



HAL
open science

Contribution à l'estimation robuste par intervalle des systèmes multivariables LTI et LPV : Application aux systèmes aérospatiaux

Irryhl Mohammadi

► **To cite this version:**

Irryhl Mohammadi. Contribution à l'estimation robuste par intervalle des systèmes multivariables LTI et LPV : Application aux systèmes aérospatiaux. Automatique. Université de Bordeaux, 2024. Français. NNT : 2024BORD0142 . tel-04691832

HAL Id: tel-04691832

<https://theses.hal.science/tel-04691832v1>

Submitted on 9 Sep 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE PRÉSENTÉE
POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR DE
L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

SPÉCIALITÉ : Automatique, productique,
signal et image, ingénierie cognitive

Par Irryhl MOHAMMEDI

**Contribution à l'estimation robuste par intervalle
des systèmes multivariables LTI et LPV :
Application aux systèmes aérospatiaux**

.....

Sous la direction de : David HENRY
Co-encadrant : David GUCIK-DERIGNY

Soutenue le 15 Juillet 2024

Membres du jury :

M. EFIMOV Denis	Directeur de recherche	Inria, Lille	Président
M. RAÏSSI Tarek	Professeur	CNAM	Rapporteur
M. COCQUEMPOT Vincent	Professeur	Université de Lille	Rapporteur
M. COMBASTEL Christophe	Maître de Conférences	Université de Bordeaux	Examinateur
M. HENRY David	Professeur	Université de Bordeaux	Dir. de thèse

Membres invités :

M. GUCIK-DERIGNY David	Maître de Conférences	Université de Bordeaux	Co-encadrant
------------------------	-----------------------	------------------------	--------------

Titre : Contribution à l'estimation robuste par intervalle des systèmes multivariables LTI et LPV : Application aux systèmes aérospatiaux

Résumé : Les travaux présentés dans ce mémoire de thèse visent à développer de nouvelles approches basées sur une nouvelle classe particulière d'estimateurs d'état : les filtres dits par intervalles. Tout comme la classe des observateurs intervalles, l'objectif est d'estimer les bornes supérieures et inférieures des états d'un système, à chaque instant de temps. L'approche proposée repose sur la théorie des systèmes monotones et sur la connaissance *a priori* du domaine d'appartenance, supposé borné, des incertitudes de modèle et des entrées exogènes (perturbations, bruit de mesure, etc). L'élément clé de l'approche proposée repose sur l'utilisation de filtre d'ordre quelconque, sans structure a priori fixée, plutôt qu'une structure basée sur l'observateur (reposant uniquement sur une structure dynamique du système étudié). La synthèse des paramètres du filtre repose sur la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes de type inégalités matricielles linéaires et bilinéaires (LMI et BMI) permettant de garantir simultanément les conditions d'existence du filtre ainsi qu'un niveau de performance, soit dans un contexte énergie, soit dans un contexte amplitude ou soit dans un contexte mixte énergie/amplitude. La méthodologie de synthèse proposée est illustrée sur un exemple académique et est comparée avec d'autres méthodes existantes dans la littérature. Enfin, la méthodologie est appliquée au cas du contrôle d'attitude et d'orbite d'un satellite, sous des conditions de simulations réalistes.

Mots clés : Filtre intervalle, Filtre $\mathcal{H}_1/\mathcal{H}_\infty$, Inégalités matricielles linéaires et bilinéaires, Systèmes LPV, gain \mathcal{L}_2 , gain \mathcal{L}_∞ .

Title : Contribution to robust interval estimation of multivariable LTI and LPV systems : Application to aerospace systems

Abstract : The work of this thesis aims at developing new approaches based on a new particular class of state estimators, the so-called interval or ensemble filters. Like the class of interval observers, the objective is to estimate, in a guaranteed way, the upper and lower bounds of the states of a system, at each time instant. The proposed approach is based on the theory of monotonic systems and on the knowledge of the domain of membership, supposedly bounded, of the uncertainties of the system and disturbances, such as noise and bias of sensors, etc. The key element of the proposed approach is to use a filter structure, rather than an observer-based structure. The synthesis of the filter parameters is based on the resolution of a constrained optimization problem of linear and bilinear matrix inequalities (LMI and BMI) allowing to guarantee simultaneously the existence conditions of the filter as well as a performance level, either in an energy context, or in an amplitude context or in a mixed energy/amplitude context. The proposed synthesis methodology is illustrated on an academic example and is compared with other existing methods in the literature. Finally, the methodology is applied to the case of attitude and acceleration control of a satellite, under realistic simulation conditions.

Keywords : Interval filter, $\mathcal{H}_1/\mathcal{H}_\infty$ filter, Linear and Bilinear Matrix Inequality, LPV systems, \mathcal{L}_2 -gain, \mathcal{L}_∞ -gain

Remerciements

Ce mémoire marque la fin de mes travaux de recherche effectués au sein de l'équipe Approche Robuste et Intégrée de l'Automatique (ARIA) du laboratoire de l'Intégration du Matériau au Système (IMS).

Je tiens à remercier tout particulièrement mon directeur de thèse Monsieur David HENRY, Professeur à l'Université de Bordeaux et responsable de l'équipe de recherche ARIA ainsi que mon co-encadrant de thèse Monsieur David GUCIK-DERIGNY, Maître de conférences à l'Université de Bordeaux, pour la disponibilité, le soutien et la confiance qu'ils m'ont accordés tout au long de cette thèse. La qualité de l'encadrement et les précieux conseils m'ont permis de mener à bien ce travail.

Mes remerciements s'adressent aussi à ma famille, mes proches et mes deux petites soeurs, Myrina et Maissane, qui m'ont toujours soutenu et encouragé dans mes choix tout au long de ces années d'études. Je souhaite également exprimer toute ma gratitude et ma profonde reconnaissance envers ma mère, Djamila, dont le soutien inébranlable, la bienveillance et la grande patience tout au long de ma vie et de cette thèse m'ont permis d'en arriver là où je suis aujourd'hui. Enfin, un grand merci à Lagertha pour son soutien.

Table des matières

Remerciements	i
Table des matières	iii
Acronymes et symboles	vii
Table des figures	xi
Liste des tableaux	xiii
Publications de l'auteur	xv
Introduction Générale	1
1 Théorie de l'estimation des systèmes LPV	5
1.1 Modélisation LPV des systèmes dynamiques	5
1.2 Notions de stabilité au sens de Lyapunov pour les systèmes LPV	7
1.2.1 Stabilité quadratique pour un système LPV	7
1.2.2 Stabilité quadratique robuste	8
1.3 Performance	10
1.3.1 De la norme \mathcal{H}_∞ au gain \mathcal{L}_2	11
1.3.2 De la norme \mathcal{H}_1 au gain \mathcal{L}_∞	13
1.4 Synthèse de filtre	14
1.4.1 Filtrage \mathcal{H}_∞ : cas des modèles LTI et LPV	14
1.4.2 Filtrage \mathcal{H}_1 : cas du modèle LTI incertain	21
1.5 Théorie des observateurs intervalles basée sur la propriété de coopérativité	24
1.5.1 Systèmes monotones	24
1.5.2 Application à la conception d'observateurs intervalles	26
1.6 Observateurs intervalles pour les systèmes LTI	28
1.6.1 Approche par transformation en système positif	28
1.6.2 Approche par changement de base d'état	31
1.6.3 Approche par une structure TNL sous critère de norme \mathcal{H}_∞	38
1.6.4 Approche sous contrainte de norme \mathcal{H}_1	42
1.7 Observateurs intervalles pour les systèmes LPV	46
1.7.1 Première approche sous critère gain \mathcal{L}_∞	47
1.7.2 Deuxième approche sous un critère mixte gain $\mathcal{L}_2/\mathcal{L}_\infty$	53

1.8	Positionnement des contributions de la thèse	62
1.8.1	Analyse critique de l'état de l'art	62
1.8.2	Objectifs de la thèse	63
2	Synthèse de filtres intervalles pour les systèmes LTI	65
2.1	Encadrement de fonctions	65
2.2	Formulation du problème	66
2.3	Conception du filtre intervalle	67
2.3.1	Conditions d'existence	67
2.3.2	Détermination des fonctions $\bar{\zeta}_1, \underline{\zeta}_2, \bar{\eta}_1, \underline{\eta}_2$	69
2.3.3	Critère de performance $\mathcal{H}_1 / \mathcal{H}_\infty$ et formulation NL-SDP	70
2.4	Application académique	74
2.5	Application et amélioration de l'unité de navigation pour les applications spatiales : Mission MICROSCOPE	78
2.5.1	Un mot sur le Principe d'équivalence	78
2.5.2	La mission MICROSCOPE	79
2.5.3	Modélisation des perturbations spatiales	82
2.5.4	Modélisation de la dynamique du satellite Microscope	84
2.6	Conception du filtre intervalle \mathcal{H}_∞	86
2.6.1	Formulation SDP	86
2.6.2	Résultats et simulations non linéaires	90
2.7	Conclusion	94
3	Synthèse de filtres intervalles pour les systèmes LPV	95
3.1	Pré-requis	95
3.2	Formulation du problème de synthèse du filtre LPV intervalle	98
3.3	Conception du filtre intervalle	100
3.3.1	Conditions d'existence	100
3.3.2	Détermination des fonctions majorantes $\bar{\zeta}_1, \underline{\zeta}_2, \bar{\eta}_1, \underline{\eta}_2$	102
3.3.3	Formulation NL-SDP basée sur des critères de gain \mathcal{L}_2 et gain \mathcal{L}_∞	104
3.3.4	Algorithme de conception du filtre intervalle	112
3.4	Exemple académique	113
3.4.1	Premier exemple académique	113
3.4.2	Second exemple académique	117
3.5	Conclusion	119
	Conclusion générale et perspectives	121
A	Normes	123
A.1	Norme vectorielle	123
A.2	Norme des signaux	123
A.2.1	Espace \mathcal{L}_q	123
A.2.2	Norme \mathcal{L}_q	124
A.3	Norme matricielle induite	124

B Complément sur les LMIs	125
B.1 Complément de Schur	125
B.2 Lemme de projection	126
B.3 Régions LMI et \mathcal{D} -stabilité	126
B.3.1 Région LMI	126
B.3.2 \mathcal{D} -stabilité	128
Bibliographie	i

Acronymes et symboles

Acronymes

AACS	<i>Attitude and Acceleration Control System</i> - Système de Contrôle d'Attitude et d'Accélération
AQP	<i>Affine Quadratic \mathcal{H}_∞ Performance</i> - Performance \mathcal{H}_∞ quadratique affine
AQS	<i>Affine Quadratic Stability</i> - Stabilité quadratique affine
μ ASC	<i>micro Advanced Stellar Compass</i> - Boussole stellaire
FES	<i>Functional Engineering Simulator</i> - Simulateur d'Ingénierie Fonctionnelle
HOSM	<i>High Order Sliding Modes</i>
IPR	<i>Internally Positive Representation</i> - Représentation Interne Positive
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i> - Inégalité matricielle linéaire
LPV	<i>Linear Parameter-Varying</i> - Linéaire à paramètres variants
LTI	<i>Linear Time-Invariant</i> - Linéaire à temps invariant
LTV	<i>Linear Time-Varying</i> - Linéaire à temps variant
NL-LMI	<i>Nonlinear Matrix Inequality</i> - Inégalité matricielle non-linéaire
PE	Principe d'Équivalence
PLMI	<i>Parametrized Linear Matrix Inequality</i> - Inégalité matricielle linéaire paramétrée
SDP	<i>Semi Definite Programming</i> - Programmation semi-définie

Ensembles et sous-espaces

\mathbb{R}, \mathbb{C}	Corps des nombres réels (resp. complexes)
$\mathbb{R}_+, \mathbb{C}_+$	Espace des nombres réels (resp. complexes) positifs
$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$	Espace des vecteurs réels (resp. complexes) de dimension n
$\mathbb{R}^{m \times n}, \mathbb{C}^{m \times n}$	Espace des matrices réelles (resp. complexes) de dimension $m \times n$
$\mathcal{L}_2([0, \infty), \mathbb{R}^n)$	Espace des signaux continus de carré-intégrables sur $[0, \infty)$ vers \mathbb{R}^n
$\mathcal{L}_\infty([0, \infty), \mathbb{R}^n)$	Espace des signaux continus à amplitude finie sur $[0, \infty)$ vers \mathbb{R}^n
$[a, b]$	$\triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \leq x \leq b\}$
s	Variable de la transformée de Laplace d'un signal continu
$G_{u \rightarrow y}(s)$	Transfert d'un système LTI continu d'entrée u et de sortie y .

Notations

$\mathbb{1}_n$	Vecteur de dimension n dont tous les éléments sont égaux à 1
I_n	Matrice identité de dimension $n \times n$ (notation implicite simplifiée I)
$\mathbf{1}_{m \times n}$	Matrice de dimension $m \times n$ dont tous les éléments sont égaux à 1
$\mathbf{0}_n$	Vecteur de dimension n dont tous les éléments sont égaux à 0
$\mathbf{0}_{m \times n}$	Matrice de dimension $m \times n$ dont tous les éléments sont égaux à 0 (notation implicite simplifiée O)
\star	Élément induit par symétrie dans une matrice symétrique par bloc

Opérateurs

$ x $	Valeur absolue de x
$sign(x)$	Opérateur signe de x i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, sign(x) = -1$ si $x < 0$, $sign(x) = 0$ si $x = 0$, $sign(x) = 1$ si $x > 0$.
$Diag(x)$	Matrice diagonale composée des éléments de x
A^+	$\triangleq \max\{A, 0\}$ au sens d'une comparaison élément par élément
A^-	$\triangleq \max\{-A, 0\}$ au sens d'une comparaison élément par élément
$\lambda(A)$	Valeurs propres de la matrice A
$\bar{\lambda}(A)$	Valeur propre maximale de la matrice A
$\sigma(A)$	Valeurs singulières de la matrice A
$\bar{\sigma}(A)$	Valeur singulière maximale de la matrice A
A^{-1}	Inverse de la matrice A
A^\dagger	Pseudo-inverse de Moore-Penrose de la matrice A
A^T	Transposée de la matrice A
$trace(A)$	Trace de la matrice A
$det(A)$	Déterminant de la matrice A
$rang(A)$	Rang de la matrice A
$Vec(A)$	Vectorisation de la matrice A i.e. pour $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ alors $Vec(A) \triangleq [a_{11}, \dots, a_{m1}, a_{12}, \dots, a_{m2}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{mn}]^T$.
$Sign(A)$	Opérateur signe défini élément par élément pour la matrice A i.e. pour $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ alors $Sign(A) \triangleq [sign(a_{i,j})]$
$A \succeq 0$ ($\preceq 0$)	Matrice A semi-définie positive (resp. négative)
$A \succ 0$ ($\prec 0$)	Matrice A définie positive (resp. négative)
$A \geq B$ ($\leq B$)	Opérateurs d'inégalité définis élément par élément. Soient deux matrices $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, nous définissons : $\forall \bullet \in \{\geq, \leq\}, A \bullet B \Leftrightarrow a_{ij} \bullet b_{ij}, \forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}$.
$A \geq 0$ (≤ 0)	Matrice A positive éléments-par-éléments (resp. négative)
\otimes	Opérateur de Kronecker
$\mathcal{R}_e(z)$	Partie réelle du nombre complexe z
$\mathcal{I}_m(z)$	Partie imaginaire du nombre complexe z

Normes vectorielles et matricielles

$\ x\ _{\mathcal{L}_p}$	Norme p d'un vecteur
$\ \cdot\ _p$	Norme induite p d'une matrice par la norme \mathcal{L}_p de vecteurs
$\ A\ _{max}$	$\triangleq \max_{ij} a_{ij} $: Max des valeurs absolues des éléments de A
$\ G_{u \rightarrow y}\ _2$	Norme \mathcal{H}_2 du transfert d'un système LTI continu $G_{u \rightarrow y}$
$\ G_{u \rightarrow y}\ _\infty$	Norme \mathcal{H}_∞ du transfert d'un système LTI continu $G_{u \rightarrow y}$
$\ G_{u \rightarrow y}\ _1$	Norme \mathcal{H}_1 du transfert d'un système LTI continu $G_{u \rightarrow y}$

Table des figures

1.1	Représentation des systèmes LPV sous forme LFT	6
2.1	Estimation par intervalle de l'état z_1	77
2.2	Estimation par intervalle de l'état z_2	77
2.3	Évolution de la précision du test du principe d'équivalence sur le paramètre d'Eötvös [56]	80
2.4	Mouvements de rotations autour de la Terre et de l'axe y du satellite Microscope	80
2.5	Simulateur d'ingénierie fonctionnelle de la mission Microscope	81
2.6	Estimation par intervalle de l'angle d'attitude θ_x	92
2.7	Estimation par intervalle de l'angle d'attitude θ_y	93
2.8	Estimation par intervalle de l'angle d'attitude θ_z	93
3.1	Valeurs propres de $A_F(\rho)$ pour différentes trajectoires de ρ - Exemple 1	115
3.2	Estimation par intervalle de l'état x_1 de l'exemple 1 - rouge (pour notre approche filtre) - bleu (observateur [38]) - noir (observateur [65])	116
3.3	Estimation par intervalle de l'état x_2 de l'exemple 1 - rouge (pour notre approche filtre) - bleu (observateur [38]) - noir (observateur [65])	116
3.4	Estimation par intervalle de l'état z_1 de l'exemple 2	118
B.1	Régions LMI : a) α -stabilité , b) Disque, c) Secteur conique	128
B.2	Union des régions LMI α -stabilité, disque et secteur conique	128

Liste des tableaux

2.1	Résultats pour différentes dimensions de l'ordre $n_f \in \{4, 5\}$	75
2.2	Résultats pour différentes dimensions de l'ordre $n_f \in \{7, 8\}$	91

Publications de l'auteur

Conférences internationales

-I. Mohammadi, D. Gucik-Derigny, and D. Henry. Guaranteed state estimation using H_∞ interval approaches for space applications: a case study. In 2022 UKACC 13th International Conference on Control (CONTROL), pages 235–236, 2022

-I. Mohammadi, D. Gucik-Derigny, and D. Henry. Improvement of navigation unit in space applications using H_∞ interval observers: comparison of two approaches. In 2022 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC). IEEE, Oct. 2022

-I. Mohammadi, D. Gucik-Derigny, and D. Henry. An arbitrary order H_∞ interval filter for satellite navigation units. Proceedings of the 10th European Conference for Aerospace Sciences. Switzerland, 2023

-I. Mohammadi, D. Gucik-Derigny, D. Henry, and S. Ygorra. A state-space based interval estimator for lti systems under H_1 and/or H_∞ constraints. In 2023 IEEE 11th International Conference on Systems and Control (ICSC), pages 608–613, 2023

Revues internationales

-I. Mohammadi, D. Gucik-Derigny, and D. Henry. A state-space approach for interval LPV estimators under L_2/L_∞ -gain criterion. Journal of the Franklin Institute, page 107144, 2024

Introduction Générale

Établir un modèle parfait traduisant les dynamiques d'un système est une utopie, voilà pourquoi tous les modèles présentent des erreurs de modélisation endogènes (comme les incertitudes paramétriques) et exogènes (comme les perturbations) [37, 188]. De même, les signaux des capteurs sont pratiquement entachés de bruits de mesure. Connaître l'état exact d'un système est donc un problème ouvert et délicat. Une solution couramment adoptée pour pallier ce problème consiste à utiliser un système dynamique auxiliaire permettant de reconstruire les variables non directement mesurées au moyen de celles disponibles et du modèle dynamique du procédé : c'est le rôle d'un estimateur d'état.

Le problème d'estimation d'état basé sur des modèles linéaires a été largement exploré dans la littérature, en particulier avec l'utilisation de l'observateur de Luenberger [115, 116, 117] dans le contexte déterministe et du filtre de Kalman [101, 102] dans le contexte stochastique. Le problème consiste à estimer les états ou une combinaison linéaire des états d'un système en utilisant les sorties mesurées, tout en minimisant l'influence des perturbations extérieures sur l'erreur d'estimation. En général, la synthèse du filtre est formulée en spécifiant un critère de performance à optimiser. Dans le cas du filtre de Kalman [101, 102], le critère de minimisation retenu est la variance de l'erreur d'estimation. Des extensions du filtre de Kalman ont été proposées ultérieurement pour les systèmes non linéaires [21]. Parmi ces extensions, on peut citer le filtre de Kalman étendu [160], le filtre de Kalman sans parfum [175], le "cubature Kalman filter" [12], ou encore le filtre de Kalman aux différences divisées [134]. Le filtre de Kalman a eu un impact significatif dans de nombreux domaines pratiques, notamment le contrôle et la navigation [75, 162], la poursuite des cibles [14, 94], et la détection des défauts [135]. Cependant, le filtre de Kalman suppose que les bruits qui affectent le système sont des bruits blancs dont on connaît les propriétés statistiques, ce qui s'avère pratiquement rarement le cas, du moins pour le bruit d'état. En effet, pour le bruit de mesure, il est toujours possible de mener des expérimentations sur banc pour tenter de déterminer les propriétés statistiques de ces derniers. Les dernières approches d'estimation visant à palier ce problème sont basées sur les techniques dites "variational Bayesian maximum correntropy cubature Kalman filter" [86, 176]. Ces approches intègrent les avantages de l'inférence variationnelle et du critère de maximum de correntropie, ce qui leur confère un bon degré de robustesse vis-à-vis des bruits non stochastiques. Elles permettent même d'atteindre un certain degré de robustesse vis-à-vis des bruits non blancs tels que les biais. D'autres méthodes de filtrage existent cependant. La première, connue sous le nom de filtrage \mathcal{H}_∞ , a été présentée dans [66]. Par rapport au filtrage de Kalman traditionnel, le filtrage \mathcal{H}_∞ offre l'avantage de ne

pas nécessiter d'hypothèses statistiques sur les signaux exogènes. En présence d'incertitudes paramétriques, ce type de filtres fournit une estimation optimale de l'état au sens "minimisation de l'énergie des entrées exogènes sur l'erreur d'estimation" [37, 133]. La synthèse de ce type de filtres repose sur différentes approches comme les méthodes basées sur des équations polynomiales [66, 82, 83, 84], des interpolations [70], des équations de Riccati [19, 54, 133] ou des inégalités matricielles linéaires (LMIs) [77, 100, 109, 138, 139, 142]. Une seconde alternative est le filtrage qui utilise un critère de nature énergie-amplitude [81, 182]. Comme dans le cas du filtrage \mathcal{H}_∞ , les perturbations sont supposées avoir une énergie limitée. Le filtrage \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_∞ [136, 140] (également appelé filtrage \mathcal{H}_2 généralisé [73, 143]) est différent du filtrage \mathcal{H}_∞ car il permet de garantir que l'erreur de filtrage soit limitée en amplitude (crête) pour toutes perturbations bornées en énergie [185, 191].

Un dernier type de filtrage où les perturbations sont supposées avoir une énergie limitée est le filtrage crête à crête [1, 20, 88, 96, 137, 156, 166] (également appelé filtrage \mathcal{H}_1 , ou \mathcal{L}_1 [127], ou encore induit \mathcal{L}_∞ [174]). L'objectif du filtrage crête à crête est de minimiser la valeur de crête la plus défavorable de l'erreur de filtrage pour toutes les valeurs de crête limitées des perturbations d'entrée.

Une approche alternative aux précédentes est l'approche dite ensembliste ("set-membership approach" en anglais). Cette approche repose sur la connaissance d'un domaine d'appartenance, supposé borné, des erreurs de modèle (incertitudes de modélisation, perturbations, bruits, etc). Contrairement aux approches de type Kalman ou à base de normes qui fournissent une valeur unique à chaque instant de temps sous forme d'une estimée optimale (au sens d'un critère), les observateurs intervalles évaluent à chaque instant un intervalle d'appartenance dont il est garanti qu'appartient le vrai état.

Au cours des deux dernières décennies, deux types de techniques d'estimation d'état ensemblistes ont été proposés.

- Dans la première approche, toutes les trajectoires d'états possibles sont englobées par des ensembles décrits à l'aide d'objets géométriques tels qu'ellipsoïdes [157, 106], intervalles simples ou pavages à base d'intervalles éventuellement accompagnés d'une mise en œuvre de contracteurs [98, 99], polytopes [192], zonotopes [44, 46, 47, 178], ou autres enveloppes convexes ou non convexes [48]. Cette classe d'approches s'appuie bien souvent sur un mécanisme de prédiction/correction présentant de fortes analogies avec le principe du filtre de Kalman [101, 102]. Si l'utilisation répétée d'enveloppes convexes simples telles qu'un intervalle ou un ellipsoïde pouvaient rendre les premières approches ensemblistes de ce type sujettes au phénomène d'enveloppement, source d'un conservatisme parfois important, une meilleure modélisation et le maintien actif d'une traçabilité des dépendances fournissent désormais des solutions génériques d'estimation d'état ensemblistes applicables à une large classe de systèmes dynamiques (linéaires, non linéaires, hybrides). Bien qu'un paramétrage de la réduction de complexité des domaines englobants permette souvent de gérer efficacement le compromis entre précision des enveloppes et coût calculatoire, ce dernier reste néanmoins un facteur limitant pour certaines applications embarquées très contraintes en ressources de calculs disponibles.
- La seconde approche, dite par intervalle, est basée sur la théorie des systèmes monotones. Dans cette théorie, une propriété centrale est la propriété de coopérativité (non-négativité) de la dynamique des erreurs d'observation, également connue sous le nom de propriété Metzler. Cette terminologie provient du fait que la matrice d'évolution de l'équation dynamique des erreurs d'observation est Metzler [163].

L'idée originale de concevoir des observateurs par intervalles a été proposée dans [80], et depuis lors, elle a été étendue à différentes classes de modèles dynamiques [61, 80, 121].

Comme précisé dans [63], un avantage non négligeable des observateurs intervalles par rapport à l'approche par approximation par ensemble géométrique, réside dans la possibilité de déterminer les paramètres des observateurs en tenant compte de contraintes de performance, comme la vitesse de convergence de l'encadrement de l'état ou encore de type "minimisation de la propagation des entrées exogènes sur la taille de l'intervalle de l'erreur d'observation", au sens d'une norme donnée ($\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_\infty, \mathcal{H}_1$ pour les modèles LTI et de gain $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_\infty$ pour les systèmes LPV) [5, 27, 38, 64, 65, 110, 124, 179].

Il est généralement admis que les filtres offrent des degrés de liberté plus importants dans leur conception que les observateurs. Cependant, ces derniers se démarquent par leur capacité supérieure à gérer l'incertitude et les variations dans les modèles. L'élément central de ce manuscrit s'inscrit dans la dynamique d'exploiter le potentiel de ces deux concepts. Plus particulièrement, nos travaux de recherche abordent la problématique de la synthèse de filtres robustes par intervalles pour les systèmes à temps continu, modélisés par une représentation d'état linéaire à temps invariants et pour la classe des systèmes modélisés par une représentation d'état à paramètres variants dans le temps (LTI et LPV, acronyme du terme anglo-saxon "Linear Time Invariant" et "Linear Parameter Varying"). Ainsi, ce mémoire est structuré de la façon suivante :

Le **Chapitre 1** rappelle les fondements mathématiques liées à l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques multivariés incertains et perturbés, en se concentrant particulièrement sur les systèmes LPV avec des incertitudes paramétriques de type polytopique. Il présente également un bref état de l'art sur les différentes techniques de filtrage, avec une discussion sur les normes utilisées pour caractériser l'erreur d'estimation. Le Chapitre se poursuit avec une explication des concepts fondamentaux associés à la théorie des observateurs intervalles, en mettant l'accent sur les notions de monotonie et de coopérativité telles que présentées dans [63, 80]. Un état de l'art sur la conception d'observateurs intervalles pour les systèmes LTI et LPV est alors présenté. Le but est de passer en revue les avancées récentes de la littérature en mettant en lumière les approches visant à assouplir les conditions requises pour l'existence des observateurs intervalles. Ces approches comprennent notamment les méthodes de changement de coordonnées et l'introduction de degrés de liberté. Nous examinons également les performances évaluées sur l'erreur d'estimation en termes de normes $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ et \mathcal{L}_∞ induites.

Le **Chapitre 2** présente la première contribution de nos travaux de thèse. Nous y proposons une nouvelle approche d'estimation par intervalle pour la classe des systèmes LTI. Plus particulièrement, les développements méthodologiques établis visent à proposer une solution au problème de synthèse des filtres par intervalles sous contraintes d'existence et de performance $\mathcal{H}_1/\mathcal{H}_\infty$. Ce critère vise à atténuer l'influence des bruits et des perturbations sur la taille de l'intervalle, dans un contexte de performance amplitude/énergie. La méthodologie repose sur une programmation semi-définie (SDP), permettant la minimisation d'un critère mixte de performance $\mathcal{H}_1/\mathcal{H}_\infty$. Un des éléments fondamentaux de la méthode proposée est qu'elle ne nécessite aucune transformation d'état, telle qu'une transformation par changement de variables ou une transformation en un système positif,

pour assurer la coopérativité des erreurs d'observation. La synthèse du filtre intervalle implique de résoudre un problème d'optimisation sous contraintes d'inégalités matricielles trilinéaires (TMIs), réduit ensuite à un problème d'inégalités matricielles linéaires et bilinéaires (LMIs et BMIs).

Nous appliquons ensuite cette méthodologie pour l'estimation d'attitude du satellite Microscope. Nous validons notre approche à l'aide d'un simulateur haute fidélité développé sous Matlab-Simulink, prenant en compte les phénomènes dynamiques non linéaires liés au satellite et aux conditions environnementales spatiales. On montre alors comment cet estimateur intervalle peut s'intégrer dans la boucle de contrôle du satellite, ce qui conduit à une nouvelle génération de module de navigation pour les systèmes spatiaux.

Le **Chapitre 3** présente la deuxième contribution de nos travaux de thèse. Cette dernière consiste en une nouvelle méthodologie pour la synthèse des filtres intervalles pour les systèmes LPV. L'originalité de l'approche proposée réside dans la synthèse des paramètres du filtre, qui permet de garantir simultanément les conditions d'existence du filtre (stabilité, coopérativité) ainsi qu'un niveau de performance. Ce niveau de performance est défini au sens d'un critère énergétique de type gain \mathcal{L}_2 et/ou au sens d'un critère d'amplitude de type gain \mathcal{L}_∞ . On montre que le problème de synthèse se formule comme un problème d'optimisation non-linéaire sous contrainte LMI et BMI, qui peut être résolu par des méthodes d'optimisation non-linéaires SDP. Deux exemples académiques sont alors présentés. Les résultats obtenus démontrent le potentiel de l'approche proposée.

Le manuscrit se termine alors par une conclusion générale dans laquelle nous rappelons les contributions majeures de nos travaux et énumérons des perspectives de recherche.

Théorie de l'estimation des systèmes LPV

Ce chapitre a pour but de présenter les concepts fondamentaux qui seront pertinents tout au long de ce mémoire, ainsi que préciser le positionnement des contributions proposées par rapport à celles de la littérature dans le domaine du filtrage et des observateurs par intervalles. La première partie débute en rappelant les notions mathématiques essentielles concernant la représentation d'état et l'analyse de stabilité des systèmes dynamiques. Ensuite, nous développons un état de l'art concis des différentes techniques de filtrage et des normes utilisées pour caractériser l'erreur d'estimation. Dans une seconde partie, nous balayons les travaux existants sur la théorie des observateurs intervalles, appliquée aux classes des systèmes LTI et LPV incertains. Cette analyse des méthodes existantes dans la littérature nous permet de mettre en perspective les nouveaux besoins théoriques de synthèse de filtres par intervalles pour les systèmes LTI et LPV incertains, ce qui constituera le coeur de de nos travaux de recherche.

Nous tenons à préciser que les classes des systèmes à retard et à commutations ne sont pas l'objet de nos travaux de thèse. Le lecteur intéressé peut se référer à une liste non exhaustive des travaux suivants : [28, 59, 146, 67].

1.1 Modélisation LPV des systèmes dynamiques

La représentation d'état a pour objectif de donner une représentation mathématique de comportement dynamique pour un système donné. Elle repose sur des principes de conservation d'énergie, permettant de décrire le fonctionnement dynamique du système associé. Dans ce cadre, l'analyse de la structure du modèle résultant permet d'en déduire diverses propriétés, telles que la stabilité, parmi d'autres. Plusieurs classes de modèles linéaires peuvent être considérées à temps invariants (LTI), à temps variants (LTV) ou à paramètres variants (LPV) dans le temps. Par la suite, nous focaliserons notre étude sur la classe des systèmes LPV.

La notion de modèle linéaire à paramètres variants dans le temps (LPV) a été introduite pour la première fois dans [158]. Un modèle LPV [57, 111, 154, 183] est un système linéaire dont les matrices de la représentation d'état varient dans le temps en fonction d'un vecteur de paramètres $\theta(t)$. Les modèles LPV constituent une classe de modèles

mathématiques particulièrement intéressante pour la modélisation de certains systèmes non linéaires pouvant être ramenée à cette représentation équivalente. La représentation d'état d'un tel modèle est donnée par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) \\ y(t) = C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))u(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^{n_u}, y \in \mathbb{R}^{n_y}$ représentent respectivement les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie du système. $\theta(t) = [\theta_1(t) \ \theta_2(t) \ \cdots \ \theta_l(t)]^T \in \mathbb{R}^l$ désigne le vecteur des paramètres susceptible d'évoluer au cours du temps dans un compact Θ dont les bornes sont connues *a priori*. Les matrices sont définies par $A : \theta \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, B : \theta \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n_u}, C : \theta \rightarrow \mathbb{R}^{n_y \times n}, D : \theta \rightarrow \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$.

Dans la littérature, trois représentations de modèles LPV peuvent être distinguées :

- La représentation affine [16, 71, 167] est caractérisée par une représentation d'état où les matrices $A(\theta(t)), B(\theta(t)), C(\theta(t))$ et $D(\theta(t))$ admettent la structure

$$\begin{bmatrix} A(\theta(t)) & B(\theta(t)) \\ C(\theta(t)) & D(\theta(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^l \theta_i(t) \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

où $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, B_i \in \mathbb{R}^{n \times n_u}, C_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n}, D_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}, i \in \{0, \dots, l\}$ et pour tout $\theta \in \Theta$.

- La représentation polytopique [11, 23, 43] est caractérisée par une représentation d'état où les matrices $A(\theta(t)), B(\theta(t)), C(\theta(t))$ et $D(\theta(t))$ admettent la structure

$$\begin{bmatrix} A(\theta(t)) & B(\theta(t)) \\ C(\theta(t)) & D(\theta(t)) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{2^l} \mu_i(\theta(t)) \begin{bmatrix} \hat{A}_i & \hat{B}_i \\ \hat{C}_i & \hat{D}_i \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

où $\mu_i(\theta(t)) \geq 0, \sum_{i=1}^{2^l} \mu_i(\theta(t)) = 1$ et les matrices $\hat{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, \hat{B}_i \in \mathbb{R}^{n \times n_u}, \hat{C}_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n}, \hat{D}_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}, i \in \{1, \dots, 2^l\}$ représentent les sommets du polytope.

- La représentation LFT [42, 89, 92], consiste à séparer les éléments incertains et à les grouper dans un opérateur $\Delta(t)$, bouclé autour d'un modèle définissant la dynamique nominale, linéaire et invariante, $G(s)$. Le bloc $\Delta(t)$ définit alors une perturbation qui agit sur $G(s)$, comme illustré par la Figure 1.1 Dans le cas des systèmes LPV, l'opérateur $\Delta(t)$, diagonal et non stationnaire, contient les paramètres variants du système.

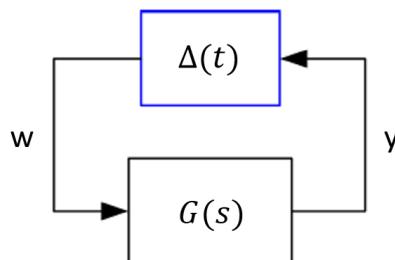


FIGURE 1.1 – Représentation des systèmes LPV sous forme LFT

Seules les deux premières représentations seront considérées dans le cadre de cette thèse.

Les deux types de modèles, bien qu'étant très similaires, se distinguent principalement par leur dépendance paramétrique. Dans le premier type de modèle, la représentation d'état dépend directement du vecteur de paramètres $\theta(t)$. En revanche, dans le deuxième type de modèle, les coordonnées barycentriques de $\theta(t)$ par rapport aux sommets $\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i, \hat{D}_i$ sont celles qui situent le système dans le polytope, à un instant donné. Ainsi, la notion de sommet joue donc un rôle prépondérant, peu importe la forme du domaine Θ pourvu qu'il soit un polytope. En ce sens, le modèle polytopique généralise le modèle affine. La catégorie des systèmes LPV revêt une importance particulière car elle élargit, non seulement la portée des modèles LTI, mais encore, elle permet d'aborder la classe des systèmes non linéaires de façon élégante avec des outils du linéaire. En effet :

- Si la trajectoire du vecteur de paramètres $\theta(t)$ est parfaitement connue pour chaque instant t , alors la représentation d'état d'un système peut être réécrite sous la forme d'une représentation d'état d'un système LPV (ou quasi-LPV) [29].
- Ensuite, lorsque le vecteur de paramètres $\theta(t)$ est fixé à une valeur particulière $\theta(t) = \theta_0$, le modèle LPV se réduit à une représentation d'état d'un système LTI :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.4)$$

1.2 Notions de stabilité au sens de Lyapunov pour les systèmes LPV

Dans cette section, nous établissons les critères de stabilité fondamentaux pour les classes de systèmes LPV, traitées dans ce mémoire. Nous nous concentrons spécifiquement sur la stabilité asymptotique, qui constitue un aspect crucial de l'analyse et de la conception des systèmes dynamiques.

1.2.1 Stabilité quadratique pour un système LPV

Soit à présent le système linéaire à paramètre variant (LPV) continu suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.5)$$

où $x \in \mathbb{R}^n, \theta(t) \in \Theta \subset \mathbb{R}^l$ est le vecteur de paramètres et la fonction matricielle $A : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$.

Définition 1.1. Le système (1.5) est dit quadratiquement stable s'il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, où $P = P^T \succ 0$, vérifiant pour toutes les trajectoires possibles du vecteur de paramètres $\theta(t) \in \Theta$:

$$A(\theta(t))^T P + PA(\theta(t)) \prec 0. \quad (1.6)$$

En admettant que la matrice $A(\theta(t))$ soit polytopique, alors la stabilité quadratique du système (1.5) est réduite à un nombre fini de contraintes.

Lemme 1.1. [72] *Le système (1.5) avec $A(\theta(t)) = \sum_{i=1}^{2^l} \mu_i(\theta(t)) \tilde{A}_i$ est dit quadratiquement stable s'il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ où $P = P^T \succ 0$ telle que :*

$$\tilde{A}_i^T P + P \tilde{A}_i \prec 0, \quad i \in \{1, \dots, 2^l\}. \quad (1.7)$$

Notons que lorsque la matrice $A(\theta(t))$ est affine en $\theta(t)$ et lorsque ses bornes de l'ensemble d'appartenance sont connues, alors il est toujours possible de transformer la matrice $A(\theta(t))$ et d'appliquer le lemme 1.1 pour garantir la propriété de stabilité. De plus, on pourra vérifier que les définitions et le lemme précédents sont tout à fait valides aussi bien dans le cas des paramètres invariants dans le temps que variants dans le temps, d'où le caractère conservateur bien connu de la propriété de stabilité quadratique.

1.2.2 Stabilité quadratique robuste

Nous définissons la notion de stabilité quadratique robuste pour un système LPV comme une généralisation de la notion de stabilité quadratique classique. Cette nouvelle notion utilise une fonction de Lyapunov qui dépend cette fois-ci des paramètres $\theta(t)$, permettant ainsi de prendre en compte les informations sur la vitesse de variation du vecteur de paramètres et de différencier les paramètres variants et invariants dans le temps. Les conditions d'existence d'une telle fonction sont moins restrictives que celles requises pour une stabilité quadratique utilisant une fonction de Lyapunov unique qui assure la stabilité sur tout le domaine de variation des paramètres [17, 26].

Définition 1.2. (Stabilité robuste). Le système (1.5) est dit robustement stable s'il existe une matrice $P(\theta(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ où $P(\theta(t)) = P(\theta(t))^T \succ 0$ telle que, $\forall \theta(t) \in \Theta$, $V(x(t), \theta(t)) = x(t)^T P(\theta(t)) x(t)$ est une fonction de Lyapunov pour le système (1.5).

Comme pour la stabilité quadratique, on déduit la définition suivante.

Définition 1.3. Le système (1.5) est dit robustement stable s'il existe une matrice $P(\theta(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ où $P(\theta(t)) = P(\theta(t))^T \succ 0$ vérifiant pour toutes les trajectoires possibles du vecteur de paramètres $\theta(t) \in \Theta$:

$$A(\theta(t))^T P(\theta(t)) + P(\theta(t)) A(\theta(t)) + \dot{P}(\theta(t)) \prec 0. \quad (1.8)$$

En pratique, la construction de la fonction matricielle $P(\theta(t))$ et la vérification que $V(x, \theta)$ est définie négative pour un système LPV peuvent être très difficiles. Cependant, il est possible de surmonter cette difficulté en choisissant une méthodologie adaptée en fonction de la classe de modèle considérée. Ainsi, il est crucial de choisir une méthodologie appropriée en fonction de la structure spécifique du modèle et d'adopter une approche adaptée pour résoudre le problème de stabilité quadratique robuste. Une telle approche peut être la notion de stabilité quadratique affine, initialement proposée dans [72], qui offre une méthode pertinente pour obtenir $P(\theta(t))$ et garantir la propriété de stabilité quadratique robuste. Cette notion est définie conformément à la définition suivante.

Définition 1.4. (Stabilité Quadratique Affine [72]). Le système (1.5) est affine quadratiquement stable (AQS) s'il existe $K + 1$ matrices symétriques $P_0, P_1, \dots, P_K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que les inégalités

$$P(\theta(t)) = P_0 + \theta_1(t) P_1 + \theta_2(t) P_2 + \dots + \theta_l(t) P_l \succ 0, \quad (1.9)$$

$$A(\theta(t))^T P(\theta(t)) + P(\theta(t))A(\theta(t)) + P(\dot{\theta}(t)) - P_0 \prec 0, \quad (1.10)$$

sont satisfaites pour toutes les trajectoires du vecteur des paramètres $\theta(t) \in \Theta$.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons à la stabilité quadratique affine des systèmes LPV, une généralisation de la stabilité quadratique classique. Cette forme de stabilité implique une variation temporelle de la matrice de Lyapunov $P(\theta(t))$ en fonction des paramètres $\theta(t)$ du système, contrairement à la stabilité quadratique classique où $P(\theta(t))$ est constante (généralement notée P_0). Les contraintes (1.9)-(1.10) énoncées dans la Définition 1.4 peuvent être donc simplifiées en un nombre fini de LMIs lorsque la matrice $A(\theta(t))$ présente une dépendance affine par rapport à $\theta(t)$. Pour ce faire, nous supposons que les paramètres $\theta(t)$ et $\dot{\theta}(t)$ du système (1.1) satisfont :

(i) $\theta_i(t), i \in \{1, \dots, l\}$ appartient à un ensemble borné et connu :

$$\theta_i \in [\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i]. \quad (1.11)$$

(ii) $\dot{\theta}_i(t), i \in \{1, \dots, l\}$ appartient à un ensemble borné et connu :

$$\dot{\theta}_i \in [\underline{\dot{\theta}}_i, \bar{\dot{\theta}}_i]. \quad (1.12)$$

(iii) Les vecteurs θ et $\dot{\theta}$ évoluent dans des hyper-rectangles délimités par l'ensemble des 2^l sommets

$$\Gamma_\alpha = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l) \mid \alpha_i \in \{\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i\}\}, \quad (1.13)$$

$$\Gamma_\beta = \{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l) \mid \beta_i \in \{\underline{\dot{\theta}}_i, \bar{\dot{\theta}}_i\}\}, \quad (1.14)$$

où $\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i, \underline{\dot{\theta}}_i, \bar{\dot{\theta}}_i$ représentent les bornes inférieure et supérieure de $\theta_i, \dot{\theta}_i, i \in \{1, \dots, l\}$.

Ainsi, en utilisant la propriété de multi-convexité, le problème initial peut être reformulé en un problème LMI numériquement résoluble. Nous résumons brièvement cette théorie pour fournir un contexte à nos résultats ultérieurs.

Définition 1.5. (Multi-convexité, théorème 3.1 dans [72]). Soit une fonction quadratique scalaire f de $\theta \in \mathbb{R}^l$ telle que

$$f(\theta_1, \dots, \theta_l) = a_0 + \sum_{i=1}^l \theta_i a_i + \sum_{i=1, i < j}^l \theta_i \theta_j b_{ij} + \sum_{i=1}^l \theta_i^2 c_i, \quad (1.15)$$

et supposons que f soit multiconvexe, c'est à dire :

$$\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial \theta_i^2} = 2c_i \geq 0, \quad i \in \{1, \dots, l\}. \quad (1.16)$$

Alors f est négative sur l'hyper-rectangle (1.13)-(1.14) si et seulement si la fonction $f(\cdot)$ est négative sur les sommets de l'hyper-rectangle (1.11). Cette contrainte consiste à vérifier que $f(\alpha) < 0$ pour tout $\alpha \in \Gamma_\alpha$.

L'application de cette propriété de multiconvexité, en accord avec la théorie de Lyapunov, permet de réécrire les inégalités (1.9)-(1.10) comme un problème d'optimisation SDP (acronyme anglo-saxon pour "SemiDefinite Programming"), ce qui conduit au théorème suivant.

Théorème 1.1. ([72]). *Soit le système décrit par*

$$\dot{x}(t) = \left(A_0 + \sum_{i=1}^l \theta_i(t) A_i \right) x(t), \quad (1.17)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ désigne le vecteur d'état, $\theta \in \mathbb{R}^l$ est le vecteur de paramètres et $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i \in \{0, 1, \dots, l\}$.

En admettant que les trajectoires du vecteur de paramètres θ et de sa dérivée $\dot{\theta}$ évoluent dans des hyper-rectangles (1.11) et (1.12) dont l'ensemble des sommets est défini par (1.13) et (1.14), alors le système (1.17) est affine quadratiquement stable s'il existe des matrices symétriques $P_0, \dots, P_l \in \mathbb{R}^{n \times n}$, telles que, pour $i = \{1, \dots, l\}$ et $\forall (\alpha, \beta) \in \Gamma_\alpha \times \Gamma_\beta$:

$$P(\alpha) = P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_l P_l \succ 0, \quad (1.18)$$

$$A(\alpha)^T P(\alpha) + P(\alpha) A(\alpha) + P(\beta) - P_0 \prec 0, \quad (1.19)$$

$$A_i^T P_i + P_i A_i \succeq 0. \quad (1.20)$$

1.3 Performance

Nous allons maintenant aborder la notion de performance pour les systèmes LPV. Cette notion est souvent associée à la minimisation de l'influence de l'entrée exogène $u(t)$ sur la sortie $y(t)$ du système, en utilisant un critère mathématique d'optimalité recherché au sens d'une norme donnée. Dans le cas des filtres, $u(t)$ est considéré comme un bruit ou une perturbation tandis que $y(t)$ représente l'erreur d'estimation. La performance est généralement définie en utilisant des normes induites par les vecteurs entrée-sortie aux conditions initiales nulles. Ces normes induites sont généralement notées \mathcal{L}_p et \mathcal{L}_q où p et q appartiennent à l'ensemble $\{1, 2, \dots, \infty\}$, c'est à dire :

$$\sup_{\theta \in \Theta} \sup_{\substack{u \in \mathcal{L}_q^n \\ \|u\|_{\mathcal{L}_q} \neq 0}} \frac{\|y\|_{\mathcal{L}_p}}{\|u\|_{\mathcal{L}_q}}. \quad (1.21)$$

Dans notre étude, nous allons utiliser les critères de performance basés sur les normes \mathcal{L}_2 (où $p = q = 2$) et \mathcal{L}_∞ (où $p = q = \infty$) pour les systèmes LPV. Ces critères sont couramment appelés les gains \mathcal{L}_2 et \mathcal{L}_∞ dans la littérature. Pour les systèmes LTI, ces critères sont équivalents aux normes \mathcal{H}_∞ et \mathcal{H}_1 , respectivement. Le gain \mathcal{L}_2 est un critère énergétique qui mesure la quantité totale d'énergie dans le système, tandis que le gain \mathcal{L}_∞ est un critère d'amplitude qui caractérise la plus grande amplitude du signal en entrée par rapport à celle obtenue en sortie. Le lecteur pourra se référer à l'Annexe A pour les définitions mathématiques de ces normes vectorielles et matricielles.

La synthèse du filtre, qui est au coeur de cette thèse, requiert avant tout le choix d'un critère mathématique à minimiser associé au sens d'une norme donnée, afin d'évaluer la performance du filtre. Les normes essentielles qui interviennent en estimation d'état sont les normes \mathcal{H}_∞ et \mathcal{H}_1 , présentées ci-après.

1.3.1 De la norme \mathcal{H}_∞ au gain \mathcal{L}_2

1.3.1.1 Norme \mathcal{H}_∞

Soit un système LTI, décrit par la représentation d'état suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.22)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ représentent respectivement les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie du système. Les matrices sont définies telles que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$.

Définition 1.6. (Norme \mathcal{H}_∞). La norme \mathcal{H}_∞ du système LTI (1.22) est la plus petite valeur de $\gamma_{\mathcal{H}_\infty} > 0$ vérifiant l'inégalité

$$\int_0^\infty y(t)^T y(t) dt \leq \gamma_{\mathcal{H}_\infty}^2 \int_0^\infty u(t)^T u(t) dt. \quad (1.23)$$

Lorsque la norme \mathcal{H}_∞ d'un système linéaire est finie et bornée par $\gamma_{\mathcal{H}_\infty}$, ceci signifie que l'énergie de la sortie $y(t)$ reste inférieure dans un rapport $\gamma_{\mathcal{H}_\infty}$ à celle de l'entrée $u(t)$.

Dans le domaine fréquentiel, la norme \mathcal{H}_∞ d'une fonction de transfert supposée asymptotiquement stable, peut être interprétée comme étant :

Définition 1.7. (Norme \mathcal{H}_∞). La norme \mathcal{H}_∞ du transfert $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ pour le système LTI (1.22) est définie par

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}^+} \bar{\sigma}(G(j\omega)), \quad (1.24)$$

où $\bar{\sigma}$ désigne la valeur singulière maximale d'une matrice complexe.

Lorsque l'on traite des systèmes LPV, les notions de fonction de transfert, de norme \mathcal{H}_∞ et de pôles ne sont plus adaptées. Des extensions sont nécessaires pour analyser la performance de ces systèmes.

1.3.1.2 Gain \mathcal{L}_2

Afin d'évaluer la performance d'un système LPV, on utilise la norme induite \mathcal{L}_2 , appelé communément gain \mathcal{L}_2 , qui est une extension de la norme \mathcal{H}_∞ . Ces deux grandeurs mesurent le rapport entre l'énergie du signal d'entrée et celle du signal de sortie, en considérant les trajectoires paramétriques admissibles dans un contexte "pire-cas".

Contrairement à la norme \mathcal{H}_∞ , il n'y a pas d'interprétation fréquentielle du gain \mathcal{L}_2 pour les systèmes LPV. Pour calculer le gain \mathcal{L}_2 , nous utilisons la définition et le lemme suivant.

Définition 1.8. (Gain \mathcal{L}_2 [15]). Le gain \mathcal{L}_2 du système LPV (1.1) est la plus petite valeur de $\gamma_{\mathcal{L}_2} > 0$ vérifiant l'inégalité

$$\forall u \in \mathcal{L}_2^m, \int_0^T y(t)^T y(t) dt \leq \gamma_{\mathcal{L}_2}^2 \int_0^T u(t)^T u(t) dt, \quad (1.25)$$

pour toutes les trajectoires possibles du vecteur de paramètres $\theta(t) \in \Theta$.

Lemme 1.2. ([183]). *Etant donné un système LPV (1.1) robustement stable, il existe un scalaire réel fini $\gamma_{\mathcal{L}_2} > 0$ tel que, pour des conditions initiales nulles, c'est à dire $x(0) = 0$:*

$$\sup_{\theta \in \Theta} \sup_{\substack{u \in \mathcal{L}_2^m \\ \|u\|_{\mathcal{L}_2} \neq 0}} \frac{\|y\|_{\mathcal{L}_2}}{\|u\|_{\mathcal{L}_2}} \leq 0 < \infty. \quad (1.26)$$

Comme mentionné dans [63], pour approcher le plus finement possible la valeur du gain \mathcal{L}_2 , l'idée consiste tout simplement à minimiser $\gamma_{\mathcal{L}_2}$. Pour atteindre cet objectif, une extension du lemme réel borné (BRL, acronyme anglo-saxon pour "Bounded Real Lemma") [24] adaptée aux systèmes LPV doit être appliquée. Cette approche est également connue sous le nom de performance \mathcal{H}_∞ quadratique, et elle est décrite plus en détails dans [7, 8].

En se basant sur une unique fonction de Lyapunov quadratique $V(x) = x^T P x$, la définition de la performance \mathcal{H}_∞ quadratique fournit une condition suffisante pour assurer la stabilité asymptotique du système LPV donné par (1.1). Elle permet également de vérifier si le gain \mathcal{L}_2 de ce système est borné par $\gamma_{\mathcal{L}_2}$, c'est-à-dire :

$$\|y\|_{\mathcal{L}_2} < \gamma_{\mathcal{L}_2} \|u\|_{\mathcal{L}_2}. \quad (1.27)$$

De manière similaire à la stabilité quadratique, cette définition peut être étendue au cas des fonctions de Lyapunov quadratiques dépendantes des paramètres. En utilisant des fonctions de Lyapunov affines, on peut introduire la notion de performance \mathcal{H}_∞ quadratique affine comme une généralisation de la performance en \mathcal{H}_∞ quadratique. Cette forme de généralisation a été présentée dans [72], et est rappelée ici.

Définition 1.9. (Performance \mathcal{H}_∞ quadratique affine ou AQP, acronyme anglo-saxon pour "Affine Quadratic Performance"). Le système LPV (1.1) est asymptotiquement stable et possède une performance \mathcal{H}_∞ quadratique affine $\gamma_{\mathcal{L}_2}$ si et seulement si, il existe $l + 1$ matrices symétriques $P_0, \dots, P_l \in \mathbb{R}^{n \times n}$, telles que pour toutes les trajectoires possibles du vecteur de paramètre $\theta(t) \in \Theta$:

$$P(\theta(t)) = P_0 + \theta_1(t)P_1 + \theta_2(t)P_2 + \dots + \theta_l(t)P_l \succ 0, \quad (1.28)$$

$$\begin{bmatrix} P(\theta(t))A(\theta(t)) + A(\theta(t))^T P(\theta(t)) + P(\dot{\theta}(t)) - P_0 & P(\theta(t))B(\theta(t)) & C(\theta(t))^T \\ B(\theta(t))^T P(\theta(t)) & -\gamma_{\mathcal{L}_2} I & D(\theta(t))^T \\ C(\theta(t)) & D(\theta(t)) & -\gamma_{\mathcal{L}_2} I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (1.29)$$

Il convient de noter que les contraintes (1.28)-(1.29) peuvent être consolidées en un nombre fini d'inégalités matricielles linéaires (LMIs), selon une approche similaire à celle présentée dans la Définition 1.4, exploitant la propriété de multiconvexité sous les hypothèses (1.11)-(1.14). Cette réduction est réalisée conformément au théorème 6.2 énoncé dans les travaux de [72].

Il convient de souligner que pour les systèmes LTI, le lemme réel borné, présenté dans [24], fournit une condition nécessaire et suffisante pour garantir que le niveau de performance $\gamma_{\mathcal{H}_\infty}$ soit satisfait. Cependant, l'extension de ce lemme aux systèmes LPV n'est qu'une condition suffisante, ce qui peut entraîner un certain conservatisme.

1.3.2 De la norme \mathcal{H}_1 au gain \mathcal{L}_∞

1.3.2.1 Norme \mathcal{H}_1

La norme \mathcal{H}_1 permet de caractériser le rapport entre l'amplitude maximale du signal d'entrée $u(t)$ et l'amplitude maximale du signal de sortie $y(t)$, sur l'ensemble des trajectoires possibles. Pour un système LTI (1.22), la norme \mathcal{H}_1 est définie telle que :

Définition 1.10. (Norme \mathcal{H}_1 [155, 173, 181]). La norme \mathcal{H}_1 du transfert $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ pour le système LTI (1.22) est définie par :

$$\|G\|_1 := \sup_{\substack{u \in \mathcal{L}_\infty^m \\ \|u\|_{\mathcal{L}_\infty} \neq 0}} \frac{\|y\|_{\mathcal{L}_\infty}}{\|u\|_{\mathcal{L}_\infty}}. \quad (1.30)$$

Tout comme pour le gain \mathcal{L}_2 , il est nécessaire de faire des extensions pour analyser la performance crête-à-crête des systèmes LPV. C'est ainsi que le gain \mathcal{L}_∞ a été introduit pour cette analyse.

1.3.2.2 Gain \mathcal{L}_∞

Le gain \mathcal{L}_∞ caractérise le pire ratio entre l'amplitude du signal d'entrée $u(t)$ et l'amplitude du signal de sortie $y(t)$. Pour un système LPV (1.1), le gain \mathcal{L}_∞ est défini tel que :

$$\sup_{\theta \in \Theta} \sup_{\substack{u \in \mathcal{L}_\infty^m \\ \|u\|_{\mathcal{L}_\infty} \neq 0}} \frac{\|y\|_{\mathcal{L}_\infty}}{\|u\|_{\mathcal{L}_\infty}}. \quad (1.31)$$

La définition précédente ne permet pas le calcul du gain \mathcal{L}_∞ . Cependant, nous pouvons nous référer au lemme suivant, lequel offre une condition suffisante pour établir une borne supérieure [111, 155].

Lemme 1.3. (*Performance gain \mathcal{L}_∞*). Soit le système LPV (1.1). S'il existe trois scalaires $\lambda > 0, \mu > 0, \gamma_{\mathcal{L}_\infty} > 0$, et une matrice $P(\theta(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ où $P(\theta(t)) = P(\theta(t))^T \succ 0$ tels que pour toutes les trajectoires possibles du vecteur de paramètres $\theta(t) \in \Theta$:

$$\begin{bmatrix} P(\theta(t))A(\theta(t)) + A(\theta(t))^T P(\theta(t)) + \dot{P}(\theta(t)) + \lambda P(\theta(t)) & P(\theta(t))B(\theta(t)) \\ B(\theta(t))^T P(\theta(t)) & -\mu I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (1.32)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda P(\theta(t)) & 0 & C(\theta(t))^T \\ 0 & (\gamma_{\mathcal{L}_\infty} - \mu)I & D(\theta(t))^T \\ C(\theta(t)) & D(\theta(t)) & \gamma_{\mathcal{L}_\infty} I \end{bmatrix} \succ 0, \quad (1.33)$$

alors le système LPV (1.1) est asymptotiquement stable et son gain \mathcal{L}_∞ est inférieur à $\gamma_{\mathcal{L}_\infty}$.

Nous allons exposer la démonstration de ce lemme telle qu'elle a été proposée dans [155]. Cette démonstration, moins courante que celle du gain \mathcal{L}_2 , jouera un rôle essentiel dans les contributions proposées dans ce manuscrit. En effet, le gain \mathcal{L}_∞ sera utilisé pour évaluer la largeur des enveloppes estimées obtenues dans l'approche par filtres intervalles.

Démonstration. Soit la fonction de Lyapunov $V(\theta(t), x(t)) = x(t)^T P(\theta(t))x(t)$. La contrainte (1.32) implique alors :

$$\dot{V}(\theta(t), x(t)) + \lambda V(\theta(t), x(t)) - \mu u(t)^T u(t) < 0. \quad (1.34)$$

En intégrant le résultat, on obtient :

$$V(\theta(t), x(t)) < V(\theta(0), x(0))e^{-\lambda t} + \frac{\mu}{\lambda} \|u\|_{\mathcal{L}_\infty}^2. \quad (1.35)$$

En notant que la contrainte (1.33) est équivalente à l'inégalité $-\frac{1}{\gamma_{\mathcal{L}_\infty}} y(t)^T y(t) + \lambda V(\theta(t), x(t)) + (\gamma_{\mathcal{L}_\infty} - \mu)u(t)^T u(t) > 0$, il est déduit que :

$$y(t)^T y(t) < \gamma_{\mathcal{L}_\infty} \left(\lambda V(\theta(t), x(t)) + (\gamma_{\mathcal{L}_\infty} - \mu)u(t)^T u(t) \right). \quad (1.36)$$

En injectant (1.35) dans (1.36), il en résulte que, pour des conditions initiales nulles (c'est à dire $x(0) = 0$) :

$$y(t)^T y(t) < \gamma_{\mathcal{L}_\infty}^2 \|u\|_{\mathcal{L}_\infty}^2. \quad (1.37)$$

En prenant en compte que la contrainte de stabilité est incluse dans la contrainte (1.32), on établit le résultat du lemme précédent. ■

1.4 Synthèse de filtre

1.4.1 Filtrage \mathcal{H}_∞ : cas des modèles LTI et LPV

Le premier schéma de filtrage non gaussien est le filtrage \mathcal{H}_∞ . Ce filtrage suppose que les entrées de bruit sont des signaux à énergie finie plutôt que des bruits blancs gaussiens pour le cas du filtrage \mathcal{H}_2 . Les méthodes basées sur les LMIs ont été introduites pour aborder ce problème dès 1997, notamment dans les travaux [81, 142]. Par la suite, les contributions de [76, 77] ont exploré les problèmes de filtrage \mathcal{H}_∞ robuste avec des incertitudes de forme polytopique, toujours en utilisant la technique LMI. Quasiment simultanément, les auteurs de [139] ont employé l'approche LMI pour résoudre le problème de filtrage \mathcal{H}_∞ en assurant une assignation de pôles. Pour les systèmes LTI nominaux, les résultats présentés dans cet état de l'art sont classiques et standard, tirés de [74].

1.4.1.1 Filtrage \mathcal{H}_∞ nominal

Nous considérons ainsi un système LTI stable décrit par le modèle d'espace d'état suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) \\ y(t) = Cx(t) + Dw(t) \\ z(t) = Lx(t) + Ew(t) \end{cases} \quad (1.38)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est la sortie mesurée, $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ est le signal à estimer, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ est une perturbation à énergie bornée.

Le problème du filtrage \mathcal{H}_∞ nominal consiste à déterminer un filtre admettant la réalisation d'espace d'état suivante

$$\begin{cases} \dot{x}_f(t) = A_F x_f(t) + B_F y(t) \\ z_f(t) = C_F x_f(t) + D_F y(t) \end{cases}, \quad x_f(0) = \mathbf{0} \quad (1.39)$$

avec $A_F \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$, $B_F \in \mathbb{R}^{n_f \times n_y}$, $C_F \in \mathbb{R}^{n_z \times n_f}$, $D_F \in \mathbb{R}^{n_z \times n_y}$, et qui permet de fournir une estimation $z_f(t)$ de $z(t)$ avec une performance garantie au sens de la norme \mathcal{H}_∞ (voir Définition 1.7).

Considérons le signal d'erreur de filtrage $e(t) = z(t) - z_f(t)$ et le vecteur d'état augmenté $\xi = [x(t)^T \quad x_f(t)^T]^T$. En connectant le filtre (1.39) au système (1.38), le système d'erreur de filtrage est donné par le modèle d'espace d'état augmenté suivant

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \check{A}\xi(t) + \check{B}w(t) \\ e(t) = \check{C}\xi(t) + \check{D}w(t) \end{cases} \quad (1.40)$$

où

$$\check{A} = \begin{bmatrix} A & A_F \\ B_F C & 0 \end{bmatrix}, \quad \check{B} = \begin{bmatrix} B \\ B_F D \end{bmatrix}, \quad (1.41)$$

$$\check{C} = [L - D_F C \quad -C_F], \quad \check{D} = E - D_F D. \quad (1.42)$$

Le théorème suivant donne la solution au problème de synthèse du filtre sous contrainte de performance \mathcal{H}_∞ .

Théorème 1.2. (*Filtre \mathcal{H}_∞ nominal [74]*). *Considérons le système stable (1.38). Etant donné un scalaire $\gamma_{\mathcal{H}_\infty} > 0$, il existe un filtre (1.39) tel que le système d'erreur de filtrage (1.40) soit asymptotiquement stable et que la fonction de transfert $G(s) = \check{C}(sI - \check{A})^{-1}\check{B} + \check{D}$ satisfasse $\|G\|_\infty < \gamma_{\mathcal{H}_\infty}$, si et seulement les inégalités suivantes*

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_1 & \tilde{P}_2 \\ \tilde{P}_2 & \tilde{P}_2 \end{bmatrix} \succ 0, \quad (1.43)$$

$$\begin{bmatrix} X_1 + X_1^T & \tilde{A}_F + X_2^T & Z_1 & L^T - C^T \tilde{D}_F^T \\ * & \tilde{A}_F + \tilde{A}_F^T & Z_2 & -\tilde{C}_F^T \\ * & * & -\gamma_{\mathcal{H}_\infty}^2 I & E^T - D^T \tilde{D}_F^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (1.44)$$

sont faisables avec les variables matricielles réelles $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{A}_F, \tilde{B}_F, \tilde{C}_F$ et \tilde{D}_F où :

$$X_1 = \tilde{P}_1 A + \tilde{B}_F C, \quad X_2 = \tilde{P}_2 A + \tilde{B}_F C, \quad (1.45)$$

$$Z_1 = \tilde{P}_1 B + \tilde{B}_F D, \quad Z_2 = \tilde{P}_2 B + \tilde{B}_F D. \quad (1.46)$$

De plus, si ces conditions sont réalisables, une réalisation admissible de l'espace d'état du filtre (1.39) est donnée par :

$$\begin{bmatrix} A_F & B_F \\ C_F & D_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_2^{-1} \tilde{A}_F & \tilde{P}_2^{-1} \tilde{B}_F \\ \tilde{C}_F & \tilde{D}_F \end{bmatrix}. \quad (1.47)$$

Démonstration. ([74]). Considérons une matrice de Lyapunov P divisée en quatre blocs sous la forme suivante

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} \succ 0, \quad (1.48)$$

où $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et où P_2 est une matrice non singulière. Considérons ensuite les matrices

$$J_0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_3^{-1}P_2^T \end{bmatrix}, \quad (1.49)$$

$$J_c = \text{diag}\{J_0, I_{n_w}, I_{n_z}\}, \quad (1.50)$$

ainsi que les changements de variables suivants :

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_F & \tilde{B}_F \\ \tilde{C}_F & \tilde{D}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2 A_F P_3^{-1} P_2^T & P_2 B_F \\ C_F P_3^{-1} P_2^T & D_F \end{bmatrix}, \quad (1.51)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}_1 & \tilde{P}_2 \\ \tilde{P}_2 & \tilde{P}_2 \end{bmatrix} = J_0^T P J_0 = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 P_3^{-1} P_2^T \\ P_2 P_3^{-1} P_2^T & P_2 P_3^{-1} P_2^T \end{bmatrix}. \quad (1.52)$$

On obtient alors les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} J_0^T P \check{A} J_0 &= \begin{bmatrix} X_1 & \tilde{A}_F \\ X_2 & \tilde{A}_F \end{bmatrix}, \\ J_0^T P \check{B} &= \begin{bmatrix} \tilde{P}_1 B + \tilde{B}_F D \\ \tilde{P}_2 B + \tilde{B}_F D \end{bmatrix}, \\ \check{C} J_0 &= \begin{bmatrix} L - \tilde{D}_F C & -\tilde{C}_F \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En notant les équations données ci-dessus, il s'ensuit facilement que :

$$J_c^T \begin{bmatrix} PA + A^T P & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma_{\mathcal{H}_\infty}^2 I & D^T \\ C & D & -I \end{bmatrix} J_c = \begin{bmatrix} X_1 + X_1^T & \tilde{A}_F + X_2^T & Z_1 & L^T - C^T \tilde{D}_F^T \\ \star & \tilde{A}_F + \tilde{A}_F^T & Z_2 & -\tilde{C}_F^T \\ \star & \star & -\gamma_{\mathcal{H}_\infty}^2 I & E^T - D^T \tilde{D}_F^T \\ \star & \star & \star & -I \end{bmatrix}. \quad (1.53)$$

Les Éqs. (1.43) et (1.44) sont alors déduites du lemme réel borné [24]. À partir des définitions suivantes

$$\begin{bmatrix} A_F & B_F \\ C_F & D_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_F & \tilde{B}_F \\ \tilde{C}_F & \tilde{D}_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2^{-T} P_3 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (1.54)$$

$$P = J_0^{-T} \begin{bmatrix} \tilde{P}_1 & \tilde{P}_2 \\ \tilde{P}_2 & \tilde{P}_2 \end{bmatrix} J_0^{-1}, \quad (1.55)$$

les conditions (1.43)-(1.44) peuvent s'écrire :

$$J_c^T \begin{bmatrix} PA + A^T P & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma_{\mathcal{H}_\infty}^2 I & D^T \\ C & D & -I \end{bmatrix} J_c \prec 0. \quad (1.56)$$

Puisque J_c est non singulière, le Théorème 1.2 donne une condition nécessaire et suffisante de l'existence d'un filtre avec un niveau de performance \mathcal{H}_∞ de réalisation d'état (A_F, B_F, C_F, D_F) donnée par (1.54). \blacksquare

1.4.1.2 Filtrage \mathcal{L}_2 à paramètres variant dans le temps

Pour les systèmes LPV, les conditions de synthèse exposées sont exprimées en utilisant des LMIs dépendantes du paramètre, en incorporant des matrices auxiliaires (appelées "slacks matrices" en anglais), telles que décrites dans [2].

Considérons un système LPV quadratiquement stable décrit par le modèle d'espace d'état suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))w(t) \\ y(t) = C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))w(t) \\ z(t) = L(\theta(t))x(t) + E(\theta(t))w(t) \end{cases} \quad (1.57)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est la sortie mesurée, $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ est le signal à estimer, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ est une perturbation à énergie bornée. Dans la suite de cette section, la dépendance temporelle de $\theta(t)$ sera omise chaque fois que possible pour alléger la notation. $A(\theta)$, $B(\theta)$, $C(\theta)$, $D(\theta)$, $L(\theta)$ et $E(\theta)$ sont des matrices réelles de dimensions appropriées. On suppose que

$$M(\theta) := (A(\theta), B(\theta), C(\theta), D(\theta), L(\theta)) \in \mathcal{M}, \quad (1.58)$$

appartient à un polytope \mathcal{M} donné décrit par

$$\mathcal{M} := \{M(\theta) : M(\theta) = \sum_{i=1}^s \theta_i M_i, \quad \theta \in \Theta\}, \quad (1.59)$$

avec $M_i := (A_i, B_i, C_i, D_i, L_i)$ désignant les sommets du polytope, et Θ désignant le simplexe unitaire :

$$\Theta := \{(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s) : \sum_{i=1}^s \theta_i = 1, \theta_i \geq 0\}. \quad (1.60)$$

Le problème du filtrage \mathcal{L}_2 à paramètres dépendant dans le temps consiste à déterminer un filtre admettant la réalisation d'espace d'état suivante

$$\begin{cases} \dot{x}_f(t) = A_F(\theta)x_f(t) + B_F(\theta)y(t) \\ z_f(t) = C_F(\theta)x_f(t) + D_F(\theta)y(t) \end{cases}, \quad x_f(0) = \mathbf{0} \quad (1.61)$$

où les matrices $A_F(\theta) \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$, $B_F(\theta) \in \mathbb{R}^{n_f \times n_y}$, $C_F(\theta) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_f}$, $D_F(\theta) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_w}$ sont à déterminer et qui permet de fournir une estimation $z_f(t)$ de $z(t)$ avec une performance de gain \mathcal{L}_2 .

Considérons à nouveau le signal d'erreur de filtrage $e(t) = z(t) - z_f(t)$ et le vecteur d'état augmenté $\xi = [x(t)^T \quad x_f(t)^T]^T$. En connectant le filtre (1.61) au système (1.57), le système d'erreur de filtrage est donné par le modèle d'espace d'état augmenté suivant

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \check{A}(\theta)\xi(t) + \check{B}(\theta)w(t) \\ e(t) = \check{C}(\theta)\xi(t) + \check{D}(\theta)w(t) \end{cases} \quad (1.62)$$

où :

$$\begin{aligned} \check{A}(\theta) &= \begin{bmatrix} A(\theta) & A_F(\theta) \\ B_F(\theta)C(\theta) & 0 \end{bmatrix}, & \check{B}(\theta) &= \begin{bmatrix} B(\theta) \\ B_F(\theta)D(\theta) \end{bmatrix}, \\ \check{C}(\theta) &= \begin{bmatrix} L(\theta) - D_F(\theta)C(\theta) & -C_F(\theta) \end{bmatrix}, & \check{D}(\theta) &= E(\theta) - D_F(\theta)D(\theta). \end{aligned} \quad (1.63)$$

Pour rappel, le critère de performance de gain \mathcal{L}_2 , également connue sous le nom de performance \mathcal{H}_∞ quadratique, est donné ici.

Théorème 1.3. (*Performance gain \mathcal{L}_2 [8, 7]*). *Le système LPV (1.62) possède une performance de gain \mathcal{L}_2 , noté $\gamma_{\mathcal{L}_2}$, si et seulement si, il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P = P^T \succ 0$ vérifiant le nombre infini d'inégalités suivantes*

$$\begin{bmatrix} P\check{A}(\theta) + \check{A}(\theta)^T P & P\check{B}(\theta) & \check{C}(\theta)^T \\ \check{B}(\theta)^T P & -\gamma_{\mathcal{L}_2} I & \check{D}(\theta)^T \\ \check{C}(\theta) & \check{D}(\theta) & -\gamma_{\mathcal{L}_2} I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (1.64)$$

pour toutes les trajectoires possibles du vecteur de paramètres $\theta \in \Theta$.

Lemme 1.4. ([161]). *Soient I , Γ et Σ des matrices de dimensions appropriées. Alors, les deux énoncés suivants sont équivalents :*

(i)

$$\begin{bmatrix} \Sigma & I \end{bmatrix} \Gamma \begin{bmatrix} \Sigma & I \end{bmatrix}^T \succ 0, \quad (1.65)$$

(ii) *Il existe une matrice R , telle que :*

$$\Sigma + \begin{bmatrix} I & -\Gamma^T \end{bmatrix}^T R + R^T \begin{bmatrix} I & -\Gamma^T \end{bmatrix} \succ 0. \quad (1.66)$$

Le théorème suivant donne la solution au problème de synthèse du filtre sous contrainte de performance de gain \mathcal{L}_2 .

Théorème 1.4. (*Filtre \mathcal{L}_2 à paramètres variant dans le temps [2]*). *Considérons le système LPV stable (1.57). Le filtre dépendant des paramètres variant dans le temps (1.61) assure une performance de gain \mathcal{L}_2 , noté $\gamma_{\mathcal{L}_2}$, pour le système d'erreur de filtrage (1.62), s'il existe des matrices auxiliaires $W(\theta)$, $Z(\theta)$, $J(\theta)$, $M(\theta)$ de dimensions appropriées et une matrice symétrique P , telles que les LMIs dépendantes des paramètres suivantes sont satisfaites pour tous les $\theta \in \Theta$:*

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2^T \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \succ 0, \quad (1.67)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -P & 0 & 0 \\ -P & 0 & 0 & -\check{C}(\theta)^T \\ 0 & 0 & I & -\check{D}(\theta)^T \\ 0 & -\check{C}(\theta) & -\check{D}(\theta) & \gamma_{\mathcal{L}_2} I \end{bmatrix}}_{\Sigma_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} W(\theta) & -W(\theta)\check{A}(\theta) & -W(\theta)\check{B}(\theta) & 0 \\ Z(\theta) & -Z(\theta)\check{A}(\theta) & -Z(\theta)\check{B}(\theta) & 0 \\ J(\theta) & -J(\theta)\check{A}(\theta) & -J(\theta)\check{B}(\theta) & 0 \\ M(\theta) & -M(\theta)\check{A}(\theta) & -M(\theta)\check{B}(\theta) & 0 \end{bmatrix}}_{\Upsilon} + \Upsilon^T \succ 0. \quad (1.68)$$

Démonstration. ([2]). Considérant le Théorème 1.3, les conditions suffisantes pour que le système d'erreur de filtrage (1.62) possède une performance de gain \mathcal{L}_2 sont les contraintes d'inégalité (1.64) et $P = P^T \succ 0$. L'inégalité (1.64) peut être réécrite comme

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 & I \end{bmatrix} \Gamma_1 \begin{bmatrix} \Sigma_1 & I \end{bmatrix}^T \succ 0, \quad (1.69)$$

où :

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \check{A}(\theta) & \check{B}(\theta) & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (1.70)$$

Maintenant, en utilisant le Lemme 1.4, l'inégalité (1.69) est équivalente à l'existence d'une matrice R_1 telle que :

$$\Sigma_1 + \begin{bmatrix} I & -\Gamma_1^T \end{bmatrix}^T R_1 + R_1^T \begin{bmatrix} I & -\Gamma_1^T \end{bmatrix} \succ 0. \quad (1.71)$$

En considérant la structure générale

$$R_1 = \begin{bmatrix} W(\theta)^T & Z(\theta)^T & J(\theta)^T & M(\theta)^T \end{bmatrix}, \quad (1.72)$$

l'inégalité (1.71) peut s'écrire comme (1.68). Ainsi, l'équation (1.64) est équivalent à l'équation (1.68). Ce qui conclut la démonstration. ■

Comme le mentionnent les auteurs de [2], la matrice de Lyapunov P n'a aucune relation de multiplication avec les matrices d'espace d'état et les matrices auxiliaires, de sorte qu'elle peut être facilement considérée comme une variable de décision. Les contraintes obtenues dans le Théorème 1.4 sont liées à l'utilisation de la fonction quadratique de Lyapunov $V(\xi) = \xi^T P \xi$, pour évaluer la stabilité quadratique avec une performance de gain \mathcal{L}_2 de la dynamique du système augmenté (1.62). Les matrices $A_F(\theta)$, $B_F(\theta)$, $C_F(\theta)$ et $D_F(\theta)$ qui varient en fonction des paramètres sont présentes de manière non linéaire dans les conditions du Théorème 1.4. Ces conditions elles-mêmes posent des contraintes de dimension infinie qui doivent être évaluées à tous les points du simplexe, ce qui rend la résolution difficile, comme expliqué dans la section 1.3.1.2. Différemment à la propriété de multiconvexité, présenté dans la Définition 1.5, pour aborder cette difficulté, les auteurs [2] portent leur attention aux matrices polynomiales homogènes de degré arbitraire g .

Définition 1.11. ([23]). Une matrice polynomiale homogène $Q(\theta)$ de degré g s'écrit généralement comme

$$Q(\theta) = \sum_{k \in \kappa(g)} \theta^k Q_k, \quad \theta^k = \theta_1^{k_1} \theta_2^{k_2} \dots \theta_s^{k_s}, \quad (1.73)$$

où $\theta_1^{k_1} \theta_2^{k_2} \dots \theta_s^{k_s}$, $\theta \in \Theta$, $k_i \in K$, avec $i \in \{1, \dots, s\}$ sont les monômes et $Q_k \in \mathbb{R}^{s \times s}$, $\forall k \in \kappa(g)$ sont des coefficients à valeur matricielle. Ici, $\kappa(g)$ est l'ensemble de s -uplets obtenus comme toutes les combinaisons possibles d'entiers non négatifs k_i , $i \in \{1, \dots, s\}$ tel que $k_1 + k_2 + \dots + k_s = g$.

L'utilisation des matrices auxiliaires dépendantes des paramètres variant dans le temps va jouer un rôle crucial dans la linéarisation et dans la réduction du conservatisme du problème d'optimisation. On définit donc un polynôme homogène dépendant du paramètre θ pour les matrices auxiliaires $W(\theta)$, $Z(\theta)$, $J(\theta)$, $M(\theta)$ comme

$$\begin{aligned} W(\theta) &= \sum_{k \in \kappa(g)} \theta^k W_k, & Z(\theta) &= \sum_{k \in \kappa(g)} \theta^k Z_k, \\ J(\theta) &= \sum_{k \in \kappa(g)} \theta^k J_k, & M(\theta) &= \sum_{k \in \kappa(g)} \theta^k M_k, \end{aligned} \quad (1.74)$$

où $W_k, Z_k \in \mathbb{R}^{(n+n_f) \times (n+n_f)}$, $J_k \in \mathbb{R}^{(n_w) \times (n+n_f)}$, et $M_k \in \mathbb{R}^{(n_z) \times (n+n_f)}$.

En raison des relations multiplicatives existantes entre les variables auxiliaires et les matrices d'espace d'état du filtre à concevoir, l'application directe du Théorème 1.4 à la conception du filtre n'est pas possible. Toutefois, en introduisant une structure spéciale aux variables auxiliaires dépendantes des paramètres, nous pouvons formuler le problème de conception dans un cadre LMI. En considérant

$$W(\theta) = \begin{bmatrix} W_1(\theta) & W_3(\theta) \\ W_2(\theta) & W_3(\theta) \end{bmatrix}, Z(\theta) = \begin{bmatrix} Z_1(\theta) & \lambda_1 W_3(\theta) \\ Z_2(\theta) & \lambda_2 W_3(\theta) \end{bmatrix}, \quad (1.75)$$

$$J(\theta) = \begin{bmatrix} J_1(\theta) & 0 \end{bmatrix}, M(\theta) = \begin{bmatrix} M_1(\theta) & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.76)$$

l'inégalité (1.68) devient une LMI en considérant le changement de variables suivant :

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_F(\theta) & \tilde{B}_F(\theta) \\ \tilde{C}_F(\theta) & \tilde{D}_F(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_3(\theta)A_F(\theta) & W_3(\theta)B_F(\theta) \\ C_F(\theta) & D_F(\theta) \end{bmatrix}. \quad (1.77)$$

Donc, en imposant ces contraintes et en substituant le changement de variables dans (1.68), nous avons (ci-après la dépendance des matrices sur θ est omise par souci de brièveté) :

$$\left[\begin{array}{ccc} W_1 + W_1^T & W_3 + W_2^T & Z_2^T - P_2 - \tilde{A}_F \\ W_2 + W_3^T & W_3 + W_3^T & \lambda_2 W_3^T - P_3 - \tilde{A}_F \\ Z_1 - P_1 - A^T W_1^T - C^T \tilde{B}_F & \lambda_1 W_3 - P_2 - A^T W_2^T - C^T \tilde{B}_F & -A^T Z_2^T - \lambda_2 C^T \tilde{B}_F^T - \lambda_1 \tilde{A}_F \\ Z_2 - P_2^T - \tilde{A}_F^T & \lambda_2 W_3 - P_3 - \tilde{A}_F & -\lambda_2 \tilde{A}_F - \lambda_2 \tilde{A}_F^T \\ J_1 - B^T W_1^T - D^T \tilde{B}_F^T & -B^T W_2^T - D^T \tilde{B}_F^T & -B^T Z_2^T - \lambda_2 D^T \tilde{B}_F^T \\ M_1 & 0 & \tilde{C}_F \\ Z_1^T - P_1 - W_1 A - \tilde{B}_F C & J_1^T - W_1 B - \tilde{B}_F D & M_1^T \\ \lambda_1 W_3^T - P_2^T - W_2 A - \tilde{B}_F C & -W_2 B - \tilde{B}_F D & 0 \\ -A^T Z_1^T - Z_1 A - \lambda_1 C^T \tilde{B}_F^T - \lambda_1 \tilde{B}_F C & A^T J_1^T - Z_1 B & -L^T + C^T \tilde{D}_F^T - A^T M_1^T \\ -Z_2 A - \lambda_2 \tilde{B}_F C - \lambda_1 \tilde{A}_F & -Z_2 B - \lambda_2 \tilde{B}_F D & \tilde{C}_F^T \\ -J_1 A - B^T Z_1^T - \lambda_1 D^T \tilde{B}_F^T & I - B^T J_1^T - J_1 B & D^T \tilde{D}_F^T - B^T M_1^T \\ -L + \tilde{D}_F C - M_1 A & \tilde{D}_F D - M_1 B & \gamma_{\mathcal{L}_2} I \end{array} \right] \succ 0. \quad (1.78)$$

Comme pour les matrices auxiliaires, les auteurs considèrent une structure polynomiale homogène dépendante des paramètres pour les matrices de conception $\tilde{A}_F(\theta)$, $\tilde{B}_F(\theta)$, $\tilde{C}_F(\theta)$ et $\tilde{D}_F(\theta)$, telle que :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_F(\theta) &= \sum_{k \in \kappa(g)} \theta^k \tilde{A}_{F_k}, & \tilde{B}_F(\theta) &= \sum_{k \in \kappa(g)} \theta^k \tilde{B}_{F_k}, \\ \tilde{C}_F(\theta) &= \sum_{k \in \kappa(g)} \theta^k \tilde{C}_{F_k}, & \tilde{D}_F(\theta) &= \sum_{k \in \kappa(g)} \theta^k \tilde{D}_{F_k}. \end{aligned} \quad (1.79)$$

À présent, les variables de décision d'intérêt (c'est-à-dire $\tilde{A}_F(\theta)$, $\tilde{B}_F(\theta)$, $\tilde{C}_F(\theta)$ et $\tilde{D}_F(\theta)$) dans (1.78), apparaissent linéairement avec les matrices auxiliaires. Dans le cadre de ces conditions LMIs, puisque la région d'incertitude est convexe (polytope), alors le problème d'optimisation qui suit est convexe :

$$\min \gamma_{\mathcal{L}_2}, \quad \text{t.q. (1.67) et (1.78)}. \quad (1.80)$$

Ainsi, la réalisation de l'espace d'état du filtre conçu peut être obtenue par :

$$\begin{bmatrix} A_F(\theta) & B_F(\theta) \\ C_F(\theta) & D_F(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_3(\theta)^{-1} \tilde{A}_F(\theta) & W_3(\theta)^{-1} \tilde{B}_F(\theta) \\ \tilde{C}_F(\theta) & \tilde{D}_F(\theta) \end{bmatrix}. \quad (1.81)$$

La conception d'un filtre \mathcal{H}_∞ dépendant des paramètres ne se limite pas à une seule approche. Dans la littérature, d'autres travaux [53, 55] ont étendu ces résultats en incorporant une fonction de Lyapunov dépendante des paramètres θ , tant pour les systèmes discrets que continus. Parallèlement, l'intégration de matrices auxiliaires a également gagné en popularité au cours de ces dernières décennies. Cependant, afin d'éviter toute redondance, les détails et les résultats de ces travaux ne sont pas présentés dans le cadre de ce mémoire. Pour des informations plus approfondies, le lecteur peut se référer à [23, 41, 50, 62, 69, 85, 118, 141, 152, 153, 190].

1.4.2 Filtrage \mathcal{H}_1 : cas du modèle LTI incertain

Bien que le bruit soit également supposé avoir une énergie bornée, à l'instar du cas du filtrage \mathcal{H}_∞ , l'objectif du filtrage crête-à-crête (appelé filtrage \mathcal{H}_1) est différent. Dans certaines situations, l'amplitude maximale d'un signal est préférable à son énergie maximale. Dans ce contexte, des auteurs ont abordé le problème de filtrage \mathcal{H}_1 avec des solutions non récursives sur un horizon fini dans [127, 168]. À partir de 1996, avec l'intérêt croissant pour la technique LMI en théorie du contrôle, des chercheurs tels que [1, 137] ont commencé à appliquer l'approche LMI pour résoudre les problèmes de filtrage crête-à-crête. Les travaux présentés dans cet état de l'art vont se limiter à ceux proposés par [137].

Considérons un système LTI incertain stable décrit par le modèle d'espace d'état suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta)x(t) + B(\theta)w(t) \\ y(t) = C(\theta)x(t) + D(\theta)w(t) \\ z(t) = L(\theta)x(t) + E(\theta)w(t) \end{cases} \quad (1.82)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est la sortie mesurée, $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ est le signal à estimer, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ est une perturbation à énergie bornée. $A(\theta), B(\theta), C(\theta), D(\theta), L(\theta), E(\theta)$ sont des matrices réelles de dimensions appropriées et satisfont les hypothèses d'appartenance à un polytope (1.58)-(1.60).

Le problème du filtrage crête-à-crête consiste à déterminer un filtre admettant la réalisation d'espace d'état suivante

$$\begin{cases} \dot{x}_f(t) = A_F x_f(t) + B_F y(t) \\ z_f(t) = C_F x_f(t) + D_F y(t) \end{cases}, \quad x_f(0) = \mathbf{0} \quad (1.83)$$

avec $A_F \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}, B_F \in \mathbb{R}^{n_f \times n_y}, C_F \in \mathbb{R}^{n_z \times n_f}, D_F \in \mathbb{R}^{n_z \times n_y}$, et qui permet de fournir une estimation $z_f(t)$ de $z(t)$ avec une performance garantie au sens de la norme \mathcal{H}_1 , (voir Définition 1.10).

Considérons le système d'Éqs. (1.62)-(1.63). Le théorème suivant donne la solution au problème de synthèse du filtre sous contrainte de performance \mathcal{H}_1 .

Théorème 1.5. (*Filtrage crête-à-crête \mathcal{H}_1 [137]*). *Considérons le système (1.82) et des scalaires $\gamma_{\mathcal{H}_1}, \mu, \lambda > 0$. Si il existe des matrices symétriques $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, avec $R \succ 0$ et des matrices $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$, $N \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$, $D_F \in \mathbb{R}^{n_z \times n_y}$ satisfaisant*

- pour $i = \{1, \dots, s\}$

$$\begin{bmatrix} A_i^T X + X A_i + \lambda X + Z C_i + C_i^T Z & A_i^T R + X A_i + Z C_i & X B_i + Z D_i \\ \star & M + \lambda R & R B_i \\ \star & \star & -\mu I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (1.84)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda X & \star & \star & \star \\ \lambda R & \lambda R & \star & \star \\ 0 & 0 & (\gamma_{\mathcal{H}_1} - \mu) I & \star \\ L_i - D_F C_i & L_i - D_F C_i - N & E_i - D_F D_i & \gamma_{\mathcal{H}_1} I \end{bmatrix} \succ 0, \quad (1.85)$$

alors, la norme \mathcal{H}_1 pour l'erreur de filtrage (1.62) est inférieure à $\gamma_{\mathcal{H}_1}$. Ainsi, les matrices du filtre admissible (1.83) sont données par :

$$A_F = (R - X)^{-1} M, \quad B_F = (R - X)^{-1} Z, \quad C_F = N, \quad D_F = D_F. \quad (1.86)$$

Démonstration. ([137]). Supposons qu'il existe des matrices R, X, M, Z et D_F ainsi qu'un scalaire μ satisfaisant les conditions (1.84)-(1.85). À partir de (1.85), on peut conclure que $\lambda(X - R) \succ 0$, où $R \succ 0$, ce qui signifie que $I - R^{-1}X$ est non singulière. Il est alors toujours possible de trouver des matrices carrées et non singulières U et V telles que $I - R^{-1}X = UV^T$ (voir [154]). Introduisons les matrices non singulières

$$J = \begin{bmatrix} X & I \\ V^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{J} = \begin{bmatrix} I & R^{-1} \\ 0 & U^T \end{bmatrix}, \quad (1.87)$$

et définissons la matrice symétrique suivante :

$$P = \tilde{J} J^{-1} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix}. \quad (1.88)$$

Le produit (1.88) implique donc que :

$$P_1 = R^{-1}, \quad P_2 = U, \quad P_3 = -U^T X (V^T)^{-1}. \quad (1.89)$$

Multiplier préalablement et postérieurement les LMIs (1.84)-(1.85) par la matrice de transformation $\text{diag}\{I, R^{-1}, I\}$, suivi du changement de variables

$$\hat{Z} = MR^{-1}, \quad \tilde{Z} = NR^{-1}, \quad (1.90)$$

et en introduisant les matrices A_F, B_F, C_F données par

$$A_F = V^{-1} \hat{Z} (U^T)^{-1}, \quad B_F = V^{-1} Z, \quad C_F = \tilde{Z} (U^T)^{-1}, \quad (1.91)$$

il devient évident que (1.84) est équivalent à

$$\begin{bmatrix} J^T \check{A}_i \tilde{J} + \tilde{J} \check{A}_i^T J + \lambda J^T \tilde{J} & J^T \check{B}_i \\ \star & -\mu I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (1.92)$$

et (1.85) est équivalent à :

$$\begin{bmatrix} \lambda J^T \tilde{J} & 0 & \tilde{J}^T \check{C}_i^T \\ \star & (\gamma_{\mathcal{H}_1} - \mu)I & \check{D}_i^T \\ \star & \star & \gamma_{\mathcal{H}_1} I \end{bmatrix} \succ 0. \quad (1.93)$$

Pour simplifier, pré et post-multiplions les LMIs (1.92)-(1.93) par $\text{diag}\{(J^T)^{-1}, I\}$ et $\text{diag}\{J^{-1}, I\}$. Selon la Définition 1.10, en tenant compte de (1.88), on peut établir l'équivalence entre les LMIs (1.92)-(1.93) et les LMIs du critère de performance \mathcal{H}_1 présenté dans [1, 88]). Ensuite, en utilisant (1.91), le transfert entre la mesure y et la sortie estimée z_f est équivalent à :

$$G(s) = \tilde{Z}(s(VU^T) - \hat{Z})^{-1}Z. \quad (1.94)$$

En appliquant l'identité $UV^T = I - RX^{-1}$ (ou $VU^T = I - XR^{-1}$) avec le changement de variables défini en (1.90), les matrices de filtrage présentées dans (1.86) sont ainsi facilement obtenues. ■

Notons que les contraintes (1.84)-(1.85) se transforment en LMIs seulement lorsque la variable λ est fixée *a priori*. En effet, les solutions de (1.84)-(1.85) dépendent du choix de λ . D'après [137], il doit être fait tel que λ appartienne à l'intervalle $(0, -2 \max \text{Re}(\lambda(A)))$ pour garantir une solution définie positive à l'inégalité $A^T P + PA + \lambda P \prec 0$ (condition nécessaire à la faisabilité de la première inégalité matricielle du critère de performance \mathcal{H}_1 , voir [88] pour plus de détails). Alors pour une valeur de λ donnée, la conception d'un filtre robuste avec une performance garantie en crête-à-crête s'exprime au moyen du problème d'optimisation formulé suivant :

$$\min \gamma_{\mathcal{H}_1}, \quad \text{t.q (1.84) - (1.85)}, \quad \forall i = \{1, \dots, s\}. \quad (1.95)$$

Afin de réduire le conservatisme de l'approche quadratique, certains chercheurs ont exploité l'idée de stabilité dépendante des paramètres pour étudier les problèmes de filtrage de gain \mathcal{L}_∞ pour les systèmes linéaires polytopiques incertains, comme observé dans [88, 123]. Dans [87], des conditions de performance de gain \mathcal{L}_∞ moins conservatrices ont été proposées sous forme de LMIs en séparant les termes de produit entre la matrice de Lyapunov dépendante des paramètres et les matrices du filtre en introduisant des variables matricielles auxiliaires. Cela a permis d'obtenir des filtres crête-à-crête robustes à partir de la résolution de problèmes d'optimisation convexe.

L'intégration d'un critère crête-à-crête dans le contexte de l'estimation par intervalle se révèle pertinente et significative, garantissant ainsi la stabilité et la performance en termes d'amplitude du signal d'erreur. Contrairement au critère \mathcal{H}_∞ , il réduit les variations maximales du signal d'erreur, ce qui est crucial dans certaines applications ensemblistes.

La continuité de ce mémoire s'appuie sur les bases posées par N. Ellero [63], qui a déjà établi un état de l'art solide dans le domaine ensembliste. Ce travail sera enrichi en incorporant des contributions récentes qui ont été publiées depuis, afin d'élargir et d'affiner les connaissances dans le domaine de l'estimation par intervalle.

1.5 Théorie des observateurs intervalles basée sur la propriété de coopérativité

Cette section met l'accent sur les méthodes fondamentales de la théorie des intervalles et sur la conception d'observateurs associés. Après avoir passé en revue les concepts de monotonie et de coopérativité, nous nous penchons en détail sur les étapes de la conception des observateurs intervalles tel que décrit dans [79]. Les notations et les définitions clés pour cette approche sont également présentées.

Pour $\vartheta \in \{A \in \mathbb{R}^{m \times n}, x \in \mathbb{R}^n\}$, les opérateurs \bullet^+ et \bullet^- sont définis par :

$$\vartheta^+ = \frac{1}{2} (|\vartheta| + \vartheta) = \max(\vartheta, 0), \quad (1.96)$$

$$\vartheta^- = \frac{1}{2} (|\vartheta| - \vartheta) = \max(-\vartheta, 0). \quad (1.97)$$

Soient deux vecteurs connus $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ définissant la notion d'intervalle pour le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t), \quad \forall t \geq t_0. \quad (1.98)$$

Le lemme suivant, donné dans [58], permet d'encadrer le produit d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ par un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$.

Lemme 1.5 (Lemme 2 dans [58]). *Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$, où $\underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$.*

1. *Pour une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, l'encadrement du produit Ax est donné par :*

$$A^+ \underline{x} - A^- \bar{x} \leq Ax \leq A^+ \bar{x} - A^- \underline{x}. \quad (1.99)$$

2. *Pour une matrice $A(\theta) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telle que $\underline{A} \leq A(\theta) \leq \bar{A}$, $\forall \theta \in \Theta$ où $\underline{A}, \bar{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, l'encadrement du produit Ax est donné par :*

$$\underline{A}^* x^* \leq A(\theta)x \leq \bar{A}^* x^*, \quad (1.100)$$

où

$$x^* = \begin{bmatrix} \bar{x}^{+T} & \bar{x}^{-T} & \underline{x}^{+T} & \underline{x}^{-T} \end{bmatrix}^T, \quad \underline{A}^* = \begin{bmatrix} -\underline{A}^- & \bar{A}^- & \underline{A}^+ & -\bar{A}^+ \end{bmatrix}, \quad \bar{A}^* = \begin{bmatrix} \bar{A}^+ & -\underline{A}^+ & -\bar{A}^- & \underline{A}^- \end{bmatrix}.$$

1.5.1 Systèmes monotones

S'appuyant sur les principes de la théorie des équations différentielles ordinaires, les systèmes monotones se distinguent comme une catégorie spécifique de systèmes, où les solutions conservent, dans un domaine de validité donné, une relation d'ordre déterminée par les conditions initiales [6, 93, 164, 165].

Soit le système décrit par

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad (1.101)$$

alors le système (1.101) est dit monotone [93] si

$$x_a(t_0) \leq x_b(t_0) \Rightarrow x_a(t) \leq x_b(t), \quad \forall t \geq t_0, \quad (1.102)$$

où $x_a(t)$ et $x_b(t)$ sont deux trajectoires, solutions du système (1.101), partant des conditions initiales respectivement données par $x_a(t_0)$ et $x_b(t_0)$.

La préservation de la relation d'ordre établie par les conditions initiales s'avère être une propriété importante au sein de la théorie des systèmes monotones. Cette propriété est utilisée dans la méthodologie de conception d'observateurs par intervalles, où elle est exploitée pour la construction d'enveloppe garantie d'appartenance de l'état du système au cours du temps. Il est important de souligner que la théorie des observateurs intervalles se fonde sur une sous-catégorie particulière des systèmes monotones, dénommée systèmes coopératifs.

En considérant le système (1.101) réécrit sous la forme :

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (1.103)$$

Un système (1.103) est dit coopératif si les dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ vérifient :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \geq 0, \quad \forall i \neq j, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}. \quad (1.104)$$

Dans le cadre particulier des systèmes linéaires, soit

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (1.105)$$

la propriété de coopérativité est garantie si et seulement si $a_{ij} \geq 0, \forall i \neq j, i, j \in \{1, \dots, n\}$, c'est à dire si et seulement si la matrice A est Metzler.

Définition 1.12. Une matrice carrée $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est dite Metzler si et seulement si $a_{ij} \geq 0, \forall i \neq j$.

Définissons les erreurs supérieure et inférieure suivantes :

$$\bar{e}_x(t) = \bar{x}(t) - x(t), \quad \underline{e}_x(t) = x(t) - \underline{x}(t). \quad (1.106)$$

L'inégalité (1.98) est alors vérifiée si et seulement si

$$\underline{e}_x(t) \geq 0 \quad \text{et} \quad \bar{e}_x(t) \geq 0, \quad \forall t \geq t_0, \quad (1.107)$$

ce qui est vrai si et seulement si les dynamiques des erreurs inférieure $\underline{e}_x(t)$ et supérieure $\bar{e}_x(t)$ sont monotones et les conditions initiales vérifient $\underline{x}(t_0) \leq x(t_0) \leq \bar{x}(t_0)$, puisqu'elles impliquent $\underline{e}_x(t_0) \geq 0, \bar{e}_x(t_0) \geq 0$.

Le principe des observateurs intervalles repose sur ce raisonnement et consiste à construire des bornes supérieure $\bar{x}(t)$ et inférieure $\underline{x}(t)$ de l'état x du système étudié, en assurant que les erreurs inférieure $\underline{e}_x(t)$ et supérieure $\bar{e}_x(t)$ satisfont la relation (1.107).

Généralement, les dynamiques des erreurs $\underline{e}_x, \bar{e}_x$ dépendent d'entrées exogènes. La vérification des contraintes (1.107) est alors basée sur le Théorème 1.6.

Théorème 1.6. ([164]). Soit le système linéaire perturbé décrit par

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + w(t), \quad (1.108)$$

où $e \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice Metzler et où $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une entrée de perturbation. Si $e(t_0) \geq 0$ et $w(t) \geq 0, \forall t \geq t_0$ alors $e(t) \geq 0, \forall t \geq t_0$.

Les travaux présentés dans les Chapitres 2 à 3, se baseront sur ce principe de coopérativité.

1.5.2 Application à la conception d'observateurs intervalles

Les prémices de la conception des observateurs intervalles ont été posées historiquement par [79, 150] pour assurer l'estimation garantie des variables non mesurables dans une catégorie de systèmes biologiques incertains. Afin d'exposer le concept de création d'observateurs intervalles, nous rappelons ici les travaux fondateurs présentés dans [79, 150].

1.5.2.1 Formulation du problème

Soit la classe des systèmes linéaires à injection de sortie décrite par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \varphi(t, y(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.109)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ représentent respectivement les vecteurs d'état et de sortie du système. Les matrices sont définies telles que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$ et la fonction $\varphi : \mathbb{R}^{n_y+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

L'étude se place sous les hypothèses suivantes :

Hypothèse 1.1. La paire (A, C) est détectable.

Hypothèse 1.2. Il existe une matrice $L \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ telle que la matrice $A - LC$ soit Metzler (L est donc le gain de l'observateur intervalle).

Hypothèse 1.3. Il existe deux fonctions connues $\underline{\varphi} : \mathbb{R}^{n_y+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\overline{\varphi} : \mathbb{R}^{n_y+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ telles que :

$$\underline{\varphi}(t, y(t)) \leq \varphi(t, y(t)) \leq \overline{\varphi}(t, y(t)), \quad \forall (t, y) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^{n_y}. \quad (1.110)$$

1.5.2.2 Structure de l'observateur intervalle

L'estimation garantie des bornes supérieures et inférieures, respectivement, $\overline{x}, \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ de l'état x du système (1.109) est réalisée à l'aide d'un observateur intervalle constitué de deux systèmes dynamiques analogues à la structure de l'observateur de Luenberger, formulée de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}(t) = A\overline{x}(t) + \overline{\varphi}(t, y(t)) + L(y(t) - C\overline{x}(t)) \\ \dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + \underline{\varphi}(t, y(t)) + L(y(t) - C\underline{x}(t)) \\ \underline{x}(t_0) \leq x(t_0) \leq \overline{x}(t_0) \end{cases} \quad (1.111)$$

1.5.2.3 Conditions d'existence de l'encadrement

En définissant l'erreur d'observation supérieure comme $\overline{e}_x(t) = \overline{x}(t) - x(t)$ et l'erreur d'observation inférieure comme $\underline{e}_x(t) = x(t) - \underline{x}(t)$, l'état x du système (1.109) est garantie d'être estimé dans l'intervalle $[\underline{x}(t), \overline{x}(t)]$ pour tout $t \geq t_0$, si et seulement si la condition (1.107) est satisfaite.

En effet, considérons les dynamiques de $\overline{e}_x, \underline{e}_x$, c'est à dire :

$$\dot{\overline{e}}_x(t) = (A - LC)\overline{e}_x(t) + \overline{\varphi}(t, y(t)) - \varphi(t, y(t)), \quad (1.112)$$

$$\dot{\underline{e}}_x(t) = (A - LC)\underline{e}_x(t) + \varphi(t, y(t)) - \underline{\varphi}(t, y(t)). \quad (1.113)$$

En appliquant le Théorème 1.6 à chacune de ces équations alors, sous les Hypothèses 1.2 et 1.3 et sous les conditions initiales $\underline{x}(t_0) \leq x(t_0) \leq \bar{x}(t_0)$, les propriétés données par l'équation (1.107) sont vérifiées, garantissant ainsi que le système (1.111) est bien un observateur intervalle.

1.5.2.4 Stabilité de l'observateur et majorant de l'enveloppe

Intéressons nous maintenant aux conditions de stabilité de l'observateur (1.111). Soit la dynamique de l'erreur totale $e(t) = \bar{e}_x(t) + \underline{e}_x(t)$ définie par :

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) + \bar{\varphi}(t, y(t)) - \underline{\varphi}(t, y(t)). \quad (1.114)$$

En supposant qu'il existe un gain L tel que que la matrice $A - LC$ soit simultanément Hurwitz et Metzler et qu'il existe un vecteur $\nu \in \mathbb{R}_+^n$ tel que

$$0 \leq \bar{\varphi}(t, y(t)) - \underline{\varphi}(t, y(t)) \leq \nu, \quad \forall (t, y) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^{n_y},$$

alors la dynamique de l'enveloppe totale $e(t)$ est stable. De plus, $e(t)$ converge asymptotiquement vers une valeur inférieure à $e_\infty = -(A - LC)^{-1}\nu$.

Dans cette approche, on pourra noter que :

- (i) il est nécessaire de déterminer un gain L tel que la matrice $A - LC$ soit simultanément Hurwitz et Metzler. Dans certains cas, cette condition est impossible à satisfaire, ce qui limite considérablement l'approche proposée. Prenons comme exemple le cas suivant

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix},$$

alors :

$$A - LC = \begin{bmatrix} l_1 + 1 & -0.5 \\ l_2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Il est alors évident qu'il n'existe aucune valeur de $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ qui conduirait à une matrice $A - LC$ Metzler.

- (ii) l'observateur intervalle (1.111) est soumis à une mesure de conservatisme qui est directement liée à l'enveloppe $e(t) = \bar{x} - \underline{x}$. Dans la littérature, un intérêt croissant est observé pour la réduction de ce conservatisme. Au départ, la minimisation de l'impact des perturbations et des incertitudes de modélisation sur la taille de cette enveloppe $e(t) = \bar{x} - \underline{x}$ (selon un critère donné) n'était pas évidente. Les premiers travaux [121, 122] dans ce domaine se sont généralement concentrés sur des ajustements itératifs *a posteriori* de la synthèse du gain L . Cependant, cette approche, largement contrainte par l'obtention conjointe des propriétés de stabilité et de monotonie, a souvent conduit à des performances sous optimales. De plus, il est important de noter que les fonctions majorantes $\bar{\varphi}$ et $\underline{\varphi}$ ont une influence directe sur la taille de l'enveloppe $\bar{x} - \underline{x}$. Un choix judicieux de ces fonctions est donc crucial pour atténuer l'impact du conservatisme inhérent à la méthodologie de synthèse associée.

Plusieurs auteurs ont cherché à apporter des solutions à ces défis. Nous allons maintenant présenter brièvement quelques-unes de ces approches pour les classes de systèmes LTI et LPV. Cependant, la classe des systèmes LTV ne sera pas traitée ici ; pour une revue concise, le lecteur pourra se référer à [63].

1.6 Observateurs intervalles pour les systèmes LTI

La coopérativité des erreurs d'observation est une contrainte forte de la théorie des observateurs intervalles. La principale restriction est liée à la détermination d'une matrice L telle que la matrice $A - LC$ soit simultanément Hurwitz et Metzler. Dans le cas général, une méthodologie de synthèse générique pour obtenir ces propriétés n'existe pas. Toutefois, des travaux récents ont permis de relaxer cette contrainte pour les systèmes LTI en utilisant :

- (i) une transformation en système positif [32, 33],
- (ii) un changement de coordonnées invariant dans le temps [147],
- (iii) un changement de coordonnées variant dans le temps [45, 49, 120, 121].

Nous proposons dans un premier temps d'explicitier ces approches. Nous aborderons ensuite le cas des approches qui présentent une méthode permettant de garantir les conditions d'existence des observateurs intervalles et d'imposer des contraintes de performance au sens d'une norme \mathcal{H}_∞ et d'une norme \mathcal{H}_1 [4, 179].

1.6.1 Approche par transformation en système positif

1.6.1.1 Préliminaires

Commençons par rappeler les définitions et les lemmes importants.

Définition 1.13 (Représentation Positive, Définition 3 dans [33]). La représentation positive d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur $X \in \mathbb{R}_+^{2n}$ tel que :

$$x = \Delta_n X \quad \text{avec} \quad \Delta_n = \begin{bmatrix} I_n & -I_n \end{bmatrix}. \quad (1.115)$$

La représentation min-positive d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur positif $\pi(x) \in \mathbb{R}_+^{2n}$ défini par :

$$\pi(x) = \begin{bmatrix} x^+ \\ x^- \end{bmatrix}. \quad (1.116)$$

La représentation min-positive d'une matrice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est une matrice positive $\tilde{M} \in \mathbb{R}_+^{2m \times 2n}$ définie par :

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} M^+ & M^- \\ M^- & M^+ \end{bmatrix}. \quad (1.117)$$

D'après la Définition 1.13, nous pouvons vérifier que

$$x = \Delta_n \pi(x), \quad \Delta_n \tilde{M} = M \Delta_n, \quad Mx = \Delta_n \tilde{M} \pi(x), \quad (1.118)$$

pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ et toute matrice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

De plus, en considérant la matrice $\hat{I}_n = \begin{bmatrix} I_n & I_n \end{bmatrix}^T$ alors, pour un vecteur $v \in \mathbb{R}_+^n$, le vecteur $\pi(x) + \hat{I}_n v$ est une représentation positive du vecteur $x \in \mathbb{R}^n$. En effet, $x = \Delta_n (\pi(x) + \hat{I}_n v)$ étant donné que $\Delta_n \hat{I}_n = 0_{n \times n}$.

Définition 1.14. La représentation Metzler $[M] \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ d'une matrice $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est définie par

$$[M] = \begin{bmatrix} d^M + (M - d^M)^+ & (M - d^M)^- \\ (M - d^M)^- & d^M + (M - d^M)^+ \end{bmatrix}, \quad (1.119)$$

où d^M correspond à une matrice (diagonale) qui possède la même diagonale que la matrice M et 0 pour tous les autres éléments.

La matrice $[M]$ possède les mêmes propriétés que la représentation positive, notamment : $\Delta_n[M] = M\Delta_n$ et $Mx = \Delta_n[M]\pi(x)$.

La représentation min-positive des vecteurs ne préserve pas les inégalités puisque pour deux vecteurs $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, l'inégalité $x_1 \leq x_2$ n'implique pas l'inégalité $\pi(x_1) \leq \pi(x_2)$. Cette propriété a motivé la définition de nouveaux opérateurs.

Définition 1.15. Pour des vecteurs $a, x \in \mathbb{R}^n$, on définit l'opérateur $\phi_a(x)$ suivant

$$\phi_a(x) = \begin{bmatrix} x + a^- \\ a^- \end{bmatrix}, \quad (1.120)$$

Le lemme suivant est alors immédiat, voir [33] :

Lemme 1.6 (Lemme 3 dans [33]). *La fonction $\phi_a(x)$ définie dans (1.120) satisfait la relation :*

$$\Delta_n \phi_a(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.121)$$

Pour trois vecteurs $a, b, x \in \mathbb{R}^n$ tels que $a \leq x \leq b$ alors :

$$\phi_a(a) \leq \phi_a(x) \leq \phi_a(b). \quad (1.122)$$

Nous terminons ce paragraphe en présentant deux lemmes sur les valeurs propres de la représentation Metzler d'une matrice A .

Lemme 1.7 (Lemme 7 dans [33]). *Le spectre de la représentation Metzler d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est :*

$$\lambda([A]) = \lambda(A) \cup \lambda(d^A + |A - d^A|). \quad (1.123)$$

Lemme 1.8 (Lemme 8 dans [33]). *Soit $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}_-$ définie par*

$$\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}_e(z) + |\mathcal{I}_m(z)| < 0\}, \quad (1.124)$$

où $\mathcal{R}_e(z)$ et $\mathcal{I}_m(z)$ désignent respectivement les parties réelle et imaginaire du complexe z . Si une matrice A est dans sa forme de Jordan réelle, alors sa représentation Metzler $[A]$ est Hurwitz si et seulement si $\lambda(A) \in \mathcal{S}$.

1.6.1.2 Formulation du problème

Soit le système décrit par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + v^s(t) \\ y(t) = Cx(t) + v^m(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.125)$$

où $x, v^s \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$ et $y, v^m \in \mathbb{R}^{n_y}$ représentent respectivement les vecteurs d'état, de bruits d'état, d'entrées, de sorties et de bruits de mesure du système. Les vecteurs u et v^s sont continus par morceaux pour garantir l'existence de la solution $x(t)$ sur $[0, \infty)$. On suppose que $v^s(t)$ et $v^m(t)$ sont bornés en amplitude, i.e. qu'il existe des bornes connues $\underline{v}^s(t), \overline{v}^s(t) \in \mathbb{R}^n$ et $\underline{v}^m(t), \overline{v}^m(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ telles que $v^s(t) \in [\underline{v}^s(t), \overline{v}^s(t)]$ et $v^m(t) \in [\underline{v}^m(t), \overline{v}^m(t)]$. On suppose également que l'état initial $x(0)$ est borné en amplitude, c'est à dire il existe deux bornes connues \underline{x}_0 et \overline{x}_0 telles que $\underline{x}_0 \leq x_0 \leq \overline{x}_0$.

L'objectif est de construire un observateur intervalle qui estime des bornes supérieure \overline{x} et inférieure \underline{x} de l'état x du système (1.125), c'est à dire $\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \overline{x}(t), \forall t \geq t_0$.

1.6.1.3 Conception de l'observateur intervalle

La solution au problème est donnée par le Théorème 1.7.

Théorème 1.7 (Théorème 11 dans [33]). *Soient le système (1.125), une matrice $K \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ telle que $[A_K]$ est Hurwitz où $A_K = A - KC$ et des bornes connues $\underline{w}(t), \overline{w}(t) \in \mathbb{R}^n$ pour le vecteur des perturbations $w(t) = v^s(t) - Kv^m(t)$ alors le système*

$$\begin{cases} \dot{\overline{Z}}(t) = [A_K]\overline{Z}(t) + \tilde{B}\pi(u(t)) + \tilde{K}\pi(y(t)) + \phi_{\underline{w}}(\overline{w}(t)) \\ \dot{\underline{Z}}(t) = [A_K]\underline{Z}(t) + \tilde{B}\pi(u(t)) + \tilde{K}\pi(y(t)) + \phi_{\underline{w}}(\underline{w}(t)) \\ \overline{x}(t) = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \overline{Z}(t) - \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_n \end{bmatrix} \underline{Z}(t) \\ \underline{x}(t) = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \underline{Z}(t) - \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_n \end{bmatrix} \overline{Z}(t) \\ \underline{Z}(0) = \phi_{\underline{x}_0}(\underline{x}_0), \overline{Z}(0) = \phi_{\overline{x}_0}(\overline{x}_0) \end{cases} \quad (1.126)$$

est un observateur intervalle pour le système (1.125).

Démonstration. La démonstration de ce théorème est donnée dans [33]. Nous la rappelons ici brièvement.

Étant donné que la matrice $[A_K]$ est Hurwitz par hypothèse, alors $Z(t) = \begin{bmatrix} \underline{Z}(t)^T & \overline{Z}(t)^T \end{bmatrix}^T$ est uniformément borné si les vecteurs u , y , \underline{w} et \overline{w} sont uniformément bornés.

La première étape de la démonstration consiste à utiliser l'égalité $x(t) = \Delta_n \zeta(t)$ et à vérifier que l'égalité $\dot{x}(t) = \Delta_n \dot{\zeta}(t)$ est vraie avec :

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = [A_K]\zeta(t) + \tilde{B}\pi(u(t)) + \tilde{K}\pi(y(t)) + \phi_{\underline{w}}(w(t)) \\ \zeta(0) = \phi_{\underline{x}_0}(x_0) \end{cases} \quad (1.127)$$

En développant $\Delta_n \dot{\zeta}(t)$, nous obtenons :

$$\Delta_n \dot{\zeta}(t) = \Delta_n [A_K]\zeta(t) + \Delta_n \tilde{B}\pi(u(t)) + \Delta_n \tilde{K}\pi(y(t)) + \Delta_n \phi_{\underline{w}}(w(t)) \quad (1.128)$$

$$= A_K \Delta_n \zeta(t) + B \Delta_n \pi(u(t)) + K \Delta_n \pi(y(t)) + w(t) \quad (1.129)$$

$$= A_K x(t) + Bu(t) + Ky(t) + w(t) \quad (1.130)$$

$$= (A - KC)x(t) + Bu(t) + Ky(t) + v^s(t) - Kv^m(t) \quad (1.131)$$

$$= Ax(t) + Bu(t) + v^s(t) + Ky(t) - K(Cx(t) + v^m(t)) \quad (1.132)$$

$$= Ax(t) + Bu(t) + v^s(t) \quad (1.133)$$

Étant donné que la matrice $[A_K]$ est Hurwitz et Metzler, que les conditions initiales vérifient l'inégalité $\underline{Z}(0) \leq \zeta(0) \leq \overline{Z}(0)$ et que l'encadrement $\phi_{\underline{w}(t)}(\underline{w}(t)) \leq \phi_{\underline{w}}(w(t)) \leq \phi_{\overline{w}}(\overline{w}(t))$ est vérifié d'après le Lemme 1.6, il vient d'après le Théorème 1.6 :

$$\underline{Z}(t) \leq \zeta(t) \leq \overline{Z}(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (1.134)$$

En appliquant le Lemme 1.5 sur la relation $x(t) = \Delta_n \zeta(t)$, nous obtenons alors :

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \overline{x}(t). \quad (1.135)$$

■

Dans cette approche, la principale difficulté réside dans la synthèse du gain K qui rend la matrice $[A - KC]$ Hurwitz. Il est montré dans [33] que ce problème peut être résolu en utilisant le Lemme 1.8 et la représentation de Jordan positive des matrices. Le lecteur intéressé pourra se référer à [33] pour de plus amples détails.

1.6.2 Approche par changement de base d'état

1.6.2.1 Formulation du problème

Soit le système décrit par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + w(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.136)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ sont respectivement les vecteurs d'état et de sortie du système. $w \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur de perturbations tel que $w(t) \in [\underline{w}(t), \overline{w}(t)]$ où les vecteurs $\underline{w}, \overline{w} \in \mathbb{R}^n$ sont *a priori* connus. Les matrices sont définies par $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$.

Dans les approches basées sur un changement de base d'état, on peut distinguer deux cas :

- le cas où le changement ne dépend pas du temps,
- le cas où le changement dépend du temps.

1.6.2.2 Approche par changement de base d'état invariant dans le temps

La première approche repose sur un changement de coordonnées (non singulier) $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tel que $r(t) = Px(t)$. Ainsi, le modèle d'état (1.136) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = PAP^{-1}r(t) + Pw(t) \\ y(t) = CP^{-1}r(t) \end{cases} \quad (1.137)$$

La démarche consiste alors à estimer une borne supérieure $\overline{r}(t)$ et inférieure $\underline{r}(t)$ de l'état dans cette nouvelle base, en utilisant un observateur intervalle défini tel que

$$\begin{cases} \dot{\overline{r}}(t) = PAP^{-1}\overline{r}(t) + PL(y(t) - CP^{-1}\overline{r}(t)) + \overline{\phi}(t) \\ \dot{\underline{r}}(t) = PAP^{-1}\underline{r}(t) + PL(y(t) - CP^{-1}\underline{r}(t)) + \underline{\phi}(t) \\ \underline{r}(t_0) \leq r(t_0) \leq \overline{r}(t_0) \end{cases} \quad (1.138)$$

où $\bar{\phi}(t) = P^+\bar{w}(t) - P^-\underline{w}(t)$ et $\phi(t) = P^+\underline{w}(t) - P^-\bar{w}(t)$.

Les dynamiques des erreurs d'observation $\bar{e}_r(t) = \bar{r}(t) - r(t)$ et $\underline{e}_r(t) = r(t) - \underline{r}(t)$ sont alors données par

$$\dot{\bar{e}}_r(t) = P(A - LC)P^{-1}\bar{e}_r(t) + \bar{\phi}(t) - \phi(t), \quad (1.139)$$

$$\dot{\underline{e}}_r(t) = P(A - LC)P^{-1}\underline{e}_r(t) + \phi(t) - \underline{\phi}(t), \quad (1.140)$$

où $\phi(t) = Pw(t)$. L'application du Lemme 1.5 sur $Pw(t)$ garantit que l'inégalité $\underline{\phi}(t) \leq \phi(t) \leq \bar{\phi}(t)$ est toujours vraie. Sous la contrainte d'un gain $L \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ et d'une matrice de changement de base $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que la matrice $P(A - LC)P^{-1}$ soit Hurwitz et Metzler, et sous les conditions initiales $\underline{r}(t_0) \leq r(t_0) \leq \bar{r}(t_0)$, alors il vient, d'après le Théorème 1.6, que les erreurs d'observation vérifient $\bar{e}_r(t) \geq 0$ et $\underline{e}_r(t) \geq 0$ pour tout $t \geq t_0$. Ainsi, l'état r du système (1.137) appartient à l'intervalle $[\underline{r}(t), \bar{r}(t)]$, $\forall t \geq t_0$. Finalement, l'application du Lemme 1.5 sur le changement de base $x(t) = P^{-1}r(t)$ permet de déduire un encadrement dans la base d'origine x du système (1.136)

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t), \quad (1.141)$$

où $\underline{x}(t) = M^+\underline{r}(t) - M^-\bar{r}(t)$ et $\bar{x}(t) = M^+\bar{r}(t) - M^-\underline{r}(t)$ avec $M = P^{-1}$.

Contrairement à l'approche présentée dans la partie 1.5.2, la démarche repose maintenant sur le choix approprié du changement de base (invariant dans le temps) P et du gain L tels que les erreurs d'observation soient stables et coopératives.

1.6.2.2.1 Solution par placement de pôles et diagonalisation

Nous présentons dans ce paragraphe une méthode simple, basée sur l'utilisation des techniques de placement de pôles qui permet de déterminer les matrices L et P .

En supposant que la paire (A, C) est observable, il existe alors un gain L tel que la matrice $A - LC$ soit diagonalisable et Hurwitz avec des pôles réels. Par conséquent, il existe une transformation de coordonnées P qui diagonalise la matrice $A - LC$ dans la nouvelle base. Une matrice diagonale satisfaisant les propriétés d'une matrice Metzler, il vient que la matrice $P(A - LC)P^{-1}$ est Hurwitz et Metzler.

L'hypothèse d'observabilité de la paire (A, C) peut être relaxée en considérant qu'elle est détectable et que la matrice $A - LC$ conserve les mêmes contraintes que celles précédemment données. Cette approche, bien que très simple, s'avère restrictive, puisque le cas des pôles complexes conjugués n'est pas traité. Les approches suivantes permettent de palier ce problème.

1.6.2.2.2 Solution par résolution d'une équation de Sylvester

Les travaux présentés dans [147] proposent une méthode moins restrictive que celle par placement de pôles et diagonalisation. Nous rappelons ici les étapes clés de cette approche.

La matrice P étant non singulière alors l'égalité matricielle $N = P(A - LC)P^{-1}$ est équivalente à la forme :

$$PA - NP = QC, \quad Q = PL. \quad (1.142)$$

En fixant la matrice Q et en choisissant N Hurwitz et Metzler, alors l'équation (1.142) est une équation de Sylvester dont l'inconnue à déterminer est la matrice P . Lorsque les matrices A et N ne partagent aucune valeur propre, alors la solution est unique pour tout Q . La solution d'une équation de Sylvester peut être obtenue en utilisant, par exemple, les travaux de [18, 78].

Le lemme suivant donne la solution au problème dans le cas contraire (non unicité de la solution P).

Lemme 1.9 (Lemme 1 dans [147]). *Soient une matrice $A - LC$ et une matrice Metzler N ayant les mêmes valeurs propres pour une matrice donnée L . S'il existe deux vecteurs v_1 et v_2 tels que les paires $(A - LC, v_1)$ et (N, v_2) sont observables alors*

$$P = O_2^{-1}O_1 \text{ et } Q = PL,$$

satisfait l'équation de Sylvester (1.142) avec :

$$O_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_1(A - LC)^{n-1} \end{bmatrix}, \quad O_2 = \begin{bmatrix} v_2 \\ \vdots \\ v_2N^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (1.143)$$

Démonstration. Étant donné que les paires $(A - LC, v_1)$ et (N, v_2) sont observables alors les matrices O_1 et O_2 sont non singulières. De plus, les transformations O_1 et O_2 transforment les matrices $A - LC$ et N sous leurs formes canoniques observables. On a alors :

$$O_1(A - LC)O_1^{-1} = O_2NO_2^{-1}. \quad (1.144)$$

En remplaçant la matrice N par son expression $P(A - LC)P^{-1}$ alors, par identification, nous obtenons l'égalité $P = O_2^{-1}O_1$. ■

1.6.2.2.3 Résolution par optimisation non lisse

Les approches précédentes donnent un moyen de déterminer les matrices L et P de l'observateur intervalle (1.138), mais malheureusement, aucune contrainte de performance n'est formulée dans la procédure de synthèse. Pour palier ce problème, les auteurs des publications [35, 36] proposent de formuler le problème, comme un problème d'optimisation non lisse. L'idée consiste à déterminer conjointement les matrices P et L , tout en satisfaisant un critère de performance relatif à la largeur de l'intervalle, au sens des normes \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ . Nous proposons ici d'explicitier le principe de cette approche.

Considérons la proposition suivante :

Proposition 1.1 (Proposition 1 dans [36]). *Soit la paire (A, C) détectable et deux matrices $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ telles que :*

$$m_{ij}(P, L) = \left[P(A - LC)P^{-1} \right]_{ij}. \quad (1.145)$$

Si le système décrit par

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = (A - LC)x_a(t) \\ \dot{x}_{ij}(t) = -m_{ij}(P, L)x_{ij}(t), \quad i \neq j \end{cases} \quad (1.146)$$

est stable pour des matrices P et L alors $P(A - LC)P^{-1}$ est Hurwitz et Metzler.

La Proposition 1.1 transforme le problème initial en un problème de stabilisation de systèmes autonomes dont la matrice d'état est donnée par $-m_{ij}(P, L) \in \mathbb{R}$. Cette reformulation du problème peut être couplée avec des contraintes de performance telles que minimiser l'influence des perturbations sur les erreurs d'observation $\bar{e}_r(t)$ et $\underline{e}_r(t)$, au sens des normes \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ . Le problème se formule alors ainsi :

Problème 1.1 (Problème 4.1 dans [35]). *Soit une collection de systèmes LTI dépendant de paramètres réglable $p \in \Xi$ et de vecteurs $w_i, z_i \in \mathbb{R}^{n_a+b_b}$, $i \in \{1, \dots, n_a + n_b\}$, $n_a, n_b \in \mathbb{R}_+$ représentant les vecteurs d'entrée et de sortie de synthèse. Le problème consiste à trouver $p \in \Xi$ tel que*

$$\min_{p \in \Xi} \max_{i=\{1, \dots, n_a\}} \|G_{w_i \rightarrow z_i}\|_{2/\infty}, \quad (1.147)$$

sous les contraintes $\|G_{w_j \rightarrow z_j}\|_{2/\infty} < 1$, $j = \{1, \dots, n_b\}$.

Les fonctions $f_k(\omega) = \|G_{w_i \rightarrow z_i}\|_k$, $k = 2, \infty$ étant des fonctions non-lisses, les techniques d'optimisation non-lisse proposées dans [9, 10, 30] sont utilisables afin de résoudre le problème. Le lecteur pourra se référer à l'Annexe A pour la définition mathématique de ces normes matricielles.

1.6.2.3 Approche par changement de coordonnées variant dans le temps

Les approches précédentes sont basées sur l'utilisation d'un changement de base stationnaire (c'est à dire P est invariant dans le temps), ce qui peut limiter l'existence de solutions dans certains cas. Pour relaxer cette contrainte, l'idée consiste à utiliser un changement de base (non singulier) variant dans le temps $P(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tel que $r(t) = P(t)x(t)$. L'équation (1.136) s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = (P(t)AP(t)^{-1} + \dot{P}(t)P(t)^{-1})r(t) + P(t)w(t) \\ y(t) = CP(t)^{-1}r(t) \end{cases} \quad (1.148)$$

La démarche est alors très similaire au cas précédent, puisqu'elle repose sur l'observateur intervalle donné par

$$\begin{cases} \dot{\bar{r}}(t) = (P(t)AP(t)^{-1} + \dot{P}(t)P(t)^{-1})\bar{r}(t) + P(t)L(y(t) - CP(t)^{-1}\bar{r}(t)) + \bar{\phi}(t) \\ \dot{\underline{r}}(t) = (P(t)AP(t)^{-1} + \dot{P}(t)P(t)^{-1})\underline{r}(t) + P(t)L(y(t) - CP(t)^{-1}\underline{r}(t)) + \underline{\phi}(t) \\ \underline{r}(t_0) \leq r(t_0) \leq \bar{r}(t_0) \end{cases} \quad (1.149)$$

où $\bar{\phi}(t) = P(t)^+\bar{w}(t) - P(t)^-\underline{w}(t)$ et $\underline{\phi}(t) = P(t)^+\underline{w}(t) - P(t)^-\bar{w}(t)$.

Les dynamiques des erreurs d'observation $\bar{e}_r(t) = \bar{r}(t) - r(t)$ et $\underline{e}_r(t) = r(t) - \underline{r}(t)$ sont alors données par

$$\dot{\bar{e}}_r(t) = \aleph(t)\bar{e}_r(t) + \bar{\phi}(t) - \phi(t), \quad (1.150)$$

$$\dot{\underline{e}}_r(t) = \aleph(t)\underline{e}_r(t) + \phi(t) - \underline{\phi}(t), \quad (1.151)$$

où $\aleph(t) = P(t)(A - LC)P(t)^{-1} + \dot{P}(t)P(t)^{-1}$ et $\phi(t) = P(t)w(t)$.

L'application du Lemme 1.5 sur $P(t)w(t)$ garantie que l'inégalité $\underline{\phi}(t) \leq \phi(t) \leq \bar{\phi}(t)$ est toujours vraie. Sous la contrainte d'un gain $L \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ et d'un changement de base $P(t) \in$

$\mathbb{R}^{n \times n}$ tels que la matrice $P(t) (A - LC) P(t)^{-1} + \dot{P}(t)P(t)^{-1}$ soit Hurwitz et Metzler, et sous les conditions initiales $\underline{r}(t_0) \leq r(t_0) \leq \bar{r}(t_0)$, s'ensuit, d'après le Théorème 1.6, que les erreurs d'observation vérifient $\bar{e}_r(t) \geq 0$ et $e_r(t) \geq 0, \forall t \geq t_0$. Ainsi, l'état r du système (1.148) appartient à l'intervalle $[\underline{r}(t), \bar{r}(t)]$, $\forall t \geq t_0$. L'application du Lemme 1.5 sur le changement de base $x(t) = P(t)^{-1}r(t)$ permet de déduire un encadrement dans la base d'origine x du système (1.136)

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t), \quad (1.152)$$

où $\underline{x}(t) = M(t)^+\underline{r}(t) - M(t)^-\bar{r}(t)$ et $\bar{x}(t) = M(t)^+\bar{r}(t) - M(t)^-\underline{r}(t)$ avec $M(t) = P(t)^{-1}$.

La difficulté réside ici dans la détermination du changement de base $P(t)$. La solution proposée dans [120, 121] permet de résoudre ce problème. Elle repose sur la détermination de $P(t)$ telle que la matrice \aleph soit Hurwitz, Metzler et invariante dans le temps. La procédure de transformation est basée sur le fait que toute matrice réelle peut être transformée sous la forme canonique de Jordan. Cette procédure est présentée dans le théorème suivant.

Théorème 1.8 (Théorème 2 dans [121]). *Soit le système décrit par*

$$\dot{x}(t) = (A - LC)x(t), \quad (1.153)$$

où le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ et la matrice $(A - LC) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est constante et Hurwitz.

Il existe alors un changement de base variant dans le temps $r(t) = P(t)x(t)$ où P est une fonction matricielle dont les éléments sont de classe C^∞ et bornés en norme \mathcal{L}_∞ transformant le système (1.153) en un système LTI coopératif et exponentiellement stable.

Démonstration. La détermination de la matrice P est organisée en trois étapes. La première étape consiste à transformer la matrice $A - LC$ dans sa forme canonique de Jordan. Pour cela, un simple changement de base stationnaire \mathcal{P} est utilisé. Le système (1.153) s'écrit alors

$$\dot{\zeta} = J\zeta, \quad (1.154)$$

où

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & J_s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

tel que les matrices $J_i, i \in \{1, \dots, s\}$ sont partitionnées en deux groupes. Les r premières matrices J_i sont associées aux r valeurs propres réelles de $A - LC$ de multiplicité n_i , les autres matrices sont associées aux valeurs propres complexes de $A - LC$ de multiplicité m_i , c'est à dire :

- pour $i \in \{1, \dots, r\}$ alors

$$J_i = \begin{bmatrix} -\mu_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -\mu_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -\mu_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, \quad (1.155)$$

où les μ_i sont des nombres réels positifs.

- pour $i \in \{r + 1, \dots, s\}$ alors

$$J_i = \begin{bmatrix} -A_i & I_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -A_i & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & I_2 \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & -A_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m_i \times 2m_i} \quad \text{avec} \quad \Lambda_i = \begin{bmatrix} -\kappa_i & \omega_i \\ -\omega_i & -\kappa_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad (1.156)$$

où les κ_i sont des nombres réels positifs et les ω_i sont des nombres réels non nuls.

Notons ici que les éléments μ_i et κ_i sont des nombres réels positifs. Il s'agit d'une conséquence directe du fait que la matrice $A - LC$ du système (1.153) est Hurwitz. Par ailleurs, lorsque la matrice $A - LC$ possède uniquement des valeurs propres réelles ($n = \sum_{i=1}^r n_i$) alors le changement de coordonnées LTI décrit par la transformation $\zeta = \mathcal{P}x$ transforme le système (1.153) en un système coopératif. Cependant, cette transformation n'est pas suffisante en présence de valeurs propres complexes puisque les termes $-\omega_i$ sont présents hors de la diagonale. De manière générale, il est démontré dans [120] qu'il n'existe pas de changement de coordonnées invariant dans le temps qui transforme le système (1.154) en un système coopératif dans la nouvelle base. Toutefois, il est démontré, dans le même article, que la propriété de coopérativité peut être obtenue en appliquant un changement de coordonnées variant dans le temps. En effet, le changement de base suivant

$$r_i(t) = \mathcal{N}_i(t)\zeta_i(t), \quad (1.157)$$

où

$$\mathcal{N}_i(t) = \begin{bmatrix} \varpi_i(t) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \varpi_i(t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \varpi_i(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m_i \times 2m_i}, \quad (1.158)$$

avec

$$\varpi_i = \begin{bmatrix} \cos(\omega_i t) & -\sin(\omega_i t) \\ \sin(\omega_i t) & \cos(\omega_i t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad (1.159)$$

transforme le système

$$\dot{\zeta}_i(t) = \begin{bmatrix} -A_i & I_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -A_i & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & I_2 \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & -A_i \end{bmatrix} \zeta_i(t), \quad (1.160)$$

en

$$\dot{r}_i(t) = \mathcal{M}_i r_i(t), \quad (1.161)$$

où :

$$\mathcal{M}_i = \begin{bmatrix} -\kappa_i I_2 & I_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\kappa_i I_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & I_2 \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & -\kappa_i I_2 \end{bmatrix}. \quad (1.162)$$

En suivant ce raisonnement, tous les systèmes LTI (1.154) possédant des valeurs propres réelles et complexes peuvent être transformés en systèmes coopératifs décrits par

$$\dot{r}(t) = \aleph r(t), \quad (1.163)$$

avec

$$\aleph = \begin{bmatrix} G & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{M}_{r+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathcal{M}_s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (1.164)$$

telle que pour $q = \sum_{i=1}^r n_i, \forall j \in \{r+1, \dots, s\}$,

$$G = \begin{bmatrix} J_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & J_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q \times q}, \quad \mathcal{M}_j = \begin{bmatrix} -\kappa_j I_2 & I_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\kappa_j I_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & \ddots & I_2 \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & -\kappa_j I_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m_j \times 2m_j}. \quad (1.165)$$

Ce changement de base est donné par $r = \eta(t)\mathcal{P}x$ où la matrice \mathcal{P} est la matrice permettant de transformer le système (1.153) sous la forme canonique de Jordan (1.154) et où $\eta(t)$ est donné par

$$\eta(t) = \begin{bmatrix} I_q & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{N}_{r+1}(t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathcal{N}_s(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (1.166)$$

tel que, pour $j \in \{r+1, \dots, s\}$,

$$\mathcal{N}_j(t) = \begin{bmatrix} \varpi_j(t) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \varpi_j(t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \varpi_j(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m_j \times 2m_j}, \quad (1.167)$$

avec :

$$\varpi_j = \begin{bmatrix} \cos(\omega_j t) & -\sin(\omega_j t) \\ \sin(\omega_j t) & \cos(\omega_j t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}. \quad (1.168)$$

■

Pour résumer le théorème et ce qu'il démontre, tout système LTI stable peut être transformé en un système LTI coopératif par un changement de coordonnées invariant dans le temps lorsque toutes les valeurs propres de la matrice $(A - LC)$ sont réelles. Dans le cas contraire, un changement de coordonnées supplémentaire et variant dans le temps est nécessaire pour obtenir la forme coopérative.

1.6.3 Approche par une structure TNL sous critère de norme \mathcal{H}_∞

Une approche alternative aux précédentes et prometteuse est la conception d'un observateur TNL telle que proposée dans [179]. Cette approche inclut deux paramètres de conception supplémentaires T et N en plus du gain de l'observateur L . Elle offre donc plus de degrés de liberté de conception. En outre, elle inclut une technique \mathcal{H}_∞ pour réduire l'influence des perturbations et du bruit de mesure limité sur les variables d'état estimées. L'approche est basée sur des LMIs, qui sont conçues de manière à garantir la stabilité des erreurs d'estimation.

1.6.3.1 Préliminaires

Commençons par rappeler les principaux lemmes.

Lemme 1.10. ([180]). *Étant données les matrices $X \in \mathbb{R}^{a \times b}, Y \in \mathbb{R}^{b \times c}, Z \in \mathbb{R}^{a \times c}$ avec $\text{rang}(Y) = c$. La solution générale de l'équation $XY = Z$ est la suivante*

$$X = ZY^\dagger + S(I - YY^\dagger), \quad (1.169)$$

où $S \in \mathbb{R}^{a \times b}$ est une matrice arbitraire.

Lemme 1.11. ([61]). *Toute solution du système perturbé discret*

$$x_{k+1} = Ax_k + w_k, \quad (1.170)$$

avec $w_k \in \mathbb{R}_+^{n_w}$ et une matrice non négative $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, est positif élément par élément pour tout $k \geq 0$, pourvu que $x_0 \geq 0$.

Lemme 1.12. ([184]). *Soit un scalaire $\gamma_{\mathcal{H}_\infty} > 0$. Le système à temps discret suivant*

$$\begin{cases} x_{k+1} = \check{A}x_k + \check{B}w_k \\ z_k = \check{C}x_k + \check{D}w_k \end{cases} \quad (1.171)$$

est stable et satisfait un critère de performance \mathcal{H}_∞ inférieur à $\gamma_{\mathcal{H}_\infty}$, si et seulement il existe une matrice $P \succ 0$, telle que :

$$\begin{bmatrix} \check{A}^T P \check{A} + \check{C}^T \check{C} - P & \check{A}^T P \check{B} + \check{C}^T \check{D} \\ * & \check{B}^T P \check{B} + \check{D}^T \check{D} - \gamma_{\mathcal{H}_\infty}^2 I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (1.172)$$

Remarque 1.1. De manière similaire, le Lemme 1.11 équivaut au Théorème 1.6, et le Lemme 1.12 correspond au lemme réel borné [24] dans le contexte des systèmes à temps discret.

1.6.3.2 Formulation du problème

Soit le système discret décrit par

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bw_k \\ y_k = Cx_k + v_k \end{cases} \quad (1.173)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$, $v \in \mathbb{R}^{n_y}$ représentent, de manière respective, l'état du système, les sorties mesurées, la perturbation inconnue et le bruit de mesure, tandis que A, B et C sont des matrices constantes de dimensions appropriées. On suppose que l'état initial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est borné et que la perturbation w_k et le bruit de mesure v_k sont bornés avec des bornes connues *a priori* comme suit :

$$\underline{w} \leq w_k \leq \bar{w} \in \mathbb{R}^{n_w}, \quad \underline{v} \leq v_k \leq \bar{v} \in \mathbb{R}^{n_y}. \quad (1.174)$$

L'objectif consiste à déterminer les bornes inférieure et supérieure de l'état du système (1.173) en utilisant un observateur intervalle donné par

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = (TA - LC)\bar{x}_k + Ly_k + Ny_{k+1} + \bar{\delta} \\ \underline{x}_{k+1} = (TA - LC)\underline{x}_k + Ly_k + Ny_{k+1} + \underline{\delta} \end{cases} \quad (1.175)$$

où :

$$\bar{\delta} = (TB)^+\bar{w} - (TB)^-\underline{w} + [L^+ + N^+]\bar{v} - [L^- + N^-]\underline{v}, \quad (1.176)$$

$$\underline{\delta} = (TB)^+\underline{w} - (TB)^-\bar{w} - [L^- + N^-]\bar{v} + [L^+ + N^+]\underline{v}. \quad (1.177)$$

Les paramètres de l'observateur intervalle à concevoir sont le gain $L \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ et les matrices $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $N \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$, avec T et N satisfaisant :

$$T + NC = I_n. \quad (1.178)$$

En définissant les erreurs d'estimation $\bar{e}_k = \bar{x}_k - x_k$ et $\underline{e}_k = \underline{x}_k - x_k$, il peut être vérifié que les dynamiques de \bar{e} et \underline{e} sont définies par

$$\begin{cases} \bar{e}_{k+1} = \underbrace{(TA - LC)}_{T_{ALC}} \bar{e}_k + \underbrace{[I_n \ L \ N]}_{E_d} \bar{\omega}_k \\ \underline{e}_{k+1} = (TA - LC)\underline{e}_k + [I_n \ L \ N]\underline{\omega}_k \end{cases} \quad (1.179)$$

où :

$$\bar{\omega}_k = \begin{bmatrix} \bar{\delta} - TBw_k \\ v_k \\ v_{k+1} \end{bmatrix}, \quad \underline{\omega}_k = \begin{bmatrix} \underline{\delta} - TBw_k \\ v_k \\ v_{k+1} \end{bmatrix}. \quad (1.180)$$

Dans [179], les auteurs proposent de concevoir les matrices L , T et N selon les conditions suivantes :

- (i) les erreurs \bar{e}_k et \underline{e}_k sont toutes deux asymptotiquement stables au sens de Schur,
- (ii) la condition de préservation de l'ordre est satisfaite, i.e $\bar{e}_k, \underline{e}_k \geq 0$,
- (iii) les erreurs \bar{e}_k et \underline{e}_k sont robustes face à $\bar{\omega}_k$ et $\underline{\omega}_k$, respectivement, dans le sens de la norme \mathcal{H}_∞ .

Dans la conception de l'observateur intervalle (1.175), nous savons d'après (1.179) que les matrices T, N et L doivent être conçues de manière à ce que $TA - LC$ soit à la fois stable et non négative. En réalité, en introduisant les matrices T et N , l'observateur proposé dans (1.175) présente deux avantages. Tout d'abord, il offre une solution lorsque nous ne pouvons pas trouver de matrice L telle que $A - LC$ soit une matrice non négative et stable (au sens de Schur). Deuxièmement, les degrés de liberté de conception supplémentaires facilités par l'introduction de T et N peuvent être utilisés pour obtenir de meilleures performances. Cela conduit au théorème suivant.

Théorème 1.9. ([179]). Soit $T + NC = I_n$. Pour un scalaire donné $\gamma_{\mathcal{H}_\infty} > 0$, l'observateur par intervalle (1.175) existe s'il existe une matrice diagonale $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et des matrices $X \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ et $Z \in \mathbb{R}^{n \times (n+n_y)}$ satisfaisant les contraintes suivantes

$$M_1 = P\Theta^\dagger\beta_1A + Z\Phi\beta_1A - XC \geq 0, \quad (1.181)$$

$$\begin{bmatrix} -P + I_n & * & * & * & * \\ 0 & -\gamma_{\mathcal{H}_\infty}^2 I_n & * & * & * \\ 0 & * & -\gamma_{\mathcal{H}_\infty}^2 I_{n_y} & * & * \\ 0 & * & * & -\gamma_{\mathcal{H}_\infty}^2 I_{n_y} & * \\ M_1 & P & X & M_2 & -P \end{bmatrix} \prec 0, \quad (1.182)$$

où :

$$\Theta = \begin{bmatrix} I_n \\ C \end{bmatrix}, \Phi = I_{n+n_y} - \Theta\Theta^\dagger, \beta_1 = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_y} \end{bmatrix}, \quad (1.183)$$

$$M_2 = P\Theta^\dagger\beta_2 + Z\Phi\beta_2. \quad (1.184)$$

Alors les matrices T et N et le gain de l'observateur L sont donnés par :

$$T = \Theta^\dagger\beta_1 + P^{-1}Z\Phi\beta_1, \quad (1.185)$$

$$N = \Theta^\dagger\beta_2 + P^{-1}Z\Phi\beta_2, \quad (1.186)$$

$$L = P^{-1}X. \quad (1.187)$$

Les erreurs \bar{e}_k et \underline{e}_k sont toutes deux asymptotiquement stables et les normes \mathcal{H}_∞ des transferts $\|G_{\bar{w} \rightarrow \bar{e}}\|_\infty$ et $\|G_{\underline{w} \rightarrow \underline{e}}\|_\infty$ sont toutes deux inférieures ou égales à $\gamma_{\mathcal{H}_\infty}$. Où $G_{\bar{w} \rightarrow \bar{e}}(s) = G_{\underline{w} \rightarrow \underline{e}}(s) = (sI - T_{ALC})^{-1}E_d$.

Démonstration. Si les matrices T et N satisfont (1.178), alors l'observateur (1.175) cède à la dynamique d'erreur dans (1.179). En appliquant le Lemme 1.10 à (1.178), on sait que la solution de (1.178) est

$$\begin{bmatrix} T & N \end{bmatrix} = \Theta^\dagger + S(I_{n+n_y} - \Theta\Theta^\dagger), \quad (1.188)$$

où $S \in \mathbb{R}^{n \times (n+n_y)}$ est une matrice librement choisie. Il s'ensuit que T et N satisfaisant (1.178) peuvent être déterminées par :

$$T = \Theta^\dagger\beta_1 + S\Phi\beta_1, \quad (1.189)$$

$$N = \Theta^\dagger\beta_2 + S\Phi\beta_2. \quad (1.190)$$

Où S est une matrice à concevoir. Il est à noter que $P \succ 0$ indique que $P > 0$ puisqu'il s'agit d'une matrice diagonale. Par conséquent, $TA - LC \geq 0$ est vraie si :

$$P(TA - LC) \geq 0. \quad (1.191)$$

La substitution de (1.189) dans (1.191) donne :

$$P\Theta^\dagger\beta_1A + PS\Phi\beta_1A - PLC \geq 0. \quad (1.192)$$

En posant

$$(TA - LC) \rightarrow \check{A}, E_d \rightarrow \check{B}, I_n \rightarrow \check{C}, 0 \rightarrow \check{D}, \quad (1.193)$$

et en appliquant le Lemme 1.12 à (1.179), on sait que le système d'erreur est stable et vérifie que $\|G_{\bar{\omega} \rightarrow \bar{e}}\|_\infty$ et $\|G_{\underline{\omega} \rightarrow \underline{e}}\|_\infty$ sont inférieurs à $\gamma_{\mathcal{H}_\infty}$, s'il existe une matrice symétrique $P \succ 0$ et une matrice L telles que :

$$\begin{bmatrix} (TA - LC)^T P (TA - LC) + I_n & (TA - LC)^T P E_d \\ \star & E_d^T P E_d - \gamma_{\mathcal{H}_\infty}^2 I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (1.194)$$

En utilisant le complément de Schur, présenté dans le Lemme B.1, l'inégalité (1.194) est équivalente à :

$$\begin{bmatrix} -P + I_n & \star & \star & \star & \star \\ 0 & -\gamma_{\mathcal{H}_\infty}^2 I_n & \star & \star & \star \\ 0 & \star & -\gamma_{\mathcal{H}_\infty}^2 I_{n_y} & \star & \star \\ 0 & \star & \star & -\gamma_{\mathcal{H}_\infty}^2 I_{n_y} & \star \\ P(TA - LC) & P & PL & PN & -P \end{bmatrix} \prec 0. \quad (1.195)$$

Il s'ensuit que (1.179) est stable et satisfait un critère de performance \mathcal{H}_∞ si $P \succ 0$ et (1.195) sont vérifiées. Ainsi, remplacer (1.189) dans (1.195), donne

$$\begin{bmatrix} -P + I_n & \star & \star & \star & \star \\ 0 & -\gamma_{\mathcal{H}_\infty}^2 I_n & \star & \star & \star \\ 0 & \star & -\gamma_{\mathcal{H}_\infty}^2 I_{n_y} & \star & \star \\ 0 & \star & \star & -\gamma_{\mathcal{H}_\infty}^2 I_{n_y} & \star \\ m_1 & P & PL & m_2 & -P \end{bmatrix} \prec 0, \quad (1.196)$$

où

$$m_1 = P\Theta^\dagger \beta_1 A + PS\Phi \beta_1 A - PLC, \quad (1.197)$$

$$m_2 = P\Theta^\dagger \beta_2 + PS\Phi \beta_2. \quad (1.198)$$

Notons que les inégalités (1.192) et (1.196) sont non linéaires en raison de la présence des produits PL et PS . En posant les changements de variables suivants

$$Z = PS, \quad X = PL, \quad (1.199)$$

et en remplaçant Z et X dans (1.192) et (1.196), on obtient (1.181) et (1.182). Nous pouvons conclure que (1.179) est un système monotone stable et satisfait un critère de performance \mathcal{H}_∞ si les inégalités de (1.181)-(1.182) sont vérifiées. Enfin, si (1.181)-(1.182) sont résolues, les matrices S et L peuvent être déterminées à partir de :

$$S = P^{-1}Z, \quad (1.200)$$

$$L = P^{-1}X. \quad (1.201)$$

En remplaçant (1.200) dans (1.189) et (1.190), on obtient (1.185) et (1.186). Ceci termine la preuve. \blacksquare

Comparativement aux méthodes préexistantes, l'observateur intervalle exposé dans l'étude [179] offre une plus grande flexibilité en termes de conception, autorisant une optimisation pour accroître la précision de l'estimation. De plus, cette approche intègre un critère de performance \mathcal{H}_∞ visant à minimiser les effets des perturbations et du bruit sur les demi-enveloppes d'estimation. Cependant, il est important de noter que cette méthode est exclusivement applicable aux systèmes à temps discret. Plus récemment, cette méthodologie a été étendue en utilisant un critère d'amplitude (norme \mathcal{H}_1) pour élaborer des observateurs intervalles adaptés aux systèmes linéaires à paramètres variables en temps continu, comme exposé dans l'ouvrage de [113], ainsi que pour les systèmes commutés selon [187].

1.6.4 Approche sous contrainte de norme \mathcal{H}_1

Dans cette section, nous examinons les approches centrées sur la norme \mathcal{H}_1 , qui impliquent des restrictions de robustesse liées à "l'amplitude maximale". De plus en plus de travaux émergent dans ce cadre. Nous abordons ici ceux présentés dans [4], où les auteurs décrivent une méthodologie d'observateurs intervalles fonctionnels pour des systèmes linéaires invariants dans le temps (LTI) discrets, confrontés à des perturbations méconnues mais bornées. Deux stratégies sont élaborées, se basant respectivement sur les performances \mathcal{H}_∞ et \mathcal{H}_1 , dans le but de minimiser l'influence des incertitudes sur les demi-enveloppes. Nous mettrons particulièrement en avant l'approche fondée sur le critère de performance \mathcal{H}_1 .

1.6.4.1 Formulation du problème

Soit le modèle discret

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Fw_k \\ y_k = Cx_k \\ z_k = Lx_k \end{cases} \quad (1.202)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ représentent, de manière respective, l'état du système, la commande d'entrée, les sorties mesurées, la perturbation inconnue et le signal qu'on souhaite estimer. A, B, F, C et L sont des matrices constantes de dimensions appropriées. Les hypothèses suivantes sont utilisées dans cet article.

Hypothèse 1.4. Il existe des fonctions connues \underline{w}_k et \bar{w}_k telles que pour tout $k \geq 0$:

$$\underline{w}_k \leq w_k \leq \bar{w}_k. \quad (1.203)$$

Hypothèse 1.5. On suppose que $\text{rang}(C) = n_y$ et $\text{rang}(L) = n_z$.

L'objectif consiste à déterminer les bornes inférieure et supérieure de l'état z_k du système (1.202) en utilisant un observateur intervalle donné par

$$\begin{cases} \bar{g}_{k+1} = D\bar{g}_k + Jy_k + Hu_k + \bar{\delta}_k \\ \underline{g}_{k+1} = D\underline{g}_k + Jy_k + Hu_k + \underline{\delta}_k \\ \bar{z}_k = S^+\bar{g}_k - S^-\underline{g}_k + Ny_k \\ \underline{z}_k = S^+\underline{g}_k - S^-\bar{g}_k + Ny_k \end{cases} \quad (1.204)$$

avec

$$\begin{cases} \bar{\delta}_k = (LF)^+ \bar{w}_k - (LF)^- \underline{w}_k \\ \underline{\delta}_k = (LF)^+ \underline{w}_k - (LF)^- \bar{w}_k \end{cases} \quad (1.205)$$

et où $\bar{g}_k, \underline{g}_k \in \mathbb{R}^n$. La matrice $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est non négative et stable au sens de Schur. $J \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ est une matrice non singulière et les gains de l'observateur $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $H \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $S \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$ et $N \in \mathbb{R}^{n_z \times n_y}$ sont des matrices constantes à concevoir.

L'objectif de l'observateur intervalle fonctionnel proposé (1.204) est de calculer le gain de l'observateur D qui minimise la norme \mathcal{H}_1 . Les conditions d'existence de l'observateur (1.204) sont données dans le théorème suivant.

Théorème 1.10. ([4]). *Soit les Hypothèses 1.4 et 1.5, les sorties $\bar{z}_k, \underline{z}_k$ de (1.204) satisfont, pour tout $k \geq 0$*

$$\bar{z}_k \leq z_k \leq \underline{z}_k, \quad (1.206)$$

si les matrices D, J, H, L, S et N satisfont les conditions suivantes

$$DL + JC - LA = 0, \quad (1.207)$$

$$H - LB = 0, \quad (1.208)$$

$$SL + NC - L = 0, \quad (1.209)$$

et D est une matrice de Schur stable et positive à calculer et $\bar{z}_0, \underline{z}_0$ sont choisis telles que $\bar{z}_0 \leq z_0 \leq \underline{z}_0$.

Démonstration. ([4]). Soient les erreurs d'observation supérieure et inférieure définies respectivement par : $\bar{e}_k = \bar{g}_k - Lx_k, \underline{e}_k = Lx_k - \underline{g}_k$ qui représentent les bornes des erreurs de reconstruction de l'observateur. Il en découle que :

$$\bar{e}_{k+1} = D(\bar{g}_k - Lx_k) + (DL + JC - LA)x_k + (H - LB)u_k + \bar{\delta}_k - LFw_k, \quad (1.210)$$

$$\underline{e}_{k+1} = D(Lx_k - \underline{g}_k) - (DL + JC - LA)x_k - (H - LB)u_k - \underline{\delta}_k + LFw_k. \quad (1.211)$$

En remplaçant (1.207) et (1.208) dans (1.210)-(1.211), il s'ensuit que

$$\bar{e}_{k+1} = D\bar{e}_k + \bar{\Psi}_k, \quad (1.212)$$

$$\underline{e}_{k+1} = D\underline{e}_k + \underline{\Psi}_k, \quad (1.213)$$

où $\bar{\Psi}_k = \bar{\delta}_k - LFw_k$ et $\underline{\Psi}_k = LFw_k - \underline{\delta}_k$.

Soient les erreurs d'observation $\bar{e}_{z_k} = \bar{z}_k - z_k$ et $\underline{e}_{z_k} = z_k - \underline{z}_k$. Il en découle que :

$$\bar{e}_{z_k} = S^+ \bar{e}_k + S^- \underline{e}_k, \quad (1.214)$$

$$\underline{e}_{z_k} = S^+ \underline{e}_k + S^- \bar{e}_k. \quad (1.215)$$

Les conditions sont notées comme suit :

$$\bar{g}_0 = \bar{L}\bar{x}_0 - \underline{L}x_0, \quad \underline{g}_0 = \bar{L}x_0 - \underline{L}\bar{x}_0. \quad (1.216)$$

D'après le Lemme 1.5, on a :

$$\underline{g}_0 \leq Lx \leq \bar{g}_0. \quad (1.217)$$

Ainsi, nous pouvons obtenir :

$$\bar{e}_0 = \bar{g}_0 - Lx_0 \geq 0, \quad e_0 = Lx_0 - \underline{g}_0 \geq 0. \quad (1.218)$$

Sous l'Hypothèse 1.4 et le Lemme 1.5, nous avons :

$$\underline{\delta}_k \leq LFw_k \leq \bar{\delta}_k. \quad (1.219)$$

Ainsi, nous pouvons obtenir $\bar{\Psi}_k \geq 0$ et $\underline{\Psi}_k \geq 0$. Étant donné que D est une matrice stable (au sens de Schur) et non négative, alors avec $\bar{\Psi}_k, \underline{\Psi}_k \geq 0$, nous avons bien $\underline{e}_k, \bar{e}_k \geq 0$. Ainsi, à partir de (1.214)-(1.215) nous avons aussi $\underline{e}_{z_k}, \bar{e}_{z_k} \geq 0$. En fin de compte, nous obtenons :

$$\bar{z}_k \leq z_k \leq \underline{z}_k. \quad (1.220)$$

■

1.6.4.2 Résolution du problème de stabilité et performance \mathcal{H}_1

Pour étudier la stabilité de l'observateur (1.204), les auteurs de [4] proposent un état augmenté défini par $e_k = [\bar{e}_k^T \quad \underline{e}_k^T]^T$. Le système augmenté correspondant peut être représenté par

$$e_{k+1} = \mathbf{D}e_k + \mathbf{G}\Sigma_k \quad (1.221)$$

où

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = [\bar{G} \quad \underline{G}]^T, \quad \Sigma_k = [\bar{\Sigma}_k^T \quad \underline{\Sigma}_k^T]^T, \quad (1.222)$$

avec :

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} I_{n \times n_w} \\ -LF \end{bmatrix}, \quad \underline{G} = \begin{bmatrix} -I_{n \times n_w} \\ LF \end{bmatrix}, \quad \bar{\Sigma}_k = \begin{bmatrix} \bar{\delta}_k \\ w_k \end{bmatrix}^T, \quad \underline{\Sigma}_k = \begin{bmatrix} \underline{\delta}_k \\ w_k \end{bmatrix}^T. \quad (1.223)$$

L'objectif est de concevoir l'observateur intervalle fonctionnel (1.247) de manière à ce que les conditions suivantes soient satisfaites :

1. Système d'erreur augmenté (1.221) stable
2. Pour des scalaires donnés $\gamma_{\mathcal{H}_1} > 0$ et $0 \leq \lambda \leq 1$, alors e_k doit satisfaire la performance \mathcal{H}_1 suivante

$$\|e\|_1 < \sqrt{\gamma_{\mathcal{H}_1}(\lambda(1-\lambda)^k V_0 + \gamma_{\mathcal{H}_1} \|\Sigma\|_\infty^2)}, \quad (1.224)$$

où $V_0 = e_0 P e_0$ et $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, P \succ 0$.

Les conditions de stabilité suffisantes sont données en termes de LMI dans le théorème suivant.

Théorème 1.11. ([4]) *Sous les Hypothèses 1.4 et 1.5, pour des paramètres donnés $\gamma_{\mathcal{H}_1} > 0$ et $0 \leq \lambda \leq 1$, le système d'erreur exprimé dans (1.221) est stable et satisfait la performance \mathcal{H}_1 (1.224), s'il existe une matrice diagonale $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $Q \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ et un scalaire $\mu > 0$, tels que :*

$$\begin{bmatrix} (\lambda - 1)P & \star & \star \\ 0 & -\mu I_n & \star \\ Q & P\mathbf{G} & -P \end{bmatrix} \prec 0, \quad (1.225)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda P & 0 & I_{2n} \\ 0 & (\gamma_{\mathcal{H}_1} - \mu)I_n & 0 \\ I_n & 0 & \gamma_{\mathcal{H}_1} I_{2n} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (1.226)$$

$$DL + JC - LA = 0, \quad (1.227)$$

$$H - LB = 0. \quad (1.228)$$

Le gain \mathbf{D} est donné par $\mathbf{D} = P^{-1}Q$, et le gain de l'observateur D peut être déduit de l'équation (1.222).

Démonstration. ([4]) Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_k = e_k^T P e_k. \quad (1.229)$$

La différence temporelle de V_k est donnée par ΔV_k :

$$\Delta V_k = V_{k+1} - V_k, \quad (1.230)$$

$$= e_k^T [\mathbf{D}^T P \mathbf{D} - P] e_k + e_k^T \mathbf{D}^T P \mathbf{G} \Sigma_k + \Sigma_k^T \mathbf{G}^T P \mathbf{D} e_k + \Sigma_k^T \mathbf{G}^T P \mathbf{G} \Sigma_k. \quad (1.231)$$

L'équation (1.231) peut être réécrite comme :

$$\begin{bmatrix} e_k \\ \Sigma_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{D}^T P \mathbf{D} - P & \mathbf{D}^T P \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T P \mathbf{D} & \mathbf{G}^T P \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_k \\ \Sigma_k \end{bmatrix}. \quad (1.232)$$

En pré et post-multipliant (1.225) avec

$$\begin{bmatrix} I_{2n} & 0 & \mathbf{D}^T \\ 0 & I_n & \mathbf{G}^T \end{bmatrix}, \quad (1.233)$$

et sa transposée, de manière respective, et en remplaçant $Q = P\mathbf{D}$ nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}^T P \mathbf{D} - P & \mathbf{D}^T P \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T P \mathbf{D} & \mathbf{G}^T P \mathbf{G} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda P & 0 \\ 0 & -\mu I_n \end{bmatrix} \prec 0. \quad (1.234)$$

En pré-multipliant et en post-multipliant (1.234) par $\begin{bmatrix} e_k^T & \Sigma_k^T \end{bmatrix}^T$ et sa transposée, il en suit que :

$$\Delta V_k < -\lambda V_k + \mu \Sigma_k^T \Sigma_k. \quad (1.235)$$

Lorsque $w_k = 0$, $\Sigma_k = 0$, l'inégalité précédente est équivalente à :

$$\Delta V_k = V_{k+1} - V_k < -\lambda V_k < 0. \quad (1.236)$$

Alors, le système d'erreur dans (1.221) est stable. De plus, l'inégalité (1.236) peut être réécrite comme :

$$V_{k+1} < (1 - \lambda)V_k + \mu \|\Sigma\|_\infty^2 < 0. \quad (1.237)$$

À partir de (1.237), on peut obtenir :

$$\begin{aligned} V_k &< (1 - \lambda)^k V_0 + \mu \sum_{\tau=0}^{k-1} (1 - \lambda)^\tau \|\Sigma\|_\infty^2, \\ &\leq (1 - \lambda)^k V_0 + \frac{\mu}{\lambda} \|\Sigma\|_\infty^2. \end{aligned} \quad (1.238)$$

En se basant sur le complément de Schur, (1.226) est équivalente à :

$$\begin{bmatrix} \lambda P & 0 \\ 0 & (\gamma_{\mathcal{H}_1} - \mu) I_n \end{bmatrix} - \frac{1}{\gamma_{\mathcal{H}_1}} \begin{bmatrix} I_{2n} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{2n} & 0 \end{bmatrix} \succ 0. \quad (1.239)$$

En pré-multipliant et en post-multipliant (1.239) par $\begin{bmatrix} e_k^T & \Sigma_k^T \end{bmatrix}^T$ et sa transposée, il en résulte que :

$$e_k^T e_k \leq \gamma_{\mathcal{H}_1} \left[\lambda^k V_k + (\gamma_{\mathcal{H}_1} - \mu) \|\Sigma\|_\infty^2 \right]. \quad (1.240)$$

En substituant (1.238) dans (1.240), on obtient :

$$e_k^T e_k \leq \gamma_{\mathcal{H}_1} \left[(1 - \lambda)^k V_0 + \gamma_{\mathcal{H}_1} \|\Sigma\|_\infty^2 \right]. \quad (1.241)$$

Ainsi, la performance \mathcal{H}_1 (1.224) est satisfaite. ■

1.7 Observateurs intervalles pour les systèmes LPV

La dernière classe des systèmes à laquelle nous allons nous intéresser est la classe des systèmes LPV (acronyme anglo-saxon pour "Linear Parameter Varying").

Dans la littérature, diverses méthodes ont été élaborées pour concevoir des observateurs intervalles pour les systèmes LPV [97, 103, 107, 119, 151, 186]. Par exemple, dans [58], les auteurs combinent les techniques des observateurs intervalles et du différenciateur d'ordre supérieur. De manière similaire aux approches pour les systèmes LTI, les travaux dans [105, 169] reposent sur un changement de base d'état variant dans le temps, sous l'hypothèse d'un ordonnancement parfaitement connu à chaque instant donné. Cependant, selon [63], les travaux tels que [22, 38, 60, 148, 149, 177] relaxent cette hypothèse en considérant que les composantes du vecteur d'ordonnancement appartiennent à un compact dont les bornes sont connues *a priori*. Ces derniers temps, plusieurs travaux [65, 110] ont intégré des méthodologies de synthèse d'observateurs dans le processus de conception, en résolvant un critère d'optimisation mathématique basé sur une norme spécifique. Les premières recherches se sont concentrées sur les travaux LPV avec un critère de performance \mathcal{L}_2 [5, 38, 119, 177]. Les méthodes abordées dans les prochains paragraphes utilisent ce dernier critère. Plus précisément, nous considérons sur les travaux récents proposés dans [110, 65] qui traitent une problématique fondamentale : la synthèse d'observateurs intervalles dépendant des paramètres pour les systèmes LPV sous contraintes LMIs. Ces travaux répondent à des contraintes de performance de type gain \mathcal{L}_∞ et gain mixte $\mathcal{L}_2/\mathcal{L}_\infty$, respectivement.

1.7.1 Première approche sous critère gain \mathcal{L}_∞

Nous présentons dans ce paragraphe, l'approche proposée dans [110].

1.7.1.1 Préliminaires

Commençons par rappeler un lemme important :

Lemme 1.13. ([189]). *Étant donné une fonction $F(z, \theta) = M(z, \theta)z$, si des fonctions $\overline{F}, \underline{F}, \overline{M}, \underline{M}$, existent telles que*

$$\begin{cases} \underline{M} \leq M(z, \theta) \leq \overline{M}, \\ \underline{F}(\overline{z}, \underline{z}) \leq F(z, \theta) \leq \overline{F}(\overline{z}, \underline{z}), \end{cases} \quad \forall \theta \in \Theta, z \in Z = \{z \in \mathbb{R}^n : \underline{z} \leq z \leq \overline{z}\},$$

alors, les inégalités suivantes sont satisfaites

$$\begin{aligned} \|\overline{F}(\overline{z}, \underline{z}) - F(z, \theta)\| &\leq \overline{l}_F \|\overline{z} - z\| + \underline{l}_F \|z - \underline{z}\| + l_{\overline{F}}, \\ \|\underline{F}(\overline{z}, \underline{z}) - F(z, \theta)\| &\leq \overline{l}_F \|\overline{z} - z\| + \underline{l}_F \|z - \underline{z}\| + l_{\underline{F}}, \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} \underline{l}_F &= \overline{l}_F = \|\overline{M}^+\| + \|\underline{M}^+\|, \\ \overline{l}_F &= \underline{l}_F = \|\overline{M}^-\| + \|\underline{M}^-\|, \\ \underline{l}_F &= \max_{\theta \in \Theta, z \in Z} \{ \|\overline{M}^+ - M^+(z, \theta)\| z^+ \| + \|\underline{M}^+ - M^+(z, \theta)\| z^- \| \\ &\quad + \|\overline{M}^- - M^-(z, \theta)\| z^+ \| + \|\underline{M}^- - M^-(z, \theta)\| z^- \|, \\ \overline{l}_F &= \max_{\theta \in \Theta, z \in Z} \{ \|\overline{M}^+ - M^+(z, \theta)\| z^- \| + \|\underline{M}^+ - M^+(z, \theta)\| z^+ \| \\ &\quad + \|\overline{M}^- - M^-(z, \theta)\| z^- \| + \|\underline{M}^- - M^-(z, \theta)\| z^+ \| \}. \end{aligned}$$

1.7.1.2 Formulation du problème

Soit la classe des systèmes LPV modélisés par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A(\rho(t)) + \Delta A(\rho(t)))x(t) + B(\rho(t))u(t) \\ y(t) = Cx(t) + v(t) \end{cases} \quad (1.242)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$, représentent respectivement les vecteurs d'état et de sortie, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ est le vecteur d'entrée qui contient l'incertitude de l'entrée et $v \in \mathbb{R}^{n_y}$ désigne l'incertitude de la sortie. $A(\rho(t)), \Delta A(\rho(t)), B(\rho(t))$ sont des matrices dépendantes d'un vecteur de paramètres, dont ces derniers sont supposés mesurés à travers $\rho(t)$, et peuvent être exprimées comme suit

$$A(\rho(t)) = \sum_{i=1}^s h_i(\rho(t))A_i, \quad B(\rho(t)) = \sum_{i=1}^s h_i(\rho(t))B_i, \quad \Delta A(\rho(t)) = \sum_{i=1}^s h_i(\rho(t))\Delta A_i, \quad (1.243)$$

où s est le nombre de sommets de l'ensemble polytopique \mathcal{M} qui borne $\rho(t)$, et $h_i(\rho(t))$, $i = \{1, \dots, s\}$ sont les coordonnées polytopiques satisfaisant :

$$\sum_{i=1}^s h_i(\rho(t)) = 1, h_i(\rho(t)) \geq 0, i = \{1, \dots, s\}. \quad (1.244)$$

$A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$ sont des matrices constantes connues, tandis que la matrice ΔA_i est inconnue et représente l'incertitude paramétrique de A_i . $B_i \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$ est inconnue mais bornée par des matrices connues. Les Hypothèses 1.6-1.7 suivantes sont donc utilisées dans l'article [110].

Hypothèse 1.6. L'état initial $x(0) \in \mathbb{R}^n$ ainsi que les incertitudes du système (1.242) en ce qui concerne les paramètres, l'entrée et la sortie sont inconnus mais bornés comme suit

$$\underline{x}(0) \leq x(0) \leq \bar{x}(0) \in \mathbb{R}^n, \quad \underline{u}(t) \leq u(t) \leq \bar{u}(t) \in \mathbb{R}^{n_u}, \quad \underline{v}(t) \leq v(t) \leq \bar{v}(t) \in \mathbb{R}^{n_y}, \quad (1.245)$$

$$\underline{\Delta A}_i \leq \Delta A_i \leq \overline{\Delta A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \underline{B}_i(t) \leq B_i \leq \overline{B}_i \in \mathbb{R}^{n \times n_u}, \quad (1.246)$$

avec $i = \{1, \dots, s\}$ et où toutes les bornes sont connues.

Hypothèse 1.7. Les états x du système (1.242) sont bornés, c'est-à-dire que $x(t) \in \Xi \subset \mathcal{L}_{\infty}^n$.

1.7.1.3 Structure de l'observateur intervalle

Pour des raisons de simplification d'écriture, la dépendance temporelle est omise dans les notations des équations de cette section lorsque cela ne donne pas lieu à ambiguïté. L'objectif consiste à déterminer les bornes inférieure et supérieure de l'état $x(t)$ du système (1.242) en utilisant un observateur intervalle donné par

$$\begin{cases} \dot{\bar{\epsilon}} = TA(\rho)\hat{x} + L(\rho)(y - C\hat{x}) + \sum_{i=1}^3 \bar{\delta}_i \\ \hat{x} = \bar{\epsilon} + Ny \\ \dot{\underline{\epsilon}} = TA(\rho)\check{x} + L(\rho)(y - C\hat{x}) + \sum_{i=1}^3 \underline{\delta}_i \\ \check{x} = \underline{\epsilon} + Ny \\ \bar{x} = \hat{x} + N^+ \bar{v} - N^- \underline{v} \\ \underline{x} = \check{x} + N^+ \underline{v} - N^- \bar{v} \end{cases} \quad (1.247)$$

où $\bar{\epsilon}, \underline{\epsilon} \in \mathbb{R}^n$ et $\bar{\delta}_i, i = \{1, \dots, 3\}$ sont données par :

$$\bar{\delta}_1 = T^+ \bar{\delta}_A - T^- \underline{\delta}_A, \quad (1.248)$$

$$\bar{\delta}_2 = T^+ \bar{\delta}_B - T^- \underline{\delta}_B, \quad (1.249)$$

$$\bar{\delta}_3 = [(TA(\rho) - L(\rho)C)N + L(\rho)]^- \bar{v} - [(TA(\rho) - L(\rho)C)N + L(\rho)]^+ \underline{v}, \quad (1.250)$$

$$\underline{\delta}_1 = T^+ \underline{\delta}_A - T^- \bar{\delta}_A, \quad (1.251)$$

$$\underline{\delta}_2 = T^+ \underline{\delta}_B - T^- \bar{\delta}_B, \quad (1.252)$$

$$\underline{\delta}_3 = [(TA(\rho) - L(\rho)C)N + L(\rho)]^- \underline{v} - [(TA(\rho) - L(\rho)C)N + L(\rho)]^+ \bar{v}, \quad (1.253)$$

$$\bar{\delta}_A = \overline{\Delta A(\rho)}^+ \bar{x}^+ + \underline{\Delta A(\rho)}^+ \bar{x}^- - \overline{\Delta A(\rho)}^- \underline{x}^+ + \underline{\Delta A(\rho)}^- \underline{x}^-, \quad (1.254)$$

$$\underline{\delta}_A = \underline{\Delta A(\rho)}^+ \underline{x}^+ + \overline{\Delta A(\rho)}^+ \underline{x}^- - \underline{\Delta A(\rho)}^- \bar{x}^+ + \overline{\Delta A(\rho)}^- \bar{x}^-, \quad (1.255)$$

$$\bar{\delta}_B = \overline{B(\rho)}^+ \bar{u}^+ + \underline{B(\rho)}^+ \bar{u}^- - \overline{B(\rho)}^- \underline{u}^+ + \underline{B(\rho)}^- \underline{u}^-, \quad (1.256)$$

$$\underline{\delta}_B = \underline{B(\rho)}^+ \underline{u}^+ + \overline{B(\rho)}^+ \underline{u}^- - \underline{B(\rho)}^- \bar{u}^+ + \overline{B(\rho)}^- \bar{u}^-. \quad (1.257)$$

L'objectif consiste à déterminer les matrices $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $N \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$, et le gain $L(\rho) \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ avec la forme suivante : $L(\rho) = \sum_{i=1}^s h_i(\rho(t)) L_i$ de l'observateur.

1.7.1.4 Conditions d'existence de l'observateur intervalle

Les conditions d'existence de l'observateur (1.247) sont données dans le théorème suivant.

Théorème 1.12. ([110]). *Sous les Hypothèses 1.6-1.7, les sorties de l'observateur (1.247) satisfont*

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x}, \quad (1.258)$$

si

$$T + NC = I, \quad (1.259)$$

et si $(TA - LC)$ est Hurwitz et Metzler.

Démonstration. [110] Soit $\bar{e}_\epsilon = \bar{\epsilon} - Tx$, $\underline{e}_\epsilon = \underline{\epsilon} - Tx$, $e_{\hat{x}} = \hat{x} - x$, $e_{\check{x}} = \check{x} - x$. En combinant (1.242)-(1.247), nous obtenons :

$$\dot{\bar{e}}_\epsilon = [TA(\rho) - L(\rho)C]e_{\hat{x}} + \sum_{i=1}^3 \bar{\delta}_i - T\Delta A(\rho)x - TB(\rho)u + Lv. \quad (1.260)$$

En utilisant (1.259), nous avons :

$$e_{\hat{x}} = \bar{\epsilon} + Ny - (T + NC)x = \bar{e}_\epsilon + Nv. \quad (1.261)$$

Remplaçant (1.261) dans (1.260), on obtient

$$\dot{\bar{e}}_\epsilon = [TA(\rho) - L(\rho)C]\bar{e}_\epsilon + \sum_{i=1}^3 \bar{d}_i, \quad (1.262)$$

avec :

$$\bar{d}_1 = \bar{\delta}_1 - T\Delta A(\rho)x, \quad (1.263)$$

$$\bar{d}_2 = \bar{\delta}_2 - TB(\rho)x, \quad (1.264)$$

$$\bar{d}_3 = \bar{\delta}_3 + [(TA(\rho) - L(\rho)C)N + L(\rho)]v. \quad (1.265)$$

De même, nous avons

$$\underline{e}_\epsilon = [TA(\rho) - L(\rho)C]\underline{e}_\epsilon + \sum_{i=1}^3 \underline{d}_i, \quad (1.266)$$

avec :

$$\underline{d}_1 = \underline{\delta}_1 - T\Delta A(\rho)x, \quad (1.267)$$

$$\underline{d}_2 = \underline{\delta}_2 - TB(\rho)x, \quad (1.268)$$

$$\underline{d}_3 = \underline{\delta}_3 + [(TA(\rho) - L(\rho)C)N + L(\rho)]v. \quad (1.269)$$

En utilisant le lemme (1.5), il est facile de montrer que :

$$\underline{\delta}_1 \leq T\Delta A(\rho)x \leq \bar{\delta}_1, \quad (1.270)$$

$$\underline{\delta}_2 \leq TB(\rho)u \leq \bar{\delta}_2, \quad (1.271)$$

$$\underline{\delta}_3 \leq -[(TA(\rho) - L(\rho)C)N + L(\rho)]v \leq \bar{\delta}_3. \quad (1.272)$$

Il s'en suit que :

$$\sum_{i=1}^3 \bar{\delta}_i - T\Delta A(\rho)x - TB(\rho)u + [(TA(\rho) - L(\rho)C)N + L(\rho)]v \geq 0, \quad (1.273)$$

$$\sum_{i=1}^3 \underline{\delta}_i - T\Delta A(\rho)x - TB(\rho)u + [(TA(\rho) - L(\rho)C)N + L(\rho)]v \leq 0. \quad (1.274)$$

Maintenant, conformément au théorème (1.6), on a $\underline{e}(t) \leq Tx(t) \leq \bar{e}(t)$ pour tout $t \geq 0$, à condition que $\underline{e}(0) \leq Tx(0) \leq \bar{e}(0)$ et que $(TA(\rho) - L(\rho)C)$ soit Metzler. Si $\underline{e}(t) \leq Tx(t) \leq \bar{e}(t)$ est satisfait, on peut facilement montrer que (1.258) est valide. ■

Dans [110], les auteurs proposent de concevoir les matrices de l'observateur (1.247) selon les conditions suivantes :

- (i) les erreurs (1.262) et (1.266) sont toutes deux asymptotiquement stables au sens de Hurwitz,
- (ii) la propriété de coopérativité est satisfaite, c'est à dire $\bar{e}_\epsilon, \underline{e}_\epsilon \geq 0, \forall t \geq 0$,
- (iii) l'influence des incertitudes $\sum_{i=1}^3 \bar{d}_i$ et $\sum_{i=1}^3 \underline{d}_i$ sur les erreurs \bar{e}_ϵ et \underline{e}_ϵ est minisée au sens du gain \mathcal{L}_∞ .

Des conditions suffisantes d'existence sont à présent données dans le théorème suivant.

Théorème 1.13. ([110]). *Supposons que $\bar{e}(0)$ et $\underline{e}(0)$ dans (1.247) satisfont $\underline{e}(0) \leq Tx(0) \leq \bar{e}(0)$. Pour des scalaires donnés $\gamma_{\mathcal{L}_\infty}, \beta_2, \beta_3 > 0$, s'il existe des scalaires $\alpha > 0, \eta > 0$, un*

vecteur $\zeta \in \mathbb{R}^n$, une matrice diagonale $P \succ 0, \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et des matrices $W_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$, $i = \{1, \dots, s\}$ tels que

$$P \succ \alpha I, \quad (1.275)$$

$$PTA_i - W_i C + \text{diag}(\zeta) \geq 0, \quad (1.276)$$

$$\begin{bmatrix} H_e\{PTA_i - W_i C\} + 9\eta(\bar{l}_d^2 + \underline{l}_d^2)I + \gamma_{\mathcal{L}_\infty} P & P & P & P \\ & \star & -\gamma_{\mathcal{L}_\infty} \beta_2 & 0 & 0 \\ & \star & \star & -\gamma_{\mathcal{L}_\infty} \beta_3 & 0 \\ & \star & \star & \star & -\eta\gamma_{\mathcal{L}_\infty} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (1.277)$$

alors (1.247) est un observateur intervalle robuste pour le système LPV (1.247), c'est-à-dire que $\bar{x}(t)$ et $\underline{x}(t)$ dans (1.247) sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de $x(t)$ avec la performance \mathcal{L}_∞ suivante

$$\|e_\epsilon\|_{\mathcal{L}_\infty} < \sqrt{\frac{1}{\alpha} V(0) e^{-\gamma_{\mathcal{L}_\infty} t} + \beta_2 \|d_2\|_{\mathcal{L}_\infty}^2 + \beta_3 \|d_3\|_{\mathcal{L}_\infty}^2}, \quad (1.278)$$

où $e_\epsilon = [\bar{e}_\epsilon^T \quad \underline{e}_\epsilon^T]^T$, $d_2 = [\bar{d}_2^T \quad \underline{d}_2^T]^T$, $d_3 = [\bar{d}_3^T \quad \underline{d}_3^T]^T$ et $V(0)$ est une fonction quadratique de $e_\epsilon(0)$.

Une solution optimale peut être trouvée en résolvant :

$$\max \alpha, \quad t.q(1.275) - (1.277). \quad (1.279)$$

Si le problème d'optimisation (1.279) est résoluble, la matrice $L(\rho)$ dans (1.247) peut être déterminée par :

$$L(\rho(t)) = P^{-1} \sum_{i=1}^s h_i(\rho(t)) W_i. \quad (1.280)$$

Démonstration. ([110]). Dans [159], il est possible de vérifier que la solution générale de l'équation (1.259) est

$$T = GZ_1 + S(I - GG^\dagger)Z_1, \quad (1.281)$$

$$N = GZ_2 + S(I - GG^\dagger)Z_2, \quad (1.282)$$

où $S \in \mathbb{R}^{n \times (n+n_y)}$ est une matrice arbitraire et :

$$G = \begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix}, \quad Z_1 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (1.283)$$

Comme dans [179], la contrainte imposée sur la matrice P est qu'elle doit avoir une forme diagonale, alors $P \succ 0$ signifie $P > 0$. Par conséquent, $TA(\rho) - L(\rho)C$ est une matrice Metzler si $P(TA(\rho) - L(\rho)C)$ est une matrice Metzler, ce qui est assuré par (1.275). Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \bar{e}_\epsilon^T P \bar{e}_\epsilon + \underline{e}_\epsilon^T P \underline{e}_\epsilon. \quad (1.284)$$

Sa dérivée temporelle est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \bar{e}_\epsilon^T [P(TA(\rho) - L(\rho)C) + (TA(\rho) - L(\rho)C)^T P] \bar{e}_\epsilon \\ &\quad + 2\bar{e}_\epsilon^T P \bar{d}_1 + 2\bar{e}_\epsilon^T P \bar{d}_2 + 2\bar{e}_\epsilon^T P \bar{d}_3 \\ &\quad + \underline{e}_\epsilon^T [P(TA(\rho) - L(\rho)C) + (TA(\rho) - L(\rho)C)^T P] \underline{e}_\epsilon \\ &\quad + 2\underline{e}_\epsilon^T P \underline{d}_1 + 2\underline{e}_\epsilon^T P \underline{d}_2 + 2\underline{e}_\epsilon^T P \underline{d}_3. \end{aligned} \quad (1.285)$$

Selon le Lemme 1.13, les fonctions $\bar{d}_1, \underline{d}_1$ sont globalement Lipschitziennes et il existe toujours des constantes positives $\bar{l}_d = \underline{l}_d, \bar{l}_d = \underline{l}_d$ et l_d, l_d , telles que

$$\|\bar{d}_1\| \leq \bar{l}_d \|e\| + \underline{l}_d \|e\| + l_d, \quad (1.286)$$

$$\|\underline{d}_1\| \leq \bar{l}_d \|e\| + \underline{l}_d \|e\| + l_d, \quad (1.287)$$

où :

$$\bar{e} = \bar{x} - x = \bar{e}_\epsilon + Nv + \bar{N}\bar{v}, \quad \bar{N}\bar{v} = N^+\bar{v} + N^-\bar{v}, \quad (1.288)$$

$$\underline{e} = \underline{x} - x = \underline{e}_\epsilon + Nv + \underline{N}\underline{v}, \quad \underline{N}\underline{v} = N^+\underline{v} + N^-\underline{v}. \quad (1.289)$$

En majorant les expressions suivantes comme suit

$$2\bar{e}_\epsilon^T P \bar{d}_1 \leq 2\bar{e}_\epsilon^T P \eta^{-1} P \bar{e}_\epsilon + \bar{d}_1^T \eta \bar{d}_1, \quad \underline{e}_\epsilon^T P \underline{d}_1 \leq 2\underline{e}_\epsilon^T P \eta^{-1} P \underline{e}_\epsilon + \underline{d}_1^T \eta \underline{d}_1, \quad (1.290)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \bar{e}_\epsilon^T [P(TA(\rho) - L(\rho)C) + (TA(\rho) - L(\rho)C)^T P + \eta^{-1} PP] \bar{e}_\epsilon \\ &\quad + \underline{e}_\epsilon^T [P(TA(\rho) - L(\rho)C) + (TA(\rho) - L(\rho)C)^T P + \eta^{-1} PP] \underline{e}_\epsilon \\ &\quad + 2\bar{e}_\epsilon^T P \bar{d}_2 + 2\bar{e}_\epsilon^T P \bar{d}_3 + 2\underline{e}_\epsilon^T P \underline{d}_2 + 2\underline{e}_\epsilon^T P \underline{d}_3 + \eta \bar{d}_1^T \bar{d}_1 + \eta \underline{d}_1^T \underline{d}_1. \end{aligned} \quad (1.291)$$

D'après (1.286)-(1.287), on a :

$$\bar{d}_1^T \bar{d}_1 \leq 3\{\bar{l}_d^2(3\|\bar{e}_\epsilon\|^2 + 3v^T N^T N v + 3\|\bar{N}\bar{v}\|^2) + \bar{l}_d^2(3\|\underline{e}_\epsilon\|^2 + 3v^T N^T N v + 3\|\underline{N}\underline{v}\|^2) + \bar{l}_d^2\}, \quad (1.292)$$

$$\underline{d}_1^T \underline{d}_1 \leq 3\{\underline{l}_d^2(3\|\bar{e}_\epsilon\|^2 + 3v^T N^T N v + 3\|\bar{N}\bar{v}\|^2) + \underline{l}_d^2(3\|\underline{e}_\epsilon\|^2 + 3v^T N^T N v + 3\|\underline{N}\underline{v}\|^2) + \underline{l}_d^2\}. \quad (1.293)$$

En utilisant le fait que $\bar{l}_d = \underline{l}_d$ et $\bar{l}_d = \underline{l}_d$, nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_\epsilon^T [P(TA(\rho) - L(\rho)C) + (TA(\rho) - L(\rho)C)^T P + \eta^{-1} PP + 9\eta(\bar{l}_d^2 + \underline{l}_d^2)e_\epsilon \\ &\quad + 2e_\epsilon^T P d_2 + 2e_\epsilon^T P d_3 + \eta(9((\bar{l}_d^2 + \underline{l}_d^2)(2\|Nv\|^2 + \|\bar{N}\bar{v}\|^2 + \|\underline{N}\underline{v}\|^2) + 3(\bar{l}_d^2 + \underline{l}_d^2))]. \end{aligned} \quad (1.294)$$

En posant $W_i = PL_i$ et en utilisant le complément de Schur, à partir de (1.277), nous obtenons :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} H_e\{PTA(\rho) - PL(\rho)C\} + 9\eta(\bar{l}_d^2 + \underline{l}_d^2)I + \gamma_{\mathcal{L}_\infty} P + \eta PP & P & P & P & & \\ & \star & -\gamma_{\mathcal{L}_\infty} \beta_2 & 0 & 0 & \\ & \star & \star & -\gamma_{\mathcal{L}_\infty} \beta_3 & 0 & \\ & \star & \star & \star & -\eta \gamma_{\mathcal{L}_\infty} & \end{array} \right] \prec 0. \quad (1.295)$$

En pré-multipliant et post-multipliant l'inégalité (1.295) avec $[e_\epsilon^T \quad d_2^T \quad d_3^T]$ et sa transposée, nous avons :

$$\dot{V} \leq -\gamma_{\mathcal{L}_\infty} V + \gamma_{\mathcal{L}_\infty} (\beta_2 \|d_2\|_{\mathcal{L}_\infty}^2 + \beta_3 \|d_3\|_{\mathcal{L}_\infty}^2). \quad (1.296)$$

Il en suit que :

$$V(t) \leq V(0)e^{-\gamma_{\mathcal{L}_\infty} t} + \gamma_{\mathcal{L}_\infty} \beta_2 \|d_2\|_{\mathcal{L}_\infty}^2 \int_0^T e^{-\gamma_{\mathcal{L}_\infty}(t-\tau)} d\tau + \gamma_{\mathcal{L}_\infty} \beta_3 \|d_3\|_{\mathcal{L}_\infty}^2 \int_0^T e^{-\gamma_{\mathcal{L}_\infty}(t-\tau)} d\tau, \quad (1.297)$$

$$\leq V(0)e^{-\gamma_{\mathcal{L}_\infty} t} + \beta_2 \|d_2\|_{\mathcal{L}_\infty}^2 + \beta_3 \|d_3\|_{\mathcal{L}_\infty}^2. \quad (1.298)$$

De plus, (1.277) implique que $V(t) \geq \alpha e_\epsilon^T e_\epsilon$, (1.278) est alors déduit. \blacksquare

1.7.2 Deuxième approche sous un critère mixte gain $\mathcal{L}_2/\mathcal{L}_\infty$

Les limitations majeures de l'approche précédente découlent de la contrainte (1.259), qui rend difficile la détermination *a priori* des matrices T et N pour l'observateur (1.247). Il est important de préciser que ce choix *a priori* peut limiter la réactivité de l'observateur aux changements dynamiques du système ou aux conditions variables qui peuvent survenir au fil du temps. Par conséquent, il peut devenir nécessaire d'adopter une approche de bouclage *a posteriori* afin d'atteindre le niveau de performance désiré. Cela rend plus difficile l'atteinte d'un niveau de performance optimal conformément à un critère donné. De plus, la formulation et la résolution des LMIs ne tiennent pas compte d'une fonction de Lyapunov dépendante des paramètres ni de l'introduction de matrices auxiliaires pour réduire le niveau de conservatisme. En outre, l'Hypothèse 1.6, à savoir que les matrices liées au vecteur de paramètres $\rho(t)$ sont bornées par des matrices constantes, traduit un défi fondamental : le problème intrinsèquement LPV est reformulé en un problème d'incertitude LTI ensembliste. Pour surmonter ces problèmes, les auteurs de l'article [65] ont proposé une approche basée sur la structure de dépendance des composantes du vecteur de paramètres mesurées $\rho(t)$. Cette approche est développée dans le contexte d'une évaluation énergétique et d'amplitude maximale, en utilisant un critère mixte combinant les gains \mathcal{L}_2 et \mathcal{L}_∞ .

1.7.2.1 Prérequis

La méthode présentée dans [65] repose sur le concept de M-matrice. La Définition et le lemme qui suivent introduisent cette notion et permettront aux auteurs de proposer une nouvelle approche pour déterminer une matrice Metzler.

Définition 1.16. (théorème 2.1 p.420 [144]). Soit une matrice carrée $W = [w_{i,j}]$ vérifiant $w_{ij} \leq 0, \forall i \neq j$ et $w_{ij} > 0 \forall i = j$ alors W est dite être une M-matrice si W^{-1} existe et $W^{-1} \geq 0$.

Lemme 1.14. ([65]). Soient une matrice à dépendance paramétrique connue $L(\rho) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ où $\rho \in \Psi \subset \mathbb{R}^s$, une M-matrice inversible $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et un scalaire réel $\mu \geq 0$. Alors la matrice $L(\rho)$ est une matrice Metzler si :

$$WL(\rho) + \mu W \geq 0, \forall \rho \in \Psi. \quad (1.299)$$

Démonstration. Étant donné que la matrice W est une M-matrice alors $W^{-1} \geq 0$. En multipliant $WL(\rho) + \mu W$ par W^{-1} alors il est déduit que $L(\rho) + \mu I_n \geq 0$, ce qui termine la démonstration. ■

Le lemme qui suit présente une approche pour établir des bornes supérieure et inférieure pour le produit d'une matrice incertaine dépendante des paramètres et d'un vecteur incertain dans un contexte ensembliste. L'idée essentielle repose sur la possibilité de décomposer toutes les matrices réelles en deux matrices (non nécessairement uniques) dont tous les éléments sont positifs. La démonstration de ce lemme est exposée à des fins didactiques.

Lemme 1.15. ([65]). Soient un vecteur $v \in [\underline{v}, \bar{v}] \subset \mathbb{R}^n$ et des matrices $\mathcal{X}_k(\theta) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\theta \in \Theta$, $k \in \{a, b\}$, tels que $\mathcal{X}(\theta) = \mathcal{X}_a(\theta) - \mathcal{X}_b(\theta)$. Alors les énoncés suivants sont considérés :

1) $\forall \theta \in \Theta$, il est supposé qu'il existe des matrices $\mathcal{X}_k(\theta) \in [\underline{\mathcal{X}}_k, \overline{\mathcal{X}}_k] \subset \mathbb{R}^{m \times n}$ avec $\underline{\mathcal{X}}_k \geq 0$, alors

$$\underline{\mathcal{X}}^\bullet v^* \leq \mathcal{X}(\theta)v \leq \overline{\mathcal{X}}^\bullet v^*, \quad (1.300)$$

où les matrices $\overline{\mathcal{X}}^\bullet = [\overline{\mathcal{X}}_a \quad -\underline{\mathcal{X}}_a \quad -\underline{\mathcal{X}}_b \quad \overline{\mathcal{X}}_b]$, $\underline{\mathcal{X}}^\bullet = [-\overline{\mathcal{X}}_b \quad \underline{\mathcal{X}}_b \quad \underline{\mathcal{X}}_a \quad -\overline{\mathcal{X}}_a]$ et le vecteur $v^* = [(\overline{v}^+)^T \quad (\overline{v}^-)^T \quad (\underline{v}^+)^T \quad (\underline{v}^-)^T]^T$.

2) En supposant qu'un sous-espace de $\theta \in \Theta$ est connu au travers de $\rho \in \Psi$, $0 < s \leq l$ et qu'il existe des matrices $\mathcal{X}_k(\rho) \in [\underline{\mathcal{X}}_k(\rho), \overline{\mathcal{X}}_k(\rho)]$ avec $\underline{\mathcal{X}}_k(\rho) \geq 0$, alors

$$\underline{\mathcal{X}}^\bullet(\rho)v^* \leq \mathcal{X}(\theta)v \leq \overline{\mathcal{X}}^\bullet(\rho)v^*, \quad (1.301)$$

où $\overline{\mathcal{X}}^\bullet(\rho) = [\overline{\mathcal{X}}_a(\rho) \quad -\underline{\mathcal{X}}_a(\rho) \quad -\underline{\mathcal{X}}_b(\rho) \quad \overline{\mathcal{X}}_b(\rho)]$, $\underline{\mathcal{X}}^\bullet(\rho) = [-\overline{\mathcal{X}}_b(\rho) \quad \underline{\mathcal{X}}_b(\rho) \quad \underline{\mathcal{X}}_a(\rho) \quad -\overline{\mathcal{X}}_a(\rho)]$ et le vecteur v^* est défini dans 1).

Démonstration. ([65]). Dans un premier temps, la démonstration de 1) est proposée. Étant donné que $v \in [\underline{v}, \overline{v}]$ alors :

$$0 \leq \underline{v}^+ \leq v^+ \leq \overline{v}^+, \quad 0 \leq \overline{v}^- \leq v^- \leq \underline{v}^-. \quad (1.302)$$

À présent, en considérant l'inégalité $0 \leq \underline{\mathcal{X}}_k \leq \mathcal{X}_k(\theta) \leq \overline{\mathcal{X}}_k$, $k \in \{a, b\}$, alors :

$$\underline{\mathcal{X}}_k \underline{v}^+ \leq \mathcal{X}_k(\theta)v^+ \leq \overline{\mathcal{X}}_k \overline{v}^+, \quad \underline{\mathcal{X}}_k \overline{v}^- \leq \mathcal{X}_k(\theta)v^- \leq \overline{\mathcal{X}}_k \underline{v}^-. \quad (1.303)$$

Enfinement, en développant l'expression $\mathcal{X}(\theta)v$, c'est à dire

$$\mathcal{X}(\theta)v = \mathcal{X}_a(\theta)v^+ - \mathcal{X}_a(\theta)v^- - \mathcal{X}_b(\theta)v^+ + \mathcal{X}_b(\theta)v^-, \quad (1.304)$$

alors, il est déduit que $\underline{\mathcal{X}}^\bullet v^* \leq \mathcal{X}(\theta)v \leq \overline{\mathcal{X}}^\bullet v^*$. La démonstration pour 2) est similaire à la démonstration de 1) en adaptant le développement pour tenir compte de la dépendance paramétrique en ρ . ■

Il est à noter que le Lemme 1.15 généralise le lemme 2 dans [58] (voir un rappel dans Lemme 1.5 présenté à la page 24). En effet, dans le cas particulier où $\mathcal{X}_a(\theta) = \mathcal{X}(\theta)^+$, $\mathcal{X}_b(\theta) = \mathcal{X}(\theta)^-$ et $\mathcal{X}(\theta) \in [\underline{\mathcal{X}}, \overline{\mathcal{X}}]$ alors le lemme 2 dans [58] est équivalent au Lemme 1.15. Ce nouvel énoncé propose l'établissement de bornes de manière à ce que la structure associée à la composante matricielle, désignée par $\mathcal{X}(\theta)$, ne soit pas unique et ne soit pas nécessairement conditionnée par les opérateurs non-linéaires \bullet^+ et \bullet^- . Ces caractéristiques offrent des avantages significatifs pour la conception d'un observateur intervalle, en se basant sur un processus d'optimisation formulé sous des contraintes LMI.

Afin de simplifier la présentation, les notations suivantes sont adoptées pour le reste de la section :

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{X}}(\rho) &= \overline{\mathcal{X}}_a(\rho) - \underline{\mathcal{X}}_b(\rho), & \underline{\mathcal{X}}(\rho) &= \underline{\mathcal{X}}_a(\rho) - \overline{\mathcal{X}}_b(\rho), \\ \widetilde{\mathcal{X}}(\rho) &= \overline{\mathcal{X}}(\rho) - \underline{\mathcal{X}}(\rho), & \check{\mathcal{X}}(\rho) &= \overline{\mathcal{X}}_a(\rho) + \overline{\mathcal{X}}_b(\rho). \end{aligned} \quad (1.305)$$

1.7.2.2 Formulation du problème

Soit la classe des systèmes LPV décrite par

$$\dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))w(t) + E(\theta(t))d(t) \quad (1.306)$$

$$y(t) = C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))w(t) \quad (1.307)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ désignent respectivement l'état et la sortie mesurée. $w(t) \in \mathbb{R}^m$ et $d(t) \in \mathbb{R}^q$ sont des entrées inconnues. Le vecteur de paramètres $\theta(t) \in \Theta \subset \mathbb{R}^l$ et sa dérivée temporelle $\dot{\theta}(t) \in \Gamma_\theta$ sont supposés être bornés par des valeurs connues *a priori*. Les matrices sont définies par $A : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $B : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, $E : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^{n \times q}$, $C : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^{p \times n}$, $D : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^{p \times m}$.

La conception d'un observateur intervalle pour le système (1.306)-(1.307) nécessite la vérification des hypothèses suivantes.

Hypothèse 1.8. La perturbation $w(t)$ est supposée être bornée par des valeurs connues $\underline{w}(t), \bar{w}(t)$.

Aucune hypothèse n'est associée à la connaissance des bornes pour $d(t)$.

Hypothèse 1.9. Il est supposé que $\theta_m(t) = [\theta_1(t) \ \theta_2(t) \ \cdots \ \theta_s(t)]^T \in \Theta_m$, $0 \leq s \leq l$, est mesuré au travers de $\rho(t) = [\rho_1(t) \ \rho_2(t) \ \cdots \ \rho_s(t)]^T \in \Psi$ où $\rho_i(t) = \lambda_i(t)\theta_i(t) + \delta_i(t)$ avec $\lambda_i \neq 0$, δ_i désignant les éléments des vecteurs $\lambda \in \Delta_\lambda \subset \mathbb{R}^s$, $\delta \in \Delta_\delta \subset \mathbb{R}^s$. Les vecteurs λ , δ sont supposés continûment différentiables tels que $\dot{\lambda} \in \Gamma_\lambda \subset \mathbb{R}^s$, $\dot{\delta} \in \Gamma_\delta \subset \mathbb{R}^s$. Il est aussi supposé que le vecteur de paramètres ρ et sa dérivée temporelle $\dot{\rho}$ sont continus, définis à chaque instant de temps et évoluant dans des hyper-rectangles délimités par 2^s sommets tels que :

$$\Gamma_\alpha = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \mid \alpha_i \in \{\underline{\rho}_i, \bar{\rho}_i\} \right\}, \quad (1.308)$$

$$\Gamma_\beta = \left\{ (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) \mid \beta_i \in \{\underline{\dot{\rho}}_i, \bar{\dot{\rho}}_i\} \right\}. \quad (1.309)$$

Ici, $\underline{\rho}_i, \bar{\rho}_i, \underline{\dot{\rho}}_i, \bar{\dot{\rho}}_i$ représentent les bornes connues de ρ_i et $\dot{\rho}_i$. Le domaine de définition de $\dot{\rho}$ est noté Γ_ρ .

Hypothèse 1.10. La matrice $E(\theta)$ est supposée être de plein rang colonne et $\text{rang}(C(\theta)E(\theta)) = \text{rang}(E(\theta)) = q$, $\forall \theta \in \Theta$. Il est aussi supposé que $q \leq p$.

Le problème consiste à estimer, de manière garantie, l'état x du système (1.306)-(1.307) en utilisant l'observateur intervalle défini par la structure

$$\begin{cases} \dot{\bar{z}} = L(\rho)\bar{z} + (M(\rho) + L(\rho)N)y + \bar{\eta}(\bar{r}, \underline{r}, \bar{w}, \underline{w}, \rho) & (1.310) \\ \bar{r} = \bar{z} + Ny + \bar{\varphi}(\bar{w}, \underline{w}, \rho) & (1.311) \\ \bar{x} = \bar{g}(\bar{r}, \underline{r}, \rho) & (1.312) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\underline{z}} = L(\rho)\underline{z} + (M(\rho) + L(\rho)N)y + \underline{\eta}(\bar{r}, \underline{r}, \bar{w}, \underline{w}, \rho) & (1.313) \\ \underline{r} = \underline{z} + Ny + \underline{\varphi}(\bar{w}, \underline{w}, \rho) & (1.314) \\ \underline{x} = \underline{g}(\bar{r}, \underline{r}, \rho) & (1.315) \end{cases}$$

où $\bar{\eta}, \underline{\eta} : \mathbb{R}^{2n+2m+s} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{\varphi}, \underline{\varphi} : \mathbb{R}^{2m+s} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{g}, \underline{g} : \mathbb{R}^{2n+s} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $L(\rho) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M(\rho), N \in \mathbb{R}^{n \times p}$. $\bar{z}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$ désignent, respectivement, les bornes supérieure et inférieure de l'état $z \in \mathbb{R}^n$ défini par :

$$z = R(\theta)x. \quad (1.316)$$

Dans cette formulation, z représente l'état découplé et satisfait, par conséquent, l'égalité :

$$R(\theta)E(\theta) = 0. \quad (1.317)$$

Selon les principes des observateurs à entrées inconnues, tels que présentés dans [52], on peut démontrer que l'équation (1.317) possède une solution si et seulement si $R(\theta) = K(\theta)(I_n - S(\theta)C(\theta))$ où $S(\theta) = E(\theta)(C(\theta)E(\theta))^\dagger$ et $K(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice arbitraire introduite pour fournir un degré de liberté. En pratique, un choix courant pour la matrice $K(\theta)$ est $K(\theta) = I_n$.

Dans ce contexte, les vecteurs \bar{x} et $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ représentent respectivement les bornes supérieure et inférieure de l'état $x \in \mathbb{R}^n$, défini par la relation

$$x = Q(\theta)r, \quad (1.318)$$

et tels que les vecteurs $\bar{r}, \underline{r} \in \mathbb{R}^n$, définis dans (1.311) et (1.314), soient respectivement les bornes supérieure et inférieure de $r \in \mathbb{R}^n$ et que la matrice $Q(\theta)$ vérifie l'hypothèse de structure suivante.

Hypothèse 1.11. Il est supposé que les matrices $K(\theta)$ et N sont connues telles que $Q(\theta)$ dans (1.318) soit inversible et admette la décomposition $Q(\theta)^{-1} = R(\theta) + NC(\theta)$.

1.7.2.3 Conditions d'existence de l'observateur intervalle

Les conditions d'existence de l'observateur (1.247) sont données dans le théorème suivant.

Théorème 1.14. ([65]). *Sous les Hypothèses 1.8, 1.9, 1.10 et 1.11, l'état x du système (1.306)-(1.307) est borné par les vecteurs \bar{x}, \underline{x} définis par (1.312), (1.315) c'est à dire*

$$x(t) \in [\underline{x}(t), \bar{x}(t)], \quad \forall t \geq 0, \quad (1.319)$$

si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées pour le système (1.310)-(1.315) :

(i) $\forall \rho \in \Psi$, il existe une matrice $L(\rho)$ telle que :

$$L(\rho) \text{ est Metzler.} \quad (1.320)$$

(ii) $\forall \rho \in \Psi, \forall \theta \in \Theta, \forall \dot{\theta} \in \Gamma_\theta$, il existe des fonctions $\bar{\eta}, \underline{\eta}, \bar{\varphi}, \underline{\varphi}, \bar{g}, \underline{g}$ telles que

$$\underline{\eta}(\bar{r}, \underline{r}, \bar{w}, \underline{w}, \rho) \leq \eta(r, w, \rho, \theta, \dot{\theta}) \leq \bar{\eta}(\bar{r}, \underline{r}, \bar{w}, \underline{w}, \rho), \quad (1.321)$$

$$\underline{\varphi}(\bar{w}, \underline{w}, \rho) \leq \varphi(w, \theta) \leq \bar{\varphi}(\bar{w}, \underline{w}, \rho), \quad (1.322)$$

$$\underline{g}(\bar{r}, \underline{r}, \rho) \leq g(r, \theta) \leq \bar{g}(\bar{r}, \underline{r}, \rho), \quad (1.323)$$

où $\eta(r, w, \rho, \theta, \dot{\theta}) = F(\rho, \theta, \dot{\theta})r + G(\rho, \theta)w$,

$$\varphi(w, \theta) = H(\theta)w,$$

$$g(r, \theta) = Q(\theta)r,$$

avec $F(\rho, \theta, \dot{\theta}) = T(\rho)Y(\theta, \dot{\theta}) - L(\rho)$, $G(\rho, \theta) = T(\rho)Z(\theta)$, $H(\theta) = -ND(\theta)$,

$$T(\rho) = \begin{bmatrix} L(\rho) & M(\rho) & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad Y(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -C(\theta)Q(\theta) \\ (R(\theta)A(\theta) + \dot{R}(\theta))Q(\theta) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Z(\theta) = \begin{bmatrix} -ND(\theta) \\ -D(\theta) \\ R(\theta)B(\theta) \end{bmatrix}.$$

(iii) Les conditions initiales pour \underline{z} , \bar{z} sont données par

$$\underline{z}(0) \leq \underline{R}^\bullet(\rho(0))x(0)^*, \quad \bar{z}(0) \geq \bar{R}^\bullet(\rho(0))x(0)^*, \quad (1.324)$$

où les notations $\underline{(\cdot)}^\bullet, \bar{(\cdot)}^\bullet$ sont définies dans le Lemme 1.15.

Démonstration. ([65]). Soient les deux erreurs d'observation définies par :

$$\bar{e}_z = \bar{z} - z, \quad \underline{e}_z = z - \underline{z}. \quad (1.325)$$

En tenant compte de la condition de découplage (1.317), la relation (1.318) et l'hypothèse 1.11 et en adoptant les notations du théorème 1.14, la détermination de la dérivée temporelle de \bar{e}_z et \underline{e}_z conduit à

$$\dot{\bar{e}}_z = L(\rho)\bar{e}_z + \bar{\eta}(\bar{r}, \underline{r}, \bar{w}, \underline{w}, \rho) - \eta(r, w, \rho, \theta, \dot{\theta}), \quad (1.326)$$

$$\dot{\underline{e}}_z = L(\rho)\underline{e}_z + \eta(r, w, \rho, \theta, \dot{\theta}) - \underline{\eta}(\bar{r}, \underline{r}, \bar{w}, \underline{w}, \rho), \quad (1.327)$$

où la fonction $\eta(r, w, \rho, \theta, \dot{\theta})$ est utilisée dans (1.321).

Sous la condition (1.321), en tenant compte de la propriété Metzler (1.320) et des conditions initiales (1.324), il est possible de constater que les équations (1.326) à (1.327) respectent les caractéristiques des systèmes coopératifs, ce qui conduit donc à :

$$\bar{e}_z(t), \underline{e}_z(t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.328)$$

À présent, en combinant (1.316) et (1.325), il est déduit que \bar{z} , \underline{z} sont équivalents à :

$$\bar{z} = \bar{e}_z + R(\theta)x, \quad \underline{z} = R(\theta)x - \underline{e}_z. \quad (1.329)$$

Puis, en utilisant (1.329) et (1.307) pour remplacer \bar{z} , \underline{z} , y dans (1.311),(1.314) et en considérant l'inverse de la relation (1.318) (i.e. $r = (R(\theta) + NC(\theta))x$), il est déduit que :

$$\bar{r} - r = \bar{e}_z + \bar{\varphi}(\bar{w}, \underline{w}, \rho) - \varphi(w, \theta), \quad (1.330)$$

$$r - \underline{r} = \underline{e}_z + \varphi(w, \theta) - \underline{\varphi}(\bar{w}, \underline{w}, \rho). \quad (1.331)$$

Sous les contraintes (1.322) et (1.328), il peut être établi que pour tout $t \geq 0$, l'état $r(t)$ se trouve dans l'intervalle $[\underline{r}(t), \bar{r}(t)]$. En dernier lieu, en considérant la relation (1.318) et en rappelant que $g(r, \theta) = Q(\theta)r$ dans (1.323), on peut conclure que $x(t)$ appartient à l'intervalle $[\underline{x}(t), \bar{x}(t)]$ pour tout $t \geq 0$, où les bornes sont définies conformément à (1.312) et (1.315). Cela achève la démonstration. ■

1.7.2.4 Formulation LMI de la performance en gain $\mathcal{L}_2/\mathcal{L}_\infty$

Dans la suite, l'objectif consiste à élaborer un observateur intervalle à entrées inconnues (1.310)-(1.315), plus précisément, les fonctions $\bar{\eta}$, $\underline{\eta}$, $\bar{\varphi}$, $\underline{\varphi}$, \bar{g} , \underline{g} et les matrices $L(\rho)$, $M(\rho)$. Dans cette démarche, les auteurs visent à réduire au minimum la propagation des effets du signal w sur la largeur de l'enveloppe totale $\tilde{x} = \bar{x} - \underline{x}$, en tenant compte des critères de type gain \mathcal{L}_2 et/ou \mathcal{L}_∞ . À présent, le lemme suivant propose une solution pour la conception des fonctions majorantes $\bar{\eta}$, $\underline{\eta}$, $\bar{\varphi}$, $\underline{\varphi}$, \bar{g} , \underline{g} .

Lemme 1.16. ([65]). Soient les matrices $F(\rho, \theta, \dot{\theta}), G(\rho, \theta), H(\rho, \theta), Q(\theta)$ vérifiant les décompositions :

$$F(\rho, \theta, \dot{\theta}) = F_a(\rho, \theta, \dot{\theta}) - F_b(\rho, \theta, \dot{\theta}), \quad (1.332)$$

$$G(\rho, \theta) = G_a(\rho, \theta) - G_b(\rho, \theta), \quad (1.333)$$

$$H(\rho, \theta) = H_a(\rho, \theta) - H_b(\rho, \theta), \quad (1.334)$$

$$Q(\theta) = Q_a(\theta) - Q_b(\theta). \quad (1.335)$$

Alors, pour $r \in [\underline{r}, \bar{r}]$, les inégalités (1.321), (1.322) et (1.323) du Théorème 1.14 sont vérifiées avec

$$\bar{\eta}(\bar{r}, \underline{r}, \bar{w}, \underline{w}, \rho) = \bar{F}^\bullet(\rho)r^* + \bar{G}^\bullet(\rho)w^*, \quad (1.336)$$

$$\underline{\eta}(\bar{r}, \underline{r}, \bar{w}, \underline{w}, \rho) = \underline{F}^\bullet(\rho)r^* + \underline{G}^\bullet(\rho)w^*, \quad (1.337)$$

$$\bar{\varphi}(\bar{w}, \underline{w}, \rho) = \bar{H}^\bullet(\rho)w^*, \quad (1.338)$$

$$\underline{\varphi}(\bar{w}, \underline{w}, \rho) = \underline{H}^\bullet(\rho)w^*, \quad (1.339)$$

$$\bar{g}(\bar{r}, \underline{r}, \rho) = \bar{Q}^\bullet(\rho)r^*, \quad (1.340)$$

$$\underline{g}(\bar{r}, \underline{r}, \rho) = \underline{Q}^\bullet(\rho)r^*, \quad (1.341)$$

$$\begin{aligned} \frac{F_a(\rho)}{F_b(\rho)} &= L_b(\rho) + T_a(\rho)\underline{Y}(\rho) - T_b(\rho)\bar{Y}(\rho) & , & \quad \frac{\bar{F}_a(\rho)}{\bar{F}_b(\rho)} = L_b(\rho) + T_a(\rho)\bar{Y}(\rho) - T_b(\rho)\underline{Y}(\rho), \\ \frac{G_a(\rho)}{G_b(\rho)} &= T_a(\rho)\underline{Z}_a(\rho) + T_b(\rho)\underline{Z}_b(\rho) & , & \quad \frac{\bar{G}_a(\rho)}{\bar{G}_b(\rho)} = T_a(\rho)\bar{Z}_a(\rho) + T_b(\rho)\bar{Z}_b(\rho), \\ \frac{F_a(\rho, \theta, \dot{\theta})}{G_a(\rho, \theta)} &= L_b(\rho) + (T_a(\rho) - T_b(\rho))Y(\theta, \dot{\theta}) & , & \quad \frac{\bar{F}_a(\rho, \theta, \dot{\theta})}{\bar{G}_a(\rho, \theta)} = L_a(\rho), \\ & & & \quad \frac{\bar{F}_b(\rho, \theta, \dot{\theta})}{\bar{G}_b(\rho, \theta)} = L_b(\rho) + T_a(\rho)Z_b(\theta) + T_b(\rho)Z_a(\theta). \end{aligned}$$

Démonstration. ([65]). Dans un premier temps, il est à noter que des bornes de $F_k(\cdot), G_k(\cdot), H_k(\cdot), Q_k(\cdot), k \in \{a, b\}$ vérifient les conditions du Lemme 1.15. Puis, en appliquant le Lemme 1.15 sur les parties $F(\rho, \theta, \dot{\theta})r, G(\rho, \theta)w, H(\theta)w$ et $Q(\theta)r$, voir (respectivement) les inégalités (1.321), (1.322) et (1.323), alors (1.336)-(1.337), (1.338)-(1.339) et (1.340)-(1.341) sont déduites. ■

Dans un premier temps, le lemme suivant est considéré pour obtenir la décomposition $\mathcal{K}(\theta, \dot{\theta}) = \mathcal{K}_a(\theta, \dot{\theta}) - \mathcal{K}_b(\theta, \dot{\theta})$ pour les matrices $\mathcal{K} \in \{Q, Y, Z, H\}$ définies dans le Lemme 1.16.

Lemme 1.17. ([65]). Soient une partie du vecteur θ définie par $\theta_m \in \mathbb{R}^s$ et mesurée au travers de $\rho \in \mathbb{R}^s$ (voir la section 1.7.2.2) et des fonctions n_i pour $i = \{1, \dots, s\}$ telles que $h_i = \frac{\rho_i}{\lambda_i} - n_i \geq 0, \forall \rho_i \in \Psi_i$. Pour une matrice $\mathcal{K}(\theta, \dot{\theta})$ telle que

$$\mathcal{K}(\theta, \dot{\theta}) = \mathcal{K}_0(\theta, \dot{\theta}) + \sum_{i=1}^s \theta_i \mathcal{K}_i(\theta, \dot{\theta}), \quad (1.342)$$

alors, sous l'Hypothèse 1.9 i.e $\theta_i = \frac{\rho_i - \delta_i}{\lambda_i}$, la décomposition $\mathcal{K}(\theta, \dot{\theta}) = \mathcal{K}_a(\theta, \dot{\theta}) - \mathcal{K}_b(\theta, \dot{\theta})$ est vérifiée pour la matrice (1.342) en adoptant, pour $k \in \{a, b\}$,

$$\mathcal{K}_k(\theta, \dot{\theta}) = \mathcal{K}_{k0}(\theta, \dot{\theta}) + \sum_{i=1}^s h_i \mathcal{K}_{ki}(\theta, \dot{\theta}), \quad (1.343)$$

$$\begin{aligned} \text{où } \mathcal{K}_{a0}(\theta, \dot{\theta}) &= \Sigma(\theta, \dot{\theta})^+ \quad , \quad \mathcal{K}_{ai}(\theta, \dot{\theta}) = \mathcal{K}_i(\theta, \dot{\theta})^+, \\ \mathcal{K}_{b0}(\theta, \dot{\theta}) &= \Sigma(\theta, \dot{\theta})^- \quad , \quad \mathcal{K}_{bi}(\theta, \dot{\theta}) = \mathcal{K}_i(\theta, \dot{\theta})^-, \\ \text{avec } \Sigma(\theta, \dot{\theta}) &= \mathcal{K}_0(\theta, \dot{\theta}) + \sum_{i=1}^s \varepsilon_i \mathcal{K}_i(\theta, \dot{\theta}), \text{ et } \varepsilon_i = n_i - \frac{\delta_i}{\lambda_i}. \end{aligned}$$

Enfin, pour $\mathcal{K}_j(\theta, \dot{\theta}) \in [\underline{\mathcal{K}}_j, \overline{\mathcal{K}}_j] \subset \mathbb{R}^{m \times n}$, $j \in \{0, \dots, s\}$, les bornes supérieure et inférieure de $\mathcal{K}_k(\theta, \dot{\theta})$ sont données par

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathcal{K}}_a(\rho) & \overline{\mathcal{K}}_a(\rho) \\ \underline{\mathcal{K}}_b(\rho) & \overline{\mathcal{K}}_b(\rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\Sigma}^+ & \overline{\Sigma}^+ \\ \underline{\Sigma}^- & \overline{\Sigma}^- \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^s h_i \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{K}}_i^+ & \overline{\mathcal{K}}_i^+ \\ \underline{\mathcal{K}}_i^- & \overline{\mathcal{K}}_i^- \end{bmatrix}, \quad (1.344)$$

$$\text{où } \underline{\Sigma} = \underline{\mathcal{K}}_0 + \sum_{i=1}^s \underline{\mathcal{K}}_i \bullet \varepsilon_i^*, \quad \overline{\Sigma} = \overline{\mathcal{K}}_0 + \sum_{i=1}^s \overline{\mathcal{K}}_i \bullet \varepsilon_i^*.$$

En développant les erreurs d'estimation $\tilde{r} = \bar{r} - \underline{r}$, $\tilde{z} = \bar{z} + \underline{z}$ et $\tilde{x} = \bar{x} - \underline{x}$ et en utilisant les expressions de $\bar{\eta}$, $\underline{\eta}$, $\bar{\varphi}$, $\underline{\varphi}$, \bar{g} , \underline{g} définies dans (1.336)-(1.341), les auteurs proposent la représentation d'état suivante

$$\begin{cases} \dot{\tilde{z}} = \mathcal{A}(\rho)\tilde{z} + f(\tilde{z}) + \check{F}(\rho) \left(\check{H}(\rho)\tilde{w} + \check{H}(\rho)\tilde{w} \right) \\ \quad + (T_a(\rho) + T_b(\rho)) \left(\check{Z}(\rho)\tilde{w} + \check{Z}(\rho)\tilde{w} \right) \end{cases} \quad (1.345)$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \check{Q}(\rho)\tilde{z} + g(\tilde{z}) + \check{Q}(\rho) \left(\check{H}(\rho)\tilde{w} + \check{H}(\rho)\tilde{w} \right) \end{cases} \quad (1.346)$$

$$\begin{cases} \tilde{z}(0) = \overline{R}^\bullet(\rho(0))x(0)^* - \underline{R}^\bullet(\rho(0))x(0)^* \end{cases} \quad (1.347)$$

où les notations $\widetilde{(\cdot)}$, $\check{(\cdot)}$ sont définies dans (1.305) et où $f(\tilde{z}) = (T_a(\rho) + T_b(\rho))\check{Y}(\rho)\hat{r}(\bar{z}, \underline{z})$, $g(\tilde{z}) = \check{Q}(\rho)\hat{r}(\bar{z}, \underline{z})$, la matrice $\mathcal{A}(\rho) = L(\rho) + \check{F}(\rho)$ et les notations $\underline{(\cdot)}$, $\overline{(\cdot)}$, $(\cdot)^*$ sont présentées dans le Lemme 1.15.

Les théorèmes suivants présentent, respectivement, des solutions sous des contraintes de performance au sens du gain \mathcal{L}_∞ et du gain \mathcal{L}_2 .

Théorème 1.15. ([65]). *Supposons les Hypothèses 1.8-1.11 vérifiées et considérons le système LPV décrit par*

$$\begin{cases} \dot{\nu} = \mathcal{A}(\rho)\nu + \mathcal{B}(\rho)\psi \end{cases} \quad (1.348)$$

$$\begin{cases} \xi = \mathcal{C}(\rho)\nu + \mathcal{D}(\rho)\psi \end{cases} \quad (1.349)$$

$$\begin{cases} \nu(0) \geq \tilde{z}(0) \end{cases} \quad (1.350)$$

où $\nu, \xi \in \mathbb{R}^n$, $\psi = [\tilde{w}^T \quad \hat{w}^T \quad |r|^T]^T$ et les matrices sont définies par $\mathcal{C}(\rho) = \check{Q}(\rho)$, $\mathcal{D}(\rho) = [\check{Q}(\rho)\check{H}(\rho) \quad \check{Q}(\rho)\check{H}(\rho) \quad \check{Q}(\rho)]$, $\mathcal{A}(\rho) = L(\rho) + \check{F}(\rho)$, $\mathcal{B}(\rho) = (T_a(\rho) + T_b(\rho))\Omega(\rho) + \check{F}(\rho)\Phi(\rho)$ avec $\Omega(\rho) = [\check{Z}(\rho) \quad \check{Z}(\rho) \quad \check{Y}(\rho)]$, $\Phi(\rho) = [\check{H}(\rho) \quad \check{H}(\rho) \quad 0_{n,n}]$ et les notations $\widetilde{(\cdot)}$, $\check{(\cdot)}$ sont définies dans (1.305).

Soient des matrices $P_j = P_j^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\mathcal{J}_j = [\mathcal{L}_{aj} \quad \mathcal{L}_{bj} \quad \mathcal{M}_{aj} \quad \mathcal{M}_{bj}]$ où $\mathcal{L}_{aj}, \mathcal{L}_{bj} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{M}_{aj}, \mathcal{M}_{bj} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, pour $j \in \{0, \dots, s\}$, telles que

$$P(\alpha) = P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_s P_s \succ 0, \forall \alpha \in \Gamma_\alpha, \quad (1.351)$$

$$\mathcal{J}(\alpha) = \mathcal{J}_0 + \alpha_1 \mathcal{J}_1 + \dots + \alpha_s \mathcal{J}_s \succ 0, \forall \alpha \in \Gamma_\alpha, \quad (1.352)$$

et des matrices $\mathcal{E}_{ii} = \mathcal{E}_{ii}^T \succeq 0$, $\mathcal{F}_{ii} = \mathcal{F}_{ii}^T \succeq 0$, $\mathcal{H}_{ii} > 0$ pour que :

$$\mathcal{E}(\alpha) = \alpha_1^2 \mathcal{E}_{11} + \cdots + \alpha_s^2 \mathcal{E}_{ss} \succeq 0, \forall \alpha \in \Gamma_\alpha, \quad (1.353)$$

$$\mathcal{F}(\alpha) = \alpha_1^2 \mathcal{F}_{11} + \cdots + \alpha_s^2 \mathcal{F}_{ss} \succeq 0, \forall \alpha \in \Gamma_\alpha, \quad (1.354)$$

$$\mathcal{H}(\alpha) = \alpha_1^2 \mathcal{H}_{11} + \cdots + \alpha_s^2 \mathcal{H}_{ss} > 0, \forall \alpha \in \Gamma_\alpha. \quad (1.355)$$

S'il existe des scalaires $\mu \geq 0$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 > 0$ et une M -matrice $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tels que les contraintes suivantes sont vérifiées :

$$(i) \forall (\alpha, \beta) \in \Gamma_\alpha \times \Gamma_\beta,$$

$$\Upsilon(\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2) + \mathcal{E}(\alpha) \prec 0, \quad (1.356)$$

$$\Xi(\alpha, \gamma_3, \gamma_4) + \mathcal{F}(\alpha) \prec 0, \quad (1.357)$$

$$-(\mathcal{L}_a(\alpha) - \mathcal{L}_b(\alpha)) - \mu W < 0, \quad (1.358)$$

$$-(\mathcal{L}_b(\alpha) + \mathcal{T}_a(\alpha)\underline{Y}(\alpha) - \mathcal{T}_b(\alpha)\overline{Y}(\alpha)) + \mathcal{H}(\alpha) < 0, \quad (1.359)$$

$$\text{avec } \Upsilon(\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2) = \begin{bmatrix} -\mathcal{H}e\{W\} & \star & \star & \star \\ \Upsilon_{2,1}(\alpha)^T & \Upsilon_{2,2}(\alpha, \gamma_2) & \star & \star \\ \Upsilon_{3,1}(\alpha)^T & \mathbf{0} & \Upsilon_{3,3}(\alpha, \beta, \gamma_1) & \star \\ W^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -P(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$\Upsilon_{2,1}(\alpha) = [(\mathcal{T}_a(\alpha) + \mathcal{T}_b(\alpha)) \Omega(\alpha) \quad \mathcal{J}(\alpha)],$$

$$\Upsilon_{3,1}(\alpha) = P(\alpha) + \mathcal{L}_a(\alpha) - \mathcal{L}_b(\alpha) + \mathcal{J}(\alpha),$$

$$\mathcal{J}(\alpha) = \mathcal{L}_b(\alpha) + \mathcal{T}_a(\alpha)\overline{Y}(\alpha) - \mathcal{T}_b(\alpha)\underline{Y}(\alpha) + \mathcal{L}_a(\alpha),$$

$$\mathcal{T}_a(\alpha) = [\mathcal{L}_a(\alpha) \quad \mathcal{M}_a(\alpha) \quad W], \quad \mathcal{T}_b(\alpha) = [\mathcal{L}_b(\alpha) \quad \mathcal{M}_b(\alpha) \quad \mathbf{0}],$$

$$\Upsilon_{2,2}(\alpha, \gamma_2) = \begin{bmatrix} -\gamma_2 \mathbf{I} & \star \\ \Phi(\alpha) & -\mathbf{I} \end{bmatrix},$$

$$\Upsilon_{3,3}(\alpha, \beta, \gamma_1) = (\gamma_1 - 1)P(\alpha) + P(\beta) - P_0,$$

$$\Xi(\alpha, \gamma_3, \gamma_4) = \begin{bmatrix} -\gamma_3 P(\alpha) & \star & \star \\ \mathbf{0} & -\gamma_4 \mathbf{I} & \star \\ \mathcal{C}(\alpha) & \mathcal{D}(\alpha) & -\mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

$$(ii) \text{ pour } i \in \{1, \dots, s\},$$

$$\Upsilon_{ii} + \mathcal{E}_{ii} \succeq 0 \quad (1.360)$$

$$\Xi_{ii} + \mathcal{F}_{ii} \prec 0 \quad (1.361)$$

$$-(\mathcal{T}_{ai}\underline{Y}_i - \mathcal{T}_{bi}\overline{Y}_i) + \mathcal{H}_{ii} > 0 \quad (1.362)$$

$$\text{où } \Upsilon_{ii} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \star & \star & \star \\ (\Upsilon_{ii})_{2,1}^T & \mathbf{0} & \star & \star \\ \mathcal{J}_{ii} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \Xi(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \star & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \star \\ \mathbf{0} & \mathcal{D}_{ii} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$(\Upsilon_{ii})_{2,1} = [(\mathcal{T}_{ai} + \mathcal{T}_{bi}) \Omega_i \quad \mathcal{J}_{ii}], \quad \mathcal{J}_{ii} = \mathcal{T}_{ai}\overline{Y}_i - \mathcal{T}_{bi}\underline{Y}_i, \quad \Omega_i = [\check{Z}_i \quad \tilde{Z}_i \quad \tilde{Y}_i], \quad \mathcal{T}_{ai} = [\mathcal{L}_{ai} \quad \mathcal{M}_{ai} \quad \mathbf{0}],$$

$$\mathcal{T}_{bi} = [\mathcal{L}_{bi} \quad \mathcal{M}_{bi} \quad \mathbf{0}], \quad \mathcal{D}_{ii} = [\check{Q}_i \check{H}_i \quad \check{Q}_i \tilde{H}_i \quad \mathbf{0}], \quad \text{où } \tilde{\mathcal{K}}_i, \check{\mathcal{K}}_i, \underline{\mathcal{K}}_i, \underline{\mathcal{K}}_i \text{ pour } \mathcal{K} \in \{Q, Y, Z, H\} \text{ sont déduites de la décomposition :}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{K}}(\rho) & \check{\mathcal{K}}(\rho) \\ \underline{\mathcal{K}}(\rho) & \bar{\mathcal{K}}(\rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{K}}_0 & \check{\mathcal{K}}_0 \\ \underline{\mathcal{K}}_0 & \bar{\mathcal{K}}_0 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^s \rho_i \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{K}}_i & \check{\mathcal{K}}_i \\ \underline{\mathcal{K}}_i & \bar{\mathcal{K}}_i \end{bmatrix}. \quad (1.363)$$

Alors, les matrices de l'observateur intervalle à entrées inconnues $L(\rho) = L_a(\rho) - L_b(\rho)$ et $M(\rho) = M_a(\rho) - M_b(\rho)$ sont définies par, $k \in \{a, b\}$,

$$\begin{bmatrix} L_k(\rho) & M_k(\rho) \end{bmatrix} = W^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{L}_k(\rho) & \mathcal{M}_k(\rho) \end{bmatrix}, \quad (1.364)$$

et le système (1.345)-(1.347) est stable avec un niveau de performance associé au gain \mathcal{L}_∞ inférieur à $\gamma_{\mathcal{L}_\infty} = \sqrt{\frac{\gamma_3 \gamma_2}{\gamma_1}} + \gamma_4$.

Théorème 1.16. ([65]). Sous les Hypothèses 1.8-1.11, en considérant le modèle LPV (1.348)-(1.350), les inégalités (1.351)-(1.352), (1.355) et les matrices $\mathcal{G}_{ii} = \mathcal{G}_{ii}^T \succeq 0$, telles que :

$$\mathcal{G}(\alpha) = \alpha_1^2 \mathcal{G}_{11} + \dots + \alpha_s^2 \mathcal{G}_{ss} \succeq 0, \forall \alpha \in \Gamma_\alpha. \quad (1.365)$$

S'il existe des scalaires réels $\mu \geq 0$, $\gamma_{\mathcal{H}_\infty} > 0$ et une M -matrice $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tels que les contraintes suivantes sont vérifiées :

(i) $\forall (\alpha, \beta) \in \Gamma_\alpha \times \Gamma_\beta$, en considérant les inégalités (1.358)-(1.359) dans le Théorème 1.15 et

$$\Pi(\alpha, \beta, \gamma_{\mathcal{H}_\infty}) + \mathcal{G}(\alpha) \prec 0, \quad (1.366)$$

où $\Pi(\alpha, \beta, \gamma_{\mathcal{H}_\infty}) = \begin{bmatrix} \Upsilon(\alpha, \beta, 0, \gamma_{\mathcal{H}_\infty}) & \star \\ \Pi_{2,1}(\alpha) & -\mathbf{I} \end{bmatrix}$ avec la matrice Υ définie dans (1.356) et la matrice $\Pi_{2,1}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathcal{D}(\alpha) & \mathbf{0} & \mathcal{C}(\alpha) & \mathbf{0} \end{bmatrix}$.

(ii) pour $i \in \{1, \dots, s\}$, en considérant les inégalités (1.362) et

$$\Pi_{ii} + \mathcal{G}_{ii} \succeq 0, \quad (1.367)$$

où $\Pi_{ii} = \begin{bmatrix} \Upsilon_{ii} & \star \\ (\Pi_{ii})_{2,1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, $(\Pi_{ii})_{2,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathcal{D}_{ii} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ avec les matrices Υ_{ii} , \mathcal{D}_{ii} définies dans (1.360), (1.361).

Alors, les matrices de l'observateur intervalle à entrées inconnues $L(\rho) = L_a(\rho) - L_b(\rho)$ et $M(\rho) = M_a(\rho) - M_b(\rho)$ sont définies par (1.364), $k \in \{a, b\}$, et le système (1.345)-(1.347) est stable avec un niveau de performance associé au gain \mathcal{L}_2 inférieur ou égal à $\gamma_{\mathcal{L}_2} = \sqrt{\gamma_{\mathcal{H}_\infty}}$.

Démonstration. ([65]). Les théorèmes 1.15 et 1.16 fournissent des solutions respectives pour déterminer les matrices $L(\rho)$ et $M(\rho)$ en respectant des critères de performance basés sur les gains \mathcal{L}_∞ et \mathcal{L}_2 . Comme le système (1.345)-(1.347) est non linéaire, la méthode proposée se base sur la propriété de coopérativité. Elle démontre que l'état $\tilde{z}(t)$ et la sortie $\tilde{x}(t)$ du système (1.345)-(1.347) peuvent être bornés par l'état et la sortie d'un système LPV fictif stable, qui dépend du vecteur de paramètres ρ et dont le vecteur d'entrées comprend \tilde{w} et \hat{w} . En montrant qu'un critère de type gain \mathcal{L}_2 et/ou \mathcal{L}_∞ du système LPV fictif est une borne supérieure du critère de performance correspondant du système (1.345)-(1.347), il est conclu que ce dernier système est stable avec une performance donnée par le critère de gain \mathcal{L}_2 et/ou \mathcal{L}_∞ . Ainsi, le problème initial se transforme en un problème LPV (fictif) linéarisé en utilisant une matrice auxiliaire comme degré de liberté. Pour atténuer le conservatisme lié à la stabilité quadratique, qui repose habituellement sur une matrice de Lyapunov constante pour toutes les variations du vecteur de paramètres, la méthode s'appuie sur une matrice de Lyapunov dépendante des paramètres et sur le concept de multi-convexité. À cette fin, l'Hypothèse 1.9 a été prise en compte. Pour la démonstration mathématiques de ces théorèmes, le lecteur peut se référer à [65]. ■

1.8 Positionnement des contributions de la thèse

L'état de l'art montre l'existence de diverses approches d'estimation d'état d'un système. La première repose sur la conception de filtres qui offrent une grande flexibilité dans le choix de sa structure, car ne dépendant pas de la structure du modèle du système comme pour les observateurs. Une deuxième approche concerne la synthèse d'observateurs intervalles, mais dont la structure repose en général sur la dynamique du système dont on cherche à estimer l'état. Pour les deux approches, des méthodologies de synthèse existent que ce soit pour la classe des systèmes LTI, comme celle des systèmes LPV. De nombreux verrous théoriques restent encore à lever pour les deux approches. Ces derniers seront à présent mis en évidence afin de positionner la contribution de nos travaux.

1.8.1 Analyse critique de l'état de l'art

Bien que de nombreuses contributions aient déjà été proposées dans la littérature sur les méthodologies de synthèse d'observateurs intervalles, certaines méthodologies n'associent pas de critère d'optimisation, contrairement à d'autres. Dans les travaux de [3, 125, 126], les méthodologies de synthèse reposent sur la détermination de matrices permettant d'obtenir la propriété Metzler et Hurwitz, l'évaluation de la performance étant réalisé *a posteriori*. L'objectif principal est de garantir la propriété de coopérativité, ce qui implique spécifiquement l'obtention d'une matrice d'état Metzler pour la dynamique d'erreur d'estimation. Dans le cas où ces méthodologies garantissent la stabilité des erreurs supérieure et inférieure avec des critères de performance tels que \mathcal{H}_∞ ou \mathcal{H}_1 , comme présentées dans [38, 110, 179], on observe que même dans ce contexte, les degrés de liberté disponibles sont mobilisés uniquement pour assurer la coopérativité des erreurs d'estimation. Comme évoqué dans [65], dans le contexte des systèmes LPV, l'approche présentée dans [38] cherche à apporter une réponse à ces problèmes en intégrant un critère de performance de type gain \mathcal{L}_2 . Cependant, cette méthode présente plusieurs inconvénients notables :

- Bien que ces travaux incorporent une mesure de performance de type gain \mathcal{L}_2 dans le processus de conception, le critère minimisé n'est pas directement associé à la réduction de la taille de l'intervalle estimé, le gain \mathcal{L}_2 étant une mesure de type énergie, contrairement au gain \mathcal{L}_∞ (pire cas crête à crête).
- La méthodologie de synthèse proposée ne fournit pas de solution pour obtenir conjointement la propriété Metzler et Hurwitz, et encore moins sous un critère de performance.
- Les matrices dépendantes du vecteur de paramètres sont supposées être bornées par des matrices constantes. Par conséquent, le problème, initialement de nature LPV, est reformulé sous la forme d'un problème incertain LTI ensembliste, induisant de manière inhérente du conservatisme.

En contraste avec l'approche précédente, la solution proposée dans [177] adopte une démarche qui intègre, d'une part, la structure inhérente des matrices du modèle et, d'autre part, la présence simultanée de paramètres mesurés et non mesurés. De plus, le processus d'optimisation qui régit cette méthode, détermine le gain de l'observateur en se basant sur un critère de performance de type \mathcal{L}_2 . Cette démarche vise à réduire au maximum l'impact des incertitudes associées au modèle sur la largeur de l'intervalle d'estimation. Cependant, il convient de souligner que la contrainte majeure de cette approche est étroitement liée au choix du gain de l'observateur intervalle. Ce gain dépend de la structure

propre au système étudié et sa détermination doit simultanément garantir la stabilité de l'encadrement et la propriété Metzler. La difficulté réside davantage dans la résolution du critère optimal et dans l'atteinte de l'optimalité, surtout en l'absence de garantie de convergence avec la synthèse "a priori/a posteriori". Il ne s'agit pas simplement de satisfaire les deux conditions, car il est possible de se retrouver dans une situation où cela est vrai sans avoir atteint le point optimal. Plus récemment, dans le contexte des observateurs intervalles LTI [179] et LPV [110], la méthode par structure TNL a réussi à surmonter les obstacles scientifiques mentionnés précédemment. Cette percée a été réalisée en évitant l'usage d'une transformation d'état, en tenant compte de la propriété Metzler dans le processus d'optimisation, et en incorporant des critères de performances \mathcal{H}_∞ et de gain \mathcal{L}_∞ dès la phase de synthèse. Néanmoins, il convient de noter que cette méthode reste relativement conservatrice dans le choix des degrés de liberté, qui doivent être préalablement fixés. De plus, ces choix ne sont pas nécessairement optimaux et ne tiennent pas compte des variations temporelles des paramètres, inhérentes à la nature des systèmes LPV [110].

En ce qui concerne la théorie des filtres, les méthodologies de synthèse intègrent *a priori* la présence d'un critère de performance au sens d'une norme donnée lors de la synthèse. L'avantage apportée par la structure du filtre, qui peut être de dimension supérieure à celle du système considéré, ainsi que l'exploitation de degré de liberté supplémentaire associée à des variables auxiliaires lors de la synthèse, sont des atouts à exploiter.

Il est important de souligner qu'il existe une différence entre la synthèse d'une loi de commande basée sur un filtre intervalle ou sur un observateur intervalle. En effet, dans le contexte des modèles LTI, LPV, la synthèse conjointe d'un estimateur intervalle et d'une loi de commande repose généralement sur la notion de principe de séparation, nécessitant que la dynamique de l'estimateur soit plus rapide que celle du système considéré. Dans le cadre des observateurs intervalles, le principe de séparation est plus complexe à obtenir. Ceci est dû à la présence de terme non linéaires qui sont le résultat de la méthode de construction des fonctions de majoration inhérentes à l'approche intervalle. Cela a pour effet de créer un couplage entre les variables du système et de celui de l'estimateur, ce qui représente un verrou. Cette problématique peut être surmontée grâce à la conception de filtres intervalles spécifiques.

Un dernier point à souligner concernant la conception des filtres est qu'il est nécessaire que le système étudié soit stable afin de garantir que le filtre synthétisé le soit également. Pour contourner le problème, on peut toujours inclure le contrôleur dans le modèle. C'est une solution éprouvée très largement utilisée dans les travaux du laboratoire IMS en diagnostic basé modèle [91]. Si toutefois, le contrôleur n'est pas connu, on aura alors recours à des modèles de performance de celui-ci.

1.8.2 Objectifs de la thèse

À la lumière des éléments exposés dans la sous-section précédente, nous avons pris comme direction de recherche la théorie des filtres. Cette analyse conforte pleinement les orientations prises dans nos travaux. Au cœur de ce manuscrit réside l'idée de tirer parti du potentiel de cette approche, dans le but de développer une nouvelle méthode d'estimation : un filtre robuste par intervalle. Nous introduirons ainsi une méthodologie novatrice de synthèse de filtres adaptée au contexte intervalle, une approche qui n'a pas encore été explorée dans la littérature existante. Cette contribution représente donc un

jalon significatif dans le cadre de notre thèse. Cette méthodologie sera développée et appliquée pour les classes de modèles suivants, en intégrant les spécifications données comme suit :

- Pour un modèle LTI
 - La propagation des incertitudes et des perturbations bornées sur l'erreur d'estimation est minimisée au sens de la norme $\mathcal{H}_1/\mathcal{H}_\infty$.
 - La structure du filtre consiste en une réalisation d'état quelconque, qui peut être d'ordre supérieur à celui du modèle du système.
 - L'obtention conjointe des propriétés de stabilité et de coopérativité est réalisée en adjoignant des contraintes associées au problème de synthèse du filtre intervalle.
- Pour un modèle LPV, le filtre intervalle est conçu pour répondre aux niveaux de performance requis, utilisant des critères tels que le gain \mathcal{L}_2 et \mathcal{L}_∞ . Tout comme pour les modèles LTI, la conception du filtre est réalisée sous la forme d'une réalisation d'état générique. Cependant, une différence significative réside dans la dépendance des paramètres du modèle LPV. Ainsi, le filtre intervalle est conçu de manière à prendre en compte cette dépendance paramétrique afin de réduire le conservatisme.

Ce sont ici, les contributions des travaux de thèse présentées.

Synthèse de filtres intervalles pour les systèmes LTI

Ce chapitre présente la première contribution de nos travaux de thèse, en proposant une nouvelle approche d'estimation par intervalle. Selon nos connaissances, l'approche de conception de filtre appliquée dans le contexte "intervalle" n'a pas été abordée dans la littérature, et constitue donc un problème ouvert. Dans cette optique, la principale contribution de ce chapitre réside dans la proposition d'une nouvelle approche pour la conception de filtres intervalles destinés aux systèmes linéaires à temps invariant (LTI). Les développements méthodologiques établis visent à proposer une solution au problème de synthèse des filtres par intervalles sous contraintes simultanées d'existence et de performance. La synthèse des paramètres des filtres par intervalles est basée sur la minimisation d'un critère mixte \mathcal{H}_∞ et \mathcal{H}_1 . Ce critère permet d'atténuer l'influence des bruits et perturbations sur l'estimation de l'intervalle total, dans un contexte "pire cas" (contexte \mathcal{H}_∞) et "d'amplitude maximale" (contexte \mathcal{H}_1). La synthèse est formulée sous contraintes d'inégalités matricielles linéaires et bilinéaires (LMIs et BMIs) comme un problème de programmation non linéaire semi-définie (du terme anglo-saxon "nonlinear semi definite programming" NL-SDP). Il est à noter que cette méthode ne nécessite aucune transformation du système (transformation par changement de variables, transformation en un système positif) pour assurer la coopérativité des erreurs d'observation. Ceci constitue un apport méthodologique notable dans l'approche proposée par rapport aux approches existantes dans la littérature, voir Chapitre 1 de ce mémoire.

2.1 Encadrement de fonctions

Le Lemme 1.5 présenté à la page 24 donne une approche constructive permettant d'encadrer le produit d'un vecteur incertain $x \in \mathbb{R}^n$ par une matrice constante $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, en utilisant les bornes du domaine d'appartenance. Sous l'hypothèse de l'existence d'une matrice $B \in \mathbb{R}^{r \times m}$ vérifiant la décomposition $B = B_a - B_b$, avec $B_a, B_b \in \mathbb{R}^{r \times m}$ représentant des degrés de liberté, nous présentons le lemme suivant.

Lemme 2.1. *Étant donné une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et une matrice $B \in \mathbb{R}^{r \times m}$. Définissons les matrices $B_k \in \mathbb{R}^{r \times m}$, $k \in \{a; b\}$ telles que $B = B_a - B_b$, avec $B_a, B_b \geq 0$ et un vecteur*

$x \in [\underline{x}, \bar{x}] \in \mathbb{R}^n$. Si A et B sont des matrices constantes, alors :

$$(B_a A^+ + B_b A^-) \underline{x} - (B_a A^- + B_b A^+) \bar{x} \leq BAx \leq (B_a A^+ + B_b A^-) \bar{x} - (B_a A^- + B_b A^+) \underline{x}. \quad (2.1)$$

Démonstration. Il est possible de décomposer le terme BAx tel que :

$$\begin{aligned} BAx &= (B_a - B_b)(A^+ - A^-)x, \\ &= (B_a A^+ - B_a A^- - B_b A^+ + B_b A^-)x. \end{aligned} \quad (2.2)$$

L'utilisation du Lemme 1.5 permet de construire un encadrement pour chaque terme $B_a A^+ x$, $B_a A^- x$, $B_b A^+ x$, $B_b A^- x$. Tenant compte de l'encadrement $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$, il vient :

$$B_a A^+ \underline{x} \leq B_a A^+ x \leq B_a A^+ \bar{x}, \quad (2.3)$$

$$-B_a A^- \bar{x} \leq -B_a A^- x \leq -B_a A^- \underline{x}, \quad (2.4)$$

$$-B_b A^+ \bar{x} \leq -B_b A^+ x \leq -B_b A^+ \underline{x}, \quad (2.5)$$

$$B_b A^- \underline{x} \leq B_b A^- x \leq B_b A^- \bar{x}. \quad (2.6)$$

Finalement, l'encadrement du terme BAx est donné par l'inégalité

$$B_a A^+ \underline{x} - B_a A^- \bar{x} - B_b A^+ \bar{x} + B_b A^- \underline{x} \leq BAx \leq B_a A^+ \bar{x} - B_a A^- \underline{x} - B_b A^+ \underline{x} + B_b A^- \bar{x}, \quad (2.7)$$

qui est équivalente aux inégalités telles qu'exprimées dans l'équation (2.1). ■

Notons que le Lemme 1.5 repose sur l'utilisation des opérateurs non-linéaires \bullet^+ et \bullet^- . Cette approche présente donc un inconvénient lorsque l'objectif final est d'inclure les majorants dans un processus d'optimisation. Le Lemme 2.1 repose sur le principe qu'une matrice réelle peut être décomposée par deux (non uniques) matrices dont tous les éléments sont positifs. Il en résulte que la structure finale des bornes supérieure et inférieure est linéaire par rapport aux degrés de liberté ce qui est clairement un avantage par rapport au Lemme 1.5.

2.2 Formulation du problème

Nous nous proposons maintenant d'explorer la formulation du problème, en considérant un système LTI stable décrit par

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Ew(t), \quad (2.8)$$

$$y(t) = Cx(t) + Fw(t), \quad (2.9)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ désignent respectivement l'état du système et la sortie mesurée. $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ est le vecteur des entrées inconnues/perturbations bornées tel que $w(t) \in [\underline{w}(t), \bar{w}(t)]$, $\forall t \geq 0$ où les vecteurs $\underline{w}(t), \bar{w}(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ sont supposés connus *a priori*. Les matrices sont définies par $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $E \in \mathbb{R}^{n \times n_w}$, $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$, et $F \in \mathbb{R}^{n_y \times n_w}$.

L'objectif que nous poursuivons est de concevoir un filtre d'intervalle d'ordre $n_f > n$, qui fournit les limites supérieure $\bar{z}(t)$ et inférieure $\underline{z}(t)$ de la combinaison linéaire de l'état :

$$z(t) = Tx(t), \quad T \in \mathbb{R}^{n_z \times n}. \quad (2.10)$$

De manière équivalente, il s'agit de déterminer un filtre dynamique dont la sortie $[\bar{z}(t)^T \underline{z}(t)^T]^T$ vérifie l'inégalité :

$$\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.11)$$

Les hypothèses suivantes sont faites :

Hypothèse 2.1. La paire (A,C) est observable (ou au moins détectable).

Hypothèse 2.2. On suppose que $n_z \leq n$ et que la matrice T est de rang plein colonne.

L'Hypothèse 2.2 est largement reconnue et courante dans le domaine des filtres fonctionnels [51]. Elle permet de garantir d'un point de vue pratique, que l'on ne cherche pas à estimer deux composantes z_i et z_j de z , qui seraient linéairement dépendantes.

$T = I_n$ est un choix valide. Cependant, ce dernier choix implique des restrictions sur D_F , voir la Remarque 2.1.

Afin d'améliorer la lisibilité des développements suivants, la dépendance temporelle est désormais omise.

L'objectif que nous poursuivons est de concevoir un filtre intervalle, qui admet la structure d'espace d'état suivante

$$\dot{\bar{s}}_f = A_F \bar{s}_f + (B_{F_1} - B_F)y + \bar{\zeta}_1(\bar{z}, \underline{z}, \bar{w}, \underline{w}) \quad (2.12)$$

$$\dot{\underline{s}}_f = A_F \underline{s}_f + (B_F - B_{F_2})y + \underline{\zeta}_2(\bar{z}, \underline{z}, \bar{w}, \underline{w}) \quad (2.13)$$

$$\dot{x}_f = A_F x_f + B_F y \quad (2.14)$$

$$\bar{x}_f = \bar{s}_f + x_f \quad (2.15)$$

$$\underline{x}_f = x_f - \underline{s}_f \quad (2.16)$$

$$\bar{z} = C_{F_1} \bar{x}_f + D_F y + \bar{\eta}_1(\bar{x}_f, \underline{x}_f, \bar{w}, \underline{w}) \quad (2.17)$$

$$\underline{z} = C_{F_2} \underline{x}_f + D_F y + \underline{\eta}_2(\bar{x}_f, \underline{x}_f, \bar{w}, \underline{w}) \quad (2.18)$$

où $\bar{s}_f, \underline{s}_f, \bar{x}_f, \underline{x}_f \in \mathbb{R}^{n_f}$, $\bar{w}, \underline{w} \in \mathbb{R}^{n_w}$ et $\bar{z}, \underline{z} \in \mathbb{R}^{n_z}$ désignent respectivement les bornes supérieures et inférieures des états $s_f, x_f \in \mathbb{R}^{n_f}$, de la perturbation $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ et du signal à estimer $z \in \mathbb{R}^{n_z}$. Les matrices $A_F, B_F, B_{F_1}, B_{F_2}, C_{F_1}, C_{F_2}, D_F$ ont des dimensions adéquates, et $\bar{\zeta}_1, \underline{\zeta}_2 : \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_w} \times \mathbb{R}^{n_w} \rightarrow \mathbb{R}^{n_f}$ et $\bar{\eta}_1, \underline{\eta}_2 : \mathbb{R}^{n_f} \times \mathbb{R}^{n_f} \times \mathbb{R}^{n_w} \times \mathbb{R}^{n_w} \rightarrow \mathbb{R}^{n_z}$.

Les éléments clés du filtre par intervalle proposé sont les suivants :

- (i) Le filtre peut avoir un ordre supérieur à celui du modèle du système : $n_f > n$.
- (ii) Les matrices $A_F, B_F, B_{F_1}, B_{F_2}, C_{F_1}, C_{F_2}, D_F$ sont des variables libres, ce qui nous donne $N = n_f^2 + 3(n_f \times n_y) + 2(n_z \times n_f) + n_z \times n_y$ degrés de liberté pour le problème de synthèse.
- (iii) L'effet des entrées inconnues w sur la taille de l'intervalle $\tilde{e}_z = \bar{z} - \underline{z}$, est minimisé dans le sens de la norme \mathcal{H}_∞ et/ou de la norme \mathcal{H}_1 .

2.3 Conception du filtre intervalle

2.3.1 Conditions d'existence

Cette sous-section aborde les conditions d'existence pour que le système (2.12) -(2.18) soit un filtre par intervalle pour le système (2.8)-(2.10). La solution est présentée dans le théorème suivant.

Théorème 2.1. *Sous les hypothèses 2.1-2.2, l'état z du système (2.8)-(2.10) est borné par les vecteurs \bar{z}, \underline{z} définis par (2.17), (2.18) c'est à dire*

$$z(t) \in [\underline{z}(t), \bar{z}(t)], \quad \forall t \geq 0, \quad (2.19)$$

si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) La matrice d'état A_F est Metzler.

(ii) Il existe des matrices de sortie C_{F_q} , $q \in \{1; 2\}$ et D_F du filtre, telles que :

$$C_{F_q} \geq 0, \quad (2.20)$$

$$D_F C T^\dagger = I_{n_z}. \quad (2.21)$$

(iii) Les fonctions $\bar{\zeta}_1, \underline{\zeta}_2, \bar{\eta}_1, \eta_2$ vérifient :

$$\bar{\zeta}_1(\bar{z}, \underline{z}, \bar{w}, \underline{w}) - \zeta_1(z, w) \geq 0, \quad (2.22)$$

$$\zeta_2(z, w) - \underline{\zeta}_2(\bar{z}, \underline{z}, \bar{w}, \underline{w}) \geq 0, \quad (2.23)$$

$$\bar{\eta}_1(\bar{x}_f, \underline{x}_f, \bar{w}, \underline{w}) - \eta_1(x_f, w) \geq 0, \quad (2.24)$$

$$\eta_2(x_f, w) - \underline{\eta}_2(\bar{x}_f, \underline{x}_f, \bar{w}, \underline{w}) \geq 0, \quad (2.25)$$

où

$$\zeta_q(z, w) = R_q Y x + R_q S w, \quad (2.26)$$

$$\eta_q(x_f, w) = C_{F_q} (-I_{n_f}) x_F + D_F (-F) w, \quad (2.27)$$

avec $R_q = \begin{bmatrix} B_{F_q} & B_F \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} -C T^\dagger & C T^\dagger \end{bmatrix}^T$, $S = \begin{bmatrix} -F & F \end{bmatrix}^T$ et $q \in \{1; 2\}$.

(iv) Pour toutes conditions initiales satisfaisant

$$\underline{s}_f(0), \bar{s}_f(0) \geq 0, \quad (2.28)$$

$$\underline{x}_f(0) \leq x_f(0) \leq \bar{x}_f(0), \quad (2.29)$$

nous avons, $\forall t \geq 0$:

$$\underline{s}_f(t), \bar{s}_f(t) \geq 0, \quad (2.30)$$

$$\underline{x}_f(t) \leq x_f(t) \leq \bar{x}_f(t). \quad (2.31)$$

Démonstration. Cherchons dans un premier temps à prouver que $\underline{s}_f(t), \bar{s}_f(t) \geq 0$ est vérifié $\forall t \geq 0$. Pour se faire, en développant (2.12) et (2.13) à partir de (2.9), on obtient :

$$\dot{\bar{s}}_f = A_F \bar{s}_f + \begin{bmatrix} B_{F_1} & B_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ -C \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_{F_1} & B_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ -F \end{bmatrix} w + \bar{\zeta}_1(\bar{z}, \underline{z}, \bar{w}, \underline{w}), \quad (2.32)$$

$$\dot{\underline{s}}_f = A_F \underline{s}_f + \begin{bmatrix} B_{F_2} & B_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -C \\ C \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_{F_2} & B_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F \\ F \end{bmatrix} w + \underline{\zeta}_2(\bar{z}, \underline{z}, \bar{w}, \underline{w}). \quad (2.33)$$

À partir de la relation $x = T^\dagger z$, et des notations $\zeta_q(z, w)$, $q \in \{1; 2\}$, introduites dans (2.26), il vient que (2.32)-(2.33) sont réduites à :

$$\dot{\bar{s}}_f(t) = A_F \bar{s}_f(t) + \bar{\zeta}_1(\bar{z}, \underline{z}, \bar{w}, \underline{w}) - \zeta(z, w), \quad (2.34)$$

$$\dot{\underline{s}}_f(t) = A_F \underline{s}_f(t) + \zeta_2(z, w) - \underline{\zeta}_2(\bar{z}, \underline{z}, \bar{w}, \underline{w}). \quad (2.35)$$

Sous la propriété Metzler (i), les conditions (2.22)-(2.23) et les conditions initiales (2.28), il vient que (2.34)-(2.35) satisfont la propriété de coopérativité et donc par conséquent :

$$\bar{s}_f(t), \underline{s}_f(t) \geq 0, \forall t \geq 0. \quad (2.36)$$

Dans un second temps, en utilisant les équations (2.15)-(2.16), les conditions initiales (2.29), et en considérant que la propriété de coopérativité (2.36) est satisfaite, on peut directement en déduire que $\bar{x}_f(t)$ et $\underline{x}_f(t)$ satisfont :

$$\underline{x}_f(t) \leq x_f(t) \leq \bar{x}_f(t), \forall t \geq 0. \quad (2.37)$$

En combinant $x(t) = T^\dagger z(t)$, (2.9) et (2.15)-(2.16), il vient que :

$$\bar{z} = C_{F_1} \bar{s}_f + C_{F_1} x_f + D_F C T^\dagger z + D_F F w + \bar{\eta}_1(\bar{x}_f, \underline{x}_f, \bar{w}, \underline{w}), \quad (2.38)$$

$$\underline{z} = C_{F_2} x_f - C_{F_2} \underline{s}_f + D_F C T^\dagger z + D_F F w + \underline{\eta}_2(\bar{x}_f, \underline{x}_f, \bar{w}, \underline{w}). \quad (2.39)$$

Sous la contrainte d'égalité (2.21), et avec les notations $\eta_q(x_f, w)$, $q \in \{1; 2\}$, introduites dans (2.27), on peut vérifier :

$$\bar{z} - z = C_{F_1} \bar{s}_f + \bar{\eta}_1(\bar{x}_f, \underline{x}_f, \bar{w}, \underline{w}) - \eta_1(x_f, w), \quad (2.40)$$

$$z - \underline{z} = C_{F_2} \underline{s}_f + \eta_2(x_f, w) - \underline{\eta}_2(\bar{x}_f, \underline{x}_f, \bar{w}, \underline{w}). \quad (2.41)$$

Sous les contraintes de positivité matricielle élément par élément définies dans (2.20), en tenant compte des conditions (2.24)-(2.25), 2.30) et (2.31) il vient que $\bar{z} - z \geq 0$, et $z - \underline{z} \geq 0$ pour tout instant $t \geq 0$. Cela marque la conclusion de la preuve. ■

Remarque 2.1. Notons que si $T = I_n$, alors D_F existe si et seulement si $\text{rang}(C) = \text{rang} \begin{pmatrix} C \\ I_n \end{pmatrix}$. Dans ce cas, la solution est donnée par

$$D_F = C^\dagger - M(I_{n_y} - C C^\dagger), \quad (2.42)$$

où M est une matrice arbitraire.

2.3.2 Détermination des fonctions $\bar{\zeta}_1, \underline{\zeta}_2, \bar{\eta}_1, \underline{\eta}_2$

La détermination de $\bar{\zeta}_1, \underline{\zeta}_2, \bar{\eta}_1, \underline{\eta}_2$ repose sur le Lemme 2.1.

Ainsi, chaque matrice (inconnue) B_F, B_{F_q} et C_{F_q} , $q \in \{1; 2\}$, est décomposée en deux matrices (non uniques) telles que

$$B_F = B_{F_a} - B_{F_b}, \quad (2.43)$$

$$B_{F_q} = B_{F_{q_a}} - B_{F_{q_b}}, \quad (2.44)$$

$$C_{F_q} = C_{F_{q_a}} - C_{F_{q_b}}, \quad (2.45)$$

où $B_{F_{q_a}}, B_{F_{q_b}}, C_{F_{q_a}}, C_{F_{q_b}}, B_{F_a}, B_{F_b} \geq 0$. La matrice D_F est quant à elle, décomposée de manière similaire, i.e.

$$D_F = D_{F_a} - D_{F_b}, \quad (2.46)$$

où D_{F_a} and D_{F_b} sont connues *a priori* telles que $D_{F_a}, D_{F_b} \geq 0$ et que la contrainte (2.21) soit satisfaite.

Il vient alors que la matrice $R_q(\rho)$ (voir (2.26)) est partitionnée de façon identique, telle que

$$R_q = R_{q_a} - R_{q_b}, \quad (2.47)$$

où $R_{q_a} = \begin{bmatrix} B_{F_{q_a}} & B_{F_a} \end{bmatrix}$, $R_{q_b} = \begin{bmatrix} B_{F_{q_b}} & B_{F_b} \end{bmatrix}$, tels que $B_{F_{q_a}}, B_{F_{q_b}}, B_{F_a}, B_{F_b} \geq 0$.

Le lemme suivant permet alors de construire les fonctions $\bar{\zeta}_1, \zeta_2$ et $\bar{\eta}_1, \eta_2$.

Lemme 2.2. *Soient les décompositions (2.43)-(2.47). Alors, pour $x_f \in [\bar{x}_f, \underline{x}_f]$ et $z \in [\bar{z}, \underline{z}]$, les inégalités (2.22)-(2.25) du Théorème 2.1 sont satisfaites avec*

$$\bar{\zeta}_1(\bar{z}, \underline{z}, \bar{w}, \underline{w}) = \Sigma_{11}\bar{z} - \Sigma_{12}\underline{z} + \Psi_{11}\bar{w} - \Psi_{12}\underline{w}, \quad (2.48)$$

$$\zeta_2(\bar{z}, \underline{z}, \bar{w}, \underline{w}) = \Sigma_{21}\bar{z} - \Sigma_{22}\underline{z} + \Psi_{21}\bar{w} - \Psi_{22}\underline{w}, \quad (2.49)$$

$$\bar{\eta}_1(\bar{x}_f, \underline{x}_f, \bar{w}, \underline{w}) = \Xi_{11}\bar{x}_f - \Xi_{12}\underline{x}_f + \Pi_{11}\bar{w} - \Pi_{12}\underline{w}, \quad (2.50)$$

$$\eta_2(\bar{x}_f, \underline{x}_f, \bar{w}, \underline{w}) = \Xi_{21}\bar{x}_f - \Xi_{22}\underline{x}_f + \Pi_{11}\bar{w} - \Pi_{12}\underline{w}, \quad (2.51)$$

où

$$\begin{aligned} \Sigma_{q1} &= R_{q_a}Y^+ + R_{q_b}Y^-, & \Xi_{q1} &= C_{F_{q_b}}(-I_{n_f})^-, \\ \Sigma_{q2} &= R_{q_a}Y^- + R_{q_b}Y^+, & \Xi_{q2} &= C_{F_{q_a}}(-I_{n_f})^-, \\ \Psi_{q1} &= R_{q_a}S^+ + R_{q_b}S^-, & \Pi_{11} &= D_{F_a}(-F)^+ + D_{F_b}(-F)^-, \\ \Psi_{q2} &= R_{q_a}S^- + R_{q_b}S^+, & \Pi_{12} &= D_{F_a}(-F)^- + D_{F_b}(-F)^+, \end{aligned}$$

avec $q \in \{1; 2\}$.

Démonstration. Une application directe du Lemme 2.1 et des décompositions (2.43) - (2.47) sur les différentes parties des équations (2.26)-(2.27) permet d'obtenir les bornes supérieures $\bar{\zeta}_1, \bar{\eta}_1$ des éléments ζ_1, η_1 et les bornes inférieures ζ_2, η_2 des éléments ζ_2, η_2 définis dans les équations (2.48)-(2.51). ■

2.3.3 Critère de performance $\mathcal{H}_1 / \mathcal{H}_\infty$ et formulation NL-SDP

Dans cette section, nous mettons en place les critères de performance nécessaires pour la conception du filtre par intervalle (2.12)-(2.18), puis nous formulons la Programmation Semi-Définie (SDP) basée sur un critère des normes \mathcal{H}_1 et/ou \mathcal{H}_∞ .

En utilisant les résultats du Lemme 2.2, les équations (2.12)-(2.18) s'écrivent

$$\dot{\bar{s}}_f(t) = A_F \bar{s}_f(t) + (B_{F_1} - B_F)y(t) + \Sigma_{11}\bar{z} - \Sigma_{12}\underline{z} + \Psi_{11}\bar{w} - \Psi_{12}\underline{w} \quad (2.52)$$

$$\dot{\underline{s}}_f(t) = A_F \underline{s}_f(t) + (B_F - B_{F_2})y(t) + \Sigma_{21}\bar{z} - \Sigma_{22}\underline{z} + \Psi_{21}\bar{w} - \Psi_{22}\underline{w} \quad (2.53)$$

$$\dot{x}_f(t) = A_F x_f(t) + B_F y(t) \quad (2.54)$$

$$\bar{z}(t) = C_{F_1}(\bar{s}_f(t) + x_f(t)) + D_F y(t) + \Xi_{11}\bar{x}_f - \Xi_{12}\underline{x}_f + \Pi_{11}\bar{w} - \Pi_{12}\underline{w} \quad (2.55)$$

$$\underline{z}(t) = C_{F_2}(x_f(t) - \underline{s}_f(t)) + D_F y(t) + \Xi_{21}\bar{x}_f - \Xi_{22}\underline{x}_f + \Pi_{11}\bar{w} - \Pi_{12}\underline{w} \quad (2.56)$$

En substituant les expressions de $y(t)$, $\bar{x}_f(t)$, $\underline{x}_f(t)$, $\bar{z}(t)$ et $\underline{z}(t)$ à partir des équations (2.9), (2.15)-(2.16), (2.55)-(2.56) dans les équations (2.52)-(2.53), et en considérant le vecteur d'état augmenté et d'entrée $\check{x} = \begin{pmatrix} x^T & x_f^T & \bar{s}_f^T & \underline{s}_f^T \end{pmatrix}^T$, $\omega = \begin{pmatrix} w^T & \bar{w}^T & \underline{w}^T \end{pmatrix}^T$ respectivement, on obtient le modèle d'état suivant

$$\dot{\check{x}} = \check{A}\check{x} + \check{B}\omega, \quad (2.57)$$

$$\tilde{e}_z = \check{C}\check{x} + \check{D}\omega, \quad (2.58)$$

où :

$$\check{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_F C & A_F \\ (B_{F_1} - B_F + \Sigma_{11} D_F - \Sigma_{12} D_F) C & \Sigma_{11} (C_{F_1} + \Xi_{11} - \Xi_{12}) - \Sigma_{12} (C_{F_2} + \Xi_{21} - \Xi_{22}) \cdots \\ (B_F - B_{F_2} + \Sigma_{21} D_F - \Sigma_{22} D_F) C & \Sigma_{21} (C_{F_2} + \Xi_{21} - \Xi_{22}) - \Sigma_{22} (C_{F_1} + \Xi_{11} - \Xi_{12}) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \cdots A_F + \Sigma_{11} (C_{F_1} + \Xi_{11}) + \Sigma_{12} \Xi_{22} & \Sigma_{11} \Xi_{12} + \Sigma_{12} (C_{F_2} + \Xi_{21}) \\ -(\Sigma_{21} \Xi_{22} + \Sigma_{22} C_{F_1} + \Sigma_{22} \Xi_{11}) & A_F - \Sigma_{21} C_{F_2} - \Sigma_{21} \Xi_{21} - \Sigma_{22} \Xi_{12} \end{bmatrix}, \quad (2.59)$$

$$\check{B} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ B_F F & 0 & 0 \\ (B_{F_1} - B_F + \Sigma_{11} D_F - \Sigma_{12} D_F) F & \Sigma_{11} \Pi_{11} + \Sigma_{12} \Pi_{12} + \Psi_{11} & -(\Sigma_{11} \Pi_{12} + \Sigma_{12} \Pi_{11} + \Psi_{12}) \\ (B_F - B_{F_2} + \Sigma_{21} D_F - \Sigma_{22} D_F) F & -(\Sigma_{21} \Pi_{12} + \Sigma_{22} \Pi_{11} + \Psi_{22}) & \Sigma_{21} \Pi_{11} + \Sigma_{22} \Pi_{12} + \Psi_{21} \end{bmatrix}, \quad (2.60)$$

$$\check{C} = [0 \quad (C_{F_1} - \Xi_{12} + \Xi_{11} - C_{F_2} - \Xi_{21} + \Xi_{22}) \quad (C_{F_1} + \Xi_{11} + \Xi_{22}) \quad (\Xi_{12} + \Xi_{21} + C_{F_2})], \quad (2.61)$$

$$\check{D} = [0 \quad (\Pi_{11} + \Pi_{12}) \quad -(\Pi_{12} + \Pi_{11})]. \quad (2.62)$$

L'objectif, vise alors à minimiser l'influence de l'entrée ω sur la largeur de l'intervalle \tilde{e}_z dans le sens d'un critère de norme \mathcal{H}_∞ et/ou \mathcal{H}_1 , tout en garantissant la stabilité asymptotique du modèle d'état (2.57)-(2.58). Compte-tenu de la nature triangulaire supérieure de \check{A} , la stabilité de (2.57)-(2.58) implique la stabilité du filtre (2.12)-(2.18).

Les lemmes suivant donnent la solution aux problèmes de synthèse \mathcal{H}_∞ et \mathcal{H}_1 .

Lemme 2.3. (Performance \mathcal{H}_∞ : Lemme réel borné [24]). Soit le transfert $G(s) = \check{C}(sI - \check{A})^{-1}\check{B} + \check{D}$ du système LTI (2.57)-(2.58). S'il existe une matrice $P = P^T$ et un scalaire $\gamma_{\mathcal{H}_\infty} > 0$ tels que

$$P = P^T \succ 0, \quad (2.63)$$

$$\begin{bmatrix} P\check{A} + \check{A}^T P & P\check{B} & \check{C}^T \\ \check{B}^T P & -\gamma_{\mathcal{H}_\infty} I & \check{D}^T \\ \check{C} & \check{D} & -\gamma_{\mathcal{H}_\infty} I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (2.64)$$

alors $\|G\|_\infty < \gamma_{\mathcal{H}_\infty}$.

Lemme 2.4. (Performance \mathcal{H}_1 [1, 88]) Soit le système (2.57)-(2.58). S'il existe trois scalaires $\gamma_{\mathcal{H}_1} > 0, \mu > 0, \lambda > 0$ et une matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}, P = P^T \succ 0$, tels que

$$\begin{bmatrix} P\check{A} + \check{A}^T P + \lambda P & P\check{B} \\ \check{B}^T P & -\mu I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (2.65)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda P & 0 & \check{C}^T \\ 0 & (\gamma_{\mathcal{H}_1} - \mu)I & \check{D}^T \\ \check{C} & \check{D} & \gamma_{\mathcal{H}_1} I \end{bmatrix} \succ 0, \quad (2.66)$$

alors la norme \mathcal{H}_1 du système $G(s)$ est inférieure à $\gamma_{\mathcal{H}_1}$, telle que $\|G\|_1 < \gamma_{\mathcal{H}_1}$.

Comme classiquement dans ce type d'approche, en raison des relations multiplicatives entre la matrice de Lyapunov P et les matrices de filtre $A_F, B_F, B_{F_q}, C_{F_q}, D_F$ ainsi que leurs décompositions $B_{F_k}, B_{F_{qk}}, C_{F_{qk}}, D_{F_k}, k \in \{a; b\}, q \in \{1; 2\}$, les inégalités impliquées ne sont pas linéaires, ce qui en fait un problème non convexe. Ce type de problème est connu pour être "NP-hard" et difficile à résoudre. Pour palier ce problème, nous proposons d'imposer une structure particulière à la matrice de Lyapunov P , ce qui permet de reformuler le problème de synthèse comme un problème NL-SDP, c'est à dire un problème d'optimisation mono-critère sous contraintes d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMI) et d'Inégalités Matricielles Bilinéaires (BMI).

Considérons que la matrice symétrique P est partitionnée selon la structure suivante :

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_2 \end{bmatrix}, \quad (2.67)$$

où $P_1 \in \mathbb{R}^{n_f \times n}$ et $P_2 \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$, et soient les changements de variables suivants :

$$\tilde{A}_F = P_2 A_F, \quad \tilde{B}_{F_{qk}} = P_2 B_{F_{qk}}, \quad (2.68)$$

$$\tilde{B}_{F_k} = P_2 B_{F_k}, \quad \tilde{C}_{F_{qk}} = C_{F_{qk}}. \quad (2.69)$$

avec $q \in \{1; 2\}$ et $k \in \{a; b\}$.

Le théorème suivant donne la solution au problème de synthèse \mathcal{H}_1 .

Théorème 2.2. *Considérons le système (2.8)-(2.10) et les Hypothèses (2.1)-(2.2). Le filtre intervalle (2.12)-(2.18) est asymptotiquement stable et vérifie $\|G\|_1 < \gamma_{\mathcal{H}_1}$, s'il existe des matrices réelles $P_1, \tilde{A}_F, \tilde{B}_{F_a}, \tilde{B}_{F_b}, \tilde{B}_{F_{1a}}, \tilde{B}_{F_{1b}}, \tilde{B}_{F_{2a}}, \tilde{B}_{F_{2b}}, \tilde{C}_{F_{1a}}, \tilde{C}_{F_{1b}}, \tilde{C}_{F_{2a}}$ de dimensions appropriées, ainsi que des scalaires réels $\kappa, \lambda, \mu, \gamma_{\mathcal{H}_1} > 0$ et une M-matrice P_2 solution du problème d'optimisation :*

$$\min \gamma_{\mathcal{H}_1} \text{ s.t. } P = P^T \succ 0, \quad (2.70)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} + \tilde{A}^T + \lambda P & \star \\ \tilde{B}^T & -\mu I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (2.71)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda P & \star & \star \\ 0 & (\gamma_{\mathcal{H}_1} - \mu)I & \star \\ \tilde{C} & \tilde{D} & \gamma_{\mathcal{H}_1} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (2.72)$$

$$\tilde{B}_{F_{qa}}, \tilde{B}_{F_{qb}}, \tilde{B}_{F_a}, \tilde{B}_{F_b}, \tilde{C}_{F_{qa}}, \tilde{C}_{F_{qb}} \geq 0, \quad (2.73)$$

$$\tilde{C}_{F_{qa}} - \tilde{C}_{F_{qb}} \geq 0, \quad (2.74)$$

$$\tilde{A}_F + \kappa P_2 \geq 0, \quad (2.75)$$

où :

$$\tilde{A} = P\check{A} = \begin{bmatrix} P_1A & 0 \\ \tilde{B}_F C & \tilde{A}_F \\ (\tilde{B}_{F_1} - \tilde{B}_F + \tilde{\Sigma}_{11}D_F - \tilde{\Sigma}_{12}D_F)C & \tilde{\Sigma}_{11}(\tilde{C}_{F_1} + \tilde{\Xi}_{11} - \tilde{\Xi}_{12}) - \tilde{\Sigma}_{12}(\tilde{C}_{F_2} + \tilde{\Xi}_{21} - \tilde{\Xi}_{22}) \cdots \\ (\tilde{B}_F - \tilde{B}_{F_2} + \tilde{\Sigma}_{21}D_F - \tilde{\Sigma}_{22}D_F)C & \tilde{\Sigma}_{21}(\tilde{C}_{F_2} + \tilde{\Xi}_{21} - \tilde{\Xi}_{22}) - \tilde{\Sigma}_{22}(\tilde{C}_{F_1} + \tilde{\Xi}_{11} - \tilde{\Xi}_{12}) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \cdots \tilde{A}_F + \tilde{\Sigma}_{11}(\tilde{C}_{F_1} + \tilde{\Xi}_{11}) + \tilde{\Sigma}_{12}\tilde{\Xi}_{22} & \tilde{\Sigma}_{11}\tilde{\Xi}_{12} + \tilde{\Sigma}_{12}(\tilde{C}_{F_2} + \tilde{\Xi}_{21}) \\ -(\tilde{\Sigma}_{21}\tilde{\Xi}_{22} + \tilde{\Sigma}_{22}\tilde{C}_{F_1} + \tilde{\Sigma}_{22}\tilde{\Xi}_{11}) & \tilde{A}_F - \tilde{\Sigma}_{21}\tilde{C}_{F_2} - \tilde{\Sigma}_{21}\tilde{\Xi}_{21} - \tilde{\Sigma}_{22}\tilde{\Xi}_{12} \end{bmatrix}, \quad (2.76)$$

$$\tilde{B} = P\check{B} = \begin{bmatrix} P_1E & 0 & 0 \\ \tilde{B}_F F & 0 & 0 \\ (\tilde{B}_{F_1} - \tilde{B}_F + \tilde{\Sigma}_{11}D_F - \tilde{\Sigma}_{12}D_F)F & \tilde{\Sigma}_{11}\tilde{\Pi}_{11} + \tilde{\Sigma}_{12}\tilde{\Pi}_{12} + \tilde{\Psi}_{11} & -(\tilde{\Sigma}_{11}\tilde{\Pi}_{12} + \tilde{\Sigma}_{12}\tilde{\Pi}_{11} + \tilde{\Psi}_{12}) \\ (\tilde{B}_F - \tilde{B}_{F_2} + \tilde{\Sigma}_{21}D_F - \tilde{\Sigma}_{22}D_F)F & -(\tilde{\Sigma}_{21}\tilde{\Pi}_{12} + \tilde{\Sigma}_{22}\tilde{\Pi}_{11} + \tilde{\Psi}_{22}) & (\tilde{\Sigma}_{21}\tilde{\Pi}_{11} + \tilde{\Sigma}_{22}\tilde{\Pi}_{12} + \tilde{\Psi}_{21}) \end{bmatrix}, \quad (2.77)$$

$$\tilde{C} = [0 \quad (\tilde{C}_{F_1} - \tilde{\Xi}_{12} + \tilde{\Xi}_{11} - \tilde{C}_{F_2} - \tilde{\Xi}_{21} + \tilde{\Xi}_{22}) \quad (\tilde{C}_{F_1} + \tilde{\Xi}_{11} + \tilde{\Xi}_{22}) \quad (\tilde{\Xi}_{12} + \tilde{\Xi}_{21} + \tilde{C}_{F_2})], \quad (2.78)$$

$$\tilde{D} = [0 \quad (\tilde{\Pi}_{11} + \tilde{\Pi}_{12}) \quad -(\tilde{\Pi}_{12} + \tilde{\Pi}_{11})]. \quad (2.79)$$

Ici, on note $\tilde{B}_{F_q} = \tilde{B}_{F_{q_a}} - \tilde{B}_{F_{q_b}}$, $\tilde{C}_{F_q} = \tilde{C}_{F_{q_a}} - \tilde{C}_{F_{q_b}}$, $\tilde{B}_F = \tilde{B}_{F_a} - \tilde{B}_{F_b}$ et

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_{q_1} &= P_2 \Sigma_{q_1} = \tilde{R}_{q_a} Y^+ + \tilde{R}_{q_b} Y^-, & \tilde{\Xi}_{q_1} &= \tilde{C}_{F_{q_b}} (-I_{n_f})^-, \\ \tilde{\Sigma}_{q_2} &= P_2 \Sigma_{q_2} = \tilde{R}_{q_a} Y^- + \tilde{R}_{q_b} Y^+, & \tilde{\Xi}_{q_2} &= \tilde{C}_{F_{q_a}} (-I_{n_f})^-, \\ \tilde{\Psi}_{q_1} &= P_2 \Psi_{q_1} = \tilde{R}_{q_a} S^+ + \tilde{R}_{q_b} S^-, & \tilde{\Pi}_{11} &= D_{F_a} (-F)^+ + D_{F_b} (-F)^-, \\ \tilde{\Psi}_{q_2} &= P_2 \Psi_{q_2} = \tilde{R}_{q_a} S^- + \tilde{R}_{q_b} S^+, & \tilde{\Pi}_{12} &= D_{F_a} (-F)^- + D_{F_b} (-F)^+, \end{aligned}$$

avec $\tilde{R}_{q_a} = [\tilde{B}_{F_{q_a}} \quad \tilde{B}_{F_a}]$, $\tilde{R}_{q_b} = [\tilde{B}_{F_{q_b}} \quad \tilde{B}_{F_b}]$ et $q \in \{1; 2\}$.

Les matrices d'état du filtre (2.12)-(2.18) sont alors données par

$$A_F = P_2^{-1} \tilde{A}_F, \quad B_{F_{q_k}} = P_2^{-1} \tilde{B}_{F_{q_k}}, \quad (2.80)$$

$$B_{F_k} = P_2^{-1} \tilde{B}_{F_k}, \quad C_{F_{q_k}} = \tilde{C}_{F_{q_k}}, \quad (2.81)$$

pour $q \in \{1; 2\}$ et $k \in \{a; b\}$.

Démonstration. En se basant sur les transformations linéaires définies dans les équations (2.68)-(2.69), il est évident que l'ensemble de contraintes énoncé dans les équations (2.70) à (2.75) du Théorème 2.2 entraîne que :

$$P = P^T \succ 0, \quad (2.82)$$

$$\begin{bmatrix} P\check{A} + \check{A}^T P + \lambda P & \star \\ \check{B}^T P & -\mu I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (2.83)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda P & \star & \star \\ 0 & (\gamma_{\mathcal{H}_1} - \mu)I & \star \\ & \check{C} & \check{D} \quad \gamma_{\mathcal{H}_1} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (2.84)$$

$$P_2 B_{F_{q_a}}, P_2 B_{F_{q_b}}, P_2 B_{F_a}, P_2 B_{F_b}, C_{F_{q_a}}, C_{F_{q_b}} \geq 0, \quad (2.85)$$

$$C_{F_{q_a}} - C_{F_{q_b}} \geq 0, \quad (2.86)$$

$$P_2 A_F + \kappa P_2 \geq 0. \quad (2.87)$$

En se basant sur la positivité de P_2^{-1} dans l'inégalité (2.87) et en utilisant le Lemme 1.14, on peut conclure que A_F est une matrice Metzler si (2.87) est satisfaite. De plus, en satisfaisant la contrainte (2.85), les matrices B_F , B_{F_q} et C_{F_q} peuvent être décomposées en deux matrices positives (non uniques) conformément à (2.43)-(2.45). Notons que (2.86) équivaut à la contrainte (2.20). En imposant la décomposition spécifique (2.43)-(2.46) des matrices du filtre B_F , B_{F_q} , C_{F_q} et D_F , les conditions énoncées dans (2.83)-(2.84) assurent un niveau de performance au sens de la norme \mathcal{H}_1 . En utilisant la matrice de Lyapunov P donnée par (2.67) et en remplaçant les matrices d'espace d'état (2.59)-(2.62) dans (2.65)-(2.66), on obtient les expressions (2.71)-(2.72). Ainsi, il vient que $\|G_{\omega \rightarrow \tilde{e}_z}\|_1 < \gamma_{\mathcal{H}_1}$ et $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t), \forall t \geq 0$. ■

Le théorème suivant donne la solution au problème de synthèse du filtre intervalle sous contrainte de performance \mathcal{H}_∞ .

Théorème 2.3. *Considérons le système (2.8)-(2.10) et les Hypothèses (2.1)-(2.2). Le filtre intervalle (2.12)-(2.18) est asymptotiquement stable et vérifie $\|G\|_\infty < \gamma_{\mathcal{H}_\infty}$, si il existe des matrices réelles $P_1, \tilde{A}_F, \tilde{B}_{F_a}, \tilde{B}_{F_b}, \tilde{B}_{F_{1a}}, \tilde{B}_{F_{1b}}, \tilde{B}_{F_{2a}}, \tilde{B}_{F_{2b}}, \tilde{C}_{F_{1a}}, \tilde{C}_{F_{1b}}, \tilde{C}_{F_{2a}}$ de dimensions appropriées, ainsi que des scalaires réels $\kappa, \gamma_{\mathcal{H}_\infty} > 0$ et une M -matrice P_2 solution du problème d'optimisation :*

$$\min \gamma_{\mathcal{H}_\infty} \text{ s.t. } P = P^T \succ 0, \quad (2.88)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} + \tilde{A}^T & \tilde{B} & \tilde{C}^T \\ * & -\gamma_{\mathcal{H}_\infty} I & \tilde{D}^T \\ * & * & -\gamma_{\mathcal{H}_\infty} I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (2.89)$$

Les matrices d'état du filtre (2.12)-(2.18) sont alors données par les équations (2.80)-(2.81).

Démonstration. La démonstration repose sur le Lemme 2.3 et est similaire à la démonstration donnée pour le Théorème 2.2. ■

Étant donné que les Théorèmes 2.2 et 2.3 sont formulés comme des problèmes NL-SDP, il est possible de les combiner en un problème d'optimisation mono-critère défini tel que $\gamma_{opt} = \psi_{\mathcal{H}_\infty} \gamma_{\mathcal{H}_\infty} + \psi_{\mathcal{H}_1} \gamma_{\mathcal{H}_1}$ sous les contraintes (2.70)-(2.75), (2.88)-(2.89) des Théorèmes 2.2 et 2.3. Le choix des poids $\psi_{\mathcal{H}_\infty}$ et $\psi_{\mathcal{H}_1}$ est guidé par le principe d'optimisation de Pareto, de telle sorte que :

$$\psi_{\mathcal{H}_\infty} + \psi_{\mathcal{H}_1} = 1. \quad (2.90)$$

2.4 Application académique

Cette section propose un exemple académique pour illustrer la pertinence des résultats proposés dans les paragraphes précédents.

Considérons le modèle suivant

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.1 \\ 0.2 & -1 & -0.2 \\ 0.1 & 0 & -2.1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -0.2 & 1 & -0.2 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 2 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix} w(t), \quad (2.91)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.1 & 0 & 1 \end{bmatrix} w(t), \quad x(0) = [0.5 \ 0 \ 0.2]^T \quad (2.92)$$

où $w = [w_1 \ w_2 \ w_3]^T$. $w_1(t)$ est choisi de type sinusoïdal tel que $w_1(t) = \sin(t)$, et $w_2(t), w_3(t)$ sont choisis à des bruits uniformes de moyenne nulle, avec $w_i(t) \in [-0.1; 0.1], i=2;3$. Il vient alors, $\bar{w}(t) = [(1 + \epsilon)\sin(t) \ 0.1 + \epsilon \ 0.1 + \epsilon]^T$ et $\underline{w} = [-(1 + \epsilon)\sin(t) \ -0.1 - \epsilon \ -0.1 - \epsilon]^T$, avec $\epsilon \rightarrow 0_+$.

Ici, on choisit d'estimer une combinaison linéaire des états :

$$z(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0.1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t). \quad (2.93)$$

La matrice D_F est choisie sous contrainte (2.21), soit avec

$$D_F = \begin{bmatrix} 1.9700 & 0.0333 \\ -0.6500 & 0.6667 \end{bmatrix}, \quad (2.94)$$

conduisant à une décomposition positive donnée par

$$D_{F_a} = \begin{bmatrix} 1.9700 & 0.0333 \\ 0 & 0.6667 \end{bmatrix}, \quad D_{F_b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.6500 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.95)$$

qui satisfait (2.46).

Le filtre intervalle (2.12)-(2.18) est ensuite synthétisé sur un critère de performance $\mathcal{H}_1/\mathcal{H}_\infty$. Le problème d'optimisation associé s'écrit donc :

$$\min \gamma_{opt} \quad \text{t.q (2.70) - (2.75), (2.88) - (2.89)}. \quad (2.96)$$

où les poids $\psi_{\mathcal{H}_1}, \psi_{\mathcal{H}_\infty}$ sont choisis tels que $\psi_{\mathcal{H}_1} = \frac{1}{2}, \psi_{\mathcal{H}_\infty} = \frac{1}{2}$. Ce problème d'optimisation est résolu à l'aide du solveur NL-SDP PENLAB [68] avec la boîte à outils YALMIP pour Matlab [114].

Les résultats obtenus sont illustrés dans le Tableau 2.1. Pour $n_f = 4$ et $n_f = 5$, la plus

pondérations	$\psi_{\mathcal{H}_1} = \frac{1}{2}$ et $\psi_{\mathcal{H}_\infty} = \frac{1}{2}$	
n_f	4	5
γ_{opt}	4.4357	2.9567
nb. variables LMI	121	155
paramètre κ	0.60028	0.81293
paramètre λ	0.04978	0.04979
enveloppe $\tilde{e}_{z_1} = \bar{z}_1 - \underline{z}_1$	0.402338	0.402332
enveloppe $\tilde{e}_{z_2} = \bar{z}_2 - \underline{z}_2$	0.2966662	0.2966661

TABLEAU 2.1 – Résultats pour différentes dimensions de l'ordre $n_f \in \{4; 5\}$

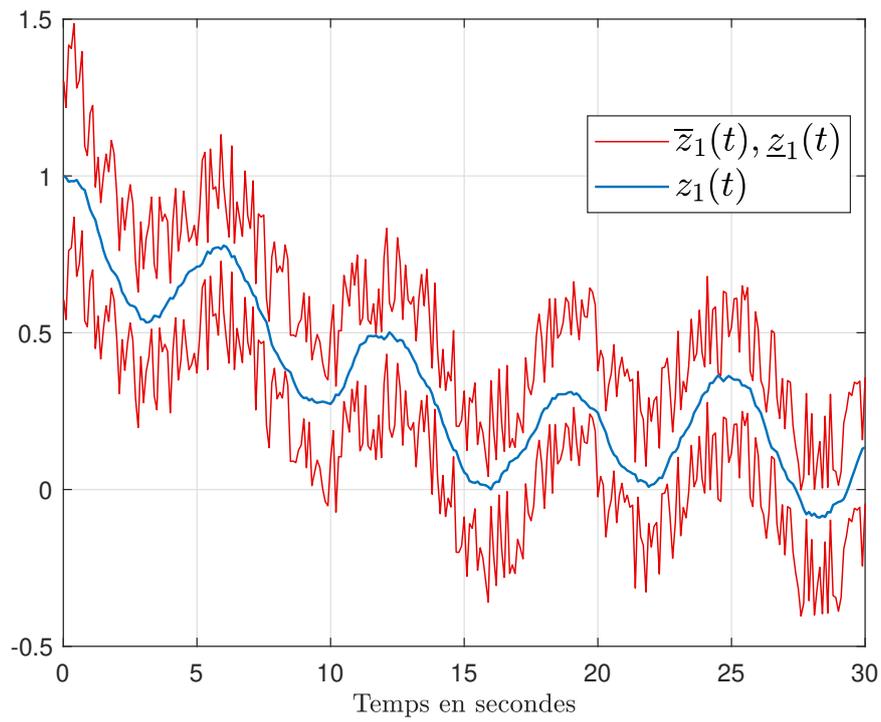
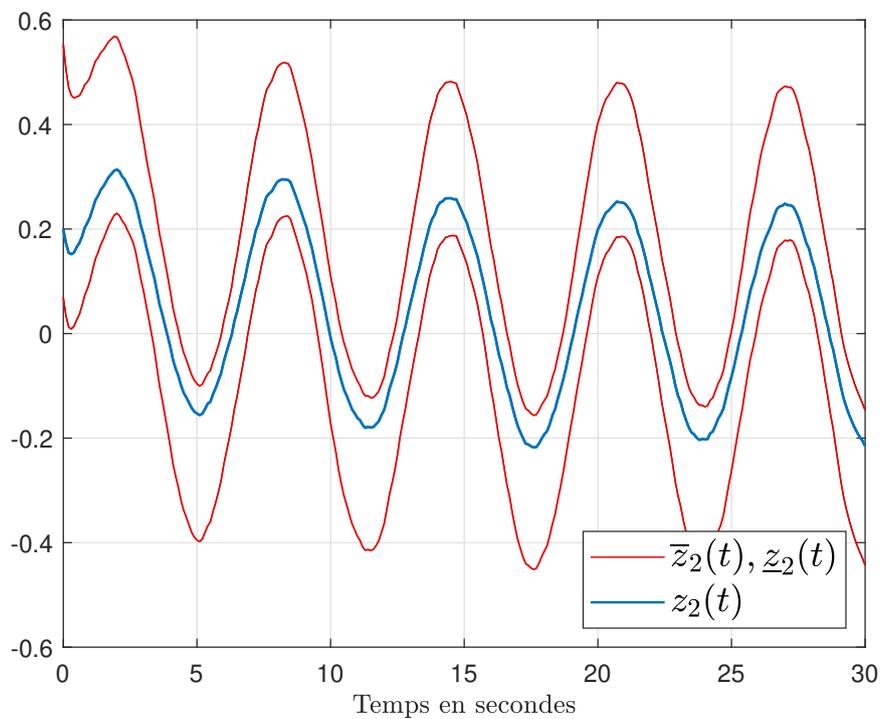
faible performance $\mathcal{H}_1/\mathcal{H}_\infty$ est atteinte avec le filtre du cinquième ordre. Les valeurs en régime permanent de l'enveloppe $\tilde{e}_z(t) = \bar{\Theta}(t) - \underline{\Theta}(t)$ associées à chaque ordre n_f sont également présentées dans le Tableau 2.1, où l'on peut observer que les enveloppes pour les deux ordres sont très proches. Sur la base de cette analyse, et en tenant compte du nombre de variables impliquées dans les LMIs et BMIs, la décision est prise de mettre en

œuvre le filtre d'intervalle avec un ordre $n_f = 5$. Avec cet ordre choisi et la réalisation admissible donnée par les équations (2.80)-(2.81), les matrices suivantes sont obtenues :

$$\begin{aligned}
 P_2 &= \begin{bmatrix} 194.3671 & -7.0755 & -7.1554 & -7.0041 & -7.1105 \\ -7.0755 & 194.2207 & -7.1467 & -7.1287 & -7.1153 \\ -7.1554 & -7.1467 & 196.1168 & -7.1633 & -7.1502 \\ -7.0041 & -7.1287 & -7.1633 & 194.5415 & -7.0414 \\ -7.1105 & -7.1153 & -7.1502 & -7.0414 & 194.2230 \end{bmatrix}, \\
 A_F &= \begin{bmatrix} -0.8128696 & 0.00000255 & 0.00000280 & 0.00000009616 & 0.00000336 \\ 0.00000258 & -0.812870 & 0.00000280 & 0.0000000941 & 0.00000336 \\ 0.00000257 & 0.00000255 & -0.812864 & 0.0000000909 & 0.00000335 \\ 0.00000255 & 0.00000257 & 0.00000280 & -0.8129303 & 0.00000333 \\ 0.00000258 & 0.00000257 & 0.00000280 & 0.0000000921 & -0.812850 \end{bmatrix}, \\
 B_{F_a} &= 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.6022 \cdot \mathbf{1}_{1 \times 2} \\ 0.6030 \cdot \mathbf{1}_{1 \times 2} \\ 0.5978 \cdot \mathbf{1}_{1 \times 2} \\ 0.6016 \cdot \mathbf{1}_{1 \times 2} \\ 0.6028 \cdot \mathbf{1}_{1 \times 2} \end{bmatrix}, \quad B_{F_b} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.0006 & 0.9885 \\ 0.0006 & 0.9898 \\ 0.0006 & 0.9813 \\ 0.0006 & 0.9875 \\ 0.0006 & 0.9895 \end{bmatrix}, \\
 B_{F_{1_a}} &= 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.6022 \cdot \mathbf{1}_{1 \times 2} \\ 0.6030 \cdot \mathbf{1}_{1 \times 2} \\ 0.5978 \cdot \mathbf{1}_{1 \times 2} \\ 0.6016 \cdot \mathbf{1}_{1 \times 2} \\ 0.6028 \cdot \mathbf{1}_{1 \times 2} \end{bmatrix}, \quad B_{F_{1_b}} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 0.6022 \cdot \mathbf{1}_{1 \times 2} \\ 0.6030 \cdot \mathbf{1}_{1 \times 2} \\ 0.5978 \cdot \mathbf{1}_{1 \times 2} \\ 0.6016 \cdot \mathbf{1}_{1 \times 2} \\ 0.6028 \cdot \mathbf{1}_{1 \times 2} \end{bmatrix}, \\
 B_{F_{2_a}} &= 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.6022 \cdot \mathbf{1}_{1 \times 2} \\ 0.6030 \cdot \mathbf{1}_{1 \times 2} \\ 0.5978 \cdot \mathbf{1}_{1 \times 2} \\ 0.6016 \cdot \mathbf{1}_{1 \times 2} \\ 0.6028 \cdot \mathbf{1}_{1 \times 2} \end{bmatrix}, \quad B_{F_{2_b}} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.0006 & 0.9861 \\ 0.0006 & 0.9875 \\ 0.0006 & 0.9790 \\ 0.0006 & 0.9852 \\ 0.0006 & 0.9872 \end{bmatrix}, \\
 C_{F_{1_a}} &= 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.9515 & 0.6731 & 0.6330 & 0.7469 & 0.7723 \\ 0.6711 & 0.7135 & 0.1643 & 0.7200 & 0.6984 \end{bmatrix}, \quad C_{F_{1_b}} = 10^{-4} \cdot \mathbf{1}_{1 \times 2}, \\
 C_{F_{2_a}} &= 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.4950 & 0.7583 & 0.9952 & 0.5250 & 0.8673 \\ 0.4547 & 0.8077 & 0.4254 & 0.6740 & 0.0477 \end{bmatrix}, \quad C_{F_{2_b}} = 10^{-4} \cdot \mathbf{1}_{1 \times 2}.
 \end{aligned}$$

Les performances sont *in fine* évaluées à l'aide de simulations temporelles. Les simulations sont réalisées avec des conditions initiales pour le filtre : $\bar{s}_f(0) = 10^{-1} (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)^T$, $\underline{s}_f(0) = \bar{s}_f(0)$, et $x_f(0) = 0_{4 \times 1}$, $\bar{x}_f(0) = \bar{s}_f(0)$, $\underline{x}_f(0) = -\underline{s}_f(0)$. Les résultats sont présentés dans les Figures 2.1 et 2.2.

Comme prévu, $\bar{z}(t)$ et $\underline{z}(t)$ encadrent bien $z(t)$ pour tout $t \geq 0$. Comme le montre les résultats, la taille de l'enveloppe \tilde{e}_z en régime permanent converge vers une valeur $c \approx (0.4023 \ 0.2966)^T$ après un régime transitoire inférieur à 1 seconde.

FIGURE 2.1 – Estimation par intervalle de l'état z_1 FIGURE 2.2 – Estimation par intervalle de l'état z_2

2.5 Application et amélioration de l'unité de navigation pour les applications spatiales : Mission MICROSCOPE

La méthodologie de conception d'un filtre intervalle expliquée précédemment est maintenant mise en œuvre pour estimer l'attitude du satellite Microscope, de façon garantie. Cette étude a été réalisée dans le cadre du COMET SCA (COMité d'Experts Techniques Systèmes de Commande et Automatique) du CNES. Lancée en 2016, la mission Microscope avait pour but de vérifier avec une précision inégalée sur Terre, le principe d'équivalence faible qui constitue un des principaux postulats de la relativité générale. Les résultats obtenus en 2022 confirmeront ce principe d'équivalence avec une précision inégalée de $2.7 \cdot 10^{-15}$ du paramètre d'Eotvos [170, 171].

2.5.1 Un mot sur le Principe d'équivalence

Le concept de Principe d'Équivalence est souvent associé à l'une de ses manifestations les plus connues : l'universalité de la chute libre. Cette observation physique découle de l'expérience et n'est pas fondée sur des principes absolus, contrairement à des concepts comme la conservation de l'énergie. La théorie de la relativité générale, développée par Einstein au début du XXe siècle, repose au cœur de ce principe. Il existe en réalité trois formes distinctes du Principe d'Équivalence : le Principe d'Équivalence Faible, le Principe d'Équivalence d'Einstein et le Principe d'Équivalence Fort.

Principe d'équivalence faible

Le Principe d'Équivalence Faible, établi depuis longtemps, stipule que dans un champ gravitationnel, deux objets chutent avec la même accélération, indépendamment de leurs masses et compositions. Galilée a initialement constaté cette équivalence en 1610 à travers des expériences où il comparait les temps de chute de poids différents roulant sur des planches inclinées. Cette notion s'étend également à la mécanique newtonienne, où les masses inertielle et grave d'un objet sont considérées comme équivalentes. La masse inertielle m_I mesure la résistance d'un corps aux changements de mouvement en réponse à toutes sortes de forces. La masse grave m_G intervient dans la loi universelle de la gravitation. Cette loi déclare que la force subie par un objet est proportionnelle à sa masse grave m_G et à l'accélération de son centre d'inertie. La constante de proportionnalité est la constante universelle de gravitation G . Ainsi, la force exercée par un corps de masse grave m_G sur un corps de masse grave m'_G (et inversement), et située à une distance r , est :

$$\vec{f} = G \frac{m_G m'_G}{r^3} \vec{r}. \quad (2.97)$$

L'équation résultante permet d'exprimer l'accélération d'un objet dans un champ gravitationnel en termes de ses masses inertielle m_I et grave m_G :

$$\vec{\gamma} = \frac{m_G}{m_I} \vec{g}. \quad (2.98)$$

Cette équation définit la chute libre comme le mouvement d'un objet soumis uniquement à la force gravitationnelle. Dans un champ gravitationnel donné, deux objets tombent

selon la même loi si les rapports de leurs masses grave et inertielle sont égaux. Newton a égalé ces deux masses dans la loi universelle de la gravitation en 1687, bien qu'elles soient conceptuellement distinctes. Cette équivalence entre les masses a été confirmée par de nombreuses expériences, comme celles décrites dans "Philosophiae naturalis principia mathematica" de Newton.

Principe d'équivalence d'Einstein

En 1907, Einstein a élevé l'universalité de la chute libre au statut de principe, connu sous le nom de Principe d'Équivalence. Le Principe d'Équivalence d'Einstein stipule essentiellement qu'un observateur ne peut pas distinguer s'il est soumis à un champ gravitationnel uniforme ou à une accélération constante dans un référentiel accéléré. Cette idée est illustrée par la fameuse expérience de pensée de l'ascenseur d'Einstein. Dans un ascenseur clos en mouvement libre, il est impossible de déterminer si l'on est en chute libre sur Terre ou en train d'accélérer uniformément (en état d'apesanteur). Cette notion forme la base du concept d'espace-temps de la théorie d'Einstein. Ce concept d'espace-temps a des répercussions majeures pour expliquer divers phénomènes physiques, comme le décalage vers le rouge de la lumière et la déviation gravitationnelle de la lumière en présence d'un champ gravitationnel puissant.

Principe d'équivalence fort

Le principe d'équivalence fort est la généralisation du principe d'équivalence d'Einstein permettant l'extension de ce principe aux expériences de gravitation.

2.5.2 La mission MICROSCOPE

L'espace fournit un environnement exceptionnel pour échapper aux perturbations terrestres, permettant ainsi la réalisation de chutes libres quasi infinies, et offrant une opportunité d'atteindre une précision accrue dans les tests du principe d'équivalence faible. C'est dans ce cadre que la mission spatiale MICROSCOPE a été initiée, avec l'ambitieux objectif de parvenir à une précision de l'ordre de 10^{-15} du paramètre d'Eötvös, comme illustré dans la Figure 2.3.

Description générale

Le satellite MICROSCOPE, pour MICROsatellite à trainée Compensée pour l'Observation du Principe d'Équivalence, est un microsatellite de la filière MYRIADE du Centre National d'Études Spatiales (CNES). Ce satellite a pour but de tester le principe d'équivalence faible décrit dans la section précédente. Pour réaliser cette expérience, le Département de Mesures Physiques de l'ONERA a adopté une approche basée sur un double accéléromètre électrostatique concentrique. Cette configuration met en œuvre deux masses cylindriques qui sont maintenues immobiles par des systèmes de contrôle afin qu'elles restent en position par rapport au satellite. Le satellite lui-même suit une orbite quasi-circulaire, polaire héliosynchrone, à une altitude de 710 km. L'axe des cylindres constitue la direction le long de laquelle le test du Principe d'Équivalence (PE) est effectué. Lorsque le satellite se déplace en orbite autour de la Terre en maintenant une orientation inertielle

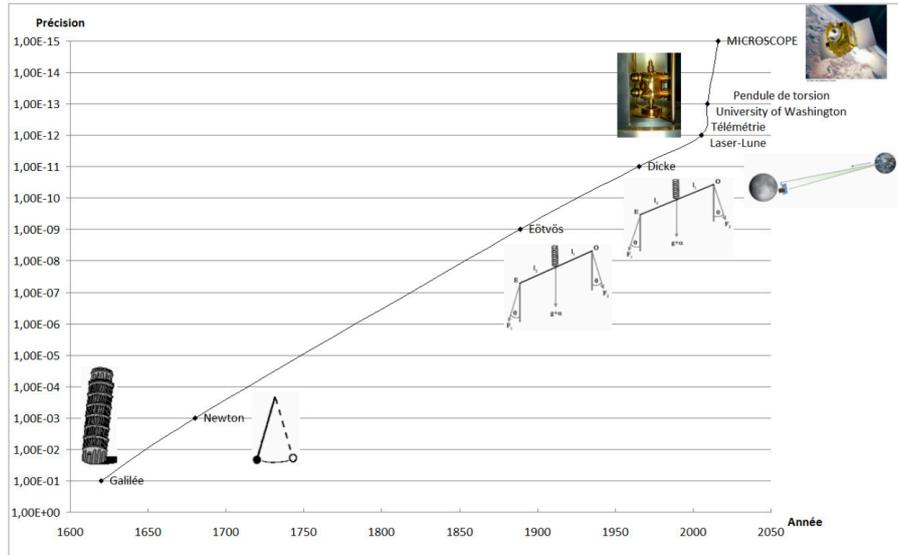


FIGURE 2.3 – Évolution de la précision du test du principe d'équivalence sur le paramètre d'Eötvös [56]

(c'est-à-dire une orientation fixe par rapport aux étoiles), les deux masses d'épreuves perçoivent la gravité selon l'axe de mesure, à la fréquence du mouvement orbital. Si le PE est vérifié, les deux masses, composées de matériaux différents, subiront la même accélération de contrôle pour rester sur la même trajectoire. Par conséquent, la mesure différentielle de ces accélérations sera nulle. En cas de non-concordance avec le PE, un signal de différence sera détecté à la fréquence orbitale. Le satellite combine donc simultanément un mouvement de rotation ω_0 autour de la Terre tout en effectuant simultanément une rotation ω_s autour de son axe y , comme illustré dans la Figure 2.4 et décrit dans les travaux [90, 112, 145].

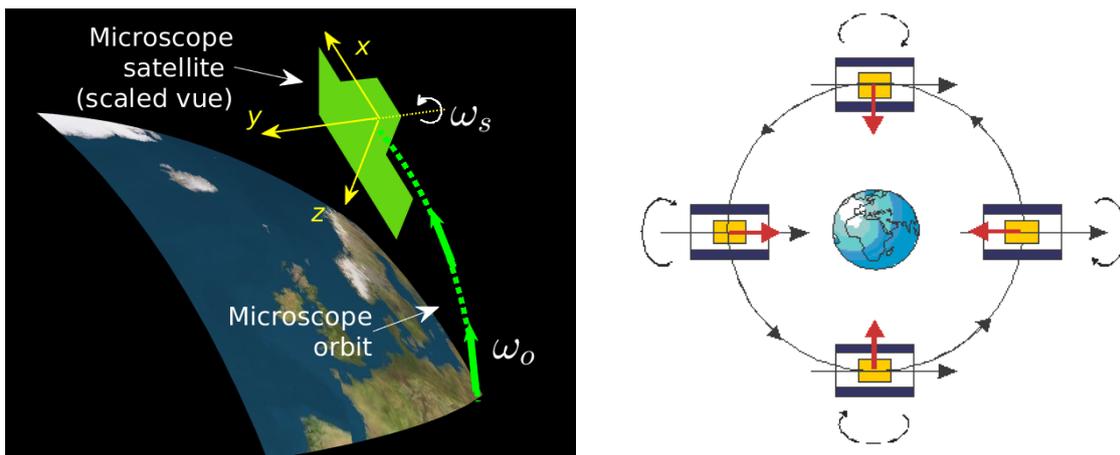


FIGURE 2.4 – Mouvements de rotations autour de la Terre et de l'axe y du satellite Microscope

Le suivi de la trajectoire du satellite est assuré par un Système de Contrôle d'Attitude et d'Accélération (AACs, acronyme anglo-saxon pour "Attitude and Acceleration Control System"), dont la structure schématique est illustrée dans la Figure 2.5. Les références sont fixées à la valeur '0', ce qui signifie que le satellite est contraint d'effectuer sa rotation autour de la Terre à une vitesse ω_0 tout en effectuant une rotation autour de son

axe y à une vitesse ω_s . L'architecture avionique est composée d'une boussole stellaire μ ASC (acronyme anglo-saxon pour "micro Advanced Stellar Compass") et de deux accéléromètres du système SAGE ("Space Accelerometer for Gravitation Experimentation"), qui fournissent des mesures bruitées et biaisées de l'attitude $\Theta = (\theta_x \ \theta_y \ \theta_z)^T \in \mathbb{R}^3$, ainsi que des accélérations angulaires $\dot{\omega} = (\dot{p} \ \dot{q} \ \dot{r})^T \in \mathbb{R}^3$ et de l'accélération linéaire $\Gamma = (\Gamma_x \ \Gamma_y \ \Gamma_z)^T \in \mathbb{R}^3$. Nous désignons ces variables mesurées avec l'indice "m", c'est à dire $\Theta_m, \dot{\omega}_m$ et Γ_m . Les indices "x, y, z" font référence de manière classique aux directions $[O, \vec{i}]$, $[O, \vec{j}]$ et $[O, \vec{k}]$ d'un repère orthonormé direct dont le centre O coïncide avec le centre de masse C_{oM} du satellite. Dans le cadre de nos travaux, l'unité de navigation a pour rôle de fournir une estimation de l'accélération linéaire Γ (rôle du filtre hybride), et des bornes inférieures/supérieures $\underline{\Theta}, \bar{\Theta} \in \mathbb{R}^3$ de l'attitude réelle Θ (rôle du filtre par intervalle), ainsi qu'une estimation $\hat{\Theta}$ de l'attitude, obtenue au moyen d'une règle de fusion (rôle de l'algorithme de fusion). Le contrôle du satellite est assuré par un contrôleur à 6 degrés de liberté qui fournit la force tridimensionnelle $F_c \in \mathbb{R}^3$ et le couple $C_c \in \mathbb{R}^3$, convertis ensuite en commande tuyères $T_C \in \mathbb{R}^{12}$ grâce à l'unité de gestion des tuyères. La mission du satellite est simulée dans un simulateur d'ingénierie fonctionnelle, qui comprend des modèles hautement représentatifs de capteurs (erreurs de désalignement, bruits non gaussiens etc...) et d'actionneurs (incluant la zone morte, l'effet de bits d'impulsion minimale etc...), ainsi que des modèles de cinématique et d'environnement. Les modules d'environnement contiennent les perturbations spatiales telles que le champ magnétique, la traînée aérodynamique, les perturbations gravitationnelles, les radiations solaires et d'albédo. Les modèles illustrés dans la Figure 2.5 sont brièvement décrits ci-dessous. Pour le lecteur intéressé, des informations plus détaillées peuvent être trouvées dans les travaux de [90].

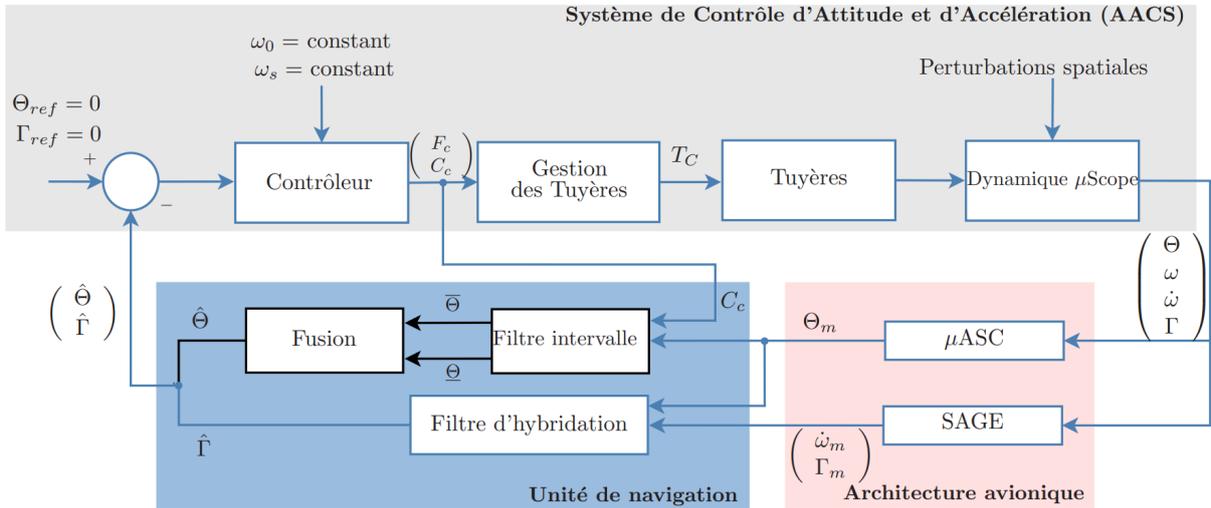


FIGURE 2.5 – Simulateur d'ingénierie fonctionnelle de la mission Microscope

Modélisation de l'unité de navigation et des tuyères

Comme mentionné précédemment, et de façon parfaitement réaliste, nous considérons dans ces travaux que les senseurs SAGE et μ ASC sont entachés d'erreurs (de niveau faible

tout de même contenu de leur technologie). Ici, nous considérons des erreurs d'alignement (biais) et la présence de bruits bornés en amplitude, de moyenne nulle. Pour les mesures $\varpi_m(t)$ et $\Gamma_m(t)$, les bruits sont modélisés comme des signaux colorés, c'est-à-dire qu'ils sont considérés comme le résultat d'un bruit blanc par un filtre formeur. Des expériences ont été menées par le CNES sur le senseur SAGE pour déterminer ces filtres et les résultats d'analyse de densité spectrale de puissance ont montré que ces filtres étaient d'ordre 6 pour la composante x et d'ordre 2 pour les composantes y et z . Pour $\Theta_m(t)$, nous supposons simplement des bruits blancs bornés sur chaque axe.

Le modèle décrivant la dynamique de chaque tuyère est choisi comme étant un transfert de premier ordre $G_{prop}(s)$ avec une fréquence de coupure de $2rad/s$, c'est-à-dire :

$$G_{prop}(s) = \frac{1}{1 + 0.5s}. \quad (2.99)$$

2.5.3 Modélisation des perturbations spatiales

Les perturbations qui affectent le mouvement du satellite sont considérées comme étant dues à quatre phénomènes : magnétiques, gravitationnels, aérodynamiques et solaires.

Les perturbations magnétiques

À cause de la présence de matériaux magnétique dans la structure du satellite, le champ magnétique terrestre induit un moment magnétique C_m qui affecte le mouvement du satellite. En utilisant le modèle du moment magnétique bipolaire, cette perturbation peut être modélisée comme suit

$$C_m = M_m \times \frac{M_0}{r^3} \left(-2 \sin \alpha \begin{pmatrix} \sin(\alpha - \theta_s) \\ 0 \\ \cos(\alpha - \theta_s) \end{pmatrix} - \cos \alpha \begin{pmatrix} -\cos(\alpha - \theta_s) \\ 0 \\ \sin(\alpha - \theta_s) \end{pmatrix} \right), \quad (2.100)$$

où "×" représente le produit vectoriel de vecteurs. M_m et M_0 sont des caractéristiques du satellite, r est le rayon orbital (c'est-à-dire $r = r_{Terre} + 710km$) et α et θ_s désignent respectivement l'angle de position en orbite et l'angle de rotation du satellite.

Les perturbations gravitationnelles

Étant donné que le centre de gravité de Microscope n'est pas égal au centre de masse, un gradient de gravité C_g agit sur le satellite. Dans ce cas, le modèle suivant est utilisé pour C_g

$$C_g = \frac{3\mu}{r^3} \begin{pmatrix} \sin(\alpha - \theta_s) \\ 0 \\ \cos(\alpha - \theta_s) \end{pmatrix} \times I_s \begin{pmatrix} \sin(\alpha - \theta_s) \\ 0 \\ \cos(\alpha - \theta_s) \end{pmatrix}, \quad (2.101)$$

où μ est la constante gravitationnelle de la Terre, c'est-à-dire $\mu = 3.986005 \cdot 10^{14} m^3/s^2$.

Les perturbations aérodynamiques

En raison du mouvement de translation de Microscope et des vents de haute atmosphère, il existe des frottements aérodynamiques. Bien sûr, étant donné que Microscope orbite à

710 km d'altitude, ces perturbations peuvent être négligées. Cependant, nous les prenons toujours en compte dans cette étude. Les forces aérodynamiques peuvent être modélisées de la manière suivante :

$$F_{aero} = F_{sm} + F_{atmo}. \quad (2.102)$$

F_{sm} modélise les forces dues au mouvement du satellite dans la haute atmosphère (i.e. exosphère), tandis que F_{atmo} modélise les effets des vents atmosphériques sur Microscope. F_{sm} est défini selon l'équation suivante

$$F_{sm} = \sum_k \frac{1}{2} \rho(\alpha) S_k |N_k \bullet V_{air}| ((N_k \bullet V_{air})(C_t - C_n)N_k + C_t V_{air}), \quad (2.103)$$

où l'opérateur "•" représente le produit scalaire de vecteurs. La lettre k est utilisée pour désigner la kème face du satellite exposée aux frictions aérodynamiques. $\rho(\alpha)$ représente la densité atmosphérique, qui dépend de l'angle de position en orbite du satellite. S_k désigne la surface de la kème face du satellite, N_k est la normale de cette face, et C_t et C_n sont les coefficients de frottement transversaux et normaux. V_{air} correspond à la vitesse de l'air par rapport au satellite et est également définie dans les coordonnées du référentiel lié au satellite par :

$$V_{air} = \frac{\mu}{r} \begin{pmatrix} \sin(\theta_s - \alpha - \pi/2) \\ 0 \\ -\cos(\theta_s - \alpha - \pi/2) \end{pmatrix}. \quad (2.104)$$

De manière similaire, F_{atmo} est défini selon l'équation suivante

$$F_{atmo} = \sum_k \frac{1}{2} \rho(\alpha) S_k |N_k \bullet V_{atmo}| ((N_k \bullet V_{atmo})(C_t - C_n)N_k + C_t V_{atmo}), \quad (2.105)$$

où V_{atmo} est la vitesse des vents atmosphériques donnée par

$$V_{atmo} = \frac{2\pi r_{Terre}}{86400} \begin{pmatrix} \cos(\beta) \cos(\theta_s) \\ -\sin(\beta) \\ \cos(\beta) \cos(\theta_s) \end{pmatrix}, \quad (2.106)$$

où β est l'angle d'inclinaison de Microscope. Les moments aérodynamiques agissant sur le satellite sont ensuite directement dérivés de l'équation (2.102) en suivant la relation

$$C_{aero} = \sum_k M \times F_{aero_k}, \quad (2.107)$$

où M est un vecteur caractérisant la géométrie de Microscope.

Les perturbations solaires

Les dernières perturbations spatiales sont dues à l'impact des radiations solaires qui exercent une pression photonique sur le satellite. Ce phénomène se manifeste de deux manières : les radiations solaires directes et les radiations albedo-terrestres (réflexion des rayons du soleil sur l'atmosphère). Les deux phénomènes entraînent des forces et des moments qui affectent le mouvement du satellite. Les forces sont donc données par l'équation :

$$F_{solar} = F_d + F_{albedo}. \quad (2.108)$$

où F_d et F_{albedo} modélisent respectivement les forces dues aux radiations solaires directes et aux radiations albedo-terrestres. F_d est défini de la manière suivante

$$F_d = \sum_k -P_{sol} S_k |X_{sol} \bullet N_k| (2C_s (|X_{sol} \bullet N_k|) N_k + (1 - C_s) X_{sol}), \quad (2.109)$$

où k désigne la k ème face du satellite exposée au soleil. P_{sol} représente la pression des radiations solaires et C_s est le coefficient de réflectivité qui caractérise les matériaux utilisés pour construire le satellite. X_{sol} est également défini dans les coordonnées liées au système du satellite selon

$$X_{sol} = \begin{pmatrix} \cos(\phi + \beta + \pi/2) \cos(\theta_s) \\ -\sin(\phi + \beta + \pi/2) \\ \cos(\phi + \beta + \pi/2) \sin(\theta_s) \end{pmatrix}, \quad (2.110)$$

où ϕ représente la déclinaison solaire qui dépend de la saison, c'est-à-dire $-23,27^\circ < \phi < 23,27^\circ$. De manière similaire, F_{albedo} est défini comme suit

$$F_{albedo} = \sum_k -P_{albedo} S_k |X_{albedo} \bullet N_k| (2C_s (|X_{albedo} \bullet N_k|) N_k + (1 - C_s) X_{albedo}), \quad (2.111)$$

où X_{albedo} est défini dans les coordonnées liées au corps du satellite par :

$$X_{albedo} = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha - \theta_s) \\ 0 \\ -\cos(\alpha - \theta_s) \end{pmatrix}. \quad (2.112)$$

Les moments causés à la fois par les radiations solaires directes et par les radiations albedo sont donnés par :

$$C_{solar} = \sum_k M \times F_{solar_k}. \quad (2.113)$$

2.5.4 Modélisation de la dynamique du satellite Microscope

Les équations décrivant le mouvement de rotation de Microscope dans le système d'axes lié au corps (dont le centre est fixé au centre de masse de Microscope) sont déduites de la seconde loi de Newton, i.e.

$$C_M = I_s \dot{\omega} + \omega \times I_s \omega, \quad (2.114)$$

où I_s est la matrice d'inertie. C_M représente les moments par rapport au centre de masse dus à la propulsion et aux perturbations. $\omega = \begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix}^T$ est la vitesse de rotation inertielle et $\dot{\omega}$ est l'accélération de rotation inertielle. En tenant compte de la vitesse de rotation de spin ω_s du Microscope, la relation entre les vitesses de rotation et les angles d'attitude (Cardan) $\Theta = \begin{pmatrix} \theta_x & \theta_y & \theta_z \end{pmatrix}^T$ est donnée par :

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta_y \\ 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x \cos \theta_y \\ 0 & -\sin \theta_x & \cos \theta_x \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \\ \dot{\theta}_z \end{pmatrix} - \omega_s \begin{bmatrix} \cos \theta_y \sin \theta_z \\ \cos \theta_x \cos \theta_y + \sin \theta_x \sin \theta_y \sin \theta_z \\ -\sin \theta_x \cos \theta_z + \cos \theta_x \sin \theta_y \sin \theta_z \end{bmatrix}. \quad (2.115)$$

Pour Microscope, les forces gravitationnelles sont compensées par les forces de Coriolis. Ainsi, l'accélération linéaire du satellite qui décrit le mouvement de translation est donnée par l'équation suivante

$$m\Gamma = F + mg_L, \quad (2.116)$$

où m représente la masse du satellite Microscope. $F \in \mathbb{R}^3$ désigne les forces dues à la propulsion et aux perturbations. $\Gamma \in \mathbb{R}^3$ est l'accélération linéaire exprimée au centre de masse. Le terme g_L représente le champ gravitationnel local.

Comme mentionné dans [90], en prenant en compte que le satellite Microscope est contrôlé autour de ses points d'équilibre $\Theta = 0_{3 \times 1}$, $\Gamma = 0_{3 \times 1}$, $\omega_0 = \text{constante}$ et $\omega_s = \text{constante}$, il est possible en linéarisant les équations non linéaires autour de cet équilibre, d'obtenir le modèle linéaire invariant dans le temps suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ew(t), \quad (2.117)$$

$$y(t) = Cx(t) + Fw(t), \quad (2.118)$$

$$z(t) = Tx(t), \quad (2.119)$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $E \in \mathbb{R}^{n \times n_w}$, $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n_y \times n_w}$ et $T \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$, avec $n = 6$, $n_u = 3$ et $n_y = 3$. Ici $x = (\theta_x \ \theta_y \ \theta_z \ p \ q \ r)^T$, $u = C_c$, $y = \Theta_m$ et $z = (\theta_x \ \theta_y \ \theta_z)^T$ sont de manière respective, le vecteur d'état, la commande en couple délivrée par l'unité de contrôle, les angles d'attitude fournis par le capteur μASC , et les signaux que l'on cherche à estimer de façon ensembliste par l'approche de filtrage développée au paragraphe 2.3. Le vecteur $w \in \mathbb{R}^{n_w}$, où $n_w = 6$, fait référence aux perturbations spatiales exprimées en couple, ainsi qu'aux erreurs d'alignement (biais) et aux bruits de mesure. Les conditions initiales $x(0)$ et l'entrée inconnue $w(t)$ sont bornées par des limites connues *a priori* compte-tenu des hypothèses faites sur les erreurs du μASC et sur les perturbations spatiales. Ainsi, pour $\underline{w}(t), \bar{w}(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ et $\underline{x}(0), \bar{x}(0) \in \mathbb{R}^n$, nous avons $w(t) \in [\underline{w}(t), \bar{w}(t)]$, $\forall t \geq 0$ et $x(0) \in [\underline{x}(0), \bar{x}(0)]$.

Modélisation de la boucle fermée et formulation du problème

Pour rappel, le filtre intervalle proposé est utilisé pour garantir une estimation ensembliste des angles d'attitude $\Theta(t)$ du satellite. Cette estimation est destinée à être intégrée dans l'unité de navigation du système de contrôle d'attitude et d'accélération du satellite. Le contrôleur à 3 degrés de liberté qui délivre le couple tridimensionnel C_c admet la représentation d'état suivante

$$\dot{x}_k(t) = A_K x_k(t) - B_K y(t), \quad (2.120)$$

$$u(t) = C_K x_k(t) - D_K y(t), \quad (2.121)$$

où $x_k \in \mathbb{R}^{n_k}$. Le modèle d'état de la boucle fermée s'écrit donc :

$$\dot{x}(t) = (A - BD_K C)x(t) + BC_K x_k(t) + (E - BD_K F)w(t), \quad (2.122)$$

$$\dot{x}_k(t) = A_K x_k(t) - B_K Cx(t) - B_K Fw(t), \quad (2.123)$$

$$y(t) = Cx(t) + Fw(t), \quad (2.124)$$

$$z(t) = Tx(t). \quad (2.125)$$

L'approche proposée s'appuie sur la prise en compte et l'ajout du contrôleur (2.120)-(2.121) dans la boucle fermée (2.122)-(2.125).

Considérons à présent le filtre par intervalle suivant associé à la boucle fermée (2.122)-(2.125) :

$$\dot{\bar{s}}_f(t) = A_F \bar{s}_f(t) + (B_{F_1} - B_F)y(t) + \bar{\zeta}_1(\bar{z}, z, \bar{w}, \underline{w}) \quad (2.126)$$

$$\dot{\underline{s}}_f(t) = A_F \underline{s}_f(t) + (B_F - B_{F_2})y(t) + \underline{\zeta}_2(\bar{z}, z, \bar{w}, \underline{w}) \quad (2.127)$$

$$\dot{x}_f(t) = A_F x_f(t) + M_F u(t) + B_F y(t) \quad (2.128)$$

$$\bar{x}_f(t) = \bar{s}_f(t) + x_f(t) \quad (2.129)$$

$$\underline{x}_f(t) = x_f(t) - \underline{s}_f(t) \quad (2.130)$$

$$\bar{z}(t) = C_{F_1} \bar{x}_f(t) + D_F y(t) + \bar{\eta}_1(\bar{x}_f, \underline{x}_f, \bar{w}, \underline{w}) \quad (2.131)$$

$$\underline{z}(t) = C_{F_2} \underline{x}_f(t) + D_F y(t) + \underline{\eta}_2(\bar{x}_f, \underline{x}_f, \bar{w}, \underline{w}) \quad (2.132)$$

L'objectif est de déterminer les matrices $A_F, B_F, M_F, B_{F_q}, C_{F_q}$ et D_F de dimensions appropriées, avec $q \in \{1; 2\}$, et les fonctions $\bar{\zeta}_1, \underline{\zeta}_2 : \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_w} \times \mathbb{R}^{n_w} \rightarrow \mathbb{R}^{n_f}$ et $\bar{\eta}_1, \underline{\eta}_2 : \mathbb{R}^{n_f} \times \mathbb{R}^{n_f} \times \mathbb{R}^{n_w} \times \mathbb{R}^{n_w} \rightarrow \mathbb{R}^{n_z}$, tel que l'effet de propagation des vecteurs $w(t), \bar{w}(t)$ et $\underline{w}(t)$ sur l'enveloppe d'estimation définie comme $\tilde{e}_z(t) = \bar{z}(t) - \underline{z}(t)$ soit minimisé, au sens \mathcal{H}_∞ .

2.6 Conception du filtre intervalle \mathcal{H}_∞

Les conditions d'existence et la solution pour que le système (2.126)-(2.132) soit un filtre par intervalle pour le système (2.122)-(2.125) sont présentées dans le Théorème 2.1. Notons ici qu'aucune contrainte n'est imposée sur la matrice M_F .

2.6.1 Formulation SDP

À partir des décompositions obtenues dans (2.43)-(2.47), et en reprenant les expressions des fonctions majorantes $\bar{\zeta}_1, \underline{\zeta}_2, \bar{\eta}_1, \underline{\eta}_2$ obtenues par le Lemme 2.2, il vient :

$$\dot{\bar{s}}_f(t) = A_F \bar{s}_f(t) + (B_{F_1} - B_F)y(t) + \Sigma_{11}\bar{z}(t) - \Sigma_{12}z(t) + \Psi_{11}\bar{w}(t) - \Psi_{12}\underline{w}(t) \quad (2.133)$$

$$\dot{\underline{s}}_f(t) = A_F \underline{s}_f(t) + (B_F - B_{F_2})y(t) + \Sigma_{21}z(t) - \Sigma_{22}\bar{z}(t) + \Psi_{21}\underline{w}(t) - \Psi_{22}\bar{w}(t) \quad (2.134)$$

$$\dot{x}_f(t) = A_F x_f(t) + M_F u(t) + B_F y(t) \quad (2.135)$$

$$\bar{z}(t) = C_{F_1}(\bar{s}_f(t) + x_f(t)) + D_F y(t) + \Xi_{11}\bar{x}_f(t) - \Xi_{12}\underline{x}_f(t) + \Pi_{11}\bar{w}(t) - \Pi_{12}\underline{w}(t) \quad (2.136)$$

$$\underline{z}(t) = C_{F_2}(x_f(t) - \underline{s}_f(t)) + D_F y(t) + \Xi_{21}\underline{x}_f(t) - \Xi_{22}\bar{x}_f(t) + \Pi_{11}\underline{w}(t) - \Pi_{12}\bar{w}(t) \quad (2.137)$$

En remplaçant $u(t), y(t), \bar{x}_f(t), \underline{x}_f(t), \bar{z}(t)$ et $\underline{z}(t)$ de (2.121), (2.124), (2.129)-(2.132) dans (2.133)-(2.135), et en considérant le vecteur d'entrée $\omega_e(t) = \left(w(t)^T \quad \bar{w}(t)^T \quad \underline{w}(t)^T \right)^T$ et le vecteur d'état augmenté $\hat{x}(t) = \left(x(t)^T \quad x_k(t)^T \quad x_f(t)^T \quad \bar{s}_f(t)^T \quad \underline{s}_f(t)^T \right)^T$, le modèle d'état suivant est obtenu

$$\dot{\hat{x}}(t) = \check{A}\hat{x}(t) + \check{B}\omega_e(t), \quad (2.138)$$

$$\tilde{e}_z(t) = \check{C}\hat{x}(t) + \check{D}\omega_e(t), \quad (2.139)$$

nous pouvons reformuler ainsi le problème comme un problème d'optimisation non linéaire SDP, c'est à dire sous contraintes LMIs et BMIs.

Considérons les matrices auxiliaires $W, Z \in \mathbb{R}^{(n+n_k+3n_f) \times (n+n_k+3n_f)}$, $J \in \mathbb{R}^{3n_w \times (n+n_k+3n_f)}$, $M \in \mathbb{R}^{n_z \times (n+n_k+3n_f)}$ partitionnées avec la structure suivante

$$W = \text{diag}\{W_1, W_2, W_3, W_3, W_3\}, \quad (2.146)$$

$$Z = \text{diag}\{Z_1, Z_2, W_3, W_3, W_3\}, \quad (2.147)$$

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.148)$$

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.149)$$

où $W_1, Z_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $W_2, Z_2 \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$, $J_1 \in \mathbb{R}^{3n_w \times n}$, $J_2 \in \mathbb{R}^{3n_w \times n_k}$, $M_1 \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$, $M_2 \in \mathbb{R}^{n_z \times n_k}$, $W_3 \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$ et les changements de variables

$$\tilde{A}_F = W_3 A_F, \quad \tilde{B}_{F_{qk}} = W_3 B_{F_{qk}}, \quad \tilde{B}_{F_k} = W_3 B_{F_k}, \quad (2.150)$$

$$\tilde{M}_F = W_3 M_F, \quad \tilde{C}_{F_{qk}} = C_{F_{qk}}, \quad (2.151)$$

avec $q \in \{1; 2\}$ et $k \in \{a; b\}$.

Le théorème suivant donne la solution au problème de synthèse.

Théorème 2.4. *Considérons le système (2.122)-(2.125) et les Hypothèses (2.1)-(2.2). Le Lemme 2.5 est satisfait, s'il existe une matrice symétrique P , des matrices réelles $W, Z, J, M, \tilde{A}_F, \tilde{M}_F, \tilde{B}_{F_a}, \tilde{B}_{F_b}, \tilde{B}_{F_{1a}}, \tilde{B}_{F_{1b}}, \tilde{B}_{F_{2a}}, \tilde{B}_{F_{2b}}, \tilde{C}_{F_{1a}}, \tilde{C}_{F_{1b}}, \tilde{C}_{F_{2a}}, \tilde{C}_{F_{2b}}$ de dimensions adéquates, des scalaires réels $\kappa, \gamma_{\mathcal{H}_\infty} > 0$ et une M -matrice W_3 qui résolvent le problème d'optimisation :*

$$\min \gamma_{\mathcal{H}_\infty} \quad t.q \quad P = P^T \succ 0, \quad (2.152)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & P & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & \tilde{C}^T \\ 0 & 0 & -\gamma_{\mathcal{H}_\infty} I & \tilde{D}^T \\ 0 & \tilde{C} & \tilde{D} & -\gamma_{\mathcal{H}_\infty} I \end{bmatrix}}_{\tilde{\Omega}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -W & \tilde{A}_W & \tilde{B}_W & 0 \\ -Z & \tilde{A}_Z & \tilde{B}_Z & 0 \\ -J & \tilde{A}_J & \tilde{B}_J & 0 \\ -M & \tilde{A}_M & \tilde{B}_M & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\Upsilon}} + \tilde{\Upsilon}^T \prec 0, \quad (2.153)$$

$$\tilde{B}_{F_{q_a}}, \tilde{B}_{F_{q_b}}, \tilde{C}_{F_{q_a}}, \tilde{C}_{F_{q_b}}, \tilde{B}_{F_a}, \tilde{B}_{F_b} \geq 0, \quad (2.154)$$

$$\tilde{C}_{F_{q_a}} - \tilde{C}_{F_{q_b}} \geq 0, \quad (2.155)$$

$$\tilde{A}_F + \kappa W_3 \geq 0, \quad (2.156)$$

où les matrices $\tilde{A}_W = W\check{A}$, $\tilde{A}_Z = Z\check{A}$, $\tilde{A}_J = J\check{A}$, $\tilde{A}_M = M\check{A}$, $\tilde{B}_W = W\check{B}$, $\tilde{B}_Z =$

Les matrices d'état $A_F, B_{F_{qk}}, B_{F_k}, M_F, C_{F_{qk}}$ sont alors données par

$$A_F = W_3^{-1} \tilde{A}_F, \quad B_{F_{qk}} = W_3^{-1} \tilde{B}_{F_{qk}}, \quad B_{F_k} = W_3^{-1} \tilde{B}_{F_k}, \quad (2.163)$$

$$M_F = W_3^{-1} \tilde{M}_F, \quad C_{F_{qk}} = \tilde{C}_{F_{qk}}, \quad (2.164)$$

$q \in \{1; 2\}, k \in \{a; b\}$, l'espace d'état de l'erreur de filtrage (2.138)-(2.139) est asymptotiquement stable avec un critère de performance $\|G_{\omega \rightarrow \tilde{e}_z}\|_\infty \leq \gamma_{\mathcal{H}_\infty}$.

Démonstration. La démonstration de ce théorème est similaire à celle donnée pour le Théorème 2.3. Considérons les changements de variables (2.150)-(2.151). Il en résulte que l'ensemble des contraintes (2.152)-(2.156) implique que :

$$P = P^T \succ 0, \quad (2.165)$$

$$\Omega + \Upsilon + \Upsilon^T \prec 0, \quad (2.166)$$

$$W_3 B_{F_{q_a}}, W_3 B_{F_{q_b}}, C_{F_{q_a}}, C_{F_{q_b}}, W_3 B_{F_a}, W_3 B_{F_b} \geq 0, \quad (2.167)$$

$$C_{F_{q_a}} - C_{F_{q_b}} \geq 0, \quad (2.168)$$

$$W_3 A_F + \kappa W_3 \geq 0. \quad (2.169)$$

En se basant sur le Lemme 1.14, la matrice A_F satisfait condition de Metzler (2.169) puisque $W_3^{-1} \geq 0$. Les matrices $B_{F_k}, B_{F_{qk}}, C_{F_{qk}}$ satisfont les décompositions (2.43)-(2.45) en deux matrices positives (non uniques) grâce aux conditions (2.167). En se basant sur ces décompositions, il devient clair que (2.168) est la contrainte (2.20) mentionnée dans le Théorème 2.1. En imposant la décomposition (2.43)-(2.46) des matrices de filtrage (c'est-à-dire B_F, B_{F_q}, C_{F_q} et D_F), les contraintes LMI et BMI (2.166) garantissent un critère de performance \mathcal{H}_∞ tel que $\dot{V}(\hat{x}) - \gamma_{\mathcal{H}_\infty} \|\omega_e\|^2 + \frac{1}{\gamma_{\mathcal{H}_\infty}} \|\tilde{e}_z\|^2 < 0$. Ensuite, en remplaçant les variables auxiliaires W, Z, J, M par la structure définie dans (2.146)-(2.149) et en remplaçant les matrices d'espace d'état (2.140)-(2.143) dans (2.145), nous obtenons finalement (2.153). Ainsi, l'affirmation $\|G_{\omega_e \rightarrow \tilde{e}_z}\|_\infty \leq \gamma_{\mathcal{H}_\infty}$ est démontrée. ■

2.6.2 Résultats et simulations non linéaires

Le filtre intervalle est synthétisé en résolvant le problème d'optimisation suivant pour deux ordres du filtre différents, i.e. $n_f = 7$ et $n_f = 8$:

$$\min \gamma_{\mathcal{H}_\infty} \quad \text{t.q. (2.152) - (2.156)}. \quad (2.170)$$

Les matrices D_{F_a} et D_{F_b} sont quant à elles choisies t.q. $D_{F_a} = I_3$ et $D_{F_b} = 0_3$. Les valeurs des bornes de w sont déterminées à l'aide du simulateur non linéaire de la mission Microscope, sur une période orbitale terrestre, i.e. :

$$\underline{w} = -10^{-5} \begin{pmatrix} 3 & 5.5 & 5 & 5.583 & 7.289 & 3.620 \end{pmatrix}^T, \quad (2.171)$$

$$\overline{w} = 10^{-5} \begin{pmatrix} 3.5 & 5 & 4.5 & 0.899 & 2.943 & 3.142 \end{pmatrix}^T. \quad (2.172)$$

Les résultats obtenus sont illustrés dans le Tableau 2.2. Pour $n_f = 7$ et $n_f = 8$, le critère de performance $\gamma_{\mathcal{H}_\infty}$ montre une très légère variation, avec une différence de l'ordre du millièème. La plus faible performance \mathcal{H}_∞ , indiquée par la plus petite valeur de $\gamma_{\mathcal{H}_\infty}$, est obtenue pour le filtre d'ordre $n_f = 8$. Les valeurs en régime permanent de l'enveloppe

ordre n_f	7	8
performance $\gamma_{\mathcal{H}_\infty}$	1.4142156	1.4142155
paramètre κ	99.6	43.0
variables LMI	2590	2794
enveloppe $\bar{\theta}_x - \underline{\theta}_x$ [deg]	$0.0741 \cdot 10^{-3}$	$0.0741 \cdot 10^{-3}$
enveloppe $\bar{\theta}_y - \underline{\theta}_y$ [deg]	$0.1174 \cdot 10^{-3}$	$0.1174 \cdot 10^{-3}$
enveloppe $\bar{\theta}_z - \underline{\theta}_z$ [deg]	$0.0705 \cdot 10^{-3}$	$0.0705 \cdot 10^{-3}$

 TABLEAU 2.2 – Résultats pour différentes dimensions de l'ordre $n_f \in \{7, 8\}$

$\tilde{z}_z(t) = \bar{\Theta}(t) - \underline{\Theta}(t)$ associées à chaque ordre n_f sont également présentées dans le Tableau 2.2, où l'on peut observer que les enveloppes pour les deux ordres sont très proches. Notons que pour le cas $n_f = 8$, le nombre de variables du problème d'optimisation augmente significativement, ce qui conduit à des difficultés numériques. Compte-tenu de cette analyse, nous choisissons d'implémenter le filtre d'ordre $n_f = 7$ dans l'unité de navigation.

Les Figures 2.6, 2.7 et 2.8 illustrent les résultats pour une simulation correspondant à une période orbitale de 8000s. Pour une meilleure évaluation des résultats de la simulation, des zooms sont également tracés. L'algorithme de fusion utilisé pour déterminer $\hat{\Theta}$ est donné par :

$$\hat{\Theta}(t) = \begin{bmatrix} R_{\theta_x} & 0 & 0 & 1 - R_{\theta_x} & 0 & 0 \\ 0 & R_{\theta_y} & 0 & 0 & 1 - R_{\theta_y} & 0 \\ 0 & 0 & R_{\theta_z} & 0 & 0 & 1 - R_{\theta_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Theta}(t) \\ \bar{\Theta}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.173)$$

où $R_{\theta_x}, R_{\theta_y}, R_{\theta_z}$ sont déterminés tels que $\hat{\Theta}(t)$ est une estimation optimale de $\Theta(t)$, au sens de la norme l_1 .

Comme prévu, nous constatons que les angles d'attitude $\theta_x(t), \theta_y(t), \theta_z(t)$ du satellite appartiennent à leur intervalle $\bar{z}(t)$ et $\underline{z}(t)$, $\forall t \geq 0$. Les conditions initiales du filtre ont été fixées à $\bar{s}_f(0) = 10^{-2} (4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4)^T$, $\underline{s}_f(0) = 10^{-2} (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)^T$ et $x_f(0) = 0_{7 \times 1}$, $\bar{x}_f(0) = \bar{s}_f(0)$, $\underline{x}_f(0) = -\underline{s}_f(0)$.

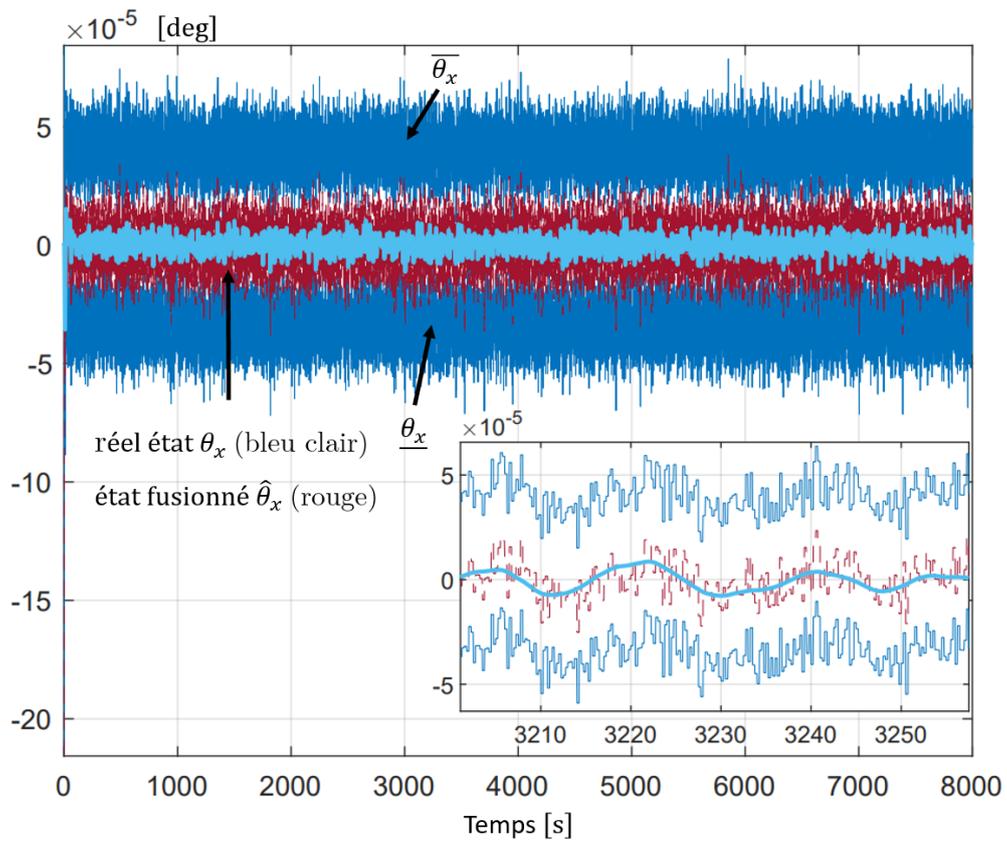
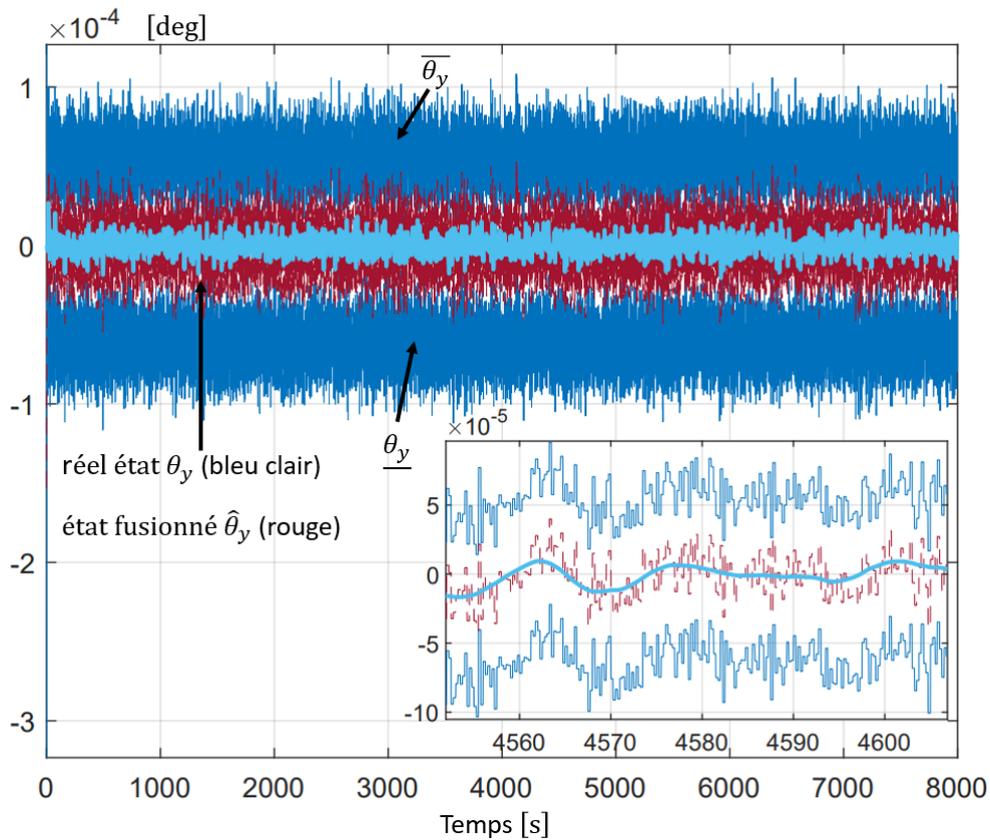
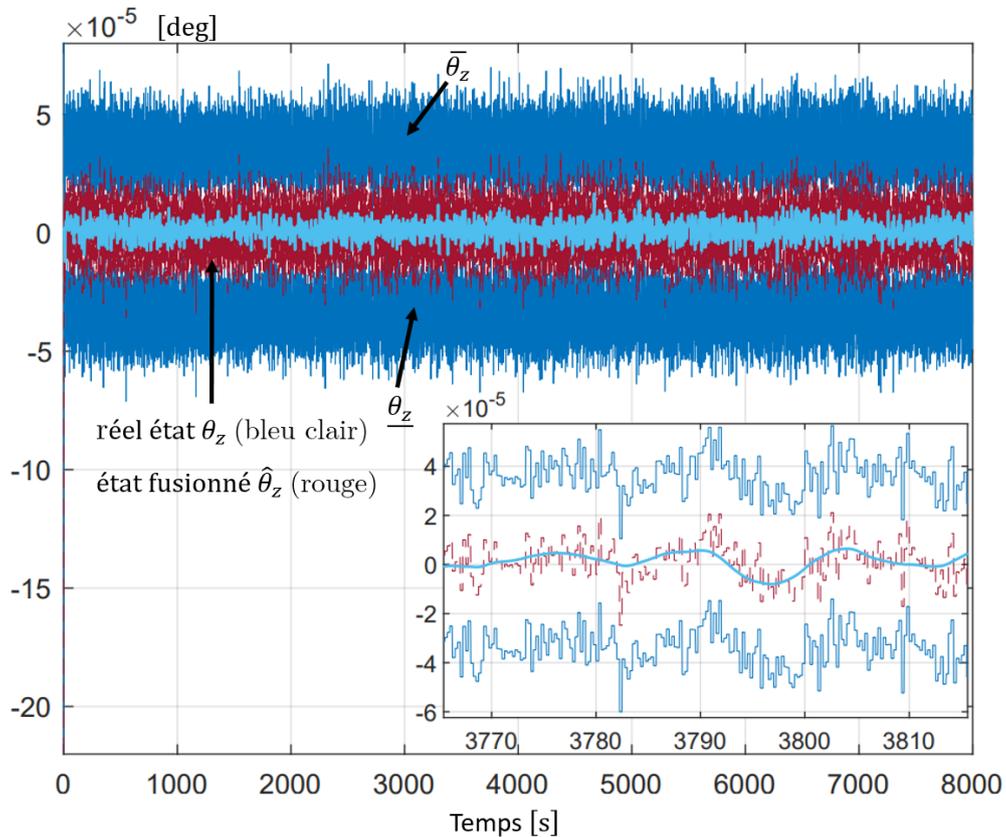


FIGURE 2.6 – Estimation par intervalle de l'angle d'attitude θ_x

FIGURE 2.7 – Estimation par intervalle de l'angle d'attitude θ_y FIGURE 2.8 – Estimation par intervalle de l'angle d'attitude θ_z

2.7 Conclusion

Ce chapitre présente une approche novatrice visant à étendre la théorie de l'estimation ensembliste, en se concentrant à la fois sur ses aspects théoriques et ses applications pratiques pour la classe des systèmes LTI incertains et perturbés.

Dans la première partie, nous avons introduit une méthode de filtres par intervalles basée sur la propriété de coopérativité. La conception des paramètres du filtre vise à répondre simultanément aux conditions d'existence du filtre et à un niveau spécifié de performance. Contrairement à l'approche classique, qui se concentre souvent sur les demi-enveloppes $\bar{z} - z$ et $z - \underline{z}$, notre méthode considère l'enveloppe totale $\tilde{e}_z = \bar{z} - \underline{z}$. Le filtre proposé est capable d'explorer des réalisations d'espace d'état d'ordre potentiellement supérieurs à celui du modèle du système. Nous avons souligné que l'évaluation des performances du filtre est réalisée *a priori* en utilisant des critères de normes $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_1$. Malgré ces avancées, des obstacles théoriques subsistent, notamment la limitation liée à la structure du système étudié, qui est restreinte aux systèmes LTI stables.

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous avons illustré l'efficacité de la méthodologie proposée en appliquant le filtre intervalle au cas du satellite Microscope. Les éléments clés de l'approche sont la dimension d'ordre supérieur du filtre intervalle, les matrices auxiliaires introduites et les degrés de liberté, ainsi que le critère de performance \mathcal{H}_∞ . L'estimateur a été implanté dans le module de navigation de Microscope pour assurer son contrôle d'attitude. Les résultats obtenus démontrent que la conception du filtre intervalle représente une solution hautement prometteuse et pratique pour améliorer les performances des unités de navigation dans les applications spatiales.

Ainsi, cette conclusion synthétise les résultats théoriques et pratiques du chapitre, mettant en évidence les avancées réalisées dans le domaine de l'estimation ensembliste et soulignant les perspectives futures pour l'application de cette méthodologie dans d'autres contextes et pour d'autres systèmes dynamiques.

Synthèse de filtres intervalles pour les systèmes LPV

Ce chapitre aborde la deuxième contribution de nos travaux de recherche. On y présente une nouvelle méthode de synthèse de filtres intervalles pour la classe des systèmes LPV affines. L'approche proposée est une extension de celle exposée dans le Chapitre 2 et repose sur les résultats énoncés dans [65]. La méthode est basée sur la théorie des systèmes monotones et exploite la structure du filtre donné par les Eqs. (2.12)-(2.18), lorsque les matrices d'état dépendent d'un vecteur de paramètres variant dans le temps. Elle repose sur l'idée que les systèmes LPV admettent une représentation positive interne (IPR en anglo-saxon pour "Internally Positive Representation"). L'avantage majeur de la solution proposée est que le filtre LPV intervalle proposé peut admettre un ordre potentiellement supérieur à celui du modèle du système, contrairement aux approches basées sur les observateurs. La performance du filtre est évaluée via les critères de gains \mathcal{L}_2 et \mathcal{L}_∞ . On montre que le problème de synthèse des paramètres du filtre peut être formulé sous la forme d'un problème de programmation semi-définie non linéaire.

Ce chapitre est structuré de la façon suivante. Nous commençons par rappeler un certain nombre de pré-requis théoriques. Ensuite, nous présentons la classe des systèmes LPV que nous considérons, ainsi que les hypothèses associées. Enfin, nous détaillons la structure du filtre intervalle et la méthode de conception des paramètres qui y sont associés. Le chapitre se termine alors par l'application de l'approche proposée au cas d'un exemple académique.

3.1 Pré-requis

Définition 3.1. ([95]). Une matrice dépendant des paramètres $A(\rho(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, où $\rho(t) \in \Gamma_\rho \subset \mathbb{R}^l$, est diagonalement dominante si ses éléments a_{ij} vérifient :

$$a_{ii}(\rho(t)) + \sum_{i \neq j} |a_{ij}(\rho(t))| < 0, (i, j) = \{1, \dots, n\}, \forall \rho(t) \in \Gamma_\rho.$$

Définition 3.2. ([172, 13]). Soit $\rho(t) \in \Gamma_\rho \subset \mathbb{R}^l$ et un système non autonome $\dot{x}(t) = A(\rho(t))x(t) + E(\rho(t))w(t)$, où la matrice $A(\rho(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est Metzler $\forall \rho(t) \in \Gamma_\rho$, la matrice $E(\rho(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n_w}$ est positive élément par élément $\forall \rho(t) \in \Gamma_\rho$ et $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w} \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}_+$. Si $x(0) \geq 0$ alors $x(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}_+$.

Définition 3.3. ([31]). Considérons un système LPV de la forme

$$\dot{x}(t) = A(\rho(t))x(t) + E(\rho(t))w(t), \quad (3.1)$$

$$y(t) = C(\rho(t))x(t) + F(\rho(t))w(t), \quad (3.2)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ et $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ dénotent respectivement les vecteurs d'état, de sortie et d'entrée. $\rho(t) \in \Gamma_\rho \subset \mathbb{R}^l$ est un vecteur de paramètres variant dans le temps. Considérons deux transformations $T_X^f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^{2n}$, $T_Y^f(y) : \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{R}_+^{2n_y}$, $T_W(w) : \mathbb{R}^{n_w} \rightarrow \mathbb{R}_+^{2n_w}$ et deux matrices $T_X^b \in \mathbb{R}^{n \times 2n}$, $T_Y^b \in \mathbb{R}^{n_y \times 2n_y}$ définies comme

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= T_X^f(x) = \begin{bmatrix} (x^+)^T & (x^-)^T \end{bmatrix}^T, \quad T_X^b = \begin{bmatrix} I_n & -I_n \end{bmatrix}, \\ \tilde{y} &= T_Y^f(y) = \begin{bmatrix} (y^+)^T & (y^-)^T \end{bmatrix}^T, \quad T_Y^b = \begin{bmatrix} I_{n_y} & -I_{n_y} \end{bmatrix}, \\ \tilde{w} &= T_W(w) = \begin{bmatrix} (w^+)^T & (w^-)^T \end{bmatrix}^T, \end{aligned} \quad (3.3)$$

telles que, $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, l'implication suivante soit vérifiée

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t_0) &= T_X^f(x(t_0)), \tilde{w}(t), \forall t \geq t_0, \\ \Rightarrow \begin{cases} x(t) = T_X^b \tilde{x}(t) \\ y(t) = T_Y^b \tilde{y}(t) \end{cases}, \forall t \geq t_0, \end{aligned}$$

où les trajectoires de sortie sont symboliquement écrites comme suit :

$$(x(t), y(t)) = \Xi(t, t_0, x(t_0), w), \quad (3.4)$$

$$(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = \tilde{\Xi}(t, t_0, \tilde{x}(t_0), \tilde{w}). \quad (3.5)$$

La représentation positive interne (IPR) de (3.1)-(3.2) qui satisfait $x(t)^+, x(t)^-, y(t)^+, y(t)^- \geq 0$, $\forall t \geq 0$ est définie par

$$\dot{\tilde{x}} = [A(\rho)]\tilde{x} + \begin{bmatrix} E(\rho)^+ & E(\rho)^- \\ E(\rho)^- & E(\rho)^+ \end{bmatrix} \tilde{w}, \quad (3.6)$$

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} C(\rho)^+ & C(\rho)^- \\ C(\rho)^- & C(\rho)^+ \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} F(\rho)^+ & F(\rho)^- \\ F(\rho)^- & F(\rho)^+ \end{bmatrix} \tilde{w}, \quad (3.7)$$

où

$$[A(\rho)] = \begin{bmatrix} Q(\rho) + (A(\rho) - Q(\rho))^+ & (A(\rho) - Q(\rho))^- \\ (A(\rho) - Q(\rho))^- & Q(\rho) + (A(\rho) - Q(\rho))^+ \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

est Metzler et Hurwitz avec $Q(\rho) = \text{diag}(A(\rho))$.

Le lemme et le corollaire qui suivent étendent les résultats obtenus dans le Lemme 1.15 à notre cas d'étude. Ces derniers offrent une approche constructive pour la détermination des bornes supérieure et inférieure d'un produit de matrices dépendant du paramètre par un vecteur dans un contexte ensembliste. L'idée fondamentale demeure que toute matrice peut être décomposée en deux matrices non uniques dont tous les éléments sont positifs.

Lemme 3.1. ([65]). *Considérons un vecteur $v \in [\underline{v}, \bar{v}] \subset \mathbb{R}^n$ satisfaisant $0 \leq \underline{v}^+ \leq v^+ \leq \bar{v}^+$ et $0 \leq \bar{v}^- \leq v^- \leq \underline{v}^-$. Supposons que $\rho \in \Gamma_\rho \subset \mathbb{R}^l$ soit mesuré avec $\Gamma_\rho = [\underline{\rho}, \bar{\rho}]$. Considérons trois matrices $X(\rho), X_k(\rho) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\rho \in \Gamma_\rho$, $k \in \{a, b\}$ satisfaisant $X(\rho) = X_a(\rho) - X_b(\rho)$, et trois autres matrices $M(\rho), M_k(\rho) \in \mathbb{R}^{r \times m}$, $\rho \in \Gamma_\rho$, $k \in \{a, b\}$ telles que $M(\rho) = M_a(\rho) - M_b(\rho)$, où $M_a(\rho), M_b(\rho) \geq 0$, pour tout $\rho \in \Gamma_\rho$. Alors :*

1. $\forall \rho \in \Gamma_\rho$, il existe $X_k(\rho) \in [\underline{X}_k, \overline{X}_k] \subset \mathbb{R}^{m \times n}$ avec $\underline{X}_k \geq 0$, tel que

$$\underline{X}^\bullet v^\bullet \leq X(\rho)v \leq \overline{X}^\bullet v^\bullet \quad (3.9)$$

$$\text{avec } \overline{X}^\bullet = \begin{bmatrix} \overline{X}_a & -\underline{X}_a & -\underline{X}_b & \overline{X}_b \end{bmatrix}, \underline{X}^\bullet = \begin{bmatrix} -\overline{X}_b & \underline{X}_b & \underline{X}_a & -\overline{X}_a \end{bmatrix}, \\ v^\bullet = \begin{bmatrix} (\overline{v}^+)^T & (\overline{v}^-)^T & (\underline{v}^+)^T & (\underline{v}^-)^T \end{bmatrix}^T.$$

2. Pour $\rho \in \Gamma_\rho$, supposons qu'il existe $X_k(\rho) \in [\underline{X}_k(\rho), \overline{X}_k(\rho)]$ avec $\underline{X}_k(\rho) \geq 0$. Alors

$$\underline{X}^\bullet(\rho)v^\bullet \leq X(\rho)v \leq \overline{X}^\bullet(\rho)v^\bullet \quad (3.10)$$

où :

$$\overline{X}^\bullet(\rho) = \begin{bmatrix} \overline{X}_a(\rho) & -\underline{X}_a(\rho) & -\underline{X}_b(\rho) & \overline{X}_b(\rho) \end{bmatrix}, \\ \underline{X}^\bullet(\rho) = \begin{bmatrix} -\overline{X}_b(\rho) & \underline{X}_b(\rho) & \underline{X}_a(\rho) & -\overline{X}_a(\rho) \end{bmatrix}.$$

3. Pour $\rho \in \Gamma_\rho$, il existe des matrices $M_a(\rho), M_b(\rho) \geq 0$, i.e

$$\underline{M}^\bullet(\rho)v^\bullet \leq M(\rho)v \leq \overline{M}^\bullet(\rho)v^\bullet, \quad (3.11)$$

où :

$$\overline{M}^\bullet(\rho) = \begin{bmatrix} M_a(\rho) & -M_a(\rho) & -M_b(\rho) & M_b(\rho) \end{bmatrix}, \\ \underline{M}^\bullet(\rho) = \begin{bmatrix} -M_b(\rho) & M_b(\rho) & M_a(\rho) & -M_a(\rho) \end{bmatrix}.$$

On rappelle que les notations $v^+, v^-, \overline{v}, \underline{v}$ sont définies par les relations données dans (1.96)-(1.98).

Démonstration. Les éléments 1 et 2 sont démontrés dans [65]. Pour l'élément 3, en considérant que $M(\rho)v = M_a(\rho)v - M_b(\rho)v$ et $v = v^+ - v^-$, on obtient :

$$M(\rho)v = M_a(\rho)v^+ - M_a(\rho)v^- - M_b(\rho)v^+ + M_b(\rho)v^-. \quad (3.12)$$

Considérons $\underline{v} \leq v \leq \overline{v}$ satisfaisant $0 \leq \underline{v}^+ \leq v^+ \leq \overline{v}^+$ et $0 \leq \overline{v}^- \leq v^- \leq \underline{v}^-$, alors :

$$M_a(\rho)(\underline{v}^+ - \underline{v}^-) - M_b(\rho)(\overline{v}^+ - \overline{v}^-) \leq M(\rho)v \leq M_a(\rho)(\overline{v}^+ - \overline{v}^-) - M_b(\rho)(\underline{v}^+ - \underline{v}^-). \quad (3.13)$$

En adoptant les notations $\underline{M}^\bullet(\rho)$, $\overline{M}^\bullet(\rho)$ et v^\bullet , l'équivalence entre (3.13) et (3.11) est démontrée. \blacksquare

Corollaire 3.1. *Considérons des matrices $Y(\rho) = M(\rho)X(\rho) \in \mathbb{R}^{r \times n}$ et $Y_k(\rho), \rho \in \Gamma_\rho$, $k \in \{a, b\}$, telles que $Y(\rho) = Y_a(\rho) - Y_b(\rho)$, avec $Y_a(\rho) = M_a(\rho)X_a(\rho) + M_b(\rho)X_b(\rho)$ and $Y_b(\rho) = M_a(\rho)X_b(\rho) + M_b(\rho)X_a(\rho)$. Alors, à partir des équations (3.10)-(3.11)*

$$\underline{Y}^\bullet(\rho)v^\bullet \leq Y(\rho)v \leq \overline{Y}^\bullet(\rho)v^\bullet, \quad (3.14)$$

où

$$\overline{Y}^\bullet(\rho) = \begin{bmatrix} \overline{Y}_a(\rho) & -\underline{Y}_a(\rho) & -\underline{Y}_b(\rho) & \overline{Y}_b(\rho) \end{bmatrix}, \\ \underline{Y}^\bullet(\rho) = \begin{bmatrix} -\overline{Y}_b(\rho) & \underline{Y}_b(\rho) & \underline{Y}_a(\rho) & -\overline{Y}_a(\rho) \end{bmatrix},$$

avec :

$$\begin{aligned}\overline{Y}_a(\rho) &= M_a(\rho)\overline{X}_a(\rho) + M_b(\rho)\overline{X}_b(\rho), \\ \underline{Y}_a(\rho) &= M_a(\rho)\underline{X}_a(\rho) + M_b(\rho)\underline{X}_b(\rho), \\ \overline{Y}_b(\rho) &= M_a(\rho)\overline{X}_b(\rho) + M_b(\rho)\overline{X}_a(\rho), \\ \underline{Y}_b(\rho) &= M_a(\rho)\underline{X}_b(\rho) + M_b(\rho)\underline{X}_a(\rho).\end{aligned}$$

Démonstration. La preuve est immédiate en considérant les énoncés 2 et 3 du Lemme 3.1. ■

Corollaire 3.2. *Considérons trois matrices $X(\rho), X_k(\rho) \in \mathbb{R}^{m \times n}, \rho \in \Gamma_\rho, k \in \{a, b\}$ satisfaisant $X(\rho) = X_a(\rho) - X_b(\rho)$, et trois autres matrices inconnues $M(\rho), M_k(\rho) \in \mathbb{R}^{r \times m}, \rho \in \Gamma_\rho, k \in \{a, b\}$ tel que $M(\rho) = M_a(\rho) - M_b(\rho)$, où $M_a(\rho), M_b(\rho) \geq 0, \forall \rho \in \Gamma_\rho$. Soit $Y(\rho) = M(\rho)X(\rho) \in \mathbb{R}^{r \times n}$ et $Y_k(\rho), \rho \in \Gamma_\rho, k \in \{a, b\}$, telles que $Y(\rho) = Y_a(\rho) - Y_b(\rho)$, avec $Y_a(\rho) = M_a(\rho)X_a(\rho) + M_b(\rho)X_b(\rho)$ et $Y_b(\rho) = M_a(\rho)X_b(\rho) + M_b(\rho)X_a(\rho)$. S'il existe $X_k(\rho) \in [\underline{X}_k, \overline{X}_k] \subset \mathbb{R}^{m \times n}$ avec $\underline{X}_k \geq 0$, et $M_k(\rho) \in [\underline{M}_k, \overline{M}_k] \subset \mathbb{R}^{m \times n}$ avec $\underline{M}_k \geq 0, \forall \rho \in \Gamma_\rho$, alors, à partir de l'équation (3.9), il vient*

$$\underline{Y}^\bullet v^\bullet \leq Y(\rho)v \leq \overline{Y}^\bullet v^\bullet, \quad (3.15)$$

où $\overline{Y}^\bullet = \begin{bmatrix} \overline{Y}_a & -\underline{Y}_a & -\underline{Y}_b & \overline{Y}_b \end{bmatrix}$, $\underline{Y}^\bullet = \begin{bmatrix} -\overline{Y}_b & \underline{Y}_b & \underline{Y}_a & -\overline{Y}_a \end{bmatrix}$ avec :

$$\begin{aligned}\overline{Y}_a &= \overline{M}_a \overline{X}_a + \overline{M}_b \overline{X}_b, \\ \underline{Y}_a &= \underline{M}_a \underline{X}_a + \underline{M}_b \underline{X}_b, \\ \overline{Y}_b &= \overline{M}_a \overline{X}_b + \overline{M}_b \overline{X}_a, \\ \underline{Y}_b &= \underline{M}_a \underline{X}_b + \underline{M}_b \underline{X}_a.\end{aligned}$$

3.2 Formulation du problème de synthèse du filtre LPV intervalle

Considérons la classe suivante de système LPV quadratiquement affinement stable à temps continu décrite par

$$\dot{x}(t) = A(\rho(t))x(t) + E(\rho(t))w(t), \quad (3.16)$$

$$y(t) = C(\rho(t))x(t) + F(\rho(t))w(t), \quad (3.17)$$

où $A(\rho(t)) = A_0 + \sum_{i=1}^s \rho_i(t)A_i$, $E(\rho(t)) = E_0 + \sum_{i=1}^s \rho_i(t)E_i$, $C(\rho(t)) = C_0 + \sum_{i=1}^s \rho_i(t)C_i$ and

$F(\rho(t)) = F_0 + \sum_{i=1}^s \rho_i(t)F_i$. Ici $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ et $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ représentent respectivement l'état du système, la sortie mesurée, le signal à estimer et les perturbations et bruits d'entrée. Les matrices $A(\rho(t)), E(\rho(t)), C(\rho(t))$ et $F(\rho(t))$ sont de dimensions adéquates. Ici, la condition initiale $x(0)$ et l'entrée inconnue $w(t)$ sont supposées bornées avec des bornes préalablement connues, c'est-à-dire que pour $\underline{w}(t), \overline{w}(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ et $\underline{x}(0), \overline{x}(0) \in \mathbb{R}^n$, nous avons $w(t) \in [\underline{w}(t), \overline{w}(t)]$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$ et $x(0) \in [\underline{x}(0), \overline{x}(0)]$.

Le but que nous poursuivons est de concevoir un filtre intervalle d'ordre $n_f > n$, qui

fournit les limites supérieure et inférieure de la combinaison linéaire de l'état dépendant des paramètres $\rho(t)$:

$$z(t) = T(\rho(t))x(t), \quad (3.18)$$

où $T(\rho(t))$ admet la structure $T(\rho(t)) = T_0 + \sum_{i=1}^s \rho_i(t)T_i$.

Hypothèse 3.1. La matrice $T(\rho(t))$ est de rang plein colonne et vérifie $n_z \leq n, \forall \rho \in \Gamma_\rho$.

Remarque 3.1. Comme dit dans le Chapitre 2, l'Hypothèse 3.1 est largement reconnue et fréquemment utilisée dans le domaine des filtres fonctionnels. C'est un principe bien établi permettant une formulation bien posée du problème d'estimation d'une combinaison linéaire de l'état. $T = I_n$ est un choix valide, cependant, notons que ce dernier choix a des implications pour $D_F(\rho)$, voir Remarque 3.3.

Hypothèse 3.2. Le vecteur de paramètres $\rho(t)$ est supposé être un vecteur exogène, mesuré en temps réel et satisfaisant les conditions suivantes : $\rho(t)$ et sa dérivée temporelle $\dot{\rho}(t)$ évoluent dans des hyper-rectangles de 2^s sommets définis comme

$$\Gamma_\alpha = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \mid \alpha_i \in \{\underline{\rho}_i, \bar{\rho}_i\}\}, \quad (3.19)$$

$$\Gamma_\beta = \{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) \mid \beta_i \in \{\underline{\dot{\rho}}_i, \bar{\dot{\rho}}_i\}\}, \quad (3.20)$$

où $\underline{\rho}_i, \bar{\rho}_i, \underline{\dot{\rho}}_i, \bar{\dot{\rho}}_i$ représentent les bornes de ρ_i et $\dot{\rho}_i$.

Hypothèse 3.3. On suppose que le système LPV (3.16)-(3.17) admet une Représentation Positive Interne (IPR) (3.6)-(3.7) stable.

Cette hypothèse est généralement admise pour les systèmes IPR, voir [31], [34], [108]. Pour tout $\rho \in \Gamma_\rho$, si la matrice $A(\rho)$ est diagonalement dominante (voir Définition 3.1) et si $Q(\rho) \prec 0$ pour tout $\rho \in \Gamma_\rho$, alors la forme IPR (3.6)-(3.7) est stable. Dans le cas contraire, une solution consiste à appliquer un changement de coordonnées qui transforme (3.16)-(3.17) en Forme de Jordan Réelle où les valeurs propres sont décrites comme des blocs avec des entrées réelles. Cette transformation garantit que l'IPR obtenue est à la fois Hurwitz et Metzler, voir [31, 34] pour plus de détails.

Afin d'améliorer la lisibilité de la suite du chapitre, la dépendance temporelle des signaux et des paramètres est omise. Cependant, il est à rappeler que tous les vecteurs (incluant les bornes) dépendent généralement de la variable temporelle t . Dans le cas contraire, l'information sera précisée explicitement dans le texte.

L'objectif est de concevoir un filtre intervalle qui admet la structure suivante

$$\dot{\bar{s}}_f = A_F(\rho)\bar{s}_f + (B_{F_1}(\rho)-B_F(\rho))y + \bar{\zeta}_1(\bar{z}, \underline{z}, \bar{w}, \underline{w}, \rho) \quad (3.21)$$

$$\dot{\underline{s}}_f = A_F(\rho)\underline{s}_f + (B_F(\rho)-B_{F_2}(\rho))y + \underline{\zeta}_2(\bar{z}, \underline{z}, \bar{w}, \underline{w}, \rho) \quad (3.22)$$

$$\dot{x}_f = A_F(\rho)x_f + B_F(\rho)y \quad (3.23)$$

$$\bar{x}_f = \bar{s}_f + x_f \quad (3.24)$$

$$\underline{x}_f = x_f - \underline{s}_f \quad (3.25)$$

$$\bar{z} = C_{F_1}(\rho)\bar{x}_f - D_F(\rho)y + \bar{\eta}_1(\bar{x}_f, \underline{x}_f, \bar{w}, \underline{w}, \rho) \quad (3.26)$$

$$\underline{z} = C_{F_2}(\rho)\underline{x}_f - D_F(\rho)y + \underline{\eta}_2(\bar{x}_f, \underline{x}_f, \bar{w}, \underline{w}, \rho) \quad (3.27)$$

où $x_f, s_f \in \mathbb{R}^{n_f} : n_f \geq n$ se réfèrent aux vecteurs d'état intrinsèques du filtre, de sorte que l'effet de l'entrée inconnue w sur la taille de la combinaison linéaire de l'enveloppe d'estimation de l'état du système $\tilde{e}_z = \bar{z} - \underline{z}$ est minimisé, au sens du gain \mathcal{L}_2 et du gain \mathcal{L}_∞ . Dans les équations (3.21)-(3.27), $\bar{s}_f, \underline{s}_f, \bar{x}_f, \underline{x}_f \in \mathbb{R}^{n_f}$, $\bar{y}, \underline{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$, $\bar{w}, \underline{w} \in \mathbb{R}^{n_w}$ et $\bar{z}, \underline{z} \in \mathbb{R}^{n_z}$ désignent les bornes supérieure et inférieure de s_f, x_f, y, w et z respectivement. Les matrices $A_F(\rho)$, $B_F(\rho)$, $B_{F_1}(\rho)$, $B_{F_2}(\rho)$, $C_{F_1}(\rho)$, $C_{F_2}(\rho)$ et $D_F(\rho)$ dépendantes du vecteur de paramètres ρ ont des dimensions appropriées, et les fonctions $\bar{\zeta}_1, \underline{\zeta}_2, \bar{\eta}_1$ et $\underline{\eta}_2 : \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_w} \times \mathbb{R}^{n_w} \rightarrow \mathbb{R}^{n_f}$ et $\bar{\eta}_1, \underline{\eta}_2 : \mathbb{R}^{n_f} \times \mathbb{R}^{n_f} \times \mathbb{R}^{n_w} \times \mathbb{R}^{n_w} \rightarrow \mathbb{R}^{n_z}$ sont des paramètres de synthèse du filtre.

Les éléments clés du filtre intervalle proposé sont les suivants :

- i) Le filtre peut être d'un ordre supérieur au modèle du système, c'est-à-dire $n_f \geq n$,
- ii) Les matrices $A_F(\rho)$, $B_F(\rho)$, $B_{F_1}(\rho)$, $B_{F_2}(\rho)$, $C_{F_1}(\rho)$, $C_{F_2}(\rho)$, $D_F(\rho)$ sont affines selon le paramètre ρ et sont des variables libres, nous avons donc $(n_f^2 + 3n_f n_y + 2n_z n_f + n_z n_y) \times (1 + s)$ degrés de liberté pour le problème de synthèse.

Remarque 3.2. Par souci de clarté, l'entrée de contrôle $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ n'est pas explicitement prise en compte dans les Eqs. (3.16)-(3.17) et (3.21)-(3.27). On peut vérifier que la théorie développée dans les sections suivantes reste néanmoins valable, en étendant simplement le vecteur y avec u . La différence portera essentiellement sur les dimensions de la matrice, de sorte que nous aurons $(n_f^2 + 3n_f(n_y + n_u) + 2n_z n_f + n_z(n_y + n_u)) \times (1 + s)$ degrés de liberté.

3.3 Conception du filtre intervalle

3.3.1 Conditions d'existence

Cette sous-section aborde les conditions d'existence pour que le système (3.21) -(3.27) soit un filtre intervalle pour le système LPV (3.16)-(3.18). La solution est présentée dans le théorème suivant.

Théorème 3.1. *Sous les hypothèses 3.1-3.3, l'état z du système (3.16)-(3.18) est borné par les vecteurs \bar{z}, \underline{z} définis par (3.26), (3.27) i.e.*

$$z(t) \in [\underline{z}(t), \bar{z}(t)], \quad \forall t \geq 0, \quad (3.28)$$

si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) $\forall \rho \in \Gamma_\alpha$, $A_F(\rho)$ est Metzler.
- (ii) $\forall \rho \in \Gamma_\alpha$, il existe des matrices $C_{F_q}(\rho)$, $q \in \{1, 2\}$ satisfaisant :

$$C_{F_q}(\rho) \geq 0. \quad (3.29)$$

- (iii) $\forall \rho \in \Gamma_\alpha$, il existe des matrices $D_F(\rho)$ telles que :

$$D_F(\rho)C(\rho)T^\dagger(\rho) = -I_{n_z}. \quad (3.30)$$

- (iv) $\forall \rho \in \Gamma_\alpha$, il existe des fonctions $\bar{\zeta}_1, \underline{\zeta}_2, \bar{\eta}_1, \underline{\eta}_2$ satisfaisant

$$\bar{\zeta}_1(\bar{z}, \underline{z}, \bar{w}, \underline{w}, \rho) - \zeta_1(z, w, \rho) \geq 0, \quad (3.31)$$

$$\zeta_2(z, w, \rho) - \underline{\zeta}_2(\bar{z}, \underline{z}, \bar{w}, \underline{w}, \rho) \geq 0, \quad (3.32)$$

$$\bar{\eta}_1(\bar{x}_f, \underline{x}_f, \bar{w}, \underline{w}, \rho) - \eta_1(x_f, w, \rho) \geq 0, \quad (3.33)$$

$$\eta_2(x_f, w, \rho) - \underline{\eta}_2(\bar{x}_f, \underline{x}_f, \bar{w}, \underline{w}, \rho) \geq 0, \quad (3.34)$$

où, pour $q \in \{1, 2\}$,

$$\zeta_q(z, w, \rho) = R_{q_Y}(\rho)z + R_{q_S}(\rho)w, \quad (3.35)$$

$$\eta_q(x_f, w, \rho) = -C_{F_q}(\rho)x_f + D(\rho)w, \quad (3.36)$$

avec $R_{q_Y}(\rho) = R_q(\rho)Y(\rho)$, $R_{q_S}(\rho) = R_q(\rho)S(\rho)$ et

$$R_q(\rho) = \begin{bmatrix} B_{F_q}(\rho) & B_F(\rho) \end{bmatrix}, Y(\rho) = \begin{bmatrix} -C(\rho)T^\dagger(\rho) & C(\rho)T^\dagger(\rho) \end{bmatrix}^T, S(\rho) = \begin{bmatrix} -F(\rho) & F(\rho) \end{bmatrix}^T$$

et $D(\rho) = D_F(\rho)F(\rho)$.

(v) Pour des conditions initiales satisfaisant

$$\underline{s}_f(0), \bar{s}_f(0) \geq 0, \quad (3.37)$$

$$\underline{x}_f(0) \leq x_f(0) \leq \bar{x}_f(0), \quad (3.38)$$

nous avons :

$$\bar{s}_f(t), \underline{s}_f(t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.39)$$

$$\underline{x}_f(t) \leq x_f(t) \leq \bar{x}_f(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.40)$$

Démonstration. Considérons la relation $x = T^\dagger(\rho)z$. Les dynamiques des états \bar{s}_f et \underline{s}_f sont déterminées par :

$$\dot{\bar{s}}_f = A_F(\rho)\bar{s}_f + \begin{bmatrix} B_{F_1}(\rho) & B_F(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C(\rho)T(\rho)^\dagger \\ -C(\rho)T(\rho)^\dagger \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B_{F_1}(\rho) & B_F(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(\rho) \\ -F(\rho) \end{bmatrix} w + \bar{\zeta}_1(\cdot), \quad (3.41)$$

$$\dot{\underline{s}}_f = A_F(\rho)\underline{s}_f + \begin{bmatrix} B_{F_2}(\rho) & B_F(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -C(\rho)T(\rho)^\dagger \\ C(\rho)T(\rho)^\dagger \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B_{F_2}(\rho) & B_F(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F(\rho) \\ F(\rho) \end{bmatrix} w + \underline{\zeta}_2(\cdot). \quad (3.42)$$

Considérons à présent les fonctions $\zeta_q(z, w, \rho)$ et $\eta_q(x_f, w, \rho)$, où q appartient à l'ensemble $\{1, 2\}$, telles qu'exprimées dans les équations (3.35)-(3.36), alors :

$$\dot{\bar{s}}_f = A_F(\rho)\bar{s}_f + \bar{\zeta}_1(\bar{z}, \underline{z}, \bar{w}, \underline{w}, \rho) - \zeta_1(z, w, \rho), \quad (3.43)$$

$$\dot{\underline{s}}_f = A_F(\rho)\underline{s}_f + \underline{\zeta}_2(\bar{z}, \underline{z}, \bar{w}, \underline{w}, \rho) - \zeta_2(z, w, \rho). \quad (3.44)$$

Sous la propriété Metzler de la matrice $A_F(\rho)$, sous les conditions (3.31)-(3.32), et avec les conditions initiales (3.37), on peut garantir que (3.43)-(3.44) satisfont la propriété de coopérativité, ce qui conduit à :

$$\bar{s}_f(t), \underline{s}_f(t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.45)$$

En examinant les équations (3.24)-(3.25), ainsi que les conditions initiales (3.38) et en tenant compte de la propriété de coopérativité (3.45), il peut être directement déduit que \bar{x}_f et \underline{x}_f satisfont :

$$\underline{x}_f(t) \leq x_f(t) \leq \bar{x}_f(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.46)$$

À partir de (3.24)-(3.25), nous déduisons que

$$\bar{z} = C_{F_1}(\rho)\bar{s}_f + C_{F_1}(\rho)x_f - D_F(\rho)y + \bar{\eta}_1(\cdot), \quad (3.47)$$

$$\underline{z} = C_{F_2}(\rho)x_f - C_{F_2}(\rho)\underline{s}_f - D_F(\rho)y + \underline{\eta}_2(\cdot), \quad (3.48)$$

où $\bar{\eta}_1(\cdot)$ et $\underline{\eta}_2(\cdot)$ représentent $\bar{\eta}_1(\bar{x}_f, \underline{x}_f, \bar{w}, \underline{w}, \rho)$ et $\underline{\eta}_2(\bar{x}_f, \underline{x}_f, \bar{w}, \underline{w}, \rho)$, respectivement. En combinant (3.17) et $x = T^\dagger(\rho)z$, nous obtenons :

$$\bar{z} = C_{F_1}(\rho)\bar{s}_f + C_{F_1}(\rho)x_F - D_F(\rho)C(\rho)T(\rho)^\dagger z - D_F(\rho)F(\rho)w + \bar{\eta}_1(\cdot), \quad (3.49)$$

$$\underline{z} = C_{F_2}(\rho)x_F - C_{F_2}(\rho)\underline{s}_f - D_F(\rho)C(\rho)T(\rho)^\dagger z - D_F(\rho)F(\rho)w + \underline{\eta}_2(\cdot). \quad (3.50)$$

Si, pour toute trajectoire de $\rho \in \Gamma_a$, on a

$$D_F(\rho)C(\rho)T^\dagger(\rho) = -I_{n_z}, \quad (3.51)$$

alors on peut écrire :

$$\bar{z} = C_{F_1}(\rho)\bar{s}_f + C_{F_1}(\rho)x_F + z - D_F(\rho)F(\rho)w + \bar{\eta}_1(\cdot), \quad (3.52)$$

$$\underline{z} = C_{F_2}(\rho)x_F - C_{F_2}(\rho)\underline{s}_f + z + D_F(\rho)F(\rho)w + \underline{\eta}_2(\cdot). \quad (3.53)$$

Donc, sous la contrainte d'égalité (3.30) et en considérant les bornes supérieure et inférieure des erreurs d'estimation

$$\bar{e}_z = \bar{z} - z, \quad (3.54)$$

$$\underline{e}_z = z - \underline{z}, \quad (3.55)$$

on en déduit que :

$$\bar{e}_z = C_{F_1}(\rho)\bar{s}_f + \bar{\eta}_1(\cdot) - \eta_1(x_f, w, \rho), \quad (3.56)$$

$$\underline{e}_z = C_{F_2}(\rho)\underline{s}_f + \eta_2(x_f, w, \rho) - \underline{\eta}_2(\cdot). \quad (3.57)$$

Enfin, sous la contrainte (3.29), les conditions (3.33)-(3.34), et si les conditions initiales décrites dans (3.37)-(3.38) sont satisfaites, l'existence d'un filtre intervalle pour le système (3.16)-(3.18) est remplie. Cela implique que les bornes \bar{z}, \underline{z} définies dans (3.26)-(3.27) satisfont l'inégalité $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t), \forall t \geq 0$, concluant ainsi la preuve. ■

Remarque 3.3. Notons que si $T(\rho) = I_n$, alors $D_F(\rho)$ existe, $\forall \rho \in \Gamma_\alpha$, si et seulement si $\text{rang}(C(\rho)) = \text{rang}\begin{pmatrix} C(\rho) \\ I_n \end{pmatrix}$ et $D_F(\rho) = C(\rho)^\dagger - M(I - C(\rho)C(\rho)^\dagger), \forall \rho \in \Gamma_\alpha$, où M est une matrice arbitraire.

3.3.2 Détermination des fonctions majorantes $\bar{\zeta}_1, \underline{\zeta}_2, \bar{\eta}_1, \underline{\eta}_2$

Le Théorème 3.1 énonce une condition nécessaire et suffisante pour que le filtre (3.21)-(3.27) soit un filtre intervalle. Cependant, il ne fournit pas de méthode constructive pour déterminer les différentes matrices et fonctions.

Dans cette section, une approche est présentée pour déterminer les fonctions $\bar{\zeta}_1, \underline{\zeta}_2, \bar{\eta}_1, \underline{\eta}_2$. Le problème de la conception des matrices entrant dans les équations (3.21)-(3.27), sera abordé dans la section suivante, où l'on montrera que ce problème peut être formulé comme un problème d'optimisation NL-SDP. Notons qu'il est toujours possible de dériver des bornes pour $\zeta_q, \eta_q, q \in \{1, 2\}$ en ignorant le couplage des variables dont elles dépendent, mais il semble évident que cela peut conduire à une solution conservatrice, et donc augmenter potentiellement la largeur de l'intervalle $\bar{z} - \underline{z}$. C'est pourquoi il est préférable de conserver la dépendance des variables entrant dans $\zeta_q, \eta_q, q \in \{1, 2\}$.

Conformément aux travaux rapportés dans [65] et au Lemme 3.1, les matrices de filtre inconnue $B_F(\rho)$, $B_{F_q}(\rho)$ et $C_{F_q}(\rho)$, $q \in \{1, 2\}$ dans (3.35)-(3.36) sont décomposées en deux matrices (non uniques) telles que

$$B_F(\rho) = B_{F_a}(\rho) - B_{F_b}(\rho), \quad (3.58)$$

$$B_{F_q}(\rho) = B_{F_{q_a}}(\rho) - B_{F_{q_b}}(\rho), \quad (3.59)$$

$$C_{F_q}(\rho) = C_{F_{q_a}}(\rho) - C_{F_{q_b}}(\rho), \quad (3.60)$$

où $B_{F_a}(\rho)$, $B_{F_b}(\rho)$, $B_{F_{q_a}}(\rho)$, $B_{F_{q_b}}(\rho)$, $C_{F_{q_a}}(\rho)$, $C_{F_{q_b}}(\rho) \geq 0$, $\forall \rho \in \Gamma_\alpha$. La matrice $D_F(\rho)$ suit la même stratégie de décomposition, mais contrairement aux équations (3.58)-(3.60), $D_{F_a}(\rho)$ et $D_{F_b}(\rho)$ sont supposés être fixés *a priori*, de sorte que (3.30) s'applique, c'est-à-dire :

$$D_F(\rho) = D_{F_a}(\rho) - D_{F_b}(\rho) \quad \text{t.q (3.30)}. \quad (3.61)$$

Alors, avec (3.58) et (3.59), il vient

$$R_q(\rho) = R_{q_a}(\rho) - R_{q_b}(\rho), \quad (3.62)$$

où $R_{q_a}(\rho) = \begin{bmatrix} B_{F_{q_a}}(\rho) & B_{F_a}(\rho) \end{bmatrix}$, $R_{q_b}(\rho) = \begin{bmatrix} B_{F_{q_b}}(\rho) & B_{F_b}(\rho) \end{bmatrix}$, telles que $B_{F_{q_a}}(\rho)$, $B_{F_{q_b}}(\rho)$, $B_{F_a}(\rho)$, $B_{F_b}(\rho) \geq 0$, $\forall \rho \in \Gamma_\alpha$.

Les fonctions $\bar{\zeta}_1, \underline{\zeta}_2 : \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_w} \times \mathbb{R}^{n_w} \rightarrow \mathbb{R}^{n_f}$ et $\bar{\eta}_1, \underline{\eta}_2 : \mathbb{R}^{n_f} \times \mathbb{R}^{n_f} \times \mathbb{R}^{n_w} \times \mathbb{R}^{n_w} \rightarrow \mathbb{R}^{n_z}$ sont alors données par le lemme suivant.

Lemme 3.2. *Considérons les décompositions (3.58)-(3.62). Alors, pour $x_f \in [\underline{x}_f, \bar{x}_f]$ et $z \in [\underline{z}, \bar{z}]$, les inégalités (3.31)-(3.34) du Théorème 3.1 sont satisfaites $\forall \rho \in \Gamma_\rho$, avec*

$$\bar{\zeta}_1(\bar{z}, \underline{z}, \bar{w}, \underline{w}, \rho) = \overline{R_{1_Y}}^\bullet z^\bullet + \overline{R_{1_S}}^\bullet(\rho) w^\bullet, \quad (3.63)$$

$$\underline{\zeta}_2(\bar{z}, \underline{z}, \bar{w}, \underline{w}, \rho) = \underline{R_{2_Y}}^\bullet z^\bullet + \underline{R_{2_S}}^\bullet(\rho) w^\bullet, \quad (3.64)$$

$$\bar{\eta}_1(\bar{x}_f, \underline{x}_f, \bar{w}, \underline{w}, \rho) = \overline{D}^\bullet(\rho) w^\bullet - \underline{C_{F_1}}^\bullet(\rho) x_f^\bullet, \quad (3.65)$$

$$\underline{\eta}_2(\bar{x}_f, \underline{x}_f, \bar{w}, \underline{w}, \rho) = \underline{D}^\bullet(\rho) w^\bullet - \overline{C_{F_2}}^\bullet(\rho) x_f^\bullet, \quad (3.66)$$

où les matrices $\overline{R_{1_Y}}^\bullet, \overline{R_{1_S}}^\bullet, \underline{R_{2_Y}}^\bullet, \underline{R_{2_S}}^\bullet, \overline{D}^\bullet, \underline{D}^\bullet$ et $\underline{C_{F_1}}^\bullet, \overline{C_{F_2}}^\bullet$ sont définis en se basant sur l'application des corollaires 3.1-3.2 et du Lemme 3.1 (élément 3).

On rappelle à toute fin utile que la notation "•" dénote l'opération présentée dans (3.9), soit $\overline{X}^\bullet = \begin{bmatrix} \overline{X_a} & -\underline{X_a} & -\underline{X_b} & \overline{X_b} \end{bmatrix}$, $\underline{X}^\bullet = \begin{bmatrix} -\overline{X_b} & \underline{X_b} & \underline{X_a} & -\overline{X_a} \end{bmatrix}$ pour une matrice et $v^\bullet = \begin{bmatrix} (\bar{v}^+)^T & (\bar{v}^-)^T & (\underline{v}^+)^T & (\underline{v}^-)^T \end{bmatrix}^T$ pour un vecteur.

Démonstration. L'application du Corollaire 3.1 sur la première partie de l'équation (3.36), et du Lemme 3.1 (point 3) sur la deuxième partie de (3.36), conduit aux bornes supérieure et inférieure $\bar{\eta}_1, \underline{\eta}_2$ définies par les équations (3.65)-(3.66). En appliquant le Corollaire 3.2 sur la première partie de l'équation (3.35), et le Corollaire 3.1 sur la deuxième partie, on obtient les bornes supérieure et inférieure $\bar{\zeta}_1, \underline{\zeta}_2$ définies dans les équations (3.63)-(3.64). ■

Notons que le Lemme 1.17 présente une démarche constructive pour déterminer la décomposition $X(\theta) = X_a(\theta) - X_b(\theta)$ pour $X \in \{Y, S, F\}$

3.3.3 Formulation NL-SDP basée sur des critères de gain \mathcal{L}_2 et gain \mathcal{L}_∞

Cette section présente la formulation NL-SDP de la synthèse du filtre LPV. Les critères de performance choisis sont de type gain \mathcal{L}_2 (critère énergétique) et gain \mathcal{L}_∞ (critère d'amplitude). En introduisant les fonctions $\bar{\zeta}_1, \underline{\zeta}_2, \bar{\eta}_1, \underline{\eta}_2$ définies dans le Lemme 3.2, les équations (3.21)-(3.27) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{s}}_f &= A_F(\rho) \bar{s}_f + (B_{F_1}(\rho) - B_F(\rho)) y + \overline{R_{Y_{1a}}} \bar{z}^+ - \underline{R_{Y_{1a}}} \bar{z}^- - \overline{R_{Y_{1b}}} \underline{z}^+ \\ &\quad + \underline{R_{Y_{1b}}} \underline{z}^- + \overline{R_{S_{1a}}}(\rho) \bar{w}^+ - \underline{R_{S_{1a}}}(\rho) \bar{w}^- - \overline{R_{S_{1b}}}(\rho) \underline{w}^+ + \underline{R_{S_{1b}}}(\rho) \underline{w}^- \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} \dot{\underline{s}}_f &= A_F(\rho) \underline{s}_f + (B_F(\rho) - B_{F_2}(\rho)) y - \overline{R_{Y_{2b}}} \bar{z}^+ + \underline{R_{Y_{2b}}} \bar{z}^- + \overline{R_{Y_{2a}}} \underline{z}^+ \\ &\quad - \underline{R_{Y_{2a}}} \underline{z}^- - \overline{R_{S_{2b}}}(\rho) \bar{w}^+ + \underline{R_{S_{2b}}}(\rho) \bar{w}^- + \overline{R_{S_{2a}}}(\rho) \underline{w}^+ - \underline{R_{S_{2a}}}(\rho) \underline{w}^- \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\dot{x}_f = A_F(\rho) x_f + B_F(\rho) y \quad (3.69)$$

$$\bar{x}_f = \bar{s}_f + x_f \quad (3.70)$$

$$\underline{x}_f = x_f - \underline{s}_f \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \bar{z} &= C_{F_{1a}}(\rho) \bar{x}_f - D_F(\rho) y + (C_{F_{1b}}(\rho) \bar{x}_f^+ - C_{F_{1b}}(\rho) \bar{x}_f^-) - (C_{F_{1a}}(\rho) \underline{x}_f^+ - C_{F_{1a}}(\rho) \underline{x}_f^-) \\ &\quad + \overline{D_a}(\rho) \bar{w}^+ - \underline{D_a}(\rho) \bar{w}^- - \overline{D_b}(\rho) \underline{w}^+ + \underline{D_b}(\rho) \underline{w}^- \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} \underline{z} &= C_{F_{2a}}(\rho) \underline{x}_f - D_F(\rho) y + (C_{F_{2b}}(\rho) \underline{x}_f^+ - C_{F_{2b}}(\rho) \underline{x}_f^-) - (C_{F_{2a}}(\rho) \bar{x}_f^+ - C_{F_{2a}}(\rho) \bar{x}_f^-) \\ &\quad - \overline{D_b}(\rho) \bar{w}^+ + \underline{D_b}(\rho) \bar{w}^- + \overline{D_a}(\rho) \underline{w}^+ - \underline{D_a}(\rho) \underline{w}^- \end{aligned} \quad (3.73)$$

En supposant que tout vecteur v peut être décomposé en deux parties positives, telles que $v = v^+ - v^-$, et que toute matrice $X(\rho)$ peut être décomposée en deux matrices positives, $X(\rho) = X_a(\rho) - X_b(\rho)$ avec $X_a(\rho), X_b(\rho) \geq 0, \forall \rho \in \Gamma_\rho$, il vient

$$\begin{aligned} \dot{\bar{s}}_f &= A_F(\rho) \bar{s}_f + ((B_{F_{1a}}(\rho) - B_{F_{1b}}(\rho)) - (B_{F_a}(\rho) - B_{F_b}(\rho))) (y^+ - y^-) \\ &\quad + \overline{R_{Y_{1a}}} \bar{z}^+ - \underline{R_{Y_{1a}}} \bar{z}^- - \overline{R_{Y_{1b}}} \underline{z}^+ + \underline{R_{Y_{1b}}} \underline{z}^- \\ &\quad + \overline{R_{S_{1a}}}(\rho) \bar{w}^+ - \underline{R_{S_{1a}}}(\rho) \bar{w}^- - \overline{R_{S_{1b}}}(\rho) \underline{w}^+ + \underline{R_{S_{1b}}}(\rho) \underline{w}^- \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} \dot{\underline{s}}_f &= A_F(\rho) \underline{s}_f + ((B_{F_a}(\rho) - B_{F_b}(\rho)) - (B_{F_{2a}}(\rho) - B_{F_{2b}}(\rho))) (y^+ - y^-) \\ &\quad - \overline{R_{Y_{2b}}} \bar{z}^+ + \underline{R_{Y_{2b}}} \bar{z}^- + \overline{R_{Y_{2a}}} \underline{z}^+ - \underline{R_{Y_{2a}}} \underline{z}^- \\ &\quad - \overline{R_{S_{2b}}}(\rho) \bar{w}^+ + \underline{R_{S_{2b}}}(\rho) \bar{w}^- + \overline{R_{S_{2a}}}(\rho) \underline{w}^+ - \underline{R_{S_{2a}}}(\rho) \underline{w}^- \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\dot{x}_f = A_F(\rho)(x_f^+ - x_f^-) + (B_{F_a}(\rho) - B_{F_b}(\rho))(y^+ - y^-) \quad (3.76)$$

$$\bar{x}_f = \bar{s}_f + (x_f^+ - x_f^-) \quad (3.77)$$

$$\underline{x}_f = (x_f^+ - x_f^-) - \underline{s}_f \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} \bar{z} &= (C_{F_{1a}}(\rho) - C_{F_{1b}}(\rho)) (\bar{x}_f^+ - \bar{x}_f^-) - (D_{F_a}(\rho) - D_{F_b}(\rho)) (y^+ - y^-) \\ &\quad + (C_{F_{1b}}(\rho) \bar{x}_f^+ - C_{F_{1b}}(\rho) \bar{x}_f^-) - (C_{F_{1a}}(\rho) \underline{x}_f^+ - C_{F_{1a}}(\rho) \underline{x}_f^-) \\ &\quad + \overline{D_a}(\rho) \bar{w}^+ - \underline{D_a}(\rho) \bar{w}^- - \overline{D_b}(\rho) \underline{w}^+ + \underline{D_b}(\rho) \underline{w}^- \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} \underline{z} &= (C_{F_{2a}}(\rho) - C_{F_{2b}}(\rho)) (\underline{x}_f^+ - \underline{x}_f^-) - (D_{F_a}(\rho) - D_{F_b}(\rho)) (y^+ - y^-) \\ &\quad + (C_{F_{2b}}(\rho) \underline{x}_f^+ - C_{F_{2b}}(\rho) \underline{x}_f^-) - (C_{F_{2a}}(\rho) \bar{x}_f^+ - C_{F_{2a}}(\rho) \bar{x}_f^-) \\ &\quad - \overline{D_b}(\rho) \bar{w}^+ + \underline{D_b}(\rho) \bar{w}^- + \overline{D_a}(\rho) \underline{w}^+ - \underline{D_a}(\rho) \underline{w}^- \end{aligned} \quad (3.80)$$

où y^+, y^- sont décrits dans (3.7) et x^+, x^- décrits dans (3.6). Chaque équation linéaire (3.76)-(3.80) peut être divisée en deux sous-vecteurs positifs qui seront reliés par la combinaison linéaire de sortie $\tilde{e}_z = \bar{z} - \underline{z} = \bar{z}^+ - \bar{z}^- - \underline{z}^+ + \underline{z}^-$. En imposant $\bar{x}f^- = x_f^-$ et $\underline{x}f^+ = x_f^+$ on peut écrire :

$$\bar{x}_f^+ = \bar{s}_f + x_f^+,$$

$$\underline{x}_f^- = x_f^- + \underline{s}_f.$$

Ainsi, les équations (3.76) et (3.79)-(3.80) peuvent être réécrites comme suit :

$$\dot{x}_f^+ = A_F(\rho)x_f^+ + B_{F_a}(\rho)y^+ + B_{F_b}(\rho)y^- \quad (3.81)$$

$$\dot{x}_f^- = A_F(\rho)x_f^- + B_{F_a}(\rho)y^- + B_{F_b}(\rho)y^+ \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} \bar{z}^+ &= (C_{F_{1a}}(\rho) + C_{F_{1b}}(\rho))\bar{s}_f + C_{F_{1a}}(\rho)\underline{s}_f + (C_{F_{1a}}(\rho) + C_{F_{1b}}(\rho))x_f^+ + (C_{F_{1a}}(\rho) \\ &\quad + C_{F_{1b}}(\rho))x_f^- + D_{F_b}(\rho)y^+ + D_{F_a}(\rho)y^- + \bar{D}_a(\rho)\bar{w}^+ + \bar{D}_b(\rho)\underline{w}^- \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} \bar{z}^- &= C_{F_{1b}}(\rho)\bar{s}_f + (C_{F_{1a}}(\rho) + C_{F_{1b}}(\rho))x_f^+ + (C_{F_{1a}}(\rho) + C_{F_{1b}}(\rho))x_f^- \\ &\quad + D_{F_a}(\rho)y^+ + D_{F_b}(\rho)y^- + \underline{D}_a(\rho)\bar{w}^- + \underline{D}_b(\rho)\underline{w}^+ \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} \underline{z}^+ &= C_{F_{2b}}(\rho)\underline{s}_f + (C_{F_{2a}}(\rho) + C_{F_{2b}}(\rho))x_f^+ + (C_{F_{2a}}(\rho) + C_{F_{2b}}(\rho))x_f^- \\ &\quad + D_{F_b}(\rho)y^+ + D_{F_a}(\rho)y^- + \underline{D}_b(\rho)\bar{w}^- + \underline{D}_a(\rho)\underline{w}^+ \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} \underline{z}^- &= C_{F_{2a}}(\rho)\bar{s}_f + (C_{F_{2a}}(\rho) + C_{F_{2b}}(\rho))\underline{s}_f + (C_{F_{2a}}(\rho) + C_{F_{2b}}(\rho))x_f^+ + (C_{F_{2a}}(\rho) \\ &\quad + C_{F_{2b}}(\rho))x_f^- + D_{F_a}(\rho)y^+ + D_{F_b}(\rho)y^- + \bar{D}_b(\rho)\bar{w}^+ + \bar{D}_a(\rho)\underline{w}^- \end{aligned} \quad (3.86)$$

En injectant les expressions de $y^+, y^-, \bar{z}^+, \bar{z}^-, \underline{z}^+, \underline{z}^-$ données par les équations (3.7), (3.83)-(3.86) dans (3.74)-(3.75), on pourra vérifier sous l'Hypothèse 3.3, que l'interconnexion entre le système et le filtre intervalle admet la représentation d'espace d'état suivante

$$\dot{\check{x}} = \check{A}(\rho)\check{x} + \check{B}(\rho)\omega, \quad (3.87)$$

$$\tilde{e}_z = \check{C}(\rho)\check{x} + \check{D}(\rho)\omega, \quad (3.88)$$

où $\check{x} = (x^{+T} \ x^{-T} \ x_f^{+T} \ x_f^{-T} \ \bar{s}_f^T \ \underline{s}_f^T)^T$, $\omega = (w^{+T} \ w^{-T} \ \bar{w}^{+T} \ \bar{w}^{-T} \ \underline{w}^{+T} \ \underline{w}^{-T})^T$ and $\tilde{e}_z = \bar{z} - \underline{z} = \bar{z}^+ - \bar{z}^- - \underline{z}^+ + \underline{z}^-$. Les matrices d'état $\check{A}(\rho)$, $\check{B}(\rho)$, $\check{C}(\rho)$ et $\check{D}(\rho)$ sont données par

$$\check{A}(\rho) = \begin{bmatrix} [A(\rho)]_{1,1} & [A(\rho)]_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [A(\rho)]_{2,1} & [A(\rho)]_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Pi_{1,1}(\cdot) & \Pi_{1,2}(\cdot) & A_F(\rho) & 0 & 0 & 0 \\ \Pi_{2,1}(\cdot) & \Pi_{2,2}(\cdot) & 0 & A_F(\rho) & 0 & 0 \\ \Pi_{3,1}(\cdot) & \Pi_{3,2}(\cdot) & \Pi_{3,3}(\cdot) & \Pi_{3,4}(\cdot) & \Pi_{3,5}(\cdot) & \Pi_{3,6}(\cdot) \\ \Pi_{4,1}(\cdot) & \Pi_{4,2}(\cdot) & \Pi_{4,3}(\cdot) & \Pi_{4,4}(\cdot) & \Pi_{4,5}(\cdot) & \Pi_{4,6}(\cdot) \end{bmatrix}, \quad (3.89)$$

$$\check{B}(\rho) = \begin{bmatrix} E(\rho)^+ & E(\rho)^- & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E(\rho)^- & E(\rho)^+ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Pi_{1,7}(\cdot) & \Pi_{1,8}(\cdot) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Pi_{2,7}(\cdot) & \Pi_{2,8}(\cdot) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Pi_{3,7}(\cdot) & \Pi_{3,8}(\cdot) & \Pi_{3,9}(\cdot) & \Pi_{3,10}(\cdot) & \Pi_{3,11}(\cdot) & \Pi_{3,12}(\cdot) \\ \Pi_{4,7}(\cdot) & \Pi_{4,8}(\cdot) & \Pi_{4,9}(\cdot) & \Pi_{4,10}(\cdot) & \Pi_{4,11}(\cdot) & \Pi_{4,12}(\cdot) \end{bmatrix}, \quad (3.90)$$

$$\check{C}(\rho) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi_{5,5}(\cdot) & \Pi_{5,6}(\cdot) \end{bmatrix}, \quad (3.91)$$

$$\check{D}(\rho) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Pi_{5,9}(\cdot) & \Pi_{5,10}(\cdot) & \Pi_{5,11}(\cdot) & \Pi_{5,12}(\cdot) \end{bmatrix}, \quad (3.92)$$

où $[A(\rho)]_{m,n}$ sont les éléments de la matrice $[A(\rho)]$ présentée dans la Définition 3.3 avec $m \in \{1, 2\}$ et $n \in \{1, 2\}$. Les expressions des matrices $\Pi_{i,j}(\cdot)$ sont données par :

$$\Pi_{1,1}(\rho) = B_{F_a}(\rho)C(\rho)^+ + B_{F_b}(\rho)C(\rho)^-, \quad \Pi_{1,2}(\rho) = B_{F_a}(\rho)C(\rho)^- + B_{F_b}(\rho)C(\rho)^+, \quad (3.93)$$

$$\Pi_{1,7}(\rho) = B_{F_a}(\rho)F(\rho)^+ + B_{F_b}(\rho)F(\rho)^-, \quad \Pi_{1,8}(\rho) = B_{F_a}(\rho)F(\rho)^- + B_{F_b}(\rho)F(\rho)^+, \quad (3.94)$$

$$\Pi_{2,1}(\rho) = \Pi_{1,2}(\rho), \quad \Pi_{2,2}(\rho) = \Pi_{1,1}(\rho), \quad \Pi_{2,7}(\rho) = \Pi_{1,8}(\rho), \quad \Pi_{2,8}(\rho) = \Pi_{1,7}(\rho), \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{3,1}(\rho) = & \left(\left(\overline{R_{1Y_a}} D_{F_b}(\rho) - \underline{R_{1Y_a}} D_{F_a}(\rho) - \underline{R_{1Y_b}} D_{F_b}(\rho) + \overline{R_{1Y_b}} D_{F_a}(\rho) + (B_{F_1}(\rho) - B_F(\rho)) \right) C(\rho)^+ \right. \\ & \left. + \left(\overline{R_{1Y_a}} D_{F_a}(\rho) - \underline{R_{1Y_a}} D_{F_b}(\rho) - \underline{R_{1Y_b}} D_{F_a}(\rho) + \overline{R_{1Y_b}} D_{F_b}(\rho) - (B_{F_1}(\rho) - B_F(\rho)) \right) C(\rho)^- \right), \end{aligned} \quad (3.96)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{3,2}(\rho) = & \left(\left(\overline{R_{1Y_a}} D_{F_b}(\rho) - \underline{R_{1Y_a}} D_{F_a}(\rho) - \underline{R_{1Y_b}} D_{F_b}(\rho) + \overline{R_{1Y_b}} D_{F_a}(\rho) + (B_{F_1}(\rho) - B_F(\rho)) \right) C(\rho)^- \right. \\ & \left. + \left(\overline{R_{1Y_a}} D_{F_a}(\rho) - \underline{R_{1Y_a}} D_{F_b}(\rho) - \underline{R_{1Y_b}} D_{F_a}(\rho) + \overline{R_{1Y_b}} D_{F_b}(\rho) - (B_{F_1}(\rho) - B_F(\rho)) \right) C(\rho)^+ \right), \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{3,7}(\rho) = & \left(\left(\overline{R_{1Y_a}} D_{F_b}(\rho) - \underline{R_{1Y_a}} D_{F_a}(\rho) - \underline{R_{1Y_b}} D_{F_b}(\rho) + \overline{R_{1Y_b}} D_{F_a}(\rho) + (B_{F_1}(\rho) - B_F(\rho)) \right) F(\rho)^+ \right. \\ & \left. + \left(\overline{R_{1Y_a}} D_{F_a}(\rho) - \underline{R_{1Y_a}} D_{F_b}(\rho) - \underline{R_{1Y_b}} D_{F_a}(\rho) + \overline{R_{1Y_b}} D_{F_b}(\rho) - (B_{F_1}(\rho) - B_F(\rho)) \right) F(\rho)^- \right), \end{aligned} \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{3,8}(\rho) = & \left(\left(\overline{R_{1Y_a}} D_{F_b}(\rho) - \underline{R_{1Y_a}} D_{F_a}(\rho) - \underline{R_{1Y_b}} D_{F_b}(\rho) + \overline{R_{1Y_b}} D_{F_a}(\rho) + (B_{F_1}(\rho) - B_F(\rho)) \right) F(\rho)^- \right. \\ & \left. + \left(\overline{R_{1Y_a}} D_{F_a}(\rho) - \underline{R_{1Y_a}} D_{F_b}(\rho) - \underline{R_{1Y_b}} D_{F_a}(\rho) + \overline{R_{1Y_b}} D_{F_b}(\rho) - (B_{F_1}(\rho) - B_F(\rho)) \right) F(\rho)^+ \right), \end{aligned} \quad (3.99)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{4,1}(\rho) = & \left(\left(-\overline{R_{2Y_b}} D_{F_b}(\rho) + \underline{R_{2Y_b}} D_{F_a}(\rho) + \underline{R_{2Y_a}} D_{F_b}(\rho) - \overline{R_{2Y_a}} D_{F_a}(\rho) + (B_F(\rho) - B_{F_2}(\rho)) \right) C(\rho)^+ \right. \\ & \left. + \left(-\overline{R_{2Y_b}} D_{F_a}(\rho) + \underline{R_{2Y_b}} D_{F_b}(\rho) + \underline{R_{2Y_a}} D_{F_a}(\rho) - \overline{R_{2Y_a}} D_{F_b}(\rho) - (B_F(\rho) - B_{F_2}(\rho)) \right) C(\rho)^- \right), \end{aligned} \quad (3.100)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{4,2}(\rho) = & \left(-\overline{R_{2Y_b}} D_{F_b}(\rho) + \underline{R_{2Y_b}} D_{F_a}(\rho) + \underline{R_{2Y_a}} D_{F_b}(\rho) - \overline{R_{2Y_a}} D_{F_a}(\rho) + (B_F(\rho) - B_{F_2}(\rho)) \right) C(\rho)^- \\ & + \left(-\overline{R_{2Y_b}} D_{F_a}(\rho) + \underline{R_{2Y_b}} D_{F_b}(\rho) + \underline{R_{2Y_a}} D_{F_a}(\rho) - \overline{R_{2Y_a}} D_{F_b}(\rho) - (B_F(\rho) - B_{F_2}(\rho)) \right) C(\rho)^+, \end{aligned} \quad (3.101)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{4,7}(\rho) = & \left(\left(-\overline{R_{2Y_b}} D_{F_b}(\rho) + \underline{R_{2Y_b}} D_{F_a}(\rho) + \underline{R_{2Y_a}} D_{F_b}(\rho) - \overline{R_{2Y_a}} D_{F_a}(\rho) + (B_F(\rho) - B_{F_2}(\rho)) \right) F(\rho)^+ \right. \\ & \left. + \left(-\overline{R_{2Y_b}} D_{F_a}(\rho) + \underline{R_{2Y_b}} D_{F_b}(\rho) + \underline{R_{2Y_a}} D_{F_a}(\rho) - \overline{R_{2Y_a}} D_{F_b}(\rho) - (B_F(\rho) - B_{F_2}(\rho)) \right) F(\rho)^- \right), \end{aligned} \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{4,8}(\rho) = & \left(\left(-\overline{R_{2Y_b}} D_{F_b}(\rho) + \underline{R_{2Y_b}} D_{F_a}(\rho) + \underline{R_{2Y_a}} D_{F_b}(\rho) - \overline{R_{2Y_a}} D_{F_a}(\rho) + (B_F(\rho) - B_{F_2}(\rho)) \right) F(\rho)^- \right. \\ & \left. + \left(-\overline{R_{2Y_b}} D_{F_a}(\rho) + \underline{R_{2Y_b}} D_{F_b}(\rho) + \underline{R_{2Y_a}} D_{F_a}(\rho) - \overline{R_{2Y_a}} D_{F_b}(\rho) - (B_F(\rho) - B_{F_2}(\rho)) \right) F(\rho)^+ \right), \end{aligned} \quad (3.103)$$

$$\Pi_{3,3}(\rho) = \left((\overline{R_{1Y_a}} - \underline{R_{1Y_a}})(C_{F_{1b}}(\rho) + C_{F_{1a}}(\rho)) + (\overline{R_{1Y_b}} - \underline{R_{1Y_b}})(C_{F_{2b}}(\rho) + C_{F_{2a}}(\rho)) \right), \quad (3.104)$$

$$\Pi_{3,4}(\rho) = \Pi_{3,3}(\rho), \quad (3.105)$$

$$\Pi_{3,5}(\rho) = \left(A_F(\rho) + \overline{R_{1Y_a}} C_{F_{1a}}(\rho) + (\overline{R_{1Y_a}} - \underline{R_{1Y_a}}) C_{F_{1b}}(\rho) + \overline{R_{1Y_b}} C_{F_{2a}}(\rho) \right), \quad (3.106)$$

$$\Pi_{3,6}(\rho) = \left(\overline{R_{1Y_a}} C_{F_{1a}}(\rho) + (\overline{R_{1Y_b}} - \underline{R_{1Y_b}}) C_{F_{2b}}(\rho) + \overline{R_{1Y_b}} C_{F_{2a}}(\rho) \right), \quad (3.107)$$

$$\Pi_{3,9}(\rho) = \left(\overline{R_{1Y_a}} \overline{D_a}(\rho) + \overline{R_{1Y_b}} \overline{D_b}(\rho) + \overline{R_{1S_a}}(\rho) \right), \quad (3.108)$$

$$\Pi_{3,10}(\rho) = - \left(\underline{R_{1Y_a}} \underline{D_a}(\rho) + \underline{R_{1Y_b}} \underline{D_b}(\rho) + \underline{R_{1S_a}}(\rho) \right), \quad (3.109)$$

$$\Pi_{3,11}(\rho) = - \left(\underline{R_{1Y_a}} \underline{D_b}(\rho) + \underline{R_{1Y_b}} \underline{D_a}(\rho) + \underline{R_{1S_b}}(\rho) \right), \quad (3.110)$$

$$\Pi_{3,12}(\rho) = \left(\overline{R_{1Y_a}} \overline{D_b}(\rho) + \overline{R_{1Y_b}} \overline{D_a}(\rho) + \overline{R_{1S_b}}(\rho) \right), \quad (3.111)$$

$$\Pi_{4,3}(\rho) = \left((\underline{R_{2Y_b}} - \overline{R_{2Y_b}})(C_{F_{1a}}(\rho) + C_{F_{1b}}(\rho)) + (\underline{R_{2Y_a}} - \overline{R_{2Y_a}})(C_{F_{2a}}(\rho) + C_{F_{2b}}(\rho)) \right), \quad (3.112)$$

$$\Pi_{4,4}(\rho) = \Pi_{4,3}(\rho), \quad (3.113)$$

$$\Pi_{4,5}(\rho) = \left(\underline{R_{2Y_b}} C_{F_{1b}}(\rho) - \overline{R_{2Y_b}}(C_{F_{1a}}(\rho) + C_{F_{1b}}(\rho)) - \overline{R_{2Y_a}} C_{F_{2a}}(\rho) \right), \quad (3.114)$$

$$\Pi_{4,6}(\rho) = \left(A_F(\rho) + \underline{R_{2Y_a}}(\rho) C_{F_{2b}}(\rho) - \overline{R_{2Y_b}} C_{F_{1a}}(\rho) - \overline{R_{2Y_a}}(C_{F_{2a}}(\rho) + C_{F_{2b}}(\rho)) \right), \quad (3.115)$$

$$\Pi_{4,9}(\rho) = - \left(\underline{R_{2Y_b}} \underline{D_a}(\rho) + \underline{R_{2Y_a}} \underline{D_b}(\rho) + \underline{R_{2S_b}}(\rho) \right), \quad (3.116)$$

$$\Pi_{4,10}(\rho) = \left(\underline{R}_{2_Y b} \underline{D}_a(\rho) + \underline{R}_{2_Y a} \underline{D}_b(\rho) + \underline{R}_{2_S b}(\rho) \right), \quad (3.117)$$

$$\Pi_{4,11}(\rho) = \left(\underline{R}_{2_Y b} \underline{D}_b(\rho) + \underline{R}_{2_Y a} \underline{D}_a(\rho) + \underline{R}_{2_S a}(\rho) \right), \quad (3.118)$$

$$\Pi_{4,12}(\rho) = - \left(\overline{R}_{2_Y b} \overline{D}_b(\rho) + \overline{R}_{2_Y a} \overline{D}_a(\rho) + \overline{R}_{2_S a}(\rho) \right), \quad (3.119)$$

$$\Pi_{5,5}(\rho) = C_{F_{1a}}(\rho) + C_{F_{2a}}(\rho), \quad (3.120)$$

$$\Pi_{5,6}(\rho) = \Pi_{5,5}(\rho), \quad (3.121)$$

$$\Pi_{5,9}(\rho) = \overline{D}_a(\rho) + \overline{D}_b(\rho), \quad (3.122)$$

$$\Pi_{5,10}(\rho) = -(\underline{D}_a(\rho) + \underline{D}_b(\rho)), \quad (3.123)$$

$$\Pi_{5,11}(\rho) = \Pi_{5,10}(\rho), \quad (3.124)$$

$$\Pi_{5,12}(\rho) = \Pi_{5,9}(\rho). \quad (3.125)$$

Les théorèmes suivants donnent respectivement les solutions aux problèmes de performances de gain \mathcal{L}_2 et de gain \mathcal{L}_∞ .

Théorème 3.2. *Soient les Eqs. (3.87)-(3.88). Le filtre intervalle LPV (3.21)-(3.27) est (quadratique affine) stable et le gain $\mathcal{L}_2 \sup_{\rho \in \Gamma_\alpha, \|\omega\|_2=1} \|\tilde{e}_z\|_2$ est inférieur à $\gamma_{\mathcal{L}_2}$ s'il existe des matrices symétriques $P_0, \dots, P_s \in \mathbb{R}^{(2n+4n_f) \times (2n+4n_f)}$ telles que, pour $i \in \{1, \dots, s\}$ et $\forall(\alpha, \beta) \in \Gamma_\alpha \times \Gamma_\beta$*

$$P(\alpha) = P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_s P_s \succ 0, \quad (3.126)$$

$$\begin{bmatrix} H_e\{P(\alpha)\check{A}(\alpha)\} + P(\beta) - P_0 & P(\alpha)\check{B}(\alpha) & \check{C}(\alpha)^T \\ \star & -\gamma_{\mathcal{L}_2} I & \check{D}^T(\alpha) \\ \star & \star & -\gamma_{\mathcal{L}_2} I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.127)$$

$$\begin{bmatrix} P_i \check{A}_i + \check{A}_i^T P_i & P_i \check{B}_i \\ \star & 0 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (3.128)$$

où \check{A}_i, \check{B}_i sont les coefficients matriciels de $\check{A}(\rho), \check{B}(\rho)$ associés à ρ^2 .

Démonstration. La preuve est immédiate en appliquant le Théorème 6.2 dans [72] au modèle (3.87)-(3.88) et en observant que la structure de $\check{A}(\rho)$ est bloc-diagonale, avec $A_F(\rho)$ sur la diagonale. ■

Théorème 3.3. *Soient les (3.87)-(3.88). Le filtre intervalle LPV (3.21)-(3.27) est (quadratique affine) stable et le gain $\mathcal{L}_\infty \sup_{\rho \in \Gamma_\alpha, \|\omega\|_\infty=1} \|\tilde{e}_z\|_\infty$ est inférieur à $\gamma_{\mathcal{L}_\infty} = \sqrt{\frac{\gamma_3 \gamma_2}{\gamma_1} + \gamma_4}$ s'il existe des matrices symétriques $P_0, \dots, P_s \in \mathbb{R}^{(2n+4n_f) \times (2n+4n_f)}$ telles que, pour $i \in \{1, \dots, s\}$ et $\forall(\alpha, \beta) \in \Gamma_\alpha \times \Gamma_\beta$:*

$$P(\alpha) = P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_s P_s \succ 0, \quad (3.129)$$

$$\begin{bmatrix} H_e\{P(\alpha)\check{A}(\alpha)\} + P(\beta) - P_0 + \gamma_4 P(\alpha) & \star \\ \check{B}(\alpha)^T P(\alpha) & -\gamma_2 I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.130)$$

$$\begin{bmatrix} -\gamma_3 P(\alpha) & \star & \star \\ 0 & -\gamma_1 I & \star \\ \check{C}(\alpha) & \check{D}(\alpha) & -I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.131)$$

$$\begin{bmatrix} P_i \check{A}_i + \check{A}_i^T P_i & P_i \check{B}_i \\ \star & 0 \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (3.132)$$

Démonstration. La preuve est immédiate en appliquant la Proposition 4.3 dans [111] au système (3.87)-(3.88), qui est une extension dans le cas de la multi-convexité du Lemme 1.3, et en considérant les mêmes définitions pour \check{A}_i, \check{B}_i et P_i pour $i \in \{1, \dots, s\}$ que celles utilisées dans le Théorème 3.2. ■

Les Théorèmes 3.2 et 3.3 fournissent des conditions suffisantes pour que le filtre LPV (3.21)-(3.27) garantisse une atténuation de l'entrée augmentée ω sur la taille de l'intervalle $\bar{z} - \underline{z}$. Malheureusement, ils ne fournissent pas de procédure constructive pour dériver pratiquement les matrices d'espace d'état du filtre, principalement en raison des dépendances non linéaires qui existent entre les matrices P_i , $i \in \{1, \dots, s\}$ et les matrices d'état du filtre. Pour pallier ce problème, le lemme de projection [24] (présenté dans l'Annexe B) et la théorie des matrices auxiliaires (présentées dans l'état de l'art) sont utilisés pour relaxer ces dépendances. Nous allons voir que le problème de synthèse des matrices d'état du filtre se formule alors comme un problème NL-SDP, c'est à dire comme un problème d'optimisation sous contraintes mixtes d'inégalités linéaires-bilinéaires matricielles (LMI-BMI). Introduisons pour cela une matrice W (matrice auxiliaire) avec la structure suivante

$$W = \text{diag}\{W_1, W_1, W_2, W_2, W_2, W_2\}, \quad (3.133)$$

où $W_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $W_2 \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$, et considérons le changement de variables pour $k \in \{a, b\}, q \in \{1, 2\}$

$$\tilde{A}_F(\rho) = W_2 A_F(\rho), \quad (3.134)$$

$$\tilde{B}_{F_k}(\rho) = W_2 B_{F_k}(\rho), \quad (3.135)$$

$$\tilde{B}_{F_{qk}}(\rho) = W_2 B_{F_{qk}}(\rho), \quad (3.136)$$

$$\tilde{C}_{F_{qk}}(\rho) = C_{F_{qk}}(\rho), \quad (3.137)$$

où l'équation (3.137) est introduite pour des raisons d'homogénéité dans les notations. Le théorème suivant donne une solution constructive au problème de synthèse du filtre sous contrainte de performance \mathcal{L}_2 .

Théorème 3.4. *Soient les matrices définies comme suit :*

$$\tilde{\Pi}_{m,n} = W_2 \Pi_{m,n}, \quad m \in \{1, 2\}, n \in \{1, 2, 7, 8\}, \quad (3.138)$$

$$\tilde{\Pi}_{m,n} = W_2 \Pi_{m,n}, \quad m \in \{3, 4\}, n \in \{1, \dots, 12\}, \quad (3.139)$$

$$\tilde{\Pi}_{5,n} = W_2 \Pi_{5,n}, \quad n \in \{5, 6, 9, 10, 11, 12\}. \quad (3.140)$$

S'il existe des matrices bornées $\underline{X}_k(\alpha) : X \in \{Y, S, F\}$ satisfaisant $\underline{X}_k(\alpha) \geq 0$, $k \in \{a, b\}$, des matrices symétriques $P_0, \dots, P_s \in \mathbb{R}^{(2n+4n_f) \times (2n+4n_f)}$, des matrices $A_F \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$, $J_i = [\tilde{B}_{F_{a_i}} \tilde{B}_{F_{b_i}} \tilde{B}_{F_{1a_i}} \tilde{B}_{F_{1b_i}} \tilde{B}_{F_{2a_i}} \tilde{B}_{F_{2b_i}} \tilde{C}_{F_{1a_i}} \tilde{C}_{F_{1b_i}} \tilde{C}_{F_{2a_i}} \tilde{C}_{F_{2b_i}}]$ avec $\tilde{B}_{F_{a_i}}, \tilde{B}_{F_{b_i}}, \tilde{B}_{F_{1a_i}}, \tilde{B}_{F_{1b_i}}, \tilde{B}_{F_{2a_i}}, \tilde{B}_{F_{2b_i}} \in \mathbb{R}^{n_f \times n_y}$, $\tilde{C}_{F_{1a_i}}, \tilde{C}_{F_{1b_i}}, \tilde{C}_{F_{2a_i}}, \tilde{C}_{F_{2b_i}} \in \mathbb{R}^{n_z \times n_f}$ et des matrices auxiliaires $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_s$, pour les sommets $i \in \{1, \dots, s\}$, telles que $\forall \alpha \in \Gamma_\alpha$

$$P(\alpha) = P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_s P_s \succ 0, \quad (3.141)$$

$$J(\alpha) = \alpha_1 J_1 + \dots + \alpha_s J_s \geq 0, \quad (3.142)$$

$$\mathcal{F}(\alpha) = \alpha_1^2 \mathcal{F}_1 + \dots + \alpha_s^2 \mathcal{F}_s \succeq 0, \quad (3.143)$$

et une matrice W_1 , des scalaires réels $\gamma_{\mathcal{L}_2}, \kappa \geq 0$, une M -matrice W_2 telles que les contraintes linéaires et bilinéaires suivantes sont vérifiées :

- $\forall(\alpha, \beta) \in \Gamma_\alpha \times \Gamma_\beta$ et pour $q \in \{1, 2\}$

$$0 \leq \underline{\tilde{B}}_{F_k} \leq \tilde{B}_{F_k}(\alpha) \leq \overline{\tilde{B}}_{F_k}, \quad (3.144)$$

$$0 \leq \underline{\tilde{B}}_{F_{q_k}} \leq \tilde{B}_{F_{q_k}}(\alpha) \leq \overline{\tilde{B}}_{F_{q_k}}, \quad (3.145)$$

$$\tilde{C}_{F_{q_a}}(\alpha) - \tilde{C}_{F_{q_b}}(\alpha) \geq 0, \quad (3.146)$$

$$\tilde{A}_F(\alpha) + \kappa W_2 \geq 0, \quad (3.147)$$

$$\tilde{\Omega}(\alpha, \beta) + \mathcal{F}(\alpha) \prec 0, \quad (3.148)$$

où

$$\tilde{\Omega}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} -H_e \{W\} & \tilde{B}(\alpha) & P(\alpha) + \tilde{A}(\alpha) & W & 0 \\ \star & -\gamma_{\mathcal{L}_2} I & 0 & 0 & \tilde{D}(\alpha)^T \\ \star & \star & -P(\alpha) + P(\beta) - P_0 & 0 & \tilde{C}(\alpha)^T \\ \star & \star & \star & -P(\alpha) & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -\gamma_{\mathcal{L}_2} I \end{bmatrix},$$

- pour $i \in \{1, \dots, s\}$

$$\begin{bmatrix} 0 & \tilde{B}_i & P_i + \tilde{A}_i & 0 & 0 \\ \star & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{F}_i \succeq 0, \quad (3.149)$$

où $\tilde{A}(\alpha)$, $\tilde{B}(\alpha)$, $\tilde{C}(\alpha)$ et $\tilde{D}(\alpha)$ sont définies comme dans (3.150), alors le gain \mathcal{L}_2 $\sup_{\rho \in \Gamma_\alpha, \|\omega\|_2=1} \|\tilde{e}_z\|_2$ est inférieur à $\gamma_{\mathcal{L}_2}$. Les matrices d'état du filtre $A_F(\rho)$, $B_F(\rho)$, $B_{F_1}(\rho)$, $B_{F_2}(\rho)$, $C_{F_1}(\rho)$, $C_{F_2}(\rho)$, $D_F(\rho)$ sont alors déduites en inversant les équations (3.134)-(3.137).

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}(\alpha) & \tilde{B}(\alpha) \\ \hline \tilde{C}(\alpha) & \tilde{D}(\alpha) \end{array} \right] = \begin{bmatrix} [A(\rho)]_{1,1} & [A(\rho)]_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & E(\alpha)^+ & E(\alpha)^- & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [A(\rho)]_{2,1} & [A(\rho)]_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & E(\alpha)^- & E(\alpha)^+ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{H}_{1,1}(\alpha) & \tilde{H}_{1,2}(\alpha) & \tilde{A}_F(\alpha) & 0 & 0 & 0 & \tilde{H}_{1,7}(\alpha) & \tilde{H}_{1,8}(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{H}_{2,1}(\alpha) & \tilde{H}_{2,2}(\alpha) & 0 & \tilde{A}_F(\alpha) & 0 & 0 & \tilde{H}_{2,7}(\alpha) & \tilde{H}_{2,8}(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{H}_{3,1}(\alpha) & \tilde{H}_{3,2}(\alpha) & \tilde{H}_{3,3}(\alpha) & \tilde{H}_{3,4}(\alpha) & \tilde{H}_{3,5}(\alpha) & \tilde{H}_{3,6}(\alpha) & \tilde{H}_{3,7}(\alpha) & \tilde{H}_{3,8}(\alpha) & \tilde{H}_{3,9}(\alpha) & \tilde{H}_{3,10}(\alpha) & \tilde{H}_{3,11}(\alpha) & \tilde{H}_{3,12}(\alpha) \\ \tilde{H}_{4,1}(\alpha) & \tilde{H}_{4,2}(\alpha) & \tilde{H}_{4,3}(\alpha) & \tilde{H}_{4,4}(\alpha) & \tilde{H}_{4,5}(\alpha) & \tilde{H}_{4,6}(\alpha) & \tilde{H}_{4,7}(\alpha) & \tilde{H}_{4,8}(\alpha) & \tilde{H}_{4,9}(\alpha) & \tilde{H}_{4,10}(\alpha) & \tilde{H}_{4,11}(\alpha) & \tilde{H}_{4,12}(\alpha) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{H}_{5,5}(\alpha) & \tilde{H}_{5,6}(\alpha) & 0 & 0 & \tilde{H}_{5,9}(\alpha) & \tilde{H}_{5,10}(\alpha) & \tilde{H}_{5,11}(\alpha) & \tilde{H}_{5,12}(\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.150)$$

Démonstration. Considérons tout d'abord $\mathcal{F}_i = 0$, $i \in \{1, \dots, s\}$ dans les Éqs. (3.148) et (3.149). En utilisant les changements de variables linéaires définis dans (3.134)-(3.137), nous pouvons déduire que, $\forall \rho \in \Gamma_\alpha$ et $\forall \dot{\rho} \in \Gamma_\beta$ (voir [72]), les contraintes (3.141)-(3.149) impliquent ce qui suit :

$$\Omega(\rho, \dot{\rho}) = \begin{bmatrix} -H_e \{W\} & W\tilde{B}(\rho) & P(\rho) + W\tilde{A}(\rho) & W & 0 \\ \star & -\gamma_{\mathcal{L}_2} I & 0 & 0 & \tilde{D}(\rho)^T \\ \star & \star & -P(\rho) + P(\dot{\rho}) - P_0 & 0 & \tilde{C}(\rho)^T \\ \star & \star & \star & -P(\rho) & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -\gamma_{\mathcal{L}_2} I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.151)$$

$$W_2 B_{F_k}(\rho), W_2 B_{F_{q_k}}(\rho), C_{F_{q_k}}(\rho), \geq 0, \quad (3.152)$$

$$C_{F_{q_a}}(\rho) - C_{F_{q_b}}(\rho) \geq 0, \quad (3.153)$$

$$W_2 A_F(\rho) + \kappa W_2 \geq 0. \quad (3.154)$$

Puisque W_2 est une M-matrice alors $W_2^{-1} \geq 0$, (3.154) garantit que $A_F(\rho)$ est Metzler basé sur le Lemme 1.14. Ensuite, (3.152) permet que les matrices $B_{F_k}(\rho), B_{F_{q_k}}(\rho), C_{F_q}(\rho)$, avec $k \in \{a, b\}$ et $q \in \{1, 2\}$, satisfassent les décompositions (3.58)-(3.60) en deux (non uniques) matrices positives. A partir de ces décompositions, il est évident que (3.153) est équivalente aux contraintes (3.29). La condition (3.151) assure des performances de gain \mathcal{L}_2 pour l'espace d'état (3.87)-(3.88) en imposant une décomposition spécifique des matrices de filtre. Cette décomposition (3.58)-(3.61) concerne les matrices $B_F(\rho), B_{F_1}(\rho), B_{F_2}(\rho), C_{F_1}(\rho), C_{F_2}(\rho)$ et $D_F(\rho)$. L'application du complément de Schur (présenté en Annexe B) à (3.151) conduit à :

$$\mathcal{A}(\rho, \dot{\rho}) + \mathcal{Z}(\rho)(\rho)^T W^T \mathcal{Y} + \mathcal{Y}^T W \mathcal{Z}(\rho)(\rho) \prec 0, \quad (3.155)$$

où $\mathcal{Y} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathcal{Z}(\rho) = \begin{bmatrix} -I & \check{B}(\rho) & \check{A}(\rho) & I \end{bmatrix}$ et

$$\mathcal{A}(\rho, \dot{\rho}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & P(\rho) & 0 \\ \star & -\gamma_{\mathcal{L}_2}^2 I + \check{D}(\rho)^T \check{D}(\rho) & \check{D}(\rho)^T \check{C}(\rho) & 0 \\ \star & 0 & -P(\rho) + P(\dot{\rho}) - P_0 + \check{C}(\rho)^T \check{C}(\rho) & 0 \\ \star & \star & \star & -P(\rho) \end{bmatrix}.$$

D'après le lemme de projection (présenté dans l'Annexe B), (3.155) admet une solution pour une matrice W si et seulement si

$$N_{\mathcal{Z}(\rho)}^T \mathcal{A}(\rho, \dot{\rho}) N_{\mathcal{Z}(\rho)} \prec 0, \quad N_{\mathcal{Y}}^T \mathcal{A}(\rho, \dot{\rho}) N_{\mathcal{Y}} \prec 0, \quad (3.156)$$

où $N_{\mathcal{Z}(\rho)}$ et $N_{\mathcal{Y}}$ sont donnés par :

$$N_{\mathcal{Z}(\rho)} = \begin{bmatrix} \check{A}(\rho) & \check{B}(\rho) & I \\ 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad N_{\mathcal{Y}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

L'inégalité de gauche de (3.156) mène à :

$$\begin{bmatrix} H_e\{P(\rho)\check{A}(\rho)\} + P(\dot{\rho}) - P_0 + \check{C}(\rho)^T \check{C}(\rho) & \star \\ \check{B}(\rho)^T P(\rho) + \check{D}(\rho) \check{C}(\rho)^T & \check{D}(\rho)^T \check{D}(\rho) - \gamma_{\mathcal{L}_2}^2 I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (3.157)$$

En appliquant le complément de Schur à (3.157), on établit une équivalence entre cette dernière et l'inégalité (3.127) introduite dans le Théorème 3.2. Il s'ensuit que la représentation d'état (3.87)-(3.88) est quadratiquement affinement stable $\forall \rho \in \Gamma_\alpha$ et $\forall \dot{\rho} \in \Gamma_\beta$ avec un niveau de performance gain \mathcal{L}_2 inférieur ou égal à $\gamma_{\mathcal{L}_2}$. Comme souligné dans [72], le conservatisme de (3.151) peut être réduit en relaxant légèrement la contrainte de multiconvexité (3.149). Cela est réalisé grâce à l'introduction des matrices $\mathcal{F}(\alpha)$ et \mathcal{F}_i dans (3.148)-(3.149), ce qui conclut la preuve. ■

Notons qu'avec l'introduction des matrices auxiliaires, les inégalités qui en résultent sont généralement moins conservatrices puisque (3.151) correspond à $\mathcal{F}_0 = \dots = \mathcal{F}_s = 0$. Néanmoins, cette amélioration se fait au détriment d'une charge de calcul plus élevée, puisque le nombre de variables d'optimisation a pratiquement doublé. Un compromis possible est de prendre $\mathcal{F}_i = \mu_i I$ où μ_i est un scalaire non négatif.

D'après le Théorème 3.4, il est évident qu'une solution optimale peut être déterminée en résolvant le problème NL-SDP suivant, (3.141)-(3.149) étant linéaire en $\gamma_{\mathcal{L}_2}$:

$$\min \gamma_{\mathcal{L}_2} \quad \text{t.q.} \quad (3.141) - (3.149)$$

Un tel problème peut être résolu numériquement en utilisant des solveurs pour les problèmes de programmation non linéaire avec des variables vectorielles, matricielles et des contraintes d'inégalité matricielle, tels que les solveurs PENLAB [68] ou PENBMI [104].

Le théorème suivant donne la solution de synthèse du filtre (3.21)-(3.27) sous contrainte de performance gain \mathcal{L}_∞ .

Théorème 3.5. *Soient le modèle (3.87)-(3.88) et le filtre intervalle (3.21)-(3.27). Supposons que (3.141)-(3.142) et (3.146)-(3.147) soient respectées, introduisons les matrices \mathcal{G}_i , \mathcal{H}_i , avec $i \in \{1, \dots, s\}$, définies de telle sorte que $\forall \alpha \in \Gamma_\alpha$:*

$$\mathcal{G}(\alpha) = \alpha_1^2 \mathcal{G}_1 + \dots + \alpha_s^2 \mathcal{G}_s \succeq 0, \quad (3.158)$$

$$\mathcal{H}(\alpha) = \alpha_1^2 \mathcal{H}_1 + \dots + \alpha_s^2 \mathcal{H}_s \succeq 0. \quad (3.159)$$

S'il existe des scalaires réels $\kappa \geq 0$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 > 0$ et une M -matrice $W_2 \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$ tels que les contraintes linéaires et bilinéaires suivantes sont vérifiées :

- $\forall (\alpha, \beta) \in \Gamma_\alpha \times \Gamma_\beta$, considérons les inégalités (3.146) - (3.147) dans le Théorème 3.4 et

$$\begin{bmatrix} -H_e \{W\} & \check{B}(\alpha) & P(\alpha) + \check{A}(\alpha) & W \\ \star & -\gamma_2 I & 0 & 0 \\ \star & \star & (\gamma_4 - 1)P(\alpha) + P(\beta) - P_0 & 0 \\ \star & \star & \star & -P(\alpha) \end{bmatrix} + \mathcal{G}(\alpha) \prec 0, \quad (3.160)$$

$$\begin{bmatrix} -\gamma_3 P(\alpha) & \star & \star \\ 0 & -\gamma_1 I & \star \\ \check{C}(\alpha) & \check{D}(\alpha) & -I \end{bmatrix} + \mathcal{H}(\alpha) \prec 0, \quad (3.161)$$

- pour $i \in \{1, \dots, s\}$

$$\begin{bmatrix} 0 & \check{B}_i & P_i + \check{A}_i & 0 \\ \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{G}_i \succeq 0. \quad (3.162)$$

Alors le gain $\mathcal{L}_\infty \sup_{\rho \in \Gamma_\alpha, \|\omega\|_\infty=1} \|\tilde{e}_z\|_\infty$ est inférieur à $\gamma_{\mathcal{L}_\infty} = \sqrt{\frac{\gamma_3 \gamma_2}{\gamma_1} + \gamma_4}$. Les matrices d'état du filtre sont alors déterminées en inversant les relations (3.134)-(3.137).

Démonstration. La preuve est basée sur le Théorème 3.3 et est similaire à la preuve donnée pour le Théorème 3.4. ■

Notons que (3.160)-(3.161) dépendent de manière non linéaire de γ_3, γ_4, P_0 et $P_i, i \in \{1, \dots, s\}$. Pour contourner cette difficulté, une approche couramment utilisée est de pré-attribuer une valeur à γ_3, γ_4 , voir [110, 5, 65]. Ensuite, on peut formuler le problème de synthèse comme un problème NL-SDP mono-objectif comme suit

$$\min \epsilon \gamma_1 + (1 - \epsilon) \gamma_2 \quad \text{t.q (3.158) - (3.162)}$$

où le choix de $0 \leq \epsilon \leq 1$ est guidé par le principe d'optimisation de Pareto. Bien sûr, on peut fixer *a priori* γ_1 ou γ_2 , ce qui conduit immédiatement à une formulation NL-SDP.

Les Théorèmes 3.4 et 3.5, étant formulés comme des problèmes NL-SDP, ils peuvent être facilement combinés en un problème mixte pondéré $\mathcal{L}_2/\mathcal{L}_\infty$. Les poids sont alors choisis selon la pénalité que l'on souhaite apporté au niveau de performance \mathcal{L}_2 ou \mathcal{L}_∞ .

3.3.4 Algorithme de conception du filtre intervalle

Nous nous proposons maintenant de résumer les principales étapes de la procédure de conception du filtre (3.21)-(3.27).

Considérons les Hypothèses 3.1-3.3. La procédure de synthèse se résume ainsi :

- i) On commence par choisir *a priori* la matrice $D_F(\rho)$ de manière à ce que la contrainte (3.30) soit satisfaite. On peut alors en déduire les matrices $D_{F_a}(\rho), D_{F_b}(\rho) \geq 0, \forall \rho \in \Gamma_\alpha$ telles que la décomposition (3.61) soit satisfaite.
- ii) Les matrices $X_a(\rho)$ et $X_b(\rho)$ vérifiant $X(\rho) = X_a(\rho) - X_b(\rho)$ pour $X \in \{Y, S, F\}$, sont alors calculées en utilisant le Lemme 1.17 initialement proposé dans [65] et rappelé dans le Chapitre 1 de ce mémoire.
- iii) Les variables matricielles d'optimisation sont alors :
 - Les matrices de Lyapunov $P_j, \forall j \in \{0, \dots, s\}$, voir (3.141).
 - Les matrices de filtre $\tilde{A}_{F_i}, \tilde{B}_{F_{k_i}}, \tilde{B}_{F_{1k_i}}, \tilde{B}_{F_{2k_i}}, \tilde{C}_{F_{1k_i}}, \tilde{C}_{F_{2k_i}}, k \in \{a, b\}, \forall i \in \{1, \dots, s\}$.
 - Les matrices auxiliaires W_1, W_2 (définie comme une M-Matrice), $\mathcal{F}_i, \mathcal{G}_i, \mathcal{H}_i, i \in \{1, \dots, s\}$ voir (3.143) (3.158), (3.159).
- iv) Selon le type de problème d'optimisation, les valeurs des scalaires $\kappa, \gamma_{\mathcal{L}_2}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ peuvent être préalablement définies ou bien elles peuvent être incluses dans le critère d'optimisation.
- v) Le problème NL-SDP associé est alors résolu par un solveur approprié (tel que PENLAB ou PENBMI) et on en déduit les matrices de filtre $A_F(\rho), B_{F_k}(\rho), B_{F_{1k}}(\rho), B_{F_{2k}}(\rho), C_{F_{1k}}(\rho), C_{F_{2k}}(\rho) k \in \{a, b\}$ en inversant les Eqs. (3.134)-(3.137).
- vi) Les bornes $\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$ sont ensuite déduites de (3.63)-(3.66).

Notons que le problème NL-SDP est réalisable uniquement si la dépendance de ρ dans les matrices $\Pi_{m,n} \forall(m, n)$ données par les Eqs. (3.93)-(3.125) est quadratique au maximum, en vertu du principe de multi-convexité [72]. Ainsi, selon la nature du système et de la combinaison d'états $T(\rho)$, et de l'impact qu'ils ont sur la dépendance des paramètres dans $\Pi_{m,n} \forall(m, n)$, la procédure de synthèse décrite ci-dessus doit être adaptée. Une solution peut consister à choisir $\tilde{B}_{F_k}, \tilde{B}_{F_{qk}}, k \in \{a, b\}, q \in \{1, 2\}$ en tant que matrices

constantes. Cela peut évidemment conduire à une solution conservatrice pour le filtre LPV intervalle. Pour pallier ce problème, il est toujours possible d'itérer sur $\tilde{B}_{F_k}, \tilde{B}_{F_{q_k}}$ et leurs bornes $\overline{\tilde{B}_{F_k}}, \underline{\tilde{B}_{F_k}}, \overline{\tilde{B}_{F_{q_k}}}, \underline{\tilde{B}_{F_{q_k}}}$, $k \in \{a, b\}$, $q \in \{1, 2\}$ jusqu'à ce que la solution la moins conservatrice soit trouvée. La Section 3.4 donne un exemple illustratif pour une meilleure compréhension de cette approche.

3.4 Exemple académique

Dans cette section, on se propose d'illustrer la méthode de synthèse décrite précédemment, à l'aide de deux exemples académiques. Nos motivations sont les suivantes :

- Premièrement, nous souhaitons démontrer que l'approche proposée est générique et peut donc être utilisée pour estimer l'état d'un système LPV. En d'autres termes, le filtre LPV intervalle (3.21)-(3.27) peut être utilisé comme estimateur d'état. Cela découle simplement du fait que $T = I_n$ est un choix valide. Cependant, cela a des conséquences comme expliqué dans la Remarque 3.3.
- Deuxièmement, nous souhaitons démontrer qu'un choix dépendant des paramètres pour $C(\rho)$ et/ou $T(\rho)$ n'est pas restrictif, à condition qu'un choix approprié pour $\tilde{B}_{F_k}, \tilde{B}_{F_{q_k}}$, $k \in \{a, b\}$, $q \in \{1, 2\}$ soit fait, voir la discussion dans la Section 3.3.4.

De plus, pour une illustration complète des éléments clés de l'approche proposée, l'ordre du filtre sera choisi plus élevé que l'ordre du système dans les deux cas. Cela met en évidence une différence majeure avec les approches basées sur les observateurs.

3.4.1 Premier exemple académique

3.4.1.1 Présentation du système

Considérons le modèle suivant (3.16)-(3.17) considéré est décrit par

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -0.5 + \rho_1(t) & \rho_1(t) \\ 0.1 & \rho_2(t) - 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.5 + \rho_1(t) & 1 & -0.2 + \rho_1(t) \\ 2 + \rho_1 & 0.1 & \rho_2 \end{bmatrix} w(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ -0.2 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 + \rho_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} w(t), \end{aligned} \quad (3.163)$$

où $w(t) = [w_1(t) \ w_2(t) \ w_3(t)]^T$. $w_1(t) = \sin(t)$ et $w_2(t), w_3(t) : |w_2(t)| \leq 0.1, |w_3(t)| \leq 0.15$ sont deux bruits uniformes bornés de valeur moyenne nulle. Il est alors immédiat de constater que $w(t) \in [\underline{w}(t), \overline{w}(t)] \ \forall t$, avec $\overline{w}(t) = [1.05\sin(t) \ 0.105 \ 0.1575]^T$ et $\underline{w} = [-1.05\sin(t) \ -0.105 \ -0.1575]^T$. Les conditions initiales du système sont fixées à $x(0) = (0 \ 0)^T$. Le vecteur de paramètres ρ et sa vitesse de variation $\dot{\rho}$ sont supposés être bornés tels que :

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} -0.13, 0.13 \\ -0.17, 0.17 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \dot{\rho}_2 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} -130, 130 \\ -170, 170 \end{bmatrix}. \quad (3.164)$$

De plus, on suppose que ρ_1 et ρ_2 sont indépendants, donc $\Gamma_\alpha = \text{co}\{\rho_1, \rho_2\}$ et $\Gamma_\beta = \text{co}\{\dot{\rho}_1, \dot{\rho}_2\}$ sont des rectangles.

3.4.1.2 Synthèse du filtre

Considérons le problème d'état, c'est-à-dire

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t), \quad (3.165)$$

avec un filtre d'ordre $n_f = 3$.

Comme expliqué dans la Section 3.3.4, la première étape de la méthode consiste à choisir $D_F(\rho)$ de manière à ce que (3.30) soit satisfaite. Conformément à la Remarque 3.3, $D_F(\rho)$ doit être choisie comme constante. Dans ce contexte, la décision suivante est prise :

$$D_F = \begin{bmatrix} -0.9901 & 0.0495 \\ -0.0990 & -0.4950 \end{bmatrix}.$$

Sa décomposition matricielle est donc définie par (voir (3.61)) :

$$D_{F_a} = \begin{bmatrix} 0 & 0.0495 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{F_b} = \begin{bmatrix} 0.9901 & 0 \\ 0.0990 & 0.4950 \end{bmatrix}.$$

La conception des matrices $X(\rho) = X_a(\rho) - X_b(\rho)$ pour $X \in \{Y, S, F\}$ suit l'approche décrite dans le Lemme 1.17, avec $h_q = \frac{\rho_a}{\lambda_q} - \rho_q$, et $q \in \{1, 2\}$. Le problème d'optimisation retenu dans cet exemple est le critère de performance mixte $\mathcal{L}_2/\mathcal{L}_\infty$. Le problème NL-SDP à résoudre est donc donné par

$$\min \psi_0 \gamma_{\mathcal{L}_2} + \psi_1 \gamma_1 + \psi_2 \gamma_2 \quad \text{t.q (3.141) - (3.149), (3.158) - (3.162), } \gamma_3 = 1, \gamma_4 = 0.4, \quad (3.166)$$

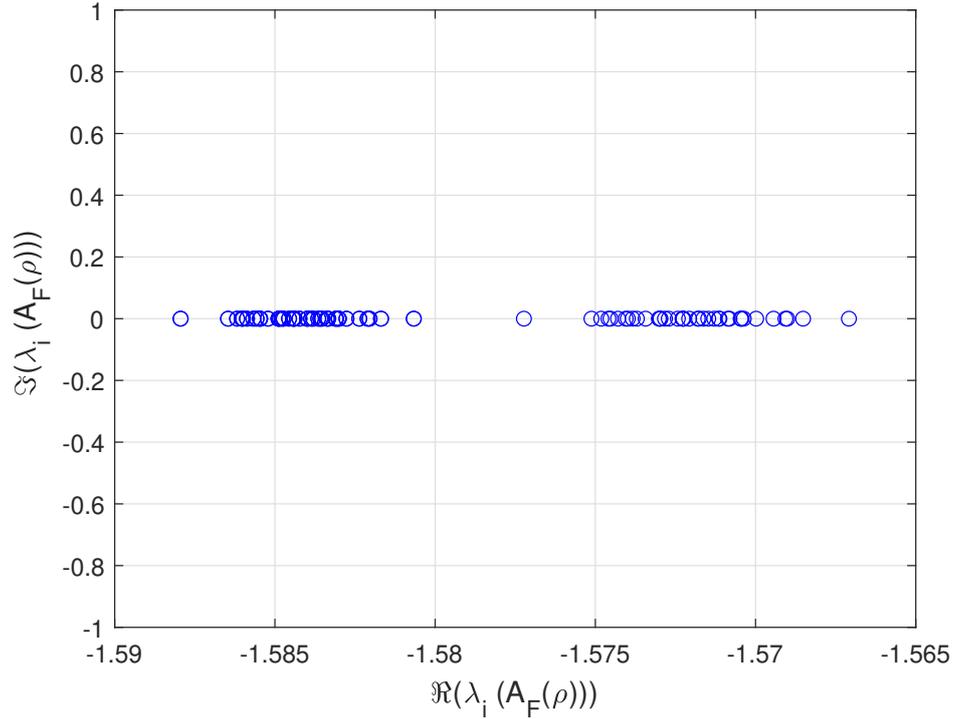
avec les pondérations $\psi_r = \frac{1}{3}$, $r \in \{0, 1, 2\}$. Le solveur SDP non linéaire PENLAB [68], avec la boîte à outils YALMIP pour Matlab, est ensuite utilisé pour résoudre ce problème. Le résultat obtenu conduit à des niveaux de performances de $\gamma_{\mathcal{L}_2} \approx 2.94$, $\gamma_{\mathcal{L}_\infty} \approx 4.78$ avec les matrices optimales associées $P_0, P_i, \tilde{A}_{F_i}, \tilde{B}_{F_{k_i}}, \tilde{B}_{F_{1k_i}}, \tilde{B}_{F_{2k_i}}, \tilde{C}_{F_{1k_i}}, \tilde{C}_{F_{2k_i}}, \mathcal{F}_i, \mathcal{G}_i, \mathcal{H}_i$, $k \in \{a, b\}$, $i \in \{1, \dots, s\}$, W_1 et W_2 .

En inversant les équations (3.134)-(3.137), on obtient finalement les matrices d'espace d'état $A_F(\rho), B_{F_k}(\rho), B_{F_{qk}}(\rho), C_{F_q}(\rho)$, $k \in \{a, b\}$, $q \in \{1, 2\}$. Les fonctions $\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$ sont ensuite déduites du Lemme 3.2, ce qui conduit à la définition complète du filtre LPV intervalle.

3.4.1.3 Simulations et résultats

Afin d'analyser la solution obtenue, les valeurs propres de $A_F(\rho)$ sont tracées pour quelques valeurs gelées aléatoirement $\rho_i \in [\underline{\rho}_i, \bar{\rho}_i]$, $i = \{1, 2\}$, voir Fig.3.1. Même si l'aspect variant dans le temps de $\rho_i(t)$, $i = \{1, 2\}$ n'est pas pris en compte, ce graphique tend à démontrer que le filtre est (évidemment) stable $\forall \rho$, les valeurs propres présentant une partie réelle négative. De plus, on pourra constater qu'elles sont réelles pures. Le filtre présente donc un très bon degré d'amortissement.

Des simulations sont ensuite réalisées pour évaluer les performances du filtre. Le comportement temporel des paramètres est choisi comme suit : $\rho_1 = 0.13 \sin(10^3 t + \frac{\pi}{3})$ et $\rho_2 = 0.17 \sin(10^3 t + \frac{\pi}{2})$. Les conditions initiales du filtre sont choisies comme suit :


 FIGURE 3.1 – Valeurs propres de $A_F(\rho)$ pour différentes trajectoires de ρ - Exemple 1

$x_f(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$, $\bar{x}_f(0) = [0.01 \ 0.01 \ 0.01]^T$, $\underline{x}_f(0) = -[0.015 \ 0.015 \ 0.015]^T$,
 $\bar{s}_f(0) = \bar{x}_f(0) - x_f(0)$ et $\underline{s}_f(0) = x_f(0) - \underline{x}_f(0)$. Les résultats de simulation sont pré-
 sentés dans les Figures 3.2 et 3.3. Comme prévu, $\bar{z}(t)$ et $\underline{z}(t)$ servent de bornes inférieure
 et supérieure pour $z(t)$, $\forall t \geq 0$, et l'enveloppe \tilde{e}_z converge en régime permanent vers une
 valeur maximale $c \approx [0.71 \ 0.38]^T$, avec un comportement transitoire raisonnable de 2
 secondes.

Pour démontrer les avantages de l'approche proposée, une comparaison avec les approches
 basées sur des observateurs par intervalles rapportées dans [38] et [65] est présentée dans
 les Figures 3.2 et 3.3. On remarque que la largeur de l'intervalle est nettement plus petite
 dans le cas de notre approche, et ce, grâce aux degrés de liberté fournis par la paramé-
 trisation matricielle des fonctions supérieures et inférieures ζ_q , η_q , $q \in \{1, 2\}$ (voir Eqs.
 (3.35)-(3.36)) et à la structure du filtre intervalle (3.21)-(3.27) qui est d'ordre supérieur à
 celui des observateurs.

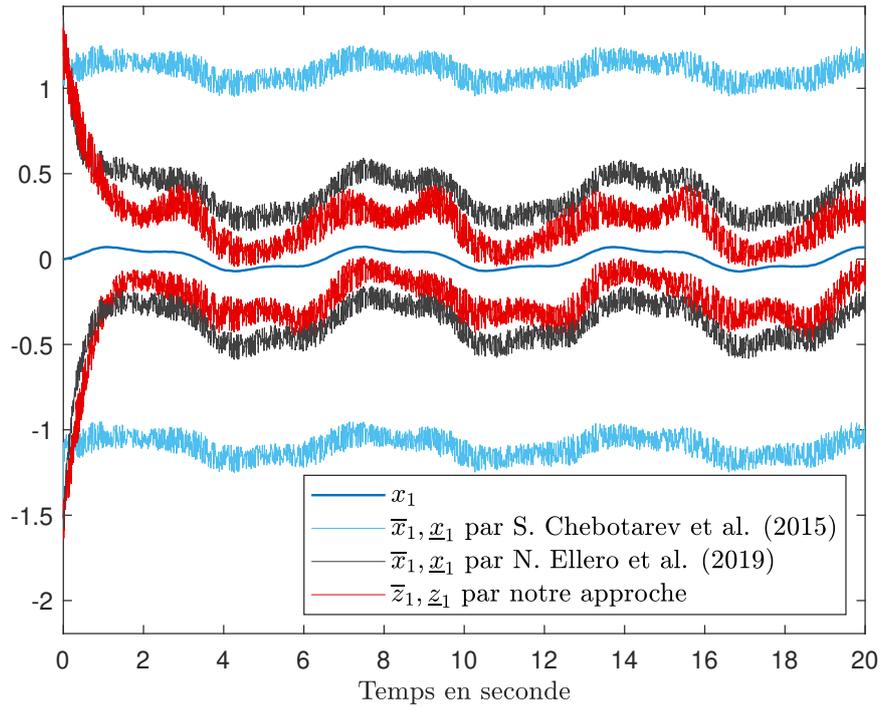


FIGURE 3.2 – Estimation par intervalle de l'état x_1 de l'exemple 1 - rouge (pour notre approche filtre) - bleu (observateur [38]) - noir (observateur [65])

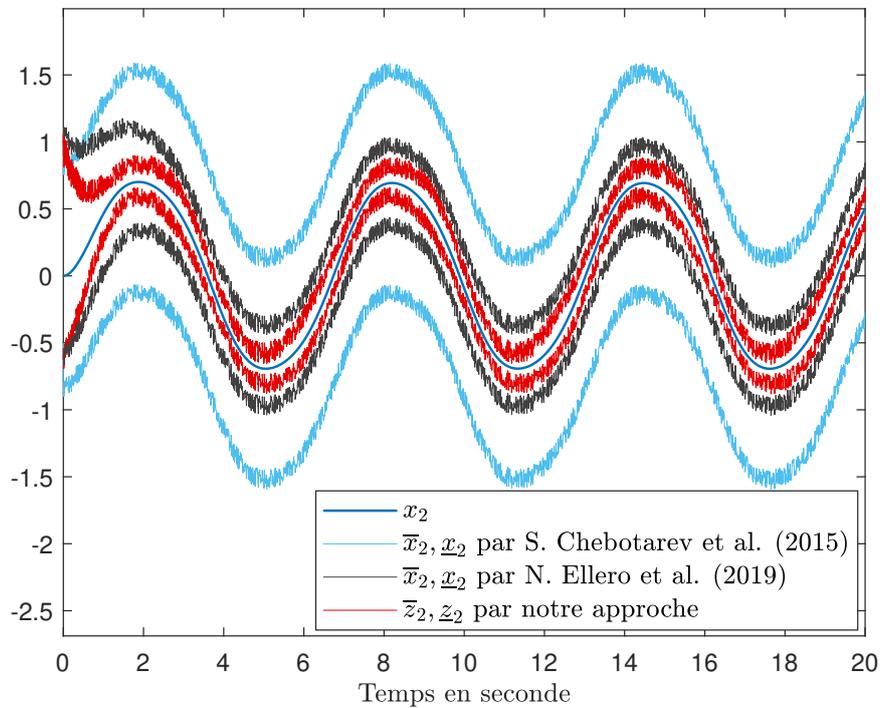


FIGURE 3.3 – Estimation par intervalle de l'état x_2 de l'exemple 1 - rouge (pour notre approche filtre) - bleu (observateur [38]) - noir (observateur [65])

3.4.2 Second exemple académique

3.4.2.1 Présentation du système

Considérons à présent le modèle LPV d'ordre 2 suivant

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -5 & \rho(t) \\ \rho(t) & \rho(t) - 0.3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 & \rho(t) & -\rho(t) - 0.2 \\ 1 + \rho(t) & 0.1 + \rho(t) & \rho(t) \end{bmatrix} w(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.1 & 1 + \rho(t) & 0 \\ 0 & 0.1 & 1 \end{bmatrix} w(t), \end{aligned} \quad (3.167)$$

où $w(t) = [w_1(t) \ w_2(t) \ w_3(t)]^T$ avec $w_1(t) = 1.5 \sin(\frac{3}{2}t)$ et $w_2(t), w_3(t) : |w_2(t)| \leq 0.15, |w_3(t)| \leq 0.15$ deux bruits bornés uniformes de valeur moyenne nulle. Il vient alors $w(t) \in [\underline{w}(t), \bar{w}(t)] \forall t$, avec $\bar{w}(t) = [1.7 \sin(\frac{3}{2}t) \ 0.15 \ 0.15]^t$ et $\underline{w} = [-1.7 \sin(\frac{3}{2}t) \ -0.15 \ -0.15]^t$. Le vecteur de paramètre ρ est choisi comme évoluant dans l'ensemble $\rho \in [-0.1, 0.1]$ et sa variation $\dot{\rho} \in [10, 10]$. Les conditions initiales du système sont fixées à $x(0) = (0 \ 0)^T$. Le filtre par intervalle (3.21)-(3.27) est ensuite conçu en suivant la méthode décrite dans les sections ci-dessus. Ici, il est choisi d'estimer la combinaison linéaire de l'état suivante :

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 + \rho(t) & \rho(t) + 0.11 \end{bmatrix} x(t). \quad (3.168)$$

3.4.2.2 Synthèse du filtre intervalle

Le filtre intervalle est synthétisé en résolvant le problème d'optimisation (3.166). Le choix suivant pour $D_F(\rho)$ est fait :

$$D_F(\rho) = -T(\rho)C^\dagger(\rho) = \begin{bmatrix} -1.625 & -0.1375 \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} -3.2142 & -1.25 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice peut être écrite comme :

$$\begin{aligned} D_F(\rho) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.625 & 0.1375 \end{bmatrix} + (\rho^+ - \rho^-) \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3.2142 & 1.25 \end{bmatrix} \right), \\ D_F(\rho) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.625 & 0.1375 \end{bmatrix} - \rho^+ \begin{bmatrix} 3.2142 & 1.25 \end{bmatrix} + \rho^- \begin{bmatrix} 3.2142 & 1.25 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Donc sa décomposition en deux matrices positives, telles que $D_F(\rho) = D_{F_a}(\rho) - D_{F_b}(\rho)$, est donnée par :

$$\begin{aligned} D_{F_a}(\rho) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} + \rho^+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} + \rho^- \begin{bmatrix} 3.2142 & 1.25 \end{bmatrix}, \\ D_{F_b}(\rho) &= \begin{bmatrix} 1.625 & 0.1375 \end{bmatrix} + \rho^+ \begin{bmatrix} 3.2142 & 1.25 \end{bmatrix} - \rho^- \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Comme pour l'exemple 1, la conception des matrices $X(\rho) = X_a(\rho) - X_b(\rho)$ pour $X \in \{Y, S, F\}$ suit l'approche décrite dans le Lemme 1.17, avec $h_q = \frac{\rho_q}{\lambda_q} - \underline{\rho}_q$, et $q \in \{1, 2\}$. Le critère retenu pour concevoir le filtre est ici le critère de performance de gain \mathcal{L}_∞ tel que

$$\min \psi_1 \gamma_1 + \psi_2 \gamma_2 \quad \text{t.q. (3.141) - (3.149), (3.158) - (3.162), } \gamma_3 = 0.8, \gamma_4 = 0.2, \quad (3.169)$$

avec les pénalités $\psi_1 = \psi_2 = \frac{1}{2}$. Une analyse approfondie de ce problème d'optimisation révèle qu'il n'est pas convexe car la propriété de multi-convexité n'est pas satisfaite. Suite à la discussion rapportée dans la Section 3.3.4, ce problème est surmonté en fixant $\tilde{B}_{F_k}, \tilde{B}_{F_{qk}}$, $k \in \{a, b\}$, $q \in \{1, 2\}$ en tant que matrices constantes. Cela est réalisé en gelant le

paramètre $\rho(t)$ à une valeur constante ρ_0 . Ensuite, à la fois ρ_0 et les bornes de matrice $\overline{B}_{F_k}, \underline{B}_{F_k}, \overline{B}_{F_{q_k}}$ $k \in \{a, b\}$, $q \in \{1, 2\}$ sont déterminées de manière itérative, jusqu'à ce que le critère d'optimisation de (3.169) converge vers une valeur minimale. La solution optimale obtenue est

$$\rho_0 = 0.1, \kappa = 2.5005, \gamma_1 = 2.3829, \gamma_2 = 0.0015,$$

conduisant à un niveau de performance \mathcal{L}_∞ de $\gamma_{\mathcal{L}_\infty} = 1.5457$.

3.4.2.3 Simulations et résultats

Des simulations temporelles sont ensuite effectuées. Les résultats obtenus sont illustrés sur la Figure 3.4. Les conditions initiales du filtre sont fixées à $x_f(0) = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$, $\overline{x}_f(0) = (0.005 \ 0.005 \ 0.005 \ 0.005)^T$, $\underline{x}_f(0) = -\overline{x}_f(0)$ et $\overline{s}_f(0) = \overline{x}_f(0) - x_f(0)$, $\underline{s}_f(0) = x_f(0) - \underline{x}_f(0)$. Comme prévu, $\overline{z}(t)$ et $\underline{z}(t)$ encadrent bien $z(t)$, $\forall t \geq 0$. De plus, l'enveloppe \tilde{e}_z converge en régime permanent vers une valeur maximale $c \approx 0.91$ avec un régime transitoire raisonnable de 2.5 secondes.

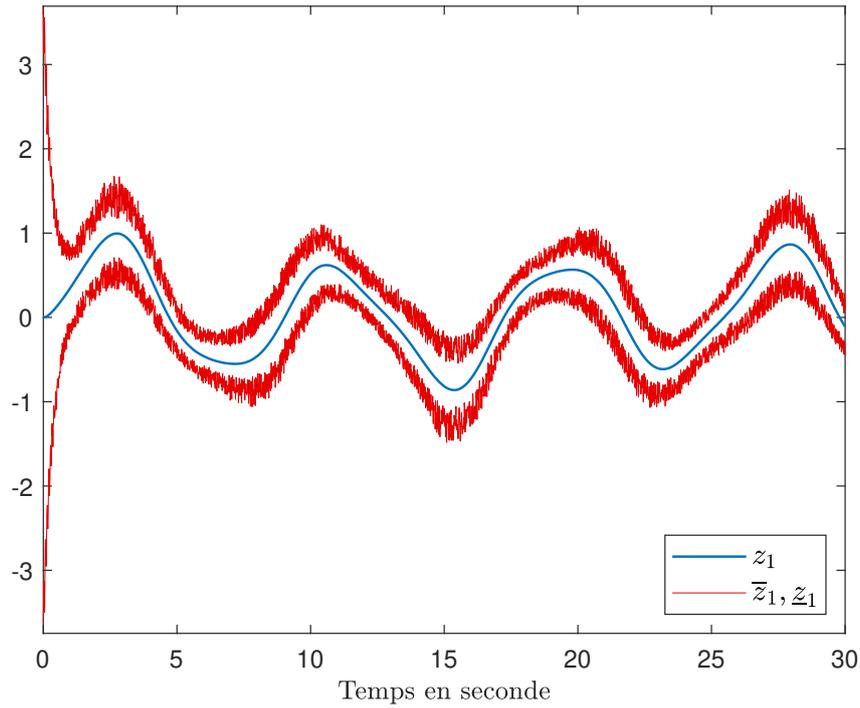


FIGURE 3.4 – Estimation par intervalle de l'état z_1 de l'exemple 2

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous présentons une nouvelle méthode de synthèse de filtres intervalles pour la classe des systèmes LPV affines en les paramètres variant dans le temps. L'approche proposée repose sur l'idée que les systèmes LPV admettent une représentation positive interne (IPR). La théorie est basée sur une fonction de Lyapunov dépendante des paramètres, sur la propriété de multiconvexité, et sur la théorie des matrices auxiliaires. La performance du filtre est formulée à l'aide de critères de type gains \mathcal{L}_2 et \mathcal{L}_∞ . On montre que le problème de synthèse des paramètres du filtre peut être formulé sous la forme d'un problème de programmation semi-définie non linéaire.

Les principaux avantages de l'approche proposée par rapport aux approches par observateurs intervalles, résident dans l'introduction de matrices auxiliaires et la possibilité de choisir un ordre du filtre supérieur à l'ordre du modèle modélisant la dynamique du système. Il s'en suit un nombre de degrés de liberté supérieur à celui des approches par observateurs, et la possibilité donc, d'augmenter les performances de l'estimation. La méthodologie proposée est appliquée au cas de deux exemples académiques. Le premier consiste à estimer l'état lui-même d'un système LPV. L'exemple vise à démontrer que l'approche proposée est générale et peut donc être utilisée pour estimer l'état d'un système LPV. Le deuxième exemple consiste à estimer une combinaison linéaire de l'état lorsque celle-ci dépend des paramètres dépendant du temps. Ce deuxième exemple vise à illustrer comment satisfaire la propriété de multiconvexité, via une procédure itérative judicieuse de certains degrés de liberté du filtre. Enfin, pour une illustration complète des éléments clés de l'approche proposée, l'ordre du filtre est choisi plus élevé que l'ordre du système dans les deux cas. Cela met en évidence une différence majeure avec les approches basées sur les observateurs. Les résultats obtenus soulignent la pertinence et l'efficacité de l'approche, ouvrant la voie à de nouvelles perspectives de recherche dans le domaine du filtrage par intervalle des systèmes LPV.

Conclusion générale et perspectives

Les travaux de recherche présentés dans ce manuscrit sont principalement dédiés au problème de conception des filtres intervalles pour les systèmes LTI et LPV. Les contributions ont progressivement été introduites au cours des chapitres de cette thèse.

Le **Chapitre 1** présente plusieurs notions mathématiques liées à l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques, en se concentrant particulièrement sur les systèmes LPV avec des incertitudes paramétriques de type polytopique. Il présente également un bref état de l'art sur les différentes techniques de filtrage ainsi qu'une explication des concepts fondamentaux associés à la théorie des observateurs par intervalle. L'objectif de cet état de l'art était de mettre en perspectives les méthodologies de conception des observateurs par intervalle pour proposer une contribution à la conception de filtre par intervalle en s'inspirant de ces derniers, l'intérêt principal étant d'utiliser les avantages structurels des filtres par rapport à ceux des observateurs par intervalle.

Le **Chapitre 2** présente la première contribution de nos travaux de thèse, en proposant une nouvelle approche d'estimation par intervalle pour la classe des systèmes LTI. Plus particulièrement, les développements établis visent à proposer une méthodologie de conception de filtres par intervalle sous contraintes simultanées d'existence et de performance. On montre que la synthèse des paramètres du filtre sous critère de performance $\mathcal{H}_1/\mathcal{H}_\infty$ se formule comme une programmation non-linéaire semi-définie (NL-SDP).

La méthodologie élaborée est appliquée au problème d'estimation d'attitude du satellite Microscope. L'approche est validée à l'aide d'un simulateur haute fidélité de la mission spatiale. Ces travaux ont été menés dans le cadre du COMET SCA du CNES.

Le **Chapitre 3** présente la deuxième contribution théorique de nos travaux de thèse. Ces derniers consistent à proposer une nouvelle méthodologie de conception des filtres intervalles pour les systèmes LPV. L'originalité de l'approche proposée est qu'elle permet de garantir simultanément les conditions d'existence du filtre ainsi qu'un niveau de performance au sens d'un critère de type gain \mathcal{L}_2 et/ou gain \mathcal{L}_∞ .

Dans l'objectif de l'extension des travaux proposés dans ce manuscrit, les perspectives de recherche pourraient s'orienter selon trois axes.

Une première piste concerne l'extension de la méthode à une plus large classe de systèmes incertains afin de pouvoir considérer, par exemple, les systèmes à retard et les systèmes à commutations.

Une deuxième piste concerne la méthode de conception des paramètres du filtre intervalle qui pourrait être étendue au cas des systèmes LTI incertains et LPV mis sous forme LFT ou sous la forme de polynômes homogènes.

Enfin, une autre direction pourrait consister à élaborer de nouvelles mesures pour évaluer les performances des filtres par intervalle, adaptées à chaque domaine d'application tel que le pronostic ou la détection de défauts.

Normes

A.1 Norme vectorielle

La norme p d'un vecteur $x = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ est définie par :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1 \quad (\text{A.1})$$

où $|\cdot|$ désigne ici l'opérateur de valeur absolue.

Dans la littérature, nous retrouvons couramment l'utilisation des normes associées suivantes :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad (\text{A.2})$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{x^T x} \quad (\text{Norme euclidienne}) \quad (\text{A.3})$$

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i| \quad (\text{A.4})$$

Dans ce manuscrit, nous notons la norme euclidienne par $\|x\|$.

A.2 Norme des signaux

A.2.1 Espace \mathcal{L}_q

L'espace \mathcal{L}_q définit l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\bullet \int_0^\infty |f(t)|^q dt < \infty \quad \text{si } 1 \leq q < \infty \quad (\text{A.5})$$

$$\bullet f \text{ est essentiellement bornée si } q = \infty \quad (\text{A.6})$$

A.2.2 Norme \mathcal{L}_q

La norme \mathcal{L}_q d'un signal $u(t) = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n]^T \in \mathcal{L}_q^n$ est définie par :

$$\|u\|_{\mathcal{L}_q} = \left(\int_0^\infty \|u(t)\|_q^q dt \right)^{1/q} = \left(\int_0^\infty \sum_{i=1}^n |u_i|^q dt \right)^{1/q} \quad (\text{A.7})$$

Cette formulation générale permet de déduire les trois principales normes que nous retrouvons dans la littérature :

$$\|u\|_{\mathcal{L}_1} = \int_0^\infty \sum_{i=1}^n |u_i(t)| dt \quad (\text{A.8})$$

$$\|u\|_{\mathcal{L}_2} = \left(\int_0^\infty u(t)^T u(t) dt \right)^{1/2} \quad (\text{A.9})$$

$$\|u\|_{\mathcal{L}_\infty} = \sup_{t \in [0, +\infty)} \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |u_i(t)| \quad (\text{A.10})$$

A.3 Norme matricielle induite

Soit une norme vectorielle $\|x\|_p$ d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$. On lui associe une norme matricielle $\|A\|_p$ d'une matrice $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dite subordonnée à (ou induite par) la norme vectorielle $\|\cdot\|_p$, définie par :

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} \quad (\text{A.11})$$

où *sup* désigne le *supremum* (plus petit majorant).

Pour $p = \{1, 2, \infty\}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|, \\ \|A\|_2 &= \sqrt{\lambda(A^T A)} = \bar{\sigma}(A), \\ \|A\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \end{aligned}$$

Complément sur les LMIs

B.1 Complément de Schur

Lemme B.1 (Complément de Schur). *Soit une matrice symétrique $M \in \mathbb{R}^{l \times l}$ partitionnée telle que :*

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

où $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D = D^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et $l = n + m$.

Si A est inversible, alors $M \prec 0$ si et seulement si :

$$\begin{cases} A \prec 0 \\ D - B^T A^{-1} B \prec 0 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Si D est inversible, alors $M \prec 0$ si et seulement si :

$$\begin{cases} D \prec 0 \\ A - B D^{-1} B^T \prec 0 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Démonstration. Par définition, la matrice $M \prec 0$ si pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^l - \{0\}$ on a $x^T M x < 0$. Par congruence, pour tout vecteur $y \in \mathbb{R}^l$ et une matrice non singulière $T \in \mathbb{R}^{l \times l}$ tels que $x = T y$ alors $x^T M x < 0 \Leftrightarrow y^T T^T M T y < 0 \Leftrightarrow T^T M T \prec 0$. En admettant que la matrice A est non singulière et en considérant la matrice T définie par

$$T = \begin{bmatrix} I_n & -A^{-1} B \\ 0_{m \times n} & I_m \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

alors :

$$T^T M T = \begin{bmatrix} A & 0_{n \times m} \\ 0_{m \times n} & D - B^T A^{-1} B \end{bmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

Par conséquent $T^T M T \prec 0$ si et seulement si $A \prec 0$, $D - B^T A^{-1} B \prec 0$.

Lorsque D est inversible alors la démonstration est similaire en considérant :

$$T = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times m} \\ -D^{-1} B^T & I_m \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

■

B.2 Lemme de projection

Lemme B.2 (Projection lemma [25]). *Considérons l'inégalité*

$$\Omega(z) + Q(z)^T W^T V(z) + V(z)^T W Q(z) \prec 0. \quad (\text{B.7})$$

où le vecteur z et la matrice W sont des variables (indépendantes), une matrice symétrique $\Omega(z) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et deux matrices $Q(z), V(z)$ de dimensions appropriées.

Alors l'inégalité (B.7) possède une solution pour une matrice W et $z = z_0$ si et seulement si les inégalités suivantes sont vérifiées avec $z = z_0$:

$$N_Q(z)^T \Omega(z) N_Q(z) \prec 0, \quad N_V(z)^T \Omega(z) N_V(z) \prec 0, \quad (\text{B.8})$$

où $N_Q(z), N_V(z)$ définissent respectivement des compléments orthogonaux aux matrices $Q(z), V(z)$ avec $\begin{bmatrix} N_Q(z) & Q(z)^T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} N_V(z) & V(z)^T \end{bmatrix}$ sont des matrices de plein rang.

Démonstration. Voir [25] ■

B.3 Régions LMI et \mathcal{D} -stabilité

B.3.1 Région LMI

Une région LMI [39, 40] est un sous espace \mathcal{D} du plan complexe défini par :

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{C}, f_{\mathcal{D}}(z) = S + zR + z^*R^T \prec 0 \right\}, \quad (\text{B.9})$$

où $S = S^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont des matrices réelles, $f_{\mathcal{D}}$ est la fonction caractéristique de \mathcal{D} et z^* est le conjugué transposé de z .

Pour exemple, considérons les régions LMI décrites par :

- Demi-plan gauche ouvert :

$$f_{\mathcal{D}}(z) = z + z^*. \quad (\text{B.10})$$

Démonstration :

$$\mathcal{R}_e(z) < 0 \Leftrightarrow z + z^* < 0,$$

alors $S = 0$ et $R = 1$.

- α -stabilité :

$$f_{\mathcal{D}}(z) = z + z^* + 2\alpha \quad (\text{B.11})$$

Démonstration :

$$\mathcal{R}_e(z) < -\alpha \Leftrightarrow 2\alpha + z + z^* < 0$$

alors $S = 2\alpha$ et $R = 1$.

- Bande verticale :

$$f_{\mathcal{D}}(z) = \begin{bmatrix} 2\alpha_1 - (z + z^*) & 0 \\ 0 & -2\alpha_2 + (z + z^*) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.12})$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \alpha_1 < \mathcal{R}_e(z) < \alpha_2 &\Leftrightarrow 2\alpha_1 - (z + z^*) < 0 \text{ et } -2\alpha_2 + (z + z^*) < 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2\alpha_1 - (z + z^*) & 0 \\ 0 & -2\alpha_2 + (z + z^*) \end{bmatrix} \prec 0, \end{aligned}$$

Ainsi $S = \begin{bmatrix} 2\alpha_1 & 0 \\ 0 & -2\alpha_2 \end{bmatrix}$ et $R = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- Un disque centré en $(-q, 0)$ dont le rayon est $r > 0$:

$$f_{\mathcal{D}}(z) = \begin{bmatrix} -r & q + z \\ q + z^* & -r \end{bmatrix}. \quad (\text{B.13})$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} |z - (-q)| < r &\Leftrightarrow (z + q)(z + q)^* < r^2 \Leftrightarrow (z + q)r^{-1}(z + q)^* - r < 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -r & z + q \\ z^* + q & -r \end{bmatrix} \prec 0, \end{aligned}$$

Cette dernière équivalence est obtenue par une légère adaptation de la démonstration du complément de Schur appliquée aux matrices hermitiennes. Ainsi, nous obtenons

$$S = \begin{bmatrix} -r & q \\ q & -r \end{bmatrix} \text{ et } R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Un secteur conique avec apex à l'origine et angle intérieur 2β :

$$f_{\mathcal{D}}(z) = \begin{bmatrix} \sin(\beta)(z + z^*) & \cos(\beta)(z - z^*) \\ \cos(\beta)(z^* - z) & \sin(\beta)(z + z^*) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.14})$$

Démonstration :

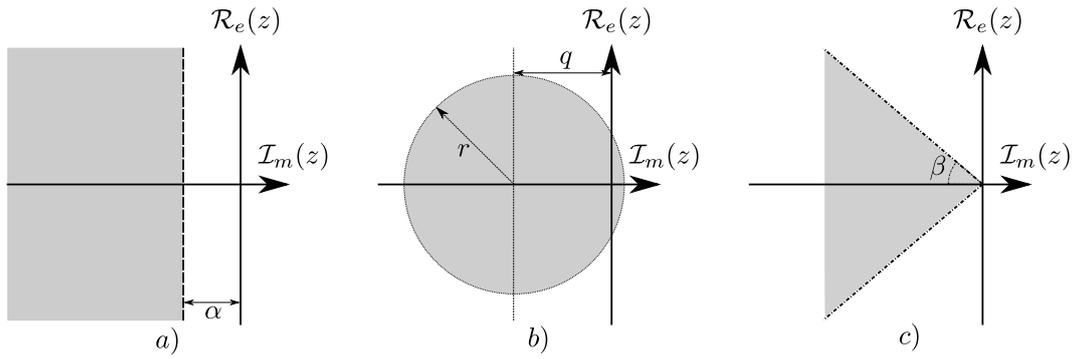
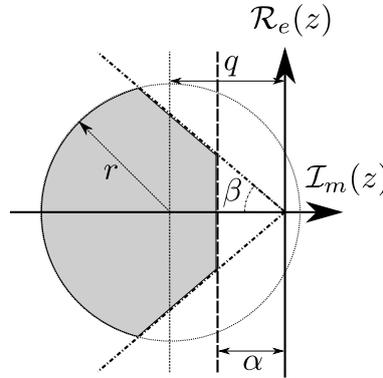
$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_m(z)| < -\mathcal{R}_e(z) \tan(\beta) &\Leftrightarrow \mathcal{I}_m(z)^2 < \mathcal{R}_e(z)^2 \tan(\beta)^2 \\ &\Leftrightarrow -(z - z^*)^2 - (z + z^*)^2 \tan(\beta)^2 < 0 \\ &\Leftrightarrow -\cos(\beta)^2 (z - z^*)^2 - \sin(\beta)^2 (z + z^*)^2 < 0 \end{aligned}$$

En admettant que $\mathcal{R}_e(z) < 0$ alors $-\sin(\theta)(z + z^*) > 0$ et :

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_m(z)| < -\mathcal{R}_e(z) \tan(\beta) &\Leftrightarrow (z + z^*) \sin(\beta) \\ &\quad - (z^* - z) \cos(\beta) ((z + z^*) \sin(\beta))^{-1} (z - z^*) \cos(\beta) < 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sin(\beta)(z + z^*) & \cos(\beta)(z - z^*) \\ \cos(\beta)(z^* - z) & \sin(\beta)(z + z^*) \end{bmatrix} \prec 0 \text{ (Schur)} \end{aligned}$$

alors $S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $R = \begin{bmatrix} \sin(\beta) & \cos(\beta) \\ -\cos(\beta) & \sin(\beta) \end{bmatrix}$.

Il est possible d'interconnecter plusieurs régions LMI élémentaires pour former une région LMI spécifique. Pour exemple, l'interconnexion des régions LMI α -stabilité, disque et secteur conique conduit à la région LMI décrite dans la figure B.2.


 FIGURE B.1 – Régions LMI : a) α -stabilité , b) Disque, c) Secteur conique

 FIGURE B.2 – Union des régions LMI α -stabilité, disque et secteur conique

B.3.2 \mathcal{D} -stabilité

Pour de nombreuses applications, il est parfois nécessaire de définir une région d'appartenance pour les pôles d'un système. Des exemples classiques concernent la synthèse de lois de commande où il peut s'avérer nécessaire de contraindre la dynamique en boucle fermée ou encore la synthèse d'un observateur afin d'imposer la vitesse de convergence de l'estimation vers la valeur réelle. Cette contrainte de synthèse peut être formulée en utilisant la notion de \mathcal{D} -stabilité [39, 40]. La notion de \mathcal{D} -stabilité pour une matrice A est présentée dans le lemme B.3.

Lemme B.3 (\mathcal{D} -stabilité, [39]). *Soit une région LMI décrite par :*

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}, f_{\mathcal{D}}(z) = S + zR + z^*R^T \prec 0\}, \quad S = S^T, \quad (\text{B.15})$$

où z^* désigne ici le conjugué transposé de z .

Alors une matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est dite \mathcal{D} -stable si et seulement si il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ où $P = P^T \succ 0$ telle que :

$$M_{\mathcal{D}}(A, P) := S \otimes P + R \otimes (PA) + R^T \otimes (A^T P) \prec 0. \quad (\text{B.16})$$

Lorsque $f_{\mathcal{D}}(z) = z + z^*$ alors la notion de \mathcal{D} -stabilité et la stabilité quadratique de Lyapunov sont équivalentes. En effet, les matrices de la fonction caractéristique $f_{\mathcal{D}}$ sont $S = 0$ et $R = 1$. Pour une matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ où $P = P^T \succ 0$ alors la contrainte (B.16) est réduite à :

$$A^T P + P A \prec 0. \tag{B.17}$$

Bibliographie

- [1] J. Abedor, K. Nagpal, and K. Poolla. A linear matrix inequality approach to peak-to-peak gain minimization. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 6(9-10) :899–927, Nov. 1996. [2](#), [21](#), [23](#), [71](#)
- [2] V. Aeinfar, J. Askari, A. Sadeghzadeh, and M. Mojiri. Parameter dependent filter design for linear continuous-time uncertain systems with arbitrarily time-varying parameters in polytopic domains. Signal Processing, 165 :83–89, Dec. 2019. [17](#), [18](#), [19](#), [87](#)
- [3] R. Akreimi, R. Lamouchi, and M. Amairi. Functional interval observers design for multivariable linear discrete-time systems. In 2022 19th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices (SSD). IEEE, May 2022. [62](#)
- [4] R. Akreimi, R. Lamouchi, and M. Amairi. L_∞/H_∞ functional interval observers design for multivariable systems. In 2022 30th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED). IEEE, June 2022. [28](#), [42](#), [43](#), [44](#), [45](#)
- [5] R. Akreimi, R. Lamouchi, M. Amairi, T. N. Dinh, and T. Raïssi. Functional interval observer design for multivariable linear parameter-varying systems. European Journal of Control, page 100794, Feb. 2023. [3](#), [46](#), [112](#)
- [6] D. Angeli and E. Sontag. Monotone control systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 48(10) :1684–1698, 2003. [24](#)
- [7] P. Apkarian, J.-M. Biannic, and P. Gahinet. Self-scheduled h-infinity control of missile via linear matrix inequalities. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 18(3) :532–538, May 1995. [12](#), [18](#)
- [8] P. Apkarian, P. Gahinet, and G. Becker. Self-scheduled h_∞ control of linear parameter-varying systems : a design example. Automatica, 31(9) :1251–1261, Sept. 1995. [12](#), [18](#)
- [9] P. Apkarian, P. Gahinet, and C. Buhr. Multi-model, multi-objective tuning of fixed-structure controllers. In 2014 European Control Conference (ECC), pages 856–861, June 2014. [34](#)
- [10] P. Apkarian and D. Noll. Nonsmooth H_∞ synthesis. IEEE Transactions on Automatic Control, 51(1) :71–86, Jan 2006. [34](#)
- [11] P. Apkarian and H. D. Tuan. Parameterized LMIs in control theory. SIAM Journal on Control and Optimization, 38(4) :1241–1264, 2000. [6](#)
- [12] I. Arasaratnam and S. Haykin. Cubature kalman filters. IEEE Transactions on Automatic Control, 54(6) :1254–1269, June 2009. [1](#)

- [13] J. Back and A. Astolfi. Design of positive linear observers for positive linear systems via coordinate transformations and positive realizations. SIAM Journal on Control and Optimization, 47(1) :345–373, Jan. 2008. [95](#)
- [14] R. Baheti. Efficient approximation of kalman filter for target tracking. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, AES-22(1) :8–14, Jan. 1986. [1](#)
- [15] G. I. Bara. Estimation d'état des systèmes linéaires à paramètres variants. PhD Thesis, Vandoeuvre-les-Nancy, INPL, 2001. [11](#)
- [16] G. I. Bara, J. Daafouz, and F. Kratz. Advanced gain scheduling techniques for the design of parameter-dependent observers. In Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.01CH37228), volume 4, pages 3892–3897 vol.4, 2001. [6](#)
- [17] B. R. Barmish. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system. Journal of Optimization Theory and Applications, 46(4) :399–408, Aug. 1985. [8](#)
- [18] R. H. Bartels and G. W. Stewart. Solution of the matrix equation $AX + XB = C$ [f4]. Commun. ACM, 15(9) :820–826, Sept. 1972. [33](#)
- [19] D. S. Bernstein and W. M. Haddad. Steady-state kalman filtering with an error bound. Systems & Control Letters, 12(1) :9–16, Jan. 1989. [2](#)
- [20] D. Bertsekas and I. Rhodes. Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty. IEEE Transactions on Automatic Control, 16(2) :117–128, Apr. 1971. [2](#)
- [21] G. Besançon. Nonlinear Observers and Applications. Springer Berlin Heidelberg, 2007. [1](#)
- [22] M. Bolajraf, M. A. Rami, and F. Tadeo. Robust interval observer with uncertainties in the output. In 18th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'10, 2010. [46](#)
- [23] R. Borges, V. Montagner, R. Oliveira, P. Peres, and P.-A. Bliman. Parameter-dependent H_2 and H_∞ filter design for linear systems with arbitrarily time-varying parameters in polytopic domains. Signal Processing, 88(7) :1801–1816, July 2008. [6](#), [19](#), [21](#)
- [24] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Society for Industrial and Applied Mathematics, Jan. 1994. [12](#), [16](#), [38](#), [71](#), [108](#)
- [25] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. Linear matrix inequalities in system and control theory. SIAM, 1994. [126](#)
- [26] C. Briat. Linear Parameter-Varying and Time-Delay Systems, volume 3. Springer, 2015. [8](#)
- [27] C. Briat and M. Khammash. Interval peak-to-peak observers for continuous- and discrete-time systems with persistent inputs and delays. Automatica, 74 :206–213, Dec. 2016. [3](#)
- [28] C. Briat and M. Khammash. Interval peak-to-peak observers for continuous- and discrete-time systems with persistent inputs and delays. Automatica, 74 :206 – 213, 2016. [5](#)

-
- [29] F. Bruzelius, S. Pettersson, and C. Breitholtz. Linear parameter-varying descriptions of nonlinear systems. In Proceedings of the 2004 American Control Conference. IEEE, 2004. 7
- [30] J. Burke, D. Henrion, A. Lewis, and M. Overton. Hifoo - a matlab package for fixed-order controller design and h_∞ optimization. IFAC Proceedings Volumes, 39(9) :339 – 344, 2006. 34
- [31] F. Cacace, L. Farina, A. Germani, and C. Manes. Internally positive representation of a class of continuous time systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 57(12) :3158–3163, Dec. 2012. 96, 99
- [32] F. Cacace, A. Germani, and C. Manes. A positive observer for linear systems. In 19th IFAC World Congress, pages 5357 – 5362, 2014. 28
- [33] F. Cacace, A. Germani, and C. Manes. A new approach to design interval observers for linear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 60(6) :1665–1670, 2015. 28, 29, 30, 31
- [34] F. Cacace, A. Germani, and C. Manes. A New Approach to Design Interval Observers for Linear Systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 60(6) :1665–1670, June 2015. 99
- [35] E. Chambon, P. Apkarian, and L. Burlion. Metzler matrix transform determination using a nonsmooth optimization technique with an application to interval observers*. In SIAM Conference on Control and its Applications, 2015. 33, 34
- [36] E. Chambon, L. Burlion, and P. Apkarian. Overview of linear time-invariant interval observer design : towards a non-smooth optimisation-based approach. IET Control Theory Applications, 10(11) :1258–1268, 2016. 33
- [37] X.-H. Chang. With other types of uncertainties. In Robust Output Feedback H-infinity Control and Filtering for Uncertain Linear Systems, pages 191–244. Springer Berlin Heidelberg, 2014. 1, 2
- [38] S. Chebotarev, D. Efimov, T. Raïssi, and A. Zolghadri. Interval observers for continuous-time LPV systems with L_1/L_2 performance. Automatica, 58 :82–89, 2015. xi, 3, 46, 62, 115, 116
- [39] M. Chilali and P. Gahinet. H_∞ design with pole placement constraints : an lmi approach. IEEE Transactions on Automatic Control, 41(3) :358–367, Mar 1996. 126, 128
- [40] M. Chilali, P. Gahinet, and P. Apkarian. Robust pole placement in LMI regions. IEEE Transactions on Automatic Control, 44(12) :2257–2270, Dec 1999. 126, 128
- [41] H.-C. Choi, S. Han, and J. H. Seo. Parameter-dependent lyapunov function approach to robust $L_2 - L_\infty$ filter design for uncertain time-delay systems. Signal Processing, 91(2) :323–329, Feb. 2011. 21
- [42] J. C. COCKBURN and B. G. MORTON. Linear fractional representations of uncertain systems. Automatica, 33(7) :1263–1271, July 1997. 6
- [43] P. Colaneri and J. C. Geromel. Parameter-dependent lyapunov functions for time varying polytopic systems. In Proceedings of the American Control Conference, volume 1, page 604, 2005. 6
- [44] C. Combastel. A state bounding observer based on zonotopes. In 2003 European Control Conference (ECC). IEEE, Sept. 2003. 2

- [45] C. Combastel. Stable interval observers in \mathbb{C} for linear systems with time-varying input bounds. Automatic Control, IEEE Transactions on, 58(2) :481–487, 2013. [28](#)
- [46] C. Combastel. Zonotopes and Kalman observers : Gain optimality under distinct uncertainty paradigms and robust convergence. Automatica, 55 :265–273, May 2015. [2](#)
- [47] C. Combastel. An Extended Zonotopic and Gaussian Kalman Filter (EZGKF) merging set-membership and stochastic paradigms : Toward non-linear filtering and fault detection. Annual Reviews in Control, 42 :232 – 243, 2016. [2](#)
- [48] C. Combastel. Functional sets with typed symbols : Mixed zonotopes and polytopes for hybrid nonlinear reachability and filtering. Automatica, 143 :110457, Sept. 2022. [2](#)
- [49] C. Combastel and S. Raka. A stable interval observer for LTI systems with no multiple poles. IFAC Proceedings Volumes, 44(1) :14335 – 14341, 2011. [28](#)
- [50] D. Coutinho, C. de Souza, and K. Barbosa. Robust H_∞ filter design for a class of discrete-time parameter varying systems. Automatica, 45(12) :2946–2954, Dec. 2009. [21](#)
- [51] M. Darouach and H. S. Ali. Optimal unbiased functional filtering in the frequency domain. Systems Science & Control Engineering, 2(1) :308–315, Apr. 2014. [67](#)
- [52] M. Darouach, M. Zasadzinski, and S. J. Xu. Full-order observers for linear systems with unknown inputs. IEEE Transactions on Automatic Control, 39(3) :606–609, Mar 1994. [56](#)
- [53] C. de Souza, K. Barbosa, and A. Neto. Robust H_∞ filtering for discrete-time linear systems with uncertain time-varying parameters. IEEE Transactions on Signal Processing, 54(6) :2110–2118, June 2006. [21](#)
- [54] C. de Souza, U. Shaked, and M. Fu. Robust H_∞ filtering for continuous time varying uncertain systems with deterministic input signals. IEEE Transactions on Signal Processing, 43(3) :709–719, Mar. 1995. [2](#)
- [55] C. E. de Souza and A. Trofino. 9. a linear matrix inequality approach to the design of robust H_2 filters. In Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control, pages 175–185. Society for Industrial and Applied Mathematics, Jan. 2000. [21](#)
- [56] O. Dhuicque. Détermination de la sensibilité thermique de l’expérience MICROSCOPE pour le test du principe d’équivalence. These de doctorat, Université Paris sciences et lettres, Dec. 2021. [xi](#), [80](#)
- [57] Y. Ebihara, D. Peaucelle, and D. Arzelier. S-Variable Approach to LMI-Based Robust Control. Springer London, 2015. [5](#)
- [58] D. Efimov, L. Fridman, T. Raissi, A. Zolghadri, and R. Seydou. Interval estimation for LPV systems applying high order sliding mode techniques. Automatica, 48(9) :2365–2371, 2012. [24](#), [46](#), [54](#)
- [59] D. Efimov, W. Perruquetti, and J.-P. Richard. Interval estimation for uncertain systems with time-varying delays. International Journal of Control, 86(10) :1777–1787, 2013. [5](#)
- [60] D. Efimov, T. Raissi, and A. Zolghadri. Control of nonlinear and LPV systems : Interval observer-based framework. IEEE Transactions on Automatic Control, 58(3) :773–778, 2013. [46](#)

- [61] D. Efimov and T. Raïssi. Design of interval observers for uncertain dynamical systems. Automation and Remote Control, 77, 2016. [3](#), [38](#)
- [62] C. El-Kasri, A. Hmamed, T. Alvarez, and F. Tadeo. Robust H_∞ filtering for uncertain 2-d continuous systems, based on a polynomially parameter-dependent lyapunov function. In The 2011 International Workshop on Multidimensional (nD) Systems. IEEE, Sept. 2011. [21](#)
- [63] N. Ellero. Synthèse d’observateurs intervalles à entrées inconnues pour les systèmes linéaires à paramètres variants. These de doctorat, Bordeaux, July 2018. [3](#), [12](#), [23](#), [27](#), [46](#)
- [64] N. Ellero, D. Gucik-Derigny, and D. Henry. Unknown input interval observer with H_∞ and D-stability performance. IFAC-PapersOnLine, 50(1) :6251–6258, July 2017. [3](#)
- [65] N. Ellero, D. Gucik-Derigny, and D. Henry. An unknown input interval observer for LPV systems under L_2 -gain and L_∞ -gain criteria. Automatica, 103 :294–301, May 2019. [xi](#), [3](#), [46](#), [53](#), [54](#), [56](#), [57](#), [58](#), [59](#), [61](#), [62](#), [95](#), [96](#), [97](#), [103](#), [112](#), [115](#), [116](#)
- [66] A. ELSAYED and M. GRIMBLE. A new approach to the H_∞ design of optimal digital linear filters. IMA Journal of Mathematical Control and Information, 6(2) :233–251, 1989. [1](#), [2](#)
- [67] H. Ethabet, T. Raïssi, M. Amairi, and M. Aoun. Interval observers design for continuous-time linear switched systems. IFAC-PapersOnLine, 50(1) :6259–6264, 2017. [5](#)
- [68] J. Fiala, M. Kočvara, and M. Stingl. Penlab : A matlab solver for nonlinear semi-definite optimization, 2013. [75](#), [111](#), [114](#)
- [69] L. Frezzatto, R. C. Oliveira, and P. L. Peres. L_2 -gain filter design for continuous-time LPV systems in finite frequency domain. IFAC-PapersOnLine, 51(26) :161–166, 2018. [21](#)
- [70] M. Fu. Interpolation approach to H_∞ estimation and its interconnection to loop transfer recovery. Systems & Control Letters, 17(1) :29–36, July 1991. [2](#)
- [71] P. Gahinet, P. Apkarian, and M. Chilali. Affine parameter-dependent lyapunov functions and real parametric uncertainty. IEEE Transactions on Automatic Control, 41(3) :436–442, Mar 1996. [6](#)
- [72] P. Gahinet, P. Apkarian, and M. Chilali. Affine parameter-dependent lyapunov functions and real parametric uncertainty. IEEE Transactions on Automatic Control, 41(3) :436–442, 1996. [8](#), [9](#), [10](#), [12](#), [107](#), [109](#), [110](#), [112](#)
- [73] H. Gao, J. Lam, and C. Wang. Induced L_2 and generalized H_2 filtering for systems with repeated scalar nonlinearities. IEEE Transactions on Signal Processing, 53(11) :4215–4226, 2005. [2](#)
- [74] H. Gao and X. Li. Robust Filtering for Uncertain Systems. Communications and Control Engineering. Springer International Publishing, Cham, 2014. [14](#), [15](#), [16](#)
- [75] X. Gao, H. Luo, B. Ning, F. Zhao, L. Bao, Y. Gong, Y. Xiao, and J. Jiang. RL-AKF : An adaptive kalman filter navigation algorithm based on reinforcement learning for ground vehicles. Remote Sensing, 12(11) :1704, May 2020. [1](#)
- [76] J. C. Geromel, J. Bernussou, G. GARCIA, and M. C. D. OLIVEIRA. H_2 and H_∞ robust filtering for discrete-time linear systems. SIAM Journal on Control and Optimization, 38(5) :1353–1368, Jan. 2000. [14](#)

- [77] J. C. Geromel and M. C. de Oliveira. H_2 and H_∞ robust filtering for convex bounded uncertain systems. IEEE Trans. Autom. Control., 46 :100–107, 2001. [2](#), [14](#)
- [78] G. Golub, S. Nash, and C. V. Loan. A hessenberg-schur method for the problem $AX + XB = C$. IEEE Transactions on Automatic Control, 24(6) :909–913, December 1979. [33](#)
- [79] J.-L. Gouzé, A. Rapaport, and M. Z. Hadj-Sadok. Interval observers for uncertain biological systems. Ecological modelling, 133(1) :45–56, 2000. [24](#), [26](#)
- [80] J. Gouzé, A. Rapaport, and M. Hadj-Sadok. Interval observers for uncertain biological systems. Ecological Modelling, 133, 2000. [3](#)
- [81] K. Grigoriadis and J. Watson. Reduced-order H_∞ and L_2 - L_∞ filtering via linear matrix inequalities. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 33(4) :1326–1338, Oct. 1997. [2](#), [14](#)
- [82] M. Grimble. Polynomial matrix solution of the H_∞ filtering problem and the relationship to riccati equation state-space results. IEEE Transactions on Signal Processing, 41(1) :67, Jan. 1993. [2](#)
- [83] M. Grimble. H_∞ inferential filtering, prediction and smoothing problems. Signal Processing, 60(3) :289–304, Aug. 1997. [2](#)
- [84] M. Grimble and A. El Sayed. Solution of the H_∞ optimal linear filtering problem for discrete-time systems. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 38(7), 1990. [2](#)
- [85] K. Han and J. Feng. A novel two-stage strategy for robust H_∞ filter design of uncertain discrete-time systems. Journal of the Franklin Institute, 353(13) :3040–3056, Sept. 2016. [21](#)
- [86] J. He, C. Sun, B. Zhang, and P. Wang. Variational bayesian-based maximum correntropy cubature kalman filter with both adaptivity and robustness. IEEE Sensors Journal, 21 :1982–1992, 2021. [1](#)
- [87] L. He, G. ren Duan, and A. guo Wu. Robust L_1 filtering with pole constraint in a disk via parameter-dependent lyapunov functions. In 2006 SICE-ICASE International Joint Conference. IEEE, 2006. [23](#)
- [88] S. He and F. Liu. Robust peak-to-peak filtering for markov jump systems. Signal Processing, 90(2) :513–522, Feb. 2010. [2](#), [23](#), [71](#)
- [89] S. Hecker, A. Varga, and J.-F. Magni. Enhanced LFR-toolbox for matlab. Aerospace Science and Technology, 9(2) :173–180, Mar. 2005. [6](#)
- [90] D. Henry. Fault Diagnosis of Microscope Satellite Thrusters Using H_∞/H_- Filters. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 31(3) :699–711, May 2008. [80](#), [81](#), [85](#)
- [91] D. Henry. A Norm-based Point of View for Fault Diagnosis : Application to Aerospace Missions — hal.science. <https://hal.science/hal-00566339>, 2010. [63](#)
- [92] D. Henry. Structured fault detection filters for LPV systems modeled in an LFR manner. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 26(3) :190–207, June 2011. [6](#)
- [93] M. W. Hirsch and H. L. Smith. Competitive and Cooperative Systems : A Mini-review, pages 183–190. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2003. [24](#)

-
- [94] O. Horn, D. Wolf, and R. Husson. Adaptive kalman filter applied to the target tracking. IFAC Proceedings Volumes, 22(6) :537–541, July 1989. 1
- [95] R. A. Horn, R. A. Horn, and C. R. Johnson. Topics in matrix analysis. Cambridge university press, 1994. 95
- [96] M. Hua, C. Bian, F. Deng, J. Fei, H. Chen, P. Cheng, F. Yao, and Y. Peng. Quantized peak-to-peak filtering for continuous-time nonhomogeneous markov jump systems with structured uncertainty. Journal of the Franklin Institute, 357(17) :13158–13188, Nov. 2020. 2
- [97] S. Ifqir, N. A. Oufroukh, D. Ichalal, and S. Mammar. Interval observer for LPV systems : Application to vehicle lateral dynamics. IFAC-PapersOnLine, 50(1) :7572–7577, July 2017. 46
- [98] L. Jaulin. Nonlinear bounded-error state estimation of continuous-time systems. Automatica, 38(6) :1079–1082, June 2002. 2
- [99] L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit, and E. Walter. Interval Analysis, page 11–43. Springer London, 2001. 2
- [100] S. Jin and J. Park. Robust H_∞ filtering for polytopic uncertain systems via convex optimisation. IEE Proceedings - Control Theory and Applications, 148(1) :55–59, Jan. 2001. 2
- [101] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. Journal of Basic Engineering, 82(1) :35–45, Mar. 1960. 1, 2
- [102] R. E. Kalman and R. S. Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. Journal of Basic Engineering, 83(1) :95–108, Mar. 1961. 1, 2
- [103] A. Khan, X. Bai, B. Zhang, and P. Yan. Interval state estimator design for linear parameter varying (LPV) systems. IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Express Briefs, 68(8) :2865–2869, Aug. 2021. 46
- [104] M. Kocvara and M. Stingl. Penbmi user’s guide, (2005). 111
- [105] S. Krebs, M. Pfeifer, S. Fugel, J. Weigold, and S. Hohmann. Interval observer for LPV systems based on time-variant transformations. In 2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC), pages 4090–4096, Dec 2016. 46
- [106] A. A. Kurzhanskiy and P. Varaiya. Ellipsoidal techniques for reachability analysis of discrete-time linear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 52(1) :26–38, 2007. 2
- [107] R. Lamouchi, M. Amairi, T. Raïssi, and M. Aoun. Interval observer design for linear parameter-varying systems subject to component faults. In 2016 24th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED). IEEE, June 2016. 46
- [108] D. Li, J. Chang, W. Chen, and T. Raïssi. IPR-based distributed interval observers design for uncertain LTI systems. ISA Transactions, 121 :147–155, Feb. 2022. 99
- [109] H. Li and M. Fu. A linear matrix inequality approach to robust H_∞ filtering. IEEE Transactions on Signal Processing, 45(9) :2338–2350, 1997. 2
- [110] J. Li, Z. Wang, W. Zhang, T. Raïssi, and Y. Shen. Interval observer design for continuous-time linear parameter-varying systems. Systems & Control Letters, 134 :104541, Dec. 2019. 3, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 62, 63, 112
- [111] S. Lim. Analysis and control of linear-parameter-varying systems. Stanford University, 1999. 5, 13, 108

- [112] F. Liorzou, P. Touboul, M. Rodrigues, G. Métris, Y. André, J. Bergé, D. Boulanger, S. Bremer, R. Chhun, B. Christophe, P. Danto, B. Foulon, D. Hagedorn, E. Hardy, P.-A. Huynh, C. Lämmerzahl, V. Lebat, M. List, F. Löffler, B. Rievers, A. Robert, and H. Selig. MICROSCOPE instrument description and validation. arXiv :2012.11232 [astro-ph, physics :gr-qc, physics :physics], Dec. 2020. arXiv : 2012.11232. [80](#)
- [113] L.-W. Liu and D.-K. Gu. Robust Hinfinity Interval Observer for Linear Systems With a Controllable Convergence Rate : A Parametric Method. IEEE Access, 7 :123922–123933, 2019. [42](#)
- [114] J. Löfberg. Yalmip : A toolbox for modeling and optimization in matlab. In In Proceedings of the CACSD Conference, Taipei, Taiwan, 2004. [75](#)
- [115] D. Luenberger. An introduction to observers. IEEE Transactions on Automatic Control, 16(6) :596–602, Dec. 1971. [1](#)
- [116] D. G. Luenberger. Observing the state of a linear system. IEEE Transactions on Military Electronics, 8(2) :74–80, 1964. [1](#)
- [117] D. G. Luenberger. Introduction to Dynamic Systems : Theory, Models, and Applications. Wiley, New York, 1st edition edition, May 1979. [1](#)
- [118] M. S. Mahmoud. Stability and H_∞ filtering of linear parameter-varying discrete-time systems with state-delay. In 1999 European Control Conference (ECC). IEEE, Aug. 1999. [21](#)
- [119] J. J. Martinez, N. Loukkas, and N. Meslem. H_∞ set-membership observer design for discrete-time LPV systems. International Journal of Control, 93(10) :2314–2325, Dec. 2018. [46](#)
- [120] F. Mazenc and O. Bernard. Asymptotically stable interval observers for planar systems with complex poles. IEEE Transactions on Automatic Control, 55(2) :523–527, Feb 2010. [28](#), [35](#), [36](#)
- [121] F. Mazenc and O. Bernard. Interval observers for linear time-invariant systems with disturbances. Automatica, 47(1) :140–147, 2011. [3](#), [27](#), [28](#), [35](#)
- [122] F. Mazenc, T. N. Dinh, and S. I. Niculescu. Interval observers for discrete-time systems. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 24(17) :2867–2890, 2014. [27](#)
- [123] X. Meng, H. Gao, and S. Mou. A new parameter-dependent approach to robust energy-to-peak filter design. Circuits, Systems & Signal Processing, 26(4) :451–471, Aug. 2007. [23](#)
- [124] N. Meslem, J. Martinez, N. Ramdani, and G. Besançon. An interval observer for uncertain continuous-time linear systems. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 30 :1886–1902, 2020. [3](#)
- [125] L. Meyer. Robust functional interval observer for multivariable linear systems. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 141(9), May 2019. [62](#)
- [126] L. Meyer, D. Ichalal, and V. Vigneron. An easy design for interval observers. International Journal of Control, 93(12) :2896–2907, Jan. 2019. [62](#)
- [127] M. Milanese and R. Tempo. Optimal algorithms theory for robust estimation and prediction. IEEE Transactions on Automatic Control, 30(8) :730–738, Aug. 1985. [2](#), [21](#)

-
- [128] I. Mohammadi, D. Gucik-Derigny, and D. Henry. Guaranteed state estimation using H_∞ interval approaches for space applications : a case study. In 2022 UKACC 13th International Conference on Control (CONTROL), pages 235–236, 2022.
- [129] I. Mohammadi, D. Gucik-Derigny, and D. Henry. Improvement of navigation unit in space applications using H_∞ interval observers : comparison of two approaches. In 2022 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC). IEEE, Oct. 2022.
- [130] I. Mohammadi, D. Gucik-Derigny, and D. Henry. An arbitrary order H_∞ interval filter for satellite navigation units. Proceedings of the 10th European Conference for Aerospace Sciences. Switzerland, 2023.
- [131] I. Mohammadi, D. Gucik-Derigny, and D. Henry. A state-space approach for interval LPV estimators under L_2/L_∞ -gain criterion. Journal of the Franklin Institute, page 107144, 2024.
- [132] I. Mohammadi, D. Gucik-Derigny, D. Henry, and S. Ygorra. A state-space based interval estimator for lti systems under H_1 and/or H_∞ constraints. In 2023 IEEE 11th International Conference on Systems and Control (ICSC), pages 608–613, 2023.
- [133] K. Nagpal and P. Khargonekar. Filtering and smoothing in an h/sup infinity / setting. IEEE Transactions on Automatic Control, 36(2) :152–166, 1991. 2
- [134] M. Nørsgaard, N. K. Poulsen, and O. Ravn. New developments in state estimation for nonlinear systems. Automatica, 36(11) :1627–1638, Nov. 2000. 1
- [135] A. Okatan, C. Hajiyev, and U. Hajiyeva. Fault detection in sensor information fusion kalman filter. AEU - International Journal of Electronics and Communications, 63(9) :762–768, Sept. 2009. 1
- [136] R. M. Palhares and P. L. Peres. Robust filtering with guaranteed energy-to-peak performance an lmi approach. Automatica, 36(6) :851–858, June 2000. 2
- [137] R. M. Palhares, P. L. Peres, and J. A. Ramírez. A linear matrix inequality approach to the peak-to-peak guaranteed cost filtering design. IFAC Proceedings Volumes, 33(14) :29–34, 2000. 3rd IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND 2000), Prague, Czech Republic, 21-23 June 2000. 2, 21, 22, 23
- [138] R. M. PALHARES and P. L. D. PERES. Optimal filtering schemes for linear discrete-time systems : a linear matrix inequality approach. International Journal of Systems Science, 29(6) :587–593, June 1998. 2
- [139] R. M. Palhares and P. L. D. Peres. Robust H_∞ filtering design with pole placement constraint via linear matrix inequalities. Journal of Optimization Theory and Applications, 102 :239–261, 1999. 2, 14
- [140] R. M. Palhares and P. L. D. Peres. Mixed filtering for uncertain linear systems : A linear matrix inequality approach. International Journal of Systems Science, 31(9) :1091–1098, Jan. 2000. 2
- [141] A. Pandey and M. C. de Oliveira. Discrete time H_∞ synthesis conditions for LPV filter design. IFAC-PapersOnLine, 51(26) :7–12, 2018. 21
- [142] P. Park and T. Kailath. H filtering via convex optimization. International Journal of Control, 66(1) :15–22, Jan. 1997. 2, 14
- [143] I. Petersen and D. McFarlane. Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 39(9) :1971–1977, 1994. 2

- [144] G. Poole and T. Boullion. A survey on M-matrices. SIAM review, 16(4) :419–427, 1974. [53](#)
- [145] P. Prieur, T. Lienart, M. Rodrigues, P. Touboul, T. Denver, J. L. Jørgensen, A. M. Bang, and G. Metris. MICROSCOPE Mission : on-orbit assessment of the Drag-Free and Attitude Control System. 2017. [80](#)
- [146] T. Raïssi and D. Efimov. Some recent results on the design and implementation of interval observers for uncertain systems. at-Automatisierungstechnik, 66(3) :213–224, 2018. [5](#)
- [147] T. Raïssi, D. Efimov, and A. Zolghadri. Interval state estimation for a class of nonlinear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 57(1) :260–265, Jan 2012. [28](#), [32](#), [33](#)
- [148] T. Raïssi, G. Videau, and A. Zolghadri. Interval observer design for consistency checks of nonlinear continuous-time systems. Automatica, 46(3) :518–527, 2010. [46](#)
- [149] M. Rami, C. Cheng, and C. de Prada. Tight robust interval observers : An LP approach. In Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on, pages 2967–2972, 2008. [46](#)
- [150] A. Rapaport and J. L. Gouzé. Practical observers for uncertain affine output injection systems. In 1999 European Control Conference (ECC), pages 1505–1510, Aug 1999. [26](#)
- [151] D. Rotondo, A. Cristofaro, T. A. Johansen, F. Nejjari, and V. Puig. State estimation and decoupling of unknown inputs in uncertain LPV systems using interval observers. International Journal of Control, 91(8) :1944–1961, June 2017. [46](#)
- [152] M. Sato. Filter design for LPV systems using quadratically parameter-dependent lyapunov functions. Automatica, 42(11) :2017–2023, Nov. 2006. [21](#)
- [153] M. Sato. Gain-scheduled H_∞ filters using inexactly measured scheduling parameters. In Proceedings of the 2010 American Control Conference. IEEE, June 2010. [21](#)
- [154] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. IEEE Transactions on Automatic Control, 42(7) :896–911, July 1997. [5](#), [22](#)
- [155] C. Scherer and S. Weiland. Linear matrix inequalities in control. Lecture Notes, Dutch Institute for Systems and Control, Delft, The Netherlands, 3, 2000. [13](#)
- [156] F. Schweppe. Recursive state estimation : Unknown but bounded errors and system inputs. IEEE Transactions on Automatic Control, 13(1) :22–28, Feb. 1968. [2](#)
- [157] F. C. Schweppe. Recursive state estimation : Unknown but bounded errors and system inputs. IEEE Transactions on Automatic Control, 13 :102–107, 1967. [2](#)
- [158] J. Shamma and M. Athans. Analysis of gain scheduled control for nonlinear plants. IEEE Transactions on Automatic Control, 35(8) :898–907, 1990. [5](#)
- [159] G. sheng Wang, F. Xia, B. Liang, F. Guo, and L. Feng. A parametric design method of finite time state observers in linear time-invariant systems. In Control and Decision Conference (2014 CCDC), The 26th Chinese, pages 795–799, 2014. [51](#)
- [160] D. Simon. Kalman filtering with state constraints : a survey of linear and nonlinear algorithms. IET Control Theory & Applications, 4(8) :1303–1318, Aug. 2010. [1](#)
- [161] R. E. Skelton, T. Iwasaki, and K. Grigoriadis. A unified algebraic approach to linear control design, 2013. [18](#)

-
- [162] M. Śmieszek and M. Dobrzańska. Application of kalman filter in navigation process of automated guided vehicles. Metrology and Measurement Systems, 22(3) :443–454, Sept. 2015. 1
- [163] H. Smith. Monotone dynamical systems. In Mathematical Surveys and Monographs, pages 1–13. American Mathematical Society, Mar. 2008. 2
- [164] H. L. Smith. Monotone dynamical systems : an introduction to the theory of competitive and cooperative systems. Number 41. American Mathematical Soc., 1995. 24, 25
- [165] H. L. Smith. Monotone dynamical systems : an introduction to the theory of competitive and cooperative systems. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, 33 :203–209, 1996. 24
- [166] J. Song and X.-H. Chang. Finite-time peak-to-peak filtering for nonlinear singular system. IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Express Briefs, 69(11) :4369–4373, Nov. 2022. 2
- [167] X. D. Sun and I. Postlethwaite. Affine LPV modelling and its use in gain-scheduled helicopter control. In Control '98. UKACC International Conference on (Conf. Publ. No. 455), pages 1504–1509 vol.2, Sep 1998. 6
- [168] R. Tempo. Robust estimation and filtering in the presence of bounded noise. IEEE Transactions on Automatic Control, 33(9) :864–867, 1988. 21
- [169] R. Thabet, T. Raissi, C. Combastel, and A. Zolghadri. Design of interval observers for LPV systems subject to exogenous disturbances. In Control Conference (ECC), 2013 European, pages 1126–1131, 2013. 46
- [170] P. Touboul, G. Métris, M. Rodrigues, J. Bergé, A. Robert, Q. Baghi, Y. André, J. Bedouet, D. Boulanger, S. Bremer, P. Carle, R. Chhun, B. Christophe, V. Cipolla, T. Damour, P. Danto, L. Demange, H. Dittus, O. Dhuicque, P. Fayet, B. Foulon, P.-Y. Guidotti, D. Hagedorn, E. Hardy, P.-A. Huynh, P. Kayser, S. Lala, C. Lämmerzahl, V. Lebat, F. Liorzou, M. List, F. Löffler, I. Panet, M. Pernot-Borràs, L. Perraud, S. Pires, B. Pouilloux, P. Prieur, A. Rebray, S. Reynaud, B. Rievers, H. Selig, L. Serron, T. Sumner, N. Tanguy, P. Torresi, and P. Visser. Result of the microscope weak equivalence principle test. Classical and Quantum Gravity, 39(20) :204009, Sept. 2022. 78
- [171] P. Touboul, G. Métris, M. Rodrigues, J. Bergé, A. Robert, Q. Baghi, Y. André, J. Bedouet, D. Boulanger, S. Bremer, P. Carle, R. Chhun, B. Christophe, V. Cipolla, T. Damour, P. Danto, L. Demange, H. Dittus, O. Dhuicque, P. Fayet, B. Foulon, P.-Y. Guidotti, D. Hagedorn, E. Hardy, P.-A. Huynh, P. Kayser, S. Lala, C. Lämmerzahl, V. Lebat, F. Liorzou, M. List, F. Löffler, I. Panet, M. Pernot-Borràs, L. Perraud, S. Pires, B. Pouilloux, P. Prieur, A. Rebray, S. Reynaud, B. Rievers, H. Selig, L. Serron, T. Sumner, N. Tanguy, P. Torresi, and P. Visser. Microscope mission : Final results of the test of the equivalence principle. Physical Review Letters, 129(12), Sept. 2022. 78
- [172] J. M. van den Hof. Positive linear observers for linear compartmental systems. SIAM Journal on Control and Optimization, 36(2) :590–608, Mar. 1998. 95
- [173] T. Vincent, J. Abedor, K. Nagpal, and P. Khargonekar. Discrete-time estimators with guaranteed peak-to-peak performance. IFAC Proceedings Volumes, 29(1) :4470–4475, June 1996. 13

- [174] P. Voulgaris. On optimal ℓ_∞ to ℓ_∞ filtering. Automatica, 31(3) :489–495, Mar. 1995. [2](#)
- [175] E. A. Wan and R. van der Merwe. The unscented kalman filter. In Kalman Filtering and Neural Networks, pages 221–280. John Wiley & Sons, Inc., 2001. [1](#)
- [176] G. Wang, B. Cui, and C. Tang. Robust cubature kalman filter based on maximum correntropy and resampling-free sigma-point update framework. Digital Signal Processing, 126 :103495, June 2022. [1](#)
- [177] Y. Wang, D. M. Bevly, and R. Rajamani. Interval observer design for LPV systems with parametric uncertainty. Automatica, 60 :79 – 85, 2015. [46](#), [62](#)
- [178] Y. Wang, V. Puig, and G. Cembrano. Set-membership approach and Kalman observer based on zonotopes for discrete-time descriptor systems. Automatica, 93 :435–443, July 2018. [2](#)
- [179] Z. Wang, C.-C. Lim, and Y. Shen. Interval observer design for uncertain discrete-time linear systems. Systems & Control Letters, 116, 2018. [3](#), [28](#), [38](#), [39](#), [40](#), [42](#), [51](#), [62](#), [63](#)
- [180] Z. Wang, M. Rodrigues, D. Theilliol, and Y. Shen. Actuator fault estimation observer design for discrete-time linear parameter-varying descriptor systems. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 29(2) :242–258, Jan. 2014. [38](#)
- [181] Z.-Q. Wang and M. Sznaier. L_∞ optimal control of SISO continuous-time systems. Automatica, 33(1) :85–90, Jan. 1997. [13](#)
- [182] J. T. Watson Jr and K. M. Grigoriadis. Optimal unbiased filtering via linear matrix inequalities. Systems & Control Letters, 35(2) :111–118, 1998. [2](#)
- [183] F. Wu. Control of linear parameter varying systems. University of California, Berkeley, 1995. [5](#), [12](#)
- [184] S. Xu and J. Lam. Robust Control and Filtering of Singular Systems. Springer-Verlag, 2006. [38](#)
- [185] Z. Xu, Z.-G. Wu, H. Su, P. Shi, and H. Que. Energy-to-peak filtering of semi-markov jump systems with mismatched modes. IEEE Transactions on Automatic Control, 65(10) :4356–4361, Oct. 2020. [2](#)
- [186] C. Zammali, J. V. Gorp, and T. Raïssi. Interval estimation for continuous-time LPV switched systems. International Journal of Control, 93(11) :2622–2633, Mar. 2020. [46](#)
- [187] C. Zammali, J. V. Gorp, Z. Wang, and T. Raïssi. Sensor fault detection for switched systems using interval observer with L_∞ performance. European Journal of Control, 57 :147–156, Jan. 2021. [42](#)
- [188] H. Zhang, A. S. Mehr, Y. Shi, and J. Sheng. New results on robust L_2 - L_∞ filtering for uncertain linear discrete-time systems. In Proceedings of the 2010 American Control Conference. IEEE, June 2010. [1](#)
- [189] G. Zheng, D. Efimov, and W. Perruquetti. Design of interval observer for a class of uncertain unobservable nonlinear systems. Automatica, 63 :167 – 174, 2016. [47](#)
- [190] S. Zhou, B. Zhang, and W. X. Zheng. A parameter-dependent lyapunov function based design approach for gain-scheduled H_∞ filters of LPV systems. In 2007 46th IEEE Conference on Decision and Control. IEEE, 2007. [21](#)

- [191] Y. Zhou and J. Li. Energy-to-peak filtering for singular systems : the discrete-time case. IET Control Theory & Applications, 2(9) :773–781, Sept. 2008. [2](#)
- [192] G. M. Ziegler. Lectures on 0/1-Polytopes, page 1–41. Birkhäuser Basel, 2000. [2](#)