
5.2.3.	Validation des simulations RANS au début du régime transitionnel	78
5.3.	Comparaison entre simulations, mesures et analyses linéaires	79
5.3.1.	Présentation de la base de données de DNS	79
5.3.2.	Validation des calculs RANS et DNS à l'ordre dominant	80
5.3.3.	Phase et amplitude de la contrainte cisaillement	80
5.3.4.	Champ des perturbations de vitesse	81
5.3.5.	De l'importance du terme de diffusion turbulente dans le bilan de quantité de mouvement	83
	Bilan	86
6.	Étude de la stabilité d'une surface ablatée et de l'influence de la fermeture turbulente sur la prévision des transferts thermiques	87
6.1.	Retour sur les analyses linéaires	88
6.1.1.	Équation de l'énergie pour l'enthalpie totale	88
6.1.2.	Linéarisation de l'équation de l'énergie et du flux thermique normal	89
6.2.	Simulations RANS et données de référence	90
6.2.1.	Validation des simulations RANS à l'ordre dominant	90
6.2.2.	Champ de perturbation de température	91
6.3.	Phase et amplitude du flux thermique	92
6.3.1.	Comparaison des analyses linéaires avec les calculs Navier-Stokes	92
6.3.2.	Conclusion sur l'influence de la fermeture turbulente	94
6.4.	Stabilité d'une surface régressive	94
	Bilan	97
7.	Développement de corrections pour la prise en compte des effets de la déformation de la paroi dans un modèle à deux équations	99
7.1.	Fonctionnement de la correction d'Hanratty	100
7.1.1.	Un palliatif pour compenser la mise en défaut de l'hypothèse de Boussinesq	100
7.1.2.	Rôle et origine des constantes proposées par Hanratty	101
7.2.	Influence de la déformation sur la structure de la région interne	103
7.2.1.	Remarques sur les profils de vitesse	103
7.2.2.	Identification d'un paramètre de modélisation	104
7.3.	Correction des modèles à viscosité turbulente	105
7.3.1.	Adaptation de la correction de Nickels (2004) pour les analyses linéaires	105
7.3.2.	Mise en place de corrections pour les simulations RANS	109
7.3.3.	Amélioration de la prévision du cisaillement et du flux thermique	112
7.3.4.	Stabilité d'une surface régressive	114
7.4.	Limitations inhérentes à ce type de corrections	116
	Bilan	117

8. Ouverture : étude préliminaire sur l'extension en trois dimensions des analyses linéaires	119
8.1. Préambule	120
8.1.1. Motivation	120
8.1.2. Configuration en trois dimensions	120
8.2. Extension des analyses linéaires	121
8.2.1. Écoulement de base	121
8.2.2. Linéarisation des équations	122
8.3. Simulations RANS en trois dimensions	124
8.4. Comparaison des résultats et discussion	125
Bilan	128
Conclusion	129
Rappel du contexte et des objectifs de l'étude	129
Bilan et discussion	129
Perspectives	131
A. Opérateurs et propriétés mathématiques	135
A.1. L'opérateur ∇	135
A.2. Propriétés de la moyenne d'ensemble	135
B. Extension des analyses linéaires en trois dimensions	137
B.1. Équations de Navier–Stokes en coordonnées cylindriques	137
B.2. Composantes du tenseur des contraintes	138
B.3. Système linéaire à résoudre	138
B.4. Résultats de l'étude préliminaire pour toutes les configurations	140
Table (exhaustive) des matières	143
Table des figures	147
Nomenclature	153
Bibliographie	155

Table des figures

1.	Coups de gouges sur la pointe avant de l'essai en vol TATER (Hochrein et Wright, 1976).	xiv
1.1.	Trajectoires de rentrées de sondes spatiales. Extrait de Duffa (2013).	4
1.2.	Choc détaché observé en soufflerie sur une maquette de capsule de rentrée, pour un nombre de Mach $M = 4$. Extrait de Duffa (2013).	5
1.3.	Bouclier thermique ablatif de la sonde spatiale Mars Science Laboratory. Source : NASA. ²	6
1.4.	Schéma illustrant la dissipation d'énergie au sein de la protection par rayonnement, conduction et ablation (oxydation, sublimation et pyrolyse).	7
1.5.	Photographie de la pointe avant de l'essai TATER après le vol, présentant des coups de gouge (gauche) et historique du recul de la paroi, obtenu par simulation (droite). Tiré de Hochrein et Wright (1976).	8
1.6.	Coups de gouge observés sur différents essais en soufflerie. De gauche à droite : camphre (Larson et Mateer, 1968), graphite (Shimizu <i>et al.</i> , 1974), téflon (Amar et Powars, 2011).	9
1.7.	Phénomène de <i>cross-hatching</i> sur un essai en cire (Stock et Ginoux, 1973).	9
1.8.	Regmaglyptes sur des météorites ferreuses. La taille caractéristique des creusements observés est de l'ordre de quelques centimètres. Gauche : météorite Willamette (American Museum of Natural History) ⁴ , droite : météorite Gibeon (haut) ⁵ , météorite Murnpeowie (bas) ⁶	10
1.9.	Gauche : photographie de dunes martiennes, extrait de Bourke <i>et al.</i> (2010). Droite : rides de sable de différentes tailles dans le désert égyptien, extrait de Yizhaq <i>et al.</i> (2012).	11
1.10.	Coups de gouge sur les paroi de grottes de roche (haut) et de glace (bas). Haut : grotte des Puits (calcaire), Moselle, France, extrait de Losson et Quinif (2001) (gauche) et grotte de Korallgrottan, Suède (marbre), extrait de Sundqvist <i>et al.</i> (2007) (droite); bas : caverne glacière au Mont Saint-Helens, USA, extrait de Anderson <i>et al.</i> (1998) (gauche) et caverne de glace au glacier Sandy, USA, extrait de Pflitsch <i>et al.</i> (2017) (droite).	12
1.11.	Corrélation empirique de Thomas (1979) entre la taille caractéristique longitudinale des coups de gouge λ et la longueur visqueuse δ_ν . Les symboles sont les données expérimentales compilées par Thomas et la ligne rouge représente la corrélation empirique $\lambda = 1000 \frac{\nu}{u_\tau}$	13
2.1.	Expérience de Reynolds : visualisation du régime d'écoulement à l'aide d'un colorant dans une conduite cylindrique. De haut en bas : régimes laminaire, transitionnel, puis turbulent. Extrait : ENSTA-ParisTech (Cadot, 2013).	19
2.2.	Contrainte totale τ , turbulente $\overline{u'w'}$ (orange) et visqueuse $\frac{1}{R_\tau} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$ (bleu) au sein d'une couche limite se développant sur une plaque plane à gradient de pression nul.	30
2.3.	Profil de vitesse moyenne en variable de paroi dans la région interne de la couche limite. Identification de la structure de la région interne (sous-couche visqueuse, zone tampon et sous-couche inertielle (zone logarithmique)). Symboles : mesures de Klebanoff (1955) ($R_{e_\theta} = 8000$), ligne pleine : loi de paroi.	32
2.4.	Évolution de z_c^+ en fonction du gradient de pression \bar{p}^+ . Comparaison entre le modèle de Nickels (2004) (2.63) et des données de DNS en configuration de couche limite et de canal (Spalart, 1986; Nagano <i>et al.</i> , 1993; Eggels <i>et al.</i> , 1994; Loulou <i>et al.</i> , 1997; Skote <i>et al.</i> , 1998). Retracer à partir de Nickels (2004).	33
2.5.	Comparaison des valeurs données par l'expression (2.65) avec des données de DNS dans les cas FPG (Spalart, 1986) et APG (Nagano <i>et al.</i> , 1993). Figure extraite de Nickels (2004).	34
2.6.	Profils de vitesse moyenne en canal pour $R_\tau = 180$ (rouge), $R_\tau = 950$ (orange) et $R_\tau = 4200$ (bleu). Ligne pointillée : loi de paroi. Reproduit à partir des DNS de Jiménez <i>et al.</i> (2010).	35
3.1.	Développement d'une couche limite turbulente incompressible sur une paroi subissant une petite déformation sinusoïdale harmonique d'amplitude ζ_0 et de longueur d'onde λ	38
3.2.	Canal hydraulique utilisé dans les expériences d'Hanratty <i>et al.</i> Figure extraite de Zilker <i>et al.</i> (1977).	43
3.3.	Profil de cisaillement paroi. Symboles : mesures d'Hanratty <i>et al.</i> , ligne pleine : tracé de la fonction (3.25). (a) : $\alpha^+ = 0.00566$ et $\zeta_0^+ = 7.8$ (soit $2\zeta_0/\lambda = 0.014$) et $N = 1$, (b) : $\alpha^+ = 0.00303$ et $\zeta_0^+ = 51.9$ (soit $2\zeta_0/\lambda = 0.05$) et $N = 2$	44

3.4.	Phase θ_{τ_w} (a) et amplitude $\frac{ \tau_w }{\langle \tau_w \rangle}$ (b) du cisaillement paroi en fonction du nombre d'onde adimensionné α^+ . Symboles : données expérimentales d'Hanratty <i>et al.</i> , lignes pleines : études de réponses linéaires forcées avec (bleu) et sans (orange) la correction d'Hanratty \mathcal{C} ($a_H = 1650$ et $b_H = 33$).	45
3.5.	Taux d'amplification temporel σ^* (a) et fréquence angulaire Ω^* (b) adimensionnés en fonction du nombre d'onde α^+ . Lignes pleines : valeurs positives, lignes pointillées : valeurs négatives ($-\sigma$ et $-\Omega$ sont tracés dans ce cas là). Valeurs calculées à partir de $\beta_\nu = 1000$ et $\mathcal{R}_d = 10$, figure extraite de Claudin <i>et al.</i> (2017).	50
3.6.	Évolution de la zone d'instabilité en fonction de \mathcal{R}_d et α^+ , pour $\beta_\nu = 1000$ et de petites valeurs de \mathcal{A}/u_τ . Zone grise : $\sigma > 0$, ligne pleine : $\sigma = 0$, ligne pointillée : localisation du mode le plus instable (<i>i.e</i> pour σ maximal). Figure extraite de Claudin <i>et al.</i> (2017).	51
4.1.	Géométrie de l'essai TATER, figure extraite de McAlees et Maydew (1985).	56
4.2.	Trajectoire de l'essai TATER en fonction du temps. Bleue : vitesse, en km/s, orange : altitude en km. Les tirets représentent l'altitude du site de l'essai, par rapport au niveau de la mer.	57
4.3.	Pression au point d'arrêt (bar) en fonction du temps. En bleu, la pression calculée par McAlees et Maydew (1985), en orange, notre simulation.	59
4.4.	Recul de la paroi au point d'arrêt (mm) en fonction du temps (s). En bleu, la simulation de McAlees et Maydew (1985), en orange, notre simulation. Les symboles noirs sont les mesures enregistrées sur l'essai TATER.	60
4.5.	Champ de nombre de Mach à $t = 10.5$ s.	61
4.6.	Champ de pression (en Pa) autour de l'objet, à $t = 10.5$ s.	62
4.7.	Champ de nombre de Mach dans la couche limite, à $t = 10.5$ s. Les flèches noires sont les vecteurs vitesse, permettant d'identifier la couche limite.	62
4.8.	Champ de masse volumique (en kg/m^3) dans la couche limite, à $t = 10.5$ s. Les flèches noires sont les vecteurs vitesse, permettant d'identifier la couche limite.	63
4.9.	Gauche : profils de vitesse de frottement u_τ (bleu), en m/s et de viscosité cinématique ν (orange), en m^2/s le long de la paroi, à 9 s, 10.5 s et 11 s. Droite : profils de δ_ν , en m, le long de la paroi aux mêmes instants. Les couleurs foncées à claires indiquent un temps croissant. La partie grisée représente approximativement l'endroit où apparaissent les coups de gouge.	63
4.10.	Corrélation entre la taille caractéristique des creusements, λ (en m) et la longueur visqueuse $\delta_\nu = \frac{\nu}{u_\tau}$ (en m) de la couche limite. Ronds noirs : données expérimentales de Thomas (1979), tirets-pointillés noirs : corrélation de Thomas (1979). Losange gris : point correspondant aux coups de gouge de l'essai TATER, la longueur visqueuse étant tirée des simulations.	64
5.1.	Gauche : comparaison des solutions au problème de couche limite entre le modèle $\mathcal{K} - \omega$ (lignes pleines) et le modèle de longueur de mélange (cercles gris). Bleu : $\langle u \rangle^+$, orange : $\langle l \rangle_{\mathcal{K}-\omega}^+$. Droite : profils d'énergie cinétique turbulente (bleu) $\langle \mathcal{K} \rangle^+$ et de dissipation spécifique $\langle \omega \rangle^+$ (orange).	69
5.2.	Résultats des analyses linéaires en configuration de canal (lignes bleues) pour $\alpha\delta_c = 2\pi$ et $b_H = 35$ (---), $\alpha\delta_c = \pi$ et $b_H = 40$ (—) et $\alpha\delta_c = \pi/2$ et $b_H = 45$ (---), comparées aux mesures d'Hanratty (symboles) et à l'étude de réponse linéaire forcée en configuration de couche limite (--- orange) avec $a_H = 2000$ et $b_H = 35$	75
5.3.	Domaine numérique pour les calculs RANS. Le nombre de points est réduit et le profil sinusoïdal est d'une amplitude bien plus grande que dans les simulations afin de rendre la figure plus lisible.	77
5.4.	Profils de vitesses mesurés et simulés pour $\mathcal{R} = 130$, à dix positions x/λ différentes le long de l'ondulation. Les symboles reproduisent les données expérimentales de Frederick et Hanratty (1988), les courbes bleues pleines sont les simulations RANS avec le modèle EB-RSM et les courbes en tiret oranges, avec le modèle $\mathcal{K} - \omega$ SST.	78
5.5.	Profils cisaillement pariétal mesuré et simulés pour $\mathcal{R} = 130$, à dix positions x/λ différentes le long de l'ondulation. Les symboles reproduisent les données expérimentales de Frederick et Hanratty (1988), les courbes pleines sont les simulations RANS avec les modèles EB-RSM (bleu) et $\mathcal{K} - \omega$ SST (orange).	79
5.6.	Profils de vitesse moyens. Les symboles noirs représentent les DNS de Hoyas et Jiménez (2008), la courbe orange, les simulations RANS avec le modèle $\mathcal{K} - \omega$ et la courbe bleue avec le modèle EB-RSM. Les DNS sont représentées par les symboles verts. Gauche : $\mathcal{R} = 150$, droite : $\mathcal{R} = 300$	79

5.7.	Phase θ_{τ_w} (a) et amplitude $\frac{ \tau_w }{\langle \tau_w \rangle}$ (b) du cisaillement paroi en fonction du nombre d'onde adimensionné α^+ , dans le régime transitionnel. Cercles noirs : mesures d'Hanratty, losanges rouges : DNS, triangles : simulations RANS avec le modèle $\mathcal{K} - \omega$ (orange) et le modèle EB-RSM (bleu). Analyses linéaires avec le modèle de longueur de mélange sans (orange, - -) et avec (bleu, —) la correction d'Hanratty, avec le système modifié (5.12) (bleu, - - -) et avec le modèle $\mathcal{K} - \omega$ (orange, —).	80
5.8.	Profils de perturbation de vorticité en dehors (orange) et dans (bleu) le régime transitionnel. Les courbes orange claire à orange foncé indiquent un nombre de Reynolds \mathcal{R} croissant, parmi $\mathcal{R} = \{30, 40, 50\}$ et bleue claire à bleue foncé, un nombre de Reynolds croissant parmi $\mathcal{R} = \{100, 200, 300, 500, 700, 1000\}$	81
5.9.	Profils de perturbation de vitesse à $x/\lambda = 0.0$ (bleu), $x/\lambda = 0.2$ (violet), $x/\lambda = 0.4$ (vert), $x/\lambda = 0.6$ (orange) et $x/\lambda = 0.8$ (rouge). Symboles : DNS, traits pleins : simulations RANS avec le modèle EB-RSM, traits pointillés : simulations RANS avec le modèle $\mathcal{K} - \omega$. Ligne pleine grise : profil de perturbation de vorticité (tiré des analyses linéaires), la zone grisée représentant la région de vorticité. Gauche : $\mathcal{R} = 150$, droite : $\mathcal{R} = 300$	83
5.10.	Profils moyens de $\langle \tau_{xz} \rangle^+$ (orange) et $\langle \tau_{xx} - \tau_{zz} \rangle^+$ (bleu) tels que donnés par les simulations RANS à $\mathcal{R} = 300$. Ligne pointillée : modèle $\mathcal{K} - \omega$, ligne pleine : modèle EB-RSM.	84
5.11.	Profils de perturbations $\frac{\partial (\tau_{xz}^+ - \langle \tau_{xz} \rangle^+)}{\partial z^+}$ (gauche) et $\frac{\partial (\tau_{xx}^+ - \tau_{zz}^+ - \langle \tau_{xx} - \tau_{zz} \rangle^+)}{\partial x^+}$ (droite) � $\mathcal{R} = 300$, donnés par le modèle EB-RSM (lignes pleines), à $x/\lambda = 0.0$ (bleu), $x/\lambda = 0.2$ (violet), $x/\lambda = 0.4$ (vert), $x/\lambda = 0.6$ (orange) et $x/\lambda = 0.8$ (rouge). Sur la figure de droite, en pointillés, les profils de $\frac{\partial}{\partial x^+} \left[4\nu_t^+ \frac{\partial u^+}{\partial x^+} \right]$ donnés par le modèle $\mathcal{K} - \omega$ sont tracés aux mêmes positions x/λ . L'échelle correspondante est sur l'axe supérieur.	85
6.1.	Profils de température moyens. La courbe orange représente les simulations RANS avec le modèle $\mathcal{K} - \omega$ et la courbe bleue avec le modèle EB-RSM. Les DNS sont représentées par les symboles verts. Gauche : $\mathcal{R} = 150$, droite : $\mathcal{R} = 300$	91
6.2.	Profils de perturbation de température à $x/\lambda = 0.0$ (bleu), $x/\lambda = 0.2$ (violet), $x/\lambda = 0.4$ (vert), $x/\lambda = 0.6$ (orange) et $x/\lambda = 0.8$ (rouge). Symboles : DNS, traits pleins : simulations RANS avec le modèle EB-RSM, traits pointillés : simulations RANS avec le modèle $\mathcal{K} - \omega$. La zone grisée représente la région de vorticité. Gauche : $\mathcal{R} = 150$, droite : $\mathcal{R} = 300$	92
6.3.	Phase (gauche) et amplitude (droite) du flux thermique pour $\phi_w^* = -400$. Comparaisons entre les DNS (losanges rouges), les simulations RANS avec les modèles EB-RSM (triangles bleus) et $\mathcal{K} - \omega$ (triangles oranges), et les analyses linéaires (traits pleins). En orange : avec une hypothèse de turbulence gelée (<i>i.e.</i> $A^0 = 26$, $A_\theta^0 = 30$, $b_H = b_{H_\theta} = 0$ et $\varepsilon_\theta = 1$ et la contribution en $\hat{\tau}_{xz}$ nulle), et en bleu avec toutes les corrections activées (<i>i.e.</i> $A^0 = 26$, $A_\theta^0 = 30$, $b_H = b_{H_\theta} = 35$ et $\varepsilon_\theta = 4$). En pointillés-tirets bleus, même configuration mais avec $\phi_w^* = 400$, les triangles inversés bleus étant les simulations correspondantes avec le modèle EB-RSM. En pointillés noirs : résultat obtenu par Claudin <i>et al.</i> (2017) (correspond au cas $A^0 = 26$, $A_\theta^0 = 26$, $b_H = b_{H_\theta} = 35$ et $\varepsilon_\theta = 0$). Le trait en tirets gris représente la ligne à -90°	93
6.4.	Taux d'amplification temporel normalisé $\sigma^* = \sigma/\phi_w$, en fonction du nombre d'onde α^+ en échelle logarithmique, et linéaire, zoomée sur le pic (encart). Comparaisons entre les simulations RANS avec le modèle $\mathcal{K} - \omega$ (triangles oranges), le modèle EB-RSM (triangles bleus), les DNS (losanges rouges) et les analyses linéaires (ligne orange : avec une hypothèse de turbulence gelée (<i>i.e.</i> $A^0 = 26$, $A_\theta^0 = 30$, $b_H = b_{H_\theta} = 0$ et $\varepsilon_\theta = 0$ et la contribution en $\hat{\tau}_{xz}$ nulle) ; ligne bleu : avec toutes les corrections activées (<i>i.e.</i> $A^0 = 26$, $A_\theta^0 = 30$, $b_H = b_{H_\theta} = 35$ et $\varepsilon_\theta = 4$)). Les flèches bleues sur l'encart dénotent la position du pic d'instabilité.	96
7.1.	Phase du cisaillement en fonction de α^+ . Symboles : mesures d'Hanratty <i>et al.</i> , lignes pleines : analyses linéaires avec $b_H = 30$ et $a_H = \{1200, 2000, 3000, 5000\}$ (orange), et avec $a_H = 1650$ et $b_H = \{10, 20, 30, 40\}$ (bleu). Les couleurs claires vers les couleurs foncées indiquent des valeurs croissantes de a_H et b_H	101

7.2. Phase (gauche) et amplitude (droite) du cisaillement en fonction de α^+ . Cercles noirs : mesures d'Hanratty <i>et al.</i> , triangles : simulations RANS avec les modèles EB-RSM (bleu) et $\mathcal{K} - \omega$ (orange) et présentées au chapitre 5, étoiles : simulations RANS avec les modèles EB-RSM (bleu) et $\mathcal{K} - \omega$ (orange) pour $\mathcal{R} = \{1500, 2000, 3000\}$, lignes pleines : analyse linéaire avec correction d'Hanratty et $(a_H, b_H) = (1650, 33)$ (bleu) et avec le modèle $\mathcal{K} - \omega$ (orange).	102
7.3. Profils locaux de vitesse à $x/\lambda = 0$ (bleu) et $x/\lambda = 0.5$ (orange) donnés par les modèles EB-RSM (traits pleins) et $\mathcal{K} - \omega$ (tirets), à $\mathcal{R} = 500$	104
7.4. Inverse de la fonction de diagnostic Ξ à $x/\lambda = 0.0$ (bleu), $x/\lambda = 0.2$ (violet), $x/\lambda = 0.4$ (vert), $x/\lambda = 0.6$ (orange) et $x/\lambda = 0.8$ (rouge). Simulations RANS avec les modèles EB-RSM (gauche) et $\mathcal{K} - \omega$ (droite) à $\mathcal{R} = 500$	105
7.5. Phase (gauche) et amplitude (droite) du cisaillement. Comparaison des analyses linéaires menées avec la correction de Nickels (2004) pour différents couples (a_H, b_{H_1}) avec les mesures d'Hanratty. Orange (du plus foncé au plus clair) : (1650, 1), (1650, 3) et (1650, 5), bleu : (1350, 4.65). Tirets-pointillés gris : analyse linéaire avec la correction d'Hanratty originale, tirets gris : analyse linéaire avec le modèle de longueur de mélange standard.	107
7.6. Phase (gauche) et amplitude (droite) du cisaillement. Comparaison des analyses linéaires menées avec la correction de Nickels (2004) pour différents couples (a_H, b_{H_1}) avec les mesures d'Hanratty. Orange (du plus foncé au plus clair) : (1650, 1), (1650, 3) et (1650, 5), bleu : (750, 5). Tirets gris : analyse linéaire avec le modèle $\mathcal{K} - \omega$ standard.	108
7.7. Évolution de la fonction Ξ à $z^+ = 100$ à partir des modèles EB-RSM (bleu) et $\mathcal{K} - \omega$ (orange), à $\mathcal{R} = 500$	110
7.8. Valeurs utilisées pour les modifications de κ et σ_ω . Bleu : σ_{ω_1} et rouge : κ_1 . Tirets : fonctions (7.15b) et (7.15a).	111
7.9. Phase (gauche) et amplitude (droite) du cisaillement. Simulations RANS menées avec un modèle $\mathcal{K} - \omega$ modifié à l'aide des corrections sur κ (losanges oranges) et σ_ω (carrés oranges). Pour comparaison, sont également représentées : les mesures d'Hanratty (symboles noirs), les simulations RANS avec les modèles EB-RSM (triangles bleus) et $\mathcal{K} - \omega$ standard (triangles oranges), et les analyses linéaires menées avec les modèles $\mathcal{K} - \omega$ standard (ligne orange) et incluant la correction de Nickels (2004) (tirets oranges) et de longueur de mélange incluant la correction d'Hanratty (ligne bleu).	112
7.10. Phase (gauche) et amplitude (droite) du flux thermique pour $\phi_w^* = -400$. Simulations RANS menées avec un modèle $\mathcal{K} - \omega$ modifié à l'aide des corrections sur κ (losanges oranges) et σ_ω (carrés oranges). Pour comparaison, sont également représentées : les DNS (losanges rouges), les simulations RANS avec les modèles EB-RSM (triangles bleus) et $\mathcal{K} - \omega$ standard (triangles oranges), et les analyses linéaires (lignes). En orange : trait plein, avec une hypothèse de turbulence gelée (<i>i.e</i> $A^0 = 26$, $A_\theta^0 = 30$, $b_H = b_{H_\theta} = 0$ et $\varepsilon_\theta = 0$ et la contribution en $\hat{\tau}_{xz}$ nulle), et en tirets, avec la correction de Nickels (2004); en bleu : avec toutes les corrections activées (<i>i.e</i> $A^0 = 26$, $A_\theta^0 = 30$, $b_H = b_{H_\theta} = 35$ et $\varepsilon_\theta = 4$). Le trait en tirets gris représente la ligne à -90°	113
7.11. Taux d'amplification temporel normalisé $\sigma^* = \sigma/\phi_w$, en fonction du nombre d'onde α^+ en échelle logarithmique (gauche), et linéaire, zoomée sur le pic (droite). Simulations RANS menées avec un modèle $\mathcal{K} - \omega$ modifié à l'aide des corrections sur κ (losanges oranges) et σ_ω (carrés oranges). Pour comparaison, sont également représentés : les DNS (losanges rouges), les simulations RANS avec les modèles EB-RSM (triangles bleus) et $\mathcal{K} - \omega$ standard (triangles oranges), et les analyses linéaires (lignes). En orange : trait plein, avec une hypothèse de turbulence gelée (<i>i.e</i> $A^0 = 26$, $A_\theta^0 = 30$, $b_H = b_{H_\theta} = 0$ et $\varepsilon_\theta = 0$ et la contribution en $\hat{\tau}_{xz}$ nulle), et en tirets, avec la correction de Nickels (2004); en bleu : avec toutes les corrections activées (<i>i.e</i> $A^0 = 26$, $A_\theta^0 = 30$, $b_H = b_{H_\theta} = 35$ et $\varepsilon_\theta = 4$).	114
7.12. Corrélation entre la taille caractéristique des creusements et la longueur visqueuse $\delta_\nu = \frac{\nu}{u_\tau}$ de la couche limite. Symboles : données expérimentales de Thomas (1979), tirets-pointillés noirs : corrélation de Thomas (1979). Comparaison avec la position du pic prévu par le modèle EB-RSM (trait rouge), par Claudin <i>et al.</i> (2017) (pointillés gris), par le modèle $\mathcal{K} - \omega$ incluant les corrections (trait orange) et par les analyses linéaires avec la correction d'Hanratty (trait bleu) et de Nickels (2004) (tirets oranges). Le losange gris correspond aux coups de gouges observés sur l'essai TATER (voir chapitre 4).	115

8.1.	Rides de sables bidimensionnelles apparaissant sur un sol plan ¹ (gauche), coups de gouges tridimensionnels apparaissant sur les parois courbées d'une grotte de glace (Pflitsch <i>et al.</i> , 2017).	120
8.2.	Schéma illustrant la configuration 3D étudiée, et le passage en coordonnées cylindriques. Pour plus de lisibilité, l'amplitude de la déformation est amplifiée par rapport à celle considérée dans les analyses linéaires et les simulations RANS présentées ci-après.	121
8.3.	Profils de vitesse moyen à l'état de base, à $\mathcal{R} = 500$, obtenus avec un modèle de longueur de mélange. Les symboles représentent le profil sur plaque plane, les couleurs de foncées à claires un rayon de courbure décroissant ($r_0 = \{0.8, 1.5, 5\}$ m).	122
8.4.	Configurations de canal pour les calculs RANS. De gauche à droite : $r_0 = 0.8$ m, $r_0 = 1.5$ m et $r_0 = 5$ m. La déformation de la paroi est illustrée par les contours sur la paroi inférieure, entre $-\zeta_0$ et ζ_0	124
8.5.	Contours de la fluctuation du cisaillement $\frac{\tau_{xr}^+ - \langle \tau_{xr} \rangle^+}{\zeta_0^+}$ projetée sur un plan (x, y) , à $\mathcal{R} = 300$ (haut) et $\mathcal{R} = 500$ (bas), pour $r_0 = 0.8$ m. Gauche : simulation RANS, droite : analyse linéaire.	126
8.6.	Contours de la fluctuation du cisaillement $\frac{\tau_{xr}^+ - \langle \tau_{xr} \rangle^+}{\zeta_0^+}$ projetée sur un plan (x, y) , à $\mathcal{R} = 300$ (haut) et $\mathcal{R} = 500$ (bas), pour $r_0 = 5$ m. Gauche : simulation RANS, droite : analyse linéaire.	126
8.7.	Contours du déphasage θ_{τ_w} du cisaillement à la paroi dans le plan (α_ψ, α) , pour $\alpha^+ r_0^+ = 0.8\pi$ (gauche) et $\alpha^+ r_0^+ = 100\pi$ (droite). La ligne pointillée noire correspond à $\alpha^+ = \alpha_\psi^+$. Obtenu à partir de l'analyse linéaire.	127
B.1.	Système de coordonnées cylindriques.	137
B.2.	Contours de la fluctuation du cisaillement $\frac{\tau_{xr}^+ - \langle \tau_{xr} \rangle^+}{\zeta_0^+}$ projetée sur un plan (x, y) , à $\mathcal{R} = 300$ (haut) et $\mathcal{R} = 500$ (bas) à $r_0 = 1.5$ m. Gauche : analyse linéaire, droite : simulation RANS.	140
B.3.	Fluctuation du cisaillement $\frac{\tau_{xr}^+ - \langle \tau_{xr} \rangle^+}{\zeta_0^+}$ sur la paroi inférieure, pour $\mathcal{R} = 300$. Gauche : analyse linéaire, droite : simulation RANS. De haut en bas, $r_0 = \{0.8, 1.5, 5\}$ m.	141
B.4.	Fluctuation du cisaillement $\frac{\tau_{xr}^+ - \langle \tau_{xr} \rangle^+}{\zeta_0^+}$ sur la paroi inférieure, pour $\mathcal{R} = 500$. Gauche : analyse linéaire, droite : simulation RANS. De haut en bas, $r_0 = \{0.8, 1.5, 5\}$ m.	142

Nomenclature

Grandeurs géométriques ou physiques

C	Gradient de pression relaxé d'Hanratty adimensionné 38
Ω	Fréquence angulaire de l'évolution de la paroi 47
\mathcal{R}_d	Nombre de Reynolds associé au diamètre d'un élément rugueux 45
\mathcal{R}	Nombre de Reynolds associé au nombre d'onde α 37
a_H	Paramètre de relaxation d'Hanratty 38
α	Nombre d'onde de la déformation de la paroi, en m^{-1} 12
A_θ	Nombre de van Driest pour la longueur de mélange l_θ 86
A	Nombre de van Driest 38
b_{H_θ}	Facteur d'amplification de la correction d'Hanratty pour A_θ 87
b_H	Facteur d'amplification de la correction d'Hanratty 38
δ_c	Demi-hauteur de canal, en m 32
δ	Épaisseur de couche limite, en m 25
δ_i	Profondeur de pénétration de la perturbation dans la couche limite 44
δ_ν	Longueur visqueuse de la région interne de la couche limite turbulente 3
Δp_{eff}	Gradient de pression relaxé d'Hanratty 38
D	Matrice de différentiation 71
ε_θ	Coefficient pour la dépendance en $\hat{\tau}_{xz}$ de A_θ 87
ε	Taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente 20
η	Direction normale à la paroi, adimensionnée par le nombre d'onde α 37
f	Flux d'un scalaire passif 46
σ	Taux d'amplification temporel de l'évolution de la paroi 47
h_t	Enthalpie totale, en J 18
h	Enthalpie, en J 86
κ	Constante de von Kármán 22
\mathcal{K}	Énergie cinétique turbulente, en m^2s^{-2} 20
λ	Longueur caractéristique longitudinale des coups de gouge 3
l_θ	Modèle de longueur de mélange pour la fermeture du flux thermique turbulent 86
l	Longueur de mélange, en m 22
μ_t	Viscosité dynamique turbulente, en Pa s 21
μ	Viscosité dynamique, en Pa s 22
M	Nombre de Mach 5
ν_t	Viscosité cinématique turbulente, en m^2/s 21
ν	Viscosité cinématique du fluide, en m^2/s 11
ω	Taux de dissipation spécifique de l'énergie cinétique turbulente 22
ϕ_w	Flux thermique pariétal 86
\mathcal{P}	Terme de production d'énergie cinétique turbulente 20
Pr_t	Nombre de Prandtl turbulent 23
Pr	Nombre de Prandtl 46
p	Pression, en Pa 18
R_c	Nombre de Reynolds critique de Nickels 30
ρ	Masse volumique du fluide, en kg/m^3 18
R_τ	Nombre de Reynolds de frottement 27
r_0	Rayon de courbure pour les analyses linéaires en 3D 118
τ_ν	Contrainte visqueuse, en N m^{-2} 26
τ	Contrainte totale, en N m^{-2} 26
τ_t	Contrainte turbulente, en N m^{-2} 26
τ_w	Contrainte de cisaillement pariétale, en N m^{-2} 26
τ_{xx}	Contrainte diagonale correspondant à u'^2 , en N m^{-2} 37
τ_{xz}	Contrainte de cisaillement, en N m^{-2} 32
τ_{zz}	Contrainte diagonale correspondant à v'^2 , en N m^{-2} 37
Θ_τ	Température de frottement, en K 88
Θ	Différence de température avec la paroi, en K 23
θ_{ϕ_w}	Déphasage du flux thermique pariétal par rapport à la déformation de la paroi 90
θ_{τ_w}	Déphasage du cisaillement pariétal par rapport à la déformation de la paroi 43

t	Temps, en s 18
u_τ	Vitesse de frottement, en m/s 11
u	Composante de vitesse longitudinale, en m/s 18
ϖ	Composante transverse de la vorticité 79
v	Composante de vitesse transverse, en m/s 18
w	Composante de vitesse normale, en m/s 18
x	Coordonnée longitudinale, en m 18
y	Coordonnée transverse, en m 18
z_c	Distance critique à la paroi de Nickels, en m 30
ζ_0	Amplitude de la déformation de la paroi 36
ζ	Profil de la déformation de la paroi 36
z	Coordonnée normale, en m 18

Opérateurs mathématiques et notations

Ξ	Fonction de diagnostic 102
$\hat{\square}$	Fluctuation d'une quantité dans les analyses linéaires 37
$\langle \square \rangle$	Moyenne spatiale d'une quantité dans la direction longitudinale dans les analyses linéaires 37
∇	Opérateur différentiel linéaire ∇ , défini en annexe A.1 18
\square	Moyenne de Reynolds, défini en annexe A.2 37

Vecteurs et tenseurs

\mathbf{R}	Tenseur des tensions de Reynolds 19
\mathbf{f}	Vecteur flux d'un scalaire passif 46
\mathbf{n}	Vecteur normal à la paroi 24
Φ	Vecteur flux thermique 18
\mathbf{S}	Tenseur taux de déformation 19
τ	Tenseur des contraintes 18
\mathbf{u}	Vecteur vitesse 18
ϖ	Vecteur vorticité 79
\mathbf{W}	Tenseur de rotation 24
\mathbf{X}	Vecteur position 18

Acronymes et sigles

APG	Adverse Pressure Gradient 30
BSL	BaSeLine 22
CEA	Commissariat à l'énergie Atomique et aux énergies Alternatives xiii
CEDRE	Calcul des écoulements Diphasiques Réactifs pour l'énergétique 73
CESTA	Centre d'études Scientifiques et Techniques d'Aquitaine xiii
CHARME	Solveur du code CEDRE pour les écoulements de fluide compressible réactif multi-espèce 73
DNS	Direct Numerical Simulation 17
DRSM	Differential Reynolds Stress Model 23
EB-RSM	Elliptic Blending Reynolds Stress Model 23
EVM	Eddy Viscosity Model 21
FPG	Favorable Pressure Gradient 30
GGDH	Generalized Gradient Diffusion Hypothesis 24
GMRES	Generalized Minimal RESidual 74
HLLC	Harten, Lax and van Leer with Contact 74
LCTS	Laboratoire des composites thermosturcturaux, Universit� de Bordeaux 7
LES	Large Eddy Simulation 17
MUSCL	Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws 74
NASA	National Aeronautics and Space Administration 5
ONERA	Office National d'�tudes et de Recherches A�rospatiales xiii
PANT	PAssive Nosetip Technology 8
RANS	Reynolds Averaged Navier–Stokes xv
SGDH	Simple Gradient Diffusion Hypothesis 23
SST	Shear Stress Transport 22
TATER	Talos-Terrier-Recruit Experimental Rocket xiii
ZPG	Zero Pressure Gradient 30

Bibliographie

- ABRAMS, J. et HANRATTY, T., 1985
Relaxation effects observed for turbulent flow over a wavy surface. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 151 pp. 443–455.
- AMAR, A. et POWARS, C., 2011
Overview of roughness and blowing effects in flows over ablating surfaces. Issu de : *Fourth Annual AFOSR/NASA/SNL Ablation Workshop*.
- ANDERSON, C., BEHRENS, C., FLOYD, G. et VINING, M., 1998
Crater firm caves of Mount St. Helens, Washington. *Journal of Caves and Karst Studies*, vol. 60 pp. 44–50.
- ANDERSON, J., 2006
Hypersonic and High-temperature Gas Dynamics. AIAA Education Series. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- AYOTTE, K., XU, D. et TAYLOR, P., 1994
The impact of turbulence closure schemes on predictions of the mixed spectral finite-difference model for flow over topography. *Boundary-layer meteorology*, vol. 68 pp. 1–33.
- BAKER, R., 1972
Low temperature ablator nosetip shape change at angle of attack. Issu de : *10th Aerospace Sciences Meeting*, p. 90.
- BALDWIN, B. et LOMAX, H., 1978
Thin-layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. Issu de : *16th aerospace sciences meeting*, p. 257.
- BENHAMADOUCHE, S., FOURNIER, Y., BILLARD, F., JARRIN, N. et PROSSER, R., 2006
Rans/les coupling in the industrial cfd tool code_saturne : Implementation and first results. Issu de : *Turbulence Heat and Mass Transfer 5. Proceedings of the International Symposium on Turbulence Heat and Mass Transfer*. Begel House Inc.
- BENJAMIN, T., 1959
Shearing flow over a wavy boundary. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 6 n° 2 pp. 161–205.
- BEST, J., 2005
The fluid dynamics of river dunes : A review and some future research directions. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface*, vol. 110 n° F4.
- BLONDEAUX, P., 2001
Mechanics of coastal forms. *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 33 n° 1 pp. 339–370.
- BLUMBERG, P. et CURL, R., 1974
Experimental and theoretical studies of dissolution roughness. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 65 n° 4 pp. 735–751.
- BOROVUČKA, J., SPURNÝ, P., BROWN, P., WIEGERT, P., KALENDA, P., CLARK, D. et SHRBNÝ, L., 2013
The trajectory, structure and origin of the Chelyabinsk asteroidal impactor. *Nature*, vol. 503 n° 7475 pp. 235–237.
- BOURKE, M., LANCASTER, N., FENTON, L., PARTELI, E., ZIMBELMAN, J. et RADEBAUGH, J., 2010
Extraterrestrial dunes : An introduction to the special issue on planetary dune systems. *Geomorphology*, vol. 121 n° 1-2 pp. 1–14.
- BOUSSINESQ, J., 1877
Essai sur la théorie des eaux courantes. Mem. Présentés par Divers Savants à L'Académie des Sciences, Paris, 23 (1877).
- BRADSHAW, P., FERRISS, D. et ATWELL, N., 1967
Calculation of boundary-layer development using the turbulent energy equation. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 28 n° 3 pp. 593–616.

- BUSHUK, M., HOLLAND, D., STANTON, T., STERN, A. et GRAY, C., 2019
Ice scallops : a laboratory investigation of the ice–water interface. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 873 pp. 942–976.
- CADOT, O., 2013
Introduction à la turbulence, cours de l'ENSTA-ParisTech 2A. Lecture.
- CAMPOREALE, C. et RIDOLFI, L., 2012
Ice ripple formation at large reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 694 pp. 225–251.
- CANNING, T., TAUBER, M. et WILKINS, M., 1968
Ablation patterns on cones having laminar and turbulent flows. *AIAA Journal*, vol. 6 n° 1 pp. 174–175.
- CATRIS, S. et AUPOIX, B., 2000
Towards a calibration of the length-scale equation. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 21 n° 5 pp. 606–613.
- CEBECI, T. et SMITH, A., 1974
Analysis of turbulent boundary layers. *New York, Academic Press, Inc.(Applied Mathematics and Mechanics)*, vol. 15.
- CHARRU, F., ANDREOTTI, B. et CLAUDIN, P., 2013
Sand ripples and dunes. *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 45 pp. 469–493.
- CHARRU, F. et HINCH, J., 2000
'Phase diagram' of interfacial instabilities in a two-layer Couette flow and mechanism of the long-wave instability. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 414 pp. 195–223.
- CHARRU, F. et HINCH, J., 2006
Ripple formation on a particle bed sheared by a viscous liquid. part 1. steady flow. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 550 pp. 111–121.
- CHARRU, F. et MOUILLERON-ARNOULD, H., 2002
Instability of a bed of particles sheared by a viscous flow. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 452 pp. 303–323.
- CHEDEVERGNE, F., 2007
Instabilités intrinsèques des moteurs à propergol solide. Thèse de doctorat, École nationale supérieure de l'aéronautique et de l'espace (Toulouse).
- CHEDEVERGNE, F., STUCK, M., OLAZABAL-LOUMÉ, M. et COUZI, J., 2023
About the role of the Hanratty correction in the linear response of a turbulent flow bounded by a wavy wall. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 967 pp. A39.
- CLAUDIN, P., DURÁN, O. et ANDREOTTI, B., 2017
Dissolution instability and roughening transition. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 832 pp. R2.
- CLAUDIN, P. et ANDREOTTI, B., 2006
A scaling law for aeolian dunes on Mars, Venus, Earth, and for subaqueous ripples. *Earth and Planetary Science Letters*, vol. 252 n° 1-2 pp. 30–44.
- CLAUDIN, P., CHARRU, F. et ANDREOTTI, B., 2011
Transport relaxation time and length scales in turbulent suspensions. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 671 pp. 491–506.
- CLAUDIN, P., WIGGS, G. et ANDREOTTI, B., 2013
Field evidence for the upwind velocity shift at the crest of low dunes. *Boundary-layer meteorology*, vol. 148 pp. 195–206.
- CLAUSER, F., 1956
The turbulent boundary layer. *Advances in applied mechanics*, vol. 4 pp. 1–51.
- COURBET, B., BENOIT, C., COUAILLIER, V., HAIDER, F., LE PAPE, M. et PÉRON, S., 2011
Space discretization methods. *Aerospace Lab*, vol. 2 pp. 1–14.

- COUSTEIX, J., 1989
Turbulence et couche limite. Editions Cépaduès.
- CURL, R., 1966
Scallops and flutes. *Transactions of Cave Research Group of Great Britain*, vol. 7 pp. 121–160.
- DALY, B. et HARLOW, F., 1970
Transport equations in turbulence. *The physics of fluids*, vol. 13 n° 11 pp. 2634–2649.
- DEHOUX, F., BENHAMADOU, S. et MANCEAU, R., 2017
An elliptic blending differential flux model for natural, mixed and forced convection. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 63 pp. 190–204.
- DERBIDGE, T. et WOOL, M., 1974
Passive Nosedip Technology (PANT) Program : An experimental study to evaluate heat transfer rates to scalloped surfaces-data report. Rapport technique, Acurex CORP/Aerotherm Mountain View CA.
- DORÉ, A., BONNETON, P., MARIEU, V. et GARLAN, T., 2016
Numerical modeling of subaqueous sand dune morphodynamics. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface*, vol. 121 n° 3 pp. 565–587.
- DUFFA, G., 2013
Ablative thermal protection systems modeling. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc.
- DURÁN, O., ANDREOTTI, B. et CLAUDIN, P., 2012
Numerical simulation of turbulent sediment transport, from bed load to saltation. *Physics of Fluids*, vol. 24 n° 10 pp. 103306.
- DURÁN, O., ANDREOTTI, B., CLAUDIN, P. et WINTER, C., 2019
A unified model of ripples and dunes in water and planetary environments. *Nature Geoscience*, vol. 12 n° 5 pp. 345–350.
- DURBIN, P., 1991
Near-wall turbulence closure modeling without “damping functions”. *Theoretical and computational fluid dynamics*, vol. 3 n° 1 pp. 1–13.
- EGGELS, J., UNGER, F., WEISS, M., WESTERWEEL, J., ADRIAN, R., FRIEDRICH, R. et NIEUWSTADT, F., 1994
Fully developed turbulent pipe flow : a comparison between direct numerical simulation and experiment. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 268 pp. 175–210.
- FINNIGAN, J., RAUPACH, M., BRADLEY, E. et ALDIS, G., 1990
A wind tunnel study of turbulent flow over a two-dimensional ridge. *Boundary-Layer Meteorology*, vol. 50 n° 1-4 pp. 277–317.
- FLACK, K. et SCHULTZ, M., 2010
Review of Hydraulic Roughness Scales in the Fully Rough Regime. *Journal of Fluids Engineering*, vol. 132 n° 4 pp. 041203.
- FOURRIERE, A., CLAUDIN, P. et ANDREOTTI, B., 2010
Bedforms in a turbulent stream : formation of ripples by primary linear instability and of dunes by nonlinear pattern coarsening. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 649 pp. 287–328.
- FREDERICK, K. et HANRATTY, T., 1988
Velocity measurements for a turbulent non-separated flow over solid waves. *Experiments in fluids*, vol. 6 n° 7 pp. 477–486.
- GALLAIS, P., 2007
Atmospheric re-entry vehicle mechanics. Springer Science & Business Media.
- GRABOW, R. et WHITE, C., 1973
A surface flow approach for predicting crosshatch patterns. *AIAA Journal*, vol. 11 n° 6 pp. 841–847.
- GRABOW, R. et WHITE, C., 1975
Surface roughness effects nosetip ablation characteristics. *AIAA Journal*, vol. 13 n° 5 pp. 605–609.

- HOCHREIN, G. et WRIGHT, G., 1976
Analysis of the tater nosetip boundary layer transition and ablation experiment. Issu de : *14th Aerospace Sciences Meeting*, p. 167.
- HOYAS, S. et JIMÉNEZ, J., 2008
Reynolds number effects on the Reynolds-stress budgets in turbulent channels. *Physics of Fluids*, vol. 20 n° 10 pp. 101511.
- HUANG, P. et BRADSHAW, P., 1995
Law of the wall for turbulent flows in pressure gradients. *AIAA journal*, vol. 33 n° 4 pp. 624–632.
- JIMÉNEZ, J., HOYAS, S., SIMENS, M. et MIZUNO, Y., 2010
Turbulent boundary layers and channels at moderate Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 657 pp. 335–360.
- JONES, P. et LAUNDER, B., 1972
The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *International journal of heat and mass transfer*, vol. 15 n° 2 pp. 301–314.
- KALITZIN, G., MEDIC, G., IACCARINO, G. et DURBIN, P., 2005
Near-wall behavior of RANS turbulence models and implications for wall functions. *Journal of Computational Physics*, vol. 204 n° 1 pp. 265–291.
- KLEBANOFF, P., 1955
Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient. *NACA TN-1247*.
- KNOPP, T., 2016
A new wall-law for adverse pressure gradient flows and modification of $k - \omega$ type RANS turbulence models. Issu de : *54th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, p. 0588.
- KNOPP, T., REUTHER, N., NOVARA, M., SCHANZ, D., SCHÜLEIN, E., SCHRÖDER, A. et KÄHLER, C., 2021
Experimental analysis of the log law at adverse pressure gradient. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 918.
- KOLMOGOROV, A., 1941
The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *Akademiia Nauk SSSR Doklady*, vol. 30 pp. 301–305.
- KRINOV, E., 1974
Fragmentation of the Sikhote-Alin meteoritic body. *Meteoritics*, vol. 9 n° 3 pp. 255–262.
- KRYVORUKA, J., 1976
Roll Torque Evaluation (RTE) vehicle postflight test report. *NASA STI/Recon Technical Report N*, vol. 77 pp. 17125.
- LAGANELLI, A. et NESTLER, D., 1969
Surface ablation patterns - A phenomenology study. *AIAA Journal*, vol. 7 n° 7 pp. 1319–1325.
- LAGANELLI, A. et ZEMPEL, R., 1970
Observations of surface ablation patterns in subliming materials. *AIAA Journal*, vol. 8 n° 9 pp. 1709–1711.
- LAMBOLEY, X., 2019
Apparition de rugosités de surface lors de l'ablation d'un matériau composite en régime de transition entre laminaire et turbulent. Thèse de doctorat, Bordeaux.
- LARSON, H. et MATEER, G., 1968
Cross-hatching-a coupling of gas dynamics with the ablation process. Issu de : *Fluid and Plasma Dynamics Conference*, p. 670.
- LEE, S., BROEREN, A., KREEGER, R., POTAPCZUK, M. et UTT, L., 2014
Implementation and validation of 3-D ice accretion measurement methodology. Issu de : *6th AIAA Atmospheric and Space Environments Conference*, p. 2613.

- LEES, L., KUBOTA, T. et KO, D., 1972
Stability theory for cross-hatching. Part I. Linear stability theory. *Technical Report SAMSO TR 72-34*, vol. 1.
- LIN, T. et QUN, P., 1987
On the formation of regmaglypts on meteorites. *Fluid dynamics research*, vol. 1 n° 3-4 pp. 191–199.
- LORIDAN, V., PELUCHON, S. et CLAUDEL, J., 2023
Investigating the accuracy of a fully coupled fluid/thermal strategy with nonequilibrium chemistry to compute graphite ablation. Issu de : *AIAA AVIATION 2023 Forum*, p. 3329.
- LOSSON, B. et QUINIF, Y., 2001
The Moselle piracy : new chronological data from U/Th dating of speleothems. *Karstologia*, vol. 37 pp. 29–40.
- LOULOU, P., MOSER, R., MANSOUR, N. et CANTWELL, B., 1997
Direct numerical simulation of incompressible pipe flow using a B-Spline spectral method. *Technical Memorandum TM-110436, NASA*, vol. 1.
- LOYD, R., MOFFAT, R. et KAYS, W., 1970
The turbulent boundary layer on a porous plate : An experimental study of the fluid dynamics with strong favorable pressure gradients and blowing. *Report No. HMT-13, Mech. Engrg. Dept., Stanford U.*
- LUCHINI, P. et CHARRU, F., 2010
The phase lead of shear stress in shallow-water flow over a perturbed bottom. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 665 pp. 516–539.
- LUCHINI, P. et CHARRU, F., 2019
On the large difference between Benjamin’s and Hanratty’s formulations of perturbed flow over uneven terrain. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 871 pp. 534–561.
- LUXTON, R., BULL, M. et RAJAGOPALAN, S., 1984
The thick turbulent boundary layer on a long fine cylinder in axial flow. *The Aeronautical Journal*, vol. 88 n° 875 pp. 186–199.
- MANCEAU, R., 2015
Recent progress in the development of the Elliptic Blending Reynolds-stress model. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 51 pp. 195–220.
- MANCEAU, R. et HANJALIĆ, K., 2002
Elliptic Blending model : A new near-wall Reynolds-stress turbulence closure. *Physics of Fluids*, vol. 14 n° 2 pp. 744–754.
- MANGEON, G., BENHAMADOUCHE, S., WALD, J.-F. et MANCEAU, R., 2020
Extension to various thermal boundary conditions of the elliptic blending model for the turbulent heat flux and the temperature variance. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 905 pp. A1.
- MAO, Z. et HANRATTY, T., 1986
Studies of the wall shear stress in a turbulent pulsating pipe flow. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 170 pp. 545–564.
- MARCHENAY, Y., 2021
Modélisation de la turbulence en présence de rugosité et de soufflage en régime hypersonique. Thèse de doctorat, Toulouse, ISAE.
- MARUSIC, I., MATHIS, R. et HUTCHINS, N., 2010
Predictive model for wall-bounded turbulent flow. *Science*, vol. 329 n° 5988 pp. 193–196.
- MATEER, G. et LARSON, H., 1969
Unusual boundary-layer transition results on cones in hypersonic flow. *AIAA Journal*, vol. 7 n° 4 pp. 660–664.
- MATHIS, R., HUTCHINS, N. et MARUSIC, I., 2009
Large-scale amplitude modulation of the small-scale structures in turbulent boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 628 pp. 311–337.

- McALEES, S. et MAYDEW, R., 1985
Aerothermodynamic design of high speed rockets. *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 22 n° 3 pp. 309–315.
- MENTER, F., 1994
Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA journal*, vol. 32 n° 8 pp. 1598–1605.
- NACHTSHEIM, P. et LARSON, H., 1971
Crosshatched ablation patterns in Teflon. *AIAA Journal*, vol. 9 n° 8 pp. 1608–1614.
- NAGANO, Y., TAGAWA, M. et TSUJI, T., 1993
Effects of adverse pressure gradients on mean flows and turbulence statistics in a boundary layer. Issue de : *Turbulent Shear Flows 8 : Selected Papers from the Eighth International Symposium on Turbulent Shear Flows, Munich, Germany, September 9–11, 1991*, pp. 7–21. Springer.
- NAGIB, H. et CHAUHAN, K., 2008
Variations of von Kármán coefficient in canonical flows. *Physics of Fluids*, vol. 20 n° 10.
- NICKELS, T., 2004
Inner scaling for wall-bounded flows subject to large pressure gradients. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 521 pp. 217–239.
- NIKURADSE, J., 1937
Laws of flows in rough pipes. *Washington (DC) : NACA. Technical Memorandum 1292*.
- ÖSTERLUND, J., JOHANSSON, A., NAGIB, H. et HITES, M., 2000
A note on the overlap region in turbulent boundary layers. *Physics of Fluids*, vol. 12 n° 1 pp. 1–4.
- PFLITSCH, A., CARTAYA, E., MCGREGOR, B., HOLMGREN, D. et STEINHÖFEL, B., 2017
Climatologic studies inside Sandy glacier at Mount Hood volcano in Oregon, USA. *Journal of Cave & Karst Studies*, vol. 79 n° 3.
- POGGI, D., KATUL, G., ALBERTSON, J. et RIDOLFI, L., 2007
An experimental investigation of turbulent flows over a hilly surface. *Physics of Fluids*, vol. 19 n° 3.
- POPE, S., 2000
Turbulent Flows. Cambridge University Press.
- PRANDTL, L., 1925
7. Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten turbulenz. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 5 n° 2 pp. 136–139.
- RAO, G. et KESHAVAN, N., 1972
Axisymmetric Turbulent Boundary Layers in Zero Pressure-Gradient Flows. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 39 n° 1 pp. 25–32.
- REFLOCH, A., COURBET, B., MURRONE, A., VILLEDIEU, P., LAURENT, C., GILBANK, P., TROYES, J., TESSÉ, L., CHAINERAY, G., DARGAUD, J. et OTHERS, 2011
CEDRE software. *Aerospace Lab*, vol. 2 pp. 1–10.
- REYNOLDS, O., 1883
XXIX. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 174 pp. 935–982.
- ROMANELLI, M., BENEDDINE, S., MARY, I., BEAUGENDRE, H., BERGMANN, M. et SIPP, D., 2023
Data-driven wall models for Reynolds Averaged Navier–Stokes simulations. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 99 pp. 109097.
- SCHAFLINGER, U., ACRIVOS, A. et STIBI, H., 1995
An experimental study of viscous resuspension in a pressure-driven plane channel flow. *International journal of multiphase flow*, vol. 21 n° 4 pp. 693–704.

- SCHERRER, D., CHEDEVERGNE, F., GRECARD, P., TROYES, J., MURRONE, A., MONTREUIL, E., VUILLOT, F., LUPOGLAZOFF, N., HUET, M., SAINTE-ROSE, B. et OTHERS, 2011
Recent cedre applications. *Aerospace Lab*, vol. 2 pp. 1–28.
- SCHULTZ, M. et FLACK, K., 2009
Turbulent boundary layers on a systematically varied rough wall. *Physics of Fluids*, vol. 21 n° 1.
- SEMINARA, G., 2010
Fluvial sedimentary patterns. *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 42 pp. 43–66.
- SHIMIZU, A., FERRELL, J. et POWARS, C., 1974
Passive Nosetip Technology (PANT) Program : Nosetip transition and shape change tests in the AFFDL 50 MW RENT Arc-Data. Rapport technique, Acurex CORP/Aerotherm Mountain View CA.
- SKOTE, M., HENNINGSON, D. et HENKES, R., 1998
Direct numerical simulation of self-similar turbulent boundary layers in adverse pressure gradients. *Flow, turbulence and combustion*, vol. 60 n° 1 pp. 47–85.
- SNARSKI, S. et LUEPTOW, R., 1995
Wall pressure and coherent structures in a turbulent boundary layer on a cylinder in axial flow. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 286 pp. 137–171.
- SPALART, P., 2015
Philosophies and fallacies in turbulence modeling. *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 74 pp. 1–15.
- SPALART, P., 1986
Numerical study of sink-flow boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 172 pp. 307–328.
- SPALART, P., 1988
Direct simulation of a turbulent boundary layer up to $R_\theta = 1410$. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 187 pp. 61–98.
- SPALART, P. et ALLMARAS, S., 1992
A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. Issu de : *30th aerospace sciences meeting and exhibit*, p. 439.
- SPEZIALE, C., SARKAR, S. et GATSKI, T., 1991
Modelling the pressure–strain correlation of turbulence : an invariant dynamical systems approach. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 227 pp. 245–272.
- STEVENSON, P., THORPE, R., KENNEDY, J. et MCDERMOTT, C., 2001
The transport of particles at low loading in near-horizontal pipes by intermittent flow. *Chemical Engineering Science*, vol. 56 n° 6 pp. 2149–2159.
- STOCK, H. et GINOUX, J., 1973
Hypersonic low temperature ablation an experimental study of cross-hatched surface patterns. Issu de : *Aeronautical Research 1971 : Proceedings of the 22nd Congress of the International Astronautical Federation Brussels, 20–25 September 1971*, pp. 105–120. Springer.
- STUCK, M., CHEDEVERGNE, F., OLAZABAL-LOUMÉ, M. et COUZI, J., 2024
Influence of the turbulent closure for the prediction of the linear response of a flow bounded by a corrugated wall. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, vol. 105 pp. 275–284.
- SUNDQVIST, H., SEIBERT, J. et HOLMGREN, K., 2007
Understanding conditions behind speleothem formation in Korallgrottan, northwestern Sweden. *Journal of Hydrology*, vol. 347 n° 1–2 pp. 13–22.
- SWIGART, R., 1974
Cross-hatching studies - A critical review. *AIAA Journal*, vol. 12 n° 10 pp. 1301–1318.
- THOMAS, R., 1979
Size of scallops and ripples formed by flowing water. *Nature*, vol. 277 n° 5694 pp. 281–283.

- THORSNESS, C., MORRISROE, P. et HANRATTY, T., 1978
A comparison of linear theory with measurements of the variation of shear stress along a solid wave. *Chemical Engineering Science*, vol. 33 n° 5 pp. 579–592.
- TORO, E., 2013
Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics : a practical introduction. Springer Science & Business Media.
- TOWNSEND, A., 1976
The structure of turbulent shear flow. Cambridge university press.
- VINUESA, R., NEGI, P., ATZORI, M., HANIFI, A., HENNINGSON, D. et SCHLATTER, P., 2018
Turbulent boundary layers around wing sections up to $Re_c = 1,000,000$. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 72 pp. 86–99.
- WHITE, C. et GRABOW, R., 1973
Crosshatch surface patterns-comparison of experiment with theory. *AIAA Journal*, vol. 11 n° 9 pp. 1316–1322.
- WILCOX, D., 1988
Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA journal*, vol. 26 n° 11 pp. 1299–1310.
- WILCOX, D., 2008
Formulation of the $k - \omega$ turbulence model revisited. *AIAA Journal*, vol. 46 n° 11 pp. 2823–2838.
- WILLIAMS, E., 1971
Experimental studies of ablation surface patterns and resulting roll torques. *AIAA Journal*, vol. 9 n° 7 pp. 1315–1321.
- WILLMARTH, W. et YANG, C., 1970
Wall-pressure fluctuations beneath turbulent boundary layers on a flat plate and a cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 41 n° 1 pp. 47–80.
- WOOL, M., 1975
Final summary report Passive Nosedip Technology (PANT) Program. Rapport technique, SAMSO-TR-75-250, Acurex CORP/Aerotherm Mountain View CA.
- YIZHAQ, H., KATRA, I., KOK, J. et ISENBERG, O., 2012
Transverse instability of megaripples. *Geology*, vol. 40 n° 5 pp. 459–462.
- ZANOUN, E., DURST, F. et NAGIB, H., 2003
Evaluating the law of the wall in two-dimensional fully developed turbulent channel flows. *Physics of fluids*, vol. 15 n° 10 pp. 3079–3089.
- ZILKER, D., COOK, G. et HANRATTY, T., 1977
Influence of the amplitude of a solid wavy wall on a turbulent flow. Part 1. Non-separated flows. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 82 n° 1 pp. 29–51.