



HAL
open science

Modélisation thermomécanique transitoire d'un contact rotor-stator au niveau des joints labyrinthes

Coline Jacobs

► **To cite this version:**

Coline Jacobs. Modélisation thermomécanique transitoire d'un contact rotor-stator au niveau des joints labyrinthes. Autre. Ecole Centrale de Lyon, 2024. Français. NNT : 2024ECDL0024 . tel-04688961

HAL Id: tel-04688961

<https://theses.hal.science/tel-04688961>

Submitted on 16 Sep 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**École Centrale de Lyon
McGill University**

École doctorale **Mécanique Énergétique Génie civil Acoustique**
Unité de recherche **LTDS**

Thèse présentée par **Coline Jacobs**

Soutenue le **1^{er} juillet 2024**

En vue de l'obtention du grade de docteur de l'École Centrale de Lyon et de McGill University

Discipline **Génie mécanique**
Spécialité **Dynamique des structures**

Modélisation thermomécanique transitoire d'un contact rotor-stator au niveau des joints labyrinthes

Thèse dirigée par Fabrice THOUVEREZ directeur
Mathias LEGRAND co-directeur

Composition du jury

<i>Rapporteurs</i>	Patrice CARTRAUD Jean-François BRUNEL	Professeur à l'École Centrale de Nantes, LMM Maître de Conférences HDR à l'Université de Lille, LAM ^{cube}
<i>Examineurs</i>	Patricio ALMEIDA Thouraya BARANGER	Ingénieur Méthodes à Safran Helicopter Engines Professeure à l'Université Claude Bernard Lyon 1, LMC ²
<i>Directeurs de thèse</i>	Fabrice THOUVEREZ Mathias LEGRAND	Professeur à l'École Centrale de Lyon, LTDS Professeur à McGill University, LDSV

École Centrale de Lyon
McGill University

Doctoral School **Mécanique Énergétique Génie civil Acoustique**
University Department **LTDS**

Thesis defended by **Coline Jacobs**

Defended on **July 1, 2024**

In order to become Doctor from École Centrale de Lyon and from McGill University

Academic Field **Mechanical engineering**
Speciality **Structural dynamics**

Thermomechanical transient dynamics of rotor-stator contact in labyrinth seals

Thesis supervised by Fabrice THOUVEREZ Supervisor
Mathias LEGRAND Co-Supervisor

Committee members

<i>Referees</i>	Patrice CARTRAUD	Professor at Ecole Centrale de Nantes, LMM
	Jean-François BRUNEL	Associate Professor at Université de Lille, LAM ^{cube}
<i>Examiners</i>	Patricio ALMEIDA	Methods Engineer at Safran Helicopter Engines
	Thouraya BARANGER	Professor at Université Claude Bernard Lyon 1, LMC ²
<i>Supervisors</i>	Fabrice THOUVEREZ	Professor at Ecole Centrale de Lyon, LTDS
	Mathias LEGRAND	Professor at McGill University, LDSV

Cette thèse a été préparée dans les laboratoires suivants.

LTDS

UMR 5513
École Centrale de Lyon
36, av. Guy de Collongue
69134 Ecully, France

☎ 0 (+33) 4 72 18 62 93
✉ helene.schoch@ec-lyon.fr
Site ltds.ec-lyon.fr



LDSV

Department of Mechanical Engineering
Room 122, McConnell Engineering Building
McGill University
817 Sherbrooke St West
Montréal QC H3A 0C3, Canada

☎ (+1) 514 398 5321
✉ mathias.legrand@mcgill.ca
Site <http://structdynviblab.mcgill.ca>



Safran Helicopter Engines

Avenue Joseph Szydlowsky
64511 Bordes, France

☎ 0 (+33) 5 59 12 50 00
✉ patricio.almeida@safrangroup.com
Site <https://www.safran-helicopter-engines.com/fr>



*Pour ma maman, courageuse, au grand coeur et qui m'a appris à me relever
après chaque combat.*

Pour mes petites étoiles, Casimir, Nono et Mamine.

Modélisation thermomécanique transitoire d'un contact rotor-stator au niveau des joints labyrinthes**Résumé**

Les générateurs de gaz sont communément employés pour motoriser des avions ou des hélicoptères et réalisent toujours les étapes de compression-combustion-détente. En régime nominal, les gaz brûlés font tourner la turbine qui entraîne le compresseur par le biais de l'arbre moteur. Il arrive que certaines des pièces de l'arbre subissent une défaillance qui ne garantit plus l'assemblage des étages turbine et compresseur. Par conséquent, la turbine entre en configuration libre et amorce une accélération non-contrôlée qui peut mener à son éclatement. Il s'avère que dans les moteurs d'hélicoptère, la turbine subit un blocage sans effets dangereux. Une analyse de ces moteurs a révélé l'émergence de contacts rotor-stator intenses au niveau du joint labyrinthe de la turbine avec une forte élévation de température. Cette thèse est motivée par le besoin de prédire le transitoire de vitesse de rotation du rotor. Bien que la littérature soit fournie au sujet de la dynamique des rotors en présence de contact unilatéral frottant, la combinaison de la réponse dynamique avec une vitesse de rotation inconnue et le couplage thermomécanique restent un sujet à explorer. Les présents travaux proposent de résoudre le problème thermomécanique dans le domaine temporel en respectant strictement des contraintes de contact via les multiplicateurs de Lagrange. Les algorithmes de contact sont réécrits pour s'adapter au système fortement non-linéaire à cause des effets gyroscopiques. Cette thèse propose des modèles enrichis progressivement afin d'inclure les physiques principales et une discrétisation spatiale par éléments finis. Afin de réduire les temps de calculs, les modèles éléments finis thermomécaniques sont réduits avec les méthodes appropriées. Les méthodes de résolution ont été comparées et ont montré des résultats concordants avec la littérature. De plus, pour un jeu de paramètres judicieusement choisis, la survitesse peut être limitée. Il a même été possible de prédire une réponse en précession inverse, qui est connue pour engendrer des efforts et vibrations très élevés. Des difficultés à identifier le moment de déclenchement cette instabilité ont été rencontrés mais corrigés en introduisant de la flexibilité au système. Enfin, la vitesse de rotation élevée conjointe aux efforts de contact importants provoque une forte génération de chaleur aux points de contact telle que la température de fusion est atteinte en cours de simulation.

Mots clés : turbine, survitesse, contact unilatéral, rotor-stator, frottement, thermomécanique, transitoire, non-linéaire, réduction, domaine temporel

Thermomechanical transient dynamics of rotor-stator contact in labyrinth seals**Abstract**

Gas generators are commonly used to power airplanes and helicopters and always perform the compression-combustion-expansion stages. The burnt gases drive the turbine which, in turn, powers the compressor through the rotorshaft. Occasionally, some parts of the shaft may fail so that the turbine and compressor stages are no longer coupled. As a result, the turbine may enter a freewheeling configuration and initiate an uncontrolled acceleration leading to the disc burst. In helicopter engines, the turbine undergoes a seizure without hazardous effects. An analysis of these engines revealed the emergence of intense rotor-stator rub within the labyrinth seal and sharp rise in temperature. The present thesis is motivated by the need to predict the rotor speed transient accurately. Although the literature is extensive about rotordynamics accounting for unilateral contact occurrences with friction, the combination of the dynamic response with unknown rotational speed and thermomechanical coupling remains a topic to be explored. The present work proposes to solve the thermomechanical problem in the time domain by strictly respecting contact conditions through Lagrange multipliers. The solution algorithms are rewritten to fit the highly non-linear system due to gyroscopic effects. This doctoral research presents models progressively enriched with physics of interest. In order to reduce the computation time, reduction methods are applied to finite elements models accordingly. The resolution methods were compared and showed results in line with the literature. It turned out that overspeed could be limited for a carefully chosen set of parameters. It was even possible to predict a response in dry whip, which is known to generate very high stress and vibration levels. Difficulties in identifying the moment of triggering were encountered, but tackled by introducing flexibility into the system. Finally, the high rotation speed combined with the high contact forces resulted in high heat generation at the contact interface, to the point that melting temperature was reached during simulation.

Keywords: turbine, overspeed, unilateral contact, rotor-stator, friction, thermomechanics, transient, non-linear, reduction, time domain

Remerciements

Je n'ai pas d'espoir de sortir par moi-même de ma solitude. La pierre n'a pas d'espoir d'être autre chose que pierre, mais en collaborant elle s'assemble et devient Temple.

Antoine de Saint-Exupéry

Changer de cap, naviguer à vue et croire en soi pour espérer apporter une contribution proche des espérances. C'est le chemin qui attend le chercheur et qui demande une grande capacité d'adaptation et d'esprit critique. Ces trois années de thèse ont été formatrices d'une nouvelle façon de penser et de juger son travail, soi-même, et ce monde dans lequel on ne fait que passer. J'ai fini par comprendre que pour trouver les bonnes réponses, il faut avant toute chose se poser les bonnes questions et identifier ses besoins, les priorités, pas à pas. Oui, la thèse est un long chemin, où l'on a souvent envie de courir pour tenter de rattraper le temps qui nous manque, de lutter contre cette sensation de retard. Il m'aura fallu apprendre à apprécier les résultats qui étaient obtenus, aussi minces soient-ils, et cela surtout au début du parcours où l'on place tellement d'attentes. Au cours de ces trois années, j'ai appris la patience, la résilience, et à plus me fier à mes compétences, que les autres sont parvenus à voir en moi. Je me suis également rendue compte que la solitude, qui est source d'appréhensions pour de nombreux jeunes doctorants, est une illusion. C'est vrai, le progrès et les solutions arrivent lorsque l'on s'impose une certaine discipline de travail et d'autonomie. Mais tout au long de mon parcours étudiant, je n'ai jamais été seule en réalité. Maintenant que mes études arrivent (enfin !) à leur terme, je ne peux m'empêcher de regarder derrière moi et d'être touchée par la quantité de personnes qui m'ont accompagnée, guidée et soutenue.

Tout d'abord, je tiens à remercier mes directeurs de thèse, Pr. Mathias Legrand à McGill, et Pr. Fabrice Thouverez à Centrale Lyon. Mathias m'a été d'une grande aide pour mon arrivée à Montréal malgré les contraintes liées au confinement. Son expertise sur la théorie du contact unilatéral et la rédaction d'articles ont été très précieuses dès le début de la thèse, ce qui a grandement facilité le travail jusqu'à aujourd'hui. La seconde moitié de la thèse sur Lyon a été très agréable et enrichissante aux côtés de Fabrice. J'ai énormément apprécié son investissement et sa disponibilité en cas de questions et de discussions, quitte à refaire les développements au tableau si besoin. Ce doctorat en collaboration avec Safran Helicopter Engines m'a aussi permis de travailler aux sein du service Méthodes et Outils avec Patricio Almeida. Je le salue pour m'avoir accompagnée dans ce travail à cheval entre industrie et recherche qu'il connaît si bien. Ensuite, je remercie mes rapporteurs Patrice Cartraud et Jean-François Brunel d'avoir accepté de réviser ce manuscrit, ainsi que Thouraya Baranger pour avoir été la présidente de jury.

Chacune des institutions dans lesquelles j'ai travaillé a aussi donné l'occasion de rencontrer des personnes formidables. Au Canada, je pense à David, TianZheng et Wendy. Mention

spéciale pour David et au Pr. Vincent Acary pour la prise en main de SICONOS. Le covid a aussi prolongé mon séjour à Bordes et les collègues du début auront été une source de soutien jusqu'au bout. Merci à Loïc et à Anthony pour leur aide sur le codage entre python et ANSYS. Je n'oublie pas non plus Jérôme, Julien, Camel, Olivier et Clément pour leur accueil dans l'entreprise, leur bonne humeur et leurs débats animés sur le rugby. Côté lyonnais, j'aimerais également remercier la fine équipe de l'open space du G8 : Samuel, Thibaut, Hugo, Soufiane et Giorgia. Nos conversations sur les simus, la langue française, les "boomerangs" et le tiramisu resteront inoubliables. J'insiste notamment sur les conseils de Thibaut sur la vie au Canada, la maîtrise du tikz, et Giorgia, dont les sorties entre filles me manquent déjà et auront été un véritable plaisir, da rifare!

Pour terminer, j'ai une profonde pensée pour ceux qui étaient présents au quotidien. Je veux remercier de tout mon coeur Giulio, qui est arrivé exactement le même jour que le début de thèse. Même à l'autre bout du monde, son regard de doctorant a été un véritable atout pour relever des défis techniques, mais aussi pour apaiser mes doutes, et surtout, pour toujours voir le côté positif et célébrer les réussites. Sa bienveillance et ses encouragements ont été ma force. Enfin, je ne peux conclure que par ceux qui m'ont guidé depuis mes premiers pas, depuis les sorties d'école à Bruxelles, en passant par Toulouse, le Québec, Lyon et bientôt Pau. Merci infiniment à mon frère Loïc Jacobs et à ma tendre maman Fabienne Papazian. Sa dévotion et ses sacrifices pour nous apporter les meilleures conditions de vie et d'étude nous honorent et je lui en serai à jamais reconnaissante. Sans elle, je n'aurais jamais pu m'envoler aussi loin. Notre vie n'aura jamais été simple, les moments de calme si rares. Je suis extrêmement fière de vous avoir dans ma vie et de m'avoir appris à toujours choisir le bien plutôt que la facilité.

Table des matières

Résumé	ix
Remerciements	xi
Table des matières	xiii
Introduction Générale	1
Contexte	1
Organisation de la thèse	1
I Rupture d'arbre et survitesse	5
1 Cycle moteur	5
2 Structure d'un moteur d'hélicoptère	7
3 Cas historiques	9
4 Origines de la survitesse	11
5 Revue des méthodes de limitation de survitesse	12
6 Présentation du problème et objectifs	15
II Contact rotor-stator	17
1 Dynamique d'arbre en présence de contact	17
1.1 Phénomènes observés	17
1.2 Facteurs influents sur la précession	19
1.3 Modélisation et équations du mouvement dynamique des rotors	23
2 Contact unilatéral frottant	29
3 Couplages thermomécaniques	31
3.1 Equation de la chaleur et discrétisation spatiale	31
3.2 Introduction à l'usure	33
3.3 Calcul de la puissance de friction	34
4 Résolution temporelle	35
5 Traitement des contraintes de contact	37
5.1 Méthode des pénalités	37
5.2 Multiplicateurs de Lagrange : contrainte en déplacement	37
5.3 Mécanique non-régulière : contrainte en vitesse	39
5.4 Contraintes simultanées en position et vitesse	42
5.5 Gestion du frottement dans la résolution numérique	42
6 Bilan du chapitre	45

III Réduction de modèle	47
1 Création de super-éléments	47
1.1 Réduction de Guyan	48
1.2 Réduction de Craig-Bampton	49
1.3 Méthode de Krylov	49
1.4 Limitations des modèles multi-physiques	54
2 Symétrie cyclique	55
3 Maillages hybrides	56
4 Bilan du chapitre	57
IV Modèle rigide	59
1 Géométrie simplifiée et hypothèses	59
2 Equations générales du mouvement de la turbine	60
2.1 Repères et degrés de liberté	60
2.2 Equations de Lagrange	63
3 Résolution du contact frottant	64
3.1 Présentation du modèle	64
3.2 Calcul du jeu et directions des efforts de contact	65
3.3 Algorithme de Carpenter adapté pour système non-linéaire	67
3.4 Algorithme de Moreau-Jean pour système lagrangien non-linéaire	70
3.5 Siconos : introduction et utilisation	77
3.6 Synthèse	79
4 Résultats	79
4.1 Données numériques	79
4.2 Analyse modale	80
4.3 Cas de référence	81
4.4 Influence du coefficient de frottement	85
4.5 Influence de la raideur du support du stator	91
4.6 Masse du stator	94
5 Application avec stator assemblé	97
6 Bilan du chapitre	103
V Contact avec rotor rigide et stator flexible	105
1 Présentation du modèle stator	106
1.1 Géométrie retenue	106
1.2 Mécanique des milieux curvilignes	107
1.3 Discrétisation spatiale par éléments finis	108
2 Validation du modèle	109
2.1 Anneau libre	109
2.2 Anneau avec diffuseur et distributeur	109
2.3 Amortissement	111
2.4 Fonction de réponse en fréquence	113
3 Problème thermomécanique	114
3.1 Ecriture matricielle de l'équation de la chaleur	114
3.2 Test excitation nodale thermique	115
4 Algorithme de contact	117
4.1 Calcul du jeu	117
4.2 Vecteurs des contributions normales et tangentielles	119
4.3 Contribution du contact à l'équation de la chaleur	120
4.4 Adaptation pour l'approche multipoints de contact	120

5	Simulation pour un rotor à déplacement imposé	122
5.1	Hypothèse d'un seul point de contact	122
5.2	Hypothèse multipoints de contact	124
6	Résultats	127
6.1	Sans dilatation thermique	127
6.2	Influence du coefficient de frottement	132
6.3	Raideur et nombre de vis	136
6.4	Géométrie de l'anneau	139
6.5	Avec dilatation thermique	139
7	Bilan du chapitre	143
VI	Application industrielle	145
1	Modèle carter : géométrie et composants	145
2	Réduction thermomécanique du carter	147
2.1	Paramétrisation de la réduction mécanique	147
2.2	Paramétrisation de la réduction thermique	149
2.3	Nombre de nœuds maîtres	153
3	Turbine flexible à section constante	155
3.1	Mécanique du solide en milieu continu	155
3.2	Equations pour le disque rigide	156
3.3	Discrétisation de l'arbre par éléments finis	157
3.4	Matrices de masses et d'inertie	158
3.5	Terme gyroscopique	159
3.6	Synthèse des équations dynamiques	160
3.7	Analyse modale	161
4	Conditions initiales	162
5	Résultats rotor à section constante	162
5.1	Solution mécanique et convergence en temps	163
5.2	Solution thermomécanique et nombre de nœuds maîtres	169
5.3	Réponse sans torsion	174
6	Application : modèle de turbine sous ANSYS	175
6.1	Géométrie et propriétés	175
6.2	Résultats mécaniques	176
6.3	Résultats thermiques	181
7	Bilan du chapitre	183
	Conclusion	185
	Bilan des travaux	185
	Perspectives	187
	Bibliographie	189
A	Rupture de tirant dans les moteurs d'hélicoptère	201
B	Calcul de la matrice jacobienne selon l'approche de Broyden Levenberg	203
	Différence finie directe	203
	Mise à jour de la matrice jacobienne	203
C	Matrices élémentaires poutre courbe	205

D	Equation de la chaleur unidimensionnelle dans une barre	207
1	Solution analytique	207
2	Solution numérique	209
E	Matrices de masse et raideur élément de poutre droite de Timoshenko	211
1	Matrices de masse et d'inertie	211
2	Matrices gyroscopiques	211
3	Matrice de raideur	212
	Liste des tableaux	213
	Table des figures	215

Introduction Générale

Contexte

L'étude du contact rotor-stator représente tout un volet de la recherche sur la dynamique des machines tournantes. Le contact est une physique fondamentalement non-linéaire et de nombreux travaux y sont dédiés, entre autres pour caractériser la réponse vibratoire par sollicitations avec un balourd, qu'il soit intentionnel ou accidentel. Cette thèse a été réalisée en collaboration avec Safran Helicopter Engines et est consacrée à l'étude de la rupture d'arbre dans un générateur de gaz et de la phénoménologie du contact rotor-stator lorsque la turbine n'est plus reliée au compresseur. Dans cette configuration de turbine seule, il est attendu que le contact qui survient en premier se situe au niveau d'un joint d'étanchéité, aussi appelé joint labyrinthe, qui consiste en plusieurs dents annulaires confinées dans une enveloppe circulaire. Davantage de détails sur le contexte industriel sont disponibles en Annexe A. Dans la plupart des travaux, la vitesse de rotation est constante, ou du moins une donnée connue en fonction du temps. Dans, cette thèse, le transitoire sur la vitesse de rotation est une inconnue essentielle à déterminer. Elle est pilotée par le bilan entre le couple moteur, lié l'entraînement des aubes par les gaz brûlés, et le couple résistant dû au frottement. A cette dynamique déjà non-linéaire en absence de contact, s'ajoute les autres physiques, comme la thermique, qui sont couplées à la mécanique par la génération de chaleur liée au frottement, l'usure ou la dilatation thermique. Si plusieurs travaux expérimentaux sont consacrés à la thermomécanique, traiter ce problème numériquement, qui plus est à vitesse de rotation inconnue, relève encore du défi. En effet, la rupture d'arbre est caractérisée par une dynamique rapide, contrairement à la thermique, et il est délicat d'inclure tous les effets thermiques dans un seul outil. C'est pourquoi des précautions doivent être considérées afin de garantir à la fois la stabilité des calculs, leur précision et un coût en temps faible.

Organisation de la thèse

Le présent travail doctoral est entièrement consacré au développement d'un outil numérique qui permet de simuler une rupture d'arbre ou tirant moteur. Le premier objectif est de pouvoir identifier le transitoire de la vitesse de rotation et les jeux de paramètres adéquats afin qu'elle reste bornée à la limite autorisée pour l'intégrité du moteur. En second lieu, il faut être capable de quantifier la distribution de température sur les pièces en contact puisqu'une forte génération de chaleur est attendue. Cette analyse permettrait d'identifier les phénomènes mis en jeu et de proposer une ligne de conduite pour de futures applications industrielles. Cette thèse est constituée de six chapitres qui présentent plus en détails le contexte de l'étude, l'état de l'art ainsi que les différents modèles développés de façon incrémentale.

Le Chapitre I est dédié à la description du scénario de rupture d'arbre. Il décrit les cas historiques survenus dans des moteurs d'avion afin de mieux comprendre les motivations de cette étude. Les moyens pour limiter la survitesse y sont également présentés en mettant l'accent

sur les mécanismes de contact.

Le Chapitre II propose un état de l'art sur le contact rotor-stator. Pour commencer, les réponses vibratoires observées via des essais et des modèles, sont décrites, en particulier les types de précession et les paramètres influents. Ensuite, les hypothèses de modélisation de la thermique et de la mécanique sont présentées, y compris pour un système tournant. Les équations sont discrétisées en espace par la méthode des éléments finis et les alternatives de modélisation des efforts de contact unilatéral et de frottement sont comparées. Dans cette thèse, les contraintes de contact sont strictement satisfaites via l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange. A ce stade, les équations du mouvement sont seulement discrétisées en espace et plusieurs méthodes de résolution temporelles peuvent être employées pour former des algorithmes de résolution disponibles dans la littérature. Le premier algorithme retenu est celui de Carpenter, qui est une méthode explicite, facile à implémenter et éprouvée avec des cas d'étude numériques en adéquation avec des essais. L'algorithme de Moreau-Jean est aussi retenu. Il est basé sur la dynamique non-régulière et garantit la stabilité des calculs pour un pas de temps plus faible compte tenu de son caractère implicite. La plupart des travaux disponibles dans la littérature partent du principe que le contact est toujours glissant à l'interface pour la gestion de la force de frottement. Cette hypothèse n'est pas garantie à ce stade précoce de l'étude de la rupture d'arbre. Afin de traiter la phase du frottement à vitesse de glissement nulle dans la loi de Coulomb, plusieurs approches existent comme la régularisation, mais qui reste une approximation. La méthode retenue part de la formulation du frottement dans le cône de Coulomb et permet d'appliquer des outils mathématiques rigoureux issus de l'analyse convexe.

Lorsque le problème est discrétisé par éléments finis, la taille du système peut devenir considérable, allant de plusieurs dizaines de milliers au million de degrés de liberté. Pour des applications industrielles, le temps et la puissance de calcul requis pour résoudre un tel système sont prohibitifs. C'est pourquoi des méthodes de réductions sont mises en place et développées dans le Chapitre III. L'approche la plus adaptée et aboutie pour une structure axisymétrique tournante est la sous-structuration, aussi connue comme super-élément. Elle s'accompagne d'une perte d'information et le type de sous-structuration doit être choisi avec précaution en fonction de la physique étudiée. Pour un problème thermomécanique, l'approche privilégiée est celle développée pendant la thèse de Nicolas Guérin [79] qui combine une réduction découplée, faisant appel à la méthode de Craig-Bampton [45] pour la mécanique et celle de Rational Craig Hale pour la thermique.

Une fois tous les pré-requis assimilés, cette thèse propose plusieurs modèles rotor-stator dont la complexité et la prise en compte de physiques est enrichie au fur et à mesure. Le premier modèle, développé au Chapitre IV, implique des corps parfaitement rigides et la thermique est ignorée. L'objectif est de pouvoir identifier la réponse dynamique dans un premier temps et de la vérifier sur un système à très peu de degrés de liberté. Ce premier cas d'étude permet aussi d'illustrer les adaptations des algorithmes de contacts nécessaires pour pouvoir traiter un système lagrangien non-linéaire. On rappelle que la non-linéarité des équations du mouvement est d'ores et déjà présente à cause de la vitesse de rotation inconnue. Une étude de sensibilité est également réalisée et démontre qu'il est possible de limiter la survitesse lorsque le coefficient de frottement et/ou la raideur des supports augmentent, ou que la masse du stator diminue.

Le Chapitre V introduit la flexibilité au système en modélisant le stator avec des éléments de poutre de Bernoulli courbes tandis que le rotor reste rigide. Les supports du stator sont aussi approchés sous forme de ressorts à partir du véritable assemblage du carter. Le modèle tient également compte de la thermique qui est résolue sur la fibre neutre de la poutre. Plusieurs approches de gestion du contact, avec un seul ou plusieurs points de contact, sont comparées et permettent de sélectionner la seconde. L'analyse de sensibilité est approfondie et l'effet de la

dilatation thermique est étudié.

Enfin, le Chapitre VI propose une application industrielle, où l'ensemble du carter assemblé est pris en compte dans la modélisation de la structure statique. La géométrie est simplifiée afin de limiter la taille du maillage mais reste fidèle à la réalité. La méthode de réduction thermomécanique issue du chapitre trois est appliquée et sa paramétrisation est optimisée. Le rotor est lui aussi modélisé comme flexible au moyen d'éléments de poutre de Timoshenko, conformément aux procédures industrielles en dynamique de ligne d'arbre. Les résultats sont analysés sur base de ceux produits par les deux modèles précédents.

Chapitre I

Rupture d'arbre et survitesse

Sommaire du présent chapitre

1 Cycle moteur	5
2 Structure d'un moteur d'hélicoptère	7
3 Cas historiques	9
4 Origines de la survitesse	11
5 Revue des méthodes de limitation de survitesse	12
6 Présentation du problème et objectifs	15

1 Cycle moteur

Les moteurs à générateur de gaz sont communément utilisés afin de motoriser les avions ainsi que les hélicoptères. Ils peuvent présenter des topologies variées mais qui peuvent toujours être synthétisées par trois régions principales par lesquelles passe l'écoulement d'air primaire. En effet, un générateur de gaz fournit de l'énergie au moteur en réalisant un cycle thermodynamique de compression, de combustion, puis de détente, comme schématisé en Figure I.1. La compression et la détente sont effectuées par un ou plusieurs étages de roues aubagées, respectivement appelés compresseurs et turbines. Ce cycle thermodynamique ouvert est largement développé dans la littérature [30, 34] sous le nom de cycle de Joule ou de Brayton et se conclut par une quatrième phase d'éjection des gaz brûlés et un débit d'air frais à l'entrée des compresseurs. En négligeant les pertes, l'énergie issue de la combustion Q_{th} est divisée en deux parties.

- La première W_c correspond à l'énergie nécessaire pour entraîner le ou les compresseurs et entretenir le cycle. Cette énergie mécanique est fournie au compresseur par un (ou plusieurs) arbre connecté à la turbine. A l'équilibre, La puissance associée \dot{W}_c est égale à la puissance motrice de la turbine $\dot{W}_t = \Omega \tau_a$, avec Ω qui définit la vitesse de rotation de l'arbre et τ_a le couple issu de l'aérodynamique.
- Le reste de l'énergie est un bénéfice net W_{net} issu du générateur de gaz et qui sert au bon fonctionnement du moteur. Il intervient dans le calcul du rendement thermique du moteur, défini comme le ratio du travail net sur la chaleur totale fournie pendant la combustion [128]

$$\eta = \frac{W_{\text{net}}}{Q_{\text{th}}}. \quad (\text{I.1})$$

L'arbre, qui permet la transmission d'énergie mécanique de la turbine vers le compresseur, n'est pas une pièce d'un seul tenant. Il est monté au moyen de plusieurs pièces emboîtées

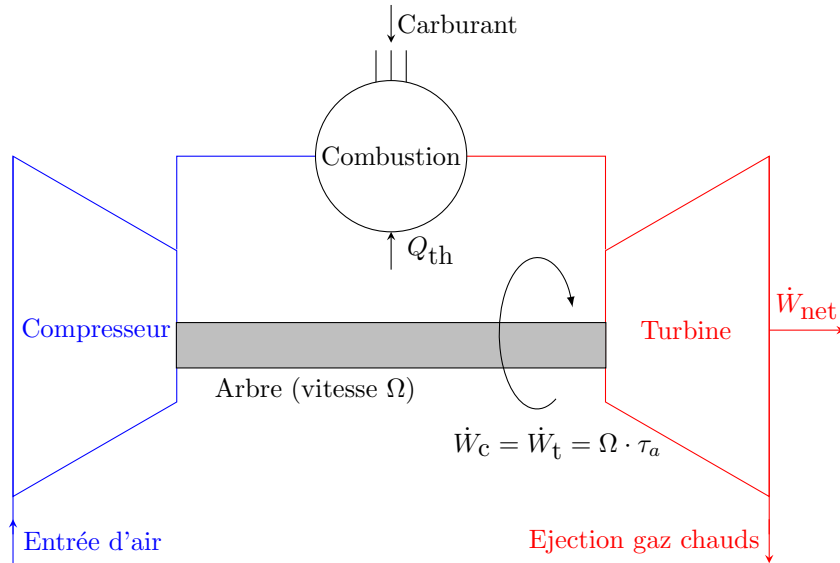


FIGURE I.1 – Cycle de générateur de gaz (Brayton ouvert) en fonctionnement nominal

les unes dans les autres le long d'un tirant et qui sont serrées aux extrémités par des écrous pour garantir l'assemblage. Il arrive qu'une de ces pièces subisse une défaillance, ce qui ne garantit plus le couplage mécanique des parties de l'arbre. Si tel est le cas, le système n'est

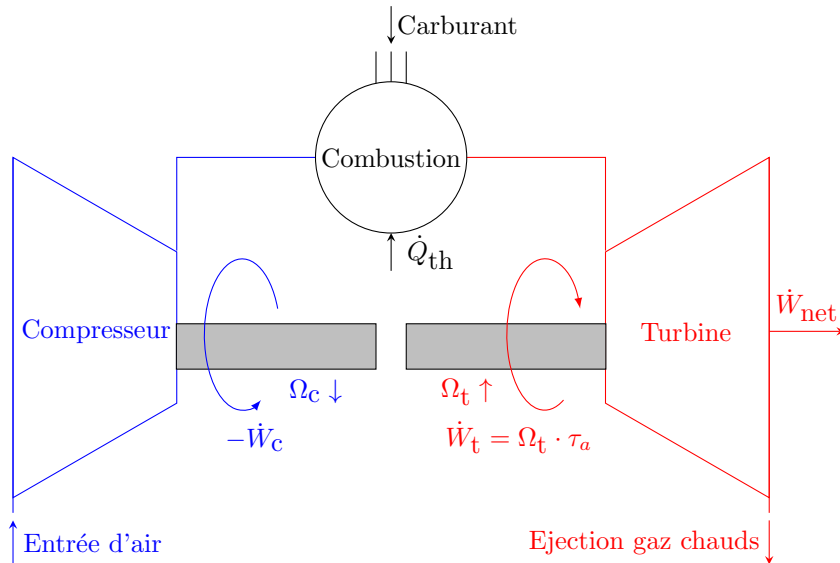


FIGURE I.2 – Etat du système lors d'un scénario de rupture d'arbre

plus à l'équilibre, comme illustré en Figure I.2. Le compresseur n'est plus relié à la turbine et décélère librement. De plus, il n'est plus en mesure de freiner la turbine qui accumule toujours de l'énergie mécanique W_t puisqu'elle est encore entraînée par les gaz chauds et la vitesse de la turbine Ω_t augmente. Il s'agit d'un scénario opérationnel appelé rupture d'arbre (*shaft failure*) [82, 121] ou encore « perte de charge » (i.e. *loss of load* [144]). Le terme « charge » est à comprendre ici comme un système qui nécessite d'être connecté à une source d'énergie pour fonctionner¹. Dans le cas présent, la charge mécanique correspond au compresseur qui subit le

1. Il s'agit d'un terme couramment employé en génie électrique [92]

travail résistant de l'air frais $-W_c$. Il s'agit d'un cas de situation accidentelle qui peut mener à une accélération non-contrôlée de la turbine. Si cette survitesse n'est pas maîtrisée rapidement, les dommages causés au moteur peuvent mettre en péril la navigabilité de l'avion. A des fins de certification auprès de l'EASA (*European Aviation Safety Agency*), les motoristes doivent fournir des preuves de respect d'un des deux critères suivants [35]

- « La rupture d'arbre est un événement classifié comme *extrêmement peu probable* ». Cela implique de pouvoir montrer que la probabilité d'apparition de cet événement est inférieure au plafond défini par l'EASA. Or ce n'est pas le cas [144].
- « La rupture d'arbre ne doit pas mener à des effets dangereux. Cette affirmation doit alors être justifiée par des tests démonstratifs ou en convenant que les conséquences sont facilement prévisibles » [36].

Ainsi, l'objectif des motoristes est de mettre au point des outils de simulation et d'implémenter des modèles phénoménologiques permettant d'étudier une rupture d'arbre. Ces outils doivent être capables de reproduire les observations de ce type de défaillance rapportées dans les retours en service.

2 Structure d'un moteur d'hélicoptère

De manière générale, le moteur se situe au-dessus de la cabine et de l'habitacle de l'hélicoptère, au plus proche des pales comme indiqué en Figure I.3 pour un Airbus Helicopter H160 .



FIGURE I.3 – Localisation du moteur sur hélicoptère (Airbus H160)

L'architecture d'un moteur d'hélicoptère est proposée en Figure I.4. A titre d'exemple, il s'agit du RTM-322 produit par Safran Helicopter Engines. Il équipe une majorité des EH101/AW101 Merlin de Leonardo et des NH90. L'écoulement d'air principal entre d'abord dans le générateur de gaz (bleu). Les compresseurs consistent en une succession de rouets et d'aubages statiques, appelés redresseurs (ou diffuseur pour les compresseurs centrifuges). Il en est de même pour les turbines, à la différence que les aubes fixes (i.e. les distributeurs) sont situés en amont des roues. Ces composants sont schématisés dans l'agrandissement réalisé en Figure I.5. En aval du générateur de gaz, il est courant dans les moteurs d'hélicoptères d'avoir un ou plusieurs étages de turbine qui permettent de récupérer l'énergie excédentaire des gaz brûlés (jaune). Ces turbines sont dites *libres* lorsqu'elles sont montées sur un arbre indépendant à celui du générateur de gaz. Les composants de turbines libres ne sont pas concernés par les présents travaux et sont donc éliminés des modèles. La rotation des pales de l'hélicoptère est

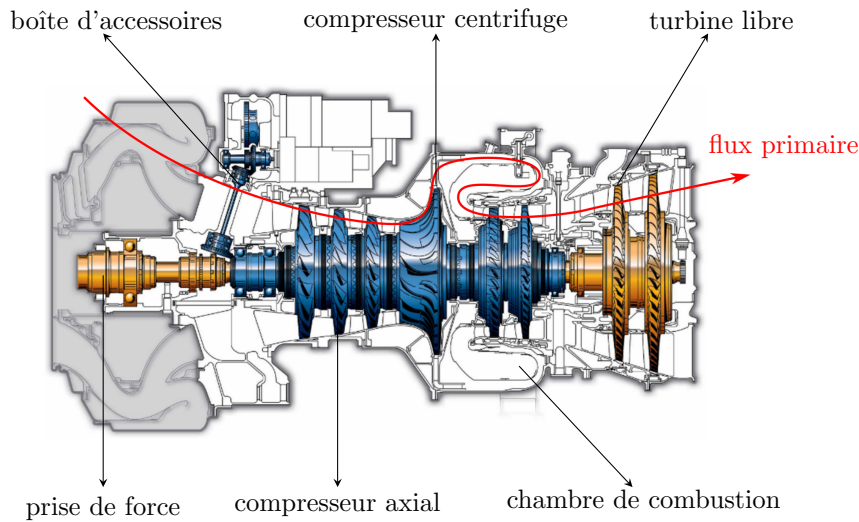


FIGURE I.4 – Coupe moteur RTM-322 avec mise en évidence du générateur de gaz (■) et de la turbine libre (■)

assurée par la boîte de transmission qui est absente du schémas. En revanche cette dernière est connectée au moteur au moyen de la prise de force en amont du générateur de gaz.

En plus des trois zones principales de compression, combustion et détente du flux primaire,

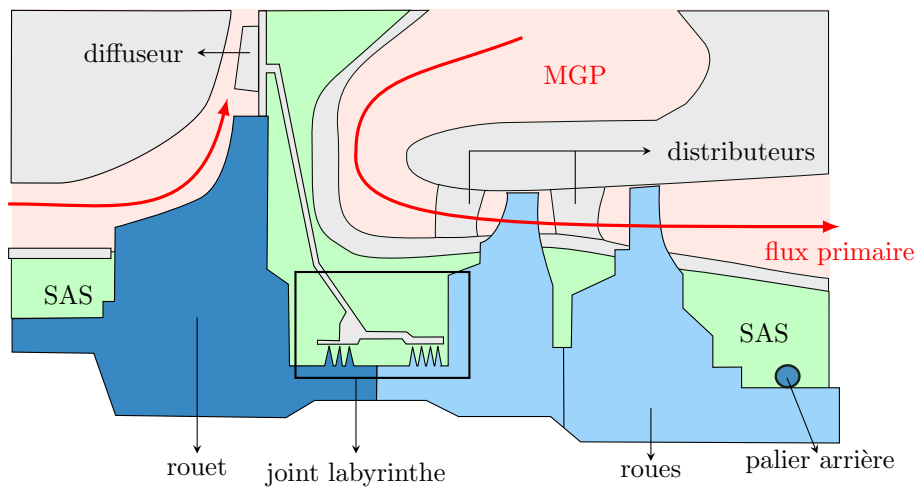


FIGURE I.5 – Schémas simplifié du générateur de gaz avec le compresseur centrifuge (■), les 2 étages de turbine HP (■) et le carter (■). Identification des zones d'air : Main Gas Path (■) et le SAS (■) ainsi que les composants principaux situés dans le SAS comme les paliers et les joints labyrinthes.

il existe une quatrième zone d'intérêt dans cette thèse appelée système d'air secondaire (SAS). Il s'agit d'un réseau complexe de poches et de cavités dans lequel les disques des turbomachines sont immergés. Il est mis en évidence en Figure I.5 qui consiste en un agrandissement de la coupe moteur réalisée au niveau du générateur de gaz allant du compresseur centrifuge au dernier étage turbine. On constate que le SAS est le plus isolé possible de l'écoulement primaire (ou MGP pour *Main Gas Path*) afin d'éviter les fuites qui affectent le rendement moteur.

En plus des disques, les paliers ainsi que des joints d'étanchéité sont situés dans le SAS.

C'est notamment le cas du joint labyrinthe (cf Figure I.6) qui nous intéresse dans cette thèse. Ses rôles principaux sont de contrôler le flux d'air de refroidissement ainsi que de garantir un équilibre en pression le long de l'arbre [49]. L'étanchéité de ces joints est garantie par la présence de plusieurs dents annulaires, même si il existe toujours un jeu résiduel s'élevant à quelques centaines de microns entre la tête des dents et l'enveloppe du labyrinthe. Ces dents sont des étranglements qui obligent l'écoulement à accélérer et à former des tourbillons dans les différentes chambres, ce qui provoque des pertes de charges importantes et une dissipation de l'énergie du fluide [154]. Ce type de joints n'est pas exclusivement situé en pieds de disques de turbine. Les compresseurs en sont également dotés, comme le montre la Figure I.5.

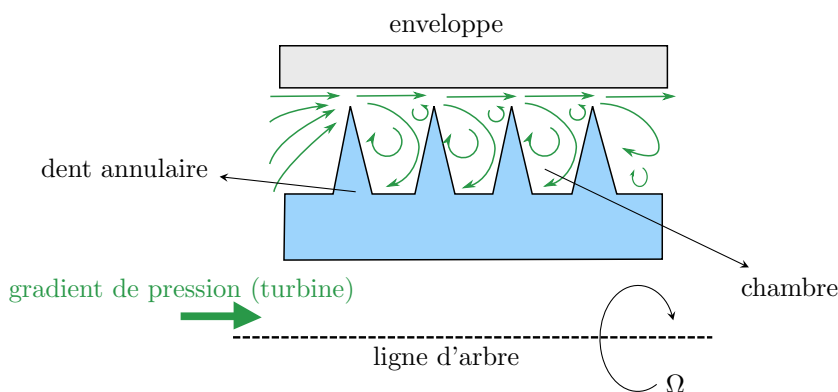


FIGURE I.6 – Propriété d'étanchéité d'un joint labyrinthe : application côté turbine

En cas de rupture d'arbre, il est avéré que le jeu entre les dents et l'enveloppe est consommé et que des contacts rotors stator sont amorcés. Le déroulement d'un tel scénario pour le cas particulier du moteur d'hélicoptère est décrit plus en détails dans la Section I.6. Avant toute chose, il faut justifier et comprendre l'importance d'étudier la rupture d'arbre. Plusieurs cas d'école sur avion sont présentés dans la section suivante afin d'en illustrer les conséquences pour l'intégrité du moteur et le bon déroulement du vol [68, 144].

3 Cas historiques

En 2008, un moteur Pratt & Whitney monté sur un Boeing 737-217 a subi une rupture d'arbre en cours de vol menant à un départ de feu [132]. Cependant, aucun éclatement du disque turbine n'a été constaté et tous les débris sont restés confinés dans le carter moteur. Il s'est avéré qu'une usure anormale d'un roulement à bille, dont l'origine reste inconnue, a provoqué une flexion de l'arbre de l'étage basse pression. Le contact avec les parties statiques avoisinantes a alors provoqué une rupture ductile de l'arbre. Des débris ont perforé un réservoir d'huile de lubrification qui, combiné avec la chaleur, a démarré le feu. C'est le grippage de boulons de serrage causé par le recul du disque qui a limité la survitesse.

En 2006, un Boeing 767-223(ER) d'American Airlines effectuait un test de maintenance de montée en puissance [24] au sol. Ici, il ne s'agit pas d'un cas de *loss of load* mais d'éclatement de disque turbine. Une photo du moteur ainsi qu'un schéma de l'accident est illustré en Figure I.7. Lors de la 2^{ème} montée en régime, le moteur droit a éjecté des débris du disque de l'étage haute pression avec trois morceaux principaux : le premier a rebondi au sol et a fini dans la nacelle gauche. Le second a été retrouvé encastré dans le fuselage tandis que le 3^{ème} a été propulsé 700m plus loin après avoir traversé deux pistes et un taxiway. D'autres débris ont perforé l'un des réservoirs de carburant causant un départ de feu. Le disque avait été inspecté et déclaré comme conforme au cahier des charges de matériau. Cependant, une analyse des

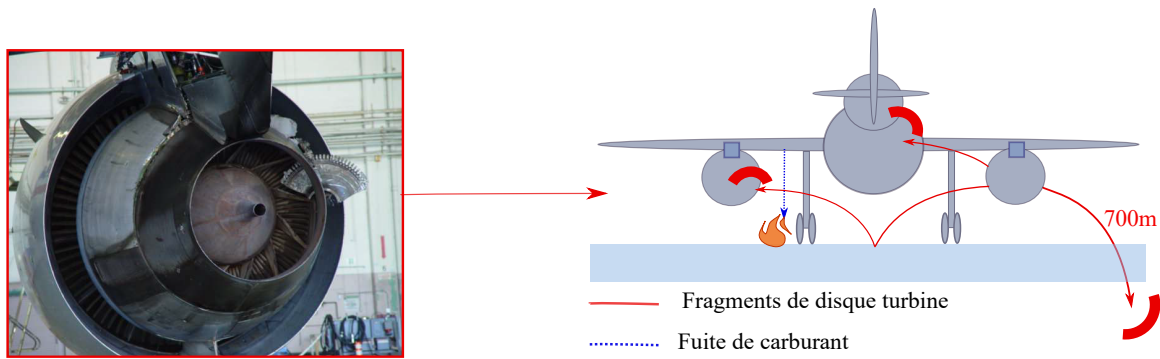


FIGURE I.7 – Boeing 767-223(ER) d'American Airlines (2006) [24]

débris a montré que celui-ci s'était rompu du bord vers l'alésage à cause d'une bosse dans une encoche d'aube. Ainsi, l'éclatement du disque dans un moteur peut survenir pour différentes raisons.

Un autre évènement survenu en 2010 a été rapporté dans [86] impliquant l'étage de pression intermédiaire (IP) d'un moteur Trent900 monté sur un A380 de Qantas Airways. Ce dernier a également subi un non-confinement de débris en plein vol déclenchant une multitude de défaillances comme un endommagement sévère de la nacelle (voir Figure I.8), des trous dans la voilure de l'aile gauche et des câbles sectionnés. La chute des débris a même endommagé des bâtiments et des maisons au sol. Encore une fois, l'équipage est parvenu à faire atterrir l'avion

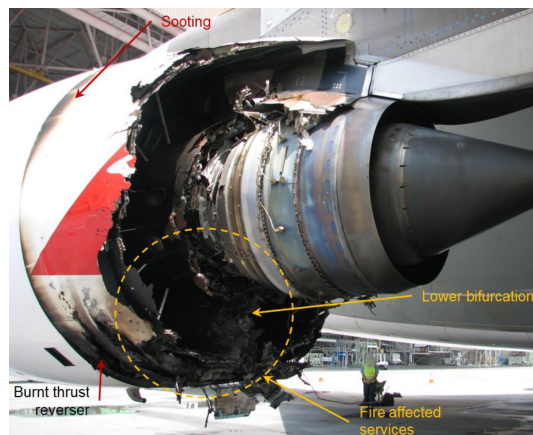


FIGURE I.8 – Endommagement de la nacelle gauche de l'Airbus A380 de Qantas Airways [86]

en urgence sans causer de blessés. Le déroulement de la défaillance est détaillé en Figure I.9. Il s'est avéré qu'un tuyau désaligné dans le système d'huile a provoqué une fuite dans une zone plus chaude et sous haute pression. L'huile est entrée dans des conditions d'allumage spontané et le départ de feu a mené à une rupture ductile de l'arbre de l'étage intermédiaire. Compte tenu du gradient de pression axial, la roue aubagée a reculé et est entré en contact à deux niveaux entre le disque et la plateforme de l'étage basse pression en aval. Cependant, la quantité de matière à éliminer était trop importante pour arriver à un contact axial aube-carter, aussi dénommé *blade tangling*. De plus, bien que le compresseur haute pression (HP) et intermédiaire (IP) soient entrés en pompage, ces derniers ont récupéré et n'ont pas suffisamment réduit le taux de compression pour dégrader les performances du moteur. Par conséquent, le disque intermédiaire est entré en survitesse non-contrôlée, ce qui a conduit à son éclatement.

Enfin, deux autres cas sont survenus en 2003 lors de phases de développement moteur chez

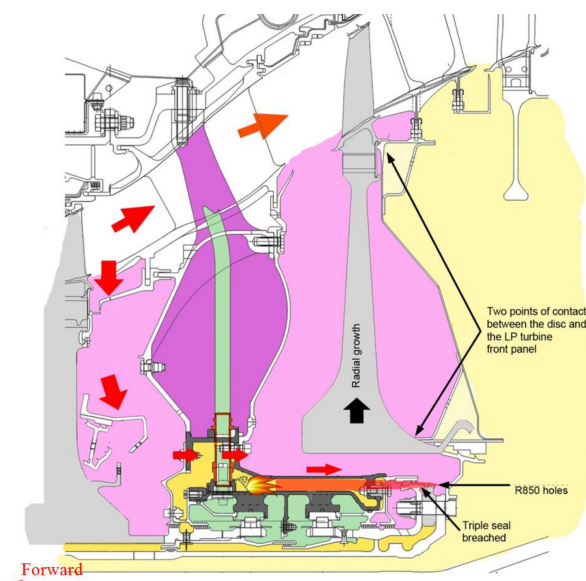


FIGURE I.9 – Localisation des touches entre disque IP (*Intermediate Pressure*) et le redresseur de l'étage LP (*Low Pressure*) du TRENT900 [86]

Rolls Royce. Ils ont été utilisés comme cas référence dans [129] afin d'expliquer les causes et conséquences de la rupture d'arbre. Dans ces deux scénarios, aucun éclatement de disque ne s'est produit et le moteur a ralenti sans conséquences dangereuses, soit grâce à un pompage non-récupéré, soit par contact frottant avec des pièces en aval de la turbine.

4 Origines de la survitesse

Les exemples ci-dessus expliquent surtout comment une rupture d'arbre peut amener à la survitesse, voire au non-confinement de débris à haute énergie, et ce pour n'importe quel étage du moteur. Néanmoins, il faut souligner que des événements autres que la rupture d'arbre peuvent être responsables d'une survitesse. En effet, Nozhnitsky & al. [121] ont également mentionné la possibilité d'une erreur dans le système de contrôle du moteur, en particulier lorsque que le débit carburant dépasse la quantité souhaitée. (i.e. scénario de *fuel overflow*). Une défaillance de la boîte de vitesse entre le moteur et sa charge (les pales d'un hélicoptère par exemple) peut aussi être à l'origine d'une vitesse de rotation élevée.

Les origines de la rupture sont diverses et variées. On peut notamment citer un défaut matériau, d'usinage ou assemblage. McCarthy [107] fut un des premiers à classifier les environnements propices à produire une rupture d'arbre. Ils sont principalement regroupés en trois catégories :

- La fatigue à faible cycle (LCF) qui est liée au nombre de cycles de vols de l'avion.
- La fatigue à fort cycle (HCF) qui est en général dominante par rapport à la LCF. Cela est lié à une contrainte transitoire qui est excessive en comparaison au design, que ce soit en magnitude ou en fréquence. Une solution pour les éviter est de concevoir la turbine de sorte que les modes à diamètre faible (provoquant les plus gros débris) se trouvent hors de la plage fréquentielle d'opération du moteur.
- Un excès de chaleur (*Overheating*). Il peut être causé par un manque de refroidissement par air et la forme/taille des fragments de moteur dépend alors du design du disque et des aubes. Dans ce cas, l'échauffement peut s'accompagner d'un étirement du disque

qui engendre l'éjection des aubes. Le plus gros débris ne peut alors qu'être une aube complète. Sinon, les autres accidents ont recensé la rupture d'un secteur de disque en plus des aubes qu'il contient : c'est le scénario le plus dangereux, comme décrit dans l'accident d'American Airlines en 2006. La surchauffe peut aussi être due au frottement avec des structures statiques adjacentes. Les débris ressemblent en général à un secteur d'aubes avec une partie du disque. Enfin, un départ de feu d'huile interne peut être à l'origine de la rupture, comme décrit dans l'accident de Qantas Airways en 2010.

Des travaux récents se sont intéressés à l'étude probabiliste de cycles de fatigues combinés (CCF) et de leur influence sur la durée de vie de l'arbre d'une turbine à gaz [14] afin de mieux en prédire la rupture. Ils ont également pris en compte des incertitudes géométriques dans le calcul de la durée de vie.

5 Revue des méthodes de limitation de survitesse

Depuis déjà plusieurs décennies, des règles de bonne pratique existent pour éviter les effets dangereux d'une rupture d'arbre, comme renforcer les zones du carter qui sont susceptibles d'être impactées par des débris ou encore placer les équipements sensibles loin des ces régions [107]. Une autre initiative serait de faire en sorte que la turbine n'atteigne pas sa vitesse critique d'éclatement : il s'agit de l'option actuellement en cours d'étude intensive chez de nombreux motoristes. Il y a deux types de d'approches qui permettent d'atteindre cet objectif.

La première repose sur les aspects aérodynamiques de la rupture d'arbre. Comme mentionné dans la section précédente, il s'est avéré que pendant une rupture d'arbre, le moteur a pu ralentir en toute sécurité grâce au pompage du compresseur [144]. En effet, l'accélération de la turbine (resp. la décélération du compresseur) modifient les caractéristiques de l'écoulement du flux primaire, notamment le triangle des vitesses au bord d'attaque des aubes, et donc le point de fonctionnement sur les cartes de performance de la turbine et du compresseur. Avant toute chose, il faut savoir que les aspects aérodynamiques du scénario de rupture d'arbre ne font pas seulement intervenir les processus de compression, combustion et détente du flux primaire dans le générateur de gaz. Le gradient de pression au niveau du disque dans le SAS peut influencer le recul de la turbine. Plusieurs travaux initiés par l'université Cranfield se sont penchés sur l'étude du comportement aérodynamique du moteur en cas de rupture d'arbre [68, 111, 170], notamment sur ces trois points :

- L'influence de l'angle d'incidence de l'écoulement au niveau de la turbine et donc son fonctionnement très loin du point de design ;
- L'étude du transitoire aérodynamique du SAS avec prise en compte des pertes de charge, des écoulements tournants au voisinage des disques et de l'assemblage du réseau (i.e. modification de volumes, bouchage et créations de cavités) ;
- La performance étendue des différents étages de compresseur en régime de pompage et en décrochage tournant.

Même si ces travaux ont démontré la capacité du pompage et du décrochage tournant à limiter la survitesse, les aspects aérodynamiques ne sont pas le sujet de cette thèse.

La seconde approche qui nous intéresse ici se base sur le comportement mécanique de l'arbre endommagé. Les retours en service sur avion ont également montré que la survitesse pouvait être limitée grâce à des mécanismes de frottement avec des composants statiques au voisinage du disque turbine. En effet, comme déjà mentionné, dans un moteur d'avion ou d'hélicoptère et lorsque les paliers le permettent, les gradients de pression entre les différents étages du générateur de gaz tendent à faire avancer le compresseur et reculer la turbine. Les mécanismes

de contact dans le cas d'un étage haute pression de moteur d'avion sont présentés en figure I.10 et surviennent de la manière suivante :

- Le premier contact à avoir lieu est un contact axial au niveau du disque de la turbine qui vient frotter sur la plateforme du distributeur en aval : il s'agit du *disc rubbing* [129].
- La force normale et la vitesse de rotation très élevées font fondre la plateforme ce qui permet à la roue de turbine de reculer davantage. Cela amène alors le bord de fuite des têtes d'aubes à entrer en contact avec les aubes du distributeur, aussi appelées *Nozzle Guide Vanes* (NGV). Ce nouveau contact se nomme couramment *blade interference ou blade tangling* dans la littérature. Ce phénomène a été modélisé avec les éléments finis dans [75] et les résultats ont confirmé les conclusions tirées des observations : le *blade tangling* contribue à limiter la survitesse.
- Il est important de remarquer que les premiers contacts sont axiaux mais qu'ils peuvent avoir une influence sur la dynamique transversale du moteur. En effet, le *blade tangling* peut provoquer un autre phénomène appelé *blade spragging*, qui est une réduction de la longueur d'aube [75]. En effet, le contact en bord de fuite génère des défauts et des craquelures qui traversent la tête d'aube, souvent creuse pour faciliter son refroidissement, jusqu'au bord d'attaque. Cela a pour résultat le détachement d'une partie de la tête d'aube. La matière retirée génère alors un balourd qui, s'il est suffisamment important, peut conduire au contact radial avec le carter [133].

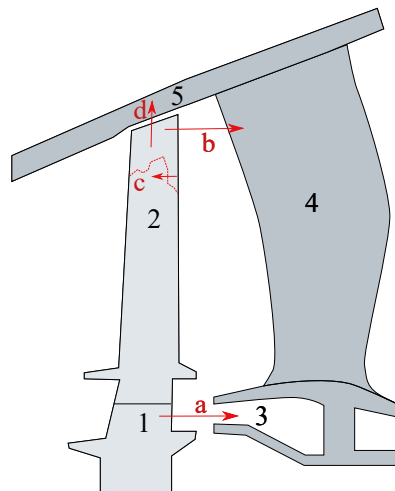


FIGURE I.10 – Schémas d'un étage turbine haute pression(1-disque, 2-aube, 3-plateforme, 4-NGV, 5-carter) et des mécanismes de contact dans un moteur d'avion [129] : a-*disc rubbing*, b-*blade tangling*, c-*blade spragging*, d-*blade/carter rub*

Cependant, peu d'information est disponible dans la littérature concernant les contacts radiaux lors d'une rupture d'arbre. Comme constaté ci-dessus, les contacts pour les moteurs d'avion, qui sont le plus étudiés, ont plutôt une nature axiale. Plus récemment, Zhang& al. [167] ont étudié la réponse forcée d'un arbre excité par un balourd avec prise en compte de contact au niveau du labyrinthe mais dans cette étude, l'intégrité de l'arbre n'est jamais altérée et la vitesse est définie comme constante.

Il faut souligner que l'apparition du contact rotor stator en cas de rupture d'arbre dépend fortement de la capacité du rotor à se déplacer axialement et donc est fonction de l'endroit de la rupture par rapport aux supports et paliers [121]. Par conséquent, le contact axial est une solution efficace pour limiter l'accélération de la turbine mais ce n'est pas un mécanisme qui survient systématiquement en cas de rupture tirant. Cela explique pourquoi certains motoristes

comme Rolls Royce se concentrent davantage sur les méthodes issues de l'aérodynamique, mais là encore, il y a des limitations qui dépendent de la nature de la rupture. En effet, dans le cas d'une rupture ductile par exemple, celle-ci génère moins de vibrations. Or la capacité d'un compresseur à entrer et rester en pompage dépend notamment du niveau vibratoire généré par la rupture [129].

Par ailleurs, à cause de la conception complexe et des interdépendances entre les 4 régions du moteur, les travaux existants partent toujours avec des hypothèses simplificatrices. Par exemple, l'influence du SAS a été négligée dans [63, 75], mais pas toujours [64]. Les changements de volume et de débit d'air dans les cavités du SAS peuvent, en cas de mouvement de recul de la roue de turbine, créer une force axiale dans le même sens ou opposée au gradient de pression du flux primaire. Dans de deuxième cas, cela peut même amener à la perte de contact entre la roue et le stator [129]. Une modélisation globale couplée des performances compresseur et turbine avec les contacts axiaux et le SAS est proposée dans [82, 144].

Enfin, pour les turbines libres ou basse pression, une autre façon d'empêcher le disque d'atteindre sa vitesse critique est de concevoir la roue aubagée de sorte que les aubes (soit en totalité soit en partie comme un secteur) soient éjectées à une vitesse de rotation donnée. Il s'agit du phénomène de *blade shedding* et Eryilmaz [62] a réalisé une étude paramétrique basée sur la géométrie du carter et des têtes d'aube, ainsi que le nombre d'aubes éjectées. Il est à noter que cette méthode implique de porter une attention particulière à la conception du carter puisqu'il doit pouvoir supporter une accumulation d'énergie localisée. Si ce n'est pas le cas, il risque de se déchirer, et donc de ne plus garantir le confinement des débris.

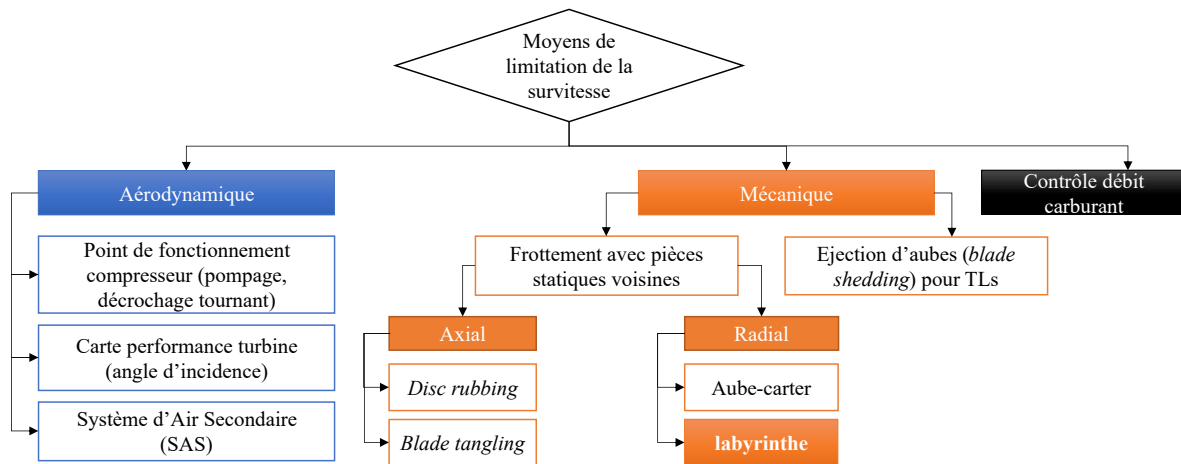


FIGURE I.11 – Synthèse méthodes de limitation de survitesse

Toutes les approches mentionnées ci-dessus sont des mécanismes passifs, c-à-d qu'ils ne nécessitent pas d'action de la part du pilote ou d'une unité de contrôle. Cependant, des solutions actives existent, comme une commande électronique du débit carburant ou des NGV à cambrure variables pour faciliter l'entrée en pompage [144]. Le déclenchement de ces actions est possible avec la mise en place d'unités de détection de survitesse, ou comme recommandé dans [135], d'une détection de baisse de régime sur l'arbre compresseur. Ce brevet propose également plusieurs méthodes pour dissocier une baisse en vitesse causée par une rupture d'arbre ou du pompage. En effet, l'apparition de ces phénomènes nécessitent des mesures distinctes pour être gérées correctement. L'ensemble de ces solutions est synthétisée dans un diagramme en Figure I.11

6 Présentation du problème et objectifs

La Figure I.12 présente un assemblage simplifié de générateur de gaz pour un hélicoptère et qui comporte : un tirant moteur, des écrous/boulons (*tie-bolts* en anglais) qui appliquent un serrage des pièces le long du tirant et le maintient en traction. Les *curvics* sont des cylindres

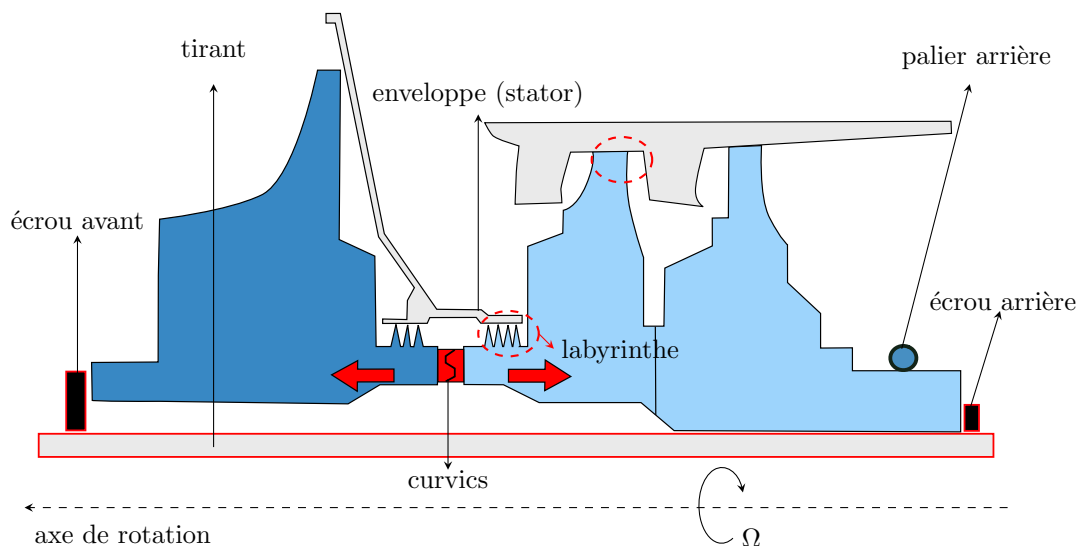


FIGURE I.12 – Assemblage schématique des composants du générateur de gaz : écrous, curvics et tirant. Déplacements axiaux des parties turbine et compresseur après rupture et localisation des zones de touche côté turbine (---)

dentelés à leur extrémité, comme des engrenages circulaires qui permettent l'emboîtement des disques de compresseurs et de turbine.

La thèse s'intéresse ici à l'étude d'un scénario académique où une des pièces de la Figure I.12 ne garantirait plus l'assemblage du moteur, ce qui est représentatif des descriptions faites en Section I.4. Combiné avec le gradient de pression axial (voir Figure I.12), la turbine amorce alors un mouvement de recul. D'autre part, il est supposé que la vibration radiale de la turbine est amplifiée et génère des zones de contact. Il s'avère que la touche qui intervient au niveau du joint labyrinthe provoque des efforts de contacts élevés. Cela implique donc une forte génération de chaleur, compte tenu du régime du générateur de gaz (autour de 40000rpm). A ce stade, on considère un cas théorique simplifié où la turbine n'est plus solidaire avec le compresseur et elle entre alors en configuration autonome. Cela implique que la turbine n'est plus supportée que par le palier arrière et le contact rotor-stator. Pour des raisons de simplicité de vocabulaire, dans le reste du document, le terme *labyrinthe* fait référence aux dents annulaires tandis que leur enveloppe est définie sous le nom de *stator*. Ensuite, de ce premier contact peuvent apparaître d'autres contacts ailleurs dans la turbine, notamment au niveau de l'aubage comme des contacts aube-carter (direction radiale) et aube-NGV (direction axiale), mais ces derniers ne sont pas pris en compte dans la suite des travaux. Dans la mesure du possible, les modèles mis en place dans les chapitres suivants se concentrent sur :

- La turbine qui est le composant le plus sensible, puisque c'est elle qui va accumuler de l'énergie mécanique et entrer en survitesse ;
- Le stator qui est moins massif que la turbine et a plus tendance à se déformer.

Cette thèse se concentre uniquement sur la simulation numérique de la rupture d'arbre, des essais expérimentaux ne sont pas prévus. Ce phénomène n'a pas encore été modélisé pour un

moteur d'hélicoptère et l'objectif principal est donc d'identifier la dynamique d'arbre quand la rupture a eu lieu. On souhaite également prendre en compte le couplage thermomécanique qui survient suite au contact frottant et donc à la génération de chaleur. Le but final de ces travaux est donc de prédire le transitoire de vitesse de rotation de la turbine et d'identifier les paramètres qui favorisent le freinage, en particulier la limitation de sa valeur maximale à une référence.

Chapitre II

Contact rotor-stator

Sommaire du présent chapitre

1 Dynamique d'arbre en présence de contact	17
1.1 Phénomènes observés	17
1.2 Facteurs influents sur la précession	19
1.3 Modélisation et équations du mouvement dynamique des rotors	23
2 Contact unilatéral frottant	29
3 Couplages thermomécaniques	31
3.1 Equation de la chaleur et discrétisation spatiale	31
3.2 Introduction à l'usure	33
3.3 Calcul de la puissance de friction	34
4 Résolution temporelle	35
5 Traitement des contraintes de contact	37
5.1 Méthode des pénalités	37
5.2 Multiplicateurs de Lagrange : contrainte en déplacement	37
5.3 Mécanique non-régulière : contrainte en vitesse	39
5.4 Contraintes simultanées en position et vitesse	42
5.5 Gestion du frottement dans la résolution numérique	42
6 Bilan du chapitre	45

1 Dynamique d'arbre en présence de contact

La méthode de limitation de vitesse qui fait l'objet de ce travail doctoral se base sur frottement causé par un contact entre la turbine et les pièces statiques avoisinantes. On rappelle que dans le cas d'une rupture d'arbre sur un moteur d'hélicoptère, le contact qui intervient au premier ordre dans le mécanisme de freinage de la turbine survient dans la direction radiale dans le joint labyrinthe, qui est situé au pied du disque turbine. Si la notion de contact est assez instinctive, il s'agit d'un phénomène complexe à modéliser car il introduit une non-linéarité forte dans le système. Dans ce chapitre, les méthodes de modélisation du contact sont présentées ainsi que les répercussions de la prise en compte du frottement sur la dynamique des rotors.

1.1 Phénomènes observés

Les machines tournantes en présence de contact présentent des comportements variés et que l'on retrouve aussi bien en essais que lors de simulations numériques [115]. Une caractéristique

qui permet de les classer est le sens de parcours de l'orbite du centre géométrique de l'arbre, reflétant sa vibration transversale. En guise d'illustration, on propose de faire une coupe au niveau du labyrinthe et de présenter la section du rotor comme pleine (cf Figure II.1). L'axe de rotation passe par le point G . Le stator ici est uniquement représenté par un cercle fixe. Le mouvement du rotor peut être décomposé en

- la rotation autour du centre géométrique G avec une vitesse Ω ;
- la translation du point G , caractérisé par une vitesse de vibration ou encore de *précession*, notée \mathbf{v}_{prec} .

Un orbitage du point G dans le même sens (resp. contraire) que celui de la vitesse de rotation de l'arbre est qualifié de mouvement précessionnel *direct* (resp. *inverse* ou *rétrograde*) [96]. Ces derniers sont illustrés en Figure II.1. La précession directe est la réponse la plus couramment rencontrée en dynamique des rotors et se caractérise par de faibles efforts de contacts. A vitesse de rotation imposée, la précession directe s'effectue de manière synchrone, ce qui se traduit par un pic correspondant à Ω dans le spectre de la vibration du rotor.

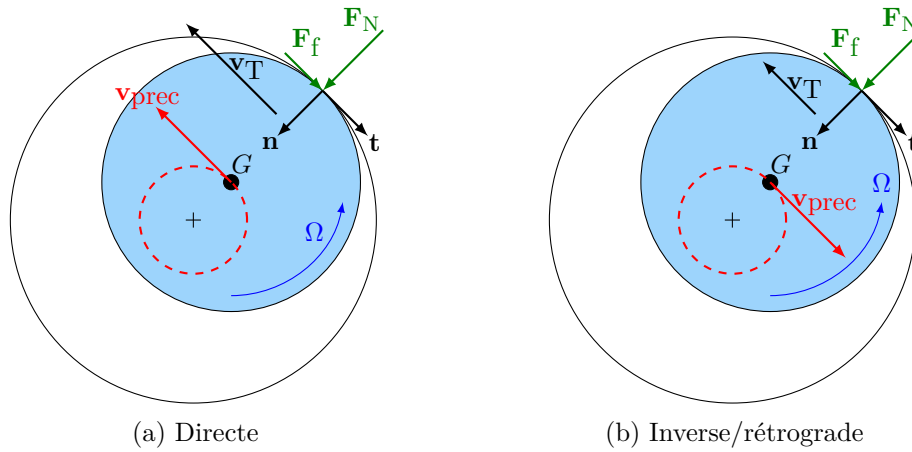


FIGURE II.1 – Descriptif des mouvements de précession en cas de contact annulaire complet

Pour les précessions rétrogrades, sans prendre en compte de lubrification des pièces, il existe deux sous catégories. Dans le cas d'un contact avec combinaison de roulement et de glissement du rotor, on parle de *dry whip* qui est qualifié comme « une des dysfonctions les plus sérieuses et destructives qui puissent avoir lieu en dynamique de machines tournantes » d'après [116]. En effet, le *dry whip* est un régime potentiellement instable qui implique des efforts de contacts très importants. Pour mieux comprendre, il faut introduire la vitesse tangentielle au point de contact \mathbf{v}_T . Pour un problème 2D tel que schématisé en Figure II.1, cette dernière est définie comme la résultante des vitesses de précession et de rotation. En notant le rayon du rotor R , il vient que

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_{\text{prec}} - R\Omega\mathbf{t} \quad (\text{II.1})$$

où \mathbf{t} correspond au vecteur unitaire tangentiel dans le repère local au contact. Cette vitesse est aussi appelée vitesse de glissement dans cette thèse. Le contact glissant implique un effort de frottement \mathbf{F}_f qui agit dans le sens contraire à \mathbf{v}_T (voir Figure II.1). Dans ce cas, le couple de frottement lutte contre la vitesse de rotation Ω mais effectue un travail moteur dans le sens de la précession qui s'amplifie. L'effet centrifuge vient alors plaquer davantage le rotor sur le stator et les efforts de contact augmentent. A ce stade, les efforts et la vibration peuvent soit se stabiliser à une valeur élevée, soit les efforts augmentent davantage et le système entre en régime instable. Ainsi, en cas de *dry whip*, la force de frottement joue un rôle de conversion de l'énergie cinétique en rotation sous forme de vibration. On parle alors de vibration auto-entretenu [88].

L'autre catégorie de précession inverse considère que la vitesse relative est nulle au point de contact. On parle alors roulement pur ou encore de *dry whirl* qui, en reprenant l'Équation (II.1), est caractérisé par le respect d'une contrainte cinématique supplémentaire qui impose que

$$\mathbf{v}_{\text{prec}} = R\Omega\mathbf{t} \quad (\text{II.2})$$

Cette proportionnalité entre vitesse de précession et de rotation est validée expérimentalement dans [159]. Si \mathbf{v}_T est nulle, alors la force de frottement \mathbf{F}_f est statique : elle peut être non-nulle mais ne travaille pas. Dans ce cas particulier, la vibration de la structure s'atténue lorsque la vitesse de glissement reste suffisamment longtemps proche de zéro.

Il faut souligner que les trajectoires du centre de gravité ont été tracées circulaires dans la Figure II.1, ce qui suppose que le contact est annulaire et permanent. En pratique, il peut y avoir des basculements aussi soudains que complexes entre les mouvements de précessions lors d'un même essai où le contact n'est pas forcément maintenu tout le temps [88, 116, 124]. Le contact peut donc aussi être partiel, ce qui se traduit par l'apparition de rebonds et de séparations. Fatarella [66] indique qu'un mouvement de précession inverse en contact partiel provoque une amplification de l'amplitude des rebonds et donc une augmentation conjointe des efforts de contact. A terme, le contact partiel peut devenir annulaire et un régime en *dry whip* s'installe.

1.2 Facteurs influents sur la précession

La section suivante propose une synthèse bibliographique des propriétés du système qui influencent le type de précession. Même si des travaux antérieurs listent déjà ces paramètres de manière non-exhaustive [7, 42, 59], il est utile de les rappeler afin qu'ils puissent être utilisés lors de l'analyse des résultats obtenus dans ces travaux de thèse.

Coefficient de frottement

A effort normal égal, l'augmentation du coefficient de frottement accroît la valeur de l'effort frottant, ce qui augmente le risque de déclenchement de la précession inverse. Jiang [90]

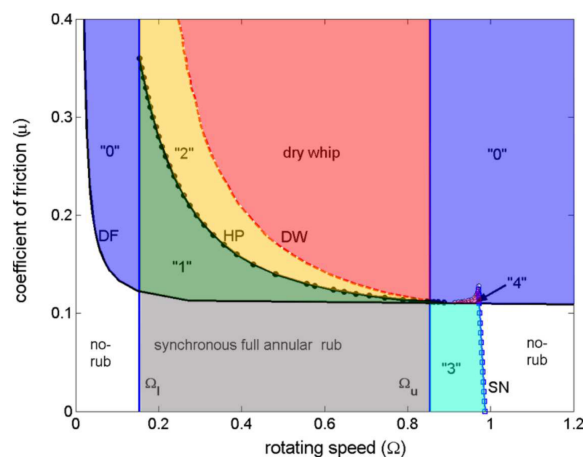


FIGURE II.2 – Diagramme vitesse de rotation-coefficient de frottement des zones d'existence des types de précession et de contact partiel [90]

a étudié la dynamique du contact sur un rotor de Jeffcott et a établi un diagramme en vitesse de rotation et coefficient de frottement (cf Figure II.2) qui met en évidence cinq zones

d'existence et de coexistence des types de précession (directe/rétrograde) et des types de contact (complet/partiel/sans contact).

- 0 (bleu) : pas de contact ou précession rétrograde en contact permanent causée par excitation asynchrone
- 1 (vert) : coexistence précession directe ou rétrograde en contact permanent
- 2 : (jaune) : contact partiel (direct ou rétrograde) ou contact permanent en précession inverse. Dans cette zone se trouve également un cas particulier délimité par la frontière DW (en rouge) où seule la précession rétrograde en contact permanent est une solution stable. Dans cette zone, le *dry whip* est également déclenchable par une excitation synchrone (ex : balourd)
- 3 (bleu clair) : sans contact ou contact permanent en précession directe
- 4 : coexistence de 3 réponses, pas de contact ou précession directe complète ou précession inverse en contact permanent

Ce diagramme montre également que pour un système symétrique, il n'est pas possible de déclencher une précession rétrograde sans un frottement suffisant ($\mu < 0.1$ dans le cas du rotor de Jeffcott utilisé ici). Sans prise en compte du frottement, et sans dissymétries du système, il est connu que le rotor orbite dans le sens de précession direct. En plus du coefficient de frottement, on peut noter l'influence de la vitesse de rotation. Pour une vitesse trop faible ($< \Omega_i$) ou trop élevée ($> \Omega_u$), il est impossible d'avoir du contact. Ces résultats sont en accord avec l'article de Chen et Géradin [39] qui s'étaient intéressés à un contact rotor-stator avec un arbre modélisé au moyen des éléments finis. Ils ont également mis en évidence que l'augmentation de la vitesse de rotation, à coefficient de frottement constant, amène la réponse du *dry whip* vers le *dry whirl*. Le roulement avec ou sans glissement est donc piloté par la vitesse de rotation.

Propriétés mécaniques des pièces

Jiang [90] s'est également intéressé à l'influence de la raideur du rotor et du stator sur la

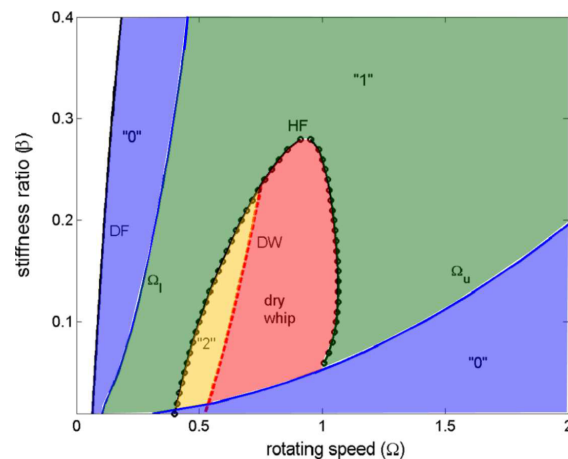


FIGURE II.3 – Diagramme vitesse de rotation-ratio de raideur rotor/stator des zones d'existence des types de précession et de contact partiel[90]

réponse d'un rotor de Jeffcott en présence de contact. La quantité β représente le ratio de la raideur du rotor sur celle du stator. Ce paramètre, combiné à la vitesse de rotation, permet de dresser un nouveau diagramme des types de contact et de précession, présenté en Figure II.3. On retrouve certaines zones déjà introduites dans la section sur le coefficient de frottement. Cependant, on remarque que la zone de *dry whip* (rouge) est maintenant bornée pour $\beta < 0.3$.

Plus le stator est souple, plus le ratio β est grand et il devient impossible de provoquer une précession rétrograde par une excitation synchrone.

Par ailleurs, Duran [60] mentionne que l'effort de contact augmente avec la rigidité du stator, en adéquation avec les travaux de Vinas [155] qui indiquent « qu'un stator rigide en contact avec un rotor de grande inertie se révèle potentiellement plus dangereux qu'un système flexible et léger ».

Incidence de touche

La cinématique du système rotor-stator avant que le contact ait lieu à déjà une influence sur le type de précession contenu dans la réponse. Bartha [16] s'est aussi intéressé à un rotor de Jeffcott dont il a modifié l'angle et la vitesse d'impact, toutes deux définies sur la Figure II.4a. Un angle $\gamma_c < \pi/2$ (resp. $\gamma_c > \pi/2$) correspond à un contact initié en précession rétrograde (resp. directe). Dans ce cas, l'étude indique que la vitesse radiale critique v_{crit} , c-à-d au-dessus de laquelle un mouvement de *dry whip* a lieu après l'impact, augmente avec γ_c . Cette augmentation est notable surtout pour les angles supérieurs à $\pi/2$. Le plateau visible pour $\gamma < \pi/2$ indique que même un impact parfaitement radial $\gamma_c = \pi/2$ requiert une vitesse radiale faible pour déclencher une précession inverse.

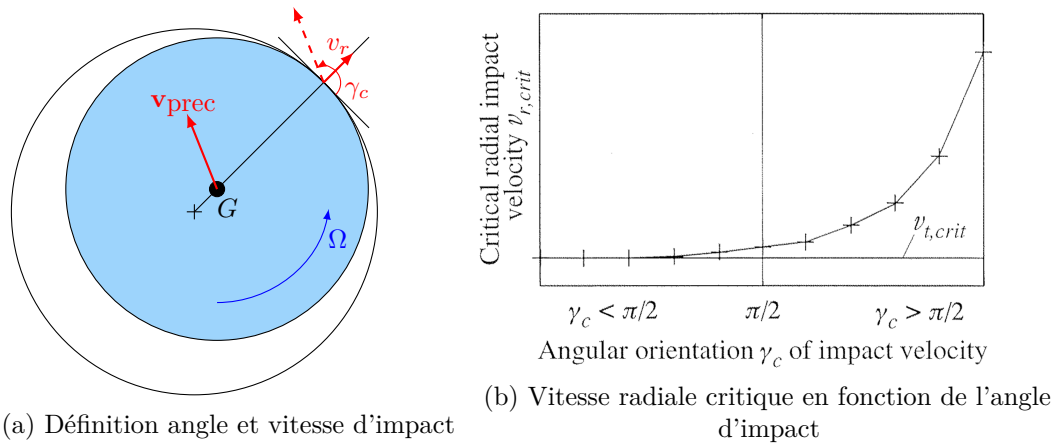


FIGURE II.4 – Sensibilité du type de précession à l'angle d'impact [16]

Vitesse de rotation

Childs & al. [40] et Black [22] ont montré que la vitesse de rotation pilote la vitesse de précession dans le cas du *dry whirl*. Si le contact est permanent, le centre de gravité est doté d'un mouvement circulaire de rayon égal au jeu initial g_0 et il vient que $\|\mathbf{v}_{prec}\| = g_0\omega_{prec}$, où ω_{prec} représente la fréquence de précession. En reprenant l'Équation (II.2), on retrouve bien la proportionnalité de cette fréquence avec la vitesse de rotation, comme illustré en Figure II.5

$$|\omega_{prec}| = \frac{R}{g_0}\Omega. \quad (\text{II.3})$$

Cette fréquence augmente jusqu'à atteindre le régime de *dry whip*. Comme indiqué par la littérature, ce comportement est caractérisé par une fréquence de vibration (i.e. de précession) asynchrone par rapport à la vitesse de rotation, mais qui correspond à la fréquence propre du système couplé rotor-stator. D'après [40], le concept de couplage correspond au rotor et au stator qui sont « collés » et ont donc leurs degrés de liberté en commun.

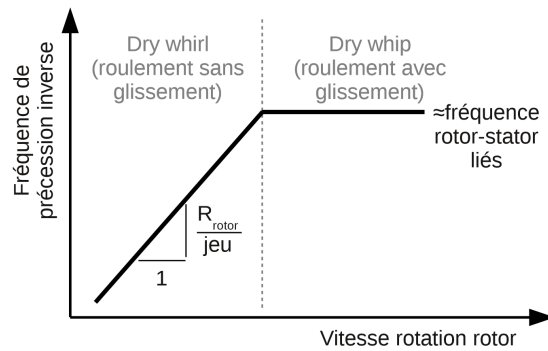


FIGURE II.5 – Sensibilité de la fréquence de vibration en précession rétrograde avec la vitesse de rotation [40]

Dans le cas d'un système à plusieurs degrés de liberté, lorsque la vitesse de rotation augmente, la fréquence de précession subit un « saut » et le système repasse en régime de *dry whirl*. Ce phénomène a été étudié par Black afin de déterminer les plages de vitesse de rotation présentant du *dry whirl*. Il prédit analytiquement un coefficient de frottement critique $\mu_c = fct(\Omega)$ nécessaire afin de satisfaire la contrainte de l'Équation (II.2). Comme illustré en Figure II.6, si le coefficient de frottement réel est supérieur à μ_c alors, le *dry whirl* a lieu. Cette théorie a été testée numériquement et expérimentalement par Wilkes et al. [160] et Choi

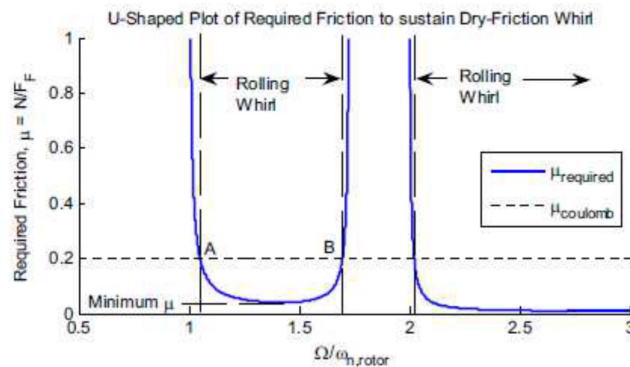
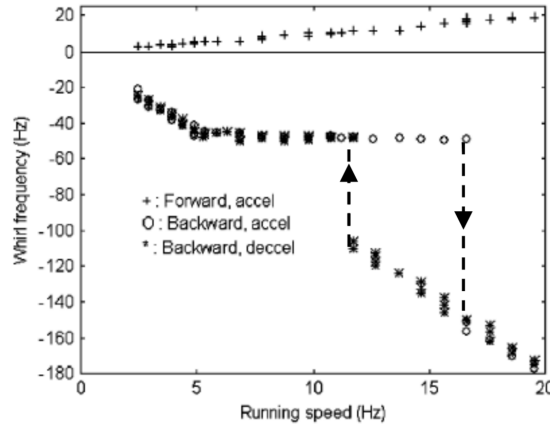


FIGURE II.6 – Coefficient de frottement critique en fonction de la vitesse de rotation et mise en évidence des plages de *dry whirl* [160]

et al [41]. Que ce soit en montée ou descente de vitesse, les résultats indiquent qu'un régime de *dry whip* intervient entre chaque phase de *dry whirl*. La fréquence de précession pour chacune de ces phases correspond à un mode couplé rotor-stator. En fin de *dry whip*, si la vitesse de rotation augmente davantage, un saut en fréquence survient. Le même phénomène est observé lors d'une baisse de vitesse de rotation sauf que le saut se produit à une vitesse de rotation différente, mettant en évidence un phénomène d'hysteresis (cf Figure II.7).

Jeu

Pour finir, à des fins d'optimisation de rendement moteur, les jeux entre les pièces tendent à diminuer de plus en plus. Or, un jeu faible augmente la fréquence de touches et la valeur des efforts de contact. D'un autre côté, comme le souligne Duran [59], il faut fournir un effort frottant plus important, pour inverser le sens de vibration du rotor avec un jeu réduit. Le jeu possède donc deux effets contradictoires sur la précession rétrograde. Enfin, il faut noter que la

FIGURE II.7 – Saut de fréquence de précession lors d'une transition *dry whip-whirl* [41]

diminution du jeu augmente la pente de la fréquence de précession des phases de *dry whirl* (voir Figure II.5). Cela a pour conséquence la réduction de la plage d'existence du roulement pur.

1.3 Modélisation et équations du mouvement dynamique des rotors

Mécanique des milieux continus élastiques

Maintenant que les comportements vibratoires attendus sont identifiés. Il faut pouvoir modéliser le rotor et le stator sur base de la théorie des milieux continus. Dans cette thèse, les corps sont considérés comme élastiquement déformables. Considérons 2 corps de volumes V^1 et V^2 pour lesquels il existe des domaines avec efforts imposés Γ_f^i et déplacements imposés Γ_u^i avec $i = 1, 2$ (cf Figure II.8). Ces deux corps sont en contact sur des surfaces de contact Γ_c^i . De manière générale, le problème se réduit à déterminer deux champs

- de déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$;
- de contraintes $\bar{\bar{\sigma}}(\mathbf{x}, t)$

qui satisfont l'équation d'équilibre locale :

$$\forall P \in V^i, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ : \operatorname{div}(\bar{\bar{\sigma}}) + \mathbf{f}_v = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (\text{II.4})$$

où les dépendances en espace-temps sont éliminées pour alléger les notations. Si nécessaire, l'exposant i est spécifié afin de distinguer les deux corps. En état de repos, tout point P appartenant au solide peut être repéré par son vecteur de position \mathbf{x} . Pour chacun de ces corps, il s'agit alors de trouver le champs de déplacement avec ρ la masse volumique et \mathbf{f}_v les efforts extérieurs volumiques. A cette égalité s'ajoutent les conditions aux limites

$$\begin{cases} \forall P \in \Gamma_u^i, & \forall t \in \mathbb{R}^+, & \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}_L; \\ \forall P \in \Gamma_f^i, & \forall t \in \mathbb{R}^+, & \bar{\bar{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{f}}_L; \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

où $\bar{\mathbf{u}}_L$ et $\bar{\mathbf{f}}_L$ représentent respectivement un champs de déplacement et de pression imposés. Il faut également spécifier les conditions initiales en déplacement et en vitesse

$$\forall P \in V^i, \quad t = 0 \rightarrow \begin{cases} \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}_0; \\ \dot{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{v}}_0. \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

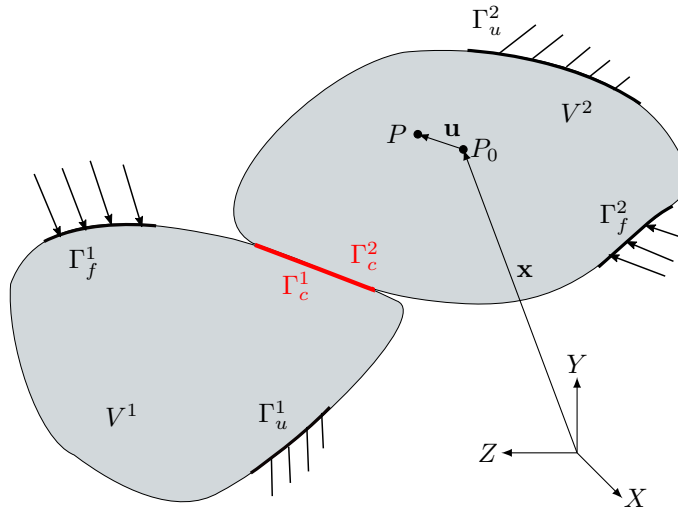


FIGURE II.8 – Domaines du problème mécanique avec contact

Étant donné que les corps sont élastiques et que la thermique sera ajoutée à la modélisation, la relation entre contraintes et déformations est donnée par la loi de Hooke élasto-thermique

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\mathbf{H}}} : [\bar{\bar{\epsilon}} - \alpha(T - T_{\text{ref}})\bar{\bar{\mathbf{I}}}] \quad (\text{II.7})$$

avec $\bar{\bar{\mathbf{H}}}$ le tenseur d'élasticité (ordre 4), $\bar{\bar{\epsilon}}$ est le tenseur des déformations (ordre 2), α le coefficient de dilatation thermique, T_{ref} la température de référence et $\bar{\bar{\mathbf{I}}}$ est le tenseur identité d'ordre 2.

Forme faible et discrétisation spatiale

La solution de la forme forte des équations du mouvement ne peut pas être calculée de façon exacte puisqu'il s'agit d'un problème continu et donc de dimension infinie. Le champ de déplacements est alors approché et, afin d'être *cinématiquement admissible*, est recherché sur un espace fonctionnel de dimension finie \mathbb{U} avec

$$\mathbf{u} \in U \subseteq \mathbb{U}, U = \left\{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \mathbb{U}, \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}_L \text{ sur } \Gamma_u^i \right\}. \quad (\text{II.8})$$

Cette méthode impose d'écrire au préalable l'équation d'équilibre sous forme faible. Cela consiste à multiplier l'Équation (II.4) par une fonction test \mathbf{w} dans un domaine W défini suivant

$$\mathbf{w} \in W \subseteq \mathbb{U}, W = \left\{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \mathbb{U}, \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_u^i \right\} \quad (\text{II.9})$$

et d'appliquer une intégration sur le volume V , ce qui donne

$$\int_V \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} dV = \int_V \mathbf{div}(\bar{\bar{\sigma}}) \cdot \mathbf{w} dV + \int_V \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{w} dV. \quad (\text{II.10})$$

Le symbole \cdot est à considérer ici au sens de produit scalaire. Au second membre de l'égalité, le théorème de Gauss peut être appliqué, ce qui fait apparaître un nouveau terme intégral sur la

surface frontière du solide ∂V

$$\int_V \mathbf{div}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \mathbf{w} dV = \int_{\partial V} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{w} dS - \int_V \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{w}) dV. \quad (\text{II.11})$$

Or cette intégrale surfacique est non nulle uniquement sur les domaines Γ_f et Γ_c où les pressions (i.e. efforts surfaciques) extérieures \mathbf{p}_s et de contact \mathbf{p}_c sont respectivement appliquées. En injectant les Équations (II.7) et (II.11) dans l'Équation (II.10), il vient

$$\begin{aligned} \int_V \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} dV + \int_V \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{u}) : \bar{\mathbf{H}} : \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{w}) dV - \int_V \alpha(T - T_{\text{ref}}) \bar{\mathbf{I}} : \bar{\mathbf{H}} : \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{w}) dV = \\ \int_V \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{w} dV + \int_{\Gamma_s} \mathbf{p}_s \cdot \mathbf{w} dS + \int_{\Gamma_c} \mathbf{p}_c \cdot \mathbf{w} dS \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

où les termes de gauche à droite représentent

- Le travail des forces d'inertie ;
- Le travail des efforts internes mécaniques ;
- Le travail des contraintes thermomécaniques (dilatation thermique) ;
- Le travail des efforts extérieurs volumiques ;
- Le travail des efforts extérieurs surfaciques ;
- Le travail des efforts de contact ;

Dans la suite, le tenseur des déformations est adapté sous forme vectorielle, aussi connue comme la notation de De Voigt

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}} \rightarrow \boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{zz} & 2\epsilon_{xy} & 2\epsilon_{yz} & 2\epsilon_{zx} \end{pmatrix}^\top, \quad (\text{II.13})$$

et \mathbf{H} est la matrice d'élasticité de la loi de Hooke. Pour un matériau isotrope, la matrice identité est remplacée par le vecteur \mathbf{I}_d et intervient afin que seules les déformations normales (ϵ_{ii}) aient une contribution de la température

$$\mathbf{I}_d = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top. \quad (\text{II.14})$$

Le vecteur des déformations peut être exprimé à partir des déplacements \mathbf{u} par un opérateur matriciel de dérivation \mathbf{D} de sorte que

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u}. \quad (\text{II.15})$$

Dans cette thèse, la discrétisation spatiale est réalisée au moyen des éléments finis. Les champs continus en déplacement et température sont approchés au moyen de fonctions de formes pouvant être différentes pour les deux physiques :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{u}_e(t) \\ T(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}_\vartheta(\mathbf{x})\mathbf{T}_e(t). \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

L'expression des déformations en fonction des quantités mécaniques nodales $\mathbf{u}_e(t)$ fait alors intervenir la matrice $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ calculée de la façon suivante :

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}\mathbf{N}(\mathbf{x}). \quad (\text{II.17})$$

La loi de Hooke discrétisée pour un élément et qui fait intervenir les déformations liées à la chaleur est

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{H}[\mathbf{B}\mathbf{u}_e - \alpha \mathbf{I}_d \mathbf{N}_\vartheta \mathbf{T}_e]. \quad (\text{II.18})$$

Ainsi, pour un vecteur test \mathbf{w} quelconque, ce dernier est éliminé et les équations du mouvement pour un élément avec un couplage thermomécanique s'écrivent

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{N}^\top \mathbf{N} \ddot{\mathbf{u}}_e dV + \int_V \mathbf{B}^\top \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{u}_e dV - \int_\Omega \alpha \mathbf{B}^\top \mathbf{H} \mathbf{I}_d \mathbf{N}_T \mathbf{T}_e dV = \\ \int_\Omega \mathbf{N}^\top \mathbf{f}_v dV + \int_{\Gamma_s} \mathbf{N}^\top \mathbf{p}_s dS + \int_{\Gamma_c} \mathbf{N}^\top \mathbf{p}_c dS. \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

On retrouve alors les deux premières intégrales qui sont les matrices de masse \mathbf{M}_e^{uu} et de raideur \mathbf{K}_e^{uu} élémentaires. La nouveauté est la troisième intégrale qui représente la matrice de dilatation thermique $\mathbf{K}_e^{u\vartheta}$. Il faut noter que la température de référence a été incluse au vecteur \mathbf{T}_e qui représente désormais un écart de température. Dans le membre de droite, les intégrales des efforts volumiques et surfaciques sont regroupées dans le vecteur des efforts extérieurs $\mathbf{f}_{\text{ext},e}$. Enfin, les éléments sont assemblés et les matrices des deux corps sont combinées dans un seul système. L'ensemble des déplacements nodaux est définis par le vecteur $\bar{\mathbf{u}}$ pour ne pas être confondu avec le champ continu $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ et les écarts de température dans le vecteur \mathbf{T} . Ainsi, en ajoutant l'amortissement structural \mathbf{C}^{uu} , l'Équation (II.19) condensée donne l'Equation Différentielle Ordinaire

$$\mathbf{M}^{uu} \ddot{\bar{\mathbf{u}}} + \mathbf{C}^{uu} \dot{\bar{\mathbf{u}}} + \mathbf{K}^{uu} \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{K}^{u\vartheta} \mathbf{T} = \mathbf{f}_{\text{ext}}^u + \mathbf{f}_c^u. \quad (\text{II.20})$$

Dans la suite de ce manuscrit, ce terme est abrégé par l'acronyme anglais ODE (*Ordinary Differential Equation*). Le vecteur \mathbf{f}_c^u représente les efforts de contacts élémentaires encore inconnus.

Cas particulier : solide en rotation

Dans le cas où le solide déformable de volume V est en rotation, des termes supplémentaires apparaissent dans l'Équation (II.20) et qui sont développés dans cette section. La localisation du point P appartenant au solide implique la définition de deux repères (voir Figure II.9) :

- (O, X, Y, Z) qui est fixe et galiléen rattaché au point O
- (O', U, V, W) qui est mobile mais fixé au solide en un point O'

Le déplacement du point P dans le repère fixe a pour composantes le vecteur \mathbf{y} et peut être décomposé en 2 contributions : la première est le grand déplacement du centre du repère mobile O' indiqué par le vecteur \mathbf{s} et la seconde est le déplacement du point P par rapport à sa position initiale P_0 . Ce vecteur, exprimé dans le repère mobile, a pour coordonnées \mathbf{u} . La position initiale P_0 par rapport au point O' est exprimé dans le repère mobile par le vecteur \mathbf{x} . Le passage du repère fixe au repère mobile est réalisé au moyen de trois rotations. Les angles utilisés ici sont des angles d'Euler $(\theta_u, \theta_v, \theta_w)$ illustrés en Figure II.10. Les trois matrices de rotations associées sont

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_u & -\sin \theta_u \\ 0 & \sin \theta_u & \cos \theta_u \end{pmatrix}, \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_v & 0 & -\sin \theta_v \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_v & 0 & \cos \theta_v \end{pmatrix}, \mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & -\sin \theta_w & 0 \\ \sin \theta_w & \cos \theta_w & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.21})$$

La matrice de rotation globale est donc $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3$. Par conséquent, le déplacement total absolu \mathbf{y} s'écrit

$$\mathbf{y} = \mathbf{s} + \mathbf{R}(\mathbf{x} + \mathbf{u}) \quad (\text{II.22})$$

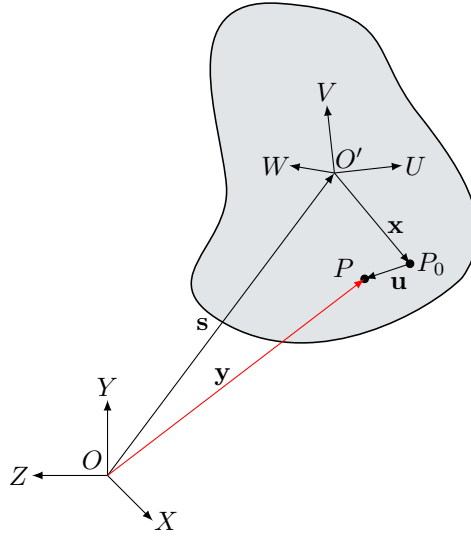


FIGURE II.9 – Solide déformable en rotation : repères et coordonnées

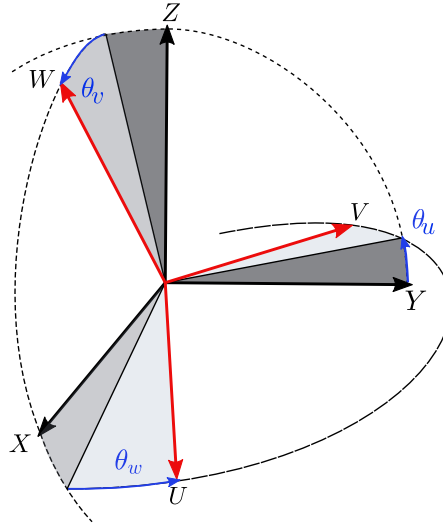


FIGURE II.10 – Rotations du repère inertiel au repère mobile (angles d'Euler)

et, comme \mathbf{x} est un vecteur constant, la dérivation en temps donne la vitesse absolue

$$\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{R}\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x} + \mathbf{u}), \quad (\text{II.23})$$

avec $\boldsymbol{\Omega}$ la matrice des vitesses de rotation

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.24})$$

Cette matrice possède la propriété d'antisymétrie puisque $\boldsymbol{\Omega}^\top = -\boldsymbol{\Omega}$ et la matrice issue de $\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}^2$ est symétrique et semi-définie négative. L'énergie cinétique du point P vaut alors $E_c = \frac{1}{2}\rho\dot{\mathbf{y}}^\top\dot{\mathbf{y}}dV$ est peut alors être intégrée sur le volume du solide

$$\begin{aligned}
E_c &= \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{u}}^\top \dot{\mathbf{u}} dV + \int_V \rho \dot{\mathbf{u}}^\top \boldsymbol{\Omega} \mathbf{u} dV - \frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{u}^\top \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{u} dV \\
&- \int_V \rho (\mathbf{u}^\top \boldsymbol{\Omega} - \dot{\mathbf{u}}^\top) (\mathbf{R}^\top \dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) dV + \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{\mathbf{s}}^\top \dot{\mathbf{s}} + 2 \dot{\mathbf{s}}^\top \mathbf{R} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}^\top - \mathbf{x} \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{x}) dV.
\end{aligned} \tag{II.25}$$

Il faut souligner qu'appliquer le principe de Hamilton sur l'énergie cinétique revient à obtenir la forme faible des équations du mouvement. Enfin, en discrétisant la solution dans l'espace par les éléments finis, et en ne tenant pas compte de la dilatation thermique, l'équation différentielle régissant le mouvement du solide dans le repère local devient

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + (\mathbf{G}(\boldsymbol{\Omega}) + \mathbf{D}) \dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{K}(\bar{\mathbf{u}}) + \mathbf{P}(\dot{\boldsymbol{\Omega}}) + \mathbf{N}(\boldsymbol{\Omega})) \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{r}(\boldsymbol{\Omega}) + \mathbf{f}_{\text{ext}} + \mathbf{f}_c. \tag{II.26}$$

Puisque seule la mécanique est prise en compte dans ce cas particulier, les exposants uu sont éliminés pour simplifier l'écriture. En plus des matrices de masse et de raideur (de manière générale qui peut être non-linéaire en $\bar{\mathbf{u}}$), on retrouve des matrices supplémentaires liées au repère tournant. En posant

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\Omega}) = \int_V \rho \mathbf{N}^\top \boldsymbol{\Omega} \mathbf{N} dV, \tag{II.27}$$

on trouve :

- La matrice gyroscopique, toujours antisymétrique

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\Omega}) - \mathbf{A}(\boldsymbol{\Omega})^\top \tag{II.28}$$

et qui, pour $\mathbf{A}(\boldsymbol{\Omega})$ antisymétrique, devient

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\Omega}) = \int_V 2\rho \mathbf{N}^\top \boldsymbol{\Omega} \mathbf{N} dV, \tag{II.29}$$

- La matrice d'assouplissement centrifuge (i.e. *spin softening*)

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\Omega}) = \int_V \rho \mathbf{N}^\top \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{N} dV, \tag{II.30}$$

Ce terme, que l'on retrouve souvent dans le domaine des turbomachines, n'apparaît pas dans les modèles développés dans cette thèse compte tenu des hypothèses simplificatrices.

- La matrice de raideur par accélération angulaire (ou matrice de Coriolis)

$$\mathbf{P}(\dot{\boldsymbol{\Omega}}) = \dot{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\Omega}) = \int_V \rho \mathbf{N}^\top \dot{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{N} dV \tag{II.31}$$

qui est antisymétrique lorsque \mathbf{A} l'est également, puisque $\mathbf{P}(\dot{\boldsymbol{\Omega}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\Omega})$.

- La matrice d'amortissement \mathbf{D} qui peut être calculée de différentes façons (base modale, Rayleigh, etc...)

Comme nous le verrons plus tard (cf Sections IV.2.2 et VI.3.5), le choix de changement de repère influence la propriété d'antisymétrie de la matrice \mathbf{A} . Le vecteur $\mathbf{r}(\boldsymbol{\Omega})$ représente les efforts inertiels

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\Omega}) = - \int_V \rho \mathbf{N}^\top (\mathbf{R}^\top \dot{\mathbf{s}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{x} + \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{x}) dV. \tag{II.32}$$

La prise en compte de certains phénomènes peut drastiquement augmenter la complexité d'implémentation et de résolution de l'Équation (II.26) dont voici quelques exemples non-exhaustifs [71, 96].

- Le balourd : un arbre dans la réalité n'est jamais parfaitement équilibré. La présence d'un balourd résiduel fournit une excitation forcée synchrone avec la vitesse de rotation. Pour être modélisé, il faut définir la masse du balourd, l'excentrement du centre de gravité par rapport au point de fixation de l'arbre, ainsi que sa phase. Dans ce travail doctoral, les effets de balourd sont négligés.
- Les effets gyroscopiques. Ceux-ci sont couramment négligés dans la littérature lorsque la vitesse de rotation est faible. En réalité, ces termes viennent coupler davantage les mécanismes non-linéaire dans la réponse dynamique du système [138]. Compte tenu de la vitesse de rotation élevée pour les moteurs d'hélicoptère (autour de 40000rpm), les matrices et efforts liés aux effets inertiels sont conservés dans les équations du mouvement.
- La vitesse de rotation inconnue. Une autre hypothèse courante est de considérer la vitesse de rotation comme constante où du moins comme une fonction du temps qui est connue. Dans ce travail doctoral, c'est le couple appliqué qui est connu, au moins sur un intervalle de temps défini. Les vitesses de rotation impliquées dans le changement de repère $(\theta_u, \theta_v, \theta_w)$ (cf Figure II.10) deviennent alors des inconnues supplémentaires du problème [134, 140]. Dans ce cas, toutes les matrices et vecteurs faisant intervenir Ω et sa dérivée deviennent fortement non-linéaires. Dans cette thèse, tout comme dans la majeure partie des ouvrages traitant la dynamique de ligne d'arbre [71, 96], la rotation autour de l'axe principal $\dot{\theta}_w(t) = \Omega(t)$ sera considérée comme dominante.

2 Contact unilatéral frottant

A présent, il faut être en mesure de définir le contenu du vecteur des efforts de contact \mathbf{f}_c . Les conditions de contact unilatéral empêchent les corps de s'interpénétrer [163]. Afin

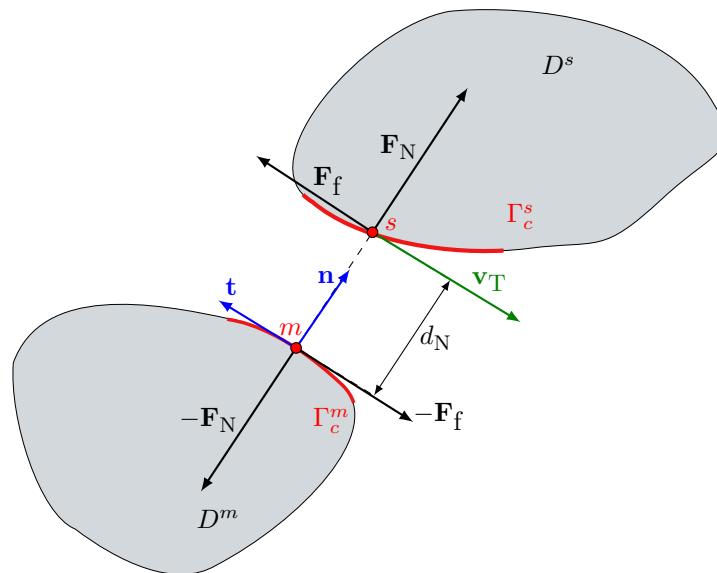


FIGURE II.11 – Quantités impliquées dans traitement du contact unilatéral

d'identifier la direction des forces à appliquer aux corps en contact, il faut en premier lieu évaluer la direction normale au contact, ce qui n'est pas une tâche triviale [133]. Considérons deux corps déformables (voir Figure II.11). Dans le cas où les corps sont modélisés par les éléments finis, Wriggers [163] propose deux méthodes de détection du contact : l'appariement de nœuds et l'approche *maître-esclave*. Dans, cette thèse c'est la seconde qui est retenue et

les exposants m et s sont attribués à chacun des corps. L'approche maître-esclave implique que sur chaque corps est défini une région Γ_c^m et Γ_c^s où le contact est possible. Pour chaque point $m \in \Gamma_c^m$, un repère local formé par les vecteurs unitaires normaux et tangentiels (\mathbf{n}, \mathbf{t}) doit pouvoir être défini. Cela implique certaines conditions à respecter pour pouvoir choisir un solide comme maître, comme l'absence d'angles. A chaque point m est alors associé un point s (pour *slave*) obtenu par projection selon le vecteur normal \mathbf{n} . L'approche maître-esclave est avantageuse par rapport à l'appariement nodal puisque l'évaluation de la distance n'est pas limitée aux nœuds. Le contact entre un nœud maître et un segment d'élément esclave est possible et est traité correctement grâce aux fonctions de forme.

Une formulation classique du contact unilatéral est celle de Hertz-Signorini-Moreau [53, 142], aussi connue sous le nom de Karush-Kuhn-Tucker [163].

Définition : Conditions de Signorini. Soient $F_N = \mathbf{F}_N \cdot \mathbf{n}$ l'effort normal et d_N la distance entre les corps. Les conditions de contact unilatéral imposent alors en tout temps que : $F_N \geq 0$ (non-collage), $d_N \geq 0$ (non-pénétration) et $F_N d_N = 0$. L'ensemble de ces conditions est résumée sous la forme

$$0 \leq d_N \perp F_N \geq 0. \quad (\text{II.33})$$

Quant au frottement, il s'agit d'un mécanisme complexe qui s'accompagne de la définition d'une force \mathbf{F}_f dont le calcul peut se baser sur des micro ou macro-modèles. Dans le premier cas, l'état de surface est pris en compte tout comme une notion de mémoire du frottement avec des propriétés matériau qui dépendent du temps de contact [125]. Au vu de la complexité des micro-modèles par rapport à la démarche exploratoire envisagée dans cette thèse, nous nous intéressons à l'utilisation d'un macro-modèle. Dans ces derniers, l'effort de frottement dépend de la force normale au contact F_N et de la vitesse relative entre les 2 corps en contact, notée \mathbf{v}_T . Le macro-modèle le plus couramment utilisé dans la littérature est celui de Coulomb où deux coefficients de frottement, statique et dynamique sont définis : μ_s et μ_d . Le coefficient de frottement statique est supérieur au dynamique : $\mu_s > \mu_d$. Cette inégalité met en évidence qu'il faut appliquer un effort plus important pour mettre en mouvement un corps initialement au repos. Dans ce cas, l'effort de contact évalué par F_N et le vecteur \mathbf{F}_f sont liés mathématiquement par :

$$\begin{cases} \|\mathbf{F}_f\| \leq \mu_s F_N & \text{si } \|\mathbf{v}_T\| = 0; \\ \|\mathbf{F}_f\| = \mu_d F_N & \text{si } \|\mathbf{v}_T\| \neq 0. \end{cases} \quad (\text{II.34})$$

En général, le modèle de Coulomb est simplifié pour ne retenir qu'un seul coefficient de frottement noté μ et égal à μ_d , ce qui donne le modèle

$$\begin{cases} \|\mathbf{F}_f\| \leq \mu F_N & \text{si } \|\mathbf{v}_T\| = 0; \\ \|\mathbf{F}_f\| = \mu F_N & \text{si } \|\mathbf{v}_T\| \neq 0; \end{cases} \quad (\text{II.35})$$

qui sera retenu dans le reste de la thèse. La vitesse relative est une grandeur clé dans la physique du frottement puisqu'elle dicte la nature de la force de frottement. Lorsque la vitesse relative au contact \mathbf{v}_T n'est pas nulle, les 2 corps en contact glissent l'un par rapport à l'autre. Il s'agit d'un frottement dynamique où la force de frottement est toujours dirigée dans le sens opposé à \mathbf{v}_T . Si la vitesse relative est nulle, cela signifie que les 2 corps en contact adhèrent l'un à l'autre et l'effort frottant est alors qualifié de statique. Sa valeur, tout comme son sens, sont adaptatifs, c'est-à-dire que la force de frottement dépend des équations du mouvement dans lesquelles la contrainte $\mathbf{v}_T = \mathbf{0}$ est introduite. Pour le cas particulier d'un corps en rotation, c'est la condition de roulement « pur », i.e. sans glissement (cf Équation (II.2)), qui intervient.

Cela peut mener à des résultats pas forcément instinctifs dans lesquels la force de frottement statique est dirigée dans le sens du mouvement [61, 126]. De plus, si la vitesse relative dans le repère du contact est nulle, cela implique que la force de frottement ne travaille pas.

Enfin, il faut souligner qu'en réalité, le coefficient de frottement dynamique n'est pas constant mais est fonction de la vitesse relative $\mu_d(\|\mathbf{v}_T\|)$. Cet effet est pris en compte dans d'autres modèles de friction sèche [125]. Dans le cas de frottement lubrifié, cette dépendance du coefficient de frottement est appelé l'effet Stribeck [70] et tient aussi compte de la viscosité du fluide et de l'effort normal linéique appliqué sur les aspérités des corps en contact, mais ces dernières approches ne sont pas retenus dans la suite des travaux de cette thèse.

3 Couplages thermomécaniques

Résoudre un problème thermomécanique au travers d'une interface de contact est une étape délicate. Nous avons déjà vu qu'il déterminait les efforts à appliquer pour empêcher les corps de se pénétrer mutuellement. Ces efforts et le mouvement relatif des surfaces entraînent une génération d'énergie de frottement qui joue plusieurs rôles. La majeure partie sert de source à l'équation de la chaleur mais le frottement provoque aussi des déformations plastiques ainsi qu'une dégradation des pièces avec la production d'un troisième corps formé par les particules d'usure. Localement, cela se traduit par une modification des propriétés tribologiques des surfaces, qui elles-même dépendent de la température [93]. Dans cette thèse, on se placera dans le cadre de la thermo-élasticité des matériaux.

3.1 Equation de la chaleur et discrétisation spatiale

La formulation d'un système thermomécanique avec frottement a été proposée dans les travaux de Strömberg [146]. Les étapes principales sont reprises dans ce paragraphe. La forme

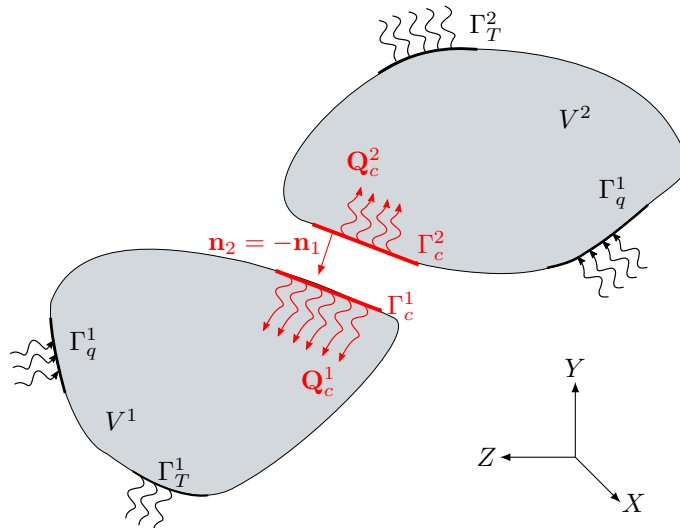


FIGURE II.12 – Domaine de définition de l'équation de la chaleur pour deux solides en contact

forte de l'équation de la chaleur avec couplage thermoélastique est la suivante [131]

$$\rho c_p \dot{T} = \dot{q}_v + \lambda \Delta T + T \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial T} : \dot{\bar{\epsilon}}, \quad (\text{II.36})$$

où le dernier terme peut être modifié en se basant sur l'Équation (II.7)

$$\rho c_p \dot{T} = \dot{q}_v + \lambda \Delta T - \alpha T \bar{\bar{\mathbf{I}}} : \bar{\bar{\mathbf{H}}} : \bar{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}. \quad (\text{II.37})$$

On rappelle que $\bar{\bar{\mathbf{H}}}$ est le tenseur d'élasticité de la loi de Hooke (ordre 4) et $\bar{\bar{\mathbf{I}}}$ est le tenseur identité d'ordre 2. Les paramètres α , c et λ représentent respectivement le coefficient de dilatation, la capacité thermique du matériau et la conductivité thermique du matériau et sont supposées constantes dans cette thèse. \dot{q}_v correspond à une source volumique de chaleur (exprimée en $[\text{W}/\text{m}^3]$). La forme faible de l'équation de la chaleur s'obtient en multipliant l'Équation (II.37) par une fonction test w

$$\int_{V^i} \alpha T \bar{\bar{\mathbf{I}}} : \bar{\bar{\mathbf{H}}} : \bar{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}} w dV + \int_{V^i} \rho c_p \dot{T} w dV - \int_{V^i} \nabla \cdot (\lambda \nabla(T)) w dV = \int_{V^i} \dot{q}_v w dV \quad \text{pour } i = 1, 2. \quad (\text{II.38})$$

La formule de la divergence ainsi que la dérivation par parties garantissent l'égalité¹

$$\int_{\partial V^i} \mathbf{n} \cdot \lambda \nabla(T) w dS = \int_{V^i} \lambda \nabla(T) \cdot \nabla(w) dV + \int_{V^i} \nabla \cdot (\lambda \nabla(T)) w dV \quad (\text{II.39})$$

où \mathbf{n} est le vecteur normal sortant à la surface du solide. En injectant la loi de Fourier $\dot{\mathbf{q}} = -\lambda \nabla(T)$ dans l'Équation (II.39), $\dot{\mathbf{q}}$ étant le vecteur courant de chaleur. Dans ce cas, le premier membre de l'Équation (II.39) fait apparaître un produit scalaire qui définit le flux de chaleur $\dot{q} = -\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n}$. Ainsi, une valeur positive de \dot{q} indique que la chaleur est introduite dans le système (retirée sinon). Ce flux de chaleur est décomposé en deux contributions : le flux externe surfacique \dot{q}_s^i appliqué sur le domaine Γ_q^i et la chaleur apportée par le contact frottant \dot{q}_c^i sur la surface de contact Γ_c^i , et ce pour les volumes 1 et 2.

Dans la suite de cette section, la notation de De Voigt est reprise conformément aux développements de la Section II.1.3 et on obtient la formulation intégrale du problème thermique pour chaque corps (l'indice i est éliminé pour simplifier les notations)

$$\int_{V^i} \alpha T \mathbf{I}_d^\top \bar{\bar{\mathbf{H}}} \bar{\boldsymbol{\epsilon}} w dV + \int_{V^i} \rho c_p \dot{T} w dV + \int_{V^i} \lambda \nabla(T)^\top \nabla(w) dV = \int_{V^i} \dot{q}_v w dV + \int_{\Gamma_q^i} \dot{q}_s w dS + \int_{\Gamma_c^i} \dot{q}_c w dS. \quad (\text{II.40})$$

De gauche à droite, les terme représentent

- l'effet piézothermique ;
- l'énergie interne au volume V^i ;
- la conduction dans le volume V^i ;
- le source de chaleur interne volumique dans V^i ;
- le flux de chaleur externe surfacique ;
- le flux de chaleur apporté par le contact.

L'effet piézothermique représente la modification de température subie par un corps soumis à des contraintes. L'application de la méthode des éléments finis implique que la température et la fonction test sont interpolées aux nœuds : $w(x, t) = \mathbf{N}_g(x) \mathbf{w}_e(t)$ (cf Équation (II.16)). L'égalité II.40 est valable pour toute fonction w et le vecteur \mathbf{w}_e est éliminé. De plus, lorsque la variation de température est supposée faible, la température dans l'intégrale pour l'effet

1. Le produit scalaire \cdot est employé ici de sorte que les écritures $c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ et $c = \mathbf{a}^\top \mathbf{b}$ soient équivalentes

piézothermique peut être remplacée par la température de référence [29]. L'équation de la chaleur discrétisée devient alors pour un élément de volume V^i

$$\int_{V^i} \alpha T_{\text{ref}} \mathbf{N}_\vartheta^\top \mathbf{I}_d^\top \mathbf{H} \mathbf{B} \dot{\mathbf{u}}_e dV + \int_{V^i} \rho c_p \mathbf{N}_\vartheta^\top \mathbf{N}_\vartheta \dot{\mathbf{T}}_e dV + \int_{V^i} \lambda \mathbf{B}_\vartheta^\top \mathbf{B}_\vartheta \mathbf{T}_e dV = \int_{V^i} \mathbf{N}_\vartheta^\top \dot{q}_v dV + \int_{\Gamma_s^i} \mathbf{N}_\vartheta^\top \dot{q}_s dS + \int_{\Gamma_c^i} \mathbf{N}_\vartheta^\top \dot{q}_c dS. \quad (\text{II.41})$$

Une fois l'intégration et l'assemblage effectués, l'équation de la chaleur sous forme matricielle est

$$\mathbf{C}^{\vartheta u} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}^{\vartheta \vartheta} \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{K}^{\vartheta \vartheta} \mathbf{T} = \dot{\mathbf{Q}}_v + \dot{\mathbf{Q}}_s + \dot{\mathbf{Q}}_c. \quad (\text{II.42})$$

L'effet piézothermique est en général gardé dans l'équation de la chaleur pour des systèmes de petite taille comme des circuits imprimés et les composants électroniques. Dans le domaine du contact rotor-stator, il est négligé par rapport à l'énergie fournie par le frottement [79] et c'est également le cas dans cette thèse. Il n'est pas non plus prévu d'avoir des sources volumiques ni de flux surfaciques ailleurs qu'à l'interface de contact. Les termes correspondants à $\dot{\mathbf{Q}}_s$ et $\dot{\mathbf{Q}}_v$ ne seront donc pas repris dans les futurs modèles.

3.2 Introduction à l'usure

Comme mentionné précédemment, l'énergie générée par frottement sert en partie à user les composants par plusieurs procédés, chimiques comme la corrosion, ou physiques comme la fatigue, l'adhésion, l'abrasion et la fusion. Dans les deux derniers cas, il peut même y avoir une formation de particules qui interagissent mécaniquement et thermiquement avec les deux corps de départ [137]. Lim et Ashby [13] ont établi une carte d'usure, principalement basée sur l'expérience, qui permet d'identifier les mécanismes d'usure dominants en fonction de la force de contact et la vitesse. Ces résultats ont servi de base aux travaux de Psarra [129] qui a modifié ces cartes pour les rendre adimensionnelles. Leur lecture et utilisation sont alors devenues plus adaptées par rapport à la diversité des géométries des pièces en contact. Ces travaux ont aussi permis de mettre en évidence que la fusion était le mécanisme d'usure principal dans les moteurs d'avion en cas de rupture d'arbre. Afin de protéger les pièces moteur en cas de contact, les motoristes appliquent une couche de matériau sacrificiel appelé *abradable*. Berthoulet [21] a fourni une liste des principaux mécanismes d'usure de cet abradable en cas d'interaction aube-carter et les a modélisés au moyen des éléments finis. L'étude ne prenait pas en compte les effets thermiques mais a montré une correspondance satisfaisante avec les résultats expérimentaux [18, 109]. Il a également mis en évidence les effets contradictoires de l'usure. En effet, l'usure augmente le niveau de vibration de la structure menant à l'apparition de contacts plus fréquents alors qu'elle contribue en parallèle à augmenter le jeu entre les structures. Ces résultats numériques ont été récemment complétés avec les effets thermiques dans [6]. Des études expérimentales de tribologie ont aussi été réalisées récemment sur le revêtement d'abradable dans les joints labyrinthes [49, 50]. Les deux articles mettent en évidence l'influence de la vitesse de rotation, la vitesse d'incursion et la profondeur d'incursion sur les profils d'usure, les transitions entre mécanismes d'usure, et la génération de chaleur.

A l'heure actuelle, nous disposons de trop peu d'informations qui permettent de prendre en compte l'usure dans les modèles. Il faudrait d'abord identifier la réponse mécanique déjà fort complexe et non-linéaire dans un scénario de rupture d'arbre. Sur base de ces premiers résultats, il sera alors judicieux d'identifier quel type d'usure est dominant afin d'appliquer des modèles appropriés, comme cela a été fait dans les travaux d'Eryilmaz sur la fusion [63].

3.3 Calcul de la puissance de friction

Dans le cas d'un contact glissant, la puissance dissipée par frottement \dot{Q}_c (exprimée en Watts [W]) est en grande majorité convertie en chaleur et est généralement exprimée comme proportionnelle à la force normale au contact, au coefficient de frottement, et à la vitesse relative au contact [55, 129]

$$\dot{Q}_c = \mu F_N \|\mathbf{v}_T\|. \quad (\text{II.43})$$

Cela introduit un couplage entre la mécanique et la thermodynamique et des phénomènes supplémentaires apparaissent comme de l'usure et de la dilatation. A cette énergie de dissipation par frottement s'ajoutent d'autres transferts de chaleur. Ils peuvent être liés au contact comme la conduction entre les aspérités des interfaces à des températures différentes, mais aussi à la convection dans le gaz emprisonné dans les cavités ainsi qu'à la radiation [162]. La capacité d'un corps à transmettre la chaleur passe par le calcul d'une résistance thermique à l'interface. Son calcul est loin d'être trivial car elle dépend de l'effort de contact mais aussi des températures, des déformations, de l'état de surface (i.e. rugosité) et des propriétés matériau [97, 161]. Il s'agit généralement de modèles semi-empiriques qui nécessitent une calibration qui sort du cadre de cette thèse. Les flux de chaleur pour chacun des corps 1 et 2 au niveau d'un point de contact peuvent être simplifiés [9, 79] suivant la relation

$$\begin{cases} \dot{Q}_c^1 = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_1 + \vartheta_2} (\vartheta_2 (T_1 - T_2) - \mu \|\mathbf{v}_T\|) F_N \\ \dot{Q}_c^2 = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2} (\vartheta_1 (T_2 - T_1) - \mu \|\mathbf{v}_T\|) F_N; \end{cases} \quad (\text{II.44})$$

où ϑ_r et ϑ_s représentent les conductances thermiques au contact du rotor et du stator. T_i , avec $i = 1, 2$ est la température d'interface du corps i . La concaténation des flux pour tous les nœuds du modèle forme alors le vecteur $\dot{\mathbf{Q}}_c$ au second membre de l'Équation (II.42). Le premier terme de chaque expression représente la conduction via l'interface de contact tandis que le second est la puissance de friction. Dans ses travaux, Ireman [87] a inclus l'usure basé sur la loi d'Archard [11]. Puisque l'usure n'est pas prise en compte dans le modèle, les termes liés à la loi d'Archard ne sont pas repris dans l'Équation (II.44).

3.3.1 Niveau de couplage

Il faut garder à l'esprit que, en général, la thermique et la mécanique ont des échelles de temps caractéristiques d'ordres de grandeurs différents [9]. C'est pourquoi il faut impérativement déterminer le niveau de couplage approprié entre ces deux physiques. Un couplage partitionné permet de résoudre les équations du mouvement et de la chaleur avec des méthodes en temps différentes. Les itérations en temps pour la mécanique sont alors réalisées sous l'hypothèse de solution isotherme auxquelles succède la résolution de l'équation de la chaleur à géométrie fixe. Des travaux récents présentent les limitations de ce couplage [164] mais se limite à un problème en quasi-statique et sans phénomène de contact. A l'inverse, un couplage monolithique implique l'utilisation de la même discrétisation temporelle et du même schémas d'intégration, les champs de température et de déplacement discrets sont groupés dans un vecteur unique d'inconnues \mathbf{q} . C'est cette 2^{ème} approche qui est privilégiée dans la thèse de Guérin [79] étant donné que la chaleur générée est directement exprimée par l'Équation (II.43). L'auteur n'a pas pris en compte les phénomènes d'usure mais il a montré que la méthode de résolution simultanée des deux physiques devait être choisie judicieusement afin de garantir une stabilité numérique. En ne tenant pas compte de l'usure, le système d'ODEs à résoudre s'écrit pour un système linéaire

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}^{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{T}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{C}^{uu} & 0 \\ \mathbf{C}^{\vartheta u} & \mathbf{C}^{\vartheta \vartheta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{T}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}^{uu} & \mathbf{K}^{u\vartheta} \\ 0 & \mathbf{K}^{\vartheta\vartheta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{\text{ext}} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{f}_c^u \\ \dot{\mathbf{Q}}_c \end{pmatrix}, \quad (\text{II.45})$$

où $\bar{\mathbf{u}}$ et \mathbf{T} représentent les vecteurs des déplacements et de la température aux nœuds du système. Pour la partie mécanique, \mathbf{M}^{uu} , \mathbf{C}^{uu} , \mathbf{K}^{uu} sont les matrices de masse, amortissement et raideur du système, \mathbf{f}_{ext} et \mathbf{f}_{c}^u définissent respectivement les efforts extérieurs (uniquement mécaniques ici) et de contact. Pour la partie thermique, $\mathbf{C}^{\theta\theta}$ et $\mathbf{K}^{\theta\theta}$ sont les matrices de capacité et de conductivité thermique, et $\dot{\mathbf{Q}}_{\text{c}}$ la puissance apportée sous forme de chaleur au système par contact.

L'écriture de ce système d'ODEs, condensée sous la forme d'un système dynamique, où le vecteur \mathbf{q} rassemble toutes les inconnues multi-physiques

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}_{\text{ext}} + \mathbf{f}_{\text{c}}. \quad (\text{II.46})$$

Pour les couplages, la matrice $\mathbf{K}^{u\theta}$ comprend la dilatation thermique. Si le couplage piezothermique était pris en compte, un bloc supplémentaire $\mathbf{C}^{\theta u}$ interviendrait dans la matrice \mathbf{C} . Dorénavant, lorsque qu'un degré de liberté mécanique ou thermique intervient dans une équation, il sera mentionné comme appartenant au vecteur \mathbf{q} . Ainsi, pour un système rotor-stator non-linéaire augmenté avec un couplage thermomécanique fort, l'ODE à résoudre aura la même écriture que pour l'Équation (II.26) où $\bar{\mathbf{u}}$ est remplacé par \mathbf{q} .

4 Résolution temporelle

Principalement à cause des termes non-linéaires dans les équations du mouvement, il est inévitable de se référer à des méthodes numériques afin d'obtenir une solution approchée du problème de contact rotor-stator [53, 81, 133, 140]. L'ensemble de ces outils peuvent être regroupés en 2 catégories : les méthodes de résolution en temps et en fréquence.

Les méthodes dans le domaine fréquentiel cherchent des solutions dont le problème possède une nature périodique ou quasi-périodique et permettent d'obtenir la solution sans passer par le régime transitoire [52, 124]. Une méthode connue dans le domaine fréquentiel, la Méthode de Balance Harmonique (HBM) est utilisée pour la résolution d'un contact rotor-stator dans [43]. Cependant, ces études s'intéressent à un moteur en régime permanent ; or la vitesse est une inconnue dans ce travail doctoral et la phase d'intérêt est justement le comportement transitoire. Ces méthodes ne sont donc pas retenues dans cette thèse.

Par conséquent, l'étude se concentre sur les méthodes du domaine temporel qui permettent de résoudre un système sans aucune propriété de périodicité connue a priori. C'est le cas des intégrateurs [81] qui ont l'avantage d'être faciles à implémenter et qui sont adaptées à résoudre des systèmes non-linéaires. Ils peuvent être obtenus aussi bien par développement de Taylor de l'inconnue que par formulation des résidus pondérés [81]. Le domaine temporel $[t_0, t_e]$ est discrétisé en t_i instants discrets ($i = 1, \dots, N$) espacés par le pas de temps $h = (t_e - t_0)/N$. Les intégrateurs peuvent faire intervenir 2 ou 3 instants discrets pour les plus simples. Les premiers sont couramment appelés les θ -méthodes et les seconds les schémas de Newmark [118].

Les θ -méthodes sont uniquement applicables aux ODEs d'ordre 1. Pour des systèmes différentiels d'ordre supérieur, il faut alors passer par une écriture en variables d'état. A titre d'exemple, considérons l'équation différentielle linéaire de forme

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t). \quad (\text{II.47})$$

Pour éviter la confusion avec d'autres grandeurs introduites dans ce manuscrit, le symbole θ est remplacé par γ . Cette famille définit un seul paramètre γ compris entre 0 et 1. En posant $\mathbf{q}_i = \mathbf{q}(t_i)$, le système algébrique discret à résoudre devient alors

$$\mathbf{C} \frac{\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i}{h} + \mathbf{K}(\gamma \mathbf{q}_{i+1} + (\gamma - 1)\mathbf{q}_i) = \gamma \mathbf{f}_{i+1} + (1 - \gamma)\mathbf{f}_i. \quad (\text{II.48})$$

La valeur de γ permet de retrouver des schémas connus dans la littérature. On retrouve les méthodes d'Euler directe ($\gamma = 0$) et rétrograde ($\gamma = 1$) qui sont respectivement explicites et implicites. Le choix du paramètre à $\gamma = 1/2$ correspond la méthode des trapèzes, aussi connue comme le schémas de Crank-Nicholson, qui est implicite. On rappelle qu'un schémas est explicite lorsque la solution au pas de temps $i + 1$ ne dépend que de l'instant précédent i , et des instants antérieurs pour les intégrateurs dont l'ordre est supérieur à 1. La solution \mathbf{q}_{i+1} peut alors être calculée directement $\mathbf{q}_{i+1} = f(\mathbf{q}_i)$. En général, les méthodes explicites sont plus simples à mettre en place par rapport aux méthodes implicites qui requièrent la résolution d'un système de forme $g(\mathbf{q}_{i+1}, \mathbf{q}_i) = 0$. Dans le cas de la θ -méthode, le seul schémas explicite est celui avec $\gamma = 0$ et la méthode est conditionnellement stable si $0 \leq \gamma < 0.5$. Dans ce cas, il existe un critère à respecter sur le pas de temps donné par :

$$h < \frac{1}{(0.5 - \gamma)\max(\lambda_j)}, \quad (\text{II.49})$$

où λ_j représente les valeurs propres obtenues suivant $\det(\lambda \mathbf{C} + \mathbf{K}) = \mathbf{0}$. En théorie, il existe donc des méthodes implicites conditionnellement stables mais où l'Équation (II.49) est peu contraignante, c'est pourquoi il est communément admis que les méthodes implicites sont stables. Les schémas caractérisées par $0.5 \leq \gamma \leq 1$ sont, quant à eux, tous implicites et inconditionnellement stables mais au prix d'un amortissement numérique plus important.

Les schémas de Newmark, quant à eux, permettent de résoudre des systèmes différentiels d'ordre 2. Ils font intervenir 2 paramètres : un facteur de dissipation (β_1) et un autre de stabilisation (β_2) de sorte que l'Équation (II.46), sans efforts de contact et une fois discrétisée en temps, devient

$$\bar{\mathbf{M}}\mathbf{q}_{i+1} = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{q}_i - \bar{\mathbf{K}}\mathbf{q}_{i-1} + \bar{\mathbf{f}}(i-1, i, i+1) \quad (\text{II.50})$$

avec

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{M}} = \frac{\mathbf{M}}{h^2} + \frac{\beta_1}{h}\mathbf{C} + \frac{\beta_2}{2}\mathbf{K}; \\ \bar{\mathbf{C}} = \frac{2\mathbf{M}}{h^2} + \frac{2\beta_1-1}{h}\mathbf{C} + \left(\frac{1}{2} + \beta_1 - \beta_2\right)\mathbf{K}; \\ \bar{\mathbf{K}} = \frac{\mathbf{M}}{h^2} + \frac{\beta_1-1}{h}\mathbf{C} + \left(\frac{1}{2} - \beta_1 + \frac{\beta_2}{2}\right)\mathbf{K}; \\ \bar{\mathbf{f}}(i-1, i, i+1) = \frac{\beta_2}{2}\mathbf{f}_{i+1} + \left(\frac{1}{2} + \beta_1 - \beta_2\right)\mathbf{f}_i + \left(\frac{1}{2} + -\beta_1 - \frac{\beta_2}{2}\right)\mathbf{f}_{i-1}. \end{cases} \quad (\text{II.51})$$

Parmi les schémas de Newmark se trouvent également des schémas connus dans la littérature tels que Fox-Goodwin, l'accélération moyenne ou les différences finies centrées [105]. Ce dernier défini par $\beta_1 = 0.5$ et $\beta_2 = 0$. C'est cette seconde égalité qui caractérise les méthodes explicites. La condition sur le pas de temps qui garantit un schémas stable est donnée par

$$h < \frac{\sqrt{2}}{\max(\omega_j)\sqrt{\beta_1 - \beta_2}} \quad (\text{II.52})$$

où $\max(\omega_j)$ correspond à la valeur maximale de la pulsation propre issue du système non-amorti \mathbf{M}, \mathbf{K} . Une version modifiée des schémas de Newmark introduit un paramètre supplémentaire qui ajoute de l'amortissement au schémas sans pour autant en affecter la précision. Cette famille s'appelle des schémas de Hilbert-Hughes-Taylor (HHT- α) [84] et ils ont été utilisés résoudre un problème de contact unilatéral dans [39].

D'autres intégrateurs peuvent faire intervenir plus de pas de temps et sont plutôt basés sur l'extrapolation comme la famille de Runge-Kutta. Ce sont des outils puissants grâce à un ordre de précision élevé. En revanche, cette propriété est perdue si la continuité de la solution n'est pas garantie, ce qui est le cas des problèmes de contact comme cela sera présenté en Section II.5.3, où la vitesse d'impact n'est pas continue. En effet, il faut souligner les critères de stabilité

définis ci-dessus ont été démontrés uniquement pour des systèmes linéaires et doivent donc être utilisés avec précaution. Cependant, ils constituent tout de même une ligne de conduite pour choisir le pas de temps dans le cas non-linéaire en ajoutant un facteur de sécurité.

5 Traitement des contraintes de contact

Comme mentionné en section II.2, la théorie du contact unilatéral implique de respecter en tout temps les conditions de Signorini. Ces conditions forment une loi de contact $F_N(d_N)$ qui est non-régulière (dérivées discontinues) et multivoque en $d_N = 0$, comme illustré en Figure II.13. Dans les sections ci-dessous, les différentes manières de gérer cette loi sont présentées ainsi que les algorithmes de référence associés.

5.1 Méthode des pénalités

Une première approche est de résoudre le problème sans contrainte et en régularisant le problème non-linéaire. On parle également de méthode de pénalité qui quantifie la force de contact au moyen d'une raideur fictive k_c unilatéral [163] telle que

$$F_N = k_c(d_N)d_N. \quad (\text{II.53})$$

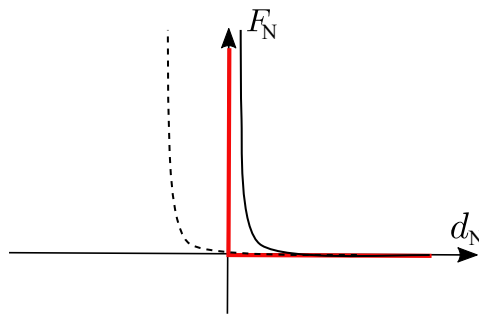


FIGURE II.13 – Loi de Signorini exacte (—) et régularisée par pénalisation extérieure (--) et intérieure (—)

Cette solution est la plus simple à implémenter. Elle est employée dans de nombreux travaux [39, 47, 157] et est la plus couramment rencontrée dans les logiciels commerciaux. La pénalité intérieure et extérieure ont toutes les deux des désavantages (cf Figure II.13). La première présente une pénétration résiduelle non-physique tandis que la seconde génère déjà des efforts non-nuls alors que le contact n'a pas encore eu lieu. La pénalité ajoute aussi de la rigidité numérique au problème pouvant mener à des solutions non-réalistes si elle n'est pas choisie correctement [98]. Ainsi, la valeur de la raideur de contact doit être validée sur base de résultats expérimentaux. Comme l'indique l'Équation (II.53), cette raideur n'est pas forcément constante et peut être paramétrée comme une fonction de la pénétration. Il est également possible d'introduire de l'amortissement en plus de la raideur mais à nouveau, le choix de sa valeur est important et délicat. Il faut donc encore faire appel à une calibration.

5.2 Multiplicateurs de Lagrange : contrainte en déplacement

Algorithme de Carpenter

Si le respect strict de la condition de Signorini de l'Équation (II.33) est souhaité, les multiplicateurs de Lagrange peuvent être utilisés comme dans [10, 99, 134, 151] qui font

appel à l'algorithme de Carpenter [32]. Il s'agit d'un algorithme explicite qui emploie les différences finies centrées combinées aux multiplicateurs de Lagrange. Néanmoins, pour un système thermomécanique, Guérin [79] a démontré qu'il fallait excentrer le schémas afin d'obtenir la convergence des calculs et donc les paramètres de Newmark seront imposés à $\beta_1 = 1/2 + \epsilon$ et $\beta_2 = 0$ lorsque la thermique est prise en compte. L'algorithme de Carpenter est aussi qualifié de prédicteur-correcteur. Afin d'en illustrer le principe, considérons un système linéaire régi par l'Équation (II.50). L'approche de Carpenter effectue les 3 étapes décrites en Figure II.14 :

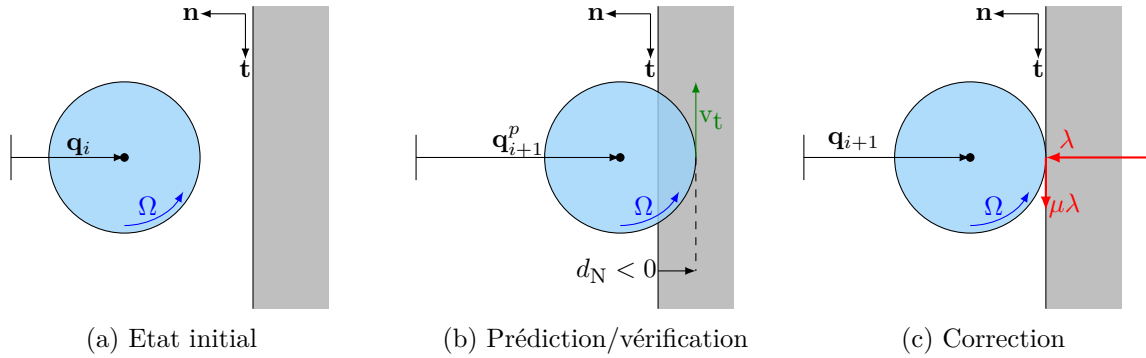


FIGURE II.14 – Etapes algorithme de Carpenter

- Prédiction : il n'y a pas de contact supposé entre les corps et les déplacements prédits aux nœuds \mathbf{q}_{i+1}^p sont obtenus en résolvant le système de l'Équation (II.50).
- Vérification : il faut s'assurer que les déplacements prédits respectent la contrainte de non-pénétration

$$d_N(\mathbf{q}_{i+1}^p) \geq 0 \quad (\text{II.54})$$

dont le gradient par rapport au vecteur déplacement est donné par le vecteur

$$\mathbf{C}_N(\mathbf{q}_{i+1}^p) = \nabla_{\mathbf{q}} d_N(\mathbf{q}_{i+1}^p) \quad (\text{II.55})$$

qui pourra être utilisé afin de corriger le déplacement prédit. La vitesse normale v_N est alors calculée en appliquant au vecteur vitesse \mathbf{v} une dérivation composée qui fait apparaître l'opérateur linéaire

$$v_N = \frac{dd_N(\mathbf{q})}{dt} = \nabla_{\mathbf{q}}^\top d_N(\mathbf{q}) \mathbf{v} = \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{q}) \mathbf{v}. \quad (\text{II.56})$$

Dans une démarche plus générale, si c contraintes similaires à l'Équation (II.54) doivent être strictement satisfaites en tout temps, comme c'est le cas pour les structures maillées ou multi-corps rigides, il se peut que $a \leq c$ soient activées et groupées dans un ensemble \mathbb{A} (de cardinalité $|\mathbb{A}| = a$) défini comme

$$\mathbb{A} = \left\{ j \mid d_N^j(\mathbf{q}_{i+1}^p) < 0, \quad \text{pour } j = 1, \dots, c \right\}. \quad (\text{II.57})$$

Par conséquent, \mathbf{C}_N devient une matrice à a colonnes $\mathbf{C}_N(\mathbf{q}_{i+1}^p) = \cup_{j \in \mathbb{A}} \mathbf{C}_N^j(\mathbf{q}_{i+1}^p)$.² Ce nombre de colonnes peut alors varier pour chaque instant discret t_i . De façon analogue, les a jeux négatifs sont regroupés dans le vecteur $\mathbf{d}_{N,i+1}^p$

2. Dans cette thèse, le symbole union \cup réalise une concaténation

- Correction : si \mathbb{A} n'est pas vide, alors a multiplicateurs de Lagrange λ^j sont calculés et correspondent physiquement à l'effort appliqué dans la direction normale au points contact actifs \mathbf{n}^j . La solution corrigée est obtenue à partir de la solution prédite où un terme correctif $\delta\mathbf{q}$ est ajouté : $\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_{i+1}^p + \delta\mathbf{q}_{i+1}$. En présence de contact, les équations du mouvement sont données par l'Équation (II.50) à laquelle les efforts de contact $\mathbf{f}_{c,i+1}$, sont ajoutés, ce qui donne :

$$\mathbf{q}_{i+1} = \bar{\mathbf{M}}^{-1}(\bar{\mathbf{F}} + \mathbf{f}_{c,i+1}), \quad (\text{II.58})$$

où $\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{q}_i - \bar{\mathbf{K}}\mathbf{q}_{i-1} + \bar{\mathbf{f}}(i-1, i)$. Le vecteur $\mathbf{f}_{c,i+1}$ peut être exprimé à partir des multiplicateurs de Lagrange multipliés par la matrice $\mathbf{C}_{\text{NT}}(\mathbf{q}_{i+1}^p)$. Elle représente la contribution de chacun des a multiplicateurs aux efforts de contact avec prise en compte du frottement glissant qui agit dans la direction tangentielle locale. A nouveau dans le schémas II.14, un seul contact est possible et $\mathbf{C}_{\text{NT}}(\mathbf{q}_{i+1}^p)$ se résume à un vecteur colonne. On en déduit donc l'expression de la correction en déplacement en fonction des multiplicateurs de Lagrange groupés dans le vecteur $\boldsymbol{\lambda}_{i+1}$

$$\delta\mathbf{q}_{i+1} = \bar{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{C}_{\text{NT}}(\mathbf{q}_{i+1}^p)\boldsymbol{\lambda}_{i+1}. \quad (\text{II.59})$$

La solution corrigée doit également satisfaire les contraintes de non-pénétration, de sorte que :

$$\mathbf{C}_{\text{N}}^j(\mathbf{q}_{i+1}^p)\delta\mathbf{q}_{i+1} = -d_{\text{N}}^j(\mathbf{q}_{i+1}^p) \quad \forall j \in \mathbb{A} \quad (\text{II.60})$$

où la projection de la contrainte selon la direction normale s'effectue via l'opérateur $\mathbf{C}_{\text{N}}(\mathbf{q}_{i+1}^p)$. Le système formé par l'équation (II.60) et l'équation (II.58) multipliée préalablement par $\mathbf{C}_{\text{N}}^{\text{T}}(\mathbf{q}_{i+1}^p)$ permet d'évaluer pour l'instant $i+1$ le vecteur $\boldsymbol{\lambda}_{i+1}$:

$$\boldsymbol{\lambda}_{i+1} = -\left(\mathbf{C}_{\text{N}}^{\text{T}}(\mathbf{q}_{i+1}^p)\bar{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{C}_{\text{NT}}(\mathbf{q}_{i+1}^p)\right)^{-1}\mathbf{d}_{\text{N},i+1}^p. \quad (\text{II.61})$$

L'algorithme de Carpenter est développé plus en détails sur son adaptation dans le cas d'un système non-linéaire régi par des matrices de masse, raideur et amortissement à coefficient non-constants en Section IV.3.3.

Méthode des lagrangiens augmentés

Il existe une autre approche intéressante qui combine les avantages des pénalités et des multiplicateurs de Lagrange : il s'agit des lagrangiens augmentés [143]. L'idée est de modéliser la condition de contact unilatéral par un ressort comme dans les pénalités mais de faire converger la force normale au moyen des multiplicateurs de Lagrange jusqu'à ce que la pénétration résiduelle ait atteint une valeur inférieure à un seuil défini par l'utilisateur. Ma & al. [103] ont employé cette méthode dans le cas d'un arbre tournant à vitesse constante en présence de contacts avec frottement.

5.3 Mécanique non-régulière : contrainte en vitesse

5.3.1 Loi d'impact

La dynamique du contact s'accompagne également d'impacts, qui sont des phénomènes très brefs au cours desquels la vitesse des corps subit une discontinuité (voir Figure II.15). Le modèle d'impact plus couramment utilisé est la loi de Newton.

Définition : Loi d'impact de Newton. Soient v_N^- et v_N^+ les composantes normales de la vitesse juste avant et après impact. Il existe alors un coefficient de restitution $e_N \in [0, 1]$ tel que

$$v_N^+ + e_N v_N^- = 0. \quad (\text{II.62})$$

Cette loi met en évidence de façon explicite le caractère non-régulier de la quantité de mouvement dans la dynamique d'impact. Les algorithmes présentés précédemment se basent sur les conditions de Signorini écrites en déplacement (cf Équation (II.33)). Cette dernière

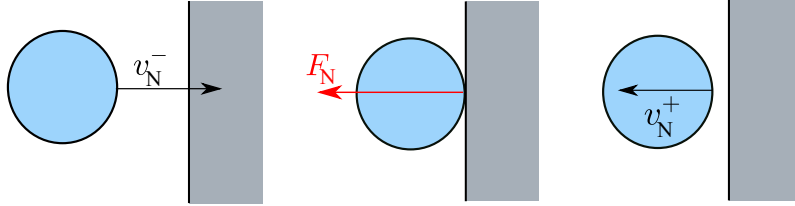


FIGURE II.15 – Différentiel de vitesse normale lors d'un impact

peut être différenciée en temps, et en y injectant l'Équation (II.62), les conditions de Signorini exprimées en vitesse [112] sont définies :

$$\begin{cases} 0 \leq (v_N^+ + e v_N^-) \perp \lambda \geq 0 & \text{si } d_N = 0; \\ \lambda = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{II.63})$$

Dans ce cas, le multiplicateur λ est interprété physiquement comme une l'impulsion $[\text{N} \cdot \text{s}]$.

5.3.2 Algorithme de Moreau-Jean

Il s'agit d'un méthode développée par Moreau [114] et reprise par Jean [89], qui gère le problème de contact en utilisant les concepts issus de la mécanique non-régulière. Dans cet algorithme, le système discrétisé en temps via la θ -méthode avec $\gamma = 1/2$. Cette approche implique au préalable de réécrire les équations du mouvement alors différenciées en temps entre deux instants proches séparés de dt . Par exemple, pour le système linéaire de l'Équation (II.46), cela donne

$$\begin{cases} \mathbf{M}d\mathbf{v} + (\mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{f}_{\text{ext}}) dt = d\mathbf{f}_c \\ \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \end{cases}. \quad (\text{II.64})$$

$d\mathbf{v}$ et $d\mathbf{f}_c$ représentent les variations de vitesse et d'efforts de contact. Ces grandeurs sont également appelées *mesures différentielles* dans la littérature. Elles permettent une écriture des équations qui admettent des solutions non-régulières. Pour rappel, l'intégration par la θ -méthode entre les instants t_i et t_{i+1} donne :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} x dt \approx ((1 - \gamma)x_i + \gamma x_{i+1})h. \quad (\text{II.65})$$

Ainsi, en intégrant l'Équation (II.64) et en posant $x_{i+\gamma} = ((1 - \gamma)x_i + \gamma x_{i+1})$, on obtient :

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i) + h(\mathbf{C}\mathbf{v}_{i+\gamma} + \mathbf{K}\mathbf{q}_{i+\gamma} - \mathbf{f}_{\text{ext},i+\gamma}) = \mathbf{p}_{i+1}; \\ \mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + h\mathbf{v}_{i+\gamma}; \end{cases} \quad (\text{II.66})$$

où l'intégrale de $d\mathbf{f}_c$ est approchée par \mathbf{p}_{i+1} . Injecter la deuxième ligne du système (II.66) dans la première mène alors à l'écriture condensée :

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{M}}(\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i) = -\widetilde{\mathbf{C}}\mathbf{v}_i - \widetilde{\mathbf{K}}\mathbf{q}_i + \widetilde{\mathbf{f}} + \mathbf{p}_{i+1}; \\ \mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + h((1 - \gamma)\mathbf{v}_i + \gamma\mathbf{v}_{i+1}); \end{cases} \quad (\text{II.67})$$

où $\widetilde{\mathbf{M}} = (\mathbf{M} + h\gamma\mathbf{C} + h^2\gamma^2\mathbf{K})$, $\widetilde{\mathbf{C}} = (h\mathbf{C} + h^2\gamma\mathbf{K})$, $\widetilde{\mathbf{K}} = h\mathbf{K}$ et $\widetilde{\mathbf{f}} = h[(1 - \gamma)\mathbf{f}_{\text{ext},i} + \gamma\mathbf{f}_{\text{ext},i+1}]$. Une fois les équations discrétisées, les étapes de résolution temporelle du contact par l'algorithme de Moreau-Jean peuvent être présentées (cf Figure II.16). Pour l'instant, le frottement est considéré comme uniquement glissant, ce qui permet de se concentrer en premier lieu sur l'obtention de l'effort normal.

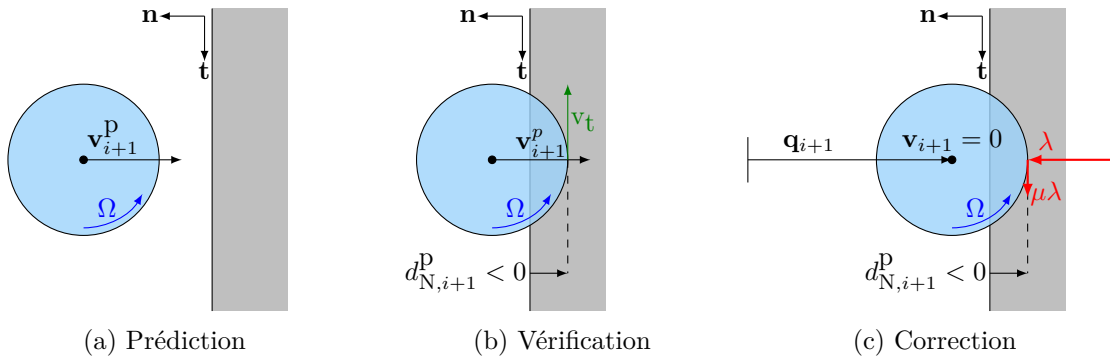


FIGURE II.16 – Etapes algorithme de Moreau-Jean : cas $e_N = 0$

- Prédiction : la vitesse prédite \mathbf{v}_{i+1}^p est évaluée directement en résolvant l'Équation (II.67) en absence de contact ($\mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{0}$). Le calcul de la position prédite fait intervenir un coefficient η tel que $\mathbf{q}_{i+1}^p = \mathbf{q}_i + h\eta\mathbf{v}_i$. Une étude d'influence sur la valeur de η a été effectuée dans [1] et montre des bonnes performances à $\eta = 1/2$.
- Vérification : cette étape est similaire à celle de l'algorithme de Carpenter. Il faut vérifier la condition de non-pénétration donnée par les c contraintes définies par l'Équation (II.54) sur lesquelles a sont actives.
- Correction : une fois la matrice \mathbf{C}_{NT} calculée, l'expression de la vitesse corrigée en fonction des multiplicateurs de Lagrange est possible avec :

$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_{i+1}^p + \widetilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{C}_{\text{NT}}\boldsymbol{\lambda}_{i+1}. \quad (\text{II.68})$$

Afin de faire apparaître la loi d'impact (i.e.Équation (II.62)), il suffit d'ajouter $e_N\mathbf{v}_i$ aux deux membres de l'Équation (II.68) et de la projeter dans la direction normale au contact (cf Équation (II.56)). Dans ce cas, le problème de contact est défini comme

$$\begin{cases} \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{v}_{i+1} + e\mathbf{v}_i) = \mathbf{C}_N^\top\widetilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{C}_{\text{NT}}\boldsymbol{\lambda}_{i+1} + \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{v}_{i+1}^p + e\mathbf{v}_i); \\ 0 \leq \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{v}_{i+1} + e\mathbf{v}_i) \perp \boldsymbol{\lambda}_{i+1} \geq 0; \end{cases} \quad (\text{II.69})$$

qui est un problème connu en théorie d'optimisation : il s'agit d'un Problème de Complémentarité Linéaire (LCP). En effet, on retrouve bien la forme d'un LCP donnée par :

$$\begin{cases} \mathbf{y} = \mathbf{W}\mathbf{r} + \mathbf{z} \\ 0 \leq \mathbf{y} \perp \mathbf{r} \geq 0; \end{cases} \quad (\text{II.70})$$

où la matrice \mathbf{W} est connue sous le nom d'*opérateur de Delassus*. L'algorithme de Moreau-Jean permet donc de prendre en compte le caractère discontinu de la vitesse normale au contact et de respecter strictement cette condition [148]. En revanche, il s'accompagne d'une pénétration résiduelle mais qui diminue avec le pas de temps.

5.4 Contraintes simultanées en position et vitesse

Plusieurs algorithmes ont été développés afin de garantir un respect strict des contraintes de contact unilatéral à la fois en déplacement et en vitesse.

Schémas de Paoli-Schatzman

L'implémentation de cette méthode est proche de celle de l'algorithme de Carpenter dans le sens où les quantités mécaniques inconnues sont les déplacements nodaux \mathbf{q}_i [123]. La contrainte de contact est également définie par les conditions de Signorini en déplacement mais où la loi d'impact de Newton est incorporée. Dans ce cas, c'est le calcul du jeu prédit qui est modifié : il fait intervenir le déplacement prédit \mathbf{q}_{i+1}^p mais aussi le déplacement à l'instant précédent \mathbf{q}_{i-1} et le coefficient de restitution e_N . La contrainte pour les c nœuds d'interface est alors modifiée

$$d_N^j(\mathbf{q}_{i+1}^p + e_N \mathbf{q}_{i-1}) \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, c. \quad (\text{II.71})$$

Dans le cas où $e_N = 0$, on retrouve l'algorithme de Carpenter qui peut donc être vu comme un cas particulier de celui de Paoli-Schatzman [53]. Cet algorithme est capable de satisfaire les contraintes en vitesse et position mais uniquement pour $e_N \neq 0$.

Algorithme de Moreau-Jean projeté

Plus récemment, Acary [1] a développé un algorithme qui permet de respecter simultanément les conditions de contact en vitesse et en déplacement en introduisant un multiplicateur de Lagrange supplémentaire κ par nœud où une pénétration est détectée. Cela amène alors à résoudre à chaque instant 2 LCPs dont le couplage peut être négligé tout en présentant des résultats précis. Le premier LCP permet d'identifier le multiplicateur λ et la vitesse normale conformément à la seconde ligne de l'Équation (II.69) tandis que le second LCP garantit pour tout instant discret i

$$0 \leq d_N^j(\mathbf{q}_{i+1}) \perp \kappa_{i+1}^j \geq 0, \quad \forall j = 1, \dots, c. \quad (\text{II.72})$$

Cette méthode a été adaptée pour un problème thermomécanique dans la thèse de Guérin [79] qui a montré des résultats satisfaisants par rapports aux algorithmes plus conventionnels comme Carpenter ou Moreau-Jean. Il est également retenu dans cette thèse et est développé plus en détails dans la Section IV.3.4.2.

5.5 Gestion du frottement dans la résolution numérique

Comme déjà mentionné en Section II.2, le frottement modélisé par la loi de Coulomb présente une non-régularité dans le cas d'une vitesse de glissement nulle, comme repris en Figure II.17. La plupart des travaux en dynamique des machines tournantes supposent que la composante tangentielle de la vitesse relative entre le rotor et le stator ne s'annule jamais, et seul le contact glissant est considéré [99, 134, 148]. Ces travaux justifient cette simplification par un régime moteur élevé et qui de plus, est constant. Même si cet argument est valable au début d'un scénario de rupture d'arbre, cela n'est pas garanti pour toute la durée de simulation puisqu'il est constaté dans le retour d'expérience que la turbine finit par s'arrêter. A ce stade très précoce de

la thèse, aucune étude ou donnée expérimentale ne permet ni d'écarter l'existence d'une réponse en roulement pur, ni de savoir si elle joue un rôle majeur dans la limitation de la survitesse. La prise en compte de transitions entre roulement/glissement (i.e. frottement statique/dynamique) est possible dans les algorithmes présentés avec plus ou moins de complexité.

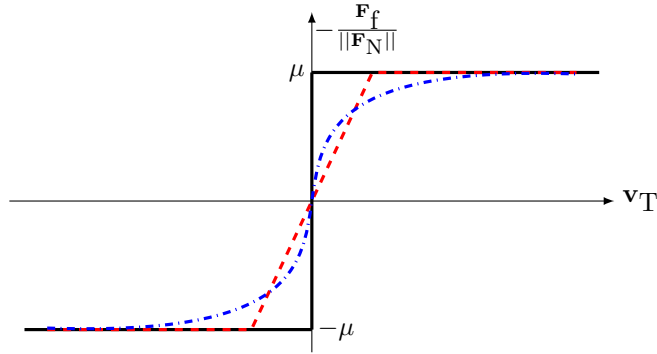


FIGURE II.17 – Méthodes de régularisation de la loi de frottement de Coulomb : exacte (—), linéarisée par morceaux (---), $\tanh()$ (---)

La méthode la plus simple est de régulariser la loi de Coulomb. Pour ce faire, il existe deux stratégies dominantes : définir une rampe lorsque la vitesse en valeur absolue, devient inférieure à une tolérance fixée par l'utilisateur [39] ou définir une fonction \tanh (cf. [79, 145]). Ces deux méthodes de régularisation sont présentées en figure II.17. Le problème principal de ces approches est d'associer une force de frottement nulle à vitesse relative nulle, ce qui n'est pas forcément vrai. En effet, on rappelle que la force de frottement statique est adaptative, sa valeur dépend des autres efforts exercés sur le corps et est déterminée par la contrainte de roulement pur $\mathbf{v}_T = \mathbf{0}$ injectée dans les équations du mouvement.

L'alternative est de faire appel à l'analyse convexe qui repose sur des concepts mathématiques rigoureux, comme décrits dans [3]. Dans le cadre de la mécanique qui nous intéresse ici, on considère un système mécanique doté de n degrés de liberté. Pour simplifier les notations, un seul point de contact dans l'espace est considéré mais les développements peuvent tout à fait être étendus à plusieurs points. A chaque point de contact est associé un repère local. La vitesse relative du rotor par rapport au stator, notée $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, est alors définie dans ce repère et possède 3 composantes de vitesses dans l'espace. En toute généralité, cette vitesse locale peut être déduite de la vitesse globale \mathbf{v} au moyen d'une relation de la forme : $\mathbf{u} = \mathbf{H}^\top \mathbf{v} + \mathbf{w}$, $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^3$ est l'opérateur de projection et $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ un terme indépendant. Cette vitesse globale est elle-même reliée aux efforts de contact locaux \mathbf{r} (frottement inclus) par une relation de la forme $\mathbf{M}\mathbf{v} = \mathbf{H}\mathbf{r} + \mathbf{f}$, où $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, est une matrice définie positive et \mathbf{f} est un vecteur de dimension n . En mécanique, \mathbf{M} et \mathbf{f} sont naturellement associés à la matrice de masse et aux efforts appliqués au système. La résultante des forces au contact \mathbf{r} , exprimée dans le repère local $(\mathbf{n}, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$, est décomposée de la manière suivante : $\mathbf{r} = F_N \mathbf{n} + F_{t1} \mathbf{t}_1 + F_{t2} \mathbf{t}_2 = F_N \mathbf{n} + F_t \mathbf{t}$. On en déduit que la valeur de la force de frottement F_f représente la projection de la force de contact dans le plan tangent au contact. Par conséquent, en reprenant le modèle de frottement de Coulomb défini à l'Équation (II.35), on constate que la force \mathbf{r} est incluse dans un cône défini par :

$$K = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid |F_f| \leq \mu F_N\}, \quad (\text{II.73})$$

également appelé *cône de Coulomb*. Ce dernier est illustré en figure II.18. La vitesse dans le repère local au contact peut aussi être décomposée en une projection tangentielle et une composante normale $\mathbf{u} = v_N \mathbf{n} + v_T \mathbf{t}$. Il est alors possible de définir un vecteur vitesse locale

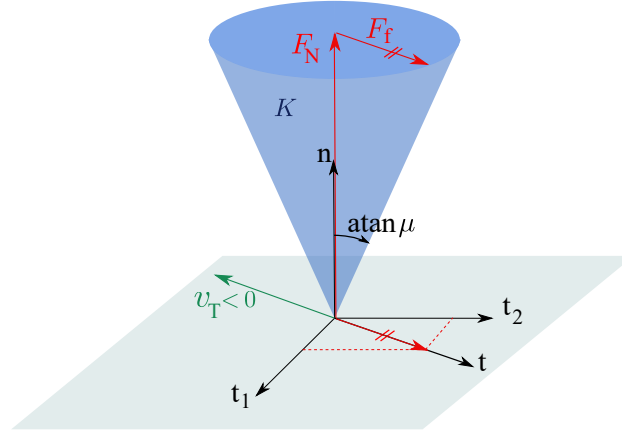


FIGURE II.18 – Forces de contact inscrites dans le cône de Coulomb

transformé comme :

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \mathbf{g}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + [\mu|v_T|, 0, 0]^\top. \quad (\text{II.74})$$

Cette vitesse modifiée est alors définie³ dans le cône K^* qui est le dual de K puisque $\forall \hat{\mathbf{u}} \in K^*, \forall \mathbf{r} \in K : \hat{\mathbf{u}}^\top \mathbf{r} \geq 0$. Par conséquent, un contact avec frottement peut être formulé en trouvant les vecteurs \mathbf{r} et $\hat{\mathbf{u}}$ solutions d'un problème de complémentarité du second ordre sur des cônes (SOCCP)

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{H}^\top \mathbf{M}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{r} + \mathbf{H}^\top \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f} + \mathbf{w} \\ \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \mathbf{g}(\mathbf{u}) \\ K^* \ni \hat{\mathbf{u}} \perp \mathbf{r} \in K. \end{cases} \quad (\text{II.75})$$

Dans ce cas, la matrice de *Delassus* s'écrit $\mathbf{W} = \mathbf{H}^\top \mathbf{M}^{-1} \mathbf{H}$. Une représentation de ces différents cônes pour le cas d'un contact glissant est proposée dans la Figure II.19. Plusieurs méthodes numériques existent pour résoudre un SOCCP, elles sont présentées et comparées dans [4] pour plus d'informations.

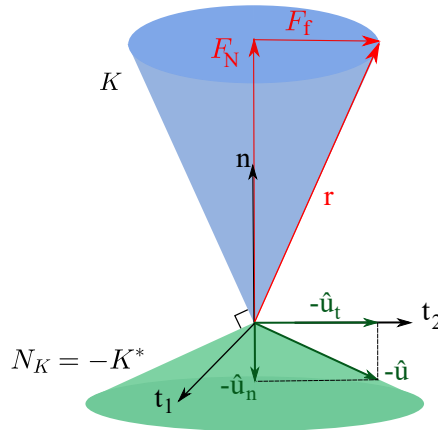


FIGURE II.19 – Schémas d'un problème de complémentarité du second ordre sur des cônes pour le cas glissant

3. Une autre formulation, tout aussi valable, fait plutôt référence au cône normal à K , noté N_K qui est le domaine de définition $-\hat{\mathbf{u}}$ et donc $\forall \mathbf{y} \in N_K, \forall \mathbf{r} \in K : \mathbf{y}^\top \mathbf{r} \leq 0$.

6 Bilan du chapitre

Les mécanismes de contact frottant ont une grande influence sur la réponse mécanique et thermique d'un système rotor-stator. Les équations d'un système thermomécanique ont été développées et ont mis en évidence les couplages par dilatation et génération de chaleur. La bibliographie indique que le frottement est un mécanisme complexe qui pilote le type de précession présent dans la réponse de la ligne d'arbre. Cette réponse est d'autant plus complexe à estimer à cause de la vitesse de rotation inconnue et donc du système fortement non-linéaire même en l'absence de contact. Ce chapitre a également présenté les principales méthodes de résolution d'un problème de contact dans le domaine temporel disponibles dans la littérature et ce pour un système lagrangien linéaire. Dans la suite de cette thèse, ce sont les techniques employant les multiplicateurs de Lagrange qui sont exploitées et qui permettent de satisfaire les conditions non-régulières de Signorini en déplacement, en vitesse, ou bien les deux. Leur adaptation dans le cas d'un système non-linéaire est décrite plus en détails au chapitre IV. A cela s'ajoute la possibilité de modéliser le frottement y compris en phase statique puisqu'une réponse en roulement pur (i.e. sans glissement) n'est pas à exclure à ce stade de l'étude.

Chapitre III

Réduction de modèle

Sommaire du présent chapitre

1	Création de super-éléments	47
1.1	Réduction de Guyan	48
1.2	Réduction de Craig-Bampton	49
1.3	Méthode de Krylov	49
1.4	Limitations des modèles multi-physiques	54
2	Symétrie cyclique	55
3	Maillages hybrides	56
4	Bilan du chapitre	57

Afin de pouvoir étudier le couplage thermomécanique pendant un contact rotor-stator au niveau du labyrinthe, la structure sera modélisée à l'aide d'une approche éléments finis. Or chercher la précision numérique sur un modèle industriel augmente drastiquement le nombre de nœuds de la structure maillée, pouvant atteindre plusieurs millions de degrés de liberté. Le coût en temps de calcul prohibitif rend souvent ce genre d'étude impossible dans un contexte industriel. Ce chapitre présente différentes manières de réduire la taille du problème tout en garantissant des résultats précis.

1 Création de super-éléments

La technique privilégiée est, en général, celle de la sous-structuration, également appelée création de super-éléments. Pour un système de départ à n coordonnées généralisées (déplacements, température,...), il s'agit d'approximer une solution déjà discrétisée sur un espace $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ par un autre jeu d'inconnues plus petit \mathbf{q}_r . La création de super-éléments s'accompagne d'une perte d'information. En effet, la solution réduite est calculée selon une projection de la solution complète sur un espace vectoriel dont la base est formée par la matrice rectangulaire $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{n \times r}$

$$\mathbf{q} \approx \mathbf{R}\mathbf{q}_r; \tag{III.1}$$

où $r < n$ est la taille du modèle réduit. Le système thermomécanique peut en toute généralité être écrit dans un espace d'état et permettant de poser le problème sous la forme d'une ODE d'ordre 1

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}. \tag{III.2}$$

Dans le cas d'une méthode de Petrov-Galerkin, ce système matriciel carré subit une approximation à l'aide de l'Équation (III.1) puis la projection dans une base \mathbf{P} de même dimension que \mathbf{R} de sorte que l'Équation (III.2) devient

$$\left(\mathbf{P}^\top \mathbf{C}\mathbf{R}\right) \dot{\mathbf{q}}_r + \left(\mathbf{P}^\top \mathbf{K}\mathbf{R}\right) \mathbf{q}_r = \mathbf{P}^\top \mathbf{f}. \quad (\text{III.3})$$

On parle également de projection oblique. En dynamique des structures, c'est la méthode de Galerkin qui est souvent employée où $\mathbf{P} = \mathbf{R}$, ce qui correspond à une projection orthogonale [130]. L'étape clé de cette procédure est donc le choix de la matrice \mathbf{R} sur sa taille (r) et son contenu de sorte que les mécanismes dominants soient correctement capturés dans la réponse du modèle réduit. En général, les quantités nodales (déplacements, températures) d'un modèle EF sont réparties en 2 catégories. Les premières sont celles associées aux nœuds qualifiés de *frontière* (ou encore nœuds *maîtres*). Il s'agit ici des nœuds qui sont retenus dans la base réduite car utiles dans la satisfaction des contraintes de contact et des conditions aux limites. En toute généralité, ces nœuds peuvent être répartis partout dans la structure afin de capturer correctement le comportement de la structure. Le reste des nœuds sont considérés comme *internes*. Leur contribution à la dynamique/thermique de la sous-structure est approchée sur base de réponses à des conditions aux limites et de chargement spécifiques. Ainsi, une étape préliminaire à toute réduction est de réarranger le vecteur des quantités nodales et les matrices (taille n) entre *frontière* (taille b) et *internes* (taille i)

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{bb} & \mathbf{C}_{bi} \\ \mathbf{C}_{ib} & \mathbf{C}_{ii} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_b \\ \dot{\mathbf{q}}_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bi} \\ \mathbf{K}_{ib} & \mathbf{K}_{ii} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_b \\ \mathbf{q}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{f}_i \end{pmatrix}. \quad (\text{III.4})$$

Les réductions les plus connues ainsi que celles adaptées à un problème thermomécanique sont présentées dans ce chapitre.

1.1 Réduction de Guyan

Il s'agit d'une des méthodes les plus simples à implémenter. Elle permet au problème réduit de reproduire fidèlement le comportement statique de la structure complète lorsque celle-ci est chargée aux nœuds frontière [78]. L'équation III.4 devient alors

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bi} \\ \mathbf{K}_{ib} & \mathbf{K}_{ii} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_b \\ \mathbf{q}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{0}_i \end{pmatrix}. \quad (\text{III.5})$$

Pour Guyan, les seuls nœuds de la base réduite sont les nœuds frontière, ce qui implique que $r = b$. Il faut alors chercher la matrice de réduction \mathbf{R}_{Guy} de taille $n \times b$

$$\mathbf{R}_{guy} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{bb} \\ \mathbf{\Psi}_s \end{pmatrix} \quad (\text{III.6})$$

de sorte que $\mathbf{q} \approx \mathbf{R}_{guy} \mathbf{q}_b$, et où $\mathbf{\Psi}_s$ est une matrice de taille $i \times b$. Physiquement, la j ème colonne de la matrice $\mathbf{\Psi}_s$ représente la déformée statique des nœuds internes de la structure lorsqu'un déplacement unitaire est appliqué au j ème nœud frontière. Aucun effort n'est appliqué aux nœuds internes. Cela revient à réécrire l'équation III.5 comme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bi} \\ \mathbf{K}_{ib} & \mathbf{K}_{ii} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{bb} \\ \mathbf{\Psi}_{ib} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{0}_i \end{pmatrix}. \quad (\text{III.7})$$

La deuxième ligne de l'équation matricielle III.7 donne alors l'expression des déformées statiques des nœuds internes en fonction de la matrice de raideur. Finalement, la matrice de réduction de Guyan s'écrit

$$\mathbf{R}_{guy} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{bb} \\ -\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ib} \end{pmatrix}. \quad (\text{III.8})$$

1.2 Réduction de Craig-Bampton

La méthode de Craig-Bampton [45] est une version étendue de la méthode de Guyan et qui est disponible dans de nombreux logiciels de dynamique des structures tels qu'ANSYS ou ABAQUS. Il s'agit d'une méthode faisant appel à une synthèse modale de la structure [91] (aussi nommée méthode CMS pour *Component Mode Synthesis*). En effet, elle fait non seulement intervenir les modes statiques de frontière, i.e. la matrice Ψ_{ib} , mais également les modes propres de la structure avec encastrement des nœuds frontière. D'autres méthodes de CMS existent : il est également possible de prendre en compte des modes avec interface libre et/ou des modes mixtes comme dans la réduction de Macneal [104] ou de Craig-Martinez [106].

Les i modes propres des nœuds internes, notés $\phi_{i,k}$ (indiqués avec $k = 1, \dots, i$) associés aux i valeurs propres λ_k , peuvent être obtenus en résolvant le problème aux valeurs propres suivant

$$\forall k = 1, \dots, i, \quad (\lambda_k \mathbf{C}_{ii} + \mathbf{K}_{ii}) \phi_{i,k} = 0. \quad (\text{III.9})$$

Les coordonnées généralisées internes peuvent alors être obtenues à partir de leur projection sur les modes propres. On introduit alors les coordonnées modales z_i telles que : $\mathbf{q}_i = \sum_{k=1}^i \phi_{i,k} z_k$. La réduction de Craig-Bampton prend donc comme base de réduction les quantités nodales de frontière \mathbf{q}_b et les composantes modales \mathbf{z}_i , ce qui donne :

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_b \\ \mathbf{q}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{bb} & \mathbf{0}_{bi} \\ -\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ij} & \phi_{ii} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_b \\ \mathbf{z}_i \end{pmatrix}. \quad (\text{III.10})$$

Il est à souligner que si la matrice des modes propres est gardée telle quelle, la matrice de Craig-Bampton \mathbf{R}_{CB} est une matrice carrée $n \times n$ et n'a donc pas réduit le problème. Il faut alors réaliser une troncature sur les modes propres à retenir, c'est-à-dire choisir k modes propres où $k < i$

$$\mathbf{R}_{CB} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{bb} & \mathbf{0}_{bk} \\ -\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ij} & \phi_{ik} \end{pmatrix}. \quad (\text{III.11})$$

Le choix des modes et leur quantité dépend de la plage fréquentielle d'intérêt pour l'étude de la structure. À noter également que le nombre de nœuds à inclure dans la frontière doit aussi être choisi judicieusement pour limiter la taille du système réduit. En effet, un nœud frontière ajoute 3 inconnues au système alors que conserver un mode supplémentaire n'en ajoute qu'une seule. Une étude paramétrique doit donc souvent être réalisée pour trouver la base de réduction optimale. La réduction de Craig-Bampton a également démontré son efficacité à résoudre des problèmes mécaniques faisant intervenir des contacts rotor-stator, notamment des interactions aube-carter [18, 51]. Par contre, étant donné que la physique du contact fait intervenir l'interface de chaque structure, il est indispensable de conserver un maximum de ces nœuds dans les nœuds de frontière afin de minimiser la perte d'information.

1.3 Méthode de Krylov

Les deux méthodes présentées ci-dessus sont connues pour leur simplicité de mise en oeuvre puisque la base de réduction est construite sur base de grandeurs physiques. Il existe d'autres

méthodes qui reposent sur des concepts algébriques plus abstraits : les espaces et méthodes de Krylov [20]. Néanmoins, elles fournissent un développement robuste et générique en termes d'application, notamment aux problèmes multi-physiques.

1.3.1 Principe

Définition : sous-espace de Krylov. Soit une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible et \mathbf{b} un vecteur $\in \mathbb{R}^n$, le sous-espace de Krylov de dimension m associée à A et b , est un espace vectoriel noté $K_l(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ de dimension $l \leq n$ dont la base est définie par :

$$\left[\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{l-1}\mathbf{b} \right]. \quad (\text{III.12})$$

Soit un système de la forme de (III.4) de taille n où la matrice \mathbf{K} est supposée inversible. En se basant sur la théorie des signaux et des systèmes, l'équation (III.4) représente un système de type *MIMO* (Multi-input Mutli-Output), les sorties étant le vecteur des quantités nodales $\mathbf{q}(t)$. En considérant e signaux d'entrée, le vecteur d'excitation $\mathbf{f}(t)$ peut être réécrit comme $\mathbf{f}(t) = \mathbf{F}\mathbf{e}(t)$, où $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times e}$ représente la *matrice d'entrée* et $\mathbf{e}(t) \in \mathbb{R}^e$ est le *vecteur d'entrée*. Dans ce cas, on peut poser $\mathbf{A} = -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C}$ et le vecteur \mathbf{b} est remplacé par une matrice $\mathbf{B} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}$. Cette variante est appelée *Méthodes de Krylov par blocs*. Le système dynamique est alors redéfini comme

$$-\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{q}(t) = \mathbf{B}\mathbf{e}(t). \quad (\text{III.13})$$

Si la transformée de Laplace est appliquée à ce système, la réponse $\mathbf{Q}(s)$ à l'excitation $\mathbf{E}(s)$, s étant la variable de Laplace, est obtenue avec :

$$\mathbf{q}(s) = (\mathbf{I} - \mathbf{A}s)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{e}(s) \quad (\text{III.14})$$

et la fonction de transfert, alors de taille $n \times e$ est

$$\mathbf{H}(s) = (\mathbf{I} - \mathbf{A}s)^{-1}\mathbf{B}. \quad (\text{III.15})$$

La fonction de transfert peut être approchée par un développement de Taylor d'ordre l au voisinage de s_0

$$\mathbf{H}(s) = (\mathbf{I} - \mathbf{A}s_0)^{-1} \sum_{j=0}^l ((\mathbf{I} - \mathbf{A}s_0)^{-1}\mathbf{A})^j \mathbf{B}(s - s_0)^j + o((s - s_0)^{l+1}). \quad (\text{III.16})$$

où s_0 est censé ne pas être un pôle de \mathbf{H} . Le coefficient du terme d'ordre j en $(s - s_0)$ est défini comme le j ème *moment* de la réponse $\mathbf{Q}(s)$. Ces $l + 1$ moments forment la base

$$K_{l+1} = \left[\mathbf{m}^{(0)}, \mathbf{m}^{(1)}, \dots, \mathbf{m}^{(l)} \right], \quad (\text{III.17})$$

avec $\mathbf{m}^{(j)} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}s_0)^{-(j+1)}\mathbf{A}^j\mathbf{B}$. Ainsi, l correspond au paramètre de troncature de la réponse. La réponse du système réduit parvient alors à reproduire le comportement et les propriétés du système complet grâce à une interpolation à l'ordre l .

1.3.2 Réduction de Craig-Hale

La méthode développée par Craig et Hale [46] combine la méthode de réduction modale et de Krylov par bloc à un système dont l'interface peut être fixe ou mobile. C'est la première

option qui est retenue dans le cadre de cette thèse ainsi que dans [80]. Soit $\boldsymbol{\phi} = (\boldsymbol{\phi}_b \ \boldsymbol{\phi}_i)^\top$ un vecteur propre associé à la valeur propre complexe λ du système soumis à un chargement \mathbf{f}_b sur ses nœuds de frontière. Ainsi pour les b chargements de frontière, le système III.4 peut être réécrit dans le domaine fréquentiel sous la forme partitionnée

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bi} \\ \mathbf{K}_{ib} & \mathbf{K}_{ii} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi}_b \\ \boldsymbol{\phi}_i \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{bb} & \mathbf{C}_{bi} \\ \mathbf{C}_{ib} & \mathbf{C}_{ii} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi}_b \\ \boldsymbol{\phi}_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{f}_b \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{III.18})$$

Sur base de la ligne inférieure de l'Équation (III.18), le mode propre est calculé via

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi}_b \\ \boldsymbol{\phi}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{bb} \\ -\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ib} \end{pmatrix} \boldsymbol{\phi}_b + \lambda \begin{pmatrix} 0_{bb} & 0_{bi} \\ \mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{C}_{ib} & \mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{C}_{ii} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi}_b \\ \boldsymbol{\phi}_i \end{pmatrix} \quad (\text{III.19})$$

où on rappelle que le produit $-\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ib}$ représente la matrice de chargement statique $\boldsymbol{\Psi}_s$ déjà introduite dans la Section III.1.1. Ainsi, le mode propre $\boldsymbol{\phi}$ peut être obtenu par une relation de récurrence :

$$\boldsymbol{\phi}^{(j+1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{bb} \\ \boldsymbol{\Psi}_s \end{pmatrix} \boldsymbol{\phi}_b^{(j+1)} + \lambda \begin{pmatrix} 0_{bb} & 0_{bi} \\ \mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{C}_{ib} & \mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{C}_{ii} \end{pmatrix} \boldsymbol{\phi}^{(j)}. \quad (\text{III.20})$$

En partant de $\boldsymbol{\phi}^{(0)}$ nul, cette récurrence développée à l'ordre l permet d'obtenir une approximation de $\boldsymbol{\phi}_i$ sous la forme condensée

$$\boldsymbol{\phi}_i^{(l+1)} = \mathbf{P}^{(0)}\boldsymbol{\phi}_b^{(l+1)} + \sum_{j=1}^l \lambda^j \mathbf{P}^{(j)}\boldsymbol{\phi}_b^{(l+1-j)}. \quad (\text{III.21})$$

Par conséquent, le sous-espace de Krylov par blocs des modes internes à interfaces fixes de dimension $1 \leq l+1 \leq i$ possède une base composée de $l+1$ matrices de taille $i \times b$.

$$\mathbb{P} = [\mathbf{P}^{(0)}, \mathbf{P}^{(1)}, \mathbf{P}^{(2)}, \dots, \mathbf{P}^{(l)}], \quad (\text{III.22})$$

où il vient directement que $\mathbf{P}^{(0)} = \boldsymbol{\Psi}_s$. tandis que

$$\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{K}_{ii}^{-1}(\mathbf{C}_{ii}\boldsymbol{\Psi}_s + \mathbf{C}_{ib}). \quad (\text{III.23})$$

Les autres moments $\mathbf{P}^{(j)}$, $2 \leq j \leq l$ sont calculés avec :

$$\mathbf{P}^{(j)} = \mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{C}_{ii}\mathbf{P}^{(j-1)}. \quad (\text{III.24})$$

Le premier bloc correspondant à $\mathbf{P}^{(0)}$ est retiré pour éviter une redondance dans la construction de la matrice de réduction notée \mathbf{R}_{CH} sous une forme analogue à celle de Craig-Bampton. La base \mathbb{P} possède alors $r = bl$ colonnes qui peuvent être linéairement dépendantes. Cette matrice de base doit donc passer par un processus d'orthogonalisation, ce qui mène à l'expression

$$\mathbf{R}_{CH} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{bb} & \mathbf{0}_{b\eta} \\ \boldsymbol{\Psi}_s & \mathbb{P}_{i\eta} \end{pmatrix}. \quad (\text{III.25})$$

où $\eta < r$. La réduction de Craig-Hale présentée ci-dessus correspond à approcher la fonction de transfert du système autour de $s = 0$, comme développé dans la prochaine section. Le modèle réduit est alors capable de reproduire fidèlement le comportement du système complet à basse fréquence. Cependant, il est attendu dans le cadre d'un contact rotor-stator, que la fréquence de la source de chaleur soit liée à la fréquence de vibration de la structure qui peut être très élevée.

Il faut donc étendre la réduction sur une plage de fréquence plus large, comme le propose la méthode de Craig Hale Rationnelle.

1.3.3 Réduction de Craig-Hale Rationnelle

Cette méthode a été proposée par Guérin [80] et fait appel à une version plus générale de la réduction Craig-Hale, nommée RCH (pour *Rational Craig Hale*). Dans cette adaptation, l'approximation de la fonction de transfert du système est construite sur base de plusieurs valeurs de s_0 . Sans rédévelopper totalement les travaux de Guérin, l'idée est d'imposer une impulsion à chaque quantité nodale frontière dans le temps, les autres nœuds frontière étant bloqués, dont la dynamique est régie par l'Équation (III.4). Dans le domaine de Laplace, le comportement de la frontière se traduit par b fonctions d'Heavyside, soit une matrice identité \mathbf{I}_{bb} . L'ensemble des efforts de réaction associés sur la frontière et la réponse des nœuds internes sont respectivement regroupés dans les matrices \mathbf{F}_{bb} et \mathbf{X}_{ib} . La réponse du système complet prend alors la forme suivante :

$$\left(\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{bb} & \mathbf{C}_{bi} \\ \mathbf{C}_{ib} & \mathbf{C}_{ii} \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bi} \\ \mathbf{K}_{ib} & \mathbf{K}_{ii} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{bb} \\ \mathbf{X}_{ib}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{bb}(s) \\ \mathbf{0}_{ib} \end{pmatrix}, \quad (\text{III.26})$$

où $\mathbf{X}_{ib}(s)$ est la réponse au niveau des nœuds internes, qui représente également la fonction de transfert pour la partie interne du système. Elle est déterminée en conservant la 2ème ligne de l'équation III.26 :

$$\mathbf{X}_{ib}(s) = -(\mathbf{C}_{ii}s + \mathbf{K}_{ii})^{-1}(\mathbf{C}_{ib}s + \mathbf{K}_{ib}) \quad (\text{III.27})$$

De manière similaire à III.16, cette fonction est approchée par un développement de Taylor d'ordre l autour d'une valeur s_0 n'étant pas un pôle, ce qui donne

$$\mathbf{X}_{ib}(s) \approx -\mathbf{H}_0 - \sum_{j=1}^l (\mathbf{H}_2)^{j-1} \mathbf{H}_1 (s - s_0)^j, \quad (\text{III.28})$$

où $\mathbf{H}_0 \in \mathbb{R}^{i \times b}$, $\mathbf{H}_1 \in \mathbb{R}^{i \times b}$, $\mathbf{H}_2 \in \mathbb{R}^{i \times i}$ permettent de simplifier les notations

$$\begin{cases} \mathbf{H}_0 = (\mathbf{C}_{ii}s_0 + \mathbf{K}_{ii})^{-1}(\mathbf{C}_{ib}s_0 + \mathbf{K}_{ib}); \\ \mathbf{H}_1 = (\mathbf{C}_{ii}s_0 + \mathbf{K}_{ii})^{-1}(\mathbf{C}_{ii}H_0 - \mathbf{C}_{ib}); \\ \mathbf{H}_2 = (\mathbf{C}_{ii}s_0 + \mathbf{K}_{ii})^{-1}\mathbf{C}_{ii}. \end{cases} \quad (\text{III.29})$$

L'auteur conseille de restreindre l'ordre du développement à 0 ou 1, ce qui évite de faire intervenir des puissances de \mathbf{H}_2 coûteuses en temps de calcul. La précision de la réduction peut être obtenue grâce à l'évaluation en plusieurs s_0 . Par conséquent, si p points d'expansion sont retenus pour approcher les b modes à interface fixe au moyen d'un développement de Taylor d'ordre l , p sous-espaces de Krylov par blocs de dimension $l + 1$ peuvent être définis et dont la base est construite avec $l + 1$ matrices de taille $i \times b$:

$$\mathbb{P}^{(j)} = - \left[\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2^2\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_2^{l-1}\mathbf{H}_1 \right] \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (\text{III.30})$$

Dans le cas où un seul point d'expansion est gardé et vaut zéro (cas statique). La base obtenue est identique à celle de la méthode de Craig-Hale classique :

$$\mathbb{P}_0 = \mathbb{P} = \left[\Psi_s, \mathbf{P}^{(1)}, K_{ii}^{-1}\mathbf{C}_{ii}\mathbf{P}^{(1)}, \dots, (K_{ii}^{-1}\mathbf{C}_{ii})^{l-1}\mathbf{P}^{(1)} \right]. \quad (\text{III.31})$$

Pour éviter de prendre en compte les déformées statiques 2 fois, Il faut soustraire les déformées

statiques au premier élément de chaque base.

$$\tilde{\mathbb{P}}^{(j)} = \left[-\mathbf{H}_0 - \Psi_s, -\mathbf{H}_1, -\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1, -\mathbf{H}_2^2\mathbf{H}_1, \dots, -\mathbf{H}_2^{l-1}\mathbf{H}_1 \right]. \quad (\text{III.32})$$

La base réunissant celles des p points d'expansion $\tilde{\mathbb{P}}^{(j)}$ est alors appelée Φ_{ir} , où $r = pb(l+1)$.

$$\Phi_{ir} = \bigcup_{j=1}^p \tilde{\mathbb{P}}^{(j)}. \quad (\text{III.33})$$

Cette dernière, pour être bien conditionnée, doit également subir une orthogonalisation afin d'éliminer les colonnes linéairement dépendantes. La matrice résultante est alors notée $\tilde{\Phi}_{i\eta}$ (telle que $\eta \leq r$) et permet de construire la matrice de réduction finale.

$$\mathbf{R}_{RCH} = \begin{pmatrix} I_{bb} & 0_{bl} \\ \Psi_s & \tilde{\Phi}_{i\eta} \end{pmatrix}. \quad (\text{III.34})$$

En guise de synthèse, l'Algorithme 1 regroupe les étapes de construction de la base des modes internes nécessaire à la réduction RCH.

Algorithme 1 : Réduction RCH

Données : \mathbf{s}_0 : vecteur points d'expansion (taille p), m ordre d'expansion et (\mathbf{C}, \mathbf{K}) (matrices système)

```

1 pour  $j = 1, \dots, p$  faire
2    $\mathbf{A}_{ii} \leftarrow \mathbf{C}_{ii}\mathbf{s}_0(j) + \mathbf{K}_{ii}$ 
3    $\mathbf{H}_0 \leftarrow \mathbf{A}_{ii}^{-1}(\mathbf{C}_{ib}\mathbf{s}_0(j) + \mathbf{K}_{ib})$ 
4    $\tilde{\mathbb{P}}_0^{(j)} \leftarrow -\mathbf{H}_0 + \mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ib}$ 
5   si  $l \geq 1$  alors
6      $\mathbf{H}_1 \leftarrow \mathbf{A}_{ii}^{-1}(\mathbf{C}_{ii}\mathbf{H}_0 - \mathbf{C}_{ib})$ 
7      $\tilde{\mathbb{P}}_1^{(j)} \leftarrow -\mathbf{H}_1$ 
8     si  $l \geq 2$  alors
9        $\mathbf{H}_2 \leftarrow \mathbf{A}_{ii}^{-1}\mathbf{C}_{ii}$ 
10      pour  $n = 2, \dots, l$  faire
11         $\tilde{\mathbb{P}}_n^{(j)} \leftarrow -\mathbf{H}_2^{n-1}\mathbf{H}_1$ 
12      fin
13    fin
14  fin
15 fin
16  $\Phi_{ir} \leftarrow [\tilde{\mathbb{P}}^{(1)}, \tilde{\mathbb{P}}^{(2)}, \dots, \tilde{\mathbb{P}}^{(p)}]$ 
17  $\tilde{\Phi}_{i\eta} \leftarrow \text{Orthogonalisation}(\Phi_{il})$ 

```

Résultat : $\tilde{\Phi}$

Il faut souligner que le processus d'orthogonalisation intervient en ligne 17 de l'Algorithme 1, et est appliqué sur l'union des bases de Krylov. Il est également possible de procéder à p orthogonalisations sur chacune des bases $\tilde{\mathbb{P}}^{(j)}$ pour $j = 1, \dots, p$ mais il s'avère que l'erreur est davantage réduite en pratiquant une seule orthogonalisation [80]. Par ailleurs, cette étape peut être remplacée par une décomposition en valeur singulière (SVD) qui permet de réduire davantage la taille de la base réduite tout en gardant une bonne précision du modèle [102]. Cette alternative est présentée plus en détails au Chapitre VI.

1.4 Limitations des modèles multi-physiques

Toutes les méthodes de réduction ne sont pas adaptées pour toutes les physiques. Cela peut entre autres s'expliquer à cause de la nature des équations qui est différente, hyperboliques pour la vibration et paraboliques pour la thermique. Par ailleurs, si la méthode de Craig-Bampton est couramment utilisée en dynamique des structures, il a été démontré que cette approche présente de mauvais résultats pour l'équation de la chaleur, en particulier pour une excitation à haute fréquence, ce qui est le cas pour le contact frottant [28]. En effet, arriver à la convergence du modèle réduit oblige à conserver un grand nombre de modes, ce qui rend la réduction peu efficace. Des travaux récents ont proposé une méthode de réduction pour un problème thermomécanique employant Craig-Bampton pour la partie mécanique et une condensation statique pour la thermique [69]. Cependant, le but cette recherche était de calculer la réponse stationnaire dans le domaine fréquentiel. La chaleur était considérée comme stationnaire et la matrice de capacité calorifique était négligée, ce qui n'est pas adapté aux objectifs de la présente thèse.

Par ailleurs, il faut décider de la prise en compte ou non de modes couplés entre les physiques dans la base de réduction. L'approche la plus simple à mettre en place a priori serait de calculer les modes indifféremment de leur nature et avec la même méthode, par exemple la RCH. Sauf que le temps de calcul de la base serait alors prohibitif. De plus, il devient très délicat de définir les critères de sélection des modes à inclure dans la base \mathbf{R} . Ces critères sont alors posés au cas par cas en fonction des physiques d'intérêt : thermique, mécanique, aérodynamique, acoustique, etc. Des travaux récents proposent de procéder à une réduction du problème mécanique dans l'espace d'états suivie d'une réduction du problème thermique avec couplage [8]. L'approche retenue dans cette thèse est un calcul découplé des modes pour chaque physique. En d'autres termes, cela implique que les modes mécaniques ne considèrent pas la matrice de dilatation thermique et que des techniques de réduction distinctes, et mieux appropriées, peuvent être appliqués à chaque physique. La démarche est donc identique à celle présentée dans [80]. Avec les différents degrés de liberté arrangés de manière appropriée, la partie mécanique et thermique sont alors réduites séparément, respectivement par Craig-Bampton et RCH. Ainsi, avant toute réduction, les degrés de liberté thermomécaniques doivent être réarrangés entre frontière et internes $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_b^u, \mathbf{q}_b^\vartheta, \mathbf{q}_i^u, \mathbf{q}_i^\vartheta)$, tout comme les matrices qui s'écrivent dans un formalisme générique

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{bb}^{uu} & \mathbf{A}_{bb}^{u\vartheta} & \mathbf{A}_{bi}^{uu} & \mathbf{A}_{bi}^{u\vartheta} \\ \mathbf{A}_{bb}^{\vartheta u} & \mathbf{A}_{bb}^{\vartheta\vartheta} & \mathbf{A}_{bi}^{\vartheta u} & \mathbf{A}_{bi}^{\vartheta\vartheta} \\ \mathbf{A}_{ib}^{uu} & \mathbf{A}_{ib}^{u\vartheta} & \mathbf{A}_{ii}^{uu} & \mathbf{A}_{ii}^{u\vartheta} \\ \mathbf{A}_{ib}^{\vartheta u} & \mathbf{A}_{ib}^{\vartheta\vartheta} & \mathbf{A}_{ii}^{\vartheta u} & \mathbf{A}_{ii}^{\vartheta\vartheta} \end{pmatrix}, \quad (\text{III.35})$$

avec $\mathbf{A} = \{\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}\}$ et, à titre d'exemple la sous-matrice $\mathbf{A}_{ib}^{u\vartheta}$ représente la contribution des ddl thermiques frontière aux ddl mécaniques internes. Ainsi le système thermomécanique réduit est obtenu avec la matrice de réduction

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{bb}^{uu} & \mathbf{0}_{bb} & \mathbf{0}_{bk} & \mathbf{0}_{b\eta} \\ \mathbf{0}_{bb} & \mathbf{I}_{bb}^{\vartheta\vartheta} & \mathbf{0}_{bk} & \mathbf{0}_{b\eta} \\ \Psi_s^{uu} & \mathbf{0}_{ib} & \phi_{ik} & \mathbf{0}_{i\eta} \\ \mathbf{0}_{ib} & \Psi_s^{\vartheta\vartheta} & \mathbf{0}_{ik} & \tilde{\Phi}_{i\eta} \end{pmatrix}. \quad (\text{III.36})$$

2 Symétrie cyclique

La symétrie cyclique de la structure peut être exploitée pour réduire le modèle uniquement à la portion, nommée secteur, qui se répète le long de la circonférence de la pièce (voir Figure III.1), et ce sans perte d'information [23]. Le maillage est alors opéré sur un seul secteur et le modèle

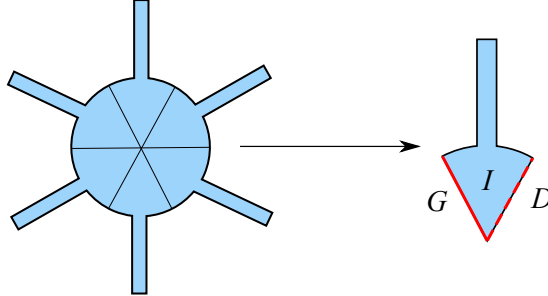


FIGURE III.1 – Définition d'un secteur sur base d'une pièce possédant des propriétés de symétrie cyclique et des domaines associés : frontière gauche G (—) et droite D (---)

complet est reproduit sur base de la symétrie cyclique. Considérons une structure à N secteurs, et donc de pas cyclique $\alpha = \frac{2\pi}{N}$. Les frontières gauche (G) et droites (D) sont respectivement identifiées par les indices g et d . Dans ce cas, pour tout secteur $j = 0, \dots, N - 1$, tout point $\mathbf{x}_g^{(j)}$ est associé à un point de coordonnées $\mathbf{x}_d^{(j=0)}$ du secteur de référence obtenu par rotation

$$\mathbf{x}_g^{(j)} = \mathbf{R}^{(j)} \mathbf{x}_d^{(0)}. \quad (\text{III.37})$$

Pour une rotation selon l'axe Z , la matrice $\mathbf{R}^{(j)}$ s'écrit

$$\mathbf{R}^{(j)} = \begin{pmatrix} \cos((j+1)\alpha) & \sin((j+1)\alpha) & 0 \\ -\sin((j+1)\alpha) & \cos((j+1)\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{III.38})$$

La continuité de toute quantité réelle \mathbf{q} (déplacement, pression, température, etc) à l'interface entre 2 secteurs est garantie par

$$\bar{\mathbf{q}}_g^{(j)} = \mathbf{q}_d^{(j+1)} \quad \forall j = 0, \dots, N - 1. \quad (\text{III.39})$$

Cette quantité définie dans l'espace physique peut alors être calculée dans l'espace cyclique comme une superposition d'harmoniques d'après [153]

$$\mathbf{q}_g^{(j)} = \sum_{k=0}^{N-1} \bar{\mathbf{q}}_{g,k}^{(j)} \quad (\text{III.40})$$

avec

$$\bar{\mathbf{q}}_{g,k}^{(j)} = \bar{\mathbf{q}}_{d,k}^{(j)} e^{ik\alpha} \quad \forall k = 0, \dots, N - 1. \quad (\text{III.41})$$

où l'indice k est l'ordre d'harmonique dans l'espace cyclique. Par conséquent, la propriété de symétrie cyclique (cf Équation (III.39)) implique un déphasage d'angle $k\alpha$ entre les composantes harmoniques des frontières déphasées géométriquement par α . L'Équation (III.41) est aussi vraie pour toute paire de points séparés d'un angle multiple du pas cyclique $j\alpha$. Cette relation est alors étendue domaine interne I du secteur j (cf Figure III.1) Les quantités nodales $\mathbf{q}^{(j)}$ associées sont alors calculées à partir des quantités cycliques pour le secteur de référence ($j=0$)

sur base d'une série de Fourier à valeurs complexes

$$\mathbf{q}^{(j)} = \sum_{k=0}^{N-1} \bar{\mathbf{q}}_k^{(0)} e^{ij\alpha k}. \quad (\text{III.42})$$

L'exposant (0) est retiré pour simplifier la lecture. l'Équation (III.42) est alors retranscrite à valeurs réelles

$$\mathbf{q}^{(j)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \bar{\mathbf{q}}_0 + \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=1}^K \bar{\mathbf{q}}_{k,c} \cos(jk\alpha) + \bar{\mathbf{q}}_{k,s} \sin(jk\alpha) + \frac{(-1)^j}{\sqrt{N}} \bar{\mathbf{q}}_{\frac{N}{2}}, \quad (\text{III.43})$$

où K vaut $N/2$ si N est pair et $(N-1)/2$ sinon. Il faut noter que le dernier terme dans l'Équation (III.43) n'existe que pour N pair. Ainsi le passage du domaine physique au coordonnées cyclique s'opère par multiplication avec la matrice de Fourier

$$\mathbf{q} = \mathbf{F} \bar{\mathbf{q}}. \quad (\text{III.44})$$

Les propriétés de symétrie cyclique ne permettent pas de réduire la taille du système à résoudre. En effet, si chaque secteur j possède J ddls, le vecteur \mathbf{q} , tout comme $\bar{\mathbf{q}}$, sont de taille NJ . En revanche, les inconnues ne portent plus sur tous les secteurs mais uniquement sur les N (resp. $N-1$ in N impair) composantes harmoniques du secteur de référence. En outre, le système \mathbf{C}, \mathbf{K} devient diagonal par blocs dans l'espace des coordonnées cycliques [17], et peut être décomposé en N (resp. $N-1$) problèmes de taille J indépendants, et permet de paralléliser les calculs. Ainsi, passer au domaine cyclique réduit drastiquement le temps de calcul des matrices de réduction impliquant une analyse modale comme Craig-Bampton ou Craig-Martinez (cf Section III.1.2). D'autre part, on peut choisir quels diamètres conserver, ce qui permet de tronquer le nombre d'harmoniques et de réduire davantage la taille du problème. Cette propriété est couramment utilisée pour les roues aubagées [58] et fait son apparition pour simuler le phénomène de blade tangling mais sans avoir encore été validé avec des résultats expérimentaux [33]. Certains auteurs ont également employé la symétrie cyclique sur dans le cas de contact aube-carter et donc en réduisant aussi le modèle du carter en un secteur [17, 79]. Cependant, la symétrie cyclique n'est pas utilisée dans cette thèse. En effet, même si le rotor et le stator présentent tous les deux des géométries cycliques, il n'est pas garanti que le chargement, i.e. les efforts de contact, possède la propriété de symétrie cyclique. Il faudrait alors utiliser tous les diamètres en même temps, car il sont couplés par les forces de contact, ce qui rend l'approche cyclique moins intéressante pour ce type de calcul.

3 Maillages hybrides

Il est intéressant de remarquer que tous les processus de réduction de modèle présentés ci-dessous supposent que une modélisation complète en 3D de la pièce étudiée, ce qui implique la construction de matrices d'éléments finis de grandes dimensions. Un autre démarche propose de modéliser les régions d'intérêt secondaire avec des structures de base : poutres, barres, plaques etc. Uniquement les zones les plus sensibles, comme les interfaces de contact, sont alors raffinées en un maillage 3D. En parallèle de ce changement de modèle piloté par les occurrences de contact, il est possible de modifier le type d'intégrateur pour le calcul de la réponse transitoire. Plusieurs travaux à ce sujet sont disponibles dans la littérature avec une application au contact rotor-stator [119, 120]. En absence de contact, une résolution implicite avec un pas de temps plus long est mise en place tandis que les phases de contact privilégient

une résolution explicite, moins coûteuse par pas de temps. Les travaux de Tannous [147] ont porté sur la modélisation d'un arbre moteur sous forme de poutre en absence de contact et un basculement vers un modèle 3D si une violation du jeu était détectée. Cependant, l'auteur n'a pas appliqué le changement d'intégrateur entre les phases de contact et de séparation. Il s'est avéré que le gain en temps de calcul par résolution implicite était faible une fois employé sur le modèle poutre qui possédait moins de degrés de liberté. Cette approche est pertinente dans l'hypothèse où les intervalles de temps sans contact sont suffisamment longs, ce qui évite des bascules fréquentes entre les modèles dynamiques qui seraient contre-productives. Or les données disponibles chez le partenaire industriel prédisent une grande fréquence de touches.

Ghanem [72] s'est également consacré à l'étude de modèles multi-échelles nommées les *méthodes Arlequin* qui ont été validées sur des problèmes de dynamique de machines tournantes. Ces méthodes ne basculent pas d'un modèle à l'autre mais modélisent les zones de contact par des maillages 3D d'éléments finis en tout temps. Ces patches qui sont alors raccordés à des éléments poutres. Toute la difficulté de cette méthode réside dans le raccord entre les éléments poutres et le maillage 3D, ce qui peut engendrer des réflexions d'ondes numériques. A la connaissance de l'auteur, l'utilisation de patch éléments finis est surtout restreinte aux problèmes de dynamique des structures et plus rarement sur des applications à un modèle multi-physique de machine tournante.

4 Bilan du chapitre

Dans une optique d'application industrielle du contact rotor-stator avec des modèles élément finis 3D de grande taille, il existe un large choix de méthodes de réduction. Ce chapitre a insisté sur la création de super-éléments dont l'implémentation est plus ou moins complexe en fonction du contenu de la base de réduction. Les méthodes impliquant l'analyse modale (CMS) sont les plus largement employées dans les applications en dynamique des structures, même si les méthodes basées sur les sous-espace de Krylov semblent être une alternative intéressante. Bien que plus complexes à implémenter, ces dernières sont basées sur l'approximation de la fonction de transfert du système complet et garantissent de bons résultats à haute fréquence. Dans la suite de ce thèse, seuls des maillages 3D seront impliqués et les inconnues du problème restent dans l'espace physique (i.e. pas de symétrie cyclique). L'approche de réduction retenue est celle utilisée par Guérin [80] qui a procédé à une réduction découplée entre la partie mécanique et thermique respectivement par la méthode de Craig-Bampton et Rational Craig Hale.

Chapitre IV

Modèle rigide

Sommaire du présent chapitre

1 Géométrie simplifiée et hypothèses	59
2 Equations générales du mouvement de la turbine	60
2.1 Repères et degrés de liberté	60
2.2 Equations de Lagrange	63
3 Résolution du contact frottant	64
3.1 Présentation du modèle	64
3.2 Calcul du jeu et directions des efforts de contact	65
3.3 Algorithme de Carpenter adapté pour système non-linéaire	67
3.4 Algorithme de Moreau-Jean pour système lagrangien non-linéaire	70
3.5 Siconos : introduction et utilisation	77
3.6 Synthèse	79
4 Résultats	79
4.1 Données numériques	79
4.2 Analyse modale	80
4.3 Cas de référence	81
4.4 Influence du coefficient de frottement	85
4.5 Influence de la raideur du support du stator	91
4.6 Masse du stator	94
5 Application avec stator assemblé	97
6 Bilan du chapitre	103

1 Géométrie simplifiée et hypothèses

La géométrie d'un générateur de gaz présentée dans l'introduction est simplifiée suivant le schémas présenté en figure IV.1. Il est utile de souligner que ce schémas n'est pas à l'échelle afin de mieux visualiser le joint labyrinthe. L'arbre rompu est divisé en deux parties : compresseur et turbine. Chacune de ces parties est supportée à son extrémité par un palier dont la modélisation peut être plus ou moins complexe fonction des besoins industriels. Dans les données fournies par l'industriel, le générateur de gaz est doté d'une roue turbine et de deux rouets compresseur. Au niveau du joint labyrinthe, seulement une dent annulaire est représentée et considérée dans le modèle. Le stator est représenté comme un anneau circulaire qui lui aussi est relié au bâti avec plus ou moins de complexité en fonction des modèles. Le repère de l'arbre est aussi illustré.

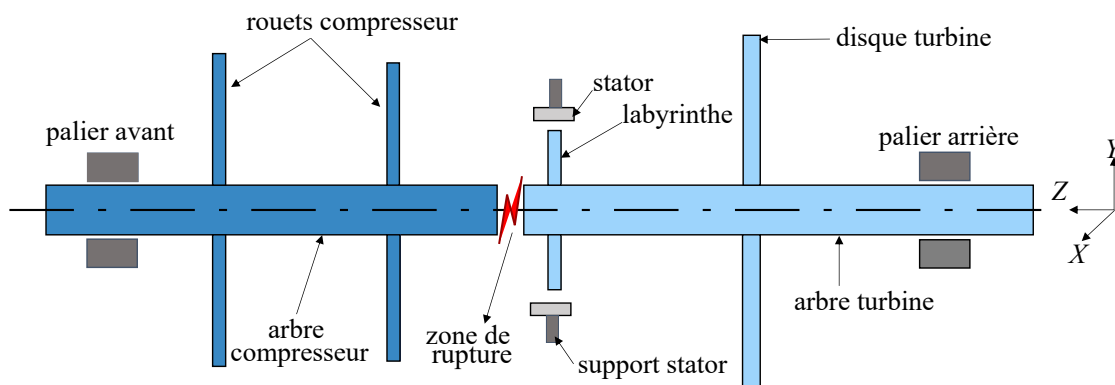


FIGURE IV.1 – Configuration simplifiée d'un générateur de gaz

Avant rupture, l'axe de rotation de l'arbre est confondu avec l'axe Z . Enfin, X (sortant du plan) et Y définissent les 2 directions transversales de l'arbre.

La première simplification faite sur ce modèle est de considérer les corps comme parfaitement rigides. Il est décidé d'ignorer la thermique dans ce chapitre car on souhaite d'abord d'identifier le comportement mécanique du système avec peu de degrés de liberté. L'arbre turbine se résume donc à une barre rigide et 2 disques rigides représentant le labyrinthe et la roue. La turbine et le compresseur sont alors tous deux caractérisés par leur masse et leurs inerties polaires et diamétrales m_j, J_{pi} et $J_{d,i}$, l'indice j valant respectivement t(turbine) et c(compresseur). Le stator est aussi considéré comme parfaitement rigide. Cette hypothèse de corps rigide n'autorise alors l'existence que d'un seul point de contact potentiel au niveau du labyrinthe. On considère également que le compresseur et la turbine sont parfaitement équilibrés (pas de balourds résiduels). Initialement leurs centres de gravité sont sur la ligne d'arbre (Z) : c'est pour cette raison que les déplacements en translations des solides sont indiqués par x et y dans la suite du chapitre. On rappelle aussi que les aspects aérodynamiques de la rupture d'arbre sortent du cadre de cette thèse. Il est alors décidé que le couple moteur appliqué sur la turbine τ_a est constant. Le recul axial de la turbine causé par le gradient de pression dans la veine de la turbine n'est pas pris en compte. On supposera donc que le déplacement axial de l'arbre (indiqué ici par la variable z) est bloqué, soit $z = 0$.

Une étape préliminaire à la résolution du contact rotor-stator est d'identifier les conditions initiales. En effet, il existe un laps de temps entre la rupture du générateur de gaz et la première touche où le contact n'a pas encore eu lieu. La résolution de cette phase, bien que très brève, reste importante puisque les conditions de touche pilotent le type de précession après impact, comme déjà évoqué en Section II.1.2. Plusieurs pistes de modélisation sont explorées dans l'Annexe A. Sans entrer dans les détails, l'approche retenue consiste à prendre en compte un couplage résiduel entre le compresseur et la turbine dans la zone de rupture. Dans cette configuration, le premier impact s'effectue dans le sens de la précession directe. Par soucis de cohérence, ces conditions initiales seront appliquées pour tous les modèles suivants développés dans cette thèse.

2 Equations générales du mouvement de la turbine

2.1 Repères et degrés de liberté

Soit un solide rigide de masse m pouvant s'apparenter à une portion de l'arbre. Ce dernier possède, compte tenu des hypothèses décrites précédemment, cinq degrés de liberté : les 2 translations du centre de gravité (x_G, y_G) et trois rotations. Dans la littérature, il existe

plusieurs approches afin de définir les trois degrés de liberté en rotation. La première, la plus généralement utilisée, est celle des angles d'Euler θ_u, θ_v et θ_w déjà introduits en Section II.1.3 et représentés séparément en Figure IV.2. Le principe d'Huygens stipule que l'énergie cinétique

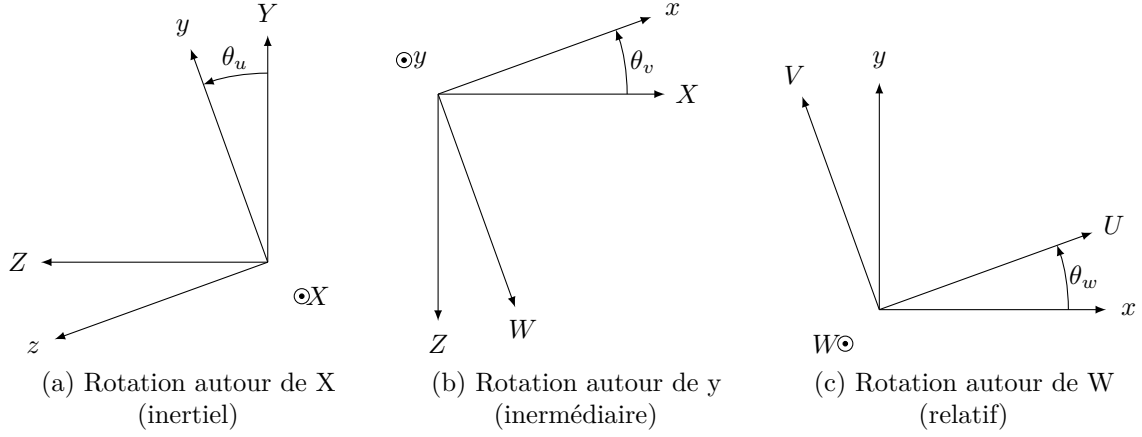


FIGURE IV.2 – Passage du repère inertiel au repère local par angles d'Euler

d'un solide vaut

$$E_c = \frac{m}{2} (\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{J_d}{2} (\omega_u^2 + \omega_v^2) + \frac{J_p}{2} \omega_w^2, \quad (\text{IV.1})$$

où ω_u, ω_v et ω_w sont les vitesses de rotation dans le repère local, rattaché au centre de gravité (U, V, W). En employant les angles d'Euler, ces vitesses valent

$$\begin{cases} \omega_u = \dot{\theta}_u \cos \theta_v \cos \theta_w + \dot{\theta}_y \sin \theta_w; \\ \omega_v = -\dot{\theta}_u \cos \theta_v \sin \theta_w + \dot{\theta}_v \cos \theta_w; \\ \omega_w = \dot{\theta}_w + \dot{\theta}_u \sin \theta_v. \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

Dans ce cas, sans aucune hypothèse sur les rotations, l'Équation (IV.1) devient

$$E_c = \frac{m}{2} (\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{J_d}{2} (\dot{\theta}_u^2 \cos^2 \theta_v + \dot{\theta}_v^2) + \frac{J_p}{2} (\dot{\theta}_u^2 \sin^2 \theta_v + \dot{\theta}_w^2 + 2\dot{\theta}_w \dot{\theta}_u \sin \theta_v). \quad (\text{IV.3})$$

Or, il est commun de simplifier le problèmes en supposant de petites rotations transversales θ_u et θ_v . l'Équation (IV.3) est développée à l'ordre 2 de sorte que

$$2E_c = m (\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + J_d (\dot{\theta}_u^2 + \dot{\theta}_v^2) + J_p \dot{\theta}_w^2 + 2J_p \dot{\theta}_w \dot{\theta}_u \theta_v. \quad (\text{IV.4})$$

Il s'agit du changement de repère le plus classique mais d'autres formalismes peuvent être employés, comme celui présenté dans Hsieh [85] dans le but d'étudier les interactions flexion-torsion d'un arbre avec une vitesse de rotation constante. Il a été introduit pour la première fois dans les travaux de Greenhill [76] où la vitesse de rotation d'un arbre à section conique était aussi considérée comme constante. Son application a été étendue à une machine tournante à haute vitesse mais pilotée en couple par Sghaier [141]. Les rotations réalisées pour passer du repère galiléen au repère tournant sont schématisées en Figure IV.3. Une première rotation autour de l'axe Z d'un angle ϕ est effectuée suivie d'une autre d'un angle α autour de l'axe $x_1 = x_2$. Enfin, une dernière rotation ψ autour de W est appliquée. Les rotations projetées θ_X et θ_Y correspondent aux composantes de la rotation α sur les axes X et Y du

repère absolu :

$$\begin{cases} \theta_X = \alpha \cos \phi; \\ \theta_Y = \alpha \sin \phi. \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

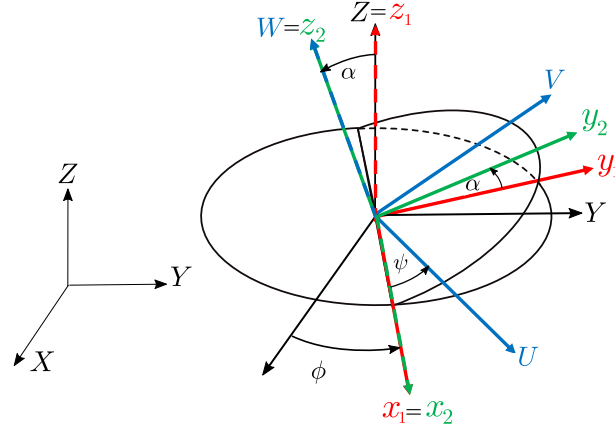


FIGURE IV.3 – Rotations de passage du repère galiléen vers le repère lié au solide d'après [85]

L'auteur mentionne également l'hypothèse des petits angles pour α par rapport à ϕ et ψ , de sorte que la rotation résultante autour de l'axe W s'écrit $\theta_w \approx \phi + \psi$. Il en découle également que les projections θ_X et θ_Y de l'angle α sont faibles. L'hypothèse des petits angles autorise aussi à exprimer les rotations projetées du solide à partir des degrés de liberté en translations. Cette approche est d'autant plus utile puisque la gestion du contact et le calcul du jeu font intervenir explicitement le déplacement du solide. Il est donc plus pratique de paramétrer le problème à l'aide des déplacements que des rotations. Dans le cas du modèle avec corps rigides, cela est réalisé en prenant en compte les déplacements latéraux en deux points de la ligne d'arbre de longueur L . Comme indiqué en Figure IV.4, l'origine du repère axial est placée au niveau du palier auquel correspond le point p . Le point l est choisi au niveau du labyrinthe et situé à une distance d du palier. La Figure IV.4 met aussi en évidence les degrés de liberté de

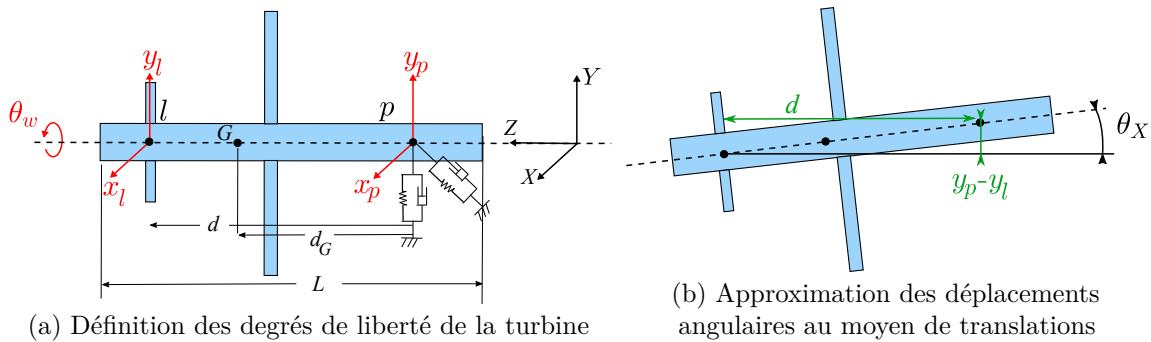


FIGURE IV.4 – Modèle rigide de la turbine à quatre degrés de liberté

translation du labyrinthe (x_l, y_l) et ceux du palier (x_p, y_p) . On obtient alors l'approximation des déplacements angulaires

$$\begin{cases} \theta_X \approx \frac{y_p - y_l}{d}; \\ \theta_Y \approx \frac{x_l - x_p}{d}. \end{cases} \quad (\text{IV.6})$$

C'est cette approximation qui a motivé le choix d'employer des déplacements angulaires au détriment des angles d'Euler. En effet, les 2 rotations transversales de l'Équation (IV.6) sont

exprimées dans le repère absolu (X, Y, Z) , qui est le même repère que celui des déplacements. Ce n'est pas le cas des angles d'Euler où la seconde rotation (θ_v) est réalisée sur un repère intermédiaire (voir Figure II.10)

Remarque : en pratique, utiliser les angles d'Euler reste pertinent, notamment en combinaison avec les éléments finis [48, 110, 140], puisque les rotations sont faibles. Les simulations en corps rigides réalisées dans ce chapitre ont également été testées avec les angles d'Euler et les résultats et commentaires sont identiques.

2.2 Equations de Lagrange

En choisissant le formalisme de déplacement angulaires, l'énergie cinétique de rotation est obtenue en connaissant les composantes de la vitesse de rotation exprimées dans le repère (U, V, W) , voir Figure IV.3 :

$$\begin{cases} w_u = \dot{\alpha} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \alpha \sin \psi; \\ w_v = -\dot{\alpha} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \alpha \cos \psi; \\ w_w = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \alpha. \end{cases} \quad (\text{IV.7})$$

Puis, en injectant les relations (IV.7) et (IV.5) dans (IV.1), l'énergie cinétique devient

$$2E_c = m(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + J_d(\dot{\theta}_X^2 + \dot{\theta}_Y^2) + J_p \dot{\theta}_w^2 + J_p \dot{\theta}_w (\dot{\theta}_X \theta_Y - \dot{\theta}_Y \theta_X). \quad (\text{IV.8})$$

Le caractère antisymétrique des effets gyroscopiques est alors mis en évidence de manière explicite. En notant $\nu = d_G/d$, d_G étant la distance entre le palier et le centre de gravité G , les déplacements de ce dernier sont interpolés avec ceux des points l et p

$$q_G = (1 - \nu)q_p + \nu q_l, \quad (\text{IV.9})$$

où $q = x, y$. Par conséquent, l'arbre rigide turbine est défini par cinq degrés de liberté indiqués en Figure IV.4

$$\mathbf{q}_t = (x_p, y_p, x_l, y_l, \theta_w)^\top. \quad (\text{IV.10})$$

Il y a deux translations choisies en 2 points de l'arbre ainsi que sa rotation propre θ_w (où $\dot{\theta}_w = \Omega(t)$). Sur base des Équations (IV.6) et (IV.9), l'énergie cinétique s'écrit alors comme

$$\begin{aligned} 2Ec = & M_{11}(\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) + M_{22}(\dot{x}_l^2 + \dot{y}_l^2) + 2M_{12}(\dot{x}_p \dot{x}_l + \dot{y}_p \dot{y}_l) \\ & + J_p \dot{\theta}_w^2 + H \dot{\theta}_w ((\dot{y}_p - \dot{y}_l)(x_l - x_p) - (\dot{x}_l - \dot{x}_p)(y_p - y_l)), \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

avec

$$\begin{cases} M_{11} = (1 - \nu)^2 m + \frac{J_d}{d^2}; \\ M_{12} = \nu(1 - \nu)m - \frac{J_d}{d^2}; \\ M_{22} = \nu^2 m + \frac{J_d}{d^2}; \\ H = \frac{J_p}{d^2}. \end{cases} \quad (\text{IV.12})$$

Dans la suite du chapitre, puisque la seule rotation inconnue est la rotation propre, l'indice w est éliminé pour alléger la notation. L'énergie potentielle prend en compte la gravité ainsi que le le palier qui est linéarisé avec une raideur symétrique est constante

$$E_p = mg\nu y_l + (1 - \nu)y_p = k_p/2(x_p^2 + y_p^2). \quad (\text{IV.13})$$

Enfin, l'effort extérieur est constitué du couple aérodynamique imposé à la turbine. En

imposant aussi un amortissement constant aux paliers, l'application des équations de Lagrange mène alors à l'ODE condensée

$$\mathbf{M}_t(\mathbf{q}_t)\ddot{\mathbf{q}}_t + (\mathbf{D}_t + \dot{\theta}\mathbf{G})\dot{\mathbf{q}}_t + \mathbf{K}_t\mathbf{q}_t = \mathbf{f}_t \quad (\text{IV.14})$$

où la matrice de raideur \mathbf{K}_t et d'amortissement \mathbf{D}_t du palier arrière sont des matrices diagonales où seuls les 2 premiers éléments sont non-nuls. Les matrices de masse, gyroscopique sont définies comme

$$\mathbf{M}_t(\mathbf{q}_t) = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & M_{12} & 0 & \frac{H}{2}(y_p - y_l) \\ & M_{11} & 0 & M_{12} & \frac{H}{2}(x_l - x_p) \\ & & M_{22} & 0 & -\frac{H}{2}(y_p - y_l) \\ Sym. & & & M_{22} & -\frac{H}{2}(x_l - x_p) \\ & & & & J_p \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & H & 0 & -H & 0 \\ -H & 0 & H & 0 & 0 \\ 0 & -H & 0 & H & 0 \\ H & 0 & -H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.15})$$

et les effort extérieurs $\mathbf{f}_t = (0, -(1 - \nu)mg, 0, -\nu mg, \tau_a)^\top$.

Il aurait été tout aussi correct d'écrire la matrice de masse comme constante et de faire apparaître la matrice antisymétrique de Coriolis $\mathbf{P} = \mathbf{G}/2$ conformément aux développements présentés en Section II.1.3 et le vecteur d'inertie non-linéaire

$$\mathbf{M}_0\ddot{\mathbf{q}}_t + (\mathbf{D}_t + \dot{\theta}\mathbf{G})\dot{\mathbf{q}}_t + (\ddot{\theta}\mathbf{P} + \mathbf{K})\mathbf{q}_t + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}_t, \dot{\mathbf{q}}_t) = \mathbf{f}_t \quad (\text{IV.16})$$

où l'effort non-linéaire vaut

$$\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}_t, \dot{\mathbf{q}}_t) = \left(0, 0, 0, 0, \frac{H}{2}(\ddot{y}_p - \ddot{y}_l)(x_l - x_p) - (\ddot{x}_l - \ddot{x}_p)(y_p - y_l) \right)^\top. \quad (\text{IV.17})$$

Cependant, l'écriture proposée en Équation (IV.14) est conservée puisqu'elle est plus compacte et se rapproche de la définition générale d'un système lagrangien non linéaire du second ordre [101].

3 Résolution du contact frottant

Il s'agit de la phase d'intérêt majeur dans ce travail doctoral. En effet, ce sont les mécanismes de frottement qui permettent de produire un couple résistif suffisant pour ralentir la turbine. Au début de cette phase, il est décidé que l'impact va amener à une séparation complète de la turbine et du compresseur. Autrement dit, la liaison au point A est perdue et seule la dynamique de la partie turbine est étudiée. Notons qu'en réalité, les observations montrent que cette liaison résiduelle n'est jamais perdue. La démarche ici est donc de s'intéresser à la dynamique d'arbre pour le cas le plus pessimiste même s'il n'est pas rencontré.

3.1 Présentation du modèle

Dans le modèle retenu pour cette phase le palier arrière de la turbine est pris en compte et est caractérisé par une raideur et un amortissement linéaires et symétriques k_p, c_p , voir Figure IV.5. La turbine possède alors cinq degrés de liberté comme développé dans la Section IV.2.2 et son mouvement est régi par les Équations (IV.14) et (IV.15). Le schémas de la turbine illustre une configuration de déplacement qui n'est pas à l'échelle afin de mettre en évidence le second appui au niveau du labyrinthe via un contact rotor-stator ponctuel. Comme déjà mentionné en début de chapitre, le stator est mobile mais est supposé parfaitement rigide. Il est donc doté de 2 ddls en translation (x_s, y_s) et est relié au bâti par des ressorts et amortisseurs symétriques k_s ,

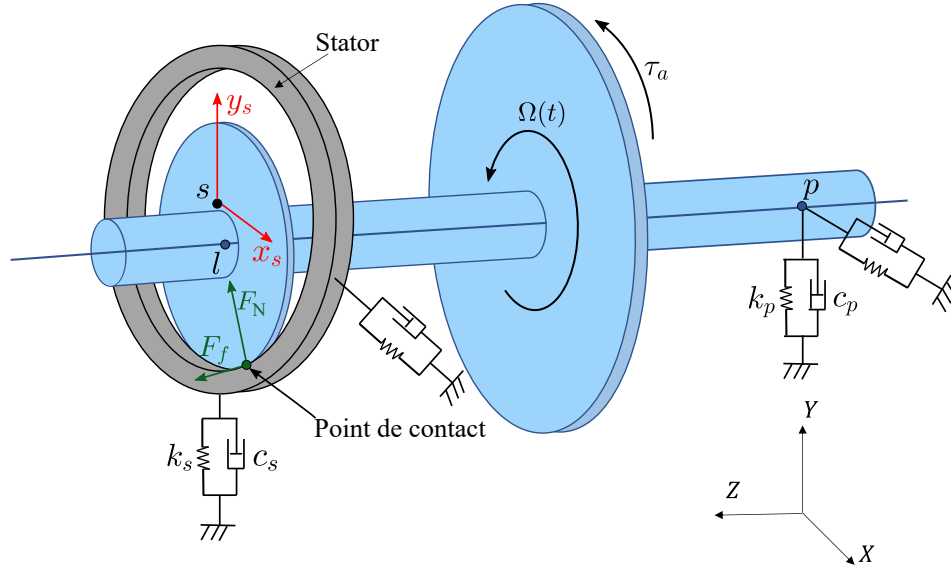


FIGURE IV.5 – Modèle turbine-stator rigide

c_s . Son mouvement est régi par un système d'ODEs linéaire classique

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{D}_s \dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{K}_s \mathbf{q}_s = 0, \quad (\text{IV.18})$$

avec

$$\mathbf{M}_s = \begin{pmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_s \end{pmatrix}, \mathbf{D}_s = \begin{pmatrix} c_s & 0 \\ 0 & c_s \end{pmatrix}, \mathbf{K}_s = \begin{pmatrix} k_s & 0 \\ 0 & k_s \end{pmatrix},$$

Le modèle dynamique complet est finalement obtenu en regroupant les Équations (IV.14) et (IV.18) avec un partitionnement des inconnues entre turbine et stator $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_t, \mathbf{q}_s)^\top = (x_p, y_p, x_l, y_l, \theta, x_s, y_s)^\top$. La rotation propre occupe donc la 5^{ème} place dans le vecteur de coordonnées généralisées.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_t(\mathbf{q}) & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_t \\ \ddot{\mathbf{q}}_s \end{pmatrix} + \left(\dot{\theta} \begin{pmatrix} \mathbf{G} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{D}_t & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_s \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_t \\ \dot{\mathbf{q}}_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_t & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_t \\ \mathbf{q}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{\text{ext},t} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.19})$$

Le système d'équations final pour la dynamique avec $\mathbf{q} = (x_p, y_p, x_l, y_l, \theta, x_s, y_s)$ et en présence de contact s'écrit alors

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + (\dot{\theta} \mathbf{G} + \mathbf{D}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{f}_{\text{ext}} + \mathbf{f}_c, \quad (\text{IV.20})$$

où \mathbf{f}_c est le vecteur d'efforts appliqués au point de contact (cf Figure IV.5) encore à déterminer afin d'inclure l'effort normal F_N et de frottement F_f . L'Équation (IV.20) démontre que les matrices qui définissent le système dynamique ne sont pas à coefficients constants : la matrice de masse dépend du vecteur position $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ et les effets gyroscopiques sont proportionnels à la vitesse de rotation $\dot{\theta} \in \dot{\mathbf{q}}$. Traiter un système présentant déjà des non-linéarités et couplages entre les degrés de liberté en absence de contact implique des adaptations de l'algorithme de Carpenter et de Moreau-Jean.

3.2 Calcul du jeu et directions des efforts de contact

Avant toute chose, il est nécessaire d'établir la fonction jeu ainsi que la direction des efforts de contact, comme déjà introduit en Sections II.5.2 et II.5.3. Pour un labyrinthe et un stator

rigides comme illustrés en Figure IV.6 et de rayons respectifs R_l et R_s , il vient directement que la distance minimale qui le sépare est calculée suivant

$$d_N(\mathbf{q}) = R_s - R_l - \delta(\mathbf{q}), \quad (\text{IV.21})$$

soit en notant le jeu initial $g_0 = R_s - R_l$ et en développant $\delta(\mathbf{q})$, la condition de Signorini en déplacement devient

$$d_N(\mathbf{q}) = g_0 - \sqrt{(x_l - x_s)^2 + (y_l - y_s)^2} \geq 0. \quad (\text{IV.22})$$

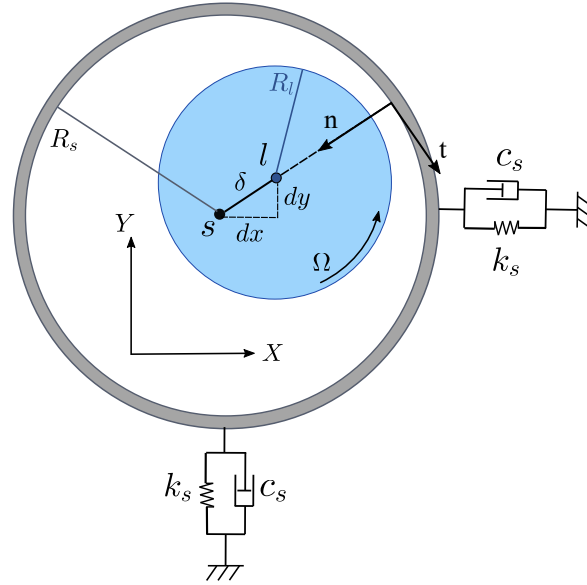


FIGURE IV.6 – Notations des données impliquées dans le traitement du contact

Dans ce qui suit posons $dx = x_l - x_s$ et $dy = y_l - y_s$. L'expression analytique IV.22 permet le calcul du vecteur \mathbf{C}_N qui intervient à la fois dans les algorithmes de Carpenter et de Moreau-Jean (voir Section II.5.2). On rappelle qu'il correspond au gradient de la distance normale $\mathbf{C}_N(\mathbf{q}) = \nabla_{\mathbf{q}}(d_N)$, ce qui donne

$$\mathbf{C}_N(\mathbf{q}) = \left(0, 0, -\frac{dx}{\delta}, -\frac{dy}{\delta}, 0, \frac{dx}{\delta}, \frac{dy}{\delta}\right)^\top. \quad (\text{IV.23})$$

On peut noter que les 3^{ème} et 4^{ème} éléments de \mathbf{C}_N correspondent aux composantes du vecteur unitaire \mathbf{n} . De façon analogue, on peut définir le vecteur \mathbf{C}_T qui contient les contributions des efforts tangentiels, c.-à-d. de la force de frottement, aux équations du mouvement et qui est orthogonal à \mathbf{C}_N . En toute rigueur, le vecteur \mathbf{C}_T est aussi issu d'un calcul de gradient sur une distance *tangentielle*

$$d_T(\mathbf{q}) = -\delta \arctan\left(\frac{dy(\mathbf{q})}{dx(\mathbf{q})}\right) - R_l \theta. \quad (\text{IV.24})$$

La signification physique de cette distance est moins instinctive. Elle correspond à la différence des longueurs d'arc parcourus entre le mouvement orbital (i.e. vibration) du rotor et sa rotation propre. Lorsque ces deux longueurs se compensent, cela reflète un mouvement de roulement pur, et donc une vitesse relative nulle. Lors d'une dérivation partielle selon la direction tangentielle, δ correspond à la coordonnée radiale du rotor par rapport au stator et doit donc être considérée

comme constante. Il vient alors que

$$\mathbf{C}_T(\mathbf{q}) = \mathbf{V}_q(d_T) = (0, 0, \frac{dy}{\delta}, -\frac{dx}{\delta}, -R_l, -\frac{dy}{\delta}, \frac{dx}{\delta})^\top, \quad (\text{IV.25})$$

tel que $\mathbf{C}_N(\mathbf{q})^\top \mathbf{C}_T(\mathbf{q}) = 0$. Il faut noter que le contact n'a aucune contribution sur les déplacements du palier arrière. Lorsque le frottement est uniquement pris en compte sur sa phase glissante, sa valeur est égale à $-\mu F_N \text{sign}(v_T)$. On rappelle que $v_T = \mathbf{v}_T \cdot \mathbf{t}$. La force normale est alignée sur le vecteur \mathbf{n} tandis que la force de frottement est dirigée selon \mathbf{t} . L'effort de contact \mathbf{f}_c implique alors l'utilisation d'un seul multiplicateur de Lagrange λ par contrainte de contact, qui est interprété comme l'effort normal, de sorte que

$$\mathbf{f}_c = \mathbf{C}_{NT}(\mathbf{q})\lambda, \quad (\text{IV.26})$$

avec la loi de Coulomb en glissement introduite directement dans le vecteur \mathbf{C}_{NT}

$$\mathbf{C}_{NT}(\mathbf{q}) = \mathbf{C}_N(\mathbf{q}) - \mu \text{sign}(v_T) \mathbf{C}_T(\mathbf{q}). \quad (\text{IV.27})$$

Par ailleurs, il faut souligner que la vitesse relative au contact v_T correspond à la dérivée de la distance tangentielle, qui est alors calculée par dérivation composée

$$v_T = \dot{d}_T(\mathbf{q}) = \mathbf{V}_q^\top(d_T) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{C}_T^\top(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (\text{IV.28})$$

L'expression analytique pour v_T est alors développée

$$v_T = \frac{dy}{\delta}(\dot{x}_l - \dot{x}_s) - \frac{dx}{\delta}(\dot{y}_l - \dot{y}_s) - R_l \dot{\theta}. \quad (\text{IV.29})$$

Vu que le terme $-R_l \dot{\theta}$ est dominant, cette vitesse est alors a valeur négative par rapport au vecteur unitaire *mathbft* (voir Figure IV.6). Dans la suite du chapitre, la vitesse relative tangentielle est considérée comme positive lorsqu'elle est orientée dans le même sens que Ω . On décide également d'appliquer cette convention pour le signe de la vitesse de précession v_{prec} qui est calculée de la façon suivante :

$$v_{\text{prec}} = -\frac{dy}{\delta}(\dot{x}_l - \dot{x}_s) + \frac{dx}{\delta}(\dot{y}_l - \dot{y}_s). \quad (\text{IV.30})$$

Si elle est positive (resp. négative), cela traduit alors un régime en précession directe (resp. inverse). En toute rigueur, les vecteurs \mathbf{C}_N , \mathbf{C}_T et donc \mathbf{C}_{NT} , dépendent de la position du rotor et du stator \mathbf{q} et devront être mis à jour à chaque fois que ce vecteur est modifié, soit en incrémentant le pas de temps et/ou l'indice d'itération. Par ailleurs, même s'il est clair qu'il n'existe qu'une seule contrainte à satisfaire pour le modèle rigide décrit dans ce chapitre, on se place dans une démarche générale multi-contraintes pour présenter les méthodes de résolution d'un système lagrangien non-linéaire. On considère donc que, parmi c contraintes définies, $a < c$ peuvent être activées par violation du jeu. Elles sont groupées dans l'ensemble $\mathbb{A} = \{j = 1, \dots, c \mid d_N^j(\mathbf{q}) < 0\}$ comme décrit en Section II.5.2.

3.3 Algorithme de Carpenter adapté pour système non-linéaire

En appliquant la discrétisation temporelle selon un schémas de Newmark (cf Section II.4), le système IV.20 devient un problème algébrique non-linéaire

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}_{i+1})\mathbf{q}_{i+1} - \bar{\mathbf{D}}\mathbf{q}_i + \bar{\mathbf{K}}(\mathbf{q}_{i+1})\mathbf{q}_{i-1} = \mathbf{f}_{\text{ext},i} + \mathbf{f}_{c,i+1}, \quad (\text{IV.31})$$

avec

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}_{i+1}) &= \frac{\mathbf{M}(\mathbf{q}_i)}{h^2} + \frac{(\frac{\theta_{i+1}-\theta_{i-1}}{2h})\mathbf{G} + \mathbf{D}}{2h}; \\ \bar{\mathbf{D}} &= \frac{2\mathbf{M}(\mathbf{q}_i)}{h^2} - \mathbf{K}; \\ \bar{\mathbf{K}}(\mathbf{q}_{i+1}) &= \frac{\mathbf{M}(\mathbf{q}_i)}{h^2} - \frac{(\frac{\theta_{i+1}-\theta_{i-1}}{2h})\mathbf{G} + \mathbf{D}}{2h}.\end{aligned}\tag{IV.32}$$

L'écriture des matrices après discrétisation ne reflète que les dépendances envers les quantités inconnues, c.-à-d. \mathbf{q}_{i+1} puisque l'évaluation de la vitesse de rotation fait intervenir le ddl $\theta_{i+1} \in \mathbf{q}_{i+1}$. Bien que la matrice de masse dépende aussi de \mathbf{q}_i , et qu'elle doit être recalculée pour chaque pas de temps, il s'agit d'une donnée connue. Dans cette thèse, 2 versions de l'algorithme de Carpenter ont été implémentées sous python :

- Le premier, noté **Carp-QN**, est semblable à celui de la thèse de S.Roques [133]. Un candidat initial sans contact est proposé puis toutes les étapes de l'algorithme de Carpenter sont appliquées de façon itérative dans une boucle de *Quasi-Newton* dont le critère d'arrêt est l'erreur relative sur la solution entre 2 itérations. Cela implique que l'étape de correction intervient donc au plus it_{Max} fois pour chaque pas de temps. Pour rappel, une boucle de Newton cherche le zéro \mathbf{x} d'une fonction $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ (vectorielle dans le cas présent) en procédant au calcul itératif

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{J}_k^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_k),\tag{IV.33}$$

où \mathbf{J}_k est la matrice jacobienne de \mathbf{f} . Dans le cas d'un méthode de *Quasi-Newton*, cette matrice n'est pas calculée exactement mais est estimée par une différence finie progressive (*forward difference*). La méthode pour calculer le nouveau candidat varie en fonction de la méthode de *Quasi-Newton* implémentée. Afin de gagner en temps de calcul, cette différentiation n'est pas effectuée à chaque itération mais est mise à jour. On procède alors à une approximation de l'estimation réalisée. Dans la thèse de S. Roques, il s'agit de la méthode hybride de Powell [38, 127] qui est utilisée. Celle ci est déjà implémentée dans la librairie **MinPack** sous FORTRAN, qui d'ailleurs, est encapsulée dans la fonction python **fsolve** de la librairie **scipy**¹. La méthode implémentée dans ce travail doctoral est la méthode de Broyden [31] combinée à la méthode de Levenberg [56]. Pour la toute première itération ($k = 0$), la matrice jacobienne, notée \mathbf{A}^k est calculée par différence finie, puis le nouveau candidat à la prédiction \mathbf{q}_p^{k+1} est calculée avec :

$$(\mathbf{A}^{k\top}\mathbf{A}^k + l\mathbf{I})(\mathbf{q}_p^{k+1} - \mathbf{q}_p^k) = -\mathbf{A}^k\mathbf{r}^k$$

où \mathbf{I} et l sont la matrice d'identité et le facteur d'échelle de la méthode de Levenberg. Pour les autres itérations, $k > 0$, la mise à jour de la matrice \mathbf{A}^k dépend de l'évolution du résidu. La mise à jour de la matrice jacobienne est plus amplement détaillée en Annexe B. Les étapes de la procédure **Carp-QN** pour un problème générique à c points de contact sont reprises dans l'Algorithme 2. Pour le modèle rigide étudié dans ce chapitre, comme déjà évoqué, $c = 1$ et un seul multiplicateur doit être calculé.

- La seconde implémentation de l'algorithme de Carpenter est nommée **Carp-oneVC**. Compte tenu du faible pas de temps choisi $h \leq 10^{-6}$ s, on peut supposer que la solution varie peu d'un pas de temps à l'autre. Il semble donc pertinent de simplifier la procédure afin que seule l'étape de prédiction soit itérative afin de proposer une solution non-linéaire prédite. Cette solution est calculée en absence de contrainte de contact. Si aucune pénétration n'est détectée alors la solution finale est bien celle prédite. Sinon, les multiplicateurs de Lagrange

1. voir documentation : <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.fsolve.html>

Algorithme 2 : Carp-QN

```

Entrées :  $i \leftarrow 0$ ,  $\mathbf{q}_0$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_0$  et  $i \leftarrow 1$ ,  $\mathbf{q}_1$ 
Données :  $it_{\text{Max}}$  and  $x_{\text{tol}}$ 
1 pour  $i = 1, \dots, N - 1$  faire
2    $k \leftarrow 0$ 
3    $\theta_p^0 \leftarrow \mathbf{q}_i + h\dot{\mathbf{q}}_{i-1}$  /* rotation prédite */
4    $\mathbf{q}_p^0 \leftarrow \bar{\mathbf{M}}(\theta_p^0)^{-1} [\bar{\mathbf{D}}\mathbf{q}_i - \bar{\mathbf{K}}(\theta_p^0)\mathbf{q}_{i-1} + \mathbf{f}_i^{\text{ext}}]$  /* candidat initial sans contact avec  $\theta_p^0$  assignée */
5    $\Delta q^k \leftarrow \inf$ 
6   tant que  $\Delta q^k > x_{\text{tol}}$  and  $k < it_{\text{Max}}$  faire
7     pour  $j = 1, \dots, c$  faire
8        $d_{N,i+1}^{j,k} \leftarrow R_s - R_l - \delta(\mathbf{q}_p^k)$  /* calcul des jeux prédits */
9     fin
10     $\mathbb{A} \leftarrow \{j = 1, \dots, c \mid d_{N,i+1}^{j,k} < 0\}$  /* ensemble des contraintes actives */
11    si  $\mathbb{A} = \emptyset$  alors
12       $\mathbf{q}_{i+1}^k \leftarrow \mathbf{q}_p^k$ 
13       $\mathbf{f}_{c,i+1}^k \leftarrow \mathbf{0}$ 
14    sinon
15       $\mathbf{d}_{N,i+1}^k \leftarrow \cup_{j \in \mathbb{A}} d_{N,i+1}^{j,k}$  /* correction */
16       $\lambda_{N,i+1}^k \leftarrow -(\mathbf{C}_N^\top(\mathbf{q}_p^k)\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}_p^k)^{-1}\mathbf{C}_{\text{NT}}(\mathbf{q}_p^k))^{-1} \mathbf{d}_{N,i+1}^k$ 
17       $\mathbf{q}_{i+1}^k \leftarrow \mathbf{q}_p^k + \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}_p^k)^{-1}\mathbf{C}_{\text{NT}}(\mathbf{q}_p^k)\lambda_{N,i+1}^k$ 
18       $\mathbf{f}_{c,i+1}^k \leftarrow \mathbf{C}_{\text{NT}}(\mathbf{q}_p^k)\lambda_{N,i+1}^k$ 
19    fin
20     $\mathbf{r}^k \leftarrow \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}_{i+1}^k)\mathbf{q}_{i+1}^k - [\bar{\mathbf{D}}\mathbf{q}_i - \bar{\mathbf{K}}(\mathbf{q}_{i+1}^k)\mathbf{q}_{i-1} + \mathbf{f}_i^{\text{ext}} + \mathbf{f}_{c,i+1}^k]$  /* calcul résidu */
21    Estimation de  $\mathbf{A}^k$  et  $l$  via l'Annexe B
22     $\Delta \mathbf{q}^{k+1} \leftarrow (\mathbf{A}^{k\top} \mathbf{A}^k + l\mathbf{I})^{-1} (-\mathbf{A}^k \mathbf{r}^k)$ 
23     $\mathbf{q}_p^{k+1} \leftarrow \mathbf{q}_p^k + \Delta \mathbf{q}^{k+1}$  /* nouvelle solution prédite */
24     $k \leftarrow k + 1$ 
25  fin
26   $\mathbf{q}_{i+1} \leftarrow \mathbf{q}_{i+1}^k$ 
27 fin

```

et la solution corrigée sont calculés. Cela revient à découpler les non-linéarités inertielles et de contact. Ainsi, l'étape de correction est appliquée au plus une fois par pas de temps, d'où le nom **Carp-oneVC** pour *One Verification and Correction*. Par ailleurs, il est décidé que l'étape de prédiction non-linéaire fait appel à la fonction python `fsolve`. Cette fonction permet de trouver la solution prédite sans contrainte $\mathbf{q}_{i+1,p}$ permettant d'annuler le système non-linéaire algébrique formé par les équations du mouvement discrétisées en temps. Les étapes de cette procédure simplifiée sont décrites dans l'Algorithme 3. Il y a alors une approximation qui est effectuée puisque la matrice $\bar{\mathbf{M}}$ est alors calculée sur base de la rotation $\theta_{i+1,p}$ faisant partie de la solution prédite $\mathbf{q}_{i+1,p}$. Puisque cette matrice intervient dans l'étape de correction qui n'est pas rebouclée, il existe un risque de propagation d'erreur mais qui est supposé acceptable pour un pas de temps suffisamment

faible. Ce postulat est vérifié dans la suite du chapitre.

Afin de s'assurer que les hypothèses retenues pour la mise en place de l'algorithme **Carp-oneVC** sont correctes, il faut comparer les résultats obtenus. La procédure complètement itérative **Carp-QN** fournit alors une solution de référence mais il s'agit toujours de l'algorithme de Carpenter. L'implémentation d'autres procédures comme Moreau-Jean semble tout à fait adéquate dans une démarche de vérification de méthodes numériques.

Algorithme 3 : Carp-oneVC

```

Entrées :  $i \leftarrow 0$ ,  $\mathbf{q}_0$  and  $\dot{\theta}_0 \leftarrow \Omega_0$  et  $i \leftarrow 1$ ,  $\mathbf{q}_1$ 
1 pour  $i = 1, \dots, N - 1$  faire
2    $\mathbf{q}_p^0 \leftarrow \mathbf{q}_i$  /* candidat initial sans contact */
   /* solveur non-linéaire: recherche la solution  $\mathbf{q}_{i+1,p}$  à partir de  $\mathbf{q}_p^0$  */
3   Résoudre  $\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}_{i+1,p})\mathbf{q}_{i+1,p} - [\bar{\mathbf{D}}\mathbf{q}_i - \bar{\mathbf{K}}(\mathbf{q}_{i+1,p})\mathbf{q}_{i-1} + \mathbf{f}_{\text{ext},i}] = \mathbf{0}$ 
4   pour  $j = 1, \dots, c$  faire
5      $d_{N,i+1}^j \leftarrow R_s - R_l - \delta(\mathbf{q}_{i+1,p})$  /* calcul jeux */
6   fin
7    $\mathbb{A} \leftarrow \{j = 1, \dots, c \mid d_{N,i+1}^j < 0\}$ 
8   si  $\mathbb{A} = \emptyset$  alors
9      $\mathbf{f}_{c,i+1} \leftarrow \mathbf{0}$ 
10  sinon /* correction */
11     $\lambda_{i+1} \leftarrow -\left(\mathbf{C}_N^\top(\mathbf{q}_{i+1,p})\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}_{i+1,p})^{-1}\mathbf{C}_{\text{NT}}(\mathbf{q}_{i+1,p})\right)^{-1}\left(\cup_{j \in \mathbb{A}} d_{N,i+1}^{j,k}\right)$ 
12     $\mathbf{f}_{c,i+1} \leftarrow \mathbf{C}_{\text{NT}}(\mathbf{q}_{i+1,p})\lambda_{i+1}$ 
13  fin
14   $\mathbf{q}_{i+1} \leftarrow \mathbf{q}_{i+1,p} + \bar{\mathbf{M}}(\theta_{i+1,p})^{-1}\mathbf{f}_{c,i+1}$ 
15 fin

```

3.4 Alogrithme de Moreau-Jean pour système lagrangien non-linéaire

3.4.1 Sans reprojexion

Discrétisation et linéarisation

Reprenons l'ODE (IV.20) mais en y introduisant le principe de la mesure différentielle (cf Section II.5.3). En posant $\mathbf{C}(\mathbf{v}) = \mathbf{D} + \dot{\theta}\mathbf{G}$ (puisque $\dot{\theta} \in \mathbf{v}$), Le système s'écrit

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\mathbf{q})d\mathbf{v} + [\mathbf{C}(\mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{K}\mathbf{q}] dt = \mathbf{f}_{\text{ext}}dt + d\mathbf{f}_c; \\ \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}. \end{cases} \quad (\text{IV.34})$$

L'intégration en temps discret pour un système lagrangien non-linéaire d'ordre 2 a été développée en détails dans [3]. La présente section reprend les étapes principales du développement. En toute généralité, l'ensemble des efforts internes et inertiels appliqués au système (raideur, gyroscopique, amortissement) représente des termes réguliers de l'équation du mouvement. Ils peuvent être groupés sous le vecteur $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t)$. Il en résulte la forme intégrale

$$\begin{cases} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{M}(\mathbf{q})d\mathbf{v} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) - \mathbf{f}_{\text{ext}}(t)] dt = \mathbf{p}_{i+1} \\ \mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{v} dt. \end{cases} \quad (\text{IV.35})$$

où $\mathbf{p}_{i+1} \approx \int_{t_i}^{t_{i+1}} d\mathbf{f}_c$. La première intégrale (sur la masse non-linéaire) peut être approchée par

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{M}(\mathbf{q}) d\mathbf{v} \approx \mathbf{M}(\mathbf{q}_{i+\gamma})(\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i) \quad (\text{IV.36})$$

avec la matrice de masse estimée en $\mathbf{q}_{i+\gamma} = (1 - \gamma)\mathbf{q}_i + \gamma\mathbf{q}_{i+1}$. L'estimation de l'intégrale des efforts réguliers n'étant pas linéaire, elle sera approchée à l'aide de l'expression

$$\mathbf{f}_{i+\eta}(\mathbf{v}_{i+1}) \approx (1 - \eta)(\mathbf{f}(\mathbf{q}_i, \mathbf{v}_i) - \mathbf{f}_{ext}(t_i)) + \eta(\mathbf{f}(\mathbf{q}_{i+1}(\mathbf{v}_{i+1}), \mathbf{v}_{i+1}) - \mathbf{f}_{ext}(t_{i+1})). \quad (\text{IV.37})$$

Ainsi, les équations discrétisées peuvent être synthétisées sous la forme

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\mathbf{q}_{i+\gamma})(\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i) + h\mathbf{f}_{i+\eta}(\mathbf{v}_{i+1}) = \mathbf{p}_{i+1}; \\ \mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + h((1 - \eta)\mathbf{v}_i + \eta\mathbf{v}_{i+1}). \end{cases} \quad (\text{IV.38})$$

En absence de contact, et en posant comme vecteur d'inconnues $\mathbf{u} = \mathbf{v}_{i+1}$ le résidu $R(\mathbf{u})$ des équations du mouvement est noté

$$R(\mathbf{u}) = \mathbf{M}(\mathbf{q}_{i+\gamma})(\mathbf{u} - \mathbf{v}_i) + h\mathbf{f}_{i+\eta}(\mathbf{u}) = 0 \quad (= \mathbf{p}_{i+1} \text{ si contact}). \quad (\text{IV.39})$$

On peut procéder à la linéarisation du résidu de sorte que la solution \mathbf{v}_{i+1} est obtenue par itération à partir d'un candidat initial $\mathbf{u}^0 = \mathbf{v}_i$. Pour l'itération τ , il vient que

$$R_L(\mathbf{u}^{\tau+1}) \approx R(\mathbf{u}^\tau) + \nabla_{\mathbf{u}}R(\mathbf{u}^\tau)(\mathbf{u}^{\tau+1} - \mathbf{u}^\tau) = 0, \quad (\text{IV.40})$$

où $\nabla_{\mathbf{u}}R(\mathbf{u}^\tau)$ correspond à la matrice jacobienne du résidu. Le jacobien du premier terme de l'équation (IV.39) est approché par

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{M}(\mathbf{q}_{i+\gamma}(\mathbf{u}))(\mathbf{u} - \mathbf{v}_i) \approx \mathbf{M}(\mathbf{q}_i + h\gamma((1 - \eta)\mathbf{v}_i + \eta\mathbf{u})). \quad (\text{IV.41})$$

Vu que cette matrice n'est généralement évaluée qu'à la première itération, pour laquelle $\mathbf{u} = \mathbf{v}_i$, la forme finale de ce terme est

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{M}(\mathbf{q}_{i+\gamma}(\mathbf{u}))(\mathbf{u} - \mathbf{v}_i) \approx \mathbf{M}(\mathbf{q}_i + h\gamma\mathbf{v}_i). \quad (\text{IV.42})$$

Quant au jacobien de $\mathbf{f}_{i+\eta}$, son expression est

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{f}_{i+\eta}(\mathbf{u}) = \eta\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{q}(\mathbf{u}), \mathbf{u}, t) + \eta^2 h \nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{f}(\mathbf{q}(\mathbf{u}), \mathbf{u}, t). \quad (\text{IV.43})$$

Il est commun de nommer les matrices $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{q}(\mathbf{u}), \mathbf{u}, t)$ et $\nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{f}(\mathbf{q}(\mathbf{u}), \mathbf{u}, t)$ respectivement comme les matrices d'amortissement et de raideur tangentes, notées $\mathbf{C}_t(\mathbf{q}, \mathbf{v})$ et $\mathbf{K}_t(\mathbf{q}, \mathbf{v})$.² Par conséquent, la matrice d'itération $\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) = \nabla_{\mathbf{u}}R(\mathbf{u})$ se calcule selon

$$\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{u}) = \mathbf{M}(\mathbf{q}_i + h\gamma\mathbf{v}_i) + h\eta\mathbf{C}_t(\mathbf{q}(\mathbf{u}), \mathbf{u}) + \eta^2 h^2 \mathbf{K}_t(\mathbf{q}(\mathbf{u}), \mathbf{u}). \quad (\text{IV.44})$$

Dans ce cas, sur base de l'équation (IV.40), la solution prédite en absence de contrainte $\mathbf{u}_p^{\tau+1}$ se calcule comme

$$\mathbf{u}_p^{\tau+1} = \mathbf{u}^\tau - \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{u}^\tau)^{-1}R(\mathbf{u}^\tau). \quad (\text{IV.45})$$

Pour la première itération ($\tau = 0$), le résidu est initialisé sachant que $\mathbf{u}^{\tau=0} = \mathbf{v}_i$, ce qui donne $R(\mathbf{u}^0) = h\mathbf{f}_{i+\eta}(\mathbf{v}_i)$. A chaque itération τ dans la boucle de Newton, il faut identifier si le jeu est

2. Si le système était linéaire, on obtiendrait $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{q}(\mathbf{u}), \mathbf{u}, t) = \mathbf{C}$ et $\nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{f}(\mathbf{q}(\mathbf{u}), \mathbf{u}, t) = \mathbf{K}$ et la matrice $\hat{\mathbf{M}}$ serait égale à $\hat{\mathbf{M}}$ présentée en Section II.5.3.2.

violé et construire l'ensemble \mathbb{A} rassemblant les a contraintes actives parmi les c définies. Une fois l'étape de correction réalisée, les impulsions de contact $\mathbf{p}_{i+1}^{\tau+1}$ sont connues et permettent de calculer l'erreur sur le résidu

$$err = \|R(\mathbf{u}^{\tau+1}) - \mathbf{p}_{i+1}^{\tau+1}\|, \quad (\text{IV.46})$$

et la vitesse corrigée

$$\mathbf{u}^{\tau+1} = \mathbf{u}_p^{\tau+1} + \hat{\mathbf{M}}^{-1}(\mathbf{u}^\tau) \mathbf{p}_{i+1}. \quad (\text{IV.47})$$

Les deux prochains paragraphes expliquent comment $\mathbf{p}_{i+1}^{\tau+1}$, et donc les multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\Lambda}_{i+1}^{\tau+1}$, sont calculés. Cela dépend du modèle de frottement de Coulomb pris en compte : avec ou sans prise en compte du frottement statique (i.e. vitesse relative de glissement nulle). Dans ce qui suit, l'exposant $\tau + 1$ est supprimé dans la notation des multiplicateurs pour l'alléger.

Multiplicateurs avec frottement glissant uniquement

Dans le cas d'un frottement uniquement étudié en phase glissante, un seul multiplicateur de Lagrange suffit $\lambda_{N,i+1}^j$ par point de contact $j \in \mathbb{A}$. Il faut alors résoudre un LCP de dimension a , avec a multiplicateurs de Lagrange groupés dans $\boldsymbol{\Lambda}_{i+1} \in \mathbb{R}^a$. Les matrices \mathbf{C}_N et \mathbf{C}_{NT} sont alors obtenues par concaténation des vecteurs (indiquée par le symbole d'union \cup) :

$$\begin{cases} \mathbf{C}_N(\mathbf{q}_p^{\tau+1}) = \cup_{j \in \mathbb{A}} \mathbf{C}_N^j(\mathbf{q}_p^{\tau+1}); \\ \mathbf{C}_{NT}(\mathbf{q}_p^{\tau+1}) = \cup_{j \in \mathbb{A}} \mathbf{C}_{NT}^j(\mathbf{q}_p^{\tau+1}). \end{cases} \quad (\text{IV.48})$$

La dépendance avec $\mathbf{q}_p^{\tau+1}$ est éliminée pour alléger la notation. En reprenant les développements de la Section II.5.3.2, le LCP s'écrit alors

$$\begin{cases} \mathbf{C}_N^\top (\mathbf{u}^{\tau+1} + e_N \mathbf{v}_i) = \mathbf{W}_{LCP}^{-1} \boldsymbol{\Lambda}_{i+1} + \mathbf{z}_{LCP}; \\ 0 \leq \mathbf{C}_N^\top (\mathbf{u}^{\tau+1} + e_N \mathbf{v}_i) \perp \boldsymbol{\Lambda}_{i+1} \geq 0; \end{cases} \quad (\text{IV.49})$$

avec la $\mathbf{W}_{LCP} = \mathbf{C}_N^\top \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{u}^\tau)^{-1} \mathbf{C}_{NT}$, la matrice de Delassus et $\mathbf{z}_{LCP} = \mathbf{C}_N^\top (\mathbf{u}_p^{\tau+1} + e_N \mathbf{v}_i)$, le terme indépendant en $\mathbf{u}^{\tau+1}$. Afin de condenser la notation, on pose que $\mathbf{U}_N = \mathbf{C}_N^\top (\mathbf{u}^{\tau+1} + e_N \mathbf{v}_i)$. Il est également utile de rappeler que l'opérateur \perp dans l'Équation (IV.49) garantit que

$$\begin{cases} \mathbf{U}_N^j \geq 0 \\ \lambda_{N,i+1}^j \geq 0 \\ \mathbf{U}_N^j \lambda_{N,i+1}^j = 0 \end{cases} \quad \forall j \in \mathbb{A}. \quad (\text{IV.50})$$

Les impulsions de contact sont alors calculées comme $\mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{C}_{NT} \boldsymbol{\Lambda}_{i+1}$.

Multiplicateurs avec loi de Coulomb complète

D'autre part, lorsque le l'effort de frottement est calculé indépendamment de l'effort normal (i.e. frottement statique inclus), une procédure analogue est mise en place. Dans ce cas il y a a SOCCP à résoudre qui permettent de calculer une paire de multiplicateurs par point de contact $\boldsymbol{\lambda}_{i+1}^j = (\lambda_{N,i+1}^j, \lambda_{f,i+1}^j)$ pour $j = 1, \dots, a$. Ces paires sont groupées dans $\boldsymbol{\Lambda}_{i+1} \in \mathbb{R}^{2a}$ tel que

$$\boldsymbol{\Lambda}_{i+1} = (\boldsymbol{\lambda}_{i+1}^1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_{i+1}^a)^\top = (\lambda_{N,i+1}^1, \lambda_{f,i+1}^1, \dots, \lambda_{N,i+1}^a, \lambda_{f,i+1}^a)^\top. \quad (\text{IV.51})$$

En chaque point de contact j , la vitesse relative dans le plan possède 2 composantes normales et tangentielles $\mathbf{U}^j = (v_N^j, v_T^j)^\top$ obtenues à partir de la vitesse absolue \mathbf{v} pour tout instant i par

$$\mathbf{U}^j(\mathbf{v}) = \mathbf{H}^j(\mathbf{q}(\mathbf{v}))^\top \mathbf{v}, \quad \forall j \in \mathbb{A}. \quad (\text{IV.52})$$

Chaque matrice de passage $\mathbf{H}^j = (\mathbf{C}_N^j(\mathbf{q}(\mathbf{v})), \mathbf{C}_T^j(\mathbf{q}(\mathbf{v})))$ contient les vecteurs de projection normale et tangentielle. En toute rigueur, ces vecteurs dépendent du déplacement mais est une fonction de la vitesse dans Moreau-Jean. Cette dépendance composée n'est pas reprise dans la notation. La vitesse relative corrigée pour l'itération τ de la boucle de Newton est alors notée $\mathbf{U}^{j,\tau+1} = \mathbf{U}^j(\mathbf{u}^{\tau+1}) = \mathbf{H}^j{}^\top \mathbf{u}^{\tau+1}$. L'ensemble des vitesses relatives, noté $\mathbf{U}^{\tau+1} = \cup_{j \in \mathbb{A}} \mathbf{U}^{j,\tau+1} \in \mathbb{R}^{2a}$ pour toutes les contraintes actives, sont alors reliées aux multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\Lambda}_{i+1}$ suivant

$$\mathbf{U}^{\tau+1} = \mathbf{H}^\top \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{u}^\tau)^{-1} \mathbf{H} \boldsymbol{\Lambda}_{i+1} + \mathbf{H}^\top \mathbf{u}_p^{\tau+1} \quad (\text{IV.53})$$

qui rappelle la structure de la première ligne de l'Équation (IV.49). La matrice de passage complète \mathbf{H} est formée par concaténation des blocs \mathbf{H}^j . Reprenons les développements présentés en Section II.5.5. le problème de complémentarité lie, pour chaque contrainte j , le vecteur $\boldsymbol{\lambda}_{i+1}^j \in K^j$, où K^j est le cône de Coulomb au point de contact j , et une vitesse relative modifiée $\hat{\mathbf{U}}^{j,\tau+1} \in K^*$ qui prend en compte la loi d'impact de Newton

$$\hat{\mathbf{U}}^{j,\tau+1} = \hat{\mathbf{U}}^j(\mathbf{u}^{\tau+1}) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_N^j{}^\top (\mathbf{u}^{\tau+1} + e_N \mathbf{v}_i) + \mu |\mathbf{C}_T^j{}^\top (\mathbf{u}^{\tau+1} + e_T \mathbf{v}_i)| \\ \mathbf{C}_T^j{}^\top (\mathbf{u}^{\tau+1} + e_T \mathbf{v}_i) \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.54})$$

On retrouve alors le coefficient de restitution normal $e_N \in [0, 1]$ déjà présenté dans l'état de l'art, mais aussi un coefficient tangentiel $e_T \in [-1, 1]$ [113]. Ce dernier est notamment lié au coefficient de frottement puisque si $\mu = 0$, alors $e_T = 0$. Ce paramètre supplémentaire intervient notamment afin d'admettre des solutions avec des sauts en vitesse qui ne sont pas liés aux collisions et de traiter certains cas particuliers [114]. Un exemple d'emploi d'un coefficient de restitution en cas de contact entre 2 sphères rigides est notamment proposé dans [168]. Dans [3], le coefficient de restitution tangentiel est négligé, tout comme dans cette thèse. En définissant explicitement les matrices de Delassus et le vecteur indépendant du SOCCP, par $\mathbf{W}_{CCP} = \mathbf{H}^\top \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{u}^\tau)^{-1} \mathbf{H}$ et $\mathbf{z}_{CCP} = \mathbf{H}^\top \mathbf{u}_p^{\tau+1}$. Le problème à résoudre s'écrit alors sous la forme condensée

$$\begin{cases} \mathbf{U}^{\tau+1} = \mathbf{W}_{CCP} \boldsymbol{\Lambda}_{i+1} + \mathbf{z}_{CCP} \\ \text{pour } j \in \mathbb{A} \\ \hat{\mathbf{U}}^{j,\tau+1} = \left(\mathbf{C}_N^j{}^\top (\mathbf{u}^{\tau+1} + e_N \mathbf{v}_i) + \mu |\mathbf{C}_T^j{}^\top \mathbf{u}^{\tau+1}|, \mathbf{C}_T^j{}^\top \mathbf{u}^{\tau+1} \right)^\top \\ K^{*,j} \ni \hat{\mathbf{U}}^{j,\tau+1} \perp \boldsymbol{\lambda}_{i+1}^j \in K^j \end{cases} \quad (\text{IV.55})$$

et on en déduit que $\mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{H} \boldsymbol{\Lambda}_{i+1}$.

Application à un problème de dynamique des rotors

Dans le cas du modèle rotor-stator étudié dans ce chapitre, le vecteur d'efforts internes dépend du déplacement et de la vitesse suivant

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = [\mathbf{D} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{G}] \mathbf{v} + \mathbf{K} \mathbf{q}, \quad \boldsymbol{\Omega} \in \mathbf{v}. \quad (\text{IV.56})$$

On rappelle que $\Omega = \dot{\theta}$ et donc qu'il s'agit de la 5^{ème} composante du vecteur \mathbf{v} . Dans ce cas particulier, la matrice de raideur tangente est constante et la matrice d'amortissement est définie comme

$$\begin{cases} \mathbf{K}_t = \mathbf{K}; \\ \mathbf{C}_t(\mathbf{v}) = \mathbf{D} + \Omega \mathbf{G} + \mathbf{G}\mathbf{v}. \end{cases} \quad (\text{IV.57})$$

Le dernier terme $\mathbf{G}\mathbf{v}$ est un vecteur à ajouter sur la cinquième colonne de \mathbf{C}_t . Ainsi, l'algorithme de Moreau-Jean pour un système non-linéaire admettant plusieurs points de contact est résumé dans l'Algorithme 4. On souligne qu'en cas de prise en compte du frottement statique, seules les lignes 11 et 15 sont modifiées afin de mettre en évidence la mise en place d'un SOCCP au lieu d'un LCP. Dans le cas du modèle rigide, une seule contrainte est à satisfaire qui est donnée par l'Équation (IV.22) et le frottement en phase statique est pris en compte dans le modèle. On a donc un SOCCP à résoudre à chaque itération et $\boldsymbol{\Lambda}_{i+1} = (\lambda_N, \lambda_f)_{i+1}^\top$.

Algorithme 4 : Moreau-Jean sans reprojction avec frottement glissant (Mor-LCP) et complet (Sic-Mor)

Données : $\mathbf{M}(\mathbf{q}), \mathbf{C}_t(\mathbf{v}), \mathbf{K}_t = \mathbf{K}, \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t), \mathbf{f}_{ext}, \mathbf{q}_0$ et \mathbf{v}_0

```

1  pour  $i = 0, \dots, N - 1$  faire
2       $\tau \leftarrow 0, \mathbf{q}_{i+1}^\tau \leftarrow \mathbf{q}_i, \mathbf{u}^\tau \leftarrow \mathbf{v}_i$  /* initialisation boucle Newton */
3       $err \leftarrow \infty$ 
4       $R^\tau \leftarrow h\mathbf{f}_{i+\eta}(\mathbf{u}^\tau)$ 
5      tant que  $err > \epsilon$  faire
6           $\hat{\mathbf{M}} \leftarrow \mathbf{M}(\mathbf{q}_i + h\gamma\mathbf{v}_i) + h\eta\mathbf{C}_t(\mathbf{u}^\tau) + h^2\eta^2\mathbf{K}_t$  /* évaluation matrice d'itération */
7           $\mathbf{u}_p^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{u}^\tau - \hat{\mathbf{M}}^{-1}R^\tau$ 
8           $\mathbf{q}_p^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{q}_i + h[(1-\eta)\mathbf{v}_i + \eta\mathbf{u}_p^{\tau+1}]$  /* Calcul du déplacement prédit */
9           $\mathbb{A} \leftarrow \{j | d_N^j(\mathbf{q}_p^{\tau+1}) < 0\}$ 
10         si  $\mathbb{A} \neq \emptyset$  alors
11             /* résoudre LCP cf. Équation (IV.49) (resp. SOCCPs cf Équation (IV.55)) */
12             
$$\begin{cases} \mathbf{U}_N = \mathbf{W}_{LCP}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{i+1} + \mathbf{z}_{LCP} \\ 0 \leq \mathbf{U}_N \perp \boldsymbol{\Lambda}_{i+1} \geq 0 \end{cases} \quad \text{resp.} \quad \begin{cases} \mathbf{U}^{\tau+1} = \mathbf{W}_{CCP}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{i+1} + \mathbf{z}_{CCP} \\ \text{for } j \in \mathbb{A} \\ K^{*,j} \ni \hat{\mathbf{U}}^{j,\tau+1} \perp \boldsymbol{\lambda}_{i+1}^j \in K^j \end{cases}$$

13         sinon
14              $\boldsymbol{\Lambda}_{i+1} \leftarrow \mathbf{0}$ 
15         fin
16          $\mathbf{p}_{i+1}^{\tau+1} \leftarrow (\mathbf{C}_{NT}^1 \dots \mathbf{C}_{NT}^j) \boldsymbol{\Lambda}_{i+1}$  (resp.  $\mathbf{p}_{i+1}^{\tau+1} \leftarrow (\mathbf{H}^1 \dots, \mathbf{H}^j) \boldsymbol{\Lambda}_{i+1}$ )
17          $\mathbf{u}^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{u}_p^{\tau+1} + \hat{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{p}_{i+1}^{\tau+1}$  /* correction */
18          $R^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{M}(\mathbf{q}_i + h\gamma\mathbf{v}_i)(\mathbf{u}^{\tau+1} - \mathbf{v}_i) + h\mathbf{f}_{i+\eta}(\mathbf{u}^{\tau+1})$  /* calcul résidu */
19          $err \leftarrow \|\mathbf{R}^{\tau+1} - \mathbf{p}_{i+1}^{\tau+1}\|$ 
20          $\tau \leftarrow \tau + 1$ 
21     fin
22      $\mathbf{v}_{i+1} \leftarrow \mathbf{u}^{\tau+1}$  /* sauvegarde solution au pas de temps  $i+1$  */
23 fin

```

3.4.2 Avec reprojection

Augmentation du système

Jusqu'à présent, l'algorithme de Moreau-Jean a été écrit afin d'être appliqué à

- un système dynamique non-linéaire (provenant des effets inertiels et gyroscopiques) ;
- permettant le traitement de plusieurs points de contact ;
- capable de gérer une vitesse relative tangentielle nulle (i.e. frottement statique) grâce à l'implémentation d'un SOCCP au lieu d'un LCP.

Comme déjà évoqué dans l'état de l'art (voir Section II.5.4), la démarche peut être poussée encore plus loin en reprojétant la solution corrigée en vitesse sur les conditions de Signorini en déplacement. Cela est réalisé sur base d'une procédure de *Gear-Gupta-Leimkuhler* qui consiste à ajouter un vecteur de multiplicateurs de Lagrange supplémentaire $\boldsymbol{\chi} \in \mathbb{R}^a$ à la seconde ligne de l'Équation (IV.34) pour le cas général où a contraintes sont actives. On se place dans le cas où le frottement est défini par le cône de Coulomb. Les développements de cette section restent valables pour un frottement exclusivement glissant, mis à part le SOCCP remplacé par un LCP. Dans l'Équation (IV.34), on pose que la mesure des efforts de contact $d\mathbf{f}_c = \mathbf{H}d\boldsymbol{\Gamma}$, de sorte que après discrétisation en temps, $\mathbf{p}_{i+1} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} d\mathbf{f}_c = \mathbf{H}\boldsymbol{\Lambda}_{i+1}$. Cela implique donc que $\boldsymbol{\Lambda}_{i+1} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} d\boldsymbol{\Gamma}$. Le système en temps continu possède alors 4 inconnues $(\mathbf{q}, \mathbf{v}, d\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\chi})$ et s'écrit

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\mathbf{q})d\mathbf{v} + [\mathbf{C}(\mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{K}\mathbf{q}]dt = \mathbf{f}_{ext}dt + \mathbf{H}d\boldsymbol{\Gamma}; \\ \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} + \mathbf{C}_N\boldsymbol{\chi}; \\ K^* \ni \hat{\mathbf{U}}(\mathbf{v}) \perp d\boldsymbol{\Gamma} \in K; \\ \mathbf{0} \leq d_N(\mathbf{q}) \perp \boldsymbol{\chi} \geq \mathbf{0}. \end{cases} \quad (\text{IV.58})$$

La dépendance du vecteur vitesse locale modifié avec la vitesse est explicitée tout comme celle du vecteur des jeux avec le déplacement. En procédant à nouveau à l'intégration discrète via la θ -méthode, et en posant $\boldsymbol{\kappa}_{i+1} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \boldsymbol{\chi}dt$, l'Équation (IV.58) devient

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\mathbf{q}_{i+\gamma})(\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i) + h\mathbf{f}_{i+\eta}(\mathbf{q}_{i+1}, \mathbf{v}_{i+1}) = \mathbf{H}\boldsymbol{\Lambda}_{i+1}; \\ \mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + h((1-\eta)\mathbf{v}_i + \eta\mathbf{v}_{i+1}) + \mathbf{C}_N\boldsymbol{\kappa}_{i+1}; \\ K^* \ni \hat{\mathbf{U}}(\mathbf{v}_{i+1}) \perp \boldsymbol{\Lambda}_{i+1} \in K; \\ \mathbf{0} \leq d_N^j(\mathbf{q}_{i+1}) \perp \boldsymbol{\kappa}_{i+1} \geq \mathbf{0}. \end{cases} \quad (\text{IV.59})$$

Cette fois le vecteur des efforts réguliers $\mathbf{f}_{i+\eta}$ (cf Équation (IV.37)) est fonction de deux inconnues distinctes en vitesse \mathbf{v}_{i+1} et position \mathbf{q}_{i+1} . Résoudre l'Équation (IV.59) pour chaque pas de temps i revient alors à chercher $(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = (\mathbf{q}_{i+1}, \mathbf{v}_{i+1})$ qui annule le résidu

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \mathbf{M}(\eta\mathbf{q} + (1-\eta)\mathbf{q}_i)(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i) - h\mathbf{f}_{i+\eta}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) - \mathbf{H}\boldsymbol{\lambda}_{i+1} \\ \mathbf{q} - \mathbf{q}_i - h(\eta\mathbf{v} + (1-\eta)\mathbf{v}_i) - \mathbf{C}_N\boldsymbol{\kappa}_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.60})$$

Linéarisation du système algébrique

L'Équation (IV.60) est ensuite linéarisée par rapport aux déplacements et à la vitesse. La solution est alors recherchée dans une boucle de Newton comme la limite de la séquence $(\mathbf{q}^{\tau+1}, \mathbf{v}^{\tau+1})$ avec pour point de départ $(\mathbf{q}_i, \mathbf{v}_i)$ telle que

$$\mathbf{r}_L(\mathbf{q}^{\tau+1}, \mathbf{v}^{\tau+1}) \approx \mathbf{r}(\mathbf{q}^\tau, \mathbf{v}^\tau) + \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{r}(\mathbf{q}^\tau, \mathbf{v}^\tau)(\mathbf{v}^{\tau+1} - \mathbf{v}^\tau) + \nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{r}(\mathbf{q}^\tau, \mathbf{v}^\tau)(\mathbf{q}^{\tau+1} - \mathbf{q}^\tau) = \mathbf{0}. \quad (\text{IV.61})$$

Les multiplicateurs à l'itération τ sont alors notés $\Lambda^{\tau+1}$ et $\kappa^{\tau+1}$ et en posant

$$\begin{cases} \mathbf{q}_\eta^\tau = \eta \mathbf{q}^\tau + (1 - \eta) \mathbf{q}_i; \\ \mathbf{v}_\eta^\tau = \eta \mathbf{v}^\tau + (1 - \eta) \mathbf{v}_i; \end{cases} \quad (\text{IV.62})$$

il vient que les trois termes valent

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}^\tau, \mathbf{v}^\tau) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_v(\mathbf{q}^\tau, \mathbf{v}^\tau) \\ \mathbf{r}_q(\mathbf{q}^\tau, \mathbf{v}^\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}(\mathbf{q}_\eta^\tau)(\mathbf{v}^\tau - \mathbf{v}_i) + h\mathbf{f}_{i+\eta}(\mathbf{q}^\tau, \mathbf{v}^\tau) - \mathbf{H}\Lambda^{\tau+1} \\ \mathbf{q}^\tau - \mathbf{q}_i - h(\eta \mathbf{v}^\tau + (1 - \eta) \mathbf{v}_i) - \mathbf{C}_N \kappa^{\tau+1} \end{pmatrix}; \quad (\text{IV.63})$$

$$\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{r}(\mathbf{q}^\tau, \mathbf{v}^\tau) = \begin{pmatrix} \mathbf{M}(\mathbf{q}_\eta^\tau) + h\eta \mathbf{C}_t(\mathbf{v}^\tau) \\ -h\eta \mathbf{I} \end{pmatrix}; \quad (\text{IV.64})$$

$$\nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{r}(\mathbf{q}^\tau, \mathbf{v}^\tau) = \begin{pmatrix} h\eta \mathbf{K}_t \\ \mathbf{I} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.65})$$

En injectant les Équations (IV.63) à (IV.65) dans l'Équation (IV.61), le système à résoudre devient

$$\begin{cases} \left[\mathbf{M}(\mathbf{q}_\eta^\tau) + h\eta \mathbf{C}_t(\mathbf{v}^\tau) \right] (\mathbf{v}^{\tau+1} - \mathbf{v}^\tau) + h\mathbf{f}_{i+\eta}(\mathbf{q}^\tau, \mathbf{v}^\tau) + \mathbf{M}(\mathbf{q}_\eta^\tau)(\mathbf{v}^\tau - \mathbf{v}_i) \\ \quad + h\eta \mathbf{K}_t(\mathbf{q}^{\tau+1} - \mathbf{q}^\tau) - \mathbf{H}\Lambda^{\tau+1} = 0; \\ \mathbf{q}^{\tau+1} = \mathbf{q}_i + h(\eta \mathbf{v}^\tau + (1 - \eta) \mathbf{v}_i) + h\eta(\mathbf{v}^{\tau+1} - \mathbf{v}^\tau) + \mathbf{C}_N \kappa^{\tau+1}; \end{cases} \quad (\text{IV.66})$$

Enfin, la seconde ligne de l'Équation (IV.66) est injectée dans la première, à la différence près que les 2 lignes sont découplées en prenant le multiplicateur κ^τ au lieu de $\kappa^{\tau+1}$. Le problème s'écrit alors

$$\begin{cases} \left[\mathbf{M}(\mathbf{q}_\eta^\tau) + h\eta \mathbf{C}_t(\mathbf{v}^\tau) + h^2 \eta^2 \mathbf{K}_t \right] (\mathbf{v}^{\tau+1} - \mathbf{v}^\tau) = -h\mathbf{f}_{i+\eta}(\mathbf{q}^\tau, \mathbf{v}^\tau) - \mathbf{M}(\mathbf{q}_\eta^\tau)(\mathbf{v}^\tau - \mathbf{v}_i) \\ \quad - h\eta \mathbf{K}_t(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}^\tau + h\mathbf{v}_\eta^\tau) + \mathbf{H}\Lambda^{\tau+1} - h\eta \mathbf{K}_t \mathbf{C}_N \kappa^\tau; \\ \mathbf{q}^{\tau+1} = \mathbf{q}_i + h\mathbf{v}_\eta^{\tau+1} + \mathbf{C}_N \kappa^{\tau+1}; \end{cases} \quad (\text{IV.67a})$$

$$\quad (\text{IV.67b})$$

qui permet de mettre en évidence la matrice $\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{q}^\tau, \mathbf{v}^\tau)$ au premier membre de l'Équation (IV.67a) et où $\mathbf{v}_\eta^{\tau+1}$ est issu de l'Équation (IV.62).

Ainsi, pour $a = |\mathbb{A}|$ points de contact qui violent le jeu, le problème de contact avec Moreau-Jean reprojété nécessite dans un premier temps de résoudre le SOCCP qui implique l'Équation (IV.67a) et la vitesse relative $\mathbf{U}^{\tau+1} = \mathbf{H}^\top \mathbf{v}^{\tau+1}$ (cf Équation (IV.52)). La matrices de Delassus et le vecteur indépendant associés sont définis de la façon suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{W}_P = \mathbf{H}^\top \hat{\mathbf{M}}^{-1}(\mathbf{q}^\tau, \mathbf{v}^\tau) \mathbf{H}; \\ \mathbf{z}_P = \mathbf{H}^\top \mathbf{v}^\tau + \mathbf{H}^\top \hat{\mathbf{M}}^{-1}(\mathbf{q}^\tau, \mathbf{v}^\tau) \left(\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{q}^\tau, \mathbf{v}^\tau) - h\eta \mathbf{K}_t \mathbf{C}_N \kappa^\tau \right); \\ \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{q}^\tau, \mathbf{v}^\tau) = -h\mathbf{f}_{i+\eta}(\mathbf{q}^\tau, \mathbf{v}^\tau) - \mathbf{M}(\mathbf{q}_\eta^\tau)(\mathbf{v}^\tau - \mathbf{v}_i) - h\eta \mathbf{K}_t(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}^\tau + h\mathbf{v}_\eta^\tau) \end{cases} \quad (\text{IV.68})$$

et le SOCCP s'écrit de manière analogue à l'Équation (IV.55)

$$\begin{cases} \mathbf{U}^{\tau+1} = \mathbf{W}_P \Lambda^{\tau+1} + \mathbf{z}_P \\ \forall j \in \mathbb{A} \quad K^{*j} \ni \hat{\mathbf{U}}^{j,\tau+1} \perp \lambda^{j,\tau+1} \in K^j \end{cases} \quad (\text{IV.69})$$

où on rappelle que $\Lambda^{\tau+1} = \cup_{j \in \mathbb{A}} \lambda^{j,\tau+1}$.

Par ailleurs, la contrainte $\mathbf{d}_N(\mathbf{q}_{i+1}) \geq 0, \forall i = 0, \dots, N$ est également rendue itérative en

linéarisant le résidu

$$\mathbf{r}_g(\mathbf{g}, \mathbf{q}_{i+1}) = \mathbf{g} - \mathbf{d}_N(\mathbf{q}_{i+1}) = 0, \quad (\text{IV.70})$$

ce qui donne, en rappelant que \mathbf{q}_{i+1} à l'itération τ est notée \mathbf{q}^τ

$$\mathbf{r}_{d,L}(\mathbf{g}^{\tau+1}, \mathbf{q}^{\tau+1}) \approx \mathbf{g}^\tau - \mathbf{d}_N(\mathbf{q}^\tau) + (\mathbf{g}^{\tau+1} - \mathbf{g}^\tau) + \nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{d}_N(\mathbf{q}^\tau)(\mathbf{q}^{\tau+1} - \mathbf{q}^\tau) = 0. \quad (\text{IV.71})$$

Cette expression est simplifiée puisque le gradient de la fonction jeu est donné par \mathbf{C}_N^\top (qui en toute rigueur dépend de \mathbf{q}^τ) et

$$\mathbf{g}^{\tau+1} = \mathbf{d}_N(\mathbf{q}^\tau) + \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{q}^{\tau+1} - \mathbf{q}^\tau). \quad (\text{IV.72})$$

De plus en injectant l'Équation (IV.67a) dans l'Équation (IV.72), on trouve que

$$\mathbf{g}^{\tau+1} = \mathbf{C}_N^\top \mathbf{C}_N \boldsymbol{\kappa}^{\tau+1} + \mathbf{d}_N(\mathbf{q}^\tau) + \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{q}_i + h\mathbf{v}_\eta^{\tau+1} - \mathbf{q}^\tau). \quad (\text{IV.73})$$

Or, la vitesse $\mathbf{v}^{\tau+1}$ qui intervient dans $\mathbf{v}_\eta^{\tau+1}$ est connue, tout comme $\boldsymbol{\Lambda}^{\tau+1}$ puisque l'Équation (IV.69) a déjà été résolue. Il y a donc un LCP à résoudre afin de corriger le jeu

$$\begin{cases} \mathbf{g}^{\tau+1} = \mathbf{C}_N^\top \mathbf{C}_N \boldsymbol{\kappa}^{\tau+1} + \mathbf{d}_N(\mathbf{q}^\tau) + \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{q}_i + h\mathbf{v}_\eta^{\tau+1} - \mathbf{q}^\tau); \\ \mathbf{0} \leq \mathbf{g}^{\tau+1} \perp \boldsymbol{\kappa}^{\tau+1} \geq \mathbf{0}. \end{cases} \quad (\text{IV.74})$$

Projection combinée

Cependant, afin d'éviter les oscillations numériques à l'interface de contact mise en évidence dans [1], l'auteur recommande de combiner activation et projection de chaque contrainte j en déplacement en fonction de la valeur de $\boldsymbol{\lambda}^j$ calculée lors du SOCCP (ou LCP si on a du frottement glissant uniquement cf Section IV.3.4.1). Un sous-ensemble $\mathbb{I}_\nu \subseteq \mathbb{A}$ est alors défini comme

$$\mathbb{I}_\nu = \{j \in \mathbb{A} \mid \boldsymbol{\lambda}^j > 0\}. \quad (\text{IV.75})$$

Pour tout $j \in \mathbb{I}_\nu$, le jeu est explicitement imposé à zéro, ce qui revient à calculer $\kappa^{j,\tau+1}$ d'après

$$\kappa^{j,\tau+1} = - \left(\mathbf{C}_N^{j,\top} \mathbf{C}_N^j \right)^{-1} \left(\mathbf{d}_N^j(\mathbf{q}^\tau) + \mathbf{C}_N^{j,\top}(\mathbf{q}_i + h\mathbf{v}_\eta^{\tau+1} - \mathbf{q}^\tau) \right). \quad (\text{IV.76})$$

Pour les contraintes actives mais pas comprises dans \mathbb{I}_ν , le système est résolu au moyen du LCP en Équation (IV.74). Les résolutions du SOCCP et du LCP sont itérées sur l'ensemble \mathbb{A} qui est lui aussi rebouclé avec la variable ν , puisque la correction peut engendrer de nouvelles violations de jeu en d'autres points de contact. La résolution projetée du SOCCP et du LCP est donc répétée tant que $\mathbb{A}_{\nu+1} \neq \mathbb{A}_\nu$. Cette boucle est alors englobée dans la boucle de Newton, qui on rappelle, est présente à cause de la non-linéarité du système (IV.58).

L'ensemble de la méthode de Moreau-Jean projetée est synthétisée dans l'Algorithme 5. On rappelle que les matrices \mathbf{H} et \mathbf{C}_N sont en réalité dépendantes de la position prédite $\mathbf{q}_p^{\tau+1}$ et doivent donc être mises à jour pour chaque itération τ de la boucle de Newton. Enfin, dans le cas particulier du système turbine-stator parfaitement rigide, il n'y a qu'une seule contrainte à respecter et donc la boucle sur \mathbb{A}_ν disparaît.

3.5 Siconos : introduction et utilisation

Les algorithmes tels que Moreau-Jean et sa version reprojétée (resp. Algorithmes 4 et 5) sont directement utilisables avec le programme SICONOS [2]. Il s'agit d'un programme développé en

Algorithme 5 : Moreau-Jean avec reprojection Sic-Proj

Données : $\mathbf{M}(\mathbf{q}), \mathbf{C}_t(\mathbf{v}), \mathbf{K}_t = \mathbf{K}, \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{v}), \mathbf{f}_{ext}(t), \mathbf{q}_0$ et \mathbf{v}_0

1 **pour** $i = 0, \dots, N - 1$ **faire**

/* initialization boucle Newton */

2 $\tau \leftarrow 0, \boldsymbol{\kappa}^\tau \leftarrow \mathbf{0}, \mathbf{q}^\tau \leftarrow \mathbf{q}_i, \mathbf{v}^\tau \leftarrow \mathbf{v}_i, \mathbf{r}_v^\tau \leftarrow h\mathbf{f}_{i+\eta}(\mathbf{q}^\tau, \mathbf{v}^\tau)$ et $err_v \leftarrow \|\mathbf{r}_v^\tau\|$

3 **tant que** $err_v > \epsilon_1$ and $\tau < itMax$ **faire**

4 $\hat{\mathbf{M}} \leftarrow \mathbf{M}(\mathbf{q}_i + h\gamma\mathbf{v}_i) + h\eta\mathbf{C}_t(\mathbf{u}^\tau) + h^2\eta^2\mathbf{K}_t$ /* matrice d'itération */

5 $\mathbf{v}_p^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{v}^\tau - \hat{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{r}_v^\tau$ /* prédiction vitesse et déplacement */

6 $\mathbf{q}_p^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{q}_i + h \left[(1 - \eta)\mathbf{v}_i + \eta\mathbf{v}_p^{\tau+1} \right]$

7 $\nu \leftarrow 0, \mathbb{A}_{-1} \leftarrow \emptyset$ et $\boldsymbol{\Lambda}^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{0}, \boldsymbol{\kappa}^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{0}$

8 $\mathbf{v}_\nu^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{v}_p^{\tau+1}$ et $\mathbf{q}_\nu^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{q}_p^{\tau+1}$

9 $\mathbb{A}_0 \leftarrow \{j | d_N^j(\mathbf{q}_p^{\tau+1}) < 0\}$ /* recherche des contraintes actives */

10 **tant que** $\mathbb{A}_\nu \neq \mathbb{A}_{\nu-1}$ **faire**

11 $\mathbf{v}_\nu^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{v}_p^{\tau+1} + \hat{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{H}\boldsymbol{\Lambda}^{\tau+1}$ avec $\boldsymbol{\Lambda}^{\tau+1}$ solution de

/* résoudre SOCCP cf éq.(IV.55) */

12
$$\begin{cases} \mathbf{U}_\nu^{\tau+1} = \mathbf{W}_P^{-1}\boldsymbol{\Lambda}^{\tau+1} + \mathbf{z}_{CCP} \\ \text{for } j \in \mathbb{A}_\nu \\ K^* \ni \hat{\mathbf{U}}_\nu^{j,\tau+1} \perp \boldsymbol{\lambda}_\nu^{j,\tau+1} \in K \end{cases}$$

13 $\mathbb{I}_\nu = \{j \in \mathbb{A}_\nu | \boldsymbol{\lambda}_\nu^{j,\tau+1} > 0\}$ /* projection de contrainte */

14 **si** $j \in \mathbb{I}_\nu$ **alors**

15
$$\boldsymbol{\kappa}^{\tau+1} = - \left(\mathbf{C}_N^{j\top} \mathbf{C}_N^j \right)^{-1} \left(\mathbf{d}_N^j(\mathbf{q}^\tau) + \mathbf{C}_N^{j\top}(\mathbf{q}_i + h\mathbf{v}_\eta^{\tau+1} - \mathbf{q}^\tau) \right)$$

16 **sinon**

/* résoudre LCP éq.(IV.74) */

17
$$\begin{cases} \mathbf{g}^{\tau+1} = \mathbf{C}_N^\top \mathbf{C}_N \boldsymbol{\kappa}^{\tau+1} + \mathbf{d}_N(\mathbf{q}^\tau) + \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{q}_i + h\mathbf{v}_\eta^{\tau+1} - \mathbf{q}^\tau) \\ \mathbf{0} \leq \mathbf{g}^{\tau+1} \perp \boldsymbol{\kappa}^{\tau+1} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

18 **fin**

19 $\mathbf{q}_\nu^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{q}_i + h(\eta\mathbf{v}_\nu^{\tau+1} + (1 - \eta)\mathbf{v}_i) + \mathbf{C}_N\boldsymbol{\kappa}^{\tau+1}$

20 $\mathbb{A}_{\nu+1} \leftarrow \mathbb{A}_\nu \cup \{j | d_N^j(\mathbf{q}_\nu^{\tau+1}) < 0\}$

21 $\nu \leftarrow \nu + 1$

22 **fin**

23 $\mathbf{v}^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{v}_\nu^{\tau+1}$ and $\mathbf{q}^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{q}_\nu^{\tau+1}$

24 $\mathbf{r}_v^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{M}(\mathbf{q}_\eta^{\tau+1})(\mathbf{v}^{\tau+1} - \mathbf{v}_i) + \mathbf{f}_{i+\eta}(\mathbf{q}^{\tau+1}, \mathbf{v}^{\tau+1})$ /* calcul résidu */

25 $err_v \leftarrow \|\mathbf{r}_v^{\tau+1} - \mathbf{H}\boldsymbol{\Lambda}^{\tau+1}\|$

26 $\tau \leftarrow \tau + 1$

27 **fin**

28 $\mathbf{v}_{i+1} \leftarrow \mathbf{v}^{\tau+1}$ et $\mathbf{q}_{i+1} \leftarrow \mathbf{q}^{\tau+1}$ /* sauvegarde solution au pas de temps $i+1$ */

29 **fin**

C/C++ à l'INRIA de Grenoble depuis près de 20 ans. Il a pour but de traiter des problèmes non-réguliers dans de nombreux domaines d'application comme l'électronique, la mécanique ou la mécanique. L'idée ici est de comparer les algorithmes de Carpenter `Carp-QN` et `Carp-oneVC` implémentés sous python avec Moreau-Jean classique et reprojété disponibles dans `SICONOS`. Il faut donc être capable de fournir l'expression du système d'équations non-linéaires couplées de l'Équation (IV.34) sous une forme qui pourra être reconnue par `SICONOS`. En effet, il faut que tout système dynamique lagrangien du second ordre soit implémenté dans un plug-in en C dans la forme suivante³

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{f}_{\text{gyr}}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) = \mathbf{f}_{\text{ext}}(t); \\ \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}. \end{cases} \quad (\text{IV.77})$$

$\mathbf{M}(\mathbf{q})$ est la matrice de masse non-constante déjà rencontrée, \mathbf{f}_{gyr} contient les termes inertiels (effets gyroscopiques), \mathbf{f}_{int} les forces internes (raideur et amortissement) et \mathbf{f}_{ext} les forces extérieures qui se résument ici à la gravité et à un couple constant. Une fonction doit être définie pour chacun des 4 termes dans le plugin. Le système dynamique a été défini dans un fichier source en C++.

3.6 Synthèse

Pour la modélisation du rotor et du stator sous l'hypothèse des corps rigides, 4 méthodes de résolution du contact sont testées et comparées. Chacune d'entre elles possède un certain niveau de complexité sur les physiques prises en compte et la mise en place d'une boucle de Newton pour la résolution du système non-linéaire. Les caractéristiques de ces 4 algorithmes sont résumées dans le tableau IV.1

Nom	Frottement	Correction itérative	Loi de contact	
			Déplacement	Vitesse
Carp-oneVC	Glissant	Non	Oui	Non
Carp-QN	Glissant	Oui	Oui	Non
Sic-Mor	Total	Oui	Non	Oui
Sic-Proj	Total	Oui	Oui	Oui

TABLEAU IV.1 – Propriétés des algorithmes de contact

Pour les algorithmes de Carpenter, la discrétisation temporelle s'effectue avec le schémas des différences finies centrées puisque la thermique n'est pas encore introduite, soit $\beta_2 = 0$ et $\beta_1 = 0$ qui est conditionnellement stable (cf. Section II.4). Pour l'algorithme de Moreau-Jean, c'est l'intégration par trapèzes qui est retenue $\gamma = 1/2$ et qui est inconditionnellement stable.

4 Résultats

4.1 Données numériques

Le coefficient de frottement généralement utilisé chez Safran Helicopter Engines pour un contact métal-métal se situe entre 0,1 et 0,2. Pour le cas de référence, il est décidé de retenir la valeur minimale de 0,1. Pour ce qui est du coefficient de restitution de la loi d'impact de Newton, celui-ci n'est pas exploité dans l'algorithme de Carpenter. Cependant, les différentes étapes

3. Rem : il est également possible de fournir à `SICONOS` un script sous python mais les ressources dans ce langage sont plus limitées à l'heure actuelle et sont en cours d'élaboration

réalisées reviennent à considérer des impacts complètement dissipatifs, ce qui équivaut $e_N = 0$. C'est pourquoi, à des fins de comparaison, la loi d'impact dans SICONOS définit également une loi d'impact avec $e_N = 0$.

Pour ce modèle, d'autres paramètres supplémentaires doivent être spécifiés, comme la raideur/amortissement du palier arrière et du support du stator ainsi que la masse du stator. Ces derniers sont regroupés dans le tableau IV.2.

Symbole	Propriété	Valeur	Unités
m_s	Masse stator	0,167	kg
k_s	Raideur stator	10^7	N/m
c_s	Amortissement stator	100	Ns/m
k_T	Raideur palier arrière	10^7	N/m
c_T	Amortissement palier arrière	100	Ns/m

TABLEAU IV.2 – Propriétés stator et palier arrière

Pour finir, pour ce qui est de la résolution numérique, le pas de temps choisi pour les différents intégrateurs est, sauf mention contraire, égal à $h = 10^{-6}$ s. En effet, cette valeur est largement inférieure au pas de temps limite pour la stabilité des calculs.

4.2 Analyse modale

Pour le stator, il existe un seul mode double de translation dont la fréquence se situe à 1231 Hz sur base des données du Tableau IV.2. Pour la turbine, les fréquences propres sont dépendantes de la vitesse de rotation à cause des effets gyroscopiques. Il est donc nécessaire de dresser un diagramme de Campbell. Prenons la vitesse de rotation comme une constante Ω . Pour la turbine seule, on a alors un système d'ODEs où les matrices de masse, gyroscopique et de raideur $\mathbf{M}, \mathbf{G}, \mathbf{K}$ sont de taille 4×4 et correspondent à celles présentées en Équation (IV.15) mais où la dernière ligne et dernière colonne sont supprimées. Le calcul des valeurs propres pour un système dynamique avec une matrice gyroscopique et/ou d'amortissement nécessite des manipulations supplémentaires. En effet, il faut écrire le problème sous forme d'équations d'état en prenant comme vecteur d'inconnues $\mathbf{y} = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^\top$

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (\text{IV.78})$$

où les valeurs propres sont solutions de $\det(\lambda\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 0$. La construction des matrices d'état optimale, en termes de conditionnement numérique, dépend de la physique prise en compte. En effet, Les matrices possèdent des propriétés différentes : la matrice gyroscopique est antisymétrique tandis que la matrice d'amortissement est symétrique. Ici, il est choisi de définir l'Équation (IV.78) avec le formalisme proposé par [108, 169]

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \Omega\mathbf{G} & \mathbf{M} \\ -\mathbf{M} & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{K} & 0 \\ 0 & \mathbf{M} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.79})$$

D'autres écritures restent valables et sont reprises en détails dans [73]. Effectuer ce calcul pour une gamme de Ω permet d'obtenir les diagrammes de Campbell (voir Figure IV.7). Pour chaque vitesse de rotation, et sans amortissement, sont alors associées 8 valeurs propres imaginaires pures conjuguées. Le Diagramme de Campbell peut donc être restreint au domaine des fréquences positives.

Le mode propre à 330 Hz en absence de rotation correspond à un mode double lié à la résonance du palier. Avec Ω croissant, il se décompose en un mode direct f_d et un rétrograde

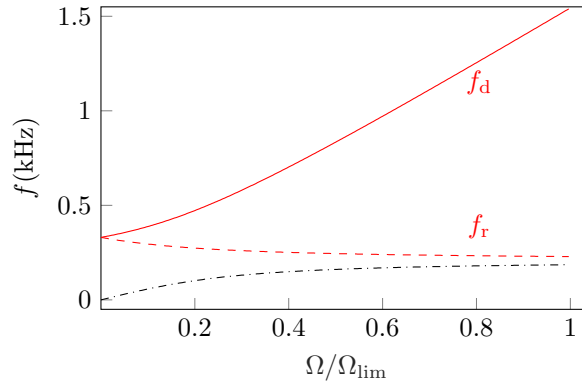


FIGURE IV.7 – Diagramme de Campbell de la turbine seule : mode direct f_d (—), mode rétrograde f_r (---), mode instable (---)

f_r (voir Figure IV.8a). A la vitesse limite autorisée pour l'intégrité du disque, le mode direct atteint $f_d = 1549\text{Hz}$. On peut également noter que 4 modes de corps rigides (2 modes doubles à fréquence nulle) sont calculés à vitesse de rotation nulle. Il s'avère que 1 d'entre eux devient instable, dont la fréquence croît avec Ω . Ce mode correspond à une orbite au niveau du labyrinthe parcourue dans le sens direct avec un palier immobile (voir Figure IV.8b). Ainsi,

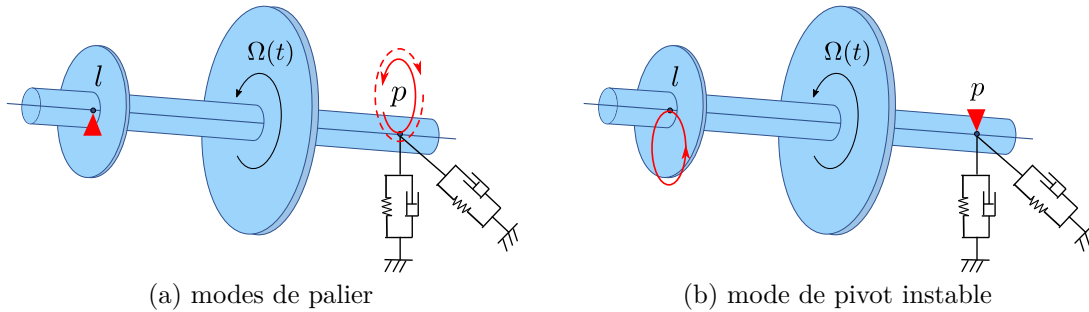


FIGURE IV.8 – Modes propres de turbine rigide en porte-à-faux sur un palier arrière en précession directe (—) et rétrograde (---)

sur base des critères de stabilité présentés en Section II.4, le pas de temps de référence choisi $h = 10^{-6}\text{s}$ est deux ordres de grandeurs inférieur à la limite de stabilité pour un système linéaire.

4.3 Cas de référence

On constate pour le cas de référence que les 4 algorithmes de contact fournissent la même solution. Les réponses obtenues sont confondues, et c'est pourquoi seuls les résultats apportés par la méthode Proj-Sic sont illustrés en Figure IV.9. La vitesse de rotation augmente de façon monotone, voir Figure IV.9a et la vitesse limite d'intégrité du disque turbine est atteinte après 117ms, soit 3.5% plus tard que le temps de référence prévu sans contact (113ms). Ce léger retard est causé par l'apparitions de contact frottant. En effet, jusqu'à 130ms, la réponse se déroule en contact partiel. La Figure IV.9b met en évidence des séparations de contact dont l'amplitude diminue progressivement jusqu'à obtenir un jeu nul pour le reste de la simulation. Cette fin de réponse reflète alors une transition vers un contact permanent. Par ailleurs, ces contacts sont toujours glissants comme le montre la vitesse tangentielle au contact en Figure IV.9c qui tend à croître. La force de frottement est donc toujours proportionnelle à

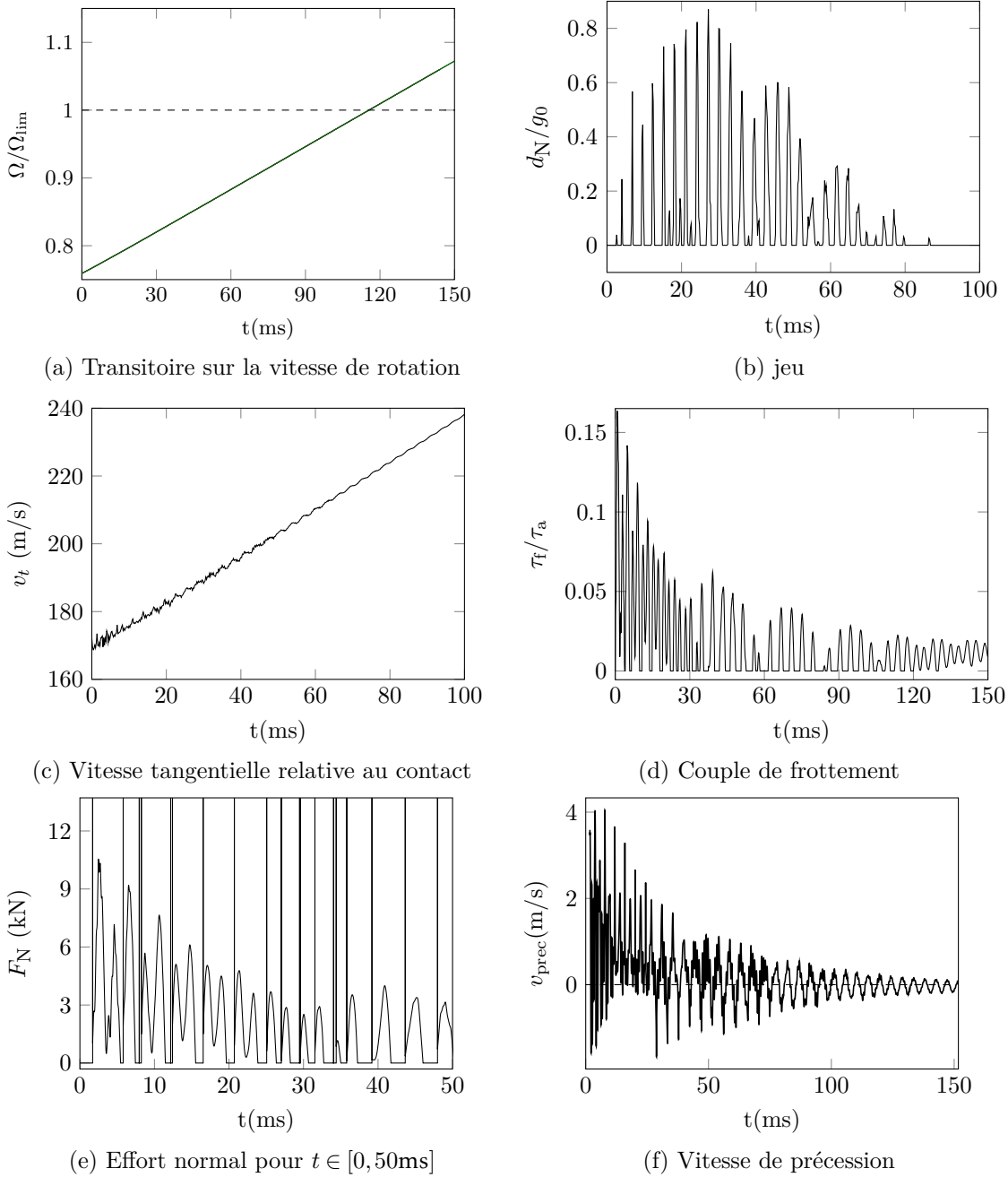


FIGURE IV.9 – Réponse modèle rotor-stator rigide obtenu avec algorithme Sic-Proj

l'effort normal par un facteur μ . Cependant, le couple généré par le frottement reste nettement inférieur au couple aérodynamique. Comme décrit en Figure IV.9d, il atteint au plus $0,15\tau_a$ en contact partiel et ne dépasse plus $0,02\tau_a$ en contact permanent. Il faut souligner que le couple affiché a été filtré afin de tronquer les impulsions liées aux impacts. A titre illustratif, ces impulsions ont été conservées dans l'effort normal présenté en Figure IV.9e. Ce graphe confirme également que la contrainte F_N est strictement respectée pour tous les algorithmes. L'effort normal est maximal au début de la simulation et atteint près de 10kN, puis son amplitude décroît au fur et à mesure des rebonds.

La vibration au niveau du labyrinthe peut être synthétisée par la trajectoire absolue parcourue par le centre du labyrinthe présentée en Figure IV.10a. Dans les graphes de trajectoire,

l'échelle de temps est normalisée par rapport à $t_{\text{ref}} = 113 \text{ ms}$ qui correspond au temps d'atteinte de Ω_{lim} sans contact. Ce graphe confirme que l'amplitude de la vibration diminue au cours

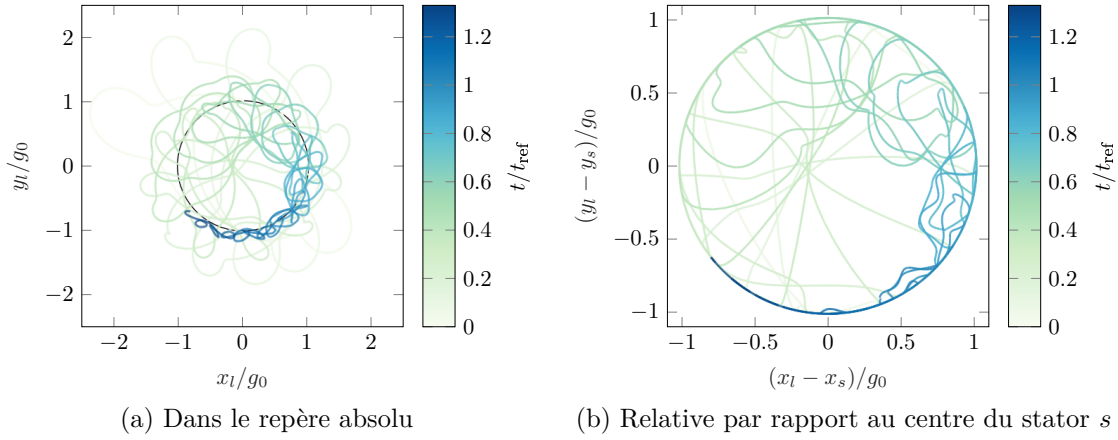


FIGURE IV.10 – Trajectoires du centre du labyrinthe l

du temps. Puis il s'avère que la trajectoire devient progressivement circulaire, avec un rayon proche de celui du jeu initial g_0 . Par ailleurs, on peut constater des boucles dans la trajectoire qui traduisent des changements locaux de précession. Le parcours de l'orbite s'effectue en résultante dans le sens horlogique, c.-à-d. dans le sens de la précession inverse mais avec une vitesse de précession lente. Cela est en accord avec la Figure IV.9f qui indique que la réponse est d'abord opérée en précession directe (i.e. $v_{\text{prec}} > 0$) même si on peut déjà constater des variations rapides de son amplitude et qui présentent déjà des passages brefs dans le domaine négatif. En fin de simulation, le transitoire de la vitesse de précession devient sinusoïdal avec une moyenne légèrement négative ($-0,07 \text{ m/s}$).

En toute rigueur, la vitesse de précession se calcule sur base de la vitesse relative du rotor par rapport au stator. Il faut donc bien distinguer les trajectoires absolues et relatives du labyrinthe. La seconde est illustrée en Figure IV.10b et confirme que la norme de la distance entre les centres du rotor et du stator est inscrite dans un cercle de rayon g_0 , ce qui est en accord avec les conditions de Signorini (voir Équation (IV.22)). Cette trajectoire relative confirme à nouveau que la réponse dynamique commence en contact partiel et tend vers un contact annulaire permanent.

Dans l'optique d'une modélisation multiphysique, il est déjà possible de quantifier l'énergie dissipée par le frottement. En temps discret le travail de l'effort de frottement est calculé via l'intégrateur trapézoïdal $W_{f,i+1} = W_{f,i} + \frac{1}{2}\mu h (F_{N,i}|v_{T,i}| + F_{N,i+1}|v_{T,i+1}|)$. Au bout de 150 ms , cette énergie convertie en chaleur s'élève à 3 kJ comme indiqué en Figure IV.11. Cela reste très faible par rapport aux 190 kJ apportés par le couple aérodynamique. Son travail est également calculé par intégration discrète : $W_{\tau,i+1} = W_{\tau,i} + \frac{1}{2}\tau_a h (\dot{\theta}_i + \dot{\theta}_{i+1})$.

Le caractère conservatif des méthodes de résolution peut être démontré en dressant le bilan énergétique. En effet, pour un système ouvert, l'énergie mécanique à un instant t auquel on ajoute les pertes et on retire les sources d'énergie doit être égale à l'énergie mécanique initiale, uniquement constituée d'énergie cinétique

$$E_c(0) = E_c(t) + E_p(t) - W_\tau(t) + W_f(t) + W_d(t), \quad (\text{IV.80})$$

où W_d représente l'énergie dissipée par amortissement et qui reste très faible pour le cas de référence (20 J en fin de simulation). Ce bilan est présenté en Figure IV.12 pour tous les algorithmes. Il montre des écarts négligeables de quelques Joules avec l'énergie mécanique totale

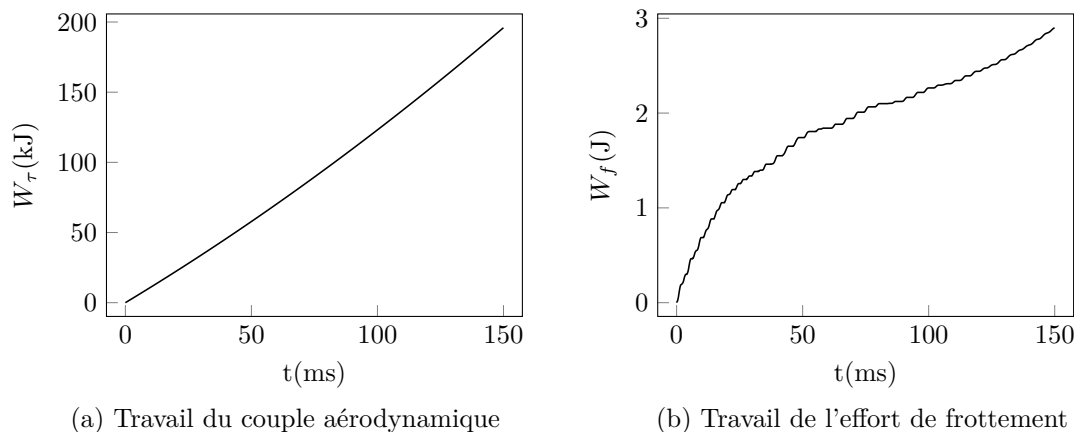


FIGURE IV.11 – Apports et pertes énergétiques

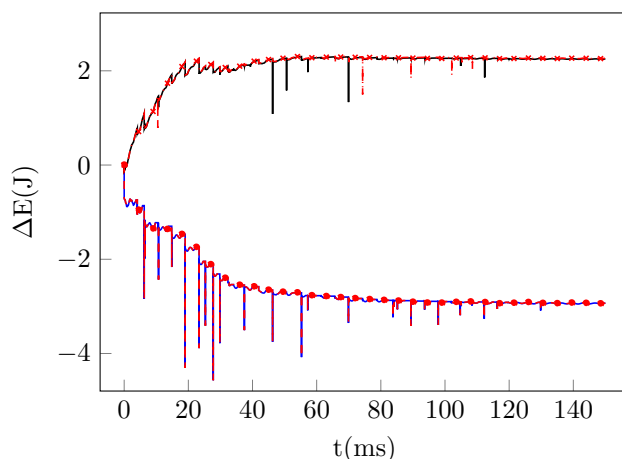


FIGURE IV.12 – Bilan énergétique pour les 4 méthodes de résolution : Carp-oneVC (—), Carp-QN (—◆—), Mor-Sic (—), Proj-Sic (—x—)

à la première touche. L'erreur relative $\Delta E/E_c(0)$ associée pour les algorithmes de Carpenter sont identiques et restent inférieures à 0,002%, ce qui est négligeable. Pour les algorithmes de Moreau-Jean disponibles dans **SICONOS**, cette erreur est même réduite à 0,0012%.

Ainsi, la réponse mécanique est vérifiée numériquement par superposition des résultats issus de plusieurs solveurs. De plus, tous les algorithmes fournissent des bilans énergétiques très satisfaisants. Dans la suite du chapitre, seules deux méthodes de résolution sont retenues :

- **Carp-oneVC** qui est le plus simple à implémenter et qui fournit des résultats identiques à **Carp-QN** pour un temps de calcul 7 fois inférieur.
- **Proj-Sic** qui est l'algorithme qui englobe le plus de physiques sur la dynamique d'impact et la loi de Coulomb.

Néanmoins, la solution du cas de référence n'est toujours pas en adéquation avec les observations d'une rupture d'arbre pour un moteur d'hélicoptère puisque la vitesse limite est dépassée. Dans les sections suivantes, plusieurs paramètres sont modifiés afin d'explorer quelles sont les configurations où une limitation de la survitesse est possible et quelle en est la cause. Trois paramètres sont retenus : le coefficient de frottement μ , la raideur du support du stator k_s , ainsi que la masse du stator m_s .

4.4 Influence du coefficient de frottement

4.4.1 Analyse temporelle

Les résultats présentés ici sont ceux fournis par l'algorithme Proj-Sic uniquement car ceux fournis par Carp-oneVC sont équivalents et mènent aux mêmes conclusions. L'étude

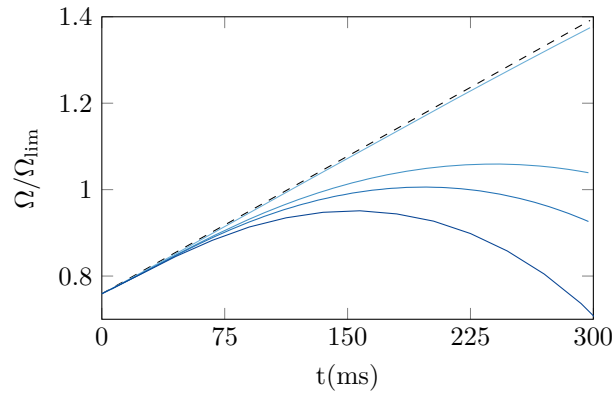
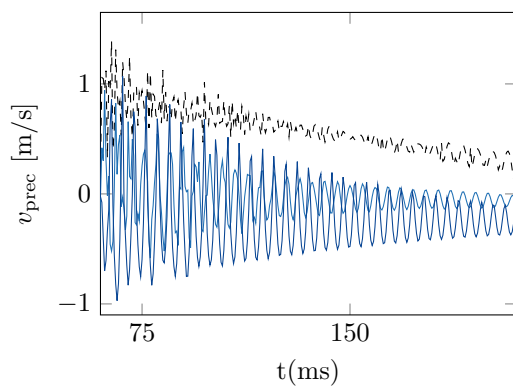
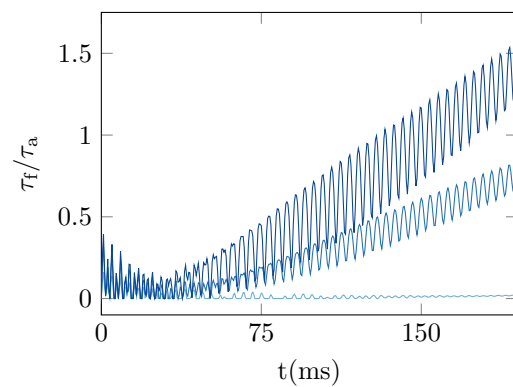


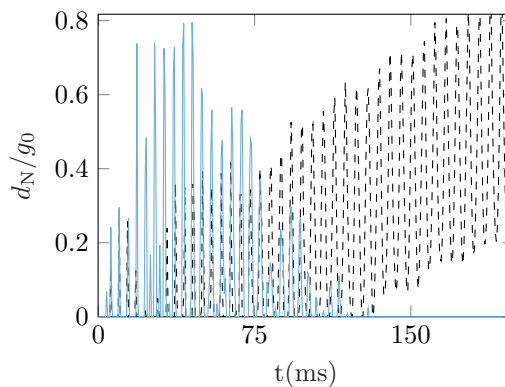
FIGURE IV.13 – Influence du coefficient de frottement sur la vitesse de rotation : $\mu = 0$ (---), $\mu = 0,1$ (ref) (—), $\mu = 0,2$ (—), $\mu = 0,22$ (—) et $\mu = 0,25$ (—)



(a) Vitesse de précession pour $t \in [60, 210]$



(b) Couple de frottement pour $t \in [0, 195]$ ms



(c) Evolution du jeu avec/sans frottement pour $t \in [0, 195]$ ms

FIGURE IV.14 – Influence du coefficient de frottement sur la cinématique du contact et le couple de frottement : $\mu = 0$ (---), $\mu = 0,1$ (ref) (—), $\mu = 0,22$ (—), $\mu = 0,25$ (—)

paramétrique du coefficient de frottement montre que son augmentation a une influence

favorable sur la vitesse de rotation de la turbine, comme illustré en Figure IV.13. Pour $\mu = 0,2$, la vitesse limite est à nouveau atteinte mais plus tardivement à 139ms. On peut noter que le transitoire de vitesse présente un profil en cloche à partir de ce coefficient de frottement. La valeur maximale de la vitesse de rotation sur le temps de simulation (ici fixé à 300ms) est notée Ω_{\max} dans le reste de la thèse. Ainsi, Ω_{\max} diminue et est atteint de plus en plus tôt lorsque μ augmente. On a $\Omega_{\max} = \Omega_{\lim}$ pour $\mu = 0,22$, tandis que pour $\mu = 0,25$, Ω_{\max} est réduite à $0,9\Omega_{\lim}$.

On peut également remarquer que le cas sans frottement et le cas de référence donnent des temps d'atteinte de la vitesse limite équivalents et proches de 113ms. Ces deux cas diffèrent sur l'évolution de la vitesse de précession. En effet, sur la Figure IV.14a, on constate que la vitesse sans frottement est tout le temps positive. Pour le cas de référence, la vitesse de précession a tendance à osciller autour de $\approx -0,07\text{m/s}$. Comme déjà évoqué à la section précédente, cela traduit des passages entre précession directe et rétrograde. En fait, il s'avère que plus le coefficient de frottement est important plus la vitesse de précession négative devient dominante. Ce constat se reflète également dans le couple de frottement. En effet, la littérature présentée en Section II.1.1 stipule que la précession inverse est accompagnée d'efforts de contact élevés. Or c'est exactement ce qu'il se produit en Figure IV.14b. Dans le cas où $\mu = 0,25$,

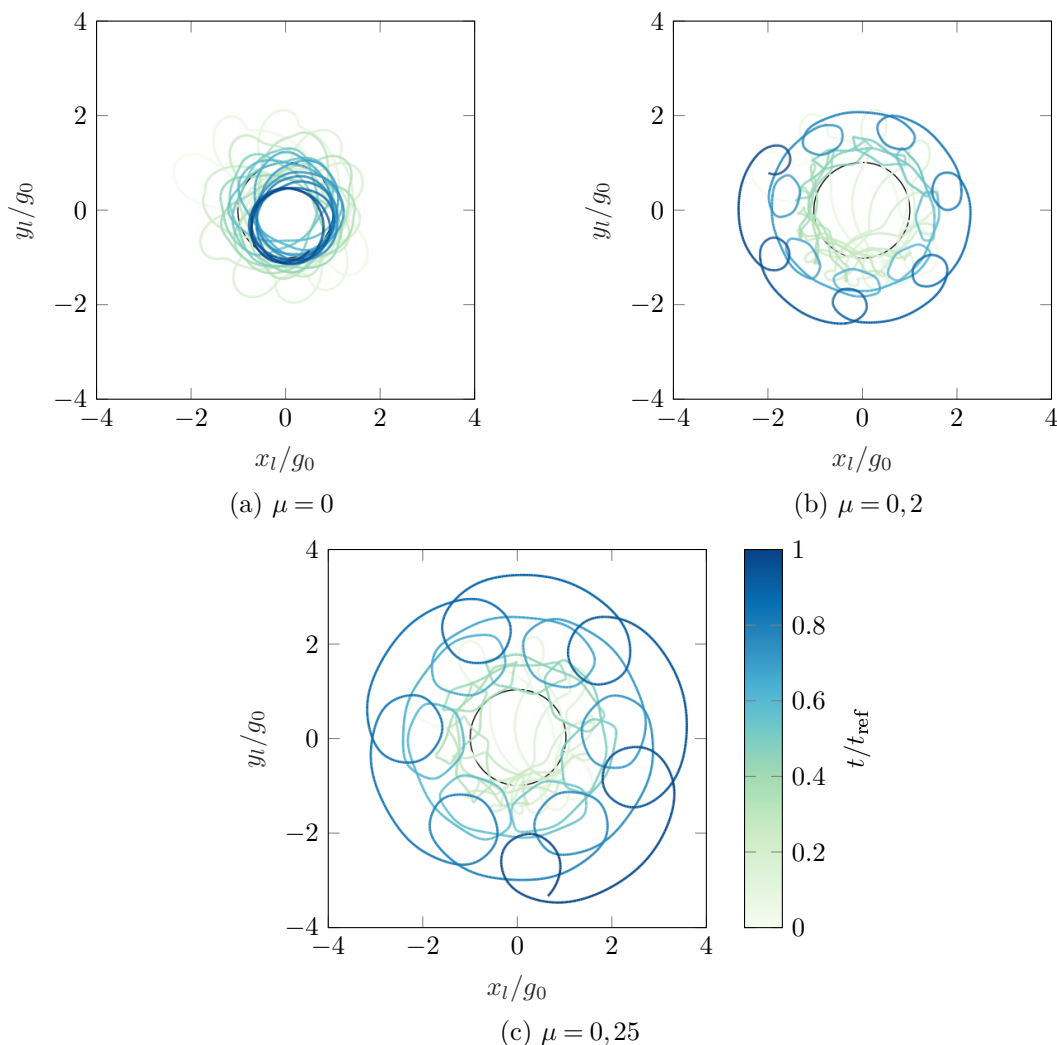


FIGURE IV.15 – Influence du coefficient de frottement sur la trajectoire absolue du labyrinthe parcourue pendant $t_{\text{ref}} = 113\text{ms}$

celui-ci finit même pas dépasser le couple aérodynamique. Cela explique la diminution de la vitesse de rotation calculée pour ce cas. Plus le phénomène de précession inverse s'accroît, plus l'amplitude de vibration augmente également, comme décrit en Figure IV.15. Pour le cas sans frottement, la vibration décroît graduellement et l'orbite devient progressivement circulaire comme pour le cas de référence, à la différence que le rayon devient inférieur au jeu initial g_0 . Ainsi, la différence majeure entre le cas sans frottement et celui de référence pour $\mu = 0,1$ est qu'un contact annulaire permanent est mis en place pour le second. Le contact sans frottement s'accompagne d'une séparation permanente puisqu'à partir de 130ms, d_N est toujours strictement positive (voir Figure IV.14c).

4.4.2 Analyse fréquentielle

La limitation de la survitesse peut également être étudiée en analysant le contenu fréquentiel de la réponse dynamique. L'objectif ici est de mieux comprendre le phénomène de précession inverse et d'identifier si le spectre de la réponse dynamique contient des résonances avec le système turbine stator couplé. Le calcul des fréquences propres d'un système rotor-stator en présence de contact peut s'avérer être une tâche complexe et qui fait l'objet de travaux de recherche récents [43, 152]. Le couplage est ici réalisé d'une manière simplifiée en ajoutant à la turbine la masse ponctuelle et la raideur du stator au niveau du labyrinthe. Les déplacements (x_s, y_s) sont alors égaux à (x_l, y_l) . Le système couplé ne possède alors plus de modes rigides et le diagramme de Campbell associé est présenté en Figure IV.16. Le premier mode double correspond à la résonance en phase des 2 supports et débute à 245Hz. Respectivement, le second mode est associé à une résonance en opposition de phase qui apparaît à 332Hz.

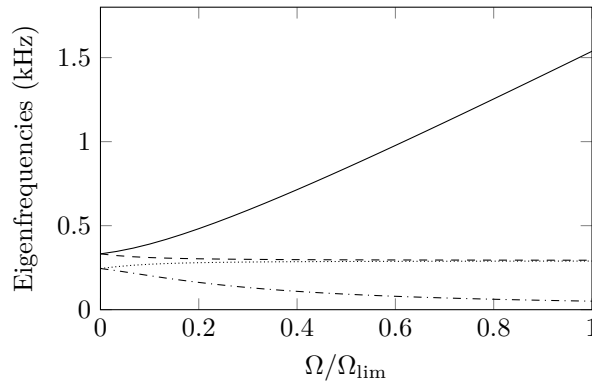


FIGURE IV.16 – Diagramme de Campbell du système rotor-stator couplé : f_{1r} (---), f_{1d} (....), f_{2r} (--) , f_{2d} (—)

Ce diagramme de Campbell est exploité afin de déterminer l'évolution des fréquences propres du système en cours de simulation. En effet, connaissant l'évolution de la vitesse de rotation en fonction du temps, il est alors possible de reporter ce point de fonctionnement sur le diagramme de Campbell. Cela revient à effectuer l'opération composée $f(\Omega(t))$. Il faut cependant souligner que cette approche est approchée pour l'étude d'une réponse transitoire puisque les valeurs propres du système n'ont de sens que pour les signaux périodiques.

L'évolution des fréquences propres est alors superposée au spectrogramme complet du déplacement absolu du labyrinthe. Il s'agit de la combinaison de deux outils d'analyse dans le domaine fréquentiel :

Spectrogramme

Il s'agit d'un diagramme temps-fréquence (avec la fréquence définie par la variable f). Autrement dit, le spectrogramme $X(f, t)$ décrit l'évolution du contenu fréquentiel d'un signal $x(t)$ dans le temps [27]. Ce diagramme se construit en appliquant une transformée de Fourier à fenêtre glissante

$$X(f, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot w(t - \tau) e^{-2i\pi ft} \cdot dt, \quad (\text{IV.81})$$

où $w(t - \tau)$ est communément appelée fonction de pondération (ou *windowing function* en anglais) centrée en l'instant τ .

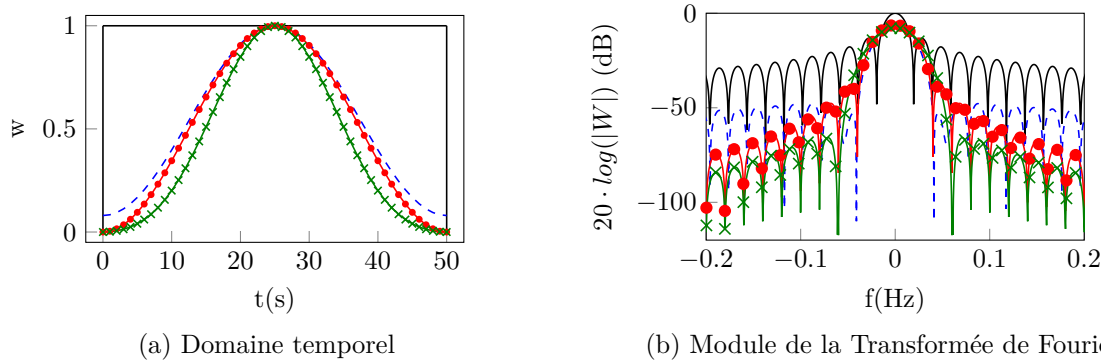


FIGURE IV.17 – Fonctions de pondération usuelles : rectangle (—), Hamming (---), Hanning (—●—), Blackman (—×—)

Le choix de la fonction dépend du niveau de précision souhaité sur la résolution fréquentielle et du type de signal temporel. Les fonctions les plus courantes sont présentées en Figure IV.17a. La fenêtre la plus simple au sens de la troncature correspond à la fonction porte (ou rectangulaire). Pour un échantillonnage de N instants dans la fenêtre, il en résulte dans le domaine fréquentiel un produit de convolution entre le spectre $X(f)$ et un sinus cardinal $W(f) = N \frac{\sin(\pi f N)}{\pi f N}$. Ce sinus cardinal induit à un lobe principal étroit qui permet de bien caractériser la fréquence, par contre elle présente d'importants lobes secondaires qui étalent le contenu spectral. Ces lobes secondaires sont le plus atténués pour la fonction de Blackman. Le compris qui semble le plus adapté correspond aux fenêtres de Hamming et de Hanning comme l'indique la Figure IV.17b. Enfin, la résolution en temps fréquence, qui est limitée par l'inégalité d'Heisenberg, peut être améliorée en introduisant un recouvrement entre les fenêtres.

Full-spectrum

En plus de fournir des informations sur l'amplitude et le contenu fréquentiel de la vibration, l'analyse par *full-spectrum* permet d'identifier le type de précession dans la dynamique d'une machine tournante [15, 60, 117, 145]. Pour commencer, la décomposition fréquentielle de 2 signaux perpendiculaires dans l'espace $x(t)$ et $y(t)$ est effectuée

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{2\pi i f_n t + \phi_n}; \\ y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_n e^{2\pi i f_n t + \psi_n}; \end{cases} \quad (\text{IV.82})$$

où X_n (resp. Y_n) est le module et ϕ_n (resp. ψ_n) est la phase du $n^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier complexe. Pour chaque fréquence f_n , la décomposition de la vibration dans le sens direct et rétrograde s'écrit

$$R_n = R_{n+} e^{2\pi i f_n t + \alpha_n} + R_{n-} e^{-(2\pi i f_n t + \beta_n)}, \quad (\text{IV.83})$$

où R_{n+} et R_{n-} représentent les rayons des orbites directes et rétrogrades parcourues à la

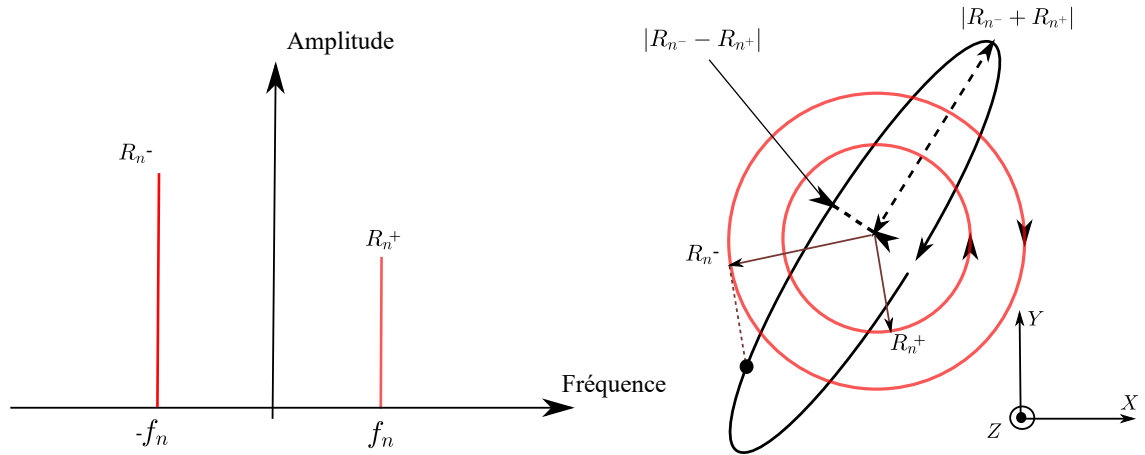


FIGURE IV.18 – Full-spectrum pour le $n^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier et interprétation sur l'orbite de vibration

fréquence f_n , comme illustré en Figure IV.18. Ces derniers sont calculés pour $n = 0, \dots, \infty$ d'après

$$\begin{aligned} R_{n+} &= \sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + 2X_n Y_n \sin(\phi_n - \psi_n)}; \\ R_{n-} &= \sqrt{X_n^2 + Y_n^2 - 2X_n Y_n \sin(\phi_n - \psi_n)}. \end{aligned} \quad (\text{IV.84})$$

Analyses des spectrogrammes complets

Dans la suite de cette section, ce sont les déplacements horizontaux et verticaux du labyrinthe relatifs au stator ($x_l - x_s, y_l - y_s$) qui sont sélectionnés. Le spectrogramme en Figure IV.19

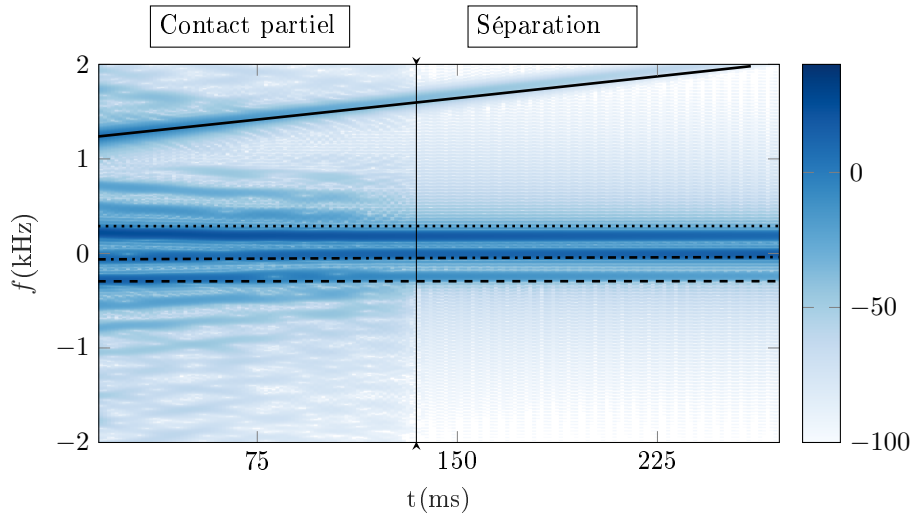


FIGURE IV.19 – Spectrogramme complet des déplacements relatifs du labyrinthe : sans frottement ; f_{1r} (---), f_{1d} (.....), f_{2r} (---), f_{2d} (—)

correspond au cas sans frottement. Il met en évidence une correspondance du spectre avec le 2^{ème} mode direct du diagramme de Campbell. Les autres modes propres sont proches des autres raies du spectre mais sans se superposer. La raie dominante du spectrogramme se situe dans le domaine positif et vaut 190Hz. L'analyse fréquentielle confirme la nature directe de

la précession du labyrinthe. Il faut par ailleurs souligner que le spectre se restreint au 4 raies principales pour $t > 130$ ms. Cette modification du contenu spectral signifie un changement de type de réponse mais sans pouvoir être identifié uniquement à partir du spectrogramme.

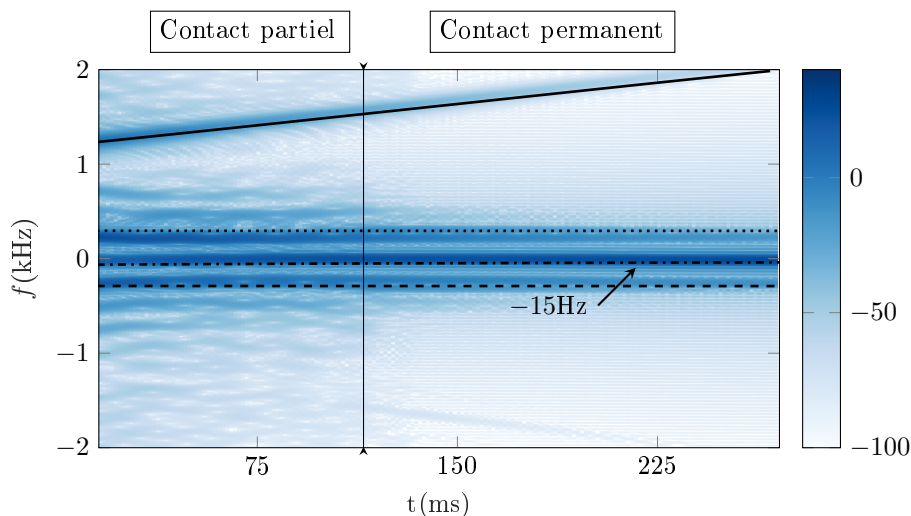


FIGURE IV.20 – Spectrogramme complet des déplacements relatifs du labyrinthe : référence $\mu = 0,1$; f_{1r} (---), f_{1d} (----), f_{2r} (--) , f_{2d} (—)

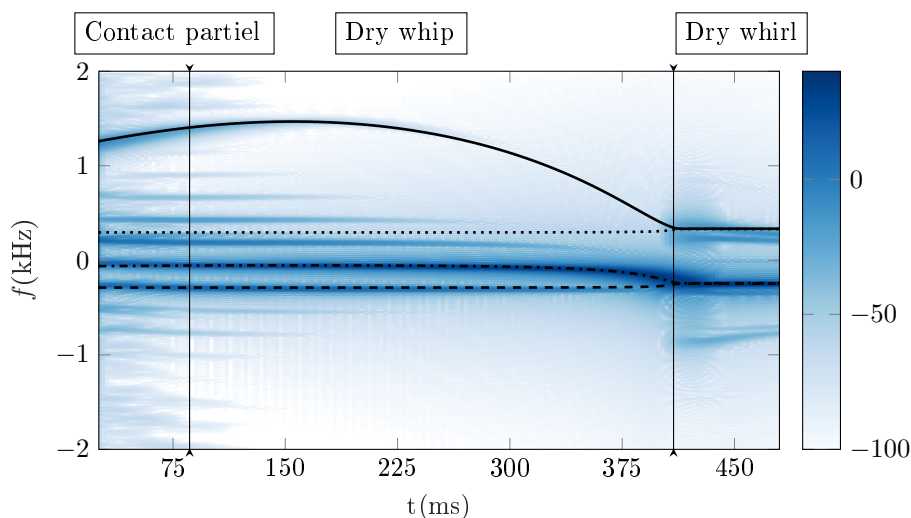


FIGURE IV.21 – Spectrogramme complet des déplacements relatifs du labyrinthe : $\mu = 0,25$; f_{1r} (---), f_{1d} (----), f_{2r} (--) , f_{2d} (—)

Pour la simulation de référence avec $\mu = 0,1$ (cf Figure IV.20), on retrouve de nouveau une correspondance avec le second mode direct et la raie principale à 190Hz. Néanmoins, en cours de simulation, le spectre devient symétrique autour de la fréquence nulle. Ce phénomène reflète un équipartition de la réponse directe et rétrograde dans le déplacement du labyrinthe. Cette raie principale devient même négative autour de -15 Hz. L'analyse fréquentielle est donc en adéquation avec la vitesse de précession affichée en Figure IV.9f qui montrait une oscillation à moyenne proche de zéro. L'élimination des raies secondaires traduit là encore une transition vers un nouveau régime comme pour le cas sans frottement. L'analyse en fréquence est insuffisante pour dissocier la transition dans les deux cas. Seule la réponse temporelle permet de confirmer la séparation de contact sans frottement et le contact permanent pour $\mu = 0,1$.

Enfin, pour un coefficient de frottement $\mu = 0,25$, la réponse correspond à une survitesse sous la limite autorisée. En début de simulation, la Figure IV.21 indique uniquement une superposition du second mode direct avec le spectrogramme. A partir d'environ 100ms apparaissent 2 superpositions avec des modes propres dans le domaine des fréquences négatives. La première, autour de -55Hz , correspond au premier mode rétrograde f_{1r} tandis que l'autre raie, à -290Hz est associée au second mode rétrograde f_{2r} avec une intensité qui diminue avec le temps. La localisation des raies principales dans le domaine négatif confirme la mise en place d'une réponse en *dry whip*. Ensuite, autour de 395ms, des pics secondaires apparaissent et reflètent le roulement pur du labyrinthe (i.e. *dry whirl*). On rappelle que la convergence des modes directs et rétrogrades en fin de simulation est liée à la forte diminution de la vitesse de rotation (autour de 1000rpm). Les effets gyroscopiques deviennent alors négligeables.

4.5 Influence de la raideur du support du stator

Dans cette section, le coefficient de frottement est maintenu constant à $\mu = 0,1$ et la raideur du stator est augmentée. Les profils de vitesse de rotation sont indiqués en Section IV.4.5 et

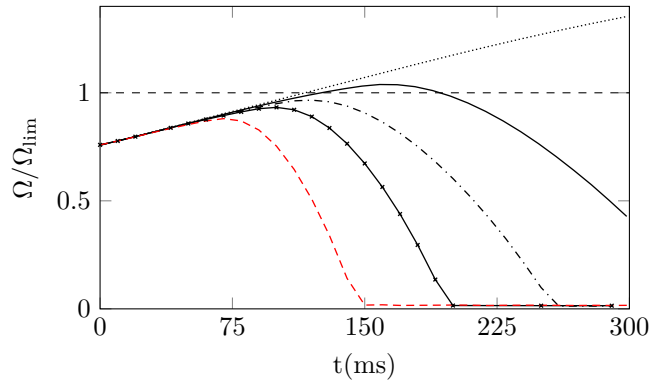


FIGURE IV.22 – Transitoires vitesse de rotation en fonction de la raideur du stator : $k_s = 4 \times 10^7 \text{N/m}$ (.....), $5 \times 10^7 \text{N/m}$ (—), $6 \times 10^7 \text{N/m}$ (---), $8 \times 10^7 \text{N/m}$ (-*-) and $1 \times 10^8 \text{N/m}$ (---)

montrent que la survitesse reste en dessous de la limite pour $k_s \geq 5,5 \times 10^7 \text{N/m}$. Dans la suite de cette section, la réponse dynamique est étudiée plus en détails pour une raideur égale à 10^8N/m et où les résultats à la fois obtenus par **Carp-oneVC** et **Proj-Sic** sont discutés. Afin d'obtenir des résultats convergés et superposés entre les 2 algorithmes, le pas de temps a été divisé par deux, soit $h = 5 \times 10^{-7} \text{s}$.

L'analyse du couple de frottement montre en Figure IV.23a que le contact est partiel pour $t < 60 \text{ms}$. A partir de cet instant, le couple est toujours non-nul ; ce qui signifie que le contact devient annulaire permanent. Par ailleurs, la vitesse de précession (voir Figure IV.23b) montre que le mouvement devient complètement rétrograde à partir de 70ms. Comme déjà évoqué, cette précession inverse s'accompagne de l'augmentation des efforts de contact, ce qui est bien confirmé avec le couple de frottement qui finit par atteindre 11.8 fois le couple aérodynamique. La vitesse de glissement relative entre le labyrinthe et le stator diminue avec la précession inverse. Elle finit par s'annuler vers 146ms, ce qui correspond à un passage vers un contact en roulement pur.

La Figure IV.24b permet de mettre en évidence la gestion du roulement pur entre les 2 algorithmes. Avec l'algorithme de Carpenter **Carp-oneVC**, seule la phase glissante est prise en compte. On trouve alors une vitesse de glissement résiduelle non-nulle qui oscille très rapidement autour de 0,1m/s. Cette amplitude décroît avec le pas de temps h puisque pour un pas de

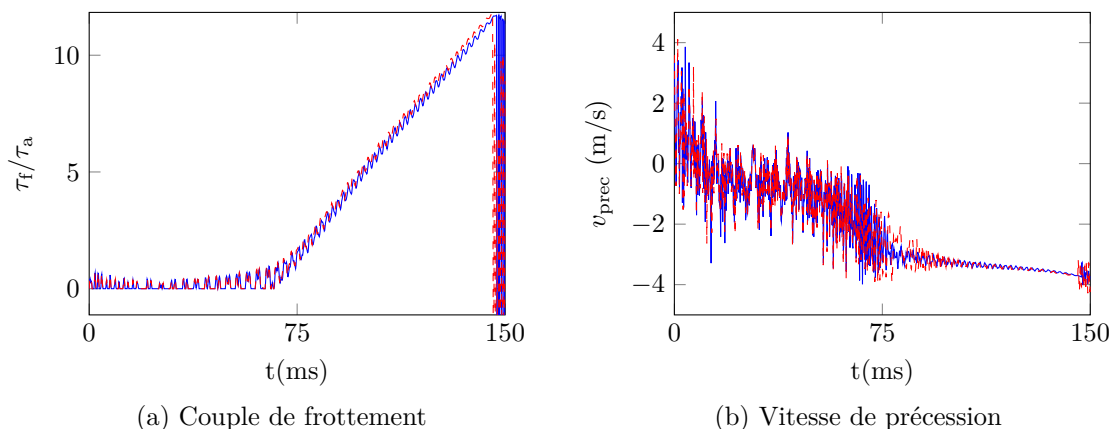


FIGURE IV.23 – Réponse temporelle cas $k_s = 10^8 \text{N/m}$: Carp-oneVC (—), Sic-Proj (—)

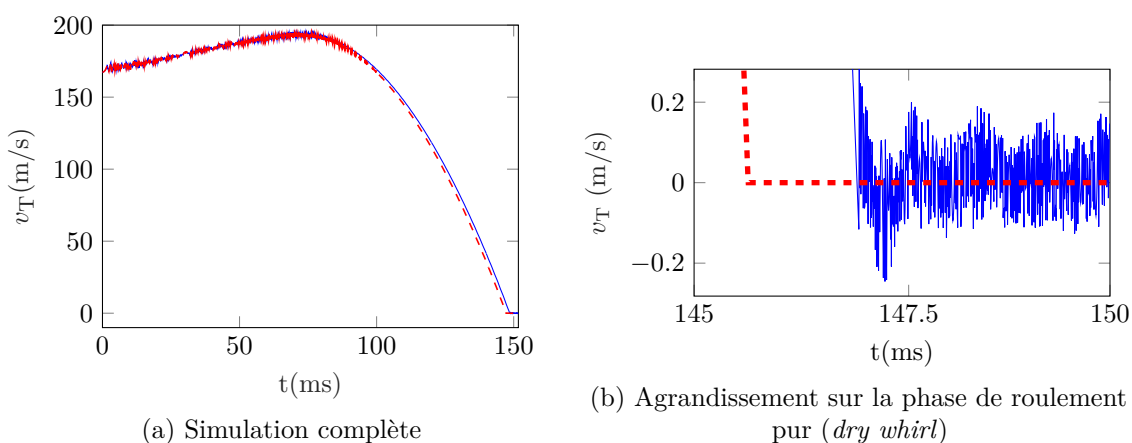


FIGURE IV.24 – Transitoire de la vitesse relative tangentielle pour $k_s = 10^8 \text{N/m}$

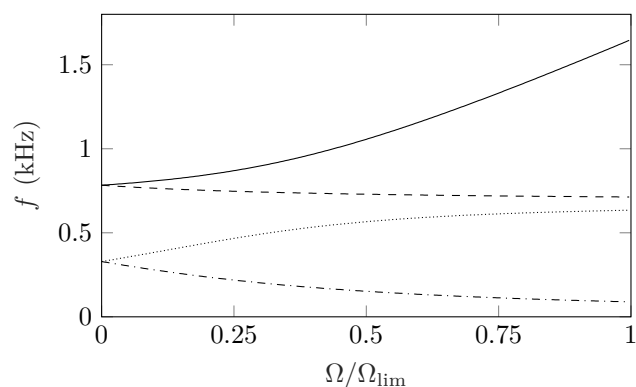


FIGURE IV.25 – Diagramme de Campbell du système rotor-stator couplé lorsque $k_s = 10^8 \text{N/m}$: f_{1r} (---), f_{1d} (----), f_{2r} (---), f_{2d} (—)

temps plus grossier $h = 10^{-6} \text{s}$, elle valait $0,25 \text{m/s}$. Pour l'algorithme **Sic-Proj** disponible dans **SICONOS**, le cône de Coulomb est traité dans son intégralité et la v_T est strictement nulle lors du *dry whirl*.

Le bilan énergétique est de nouveau étudié pour ce paramétrage où la limitation de survitesse à lieu. Cette fois-ci, la Figure IV.30a révèle que le travail réalisé par l'effort de frottement dépasse celui fourni par le couple en $t = 92 \text{ms}$. Au-delà, il y a plus d'énergie qui est extraite du

système plutôt que entrante. Les deux énergies finissent par atteindre un plateau. En effet, la vitesse de rotation est proche de zéro et le couple aérodynamique ne travaille presque plus. Par analogie, l'effort de frottement ne fournit plus de travail non plus puisque le régime en roulement pur a été atteint. En résultante, l'écart sur le bilan énergétique proposé en Figure IV.30b reste très faible pour les deux méthodes. Pour le pas de temps choisi, et connaissant l'énergie mécanique initiale ($\approx 200\text{kJ}$), les erreurs relatives associées sont limitées respectivement à 0,13% pour *Carp-oneVC* et 0,08% pour *Proj-Sic*.

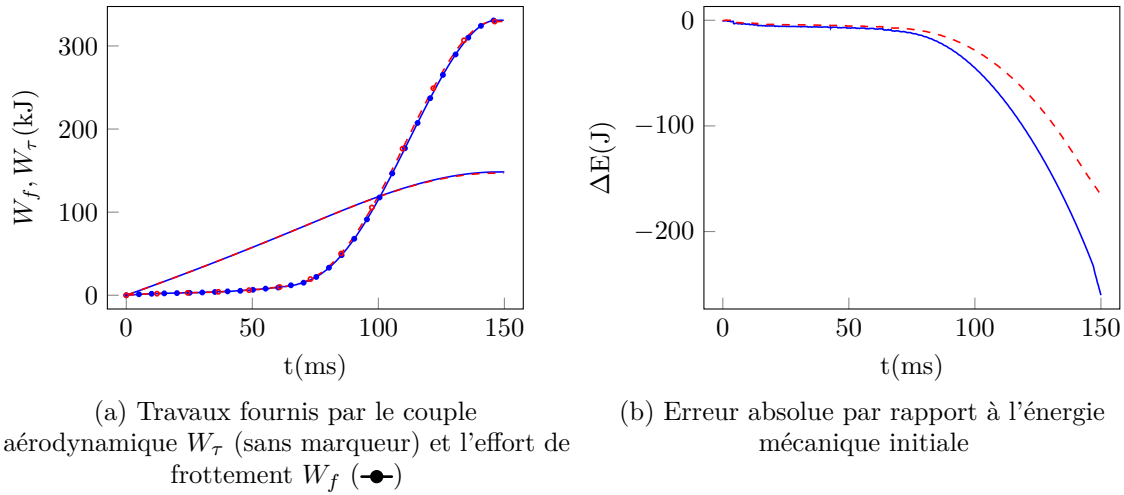


FIGURE IV.26 – Bilan énergétique pour les algorithmes *Carp-oneVC* (—) et *Proj-Sic* (---)

En ce qui concerne l'analyse fréquentielle, modifier la raideur du stator induit des changements dans le diagramme de Campbell (cf Figure IV.25). Pour k_s augmenté d'un ordre de grandeur, les fréquences propres des modes à rotation nulle augmentent. Elles valent désormais $f_1 = 348\text{Hz}$ et $f_2 = 783\text{Hz}$ (contre 245Hz et 332Hz pour le cas de référence). L'analyse par spectrogramme complet est présentée en Figure IV.27. On constate que pour $t < 70\text{ms}$, le

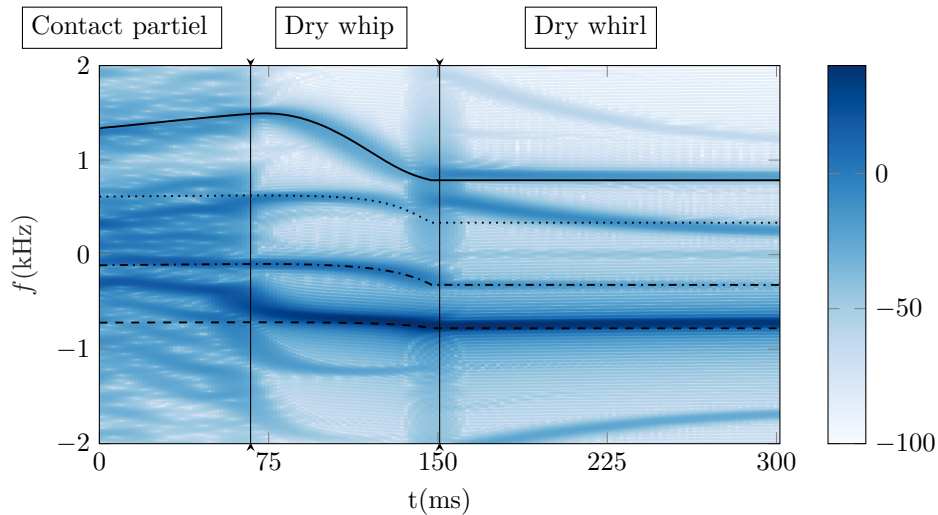


FIGURE IV.27 – Spectrogramme complet du déplacement relatif du labyrinthe : $k_s = 10^8\text{N/m}$; f_{1r} (---), f_{1d} (.....), f_{2r} (--), f_{2d} (—)

contenu spectral est riche dans l'intervalle $[-500\text{Hz}, 500\text{Hz}]$. Le pic à -100Hz se superpose avec le premier mode rétrograde à partir de 50ms. Le deuxième mode direct reste proche du

pic autour de 1200Hz. Ainsi, même si le contact est partiel pendant cette première partie de simulation, il existe une correspondance avec des modes propres de couplage. Dans la seconde phase de la simulation, il n'y a plus de rebonds et les pics deviennent plus nets. Au niveau des fréquences négatives, une seconde superposition apparaît à partir de $t \approx 113\text{ms}$ entre le pic principal et le second mode rétrograde f_{2r} . A cet instant, la fréquence du pic se situe autour de -500Hz . Jusqu'à la fin de la simulation, le spectrogramme indique que ce pic reste proche du second mode rétrograde. La prépondérance de pics négatifs dans le spectre démontre à nouveau l'importance de la précession inverse dans la réponse du système. Jusqu'à présent, $v_T > 0$, ce qui indique que le système répond en *dry whip*. La vitesse de rotation décroît, ce qui modifie les fréquences des modes et il est clair que le spectre suit une évolution identique avec le second mode rétrograde de plus en plus dominant. Enfin à partir de $t \approx 146\text{ms}$, le système passe en régime de *dry whirl*, ce qui engendre l'apparition de sous-harmoniques supplémentaires.

En conclusion, l'augmentation du coefficient de frottement et/ou de la raideur engendrent une prépondérance de la précession inverse lors d'un contact rotor-stator. L'augmentation des efforts de contact qui en découlent est généralement un phénomène à éviter pour ne pas endommager les composants en contact. Dans un scénario accidentel de rupture d'arbre, il s'agit plutôt d'un comportement bénéfique puisqu'il génère un couple de frottement suffisant pour lutter contre le couple aérodynamique. Néanmoins, ce ralentissement s'accompagne d'une amplification de la vibration des deux structures. La présence de précession rétrograde peut être aussi bien confirmée par des analyses dans le domaine temporel que fréquentiel. Cette dernière présente l'intérêt de démontrer une correspondance forte du contenu spectral avec des modes propres couplés labyrinthe-stator.

4.6 Masse du stator

La section précédente a mis en évidence l'importance de la raideur du stator sur la réponse dynamique de la turbine en présence de contact frottant. Dans le calcul des fréquences propres, la masse du stator possède également un rôle important. Dans cette section, deux cas supplémentaires sont étudiés : $m_s = 352\text{g}$ et $m_s = 527\text{g}$. L'objectif est d'effectuer une étude

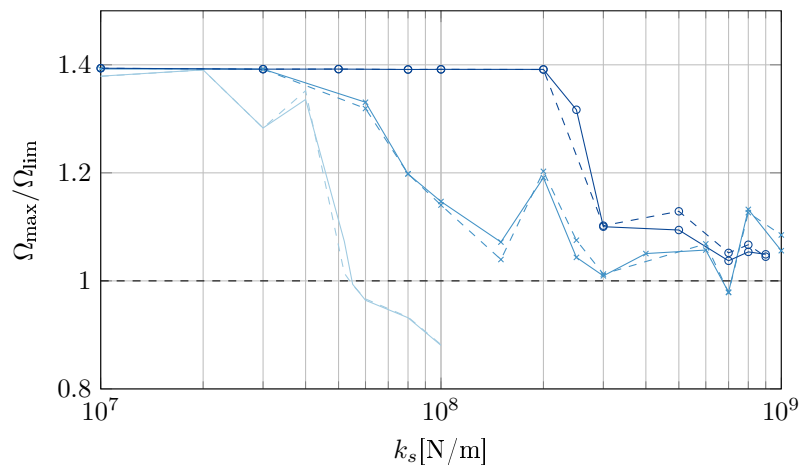


FIGURE IV.28 – Diagramme masse-raideur des maxima de vitesse de rotation pour $\mu = 0,1$ obtenus par Carp-oneVC (tirets) et Proj-Sic (continu) : $m_s = 167\text{g}$ (—), $m_s = 352\text{g}$ (—) and $m_s = 527\text{g}$ (—○—)

paramétrique impliquant trois quantités : la masse du stator et la raideur de son support, ainsi que le coefficient de frottement. Afin de synthétiser les résultats, la valeur maximale de la vitesse de rotation $\Omega_{\max} = \max(\Omega(t))$ est retenue pour chaque simulation lancée sur durée égale à

300 ms. Elles sont ensuite reportées dans deux diagrammes pour deux coefficients de frottement : $\mu = 0,1$ (cf Figure IV.28) et $\mu = 0,17$ (cf fig Figure IV.31). Pour le cas où $\mu = 0,1$, les résultats

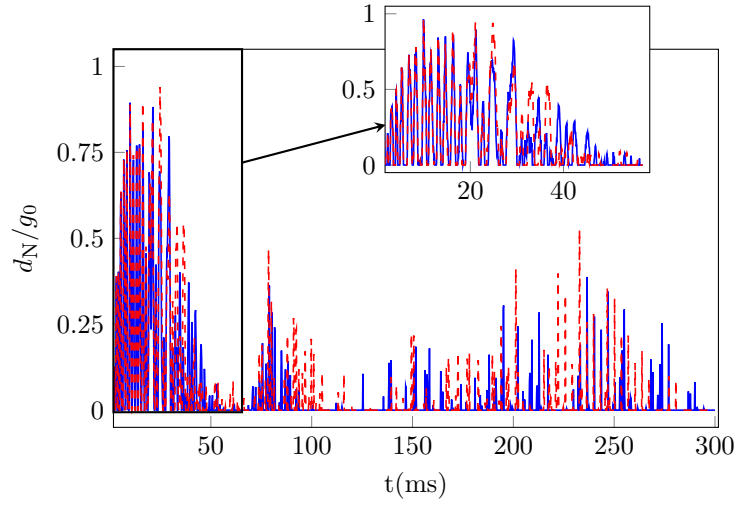


FIGURE IV.29 – Evolution temporelle du jeu avec $m_s = 352\text{g}$ et $k_s = 3 \times 10^8\text{N/m}$ où $h = 1 \times 10^{-7}\text{s}$ et calculée avec **Carp-oneVC** (—) et **Proj-Sic** (---)

à la fois fournis par **Carp-oneVC** et **Proj-Sic** sont présentés. A nouveau, ils démontrent la similarité des profils de $\Omega_{\max}(k_s, m_s)$ pour les deux algorithmes de résolution. Avant toute chose, il faut souligner que pour toutes les masses, il existe une valeur plafond autour de $1.4\Omega_{\text{lim}}$. Elle correspond à la vitesse en fin de simulation (i.e. $\Omega_{\max} = \Omega(t = 300\text{ms})$) lorsqu'une séparation de contact a lieu. Cette valeur est donc associée au scénario le plus défavorable pour le temps de simulation choisi. En effet, si la durée de simulation était plus longue, alors ce plateau se situerait à une vitesse plus élevée. On remarque que la valeur maximale de la vitesse de rotation

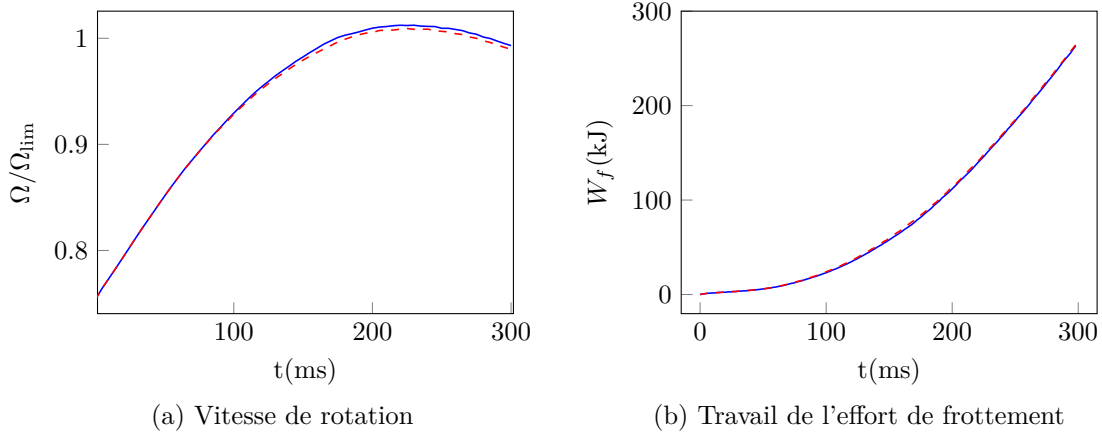


FIGURE IV.30 – Transitoires de quantités globales avec $m_s = 352\text{g}$, $k_s = 3 \times 10^8\text{N/m}$ et $h = 10^{-7}\text{s}$ pour les algorithmes **Carp-oneVC** (—) et **Proj-Sic** (---)

baisse avec k_s , et cela quelle que soit la masse. Pour les deux masses les plus faibles (167 et 352g), l'extremum de vitesse Ω_{\max} parvient à passer sous la valeur limite pour l'intégrité du disque Ω_{lim} . En revanche, une masse plus élevée s'accompagne d'une raideur seuil plus élevée. En effet, alors que l'objectif est rempli pour $k_s > 5,5 \times 10^7\text{N/m}$ pour la masse la plus faible, il faut augmenter davantage la raideur jusque $7 \times 10^8\text{N/m}$ lorsque $m_s = 352\text{g}$. La tâche est d'autant plus complexe que Ω_{\max} ne décroît plus de façon monotone avec k_s . Par ailleurs,

la superposition parfaite des solutions des deux solveurs devient plus difficile à obtenir et oblige à décroître davantage le pas de temps lorsque la raideur et la masse augmentent. Il

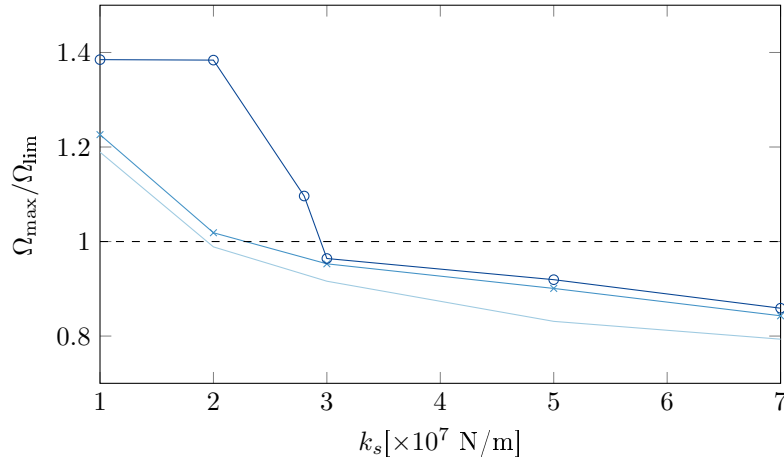


FIGURE IV.31 – Diagramme masse-raideur des maxima de vitesse de rotation pour $\mu = 0,17$ obtenus par Sic-Proj : $m_s = 167 \text{ g}$ (—), $m_s = 352 \text{ g}$ (—*) and $m_s = 527 \text{ g}$ (—○)

s’agit d’un résultat attendu puisqu’aucune flexibilité n’est introduite dans les structures, ce qui rend le modèle très sensible aux impacts, et ce quel que soit la méthode de résolution retenue. En effet, si les impacts n’apparaissent pas exactement au mêmes instants, la solution sur des grandeurs macroscopiques (ex : couple résistif, vitesse de rotation) change peu, mais les déplacement locaux peuvent varier. A titre d’exemple, la réponse fournie pour $m_s = 352 \text{ g}$ et $k_s = 3 \times 10^8 \text{ N/m}$ est étudiée plus en détails avec un pas de temps raffiné à 10^{-7} s . L’évolution du jeu d_N en Figure IV.29 confirme que l’augmentation de la masse implique une durée de réponse en contact partiel plus longue, ici sur la totalité de la simulation. Les solutions issues de Carp-oneVC et Sic-Proj sont identiques pour $t < 20 \text{ ms}$ puis elles se dissocient. Pourtant il faut noter que les deux fonctions distance suivent la même tendance et que le travail fourni par le frottement, tout comme les profils de vitesse de rotations (voir Figure IV.30), sont similaires. Cela signifie que les instants d’impacts sont différents mais que la densité moyenne d’impacts par unité de temps et les niveaux efforts de contact associés sont identiques.

Ainsi, l’effet bénéfique de la raideur élevée du support du stator sur la survitesse devient limité pour une masse trop grande. Comme illustré pour la masse de 527 g , l’objectif n’est jamais rempli et le meilleur résultat est donné pour $k_s = 7 \times 10^8 \text{ N/m}$. La vitesse atteint alors $1.012\Omega_{\text{lim}}$.

Si le coefficient est augmenté à $\mu = 0,17$, il est à nouveau constaté qu’une raideur élevée a un effet positif sur la survitesse. Mais cette fois, toutes les masses parviennent à fournir une réponse avec un maximum de vitesse de rotation sous la limite. Par ailleurs, lorsque le coefficient de frottement augmente, la raideur nécessaire pour avoir $\Omega_{\max} < \Omega_{\text{lim}}$ diminue. Par exemple, pour $m_s = 352 \text{ g}$ la raideur passe à $2,2 \times 10^7 \text{ N/m}$, soit une réduction d’un facteur trois par rapport à $\mu = 0,1$. L’augmentation couplée de la raideur et du coefficient de frottement permet même de limiter la survitesse pour la masse stator la plus élevée. Notons que seuls les résultats fournis par Sic-Proj sont affichés en figure Figure IV.31. Certains jeux de paramètres ont également été testés avec l’algorithme de Carpenter qui a fourni des valeurs identiques.

En résumé, la réponse dynamique est fortement influencée par les valeurs définies pour le triplet masse stator, raideur stator et coefficient de frottement (m_s, k_s, μ). La valeur du coefficient de frottement doit être la plus élevée possible afin de garantir un freinage efficace de la turbine pour une plus large gamme de géométrie du stator. Cependant, il s’agit du paramètre le plus difficile à déterminer et à fixer par l’opérateur. Il est donc préférable de dimensionner le

stator en maximisant la raideur de son support et en minimisant sa masse.

5 Application avec stator assemblé

Dans les sections précédentes, il était supposé que seule la masse m_r de l'enveloppe annulaire du labyrinthe (voir pièce en gris en Figure IV.32) était prise en compte dans l'estimation de la masse du stator m_s . Dans l'assemblage du carter, cet anneau est supporté par vissage avec

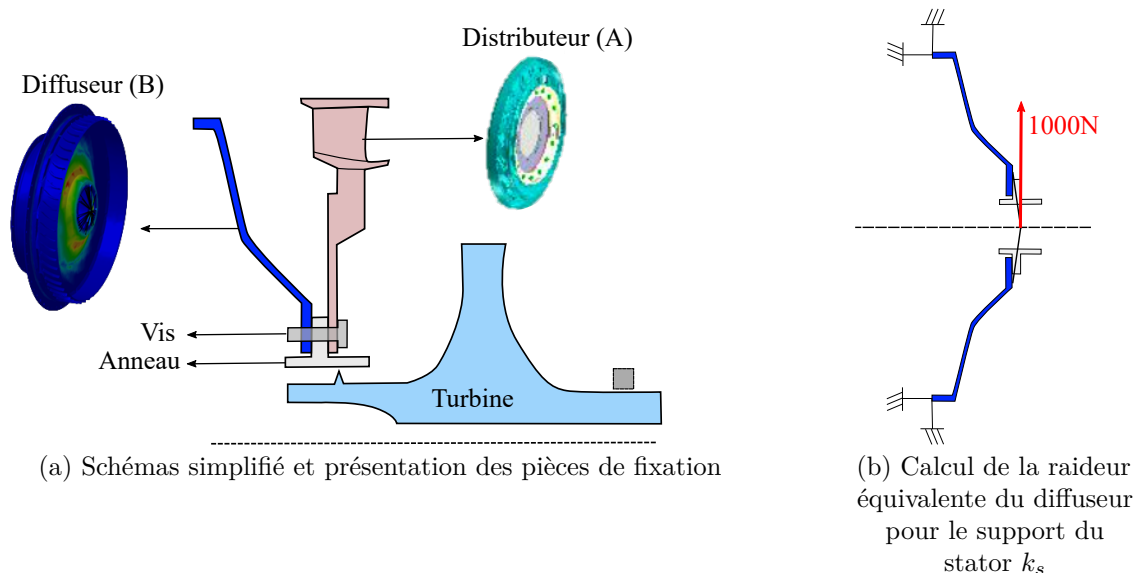


FIGURE IV.32 – Assemblage du stator par vissage entre l'anneau du labyrinthe, le redresseur (A) et le diffuseur (B)

deux autres composantes du moteur :

- A : le distributeur de l'étage turbine en aval ;
- B : le diffuseur du compresseur en amont.

Cette configuration est simplifiée dans la Figure IV.32a et implique de prendre en compte la masse du distributeur m_A dans la masse totale du stator parfaitement rigide.

A ce stade des travaux, la raideur est apportée au système uniquement via le diffuseur de l'étage compresseur et doit être estimée. Le calcul a été réalisé sous ANSYS en prenant uniquement en compte le diffuseur dans le modèle. Un effort vertical de 1000N a été imposé sur l'ensemble de la section droite du diffuseur en partant d'un point d'application situé au centre de l'enveloppe du labyrinthe, comme l'illustre la Figure IV.32b. Les conditions aux limites du calcul de chargement supposent que l'extrémité gauche du diffuseur est encastré sur toute sa circonférence. Le ratio de l'effort sur la flèche maximale relevée sur la pièce donne une raideur k_s dans l'ordre de grandeur 10^8N/m .

Dans la suite de cette partie, les résultats de l'algorithme de Carpenter *Carp-oneVC* sont comparés avec ceux fournis par *Sic-Proj* et plusieurs coefficients de frottement ont été testés. Les transitoires de vitesse fournis par les deux approches sont synthétisés en Figure IV.33 et indiquent qu'il est possible de limiter la survitesse lorsque $\mu \geq 0.17$. Pour commencer, lorsque $\mu = 0,1$, les deux algorithmes prédisent une perte de contact à partir de 30ms, comme détaillé en Figure IV.34. La vitesse de rotation n'est donc pas limitée par freinage et finit par atteindre Ω_{lim} au bout de $t \approx 113\text{ms}$. Les deux solutions fournies par *SICONOS* et l'algorithme de Carpenter donnent des amplitudes de jeu légèrement décalées mais l'issue de la simulation,

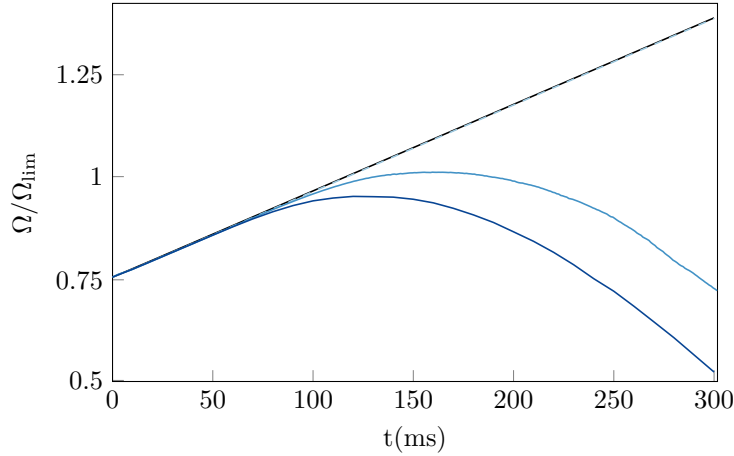


FIGURE IV.33 – Sensibilité du profil de vitesse de rotation au coefficient de frottement avec prise en compte du système de l’assemblage suspendu pour le stator : $\mu = 0,1$ (—), $\mu = 0,15$ (—), $\mu = 0,16$ (—), $\mu = 0,17$ (—)

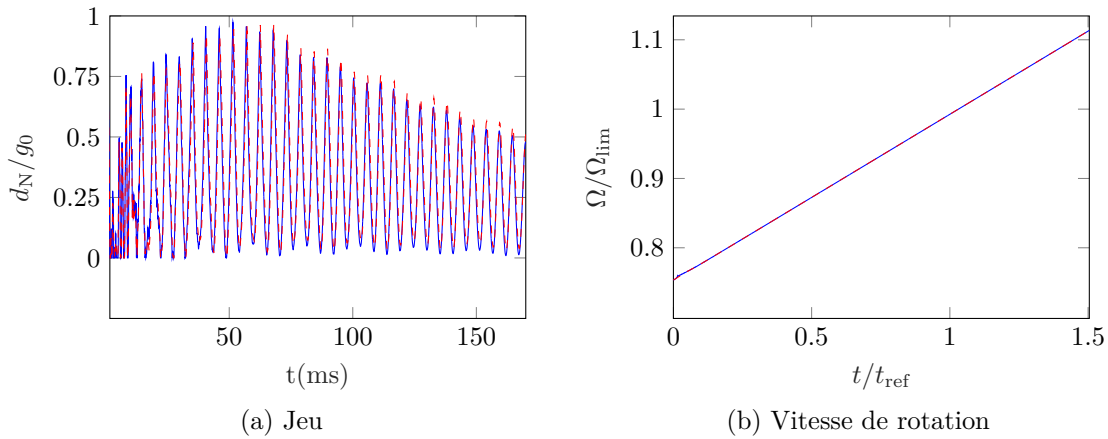


FIGURE IV.34 – Réponse dynamique pour le stator assemblé avec $\mu = 0,1$: **Carp-oneVC**(—), **Sic-Proj**(--)

reste identique. Le même constat a été dressé pour $\mu = 0,15$. Cependant, il a fallu réduire le pas de temps à $h = 5 \times 10^{-7}$ s pour **Carp-oneVC** afin d’obtenir la superposition du jeu avec **Sic-Proj**. Pour $\mu = 0,16$, avec un pas de temps fixé à $h = 10^{-6}$ s, les solutions données par Carpenter et Moreau-Jean sont radicalement différentes, ce qui indique clairement que les solutions ne sont pas convergées (voir Figure IV.35). Des résultats plus semblables sont proposés lorsque $h = 10^{-7}$ s. Cette fois-ci, les deux algorithmes de résolution prédisent un contact partiel et un profil de vitesse de rotation en cloche. On constate également que la vitesse de rotation reste sous la limite autorisée avec Carpenter tandis que $\Omega = 1.011\Omega_{lim}$ dans le cas de Moreau-Jean projeté. Le dépassement a donc bien lieu mais reste faible. La différence sur le transitoire de vitesse entre les deux méthodes de résolution peut s’expliquer en analysant le jeu en Figure IV.35a puisque les deux solutions commencent à se séparer à partir de 23 ms. Si les contacts ne sont pas détectés aux mêmes moments et n’ont pas la même durée, cela peut influencer la valeur de la force normale et donc le couple de frottement. Néanmoins, ce cas met en évidence la possibilité de limiter la survitesse même avec un stator assemblé qui pèse plusieurs kilos.

Cette propriété de freinage est confirmée en augmentant encore légèrement le coefficient de frottement. Pour $\mu = 0,17$, il est prédit par les deux méthodes de résolution que la vitesse reste

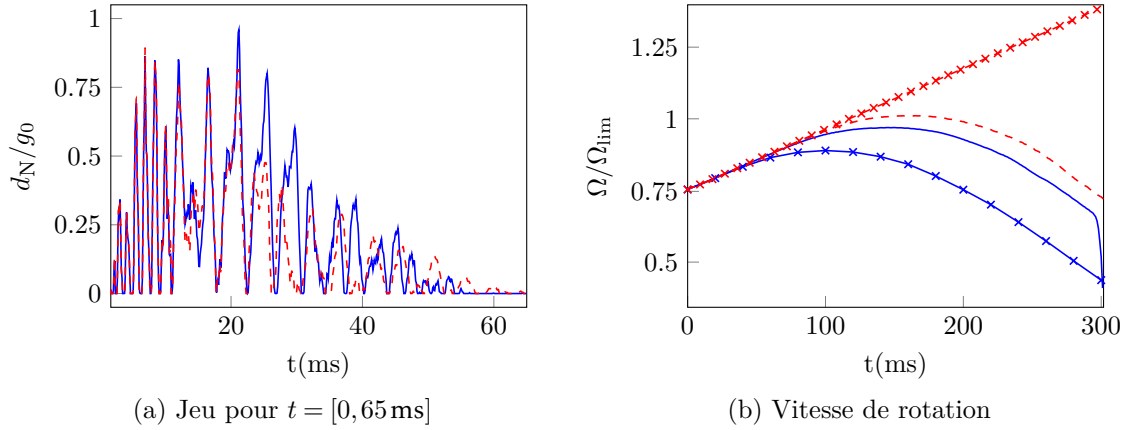


FIGURE IV.35 – Réponse dynamique avec le stator assemblé et pour $\mu = 0,16$: **Carp-oneVC** ($h = 10^{-6}\text{s}$) (\times), **Sic-Proj** ($h = 10^{-6}\text{s}$) (\times), **Carp-oneVC** ($h = 10^{-7}\text{s}$) ($—$), **Sic-Proj** ($h = 10^{-7}\text{s}$) ($- -$)

en dessous de la limite autorisée (cf Figure IV.36). Cependant, avec les pas de temps les plus fins, respectivement $h = 10^{-6}\text{s}$ pour **Carp-oneVC** contre $h = 5 \times 10^{-7}\text{s}$ avec **Sic-Proj**, on trouve que l'extremum de vitesse de rotation Ω_{\max} est légèrement inférieur avec l'algorithme de Carpenter, i.e. $0,91\Omega_{\lim}$ contre $0,95\Omega_{\lim}$ avec Moreau-Jean issu de **SICONOS**. Tous les résultats s'accordent

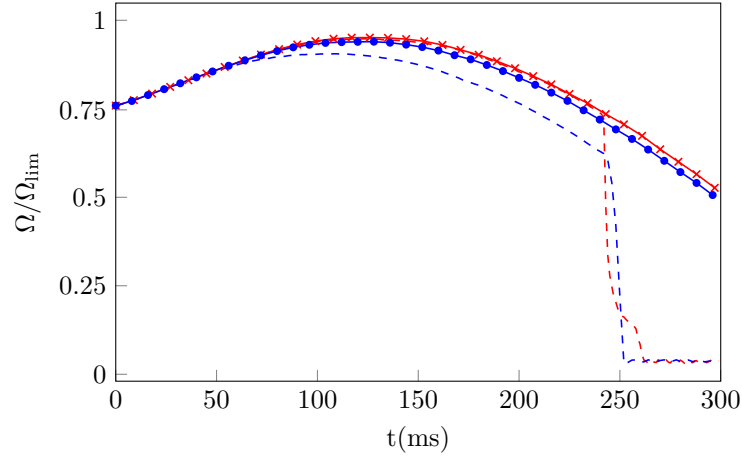


FIGURE IV.36 – Vitesse de rotation avec le stator assemblé et pour $\mu = 0,17$: **Carp-oneVC** ($h = 10^{-6}\text{s}$) ($- -$), **Sic-Proj** ($h = 10^{-6}\text{s}$) (\times), **Carp-oneVC** ($h = 2 \times 10^{-6}\text{s}$) (\bullet), **Sic-Proj** ($h = 5 \times 10^{-7}\text{s}$) ($- -$)

pour fournir une réponse en contact partiel au moins jusqu'à 240ms, comme l'indique l'effort normal en Figure IV.37b qui présente des annulations fréquentes. Avec la masse du stator complet et la raideur de son support issues des données industrielles, l'ordre de grandeur de cet effort augmente avec le temps. Les premiers contacts engendrent un effort autour de 40kN qui finit par avoisiner 300kN en fin de phase de contact partiel. On peut également noter que l'effort calculé par l'algorithme de Carpenter est supérieur à celui de Moreau-Jean projeté, ce qui explique la différence sur le transitoire de vitesse mentionnée précédemment. En parallèle de l'augmentation de l'effort de contact, la perte sur le bilan énergétique est également plus élevée pour l'application industrielle. Cette dernière est liée au caractère dissipatif de la loi d'impact de Newton retenue. En effet, le coefficient de restitution e_N est nul, choisi directement comme tel dans Moreau-Jean, et implicite dans Carpenter. Cela implique qu'une partie de

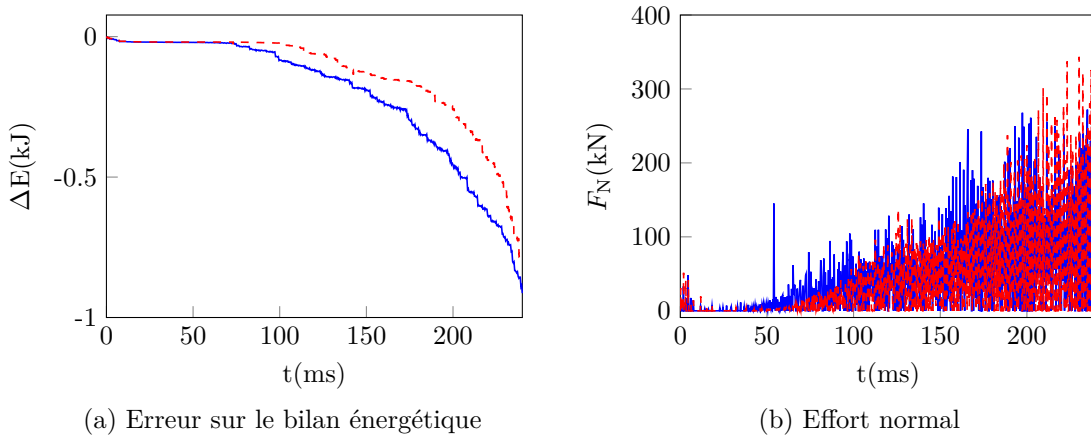


FIGURE IV.37 – Comparaison des phases de contact partiel entre **Carp-oneVC**(10^{-6} s) (—) et **Sic-Proj**($h = 5 \times 10^{-7}$ s) (---)

l'énergie cinétique liée à la composante de vitesse normale est perdue après l'impact. Au vu du nombre d'occurrences d'impacts plus élevée pour cette application, la dissipation qui en découle devient visible même si elle représente que $\approx 0.7\%$ de l'énergie mécanique initiale. Cependant,

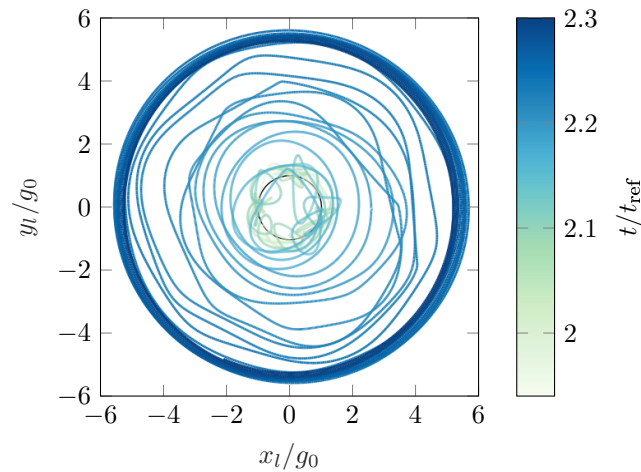


FIGURE IV.38 – Trajectoire absolue du centre du labyrinthe pour l'application avec stator assemblé

en raffinant le pas de temps, les solutions proposées en Figure IV.36 prédisent une chute rapide de la vitesse de rotation en cours de simulation. La présence de cette chute n'est pas liée à la méthode de résolution par multiplicateurs de Lagrange puisqu'une méthode des pénalités a aussi été testée et a mené au même résultat. Dans le même temps, la Figure IV.38 montre que l'amplitude de la vibration augmente nettement en une douzaine de révolutions du centre du labyrinthe. Elle finit par atteindre 5.5 fois la valeur du jeu initial pour ensuite décroître lentement en orbites circulaires. Afin de mieux comprendre ce phénomène, les efforts de contact, le jeu, la vitesse relative et le bilan énergétique sont étudiés pour **Carp-oneVC** et **Sic-Proj** respectivement en Figure IV.39 et Figure IV.40. Dans les deux cas, la baisse violente de la vitesse de rotation est liée à une fermeture du jeu qui reflète l'apparition brutale d'un régime en contact permanent (voir Figure IV.39a et Figure IV.40a). Cela confirme la réponse en *dry whip* puisque les efforts de contact augmentent également. L'effort de contact, qui est déjà très élevé en contact partiel, a fini par atteindre une valeur suffisante pour permettre au rotor de faire

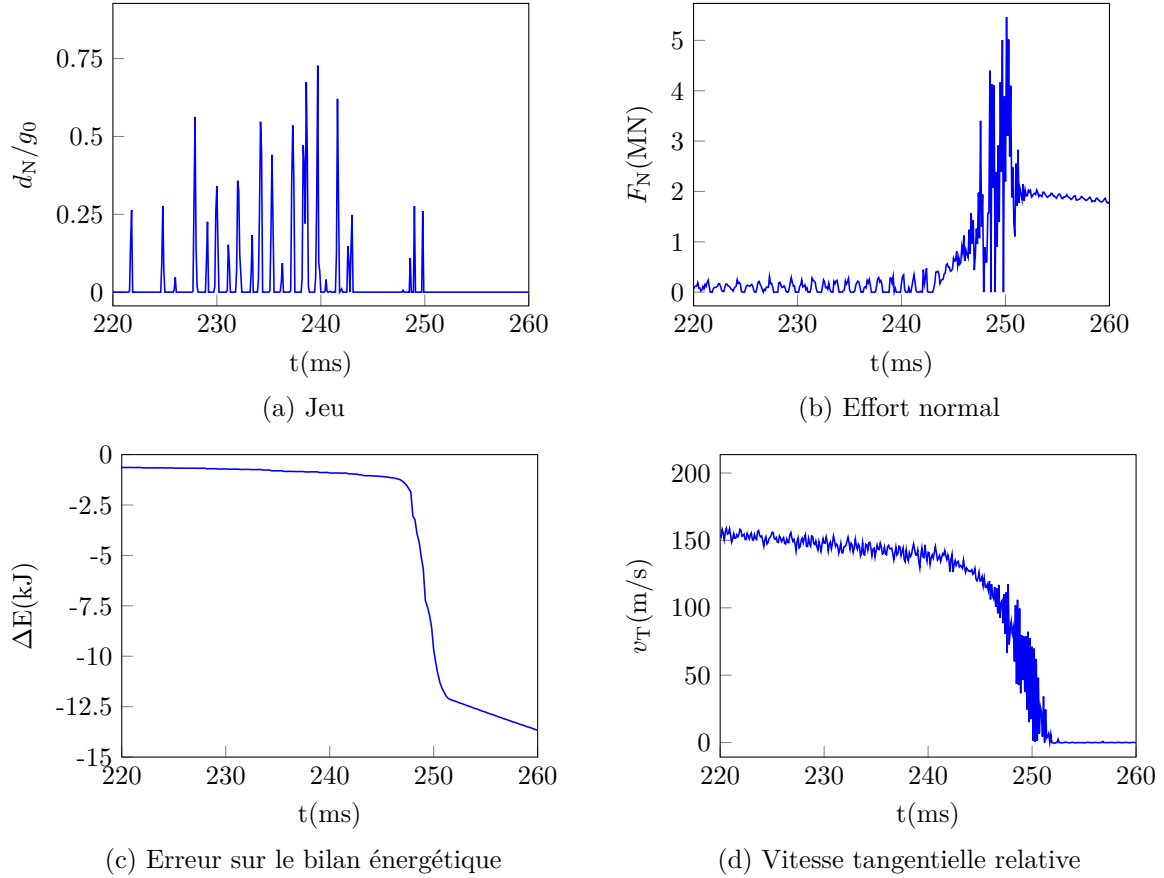


FIGURE IV.39 – Analyse de la transition du contact partiel au *dry whip* pour $\mu = 0,17$ avec l'algorithme **Carp-oneVC** sur l'intervalle $t \in [215, 260]$ ms

un tour complet et maintenir le contact par la suite. En revanche, ce sont les durées de cette phase de *dry whip* et les niveaux d'efforts associés qui diffèrent entre les deux algorithmes.

Pour **Carp-oneVC**, l'effort normal croît exponentiellement 0,4MN à plus de 5MN (cf Figure IV.39b) mais il reste quand même possible de visualiser la baisse de la vitesse tangentielle vers zéro qui correspond au passage du régime instable de *dry whip* au *dry whirl* (voir Figure IV.39d). Durant le *dry whip*, le bilan énergétique affiché en Figure IV.39c subit une perte d'environ 11 kJ mais qui représente une erreur relative de 5.7% par rapport à l'énergie mécanique initiale. Cet écart est bien plus élevé que pour les calculs précédents mais reste raisonnable compte tenu du caractère exponentiel et rapide de cette phase de *dry whip*. Des calculs préliminaires à cette thèse ont montré que la vitesse relative tangentielle entre le rotor et le stator est sous estimée lorsque la vitesse de précession est amplifiée. Il s'agit d'une erreur numérique liée à la projection en temps discret $v_{T,i} = \mathbf{C}_T(\mathbf{q}_{i+1})(\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_{i-1})/h$ qui peut être réduite en raffinant le pas de temps. En revanche, la solution fournie par **Sic-Proj** présente un saut quasi-instantané de l'effort normal jusqu'à 40MN, voir Figure IV.40b. La vitesse tangentielle passe directement à zéro et la phase de *dry whip* est pratiquement inexistante. Ce résultat n'est pas physique puisqu'il viole complètement le bilan énergétique en Figure IV.40c. Il n'est pas exclu qu'une instabilité en *dry whip* soit effectivement déclenchée comme cela a déjà été observé dans la littérature [47, 134] mais il devient clair que les solveurs n'arrivent pas à converger sur le moment de déclenchement du *dry whip*. Cela est déjà visible en Figure IV.36 où la chute sur la vitesse de rotation n'apparaît pas dans le temps de simulation choisi pour les pas de temps les plus grossiers. En réalité, lorsque h augmente, elle intervient aussi mais

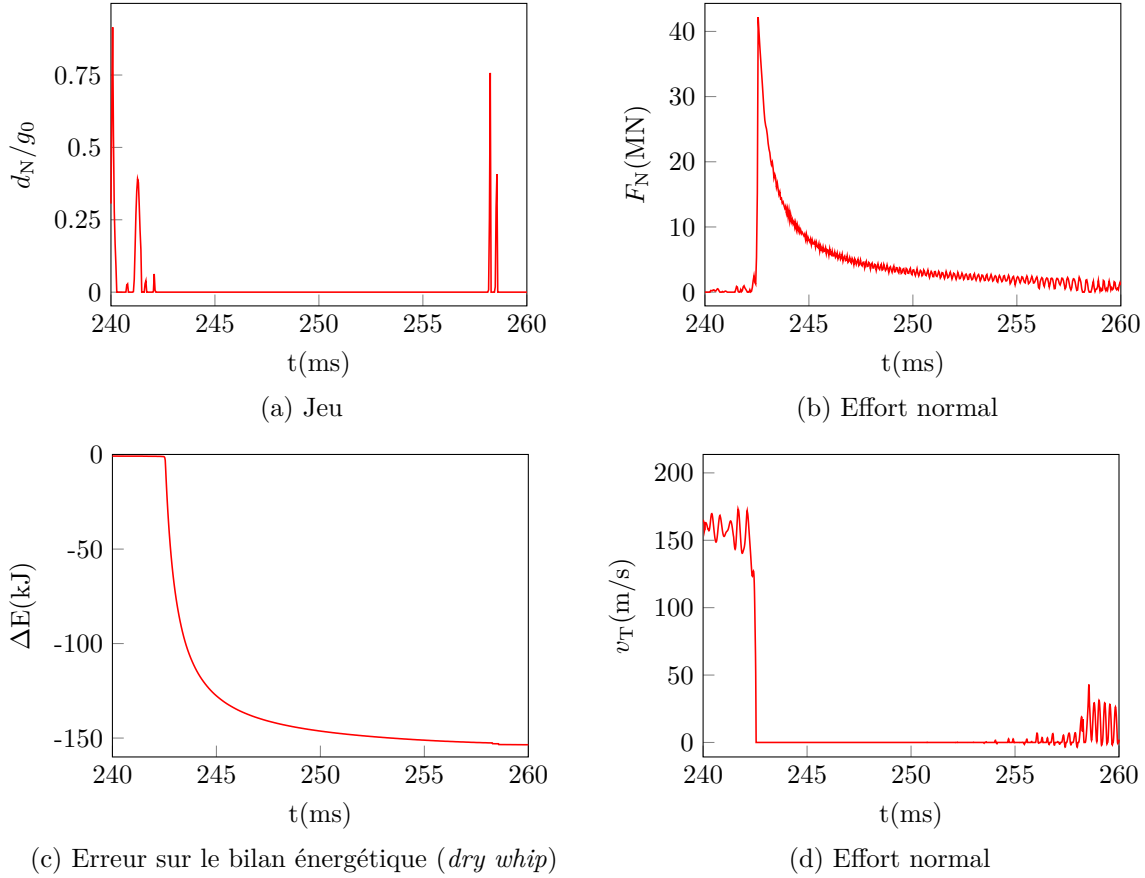


FIGURE IV.40 – Analyse de la transition du contact partiel au *dry whip* pour $\mu = 0,17$ avec l'algorithme **Sic-Proj** l'intervalle $t \in [240, 260]$ ms

beaucoup plus tard comme l'indique l'étude de convergence approfondie en Figure IV.41 basée sur le solveur **Sic-Proj**.

Lors du contact partiel, les profils de vitesse de rotation remplissent tous l'objectif $\Omega_{\max} < \Omega_{\lim}$ dans une marge comprise $0,91\Omega_{\lim}$ et $0,95\Omega_{\lim}$. La baisse brutale est toujours présente mais n'apparaît jamais au même moment lorsque le pas de temps diminue. Le problème pourrait

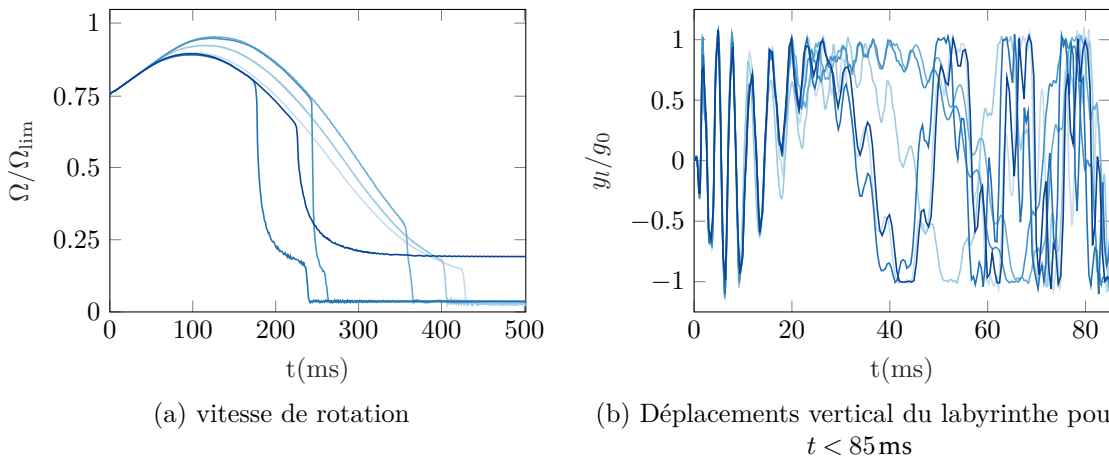


FIGURE IV.41 – Etude de convergence sur la solution obtenue avec **Sic-Proj** et le stator assemblé pour $\mu = 0,17$

être dû à une accumulation d'erreur dans la solution et ce quel que soit l'algorithme de contact sélectionné. En effet, l'étude sur le pas de temps montre que la solution ne converge pas. Cela est particulièrement mis en évidence sur le déplacement du labyrinthe en Figure IV.41b. Déjà très tôt dans la phase de contact partiel, à partir de $t > 23\text{ms}$, les vibrations d'un pas de temps à l'autre ne se superposent plus et semblent se répartir entre deux familles de solutions.

Cette forte sensibilité de la solution démontre les limitations du modèle rotor-stator avec l'hypothèse des corps parfaitement rigides lorsque la masse du stator devient trop importante. Par ailleurs l'ordre de grandeur des efforts de contact $F_N \approx 10^6\text{N}$ laisse supposer que garder les structures indéformables n'est plus adapté. Cela est particulièrement vrai pour le stator où l'anneau n'est épais que de quelques millimètres et dont la masse est nettement inférieure à celle de la turbine.

6 Bilan du chapitre

La modélisation de la turbine et du stator sous l'hypothèse des corps rigides a permis d'identifier les conditions initiales de touche. La rupture d'arbre a été résumée à l'apparition d'une liaison résiduelle entre le compresseur et la turbine du générateur de gaz afin de prédire une arrivée en touche rapide en accord avec les données industrielles. La réponse mécanique du système en présence de contact a également été étudiée de manière approfondie. Quatre méthodes de résolution ont été présentées : deux adaptations aux systèmes non-linéaires de l'algorithme de Carpenter sous python et deux versions de l'algorithme de Moreau-Jean disponibles dans SICONOS. Dans ces derniers, la possibilité de transition de contact avec glissement ou en roulement pur a été incluse. Les quatre algorithmes ont fourni des résultats concordants pour le cas de référence ainsi que dans l'étude paramétrique sur le coefficient de frottement, la masse du stator ainsi que la raideur de son support. Il a été démontré que pour certains jeux de paramètres, la survitesse pouvait être limitée avec l'apparition d'un régime en précession rétrograde annulaire permanent, i.e. de *dry whip*. Le phénomène est d'autant plus violent que la masse et la raideur augmentent. Une transition du *dry whip* au *dry whirl* peut avoir lieu en fin de simulation, ce qui se traduit pas une modification du contenu spectral de la vibration. Cependant, cette phase de roulement pur intervient après le *dry whip* qui pilote principalement le freinage de la turbine. Par conséquent, la modélisation du frottement en phase glissante suffit dans le reste de la thèse. Sauf mention contraire, c'est la méthode de résolution **Carp-oneVC** qui est retenue dans la suite des travaux pour son bon rapport précision de la solution sur temps de calcul même avec la prédiction et la correction qui ne sont pas rebouclées. Le présent chapitre a également montré les limites de l'hypothèse des corps rigides sur la convergence de la solution, en particulier la capacité à détecter le déclenchement de l'instabilité en *dry whip*. Au vu des grands déplacements et efforts de contact calculés, il est attendu que le stator se déforme et que plusieurs points de contact émergent. Il est donc essentiel de modéliser les corps comme flexibles dont le stator en priorité. Compte tenu de sa masse faible par rapport à la turbine, c'est lui qui est plus susceptible de se déformer. Par ailleurs, la thermique a été complètement ignorée jusqu'à présent et discrétiser le stator en espace permettra d'employer des méthodes numériques pour résoudre l'équation de la chaleur.

Chapitre V

Contact avec rotor rigide et stator flexible

Sommaire du présent chapitre

1	Présentation du modèle stator	106
1.1	Géométrie retenue	106
1.2	Mécanique des milieux curvilignes	107
1.3	Discrétisation spatiale par éléments finis	108
2	Validation du modèle	109
2.1	Anneau libre	109
2.2	Anneau avec diffuseur et distributeur	109
2.3	Amortissement	111
2.4	Fonction de réponse en fréquence	113
3	Problème thermomécanique	114
3.1	Ecriture matricielle de l'équation de la chaleur	114
3.2	Test excitation nodale thermique	115
4	Algorithme de contact	117
4.1	Calcul du jeu	117
4.2	Vecteurs des contributions normales et tangentielles	119
4.3	Contribution du contact à l'équation de la chaleur	120
4.4	Adaptation pour l'approche multipoints de contact	120
5	Simulation pour un rotor à déplacement imposé	122
5.1	Hypothèse d'un seul point de contact	122
5.2	Hypothèse multipoints de contact	124
6	Résultats	127
6.1	Sans dilatation thermique	127
6.2	Influence du coefficient de frottement	132
6.3	Raideur et nombre de vis	136
6.4	Géométrie de l'anneau	139
6.5	Avec dilatation thermique	139
7	Bilan du chapitre	143

1 Présentation du modèle stator

1.1 Géométrie retenue

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la modélisation du stator en corps flexibles et toujours représenté comme un anneau circulaire à section rectangulaire constante. Son épaisseur est notée e et le rayon moyen est déterminé par $R_s = R_l + g_0 + e/2$, où R_l est le rayon du labyrinthe et g_0 le jeu initial. Les résultats de la Section IV.5 ont démontré l'importance des conditions de support appliquées au stator et de la suspension du distributeur. On rappelle qu'en réalité,

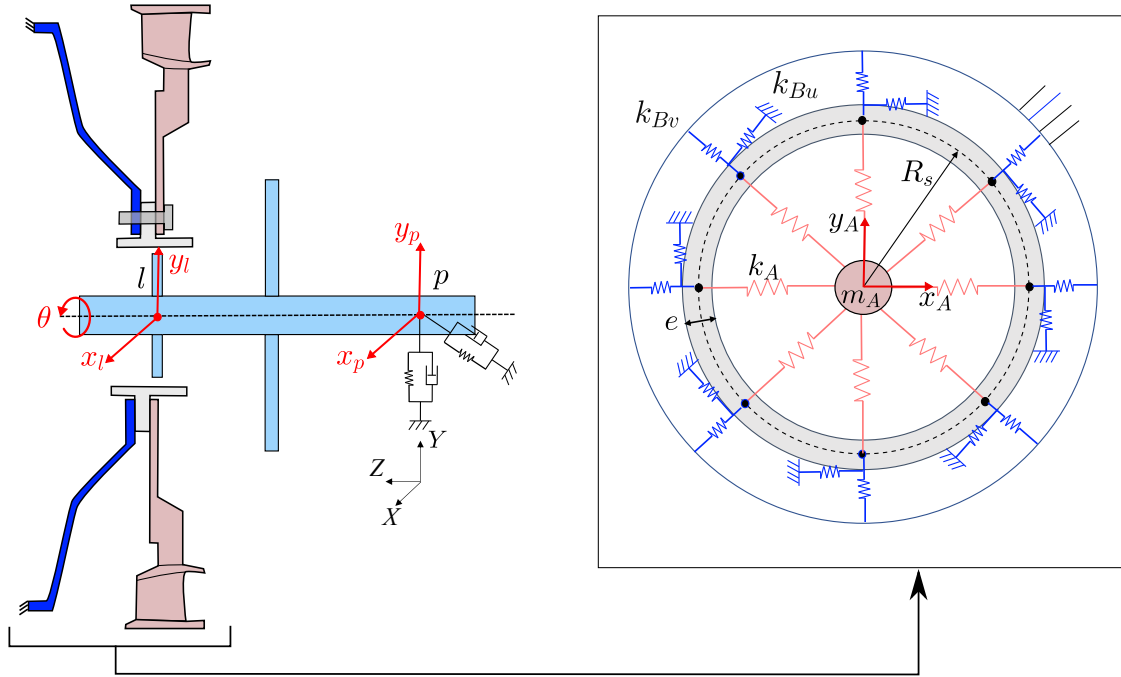


FIGURE V.1 – Composants du système rotor stator et simplification de l'assemblage du carter par ressorts équivalents aux points de vissage : anneau (□), distributeur de la turbine (■), diffuseur du compresseur (■)

l'anneau est relié au carter moteur par des attaches avec le distributeur HP et le diffuseur du compresseur, respectivement en rouge et bleu en Figure V.1. Ces attaches se font aux mêmes endroits sur l'anneau pour les deux pièces au niveau de n_v points de vissage. A titre illustratif, 8 vis sont schématisées. La Figure V.1 montre aussi comment l'assemblage du carter à trois pièces est simplifié. Dans la dynamique d'ensemble, il est supposé que le diffuseur apporte uniquement une contribution en raideur. Cette pièce est réduite par la définition de n_v paires de ressorts radiaux et tangentiels sur la circonférence de l'anneau, notés k_{Bv} et k_{Bu} . Le distributeur, quant à lui, est pris en compte par l'ajout d'une masse suspendue reliée aux n_v points de vissage par des raideurs radiales k_A . Le distributeur est donc une pièce considérée comme rigide et qui possède 2 ddls en translation. En pratique, ce composant devrait être situé à l'extérieur de l'anneau. En revanche, le centre du distributeur au repos se situe sur l'axe de rotation Z , soit $x_A = y_A = 0$. Ainsi, pour que la localisation de la masse corresponde à la position de son centre de gravité, la masse m_A est positionnée à l'intérieur de l'anneau dans le schémas simplifié.

Quant à la turbine, celle-ci est identique à celle présentée au Chapitre IV. Il s'agit d'un corps rigide en rotation d'angle θ autour de son axe principal, qui coïncide initialement avec l'axe Z , et dont la translation axiale est négligée. Les rotations transversales sont supposées faibles et approchées via les translations au palier arrière (x_p, y_p) et au niveau du labyrinthe

(x_l, y_l) , ce qui donne 5 ddl.

1.2 Mécanique des milieux curvilignes

Comme déjà mentionné, la flexibilité structurale est introduite pour l'anneau dont une portion est illustrée en Figure V.2. En toute généralité, en chaque point sur la fibre neutre de la courbe peut être associé un repère curviligne. Le vecteur \mathbf{s} est tangent tout le long de la ligne tandis que le vecteur unitaire \mathbf{r} est pris normal et sortant de la courbure de la poutre. Le vecteur \mathbf{z} est identique en tout point sur la ligne neutre et correspond à la direction axiale Z du moteur. Un volume élémentaire possède 6ddl sans simplifications [57] préalables et sont

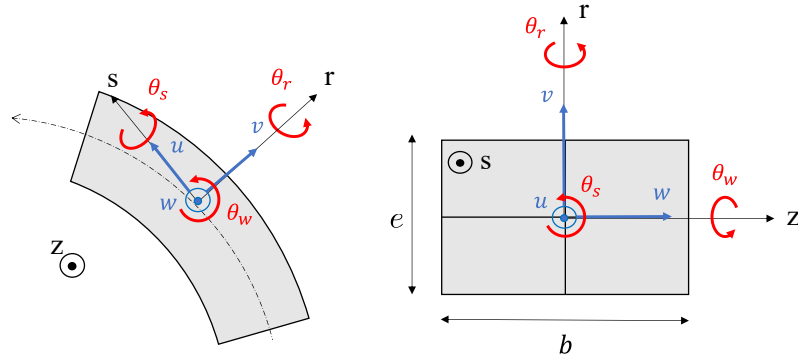


FIGURE V.2 – Repère et degrés de liberté pour une poutre de Bernoulli courbe de longueur infinitésimale

illustrées en Figure V.2. Sous l'hypothèse des petites déformations et que $e \ll R_s$, il n'y a que trois déplacements et la torsion de la ligne moyenne interviennent dans les expressions des énergies : (u, v, w, α) . L'énergie de déformation E_d est exprimée avec la loi de Hooke et intégrée sur le volume de la poutre. Pour alléger la notation, les dérivées curvilignes sont indiquées par la notation indicielle $,s$ et $,ss$. Si on suppose que la section de poutre rectangulaire S est homogène sur toute la circonférence de l'anneau, cette énergie est donnée par

$$2E_d = E \int_{s_1}^{s_2} S \left(\frac{v}{R_s} + u_{,s} \right)^2 + I_r \left(\frac{\alpha}{R_s} - w_{,ss} \right)^2 + I_z \left(\frac{v}{R_s^2} + v_{,ss} \right)^2 + \frac{GI_s}{E} \left(\alpha_{,s} + \frac{w_{,s}}{R_s} \right)^2 ds. \quad (\text{V.1})$$

I_r, I_z représentent les moments quadratiques d'inertie transversaux, I_s le moment polaire, S la section de poutre et E, G représentent les modules de Young et de Coulomb. L'énergie cinétique est fournie par l'expression

$$2E_c = \rho \int_{s_1}^{s_2} S (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + I_r \dot{w}_{,s}^2 + I_z \left(\frac{\dot{u}}{R_s} - \dot{v}_{,s} \right)^2 + I_{ab} \dot{\alpha}^2 ds, \quad (\text{V.2})$$

où I_{ab} est donné par une expression issue de Bazergui & al.[19] et ρ correspond à la masse volumique. Le nombre de degrés de liberté est réduit en focalisant l'étude du contact rotor stator au plan (X, Y) . Par conséquent, le déplacement axial w et la torsion α sont ignorées. Les expressions simplifiées des énergies de déformation et cinétique sont alors

$$2E_d = E \int_{s_1}^{s_2} S \left(\frac{v}{R_s} + u_{,s} \right)^2 + I_z \left(\frac{v}{R_s^2} + v_{,ss} \right)^2 ds; \quad (\text{V.3})$$

et

$$2E_c = \rho \int_{s_1}^{s_2} S (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + I_z \left(\frac{\dot{u}}{R_s} - \dot{v}_{,s} \right)^2 ds. \quad (\text{V.4})$$

Dans la littérature, il est commun de négliger la contribution de l'énergie cinétique de rotation dans l'Équation (V.4), ce qui revient à éliminer le second terme [58, 98, 133].

1.3 Discrétisation spatiale par éléments finis

Dans un premier temps, le contact est simplifié afin de rester dans le plan (X, Y) . Les seuls degrés de liberté à considérer sont les déplacements curvilignes et radiaux (u, v) . L'anneau flexible est discrétisé par des fonctions de formes cubiques, aussi appelés polynômes d'Hermite. Pour un élément de référence de longueur ℓ_e , ceux-ci s'écrivent

$$\begin{cases} N_1(\chi) = 1 - 3\chi^2 + 2\chi^3; \\ N_2(\chi) = \ell_e(\chi - 2\chi^2 + \chi^3); \\ N_3(\chi) = 3\chi^2 - 2\chi^3; \\ N_4(\chi) = \ell_e(-\chi^2 + \chi^3); \end{cases} \quad (\text{V.5})$$

en posant $\chi = s/\ell_e \in [0, 1]$. L'emploi de ces fonctions de forme garantit la continuité des déplacements mais aussi de la dérivée selon s . Cela implique que les dérivées curvilignes des déplacements $u_{,s}$ et $v_{,s}$ soient prises en compte dans les coordonnées généralisées, soit un total de quatre inconnues par nœud. Le vecteur des coordonnées généralisées pour un élément devient alors $\mathbf{q}_e = (u_1, u_{1,s}, v_1, v_{1,s}, u_2, u_{2,s}, v_2, v_{2,s})$. Par conséquent, les déplacements continus $u(\chi, t)$ et $v(\chi, t)$ pour chaque poutre élémentaire, groupés dans le vecteur $\mathbf{u}(\chi, t)$, sont approchés par :

$$\mathbf{u}(\chi, t) \approx \mathbf{N}(\chi)\mathbf{q}_e(t), \quad (\text{V.6})$$

où la matrice des fonctions de forme $\mathbf{N}(\chi)$ vaut

$$\mathbf{N}(\chi) = \begin{pmatrix} N_1(\chi) & N_2(\chi) & 0 & 0 & N_3(\chi) & N_4(\chi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1(\chi) & N_2(\chi) & 0 & 0 & N_3(\chi) & N_4(\chi) \end{pmatrix}. \quad (\text{V.7})$$

Afin de calculer la matrice de raideur élémentaire, l'énergie de déformation de l'Équation (V.3) est reformulée sous la forme matricielle

$$2E_d = \int_0^{\ell_e} \begin{pmatrix} u(s, t) \\ v(s, t) \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \frac{d}{ds} & \frac{1}{R_s} \\ 0 & \frac{d^2}{ds^2} + \frac{1}{R_s^2} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} ES & 0 \\ 0 & EI_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{ds} & \frac{1}{R_s} \\ 0 & \frac{d^2}{ds^2} + \frac{1}{R_s^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(s, t) \\ v(s, t) \end{pmatrix} ds. \quad (\text{V.8})$$

En introduisant le changement de variable $\chi = s/\ell_e$ dans l'Équation (V.8), on obtient

$$2E_d = \mathbf{q}_e^\top \int_0^1 \ell_e (\mathbf{D}\mathbf{N}(\chi))^\top \mathbf{H} (\mathbf{D}\mathbf{N}(\chi)) d\chi \mathbf{q}_e, \quad (\text{V.9})$$

avec \mathbf{D} l'opérateur de dérivation et \mathbf{H} la matrice d'élasticité définis comme

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\ell_e} \frac{d}{d\chi} & \frac{1}{R_s} \\ 0 & \frac{1}{\ell_e^2} \frac{d^2}{d\chi^2} + \frac{1}{R_s^2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} ES & 0 \\ 0 & EI_z \end{pmatrix}. \quad (\text{V.10})$$

Ainsi, la matrice de raideur élémentaire \mathbf{K}_e , en posant $\mathbf{B}(\chi) = \mathbf{D}\mathbf{N}(\chi)$ est déterminée par

$$\mathbf{K}_e = \int_0^1 \ell_e \mathbf{B}(\chi)^\top \mathbf{H} \mathbf{B}(\chi) d\chi. \quad (\text{V.11})$$

Son expression analytique est fournie en Annexe C. Une démarche équivalente est appliquée pour l'énergie cinétique qui s'exprime comme :

$$2E_c = \dot{\mathbf{q}}_e^\top \mathbf{M}_e \dot{\mathbf{q}}_e \quad (\text{V.12})$$

avec la matrice de masse élémentaire $\mathbf{M}_e = \rho \ell_e S \int_0^1 \mathbf{N}(\chi)^\top \mathbf{N}(\chi) d\chi$ dont l'expression est également proposée en Annexe C. L'assemblage des matrices élémentaires est effectué dans le repère local (\mathbf{s}, \mathbf{r}) et les matrices de masse et de raideur de l'anneau sont définies par \mathbf{M}_{ring} et \mathbf{K}_{ring} . Afin que les points d'attaches des ressorts soient des nœuds du modèle éléments finis, il faut que le nombre d'éléments soit un multiple du nombre de vis n_v . Dans le cas de référence, on a $n_v = 12$.

2 Validation du modèle

2.1 Anneau libre

Le livre de R.D. Blevins [25] fournit l'expression analytique des fréquences propres d'un anneau circulaire

$$f_n = \frac{n(n^2 - 1)}{2\pi R_s^2} \sqrt{\frac{E \cdot I_z}{\rho b e (n^2 + 1)}}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (\text{V.13})$$

On rappelle que les valeurs propres d'un système masse-raideur sont calculées avec $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{q} = 0$. Les fréquences propres associées au mode d'ovalisation ($n = 2$) et trifolié ($n = 3$) prédites par la formule analytique donnent

- $f_2 = 797\text{Hz}$
- $f_3 = 2255\text{Hz}$

Le calcul des valeurs propres dans python donne des résultats identique à 1Hz près pour un nombre de nœuds $N_e \geq 24$. Dans la suite du chapitre, le maillage de référence est caractérisé par $N_e = 36$.

2.2 Anneau avec diffuseur et distributeur

L'anneau flexible est relié au bâti au moyen du diffuseur du compresseur centrifuge par un certain nombre de points de vissage. Un exemple avec 8 points de vissage équidistants est illustré en Figure V.1. Les raideurs radiales et tangentielles associées au diffuseur sont respectivement définies par les paramètres k_{Bv} et k_{Bu} qui sont estimés à l'aide de deux cas de chargement sous ANSYS. La raideur k_{Bv} a été calculée en imposant un effort sur un perçage en encastrant les deux autres qui lui sont diamétralement opposés (voir Figure V.3a). L'encastrement de la bride du diffuseur a également été maintenu (cf assemblage réel en Figure V.1). De façon analogue, le calcul de k_{Bu} implique deux sections de perçage comme décrit en Figure V.3b. La première est bloquée tandis que sur la seconde est appliqué un effort dans la direction de l'espacement entre les deux trous. Pour cette pièce, on trouve que $k_{Bu} \approx 2k_{Bv}$. L'énergie potentielle pour chaque nœud vis $j = 1, \dots, n_v$ considéré s'exprime directement comme

$$E_{p,B} = \frac{1}{2} (k_{Bu} u_j^2 + k_{B,v} v_j^2). \quad (\text{V.14})$$

La matrice de raideur, regroupant les contributions du diffuseur, est donc de forme diagonale avec pour chaque vis j .

On rappelle aussi que la prise en compte du distributeur est réalisée en reliant les nœuds correspondants aux points de vissage à une masse ponctuelle équivalente m_A . Cette masse est

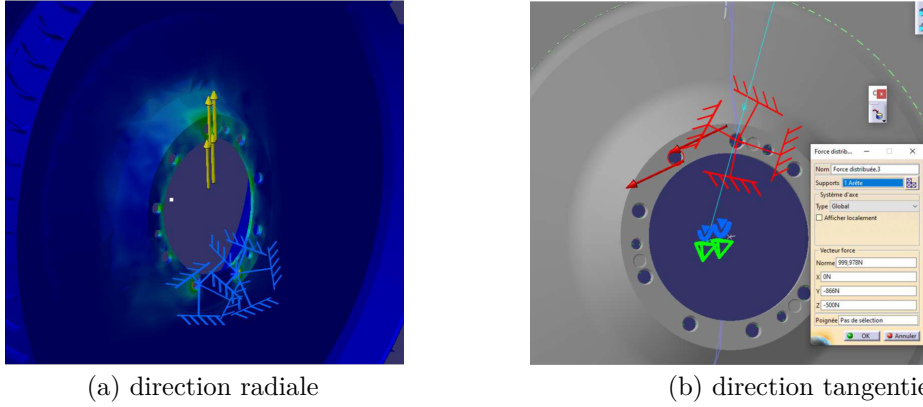


FIGURE V.3 – Estimation des raideurs de fixation équivalentes du diffuseur effectuées sous ANSYS

reliée aux points de vissage avec des raideurs radiales uniquement, notées k_A . Cette dernière est estimée de la même manière que pour k_{Bv} et vaut environ $0,5k_{Bv}$. Dans ce cas, pour une vis j localisée sur l'anneau avec un angle $\phi_j = \frac{2\pi(j-1)}{n_v}$, l'énergie potentielle du ressort dans le repère curviligne de la vis vaut

$$E_{p,j} = \frac{1}{2}k_A(v_j - x_A \cos \phi_j - y_A \sin \phi_j)^2. \quad (\text{V.15})$$

La matrice de raideur entre une vis j et la masse m_A s'écrit sous la forme condensée

$$\mathbf{K}_{A,j} = k_A \begin{pmatrix} 1 & -\cos \phi_j & -\sin \phi_j \\ -\cos \phi_j & \cos^2 \phi_j & \cos \phi_j \sin \phi_j \\ -\sin \phi_j & \cos \phi_j \sin \phi_j & \sin^2 \phi_j \end{pmatrix}. \quad (\text{V.16})$$

Les termes de couplage $\sin \phi_j \cos \phi_j$ entre les degrés de liberté de la masse suspendue (x_A, y_A) sont éliminés de la matrice en Équation (V.16) afin d'éviter d'accumuler des erreurs numériques lors de l'assemblage. En effet, comme les points de vissage sont répartis avec un pas angulaire de $\frac{2\pi}{n_v}$, on trouve que de $\sum_{j=1}^{n_v} \sin \phi_j \cos \phi_j = 0$.

Le modèle est donc défini pour l'instant par quatre matrices :

- Une matrice de masse \mathbf{M}_s issue de l'assemblage de la matrice de l'anneau M_{ring} et de la masse suspendue $\text{diag}(m_A, m_A)$.
- La raideur de l'anneau \mathbf{K}_{ring}
- La raideur de fixation du diffuseur \mathbf{K}_B
- La raideur de fixation du distributeur \mathbf{K}_A

La raideur totale du stator s'obtient alors par sommation par blocs

$$\mathbf{K}_s = \mathbf{K}_{\text{ring}} + \mathbf{K}_B + \mathbf{K}_A. \quad (\text{V.17})$$

A présent, il faut déterminer les modes propres de la structure complète du stator. Pour N_e éléments ($N_e = 36$ sauf mention contraire), le système possède donc $N = 4N_e + 2$ valeurs propres ω et vecteurs propres ϕ . Il s'avère que le premier mode se situe à une fréquence de 1250Hz, ce qui est largement inférieur aux autres modes (> 11 kHz). Il s'agit d'un mode double associé à la masse suspendue m_A comme le démontrent les formes propres en Figure V.4. Les modes supérieurs sont des modes à diamètres associés à l'anneau. Le suivant est un mode

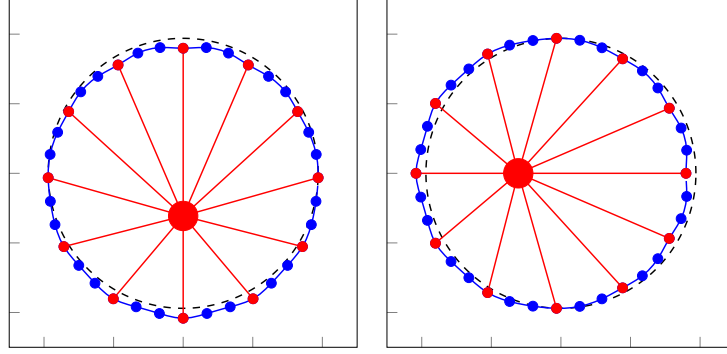


FIGURE V.4 – Formes propres associées aux modes de masse suspendue

simple à 6 diamètres ($N_D = 6$) illustré en Figure V.5a qui apparaît à $f_6 = 11058\text{Hz}$. Il est proche du mode double à 5 diamètres (cf Figure V.5b) qui apparaît à $f_5 = 11367\text{Hz}$.

Le mode double suivant est celui à 4 diamètres intervient à $f_4 = 12128\text{Hz}$ et est illustré en Figure V.5c. Les 2 autres modes doubles dont la fréquence propre est étudiée sont les modes trifolié ($f_3 = 13053\text{Hz}$) et d'ovalisation ($f_2 = 14074\text{Hz}$) respectivement illustrés en Figure V.5d et Figure V.5e. L'ajout de 12 points de vissage engendre donc une forte rigidification de la structure.

2.3 Amortissement

2.3.1 Rayleigh ou proportionnel

De l'amortissement peut être introduit dans la dynamique du stator au moyen d'un modèle de Rayleigh. Il spécifie 2 facteurs r_k et r_m tels que la matrice d'amortissement \mathbf{C}_s se calcule suivant

$$\mathbf{C}_s = r_k \mathbf{K}_s + r_m \mathbf{M}_s. \quad (\text{V.18})$$

Dans ce cas, le passage dans l'espace modal de l'amortissement pour le mode $m = 1, \dots, N$ devient, dans le cas où la base ϕ est normée par rapport à \mathbf{M} [65]

$$\phi_m^\top \mathbf{C}_s \phi_m = r_k \phi_m^\top \mathbf{K} \phi_m + r_m \phi_m^\top \mathbf{M} \phi_m \rightarrow 2\xi_i \omega_{n,i} = r_k \omega_{n,i}^2 + r_m \cdot 1, \quad (\text{V.19})$$

avec ξ_i défini comme le taux d'amortissement associé à la fréquence propre naturelle ω_i

$$\xi_i = 1/2(r_k \omega_i + r_m / \omega_i). \quad (\text{V.20})$$

Il faut garder à l'esprit que les pulsations naturelles sont issues du calcul des valeurs propres sans amortissement. En présence d'amortissement, les valeurs propres complexes peuvent s'écrire en fonction du taux d'amortissement et de la pulsation naturelle suivant

$$\lambda_i = -\omega_i \left(\xi_i \pm i \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \right). \quad (\text{V.21})$$

Par conséquent, une solution pseudo-périodique est obtenue si la partie imaginaire existe et donc pour $\xi_i < 1$. Dans le cas où $r_m = 0$, les modes qui seront en amortissement (sur-)critique sont ceux dont la pulsation propre naturelle vaut $\omega_i > 2/r_k$.

L'avantage de l'amortissement de Rayleigh est qu'il garde les mêmes formes propres pour le déplacement que dans le cas conservatif et sont donc à valeurs réelles [5]. Dans la suite des travaux, il est décidé de retenir $r_k = 10^{-6}$. Dans ce cas, sur les 146 modes propres, 90

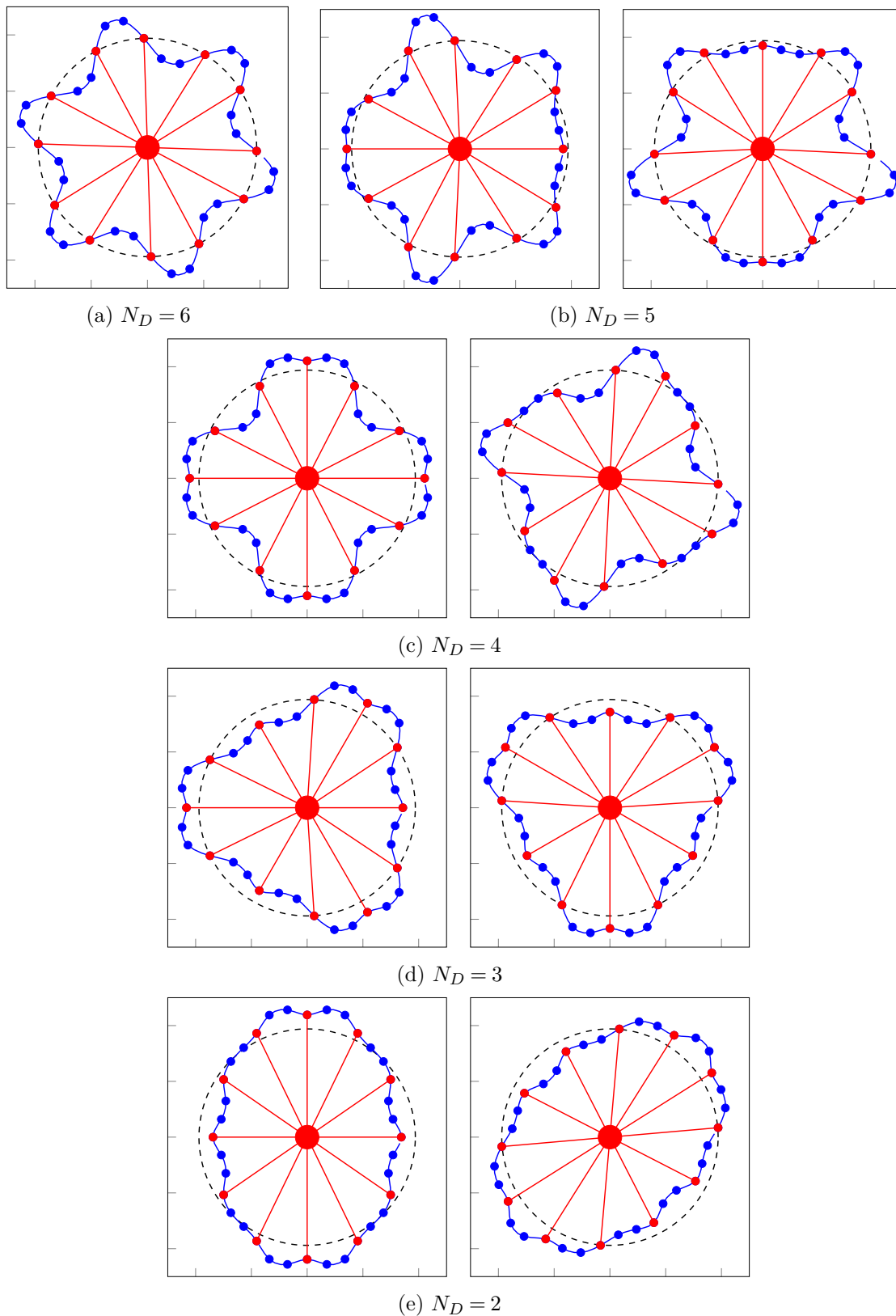


FIGURE V.5 – Formes propres associées aux modes à diamètres de l'anneau

sont pseudo-périodiques. Le taux d'amortissement le plus faible est obtenu pour le mode de

masse suspendue ($f = 1251\text{Hz}$) et vaut $\xi = 0.39\%$, pour les 4 modes doubles suivants, le taux d'amortissement atteint une valeur maximale de $\xi = 4.1\%$. Il s'agit d'un taux d'amortissement proche de celui mentionné dans les recommandations industrielles autour de 3%.

2.3.2 Passage en base modale

En cas de problème dynamique à peu de degrés de liberté, une alternative à l'amortissement de Rayleigh est d'imposer les taux d'amortissement pour chaque mode [58]. Il faut souligner que ni l'amortissement en base modale ni l'amortissement de Rayleigh ne sont réalistes mais qu'ils permettent de définir la physique de façon approchée en étant calibré par rapport à des données expérimentales. L'identification des taux d'amortissement en dynamique des structures reste un large domaine de recherche et de nombreux travaux s'y intéressent encore aujourd'hui. Les taux d'amortissement pour tous les modes sont groupés dans une matrice diagonale \mathbf{C}_m où

$$\mathbf{C}_m = \begin{pmatrix} 2\xi_1\omega_{n,1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 2\xi_i\omega_{n,i} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2\xi_N\omega_{n,N} \end{pmatrix}. \quad (\text{V.22})$$

Les modes propres $\boldsymbol{\phi}$ associés au système conservatif sont orthonormés par rapport à la matrice de masse de sorte que $\boldsymbol{\phi}^\top \mathbf{M} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{I}$. Le passage de la matrice d'amortissement en base physique est alors effectué suivant

$$\mathbf{C}_s = \boldsymbol{\phi}^{-1\top} \mathbf{C}_m \boldsymbol{\phi}^{-1}. \quad (\text{V.23})$$

Afin d'éviter des calculs coûteux, il est possible de remplacer $\boldsymbol{\phi}^{-1}$ par $\boldsymbol{\phi}^\top \mathbf{M}$ dans l'Équation (V.23). Même si cette l'amortissement modal est tout à fait adapté au modèle académique étudié dans cette section, il n'est pas retenu pour le modèle transitoire de contact rotor-stator, vu que la taille du problème va graduellement augmenter et tendre vers une adaptation à un cas industriel.

2.4 Fonction de réponse en fréquence

En plus du calcul des modes propres, il est utile d'identifier la Réponse en Fréquence du système (FRF) pour l'amortissement de Rayleigh choisi. En présence d'amortissement, un système dynamique soumis à un chargement périodique est régi par l'ODE

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f} \cos(\omega t), \quad (\text{V.24})$$

où le vecteur \mathbf{f} contient les amplitudes des excitations appliquées à chaque degré de liberté. Par conséquent, après dissipation de la solution transitoire, la solution périodique pour les déplacements est de forme $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 e^{i\omega t}$. La transformée de Fourier appliquée à l'Équation (V.24) donne

$$(\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{q}_0 = \mathbf{f}. \quad (\text{V.25})$$

On note $\mathbf{H}(\omega)$ la matrice de transfert définie par l'expression suivante :

$$\mathbf{H}(\omega) = (\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})^{-1}. \quad (\text{V.26})$$

Les composantes de \mathbf{H} correspondent aux fonctions de transfert $H_{ij}(\omega)$ reflètent la contribution de l'effort appliqué au $j^{\text{ème}}$ ddl sur le déplacement en q_i . La réponse $q_i(t)$ subit un changement

d'amplitude et un déphasage par rapport à l'excitation. Ces derniers sont quantifiés par le module et la phase de la fonction de transfert

$$q_i(t) = A \cos(\omega t - \varphi) \rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{\Re\epsilon(H_{ij}(\omega))^2 + \Im\epsilon(H_{ij}(\omega))^2}; \\ \tan \varphi = -\frac{\Im\epsilon(H_{ij}(\omega))}{\Re\epsilon(H_{ij}(\omega))}. \end{cases} \quad (\text{V.27})$$

Lorsque $i = j$, on parle alors de FRF *colocalisée*. Dans cette section, il a été décidé d'imposer un effort radial uniquement sur le troisième nœud. La réponse sur ce même degré de liberté (v_3) est illustrée par la courbe en noir en Figure V.6. On retrouve bien les pics de résonance aux fréquences propres entre lesquelles les pics d'anti-résonance apparaissent. La Figure V.6

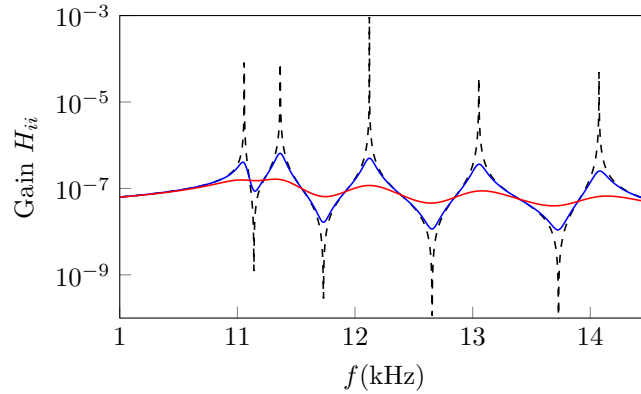


FIGURE V.6 – Sensibilité de la FRF colocalisée du nœud excité (2) avec à l'amortissement proportionnel : $r_k = 0$ (sans amortissement) (---), $r_k = 10^{-7}$ (—), $r_k = 5 \times 10^{-7}$ (—)

présente deux cas de FRF colocalisées sur le déplacement v_3 en présence d'amortissement de Rayleigh ($r_k = 10^{-7}, 5 \times 10^{-7}$). Un coefficient r_k faible permet d'observer distinctement les 2 résonances des deux modes voisins à 11050Hz et 11360Hz, soit avec un écart relatif de seulement 2.8%. Si $r_k > 5 \times 10^{-7}$, ces 2 résonances se recouvrent pour n'en former plus qu'une. Or plus l'amortissement augmente, plus la bande passante $3dB$ d'un mode s'élargit : $\frac{\Delta f}{f} = 2\xi$. Dans le cas à $r_k = 10^{-6}$, le mode à 11050Hz a un taux d'amortissement de 3.4%. La bande passante vaut alors plus de 760Hz dans laquelle le mode voisin est contenu. Cela explique donc pourquoi un seul pic apparaît à ces fréquences. Plus l'amortissement est élevé, plus les pics sont étirés en fréquence et aplatis en gain.

3 Problème thermomécanique

3.1 Ecriture matricielle de l'équation de la chaleur

Maintenant que le stator est discrétisé en espace, il est pertinent d'introduire le couplage avec l'équation de la chaleur et de la dilatation thermique. Pour un élément poutre thermomécanique, la température peut être interpolée linéairement. Cela implique l'utilisation des fonctions de forme

$$\mathbf{N}_\theta(\chi) = \begin{pmatrix} 1 - \chi & \chi \end{pmatrix}^\top. \quad (\text{V.28})$$

Celles-ci sont injectées dans l'Équation (II.41) qui fournit l'expression des matrices élémentaires de capacité et de conductivité thermique introduites dans l'Équation (II.42)

$$\mathbf{C}^{\vartheta\vartheta} = \frac{\rho c_T S L}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{K}^{TT} = \frac{\lambda S}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{V.29})$$

A présent, il s'agit de déterminer la matrice de dilatation thermique intervenant dans la dynamique d'un élément de poutre courbe \mathbf{K}^{uT} . D'après l'Équation (II.19) et sachant que le volume $dV = S \ell_e d\chi$ pour un élément de référence à section constante S , cette matrice se calcule par l'intégrale

$$\mathbf{K}^{uT} = - \int_0^1 \alpha S \ell_e \mathbf{B}(\chi)^\top \mathbf{H} \mathbf{I}_d \mathbf{N}_\vartheta(\chi) dV. \quad (\text{V.30})$$

Pour une poutre de Bernoulli en traction-flexion, les matrices de dérivation \mathbf{D} (et donc $\mathbf{B}(\chi) = \mathbf{D}\mathbf{N}(\chi)$) et d'élasticité \mathbf{H} ont déjà été explicitées, voir Équation (V.10). Pour finir, il faut chercher l'expression du vecteur \mathbf{I}_d dans le cas d'une poutre de Bernoulli. S'il avait été question d'une poutre droite (où le rayon de courbure $R \rightarrow \infty$), seule la déformation dans la direction axiale ϵ_{uu} aurait une composante thermique. Dans le cas d'une poutre courbe, le principe est le même : la température n'a d'influence que sur les contraintes normales et non sur les moments [136], ce qui mène à

$$\mathbf{I}_d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{V.31})$$

Ainsi, en se basant sur l'Équation (V.30), la matrice élémentaire de dilatation thermique est fonction des propriétés géométriques et matériau suivant

$$\mathbf{K}^{uT,e} = \alpha E S \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\ell_e}{12} & -\frac{7\ell_e}{20R_s} & -\frac{\ell_e^2}{20R_s^2} & -\frac{1}{2} & \frac{\ell_e}{12} & -\frac{3\ell_e}{20R_s} & \frac{\ell_e^2}{30R_s^2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\ell_e}{12} & -\frac{3\ell_e}{20R_s} & -\frac{\ell_e^2}{30R_s^2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\ell_e}{12} & -\frac{7\ell_e}{20R_s} & \frac{\ell_e^2}{20R_s^2} \end{pmatrix}^\top. \quad (\text{V.32})$$

Une fois les matrices élémentaires assemblées, l'équation différentielle régissant le mouvement du rotor et du stator, ainsi que la thermique du stator avec contact est donc de la forme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_t(\mathbf{q}) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_t \\ \ddot{\mathbf{q}}_s \\ \ddot{\mathbf{T}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{D}_t(\mathbf{q}) + \dot{\theta} \mathbf{G} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_s & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C}^{\vartheta\vartheta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_t \\ \dot{\mathbf{q}}_s \\ \dot{\mathbf{T}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_t & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_s & \mathbf{K}^{u\vartheta} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}^{\vartheta\vartheta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_t \\ \mathbf{q}_s \\ \mathbf{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{\text{ext},t} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{c,t} \\ \mathbf{f}_{c,s} \\ \dot{\mathbf{Q}}_c \end{pmatrix}. \quad (\text{V.33})$$

Les matrices liées à la turbine sont les mêmes à celles introduites en Équation (IV.15). A ce stade, le système possède 187 ddls, dont 5 pour la turbine ($\mathbf{q}_t = (x_p, y_p, x_l, y_l, \theta)^\top$), 144 mécaniques pour l'anneau, 2 mécaniques pour la masse suspendue et 36 thermiques.

3.2 Test excitation nodale thermique

Dans l'optique d'être inclus à l'algorithme de Carpenter, la résolution de l'équation de la chaleur dans l'anneau s'accompagne d'une discrétisation temporelle de type NewMark. Cependant, comme discuté au Chapitre II (voir Section II.5.2), la résolution du problème thermomécanique de façon monolithique nécessite de décentrer le schémas pour des raisons

de stabilité de la résolution l'équation de la chaleur. La présente section vise à étudier le comportement thermique de l'anneau. Le modèle est donc limité à sa partie thermique en lui imposant une source de chaleur sinusoïdale de 1W sur l'un des points de l'anneau (localisé en $\phi = 42^\circ$). La fréquence de l'excitation est imposée à 0,5Hz pendant 10s. L'évolution temporelle de la température au nœud excité est présentée en Figure V.7a. Toutes les simulations ont été réalisées avec un pas de temps à $h = 10^{-4}$ s et indiquent que la solution est convergée pour $N_e \geq 49$.

Pour ce qui est de la distribution en espace de la température à un instant donné, on constate dans un premier temps la symétrie de la solution par rapport au nœud excité. De plus, le profil en Figure V.7a montre des valeurs négatives de température qui ne sont pas physiques puisqu'en $t = 1$ s la chaleur est exclusivement fournie au système. En réalité, ces valeurs erronées de température sont liées à la discrétisation spatiale du problèmes et sont d'origine numérique. Elles indiquent que le nombre de nœuds est insuffisant pour capturer la physique correctement. En effet, le domaine d'influence pour la source de chaleur avec une période assez lente de 2s est déjà restreinte à 13° de part et d'autre du nœud excité. Ainsi seuls trois nœuds sont contenus dans la zone d'influence pour le maillage grossier à 35 nœuds. Ce phénomène de température négative disparaît à partir de 70 nœuds.

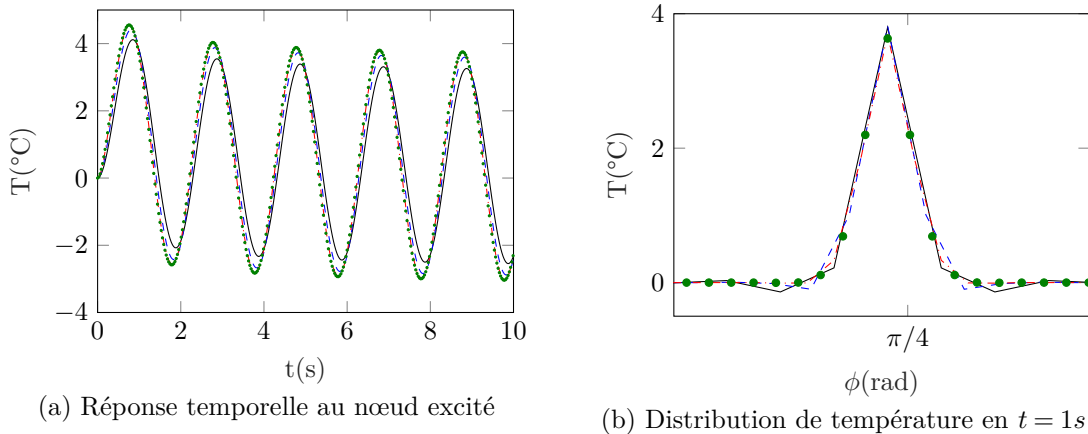


FIGURE V.7 – Réponse excitation sinusoïdale chaleur : $N_e = 35$ (—), $N_e = 49$ (---), $N_e = 70$ (-.-), $N_e = 84$ (•)

Il faut cependant garder à l'esprit que la fréquence d'excitation ainsi que la diffusivité thermique $\alpha = \lambda/(c\rho)$ ont une influence significative sur la réponse du système. En effet, comme démontré avec le cas d'une poutre droite en Annexe D, plus la fréquence d'excitation est élevée, plus la thermique se limite à un *effet de peau* puisque l'information n'a pas le temps de se propager au reste du domaine. La valeur de la température au voisinage de la source de chaleur est donc à considérer avec précaution. Comme constaté au chapitre précédent, les fréquences et les vitesses mises en jeu sont élevées ce qui nécessitera, d'un point de vue thermique, la mise en place d'un maillage suffisamment fin si l'on cherche à bien représenter le champ de température. Ce raffinement devient vite problématique, lors d'une simulation multiphysique avec un maillage commun pour la mécanique et la thermique. Le pas de temps critique pour la stabilité de la résolution numérique est piloté par la plus haute fréquence propre, qui est d'origine mécanique. Or, comme décrit en section V.2.3, l'anneau considéré est très raide avec des fréquences propres allant de 1kHz à 741kHz, et cela pour un modèle avec seulement 36 nœuds.

4 Algorithme de contact

Les résultats obtenus sur le modèle rigide ont démontré la capacité de l'algorithme de Carpenter modifié **Carp-oneVC** à fournir une solution pour un système non-linéaire en adéquation avec d'autres méthodes de résolution. C'est donc ce dernier qui est sélectionné dans ce chapitre et il faut maintenant présenter les modifications à prendre en compte lorsqu'une structure flexible est étudiée. Dans ce qui suit, l'ensemble des coordonnées généralisées du rotor et du stator sont groupées dans le vecteur $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_t, \mathbf{q}_s, \mathbf{T})^\top$, où on rappelle que les inconnues de la turbine sont $\mathbf{q}_t = (x_p, y_p, x_l, y_l, \theta)$.

4.1 Calcul du jeu

Dans un premier temps, il est envisagé de considérer un seul point de contact entre le rotor et le stator afin de conserver un problème scalaire à résoudre lors du calcul de l'étape de correction. Deux méthodes sont proposées dans la thèse de S. Roques [133]. La première est une version approchée qui est plus rapide en temps de calcul et suppose que le point de contact potentiel est aligné sur le vecteur \vec{OL} et correspond donc au point P_1 . On rappelle que le point L correspond au centre du labyrinthe de coordonnées (x_l, y_l) dans le repère absolu. Connaissant l'angle γ

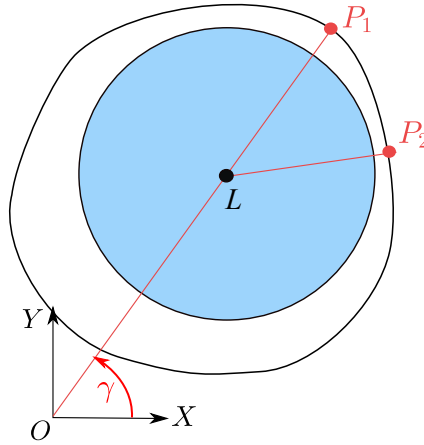


FIGURE V.8 – Méthodes de recherche du point de contact pour l'approche mono-contraainte

formé entre ce vecteur et l'horizontale, il est possible d'identifier à quel élément appartient ce point de contact. En effet la valeur plancher du ratio $\text{floor}(\frac{R_s \gamma}{l_e})$, permet d'identifier le nœud de départ de l'élément auquel le point P_1 appartient. La variable d'interpolation χ est alors défini comme $\chi = \frac{R_s \gamma}{l_e} - \text{floor}(\frac{R_s \gamma}{l_e})$ et reste comprise entre 0 et 1. Cette méthode a été testée et a montré des résultats erronés. Le jeu entre les structures est assez faible et cette méthode de recherche de contact ne tient pas compte de la déformation du stator.

La seconde méthode est exacte et revient à chercher le point P_2 en calculant directement la distance minimale entre les 2 corps. C'est à dire qu'à chaque pas de temps, après l'étape de prédiction, l'anneau est reconstitué avec les fonctions de forme. En définissant (x_S, y_S) comme les coordonnées absolues d'un point appartenant à la ligne neutre de l'anneau déformé, et qui fondamentalement dépendent des déplacement nodaux \mathbf{q} , la fonction distance en 2D s'écrit :

$$d_N(\mathbf{q}) = \sqrt{(x_S(\mathbf{q}) - x_l)^2 + (y_S(\mathbf{q}) - y_l)^2} - R_l - \frac{e}{2}. \quad (\text{V.34})$$

On rappelle que la position cartésienne du point S est décomposée en une position initiale non-déformée $(x_0, y_0) = R_s(\cos \phi, \sin \phi)$ associée au point S_0 et des petites perturbations $\mathbf{u} = (u, v)$ définies dans un repère local curviligne (\mathbf{s}, \mathbf{r}) (cf Figure V.9). Ces déplacements doivent subir

un changement de repère d'angle ϕ tel que

$$\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_s \cos \phi \\ R_s \sin \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin \phi & \cos \phi \\ \cos \phi & \sin \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (\text{V.35})$$

Afin d'alléger les calculs, l'auteur propose que la fonction distance ne soit calculée dans un premier temps que sur les nœuds. Le nœud $k = 0, \dots, N_e - 1$ qui minimise cette fonction détermine quels sont les 2 éléments connexes dans lesquels la distance minimale apparaît. Le

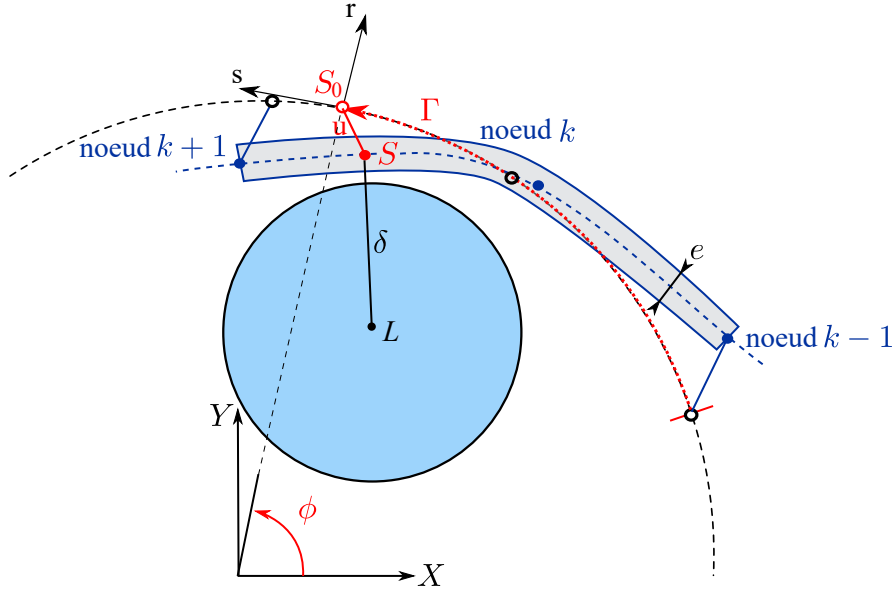


FIGURE V.9 – Recherche du point de contact S entre 2 éléments adjacents par minimisation de la norme δ du vecteur \vec{SL} et schématisation de la fibre neutre du stator en configuration de repos (\circ) et déformée (\bullet)

domaine de définition pour S est plus restreint, ce qui dans les perspectives de S.Roques, doit faire gagner en temps de calcul. En effet, le point S est repéré par la coordonnée curviligne adimensionnée $\Gamma \in [0, 2]$. Ainsi, puisque les déplacements du rotor et du stator \mathbf{q} sont connus, l'objectif à atteindre est de trouver Γ qui minimise la fonction

$$\delta(\Gamma) = \sqrt{(x_S(\Gamma) - x_l)^2 + (y_S(\Gamma) - y_l)^2} \quad (\text{V.36})$$

qui représente la norme du vecteur \vec{SL} , voir Figure V.9. Si $\Gamma \in [0, 1]$, alors S appartient à l'élément antérieur formé des nœuds $k-1$ et k . Sinon, $\Gamma \in]1, 2]$, et S se trouve dans l'élément postérieur constitué des nœuds k et $k+1$. La coordonnée polaire du point S au repos est donnée par $\phi = \frac{2\pi(k+\Gamma)}{N_e}$. On déduit également le paramètre d'interpolation des fonctions de forme

$$\chi = \begin{cases} \Gamma, & \text{si } \Gamma \leq 1 \\ \Gamma - 1, & \text{sinon} \end{cases} ; \quad (\text{V.37})$$

et le vecteur déplacement de l'élément \mathbf{q}_e (taille 8) contenant le point S

$$\mathbf{q}_e(\Gamma) = \begin{cases} \mathbf{q}_s^{[k-1, k]}, & \text{si } \Gamma \leq 1 \\ \mathbf{q}_s^{[k, k+1]}, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{V.38})$$

nécessaires au calcul des perturbations \mathbf{u} (cf Équation (V.6)).

4.2 Vecteurs des contributions normales et tangentielles

Une fois le point S identifié et s'il engendre une pénétration rotor-stator, alors les contributions normales et tangentielles du multiplicateur de Lagrange doivent être calculées. La direction de l'effort normal \mathbf{C}_N , comme déjà évoqué, correspond au gradient de la fonction jeu (cf Équation (V.34)). Il s'agit donc d'un vecteur non-nul uniquement pour les déplacements du labyrinthe et pour les 2 nœuds qui définissent l'élément dans lequel le point S se situe. La portion de \mathbf{C}_N pour la turbine (notée $\mathbf{C}_{N,t}$) vient assez directement :

$$\mathbf{C}_{N,t}(\mathbf{q}) = \left(0, 0, \frac{-(x_S(\mathbf{q}) - x_l)}{\delta}, \frac{-(y_S(\mathbf{q}) - y_l)}{\delta}, 0 \right)^\top \quad (\text{V.39})$$

où la dépendance en Γ de δ n'est pas reprise puisqu'il est désormais connu. Le calcul des contributions de l'effort sur les déplacements de l'élément poutre ($\mathbf{C}_{N,s}$) nécessitent plus de description. La position x_S en configuration déformée est déterminée avec la position au repos (x_0, y_0) et la projection des perturbations $\mathbf{u} = (u, v)^\top$ sur l'axe X au moyen de $\mathbf{P}_x = (-\sin \phi, \cos \phi)$. Or ces perturbations \mathbf{u} sont approchées par les déplacements élémentaires \mathbf{q}_e grâce aux fonctions de forme (cf Équation (V.6)), avec le paramètre d'interpolation $\chi \in [0, 1]$ connu

$$x_S(\mathbf{q}_e) = x_0 + \mathbf{P}_x \mathbf{u} = x_0 + \mathbf{P}_x \mathbf{N}(\chi) \mathbf{q}_e. \quad (\text{V.40})$$

Une formulation identique peut être déduite pour la coordonnée y_S , avec la définition d'un vecteur de projection sur l'axe y $\mathbf{P}_y = (\cos \phi, \sin \phi)$:

$$y_S(\mathbf{q}_e) = y_0 + \mathbf{P}_y \mathbf{u} = y_0 + \mathbf{P}_y \mathbf{N}(\chi) \mathbf{q}_e. \quad (\text{V.41})$$

Par conséquent la portion du vecteur colonne \mathbf{C}_N correspondant aux déplacements élémentaires \mathbf{q}_e du stator, notée $\mathbf{C}_{N,s}(\mathbf{q})$ est calculée d'après

$$\mathbf{C}_{N,s}(\mathbf{q}) = \nabla_{\mathbf{q}_e} d_N = \frac{1}{\delta} \left((x_S - x_l) \mathbf{P}_x \mathbf{N}(\chi) + (y_S - y_l) \mathbf{P}_y \mathbf{N}(\chi) \right)^\top \quad (\text{V.42})$$

où la dépendance de la position du point S par rapport à \mathbf{q} est supprimée pour alléger la notation.

D'autre part, la contribution de la force de frottement aux équations du mouvement s'obtient par le calcul du gradient d'une fonction de déplacement tangentiel

$$d_T(\mathbf{q}) = \delta \arctan \frac{y_S(\mathbf{q}) - y_l}{x_S(\mathbf{q}) - x_l} - R_l \theta. \quad (\text{V.43})$$

On trouve alors les contributions du frottement sur le labyrinthe :

$$\mathbf{C}_{T,t}(\mathbf{q}) = \left(0, 0, \frac{y_S(\mathbf{q}) - y_l}{\delta}, \frac{-(x_S(\mathbf{q}) - x_l)}{\delta}, -R_l \right)^\top ; \quad (\text{V.44})$$

ainsi que sur le stator

$$\mathbf{C}_{T,s}(\mathbf{q}) = \nabla_{\mathbf{q}_e} d_T = \frac{1}{\delta} \left(-(y_S - y_l) \mathbf{P}_x \mathbf{N}(\chi) + (x_S - x_l) \mathbf{P}_y \mathbf{N}(\chi) \right)^\top. \quad (\text{V.45})$$

Puisque la loi de Coulomb est désormais uniquement prise en compte sur sa phase glissante, la contribution résultante du multiplicateur de Lagrange aux équations du mouvement est

alors donnée par la combinaison des contributions normale et tangentielles : $\mathbf{C}_{\text{NT}} = \mathbf{C}_{\text{N}} + \mu \text{sign}(v_{\text{T}}) \mathbf{C}_{\text{T}}$.

4.3 Contribution du contact à l'équation de la chaleur

L'expression de la chaleur répartie entre la turbine et le stator est directement reprise de l'Équation (II.44) déjà présentée dans l'état de l'art

$$\begin{cases} \dot{Q}_{\text{t}} = \frac{\vartheta_{\text{t}}}{\vartheta_{\text{t}} + \vartheta_{\text{s}}} (\vartheta_{\text{s}}(T_{\text{s}} - T_{\text{t}}) + \mu |v_{\text{T}}|) F_{\text{N}} \\ \dot{Q}_{\text{s}} = \frac{\vartheta_{\text{s}}}{\vartheta_{\text{t}} + \vartheta_{\text{s}}} (\vartheta_{\text{t}}(T_{\text{t}} - T_{\text{s}}) + \mu |v_{\text{T}}|) F_{\text{N}} \end{cases}$$

où ϑ_{t} et ϑ_{s} représentent les conductances thermiques au contact de la turbine (rotor) et du stator. Le premier terme de chaque expression représente la conduction via l'interface de contact tandis que le second est la puissance de friction. Sur base des données et travaux Ireman [87], une adaptation des données expérimentales permet de fixer les conductances à $\vartheta_{\text{t}} = \vartheta_{\text{s}} = 1e - 3 [W.N^{-1}.K^{-1}]$. Un tel choix de paramètre engendre une répartition équitable de la puissance de friction qui est une hypothèse couramment utilisée dans la littérature [54, 55, 149]. Par ailleurs, la portion de flux de chaleur associé à la conduction entre le rotor et le stator est négligée pour deux raisons. La première est que la température au niveau de la turbine n'est pas calculée et donc T_{t} est indéterminée. De plus, cette simplification est pertinente en étudiant les ordres de grandeurs. Au maximum, on peut supposer qu'un des 2 corps restera à température ambiante du moteur ($\approx 10^2 \text{°C}$) tandis que le second a atteint son point de fusion autour de 10^3°C (pour l'acier ou de l'inconel). Ainsi le produit $\vartheta(T_{\text{t}} - T_{\text{s}})$ restera inférieur à l'unité tandis que $v_{\text{T}} \approx 10^2 \text{m/s}$ et $\mu \approx 10^{-1}$, ce qui mène à un proportion de chaleur liée à la friction au moins 10 fois supérieure à celle liée à la conduction.

Dans le cas particulier du problème avec un seul point de contact, cette puissance calorifique \dot{Q}_{s} doit être répartie sur les 2 nœuds de l'élément où la distance minimale a été détectée. Or, sachant que la chaleur aux nœuds est approchée par $\dot{\mathbf{Q}}_{\text{c}} = \mathbf{N}_{\vartheta}^{\top} \dot{Q}_{\text{s}}$, on en déduit que le vecteur de flux du stator peut être écrit comme

$$\dot{\mathbf{Q}}_{\text{c}} = \mathbf{C}_{\vartheta} F_{\text{N}} \quad (\text{V.46})$$

avec

$$\mathbf{C}_{\vartheta} = 0.5 \mu |v_{\text{T}}| \mathbf{N}_{\vartheta}(\chi)^{\top}. \quad (\text{V.47})$$

Ce vecteur \mathbf{C}_{ϑ} représente les contribution de l'effort normal (i.e. multiplicateur de Lagrange) à l'équation de la chaleur. Il est nul pour tous les éléments sauf celui où la distance minimale (et violant la condition de non-pénétration) a été calculée. Par conséquent pour le problème thermomécanique, le vecteur \mathbf{C}_{NT} est remplacé dans les étapes de la méthode de Carpenter (voir Algorithme 3) par une version enrichie $\mathbf{C}_{\text{NT}\vartheta} = (\mathbf{C}_{\text{NT}}, \mathbf{C}_{\vartheta})^{\top}$.

4.4 Adaptation pour l'approche multipoints de contact

Plus généralement, il est tout à fait possible d'employer une approche multi-contraintes. Dans ce cas, la résolution du problème implique autant de points de contact que de nœuds qui violent la contrainte sur le jeu. Pour chaque nœud $k = 0, \dots, N_e - 1$, cela revient à vérifier

$$d_{\text{N}}^k(\mathbf{q}) = \sqrt{(x_s^k(\mathbf{q}) - x_l)^2 + (y_s^k(\mathbf{q}) - y_l)^2} - R_l - \frac{e}{2} \geq 0. \quad (\text{V.48})$$

L'illustration graphique de ce calcul est proposée en Figure V.10. La position absolue du nœud k , notée (x_s^k, y_s^k) , est obtenue par une approche similaire à celle des Équations (V.40) et (V.41).

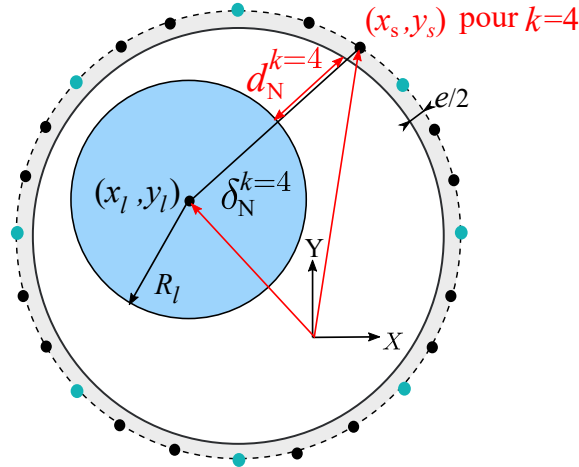


FIGURE V.10 – Simplification du calcul du jeu aux nœuds pour l’approche multi-points de contact

En revanche, ce ne sont plus les déplacements élémentaires \mathbf{q}_e qui permettent de calculer les déplacements curvilignes \mathbf{u}^k à projeter. Ces derniers sont déjà contenus dans le vecteur des degrés de liberté du nœud k : $\mathbf{q}_s^k = (u_k, u_{,sk}, v_k, v_{,sk})$. En définissant la matrice

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{V.49})$$

et sachant que la position angulaire initiale du nœud k est $\phi^k = 2\pi k/N_e$, les positions absolues du nœud k s’écrivent

$$\begin{cases} x_s^k = R_s \cos \phi^k + \mathbf{P}_x^k \mathbf{U} \mathbf{q}_s^k; \\ y_s^k = R_s \sin \phi^k + \mathbf{P}_y^k \mathbf{U} \mathbf{q}_s^k. \end{cases} \quad (\text{V.50})$$

Les opérateurs de projection \mathbf{P}_x^k et \mathbf{P}_y^k prennent en paramètre la position angulaire ϕ^k . Cette approche simplifie la recherche des points de contacts puisqu’il suffit de retenir les nœuds pour lesquels la distance normale (cf Équation (V.48)) est négative. De plus, il n’est plus nécessaire de faire intervenir les fonctions de forme dans la résolution du problème. En suivant cette méthode, pour $a \leq N_e$ contraintes actives ($a = |\mathbb{A}|$), cela implique le calcul de a multiplicateurs et les a contraintes sont regroupées dans l’ensemble \mathbb{A} déjà présenté en Sections II.5.2 et IV.3. Dans ce cas, \mathbf{C}_N , \mathbf{C}_T et \mathbf{C}_ϑ ne sont plus des vecteurs mais des matrices avec a colonnes. Dans ce qui suit, on définit la variable $j = 1, \dots, a$ qui représente l’indice du nœud k dans l’ensemble \mathbb{A} .

Le calcul de chaque colonne j est inspiré des expressions V.42, V.45 et V.47, à la différence qu’elles sont non-vides uniquement sur les degrés de liberté du labyrinthe et du nœud k impliqués dans la $j^{\text{ème}}$ contrainte active

$$\forall j = 1, \dots, a \quad \begin{cases} \mathbf{C}_{N,j}^k = \nabla_{\mathbf{q}_s} d_N^k = \frac{1}{\delta^k} \left((x_s^k - x_l) \mathbf{P}_x^k \mathbf{U} + (y_s^k - y_l) \mathbf{P}_y^k \mathbf{U} \right)^\top \\ \mathbf{C}_{T,j}^k = \nabla_{\mathbf{q}_s} d_T^k = \frac{1}{\delta^k} \left(-(y_s^k - y_l) \mathbf{P}_x^k \mathbf{U} + (x_s^k - x_l) \mathbf{P}_y^k \mathbf{U} \right)^\top \\ \mathbf{C}_{\vartheta,j}^k = 0.5\mu |v_T^k| \end{cases} \quad (\text{V.51})$$

Ainsi, la matrice $\mathbf{C}_{NT\vartheta}$ est obtenue par concaténation (représentée par le symbole \cup dans cette

thèse) des $|\mathbb{A}|$ colonnes.

$$\mathbf{C}_{\text{NT}\vartheta} = \bigcup_{j=1}^{|\mathbb{A}|} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\text{N},j}^k + \text{sign}(v_{\text{T}}^k) \mathbf{C}_{\text{T},j}^k \\ \mathbf{C}_{\vartheta,j}^k \end{pmatrix}. \quad (\text{V.52})$$

Il faut à présent décider quelle approche, de la mono-contraintes ou multi-contraintes est la plus performante dans la méthode de résolution.

5 Simulation pour un rotor à déplacement imposé

Dans un premier temps, on s'intéresse au comportement thermomécanique du stator uniquement. La dynamique du rotor est simplifiée au maximum et est entièrement imposée. On propose ici que le rotor ait un mouvement circulaire. Son centre de gravité est localisé selon

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cos(\Omega t) + \epsilon \\ y(t) = r(t) \sin(\Omega t) + \epsilon \end{cases} \quad (\text{V.53})$$

où $r(t)$ est la coordonnée radiale. Ω correspond à la fois à la vitesse angulaire du centre du rotor et sa rotation propre imposée comme constante ($\dot{\theta} = \Omega$), et ϵ est un décalage introduit pour éviter la singularité de détection du contact lorsque le rotor est centré en l'origine en début de simulation. Initialement, le rotor n'est pas en contact avec le stator. La coordonnée radiale $r(t)$ suit un rampe de forme

$$r(t) = \begin{cases} (g_0 + z) \frac{t}{t_{\text{step}}} & \text{si } t < t_{\text{step}} \\ (g_0 + z) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{V.54})$$

On rappelle que g_0 représente le jeu initial et z l'interpénétration s'il n'y avait pas de contraintes de contact. Cette dernière est fixée à $100 \mu\text{m}$ et $t_{\text{step}} = 1 \text{ ms}$.

5.1 Hypothèse d'un seul point de contact

Dans la suite de cette section, Ω est fixé à 500 rad/s . Deux paramétrisations du stator sont définies

- 35 nœuds dont 5 vis avec un pas de temps $h = 4 \times 10^{-7} \text{ s}$;
- 70 nœuds dont 5 vis avec un pas de temps $h = 10^{-7} \text{ s}$.

Pour l'instant, la dilatation thermique n'est pas prise en compte. La température initiale est nulle sur toute la circonférence de l'anneau. Bien entendu, il s'agit d'un cas théorique car le labyrinthe en opération est chaud avec une température de quelques centaines de degrés. Toutes les propriétés thermiques (capacité calorifique, conductivité thermique,...) sont considérées comme constantes. En d'autres termes, une condition initiale non-nulle implique simplement que la solution fournie par l'algorithme correspond à l'élévation de température subie par la pièce. Pour les 2 maillages de stator, les simulations sont lancées pour 20 ms et la condition de non-pénétration est respectée puisque le jeu corrigé en Figure V.11a ne présente pas de valeurs négatives. En revanche, il faut noter la présence de micro-impacts où le jeu corrigé ne dépasse pas $0,2 \mu\text{m}$. Plus le maillage et le pas de temps sont fins, plus ces recollements et séparation sont fréquents mais baissent en amplitude. L'évolution de l'effort normal (voir Figure V.11b) confirme ces séparations brèves en passant par une valeur nulle en l'espace d'une itération en temps. Il s'agit d'un phénomène numérique déjà rencontré dans la littérature connu sous le nom de *chattering* [1]. On peut noter que le chattering disparaît pour les 2 intervalles $[10.3, 11.7] \text{ ms}$

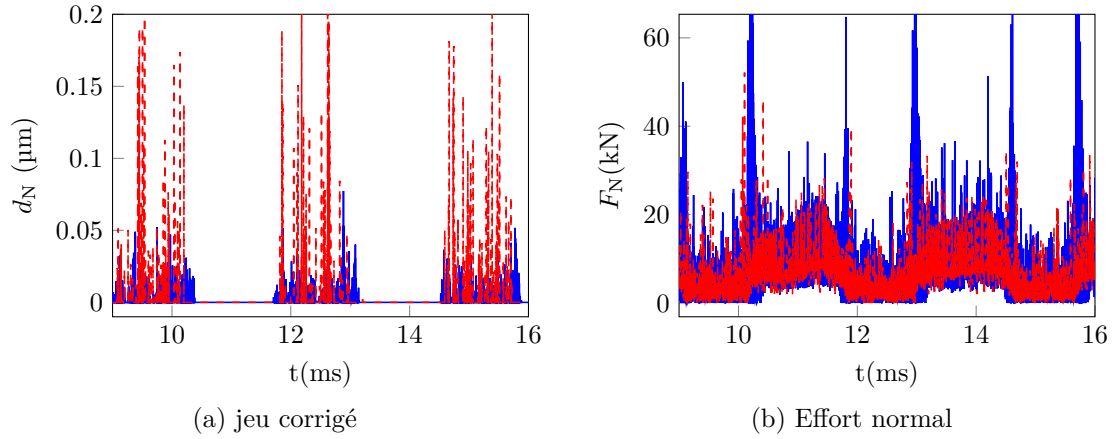


FIGURE V.11 – Comparaison des réponses mécaniques obtenues avec l’approche mono-contrainte pour $t = [9, 16]$ ms : 35 nœuds(---), 70 nœuds (—)

et $[13.2, 14.5]$ ms et sont associés à une stagnation du point de contact au voisinage d’un point de vissage.

L’étude de ces phases de *chattering* indiquent également que le point de contact semble sauter d’un point à l’autre entre 2 instants i et $i + 1$. La Figure V.12 illustre cet effet où le point

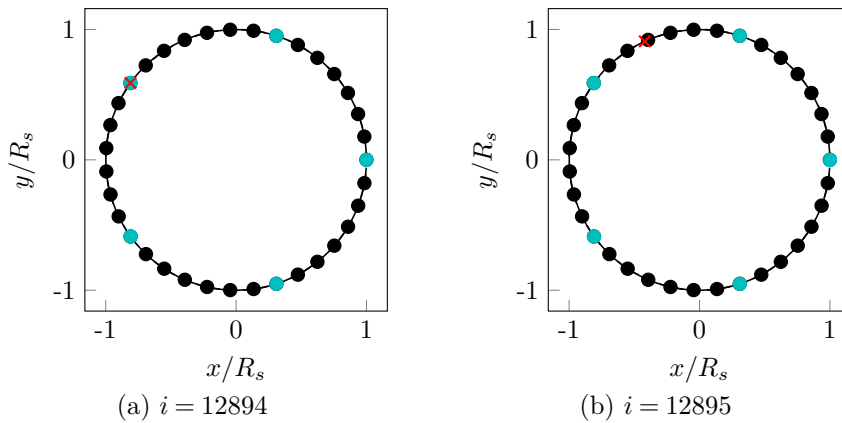
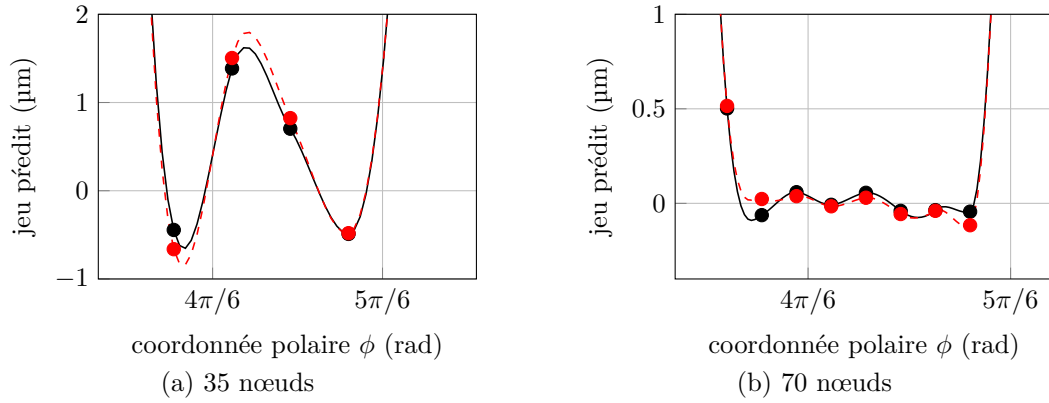
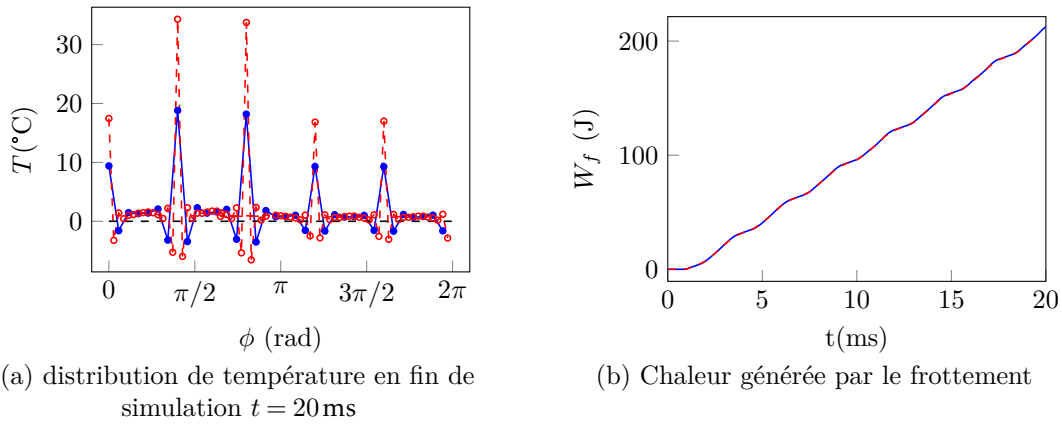


FIGURE V.12 – Saut du point de contact (\times) sur le stator (\bullet) doté de 5 vis (\bullet) entre 2 itérations pour $t \approx 5$ ms

de contact passe de $\phi = 140^\circ$ à 110° environ. Ce type de saut a aussi été constaté pour le cas de référence à 12 vis. Le problème vient du choix du nœud qui possède la plus petite distance avec le rotor. Pour 35 nœuds, la Figure V.13a décrit l’évolution de la distance prédite rotor-stator pour une portion de stator allant de 100° à 170° pour 2 instants consécutifs (abscisse indiquée en radians) . A l’itération i , il y a 2 nœuds qui violent la contrainte de non-pénétration mais c’est celui en $\phi = 143^\circ$ qui pénètre le plus et la recherche de distance minimale est effectuée que sur les 2 éléments qui le contiennent. A l’itération suivante, l’étape de prédiction de l’algorithme donne toujours 2 nœuds avec un jeu négatif mais à présent, c’est celui en $\phi = 114^\circ$ qui est le plus discriminant. En augmentant le nombre de nœuds, l’explication est la même sauf qu’au lieu d’avoir 2 nœuds avec un jeu négatif, il y en a 5 mais comme l’hypothèse de recherche de contact implique un seul nœud retenu, ces derniers ne sont pas traités lors de l’étape de correction.

Pour ce qui est de la thermique, on constate que le profil de température en fin de simulation

FIGURE V.13 – Jeu prédit sur une portion de stator entre 2 itérations i (—) et $i + 1$ (---)FIGURE V.14 – Réponse thermique du contact rotor stator : $N_e = 35$ (—) et $N_e = 70$ (---)

(cf Figure V.14a) présente des raies au niveau des points de vissage. Pour n_v points de vissage, n_v pics de température sont identifiés. Il faut noter que, quel que soit le maillage, 2 pics aux positions $\phi = 72^\circ$ et $\phi = 144^\circ$ (vis 2 et 3) sont plus élevés car le contact est passé 2 fois par ces vis pendant la simulation. Il faut aussi noter que des températures négatives apparaissent aux nœuds de part et d'autre des vis. A nouveau, cela dénote la concentration nodale de la source de chaleur en ces points et donc le manque de nœuds présents dans le domaine d'influence des sources de chaleur. Bien qu'il semblerait que l'effort de contact augmente au passage des vis, l'origine de cette localisation de température ne peut pas être démontrée explicitement avec l'approche mono-contrainte. Cependant, le profil de température est cohérent avec la chaleur générée par frottement qui s'élève à 200J en fin de simulation (cf Figure V.14b). En effet, la température moyenne de l'anneau correspond à celle calculée selon le premier principe de la thermodynamique

$$m_{\text{ring}}c\Delta T_{\text{moy}} = Q_c = 0.5W_f = 100\text{J}. \quad (\text{V.55})$$

où m_{ring} est la masse de l'anneau et c la capacité calorifique. Pour les deux maillages de l'anneau, les résultats donnent $\Delta T_{\text{moy}} = 1,89^\circ\text{C}$. Dans la section suivante, on propose de changer d'hypothèse de détection du contact et de passer à l'approche multi-contraintes.

5.2 Hypothèse multipoints de contact

L'approche avec plusieurs points de contact est testée sur le stator avec $N_e = 70$ et $n_v = 5$. Les résultats montrent désormais que la zone de contact est représentée par un secteur allant

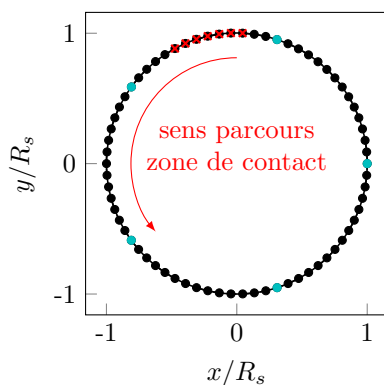


FIGURE V.15 – Points de contact (x) sous forme de secteur avec maillage avec $N_e = 70$ et $n_v = 5$

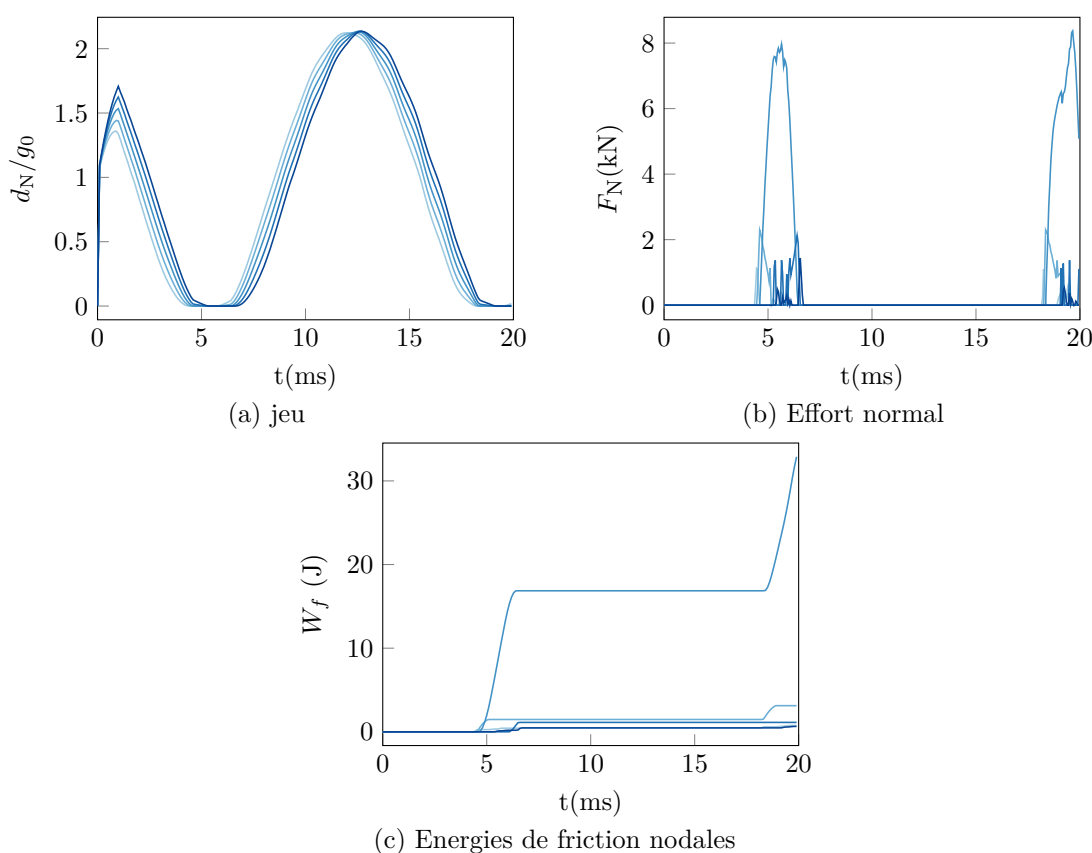


FIGURE V.16 – Réponse temporelle du contact rotor stator avec approche multipoints de contact avec maillage à 70 nœuds : nœud 13 (—), nœud 14 (—), nœud 15 (—), 16 (—), 17 (—)

jusqu'à 7/8 nœuds (voir Figure V.15) qui se déplace dans le sens anti-horaire le long de l'anneau. Si on s'intéresse au nœud 15 (qui est aussi la seconde vis) ainsi qu'aux 4 nœuds voisins, leur distance avec le rotor indique de nouveau un respect de la contrainte de non-pénétration (cf. Figure V.16a).

Par contre, l'effort normal ne suit pas le même profil pour tous les nœuds. Ces derniers, en Figure V.17a, démontrent que plus le nœud est éloigné de la vis, plus l'effort de contact est faible. Un effort normal maximal engendre une énergie de friction plus grande au niveau de la vis (voir Figure V.16c), ce qui explique pourquoi la distribution spatiale en température est

maximale aux points de vissage.

Par ailleurs, il est important de souligner que les distributions de températures et l'énergie de friction (voir Figure V.17) sont identiques par rapport à la simulation avec hypothèse d'un seul point de contact. On peut en déduire que l'approche mono-contrainte reproduit correctement la thermique. Néanmoins, pour les 2 approches de gestion du contact, il existe toujours des nœuds dont la température est négative, ce qui est irréaliste puisque la chaleur est toujours source d'énergie aux nœuds. Cet effet ramène aux conclusions de la Section V.3.2. la période du terme source ici vaut 0,012s, soit une fréquence de 80Hz. L'excitation thermique est à haute fréquence et la couche thermique est concentrée aux points de vissage. A titre illustratif,

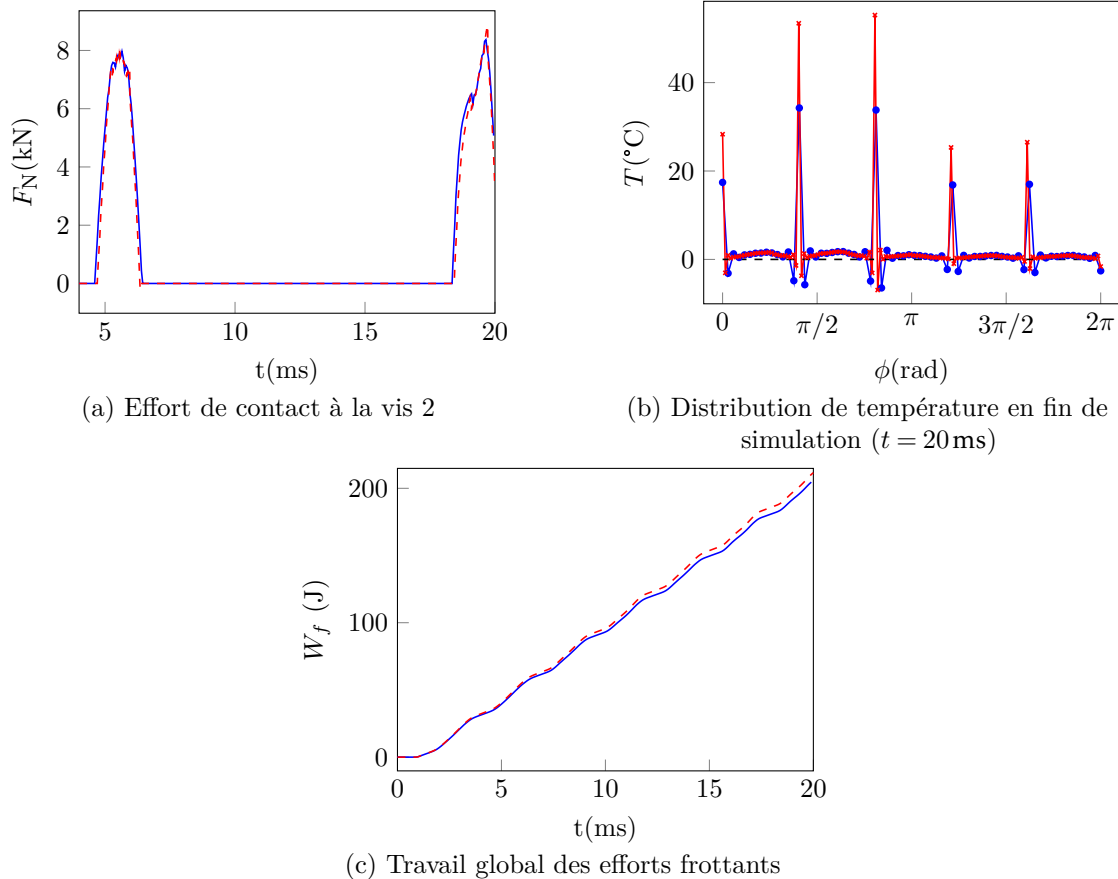


FIGURE V.17 – Sensibilité au maillage $N_e = 70$ (—) et $N_e = 140$ (---)

le calcul est relancé avec un maillage de 140 nœuds. Le pas de temps critique de stabilité descend alors à $h = 4,3 \times 10^{-8}$ s. Les profils de température (voir Figure V.17b), ainsi que l'effort et le jeu au niveau de la 2^{ème} vis (voir Figure V.17a) sont comparés pour les 2 maillages. Il s'avère que le calcul est convergé pour la solution mécanique puisque les efforts de contact se superposent. Quant au profil de température en fin de simulation, ils sont identiques dans un domaine suffisamment éloigné des points de vissage. En revanche les pics de température aux vis sont plus resserrés et atteignent des valeurs plus élevées lorsque le maillage est raffiné. De plus, malgré le raffinement, les températures des nœuds adjacents aux vis restent négatives mais se sont rapprochées de zéro. D'un point de vue global, l'énergie générée par friction vaut 211J contre 204J avec 70 nœuds, soit un écart relatif raisonnable de 3.5%. Ainsi, dans la suite des travaux, il faut surtout prêter attention à la température loin des vis car la température sur ces dernières est surtout qualitative et indique un échauffement extrêmement localisé à cause de la raideur ponctuelle ajoutée par les supports.

En conclusion, après avoir comparé les approches mono et multi-contraintes sur un cas simplifié, il est décidé de retenir la seconde dans la résolution du contact rotor-stator. Même si la solution thermique est identique, l'approche multi-contrainte se rapproche davantage de la réalité avec l'apparition d'un arc de contact plutôt que d'un seul point qui saute instantanément d'un nœud à un autre. L'approche multi-contrainte permet d'éviter des impacts irréalistes qui « bruyent » le transitoire sur les efforts de contacts et le jeu.

6 Résultats

6.1 Sans dilatation thermique

Les premiers calculs négligent la dilatation thermique. On rappelle que les conditions initiales sont identiques à celles calculées en Annexe A. Le stator est au repos et la température est imposée nulle sur toute la circonférence. Comme déjà évoqué, les équations de la chaleur sont linéaires. Cela signifie que si une autre température de départ homogène T_0 est envisagée, alors la solution calculée correspond à l'élévation de température par rapport à T_0 .

Cas de référence $\mu = 0,1$

Le cas de référence est associé ici à $\mu = 0,1$ et est testé pour 2 maillages avec $N_e = 36$ et $N_e = 72$. Pour chacun d'entre eux, la fréquence propre maximale du stator impose un pas de temps fixé respectivement à $h = 4 \times 10^{-7}$ s et $h = 10^{-7}$ s. Le profil de vitesse de rotation pour les différents maillages est présenté en Figure V.18a. On constate que la réponse dynamique

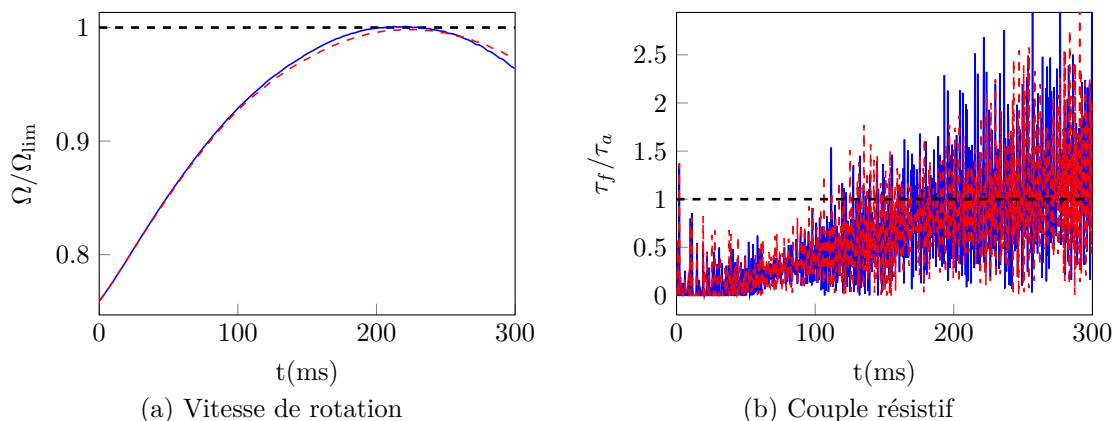


FIGURE V.18 – Réponse dynamique : $N_e = 36$ (—), $N_e = 72$ (---)

est semblable même en doublant le maillage. La valeur maximale de Ω_{\max} avec 36 nœuds est égale à la vitesse limite Ω_{\lim} tandis que la solution pour 72 nœuds, a un écart relatif très faible de -0.17% . A nouveau, la limitation de la vitesse est provoquée par le couple de frottement qui dépasse le couple aérodynamique τ_a (toujours supposé fixe), voir Figure V.18b. Cette augmentation du couple résistif est progressive à cause du régime en contact partiel. En effet, un couple nul implique qu'aucun nœud est en contact. La fonction jeu à la 4^{ème} vis et le déplacement du labyrinthe¹ x_l montrent tous les deux une correspondance parfaite pour $t < 30$ ms, puis restent cohérents avec un déphasage qui se met en place. Les niveaux d'amplitude des solutions restent identiques avec le raffinement du maillage et du pas de temps.

A titre de comparaison, un modèle avec la même configuration de stator (anneau+masse ponctuelle suspendue) mais où le stator est parfaitement rigide a été testée. Ce système rigide

1. Les résultats sont aussi satisfaisants pour y_l mais ne sont pas montrés car redondants avec x_l .

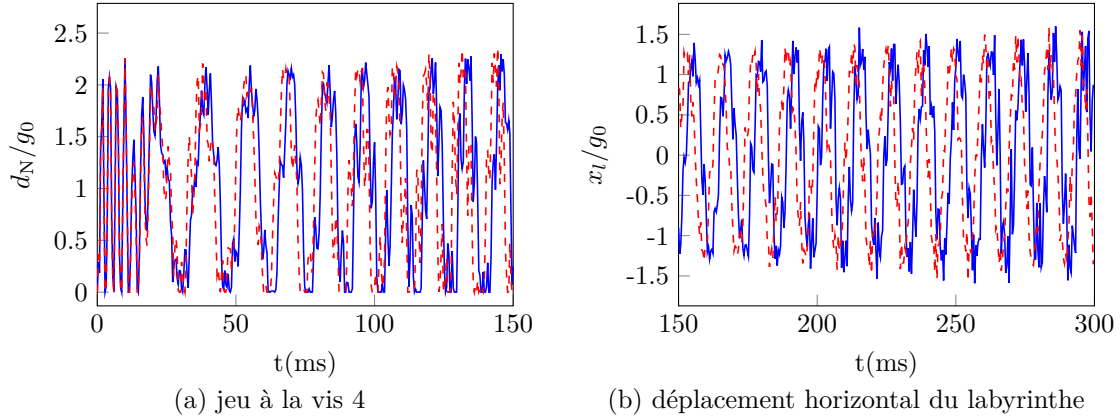


FIGURE V.19 – Vibrations des structures : $N_e = 36$ (—), $N_e = 72$ (---)

équivalent possède alors 2 degrés de liberté supplémentaires (translations en x et y de la masse m_A) par rapport à celui présenté au Chapitre IV. Les raideurs aux 12 vis sont alors condensées en 4 raideurs (illustrées en Figure V.20). Deux relient le stator au bâti (k_{Bxx}, k_{Byy}) et l'autre paire (k_{Axx}, k_{Ayy}) sert à la suspension de la masse ponctuelle. L'équipartition des vis implique l'absence de termes de couplage k_{xy} et la symétrie des raideurs $k_{Bxx} = k_{Byy}$ et $k_{Axx} = k_{Ayy}$ puisque

$$\begin{cases} k_{Bxx} = \sum_{i=0}^{n_v-1} k_{Bu} \sin^2\left(\frac{i2\pi}{n_v}\right) + k_{Bv} \cos^2\left(\frac{i2\pi}{n_v}\right) = 6(k_{Bu} + k_{Bv}) \\ k_{Byy} = \sum_{i=0}^{n_v-1} k_{Bu} \cos^2\left(\frac{i2\pi}{n_v}\right) + k_{Bv} \sin^2\left(\frac{i2\pi}{n_v}\right) = 6(k_{Bu} + k_{Bv}) \\ k_{Axx} = \sum_{i=0}^{n_v-1} k_A \cos^2\left(\frac{i2\pi}{n_v}\right) = 6k_A \\ k_{Ayy} = \sum_{i=0}^{n_v-1} k_A \sin^2\left(\frac{i2\pi}{n_v}\right) = 6k_A \end{cases} \quad (\text{V.56})$$

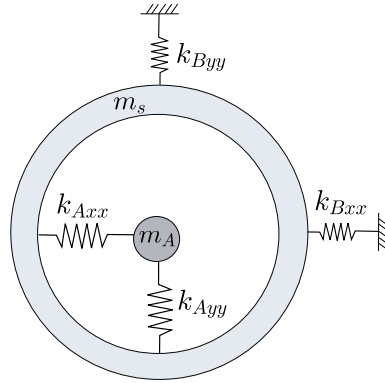


FIGURE V.20 – Schémas de stator rigide avec propriétés équivalentes

Les résultats fournis par convergence sur le pas de temps sont similaires pour ce modèle rigide à partir de $h = 2 \times 10^{-7}$ s. Dans ce cas, contrairement à ce qui a été montré au chapitre précédent, il n'y a plus séparation de contact et le profil de vitesse de rotation est de nouveau en cloche, comme pour le modèle flexible. La Figure V.21a montre que la valeur maximale sur $\Omega(t)$ pour le modèle rigide est de $\Omega_{\max} = 1.015\Omega_{\lim}$. Cet écart de 1.5% avec le modèle flexible s'explique notamment sur base du couple (Figure V.21b). Il démontre qu'un stator rigide engendre des touches plus violentes puisque le couple est localement plus élevé qu'avec l'anneau flexible. Les pics associés aux impacts sont nettement marqués et traduisent également une réponse dynamique avec plus de rebonds. Cette comparaison démontre l'intérêt de modéliser le stator comme flexible où la déformation fait apparaître un secteur de contact, ce qui est

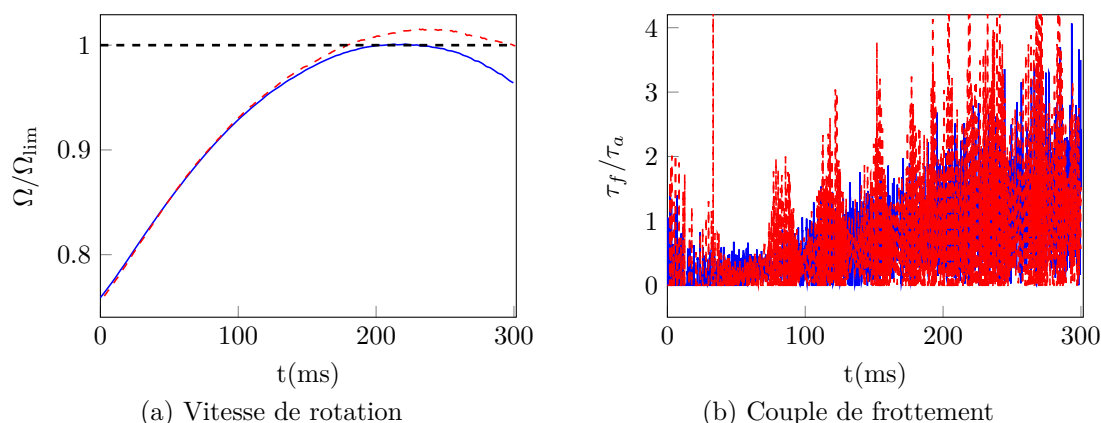
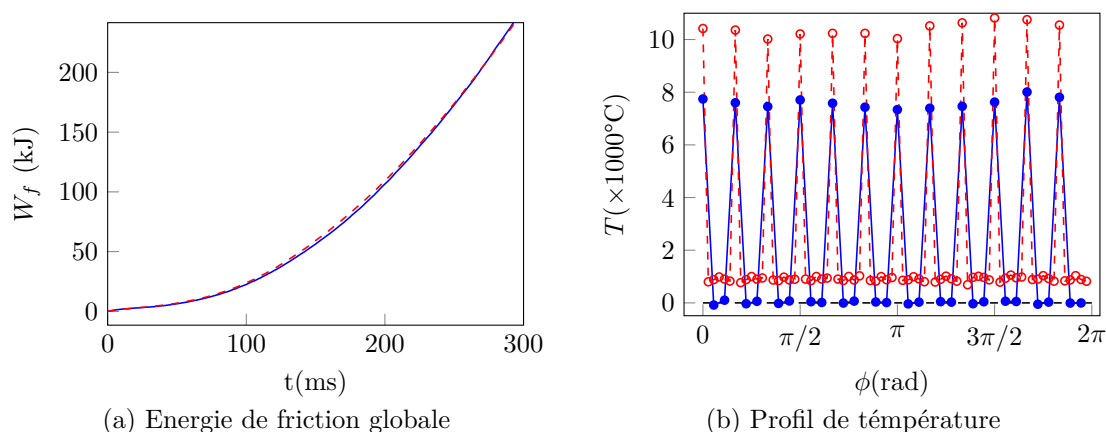


FIGURE V.21 – Réponse temporelle du modèle rigide équivalent : flexible (—), rigide (---)

plus réaliste qu'un contact singulier. En résumé, la solution du modèle flexible par rapport rigide équivalent est en accord avec la littérature présentée au Chapitre II. Avec la flexibilité de l'anneau, l'effort de contact diminue ainsi que le phénomène de rebond.

La résolution du système en modélisant uniquement la partie mécanique est donc acceptable avec seulement 36 nœuds. En revanche, comme déjà discuté en Section V.5.2, seul le calcul avec 72 nœuds présente un profil de température réaliste dans un voisinage suffisamment éloigné des vis. En effet, même si les 2 maillages produisent des transitoires de l'énergie de

FIGURE V.22 – Réponse thermique : $N_e = 36$ (—), $N_e = 72$ (---)

friction globale identiques (cf Figure V.22a), le profil de température du maillage le plus grossier (voir Figure V.22b) présente tout de même des températures négatives non-physiques. Ce problème lié à la faible densité de nœuds au voisinage des vis est éliminé pour $N_e = 72$. Dans ce voisinage (hors pics), la distribution de température varie entre 769°C et 1055°C avec une valeur moyenne de 904°C . A présent, supposons que la température nominale avant contact est autour de 300°C .

Les propriétés matériau considérées sont celles de l'acier par défaut². Sachant que la températures de fusion avoisine $\approx 1400 - 1500^\circ\text{C}$, cela signifie qu'il n'y a pas de fusion prédite loin des points de vissage. En revanche, la température aux nœuds vis dépasse largement celle de fusion. Ce constat est à analyser avec précaution car si cette température est très élevée (plus

2. En pratique, les turboréacteurs sont soumis à de fortes températures et sont constitués d'aciers, d'alliages de titane, de super-alliages de nickel ou encore d'Inconel. Les données matériau étant souvent confidentielles, l'acier est retenu dans cette thèse

de 10000°C), il s'agit probablement d'une température *flash*. C'est un phénomène physique caractérisé par une température aux aspérités de surface qui est supérieure à la température moyenne de contact de plusieurs ordres de grandeurs sur des durées de vie très brèves [12, 26, 166]. Ce flash thermique est difficile à mesurer sur des essais mais a déjà été rencontré dans des résultats numériques impliquant des éléments finis [79]. Ces pics de température sont causés par un échauffement local et à haute intensité (i.e. efforts, vitesse, coefficient de frottement élevés), qui est exactement la configuration rencontrée pour le présent modèle de stator. Cet écart de température est causé par la disparité des efforts de contact entre les nœuds simples et les nœuds vis avec des raideurs ajoutées. Sur la Figure V.23a, les nœuds sont identifiés par la variable k et il est clair que l'effort normal pour une vis est toujours supérieur par rapport aux autres nœuds jusqu'à un facteur 4. Par conséquent, la source de chaleur nodale en Figure V.23b

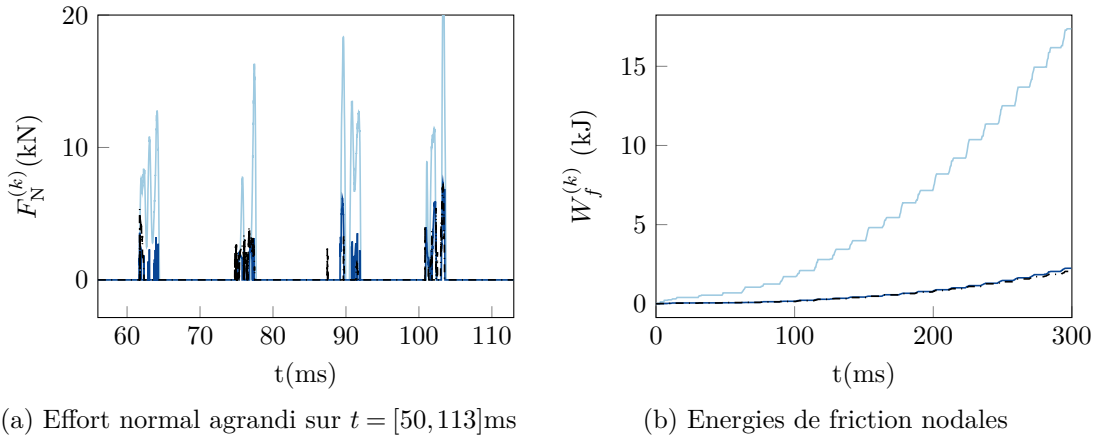


FIGURE V.23 – Mise en évidence de la disparité des efforts de contact et du frottement entre les nœuds vis et normaux $N_e = 36$: $k = 9$ (4^{ème} vis) (—), $k = 10$ (—), $k = 11$ (---)

est bien supérieure aux vis. En quelque sorte, les nœuds vis représentent des « aspérités à forte rigidité », des points durs ponctuels en raison des conditions de fixations qui leurs sont imposées.

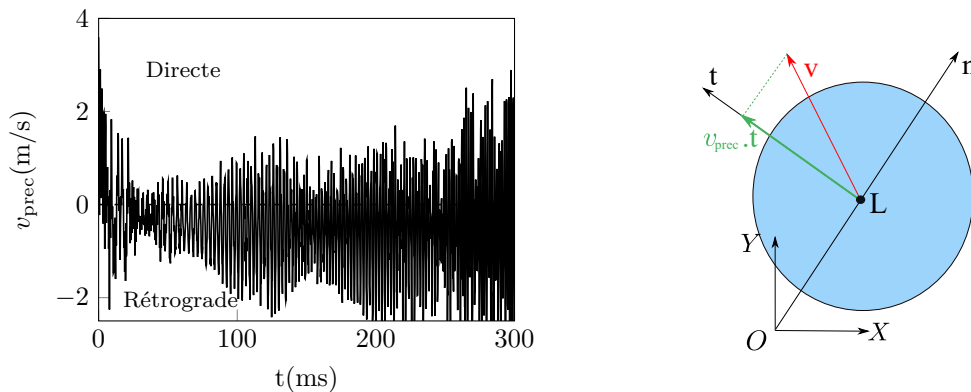


FIGURE V.24 – Vitesse de précession globale du labyrinthe

Pour ce cas de référence, on peut déduire que le frottement permet de limiter la survitesse avec une valeur maximale proche de la limite autorisée. L'augmentation de l'effort et la vitesse de précession du labyrinthe confirment le déclenchement de précession inverse. En étant rigoureux, la vitesse de précession dans le cas d'un stator flexible devrait être définie localement aux nœuds puisqu'elle est calculée selon $v_{\text{prec}}^k = v_{\text{T}}^k - R\Omega$ qui fait intervenir la vitesse relative tangentielle

locale au nœud k . Dans cette section, on peut estimer la vitesse de précession de manière globale en la définissant comme la vitesse circonférentielle du centre de gravité du labyrinthe. Cette vitesse est calculée suivant la relation

$$v_{\text{prec}} \approx \frac{-y_l}{\sqrt{x_l^2 + y_l^2}} \dot{x}_l + \frac{x_l}{\sqrt{x_l^2 + y_l^2}} \dot{y}_l, \quad (\text{V.57})$$

et est affichée en Figure V.24 pour le maillage à 36 nœuds uniquement pour plus de visibilité. Le graphe confirme que la vitesse de précession est majoritairement négative et augmente en amplitude. Le phénomène de précession inverse est amplifié avec le temps mais aucun déclenchement en dry whip n'est prédit. En effet, le contact est partiel pour toute la durée de la simulation. Dans l'optique d'un futur modèle avec un maillage 3D, il est utile d'identifier

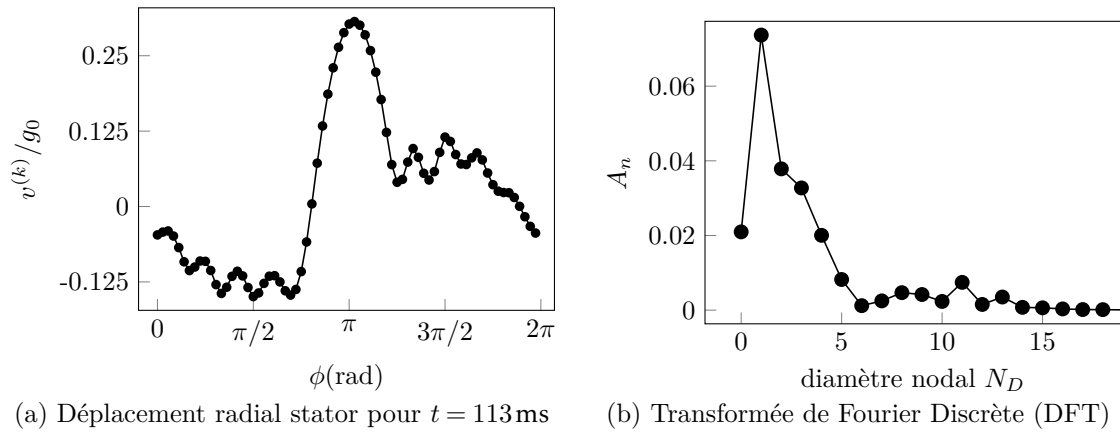


FIGURE V.25 – Contenu spectral de la déformée de l'anneau

les nombres d'onde, c-à-d les diamètres nodaux contenus dans la déformée du stator. Il faut noter qu'une dominance d'un diamètre nodal dans la réponse du stator n'est pas une condition suffisante pour conclure à une résonance sur ce mode. Il faudrait également une correspondance en fréquence de la réponse avec le mode associé.

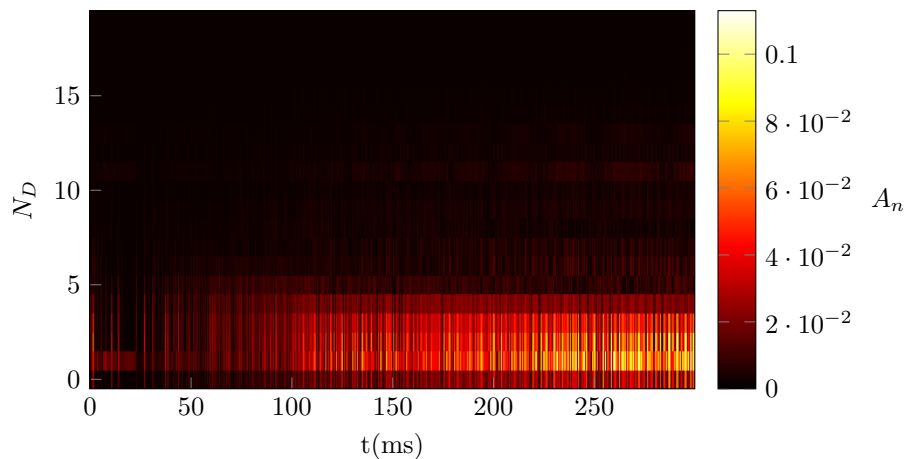


FIGURE V.26 – Spectrogramme diamètre-temps du stator : $N_e = 72$ et $\mu = 0,1$

A titre d'exemple, l'étude est réalisée sur le maillage le plus fin, soit 72 nœuds. Le contenu spectral du stator peut alors être calculé jusqu'à 36 diamètres nodaux. En partant des déplacements radiaux adimensionnés v/g_0 sur la circonférence du stator à un instant donné (en fin

de simulation pour la Figure V.25a), la pondération de chaque diamètre n est fournie par la transformée de Fourier discrète

$$A_n = \frac{1}{N_e g_0} \sum_{k=0}^{N_e-1} v_k e^{-2\pi i \frac{kn}{N_e}}. \quad (\text{V.58})$$

Les coefficients en Figure V.25b sont calculés en pondérant par le nombre de nœuds pour avoir l'amplitude de chaque mode spatial. Cette dernière est alors adimensionnée par rapport au jeu initial g_0 entre le rotor et le stator. En fin de simulation, on constate donc que seuls les modes à faibles diamètres, au plus $n = 6$, contribuent à la déformée de l'anneau. Cette opération est alors réalisée sur plusieurs instants discrets pour dresser le spectrogramme en diamètre-temps en Figure V.26. Il confirme la participation des modes à faibles diamètres uniquement, en particulier les modes à 1,2 et 3 diamètres. Celui à un diamètre est d'ailleurs bien visible en fin de simulation par l'existence d'un lobe principal. Le spectrogramme confirme aussi l'augmentation d'amplitude de la vibration du stator dans l'intervalle de temps. Le spectrogramme pour 36 nœuds fournit des résultats similaires et n'est donc par repris ici.

6.2 Influence du coefficient de frottement

L'influence du coefficient de frottement sur la réponse dynamique est analysée en prenant pour μ les valeurs : 0,12 ; 0,15 et 0,2. Augmenter davantage le coefficient de frottement fournit

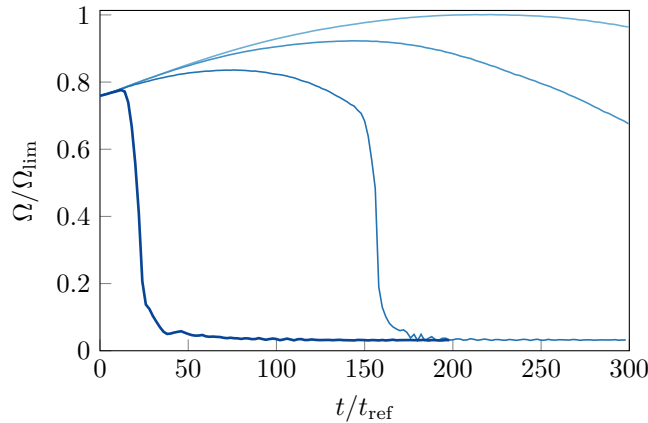
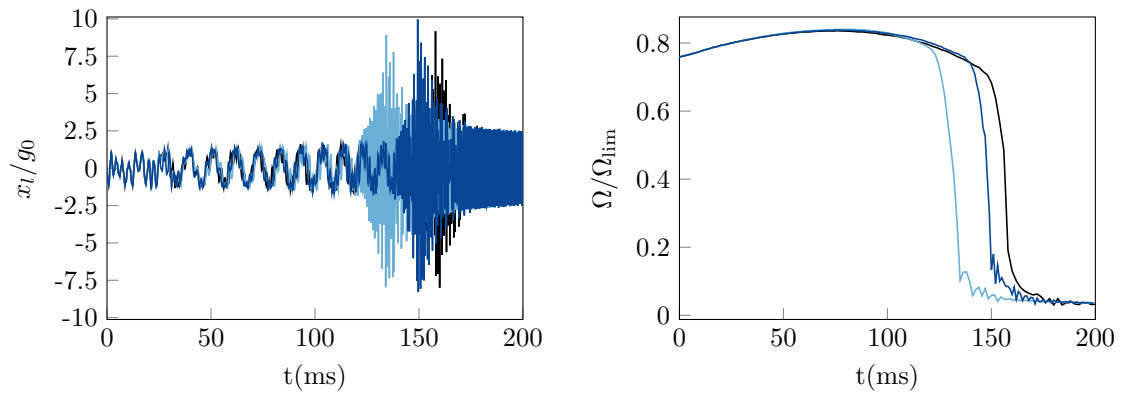


FIGURE V.27 – Sensibilité du transitoire de vitesse au coefficient de frottement :
 $\mu = 0,1(\text{ref})(\text{—}), \mu = 0,12(\text{—}), \mu = 0,15(\text{—}), \mu = 0,2(\text{—})$

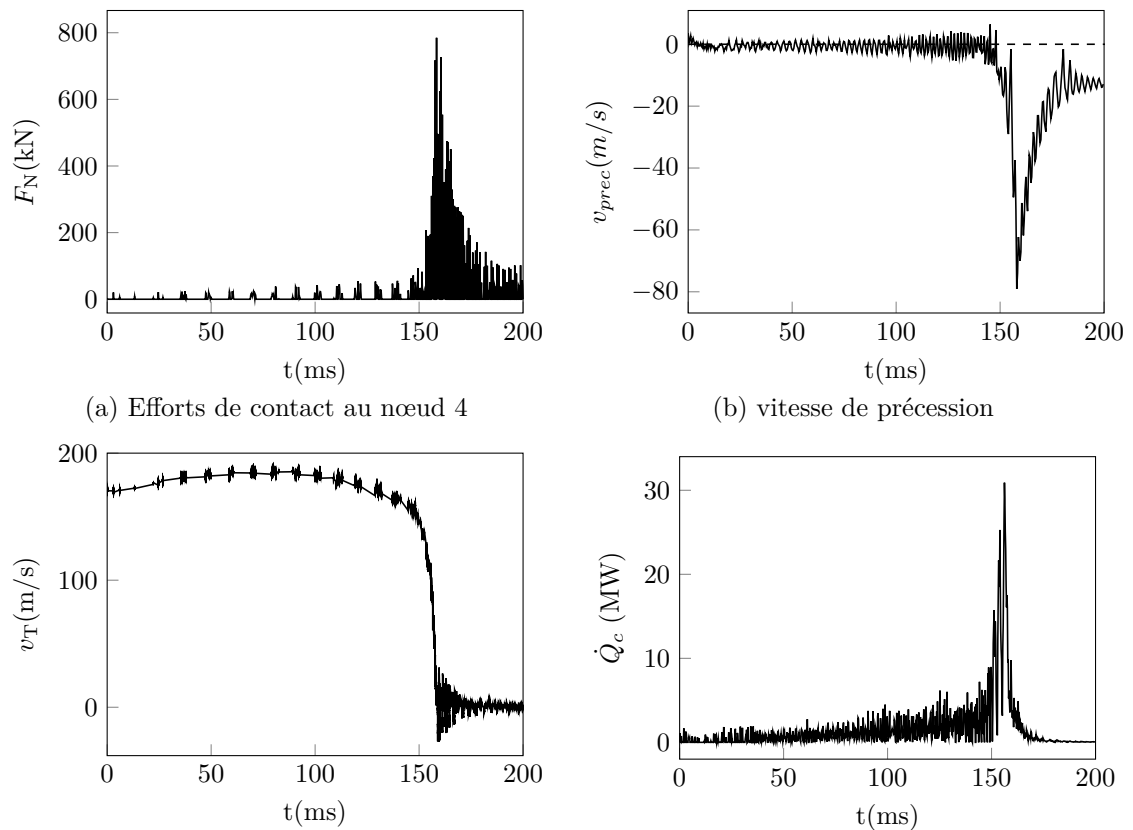
une solution où la vitesse de rotation Ω_{\max} est nettement inférieure à Ω_{\lim} . Cependant, les simulations avec $\mu = 0,15$ et $\mu = 0,2$ indiquent aussi une chute brutale de la vitesse de rotation qui intervient de plus en plus tôt à mesure que le coefficient de frottement augmente. Ce phénomène avait également été observé dans [42, 133] qui mettait en garde sur le choix du coefficient de frottement qui gouvernait la violence du régime en précession inverse. Afin de mieux comprendre la succession d'évènements qui aboutit à cette chute sur la vitesse de rotation, nous nous intéressons à la solution pour le cas $\mu = 0,15$. Ce dernier est à nouveau testé pour deux maillages plus fins respectivement à 48 nœuds (pas de temps de $h = 3 \times 10^{-7}$ s) et 60 nœuds ($h = 2 \times 10^{-7}$ s) qui indiquent aussi une forte décroissance de la vitesse de rotation mais avec un déclenchement à un instant légèrement différent selon le maillage. Si on s'intéresse au déplacement du rotor, on peut noter dans les deux cas une amplification de sa vibration. Les trois solutions sont parfaitement superposées pendant pour $t < 30$ ms, puis un déphasage se met en place. Celui-ci peut expliquer pourquoi l'instabilité n'est pas tout à fait détectée au



(a) Déplacement horizontal du labyrinthe

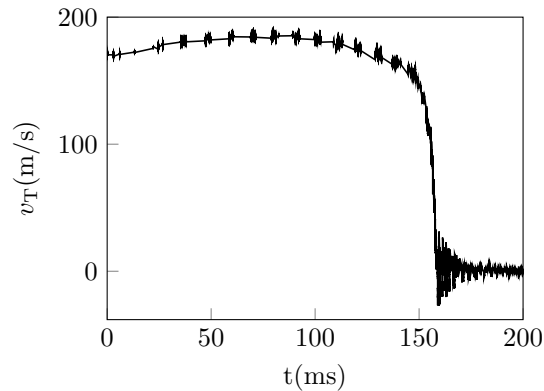
(b) Vitesse de rotation

FIGURE V.28 – Étude de convergence de la détection du dry whip pour $\mu = 0,15$:
 $N_e = 36$ (—) $N_e = 48$ (—), $N_e = 60$ (—)

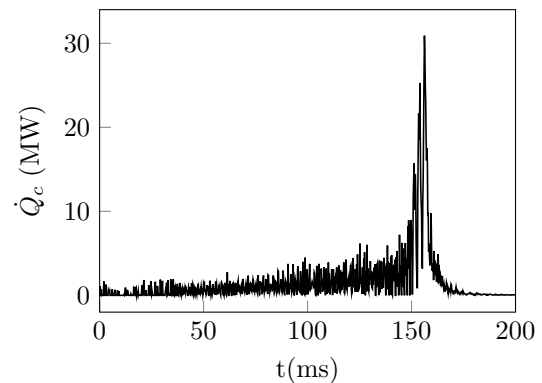


(a) Efforts de contact au nœud 4

(b) vitesse de précession



(c) Vitesse de glissement filtrée sur les occurrences de contact à la vis 4



(d) Puissance de friction globale

FIGURE V.29 – Mise en évidence de la précession inverse : cas $N_e = 36$

même moment. Néanmoins, il faut noter une amélioration de la concordances des solutions par rapport au modèle précédent qui employait un stator rigide. Auparavant, le solveur ne parvenait pas à identifier correctement l'instant de déclenchement de la chute en vitesse : diviser le pas de temps par 2 menait à un écart sur l'instant de déclenchement d'au moins 100ms. A présent ce phénomène peut être détecté dans une fenêtre de 25ms entre les simulations. Ce qu'il faut comprendre, c'est que la précession inverse en dry whip reste un phénomène connu

pour son instabilité et l'apparition de grands efforts de contact (cf Figure V.29a pour la vis n°4). Cette augmentation est donc également ressentie sur le couple de frottement. L'augmentation du couple frottant implique une décroissance de la vitesse de rotation de plus en plus forte. L'orientation de l'effort de frottement lors d'une précession inverse implique que cette force vient renforcer ce régime instable et la vitesse de précession devient de plus en plus négative (cf Figure V.29b). Cette amplification de la vibration du système prend alors une tournure exponentielle qui s'interrompt lorsque la vitesse relative tangentielle locale au contact s'annule. Son expression en fonction des vitesses de rotation et de précession est rappelée ci-dessous

$$v_T(t) = R_l \Omega(t) + r(t)v_{\text{prec}}(t), \quad (\text{V.59})$$

où $r(t)$ est la coordonnée radiale du rotor. Il devient clair qu'une baisse du premier terme et une augmentation en valeur absolue du second tend à annuler la somme. Cela est confirmé en Figure V.29c où v_T pour la vis 4 a été filtré sur les occurrences de contact et présente des oscillations proches de zéro. Dans ce cas, les efforts de frottements aux nœuds en contact ne travaillent plus, comme l'indique le transitoire de la puissance de friction globale qui tend vers zéro en Figure V.29d, et la vibration des deux structures s'atténue. La conversion de l'énergie cinétique en rotation vers la vibration est mise en évidence en Figure V.30.

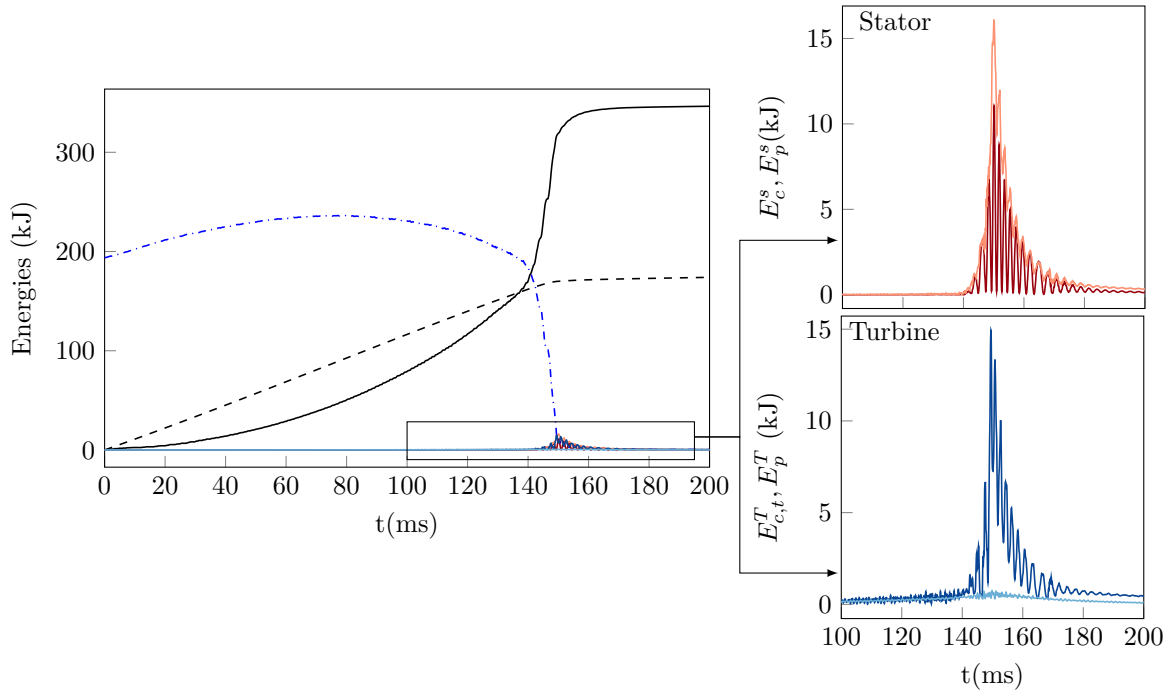


FIGURE V.30 – Suivi des transferts d'énergie liés au dry whip. Pour la turbine, l'énergie mécanique se décompose en énergie cinétique en rotation de $E_{c,r}^T$ (---), transversale $E_{c,t}^T$ (—) et en énergie potentielle E_p^T (—). Le stator est doté d'énergie potentielle E_p^s (—) et cinétique E_c^s (—) et les travaux du couple aérodynamique W_τ (--) et de frottement W_f (—)

L'énergie mécanique de la turbine est décomposée en trois contributions : l'énergie cinétique de rotation propre $E_{c,r}^t$ et de mouvement transversal $E_{c,t}^t$, ainsi que l'énergie potentielle E_p^t . Il en est de même pour le stator dont l'énergie est répartie entre cinétique (E_c^s) et potentielle (E_p^s). Au début de la simulation, la quasi-totalité de l'énergie interne du système correspond à la rotation de la turbine. Lors de la phase de contact partiel, l'apport d'énergie par le travail du couple aérodynamique W_{tau} est supérieur à la perte causée par le frottement et la turbine

accélère. Néanmoins, W_f revient progressivement au niveau de W_τ au cours du temps. Cela implique que l'énergie cinétique de rotation revient à son niveau initial. Puis, pendant le dry whip, la majeure partie de l'énergie de rotation est perdue sous forme de frottement (W_f), mais il est clair que l'énergie cinétique transversale de la turbine et du compresseur ont augmenté de façon significative. Pour la turbine, le ratio d'énergie potentielle sur cinétique est très faible puisque $E_p^T < 1\text{kJ}$ alors que $E_c^T \approx 15\text{kJ}$. Pour le stator, il y a presque une équipartition entre l'énergie de vibration et de déformation. Enfin, il est possible de clairement distinguer la

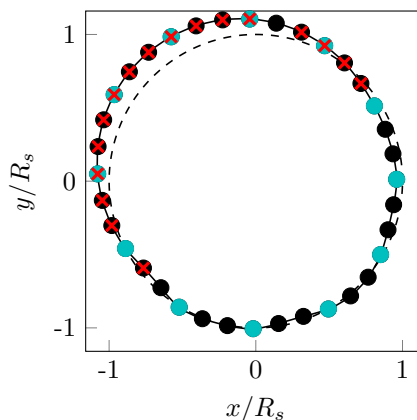


FIGURE V.31 – Déformée du stator au repos (---) lors de la phase instable en dry whip (●) avec mise en évidence des nœuds vis (●) et des points de contact (x)

transition du dry whip au *dry whirl* sur la Figure V.30. La source de chaleur nulle au niveau du stator correspond à un plateau du travail des efforts frottants puisque $W_f(t) = 2 \int_0^t \dot{Q}_c(t) dt$. On rappelle que le facteur 2 intervient en raison d'une répartition égale de la chaleur générée entre le rotor et le stator. D'autre part, étant donné la faible vitesse de rotation de la turbine, le couple aérodynamique ne travaille presque plus non plus, ce qui explique l'atteinte d'un plateau pour W_τ également.

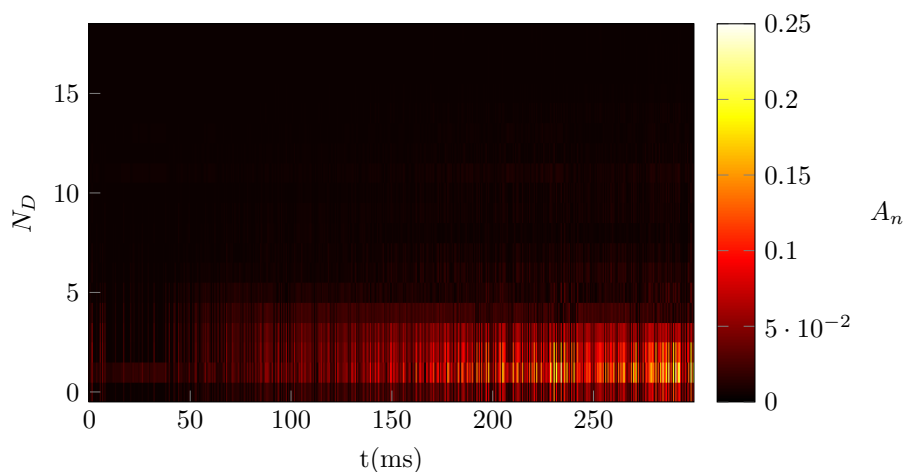
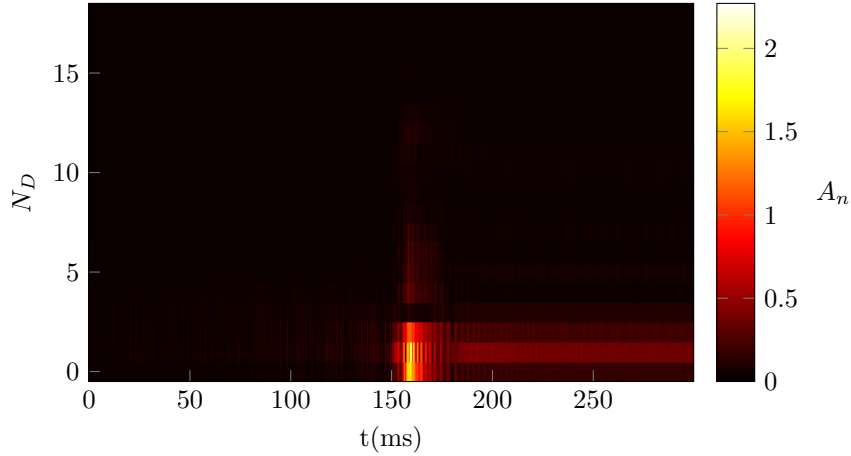


FIGURE V.32 – Spectrogramme espace-temps du stator : $\mu = 0,12$

Les spectrogrammes en espace de la déformée de l'anneau sont également calculés pour $\mu = 0,12$ et $0,15$. Pour $\mu = 0,12$, le spectre des déplacements du stator est identique au cas de référence, avec une dominance des modes à 1,2 et 3 diamètres puis une décroissance des coefficients de Fourier qui deviennent négligeables pour $n > 6$. La différence principale réside sur la valeur de ces coefficients dans la barre de couleur. Celle-ci a doublé par rapport à $\mu = 0,1$,

FIGURE V.33 – Spectrogramme espace-temps du stator : $\mu = 0,15$

ce qui reflète une amplification des déplacements du stator. Néanmoins, le dry whip en contact permanent n'a pas lieu pour ce coefficient de frottement et donc les amplitudes de ces ondes spatiales restent raisonnables ($< 0.25g_0$). Ce n'est pas le cas pour $\mu = 0,15$, où l'amplification de la vibration du système est également mise en évidence dans le spectrogramme en Figure V.33. En effet, la valeur maximale d'amplitude d'une onde à diamètre peut cette fois monter à plus de $1.87g_0$. Même si les modes à un diamètre et d'ovalisation ($n = 2$) restent dominants, on peut noter la présence plus nette de diamètres secondaires, allant de 5 à 12. Le fait que les pics semblent continus après le dry whip sont un indicateur de contact permanent.

Pour finir, même si cette forte précession inverse est cohérente au travers des différents résultats, il faut garder à l'esprit les limitations du modèle. L'application d'efforts de contacts aussi grands (jusqu'à $\approx 800\text{kN}$ pour un nœud vis) et les grands déplacements du stator en phase de dry whip (voir Figure V.31) pose la question de la validité de l'hypothèse de la déformation élastique³. De plus, tout l'arbre, notamment la section au niveau du labyrinthe, est parfaitement rigide. L'effort de contact ne peut donc pas engendrer de déformation du rotor mais uniquement un déplacement de corps rigide.

6.3 Raideur et nombre de vis

Dans le modèle rigide, la modification de la raideur avait une influence sur la survitesse de sorte qu'il était préconisé de maximiser la raideur des supports. Dans le modèle actuel, il est possible de piloter la raideur via

- Le nombre de vis ;
- La raideur des ressorts.

Dans un premier cas le nombre de vis est diminué à 5. Sans autre modification, la raideur globale de support diminue également. Comme attendu, la limitation de la survitesse intervient toujours mais avec moins d'efficacité. La vitesse limite est franchie et le transitoire atteint la valeur maximale de $\Omega_{\max} = 1.117\Omega_{\text{lim}}$. Le profil de température en fin de simulation confirme que ce sont les vis qui subissent les plus grands flux de chaleur et donc les plus grands efforts de contact. Pour le cas à 5 vis, la température loin des vis a baissé. Elle se situe entre 582°C et 1014°C ,

3. Pour de l'acier, la limite d'élasticité peut atteindre $\sigma_y \approx 1\text{GPa}$ [158] et la loi d'élasticité donne $E\epsilon_{ss} \approx Ev/R_s \approx 41\text{GPa}$, ce qui est bien au-delà de la limite de validité pour l'hypothèse de déformation élastique. Cette estimation doit être évaluée avec précaution d'autant plus que la structure est suspendue à des ressorts. Le déplacement radial est la combinaison de la déformation structurelle et d'un déplacement d'ensemble

avec une moyenne de 815°C , ce qui représente 9.84% de moins que pour le cas de référence. Ce résultat peut sembler contradictoire avec l'augmentation de la vitesse de rotation et donc de la vitesse relative tangentielle. En effet, cette dernière sur l'ensemble des nœuds, finit par atteindre 250m/s alors que le cas de référence indique que $v_T < 223\text{m/s}$. Cette augmentation de v_T est en fait compensée par des efforts de contacts plus faible compte tenu que le stator a été assoupli, ce qui est cohérent avec l'état de l'art présenté au Chapitre II. A titre illustratif, cet effort normal est représenté pour les deux cas sur le nœud de coordonnée polaire $\pi/9$ en Figure V.35a. On peut également noter qu'il y a moins d'occurrences de contact lorsque $n_v = 5$ puisqu'elles passent de 23 à 16 seulement mais ces dernières durent plus longtemps. En effet, pour $n_v = 12$, la durée d'un contact ne dépasse pas 3ms tandis que cette valeur peut monter à 5ms avec $n_v = 5$. Les effort de contact plus faible, malgré une vitesse de glissement plus élevée, expliquent pourquoi le travail de l'effort frottant est plus faible pour $n_v = 5$, voir Figure V.35b.

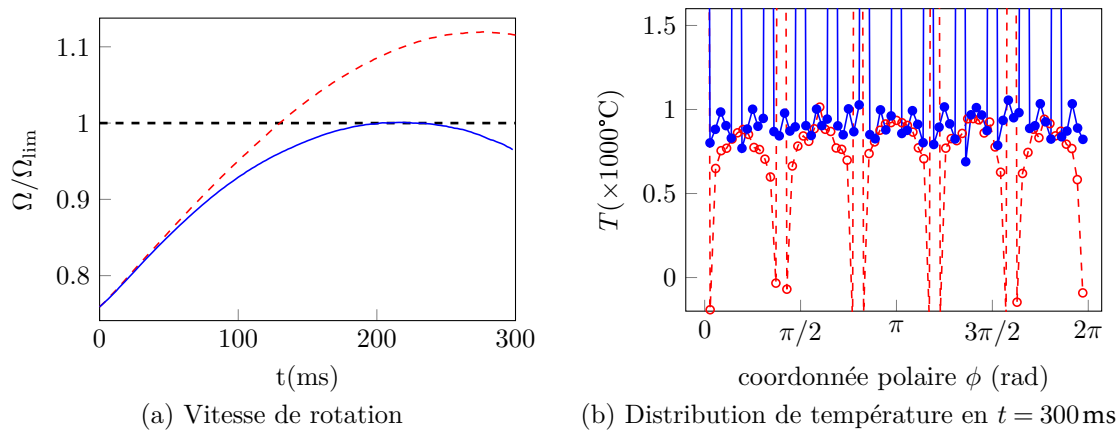


FIGURE V.34 – Sensibilité de la réponse thermomécanique au nombre de vis, sans changer la raideur par vis : $n_v = 12$ (ref) (—), $n_v = 5$ (---)

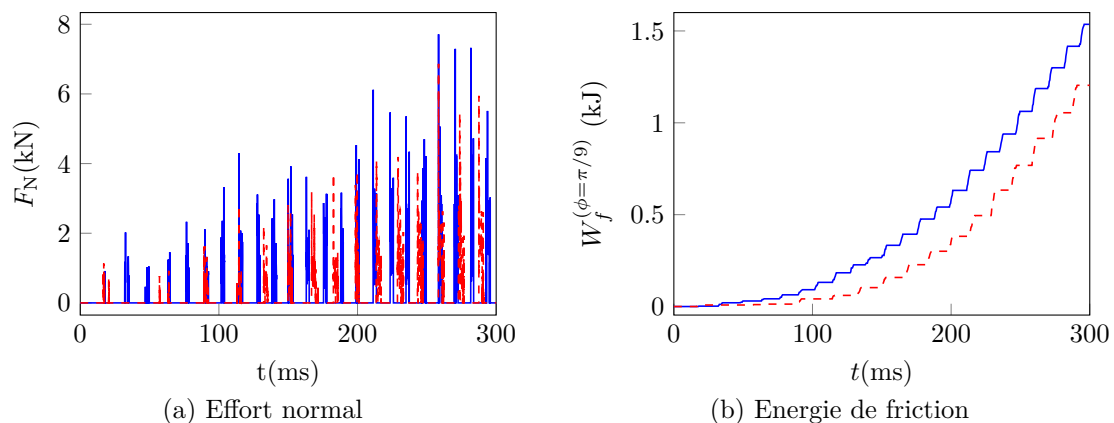


FIGURE V.35 – Influence du nombre de vis sur les quantités associées au nœud positionné sur le stator par $\phi = \pi/9$: $n_v = 12$ (ref) (—), $n_v = 5$ (---)

Il faut se rappeler qu'il s'agit d'une phase exploratoire. L'anneau n'est pas supporté par des ressorts en réalité mais est rattaché au diffuseur et au distributeur, qui sont des pièces complètes. Ainsi, en pratique, réduire le nombre de vis n'implique donc par forcément un assouplissement du système. Une nouvelle analyse dans ANSYS devrait être effectuée afin d'adapter les valeurs de k_A , k_{Bu} et k_{Bv} .

Dans la seconde étude paramétrique, les raideurs k_{Bu} et k_{Bv} subissent une modification de 10% (en augmentation puis en réduction) mais le nombre de vis reste fixé à 12. A noter que le coefficient de Rayleigh est maintenu à $r_k = 10^{-6}$ et donc l'amortissement varie dans la même proportion. L'augmentation de la raideur amène à une diminution du pas de temps critique pour la stabilité de la résolution numérique qui passe à $h = 3 \times 10^{-7}$ s. Les profils de vitesse de rotation affichés en Figure V.36 restent en adéquation avec les résultats fournis pas le modèle avec un stator rigide. Augmenter la raideur du système implique une baisse de l'extremum de vitesse. Pour une raideur 10% plus faible, Ω_{\max} dépasse Ω_{\lim} de 7% alors que pour le système plus raide de 10%, $\Omega_{\max} = 0.95\Omega_{\lim}$. L'effort de contact qui croît avec la raideur est justifié en Figure V.37a qui représente l'effort normal sur la 3^{ème} vis. Si les niveaux d'effort sont semblables pendant les 20 premières millisecondes, la force normale évolue avec une amplitude plus élevée pour le système plus raide.

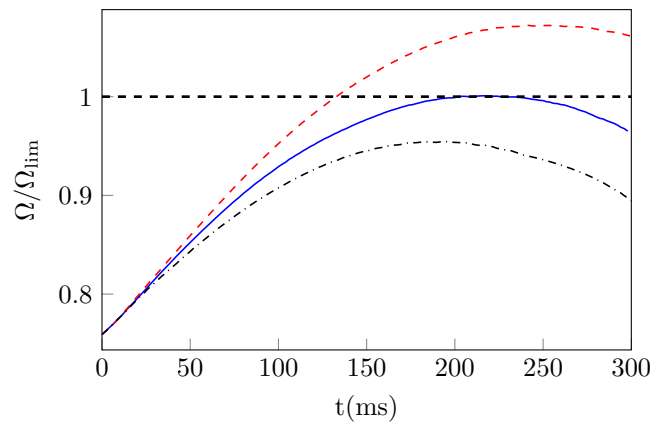


FIGURE V.36 – Sensibilité du transitoire de vitesse de rotation à la raideur des supports :
reference (—), -10% (---), +10% (---)

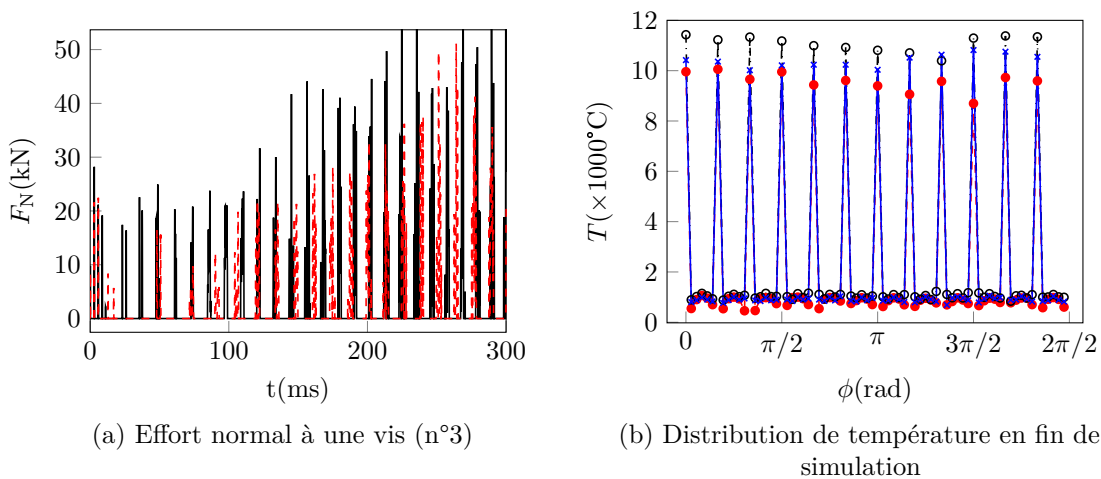


FIGURE V.37 – Sensibilité de la solution thermomécanique à la raideur des supports :
-10% (---), +10% (---)

Par conséquent, la chaleur générée aux vis augmente davantage, tout comme la température, comme le montre la Figure V.37b, qu'en $t = 300$ ms. Cette augmentation de température doit tout de même être considérée avec précaution et plutôt d'un point de vue qualitatif. Si le lien de cause à effet est avéré entre raideur et température, ces dernières sont largement supérieures

au point de fusion. Or, la fusion n'a pas été prise en compte dans le modèle. En réalité, il faudrait donc s'attendre à davantage d'usure par fusion aux vis. D'autre part, la température moyenne loin des vis est proportionnelle à la raideur. Pour une structure 10% plus (resp. moins) raide, la moyenne vaut $T = 1032^\circ\text{C}$ (resp. $T = 828^\circ\text{C}$). Dans le premier cas, il faut noter que la température atteint localement 1226°C . Cela implique donc que si la température initiale est non-nulle ($T_0 \approx 300^\circ\text{C}$), alors de la fusion intervient aussi en dehors des vis.

6.4 Géométrie de l'anneau

Un aspect qui n'a pas encore été exploré dans cette thèse est la modification de la géométrie du labyrinthe. On s'intéresse donc à la modification du rayon de labyrinthe avec une marge de 10%. Le jeu initial g_0 et l'épaisseur d'anneau e sont maintenus constant et donc les deux valeurs de rayons de fibre neutre R_s considérés varient en valeur absolue de 9.5%.

La modification du rayon moyen a forcément des répercussions sur la masse de l'anneau, qui évolue dans les mêmes proportions. A priori, augmenter la masse du stator engendre un freinage moins efficace mais cette variation de masse reste négligeable ($< 0.4\%$) par rapport à la masse du système complet (anneau+ masse suspendue). Le profil de vitesse de rotation semble plutôt indiquer, voir Figure V.38, qu'augmenter le rayon du labyrinthe est bénéfique pour limiter la sùvitesse. Avec $R_l = 0.9R_{l,\text{ref}}$, la vitesse de rotation Ω_{max} augmente de 1.4%

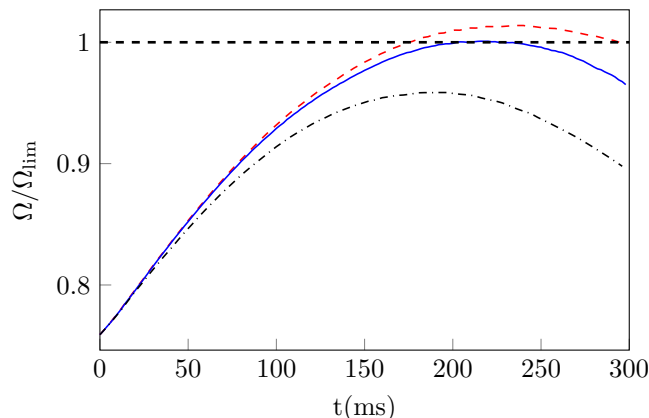


FIGURE V.38 – Sensibilité du transitoire de vitesse de rotation au rayon du labyrinthe :
référence (—), -10% (---), +10% (---)

tandis qu'une baisse de 4.1% est prédite pour $R_l = 1.1R_{l,\text{ref}}$. Si ce résultat semble contradictoire par rapport aux conclusions dressées au Chapitre IV, cela s'explique par l'augmentation du bras de levier en lien avec l'effort de frottement pour générer le couple. En effet, à effort de contact identique, un rayon du labyrinthe plus élevé augmente le couple frottant. La valeur maximale de vitesse de rotation Ω_{max} n'évolue pas dans les même proportions que R_l . En effet, modifier le rayon du labyrinthe a de multiples répercussions sur les propriétés du système rotor-stator dans sa globalité. Il ne s'agit pas d'un paramètre isolé et il semblerait donc qu'il y ait tout de même une influence de la masse de l'anneau.

6.5 Avec dilatation thermique

Jusqu'à présent, le couplage thermomécanique intervenait uniquement par le terme source d'origine mécanique (énergie de friction) dans l'équation de la chaleur. L'autre couplage introduit dans les équations est celui de la dilatation thermique qui, pour rappel, est représenté par la matrice \mathbf{K}^{uT} dans l'Équation (V.33). Le coefficient de dilatation, noté α , prend la valeur de

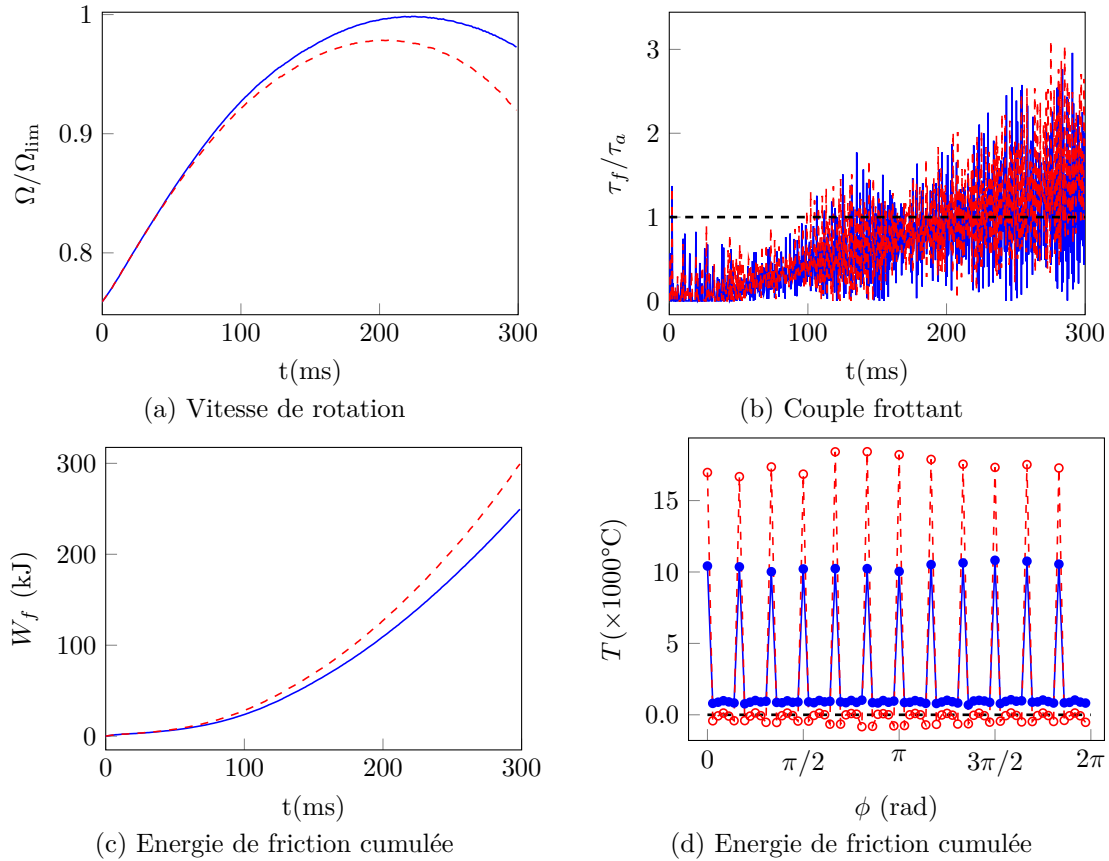


FIGURE V.39 – Réponse thermomécanique globale : $\alpha = 0$ (ref)(—) $\alpha = 1,05 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ (--)

$1,05 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. Afin d'avoir une résolution thermique suffisante, la simulation est lancée avec 72 éléments poutres pour le stator. Les résultats sont comparés en Figure V.39d avec le cas sans dilatation et indiquent à nouveau une capacité de limiter la vitesse de rotation sous Ω_{lim} . Cependant, la valeur maximale Ω_{max} baisse de 2.3% par rapport au cas sans dilatation.

Le couple de frottement indique effectivement un niveau semblable pour les deux cas. Les fortes oscillations sur le graphe rendent sa lecture difficile. A partir de 200ms, on parvient à voir que le couple frottant en présence de dilatation est supérieur à celui sans couplage. On peut alors s'appuyer sur l'énergie de friction pour motiver l'accentuation du frottement avec la dilatation thermique. En fin de simulation cette chaleur s'élève à 300kJ avec dilatation, soit une augmentation de 20% par rapport à la référence (i.e. 250kJ). Pourtant, sur le profil de température, on constate que seuls les vis voient leur température augmenter. La température dans le reste de l'anneau diminue, voire même devient négative alors qu'à nouveau, le frottement agit uniquement comme source de chaleur. Il faut alors s'interroger sur l'origine de ces températures plus faibles au niveau des nœuds normaux. Si effectivement l'énergie apportée à une vis est plus importante (valeurs en Figure V.40a pour la 4^{ème} vis, positionnée à 90°), c'est le contraire qui se produit pour les autres nœuds. A titre d'exemple, la chaleur apportée au nœud 18 juste en amont de la vis n°4, est divisée par deux.

Il est même confirmé que la chaleur cumulée au nœud 18 avec dilatation finit par atteindre un plateau vers 280J, ce qui signifie qu'il n'y a plus d'énergie apportée à ce nœud avec le temps. En effet, l'évolution du jeu au 18^{ème} nœud montre une séparation du contact qui se met en place à partir de 220ms, ce qui n'est pas du tout le cas sans dilatation (cf Figure V.41b). De plus, la distance rotor-stator s'accroît de plus en plus durant la simulation jusqu'à dépasser $3.75g_0$.

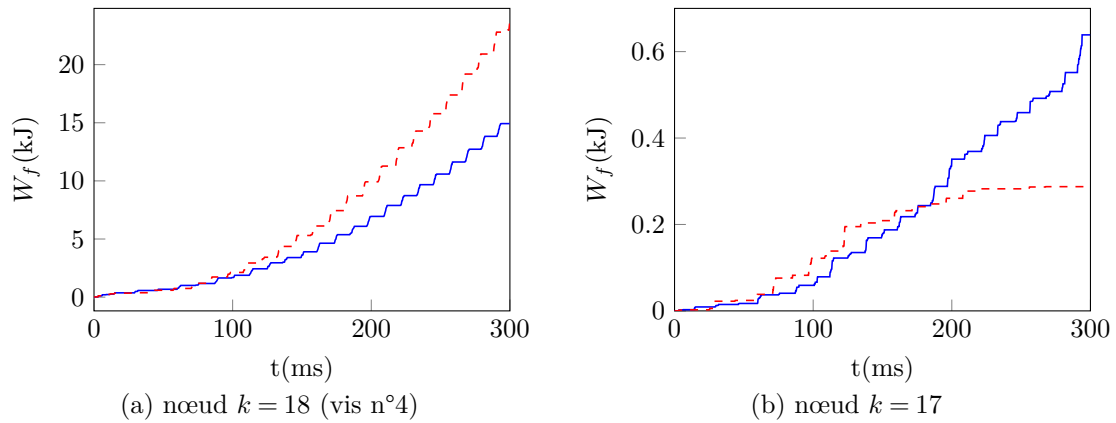


FIGURE V.40 – Energie apportée localement par frottement : $\alpha = 0$ (ref)(—) $\alpha = 1,05 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ (--)

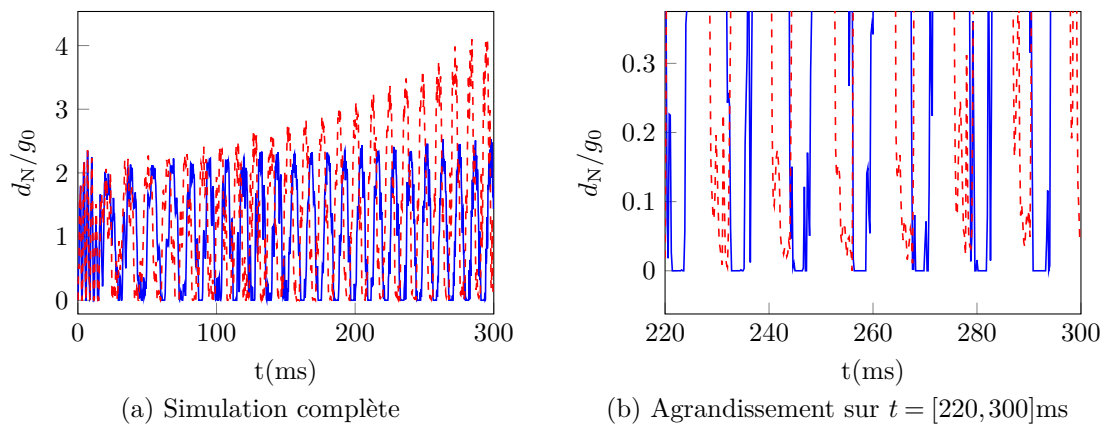


FIGURE V.41 – Fonction jeu au nœud $k = 17$: $\alpha = 0$ (ref)(—) $\alpha = 1,05 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ (--)

L'élargissement de la structure avec la chaleur est donc correctement modélisée. Cependant, il s'avère que toute la structure ne s'étire pas de la même manière, en particulier aux nœuds vis. La Figure V.44 représente la configuration de contact entre le labyrinthe et l'anneau en fin de simulation ($t = 300$ ms), un facteur d'échelle ($\times 5$) a été appliqué pour faciliter la lecture. Le graphe montre que la structure est effectivement dilatée, ce qui augmente de façon générale le rayon de la fibre neutre de l'anneau. En revanche, les conditions aux limites appliquées aux vis (raideur d'attache du diffuseur et de suspension du distributeur) les empêchent de s'éloigner librement. Le stator se déforme alors avec une structure en pétales qui vient privilégier le contact uniquement aux vis. En effet, la figure indique un contact (croix rouge), uniquement au niveau des vis, le reste de l'anneau étant trop éloigné. Cela explique donc pourquoi le frottement est davantage accentué aux vis. Le manque de contact sur le reste de l'anneau qui était déjà minoritaire, semble donc être compensé par un frottement plus accru aux vis et qui permet un ralentissement suffisant de la turbine. Néanmoins, il reste difficile de conclure avec certitude du bénéfice de la dilatation thermique sur la survitesse. La modélisation de la dilatation thermique est un phénomène complexe et tridimensionnel qui est simplifié au maximum dans ce chapitre pour ne retenir uniquement que l'élongation de la fibre neutre. Par contre, ce qui semble certain, c'est que la dilatation thermique n'a pas d'effet négatif sur la vitesse de rotation.

En appliquant à nouveau la transformée de Fourier sur le déplacement radial des nœuds, on constate alors un changement radical sur les diamètres nodaux. Pour $t = 300$ ms, il n'y a pratiquement que le mode à zéro diamètre (dilatation uniforme) et celui à 12 diamètres qui

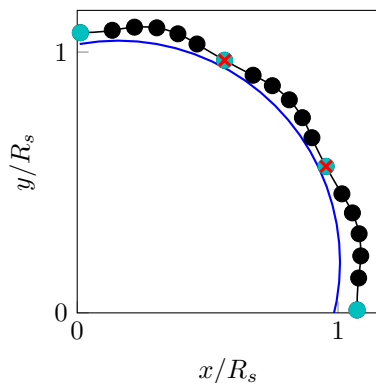


FIGURE V.42 – Configuration de contact rotor (—)/stator (●) en fin de simulation $t = 300$ ms avec indication des nœuds en contact (×) et des nœuds vis (●) pour un secteur de 0° à 90°

ressortent dans le spectre. Cela est également vrai pour toute la simulation, où la Figure V.44 met en évidence la dilatation progressive de l'anneau.

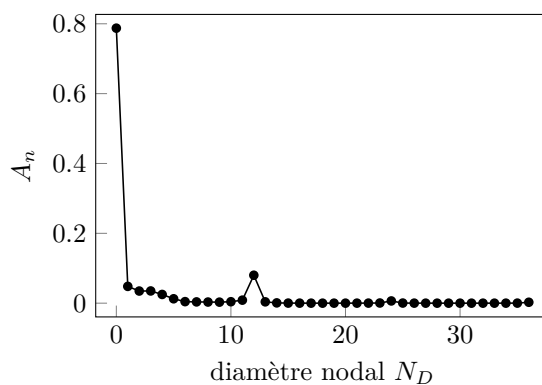


FIGURE V.43 – Décomposition de la déformée du stator sur les diamètres nodaux

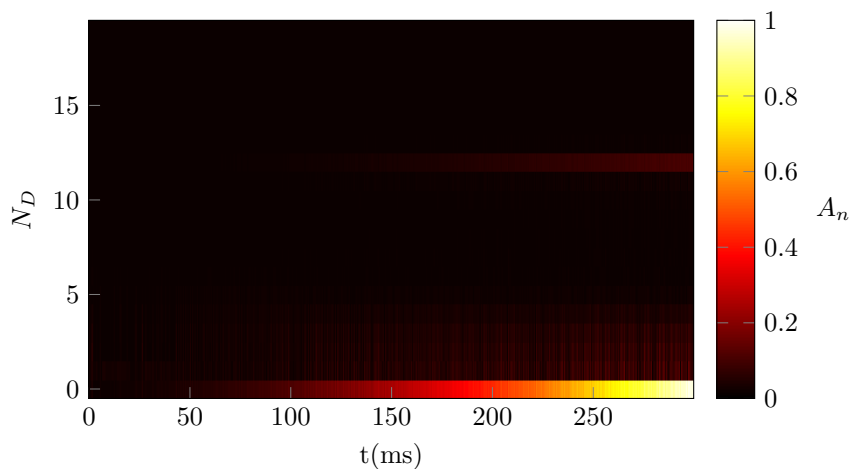


FIGURE V.44 – Spectrogramme diamètre-temps du stator avec dilatation thermique

7 Bilan du chapitre

Les résultats apportés par le modèle où le stator est discrétisé avec des éléments finis de poutre courbes sont dans la continuité du modèle avec corps rigides. Comme attendu, ajouter de la flexibilité au système atténue les impacts tout en autorisant l'apparition de secteurs de contacts grâce à la déformation de l'anneau. Le cas de référence prédit une survitesse bornée à la limite autorisée et, comme pour le modèle rigide, le coefficient de frottement favorise le freinage de la turbine. De plus, l'étude de sensibilité au coefficient de frottement rappelle qu'au delà d'un certain seuil, le phénomène instable de *dry whip* peut être déclenché. Le moment de déclenchement est prédit avec plus de robustesse que le modèle précédent et même si les efforts de contact restent élevés pendant le *dry whip*, ces derniers atteignent des ordres de grandeurs plus réalistes : au plus $\approx 10^5\text{N}$ (pour les vis) contre $\approx 10^7\text{N}$ avec des corps parfaitement rigides. Cependant, il faut aussi retenir que les déformations sont supposées être dans le domaine de l'élasticité linéaire dans ce modèle. Il serait possible d'enrichir la mécanique des structures en prenant compte des déformations plastiques, comme ce qui est proposé dans [139]. De plus, toute la turbine est encore considérée comme parfaitement rigide et sa modélisation peut donc encore être améliorée.

La discrétisation spatiale de l'anneau a également permis d'ajouter la résolution numérique du couplage thermomécanique. En particulier, le profil de température indique systématiquement un échauffement plus intense et localisé au niveau des points de vissage, et cela peu importe leur nombre. L'ordre de grandeur de ces températures, même s'il s'agit de températures flash, indique que des phénomènes plus complexes sont à envisager, comme l'usure et surtout la fusion. Pour de l'acier, la température de fusion se situe autour de 1400°C , qui est largement dépassée au niveau des vis. Il faut aussi souligner que la thermique reste encore très simplifiée et linéarisée. La thermique est réduite ici à un modèle poutre curviligne. Toute la section est isotherme alors qu'il s'agit d'une physique plutôt tridimensionnelle. Les capacités et conductivité thermiques ont été prise comme constantes alors qu'en réalité, ces propriétés sont sensibles à la température. La dilatation thermique est prise en compte mais de manière limitée par l'emploi d'éléments poutres.

En conclusion, ces travaux semblent indiquer qu'un maillage 3D du stator pourrait apporter des données intéressantes. Les conditions de d'assemblage de la structure complète seraient définies directement sur base de la CAO. Par ailleurs, il serait souhaitable de s'affranchir de la simplification des pièces assemblées au stator (i.e. le diffuseur et le distributeur du générateur de gaz) en raideur discrètes. Les propriétés mécaniques des pièces seraient plus réalistes tout comme la répartition des températures sur la circonférence de l'anneau. De plus, la thermique ne sera plus limitée à une dimension le long de la fibre de la poutre. Le maillage 3D thermomécanique pourra être réduit de façon appropriée sur base des méthodes du Chapitre III. La modélisation du système rotor-stator dans le logiciel commercial ANSYS est discutée dans le chapitre suivant.

Chapitre VI

Application industrielle

Sommaire du présent chapitre

1	Modèle carter : géométrie et composants	145
2	Réduction thermomécanique du carter	147
2.1	Paramétrisation de la réduction mécanique	147
2.2	Paramétrisation de la réduction thermique	149
2.3	Nombre de nœuds maîtres	153
3	Turbine flexible à section constante	155
3.1	Mécanique du solide en milieu continu	155
3.2	Equations pour le disque rigide	156
3.3	Discrétisation de l'arbre par éléments finis	157
3.4	Matrices de masses et d'inertie	158
3.5	Terme gyroscopique	159
3.6	Synthèse des équations dynamiques	160
3.7	Analyse modale	161
4	Conditions initiales	162
5	Résultats rotor à section constante	162
5.1	Solution mécanique et convergence en temps	163
5.2	Solution thermomécanique et nombre de nœuds maîtres	169
5.3	Réponse sans torsion	174
6	Application : modèle de turbine sous ANSYS	175
6.1	Géométrie et propriétés	175
6.2	Résultats mécaniques	176
6.3	Résultats thermiques	181
7	Bilan du chapitre	183

1 Modèle carter : géométrie et composants

L'objectif dans cette section est de mettre en place un modèle de carter plus réaliste que celui utilisé dans le chapitre précédent. Par carter, on entend l'anneau qui sert d'enveloppe au labyrinthe (stator) mais également le diffuseur et le distributeur THP auxquels l'anneau est rattaché par des vis. Dans le chapitre précédent, ces deux pièces étaient simplifiées par des ressorts et une masse ponctuelle supplémentaire. Afin d'obtenir des conditions aux limites plus

fidèles, ces deux pièces sont incluses dans la CAO du carter réalisée sous SpaceClaim¹ et sont illustrées schématiquement en Figure VI.1a et Figure VI.1b.

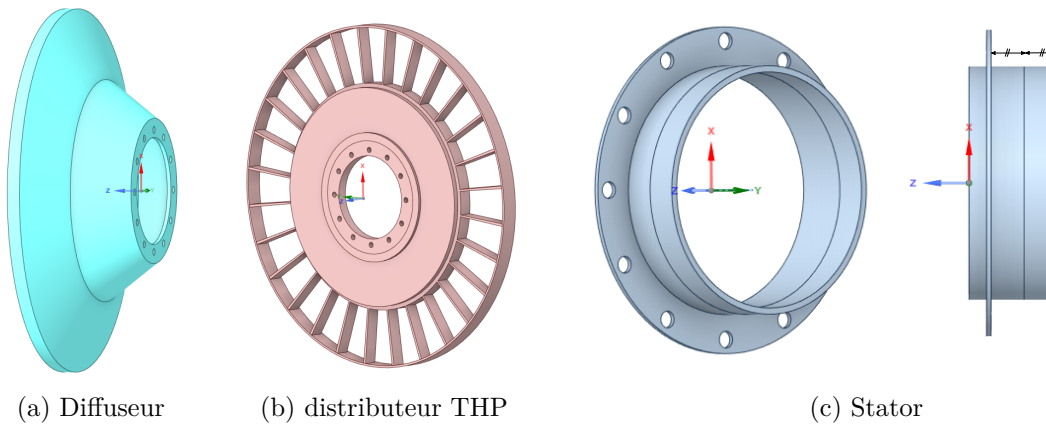


FIGURE VI.1 – Modèles CAO du stator et de ses supports

Le stator, quant à lui, est toujours représenté comme un anneau circulaire à section constante. La différence avec le chapitre précédent est que la section n'est plus rectangulaire mais en T. La branche supplémentaire présente les 12 points de perçage (voir Figure VI.1c). L'assemblage des trois pièces (stator, diffuseur, distributeur) est illustré en Figure VI.2. Les vis ont été négligées dans le modèle et deux zones de contacts collés sont définies aux interfaces entre les pièces

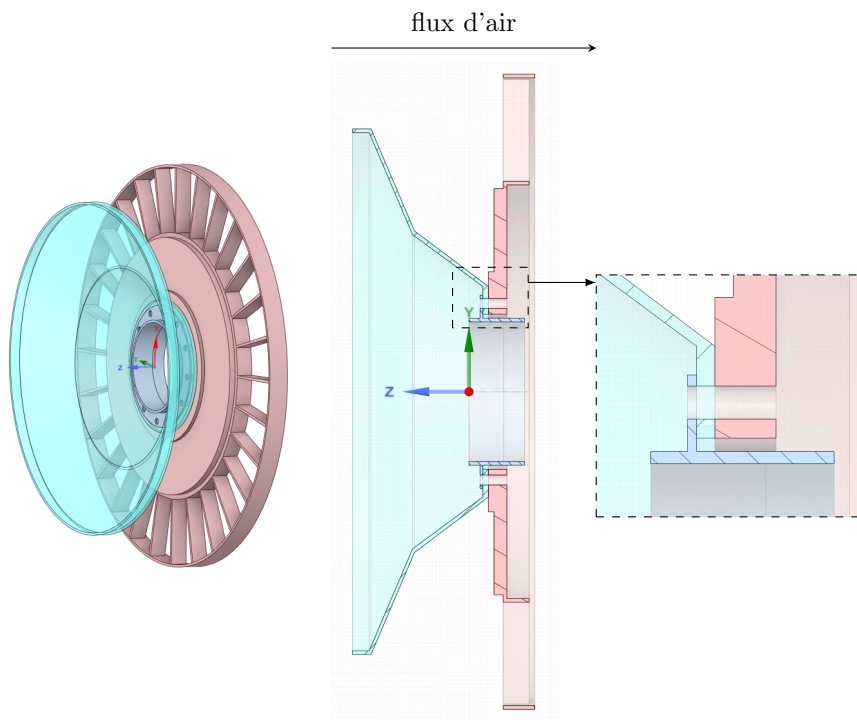


FIGURE VI.2 – Assemblage des pièces formant le carter et mise en évidence des 2 zones de contact

1. Avec Design Modeler, il s'agit des deux logiciels de création et édition de CAO disponibles dans les outils ANSYS

- La première se situe entre la branche du stator et le diffuseur ;
- La seconde entre le diffuseur et le distributeur.

En ce qui concerne les conditions aux limites mécaniques, le stator ne subit aucun pré-chargement. les mouvements de corps rigides sont éliminés par encastrement des faces extérieures du diffuseur et du distributeur (voir Figure VI.3a). Le diffuseur et le distributeur participent seulement à la mécanique du problème. D'autre part, la température est imposée comme nulle suffisamment loin de la zone de contact, ici à l'extrémité de la branche du stator décrit en Figure VI.3b. En effet, compte tenu de la dynamique extrêmement rapide du contact ($< 0,5s$), il est pertinent de supposer que la température au plus loin de l'interface de contact reste fixe. Pour ce modèle,

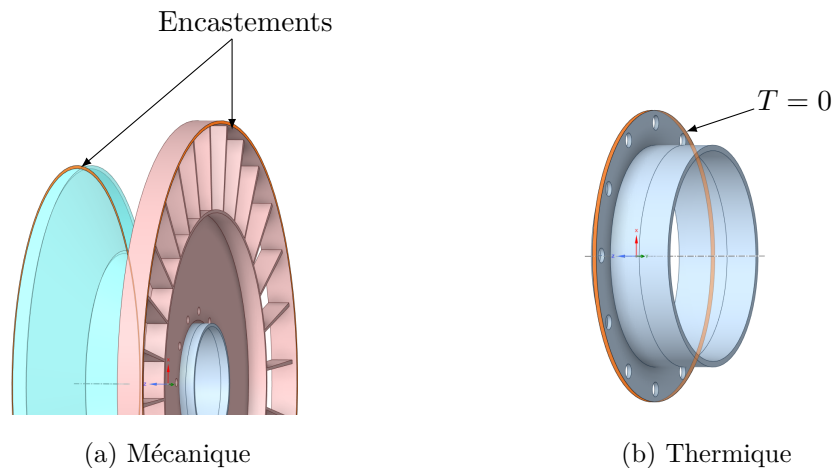


FIGURE VI.3 – Conditions aux limites appliquées aux composants du carter

le matériau retenu est l'acier standard fourni dans les données techniques d'ANSYS (*Structural steel*) et est assigné aux trois composants.

2 Réduction thermomécanique du carter

Dans ce chapitre, comme dans le reste de cette thèse, une seule dent du labyrinthe est prise en compte. Le domaine d'existence pour un contact potentiel se résume donc à un cercle sur le rayon intérieur du stator. Ce dernier est d'ailleurs représenté en Figure VI.1c et est positionné au milieu de l'arrête allant de la branche verticale à l'extrémité droite de la pièce. Cette ligne de construction va donc définir la position des nœuds maîtres lors de la réduction du modèle.

Après application des conditions aux limites, le modèle thermomécanique comporte alors 75120 ddls mécaniques et 3390 ddls thermiques. Un système de cette taille requiert un pas d'intégration temporel très faible, conduisant à des temps de simulation in-envisageable dans un contexte industriel. C'est pourquoi une réduction du modèle mécanique par Craig-Bampton est réalisée par l'outil de sous-structuration déjà disponible dans ANSYS. La réduction thermique n'est pas encore développée dans ANSYS mais il est possible d'extraire les matrices de capacité et de conductivité thermique nécessaires à la mise en place de la base de réduction de Rational Craig-Hale (RCH) présentée en Section III.1.3.3. La réduction thermomécanique complète est réalisée dans un code maison sous python.

2.1 Paramétrisation de la réduction mécanique

Afin de maximiser la précision de la résolution du contact, le nombre de nœuds maîtres sélectionnés sur le cercle de touche n'est pas modifié et est donc fixé à $n_b = 72$, soit 216 dofs

mécaniques. Le paramètre étudié ici est le nombre de modes à interface fixes m qui sont retenus dans la base de réduction de Craig-Bampton. Pour commencer, l'étude de convergence de

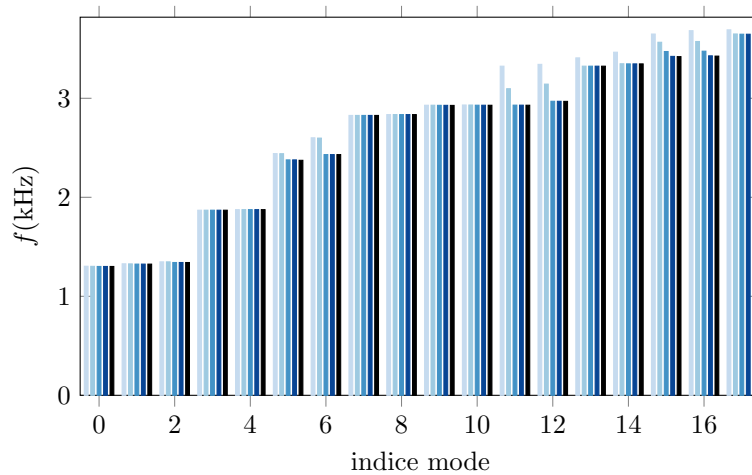


FIGURE VI.4 – Convergence es fréquences propres avec le nombre de modes retenus dans la réduction de Craig-Bampton : complet (---), $m = 20$ (—), $m = 40$ (—), $m = 50$ (—), $m = 60$ (—)

la réduction se base sur la comparaison des modes propres par rapport au modèle complet. On s'intéresse ici aux 18 premiers modes car au-delà, il s'agit surtout de résonances liées à la flexion des aubes du distributeur sans faire intervenir le reste de la structure. Ces derniers ont donc moins d'intérêt pour la résolution du contact rotor-stator. La Figure VI.4 présente des résultats satisfaisants à partir de 50 modes retenus dans la base de réduction. Pour $m = 50$, il reste une erreur relative de 1.4% avec le modèle complet tandis que les fréquences propres sont indiscernables avec $m = 60$.

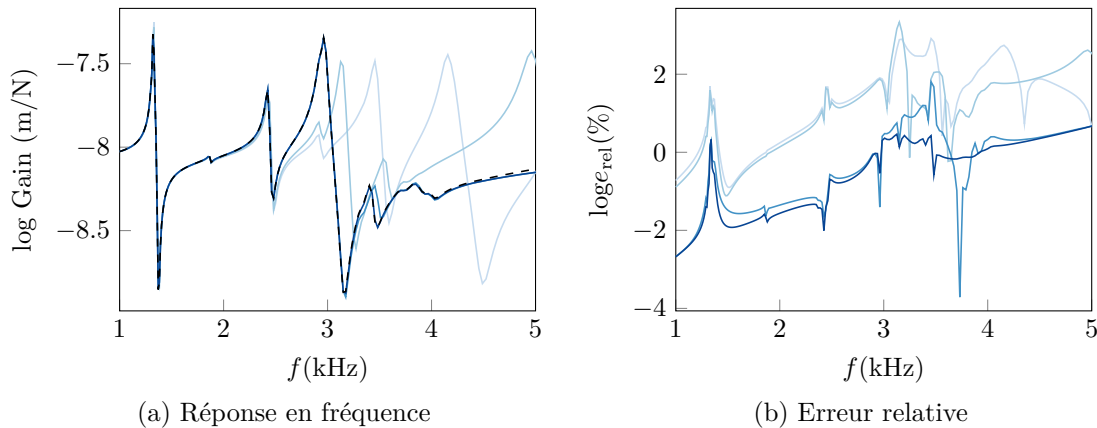


FIGURE VI.5 – Convergence de la réponse en fréquence en déplacement u_x au nœud 631 : complet (---), $m = 20$ (—), $m = 40$ (—), $m = 50$ (—), $m = 60$ (—)

Ensuite, la réponse en fréquence est étudiée en Figure VI.5a afin de valider la qualité de la réduction hors résonances. On choisit de calculer la fonction de transfert colocalisée au premier nœud maître (i.e. le premier nœud maître qui apparaît dans le partitionnement des matrices complètes) avec une excitation sur le déplacement latéral u_x . Afin d'éviter des calculs coûteux, la FRF du système complet est approchée par celle d'un système réduit avec un grand nombre de modes dans la base (ici $m = 200$). A nouveau, ce sont les réductions avec $m = 50, 60$ qui

sont les plus précises. Pour 60 modes retenus dans la base de Craig-Bampton, l'erreur relative e_{rel} affichée en Figure VI.5b reste bornée à 4.66% pour les plus hautes fréquences (5kHz). Il s'agit d'une plage de fréquence bien au-delà du mode de carter d'intérêt le plus élevé et donc le résultat est satisfaisant. Par ailleurs, les Figures VI.5a et VI.5b démontrent que les réductions avec les bases les moins riches peuvent aussi reproduire fidèlement la FRF mais sur une gamme de fréquence limitée à 2,5kHz. Par conséquent, on choisit de retenir la réduction sur une base de 60 modes propres.

2.2 Paramétrisation de la réduction thermique

La paramétrisation de la réduction Rational Craig-Hale est primordiale à analyser, et ce peut importe la physique étudiée. Dans toutes les études de sensibilité réalisées dans cette section, il est supposé que les points d'expansion sont répartis de manière asymptotique dans l'intervalle fréquentiel. Si cette approche peut être discutée en mécanique à cause des fréquences propres [77], elle apparaît pertinente pour la thermique. En effet, l'ensemble des fonctions de transfert nodales s'apparente plutôt à un filtre passe-bas, bien plus régulières que celles obtenues en dynamique présentant un grand nombre de pics de résonances et d'anti-résonances. Conformément à l'approche présentée xxx, il est nécessaire de définir le nombre de point d'expansion de matrices de transfert themiques, la plage fréquentielle, ainsi que l'ordre d'expansion.

2.2.1 Nombre de points et ordre d'expansion

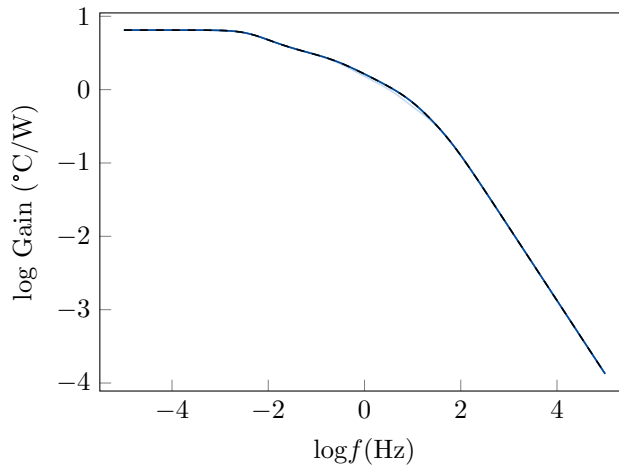
Dans cette thèse, les bornes supérieures et inférieures du domaine d'expansion sont incluses dans les points d'expansion, ce qui oblige à choisir au minimum $p = 2$. L'étude de convergence sur le nombre de points d'expansion est réalisée sur la fonction de transfert colocalisée au premier nœud maître apparaissant dans la structure matricielle complète (ici le nœud 631). A l'oeil nu, le seul cas qui semble se démarquer sur la réponse en fréquence (voir Figure VI.6a) correspond à $p = 2$. La diminution de l'erreur relative e_{rel} est mise en évidence dans les échelles linéaires et logarithmiques pour plus de clarté respectivement en Figures VI.6b et VI.6c. L'erreur diminue clairement avec le nombre de points et la valeur maximale d'erreur passe sous 1% pour $p \geq 6$ ($e_{\text{ref}} = 0.33\%$ pour ce dernier). En revanche, si l'erreur est de l'ordre de la précision machine pour les très basses fréquences, on remarque que La plage d'erreur relative maximale est progressivement réduite et décalée vers les hautes fréquences. Pour $p = 2$ elle vaut $[10^{-2}, 10^1]$ Hz contre $[1, 10^2]$ Hz lorsque $p = 8$.

2.2.2 Ordre d'expansion

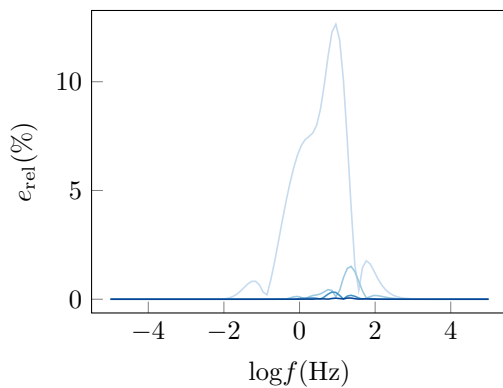
Le second paramètre de la réduction RCH est l'ordre d'expansion l du développement de Taylor de la fonction de transfert. Jusqu'à présent, on a considéré que $l = 0$. Dans cette étude, le nombre de points est fixé à $p = 6$ et les résultats en Figure VI.7 confirment l'amélioration de la convergence qui atteint au plus $10^{-5}\%$ pour $l = 2$. Les fonctions de transfert sont indiscernables de celle du modèle complet et ne sont pas reprises ici. Il est conseillé de garder un ordre faible car ce dernier pilote la taille de l'espace de Krylov selon

$$S_k = n_b p(l + 1) \quad (\text{VI.1})$$

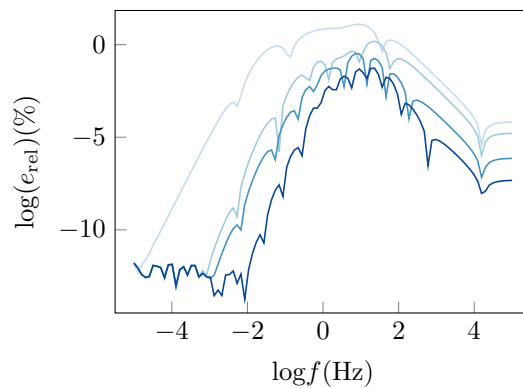
qui peut rapidement augmenter. Pour $l = 0$, sachant que le nombre de nœuds maîtres retenus vaut $n_b = 72$, S_k vaut déjà 432 et monte jusqu'à 1296 avec $l = 2$. Dans la suite des développements, l'ordre 0 est conservé.



(a) Fonctions de transferts

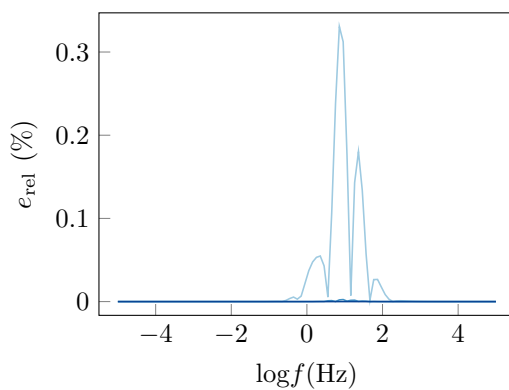


(b) Erreur relative linéaire

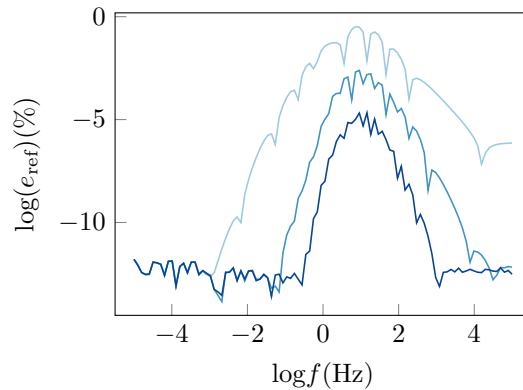


(c) Erreur relative logarithmique

FIGURE VI.6 – Sensibilité au nombre de points d'expansion sur la FRF thermique sur le nœud 631 : complet (---), $p = 2$ (—), $p = 4$ (—), $p = 6$ (—), $p = 8$ (—)



(a) Erreur relative linéaire



(b) Logarithme de l'erreur relative

FIGURE VI.7 – Sensibilité à l'ordre d'expansion de la FRF thermique au nœud 631 : $l = 0$ (—), $l = 1$ (—), $l = 2$ (—)

2.2.3 Borne supérieure des points d'expansion

La borne inférieure reste fixe en une valeur assez faible (10^{-7} Hz) afin de capturer correctement le comportement asymptotique en $s = 0$. Jusqu'à présent, la borne supérieure d'expansion

était imposée à une valeur élevée $f_{\max} = 10^5 \text{Hz}$. Il faut noter que le nombre de points est toujours maintenu à $p = 6$ et l'ordre d'expansion remis en $l = 0$. La Figure VI.8 démontre clairement que la diminution de f_{\max} entraîne une dégradation de l'erreur relative maximale. En effet, $e_{\text{rel}} = 0.57\%$ autour de $f \approx 40 \text{Hz}$. Il s'avère également que plus f_{\max} diminue, plus l'erreur relative asymptotique aux hautes fréquences augmente. Cela est confirmé en Figure VI.8b où

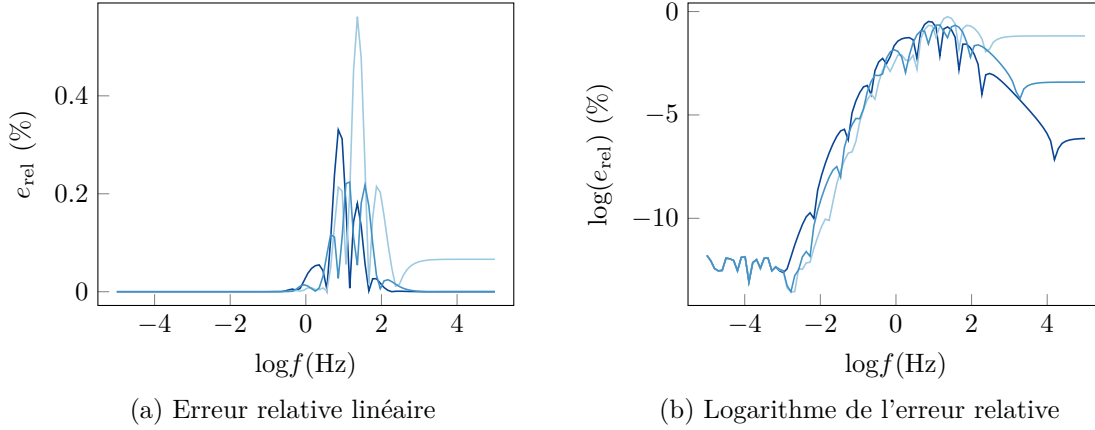


FIGURE VI.8 – Sensibilité de la réponse en fréquence sur la température du nœud 631 : avec la borne supérieure d'expansion $f_{\max} = 10^5 \text{Hz}$ (—), $f_{\max} = 10 \text{Hz}$ (—), $f_{\max} = 1000 \text{Hz}$ (—)

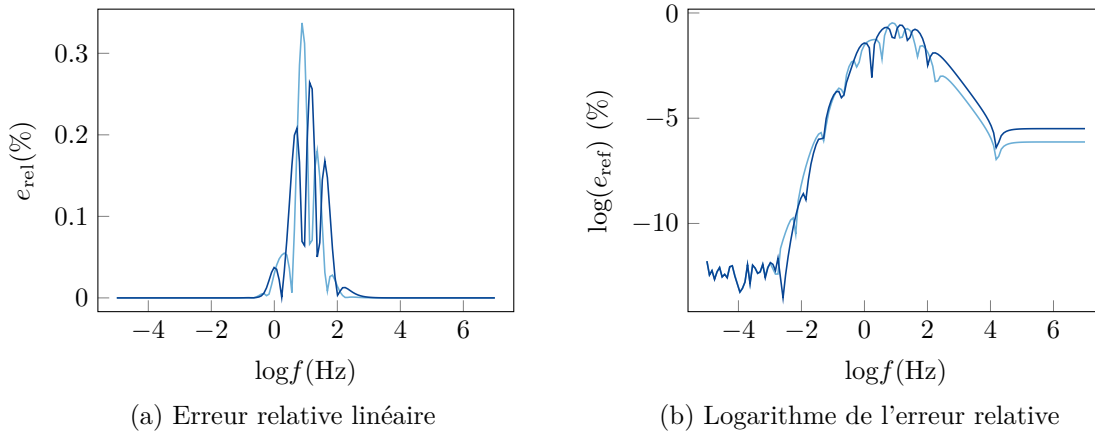


FIGURE VI.9 – Prise en compte de la réponse asymptotique dynamique avec la borne supérieure d'expansion $p = 6$ et $f_{\max} = 10^5 \text{Hz}$ (—), $p = 5$ et $f_{\max} = \infty$ (—)

l'erreur relative aux hautes fréquences se dégrade et atteint un plateau à $e_{\text{rel}} = 0.1\%$ lorsque la borne supérieure diminue à $f_{\max} = 10 \text{Hz}$. Cependant, réduire la borne supérieure implique qu'un même nombre de points d'expansion est choisi sur une plage de fréquence plus courte. La densité de points d'expansion est alors plus importante aux basses fréquences et l'approximation de la fonction de transfert est plus précise. Cela explique pourquoi e_{rel} diminue aux basses fréquences lorsque f_{\max} décroît.

Il est également possible d'inclure le comportement asymptotique dans la base de réduction. L'exemple ci-dessous présente une réduction avec 5 points d'expansion au lieu de 6 mais avec prise en compte du comportement asymptotique dynamique. Ce 5^{ème} point est toujours évalué en $f = 10^5 \text{Hz}$ et le 6^{ème} moment est remplacé par

$$H(s \rightarrow \infty) = -\mathbf{C}_{ii}^{-1} \mathbf{C}_{ib}. \quad (\text{VI.2})$$

La Figure VI.9 montre que dans les deux cas, la réduction du modèle thermique présente des erreurs relatives similaires et satisfaisantes. On peut tout de même noter que lorsque la réponse asymptotique est prise en compte, l'erreur relative maximale baisse à 0,25%. Si cette approche a pu présenter une amélioration dans d'autres travaux [79] pour $f \rightarrow \infty$, on remarque ici que cet ajout n'améliore pas la diminution de l'erreur. En fait, l'erreur augmente légèrement dans la gamme aux hautes fréquences probablement à cause du point d'expansion intermédiaire éliminé.

2.2.4 Troncature de la décomposition aux valeurs singulières

La SVD, ou Décomposition en Valeurs Singulières, consiste à diagonaliser un opérateur linéaire défini par une matrice rectangulaire potentiellement complexe $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{i \times S_k}$ en un produit

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^*. \quad (\text{VI.3})$$

où $*$ est l'opérateur de trans-conjugaison [74, 156]. Compte tenu de la nature de la matrice \mathbf{R} comme matrice de réduction dans cette thèse, on sait que $S_k < i$. La matrice $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{i \times S_k}$ est diagonale rectangulaire à valeurs réelles positives $\sigma_j, j = 1, \dots, S_k$. $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{i \times i}$ et $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{S_k \times S_k}$ sont deux matrices unitaires. Dans le domaine réel, une matrice unitaire équivaut à une matrice orthogonale. Chaque colonne de \mathbf{U} représente un vecteur singulier dont au plus S_k sont non-nulles. Une fois normées, ces S_k colonnes, groupées dans la matrice \mathbf{U}_{S_k} , représentent une base orthonormée pour la réduction thermique.

Jusqu'à présent, la base de réduction fournie par la procédure de Rational-Craig-Hale \mathbf{R}_{CH} est une base orthonormée par un algorithme de Gram-Schmidt dont la taille est donnée par l'Équation (VI.1). Il est possible de remplacer cette étape par une approximation de la base, notée $\bar{\mathbf{R}}_{\text{CH}}$, calculée par une troncature de taille k de \mathbf{U}_{S_k} [102]. Le principe est de considérer comme nulle toute valeur singulière inférieure à une tolérance relative donnée. La base tronquée associée avec k colonnes, est alors définie par

$$\bar{\mathbf{R}}_{\text{CH}} = \{\mathbf{v}_j \in \mathbf{U}_{S_k} | \sigma_j / \max(\sigma_j) < \epsilon\} \in \mathbb{R}^{i \times k}. \quad (\text{VI.4})$$

L'étude de sensibilité est réalisée en gardant $p = 6$, $l = 0$, soit $S_k = 432$. Les valeurs retenues pour la tolérance et la taille résultante $\bar{\mathbf{R}}_{\text{CH}}$ sont résumées dans le Tableau VI.1.

ϵ	k
0 (sans SVD)	432 = S_k
10^{-10}	324
10^{-8}	294
10^{-6}	288
10^{-4}	239
10^{-3}	224
10^{-2}	185

TABLEAU VI.1 – Taille de la base réduite tronquée en fonction de la tolérance relative sur les valeurs singulières

On constate déjà une réduction de 25% de la taille de la base pour une très faible tolérance $\epsilon = 10^{-10}$. La valeur singulière maximale vaut $\max(\sigma_j) = 6.44$ et l'ordre de grandeur des autres valeurs peut descendre jusqu'à 10^{-16} .

Les erreurs relatives par rapport au modèle complet sont reportées en Figure VI.10 pour une partie des tolérances afin de ne pas surcharger le graphe. Malgré une tolérance grossière,

l'erreur relative maximale reste contenue et ne dépasse pas 3%, ce qui est déjà satisfaisant. Pour $\epsilon \in [10^{-8}, 10^{-6}]$, l'erreur maximale est supérieure à celle sans troncature mais reste stable. C'est surtout aux très basses fréquences que l'erreur augmente. L'erreur relative maximale commence aussi à se dégrader lorsque $\epsilon \in [10^{-6}, 10^{-3}]$ où elle finit par atteindre 1.8%. Enfin, ce sont les hautes fréquences qui sont affectées lorsque la tolérance passe à $\epsilon = 10^{-2}$. Une forte troncature a tendance à harmoniser l'erreur sur la réponse en fréquence.

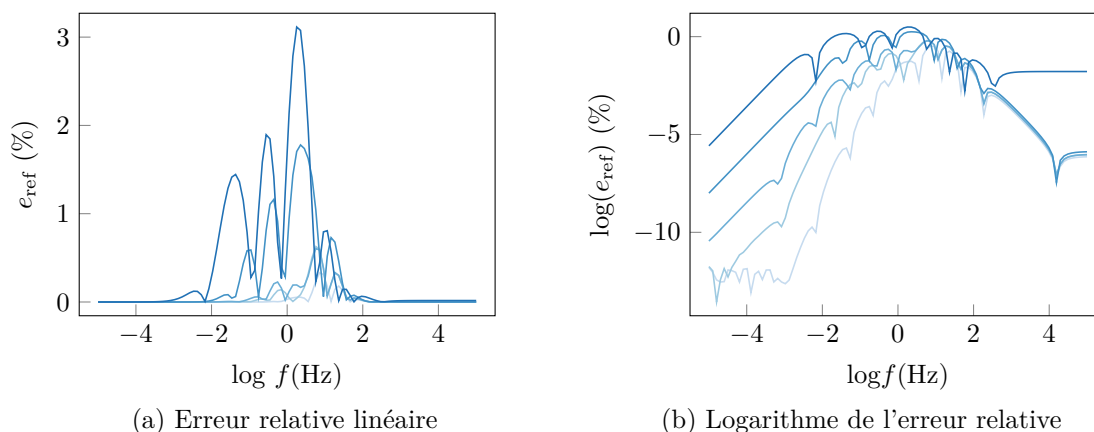


FIGURE VI.10 – Prise en compte de la réponse asymptotique dynamique avec la borne supérieure d'expansion $\epsilon = 0$ (sans SVD) (—), $\epsilon = 10^{-8}$ (—), $\epsilon = 10^{-6}$ (—), $\epsilon = 10^{-3}$ (—), $\epsilon = 10^{-2}$ (—)

Le ratio réduction de taille sur erreur relative reste de qualité même avec une grande tolérance. Choisir $\epsilon = 10^{-4}$ permet de réduire la base de 44%, ce qui semble être un bon compromis avec une erreur maximale de 1.62% vers 3Hz.

2.2.5 Bilan

Toutes les études de convergence ci-dessus permettent de définir les paramètres de la réduction thermo-mécanique du carter. Ces derniers sont regroupés dans la Tableau VI.2 en guise de synthèse.

Paramètres	Symbole	Valeur
Nombre de modes mécaniques (CB)	m	60
Points d'expansion (RCH)	p	6
Ordre d'expansion (RCH)	l	0
Comportement asymptotique dynamique (RCH)	-	Non
Tolérance SVD (RCH)	ϵ	10^{-4}

TABLEAU VI.2 – Paramètres de réduction du carter

2.3 Nombre de nœuds maîtres

En prenant $n_b = 72$ nœuds maîtres, le nombre de degrés de liberté s'élève à 587, qui sont divisés par catégorie :

- ddls maîtres mécaniques : $b_u = 216$;
- ddls maîtres thermiques $b_t = 72$;
- ddls internes mécaniques : $i_u = 60$;

— dds internes thermiques $i_t = 239$.

Afin d'obtenir le meilleur compromis entre précision et temps de calcul, le nombre de nœuds maîtres retenus dans le modèle peut être réduit. Le chapitre précédent indiquait que 36 nœuds maîtres permettaient de reproduire fidèlement la réponse mécanique. C'est pourquoi ce cas de figure, avec seulement 331 dds au total, est également testé. Les fonctions de transfert mécanique et thermique, pour cette configuration sont illustrées en Figures VI.11 et VI.12

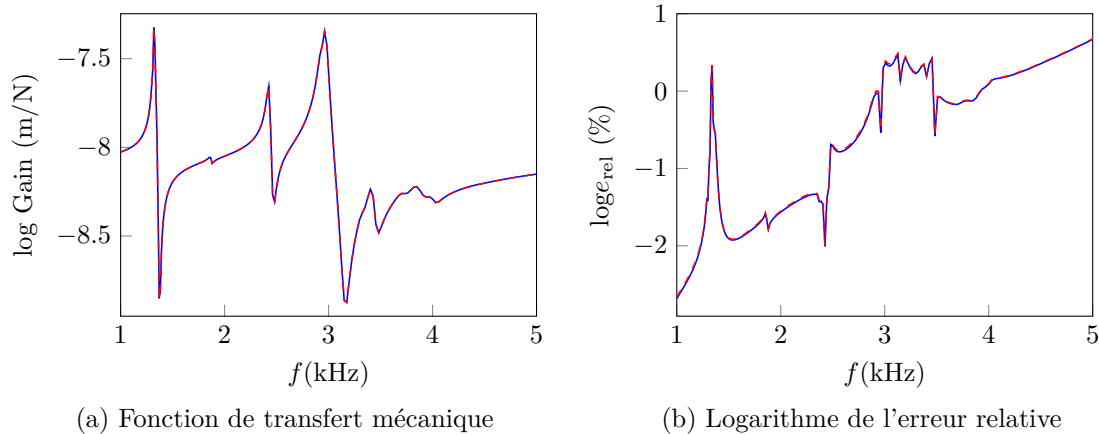


FIGURE VI.11 – Comparaison des réductions de Craig Bampton avec $n_b = 36$ (---) et $n_b = 72$ (—)

Pour la partie mécanique, conserver deux fois moins de nœuds maîtres dans la base de réduction, tout en retenant $m = 60$, n'altère aucunement la qualité de la réduction, les fonctions de transfert sont indiscernables et l'erreur relative est quasiment identique. En revanche,

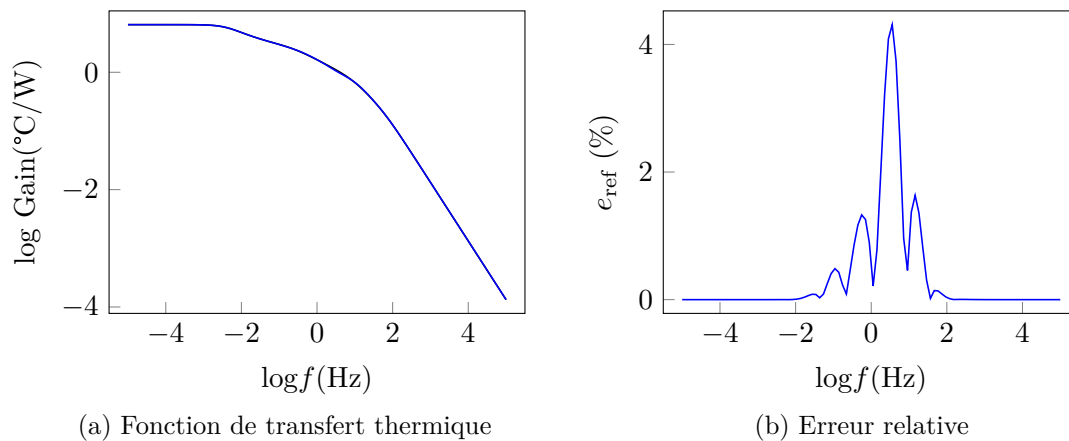


FIGURE VI.12 – Réduction RCH avec $n_b = 36$

cette diminution du nombre de maître se fait davantage ressentir pour la partie thermique. A paramètres de réductions identiques, le modèle à 36 nœuds maîtres est un peu moins précis même s'il parvient à capturer la physique tout en gardant une erreur relative ne dépasse pas 4.1%, ce qui reste raisonnable par rapport aux préconisations industrielles.

3 Turbine flexible à section constante

Précédemment dans ce travail doctoral, la turbine était toujours modélisée sous l'hypothèse des corps rigides. Désormais, les données de la turbine sont utilisées pour la convertir en un arbre flexible à section circulaire creuse et sur lequel est monté un disque rigide. Ce disque possède des propriétés de masse et d'inertie notées m_D , J_{pD} et J_{dD} et est positionné en z_D par rapport au palier arrière (voir Figure VI.13). La section circulaire est caractérisée par un rayon interne r_i et externe r_e et est en Inconel. La Figure VI.13 précise aussi que le référentiel absolu de la turbine a pour origine le palier arrière.

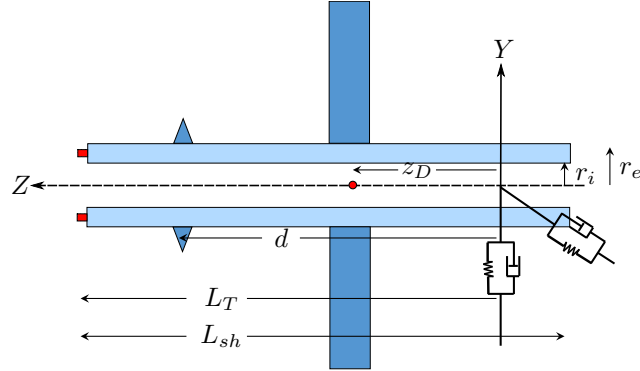


FIGURE VI.13 – Modèle turbine constitué d'une poutre à section constante et d'un disque rigide

3.1 Mécanique du solide en milieu continu

Dans ce chapitre, il est choisi d'employer les angles d'Euler conventionnels comme degrés de liberté en rotation (cf Section II.1.3) plutôt que les rotations projetées présentées pour le modèle rigide en Section IV.2.1. En effet, la majorité des travaux impliquant un rotor flexible retiennent ce formalisme [37, 59, 133, 140]. Conformément à la Figure II.10, Les rotations latérales sont notées θ_u autour de l'axe absolu X et θ_v autour de l'axe intermédiaire y tandis que la rotation propre autour de l'axe W rattaché au solide est définie par θ_w . En notant u, v et w les ddls en translation, l'expression de l'énergie cinétique pour un élément poutre à section constante, et connaissant les moments quadratiques d'inertie de la section I_d et I_p , l'énergie cinétique prend alors la forme intégrale

$$2E_c = \rho \int_0^L \left[S(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + I_d(\dot{\theta}_u^2 + \dot{\theta}_v^2) + I_p\dot{\theta}_w^2 + 2I_p\dot{\theta}_w\dot{\theta}_u\dot{\theta}_v \right] dz. \quad (\text{VI.5})$$

Il faut souligner l'approximation telle que les angles d'Euler et les degrés de liberté en rotation de la poutre (définis dans le repère absolu X, Y, Z) sont confondus est tout à fait justifiée d'après [48, 110]. Le modèle des éléments poutres droites est basé sur la théorie de Timoshenko, c.-à-d. avec prise en compte du cisaillement. Pour une section de poutre constante S , et un module de cisaillement $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ déterminé avec le module de Young E et le coefficient de Poisson ν , l'énergie de déformation est donnée par

$$2E_d = \int_0^l \left[ES \frac{\partial w^2}{\partial z} + EI_d \left(\frac{\partial \theta_u^2}{\partial z} + \frac{\partial \theta_v^2}{\partial z} \right) + GI_p \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} + kGS \left(\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \theta_v \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \theta_u \right)^2 \right) \right] dz. \quad (\text{VI.6})$$

L'angle β correspond à l'angle de torsion. Le mouvement de torsion est conservé compte tenu que le couple aérodynamique et de frottement ne sont pas au même endroit sur la ligne d'arbre (respectivement sur le disque et sur le labyrinthe). De plus, les résultats apportés par les deux dernier modèles ont démontré que le couple de frottement peut largement surpasser celui issu de l'aérodynamique, en particulier lorsque le rotor répond en régime instable de *dry whip*. La réponse en torsion peut alors affecter la réponse du système et cet effet doit être quantifié.

Comme pour le reste de la thèse, le gradient axial en pression de l'air dans la veine du générateur de gaz n'est pas considéré. Ainsi, en absence d'excitation axiale, le déplacement associé w est considéré comme nul. Par ailleurs, pour chaque point le long de la ligne d'arbre, la rotation $\theta_w(z, t)$ est considérée comme la somme de la rotation de corps rigide $\varphi(t)$ commune pour tout l'arbre et de la torsion $\beta(z, t)$. Sachant que $\dot{\varphi} = \Omega$ Cette relation se traduit aux niveau de la vitesse par

$$\dot{\theta}_w(z, t) = \Omega(t) + \dot{\beta}(z, t). \quad (\text{VI.7})$$

Cette relation implique également qu'il est possible de remplacer la dérivée partielle de la torsion dans l'Équation (VI.6) par $\frac{\partial^2 \theta_w}{\partial z^2}$.

Ce formalisme a été employé dans les travaux de Sghaier [140] mais il est tout à fait possible de développer les équations du mouvement en séparant la rotation macroscopique et la torsion [37]. Il n'y a pas d'approche meilleure que l'autre mais conserver un seul degré de liberté de rotation induit un couplage complet entre la flexion et la torsion comme cela est mis en évidence dans la suite du chapitre.

3.2 Equations pour le disque rigide

L'application des équations de Lagrange donne les équations du mouvement d'un disque sous la forme matricielle $\mathbf{M}_D(\mathbf{q}_D)\ddot{\mathbf{q}}_D + \dot{\theta}_w \mathbf{G}_D \dot{\mathbf{q}}_D + \bar{\mathbf{f}}_{cp,D} = \mathbf{0}$ avec

$$\mathbf{M}_D(\mathbf{q}_D) = \begin{pmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{dD} & 0 & J_{pD}\theta_v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{dD} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{pD}\theta_v & 0 & J_{pD} \end{pmatrix}, \mathbf{G}_D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{pD} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_{pD} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{f}}_{cp,D} = J_{pD} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_u \dot{\theta}_v \end{pmatrix}. \quad (\text{VI.8})$$

L'emploi des angles d'Euler implique l'apparition d'un terme de couplage $\bar{\mathbf{f}}_{cp,D}$. Le disque étant rigide, il n'y a pas de contributions sur la matrice de raideur. On souhaite que la matrice de masse ne contienne que des éléments constants pour faciliter la combinaison des matrices du disque avec celle de l'élément poutre associé. Dans ce cas, une matrice d'accélération angulaire \mathbf{K}_D est ajoutée et le vecteur de couplage est modifié de sorte que le mouvement du disque est alors régi par

$$\mathbf{M}_D \ddot{\mathbf{q}}_D + \dot{\theta}_w \mathbf{G}_D \dot{\mathbf{q}}_D + \ddot{\theta}_w \mathbf{K}_D \mathbf{q}_D + \mathbf{f}_{cp,D} = \mathbf{0} \quad (\text{VI.9})$$

avec

$$\mathbf{M}_D = \begin{pmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{pD} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{dD} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{pD} \end{pmatrix}, \mathbf{K}_D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{pD} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_{cp,D} = J_{pD} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_u \theta_v + \dot{\theta}_u \dot{\theta}_v \end{pmatrix}. \quad (\text{VI.10})$$

C'est cette dernière écriture qui est retenue dans la suite du chapitre.

3.3 Discrétisation de l'arbre par éléments finis

Un élément de poutre est présenté en Figure VI.14 où la torsion a été prise en compte. On se retrouve donc avec un problème à 10 ddls par élément. Le vecteur des coordonnées généralisées prend donc la forme :

$$\mathbf{q}^e = (u_1, v_1, \theta_{u1}, \theta_{v1}, \theta_{w1}, u_2, v_2, \theta_{u2}, \theta_{v2}, \theta_{w2}). \quad (\text{VI.11})$$

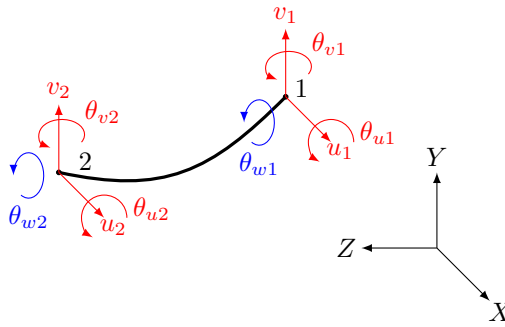


FIGURE VI.14 – Degrés de liberté d'un élément poutre en flexion (—) et torsion (—)

Les degrés de liberté peuvent être répartis en trois vecteurs. Le premier reprend les déplacements et rotations dans le plan (X, Z) : $\mathbf{q}_x^\top = (u_1, \theta_{v1}, u_2, \theta_{v2})$. Le second inclut les ddls dans le plan (Y, Z) : $\mathbf{q}_y^\top = (v_1, \theta_{u1}, v_2, \theta_{u2})$. Enfin, le dernier vecteur est constitué des rotations propres : $\mathbf{q}_z^\top = (\theta_{w1}, \theta_{w2})$. Le cisaillement est pris en compte et intervient dans les fonctions de forme des éléments poutres. Pour un élément de référence en flexion, et en adimensionnant la position sur la ligne neutre $\xi = z/l$ où $\xi \in [0, 1]$, les fonctions de forme introduisent le facteur $\Phi = \frac{12EI_d}{k_{xy}SG\ell_e^2}$, où k_{xy} est communément appelé coefficient de cisaillement. Ces fonction de formes sont définies comme :

$$\begin{cases} N_1(\xi) = \frac{1}{1+\Phi}((1+\Phi) - \Phi\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3) \\ N_2(\xi) = \frac{\ell_e}{1+\Phi}(\frac{2+\Phi}{2}\xi - \frac{4+\Phi}{2}\xi^2 + \xi^3) \\ N_3(\xi) = \frac{1}{1+\Phi}(\Phi\xi + 3\xi^2 - 2\xi^3) \\ N_4(\xi) = \frac{\ell_e}{1+\Phi}(-\frac{\Phi}{2}\xi - (1-\Phi)\xi^2 + \xi^3) \\ N_5(\xi) = \frac{6}{\ell_e(1+\Phi)}(-\xi + \xi^2) \\ N_6(\xi) = \frac{1}{1+\Phi}((1+\Phi) - (4+\Phi)\xi + 3\xi^2) \\ N_7(\xi) = \frac{6}{\ell_e(1+\Phi)}(\xi - \xi^2) \\ N_8(\xi) = \frac{1}{1+\Phi}((-2+\Phi)\xi + 3\xi^2) \end{cases} \quad (\text{VI.12})$$

Les déplacements selon l'axe Z sont quant à eux interpolés linéairement, ce qui donne :

$$\begin{cases} u(\xi, t) = \mathbf{N}_u(\xi)\mathbf{q}_x(t) \\ v(\xi, t) = \mathbf{N}_v(\xi)\mathbf{q}_y(t) \\ \theta_w(\xi, t) = \mathbf{N}_z\mathbf{q}_z(t) \\ \theta_u(\xi, t) = \mathbf{N}_{\theta u}(\xi)\mathbf{q}_y(t) \\ \theta_v(\xi, t) = \mathbf{N}_{\theta v}(\xi)\mathbf{q}_x(t) \end{cases}, \text{ où } \begin{cases} \mathbf{N}_u(\xi) = (N_1(\xi), N_2(\xi), N_3(\xi), N_4(\xi)) \\ \mathbf{N}_{\theta v}(\xi) = (N_5(\xi), N_6(\xi), N_7(\xi), N_8(\xi)) \\ \mathbf{N}_v(\xi) = (N_1(\xi), -N_2(\xi), N_3(\xi), -N_4(\xi)) \\ \mathbf{N}_{\theta u}(\xi) = (-N_5(\xi), N_6(\xi), -N_7(\xi), N_8(\xi)) \\ \mathbf{N}_z(\xi) = (1 - \xi, \xi). \end{cases} \quad (\text{VI.13})$$

La dépendance temporelle des vecteurs de degrés de liberté n'est pas réécrite pour alléger la notation.

Pour un élément à section circulaire creuse, la documentation de `Code_Aster` [150] mentionne que le coefficient k_{xy} dépend uniquement des propriétés géométriques

$$k_{xy} = \frac{7 + 20\alpha^2}{6}, \text{ avec } \alpha = \frac{R_i}{R_e(1 + \frac{R_i^2}{R_e^2})}. \quad (\text{VI.14})$$

D'autres formalismes prennent en compte les données matériau dans le calcul de k_{xy} , notamment celui de Cowper [44]. Celui-ci a aussi été testé dans ce chapitre et mène aux mêmes conclusions sur la réponse thermomécanique et ne sont donc pas repris ici.

3.4 Matrices de masses et d'inertie

La dérivation des matrices de masse et d'inertie décrite dans cette section est identique à celle issue de la documentation de `code_Aster` [67]. Les fonctions de forme employées sont identiques pour la masse et la raideur et font intervenir le coefficient de cisaillement (cf Équation (VI.12))². Le premier terme de l'énergie cinétique permet de définir les matrices de masse liées à la translation de l'arbre. Pour les 2 composantes en translation (u, v) on obtient respectivement

$$\mathbf{M}_u^e = \rho S \ell_e \int_0^1 [\mathbf{N}_u(\xi)]^\top [\mathbf{N}_u(\xi)] d\xi \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_v^e = \rho S \ell_e \int_0^1 [\mathbf{N}_v(\xi)]^\top [\mathbf{N}_v(\xi)] d\xi. \quad (\text{VI.15})$$

Le second terme de l'énergie cinétique (cf Équation (VI.5)) est lié aux rotations. Les sous-matrices de masse associée à la rotation autour de l'axe X et Y sont données par

$$\mathbf{M}_{\theta u}^e = \rho I_d \ell_e \int_0^1 [\mathbf{N}_{\theta u}(\xi)]^\top [\mathbf{N}_{\theta u}(\xi)] d\xi \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_{\theta v}^e = \rho I_d \ell_e \int_0^1 [\mathbf{N}_{\theta v}(\xi)]^\top [\mathbf{N}_{\theta v}(\xi)] d\xi. \quad (\text{VI.16})$$

2. D'autres travaux emploient des fonctions de formes distinctes pour la matrice de masse où le cisaillement est négligé [94]. Cela revient à employer la matrice de masse d'une poutre de Bernoulli.

Les expressions détaillées des matrices élémentaires $\mathbf{M}_u^e, \mathbf{M}_v^e, \mathbf{M}_{\theta_u}^e$ et $\mathbf{M}_{\theta_v}^e$ sont proposées en Annexe E.1. Enfin la sous-matrice liée à la rotation autour de l'axe Z vaut

$$\mathbf{M}_{\theta_w}^e = \rho I_p \ell_e \int_0^1 [1 - \xi \ \xi]^t [1 - \xi \ \xi] d\xi = \frac{\rho I_p \ell_e}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (\text{VI.17})$$

Par conséquent la forme matricielle de l'énergie cinétique liée aux translations et aux rotations s'écrit

$$2E_{c,rt} = \mathbf{q}_x^\top (\mathbf{M}_u^e + \mathbf{M}_{\theta_v}^e) \mathbf{q}_x + \mathbf{q}_y^\top (\mathbf{M}_v^e + \mathbf{M}_{\theta_u}^e) \mathbf{q}_y + \mathbf{q}_z^\top \mathbf{M}_{\theta_w}^e \mathbf{q}_z. \quad (\text{VI.18})$$

Les matrices sont complétées afin que le vecteur de degrés de liberté complet de l'élément \mathbf{q}^e intervienne dans le calcul de l'énergie cinétique. Cette complétion est signalée par l'exposant q . Dans ce cas, la somme des cinq matrices augmentées $\mathbf{M}_u^q + \mathbf{M}_v^q + \mathbf{M}_{\theta_u}^q + \mathbf{M}_{\theta_v}^q + \mathbf{M}_{\theta_w}^q$ est condensée sous la matrice élémentaire \mathbf{M}_{sh}^e .

3.5 Terme gyroscopique

Le terme gyroscopique s'écrit sous la forme intégrale

$$E_{c,gyr} = \rho I_p \ell_e \int_0^1 \mathbf{N}_z(\xi) \dot{\mathbf{q}}_z \dot{\mathbf{q}}_y^\top \mathbf{N}_{\theta_u}^\top(\xi) \mathbf{N}_{\theta_v}(\xi) \mathbf{q}_x d\xi. \quad (\text{VI.19})$$

Le calcul de ce terme est assez complexe à cause de la prise en compte de la torsion dans le modèle et donc du couplage avec la flexion. Le calcul de ce terme fait l'objet d'une section entière dans la thèse de Sghaier [140]. L'intégration par parties du produit des trois fonctions de forme devient

$$E_{c,gyr} = \mathbf{N}_z^q|_1 \dot{\mathbf{q}}^e (\dot{\mathbf{q}}^e \mathbf{A}_1^e \mathbf{q}^e) - \frac{d\mathbf{N}_z^q}{d\xi} \dot{\mathbf{q}}^e (\dot{\mathbf{q}}^e \mathbf{A}_2^e \mathbf{q}^e) \quad (\text{VI.20})$$

où \mathbf{N}_z^q correspond à la version étendue de \mathbf{N}_z à tous les degrés de liberté de l'élément (remplissage du vecteur par des zéros). Le symbole $|_1$ indique que la fonction de forme est évaluée en $\xi = 1$

$$\mathbf{N}_z^q|_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1). \quad (\text{VI.21})$$

Les matrices \mathbf{A}_1^e et \mathbf{A}_2^e ne possèdent aucune propriété de symétrie et sont données en Annexe E.2. En pratique, la matrice \mathbf{A}_1^e correspond à la matrice d'accélération angulaire usuelle pour une poutre sans torsion [150]. L'application des équations de Lagrange donne alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_{c,gyr}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^e} - \frac{\partial E_{c,gyr}}{\partial \mathbf{q}^e} &= (\mathbf{N}_z^q|_1 \ddot{\mathbf{q}}^e) (\mathbf{A}_1^e \mathbf{q}^e) + (\mathbf{N}_z^q|_1 \dot{\mathbf{q}}^e) (\mathbf{G}_1^e \dot{\mathbf{q}}^e) \\ &\quad - \left(\frac{d\mathbf{N}_z^q}{d\xi} \ddot{\mathbf{q}}^e \right) (\mathbf{A}_2^e \mathbf{q}^e) - \left(\frac{d\mathbf{N}_z^q}{d\xi} \dot{\mathbf{q}} \right) (\mathbf{G}_2^e \dot{\mathbf{q}}^e) \\ &\quad + \left(\mathbf{N}_z^q|_1 (\ddot{\mathbf{q}}^{e\top} \mathbf{A}_1^e \mathbf{q}^e + \dot{\mathbf{q}}^{e\top} \mathbf{A}_1^e \dot{\mathbf{q}}^e) - \frac{d\mathbf{N}_z^q}{d\xi} (\ddot{\mathbf{q}}^{e\top} \mathbf{A}_2^e \mathbf{q}^e + \dot{\mathbf{q}}^{e\top} \mathbf{A}_2^e \dot{\mathbf{q}}^e) \right) \end{aligned} \quad (\text{VI.22})$$

avec $\mathbf{G}_1^e = \mathbf{A}_1^e - \mathbf{A}_1^{e\top}$ (matrice gyroscopique classique) et $\mathbf{G}_2^e = \mathbf{A}_2^e - \mathbf{A}_2^{e\top}$ (contribution de la torsion) qui sont des matrices anti-symétriques. Les 4 premiers termes peuvent se simplifier et permettent les écritures matricielles suivantes

$$(\mathbf{N}_z^q|_1 \ddot{\mathbf{q}}) (\mathbf{A}_1^e \mathbf{q}) = \ddot{\theta}_{w2} \mathbf{A}_1^e \mathbf{q}^e; \quad (\text{VI.23})$$

$$(\mathbf{N}_z^q|_1 \dot{\mathbf{q}}) (\mathbf{G}_1^e \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\theta}_{w2} \mathbf{G}_1^e \dot{\mathbf{q}}^e; \quad (\text{VI.24})$$

$$\left(\frac{d\mathbf{N}_z^q}{d\xi} \ddot{\mathbf{q}}^e \right) (\mathbf{A}_2^e \mathbf{q}^e) = (\ddot{\theta}_{w2} - \ddot{\theta}_{w1}) \mathbf{A}_2 \mathbf{q}^e; \quad (\text{VI.25})$$

$$\left(\frac{d\mathbf{N}_z^q}{d\xi} \dot{\mathbf{q}} \right) (\mathbf{G}_2^e \dot{\mathbf{q}}^e) = (\dot{\theta}_{w2} - \dot{\theta}_{w1}) \mathbf{G}_2^e \dot{\mathbf{q}}^e. \quad (\text{VI.26})$$

Le dernier terme de couplage est noté comme un vecteur de couplage $\mathbf{f}_{cp}^e(\mathbf{q}^e, \dot{\mathbf{q}}^e, \ddot{\mathbf{q}}^e)$ qui est non nul seulement sur les 5^{ème} et 10^{ème} lignes. Pour les développements intermédiaires, les dépendances du terme de couplage avec le vecteur des coordonnées généralisées n'est pas repris dans la notation. Les équations du mouvement complètes s'écrivent sous forme matricielle :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\mathbf{q}}^e} - \frac{\partial E_c}{\partial \mathbf{q}^e} = \mathbf{M}_{sh}^e \ddot{\mathbf{q}}^e + (\dot{\theta}_{w2} \mathbf{G}_1 - (\dot{\theta}_{w2} - \dot{\theta}_{w1}) \mathbf{G}_2) \dot{\mathbf{q}}^e + (\ddot{\theta}_{w2} \mathbf{A}_1 - (\ddot{\theta}_{w2} - \ddot{\theta}_{w1}) \mathbf{A}_2) \mathbf{q}^e + \mathbf{f}_{cp}^e. \quad (\text{VI.27})$$

En ajoutant à l'Équation (VI.27) les matrices liées au disque, on obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_{c,tot}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^e} - \frac{\partial E_{c,tot}}{\partial \mathbf{q}^e} = & (\mathbf{M}_{sh}^e + \mathbf{M}_D) \ddot{\mathbf{q}}^e + (\dot{\theta}_{w2} (\mathbf{G}_1^e + \mathbf{G}_D) - (\dot{\theta}_{w2} - \dot{\theta}_{w1}) \mathbf{G}_2^e) \dot{\mathbf{q}}^e \\ & + (\ddot{\theta}_{w2} (\mathbf{A}_1^e + \mathbf{K}_D) - (\ddot{\theta}_{w2} - \ddot{\theta}_{w1}) \mathbf{A}_2^e) \mathbf{q}^e + (\mathbf{f}_{cp}^e + \mathbf{f}_{cp,D}). \end{aligned} \quad (\text{VI.28})$$

D'une manière générale, on peut noter que les termes faisant intervenir la matrice \mathbf{A}_1^e reflètent que la vitesse de rotation de corps rigide est

- non-nulle/ non-négligeable $\dot{\theta} \mathbf{G}_1^e$;
- variable à cause du terme $\ddot{\theta} \mathbf{A}_1^e$;
- inconnue et donc couplée avec la flexion $\dot{\mathbf{q}}^\top \mathbf{A}_1^e \mathbf{q} + \dot{\mathbf{q}}^\top \mathbf{A}_1^e \dot{\mathbf{q}}$.

Les termes en \mathbf{A}_2^e existent pour prendre en compte la torsion et seraient supprimés si cette dernière était négligée.

3.6 Synthèse des équations dynamiques

La matrice de raideur élémentaire est fournie en Annexe E.3 et le modèle d'amortissement reste le même que par rapport au chapitres précédents. Un amortissement de Rayleigh est choisi pour la poutre en fixant les paramètres de proportionnalité à la masse ($r_m = 0$) et à la raideur ($r_k = 10^{-6}$). L'amortissement et la raideur aux paliers sont identiques à ceux du modèle rigide $c_p = 100 \text{Ns/m}$ et $k_p = 10^7 \text{N/m}$. Dans ce cas, l'équation du mouvement élémentaire est

$$\begin{aligned} & (\mathbf{M}_{sh}^e + \mathbf{M}_D) \ddot{\mathbf{q}}^e + (\mathbf{D}^e + \mathbf{D}_p + \dot{\theta}_{w2} (\mathbf{G}_1^e + \mathbf{G}_D) - (\dot{\theta}_{w2} - \dot{\theta}_{w1}) \mathbf{G}_2^e) \dot{\mathbf{q}}^e \\ & + (\mathbf{K}^e + \mathbf{K}_p + \ddot{\theta}_{w2} (\mathbf{A}_1^e + \mathbf{K}_D) - (\ddot{\theta}_{w2} - \ddot{\theta}_{w1}) \mathbf{A}_2^e) \mathbf{q}^e + (\mathbf{f}_{cp}^e + \mathbf{f}_{cp,D}) = \mathbf{f}_{ext}^e. \end{aligned} \quad (\text{VI.29})$$

Après assemblage de tous les éléments, les ddls de la turbine sont regroupés dans \mathbf{q}_t , soit

$$\mathbf{q}_t = \cup_e \mathbf{q}^e \quad (\text{VI.30})$$

et les équations du mouvement pour la turbine complète sous forme condensée sont

$$\mathbf{M}_t \ddot{\mathbf{q}}_t + (\mathbf{G}(\dot{\mathbf{q}}_t) + \mathbf{D}_t) \dot{\mathbf{q}}_t + (\mathbf{P}(\ddot{\mathbf{q}}_t) + \mathbf{K}_t) \mathbf{q}_t + \mathbf{f}_{cp}(\mathbf{q}_t, \dot{\mathbf{q}}_t, \ddot{\mathbf{q}}_t) = \mathbf{f}_{ext,t} \quad (\text{VI.31})$$

avec $\mathbf{f}_{ext,t}$ qui est un vecteur d'efforts extérieurs. La gravité est négligée donc ce vecteur est nul sauf sur la ligne correspondant à la rotation du nœud auquel le disque est raccordé. Ce ddl subit un chargement lié au couple aérodynamique τ_a .

Enfin, on considère dans ce chapitre le cas particulier sans torsion. En effet, il est possible que la torsion n'ait pas d'effet significatif sur la solution. Si elle est éliminée, chaque nœud n'a plus que 4 ddls et une seule rotation de corps rigide φ doit être introduite. Dans le terme gyroscopique, sans torsion, la rotation propre n'est pas fonction de l'espace mais uniquement du temps. L'énergie cinétique liée à l'effet gyroscopique est alors modifiée

$$E_{c,gyr} = \rho I_p l_e \dot{\varphi} \int_0^1 \dot{\mathbf{q}}_y^\top \mathbf{N}_{\theta u}^\top \mathbf{N}_{\theta v} \mathbf{q}_x d\xi. \quad (\text{VI.32})$$

On retrouve l'expression intégrale de la matrice de Coriolis \mathbf{A}_1^e et $E_{c,gyr} = \dot{\varphi} \mathbf{A}_1^e$ conformément à l'Annexe E.2 mais où les lignes/colonnes 5 et 10 sont supprimées en absence de torsion. L'assemblage des matrices gyroscopiques \mathbf{G} et de Coriolis \mathbf{A} sont alors simplifiées puisqu'elles sont proportionnelles à la rotation macroscopique rigide. Le moment d'inertie polaire résultant de l'arbre flexible est noté $J_{p,sh}$ et on retrouve le moment d'inertie de la turbine $J_p = J_{p,sh} + J_{pD}$. L'application des équations de Lagrange sur l'énergie cinétique complète, en groupant les ddls de flexion dans \mathbf{q}_{sh} , donne alors

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{sh}} - \frac{\partial E_c}{\partial \mathbf{q}_{sh}} = \tilde{\mathbf{M}}_t \ddot{\mathbf{q}}_{sh} + \dot{\varphi} \mathbf{G} \dot{\mathbf{q}}_{sh} + \ddot{\varphi} \mathbf{A} \mathbf{q}_{sh} \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial E_c}{\partial \varphi} = (J_p) \ddot{\varphi} + \dot{\mathbf{q}}_{sh}^\top \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}_{sh} + \dot{\mathbf{q}}_{sh}^\top \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}_{sh} \end{cases} \quad (\text{VI.33})$$

Ici, $\tilde{\mathbf{M}}_t$ constitue l'assemblage des matrices de masse élémentaires en flexion pure (soit 8 ddls au lieu de 10) et du disque. Pour finir, avec prise en compte de la raideur et de l'amortissement structural de l'arbre et du palier, et des efforts extérieurs, l'équation du mouvement totale est

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_t & 0 \\ 0 & J_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_{sh} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{D}_t + \dot{\varphi} \mathbf{G} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{sh} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_t + \ddot{\varphi} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{sh} \\ \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_{cp}(\ddot{\mathbf{q}}_{sh}, \dot{\mathbf{q}}_{sh}, \mathbf{q}_{sh}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_a \end{pmatrix} \quad (\text{VI.34})$$

Dans la suite du chapitre, que ce soit avec ou sans torsion, la totalité des coordonnées généralisées de la turbine sont groupées dans le vecteur \mathbf{q}_t .

3.7 Analyse modale

Un schéma de la structure maillée est proposé en Figure VI.15. Le nombre d'éléments

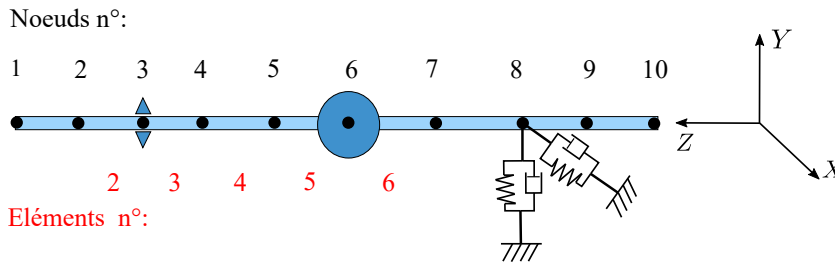


FIGURE VI.15 – Schéma de la ligne d'arbre discrétisée par des poutres de Timoshenko et numérotation des nœuds et des éléments

retenus pour le maillage du rotor est fixé à $N_e = 9$. Les nœuds qui correspondent respectivement au labyrinthe et au disque sont le 3^{ème} et le 6^{ème}. Afin d'identifier la limite de pas de temps pour la simulation temporelle, le diagramme de Campbell de la turbine est dressé en Figure VI.16. Les 2 premiers modes en "flexion" F_1, F_2 sont identiques à ceux trouvés pour le modèle rigide

puisqu'il s'agit des modes de pivotement rigide et de palier (voir Section IV.4.2). Le premier mode de flexion à proprement parler est F_3 et intervient à une fréquence bien plus haute, ($f > 9\text{kHz}$). Cela est également vrai pour le premier mode de torsion T_1 qui apparaît vers $10,3\text{kHz}$. Cela confirme une forte rigidité en flexion et torsion de la turbine.

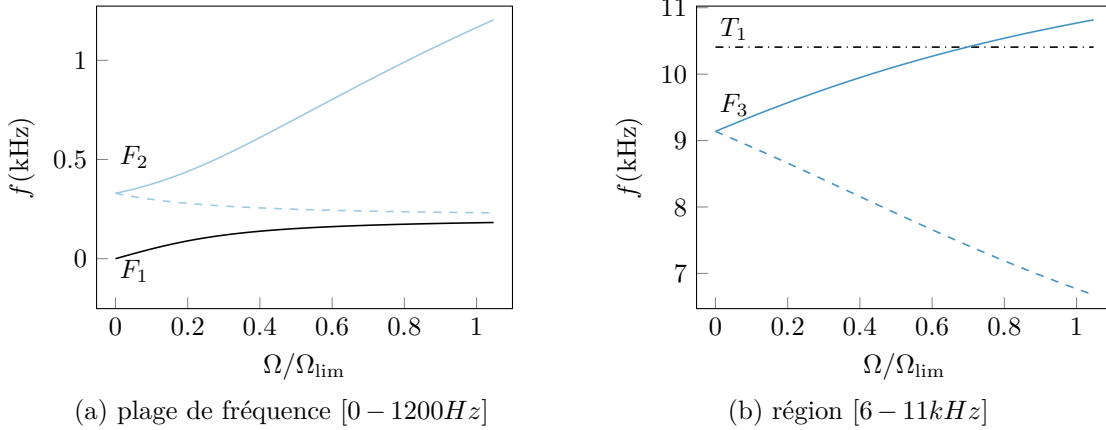


FIGURE VI.16 – Diagramme de Campbell du rotor : F_1 (—), F_2 (directe) (—), F_2 (rétrograde) (---), F_3 (directe) (—), F_3 (rétrograde) (---), T_1 (---)

4 Conditions initiales

Les conditions initiales de la turbine flexible sont calculées afin de reproduire la configuration de touche trouvée en Annexe A. Pour un calcul avec $h = 10^{-6}\text{s}$, et sachant que le palier était considéré comme une rotule simple ($u_p = v_p = 0$), on a obtenu les conditions initiales de touche pour le labyrinthe (u_l, v_l, θ_{wl}) ainsi que les dérivées associées. À présent, il faut interpoler le déplacement et la vitesse initiale aux autres nœuds de la ligne d'arbre. Connaissant leur position sur l'axe Z , toujours avec pour origine le palier arrière (soit $z_p = 0$ par défaut) et la distance palier-labyrinthe d (cf Figure VI.13), les translations valent

$$\begin{cases} u_0(z) = \frac{u_l(0)}{d}(z - z_p); \\ v_0(z) = \frac{v_l(0)}{d}(z - z_p). \end{cases} \quad (\text{VI.35})$$

Pour ce qui est des rotations et de leurs dérivées associées, elles sont identiques en tout point pour se rapprocher au mieux de la topologie de corps rigide précédemment utilisée. Pour les rotations transversales θ_u et θ_v , ces dernières sont approchées au moyen des translations comme dans la modélisation avec corps rigides

$$\begin{cases} \theta_{u0}(z) \approx \frac{-v_l(0)}{d}; \\ \theta_{v0}(z) \approx \frac{u_l(0)}{d}. \end{cases} \quad (\text{VI.36})$$

Les vitesses sont obtenues de la même façon. Les conditions initiales de touche de la turbine en déplacement et vitesse sont alors notées $\mathbf{q}_t(0)$ et $\dot{\mathbf{q}}_t(0)$.

5 Résultats rotor à section constante

Dans ce qui suit, sauf mention contraire, la méthode de résolution du contact utilisée est Carp-oneVC. Comme au Chapitre V, c'est l'approche multi-contraintes qui est retenue. La

position initiale des nœuds maîtres du stator est identifiée par leur coordonnée polaire dans le maillage, indiquée par la variable ϕ .

5.1 Solution mécanique et convergence en temps

Dans un premier temps, l'étude de convergence est réalisée en désactivant la thermique dans la simulation afin de vérifier la convergence du modèle. La tolérance du solveur python `fsolve` utilisé dans le calcul de la solution prédite est fixé à $x_{tol} = 10^{-8}$ afin de réduire le temps CPU. Trois pas de temps sont retenus $h_1 = 7 \times 10^{-7}$ s, $h_2 = 6 \times 10^{-7}$ s et $h_3 = 5 \times 10^{-7}$ s. La vitesse de rotation au niveau du disque (soit au 6ème nœud, cf Figure VI.15) est notée $\dot{\theta}_w^{(6)}$. Dans tous les cas, la réponse obtenue présente une limitation de la survitesse au niveau du disque autour de $0,853\Omega_{lim}$ atteinte après 55 ms, comme illustré en Figure VI.17. A partir de

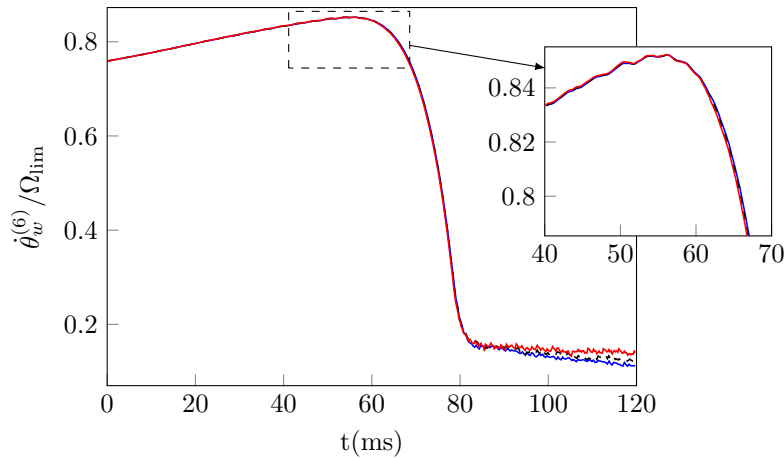


FIGURE VI.17 – Convergence de la vitesse de rotation du disque avec le pas de temps h_1 (—), h_2 (---), h_3 (—)

80ms, pour tous les pas de temps, une transition du *dry whip* au *dry whirl* intervient. Tout comme dans le Chapitre V, l'analyse du jeu ne permet plus d'identifier un contact permanent (i.e. *full annular rub*), compte tenu de l'approche multi-points de contact. En revanche, le contact permanent peut être repéré grâce au couple résistant affiché en Figure VI.18. Avant 45ms, celui-ci présente des intervalles d'annulation qui indiquent un contact partiel. Pendant cette phase, le couple de frottement reste inférieur à celui qui entraîne l'aubage de turbine mais est du même ordre de grandeur. Il atteint même brièvement $0,75\tau_a$. Ensuite, le couple ne s'annule plus et augmente avec une tendance exponentielle déjà observée dans les chapitres précédents et dépasse $40\tau_a$. En rappelant l'ordre de grandeur de $\tau_a \approx 10^2$ Nm, le couple frottant atteint une valeur maximale autour de 10^4 Nm, ce qui est considérable. La convergence des résultats est aussi démontrée par le transitoire des efforts de contact, notamment en Figure VI.19 pour le nœud positionné en $\phi = \frac{\pi}{2}$ rad sur le cercle de contact. L'effort normal en fin de *dry whip* est borné à 280kN.

Enfin, la convergence des résultats est vérifiée sur des quantités nodales du rotor, comme la vibration du nœud de la turbine correspondant au labyrinthe. A titre d'exemple, le déplacement u_l (selon X) est affiché en fonction du temps en Figure VI.20). Pendant la phase de contact partiel, toutes les simulations fournissent des réponses qui se superposent parfaitement, comme l'illustre l'agrandissement sur les 30 première millisecondes. Ensuite, à cause du déclenchement de l'instabilité en *dry whip*, la vibration est amplifiée exponentiellement puis décroît suite au passage en *dry whirl*. Lors de la phase de *dry whip*, on constate seulement un léger déphasage de la réponse inférieur au dixième de milliseconde.

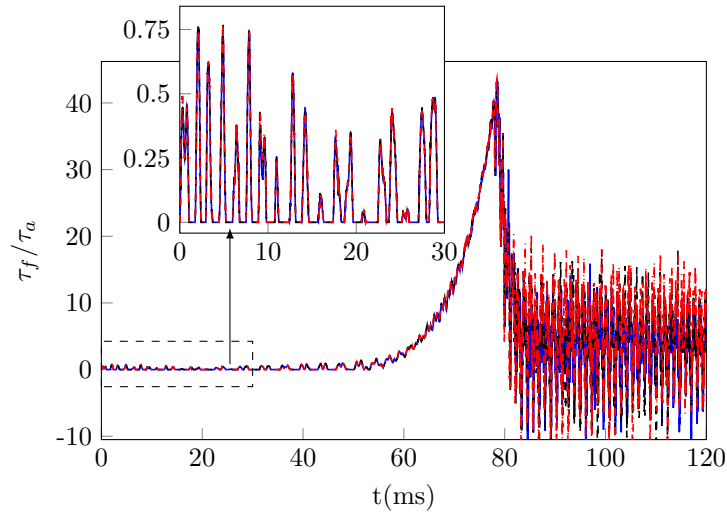


FIGURE VI.18 – Convergence en temps du couple frottant pour h_1 (—), h_2 (---), h_3 (—)

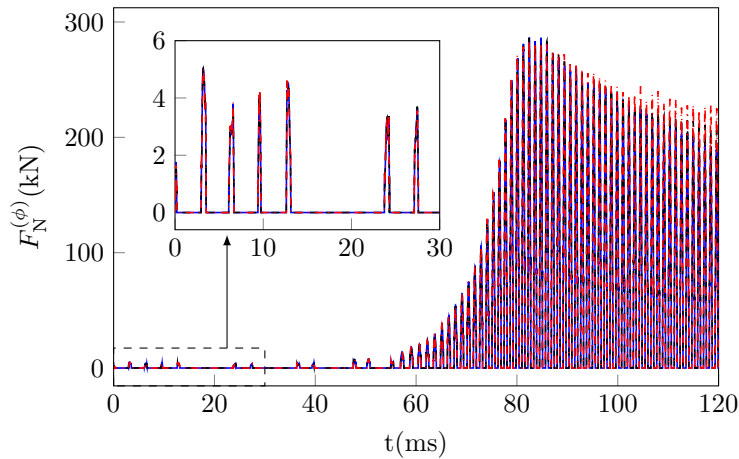


FIGURE VI.19 – Convergence en temps de l'effort normal au nœud situé en $\phi = \pi/2 \text{ rad}$:
 h_1 (—), h_2 (---), h_3 (—)

Par rapport au modèle développé au chapitre précédent, on constate surtout un déclenchement plus précoce du contact permanent en précession inverse (*dry whip*) et par conséquent, l'extremum sur la vitesse de rotation Ω_{\max} est plus faible. En effet, avec le modèle d'anneau flexible suspendu, et à coefficient de frottement identique, seul du contact partiel était prédit. Une explication possible du déclenchement plus rapide du *dry whip* est une homogénéisation de la rigidité du stator sur toute le cercle de contact. En effet, le modèle d'anneau suspendu présentait des points durs au niveau des fixations des vis. Dans le cas présent, la liaison de l'anneau avec les pièces voisines se fait par contact collé. Or, la structure est aussi raide compte tenu de l'analyse modale du stator où le premier mode est défini sur des fréquences semblables (1300Hz contre 1251Hz auparavant). Les efforts de contact sont donc mieux équi-répartis sur la zone de contact. Un indicateur de cette homogénéisation des efforts est le travail de la force de frottement aux nœuds (voir Figure VI.21). Pour le modèle avec poutres de Benoulli vissées (cf Chapitre V), ce travail après 30ms valait autour de 400J pour un nœud vis contre 60 maximum pour les autres. Pour le modèle industriel, l'agrandissement en Figure VI.21 indique que toutes les énergies sur le secteur $\phi = [80^\circ, 130^\circ]$ sont toutes situées entre 120J et 290J et donc dans le même ordre de grandeur.

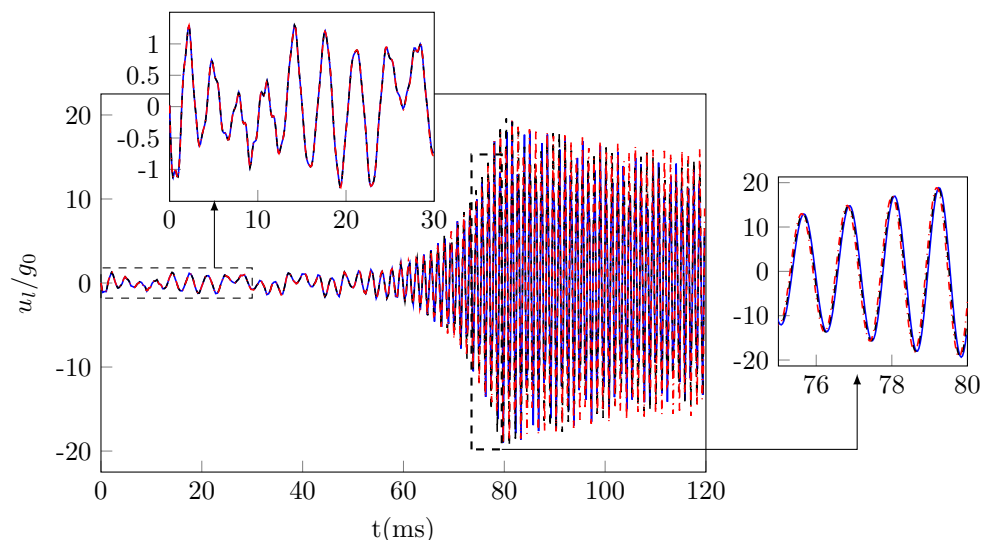


FIGURE VI.20 – Convergence en temps de la vibration selon x du rotor au niveau du labyrinthe : h_1 (—), h_2 (---), h_3 (—)

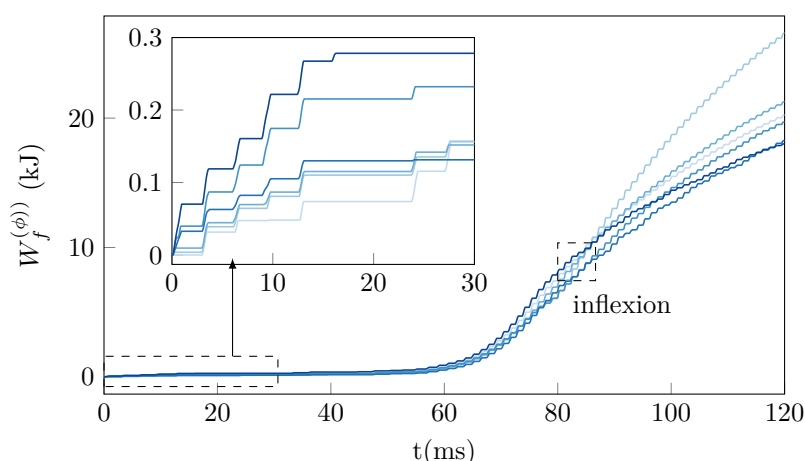


FIGURE VI.21 – Répartition d'énergie frictonnelle aux nœuds au cours du temps : $\phi = 80^\circ$ (—), $\phi = 90^\circ$ (—), $\phi = 100^\circ$ (—), $\phi = 110^\circ$ (—), $\phi = 120^\circ$ (—), $\phi = 130^\circ$ (—) et mise en évidence du point d'inflexion qui correspond à la transition *dry whip/dry whirl*

Une autre remarque sur la Figure VI.21 concerne le passage du *dry whip* au *dry whirl*. Auparavant, cette transition se traduisait par un plateau net indiquant que la puissance de friction (donc la dérivée temporelle de W_f) était nulle. Ce plateau n'apparaît plus même si un point d'inflexion est détecté dans l'évolution du travail. Cela s'explique par une vitesse relative tangentielle (i.e. de glissement) qui oscille autour de zéro avec une forte amplitude, même si cette amplitude décroît avec le temps. Par ailleurs, en fin de *dry whip*, le déplacement des nœuds peut dépasser 1 cm et atteindre 40% du rayon interne du stator voir Figure VI.23. D'une part, un tel niveau de vibration n'est pas réaliste compte tenu de la plasticité, et d'autre part, il n'est pas possible d'avoir une vitesse de glissement nulle sur tout le secteur. Ainsi, si une vitesse relative tangentielle non-nulle et oscillante reste physique, il est tout à fait possible que l'amplitude des efforts et la vitesse relative soit encore surestimée pour la phase de roulement. Cette hypothèse est d'ailleurs confirmée dans des calculs ultérieurs. A ce stade, on peut donc conclure que les résultats en mécanique sont convergés jusqu'en phase de *dry whip* incluse.

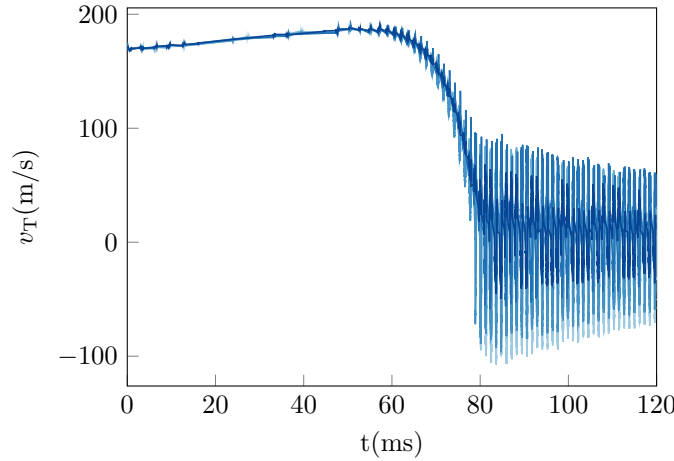


FIGURE VI.22 – Transitoire de la vitesse relative tangentielle aux nœuds du stator sur la portion : $\phi = 80^\circ$ (—), $\phi = 90^\circ$ (—), $\phi = 100^\circ$ (—), $\phi = 110^\circ$ (—), $\phi = 120^\circ$ (—), $\phi = 130^\circ$ (—)

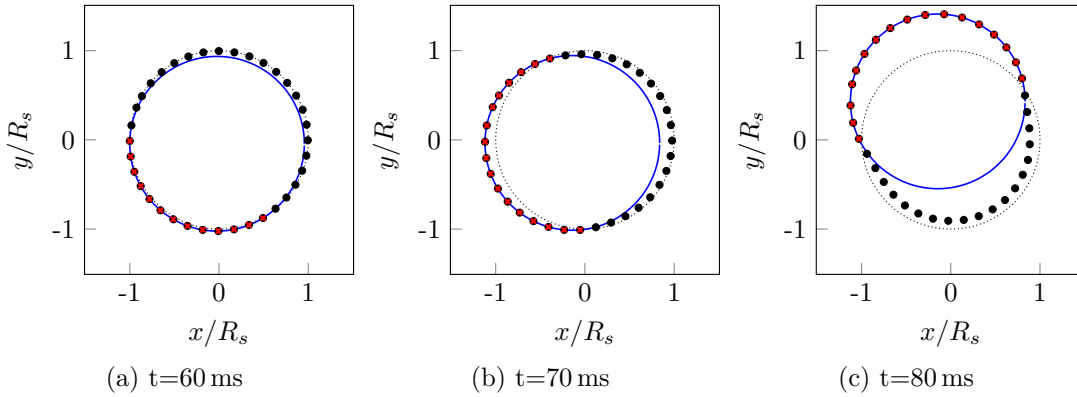


FIGURE VI.23 – Configurations de contact rotor-stator pour trois instants pris en cours de *dry whip* : labyrinthe (—), cercle de contact sur l'anneau en position de repos (----), nœuds maîtres (●) et nœuds en contact (×)

D'autres variables, comme la torsion, peuvent être étudiées plus en détails avec le pas de temps le plus grossier $h = 7 \times 10^{-7}$ s. A présent, on s'intéresse aux transitoires de vitesses de rotation nodales $\dot{\theta}_w^{(n)} = \Omega + \dot{\beta}^{(n)}$ en dehors du disque ($n \neq 6$ cf Figure VI.15). La Figure VI.24 permet de mettre en évidence les fluctuations de la vitesse de rotation qui sont plus marquées au niveau du labyrinthe. Ces fluctuations sont lissées le long de l'arbre du labyrinthe vers le disque et restent très faibles. En effet, les vitesses de rotation aux nœuds se démarquent surtout après la première touche (Figure VI.24a) et lors du passage de la valeur maximale, qui correspond aussi à l'amorce du *dry whip* (Figure VI.24).

Par ailleurs, on rappelle que les ddls en rotation propre θ_w pour chaque nœud n sont constitués de la somme de la rotation macroscopique de corps rigide φ et d'une rotation nodale en torsion pure $\beta^{(n)}$. Le déplacement en torsion peut donc être déduit en différentiant la rotation sur l'élément e

$$\Delta\beta^{(e=n)} = \beta^{(n+1)} - \beta^{(n)} = \theta_w^{(n+1)} - \theta_w^{(n)}, \quad \text{pour } n = 1, \dots, N_e \quad (\text{VI.37})$$

Cette torsion élémentaire sert également à calculer le moment de torsion sur l'élément de la

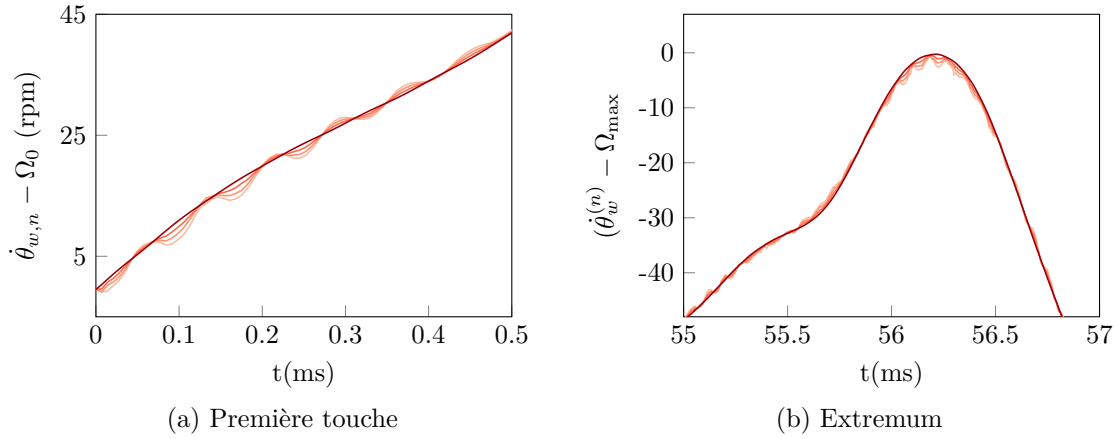


FIGURE VI.24 – Vitesses de rotations nodales : $n = 3$ (labyrinthe) (—), $n = 4$ (—), $n = 5$ (—), $n = 6$ (disque) (—)

manière suivante

$$M_{\theta}^{(e)} = \frac{G \cdot I_p}{\ell_e} \cdot \Delta\beta^{(e)} \quad (\text{VI.38})$$

où on rappelle la longueur de l'élément ℓ_e . Les éléments de 2 à 6 (cf Figure VI.15) sont retenus pour étudier la torsion sur l'arbre en Figure VI.25.

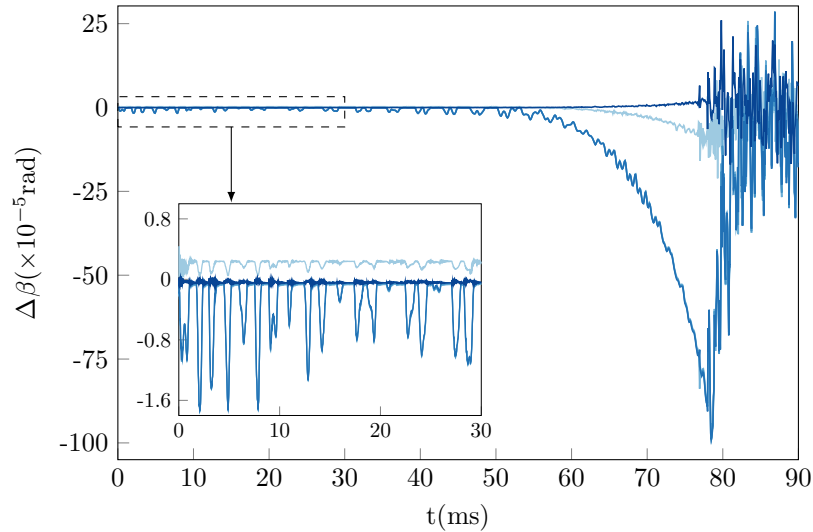


FIGURE VI.25 – Rotations élémentaires pour $e = 2$ (—), $e = 3$ (—), $e = 4$ (—), $e = 5$ (—), $e = 6$ (—)

Les transitoires de torsion élémentaires pour les éléments situés entre le labyrinthe et le disque suivent le même profil en temps que le couple en frottement. Lors de la phase de contact partiel, ces angles subissent des successions d'annulations et sont à très faibles valeurs lors des contacts. Ils sont de l'ordre de 10^{-5} rad pour ces trois éléments comme décrit dans le diagramme en Figure VI.26a. Ensuite, ces angles croissent pour atteindre 3×10^{-4} rad, avec 3 éléments entre le laby et le disque, l'écart en torsion sur cette portion de la ligne d'arbre s'élève à $\approx 10^{-3}$ rad = 0.05° , (cf Figure VI.26b). Si ces angles sont très faibles, le diagramme des moments en Figure VI.26a indique que le moment de torsion donné par l'Équation (VI.38) pour un arbre en Inconel vaut maximum 10Nm en aval du disque turbine et avoisine -100 Nm

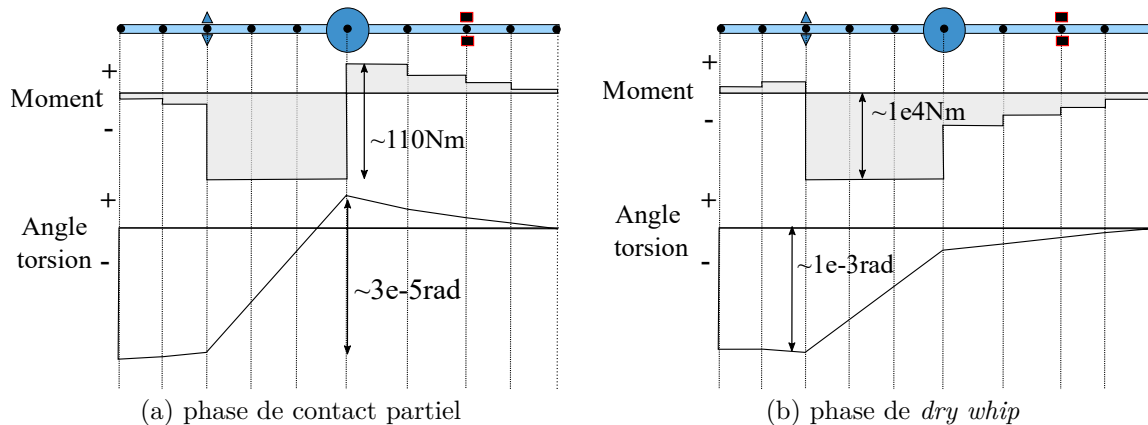


FIGURE VI.26 – Synthèse des diagrammes de moment/rotation en torsion de la ligne d'arbre (pas à l'échelle)

entre le labyrinthe et le disque. En fin de *dry whip*, le moment de torsion est négatif partout en aval du labyrinthe et s'élève à $\approx 10^4 \text{Nm}$, tout comme le couple résistif τ_f . Il faut aussi noter les moments de torsion très faibles aux extrémités de l'arbre, ce qui est cohérent avec la configuration libre-libre de la structure. En termes de contraintes, le cisaillement engendré par la torsion se calcule comme $\sigma = \frac{M \rho r_e}{I_p}$, où on rappelle que r_e représente le rayon extérieur de la section circulaire creuse de l'arbre (cf Figure VI.13) et I_p le moment quadratique polaire de la section. La contrainte est alors estimée autour 2,66 MPa en contact partiel et vaut 100 fois plus en fin de *dry whip*. Même si cela semble élevé, la limite d'élasticité pour de l'Inconel718 peut dépasser 1000 MPa s'il est traité thermiquement³. Pour de l'Inconel600, la marge est plus grande entre 250 et 758 MPa⁴. Il est donc en théorie possible, en fonction des données matériau plus précises, que des déformations plastiques interviennent en toute fin de *dry whip* mais cela est peu probable. Cela traduit la grande rigidité en torsion de l'arbre et il est donc envisageable que la torsion puisse être éliminée sans perturber le transitoire en vitesse de rotation. Ce cas de figure est étudié ultérieurement en Section VI.5.3.

En résumé, les résultats numériques pour la partie mécanique du contact rotor stator ont été vérifiés par analyse de convergence en temps sur des données globales comme la vitesse de rotation ou le couple frottant mais également sur des quantités nodales comme le déplacement au niveau du labyrinthe ou l'effort normal. Il y a une très bonne superposition des solutions sur les phases d'intérêt principal que sont le contact partiel et la phase instable en *dry whip*. Au-delà, la réponse présente de fortes oscillations surtout sur la vitesse relative tangentielle dont l'amplitude diminue avec le temps mais reste très élevée (60 m/s) ce qui engendre une surestimation du travail de la force de frottement pendant cette phase. Néanmoins, comme démontré à la section suivante, ce problème d'origine numérique est facilement atténué en réduisant conjointement le pas de temps et la tolérance du solveur non-linéaire lors de l'étape de prédiction x_{tol} . Cependant, il reste des limitations physiques dans la réponse convergée qui doivent être mises en évidence. Pour commencer, même si l'effort normal maximal appliqué aux nœuds a été divisé par 3, par rapport au Chapitre V (280 kN contre 800 kN auparavant, voir Figure V.29a), ce niveau reste élevé. C'est également vrai pour l'amplitude de la vibration au niveau du labyrinthe qui peut monter au-delà du centimètre. Même s'il est vrai que la zone de contact est en porte-à-faux par rapport à la fixation du stator au diffuseur et au distributeur (cf Figure VI.1c), ce qui devrait autoriser plus d'amplitude de déplacement radial,

3. données issues de <https://www.hightempmetals.com/techdata/hitempInconel718data.php>

4. voir : <https://www.corrotherm.co.uk/blog/mechanical-properties-of-inconel-alloy-600>

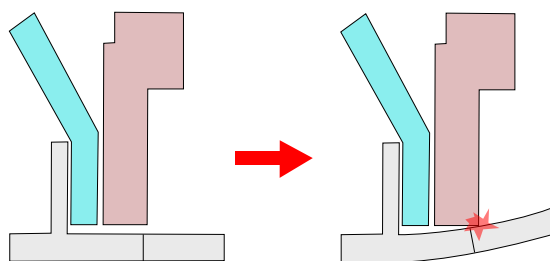


FIGURE VI.27 – Illustration d'un contact secondaire généré entre l'anneau et le distributeur en cas de forte vibration de l'anneau (*dry whip*)

la déformée du cercle de contact est excessive en fin de *dry whip* (voir Figure VI.23c). Comme déjà mentionné, il est fort probable que l'anneau plastifie en fin de *dry whip*. Par ailleurs, il y a un forte probabilité de génération de touches secondaires entre les pièces du carter, en particulier entre l'anneau et le distributeur de la THP (voir Figure VI.27) qui n'a pas été pris en compte.

5.2 Solution thermomécanique et nombre de nœuds maîtres

Les résultats du Chapitre V indiquaient qu'il était préférable d'augmenter le nombre de nœuds sur l'interface de contact afin d'obtenir une réponse thermique de qualité. Cette recommandation était surtout liée à l'ajout de ressorts sur la circonférence de l'anneau et qui raidissaient extrêmement localement la structure. Dans cette section, la configuration stator avec 72 nœuds maîtres est comparée avec celle à 36 nœuds en activant le couplage thermomécanique. Pour l'instant la dilatation thermique n'est pas prise en compte. Afin d'améliorer le calcul de la solution lorsque la vitesse relative tangentielle décroît fortement, la tolérance du solveur pour le calcul de la solution prédite est baissée à $x_{tol} = 10^{-10}$ pour les 2 maillages. Enfin, raffiner le maillage oblige à réduire le pas de temps afin que le calcul soit stable : il est alors fixé à $h = 2 \times 10^{-7}$ s.

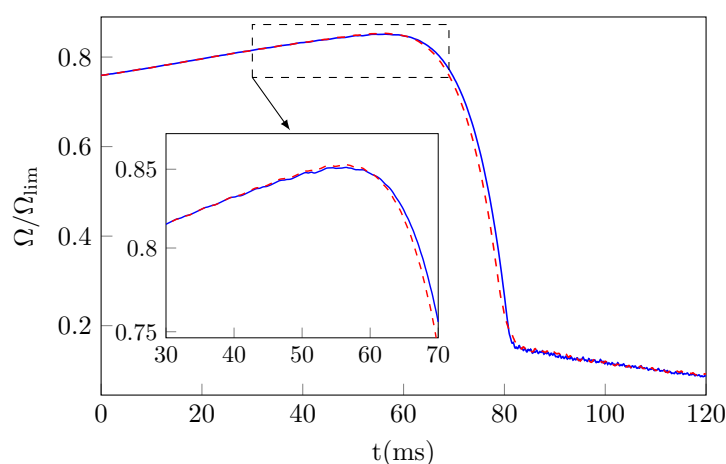


FIGURE VI.28 – Transitoire de vitesse de rotation : 72 nœuds (—) et 36 nœuds (- -)

Tout d'abord, il s'avère que les profils de vitesse de rotation du disque (voir Figure VI.28) sont identiques en changeant le nombre de nœuds maîtres n_b . Il en est de même pour la vibration latérale de l'arbre au niveau du labyrinthe u_l illustrée en Figure VI.29. Les courbes se superposent parfaitement jusqu'en 55ms qui correspond au déclenchement du *dry whip*. Au-delà, un léger déphasage existe entre les réponses des 2 modèles mais les niveaux de vibration

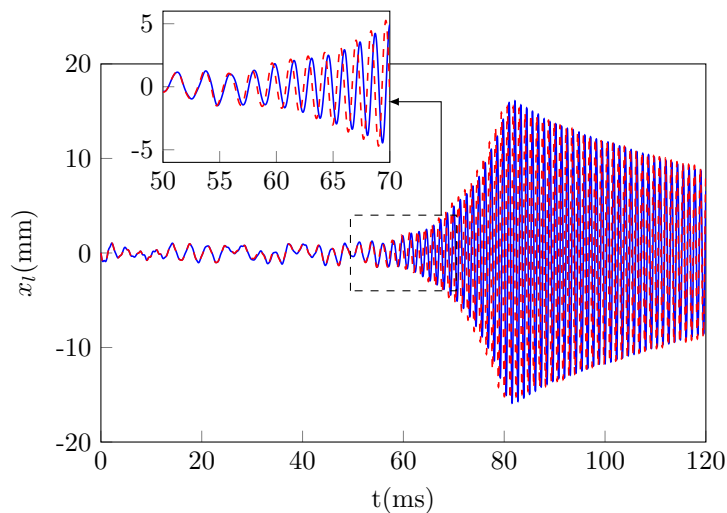


FIGURE VI.29 – Étude de convergence de la vibration du labyrinthe lorsque $n_b = 36$ (---) et $n_b = 72$ (—)

en *dry whip* et en *dry whirl* restent égaux. Enfin, le transitoire sur le couple de frottement (cf Figure VI.30) reste semblable à ceux déjà obtenus dans ce chapitre et les solutions sont parfaitement superposées pour la phase de contact partiel. Ces résultats confirment que la modèle réduit de carter avec $n_b = 36$ suffit pour prédire correctement la réponse mécanique. L'énergie

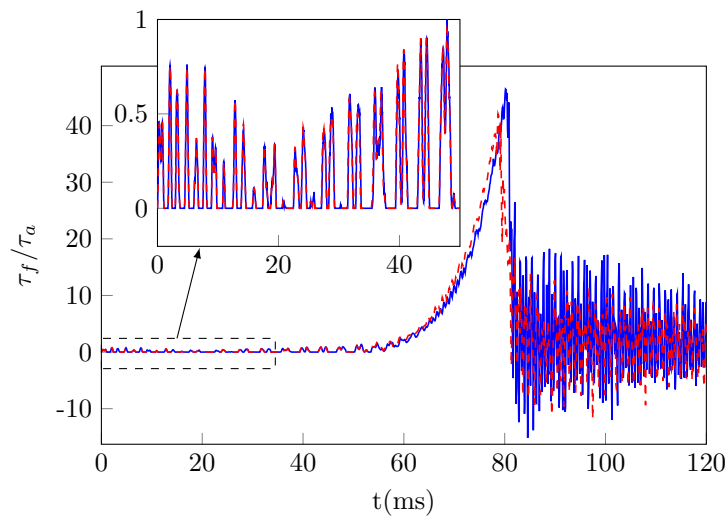


FIGURE VI.30 – Couple de frottement : 72 nœuds (—) et 36 nœuds (---)

de friction globale est identique pour les 2 maillages jusqu'à $t = 80$ ms (voir Figure VI.31). Cet instant marque la transition d'un régime instable en *dry whip* vers le *dry whirl* puisque la vitesse relative affichée en Figure VI.32 tend vers zéro. Le point d'inflexion sur l'énergie W_f est toujours présent. Pour $n_b = 72$, l'énergie de friction totale tend asymptotiquement vers 360 kJ, ce qui est deux fois inférieur au travail fourni par le frottement avec $n_b = 36$ en fin de simulation. Cela s'explique par des oscillations de la vitesse relative tangentielle autour de zéro avec une amplitude divisée par 2 avec le maillage plus fin. Il s'agit plutôt d'une conséquence de la diminution de la tolérance de la fonction `fsolve` employé dans l'algorithme `Carp-oneVC` et de la réduction du pas de temps plutôt que du raffinement du maillage puisque ce constat avait

également été rapporté pour le modèle parfaitement rigide (voir Section IV.4.5).

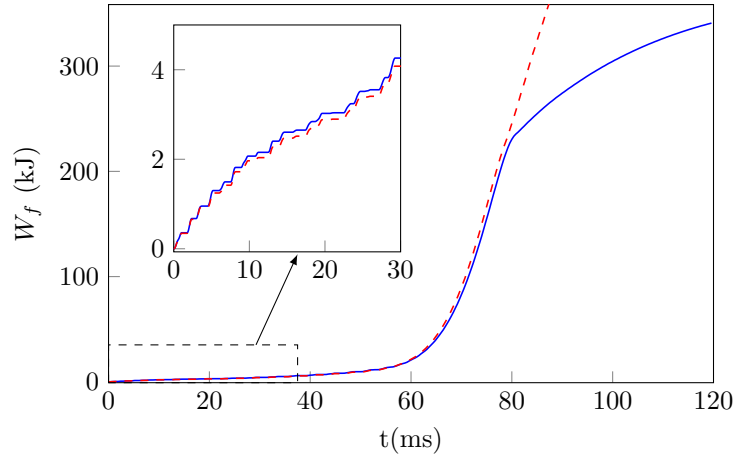


FIGURE VI.31 – Comparaison des énergies de friction globales avec $n_b = 72$ (—) et $n_b = 36$ (---)

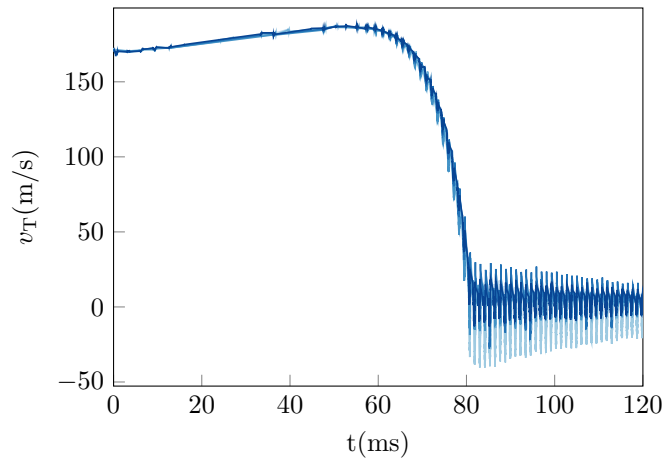


FIGURE VI.32 – Vitesses relatives tangentielles aux nœuds positionnés en $\phi = 80^\circ$ (—), $\phi = 90^\circ$ (—), $\phi = 100^\circ$ (—), $\phi = 110^\circ$ (—), $\phi = 120^\circ$ (—), $\phi = 130^\circ$ (—) pour le maillage avec $n_b = 72$

La comparaison des 2 maillages se poursuit sur la solution thermique. Les profils de températures sur le cercle de contact sont représentés pour trois instants : 10ms, 30ms et 50ms en Figure VI.33. Avec l'acier choisi comme matériau pour l'anneau, la température de fusion T_{fus} vaut en moyenne 1400°C et est reportée dans les 3 profils. Il s'avère que dès 10ms, la température dépasse le point de fusion sur 2 zones au fond ($\phi \approx \frac{\pi}{2}\text{rad}$) et en haut de l'anneau ($\phi \approx \frac{3\pi}{2}$). Même si ces températures sont très élevées ($> 4000^\circ\text{C}$), elles décroissent très rapidement. A $t = 30\text{ms}$, certains nœuds sont passés sous la barre des 2000°C et la conduction est une physique trop lente pour justifier cette baisse de température en 20ms. Le système subit des échauffements intenses. La vitesse de glissement avoisine 170m/s , les efforts de contact F_N sont de l'ordre de 10^3N et le coefficient de frottement $\mu = 0.1$. Sachant que la puissance de friction $\dot{Q}_f = \mu v_T F_N$ est répartie équitablement entre le rotor et le stator, la source de chaleur aux nœuds atteint plusieurs dizaines de kilowatts. D'autre part, cet échauffement est extrêmement rapide puisque les phases de contacts durent moins de 1ms. La structure présente alors des montées et descentes de températures très rapides qui sont une caractéristique de

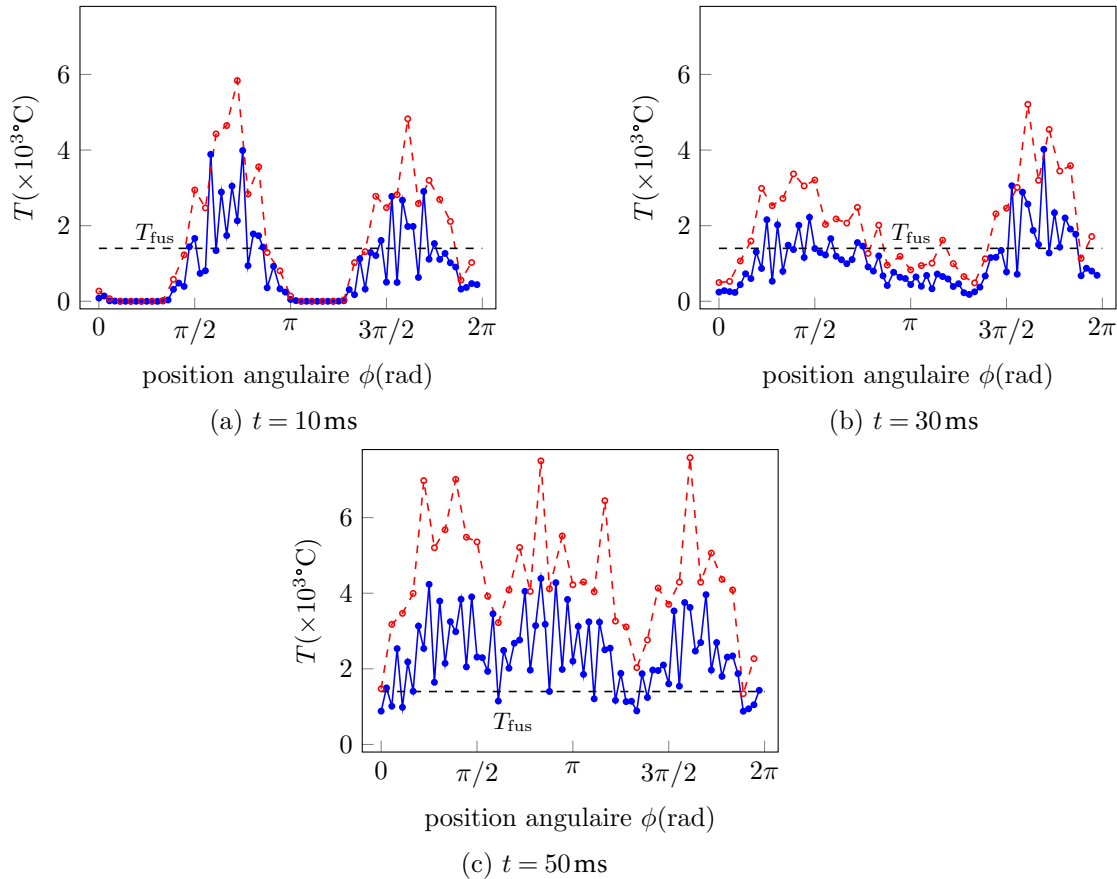


FIGURE VI.33 – Couple de frottement : $n_b = 72$ (—) et $n_b = 36$ (---)

températures dites *flash* [12] et donc les résultats sur la températures restent assez qualitatifs. Il est difficile de déterminer à ce stade précoce de la simulation si la fusion intervient effectivement dans la réalité. Par contre, à terme, et au fur et à mesure des contacts, la température croît inexorablement et finit par dépasser le point de fusion sur toute la circonférence du cercle de contact pour $t \geq 50 \text{ ms}$. C'est pour cette raison que le couplage par dilatation thermique n'a jamais été réactivé dans le modèle. Des températures aussi élevées combinées avec un modèle où le déplacement par dilatation est linéairement dépendant de la température n'est pas réaliste et fausse les résultats. Le dépassement du point de fusion est prédit par les deux modèles, même si toutefois la température paraît globalement surestimée pour le maillage plus grossier. Cela peut paraître paradoxal compte tenu que les 2 modèles fournissent la même énergie de friction globale et un couple résistif identiques pour $t \leq 80 \text{ ms}$. Cela signifie que la solution n'est pas encore convergée sur des quantités locales comme l'effort de contact aux nœuds. Ces efforts sont reportés pour 3 nœuds positionnés en $\phi = 80^\circ, 90^\circ, 100^\circ$ sur le cercle de contact pour $n_b = 36$ et $n_b = 72$ respectivement en Figures VI.34 et VI.35.

Pour $t \leq 30 \text{ ms}$, l'amplitude de l'effort normal aux trois nœuds vaut en moyenne 4 kN pour $n_b = 36$, tandis qu'avec 72 nœuds, F_N dépasse à peine 2 kN. Sur un même secteur de contact, il y a 2 fois plus de nœuds mais l'effort qui agit sur chacun d'entre eux est réduit de moitié mais la somme des efforts sur le secteur (et donc le couple) reste inchangée. Les deux modèles prédisent un amorçage du *dry whip* au même moment mais de nouveau, les efforts de contacts sont inférieurs pour le maillage raffiné : ils sont bornés à 100 kN contre les 280 kN prédits avec $n_b = 36$. La réponse mécanique n'est pas modifiée mais comme l'effort pilote localement les termes sources de l'équation de la chaleur, la solution thermique est affectée. Le maillage raffiné

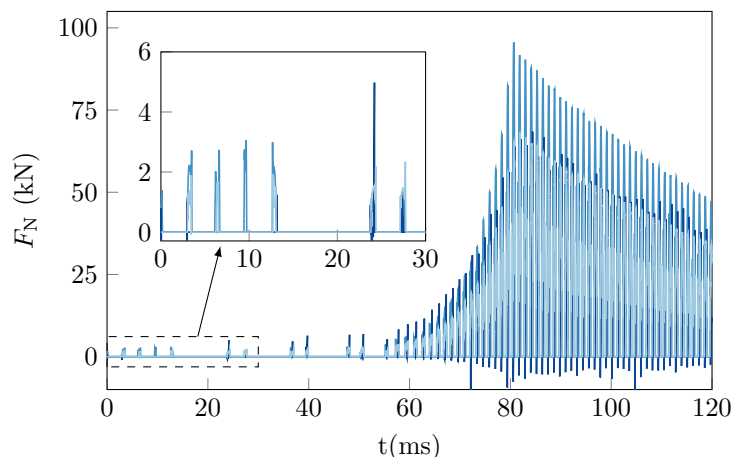


FIGURE VI.34 – Efforts de contact aux nœuds situés en $\phi = 80^\circ$ (---), $\phi = 90^\circ$ (—), $\phi = 100^\circ$ (—) pour le maillage fin $n_b = 72$

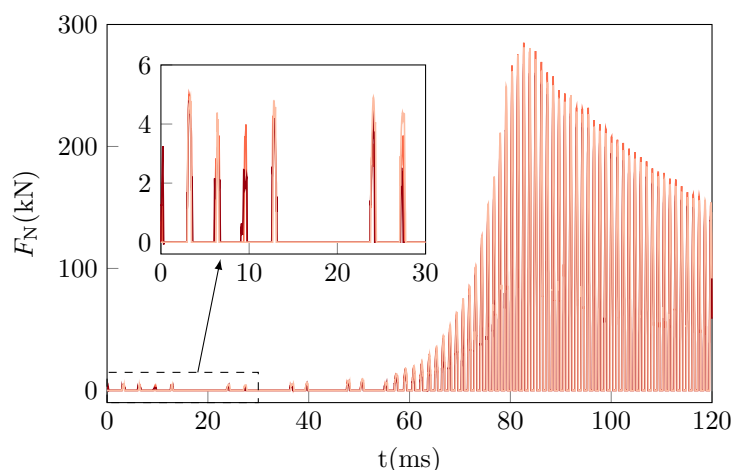


FIGURE VI.35 – Efforts de contact aux nœuds situés en $\phi = 80^\circ$ (---), $\phi = 90^\circ$ (—), $\phi = 100^\circ$ (—) pour le maillage grossier $n_b = 36$

donne une meilleure estimation de la température.

En revanche, la solution avec $n_b = 72$ présente brièvement des efforts de contact négatifs contrairement au cas où $n_b = 36$. $F_N < 0$ correspond à un contact avec collement qui n'est pas physique et viole les conditions de Signorini. C'est un problème parfois rencontré avec l'algorithme de Carpenter qui est inhérent à son implémentation. Il semblerait que ce problème soit accru avec le nombre de contraintes à gérer et donc avec la taille de la matrice de Delassus W qui augmente. Qui plus est, cette matrice est à valeurs très faibles et doit être inversée pour calculer les efforts. Il est donc possible qu'il y ait un problème de conditionnement numérique avec n_b plus élevé. Cependant, ce problème ne semble pas affecter la solution thermomécanique. Ces quelques efforts négatifs sont négligeables par rapport à la contribution des autres points. Si toutefois, il est souhaité de garantir des efforts strictement positifs, employer l'algorithme de Moreau-Jean est tout à fait adapté puisqu'il procède à la résolution du contact par un LCP où la condition sur le multiplicateur de Lagrange $\lambda \geq 0$ est clairement définie.

5.3 Réponse sans torsion

On rappelle que dans la Section VI.5.1, la vibration en torsion a été étudiée en détails et indiquait qu'il était peu probable que des déformations plastiques interviennent sur la structure. De plus, les modes en torsion sont à fréquence très élevée ($f_{T1} > 10\text{kHz}$) et ne semblent pas être excités pas le contact. De plus la résolution du contact avec la torsion est coûteuse en temps de calcul. Pour l'instant avec 10 nœuds sur la ligne d'arbre et 5ddls/nœud et avec $n_b = 36$ pour le carter, le calcul de 120ms prend déjà plus d'1h40 sans prise en compte de la thermique. Dans cette section, on propose de supprimer la torsion et de garder seulement la rotation de corps rigide φ . Cette simplification réduit la taille du modèle rotor de 20% et pourrait notamment accélérer le calcul de la solution non-linéaire. L'intérêt serait d'obtenir une solution similaire, en particulier le transitoire sur la vitesse de rotation macroscopique (et donc Ω correspond à $\dot{\varphi}$ de l'Équation (VI.34)), tout en ayant un gain sur le temps de calcul. Ce dernier est affiché en Figure VI.36a et est semblable par rapport au cas avec torsion. Le *dry whip* est déclenché

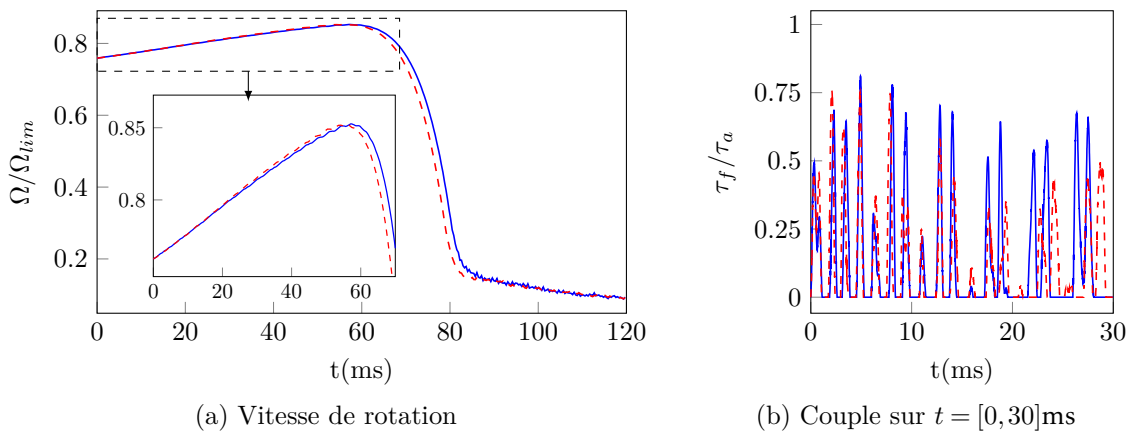


FIGURE VI.36 – Réponse transitoire sans torsion (—) et avec torsion (- -)

moins de 2ms plus tard dans le cas sans torsion mais la valeur maximale pour la vitesse de rotation $\Omega_{\max} = 0.852\Omega_{\text{lim}}$ reste inchangée. Pendant le premier tiers de la phase de contact partiel, le niveau de couple est identique, puis devient plus important pour le cas sans torsion. Cela explique pourquoi le profil de vitesse sans torsion est légèrement inférieur juste avant le déclenchement du *dry whip*. Pour finir, la vibration du rotor au niveau du labyrinthe est aussi comparée en fonction de la prise en compte, ou non, de la torsion (voir Figure VI.37). De nouveau, les 2 réponses sont similaires, elles se superposent sur une durée plus courte de 6ms. Ensuite, elles se dissocient mais maintiennent le même niveau d'amplitude. Ainsi, éliminer la torsion du modèle ne change pas l'issue de la simulation et maintient une correspondance satisfaisante de la solution tout en réduisant le temps de calcul qui passe à 39min, soit une division par 2.5.

A ce stade de l'étude, il a été possible de vérifier numériquement la solution thermomécanique de contact rotor stator en employant un modèle de carter proche du montage réel dans le moteur et une ligne d'arbre flexible. Les résultats mécaniques sont déjà convergés pour 36 nœuds mais c'est la réduction thermomécanique à 72 nœuds maîtres qui est retenue pour la suite de ce chapitre. Ce modèle prédit les quantités locales (vitesse relative, effort normal) avec plus de précision, ce qui se reflète nettement dans la solution thermique. Le modèle de ligne d'arbre flexible a également permis de confirmer que la torsion ne joue pas de rôle majeur dans la réponse transitoire et peut être ignorée. La section suivante propose de se prémunir d'un modèle « maison » pour la ligne d'arbre développée sous python. A la place, la ligne d'arbre est modélisée sous ANSYS tout comme le carter afin de garantir une conservation des modèles

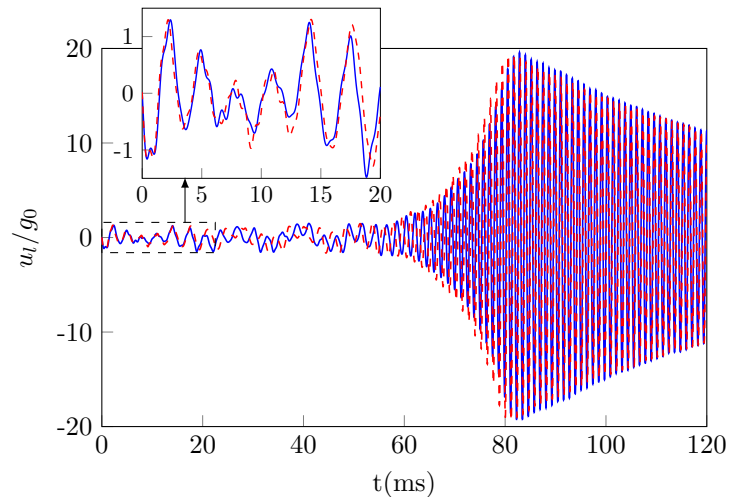


FIGURE VI.37 – Déplacement labyrinthe selon axe X : sans torsion (—) et avec torsion (---)

plus robuste et centralisée dans un logiciel commercial.

6 Application : modèle de turbine sous ANSYS

6.1 Géométrie et propriétés

Dans cette section, la CAO de la turbine est réalisée sous SpaceClaim et se rapproche de la vraie pièce. Dans la plupart des modèles de ligne d'arbre, la structure est simplifiée par des

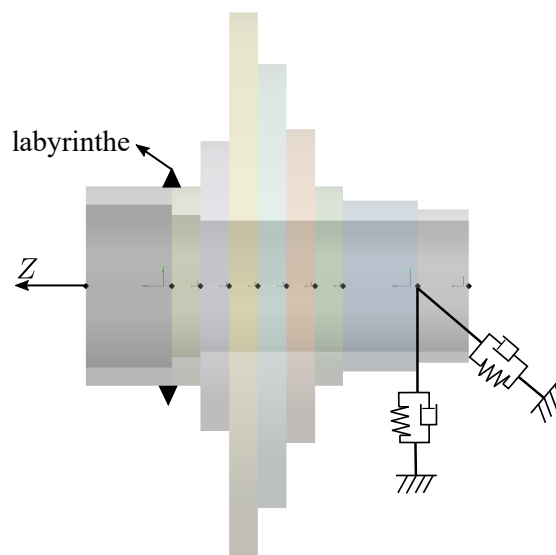


FIGURE VI.38 – Profil de la turbine flexible à section constante par morceaux avec mise en évidence du palier et du labyrinthe

poutres de section constantes par morceaux (voir Figure VI.38). Dans cette étude 9 tronçons de turbine sont définis. Cette approche de modélisation de ligne d'arbre est celle couramment utilisée par le partenaire industriel. Sur la Figure VI.38 sont également mis en évidence les emplacements du palier et de la dent du labyrinthe. La raideur du palier est toujours fixée à

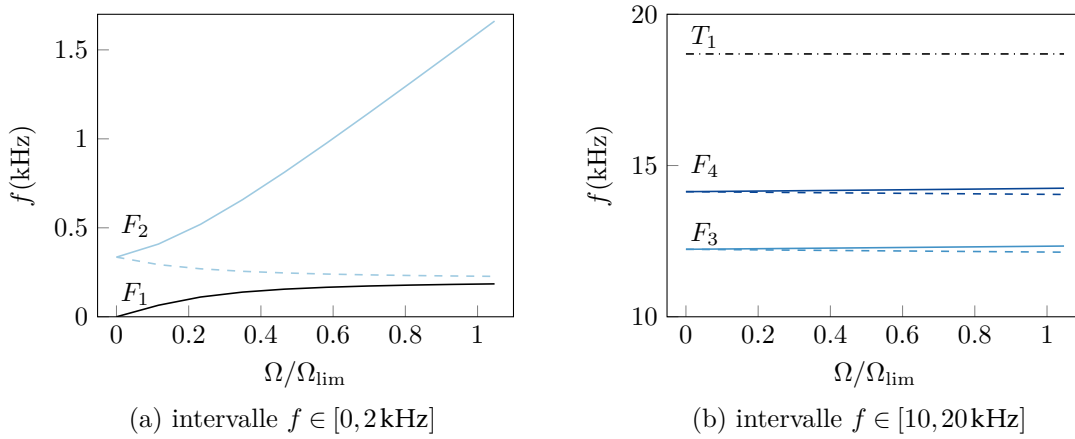


FIGURE VI.39 – Diagramme de Campbell de la ligne d'arbre modélisée sous ANSYS avec modes de flexion F_1 (—), F_2 (—), F_3 (—) et F_4 (—) en précession directe (continu) et rétrograde (pointillés), et le 1er mode de torsion T_1 (—)

$k_p = 10^7 \text{N/m}$ et l'amortissement à $c_p = 100 \text{Ns/m}$. Dans ANSYS Mechanical, la turbine est discrétisée au moyen de 14 éléments poutres de Timoshenko BEAM188 composé de 3 nœuds (1 nœud par extrémité et 1 nœud interne), soit $N_n = 29$. Les nœuds internes ne sont pas accessibles par l'utilisateur. Chaque nœud possède initialement 6 ddl mais, compte tenu des résultats de la Section VI.5.3 concernant la torsion, la rotation ainsi que le déplacement axial seront éliminés. Une analyse modale est effectuée et les diagrammes de Campbell issus d'ANSYS sont proposés en Figure VI.39. De nouveau, les 2 premiers modes F_1, F_2 sont identiques à ceux déjà présentés pour le modèle rigide et le modèle flexible à section constante (modes de pivot et du palier). Par contre les autres modes de flexion ont des fréquences encore plus hautes qu'en Section VI.3.7, ce qui traduit que la turbine est plus rigide en lien avec l'évolution des sections de cette dernière. De plus, l'élimination de la torsion est aussi motivée par l'augmentation de la première fréquence propre de celle-ci qui atteint 18 kHz soit 63% de plus que pour le modèle flexible précédent.

6.2 Résultats mécaniques

Le modèle réduit du carter avec $n_b = 72$ oblige à diminuer le pas de temps à $h = 2 \times 10^{-7} \text{s}$. Le coefficient de frottement est toujours fixé à $\mu = 0.1$ et la dilatation thermique est ignorée. Afin d'éviter le problème d'apparition d'efforts négatifs, l'algorithme de Moreau-Jean est également employé et implémenté en python. Le frottement est considéré en phase glissante uniquement et donc, si on se ramène aux étapes détaillées dans l'Algorithme 4, les multiplicateurs de Lagrange sont solution d'un LCP. Vu que SICONOS n'est pas employé dans ce chapitre, l'algorithme de Moreau-Jean est nommé Mor-LCP ici pour le dissocier de celui utilisé au Chapitre IV et qui faisait appel à un SOCCP. Les transitoires sur la vitesse de rotation $\Omega = \dot{\varphi}$ sont comparés pour les 2 algorithmes en Figure VI.40. Dans les 2 cas, et comme pour le modèle de ligne d'arbre à section constante, Ω commence par croître puis est limitée à $\Omega_{\max} \approx 0.88\Omega_{\text{lim}}$. Comme l'indique la Figure VI.41, la réponse débute en régime de contact partiel en précession directe. Le sens de la précession change rapidement pour devenir rétrograde mais les rebonds ont toujours lieu. Ensuite, le contact devient permanent, et la réponse instable en *dry whip* est déclenchée pour finir en régime proche du roulement pur. La solution obtenue par Mor-LCP prédit néanmoins une apparition du *dry whip* un peu plus tôt. La valeur maximale de la vitesse de rotation $\Omega_{\max} = 0.866\Omega_{\text{lim}}$ est atteinte à 67 ms. Pour Carp-oneVC, on trouve que $\Omega_{\max} = 0.876\Omega_{\text{lim}}$ lorsque $t = 75 \text{ms}$, soit 8 ms d'écart entre les 2 algorithmes, ce qui reste

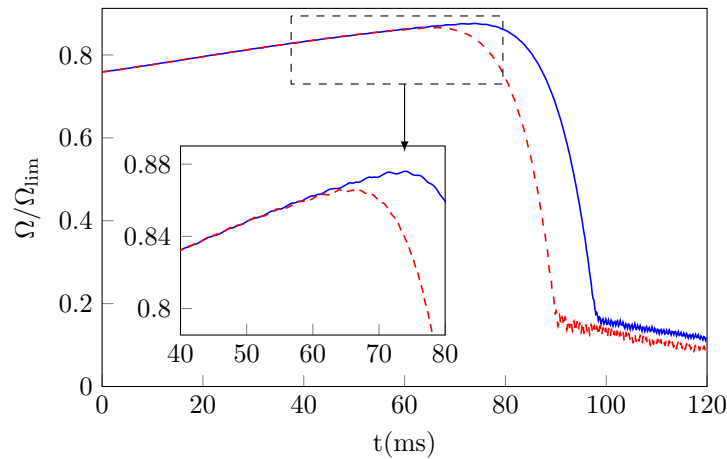


FIGURE VI.40 – Vitesse de rotation avec turbine et carter sous ANSYS calculé avec Carpenter (—) et Moreau-Jean (---)

raisonnable compte tenu de la brutalité et l'instabilité de la solution. De plus, l'écart relatif sur Ω_{\max} fourni avec Mor-LCP par rapport à Carp-oneVC est inférieur à 1.15%, ce qui est satisfaisant. Le couple de frottement (voir Figure VI.41a) pour les 2 méthodes de résolution

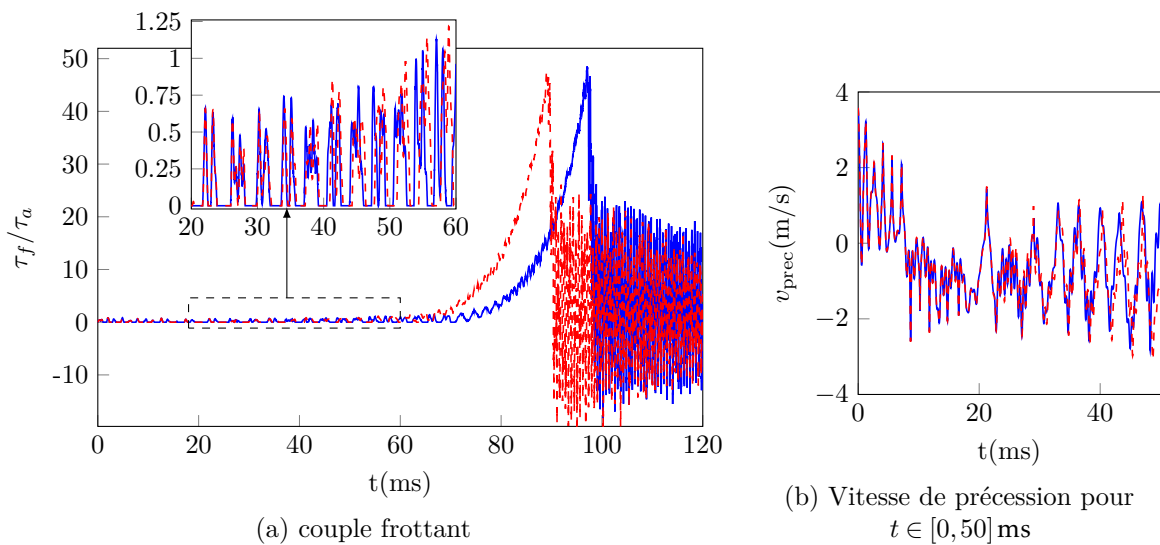


FIGURE VI.41 – Mise en évidence de la précession inverse et du *dry whip* prédits avec Carp-oneVC (—) et Mor-LCP (---)

sont identiques pour $t < 40$ ms. Puis le couple calculé par Mor-LCP devient supérieur à celui de capr-oneVC, ce qui explique le déclenchement plus précoce du *dry whip*. Le couple suit la même évolution pour les 2 algorithmes et finit par atteindre la même valeur (de l'ordre de 10^4 Nm) en fin d'instabilité avant de chuter et de décroître progressivement en amplitude. La convergence des 2 méthodes pour la phase de contact partiel est également démontrée par la vibration du nœud de la ligne d'arbre correspondant au labyrinthe (cf Figure VI.42). Le niveau d'amplitude maximal lors du *dry whip* est identique pour Carpenter et Moreau-Jean et est très proche de celui prédit avec la ligne d'arbre simplifiée (cf Figure VI.37).

Comme attendu, les efforts de contact calculés avec Carp-oneVC peuvent présenter des résultats négatifs. C'est notamment le cas pour les nœuds aux coordonnées polaires $\phi =$

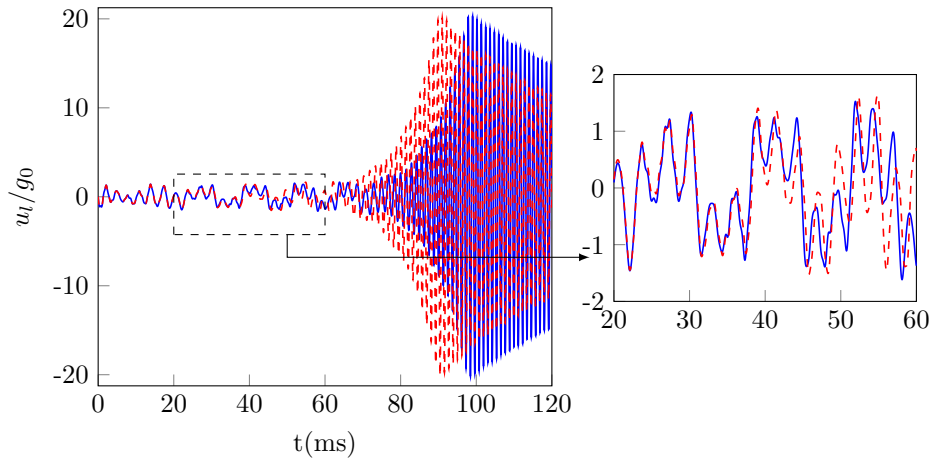


FIGURE VI.42 – Vibration du labyrinthe et du carter sous ANSYS pour **Carp-oneVC** (—) et **Mor-LCP** (---)

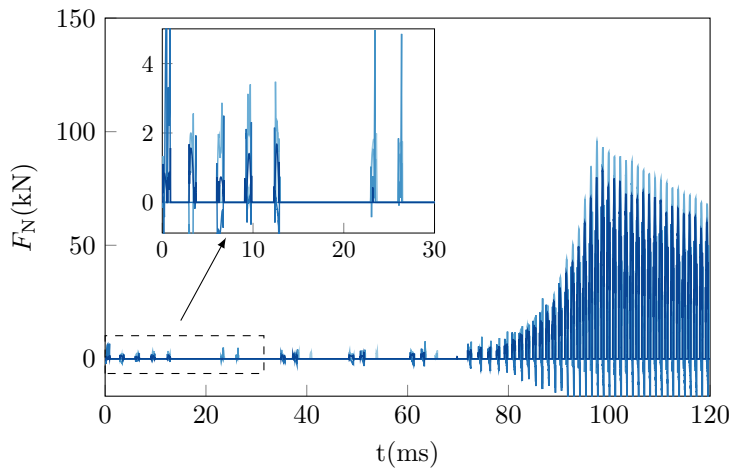


FIGURE VI.43 – Efforts normaux obtenus avec **Carp-oneVC** aux nœuds situés aux coordonnées polaires : $\phi = 80^\circ$ (—), $\phi = 90^\circ$ (—), $\phi = 100^\circ$ (—), $\phi = 110^\circ$ (—), $\phi = 120^\circ$ (—)

100° et 110° , voir Figure VI.43. Ce problème n'apparaît pas avec **Mor-LCP** comme l'indique la Figure VI.44. D'autre part, il faut remarquer que les efforts nodaux sont légèrement inférieurs à ceux obtenus par **Carp-oneVC**, alors que la somme de ces efforts, reflétée par le couple frottant, sont égales. Il semble donc que pour l'algorithme de Carpenter que les efforts aux autres nœuds soient plus élevés ce qui compense les valeurs négatives calculées ailleurs. Cela explique notamment comment ces quantités non-physiques sont estompées dans la solution globale. Ces valeurs négatives sont encore plus flagrantes lors de la phase de *dry whip* mais en général, les niveaux d'efforts atteints pour les deux simulations sont similaires. En contrepartie de la positivité des efforts, l'algorithme de Moreau-Jean présente tout de même des pénétrations résiduelles non-physiques, liées à la résolution en vitesse plutôt qu'en position des contraintes de Signorini. Néanmoins, vu le pas de temps retenu qui est assez faible, ces pénétrations sont bornées au dixième de micron lors de la phase de contact partiel. Bien que la pénétration résiduelle soit très faible, il est possible que l'accumulation des contacts modifie progressivement le déplacement des structures. Cela se confirme sur l'agrandissement de la vibration du labyrinthe en Figure VI.42 qui montre que son amplitude atteint des valeurs un peu plus élevées avec **Mor-LCP**. Cet écart sur le jeu et la vibration engendre à terme un décalage des

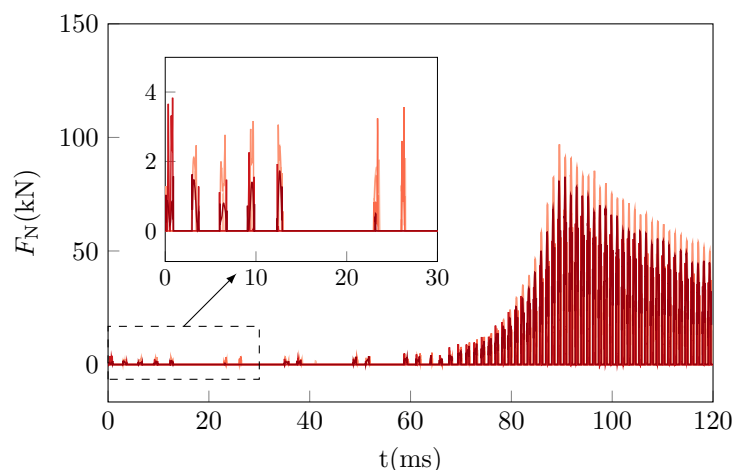


FIGURE VI.44 – Efforts normaux obtenus avec **Mor-LCP** aux nœuds situés aux coordonnées polaires : $\phi = 80^\circ$ (—), $\phi = 90^\circ$ (—), $\phi = 100^\circ$ (—)

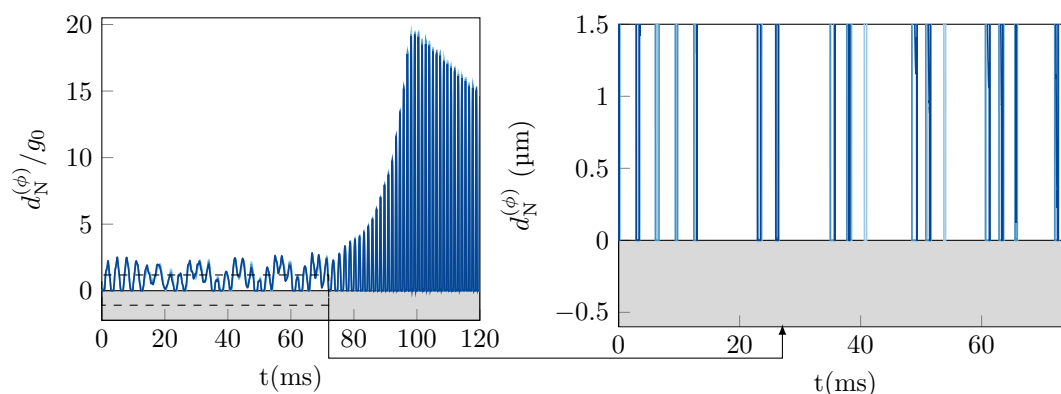


FIGURE VI.45 – distances normales obtenues avec **Carp-oneVC** aux nœuds situés aux coordonnées polaires : $\phi = 80^\circ$ (—), $\phi = 90^\circ$ (—), $\phi = 100^\circ$ (—)

solutions et de l'instant de déclenchement de l'instabilité. Quant à l'algorithme de Carpenter, il présente l'avantage de satisfaire strictement le condition $d_N \geq 0$ pour tous les nœuds. En pratique, il est tout à fait possible de garantir à la fois la positivité des efforts et du jeu en procédant à la reprojection de contraintes déjà présentée dans l'Algorithme 5 qui est directement disponible dans le programme **SICONOS**. On rappelle que cette approche a déjà été utilisée pour modèle rigide au Chapitre IV sous le nom de **Sic-Proj**. Par manque de temps, cette version de l'algorithme de Moreau-Jean n'a pas pu être implémentée sous python. Cependant, les résultats fournis par Carpenter et Moreau-Jean sous sa forme classique restent cohérents et pertinents. En effet, l'objectif de cette section n'est pas de savoir quelle méthode est la meilleure puisque chacune a déjà démontré sa capacité à résoudre correctement des problèmes de contact. Cela permet de mettre en évidence les limitations et propriétés de chacune des méthodes et de leurs conséquences sur la réponse transitoire.

Dans une démarche analogue à celle du Chapitre IV, une analyse fréquentielle est de nouveau réalisée pour cette application industrielle, afin de caractériser le déclenchement du *dry whip*. En Section IV.4.4.2, il s'est avéré que les raies principales du spectrogramme de la vibration du labyrinthe correspondaient à des modes couplés de la turbine et stator rigides.

Dans le cas du système complet modélisé avec des éléments finis, définir en quoi consiste le

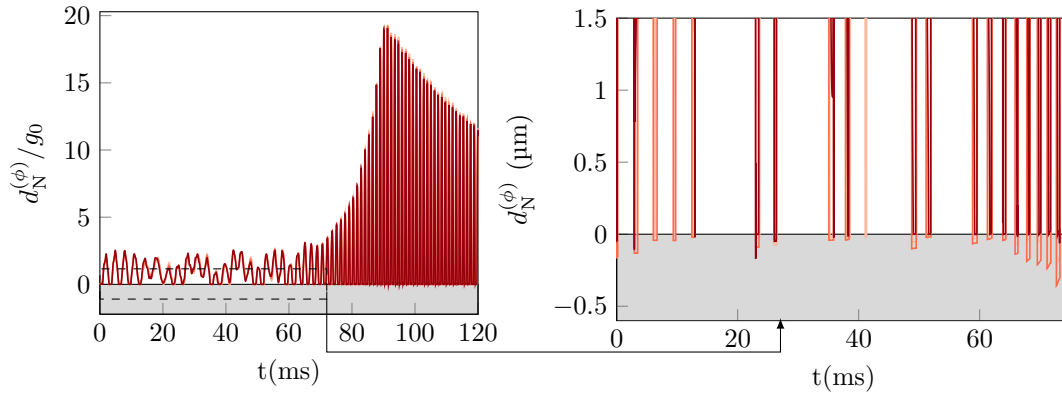


FIGURE VI.46 – distances normales obtenues avec **Mor-slip** aux nœuds situés aux coordonnées polaires : $\phi = 80^\circ$ (—), $\phi = 90^\circ$ (—), $\phi = 100^\circ$ (—)

couplage rotor-stator est plus délicat. En première approche, et faute de temps supplémentaire, le rotor et le stator sont ici connectés par un nœud commun. En effet, le nœud l sur la ligne d'arbre qui correspond au labyrinthe est confondu avec le nœud maître i du carter arbitrairement choisi en $\phi = \frac{3\pi}{2}$ rad. Cette liaison implique alors les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} u_l = u_i \\ v_l = v_i \end{cases} \quad (\text{VI.39})$$

qui sont injectées dans les équations du mouvement. Le diagramme de Campbell brut dans le repère fixe est affiché en Figure VI.47a. Il indique de nombreux modes indépendants de la vitesse de rotation. Ce sont donc toujours des modes de stator qui ne font pas intervenir de mouvement du rotor. Ce diagramme est alors filtré afin de mettre en évidence des modes directs (FW1, FW2, FW3, FW4 et FW5) et inverse (BW1) en Figure VI.47b. La différence majeure avec les diagrammes de Campbell présentés au Chapitre IV est que la plupart des modes ne sont plus doubles à vitesse de rotation nulle. En effet, la liaison appliquée dans ce cas industriel casse la symétrie de la structure. Il est donc fort possible que des modes soient manquants à cause de ce couplage simplifié. D'autre part, on constate que le modèle industriel présente une zone de veering entre les modes FW3, FW4 et FW5. La combinaison des 3 courbes rappelle l'évolution du mode conique direct qui avait pu être identifié pour le modèle rigide (Figure IV.16). Ainsi, le modèle industriel couplé flexible fait intervenir 3 modes coniques au lieu d'un seul. Ce modèle de couplage, malgré sa simplicité, permet d'obtenir des premiers résultats intéressants. On trouve déjà une superposition entre l'évolution temporelle des modes avec le spectrogramme complet de la vibration du labyrinthe dans le repère absolu (u_l, v_l) . En particulier, une des raies principales dans le domaine de fréquence négatif correspond au premier mode de précession inverse BW1. Par contre, la seconde raie, dont l'intensité s'accroît avec le temps, n'est pas associée avec un mode de la Figure VI.47. Cependant cette seconde raie est définie de 420Hz à 800Hz ce qui correspondrait à deux modes rétrogrades manquants (BW2, BW3) dans le diagramme de Campbell. De plus, même s'il ne s'agit pas des raies principales, il y a aussi des superpositions avec des modes directs FW3 et FW5, comme dans le cas parfaitement rigide. Ce spectrogramme réitère les conclusions déjà expliquées au Chapitre IV. La dynamique du système rotor stator consiste en une succession de régimes vibratoires

1. de contact partiel, initialement dans le sens direct mais qui bascule rapidement dans le sens inverse ;
2. puis de contact permanent en *dry whip* ;

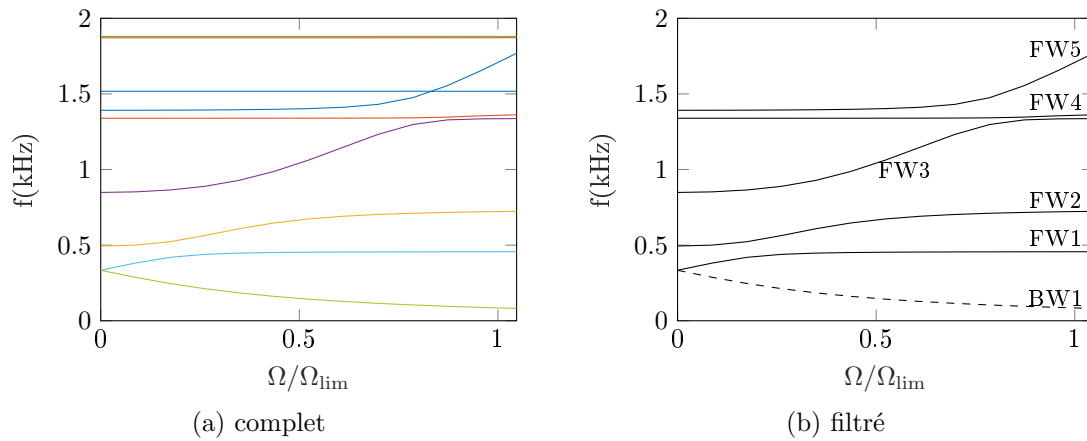


FIGURE VI.47 – Diagramme de Campbell du système rotor stator couplé par appariement du nœud labyrinthe et un nœud maître arbitraire. Filtrage du diagramme afin de mettre en évidence les modes avec précessions inverses (---) : BW1 et directes (—) : FW1, FW2, FW3, FW4 et FW5

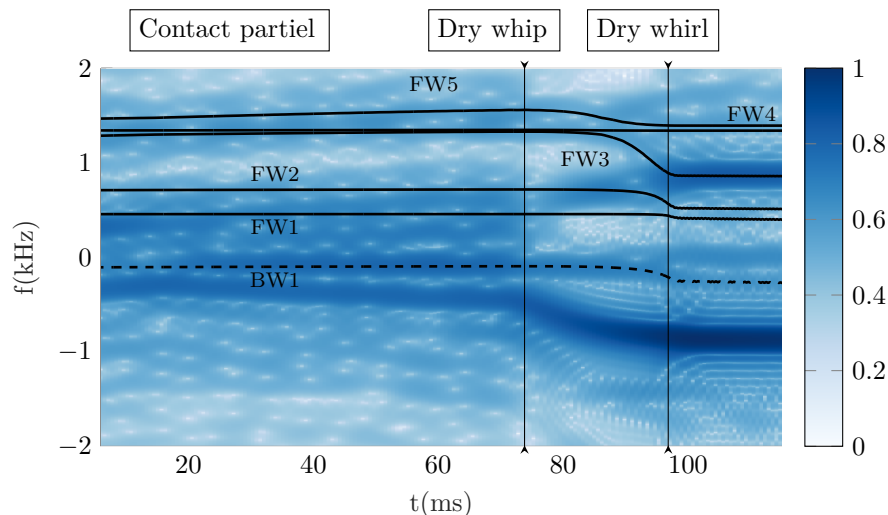


FIGURE VI.48 – Spectrogramme complet temps-fréquence de la vibration absolue du nœud associé au labyrinthe et superposition modes couplés inverses (---) : BW1 et directs (—) : FW1, FW2, FW3, FW4 et FW5

3. finalement une transition vers le *dry whirl* est mise en place ;

Le spectrogramme est semblable à celui du modèle parfaitement rigide ce qui implique que malgré l'introduction de la flexibilité des structures, ce sont les modes d'ensembles rigides qui sont le plus sollicités lors du contact rotor-stator. Ce résultat est attendu puisque la turbine est plus massive que l'anneau du carter et a donc moins tendance à fléchir.

6.3 Résultats thermiques

Pour finir, la réponse thermique est analysée pour les 2 algorithmes *Carp-oneVC* et *Mor-LCP*, les profils de températures sont reportés pour 4 instants $t = 1, 10, 30, 50$ ms en Figure VI.49. Le premier graphe à 1 ms montre qu'il existe déjà certains nœuds dont la température excède le point de fusion. Le profil présente un seul lobe allant sur le second quadrant du cercle de contact (i.e. en radians sur $\phi \in [\pi/2, \pi]$ rad). Les 2 algorithmes fournissent des profils quasiment

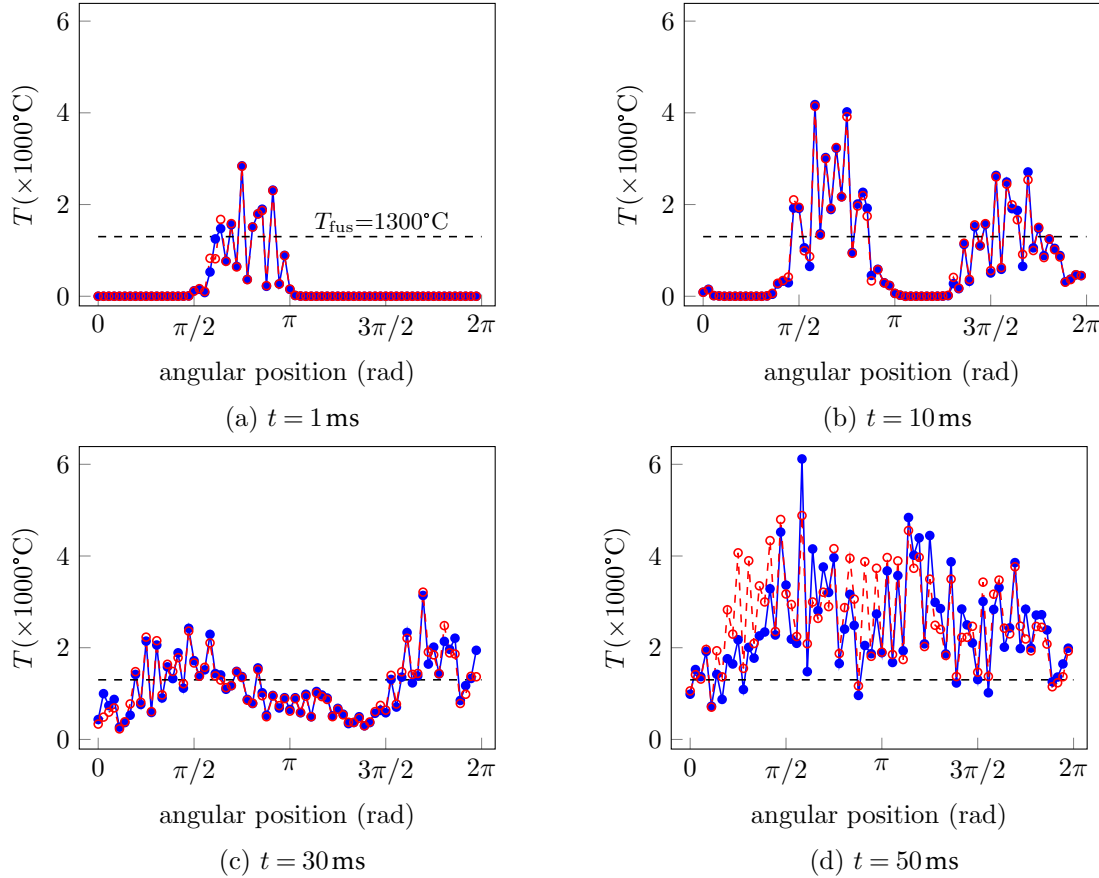


FIGURE VI.49 – Profils de température sur la circonférence du stator pour plusieurs instants calculés via **Carp-oneVC** (●) et **Mor-LCP** (◊)

identiques. Les quelques écarts sont liés à la présence d'efforts négatifs pour Carpenter. Des puits de chaleur apparaissent aux points de contact au lieu de sources, ce qui n'est pas physique. La température est alors un peu sous-estimée mais cet effet demeure localisé et négligeable. Pour $t = 10 \text{ ms}$, un second lobe apparaît, sur le quatrième quadrant (de $3\pi/2 \text{ rad}$ à $2\pi \text{ rad}$). Ailleurs la température reste nulle, ce qui n'est plus le cas à $t = 30 \text{ ms}$. Toute la circonférence est chauffée même si les 2 lobes principaux continuent de se démarquer. En revanche, il faut souligner que l'amplitude du premier lobe a baissé de 4000°C à 2000°C , voire est repassée sous le point de fusion localement en seulement 20 ms d'intervalle. Cela souligne caractère bref et intense de l'échauffement et motive l'apparition d'une température *flash*. L'issue de la réponse thermique est la même que pour le modèle avec une ligne d'arbre à section constante : dès 50 ms , presque tout le cercle de contact est passé à une température supérieure à la température de fusion T_{fus} . Ce résultat est valable à la fois pour **Carp-oneVC** et **Mor-LCP** même si les profils ne se superposent plus parfaitement pour $\phi \in [\pi/6, \pi] \text{ rad}$.

Puisque la solution en température est équivalente pour les 2 méthodes de résolution, celle prédite par **Mor-LCP** est retenue pour la suite du post-traitement. Les croissances quasi-instantanées suivies par les chutes rapides de températures sont mises en évidence pour 6 nœuds sur un secteur allant de 80° à 105° (i.e. de $\frac{4\pi}{9} \text{ rad}$ à $\frac{7\pi}{12} \text{ rad}$). Sans la succession de contacts, la température subirait une décroissance exponentielle et repasserait sous celle de fusion. On peut considérer que le métal commence à fondre lorsque l'on atteint un état où la température est majoritairement au dessus de la température de fusion c'est à dire à partir de $t \geq 50 \text{ ms}$. A titre de synthèse, les profils de température sur le cercle de contact sont empilés

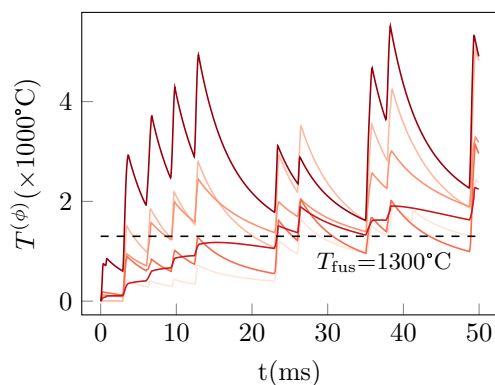


FIGURE VI.50 – Evolutions temporelles des températures nodales sur un secteur de 80° à 105° : $\phi = 80^\circ$ (—), $\phi = 85^\circ$ (—), $\phi = 90^\circ$ (—), $\phi = 95^\circ$ (—), $\phi = 100^\circ$ (—), $\phi = 105^\circ$ (—)

pour plusieurs instants et permettent de dresser la solution thermique dans l'espace et le temps en Figure VI.51. Ce graphe illustre clairement que si la température augmente instantanément

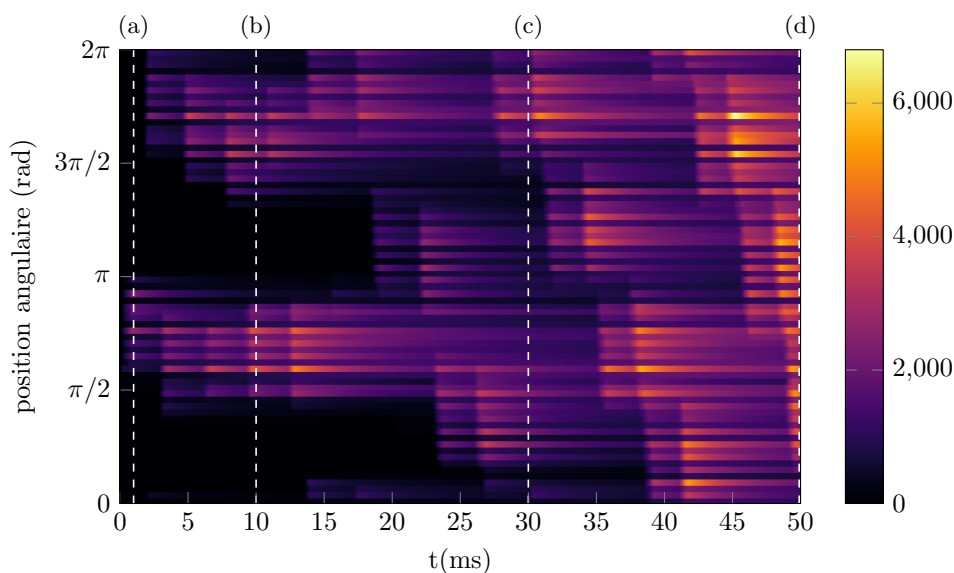


FIGURE VI.51 – Diagramme Température-position angulaire-temps pour le contact thermomécanique jusqu'à $t = 50ms$

à cause du frottement, ce n'est pas le cas partout sur le cercle de contact et la baisse de température intervient rapidement. Jusqu'à $t = 20ms$, les zones de contact sont réduites aux deux lobes déjà décrits plus haut. Les *screenshots* de la Figure VI.49 sont d'ailleurs reportés sur le diagramme.

7 Bilan du chapitre

Le rotor et le stator ont tous les deux été modélisés dans ANSYS. Le stator a subi une réduction thermomécanique qui permet de reproduire correctement les réponses en fréquence thermique et mécaniques. Cette réduction a uniquement impliqué des données issues des fichiers binaires d'ANSYS ce qui assure une excellente robustesse et flexibilité de la procédure mise en place. L'étude de cas réalisée au préalable sur le modèle rotor a démontré que le mouvement de torsion n'affecte pas la réponse et a pu être éliminée du problème tout en réduisant le temps de

calcul. L'utilisation de l'algorithme de Carpenter présente des résultats vérifiés numériquement mais qui pouvaient tout de même présenter des collements non-physiques lorsque le nombre de nœuds maîtres est augmenté. Les résultats ont été comparés avec ceux fournis par Moreau-Jean qui ne présente pas ce problème et ont tous deux prédit une réponse qui commençait en précession inverse en contact partiel avant de basculer dans un régime de *dry whip*. Pour la réponse thermique, les 2 approches fournissent également des résultats qui concordent. Cependant, il faut noter que l'intensité et la rapidité des échauffement provoquent une montée rapide de la température au-delà du point de fusion puis une décroissance exponentielle en absence de contact. Le cumul des contacts amène la température à dépasser le point de fusion de façon progressive. Il semble donc que si un grippage apparaît dans le joint labyrinthe lors d'une rupture d'arbre, ce soit plus probablement causé par une soudure par frottement (*fretting*) plutôt que par serrage lié au rattrapage de jeu (i.e. phénomène de frettage).

Enfin, si les résultats sont vérifiés numériquement, il reste des limitations liées à une simplification des physiques. La vibration conséquente des structures remet en cause la loi d'élasticité structurelle employée dans le modèle. Des zones de contacts secondaires qui n'ont pas été envisagées peuvent émerger. De plus, le problème élastothermique est linéarisé. Toutes les propriétés matériau (conductivité, dilatation, module de Young,...) ont été considérées sans dépendance avec la température, ce qui semble remis en cause par la plage de température couverte lors de la simulation. Cela est particulièrement vrai pour le coefficient de frottement qui en pratique, serait grandement affecté par l'existence d'une couche de métal fondu. Le contact n'est plus sec mais lubrifié.

Conclusion

Bilan des travaux

Cette thèse a contribué à répondre à une problématique encore peu explorée pour les moteurs d'hélicoptère. Les ruptures d'arbre et/ou de tirant moteur, et la perte de charge (*loss of load*) qui en découlent, sont des événements complexes et multiphysiques. Ce scénario accidentel fait intervenir des effets aérodynamiques, mais aussi thermomécaniques et tribologiques à cause de l'émergence de zones de contact rotor-stator à plusieurs endroits dans le moteur. L'étude a démarré sur des cas historiques, qui ont démontré qu'il était possible que la turbine d'un générateur de gaz ne subisse pas de survitesse non-contrôlée pour l'intégrité du moteur et de la cellule. Le ralentissement de la turbine pouvait être provoqué par des contacts axiaux de type disque-carter et aube carter (*blade tangling*). Il faut dissocier ce scénario de *loss of load* de celui du *blade shedding*, où la montée en vitesse est provoquée et s'applique sur la turbine libre du moteur d'hélicoptère. Cependant, aucun travail de recherche n'avait encore été réalisé sur la gestion du contact radial frottant dans les joints labyrinthes dans le cas du *loss of load* et de son influence sur le transitoire de la vitesse de rotation. L'outil numérique développé dans cette thèse a permis de confirmer cette hypothèse pour un cas de turbine isolée du compresseur, ce qui est plus pessimiste que la réalité, et de donner les clés pour en expliquer la cause.

Comme point de départ, les travaux ont consisté en l'élaboration d'un modèle académique simple afin de capturer l'essentiel de la physique, c'est-à-dire la dynamique d'une ligne d'arbre en porte-à-faux affectée par un contact unilatéral frottant. Le rotor et le stator ont été modélisés sous l'hypothèse des corps rigides et le système était alors limité à 7 degrés de liberté. Un besoin préliminaire de cette étude était aussi de déterminer les conditions initiales de touche provoquées par la rupture d'arbre. Pendant cette phase, une liaison résiduelle entre les parties compresseur et turbine du moteur a été prise en compte, ce qui se rapproche le plus de la configuration réelle. Les méthodes de résolution de contact employées, Carpenter et Moreau-Jean, sont déjà disponibles et largement éprouvées dans la littérature et l'idée n'est donc pas de déterminer laquelle est la meilleure. Cependant, les présents travaux ont mis en évidence le besoin d'adaptation de ces méthodes pour un système Lagrangien intrinsèquement non-linéaire à cause des effets gyroscopiques et d'accélération angulaire. Si cette adaptation est décrite en profondeur pour l'algorithme de Moreau-Jean [3], cette thèse a proposé une version simplifiée de l'algorithme de Carpenter qui a fourni des résultats tout aussi satisfaisants. Ce modèle académique a été capable de reproduire les observations et études d'influences disponibles dans la littérature. De plus, ce modèle a permis l'analyse d'une application moins courante où la vitesse de rotation est une inconnue du problème. Ce modèle rigide a démontré que la survitesse peut être bornée à la limite autorisée lorsque le coefficient de frottement ou la raideur du support du stator augmentent, ou que la masse du stator est faible. D'autre part, certains jeux de paramètres ont mis en évidence un déclenchement d'instabilité en *dry whip*, qui est un phénomène physique, mais dont la détection est rendue difficile par la grande rigidité des structures et donc sa forte sensibilité aux instants d'impacts. Cette difficulté a pu être contrée

en introduisant des hypothèses de flexibilité au système, en priorité sur le stator puisque c'est ce composant qui est le plus susceptible de se déformer.

La discrétisation spatiale du stator a aussi permis d'introduire la résolution numérique de la thermique, mais en se limitant uniquement à une solution 1D le long de la fibre neutre du stator. Il a aussi été possible d'introduire plusieurs points de contacts entre le rotor et le stator. Pour ce modèle intermédiaire, les conclusions ont été en adéquation avec le modèle rigide. Pour le cas de référence, une réponse en contact partiel en précession inverse s'accompagnait d'efforts assez importants pour générer un couple frottant qui surpassait celui issue de l'aérodynamique. En augmentant le coefficient de frottement, il était de nouveau possible de prédire une transition du contact partiel à permanent en précession inverse, ce qui correspond au *dry whip*. Cette fois-ci, l'étude de convergence était concluante et a permis d'identifier l'instant de déclenchement avec plus de précision. Les limitations de ce modèle étaient d'abord liées à la thermique. En effet, la fixation du stator par un ensemble discret de raideurs élevées a provoqué une grande disparité des efforts entre les nœuds auxquelles les raideurs étaient appliquées et les autres nœuds. Il en découlait alors des pics de températures non-physiques aux vis, car bien au-delà du point de fusion, et un besoin de raffinement du maillage afin que suffisamment de points se situent dans la zone d'influence thermique. Ce modèle a aussi montré que les températures étaient aussi très proches de la fusion loin des points de vissage et que la dilatation thermique n'avait pas d'effet néfaste sur la limitation de la survitesse. Cependant, la dilatation avait tendance à localiser davantage les contacts aux points de vissage, ce qui en pratique, signifie une plus grande dégradation de la structure qui n'a pas été prise en compte.

Enfin, les hypothèses simplificatrices sur les conditions de fixations du stator au reste du moteur ont été éliminées. L'assemblage du stator aux autres composants du carter, i.e. le diffuseur en amont et le distributeur en aval, a été pris en compte dans le modèle éléments finis réalisé sous ANSYS. Les anciennes raideurs discrètes ont été remplacées par les vrais composants qu'elles imitaient. Des contacts collés ont été considérés pour connecter les trois pièces. Le modèle 3D est alors restreint à un problème 2D sur le cercle de contact où sont sélectionnés les nœuds maîtres impliqués dans la réduction thermomécanique. Quant au rotor, il a aussi été discrétisé en espace avec des éléments de poutres de Timoshenko. Un premier modèle maison élaboré sous python a démontré que la torsion n'affectait pas l'issue de la simulation de rupture d'arbre et a été éliminée du problème. Les résultats ont également indiqué que la structure finissait par freiner en raison d'un déclenchement en *dry whip*. Ce phénomène garantit la limitation de la survitesse et est causé par une rigidification homogène du stator sur toute la circonférence à cause du contact collé. Cette homogénéisation s'est aussi faite ressentir sur la solution thermique. Les pics de température très locaux sur la circonférence du stator ont laissé place à des lobes. Cependant ces derniers présentent des valeurs élevées très rapidement à cause de la chaleur intense générée pendant les phases de contacts très brèves, inférieures à la milliseconde. La température en fonction du temps subit alors des successions de montées et descentes rapides, mais qui à terme semblent indiquer de la fusion sur toute la circonférence du stator. Ces résultats mettent en avant un mécanisme de grippage du labyrinthe plutôt qu'une dilatation thermique qui provoquerait un rattrapage de jeu. Il est possible que la fusion génère un troisième corps au sens de la tribologie. Cette couche de métal fondu conduirait à un processus de soudure par fusion avec frottement.

En conclusion, la complexité incrémentale des modèles a permis de formuler de nouvelles hypothèses qui expliquent la limitation de survitesse lors d'une rupture d'arbre. Si les méthodes de réduction et de résolution sont connues, c'est leur adaptation et leur utilisation sur une problématique nouvelle étendue à plusieurs physiques qui représentent l'innovation de ce travail doctoral.

Perspectives

Si cette thèse apporte un progrès sur la caractérisation de la rupture d'arbre, il reste des pistes non-explorées et des questionnements soulevés par les résultats fournis. Pour commencer, on rappelle que l'entièreté des travaux s'est concentrée sur des aspects numériques. Les résultats ont été vérifiés numériquement mais n'ont pas été validés par rapport à des données d'essai. Un projet de thèse sur la mise en place d'un banc d'essai est en cours d'élaboration au sein de Safran. Tout l'enjeu de ces futurs travaux reposerait alors sur la détermination d'un point de fonctionnement adéquat, notamment sur la vitesse de rotation initiale. Les conditions de mise en contact devraient également être adaptées pour que la touche soit intentionnelle et fidèle au pivotement couplé qui survient lors d'une rupture entre le compresseur et la turbine.

D'autre part, en ce qui concerne le modèle numérique à proprement parler, certains aspects peuvent être pris en compte pour améliorer la précision du modèle. Pour commencer, l'aérodynamique a été complètement négligée. L'état de l'art présenté au Chapitre I mentionne clairement que la rupture d'arbre engendre la modification des points de fonctionnement du compresseur mais aussi de la turbine. Or, dans cette thèse, la seule considération aérodynamique était le couple moteur exercé par les gaz chaud sur les aubes de turbine. Ce couple a été supposé constant pendant tous les travaux. Pourtant, les turbomachines fonctionnent plutôt à puissance constante, ce qui implique qu'une survitesse engendrerait une baisse du couple aérodynamique. En pratique, même le couple est une fonction inconnue du temps et l'hypothèse de couple fixe représente un cas de figure plus pessimiste que la réalité.

De plus, l'hypothèse de déformation élastique semble limitée lorsque le régime instable en *dry whip* survient. En effet, les résultats ont fourni des déformées très importantes au point culminant de l'instabilité, voire irréalistes. Une première piste d'amélioration serait de prendre en compte une loi de déformation élasto-plastique du matériau [122]. Par ailleurs, d'autres travaux sur la rupture d'arbre [75, 129] ont intégré des mécanismes de rupture comme celui de Johnson-Cook [95] et il serait judicieux de les prendre en compte également dans de futurs modèles. Des travaux récents [165] se sont également penchés sur la propagation de fracture dans des roulements inter-arbres dont l'enveloppe est semblable à celle des joints labyrinthes. D'une façon générale, les modèles développés pendant cette thèse présentent des propriétés matériau constantes et qui linéarisent en partie le problème. A titre d'exemple, les propriétés thermiques, comme le coefficient de dilatation, de capacité et de conductivité thermique sont en réalité dépendantes de la température. Une autre dépendance à prendre en compte est celle du coefficient de frottement. Puisque les résultats de cette thèse signalent la présence de fusion, le contact deviendrait progressivement lubrifié et non plus sec. Or, un frottement avec lubrification est caractérisé par un coefficient dépendant de la vitesse de glissement et de la température [70]. Par ailleurs, le coefficient de frottement agit au premier ordre sur les efforts de frottement, le couple résistant et le type de précession. Une meilleure estimation du coefficient de frottement paraît donc appropriée pour des futurs travaux.

Comme déjà évoqué pour l'aérodynamique, un des enjeux de la modélisation de la rupture d'arbre est la prise en compte des nombreuses physiques qui interviennent et de leur niveau de couplage. Il faut aussi souligner l'importance des phénomènes tribologiques, en particulier la fusion qui a été mise en évidence dans les deux derniers chapitres. De plus, la prédiction de fusion est cohérente avec des travaux similaires engagés sur la rupture d'arbre [63]. Les volumes fondus doivent être supprimés du modèle éléments finis et affectent donc le jeu et la topologie de l'interface de contact.

Pour finir, il faut insister sur les marges de progression sur l'étude du contact selon la direction axiale. En effet, bien que le dernier modèle soit basé sur un maillage 3D, l'interface de contact est restreinte au plan situé au niveau d'une seule dent du labyrinthe. Pour commencer,

le joint est formé de plusieurs dents, ce qui implique l'émergence de plusieurs interfaces de contact le long de l'axe de rotation. Ensuite, il a été constaté que la vibration des structures était importante en *dry whip*. Cela laisse penser que la zone de contact n'est pas limitée à une position axiale précise mais est répartie sur une zone où interagissent les dents et l'enveloppe du labyrinthe. Il faudrait alors considérer le frottement en trois dimensions, y compris dans la longueur du labyrinthe. Cela revient à définir un cylindre de contact au lieu d'un cercle. Une piste serait de sélectionner les nœuds maîtres de la réduction sur une portion cylindrique au lieu d'un cercle. Le choix de la largeur et du nombre de nœuds maîtres doit alors faire l'objet d'une étude méticuleuse afin de garantir un modèle suffisamment réduit.

Bibliographie

- [1] V. ACARY. « Projected event-capturing time-stepping schemes for nonsmooth mechanical systems with unilateral contact and Coulomb's friction ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 256 (2013), p. 224-250. DOI : [10.1016/j.cma.2012.12.012](https://doi.org/10.1016/j.cma.2012.12.012). oai : [hal-00758613](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00758613) (cf. p. [41 sq.](#), [77](#), [122](#)).
- [2] V. ACARY, O. BONNEFON, M. BRÉMOND, O. HUBER, F. PÉRIGNON et AL. *An introduction to Siconos*. Rapp. tech. RT-0340. INRIA, 2019. [hal-00162911](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00162911) (cf. p. [77](#)).
- [3] V. ACARY et B. BROGLIATO. *Numerical methods for nonsmooth dynamical systems*. 35. Springer, 2008. ISBN : 978-3-540-75391-9. DOI : [10.1007/978-3-540-75392-6](https://doi.org/10.1007/978-3-540-75392-6). oai : [hal-00423530](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00423530) (cf. p. [43](#), [70](#), [73](#), [185](#)).
- [4] V. ACARY, M. BRÉMOND et O. HUBER. « On Solving Contact Problems with Coulomb Friction : Formulations and Numerical Comparisons ». *Advanced Topics in Nonsmooth Dynamics*. Sous la dir. de R. LEINE, V. ACARY et O. BRÜLS. 2018, p. 375-457. ISBN : 978-3-319-75971-5 978-3-319-75972-2. DOI : [10.1007/978-3-319-75972-2_10](https://doi.org/10.1007/978-3-319-75972-2_10). oai : [hal-01878539](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01878539) (cf. p. [44](#)).
- [5] S. ADHIKARI et A.S. PHANI. « Rayleigh's Classical Damping Revisited » (2006) (cf. p. [111](#)).
- [6] Q. AGRAPART, F. NYSSSEN, D. LAVAZEC, P. DUFRÉNOY et A. BATAILLY. « Multi-physics numerical simulation of an experimentally predicted rubbing event in aircraft engines ». *Journal of Sound and Vibration* 460 (2019), p. 114869. DOI : [10.1016/j.jsv.2019.114869](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.114869). oai : [hal-02269517](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02269517) (cf. p. [33](#)).
- [7] S. AHMAD. « Rotor Casing Contact Phenomenon in Rotor Dynamics — Literature Survey ». *Journal of Vibration and Control* 16.9 (2010), p. 1369-1377. DOI : [10.1177/1077546309341605](https://doi.org/10.1177/1077546309341605) (cf. p. [19](#)).
- [8] J.-G. AHN, J.-C. LEE, J.-G. KIM et H.-I. YANG. « Multiphysics model reduction of thermomechanical vibration in a state-space formulation ». *Engineering with Computers* 39.5 (2023), p. 3371-3399. DOI : [10.1007/s00366-022-01748-w](https://doi.org/10.1007/s00366-022-01748-w) (cf. p. [54](#)).
- [9] P. ALMEIDA. « Couplage thermomécanique et vibratoire d'un compresseur centrifuge lors d'un contact aube-carter ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Lyon, 2014. oai : [hal-01289766](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01289766) (cf. p. [34](#)).
- [10] P. ALMEIDA, C. GIBERT, F. THOUVEREZ et J.-P. OUSTY. « On some physical phenomena involved in blade-casing contact ». *9th International Conference on Structural Dynamics*. 2014. oai : [hal-02121521](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02121521) (cf. p. [37](#)).
- [11] J. F. ARCHARD. « Contact and Rubbing of Flat Surfaces ». *Journal of Applied Physics* 24.8 (1953), p. 981-988. DOI : [10.1063/1.1721448](https://doi.org/10.1063/1.1721448) (cf. p. [34](#)).
- [12] J. F. ARCHARD. « The temperature of rubbing surfaces ». *Wear* 2.6 (1959), p. 438-455. DOI : [10.1016/0043-1648\(59\)90159-0](https://doi.org/10.1016/0043-1648(59)90159-0) (cf. p. [130](#), [172](#)).

- [13] M.F. ASHBY et S.C. LIM. « Wear mechanism maps ». *Scripta Metallurgica et Materialia* 24.5 (1990), p. 805-810 (cf. p. 33).
- [14] S. BAI, Y. LI, H.-Z. HUANG, Q. MA et N. LU. « A probabilistic combined high and low cycle fatigue life prediction framework for the turbine shaft with random geometric parameters ». *International Journal of Fatigue* 165 (2022), p. 107218. DOI : [10.1016/j.ijfatigue.2022.107218](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2022.107218) (cf. p. 12).
- [15] F. BALITSKY et A. SOKOLOVA. « Application of Full Spectrums and other Vibration Two-Dimensional Characteristics for Gas Transportation Units Condition Monitoring ». *10th European Conference on Non-Destructive Testing* (2010), p. 5 (cf. p. 88).
- [16] A.R. BARTHA. « Dry friction backward whirl of rotors ». Thèse de doct. ETH Zurich, 2000 (cf. p. 21).
- [17] A. BATAILLY. « Simulation de l'interaction rotor/stator pour des turbo-machines aéronautiques en configuration non-accidentelle ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2008. oai : [hal-00364945](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00364945) (cf. p. 56).
- [18] A. BATAILLY, Q. AGRAPART, A. MILLECAMPS et J.-F. BRUNEL. « Experimental and numerical simulation of a rotor/stator interaction event localized on a single blade within an industrial high-pressure compressor ». *Journal of Sound and Vibration* 375 (2016), p. 308-331. DOI : [10.1016/j.jsv.2016.03.016](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2016.03.016). oai : [hal-01342401](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01342401) (cf. p. 33, 49).
- [19] A. BAZERGUI, T. BUI-QUOC, A. BIRON, G. MCINTYRE et C.A. LABERGE. *Résistance des matériaux : recueil de problèmes*. Presses internationales Polytechnique, 2003 (cf. p. 107).
- [20] T. BECHTOLD, B. SALIMBAHRAMI, E. RUDNYI, B. LOHMANN et J. KORVINK. « Krylov-Subspace-Based Order Reduction Methods Applied to Generate Compact- Electro-Thermal Models for MEMS ». *NSTI Nanotechnology Conference & Trade Show Nanotech 2003*. 2003. oai : [hal-01615922](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01615922) (cf. p. 50).
- [21] B. BERTHOUL, A. BATAILLY, L. STAINIER, M. LEGRAND et P. CARTRAUD. « Phenomenological modeling of abradable wear in turbomachines ». *Mechanical Systems and Signal Processing* 98 (2018), p. 770-785. DOI : [10.1016/j.ymsp.2017.05.020](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2017.05.020). oai : [hal-01569316](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01569316) (cf. p. 33).
- [22] H.F. BLACK. « Interaction of a Whirling Rotor with a Vibrating Stator across a Clearance Annulus ». *Journal of Mechanical Engineering Science* 10.1 (1968), p. 1-12. DOI : [10.1243/JMES_JOUR_1968_010_003_02](https://doi.org/10.1243/JMES_JOUR_1968_010_003_02) (cf. p. 21).
- [23] R. BLADH. « Efficient predictions of the vibratory response of mistuned bladed disks by reduced order modeling ». Thèse de doct. University of Michigan, 2001. oai : [hal-00358168](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00358168) (cf. p. 55).
- [24] M.C. BLAKEY. *Safety recommendation*. Rapp. tech. Washington D.C. : National Transportation Safety Board, 2006 (cf. p. 9 sq.).
- [25] R.D. BLEVINS. *Formulas for natural frequency and mode shape*. Rapp. tech. Van Nostrand Reynhold Company, 1979, p. 492 (cf. p. 109).
- [26] H. BLOK. « The flash temperature concept ». *Wear* 6.6 (1963), p. 483-494. DOI : [10.1016/0043-1648\(63\)90283-7](https://doi.org/10.1016/0043-1648(63)90283-7) (cf. p. 130).
- [27] B. BOASHASH. « Time Frequency Signal Analysis and Processing : A Comprehensive Reference ». *Time-Frequency Signal Analysis and Processing (Second Edition)*. Oxford : Academic Press, 2016. ISBN : 978-0-12-398499-9. DOI : [10.1016/B978-0-12-398499-9.09983-0](https://doi.org/10.1016/B978-0-12-398499-9.09983-0) (cf. p. 88).

- [28] D. BOTTO, S. ZUCCA et M.M. GOLA. « Reduced-Order Models for the Calculation of Thermal Transients of Heat Conduction/Convection FE Models ». *Journal of Thermal Stresses* 30.8 (2007), p. 819-839. DOI : [10.1080/01495730701415806](https://doi.org/10.1080/01495730701415806) (cf. p. 54).
- [29] D. BOUSSAA. « Coupled heat equation in thermoelasticity with temperature dependent moduli ». *Journal of Thermal Stresses* (2019). Publisher : Taylor & Francis. DOI : [10.1080/01495739.2019.1662353](https://doi.org/10.1080/01495739.2019.1662353) (cf. p. 33).
- [30] M.P. BOYCE. *Gas turbine engineering handbook*. 2nd ed. Boston, MA : Gulf Professional Pub, 2002. ISBN : 978-0-88415-732-8 (cf. p. 5).
- [31] C.G. BROYDEN. « A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations ». *Math. Comp.* 19.92 (1965), p. 577-593. DOI : [10.1090/S0025-5718-1965-0198670-6](https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1965-0198670-6) (cf. p. 68, 203).
- [32] N.J. CARPENTER, R.L. TAYLOR et M.G. KATONA. « Lagrange constraints for transient finite element surface contact ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 32.1 (1991), p. 103-128. DOI : [10.1002/nme.1620320107](https://doi.org/10.1002/nme.1620320107). oai : [hal-01389918](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01389918) (cf. p. 38).
- [33] D.A. CENDÓN, B. ERICE, F. GÁLVEZ et V. SÁNCHEZ-GÁLVEZ. « Numerical simulation of tangling in jet engine turbines ». *International Journal Turbo Jet-Engines* 29.4 (2012). DOI : [10.1515/tjj-2012-0018](https://doi.org/10.1515/tjj-2012-0018) (cf. p. 56).
- [34] Y.A. CENGEL. *Thermodynamics : an engineering approach*. Sixth edition. Boston : McGraw-Hill Higher Education, 2008 (cf. p. 5).
- [35] *Certification memorandum - turbine over-speed resulting from shaft failure*. Rapp. tech. European Aviation Safety Agency, 2012, p. 6 (cf. p. 7).
- [36] *Certification specifications for engines CS-E - Amendment 3*. Rapp. tech. European Aviation Safety Agency, 2010 (cf. p. 7).
- [37] G. CHAUVINEAU. « Modélisation de la dynamique des boîtes de vitesse automobiles soumises à des sollicitations acycliques : application à la prédiction du bruit de grenaille et validation expérimentale ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Lyon, 2014 (cf. p. 155 sq.).
- [38] H.-S. CHEN et M. STADTHER. « A modification of Powell's dogleg method for solving systems of nonlinear equations ». *Computers & Chemical Engineering* 5.3 (1981). Publisher : Elsevier, p. 143-150. DOI : [10.1016/0098-1354\(81\)85003-X](https://doi.org/10.1016/0098-1354(81)85003-X) (cf. p. 68).
- [39] S.L. CHEN et M. GÉRADIN. « Finite element simulation of non-linear transient response due to rotor-stator contact ». *Engineering Computations* 14.6 (1997), p. 591-603. DOI : [10.1108/02644409710180356](https://doi.org/10.1108/02644409710180356) (cf. p. 20, 36 sq., 43).
- [40] D.W. CHILDS et A. BHATTACHARYA. « Prediction of dry-friction whirl and whip between a rotor and a stator ». *Journal of Vibration and Acoustics* 129.3 (2007), p. 355-362. DOI : [10.1115/1.2731412](https://doi.org/10.1115/1.2731412) (cf. p. 21 sq.).
- [41] Y.S. CHOI. « Investigation on the Whirling Motion of Full Annular Rotor Rub ». *Journal of Sound and Vibration* 258.1 (2002), p. 191-198. DOI : [10.1006/jsvi.2002.5091](https://doi.org/10.1006/jsvi.2002.5091) (cf. p. 22 sq.).
- [42] F.K. CHOY et J. PADOVAN. « Non-linear transient analysis of rotor-casing rub events ». *Journal of Sound and Vibration* 113.3 (1987), p. 529-545. DOI : [10.1016/S0022-460X\(87\)80135-9](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(87)80135-9) (cf. p. 19, 132).
- [43] Y. COLAÏTIS. « Stratégie numérique pour l'analyse qualitative des interactions aube/carter ». Thèse de doct. Ecole Polytechnique de Montréal, 2021. oai : [hal-03318777](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03318777) (cf. p. 35, 87).

- [44] G.R. COWPER. « The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory ». *Journal of Applied Mechanics* 33.2 (1966), p. 335-340. DOI : [10.1115/1.3625046](https://doi.org/10.1115/1.3625046) (cf. p. 158).
- [45] R. CRAIG et M. BAMPION. « Coupling of substructures for dynamic analyses. » *AIAA Journal* 6.7 (1968), p. 1313-1319. DOI : [10.2514/3.4741](https://doi.org/10.2514/3.4741). oai : [hal-01537654](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01537654) (cf. p. 2, 49).
- [46] R. CRAIG et A. HALE. « Block-Krylov component synthesis method for structural model reduction ». *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 11.6 (1988), p. 562-570. DOI : [10.2514/3.20353](https://doi.org/10.2514/3.20353) (cf. p. 50).
- [47] X. DAI, Z. JIN et X. ZHANG. « Dynamic Behavior of the full rotorstop rubbing : numerical simulation and experimental verification ». *Journal of Sound and Vibration* 251.5 (2002), p. 807-822. DOI : [10.1006/jsvi.2001.3998](https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3998) (cf. p. 37, 101).
- [48] Z. DAKEL. « Stabilité et dynamique non linéaire de rotors embarqués ». Thèse de doct. INSA de Lyon, 2014 (cf. p. 63, 155).
- [49] C. DELEBARRE, V. WAGNER, J.Y. PARIS, G. DESSEIN, J. DENAPE et J. GURT-SANTANACH. « An experimental study of the high speed interaction between a labyrinth seal and an abradable coating in a turbo-engine application ». *Wear* 316.1-2 (2014), p. 109-118. DOI : [10.1016/j.wear.2014.04.023](https://doi.org/10.1016/j.wear.2014.04.023) (cf. p. 9, 33).
- [50] C. DELEBARRE, V. WAGNER, J.Y. PARIS, G. DESSEIN, J. DENAPE et J. GURT-SANTANACH. « The wear mechanisms occurring in a labyrinth seal/abradable contact depending on the incursion depth parameter ». *Mechanics & Industry* 17.6 (2016), p. 601. DOI : [10.1051/meca/2015118](https://doi.org/10.1051/meca/2015118) (cf. p. 33).
- [51] E. DELHEZ, F. NYSSSEN, J.-C. GOLINVAL et A. BATAILLY. « Reduced Order Modeling of Bladed Disks with Geometric and Contact Nonlinearities ». *8th International Conference on Advanced Computational Methods in Engineering*. Liège, Belgium, 2022. oai : [hal-03750067](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03750067) (cf. p. 49).
- [52] D. DEMAILLY. « Etude du comportement non-linéaire dans le domaine fréquentiel. Application à la dynamique rotor ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Lyon, 2003. oai : [hal-00587168](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00587168) (cf. p. 35).
- [53] J. DI STASIO, D. DUREISSEIX, A. GRAVOUIL, G. GEORGES et T. HOMOLLE. « Benchmark cases for robust explicit time integrators in non-smooth transient dynamics ». *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences* 6.1 (2019), p. 2. DOI : [10.1186/s40323-019-0126-y](https://doi.org/10.1186/s40323-019-0126-y). oai : [hal-02063069](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02063069) (cf. p. 30, 35, 42).
- [54] A. DRAGANIS. « Finite Element Modeling of Transient Thermomechanical Rolling Contact Featuring Mixed Control of the Rigid Body Motion ». *Journal of Tribology* 139.1 (2017), p. 011503. DOI : [10.1115/1.4033048](https://doi.org/10.1115/1.4033048) (cf. p. 120).
- [55] A. DRAGANIS, F. LARSSON et A. EKBERG. « Finite element modelling of frictional thermomechanical rolling/sliding contact using an arbitrary Lagrangian–Eulerian formulation ». *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J : Journal of Engineering Tribology*. T. 229. 2015, p. 870-880. DOI : [10.1177/1350650115572197](https://doi.org/10.1177/1350650115572197) (cf. p. 34, 120).
- [56] T.A. DRISCOLL et R.J. BRAUN. *Fundamentals of Numerical Computation*. Society of Applied et Industrial Mathematics, 2017 (cf. p. 68).
- [57] S. DUBIGEON. *Mécanique des Milieux Continus*. Lavoisier, Tec & Doc, Nantes, 1998 (cf. p. 107).
- [58] C. DUMARTINEIX. « Modélisation et étude de la dynamique complexe d'un système bi-rotor aubagé couplé ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Lyon, 2019. oai : [hal-03052668](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03052668) (cf. p. 56, 108, 113).

- [59] C. DURAN. « Modélisation du comportement dynamique non-linéaire et transitoire de turbomoteur avec multitouches rotor/stator ». Thèse de doct. INSA de Lyon, 2014 (cf. p. 19, 22, 155).
- [60] C. DURAN, L. MANIN, M.-A. ANDRIANOELY, C. BORDEGARAY, F. BATTLE et R. DUFOUR. « Effect of Rotor-Stator Contact on the Mass Unbalance Response ». *Proceedings of the 9th IFToMM International Conference on Rotor Dynamics*. Sous la dir. de P. PENNACCHI. 2015, p. 1965-1975. DOI : [10.1007/978-3-319-06590-8_163](https://doi.org/10.1007/978-3-319-06590-8_163). oai : [hal-01075974](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01075974) (cf. p. 21, 88).
- [61] M. D'ANNA et H. FUCHS. « Rolling cylinder and static friction : model and experiments ». *Eur. J. Phys.* 42.2 (2021), p. 025007. DOI : [10.1088/1361-6404/abbedd](https://doi.org/10.1088/1361-6404/abbedd) (cf. p. 31).
- [62] I. ERYILMAZ, B. GUENCHI et V. PACHIDIS. « Multi-blade shedding in turbines with different casing and blade tip architectures ». *Aerospace Science and Technology* 87 (2019), p. 300-310. DOI : [10.1016/j.ast.2019.02.025](https://doi.org/10.1016/j.ast.2019.02.025) (cf. p. 14).
- [63] I. ERYILMAZ et V. PACHIDIS. « Turbine thermomechanical modelling during excessive axial movement and overspeed ». *The Aeronautical Journal* 123.1260 (2019), p. 248-264. DOI : [10.1017/aer.2018.162](https://doi.org/10.1017/aer.2018.162) (cf. p. 14, 33, 187).
- [64] I. ERYILMAZ, L. PAWSEY et V. PACHIDIS. « Multidisciplinary methodology for turbine overspeed analysis ». *The Aeronautical Journal* 122.1257 (2018), p. 1711-1733. DOI : [10.1017/aer.2018.100](https://doi.org/10.1017/aer.2018.100) (cf. p. 14).
- [65] D.J. EWINS. « Modal Testing : theory, practice and application ». 2nd. John Wiley, 2009. ISBN : 08638021814 (cf. p. 111).
- [66] F. FATARELLA. « On the Dynamics of Reverse Whirl Due to Rotor/Stator Interaction ». Thèse de doct. Imperial College of Science, Medicine & Technology, 1999 (cf. p. 19).
- [67] J.-L. FLÉJOU. *Exact elements of beams (right and curved)*. Rapp. tech. Code_Aster documentation, 2017 (cf. p. 158).
- [68] L. GALLAR. « Gas turbine shaft over-speed/failure performance modelling. Aero/Thermodynamics modelling and overall engine system response ». Thèse de doct. Cranfield University, 2010 (cf. p. 9, 12).
- [69] Q. GAO, Y. FAN, Y. WU et L. LI. « A harmonic balance-based method to predict nonlinear forced response and temperature rise of dry friction systems including frictional heat transfer ». *Nonlinear Dyn* 111.15 (2023), p. 14263-14291. DOI : [10.1007/s11071-023-08607-3](https://doi.org/10.1007/s11071-023-08607-3) (cf. p. 54).
- [70] E.R.M. GELINCK et D. J. SCHIPPER. « Calculation of Stribeck curves for line contacts ». *Tribology International* 33.3 (2000), p. 175-181. DOI : [10.1016/S0301-679X\(00\)00024-4](https://doi.org/10.1016/S0301-679X(00)00024-4) (cf. p. 31, 187).
- [71] G. GENTA. *Dynamics of rotating systems*. Mechanical engineering series. Springer, 2005. ISBN : 978-0-387-20936-4 (cf. p. 28 sq.).
- [72] A. GHANEM, M. TORKHANI, T. BARANGER et G. ALTMAYER. « Méthode Arlequin pour la modélisation multi-échelles en temps des machines tournantes ». *11e colloque national en calcul des structures*. Giens, France : CSMA, 2013. oai : [hal-01717113](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01717113) (cf. p. 57).
- [73] T. GMÜR. *Dynamique des structures : analyse modale numérique*. Presses polytechniques et universitaires romandes. 1997 (cf. p. 80).

- [74] G. GOLUB et W. KAHAN. « Calculating the Singular Values and Pseudo-Inverse of a Matrix ». *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series B Numerical Analysis* 2.2 (1965). Publisher : Society for Industrial and Applied Mathematics, p. 205-224. DOI : [10.1137/0702016](https://doi.org/10.1137/0702016) (cf. p. 152).
- [75] A. GONZALEZ et V. PACHIDIS. « On the numerical simulation of turbine blade tangling after a shaft failure ». *Volume 7B : Structures and Dynamics*. Düsseldorf, Germany : American Society of Mechanical Engineers, 2014, V07BT33A026. ISBN : 978-0-7918-4577-6. DOI : [10.1115/GT2014-27061](https://doi.org/10.1115/GT2014-27061) (cf. p. 13 sq., 187).
- [76] L. M. GREENHILL, W. B. BICKFORD et H. D. NESLON. « A conical beam finite element for rotor dynamics analysis ». *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design* (1985), 421_430 (cf. p. 61).
- [77] E.J. GRIMME. « Krylov Projection Methods for Model Reduction ». Thèse de doct. University of Illinois, 1997 (cf. p. 149).
- [78] R. GUYAN. « Reduction of stiffness and mass matrices ». *AIAA Journal* 3.2 (1965). Publisher : American Institute of Aeronautics and Astronautics, p. 380. DOI : [10.2514/3.2874](https://doi.org/10.2514/3.2874) (cf. p. 48).
- [79] N. GUÉRIN. « Analyse thermomécanique du contact aube-stator : approches numérique et expérimentale ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Lyon, 2019. oai : [hal-03434990](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03434990) (cf. p. 2, 33 sq., 38, 42 sq., 56, 130, 152).
- [80] N. GUÉRIN, A. THORIN, F. THOUVEREZ, M. LEGRAND et P. ALMEIDA. « Thermomechanical model reduction for efficient simulations of rotor-stator contact interaction ». *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 141.2 (2018). DOI : [10.1115/1.4040858](https://doi.org/10.1115/1.4040858). oai : [hal-01989175](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01989175) (cf. p. 51 sqq., 57).
- [81] M. GÉRADIN et D. RIXEN. *Mechanical vibrations : theory and application to structural dynamics*. 3rd. Wiley& sons, 2014. ISBN : 978-1-118-90020 8 (cf. p. 35).
- [82] M. HAAKE, R. FIOLA et S. STAUDACHER. « Multistage compressor and turbine modeling for the prediction of the maximum turbine speed resulting from shaft breakage ». *Journal of Turbomachinery* (2011). DOI : [10.1115/1.4001188](https://doi.org/10.1115/1.4001188) (cf. p. 6, 14).
- [83] M.-J. HANCOCK. « Linear Partial Differential Equations » (2006) (cf. p. 207).
- [84] H. HILBER, T. HUGHES et R. TAYLOR. « Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics ». *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 5.3 (1977), p. 283-292. DOI : [10.1002/eqe.4290050306](https://doi.org/10.1002/eqe.4290050306) (cf. p. 36).
- [85] S.-C. HSIEH, J.-H. CHEN et A.-C. LEE. « A modified transfer matrix method for the coupling lateral and torsional vibrations of symmetric rotor-bearing systems ». *Journal of Sound and Vibration* 289.1-2 (2006), p. 294-333. DOI : [10.1016/j.jsv.2005.02.004](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.02.004) (cf. p. 61 sq.).
- [86] *In-flight uncontained engine failure - overhead Batam Island, Indonesia - 4 November 2010 - VH-OQA, Airbus A380-842*. Rapp. tech. Australian Transport Safety Bureau, 2013 (cf. p. 10 sq.).
- [87] P. IREMAN, A. KLARBRING et N. STRÖMBERG. « Finite element algorithms for thermoelastic wear problems ». *European Journal of Mechanics - A/Solids* 21.3 (2002), p. 423-440. DOI : [10.1016/S0997-7538\(02\)01208-1](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(02)01208-1) (cf. p. 34, 120).

- [88] G. JACQUET-RICHARDET, M. TORKHANI, P. CARTRAUD, F. THOUVEREZ, T. NOURI BARANGER, M. HERRAN, C. GIBERT, S. BAGUET, P. ALMEIDA et L. PELETAN. « Rotor to stator contacts in turbomachines. Review and application ». *Mechanical Systems and Signal Processing* 40.2 (2013), p. 401-420. DOI : [10.1016/j.ymssp.2013.05.010](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2013.05.010). oai : [hal-00934050](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00934050) (cf. p. 18 sq.).
- [89] M. JEAN. « The non-smooth contact dynamics method ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 177.3-4 (1999), p. 235-257. DOI : [10.1016/S0045-7825\(98\)00383-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00383-1). oai : [hal-01390459](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01390459) (cf. p. 40).
- [90] J. JIANG. « Determination of the global responses characteristics of a piecewise smooth dynamical system with contact ». *Nonlinear Dyn* 57.3 (2009), p. 351-361. DOI : [10.1007/s11071-008-9446-z](https://doi.org/10.1007/s11071-008-9446-z) (cf. p. 19 sq.).
- [91] Louis JÉZÉQUEL. « Synthèse modale : théorie et extensions ». Thèse de doctorat dirigée par Sidoroff, François Sciences Lyon 1 1985. Thèse de doct. 1985, 1 vol. (346 p.) (Cf. p. 49).
- [92] G.G. KARADY et K.E. HOLBERT. *Electrical energy conversion and transport : an interactive computer-based approach*. John Wiley & Sons, 2013. ISBN : 1-118-49803-8 (cf. p. 6).
- [93] F.E. KENNEDY. « Thermomechanical phenomena in high speed rubbing ». *Wear* 59.1 (1980), p. 149-163. DOI : [10.1016/0043-1648\(80\)90276-8](https://doi.org/10.1016/0043-1648(80)90276-8) (cf. p. 31).
- [94] P. KOTRONIS, L. DAVENNE et J. MAZARS. « Poutre multifibre Timoshenko pour la modélisation de structures en béton armé. Théorie et applications numériques ». *Revue française de génie civil* 8.2-3 (2004), p. 329-343. DOI : [10.3166/rfgc.8.329-343](https://doi.org/10.3166/rfgc.8.329-343) (cf. p. 158).
- [95] V. KUMAR REDDY SIRIGIRI, V. YADAV GUDIGA, U. SHANKAR GATTU, G. SUNEESH et Krishna MOHAN BUDDARAJU. « A review on Johnson Cook material model ». *Materials Today : Proceedings*. International Conference on Materials, Processing & Characterization (13th ICMPC) 62 (2022), p. 3450-3456. DOI : [10.1016/j.matpr.2022.04.279](https://doi.org/10.1016/j.matpr.2022.04.279) (cf. p. 187).
- [96] M. LALANNE et G. FERRARIS. *Rotordynamics prediction in engineering*. 2^e éd. John Wiley, 1998. ISBN : 0-585-32863-3 978-0-585-32863-8 (cf. p. 18, 28 sq.).
- [97] M. A. LAMBERT et L. S. FLETCHER. « Review of Models for Thermal Contact Conductance of Metals ». *Journal of Thermophysics and Heat Transfer* (2012). DOI : [10.2514/2.6221](https://doi.org/10.2514/2.6221) (cf. p. 34).
- [98] M. LEGRAND. « Modèles de prédiction de l'interaction rotor/stator dans un moteur d'avion ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Nantes, 2006. oai : [hal-00011631](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00011631) (cf. p. 37, 108).
- [99] M. LEGRAND, S. ROQUES, C. PIERRE et B. PESEUX. « Aircraft engine structural rotor-stator modal interaction ». *20th ASME Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise (IDETC/CIE 2005)*. T. 1. Long Beach, United States, 2005, p. 2523-2532. DOI : [10.1115/DETC2005-85251](https://doi.org/10.1115/DETC2005-85251). oai : [hal-01007848](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01007848) (cf. p. 37, 42).
- [100] K. LEVENBERG. « A method for the solution of certain non-linear problems in least squares ». *Quart. Appl. Math.* 2.2 (1944), p. 164-168. DOI : [10.1090/qam/10666](https://doi.org/10.1090/qam/10666) (cf. p. 204).
- [101] Y.S. LIM et L.F. KAZDA. « A study of second order nonlinear systems ». *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 8.3 (1964), p. 423-444. DOI : [10.1016/0022-247X\(64\)90052-6](https://doi.org/10.1016/0022-247X(64)90052-6) (cf. p. 64).

- [102] A. LUPINI et B.I. EPUREANU. « A conditioning technique for projection-based reduced order models ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 349 (2019), p. 251-265. DOI : [10.1016/j.cma.2019.02.020](https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.02.020) (cf. p. 53, 152).
- [103] H. MA, Q. ZHAO, X. ZHAO, Q. HAN et B. WEN. « Dynamic characteristics analysis of a rotor–stator system under different rubbing forms ». *Applied Mathematical Modelling* 39.8 (2015), p. 2392-2408. DOI : [10.1016/j.apm.2014.11.009](https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.11.009) (cf. p. 39).
- [104] R. MACNEAL. « A hybrid method of component mode synthesis ». *Computers & Structures* 1.4 (1971), p. 581-601. DOI : [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(71\)90031-9](https://doi.org/10.1016/0045-7949(71)90031-9) (cf. p. 49).
- [105] L. MAHÉO. « Etude des effets dissipatifs de différents schémas d'intégration temporelle en calcul dynamique par éléments finis ». Thèse de doct. Université de Bretagne Sud, 2006. oai : [hal-00139112](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00139112) (cf. p. 36).
- [106] D. MARTINEZ, T. CARNE, D. GREGORY et A. MILLER. « Combined experimental/analytical modeling using component mode synthesis ». *25th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*. Structures, Structural Dynamics, and Materials and Co-located Conferences. American Institute of Aeronautics et Astronautics, 1984. DOI : [10.2514/6.1984-941](https://doi.org/10.2514/6.1984-941) (cf. p. 49).
- [107] D. MCCARTHY. *Types of rotor failure and characteristics of fragments*. Rapp. tech. A workshop held at the Massachusetts Institute of Technology, NASA, 1977, p. 65-92 (cf. p. 11 sq.).
- [108] L. MEIROVITCH. « A new method of solution of the eigenvalue problem for gyroscopic systems ». *AIAA Journal* 12.10 (1974), p. 1337-1342. DOI : [10.2514/3.49486](https://doi.org/10.2514/3.49486) (cf. p. 80).
- [109] A. MILLECAMPS, J.-F. BRUNEL, P. DUFRENOY, F. GARCIN et M. NUCCI. « Influence of Thermal Effects During Blade-Casing Contact Experiments ». *ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. San Diego, United States, 2009. DOI : [10.1115/DETC2009-86842](https://doi.org/10.1115/DETC2009-86842). oai : [hal-01223060](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01223060) (cf. p. 33).
- [110] G. MOGENIER. « Identification et prévision du comportement dynamique des rotors feuilletés en flexion ». Thèse de doct. INSA de Lyon, 2011. oai : [hal-00627647](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00627647) (cf. p. 63, 155).
- [111] M. MOHSENI. « Helix-simulation framework development for assessment of rotorcraft engines ». Thèse de doct. Cranfield University, School of Engineering, Department of Power et Propulsion, 2011 (cf. p. 12).
- [112] J.-J. MOREAU. « Numerical aspects of the sweeping process ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 177.3 (1999), p. 329-349. DOI : [10.1016/S0045-7825\(98\)00387-9](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00387-9) (cf. p. 40).
- [113] J.-J. MOREAU. « Some numerical methods in multibody dynamics : application to granular materials ». *European Journal of Mechanics - A/Solids* 13.4 - suppl (1994), p. 93-114 (cf. p. 73).
- [114] J.-J. MOREAU. « Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics ». *Nonsmooth Mechanics and Applications*. Sous la dir. de Moreau J.-J. et Panagiotopoulos P.D. T. 302. International centre for mechanical sciences. Springer, 1988, p. 1-82. DOI : [10.1007/978-3-7091-2624-0_1](https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2624-0_1). oai : [hal-01713847](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01713847) (cf. p. 40, 73).
- [115] A. MUSZYŃSKA. « Rotor-to-stationary element rub-related vibration phenomena in rotating machinery – literature survey ». *The Shock and Vibration Digest* 21 (1989), p. 3-11 (cf. p. 17).

- [116] A. MUSZYŃSKA. *Rotordynamics*. Mechanical engineering ; 188. Taylor & Francis, 2005. ISBN : 0-8247-2399-6 978-0-8247-2399-6 (cf. p. [18 sq.](#)).
- [117] A. MUSZYŃSKA et P. GOLDMAN. « Application of full spectrum to rotating machinery diagnostics. » *Orbit First Quarter* (1999), p. 17-21 (cf. p. [88](#)).
- [118] N.M. NEWMARK. « A Method of Computation for Structural Dynamics ». *Journal of the Engineering Mechanics Division* 85.3 (1959). Publisher : American Society of Civil Engineers, p. 67-94. DOI : [10.1061/JMCEA3.0000098](https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0000098) (cf. p. [35](#)).
- [119] L. NOELS, L. STAINIER et J.-P. PONTHOT. « Combined implicit/explicit time-integration algorithms for the numerical simulation of sheet metal forming ». *Journal of Computational and Applied Mathematics* 168.1 (2004), p. 331-339. DOI : [10.1016/j.cam.2003.12.004](https://doi.org/10.1016/j.cam.2003.12.004). oai : [hal-01005863](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01005863) (cf. p. [56](#)).
- [120] L. NOELS, L. STAINIER, J.-P. PONTHOT et J. BONINI. « Automatic time stepping algorithms for implicit numerical simulations of blade/casing interactions. » *International Journal of Crashworthiness* 6.3 (2001), p. 351-362. DOI : [10.1533/cras.2001.0183](https://doi.org/10.1533/cras.2001.0183). oai : [hal-01005283](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01005283) (cf. p. [56](#)).
- [121] Y.A. NOZHNITSKY et A.N. SERVETNIK. « Prevention of hazardous failure of the turbine rotor due to its overspeed ». *IOP Conference Series : Materials Science and Engineering* 449 (2018), p. 012025. DOI : [10.1088/1757-899X/449/1/012025](https://doi.org/10.1088/1757-899X/449/1/012025) (cf. p. [6](#), [11](#), [13](#)).
- [122] N. OHNO. « Recent Topics in Constitutive Modeling of Cyclic Plasticity and Viscoplasticity ». *Applied Mechanics Reviews* 43.11 (1990), p. 283-295. DOI : [10.1115/1.3119155](https://doi.org/10.1115/1.3119155) (cf. p. [187](#)).
- [123] L. PAOLI et M. SCHATZMAN. « A Numerical Scheme for Impact Problems I : The One-Dimensional Case ». *SIAM Journal on Numerical Analysis* 40.2 (2002), p. 702 -733. DOI : [10.1137/S0036142900378728](https://doi.org/10.1137/S0036142900378728). oai : [hal-01885729](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01885729) (cf. p. [42](#)).
- [124] L. PELETAN. « Stratégie de modélisation simplifiée et de résolution accélérée en dynamique non linéaire des machines tournantes : Application au contact rotor-stator ». Thèse de doct. INSA de Lyon, 2012. oai : [hal-00808515](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00808515) (cf. p. [19](#), [35](#)).
- [125] E. PENNISTRÌ, V. ROSSI, P. SALVINI et P.P. VALENTINI. « Review and comparison of dry friction force models ». *Nonlinear Dyn* 83.4 (2016), p. 1785-1801. DOI : [10.1007/s11071-015-2485-3](https://doi.org/10.1007/s11071-015-2485-3) (cf. p. [30 sq.](#)).
- [126] A. PINTO et M. FIOHAIS. « Rolling cylinder on a horizontal plane ». *Phys. Educ.* 36.3 (2001), p. 250-254. DOI : [10.1088/0031-9120/36/3/312](https://doi.org/10.1088/0031-9120/36/3/312) (cf. p. [31](#)).
- [127] M. J. D. POWELL. « A Hybrid Method for Nonlinear Equations ». *Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations, Gordon and Breach* (1970), p. 87-114 (cf. p. [68](#)).
- [128] C.L. PROCTOR. « Internal Combustion Engines ». *Encyclopedia of Physical Science and Technology (Third Edition)*. Sous la dir. de R.A. MEYERS. New York : Academic Press, 2003, p. 33-44. ISBN : 978-0-12-227410-7. DOI : [10.1016/B0-12-227410-5/00350-1](https://doi.org/10.1016/B0-12-227410-5/00350-1) (cf. p. [5](#)).
- [129] A. PSARRA. « Gas Turbine shaft failure Modelling : friction and wear modelling of turbines in contact ». Thèse de doct. Cranfield University, 2010 (cf. p. [11](#), [13 sq.](#), [33 sq.](#), [187](#)).
- [130] Z.-Q. QU. *Model Order Reduction Techniques with Applications in Finite Element Analysis*. London, 2004. ISBN : 978-1-84996-924-6 978-1-4471-3827-3. DOI : [10.1007/978-1-4471-3827-3](https://doi.org/10.1007/978-1-4471-3827-3) (cf. p. [48](#)).

- [131] N. RANC. « Couplage thermomécanique ». *Techniques de l'Ingénieur* (2003). DOI : [10.51257/a-v1-af5042](https://doi.org/10.51257/a-v1-af5042) (cf. p. 31).
- [132] *Rapport d'enquête aéronautique : Perte de puissance moteur du boeing 737-217, C-GKCP exploité par canadian north inc.* Rapp. tech. A08C0108. Saskatchewan : Bureau de Sécurité des Transports du Canada, 2008 (cf. p. 9).
- [133] S. ROQUES. « Modélisation du comportement dynamique couplé rotor-stator d'une turbine en situation accidentelle ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Nantes, 2007. oai : [hal-00353938](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00353938) (cf. p. 13, 29, 35, 68, 108, 117, 132, 155).
- [134] S. ROQUES, M. LEGRAND, P. CARTRAUD, C. STOISSER et C. PIERRE. « Modeling of a rotor speed transient response with radial rubbing ». *Journal of Sound and Vibration* 329.5 (2010), p. 527-546. DOI : [10.1016/j.jsv.2009.09.016](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.09.016). oai : [hal-00431223](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00431223) (cf. p. 29, 37, 42, 101).
- [135] A.L ROWE, S.G GARNER et M. BACIE. « Shaft break detection ». Brev. US8,943,876 B2. 2015 (cf. p. 14).
- [136] J. SALENÇON. *Mécanique des milieux continus : milieux curvilignes*. T. 3. Editions de l'Ecole Polytechnique, 2016. ISBN : 978-2-7302-1644-9 (cf. p. 115).
- [137] L. SALLES. « Etude de l'usure par fretting sous chargements dynamiques dans les interfaces frottantes : application aux pieds d'aubes de turbomachines ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Lyon, Université Technique d'Etat Bauman de Moscou, 2010. oai : [hal-00600613](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00600613) (cf. p. 33).
- [138] N. SALVAT. « Modeling of shaft precessional motions induced by unilateral and frictional blade/casing contacts in aircraft engines ». Thèse de doct. McGill University, 2015. oai : [hal-0125913](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-0125913) (cf. p. 29).
- [139] M. SAVI. « Finite Element Analysis of the Thermomechanical Coupling in Quenching of Steel Cylinders Using a Constitutive Model with Diffusional Phase Transformations ». *III European Conference on Computational Mechanics* (2006) (cf. p. 143).
- [140] E. SGHAIER. « Dynamique des rotors à très hautes vitesses et en régime non-stationnaire - Identification par le filtre de Kalman ». Thèse de doct. Université Paris-Saclay, 2020. oai : [hal-02890956](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02890956) (cf. p. 29, 35, 63, 155 sq., 159).
- [141] E. SGHAIER, A. BOURDON, D. REMOND, J.-L. DION et N. PEYRET. « Dynamic Behavior of Very-High Speed Rotors at Non-stationary Conditions ». *Proceedings of the 10th International Conference on Rotor Dynamics – IFToMM*. Sous la dir. de K. CAVALCA et H.I. WEBER. T. 63. Cham : Springer International Publishing, 2019, p. 79-90. ISBN : 978-3-319-99271-6 978-3-319-99272-3. oai : [hal-03991334](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03991334) (cf. p. 61).
- [142] A. SIGNORINI. « Questioni di elasticità non linearizzata e semilinearizzata ». *Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni*. 5e sér. 18. 1959 (cf. p. 30).
- [143] J. SIMO et T. LAURSEN. « An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction ». *Computers & Structures* 42.1 (1992), p. 97-116. DOI : [10.1016/0045-7949\(92\)90540-G](https://doi.org/10.1016/0045-7949(92)90540-G) (cf. p. 39).
- [144] C. SORIA. « Gas Turbine Shaft Over-speed/Failure Modelling. Aero/Thermodynamics Modelling and Overall Engine System Response ». Thèse de doct. Cranfield University, 2014 (cf. p. 6 sq., 9, 12, 14).
- [145] A. SRIVASTAVA, M. TIWARI et A. SINGH. « Identification of rotor-stator rub and dependence of dry whip boundary on rotor parameters ». *Mechanical Systems and Signal Processing* 159 (2021), p. 107845. DOI : [10.1016/j.ymssp.2021.107845](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2021.107845) (cf. p. 43, 88).

- [146] N. STRÖMBERG. « Finite element treatment of two-dimensional thermoelastic wear problems ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 177.3-4 (1999), p. 441-455. DOI : [10.1016/S0045-7825\(98\)00392-2](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00392-2). oai : [hal-01574166](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01574166) (cf. p. 31).
- [147] M. TANNOUS. « Développement et évaluation d'approches de modélisation numérique couplées 1D et 3D du contact rotor-stator ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Nantes, 2013. oai : [hal-00943210](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00943210) (cf. p. 57).
- [148] A. THORIN, N. GUÉRIN, M. LEGRAND, F. THOUVEREZ et P. ALMEIDA. « Nonsmooth thermoelastic simulations of blade-casing contact interactions ». *Volume 7C : Structures and dynamics*. Oslo, Norway : American Society of Mechanical Engineers, 2018, V07CT35A018. ISBN : 978-0-7918-5115-9. DOI : [10.1115/GT2018-75959](https://doi.org/10.1115/GT2018-75959). oai : [hal-01713919](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01713919) (cf. p. 42).
- [149] A. THORIN, N. GUÉRIN, M. LEGRAND, F. THOUVEREZ et P. ALMEIDA. « Nonsmooth Thermoelastic Simulations of Blade-Casing Contact Interactions ». *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 141.2 (2018). DOI : [10.1115/1.4040857](https://doi.org/10.1115/1.4040857). oai : [hal-01989188](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01989188) (cf. p. 120).
- [150] M. TORKHANI. *Gyroscopic matrices of the right beams and the discs*. 2014 (cf. p. 158 sq.).
- [151] M. TORKHANI, L. MAY et P. VOINIS. « Light, medium and heavy partial rubs during speed transients of rotating machines : Numerical simulation and experimental observation ». *Mechanical Systems and Signal Processing* 29 (2012), p. 45-66. DOI : [10.1016/j.ymssp.2012.01.019](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2012.01.019) (cf. p. 37).
- [152] T. VADCARD. « Nonlinear dynamics of mechanical systems featuring contact interfaces : application to blade/casing interactions ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Lyon, Ecole Polytechnique de Montréal, 2023. oai : [hal-04132688](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-04132688) (cf. p. 87).
- [153] R. VALID et R. OHAYON. « Théorie et calcul statique et dynamique des structures à symétries cycliques ». *La Recherche Aéronautique* 4 (1985), p. 251-263 (cf. p. 55).
- [154] G. VERMES. « A Fluid Mechanics Approach to the Labyrinth Seal Leakage Problem ». *Journal of Engineering for Power* 83.2 (1961), p. 161-169. DOI : [10.1115/1.3673158](https://doi.org/10.1115/1.3673158) (cf. p. 9).
- [155] T. VINAS. *Contact rotor/stator dans les turbomachines*. Rapport de stage. Safran Helicopter Engines, 2006 (cf. p. 21).
- [156] M.E. WALL, A. RECHTSTEINER et L.M. ROCHA. *Singular value decomposition and principal component analysis*. D.P. Berrar, W. Dubitzky, M. Granzow, eds. A Practical Approach to Microarray Data Analysis. 2003 (cf. p. 152).
- [157] S WANG, L. HONG et J. JIANG. « Analytical prediction on stick-slip whirling oscillations induced by dry friction between a rotating imbalanced rotor and a flexibly supported stator ». *Journal of Sound and Vibration* 511 (2021), p. 116333. DOI : [10.1016/j.jsv.2021.116333](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116333) (cf. p. 37).
- [158] L. L. WEI, G. H. GAO, J. KIM, R. D. K. MISRA, C. G. YANG et X. J. JIN. « Ultrahigh strength-high ductility 1 GPa low density austenitic steel with ordered precipitation strengthening phase and dynamic slip band refinement ». *Materials Science and Engineering : A* 838 (mars 2022), p. 142829. DOI : [10.1016/j.msea.2022.142829](https://doi.org/10.1016/j.msea.2022.142829) (cf. p. 136).
- [159] C. WILKES. « A perspective on the numerical and experimental characteristics of multi-mode dry friction whip and whirl ». Thèse de doct. Texas A&M University, 2008 (cf. p. 19).

- [160] J.C. WILKES, D.W. CHILDS, B.J. DYCK et S.G. PHILLIPS. « The numerical and experimental characteristics of multimode dry-friction whip and whirl ». *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 132.5 (2010). DOI : [10.1115/1.3204658](https://doi.org/10.1115/1.3204658) (cf. p. 22).
- [161] M. WILLIAMSON et A. MAJUMDAR. « Effect of Surface Deformations on Contact Conductance ». *Journal of Heat Transfer* 114.4 (1992), p. 802-810. DOI : [10.1115/1.2911886](https://doi.org/10.1115/1.2911886) (cf. p. 34).
- [162] P. WRIGGERS. « Contact constraints within coupled thermomechanical analysis—A finite element model ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 113.3-4 (1994), p. 301-319. DOI : [10.1016/0045-7825\(94\)90051-5](https://doi.org/10.1016/0045-7825(94)90051-5) (cf. p. 34).
- [163] P. WRIGGERS, T.A. LAURSEN, G. MAIER, J. SALENÇON, W. SCHNEIDER, B. SCHREFLER et P. SERAFINI, éd. *Computational Contact Mechanics*. T. 498. CISM International Centre for Mechanical Sciences. Vienna : Springer, 2007. ISBN : 978-3-211-77297-3 978-3-211-77298-0. DOI : [10.1007/978-3-211-77298-0](https://doi.org/10.1007/978-3-211-77298-0) (cf. p. 29 sq., 37).
- [164] F. WURTZER, P.-A. BOUCARD, P. LADEVÈZE et D. NÉRON. « Première approche d'une stratégie de partitionnement multimodèle pour la simulation de problèmes multiphysiques ». 2022. oai : [hal-03806755](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03806755) (cf. p. 34).
- [165] Z. YANG, J. HONG, D. WANG, Y. MA et R. CHENG. « Failure analysis of an aero-engine inter-shaft bearing due to clearance between the outer ring and its housing ». *Engineering Failure Analysis* 150 (2023), p. 107298. DOI : [10.1016/j.engfailanal.2023.107298](https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2023.107298) (cf. p. 187).
- [166] H. ZAIDI et J. FRÊNE. « Température du contact glissant ». *CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique*. AFM, Maison de la Mécanique, 2009. oai : [hal-03665624](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03665624) (cf. p. 130).
- [167] H. ZHANG, X. LI, D. WANG et T. LIU. « Nonlinear dynamics of a blade rotor with coupled rubbing of labyrinth seal and tip seal ». *Shock and Vibration* 2021 (2021). Sous la dir. de L. HOU, p. 1-14. DOI : [10.1155/2021/3826429](https://doi.org/10.1155/2021/3826429) (cf. p. 13).
- [168] S. ZHANG, N. GUI, X. HUANG, L. GE, X. YANG, J. TU et S. JIANG. « Verifying the tangential and normal restitution coefficients for double-sphere particles ». *Powder Technology* 363 (2020), p. 419-427. DOI : [10.1016/j.powtec.2020.01.025](https://doi.org/10.1016/j.powtec.2020.01.025) (cf. p. 73).
- [169] Z. ZHENG, G. REN et F. W. WILLIAMS. « The eigenvalue problem for damped gyroscopic systems ». *International Journal of Mechanical Sciences* 39.6 (1997), p. 741-750. DOI : [10.1016/S0020-7403\(96\)00072-0](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(96)00072-0) (cf. p. 80).
- [170] S. ZOPPELLARI. « Analytical modeling of rotating stall and surge ». Thèse de doct. Cranfield University, 2014 (cf. p. 12).

Annexe A

Rupture de tirant dans les moteurs d'hélicoptère

Cette annexe n'est pas disponible dans la version publique du manuscrit pour des raisons de confidentialité.

Annexe B

Calcul de la matrice jacobienne selon l'approche de Broyden Levenberg

Différence finie directe

Dans le cas où la fonction dont on cherche la racine est un vecteur de fonctions à plusieurs variables

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} f_1(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ f_2(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ \dots \\ f_n(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

on rappelle que la forme générale de la matrice jacobienne $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ est

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial q_1} & \frac{\partial f_n}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial q_n} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Une manière de calculer cette matrice jacobienne de manière approchée est d'opérer une différentiation colonne par colonne

$$\mathbf{J}_{.j} = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{q} + \delta \mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\delta} \quad (\text{B.3})$$

avec \mathbf{e}_j un vecteur nul sauf sur la $j^{\text{ème}}$ composante. Le pas de différentiation δ est choisi comme égal à $\sqrt{\epsilon}$, ϵ étant la tolérance sur la boucle de Newton ou la précision machine.

Mise à jour de la matrice jacobienne

Le calcul de la matrice jacobienne par différence finie pour chaque itération k est coûteuse en temps de calcul pour des systèmes de grande taille puisqu'elle requiert l'évaluation de la fonction \mathbf{f} , n fois. Broyden [31] a proposé une méthode de mise à jour de la matrice jacobienne

$$\mathbf{J}_{k+1} = \mathbf{J}_k + \frac{1}{\mathbf{s}_k^\top \mathbf{s}_k} (\mathbf{f}(\mathbf{q}_{k+1}) - \mathbf{f}(\mathbf{q}_k) - \mathbf{J}_k \mathbf{s}_k) \mathbf{s}_k^\top \quad (\text{B.4})$$

en posant $\mathbf{s}_k = \mathbf{q}_{k+1} - \mathbf{q}_k$. Dans le cas où \mathbf{f} tend vers zéro entre les deux dernières itérations, la matrice jacobienne peut continuer d'être mise à jour sur base de l'Équation (B.4). Le cas échéant, il est possible de rafraîchir la matrice jacobienne avec un nouveau calcul par différence finie. Levenberg [100] a ajouté un facteur positif l dans le calcul du nouveau vecteur candidat

$$(\mathbf{J}_k \mathbf{J}_k + l \mathbf{I}) \mathbf{s}^k = -\mathbf{J}_k \mathbf{f}(\mathbf{q}_k). \quad (\text{B.5})$$

Si $l = 0$ on retrouve la méthode de Newton (ou quasi-Newton) tandis que si $l \rightarrow \infty$, il vient

$$l \mathbf{s}^k = -\mathbf{J}_k \mathbf{f}(\mathbf{q}_k). \quad (\text{B.6})$$

Or le second membre de l'Équation (B.6) représente le gradient de la norme-2 du vecteur \mathbf{f} . En effet, en posant $\phi = \mathbf{f}^\top \mathbf{f}$, rechercher la racine de \mathbf{f} revient à minimiser la fonction potentiel ϕ dont le gradient vaut

$$\nabla_{\mathbf{q}} \phi = 2\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{f}(\mathbf{q}). \quad (\text{B.7})$$

On a donc la direction de recherche de solution qui est opposée au gradient du potentiel, qui se trouve être la direction avec la pente maximale. Cela signifie que le potentiel minimum sera atteint plus rapidement (i.e. en moins d'itérations), le long de cette direction. Cette méthode d'appelle la *gradient descent* ou encore *steepest descent* en théorie de l'optimisation. Le paramètre l peut donc être adapté en fonction de l'évolution de la fonction \mathbf{f} entre deux itérations. Les méthodes de recherche de zéro de Broyden et Levenberg peuvent être combinées pour former l'algorithme ci-dessous.

Algorithme 6 : Calcul de la matrice Jacobienne d'après Broyden-Levenberg

```

Données :  $l, k, r_{k+1}, r_k \in \mathbb{R}$ 
1 si  $k == 0$  alors
2   | Compute  $\mathbf{J}_k$  by forward difference
3   |  $jacIsNew \leftarrow \text{True}$ 
4 sinon
5   | si  $\|\mathbf{r}_{k+1}\|_2 \leq \|\mathbf{r}_k\|_2$  alors
6     |  $d\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k$ 
7     |  $l \leftarrow l/4$  (closer to Newton-loop)
8     |  $\mathbf{J}_{k+1} = \mathbf{J}_k + \frac{1}{\mathbf{s}_k^\top \mathbf{s}_k} (d\mathbf{r} - \mathbf{J}_k \mathbf{s}_k) \mathbf{s}_k^\top$ 
9     |  $jacIsNew \leftarrow \text{False}$ 
10  sinon
11  |  $l \leftarrow 4l$  (closer to steepest descent)
12  | si  $jacIsNew == \text{False}$  alors
13  |   | Compute  $\mathbf{J}_k$  by forward difference
14  |   |  $jacIsNew \leftarrow \text{True}$ 
15  |   fin
16  fin
17 fin

```

Annexe C

Matrices élémentaires poutre courbe

Cette annexe présente les matrices de masse et de raideur élémentaires d'une poutre courbe sous l'hypothèse d'Euler-Bernoulli.

$$\mathbf{M}_e = \rho \cdot S l_e \begin{pmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11l_e}{210} & 0 & 0 & \frac{9}{70} & -\frac{13l_e}{420} & 0 & 0 \\ & \frac{l_e^2}{105} & 0 & 0 & \frac{13l_e}{420} & -\frac{l_e^2}{140} & 0 & 0 \\ & & \frac{13}{35} & \frac{11l_e}{210} & 0 & 0 & \frac{9}{70} & -\frac{13l_e}{420} \\ & & & \frac{l_e^2}{105} & 0 & 0 & \frac{13l_e}{420} & -\frac{l_e^2}{140} \\ & & & & \frac{13}{35} & -\frac{11l_e}{210} & 0 & 0 \\ & & & & & \frac{l_e^2}{105} & 0 & 0 \\ & & & & & & \frac{13}{35} & -\frac{11l_e}{210} \\ & & & & & & & \frac{l_e^2}{105} \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

$$\mathbf{M}_e = \rho \cdot S l_e \begin{pmatrix} \frac{6S}{5l_e} & \frac{S}{10} & -\frac{S}{2R} & -\frac{Sl_e}{10R} & \frac{6S}{5l_e} & \frac{S}{10} & -\frac{S}{2R} & \frac{Sl_e}{10R} \\ & \frac{2Sl_e}{15} & \frac{Sl_e}{10R} & 0 & -\frac{S}{10} & -\frac{Sl_e}{30} & -\frac{Sl_e}{10R} & \frac{Sl_e^2}{60R} \\ & & A & B & \frac{S}{2R} & -\frac{Sl_e}{10R} & C & F \\ & & & D & \frac{Sl_e}{10R} & -\frac{Sl_e^2}{60R} & -F & G \\ & & & & \frac{6S}{5l_e} & -\frac{S}{10} & \frac{S}{2R} & -\frac{Sl_e}{10R} \\ & & & & & \frac{2Sl_e}{15} & \frac{Sl_e}{10R} & 0 \\ & & & & & & A & -B \\ & & & & & & & D \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

où

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{13l_e^4 S R_s^2 + 13l_e^4 I_z - 84I_z l_e^2 R_s^2 + 420I_z R_s^4}{35l_e^3 R_s^4} \\
 B &= \frac{11l_e^4 S R_s^2 + 11l_e^4 I_z - 252I_z l_e^2 R_s^2 + 1260I_z R_s^4}{210l_e^2 R_s^4} \\
 C &= 3 \frac{3l_e^4 S R_s^2 + 3l_e^4 I_z + 56I_z l_e^2 R_s^2 - 280I_z R_s^4}{70l_e^3 R_s^4} \\
 D &= \frac{l_e^4 S R_s^2 + l_e^4 I_z - 28I_z l_e^2 R_s^2 + 420I_z R_s^4}{105l_e R_s^4} \\
 F &= \frac{2520I_z R_s^4 - 13l_e^4 S R_s^2 - 13l_e^4 I_z - 84I_z l_e^2 R_s^2}{420l_e^2 R_s^4} \\
 G &= \frac{840I_z R_s^4 - 3l_e^4 S R_s^2 - 3l_e^4 I_z + 28I_z l_e^2 R_s^2}{420l_e^2 R_s^4}
 \end{aligned}$$

Annexe D

Equation de la chaleur unidimensionnelle dans une barre

L'objectif de cette annexe est d'étudier l'influence de la fréquence d'excitation thermique sur la solution de l'équation de la chaleur. L'application retenue est le cas académique de la barre 1D de longueur L encadrée thermiquement à une extrémité et l'autre avec un flux thermique sinusoïdal

$$\begin{cases} u_t - \alpha u_{xx} = 0 \\ u(0, t) = 0 \\ u_x(L, t) = Q \sin(\omega t) \\ u(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

1 Solution analytique

L'Équation (D.1) n'est pas une EDP triviale compte tenu des conditions aux limites mixtes dont une est non-homogène. Plus d'informations sur la méthode de résolution présentée dans cette annexe sont disponibles dans [83]. Le traitement de ces dernières implique certaines manipulations préliminaires. Pour commencer, la solution doit être décomposée comme

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) \quad (\text{D.2})$$

où $v(x, t)$ est communément appelée fonction de relèvement. Elle a pour but de faire respecter les conditions aux bords

$$\begin{cases} v(0, t) = 0 \\ v_x(L, t) = Q \sin(\omega t) \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

et intervient dans le terme source la solution initiale d'une nouvelle EDP sur la fonction $w(x, t)$, qui est obtenue en injectant l'Équation (D.2) dans l'Équation (D.1)

$$\begin{cases} w_t - \alpha w_{xx} = -(v_t - \alpha v_{xx}) \\ w(0, t) = 0 \\ w_x(L, t) = 0 \\ w(x, 0) = -v(x, 0) \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

La fonction de relèvement permet donc de simplifier les conditions aux bords comme homogènes. Son calcul est laissé de côté pour l'instant. La solution de l'Équation (D.4) sans terme source

peut quant à elle, être obtenue rapidement en procédant à la séparation de variables classique

$$w(x, t) = T(t)X(x). \quad (\text{D.5})$$

En particulier, la recherche fonction spatiale $X(x)$ correspond à un problème aux valeurs propres sur l'opérateur laplacien (simplifié en une dérivée seconde spatiale ici)

$$X'' - kX = 0, \text{ avec } k < 0. \quad (\text{D.6})$$

Compte tenu des conditions aux limites mixtes homogènes (lignes 2 et 3 de l'Équation (D.4)), la base orthonormée ϕ_n des fonctions propres est

$$\phi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right) \text{ pour } n \in \mathbb{N}. \quad (\text{D.7})$$

Maintenant que les fonctions spatiales sont identifiées, trouver la solution de l'Équation (D.4) implique d'être capable de décomposer la solution comme une série infinie des fonctions propres

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(t)\phi_n(x) \quad (\text{D.8})$$

Cette décomposition doit également être possible pour son terme source, noté $G(x, t)$ et sa solution initiale $f(x)$. Dans ce cas, cela signifie

- que la solution initiale soit compatible avec les conditions limites du problème de l'Équation (D.4), ce qui est le cas ici car (cf.Équation (D.3))

$$\begin{cases} f(0) = -v(0, 0) = 0 \\ f_x(L) = -v_x(L, 0) = -Q \sin(\omega \cdot 0) = 0 \end{cases} \quad (\text{D.9})$$

- que le terme source $G(x, t) = -(v_t - \alpha v_{xx})(x, t)$ doive lui aussi satisfaire aux conditions aux limites du problème de l'Équation (D.4)

$$\begin{cases} G(0, t) = -(v_t - \alpha v_{xx})(0, t) = 0 \\ \frac{dG}{dx}(L, t) = -\frac{d}{dx}(v_t - \alpha v_{xx})(L, t) = 0. \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

Ainsi, la fonction de relèvement $v(x, t)$ est obtenue en résolvant le système formé par l'Équation (D.3) et l'Équation (D.10)

$$\begin{cases} v(0, t) = 0 \\ v_x(L, t) = Q \sin(\omega t) \\ (v_t - \alpha v_{xx})(0, t) = 0 \\ \frac{d}{dx}(v_t - \alpha v_{xx})(L, t) = 0. \end{cases} \quad (\text{D.11})$$

On en déduit alors que

$$v(x, t) = Qx \sin(\omega t) + \frac{\omega Q}{6\alpha}(-3xL^2 + x^3) \cos(\omega t) \quad (\text{D.12})$$

Maintenant que la fonction de relèvement est connue, la solution initiale et le terme source

peuvent être décomposés en séries de Fourier

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \phi_n(x) \\ G(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(t) \phi_n(x) \end{cases} \quad (\text{D.13})$$

où les coefficients de Fourier F_n et $G_n(t)$ sont respectivement calculés selon

$$\begin{cases} F_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \phi_n(x) dx \\ G_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L G(x, t) \phi_n(x) dx \end{cases} \quad (\text{D.14})$$

Un point important à souligner est que les coefficients $F_n = W_n(0)$. À présent, nous avons toutes les informations nécessaires pour trouver $W_n(t)$. En injectant l'Équation (D.8) dans l'EDP D.4 et sachant les valeurs propres associées aux ϕ_n valent $\lambda_n = \alpha \left(\frac{(2n+1)\pi}{2L} \right)^2$, il vient que

$$\frac{dW_n(t)}{dt} + \lambda_n W_n(t) = G_n(t) \text{ pour } n = 0, \dots, \infty \quad (\text{D.15})$$

À ce stade, un artifice de calcul est introduit en multipliant les deux membres de l'Équation (D.15) par $e^{\lambda_n t}$ et en intégrant de 0 à t , ce qui donne

$$W_n(t) e^{\lambda_n t} - W_n(0) = \int_0^t G_n(\tau) e^{\lambda_n \tau} d\tau \text{ pour } n = 0, \dots, \infty. \quad (\text{D.16})$$

On en déduit enfin l'expression finale de $W_n(t)$

$$W_n(t) = e^{-\lambda_n t} F_n + \int_0^t G_n(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau \text{ pour } n = 0, \dots, \infty \quad (\text{D.17})$$

qui, dans le problème actuel donne

$$W_n(t) = \frac{A_n}{\lambda_n^2 + \omega^2} (\lambda_n \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t)) + C_n e^{-\lambda_n t} \quad (\text{D.18})$$

avec

- $A_n = -(-1)^n \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{16\omega^2 Q L^4}{\alpha(2n+1)^4 \pi^4}$;
- $\bar{V}_n = -\sqrt{\frac{2}{L}} (-1)^n \frac{16\omega Q L^4}{\alpha(2n+1)^4 \pi^4}$;
- $C_n = \frac{A_n \omega}{\kappa_n^2 + \omega^2} - \bar{V}_n$.

2 Solution numérique

La vérification de la solution analytique peut passer par une comparaison avec la solution numérique, réalisée ici avec une discrétisation spatiale par éléments finis et temporelle par la méthodes d'Euler implicite. D'autres méthodes telles que Runge-Kutta ou Euler explicite ont été testées et ont fourni des solutions identiques. Pour les données numériques, on considère une barre en acier

- de longueur de poutre $L = 0,3 \text{ m}$;
- de section $S = 6 \times 10^{-5} \text{ m}^2$;
- de conductivité thermique $\kappa = 50 \text{ W/mK}$;
- de densité $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$;

- de capacité calorifique $c = 450\text{J/kg K}$;
- avec une amplitude d'excitation en chaleur $\dot{q} = 1\text{ W}$

la diffusivité thermique équivalente α vaut $\kappa/(\rho \cdot c)$ et l'amplitude $Q = \dot{q}/(\kappa \cdot S)$.

Les résultats pour une excitation à 0,5Hz pendant une simulation de 10s sont fournis en Figure D.1 pour la solution analytique et numérique. La solution analytique est calculée en 500 points le long de la barre et 200 points en temps avec une troncature de la série aux 100 premiers termes. La solution numérique correspond à celle analytique pour $N > 71$ avec

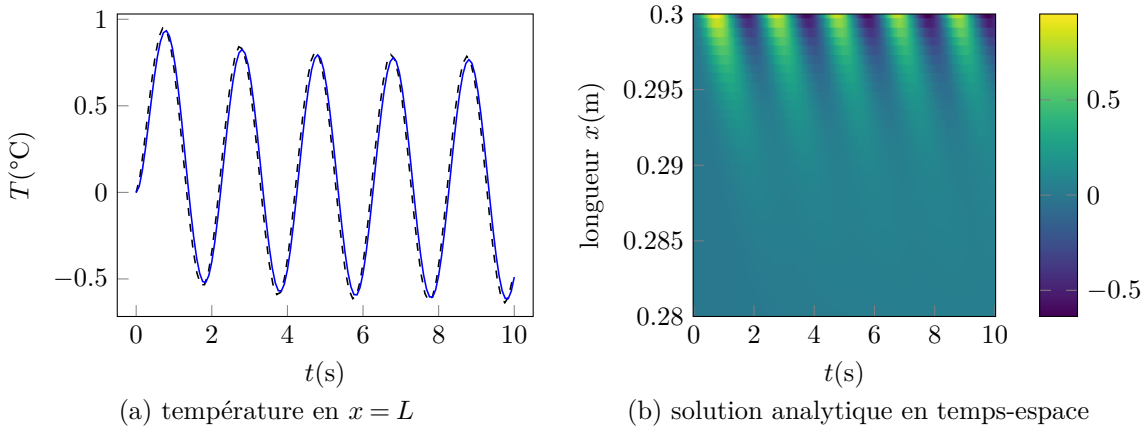


FIGURE D.1 – Solution pour excitation thermique de 0,5Hz analytique (—) et numérique (--)

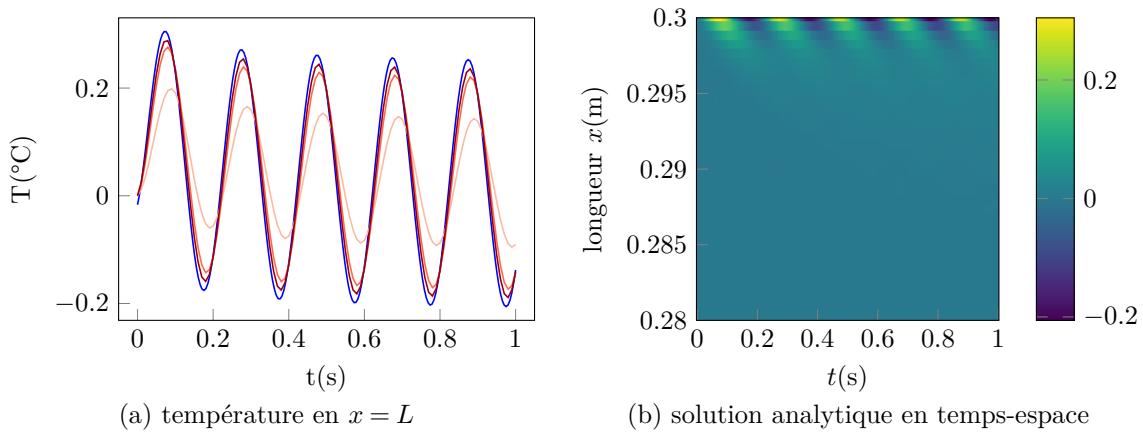


FIGURE D.2 – Solution pour excitation thermique de 5Hz analytique (—) et numérique avec 71 nœuds (—), 151 nœuds (—), 201 nœuds (—)

un pas de temps fixé à $h = 1e - 2s$. Dans les deux cas, le domaine d'influence est réduit à une profondeur inférieure à 2cm.

Pour une fréquence de 5Hz et un temps de simulation de 1s, la couche limite de conduction se réduit d'avantage et se limite à la peau en extrémité de poutre (environ 2mm). L'information évolue tellement vite qu'elle n'a pas le temps d'être propagée dans la profondeur de la poutre. Il faut donc davantage raffiner la solution comme le montre la Figure D.2a pour la solution numérique où le nombre de nœuds monte de 71 à 201 (valeur intermédiaire de 151 nœuds). Pour la solution analytique, plus de précision est également nécessaire via l'augmentation de l'indice de troncature, qui passe à 200.

Annexe E

Matrices de masse et raideur élément de poutre droite de Timoshenko

Les différentes matrices prennent en compte la torsion et la flexion. Le déplacement axial est négligé

1 Matrices de masse et d'inertie

$$\mathbf{M}_u^e = \frac{\rho S \ell_e}{840(1+\phi)^2} \begin{pmatrix} 312 + 588\phi + 280\phi^2 & (44 + 77\phi + 35\phi^2)\ell_e & 108 + 252\phi + 140\phi^2 & -(26 + 63\phi + 35\phi^2)\ell_e \\ (8 + 14\phi + 7\phi^2)\ell_e^2 & \text{SYM} & (26 + 63\phi + 35\phi^2)\ell_e & -(6 + 14\phi + 7\phi^2)\ell_e^2 \\ 312 + 588\phi + 280\phi^2 & & 312 + 588\phi + 280\phi^2 & -(44 + 77\phi + 35\phi^2)\ell_e \\ & & & (8 + 14\phi + 7\phi^2)\ell_e^2 \end{pmatrix} \quad (\text{E.1})$$

$$\mathbf{M}_v^e = \frac{\rho S \ell_e}{840(1+\phi)^2} \begin{pmatrix} 312 + 588\phi + 280\phi^2 & -(44 + 77\phi + 35\phi^2)\ell_e & 108 + 252\phi + 140\phi^2 & (26 + 63\phi + 35\phi^2)\ell_e \\ (8 + 14\phi + 7\phi^2)\ell_e^2 & \text{SYM} & -(26 + 63\phi + 35\phi^2)\ell_e & -(6 + 14\phi + 7\phi^2)\ell_e^2 \\ 312 + 588\phi + 280\phi^2 & & 312 + 588\phi + 280\phi^2 & (44 + 77\phi + 35\phi^2)\ell_e \\ & & & (8 + 14\phi + 7\phi^2)\ell_e^2 \end{pmatrix} \quad (\text{E.2})$$

$$\mathbf{M}_{\theta u} = \frac{\rho I_d}{30\ell_e(1+\phi)^2} \begin{pmatrix} 36 & -3(1-5\phi)\ell_e & -36 & -3(1-5\phi)\ell_e \\ (4l + 5\phi + 10\phi^2)\ell_e^2 & 3(1-5\phi)\ell_e & 36 & (-1-5\phi+5\phi^2)\ell_e^2 \\ \text{SYM} & & & 3(1-5\phi)\ell_e \\ & & & (4l + 5\phi + 10\phi^2)\ell_e^2 \end{pmatrix} \quad (\text{E.3})$$

$$\mathbf{M}_{\theta v}^e = \frac{\rho I_d}{30\ell_e(1+\phi)^2} \begin{pmatrix} 36 & 3(1-5\phi)\ell_e & -36 & 3(1-5\phi)\ell_e \\ (4l + 5\phi + 10\phi^2)\ell_e^2 & (-3+15\phi)l & 36 & (-1-5\phi+5\phi^2)\ell_e^2 \\ \text{SYM} & & & -3(1-5\phi)\ell_e \\ & & & (4l + 5\phi + 10\phi^2)\ell_e^2 \end{pmatrix} \quad (\text{E.4})$$

2 Matrices gyroscopiques

Les matrices liées aux effets gyroscopiques sont données pour le cas d'une poutre de Timoshenko en flexion-torsion, soit 10 ddls par élément. Pour déduire ces matrices en absence

de torsion (soit 8 ddls/nœud), il faut supprimer les lignes/colonnes 5 et 10.

$$\mathbf{A}_1^e = \frac{-\rho I_p}{30\ell_e(1+\phi)^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 & 0 & 0 & - \\ 36 & 0 & 0 & 3\ell_e(1-5\phi) & - & -36 & 0 & 0 & 3\ell_e(1-5\phi) & - \\ -3\ell_e(1-5\phi) & 0 & 0 & -(4+5\phi+10\phi^2)\ell_e^2 & - & 3\ell_e(1-5\phi) & 0 & 0 & \ell_e^2(1+5\phi-5\phi^2) & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 & 0 & 0 & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 & 0 & 0 & - \\ -36 & 0 & 0 & -3\ell_e(1-5\phi) & - & 36 & 0 & 0 & -3\ell_e(1-5\phi) & - \\ -3\ell_e(1-5\phi) & 0 & 0 & \ell_e^2(1+5\phi-5\phi^2) & - & 3\ell_e(1-5\phi) & 0 & 0 & -\ell_e^2(4+5\phi+10\phi^2) & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \quad (\text{E.5})$$

$$\mathbf{A}_2^e = \frac{-\rho I_p}{30\ell_e(1+\phi)^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 0 & 0 & -9\ell_e\phi & - & -18 & 0 & 0 & (3-6\phi)\ell_e & 0 \\ 9\ell_e\phi & 0 & 0 & -(3+6\phi+15/2\phi^2)\ell_e^2 & - & -9\ell_e\phi & 0 & 0 & \ell_e^2/2(1+5\phi-5\phi^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -18 & 0 & 0 & 9\ell_e\phi & 0 & 18 & 0 & 0 & (-3+6\phi)\ell_e & 0 \\ (-3+6\phi)\ell_e & 0 & 0 & \ell_e^2/2(1+5\phi-5\phi^2) & 0 & (3-6\phi)\ell_e & 0 & 0 & -\ell_e^2/2(2-2\phi+5\phi^2)\ell_e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \quad (\text{E.6})$$

3 Matrice de raideur

Il est possible de prendre en compte les effets de cisaillement en incluant le paramètre b dans les matrices de raideur liées aux flexions. Il sont définis comme

$$b = \frac{EI_d}{\ell_e^3(1+\phi)} \quad (\text{E.7})$$

Dans ce cas la matrice de raideur élémentaire vaut

$$\mathbf{K}^e = \begin{pmatrix} k1 & 0 & 0 & k3 & 0 & -k1 & 0 & 0 & k3 & 0 \\ & k1 & -k3 & 0 & 0 & 0 & -k1 & -k3 & 0 & 0 \\ & & k2 & 0 & 0 & 0 & k3 & k4 & 0 & 0 \\ & & & k2 & 0 & -k3 & 0 & 0 & k4 & 0 \\ & & & & k5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k5 \\ & & & & & k1 & 0 & 0 & -k3 & 0 \\ & & & & & & k1 & k3 & 0 & 0 \\ & & & & & & & k2 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & k2 & 0 \\ & & & & & & & & & k5 \end{pmatrix}, \quad (\text{E.8})$$

avec

$$\begin{cases} k1 = 12b \\ k2 = b(4+\phi)\ell_e^2 \\ k3 = 6b\ell_e \\ k4 = b(2-\phi)\ell_e^2 \\ k5 = GI_p/\ell_e \end{cases} \quad (\text{E.9})$$

On rappelle que G représente le module de cisaillement. Si un nœud correspond au palier arrière, alors la raideur associée aux translations est augmentée du paramètre k_{rb} .

Liste des tableaux

IV.1	Propriétés des algorithmes de contact	79
IV.2	Propriétés stator et palier arrière	80
VI.1	Taille de la base réduite tronquée en fonction de la tolérance relative sur les valeurs singulières	152
VI.2	Paramètres de réduction du carter	153

Table des figures

I.1	Cycle de générateur de gaz (Brayton ouvert) en fonctionnement nominal	6
I.2	Etat du système lors d'un scénario de rupture d'arbre	6
I.3	Localisation du moteur sur hélicoptère (Airbus H160)	7
I.4	Coupe moteur RTM-322 avec mise en évidence du générateur de gaz (■) et de la turbine libre (■)	8
I.5	Schémas simplifié du générateur de gaz avec le compresseur centrifuge (■), les 2 étages de turbine HP (■) et le carter (□). Identification des zones d'air : Main Gas Path (□) et le SAS (■) ainsi que les composants principaux situés dans le SAS comme les paliers et les joints labyrinthes.	8
I.6	Propriété d'étanchéité d'un joint labyrinthe : application côté turbine	9
I.7	Boeing 767-223(ER) d'American Airlines (2006) [24]	10
I.8	Endommagement de la nacelle gauche de l'Airbus A380 de Qantas Airways [86] .	10
I.9	Localisation des touches entre disque IP (<i>Intermediate Pressure</i>) et le redresseur de l'étage LP (<i>Low Pressure</i>) du TRENT900 [86]	11
I.10	Schémas d'un étage turbine haute pression(1-disque, 2-aube, 3-plateforme, 4-NGV, 5-carter) et des mécanismes de contact dans un moteur d'avion [129] : a- <i>disc rubbing</i> , b- <i>blade tangling</i> , c- <i>blade spragging</i> , d- <i>blade/carter rub</i>	13
I.11	Synthèse méthodes de limitation de survitesse	14
I.12	Assemblage schématique des composants du générateur de gaz : écrous, curvics et tirant. Déplacements axiaux des parties turbine et compresseur après rupture et localisation des zones de touche côté turbine (--)	15
II.1	Descriptif des mouvements de précession en cas de contact annulaire complet . .	18
II.2	Diagramme vitesse de rotation-coefficient de frottement des zones d'existence des types de précession et de contact partiel [90]	19
II.3	Diagramme vitesse de rotation-ratio de raideur rotor/stator des zones d'existence des types de précession et de contact partiel[90]	20
II.4	Sensibilité du type de précession à l'angle d'impact [16]	21
II.5	Sensibilité de la fréquence de vibration en précession rétrograde avec la vitesse de rotation [40]	22
II.6	Coefficient de frottement critique en fonction de la vitesse de rotation et mise en évidence des plages de <i>dry whirl</i> [160]	22
II.7	Saut de fréquence de précession lors d'une transition <i>dry whip-whirl</i> [41]	23
II.8	Domaines du problème mécanique avec contact	24
II.9	Solide déformable en rotation : repères et coordonnées	27
II.10	Rotations du repère inertiel au repère mobile (angles d'Euler)	27
II.11	Quantités impliquées dans traitement du contact unilatéral	29
II.12	Domaine de définition de l'équation de la chaleur pour deux solides en contact .	31

II.13	Loi de Signorini exacte (—) et régularisée par pénalisation extérieure (--) et intérieure (—)	37
II.14	Etapes algorithme de Carpenter	38
II.15	Différentiel de vitesse normale lors d'un impact	40
II.16	Etapes algorithme de Moreau-Jean : cas $e_N = 0$	41
II.17	Méthodes de régularisation de la loi de frottement de Coulomb : exacte (—), linéarisée par morceaux (--), tanh() (---)	43
II.18	Forces de contact inscrites dans le cône de Coulomb	44
II.19	Schémas d'un problème de complémentarité du second ordre sur des cônes pour le cas glissant	44
III.1	Définition d'un secteur sur base d'une pièce possédant des propriétés de symétrie cyclique et des domaines associés : frontière gauche G (—) et droite D (--)	55
IV.1	Configuration simplifiée d'un générateur de gaz	60
IV.2	Passage du repère inertiel au repère local par angles d'Euler	61
IV.3	Rotations de passage du repère galiléen vers le repère lié au solide d'après [85]	62
IV.4	Modèle rigide de la turbine à quatre degrés de liberté	62
IV.5	Modèle turbine-stator rigide	65
IV.6	Notations des données impliquées dans le traitement du contact	66
IV.7	Diagramme de Campbell de la turbine seule : mode direct f_d (—), mode rétrograde f_d (--), mode instable (---)	81
IV.8	Modes propres de turbine rigide en porte-à-faux sur un palier arrière en précession directe (—) et rétrograde (--)	81
IV.9	Réponse modèle rotor-stator rigide obtenu avec algorithme Sic-Proj	82
IV.10	Trajectoires du centre du labyrinthe l	83
IV.11	Apports et pertes énergétiques	84
IV.12	Bilan énergétique pour les 4 méthodes de résolution : Carp-oneVC (—), Carp-QN (—♦), Mor-Sic (—), Proj-Sic (—*)	84
IV.13	Influence du coefficient de frottement sur la vitesse de rotation : $\mu = 0$ (--), $\mu = 0,1$ (ref) (—), $\mu = 0,2$ (—), $\mu = 0,22$ (—) et $\mu = 0,25$ (—)	85
IV.14	Influence du coefficient de frottement sur la cinématique du contact et le couple de frottement : $\mu = 0$ (--), $\mu = 0,1$ (ref) (—), $\mu = 0,22$ (—), $\mu = 0,25$ (—)	85
IV.15	Influence du coefficient de frottement sur la trajectoire absolue du labyrinthe parcourue pendant $t_{ref} = 113$ ms	86
IV.16	Diagramme de Campbell du système rotor-stator couplé : f_{1r} (---), f_{1d} (----), f_{2r} (--), f_{2d} (—)	87
IV.17	Fonctions de pondération usuelles : rectangle (—), Hamming (--), Hanning (—♦), Blackman (—*)	88
IV.18	Full-spectrum pour le $n^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier et interprétation sur l'orbite de vibration	89
IV.19	Spectrogramme complet des déplacements relatifs du labyrinthe : sans frottement ; f_{1r} (---), f_{1d} (----), f_{2r} (--), f_{2d} (—)	89
IV.20	Spectrogramme complet des déplacements relatifs du labyrinthe : référence $\mu = 0,1$; f_{1r} (---), f_{1d} (----), f_{2r} (--), f_{2d} (—)	90
IV.21	Spectrogramme complet des déplacements relatifs du labyrinthe : $\mu = 0,25$; f_{1r} (---), f_{1d} (----), f_{2r} (--), f_{2d} (—)	90
IV.22	Transitoires vitesse de rotation en fonction de la raideur du stator : $k_s = 4 \times 10^7$ N/m (----), 5×10^7 N/m (—), 6×10^7 N/m (---), 8×10^7 N/m (—*) and 1×10^8 N/m (--)	91

IV.23	Réponse temporelle cas $k_s = 10^8 \text{N/m}$: Carp-oneVC (—), Sic-Proj (—)	92
IV.24	Transitoire de la vitesse relative tangentielle pour $k_s = 10^8 \text{N/m}$	92
IV.25	Diagramme de Campbell du système rotor-stator couplé lorsque $k_s = 10^8 \text{N/m}$: f_{1r} (---), f_{1d} (----), f_{2r} (--), f_{2d} (—)	92
IV.26	Bilan énergétique pour les algorithmes Carp-oneVC (—) et Proj-Sic (--)	93
IV.27	Spectrogramme complet du déplacement relatif du labyrinthe : $k_s = 10^8 \text{N/m}$; f_{1r} (---), f_{1d} (----), f_{2r} (--), f_{2d} (—)	93
IV.28	Diagramme masse-raideur des maxima de vitesse de rotation pour $\mu = 0,1$ obtenus par Carp-oneVC (tirets) et Proj-Sic (continu) : $m_s = 167 \text{g}$ (—), $m_s = 352 \text{g}$ (—*) and $m_s = 527 \text{g}$ (—⊖)	94
IV.29	Evolution temporelle du jeu avec $m_s = 352 \text{g}$ et $k_s = 3 \times 10^8 \text{N/m}$ où $h = 1 \times 10^{-7} \text{s}$ et calculée avec Carp-oneVC (—) et Proj-Sic (--)	95
IV.30	Transitoires de quantités globales avec $m_s = 352 \text{g}$, $k_s = 3 \times 10^8 \text{N/m}$ et $h = 10^{-7} \text{s}$ pour les algorithmes Carp-oneVC (—) et Proj-Sic (--)	95
IV.31	Diagramme masse-raideur des maxima de vitesse de rotation pour $\mu = 0,17$ obtenus par Sic-Proj : $m_s = 167 \text{g}$ (—), $m_s = 352 \text{g}$ (—*) and $m_s = 527 \text{g}$ (—⊖)	96
IV.32	Assemblage du stator par vissage entre l'anneau du labyrinthe, le redresseur (A) et le diffuseur (B)	97
IV.33	Sensibilité du profil de vitesse de rotation au coefficient de frottement avec prise en compte du système de l'assemblage suspendu pour le stator : $\mu = 0,1$ (—), $\mu = 0,15$ (--), $\mu = 0,16$ (—), $\mu = 0,17$ (—)	98
IV.34	Réponse dynamique pour le stator assemblé avec $\mu = 0,1$: Carp-oneVC (—), Sic-Proj (--)	98
IV.35	Réponse dynamique avec le stator assemblé et pour $\mu = 0,16$: Carp-oneVC ($h = 10^{-6} \text{s}$) (—*), Sic-Proj ($h = 10^{-6} \text{s}$) (—*), Carp-oneVC ($h = 10^{-7} \text{s}$) (—), Sic-Proj ($h = 10^{-7} \text{s}$) (--)	99
IV.36	Vitesse de rotation avec le stator assemblé et pour $\mu = 0,17$: Carp-oneVC ($h = 10^{-6} \text{s}$)(--), Sic-Proj ($h = 10^{-6} \text{s}$)(—*), Carp-oneVC ($h = 2 \times 10^{-6} \text{s}$)(—●), Sic-Proj ($h = 5 \times 10^{-7} \text{s}$)(--)	99
IV.37	Comparaison des phases de contact partiel entre Carp-oneVC (10^{-6}s) (—) et Sic-Proj ($h = 5 \times 10^{-7} \text{s}$) (--)	100
IV.38	Trajectoire absolue du centre du labyrinthe pour l'application avec stator assemblé	100
IV.39	Analyse de la transition du contact partiel au <i>dry whip</i> pour $\mu = 0,17$ avec l'algorithme Carp-oneVC sur l'intervalle $t \in [215, 260] \text{ms}$	101
IV.40	Analyse de la transition du contact partiel au <i>dry whip</i> pour $\mu = 0,17$ avec l'algorithme Sic-Proj l'intervalle $t \in [240, 260] \text{ms}$	102
IV.41	Etude de convergence sur la solution obtenue avec Sic-Proj et le stator assemblé pour $\mu = 0,17$	102
V.1	Composants du système rotor stator et simplification de l'assemblage du carter par ressorts équivalents aux points de vissage : anneau (□), distributeur de la turbine (▣), diffuseur du compresseur (■)	106
V.2	Repère et degrés de liberté pour une poutre de Bernoulli courbe de longueur infinitésimale	107
V.3	Estimation des raideur de fixation équivalentes du diffuseur effectués sous ANSYS	110
V.4	Formes propres associées aux modes de masse suspendue	111
V.5	Formes propres associées aux modes à diamètres de l'anneau	112
V.6	Sensibilité de la FRF colocalisée du nœud excité (2) avec à l'amortissement proportionnel : $r_k = 0$ (sans amortissement) (--), $r_k = 10^{-7}$ (—), $r_k = 5 \times 10^{-7}$ (—)	114

V.7	Réponse excitation sinusoïdale chaleur : $N_e = 35$ (—), $N_e = 49$ (---), $N_e = 70$ (---), $N_e = 84$ (●)	116
V.8	Méthodes de recherche du point de contact pour l'approche mono-contrainte	117
V.9	Recherche du point de contact S entre 2 éléments adjacents par minimisation de la norme δ du vecteur \vec{SL} et schématisation de la fibre neutre du stator en configuration de repos (—○) et déformée (—●)	118
V.10	Simplification du calcul du jeu aux nœuds pour l'approche multi-points de contact	121
V.11	Comparaison des réponses mécaniques obtenues avec l'approche mono-contrainte pour $t = [9, 16]$ ms : 35 nœuds(---), 70 nœuds (—)	123
V.12	Saut du point de contact (×) sur le stator (—●) doté de 5 vis (●) entre 2 itérations pour $t \approx 5$ ms	123
V.13	Jeu prédit sur une portion de stator entre 2 itérations i (—) et $i + 1$ (---)	124
V.14	Réponse thermique du contact rotor stator : $N_e = 35$ (—) et $N_e = 70$ (---)	124
V.15	Points de contact (×) sous forme de secteur avec maillage avec $N_e = 70$ et $n_v = 5$	125
V.16	Réponse temporelle du contact rotor stator avec approche multipoints de contact avec maillage à 70 nœuds : nœud 13 (—), nœud 14 (—), nœud 15 (—), 16 (—), 17 (—)	125
V.17	Sensibilité au maillage $N_e = 70$ (—) et $N_e = 140$ (---)	126
V.18	Réponse dynamique : $N_e = 36$ (—), $N_e = 72$ (---)	127
V.19	Vibrations des structures : $N_e = 36$ (—), $N_e = 72$ (---)	128
V.20	Schémas de stator rigide avec propriétés équivalentes	128
V.21	Réponse temporelle du modèle rigide équivalent : flexible (—), rigide (---)	129
V.22	Réponse thermique : $N_e = 36$ (—), $N_e = 72$ (---)	129
V.23	Mise en évidence de la disparité des efforts de contact et du frottement entre les nœuds vis et normaux $N_e = 36$: $k = 9$ (4 ^{ème} vis) (—), $k = 10$ (—), $k = 11$ (---) .	130
V.24	Vitesse de précession globale du labyrinthe	130
V.25	Contenu spectral de la déformée de l'anneau	131
V.26	Spectrogramme diamètre-temps du stator : $N_e = 72$ et $\mu = 0, 1$	131
V.27	Sensibilité du transitoire de vitesse au coefficient ce frottement : $\mu = 0, 1$ (ref)(—), $\mu = 0, 12$ (—), $\mu = 0, 15$ (—), $\mu = 0, 2$ (—)	132
V.28	Etude de convergence de la détection du dry whip pour $\mu = 0, 15$: $N_e = 36$ (—) $N_e = 48$ (—), $N_e = 60$ (—)	133
V.29	Mise en évidence de la précession inverse : cas $N_e = 36$	133
V.30	Suivi des transferts d'énergie liées au dry whip. Pour la turbine, l'énergie mécanique se décompose en énergie cinétique en rotation de $E_{c,r}^T$ (---), transversale $E_{c,t}^T$ (—) et en énergie potentielle E_p^T (—). Le stator est doté d'énergie potentielle E_p^s (—) et cinétique E_c^s (—) et les travaux du couple aérodynamique W_τ (---) et de frottement W_f (—)	134
V.31	Déformée du stator au repos (---) lors de la phase instable en dry whip (—●) avec mise en évidence des nœuds vis (●) et des points de contact (×)	135
V.32	Spectrogramme espace-temps du stator : $\mu = 0, 12$	135
V.33	Spectrogramme espace-temps du stator : $\mu = 0, 15$	136
V.34	Sensibilité de la réponse thermomécanique au nombre de vis, sans changer la raideur par vis : $n_v = 12$ (ref) (—), $n_v = 5$ (---)	137
V.35	Influence du nombre de vis sur les quantités associées au nœud positionné sur le stator par $\phi = \pi/9$: $n_v = 12$ (ref) (—), $n_v = 5$ (---)	137
V.36	Sensibilité du transitoire de vitesse de rotation à la raideur des supports : référence (—), -10% (---), $+10\%$ (---)	138
V.37	Sensibilité de la solution thermomécanique à la raideur des supports : -10% (---), $+10\%$ (---)	138

V.38	Sensibilité du transitoire de vitesse de rotation au rayon du labyrinthe : référence (—), -10% (- -), +10% (- - -)	139
V.39	Réponse thermomécanique globale : $\alpha = 0$ (ref)(—) $\alpha = 1,05 \times 10^{-5} \text{K}^{-1}$ (- -) . . .	140
V.40	Energie apportée localement par frottement : $\alpha = 0$ (ref)(—) $\alpha = 1,05 \times 10^{-5} \text{K}^{-1}$ (- -)	141
V.41	Fonction jeu au nœud $k = 17$: $\alpha = 0$ (ref)(—) $\alpha = 1,05 \times 10^{-5} \text{K}^{-1}$ (- -)	141
V.42	Configuration de contact rotor (—)/stator (●) en fin de simulation $t = 300 \text{ms}$ avec indication des nœuds en contact (×) et des nœuds vis (●) pour un secteur de 0° à 90°	142
V.43	Décomposition de la déformée du stator sur les diamètres nodaux	142
V.44	Spectrogramme diamètre-temps du stator avec dilatation thermique	142
VI.1	Modèles CAO du stator et de ses supports	146
VI.2	Assemblage des pièces formant le carter et mise en évidence des 2 zones de contact	146
VI.3	Conditions aux limites appliquées aux composants du carter	147
VI.4	Convergence es fréquences propres avec le nombre de modes retenus dans la réduction de Craig-Bampton : complet (- -), $m = 20$ (—), $m = 40$ (—), $m = 50$ (—), $m = 60$ (—)	148
VI.5	Convergence de la réponse en fréquence en déplacement u_x au nœud 631 : complet (- -), $m = 20$ (—), $m = 40$ (—), $m = 50$ (—), $m = 60$ (—)	148
VI.6	Sensibilité au nombre de points d'expansion sur la FRF thermique sur le nœud 631 : complet (- -), $p = 2$ (—), $p = 4$ (—), $p = 6$ (—), $p = 8$ (—)	150
VI.7	Sensibilité à l'ordre d'expansion de la FRF thermique au nœud 631 : $l = 0$ (—), $l = 1$ (—), $l = 2$ (—)	150
VI.8	Sensibilité de la réponse en fréquence sur la température du nœud 631 : avec la borne supérieure d'expansion $f_{\max} = 10^5 \text{Hz}$ (—), $f_{\max} = 10 \text{Hz}$ (—), $f_{\max} = 1000 \text{Hz}$ (—)	151
VI.9	Prise en compte de la réponse asymptotique dynamique avec la borne supérieure d'expansion $p = 6$ et $f_{\max} = 10^5 \text{Hz}$ (—), $p = 5$ et $f_{\max} = \infty$ (—)	151
VI.10	Prise en compte de la réponse asymptotique dynamique avec la borne supérieure d'expansion $\epsilon = 0$ (sans SVD) (—), $\epsilon = 10^{-8}$ (—), $\epsilon = 10^{-6}$ (—), $\epsilon = 10^{-3}$ (—), $\epsilon = 10^{-2}$ (—)	153
VI.11	Comparaison des réductions de Craig Bampton avec $n_b = 36$ (- -) et $n_b = 72$ (—)	154
VI.12	Réduction RCH avec $n_b = 36$	154
VI.13	Modèle turbine constitué d'une poutre à section constante et d'un disque rigide .	155
VI.14	Degrés de liberté d'un élément poutre en flexion (—) et torsion (—)	157
VI.15	Schéma de la ligne d'arbre discrétisée par des poutres de Timoshenko et numérotation des nœuds et des éléments	161
VI.16	Diagramme de Campbell du rotor : F_1 (—), F_2 (directe) (—), F_2 (rétrograde) (- -), F_3 (directe) (—), F_3 (rétrograde) (- -), T_1 (- - -)	162
VI.17	Convergence de la vitesse de rotation du disque avec le pas de temps h_1 (—), h_2 (- -), h_3 (—)	163
VI.18	Convergence en temps du couple frottant pour h_1 (—), h_2 (- -), h_3 (—)	164
VI.19	Convergence en temps de l'effort normal au nœud situé en $\phi = \pi/2 \text{rad}$: h_1 (—), h_2 (- -), h_3 (—)	164
VI.20	Convergence en temps de la vibration selon x du rotor au niveau du labyrinthe : h_1 (—), h_2 (- -), h_3 (—)	165
VI.21	Répartition d'énergie friccionnelle aux nœuds au cours du temps : $\phi = 80^\circ$ (—), $\phi = 90^\circ$ (—), $\phi = 100^\circ$ (—), $\phi = 110^\circ$ (—), $\phi = 120^\circ$ (—), $\phi = 130^\circ$ (—) et mise en évidence du point d'inflexion qui correspond à la transition <i>dry whip/ dry whirl</i>	165

VI.22	Transitoire de la vitesse relative tangentielle aux nœuds du stator sur la portion : $\phi = 80^\circ$ (—), $\phi = 90^\circ$ (—), $\phi = 100^\circ$ (—), $\phi = 110^\circ$ (—), $\phi = 120^\circ$ (—), $\phi = 130^\circ$ (—)	166
VI.23	Configurations de contact rotor-stator pour trois instants pris en cours de <i>dry whip</i> : labyrinthe (—), cercle de contact sur l'anneau en position de repos (---), nœuds maîtres (●) et nœuds en contact (×)	166
VI.24	Vitesses de rotations nodales : $n = 3$ (labyrinthe) (—), $n = 4$ (—), $n = 5$ (—), $n = 6$ (disque) (—)	167
VI.25	Rotations élémentaires pour $e = 2$ (—), $e = 3$ (—), $e = 4$ (—), $e = 5$ (—), $e = 6$ (—)	167
VI.26	Synthèse des diagrammes de moment/rotation en torsion de la ligne d'arbre (pas à l'échelle)	168
VI.27	Illustration d'un contact secondaire généré entre l'anneau et le distributeur en cas de forte vibration de l'anneau (<i>dry whip</i>)	169
VI.28	Transitoire de vitesse de rotation : 72 nœuds (—) et 36 nœuds (--)	169
VI.29	Etude de convergence de la vibration du labyrinthe lorsque $n_b = 36$ (--) et $n_b = 72$ (—)	170
VI.30	Couple de frottement : 72 nœuds (—) et 36 nœuds (--)	170
VI.31	Comparaison des énergies de friction globales avec $n_b = 72$ (—) et $n_b = 36$ (--)	171
VI.32	Vitesses relatives tangentielles aux nœuds positionnés en $\phi = 80^\circ$ (—), $\phi = 90^\circ$ (—), $\phi = 100^\circ$ (—), $\phi = 110^\circ$ (—), $\phi = 120^\circ$ (—), $\phi = 130^\circ$ (—) pour le maillage avec $n_b = 72$	171
VI.33	Couple de frottement : $n_b = 72$ (—) et $n_b = 36$ (--)	172
VI.34	Efforts de contact aux nœuds situés en $\phi = 80^\circ$ (—), $\phi = 90^\circ$ (—), $\phi = 100^\circ$ (—) pour le maillage fin $n_b = 72$	173
VI.35	Efforts de contact aux nœuds situés en $\phi = 80^\circ$ (—), $\phi = 90^\circ$ (—), $\phi = 100^\circ$ (—) pour le maillage grossier $n_b = 36$	173
VI.36	Réponse transitoire sans torsion (—) et avec torsion (--)	174
VI.37	Déplacement labyrinthe selon axe X : sans torsion (—) et avec torsion (--)	175
VI.38	Profil de la turbine flexible à section constante par morceaux avec mise en évidence du palier et du labyrinthe	175
VI.39	Diagramme de Campbell de la ligne d'arbre modélisée sous ANSYS avec modes de flexion $F1$ (—), $F2$ (—), $F3$ (—) et $F4$ (—) en précession directe (continu) et rétrograde (pointillés), et le 1er mode de torsion $T1$ (—)	176
VI.40	Vitesse de rotation avec turbine et carter sous ANSYS calculé avec Carpenter (—) et Moreau-Jean (--)	177
VI.41	Mise en évidence de la précession inverse et du <i>dry whip</i> prédits avec Carp-oneVC (—) et Mor-LCP (—)	177
VI.42	Vibration du labyrinthe et du carter sous ANSYS pour Carp-oneVC (—) et Mor-LCP (—)	178
VI.43	Efforts normaux obtenus avec Carp-oneVC aux nœuds situés aux coordonnées polaires : $\phi = 80^\circ$ (—), $\phi = 90^\circ$ (—), $\phi = 100^\circ$ (—), $\phi = 110^\circ$ (—), $\phi = 120^\circ$ (—)	178
VI.44	Efforts normaux obtenus avec Mor-LCP aux nœuds situés aux coordonnées polaires : $\phi = 80^\circ$ (—), $\phi = 90^\circ$ (—), $\phi = 100^\circ$ (—)	179
VI.45	distances normales obtenues avec Carp-oneVC aux nœuds situés aux coordonnées polaires : $\phi = 80^\circ$ (—), $\phi = 90^\circ$ (—), $\phi = 100^\circ$ (—)	179
VI.46	distances normales obtenues avec Mor-slip aux nœuds situés aux coordonnées polaires : $\phi = 80^\circ$ (—), $\phi = 90^\circ$ (—), $\phi = 100^\circ$ (—)	180

VI.47	Diagramme de Campbell du système rotor stator couplé par appariement du nœud labyrinthe et un nœud maître arbitraire. Filtrage du diagramme afin de mettre en évidence les modes avec précessions inverses (--) : BW1 et directes (—) : FW1, FW2, FW3, FW4 et FW5	181
VI.48	Spectrogramme complet temps-fréquence de la vibration absolue du nœud associé au labyrinthe et superposition modes couplés inverses (--) : BW1 et directs (—) : FW1, FW2, FW3, FW4 et FW5	181
VI.49	Profils de température sur la circonférence du stator pour plusieurs instants calculés via Carp-oneVC (●) et Mor-LCP (⊖)	182
VI.50	Evolutions temporelles des températures nodales sur un secteur de 80°a 105° : $\phi = 80^\circ$ (—), $\phi = 85^\circ$ (—), $\phi = 90^\circ$ (—), $\phi = 95^\circ$ (—), $\phi = 100^\circ$ (—), $\phi = 105^\circ$ (—)	183
VI.51	Diagramme Température-position angulaire-temps pour le contact thermomécanique jusqu'à $t = 50ms$	183
D.1	Solution pour excitation thermique de 0,5Hz analytique (—) et numérique (--)	210
D.2	Solution pour excitation thermique de 5Hz analytique (—) et numérique avec 71 nœuds (—), 151 nœuds (—), 201 nœuds (—)	210

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 25 mai 2016 modifié par l'arrêté du 26 août 2022,

Vu la demande des directeurs de thèse

Messieurs F. THOUVEREZ et M. LEGRAND

et les rapports de

M. P. CARTRAUD
Professeur - CENTRALE NANTES - Laboratoire GEM - 1 rue de la Noë
44321 Nantes Cedex 3

et de

M. J-F. BRUNEL
Maître de Conférences HDR - POLYTECH LILLE - LaMcube, Bâtiment Esprit - Cité scientifique
59665 VILLENEUVE D'ASCQ

Madame JACOBS Coline

est autorisée à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique

Fait à Ecully, le 20 juin 2024

Pour le directeur de l'École Centrale de Lyon
Le directeur de la recherche



Christophe CORRE

Modélisation thermomécanique transitoire d'un contact rotor-stator au niveau des joints labyrinthes

Résumé

Les générateurs de gaz sont communément employés pour motoriser des avions ou des hélicoptères et réalisent toujours les étapes de compression-combustion-détente. En régime nominal, les gaz brûlés font tourner la turbine qui entraîne le compresseur par le biais de l'arbre moteur. Il arrive que certaines des pièces de l'arbre subissent une défaillance qui ne garantit plus l'assemblage des étages turbine et compresseur. Par conséquent, la turbine entre en configuration libre et amorce une accélération non-contrôlée qui peut mener à son éclatement. Il s'avère que dans les moteurs d'hélicoptère, la turbine subit un blocage sans effets dangereux. Une analyse de ces moteurs a révélé l'émergence de contacts rotor-stator intenses au niveau du joint labyrinthe de la turbine avec une forte élévation de température. Cette thèse est motivée par le besoin de prédire le transitoire de vitesse de rotation du rotor. Bien que la littérature soit fournie au sujet de la dynamique des rotors en présence de contact unilatéral frottant, la combinaison de la réponse dynamique avec une vitesse de rotation inconnue et le couplage thermomécanique restent un sujet à explorer. Les présents travaux proposent de résoudre le problème thermomécanique dans le domaine temporel en respectant strictement des contraintes de contact via les multiplicateurs de Lagrange. Les algorithmes de contact sont réécrits pour s'adapter au système fortement non-linéaire à cause des effets gyroscopiques. Cette thèse propose des modèles enrichis progressivement afin d'inclure les physiques principales et une discrétisation spatiale par éléments finis. Afin de réduire les temps de calculs, les modèles éléments finis thermomécaniques sont réduits avec les méthodes appropriées. Les méthodes de résolution ont été comparées et ont montré des résultats concordants avec la littérature. De plus, pour un jeu de paramètres judicieusement choisis, la survitesse peut être limitée. Il a même été possible de prédire une réponse en précession inverse, qui est connue pour engendrer des efforts et vibrations très élevés. Des difficultés à identifier le moment de déclenchement cette instabilité ont été rencontrés mais corrigés en introduisant de la flexibilité au système. Enfin, la vitesse de rotation élevée conjointe aux efforts de contact importants provoque une forte génération de chaleur aux points de contact telle que la température de fusion est atteinte en cours de simulation.

Mots clés : turbine, survitesse, contact unilatéral, rotor-stator, frottement, thermomécanique, transitoire, non-linéaire, réduction, domaine temporel

Thermomechanical transient dynamics of rotor-stator contact in labyrinth seals

Abstract

Gas generators are commonly used to power airplanes and helicopters and always perform the compression-combustion-expansion stages. The burnt gases drive the turbine which, in turn, powers the compressor through the rotorshaft. Occasionally, some parts of the shaft may fail so that the turbine and compressor stages are no longer coupled. As a result, the turbine may enter a freewheeling configuration and initiate an uncontrolled acceleration leading to the disc burst. In helicopter engines, the turbine undergoes a seizure without hazardous effects. An analysis of these engines revealed the emergence of intense rotor-stator rub within the labyrinth seal and sharp rise in temperature. The present thesis is motivated by the need to predict the rotor speed transient accurately. Although the literature is extensive about rotordynamics accounting for unilateral contact occurrences with friction, the combination of the dynamic response with unknown rotational speed and thermomechanical coupling remains a topic to be explored. The present work proposes to solve the thermomechanical problem in the time domain by strictly respecting contact conditions through Lagrange multipliers. The solution algorithms are rewritten to fit the highly non-linear system due to gyroscopic effects. This doctoral research presents models progressively enriched with physics of interest. In order to reduce the computation time, reduction methods are applied to finite elements models accordingly. The resolution methods were compared and showed results in line with the literature. It turned out that overspeed could be limited for a carefully chosen set of parameters. It was even possible to predict a response in dry whip, which is known to generate very high stress and vibration levels. Difficulties in identifying the moment of triggering were encountered, but tackled by introducing flexibility into the system. Finally, the high rotation speed combined with the high contact forces resulted in high heat generation at the contact interface, to the point that melting temperature was reached during simulation.

Keywords: turbine, overspeed, unilateral contact, rotor-stator, friction, thermomechanics, transient, non-linear, reduction, time domain