



HAL
open science

Réduction et recalage de modèles d'un module de puissance : vers un jumeau numérique probabiliste pour la prédiction de durée de vie restante

Louis Schuler

► **To cite this version:**

Louis Schuler. Réduction et recalage de modèles d'un module de puissance : vers un jumeau numérique probabiliste pour la prédiction de durée de vie restante. Mécanique des solides [physics.class-ph]. Université Paris-Saclay, 2023. Français. NNT : 2023UPAST186 . tel-04692277

HAL Id: tel-04692277

<https://theses.hal.science/tel-04692277>

Submitted on 9 Sep 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Réduction et recalage de modèles d'un
module de puissance : vers un jumeau
numérique probabiliste pour la prédiction
de durée de vie restante

*Model Reduction and Model Updating of a Power Module :
Towards a Probabilistic Digital Twin for Remaining Life
Prediction*

Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay

École doctorale n° 579 : sciences mécaniques et énergétiques,
matériaux et géosciences (SMEMaG)

Spécialité de doctorat : Mécanique des solides

Graduate School : Sciences de l'ingénierie et des systèmes

Réfèrent : ENS Paris-Saclay

Thèse CIFRE préparée à Mitsubishi Electric R&D Centre Europe (MERCE), au
LMPS et au laboratoire SATIE, sous la co-direction de **Ludovic Chamoin**,
professeur des universités, et de **Zoubir Khatir**, directeur de recherche, le
co-encadrement de **Mounira Bouarroudj**, maîtresse de conférences, de
Merouane Ouhab, ingénieur de recherche, et de **Nicolas Degrenne**,
ingénieur de recherche.

Thèse soutenue à Gif-sur-Yvette, le 08 décembre 2023, par

Louis Schuler

Composition du jury

Membres du jury avec voix délibérative

Stéphane Clénet Professeur des Universités, Université de Lille, Ecole Na- tionale Supérieure d'Arts et Métiers	Président
Pedro Diez Professeur, Universitat Politècnica de Catalunya	Rapporteur
Eric Woïgard Professeur des Universités, Université de Bordeaux	Rapporteur
Lucas Boucinha Ingénieur de recherche, Ansys	Examineur
Mathilde Chevreuil Maîtresse de Conférences, Nantes Université	Examinatrice

Titre : Réduction et recalage de modèles d'un module de puissance : vers un jumeau numérique probabiliste pour la prédiction de durée de vie restante

Mots clés : Réduction de modèle, Prédiction de durée de vie, Inférence bayésienne, Propagation d'incertitudes, Module IGBT, Implémentation non-intrusive

Résumé : Les modules électroniques de puissance permettent d'adapter le courant électrique du réseau en fonction des besoins des moteurs électriques. Ce sont des composants essentiels à de nombreux systèmes. Au cours du fonctionnement du module, des pertes électriques génèrent un échauffement, créant des contraintes thermiques qui mènent à terme à la rupture du composant. Les modèles de durée de vie actuels basés sur la physique sont encore limités par leur temps de calcul, prohibitif pour leur emploi en temps réel dans le cadre de la prédiction de durée de vie restante. Les modèles actuels ne prennent pas non plus en compte les nombreuses sources d'incertitudes influant sur la durée de vie du module.

Afin de réduire les coûts de calcul des modèles numériques, et de pouvoir prendre en compte ces

incertitudes, ces travaux de thèse portent sur la création de modèles réduits multiphysiques et paramétriques d'un module de puissance IGBT. Les modèles sont basés sur la méthode Proper Generalized Decomposition. Un modèle électro-thermo-mécanique est implémenté de manière non-intrusive avec Ansys. Une fois le modèle réduit obtenu, celui-ci est exploité pour prédire la durée de vie restante d'un module au cours de son utilisation. Pour cela, l'utilisation de l'inférence bayésienne permet d'obtenir une densité de probabilité portant sur les paramètres du modèle à l'aide de mesures expérimentales. Cette densité est ensuite échantillonnée par *Transport Maps* puis propagée à travers le modèle numérique, afin d'obtenir une durée de vie probabiliste en temps réel au cours de l'utilisation du module.

Title : Model Reduction and Model Updating of a Power Module : Towards a Probabilistic Digital Twin for Remaining Life Prediction

Keywords : Reduced order modeling, Lifetime prediction, Bayesian inference, Uncertainty quantification, IGBT module, Non-invasive implementation

Abstract : Power electronic modules transform the electrical current from the grid to meet the requirements of electric motors. These components are essential to numerous electrical systems. During their operation, losses generate heat within the module, leading to thermal stress, and eventually resulting in component failure. Current physics-based lifetime models are still limited by their computational time, making them impractical for real-time use in predicting the remaining lifetime. Furthermore, existing models do not account for the numerous sources of uncertainty that influence the module lifetime.

This research work focuses on developing parameterized and multiphysics reduced models of

an IGBT power module. The developed reduced models are based on the Proper Generalized Decomposition method. They decrease the computational cost of numerical model and can be used for uncertainty quantification studies. In this context, a non-intrusive implementation of an electro-thermo-mechanical model is developed in Ansys. The reduced model is then employed in real time to predict the remaining lifetime of a module. First, the method uses Bayesian inference and experimental measures to obtain a probability density over the model parameters. Then, the density is sampled using *Transport Maps* sampling and propagated through the numerical model to obtain online a probabilistic estimation of the remaining lifetime.

Remerciements

Après plus de sept années passées au sein de l'ENS Paris-Saclay, voici venue l'heure d'écrire les dernières lignes clôturant ce chapitre. Celles-ci ne sont pas les plus simples à écrire, car elles tentent d'exprimer simplement ma gratitude aux personnes ayant contribué à la réussite de cette thèse.

Mes premiers remerciements s'adressent aux membres de mon jury, et plus particulièrement à Pedro Diez et Eric Woirgard pour avoir accepté de rapporter mes travaux. Merci également à Stéphane Clénet d'avoir présidé le jury, et aux autres membres, Mathilde Chevreuil, Lucas Boucinha. Merci à vous, membres du jury, pour l'intérêt que vous avez porté à mon travail et pour toutes vos remarques et questions pertinentes qui ont soulevé d'intéressantes perspectives.

Si j'ai pu réaliser cette thèse, c'est tout d'abord et principalement grâce à l'ensemble de mes encadrants. Merci pour la confiance que vous m'avez accordée en me retenant d'abord pour le stage de M2, puis pour la thèse. Cette thèse a été l'occasion pour moi de découvrir un domaine qui, en tant que mécanicien, m'était complètement inconnu auparavant : l'électronique de puissance. Merci à Merouane, Zoubir et Mounira de m'avoir partagé vos connaissances sur ce sujet. Merci également d'avoir apporté des solutions qui ont permis de faciliter la modélisation du comportement complexe du module, et d'avoir rappelé le sens physique de la thèse, qui a beaucoup été orientée sur la réduction de modèle.

Le chemin de la recherche n'est pas malheureusement pas sans embuches, et cette thèse n'en a pas fait exception. Merci Ludo d'avoir toujours été présent pour m'aider dans ces moments difficiles. Ton optimisme et ta confiance en notre capacité à trouver des solutions ont été précieux, tout comme ta gentillesse et ta patience envers moi. Je te suis vraiment reconnaissant de tout ce que tu as pu faire pour moi.

Je voudrais ensuite m'adresser à tous les membres du LMPS et du département de génie mécanique de l'ENS, qui contribuent à créer un cadre de travail agréable. Je pense tout d'abord aux doctorants que j'ai pu rencontrer durant ces trois ans. Nous avons pu nous entraider, mais aussi passer des moments plus agréables et plus festifs. En particulier, merci Matthieu pour ton amitié et pour tout ce que nous avons pu partager ensemble depuis l'ENS jusqu'à aujourd'hui. Merci Alexandre pour avoir enduré avec moi les peines de la PGD en non-linéaire. Merci aux plus anciens : Willy pour les bons moments passés avec Matthieu lors de l'école d'été, Ronan pour tes discussions scientifiques ou sportives, pour ton calme et ta sérénité, Ahmed et Perla pour votre bonne humeur et les goûters partagés. Merci aux camarades de promo : Flavien, notamment pour ton support informatique, Aurélia et Marie pour vos discussions au café-lab, et puis Héloïse pour le chemin parcouru ensemble depuis la prépa d'Ajaccio. Enfin, merci aux plus

jeunes : Quentin, Victor, Pierre-Eliot, Karim et Floriane. J'ai pu échanger avec chacun d'entre vous sur de nombreux sujets, et cela a toujours été agréable. Vous avez beaucoup contribué à rendre l'ambiance du labo plus conviviale lors de ma dernière année de thèse.

Je n'oublie pas non plus les permanents et les profs du département de génie mécanique de l'ENS, notamment François L. et Emmanuel H. pour les pauses au café-lab en votre compagnie et pour les nombreuses discussions souvent orientées vélo.

Je souhaite également remercier PAB, Ronan, Alexandre et toutes les autres personnes m'ayant apporté de précieux commentaires qui ont permis d'améliorer grandement la qualité de la présentation de ma soutenance.

Durant cette thèse, j'ai également eu la chance de pouvoir compter sur mes amis en dehors du labo. Tout d'abord merci à Romain et Maëva pour votre accueil lors du deuxième confinement. Être avec vous durant ces quelques semaines a permis de les rendre plus agréables, notamment grâce aux sorties à vélo, même dans un rayon d'un kilomètre. Et parce que le sport a énormément contribué à maintenir une bonne santé physique et mentale pendant ces périodes de confinement, merci Fred pour tes terribles séances de cardio-abdo-gainage. Merci également à Alexis et Anne-Laure, pour votre amitié, votre simplicité, et pour les nombreux moments passés ensemble, souvent autour d'une table. Merci aussi Anne-Laure d'être venue à ma soutenance. Je suis conscient de la chance que j'ai de pouvoir compter sur vous deux.

Et parce que mon parcours n'aurait pas pu s'effectuer sans eux, merci à tous les excellents professeurs dont j'ai eu la chance d'avoir tout au long de ma scolarité. Ils sont nombreux, mais je pense tout particulièrement à M. Coppin et M. Usciati. Votre rigueur scientifique et votre passion de l'enseignement ont été la source de la réussite de nombreux élèves.

Enfin, je souhaite remercier tous les membres de ma famille d'Alsace, de Corse ou de Nice, votre soutien a été précieux. En particulier, merci à mes sœurs et à mes parents d'être venus à Paris pour ma soutenance. Pour finir, je te remercie, Agathe, pour ta présence quotidienne qui m'apporte beaucoup de bonheur.

Table des matières

Introduction	1
1 État de l'art sur les modèles de durée de vie des modules de puissance	7
1.1 Composition d'un module électronique de puissance IGBT	8
1.2 Mécanismes de dégradation des modules de puissance	9
1.2.1 Dégradation de la métallisation	9
1.2.2 Fissuration des fils de connexion	10
1.2.3 Fissuration des brasures	12
1.3 Indicateurs de défaillance	12
1.4 Modèles de durée de vie	13
1.4.1 Modèles empiriques	14
1.4.2 Modèles basés sur la physique	15
1.4.3 Cumul d'endommagement	16
1.5 Estimation de la durée de vie restante	17
2 Modèle réduit thermo-mécanique d'un module IGBT par la méthode Proper Generalized Decomposition	21
2.1 Les méthodes de réduction de modèle	23
2.1.1 Les méthodes <i>a posteriori</i>	24
2.1.2 La Proper Generalized Decomposition, une méthode de réduction de modèle <i>a priori</i>	26
2.2 Illustration de la POD et la PGD sur un exemple simple	28
2.2.1 Illustration de la POD	28
2.2.2 Illustration de la PGD	31
2.3 Définition du problème thermo-mécanique	37
2.4 Modèle de zone cohésive	38
2.5 Formulation faible du problème thermo-mécanique	39
2.5.1 Problème thermique	39
2.5.2 Problème mécanique	41
2.6 Prise en compte des variations de géométrie et de conditions aux limites	42
2.6.1 Changement de variables	42
2.6.2 Réécriture du problème thermique	44
2.6.3 Réécriture du problème mécanique	45
2.7 Résolution du problème couplé par PGD	45
2.7.1 Méthode itérative globale pour la résolution du problème couplé	45
2.7.2 Solution PGD du problème thermique	47

2.7.3	Solution PGD du problème mécanique	48
2.7.4	Orthogonalisation des modes PGD	49
2.8	Résultats	50
2.8.1	Géométrie, propriétés matériaux et conditions aux limites	50
2.8.2	Résultats PGD	52
2.8.3	Post-traitement : vers un modèle de durée de vie	55
2.8.4	Difficultés rencontrées	56
2.9	Conclusions du développement du modèle réduit thermo-mécanique	57
3	Implémentation non-intrusive pour la construction d'un modèle réduit électro-thermo-mécanique avec Ansys	59
3.1	La réduction de modèles implémentée de manière non-intrusive	60
3.2	Présentation du problème 3D	61
3.2.1	Géométrie et conditions aux limites du problème	61
3.2.2	Comportement electro-thermo-mécanique	62
3.3	Stratégie de résolution	62
3.3.1	Découplage du problème de mécanique	63
3.3.2	Longueur de fissure équivalente	63
3.3.3	Paramétrisation de la longueur de fissure	64
3.4	Paramètres incertains	65
3.5	Résolution d'un problème PGD avec Ansys	68
3.6	Modèle réduit électro-thermique	69
3.6.1	Modèle réduit électrique	70
3.6.2	Modèle réduit thermique	72
3.6.3	Résultats du problème électro-thermique	74
3.6.4	Comparaison avec un calcul direct issu de Ansys	77
3.7	Modèle réduit mécanique	83
3.7.1	Paramétrisation de la longueur de fissure	83
3.7.2	Problème à résoudre	84
3.7.3	Evaluation des termes non-linéaires	85
3.7.4	Hyper-réduction de modèle	88
3.7.5	Résultats du problème non-linéaire de mécanique	93
3.7.6	Modèle réduit linéaire	93
3.7.7	Résultats du problème linéaire de mécanique	96
3.8	Conclusions du développement du modèle réduit non-intrusif	98
4	Application à la prédiction de la durée de vie restante d'un module au cours de son utilisation	101
4.1	Présentation du contexte	102
4.2	Recalage de modèle par inférence bayésienne	104
4.2.1	Principe de l'inférence bayésienne	104
4.2.2	Correction du biais de modèle	105
4.2.3	Post-traitement de la densité <i>a posteriori</i>	105
4.3	Échantillonnage par la méthode des <i>Transport Maps</i>	106
4.3.1	Approximation de Laplace	106
4.3.2	Transformation triangulaire	108
4.3.3	Composition de transformations pour l'assimilation séquentielle	109
4.4	Application à la prédiction de durée de vie restante d'un module	109
4.4.1	Recalage à partir de mesures synthétiques	112

4.4.2	Recalage à partir de mesures réelles	115
4.5	Conclusions sur la prédiction de durée de vie restante	119
	Conclusion générale et perspectives	121
A	Commandes APDL usuelles	125
B	Liste des publications et actes de conférences	129
	Bibliographie	131

Table des figures

0.1	Vue extérieure d'un module IGBT dans son boîtier.	2
1.1	Vue interne et schéma électrique d'un module de puissance IGBT.	8
1.2	Schématisme d'une vue en coupe d'un module au niveau d'une puce IGBT, sans son boîtier.	9
1.3	Influence des cycles thermiques sur la métallisation de la puce [CIAPPA 2002]. . .	10
1.4	Décollement et fissuration des fils de connexion [BOUARROUDJ-BERKANI 2008]. . .	10
1.5	Fissure se propageant dans un fil de connexion, juste au dessus du contact avec la métallisation [LOH et al. 2007].	11
1.6	Tailles de grains au sein d'un fil de connexion [LOH et al. 2007].	11
1.7	Évolution de la tension V_{CE} en fonction du nombre de cycles [BĘCZKOWSKI et al. 2013].	12
1.8	Courant injecté lors d'un test de vieillissement et cycles de température induits. .	14
1.9	Illustration de la prédiction probabiliste de la durée de vie restante à un cycle n , par propagation d'incertitudes à travers le modèle de durée de vie.	19
2.1	Barreau de longueur L soumis à un flux thermique q à son extrémité gauche. . . .	28
2.2	Décroissance des valeurs propres de la matrice des <i>snapshots</i>	29
2.3	Les trois premiers modes POD.	29
2.4	Comparaison entre la solution exacte et la solution POD obtenue avec une base de 10 modes.	30
2.5	Modes PGD : chaque ligne correspond à un mode, dont la première colonne est la fonction spatiale, la seconde la fonction temporelle, et la troisième la fonction paramétrique.	35
2.6	Évolution de l'amplitude normalisée des modes PGD.	36
2.7	Erreur (en %) entre la solution exacte et la solution PGD obtenue avec 10 modes pour $\alpha = 1,1 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$	36
2.8	Présentation du problème thermo-mécanique : géométrie et conditions aux limites.	37
2.9	Modèle de zone cohésive. Adapté de [CODE_ASTER 2014].	38
2.10	Représentation de la composante normale de deux types de loi cohésives : la loi bilinéaire et la loi exponentielle.	39
2.11	Définition d'un élément cohésif à partir des nœuds des éléments massifs.	39
2.12	Interface cohésive située au niveau du plan médian de la brasure.	40
2.13	Transformation géométrique de la brasure, et définition de ses domaines.	42
2.14	Comparaison des méthodes incrémentales et des méthodes non-incrémentales pour la résolution de problèmes non-linéaires.	49

2.15	Évolution de la longueur de fissure de gauche au cours du temps et des itérations globales de l'algorithme de résolution du problème thermo-mécanique, pour $e = h = 0,8$	52
2.16	Modes PGD thermiques : chaque ligne correspond à un mode, dont la première colonne est la fonction spatiale, la seconde la fonction temporelle, la troisième la fonction portant sur e et la dernière sur h	53
2.17	Température et déplacement vertical des deux nœuds situés à l'extrémité gauche de la fissure 1, pour $e = h = 0,8$	53
2.18	Premier et sixième modes PGD mécaniques. La fonction spatiale affichée est la composante verticale u_y	54
2.19	Composantes tangentielles (u_x) des fonctions spatiales des premier et sixième modes.	54
2.20	Effets des paramètres sur la propagation de la fissure de gauche.	55
2.21	Domaine paramétrique assurant une durée de vie minimale.	55
2.22	Propagation d'incertitudes à travers le modèle de durée de vie.	56
2.23	Fonctions temporelles des premier et neuvième modes de la matrice de conduction thermique du domaine Ω_1 de la brasure. Une instabilité numérique apparaît dans le neuvième mode.	57
3.1	Géométrie du module tridimensionnel.	61
3.2	Couplage électro-thermo-mécanique d'un module de puissance.	63
3.3	Évolution de la surface de contact avec une propagation circulaire de fissure.	64
3.4	Géométrie des problèmes pour l'évaluation des résistances de contact.	65
3.5	Évolution des conductances de contact avec la longueur de fissure	65
3.6	Algorithme de point fixe pour la détermination d'un nouveau mode PGD avec Ansys.	69
3.7	Algorithme itératif global pour la résolution du problème électro-thermique couplé par PGD.	70
3.8	Illustration d'un quadrangle ayant un fort gradient de potentiel électrique. Les nœuds sont représentés par les cercles noirs et les points d'intégration par les croix bleues.	73
3.9	Comparaison entre la valeur de référence de la puissance volumique dissipée par effet Joule calculée par Ansys et son approximation.	74
3.10	Configuration du problème électro-thermique dans Workbench pour la résolution par PGD.	75
3.11	Convergence du problème électro-thermique.	76
3.12	Évolution de la norme des modes de la température, par rapport à la norme du premier mode. Les modes sont orthogonalisés par rapport aux fonctions spatiales.	77
3.13	Premier mode (correspondant au produit des fonctions de la première colonne) et troisième mode (deuxième colonne) du potentiel électrique. L'encadré des fonctions temporelles présente un zoom de celles-ci sur 2 cycles.	78
3.14	Premier mode (correspondant au produit des fonctions de la première colonne) et deuxième mode (deuxième colonne) de la température. L'encadré des fonctions temporelles présente un zoom de celles-ci sur 2 cycles.	79
3.15	Impact des paramètres sur le cycle limite de la température de jonction	80

3.16	Comparaison entre le potentiel électrique (en Volt) obtenu avec un calcul direct et la solution PGD. La solution est montrée pour la valeur nominale des paramètres ($a/a_0 = 1, b/b_0 = 1$), à la fin du temps d'échauffement du deuxième cycle, et pour un endommagement nul.	80
3.17	Comparaison entre la température obtenue (en degrés Celsius) avec un calcul direct et la solution PGD. La solution est montrée pour la valeur nominale des paramètres ($a/a_0 = 1, b/b_0 = 1$), à la fin du temps d'échauffement du deuxième cycle, et pour un endommagement nul.	81
3.18	Comparaison entre la température obtenue (en degrés Celsius) avec un calcul direct et la solution PGD. La solution est montrée pour la valeur nominale des paramètres, à la fin du deuxième cycle, et pour un endommagement nul.	82
3.19	Géométrie du problème de mécanique.	83
3.20	Évolution spatiale de la contrainte maximale de la loi cohésive utilisateur utilisée pour le paramétrage de la longueur de fissure.	84
3.21	Maillage total et maillage de la zone cohésive. Les éléments cohésifs sont les seuls éléments sélectionnés lors de l'évaluation des termes non-linéaires.	90
3.22	Fonctions spatiales des premier (première colonne) et sixième (seconde colonne) modes du déplacement.	94
3.23	Fonctions temporelles et paramétriques des premier mode (première colonne) et sixième mode (deuxième colonne) du déplacement. De haut en bas : fonction temporelle, fonction portant sur la résistivité électrique des puces, la longueur de fissure, la contrainte maximale de la loi cohésive, et la température de référence.	95
3.24	Variations de l'évolution de la longueur de fissure en fonction des paramètres. Les paramètres non mentionnés dans la légende sont égaux à leurs valeurs nominales.	97
3.25	Variations de l'évolution de la chute de tension V_{CE} en fonction du paramètre b de la conductivité électrique des puces. Les autres paramètres sont égaux à leurs valeurs nominales.	97
3.26	Variations de l'évolution de la chute de tension V_{CE} en fonction des paramètres. Les paramètres non mentionnés dans la légende sont égaux à leurs valeurs nominales.	98
4.1	Mesures de V_{CE} acquises lors du cyclage de six modules. La chute de tension est mesurée sur chacune des deux puces du bras central de chaque module.	102
4.2	Contexte pour la prédiction par inférence bayésienne de la durée de vie restante d'un module au cours de son utilisation.	103
4.3	Principe de l'échantillonnage par <i>Transport Maps</i> . Figure adaptée de la documentation de la librairie MParT et de [RUBIO 2019].	107
4.4	Stratégie de l'approximation par <i>Transport Maps</i> pour l'assimilation séquentielle de mesures. Figure issue de [RUBIO 2019].	111
4.5	Génération de mesures synthétiques à partir du modèle numérique : V_{CE} et son augmentation en fonction du nombre de cycles.	112
4.6	Densité <i>a posteriori</i> portant sur la résistivité électrique de la puce, et son approximation par <i>Transport Maps</i>	113
4.7	Densités <i>a posteriori</i> de c_1 et c_2 obtenues à l'issue de (a) la première assimilation et (b) la quarantième assimilation.	113
4.8	Lois marginales issues de la densité jointe après 20 assimilations.	114
4.9	Densité de probabilité de la durée de vie du module, à l'issue de la première assimilation et son évolution au cours des assimilations suivantes.	114

4.10	Densité <i>a priori</i> de la conductivité électrique de la puce, obtenue par une méthode déterministe à l'aide de mesures expérimentales provenant de 11 puces.	116
4.11	Évolution de la densité de probabilité de la conductivité électrique après l'assimilation des 4 premières mesures du module. Les densités sont normalisées par leurs valeurs maximales.	116
4.12	Comparaison de l'évolution de V_{CE} mesurée sur un module au cours d'un test de vieillissement, et de deux évolutions prédites par le modèle numérique.	117
4.13	Densités de probabilité de la durée de vie du module, obtenues (a) après l'assimilation de la première mesure, (b) après l'assimilation de 15 mesures, soit au bout d'un nombre de cycle normalisé de $N/N_0 = 0,3$	118
4.14	Difficultés d'identification des paramètres et de la prédiction de la durée de vie du module.	118

Liste des Algorithmes

1	Point fixe déterminant un nouveau mode PGD	33
2	Résolution d'un problème par PGD	34
3	Approche incrémentale et itérative pour la résolution du problème thermo- mécanique couplé par les fissures	46
4	Méthode itérative globale pour la résolution d'un problème couplé par PGD . . .	47
5	Résolution d'un problème par PGD avec orthogonalisation	51
6	Algorithme de Newton-Raphson utilisé dans Ansys	87
7	Approximation des termes non-linéaires	92
8	Assimilation séquentielle de mesures avec échantillonnage par <i>Transport Maps</i> . .	110

Introduction

LA réduction des émissions de gaz à effet de serre est un défi que chacun doit relever afin de limiter le changement climatique, et de contenir le réchauffement global de la planète à moins de 2°C, objectif des accords de Paris de 2016. L'Union Européenne s'est engagée dans ce cadre à atteindre une neutralité carbone à l'horizon 2050 à travers son **pacte vert**. Afin d'atteindre cet objectif, la production d'énergie renouvelable a fortement augmenté au cours des dernières années en Europe, avec un doublement de la part de ces énergies dans la consommation totale d'énergie entre 2005 et 2021, d'après **Eurostat**. En France, près de 90% de la production d'électricité est dite "bas carbone" grâce à une production majoritairement nucléaire. Ainsi, l'électrification des systèmes (trains, voitures, bus, etc.) permet de baisser fortement leur empreinte carbone en utilisant une énergie moins émettrice de gaz à effet de serre. En conséquence, la part de marché des systèmes électriques va continuer d'augmenter dans les prochaines années pour répondre à la problématique climatique.

Au sein des systèmes électriques, les modules électroniques de puissance sont des composants essentiels. Utilisés dans les systèmes de conversion d'énergie, ils permettent la transformation d'une forme de l'énergie électrique en une autre forme, par exemple un courant électrique continu en un courant alternatif. Afin d'assurer cette fonction, un module de puissance est composé d'un assemblage de diodes et de transistors. Ces derniers sont des composants semi-conducteurs contrôlés par une tension de grille, permettant ou non au courant de passer, agissant donc comme des interrupteurs contrôlés électroniquement.

Les modules de puissance se distinguent en fonction de la technologie des semi-conducteurs employée. Les technologies les plus répandues sont à base de Silicium (Si), mais de nouvelles technologies émergent, comme par exemple les composants grand gap à base de Carbure de Silicium (SiC) ou Nitrure de Gallium (GaN). Parmi les modules basés sur des semi-conducteurs à base de Silicium, certains emploient des transistors MOSFET (*Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor*, ou transistor à effet de champ à grille métal-oxyde) et d'autres utilisent des transistors IGBT (*Insulated Gate Bipolar Transistor*, ou transistor bipolaire à grille isolée) qui sont employés pour de plus grandes puissances. Ce sont ces derniers qui sont étudiés dans ce travail. Une photographie d'un module IGBT est présentée sur la Figure 0.1.

Au cours de leur utilisation, les modules de puissance sont soumis à de nombreuses sollicitations. D'une part, ils sont soumis à des variations de l'environnement dans lequel ils se situent, comme la température, l'humidité ou la pression atmosphérique qui varient au cours du temps, et qui dépendent également de la position spatiale du module. D'autres sollicitations mécaniques comme des vibrations ou des chocs impactent également les modules de puissance. D'autre part, les modules sont soumis à d'importantes contraintes thermo-mécaniques provenant de leur utilisation propre. En effet, un module IGBT produit des pertes électriques lors de son utilisation, qui proviennent de deux sources distinctes :

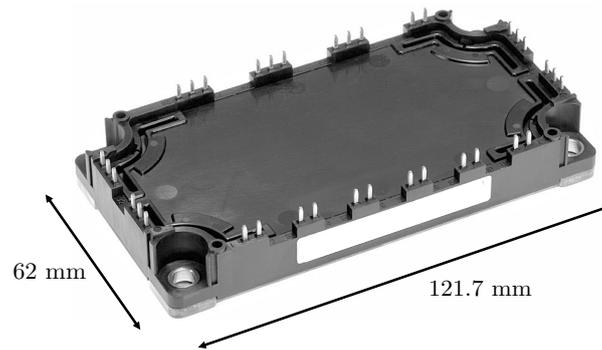


FIGURE 0.1 – Vue extérieure d'un module IGBT dans son boîtier.

- des pertes par commutation, qui sont produites lorsque le transistor passe de l'état passant à l'état bloquant, ou inversement ;
- des pertes par conduction, qui sont produites par effet Joule lorsque le courant traverse les différents composants du module, principalement la puce semi-conductrice.

Les pertes électriques génèrent un échauffement du module, qui, associé à une disparité importante de coefficients de dilatation thermique des matériaux du module, conduit à sa dégradation progressive au cours des cycles de chargement.

Il est ainsi nécessaire d'élaborer des modèles de durée de vie fiables des modules de puissance, afin de pouvoir procéder à des opérations de maintenance préventive de manière optimale, sans remplacer trop tôt un module en bon état de fonctionnement, mais avant que celui-ci ne cède.

Actuellement, la grande majorité des modèles de durée de vie sont des modèles empiriques, dont les paramètres sont déterminés par des essais de durée de vie réalisés en laboratoire. Ces essais, pour des raisons économiques et pratiques, sont réalisés en conditions de chargement accélérées, afin de durer un temps raisonnablement court. En effet, un module de puissance est dimensionné pour fonctionner plusieurs années, voire dizaines d'années dans des conditions normales d'utilisation. Les modèles ainsi obtenus sont fiables dans les conditions de test, mais sont difficilement exploitables dans les conditions normales d'utilisation. Des modèles basés sur des grandeurs impactant directement la propagation des fissures, telles que les déformations, par exemple, ont été développés pour améliorer l'extrapolation vers les conditions réelles d'utilisation. Cependant, ils requièrent également un nombre important d'essais expérimentaux pour recalibrer les paramètres des modèles. Afin de réduire les tests expérimentaux coûteux, des modèles purement numériques ont été développés. Ceux-ci cherchent à apporter une meilleure connaissance des phénomènes de dégradation en modélisant directement la propagation de l'endommagement. Les comportements non-linéaires et les couplages multiphysiques pris en compte dans ces modèles les rendent complexes et coûteux en terme de temps de calcul.

De plus, très peu de modèles actuellement développés tiennent compte des incertitudes qui influent sur la durée de vie des modules. En effet, les incertitudes portant sur les propriétés des matériaux, la géométrie, ou encore les contraintes résiduelles dues aux procédés de fabrication, conduisent à des disparités de durée de vie parfois importantes entre les modules. De nombreux paramètres des modèles numériques sont donc incertains et doivent être recalés à l'aide de mesures expérimentales. Pour cela, deux types de méthodes existent, les méthodes déterministes et les méthodes stochastiques. L'identification des paramètres à l'aide de méthodes déterministes, comme la méthode des moindres carrés, conduit à des problèmes demandant une régularisation. Les méthodes stochastiques permettent d'introduire une régularisation naturelle en déterminant non pas une valeur déterministe de paramètres, mais une densité de probabilité.

Dans le cadre des modules de puissance, l'utilisation de ces dernières méthodes permet deux

principales applications :

- L'étude de la variabilité des paramètres entre modules. L'acquisition de données expérimentales sur plusieurs modules permet de construire une distribution de la valeur des paramètres. Il est ensuite possible de propager cette distribution à travers le modèle de durée de vie afin d'obtenir un modèle de durée de vie stochastique. Ce modèle peut être utilisé en phase de conception afin de déterminer, sous certaines contraintes, les valeurs optimales des paramètres. Cette méthode permet de concevoir un module capable d'atteindre une durée de vie minimale, à une probabilité donnée, assurant par exemple que 95% des modules l'atteignent.
- L'étude d'un module en particulier, en construisant une densité de probabilité sur la valeur des paramètres (géométrie, propriétés matériaux,...) de ce module à l'aide de mesures réalisées en temps réel au cours de son utilisation. Une fois les incertitudes propagées dans le modèle de durée de vie, une densité de probabilité portant sur la durée de vie restante du module est obtenue, permettant de prédire la durée de vie à un niveau d'incertitude donné. C'est le concept de jumeau numérique, dans lequel le module physique et sa représentation numérique interagissent.

Dans ce travail de thèse, nous nous plaçons essentiellement dans le cadre de la seconde application. L'objectif est de construire un modèle de durée de vie basé sur la représentation des phénomènes physiques responsables de l'endommagement d'un module de puissance, puis de recalibrer les paramètres du modèle à l'aide de mesures obtenues au cours de l'utilisation du module, afin de pouvoir prédire sa durée de vie restante. Le modèle développé est un modèle numérique s'appuyant sur la méthode des éléments finis, modélisant le comportement multiphysique couplé d'un module de puissance. Trois physiques sont prises en compte dans le modèle. La première est l'électrique, afin d'obtenir le potentiel électrique et le courant responsable de l'échauffement du module. La seconde est la thermique, qui permet de calculer l'échauffement généré par les pertes par effet Joule. Enfin, la mécanique permet d'obtenir l'évolution de l'endommagement du module.

Les méthodes stochastiques de recalage de modèle et de propagation d'incertitudes utilisent des méthodes de type Monte-Carlo qui nécessitent un grand nombre d'appels au modèle numérique, en l'évaluant pour différentes valeurs de paramètres. Cependant, le temps de calcul nécessaire à la résolution d'un seul problème numérique est important, et ce pour plusieurs raisons. Premièrement, un modèle tridimensionnel mène à un nombre important de degrés de liberté, du fait des géométries parfois complexes à mailler, comme les fils, et de la structure de type "plaque" des composants du module. Typiquement, un maillage 3D d'un module de puissance peut atteindre plusieurs millions de degrés de liberté. Deuxièmement, des phénomènes physiques complexes doivent être modélisés. Cela inclut le couplage entre les trois physiques, dû d'une part aux propriétés des matériaux dépendantes de la température, et d'autre part à l'influence de l'endommagement sur le comportement électrique et thermique. Le comportement mécanique est également non-linéaire, du fait du comportement de certains matériaux (plasticité, fluage) et de la propagation des fissures. L'évaluation des comportements non-linéaires est coûteuse en temps, et la résolution du problème requiert une méthode de résolution adaptée. Pour cela, les méthodes itératives de type Newton-Raphson sont classiquement utilisées. De plus, un nombre important de pas de temps est également nécessaire afin de modéliser finement le comportement du module.

Par conséquent, l'utilisation d'un modèle tridimensionnel haute fidélité n'est pas envisageable dans le cadre de la propagation d'incertitudes qui demande de nombreuses évaluations du modèle numérique pour des valeurs de paramètres différentes. A la place, des modèles dont l'évaluation est très rapide sont nécessaires, comme des surfaces de réponse, ou des modèles

réduits. Afin d'obtenir un tel modèle, plusieurs stratégies peuvent être envisagées. La première, dite "force brute", consiste à construire une surface de réponse en évaluant le modèle numérique sur une grille discrétisant l'espace paramétrique. Cette méthode est très coûteuse en temps de calcul du fait de l'augmentation exponentielle du nombre de calculs à réaliser avec le nombre de paramètres, ce qui est appelé la "malédiction de la dimension". Il est également dommageable de refaire un calcul très coûteux lorsqu'une solution a déjà été obtenue pour une proche valeur de paramètres : la solution risque de peu différer. La seconde stratégie consiste donc à exploiter via les méthodes de réduction de modèle la redondance des informations présentes dans la physique du problème. Ces méthodes visent à réduire le temps de calcul des modèles en cherchant la solution du problème dans un espace de faible dimension, sans simplifier la richesse physique. Les méthodes *a posteriori* comme la Proper Orthogonal Decomposition (POD) ou les méthodes de base réduite construisent la base générant l'espace réduit à partir de solutions pré-calculées. Une fois l'espace de faible dimension généré, la solution pour un autre jeu de paramètres est cherchée dans cet espace, réduisant fortement le temps de calcul. Les méthodes *a priori*, comme la Proper Generalized Decomposition (PGD), consistent à construire la base sans aucune connaissance *a priori* sur la solution. La méthode PGD permet également de calculer la solution sur l'ensemble du domaine paramétrique et non pour une valeur fixée de paramètres, permettant de s'affranchir du problème de la dimension. C'est cette méthode qui sera choisie pour ce travail.

Ce manuscrit est organisé de la manière suivante :

- Le **Chapitre 1** présente l'état de l'art sur les modèles de durée de vie des modules de puissance et sur la prédiction de durée de vie restante.
- Le **Chapitre 2** porte ensuite sur l'élaboration d'un modèle réduit basé sur la PGD pour un problème couplé thermo-mécanique appliqué à un module de puissance. Dans ce premier modèle, l'échauffement du module dû aux pertes électriques est modélisé par un flux thermique. Les contraintes thermiques induites initient et propagent une fissure au niveau du joint de brasure de la puce, qui couple fortement les deux comportements, en augmentant la résistance thermique du module. La propagation de la fissure est modélisée par un modèle de zones cohésives. Les travaux de ce chapitre sont appliqués à un modèle bidimensionnel, et sont réalisés avec un code Matlab permettant une implémentation aisée de la méthode de réduction de modèle. L'étude d'un modèle tridimensionnel plus réaliste, associé à des lois de comportement complexes, nécessite une puissance de calcul plus importante, et l'utilisation d'un logiciel éléments finis commercial s'avère utile.
- Le **Chapitre 3** de cette thèse porte ainsi sur l'implémentation non-intrusive de la méthode de réduction de modèle avec le logiciel Ansys. Le comportement électrique est également modélisé dans ce modèle, en se focalisant sur la dégradation des fils de connexion. Une stratégie permettant de résoudre le problème couplé est développée.
- Le **Chapitre 4** porte enfin sur le recalage en ligne des paramètres du modèle, en exploitant le modèle réduit précédemment développé. L'objectif est de prédire la durée de vie restante d'un module au cours de son utilisation. La méthode de recalage de modèle s'appuie sur l'inférence bayésienne qui permet, dans un cadre stochastique, d'affiner la connaissance des paramètres incertains par la comparaison de mesures avec la prédiction du modèle. La méthode est tout d'abord présentée en utilisant des mesures synthétiques. La méthode est ensuite appliquée à des mesures réelles obtenues au cours de plusieurs tests de durée de vie, qui ont été effectués préalablement à la thèse par le laboratoire SATIE. L'assimilation des mesures au cours du temps se fait de manière séquentielle, permettant d'obtenir une

densité de probabilité portant sur les paramètres s'affinant au cours des assimilations. A chaque nouvelle mesure assimilée, la densité est approximée par la méthode des *transport maps*, méthode alternative à l'algorithme de Metropolis Hasting classiquement utilisé. Cette méthode consiste à trouver une transformation entre une densité de référence, qui est facile à échantillonner, et la densité cible. Un problème déterministe est obtenu afin d'obtenir les paramètres de la transformation. Une fois celle-ci obtenue, elle est utilisée afin de transformer un échantillon de la densité de référence en un échantillon de la densité cible. Ce dernier est ensuite propagé à travers le modèle de durée de vie afin de prédire la durée de vie restante.

- Les conclusions et perspectives de ce travail sont enfin présentées dans une dernière section.

Chapitre 1

État de l'art sur les modèles de durée de vie des modules de puissance

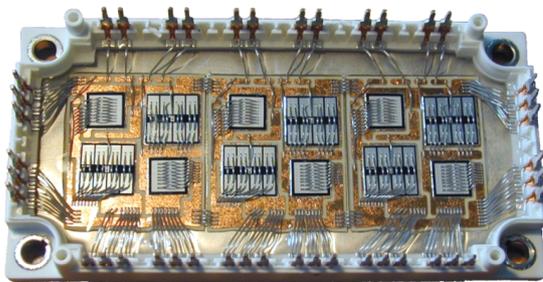
Ce premier chapitre présente tout d'abord les mécanismes de dégradation des modules de puissance et les indicateurs de défaillance existants. Une revue de l'état de l'art des modèles de durée de vie est ensuite proposée, ainsi que des stratégies d'estimation de la durée de vie restante des modules.

Sommaire

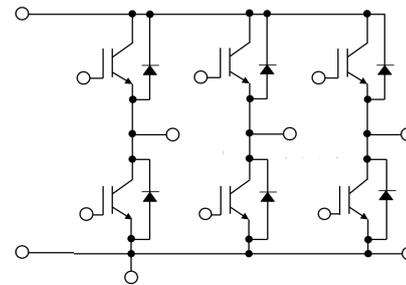
1.1	Composition d'un module électronique de puissance IGBT	8
1.2	Mécanismes de dégradation des modules de puissance	9
1.2.1	Dégradation de la métallisation	9
1.2.2	Fissuration des fils de connexion	10
1.2.3	Fissuration des brasures	12
1.3	Indicateurs de défaillance	12
1.4	Modèles de durée de vie	13
1.4.1	Modèles empiriques	14
1.4.2	Modèles basés sur la physique	15
1.4.3	Cumul d'endommagement	16
1.5	Estimation de la durée de vie restante	17

1.1 Composition d'un module électronique de puissance IGBT

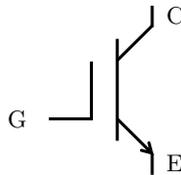
Un module de puissance IGBT, comme celui de la Figure 0.1, s'apparente à un boîtier étanche que l'on vient connecter à l'installation électrique. L'intérieur de ce boîtier, montré sur la Figure 1.1a, est composé d'un assemblage de puces IGBT et de diodes. Le module de la Figure 1.1 comporte trois bras identiques, qui sont chacun associés à une phase du courant. Chaque bras est composé de deux puces IGBT en série, appelées IGBT *top* (supérieure) et IGBT *bottom* (inférieure). Chaque puce est associée à une diode antiparallèle, qui assure le bon sens de circulation du courant. Le schéma électrique du module est représenté sur la Figure 1.1b, sur lequel les trois bras sont facilement identifiables. Le symbole électrique d'un transistor IGBT est présenté sur la Figure 1.1c. L'IGBT comporte trois bornes : la grille, l'émetteur et le collecteur. La tension de grille V_{GE} , soit la différence de potentiel entre l'émetteur et la grille, permet de contrôler l'état de l'IGBT, laissant passer ou non le courant entre l'émetteur et le collecteur. La différence de potentiel entre ceux-ci, appelée V_{CE} , est due à la résistance électrique de l'IGBT.



(a) Photographie de l'intérieur d'un module de puissance, nettoyé de son gel
[BOUARROUDJ-BERKANI 2008]



(b) Schéma électrique associé



(c) Symbole usuel de l'IGBT

FIGURE 1.1 – Vue interne et schéma électrique d'un module de puissance IGBT.

Afin de pouvoir réaliser sa fonction électrique, un module de puissance est composé d'un assemblage de composants réalisés en différents matériaux, comme le montre la représentation schématique d'une vue en coupe d'un module sur la Figure 1.2. Les composants principaux des modules sont les puces IGBT, qui sont brasées sur des feuilles de cuivre dans lesquelles le courant circule. Ces feuilles reposent sur une céramique, elle-même reposant sur une feuille de cuivre inférieure. Ces trois couches, appelées substrat, permettent d'isoler électriquement le module. Le substrat est également brasé sur un support, la semelle, permettant de diffuser la chaleur vers un refroidisseur. Les puces sont composées de cellules élémentaires de transistors disposées en parallèle, et qui permettent la circulation du courant uniquement de manière verticale. Elles sont donc recouvertes d'une fine couche d'aluminium, appelée métallisation, permettant de connecter les cellules élémentaires entre elles en collectant les courants des cellules afin de les ramener horizontalement vers les fils de connexion. Ces fils de connexion, fabriqués en aluminium, relient les puces et les diodes aux différentes plaques de cuivre et permettent de réaliser le circuit

électrique. Enfin, cet assemblage est recouvert d'un gel silicone isolant électrique et protecteur, permettant de protéger le circuit électrique de l'humidité et de l'oxygène.

Les matériaux utilisés dans la composition des modules de puissance ont des propriétés différentes, notamment les coefficients de dilatation thermique. Lors de l'échauffement du module provoqué par les pertes électriques, les différences de coefficient de dilatation thermique créent des contraintes thermo-mécaniques de cisaillement. Les contraintes les plus élevées sont situées au niveau des interfaces entre les matériaux soumis aux plus grandes variations de température et entre les matériaux ayant une grande différence de coefficient de dilatation thermique. Ces zones de concentration de contrainte se situent au niveau des contacts entre les fils de connexion et les métallisations des puces, ainsi qu'au niveau des brasures assemblant les puces au substrat, et enfin, au niveau de la brasure entre le substrat et le support.

Ces concentrations de contrainte peuvent initier et propager des fissures qui conduisent à terme à la dégradation du module. Les principaux mécanismes altérant le fonctionnement des modules sont présentés dans la section suivante.

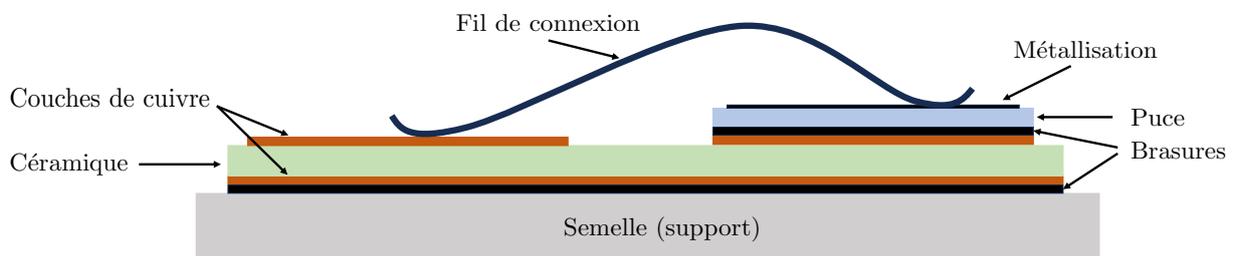


FIGURE 1.2 – Schématisation d'une vue en coupe d'un module au niveau d'une puce IGBT, sans son boîtier.

1.2 Mécanismes de dégradation des modules de puissance

Lors de l'utilisation d'un module de puissance, les puces semi-conductrices passent successivement de l'état passant à l'état bloquant. Lors de l'état passant, le courant traverse la puce et les composants supérieurs du module (les composants supérieurs à la céramique, isolante électriquement), générant des pertes et l'échauffement de ce dernier. Le flux de chaleur généré est évacué grâce au refroidisseur sur lequel le module est posé, via un liquide de refroidissement, souvent de l'eau, qui circule sur la surface inférieure du refroidisseur. Lors de l'état bloquant, le courant ne circule plus à travers le module, et celui-ci refroidit. Au cours de son utilisation, un module est donc soumis à des cycles thermiques, qui sont composés d'une phase d'échauffement et d'une phase de refroidissement. La répétition de ces cycles endommage plusieurs zones du module, conduisant à sa rupture.

1.2.1 Dégradation de la métallisation

Au cours des cycles thermiques subis par le module, la température au niveau de la métallisation peut dépasser 110°C, température à partir de laquelle la contrainte thermique équivalente dépasse la limite d'élasticité de l'aluminium. Des déformations plastiques apparaissent alors, se traduisant par des dislocations ou par des glissements de grains [CIAPPA 2002]. Ces déformations plastiques, qui apparaissent dès le début des cycles thermiques, initient des fissures en surface de la métallisation au niveau des joints de grains. Les fissures se propagent ensuite à l'intérieur de la métallisation et conduisent à une augmentation de sa résistance électrique

[PIETRANICO et al. 2010]. La Figure 1.3 illustre l'effet des cycles thermiques sur l'état de surface de la métallisation, et met en évidence une forte dégradation de l'état de surface. Avant cyclage, les cellules élémentaires de la puce sont visibles, car la métallisation épouse la surface supérieure de la puce. Après cyclage, la surface est plus rugueuse et les cellules élémentaires de la puce sont difficilement distinguables. L'augmentation de la résistance électrique de la métallisation [DETZEL et al. 2004; LUTZ et al. 2008] accroît par conséquent les pertes par effet Joule, et augmente les sollicitations au niveau des contacts avec les fils de connexion.

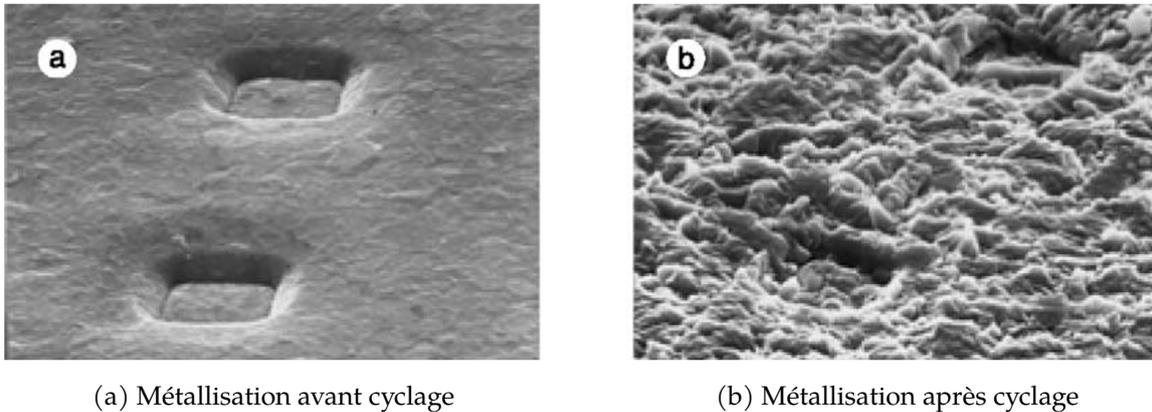


FIGURE 1.3 – Influence des cycles thermiques sur la métallisation de la puce [CIAPPA 2002].

1.2.2 Fissuration des fils de connexion

Un second mécanisme de défaillance est la fissuration des fils de connexion. Des fissures peuvent apparaître soit au sein même du fil, soit au niveau de l'interface fil-métallisation. Ces fissures conduisent dans un cas à la rupture du fil, et dans l'autre à son décollement de la métallisation, comme illustré sur la Figure 1.4. La fissuration dans le fil nécessite des contraintes

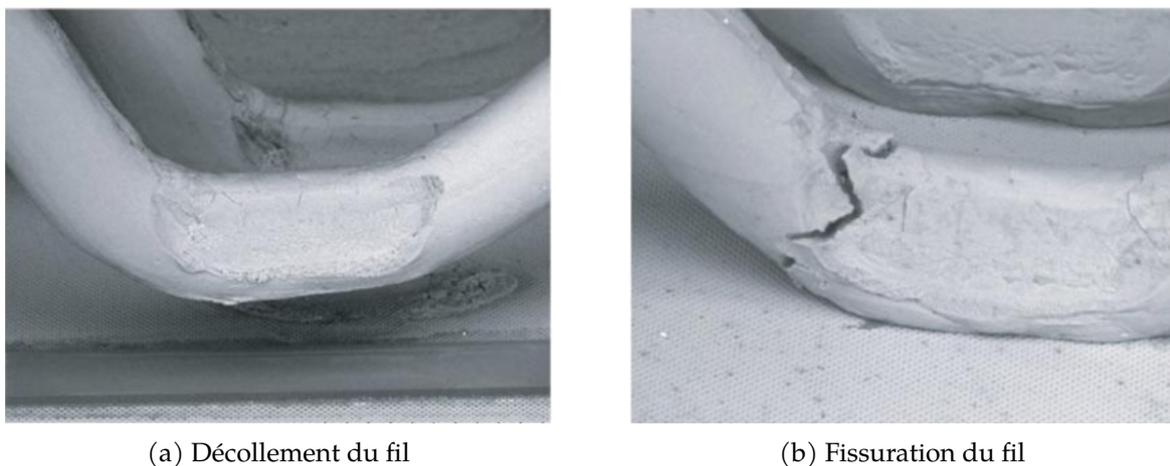


FIGURE 1.4 – Décollement et fissuration des fils de connexion [BOUARROUDJ-BERKANI 2008].

thermiques plus élevées que celles nécessaires pour la fissuration à l'interface. En conséquence, ce phénomène n'apparaît que rarement, principalement pour des conditions opérationnelles intenses. Il a également été démontré que des fils dont la boucle est plus haute (des fils qui, sur la Figure 1.2, monteraient plus haut) permettent de limiter l'apparition de fissures au sein du fil [RAMMINGER et al. 2000; MERKLE et al. 2008].

En revanche, la fissuration au niveau de l'interface des fils de connexion est un phénomène fréquent et critique pour les modules. En effet, lorsqu'un fil se décolle, le courant doit se répartir dans les autres fils, augmentant la densité de courant dans les fils restants. Cela conduit à une augmentation des pertes par effet Joule au niveau des autres fils, et conduit rapidement à leur rupture. De nombreuses études ont donc porté sur la compréhension de la fissuration menant au décollement des fils [CIAPPA et MALBERTI 1996; RAMMINGER et al. 1998; CIAPPA 2002; YAMADA et al. 2007]. La fissure s'amorce à cause des élévations de température qui produisent des contraintes concentrées sur le bord du contact fil-métallisation. Elles initient une fissure dans le fil, juste au dessus de la métallisation [ONUKEI et al. 2000; LOH et al. 2007], comme illustré sur la Figure 1.5. Cette fissure se propage ensuite vers le centre du contact. D'après [ONUKEI et al.

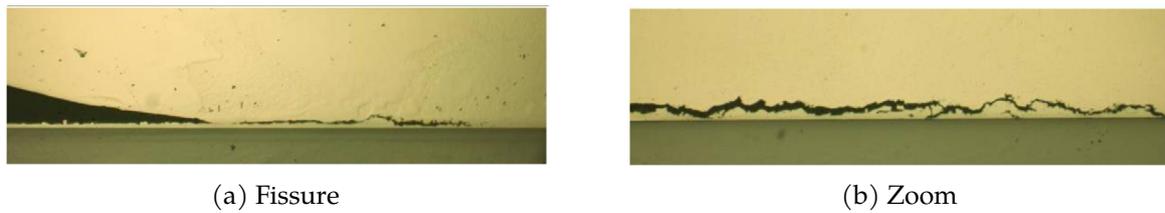


FIGURE 1.5 – Fissure se propageant dans un fil de connexion, juste au dessus du contact avec la métallisation [LOH et al. 2007].

2000], des contraintes de compression sont générées à l'interface fil-métallisation lors de la phase d'échauffement des cycles thermiques, au cours de laquelle la fissure ne se propage pas, et des contraintes de traction lors de la phase de refroidissement qui permet à la fissure de se propager.

La fissure se propage dans un premier temps rapidement, puis avec une vitesse de propagation plus faible lorsque sa taille augmente. Des études portant sur la micro-structure des matériaux ont été réalisées afin de comprendre cette différence de vitesse de propagation, *a priori* non intuitive. En effet, lors d'un essai de fatigue mécanique, la vitesse de propagation de la fissure croît continuellement de l'amorçage jusqu'à la rupture brutale de l'éprouvette, ce qui n'est pas observé dans le cadre d'un chargement thermique sur la fissuration des fils de connexion. Tout d'abord, l'analyse de la micro-structure a montré une hétérogénéité de la taille des grains du fil, comme illustré sur la Figure 1.6. Les grains d'aluminium sont de petite taille au niveau

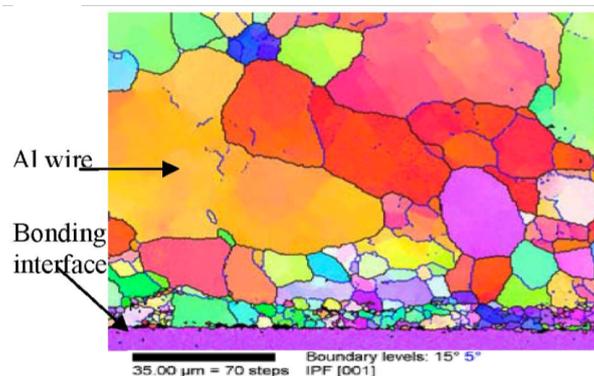


FIGURE 1.6 – Tailles de grains au sein d'un fil de connexion [LOH et al. 2007].

de l'interface avec la métallisation, et leur taille augmente progressivement à mesure que l'on s'éloigne de cette zone. D'après [LOH et al. 2007], la température à laquelle le procédé de soudage par ultrasons des fils est effectué influe également fortement sur la taille de la micro-structure : plus la température est importante, plus la taille des grains l'est, et moins la fissure se propage,

ce qui s'explique par une plus grande résistance des joints de grains lorsque leur taille augmente. Des travaux [SHOAIK et al. 2022b] ont montré que la taille des grains augmente et que leurs orientations changent au cours de la fissuration des fils de connexion, ce qui peut expliquer la baisse de la vitesse de propagation.

1.2.3 Fissuration des brasures

Des fissures peuvent également apparaître au sein des différents joints de brasure [KHATIR et LEFEBVRE 2000; CIAPPA 2002; MOROZUMI et al. 2003]. Ces fissures sont induites par des imperfections dues au procédé de brasage et apparaissent au niveau des bords des brasures [GUTH et MAHNKE 2006]. En effet, les bords peuvent être fragilisés par une plus faible épaisseur que le centre à cause du processus d'assemblage. De plus, des concentrations de contraintes apparaissent dans les coins des brasures, à partir desquels les fissures s'initient puis se propagent vers le centre de la brasure. De manière générale, plus l'épaisseur des brasures est importante, moins elles sont sujettes à s'endommager [SURENDAR et al. 2018]. En revanche, une brasure plus épaisse augmente la résistance thermique du module et conduit donc à de plus grandes élévations de température. Il est ainsi nécessaire de trouver une épaisseur de brasure optimale apportant un compromis entre sa tenue mécanique et sa résistance thermique.

1.3 Indicateurs de défaillance

La mesure de l'état de fissuration des fils de connexion ou l'évaluation de l'état de la métallisation étant impossibles à effectuer lorsqu'un module est en cours d'utilisation, il est nécessaire d'avoir des grandeurs mesurables donnant une indication de l'état de dégradation du module.

La dégradation de la métallisation et la fissuration des fils de connexion augmentent la résistance électrique R_{CE} du module. Ainsi, pour le même courant I_c traversant le module, la tension collecteur - émetteur V_{CE} augmente avec l'état de dégradation du module et constitue par conséquent un indicateur fiable de défaillance [JACOB et al. 1995; FAROKHZAD et al. 1996; HELD et al. 1997]. La Figure 1.7 illustre l'augmentation typique de la tension V_{CE} avec le nombre de cycles thermiques appliqués au module. L'évolution de la tension collecteur - émetteur peut se décomposer en deux, voire trois zones [DORNIC et al. 2018]. La première zone correspond

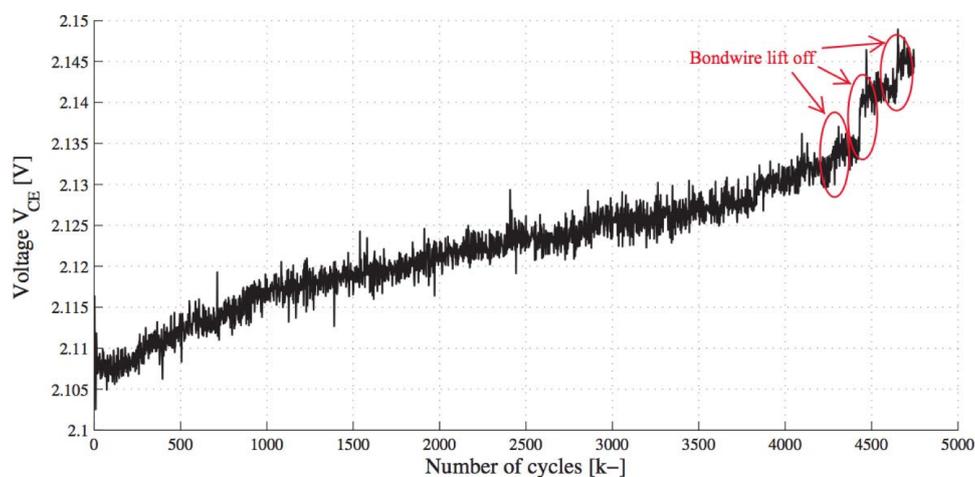


FIGURE 1.7 – Évolution de la tension V_{CE} en fonction du nombre de cycles [BĘCZKOWSKI et al. 2013].

au début de la dégradation, dans laquelle la tension augmente de manière progressive. Dans cette zone, l'augmentation de V_{CE} est principalement due à la dégradation de la métallisation. L'augmentation se fait ensuite plus marquée au sein de la deuxième zone, dans laquelle la résistivité électrique de la métallisation a atteint un niveau de saturation et n'augmente plus. L'augmentation de V_{CE} est alors majoritairement due à la fissuration progressive des fils de connexion. Enfin, la tension V_{CE} augmente de manière exponentielle dans la troisième zone, dans laquelle les fils de connexion se décolent. Le décollement d'un fil se traduit par une augmentation brutale de la tension V_{CE} , du fait de l'augmentation soudaine de résistance électrique. Cette augmentation est d'une part due à l'absence d'un fil, et d'autre part due à la redistribution du courant au sein de la métallisation.

A partir de l'évolution de la tension V_{CE} , un critère de défaillance peut être défini. Le critère a été défini initialement comme 20% d'augmentation de la tension V_{CE} dans [SMET et al. 2011]. Plusieurs critères ont ensuite été proposés dans [GHIMIRE et al. 2013], variant entre 3% et 20% d'augmentation, suivant que l'on veuille placer le critère de défaillance avant la levée du premier fil ou après le décollement de la totalité des fils. Dans ce dernier cas, le module n'est alors plus utilisable. Une valeur de seuil dépendante de l'intensité du courant traversant le module est également proposée. Dans la pratique, la littérature considère que le module atteint sa fin de vie pour une augmentation de la tension V_{CE} de 5%.

En revanche, la mesure seule de l'augmentation de la tension V_{CE} ne permet pas de séparer les effets de la dégradation de la métallisation et des contacts fils-métallisation, les deux phénomènes ayant la même influence sur la tension. Il faudrait pour cela pouvoir mesurer directement l'augmentation de la résistance électrique de la métallisation, mais cette mesure n'est pas accessible au cours d'essais de durée de vie, ni sur un module en utilisation réelle. De plus, la tension V_{CE} est un indicateur global sur l'ensemble des fils de connexion, et ne permet pas d'obtenir l'état de dégradation individuel de chaque contact.

L'apparition de fissures dans les brasures augmente fortement la résistance thermique du module [LEFRANC et al. 2000], celles-ci étant situées entre la puce et le refroidisseur, et par conséquent sur le chemin du flux de chaleur. La résistance thermique du module, soit la résistance thermique entre la puce et la semelle, est donc utilisée comme indicateur de défaillance pour ce mécanisme de dégradation. Le seuil de défaillance est généralement défini entre 20% et 50 % d'augmentation [SMET et al. 2011 ; H. HUANG et MAWBY 2012].

Le calcul de la résistance thermique est effectué avec la température de jonction T_j , qui correspond à une température équivalente moyenne de la puce du module. Cette température n'est en réalité pas directement mesurable, et est estimée à partir de la mesure de la tension V_{CE} . A courant fixe, cette tension varie en fonction de la température à cause de la dépendance des conductivités électriques des matériaux. Il est ainsi possible d'établir, dans une phase de calibration, une relation entre la température de jonction et la tension V_{CE} , en imposant une température homogène au sein du module et en mesurant la valeur de V_{CE} associée. Cette relation est ensuite utilisée lors du test de vieillissement afin d'estimer la température de jonction à partir de la mesure de la chute de tension V_{CE} . Une correction doit cependant être effectuée afin de déduire l'effet de la dégradation sur l'augmentation de V_{CE} [DEGRENNÉ et al. 2020].

1.4 Modèles de durée de vie

Les mécanismes de dégradation décrits dans la Section 1.2 conduisent à la défaillance des modules, qui ne peuvent plus fonctionner correctement lorsque leur dégradation est trop importante. Afin de prédire la durée de vie des modules, pour pouvoir notamment procéder à des opérations de maintenance préventive ou pour prédire la durée de vie restante des modules, des

modèles de durée de vie sont nécessaires. Dans cette section, une revue des principaux types de modèles est proposée. Une revue détaillée peut être trouvée dans [KOVAČEVIĆ-BADSTUEBNER et al. 2015]. Les modèles de durée de vie peuvent se diviser en deux catégories, la première regroupant les modèles empiriques, et la seconde les modèles basés sur la physique.

1.4.1 Modèles empiriques

Les premiers modèles de durée de vie développés, qui sont aussi les plus simples, sont des modèles empiriques basés sur des essais de durée de vie réalisés en laboratoire. Au cours d'un essai de durée de vie, les modules sont sollicités électriquement afin de s'approcher des conditions réelles d'utilisation (voir par exemple [SMET et al. 2011] pour une description des types d'essais de durée de vie réalisés en laboratoire). Ainsi, un courant cyclique rectangulaire est injecté dans le module, provoquant un échauffement de celui-ci. Un cycle est composé d'un temps d'échauffement t_{ON} durant lequel le courant circule, et d'un temps de refroidissement t_{OFF} durant lequel le courant est coupé, permettant au module de refroidir, comme montré sur la Figure 1.8.

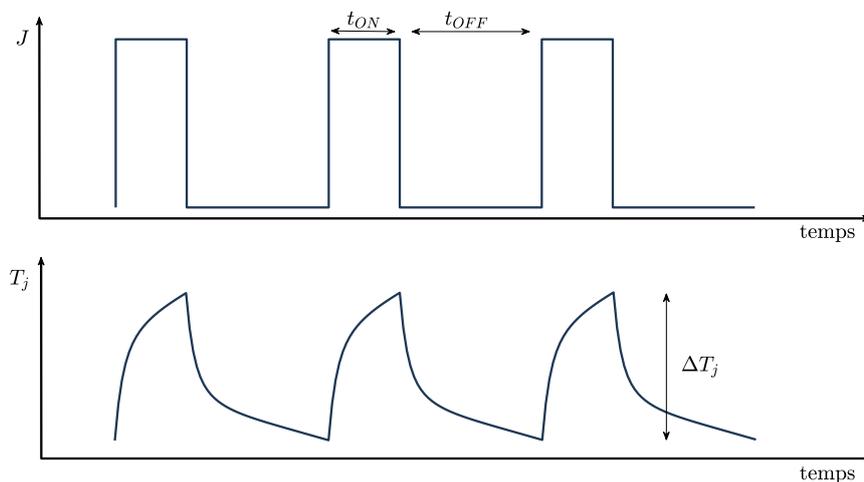


FIGURE 1.8 – Courant injecté lors d'un test de vieillissement et cycles de température induits.

Les modèles empiriques relient la durée de vie des modules au chargement thermique, qui est représenté par la température de jonction. Le premier modèle décrit une relation affine entre le logarithme de la durée de vie N_f et l'amplitude ΔT_j des cycles de la température de jonction :

$$N_f = a(\Delta T_j)^n \quad (1.1)$$

Cette loi est inspirée de la loi de Coffin-Manson qui relie l'amplitude de déformation plastique à la durée de vie d'une structure soumise à de la fatigue oligo-cyclique. Les deux paramètres a et n dépendent du type de module et des conditions de test et sont déterminés grâce à la réalisation de plusieurs essais de durée de vie pour des amplitudes thermiques différentes.

Ce premier modèle a été par la suite amélioré afin de tenir compte d'autres paramètres influant la durée de vie. La dépendance à la température moyenne de jonction a tout d'abord été introduite dans [HELD et al. 1997]. Puis, d'autres paramètres ont été ajoutés au modèle dans [BAYERER et al. 2008], tels que le diamètre des fils de connexion, le temps d'échauffement, l'intensité du courant injecté et un paramètre électrique caractéristique du module, qui est la tension de blocage à partir de laquelle le composant claque. Tous ces paramètres influent sur la

durée de vie des modules, comme le montre par exemple l'étude de [JUNGAENEL et SCHEUERMANN 2017] portant sur l'effet du temps d'échauffement.

L'augmentation du nombre de paramètres dans les modèles de durée de vie empiriques nécessite un grand nombre d'essais de durée de vie, qui sont coûteux et longs à réaliser. Ces modèles empiriques ne sont également fiables que sur les plages de chargement testées, soit des conditions de chargement extrêmement accélérées (grandes amplitudes ΔT_j) par rapport à l'utilisation réelle d'un module, afin de réduire le temps des essais de durée de vie. Ces modèles n'incluent également aucune connaissance physique, et ne permettent ni de différencier les mécanismes d'endommagement du module, ni de savoir s'ils interagissent entre eux. Par conséquent, il est difficile d'extrapoler les prédictions des modèles empiriques vers des conditions normales d'utilisation, qui correspondent à de faibles amplitudes thermiques.

1.4.2 Modèles basés sur la physique

Afin de tenter de pallier ces difficultés, des modèles spécifiques à la dégradation des brasures [LEE et al. 2000] et au décollement des fils de connexion ont été développés. Ces modèles ne dépendent plus comme précédemment d'une grandeur représentant la sollicitation globale du module (l'amplitude de la température de jonction), mais de grandeurs physiques locales directement responsables de la propagation des fissures, d'où le nom attribué à cette catégorie de modèles. On retrouve ainsi la loi de Coffin-Manson, reliant la durée de vie à l'amplitude cyclique $\Delta\varepsilon_p$ des déformations plastiques :

$$N_f = a(\Delta\varepsilon_p)^n \quad (1.2)$$

Pour modéliser de plus faibles chargements, l'amplitude $\Delta\varepsilon_e$ des déformations élastiques est plutôt utilisée, ce qui correspond à la loi de Basquin :

$$N_f = a(\Delta\varepsilon_e)^n \quad (1.3)$$

Il est également possible de combiner ces deux dernières relations afin d'obtenir la relation entre l'amplitude des déformations totales et la durée de vie.

D'autres modèles se basent sur l'énergie de déformation dissipée lors d'un cycle d'hystérésis. Il est alors possible de modéliser plus finement le comportement, en tenant compte du fluage par exemple. Dans [KOVAČEVIĆ et al. 2010], l'intégrale sur une boucle d'hystérésis de l'énergie de déformation élasto-visco-plastique Δw_{hys} est reliée à la durée de vie :

$$N_f = C(\Delta w_{hys})^{-n} \quad (1.4)$$

Une autre catégorie regroupe les modèles simulant la propagation de l'endommagement, en s'inspirant de la loi de Paris. Cette dernière décrit l'évolution de la vitesse de propagation d'une fissure en fonction du facteur d'intensité des contraintes ou d'une autre grandeur critique. Dans ces modèles, la fissure tridimensionnelle est ramenée à une fissure équivalente unidirectionnelle. Le nombre de cycles N_0 nécessaires pour initier la fissure, puis sa vitesse de propagation $\frac{da}{dN}$, sont décrits par le même type de relations que dans les modèles précédents. L'amplitude d'énergie de déformation viscoplastique ΔW , calculée par un modèle éléments finis, est par exemple utilisée dans [DARVEAUX 2002] :

$$N_0 = K_1(\Delta W)^{K_2} \quad (1.5)$$

et

$$\frac{da}{dN} = K_3(\Delta W)^{K_4} \quad (1.6)$$

Ce modèle a aussi été utilisé pour modéliser la propagation de fissures dans les brasures [STEINHORST et al. 2013]. Enfin, une relation similaire portant sur l'intégrale de la déformation de fluage à la place de ΔW est utilisée dans [DÉPLANQUE et al. 2006; DÉPLANQUE 2007].

Toutes les constantes de ces modèles sont, comme pour les modèles empiriques, obtenues à l'aide d'essais expérimentaux de durée de vie. Ces modèles de durée de vie sont combinés avec des modèles physiques numériques qui permettent d'obtenir les valeurs des déformations ou énergies [SCHILLING et al. 2012; DUDEK et al. 2015; DORNIC et al. 2019; Y. HUANG et al. 2019; SHISHIDO et al. 2019; GRAMS et al. 2020]. L'extrapolation vers des conditions de vie réelles est donc plus fiable. Les modèles numériques permettent également d'apporter une compréhension physique des phénomènes et des paramètres responsables de la dégradation des modules. Par exemple, une modélisation de la propagation de l'endommagement à l'interface fil-métallisation a été conduite dans [L. YANG et al. 2011]. Le modèle développé tient compte de la diminution de l'endommagement due aux phénomènes de recristallisation se produisant à des températures élevées.

Des modèles éléments finis sont également utilisés afin de modéliser numériquement la propagation de fissure. Dans le domaine de l'électronique de puissance, des modèles de zones cohésives [ELICES et al. 2002] sont traditionnellement utilisés, bien que d'autres méthodes puissent être employées comme la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) qui ne nécessite pas de prédéfinir un chemin de fissuration [MOËS et al. 1999; FRIES et BELYTSCHKO 2010], ou encore la méthode de fissuration par champs de phase [BOURDIN et al. 2008], par exemple. De nombreux travaux ont récemment utilisé la méthode des zones cohésives pour prédire la propagation de fissures au niveau des fils de connexion [VAN HAL et al. 2007; DUDEK et al. 2017; DORNIC 2019; HALOUANI et al. 2022] ou au niveau des joints de brasure [Q. YANG et al. 2004; BENABOU et al. 2013]. La méthode a également été appliquée à l'échelle microscopique pour obtenir le chemin de fissuration à l'échelle des grains [LE et al. 2017; LUO et al. 2021; SHQAIR et al. 2022a].

Grâce à la modélisation des phénomènes physiques, les modèles numériques contribuent à la compréhension de l'influence des paramètres sur l'endommagement du module, par exemple le chargement thermique [YIN et al. 2008; MUSALLAM et al. 2014], l'épaisseur de la brasure et la forme des fils [H. LU et al. 2009], ou le temps d'échauffement t_{ON} [OUHAB et al. 2023]. Les modèles numériques permettent également de pouvoir mener des études d'optimisation de paramètres de design, comme la forme des fils [ZHAO et al. 2017] ou leur orientation [SIPPEL et al. 2023]. Enfin, les modèles physiques rendent possible l'étude des couplages des différents mécanismes de dégradation, comme dans [GRAMS et al. 2020] où un modèle combinant l'endommagement des fils de connexion et l'endommagement de la brasure est développé.

Notons que bien que cette dernière classe de modèles ne repose pas sur des essais expérimentaux de durée de vie, un certain nombre d'essais reste tout de même nécessaire. En effet, ces derniers permettent de recalibrer les paramètres des modèles, notamment les paramètres liés à la propagation de la fissure, et également de valider les modèles numériques.

1.4.3 Cumul d'endommagement

Certains modèles présentés précédemment, comme les modèles de Coffin-Manson (1.1) ou (1.2), relient la durée de vie du module à l'amplitude cyclique du chargement, ou à des grandeurs physiques reliées à l'endommagement. Un chargement réel est constitué de cycles de différentes amplitudes, ce qui le rend plus complexe. Afin de prendre en compte l'effet de chaque cycle sur l'endommagement du module, un algorithme de type Rainflow [DOWNING et SOCIE 1982] est d'abord utilisé pour identifier chaque type de cycle (chaque cycle correspondant à une amplitude différente) et dénombrer leur occurrence. Une loi de cumul d'endommagement

de Miner [MINER 1945] est ensuite utilisée pour additionner les endommagements associés à chaque type de cycle. Cette loi suppose une indépendance de chaque cycle sur la durée de vie du module. Elle définit un endommagement d global, évoluant entre 0 lorsque la structure est complètement saine, et 1 lorsqu'elle a atteint sa fin de vie. Si un type i de cycles, d'amplitude fixée, conduit à une durée de vie N_i d'après le modèle de durée de vie, alors appliquer n_i cycles de cette amplitude produit un endommagement $d_i = n_i/N_i$. La loi de Miner additionne les endommagements d_i associés à chaque type de cycle :

$$d = \sum_i d_i = \sum_i \frac{n_i}{N_i} \quad (1.7)$$

et le module atteint sa fin de vie lorsque l'endommagement d atteint 1.

La loi de Miner permet de prendre très simplement en compte l'effet de cycles de différentes amplitudes et a été utilisée dans de nombreuses études [MUSALLAM et al. 2008; FALCK et al. 2015; L. LI et al. 2021]. En revanche, l'hypothèse d'indépendance des effets des cycles (accumulation linéaire de l'endommagement) n'est pas forcément vérifiée et constitue une limite de la méthode [ANTONOPOULOS et al. 2020].

1.5 Estimation de la durée de vie restante

Les modèles présentés dans le paragraphe précédent permettent de prédire la durée de vie d'un module connaissant le chargement appliqué. Un autre aspect important dans la fiabilité des systèmes est de pouvoir prédire leur durée de vie restante au cours de leur fonctionnement. De manière générale, trois types d'approches existent. Le premier type regroupe les approches basées uniquement sur des données [KABIR et al. 2012; HAQUE et al. 2017], le deuxième celles s'appuyant sur un modèle de durée de vie [DEGRENNÉ et al. 2015], et le troisième les méthodes combinant les données et les modèles.

Les approches basées sur les données reposent sur l'analyse de l'évolution des indicateurs de défaillance, et ont pour avantage de ne pas avoir besoin de modèles physiques qui peuvent être complexes. Elles se divisent en deux catégories. Les méthodes de la première utilisent uniquement les mesures de l'indicateur du module réalisées jusqu'à l'instant présent pour prédire la durée de vie restante. Quant aux méthodes de la deuxième catégorie, elles utilisent les évolutions mesurées jusqu'à défaillance de nombreux modules afin d'en construire un modèle. Ce dernier est ensuite utilisé pour prédire la durée de vie restante du module étudié. Dans le cadre de cette première approche, un modèle d'évolution d'un indicateur de défaillance a été développé à partir d'observations de cet indicateur pour différents modules dans [CELAYA et al. 2011]. Le modèle contient des paramètres qui varient en fonction des modules et qu'il faut donc recalculer. Ce recalage s'effectue à l'aide des mesures réalisées jusqu'à l'instant présent sur le module, et s'effectue en temps réel, au fur et à mesure de l'assimilation des mesures. Pour cela, plusieurs méthodes sont implémentées : le processus de régression gaussien [ALI et al. 2017], le filtre de Kalman étendu et le filtre particulaire [ZIO et PELONI 2011; HAQUE et al. 2017; Y. LU et CHRISTOU 2019]. Dans la seconde catégorie, les mêmes méthodes sont utilisées, mais appliquées à un modèle empirique d'évolution de l'indicateur de défaillance, obtenu avec les mesures de précédents modules [SAHA et al. 2011]. Des méthodes utilisant des réseaux de neurones ont également été utilisées pour prédire la durée de vie restante [ALGHASSI et al. 2015; W. LI et al. 2020]. Dans [NAZAR 2023], l'évolution de la tension V_{CE} est modélisée par un processus gamma, permettant de modéliser son accroissement monotone dû à l'accumulation d'endommagement à chaque cycle. A chaque nouvelle mesure assimilée, les paramètres du modèle sont d'abord recalés, puis le modèle est utilisé pour prédire la durée de vie restante.

Le deuxième type d'approches utilise des modèles de durée de vie, principalement ceux basés sur la température de jonction. La méthode consiste tout d'abord à évaluer l'état de dégradation du module à l'instant présent, à l'aide du modèle de durée de vie et d'un algorithme de comptage des cycles thermiques de type Rainflow, ou un algorithme plus adapté au temps réel [DEGRENNÉ et al. 2015]. La température de jonction peut-être soit directement mesurée par des thermocouples, ou indirectement calculée par la mesure de paramètres électriques thermo-sensibles (la tension V_{CE} par exemple). Une fois l'état de santé du module évalué, la prédiction de la durée de vie est extrapolée linéairement. Si le profil de mission (l'amplitude des cycles de courant, et donc de température) est connu, le modèle de durée de vie peut être évalué pour prédire la durée de vie restante. Des approches différentes sont développées par [DEGRENNÉ et MOLLOV 2018], où un modèle reliant l'augmentation de la résistance électrique de la métallisation et des interconnexions en fonction du nombre de cycles est développé. A un cycle n , la mesure de la tension *on-stage* V_{on} au cours des cycles précédents permet tout d'abord de recalibrer les paramètres du modèle, afin de prédire ensuite la durée de vie restante. Dans [NAZAR et al. 2020] l'augmentation de résistance électrique due à la dégradation des connexions fils-métallisation est décrite par un modèle analytique dépendant de la longueur de fissure. A un cycle n , la mesure de l'augmentation de la tension V_{CE} permet d'obtenir la longueur de fissure équivalente. Une vitesse de propagation est ensuite estimée avec la mesure précédente, ce qui permet d'extrapoler la longueur de fissure sur les cycles suivants, et de prédire la durée de vie restante.

L'utilisation de modèles numériques complexes dans l'optique de la prédiction de durée de vie restante reste encore très limitée par leurs coûts de calcul. Les modèles utilisés ne tiennent pas non plus compte des incertitudes existantes sur certains paramètres des modules, provenant par exemple des matériaux ou du procédé de fabrication, qui influent sur la durée de vie des modules. Afin de pouvoir utiliser des modèles physiques complexes, modélisant finement les phénomènes physiques présents au sein du module, et de pouvoir les utiliser dans un cadre de propagation d'incertitudes, ce travail de thèse porte sur le développement de modèles réduits paramétrés. La réduction de modèles est une thématique particulièrement novatrice dans le domaine de l'électronique de puissance, dans lequel peu de travaux existent à ce sujet. Citons néanmoins les travaux portant sur la réduction de modèle par troncature modale appliqués à un module IGBT [DA SILVA 2015]. Une fois le modèle réduit obtenu, celui-ci peut être utilisé dans une phase en ligne afin de prédire la durée de vie restante du module au cours de son utilisation. Dans ce travail, et dans un premier temps, les paramètres du modèle sont recalés par l'inférence bayésienne, à l'aide de mesures provenant du module. Dans un second temps, la densité de probabilité portant sur les paramètres est propagée à travers le modèle de durée de vie. Cela permet d'obtenir une distribution de la durée de vie restante, comme illustré sur la Figure 1.9. L'utilisation d'un modèle réduit permet d'effectuer ces deux phases avec une grande efficacité numérique.

Une difficulté majeure réside dans la construction de modèles réduits de comportements non-linéaires complexes, comme ceux rencontrés dans les modules de puissance. Dans ce cadre, après une présentation des méthodes usuelles de réduction de modèle, une approche permettant le développement d'un modèle réduit thermo-mécanique PGD d'un module IGBT est proposée dans le chapitre suivant.

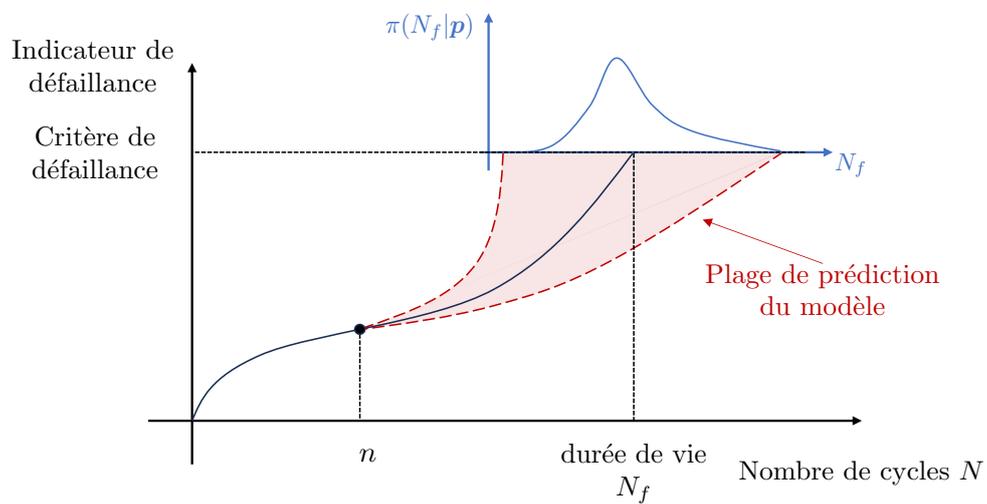


FIGURE 1.9 – Illustration de la prédiction probabiliste de la durée de vie restante à un cycle n , par propagation d'incertitudes à travers le modèle de durée de vie.

Chapitre 2

Modèle réduit thermo-mécanique d'un module IGBT par la méthode Proper Generalized Decomposition

Ce chapitre présente tout d'abord une revue succincte des méthodes de réduction de modèle. L'une d'elle, la Proper Generalized Decomposition (PGD), est ensuite utilisée pour construire un modèle réduit d'un module de puissance, dont le comportement thermo-mécanique est fortement couplé par une fissure se propageant dans la brasure de la puce. La méthode est implémentée dans un code éléments finis 2D dans Matlab. L'objectif de ce chapitre, dont le contenu est en partie adapté des articles [SCHULER *et al.* 2022a ; b], est de présenter la méthode PGD et ses spécificités, avant de l'appliquer à un problème tridimensionnel traité avec Ansys dans le chapitre suivant.

Sommaire

2.1	Les méthodes de réduction de modèle	23
2.1.1	Les méthodes <i>a posteriori</i>	24
2.1.2	La Proper Generalized Decomposition, une méthode de réduction de modèle <i>a priori</i>	26
2.2	Illustration de la POD et la PGD sur un exemple simple	28
2.2.1	Illustration de la POD	28
2.2.2	Illustration de la PGD	31
2.3	Définition du problème thermo-mécanique	37
2.4	Modèle de zone cohésive	38
2.5	Formulation faible du problème thermo-mécanique	39
2.5.1	Problème thermique	39
2.5.2	Problème mécanique	41
2.6	Prise en compte des variations de géométrie et de conditions aux limites	42
2.6.1	Changement de variables	42
2.6.2	Réécriture du problème thermique	44
2.6.3	Réécriture du problème mécanique	45
2.7	Résolution du problème couplé par PGD	45
2.7.1	Méthode itérative globale pour la résolution du problème couplé	45
2.7.2	Solution PGD du problème thermique	47
2.7.3	Solution PGD du problème mécanique	48
2.7.4	Orthogonalisation des modes PGD	49
2.8	Résultats	50

2.8.1	Géométrie, propriétés matériaux et conditions aux limites	50
2.8.2	Résultats PGD	52
2.8.3	Post-traitement : vers un modèle de durée de vie	55
2.8.4	Difficultés rencontrées	56
2.9	Conclusions du développement du modèle réduit thermo-mécanique	57

2.1 Les méthodes de réduction de modèle

Les méthodes de réduction de modèle ont été développées dans l'optique de réduire les temps de calcul des modèles numériques, sans dégrader leur richesse physique par simplification (utilisation d'un modèle 2D ou 1D à la place d'un modèle 3D, simplification des couplages multiphysiques...), mais en exploitant plutôt la redondance d'information entre les calculs ou dans l'espace des solutions. Les méthodes de réduction de modèle consistent à chercher la solution dans un espace de plus faible dimension, généré par une base. Elles peuvent se diviser en deux catégories. La première regroupe les méthodes *a posteriori*, qui exploitent les résultats de calculs précédents afin de construire la base réduite. Une fois la base générée, le problème initial est projeté dans l'espace réduit afin de déterminer la solution pour un nouveau jeu de paramètres. La seconde catégorie est celle des méthodes *a priori*, qui ne nécessitent aucune information afin de construire la base ou directement la solution du problème.

Ces deux catégories de méthodes, que nous présentons par la suite, calculent la solution u d'un problème satisfaisant une équation aux dérivées partielles représentative du problème physique étudié. Le champ solution dépend généralement de l'espace x , du temps t et d'un certain nombre de paramètres utiles à l'ingénieur pour des fins de dimensionnement (optimisation, propagation d'incertitudes,...) ou de recalage de modèle, regroupés dans un vecteur p . Le champ solution est donc de la forme : $u = u(x, t, p)$. Si N_x représente le nombre de degrés de liberté spatiaux du problème, N_t le nombre d'instantanés temporels, et si N_p points sont utilisés pour discrétiser chaque paramètre, l'utilisation d'une approche classique de force brute consistant à résoudre le problème spatio-temporel pour toutes les valeurs des paramètres conduirait à la résolution de $N_t \times (N_p)^d$ problèmes éléments finis de taille $N_x \times N_x$, où d est le nombre de paramètres. Le nombre de degrés de liberté N_x pouvant être grand, de l'ordre de plusieurs millions pour les problèmes industriels, le temps de calcul associé à cette approche est rédhibitoire, et augmente exponentiellement avec le nombre de paramètres. Les méthodes *a posteriori* cherchent à réduire le coût de calcul associé aux résolutions des problèmes spatiaux à chaque pas de temps et valeur de paramètres, en cherchant la solution dans un espace de faible dimension $N \ll N_x$ en exploitant des informations issues de solutions pré-calculées. Une première méthode *a priori*, appelée APR pour *A Priori model Reduction* [ALLERY et al. 2011], s'apparente aux méthodes *a posteriori* en construisant également une base spatiale puis en projetant l'équation à résoudre dans cette base. La méthode diffère des méthodes *a posteriori* en construisant la base sans aucune connaissance issue de solutions pré-calculées, mais en procédant par des itérations successives améliorant une base initiale. La Proper Generalized Decomposition (PGD) est une autre méthode *a priori*. Cette méthode ne cherche pas à réduire la dimension spatiale, mais cherche la solution paramétrique dans l'espace des fonctions à variables séparées. Cette forme de la solution permet d'obtenir un problème sur chacune des variables. Ainsi, l'utilisation de cette méthode conduit à un coût de calcul linéaire en fonction du nombre de paramètres. Ce temps est donc proportionnel à la somme du temps de la résolution de chaque problème, c'est-à-dire le temps de résolution d'un système matriciel de taille $N_x \times N_x$, plus le temps nécessaire pour résoudre le problème temporel et chacun des problèmes paramétriques. En effet, la résolution d'un seul problème matriciel est requise pour obtenir une solution pour tout le domaine temporel et paramétrique. La "malédiction de la dimension" est ainsi levée. De plus, le coût de calcul des problèmes temporel et paramétriques est très faible comparé à la résolution du problème matriciel.

Le gain de temps de calcul obtenu grâce aux méthodes de réduction de modèle permet de les utiliser en temps réel dans le cadre du suivi de procédés [GHNATIOS et al. 2012; AGUADO et al. 2015; RUBIO et al. 2019a], du recalage de paramètres [GREPL et al. 2007; NGUYEN et al. 2010; LOUF et CHAMPANEY 2013; NADAL et al. 2015], du contrôle ou du suivi de l'état de santé des structures

[PEHERSTORFER et WILLCOX 2015; MARCHAND et al. 2016; GONZÁLEZ et al. 2017; NASIKA et al. 2022], ou de propagation d'incertitudes [CHEVREUIL et NOUY 2011; 2012; LEGRAIN et al. 2017]. L'emploi des méthodes de réduction de modèle s'effectue en deux phases distinctes. La première, dite *offline*, est la phase de calcul intensif permettant d'obtenir la base réduite ou le modèle réduit PGD. La seconde, dite *online*, consiste à employer ces derniers en temps réel pour l'application souhaitée. Les principales méthodes de réduction de modèle appartenant aux deux catégories sont détaillées ci-après.

2.1.1 Les méthodes *a posteriori*

La méthode Proper Orthogonal Decomposition

La méthode Proper Orthogonal Decomposition (POD) [CHATTERJEE 2000; KUNISCH et VOLKWEIN 2001; GUNZBURGER et al. 2007] a tout d'abord été introduite par M. Loève [LOEVE 1948] et a pris initialement le nom de Karhunen-Loève Expansion ou Decomposition (KLE ou KLD) [NEWMAN 1996; H. PARK et CHO 1996]. La POD est également assimilée à l'analyse en composantes principales (PCA) [WOLD et al. 1987; KARAMIZADEH et al. 2013; JOLLIFFE et CADIMA 2016]. Ces méthodes sont toutes équivalentes en dimension finie.

La POD consiste dans un premier temps à construire une base spatiale $\mathcal{B} = \{\Phi_i(\mathbf{x})\}_{i=1,\dots,N}$ génératrice d'un espace de faible dimension approximant l'espace des solutions. Dans un second temps, la base est utilisée afin de calculer une solution u_r appartenant à l'espace réduit :

$$u_r(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t, \mathbf{p}) \Phi_i(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

Le problème est donc ramené à la détermination des N coefficients α_i à chaque instant temporel. La base est obtenue à l'aide de $N_s > N$ observations, ou *snapshots*, u_k issues de solutions calculées à n_t divers instants t_1, \dots, t_{n_t} et n_p valeurs de paramètres $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n_p}$ ($N_s = n_t \times n_p$). On espère que ces observations soient suffisamment représentatives de l'espace des solutions. La base orthonormée $\{\Phi_i\}_{i=1,\dots,N}$ est cherchée comme la meilleure base approximant l'espace généré par les observations, c'est-à-dire la base minimisant l'erreur de projection :

$$\{\Phi_i\}_{i=1,\dots,N} = \underset{\{\Psi_i\}}{\operatorname{argmin}} \sum_{k=1}^{N_s} \left\| u_k - \sum_{i=1}^N (u_k, \Psi_i) \Psi_i \right\|^2 \quad (2.2)$$

La notation (\bullet, \bullet) dénote un produit scalaire. Ce problème de minimisation est équivalent à rechercher les N plus grandes valeurs propres de la matrice \mathbf{X} regroupant les observations. Cette matrice contient les *snapshots* sur chaque colonne :

$$\mathbf{X} = [u(\mathbf{x}, t_1, \mathbf{p}_1) | \dots | u(\mathbf{x}, t_{n_t}, \mathbf{p}_1) | \dots | u(\mathbf{x}, t_1, \mathbf{p}_{n_p}) | \dots | u(\mathbf{x}, t_{n_t}, \mathbf{p}_{n_p})] \quad (2.3)$$

Une décomposition en valeurs singulières, ou *Singular Value Decomposition* (SVD), peut être alors effectuée sur cette matrice :

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V} \quad (2.4)$$

Les colonnes $\mathbf{U}_{\cdot j}$ de la matrice \mathbf{U} représentent une base spatiale orthonormée, tandis que les lignes \mathbf{V}_i de la matrice \mathbf{V} forment une base temporelle également orthonormée :

$$\mathbf{U}_{\cdot j}^T \mathbf{U}_{\cdot k} = \delta_{jk} \quad ; \quad \mathbf{V}_i^T \mathbf{V}_k = \delta_{ik} \quad (2.5)$$

où δ_{jk} est le symbole de Kronecker. La matrice $\mathbf{\Sigma}$ est une matrice diagonale contenant les valeurs singulières de \mathbf{X} , c'est-à-dire les coefficients associés à chaque couple de modes spatio-temporels. Les matrices sont ordonnées de telle sorte que les valeurs singulières soient rangées

dans l'ordre décroissant. Ainsi, les modes sont rangés de ceux ayant la plus grande amplitude, et comportant donc le plus d'information (ou d'énergie), aux modes de plus faible amplitude et comportant par conséquent le moins d'information.

Une base spatiale réduite peut alors être extraite en tronquant la base spatiale aux N plus grands vecteurs de la matrice U , en supposant que ces N vecteurs suffisent pour générer une bonne approximation de l'espace des solutions. Le nom de Proper Orthogonal Decomposition vient du fait que la base obtenue est orthonormée pour la norme L_2 , qui est la norme associée au produit scalaire usuel : la norme euclidienne d'un vecteur R est $\|R\|_{L_2} = \sqrt{R^T R}$.

Une fois la base de l'espace réduit obtenue, la solution du problème pour un nouveau jeu de paramètres p est ensuite calculée en projetant l'équation aux dérivées partielles du problème sur la base, c'est la méthode POD-Galerkin. On obtient alors un système de taille $(N \times N)$ à résoudre à chaque pas de temps, afin de déterminer les coefficients $\alpha_i, i = 1, \dots, N$. Ce système est de petite taille et par conséquent bien plus rapide à résoudre que le problème éléments finis. Cependant, il nécessite le calcul des opérateurs matriciels du problème éléments finis (matrice de rigidité, de masse,...) qui dépendent généralement des paramètres p et parfois du temps. Lorsque le problème est non-linéaire, l'évaluation de ces termes s'avère coûteuse.

Bien que l'erreur commise en tronquant la base aux N plus grandes valeurs propres puisse être quantifiée et contrôlée, la qualité de l'approximation de l'espace réduit dépend également fortement du choix des *snapshots*. Si des informations ne sont pas contenues dans les *snapshots* choisis, la base générée ne pourra pas non plus les contenir, par conséquent. Afin de remédier à ce problème, la méthode de base réduite propose une approche permettant de déterminer de manière optimale les paramètres p_j avec lesquels la base sera construite.

Méthode de base réduite

La méthode de base réduite [MADAY et RØNQUIST 2002 ; ROZZA et al. 2007 ; QUARTERONI et al. 2011 ; DROHMANN et al. 2012] utilise un algorithme glouton, ou *greedy* en anglais, pour construire la base réduite. L'algorithme glouton consiste à construire les modes de la base les uns après les autres, en sélectionnant les instants temporels et les paramètres optimaux qui permettent d'enrichir la base.

Le premier instant temporel et le premier jeu de paramètres peuvent par exemple être tirés aléatoirement afin d'initier l'algorithme et former le premier élément de la base. La sélection de l'instant temporel et des paramètres optimaux suivants s'effectue ensuite en maximisant l'erreur commise entre la solution u_r appartenant à l'espace réduit de l'itération actuelle et la solution exacte u . En d'autres termes, si à l'itération i une base réduite est connue, les paramètres permettant d'enrichir la base sont déterminés par :

$$(t_{i+1}, \mathbf{p}_{i+1}) = \underset{(t, \mathbf{p})}{\operatorname{argmax}} \|u(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}) - u_r(\mathbf{x}, t, \mathbf{p})\| \quad (2.6)$$

Cette erreur ne pouvant être calculée sans connaître la solution exacte sur l'espace des paramètres et du temps, un estimateur d'erreur est utilisé à la place, en calculant le résidu obtenu en injectant la solution u_r dans l'équation du problème [ROZZA et al. 2008]. La base est ensuite enrichie par l'ajout de la solution $u(\mathbf{x}, t_{i+1}, \mathbf{p}_{i+1})$.

La base réduite ainsi générée contient un maximum d'informations et ne nécessite généralement pas de compression par SVD, sauf dans des approches légèrement différentes, de type POD-*greedy* [HESTHAVEN et al. 2022].

2.1.2 La Proper Generalized Decomposition, une méthode de réduction de modèle *a priori*

La méthode Proper Generalized Decomposition (PGD) a été initialement introduite par P. Ladevèze [LADEVÈZE 1989] pour la résolution de problèmes non-linéaires dépendant du temps. La méthode a été par la suite généralisée à de nombreux problèmes. Une revue complète de la méthode et de ses applications peut être trouvée dans [CHINESTA et al. 2013a; CHINESTA et al. 2013b]. Tout comme les méthodes *a posteriori*, la PGD calcule la solution du problème dans un espace de dimension réduite. Cependant, contrairement à ces méthodes, la PGD ne génère pas une base d'un espace réduit spatial, mais cherche la solution dans l'espace des fonctions s'écrivant à variables séparées. La PGD n'utilise pas non plus d'informations provenant de solutions pré-calculées pour construire la solution, mais la construit directement à partir de l'équation à résoudre. Les modes des méthodes *a posteriori* sont des modes spatiaux, et afin de calculer une solution, il faut déterminer à chaque pas de temps les coefficients des vecteurs de la base. Pour des problèmes non paramétrés, la PGD permet, elle, d'obtenir la solution comme une somme de modes spatiaux-temporels, qui s'écrivent sous la forme d'un produit de fonctions à variables séparées [AMMAR et al. 2006; CHINESTA et al. 2011] :

$$u_r(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(t) \Lambda_i(\mathbf{x}) \quad (2.7)$$

Les modes sont générés par un algorithme glouton, c'est-à-dire les uns après les autres [NIROOMANDI et al. 2013; DÍEZ et al. 2018; DÍEZ et al. 2020]. L'algorithme calcule tout d'abord le premier mode, soit la solution de rang 1, qui permet d'approximer au mieux la solution exacte :

$$u_1(\mathbf{x}, t) = \lambda_1(t) \Lambda_1(\mathbf{x}) \quad (2.8)$$

La détermination du mode conduit à deux problèmes couplés sur la fonction temporelle et la fonction spatiale. Ce problème est résolu par un algorithme de point fixe qui résout alternativement les problèmes et qui itère jusqu'à convergence, ou jusqu'à un nombre maximal d'itérations.

En considérant cette première approximation, un deuxième mode est ensuite calculé, et ainsi de suite jusqu'à ce que la norme du mode ajouté soit plus petite qu'un critère fixé. Le critère d'arrêt de l'algorithme peut également être basé sur le résidu de l'équation à résoudre. Une étape optionnelle consiste à mettre à jour les fonctions temporelles calculées jusqu'alors, en conservant les fonctions spatiales. Cette étape, appelée *update*, permet d'améliorer la convergence globale de l'algorithme, et est relativement peu chère comparée au calcul d'ajout d'un nouveau mode [NOUY 2010; LADEVÈZE et CHAMOIN 2011; BONITHON et NOUY 2012]. Contrairement à la POD, les fonctions spatiales obtenues avec la PGD ne sont pas forcément orthogonales entre elles. Il peut néanmoins être intéressant de les orthogonaliser, ce qui évite que la qualité de la base générée se dégrade au fur et à mesure de l'ajout de modes, ce qui se produit lorsque les modes ajoutés sont redondants. Dans le cadre des problèmes d'évolution, l'orthonormalisation par procédé de Gram-Schmidt améliore grandement la qualité de la solution obtenue [NOUY 2010; LADEVÈZE et CHAMOIN 2011].

La PGD permet également de traiter les problèmes paramétriques. Pour cela, deux approches coexistent. La première consiste à résoudre uniquement des problèmes espace-temps, à valeurs de paramètres fixées, et à explorer de cette façon l'espace paramétrique. L'utilisation d'un algorithme adapté, tel qu'un algorithme de krigeage [KRIGE 1951; OLIVER et WEBSTER 1990], peut permettre de sélectionner de manière intelligente les valeurs des paramètres pour lesquelles la solution est déterminée. La méthode utilisée pour résoudre les problèmes non-linéaires par PGD, appelée

méthode LaTin [LADEVÈZE 1989; LADEVÈZE 1999; LADEVÈZE et al. 2010], permet d’initialiser le calcul de la solution pour un nouveau jeu de paramètres avec une solution précédemment calculée, afin d’accélérer la convergence. Il faut toutefois que la solution servant d’initialisation de l’algorithme soit cinématiquement admissible, et donc que le paramètre ne porte pas sur les conditions aux limites. Cette méthode a été utilisée pour de nombreuses études [BOUCARD et CHAMPANEY 2003; HEYBERGER et al. 2012; LAURENT et al. 2013; NÉRON et al. 2015; SCANFF et al. 2022] et permet de réduire significativement le temps de calcul comparé à la méthode de force brute.

La seconde approche consiste à obtenir explicitement la solution du problème paramétrique en considérant les paramètres comme extra-coordonnées [CHINESTA et al. 2010; LEYGUE et VERRON 2010; PRULIERE et al. 2010; AMMAR et al. 2013; BOUCINHA et al. 2014]. Les modes obtenus sont alors des modes portant sur l’espace, le temps et chacun des d paramètres p_k regroupés dans le vecteur \mathbf{p} :

$$u_r(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(t) \Lambda_i(\mathbf{x}) \prod_{k=1}^d \alpha_i^k(p_k) \quad (2.9)$$

Dans ce cadre multi-paramétrique, la PGD a été utilisée pour résoudre des problèmes dont les propriétés matériaux [VITSE et al. 2014; RUBIO et al. 2019b], le chargement [MODESTO et al. 2015], les conditions aux limites ou initiales [CHINESTA et al. 2013a], ou encore la géométrie [AMMAR et al. 2013; CHINESTA et al. 2013a; ZLOTNIK et al. 2015; CHAMOIN et al. 2016; CHAMOIN et THAI 2019; GARIKAPATI et al. 2020], sont paramétrés. La PGD a aussi été employée dans un cadre stochastique, lorsque les paramètres sont des variables aléatoires [NOUY 2007; 2008; CHEVREUIL et NOUY 2011; NOUY et al. 2011; CHEVREUIL et NOUY 2012]. La dépendance explicite de la forme (2.9) de la solution par rapport aux paramètres rend la PGD particulièrement adaptée aux problèmes d’identification et de recalage de modèle, ainsi qu’aux problèmes d’optimisation. En effet, au delà de l’évaluation de la solution, qui est directe par la PGD, les algorithmes de minimisation utilisés dans ces méthodes requièrent le gradient de la solution vis-à-vis des paramètres. Celui-ci est obtenu de manière explicite par la forme (2.9). Ainsi, la PGD permet d’obtenir la solution du problème et ses gradients dans une phase de calcul intensive *offline*, puis de les utiliser dans une phase *online* peu coûteuse, comme montré par exemple dans [LOUF et CHAMPANEY 2013; RUBIO et al. 2019a; b] pour le recalage de paramètres en temps réel.

La PGD a également fait l’objet de nombreux développements dans le cadre multiphysique [BERINGHIER et al. 2010; NÉRON et LADEVÈZE 2010; HENNERON et CLENET 2016; QIN et al. 2016; HENNERON et CLÉNET 2018; KRIMM et al. 2019; LARION et al. 2020]. Par ailleurs, des estimateurs d’erreur ont été développés afin de quantifier l’erreur commise par le modèle réduit PGD. Ceux-ci sont basés sur l’erreur en relation de comportement et la construction d’un champ équilibré [CHAMOIN et LADEVÈZE 2012; ALMEIDA 2013; LADEVÈZE et CHAMOIN 2013; CHAMOIN et al. 2016; 2017], sur la résolution de problèmes duaux [AMMAR et al. 2010; ALFARO et al. 2015; GARCÍA-BLANCO et al. 2017; KERGRENE et al. 2019; REIS et al. 2020; SMETANA et ZAHM 2020].

Pour ces différentes raisons, la Proper Generalized Decomposition sera utilisée dans la suite de ces travaux pour la construction des modèles réduits multiphysiques d’un module de puissance, dans l’optique de recalage de modèle et de propagation d’incertitudes. Dans un premier temps, la méthode est illustrée sur la résolution d’un problème de thermique 1D, puis est appliquée à un problème thermo-mécanique couplé modélisant le comportement d’un module de puissance.

2.2 Illustration de la POD et la PGD sur un exemple simple

Dans cette partie, les méthodes de réduction de modèle POD et PGD sont appliquées à un problème de thermique instationnaire unidimensionnel afin d'illustrer leurs principes et avantages. Le problème concerne l'étude d'un barreau, dont la température initiale est nulle, soumis à son extrémité gauche à un flux de chaleur q , comme représenté sur la Figure 2.1. La température de l'extrémité droite du barreau est maintenue constante à zéro. La longueur du



FIGURE 2.1 – Barreau de longueur L soumis à un flux thermique q à son extrémité gauche.

barreau est $L = 1\text{m}$. Afin d'obtenir l'évolution de la température $T(x, t)$, x étant la coordonnée spatiale et t le temps, le problème à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}T(x, t) - \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x, t) = 0 \\ T(x, 0) = 0 \\ k \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = q \quad , \quad T(L, t) = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

où $\alpha = k/c$ est le coefficient de "diffusivité", exprimé en $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$, avec k la conductivité et c la capacité thermique. Le coefficient α est pris comme paramètre, et le champ de température est cherché pour toute valeur de $\alpha \in [0, 8; 1, 2] \times 10^{-1}$. La solution analytique de ce problème s'écrit comme une somme infinie de sinus :

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \exp\left(-\alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) - \frac{qx}{L} \quad (2.11)$$

L'amplitude K_n décroît en $1/n$ avec le nombre de modes n . Ainsi, il est possible d'approximer la solution exacte en ne gardant qu'un nombre fini de termes. C'est ce que les méthodes de réduction de modèle vont chercher à faire, sans trop dégrader la qualité de la solution.

Le problème peut également être résolu par la méthode des éléments finis, avec un schéma d'Euler implicite. Après discrétisation, le problème s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{C} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{T} + \alpha \mathbf{K} \mathbf{T} = \mathbf{Q} \quad (2.12)$$

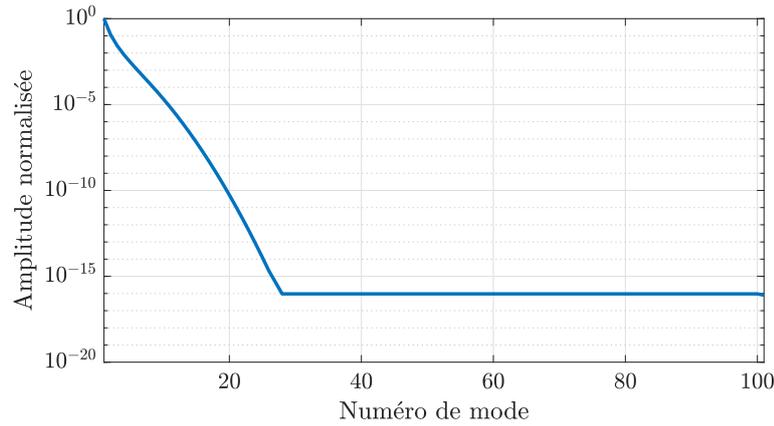
où \mathbf{T} est la température discrétisée spatialement et mise sous forme vectorielle. Une discrétisation spatiale avec $N_x = 101$ nœuds et une discrétisation temporelle avec $N_t = 201$ instants temporels sont utilisées. Le schéma d'Euler implicite conduit au problème matriciel suivant à résoudre, au pas de temps j :

$$\mathbf{K}_t \mathbf{T}_j = \mathbf{F} \quad (2.13)$$

avec $\mathbf{K}_t = \frac{1}{\Delta T} \mathbf{C} + \alpha \mathbf{K}$ et $\mathbf{F} = \mathbf{Q} + \frac{1}{\Delta T} \mathbf{M} \mathbf{T}_{j-1}$, et où \mathbf{T}_j et \mathbf{T}_{j-1} sont respectivement la température aux temps j et $j - 1$.

2.2.1 Illustration de la POD

Afin d'obtenir une base générant un espace de faible dimension approxinant l'espace des solutions $T(x, t, \alpha)$, le problème est résolu pour les deux bornes du coefficient de diffusivité : $\alpha = 8 \times 10^{-2} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ et $\alpha = 1,2 \times 10^{-1} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$. A chaque pas de temps, le vecteur solution est

FIGURE 2.2 – Décroissance des valeurs propres de la matrice des *snapshots*.

ajouté comme vecteur colonne à la matrice \mathbf{X} , comme décrit par l'équation (2.3). La décroissance des valeurs propres de la matrice des *snapshots* \mathbf{X} est montrée sur la Figure 2.2. La figure montre une décroissance rapide de la norme des modes : la norme du onzième mode est inférieure à 10^{-5} fois la norme du premier. Ainsi, les $N = 10$ premiers modes Φ_i , contenant la majorité de l'information captée par les *snapshots*, sont conservés pour générer l'espace réduit. Les trois premiers modes sont montrés sur la Figure 2.3. Le premier mode capte la décroissance exponentielle de la température dans le barreau. Ce mode contient la majorité de la solution. L'ajout de modes suivants permet d'enrichir la solution et de pouvoir décrire l'évolution temporelle et paramétrique.

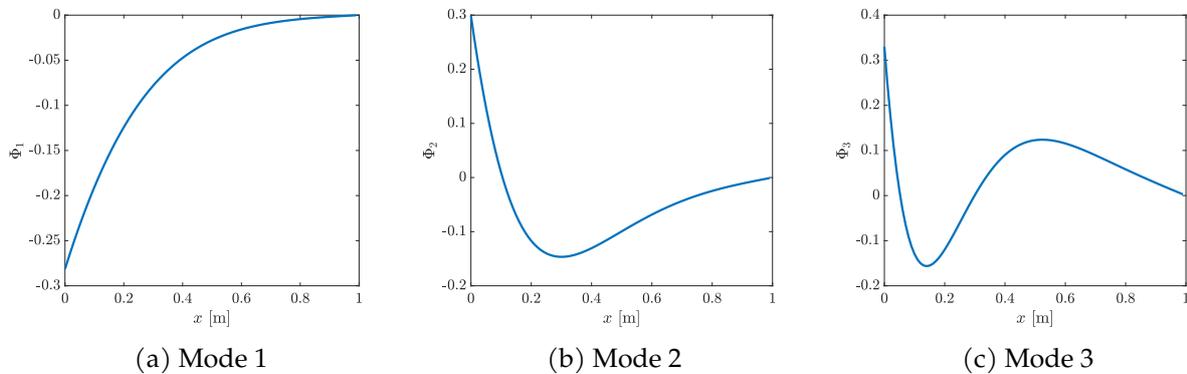


FIGURE 2.3 – Les trois premiers modes POD.

La solution pour une nouvelle valeur du coefficient de diffusivité, par exemple $\alpha = 1, 1 \times 10^{-1} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$, est ensuite calculée en déterminant, à chaque pas de temps j , les coefficients a_i de la combinaison linéaire des modes :

$$\mathbf{T}_j = \sum_{i=1}^N a_i \Phi_i \quad (2.14)$$

En projetant cette équation sur la base réduite, un système de taille $N \times N$ est obtenu, du type :

$$\mathbf{K}\mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (2.15)$$

où les coefficients K_{ij} de la matrice \mathbf{K} sont $K_{ij} = \Phi_i^T \mathbf{K}_t \Phi_j$, le vecteur \mathbf{A} contient les coefficients a_i et le second membre \mathbf{B} est défini par les coefficients $B_i = \Phi_i^T \mathbf{F}$. La Figure 2.4, comparant la

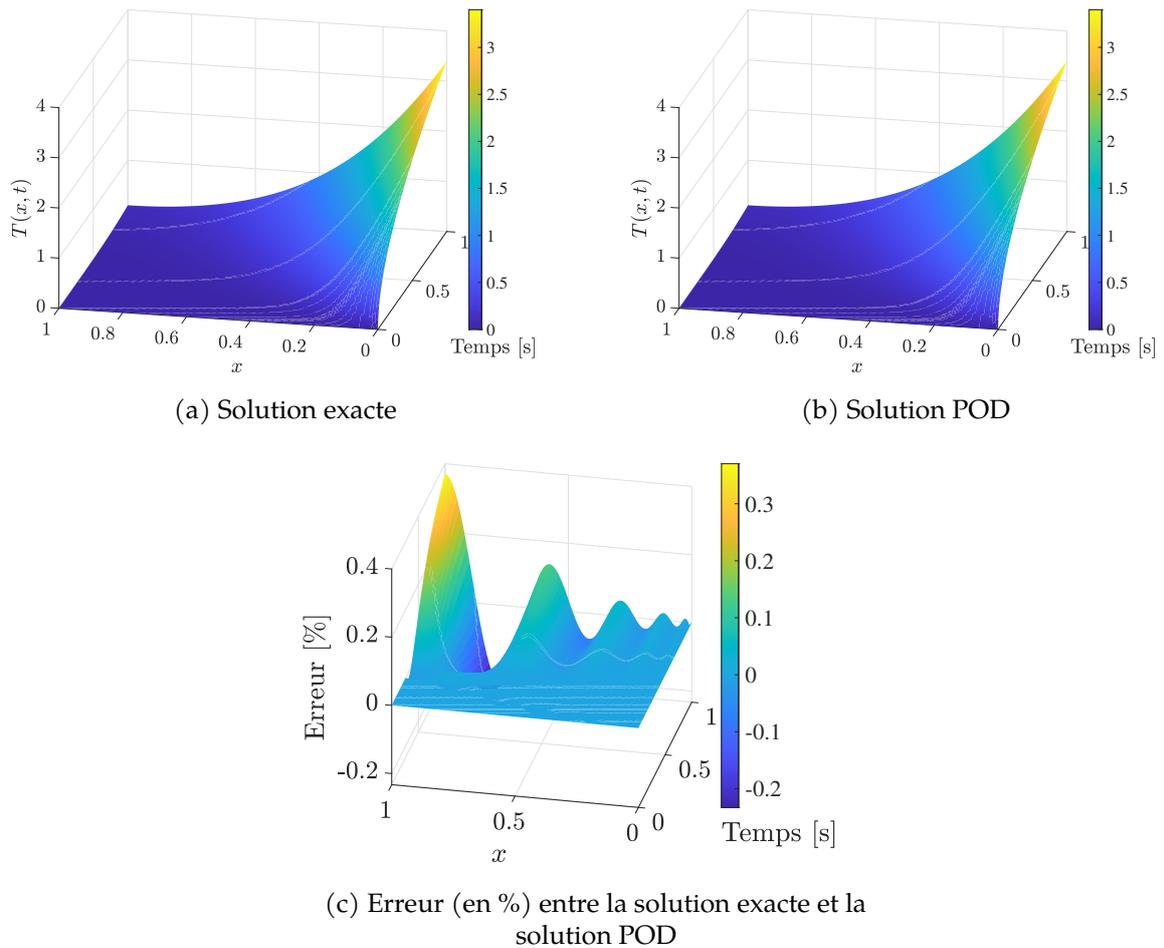


FIGURE 2.4 – Comparaison entre la solution exacte et la solution POD obtenue avec une base de 10 modes.

solution POD à la solution exacte, montre que l'erreur commise pour cette valeur de paramètre, définie par $e = (T_{exacte} - T_{POD})/T_{exacte}$ est au maximum égale à 0,37%.

Remarquons que la POD est une méthode non-intrusive par nature. En effet, la construction de la base réduite nécessite uniquement la solution du problème à différents instants temporels et différentes valeurs de paramètres, ce qui est très facilement réalisable avec un logiciel éléments finis commercial. Le calcul de la solution pour une nouvelle valeur de paramètres requiert uniquement les opérateurs éléments finis classiques associés au jeu de paramètres, qui sont également facilement exportables par le logiciel utilisé.

2.2.2 Illustration de la PGD

Formulation faible et problèmes PGD

La PGD consiste à chercher la solution dans l'espace généré par les fonctions s'écrivant comme un produit de fonctions à variables séparées. Pour cela, la solution est cherchée sous la forme d'une somme de modes, chacun appartenant à cet espace. Ainsi, la température est cherchée sous la forme suivante :

$$\mathbf{T}(x, t, \alpha) = \sum_{i=1}^N \mathbf{\Lambda}_i(x) \lambda_i(t) A_i(\alpha) \quad (2.16)$$

Les vecteurs $\mathbf{\Lambda}_i$ sont les fonctions dépendant de l'espace, ici écrites sous la forme discrétisée vectorielle. Les fonctions λ_i sont les fonctions temporelles, et les fonctions A_i sont les fonctions paramétriques, dépendantes du paramètre α . Dès lors, la PGD permet d'obtenir la solution du problème paramétré sur tout le domaine spatial, temporel et paramétrique. Contrairement à la POD, cette solution est calculée sans exploiter de solution pré-calculée. La PGD ne construit pas non plus de base du domaine réduit, mais calcule directement les modes composant la solution. Les modes sont calculés les uns après les autres, par un algorithme glouton. Supposons que l'algorithme ait obtenu, à l'itération $n - 1$, une solution T_{n-1} :

$$\mathbf{T}_{n-1}(x, t, \alpha) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{\Lambda}_i(x) \lambda_i(t) A_i(\alpha) \quad (2.17)$$

A l'itération n suivante, la solution est enrichie par l'ajout d'un nouveau mode $\mathbf{\Lambda}_n \lambda_n A_n$, de telle sorte que la solution T_n s'écrive :

$$\mathbf{T}_n = \mathbf{T}_{n-1} + \mathbf{\Lambda}_n \lambda_n A_n = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{\Lambda}_i \lambda_i A_i + \mathbf{\Lambda}_n \lambda_n A_n \quad (2.18)$$

Ce nouveau mode est obtenu en définissant une formulation faible généralisée du problème. Pour cela, la formulation forte du problème décrite par l'équation (2.12) est multipliée par une fonction test \mathbf{T}^* appartenant à l'ensemble des champs de température admissibles à zéro Θ_{ad}^0 , c'est-à-dire à l'ensemble des champs de température nuls sur les zones de température imposée. L'équation est ensuite intégrée sur le domaine temporel I_t et paramétrique I_α afin d'obtenir l'écriture suivante :

$$\int_{I_t} \int_{I_\alpha} \mathbf{T}^{*T} \mathbf{C} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{T} \, d\alpha \, dt + \int_{I_t} \int_{I_\alpha} \alpha \mathbf{T}^{*T} \mathbf{K} \mathbf{T} \, d\alpha \, dt = \int_{I_t} \int_{I_\alpha} \mathbf{T}^{*T} \mathbf{Q} \, d\alpha \, dt \quad , \quad \forall \mathbf{T}^* \in \Theta_{ad}^0 \quad (2.19)$$

La fonction test est choisie dans l'espace tangent du nouveau mode, inclus dans Θ_{ad}^0 . La fonction test s'écrit ainsi :

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{\Lambda}_n^* \lambda_n A_n + \mathbf{\Lambda}_n \lambda_n^* A_n + \mathbf{\Lambda}_n \lambda_n A_n^* \quad (2.20)$$

En injectant la forme de la solution (2.18) dans l'équation (2.19), l'équation portant sur les fonctions du nouveau mode est obtenue, en dénotant $\dot{\lambda}_n$ la dérivée (temporelle) de λ_n :

$$\begin{aligned} & \int_{I_t} \int_{I_\alpha} (\Lambda_n^* \lambda_n A_n + \Lambda_n \lambda_n^* A_n + \Lambda_n \lambda_n A_n^*)^T \mathbf{C} \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{T}_{n-1} + \Lambda_n \dot{\lambda}_n A_n \right) d\alpha dt \\ & + \int_{I_t} \int_{I_\alpha} \alpha (\Lambda_n^* \lambda_n A_n + \Lambda_n \lambda_n^* A_n + \Lambda_n \lambda_n A_n^*)^T \mathbf{K} (\mathbf{T}_{n-1} + \Lambda_n \lambda_n A_n) d\alpha dt \\ & = \int_{I_t} \int_{I_\alpha} (\Lambda_n^* \lambda_n A_n + \Lambda_n \lambda_n^* A_n + \Lambda_n \lambda_n A_n^*)^T \mathbf{Q} d\alpha dt \quad , \quad \forall \Lambda_n^*, \lambda_n^*, A_n^* \end{aligned} \quad (2.21)$$

En choisissant successivement chacune des fonctions test Λ_n^* , λ_n^* , A_n^* nulles sauf une, trois problèmes, portant chacun sur une fonction du nouveau mode, en découlent. Le premier est une équation différentielle portant sur la fonction temporelle λ_n , obtenue en prenant $\Lambda_n^* = \mathbf{0}$ et $A_n^* = 0$:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{I_\alpha} A_n^2 \right) (\Lambda_n^T \mathbf{C} \Lambda_n) \dot{\lambda}_n + \left(\int_{I_\alpha} \alpha A_n^2 \right) (\Lambda_n^T \mathbf{K} \Lambda_n) \lambda_n = \left(\int_{I_\alpha} A_n \right) (\Lambda_n^T \mathbf{Q}) \\ & - \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \left(\int_{I_\alpha} A_i A_n \right) (\Lambda_i^T \mathbf{C} \Lambda_n) \dot{\lambda}_i + \left(\int_{I_\alpha} \alpha A_i A_n \right) (\Lambda_i^T \mathbf{K} \Lambda_n) \lambda_i \right\} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Cette équation est résolue à l'aide d'un schéma d'Euler implicite. En choisissant $\Lambda_n^* = \mathbf{0}$ et $\lambda_n^* = 0$, un deuxième problème est obtenu. Celui-ci est une équation algébrique dont l'inconnue est la fonction paramétrique A_n :

$$\begin{aligned} & \left(\int_{I_t} \dot{\lambda}_n \lambda_n \right) (\Lambda_n^T \mathbf{C} \Lambda_n) A_n + \left(\int_{I_t} \lambda_n^2 \right) (\Lambda_n^T \mathbf{K} \Lambda_n) \alpha A_n = \left(\int_{I_t} \lambda_n \right) (\Lambda_n^T \mathbf{Q}) \\ & - \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \left(\int_{I_t} \dot{\lambda}_i \lambda_n \right) (\Lambda_i^T \mathbf{C} \Lambda_n) A_i + \left(\int_{I_t} \lambda_i \lambda_n \right) (\Lambda_i^T \mathbf{K} \Lambda_n) \alpha A_i \right\} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Enfin, en imposant $\lambda_n^* = A_n^* = 0$, un dernier problème est déduit. C'est un problème éléments finis, portant sur la fonction spatiale Λ_n :

$$\begin{aligned} & \left(\int_{I_t} \dot{\lambda}_n \lambda_n \int_{I_\alpha} A_n^2 \right) \mathbf{C} \Lambda_n + \left(\int_{I_t} \lambda_n^2 \int_{I_\alpha} \alpha A_n^2 \right) \mathbf{K} \Lambda_n = \left(\int_{I_t} \lambda_n \int_{I_\alpha} A_n \right) \mathbf{Q} \\ & - \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \left(\int_{I_t} \dot{\lambda}_i \lambda_n \int_{I_\alpha} A_i A_n \right) \mathbf{C} \Lambda_i + \left(\int_{I_t} \lambda_i \lambda_n \int_{I_\alpha} \alpha A_i A_n \right) \mathbf{K} \Lambda_i \right\} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ces trois problèmes sont couplés entre eux, et s'écrivent, de manière synthétique :

$$\begin{cases} \lambda_n = \mathcal{T}(T_{n-1}, \Lambda_n, A_n) \\ A_n = \mathcal{P}(T_{n-1}, \Lambda_n, \lambda_n) \\ \Lambda_n = \mathcal{S}(T_{n-1}, \lambda_n, A_n) \end{cases} \quad (2.25)$$

La résolution des problèmes couplés PGD s'effectue traditionnellement par un algorithme de point fixe, qui est détaillé ci-dessous.

Algorithmes de résolution numérique d'un problème PGD

La détermination d'un nouveau mode PGD conduit à un système de problèmes couplés, dépendant chacun d'une seule variable. La solution de ce problème couplé peut être déterminée

à l'aide d'un algorithme de point fixe, qui consiste à résoudre successivement chaque problème en supposant les fonctions solutions des autres problèmes connues. Notons que la décomposition d'un mode sous forme d'un produit de fonctions n'est pas unique, les fonctions l'étant à une constante multiplicative près. Afin d'assurer la convergence du point fixe, toutes les fonctions sont normalisées sauf une, qui contient par conséquent la norme du nouveau mode calculé. Arbitrairement, nous choisissons de ne pas normaliser la fonction temporelle. L'algorithme de point fixe est le suivant :

Après avoir initialisé la fonction spatiale et la fonction paramétrique à une constante non nulle, le problème temporel est résolu : $\lambda_n = \mathcal{T}(T_{n-1}, \Lambda_n, A_n)$. En considérant cette nouvelle fonction temporelle, la fonction paramétrique est ensuite déterminée : $A_n = \mathcal{P}(T_{n-1}, \Lambda_n, \lambda_n)$, puis normalisée. Enfin, la fonction spatiale est à son tour obtenue, en résolvant le problème éléments finis : $\Lambda_n = \mathcal{S}(T_{n-1}, \lambda_n, A_n)$. La fonction spatiale est également normalisée. L'algorithme itère ainsi de suite, jusqu'à ce que le critère de convergence atteigne une tolérance ε donnée. Ce critère est basé sur la norme de la différence de la solution d'une itération à la suivante. Un nombre maximal d'itérations k_{max} est également fixé afin de stopper l'algorithme en cas de difficulté de convergence. En pratique, le nombre maximal d'itérations est petit, car l'erreur de convergence commise est corrigée par le calcul du mode PGD suivant. Il est usuellement fixé à 4 pour les problèmes ne dépendant que de l'espace et du temps, mais le point fixe peut nécessiter plus d'itérations pour des problèmes paramétrés. Par la suite, le nombre maximal d'itérations sera fixé à 10.

Les problèmes portant sur chacune des fonctions peuvent en théorie être résolus dans n'importe quel ordre. Cependant, le problème spatial est le problème le plus coûteux à résoudre. Afin qu'il bénéficie du maximum d'informations de la solution, nous choisissons de le résoudre en dernier. La structure résumant le calcul d'un nouveau mode PGD est présentée dans l'Algorithme 1.

Algorithme 1 : Point fixe déterminant un nouveau mode PGD

Données : $T_{n-1}, k_{max}, \varepsilon$

Résultat : $(\Lambda_n, \Lambda_n, A_n)$

Initialisation de la solution :

$A_n = 1, \Lambda_n = 1$

Normalisation : $A_n \leftarrow A_n / \|A_n\|, \Lambda_n \leftarrow \Lambda_n / \|\Lambda_n\|$

Initialisation de l'indicateur de convergence et du compteur d'itérations :

$\eta = 1, k = 0$

tant que $\eta > \varepsilon$ **et** $k < k_{max}$ **faire**

$\lambda_n^k \leftarrow \lambda_n$ # stocke la fonction temporelle de l'itération précédente

$k \leftarrow k + 1$

 Résolution du problème temporel $\lambda_n = \mathcal{T}(T_{n-1}, \Lambda_n, A_n)$

 Résolution du problème paramétrique $A_n = \mathcal{P}(T_{n-1}, \Lambda_n, \lambda_n)$

 Normalisation : $A_n \leftarrow A_n / \|A_n\|$

 Résolution du problème spatial $\Lambda_n = \mathcal{S}(T_{n-1}, \lambda_n, A_n)$

 Normalisation : $\Lambda_n \leftarrow \Lambda_n / \|\Lambda_n\|$

 Actualisation du critère de convergence : $\eta = \|\lambda_n^k - \lambda_n\| / \|\lambda_n\|$

fin

Une fois le nouveau mode déterminé, la solution PGD est mise à jour en ajoutant ce mode à l'ancienne solution, puis le mode suivant est à son tour calculé afin d'enrichir la solution. L'algorithme de résolution PGD est donc un algorithme glouton qui construit les modes sé-

quentiellement. Comme le nombre de modes nécessaires à l'obtention d'une solution de qualité satisfaisante ne peut être déterminé à l'avance, un critère basé sur la décroissance de la norme des modes est défini afin de stopper le processus d'ajout de modes. En effet, la norme des modes est censée décroître globalement avec l'ordre du mode, les premiers modes contenant la majorité de la solution. L'algorithme est arrêté lorsque le rapport entre la norme du nouveau mode et la norme du premier est inférieur à un critère donné. Dans ce cas, cela signifie que le nouveau mode calculé contient très peu d'information, et que la solution obtenue est de qualité suffisante. L'hypothèse est faite que les modes suivants ont également une faible norme et n'apportent plus d'information à la solution. Cependant, aucune garantie n'existe sur la monotonie de la décroissance de la norme des modes, surtout lorsque les fonctions spatiales ne sont pas orthonormées, sauf dans des cas particuliers [FALCÓ et NOUY 2011]. Ainsi, l'établissement du critère d'arrêt de l'algorithme peut s'avérer difficile. Finalement, l'algorithme de résolution d'un problème par la méthode PGD est détaillé dans l'Algorithme 2.

Algorithme 2 : Résolution d'un problème par PGD

Données : ε, N_{max}

Résultat : \mathbf{T}_m

Initialisation :

$\mathbf{T}_m = 0$

$\eta = 1, m = 0$

tant que $\eta > \varepsilon$ **et** $m < N_{max}$ **faire**

$m \leftarrow m + 1$

 Calcul d'un nouveau mode $(\Lambda_m, \lambda_m, A_m)$ par l'Algorithme 1 de point fixe

 # Stockage du nouveau mode :

$\mathbf{T}_m \leftarrow \mathbf{T}_m + \Lambda_m \lambda_m A_m$

 # Actualisation du critère de convergence :

$\eta = \|\lambda_m\| / \|\lambda_1\|$

fin

La forme séparée de la solution permet donc d'obtenir des problèmes globaux portant chacun sur une variable. Dès lors, un seul problème éléments finis doit être résolu (par itération du point fixe) afin d'obtenir la solution sur tout le domaine temporel et paramétrique. En calculant au plus N_{max} modes, la solution obtenue avec la méthode PGD sur l'ensemble de ce domaine nécessite de résoudre au maximum $\mathcal{N} = k_{max} \times N_{max}$ problèmes éléments finis, \mathcal{N} équations différentielles ordinaires (ODE) et \mathcal{N} équations algébriques, alors qu'une résolution par une méthode directe en utilisant une stratégie de force brute demanderait $N_t \times N_a$ systèmes linéaires à résoudre, N_t et N_a étant respectivement les tailles de la discrétisation temporelle et du paramètre α . De plus, l'ajout de paramètres n'impacte pas le nombre de problèmes éléments finis à résoudre, car cela rajoute uniquement une équation algébrique portant sur ce paramètre, du fait de la dépendance affine au nombre de paramètres. Cependant, ce bénéfice n'est acquis que lorsqu'une écriture sous forme séparée des opérateurs matriciels et du second membre peut être obtenue en fonction des variables. En fonction du type de problème traité (certains problèmes comportant un paramètre géométrique, problèmes non-linéaires, etc), cette forme ne peut pas être naturellement obtenue, les opérateurs étant non-linéaires. Les termes non-linéaires doivent alors être évalués à chaque pas de temps et chaque valeur de paramètre, et la malédiction de la dimension est retrouvée. Des méthodes additionnelles dites d'hyper-réduction peuvent être utilisées afin de réduire le coût de l'évaluation de ces termes. Ces dernières méthodes seront présentées dans le chapitre 3.

Résultats

Les trois premiers modes PGD obtenus sont représentés sur la Figure 2.5. Le premier mode,

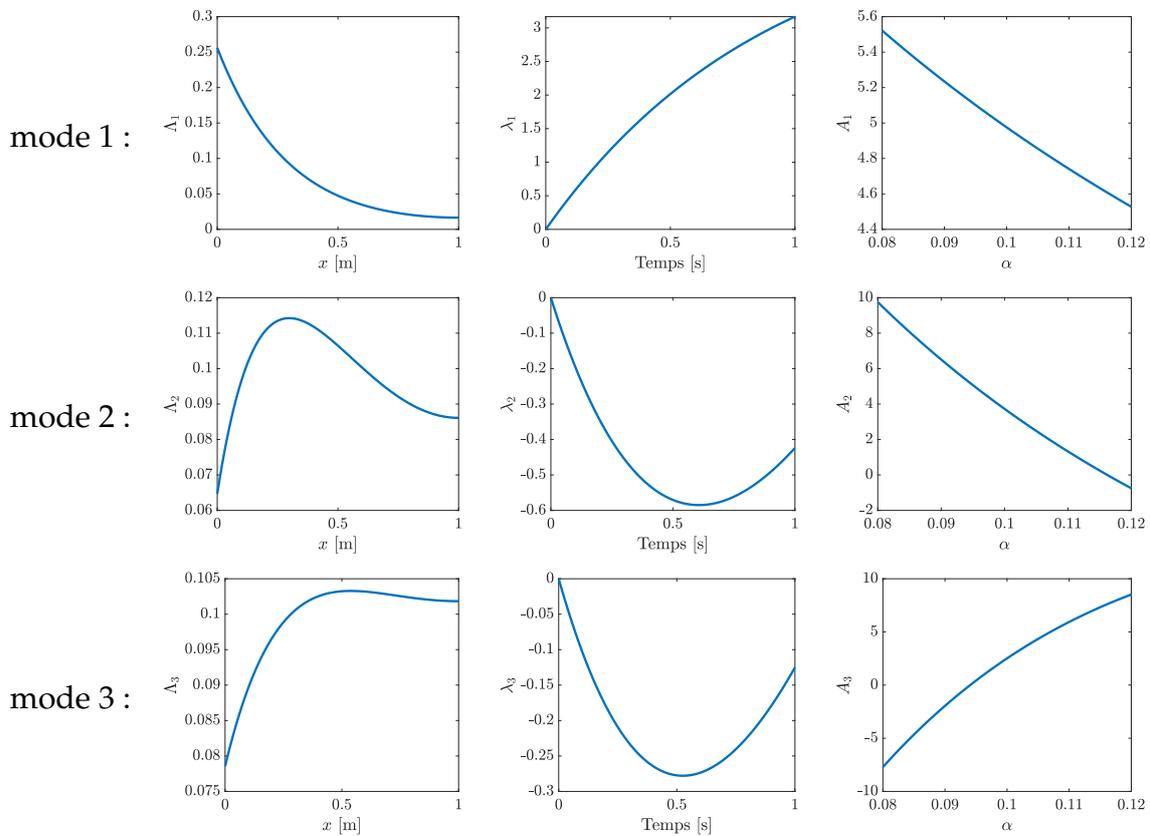


FIGURE 2.5 – Modes PGD : chaque ligne correspond à un mode, dont la première colonne est la fonction spatiale, la seconde la fonction temporelle, et la troisième la fonction paramétrique.

représenté par les fonctions de la première ligne de cette figure, capte la forme globale de la solution. La forme de la surface solution de la Figure 2.4a est bien retrouvée en effectuant le produit tensoriel de la fonction spatiale et de la fonction temporelle du premier mode. Le premier mode contient la majorité des informations de la solution, et est de plus grande norme. Les modes suivants viennent apporter des corrections plus locales, et sont de plus petite norme, comme le montre l'évolution de l'amplitude des modes de la Figure 2.6. L'erreur commise par la solution PGD obtenue avec 10 modes pour une valeur de $\alpha = 1, 1 \cdot 10^{-2} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ est montrée sur la Figure 2.7. L'erreur est, dans cet exemple, plus importante que l'erreur de la solution POD obtenue pour un même nombre de modes. Cela peut s'expliquer par deux raisons. La première est que la base POD a été calculée à partir d'un nombre importants de *snapshots* qui comportaient toute l'information nécessaire pour construire une base riche permettant d'approximer correctement la solution. La SVD extrait ensuite les modes optimaux de la matrice des *snapshots* afin de construire la base POD. Ainsi, l'approximation par PGD d'une fonction connue sera toujours moins performante que la SVD à un nombre de modes fixé. La seconde raison est que la solution PGD est obtenue sur l'ensemble du domaine paramétrique, contrairement à la solution POD qui a été calculée pour une valeur donnée du paramètre. Un nombre plus important de modes peut donc être nécessaire pour la PGD.

Remarquons que, contrairement à la POD, la PGD est par nature une méthode intrusive. En effet, les opérateurs définis dans les équations (2.22), (2.23) et (2.24) sont des opérateurs modifiés par les intégrales des fonctions de la base PGD. Dans ce cas simple, les opérateurs

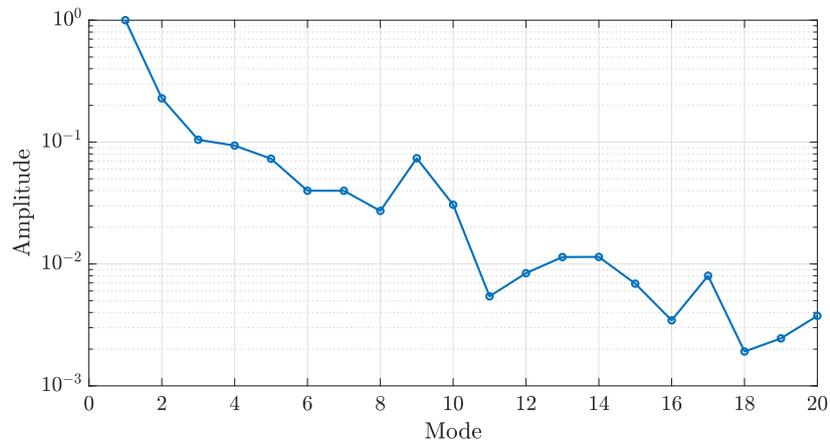
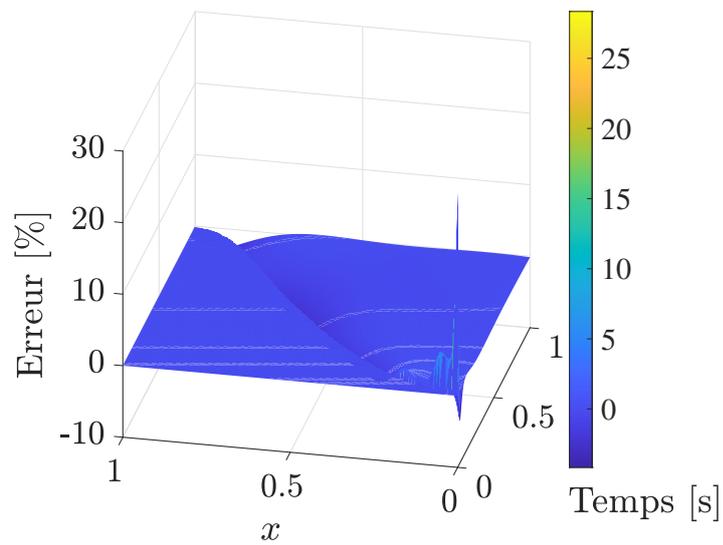


FIGURE 2.6 – Évolution de l'amplitude normalisée des modes PGD.

FIGURE 2.7 – Erreur (en %) entre la solution exacte et la solution PGD obtenue avec 10 modes pour $\alpha = 1,1 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

sont uniquement multipliés par des coefficients, ce qui rend l'implémentation aisée. Cependant, pour des problèmes plus complexes, comme par exemple des problèmes géométriquement paramétrés, les matrices élémentaires sont modifiées et l'implémentation non-intrusive est plus complexe.

Après avoir illustré et introduit les méthodes permettant de résoudre un problème par la PGD sur l'exemple de thermique unidimensionnel, cette méthode est employée pour construire un modèle réduit paramétré d'un module de puissance 2D, décrit dans la section 2.3 suivante.

2.3 Définition du problème thermo-mécanique

A présent, le problème porte sur l'étude de la fissuration du joint de brasure de la puce, afin de travailler sur une géométrie simplifiée du module, sans les fils de connexion. Ainsi, la géométrie représentée sur la Figure 2.8a comporte uniquement la puce, brasée sur le substrat qui est composé d'une céramique en sandwich entre deux couches de cuivre. Ce substrat est directement posé sur le refroidisseur via une pâte thermique. Le domaine spatial du module, comprenant l'ensemble des éléments ci-dessus, est dénommé Ω .

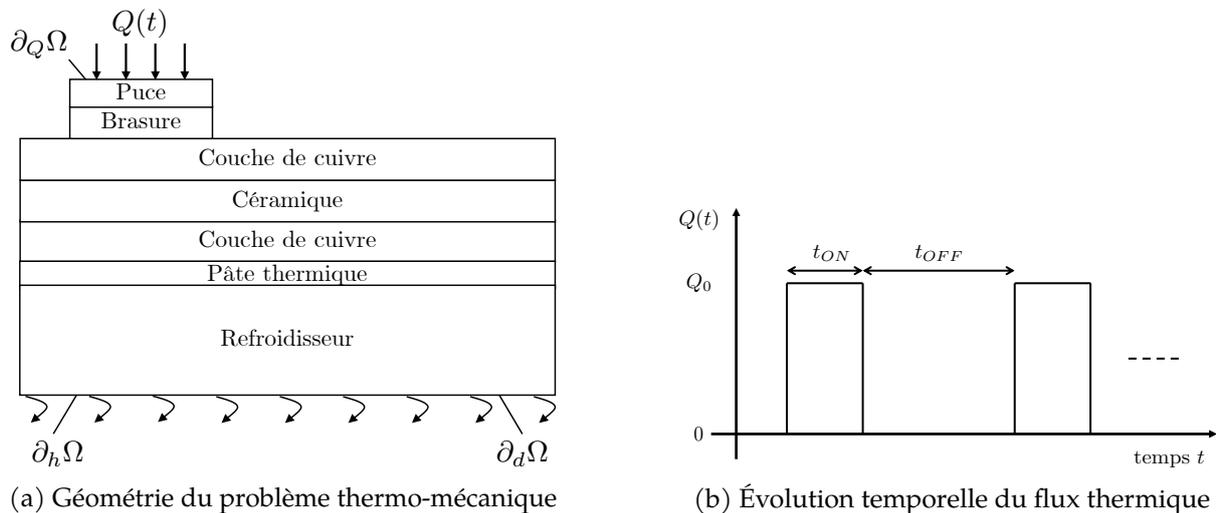


FIGURE 2.8 – Présentation du problème thermo-mécanique : géométrie et conditions aux limites.

L'échauffement du module, dû aux pertes induites par le courant traversant la puce, est modélisé par un flux thermique $Q(t)$ cyclique entrant sur la surface supérieure de la puce, notée $\partial_Q\Omega$. L'évolution temporelle du flux est présentée sur la Figure 2.8b; elle est composée d'un temps d'échauffement t_{ON} durant lequel le flux est constant à une valeur non nulle Q_0 , et d'un temps de refroidissement t_{OFF} durant lequel le flux est nul, permettant au module de refroidir. Le refroidissement du module est assuré par une convection forcée sur la surface inférieure du refroidisseur, notée $\partial_h\Omega$. Le module est encasté mécaniquement sur un domaine $\partial_d\Omega$. L'échauffement du module génère des contraintes thermo-mécaniques du fait des différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux. Ces contraintes initient et propagent une fissure dans le joint de brasure de la puce. Quand la fissure s'ouvre, des surfaces libres se créent si les lèvres de celle-ci ne sont plus en contact, et le flux thermique doit alors se concentrer au niveau de la surface non fissurée restante. La résistance thermique du module augmente ainsi fortement, ce qui a été mesuré expérimentalement [MITIC et al. 1999]. Même si les lèvres de la fissure se retrouvent de nouveau en contact, la qualité du contact reste fortement dégradée. Par simplification, les lèvres de la fissure sont donc tout le temps considérées adiabatiques.

Le problème thermo-mécanique est ainsi fortement couplé par la propagation de la fissure, qui est initiée par les contraintes thermiques. En retour, la fissure modifie la répartition de la température.

Dans ce problème, le coefficient de convection \hat{h} et l'épaisseur de la brasure H_b sont jugés incertains et seront donc considérés comme paramètres du modèle thermo-mécanique, afin d'obtenir leur influence sur la propagation de la fissure. Ceux-ci varient autour de leur valeurs nominales \hat{h}^0 et H_b^0 : $\hat{h} = h\hat{h}^0$ et $H_b = eH_b^0$, où h et e sont des coefficients multiplicateurs adimensionnés.

2.4 Modèle de zone cohésive

La propagation de la fissure est obtenue par un modèle de zone cohésive, ou *Cohesive Zone Model* (CZM) [BARENBLATT 1962; NEEDLEMAN 1987; XU et NEEDLEMAN 1993]. Dans ce modèle, la fissure se propage le long d'un chemin pré-défini, montré sur la Figure 2.9. Le long de ce

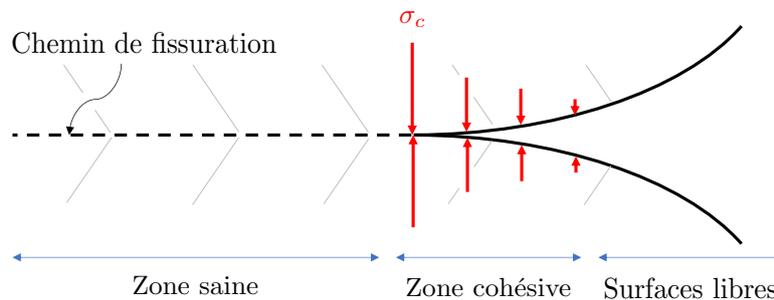


FIGURE 2.9 – Modèle de zone cohésive. Adapté de [CODE_ASTER 2014].

chemin, des efforts internes assurent la cohésion de la matière ; ce sont les forces cohésives. Le comportement de l'interface cohésive relie la valeur des efforts de cohésion en fonction du saut de déplacement à l'interface, soit l'ouverture de fissure. Plusieurs types de lois existent pour modéliser le comportement cohésif [CHANDRA et al. 2002; CAZES 2010; K. PARK et PAULINO 2011]. De manière générale, les efforts de cohésion augmentent dans un premier temps avec le saut de déplacement, jusqu'à ce que la contrainte maximale cohésive soit atteinte. A partir de ce seuil, l'interface s'endommage, et les contraintes cohésives décroissent ensuite avec l'augmentation de l'ouverture de la fissure. Si, à cet instant, la structure est déchargée, la décharge puis la recharge s'effectuent de manière élastique, avec une raideur modifiée par l'endommagement. L'endommagement de l'interface ne peut que croître. Celui-ci est défini localement sur chaque élément cohésif, et varie de zéro, lorsque l'élément est sain, jusqu'à un, valeur pour laquelle l'élément est complètement rompu. Une des lois les plus simples pour représenter ce comportement est la loi bilinéaire [CAMANHO et al. 2003] représentée sur la Figure 2.10a. Une régularisation de cette loi peut être utilisée avec une loi de type exponentielle [XU et NEEDLEMAN 1994], représentée sur la Figure 2.10b, où Δ_n est le saut de déplacement normal à l'interface, et δ_n la valeur du saut de déplacement à partir de laquelle l'interface s'endommage. F_c^n est la composante normale des efforts cohésifs et σ_n la contrainte normale maximale de la loi cohésive. L'aire sous la courbe G_{Ic} représente l'énergie de déformation nécessaire à la fissuration, appelée *critical energy release rate*, ou taux de restitution d'énergie critique.

Les modèles de zone cohésive sont généralement utilisés pour des problèmes quasi-statiques, afin de déterminer une longueur de fissure pour un chargement fixé. Dans ce cadre, la PGD a déjà été utilisée avec un modèle CZM en séparant la coordonnée normale des coordonnées tangentielles [METOUÏ et al. 2014]. Cependant, les modèles de zone cohésive peuvent également être

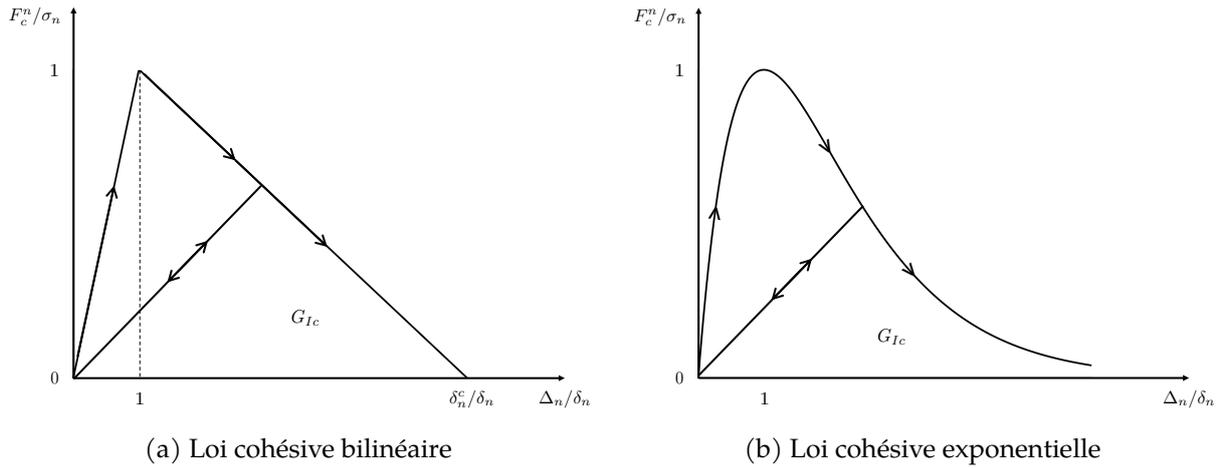


FIGURE 2.10 – Représentation de la composante normale de deux types de loi cohésives : la loi bilinéaire et la loi exponentielle.

utilisés pour des problèmes de fatigue, en définissant un endommagement lié à l'accumulation de cycles de chargement [ROE et SIEGMUND 2003].

D'un point de vue numérique, l'implémentation s'effectue de la même manière que pour des problèmes de contact, en définissant deux solides différents. Idéalement, un maillage conforme est défini. Les éléments cohésifs sont donc d'épaisseur nulle et sont définis par les nœuds situés de part et d'autre de l'interface, comme illustré sur la Figure 2.11. Il est alors possible de définir

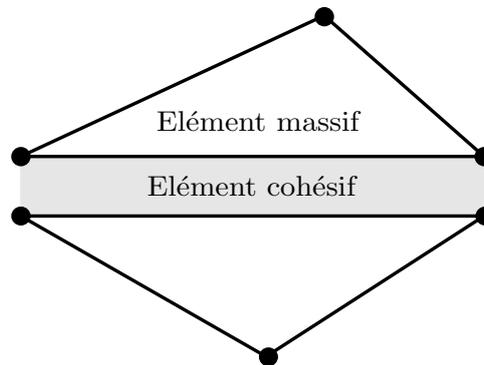


FIGURE 2.11 – Définition d'un élément cohésif à partir des nœuds des éléments massifs.

un opérateur non-linéaire \mathcal{K}_c reliant les déplacements \mathbf{u} des nœuds de l'élément cohésif aux efforts cohésifs \mathbf{F}_c :

$$\mathbf{F}_c = \mathcal{K}_c(\mathbf{u})\mathbf{u} \quad (2.26)$$

2.5 Formulation faible du problème thermo-mécanique

2.5.1 Problème thermique

Le problème de thermique est obtenu à l'aide de l'équation d'équilibre thermique, déroulant du premier principe de la thermodynamique. Sans source de chaleur volumique, celui-ci impose que la variation de l'énergie interne spécifique soit égale à l'opposé de la divergence du flux de chaleur \mathbf{q} :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{q} \quad (2.27)$$

où ρ et c_p sont respectivement la masse volumique et la capacité thermique des matériaux, et où T est la température. En multipliant cette équation par une fonction test T^* appartenant à l'ensemble des champs de température admissibles à zéro Θ_{ad}^0 , soit l'ensemble des champs de température nuls sur les zones de température imposée, puis en intégrant sur le domaine Ω , on obtient :

$$\int_{\Omega} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} T^* d\Omega + \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{q} T^* d\Omega = 0 \quad \forall T^* \in \Theta_{ad}^0 \quad (2.28)$$

En appliquant le théorème de la divergence sur le second terme, cela conduit à :

$$\int_{\Omega} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} T^* d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{grad} T^* d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} T^* dS = 0 \quad \forall T^* \in \Theta_{ad}^0 \quad (2.29)$$

où \mathbf{n} est la normale à la surface du domaine $\partial\Omega$. En utilisant la loi de Fourier traduisant la proportionnalité du flux de chaleur au gradient de température T :

$$\mathbf{q} = -k \mathbf{grad} T \quad (2.30)$$

où k est la conductivité thermique du matériau, ainsi que la condition aux limites de convection qui impose une valeur de flux sur $\partial_h\Omega$ proportionnelle à la différence de température entre la température de la surface et celle du fluide refroidisseur T_{conv} :

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \hat{h}(T - T_{conv}) \quad \text{sur } \partial_h\Omega \quad (2.31)$$

la formulation faible du problème de thermique est obtenue :

$$\int_{\Omega} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} T^* d\Omega + \int_{\Omega} k \mathbf{grad} T \cdot \mathbf{grad} T^* d\Omega + \int_{\partial_h\Omega} \hat{h}(T - T_{conv}) T^* dS = \int_{\partial_Q\Omega} Q T^* dS \quad \forall T^* \in \Theta_{ad}^0 \quad (2.32)$$

Dans ce problème, l'interface cohésive est définie au milieu du joint de brasure, comme montré sur la Figure 2.12. L'interface cohésive $\partial_c\Omega$ peut s'écrire comme l'union de deux surfaces, l'une

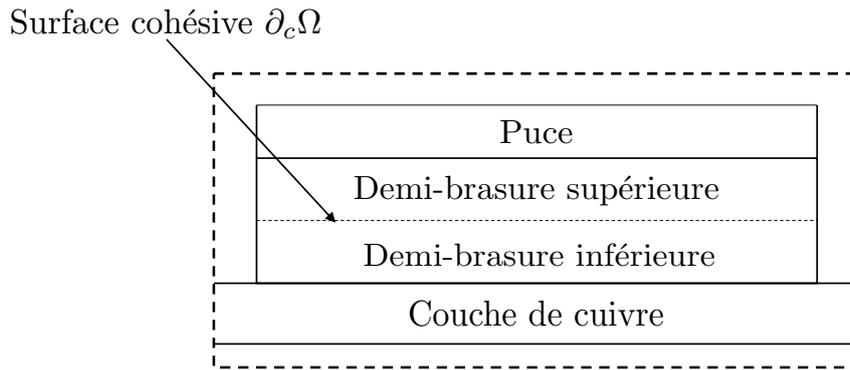


FIGURE 2.12 – Interface cohésive située au niveau du plan médian de la brasure.

saine (*healthy*) $\partial_c^h\Omega$ laissant passer le flux thermique et une fissurée (*cracked*) $\partial_c^c\Omega$, adiabatique : $\partial_c\Omega = \partial_c^h\Omega \cup \partial_c^c\Omega$. Sur la surface saine, la condition d'égalité de la température de part et d'autre de l'interface est traitée à l'aide de multiplicateurs de Lagrange. Celle-ci s'écrit :

$$\lambda(T^+ - T^-) = 0 \quad \text{sur } \partial_c^h\Omega \quad (2.33)$$

où λ est le champ de multiplicateurs de Lagrange et où T^+ et T^- sont respectivement les températures situées sur la partie supérieure et inférieure de l'interface.

2.5.2 Problème mécanique

Le problème de mécanique est obtenu à partir de l'équilibre mécanique pour un problème quasi-statique, imposant que la somme de la divergence du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ et des efforts cohésifs est nulle :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}_c = \mathbf{0} \quad (2.34)$$

De manière similaire à la méthode présentée dans le paragraphe 2.5.1 précédent pour la thermique, la formulation faible du problème est obtenue en multipliant cette équation par une fonction test \mathbf{u}^* , champ de déplacement appartenant à l'espace des solutions admissibles à zéro \mathcal{U}_{ad}^0 , soit l'ensemble des solutions à énergie finie nulles sur les zones où le déplacement \mathbf{u} est imposé, puis en intégrant sur le domaine Ω :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{u}^* \, d\Omega + \int_{\partial_c \Omega} \mathbf{F}_c \cdot \mathbf{u}^* \, dS = 0 \quad \forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{U}_{ad}^0 \quad (2.35)$$

La première intégrale est également transformée à l'aide du théorème de la divergence :

$$- \int_{\Omega} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*)) \, d\Omega + \int_{\partial \Omega} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^* \, dS + \int_{\partial_c \Omega} \mathbf{F}_c \cdot \mathbf{u}^* \, dS = 0 \quad (2.36)$$

Le second terme est nul, car d'une part aucun effort extérieur n'est appliqué à la structure, et d'autre part, le champ test \mathbf{u}^* est admissible à zéro. En introduisant l'équation de comportement, reliant les contraintes à la partie mécanique $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ du tenseur des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ via le tenseur de Hooke \mathcal{K} ,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{K} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.37)$$

la formulation faible du problème de mécanique est finalement obtenue :

$$\int_{\Omega} \operatorname{tr}(\mathcal{K} \boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{u}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*)) \, d\Omega + \int_{\partial_c \Omega} \mathbf{F}_c(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}^* \, dS = 0 \quad (2.38)$$

La déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}$ est la somme des déformations élastique $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ et thermique $\boldsymbol{\varepsilon}^{th}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^{th} \quad (2.39)$$

Par ailleurs, la déformation thermique est proportionnelle à l'augmentation de température par rapport à la température de référence T_0 pour laquelle cette déformation est nulle :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{th} = \alpha(T - T_0) \mathbf{I}_d \quad (2.40)$$

α est le coefficient de dilatation thermique, qui est un scalaire en considérant un matériau isotrope, et \mathbf{I}_d est le tenseur identité. En injectant cette équation dans la formulation faible (2.38) du problème, le chargement d'origine thermique apparaît :

$$\int_{\Omega} \operatorname{tr}(\mathcal{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*)) \, d\Omega + \int_{\partial_c \Omega} \mathbf{F}_c(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}^* \, dS = \int_{\Omega} \operatorname{tr}(\mathcal{K} \alpha (T - T_0) \mathbf{I}_d \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*)) \, d\Omega \quad (2.41)$$

Finalement, en introduisant l'opérateur cohésif \mathcal{K}_c , permettant de relier le déplacement aux nœuds de l'interface cohésive aux efforts de cohésion \mathbf{F}_c , le problème devient :

$$\int_{\Omega} \operatorname{tr}(\mathcal{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*)) \, d\Omega + \int_{\partial_c \Omega} \mathcal{K}_c(\mathbf{u}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* \, dS = \int_{\Omega} \operatorname{tr}(\mathcal{K} \alpha (T - T_0) \mathbf{I}_d \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*)) \, d\Omega \quad (2.42)$$

2.6 Prise en compte des variations de géométrie et de conditions aux limites liées à la fissuration

L'épaisseur de la brasure est un paramètre modifiant la géométrie du problème. La fissure modifie également la géométrie, ou tout du moins la surface libre sur laquelle une condition aux limites de Neumann est appliquée (flux thermique nul) lorsqu'elle se propage. Afin de prendre en compte leurs effets sur la solution, une première méthode consisterait à redéfinir la géométrie pour chaque valeur de l'épaisseur de la brasure et chaque longueur de fissure, puis de remailler et obtenir la solution. Cette méthode est coûteuse en temps de calcul et assez difficile à implémenter. De plus, cette approche est incompatible avec la méthode de réduction de modèle PGD, qui, comme décrit dans les sections suivantes, conduit à des problèmes globaux en espace et en paramètres, et qui demande donc de travailler sur une géométrie et un maillage fixe. Pour contourner cette difficulté, une seconde approche est utilisée pour traiter par la PGD les problèmes dont la géométrie est paramétrée [HUGHES et al. 2005; AMMAR et al. 2013; CHINESTA et al. 2013a; ZLOTNIK et al. 2015; CHAMOIN et al. 2016; CHAMOIN et THAI 2019; GARIKAPATI et al. 2020; TIRVAUDEY et al. 2020; CAVALIERE et al. 2021; GHNATIOS et al. 2021]. Cette approche consiste à travailler sur une géométrie fixe de référence, par un changement de coordonnées. Outre cette méthode, d'autres approches existent, telles que le morphing de maillage [THOMAS et al. 2020; AGATHOS et al. 2022], ou la méthode de volume fictif [GLOWINSKI et al. 1994; NOUY et al. 2011; LEGRAIN et al. 2017]. Une revue des méthodes d'optimisation topologique est présentée dans [UPADHYAY et al. 2021].

2.6.1 Changement de variables

Pour ce problème, la géométrie de référence $\bar{\Omega}$, avec des conditions aux limites également fixées, comporte une épaisseur de brasure égale à son épaisseur nominale, et deux fissures L_1 et L_2 , initiées à gauche et à droite de la brasure, de longueur du quart de la longueur totale L_b de la brasure. Les brasures associées à la géométrie de référence et à la géométrie réelle sont représentées sur la Figure 2.13a. Les autres composants ont des géométries inchangées par la

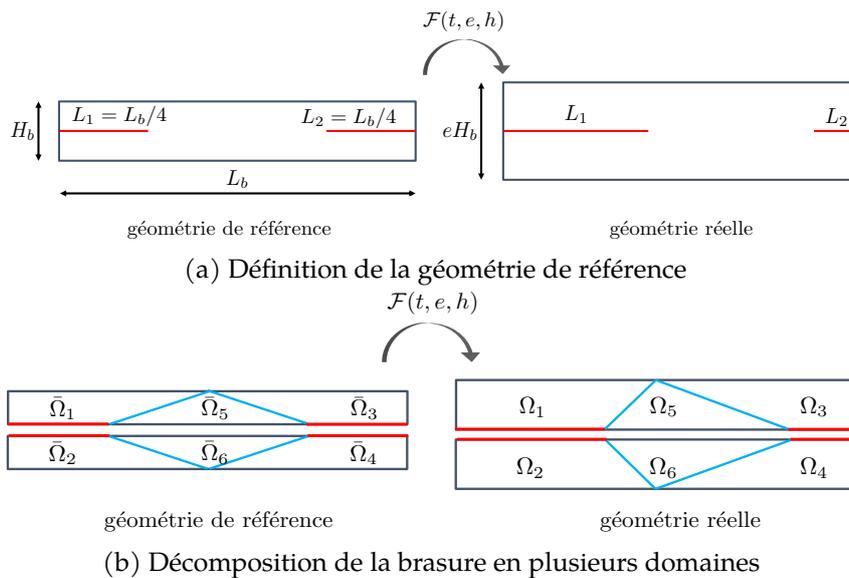


FIGURE 2.13 – Transformation géométrique de la brasure, et définition de ses domaines.

transformation. Une transformation géométrique est effectuée pour passer de la configuration

réelle à la configuration de référence. Cette transformation doit laisser la surface inférieure et la surface supérieure de la brasure inchangées afin de ne pas impacter les composants inférieurs et supérieurs. Ainsi, la brasure est divisée en 6 domaines quadrangulaires, comme montré sur la Figure 2.13b. Les lignes inférieures des trois domaines Ω_1 , Ω_5 et Ω_3 et les lignes supérieures des trois autres domaines sont en réalité deux lignes différentes mais situées au même endroit, et constituent le chemin de fissuration. La séparation en deux lignes distinctes est nécessaire pour définir les éléments cohésifs.

Sur chaque domaine, un changement de coordonnées entre les coordonnées réelles (x, y) et les coordonnées de référence (η, ξ) , lié à la transformation de la brasure, est défini. Le changement de coordonnées est obtenu de la même manière que la transformation isoparamétrique pour les éléments finis entre l'élément de référence et l'élément réel. Ainsi, une fonction de forme N_i est définie pour chaque sommet i du domaine. Celle-ci est nulle sur les trois autres sommets et égale à 1 au sommet i . On écrit ensuite que les coordonnées réelles sont égales à la somme des fonctions de forme multipliées par les coordonnées réelles (x_i, y_i) des sommets :

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i(\eta, \xi) x_i \quad , \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i(\eta, \xi) y_i \quad (2.43)$$

Par exemple, pour le domaine $\bar{\Omega}_1$, cela conduit au changement de variables suivant, en considérant l'origine des coordonnées au sommet inférieur gauche du domaine :

$$x = \frac{2}{H_b^0} \eta \xi (1 - 2l_1) + 2l_1 \eta \quad , \quad y = e \xi \quad (2.44)$$

On note l_1 la longueur de fissure normalisée évoluant de 0 à 1, telle que $L_1 = l_1 L_b / 2$, et de même pour la seconde fissure. Ainsi, la longueur de fissure impacte uniquement la coordonnée horizontale x tandis que l'épaisseur de brasure impacte uniquement la coordonnée y . Il est possible de vérifier que la transformation obtenue est bien la transformation identité pour $l_1 = 1/2$ et $e = 1$, et que les coordonnées sont bien celles attendues sur les bords du domaine.

En considérant les coordonnées normalisées

$$\bar{\xi} = \frac{2\xi}{H_b^0} \in [0, 1] \quad , \quad \bar{\eta} = \frac{2\eta}{H_b^0} \in \left[0, \frac{L_s}{H_b^0}\right] \quad (2.45)$$

la matrice jacobienne de la transformation est obtenue :

$$\mathbf{J}_{\Omega_1} = \begin{bmatrix} \bar{\xi}(1 - 2l_1) + 2l_1 & \bar{\eta}(1 - 2l_1) \\ 0 & e \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

L'approche est répétée pour les autres domaines.

La matrice jacobienne et son déterminant, le jacobien, permettent d'écrire les formulations faibles du problème thermique et du problème mécanique dans la configuration de référence. En effet, l'intégrale d'une fonction $f(x, y)$ sur un domaine réel Ω_i s'écrit, sur le domaine de référence $\bar{\Omega}_i$ comme :

$$\int_{\Omega_i} f(x, y) d\Omega = \int_{\bar{\Omega}_i} \tilde{f}(\eta, \xi) |\mathbf{J}_{\Omega_i}|(\eta, \xi) d\bar{\Omega} \quad (2.47)$$

où \tilde{f} est la fonction f après changement de variables vers la configuration de référence. $|\mathbf{J}_{\Omega_i}|$ est le déterminant de la matrice \mathbf{J}_{Ω_i} . De plus, le gradient de la fonction f dans la configuration réelle est lié au gradient de la fonction \tilde{f} dans la configuration de référence, par la transposée de la matrice jacobienne :

$$\nabla_{x,y} f = \mathbf{J}_{\Omega_i}^{-T} \nabla_{\eta,\xi} \tilde{f} \quad (2.48)$$

2.6.2 Réécriture du problème thermique

Ainsi, en écrivant que le domaine Ω est l'union des six domaines Ω_i constituant la brasure et du domaine Ω_{comp} constitué par le reste des composants, le terme de diffusion de la formulation faible (2.32) du problème de thermique se réécrit dans la configuration de référence comme :

$$\int_{\Omega} k \nabla T \cdot \nabla T^* \, d\Omega = \int_{\Omega_{comp}} k (\nabla T)^T (\nabla T^*) \, d\Omega + \sum_{d=1}^6 \int_{\bar{\Omega}_d} k (\nabla_{\eta,\xi} T)^T \mathbf{J}_{\Omega_d}^{-1} \mathbf{J}_{\Omega_d}^{-T} (\nabla_{\eta,\xi} T^*) |J_{\Omega_d}| \, d\bar{\Omega} \quad (2.49)$$

La formulation faible (2.32) du problème thermique se réécrit alors dans la configuration de référence :

$$\int_{\bar{\Omega}} \bar{c} \frac{\partial T}{\partial t} T^* \, d\bar{\Omega} + \int_{\bar{\Omega}} (\nabla T)^T \bar{\mathbf{k}} \nabla T^* \, d\bar{\Omega} + \int_{\partial_h \bar{\Omega}} \bar{h} (T - T_{conv}) T^* \, dS - \int_{\partial_b \bar{\Omega}} \bar{Q} T^* \, dS = 0 \quad (2.50)$$

où \bar{c} , définie ci-dessous, est la capacité thermique équivalente :

$$\bar{c} = \rho c_p \left(\sum_{d=1}^6 |J_{\Omega_d}| \chi_{\Omega_d} + \chi_{comp} \right) \quad (2.51)$$

Les fonctions χ_{Ω_d} et χ_{comp} sont respectivement les fonctions indicatrices des domaines $\bar{\Omega}_d$ et des autres composants :

$$\chi_{\Omega_d}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_d \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.52)$$

$$\chi_{comp}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_{comp} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.53)$$

De la même façon, une matrice de diffusion équivalente $\bar{\mathbf{k}}$ est définie :

$$\bar{\mathbf{k}} = k \left(\sum_{d=1}^6 \mathbf{J}_{\Omega_d}^{-1} \mathbf{J}_{\Omega_d}^{-T} \chi_{\Omega_d} + \mathbf{I}_d \chi_{comp} \right) \quad (2.54)$$

où \mathbf{I}_d est la matrice identité de taille 2×2 . Le coefficient de convection équivalent \bar{h} et le flux thermique équivalent \bar{Q} sont inchangés car leurs domaines de définition sont uniquement impactés par une translation d'axe y .

Dès lors, prendre en compte des paramètres géométriques à travers un changement de variables vers une géométrie de référence est équivalent à résoudre le problème sur cette géométrie fixe avec des propriétés équivalentes et variables des matériaux. Par la suite, nous considérons que la température de convection T_{conv} est égale à la température initiale, et que T représente l'augmentation de température.

En utilisant classiquement la méthode des éléments finis pour discrétiser l'espace et représenter la solution, l'équation à résoudre se présente sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{T}^{*T} \mathbf{C} \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T}^{*T} \mathbf{K} \mathbf{T} + \mathbf{T}^{*T} \mathbf{H} \mathbf{T} = \mathbf{T}^{*T} \mathbf{Q} \quad , \forall \mathbf{T}^* \in \Theta_{ad}^0 \quad (2.55)$$

où \mathbf{T} est ici la température discrétisée spatialement sous la forme d'un vecteur, et \mathbf{Q} le vecteur second membre associé au flux Q .

2.6.3 Réécriture du problème mécanique

Le changement de variables dans le problème de mécanique est légèrement plus complexe, du fait que le déplacement ne soit pas un champ scalaire, et que le tenseur des déformations soit symétrique. Afin de définir les effets du changement de coordonnées, il est nécessaire de repasser par l'écriture de la matrice de rigidité élémentaire. En utilisant la notation de Voigt, le vecteur des déformations est :

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \xi}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \xi}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u_x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u_y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u_x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u_y}{\partial \eta} \end{array} \right\} \quad (2.56)$$

Au sein d'un élément, les déformations et les déplacements sont donc reliés par la matrice $[\tilde{B}]$:

$$\{\varepsilon\} = [\hat{J}][\tilde{B}]\{U\} \quad (2.57)$$

où $[\hat{J}]$ est la matrice jacobienne modifiée associée à la transformation de chaque domaine. $[\tilde{B}]$ est la matrice contenant les dérivées des fonctions de forme par rapport aux coordonnées de référence (η, ξ) , modifiée par rapport à la matrice $[B]$ classique, qui relie elle directement les déplacements aux nœuds $\{U\}$ au vecteur des déformations $\{\varepsilon\}$.

$$\left\{ \frac{\partial u_x}{\partial \eta} \quad \frac{\partial u_y}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u_x}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u_y}{\partial \eta} \right\}^T = [\tilde{B}]\{U\} \quad (2.58)$$

La matrice de rigidité élémentaire s'écrit alors sous la forme suivante, où $\bar{\Omega}_e$ est le volume de l'élément :

$$\mathbf{K}_e = \int_{\bar{\Omega}_e} [\hat{B}]^T [\hat{J}]^T [A] [\hat{J}] [\hat{B}] |J| d\bar{\Omega}_e \quad (2.59)$$

avec $[A]$ la matrice de raideur liée au comportement du matériau.

Le problème mécanique s'écrit donc, sous forme matricielle :

$$\mathbf{u}^{*T} \mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{u}^{*T} \mathbf{K}_c \mathbf{u} = \mathbf{u}^{*T} \mathbf{F} \quad , \forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{U}_{ad}^0 \quad (2.60)$$

où \mathbf{u} et \mathbf{u}^* sont les formes discrétisées du déplacement et de la fonction test, sous forme vectorielle. \mathbf{K} est la matrice de rigidité, et \mathbf{K}_c est la matrice de rigidité cohésive.

2.7 Résolution du problème couplé par PGD

2.7.1 Méthode itérative globale pour la résolution du problème couplé

Le problème thermo-mécanique est résolu avec la méthode PGD. La solution de chaque problème est donc cherchée sous la forme séparée (2.9), en considérant comme paramètres le coefficient de convection \hat{h} et l'épaisseur de la brasure H_b , ceux-ci variant autour de leur valeurs nominales \hat{h}^0 et H_b^0 : $\hat{h} = h\hat{h}^0$ et $H_b = eH_b^0$. Les paramètres considérés sont donc h et e . Notons I_h et I_e leurs intervalles de variation. La température T et le déplacement \mathbf{u} sont donc cherchés sous la forme :

$$T(\mathbf{x}, t, e, h) = \sum_{k=1}^{N^{th}} \Lambda_k^{th}(\mathbf{x}) \lambda_k^{th}(t) \gamma_k^{th}(e) \theta_k^{th}(h) \quad (2.61)$$

et

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, e, h) = \sum_{k=1}^{N^u} \Lambda_k^u(\mathbf{x}) \lambda_k^u(t) \gamma_k^u(e) \theta_k^u(h) \quad (2.62)$$

où N^{th} et N^u sont respectivement le nombre de modes nécessaires à l'obtention des solutions thermique et mécanique.

Classiquement, sans utiliser une méthode de réduction de modèle, plusieurs méthodes existent pour la résolution de problèmes couplés évolutifs. La méthode monolithique consistant à résoudre en bloc le système couplé, est coûteuse en temps de calcul du fait de la taille importante du système et de la largeur de bande de la matrice à factoriser. Les méthodes partitionnées [K. PARK et al. 1977 ; FELIPPA et al. 2001 ; MATTHIES et al. 2006] consistent à résoudre alternativement chacune des physiques. L'intervalle temporel I_t est tout d'abord discrétisé en plusieurs pas de temps, puis, si une méthode partitionnée itérative est utilisée, les deux problèmes sont résolus alternativement à chaque pas de temps, jusqu'à ce que la convergence soit obtenue avant de passer au pas de temps suivant. C'est une approche itérative et incrémentale, décrite dans l'Algorithme 3. Cet algorithme doit être répété pour obtenir la solution pour un nouveau jeu de paramètres.

Algorithme 3 : Approche incrémentale et itérative pour la résolution du problème thermo-mécanique couplé par les fissures

Résultat : Champs de température $T(\mathbf{x}, t)$ et de déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$

Initialisation des longueurs de fissure :

$$l_{1,2}(0) = 0$$

pour $n = 1$ à N_t **faire**

tant que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_n)$ et $T(\mathbf{x}, t_n)$ n'ont pas convergé **faire**

 Calcul de la température $T(\mathbf{x}, t_n, l_{1,2})$

 Calcul du champ de déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_n, l_{1,2})$

 Actualisation des indicateurs de convergence

fin

 Actualisation des longueurs des fissures $l_{1,2}$

 Mise à jour des CL dues aux nouvelles longueurs de fissure

fin

La détermination des modes des solutions PGD, détaillée par la suite, conduit à des problèmes globaux sur l'espace, le temps et chacun des paramètres afin de déterminer chaque fonction composant un mode. La solution PGD obtenue est ainsi une solution globale sur le domaine spatial, temporel et paramétrique. La méthode incrémentale présentée dans l'Algorithme 3 ne peut donc pas être utilisée. A la place, une méthode itérative globale, appelée également méthode de Picard, est implémentée. Elle consiste à résoudre alternativement les problèmes PGD de thermique et de mécanique, jusqu'à obtenir une convergence globale. Les deux physiques étant couplées via les fissures, les problèmes sont résolus en considérant l'évolution des fissures calculées à l'itération précédente. En partant d'une initialisation à zéro des longueurs de fissures, le champ de température est tout d'abord calculé par PGD sur l'ensemble du temps et des paramètres. La température constituant le chargement du problème de mécanique, les nouvelles évolutions (en temps et en paramètres) des fissures sont obtenues après sa résolution. En considérant ces nouvelles fissures, le problème thermique est de nouveau résolu, et ainsi de suite jusqu'à convergence des longueurs de fissures d'une itération de l'algorithme à la suivante. La méthode est présentée dans l'Algorithme 4.

Notons que cet algorithme n'a pas à être répété pour chaque valeur de paramètres, puisque la solution est obtenue sur l'ensemble de l'espace paramétrique.

Algorithme 4 : Méthode itérative globale pour la résolution d'un problème couplé par PGD

Résultat : Champs de température $T(\mathbf{x}, t, \mathbf{p})$ et de déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \mathbf{p})$

Initialisation :

$l_{1,2}(0, \mathbf{p}) = 0$

tant que l_1 et l_2 n'ont pas convergé **faire**

 Calcul de la température $T(\mathbf{x}, t, \mathbf{p})$ par PGD connaissant $l_{1,2}(t, \mathbf{p})$

 Calcul du champ de déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \mathbf{p})$ par PGD connaissant $l_{1,2}(t, \mathbf{p})$

 Calcul des nouvelles longueurs de fissure $l_{1,2}(t, \mathbf{p})$ sous forme séparée

 Actualisation des indicateurs de convergence

fin

2.7.2 Solution PGD du problème thermique

Afin d'obtenir la solution sous forme PGD, une formulation faible généralisée sur le temps et les paramètres doit être définie. Celle-ci s'obtient en intégrant la forme faible (2.55) sur le domaine temporel et paramétrique. Cela mène au problème suivant :

$$\int_{I_t} \int_{I_h} \int_{I_e} \left(\mathbf{T}^{*T} \mathbf{C} \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T}^{*T} \mathbf{K} \mathbf{T} + h \mathbf{T}^{*T} \mathbf{H} \mathbf{T} \right) de dh dt = \int_{I_t} \int_{I_h} \int_{I_e} \mathbf{T}^{*T} \mathbf{Q} \mathbf{T} de dh dt \quad , \forall \mathbf{T}^* \in \Theta_{ad}^0 \quad (2.63)$$

Supposons maintenant connue une solution PGD au rang $n - 1$, c'est-à-dire, sous la forme discrétisée spatialement :

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t, e, h) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{\Lambda}_k^{th} \lambda_k^{th}(t) \gamma_k^{th}(e) \theta_k^{th}(h) \quad (2.64)$$

Le calcul du mode n suivant $\mathbf{T}_n = \mathbf{\Lambda}^{th} \lambda^{th} \gamma^{th} \theta^{th}$, où l'indice n a été omis pour faciliter la lecture, s'effectue en prenant le champ test \mathbf{T}^* dans l'espace tangent de \mathbf{T}_n :

$$\mathbf{T}^* = (\mathbf{\Lambda}^{th})^* \lambda^{th} \gamma^{th} \theta^{th} + \mathbf{\Lambda}^{th} (\lambda^{th})^* \gamma^{th} \theta^{th} + \mathbf{\Lambda}^{th} \lambda^{th} (\gamma^{th})^* \theta^{th} + \mathbf{\Lambda}^{th} \lambda^{th} \gamma^{th} (\theta^{th})^* \quad (2.65)$$

En injectant cette forme dans la formulation faible généralisée, et en prenant successivement toutes les fonctions test nulles sauf une, quatre problèmes couplés sont obtenus, portant chacun sur une variable. Les problèmes obtenus sont les suivants :

1. Une équation différentielle sur la fonction temporelle : $\lambda^{th} = \mathcal{T}(\mathbf{\Lambda}^{th}, \gamma^{th}, \theta^{th})$;
2. Une équation algébrique sur la fonction dépendant de l'épaisseur de la brasure : $\gamma^{th} = \mathcal{P}_1(\mathbf{\Lambda}^{th}, \lambda^{th}, \theta^{th})$;
3. Une équation algébrique sur la fonction dépendant du coefficient de convection : $\theta^{th} = \mathcal{P}_2(\mathbf{\Lambda}^{th}, \lambda^{th}, \gamma^{th})$;
4. Un problème éléments finis sur la fonction spatiale : $\mathbf{\Lambda}^{th} = \mathcal{S}(\lambda^{th}, \gamma^{th}, \theta^{th})$

Notons que pour obtenir ces problèmes, les matrices de conduction \mathbf{K} et de capacité thermique \mathbf{C} doivent être obtenues sous forme séparée espace-temps-paramètres (représentation affine), afin de pouvoir calculer efficacement les intégrales sans devoir assembler une matrice pour chaque pas de temps et valeur de paramètre. Cette forme est obtenue naturellement pour la matrice de capacité, car seul le jacobien intervient dans son calcul et les longueurs de fissures sont mises sous forme séparée. En revanche, ce n'est pas le cas de la matrice de conduction thermique. En effet, le produit matriciel des inverses des matrices jacobiennes de l'équation (2.54)

fait intervenir des quotients de fonctions dépendantes à la fois de l'espace et des paramètres. Comme le numérateur et le dénominateur peuvent s'écrire sous forme séparée, un algorithme de compression est utilisé [DÍEZ et al. 2018; DÍEZ et al. 2020] pour obtenir le quotient sous forme séparée sans devoir faire le calcul terme à terme pour chaque valeur des paramètres. Le calcul des matrices éléments finis équivalentes induites par la PGD et par les paramètres géométriques requiert donc une intrusivité forte au code éléments finis, afin de modifier le calcul des matrices élémentaires.

La résolution du problème PGD s'effectue avec des algorithmes similaires à ceux présentés dans le paragraphe 2.2.2, avec un algorithme glouton pour déterminer les modes PGD les uns après les autres, et un algorithme de point fixe pour la résolution des problèmes couplés liés à la détermination d'un mode.

2.7.3 Solution PGD du problème mécanique

Comme pour le problème de thermique, une formulation faible généralisée sur le temps et les paramètres est définie en intégrant la forme faible (2.60) sur le domaine temporel et paramétrique. Quatre problèmes couplés sont également obtenus, un sur chacune des variables. Comme la dérivée temporelle du déplacement n'intervient pas dans l'équation du problème mécanique, une équation algébrique est obtenue à la place d'une équation différentielle pour la fonction temporelle.

Le problème de mécanique est un problème non-linéaire du fait de la loi cohésive non-linéaire reliant les déplacements de l'interface aux efforts cohésifs. La résolution de problèmes non-linéaires est classiquement traitée en utilisant un algorithme incrémental et itératif de type Newton-Raphson. Il consiste à résoudre une succession de problèmes linéarisés à chaque pas de temps jusqu'à converger, puis à passer au pas de temps suivant. Pour la même raison qu'une méthode incrémentale ne pouvait pas être utilisée pour la résolution du problème couplé thermo-mécanique, cette méthode ne peut pas non plus être utilisée pour résoudre le problème non-linéaire de mécanique par PGD. A la place, une méthode itérative non-incrémentale (globale) est mise en œuvre. Elle consiste tout d'abord à résoudre le problème élastique par PGD en considérant la rigidité cohésive initiale :

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_0(t, \mathbf{p}) + \mathbf{K}_c(\mathbf{0}) \mathbf{u}_0(t, \mathbf{p}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{p}) \quad (2.66)$$

Une solution PGD $\mathbf{u}_0(t, \mathbf{p})$ est alors obtenue sur le domaine temporel et paramétrique. A partir de cette solution, le comportement est évalué afin d'obtenir un résidu $\mathbf{r}(t, \mathbf{p})$ global sur l'espace, le temps et les paramètres :

$$\mathbf{r}(t, \mathbf{p}) = \mathbf{f} - (\mathbf{K} + \mathbf{K}_c(\mathbf{u}_0)) \mathbf{u}_0 \quad (2.67)$$

Si la norme de ce résidu n'est pas inférieure à un critère de convergence, une solution PGD $\delta \mathbf{u}$ de correction est alors calculée :

$$\mathbf{K} \delta \mathbf{u} + \mathbf{K}_c(\mathbf{u}_0) \delta \mathbf{u} = \mathbf{r} \quad (2.68)$$

et la solution est mise à jour :

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0 + \delta \mathbf{u} \quad (2.69)$$

L'algorithme itère ainsi de suite jusqu'à ce que la convergence soit atteinte. La comparaison entre cette méthode itérative mais non-incrémentale et les méthodes à la fois incrémentales et itératives est illustrée sur la Figure 2.14.

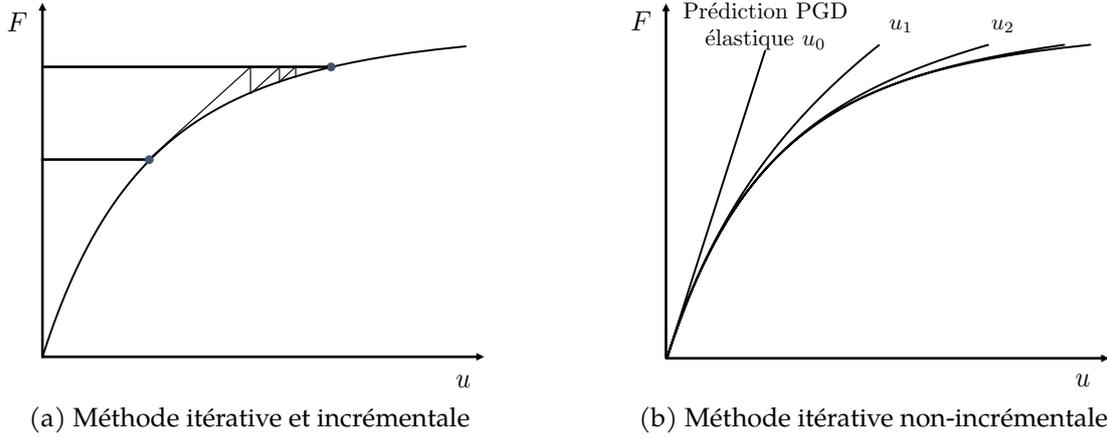


FIGURE 2.14 – Comparaison des méthodes incrémentales et des méthodes non-incrémentales pour la résolution de problèmes non-linéaires.

2.7.4 Orthogonalisation des modes PGD

Les problèmes PGD de thermique et de mécanique sont résolus de la même façon que celle présentée dans la Section 2.2.2, c'est-à-dire en utilisant un algorithme de point fixe pour déterminer un nouveau mode PGD, et un algorithme glouton pour le calcul successif des modes PGD.

Après le calcul d'un mode, et avant le calcul du suivant, deux étapes optionnelles peuvent être réalisées. La première, appelée *update*, consiste à recalculer les fonctions temporelles et paramétriques tout en conservant les fonctions spatiales déjà générées, dans l'optique d'améliorer la solution sans calculer un nouveau mode. Cette étape, dans le cadre de problèmes paramétrés, conduit à la résolution d'un système de problèmes couplés, chacun permettant d'obtenir par une résolution en bloc les nouvelles fonctions temporelles ou paramétriques. Le système couplé est résolu par un algorithme de point fixe, de manière similaire au calcul de l'ajout d'un mode. L'étape d'*update* permet d'améliorer la convergence de l'algorithme PGD pour certains problèmes, en trouvant une solution comportant un nombre plus faible de modes [ALAMEDDIN et al. 2019]. Cependant, le point fixe de l'étape d'*update* peut rencontrer des difficultés de convergence pour les problèmes paramétrés. Pour des raisons de simplicité, cette étape ne sera pas implémentée.

La seconde étape consiste à orthogonaliser les fonctions spatiales des modes, afin de construire une base spatiale orthonormée. Cela évite que la base construite soit dégénérée au bout de l'ajout de plusieurs modes. Cela s'effectue simplement en retranchant à chaque nouveau mode sa projection sur la base déjà construite. Le processus utilisé est l'algorithme de Gram-Schmidt, et est détaillé ci-dessous pour un champ u scalaire, mais est également valable pour un champ vectoriel.

Supposons qu'une solution PGD de rang $n - 1$ soit connue :

$$u_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \Lambda_k(\mathbf{x}) \lambda_k(t) \gamma_k(e) \theta_k(h) \quad (2.70)$$

où la famille $\{\Lambda_k\}_{k=1, \dots, n-1}$ constitue une base orthonormée. La solution de rang n , après génération du nouveau mode par l'Algorithme 1 est :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \Lambda_k(\mathbf{x}) \lambda_k(t) \gamma_k(e) \theta_k(h) + \Lambda_n(\mathbf{x}) \lambda_n(t) \gamma_n(e) \theta_n(h) \quad (2.71)$$

L'orthogonalisation de la fonction spatiale Λ_n consiste à lui retrancher la contribution des modes précédents, en écrivant que

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \Lambda_k \lambda_k \gamma_k \theta_k + \left(\Lambda_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle \Lambda_n, \Lambda_k \rangle \Lambda_k \right) \lambda_n \gamma_n \theta_n + \lambda_n \gamma_n \theta_n \sum_{k=1}^{n-1} \langle \Lambda_n, \Lambda_k \rangle \Lambda_k \quad (2.72)$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente un produit scalaire, par exemple le produit scalaire canonique après discrétisation spatiale. En regroupant les premier et derniers termes en facteur de Λ_k , cela conduit à :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\lambda_k \gamma_k \theta_k + \langle \Lambda_n, \Lambda_k \rangle \lambda_n \gamma_n \theta_n \right) \Lambda_k + \left(\Lambda_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle \Lambda_n, \Lambda_k \rangle \Lambda_k \right) \lambda_n \gamma_n \theta_n \quad (2.73)$$

En posant $\tilde{\Lambda}_n = \Lambda_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle \Lambda_n, \Lambda_k \rangle \Lambda_k$ que l'on normalise ($\tilde{\Lambda}_n \leftarrow \tilde{\Lambda}_n / \|\tilde{\Lambda}_n\|$), une nouvelle fonction spatiale orthonormée est générée. Afin de conserver la norme du nouveau mode, la fonction temporelle est multipliée par la norme de la fonction spatiale avant sa normalisation : $\lambda_n \leftarrow \lambda_n \|\Lambda_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle \Lambda_n, \Lambda_k \rangle \Lambda_k\|$. La solution PGD s'écrit alors :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\lambda_k \gamma_k \theta_k + \langle \Lambda_n, \Lambda_k \rangle \lambda_n \gamma_n \theta_n \right) \Lambda_k + \tilde{\Lambda}_n \lambda_n \gamma_n \theta_n \quad (2.74)$$

Bien que l'orthogonalisation du nouveau mode garde la forme séparée de la solution, elle en double le nombre de modes à cause de l'ajout de la projection du nouveau mode sur les modes précédents. Afin de remédier à ce problème, une approximation PGD de rang 1 est cherchée à la fonction connue $\lambda_k \gamma_k \theta_k + \langle \Lambda_n, \Lambda_k \rangle \lambda_n \gamma_n \theta_n = \tilde{\lambda}_k \tilde{\gamma}_k \tilde{\theta}_k$.

L'orthogonalisation des modes permet d'améliorer grandement la qualité de la solution obtenue pour le problème de thermique en permettant de capter plus rapidement le terme transitoire, sans devoir calculer un nombre important de modes qui viennent perturber la solution. Une autre approche, présentée pour des problèmes spatio-temporels dans [GIACOMA et al. 2015; ALAMEDDIN et al. 2019] consiste à effectuer une SVD de toute la solution après le calcul d'un nouveau mode à la place de l'algorithme de Gram-Schmidt qui opère uniquement sur le nouveau mode. Cette méthode permet d'obtenir à la fois des bases spatiale et temporelle orthonormées et forme une meilleure base que celle obtenue par Gram-Schmidt. La SVD se généralise à des dimensions supérieures à deux, avec la *High Order SVD*. Pour des raisons de simplicité, nous conservons l'approche de Gram-Schmidt précédemment décrite.

Les résultats présentés dans la partie suivante ont été obtenus en utilisant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt présenté ci-dessus, après le calcul de chaque nouveau mode, comme détaillé dans l'Algorithme 5.

2.8 Résultats

2.8.1 Géométrie, propriétés matériaux et conditions aux limites

Les résultats présentés dans cette partie ont été obtenus avec les épaisseurs des composants du module présentés dans le Tableau 2.1. La puce et de la brasure ont une longueur de 8mm, et sont situées à 5mm du bord gauche du module. La longueur des autres composants est de 30mm. Les propriétés des matériaux sont rassemblées dans le Tableau 2.2. Les propriétés thermiques de l'interface thermique ont été choisies de manière à ce que cette couche soit équivalente à une conductance thermique de $10^4 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-2}$. La loi cohésive utilisée est une loi triangulaire, dont

Algorithme 5 : Résolution d'un problème par PGD avec orthogonalisation**Données** : ε, N_{max} **Résultat** : u_m

Initialisation :

 $u_m = 0$ $\eta = 1, m = 0$ **tant que** $\eta > \varepsilon$ **et** $m < N_{max}$ **faire** $m \leftarrow m + 1$ Calcul d'un nouveau mode $(\Lambda_m, \lambda_m, \gamma_m, \theta_m)$ par l'algorithme de point fixeOrthogonalisation de la fonction spatiale Λ_m

Mise à jour de la fonction temporelle et des fonctions paramétriques des modes précédents

Stocke le nouveau mode :

 $u_m \leftarrow u_m + \Lambda_m \lambda_m \gamma_m \theta_m$

Actualisation du critère de convergence :

 $\eta = \|\lambda_m\| / \|\lambda_1\|$ **fin**

TABLE 2.1 – Epaisseur des différents composants du module.

Composant	Puce	Brasure	Cuivre	Céramique	TIM	Refroidisseur
Epaisseur [mm]	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1	10

TABLE 2.2 – Propriétés thermo-mécaniques des matériaux.

Matériau	k [Wm ⁻¹ K ⁻¹]	c_p [J kg ⁻¹ K ⁻¹]	ρ [kg m ⁻³]	E [GPa]	ν [-]	α [ppm°C ⁻¹]
Cuivre	400	390	8930	97	0,34	17
Céramique	170	720	3300	200	0,25	4,7
Silicium	150	710	2330	131	0,22	2,5
Brasure	55	210	7360	50	0,4	22
Aluminium	237	900	2700	76	0,34	23,5
Graisse thermique	1	1	1	76	0,34	30

TABLE 2.3 – Paramètres de la loi cohésive.

σ_{max} [Pa]	δ_t^0 [m]	δ_n^0 [m]	δ_t^c [m]	δ_n^c [m]
$2,5 \times 10^4$	5×10^{-9}	5×10^{-9}	3×10^{-8}	2×10^{-8}

les paramètres sont listés dans le Tableau 2.3. Pour cet exemple illustratif, les propriétés de la loi cohésive ont été choisies de manière à obtenir une propagation rapide des fissures.

Un flux thermique de $Q_0 = 40000 \text{ W m}^{-1}$ est imposé sur la surface supérieure de la puce, et la valeur nominale du coefficient de convection est fixée à $\hat{h}_0 = 200 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ sur la surface inférieure du refroidisseur. Les paramètres incertains, l'épaisseur de la brasure et le coefficient de convection, varient de $\pm 20\%$ autour de leurs valeurs nominales. 50 cycles, composés d'un temps d'échauffement de $t_{ON} = 3\text{s}$ et d'un temps de refroidissement $t_{OFF} = 6\text{s}$, sont simulés.

2.8.2 Résultats PGD

La convergence du problème thermo-mécanique a été atteinte en 5 itérations. L'évolution au cours des itérations globales de la longueur de la fissure s'initiant du bord gauche du module est montrée sur la Figure 2.15. La Figure 2.16 illustre les quatre premiers modes thermiques.

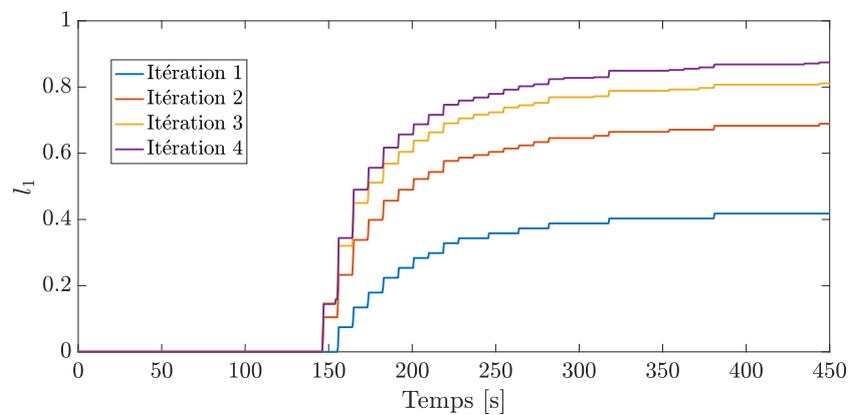


FIGURE 2.15 – Évolution de la longueur de fissure de gauche au cours du temps et des itérations globales de l'algorithme de résolution du problème thermo-mécanique, pour $e = h = 0, 8$.

Le premier mode obtenu est un mode permettant d'approximer globalement le champ de température : l'évolution temporelle cyclique de la température est bien représentée. Les modes suivants apportent des corrections à cette première solution. Les modes 3 et 4 traduisent par exemple l'impact de la fissure sur la température : les fonctions spatiales comportent des sauts de température au niveau des fissures, tandis que les fonctions temporelles associées sont petites tant que la fissure n'a pas propagé, et augmentent ensuite avec la propagation de la fissure. Les évolutions discontinues des fonctions paramétriques sont dues à la discrétisation grossière des paramètres (5 points par paramètre). Une telle discrétisation est utilisée afin de limiter le coût de calcul, qui est principalement dû à l'évaluation des termes non-linéaires sur l'espace paramétrique.

L'effet de la fissure sur la température du module est illustré sur la Figure 2.17a, sur laquelle l'évolution temporelle de la température est montrée au niveau du bord gauche de la brasure, de part et d'autre de la fissure. La température du nœud situé sur la lèvres supérieure est tout d'abord identique à celle du nœud situé sur la lèvres inférieure de la fissure, tant que la longueur de celle-ci est nulle. Elle augmente ensuite avec la longueur de fissure, du fait de l'augmentation de la résistance thermique du module. Sur la Figure 2.17b, le déplacement vertical de ces deux nœuds est montré, traduisant l'ouverture de la fissure au cours du temps.

Le premier mode de la solution mécanique, correspondant au premier mode de la prédiction élastique, est montré sur la Figure 2.18. Comme pour la solution thermique, ce premier mode correspond à une approximation globale du comportement mécanique de la structure, et les

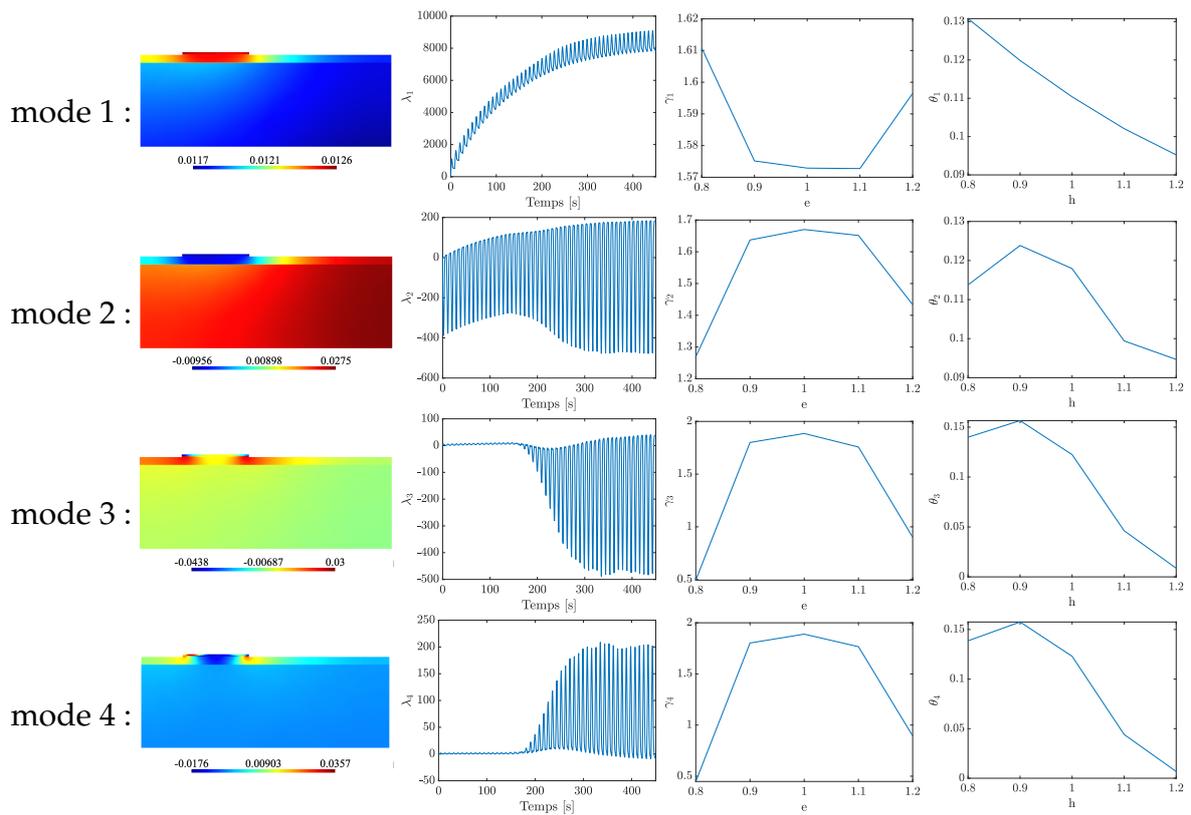


FIGURE 2.16 – Modes PGD thermiques : chaque ligne correspond à un mode, dont la première colonne est la fonction spatiale, la seconde la fonction temporelle, la troisième la fonction portant sur e et la dernière sur h .

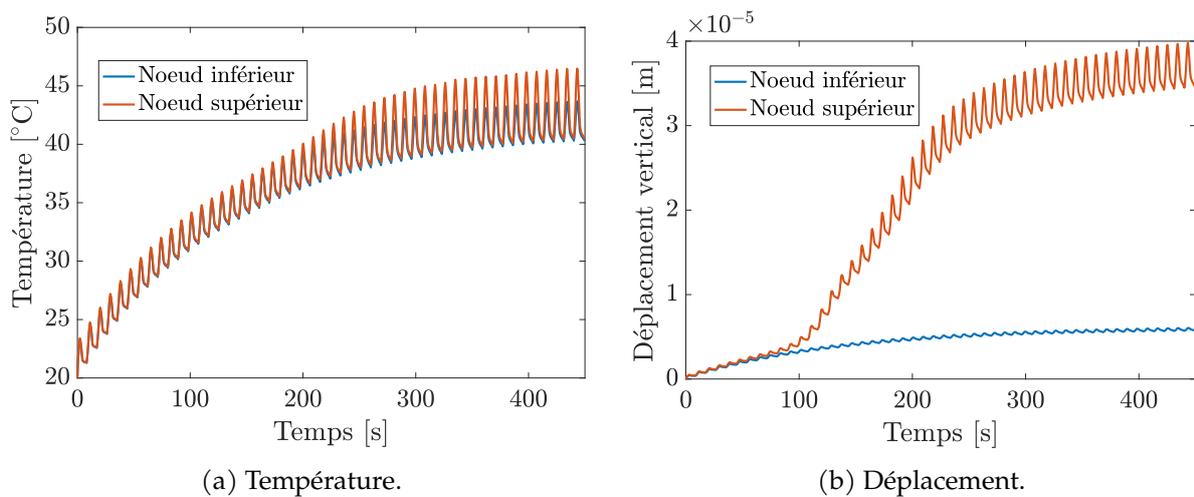


FIGURE 2.17 – Température et déplacement vertical des deux nœuds situés à l'extrémité gauche de la fissure 1, pour $e = h = 0,8$.

modes suivants apportent des corrections afin de prendre en compte les comportements locaux et dépendants des paramètres. La prédiction élastique capte ainsi le comportement global de la solution. Les corrections PGD suivantes permettent ensuite d'obtenir les effets locaux non-linéaires du comportement. Par exemple, le sixième mode de la solution, correspondant à la seconde correction PGD du problème non-linéaire, est également montré sur la Figure 2.18. Ce mode est très localisé et traduit les déplacements liés à l'endommagement de l'interface cohésive. La composante u_x des deux modes de la Figure 2.18 est montrée sur la Figure 2.19. Enfin, l'impact

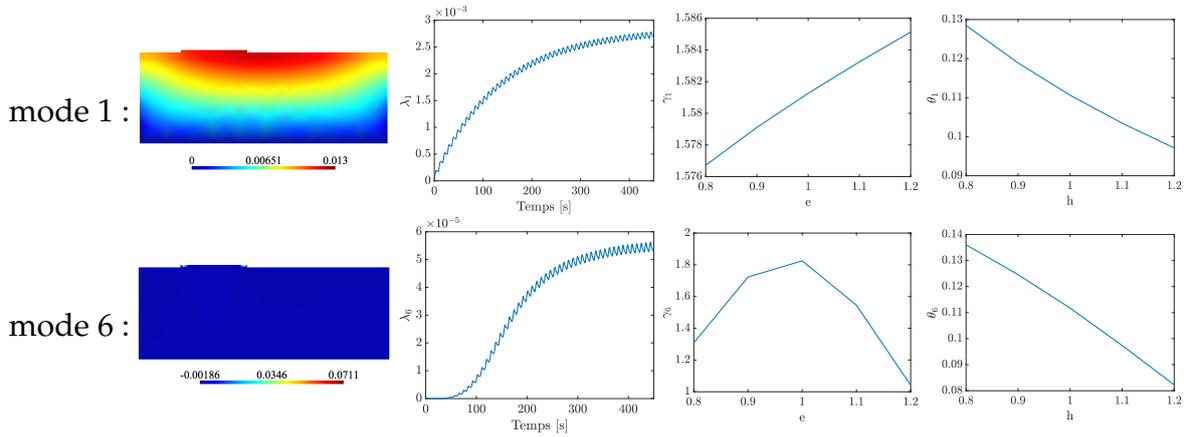


FIGURE 2.18 – Premier et sixième modes PGD mécaniques. La fonction spatiale affichée est la composante verticale u_y .

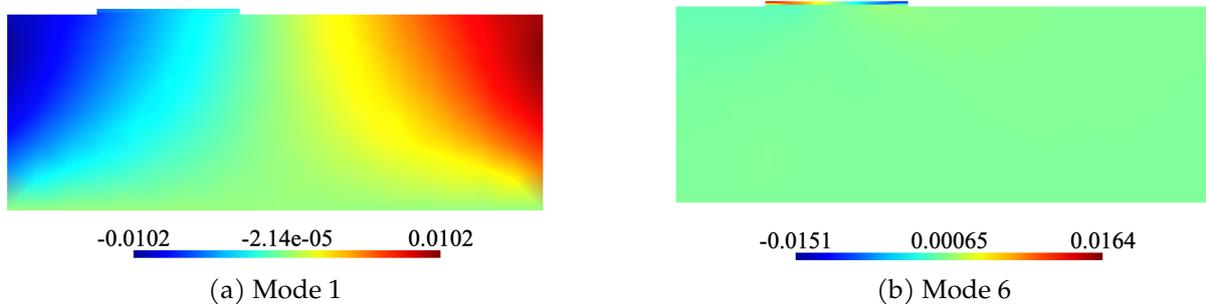


FIGURE 2.19 – Composantes tangentielles (u_x) des fonctions spatiales des premier et sixième modes.

des paramètres sur la propagation de la fissure est montré sur la Figure 2.20a pour l'épaisseur de la brasure, et sur la Figure 2.20b pour le coefficient de convection. La Figure 2.20a montre qu'une augmentation de l'épaisseur de la brasure conduit dans un premier temps à une longueur de fissure plus importante. Cela peut être dû au fait qu'une brasure plus épaisse augmente la résistance thermique du module, et par conséquent les contraintes thermiques. Dans un second temps, pour $e > 1$, la longueur de fissure décroît avec l'épaisseur de brasure, ce qui peut être expliqué par une meilleure tenue mécanique de la structure quand la brasure est plus épaisse. La Figure 2.20b indique que la longueur de fissure décroît avec l'augmentation du coefficient de convection, et qu'elle se propage également moins rapidement. Ces résultats étaient attendus, car un plus grand coefficient de convection induit un meilleur refroidissement et une température plus faible du module.

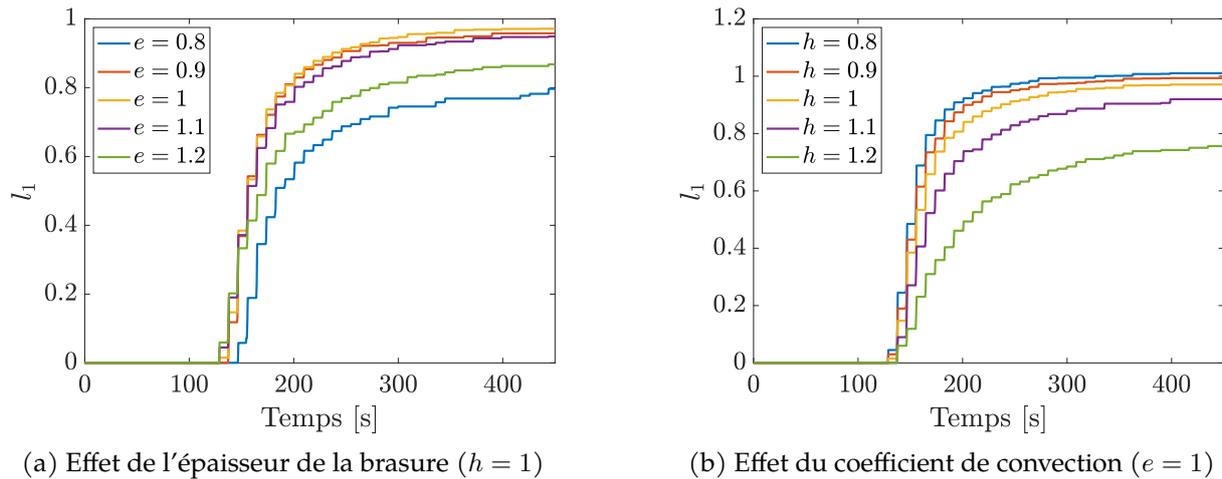


FIGURE 2.20 – Effets des paramètres sur la propagation de la fissure de gauche.

2.8.3 Post-traitement : vers un modèle de durée de vie

Le modèle réduit obtenu peut être post-traité afin d'obtenir un modèle de durée de vie du module, pour des fins de conception. A titre d'illustration, la durée de vie du module est définie ici par l'instant où la brasure est fissurée à plus de 80%, soit quand la demi-somme $l = (l_1 + l_2)/2$ des longueurs l_1 et l_2 atteint 0,8. Le domaine vert de la Figure 2.21 représente les valeurs acceptables des paramètres, pour lesquelles le module n'a pas atteint l'endommagement critique à la fin des cycles simulés. La forme du domaine traduit les effets des paramètres sur la longueur de fissure observés sur la Figure 2.20. Ainsi, de manière logique et attendue, plus le coefficient de convection est élevé, plus la durée de vie est grande. La Figure 2.21 montre aussi que des brasures de faible épaisseur, ou au contraire de grande épaisseur permettent d'atteindre la durée de vie minimale, en diminuant la résistance thermique dans le premier cas et en augmentant la tenue mécanique dans le second.

Le modèle réduit peut être exploité plus avantageusement encore, en considérant des incertitudes sur les paramètres. Il est alors possible de propager les incertitudes à travers le modèle, afin d'obtenir une probabilité portant sur l'endommagement du module, à un nombre de cycles donné. En supposant par exemple que les paramètres sont indépendants et qu'ils suivent une loi de probabilité gaussienne, centrée sur leurs valeurs nominales et d'écart-type 0,05, les densités

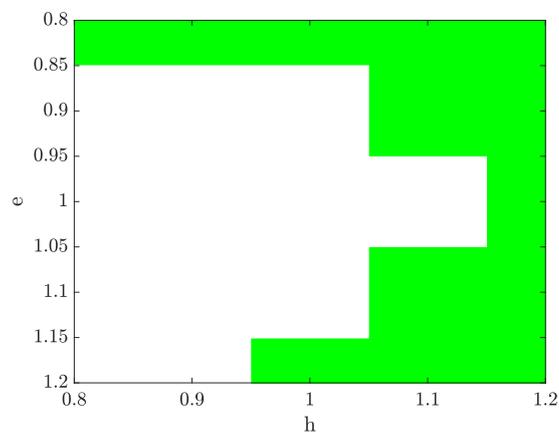
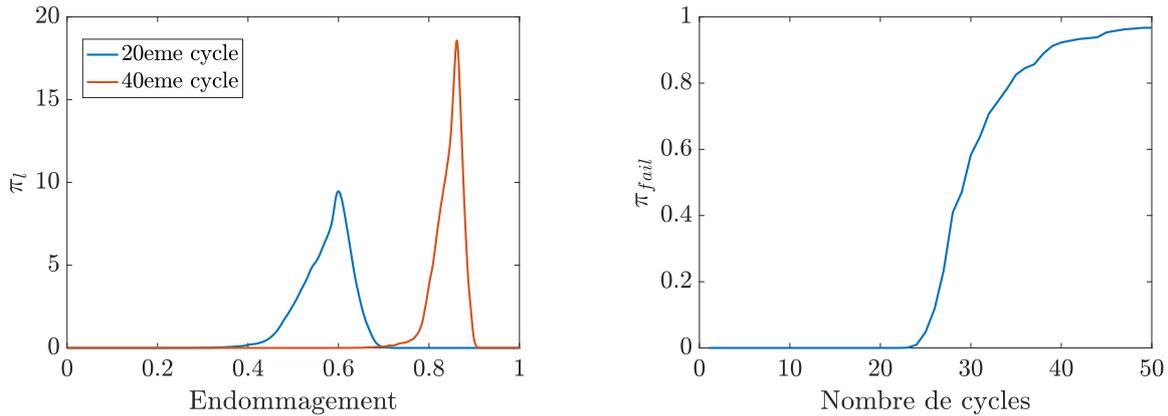


FIGURE 2.21 – Domaine paramétrique assurant une durée de vie minimale.

de probabilité π_l de l'endommagement l du module au bout de 40 et 50 cycles sont montrées sur la Figure 2.22a. La probabilité de rupture du module π_{fail} est alors définie par la probabilité que l'endommagement soit supérieur à 0,8, d'après le critère de durée de vie utilisé.

$$\pi_{fail} = \pi_l(l > 0,8) = 1 - \pi_l(l \leq 0,8) = 1 - \int_0^{0,8} \pi_l(l) dl \quad (2.75)$$

Ainsi, la probabilité de rupture des modules en fonction du nombre de cycles est représentée sur la figure 2.22b. Cela permet, par exemple, de définir un nombre de cycles que 95% des modules atteignent.



(a) Probabilité de l'endommagement du module, au bout de 20 et 40 cycles

(b) Probabilité de rupture du module en fonction du nombre de cycles

FIGURE 2.22 – Propagation d'incertitudes à travers le modèle de durée de vie.

Une bonne qualité de l'échantillonnage des densités de probabilité des paramètres demande un nombre important d'échantillons. Dans cet exemple, 10^5 points sont utilisés. L'emploi d'un modèle réduit pour propager les incertitudes est alors d'un grand intérêt, l'évaluation du modèle étant immédiate.

2.8.4 Difficultés rencontrées

L'implémentation de la PGD dans le cadre de cette application a permis de se rendre compte de plusieurs difficultés. Une première difficulté, inhérente aux problèmes non-linéaires, est l'évaluation des termes non-linéaires. Ici, dans le problème mécanique, ces termes sont le résidu et la matrice de rigidité. En effet, cette évaluation doit se faire pour chaque valeur des paramètres et chaque pas de temps. Cette étape nuit grandement aux performances de la PGD, car la "malédiction de la dimension" est retrouvée. Bien que l'étape de l'évaluation du comportement soit parallélisable sur les paramètres, la boucle temporelle ne peut pas être évitée pour les problèmes dont le comportement dépend de l'histoire du chargement, comme la plasticité, l'endommagement, ou ici les modèles de zone cohésive. Des méthodes d'hyper-réduction peuvent néanmoins être utilisées pour réduire le coût de l'évaluation. Une de ces méthodes sera détaillée dans le chapitre suivant.

Un second problème rencontré porte sur l'écriture sous forme séparée de la longueur de fissure et des grandeurs liées à celle-ci. En effet, l'évolution par paliers de la longueur de fissure rend la séparation entre le temps et les paramètres difficile. La fonction à approximer sous forme séparée n'est pas continue, et comporte par conséquent de forts gradients en temps et

en paramètres. Son approximation demande un nombre important de modes, et les modes d'ordre élevé peuvent présenter des pics, comme le montre la Figure 2.23, présentant la fonction temporelle du neuvième mode de la matrice de conduction thermique du domaine Ω_1 de la brasure. Ces erreurs se propagent ensuite dans la solution PGD, qui peut ainsi comporter des oscillations numériques non-physiques, et conduire parfois à une instabilité et à la divergence de la solution.

Enfin, la dernière difficulté rencontrée est intrinsèque à la méthode de zone cohésive. En effet, la sensibilité des résultats vis-à-vis des paramètres de la loi cohésive est grande, et ceux-ci sont difficiles à établir. De plus, les modèles cohésifs rencontrent parfois des difficultés de convergence, rendant leur utilisation délicate.

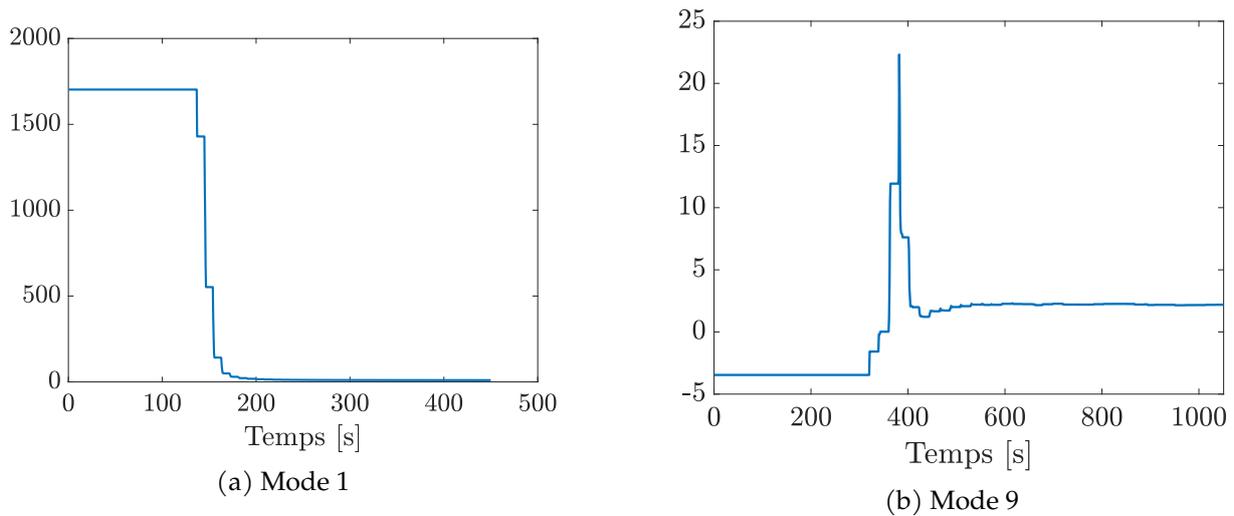


FIGURE 2.23 – Fonctions temporelles des premier et neuvième modes de la matrice de conduction thermique du domaine Ω_1 de la brasure. Une instabilité numérique apparaît dans le neuvième mode.

2.9 Conclusions du développement du modèle réduit thermo-mécanique

Dans ce chapitre, un modèle PGD a été développé pour un problème thermo-mécanique fortement couplé par une fissure. Dans ce problème, la propagation de la fissure au sein de la brasure, modélisée par un modèle de zones cohésives, augmente la résistance thermique du module, et par conséquent, modifie le champ de température. Une méthode itérative globale a été développée pour résoudre le problème couplé avec la méthode PGD. La méthode a été implémentée dans un code éléments finis Matlab, permettant de modifier aisément les opérateurs éléments finis classiques. Elle a permis d'exhiber les bénéfices de la PGD, très avantageuse à utiliser pour des problèmes linéaires, mais moins efficace pour la résolution de problèmes non-linéaires, tels que le problème de mécanique comportant une forte non-linéarité due à la propagation de fissure. En effet, la méthode de réduction de modèle est limitée par l'évaluation des termes non-linéaires, qui sont le résidu du problème de mécanique, et la matrice de rigidité tangente. L'évaluation de ces termes ne permet plus de lever le coût exponentiel de la résolution du problème paramétrique. De plus, la nature du problème étudié est elle-même difficile à représenter sous forme séparée espace-temps, du fait de la propagation de la fissure. Cependant,

une fois le modèle réduit établi, celui-ci peut être avantageusement utilisé dans une phase *online* de propagation d'incertitudes, grâce à son évaluation instantanée.

Dans le chapitre suivant, la méthode développée est étendue à un problème 3D multiphysique, en tenant compte du comportement électrique, et de la propagation de l'endommagement sur un grand nombre de cycles. La méthode est également adaptée afin de remédier aux problèmes rencontrés dans ce chapitre, évoqués dans le paragraphe précédent. Tout d'abord, en tenant compte du fait que l'endommagement du module s'effectue sur un grand nombre de cycles, le comportement thermo-mécanique est simplifié en comparant les temps caractéristiques de chaque physique. Ainsi, le couplage fort entre les physiques n'est plus nécessaire, ce qui permet de découpler le problème de mécanique du problème électro-thermique. Ce dernier est alors résolu en paramétrant une longueur de fissure non-évolutive. Cela permet de s'affranchir des instabilités numériques dues à la séparation entre le temps et les paramètres de la longueur de fissure et des termes s'y rapportant. D'autre part, une méthode d'hyper-réduction est proposée, afin de diminuer le coût de l'évaluation des termes non-linéaires. Enfin, afin de diminuer l'influence des paramètres cohésifs sur les résultats, la contrainte maximale de la loi cohésive est paramétrée dans le problème de mécanique. Le comportement mécanique, et par conséquent la durée de vie du module, sont ainsi obtenus en fonction de ce paramètre. Celui-ci pourra être recalé dans l'application à la prédiction de la durée de vie restante d'un module.

La méthode développée est également implémentée avec Ansys, afin d'utiliser un outil efficace pour la définition du modèle numérique, le maillage de la géométrie, et la résolution de problèmes matriciels de grande dimension. Cette implémentation non-intrusive demande des adaptations de la méthode, qui sont détaillées dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Implémentation non-intrusive pour la construction d'un modèle réduit électro-thermo-mécanique avec Ansys

Après avoir introduit la méthode PGD pour un problème bidimensionnel dans le chapitre précédent, ce chapitre porte sur l'étude d'un modèle tridimensionnel d'un module de puissance. Afin de pouvoir traiter un problème de grande dimension, le logiciel éléments finis industriel Ansys est utilisé. Ce chapitre détaille le modèle multiphysique considéré, qui tient compte des trois physiques impactant le comportement d'un module, et présente la stratégie d'implémentation non-intrusive de la PGD avec Ansys.

Sommaire

3.1	La réduction de modèles implémentée de manière non-intrusive . . .	60
3.2	Présentation du problème 3D	61
3.2.1	Géométrie et conditions aux limites du problème	61
3.2.2	Comportement electro-thermo-mécanique	62
3.3	Stratégie de résolution	62
3.3.1	Découplage du problème de mécanique	63
3.3.2	Longueur de fissure équivalente	63
3.3.3	Paramétrisation de la longueur de fissure	64
3.4	Paramètres incertains	65
3.5	Résolution d'un problème PGD avec Ansys	68
3.6	Modèle réduit électro-thermique	69
3.6.1	Modèle réduit électrique	70
3.6.2	Modèle réduit thermique	72
3.6.3	Résultats du problème électro-thermique	74
3.6.4	Comparaison avec un calcul direct issu de Ansys	77
3.7	Modèle réduit mécanique	83
3.7.1	Paramétrisation de la longueur de fissure	83
3.7.2	Problème à résoudre	84
3.7.3	Evaluation des termes non-linéaires	85
3.7.4	Hyper-réduction de modèle	88
3.7.5	Résultats du problème non-linéaire de mécanique	93
3.7.6	Modèle réduit linéaire	93
3.7.7	Résultats du problème linéaire de mécanique	96
3.8	Conclusions du développement du modèle réduit non-intrusif	98

3.1 La réduction de modèles implémentée de manière non-intrusive

L'emploi des méthodes de réduction de modèle a tout d'abord été réservé aux codes éléments finis maison, de par la nouveauté de ces méthodes et de par leur intrusivité au code éléments finis. Cependant, au cours des dernières années, de plus en plus de travaux ont porté sur leur implémentation au sein de codes commerciaux ou en couplage avec ceux-ci, dans l'optique de pouvoir rendre les méthodes accessibles aux ingénieurs non-experts en réduction de modèle, mais également de pouvoir profiter de la puissance de calcul des logiciels industriels. Les travaux ont tout naturellement d'abord porté sur les méthodes non-intrusives comme la POD [AUDOUZE et al. 2013; XIAO et al. 2017; KADEETHUM et al. 2021] et la méthode de base réduite [CAsENAVE et al. 2015; HAMMOND et al. 2019], qui peuvent utiliser le logiciel industriel comme boîte noire et exploiter les résultats de calculs pour construire l'espace réduit. L'export des opérateurs éléments finis permettant de calculer une solution dans l'espace réduit une fois sa base déterminée (matrice de rigidité, de masse, second membre,...) est également aisé, tout du moins pour des problèmes linéaires.

La PGD, de par sa nature intrusive, demande des spécificités supplémentaires. Ainsi, des méthodes ont été développées afin de rendre la PGD moins intrusive et de pouvoir exploiter les logiciels commerciaux en tant que boîte noire. Ceux-ci sont utilisés pour générer des *snapshots* puis d'en extraire un modèle réduit, comme les méthodes de Sparse Subspace Learning (SSL) [BORZACCHIELLO et al. 2019; LEON et al. 2019], ou la sparse PGD (s-PGD) par exemple [IBÁÑEZ et al. 2018; Y. LU et al. 2018; SANCARLOS et al. 2021]. Une méthode similaire a été développée pour construire un modèle réduit par PGD, en exploitant des *snapshots* et une méthode d'interpolation, dans le cadre de problèmes magnétostatiques [HENNERON et CLÉNET 2023].

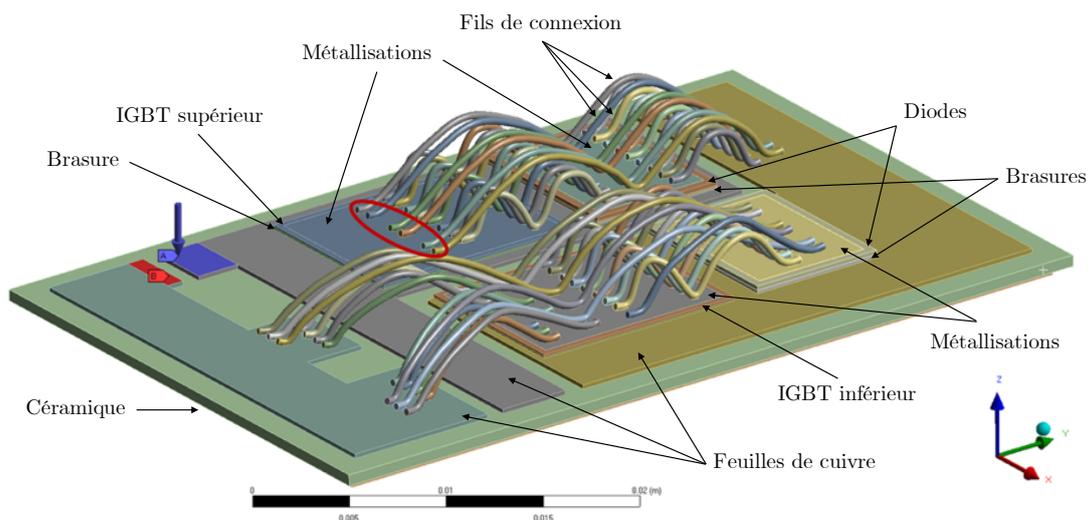
Parallèlement, des approches non-intrusives ont été élaborées sur la méthode PGD classique, en couplant un code industriel avec un code Python ou Matlab. Ces méthodes ont été développées dans un premier temps pour des problèmes linéaires [COURARD et al. 2016; ZOU et al. 2018; CAVALIERE et al. 2021] avec Samcef, Abaqus et Nastran. Ce type de problèmes permet d'exporter une fois pour toutes les opérateurs éléments finis, puis de les utiliser dans un code maison pour calculer les opérateurs modifiés par la formulation PGD. L'idée de ces deux travaux, que nous reprendrons par la suite, est de résoudre le système matriciel portant sur la fonction spatiale du mode PGD avec le logiciel industriel afin d'exploiter sa capacité à résoudre des systèmes linéaires de grande taille. Ainsi, le logiciel est encapsulé dans le code Matlab ou Python et est utilisé comme solveur externe. Plus récemment, des problèmes non-linéaires ont été traités, comme dans [TSIOLAKIS et al. 2020] pour un problème de mécanique des fluides en utilisant OpenFOAM en logiciel externe. Plus récemment encore, des travaux ont porté sur l'implémentation au sein même du logiciel Samcef de la méthode LaTin-PGD pour traiter des problèmes non-linéaires [SCANFF et al. 2022], en ayant un accès important au code source.

Lorsque l'accès au code source est limité, ce qui est majoritairement le cas, le couplage des méthodes de réduction de modèle de type PGD reste complexe pour l'étude de problèmes non-linéaires, à cause de la nécessité d'évaluer à chaque itération le résidu et les opérateurs non-linéaires, alors que cette fonction n'est pas directement accessible par l'utilisateur. Dans ce chapitre, une stratégie pour construire un modèle réduit d'un problème couplé électro-thermo-mécanique représentatif du comportement d'un module de puissance est développée avec Ansys. Tout comme [COURARD et al. 2016; ZOU et al. 2018], l'approche consiste à utiliser le logiciel industriel pour résoudre le système matriciel de grande dimension permettant de déterminer la fonction spatiale, et d'implémenter le reste de l'algorithme PGD dans un code Python.

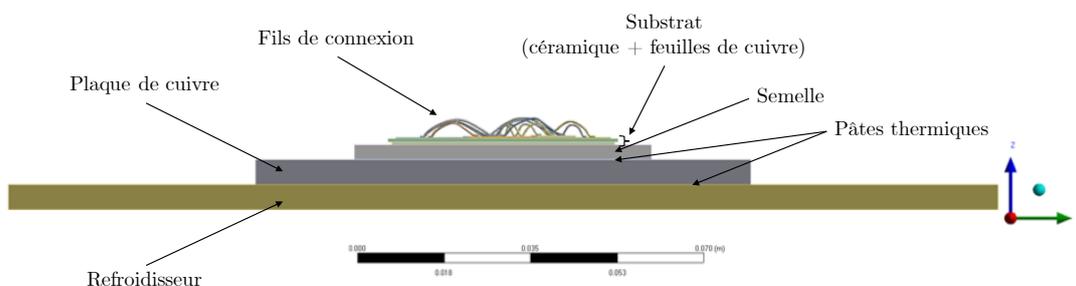
3.2 Présentation du problème 3D

3.2.1 Géométrie et conditions aux limites du problème

La géométrie du problème 3D est présentée sur la Figure 3.1a. La géométrie comporte uniquement le bras central du module, le seul qui est traversé par le courant électrique au cours du test de durée de vie. En effet, lors du fonctionnement normal du module, le bras central est impacté par les effets thermiques des deux autres bras situés de part et d'autre. Au contraire, les deux autres bras, situés au bord du module ne sont impactés que par le bras central, et subissent par conséquent des élévations de température moins élevées. C'est donc le bras central qui rompt en premier, ce qui justifie la nécessité de l'examiner en priorité. Lorsque les deux autres bras ne sont pas traversés par un courant électrique, ils ont un impact très faible sur les comportements thermique et mécanique du module, et peuvent être négligés dans la géométrie du modèle numérique. La géométrie est donc composée de deux puces IGBT, et de deux diodes qui sont à l'état bloquant. Ces éléments reposent sur un substrat, qui est lui-même brasé sur la semelle du module. Une plaque en cuivre intermédiaire est située entre la semelle et le refroidisseur. Des couches de pâte thermique sont situées de part et d'autre de cette plaque, permettant d'augmenter la conductivité thermique entre les composants. Un courant électrique cyclique, représenté par la flèche bleue sur la Figure 3.1a, est imposé comme chargement du



(a) Géométrie du problème sans la semelle et le refroidisseur. Conditions aux limites électriques et identification des 6 contacts fils-métallisation les plus critiques



(b) Vue de côté de la géométrie du problème comportant la semelle et le refroidisseur

FIGURE 3.1 – Géométrie du module tridimensionnel.

module, tandis qu'un potentiel électrique nul est imposé sur la surface rouge de la Figure 3.1a. Une convection forcée, représentante du refroidissement du module, est imposée sur la surface inférieure du refroidisseur. Il est possible de s'apercevoir sur la Figure 3.1a que les répartitions des fils de connexion sur les IGBTs *top* et *bottom* sont différentes. En effet, les fils situés sur l'IGBT *bottom* sont bien mieux répartis sur la surface de la puce que ceux de l'IGBT *top*. Cela induit une répartition de courant différente au sein des puces et des métallisations. En conséquence, l'IGBT *top* est soumis à de plus grandes contraintes thermiques, et il est observé expérimentalement que c'est cette puce qui entraîne la première la défaillance du module.

Le mécanisme de défaillance étudié est le décollement des fils de connexion. Cette étude se place dans le cadre d'amplitudes thermiques importantes, de l'ordre de 70°C. Pour ces cycles thermiques importants, il a été observé que six fils sont plus critiques que les autres. Ce sont ceux situés sur le devant de la puce, mis en évidence sur la Figure 3.1a. Afin de simplifier l'étude, la dégradation des six fils est supposée identique.

3.2.2 Comportement electro-thermo-mécanique

Lorsque des fissures se propagent à l'interface fils-métallisation, elles réduisent la surface de contact, en augmentant par conséquent à la fois la résistance thermique et la résistance électrique du module. Ainsi, le comportement électro-thermo-mécanique apparaît dans un premier temps comme fortement couplé. Afin de simplifier le problème, seules les résistivités électriques ρ des composants les plus critiques, soit les deux puces IGBT, les quatre métallisations, ainsi que les fils de connexion, sont supposés dépendre de la température. Celles-ci sont considérées comme dépendantes linéairement de la température dans la plage d'utilisation du module :

$$\rho = a(T + T_0) + b \quad (3.1)$$

où T est l'augmentation de la température par rapport à la température initiale T_0 . Les autres propriétés électriques, thermiques et mécaniques, sont considérées comme constantes. Le comportement mécanique est pris dans un premier temps comme linéaire élastique, et une loi cohésive modélise la propagation de la fissure. Un comportement plus complexe et plus réaliste de la physique, modélisant par exemple le comportement plastique ou le fluage, est envisagé à la suite de ces premiers travaux.

Le couplage multiphysique, schématisé sur la Figure 3.2, est donc le suivant : les pertes par effet Joule dues à la distribution de courant et à la résistivité des matériaux génèrent une augmentation de température. En retour, la température modifie la distribution de courant et les pertes via les conductivités électriques dépendantes de la température. La température occasionne aussi des contraintes thermiques qui créent des fissures, qui à leur tour, augmentent les résistances thermiques et électriques de contact entre les fils et la métallisation de la puce, modifiant ainsi la répartition du potentiel électrique et de la température.

3.3 Stratégie de résolution

Le comportement du module peut cependant être simplifié. En effet, les modules testés dans ces conditions de chargement ont des durées de vie de plusieurs centaines de milliers de cycles, voire de l'ordre du million de cycles. La fissure décollant les fils de connexion se propage donc au cours de ce grand nombre de cycles. Par conséquent, la cinétique du mécanisme de fissuration est bien plus faible que les temps caractéristiques thermique et électrique. Il est ainsi possible de découpler le problème de mécanique du problème électro-thermique.

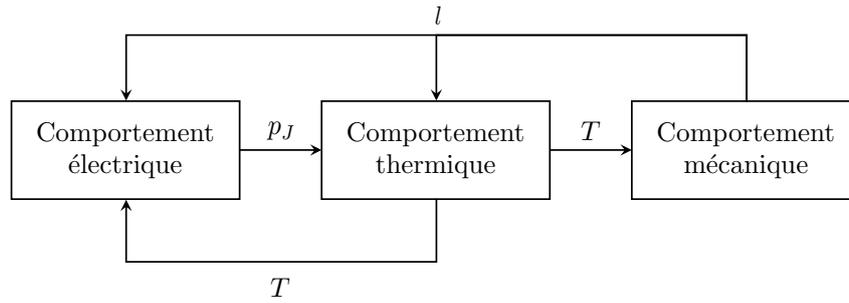


FIGURE 3.2 – Couplage électro-thermo-mécanique d'un module de puissance.

3.3.1 Découplage du problème de mécanique

Afin de découpler les problèmes, le problème électro-thermique est résolu pour toute valeur constante de longueur de fissure. Le problème est résolu sur un nombre de cycles N^{th} permettant d'atteindre le régime thermique permanent. Ce régime électro-thermique, prenant effet à la fin du régime transitoire, est caractérisé par la répétition d'un même cycle limite électro-thermique. En obtenant le comportement électro-thermique sur toute la plage d'évolution de la fissure, celui-ci est alors connu pour toute la durée de vie du module. Pour ce faire, la longueur de fissure l est considérée comme un paramètre du problème électro-thermique, le potentiel électrique et la température étant cherchés sous la représentation explicite $V(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}, l)$ et $T(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}, l)$. Ensuite, le cycle limite thermique est utilisé comme chargement du problème de mécanique afin de déterminer la vitesse de propagation de la fissure, pour chaque valeur de longueur de fissure. En effet, en résolvant le problème de mécanique sur un nombre de cycles N^{mec} , la vitesse de propagation de la fissure à la longueur l_0 est estimée par le rapport de l'incrément de longueur de fissure par le nombre de cycles N^{mec} :

$$\frac{\partial l}{\partial N} = \frac{l(N^{mec}) - l_0}{N^{mec}} \quad (3.2)$$

Considérant cette vitesse de propagation, obtenue pour toute longueur de fissure, il est possible de prédire la longueur de fissure obtenue après un incrément de ΔN cycles à partir de la longueur de fissure au cycle N , en effectuant un développement limité à l'ordre 1 :

$$l(N + \Delta N) = l(N) + \frac{\partial l}{\partial N} \Delta N \quad (3.3)$$

La longueur de fissure est ainsi obtenue en fonction du nombre de cycles, et la durée de vie du module est définie par le nombre de cycles nécessaires pour atteindre la longueur de fissure finale.

3.3.2 Longueur de fissure équivalente

La surface de contact entre les fils et la métallisation forme une surface quasi-elliptique, comme représenté sur la Figure 3.3a. Le contact ne forme pas une ellipse parfaite, car souvent l'axe de symétrie vertical n'est pas exactement respecté, et la surface est plutôt assimilable à deux demi-ellipses de grands axes différents mais de mêmes petits axes. La fissure menant au décollement des fils de connexion se propage depuis les extrémités de la surface vers l'intérieur de celle-ci, dans le sens longitudinal de l'ellipse. En appelant S l'aire de la surface de contact, une longueur de fissure équivalente l , évoluant de 0 (lorsque la surface n'est pas fissurée) jusqu'à 1 (valeur pour laquelle la surface est complètement fissurée), est définie comme le ratio de l'aire

fissurée sur l'aire de la surface de contact initiale S_0 :

$$l = \frac{S_0 - S}{S_0} \quad (3.4)$$

3.3.3 Paramétrisation de la longueur de fissure

La prise en compte de la fissure comme paramètre des problèmes électro-thermique et mécanique impose que son effet puisse être paramétrable. Une première approche consisterait à utiliser une transformation géométrique pour décrire l'évolution de la longueur de fissure, afin de travailler sur une géométrie comportant des conditions aux limites fixes, tel que fait dans le Chapitre 2. Comme vu dans ce chapitre, cette méthode a l'avantage de fournir une écriture explicite du problème en fonction de la longueur de fissure. Cependant, cette méthode a l'inconvénient d'être intrusive, en modifiant les matrices élémentaires. Avec Ansys, cela conduit à devoir utiliser des éléments finis utilisateurs. De plus, en 3D, l'expression des transformations géométriques est complexe, menant à des transformations dépendantes de l'espace et de la longueur de fissure. Chaque composante de la matrice élémentaire $[\hat{B}]^T[\hat{J}]^T[A][\hat{J}][\hat{B}]$ de l'équation (2.59) par exemple, (qui est de taille 9×9), devrait donc être mise sous forme séparée, et ce pour chaque domaine sur lequel s'applique une transformation géométrique. En raison de ces difficultés, une approche différente est utilisée, dans laquelle l'effet de la fissure sur le comportement est paramétré, plutôt que la longueur de fissure elle-même.

Pour le comportement électro-thermique, la fissure impacte directement la résistance de contact entre le fil et la métallisation. Par conséquent, son effet peut se modéliser par une résistance de contact uniforme sur la surface de contact initiale. Les valeurs des résistances de contact sont obtenues par simulations, pour différentes longueurs de fissure. Pour cela, la configuration de la surface fissurée doit être définie. Nous supposons qu'elle est circulaire, comme illustré sur la Figure 3.3b, où la surface non-fissurée est l'intersection de la surface initiale et d'un cercle de rayon r . Sur cette figure, la surface bleue est la surface non-fissurée tandis que la surface grise représente la surface fissurée. Afin d'obtenir les résistances de contact, des calculs directs sont

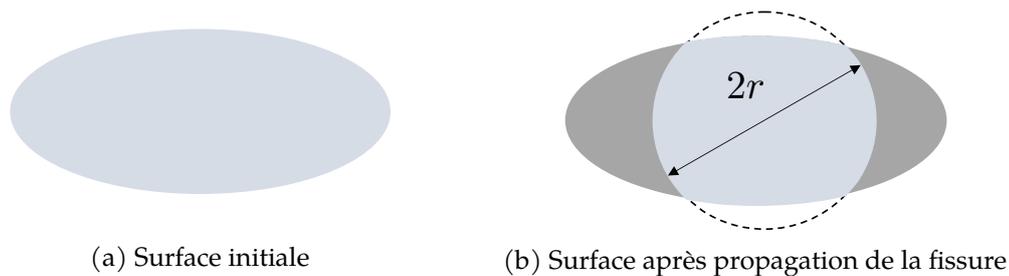


FIGURE 3.3 – Évolution de la surface de contact avec une propagation circulaire de fissure.

effectués en considérant une géométrie simplifiée ne comportant qu'un seul fil. Les géométries et conditions aux limites sont montrées sur la Figure 3.4. Un flux thermique est imposé au niveau de la surface A située à l'extrémité du fil et la température de la surface inférieure B de la brasure est imposée. Pour le problème électrique, un courant est imposé sur la surface A bleue, et le potentiel est fixé à zéro sur la surface B rouge située à l'extrémité du fil. Au niveau du contact, la surface fissurée est imposée comme adiabatique et non-conductrice électriquement, tandis qu'une conduction parfaite est imposée sur la surface saine. La résistance électrique est égale au rapport de la différence des potentiels électriques entre les deux surfaces, et du courant imposé :

$$R_e = \frac{V_A - V_B}{J} \quad (3.5)$$

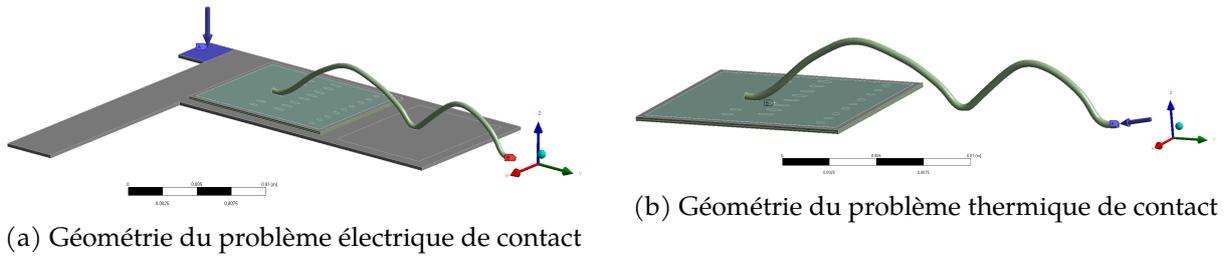


FIGURE 3.4 – Géométrie des problèmes pour l'évaluation des résistances de contact.

De façon analogue, la résistance thermique est égale au rapport de la différence des températures et du flux thermique :

$$R_{th} = \frac{T_A - T_B}{Q} \quad (3.6)$$

Ces résistances comportent une part liée à la résistance de conduction des matériaux, et une liée au contact :

$$R_e = R_{mat} + R_{contact} \quad (3.7)$$

En variant la longueur de fissure, seule la résistance de contact est impactée, et peut ainsi être déduite. Les valeurs des conductances électriques et thermiques sont représentées sur la Figure 3.5 en fonction de la longueur équivalente de fissure. Logiquement, les conductances tendent vers $+\infty$ quand la longueur de fissure tend vers 0 (les résistances de contact tendent vers 0), et tendent vers 0 quand la longueur de fissure tend vers 1 (la surface étant complètement fissurée, les flux ne sont plus conduits au travers).

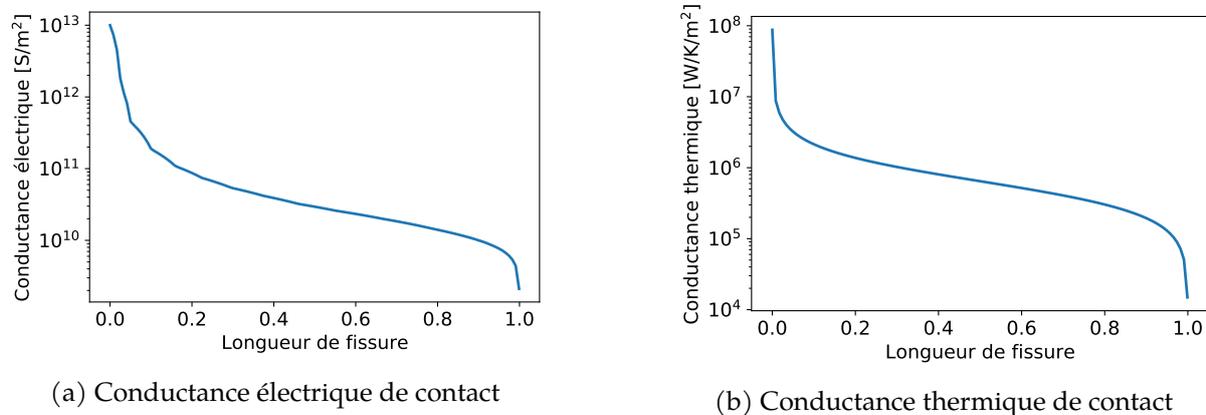


FIGURE 3.5 – Évolution des conductances de contact avec la longueur de fissure

3.4 Paramètres incertains

L'objectif du modèle réduit construit dans ce chapitre est de pouvoir l'utiliser afin de construire un jumeau numérique d'un module réel et d'en prédire la durée de vie restante au cours de son utilisation. Les paramètres du modèle réduit doivent donc être des paramètres à la fois influents sur la durée de vie du module, et à la fois incertains. Afin de déterminer les paramètres à prendre en compte dans le modèle réduit, une liste non-exhaustive est présentée dans le Tableau 3.1. Les deux critères, l'incertitude et l'influence du paramètre, sont évalués sur une échelle de 0 (valeur pour laquelle le paramètre n'est pas influent ou complètement

déterminé) à 5 (valeur pour laquelle le paramètre est très influent ou très incertain). La notation des paramètres suivant cette échelle provient de l'expertise métier des ingénieurs. Le produit des deux critères permet de choisir les paramètres du modèle réduit. Si le modèle réduit était utilisé dans une phase de conception, afin de déterminer les paramètres optimaux permettant d'obtenir la plus grande durée de vie sous certaines contraintes, le critère portant sur l'incertitude des paramètres n'aurait pas lieu d'être, et d'autres paramètres seraient choisis.

Cette analyse fait ressortir cinq paramètres à la fois incertains et influents sur la durée de vie du module. Ceux-ci sont :

- La conductivité électrique de la puce. En effet, cette conductivité électrique est directement liée aux pertes électriques. Ces dernières sont responsables de l'augmentation de température du module, et donc des contraintes thermiques induites. Or, la conductivité électrique de la puce varie d'un module à un autre, comme l'indique la variation de la chute de tension V_{CE} dans les datasheets. Or, la tension V_{CE} est proportionnelle à la résistivité électrique de la puce. Par exemple, une datasheet typique peut indiquer, pour un courant de 150A, une tension grille-émetteur $V_{GE} = 15V$, une valeur nominale de la chute de tension de la puce $V_{CE,chip} = 1,7V$, et une chute de tension maximale $V_{CE,chip} = 2,15V$, ce qui représente une variation de 26,5%. Aucune valeur n'est fournie pour la chute de tension minimale.
- La conductivité thermique des matériaux utilisés pour les différents éléments du module, qui, comme la conductivité électrique de la puce, impacte directement la température du module et les contraintes thermiques.
- Les paramètres de la loi cohésive, qui impactent fortement à la fois le seuil de propagation de la fissure et sa vitesse de propagation. Il est difficile d'établir avec certitude les valeurs de ces paramètres, ce qui demanderait des essais mécaniques spécifiques qui n'ont jusqu'à présent pas été effectués dans le cadre du contact fil-métallisation.
- La surface de contact entre le fil et la métallisation, dont des variations proviennent du procédé de fabrication.
- La température de référence pour laquelle les contraintes thermiques au niveau du contact fil-métallisation sont nulles. Cette température correspond à la température à laquelle le soudage s'est effectué, et est liée aux contraintes résiduelles présentes à l'état initial du module. Ces contraintes influent fortement sur la propagation de la fissure.

Afin de ne pas considérer un nombre trop important de paramètres dans le modèle, ce qui serait trop coûteux numériquement pour les problèmes non-linéaires, seules la conductivité électrique de la puce, la contrainte maximale de la loi cohésive σ_m , et la température de référence T_0 pour laquelle les contraintes thermiques sont nulles sont retenues comme paramètres du modèle. Il faut également rajouter à ces paramètres la longueur de fissure qui permet d'obtenir le comportement pour toute la plage d'utilisation du module. Ainsi, les champs solution des problèmes électriques et thermiques sont recherchés sous la forme suivante, par exemple pour le potentiel électrique :

$$V(\mathbf{x}, t, a, b, l) = \sum_{i=1}^{N^e} \Lambda_i^e(\mathbf{x}) \lambda_i^e(t) \alpha_i^e(a) \beta_i^e(b) \Gamma_i^e(l) \quad (3.8)$$

où a et b sont respectivement la pente et l'ordonnée à l'origine de la résistivité électrique de la puce dépendante de la température, de l'équation (3.1). Le déplacement \mathbf{u} dépend, en plus des paramètres électriques, des deux paramètres mécaniques :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, a, b, l, \sigma_m, T_0) = \sum_{i=1}^{N^u} \Lambda_i^u(\mathbf{x}) \lambda_i^u(t) \alpha_i^u(a) \beta_i^u(b) \Gamma_i^u(l) \zeta_i^u(\sigma_m) \theta_i^u(T_0) \quad (3.9)$$

TABLE 3.1 – Critères de choix des paramètres du modèle réduit

Type de paramètre	Sous type	Paramètre	Couche	Influence durée de vie	Incertitude	Importance
Propriétés des matériaux	Électrique	Conductivité	Puce Fil	5	4-5	20-25
		Capacité	Puce - semelle	3	1	3
	Thermique	Conductivité	Puce - semelle	1-2	4	4-8
		Module d'Young	Puce - semelle	5	4	20
		Coefficient de Poisson	Fils-métallisation	2	2	4
Mécanique	Paramètres loi cohésive	Fils-métallisation	2	2	4	
	Coeff. dilatation thermique	Zone cohésive	5	5	25	
	Courant injecté	Fils-métallisation	5	2	10	
Conditions aux limites	Électrique	t_{ON}, t_{OFF}	-	5	0	0
		Température convection	-	5	0	0
	Thermique	Coefficient de convection	Refroidisseur	3	1	3
Encastrement		Refroidisseur	3	4	12	
Design	Mécanique	Encastrement	Semelle	2	2	4
		Épaisseur	Brasure	3	2-3	6-9
	Géométrie	Surface	Puce	3	2-3	6-9
		Diamètre	Métallisation	4	3	12
		Surface de contact	Puce	?	1	≤ 5
	Design	Surface de contact	Métallisation	?	1	≤ 5
		Nombre de fils	Fils-métallisation	2	1-2	2-4
		Température d'assemblage	Fils-métallisation	4	4	16
		Température de convection	Fils-métallisation	?	0	0
		Conditions initiales	Température d'assemblage	Fils-métallisations	5	4

3.5 Résolution d'un problème PGD avec Ansys

La résolution des problèmes par PGD conduit, comme vu au Chapitre 2, à des problèmes globaux sur chacune des variables (espace, temps, paramètres). Ces problèmes sont de la nature suivante :

- Une équation différentielle ou algébrique portant sur chacune des fonctions temporelles ou paramétriques,
- Un problème éléments finis portant sur la fonction spatiale.

Le problème éléments finis conduit à la résolution d'un système matriciel de grande taille, de l'ordre de plusieurs millions de degrés de liberté dans le cas de l'étude d'un module de puissance 3D. Sa résolution est la partie la plus coûteuse en temps de calcul pour la détermination d'un nouveau mode PGD. Dans l'optique de réduire le temps de calcul de cette résolution, l'approche proposée dans [COURARD et al. 2016; ZOU et al. 2018] consistant à utiliser le logiciel industriel, ici Ansys Mechanical, comme solveur externe est reprise. De cette manière, il est possible d'exploiter les capacités du logiciel pour la résolution de problèmes éléments finis de grande taille. Les résolutions des autres problèmes sont effectuées dans le code Python par simplicité, bien qu'il soit possible de les effectuer avec le langage de programmation d'Ansys Mechanical.

Afin de pouvoir communiquer de manière efficace entre les deux codes, la librairie Python `PyMapdl` est utilisée. Initialement faisant partie de la librairie `PyAnsys` développée par le MIT, qui a été sous divisée en plusieurs librairies par la suite, `PyMapdl` permet de travailler interactivement avec Ansys Mechanical APDL. Les commandes du langage de programmation d'Ansys Mechanical, *Ansys Parametric Design Language* (APDL), sont traduites en commandes Python. La librairie permet notamment :

- d'automatiser (scripter) l'utilisation d'Ansys Mechanical APDL (MAPDL) à travers son langage de programmation APDL ou Python,
- d'accéder aux objets MAPDL en tant qu'objets Python (vecteurs, matrices, maillage, nœuds, éléments, résultats,...),
- d'afficher la géométrie, le maillage, les solutions en utilisant `PyVista` dans des perspectives de pré ou post-traitement.

Grâce à la technologie `Grpc`, la communication entre les deux codes est efficace et s'effectue très rapidement, sans passer par l'écriture de fichiers textes volumineux sur le disque dur.

Ainsi, la structure de l'algorithme de détermination d'un nouveau mode PGD avec Ansys se schématise par l'illustration de la Figure 3.6.

Plus spécifiquement, la résolution du problème spatial avec Ansys consiste tout d'abord à assembler la matrice $\tilde{\mathbf{K}}$ et le second membre $\tilde{\mathbf{F}}$ du problème avec Python, puis à résoudre le problème avec Ansys, celui-ci s'écrivant :

$$\tilde{\mathbf{K}} \Lambda_n = \tilde{\mathbf{F}} \quad (3.10)$$

La matrice et le vecteur du second membre sont donc, dans un premier temps, transférés dans MAPDL. La matrice est ensuite factorisée afin de déterminer la solution du problème. Les lignes de codes associées sont présentées dans l'Annexe A. La matrice et le second membre du problème sont calculés à partir d'une ou plusieurs matrices et vecteurs. Ceux-ci sont obtenus avec MAPDL, en ajoutant la commande `WRFULL` avant la commande `SOLVE`, ce qui permet de stopper le processus après avoir assemblé les opérateurs et le second membre, mais avant de résoudre le problème. Les objets peuvent ensuite être importés en tant qu'objets Python, afin de pouvoir résoudre le problème temporel et les problèmes paramétriques.

La méthodologie globale afin de résoudre un problème PGD avec Ansys est la suivante :

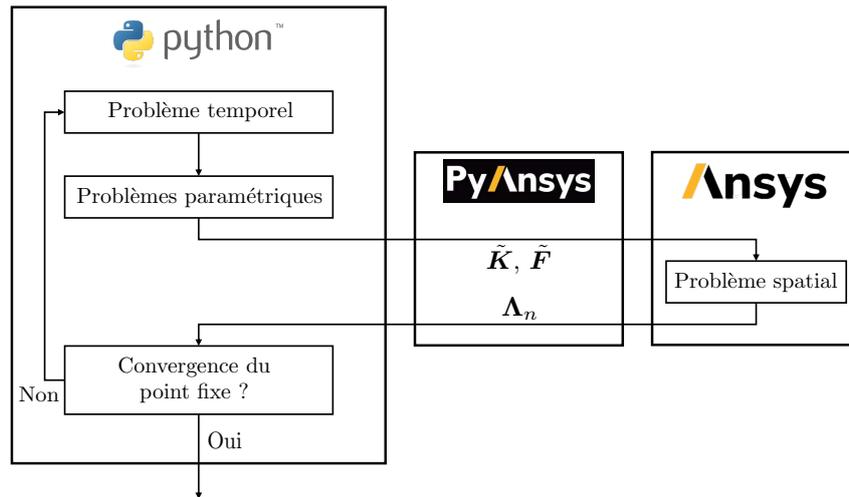


FIGURE 3.6 – Algorithme de point fixe pour la détermination d'un nouveau mode PGD avec Ansys.

1. Créer dans Ansys Workbench le type d'analyse du problème (électrique, thermique, statique, etc), et définir la géométrie avec Design Modeler ou SpaceClaim ainsi que les propriétés des matériaux.
2. Editer ensuite le modèle avec l'interface graphique de Mechanical : définir les contacts, procéder au maillage et spécifier les conditions aux limites.
3. Ajouter la ligne de commande `'WRFULL,1'` avant la résolution du problème, demandant à Ansys de stopper l'analyse avant la résolution.
4. Exporter le fichier d'entrée `.inp` ou `.dat` du problème, et quitter Ansys Mechanical.
5. Dans Python, lancer une instance APDL via la librairie Pymapdl. Lire le fichier d'entrée précédemment exporté afin de recréer le problème (maillage, conditions aux limites, etc).
6. Importer dans Python les matrices et vecteurs nécessaires à la résolution du problème PGD.
7. Résoudre le problème PGD dans le code Python, en interagissant avec MAPDL pour la résolution des problèmes matriciels.

Notons que la création du modèle pourrait s'effectuer directement dans Python en utilisant les commandes APDL. Cependant, la géométrie est complexe et est importée depuis un modèle fourni, ce qui est facilement réalisable dans Workbench. La modification de la géométrie et la définition du modèle sont alors plus aisées en utilisant l'interface graphique.

Les spécificités de l'implémentation de la PGD dans le cadre de la modélisation d'un module de puissance sont détaillées dans le paragraphe 3.6 ci-dessous.

3.6 Modèle réduit électro-thermique

Dans cette section, un modèle réduit électro-thermique 3D d'un module de puissance est développé. Comme pour le modèle réduit développé dans le Chapitre 2, la PGD conduisant à des problèmes globaux sur chacune des variables, une méthode incrémentale ne peut pas être utilisée pour résoudre le problème couplé. A la place, une méthode non-incrémentale de type Picard, itérant globalement entre les deux physiques est utilisée. Elle consiste à résoudre alternativement les problèmes PGD portant sur le comportement électrique et thermique du module, en obtenant

des solutions globales sur l'ensemble de l'espace, du temps et des paramètres. L'algorithme itère ainsi entre les deux physiques jusqu'à obtenir une convergence globale des deux solutions. Cette méthode est illustrée sur la Figure 3.7.

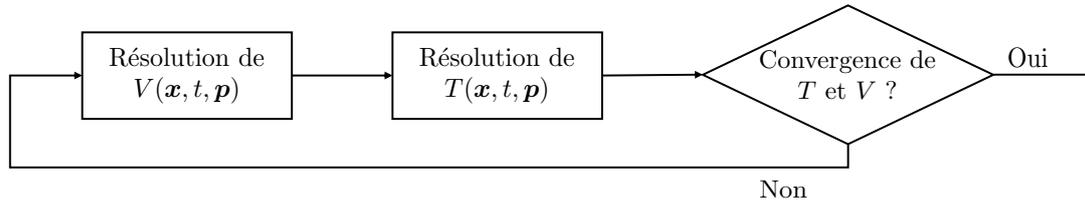


FIGURE 3.7 – Algorithme itératif global pour la résolution du problème électro-thermique couplé par PGD.

Commençons par obtenir le modèle réduit électrique, connaissant la température issue de l'itération précédente de l'algorithme.

3.6.1 Modèle réduit électrique

Le problème électrique est obtenu à partir de l'équation de Maxwell-Ampère dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) :

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad (3.11)$$

où \mathbf{j} est la densité volumique de courant en A m^{-2} . En multipliant par une fonction test V^* et en intégrant cette équation sur le domaine spatial Ω , on obtient :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{j} V^* \, d\Omega = 0 \quad (3.12)$$

Cela mène, en appliquant ensuite le théorème de la divergence :

$$-\int_{\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{grad} V^* \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} V^* \, dS = 0 \quad (3.13)$$

où \mathbf{n} est la normale à la surface du domaine $\partial\Omega$. En utilisant ensuite la loi d'Ohm locale

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (3.14)$$

où σ est la conductivité électrique et \mathbf{E} le champ électrique, et en introduisant un potentiel V tel que le champ électrique découle du gradient du potentiel,

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad} V \quad (3.15)$$

la formulation faible du problème électrique est obtenue :

$$\int_{\Omega} \sigma \mathbf{grad} V^* \cdot \mathbf{grad} V \, d\Omega = \int_{\partial_J \Omega} V^* J \, dS \quad (3.16)$$

où J est le courant imposé sur le bord $\partial_J \Omega$ du domaine, et où l'inconnue est le potentiel électrique V . Ce problème est analogue à un problème de conduction thermique stationnaire, dans lequel le potentiel électrique correspondrait à la température, le courant au flux de chaleur, et la conductivité électrique à la conductivité thermique.

Dans le cadre de la fissuration des fils de connexion, il faut tenir compte du contact imparfait au niveau des six surfaces de contact $\partial_c \Omega$ entre les fils et la métallisation de la puce. Cette

imperfection est modélisée par une résistance de contact $R_e(l) = 1/S_e(l)$, égale à l'inverse de la conductance. Le courant traversant la surface de contact est continu. Ainsi, le courant $j_m = \sigma_m \mathbf{grad} V \cdot \mathbf{n}_{mw}$ traversant la surface de contact de la métallisation est égal au courant j_w traversant la surface de contact du fil :

$$j_c = j_m = j_w = -\sigma_m \mathbf{grad} V \cdot \mathbf{n}_m = \sigma_w \mathbf{grad} V \cdot \mathbf{n}_w \quad (3.17)$$

où \mathbf{n}_m est la normale extérieure à la surface de contact de la métallisation, et \mathbf{n}_w la normale à la surface du fil.

La résistance de contact crée un saut de potentiel électrique entre le potentiel V_m de la surface de contact de la métallisation et le potentiel V_w de la surface de contact du fil. Cette différence de potentiel est égale au produit de la résistance et du courant traversant la surface :

$$[[V]] = V_m - V_w = R_e(l)j_c \quad (3.18)$$

La formulation faible du problème devient alors :

$$\int_{\Omega} \sigma \mathbf{grad} V^* \cdot \mathbf{grad} V \, d\Omega + \int_{\partial_c \Omega} S_e(l) [[V^*]] [[V]] \, d\Omega = \int_{\partial_J \Omega} J V^* \, dS \quad (3.19)$$

Sous forme semi-discrétisée spatialement, l'équation matricielle s'écrit :

$$\mathbf{V}^{*T} \mathbf{K} \mathbf{V} + S_e(l) \mathbf{V}^{*T} \mathbf{K}_c \mathbf{V} = \mathbf{V}^{*T} \mathbf{J} \quad (3.20)$$

où \mathbf{K} est la matrice de conductivité électrique, \mathbf{K}_c la matrice de conductivité du contact, pour une valeur de conductance de $S = 1 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-2}$, et où \mathbf{V} et \mathbf{J} sont respectivement le potentiel électrique et le courant sous forme discrétisée de vecteur. Le contact entre les six fils est traité par des éléments de contact (éléments CONTA174), permettant de ne pas ajouter de degré de liberté supplémentaires, contrairement à la méthode des multiplicateurs de Lagrange. La structure de la matrice de conductivité électrique n'est donc pas modifiée, ce qui permet d'implémenter plus facilement la PGD. Les autres contacts entre les différents matériaux sont traités par la méthode *Multiple Point Constraints (MPC)* en imposant un contact parfait, ou non pris en compte. Dans ce dernier cas, les nœuds de l'unique surface de contact sont partagés par les éléments des deux composants.

Afin de prendre en compte l'influence de la température sur les conductivités électriques des six fils, de la métallisation, et de la puce, la matrice \mathbf{K} est décomposée en une somme de matrices, chacune associée à un de ces composants, et une à l'ensemble des composants restants :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{fils} + \mathbf{K}_{met} + \mathbf{K}_{IGBT} + \mathbf{K}_{comp} \quad (3.21)$$

La solution du modèle PGD électrique est cherchée sous la forme suivante :

$$V(\mathbf{x}, t, a, b, l) = \sum_{i=1}^{N^e} \Lambda_i(\mathbf{x}) \lambda_i(t) \alpha_i(a) \beta_i(b) \Gamma_i(l) \quad (3.22)$$

connaissant la température sous une forme séparée similaire.

La difficulté de l'implémentation du problème électrique avec Ansys provient de l'évaluation du comportement électrique, c'est-à-dire des conductivités électriques dépendantes de la température. En effet, rappelons que la dépendance des conductivités électriques à la température est non-linéaire :

$$\sigma(\mathbf{x}, t, a, b, l) = \frac{1}{a(T_0 + T(\mathbf{x}, t, a, b, l)) + b} \quad (3.23)$$

Connaissant la température sur tout le domaine spatial, temporel et paramétrique, il faudrait ainsi assembler une matrice de conductivité à tous les pas de temps et toutes les valeurs de paramètres. Afin d'éviter cette opération coûteuse en temps, la conductivité de chaque matériau dépendant de la température est mise sous forme séparée dans le code Python. Par exemple, pour la conductivité des fils :

$$\sigma_f = \sum_{i=1}^{N_{\sigma_f}} = \Lambda_i^{\sigma_f}(\mathbf{x}) \lambda_i^{\sigma_f}(t) \alpha_i^{\sigma_f}(a) \beta_i^{\sigma_f}(b) \Gamma_i^{\sigma_f}(l) \quad (3.24)$$

De cette manière, il suffit ensuite d'évaluer N_{σ_f} matrices de conductivité, associées chacune à la fonction spatiale $\Lambda_i^{\sigma_f}$. Cependant, pour des raisons inconnues, il n'est pas possible d'imposer un champ spatial de conductivité ou résistivité électrique dans la version d'Ansys 2021R1, bien que cette fonctionnalité existe pour un champ de module de Young par exemple. La stratégie consiste alors à imposer un champ de température T_i , tel que la conductivité pour ce champ de température soit égale à la fonction spatiale $\Lambda_i^{\sigma_f}$:

$$\Lambda_i^{\sigma_f} = \frac{1}{a(T_0 + T_i) + b} \quad (3.25)$$

Ainsi, après avoir calculé ce champ thermique dans Python et l'avoir imposé dans Ansys, la matrice de conductivité électrique \mathbf{K}_i^f associée à la fonction spatiale $\Lambda_i^{\sigma_f}$ est obtenue, et la matrice de conductivité des fils peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{K}_{fils} = \sum_{i=1}^{N_{\sigma_f}} = \mathbf{K}_i^f \lambda_i^{\sigma_f}(t) \alpha_i^{\sigma_f}(a) \beta_i^{\sigma_f}(b) \Gamma_i^{\sigma_f}(l) \quad (3.26)$$

La procédure est appliquée de manière identique pour les autres composants dépendant de la température, ce qui permet d'obtenir la matrice de conductivité électrique globale sous forme séparée. La procédure PGD standard est ensuite employée afin d'obtenir la solution.

3.6.2 Modèle réduit thermique

Le courant électrique génère une densité volumique de pertes par conduction p_J , qui est égale au produit de la conductivité σ par le carré du gradient du potentiel électrique V :

$$p_J = \sigma(\nabla V)^2 \quad (3.27)$$

L'équation régissant l'évolution de l'augmentation de la température est obtenue de manière similaire à celle détaillée dans la Section 2.5.1. On obtient, en considérant la température initiale égale à la température de convection, et en tenant compte de la conductance thermique de contact S_{th} entre les six fils et la métallisation :

$$\int_{\Omega} \rho c_p T^* \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} k \nabla T^* \cdot \nabla T d\Omega + \int_{\partial_c \Omega} S_{th}(l) [[T^*]] [[T]] d\Omega + \int_{\partial_h \Omega} h T^* T dS = \int_{\Omega} T^* \sigma(\nabla V)^2 d\Omega \quad (3.28)$$

où h est le coefficient d'échange par convection. Sous forme discrétisée par éléments finis, l'équation est la suivante :

$$\mathbf{T}^{*T} \mathbf{C} \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T}^{*T} \mathbf{K} \mathbf{T} + S_{th}(l) \mathbf{T}^{*T} \mathbf{K}_c \mathbf{T} = \mathbf{T}^{*T} \mathbf{F}_{th} \quad (3.29)$$

où C est la matrice de conductivité thermique, K la matrice de conduction regroupant également le terme de convection, K_c la matrice de conduction liée au contact, et F_{th} le chargement du problème.

La difficulté de l'implémentation du problème thermique avec Ansys réside dans l'évaluation de ce second membre. En effet, la fonction permettant de calculer le gradient spatial d'un champ n'est pas directement accessible par l'utilisateur. Une stratégie doit donc être mise en œuvre afin de calculer le chargement du problème thermique. Le potentiel électrique étant obtenu sous forme séparée, son gradient est déterminé par le gradient des fonctions spatiales :

$$\nabla V = \sum_{i=1}^{N^e} \nabla \Lambda_i^e(\mathbf{x}) \lambda_i^e(t) \alpha_i^e(a) \beta_i^e(b) \Gamma_i^e(l) \quad (3.30)$$

Afin d'obtenir le gradient de chaque fonction spatiale, un problème fictif est résolu, en imposant la valeur de tous les degrés de liberté à la valeur de la fonction. Ainsi, la fonction devient la solution du problème dans Ansys Mechanical. Pour ce faire, chaque fonction spatiale Λ_i étant connue sous la numérotation des degrés de liberté car issue de la résolution d'un problème éléments finis, doit d'abord être ordonnée par numéro de nœud. Ensuite, le potentiel électrique de chaque nœud est imposé à la valeur de la fonction. Les commandes APDL associées à ces opérations sont présentées en Annexe A. Le problème fictif est ensuite résolu, suite auquel Ansys post-traite la solution. Le gradient de la fonction peut ensuite être issu du post-traitement. Une première idée serait d'exporter le champ électrique de la solution, qui est au signe près le gradient du potentiel électrique :

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V \quad (3.31)$$

Cependant, la valeur du champ électrique retournée par Ansys est la valeur moyennée sur l'élément. Or, les éléments finis utilisés par Ansys étant quadratiques pour un problème électrique, le gradient du potentiel n'est en réalité pas constant par élément, et l'erreur commise lors du calcul de la puissance dissipée par effet Joule est importante sur les éléments comportant un fort gradient du potentiel électrique. En effet, pour calculer la puissance dissipée par effet Joule, il est préférable d'élever d'abord le gradient au carré avant d'effectuer la moyenne sur les points de Gauss de l'élément, comme montré sur la Figure 3.8. Sur cet exemple d'illustration, la moyenne de la première composante du gradient obtenu aux quatre points d'intégration de l'élément vaut $-1/2$, qui élevé au carré vaut $1/4$, tandis que la moyenne des carrés des gradients est égale à $0,46$.

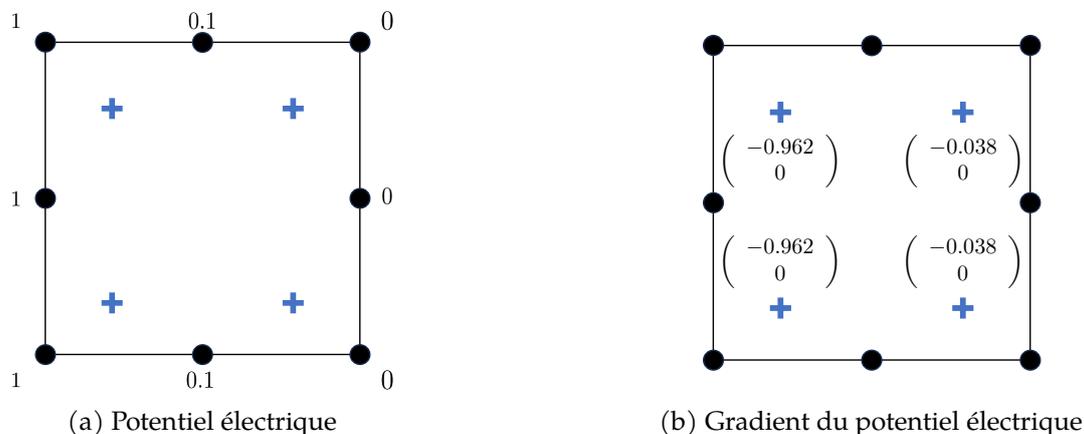


FIGURE 3.8 – Illustration d'un quadrangle ayant un fort gradient de potentiel électrique. Les nœuds sont représentés par les cercles noirs et les points d'intégration par les croix bleues.

Afin de réduire cette erreur, chaque composante E_x^2 , E_y^2 et E_z^2 de la moyenne du carré du gradient est calculée et exportée grâce au calcul de la puissance dissipée par effet Joule. Pour cela, trois problèmes fictifs sont résolus en imposant la conductivité électrique des matériaux égale à 1 pour la composante souhaitée et égale à une valeur très faible pour les deux autres composantes. Le gradient de la fonction spatiale est enfin obtenu en prenant la racine carré et en la multipliant par l'opposé du signe du champ électrique.

Une fois que les gradients des fonctions spatiales sont obtenus, la puissance dissipée par effet Joule est calculée dans le code Python, en prenant comme valeur élémentaire de la conductivité électrique la moyenne de la conductivité des nœuds de l'élément. La température n'ayant pas un fort gradient sur les éléments (contrairement à la tension électrique sur certains éléments), l'erreur commise est négligeable.

La Figure 3.9 valide l'approche utilisée en comparant la puissance élémentaire obtenue avec cette approche à partir du potentiel obtenu par un calcul direct, à la puissance obtenue par le calcul électrique direct avec Ansys.

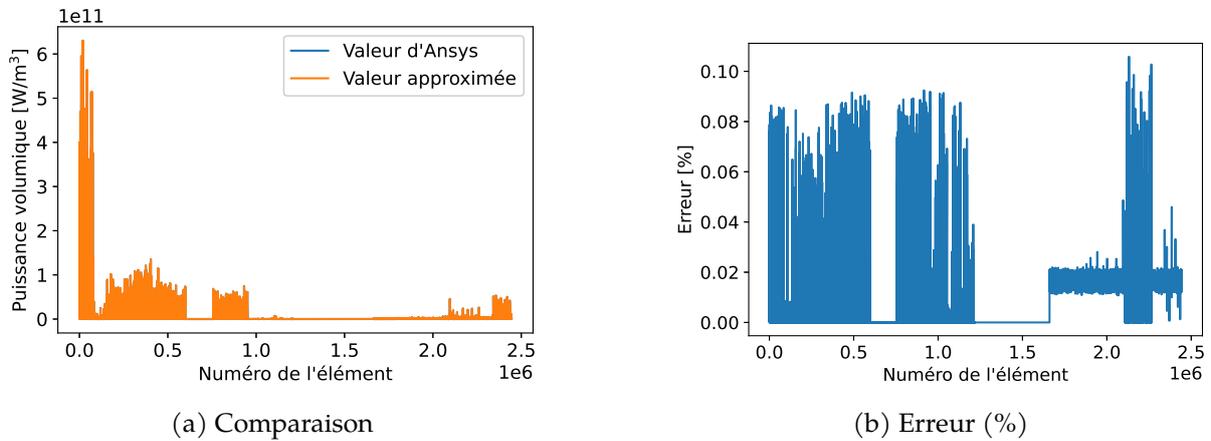


FIGURE 3.9 – Comparaison entre la valeur de référence de la puissance volumique dissipée par effet Joule calculée par Ansys et son approximation.

3.6.3 Résultats du problème électro-thermique

Le problème électro-thermique a tout d'abord été créé dans Workbench, comme décrit par la procédure de la Section 3.5. Sans utiliser de méthode de réduction de modèle, le comportement électro-thermique est classiquement résolu dans Ansys par une méthode monolithique. Dans Workbench, cela implique l'utilisation du bloc thermo-électrique, résolvant le problème couplé. La méthode utilisée pour résoudre le problème par PGD est une méthode partitionnée. Elle impose donc d'utiliser un bloc électrique et un bloc thermique, partageant uniquement le même modèle, mais n'échangeant pas les résultats. Cette configuration est montrée sur la Figure 3.10. L'échange des informations est traité par le code, comme précédemment décrit.

Les propriétés des matériaux utilisés dans le modèle 3D sont présentées dans le Tableau 3.2, où ρ est la résistivité électrique et ρ_v la masse volumique. La résistivité électrique de la puce est orthotrope afin de modéliser la conduction verticale de la puce. Les valeurs de la résistivité dans les directions x et y sont prises très grandes, tout comme les résistivités des diodes qui sont à l'état bloqué, et de la céramique qui n'est pas conductrice. Les valeurs des paramètres des résistivités dépendantes de la température sont listées dans le Tableau 3.3. La résistivité électrique de la puce a été obtenue à l'aide de la datasheet, pour une valeur de la tension grille-émetteur $V_{GE} = 11V$.

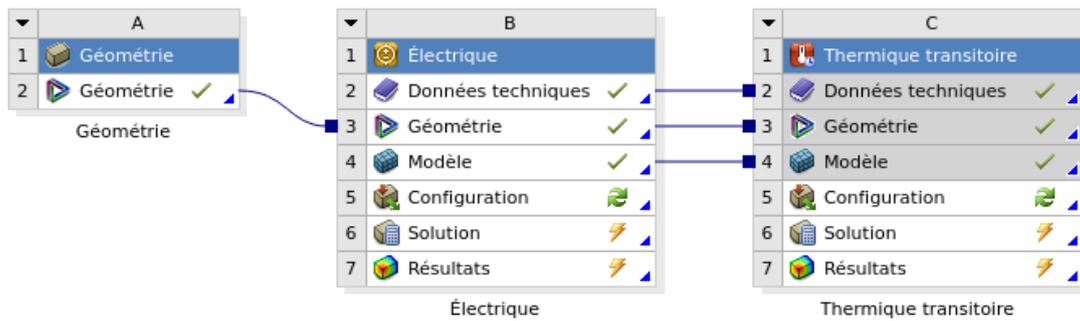


FIGURE 3.10 – Configuration du problème électro-thermique dans Workbench pour la résolution par PGD.

TABLE 3.2 – Propriétés électro-thermo-mécaniques des matériaux du modèle 3D.

Matériau	ρ [Ω/m]	k [W/m/K]	c_p [J/kg/K]	ρ_v [kg/m ³]	E [GPa]	ν [–]	α [ppm]
Cuivre	$1,7 \times 10^{-8}$	400	390	8930	97	0,34	17
Céramique	10^8	170	720	3300	110	0,25	18
Silicium IGBT	$\rho_{IGBT}(T)$	150	710	2330	131	0,28	4,1
Silicium diodes	10^8	150	710	2330	131	0,28	4,1
Brasure	$1,6 \times 10^{-7}$	55	210	7360	35	0,31	26
Al. fils	$\rho_f(T)$	237	900	2700	76	0,35	23,5
Al. métallisations	$\rho_m(T)$	237	900	2700	76	0,35	23,5
Graisse thermique	10^{-8}	1	1,4	2	-	-	-

Cette valeur, plus faible que la valeur nominale de 15V, a été choisie lors des essais de durée de vie afin de rendre le composant plus résistif pour atteindre des amplitudes thermiques d'environ 70°C. Le problème est résolu pour une plage de variation de $\pm 20\%$ des paramètres a et b .

TABLE 3.3 – Propriétés des résistivités électriques $\rho(T) = a(T_0 + T) + b$ dépendantes de la température. La température est en degrés Celsius.

Composant	a [$\Omega m^{-1} K^{-1}$]	b [Ωm^{-1}]
Puce	$1,23 \times 10^{-5}$	$1,32 \times 10^{-2}$
Métallisation	$1,25 \times 10^{-10}$	$2,41 \times 10^{-8}$
Fils	$1,47 \times 10^{-10}$	$3,71 \times 10^{-8}$

La température initiale du module est $T_0 = 30^\circ\text{C}$, qui est également la température du liquide de refroidissement. Le coefficient de convection est égal à $h = 3000 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$. Les cycles du courant sont composés d'un temps $t_{ON} = 0,2\text{s}$ durant lequel le courant vaut 150A et d'un temps $t_{OFF} = 0,4\text{s}$ durant lequel le courant est nul. 50 cycles sont simulés, afin d'obtenir un cycle thermique limite.

La convergence du problème électro-thermique a été obtenue en 3 itérations, comme le montre la Figure 3.11, représentant les évolutions au cours des itérations globales de la tension électrique et la température du module sur les premiers cycles. Ces grandeurs sont montrées au point de l'espace où elles sont maximales. Lors de la première itération, le potentiel électrique est calculé en considérant une température constante et homogène, c'est pourquoi le potentiel est constant lors de la phase d'échauffement du cycle. Lors de l'itération suivante, le nouveau profil de température est considéré, et les matériaux deviennent plus résistifs avec l'augmentation de température.

Le potentiel électrique augmente donc lors de la phase d'échauffement, même si le courant est constant durant cette phase. Les résultats obtenus après la troisième itération de l'algorithme sont proches de ceux obtenus à l'issue de l'itération précédente (ils apparaissent confondus sur la Figure 3.11), la convergence est alors atteinte. L'amplitude des cycles thermiques de la Figure 3.11b est d'environ 70°C , ce qui correspond bien au comportement mesuré expérimentalement.

La solution du problème électrique a été obtenue en calculant 5 modes, tandis que la température, du fait du terme transitoire plus difficile à capter correctement, est décrite par 13 modes. L'évolution de l'amplitude des modes thermiques est montrée sur la Figure 3.12.

Les premier et troisième modes du potentiel électrique sont montrés sur la Figure 3.13, où chaque mode correspond au produit des fonctions d'une colonne. Seuls les composants supérieurs à la semelle sont montrés sur les fonctions spatiales. Les premier et deuxième modes thermiques sont présentés sur la Figure 3.14. Comme cela est classiquement le cas pour la PGD, les premiers modes captent la solution de manière globale, et les modes suivants permettent de capter les effets locaux de la solution, ou les dépendances paramétriques. Le troisième mode du potentiel électrique contient l'effet de la fissuration des fils sur la solution : la fonction spatiale comporte une variation importante au niveau des six fils qui s'endommagent, et la fonction paramétrique $\Gamma(l)$ dépendante de la longueur de fissure évolue bien plus que celle du premier mode. Les résultats électro-thermiques mettent également en évidence que le paramètre a , correspondant à la pente de la résistivité électrique de la puce impacte peu le potentiel électrique et la température. Le paramètre b est bien plus influant. Par conséquent, le paramètre a ne sera pas pris en compte dans le modèle mécanique.

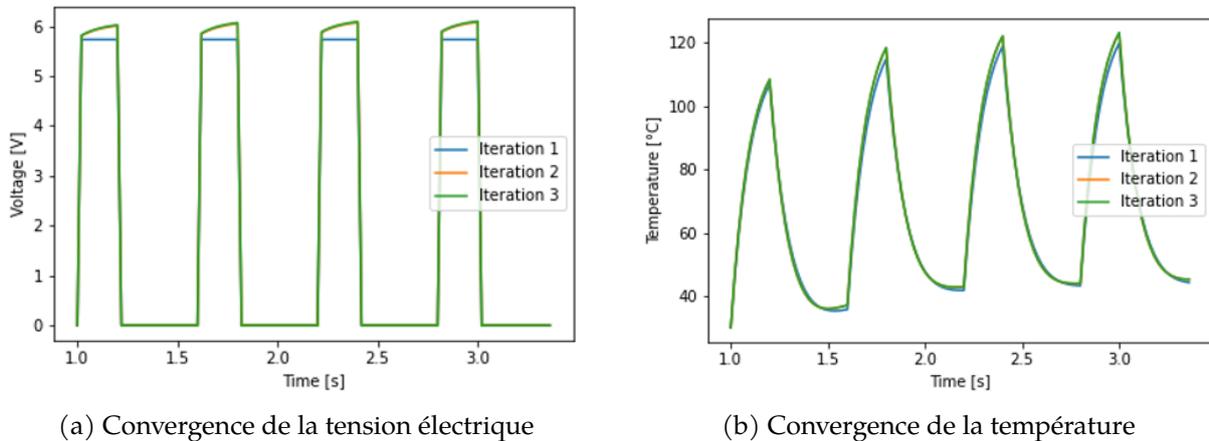


FIGURE 3.11 – Convergence du problème électro-thermique.

Le faible impact du paramètre a se confirme également sur l'évolution de la température de jonction, comme montré sur la Figure 3.15. Cette figure illustre l'impact des paramètres sur le cycle limite de la température de jonction, calculée ici comme la température moyenne de la surface de la puce IGBT top. En revanche, le paramètre b est bien plus influant, comme montré également sur cette figure. La Figure 3.15 montre également que, de manière attendue, l'amplitude des cycles thermiques augmente avec la résistivité de la puce (ce qui correspond à des valeurs plus grandes de a et b). Une amplitude de 70°C de la température de jonction est obtenue pour des valeurs de b/b_0 proches de 1,2.

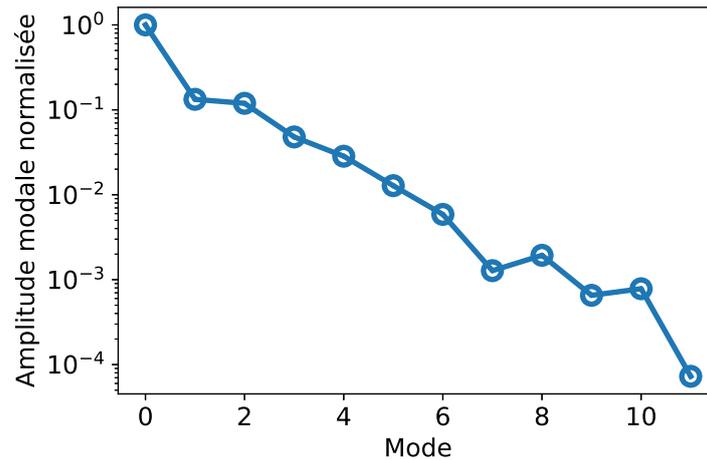


FIGURE 3.12 – Évolution de la norme des modes de la température, par rapport à la norme du premier mode. Les modes sont orthogonalisés par rapport aux fonctions spatiales.

3.6.4 Comparaison avec un calcul direct issu de Ansys

Afin de valider le modèle réduit électro-thermique, les résultats PGD sont comparés avec les résultats issus d'un calcul direct. Le problème comporte 3,83 millions de degrés de liberté et est résolu à l'aide de douze cœurs d'un ordinateur comportant deux processeurs Intel Xeon CPU E5-2630 v4, dont la fréquence est de 2,20 GHz. La résolution du problème couplé par la méthode monolithique utilisée pour un problème électro-thermique dans Ansys demande environ 12 minutes pour chaque pas de temps. La simulation de 50 cycles, en utilisant 30 pas de temps par cycle, demanderait ainsi environ 300 heures de calcul, soit 12,5 jours. L'exploration du domaine paramétrique, si chaque paramètre est discrétisé par 101 points, est par conséquent impossible.

Grâce à la PGD, la solution du problème couplé électro-thermique est obtenue en moins de 24h, et ce sur tout le domaine paramétrique, en réalisant 3 itérations globales.

Afin de diminuer le temps de calcul associé à la résolution de référence, une méthode partitionnée est utilisée, sans itérer entre les physiques à chaque pas de temps.

Sur la Figure 3.16, le potentiel électrique V_{PGD} obtenu avec la PGD est comparé à la solution de référence V_{ref} pour les valeurs nominales des paramètres, et une longueur de fissure équivalente nulle. La comparaison est effectuée à la fin du temps d'échauffement du deuxième cycle. La comparaison montre une très bonne concordance des résultats. L'erreur commise, définie par $e_V = ||V_{ref} - V_{PGD}|| / ||V_{ref}||$ est égale à $e_V = 1,06\%$. Comme attendu, le potentiel électrique est plus élevé sur la feuille de cuivre sur laquelle le courant est imposé, et diminue au cours du trajet du courant.

La même comparaison est effectuée pour la température sur la Figure 3.17. La température du module est maximale au niveau des puces, qui chauffent dû à la grande résistivité des puces et au fort courant les traversant. L'erreur la plus importante est localisée au niveau des fils de l'IGBT top. Cette erreur est cependant maximale sur la partie supérieure des fils, mais faible au niveau des contacts entre les fils et la métallisation de la puce. L'erreur entre la PGD et la solution de référence est de $e_T = 4,88\%$. Cette erreur décroît lors du refroidissement du module. La comparaison de la température à la fin du deuxième cycle est montrée sur la Figure 3.18. A cet instant, l'erreur commise est de $e_T = 3,32\%$.

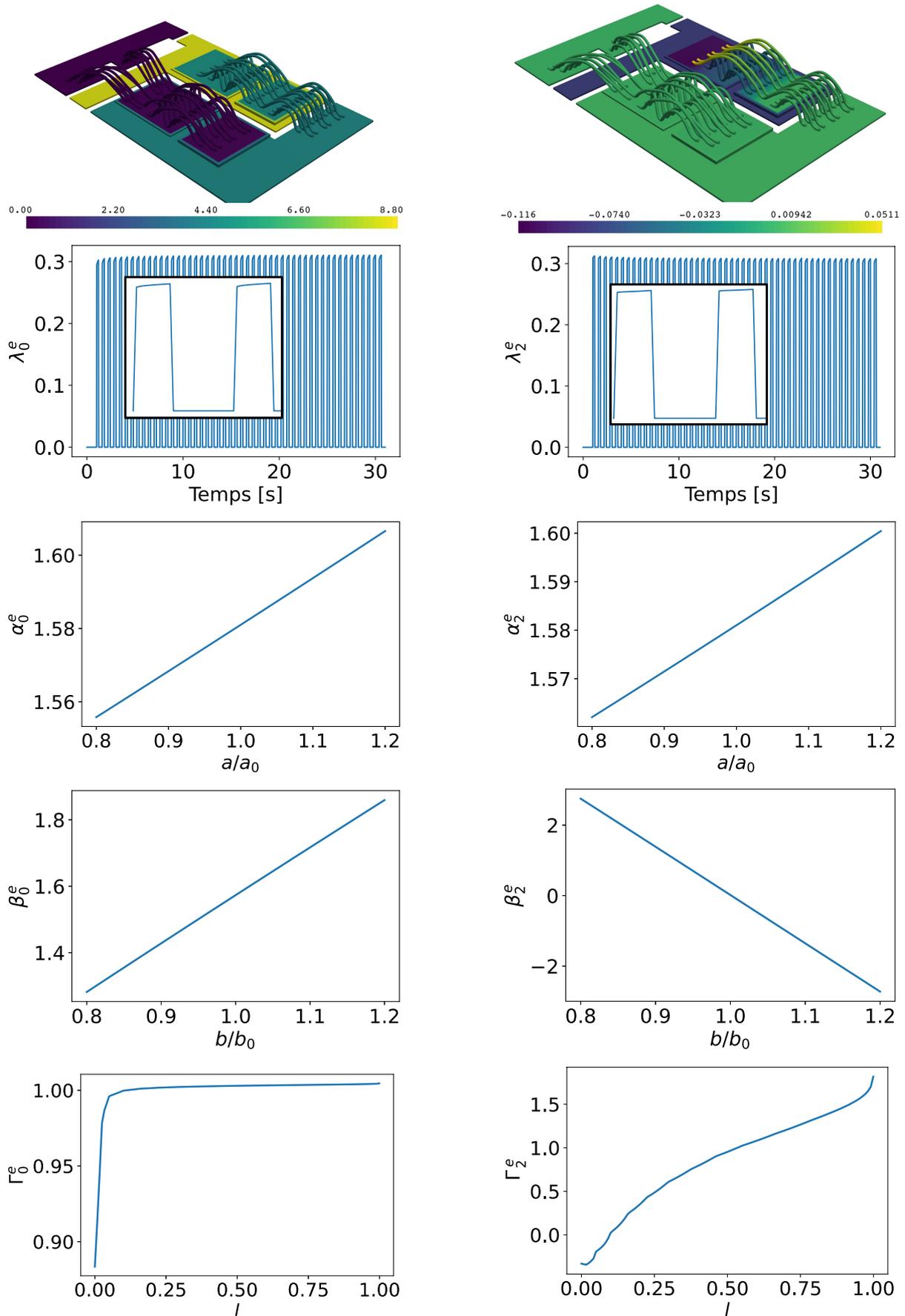


FIGURE 3.13 – Premier mode (correspondant au produit des fonctions de la première colonne) et troisième mode (deuxième colonne) du potentiel électrique. L'encadré des fonctions temporelles présente un zoom de celles-ci sur 2 cycles.

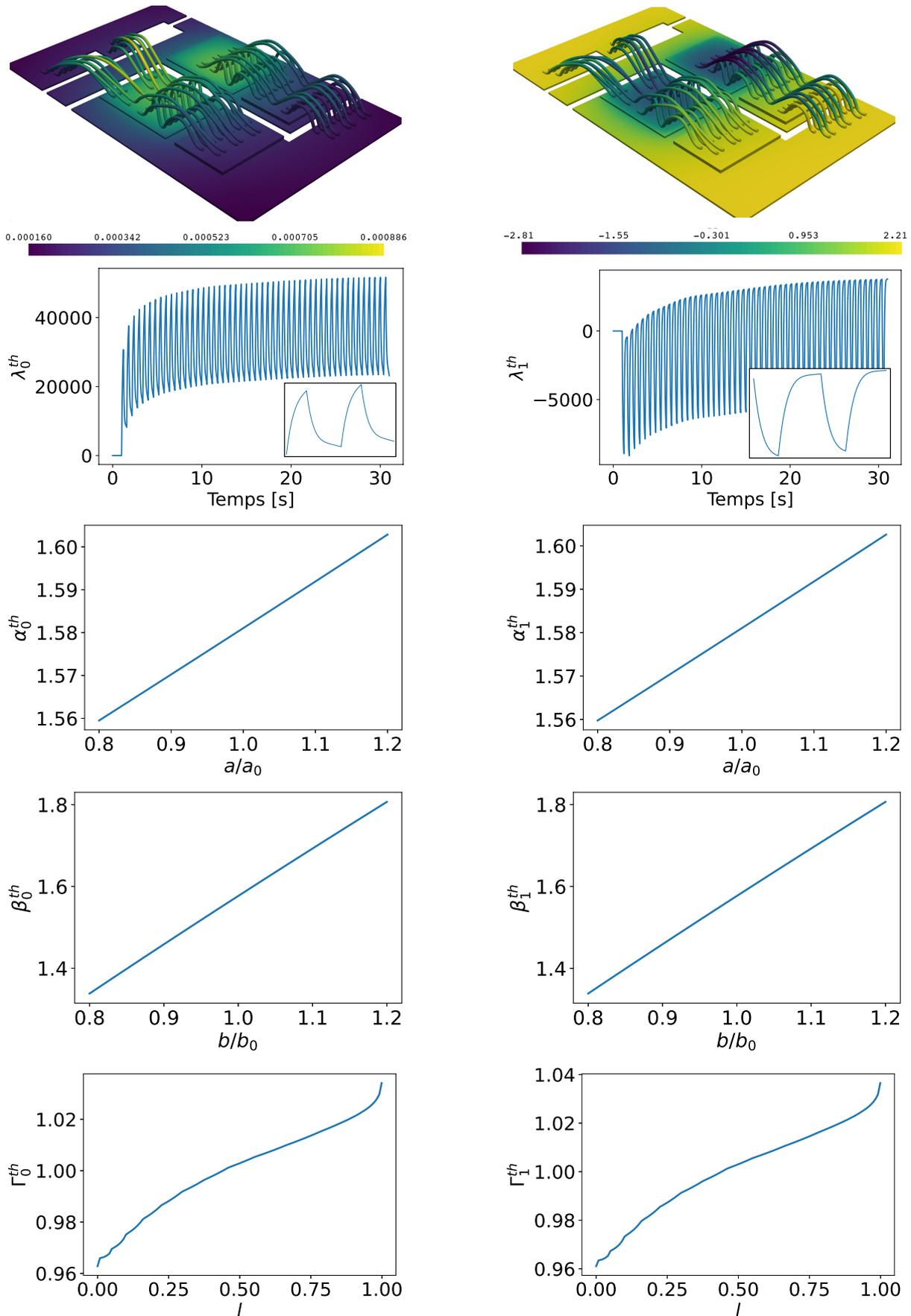


FIGURE 3.14 – Premier mode (correspondant au produit des fonctions de la première colonne) et deuxième mode (deuxième colonne) de la température. L’encadré des fonctions temporelles présente un zoom de celles-ci sur 2 cycles.

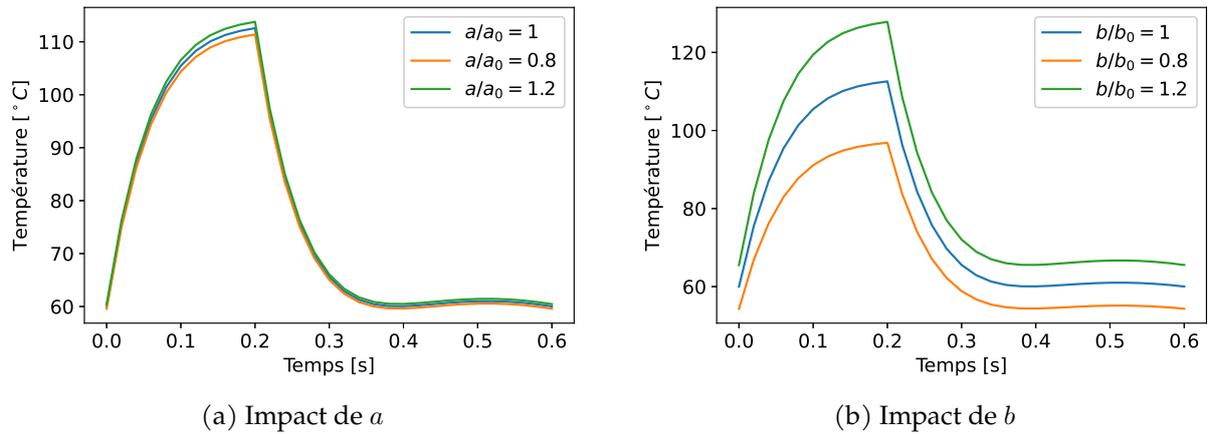
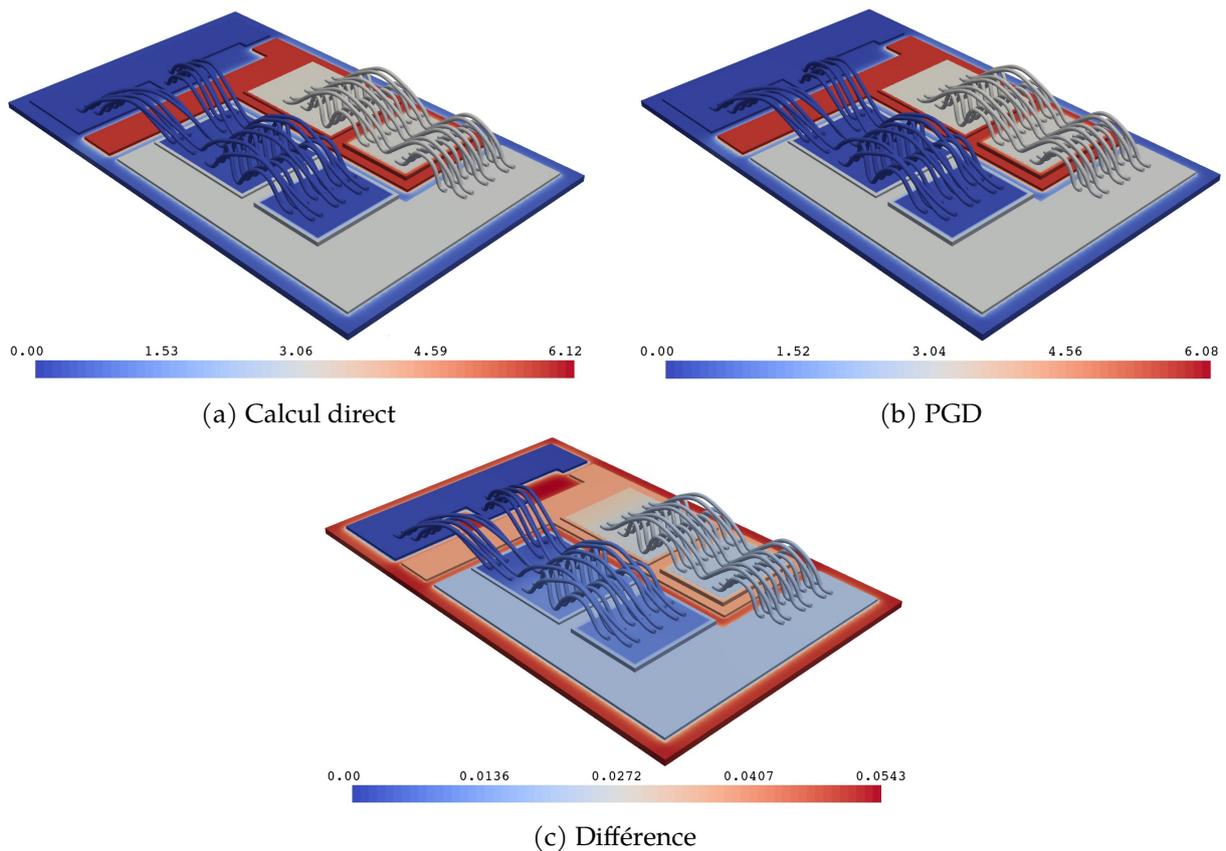


FIGURE 3.15 – Impact des paramètres sur le cycle limite de la température de jonction

FIGURE 3.16 – Comparaison entre le potentiel électrique (en Volt) obtenu avec un calcul direct et la solution PGD. La solution est montrée pour la valeur nominale des paramètres ($a/a_0 = 1, b/b_0 = 1$), à la fin du temps d'échauffement du deuxième cycle, et pour un endommagement nul.

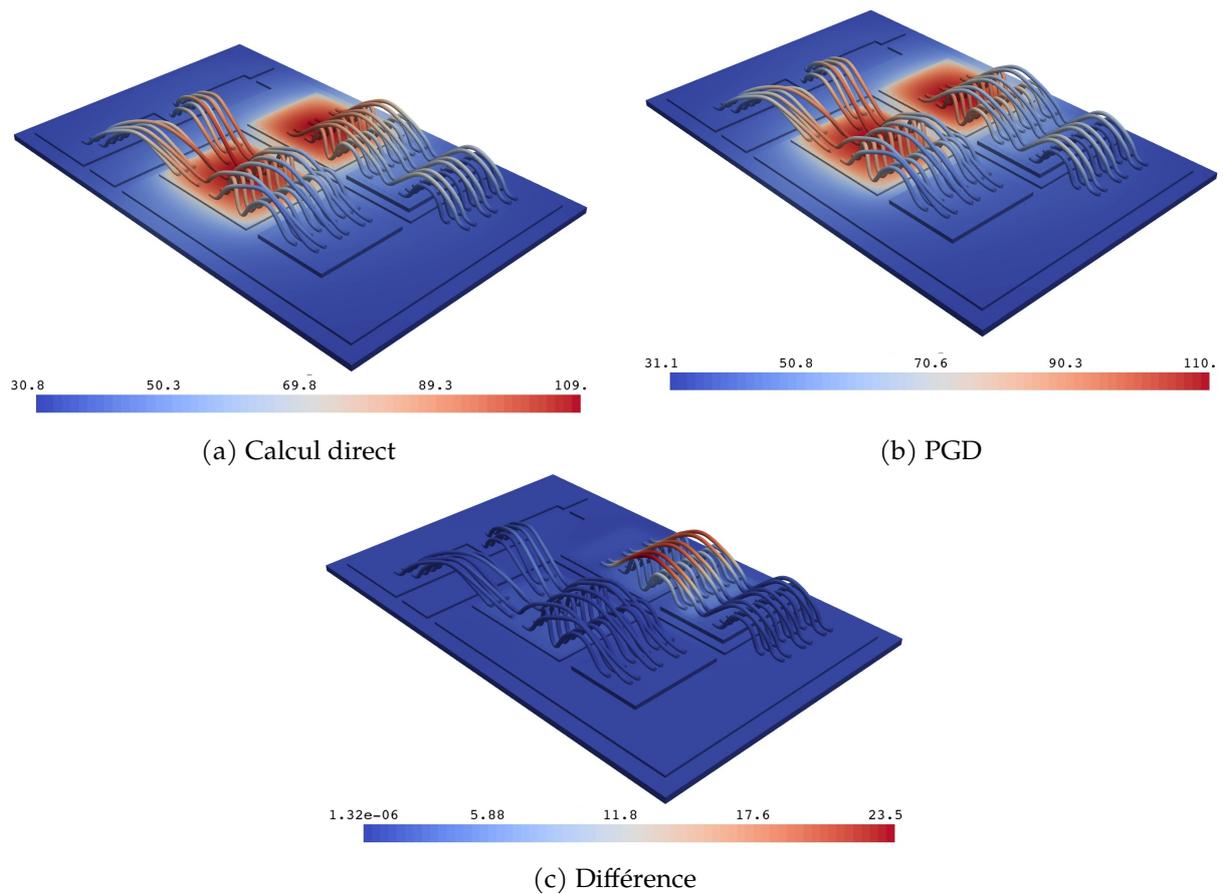


FIGURE 3.17 – Comparaison entre la température obtenue (en degrés Celsius) avec un calcul direct et la solution PGD. La solution est montrée pour la valeur nominale des paramètres ($a/a_0 = 1, b/b_0 = 1$), à la fin du temps d'échauffement du deuxième cycle, et pour un endommagement nul.

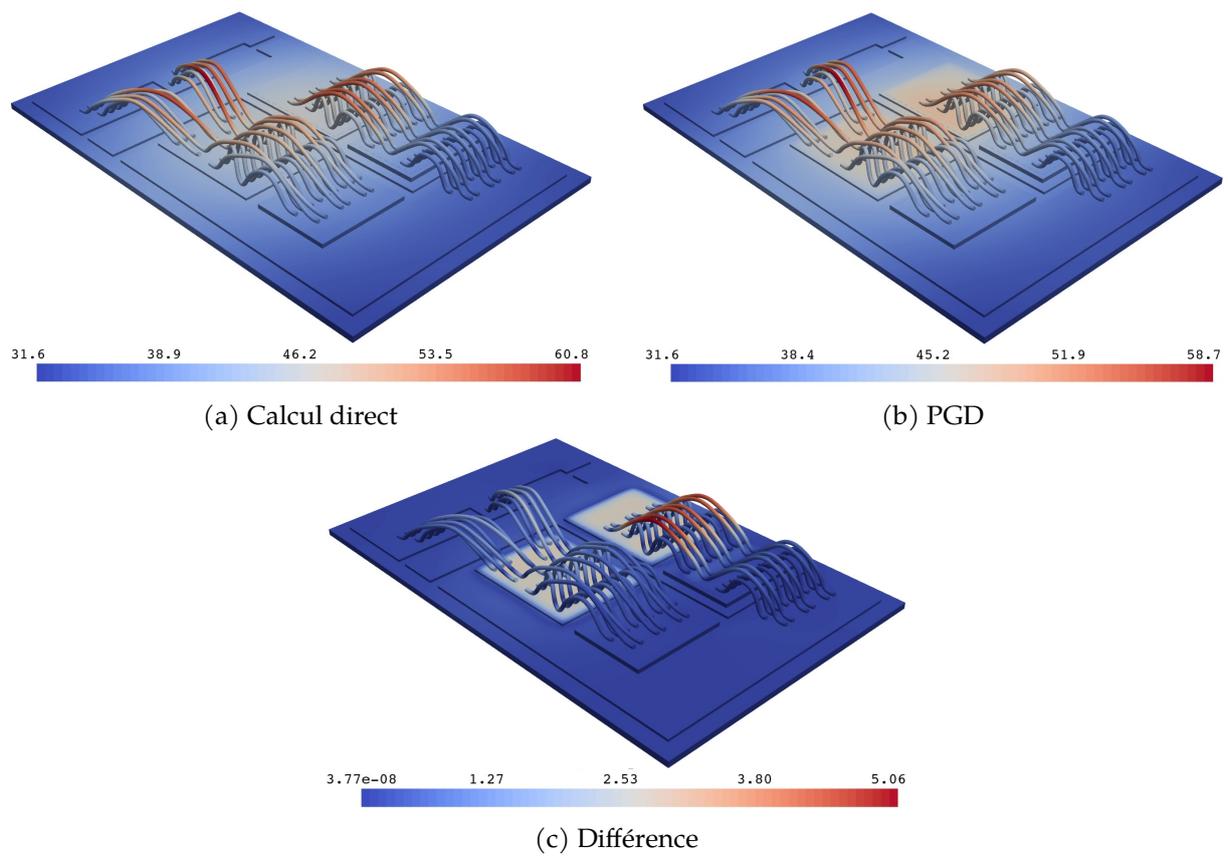


FIGURE 3.18 – Comparaison entre la température obtenue (en degrés Celsius) avec un calcul direct et la solution PGD. La solution est montrée pour la valeur nominale des paramètres, à la fin du deuxième cycle, et pour un endommagement nul.

3.7 Modèle réduit mécanique

Le modèle électro-thermique permet d'obtenir le potentiel électrique et la température du module en fonction de la longueur de fissure. L'objectif du problème de mécanique est, à partir du chargement thermique, de calculer l'évolution de la longueur de fissure en fonction du nombre de cycles. Ainsi, une fois cette évolution obtenue, les comportements électrique, thermique et mécanique du module seront connus en fonction du nombre de cycles endurés par le module.

Une fois le modèle réduit électro-thermique obtenu, le cycle limite thermique en est extrait pour constituer le chargement du problème de mécanique. En première approximation, le cycle limite thermique est également considéré comme étant le chargement du problème pour les cycles initiaux, qui correspondent au régime transitoire. De fait, cela surestime la propagation de la fissure durant les premiers cycles. Les cycles transitoires pourront éventuellement être pris en compte dans un second modèle pour corriger ce biais. Cette erreur a cependant une faible incidence sur la durée de vie, le régime transitoire étant très court par rapport à la durée de vie du module. Afin de diminuer le temps de calcul du modèle numérique, la géométrie est simplifiée, et ne contient qu'un seul fil. Le fil choisi est un des deux fils les plus au centre de la puce, et subissant en conséquent des plus grandes variations de température. Une zone cohésive est créée à l'interface entre le fil et la métallisation de la puce afin de modéliser la propagation de la fissure. De plus, la géométrie comporte uniquement les éléments supérieurs du module pouvant influencer sur le comportement local du contact fil-métallisation. La géométrie est présentée sur la Figure 3.19.

Un nouveau maillage est par conséquent généré. Le nouveau maillage permet également d'utiliser des éléments linéaires qui suffisent à modéliser le comportement mécanique de la structure, des éléments quadratiques étant utilisés précédemment pour le calcul électro-thermique. Les fonctions spatiales des modes de la température doivent donc être projetées sur le maillage mécanique à l'aide de l'opérateur APDL *MOPER.

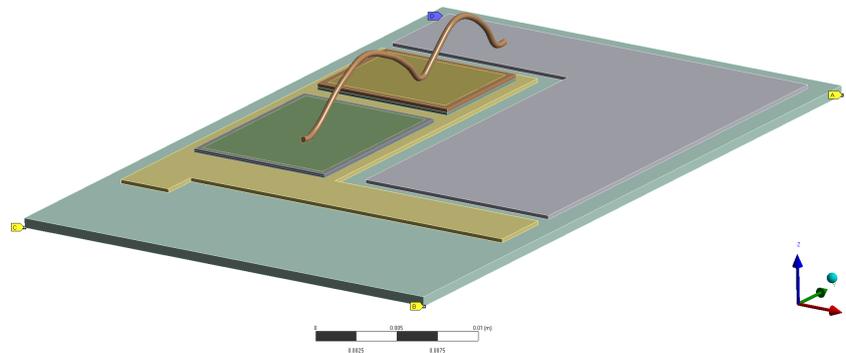


FIGURE 3.19 – Géométrie du problème de mécanique.

3.7.1 Paramétrisation de la longueur de fissure

Afin de paramétrer la longueur de fissure sans utiliser une transformation géométrique, qui serait difficile à mettre en œuvre dans le cadre de la géométrie 3D, une loi cohésive utilisateur est utilisée. Celle-ci permet de définir la contrainte maximale de la loi cohésive σ_m variant sur la surface cohésive. Afin de définir une fissure, la contrainte maximale est nulle sur la zone fissurée ($\sigma_m = 0$), et égale à sa valeur nominale sur la zone saine ($\sigma_m = \sigma_m^0$), comme montré sur la Figure 3.20. L'utilisation d'une loi cohésive utilisateur avec Ansys se fait via le sous-programme FORTRAN *userCZM.F* qu'il faut d'abord éditer puis compiler. De nombreux

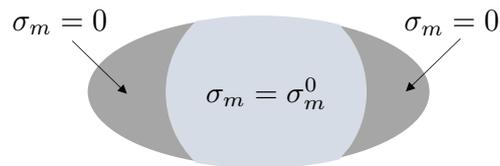


FIGURE 3.20 – Évolution spatiale de la contrainte maximale de la loi cohésive utilisateur utilisée pour le paramétrage de la longueur de fissure.

éléments sont personnalisables dans Ansys, tels que les éléments utilisateurs (*userElem.F*), une loi matériau (*userMat.F*), une loi de fluage (*userCreep.F*), etc. La procédure afin d'éditer un élément personnalisable est la suivante :

1. Copier les sous-programmes à personnaliser depuis le dossier `"/customize/user/"` (l'emplacement ou le nom de ce dossier peuvent varier suivant les installations) dans un nouveau dossier de travail *working_directory*.
2. Editer les sous-programmes copiés.
3. Compiler les sous-programmes, et créer une *Dynamic Link Library*. Pour cela, sous linux, il faut charger les compilateurs intel et gcc, puis, en se plaçant dans le dossier contenant les sous-programmes modifiés, exécuter le programme *ANSUSERSHARED* qui se trouve dans le dossier `"/customize/user/"`.
4. Créer la variable d'environnement `ANS_USER_PATH` pour indiquer à Ansys le chemin contenant la *Dynamic Link Library*, via la ligne `"export ANS_USER_PATH = working_directory"` que l'on écrira dans le fichier `.bashrc`.

Pour utiliser la loi cohésive utilisateur, la commande 'TB' est utilisée, permettant d'utiliser un tableau pour des propriétés matériaux, avec l'option `"TBOPT='USER'"`. Les propriétés de la loi cohésive utilisateur, ainsi que la longueur de fissure, sont ensuite spécifiées avec la commande `"TBOPT"`.

3.7.2 Problème à résoudre

Le problème mécanique 3D est le même que celui présenté dans le Chapitre 2, et correspond à un problème d'élasticité comportant une non-linéarité due à une zone cohésive. La loi cohésive utilisée est la loi exponentielle. Afin de modéliser la propagation de la fissure au cours des cycles, il est possible de définir une variable d'endommagement dégradant la contrainte maximale de la loi cohésive [ROE et SIEGMUND 2003]. L'endommagement est défini à partir de la limite d'endurance en fatigue de la loi cohésive, et s'accumule au cours des cycles. L'utilisation de cette loi est complexe pour deux raisons. La première est qu'elle n'est pas implémentée dans Ansys, et demanderait alors des développements additionnels, en utilisant une loi cohésive utilisateur, par exemple. La seconde est que la longueur de fissure est paramétrée dans le problème à résoudre. Or, l'endommagement associé à une longueur de fissure ne peut pas être connu à l'avance. Pour contourner cette dernière difficulté, une solution est de considérer que l'endommagement se localise en pointe de fissure, et que par conséquent, l'endommagement peut être considéré nul à l'initialisation du problème pour toute longueur de fissure.

Pour des raisons de simplicité, la loi classique ne dépendant pas de l'endommagement accumulé au cours des cycles est utilisée. Cependant, la contrainte maximale de la loi cohésive est un paramètre du modèle PGD de mécanique. Le comportement, et donc l'évolution de la longueur de fissure, sont obtenus en fonction de ce paramètre. Celui-ci est recalé au cours de l'utilisation du modèle pour la prédiction de la durée de vie d'un module au cours de son

utilisation. L'assimilation des mesures issues du module, ainsi que le recalage, s'effectuent de façon séquentielle. Dès lors, il est possible de recalculer l'évolution temporelle de la contrainte maximale de la loi cohésive à l'aide des mesures acquises au cours du temps.

En suivant le même formalisme que celui décrit dans le paragraphe 2.5.2, la formulation du problème de mécanique, sous forme semi-discrétisée, est la suivante :

$$\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{K}_c(\mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.32)$$

Notons que la contrainte maximale de la loi cohésive est un facteur proportionnel à la matrice de rigidité cohésive \mathbf{K}_c . En effet, en considérant la matrice de rigidité cohésive \mathbf{K}_c^0 obtenue pour une contrainte maximale égale à sa valeur nominale, la matrice s'écrit $\mathbf{K}_c = \sigma_m \mathbf{K}_c^0$ où σ_m est la variation de la contrainte nominale. Ainsi, la prise en compte de ce paramètre dans le modèle réduit est aisée.

La méthode utilisée pour résoudre ce problème non-linéaire en utilisant la méthode PGD est la même que celle du Chapitre 2, décrite dans la Section 2.7.3, c'est-à-dire une méthode non-incrementale mais itérative globale, de type Picard. Rappelons son principe. La première itération de l'algorithme consiste à calculer une prédiction élastique de la solution :

$$\mathbf{K}\mathbf{u}_0 + \mathbf{K}_c(\mathbf{0})\mathbf{u}_0 = \mathbf{f} \quad (3.33)$$

Cette solution est obtenue sur l'ensemble du domaine temporel et paramétrique grâce à la PGD. Elle ne vérifie généralement pas l'équilibre mécanique, c'est-à-dire que le résidu \mathbf{r} , calculé lui aussi à tous les pas de temps et valeurs des paramètres, n'est pas nul :

$$\mathbf{r}(t, \mathbf{p}) = \mathbf{f} - (\mathbf{K} + \mathbf{K}_c(\mathbf{u}_0))\mathbf{u}_0 \quad (3.34)$$

Ainsi, une nouvelle solution $\delta\mathbf{u}$ est calculée afin d'apporter une correction à la prédiction élastique :

$$\mathbf{K}\delta\mathbf{u} + \mathbf{K}_c(\mathbf{u}_0)\delta\mathbf{u} = \mathbf{r} \quad (3.35)$$

et une nouvelle approximation de la solution est obtenue : $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0 + \delta\mathbf{u}$. L'algorithme itère ainsi de suite jusqu'à ce que la convergence soit atteinte, c'est-à-dire que la norme du résidu global soit inférieure à un critère de convergence donné. Notons que la matrice de rigidité tangente $\mathbf{K}_t = \partial\mathbf{r}/\partial\mathbf{u}$ peut être utilisée dans l'équation (3.35) au lieu de la matrice de rigidité sécante $(\mathbf{K} + \mathbf{K}_c)$, ce qui permet d'accélérer la convergence de l'algorithme.

La difficulté de l'implémentation de cette méthode avec un logiciel industriel réside en l'évaluation du résidu et de la matrice de rigidité à partir d'un champ $\mathbf{u}(t, \mathbf{p})$ connu sur l'ensemble du temps et des paramètres. En effet, la fonction calculant le résidu et la matrice de rigidité n'est pas une fonction directement accessible par l'utilisateur, ces opérations étant effectuées dans la routine de résolution SOLVE qui résout le problème à un pas de temps donné. Une stratégie doit alors être mise en place afin d'évaluer ces termes non-linéaires.

3.7.3 Evaluation des termes non-linéaires

Afin de construire une méthode pour évaluer les termes non-linéaires, il est nécessaire de comprendre comment Ansys Mechanical résout un problème non-linéaire, à un jeu de paramètres fixé. Le logiciel utilise une méthode incrémentale de Newton-Raphson. Les options de la méthode sont imposées par les commandes NROPT et NEQIT. La première permet de préciser le type de matrice utilisée (matrice de rigidité tangente, matrice séquente, ou constante au sein d'un même pas de temps...) et la seconde précise le nombre maximal d'itérations. Un prédicteur peut également être utilisé afin d'accélérer la convergence. La méthode de Newton-Raphson consiste,

à chaque pas de temps, à résoudre un problème linéarisé et à itérer jusqu'à la convergence, avant de passer au pas de temps suivant. A un pas de temps j , l'algorithme commence par initialiser la solution du pas de temps j par la solution \mathbf{u}_{j-1} convergée du pas de temps précédent :

$$\mathbf{u}_j^0 = \mathbf{u}_{j-1} \quad (3.36)$$

puis évalue le résidu :

$$\mathbf{r}^0 = \mathbf{f}_j - (\mathbf{K} + \mathbf{K}_c(\mathbf{u}_j^0))\mathbf{u}_j^0 \quad (3.37)$$

L'équation suivante est ensuite résolue, afin d'obtenir une nouvelle approximation de la solution :

$$\mathbf{K}_t \delta \mathbf{u} = \mathbf{r}^0 \quad (3.38)$$

La matrice de rigidité tangente est utilisée afin d'accélérer la convergence de l'algorithme. La solution est ensuite mise à jour :

$$\mathbf{u}_j^1 = \mathbf{u}_j^0 + \delta \mathbf{u} \quad (3.39)$$

L'algorithme itère ainsi de suite jusqu'à ce que la norme du résidu soit plus petite que le critère de convergence. Cet algorithme est schématisé par la Figure 2.14a et est synthétisé dans l'Algorithme 6, comportant également la boucle sur les pas de temps. Remarquons que l'algorithme de Newton-Raphson est très similaire à l'approche itérative globale de Picard utilisée avec la méthode PGD. La différence entre ces méthodes réside uniquement dans le fait que la méthode de Newton itère à un pas de temps donné jusqu'à obtenir la convergence avant de passer au pas de temps suivant, tandis que la méthode de Picard résout dans une itération le problème linéarisé à tous les pas de temps. On dit que les boucles portant sur les pas de temps et sur la convergence sont inversées.

L'algorithme de Newton-Raphson utilisé par Ansys évalue donc les quantités non-linéaires au début de chaque pas de temps. Cette évaluation est exploitée dans la méthode de Picard afin d'évaluer les termes non-linéaires connaissant un champ \mathbf{u} à tous les pas de temps. L'approche comporte deux étapes :

1. La première étape consiste à résoudre un problème fictif à chaque pas de temps, dans lequel tous les degrés de liberté sont imposés par la valeur du déplacement en ce pas de temps. Cela permet de donner à Ansys la solution à chaque pas de temps pour laquelle on souhaite évaluer le résidu et la matrice de rigidité. Par la même occasion, Ansys met à jour l'évolution des variables internes du problème.
2. La seconde étape consiste, pour chaque pas de temps, à recommencer une analyse en mode perturbation linéaire. Ansys charge la solution convergée à ce pas de temps issue de la précédente analyse et passe au pas de temps suivant, en évaluant le comportement pour cette solution. Comme la nouvelle analyse est une perturbation linéaire, la commande WRFULL est valide et permet d'assembler la matrice de rigidité et le second membre puis de les exporter sans résoudre le problème.

Lors de la seconde étape, lorsque Ansys effectue un restart au pas de temps n , la solution \mathbf{u}_n issue de la précédente analyse est chargée. Cette solution sert de condition initiale à la nouvelle analyse, dont la première inconnue sera le déplacement au pas de temps $n + 1$. Le passage au pas de temps suivant peut induire des erreurs au niveau du résidu si certaines quantités sont dépendantes du temps, ce qui est le cas si Ansys utilise une loi cohésive bilinéaire avec un amortissement artificiel pour améliorer la convergence par exemple.

Cependant, l'évaluation des termes non-linéaires via cette procédure est coûteuse en temps, du fait des multiples résolutions et de l'écriture des fichiers stockant la solution. Ainsi, une méthode permettant de réduire le temps de calcul de l'évaluation de ces termes est nécessaire.

Algorithme 6 : Algorithme de Newton-Raphson utilisé dans Ansys

Données : \mathbf{f} , ε_F , ε_u , N_{max}

Résultat : $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N_t}\}$

Initialisation :

$\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$

Boucle temporelle :

pour j allant de 1 à N_t **faire**

$\mathbf{u}_j^0 = \mathbf{u}_{j-1}$ # initialisation de la solution au pas de temps j

$i = 0$ # initialisation du nombre d'itérations

$r = 10\varepsilon_F$ # initialisation de l'indicateur de convergence en effort

$stagn = 10\varepsilon_u$ # initialisation de l'indicateur de convergence en déplacement

tant que ($r > \varepsilon_F$ **ou** $stagn > \varepsilon_u$) **et** $i < N_{max}$ **faire**

$i \leftarrow i + 1$ # actualisation du nombre d'itérations

$\mathbf{u}_j^{i-1} \leftarrow \mathbf{u}_j^i$ # stocke la solution précédente

 Évalue la matrice de rigidité tangente \mathbf{K}_t

 Évalue le résidu $\mathbf{r}_j^i = \mathbf{f}_j - (\mathbf{K} + \mathbf{K}_c(\mathbf{u}_j^i))\mathbf{u}_j^i$

 Résout $\mathbf{K}_t \delta \mathbf{u} = \mathbf{r}_j^i$

 Actualise l'indicateur d'erreur : $r \leftarrow \|\mathbf{r}_j^i\|$

 Actualise la solution : $\mathbf{u}_j^i \leftarrow \mathbf{u}_j^i + \delta \mathbf{u}$

 Actualise l'indicateur de convergence en déplacement :

$stagn \leftarrow \|\mathbf{u}_j^i - \mathbf{u}_j^{i-1}\| / \|\mathbf{u}_j^{i-1}\|$

fin

$\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_j^i$ # Stocke la solution du pas de temps j

fin

Tout d'abord, afin de réduire le coût d'écriture des fichiers lors d'une résolution par Ansys, il est possible d'évaluer les termes non-linéaires en sélectionnant uniquement les éléments comportant les non-linéarités, ici les éléments cohésifs, le résidu étant nul sur les autres éléments. La sélection de ces éléments conduit à la définition d'un problème local de taille beaucoup plus petite que la taille du problème global, et par conséquent à un nombre de données plus faible à écrire et stocker. La procédure décrite précédemment peut être mise en œuvre en sélectionnant uniquement les éléments cohésifs. Le second membre obtenu \hat{r} correspond alors uniquement à la contribution des éléments cohésifs. Il est égal à la différence entre les efforts initiaux restreints aux nœuds cohésifs \hat{f} et les efforts cohésifs. Ceux-ci correspondent au produit matriciel de la rigidité cohésive et du déplacement. Ainsi le résidu \hat{r} s'écrit comme :

$$\hat{r} = \hat{f} - \hat{f}_c = \hat{f} - \hat{K}_c(\hat{u})\hat{u} \quad (3.40)$$

où \hat{u} est le déplacement restreint aux nœuds cohésifs, ordonné suivant l'ordre des degrés de liberté du problème local. Le résidu local \hat{R} est également obtenu suivant cette numérotation, et la matrice \hat{K}_c est la matrice de rigidité cohésive de taille réduite par rapport à la matrice de taille globale K_c . Afin de revenir vers le problème global, il est ensuite possible de transformer le vecteur local en un vecteur de taille globale et ordonné suivant la numérotation globale à travers un mapping $\mathcal{M}_{loc2glob}$. Cet opérateur permet de passer de la numérotation locale des degrés de liberté vers la numérotation globale. Les efforts intérieurs correspondant aux matériaux élastiques sont égaux au produit de la matrice de rigidité et du déplacement : $f_{int}^e = K u$. Il est possible d'extraire de ces efforts intérieur uniquement la contribution s'appliquant aux nœuds cohésifs. Pour cela, un masque \mathcal{M}_{loc} est utilisé, mettant à zéro les efforts intérieurs sauf sur les degrés de libertés des nœuds cohésifs. En retranchant cette contribution au résidu précédent, on obtient alors le résidu global :

$$r = \mathcal{M}_{loc2glob}(\hat{r}) - \mathcal{M}_{loc}(f_{int}) \quad (3.41)$$

L'étape d'évaluation des termes non-linéaires reste néanmoins très coûteuse, malgré la réduction du temps de calcul obtenue grâce à la réduction du nombre de degrés de libertés sur lesquels le comportement est évalué. Cela provient du fait que l'évaluation doit être effectuée pour tous les pas de temps et toutes les valeurs des paramètres. En outre, cette étape n'est pas optimisée car le logiciel n'est pas conçu pour une utilisation de ce type. La méthode décrite ci-dessus demande par exemple l'assemblage inutile d'opérateurs, ainsi que l'écriture de nombreuses variables dans la base de données. De plus, en fonction du nombre de licences du logiciel mises à disposition, cette étape n'est pas parallélisable, contrairement à l'implémentation Matlab du modèle 2D. En effet, une licence est requise pour chaque calcul associé à une valeur de paramètre.

Pour ces raisons, il peut être intéressant de réduire davantage le temps de calcul de cette étape en utilisant une méthode d'hyper-réduction permettant d'évaluer le comportement sur un nombre réduit de valeurs de paramètres. Cette méthode est présentée dans la section suivante.

3.7.4 Hyper-réduction de modèle

Les méthodes d'hyper-réduction ont pour objectif d'approximer les termes non-linéaires afin de réduire le coût de leur évaluation [RYCKELYNCK 2005 ; 2009]. Plusieurs méthodes existent, et l'une des plus répandues est la "méthode d'interpolation empirique", ou *Empirical Interpolation Method* (EIM) [BARRAULT et al. 2004], ou dans sa version discrète la *Discrete Empirical Interpolation Method* (DEIM) [CHATURANTABUT et SORENSEN 2010]. Ces méthodes ont initialement été implémentées avec la POD. Si le problème s'écrit sous la forme matricielle :

$$K u(t) + f(u(t)) = 0 \quad (3.42)$$

où $\mathbf{f}(\mathbf{u}(t))$ est une fonction non-linéaire de \mathbf{u} , la DEIM consiste à construire une base spatiale de faible dimension $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m\}$ génératrice d'un espace approximant l'espace des termes non-linéaires \mathbf{f} . Le principe de la construction de la base est le même que celui utilisé pour générer l'espace réduit des solutions. Il consiste à recueillir, en même temps que les *snapshots* de la solution, les efforts intérieurs non-linéaires, puis d'effectuer une SVD afin d'en extraire une base. Comme ces termes doivent être calculés afin de générer la base réduite de la solution, aucun coût de calcul supplémentaire n'est requis, mis à part le coût de la SVD.

Une fois la base construite, lors du calcul de la solution dans la phase *online* de la POD, les termes non-linéaires sont approximés à chaque pas de temps par une combinaison linéaire des vecteurs de la base, c'est-à-dire :

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}(t)) = \mathbf{F}\mathbf{c}(t) \quad (3.43)$$

où \mathbf{F} est la matrice contenant les vecteurs de la base $\mathbf{F} = [\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m]$ et $\mathbf{c}(t)$ est le vecteur des coefficients. Afin de déterminer $\mathbf{c}(t)$, m indices d'interpolation sont déterminés à partir de la base. Ainsi, une fois la base générée, il suffit ensuite d'évaluer les termes non-linéaires sur ces m indices, ce qui est beaucoup moins coûteux que de les évaluer sur tout l'espace.

La méthode DEIM se couple par conséquent très bien aux méthodes *a priori* de réduction de modèle comme cela a été fait dans de nombreuses études [CHATURANTABUT et SORENSEN 2010; TISO et RIXEN 2013; RADERMACHER et REESE 2016; GHAVAMIAN et al. 2017], mais elle a aussi été adaptée afin de pouvoir être appliquée avec la PGD. Cette adaptation est nécessaire puisque aucun *a priori* n'est connu sur la solution et les non-linéarités. Dans ce cadre, une approche modifiée de la DEIM a été utilisée dans [AGUADO et al. 2013] pour résoudre un problème de diffusion non-linéaire par PGD. Comme l'oblige la PGD, le problème non-linéaire est résolu par une méthode itérative globale de Picard. Un problème linéaire est tout d'abord obtenu en évaluant les termes non-linéaires par l'initialisation de la solution. Il est résolu pour obtenir une première solution PGD. Ensuite, le terme non-linéaire est approximé en utilisant directement les m modes de la solution PGD, en le cherchant sous la forme d'une combinaison linéaire de ceux-ci. Les coefficients sont déterminés en évaluant le terme non-linéaire en m points de l'espace et du temps, déterminés par l'algorithme de sélection des indices de la DEIM. A partir de l'approximation du terme non-linéaire, l'algorithme calcule une nouvelle solution PGD et itère jusqu'à convergence. Cette adaptation de la DEIM, bien que pouvant être efficace pour des problèmes dont la non-linéarité est simple, comme dans le cadre de l'illustration proposée dans [AGUADO et al. 2013] dans laquelle la non-linéarité provenait d'un terme quadratique de la température, ne peut cependant pas être appliquée pour des problèmes plus complexes. Tout d'abord, il y a peu de chance que le terme non-linéaire puisse être correctement représenté spatialement par les modes PGD de la solution. En effet, les non-linéarités en mécanique des structures sont souvent localisées en espace, comme c'est le cas pour la zone cohésive, ce qui n'est pas capté par les fonctions spatiales de la solution élastique. Ensuite, les non-linéarités sont souvent associées à des comportements à seuil, ce qui n'est pas non plus décrit par les fonctions temporelles de la solution élastique. De plus, comme l'approximation utilise les fonctions temporelles et n'évalue pas les termes non-linéaires à chaque pas de temps, le comportement à seuil dépendant de l'histoire du chargement peut d'autant moins être capté. Par conséquent, les termes non-linéaires sont mal approximés pour la plupart des problèmes de mécanique non-linéaires, et la solution obtenue par cette méthode ne converge pas vers la bonne solution.

Une autre adaptation a été utilisée dans [HENNERON et CLENET 2016], pour un problème de magnétostatique. La méthode consiste, à partir d'une solution PGD de l'itération précédente, à générer un certain nombre de *snapshots* du terme non-linéaire, en l'évaluant par exemple aux premiers instants temporels puis d'appliquer la procédure DEIM standard pour générer une base. Celle-ci est ensuite utilisée pour approximer le terme non-linéaire à chaque pas de temps.

Cependant, cette méthode peut également rencontrer des difficultés pour capter les non-linéarités dans le cadre d'une loi à seuil, la solution pouvant rester élastique linéaire dans les premiers instants temporels.

D'autres méthodes d'hyper-réduction existent, parmi lesquelles la méthode du meilleur point d'interpolation (*Best Point Interpolation*) [NGUYEN et al. 2008] similaire à la DEIM, ou la méthode de l'estimation du point manquant (*Missing Point Estimation*) [ASTRID 2004]. Une autre méthode, développée pour traiter les problèmes non-linéaires par la méthode LaTin-PGD, est la méthode du point de référence, ou *Reference Point Method* (RPM) [LADEVÈZE 1997; CAPALDO et al. 2017], qui consiste à approximer les intégrales des termes non-linéaires de la formulation PGD en évaluant ces termes en des points spatiaux-temporels bien choisis. Cette approximation, effectuée uniquement lors de l'étape d'*update* de la méthode LaTin-PGD, permet à la solution de converger vers la solution exacte, car l'erreur commise par l'approximation peut être corrigée lors de la génération d'un nouveau mode PGD, pour lequel les termes non-linéaires sont classiquement évalués.

Dans ce travail, afin de prendre en compte les difficultés énoncées ci-dessus, la méthode utilisée consiste à réduire le nombre d'évaluations des termes non-linéaires en sélectionnant des valeurs de paramètres pour lesquels ces termes sont évalués. Pour un jeu de paramètres donné, le comportement est évalué sur l'ensemble des pas de temps, comme décrit dans la section précédente, afin de s'assurer que le comportement non-linéaire à seuil est correctement évalué. De plus, les éléments cohésifs sont uniquement sélectionnés, comme montré sur la Figure 3.21 mais aucune réduction additionnelle n'est effectuée spatialement. Ainsi, la réduction porte uniquement sur les paramètres, leur impact étant supposé être plus lisse sur le comportement. L'approche consiste à se fixer un nombre de points par paramètre pour lesquels le comportement est évalué. Si ce nombre est inférieur au nombre de modes PGD de la solution, les fonctions paramétriques sont utilisées avec l'algorithme DEIM de sélection d'indices afin de trouver les points optimaux. Si le nombre est plus grand que le nombre de modes, les indices restants sont déterminés aléatoirement. Étant donné une famille de fonctions d'une seule variable x

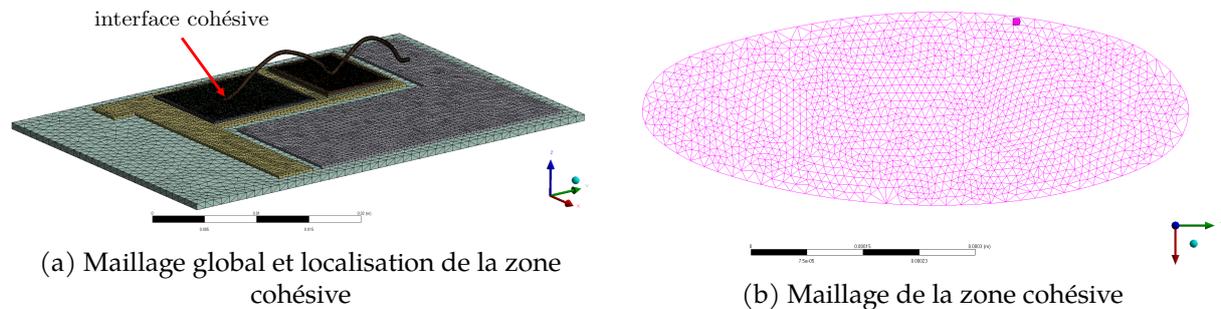


FIGURE 3.21 – Maillage total et maillage de la zone cohésive. Les éléments cohésifs sont les seuls éléments sélectionnés lors de l'évaluation des termes non-linéaires.

$\{\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)\}$, l'algorithme DEIM sélectionnant les indices permettant de capter le plus d'informations de l'espace généré par cette famille est le suivant. Le premier indice est déterminé par l'argument du maximum de la valeur absolue de la première fonction :

$$x_1 = \operatorname{argmax}_x |\Phi_1(x)| \quad (3.44)$$

La constante c_1 , égale au rapport des seconde et première fonctions au point x_1 est alors calculée,

$$c_1 \Phi_1(x_1) = \Phi_2(x_1) \quad (3.45)$$

permettant de définir un résidu r_2 nul en x_1 :

$$r_2(x) = \Phi_2(x) - c_1\Phi_1(x) \quad (3.46)$$

Le second indice est alors déterminé par l'argument du maximum de la valeur absolue de ce résidu :

$$x_2 = \operatorname{argmax}_x |r_2(x)| \quad (3.47)$$

Par généralisation, afin de déterminer le j -ième indice, le résidu r_j est défini :

$$r_j(x) = \Phi_j - \sum_{i=1}^{j-1} c_i\Phi_i(x) \quad (3.48)$$

dont les coefficients doivent être déterminés. Cela est fait en imposant que $r_j(x_l) = 0$ pour $l = 1 \dots, j-1$, c'est-à-dire :

$$r_j(x_l) = \Phi_j(x_l) - \sum_{i=1}^{j-1} c_i\Phi_i(x_l) = 0 \quad , \quad l = 1 \dots, j-1 \quad (3.49)$$

ce qui conduit au système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \Phi_1(x_1) & \Phi_2(x_1) & \cdots & \Phi_{j-1}(x_1) \\ \Phi_1(x_2) & \Phi_2(x_2) & \cdots & \Phi_{j-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi_1(x_{j-1}) & \Phi_2(x_{j-1}) & \cdots & \Phi_{j-1}(x_{j-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{j-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_j(x_1) \\ \Phi_j(x_2) \\ \vdots \\ \Phi_j(x_{j-1}) \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

et x_j est déterminé par l'argument max de la valeur absolue de r_j :

$$x_j = \operatorname{argmax}_x |r_j(x)| \quad (3.51)$$

Cet algorithme se généralise en n dimensions en considérant par exemple pour Φ le produit des fonctions paramétriques d'un mode. Cela permettrait d'obtenir le jeu de paramètre optimal pour ce mode. Cependant, la minimisation en n dimensions est plus coûteuse, et l'algorithme DEIM demande la reconstruction du résidu r_j à partir des fonctions séparées, ce qui peut rapidement causer des problèmes de mémoire. Pour ces raisons, les indices sont déterminés indépendamment sur chacun des paramètres. A partir de ces d jeux de N indices, une grille de taille N^d est construite, sur laquelle les termes non-linéaires sont évalués. Une fois les indices portant sur les paramètres déterminés, et les termes non-linéaires évalués en chacun de ces indices pour tous les pas de temps, ceux-ci sont interpolés linéairement dans l'espace paramétrique. L'algorithme permettant d'approximer les termes non-linéaires sur l'espace paramétrique est présenté dans l'Algorithme 7.

Malgré l'utilisation de la méthode d'hyper-réduction présentée dans ci-dessus, l'utilisation d'un modèle non-linéaire avec Ansys reste coûteuse en temps de calcul. En effet, le logiciel n'est pas utilisé de la manière pour laquelle il a été conçu. Plusieurs opérations coûteuses en temps de calcul (assemblage d'opérateurs, écriture dans la base de donnée, ...) sont effectuées lors de l'évaluation des termes non-linéaires. De plus, la physique du problème, du fait de la loi de comportement à seuil, ne permet pas non plus de réduire fortement le nombre de points de l'espace paramétrique pour lesquels le comportement est évalué. L'interpolation des termes non-linéaires conduit également à une surestimation de l'endommagement pour certain paramètres. Cela entraîne une sous-estimation de la matrice de rigidité et une surestimation du résidu, ce qui conduit à un trop grand déplacement à l'itération suivante. La solution peut donc converger vers une solution erronée.

Algorithme 7 : Approximation des termes non-linéaires

Données : Solution PGD U , nombre de points par paramètres N_p

Résultat : Matrice de rigidité cohésive K_c , résidu R

Détermination des points d'évaluation des termes non-linéaires :

pour *chaque paramètre* **faire**

 | Déterminer les indices pour lesquels évaluer le paramètre

fin

Définir les jeux de paramètres à partir des indices de chaque paramètre

Sélectionne uniquement les éléments cohésifs et les nœuds associés

Evalue les termes NL pour chaque jeu de paramètres :

pour *chaque jeu de paramètre* **faire**

 # Impose la valeur du déplacement à tous les pas de temps

 Entrer dans le processeur SOLUTION

pour *i allant de 1 à N_t* **faire**

 | Résoudre un problème fictif en imposant la valeur du déplacement

fin

 Sortir du processeur SOLUTION

 # Evalue ensuite les termes non-linéaires :

pour *i allant de 1 à N_t* **faire**

 | Entrer dans le processeur SOLUTION

 | Recommencer une analyse au pas de temps t_i en mode perturbation linéaire

 | Récupérer les opérateurs issus de l'analyse précédente (obligatoire par Ansys)

 | Supprimer les contraintes précédemment imposées

 | Imposer les efforts thermiques

 | Assembler la nouvelle matrice de rigidité et le second membre, et stopper avant la résolution du problème

 | Importer les termes non-linéaires

 | Sortir du processeur SOLUTION

fin

fin

3.7.5 Résultats du problème non-linéaire de mécanique

Les résultats du problème de mécanique présentés dans cette section ont été obtenus avec les valeurs des paramètres de la loi cohésive issues de [GRAMS et al. 2013]. La contrainte maximale de la loi cohésive est $\sigma_m = 15\text{MPa}$, et le taux d'énergie critique est $G_{Ic} = 3,75\text{J m}^{-2}$. Comme le chargement provient de la répétition du cycle limite thermique, et que le comportement est linéaire élastique en dehors de la zone cohésive, la longueur de fissure n'évolue plus après la simulation du premier cycle. Un seul cycle est donc simulé. La Figure 3.22 montre les trois composantes des fonctions spatiales des premier et sixième modes de la solution PGD. Le premier mode correspond au premier mode de la solution élastique, tandis que le sixième mode correspond au premier mode de la première correction PGD. Ainsi, la première fonction spatiale capte l'évolution globale de la solution, tandis que la sixième corrige localement la solution au niveau du fil, dû aux non-linéarités de la zone cohésive. La Figure 3.23 présente les fonctions temporelles et paramétriques associées à ces deux fonctions spatiales. Les fonctions paramétriques du mode 6 montrent que le terme de correction est non nul pour des petites valeurs de la contrainte maximale de la loi cohésive et de la température pour laquelle les déformations thermiques sont nulles, et également pour des valeurs plus grandes de la résistivité de la puce et de la longueur initiale de fissure. Ces résultats sont attendus car pour ces valeurs de paramètres la rigidité cohésive est plus faible et le chargement est plus grand, ce qui endommage la zone cohésive et fait entrer dans le domaine non-linéaire.

Ces résultats sont cependant des résultats préliminaires et ne peuvent pas être exploités pour construire un modèle de durée de vie fiable. La principale raison est que l'erreur commise par la méthode d'hyper-réduction utilisée n'a pas été quantifiée. De plus, à cause du temps de calcul trop important, une discrétisation grossière des paramètres a été utilisée, et la solution a été stoppée avant d'atteindre la convergence. Les résultats dépendent également du maillage utilisé, qui doit être très raffiné au niveau de la zone cohésive pour pouvoir capter la faible évolution de la fissure sur un cycle. Cependant, un tel maillage n'a pas été utilisé ici, car pour des raisons de stabilité numérique, un maillage spatial fin demande également de diminuer le pas de temps utilisé, ce qui augmente en conséquence le temps de calcul.

3.7.6 Modèle réduit linéaire

Afin de s'affranchir des difficultés précédemment évoquées, et de pouvoir exploiter pleinement le gain de calcul obtenu par les méthodes de réduction de modèle pour les problèmes linéaires, un modèle simplifié a été développé. Dans ce modèle, les matériaux sont linéaires élastiques, et la fissure se propage suivant une loi de Paris :

$$\frac{dl}{dN} = c_1(\Delta S)^{c_2} \quad (3.52)$$

où S est une grandeur physique liée à la propagation de la fissure. Cela peut être le facteur d'intensité des contraintes, l'énergie de déformation, ou les déformations élastiques, par exemple. Pour des raisons de simplicité, la grandeur utilisée est la déformation élastique équivalente, intégrée sur la surface de contact fil-métallisation. La variation Δ représente la variation de la grandeur au cours du cycle limite. Les constantes c_1 et c_2 sont des paramètres à recalculer à l'aide de tests expérimentaux de durée de vie. Leurs valeurs influent grandement la propagation de la fissure, ces paramètres sont considérés comme incertains et pris comme paramètres du modèle de durée de vie. Afin de prendre en compte la longueur de fissure comme paramètre, la loi cohésive utilisateur permettant de définir une longueur de fissure est conservée. Une valeur élevée de la contrainte maximale de la loi cohésive est utilisée, de manière à rester dans le domaine élastique.

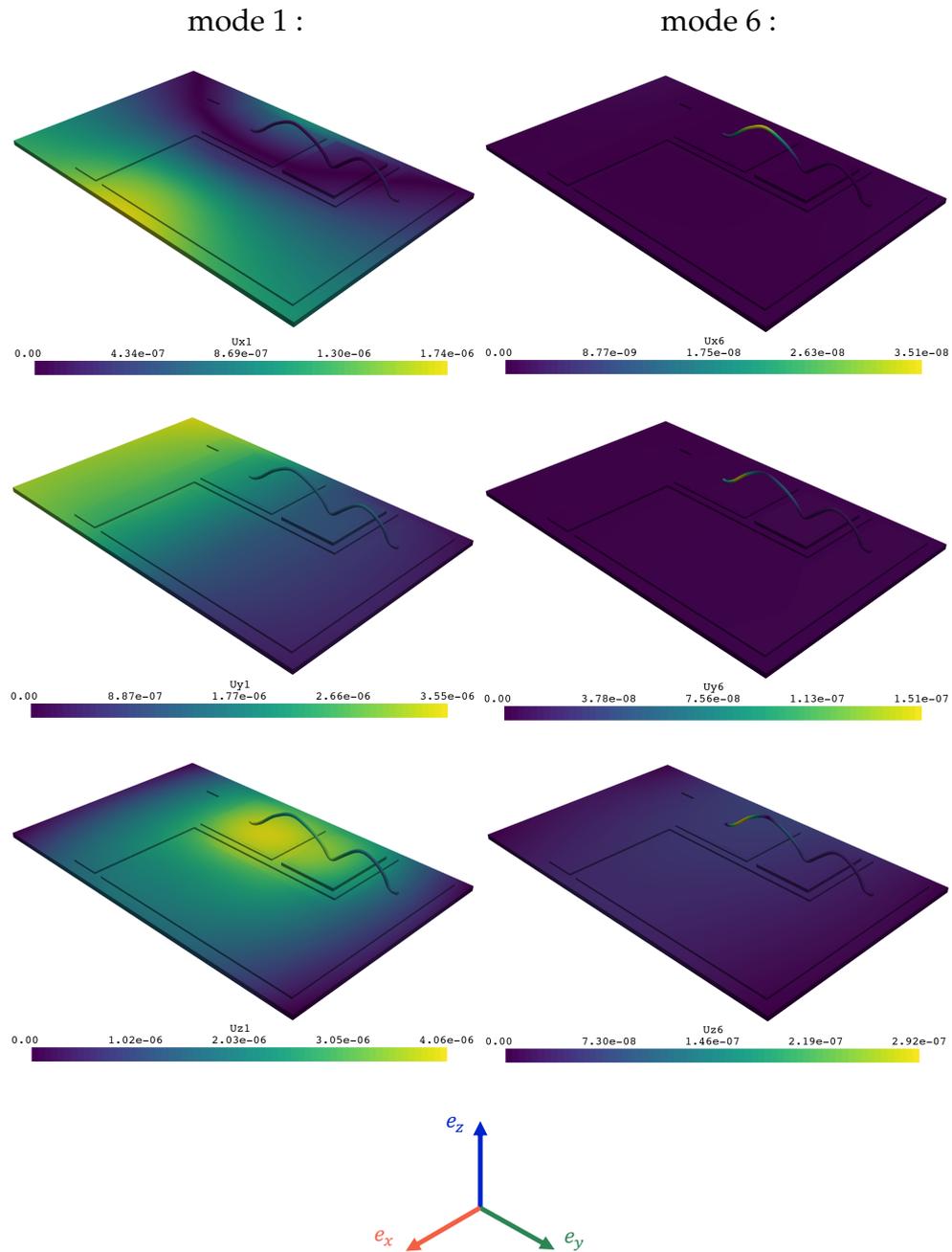


FIGURE 3.22 – Fonctions spatiales des premier (première colonne) et sixième (seconde colonne) modes du déplacement.

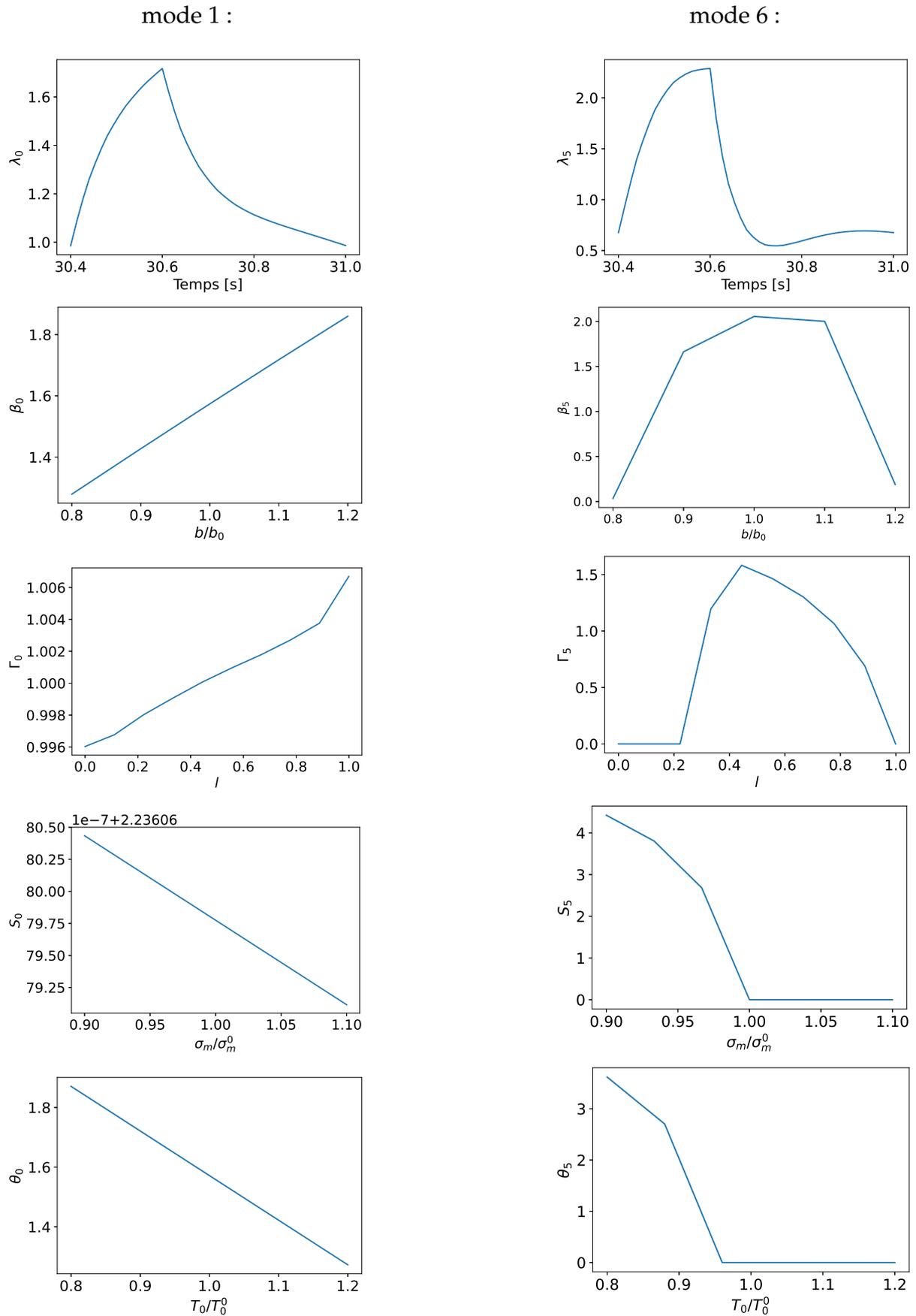


FIGURE 3.23 – Fonctions temporelles et paramétriques des premier mode (première colonne) et sixième mode (deuxième colonne) du déplacement. De haut en bas : fonction temporelle, fonction portant sur la résistivité électrique des puces, la longueur de fissure, la contrainte maximale de la loi cohésive, et la température de référence.

Le problème étant linéaire, le gain de temps de calcul lié à la PGD est conservé. La solution \mathbf{u} du problème mécanique est donc obtenue sous la forme séparée :

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{N^u} \Lambda_i^u(\mathbf{x}) \lambda_i^u(t) \beta_i^u(b) \Gamma_i^u(l) \theta_i^u(T_0) \quad (3.53)$$

Le modèle étant linéaire, le post-traitement pour calculer les déformations est également rapide : il suffit d'évaluer le champ de déformations pour les fonctions spatiales du déplacement, puis de le multiplier par la fonction temporelle et les fonctions paramétriques. Afin de déterminer le champ de déformation associé à chaque fonction spatiale des modes du déplacement, un problème fictif est résolu dans Ansys en imposant la valeur de la fonction à chaque degré de liberté.

En intégrant ensuite la loi de Paris (3.52), la longueur de fissure est obtenue en fonction du nombre de cycles et des valeurs des paramètres : $l = l(N, b, T_0, c_1, c_2)$. Lorsque la longueur équivalente de fissure atteint 1, qui est la valeur maximale possible de l'endommagement, sa valeur est maintenue à 1 pour les cycles suivants.

Enfin, en post-traitant les résultats du modèle électrique comportant les conditions de mesure, la tension V_{CE} est obtenue en fonction de la longueur de fissure et des paramètres :

$$V_{CE} = \sum_{i=1}^{N_e} V_i \beta_i^e(b) \Gamma_i^e(l) \quad (3.54)$$

Les constantes V_i sont les différences des valeurs moyennes des fonctions spatiales Λ_i^e au niveau du collecteur et de l'émetteur : $V_i = \Lambda_i^e|_c - \Lambda_i^e|_e$. En injectant l'évolution de la longueur de fissure, la chute de tension V_{CE} est ainsi obtenue en fonction du nombre de cycles et des paramètres : $V_{CE} = V_{CE}(N, b, T_0, c_1, c_2)$.

3.7.7 Résultats du problème linéaire de mécanique

Les résultats du problème linéaire de mécanique ont été obtenus avec les valeurs nominales des paramètres $c_1^0 = 2 \times 10^{-4}$ et $c_2^0 = 0.65$. La plage de variation considérée est de $\pm 50\%$.

La Figure 3.24 illustre l'influence des paramètres sur l'évolution de l'endommagement du module. L'endommagement, évoluant en fonction du nombre de cycles, est présenté en variant un paramètre à la fois, les autres étant fixés à leurs valeurs nominales. Pour des raisons de confidentialité, les cycles sont normalisés par un nombre de cycles N_0 . La Figure 3.24a montre que l'effet du paramètre b de la conductivité électrique de la puce est plus faible que celui de la température de référence influant sur les contraintes thermiques du module. De manière attendue, plus le paramètre b est grand, et donc plus la résistivité de la puce est grande, plus le module s'endommage rapidement, résultant de pertes électriques plus importantes. Comme attendu également, plus la température pour laquelle les contraintes thermiques sont nulles est petite, plus le module s'endommage rapidement. En effet, en abaissant ce paramètre, de plus faibles températures suffisent pour générer des contraintes de traction qui sont responsables de l'endommagement du contact.

La Figure 3.24b montre elle l'impact des paramètres de la loi de Paris. Le coefficient multiplicateur c_1 est un paramètre accélérant l'endommagement du module, tandis que l'exposant c_2 influe inversement.

Une fois l'évolution de l'endommagement obtenue en fonction du nombre de cycles, celle-ci est utilisée pour calculer l'évolution de V_{CE} au cours des cycles. La Figure 3.25 présente l'impact des paramètres sur la valeur de la chute de tension V_{CE} et son évolution. La Figure 3.25a montre

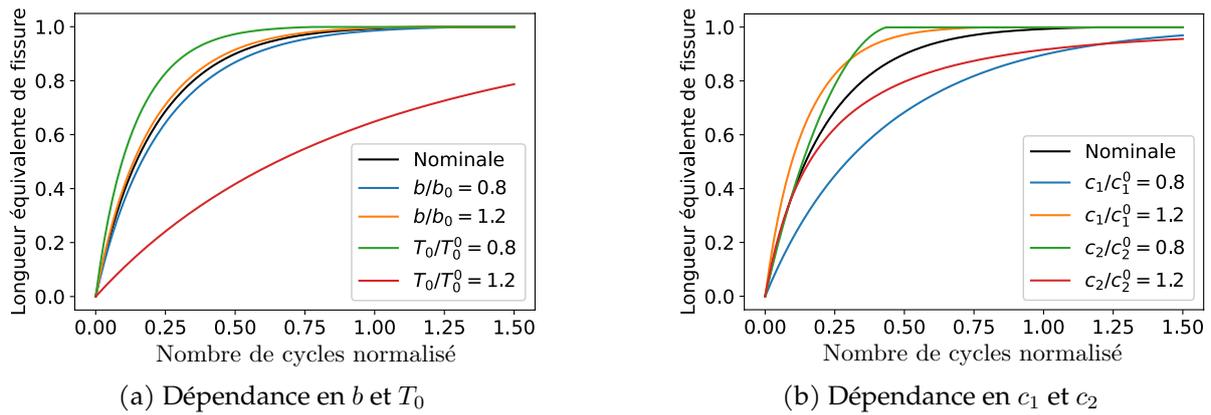


FIGURE 3.24 – Variations de l'évolution de la longueur de fissure en fonction des paramètres. Les paramètres non mentionnés dans la légende sont égaux à leurs valeurs nominales.

que le paramètre b , portant sur la conductivité électrique de la puce, impacte fortement la valeur initiale de la chute de tension. En revanche, son impact sur l'augmentation de V_{CE} par rapport à sa valeur initiale est plus faible, comme le montre la Figure 3.25b. La Figure 3.26 illustre l'influence

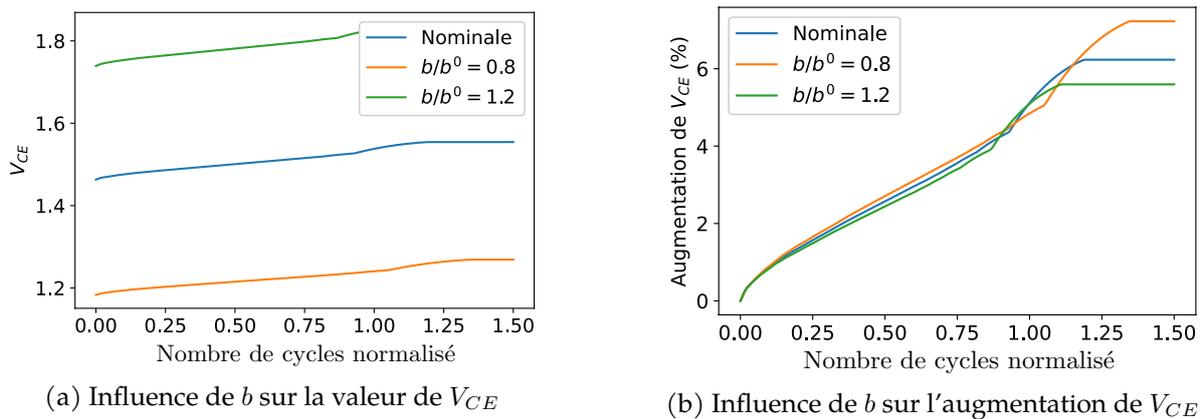


FIGURE 3.25 – Variations de l'évolution de la chute de tension V_{CE} en fonction du paramètre b de la conductivité électrique des puces. Les autres paramètres sont égaux à leurs valeurs nominales.

des trois autres paramètres sur l'évolution de la chute de tension. Ces trois paramètres impactant uniquement la propagation de la fissure, ils n'influent pas sur la valeur de la chute de tension à l'état sain, mais ont un effet sur son évolution. Leurs effets sont directement liés à l'impact des paramètres sur la longueur de fissure. Ainsi, des valeurs plus faibles de la température T_0 et de l'exposant c_2 de la loi de propagation de la fissure accélèrent la propagation de la fissure et par conséquent l'augmentation de V_{CE} . Agissant de façon contraire, le coefficient c_1 accélère l'augmentation de V_{CE} lorsque sa valeur croît.

Les paliers de la chute de tension V_{CE} sont dus au fait que la longueur équivalente de fissure a atteint 1, sa valeur maximale, et donc que les six fils sont complètement décollés. Après ce stade, la valeur de V_{CE} ne peut plus croître car l'endommagement des autres fils n'est pas modélisé.

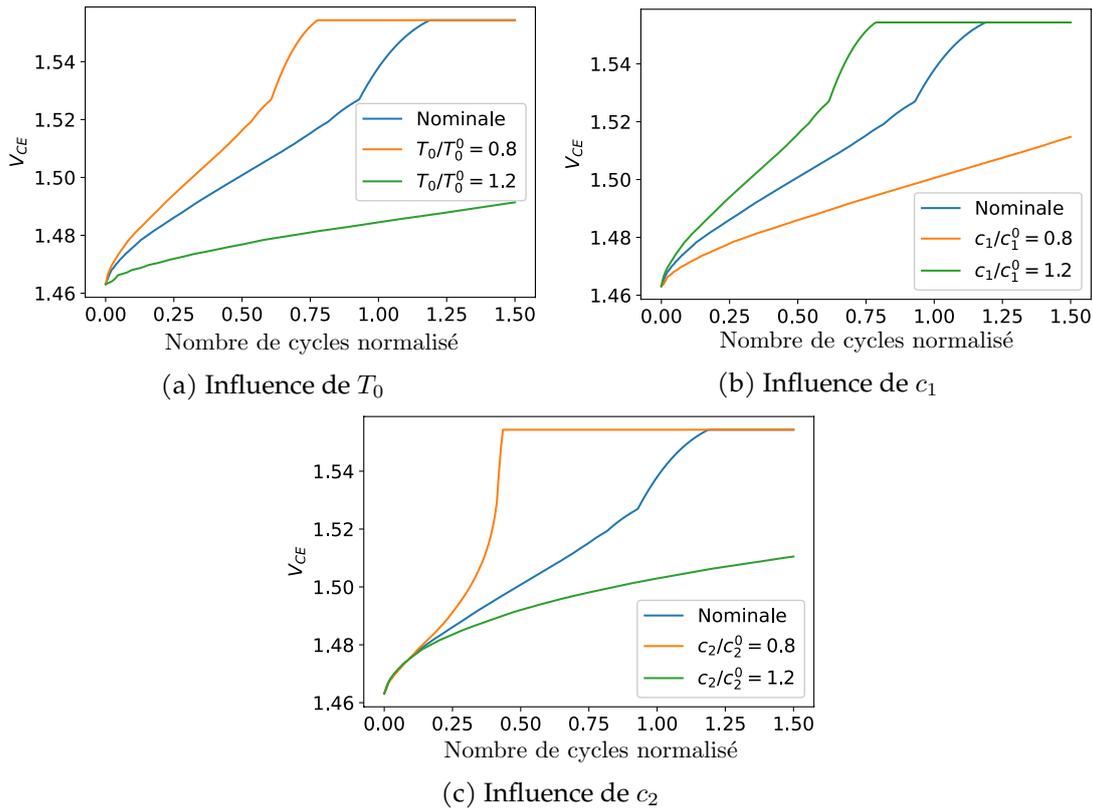


FIGURE 3.26 – Variations de l'évolution de la chute de tension V_{CE} en fonction des paramètres. Les paramètres non mentionnés dans la légende sont égaux à leurs valeurs nominales.

3.8 Conclusions du développement du modèle réduit non-intrusif

Dans ce chapitre, une méthodologie a tout d'abord été développée afin de découpler le comportement multiphysique d'un module de puissance et de pouvoir modéliser le module sur un grand nombre de cycles. Dans cette optique, le comportement mécanique a été découplé du comportement électro-thermique. En paramétrant la longueur de fissure dans les modèles, les comportements ont été obtenus en fonction de la longueur de fissure, soit tout au long de la durée de vie du module. Le modèle mécanique a permis de relier la longueur de fissure au nombre de cycles du module, et d'obtenir ainsi les comportements en fonction du nombre de cycles.

Le modèle réduit a été développé de manière non-intrusive, en utilisant Mechanical APDL en tant que solveur externe pour la résolution des systèmes linéaires de grande dimension. Le code industriel a également été utilisé pour évaluer le comportement mécanique non-linéaire. Afin de résoudre ce problème, une stratégie d'hyper-réduction a également été développée en approximant les termes non-linéaires. Cependant, du fait de la forte non-linéarité du problème, ne permettant pas de réduire fortement le nombre d'évaluations de ces termes, et du fait de l'utilisation détournée du logiciel de son utilisation normale, les temps de calculs restent conséquents. Pour s'affranchir de cette difficulté, et afin d'exploiter pleinement les capacités de la PGD, un second modèle du comportement mécanique a été développé, dans lequel les matériaux ont un comportement élastique linéaire, et où la propagation de la fissure est modélisée par une loi de Paris.

L'emploi de la PGD a non seulement permis de réduire drastiquement le temps de calcul associé à la résolution d'un problème électro-thermo-mécanique, mais a également permis d'obtenir la solution sur l'ensemble du domaine paramétrique. En effet, sans réduction de modèle, le coût de calcul associé à la résolution du problème pour un seul jeu de paramètres rend l'exploration du domaine paramétrique impossible.

Une fois le modèle réduit obtenu, celui-ci est post-traité afin d'obtenir la chute de tension V_{CE} en fonction du nombre de cycles et des paramètres. Ce modèle est ensuite utilisé dans le chapitre suivant dans le cadre du suivi de l'état de santé d'un module au cours de son utilisation et de la prédiction de sa durée de vie restante. Pour cela, l'inférence bayésienne est utilisée pour générer une distribution de probabilité portant sur les paramètres. La méthode repose sur la comparaison du modèle numérique prédisant la valeur de V_{CE} à des mesures expérimentales. La densité de probabilité obtenue est ensuite échantillonnée et propagée à travers le modèle de durée de vie, donnant lieu à une probabilité portant sur la durée de vie restante du module. Il est alors possible d'obtenir la durée de vie restante du module à un niveau de confiance donné. Il est par exemple possible d'établir un nombre de cycles assurant que la probabilité que la durée de vie restante du module soit supérieure ou égale à ce nombre soit de 95%.

L'inférence bayésienne, ainsi que la propagation des échantillons à travers le modèle de durée de vie requiert un grand nombre d'appels au modèle. L'intérêt du modèle réduit apparaît alors : l'évaluation du modèle est immédiate et ne requiert aucun coût de calcul additionnel.

Chapitre 4

Application à la prédiction de la durée de vie restante d'un module au cours de son utilisation

Après avoir construit un modèle réduit du comportement électro-thermo-mécanique d'un module de puissance dans le chapitre précédent, ce modèle est employé dans ce chapitre afin de créer un jumeau numérique suivant un module réel au cours de son utilisation. Le jumeau numérique est créé à partir du modèle numérique et de mesures acquises à la fois lors d'essais de durée de vie sur de précédents modules, et de mesures acquises sur le module étudié. Il permet de prédire la durée de vie restante au cours de l'utilisation du module. La méthode employée utilise l'inférence bayésienne, qui permet d'obtenir une densité de probabilité sur les paramètres du modèle, en comparant la prédiction du modèle aux mesures issues du module réel. L'acquisition régulière de mesures au cours de la vie du module permet d'affiner au fur et à mesure la densité de probabilité. En transportant ces incertitudes à travers le modèle de durée de vie, une durée de vie probabilisée est ensuite obtenue.

Sommaire

4.1	Présentation du contexte	102
4.2	Recalage de modèle par inférence bayésienne	104
4.2.1	Principe de l'inférence bayésienne	104
4.2.2	Correction du biais de modèle	105
4.2.3	Post-traitement de la densité <i>a posteriori</i>	105
4.3	Échantillonnage par la méthode des <i>Transport Maps</i>	106
4.3.1	Approximation de Laplace	106
4.3.2	Transformation triangulaire	108
4.3.3	Composition de transformations pour l'assimilation séquentielle	109
4.4	Application à la prédiction de durée de vie restante d'un module	109
4.4.1	Recalage à partir de mesures synthétiques	112
4.4.2	Recalage à partir de mesures réelles	115
4.5	Conclusions sur la prédiction de durée de vie restante	119

4.1 Présentation du contexte

L'objectif de ce chapitre est de prédire la durée de vie restante d'un module au cours de son utilisation. Le module étudié est un module soumis à un test de durée de vie, avec les conditions de chargement utilisées pour la construction du modèle numérique (courant de 150A, avec un temps d'échauffement $t_{ON} = 200\text{ms}$ et un temps de refroidissement $t_{OFF} = 400\text{ms}$). Au cours du test de durée de vie, la tension V_{CE} est mesurée tous les n cycles afin de suivre l'état de santé du module. L'objectif est d'exploiter ces mesures afin de déterminer les paramètres du modèle numérique du module, pour en construire un jumeau numérique, et de prédire la durée de vie restante. Des essais de durée de vie ont été préalablement réalisés sur des modules du même type que celui testé, permettant d'avoir une connaissance *a priori* sur les paramètres. Celle-ci sera affinée à l'aide des mesures propres au module. Les mesures acquises sont montrées sur la Figure 4.1, où le nombre de cycles est normalisé, pour des raisons de confidentialité, par le même nombre de cycles N_0 que dans le chapitre précédent. Pour chaque module, l'état de santé des deux puces du bras central est surveillé au cours du test de vieillissement. Les puces supérieures (IGBT *top*) sont celles se dégradant le plus rapidement, comme attendu du fait de la disposition des fils. Les mesures des puces inférieures seront utilisées pour obtenir la densité de probabilité *a priori* sur la conductivité électrique des puces du jumeau numérique. En revanche, elles ne seront pas exploitées pour les autres paramètres, qui influent sur la propagation de la fissure et qui sont donc propres à l'IGBT supérieur.

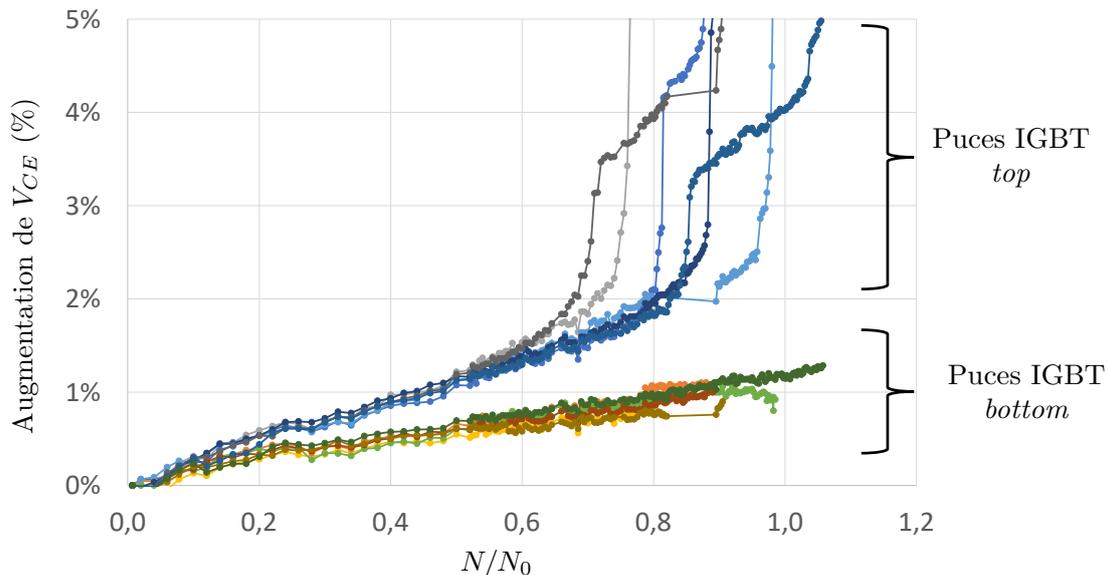


FIGURE 4.1 – Mesures de V_{CE} acquises lors du cyclage de six modules. La chute de tension est mesurée sur chacune des deux puces du bras central de chaque module.

Une fois les paramètres recalés, le modèle de durée de vie est utilisé afin de prédire la durée de vie restante du module, en propageant un échantillon de la densité de probabilité des paramètres à travers le modèle numérique. Un schéma illustrant cette méthodologie est présenté sur la Figure 4.2.

La résolution d'un problème direct consiste à déterminer la sortie d d'un modèle \mathcal{M} connaissant ses paramètres p :

$$\text{Trouver } d \text{ tel que } \mathcal{M}(p) = d \quad (4.1)$$

Un problème direct est généralement bien posé, conduisant à une solution unique. La résolution de problèmes inverses, consistant à déterminer les paramètres p du modèle en connaissant des observations d^{obs} des grandeurs modélisées :

$$\text{Trouver } p \text{ tel que } d^{obs} = \mathcal{M}(p) \quad (4.2)$$

est en revanche plus difficile, conduisant généralement à des problèmes mal posés [ENGL et al. 1996; TARANTOLA 2005], c'est-à-dire qu'au moins une des trois propriétés suivantes n'est pas vérifiée :

- Une solution existe ;
- La solution est unique ;
- La solution dépend de façon continue des données.

En effet, plusieurs valeurs de paramètres du modèle peuvent conduire à la même observation, et parfois aucune solution n'existe, ce qui est d'autant plus probable que les mesures observées sont bruitées. Une méthode classiquement utilisée pour résoudre les problèmes inverses est la méthode des moindres carrés, conduisant à la minimisation d'une fonction coût. Cette fonction peut comporter plusieurs minima locaux, rendant la minimisation difficile et coûteuse. Des méthodes de régularisation [BENNING et BURGER 2018], telles que la régularisation de Tikhonov [TIKHONOV 1963; GOLUB et al. 1999] peuvent néanmoins être utilisées afin de faciliter la minimisation. L'inférence bayésienne apporte dans ce cadre une régularisation naturelle [TARANTOLA 2005; STUART 2010; CALVETTI et SOMERSALO 2018], en cherchant non pas une valeur déterministe des paramètres, mais une densité de probabilité. L'inférence bayésienne a été utilisée pour de nombreuses applications, telles que le contrôle et le suivi de l'état de santé de structures [BECK et KATAFYGIOTIS 1998; BECK 2010; JENSEN et al. 2013; YAN et KATAFYGIOTIS 2015], parfois en temps réel [NGUYEN et al. 2010; RUBIO et al. 2019a; SEVERI et DE FALCO 2020; DIEZ et al. 2023], l'analyse de fiabilité structurelle [PAPAIIOANNOU et al. 2016; STRAUB et al. 2016], ou encore l'identification de propriétés matériaux [DAGHIA et al. 2007; GOGU et al. 2013]. L'inférence bayésienne a également été utilisée dans le cadre de la sélection de modèles [SAITO et BECK 2010; WORDEN et HENSMAN 2012; RITTO et NUNES 2015].

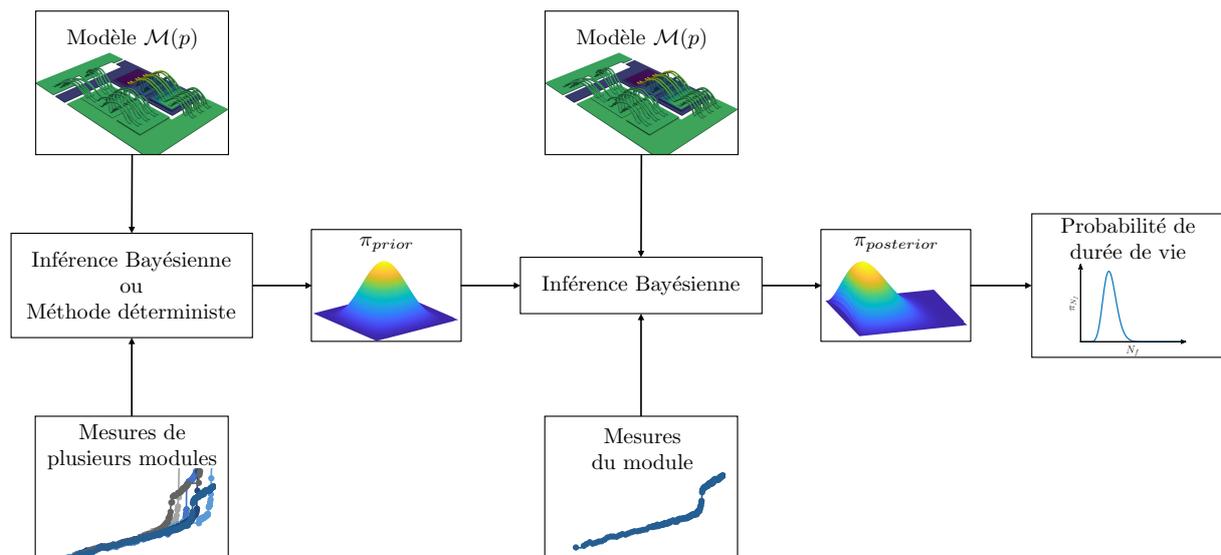


FIGURE 4.2 – Contexte pour la prédiction par inférence bayésienne de la durée de vie restante d'un module au cours de son utilisation.

4.2 Recalage de modèle par inférence bayésienne

4.2.1 Principe de l'inférence bayésienne

L'inférence bayésienne repose, comme son nom l'indique, sur le théorème de Bayes qui exprime ici que la densité de probabilité $\pi(\mathbf{p}|\mathbf{d}^{obs})$ des paramètres \mathbf{p} connaissant les mesures observées \mathbf{d}^{obs} est proportionnelle au produit de la densité de probabilité d'observer les mesures connaissant les paramètres $\pi(\mathbf{d}^{obs}|\mathbf{p})$, et de la densité de probabilité *a priori* des paramètres $\pi(\mathbf{p})$:

$$\pi(\mathbf{p}|\mathbf{d}^{obs}) = \frac{\pi(\mathbf{d}^{obs}|\mathbf{p})\pi(\mathbf{p})}{\pi(\mathbf{d}^{obs})} \quad (4.3)$$

La densité $\pi(\mathbf{p}|\mathbf{d}^{obs})$ est appelée densité *a posteriori*, elle est issue de la densité *a priori* qui a été enrichie par la fonction de vraisemblance $\pi(\mathbf{d}^{obs}|\mathbf{p})$. La probabilité d'observer les mesures $\pi(\mathbf{d}^{obs})$ est une constante de normalisation permettant d'assurer que l'intégrale de la densité *a posteriori* est égale à 1. La fonction *a priori* est une fonction connue contenant les connaissances *a priori* sur les paramètres, avant l'assimilation des mesures. Cette connaissance provient par exemple de l'expertise de l'ingénieur ou est issue de l'assimilation de mesures précédentes. La difficulté de la méthode réside ainsi dans le calcul de la fonction de vraisemblance. Sans inclure de biais de modèle, celle-ci s'obtient en supposant que les mesures sont égales à la prédiction du modèle, à laquelle s'ajoute un bruit de mesure e :

$$\mathbf{d}^{obs} = \mathcal{M}(\mathbf{p}) + e \quad (4.4)$$

Ici, le bruit de mesure e suit une densité de probabilité π_{err} connue, qui est choisie comme une gaussienne centrée. Il est également possible de recalibrer l'erreur de mesure, en supposant que celle-ci suive une loi donnée et en recalant les paramètres de cette loi. Un biais de modèle peut également être introduit et recalé, comme montré dans la sous-section suivante.

D'après (4.4), quand les paramètres \mathbf{p} et le bruit de mesure e sont fixés, les mesures \mathbf{d}^{obs} sont complètement déterminées. Dans ce cas, la probabilité d'observer les mesures connaissant les paramètres et le bruit de mesure est concentrée en \mathbf{d}^{obs} :

$$\pi(\mathbf{d}^{obs}|\mathbf{p}, e) = \delta(\mathbf{d}^{obs} - (\mathcal{M}(\mathbf{p}) + e)) \quad (4.5)$$

où δ est la distribution de Dirac. Ainsi, la fonction de vraisemblance s'écrit :

$$\pi(\mathbf{d}^{obs}|\mathbf{p}) = \int \pi(\mathbf{d}^{obs}|\mathbf{p}, e)\pi_{err}(e|\mathbf{p}) de = \pi_{err}(\mathbf{d}^{obs} - \mathcal{M}(\mathbf{p})|\mathbf{p}) \quad (4.6)$$

De plus, le bruit de mesure étant indépendant des paramètres, la fonction de vraisemblance s'écrit finalement comme :

$$\pi(\mathbf{d}^{obs}|\mathbf{p}) = \pi_{err}(\mathbf{d}^{obs} - \mathcal{M}(\mathbf{p})) \quad (4.7)$$

Les mesures \mathbf{d}^{obs} du module sont acquises au cours du temps et sont indépendantes entre elles. Il est alors possible d'assimiler les mesures de manière séquentielle, les unes après les autres. A chaque nouvelle assimilation, la densité *a posteriori* issue de l'assimilation précédente est prise comme nouvelle densité *a priori*. Ainsi, après l'assimilation de i mesures $\{\mathbf{d}_1^{obs}, \dots, \mathbf{d}_i^{obs}\}$, acquises aux cycles $\{N_1, \dots, N_i\}$, la densité *a posteriori* est proportionnelle à la densité *a priori* initiale et au produit des fonctions de vraisemblance issues de l'assimilation de chaque mesure :

$$\pi(\mathbf{p}|\mathbf{d}_1^{obs}, \dots, \mathbf{d}_i^{obs}) \propto \pi(\mathbf{p}) \prod_{k=1}^i \pi_{err}(\mathbf{d}_k^{obs} - \mathcal{M}(\mathbf{p}, N_k)) \quad (4.8)$$

La constante de normalisation $C = \int \pi(\mathbf{p} | \mathbf{d}_1^{obs}, \dots, \mathbf{d}_i^{obs}) d\mathbf{p}$ n'est souvent pas calculée car souvent seul le rapport des probabilités est important lors de l'exploitation de la densité *a posteriori*. Cependant, il peut parfois être intéressant de calculer cette constante, car sa valeur traduit la justesse du modèle. En effet, plus la valeur de la constante est grande, plus cela indique une grande densité *a posteriori* grande, et par conséquent un modèle fiable [SATO 2001; SAITO et BECK 2010]. Pour cette raison, la constante de normalisation est également appelée *model evidence* en anglais. Ainsi, en appliquant l'inférence bayésienne avec les mêmes mesures sur différents modèles, la comparaison des constantes de normalisation permet de sélectionner les modèles les plus fiables.

4.2.2 Correction du biais de modèle

L'assimilation séquentielle des mesures peut permettre de corriger l'erreur de modèle d'une assimilation à la suivante. En suivant le formalisme utilisé dans [RUBIO et al. 2019a], une estimation probabiliste du résidu B_i à l'assimilation de la i -ième mesure est définie par :

$$B_i = \mathbf{d}_i^{obs} - \mathcal{M}(\mathbf{p}) - \mathbf{e} \quad (4.9)$$

où \mathbf{e} est le bruit de mesure. Ce résidu traduit la différence entre le modèle et la mesure. Il est ensuite possible de corriger le modèle en prenant en compte ce biais en l'extrapolant pour l'assimilation suivante. Ainsi, le modèle corrigé utilisé pour l'assimilation de la mesure suivante s'écrit :

$$\mathcal{M}^{corr}(\mathbf{p}) = \mathcal{M}(\mathbf{p}) + \hat{\mathbf{B}} \quad (4.10)$$

où $\hat{\mathbf{B}}$ est l'extrapolation du biais de modèle B_i calculé pour la mesure i , ayant une densité de probabilité $\pi_{\hat{\mathbf{B}}}$. La fonction de vraisemblance issue de l'assimilation de la mesure $i + 1$ vaut alors :

$$\pi(\mathbf{d}_{i+1}^{obs} | \mathbf{p}) = \pi_{\hat{\mathbf{B}}}(\mathbf{d}_{i+1}^{obs} - \mathcal{M}(\mathbf{p})) \quad (4.11)$$

Dans un premier temps, la correction du biais de modèle n'est pas utilisée pour des raisons de simplicité.

4.2.3 Post-traitement de la densité *a posteriori*

Une fois la densité *a posteriori* déterminée, celle-ci peut-être utilisée dans une phase de post-traitement, pour identifier par exemple les paramètres en utilisant le maximum *a posteriori* :

$$\hat{\mathbf{p}} = \operatorname{argmax} \pi(\mathbf{p} | \mathbf{d}^{obs}) \quad (4.12)$$

Les densités de probabilité marginales portant sur chacun des paramètres p_j peuvent également être extraites en intégrant la densité *a posteriori* sur les autres paramètres :

$$\pi_{p_j} = \int \pi(\mathbf{p} | \mathbf{d}^{obs}) \prod_{i \neq j} dp_i \quad (4.13)$$

Il est possible d'évaluer ensuite l'espérance de ces lois, ou tout autre moment associé (variance, écart-type,...). L'espérance vaut par exemple :

$$\mathbb{E}(p_j) = \int p_j \pi_{p_j} dp_j \quad (4.14)$$

Ces moments peuvent être approximés en utilisant une intégration par Monte-Carlo, à l'aide de N_{mc} échantillons $\{p_j^1, \dots, p_j^{N_{mc}}\}$ issus de la loi π_{p_j} :

$$\mathbb{E}(p_j) \approx \frac{1}{N_{mc}} \sum_{k=1}^{N_{mc}} p_j^k \quad (4.15)$$

De plus, la densité jointe *a posteriori* doit être échantillonnée afin de transporter les échantillons à travers le modèle de durée de vie, pour obtenir une durée de vie restante probabilisée. Cependant, la densité *a posteriori* π n'est pas une densité de probabilité usuelle, et son échantillonnage est dès lors difficile. Les méthodes classiquement utilisées pour échantillonner la densité *a posteriori* sont les méthodes de Monte-Carlo par Chaînes de Markov, ou MCMC pour *Markov Chain Monte-Carlo* en anglais, qui utilisent des chaînes de Markov ayant comme loi stationnaire la densité *a posteriori* [GEYER 1992; GILKS et al. 1995; BROOKS et al. 2011]. Un des algorithmes les plus utilisés est l'algorithme de Metropolis Hasting [METROPOLIS et al. 1953; HASTINGS 1970; CHIB et GREENBERG 1995]. L'algorithme est un processus itératif qui génère les échantillons les uns après les autres. Il consiste, à partir d'un échantillon x_0 , à générer un nouveau échantillon candidat à l'aide d'une distribution de transition, souvent une gaussienne centrée en x_0 , puis d'accepter ou non ce candidat en tant que nouvel échantillon x suivant le rapport des densités *a posteriori* $\pi(x)/\pi(x_0)$. Ainsi, l'utilisation de cet algorithme dans le cadre de l'inférence bayésienne est avantageuse car le calcul de la constante de normalisation C n'est pas nécessaire. Après un certain nombre d'échantillons, les échantillons générés suivent la densité *a posteriori*. Les premiers échantillons générés par l'algorithme doivent donc être rejetés (phase de *burn-in*). Le nombre d'échantillons à rejeter et la loi de probabilité permettant de générer un nouvel échantillon sont des paramètres qui doivent être ajustés selon la densité à échantillonner. Le calibrage de la loi générant les échantillons est délicat et un mauvais choix peut conduire à des échantillons stagnant longtemps dans une zone de probabilité, ou à des échantillons étant souvent rejetés et donc doublés [ROBERTS et ROSENTHAL 2001]. Afin de s'affranchir de ces paramètres, une approche alternative est utilisée, basée sur la méthode des *Transport Maps* [EL MOSELHY et Y. M. MARZOUK 2012; SPANTINI et al. 2018]. Cette méthode a été employée dans de précédentes études pour résoudre des problèmes d'inférence bayésienne séquentiels en utilisant des modèles réduits PGD, dans le cadre du contrôle de santé de structures mécaniques [RUBIO et al. 2019a; b].

4.3 Échantillonnage par la méthode des *Transport Maps*

La méthode des *Transport Maps* consiste à trouver une transformation déterministe M entre une mesure de référence ν_ρ , suivant une loi facile à échantillonner, telle la loi normale centrée réduite, et la mesure d'intérêt ν_π suivant la loi *a posteriori* que l'on souhaite échantillonner. De cette manière, les échantillons de la densité de référence peuvent être transportés vers la densité *a posteriori*, comme illustré sur la Figure 4.3. L'objectif est donc de déterminer le changement de variables M tel que :

$$\int g d\nu_\pi = \int gM \circ d\nu_\rho \quad (4.16)$$

4.3.1 Approximation de Laplace

Supposons que l'on connaisse la densité *a posteriori* à la constante de normalisation près :

$$\pi(\mathbf{p}) = \frac{1}{C} \tilde{\pi}(\mathbf{p}) \quad (4.17)$$

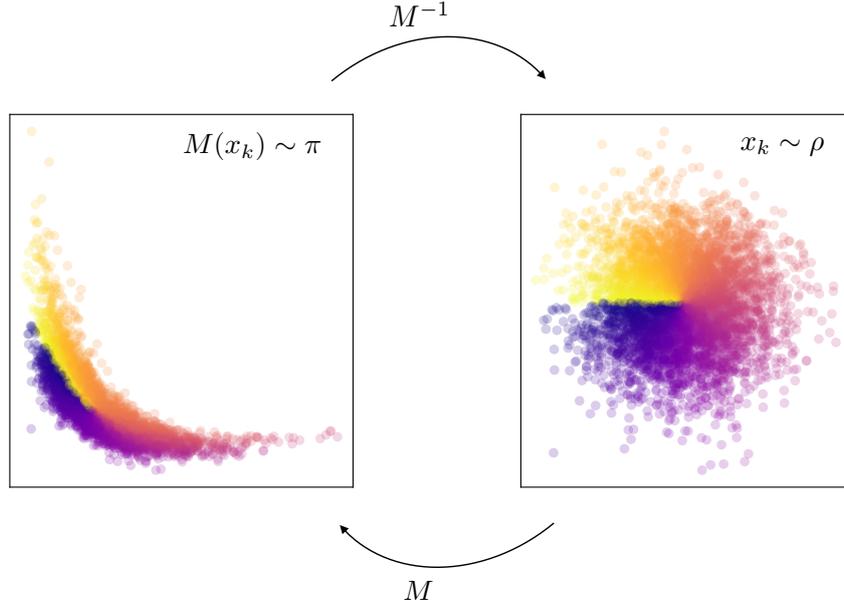


FIGURE 4.3 – Principe de l'échantillonnage par *Transport Maps*. Figure adaptée de la [documentation](#) de la librairie MParT et de [RUBIO 2019].

Lorsque la densité *a posteriori* π est très éloignée de la densité de référence, c'est-à-dire que son espérance et sa moyenne ne sont pas proches de 0 et de 1, une première étape consiste à trouver une approximation de Laplace de la densité *a posteriori*, afin de pouvoir transformer celle-ci en une densité plus proche de la densité de référence. L'approximation de Laplace consiste à trouver la meilleure gaussienne approximant la densité *a posteriori*. Afin de construire cette approximation, le point \mathbf{p}_0 minimisant l'opposée du logarithme de $\tilde{\pi}$ est tout d'abord trouvé :

$$\mathbf{p}_0 = \underset{\mathbf{p}}{\operatorname{argmin}} \left(-\log(\tilde{\pi}(\mathbf{p})) \right) \quad (4.18)$$

Ensuite, un développement de Taylor au second ordre du logarithme de $\tilde{\pi}$ au point \mathbf{p}_0 est effectué :

$$\log(\tilde{\pi}(\mathbf{p})) \approx \log(\tilde{\pi}(\mathbf{p}_0)) + \frac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^T \mathbb{H}(\mathbf{p}_0)(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \quad (4.19)$$

où $\mathbb{H}(\mathbf{p}_0)$ est la matrice Hessienne de $\log(\tilde{\pi})$ au point \mathbf{p}_0 . Une approximation de $\tilde{\pi}$ est donc obtenue par :

$$\tilde{\pi}(\mathbf{p}) \approx \tilde{\pi}(\mathbf{p}_0) \exp \left(\frac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^T \mathbb{H}(\mathbf{p}_0)(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \right) \quad (4.20)$$

Ainsi, une approximation de la constante de normalisation peut être obtenue :

$$C \approx \int \tilde{\pi}(\mathbf{p}_0) \exp \left(\frac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^T \mathbb{H}(\mathbf{p}_0)(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \right) d\mathbf{p} \quad (4.21)$$

soit :

$$C \approx \tilde{\pi}(\mathbf{p}_0) \frac{(2\pi)^{d/2}}{|\mathbb{H}(\mathbf{p}_0)|^{1/2}} \quad (4.22)$$

où d est le nombre de paramètres. Le calcul de la constante d'intégration permet d'exprimer une approximation de la densité *a posteriori* $\pi(\mathbf{p})$:

$$\pi(\mathbf{p}) \approx \frac{|\mathbb{H}(\mathbf{p}_0)|^{1/2}}{(2\pi)^{d/2}} \exp \left(\frac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^T \mathbb{H}(\mathbf{p}_0)(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \right) = \mathcal{N}(\mathbf{p}_0, -\mathbb{H}(\mathbf{p}_0)^{-1}) \quad (4.23)$$

Cette approximation correspond à une loi normale centrée en \mathbf{p}_0 , et de matrice de covariance $-\mathbb{H}(\mathbf{p}_0)^{-1}$. Ainsi, l'approximation de Laplace correspond à une transformation linéaire :

$$L(\mathbf{p}) = \mathbf{p}_0 - \mathbb{H}(\mathbf{p}_0)^{-1}\mathbf{p} \quad (4.24)$$

En résumé, l'approximation de Laplace est obtenue en résolvant le problème de minimisation (4.18) et en calculant les dérivées secondes de la densité $\tilde{\pi}$ pour obtenir la matrice Hessienne.

4.3.2 Transformation triangulaire

L'approximation de Laplace est utilisée pour transformer la densité *a posteriori* en une densité π^* qui est approximativement d'espérance nulle et de matrice de covariance identité : $\pi^* = \pi \circ L^{-1}$. Ensuite, une transformation M inversible est calculée entre la densité π^* et la densité de référence ρ , telle que :

$$\nu_{\pi^*} \approx M_{\#}\nu_{\rho} = \rho \circ M^{-1} |\det \nabla M^{-1}| \quad (4.25)$$

Afin de quantifier la différence entre les distributions ν_{π^*} et $M_{\#}\nu_{\rho}$, la divergence de Kullback-Leibler est utilisée :

$$\mathcal{D}_{KL}(M_{\#}\nu_{\rho} || \nu_{\pi^*}) = \mathcal{D}_{KL}(\nu_{\rho} || M_{\#}^{-1}\nu_{\pi^*}) \quad (4.26)$$

$$= \mathbb{E}_{\rho} \left[\log \frac{\nu_{\rho}}{M_{\#}^{-1}\nu_{\pi^*}} \right] \quad (4.27)$$

$$= \int [\log(\rho(\mathbf{p})) - \log([\pi \circ M](\mathbf{p})) - \log(|\det \nabla M(\mathbf{p})|)] \rho(\mathbf{p}) d\mathbf{p} \quad (4.28)$$

La transformation M est cherchée sous la forme triangulaire suivante :

$$M(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} M^1(\mathbf{a}_c^1, \mathbf{a}_e^1, p_1) \\ M^2(\mathbf{a}_c^2, \mathbf{a}_e^2, p_1, p_2) \\ \vdots \\ M^d(\mathbf{a}_c^d, \mathbf{a}_e^d, p_1, p_2, \dots, p_d) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

où chaque transformation M^k est définie de la manière suivante :

$$M^k(\mathbf{a}_c^k, \mathbf{a}_e^k, \mathbf{p}) = \Phi_c(\mathbf{p})\mathbf{a}_c^k + \int_0^{p_k} \left(\Phi_e(p_1, \dots, p_{k-1}, \theta)\mathbf{a}_e^k \right)^2 d\theta \quad (4.30)$$

Les fonctions Φ_c et Φ_e sont les polynômes d'Hermite de coefficients \mathbf{a}_c et \mathbf{a}_e . Le degré maximal des polynômes définit le degré de la transformation. Les coefficients \mathbf{a}_c et \mathbf{a}_e sont donc les inconnues à déterminer afin de caractériser la transformation. Ceux-ci sont obtenus en minimisant la divergence de Kullback-Leibler. La forme triangulaire monotone (4.29) choisie pour la transformation permet d'assurer que celle-ci est inversible [REZENDE et MOHAMED 2015; Y. MARZOUK et al. 2016]. Elle permet également une relative facilité de calcul, et assure que la solution du problème de minimisation de la divergence est unique. Plus de détails peuvent être trouvés dans [Y. MARZOUK et al. 2016; SPANTINI et al. 2018]. Lorsque l'espace paramétrique est de grande dimension, le nombre de coefficients à déterminer est également important et la minimisation de la divergence KL peut être difficile. Ainsi, des méthodes ont été développées afin d'identifier et exploiter des structures de faible rang que le problème peut comporter [NOUY 2017; BAPTISTA et al. 2020; BRENNAN et al. 2020; ZAHM et al. 2022; CUI et al. 2023]. De plus, un estimateur de

la qualité de l'approximation par la transformation M peut être défini par la variance suivante (*variance diagnostic*) [EL MOSELHY et Y. M. MARZOUK 2012; SPANTINI et al. 2018] :

$$\epsilon_\sigma = \frac{1}{2} \text{Var}_\rho \left[\log \frac{\nu_\rho}{M_\#^{-1} \nu_{\pi^*}} \right] \quad (4.31)$$

Cet estimateur permet d'utiliser une procédure itérative sur la construction de la transformation. Après avoir déterminé l'approximation de Laplace, une transformation triangulaire M d'ordre 1 est calculée. Tant que l'estimateur d'erreur n'est pas inférieur à une tolérance donnée, une nouvelle transformation d'ordre supérieur est calculé.

4.3.3 Composition de transformations pour l'assimilation séquentielle

Un avantage des *Transport Maps* dans le cadre de l'assimilation séquentielle des mesures est de pouvoir exploiter la transformation issue de l'assimilation précédente en la composant avec une transformation d'ordre faible [SPANTINI et al. 2018; RUBIO et al. 2019b; CUI et DOLGOV 2022; RUBIO et al. 2023], au lieu de la recalculer entièrement. En effet, comme la densité *a posteriori* est proportionnelle au produit de chaque fonction de vraisemblance π_k issue de l'assimilation d'une mesure

$$\pi(\mathbf{p} | \mathbf{d}_1^{obs}, \dots, \mathbf{d}_i^{obs}) \propto \pi(\mathbf{p}) \prod_{k=1}^i \pi_k \left(\mathbf{d}_k^{obs} - \mathcal{M}(\mathbf{p}, N_k) \right) \quad (4.32)$$

l'idée est de calculer une nouvelle transformation entre la densité de référence et la densité *a posteriori* affectée par la transformation issue de l'assimilation précédente. Ainsi, la densité *a posteriori* est approximée par :

$$\pi(\mathbf{p} | \mathbf{d}_1^{obs}, \dots, \mathbf{d}_i^{obs}) \approx (L \circ M_1 \circ \dots \circ M_i)_\# \rho(\mathbf{p}) = (\mathbb{M}_i)_\# \rho(\mathbf{p}) \quad (4.33)$$

où chaque transformation M_k , $k = \{2, \dots, i\}$, transforme la densité de référence ρ en la densité cible π_k^* :

$$\pi_k^*(\mathbf{p}) = \pi_k \left(\mathbf{d}_k^{obs} | \mathbb{M}_{k-1}(\mathbf{p}) \right) \rho(\mathbf{p}) \quad (4.34)$$

L'assimilation séquentielle des mesures par inférence bayésienne est présentée dans l'algorithme 8, qui est adapté de [RUBIO 2019]. La méthode est illustrée visuellement sur la Figure 4.4.

4.4 Application à la prédiction de durée de vie restante d'un module

Le suivi de l'état de santé d'un module de puissance au cours d'un essai de durée de vie est assuré par la mesure de la chute de tension collecteur-émetteur V_{CE} . Les paramètres du modèle influent différemment sur la tension V_{CE} . En effet, comme vu dans le chapitre précédent, la conductivité électrique de la puce influe sur la valeur nominale de V_{CE} , tandis que les autres paramètres influent sur la propagation de la fissure. Ces derniers influent ainsi de manière indirecte sur l'augmentation de la chute de tension, mais pas sur sa valeur initiale. En tirant profit de cette constatation, les paramètres sont donc recalés en deux fois. Les premières mesures de V_{CE} sont tout d'abord exploitées afin de recaler la valeur de la conductivité électrique de la puce dans l'état initial (sain) du module. La conductivité électrique de la puce est ensuite fixée à la valeur obtenue par le maximum *a posteriori* pour recaler les autres paramètres avec les

Algorithme 8 : Assimilation séquentielle de mesures avec échantillonnage par *Transport Maps*

Données : *tolerance*, *i* mesures $\{d_1^{obs}, \dots, d_i^{obs}\}$

Résultat : Transformation \mathbb{M}_i

Assimilation de la première mesure :

$\pi_1(\mathbf{p} | d^{obs}) \pi(\mathbf{p})$

Approximation de Laplace :

$L = \mathbf{Approximation_Laplace}(\pi_1)$

$\hat{\mathbb{M}}_1 = \mathbb{I}_d$

ordre = 0 # Initialisation de l'ordre de la transformation triangulaire

$\epsilon_\sigma = 2 \times \textit{tolerance}$ # Initialisation de l'estimateur d'erreur

tant que $\epsilon_\sigma > \textit{tolerance}$ **faire**

ordre \leftarrow *ordre* + 1

$M = \mathbf{Map_Triangulaire}(\textit{ordre})$ # Initialisation de la transformation triangulaire

$M_1 = \min_M \text{DKL}(\rho, (L \circ \hat{\mathbb{M}}_1 \circ M)_\#^{-1} \pi_1)$ # Minimisation de la divergence KL pour déterminer la transformation

$\hat{\mathbb{M}}_1 = \hat{\mathbb{M}}_1 \circ M_1$

 Actualise la variance ϵ_σ

fin

Crée la transformation liée à la première mesure :

$\mathbb{M}_1 = L \circ \hat{\mathbb{M}}_1$

Assimilation des autres mesures :

pour *k* allant de 2 à *i* **faire**

 # Assimile la *k*ième mesure et calcule la densité cible :

$\pi_k^* = \pi(d_k^{obs} | \mathbb{M}_{k-1}(\mathbf{p})) \rho(\mathbf{p})$

$\hat{\mathbb{M}}_k = \mathbb{I}_d$ # Initialise la *k*-ième transformation

ordre = 0; $\epsilon_\sigma = 2 \times \textit{tolerance}$

 # Calcule la transformation :

tant que $\epsilon_\sigma > \textit{tolerance}$ **faire**

ordre \leftarrow *ordre* + 1

$M = \mathbf{Map_Triangulaire}(\textit{ordre})$ # Initialisation de la transformation triangulaire

$M_k = \min_M \text{DKL}(\rho, (L \circ \hat{\mathbb{M}}_k \circ M)_\#^{-1} \pi_k^*)$ # Minimisation de la divergence KL pour déterminer la transformation

$\hat{\mathbb{M}}_k = \hat{\mathbb{M}}_k \circ M_k$

 Actualise la variance ϵ_σ

fin

$\mathbb{M}_k = \hat{\mathbb{M}}_{k-1} \circ \hat{\mathbb{M}}_k$

fin

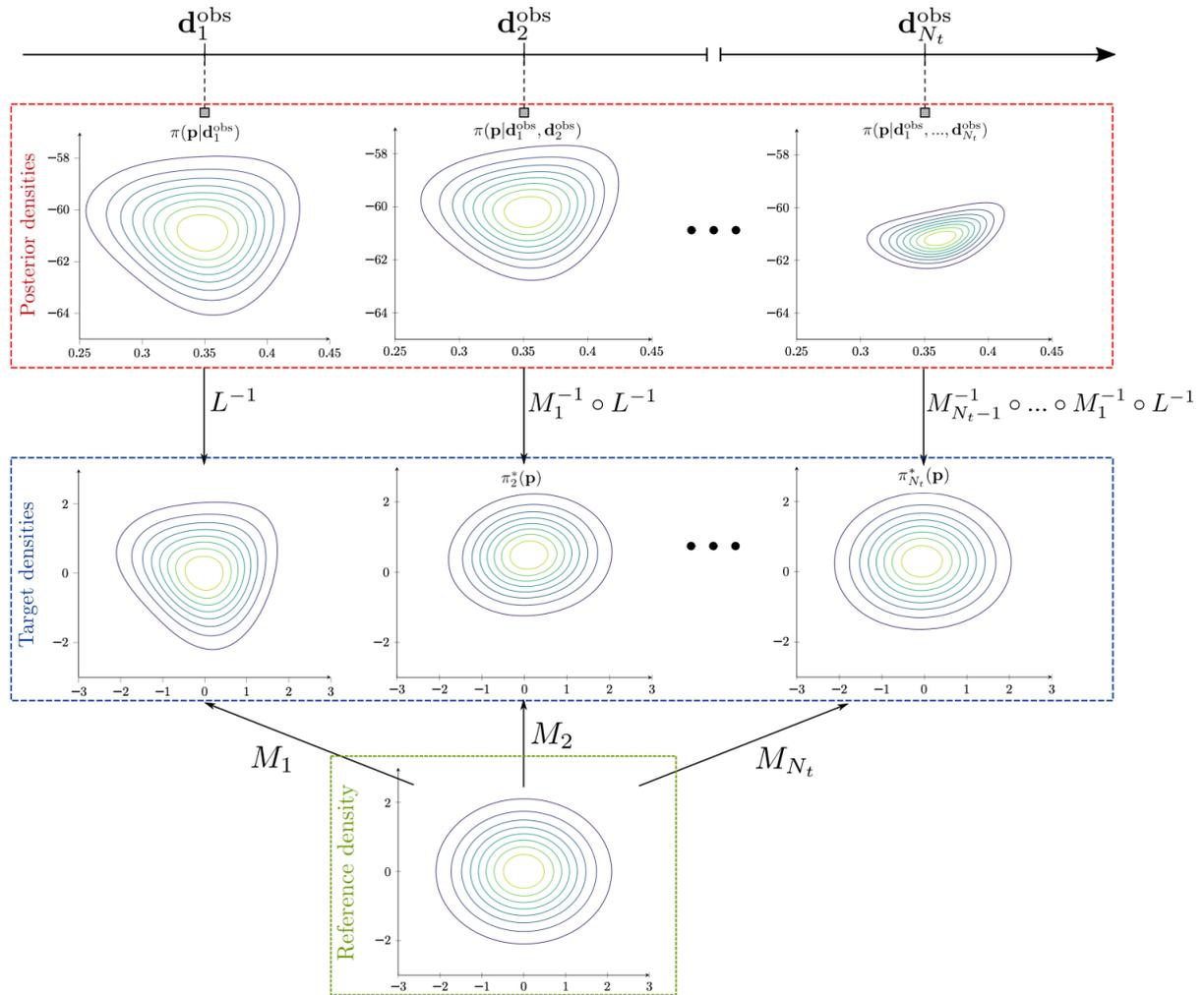


FIGURE 4.4 – Stratégie de l'approximation par *Transport Maps* pour l'assimilation séquentielle de mesures. Figure issue de [RUBIO 2019].

mesures suivantes. Pour ce deuxième recalage, les valeurs de l'augmentation de V_{CE} par rapport à sa valeur initiale sont utilisées, car elles traduisent la propagation de la fissure. Elles sont ainsi plus sensibles aux paramètres.

4.4.1 Recalage à partir de mesures synthétiques

Dans un premier temps, afin d'illustrer la méthode en s'affranchissant des difficultés liées aux mesures réelles, la prédiction de la durée de vie restante d'un module est effectuée à partir de mesures synthétiques, qui sont des mesures créées artificiellement à partir du modèle numérique. Ainsi, les mesures sont générées à partir de l'évolution de la chute de tension V_{CE} obtenue avec le jeu de paramètres ($b/b_0 = 1,08$, $T_0/T_0^0 = 1$, $c_1/c_1^0 = 0,9$, $c_2/c_2^0 = 1,1$). Rappelons que ces paramètres sont respectivement le paramètre associé à la conductivité électrique des puces, la température pour laquelle les déformations thermiques sont nulles, et les paramètres de la loi de Paris régissant la propagation de la fissure. Un bruit gaussien centré d'écart type $\sigma_m = 7 \times 10^{-2}$ est ajouté à l'évolution de V_{CE} obtenue pour ces paramètres. Les mesures sont générées tous les 7500 cycles. Les mesures utilisées, comparées à la prédiction du modèle, sont montrées sur la Figure 4.5a. Dans un premier temps, afin de faciliter l'identification des paramètres, la

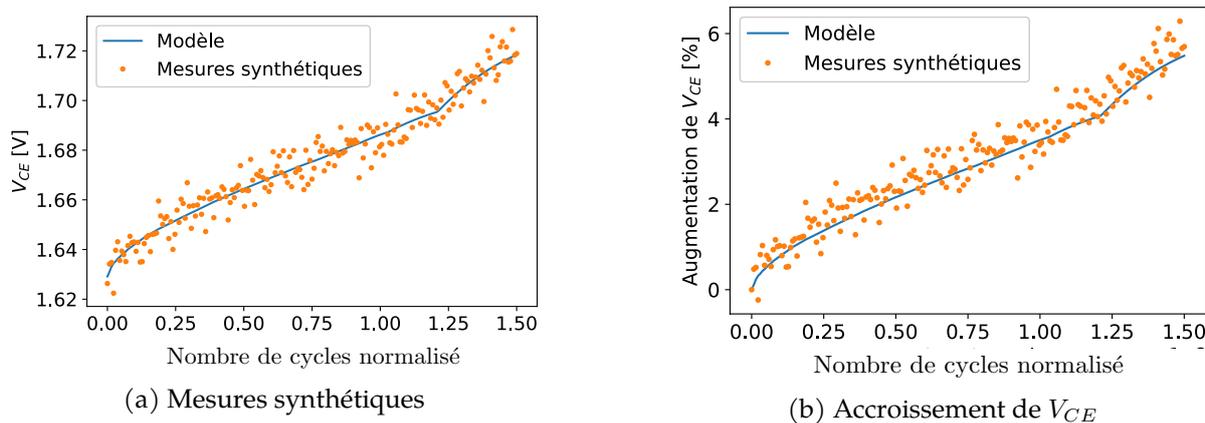


FIGURE 4.5 – Génération de mesures synthétiques à partir du modèle numérique : V_{CE} et son accroissement en fonction du nombre de cycles.

température T_0 est supposée être entièrement connue. Elle est fixée à sa valeur nominale. La densité de probabilité *a priori* est choisie comme uniforme sur l'intervalle de variation des paramètres, ce qui n'introduit aucune connaissance *a priori* des paramètres. La densité *a posteriori* de la résistivité électrique de la puce b , montrée sur la Figure 4.6, est obtenue après l'assimilation de 3 mesures. Sur cette figure, l'approximation de la densité obtenue par une transformation triangulaire d'ordre 1 est également montrée. Les deux densités sont normalisées par leurs valeurs maximales respectives. La comparaison montre que l'approximation par *Transport Maps* est très bonne, comme le confirme la faible valeur de l'indicateur de la variance $\epsilon_{\sigma} = 1.03 \times 10^{-4}$.

La valeur de b obtenue par le principe du maximum *a posteriori*, est la valeur pour laquelle les mesures ont été générées.

Cette valeur est ensuite fixée pour recalibrer les paramètres suivants. L'évolution de la densité *a posteriori*, entre l'assimilation de la première mesure et la quarantième assimilation est montrée sur la Figure 4.7. La densité obtenue à l'issue de l'assimilation de la première mesure est assez peu informative : la densité est importante sur une large bande du domaine paramétrique. Puis le support de la densité se restreint, grâce à l'apport d'informations par les nouvelles mesures assimilées. A l'issue d'une vingtaine d'assimilation, la densité *a posteriori* contient une

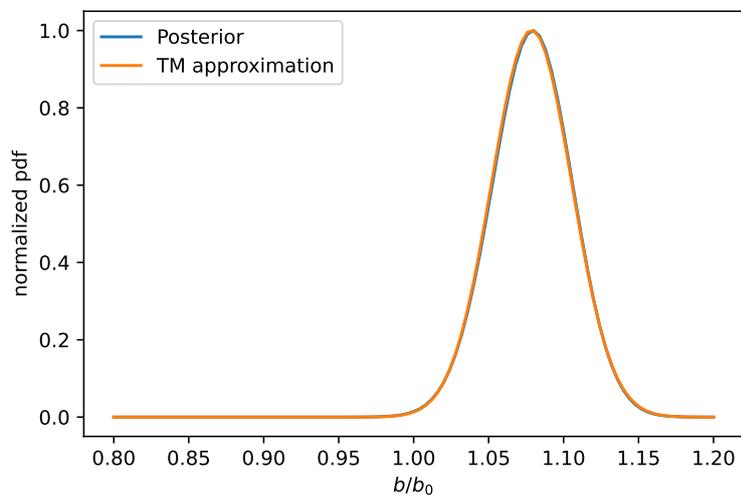


FIGURE 4.6 – Densité *a posteriori* portant sur la résistivité électrique de la puce, et son approximation par *Transport Maps*.

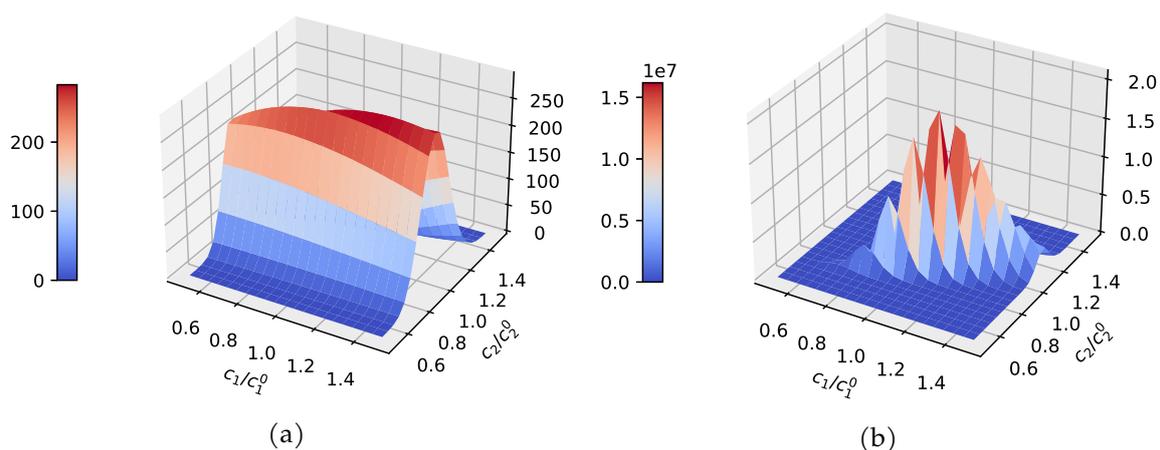


FIGURE 4.7 – Densités *a posteriori* de c_1 et c_2 obtenues à l'issue de (a) la première assimilation et (b) la quarantième assimilation.

information suffisamment fine pour permettre d'identifier de manière robuste les paramètres du modèle. Il est par exemple possible d'extraire les lois marginales, présentées sur la Figure 4.8. Les moments des densités de probabilité sont ensuite estimés par la méthode de Monte-Carlo. Les paramètres ont une moyenne de 0,96 et 1,17 pour c_1 et c_2 respectivement. Ces valeurs sont proches de celles utilisées pour générer les mesures : 0,9 et 1,1, soit une erreur relative de 6,7 et 6,3% respectivement.

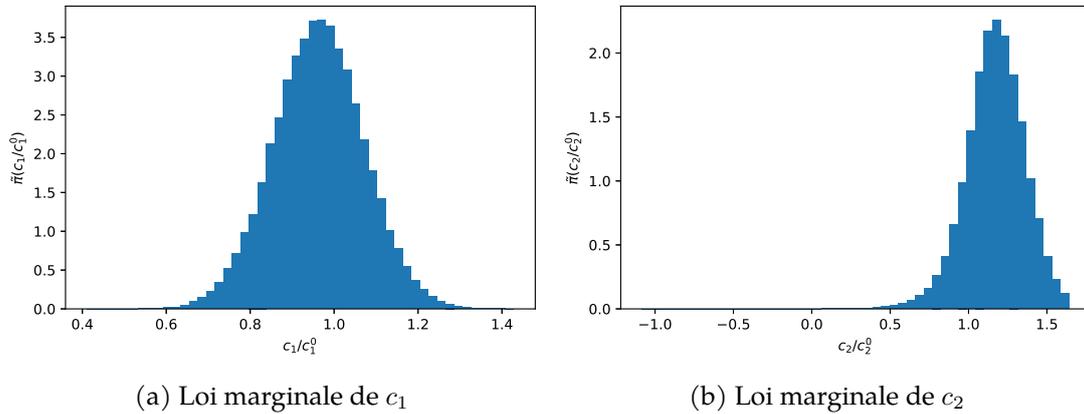


FIGURE 4.8 – Lois marginales issues de la densité jointe après 20 assimilations.

En échantillonnant la densité *a posteriori* par la méthode des *Transport Maps* puis en transportant l'échantillon à travers le modèle de durée de vie, la probabilité de la durée de vie du module est obtenue et présentée sur la Figure 4.9a. L'évolution de cette densité au cours des assimilations des mesures suivantes est montrée sur la Figure 4.9. La densité de probabilité de la durée de vie du module découlant de la densité *a posteriori* des paramètres, elle s'affine également avec l'assimilation des mesures. La moyenne de la densité de probabilité de la durée

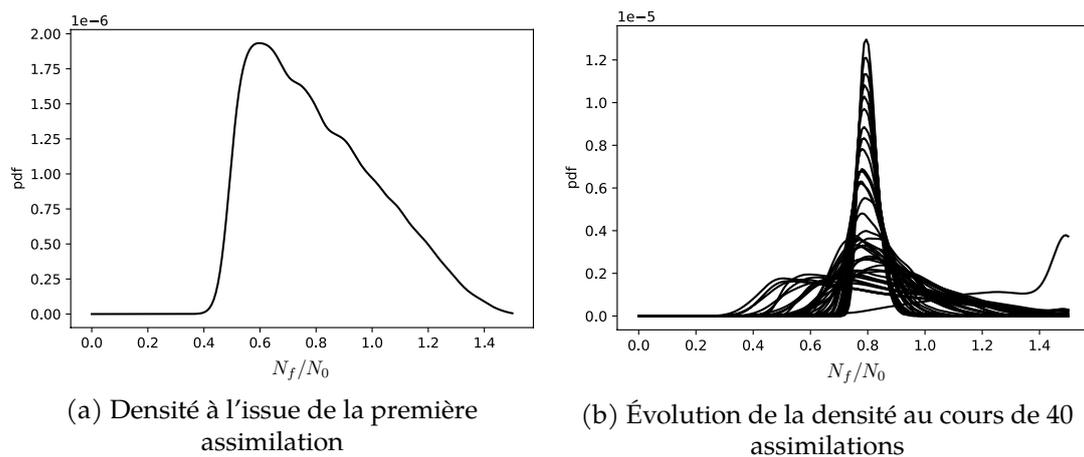


FIGURE 4.9 – Densité de probabilité de la durée de vie du module, à l'issue de la première assimilation et son évolution au cours des assimilations suivantes.

de vie (normalisée) obtenue après quarante assimilations est de $8,038 \times 10^{-1}$, proche de la valeur du modèle, qui est de $N_f/N_0 = 7,875 \times 10^{-1}$. L'écart-type est de 0,0316.

4.4.2 Recalage à partir de mesures réelles

Après avoir illustré la méthode permettant de recalculer les paramètres du modèle et de prédire de la durée de vie restante d'un module à l'aide de mesures issues du modèle numérique, les mesures réelles présentées sur la Figure 4.1 sont exploitées dans cette partie. Les mesures de cinq modules sont utilisées pour construire la densité *a priori* des paramètres. Les mesures de la puce IGBT supérieure du module restant sont utilisées pour construire le jumeau numérique de celui-ci.

Densité *a priori*

La densité de probabilité *a priori* contenant les informations connues sur les paramètres, peut être obtenue de plusieurs manières. Tout d'abord, si aucune information n'est connue sur les paramètres, la densité *a priori* est considérée uniforme sur le domaine de variation des paramètres : cette loi ne contient aucune information, si ce n'est que les paramètres appartiennent au domaine défini. Dans le cas de l'étude d'un module de puissance, de nombreux tests ont été réalisés au préalable sur des modules identiques à celui testé. Les mesures de V_{CE} peuvent ainsi être exploitées afin de construire une connaissance *a priori* sur les paramètres. Cette connaissance doit traduire la probabilité que les paramètres d'un module soit égale à une certaine valeur. Elle traduit donc la dispersion des paramètres entre les différents modules. L'obtention de la densité *a priori* peut se faire par inférence bayésienne ou par une méthode déterministe telle que les moindres carrés par exemple [LOUF et CHAMPANEY 2013]. Cette dernière méthode sera employée par la suite.

Afin d'obtenir la densité *a priori* des paramètres, considérons les évolutions de la chute de tension V_{CE} mesurée sur $M = 5$ modules au cours de leurs tests de vieillissement. Les données issues d'un sixième module sont conservées pour construire ensuite un jumeau numérique de ce dernier. Pour chaque module, la conductivité électrique b^i de la puce du module i est tout d'abord calculée par la méthode des moindres carrés, en utilisant les n premières mesures, obtenues aux cycles N_k , pour lesquelles le module n'est pas encore ou faiblement endommagé. La méthode des moindres carrés consiste à minimiser l'erreur définie par la somme des écarts au carré entre la mesure $V_{CE}^{i,k}$ et la prédiction de la chute de tension par le modèle réduit PGD $\mathcal{M}(n_k, b, c_1, c_2)$:

$$b^i = \underset{b}{\operatorname{argmin}} \sum_{k=1}^n \left(V_{CE}^{i,k} - \mathcal{M}(n_k, b, c_1, c_2) \right)^2 \quad (4.35)$$

où les paramètres c_1 et c_2 sont fixés à leurs valeurs nominales. Ceux-ci n'influent de toute manière pas sur la valeur prédite par le modèle, la fissure n'ayant pas encore ou faiblement propagé.

Une fois les valeurs des paramètres b^i obtenues pour chaque module, la densité de probabilité est obtenue par lissage, via une méthode d'estimation par noyau (*Kernel Density Estimation (KDE)*, en anglais). Les valeurs de b obtenues pour les cinq puces supérieures et les six puces inférieures, et la densité obtenue par lissage sont présentées sur la Figure 4.10. Ici, le noyau choisi est un noyau gaussien, de largeur de bande automatiquement déterminée par la règle de Scott [SCOTT 1992] et le nombre de points. Peu de points sont utilisés ici, ce qui génère une largeur de bande assez grande et un lissage grossier.

De la même manière, les mesures suivantes de chaque module sont utilisées pour obtenir les paramètres c_1^i et c_2^i de chaque module i :

$$(c_1^i, c_2^i) = \underset{(c_1, c_2)}{\operatorname{argmin}} \sum_{k \geq n} \left(V_{CE}^{i,k} - \mathcal{M}(n_k, b^i, c_1, c_2) \right)^2 \quad (4.36)$$

où b^i est le paramètre de la conductivité électrique du module i recalculé avec les premières mesures.

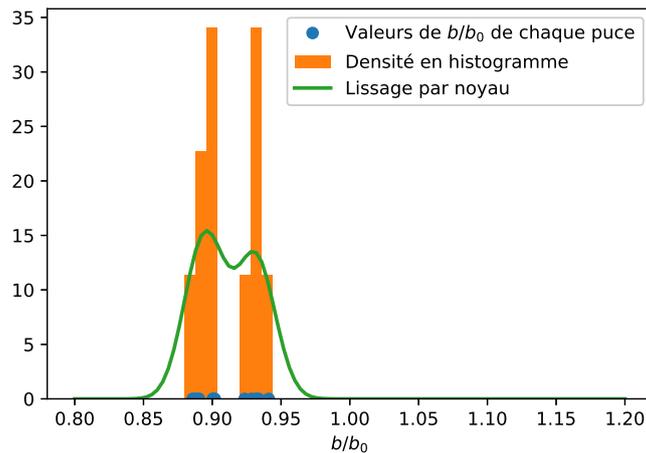


FIGURE 4.10 – Densité *a priori* de la conductivité électrique de la puce, obtenue par une méthode déterministe à l'aide de mesures expérimentales provenant de 11 puces.

Prédiction de la durée de vie restante

De la même manière qu'avec les mesures synthétiques, la valeur du paramètre b , portant sur la conductivité électrique de la puce est tout d'abord obtenue à l'aide des mesures initiales. Pour cela, la densité *a priori* de la Figure 4.10, obtenue avec les mesures des précédents modules, est affinée à l'aide des quatre premières mesures de V_{CE} du module. L'erreur de mesure est considérée suivre une densité gaussienne centrée, d'écart-type $2,2 \times 10^{-2}$. L'évolution de la densité de probabilité du paramètre b entre la densité *a priori* et la densité *a posteriori* est montrée sur la Figure 4.11. Le paramètre b est ensuite choisi par le principe du maximum *a posteriori*, conduisant à une valeur de $b/b_0 = 0,932$.

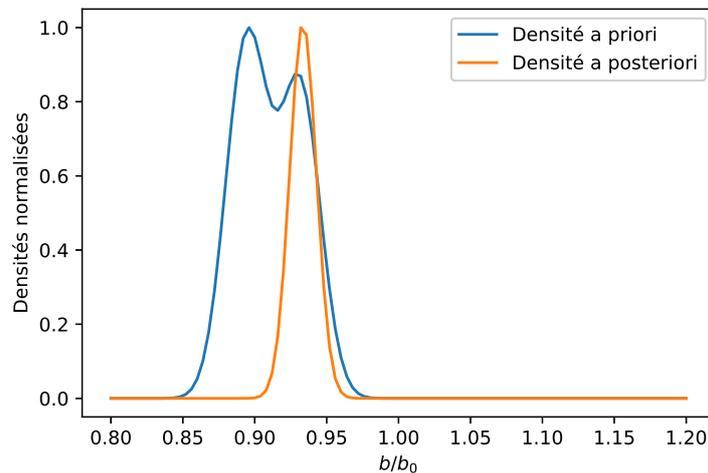


FIGURE 4.11 – Évolution de la densité de probabilité de la conductivité électrique après l'assimilation des 4 premières mesures du module. Les densités sont normalisées par leurs valeurs maximales.

Les mesures du module sont comparées sur la Figure 4.12 à l'évolution de V_{CE} prédite par le modèle numérique, pour la valeur recalée du paramètre b , et deux valeurs des paramètres c_1 et c_2 . Cette figure montre que le modèle, pour les bonnes valeurs de paramètres, est capable de décrire de manière acceptable l'augmentation de la tension V_{CE} .

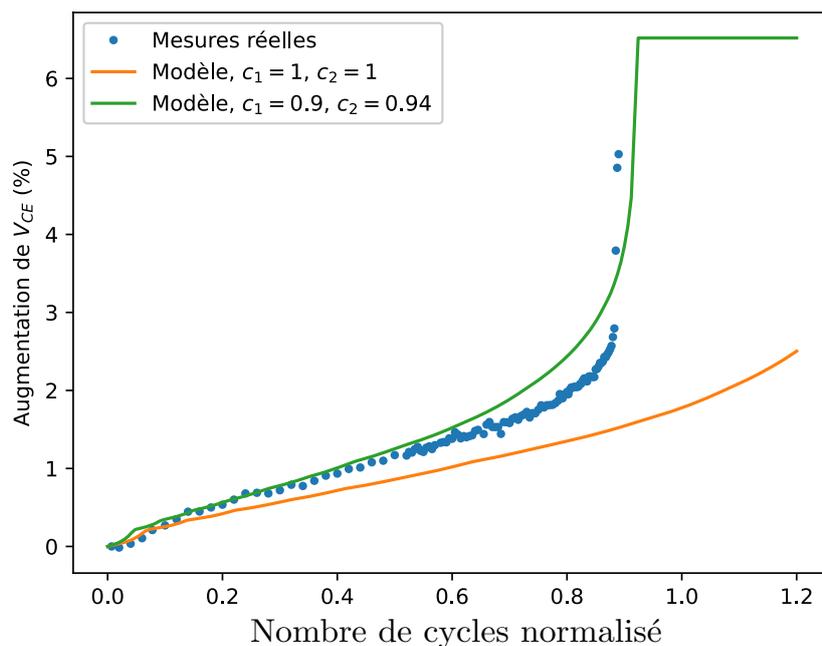


FIGURE 4.12 – Comparaison de l'évolution de V_{CE} mesurée sur un module au cours d'un test de vieillissement, et de deux évolutions prédites par le modèle numérique.

La Figure 4.13 présente la densité de probabilité de la durée de vie du module obtenue après la propagation de la densité *a posteriori* des paramètres c_1 et c_2 à travers le modèle de durée de vie. Cette densité est montrée après l'assimilation de la première mesure, et après l'assimilation de 15 mesures. Comme pour les mesures synthétiques, la densité est assez peu informative lors de la première assimilation, et s'affine avec l'assimilation des mesures suivantes. La durée de vie normalisée moyenne de la densité obtenue après l'assimilation de 15 mesures est d'environ 0,936, alors que la durée de vie mesurée du module est en réalité de 0,890. La durée de vie du module est ainsi légèrement surestimée. Cela provient du fait que l'identification des paramètres est difficile. En effet, plusieurs couples (c_1, c_2) de paramètres conduisent à un modèle concordant avec les premières mesures. Cela est visible sur la Figure 4.14a, qui présente la densité *a posteriori* des paramètres. Celle-ci comporte une bande dans laquelle les valeurs de c_1 et c_2 sont acceptables. La Figure 4.14b illustre bien la concordance du modèle pour différents couples de paramètres sur les premières mesures. En revanche, les paramètres conduisent à une durée de vie différente, ce qui explique l'erreur sur la durée de vie prédite par le modèle. La correction du biais de modèle pourrait améliorer la prédiction de la durée de vie du module.

Notons que l'assimilation d'une mesure et la propagation des incertitudes à travers le modèle de durée de vie requiert un temps de calcul d'environ quatre minutes. Le temps de calcul provient majoritairement de la minimisation de la fonction coût pour déterminer les coefficients des polynômes de la transformation. Ce temps est très inférieur au temps s'écoulant entre deux mesures. En effet, les premières mesures sont acquises tous les vingt mille cycles, puis tous les 2500 cycles. Un cycle durant 0,6s, les mesures sont donc acquises soit toutes les 3h20, soit toutes les 25 minutes. L'approche utilisée peut donc être aisément employée en temps réel lors de l'utilisation d'un module.

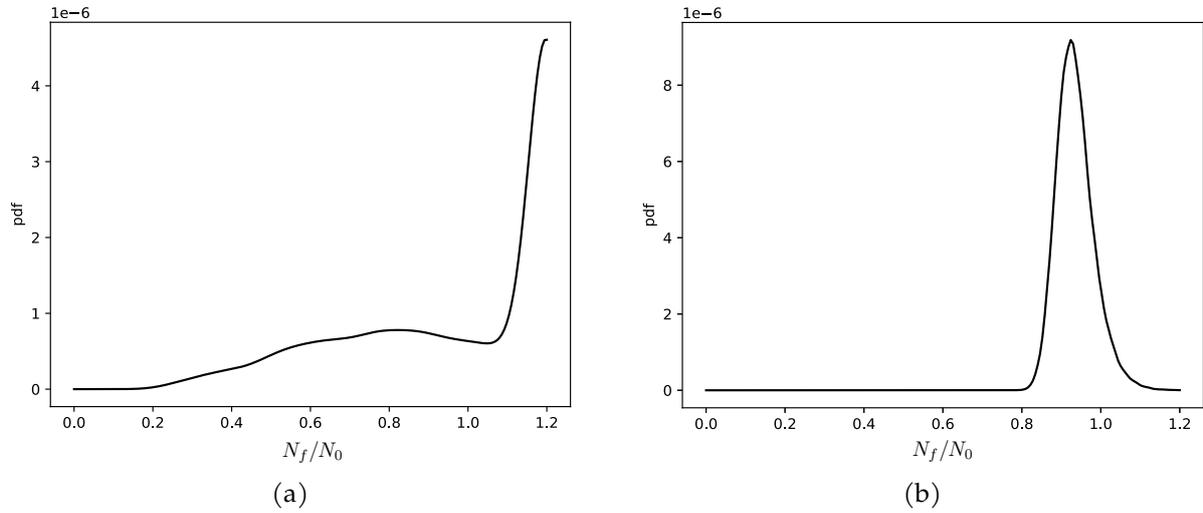
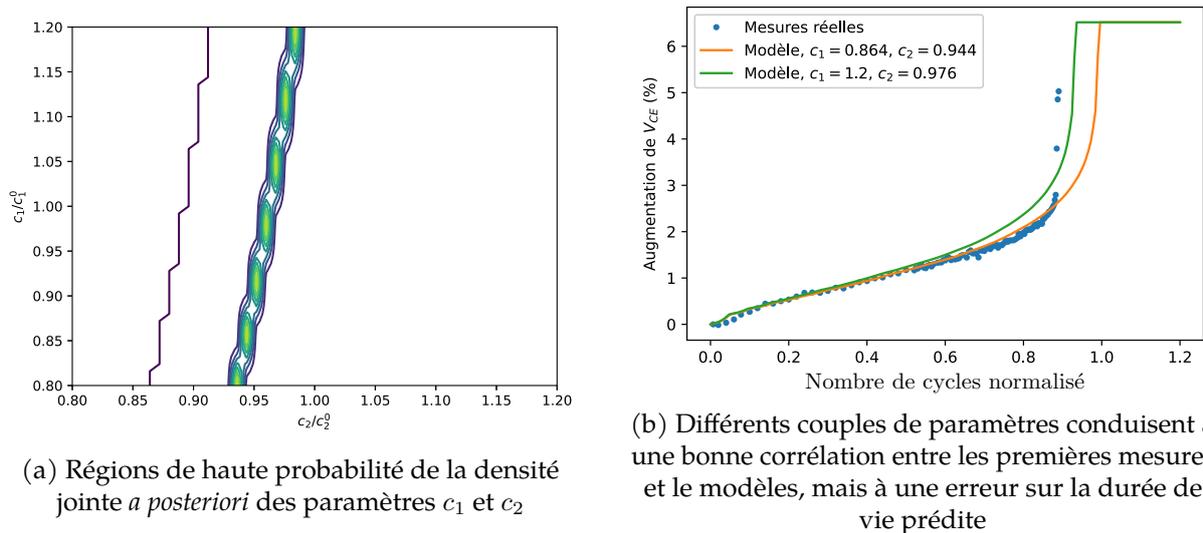


FIGURE 4.13 – Densités de probabilité de la durée de vie du module, obtenues (a) après l’assimilation de la première mesure, (b) après l’assimilation de 15 mesures, soit au bout d’un nombre de cycle normalisé de $N/N_0 = 0,3$.



(a) Régions de haute probabilité de la densité jointe *a posteriori* des paramètres c_1 et c_2

(b) Différents couples de paramètres conduisant à une bonne corrélation entre les premières mesures et le modèles, mais à une erreur sur la durée de vie prédite

FIGURE 4.14 – Difficultés d’identification des paramètres et de la prédiction de la durée de vie du module.

4.5 Conclusions sur la prédiction de durée de vie restante

Dans ce chapitre, une méthode a été proposée pour prédire la durée de vie restante d'un module au cours de son utilisation, en prenant compte des sources d'incertitude et de variabilité. La méthode repose sur l'inférence bayésienne, méthode stochastique de résolution de problèmes inverses. La méthode permet d'obtenir une densité de probabilité sur les paramètres du modèle de durée de vie, en comparant le modèle à des mesures issues du module. La densité de probabilité ainsi obtenue est ensuite échantillonnée par la méthode des *Transport Maps*. L'échantillon est propagé à travers le modèle numérique permettant d'obtenir une probabilité portant sur la durée de vie du module. L'approche a été dans un premier temps illustrée sur des mesures synthétiques. Elle a ensuite été employée sur des mesures réelles provenant d'un test de durée de vie d'un module. Du fait du faible temps de calcul nécessaire à l'assimilation d'une mesure, l'approche peut être mise en œuvre en temps réel sur un module en cours de son utilisation.

Conclusion générale et perspectives

Dans le cadre de la prédiction de durée de vie restante des modules électroniques de puissance, l'emploi des modèles basés sur la physique reste encore limité par leur coût de calcul important. Dans ce travail, une méthodologie a été proposée pour prédire la durée de vie restante d'un module au cours de son utilisation, à l'aide d'un modèle numérique basé sur la physique. L'approche utilisée repose sur deux piliers. Le premier est l'emploi d'une méthode de réduction de modèle, la Proper Generalized Decomposition (PGD), pour construire un modèle paramétrique à moindre coût. La PGD permet de contourner l'augmentation exponentielle du coût de calcul en fonction du nombre de paramètres, en cherchant une solution à variables séparées. Grâce à cette représentation de la solution, le nombre de problèmes éléments finis coûteux est proportionnel au nombre de modes, généralement faible, de la solution. Ce nombre est bien inférieur au nombre de problèmes éléments finis à résoudre lorsqu'une méthode directe de force brute est utilisée, qui est le nombre de points de la grille discrétisant le domaine temporel et paramétrique. Le second pilier de la méthode proposée est l'utilisation de l'inférence bayésienne. Cette méthode stochastique de résolution de problèmes inverses permet d'obtenir une densité de probabilité sur les paramètres du modèle, en comparant la prédiction de celui-ci à des mesures acquises au cours de l'utilisation du module.

Les premiers travaux ont tout d'abord porté sur la construction d'un modèle réduit d'un modèle simplifié du comportement thermo-mécanique d'un module de puissance. Ce modèle a permis d'employer la PGD pour la résolution du problème fortement couplé par la propagation d'une fissure au sein d'un joint de brasure. Deux paramètres ont été considérés dans ce modèle. L'un, géométrique, était l'épaisseur de la brasure, et l'autre, portant sur les conditions aux limites thermiques, était le coefficient de convection. Une méthode itérative a été utilisée afin de résoudre le problème couplé. Le modèle réduit a été implémenté au sein d'un code éléments finis Matlab, permettant de modifier aisément les opérateurs et seconds membres élémentaires. Dans ce premier modèle, la propagation de la fissure était modélisée par une loi cohésive dont les paramètres étaient fortement modifiés afin d'accélérer la propagation de la fissure. Plusieurs difficultés ont été rencontrées lors de la construction du modèle réduit. L'une d'elle provient du couplage fort considéré : la séparation entre les variables, qui sont le temps et les paramètres, de la fonction décrivant l'évolution temporelle de la longueur de fissure est délicate et peut introduire des instabilités numériques. La seconde montre les limites de la réduction de modèle pour les problèmes non-linéaires : l'évaluation du comportement est coûteuse en temps de calcul et doit s'effectuer sur chaque jeu de paramètres, réduisant fortement le gain obtenu par l'emploi des méthodes de réduction de modèle.

La deuxième partie de ces travaux s'est ensuite focalisée sur la construction d'un second modèle, plus représentatif d'un module réel. Ainsi, un modèle 3D a été considéré, et le comportement électrique a été ajouté. Dans ce modèle, l'endommagement est localisé au niveau des fils de connexion. Une méthode a été développée afin de tenir compte du grand nombre de cycles sur lesquels s'effectue la propagation de l'endommagement, et afin de s'affranchir des difficultés liées au couplage fort entre les physiques. Ainsi, le comportement électro-thermique est obtenu indépendamment du comportement mécanique, en paramétrant l'endommagement dans les problèmes. De cette manière, le problème électro-thermique permet d'obtenir le comportement électrique et thermique du module sur toute sa durée de vie. Le problème de mécanique permet, lui, d'obtenir l'évolution de l'endommagement en fonction du nombre de cycles. Ainsi, en combinant les deux modèles, les comportements électrique, thermique et mécanique sont obtenus en fonction du nombre de cycles vécus par le module. Afin de pouvoir résoudre rapidement le problème comprenant plusieurs millions de degrés de liberté, le logiciel commercial Ansys Mechanical APDL a été utilisé. Une stratégie numérique a été développée en conséquence, afin de pouvoir implémenter la méthode PGD de manière non-intrusive pour la résolution de problèmes couplés non-linéaires. Une méthode d'hyper-réduction de modèle a également été étudiée afin de diminuer le coût de l'évaluation des termes non-linéaires avec Ansys. Cependant, ce coût reste encore trop important et limitant pour pouvoir obtenir des résultats fiables. C'est pourquoi un second modèle du comportement mécanique a été développé. Ce modèle, linéaire, permet d'exploiter pleinement le gain de temps obtenu par l'emploi de la PGD.

Enfin, dans la dernière partie de ces travaux, le modèle réduit a été employé pour la prédiction de la durée de vie restante d'un module au cours de son utilisation. La méthode employée repose sur l'inférence bayésienne, qui exploite des mesures de la tension V_{CE} acquises au fur et à mesure de l'utilisation du module. En exploitant des données acquises sur des tests précédents de vieillissement de modules identiques, une connaissance *a priori* des paramètres peut être déduite. Cette connaissance est ensuite affinée séquentiellement à l'aide des mesures acquises en temps réel sur le module. Dans un premier temps, des mesures synthétiques ont été utilisées afin d'illustrer la méthode, puis des mesures réelles ont été exploitées. Après l'acquisition d'une mesure, la nouvelle connaissance *a posteriori* se traduit par une nouvelle densité de probabilité portant sur les paramètres. Cette densité, ne suivant pas de loi usuelle, est difficile à échantillonner. Dans ce travail, l'échantillonnage est effectué à l'aide de la méthode des *Transport Maps*, méthode alternative aux méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov (MCMC). Cette méthode, consistant à déterminer une transformation entre une densité de référence et la densité cible, permet de s'affranchir des difficultés des méthodes MCMC (phase de *burn in*, stagnation dans une région de la densité, ...). Elle permet également de se ramener à un problème déterministe portant sur les paramètres de la transformation, et de pouvoir contrôler l'erreur d'approximation commise via un estimateur robuste. L'échantillon de la densité de probabilité des paramètres est ensuite propagé à travers le modèle de durée de vie. De cette manière, une densité de durée de vie probabiliste est obtenue, permettant de prédire avec robustesse la durée de vie restante du module.

Perspectives

Plusieurs perspectives font suite à ces travaux. La première est l'amélioration du modèle non-linéaire de mécanique afin d'obtenir un modèle fiable pouvant être employé dans le cadre de la prédiction de la durée de vie restante du module. Les résultats obtenus pourront être comparés avec ceux du modèle linéaire. Comme le formalisme de l'inférence bayésienne le permet, il sera

ainsi possible de sélectionner le modèle le plus adéquat en comparant les valeurs des constantes de normalisation des densités *a posteriori*.

Dans la même perspective d'améliorer le modèle utilisé, une complexification progressive du modèle peut être envisagée. La méthode d'hyper-réduction introduite dans ces travaux est généralisable quelle que soit la non-linéarité du problème. Ainsi, il est possible de considérer un modèle mécanique plus proche des phénomènes physiques présents au sein du module, tel que la plasticité ou le fluage.

De plus, le modèle développé repose sur l'hypothèse que les six fils se dégradent à la même vitesse. Une extension à des vitesses de propagation différentes est également envisageable, en introduisant un paramètre d'endommagement par fil. Des précautions devront néanmoins être prises afin de ne pas introduire un trop grand nombre de paramètres. En effet, l'augmentation du nombre de paramètres induit une augmentation de la complexité de la mise en œuvre de la réduction de modèle, et engendre une augmentation importante du coût de calcul des problèmes non-linéaires comme le problème de mécanique.

Le modèle numérique peut également être amélioré afin de pouvoir tenir compte d'un chargement réel d'un module, en utilisant un algorithme de comptage de cycles, et en cumulant les endommagements liés à chaque amplitude cyclique.

Dans l'optique de réduction de temps de calcul, des travaux peuvent aussi être menés sur le développement de méthodes permettant de calculer efficacement le cycle limite thermique, sans devoir calculer le régime transitoire.

Enfin, les modèles réduits paramétrés pourraient aussi être utilisés pour une phase de conception des modules. Dans ce cadre, un modèle réduit peut être développé en considérant des paramètres de design ayant une influence sur la durée de vie. Les paramètres optimaux peuvent ensuite en être déduits, et ce de manière robuste, en considérant des incertitudes sur les paramètres.

Annexe A

Commandes APDL usuelles

L'aide à l'utilisation des commandes du langage de programmation d'ANSYS (*Ansys Parametric Design Language*, ou *APDL*) est disponible sur cette [page](#). Une documentation détaillée sur l'installation et l'utilisation de la bibliothèque python permettant de travailler en interaction avec une instance MAPDL, appelée *PyMapdl* est également disponible en ligne. Cette annexe vise à fournir une explication globale du fonctionnement d'Ansys Mechanical APDL et des commandes APDL et python les plus utiles à l'implémentation des codes développés dans ces travaux de thèse.

Le code de calcul Ansys Mechanical APDL est sous divisé en plusieurs processeurs, chacun pouvant permettre à l'utilisateur d'effectuer un type de commandes. Les principaux processeurs sont les suivants.

- Le processeur PREP7 permet à l'utilisateur de définir le problème. Il peut notamment définir la géométrie du problème, définir et effectuer le maillage, et définir le comportement des matériaux utilisés et leur propriétés.
- Le processeur SOLUTION permet de définir le type d'analyse effectuée, de définir les conditions aux limites et de résoudre le problème. Toutes les commandes liées à la résolution du problème (définition du type de solveur, définition des schémas d'intégration, des critères de convergence des problèmes non-linéaires,...) s'utilisent dans ce processeur.
- Le processeur POST1 permet à l'utilisateur de post-traiter la solution calculée.
- Enfin, le processeur AUX2 permet de manipuler et notamment de combiner les fichiers écrits par les différents processeurs de calculs utilisés lors d'un calcul parallèle, afin de pouvoir extraire par la suite les quantités d'intérêt.

Certaines commandes ne sont utilisables que dans un seul processeur, tandis que d'autres peuvent l'être dans plusieurs processeurs. C'est notamment le cas des commandes permettant de définir les conditions aux limites du problème, ou les propriétés matériaux, qui sont valides à la fois dans les processeur PREP7 et SOLU.

Par la suite, nous présentons une liste non exhaustive des commandes python les plus utiles de la librairie PyAnsys.

La ligne suivante importe la fonction permettant de créer une instance MAPDL :

```
from ansys.mapdl.core import launch_mapdl
```

En créant l'instance MAPDL, il est possible de spécifier l'emplacement d'Ansys Mechanical, le nombre de processeurs, ou encore l'emplacement où MAPDL se lance et où les fichiers sont écrits :

```
mapdl = launch_mapdl(exec_file=exec_file, nproc=nproc, run_loc=run_loc)
```

Pré-processing

Lit un fichier d'entrée :

```
mapdl.input(input_file)
```

Obtient la numérotation des nœuds (celle-ci peut comporter des sauts dûs au maillage de plusieurs pièces)

```
lst_nodes = mapdl.mesh.nnum
```

Sélectionne les éléments du solide numéro *matId* :

```
mapdl.esel('S', 'MAT', '', matId)
```

L'option 'S' permet d'effectuer une nouvelle sélection. L'option 'A' permet d'ajouter à une sélection des éléments, l'option 'R' d'en re-sélectionner un sous ensemble, et 'U' d'en dé-sélectionner.

Sélectionne les nœuds associés aux éléments sélectionnés :

```
mapdl.nslc()
```

Résolution

Entre dans le processeur SOLUTION

```
mapdl.slashsolu()
```

Spécifie l'option de stopper ou non la résolution après l'assemblage des matrices et vecteurs :

```
mapdl.wrfull(1) # 0 pour ne pas l'utiliser
```

Résout le problème

```
mapdl.solve()
```

Post-processing

Combine les fichiers écrits par les processeurs lors d'un calcul parallélisé :

```
mapdl.aux2()
mapdl.combine('full')
mapdl.finish()
```

Echanges entre Python et MAPDL

Importe dans Python depuis le fichier 'file.full' la matrice de rigidité (sous forme triangulaire supérieure) et le second membre :

```
mm = mapdl.math
K = mm.stiff(asarray=True)
F = mm.rhs(asarray=True)
```

En spécifiant `asarray=False`, les éléments sont importés à la place dans MAPDL.

Envoie la matrice sparse *K* sous forme triangulaire supérieure dans MAPDL, ainsi que le vecteur *F* :

```

from scipy import sparse
Kmapdl = mm.matrix(sparse.triu(K), triu=True)
mm.set_vec(F, name="Fmapdl")
Fmapdl = mm.vec(name="Fmapdl")

# Factorise la matrice K par MAPDL, et résout le système  $KU = F$  :

s = mm.factorize(Kmapdl)

U = s.solve(Fmapdl)
U = U.asarray() # importe dans Python

# Transforme un vecteur U rangé suivant la numérotation des degrés de libertés en un vecteur
Unod suivant l'ordre des nœuds, à l'aide de la matrice de passage M, telle que  $U = MU_{nod}$  et
 $U_{nod} = M^T U$  :

# Importe le mapping depuis le fichier "file.full" :
mapdl.run("*SMAT,M,D,IMPORT,FULL,file.full,USR2BCS")
# Initialise le vecteur ordonne par numero de noeud
Xusr = mapdl.math.vec(size=int(max(lst_nodes)), init="zeros")
mapdl.math.set_vec(U, name="Xbcs")
mapdl.math.vec(name="Xbcs")
mapdl.mult(m1='M', t1='TRANS', m2='Xbcs', m3=Xusr.id)
Unod = Xusr.asarray()

# Résout un problème fictif en imposant la valeur des degrés de liberté aux valeurs du vecteur
Unod, connu suivant l'ordre des nœuds :

# Definit un tableau a donner a MAPDL, contenant le numero des
noeuds et la valeur aux noeuds :
table = np.hstack((lst_node, Unod))

# Charge le tableau dans MAPDL :
mapdl.prep7()
mapdl.load_table('table', table, 'NODE')

# Impose tous les degres de liberte :
mapdl.d('ALL', 'VOLT', '%table%') # ('VOLT' peut aussi etre 'TEMP
', 'UX', 'UY', ... suivant la grandeur physique)
mapdl.finish()

# Resout le probleme fictif :
mapdl.slashsolu()
mapdl.solve()
mapdl.finish()

```


Liste des publications et actes de conférences

Publications dans des revues :

Schuler, L., Chamoin, L., Khatir, Z., Berkani, M., Ouhab, M., & Degrenne, N. (2022). "A Reduced Model Based on Proper Generalized Decomposition for the Fast Analysis of IGBT Power Modules Lifetime". *Journal of Electronic Packaging*, 144(3), 031013.

Schuler, L., Chamoin, L., Khatir, Z., Berkani, M., Ouhab, M., & Degrenne, N. (2022). "Iterative PGD model reduction for the strongly-coupled thermomechanical analysis of crack propagation in power electronic modules". *Computational Mechanics*, 70(2), 407-424.

Articles en préparation :

Schuler, L., Chamoin, L., Khatir, Z., Berkani, M., Ouhab, M. "Non-intrusive PGD model reduction for multiphysics power module problems solved with Ansys"

Schuler, L., Chamoin, L., Khatir, Z., Berkani, M., Ouhab, M. "Fast sequential data assimilation with model reduction and transport maps for the online prediction of RUL on IGBT power modules"

Actes de conférence :

Schuler, L., Chamoin, L., Khatir, Z., Bouarroudj, M., & Ouhab, M. (2023, April). "Non-intrusive electro-thermo-mechanical reduced model for diagnosis and prognostic on IGBT power modules". In *2023 24th International Conference on Thermal, Mechanical and Multi-Physics Simulation and Experiments in Microelectronics and Microsystems (EuroSimE)* (pp. 1-9). IEEE.

Schuler, L., Chamoin, L., Khatir, Z., Berkani, M., Ouhab, M., & Degrenne, N. (2022, May). "Construction d'un modèle réduit PGD pour l'étude de la fissuration thermo-mécanique des modules de puissance". In *15ème colloque national en calcul des structures*.

Schuler, L., Khatir, Z., Berkani, M., Ouhab, M., & Degrenne, N. (2022, March). "Model reduction for sensitivity analysis of solder joint fracture in power electronic modules". In *CIPS*

2022; 12th International Conference on Integrated Power Electronics Systems (pp. 1-6). VDE.

Présentations en conférences, séminaires et workshops, sans actes :

Schuler, L., Chamoin, L., Khatir, Z., Bouarroudj, M., & Ouhab, M. (2023, July) "Prédiction de la durée de vie restante d'un module de puissance par inférence bayésienne". *Journée thématique de la F2M Approches probabilistes en mécanique*.

Schuler, L., Chamoin, L., Khatir, Z., Bouarroudj, M., & Ouhab, M. (2023, June) Non-intrusive reduced order modeling for a coupled electro-thermo-mechanical problem. In *Conference on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering (COUPLED) 2023*.

Schuler, L., Chamoin, L., Khatir, Z., Bouarroudj, M., & Ouhab, M. (2022, Sept) "Non-intrusive multi-physics PGD-based reduced model for the modeling of power electronic modules". In *Model Reduction and Surrogate Modeling (MORE) 2022*.

Bibliographie

- AGATHOS, K., TATSIS, K. E., VLACHAS, K. et CHATZI, E.** (2022). "Parametric reduced order models for output-only vibration-based crack detection in shell structures". In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 162, p. 108051. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2021.108051> (cf. p. 42).
- AGUADO, J. V., CHINESTA, F., LEYGUE, A., CUETO, E. et HUERTA, A.** (2013). "DEIM-based PGD for parametric nonlinear model order reduction". In : *Centre Internacional de Mètodes Numèrics en Enginyeria (CIMNE)*, p. 29-34 (cf. p. 89).
- AGUADO, J. V., HUERTA, A., CHINESTA, F. et CUETO, E.** (2015). "Real-time monitoring of thermal processes by reduced-order modeling". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 102.5, p. 991-1017. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.4784>. eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.4784> (cf. p. 23).
- ALAMEDDIN, S., FAU, A., NÉRON, D., LADEVÈZE, P. et NACKENHORST, U.** (2019). "Toward Optimality of Proper Generalised Decomposition Bases". In : *Mathematical and Computational Applications* 24 (1), p. 30. DOI : [10.3390/mca24010030](https://doi.org/10.3390/mca24010030) (cf. p. 49, 50).
- ALFARO, I., GONZÁLEZ, D., ZLOTNIK, S., DÍEZ, P., CUETO, E. et CHINESTA, F.** (2015). "An error estimator for real-time simulators based on model order reduction". In : *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences* 2, p. 1-16 (cf. p. 27).
- ALGHASSI, A., PERINPANAYAGAM, S. et SAMIE, M.** (2015). "Stochastic RUL calculation enhanced with TDNN-based IGBT failure modeling". In : *IEEE Transactions on Reliability* 65.2, p. 558-573 (cf. p. 17).
- ALI, S. H., HEYDARZADEH, M., DUSMEZ, S., LI, X., KAMATH, A. S. et AKIN, B.** (2017). "Lifetime estimation of discrete IGBT devices based on Gaussian process". In : *IEEE Transactions on industry applications* 54.1, p. 395-403 (cf. p. 17).
- ALLERY, C., HAMDOUNI, A., RYCKELYNCK, D. et VERDON, N.** (2011). "A priori reduction method for solving the two-dimensional burgers' equations". In : *Applied Mathematics and Computation* 217.15, p. 6671-6679 (cf. p. 23).
- ALMEIDA, J. M. de** (2013). "A basis for bounding the errors of proper generalised decomposition solutions in solid mechanics". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 94.10, p. 961-984 (cf. p. 27).

- AMMAR, A., CHINESTA, F., DIEZ, P. et HUERTA, A. (2010). "An error estimator for separated representations of highly multidimensional models". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199.25, p. 1872-1880. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.02.012> (cf. p. 27).
- AMMAR, A., HUERTA, A., CHINESTA, F., CUETO, E. et LEYGUE, A. (2013). "Parametric solutions involving geometry : A step towards efficient shape optimization". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 268, p. 178-193. DOI : [10.1016/j.cma.2013.09.003](https://doi.org/10.1016/j.cma.2013.09.003) (cf. p. 27, 42).
- AMMAR, A., MOKDAD, B., CHINESTA, F. et KEUNINGS, R. (2006). "A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids". In : *Journal of non-Newtonian fluid Mechanics* 139.3, p. 153-176 (cf. p. 26).
- ANTONOPOULOS, A., D'ARCO, S., HERNES, M. et PEFTITSIS, D. (2020). "Limitations and guidelines for damage estimation based on lifetime models for high-power IGBTs in realistic application conditions". In : *IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics* 9.3, p. 3598-3609 (cf. p. 17).
- ASTRID, P. (2004). "Reduction of process simulation models : a proper orthogonal decomposition approach". *Electrical Engineering*. DOI : [10.6100/IR581728](https://doi.org/10.6100/IR581728) (cf. p. 90).
- AUDOUBE, C., VUYST, F. D. et NAIR, P. B. (2013). "Nonintrusive reduced-order modeling of parametrized time-dependent partial differential equations". In : *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 29 (5), p. 1587-1628. DOI : [10.1002/num.21768](https://doi.org/10.1002/num.21768) (cf. p. 60).
- BAPTISTA, R., ZAHM, O. et MARZOUK, Y. (2020). "An adaptive transport framework for joint and conditional density estimation". In : *arXiv preprint arXiv :2009.10303* 1 (cf. p. 108).
- BARENBLATT, G. I. (1962). "The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture". In : *Advances in applied mechanics* 7, p. 55-129 (cf. p. 38).
- BARRAULT, M., MADAY, Y., NGUYEN, N. C. et PATERA, A. T. (2004). "An 'empirical interpolation' method : application to efficient reduced-basis discretization of partial differential equations". In : *Comptes Rendus Mathematique* 339.9, p. 667-672 (cf. p. 88).
- BAYERER, R., HERRMANN, T. et LUTZ, J. (2008). "Model for Power Cycling lifetime of IGBT Modules-various factors influencing lifetime". In : p. 1-6 (cf. p. 14).
- BECK, J. L. (2010). "Bayesian system identification based on probability logic". In : *Structural Control and Health Monitoring* 17.7, p. 825-847 (cf. p. 103).
- BECK, J. L. et KATAFYGIOTIS, L. S. (1998). "Updating models and their uncertainties. I : Bayesian statistical framework". In : *Journal of Engineering Mechanics* 124.4, p. 455-461 (cf. p. 103).
- BĘCZKOWSKI, S., GHIMRE, P., VEGA, A. R. de, MUNK-NIELSEN, S., RANNESTAD, B. et THØGERSEN, P. (2013). "Online Vce measurement method for wear-out monitoring

- of high power IGBT modules". In : *2013 15th European Conference on Power Electronics and Applications (EPE)*. IEEE, p. 1-7 (cf. p. 12).
- BENABOU, L., SUN, Z. et DAHOO, P.-R.** (2013). "A thermo-mechanical cohesive zone model for solder joint lifetime prediction". In : *International Journal of Fatigue* 49, p. 18-30 (cf. p. 16).
- BENNING, M. et BURGER, M.** (2018). "Modern regularization methods for inverse problems". In : *Acta numerica* 27, p. 1-111 (cf. p. 103).
- BERINGHIER, M., GUEGUEN, M. et GRANDIDIER, J.-C.** (2010). "Solution of strongly coupled multiphysics problems using space-time separated representations—Application to thermoviscoelasticity". In : *Archives of Computational Methods in Engineering* 17, p. 393-401 (cf. p. 27).
- BONITHON, G. et NOUY, A.** (2012). "A priori tensor approximations for the numerical solution of high dimensional problems : alternative definitions". In : *28th GAMM-Seminar Leipzig on Analysis and Numerical Methods in Higher Dimensions, Leipzig, Allemagne* (cf. p. 26).
- BORZACCHIELLO, D., AGUADO, J. V. et CHINESTA, F.** (2019). "Non-intrusive sparse subspace learning for parametrized problems". In : *Archives of Computational Methods in Engineering* 26, p. 303-326 (cf. p. 60).
- BOUARROUDJ-BERKANI, M.** (2008). "Etude de la fatigue thermo-mécanique de modules électroniques de puissance en ambiance de températures élevées pour des applications de traction de véhicules électriques et hybrides". Ecole Normale Supérieure de Cachan (cf. p. 8, 10).
- BOUCARD, P.-A. et CHAMPANEY, L.** (2003). "A suitable computational strategy for the parametric analysis of problems with multiple contact". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 57.9, p. 1259-1281 (cf. p. 27).
- BOUCINHA, L., AMMAR, A., GRAVOUIL, A. et NOUY, A.** (2014). "Ideal minimal residual-based proper generalized decomposition for non-symmetric multi-field models—Application to transient elastodynamics in space-time domain". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 273, p. 56-76 (cf. p. 27).
- BOURDIN, B., FRANCFORT, G. A. et MARIGO, J.-J.** (2008). "The variational approach to fracture". In : *Journal of elasticity* 91, p. 5-148 (cf. p. 16).
- BRENNAN, M. C., BIGONI, D., ZAHM, O., SPANTINI, A. et MARZOUK, Y.** (2020). *Greedy inference with structure-exploiting lazy maps*. arXiv : 1906.00031 [stat.CO] (cf. p. 108).
- BROOKS, S., GELMAN, A., JONES, G. et MENG, X.-L.** (2011). *Handbook of markov chain monte carlo*. CRC press (cf. p. 106).
- CALVETTI, D. et SOMERSALO, E.** (2018). "Inverse problems : From regularization to Bayesian inference". In : *Wiley Interdisciplinary Reviews : Computational Statistics* 10.3, e1427 (cf. p. 103).

- CAMANHO, P. P., DAVILA, C. G. et MOURA, M. F. D.** (2003). "Numerical Simulation of Mixed-mode Progressive Delamination in Composite Materials". In : *Journal of Composite Materials* 37, p. 1415-1438. DOI : [10.1177/002199803034505](https://doi.org/10.1177/002199803034505) (cf. p. 38).
- CAPALDO, M., GUIDAULT, P.-A., NÉRON, D. et LADEVÈZE, P.** (2017). "The Reference Point Method, a "hyperreduction" technique : application to PGD-based nonlinear model reduction". In : *computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 322, p. 483-514 (cf. p. 90).
- CASENAVE, F., ERN, A. et LELIEVRE, T.** (2015). "A nonintrusive reduced basis method applied to aeroacoustic simulations". In : *Advances in Computational Mathematics* 41, p. 961-986 (cf. p. 60).
- CAVALIERE, F., ZLOTNIK, S., SEVILLA, R., LARRÁYOZ, X. et DÍEZ, P.** (2021). "Nonintrusive reduced order model for parametric solutions of inertia relief problems". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 122 (16), p. 4270-4291. DOI : [10.1002/nme.6702](https://doi.org/10.1002/nme.6702) (cf. p. 42, 60).
- CAZES, F.** (2010). "Construction et implémentation de lois cohésives extrinsèques". INSA-Lyon, LaMCoS (cf. p. 38).
- CELAYA, J. R., SAXENA, A., SAHA, S., GOEBEL, K. F. et ABHINAVSAXENA, nasagov** (2011). "Prognostics of Power MOSFETs under Thermal Stress Accelerated Aging using Data-Driven and Model-Based Methodologies". In : (cf. p. 17).
- CHAMOIN, L. et THAI, H. P.** (2019). "Certified real-time shape optimization using isogeometric analysis, PGD model reduction, and a posteriori error estimation". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 119 (3), p. 151-176. DOI : [10.1002/nme.6045](https://doi.org/10.1002/nme.6045) (cf. p. 27, 42).
- CHAMOIN, L., ALLIER, P. E. et MARCHAND, B.** (2016). "Synergies between the constitutive relation error concept and PGD model reduction for simplified V&V procedures". In : *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences* 3 (1). DOI : [10.1186/s40323-016-0073-9](https://doi.org/10.1186/s40323-016-0073-9) (cf. p. 27, 42).
- CHAMOIN, L. et LADEVÈZE, P.** (2012). "Robust control of PGD-based numerical simulations". In : *European Journal of Computational Mechanics* 21.3-6, p. 195-207 (cf. p. 27).
- CHAMOIN, L., PLED, F., ALLIER, P. E. et LADEVÈZE, P.** (2017). "A posteriori error estimation and adaptive strategy for PGD model reduction applied to parametrized linear parabolic problems". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 327, p. 118-146. DOI : [10.1016/j.cma.2017.08.047](https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.08.047) (cf. p. 27).
- CHANDRA, N., LI, H., SHET, C. et GHONEM, H.** (2002). "Some issues in the application of cohesive zone models for metal-ceramic interfaces". In : *International Journal of Solids and Structures* 39.10, p. 2827-2855 (cf. p. 38).
- CHATTERJEE, A.** (2000). "An introduction to the proper orthogonal decomposition". In : *Current science*, p. 808-817 (cf. p. 24).

- CHATURANTABUT, S. et SORENSEN, D. C.** (2010). "Nonlinear model reduction via discrete empirical interpolation". In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 32.5, p. 2737-2764 (cf. p. 88, 89).
- CHEVREUIL, M. et NOUY, A.** (2011). "Proper Generalized Decomposition for the dynamic analysis of uncertain structures". In : *EURODYN 2011-8th International Conference on Structural Dynamics* (cf. p. 24, 27).
- (2012). "Model order reduction based on proper generalized decomposition for the propagation of uncertainties in structural dynamics". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 89.2, p. 241-268 (cf. p. 24, 27).
- CHIB, S. et GREENBERG, E.** (1995). "Understanding the metropolis-hastings algorithm". In : *The american statistician* 49.4, p. 327-335 (cf. p. 106).
- CHINESTA, F., LEYGUE, A., BORDEU, F., AGUADO, J., CUETO, E., GONZALEZ, D., ALFARO, I., AMMAR, A. et HUERTA, A.** (2013a). "PGD-based computational vademecum for efficient design, optimization and control". In : *Archives of Computational Methods in Engineering* 20 (1), p. 31-59 (cf. p. 26, 27, 42).
- CHINESTA, F., AMMAR, A. et CUETO, E.** (2010). "Recent advances and new challenges in the use of the proper generalized decomposition for solving multidimensional models". In : *Archives of Computational methods in Engineering* 17.4, p. 327-350 (cf. p. 27).
- CHINESTA, F., KEUNINGS, R. et LEYGUE, A.** (2013b). *The Proper Generalized Decomposition for Advanced Numerical Simulations : a primer*. Springer Science & Business Media (cf. p. 26).
- CHINESTA, F., LADEVEZE, P. et CUETO, E.** (2011). "A Short Review on Model Order Reduction Based on Proper Generalized Decomposition". In : *Archives of Computational Methods in Engineering* 18 (4), p. 395-404. DOI : [10.1007/s11831-011-9064-7](https://doi.org/10.1007/s11831-011-9064-7) (cf. p. 26).
- CIAPPA, M.** (2002). "Selected failure mechanisms of modern power modules". In : *Microelectronics reliability* 42.4-5, p. 653-667 (cf. p. 9-12).
- CIAPPA, M. et MALBERTI, P.** (1996). "Plastic-strain of aluminium interconnections during pulsed operation of IGBT multichip modules". In : *Quality and reliability engineering international* 12, p. 297-303 (cf. p. 11).
- CODE_ASTER** (2014). *Lois de comportement cohésives : CZM_xxx_xxx et pilotage du chargement*. "https://code-aster.org/V2/doc/v13/fr/man_r/r7/r7.02.11.pdf" (cf. p. 38).
- COURARD, A., NÉRON, D., LADEVÈZE, P. et BALLERE, L.** (2016). "Integration of PGD-virtual charts into an engineering design process". In : *Computational Mechanics* 57 (4), p. 637-651. DOI : [10.1007/s00466-015-1246-y](https://doi.org/10.1007/s00466-015-1246-y) (cf. p. 60, 68).
- CUI, T. et DOLGOV, S.** (2022). "Deep composition of Tensor-Trains using squared inverse Rosenblatt transports". In : *Foundations of Computational Mathematics* 22.6, p. 1863-1922 (cf. p. 109).

- CUI, T., DOLGOV, S. et ZAHM, O.** (2023). "Scalable conditional deep inverse Rosenblatt transports using tensor trains and gradient-based dimension reduction". In : *Journal of Computational Physics* 485, p. 112103 (cf. p. 108).
- DA SILVA, F.** (2015). "Méthodologies de réduction de modèles multiphysiques pour la conception et la commande d'une chaîne de traction électrique". Université Paris-Saclay (cf. p. 18).
- DAGHIA, F., MIRANDA, S. de, UBERTINI, F. et VIOLA, E.** (2007). "Estimation of elastic constants of thick laminated plates within a Bayesian framework". In : *Composite Structures* 80.3, p. 461-473 (cf. p. 103).
- DARVEAUX, R.** (2002). "Effect of Simulation Methodology on Solder Joint Crack Growth Correlation". In : *Journal of Electronic Packaging* 124, p. 147-154 (cf. p. 15).
- DEGRENNÉ, N., DELAMEA, R. et MOLLOV, S.** (2020). "Electro-thermal modelling and Tj estimation of wire-bonded IGBT power module with multi-chip switches subject to wire-bond lift-off". In : *AIMS Electronics and Electrical Engineering* 4.2, p. 154-168 (cf. p. 13).
- DEGRENNÉ, N., EWANCHUK, J., DAVID, E., BOLDYRJEV, R. et MOLLOV, S.** (2015). "A Review of Prognostics and Health Management for Power Semiconductor Modules". In : (cf. p. 17, 18).
- DEGRENNÉ, N. et MOLLOV, S.** (2018). "Experimentally-validated models of on-state voltage for remaining useful life estimation and design for reliability of power modules". In : *CIPS 2018 ; 10th International Conference on Integrated Power Electronics Systems*. VDE, p. 1-6 (cf. p. 18).
- DÉPLANQUE, S., NÜCHTER, W., WUNDERLE, B., SCHACHT, R. et MICHEL, B.** (2006). "Lifetime Prediction of SnPb and SnAgCu Solder Joints of Chips on Copper Substrate Based on Crack Propagation FE-Analysis". In : p. 1-8 (cf. p. 16).
- DÉPLANQUE, S.** (2007). "Lifetime prediction for solder die-attach in power applications by means of primary and secondary creep" (cf. p. 16).
- DETZEL, T., GLAVANOVICS, M. et WEBER, K.** (2004). "Analysis of wire bond and metallization degradation mechanisms in DMOS power transistors stressed under thermal overload conditions." In : *Microelectron. Reliab.* 44.9-11, p. 1485-1490 (cf. p. 10).
- DÍEZ, P., ZLOTNIK, S., GARCÍA-GONZÁLEZ, A. et HUERTA, A.** (2020). "Encapsulated PGD Algebraic Toolbox Operating with High-Dimensional Data". In : *Archives of Computational Methods in Engineering* 27.4, p. 1321-1336. DOI : [10.1007/s11831-019-09378-0](https://doi.org/10.1007/s11831-019-09378-0) (cf. p. 26, 48).
- DÍEZ, P., ZLOTNIK, S., GARCÍA-GONZÁLEZ, A. et HUERTA, A.** (2018). "Algebraic PGD for tensor separation and compression : An algorithmic approach". In : *Comptes Rendus - Mécanique* 346 (7), p. 501-514. DOI : [10.1016/j.crme.2018.04.011](https://doi.org/10.1016/j.crme.2018.04.011) (cf. p. 26, 48).
- DÍEZ, P., ZLOTNIK, S., MUIXI, A. et GARCIA-GONZÁLEZ, A.** (2023). "Reduced-Order Models in Bayesian solvers for inverse problems". In : *10th edition of the International Conference*

- on *Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering (COUPLED PROBLEMS 2023)*. ECCOMAS (cf. p. 103).
- DORNIC, N., IBRAHIM, A., KHATIR, Z., TRAN, S. H., OUSTEN, J. P., EWANCHUK, J. et MOLLOV, S. (2018). "Analysis of the degradation mechanisms occurring in the topside interconnections of IGBT power devices during power cycling". In : *Microelectronics Reliability* 88-90, p. 462-469. DOI : [10.1016/j.microrel.2018.07.041](https://doi.org/10.1016/j.microrel.2018.07.041) (cf. p. 12).
- DORNIC, N. (2019). "Elaboration et comparaison de deux modèles de durée de vie des fils d'interconnexion des modules de puissance, l'un basé sur les déformations et l'autre sur les dégradations" (cf. p. 16).
- DORNIC, N., KHATIR, Z., TRAN, S. H., IBRAHIM, A., LALLEMAND, R., OUSTEN, J. P., EWANCHUK, J. et MOLLOV, S. V. (2019). "Stress-Based Model for Lifetime Estimation of Bond Wire Contacts Using Power Cycling Tests and Finite-Element Modeling". In : *IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics* 7 (3), p. 1659-1667. DOI : [10.1109/JESTPE.2019.2918941](https://doi.org/10.1109/JESTPE.2019.2918941) (cf. p. 16).
- DOWNING, S. D. et SOCIE, D. (1982). "Simple rainflow counting algorithms". In : *International journal of fatigue* 4.1, p. 31-40 (cf. p. 16).
- DROHMANN, M., HAASDONK, B. et OHLBERGER, M. (2012). "Reduced basis approximation for nonlinear parametrized evolution equations based on empirical operator interpolation". In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 34.2, A937-A969 (cf. p. 25).
- DUDEK, R., DÖRING, R., RZEPKA, S., EHRHARDT, C., GÜNTHER, M. et HAAG, M. (2015). "Electro-thermo-mechanical analyses on silver sintered IGBT-module reliability in power cycling". In : *2015 16th International Conference on Thermal, Mechanical and Multi-Physics Simulation and Experiments in Microelectronics and Microsystems*, p. 1-8. DOI : [10.1109/EuroSimE.2015.7103139](https://doi.org/10.1109/EuroSimE.2015.7103139) (cf. p. 16).
- DUDEK, R., DÖRING, R., OTTO, A., RZEPKA, S., STEGMEIER, S., KIEFL, S., LUNDING, A. et EISELE, R. (2017). "FE analyses and power cycling tests on the thermo-mechanical performance of silver sintered power semiconductors with different interconnection technologies". In : *2017 16th IEEE Intersociety Conference on Thermal and Thermomechanical Phenomena in Electronic Systems (ITherm)*. IEEE, p. 1145-1152 (cf. p. 16).
- EL MOSELHY, T. A. et MARZOUK, Y. M. (2012). "Bayesian inference with optimal maps". In : *Journal of Computational Physics* 231.23, p. 7815-7850 (cf. p. 106, 109).
- ELICES, M., GUINEA, G., GOMEZ, J. et PLANAS, J. (2002). "The cohesive zone model : advantages, limitations and challenges". In : *Engineering fracture mechanics* 69.2, p. 137-163 (cf. p. 16).
- ENGL, H. W., HANKE, M. et NEUBAUER, A. (1996). *Regularization of inverse problems*. T. 375. Springer Science & Business Media (cf. p. 103).
- FALCK, J., ANDRESEN, M. et LISERRE, M. (2015). "Active thermal control of IGBT power electronic converters". In : *IECON 2015-41st Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*. IEEE, p. 000001-000006 (cf. p. 17).

- FALCÓ, A. et NOUY, A.** (2011). "A Proper Generalized Decomposition for the solution of elliptic problems in abstract form by using a functional Eckart–Young approach". In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 376.2, p. 469-480. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.12.003> (cf. p. 34).
- FAROKHZAD, B., TÜRKES, P., WOLFGANG, E. et GOSER, K.** (1996). "Reliability indicators for lift-off of bond wires in IGBT power-modules". In : *Microelectronics reliability* 36.11-12, p. 1863-1866 (cf. p. 12).
- FELIPPA, C. A., PARK, K.-C. et FARHAT, C.** (2001). "Partitioned analysis of coupled mechanical systems". In : *Computer methods in applied mechanics and engineering* 190.24-25, p. 3247-3270 (cf. p. 46).
- FRIES, T.-P. et BELYTSCHKO, T.** (2010). "The extended/generalized finite element method : an overview of the method and its applications". In : *International journal for numerical methods in engineering* 84.3, p. 253-304 (cf. p. 16).
- GARCÍA-BLANCO, R., BORZACCHIELLO, D., CHINESTA, F. et DIEZ, P.** (2017). "Monitoring a PGD solver for parametric power flow problems with goal-oriented error assessment". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 111.6, p. 529-552. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.5470>. eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.5470> (cf. p. 27).
- GARIKAPATI, H., ZLOTNIK, S., DÍEZ, P., VERHOOSSEL, C. V. et BRUMMELEN, E. H. van** (2020). "A Proper Generalized Decomposition (PGD) approach to crack propagation in brittle materials : with application to random field material properties". In : *Computational Mechanics* 65, p. 451-473 (cf. p. 27, 42).
- GEYER, C. J.** (1992). "Practical markov chain monte carlo". In : *Statistical science*, p. 473-483 (cf. p. 106).
- GHAVAMIAN, F., TISO, P. et SIMONE, A.** (2017). "POD–DEIM model order reduction for strain softening viscoplasticity". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 317, p. 458-479. DOI : [10.1016/j.cma.2016.11.025](https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.11.025) (cf. p. 89).
- GHIMIRE, P., BĘCZKOWSKI, S., MUNK-NIELSEN, S., RANNESTAD, B. et THØGERSEN, P. B.** (2013). "A review on real time physical measurement techniques and their attempt to predict wear-out status of IGBT". In : *2013 15th European Conference on Power Electronics and Applications (EPE)*. IEEE, p. 1-10 (cf. p. 13).
- GHNATIOS, C., MASSON, F., HUERTA, A., LEYGUE, A., CUETO, E. et CHINESTA, F.** (2012). "Proper generalized decomposition based dynamic data-driven control of thermal processes". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 213, p. 29-41 (cf. p. 23).
- GHNATIOS, C., CUETO, E., FALCO, A., DUVAL, J.-L. et CHINESTA, F.** (2021). "Spurious-free interpolations for non-intrusive PGD-based parametric solutions : application to composites forming processes". In : *International Journal of material forming* 14, p. 83-95 (cf. p. 42).
- GIACOMA, A., DUREISSEIX, D., GRAVOUIL, A. et ROCHETTE, M.** (2015). "Toward an optimal a priori reduced basis strategy for frictional contact problems with LATIN solver".

- In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 283, p. 1357-1381. DOI : [10.1016/j.cma.2014.09.005](https://doi.org/10.1016/j.cma.2014.09.005) (cf. p. 50).
- GILKS, W. R., RICHARDSON, S. et SPIEGELHALTER, D.** (1995). *Markov chain Monte Carlo in practice*. CRC press (cf. p. 106).
- GLOWINSKI, R., PAN, T.-W. et PERIAUX, J.** (1994). "A fictitious domain method for Dirichlet problem and applications". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 111.3, p. 283-303. DOI : [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(94\)90135-X](https://doi.org/10.1016/0045-7825(94)90135-X) (cf. p. 42).
- GOGU, C., YIN, W., HAFTKA, R., IFJU, P., MOLIMARD, J., LE RICHE, R. et VAUTRIN, A.** (2013). "Bayesian identification of elastic constants in multi-directional laminate from moiré interferometry displacement fields". In : *Experimental Mechanics* 53, p. 635-648 (cf. p. 103).
- GOLUB, G. H., HANSEN, P. C. et O'LEARY, D. P.** (1999). "Tikhonov regularization and total least squares". In : *SIAM journal on matrix analysis and applications* 21.1, p. 185-194 (cf. p. 103).
- GONZÁLEZ, D., BADÍAS, A., ALFARO, I., CHINESTA, F. et CUETO, E.** (2017). "Model order reduction for real-time data assimilation through Extended Kalman Filters". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 326, p. 679-693. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.08.041> (cf. p. 24).
- GRAMS, A., JAESCHKE, J., WITTLER, O., FABIAN, B., THOMAS, S. et SCHNEIDER-RAMELOW, M.** (2020). "FEM-based combined degradation model of wire bond and die-attach for lifetime estimation of power electronics". In : *Microelectronics Reliability* 111, p. 113683 (cf. p. 16).
- GRAMS, A., PREWITZ, T., WITTLER, O., KRIPFGANS, J., SCHMITZ, S., MIDDENDORF, A., MÜLLER, W. H. et LANG, K.-D.** (2013). "Simulation of an aluminum thick wire bond fatigue crack by means of the cohesive zone method". In : *2013 14th International Conference on Thermal, Mechanical and Multi-Physics Simulation and Experiments in Microelectronics and Microsystems (EuroSimE)*. IEEE, p. 1-8 (cf. p. 93).
- GREPL, M. A., NGUYEN, N. C., VEROY, K., PATERA, A. T. et LIU, G. R.** (2007). "Certified rapid solution of partial differential equations for real-time parameter estimation and optimization". In : *Real-time PDE-constrained optimization*. SIAM, p. 199-216 (cf. p. 23).
- GUNZBURGER, M. D., PETERSON, J. S. et SHADID, J. N.** (2007). "Reduced-order modeling of time-dependent PDEs with multiple parameters in the boundary data". In : *Computer methods in applied mechanics and engineering* 196.4-6, p. 1030-1047 (cf. p. 24).
- GUTH, K. et MAHNKE, P.** (2006). "Improving the thermal reliability of large area solder joints in IGBT power modules". In : *4th International Conference on Integrated Power Systems*. VDE, p. 1-6 (cf. p. 12).
- HALOUANI, A., SHQAIR, M., KHATIR, Z., IBRAHIM, A. et OUHAB, M.** (2022). "Finite elements analyses of early-stage crack propagation in aluminum wire bonds due to power cycling". In : *Microelectronics Reliability* 138, p. 114610. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.microrel.2022.114610> (cf. p. 16).

- HAMMOND, J. K., CHAKIR, R., BOURQUIN, F. et MADAY, Y.** (2019). "PBDW : A non-intrusive Reduced Basis Data Assimilation method and its application to an urban dispersion modeling framework". In : *Applied Mathematical Modelling* 76, p. 1-25 (cf. p. 60).
- HAQUE, M. S., CHOI, S. et BAEK, J.** (2017). "Auxiliary particle filtering-based estimation of remaining useful life of IGBT". In : *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 65.3, p. 2693-2703 (cf. p. 17).
- HASTINGS, W. K.** (1970). "Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications". In : (cf. p. 106).
- HELD, M., JACOB, P., NICOLETTI, G., SCACCO, P. et POECH, M.-H.** (1997). "Fast power cycling test of IGBT modules in traction application". In : *Proceedings of second international conference on power electronics and drive systems*. T. 1. IEEE, p. 425-430 (cf. p. 12, 14).
- HENNERON, T. et CLENET, S.** (2016). "Application of the PGD and DEIM to Solve a 3-D Non-Linear Magnetostatic Problem Coupled with the Circuit Equations". In : *IEEE Transactions on Magnetics* 52 (3), p. 1-4. DOI : [10.1109/TMAG.2015.2487539](https://doi.org/10.1109/TMAG.2015.2487539) (cf. p. 27, 89).
- HENNERON, T. et CLÉNET, S.** (2018). "Application of the Proper Generalized Decomposition to Solve Magnetolectric Problem". In : *IEEE Transactions on Magnetics* 54.3, p. 1-4. DOI : [10.1109/TMAG.2017.2762702](https://doi.org/10.1109/TMAG.2017.2762702) (cf. p. 27).
- (2023). "Separated representation of the finite element solution of nonlinear magnetostatic problem based on non-intrusive Proper Generalized Decomposition". In : *Finite Elements in Analysis and Design* 223, p. 103972. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.finel.2023.103972> (cf. p. 60).
- HESTHAVEN, J. S., PAGLIANTINI, C. et ROZZA, G.** (2022). "Reduced basis methods for time-dependent problems". In : *Acta Numerica* 31, p. 265-345 (cf. p. 25).
- HEYBERGER, C., BOUCARD, P.-A. et NÉRON, D.** (2012). "Multiparametric analysis within the proper generalized decomposition framework". In : *Computational Mechanics* 49.3, p. 277-289 (cf. p. 27).
- HUANG, H. et MAWBY, P.** (2012). "A lifetime estimation technique for voltage source inverters". In : *IEEE Transactions on Power Electronics* 28.8, p. 4113-4119 (cf. p. 13).
- HUANG, Y., JIA, Y., LUO, Y., XIAO, F. et LIU, B.** (2019). "Lifting-off of Al bonding wires in IGBT modules under power cycling : failure mechanism and lifetime model". In : *IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics* 8.3, p. 3162-3173 (cf. p. 16).
- HUGHES, T. J., COTTRELL, J. A. et BAZILEVS, Y.** (2005). "Isogeometric analysis : CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement". In : *Computer methods in applied mechanics and engineering* 194.39-41, p. 4135-4195 (cf. p. 42).
- IBÁÑEZ, R., ABISSET-CHAVANNE, E., AMMAR, A., GONZÁLEZ, D., CUETO, E., HUERTA, A., DUVAL, J. L., CHINESTA, F. et al.** (2018). "A multidimensional data-driven sparse iden-

- tification technique : the sparse proper generalized decomposition". In : *Complexity* 2018 (cf. p. 60).
- JACOB, P., HELD, M., SCACCO, P. et WU, W. (1995). "Reliability testing and analysis of IGBT power semiconductor modules". In : *IEE Colloquium on IGBT Propulsion Drives*. IET, p. 4-1 (cf. p. 12).
- JENSEN, H., VERGARA, C., PAPADIMITRIOU, C. et MILLAS, E. (2013). "The use of updated robust reliability measures in stochastic dynamical systems". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 267, p. 293-317 (cf. p. 103).
- JOLLIFFE, I. T. et CADIMA, J. (2016). "Principal component analysis : a review and recent developments". In : *Philosophical transactions of the royal society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 374.2065, p. 20150202 (cf. p. 24).
- JUNGHAEDEL, M. et SCHEUERMANN, U. (2017). "Impact of load pulse duration on power cycling lifetime of chip interconnection solder joints". In : *Microelectronics reliability* 76, p. 480-484 (cf. p. 15).
- KABIR, A., BAILEY, C., LU, H. et STOYANOV, S. (2012). "A review of data-driven prognostics in power electronics". In : *2012 35th International Spring Seminar on Electronics Technology*. IEEE, p. 189-192 (cf. p. 17).
- KADEETHUM, T., BALLARIN, F. et BOUKLAS, N. (2021). "Non-intrusive reduced order modeling of poroelasticity of heterogeneous media based on a discontinuous Galerkin approximation". In : *arXiv preprint arXiv :2101.11810* (cf. p. 60).
- KARAMIZADEH, S., ABDULLAH, S. M., MANAF, A. A., ZAMANI, M. et HOOMAN, A. (2013). "An overview of principal component analysis". In : *Journal of Signal and Information Processing* 4.3B, p. 173 (cf. p. 24).
- KERGRENE, K., CHAMOIN, L., LAFOREST, M. et PRUDHOMME, S. (2019). "On a Goal-Oriented Version of the Proper Generalized Decomposition Method". In : *Journal of Scientific Computing* 81 (1), p. 92-111. DOI : [10.1007/s10915-019-00918-1](https://doi.org/10.1007/s10915-019-00918-1) (cf. p. 27).
- KHATIR, Z. et LEFEBVRE, S. (2000). "Thermal analysis of high power IGBT modules". In : *12th International Symposium on Power Semiconductor Devices & ICs. Proceedings (Cat. No. 00CH37094)*. IEEE, p. 271-274 (cf. p. 12).
- KOVAČEVIĆ, I., DROFENIK, U. et KOLAR, J. W. (2010). "New physical model for lifetime estimation of power modules". In : *The 2010 International Power Electronics Conference-ECCE ASIA*. IEEE, p. 2106-2114 (cf. p. 15).
- KOVAČEVIĆ-BADSTUEBNER, I. F., KOLAR, J. W. et SCHILLING, U. (2015). *Modelling for the Lifetime Prediction of Power Semiconductor Modules* (cf. p. 14).
- KRIGE, D. G. (1951). "A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand". In : *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy* 52.6, p. 119-139 (cf. p. 26).
- KRIMM, A., CASPER, T., SCHÖPS, S., GERSEM, H. D. et CHAMOIN, L. (2019). "Proper Generalized Decomposition of Parameterized Electrothermal Problems Discretized

- by the Finite Integration Technique". In : *IEEE Transactions on Magnetics* 55 (6), p. 1-4. DOI : [10.1109/TMAG.2019.2907223](https://doi.org/10.1109/TMAG.2019.2907223) (cf. p. 27).
- KUNISCH, K. et VOLKWEIN, S. (2001). "Galerkin proper orthogonal decomposition methods for parabolic problems". In : *Numerische mathematik* 90, p. 117-148 (cf. p. 24).
- LADEVÈZE, P. (1989). "La méthode à grand incrément de temps pour l'analyse de structures à comportement non linéaire décrit par variables internes". In : *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 2, Mécanique, Physique, Chimie, Sciences de l'univers, Sciences de la Terre* 309.11, p. 1095-1099 (cf. p. 26, 27).
- LADEVÈZE, P. (1997). *A computational technique for the integrals over the time-space domain in connection with the LATIN method*. Rapp. tech. Tech. Rep. 193, LMT-Cachan (cf. p. 90).
- (1999). *Nonlinear Computational Structural Mechanics : New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*. New-York : Springer (cf. p. 27).
- LADEVÈZE, P. et CHAMOIN, L. (2011). "On the verification of model reduction methods based on the proper generalized decomposition". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200 (23-24), p. 2032-2047. DOI : [10.1016/j.cma.2011.02.019](https://doi.org/10.1016/j.cma.2011.02.019) (cf. p. 26).
- (2013). "Toward guaranteed PGD-reduced models". In : *Bytes and Science. CIMNE : Barcelona*, p. 143-154 (cf. p. 27).
- LADEVÈZE, P., PASSIEUX, J.-C. et NÉRON, D. (2010). "The latin multiscale computational method and the proper generalized decomposition". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199.21-22, p. 1287-1296 (cf. p. 27).
- LARION, Y., ZLOTNIK, S., MASSART, T. J. et DÍEZ, P. (2020). "Building a certified reduced basis for coupled thermo-hydro-mechanical systems with goal-oriented error estimation". In : *Computational Mechanics* 66.3, p. 559-573. DOI : [10.1007/s00466-020-01865-7](https://doi.org/10.1007/s00466-020-01865-7) (cf. p. 27).
- LAURENT, L., BOUCARD, P.-A. et SOULIER, B. (2013). "A dedicated multiparametric strategy for the fast construction of a cokriging metamodel". In : *Computers & Structures* 124, p. 61-73 (cf. p. 27).
- LE, V.-N., BENABOU, L., TAO, Q.-B. et ETGENS, V. (2017). "Modeling of intergranular thermal fatigue cracking of a lead-free solder joint in a power electronic module". In : *International Journal of Solids and Structures* 106-107, p. 1-12. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.12.003> (cf. p. 16).
- LEE, W. W., NGUYEN, L. T. et SELVADURAY, G. S. (2000). "Introductory invited paper Solder joint fatigue models : review and applicability to chip scale packages". In : *Microelectronics reliability* 40, p. 231-244 (cf. p. 15).
- LEFRANC, G., LICHT, T., SCHULTZ, H., BEINERT, R. et MITIC, G. (2000). "Reliability testing of high-power multi-chip IGBT modules". In : *Microelectronics reliability* 40.8-10, p. 1659-1663 (cf. p. 13).
- LEGRAIN, G., CHEVREUIL, M. et TAKANO, N. (2017). "Prediction of apparent properties with uncertain material parameters using high-order fictitious domain methods and

- PGD model reduction". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 109.3, p. 345-367 (cf. p. 24, 42).
- LEON, A., MUELLER, S., LUCA, P. de, SAID, R., DUVAL, J.-L. et CHINESTA, F. (2019). "Non-intrusive proper generalized decomposition involving space and parameters : application to the mechanical modeling of 3D woven fabrics". In : *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences* 6.1, p. 1-20 (cf. p. 60).
- LEYGUE, A. et VERRON, E. (2010). "A First Step Towards the Use of Proper General Decomposition Method for Structural Optimization". In : *Archives of Computational Methods in Engineering* 17 (4), p. 465-472. DOI : [10.1007/s11831-010-9052-3](https://doi.org/10.1007/s11831-010-9052-3) (cf. p. 27).
- LI, L., HE, Y., WANG, L., WANG, C., WANG, C. et WU, X. (2021). "The aging analysis method of IGBT with composite failure mode based on Miner linear fatigue cumulative theory". In : *Microelectronics Reliability* 122, p. 114165 (cf. p. 17).
- LI, W., WANG, B., LIU, J., ZHANG, G. et WANG, J. (2020). "IGBT aging monitoring and remaining lifetime prediction based on long short-term memory (LSTM) networks". In : *Microelectronics Reliability* 114, p. 113902 (cf. p. 17).
- LOEVE, M. (1948). "Fonctions aléatoires du second ordre". In : *Processus stochastique et mouvement Brownien*, p. 366-420 (cf. p. 24).
- LOH, W.-S., CORFIELD, M., LU, H., HOGG, S., TILFORD, T. et JOHNSON, C. M. (2007). "Wire bond reliability for power electronic modules-effect of bonding temperature". In : *2007 International Conference on Thermal, Mechanical and Multi-Physics Simulation Experiments in Microelectronics and Micro-Systems. EuroSime 2007*. IEEE, p. 1-6 (cf. p. 11).
- LOUF, F. et CHAMPANEY, L. (2013). "Fast validation of stochastic structural models using a PGD reduction scheme". In : *Finite Elements in Analysis and Design* 70-71, p. 44-56. DOI : [10.1016/j.finel.2013.04.003](https://doi.org/10.1016/j.finel.2013.04.003) (cf. p. 23, 27, 115).
- LU, H., BAILEY, C. et YIN, C. (2009). "Design for reliability of power electronics modules". In : *Microelectronics reliability* 49.9-11, p. 1250-1255 (cf. p. 16).
- LU, Y., BLAL, N. et GRAVOUIL, A. (2018). "Adaptive sparse grid based HOPGD : Toward a nonintrusive strategy for constructing space-time welding computational vademecum". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 114.13, p. 1438-1461 (cf. p. 60).
- LU, Y. et CHRISTOU, A. (2019). "Prognostics of IGBT modules based on the approach of particle filtering". In : *Microelectronics Reliability* 92, p. 96-105 (cf. p. 17).
- LUO, J., GUAN, S., WAN, B., JIANG, M. et FU, G. (2021). "Research on IGBT Bonding Wires Crack Propagation at the Macro and Micro Scales". In : *IEEE Access* 9, p. 106270-106282 (cf. p. 16).
- LUTZ, J., HERRMANN, T., FELLER, M., BAYERER, R., LICHT, T. et AMRO, R. (2008). "Power cycling induced failure mechanisms in the viewpoint of rough temperature environ-

- ment". In : *5th International Conference on Integrated Power Electronics Systems*. VDE, p. 1-4 (cf. p. 10).
- MADAY, Y. et RØNQUIST, E. M. (2002). "A reduced-basis element method". In : *Comptes Rendus Mathématique* 335.2, p. 195-200. DOI : [https://doi.org/10.1016/S1631-073X\(02\)02427-5](https://doi.org/10.1016/S1631-073X(02)02427-5) (cf. p. 25).
- MARCHAND, B., CHAMOIN, L. et REY, C. (2016). "Real-time updating of structural mechanics models using Kalman filtering, modified constitutive relation error, and proper generalized decomposition". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 107.9, p. 786-810 (cf. p. 24).
- MARZOUK, Y., MOSELHY, T., PARNO, M. et SPANTINI, A. (2016). "An introduction to sampling via measure transport". In : *arXiv preprint arXiv:1602.05023* (cf. p. 108).
- MATTHIES, H. G., NIEKAMP, R. et STEINDORF, J. (2006). "Algorithms for strong coupling procedures". In : *Computer methods in applied mechanics and engineering* 195.17-18, p. 2028-2049 (cf. p. 46).
- MERKLE, L., KADEN, T., SONNER, M., GADEMANN, A., TURKI, J., DRESBACH, C. et PETZOLD, M. (2008). "Mechanical fatigue properties of heavy aluminium wire bonds for power applications". In : *2008 2nd Electronics System-Integration Technology Conference*. IEEE, p. 1363-1368 (cf. p. 10).
- METOU, S., PRULIERE, E., AMMAR, A., DAU, F. et IORDANOFF, I. (2014). "The proper generalized decomposition for the simulation of delamination using cohesive zone model". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 99 (13), p. 1000-1022. DOI : [10.1002/nme.4732](https://doi.org/10.1002/nme.4732) (cf. p. 38).
- METROPOLIS, N., ROSENBLUTH, A. W., ROSENBLUTH, M. N., TELLER, A. H. et TELLER, E. (1953). "Equation of state calculations by fast computing machines". In : *The journal of chemical physics* 21.6, p. 1087-1092 (cf. p. 106).
- MINER, M. A. (1945). "Cumulative Damage in Fatigue". In : *Journal of Applied Mechanics* 12.3, p. 159-164. DOI : [10.1115/1.4009458](https://doi.org/10.1115/1.4009458) (cf. p. 17).
- MITIC, G., BEINERT, R., SCHULTZ, H. J. et LEFRANC, G. (1999). "Reliability of AlN substrates and their solder joints in IGBT power modules". In : *Microelectronics Reliability* 39 (6), p. 1159-1164 (cf. p. 37).
- MODESTO, D., ZLOTNIK, S. et HUERTA, A. (2015). "Proper generalized decomposition for parameterized Helmholtz problems in heterogeneous and unbounded domains : Application to harbor agitation". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 295, p. 127-149. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.03.026> (cf. p. 27).
- MOËS, N., DOLBOW, J. et BELYTSCHKO, T. (1999). "A finite element method for crack growth without remeshing". In : *International journal for numerical methods in engineering* 46.1, p. 131-150 (cf. p. 16).

- MOROZUMI, A., YAMADA, K., MIYASAKA, T., SUMI, S. et SEKI, Y. (2003). "Reliability of power cycling for IGBT power semiconductor modules". In : *IEEE Transactions on Industry Applications* 39.3, p. 665-671 (cf. p. 12).
- MUSALLAM, M., JOHNSON, C. M., YIN, C., LU, H. et BAILEY, C. (2008). "Real-time life expectancy estimation in power modules". In : *2008 2nd Electronics System-Integration Technology Conference*. IEEE, p. 231-236 (cf. p. 17).
- MUSALLAM, M., YIN, C., BAILEY, C. et JOHNSON, C. M. (2014). "Application of coupled electro-thermal and physics-of-failure-based analysis to the design of accelerated life tests for power modules". In : *Microelectronics Reliability* 54.1, p. 172-181 (cf. p. 16).
- NADAL, E., CHINESTA, F., DÍEZ, P., FUENMAYOR, F. et DENIA, F. (2015). "Real time parameter identification and solution reconstruction from experimental data using the proper generalized decomposition". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 296, p. 113-128 (cf. p. 23).
- NASIKA, C., DÍEZ, P., GERARD, P., MASSART, T. J. et ZLOTNIK, S. (2022). "Towards real time assessment of earthfill dams via Model Order Reduction". In : *Finite Elements in Analysis and Design* 199, p. 103666. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.finel.2021.103666> (cf. p. 24).
- NAZAR, M. (2023). "Online Prediction of the Remaining Life of IGBTs Semiconductor Modules". Université Gustave Eiffel (cf. p. 17).
- NAZAR, M., IBRAHIM, A., KHATIR, Z., DEGRENNE, N. et AL, Z. (2020). "Remaining Useful Lifetime estimation for Electronic Power modules using an analytical degradation model". In : (cf. p. 18).
- NEEDLEMAN, A. (1987). *A Continuum Model for Void Nucleation by Inclusion Debonding* (cf. p. 38).
- NÉRON, D., BOUCARD, P.-A. et RELUN, N. (2015). "Time-space PGD for the rapid solution of 3D nonlinear parametrized problems in the many-query context". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 103.4, p. 275-292. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.4893>. eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.4893> (cf. p. 27).
- NÉRON, D. et LADEVÈZE, P. (2010). "Proper generalized decomposition for multiscale and multiphysics problems". In : *Archives of Computational Methods in Engineering* 17, p. 351-372 (cf. p. 27).
- NEWMAN, A. J. (1996). *Model Reduction via the Karhunen-Loeve Expansion Part I : An Exposition Model Reduction via the Karhunen-Loeve Expansion*. Rapp. tech. (cf. p. 24).
- NGUYEN, N. C., ROZZA, G., HUYNH, D. B. P. et PATERA, A. T. (2010). "Reduced Basis Approximation and a Posteriori Error Estimation for Parametrized Parabolic PDEs : Application to Real-Time Bayesian Parameter Estimation". In : *Large-Scale Inverse Problems and Quantification of Uncertainty*. John Wiley & Sons, Ltd. Chap. 8, p. 151-177. DOI : <https://doi.org/10.1002/9780470685853.ch8>. eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9780470685853.ch8> (cf. p. 23, 103).

- NGUYEN, N. C., PATERA, A. T. et PERAIRE, J. (2008). "A 'best points' interpolation method for efficient approximation of parametrized functions". In : *International journal for numerical methods in engineering* 73.4, p. 521-543 (cf. p. 90).
- NIROOMANDI, S., GONZÁLEZ, D., ALFARO, I., BORDEU, F., LEYGUE, A., CUETO, E. et CHINESTA, F. (2013). "Real-time simulation of biological soft tissues : A PGD approach". In : *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering* 29 (5), p. 586-600. DOI : [10.1002/cnm.2544](https://doi.org/10.1002/cnm.2544) (cf. p. 26).
- NOUY, A. (2007). "A generalized spectral decomposition technique to solve a class of linear stochastic partial differential equations". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196.45-48, p. 4521-4537 (cf. p. 27).
- (2008). "Generalized spectral decomposition method for solving stochastic finite element equations : invariant subspace problem and dedicated algorithms". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197 (51-52), p. 4718-4736 (cf. p. 27).
- (2010). "A priori model reduction through Proper Generalized Decomposition for solving time-dependent partial differential equations". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199 (23-24), p. 1603-1626. DOI : [10.1016/j.cma.2010.01.009](https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.01.009) (cf. p. 26).
- (2017). "Low-rank methods for high-dimensional approximation and model order reduction". In : *Model Reduction and Approximation : Theory and Algorithms* 15.171, p. 3672148 (cf. p. 108).
- NOUY, A., CHEVREUIL, M. et SAFATLY, E. (2011). "Fictitious domain method and separated representations for the solution of boundary value problems on uncertain parameterized domains". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200.45-46, p. 3066-3082 (cf. p. 27, 42).
- OLIVER, M. A. et WEBSTER, R. (1990). "Kriging : a method of interpolation for geographical information systems". In : *International Journal of Geographical Information System* 4.3, p. 313-332 (cf. p. 26).
- ONUKI, J., KOIZUMI, M. et SUWA, M. (2000). "Reliability of thick Al wire bonds in IGBT modules for traction motor drives". In : *IEEE Transactions on Advanced Packaging* 23.1, p. 108-112 (cf. p. 11).
- OUHAB, M., DEGRENNE, N., ITO, Y. et IZUO, S. (2023). "Physics-of-Failure Model to Explain the Heating-Time Effect on IGBT Power Modules Lifetime". In : *PCIM Europe 2023 ; International Exhibition and Conference for Power Electronics, Intelligent Motion, Renewable Energy and Energy Management*, p. 1-6. DOI : [10.30420/566091007](https://doi.org/10.30420/566091007) (cf. p. 16).
- PAPAIIOANNOU, I., PAPADIMITRIOU, C. et STRAUB, D. (2016). "Sequential importance sampling for structural reliability analysis". In : *Structural safety* 62, p. 66-75 (cf. p. 103).
- PARK, H. et CHO, D. (1996). "The use of the Karhunen-Loeve decomposition for the modeling of distributed parameter systems". In : *Chemical Engineering Science* 51.1, p. 81-98 (cf. p. 24).

- PARK, K., FELIPPA, C. et DeRUNTZ, J.** (1977). "Stabilization of staggered solution procedures for fluid-structure interaction analysis". In : *Computational methods for fluid-structure interaction problems* 26.94-124, p. 51 (cf. p. 46).
- PARK, K. et PAULINO, G.** (2011). "Cohesive Zone Models : A Critical Review of Traction-Separation Relationships Across Fracture Surfaces". In : *Applied Mechanics Reviews* 64. DOI : [10.1115/1.4023110](https://doi.org/10.1115/1.4023110) (cf. p. 38).
- PEHERSTORFER, B. et WILLCOX, K.** (2015). "Dynamic data-driven reduced-order models". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 291, p. 21-41 (cf. p. 24).
- PIETRANICO, S., POMMIER, S., LEFEBVRE, S., KHATIR, Z., BONTEMPS, S. et CADEL, E.** (2010). "Study of ageing of the metallization layer of power semiconductor devices". In : (cf. p. 10).
- PRULIERE, E., CHINESTA, F. et AMMAR, A.** (2010). "On the deterministic solution of multidimensional parametric models using the proper generalized decomposition". In : *Mathematics and Computers in Simulation* 81.4, p. 791-810 (cf. p. 27).
- QIN, Z., TALLEB, H. et REN, Z.** (2016). "A Proper Generalized Decomposition-Based Solver for Nonlinear Magneto-thermal Problems". In : *IEEE Transactions on Magnetics* 52.2, p. 1-9. DOI : [10.1109/TMAG.2015.2492462](https://doi.org/10.1109/TMAG.2015.2492462) (cf. p. 27).
- QUARTERONI, A., ROZZA, G. et MANZONI, A.** (2011). "Certified reduced basis approximation for parametrized partial differential equations and applications". In : *Journal of Mathematics in Industry* 1, p. 1-49 (cf. p. 25).
- RADERMACHER, A. et REESE, S.** (2016). "POD-based model reduction with empirical interpolation applied to nonlinear elasticity". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 107.6, p. 477-495 (cf. p. 89).
- RAMMINGER, S., SELIGER, N. et WACHUTKA, G.** (2000). "Reliability model for Al wire bonds subjected to heel crack failures". In : *Microelectronics Reliability* 40.8-10, p. 1521-1525 (cf. p. 10).
- RAMMINGER, S., TÜRKES, P. et WACHUTKA, G.** (1998). "Crack mechanism in wire bonding joints". In : *Microelectronics Reliability* 38.6-8, p. 1301-1305 (cf. p. 11).
- REIS, J., MOITINHO DE ALMEIDA, J., DíEZ, P. et ZLOTNIK, S.** (2020). "Error estimation for proper generalized decomposition solutions : A dual approach". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 121.23, p. 5275-5294 (cf. p. 27).
- REZENDE, D. et MOHAMED, S.** (2015). "Variational inference with normalizing flows". In : *International conference on machine learning*. PMLR, p. 1530-1538 (cf. p. 108).
- RITTO, T. et NUNES, L.** (2015). "Bayesian model selection of hyperelastic models for simple and pure shear at large deformations". In : *Computers & Structures* 156, p. 101-109 (cf. p. 103).
- ROBERTS, G. O. et ROSENTHAL, J. S.** (2001). "Optimal scaling for various Metropolis-Hastings algorithms". In : *Statistical science* 16.4, p. 351-367 (cf. p. 106).

- ROE, K. L. et SIEGMUND, T.** (2003). “An irreversible cohesive zone model for interface fatigue crack growth simulation”. In : *Engineering Fracture Mechanics*, p. 209-232 (cf. p. 39, 84).
- ROZZA, G., HUYNH, D. B. P. et PATERA, A. T.** (2007). “Reduced basis approximation and a posteriori error estimation for affinely parametrized elliptic coercive partial differential equations”. In : *Archives of Computational Methods in Engineering* 15.3, p. 1 (cf. p. 25).
- (2008). “Reduced basis approximation and a posteriori error estimation for affinely parametrized elliptic coercive partial differential equations : application to transport and continuum mechanics”. In : *Archives of Computational Methods in Engineering* 15.3, p. 229-275 (cf. p. 25).
- RUBIO, P.-B.** (2019). “Stratégies numériques innovantes pour l’assimilation de données par inférence bayésienne”. Thèse de doct. Université Paris-Saclay (ComUE) (cf. p. 107, 109, 111).
- RUBIO, P.-B., CHAMOIN, L. et LOUF, F.** (2019a). “Real-time Bayesian data assimilation with data selection, correction of model bias, and on-the-fly uncertainty propagation”. In : *Comptes Rendus - Mécanique* 347 (11), p. 762-779. DOI : [10.1016/j.crme.2019.11.004](https://doi.org/10.1016/j.crme.2019.11.004) (cf. p. 23, 27, 103, 105, 106).
- RUBIO, P.-B., LOUF, F. et CHAMOIN, L.** (2019b). “Transport Map sampling with PGD model reduction for fast dynamical Bayesian data assimilation”. In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 120 (4), p. 447-472. DOI : [10.1002/nme.6143](https://doi.org/10.1002/nme.6143) (cf. p. 27, 106, 109).
- RUBIO, P.-B., MARZOUK, Y. et PARNO, M.** (2023). “A transport approach to sequential simulation-based inference”. In : *arXiv preprint arXiv :2308.13940* (cf. p. 109).
- RYCKELYNCK, D.** (2005). “A priori hyperreduction method : an adaptive approach”. In : *Journal of computational physics* 202.1, p. 346-366 (cf. p. 88).
- (2009). “Hyper-reduction of mechanical models involving internal variables”. In : *International Journal for numerical methods in engineering* 77.1, p. 75-89 (cf. p. 88).
- SAHA, S., CELAYA, J. R., VASHCHENKO, V., MAHIUDDIN, S. et GOEBEL, K. F.** (2011). “Accelerated aging with electrical overstress and prognostics for power MOSFETs”. In : *IEEE 2011 EnergyTech*. IEEE, p. 1-6 (cf. p. 17).
- SAITO, T. et BECK, J. L.** (2010). “Bayesian model selection for ARX models and its application to structural health monitoring”. In : *Earthquake engineering & structural dynamics* 39.15, p. 1737-1759 (cf. p. 103, 105).
- SANCARLOS, A., CHAMPANEY, V., DUVAL, J.-L., CUETO, E. et CHINESTA, F.** (2021). “PGD-based advanced nonlinear multiparametric regressions for constructing metamodels at the scarce-data limit”. In : *arXiv preprint arXiv :2103.05358* (cf. p. 60).
- SATO, M.-a.** (2001). “Online Model Selection Based on the Variational Bayes”. In : *Neural Computation* 13.7, p. 1649-1681. DOI : [10.1162/089976601750265045](https://doi.org/10.1162/089976601750265045). eprint : [https](https://arxiv.org/abs/2103.05358) :

[//direct.mit.edu/neco/article-pdf/13/7/1649/814879/089976601750265045.pdf](https://direct.mit.edu/neco/article-pdf/13/7/1649/814879/089976601750265045.pdf) (cf. p. 105).

SCANFF, R., NÉRON, D., LADEVÈZE, P., BARABINOT, P., CUGNON, F. et DELSEMME, J.-P. (2022). “Weakly-invasive LATIN-PGD for solving time-dependent non-linear parametrized problems in solid mechanics”. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 396, p. 114999. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.114999> (cf. p. 27, 60).

SCHILLING, O., SCHÄFER, M., MAINKA, K., THOBEN, M. et SAUERLAND, F. (2012). “Power cycling testing and FE modelling focussed on Al wire bond fatigue in high power IGBT modules”. In : *Microelectronics Reliability* 52.9-10, p. 2347-2352 (cf. p. 16).

SCHULER, L., CHAMOIN, L., KHATIR, Z., BERKANI, M., OUHAB, M. et DEGRENNE, N. (2022a). “A Reduced Model Based on Proper Generalized Decomposition for the Fast Analysis of IGBT Power Modules Lifetime”. In : *Journal of Electronic Packaging, Transactions of the ASME* 144 (3). DOI : [10.1115/1.4053767](https://doi.org/10.1115/1.4053767) (cf. p. 21).

— (2022b). “Iterative PGD model reduction for the strongly-coupled thermomechanical analysis of crack propagation in power electronic modules”. In : *Computational Mechanics* 70 (2), p. 407-424. DOI : [10.1007/s00466-022-02173-y](https://doi.org/10.1007/s00466-022-02173-y) (cf. p. 21).

SCOTT, D. W. (1992). *Multivariate density estimation : theory, practice, and visualization*. New-York : John Wiley & Sons (cf. p. 115).

SEVIERI, G. et DE FALCO, A. (2020). “Dynamic structural health monitoring for concrete gravity dams based on the Bayesian inference”. In : *Journal of Civil Structural Health Monitoring* 10.2, p. 235-250 (cf. p. 103).

SHISHIDO, N., HAYAMA, Y., MOROOKA, W., HAGIHARA, S. et MIYAZAKI, N. (2019). “Application of nonlinear fracture mechanics parameter to predicting wire-liftoff lifetime of power module at elevated temperatures”. In : *IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics* 7 (3), p. 1604-1614. DOI : [10.1109/JESTPE.2019.2914244](https://doi.org/10.1109/JESTPE.2019.2914244) (cf. p. 16).

SHQAIR, M., KHATIR, Z., IBRAHIM, A., BERKANI, M., HALOUANI, A. et HAMIEH, T. (2022a). “Physicochemical-microstructural approach for modeling the crack passage at topside metallic parts in IGBT semiconductor power electronics”. In : *2022 23rd International Conference on Thermal, Mechanical and Multi-Physics Simulation and Experiments in Microelectronics and Microsystems (EuroSimE)*, p. 1-6. DOI : [10.1109/EuroSimE54907.2022.9758895](https://doi.org/10.1109/EuroSimE54907.2022.9758895) (cf. p. 16).

SHQAIR, M., KHATIR, Z., IBRAHIM, A., HALOUANI, A. et BERKANI, M. (2022b). “Microstructural evolution during the crack propagation at the bond-wire contact area of IGBT power modules upon power cycling”. In : *Microelectronics Reliability* 138, p. 114635. DOI : [10.1016/j.microrel.2022.114635](https://doi.org/10.1016/j.microrel.2022.114635) (cf. p. 12).

SIPPEL, M., TAN, Y. F., SCHMIDT, R., BOTAZZOLI, P., SPRENGER, M. et FRANKE, J. (2023). “Influence of the Bond Foot Angle on Active Power Cycling Lifetime of Wire Bonds”. In : *2023 24th International Conference on Thermal, Mechanical and Multi-Physics Simulation and Experiments in Microelectronics and Microsystems (EuroSimE)*. IEEE, p. 1-7 (cf. p. 16).

- SMET, V., FOREST, F., HUSELSTEIN, J.-J., RICARDEAU, F., KHATIR, Z., LEFEBVRE, S. et BERKANI, M.** (2011). "Ageing and failure modes of IGBT modules in high-temperature power cycling". In : *IEEE transactions on industrial electronics* 58.10, p. 4931-4941 (cf. p. 13, 14).
- SMETANA, K. et ZAHM, O.** (2020). "Randomized residual-based error estimators for the proper generalized decomposition approximation of parametrized problems". In : *International journal for numerical methods in engineering* 121.23, p. 5153-5177 (cf. p. 27).
- SPANTINI, A., BIGONI, D. et MARZOUK, Y.** (2018). "Inference via low-dimensional couplings". In : *The Journal of Machine Learning Research* 19.1, p. 2639-2709 (cf. p. 106, 108, 109).
- STEINHORST, P., POLLER, T. et LUTZ, J.** (2013). "Approach of a physically based lifetime model for solder layers in power modules". In : t. 53, p. 1199-1202. DOI : [10.1016/j.microrel.2013.07.094](https://doi.org/10.1016/j.microrel.2013.07.094) (cf. p. 16).
- STRAUB, D., PAPAIOANNOU, I. et BETZ, W.** (2016). "Bayesian analysis of rare events". In : *Journal of Computational Physics* 314, p. 538-556 (cf. p. 103).
- STUART, A. M.** (2010). "Inverse problems : a Bayesian perspective". In : *Acta numerica* 19, p. 451-559 (cf. p. 103).
- SURENDAR, A., SAMAVATIAN, V., MASELENO, A., IBATOVA, A. Z. et SAMAVATIAN, M.** (2018). "Effect of solder layer thickness on thermo-mechanical reliability of a power electronic system". In : *Journal of Materials Science : Materials in Electronics* 29, p. 15249-15258 (cf. p. 12).
- TARANTOLA, A.** (2005). *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. SIAM (cf. p. 103).
- THOMAS, A. E., GUEVELOU, S., DI PASQUALE, E., CHAMBAR, A., DUVAL, J.-L., CHINESTA, F., LIMOUSIN, V., DELGERIE, X. et LEROY, E.** (2020). "Shape parametrization & morphing in sheet-metal forming". In : *Procedia Manufacturing* 47, p. 702-706 (cf. p. 42).
- TIKHONOV, A. N.** (1963). "On the solution of ill-posed problems and the method of regularization". In : *Doklady akademii nauk*. T. 151. 3. Russian Academy of Sciences, p. 501-504 (cf. p. 103).
- TIRVAUDEY, M., BOUCLIER, R., PASSIEUX, J.-C. et CHAMOIN, L.** (2020). "Non-invasive implementation of nonlinear isogeometric analysis in an industrial FE software". In : *Engineering Computations* 37.1, p. 237-261 (cf. p. 42).
- TISO, P. et RIXEN, D. J.** (2013). "Discrete empirical interpolation method for finite element structural dynamics". In : *Topics in Nonlinear Dynamics, Volume 1 : Proceedings of the 31st IMAC, A Conference on Structural Dynamics, 2013*. Springer, p. 203-212 (cf. p. 89).
- TSIOLAKIS, V., GIACOMINI, M., SEVILLA, R., OTHMER, C. et HUERTA, A.** (2020). "Non-intrusive proper generalised decomposition for parametrised incompressible flow problems in OpenFOAM". In : *Computer Physics Communications* 249, p. 107013. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2019.107013> (cf. p. 60).

- UPADHYAY, B. D., SONIGRA, S. S. et DAXINI, S. D. (2021). "Numerical analysis perspective in structural shape optimization : A review post 2000". In : *Advances in Engineering Software* 155, p. 102992 (cf. p. 42).
- VAN HAL, B., PEERLINGS, R., GEERS, M. et VAN DER SLUIS, O. (2007). "Cohesive zone modeling for structural integrity analysis of IC interconnects". In : *Microelectronics Reliability* 47.8, p. 1251-1261. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.microrel.2006.08.017> (cf. p. 16).
- VITSE, M., NÉRON, D. et BOUCARD, P. A. (2014). "Virtual charts of solutions for parameterized nonlinear equations". In : *Computational Mechanics* 54 (6), p. 1529-1539. DOI : [10.1007/s00466-014-1073-6](https://doi.org/10.1007/s00466-014-1073-6) (cf. p. 27).
- WOLD, S., ESBENSEN, K. et GELADI, P. (1987). *Principal Component Analysis* (cf. p. 24).
- WORDEN, K. et HENSMAN, J. (2012). "Parameter estimation and model selection for a class of hysteretic systems using Bayesian inference". In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 32, p. 153-169 (cf. p. 103).
- XIAO, D., FANG, F., PAIN, C. C. et NAVON, I. M. (2017). "A parameterized non-intrusive reduced order model and error analysis for general time-dependent nonlinear partial differential equations and its applications". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 317, p. 868-889. DOI : [10.1016/j.cma.2016.12.033](https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.12.033) (cf. p. 60).
- XU, X. P. et NEEDLEMAN, A. (1993). "Void nucleation by inclusion debonding in a crystal matrix". In : 1.2, p. 111-132. DOI : [10.1088/0965-0393/1/2/001](https://doi.org/10.1088/0965-0393/1/2/001) (cf. p. 38).
- (1994). "Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids". In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 42.9, p. 1397-1434 (cf. p. 38).
- YAMADA, Y., TAKAKU, Y., YAGI, Y., NAKAGAWA, I., ATSUMI, T., SHIRAI, M., OHNUMA, I. et ISHIDA, K. (2007). "Reliability of wire-bonding and solder joint for high temperature operation of power semiconductor device". In : *Microelectronics Reliability* 47.12, p. 2147-2151 (cf. p. 11).
- YAN, W.-J. et KATAFYGIOTIS, L. S. (2015). "A novel Bayesian approach for structural model updating utilizing statistical modal information from multiple setups". In : *Structural Safety* 52, p. 260-271 (cf. p. 103).
- YANG, L., AGYAKWA, P. A. et JOHNSON, C. M. (2011). "A time-domain physics-of-failure model for the lifetime prediction of wire bond interconnects". In : *Microelectronics Reliability* 51 (9-11), p. 1882-1886. DOI : [10.1016/j.microrel.2011.07.052](https://doi.org/10.1016/j.microrel.2011.07.052) (cf. p. 16).
- YANG, Q., SHIM, D. et SPEARING, S. (2004). "A cohesive zone model for low cycle fatigue life prediction of solder joints". In : *Microelectronic Engineering* 75.1, p. 85-95. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.mee.2003.11.009> (cf. p. 16).
- YIN, C., LU, H., MUSALLAM, M., BAILEY, C. et JOHNSON, C. (2008). "A physics-of-failure based prognostic method for power modules". In : *2008 10th Electronics Packaging Technology Conference*. IEEE, p. 1190-1195 (cf. p. 16).

- ZAHM, O., CUI, T., LAW, K., SPANTINI, A. et MARZOUK, Y.** (2022). "Certified dimension reduction in nonlinear Bayesian inverse problems". In : *Mathematics of Computation* 91.336, p. 1789-1835 (cf. p. 108).
- ZHAO, J., QIN, F., AN, T., BIE, X. et FANG, C.** (2017). "Electro-thermal and thermal-mechanical FE analysis of IGBT module with different bonding wire shape". In : *2017 18th International Conference on Electronic Packaging Technology (ICEPT)*. IEEE, p. 548-551 (cf. p. 16).
- ZIO, E. et PELONI, G.** (2011). "Particle filtering prognostic estimation of the remaining useful life of nonlinear components". In : *Reliability Engineering & System Safety* 96.3, p. 403-409 (cf. p. 17).
- ZLOTNIK, S., DÍEZ, P., MODESTO, D. et HUERTA, A.** (2015). "Proper generalized decomposition of a geometrically parametrized heat problem with geophysical applications". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 103.10, p. 737-758. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.4909>. eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.4909> (cf. p. 27, 42).
- ZOU, X., CONTI, M., DÍEZ, P. et AURICCHIO, F.** (2018). "A nonintrusive proper generalized decomposition scheme with application in biomechanics". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 113 (2), p. 230-251. DOI : [10.1002/nme.5610](https://doi.org/10.1002/nme.5610) (cf. p. 60, 68).