



**HAL**  
open science

# Approximation d'un problème de contrôle optimal sur un réseau

Mériadec Chuberre

► **To cite this version:**

Mériadec Chuberre. Approximation d'un problème de contrôle optimal sur un réseau. Optimisation et contrôle [math.OC]. INSA de Rennes, 2023. Français. NNT : 2023ISAR0029 . tel-04702679

**HAL Id: tel-04702679**

**<https://theses.hal.science/tel-04702679v1>**

Submitted on 19 Sep 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT DE

L'INSTITUT NATIONAL DES  
SCIENCES APPLIQUÉES DE RENNES

ÉCOLE DOCTORALE N° 601

*Mathématiques, Télécommunications, Informatique, Signal, Systèmes,  
Électronique*

Spécialité : *Mathématiques et leurs Interactions*

Par

**Mériadec CHUBERRE**

**Approximation d'un problème de contrôle optimal sur un réseau**

Thèse présentée et soutenue à Rennes, le 12 décembre 2023

Unité de recherche : IRMAR-UMR 6625

Thèse N° : 23ISAR 37 / D23 - 37

## Rapporteurs avant soutenance :

Vincent PERROLLAZ Maître de Conférences, Institut Denis Poisson, Université de Tours  
Hasnaa ZIDANI Professeur des Universités, LMI, INSA ROUEN NORMANDIE

## Composition du Jury :

Président :	Aris DANIILIDIS	Professeur, TU, Wien
Examineurs :	Vincent PERROLLAZ	Maître de Conférences, Institut Denis Poisson, Université de Tours
	Hasnaa ZIDANI	Professeur des Universités, LMI, INSA ROUEN NORMANDIE
	Oana SILVIA SEREA	Professeur, Western Norway University of Applied Sciences, Bergen
	Aris DANIILIDIS	Professeur, TU, Wien
Dir. de thèse :	Olivier LEY	Professeur des Universités, IRMAR, INSA RENNES
	Mounir HADDOU	Professeur des Universités, IRMAR, INSA RENNES
Co-dir. de thèse :	Mohamed CAMAR-EDDINE	Maître de Conférences, IRMAR, INSA RENNES



# REMERCIEMENTS

---

Une thèse commence naturellement par des remerciements. La mienne (comme beaucoup) a été longue, parfois douloureuse et souvent remplie de doutes. Elle n'a pu se terminer que grâce au soutien de multiples personnes, que je tente de remercier ici, bien que ces quelques lignes ne leur rendront pas tout l'hommage qu'elles méritent.

Je tiens avant tout à remercier Hasnaa Zidani et Vincent Perrollaz, de m'avoir fait l'honneur de rapporter ma thèse. Je les remercie chaleureusement pour la bienveillance de leurs rapports. Je remercie aussi naturellement Oana Silvia Serea et Aris Daniilidis, qui ont accepté de constituer les membres de mon jury. Je remercie en particulier Aris pour les discussions mathématiques très enrichissantes que nous avons pu avoir lors de ses différents passages à l'INSA au cours de mes quatre années.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers mes directeurs, Olivier, Mounir et Camar, pour leur accompagnement au cours de ces quatre années. Je les remercie pour leur encadrement et leur très grande disponibilité. Merci à toi Olivier pour la très forte implication mathématique qui fut la tienne dans mon travail et ta détermination face aux problèmes que j'ai pu te rapporter. Merci à toi Mounir pour ton éternelle bonne humeur et la pertinence de tes remarques et suggestions lors de nos nombreuses discussions. Merci à toi Camar pour ta bienveillance et ta sollicitude à chaque fois que j'ai pu passer le pas de la porte de ton bureau.

Je ne peux écrire ces remerciements sans dresser un paragraphe pour l'équipe de l'INSA qui n'aurait pas pu mieux m'accueillir et m'intégrer en son sein. Un très grand merci à Léo et Valérie pour les discussions et jus de houblon d'après boulot qui ont été des sources de détente indispensables. Merci à l'Innocent Jafar (pour ses contrepèteries), Jérémy, Simon, Nicolas, Aziz, Laurent et Pierrette. Merci à Bilel, David et Théo mes compagnons de bureau 318 qui ont rendu l'ambiance de travail fort agréable. Un grand merci à Martine, Daviane, Justine et Patricia pour leur gentillesse et leur grande réactivité face aux nombreux problèmes administratifs que j'ai pu leur soumettre. C'est une chance inestimable

pour un doctorant de bénéficier d'un personnel administratif aussi compétent et soucieux d'aider.

Je remercie également l'ensemble des chercheurs et personnels de l'IRMAR avec qui j'ai pu interagir lors de ces quatre ans. Merci beaucoup à Marie-Aude pour sa gentillesse et son efficacité. Je remercie également Goulwen Fichou.

J'ai la chance d'avoir été entouré d'amis au cours de toutes ces années. Il est temps de remercier ces gens qui ont toujours été là pour moi.

Tout d'abord, merci à Chocho et Grégoire, le "Magic Gang" pour ces soirées et ces pauses midi. Je ne saurais remercier suffisamment Lucile, pour son soutien et son amitié sans faille au cours de ces huit dernières années, qui m'ont empêché de m'écrouler bien souvent. Merci également à Antoine Mouzard, notre "grand-frère" à tous pour avoir endossé et assumé ce rôle sans forcément l'avoir voulu. Merci à Antoine Meddane, Louis Gass, Mégane, Jérémy et Émeline.

Je voudrais remercier aussi les amis de l'IRMAR. Un grand merci à Hugo, pour ces moments passés dans notre bureau du deuxième étage ainsi qu'au Fox. Nos nombreuses discussions sur les maths et la vie ont grandement enrichi cette année d'ATER. Merci à François, pour ces vendredis de boulot acharnés! Merci à Marc, pour ces bières et ces pauses café. Merci à Alice pour toutes ces discussions partagées entre sérieux et (total) relâchement. Merci aussi à Silvère, j'attends toujours la fin du JDR.

Yoann, chose promise chose due, voici ton paragraphe! Merci d'avoir rendues possibles toutes les figures qui vont suivre, j'en aurais été incapable sans ton aide! Je pense aussi à ces soirées Guinness/burger certains jeudis soir...

Je tiens beaucoup à remercier les membres du CPB Rennes Judo, avec qui j'ai usé les tatamis au cours d'entraînements acharnés qui m'ont assuré un équilibre. Nol, Iona, Glenn, Jean (pour m'avoir enfin secoué pour le deuxième Dan), Étienne, Aleks et notre coach Jean-Paul. Merci aux Noyalais, Hervé et Stan, pour tous ces moments.

Je remercie mes grands démons, Fabrice et Nathan. Merci à eux pour cette année de

coloc exceptionnelle. Mon Fabrou, merci pour tes conseils et ta constante bonne humeur, c'est enfin au moment où je tape ces lignes que je n'ai plus à te demander quand est-ce que ça publie. Merci à toi Nathan, ami et partenaire d'entraînement pour tout ce que tu m'as apporté et continues de m'apporter.

Merci à toute la clique Brestoïse chez qui j'ai fait tant d'allers-retours lorsqu'il était temps de décompresser. Merci à toi Louis, ex-colloc et toujours-ami, pour ces discussions qui n'ont jamais su trouver le juste milieu entre le sérieux complet et la déconne absolue. Je pense à Léo, Julie Lelong, Alice, Julie Breton, Coco Roux, Erwan, Mathilde, Adri, Pauline, Valou, Bren et Coco Petton.

Merci à toi Nico, dont je suis très heureux d'avoir tiré la notice de téléphone en ce jeudi 30 août 2012 au soir, pour les soirées jus de kiwi et tout le reste.

Mon Wanou, aux vues de l'amitié qui est la notre depuis ce barathon 2015 et de la confiance que tu as placée en moi pour une certaine signature, tu ne pouvais pas ne pas avoir ta propre place ici.

Enfin, comment ne pas évoquer le tri fusion. Merci à vous Étienne et Gildas pour cette longue et solide amitié qui a eu une influence considérable sur la personne que je suis actuellement. J'ai une chance infinie de pouvoir vous compter parmi mes amis.

Merci à toi Laurent, "mon prof de spé" comme je dis aux gens, qui m'a donné le goût des mathématiques et de la rigueur, et a grandement inspiré l'enseignant que je suis devenu. Merci pour tout ce que tu m'as appris.

Merci à toute ma famille qui m'a soutenu et aimé depuis tout ce temps. Merci à toi parrain pour ces escape games et ces concerts. Merci à ma marraine. Je pense beaucoup à mes grands-parents, de Rennes et de Janzé. Merci aux Vaveaux pour ces noëls et vacances d'été dans ce havre de paix qu'est Messeugne, où j'ai pu me recueillir maintes et maintes fois au cours de ces dernières années.

Merci à toi Papa. Merci pour ta solidité et ta force qui m'ont servi de modèle et de repère dans mes moments de doutes. Merci à toi maman, pour me connaître et me

---

comprendre aussi bien et avoir toujours su ce qu'il fallait dire ou faire dans les moments difficiles. Frangine, merci à toi pour tous ces plateaux/canap/séries & entraînements. Tenter d'être un grand frère digne de la sœur géniale que tu es a toujours été primordial pour moi. C'est dans cette volonté que j'ai puisé le courage nécessaire dans les moments où l'abandon paraissait être ma seule option.

Enfin, merci à toi Doreen, qui n'auras pas connu le début de cette aventure mais qui m'auras permis d'en voir la fin.

# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>10</b>
1.1	Contexte et motivations . . . . .	10
1.1.1	Équations de Hamilton-Jacobi et équations de Hamilton-Jacobi-Bellman . . . . .	10
1.1.2	Équations de Hamilton-Jacobi sur un réseau . . . . .	14
1.1.3	Le problème de Skorokhod . . . . .	18
1.2	Description du problème étudié et résultats . . . . .	22
1.2.1	Problématique initiale . . . . .	22
1.2.2	Convergence des trajectoires pénalisées et de la suite des fonctions valeur . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Résultats préliminaires</b>	<b>33</b>
2.1	Quelques résultats sur les équations différentielles . . . . .	33
2.1.1	Théorème de Cauchy-Lipschitz pour des fonctions de Carathéodory . . . . .	33
2.1.2	Dépendance par rapport à un paramètre . . . . .	35
2.2	Quelques résultats de descente de gradient . . . . .	39
2.2.1	Inégalité de Lojasiewicz et convergence des trajectoires . . . . .	39
2.3	Étude de la fonction distance au réseau . . . . .	43
2.3.1	Propriétés algébriques . . . . .	43
2.3.2	Trajectoires de descente de gradient . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Étude du système d'EDO pénalisé</b>	<b>49</b>
3.1	Études des zones d'invariance pour les solutions du système pénalisé . . . . .	52
3.2	Estimations a priori et existence de solutions pour le système pénalisé . . . . .	59
3.3	Convergence uniforme de la suite des trajectoires pénalisées à extraction près . . . . .	66
3.4	Caractérisation de la limite au sein des arêtes du réseau . . . . .	68
3.5	Autour de l'existence de la limite de $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Problème de Skorokhod sur un réseau</b>	<b>85</b>
4.1	Une trajectoire limite qui ne rentre dans aucune branche . . . . .	85



TABLE DES MATIÈRES

---

4.2	Autour du caractère mal posé du problème limite . . . . .	89
4.3	Étude d'une dynamique particulière . . . . .	90
4.3.1	Étude de (4.3.1) lorsque $X_0 \in \Gamma \setminus \{0\}$ . . . . .	90
4.3.2	Étude de (4.3.1) lorsque $X_0 = 0$ . . . . .	105
4.4	Autour de l'instabilité du problème limite . . . . .	107
<b>5</b>	<b>Problème de contrôle optimal</b>	<b>109</b>
5.1	Étude du système contrôlé 5.0.1 . . . . .	110
5.1.1	Application des résultats du chapitre 3 . . . . .	110
5.1.2	Le cas spécifique $X \in \Gamma$ . . . . .	112
5.1.3	Résultats de suivi de trajectoires . . . . .	115
5.2	Propriétés et convergence de $(V^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ . . . . .	129
5.2.1	Restriction à $\Gamma$ . . . . .	130
5.2.2	Convergence de $(V^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ . . . . .	132
<b>6</b>	<b>Discussion et perspectives</b>	<b>141</b>
6.1	À propos d'un réseau général . . . . .	141
6.2	Convergence des inégalités de Hamilton-Jacobi . . . . .	144
<b>A</b>	<b>Preuve de la proposition 5.1.13</b>	<b>153</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>167</b>

# NOTATIONS

---

- Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on note  $x^+$  (resp.  $x^-$ )

$$x^+ := \max\{0, x\}, \quad (\text{resp. } \max\{0, -x\}).$$

- Pour tout  $X \in \mathbb{R}^2$ , on notera  $X := (X_1, X_2)$ , les coordonnées de  $X$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .
- Pour  $(X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , on note  $\langle X, Y \rangle$ , le produit scalaire euclidien entre  $X$  et  $Y$ .
- Pour  $X \in \mathbb{R}^n$ , on note  $|X| := \sqrt{\langle X, X \rangle}$ , la norme euclidienne de  $X$ .
- Pour  $X := (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ , on note  $|X|_\infty := \max\{|X_i|, i = 1, \dots, n\}$ , la norme infinie de  $X$ .
- Pour  $X = (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2$  on note

$$X^\perp := \begin{pmatrix} -X_2 \\ X_1 \end{pmatrix},$$

sa rotation d'angle  $\pi/2$ .

- On note pour  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{C}(\Omega)$ , l'ensemble des fonctions continues sur  $\Omega$ .
- On note pour  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{C}^{1,1}(\Omega)$ , l'ensemble des fonctions  $\mathcal{C}^1(\Omega)$  de dérivée lipschitzienne.
- On note pour  $T > 0$ ,  $BV(]0, T[)$ , l'ensemble des fonctions à variations bornées sur  $]0, T[$ .

# INTRODUCTION

---

## 1.1 Contexte et motivations

Cette section vise à donner le cadre général dans lequel s'inscrit ce mémoire : la thématique du contrôle optimal, et plus particulièrement l'étude des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman posées sur un réseau. On fera donc un très bref tour d'horizon de la théorie de Hamilton-Jacobi et des solutions de viscosité. On portera une attention particulière sur la construction de problèmes de Hamilton-Jacobi sur des structures de type réseaux. Les problèmes étudiés dans ce mémoire se trouveront étroitement liés aux problèmes de contraintes de trajectoires, et en particulier au *problème de Skorokhod*. On écrira donc une section dans ce sens.

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'approximation d'un problème de contrôle optimal posé sur un réseau de  $\mathbb{R}^2$  au sens de Y. Achdou, F. Camilli, A. Cutrì et N. Tchou [1], par une suite de problèmes de contrôle optimal posés sur l'espace entier (on voit ici la structure de réseau comme plongée dans  $\mathbb{R}^2$ ). Dans [1], Achdou & al. contraignent les trajectoires de leur problème à évoluer sur le réseau à l'aide d'un ensemble de contrôles adéquat. Dans [4], Y. Achdou et N. Tchou approchent un problème de contrôle optimal sur un réseau en relaxant leurs trajectoires, leurs ensembles de contrôles ainsi que leurs coûts instantanés. Dans ce travail on se fixe un ensemble de contrôles ainsi qu'un coût instantané, et la contrainte sur les trajectoires s'effectuera grâce à un terme de pénalisation qui ne dépendra que de la géométrie du réseau, et non de l'ensemble des contrôles.

### 1.1.1 Équations de Hamilton-Jacobi et équations de Hamilton-Jacobi-Bellman

Les équations de Hamilton-Jacobi interviennent dans une grande variété de domaines tels que le calcul des variations, la mécanique hamiltonienne, la théorie du contrôle, la théorie des jeux, le traitement d'images (on pourra par exemple regarder [5]), la robotique,

la finance ou encore la biologie. Ces équations font intervenir de fortes non-linéarités sur les dérivées mises en jeu, qui conduisent à des problèmes de notion de solution, d'existence et d'unicité. On appellera *équation de Hamilton-Jacobi* du premier ordre une équation de la forme

$$H(X, u(X), Du(X)) = 0, \quad X \in \Omega, \quad (HJ)$$

où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $H : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue appelée *hamiltonien* de l'équation (HJ), et  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction solution de l'équation (HJ) à déterminer, "solution" en un sens à préciser. Le caractère fortement non-linéaire de l'équation provient que l'on demande seulement à l'hamiltonien d'être continu. Cela a pour conséquence l'autorisation d'un large ensemble de non-linéarités sur  $Du$ .

L'exemple le plus connu est celui de l'équation Eikonale

$$|\nabla u(X)| = 1, \quad X \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

qui intervient notamment en optique géométrique (étant en dimension finie, on identifie ici le gradient de  $u$  et sa différentielle). Cette équation donne lieu à un grand nombre de problèmes mal posés, que cela soit au sens classique ou au sens faible.

La bonne notion de solution pour cette classe d'équations est celle des *solutions de viscosité*, introduite par Crandall et Lions en 1981 dans [21, 22, 33]. Cette notion de solution repose sur le principe du maximum ainsi que l'utilisation d'une classe de fonctions-test régulières (pour donner un sens aux dérivées qui interviennent dans l'équation), dont on va se servir pour approcher les sous-solutions (resp. sur-solutions) de l'équation par en dessus (resp. par au dessous). La théorie des solutions de viscosité pour les équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre a donné lieu à plusieurs ouvrages, parmi lesquels on pourra citer [9, 10, 33]. On commence par donner la définition d'une solution de viscosité continue pour (HJ).

**Définition 1.1.1** (Solution de viscosité). Soit  $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ . On dit que  $u$  est une **sous-solution** de viscosité de (HJ), si pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$  et tout maximum local  $X_0 \in \Omega$  de  $u - \varphi$ ,

$$H(X_0, u(X_0), D\varphi(X_0)) \leq 0.$$

On dit de même que  $u$  est une **sur-solution** de viscosité de (HJ), si pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$  et tout minimum local  $X_0 \in \Omega$  de  $u - \varphi$ ,

$$H(X_0, u(X_0), D\varphi(X_0)) \geq 0.$$

On dira alors que  $u$  est une **solution de viscosité** de  $(HJ)$  si elle est à la fois sous et sur solution de  $(HJ)$ .

On s'intéresse particulièrement aux équations de Hamilton-Jacobi-Bellman, qui sont issues de problèmes de contrôle optimal. Des méthodes particulières liées à ce type d'équations ont été introduites par P.L Lions dans [33]. On pourra regarder en particulier [9] et [10] qui décrivent en détail les liens entre ces deux thématiques. On décrit un problème de contrôle optimal de la manière suivante. On considère  $A \subset \mathbb{R}^n$  un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^n$  et

$$\mathcal{A} := \{\alpha : [0, +\infty[ \rightarrow A, \alpha \text{ mesurable}\}.$$

On pose pour  $\alpha \in \mathcal{A}$ , le système différentiel

$$\begin{cases} (Y^{X,\alpha})'(t) = f(Y^{X,\alpha}(t), \alpha(t)), & t \geq 0 \\ Y^{X,\alpha}(0) = X \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

où  $f : \mathbb{R}^n \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$ . On introduit alors le *coût*

$$J : (X, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{A} \mapsto \int_0^{+\infty} \ell(Y^{X,\alpha}(t), \alpha(t)) e^{-\lambda t} dt,$$

où  $\lambda > 0$  est appelé *taux d'actualisation* et  $\ell : \mathbb{R}^n \times A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction appelée *coût instantané*. On définit la *fonction valeur* associée au problème de contrôle optimal par

$$V : X \in \mathbb{R}^n \mapsto \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} J(X, \alpha).$$

Dans tout ce travail, on fera les hypothèses suivantes :

**Hypothèse 1.1.2.**  $f$  est continue, bornée par  $M > 0$  sur  $\mathbb{R}^n \times A$  et il existe  $L_f > 0$ , tel que pour tout  $X, Y \in \mathbb{R}^n$  et  $a \in A$ ,

$$|f(X, a) - f(Y, a)| \leq L_f |X - Y|. \quad (1.1.2)$$

**Hypothèse 1.1.3.**  $\ell$  est continue sur  $\mathbb{R}^n \times A$  et il existe  $L_\ell > 0$ , tel que pour tout  $X, Y \in \mathbb{R}^n$  et  $a \in A$ ,

$$\begin{cases} |\ell(X, a) - \ell(Y, a)| \leq L_\ell |X - Y|, \\ |\ell(X, a)| \leq M. \end{cases} \quad (1.1.3)$$

On associe au problème (1.1.1) l'équation de *Hamilton-Jacobi-Bellman*

$$\lambda u(X) + H(X, Du(X)) = 0, \quad X \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1.4)$$

où pour  $(X, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$H(X, p) = \sup_{a \in A} \{-\langle f(X, a), p \rangle - \ell(X, a)\}. \quad (1.1.5)$$

Plus généralement, pour un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , les équations de Hamilton-Jacobi Bellman forment une sous-classe d'équations de Hamilton-Jacobi de la forme

$$\lambda u(X) + H(X, Du(X)) = 0, \quad X \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad (1.1.6)$$

ou encore

$$\begin{cases} \partial_t u(t, X) + H(X, \partial_x u(t, X)) = 0, & (t, X) \in ]0, T[ \times \Omega \\ u(0, X) = u_0(X), & X \in \Omega. \end{cases} \quad (1.1.7)$$

L'équation (1.1.7) correspond au cas où  $t \in [0, T]$ , dans le système (1.1.1), qui est un problème de contrôle optimal dit *en horizon finie*.

On peut montrer grâce à la transformée de Legendre-Fenchel (voir [6, 46]) que tout problème de contrôle optimal peut s'écrire sous la forme (1.1.6) ou (1.1.7).

On peut alors énoncer le théorème suivant, dont on pourra trouver preuve et commentaires dans [9, 10] :

**Théorème 1.1.4.** *Sous les hypothèses (1.1.2) et (1.1.3),  $V$  est l'unique solution de viscosité bornée uniformément continue de l'équation (1.1.4).*

On conclut ce tour d'horizon en mentionnant différentes techniques qui entrent en jeu dans l'étude des équations de Hamilton-Jacobi.

- Les **principes de comparaison**, qui permettent de comparer une sous- et une sur-solutions (voir [9, 12, 22, 33]). Cela aboutit à des résultats d'unicité pour les solutions de viscosité.

- Le **principe de programmation dynamique**, introduit par Bellman dans [14] est un outil spécifique aux équations de Hamilton-Jacobi-Bellman (voir aussi [9, 10, 33]). Il permet en particulier d'établir dans le théorème 1.1.4 que  $V$  est bien solution de viscosité

de (1.1.6).

- La notion de **solution de viscosité discontinues**, développée par H. Ishii (voir [30] et [29, 31]). Cela a permis une étude d'un ensemble d'équations de Hamilton-Jacobi plus large, et notamment d'obtenir des résultats de stabilité et d'unicité qui étaient jusqu'alors absent dans certains cas.
- La **Méthode de Perron**, qui permet de construire des solutions de viscosités discontinues. Elle est introduite par H. Ishii dans [30].

### 1.1.2 Équations de Hamilton-Jacobi sur un réseau

On décrit ici un peu plus précisément les travaux mis en jeu dans cette théorie, dans la continuité desquels s'inscrit ce mémoire. On donne d'abord la définition d'un réseau dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Définition 1.1.5.** On appelle *réseau* un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  de la forme  $\mathcal{S} \cup \mathcal{E}$ , où :

- $\mathcal{S}$  est un ensemble fini de points de  $\mathbb{R}^2$  appelés *sommets*,
- $\mathcal{E}$  est un ensemble fini de segments et de demi-droites de  $\mathbb{R}^2$ , dont les extrémités sont des éléments de  $\mathcal{S}$ , appelés *arêtes*.

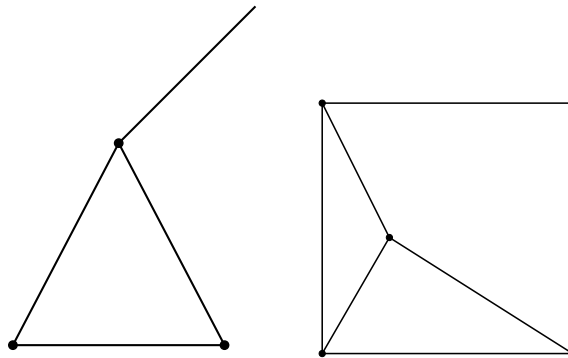


FIGURE 1.1 – Deux exemples de réseaux

La notion de solution de viscosité pour une équation de Hamilton-Jacobi posée sur un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  implique un ensemble de fonctions-tests régulières sur ce domaine, et donc une notion de différentiabilité sur ce domaine. Dans le cas d'un réseau, le domaine

est fermé, non-convexe et d'intérieur vide. Une bonne notion de solution de viscosité à la jonction notamment sera à déterminer, ainsi que de techniques adéquates pour obtenir des résultats de stabilités et des théorèmes de comparaison.

La principale difficulté à travailler sur les réseaux est la présence de jonctions. On se contentera donc de travailler sur une jonction simple de  $\mathbb{R}^2$ , dont on donne la définition ci-dessous.

**Définition 1.1.6.** On appelle jonction de  $\mathbb{R}^2$ , tout ensemble de la forme

$$\Gamma := \{0\} \cup \bigcup_{i=1}^n J_i,$$

où  $\{J_i\}_{i=1\dots n}$  sont les arêtes du réseaux, de la forme  $J_i = \mathbb{R}_+^* e_i$ , avec  $\{e_i\}_{i=1\dots n}$  un ensemble de vecteurs unitaires de  $\mathbb{R}^2$  deux à deux distincts.

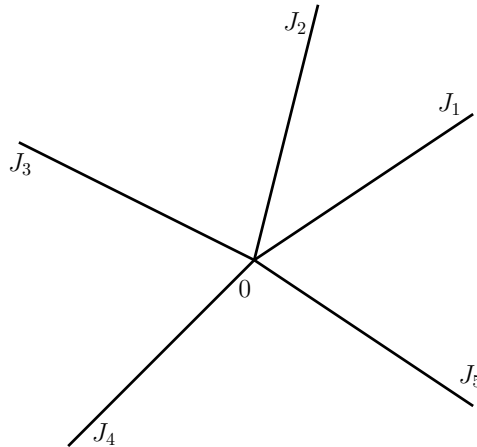


FIGURE 1.2 – Exemple de jonction

Les premiers travaux portant sur les équations de Hamilton-Jacobi posées sur un réseau sont trois articles publiés en 2013 par Achdou & al [1], C. Imbert, R. Monneau, H. Zidani [28] et D. Schieborn, F. Camilli [41]. En 2015, dans [4], Y. Achdou et N. Tchou approximent un problème de contrôle optimal sur un réseau, comme limite de problèmes de contrôle sur l'espace avec contraintes d'états. La même année, Y. Achdou, S. Oudet et N. Tchou généralisent dans [2] les résultats obtenus dans [1] en considérant des dynamiques et des coûts instantanés indépendants sur chaque arrêt du réseau.



Dans [1], Achdou & al étudient des problèmes de contrôle optimal associés à des dynamiques contraintes à évoluer sur le réseau, et les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman associées. Les auteurs considèrent dans cet article le système (1.1.1), avec comme donnée initiale  $X \in \Gamma$ . Pour un compact  $A$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow A$ , est un contrôle admissible (i.e. tel que la trajectoire reste sur le réseau) et  $f$  est une fonction de  $\mathbb{R}^2 \times A$  dans  $\mathbb{R}^2$  qui satisfait l'hypothèse (1.1.2). Est introduit alors de la même façon que pour un problème de contrôle optimal classique le coût

$$J_\Gamma : (X, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{A} \mapsto \int_0^{+\infty} \ell(Y^{X,\alpha}(t), \alpha(t)) e^{-\lambda t} dt, \quad (1.1.8)$$

avec  $\lambda > 0$  et  $\ell : \mathbb{R}^2 \times A \rightarrow \mathbb{R}$  qui satisfait l'hypothèse (1.1.3). Ils considèrent pour  $X \in \Gamma$

$$A_X := \left\{ a \in A, \exists \theta > 0, \forall 0 < t < \theta, Y^{X,a}(t) \in \Gamma \right\}, \quad (1.1.9)$$

ainsi que

$$\mathcal{A}_X := \left\{ \alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow A, \text{ mesurable, } \forall t > 0, Y^{X,\alpha}(t) \in \Gamma \right\}, \quad (1.1.10)$$

l'ensemble des contrôles admissibles au point  $X$ . Ils définissent alors la *fonction valeur* du problème de contrôle optimal associé

$$V_\Gamma : X \in \mathbb{R}^2 \mapsto \inf_{\alpha \in \mathcal{A}_X} J(X, \alpha). \quad (1.1.11)$$

L'enjeu de l'article est d'obtenir le bon ensemble de fonctions tests définies sur  $\Gamma$ , les bonnes hypothèses sur  $A$  pour définir une bonne notion d'équations de Hamilton-Jacobi sur un réseau et la bonne notion de solution de viscosité associée.

Les hypothèses faites sur  $A$  sont les suivantes :

**Hypothèse 1.1.7.** Il existe des sous-ensembles fermés non-vides  $A^j$ ,  $j = 1, \dots, n$  de  $A$  tel que

1.

$$A = \bigcup_{j=1}^n A^j$$

2. Pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $a \in A$  et  $X \in J_j$ ,  $f(X, a) \in \mathbb{R}e_j$  si et seulement si  $a \in A^j$ .

3.  $A_0 = \bigcup_{j=1}^n \{a \in A^j : f(0, a) \in \mathbb{R}_+ e_j\} \neq \emptyset$

**Hypothèse 1.1.8.** Pour tout  $j = 1, \dots, n$ , il existe des constantes  $\bar{\zeta}_j, \underline{\zeta}_j > 0$ , tel que

$$\overline{\text{co}}(f(0, A^j)) = [\underline{\zeta}_j, \bar{\zeta}_j]e_j,$$

où  $\overline{\text{co}}(F)$  désigne le cône convexe fermé de  $F$ .

Achdou & al prennent comme ensemble de fonctions tests admissibles  $\mathcal{R}(\Gamma)$  l'ensemble des fonctions  $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

- $\varphi \in \mathcal{C}(\Gamma) \cap \mathcal{C}^1(\Gamma \setminus \{0\})$
- $\forall i = 1, \dots, n, \varphi|_{\bar{J}_i} \in \mathcal{C}^1(\bar{J}_i)$ .

En définissant pour  $X \in \Gamma$  les ensembles

$$FL(X) = \overline{\text{co}}((f(X, a), \ell(X, a)) : a \in A_X), \text{ si } X \neq 0,$$

et

$$FL(0) = \bigcup_{j=1}^n (\overline{\text{co}}((f(0, a), \ell(0, a)) : a \in A^j) \cap \mathbb{R}_+ e_j \times \mathbb{R}),$$

ils introduisent la définition de *solution de viscosité contrainte* de l'équation

$$\lambda u(X) + \sup_{(\zeta, \xi) \in FL(X)} \{-Du(X, \zeta) - \xi\} = 0, \quad X \in \Gamma. \quad (1.1.12)$$

**Définition 1.1.9.** Soit  $u : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée, semi-continue supérieurement.  $u$  est appelée sous-solution de (1.1.12) sur  $\Gamma$ , si pour tout  $\varphi \in \mathcal{R}(\Gamma)$  et tout maximum local  $X_0 \in \Gamma$  de  $u - \varphi$ ,

$$\lambda u(X_0) + \sup_{(\zeta, \xi) \in FL(X_0)} \{-D\varphi(X_0, \zeta) - \xi\} \leq 0.$$

De même, une fonction  $u : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  bornée semi-continue inférieurement est appelée sur-solution de (1.1.12) sur  $\Gamma$ , si pour tout  $\varphi \in \mathcal{R}(\Gamma)$  et tout minimum local  $X_0 \in \Gamma$  de  $u - \varphi$ ,

$$\lambda u(X_0) + \sup_{(\zeta, \xi) \in FL(X_0)} \{-D\varphi(X_0, \zeta) - \xi\} \geq 0.$$

Une fonction  $u : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  continue est une solution de viscosité contrainte de (1.1.12) si c'est une sous- et une sur-solution de (1.1.12) sur  $\Gamma$ .

*Remarque 1.1.10.* Lorsque  $X \in \Gamma \setminus 0$ , la notion de solution de viscosité contrainte pour

(1.1.12) est équivalente à la notion de solution de viscosité classique pour l'équation

$$\lambda u(X) + \sup_{a \in A_x} \{-\langle f(X, a), Du(X) - \ell(X, a) \rangle\} = 0.$$

Sous les hypothèses 1.1.7 et 1.1.8, Achdou & al montrent à l'aide du principe de la programmation dynamique que la fonction  $V$  décrite par (1.1.11) est une solution de viscosité contrainte, continue, de l'équation (1.1.12).

L'unicité s'obtient à l'aide d'un principe de comparaison. Ce principe de comparaison est obtenu en rajoutant des hypothèses supplémentaires sur la valeur de l'hamiltonien à la jonction. Dans [2], Y. Achdou, S. Oudet et N. Tchou parviennent à s'affranchir de ces hypothèses supplémentaires.

À noter que les équations de Hamilton-Jacobi posées sur les réseaux trouvent de nombreuses applications dans l'étude de problèmes de trafic routier. L'article de C. Imbert, R. Monneau et H. Zidani [28] découle de ces problèmes. Dans [27], les auteurs s'intéressent à des problèmes avec des conditions de transmissions aux jonctions particulières ; celles-ci modélisent un embranchement avec différents sens de circulation. On mentionne quelques travaux qui vont dans ce sens, sans prétendre à une exhaustivité. Dans [26], les auteurs considèrent un domaine dépendant du temps, qui modélise une voie de bus. Enfin, dans [18], les auteurs s'intéressent à l'obtention d'un modèle macroscopique de trafic routier à l'aide de changement d'échelle dans des modèles microscopiques.

### 1.1.3 Le problème de Skorokhod

Introduit par A. V. Skorokhod dans les années 60 (voir [42, 43]), le *problème de Skorokhod* est un problème de diffusion avec réflexion. On se donne un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  et  $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue. On cherche un couple de fonctions  $(Y, k)$  continues sur  $[0, +\infty[$ , avec  $k \in BV(]0, T[)$  pour tout  $T > 0$ , satisfaisant, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$Y(t) + k(t) = F(t),$$

et

$$Y(t) \in \Omega.$$

Le terme  $k$  va avoir pour rôle de contraindre  $Y$  à demeurer dans le domaine  $\Omega$ . L'idée est de faire en sorte que  $k$  reste nul le plus possible, que ça soit principalement  $F$  qui dicte la dynamique de  $Y$  au sein de  $\Omega$ .

De nombreux auteurs se sont intéressés au cas du demi-espace ou de la demi-droite, dans des cadres stochastiques ou déterministes, comme A. V. Skorokhod [42, 43], H. P. McKean [39, 40], N. El Karoui [25] ou encore N. El Karoui et M. Chaleyat-Maurel [24] où est considéré le problème de réflexion sur la demi-droite.

Le cas d'un ouvert  $D \subset \mathbb{R}^n$  convexe est traité par H. Tanaka dans [44].

Le travail sur le problème de Skorokhod qui va nous intéresser ici, est celui effectué par P. L. Lions et A. S. Sznitman [34], pour un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ . En effet, la construction du problème étudié dans ce manuscrit est directement inspirée du travail effectué dans l'article de Lions et Sznitman. Lions et Sznitman s'appuient sur une méthode constructive pour déterminer l'existence de solutions au problème de Skorokhod dans le cas où  $F$  est régulière ( $\mathcal{C}^1$ ) et  $\Omega$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Les auteurs effectuent sur  $\partial\Omega$  l'hypothèse qu'il existe un champ de vecteur  $n$ , potentiellement multi-valué, à valeurs dans  $\partial\overline{B}(0, 1)$ , tel que :

$$\begin{aligned} \exists C_0 \geq 0, \quad \forall X \in \partial\Omega, \quad \forall X' \in \overline{\Omega}, \quad \forall k \in n(X) \\ \langle X - X', k \rangle + C_0 |X - X'|^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

et

$$\begin{aligned} \forall X \in \partial\Omega, \quad \text{si } \exists C_0 \geq 0, \quad \text{et } k \in \mathbb{R}^n : \\ \forall X' \in \overline{\Omega}, \quad \langle X - X', k \rangle + C_0 |X - X'|^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

alors il existe  $\theta \geq 0$ , tel que  $k \in \theta n(X)$ .

*Remarque 1.1.11.* Dans le cas où  $\Omega$  est suffisamment régulier,  $n(X)$  désigne simplement le vecteur unitaire sortant normal à  $\Omega$  en  $X$ . On explique à la fin de la présente section pourquoi on énonce le résultat de Lions et Sznitman dans le cas le plus général, où  $\Omega$  est non régulier.

*Remarque 1.1.12.* Si  $\Omega$  est régulier et respecte la condition de *sphère extérieure*, alors (1.1.13) et (1.1.14) sont vérifiées. Formellement, cette condition signifie qu'il existe une sphère de rayon fixe, que l'on peut faire "rouler" sur le bord de  $\Omega$ , telle qu'elle ne soit en contact qu'avec un et un seul point du bord, en lequel elle est tangente à  $\Omega$ . Plus précisément, un ouvert  $\Omega$  régulier respecte la condition de sphère extérieure si, sous l'hypothèse qu'il existe  $R_0 > 0$  tel que, pour tout  $X \in \partial\Omega$ , il existe  $Y \in \mathbb{R}^d$  tel que

$$B(Y, R_0) \cap \Omega = \emptyset, \quad \text{et } |X - Y| = R_0.$$

Alors pour  $C \geq \frac{R_0}{2}$  et pour tout  $X' \in \overline{\Omega}$ ,

$$\langle n(X), X - X' \rangle + C|X - X'|^2 \geq 0.$$

Les auteurs définissent la notion de solution au problème de Skorokhod comme suit :

**Définition 1.1.13.** Soit  $F \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^n)$ . Un couple de fonctions  $Y, k \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^n)$  est dit solution sur  $\Omega$  du problème de Skorokhod associé à  $F$ , si, pour tout  $t \geq 0$ ,

- 1)  $Y(t) + k(t) = F(t)$ ,
- 2)  $Y(t) \in \overline{\Omega}$ ,
- 3)  $k$  est à variations bornées, et satisfait que

$$|k|_t = \int_0^t \mathbf{1}_{\{Y(s) \in \partial\Omega\}} d|k|_s \text{ et } k(t) = \int_0^t \xi(s) d|k|_s, \text{ pour } \xi(s) \in n(Y(s)),$$

où  $|k|_s$  désigne la variation totale de  $k$  sur  $[0, s]$ .

Ils obtiennent alors le théorème

**Théorème 1.1.14.** *Sous les hypothèses (1.1.13) et (1.1.14) il existe une unique solution au problème de Skorokhod associé à  $F$ . De plus, l'application*

$$F \mapsto Y$$

*est 1/2 Hölderienne sur tout compact de  $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^n)$ .*

Pour l'existence d'une solution, dans le cas d'un ouvert régulier, P. L Lions et A. S Sznitman utilisent une méthode constructive. Ils considèrent le problème

$$\begin{cases} (Y^\varepsilon)'(t) &= F'(t) - \frac{1}{\varepsilon} \nabla d(Y^\varepsilon(t)), \quad 0 \leq t \leq T \\ Y^\varepsilon(0) &= F(0), \end{cases} \quad (1.1.15)$$

où  $d : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction positive, nulle sur  $\overline{\Omega}$ , et égale au carré de la distance à  $\overline{\Omega}$  sur un voisinage de  $\overline{\Omega}$ . Alors, en notant

$$k^\varepsilon : t \mapsto \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \nabla d(Y^\varepsilon(s)) ds,$$

ils démontrent la convergence locale uniforme de  $(Y^\varepsilon, k^\varepsilon)$  vers une solution du problème de Skorokhod associé à  $F$ . On utilisera un procédé très analogue pour le travail présenté dans

ce manuscrit. De la même manière que dans [34], la solution  $Y^\varepsilon$  de (1.1.15) a vocation à demeurer dans  $\overline{\Omega}$  à la limite, dans notre cas  $\overline{\Omega}$  sera un réseau. Il s'agit d'un fermé de  $\mathbb{R}^2$  d'intérieure vide, non convexe, qui ne respecte pas les conditions (1.1.13) et (1.1.14). Plus précisément, une application  $n$  qui vérifierait ces conditions en tout point du réseau n'existe pas. Si l'on considère un réseau

$$\Gamma := \{0\} \cup \bigcup_{i=1}^n J_i,$$

conformément à la définition 1.1.6 d'une jonction. Alors pour tout  $i = 1, \dots, n$  et tout  $X \in J_i$ ,

$$n(X) = \{X^\perp, -X^\perp\}$$

convient, au sens où  $n(X)$  respecte (1.1.13) et (1.1.14). En revanche, il n'est pas forcément possible de définir une telle application en un sommet. C'est le cas du réseau qui sera étudié dans ce manuscrit, à savoir

$$\Gamma := \{0\} \cup J_N \cup J_O \cup J_S \cup J_E, \tag{1.1.16}$$

où, en notant  $(e_1, e_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ ,

- $J_N := \mathbb{R}_+^* e_N$ , où  $e_N := e_2$ ,
- $J_O := \mathbb{R}_+^* e_O$ , où  $e_O := -e_1$ ,
- $J_S := \mathbb{R}_+^* e_S$ , où  $e_S := -e_2$ ,
- $J_E := \mathbb{R}_+^* e_E$ , où  $e_E := e_1$ .

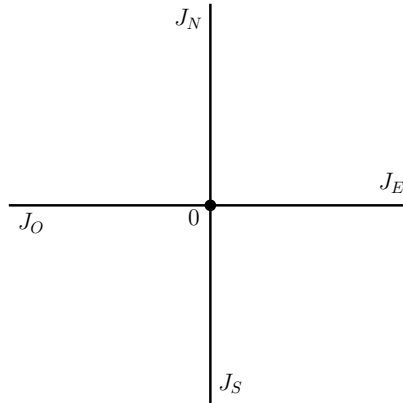


FIGURE 1.3 – Le réseau  $\Gamma$

On travaille sur cet objet car c'est une illustration très simple du fait que les structures de réseau n'ont pas les propriétés nécessaires pour appliquer les résultats sur le problème de Skorokhod présentés par P. L Lions et A. S Sznitman. On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe une application  $n$  qui vérifie (1.1.13) et (1.1.14), et on considère

$$k := \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \in n(0).$$

On suppose sans perdre de généralité que  $k_1 \neq 0$ . Alors en choisissant

$$X = \begin{pmatrix} \frac{k_1}{2C_0} \\ 0 \end{pmatrix} \in \Gamma,$$

où  $C_0$  est la constante dans l'hypothèse (1.1.13), on obtient

$$\begin{aligned} \langle 0 - X, k \rangle + C_0 |0 - X|^2 &= -\frac{k_1^2}{4C_0} \\ &< 0. \end{aligned}$$

## 1.2 Description du problème étudié et résultats

On décrit dans cette section les questions étudiées au cours de cette thèse, ainsi que les résultats obtenus. On donnera d'abord une heuristique de la question qui a initié le travail effectué lors de ces quatre ans. On posera ensuite le problème précis étudié, pour enfin décrire les résultats obtenus.

### 1.2.1 Problématique initiale

On considère une jonction de  $\mathbb{R}^2$  au sens de la définition 1.1.6. On plonge  $\Gamma$  dans  $\mathbb{R}^2$  comme fait dans [4], au sens où on considère  $\Gamma$  comme un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  muni de sa topologie usuelle. Dans tout le manuscrit, le terme *trajectoire* désignera une solution du système (1.2.1) ou bien du problème limite. Soit  $A$  un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^2$ . On pose

$$\mathcal{A} := \{\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow A, \text{ mesurable}\}.$$

On considère alors pour  $X \in \mathbb{R}^2$  et  $\alpha \in \mathcal{A}$ , le système

$$\begin{cases} (Y^{X,\alpha,\varepsilon})'(t) &= f(Y^{X,\alpha,\varepsilon}(t), \alpha(t)) - \frac{1}{\varepsilon} \nabla d(Y^{X,\alpha,\varepsilon}(t)) \\ Y^{X,\alpha,\varepsilon}(0) &= X \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (1.2.1)$$

où  $\frac{1}{\varepsilon} \nabla d$  est un terme de pénalisation,  $d \in \mathcal{C}^{1,1}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_+)$  ne dépend que de la géométrie de  $\Gamma$ , tel que

$$\{d = 0\} = \{\nabla d = 0\} = \Gamma. \quad (1.2.2)$$

Ce terme de pénalisation a pour objectif de contraindre la trajectoire, à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , à évoluer sur le réseau. On pose alors

$$F^\varepsilon : (Y, a) \in A \times \mathbb{R}^2 \mapsto f(Y, a) - \frac{1}{\varepsilon} \nabla d(Y).$$

On associe à (1.2.1) un coût instantané

$$\ell : \mathbb{R}^2 \times A \rightarrow \mathbb{R},$$

et on considère, pour  $\lambda > 0$  donné,

$$J^\varepsilon(X, \alpha) := \int_0^{+\infty} \ell(Y^\varepsilon(t), \alpha(t)) e^{-\lambda t} dt. \quad (1.2.3)$$

On pose enfin

$$V^\varepsilon(X) := \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} J^\varepsilon(X, \alpha).$$

On suppose que  $f$  et  $\ell$  satisfont respectivement les hypothèses (1.1.2) et (1.1.3) et que  $A$  vérifie les hypothèses 1.1.7 et 1.1.8. Sous ces hypothèses, le théorème 1.1.4 s'applique et  $V^\varepsilon$  est l'unique solution de viscosité de l'équation

$$\lambda u^\varepsilon(X) + \sup_{a \in A} \{-\langle \nabla u^\varepsilon(X), F^\varepsilon(X, a) \rangle - \ell(X, a)\} = 0, \quad X \in \mathbb{R}^2. \quad (1.2.4)$$

Cette approche a pour but d'obtenir les deux résultats suivants :

1. Obtenir la convergence (dans un sens qui sera à préciser) de la suite de trajectoires  $(Y^{X,\alpha,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$  solutions de (1.2.1), vers une trajectoire limite  $Y$ , tel que pour tout  $t > 0$ ,

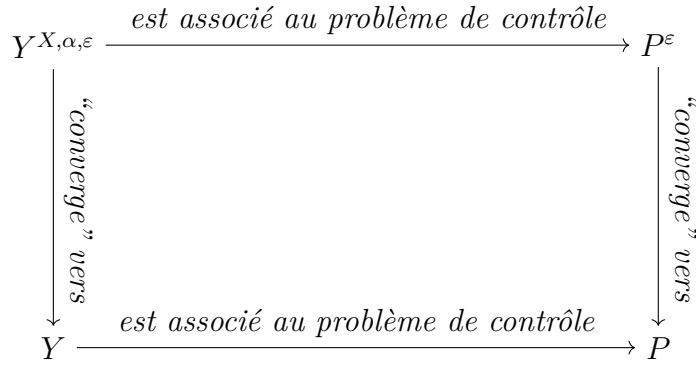
$$Y(t) \in \Gamma.$$



2. Que la trajectoire limite  $Y$  soit associée à un problème de contrôle optimal posé sur  $\Gamma$  au sens de [1, 28], limite (en un sens également à préciser) de la suite de problèmes de contrôles posés sur  $\mathbb{R}^2$  à  $\varepsilon$  fixé.

On s'attend, à ce que la suite  $(V^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge vers une fonction  $V$  qui soit la fonction valeur du problème limite associé au système vérifié par  $Y$ .

On peut résumer les deux points ci-dessus par le diagramme suivant, où  $P^\varepsilon$  est une notation heuristique au problème de contrôle optimal posé sur  $\mathbb{R}^2$ , associé au système (1.2.1), et  $P$  le problème de contrôle optimal posé sur  $\Gamma$  au sens de [1] associé au système limite vérifié par  $Y$ .



On remarque que l'on s'autorise une condition initiale hors du réseau. Cela s'interprète comme autoriser la trajectoire limite  $Y$  à “sauter” sur le réseau à  $t = 0$ , avant de se mettre à évoluer continûment sur celui-ci.

Dans les articles [1, 3] la condition initiale est prise sur le réseau, et les contrôles admissibles sont uniquement ceux permettant aux solutions de (1.1.1) d'être telles que pour tout  $t \geq 0$ ,  $Y(t) \in \Gamma$ . Dans [4], comme décrit dans la sous-section 1.1.2, Achdou et Tchou approchent une trajectoire définie sur le réseau par contrainte d'état. On considère une suite d'ouverts  $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$ , décroissante pour l'inclusion qui converge vers  $\Gamma$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , on considère  $\mathcal{A}_\varepsilon$  l'ensemble des contrôles qui contraignent la solution de (1.1.1) à rester dans  $\Omega_\varepsilon$ . À la limite ils obtiennent les résultats de [1].

Le but ici est d'approcher un problème de contrôle optimal posé sur un réseau, sans avoir à se restreindre sur l'ensemble des contrôles admissibles, ou sur l'ensemble des conditions initiales. On veut s'autoriser l'ensemble de contrôles le plus général possible. L'idée d'un système de la forme (1.2.1) provient de la manière dont Lions et Sznitman construisent des solutions au problème de Skorokhod, comme décrit dans la sous-section

1.1.3. Sous les hypothèses faites sur  $d$ , le vecteur

$$\frac{1}{\varepsilon} \nabla d(Y)$$

est toujours “dirigé” vers le réseau, pour tout  $Y \in \mathbb{R}^2$ . Cela aura pour conséquence sur le vecteur vitesse de la solution de (1.2.1), dès que  $\varepsilon$  sera suffisamment petit, d’avoir tendance à “ramener”  $Y^{X,\alpha,\varepsilon}$  vers le réseau.

## 1.2.2 Convergence des trajectoires pénalisées et de la suite des fonctions valeur

Dans tout le manuscrit, on se placera dans le cas particulier du réseau défini par (1.1.16), dont on redonne ici une illustration

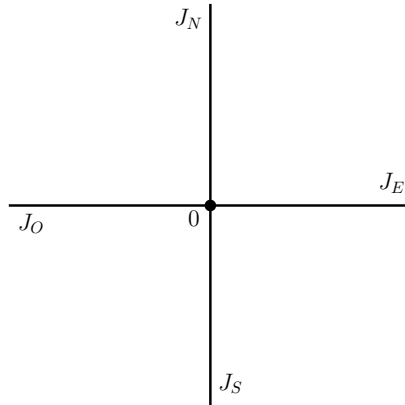


FIGURE 1.4 – Le réseau  $\Gamma$

Le choix de cette configuration est fait pour des raisons de simplifications de calculs. La spécificité de ce réseau est qu’il n’a pas de demi-droite, au sens où, pour toute arête  $J_i$  du réseau,  $-J_i$  est aussi une arête du réseau. Cela permet de choisir une fonction polynomiale simple pour  $d$ ,

$$d : X \in \mathbb{R}^2 \mapsto X_1^2 X_2^2.$$

*Remarque 1.2.1.* La fonction  $d$  satisfaisant (1.2.2) n’est évidemment pas unique. Dans le cas présent on aurait pu choisir -par exemple- n’importe quelle fonction de la forme

$$d : X \in \mathbb{R}^2 \mapsto (\lambda X_1)^{2p} (\mu X_2)^{2q},$$

avec  $\lambda, \mu > 0$  et  $p, q \in \mathbb{N}$ .

*Remarque 1.2.2.* Le choix des notations pour les arêtes et leurs vecteurs directeurs provient des quatre points cardinaux.

Le choix d'un tel réseau n'est a priori pas restrictif, il permet d'alléger les calculs. On proposera dans le dernier chapitre de ce manuscrit des éléments de généralisation.

Une étude des propriétés algébriques de  $d$  ainsi que de ses trajectoires de descente de gradient est donnée dans le chapitre 2. On donnera dans ce même chapitre des résultats complémentaires sur les équations différentielles ordinaires et sur l'étude de trajectoires de descente de gradients. En particulier, on montre que la solution du système

$$\begin{cases} Y'(t) &= -\nabla d(Y(t)) \\ Y(0) &= X \in \mathbb{R}^2 \end{cases}. \quad (1.2.5)$$

admet une limite lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ . Plus précisément, on établit la proposition 2.3.2 :

**Proposition 1.2.3.** *Pour tout  $X \in \mathbb{R}^2$ , la limite de  $Y(t)$  existe lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , et en notant*

$$\bar{X} := \lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t), \quad (1.2.6)$$

$\bar{X} \in \Gamma$ .

On étudie dans le chapitre 3 le système (1.2.1), pour  $\alpha \in \mathcal{A}$  fixé. L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'asymptotique  $\varepsilon \rightarrow 0$  des trajectoires  $Y^{X, \alpha, \varepsilon}$ , et d'obtenir des résultats uniformes en  $\alpha$ . On simplifiera alors les notations en réécrivant (1.2.1)

$$\begin{cases} (Y^\varepsilon)'(t) &= f(Y^\varepsilon(t), t) - \frac{1}{\varepsilon} \nabla d(Y^\varepsilon(t)), \quad t \geq 0 \\ Y^\varepsilon(0) &= X \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (1.2.7)$$

Le résultat principal du chapitre 3 est le suivant :

**Théorème 1.2.4.** *On suppose que l'hypothèse (1.1.2) est vérifiée par  $f$ . Alors pour tout  $X \in \mathbb{R}^2$ , il existe une suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels convergeant vers 0, ainsi qu'un couple de fonctions  $(Y, k)$ , tel que*

1. *Si  $X \in \Gamma$ , alors pour tout  $T > 0$ , la suite  $(Y^{\varepsilon_n}, k^{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $(Y, k)$  uniformément sur  $[0, T]$  et simplement sur  $[0, +\infty[$ . De plus,  $(Y, k) \in (H^1([0, T]))^2$ .*

2. Si  $X \notin \Gamma$ , alors pour tout  $T > 0$  et tout  $\eta > 0$ , la suite  $(Y^{\varepsilon_n}, k^{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $(Y, k)$  uniformément sur  $[\eta, T]$ , et simplement sur  $[0, +\infty[$ . De plus,  $(Y, k) \in (L^\infty([0, T]) \cap H^1([\eta, T]))^2$ .
3. Si  $X \notin \Gamma$ , alors

$$Y(0^+) := \lim_{t \rightarrow 0^+} Y(t) = \bar{X},$$

où  $\bar{X}$  est défini par (1.2.6).

4. Pour tout  $t > 0$ ,

$$Y(t) \in \Gamma. \quad (1.2.8)$$

5. Pour tout  $t \geq 0$

$$Y(t) = X + \int_0^t f(Y(s), s) ds - k(t). \quad (1.2.9)$$

Il est important de remarquer qu'on n'est pas en mesure d'obtenir l'existence de la limite, à savoir l'unicité de la trajectoire limite. La principale conséquence étant qu'il faudra considérer lors de l'étude du problème de contrôle dans le chapitre 5 une fonction valeur qui minimise le coût sur l'ensemble des contrôles *et* sur les différentes trajectoires limites possibles. La démonstration de ce théorème repose sur des estimations  $L_{\text{loc}}^\infty$  uniformes en  $\varepsilon$  sur  $Y^\varepsilon$  et  $k^\varepsilon$ , et des estimations  $L_{\text{loc}}^2$  uniformes en  $\varepsilon$  sur  $(Y^\varepsilon)'$  et  $(k^\varepsilon)'$ . En particulier, le caractère  $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$  en dimension 1 donne la continuité des trajectoires limites sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Le troisième point du théorème s'obtient en montrant que toutes les sous-suites  $(Y(t_n))_{n \in \mathbb{N}, t_n > 0}$  convergent vers la même limite. On montre d'abord la convergence en norme de  $(|Y(t_n)|)_{n \in \mathbb{N}, t_n > 0}$ , puis on utilise le fait que  $\bar{X}$  est sur le réseau  $\Gamma$  pour conclure.

Une trajectoire limite  $Y$  étant continue, on peut écrire l'ensemble des instants en lesquels elle n'est pas à la jonction de la manière suivante :

$$\{Y \neq 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} ]a_k, b_k[, \quad ]a_k, b_k[ \subset \mathbb{R}_+^*, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.2.10)$$

Il découle du point 4. du théorème 1.2.4 que pour tout  $t > 0$ , et toute trajectoire limite  $Y$ , si  $Y(t) \neq 0$ , alors il existe  $k \in \mathbb{N}$  et  $i \in \{N, O, S, E\}$ , tel que  $t \in ]a_k, b_k[$  et  $Y(t) \in J_i$ .

On obtient alors une caractérisation des trajectoires **à l'intérieur des arêtes**, qui est donnée par la proposition 3.4.3 que l'on écrit ici (avec  $e_i^\perp$  étant la notation pour la rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  du vecteur  $e_i$ ) :

**Proposition 1.2.5.** *Soit une donnée initiale  $X \in \mathbb{R}^2$  et  $(Y, k)$  une valeur d'adhérence de  $(Y^\varepsilon, k^\varepsilon)$ . Soit  $m \in \mathbb{N}$  et  $i \in \{N, O, S, E\}$  tel que pour tout  $t \in ]a_m, b_m[$ ,  $Y(t) \in J_i$ , où*

$]a_m, b_m[$  est donné par (1.2.10). Alors si  $a_m = 0$  pour tout  $t \in [0, b_m]$ ,

$$\begin{cases} \langle Y(t), e_i^\perp \rangle = 0 \\ \langle Y(t), e_i \rangle = \langle \bar{X}, e_i \rangle + \int_0^t \langle f(Y(s), s), e_i \rangle ds, \end{cases} \quad (1.2.11)$$

et

$$\begin{cases} \langle k(t), e_i \rangle = \langle X - \bar{X}, e_i \rangle \\ \langle k(t), e_i^\perp \rangle = \langle X - \bar{X}, e_i^\perp \rangle + \int_0^t \langle f(Y(s), s), e_i^\perp \rangle ds. \end{cases} \quad (1.2.12)$$

Si  $a_m \neq 0$ , alors pour tout  $t \in [a_m, b_m]$ ,

$$\begin{cases} \langle Y(t), e_i^\perp \rangle = 0 \\ \langle Y(t), e_i \rangle = \int_{a_m}^t \langle f(Y(s), s), e_i \rangle ds, \end{cases} \quad (1.2.13)$$

et

$$\begin{cases} \langle k(t), e_i \rangle = \langle k(a_m), e_i \rangle \\ \langle k(t), e_i^\perp \rangle = \langle k(a_m), e_i^\perp \rangle + \int_{a_m}^t \langle f(Y(s), s), e_i^\perp \rangle ds. \end{cases} \quad (1.2.14)$$

Cette proposition assure qu'au sein d'une arête  $J_i$  du réseau, la trajectoire limite est solution d'une équation différentielle sur la composante tangentielle de la dynamique  $f$  à  $J_i$ , là où la pénalisation limite  $k$  est quant à elle déterminée par sa composante normale. On s'aperçoit donc que l'évolution d'une trajectoire limite le long d'une arête ne dépend pas de la pénalisation mais uniquement de la dynamique  $f$  initialement choisie.

On accorde de l'importance au fait qu'on est capable de déterminer l'expression de  $Y$  uniquement si l'on sait a priori qu'elle se trouve dans une arête. En effet, et c'est en parti la raison pour laquelle on se trouve dans l'impossibilité de conclure quant à l'unicité de la trajectoire limite, lorsqu'une trajectoire limite  $Y$  atteint la jonction en un temps  $t_0$ , on n'est pas en mesure de déterminer son comportement sur un intervalle du type  $]t_0, t_0 + \delta]$ . La trajectoire reste-t-elle en 0? Rentre-t-elle dans une branche? Si oui, laquelle? Oscille-t-elle autour de la jonction? Ce sont des questions qui restent ouvertes.

On exhibe aussi dans le chapitre 3 des zones d'invariance pour les solutions du système (1.2.7), ainsi que des temps d'atteintes de ces zones pour les trajectoires  $Y^\varepsilon$  solutions.

Dans le chapitre 4, on fait un parallèle entre l'étude des trajectoires limites  $Y^\varepsilon$  et l'étude du problème de Skorokhod posé sur  $\Gamma$ . Ce problème n'est en soit pas défini sur  $\Gamma$  au sens de celui défini dans [34];  $\Gamma$  est un fermé d'intérieur vide, ne respectant pas la condition de sphère extérieure. La technique de pénalisation utilisée dans le chapitre

3 est la même que celle utilisée par P.L Lions et A.S Sznitman dans [34] pour construire des solutions au problème de Skorokhod sur un ouvert régulier. On obtient à la limite par (1.2.9) que le couple  $(Y, k)$  respecte une égalité de la forme

$$Y(t) + k(t) = F(t),$$

où  $F(t) \in \mathbb{R}^2$  et  $Y(t) \in \Gamma$ , et où  $k'$  est orthogonal à  $\Gamma$ . Cela fait grandement penser à la définition donnée dans [34] de la solution au problème de Skorokhod. Néanmoins le problème 3.3.1 respecté par un couple  $(Y, k)$  est mal posé, au sens où il n'y a pas unicité du couple solution respectant les différentes propriétés des trajectoires et pénalisations limites exhibées dans le chapitre 3.

On étudie également dans ce chapitre plusieurs exemples de dynamiques pour 1.2.7. On regardera en particulier le cas où la dynamique  $f$  est constante, et où  $X$  est un point du réseau. On est dans ces cas précis en mesure d'établir l'unicité de la limite, ainsi que de la déterminer. On exhibera également un exemple de dynamique pour laquelle, si le système est à la jonction à  $t = 0$ , la trajectoire limite  $Y$  ne rentre dans aucune branche, au sens où il n'existe pas  $J_i$  une arête de  $\Gamma$  et  $\delta_i > 0$ , tel que pour tout  $t \in ]0, \delta_i[$ ,

$$Y(t) \in J_i.$$

Dans le chapitre 5, on étudie l'asymptotique du problème de contrôle optimal défini par le système 1.2.1, que l'on rappelle ici :

$$\begin{cases} (Y^{X,\alpha,\varepsilon})'(t) &= f(Y^{X,\alpha,\varepsilon}(t), \alpha(t)) - \frac{1}{\varepsilon} \nabla d(Y^{X,\alpha,\varepsilon}(t)) \\ Y^{X,\alpha,\varepsilon}(0) &= X \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (1.2.15)$$

Le théorème 1.2.4 permet de définir, pour  $\alpha \in \mathcal{A}$  et  $X \in \mathbb{R}^2$

$$\omega(X, \alpha) := \left\{ Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2, \exists \varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0, \left\| Y^{X,\alpha,\varepsilon_n} - Y \right\|_{L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+^*)} \rightarrow 0 \right\}, \quad (1.2.16)$$

l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite des solutions de (1.2.1).

On définit les quantités asymptotiques suivantes, qui ne sont a priori pas de "vraies" fonctions coût et valeur au sens de celles définies dans [1]. Pour  $X \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha \in \mathcal{A}$  et  $Y^{X,\alpha} \in \omega(X, \alpha)$ ,

$$J(Y^{X,\alpha}) := \int_0^{+\infty} \ell(Y^{X,\alpha}(s), \alpha(s)) e^{-\lambda s} ds, \quad (1.2.17)$$

et de même pour tout  $X \in \mathbb{R}^2$

$$V(X) := \inf_{\substack{\alpha \in \mathcal{A} \\ Y^{X,\alpha} \in \omega(X,\alpha)}} J(Y^{X,\alpha}). \quad (1.2.18)$$

Dans notre analyse, nous ferons les hypothèses suivantes :

**Hypothèse 1.2.6.** Pour tout  $(X, a) \in \mathbb{R}^2 \times A$ ,

$$\ell(X, a) \equiv \ell(X). \quad (1.2.19)$$

**Hypothèse 1.2.7.** Pour tout  $X \in \mathbb{R}^2$

$$\overline{B}(0, 1) \subset f(X, A). \quad (1.2.20)$$

*Remarque 1.2.8.* L'hypothèse (1.2.19) est restrictive mais est essentielle pour la preuve du théorème 1.2.10. On est incapable de s'en affranchir ici bien que cela permettrait d'avoir un résultat plus général. On traite dans le chapitre 5 l'exemple 5.2.10, dans lequel  $\ell$  a une dépendance selon les coordonnées de  $a \in A$ , et entraîne l'invalidité du théorème 1.2.10.

*Remarque 1.2.9.* L'hypothèse (1.2.20) est une hypothèse de forte contrôlabilité en tout point de l'espace, similaire à celle effectuée dans les travaux [1, 2, 4] à l'origine. On a ici besoin de cette hypothèse en tout point de l'espace, notamment pour obtenir les résultats de suivis de trajectoire de la section 5.1.3.

Le résultat principal de ce chapitre, qui est le résultat principal de ce manuscrit est le suivant

**Théorème 1.2.10.** *On suppose que les hypothèses (1.1.2), (1.1.3), (1.2.19) et (1.2.20) sont vérifiées. Alors*

1.  $(V^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  converge localement uniformément vers  $V$  sur  $\mathbb{R}^2$ ,
2. Pour tout  $X \in \mathbb{R}^2$ ,  $V(X) = V_\Gamma(\overline{X})$ , où pour tout  $X \in \mathbb{R}^2$ ,  $\overline{X}$  est la notation donnée par l'égalité (2.3.7), et  $V_\Gamma$  est la fonction valeur sur le réseau défini en (1.1.11).

Ce théorème assure la convergence de la suite de fonctions valeur associées aux systèmes pénalisés vers la fonction valeur solution du problème de Hamilton-Jacobi posé sur  $\Gamma$ , défini dans [1]. On n'a cependant pas la convergence de la suite des hamiltoniens.

Cela se prouve en utilisant ce qu'on appellera des *résultats de suivi de trajectoires*. Plus précisément, pour  $X \in \mathbb{R}^2$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $\beta \in \mathcal{A}$ , on dira que l'on peut suivre la trajectoire

$Y^{X,\beta,\varepsilon}$  depuis le réseau, s'il existe  $\alpha_\beta \in \mathcal{A}_X$  (c.f. (1.1.10)) un contrôle maintenant la trajectoire sur le réseau, tel que l'on ait un résultat de la forme

$$\forall \varepsilon > 0, \forall t \geq t^\varepsilon, \left| (Y^{X,\beta,\varepsilon} - Y^{\bar{X},\alpha_\beta})(t) \right| \leq \varepsilon^\delta t,$$

où  $\delta > 0$  et  $t^\varepsilon$  est un temps d'ordre de grandeur  $\varepsilon^\gamma$ ,  $\gamma > 0$ . On aura des résultats analogues pour suivre une trajectoire sur réseau par une trajectoire pénalisée, ou encore pour suivre une trajectoire pénalisée à l'aide d'une autre trajectoire pénalisée. Ce sont ces résultats de suivi de trajectoire qui posent le plus de problèmes, essentiellement techniques, dans ce chapitre. Une fois qu'ils sont établis, la démonstration du théorème 1.2.10 devient aisée.

Dans le chapitre 6, on discute des questions qui restent ouvertes à l'issue de ce travail, ainsi que de certaines extensions immédiates. On discutera en particulier autour du choix de la fonction distance pour un réseau général.

Le travail effectué au cours de cette thèse est original, en ce sens où la contrainte d'état sur les trajectoires ne se fait pas au niveau de l'ensemble des contrôles considérés, mais à l'aide d'un terme de pénalisation qui dépend uniquement de la géométrie du domaine considéré.





# RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

---

## 2.1 Quelques résultats sur les équations différentielles

Il s'agit dans cette section d'adapter les résultats classiques d'équations différentielles ordinaires (existence et unicité des solutions, continuité du flot par rapport à un paramètre) dans le cas où la dynamique n'est pas continue par rapport à la variable temporelle mais seulement mesurable. On se basera sur le travail effectué par C. Wagschal dans [45, section 2.A], qui re-démontre les résultats classiques d'EDO (Cauchy-Lipschitz, théorème de sortie de tout compact et lemme de Grönwall) dans cette configuration. L'objet principal de cette section est le théorème 2.1.10, qui donne un résultat de régularité du flot par rapport à un paramètre.

Dans toute cette section,  $I$  désignera un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $\Omega$  un ouvert de  $E$ . Pour  $F : I \times \Omega \rightarrow E$ , et  $t_0 \in I$  on considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y'(t) &= F(Y(t), t), \\ Y(t_0) &= X_0 \in \Omega. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

On appelle *solution du problème de Cauchy* (2.1.1) un couple  $(J, \varphi)$ , où  $J \subset I$  est un intervalle contenant  $t_0$  et  $\varphi : J \rightarrow E$  une fonction localement absolument continue sur  $J$  (i.e absolument continue sur tout compact de  $J$ ), tel que  $\varphi(t_0) = X_0$  et pour presque tout  $t \in J$ ,  $\varphi'(t) = F(\varphi(t), t)$ .

On dira que  $(J, \varphi)$  est *maximale* si pour toute solution  $(\tilde{J}, \tilde{\varphi})$ ,  $\tilde{J} \subset J$  et  $\tilde{\varphi} = \varphi|_{\tilde{J}}$ .

On dira que  $(J, \varphi)$  est *globale* si  $J = I$ .

### 2.1.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz pour des fonctions de Carathéodory

Les résultats de cette sous-section peuvent être trouvés dans [45, chap 2.A], avec des versions plus faibles pour certains. Ces résultats seront utilisés pour établir le théorème

2.1.10, ainsi que dans le chapitre 3, lors d'une discussion autour de l'existence de la limite de la suite de solutions  $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ , du système 1.2.7.

**Définition 2.1.1.** Une fonction  $F : I \times \Omega \rightarrow E$  est appelée *fonction de Carathéodory* si

- 1) pour tout  $X \in \Omega$ , la fonction  $t \mapsto F(X, t)$  est mesurable,
- 2) pour presque tout  $t \in I$ , la fonction  $X \mapsto F(X, t)$  est continue.

La preuve du théorème suivant s'effectue comme dans le cas où  $F$  est continue par rapport à sa variable temporelle. On utilise un théorème de point fixe, qui est rendu possible grâce à des hypothèses de locale intégrabilité sur  $F$ .

**Théorème 2.1.2** (Théorème de Cauchy-Lipschitz local). *On suppose*

- 1) Pour tout compact  $K \subset \Omega$ , il existe  $L_K > 0$  tel que, pour presque tout  $t \in I$  et tout  $(X, Y) \in K^2$ ,

$$|F(X, t) - F(Y, t)| \leq L_K |X - Y|,$$

- 2)  $F$  est une fonction de Carathéodory et pour tout  $X \in \Omega$ ,  $t \mapsto F(X, t)$  est localement intégrable.

Alors le problème de Cauchy (2.1.1) admet une unique solution maximale  $(I_{X_0}, Y)$ .

On rappelle aussi un théorème de sortie de tout compact.

**Théorème 2.1.3** (Théorème de sortie de tout compact). *Soit  $Y : ]a, b[ \subset I \rightarrow \Omega$ , une solution maximale de (2.1.1), où  $b < +\infty$ . On suppose*

- 1) Pour tout  $Y \in \Omega$  il existe  $\varepsilon > 0$  et  $r > 0$ , tel que pour presque tout  $t \in [b - \varepsilon, b[$ , et tout  $X \in B(Y, r)$ ,

$$|F(X, t)| \leq L_r,$$

où  $L_r$  est une constante strictement positive.

- 2)  $F$  est une fonction de Carathéodory.

Alors pour tout compact  $K \subset \Omega$ , il existe  $s_K \in ]a, b[$ , tel que pour tout  $t \in [s_K, b[$ ,

$$Y(t) \notin K.$$

*Remarque 2.1.4.* Dans le cas où  $F$  est bornée et localement uniformément Lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable, les conditions 2) du théorème 2.1.2 et 1) du théorème 2.1.3 sont automatiquement vérifiées.

*Remarque 2.1.5.* On peut remplacer dans le théorème 2.1.1 la constante  $L_K$  par une fonction

$$g_K : I \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

localement intégrable [45, Chap 2.A, Théorème 2.2.3]. Il en va de même pour  $L_r$  dans la proposition 2.1.3. Cela est dû au résultat suivant, qui est une version du lemme de Gronwall plus faible que celle utilisée habituellement.

**Lemme 2.1.6** (Lemme de Gronwall). *Soit  $\varphi : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction absolument continue telle que pour presque tout  $t \in [t_1, t_2]$ ,*

$$\varphi'(t) \leq a(t)\varphi(t) + b(t),$$

où  $a$  et  $b$  sont intégrables. Alors

$$\varphi(t_2) \leq \varphi(t_1)e^{\int_{t_1}^{t_2} a(s) ds} + \int_{t_1}^{t_2} b(\tau)e^{\int_{t_1}^{\tau} a(s) ds} d\tau.$$

## 2.1.2 Dépendance par rapport à un paramètre

On considère dans cette section le système

$$\begin{cases} Y'(t) = F(Y(t), t, \varepsilon) \\ Y(t_0) = X_0, \end{cases} \quad (2.1.2)$$

où  $F$  est une fonction

$$I \times \Omega \times \Xi \rightarrow E,$$

où  $\Xi$  est un espace métrique. Pour tout  $\varepsilon \in \Xi$ , on appelle *solution du problème de Cauchy* (2.1.2) un couple  $(J^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)$ , où  $J^\varepsilon \subset I$  est un intervalle contenant  $t_0$  et  $\varphi : J^\varepsilon \rightarrow E$  une fonction localement absolument continue sur  $J^\varepsilon$  (i.e absolument continue sur tout compact de  $J^\varepsilon$ ), tel que  $\varphi^\varepsilon(t_0) = X_0$  et pour presque tout  $t \in J^\varepsilon$ ,  $(\varphi^\varepsilon)'(t) = F(\varphi^\varepsilon(t), t, \varepsilon)$ .

On effectue l'hypothèse suivante sur  $F$  :

### Hypothèse 2.1.7.

- 1) Pour tout  $\varepsilon \in \Xi$ ,

$$(X, t) \in \Omega \times I \mapsto F(X, t, \varepsilon)$$

est une fonction de Carathéodory, et pour tout  $X \in \Omega$ ,  $t \mapsto F(X, t, \varepsilon)$  est localement intégrable, uniformément par rapport à  $\varepsilon$ .

- 2) Pour tout compact  $K \subset \Omega$ , il existe  $L_K > 0$ , tel que pour presque tout  $t \in I$ , pour tout  $\varepsilon \in \Xi$  et tout  $X, Y \in K$ ,

$$|F(X, t, \varepsilon) - F(Y, t, \varepsilon)| \leq L_K |X - Y|.$$

Sous l'hypothèse 2.1.7, le théorème 2.1.2 s'applique à  $\varepsilon$  fixé. La proposition suivante fournit l'existence d'un intervalle d'existence de solutions pour (2.1.2), uniforme en  $\varepsilon \in \Xi$ .

**Proposition 2.1.8.** *Il existe  $I_{(t_0, X_0)} \subset I$  indépendant de  $\varepsilon \in \Xi$ , tel que pour tout  $\varepsilon \in \Xi$ , il existe une unique solution  $(I_{(t_0, X_0)}, Y)$  de (2.1.2).*

*Démonstration.* L'unicité à  $\varepsilon$  fixé se traite de la même manière que pour le théorème de Cauchy-Lipschitz 2.1.2. On traite ici la question d'un intervalle d'existence uniforme en  $\varepsilon \in \Xi$ .

Soit  $r > 0$ , on pose

$$K := \overline{B}(X_0, r)$$

L'hypothèse 2.1.7 donne l'existence de  $t_r > 0$ , indépendant de  $\varepsilon \in \Xi$ , tel que pour tout  $\varepsilon \in \Xi$

$$\int_{t_0 - t_r}^{t_0 + t_r} (|F(X_0, s, \varepsilon)| + L_K r) ds \leq r.$$

Il suffit ensuite de refaire la preuve classique du théorème de Cauchy-Lipschitz à l'aide d'une méthode de point fixe pour montrer que pour tout  $\varepsilon \in \Xi$  il existe une solution de (2.1.2) définie sur  $]t_0 - t_r, t_0 + t_r[$ . De plus, pour tout  $t \in ]t_0 - t_r, t_0 + t_r[$ , pour tout  $\varepsilon \in \Xi$ ,  $Y(t) \in K$ .  $\square$

**Définition 2.1.9.** On appelle **flot** associé à (2.1.2) l'application

$$\varphi_{(t_0, X_0)} : (t, \varepsilon) \in I_{(t_0, X_0)} \times \Xi \mapsto Y(t),$$

où  $I_{(t_0, X_0)}$  est donné par la proposition 2.1.8 et  $Y$  la solution de (2.1.2) définie sur  $I_{(t_0, X_0)}$ .

On s'intéresse dans cette section à la régularité du flot sur  $I_{(t_0, X_0)}$ .

Lorsque  $F$  est continue et localement lipschitzienne, il est bien connu (voir [19, théorème 1.11.1, p.126] et [45, théorème 2.5.2, p.344]) que  $\varphi_{(t_0, X_0)}$  est elle aussi continue. Le théorème suivant apporte la continuité de  $\varphi_{(t_0, X_0)}$  lorsque  $F$  n'est que mesurable par rapport au temps, en rajoutant des hypothèses.

**Théorème 2.1.10.** *On suppose que  $F$  respecte l'hypothèse 2.1.7. On suppose de plus que pour tout compact  $K \subset \Omega$ , il existe  $\tilde{\omega}_K : (t, s) \in I \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , continue, tel que*

1.  $\tilde{\omega}_K(s, r) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} 0$ , uniformément par rapport à  $s \in I$ ,
2. pour tout  $X \in K$ , presque tout  $t \in I$  et tout  $\varepsilon, \varepsilon' \in \Xi$ ,

$$|F(X, t, \varepsilon) - F(X, t, \varepsilon')| \leq \tilde{\omega}_K(t, |\varepsilon - \varepsilon'|).$$

Alors  $(t, \varepsilon) \in I \times \Xi \mapsto \varphi_{(t_0, X_0)}(t, \varepsilon)$  est continue sur  $I \times \Xi$ .

*Démonstration.* On mentionne d'abord le lemme suivant, dont on trouvera la preuve dans [19, section II.1, lemme 1.10.3].

**Lemme 2.1.11.** *Soit  $\varphi : I \times \Xi \rightarrow E$  séparément continue par rapport à  $t \in I$  et  $\varepsilon \in \Xi$ . On suppose que  $\varphi(t, \cdot) : \Xi \rightarrow E$  est continue uniformément par rapport à  $t \in I$ . Alors  $\varphi$  est continue.*

Dans la suite de la preuve, afin d'alléger les notations, on notera

$$\varphi \equiv \varphi_{(t_0, X_0)}.$$

À  $\varepsilon$  fixé,

$$t \mapsto \varphi(t, \varepsilon)$$

est continue sur  $I_{(t_0, X_0)}$ , il suffit donc d'après le lemme 2.1.11 de montrer que pour  $\tau \in I_{(t_0, X_0)}$  et  $\varepsilon_0 \in \Xi$ ,

$$\varepsilon \mapsto \varphi(\tau, \varepsilon)$$

est continue en  $\varepsilon_0$  uniformément par rapport à  $\tau$ . Soit  $r > 0$  comme dans la preuve de la proposition 2.1.8, et  $t_r > 0$  tel que  $[\tau - t_r, \tau + t_r] \subset I_{(t_0, X_0)}$ . Alors la proposition 2.1.8 donne que pour tout  $t \in [\tau - t_r, \tau + t_r]$  et tout  $\varepsilon \in \Xi$ ,

$$\varphi(t, \varepsilon) \in B(X_0, r) =: K. \tag{2.1.3}$$

Donc pour presque tout  $t \in [\tau - t_r, \tau + t_r]$  et tout  $\varepsilon \in \Xi$ ,

$$\begin{aligned}
 |\varphi'(t, \varepsilon_0) - \varphi'(t, \varepsilon)| &\leq |F(\varphi(t, \varepsilon_0), t, \varepsilon_0) - F(\varphi(t, \varepsilon), t, \varepsilon)| \\
 &\leq |F(\varphi(t, \varepsilon_0), t, \varepsilon_0) - F(\varphi(t, \varepsilon_0), t, \varepsilon)| \\
 &\quad + |F(\varphi(t, \varepsilon_0), t, \varepsilon) - F(\varphi(t, \varepsilon), t, \varepsilon)| \\
 &\leq \tilde{\omega}_K(t, |\varepsilon_0 - \varepsilon|) \\
 &\quad + L_K |\varphi(t, \varepsilon_0) - \varphi(t, \varepsilon)|.
 \end{aligned}$$

Soit  $\eta > 0$ . L'hypothèse 1. donnée dans l'énoncé du théorème donne l'existence de  $\lambda > 0$  **indépendant de  $t$**  tel que, si  $|\varepsilon - \varepsilon_0| < \lambda$ , alors pour tout  $t \in ]\tau - t_r, \tau + t_r[$

$$\tilde{\omega}_K(t, |\varepsilon_0 - \varepsilon|) \leq \frac{\eta}{2t_r e^{L_K(t_r - \tau)}}.$$

Le lemme de Grönwall assure que pour tout  $\varepsilon \in \Xi_0$ , si  $|\varepsilon - \varepsilon_0| \leq \lambda$ , alors

$$|\varphi(t, \varepsilon_0) - \varphi(t, \varepsilon)| \leq \eta.$$

Le théorème est donc montré. □

**Corollaire 2.1.12.** *Si pour tout  $\varepsilon \in \Xi$ , la solution maximale du système (2.1.2) est globale, alors  $\varphi_{(t_0, X_0)}$  est définie et continue sur  $I \times \Xi$ .*

*Remarque 2.1.13.* Dans le cas où  $F$  est continue,  $\Xi$  est autorisé à seulement être un espace topologique. L'hypothèse 2. du théorème 2.1.10 étant une hypothèse d'uniforme continuité par rapport à  $\varepsilon$ , on est contraint d'avoir une notion de distance sur  $\Xi$ .

*Remarque 2.1.14.* L'hypothèse de mesurabilité sur  $F$  requiert de prendre  $E$  de dimension finie, et non un Banach quelconque, pour conserver l'intégrale de Lebesgue.

*Remarque 2.1.15.* L'hypothèse 4) du théorème 2.1.10 est celle qui permet de compenser l'absence de continuité par rapport au temps. G. Barles fait une hypothèse très semblable dans [11], où il étudie la convergence de solutions de viscosité d'équations paraboliques non-linéaires avec dépendance mesurable en temps.

## 2.2 Quelques résultats de descente de gradient

On donne dans cette section quelques résultats sur les systèmes différentiels (2.1.1) de la forme

$$F(Y, t) \equiv -\nabla g(Y),$$

dis de *descente de gradient* :

$$\begin{cases} Y'(t) = -\nabla g(Y(t)), & t \geq 0 \\ Y(0) = X \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.2.1)$$

avec  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable.

La littérature sur cette problématique est très riche, on donne ici les résultats qui seront utiles pour la suite de ce travail, ainsi que quelques références bibliographiques générales.

Deux questions sont particulièrement intéressantes ici. La première concerne les hypothèses à vérifier sur  $g$  pour qu'il y ait convergence des trajectoires vers un de ses points critiques  $\bar{X}$ . La deuxième concerne la régularité de l'application

$$X \in \mathbb{R}^n \mapsto \bar{X},$$

où

$$\bar{X} := \lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t), \quad \nabla g(\bar{X}) = 0,$$

en cas de convergence des trajectoires.

### 2.2.1 Inégalité de Lojasiewicz et convergence des trajectoires

On donne une première inégalité, qui prodigue une condition suffisante pour avoir la convergence de la solution de (2.2.1). Cette inégalité est présentée dans [35], où le contexte général de son établissement ainsi que certaines de ses conséquences directes pourront être trouvés.

**Définition 2.2.1** (Inégalité de Lojasiewicz).

Soit  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\nabla g(X)$  existe en tout point  $X$  de  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $g$  satisfait l'inégalité de Lojasiewicz dans un voisinage  $V_a$  d'un point  $a \in \mathbb{R}^n$ , s'il existe  $C > 0$  et



$0 < \theta < 1$  tels que, pour tout  $X \in V_a$ ,

$$|\nabla g(X)| \geq C |g(X) - g(a)|^\theta.$$

Le résultat suivant est une conséquence de cette inégalité. La preuve de ce théorème est classique, et peut être par exemple retrouvée dans [23, 37].

**Théorème 2.2.2** (Convergence des trajectoires de gradient). *On suppose que  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et satisfait l'inégalité de Lojasiewicz. Alors*

1. *Pour toute donnée initiale  $X \in \mathbb{R}^n$ , la solution maximale  $Y$  de (2.2.1) est globale sur  $\mathbb{R}_+$ .*
2. *Pour toute donnée initiale  $X \in \mathbb{R}^n$ , il existe un point critique  $\bar{X}$  de  $g$  tel que*

$$Y(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \bar{X}.$$

*Démonstration.* Soit  $X \in \mathbb{R}^n$  qui n'est pas un point critique de  $g$ , on suppose sans perdre de généralité que  $g(X) = 0$ . On note  $T_X > 0$  le temps d'existence de  $Y$ . On montre d'abord que  $t \mapsto g(Y(t))$  est décroissante sur  $[0, T_X[$ . On calcule pour tout  $t \in [0, T_X[$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g(Y(t)) &= \langle \nabla g(Y(t)), Y'(t) \rangle \\ &= -|\nabla g(Y(t))|^2 \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Soit  $t \in [0, T_X[$ . Alors

$$\begin{aligned} -\frac{1}{1-\theta} \frac{d}{dt}g^{1-\theta}(Y(t)) &= -\langle \nabla g(Y(t)), Y'(t) \rangle g^{-\theta}(Y(t)) \\ &= |\nabla g(Y(t))|^2 g^{-\theta}(Y(t)) \\ &\geq C |\nabla g(Y(t))|, \end{aligned}$$

car  $g$  respecte l'inégalité de Lojasiewicz. Donc

$$\begin{aligned} \int_0^t |Y'(s)| \, ds &= \int_0^t |\nabla g(Y(s))| \, ds \leq \frac{1}{C(1-\theta)} (g^{1-\theta}(X) - g^{1-\theta}(Y(t))) \\ &\leq \frac{1}{C(1-\theta)} g^{1-\theta}(X). \end{aligned}$$

La longueur de la trajectoire  $\{Y(s)\}_{s \in [0, T_X]}$  est donc bornée indépendamment de  $t \in [0, T_X]$ . Cela assure que  $Y$  est bornée, et donc par le théorème de sortie de tout compact  $Y$  est globale, donc 1. est prouvé. On obtient de plus que  $\{Y(s)\}_{s \in \mathbb{R}_+}$  admet des valeurs d'adhérences. Il reste à montrer qu'il n'en existe qu'une. Soit  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $\tau > 0$ . Alors

$$\begin{aligned} |Y(t + \tau) - Y(t)| &\leq \int_t^{t+\tau} |Y'(s)| \, ds \\ &\leq \frac{1}{C(1-\theta)} \left| g^{1-\theta}(Y(t + \tau)) - g^{1-\theta}(Y(t)) \right|. \end{aligned}$$

Or la suite  $(g(Y(t)))_{t \geq 0}$  converge, elle est donc de Cauchy. Il en va donc de même pour  $(Y(t))_{t \geq 0}$ , et donc  $Y(t)$  converge vers  $\bar{X} \in \mathbb{R}^n$ . De plus,  $\bar{X} \in \mathbb{R}^n$  est nécessairement un point critique de  $g$ . En effet, si ça n'était pas le cas,  $|\nabla g|$  serait minoré au voisinage de  $\bar{X}$  puisque  $g$  est  $\mathcal{C}^1$ . Plus précisément, il existerait  $\eta > 0$  tel que pour tout  $Y \in B(\bar{X}, \eta)$ ,

$$|\nabla g(Y)| \geq \frac{|\nabla g(\bar{X})|}{2}.$$

Comme  $Y(t)$  converge vers  $\bar{X}$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , pour tout  $0 < \varepsilon < \eta$  il existe  $t_\varepsilon > 0$ , tel que pour tout  $t > t_\varepsilon$ ,

$$|Y(t) - \bar{X}| \leq \varepsilon.$$

Donc pour tout  $t > t_\varepsilon$

$$\begin{aligned} |Y(t) - \bar{X}| &\geq |Y(t) - Y(t_\varepsilon)| - \varepsilon \\ &\geq \left| - \int_{t_\varepsilon}^t \nabla g(Y(s)) \, ds \right| - \varepsilon \\ &\geq (t - t_\varepsilon) \frac{|\nabla g(\bar{X})|}{2}. \end{aligned}$$

Donc il existe  $t > t_\varepsilon$  tel que

$$|Y(t) - \bar{X}| > \varepsilon,$$

ce qui aboutit à une contradiction et complète la preuve.  $\square$

On cherche maintenant à avoir des conditions suffisantes sur  $g$  afin qu'elle respecte l'inégalité de Lojasiewicz. La première est classique et peut être trouvée dans [35, Théorème 4] et [36, Proposition 1, p.92]. C'est dans ce cadre que va s'inscrire ce mémoire.

**Théorème 2.2.3.** *Si  $g$  est analytique sur  $\mathbb{R}^n$ , alors  $g$  respecte l'inégalité de Lojasiewicz.*

La proposition suivante donne des conditions suffisante plus faibles sur  $g$ . On introduit la notion d'ensembles sous- et semi-analytiques dans  $\mathbb{R}^n$ . On pourra, pour plus de détails sur la géométrie sous- et semi-analytique, consulter [15, 38].

**Définition 2.2.4** (Sous-analyticité).

- 1) Soit  $A \subset \mathbb{R}^n$ . On dit que  $A$  est *semi-analytique*, si pour tout point de  $\mathbb{R}^n$ , il existe un voisinage  $V$  de ce point et une famille de fonctions analytiques  $(f_{i,j}, g_{i,j})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$ , définies sur  $V$ , tel que

$$A \cap V = \bigcup_{i=1}^p \bigcap_{j=1}^q \{X \in \mathbb{R}^n : f_{i,j}(X) = 0, g_{i,j}(X) > 0\}.$$

- 2)  $A$  est dit *sous-analytique*, si tout point de  $\mathbb{R}^n$  admet un voisinage  $V$ , tel que

$$A \cap V = \{X \in \mathbb{R}^n : X \in \Pi_1(B)\},$$

où  $B$  est un sous-ensemble semi-analytique borné de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , pour un certain  $m \geq 1$ , et  $\Pi_1(B)$  sa projection sur  $\mathbb{R}^n$ .

- 3) Une fonction  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *sous-analytique*, si son graphe

$$\{(X, g(X)), X \in \mathbb{R}^n\}$$

est un ensemble sous-analytique de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

*Exemple 2.2.5.* La fonction

$$d : X = (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto X_1^2 X_2^2$$

est sous-analytique. On choisit cette fonction en particulier, car comme présenté dans la section 1.2.2, c'est grâce à cette dernière que l'on va construire la pénalisation pour contraindre les solutions du système (1.2.1) à se rapprocher du réseau  $\Gamma$ .

*Exemple 2.2.6.* On considère un ensemble  $(e_i)_{i=1 \dots n}$  un ensemble de vecteurs unitaires de  $\mathbb{R}^n$  ainsi que le réseau

$$\Gamma = \{0\} \cup \bigcup_{i=1}^n \mathbb{R}_+^* e_i.$$

Alors la fonction

$$d_\Gamma : X \in \mathbb{R}^2 \mapsto \prod_{i=1}^n \left( \langle X, e_i^\perp \rangle^2 + (\langle X, e_i \rangle^-)^2 \right)$$

est sous-analytique. Cette fonction est présentée dans la section 6.1 du chapitre 6 comme une généralisation de la fonction distance  $d$ , dans le cas d'un réseau général.

Le théorème suivant est démontré dans [16, Théorème 3.1].

**Théorème 2.2.7.** *Soit  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sous-analytique. Alors  $g$  respecte l'inégalité de Lojasiewicz.*

Ce théorème permet d'appliquer le théorème 2.2.2 aux deux fonctions des exemples 2.2.5 et 2.2.6. Cela permet de s'assurer de la convergence des trajectoires de descente de gradient associées à celles-ci, et de pouvoir établir dans la proposition 3.4.2 que les trajectoires limites des solution du système (1.2.1) sautent sur le réseau à  $t = 0$ .

## 2.3 Étude de la fonction distance au réseau

On rappelle que l'on considère dans tout le manuscrit le réseau

$$\Gamma := \{0\} \cup \bigcup_{i \in \{E, O, N, S\}} \mathbb{R}_+^* e_i,$$

auquel on associe la fonction

$$\begin{aligned} d : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X_1, X_2) &\mapsto X_1^2 X_2^2 \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

appelée -abusivement- *fonction distance au réseau*. Comme on l'a décrit dans l'introduction, on construit le terme de pénalisation pour contraindre la trajectoire à rester "proche" du réseau. Dans ce chapitre on effectue une étude de la fonction  $d$  et on donne certaines de ses propriétés qui vont être utiles tout au long du travail décrit dans ce manuscrit.

### 2.3.1 Propriétés algébriques

On remarque tout d'abord que pour tout  $X := (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla d(X) = 2X_1 X_2 \begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors immédiatement que  $d$  respecte

$$\{d = 0\} = \{\nabla d = 0\},$$

c'est-à-dire la relation 1.2.2 introduite dans l'introduction, que l'on demande d'être vérifiée par la fonction  $d$ .

Les deux propositions suivantes donnent des moyens de comparer les quantités  $d(X)$  et  $|X|$ , pour  $X \in \mathbb{R}^2$ .

**Proposition 2.3.1.** *Pour tout  $X \in \mathbb{R}^2$ ,*

$$\langle X, \nabla d(X) \rangle = 4d(X) \tag{2.3.2}$$

$$|\nabla d(X)| = 2d^{1/2}(X) |X| \tag{2.3.3}$$

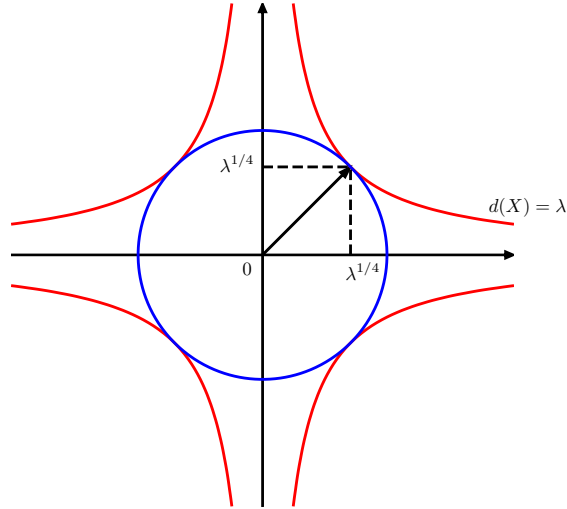
$$|\nabla d(X)| \geq 2\sqrt{2}d^{3/4}(X) \tag{2.3.4}$$

$$|X| \geq \sqrt{2}d^{1/4}(X) \tag{2.3.5}$$

*L'inégalité (2.3.4) est une inégalité de Lojasiewicz explicite vérifiée par  $d$  en tout point de l'espace.*

*Démonstration.* Les deux premières égalités sont évidentes. L'inégalité (2.3.4) s'obtient en calculant  $|\nabla d(X)|^2$ , et en utilisant l'inégalité classique  $2ab \leq a^2 + b^2$ . On obtient l'inégalité (2.3.5) de la même manière.  $\square$

La figure suivante donne une illustration de l'inégalité 2.3.5.


 FIGURE 2.1 – Comparaison entre  $d(\cdot)$  et  $|\cdot|$ 

On remarque que la boule de taille maximale que l'on peut insérer dans un ensemble de la forme

$$\{d \leq \lambda\},$$

est de rayon  $\sqrt{2}\lambda^{1/4}$ .

### 2.3.2 Trajectoires de descente de gradient

On considère ici le système (2.2.1) avec  $g \equiv d$  :

$$\begin{cases} Y'(t) = -\nabla d(Y(t)) \\ Y(0) = X \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (2.3.6)$$

L'objectif de cette section est d'étudier les trajectoires de descente de gradient de la fonction  $d$ , ainsi que les courbes algébriques associées.

Un premier résultat correspond à la proposition suivante

**Proposition 2.3.2.** *Pour tout  $X \in \mathbb{R}^2$ , la limite de la solution  $Y(t)$  du système (2.3.6) lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  existe, et en notant*

$$\bar{X} := \lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) \in \Gamma. \quad (2.3.7)$$

*Démonstration.* La fonction  $d$  est analytique, positive, donc le théorème 2.2.3 assure que

$d$  respecte l'inégalité de Lojasiewicz. On peut donc appliquer le théorème 2.2.2 qui donne l'existence de  $\bar{X} \in \mathbb{R}^2$ , un point critique de  $d$ , tel que

$$\bar{X} := \lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t).$$

Comme l'ensemble des points critiques de  $d$  est exactement  $\Gamma$ , ceci complète la preuve.  $\square$

La proposition suivante donne des informations sur le point limite de la trajectoire de descente solution de (2.3.6). On ré-écrit le système (2.3.6) coordonnée par coordonnées

$$\begin{cases} Y_1'(t) = -2Y_1(t)Y_2^2(t) \\ Y_2'(t) = -2Y_1^2(t)Y_2(t) \\ (Y_1(0), Y_2(0)) = X. \end{cases} \quad (2.3.8)$$

**Proposition 2.3.3.** *Pour tout  $X := (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2$ , la solution  $Y(t)$  de (2.3.8) vérifie :*

- 1)  $Y_2^2(t) - Y_1^2(t) = (X_2^2 - X_1^2)$
- 2)  $\bar{X} = \begin{cases} (0, \text{sign}(X_2)\sqrt{(X_2^2 - X_1^2)}), & \text{si } |X_2| \geq |X_1| \\ (\text{sign}(X_1)\sqrt{(X_1^2 - X_2^2)}, 0), & \text{si } |X_1| \geq |X_2|. \end{cases}$

On représente sur la figure ci-dessous la position de  $\bar{X}$  par rapport à celle de  $X$  :

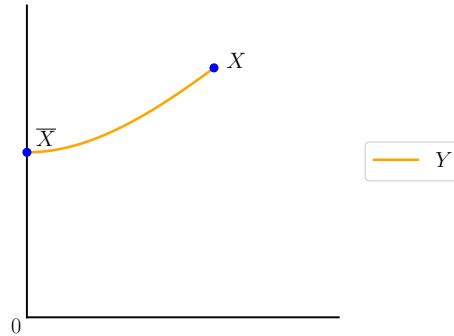


FIGURE 2.2 – Localisation de  $\bar{X}$

*Démonstration de la proposition 2.3.3.*

Montrons le premier point. On multiplie la première ligne de (2.3.8) par  $Y_1(t)$ , la deuxième par  $Y_2(t)$  puis on les soustrait. On obtient alors pour tout  $t \geq 0$

$$Y_2(t)Y_2'(t) - Y_1(t)Y_1'(t) = 0.$$

Donc en intégrant entre 0 et  $t$  on obtient :

$$(Y_2^2(t) - Y_1^2(t)) = (Y_2^2(0) - Y_1^2(0)).$$

Concernant le deuxième point, on considère le cas  $0 < X_1 < X_2$ . Les autres cas se traitent de la même manière. La proposition 2.3.2 et le premier point donnent que  $\bar{X}$  est l'intersection de l'arête  $J_N$  avec l'hyperbole d'équation

$$Y_2^2 - Y_1^2 = X_2^2 - X_1^2.$$

L'expression de  $\bar{X}$  s'en déduit donc immédiatement. □

**Corollaire 2.3.4.** *L'application*

$$X \in \mathbb{R}^2 \mapsto \bar{X}$$

*est 1/2-Hölderienne.*

*Remarque 2.3.5.* Dans le cas particulier où  $X_1 = X_2$  (resp.  $X_1 = -X_2$ ), les trajectoires de descentes évoluent sur les droites d'équation  $Y_1 = Y_2$  (resp.  $Y_1 = -Y_2$ ) et convergent vers 0.

On remarque que les trajectoires de gradient sont perpendiculaires aux lignes de niveaux de  $d$  en tout point d'intersection. Autrement dit, considérons les lignes de niveaux

$$\{d = \lambda\} = \{X_1^2 X_2^2 = \lambda, (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

pour  $\lambda > 0$ , et une hyperbole sur laquelle évoluent des trajectoires de descente, c'est à dire un ensemble de la forme

$$Y_2^2 - Y_1^2 = \delta$$

pour  $\delta > 0$ . Alors en tout point d'intersection de ces deux courbes, leurs vecteurs tangents respectifs y sont perpendiculaires. Le lemme suivant établit les coordonnées de tels points d'intersection. Il sera utile dans la section 5.1.3 du chapitre 5, pour établir des résultats de suivi de trajectoires.

**Lemme 2.3.6.** *Soit  $\lambda > 0$  et  $\delta > 0$ . Alors les quatre points d'intersection des courbes d'équations respectives*

$$Y_2^2 - Y_1^2 = \delta$$



et

$$Y_1^2 Y_1^2 = \lambda,$$

ont pour coordonnées

$$(\pm X_1^{\delta,\lambda}, \pm X_2^{\delta,\lambda}),$$

où

$$X_1^{\delta,\lambda} = \frac{\sqrt{2\lambda}}{\sqrt{\delta + \sqrt{\delta + 4\lambda}}},$$

et

$$X_2^{\delta,\lambda} = \frac{\sqrt{\delta + \sqrt{\delta + 4\lambda}}}{\sqrt{2}}.$$

*Démonstration.* On cherche à résoudre le système

$$\begin{cases} X_1^2 X_2^2 = \lambda \\ X_2^2 - X_1^2 = \delta. \end{cases}$$

Comme les points d'intersections ne peuvent pas se situer sur les axes, on peut substituer  $\frac{\lambda}{X_2^2}$  à  $X_1^2$  dans la deuxième ligne. Alors en multipliant par  $X_2^4$  il reste juste à résoudre

$$X_2^4 - \delta X_2^2 - \lambda = 0,$$

et on obtient le résultat. □

# ÉTUDE DU SYSTÈME D'EDO PÉNALISÉ

---

Ce chapitre est consacré à l'étude du système 1.2.1

$$\begin{cases} (Y^{X,\alpha,\varepsilon})'(t) = f(Y^{X,\alpha,\varepsilon}(t), \alpha(t)) - \frac{1}{\varepsilon} \nabla d(Y^{X,\alpha,\varepsilon}(t)), & t \geq 0 \\ Y^{X,\alpha,\varepsilon}(0) = X \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

où pour  $X = (X_1, X_2)$ ,  $d(X) = (X_1)^2(X_2)^2$ , dans le cas particulier où l'on fixe  $\alpha \in \mathcal{A}$ . On le ré-écrit alors sous la forme du système (1.2.7)

$$\begin{cases} (Y^\varepsilon)'(t) = f(Y^\varepsilon(t), t) - \frac{1}{\varepsilon} \nabla d(Y^\varepsilon(t)), & t \geq 0 \\ Y^\varepsilon(0) = X \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (3.0.1)$$

On rappelle l'expression de la fonction  $F^\varepsilon$

$$F^\varepsilon(Y, t) := f(Y, t) - \frac{1}{\varepsilon} \nabla d(Y),$$

de façon à ré-écrire le système (3.0.1) sous la forme

$$\begin{cases} (Y^\varepsilon)'(t) = F^\varepsilon(Y^\varepsilon(t), t), & t \geq 0 \\ Y^\varepsilon(0) = X \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (3.0.2)$$

Sous l'hypothèse (1.1.2),  $F^\varepsilon$  vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz 2.1.2, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution maximale absolument continue sur  $[0, +\infty[$  pour (3.0.1). À noter que la constante de lipschitz est de la forme

$$C \frac{1}{\varepsilon},$$

et explose donc à l'asymptotique  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

On peut ré-écrire (3.0.1) sous forme intégrale :

$$Y^\varepsilon(t) = X + \int_0^t f(Y^\varepsilon(s), s) ds - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \nabla d(Y^\varepsilon(s)) ds, \quad t \geq 0 \quad (3.0.3)$$

et on définit ainsi

$$k^\varepsilon : t \mapsto \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \nabla d(Y^\varepsilon(s)) ds. \quad (3.0.4)$$

La dérivée de  $k^\varepsilon$  représente donc la pénalisation qui a vocation à ramener la trajectoire  $Y^\varepsilon$  sur le réseau.  $k^\varepsilon$  doit être étudié en parallèle de  $Y^\varepsilon$ . En effet, ce terme de pénalisation va, à la limite, devenir celui qui contraindra la trajectoire limite  $Y$  de la suite  $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ , à rester sur le réseau. Il va être intéressant de regarder comment ce terme agit sur la trajectoire, et le lien qu'il va avoir avec la dynamique initiale  $f$ .

On regarde en particulier l'existence et l'unicité de la solution globale  $Y^\varepsilon$  de (3.0.1). Ce point ne pose pas spécialement de difficulté et s'obtient grâce à des estimations de non-explosion en temps fini.

La question la plus intéressante est celle de l'étude de la convergence de  $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ . On verra que l'étude de cette suite ne peut pas se faire indépendamment de celle du terme de pénalisation. Le but va être de borner cette suite dans  $H^1([0, T])$  pour tout  $T > 0$  afin de pouvoir appliquer le théorème de Reillich (voir par exemple [17]) et procéder à une extraction. La question de la convergence de toute la suite restera à l'issue de ce travail en grande partie ouverte. Une discussion sera faite à propos de la stratégie adoptée pour résoudre cette question. Il s'agira également de montrer qu'à la limite on récupère bien une trajectoire qui évolue entièrement sur le réseau, c'est-à-dire, tel que pour tout  $t > 0$ ,  $d(Y(t)) = 0$ .

On s'attend à ce que cette trajectoire limite soit solution d'un système différentiel de la forme

$$Y(t) = X + \int_0^t f(Y(s), s) ds - k(t),$$

où  $k$  est la limite de  $(k^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ . C'est ce qu'il va se passer ; en revanche comme expliqué dans l'introduction, on n'est pas capable à l'issue de ce travail d'établir l'existence de la limite de la suite  $(Y^\varepsilon, k^\varepsilon)$ . Les trajectoires limites  $Y$  seront donc uniquement caractérisées comme étant des valeurs d'adhérence de la suite  $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ .

Deux autres propriétés sont perdues à la limite : la stabilité par rapport à la position initiale, ainsi que la propriété de semi-groupe. On utilise jusqu'à la fin de ce paragraphe les notations

$$Y^{X,\varepsilon} \text{ et } Y^X,$$

pour spécifier la dépendance en la position initiale. Ce qu'on appelle propriété de semi-groupe, est le fait de respecter pour toute position initiale  $X$ , et tout  $0 \leq t \leq s$ ,

$$Y^X(t+s) = Y^{Y^X(t)}(s).$$

On exhibe un contre-exemple (qui sera complètement étudié dans le chapitre 4) à cette propriété. On considère comme dynamique initiale

$$f(Y, t) := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Alors dans ce cas on est en mesure d'assurer l'existence de la limite  $Y^X$  de la suite des solutions  $(Y^{X,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$  du système (3.0.1). Dans le cas particulier où

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \end{pmatrix},$$

avec  $\delta > 0$ , pour tout  $t \geq 0$ ,

$$Y^X(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ \delta - t \end{pmatrix}, & \text{si } 0 \leq t \leq \delta, \\ \begin{pmatrix} \delta - t \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{si } t \geq \delta. \end{cases}$$

Or, Dans le cas où  $X = 0$ , on obtient, pour tout  $t \geq 0$ ,  $Y^0(t) = 0$ . Donc dans le cas où  $\delta = 1$ ,

$$Y^X(1+1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = Y^0(1) = Y^{Y^X(1)}(1).$$

La distinction va devoir être faite entre le cas  $X \in \Gamma$  et  $X \notin \Gamma$ . Lorsque le point de départ de  $Y^\varepsilon$  (et donc de  $Y$ ) ne se trouve pas sur le réseau, on observe un phénomène de "saut" sur  $\Gamma$  pour la trajectoire limite  $Y$  à l'instant  $t = 0$ . Une fois ce saut effectué,  $\{Y(t), t > 0\}$  est une trajectoire évoluant sur  $\Gamma$ .

On détermine explicitement le point de saut de  $Y$ . Si on note  $X \notin \Gamma$  la condition initiale, alors

$$Y(0^+) = \bar{X},$$

où  $\bar{X}$  est la notation introduite par (2.3.7) (voir aussi la figure 2.2).

### 3.1 Études des zones d'invariance pour les solutions du système pénalisé

Cette section est dédiée à la recherche de zones d'invariance pour le flot associé à (3.0.1). Les résultats établis, en particulier la proposition 3.1.11, sont uniformes par rapport au contrôle  $\alpha$  choisit initialement. Ces derniers vont permettre d'établir la proposition 3.2.5, et interviennent dans une grande partie des résultats exposés dans le chapitre 5, en particulier ceux concernant les suivis de trajectoires. La notion d'ensemble invariant tient une grande place dans l'étude des systèmes d'équations ou d'inclusions différentielles (voir F. Clarke [20] et J.P. Aubin, A. Cellina [7], J.P. Aubin, H. Frankowska [8]). On donne la définition d'un ensemble invariant

**Définition 3.1.1.** Soit  $S \subset \mathbb{R}^2$ , régulier. On dit que  $S$  est invariant pour le flot associé à (3.0.2), si pour tout  $t \geq 0$  et tout  $X \in \partial S$ ,

$$\langle F^\varepsilon(X, t), n_{\partial S}(X) \rangle \leq 0,$$

où  $n_{\partial S}(X)$  désigne le vecteur normal unitaire sortant à  $\partial S$  en  $X$ .

On s'intéresse plus spécifiquement dans la suite aux zones d'invariance introduites par la notation suivante :

**Notation 3.1.2.** On définit pour tout  $\lambda > 0$

$$Z(\lambda) := \{X \in \mathbb{R}^2 : d(X) \leq \lambda\},$$

ainsi que pour tout  $\varepsilon > 0$  et toute position initiale  $X \in \mathbb{R}^2$ ,

$$t^{X, \varepsilon}(\lambda) := \inf \{t \geq 0 : Y^\varepsilon(t) \in Z(\lambda)\},$$

le plus petit temps auquel la solution  $Y^\varepsilon$  de (3.0.2) atteint  $Z(\lambda)$ . On prendra comme convention  $t^{X, \varepsilon}(\lambda) = +\infty$  si  $Y^\varepsilon$  n'atteint jamais  $Z(\lambda)$ .

On établit dans les propositions suivantes plusieurs estimations techniques concernant  $d^\theta(Y^\varepsilon(t))$ ,  $\theta > 0$ ,  $t \geq 0$ . Ces estimations vont être utiles dans la détermination de zones d'invariance pour (3.0.1) de la forme  $Z(\lambda)$ , et plus particulièrement de la forme  $Z(C\varepsilon^\delta)$ .

Le lemme suivant est un lemme technique général qui sera très utilisé dans ce chapitre :

**Lemme 3.1.3.** *Pour tout  $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ , et tout temps  $t \geq 0$  en lequel  $g(Y^\varepsilon)$  est dérivable,*

$$\frac{d}{dt}g(Y^\varepsilon)(t) = \langle \nabla g(Y^\varepsilon(t)), f(Y^\varepsilon(t), t) \rangle - \frac{1}{\varepsilon} \langle \nabla g(Y^\varepsilon(t)), \nabla d(Y^\varepsilon(t)) \rangle. \quad (3.1.1)$$

*Démonstration.* Il s'agit ici d'un simple calcul :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g(Y^\varepsilon)(t) &= \langle \nabla g(Y^\varepsilon(t)), (Y^\varepsilon)'(t) \rangle \\ &= \left\langle \nabla g(Y^\varepsilon(t)), f(Y^\varepsilon(t), t) - \frac{1}{\varepsilon} \nabla d(Y^\varepsilon(t)) \right\rangle \\ &= \langle \nabla g(Y^\varepsilon(t)), f(Y^\varepsilon(t), t) \rangle - \frac{1}{\varepsilon} \langle \nabla g(Y^\varepsilon(t)), \nabla d(Y^\varepsilon(t)) \rangle. \end{aligned}$$

□

**Proposition 3.1.4.** *Pour tout  $\theta > 0$  et presque tout  $t > 0$ , tel que  $d(Y^\varepsilon(t)) \neq 0$ ,*

$$\frac{1}{\theta} \frac{d}{dt}d^\theta(Y^\varepsilon(t)) \leq 2d^{\theta-1/2}(Y^\varepsilon(t)) |Y^\varepsilon(t)| \left( M - \frac{2}{\varepsilon} d^{1/2}(Y^\varepsilon(t)) |Y^\varepsilon(t)| \right), \quad (3.1.2)$$

où  $M$  désigne la borne  $L^\infty$  de  $f$ .

*Démonstration.* On utilise le lemme 3.1.3 avec  $g := \frac{1}{\theta}d^\theta$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta} \frac{d}{dt}d^\theta(Y^\varepsilon(t)) &= d^{\theta-1}(Y^\varepsilon(t)) \langle (Y^\varepsilon)'(t), \nabla d(Y^\varepsilon(t)) \rangle \\ &= d^{\theta-1}(Y^\varepsilon(t)) \left( \langle f(Y^\varepsilon(t), t), \nabla d(Y^\varepsilon(t)) \rangle - \frac{1}{\varepsilon} |\nabla d(Y^\varepsilon(t))|^2 \right). \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité 2.3.3, on obtient

$$\frac{1}{\theta} \frac{d}{dt}d^\theta(Y^\varepsilon(t)) = d^{\theta-1}(Y^\varepsilon(t)) \left( \langle f(Y^\varepsilon(t), t), \nabla d(Y^\varepsilon(t)) \rangle - \frac{4}{\varepsilon} d(Y^\varepsilon(t)) |Y^\varepsilon(t)|^2 \right).$$

On utilise alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que l'égalité (2.3.3) une nouvelle fois et on obtient le résultat. □

La proposition suivante donne une zone d'invariance qui sera qualifiée "d'optimale" pour la trajectoire  $Y^\varepsilon$ ; optimale au sens de l'inclusion, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de zone plus petite que celle donnée par la proposition ci-dessous.

**Proposition 3.1.5.** *Pour tout  $\lambda \geq \lambda_\varepsilon := \left(\frac{M}{2\sqrt{2}}\right)^{4/3} \varepsilon^{4/3}$ , toute donnée initiale  $X \in \partial Z(\varepsilon^\lambda)$  et presque tout  $t \geq 0$ ,*

$$\langle F^\varepsilon(X, t), n_{\partial Z(\varepsilon^\lambda)}(X) \rangle \leq 0. \quad (3.1.3)$$

*En conséquence :*

1. *Si  $d(X) > \lambda_\varepsilon$ , alors pour tout  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t^{X, \varepsilon}(\lambda_\varepsilon)$ ,*

$$d(Y^\varepsilon(t_2)) \leq d(Y^\varepsilon(t_1)).$$

*Autrement dit, si  $d(X) > \lambda_\varepsilon$ , alors  $Z(d(X))$  est une zone d'invariance pour  $Y^\varepsilon$ .*

2.  *$Z(\lambda_\varepsilon)$  est optimale vis-à-vis de la dynamique  $f$  choisie. Dans le sens où si  $\lambda < \lambda_\varepsilon$ , alors  $Z(\lambda)$  n'est pas nécessairement invariante.*

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que pour tout  $X \in \partial Z(\lambda)$ ,

$$n_{\partial Z(\lambda)}(X) = \frac{\nabla d(X)}{|\nabla d(X)|}.$$

Alors grâce à (2.3.3) et (2.3.5), on obtient pour  $\lambda \geq \lambda_\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned} \langle F^\varepsilon(X, t), n_{\partial Z(\lambda)}(X) \rangle &= \left\langle F^\varepsilon(X, t), \frac{\nabla d(X)}{|\nabla d(X)|} \right\rangle \\ &= \left\langle f(Y^\varepsilon(t), t), \frac{\nabla d(X)}{|\nabla d(X)|} \right\rangle - \frac{|\nabla d(X)|}{\varepsilon} \\ &\leq M - \frac{2}{\varepsilon} \sqrt{d(X)} |X| \\ &\leq M - \frac{2}{\varepsilon} \lambda^{1/2} \sqrt{2} \lambda^{1/4} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Prouvons maintenant les deux autres points de la proposition. Pour le premier, en appliquant la proposition 3.1.4 avec  $\theta = 1$ , on obtient pour  $t \in [0, t^{X, \varepsilon}(\lambda_\varepsilon)[$ ,

$$\frac{d}{dt} d(Y^\varepsilon(t)) < 0.$$

Pour montrer le deuxième point, il suffit d'exhiber un contre exemple. On définit

$$f(Y, t) := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et on prend pour condition initiale

$$X = \begin{pmatrix} \lambda^{1/4} \\ \lambda^{1/4} \end{pmatrix}.$$

On se donne alors

$$\lambda < \left( \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^{4/3} \varepsilon^{4/3},$$

par lequel on obtient

$$\langle (Y^\varepsilon)'(0), n_{Z(X)}(X) \rangle = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon} \lambda^{3/4} > 0.$$

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$  donc la solution  $Y^\varepsilon$  est  $\mathcal{C}^1$  sur son intervalle d'existence. Il existe donc  $\eta > 0$  tel que pour tout  $t \in ]0, \eta[$ ,

$$Y^\varepsilon(t) \notin Z(d(X)),$$

autrement dit, pour tout  $t \in ]0, \eta[$ ,

$$d(Y^\varepsilon(t)) > d(X).$$

□

*Remarque 3.1.6.* Ce résultat apporte deux informations concernant la proximité de  $Y^\varepsilon$  au réseau. Tout d'abord, si  $X$  est un point du réseau, alors pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $t \geq 0$ , on dispose d'une majoration de  $d(Y^\varepsilon(t))$  de la forme

$$d(Y^\varepsilon(t)) < C\varepsilon^{4/3}, \tag{3.1.4}$$

où  $C$  est une constante strictement positive ne dépendant que de la norme  $L^\infty$  de  $f$ . Ensuite, dans le cas où  $X \notin \Gamma$ , alors  $Y^\varepsilon$  va "descendre" vers le réseau, au sens où l'on va observer une stricte décroissance de  $d(Y^\varepsilon)$  sur  $]0, t^{X,\varepsilon}(\lambda_\varepsilon)[$ .

*Remarque 3.1.7.* Une observation importante à faire est l'uniformité par rapport à la norme  $L^\infty$  de  $f$  de la zone d'invariance optimale donnée par le deuxième point. Dans le chapitre consacré à l'étude du problème de contrôle que l'on associera à (3.0.1), une zone d'invariance uniforme par rapport au contrôle choisi s'avérera utile.



Le lemme suivant paraît à première vue une version faible de la proposition 3.1.5. Il donne cependant un résultat de contrôle de  $d(Y^\varepsilon)$  entre deux instants, indépendamment de la condition initiale.

**Lemme 3.1.8.** *Pour toute donnée initiale  $X \in \mathbb{R}^2$  et tout  $0 \leq t_0 \leq t$ ,*

$$d(Y^\varepsilon(t)) - d(Y^\varepsilon(t_0)) \leq \frac{M^2}{4}(t - t_0)\varepsilon. \quad (3.1.5)$$

*Démonstration.* Pour presque tout  $0 \leq t_0 < t$ , le lemme 3.1.3, avec  $g = d$ , donne

$$\frac{d}{dt}d(Y^\varepsilon(t)) = \langle \nabla d(Y^\varepsilon(t)), f(Y^\varepsilon(t), t) \rangle - \frac{1}{\varepsilon} |\nabla d(Y^\varepsilon(t))|^2.$$

Donc en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}d(Y^\varepsilon(t)) &\leq M |\nabla d(Y^\varepsilon(t))| - \frac{1}{\varepsilon} |\nabla d(Y^\varepsilon(t))|^2 \\ &\leq \frac{M^2}{4}\varepsilon, \end{aligned}$$

en regardant le sup sur  $\mathbb{R}_+$  de  $r \mapsto Mr - \frac{1}{\varepsilon}r^2$ . Il suffit alors d'intégrer entre  $t_0$  et  $t$  pour obtenir le résultat.  $\square$

On recherche maintenant un résultat de la forme

$$t^{X,\varepsilon}(\lambda_\varepsilon) \leq C\varepsilon^\delta,$$

où  $t^{X,\varepsilon}(\lambda_\varepsilon)$  est défini par la notation 3.1.2, pour un certain  $\delta > 0$ , et où  $C$  serait une constante positive ne dépendant que de la condition initiale  $X$  et de la norme  $L^\infty$  de  $f$ . En d'autres termes, si l'on regarde l'objectif d'étudier le problème de contrôle associé au système (1.2.1), on est intéressé par un temps d'atteinte d'une zone d'invariance pour  $Y^\varepsilon$  en  $O(\varepsilon^\delta)$ , borné uniformément par rapport à  $\alpha \in \mathcal{A}$ .

Le lemme suivant est un lemme technique qui donne une majoration de  $\frac{d}{dt}d^\theta(Y^\varepsilon)$ , lorsque cette dérivée existe.

**Lemme 3.1.9.** *Soit  $\gamma < 4/3, \theta \geq 1/2$  et  $X \in \mathbb{R}^2$ , tel que  $d(X) \geq \varepsilon^\gamma$ . Alors pour  $\varepsilon < \left(\frac{2\sqrt{2}}{M}\right)^{\frac{4}{4-3\gamma}}$  et pour presque tout  $t \in [0, t^{X,\varepsilon}(\varepsilon^\gamma)]$ ,*

$$\frac{d}{dt}d^\theta(Y^\varepsilon) \leq - \left(8 - 2\sqrt{2}M\varepsilon^{\frac{4-3\gamma}{4}}\right) \varepsilon^{(\gamma(\theta+\frac{1}{2})-1)}. \quad (3.1.6)$$

*Démonstration.* En appliquant la proposition 3.1.4, on obtient pour presque tout  $t \in [0, t^{X,\varepsilon}(\varepsilon^\gamma)]$

$$\frac{1}{\theta} \frac{d}{dt} d^\theta(Y^\varepsilon(t)) \leq 2d^{\theta-\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(t)) |Y^\varepsilon(t)| \left( M - 2\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{3\gamma-4}{4}} \right),$$

puisque sur  $[0, t^{X,\varepsilon}(\varepsilon^\gamma)]$ ,

$$|Y^\varepsilon(t)| \geq \sqrt{2}\varepsilon^{\frac{\gamma}{4}}, \text{ et } d(Y^\varepsilon(t)) \geq \varepsilon^\gamma. \quad (3.1.7)$$

Comme  $\gamma < \frac{4}{3}$ , on a bien pour  $\varepsilon < \left( \frac{2\sqrt{2}}{M} \right)^{\frac{4}{4-3\gamma}}$ ,

$$\left( M - 2\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{3\gamma-4}{4}} \right) < 0.$$

Donc en factorisant par  $\varepsilon^{\frac{3\gamma-4}{4}}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta} \frac{d}{dt} d^\theta(Y^\varepsilon(t)) &\leq -2 \left( 2\sqrt{2} - M\varepsilon^{\frac{4-3\gamma}{4}} \right) d^{\theta-1/2}(Y^\varepsilon(t)) |Y^\varepsilon(t)| \varepsilon^{\frac{3\gamma-4}{4}} \\ &\leq -2 \left( 2\sqrt{2} - M\varepsilon^{1-\frac{3\gamma}{4}} \right) \varepsilon^{\gamma(\theta-\frac{1}{2})} \sqrt{2}\varepsilon^{\frac{\gamma}{4}} \varepsilon^{\frac{3\gamma-4}{4}}, \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

car  $\theta \geq 1/2$ , et en utilisant encore une fois (3.1.7). Après simplification, le résultat est montré.  $\square$

*Remarque 3.1.10.* L'hypothèse  $\theta \geq \frac{1}{2}$  est nécessaire pour obtenir (3.1.8), cela permet d'avoir une minoration de  $d^{\theta-1/2}(Y^\varepsilon(t)) |Y^\varepsilon(t)|$  et donc une majoration de  $-d^{\theta-1/2}(Y^\varepsilon(t)) |Y^\varepsilon(t)|$ . L'hypothèse sur  $\varepsilon$  n'est pas gênante; en effet, elle ne dépend que de la borne  $L^\infty$  de  $f$ , et est donc uniforme par rapport à  $t$  et  $X$ .

La proposition suivante donne une borne sur  $t^{X,\varepsilon}(\varepsilon^\gamma)$  uniforme par rapport à la borne  $L^\infty$  de  $f$  et localement uniforme par rapport à  $X$ .

**Proposition 3.1.11.** *Soit  $X \in \mathbb{R}^2$  une donnée initiale. Alors pour tout  $\gamma < 1$ , et  $\varepsilon < \left( \frac{\sqrt{2}}{M} \right)^{\frac{4}{4-3\gamma}}$ ,*

$$t^{X,\varepsilon}(\varepsilon^\gamma) \leq \frac{d(X)}{2} \varepsilon^{1-\gamma}. \quad (3.1.9)$$

*Démonstration.* Si  $d(X) \leq \varepsilon^\gamma$ ,  $Y^\varepsilon$  est dans une zone d'invariance et  $t^{X,\varepsilon}(\varepsilon^\gamma) = 0$ , d'où le résultat. Sinon, le lemme 3.1.9 donne avec  $\theta = \frac{1}{2}$ , que pour tout  $t \in [0, t^{X,\varepsilon}(\varepsilon^\gamma)]$ ,

$$2 \frac{d}{dt} (d^{1/2}(Y^\varepsilon(t))) \leq - \left( 8 - 2\sqrt{2}M\varepsilon^{1-\frac{3\gamma}{4}} \right) \varepsilon^{(\gamma-1)}.$$

Ainsi, en intégrant entre 0 et  $t^{X,\varepsilon}(\varepsilon^\gamma)$ ,

$$2(\varepsilon^{\gamma/2} - \sqrt{d(X)}) \leq - \left(8 - 2\sqrt{2}M\varepsilon^{1-\frac{3\gamma}{4}}\right) \varepsilon^{(\gamma-1)} t^{X,\varepsilon}(\varepsilon^\gamma).$$

Donc pour  $\varepsilon < \left(\frac{\sqrt{2}}{M}\right)^{\frac{4}{4-3\gamma}}$ ,

$$t^{X,\varepsilon}(\varepsilon^\gamma) \leq \frac{d(X)}{2} \varepsilon^{1-\gamma}.$$

□

*Remarque 3.1.12.* La constante  $\frac{d(X)}{2}$  n'est bien entendu pas optimale. Pour tout  $0 < m < 4$ , si  $\varepsilon < \left(\frac{m+4}{\sqrt{2}M}\right)^{\frac{4}{4-3\gamma}}$ , alors

$$t^{X,\varepsilon}(\varepsilon^\gamma) \leq \frac{d(X)}{m} \varepsilon^{1-\gamma}.$$

La possibilité d'avoir un tel choix dans la constante n'apporte cependant rien pour la suite de ce travail, c'est pourquoi par souci d'économie de notation on ne présente pas ce résultat sous son caractère le plus général.

*Remarque 3.1.13.* L'hypothèse  $\gamma < 1$  est malheureusement nécessaire. Dans l'application du lemme 3.1.9 on a besoin que

$$\gamma\left(\theta + \frac{1}{2}\right) - 1 < 0,$$

et on souhaite en parallèle avoir  $\gamma$  le plus grand possible. Pour cela,  $\theta$  doit être le plus petit possible, et comme nécessairement  $\theta \geq \frac{1}{2}$ , on doit nécessairement exiger  $\gamma < 1$ .

En conclusion, on ne peut pas atteindre une zone d'invariance de la forme  $Z(C\varepsilon^\gamma)$  avec  $\gamma \geq 1$ , en un temps  $t \leq \varepsilon^\delta$ , pour tout  $f \in L^\infty$ . La figure suivante donne une illustration de la proposition 3.1.11 :

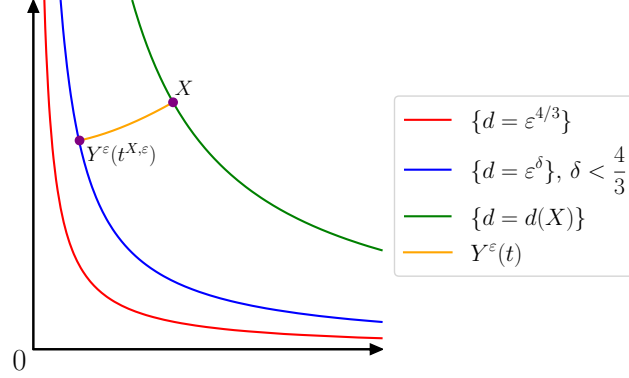


FIGURE 3.1 – Zones d'invariance

## 3.2 Estimations a priori et existence de solutions pour le système pénalisé

Cette section est dédiée à l'établissement d'estimations a priori sur les normes  $L^\infty$  et  $L^2$  de  $Y^\varepsilon$ ,  $(Y^\varepsilon)'$ ,  $k^\varepsilon$ , et  $(k^\varepsilon)'$ . Ces estimations vont permettre d'établir les résultats proposés dans le théorème 1.2.4, que l'on rappelle ici :

**Théorème 3.2.1.** *On suppose que l'hypothèse (1.1.2) est vérifiée par  $f$ . Alors pour tout  $T > 0$  et  $X \in \mathbb{R}^2$ , il existe une suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels convergeant vers 0, ainsi qu'un couple de fonctions  $(Y, k)$  tel que*

1. *Si  $X \in \Gamma$ , alors la suite  $(Y^{\varepsilon_n}, k^{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $(Y, k)$  uniformément sur  $[0, T]$  et simplement sur  $[0; +\infty[$ . De plus,  $(Y, k) \in (H^1([0, T]))^2$ .*
2. *Si  $X \notin \Gamma$ , alors pour tout  $\eta > 0$  la suite  $(Y^{\varepsilon_n}, k^{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $(Y, k)$  uniformément sur  $[\eta, T]$ , et simplement vers sur  $[0, +\infty[$ . De plus,  $(Y, k) \in (L^\infty([0, T]) \cap H^1([\eta, T]))^2$ .*
3. *Si  $X \notin \Gamma$ , alors*

$$Y(0^+) := \lim_{t \rightarrow 0^+} Y(t) = \bar{X},$$

où  $\bar{X}$  est défini dans la proposition 2.3.3 du chapitre 2.

4. *Pour tout  $t > 0$ ,*

$$Y(t) \in \Gamma.$$

5. *Pour tout  $t \geq 0$*

$$Y(t) = X + \int_0^t f(Y(s), s) ds - k(t).$$

On commence par donner une borne  $L_{\text{loc}}^\infty([0, +\infty[)$  de la suite  $(Y^\varepsilon, k^\varepsilon)$ .

**Proposition 3.2.2.** *Pour toute donnée initiale  $X \in \mathbb{R}^2$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $0 \leq t_0 \leq T$ ,*

$$\|Y^\varepsilon\|_{L^\infty([t_0, T])} \leq |Y^\varepsilon(t_0)|^2 e^{(T-t_0)} + M^2(e^{(T-t_0)} - 1) \quad (3.2.1)$$

et

$$\|k^\varepsilon\|_{L^\infty([t_0, T])} \leq M(T - t_0) + |Y^\varepsilon(t_0)|^2 (1 + e^{(T-t_0)}) + M^2(e^{(T-t_0)} - 1). \quad (3.2.2)$$

*Démonstration.* Pour presque tout  $t \in [t_0, T]$ , en prenant  $g = \frac{1}{2} |\cdot|^2$  dans le lemme 3.1.3,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |Y^\varepsilon(t)|^2 = \langle Y^\varepsilon(t), f(Y^\varepsilon(t), t) \rangle - \frac{1}{\varepsilon} \langle Y^\varepsilon(t), \nabla d(Y^\varepsilon(t)) \rangle.$$

Ainsi, par (2.3.2),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |Y^\varepsilon(t)|^2 &\leq \langle Y^\varepsilon(t), f(Y^\varepsilon(t), t) \rangle \\ &\leq M |Y^\varepsilon(t)| \\ &\leq \frac{M^2}{2} + \frac{|Y^\varepsilon(t)|^2}{2}. \end{aligned}$$

Le lemme de Grönwall 2.1.6 donne donc que pour tout  $t_0 \leq t \leq T$ ,

$$|Y^\varepsilon(t)|^2 \leq |Y^\varepsilon(t_0)|^2 e^{(t-t_0)} + M^2(e^{(t-t_0)} - 1), \quad (3.2.3)$$

d'où (3.2.1).

Pour obtenir la borne sur  $k^\varepsilon$ , on remarque juste que

$$(Y^\varepsilon)' = f - (k^\varepsilon)'$$

presque partout, et on refait les mêmes calculs.  $\square$

**Corollaire 3.2.3.** *Les estimations a priori ci-dessus donnent que pour tout  $\varepsilon > 0$ , la solution de (3.0.1) est globale.*

La proposition suivante donne d'autres estimations sur  $d(Y^\varepsilon)$  qui seront utiles pour obtenir des estimations  $L^2$  sur  $(Y^\varepsilon)'$  et  $(k^\varepsilon)'$ .

**Proposition 3.2.4.** *Supposons que  $X \notin \Gamma$ . Alors pour tout  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$  et  $\varepsilon > 0$ ,*

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} d(Y^\varepsilon(t)) dt \leq K_T \left( d^{\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(t_1)) - d^{\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(t_2)) + t_2 - t_1 \right). \quad (3.2.4)$$

*Démonstration.* L'idée de la preuve est de faire des estimations sur  $d^{\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon)$ . La non dérivabilité de la racine en 0 nécessite de faire une disjonction de cas. On montre donc d'abord le résultat lorsque  $Y^\varepsilon \notin \Gamma$  sur  $[t_1, t_2]$ . En prenant  $g = \frac{1}{2}d^{1/2}$  dans le lemme 3.1.3, pour presque tout  $t \in [t_1, t_2]$ ,

$$-\frac{d}{dt}d^{\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(t)) = \frac{1}{2}\langle \nabla d(Y^\varepsilon(t)), f(Y^\varepsilon(t), t) \rangle d^{-\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(t)) + \frac{1}{2\varepsilon}|\nabla d(Y^\varepsilon(t))|^2 d^{-\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(t)).$$

Donc en appliquant l'inégalité de Cauchy-Swarz ainsi que (2.3.3) et (2.3.4),

$$-\frac{d}{dt}d^{\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(t)) \geq -\frac{M}{2}|\nabla d(Y^\varepsilon(t))|d^{-\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(t)) + \frac{4}{\varepsilon}d(Y^\varepsilon(t)).$$

Par intégration sur  $[t_1, t_2]$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} d(Y^\varepsilon(t)) dt \leq \left(1 + \frac{M}{8}\right) \left( d^{\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(t_1)) - d^{\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(t_2)) + \int_{t_1}^{t_2} |\nabla d(Y^\varepsilon(t))|d^{-\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(t)) dt \right),$$

puis en utilisant (2.3.3),

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} d(Y^\varepsilon(t)) dt \leq K_T \left( d^{\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(t_1)) - d^{\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(t_2)) + (t_2 - t_1) \right),$$

où

$$K_T = \left(1 + \frac{M}{8} + 2 \sup_{\varepsilon > 0} \left\{ \|Y^\varepsilon\|_{L^\infty([0, T])} \right\} \right);$$

on rappelle que  $\sup_{\varepsilon > 0} \left\{ \|Y^\varepsilon\|_{L^\infty([0, T])} \right\}$  est fini d'après la proposition 3.2.2. Montrons maintenant le résultat sur tout intervalle de la forme  $[t_1, t_2]$  avec  $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ .  $Y^\varepsilon$  et  $d(Y^\varepsilon)$  sont au moins absolument continues sur  $[0, T]$ . On peut écrire  $[t_1, t_2]$  de la manière suivante :

$$[t_1, t_2] = \{d(Y^\varepsilon) \neq 0\} \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} ]a_k^\varepsilon, b_k^\varepsilon[, \quad (3.2.5)$$

où

$$d(Y^\varepsilon(t)) \neq 0 \quad \text{sur} \quad ]a_k^\varepsilon, b_k^\varepsilon[. \quad (3.2.6)$$

Alors par continuité et définition de  $a_k, b_k$  on peut écrire comme précédemment, pour  $r$

suffisamment petit, sur  $[a_k^\varepsilon + r, b_k^\varepsilon - r]$ ,

$$\int_{a_k^\varepsilon + r}^{b_k^\varepsilon - r} \frac{d(Y^\varepsilon(t))}{\varepsilon} dt \leq K_T \left( d^{\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(a_k^\varepsilon + r)) - d^{\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(b_k^\varepsilon - r)) + \int_{a_k}^{b_k} |\nabla d(Y^\varepsilon(t))| d^{-\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(t)) dt \right).$$

Comme

$$\int_{a_k}^{b_k} |\nabla d(Y^\varepsilon(t))| d^{-\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(t)) dt \leq K(b_k^\varepsilon - a_k^\varepsilon),$$

on a, lorsque  $r$  tend vers zéro,

$$\int_{a_k^\varepsilon}^{b_k^\varepsilon} \frac{d(Y^\varepsilon(t))}{\varepsilon} dt \leq K_T \left( d^{\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(a_k^\varepsilon)) - d^{\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(b_k^\varepsilon)) + (b_k^\varepsilon - a_k^\varepsilon) \right).$$

En sommant sur  $k$  on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} d(Y^\varepsilon(t)) dt &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{\varepsilon} \int_{a_k}^{b_k} d(Y^\varepsilon(t)) dt \\ &\leq K_T \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} d^{\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(a_k^\varepsilon)) - d^{\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(b_k^\varepsilon)) + \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k^\varepsilon - a_k^\varepsilon \right). \end{aligned}$$

Ainsi, comme chacun des termes de la première somme est nul, sauf peut-être

$$d^{\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(t_1)) - d^{\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(t_2)),$$

on obtient

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d(Y^\varepsilon(t))}{\varepsilon} dt \leq K_T \left( d^{\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(t_1)) - d^{\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(t_2)) + t_2 - t_1 \right). \quad (3.2.7)$$

□

On établit maintenant le fait que la suite  $(Y^\varepsilon, k^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  est uniformément bornée dans  $(H_{\text{loc}}^1([0, +\infty[))^2$  si  $X \in \Gamma$  et dans  $(H_{\text{loc}}^1(]0, +\infty[))^2$  si  $X \notin \Gamma$ .

**Proposition 3.2.5.** *Si  $X \in \Gamma$ , alors pour tout  $0 \leq t_0 \leq T$ ,*

$$\|(Y^\varepsilon)'\|_{L^2([t_0, T])}^2 \leq (M^2 + 1) \left( T - \frac{t_0}{2} \right) \quad (3.2.8)$$

et

$$\|(k^\varepsilon)'\|_{L^2([t_0, T])}^2 \leq 2(M^2 + 1)(T - t_0). \quad (3.2.9)$$

Si  $X \notin \Gamma$ , pour tout  $0 < \eta < T$ ,  $(Y^\varepsilon)'$  et  $(k^\varepsilon)'$  sont bornées dans  $L^2([\eta, T])$  uniformément par rapport à  $\varepsilon$ .

*Démonstration.*

1) Cas où  $X \in \Gamma$

Pour presque tout  $t \in [t_0, T]$ ,

$$\begin{aligned} |(Y^\varepsilon)'(t)|^2 &= \langle (Y^\varepsilon)'(t), f(Y^\varepsilon(t), t) \rangle - \frac{1}{\varepsilon} \langle (Y^\varepsilon)'(t), \nabla d(Y^\varepsilon(t)) \rangle \\ &= \langle f(Y^\varepsilon(t), t), (Y^\varepsilon)'(t) \rangle - \frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{dt} d(Y^\varepsilon(t)). \end{aligned}$$

Par intégration sur  $[t_0, T]$  on obtient

$$\frac{1}{\varepsilon} (d(Y^\varepsilon(T)) - d(Y^\varepsilon(t_0))) = \int_{t_0}^T \left[ \langle f(Y^\varepsilon(s), s), (Y^\varepsilon)'(s) \rangle - |(Y^\varepsilon)'(s)|^2 \right] ds$$

Ainsi on a, en appliquant l'estimation (3.1.4) prodigué par la proposition 3.1.5,

$$\begin{aligned} \|(Y^\varepsilon)'\|_{L^2([t_0, T])}^2 &\leq M \int_{t_0}^T |(Y^\varepsilon)'(s)| ds - \frac{1}{\varepsilon} (d(Y^\varepsilon(T)) - d(Y^\varepsilon(t_0))) \\ &\leq M \int_{t_0}^T |(Y^\varepsilon)'(s)| ds + \frac{1}{\varepsilon} \left( 2 \left( \frac{M}{2\sqrt{2}} \right)^{4/3} \varepsilon^{4/3} \right). \end{aligned}$$

En appliquant alors l'inégalité de Young,

$$\|(Y^\varepsilon)'\|_{L^2([t_0, T])}^2 \leq \frac{1}{2} \left( \int_{t_0}^T |(Y^\varepsilon)'(s)|^2 ds + M^2(T - t_0) \right) + \frac{M^{4/3}}{2} \varepsilon^{1/3}.$$

Donc

$$\|(Y^\varepsilon)'\|_{L^2([t_0, T])}^2 \leq M^2(T - t_0) + M^{4/3} \varepsilon^{1/3}.$$

donc pour  $\varepsilon \leq \frac{1}{M^4}$ , l'inégalité (3.2.8) est établie. De la même manière, pour presque tout  $t \in [t_0, T]$ ,

$$\begin{aligned} |(k^\varepsilon)'(t)|^2 &= \frac{1}{\varepsilon} |\nabla d(Y^\varepsilon(t))|^2 \\ &\leq |(Y^\varepsilon)'(t) + f(Y^\varepsilon(t), t)|^2 \\ &\leq 2|(Y^\varepsilon)'(t)|^2 + 2M^2. \end{aligned}$$



Ainsi,

$$\int_{t_0}^t |(k^\varepsilon)'(s)|^2 ds \leq 2 \int_{t_0}^T |(Y^\varepsilon)'(s)|^2 ds + 2M^2(t - t_0).$$

Finalement, on obtient

$$\int_{t_0}^T |(k^\varepsilon)'(s)|^2 ds \leq 2(M^2 + 1)(T - t_0), \quad (3.2.10)$$

ce qui donne une borne  $L_{\text{loc}}^2(]0, +\infty[)$  de  $(k^\varepsilon)'$  indépendante de  $\varepsilon$ , sur chaque intervalle de  $]0, +\infty[$ .

## 2) Cas où $X \notin \Gamma$

La proposition 3.2.4 appliquée avec  $t_1 = 0$  et  $t_2 = T$ , donne que

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T d(Y^\varepsilon(t)) dt \leq \widehat{K}_T, \quad (3.2.11)$$

où  $\widehat{K}_T$  est une constante positive indépendante de  $\varepsilon$ . En effet, la proposition 3.2.2 ainsi que la continuité de  $d^{\frac{1}{2}}$  donnent que

$$\left( d^{\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(0)) - d^{\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(T)) + T \right)$$

est borné uniformément par rapport à  $\varepsilon$ . Pour  $\rho, \varepsilon > 0$  on définit :

$$A_{\rho, \varepsilon} := \{t \in [0, T] : d(Y^\varepsilon(t)) \geq \rho\}. \quad (3.2.12)$$

Alors

$$\frac{\rho}{\varepsilon} \text{mes}(A_{\rho, \varepsilon}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{A_{\rho, \varepsilon}} d(Y^\varepsilon(t)) dt \leq \widehat{K}_T,$$

où  $\text{mes}(A)$  désigne la mesure de Lebesgue d'un ensemble  $A \subset \mathbb{R}^2$ . Finalement, pour tout  $\rho, \varepsilon > 0$ ,

$$\text{mes}(A_{\rho, \varepsilon}) \leq \widehat{K}_T \frac{\varepsilon}{\rho}. \quad (3.2.13)$$

Comme conséquence de (3.2.13), pour tout  $\rho, \varepsilon > 0$ , il existe

$$t_{\rho, \varepsilon} \leq \widehat{K}_T \frac{\varepsilon}{\rho},$$

tel que

$$d(Y^\varepsilon(t_{\rho,\varepsilon})) \leq \rho.$$

Pour presque tout  $t \in [0, T]$ , comme

$$|(Y^\varepsilon)'(t)|^2 = \langle f(Y^\varepsilon(t), t), (Y^\varepsilon)'(t) \rangle - \frac{1}{\varepsilon} \langle \nabla d(Y^\varepsilon(t)), (Y^\varepsilon)'(t) \rangle,$$

il vient en intégrant sur n'importe quel sous-intervalle  $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ , que

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} |(Y^\varepsilon)'(t)|^2 dt &\leq \int_{t_1}^{t_2} M |(Y^\varepsilon)'(t)| dt - \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} \langle \nabla d(Y^\varepsilon(t)), (Y^\varepsilon)'(t) \rangle dt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} |(Y^\varepsilon)'(t)|^2 dt + \frac{M^2}{2} (t_2 - t_1) + \frac{1}{\varepsilon} (d(Y^\varepsilon(t_1)) - d(Y^\varepsilon(t_2))). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_{t_1}^{t_2} |(Y^\varepsilon)'(t)|^2 dt \leq \widetilde{K}_T \left( t_2 - t_1 + \frac{1}{\varepsilon} (d(Y^\varepsilon(t_1)) - d(Y^\varepsilon(t_2))) \right), \quad (3.2.14)$$

où  $\widetilde{K}_T$  est une constante positive ne dépendant que de  $T$ . Donc pour tout  $\varepsilon, \rho > 0$ , en choisissant  $t_1 = t_{\rho,\varepsilon}$  et  $t_2 = T$  :

$$\int_{t_{\rho,\varepsilon}}^T |(Y^\varepsilon)'(t)|^2 dt \leq \widetilde{K}_T \left( T + \frac{\rho}{\varepsilon} \right). \quad (3.2.15)$$

Soit  $\eta > 0$ . On définit  $\rho := \frac{\varepsilon}{\widetilde{K}_T \eta}$ . Alors par (3.2.13) il existe  $t_{\rho,\varepsilon} = t\left(\frac{\varepsilon}{\widetilde{K}_T \eta}, \varepsilon\right) \leq K_T \frac{\varepsilon}{\rho} = \eta$  tel que

$$\int_{\eta}^T |(Y^\varepsilon)'(t)|^2 dt \leq \int_{t\left(\frac{\varepsilon}{\widetilde{K}_T \eta}, \varepsilon\right)}^T |(Y^\varepsilon)'(t)|^2 dt \leq \widetilde{K}_T \left( T + \frac{1}{\widetilde{K}_T \eta} \right). \quad (3.2.16)$$

On obtient alors la borne  $L^2([\eta, T])$  sur  $(Y^\varepsilon)'$  recherchée. Pour obtenir la borne sur  $(k^\varepsilon)'$ , on remarque juste que

$$(Y^\varepsilon)' = f - (k^\varepsilon)'$$

presque partout et que  $f$  est bornée. □

On peut maintenant écrire la synthèse des propositions 3.2.5 et 3.2.2, et du corollaire

3.2.3 :

**Proposition 3.2.6.** *Soit  $f$  vérifiant l'hypothèse (1.1.2) et  $X \in \mathbb{R}^2$ . Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , la solution  $Y^\varepsilon$  de (3.0.1) est globale sur  $[0, +\infty[$ . De plus,  $(Y^\varepsilon, k^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  satisfait*

1. *Si  $X \in \Gamma$ , alors pour tout  $T > 0$ , la suite  $(Y^\varepsilon, k^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  est bornée dans  $H^1([0, T])$ .*
2. *Si  $X \notin \Gamma$ , alors pour tout  $\eta, T > 0$ , la suite  $(Y^\varepsilon, k^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  est bornée dans  $H^1([\eta, T])$ .*

### 3.3 Convergence uniforme de la suite des trajectoires pénalisées à extraction près

Cette courte section est dédiée à l'existence d'une valeur d'adhérence pour la suite

$$(Y^\varepsilon, k^\varepsilon)_{\varepsilon>0}.$$

Ce résultat s'obtient essentiellement en appliquant le théorème de Rellich (voir [17]) à la suite  $(Y^\varepsilon, k^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ .

**Proposition 3.3.1.** *Pour tout  $X \in \mathbb{R}^2$ , Il existe une suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels convergeant vers 0, ainsi qu'un couple de fonctions  $(Y, k)$ , tel que*

1. *Si  $X \in \Gamma$ , alors pour tout  $T > 0$ , la suite  $(Y^{\varepsilon_n}, k^{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $(Y, k)$  uniformément sur  $[0, T]$  et sur  $[0, +\infty[$ . De plus,  $(Y, k) \in (H^1([0, T]))^2$ .*
2. *Si  $X \notin \Gamma$ , alors pour tout  $T > 0$  et tout  $\eta > 0$ , la suite  $(Y^{\varepsilon_n}, k^{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $(Y, k)$  uniformément sur  $[\eta, T]$ , et simplement sur  $[0, +\infty[$ . De plus,  $(Y, k) \in (L^\infty([0, T]) \cap H^1([\eta, T]))^2$ .*
3. *Pour tout  $t \geq 0$*

$$Y(t) = X + \int_0^t f(Y(s), s) ds - k(t). \quad (3.3.1)$$

*Démonstration.*

1. On raisonne par extraction diagonale. D'après la proposition 3.2.6,  $(Y^\varepsilon, k^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  est bornée dans  $H^1([0, 1])$ . Or, le théorème de Rellich donne l'injection compacte  $H^1(I)$  de  $C^0(I)$ , pour tout intervalle borné  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Il existe donc une suite  $(\varepsilon_{\varphi_1(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ , où  $\varphi_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est strictement croissante, de réels convergeant vers zéro et  $Y^1, k^1 \in \mathcal{C}([0, 1])$ , tel que

$$Y^{\varepsilon_{\varphi_1(i)}}, k^{\varepsilon_{\varphi_1(i)}} \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} Y^1, k^1,$$

uniformément sur  $[0, 1]$ . Or,  $H^1([0, 1])$  est un Hilbert, donc un Banach réflexif. Il existe

donc (voir [17])  $(\widetilde{Y}^1, \widetilde{k}^1)$  un couple de fonctions de  $H^1([0, 1])$ , et une suite  $(\widetilde{\varepsilon}_{\varphi_1(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ , extraite de  $(\varepsilon_{\varphi_1(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ , de réels convergeant vers zéro, tel que  $(Y^{\widetilde{\varepsilon}_{\varphi_1(i)}}, k^{\widetilde{\varepsilon}_{\varphi_1(i)}})$  converge faiblement vers  $(\widetilde{Y}^1, \widetilde{k}^1)$ . Ainsi, quitte à extraire de nouveau, on a par identification des limites faibles et fortes

$$(Y^1, k^1) = (\widetilde{Y}^1, \widetilde{k}^1).$$

Il existe donc une suite  $(\varepsilon_{\varphi_1(i)})_{i \in \mathbb{N}}$  de réels convergeant vers zéro et  $Y^1, k^1 \in H^1([0, 1])$ , tel que  $(Y^{\varepsilon_{\varphi_1(i)}}, k^{\varepsilon_{\varphi_1(i)}})_{i \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $(Y^1, k^1)$  sur  $[0, 1]$ .

La suite  $(Y^{\varepsilon_{\varphi_1(i)}}, k^{\varepsilon_{\varphi_1(i)}})_{i \in \mathbb{N}}$  possède les mêmes propriétés que  $(Y^\varepsilon, k^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ . Il existe donc une application  $\varphi_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante, ainsi qu'un couple de fonctions  $Y^2, k^2 \in H^1([0, 2])$ , tel que  $(Y^{\varepsilon_{\varphi_1 \circ \varphi_2(i)}}, k^{\varepsilon_{\varphi_1 \circ \varphi_2(i)}})_{i \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $(Y^2, k^2)$  sur  $[0, 2]$ . De plus, comme  $(\varepsilon_{\varphi_1 \circ \varphi_2(i)})_{i \in \mathbb{N}}$  est extraite de  $(\varepsilon_{\varphi_1(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $(Y^2, k^2)$  et  $(Y^1, k^1)$  coïncident sur  $[0, 1]$ .

On effectue alors ce procédé pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On définit alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\varphi(n) := \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_n(n).$$

De même, pour tout  $t \in [0, +\infty[$ , on définit  $(Y, k)$  comme la limite simple de  $(Y^n, k^n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $[0, +\infty[$ . Le couple  $(Y, k)$  est un couple d'éléments de  $H_{\text{loc}}^1([0, +\infty[)$  et coïncide avec  $(Y^n, k^n)$  sur  $[0, n]$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors, en notant

$$\varepsilon_n := \varepsilon_{\varphi(n)},$$

la suite

$$(Y^{\varepsilon_n}, k^{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$$

converge vers  $(Y, k)$  simplement sur  $[0, +\infty[$ , et uniformément sur tout compact de  $[0, +\infty[$ .

2. Le deuxième point se montre exactement de la même manière, en travaillant sur  $[\frac{1}{n}, n]$ , au lieu de  $[0, n]$ . La convergence simple à  $t = 0$  provient du fait que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$Y^\varepsilon(0) = X = Y(0).$$

3. Pour tout  $t \geq 0$ , tout  $X \in \mathbb{R}^2$  et tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$Y^\varepsilon(t) = X + \int_0^t f(Y^\varepsilon(s), s) ds - k^\varepsilon(t).$$

Donc en utilisant la convergence simple sur  $[0, +\infty[$  de  $(Y^\varepsilon, k^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ , et en appliquant le théorème de convergence dominée dans l'égalité ci-dessus, on obtient bien que  $(X, k)$  vérifie (3.3.1).  $\square$

### 3.4 Caractérisation de la limite au sein des arêtes du réseau

La proposition 3.3.1 ci-dessus donne l'existence d'au moins une valeur d'adhérence pour  $(Y^\varepsilon, k^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ . On s'intéresse maintenant à un résultat d'unicité, c'est à dire l'existence de la limite de la suite  $(Y^\varepsilon, k^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ . Pour cela on montre d'abord deux propriétés communes à toutes valeurs d'adhérence de cette suite :

- $Y(t) \in \Gamma$  pour presque tout  $t \geq 0$  (évident lorsque  $X \in \Gamma$  par le point 1) dans la proposition 3.1.5).
- Une expression pour  $X$  et  $k$  lorsque l'on sait a priori que  $X$  appartient à une arête, i.e. lorsque  $X$  est hors de la jonction.

**Proposition 3.4.1.** *Pour toute donnée initiale  $X \in \mathbb{R}^2$ , pour toute valeur d'adhérence  $(Y, k)$ , et pour tout  $0 < t \leq T$ ,*

$$Y(t) \in \Gamma.$$

*Démonstration.* Si  $X \in \Gamma$ , alors c'est évident par le lemme 3.1.8. On montre le résultat pour  $X \notin \Gamma$ . La proposition 3.2.4 donne que pour tout  $[t_1, t_2] \subset ]0, T]$ ,

$$\int_{t_1}^{t_2} d(Y^\varepsilon(t)) dt \leq \widetilde{K}_T \varepsilon, \tag{3.4.1}$$

avec

$$\widetilde{K}_T := K_T \left( 2 \sup_{\substack{t \in [0, T] \\ \varepsilon > 0}} d^{1/2}(Y^\varepsilon(t)) + T \right).$$

La convergence simple (à extraction près) de  $Y^\varepsilon$  vers  $Y$  et la continuité de  $d$  permettent d'appliquer le théorème de convergence dominée et d'obtenir

$$\int_{t_1}^{t_2} d(Y^\varepsilon(t)) dt \xrightarrow{t \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} d(Y(t)) dt.$$

En passant à la limite dans (3.4.1), on obtient

$$\int_{t_1}^{t_2} d(Y(t)) dt = 0,$$

et par positivité et continuité de  $d$ , pour tout  $t \in [t_1, t_2]$ ,

$$d(Y(t)) = 0.$$

$[t_1, t_2]$  étant quelconque dans  $]0, T]$  le résultat est valable sur cet intervalle. □

On vient de montrer que l'on avait à la limite pour tout  $t > 0$ , pour tout  $X \in \mathbb{R}^2$ ,  $Y(t) \in \Gamma$ . Dans le cas où  $X \notin \Gamma$ , on observe un phénomène de "saut" de la part de  $Y$  à  $t = 0$ . On entend ici par saut

$$Y(0) \notin \Gamma$$

et

$$Y(0^+) := \lim_{t \rightarrow 0^+} Y(t) \in \Gamma.$$

La question est donc, est-on capable de déterminer le point de saut  $Y(0^+)$ ? On se doute qu'il va dépendre de  $X$ , mais dépend-il aussi de  $f$ ? La proposition suivante répond à cette question.

**Proposition 3.4.2.** *Pour toute donnée initiale  $X \in \mathbb{R}^2$ , et toute valeur d'adhérence  $(Y, k)$  de  $(Y^\varepsilon, k^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} Y(t) = \bar{X}, \tag{3.4.2}$$

et

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} k(t) = X - \bar{X}, \tag{3.4.3}$$

où  $\bar{X}$  est défini par la proposition 2.3.2.

*Démonstration.* Si (3.4.2) est vérifiée, (3.4.3) s'en déduit immédiatement par passage à la limite  $t \rightarrow 0^+$  dans (3.3.1). On montre donc ici (3.4.2).

Si  $X \in \Gamma$  le résultat est immédiat ( $X = \bar{X}$ ). On traite le cas  $X \notin \Gamma$ . La preuve se fait en trois étapes :

1. Montrer que l'ensemble

$$\omega(Y(0^+)) := \left\{ \tilde{X} \in \mathbb{R}^2, \exists t_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0, t_n > 0, Y(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \tilde{X} \right\}$$

est non vide.

2. Montrer que  $\omega(Y(0^+))$  est réduit à un élément, c'est-à-dire que  $Y$  admet une limite lorsque  $t$  tend vers 0.
3. Montrer que cet élément est  $\bar{X}$ .

Étape 1. On montre que  $\omega(Y(0^+))$  est non vide

Pour presque tout  $t \geq 0$ , on a déjà vu grâce au lemme 3.1.3 (avec  $g = |\cdot|^2$ ) et à l'inégalité (2.3.2), que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |Y^\varepsilon(t)|^2 = \langle f(Y^\varepsilon(t), t), Y^\varepsilon(t) \rangle - \frac{4}{\varepsilon} d(Y^\varepsilon(t)).$$

On se fixe jusqu'à la fin de la preuve  $T > 0$ . Alors pour tout  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ ,

$$\left| |Y^\varepsilon(t_2)|^2 - |Y^\varepsilon(t_1)|^2 \right| \leq (M + 4) \left( \int_{t_1}^{t_2} |Y^\varepsilon(s)| \, ds + \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{d(Y^\varepsilon(s))}{\varepsilon} \, ds \right| \right).$$

La proposition 3.2.4 donne donc pour tout  $0 < t_1 \leq t_2$ ,

$$\begin{aligned} \left| |Y^\varepsilon(t_2)|^2 - |Y^\varepsilon(t_1)|^2 \right| &\leq (M + 4) \left( \int_{t_1}^{t_2} |Y^\varepsilon(s)| \, ds + K_T \left( d^{\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(t_1)) - d^{\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(t_2)) + t_2 - t_1 \right) \right) \\ &\leq \widetilde{K}_T \left( d^{\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(t_1)) - d^{\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(t_2)) + t_2 - t_1 \right), \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

où

$$\widetilde{K}_T = \left( (M + 4) + K_T + \sup_{\substack{t \in [0, T] \\ \varepsilon > 0}} |Y^\varepsilon(t)| \right).$$

De plus, comme  $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  converge simplement vers  $Y$  sur  $[0, T]$ , on obtient en passant à la limite dans (3.4.4)

$$\left| |Y(t_2)|^2 - |Y(t_1)|^2 \right| \leq \widetilde{K}_T (t_2 - t_1), \quad (3.4.5)$$

puisque  $d(Y(t_1)) = d(Y(t_2)) = 0$  d'après la proposition 3.4.1. Le critère de Cauchy donne donc que  $t \mapsto |Y(t)|^2$  admet une limite lorsque  $t$  tend vers 0 par valeurs supérieures. Il existe alors  $a \geq 0$ , tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} |Y(t)| = a.$$

L'ensemble

$$\omega(Y(0^+)) := \left\{ \widetilde{X} \in \mathbb{R}^2, \exists t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, t_n > 0, Y(t_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \widetilde{X} \right\}$$

est donc non vide.

Étape 2. On montre que  $\omega(Y(0^+))$  est réduit à un unique élément

Si  $a = 0$ , alors immédiatement

$$\omega(Y(0^+)) = \{0\}.$$

Supposons  $a \neq 0$ . Soit  $\widetilde{X}, \widehat{X} \in \omega(Y(0^+))$ . On suppose  $\widetilde{X} \neq \widehat{X}$ . Comme  $Y$  est continu sur  $]0, T]$ , que pour tout  $t > 0$ ,  $Y(t) \in \Gamma$  et que  $\Gamma$  est fermé, alors nécessairement  $\widetilde{X} \in \Gamma$  et  $\widehat{X} \in \Gamma$ . Soit  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(t'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de réels convergeant vers 0, tel que

$$Y(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \widetilde{X} \quad \text{et} \quad Y(t'_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \widehat{X}.$$

Quitte à extraire encore, on peut supposer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$t'_n < t_n.$$

On remarque que  $\widetilde{X}$  et  $\widehat{X}$  sont des éléments de

$$\Gamma \cap C(0, |a|),$$

où  $C(0, |a|)$  est le cercle de centre 0 et de rayon  $|a|$ . L'ensemble ci-dessus a quatre points situés dans les quatre arêtes de  $\Gamma$ . Comme par hypothèse  $\widetilde{X} \neq \widehat{X}$ , ces deux points sont situés dans deux arêtes distinctes. Comme  $Y$  est continu sur  $[0, T]$ , il existe, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, à partir d'un certain rang,

$$t'_n < t''_n < t_n$$

tel que

$$Y(t''_n) = 0.$$

Alors par encadrement  $t''_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  et donc

$$Y(t''_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Cela contredit  $a \neq 0$ . Donc  $\widetilde{X} = \widehat{X}$ , donc  $Y(t)$  admet une limite lorsque  $t$  tend vers 0.

Étape 3. On montre que  $\omega(Y(0^+)) = \overline{X}$



Cette étape se fait en deux temps. On montre d'abord la convergence en norme

$$|Y(t)| \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} |\bar{X}|.$$

On conclut ensuite via un raisonnement par l'absurde similaire à celui de l'étape numéro 2. On rappelle le système 2.3.6 (dont on notera l'inconnue  $Z$  pour éviter la confusion avec la trajectoire limite  $Y$  considérée) :

$$\begin{cases} Z'(t) &= -\nabla d(Z(t)) \\ Z(0) &= X \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

On sait d'après le théorème 2.2.2 que

$$\bar{X} := \lim_{t \rightarrow +\infty} Z(t). \quad (3.4.6)$$

On pose pour  $t \in [0, \frac{T}{\varepsilon}]$ ,

$$\tilde{Y}^\varepsilon(t) := Y^\varepsilon(\varepsilon t).$$

On remarque que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\|\tilde{Y}^\varepsilon\|_{L^\infty([0, \frac{T}{\varepsilon}])} = \|Y^\varepsilon\|_{L^\infty([0, T])} \leq C_T, \quad (3.4.7)$$

où  $C_T$  est une constante positive indépendante de  $\varepsilon$ , de par la proposition 3.2.2. De plus,  $\tilde{Y}^\varepsilon$  est solution de

$$\begin{cases} (\tilde{Y}^\varepsilon)'(t) &= \varepsilon f(\tilde{Y}^\varepsilon(t), \varepsilon t) - \nabla d(\tilde{Y}^\varepsilon(t)) \\ \tilde{Y}^\varepsilon(0) &= X. \end{cases} \quad (3.4.8)$$

Alors pour presque tout  $t \in [0, \frac{T}{\varepsilon}]$ ,

$$\begin{aligned} |(\tilde{Y}^\varepsilon)'(t) - Z'(t)| &= |\varepsilon f(\tilde{Y}^\varepsilon(t), \varepsilon t) + \nabla d(Z(t)) - \nabla d(\tilde{Y}^\varepsilon(t))| \\ &\leq M\varepsilon + |\nabla d(Z(t)) - \nabla d(\tilde{Y}^\varepsilon(t))|. \end{aligned}$$

Les relations (3.4.6) et (3.4.7) donnent l'existence d'un compact  $K_{X,T}$  ne dépendant que de  $X$  et de  $T$ , tel que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $t \in [0, +\infty[$  et  $s \in [0, \frac{T}{\varepsilon}]$ ,

$$\tilde{Y}^\varepsilon(s) \in K_{X,T} \text{ et } Z(t) \in K_{X,T}.$$

Comme  $\nabla d$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , il existe  $L_d > 0$  ne dépendant que de  $K_{X,T}$ , tel que pour tout  $t \in [0, \frac{T}{\varepsilon}]$ ,

$$\left| \nabla d(Z(t)) - \nabla d(\tilde{Y}^\varepsilon(t)) \right| \leq L_d \left| \tilde{Y}^\varepsilon(t) - Z(t) \right|.$$

Ainsi

$$\left| (\tilde{Y}^\varepsilon)'(t) - Z'(t) \right| \leq M\varepsilon + L_d \left| \tilde{Y}^\varepsilon(t) - Z(t) \right|.$$

Le lemme de Grönwall 2.1.6 donne donc

$$\left| \tilde{Y}^\varepsilon(t) - Z(t) \right| \leq M\varepsilon e^{L_d t},$$

c'est à dire

$$\left| Y^\varepsilon(\varepsilon t) - Z(t) \right| \leq M\varepsilon e^{L_d t}. \quad (3.4.9)$$

On pose

$$t_\varepsilon := -\frac{1}{L_d + 1} \ln(\varepsilon).$$

À partir d'un certain rang,  $\varepsilon_T$  ne dépendant que de  $T$ ,  $t_\varepsilon \in ]0, \frac{T}{\varepsilon}]$  pour tout  $0 < \varepsilon < \varepsilon_T$ .

On remarque

$$t_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} +\infty \quad \text{et} \quad \varepsilon t_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Alors d'une part

$$Z(t_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{X},$$

et d'autre part

$$M\varepsilon e^{L_d t_\varepsilon} = M\varepsilon^{\frac{1}{L_d+1}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

L'inégalité (3.4.9) donne donc

$$Y^\varepsilon(\varepsilon t_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{X}.$$

Soit maintenant  $t \in ]0, T[$  et  $\varepsilon > 0$ , tel que  $\varepsilon t_\varepsilon < t$ . Alors (3.4.4) donne

$$\left| |Y^\varepsilon(t)|^2 - |Y^\varepsilon(\varepsilon t_\varepsilon)|^2 \right| \leq \widetilde{K}_T(t - \varepsilon t_\varepsilon) + \widetilde{K}_T \left( d^{\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(\varepsilon t_\varepsilon)) - d^{\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(t)) \right).$$

En passant à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , comme  $\bar{X} \in \Gamma$ , on obtient

$$\left| |Y(t)|^2 - |\bar{X}|^2 \right| \leq \tilde{C}t.$$

Cette inégalité étant valable pour tout  $t > 0$ , on obtient

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} |Y(t)| = |\bar{X}|.$$

Il ne reste plus qu'à montrer que l'on a effectivement

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} Y(t) = \bar{X}.$$

La stratégie va être la même que pour montrer que  $\omega(Y(0^+))$  était réduit à un élément. Comme précédemment, si  $|\bar{X}| = 0$ , alors  $\bar{X} = 0$  et donc

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} Y(t) = 0 = \bar{X}.$$

On suppose  $|\bar{X}| \neq 0$ . Par l'absurde, on suppose

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} Y(t) =: \tilde{X} \neq \bar{X}.$$

Alors, comme

$$|\tilde{X}| = |\bar{X}| \neq 0,$$

$\tilde{X}$  et  $\bar{X}$  sont dans deux arêtes différentes. Soit  $\eta > 0$ , tel que

$$\bar{B}(\tilde{X}, \eta), \bar{B}(\bar{X}, \eta) \text{ et } \bar{B}(0, \eta)$$

soient deux à deux disjointes. La convergence de  $Y^\varepsilon(\varepsilon t_\varepsilon)$  vers  $\bar{X}$  donne  $\varepsilon_\eta > 0$ , tel que pour tout  $\varepsilon < \varepsilon_\eta$ ,

$$Y^\varepsilon(\varepsilon t_\varepsilon) \in \bar{B}(\bar{X}, \eta). \quad (3.4.10)$$

De plus, comme

$$Y(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \tilde{X},$$

il existe  $t_\eta > 0$ , tel que pour tout  $0 < t \leq t_\eta$ ,

$$Y(t) \in \bar{B}(\tilde{X}, \eta).$$

Soit  $0 < t \leq t_\eta$ . La convergence simple de  $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  vers  $Y$  donne  $\tilde{\varepsilon} > 0$ , tel que pour tout  $\varepsilon < \tilde{\varepsilon}$ ,

$$Y^\varepsilon(t) \in \bar{B}(\tilde{X}, \eta).$$

La continuité en temps de  $Y^\varepsilon$  donne donc  $\tau_\varepsilon \in [\varepsilon t_\varepsilon, t]$ , tel que

$$Y^\varepsilon(\tau_\varepsilon) \in \left\{ X = (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2, X_1 = X_2 \right\}. \quad (3.4.11)$$

Le but est de montrer que  $Y^\varepsilon(\tau_\varepsilon)$  tend vers 0 lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 et d'aboutir à la contradiction

$$|\widetilde{X}| \leq 0,$$

en utilisant une fois encore l'inégalité (3.4.4). Le lemme 3.1.8 donne

$$d(Y^\varepsilon(\tau_\varepsilon)) \leq d(Y^\varepsilon(\varepsilon t_\varepsilon)) + \frac{M^2}{4} \varepsilon (\tau_\varepsilon - \varepsilon t_\varepsilon).$$

Donc

$$d(Y^\varepsilon(\tau_\varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

et (3.4.11) donne donc

$$Y^\varepsilon(\tau_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

On applique alors l'inégalité (3.4.4) entre les temps  $\tau_\varepsilon$  et  $t$  et on obtient alors

$$\left| |Y^\varepsilon(t)|^2 - |Y^\varepsilon(\tau_\varepsilon)|^2 \right| \leq \widetilde{K}_T(t - \tau_\varepsilon) + \widetilde{K}_T \left( d^{\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(\tau_\varepsilon)) - d^{\frac{1}{2}}(Y^\varepsilon(t)) \right).$$

Alors en passant à la limite et en utilisant le fait que  $\tau_\varepsilon < t$ , on obtient

$$|Y(t)| \leq 2\widetilde{K}_T t.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout  $0 < t < t_\eta$  on obtient

$$Y(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0,$$

ce qui contredit  $\widetilde{X} \neq 0$ . □

Le théorème 1.2.4 est donc maintenant prouvé, il s'agit de la réunion des propositions 3.3.1 et 3.4.2.

La proposition suivante dit que si l'on sait a priori qu'une valeur d'adhérence  $(Y, k)$  donnée de  $(Y^\varepsilon, k^\varepsilon)$  est dans une arête à un instant  $T$ , alors on est en mesure d'avoir son expression.

**Proposition 3.4.3.** *Soit une donnée initiale  $X \in \mathbb{R}^2$  et  $(Y, k)$  une valeur d'adhérence de  $(Y^\varepsilon, k^\varepsilon)$ . Soit  $m \in \mathbb{N}$  et  $i \in \{N, O, S, E\}$ , tel que pour tout  $t \in ]a_m, b_m[$ ,  $Y(t) \in J_i$ , où  $]a_m, b_m[$  est donné par (1.2.10). Alors si  $a_m = 0$  pour tout  $t \in [0, b_m]$ ,*

$$\begin{cases} \langle Y(t), e_i^\perp \rangle = 0 \\ \langle Y(t), e_i \rangle = \langle \bar{X}, e_i \rangle + \int_0^t \langle f(Y(s), s), e_i \rangle ds, \end{cases} \quad (3.4.12)$$

et

$$\begin{cases} \langle k(t), e_i \rangle = \langle X - \bar{X}, e_i \rangle \\ \langle k(t), e_i^\perp \rangle = \langle X - \bar{X}, e_i^\perp \rangle + \int_0^t \langle f(Y(s), s), e_i^\perp \rangle ds. \end{cases} \quad (3.4.13)$$

Si  $a_m \neq 0$ , alors pour tout  $t \in [a_m, b_m]$ ,

$$\begin{cases} \langle Y(t), e_i^\perp \rangle = 0 \\ \langle Y(t), e_i \rangle = \int_{a_m}^t \langle f(Y(s), s), e_i \rangle ds, \end{cases} \quad (3.4.14)$$

et

$$\begin{cases} \langle k(t), e_i \rangle = \langle k(a_m), e_i \rangle \\ \langle k(t), e_i^\perp \rangle = \langle k(a_m), e_i^\perp \rangle + \int_{a_m}^t \langle f(Y(s), s), e_i^\perp \rangle ds. \end{cases} \quad (3.4.15)$$

*Démonstration.* L'expression du gradient de  $d$  donnée dans la section 2.3, permet de réécrire le système (3.0.1) par coordonnées :

$$\begin{cases} (Y_1^\varepsilon)'(t) = f_1(Y^\varepsilon(t), t) - \frac{2}{\varepsilon} Y_1^\varepsilon(t) (Y_2^\varepsilon(t))^2 \\ (Y_2^\varepsilon)'(t) = f_2(Y^\varepsilon(t), t) - \frac{2}{\varepsilon} (Y_1^\varepsilon(t))^2 Y_2^\varepsilon(t) \\ Y_1^\varepsilon(0) = X_1 \\ Y_2^\varepsilon(0) = X_2, \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{cases} (Y_1^\varepsilon)'(t) = f_1(Y^\varepsilon(t), t) - (k_1^\varepsilon)'(t) \\ (Y_2^\varepsilon)'(t) = f_2(Y^\varepsilon(t), t) - (k_2^\varepsilon)'(t) \\ Y_1^\varepsilon(0) = X_1 \\ Y_2^\varepsilon(0) = X_2. \end{cases}$$

On commence par montrer (3.4.14) et (3.4.15). On note  $(Y^\varepsilon, k^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  une suite extraite qui converge vers  $(Y, k)$ . On traite le cas  $a_m \neq 0$ . Comme  $Y$  est continue sur  $]0, +\infty[$  et que pour  $t \in ]a_m, b_m[$ ,  $Y(t) \in J_i$  qui est un ouvert,  $Y(t) \neq 0$ , pour tout  $t \in ]a_m, b_m[$ . Alors, comme  $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge uniformément vers  $Y$  sur  $[a_m, b_m]$ , il existe pour tout

$a_m < t_1 < t_2 < b_m$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ , tel que pour tout  $\varepsilon < \varepsilon_0$  et tout  $t \in [t_1, t_2]$ ,  $\langle Y^\varepsilon(t), e_i \rangle \neq 0$ .

Afin d'alléger les notations, on supposera -sans perdre de généralité- que  $i = N$ . On a donc ici  $e_i = (0, 1)$  et  $e_i^\perp = (1, 0)$ . En particulier, pour tout  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  et  $t \in [t_1, t_2]$ ,

$$\langle Y^\varepsilon(t), e_N \rangle = Y_2^\varepsilon(t) \neq 0.$$

On peut écrire

$$Y_1^\varepsilon(t) - Y_1^\varepsilon(a_m) = \int_{a_m}^t f_1(s, Y^\varepsilon(s)) ds + k_1^\varepsilon(t) - k_1^\varepsilon(a_m).$$

Alors, comme  $(Y_1^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  converge uniformément vers zéro sur  $[a_m, b_m]$ , on obtient en passant à la limite,

$$k_1(t) = k_1(a_m) + \int_{a_m}^t f_1(s, Y^\varepsilon(s)) ds. \quad (3.4.16)$$

On montre maintenant que  $k_2 \equiv k_2(a_m)$  sur  $[a_m, b_m]$ . Pour tout  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , presque partout sur l'intervalle  $[t_1, t_2]$ ,

$$(k_2^\varepsilon)' = \frac{Y_1^\varepsilon}{Y_2^\varepsilon} (k_1^\varepsilon)';$$

cela s'obtient en écrivant le système (3.0.1) coordonnées par coordonnées. Alors, par intégration,

$$k_2^\varepsilon(t_2) - k_2^\varepsilon(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{Y_1^\varepsilon}{Y_2^\varepsilon} (k_1^\varepsilon)' \right) (s) ds. \quad (3.4.17)$$

On a le lemme évident suivant :

**Lemme 3.4.4.** *Soit  $(f_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  une suite de  $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+^*)$  bornée par  $M > 0$  qui converge faiblement vers  $f \in L^2_{loc}$ , et  $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  une suite de fonctions continues sur  $\mathbb{R}_+^*$  qui converge uniformément vers  $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*)$ . Alors pour tout sous ensemble compact  $K \subset \mathbb{R}_+^*$ ,*

$$\int_K \varphi_\varepsilon(s) f_\varepsilon(s) ds \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K \varphi(s) f(s) ds.$$

Comme  $Y \in J_N$  sur sur  $[t_1; t_2]$ ,  $\frac{Y_1^\varepsilon}{Y_2^\varepsilon}$  converge uniformément vers 0 sur  $[t_1; t_2]$ . De plus,  $(k^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  est bornée dans  $H^1([t_1, t_2])$ , donc quitte à extraire encore,  $((k_2^\varepsilon)')_{\varepsilon > 0}$  converge faiblement vers un certain élément  $h \in L^2([t_1, t_2])$ . Alors en appliquant le lemme avec

$$\varphi_\varepsilon \equiv \frac{Y_1^\varepsilon}{Y_2^\varepsilon} \text{ et } f_\varepsilon \equiv (k_1^\varepsilon)',$$

on obtient en passant à la limite dans (3.4.17),

$$k_2(t_1) = k_2(t_2).$$

Comme  $t_1$  et  $t_2$  sont arbitrairement choisis et que  $k$  est continue sur  $[a_m, b_m]$ ,  $k_2(t) = k_2(a_m)$  sur  $[a_m, b_m]$ . Donc avec (3.4.16) on obtient (3.4.15). Comme  $Y \in J_N$  sur  $]a_m, b_m[$ , et que pour tout  $t \in [a_m, b_m]$ ,

$$Y_2^\varepsilon(t) - Y_2^\varepsilon(a_m) = \int_{a_m}^t f_2(s, Y^\varepsilon(s)) ds + k_2^\varepsilon(t) - k_2^\varepsilon(a_m),$$

on obtient (3.4.14) par passage à la limite.

Il reste à traiter le cas  $a_m = 0$ , c'est-à-dire lorsque  $Y$  n'est pas nécessairement continue en 0, si  $X \notin \Gamma$ . On refait exactement le même travail que pour le cas  $a_m \neq 0$ , en travaillant non pas sur  $[0, b_m]$ , mais sur  $[\eta, b_m]$ , pour  $0 < \eta < b_m$ . On passe alors à la limite  $\eta \rightarrow 0^+$  dans les expressions obtenues et on conclut à l'aide de la proposition 3.4.2.  $\square$

*Remarque 3.4.5.* On remarque ici que l'expression trouvée pour  $Y$  présente des similitudes avec le troisième point du théorème 2.3 de [2]. Dans ce théorème, Achdou, Oudet et Tchou construisent l'ensemble des trajectoires évoluant sur un réseau, auxquelles ils associent un problème de contrôle. Dans ce théorème, ils démontrent qu'au sein d'une arête les trajectoires sont uniquement déterminées par la composante tangentielle à cette arête de la dynamique  $f$ .

### 3.5 Autour de l'existence de la limite de $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$

On a vu dans la deuxième section de ce chapitre que  $(Y^\varepsilon, k^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  était relativement compacte, soit dans  $H^1([0, T])$ , soit dans  $H^1([\eta, T])$  pour tout  $\eta > 0$ , suivant la position de départ  $X$ . Il y a donc existence d'au moins une valeur d'adhérence pour cette suite, mais la question de son unicité se pose. Il s'est avéré qu'il n'a pas été possible au cours de ce travail de répondre pleinement à cette question. On donne dans cette section la démarche d'étude, ainsi qu'une réponse partielle à la question de l'existence de la limite de la suite  $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ . La raison qui empêche ici d'affirmer ou d'infirmer l'existence de la limite, est que l'on comprend mal ce qui se passe au voisinage de la jonction à la limite. En effet, selon le choix de la dynamique  $f$ , des phénomènes d'oscillations peuvent apparaître au niveau de la jonction. On perd alors de l'information lors du passage à la limite, ce qui

empêche de caractériser complètement  $Y$ .

Comme il a été vu précédemment, l'étude de la suite de trajectoires  $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  est étroitement liée à celle de  $(k^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ . Le rôle de contrainte limite que  $k$  va jouer vis-à-vis de  $Y$  afin qu'elle demeure sur  $\Gamma$ , amène à considérer  $(Y^\varepsilon, k^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ , et pas uniquement  $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ .

On se place dans un cas particulier, celui où  $f$  ne dépend pas de la variable d'espace, i.e., il existe  $\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ , tel que pour tout  $t \geq 0$  et tout  $Y \in \mathbb{R}^2$

$$f(Y, t) \equiv \alpha(t). \quad (3.5.1)$$

La stratégie de recherche est la suivante. Soit  $X \in \mathbb{R}^2$ , on suppose -par exemple- que  $X \notin \Gamma$ . On pose alors

$$\mathcal{V} := \left\{ (Y, k) \in (H_{\text{loc}}^1([0, +\infty[))^2, \exists \varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0, \|(Y^{\varepsilon_n}, k^{\varepsilon_n}) - (Y, k)\|_{(L_{\text{loc}}^\infty([0, +\infty[))^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \right\},$$

l'ensemble des valeurs d'adhérences de  $(Y^\varepsilon, k^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ . On cherche à montrer que cet ensemble est réduit à un élément, en raisonnant par l'absurde. On pose alors

$$T_* := \inf \left\{ t \geq 0, \exists (Y(t), k(t)), (\tilde{Y}(t), \tilde{k}(t)) \in \mathcal{V}, (Y(t), k(t)) \neq (\tilde{Y}(t), \tilde{k}(t)) \right\}, \quad (3.5.2)$$

le plus petit temps à partir duquel il existe deux valeurs d'adhérences distinctes. On suppose que  $T_* < +\infty$ , et on cherche une contradiction avec la propriété caractéristique de la borne inférieure vérifiée par  $T_*$ . Soit alors  $(Y, k), (\tilde{Y}, \tilde{k})$  définis comme dans (3.5.2). Il y a ici deux cas possibles,  $T_* = 0$  et  $T_* \neq 0$ . Si  $T_* = 0$ , alors

$$Y(0) = \tilde{Y}(0) = X.$$

Si  $T_* \neq 0$ , alors comme  $Y$  et  $\tilde{Y}$  sont continues en  $T_*$ , et qu'elles coïncident sur  $[0, T_*[$ , on obtient

$$Y(T_*) = \tilde{Y}(T_*),$$

il en va de même pour  $k$  et  $\tilde{k}$ . On remarque donc que  $T_*$  ne peut pas être un min, et que pour tout  $(Y, k), (\tilde{Y}, \tilde{k}) \in \mathcal{V}$ ,

$$Y(T_*) = \tilde{Y}(T_*), \text{ et } k(T_*) = \tilde{k}(T_*).$$

On distingue donc à nouveau deux cas :



- 1) Pour tout  $(Y, k) \in \mathcal{V}$ ,  $Y(T_*)$  se trouve dans une arête.
- 2) Pour tout  $(Y, k) \in \mathcal{V}$ ,  $Y(T_*) = 0$ .

Traisons le premier cas. On suppose sans perdre de généralité

$$Y(T_*) \in J_E.$$

$Y$  et  $\tilde{Y}$  sont continues et  $J_E$  est un ouvert. La propriété caractéristique de la borne inférieure donne alors l'existence de  $t > T_*$ , tel que

$$Y(t) \neq \tilde{Y}(t) \text{ ou } k(t) \neq \tilde{k}(t),$$

et que pour tout  $s \in [T_*, t]$

$$Y(s) \in J_E \text{ et } \tilde{Y}(s) \in J_E.$$

Or, d'une part, pour tout  $s \in [T_*, t]$ ,

$$Y_2(s) = \tilde{Y}_2(s) = 0;$$

d'autre part, la proposition 3.4.3 donne que  $Y_1$  et  $\tilde{Y}_1$  satisfont le même problème de Cauchy sur  $[T_*, t]$ . De la même manière, pour tout  $s \in [T_*, t]$ ,

$$k_1(s) = \tilde{k}_1(s) = k_1(T_*)$$

et la proposition 3.4.3 donne que  $k_2$  et  $\tilde{k}_2$  satisfont le même problème de Cauchy sur  $[T_*, t]$ .

On obtient finalement pour tout  $s \in [T_*, t]$ ,

$$Y(s) = \tilde{Y}(s) \text{ et } k(s) = \tilde{k}(s),$$

ce qui est en contradiction avec la définition de  $T_*$ . Finalement, si  $\mathcal{V}$  n'est pas réduit à un élément, alors pour  $(Y, k) \in \mathcal{V}$ ,  $Y(T_*) = 0_{\mathbb{R}^2}$ .

On regarde donc maintenant le cas où pour tout  $(Y, k) \in \mathcal{V}$ ,  $Y(T_*) = 0_{\mathbb{R}^2}$ . Ce cas est celui qui est problématique. La propriété caractéristique de la borne inférieure donne alors pour tout  $\eta > 0$ , qu'il existe  $T_* < t_\eta < T_* + \eta$  tel que

$$Y(t) \neq \tilde{Y}(t).$$

On distingue alors trois cas :

- 1)  $Y(t_\eta)$  -par exemple- est dans une arête, et  $\tilde{Y}(t_\eta)$  est à la jonction.
- 2)  $Y(t_\eta)$  et  $\tilde{Y}(t_\eta)$  sont dans deux arêtes différentes.
- 3)  $Y(t_\eta)$  et  $\tilde{Y}(t_\eta)$  sont dans la même arête.

On montre tout d'abord que l'on peut toujours se ramener au troisième cas. Plus précisément, on montre que si l'on se trouve dans l'un des cas 1. et 2., alors on peut construire une troisième valeur d'adhérence  $\hat{Y}$  de  $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  tel que  $\hat{Y}(t_\eta)$  se trouve dans la même arête que  $Y(t_\eta)$ . Il n'y aura alors qu'à chercher une contradiction à l'hypothèse  $T_* < +\infty$ , en se plaçant dans le cas 3.

On se place dans le cas 1. On suppose sans perdre de généralité que  $Y(t_\eta) \in J_E$ . Soit  $(\varepsilon_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\varepsilon_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$  deux extractions, tel que  $(Y^{\varepsilon_n^1})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(Y^{\varepsilon_n^2})_{n \in \mathbb{N}}$  convergent localement uniformément, respectivement, vers  $Y$  et  $\tilde{Y}$ . Quitte à ré-extraire, on peut supposer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 < \varepsilon_n^1 < \varepsilon_n^2.$$

À  $n$  fixé, pour  $T$  suffisamment grand, la fonction

$$(t, \varepsilon) \in [0, T] \times [\varepsilon_n^1, \varepsilon_n^2] \mapsto Y^\varepsilon(t)$$

est continue par le théorème 2.1.10. Il existe donc pour  $n$  suffisamment grand,

$$\varepsilon_n^1 < \varepsilon_n^3 < \varepsilon_n^2$$

tel que

$$\langle Y^{\varepsilon_n^3}(t), e_E \rangle = \frac{1}{2} \langle Y(t), e_E \rangle.$$

Par encadrement

$$\varepsilon_n^3 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc quitte à extraire de la suite  $(Y^{\varepsilon_n^3}, k^{\varepsilon_n^3})$ , il existe  $(\hat{Y}, \hat{k}) \in \mathcal{V}$  tel que

$$\hat{Y}(t_\eta) = \frac{1}{2} Y(t_\eta),$$

et on est ramené au cas 3).

*Remarque 3.5.1.* Remarquons ici que le choix

$$\hat{Y}(t_\eta) = \frac{1}{2} Y(t_\eta)$$

est complètement arbitraire. On aurait pu définir de la même manière  $\widehat{Y}$  tel que

$$\widehat{Y}(t_\eta) = \theta Y(t_\eta),$$

pour n'importe quel  $\theta \in ]0, 1[$ .

Considérons maintenant le cas où  $Y(t_\eta)$  et  $\widetilde{Y}(t_\eta)$  sont dans deux arêtes différentes, par exemple  $Y(t_\eta) \in J_E$  et  $\widetilde{Y}(t_\eta) \in J_N$ . Alors comme pour le premier cas, il existe pour  $n$  suffisamment grand

$$\varepsilon_n^1 < \varepsilon_n^3 < \varepsilon_n^2,$$

tel que

$$\langle Y^{\varepsilon_n^3}(t_\eta), e_E \rangle = \langle Y^{\varepsilon_n^3}(t_\eta), e_N \rangle.$$

Encore une fois, quitte à ré-extraire, il existe  $(\widehat{Y}, \widehat{k}) \in \mathcal{V}$  tel que

$$\langle \widehat{Y}(t_\eta), e_E \rangle = \langle \widehat{Y}(t_\eta), e_N \rangle.$$

Donc comme  $\widehat{Y}(t_\eta) \in \Gamma$ ,  $\widehat{Y}(t_\eta) = 0$  et on est ramené au cas 1) et donc au cas 3).

Faisons un récapitulatif de notre avancée. On est parti de l'hypothèse  $T_* < +\infty$ . On en a alors déduit deux choses :

- 1) Pour toute valeur d'adhérence  $Y$  de  $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ ,  $Y(T_*) = 0$ .
- 2) Pour tout  $\theta \in ]0, 1[$ , on peut trouver deux couples  $(Y, k), (\widetilde{Y}, \widetilde{k}) \in \mathcal{V}$  et  $t > T_*$ , tel que  $Y(t)$  soit dans une arête et  $\widetilde{Y}(t) = \theta Y(t)$ .

On distingue alors deux cas :

- 1) Il existe  $\eta > 0$ , tel que pour tout  $s \in ]T_*, T_* + \eta]$ ,  $Y(s) \neq 0$  et  $\widetilde{Y}(s) \neq 0$
- 2) Il existe  $\eta > 0$  et une suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset ]T_*; T_* + \eta[$  non stationnaire qui converge vers  $T_*$ , tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Y(t_n) = 0$  ou  $\widetilde{Y}(t_n) = 0$ .

Si on est dans le premier cas, alors la propriété caractéristique de la borne inférieure donne l'existence de  $t_\eta \in ]T_*, T_* + \eta]$ , tel que  $Y(t_\eta) \neq \widetilde{Y}(t_\eta)$ . Alors la proposition 3.4.3 donne que les composantes de  $Y$  et de  $\widetilde{Y}$  satisfont le même problème de Cauchy sur  $[T_*, t_\eta]$ . Donc finalement  $Y(t_\eta) = \widetilde{Y}(t_\eta)$  et on obtient une contradiction.

Le deuxième cas est celui où l'on n'arrive pas à conclure. Il peut s'interpréter comme un phénomène d'oscillations autour de la jonction de la part d'une ou des deux valeurs d'adhérences concernées. On ne peut alors plus utiliser les relations (3.4.14) et (3.4.15). En effet, soit  $t > T_*$  tel que  $Y(t) \neq \widetilde{Y}(t)$ . On suppose, sans perdre de généralité, que  $Y(t)$

et  $\tilde{Y}(t)$  sont dans l'arête  $J_E$ . Comme dans la proposition 3.4.3, on définit

$$\tilde{t}_0 := \sup \{s < t, \tilde{Y}(s) = 0\},$$

et

$$t_0 := \sup \{s < t, Y(s) = 0\}.$$

On aimerait exploiter les relations

$$Y(t) = \int_{t_0}^t \alpha(s) ds - (k(t) - k(t_0))$$

et

$$\tilde{Y}(t) = \int_{\tilde{t}_0}^t \alpha(s) ds - (\tilde{k}(t) - \tilde{k}(\tilde{t}_0)),$$

et en particulier que  $(k(t) - k(t_0))$  et  $(\tilde{k}(t) - \tilde{k}(\tilde{t}_0))$  sont orthogonaux à  $J_E$ .

Le problème est qu'il n'y a a priori aucune raison pour que  $t_0$  et  $\tilde{t}_0$  soient identiques, et donc qu'aucune relation utile entre les deux égalités ci-dessus soit établie.

*Remarque 3.5.2.* Ce phénomène d'oscillations autour de la jonction rappelle *l'effet Zéno*, décrit dans [13, 32]. Dans [32, Proposition B.2], O. Jerhaoui et H. Zidani gèrent cet effet en appliquant le théorème de Filippov (voir [20], Théorème 3.1.6). L'idée est d'approcher la trajectoire par une suite de trajectoires ayant un nombre fini de passages à la jonction. Le problème est qu'ils utilisent la borne  $L^\infty$  de leurs dynamiques. Si l'on essaie ici de suivre leur stratégie, il faudrait disposer d'une borne  $L^\infty$  sur  $(Y^\varepsilon)'$  uniforme en  $\varepsilon$ , ce qui n'est pas possible.



# PROBLÈME DE SKOROKHOD SUR UN RÉSEAU

---

On a étudié dans le chapitre précédent la convergence locale uniforme de la suite de solutions  $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  du système (3.0.1). On a montré qu’il n’y avait pas existence de la limite pour cette suite, seulement existence de valeurs d’adhérence. On a établi en particulier, certaines propriétés vérifiées par ces valeurs d’adhérences, à savoir le théorème 3.2.1 et la proposition 3.4.3. L’enjeu de ce chapitre est une discussion autour du problème limite vérifié par les valeurs d’adhérence de  $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ , ainsi qu’à travers des cas concrets, illustrer les difficultés rencontrées dans l’étude de la convergence de cette suite. On exhibera en particulier des exemples de dynamiques qui illustrent les problèmes qui se posent lorsqu’une trajectoire limite (i.e. une valeur d’adhérence de  $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ ) atteint la jonction du réseau.

## 4.1 Une trajectoire limite qui ne rentre dans aucune branche

On a vu dans la section 3.5 que la principale difficulté qui apparaissait pour la question de l’unicité était celle de la gestion des oscillations qui pouvaient apparaître autour de la jonction. On donne dans cette sous-section l’exemple d’une dynamique pour laquelle il y a unicité de la trajectoire limite, et pour laquelle la dite trajectoire limite ne “rentre dans aucune arête” à  $t = 0$ . On entend ici par “rentrer dans une arête” à un temps  $t_0 \geq 0$ , pour une trajectoire  $Y : \mathbb{R}_+ \mapsto \Gamma$ , tel que  $Y(t_0) = 0$ , l’existence de  $i \in \{N, O, S, E\}$  et de  $\delta_i > 0$ , tel que pour tout  $t \in ]t_0, \delta_i[$ ,

$$Y(t) \in J_i.$$

On considère une suite  $(i(n))_{n \in \mathbb{N}}$ , tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$i(n) \in \{N, O, S, E\}.$$

On définit alors pour tout  $t \in [0, +\infty[$ ,

$$f_n : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{cases} 0, & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2^{n+1}}[, \\ e_{i(n)}, & \text{si } t \in [\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}}[, \\ -e_{i(n)}, & \text{si } t \in [\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^n}[, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{supp}(f_n) \subset [0, 1].$$

On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Z'_n(t) = f_n(t), & t \geq 0, \\ Z_n(0) = 0. \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Alors pour tout  $t \geq 0$ ,

$$Z_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2^{n+1}}[, \\ (t - \frac{1}{2^{n+1}})e_{i(n)}, & \text{si } t \in [\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{3}{2^{n+2}}[, \\ (\frac{1}{2^n} - t)e_{i(n)}, & \text{si } t \in [\frac{3}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^n}[, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

est solution de (4.1.1). On donne une représentation de  $f_n$  et  $Z_n$  sur les figures suivantes.

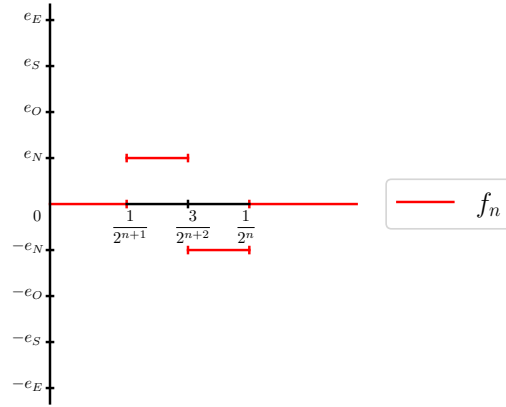


FIGURE 4.1 –  $f_n$ , lorsque  $e_{i(n)} = e_N$

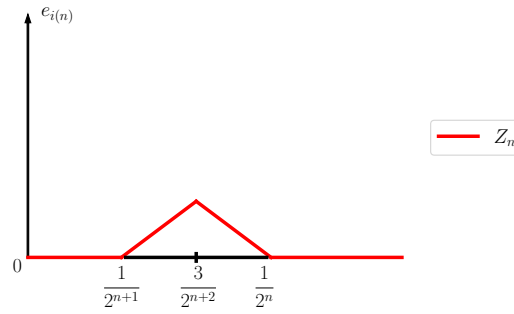


FIGURE 4.2 – Représentation de  $t \mapsto Z_n(t)$

Les fonctions  $f_n$  sont à supports compacts disjoints, donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$Y_n := \sum_{k=1}^n Z_k,$$

est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y_n'(t) = \sum_{k=1}^n f_k(t), & t \geq 0 \\ Y_n(0) = 0. \end{cases} \quad (4.1.2)$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_0^{+\infty} |f_n(s)| \, ds = \frac{1}{2^{n+1}}.$$



Donc  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge presque partout vers  $Y_\infty$ , la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y'_\infty(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t), & t \geq 0 \\ Y_\infty(0) = 0. \end{cases} \quad (4.1.3)$$

De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $t \in [\frac{1}{2^{n+1}}, +\infty[$ ,

$$Y_\infty(t) = Y_n(t),$$

donc pour tout  $t \geq 0$ ,

$$Y_\infty(t) \in \Gamma.$$

Donc pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $t \geq 0$ ,

$$\frac{1}{\varepsilon} \nabla d(Y_\infty(t)) = 0.$$

Donc pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $Y_\infty$  coïncide avec la solution  $Y^\varepsilon$  du système (3.0.1), avec

$$f(Y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) \text{ et } X = 0.$$

Donc dans ce cas, la suite  $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  converge (vers  $Y_\infty$ ) car est stationnaire. On choisit alors  $(e_{i(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  tel qu'il n'y ait pas convergence, c'est à dire qu'il existe  $j, l \in \{N, O, S, E\}$  distincts, tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il existe  $n_j, n_l \geq n$ , tel que

$$e_{i(n_j)} = e_j \text{ et } e_{i(n_l)} = e_l.$$

Ainsi, pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $0 < t_j < \delta$  et  $0 < t_l < \delta$ , tel que

$$Y_\infty(t_j) \in J_{e_j} \text{ et } Y_\infty(t_l) \in J_{e_l}.$$

On a donc bien exhibé un exemple de trajectoire limite pour le système (3.0.1) qui ne rentre dans aucune branche, ce qui correspond au cas de figure qui pose problème dans la section 3.5 pour l'établissement de l'existence de la limite de la suite  $(Y^\varepsilon, k^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ .

## 4.2 Autour du caractère mal posé du problème limite

Une autre difficulté qui intervient pour l'étude des couples trajectoires/pénalisations limites, est le fait que ces dernières sont uniquement caractérisées comme étant des valeurs d'adhérence de la suite  $(Y^\varepsilon, k^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ . Plus précisément, pour un couple  $(Y, k)$ , limite d'une suite extraite de  $(Y^\varepsilon, k^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  vérifie

1.  $(Y, k)$  satisfait les cinq propriétés du théorème 3.2.1,
2.  $(Y, k)$  satisfait la proposition 3.4.3.

Or, vérifier ces deux propriétés ne caractérise pas le couple  $(Y, k)$ . En effet, on considère l'exemple de la dynamique

$$f(Y, t) := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

avec comme position initiale

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

qui sera étudié plus précisément dans la prochaine section. On considère les deux couples  $(Y, k)$  et  $(\tilde{Y}, \tilde{k})$  définis par

$$Y(t) := \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix}, & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{si } t \geq 1, \end{cases}$$

$$k(t) := \begin{cases} \begin{pmatrix} -t \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 1-t \end{pmatrix}, & \text{si } t \geq 1, \end{cases}$$

$$\tilde{Y}(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix},$$

et

$$\tilde{k}(t) := \begin{pmatrix} -t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors on vérifie aisément que  $(Y, k)$  et  $(\tilde{Y}, \tilde{k})$  vérifient les deux propriétés mentionnées plus haut. D'une certaine manière, ça n'est pas étonnant. Si vérifier le théorème 3.2.1 et la proposition 3.4.3 suffisait à caractériser un couple de fonctions, alors on aurait une bonne définition d'un problème de Skorokhod posé sur  $\Gamma$ . Encore une fois, ce qui manque ici est de l'information sur le comportement du couple  $(Y, k)$  aux temps où  $Y$  atteint la jonction. La question de comment est déterminé le comportement de la trajectoire  $Y$  après ces temps-là est encore ouverte.

### 4.3 Étude d'une dynamique particulière

On considère dans toute cette section la dynamique

$$f(Y, t) := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On décide d'adopter dans cette section des notations plus légères pour la trajectoire  $Y^\varepsilon$ , que l'on notera  $Y^\varepsilon := (x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ . Le système (3.2.1) se réécrit donc dans cette situation

$$\begin{cases} x_\varepsilon'(t) &= -1 - \frac{2}{\varepsilon} x_\varepsilon(t) y_\varepsilon^2(t) \\ y_\varepsilon'(t) &= -1 - \frac{2}{\varepsilon} x_\varepsilon^2(t) y_\varepsilon(t), \\ Y_\varepsilon(0) &= X_0. \end{cases} \quad (4.3.1)$$

De plus,  $F^\varepsilon(Y, t)$ , pour  $Y = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  et  $t \geq 0$ , se réécrit

$$F^\varepsilon(Y, t) = \begin{pmatrix} -1 - \frac{2}{\varepsilon} x^2 y^2 \\ -1 - \frac{2}{\varepsilon} x^2 y \end{pmatrix},$$

indépendamment de  $t$ .

#### 4.3.1 Étude de (4.3.1) lorsque $X_0 \in \Gamma \setminus \{0\}$ .

Le but de cette section est l'établissement des propositions suivantes

**Proposition 4.3.1.** *Pour  $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \end{pmatrix}$ , avec  $\delta > 0$ , la suite  $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  de solutions de (4.3.1) converge vers*

$$Y(t) := \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ \delta - t \end{pmatrix}, & \text{si } 0 \leq t \leq \delta, \\ \begin{pmatrix} \delta - t \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{si } t \geq \delta. \end{cases} \quad (4.3.2)$$

*De plus, la suite  $(k^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge vers*

$$k(t) := \begin{cases} \begin{pmatrix} -t \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{si } 0 \leq t \leq \delta, \\ \begin{pmatrix} -\delta \\ \delta - t \end{pmatrix}, & \text{si } t \geq \delta. \end{cases} \quad (4.3.3)$$

**Proposition 4.3.2.** *Pour  $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\delta \end{pmatrix}$ , avec  $\delta > 0$ , la suite  $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  de solutions de (4.3.1) converge vers*

$$Y(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ -\delta - t \end{pmatrix}.$$

*De plus, la suite  $(k^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge vers*

$$k(t) := \begin{pmatrix} -t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Proposition 4.3.3.** *Pour  $X_0 = \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \end{pmatrix}$ , avec  $\delta > 0$ , la suite  $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  de solutions de*

(4.3.1) converge vers

$$Y(t) := \begin{cases} \begin{pmatrix} \delta - t \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{si } 0 \leq t \leq \delta, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \delta - t \end{pmatrix}, & \text{si } t \geq \delta. \end{cases}$$

De plus, la suite  $(k^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge vers

$$k(t) := \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ -t \end{pmatrix}, & \text{si } 0 \leq t \leq \delta, \\ \begin{pmatrix} \delta - t \\ -\delta \end{pmatrix}, & \text{si } t \geq \delta. \end{cases}$$

**Proposition 4.3.4.** Pour  $X_0 = \begin{pmatrix} -\delta \\ 0 \end{pmatrix}$ , avec  $\delta > 0$ , la suite  $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  de solutions de (4.3.1) converge vers

$$Y(t) := \begin{pmatrix} -\delta - t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, la suite  $(k^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge vers

$$k(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ -t \end{pmatrix}.$$

Les propositions 4.3.2 et 4.3.4 se démontrent aisément, elles découlent directement de la proposition 3.4.3.

*Démonstration de la proposition 4.3.2.* Soit  $Y$  une valeur d'adhérence de la suite de solutions du système (4.3.1),  $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ . Comme  $Y(0) \in J_S$ , on note  $T_* > 0$ , le premier temps d'arrivée à la jonction, c'est à dire

$$T_* := \inf \{t > 0, Y(t) = 0\}.$$

La proposition 3.4.3 donne donc que pour tout  $t \in [0, T_*[$ ,

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\delta - t \end{pmatrix}.$$

Comme  $Y$  est continue sur  $[0, +\infty[$  par le théorème 3.2.1,  $Y(t) \neq 0$  pour tout  $t \geq 0$ , donc  $T_* = +\infty$ . Donc pour toute valeur d'adhérence  $Y$  de  $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ ,

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\delta - t \end{pmatrix},$$

pour tout  $t \geq 0$ . Donc  $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge, donc  $(k^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge vers une fonction  $k$ , dont l'expression est donnée par la proposition 3.4.3. □

*Démonstration de la proposition 4.3.4.* La preuve s'effectue de la même manière que pour la proposition 4.3.2. □

La proposition 4.3.3 se déduira de la proposition 4.3.1, via un changement de coordonnées dans le système (4.3.1). La difficulté de cette section est l'établissement de la proposition 4.3.1. L'expression de  $Y$  sur  $[0, \delta]$  ne pose pas de problème, il s'agit des mêmes arguments que pour l'établissement de la proposition 4.3.2. Il s'agit ensuite de déterminer le comportement de  $Y$  une fois qu'elle a atteint la jonction à  $t = \delta$ . En effet, comme décrit dans la section précédente, il y a plusieurs trajectoires limite qui satisfont le théorème 3.2.1 ainsi que la proposition 3.4.3. L'enjeu de ce qui va suivre est de trouver le "bon" candidat limite.

Pour ce faire, il suffit juste de montrer qu'il existe  $T > 1$ , tel que  $Y(T) \in J_O$ ; on conclura alors une nouvelle fois grâce à la proposition 3.4.3. Pour avoir l'existence d'un tel  $T$ , on montre qu'il existe  $\delta_0 > 0$  et  $T > 0$ , tel que pour tout  $t \in [1, T]$  et tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$x'_\varepsilon(t) \leq -\delta_0. \tag{4.3.4}$$

Alors par intégration et utilisation de la convergence uniforme de  $(x_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ , on obtiendra à la limite  $x(T) < 0$ . On établit la proposition 4.3.1 dans le cas où

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On ne perd pas de généralité, et cela permet d'alléger les calculs.

On définit certaines courbes planes pour  $\varepsilon > 0$  :

$$\mathcal{C}_{x'}^\varepsilon := \left\{ \left( x, -\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}(-x)^{\frac{1}{2}}} \right), x < 0 \right\}, \quad (\mathcal{C}_{x'}^\varepsilon)$$

et

$$\mathcal{C}_{x',\nu}^\varepsilon := \left\{ \left( x, -\frac{\nu\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}(-x)^{\frac{1}{2}}} \right), x < 0, \nu < 0 \right\}. \quad (\mathcal{C}_{x',\nu}^\varepsilon)$$

Ces courbes sont fortement liées au système (4.3.1) ; en effet, si  $Y^\varepsilon(t) \in \mathcal{C}_{x'}^\varepsilon$ , alors  $x'_\varepsilon(t) = 0$ . L'idée est donc de comparer la position de  $Y^\varepsilon$  par rapport à ces courbes et obtenir des estimations utiles sur  $x_\varepsilon, y_\varepsilon$  ainsi que sur leurs dérivées.

Afin de donner une idée du comportement de ce système, on montre ici des simulations numériques. On regarde en particulier la position de la courbe  $Y^\varepsilon$  par rapport aux courbes décrites ci-dessus.

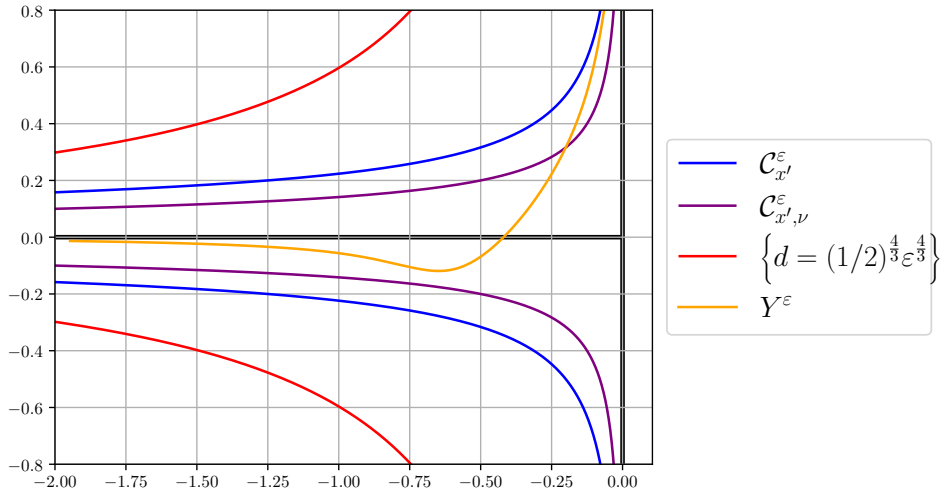


FIGURE 4.3 – Simulation pour la dynamique  $f(Y, t) := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , sur  $[0, 2.5]$ , avec  $\varepsilon = 0.1$ .

On s'aperçoit que toutes les courbes introduites sont contenues dans la zone d'invariance  $\{d = (1/2)^{\frac{4}{3}}\varepsilon^{\frac{4}{3}}\}$ , représentée en rouge sur la figure 4.3. On rappelle que cette zone est la zone d'invariance optimale pour  $Y^\varepsilon$ , donnée par la proposition 3.1.5. Il va falloir ici des résultats plus fins, pour être en mesure d'obtenir une estimation de la forme (4.3.4). À la limite, on observe le comportement suivant :

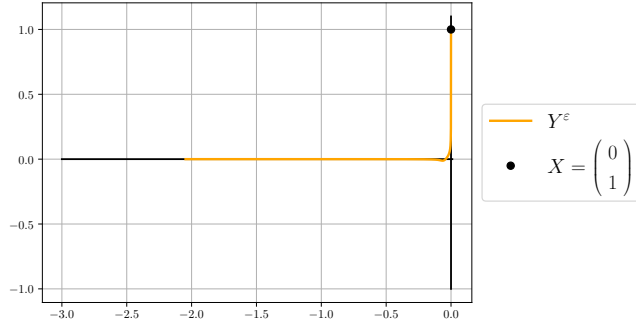


FIGURE 4.4 – Simulation pour la dynamique  $f(Y, t) := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , sur  $[0, 3]$  avec  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

Cela donne l'intuition d'établir l'expression pour  $Y$  donnée par l'égalité (4.3.2).

La proposition suivante donne pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'existence d'un temps  $t_\varepsilon < 1$ , en lequel  $Y^\varepsilon$  atteint l'axe des abscisses.

**Proposition 4.3.5.** *Il existe une suite  $(t_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  de réels positifs bornée par 1, tel que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $y_\varepsilon(t_\varepsilon) = 0$ .*

*Démonstration.* • Soit  $\varepsilon > 0$ . On a

$$y'_\varepsilon(0) = -1 < 0$$

et

$$y'_\varepsilon(t) = -1 - \frac{2}{\varepsilon} x_\varepsilon^2(t) y_\varepsilon(t).$$

Alors, tant que  $y_\varepsilon(t)$  est positif,  $y'_\varepsilon(t)$  est strictement négatif et majoré par  $-1$ . Ainsi  $y_\varepsilon$  est strictement décroissant jusqu'à atteindre 0 et il existe donc  $t_\varepsilon$  tel que  $y_\varepsilon(t_\varepsilon) = 0$ .

• De plus, pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $t \in [0, t_\varepsilon]$ ,

$$y'_\varepsilon(t) \leq -1.$$

Donc par intégration,  $y_\varepsilon(t) \leq 1 - t$ . On obtient donc

$$0 \leq 1 - t_\varepsilon,$$

et finalement  $t_\varepsilon \leq 1$ . □



La proposition suivante assure la décroissance de  $x_\varepsilon$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , et une première zone d'invariance, plus fine que celle donnée par la proposition 3.1.5.

**Proposition 4.3.6.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $t > 0$ ,*

$$x'_\varepsilon(t) \leq 0.$$

*Démonstration.* Soit  $X := (x, y) \in \mathcal{C}_{x'}^\varepsilon \cap \{x \leq 0\}$ . Alors,

$$X = \left( x, -\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}(-x)^{\frac{1}{2}}} \right).$$

Ainsi la direction de la tangente à  $\mathcal{C}_{x'}$  en  $X$  est donnée par :

$$\left( 1, -\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2}(-x)^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (4.3.5)$$

Ainsi, le vecteur normal à  $\mathcal{C}_{x'}$  sortant en  $X$  est

$$n_{\mathcal{C}_{x'}^\varepsilon}(X) := \left( -\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2}(-x)^{\frac{3}{2}}}, -1 \right).$$

On calcule alors pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\langle F^\varepsilon(X, t), n_{\mathcal{C}_{x'}^\varepsilon}(X) \rangle = 1 + \frac{2x^2y}{\varepsilon}.$$

Cependant, comme  $\mathcal{C}_{x'}^\varepsilon$  est en dessous de  $\mathcal{C}_{y'}$ ,

$$y \leq -\frac{\varepsilon}{2x^2}.$$

Donc

$$\langle F^\varepsilon(X, t), n_{\mathcal{C}_{x'}^\varepsilon}(X) \rangle \leq 0.$$

Ainsi, pour  $t > 0$  tel que  $x'_\varepsilon(t) = 0$ ,

$$\langle (Y^\varepsilon)'(t), n_{\mathcal{C}_{x'}^\varepsilon}(Y^\varepsilon(t)) \rangle = \langle F^\varepsilon(Y^\varepsilon(t), t), n_{\mathcal{C}_{x'}^\varepsilon}(Y^\varepsilon(t)) \rangle \leq 0.$$

Donc comme à  $t = 0$ ,  $x'_\varepsilon(0) < 0$ , on a bien pour tout  $t \geq 0$ ,

$$x'_\varepsilon(t) \leq 0.$$

□

*Remarque 4.3.7.* La figure 4.3 illustre la proposition précédente, on voit bien que la courbe représentative de  $Y^\varepsilon$  (en jaune), est contenu dans l'espace délimité par  $\mathcal{C}_x^\varepsilon$  (en bleu).

On définit alors, en accord avec les notations précédentes, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\eta_\varepsilon := x_\varepsilon(t_\varepsilon), \tag{4.3.6}$$

l'abscisse de  $Y^\varepsilon$  au temps  $t_\varepsilon$ , lorsque  $Y^\varepsilon$  intersecte  $J_O$ .

**Proposition 4.3.8.** *L'ensemble*

$$\left\{ y \geq x - \eta_\varepsilon \right\} \cap \left\{ y \geq -\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}(-x)^{\frac{1}{2}}} \right\} \cap \left\{ y \leq \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}(-x)^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

*est invariant pour  $Y^\varepsilon$ .*

*Démonstration.* En effectuant les mêmes calculs que précédemment, on regarde pour  $X = (x, y) \in \{y \geq x - \eta_\varepsilon\}$  et  $t \geq 0$ ,

$$\langle F^\varepsilon(X, t), (1, -1) \rangle = -\frac{2xy}{\varepsilon} \eta_\varepsilon < 0,$$

et on conclut de la même manière. □

On illustre la proposition précédente sur la figure ci-dessous, en notant que l'ensemble

$$\left\{ y \geq -\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}(-x)^{\frac{1}{2}}} \right\} \cap \left\{ y \leq \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}(-x)^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

est celui délimité par les deux hyperboles (en bleu sur la figure 4.5) définissant  $\mathcal{C}_x^\varepsilon$ .

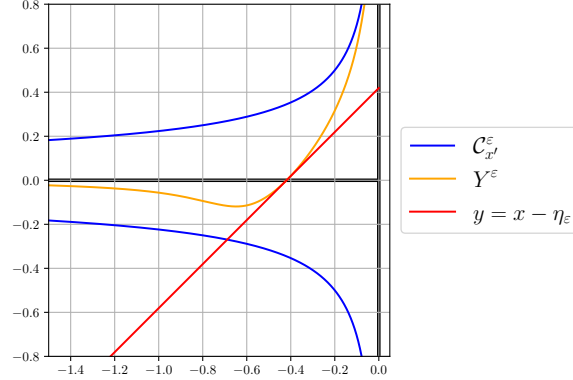


FIGURE 4.5 – Zone d’invariance déterminée par la proposition 4.3.8

On dispose désormais un ensemble invariant pour  $Y^\varepsilon$ . Cependant, ce n’est pas suffisant pour obtenir une estimation de la forme (4.3.4). On a besoin de résultats plus fins que la position relative de  $Y^\varepsilon$  par rapport à  $\mathcal{C}_{x'}^\varepsilon$ . On va comparer la position de  $Y^\varepsilon$  à celle d’une courbe “un peu plus au dessus” de  $\mathcal{C}_{x'}^\varepsilon$ ,  $\mathcal{C}_{x',\nu}^\varepsilon$ , pour un réel strictement positif  $\nu$  bien choisi (voir la figure 4.3). On donne d’abord le lemme suivant :

**Lemme 4.3.9.** *Il existe  $\gamma > 0$  tel que, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,*

$$\eta_\varepsilon \leq -(\gamma\varepsilon)^{1/3}.$$

*Démonstration.* Pour prouver ce lemme, on considère le système (4.3.1) avec une position initiale proche de la jonction. Pour  $\varepsilon > 0$ , on considère le système, notant  $U^\varepsilon := (u_\varepsilon, v_\varepsilon)$  :

$$\begin{cases} u'_\varepsilon(t) &= -1 - \frac{2}{\varepsilon}u_\varepsilon(t)v_\varepsilon^2(t) \\ v'_\varepsilon(t) &= -1 - \frac{2}{\varepsilon}u_\varepsilon^2(t)v_\varepsilon(t) \\ U_\varepsilon(0) &= (0, \varepsilon^{1/3}) \end{cases} \quad (4.3.7)$$

On note  $t_\varepsilon^U > 0$  (qui existe par la proposition 4.3.5) tel que  $v_\varepsilon(t_\varepsilon^U) = 0$ . Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure qu’il n’y pas d’intersection entre les courbes paramétrées  $(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))_{t \geq 0}$  et  $(u_\varepsilon(t), v_\varepsilon(t))_{t \geq 0}$ , ainsi, pour tout  $\varepsilon \geq 0$ ,

$$x_\varepsilon(t_\varepsilon) < u_\varepsilon(t_\varepsilon^U). \quad (4.3.8)$$

On travaille ici sur  $[0, t_\varepsilon^U]$ . Comme  $v'_\varepsilon(t) \leq -1$ , nécessairement

$$v_\varepsilon(t) \leq \varepsilon^{1/3}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} u'_\varepsilon &\leq -1 - \frac{2}{\varepsilon} u_\varepsilon v_\varepsilon^2 \\ &\leq -1 - \frac{2}{\varepsilon^{1/3}} u_\varepsilon. \end{aligned}$$

Cela donne que  $u_\varepsilon$  est une sous-solution de

$$\begin{cases} z'_\varepsilon(t) + \frac{2}{\varepsilon^{1/3}} z &= -1 \\ z(0) &= 0. \end{cases} \quad (4.3.9)$$

Ainsi, en résolvant (4.3.9), on obtient pour tout  $t \in [0, t_\varepsilon^U[$ ,

$$u_\varepsilon(t) \leq -\varepsilon^{1/3} \left( 1 - e^{-\frac{2}{\varepsilon^{1/3}} t} \right). \quad (4.3.10)$$

On veut ici minimiser  $t_\varepsilon^U$ . Il y a deux cas possibles :

$$\exists B > 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall t \in [0, t_\varepsilon^U], \quad -B\varepsilon^{1/3} \leq u_\varepsilon(t) \leq 0 \quad (\star)$$

$$\forall B > 0, \quad \exists \varepsilon_B > 0, \quad \exists t_B \in [0, t_\varepsilon^U], \quad u_\varepsilon(t_B) < -B\varepsilon^{1/3} \quad (\star\star)$$

Le cas  $(\star\star)$  n'est pas possible, car  $(t_\varepsilon^U)_{\varepsilon > 0}$  est borné par 1, par la proposition 4.3.5, et  $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  est bornée sur  $[0, 1]$ . Il existe donc  $B > 0$ , tel que pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $t \in [0, t_\varepsilon^U]$ ,

$$\frac{u_\varepsilon^2}{\varepsilon} \leq \frac{(B\varepsilon^{1/3})^2}{\varepsilon}.$$

Donc, comme  $U^\varepsilon$  vérifie (4.3.7),  $v_\varepsilon$  vérifie

$$\begin{cases} v'_\varepsilon \geq -1 - \frac{2B^2}{\varepsilon^{1/3}} \\ v_\varepsilon(0) = \varepsilon^{1/3} \end{cases} \quad (4.3.12)$$

Ainsi, pour tout  $t \in [0, t_\varepsilon^U]$ ,

$$v_\varepsilon(t) \geq -\frac{\varepsilon^{1/3}}{2B^2} + \frac{\varepsilon^{1/3}}{2B^2} e^{-\frac{2B^2}{\varepsilon^{1/3}}t} + B\varepsilon^{1/3} e^{-\frac{2B^2}{\varepsilon^{1/3}}t}. \quad (4.3.13)$$

On pose  $\beta := B + \frac{1}{2B^2}$ . Alors, en considérant (4.3.13) à  $t = t_\varepsilon^U$ , puisque  $v_\varepsilon(t_\varepsilon^U) = 0$ ,

$$\beta\varepsilon^{1/3} e^{-\frac{2B^2}{\varepsilon^{1/3}}t_\varepsilon^U} \leq \frac{\varepsilon^{1/3}}{2B^2},$$

donc

$$t_\varepsilon^U \geq \frac{\ln(2\beta B^2)}{2B^2} \varepsilon^{1/3},$$

et

$$\ln(2\beta B^2) > 0$$

par définition de  $\beta$ . Alors, en notant

$$A := \frac{\ln(2\beta B^2)}{2B^2},$$

on obtient par (4.3.8) et (4.3.10) :

$$\begin{aligned} \eta_\varepsilon &\leq u_\varepsilon(t_\varepsilon^U) \\ &\leq -\frac{\varepsilon^{1/3}}{2B^2} (1 - e^{-\frac{2}{\varepsilon^{1/3}}t_\varepsilon^U}) \\ &\leq -\frac{\varepsilon^{1/3}}{2B^2} (1 - e^{-2A}) \\ &\leq -(\gamma\varepsilon)^{1/3}, \end{aligned}$$

où

$$\gamma := \left( \frac{(1 - e^{-2A})}{2B^2} \right)^3.$$

□

On est maintenant en mesure d'obtenir une estimation de la forme (4.3.4). Pour cela on va effectuer les calculs dans une zone d'invariance légèrement plus grande que celle donnée par la proposition 4.3.8, à savoir celle délimitée par la réunion d'hyperboles définissant  $\mathcal{C}_{x'}^\varepsilon$  et la droite d'équation  $y = x + (\gamma\varepsilon)^{\frac{1}{3}}$ , où  $\gamma$  est la constante donnée par le lemme 4.3.9.

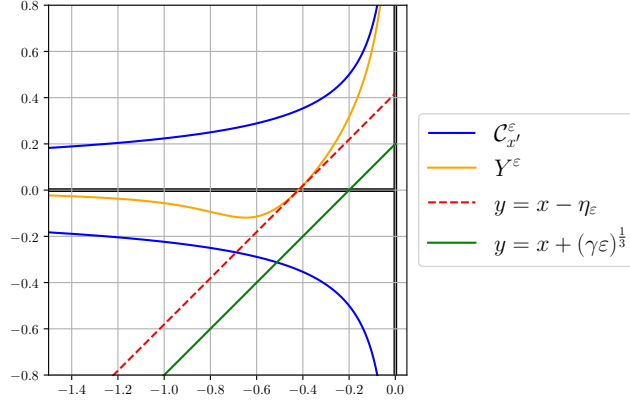


FIGURE 4.6 –

**Proposition 4.3.10.** *Il existe  $0 < \nu < 1$  tel que pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $t > t_\varepsilon$ ,*

$$x'_\varepsilon(t) \leq -1 + \nu^2.$$

*Démonstration.* Le but de la preuve est de montrer qu'il existe  $\nu > 0$ , tel que pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, l'ensemble

$$S_\nu := \left\{ y \geq -\frac{\nu\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}(-x)^{\frac{1}{2}}} \right\} \cup \{y \geq x + \eta_\varepsilon\} \cup \{x \leq 0\}$$

est un ensemble invariant pour  $(Y^\varepsilon(t))_{t \geq t_\varepsilon, \varepsilon > 0}$ . Pour ce faire, on effectue le même type de calcul que dans les propositions 4.3.6 et 4.3.8.

Soit  $\nu, \varepsilon > 0$ , et  $X := (x, y) \in \mathcal{C}_{x', \nu}^\varepsilon$ , où on rappelle

$$\mathcal{C}_{x', \nu}^\varepsilon = \left\{ y = -\frac{\nu\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}(-x)^{\frac{1}{2}}} \right\}.$$

Alors,

$$X = \left( x, -\frac{\nu\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}(-x)^{\frac{1}{2}}} \right).$$

Donc, un vecteur normal sortant à  $\mathcal{C}_{x', \nu}^\varepsilon$  en  $X$  est donné par

$$n_{\mathcal{C}_{x', \nu}^\varepsilon}(X) := \left( -\frac{\nu\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2}(-x)^{\frac{3}{2}}}, -1 \right).$$

Comme précédemment, on souhaite obtenir pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\langle F^\varepsilon(X, t), n_{\mathcal{C}_{x', \nu}^\varepsilon}(X) \rangle \leq 0,$$

pour un élément  $X \in \mathcal{C}_{x', \nu}^\varepsilon$  bien choisi. Il faut en effet le prendre dans

$$\mathcal{C}_{x', \nu}^\varepsilon \cap S.$$

En réalité, afin de simplifier les calculs, on prend  $X$  dans

$$\tilde{S} := \mathcal{C}_{x', \nu}^\varepsilon \cup \{y \geq x + (\gamma\varepsilon)^{1/3}\} \cup \{x \leq 0\}.$$

En effet, la proposition 4.3.8 et le lemme 4.3.9 donnent l'inclusion  $S \subset \tilde{S}$ . Ainsi, si l'on dispose du résultat pour  $X \in \tilde{S}$ , on aura montré la proposition. On calcule alors

$$\begin{aligned} \langle F^\varepsilon(X, t), n_{\mathcal{C}_{x', \nu}^\varepsilon}(X) \rangle &= \left(-1 - \frac{2xy^2}{\varepsilon}\right) \left(-\frac{\nu\varepsilon^{1/2}}{2\sqrt{2}(-x)^{3/2}}\right) + (-1) \left(-1 - \frac{2yx^2}{\varepsilon}\right) \\ &= \left(-1 - \frac{2x\nu^2\varepsilon}{2(-x)\varepsilon}\right) \left(-\frac{\nu\varepsilon^{1/2}}{2\sqrt{2}(-x)^{3/2}}\right) + (-1) \left(-1 - \frac{2\nu\varepsilon x^2}{\sqrt{2}\varepsilon(-x)^{1/2}}\right), \end{aligned}$$

car  $X \in \mathcal{C}_{x', \nu}^\varepsilon$ . Alors

$$\begin{aligned} \langle F_\varepsilon(X), n_{\mathcal{C}_{x', \nu}^\varepsilon}(X) \rangle &= \frac{\nu\varepsilon^{1/2}}{2\sqrt{2}(-x)^{3/2}} - \frac{\nu^3\varepsilon^{1/2}}{2\sqrt{2}(-x)^{3/2}} + 1 - \frac{\nu\sqrt{2}(-x)^{3/2}}{\varepsilon^{1/2}} \\ &= \frac{\varepsilon^{1/2}}{2\sqrt{2}(-x)^{3/2}}(\nu - \nu^3) + 1 - \frac{\sqrt{2}(-x)^{3/2}}{\varepsilon^{1/2}}\nu. \end{aligned}$$

On pose alors

$$Q_{x, \varepsilon}(\nu) = \frac{\varepsilon^{1/2}}{2\sqrt{2}(-x)^{3/2}}(\nu - \nu^3) + 1 - \frac{\sqrt{2}(-x)^{3/2}}{\varepsilon^{1/2}}\nu. \quad (4.3.14)$$

On recherche  $\nu_0 < 1$  indépendant de  $\varepsilon$  tel que, pour tout  $x$  admissible, i.e tel que  $X \in \tilde{S}$ ,

$$Q_{x, \varepsilon}(\nu_0) < 0.$$

On détermine le point d'intersection entre  $\mathcal{C}_{x', \nu}^\varepsilon$  et  $\{y = x + (\gamma\varepsilon)^{1/3}\}$ , pour  $0 < \nu < 1$

donné, noté  $X_{\nu,\varepsilon} = (x_{\nu,\varepsilon}, y_{\nu,\varepsilon})$ . On résout alors

$$(\gamma\varepsilon)^{1/3} + x_{\nu,\varepsilon} = -\frac{\nu\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{2}(-x_{\nu,\varepsilon})^{1/2}}. \quad (4.3.15)$$

Avec le changement de variable  $z_{\nu,\varepsilon} := (-x_{\nu,\varepsilon})^{1/2}$ , la relation (4.3.15) se réécrit

$$z_{\nu,\varepsilon}^3 - (\gamma\varepsilon)^{1/3}z_{\nu,\varepsilon} - \frac{\nu\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{2}} = 0. \quad (P(z_{\nu,\varepsilon}))$$

On cherche les racines de  $(P(z_{\nu,\varepsilon}))$  de la forme

$$z_{\nu,\varepsilon} = r_\nu \varepsilon^{1/6}.$$

On résout donc

$$r^3 - \gamma^{1/3}r - \frac{\nu}{\sqrt{2}} = 0. \quad (P(r))$$

Comme  $P'(r) = 3r^2 - \gamma^{1/3}$ , il y a existence et unicité de  $0 < \bar{r}_\nu$  (on a même  $\frac{\gamma^{1/3}}{\sqrt{3}} < \bar{r}_\nu$ ), tel que  $P(\bar{r}_\nu) = 0$ . Alors,

$$z_{\nu,\varepsilon} = \bar{r}_\nu \varepsilon^{1/6},$$

et

$$x_{\nu,\varepsilon} = -\bar{r}_\nu^2 \varepsilon^{1/3}. \quad (4.3.16)$$

Donc, en considérant (4.3.14), pour tout  $x < x_{\nu,\varepsilon}$ ,

$$\begin{aligned} Q_{x,\varepsilon}(\nu) &= \frac{\varepsilon^{1/2}}{2\sqrt{2}(-x)^{3/2}}(\nu - \nu^3) + 1 - \frac{\sqrt{2}(-x)^{3/2}}{\varepsilon^{1/2}}\nu \\ &\leq \frac{(\nu - \nu^3)}{2\sqrt{2}\bar{r}_\nu} + 1 - \sqrt{2}\nu\bar{r}_\nu^3. \end{aligned}$$

Par définition de  $\bar{r}_\nu$ ,

$$\bar{r}_\nu = \gamma^{1/3}\bar{r}_\nu + \frac{\nu}{\sqrt{2}}.$$

Donc

$$\sqrt{2}\nu\bar{r}_\nu = \frac{\sqrt{2}}{(1 - \gamma^{1/3})}\nu + \nu^2,$$

on note

$$g(\nu) := \frac{\sqrt{2}}{(1 - \gamma^{1/3})}\nu + \nu^2.$$



On remarque  $g(1) > 1$ . Ainsi, comme

$$\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2}(-x)^{\frac{3}{2}}}(\nu - \nu^3) \xrightarrow{\nu \rightarrow 1} 0,$$

et que  $\bar{r}_\nu$  est continue par rapport à  $\nu$ , il existe  $\nu_0 < 1$  tel que pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $x < x_{\nu_0, \varepsilon}$ ,

$$\langle F^\varepsilon(X, t), n_{C_{x', \nu}^\varepsilon}(X) \rangle < 0,$$

où

$$X = \left( x, -\frac{\nu \varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}(-x)^{\frac{1}{2}}} \right).$$

Ainsi  $S$  est un ensemble invariant pour  $X^\varepsilon$ , donc pour  $t > t_\varepsilon$ , en considérant l'expression de  $x'_\varepsilon$ ,

$$x'_\varepsilon(t) < -1 + \nu_0^2. \quad (4.3.17)$$

□

On est maintenant en mesure d'établir la proposition 4.3.1, on rappelle que l'on démontre cette proposition dans le cas où

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*Démonstration de la proposition 4.3.1.* Soit  $Y(t) := (x(t), y(t))$  une valeur d'adhérence de  $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ . Alors son expression sur  $[0, 1]$  découle directement de la proposition 3.4.3. Les propositions 4.3.5 et 4.3.10 permettent d'écrire que pour tout  $t > 1$ , et tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$x'_\varepsilon(t) \leq -1 + \nu_0^2.$$

Donc pour  $1 < s < t$ , par intégration,

$$x_\varepsilon(t) \leq x_\varepsilon(s) + (-1 + \nu_0^2)(t - s).$$

En laissant tendre  $\varepsilon$  vers 0, et  $s$  vers 1, on obtient

$$x(t) \leq (t - 1)(-1 + \nu_0^2) < 0.$$

Comme  $Y(t) \in \Gamma$ , nécessairement  $y(t) = 0$ , et donc  $Y(t) \in J_O$ . On pose

$$T^1 := \inf\{s > 1, Y(s) = 0\}.$$

Alors la proposition 3.4.3 donne que pour tout  $1 \leq t \leq T^1$ ,

$$x(t) = (1 - t)$$

et  $y(t) = 0$ . Donc  $T^1 = +\infty$ , et pour tout  $t \geq 1$ ,

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - t \end{pmatrix}.$$

L'expression de  $k$  découle de la proposition 3.4.3. Ceci est valable pour toute valeur d'adhérence  $Y$  de  $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ , d'où la convergence et le résultat recherché.  $\square$

On établit de même la proposition 4.3.3.

*Démonstration de la proposition 4.3.3.* On peut ré-écrire (4.3.1) de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_\varepsilon(t) = -1 - \frac{2}{\varepsilon} x_\varepsilon(t) y_\varepsilon^2(t) \\ y'_\varepsilon(t) = -1 - \frac{2}{\varepsilon} x_\varepsilon^2(t) y_\varepsilon(t) \\ (x_\varepsilon(0), y_\varepsilon(0)) = (\delta, 0) \end{array} \right.$$

Alors, en faisant le changement de variable  $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) = (y_\varepsilon, x_\varepsilon)$ , on se ramène au cas  $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \end{pmatrix}$ ,  $\delta > 0$ , et on obtient le résultat souhaité.  $\square$

*Remarque 4.3.11.* Cet exemple fournit un exemple non trivial (c'est à dire où  $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  n'est pas stationnaire) pour lequel il y a convergence de la suite de solutions du système (3.0.1) vers une trajectoire limite évoluant sur  $\Gamma$ .

### 4.3.2 Étude de (4.3.1) lorsque $X_0 = 0$

On considère maintenant le système (4.3.1) avec  $X_0 = 0$ . On montre ici que  $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge uniformément vers la fonction nulle. On commence par montrer le lemme suivant.

**Lemme 4.3.12.** *Si  $X_0 = 0$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , et tout  $t \geq 0$ ,*

$$Y^\varepsilon(t) \in \{X := (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x = y\}.$$

*Démonstration.* Soit  $X = (x, x)$ . L'ensemble des vecteurs normaux à

$$\{X := (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x = y\}$$

en  $X$  est

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ainsi pour tout  $\varepsilon > 0$ , tout  $t \geq 0$ ,

$$\langle F^\varepsilon(X, t), (1, -1) \rangle = \langle F_\varepsilon(X, t), (-1, 1) \rangle = 0.$$

Donc pour tout  $t > 0$  et tout  $\varepsilon > 0$ ,  $x_\varepsilon(t) = y_\varepsilon(t)$ . □

On peut donc maintenant prouver la proposition principale

**Proposition 4.3.13.** *Si  $X_0 = 0$ , la suite  $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ , de solutions de (4.3.1) converge localement uniformément vers 0.*

*Démonstration.* Le lemme précédent assure que pour tout  $\varepsilon > 0$ , et tout  $t \geq 0$ ,

$$x_\varepsilon(t) = y_\varepsilon(t).$$

On suppose qu'il existe  $t_0 > 0$ , tel que  $Y(t) \neq 0$  (i.e.  $Y(t_0)$  appartient à une arête du réseau). Alors par convergence locale uniforme de  $(Y_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ , il existe  $h > 0$  suffisamment petit tel que

$$\overline{B}(Y(t_0), h) \cap \{x = y\} = \emptyset,$$

et  $\varepsilon_h > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon > \varepsilon_h$ ,

$$Y^\varepsilon(t_0) \in \overline{B}(X(t_0), h).$$

Il y a alors une contradiction avec le lemme précédent, donc  $Y(t) = 0$  pour tout  $t \in [0, +\infty[$ . □

## 4.4 Autour de l'instabilité du problème limite

Une question naturelle qui émerge lors de l'étude de ce système est celle de la "stabilité" par rapport à la condition initiale. On prend ici comme définition de la stabilité le critère suivant :

**Définition 4.4.1.** On dit que l'ensemble  $\{Y^X, X \in \mathbb{R}^2\}$  des limites des suites des solutions de (3.0.1) est stable par rapport à  $X \in \mathbb{R}^2$  si, pour tout  $X_0 \in \mathbb{R}^2$  et pour tout  $0 \leq t_1 \leq t_2 < +\infty$ ,

$$\|Y^X - Y^{X_0}\|_{L^\infty([t_1, t_2])} \xrightarrow{X \rightarrow X_0} 0.$$

On montre ici qu'il n'y a pas de propriété de stabilité sur  $\mathbb{R}^2$ . L'exemple de la dynamique

$$f(Y, t) := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

traité dans la section précédente donne l'instabilité de l'ensemble des trajectoires. En effet, on pose  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 1$  et pour tout  $\delta \geq 0$ ,

$$X_\delta := \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \end{pmatrix}.$$

Alors pour tout  $\delta > 0$ ,

$$\begin{aligned} \|Y^{X_\delta} - Y^{X_0}\|_{L^\infty([t_1, t_2])} &= \|Y^{X_\delta} - Y^{X_0}\|_{L^\infty([0, 1])} \\ &= 1 - \delta. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|Y^{X_\delta} - Y^{X_0}\|_{L^\infty([0, 1])} = 1,$$

alors que

$$\|Y^{X_0}\|_{L^\infty([0, 1])} = 0.$$



# PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL

---

On rappelle que ce chapitre est consacré à l'étude du problème de contrôle associé au système (1.2.1)

$$\begin{cases} (Y^{X,\alpha,\varepsilon})'(t) &= f(Y^{X,\alpha,\varepsilon}(t), \alpha(t)) - \frac{1}{\varepsilon} \nabla d(Y^{X,\alpha,\varepsilon}(t)) \\ Y^{X,\alpha,\varepsilon}(0) &= X \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (5.0.1)$$

où  $\alpha \in \mathcal{A}$ , où

$$\mathcal{A} := \{\alpha : [0, +\infty[ \rightarrow A, \alpha \text{ mesurable}\}.$$

On rappelle les fonctions coût et valeur associées à (5.0.1), pour  $X \in \mathbb{R}^2$  et  $\alpha \in \mathcal{A}$

$$J^\varepsilon(X, \alpha) := \int_0^\infty \ell(Y^{X,\alpha,\varepsilon}(t), \alpha(t)) e^{-\lambda t} dt$$

et

$$V^\varepsilon(X) := \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} J^\varepsilon(X, \alpha),$$

avec  $A \subset \mathbb{R}^2$  compact. On rappelle également certains objets asymptotiques. Pour  $X \in \mathbb{R}^2$  et  $\alpha \in \mathcal{A}$ , on note

$$\omega(X, \alpha) := \left\{ Y : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^2, \exists \varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0, \left\| Y^{X,\alpha,\varepsilon_n} - Y \right\|_{L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+^*)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \right\}, \quad (5.0.2)$$

l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite des solutions de (5.0.1), dont on justifie l'existence dans la section 5.1.1. Pour  $Y^{X,\alpha} \in \omega(X, \alpha)$ , on note

$$J(Y^{X,\alpha}) := \int_0^{+\infty} \ell(Y^{X,\alpha}(s), \alpha(s)) e^{-\lambda s} ds \quad (5.0.3)$$

et pour  $X \in \mathbb{R}^2$ ,

$$V(X) := \inf_{\substack{\alpha \in \mathcal{A} \\ Y^{X,\alpha} \in \omega(X,\alpha)}} J(Y^{X,\alpha}). \quad (5.0.4)$$

Le but de ce chapitre est l'établissement du théorème 1.2.10 que l'on rappelle ici :

**Théorème 5.0.1.** *On suppose que les hypothèses (1.1.2), (1.1.3), (1.2.19) et (1.2.20) sont vérifiées. Alors*

- 1)  $(V^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge localement uniformément vers  $V$  sur  $\mathbb{R}^2$ ,
- 2) Pour tout  $X \in \mathbb{R}^2$ ,  $V(X) = V_\Gamma(\bar{X})$ , où pour tout  $X \in \mathbb{R}^2$ ,  $\bar{X}$  est la notation donnée par l'égalité (2.3.7), et  $V_\Gamma$  est défini par (1.1.11).

## 5.1 Étude du système contrôlé 5.0.1

### 5.1.1 Application des résultats du chapitre 3

Comme expliqué dans l'introduction et au début du chapitre 3, le but de ce dernier était d'obtenir des propriétés sur  $(Y^{X,\alpha,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$  uniformes en  $\alpha \in \mathcal{A}$ . Tous les résultats de ce chapitre peuvent se ré-écrire en remplaçant  $f(Y, t)$  par  $f(Y, \alpha(t))$ , sans que cela affecte leurs preuves. Cela provient du fait que la quantité  $f(Y, t)$  est systématiquement majorée par  $M$ -sa norme  $L^\infty$ - dans les estimations où elle intervient.

On ré-écrit ici les résultats du chapitre 3, en adaptant leur écriture au fait que dans ce chapitre le contrôle  $\alpha$  est variable.

Tout d'abord les résultats concernant les zones d'invariance. On adapte la notation 3.1.2 :

**Notation 5.1.1.** On définit pour tout  $\lambda > 0$ ,  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $\varepsilon > 0$  et toute position initiale  $X \in \mathbb{R}^2$ ,

$$t^{X,\alpha,\varepsilon}(\lambda) := \inf \left\{ t \geq 0 : Y^{X,\alpha,\varepsilon}(t) \in Z(\lambda) \right\},$$

le plus petit temps auquel  $Y^{X,\alpha,\varepsilon}$  atteint  $Z(\lambda)$ . On prendra comme convention

$$t^{X,\alpha,\varepsilon}(\lambda) = +\infty,$$

si  $Y^{X,\alpha,\varepsilon}$  n'atteint jamais  $Z(\lambda)$ .

La proposition 3.1.5 reste valable :

**Proposition 5.1.2.** *Pour tout  $\lambda \geq \lambda_\varepsilon := \left(\frac{M}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{4}{3}} \varepsilon^{\frac{4}{3}}$ , tout  $\alpha \in \mathcal{A}$ , toute donnée initiale  $X \in \partial Z(\varepsilon^\lambda)$  et presque tout  $t \geq 0$ ,*

$$\left\langle F^\varepsilon(X, \alpha(t)), n_{\partial Z(\varepsilon^\lambda)}(X) \right\rangle \leq 0. \quad (5.1.1)$$

En conséquence :

1. Si  $d(X) > \lambda_\varepsilon$ , alors pour tout  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t^{X,\alpha,\varepsilon}(\lambda_\varepsilon)$

$$d(Y^{X,\alpha,\varepsilon}(t_2)) \leq d(Y^{X,\alpha,\varepsilon}(t_1)).$$

Autrement dit, si  $d(X) > \lambda_\varepsilon$ , alors  $Z(d(X))$  est une zone d'invariance pour  $Y^{X,\alpha,\varepsilon}$ .

2.  $Z(\lambda_\varepsilon)$  est optimale vis-à-vis de la dynamique  $f$  choisie. Dans le sens où si  $\lambda < \lambda_\varepsilon$ , alors  $Z(\lambda)$  n'est plus nécessairement invariante.

De même, on garde la majoration de  $t^{X,\alpha,\varepsilon}(\varepsilon^\gamma)$  :

**Proposition 5.1.3.** Soit  $\alpha \in \mathcal{A}$  et  $X \in \mathbb{R}^2$  une donnée initiale. Alors pour tout  $\gamma < 1$ , et  $\varepsilon < \left(\frac{\sqrt{2}}{M}\right)^{\frac{4}{4-3\gamma}}$ ,

$$t^{X,\alpha,\varepsilon}(\varepsilon^\gamma) \leq \frac{d(X)}{2} \varepsilon^{1-\gamma}. \quad (5.1.2)$$

*Remarque 5.1.4.* Il est important de faire une distinction entre deux choses :

- le temps  $t^{X,\alpha,\varepsilon}(\varepsilon^\gamma)$  qui dépend du contrôle  $\alpha$
- la majoration (5.1.2) qui donne une majoration de  $t^{X,\alpha,\varepsilon}(\varepsilon^\gamma)$  uniforme par rapport à  $\alpha \in \mathcal{A}$ .

Le théorème 1.2.4 reste lui aussi valable :

**Théorème 5.1.5.** On suppose que l'hypothèse (1.1.2) est vérifiée par  $f$ . Alors pour tout  $X \in \mathbb{R}^2$ , il existe une suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels convergeant vers 0 ainsi qu'un couple de fonctions  $(Y^{X,\alpha}, k^{X,\alpha})$ , tel que

1. Si  $X \in \Gamma$ , alors pour tout  $T > 0$ , la suite  $(Y^{X,\alpha,\varepsilon_n}, k^{X,\alpha,\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $(Y^{X,\alpha}, k^{X,\alpha})$  uniformément sur  $[0, T]$  et simplement sur  $[0, +\infty[$ . De plus,  $(Y^{X,\alpha}, k^{X,\alpha}) \in (H^1([0, T]))^2$ .
2. Si  $X \notin \Gamma$ , alors pour tout  $T > 0$  et tout  $\eta > 0$ , la suite  $(Y^{X,\alpha,\varepsilon_n}, k^{X,\alpha,\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $(Y^{X,\alpha}, k^{X,\alpha})$  uniformément sur  $[\eta, T]$ , et simplement sur  $[0, +\infty[$ . De plus,  $(Y^{X,\alpha}, k^{X,\alpha}) \in (L^\infty([0, T]) \cap H^1([\eta, T]))^2$ .
3. Si  $X \notin \Gamma$ , alors

$$Y^{X,\alpha}(0^+) := \lim_{t \rightarrow 0^+} Y^{X,\alpha}(t) = \bar{X},$$

où  $\bar{X}$  est défini dans la proposition 2.3.3 du chapitre 2.

4. Pour tout  $t > 0$ ,

$$Y^{X,\alpha}(t) \in \Gamma.$$



5. Pour tout  $t \geq 0$

$$Y^{X,\alpha}(t) = X + \int_0^t f(Y^{X,\alpha}(s), \alpha(s)) ds - k^{X,\alpha}(t). \quad (5.1.3)$$

Ce théorème justifie alors la définition de

$$\omega(X, \alpha) := \left\{ Y : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^2, \exists \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \left\| Y^{X,\alpha,\varepsilon_n} - Y \right\|_{L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+^*)} \rightarrow 0 \right\}.$$

On réécrit enfin la proposition 3.4.3,

**Proposition 5.1.6.** *Soit une donnée initiale  $X \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha \in \mathcal{A}$  et  $(Y^{X,\alpha}, k^{X,\alpha})$  une valeur d'adhérence de  $(Y^{X,\alpha,\varepsilon}, k^{X,\alpha,\varepsilon})$ . Soit  $m \in \mathbb{N}$  et  $i \in \{N, O, S, E\}$  tel que pour tout  $t \in ]a_m, b_m[$ ,  $Y^{X,\alpha}(t) \in J_i$ , où  $]a_m, b_m[$  est donné par (1.2.10). Alors si  $a_m = 0$  pour tout  $t \in [0, b_m]$ ,*

$$\begin{cases} \langle Y^{X,\alpha}(t), e_i^\perp \rangle = 0 \\ \langle Y^{X,\alpha}(t), e_i \rangle = \langle \bar{X}, e_i \rangle + \int_0^t \langle f(Y^{X,\alpha}(s), \alpha(s)), e_i \rangle ds, \end{cases} \quad (5.1.4)$$

et

$$\begin{cases} \langle k^{X,\alpha}(t), e_i \rangle = \langle X - \bar{X}, e_i \rangle \\ \langle k^{X,\alpha}(t), e_i^\perp \rangle = \langle X - \bar{X}, e_i^\perp \rangle + \int_0^t \langle f(Y^{X,\alpha}(s), \alpha(s)), e_i^\perp \rangle ds. \end{cases} \quad (5.1.5)$$

Si  $a_m \neq 0$ , alors pour tout  $t \in [a_m, b_m]$ ,

$$\begin{cases} \langle Y^{X,\alpha}(t), e_i^\perp \rangle = 0 \\ \langle Y^{X,\alpha}(t), e_i \rangle = \int_{a_m}^t \langle f(Y^{X,\alpha}(s), \alpha(s)), e_i \rangle ds, \end{cases} \quad (5.1.6)$$

et

$$\begin{cases} \langle k^{X,\alpha}(t), e_i \rangle = \langle k^{X,\alpha}(a_m), e_i \rangle \\ \langle k^{X,\alpha}(t), e_i^\perp \rangle = \langle k^{X,\alpha}(a_m), e_i^\perp \rangle + \int_{a_m}^t \langle f(Y^{X,\alpha}(s), \alpha(s)), e_i^\perp \rangle ds. \end{cases} \quad (5.1.7)$$

### 5.1.2 Le cas spécifique $X \in \Gamma$

On commence par montrer un résultat important portant sur les dérivées des trajectoires limites  $Y^{x,\alpha} \in \omega(X, \alpha)$ . En effet, nous avons vu dans le chapitre 3 que  $Y^{X,\alpha}$  était élément de  $H_{\text{loc}}^1([0, +\infty[)$  (ou  $H_{\text{loc}}^1(]0, +\infty[)$ ) mais il n'y a pas d'information plus précise sur  $(Y^{X,\alpha})'$  hormis son caractère  $L_{\text{loc}}^2$ . Le lemme et la proposition suivants assurent que

pour tout  $X \in \mathbb{R}^2$  et tout contrôle  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $(Y^{X,\alpha})' \in L^\infty([0, +\infty[)$ . Soit  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $X \in \mathbb{R}^2$  et  $Y^{X,\alpha}$  un élément de  $\omega(X, \alpha)$ . On définit

$$\mathcal{T}_{X,\alpha} := \left\{ t \in \mathbb{R}_+, Y^{X,\alpha}(t) = 0, (Y^{X,\alpha})'(t) \text{ existe et } (Y^{X,\alpha})'(t) \notin \overline{B}(0, M) \right\}. \quad (5.1.8)$$

**Lemme 5.1.7.** *On a  $\text{mes}(\mathcal{T}_{X,\alpha}) = 0$ .*

*Démonstration.* Afin de simplifier les notations, on notera dans la preuve  $Y^{X,\alpha} =: Y$ . On remarque tout d'abord que,  $Y$  étant absolument continue, l'ensemble

$$\{t, Y'(t) \text{ existe}\}$$

est de mesure pleine. Soit  $t \in \mathcal{T}_{X,\alpha}$ . Comme  $Y'(t) \notin \overline{B}(0, M)$  il existe  $\eta > 0$  tel que  $Y(s)$  appartient à une arête du réseau pour tout  $s \in ]t, t + \eta[$ , autrement dit  $Y$  ne demeure pas à la jonction après l'instant  $t$ . Alors il existe  $i \in \{N, O, S, E\}$  et  $\beta > M$ , tel que

$$Y'(t) = \langle Y'(t), e_i \rangle e_i = \beta e_i.$$

De plus, comme  $Y(t) = 0$ , on a pour  $h > 0$

$$Y(t+h) = Y'(t)h + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h) = h\beta e_i + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h). \quad (5.1.9)$$

Alors d'une part, il existe pour tout  $\delta > 0$ ,  $h_\delta < \delta$  tel que pour tout  $h \in [-h_\delta, h_\delta]$ ,

$$|Y(t+h)| \geq \beta h - h\delta, \quad (5.1.10)$$

et d'autre part, pour tout  $h \in [0, \eta]$ ,

$$\begin{aligned} |Y(t+h) - Y(t)| &= |Y(t+h)| = \left| \int_t^{t+h} Y'(s) \, ds \right| \\ &\leq \int_t^{t+h} |Y'(s)| \, ds \\ &\leq Mh \end{aligned}$$

parce que  $|Y'(s)| \leq M$  presque partout à l'intérieur des arêtes par la proposition 3.4.3. Alors pour tout  $\delta$  suffisamment petit on a :

$$(\beta - \delta)h \leq |Y(t+h)| \leq Mh,$$

ce qui n'est pas possible car  $\beta > M$ . □

On en déduit la proposition suivante

**Proposition 5.1.8.** *Pour tout  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $X \in \Gamma$ ,  $Y^{X,\alpha} \in \omega(X, \alpha)$  et presque tout  $t \geq 0$ ,*

$$(Y^{X,\alpha})'(t) \in \overline{B(0, M)}.$$

*Démonstration.* Prenons  $t \in \mathbb{R}_+$  tel que  $(Y^{X,\alpha})'(t)$  existe. Il y a alors deux cas à traiter, celui où  $Y^{X,\alpha}(t) \neq 0$  et celui où  $Y^{X,\alpha}(t) = 0$ . Alors le lemme précédent nous donne le résultat pour  $Y^{X,\alpha}(t) = 0$ , et la caractérisation de  $Y^{X,\alpha}$  à l'intérieur des arêtes donnée par la proposition 5.1.6 donne le résultat pour  $Y^{X,\alpha}(t) \neq 0$ . □

Si l'on se place dans le cas particulier  $X \in \Gamma$  et  $\alpha \in \mathcal{A}_X$ , l'ensemble de contrôles introduit dans [1], alors on obtient une trajectoire qui évolue sur le réseau. La suite  $(Y^{X,\alpha,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$  est alors stationnaire, ce qui donne trivialement sa convergence. La proposition suivante établit ce résultat.

**Proposition 5.1.9.** *Soit  $X \in \Gamma$  et  $\alpha \in \mathcal{A}_X$ . Alors la suite de trajectoires  $(Y^{X,\alpha,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$  est stationnaire, et en particulier converge, on notera  $Y^{X,\alpha}$  la trajectoire en question. En particulier,  $\omega(X, \alpha)$  est réduit au singleton  $\{Y^{x,\alpha}\}$ .*

*Démonstration.* Par définition de  $\mathcal{A}_X$  on a :

$$\forall t > 0, \quad \nabla d(Y^{X,\alpha})(t) = 0,$$

donc  $Y^{X,\alpha}$  est aussi solution de (1.2.1) et donc  $Y^{X,\alpha,\varepsilon} \equiv Y^{X,\alpha}$  pour tout  $\varepsilon > 0$ . Donc la suite  $(Y^{x,\alpha,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$  est stationnaire. □

On en déduit le corollaire

**Corollaire 5.1.10.** *Pour  $X \in \Gamma$  et  $\alpha \in \mathcal{A}_X$ ,*

$$\omega(X, \alpha) = \{Y^{X,\alpha}\},$$

et donc

$$J(Y^{X,\alpha}) = J_\Gamma(X, \alpha),$$

où  $J$ .

### 5.1.3 Résultats de suivi de trajectoires

Cette section est dédiée à l'établissement de *résultats de suivi* de trajectoires. Ces résultats sont motivés par l'établissement du théorème 5.0.1. En effet, comme on le montre dans la proposition 5.2.3, on obtient des résultats d'uniforme Lipschitzienité pour  $(V^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  en se restreignant au réseau. Cela provient essentiellement de l'hypothèse de contrôlabilité totale qui permet de joindre deux points  $(X, \widetilde{X})$  de  $\Gamma$  en restant sur le réseau, grâce à un contrôle adapté dans  $\mathcal{A}_X$ . Cela donne que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $k^\varepsilon \equiv 0$ , et on récupère ainsi de l'uniformité par rapport à  $\varepsilon$ . Lorsque la condition initiale  $X$  n'est pas sur le réseau, ce n'est plus valable. On a besoin d'approcher une trajectoire pénalisée quelconque  $Y^{X,\alpha,\varepsilon}$ , par une trajectoire contrôlée évoluant sur le réseau. C'est ce que l'on fait dans cette section.

Grossièrement parlant, on dit disposer de résultats de suivi de trajectoire lorsque pour  $X \in \mathbb{R}^2$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $\beta \in \mathcal{A}_{\overline{X}}$  (resp.  $\mathcal{A}$ ) donné, on est capable d'avoir un contrôle  $\alpha_{\beta,\varepsilon} \in \mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{A}_{\overline{X}}$ ) tel que les trajectoires  $Y^{\overline{X},\alpha_{\beta,\varepsilon}}$  et  $Y^{X,\beta,\varepsilon}$  (resp.  $Y^{X,\alpha_{\beta,\varepsilon},\varepsilon}$  et  $Y^{\overline{X},\beta}$ ) restent "proches", en un sens à définir (où pour  $X \in \mathbb{R}^2$ ,  $\overline{X}$  désigne toujours la quantité définie par (2.3.7)). En d'autres termes, on est capable de "suivre" une trajectoire pénalisée  $Y^{X,\alpha,\varepsilon}$  à l'aide d'une trajectoire contrôlée évoluant sur le réseau au sens de [1], et réciproquement.

L'objectif de cette section est d'établir les deux propositions suivantes :

**Proposition 5.1.11.** *Soit  $\varepsilon > 0$ ,  $X \in \mathbb{R}^2$ ,  $0 < \gamma < \frac{7}{8}$  et  $\beta \in \mathcal{A}$ . Alors il existe  $\alpha_{\beta,\varepsilon} \in \mathcal{A}_{\overline{X}}$  et  $C_X > 0$ , tel que pour tout  $t \geq t^{X,\alpha,\varepsilon}(\varepsilon^\gamma)$ ,*

$$\left| Y^{X,\beta,\varepsilon}(t) - Y^{\overline{X},\alpha_{\beta,\varepsilon}}(t) \right| \leq C_X (t\varepsilon^{\frac{5}{24}} + \varepsilon^{\frac{1}{8}}), \quad (5.1.11)$$

où  $C_X$  est bornée par la norme de  $X$ .

**Proposition 5.1.12.** *Soit  $\varepsilon > 0$ ,  $X \in \mathbb{R}^2$  et  $\beta \in \mathcal{A}_{\overline{X}}$ . Alors il existe  $\alpha_{\beta,\varepsilon} \in \mathcal{A}$  et  $C_X > 0$ , tel que pour tout  $t \geq t^{X,\alpha_{\beta,\varepsilon},\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})$ ,*

$$\left| Y^{\overline{X},\beta}(t) - Y^{X,\alpha_{\beta,\varepsilon},\varepsilon}(t) \right| \leq C_X (t\varepsilon^{\frac{5}{24}} + \varepsilon^{\frac{1}{8}}). \quad (5.1.12)$$

où  $C_X$  est bornée par la norme de  $X$ .

On montre d'abord la proposition 5.1.11 dans le cas où  $X \in \Gamma$ . Dans ce cas,  $X = \overline{X}$  et pour tout  $\beta \in \mathcal{A}$ ,  $Y^{X,\alpha,\varepsilon}(0) = \overline{X}$ . Cela permet d'avoir l'estimation (5.1.11) valable pour tout  $t \geq 0$ , avec une constante  $C$  uniforme en  $X \in \Gamma$ . La proposition 5.1.11 se réécrit donc :

**Proposition 5.1.13.** *Soit  $\varepsilon > 0$ ,  $X \in \Gamma$ ,  $\beta \in \mathcal{A}$ . Alors il existe  $\alpha_{\beta,\varepsilon} \in \mathcal{A}_X$  et  $C > 0$ , indépendant de  $X$  et  $\varepsilon > 0$ , tel que pour tout  $t \geq 0$ ,*

$$\left| Y^{X,\beta,\varepsilon}(t) - Y^{X,\alpha_{\beta,\varepsilon}}(t) \right| \leq C(t\varepsilon^{\frac{5}{24}} + \varepsilon^{\frac{1}{8}}). \quad (5.1.13)$$

*Idée de preuve pour la proposition 5.1.13.* La preuve de cette proposition est longue et n'apporte pas grand chose à la compréhension du problème, elle pourra être trouvée en annexe A. On en donne ici une idée générale. Il va s'agir ici de contrôler la vitesse de  $Y^{X,\beta,\varepsilon}$ , pour  $\beta \in \mathcal{A}$ . En effet, pour tout élément  $\alpha \in \mathcal{A}_X$ , la trajectoire  $Y^{X,\alpha}$  évolue au plus à vitesse  $M$  sur le réseau, par l'hypothèse (1.1.2) faite sur  $f$ . La question est donc de savoir si l'on est capable de rester "proche" (proche au sens de l'inégalité (5.1.13)) d'une trajectoire pénalisée en restant sur le réseau à vitesse  $M$ . Introduisons tout d'abord certains ensembles géométriques qui vont s'avérer utiles pour la démonstration de cette proposition.

$$\begin{aligned} Q_{NE} &:= \{X \in \mathbb{R}^2 : X_1 \geq 0, X_2 \geq 0\}, \\ C^\varepsilon &:= \{X \in \mathbb{R}^2 : |X|_\infty \leq \varepsilon^{\frac{1}{8}}\} \cap Q_{NE}, \\ A_N^\varepsilon &= C^\varepsilon \cap \{X := (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 : X_2 = \varepsilon^{\frac{1}{8}}\}, \\ A_E^\varepsilon &= C^\varepsilon \cap \{X := (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 : X_1 = \varepsilon^{\frac{1}{8}}\}, \\ Z_N^\varepsilon &= (C^\varepsilon)^c \cap \{d \leq \varepsilon^{\frac{4}{3}}\} \cap \{X_2 \geq 0\}, \\ Z_E^\varepsilon &= (C^\varepsilon)^c \cap \{d \leq \varepsilon^{\frac{4}{3}}\} \cap \{X_1 \geq 0\}. \end{aligned}$$

Une représentation géométrique est donnée par la figure suivante

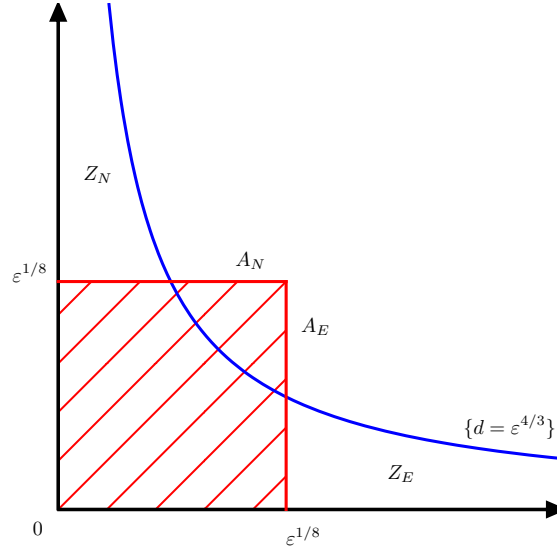


FIGURE 5.1 –

La proposition 3.1.5 assure que pour tout  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $Y^{X,\alpha,\epsilon}$  reste dans la zone d'invariance  $Z \left( \left( \frac{M}{2\sqrt{2}} \right)^{\frac{4}{3}} \epsilon^{\frac{4}{3}} \right)$ . Pour simplifier les notations, on suppose sans perdre de généralité

$$\left( \frac{M}{2\sqrt{2}} \right)^{\frac{4}{3}} = 1.$$

On restreint l'étude au cas où pour tout  $t \geq 0$ ,

$$Y^{X,\alpha,\epsilon}(t) \in Q_{NE}.$$

En effet, on constate que l'on est capable de contrôler la vitesse de  $Y^{X,\alpha,\epsilon}$  lorsqu'elle se trouve hors de  $C^\epsilon$ . Il va falloir faire la distinction entre les intervalles de temps sur lesquels  $Y^{X,\alpha,\epsilon}$  se trouve dans  $C^\epsilon$ , et ceux sur lesquels elle n'y est pas. Les moments où le suivi à l'aide d'une trajectoire évoluant sur le réseau bien choisie va être compliqué à établir, sont ceux où  $Y^{X,\alpha,\epsilon}$  va être en mesure de traverser  $C^\epsilon$  à une vitesse plus élevée et sur une distance plus courte que  $Y^{X,\alpha\beta,\epsilon}$ . Là où, en prenant l'exemple de la figure 5.1,  $Y^{X,\alpha\beta,\epsilon}$  est contrainte de parcourir une distance de longueur  $2\epsilon^{\frac{1}{8}}$  à vitesse maximale  $M$ , pour passer de la zone  $Z_N$  à celle  $Z_E$ ,  $Y^{X,\alpha,\epsilon}$  va être en mesure de "couper"  $C^\epsilon$  avec une vitesse supérieure. Il n'est donc pas nécessaire de traiter le cas général. Si l'on sait gérer le suivi de  $Y^{X,\alpha,\epsilon}$  par une trajectoire bien choisie  $Y^{X,\alpha\beta,\epsilon}$  dans la zone décrite ici, la généralisation

à l'espace entier est immédiate.

La preuve se fait en trois étapes. La première consistera à partitionner  $\mathbb{R}_+$  comme union dénombrable croissante d'intervalles adéquatement choisis. La deuxième sera l'établissement d'estimations sur  $(Y^{X,\beta,\varepsilon})'$  au sein des domaines décrits plus haut. Enfin, la construction de  $\alpha_{\beta}^{\varepsilon}$  se fera par récurrence sur les intervalles construits à l'étape 1.  $\square$

Maintenant que l'on dispose d'un résultat de suivi de trajectoire pour une condition initiale  $X \in \Gamma$ , il va falloir l'étendre au cas  $X \in \mathbb{R}^2$ , et montrer la proposition 5.1.11. On illustre dans la figure 5.2 l'échelle de temps sur laquelle on doit travailler pour obtenir le résultat de suivi de trajectoire sur  $\mathbb{R}^2$ .

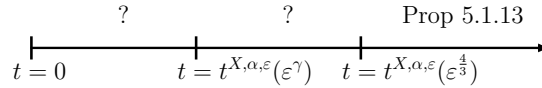


FIGURE 5.2 –

On est capable d'avoir un suivi de trajectoire uniquement lorsque la trajectoire pénalisée est rentrée dans la zone d'invariance  $\{d \leq \varepsilon^{\frac{4}{3}}\}$ . Il faut donc être capable d'avoir un résultat qui assure que à sa rentrée dans  $Z(\varepsilon^{\frac{4}{3}})$ , la trajectoire  $Y^{X,\beta,\varepsilon}$  ne soit pas “trop loin” de  $\bar{X}$ , pour que l'on puisse la suivre à l'aide d'une trajectoire évoluant sur  $\Gamma$ , qui démarrerait de  $\bar{X}$ . On sait par la proposition 3.1.11 que pour tout  $\gamma < 1$  et  $t \geq \frac{d(X)}{2}\varepsilon^{1-\gamma}$ ,

$$d(Y^{X,\beta,\varepsilon}(t)) \leq \varepsilon^\gamma.$$

Si on montre que pour tout  $t^{X,\beta,\varepsilon}(\varepsilon^\gamma) \leq t \leq t^{X,\beta,\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})$  qu'il existe une estimation de la forme

$$|\bar{X} - Y^{X,\beta,\varepsilon}(t)| \leq C_X \varepsilon^\delta,$$

alors on pourra établir la proposition 5.1.11. Il suffira de prendre comme contrôle sur  $[0, t^{X,\beta,\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})]$

$$\alpha_{\beta,\varepsilon} \equiv 0,$$

et de choisir un contrôle de la même manière que pour la proposition 5.1.13 sur  $[t^{X,\beta,\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}}), +\infty[$ .

On se fixe jusqu'à la fin de cette section  $X := (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2$  qu'on suppose (sans perdre de généralité) tel que

$$0 \leq X_1 < X_2,$$

et

$$X_1^2 X_2^2 > \varepsilon^{\frac{4}{3}}.$$

On considère pour  $\varepsilon > 0$  les systèmes différentiels suivants,

$$\begin{cases} (Y^{-,\varepsilon})'(t) &= -(M+1) \frac{(\nabla d)^\perp(Y^{-,\varepsilon}(t))}{|\nabla d(Y^{-,\varepsilon}(t))|} - \frac{1}{\varepsilon} \nabla d(Y^{-,\varepsilon}(t)), & t \geq 0 \\ Y^{-,\varepsilon}(0) &= X \end{cases} \quad (S^-)$$

et

$$\begin{cases} (Y^{+,\varepsilon})'(t) &= +(M+1) \frac{(\nabla d)^\perp(Y^{+,\varepsilon}(t))}{|\nabla d(Y^{+,\varepsilon}(t))|} - \frac{1}{\varepsilon} \nabla d(Y^{+,\varepsilon}(t)), & t \geq 0 \\ Y^{+,\varepsilon}(0) &= X. \end{cases} \quad (S^+)$$

Il y a clairement existence et unicité des solutions en temps finis pour ces deux systèmes.

L'idée va être de montrer que pour tout  $\beta \in \mathcal{A}$  et tout  $\varepsilon > 0$ , la courbe

$$\{Y^{X,\beta,\varepsilon}(t), t \geq 0\}$$

est toujours incluse dans le domaine délimité par les courbes  $\{Y^{-,\varepsilon}(t), t \geq 0\}$  et  $\{Y^{+,\varepsilon}(t), t \geq 0\}$ . Grossièrement parlant, on montre que toute trajectoire pénalisée  $Y^{X,\beta,\varepsilon}$  se trouve toujours "entre" les trajectoires  $Y^{+,\varepsilon}$  et  $Y^{-,\varepsilon}$ . Le fait est qu'ici nous allons pouvoir avoir de meilleures estimations sur  $Y^{+,\varepsilon}$  et  $Y^{-,\varepsilon}$  que sur une trajectoire  $Y^{X,\beta,\varepsilon}$  arbitraire. En particulier, on va avoir pour ces deux trajectoires particulières, un temps d'atteinte de l'ensemble  $Z(\varepsilon^{\frac{4}{3}})$  asymptotiquement petit en  $\varepsilon$ . Cela nous permettra alors de contrôler

$$|\bar{X} - Y^{X,\beta,\varepsilon}|$$

sur  $[t^{X,\beta,\varepsilon}(\varepsilon^\gamma), t^{X,\beta,\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})]$ , indépendamment de  $\beta \in \mathcal{A}$ . On aura alors les propriétés nécessaires pour généraliser la proposition 5.1.13 à  $X \in \mathbb{R}^2$ .

On définit l'ensemble

$$\mathcal{E} := \left\{d \geq \varepsilon^{\frac{4}{3}}\right\} \cap \{X_1 \leq X_2\} \cap \mathcal{E}^-(Y^{+,\varepsilon}) \cap \mathcal{E}^+(Y^{-,\varepsilon}), \quad (5.1.14)$$

où  $\mathcal{E}^+(f)$  désigne l'épigraphe d'une fonction  $f$  donnée et  $\mathcal{E}^-(f)$  son hypographe.



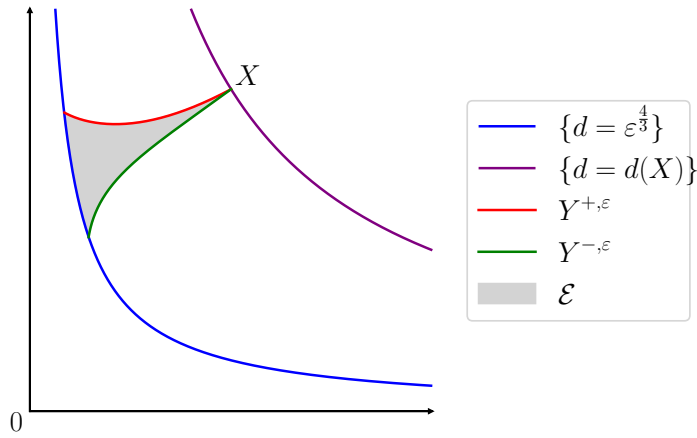


FIGURE 5.3 – Ensemble d'évolution des trajectoires pénalisées

On établit maintenant le résultat suivant :

**Proposition 5.1.14.** *En accord avec les notations précédentes, pour tout  $\varepsilon > 0$ , pour tout  $\beta \in \mathcal{A}$  et presque tout  $t \in [0, t^{X, \beta, \varepsilon}]$ ,*

$$Y^{X, \beta, \varepsilon}(t) \in \mathcal{E}.$$

*Démonstration.* On définit

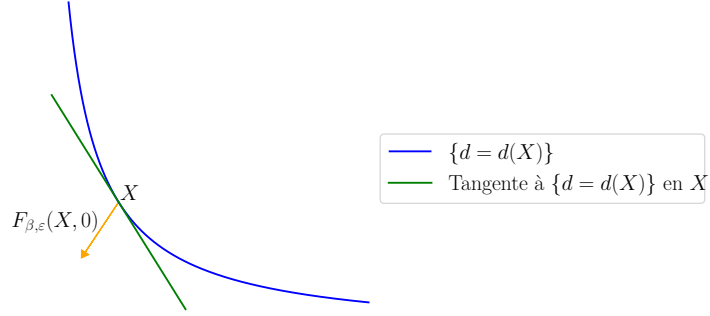
$$F_{\beta, \varepsilon}(Y, t) := f(Y, \beta(t)) - \frac{\nabla d(Y)}{\varepsilon},$$

$$F_{+, \varepsilon}(Y) := (1 + M) \frac{(\nabla d)^\perp(Y)}{\|(\nabla d)^\perp(Y)\|} - \frac{(\nabla d)^\perp(Y)}{\varepsilon},$$

et

$$F_{-, \varepsilon}(Y) := -(1 + M) \frac{(\nabla d)^\perp(Y)}{\|(\nabla d)^\perp(Y)\|} - \frac{\nabla d(Y)}{\varepsilon}.$$

La proposition 3.1.5 nous donne que nous nous trouvons dans la configuration décrite par la figure suivante :


 FIGURE 5.4 – Direction de  $(Y^{X,\beta,\varepsilon})'(0)$ 

En refaisant le même type de calculs que dans la proposition 3.1.5, on obtient que  $F_{\beta,\varepsilon}(X,0)$  (i.e.  $(Y^{X,\beta,\varepsilon})'(0)$ ) est **strictement** inclus dans le cône de sommet  $X$  et dirigé par  $F_{+,\varepsilon}(X)$  (i.e.  $(Y^{+,\varepsilon})'(0)$ ) et  $F_{-,\varepsilon}(X)$  (i.e.  $(Y^{-,\varepsilon})'(0)$ ). Il existe alors  $t_0 > 0$  tel que pour tout  $0 \leq t \leq t_0$ ,

$$Y^{X,\beta,\varepsilon}(t) \in \mathcal{E}.$$

Notons alors

$$T_+ := \inf \left\{ t \geq t_0 : Y^{X,\beta,\varepsilon}(t) = Y^{+,\varepsilon}(t) \right\}.$$

Supposons que  $T_+ < +\infty$ . Alors le raisonnement ci-dessus nous donne de la même manière  $t_+ > 0$  tel que pour tout  $t \in [T_+, T_+ + t_+]$ ,  $Y^{X,\beta,\varepsilon}(t) \in \mathcal{E}^-(Y^{+,\varepsilon})$ . De la même manière notons

$$T_- := \inf \left\{ t \geq t_0 : Y^{X,\beta,\varepsilon}(t) = Y^{-,\varepsilon}(t) \right\}.$$

Supposons que  $T_- < +\infty$ . Alors le raisonnement ci-dessus nous donne de la même manière  $t_- > 0$  tel que pour tout  $t \in [T_-, T_- + t_-]$ ,  $Y^{X,\beta,\varepsilon}(t) \in \mathcal{E}^+(Y^{-,\varepsilon})$ . Donc un argument de bootstrap donne que pour tout  $t \in [0, t^{X,\beta,\varepsilon}]$ ,  $Y^{X,\beta,\varepsilon}(t) \in \mathcal{E}$ .  $\square$

On définit maintenant

$$t^{+,\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}}) := \inf \left\{ t > 0, \quad d(Y^{+,\varepsilon})(t) \leq \varepsilon^{\frac{4}{3}} \right\}$$

et

$$t^{-,\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}}) := \inf \left\{ t > 0, \quad d(Y^{-,\varepsilon})(t) \leq \varepsilon^{\frac{4}{3}} \right\}.$$

Notons maintenant

$$Y_{\frac{4}{3}}^{+,\varepsilon} := Y^{+,\varepsilon}(t^{+,\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}}))$$

et

$$Y_{\frac{4}{3}}^{-,\varepsilon} := Y^{-,\varepsilon}(t^{-,\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})),$$

les temps d'atteinte respectifs de  $Z(\varepsilon^{\frac{4}{3}})$  de  $Y^{+,\varepsilon}$  et  $Y^{-,\varepsilon}$ .

Nous donnons ici une estimation sur  $t^{+,\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})$  et  $t^{-,\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})$  plus précise que celle de la proposition 3.1.11. Le chapitre 3 nous donne que pour  $X \notin \Gamma$ , on parvient à obtenir une estimation sur  $t^{X,\beta,\varepsilon}(\varepsilon^\gamma)$ , pour  $0 < \gamma < 1$ . Dans le cas particulier des systèmes  $(S^+)$  et  $(S^-)$  nous allons pouvoir obtenir une estimation analogue à celle de la proposition 3.1.11 pour  $t^{-,\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})$  et  $t^{+,\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})$ .

**Proposition 5.1.15.** *Pour tout  $0 < \theta < 1/4$ , il existe  $K_X > 0$ , tel que pour  $\varepsilon$  suffisamment petit,*

$$t^{-,\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}}) \leq K_X \varepsilon^{(\frac{1}{4}-\theta)} \quad (5.1.15)$$

et

$$t^{+,\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}}) \leq K_X \varepsilon^{(\frac{1}{4}-\theta)}, \quad (5.1.16)$$

où  $K_X$  est bornée par la norme de  $X$ .

*Démonstration.* On effectue les mêmes calculs que pour l'établissement de la proposition 3.1.11. On obtient ici pour tout  $0 \leq t \leq t^{+,\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta} \frac{d}{dt} d^\theta(Y^{+,\varepsilon}(t)) &= d^{\theta-1}(Y^{+,\varepsilon}(t)) \langle (Y^{+,\varepsilon})'(t), \nabla d(Y^{+,\varepsilon}(t)) \rangle \\ &= d^{\theta-1}(Y^{+,\varepsilon}(t)) \left( \left\langle (M+1) \frac{\nabla^\perp d(Y^{+,\varepsilon}(t))}{|\nabla d(Y^{+,\varepsilon}(t))|}, \nabla d(Y^{+,\varepsilon}(t)) \right\rangle \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\varepsilon} |\nabla d(Y^{+,\varepsilon}(t))|^2 \right) \\ &= -d^{\theta-1}(Y^{+,\varepsilon}(t)) \frac{4}{\varepsilon} d(Y^{+,\varepsilon}(t)) |Y^{+,\varepsilon}(t)|^2 \\ &= -\frac{4}{\varepsilon} d^\theta(Y^{+,\varepsilon}(t)) |Y^{+,\varepsilon}(t)|^2 \\ &\leq -\frac{4}{\varepsilon} (\varepsilon^{\frac{4}{3}})^\theta (\varepsilon^{\frac{4}{3}})^{1/2} \\ &\leq -4\varepsilon^{\frac{4}{3}(\theta-\frac{1}{4})}. \end{aligned}$$

On conclut alors comme dans la proposition 3.1.11 par intégration entre 0 et  $t^{+,\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})$ . Le résultat pour  $t^{-,\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})$  s'obtient exactement de la même manière.  $\square$

*Remarque 5.1.16.* On gagne ici par rapport à la proposition 3.1.11. Celle-ci nous assure un temps d'atteinte asymptotiquement petit en  $\varepsilon$ , pour une trajectoire pénalisée quelconque,

uniquement vers des zones de la forme  $Z(\varepsilon^\gamma)$ , avec  $0 < \gamma < 1$ . On peut ici, pour les trajectoires particulières  $Y^{+,\varepsilon}$  et  $Y^{-,\varepsilon}$ , obtenir un temps d'atteinte de  $Z(\varepsilon^{\frac{4}{3}})$  asymptotiquement petit en  $\varepsilon$ .

**Proposition 5.1.17.** *Il existe une constante  $K_X > 0$ , tel que*

$$\left| Y_{\frac{4}{3}}^{+,\varepsilon} - \bar{X} \right| \leq K_X \varepsilon^{\frac{1}{8}}$$

et

$$\left| Y_{\frac{4}{3}}^{-,\varepsilon} - \bar{X} \right| \leq K_X \varepsilon^{\frac{1}{8}},$$

où  $K_X$  est bornée par la norme de  $X$ .

*Démonstration.* On rappelle que dans toute la section, on a comme hypothèse sur  $X$ ,

$$0 \leq X_1 < X_2 \text{ et } X_1^2 X_2^2 > \varepsilon^{\frac{4}{3}}.$$

La proposition 2.3.3 nous donne

$$(\bar{X}_1, \bar{X}_2) := \bar{X} = (0, \sqrt{(X_2^2 - X_1^2)}).$$

On ne fera la preuve que pour  $\left| Y_{\frac{4}{3}}^{+,\varepsilon} - \bar{X} \right|$ , l'estimation sur  $\left| Y_{\frac{4}{3}}^{-,\varepsilon} - \bar{X} \right|$  se faisant de la même manière. On ré-écrit le système  $(S^+)$  en coordonnées, en notant, pour alléger les notations,  $Y^{+,\varepsilon} := (x, y)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = -2 \frac{x(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}} - \frac{1}{\varepsilon} x(t) y^2(t), \\ y'(t) = 2 \frac{y(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}} - \frac{1}{\varepsilon} x^2(t) y(t) \\ (x(0), y(0)) = (X_1, X_2). \end{array} \right. \quad (S^+)$$

On multiplie la première ligne par  $x(t)$  et la deuxième ligne par  $y(t)$ . Alors par intégration, on obtient pour  $0 < t < 1$  :

$$y^2(t) - x^2(t) = 4 \int_0^t \sqrt{x^2(s) + y^2(s)} \, ds + 2(X_2^2 - X_1^2).$$

On définit

$$C_X := \sup_{\substack{0 \leq t \leq 1 \\ \varepsilon > 0}} \left\{ |Y^{+, \varepsilon}(t)| \right\}.$$

Donc d'après la proposition précédente, avec  $\theta = \frac{1}{8}$ , pour tout  $t \in [0, t^{+, \varepsilon}(\frac{4}{3})]$ ,

$$-\widehat{K}_X \varepsilon^{\frac{1}{8}} + 2(X_2^2 - X_1^2) \leq y^2(t) - x^2(t) \leq \widehat{K}_X \varepsilon^{\frac{1}{8}} + 2(X_2^2 - X_1^2),$$

où  $\widehat{K}_X := 4C_X K_X$ . La courbe représentative de  $Y^{+, \varepsilon}$  sur  $[0, t^{+, \varepsilon}(\frac{4}{3})]$  est donc incluse dans le domaine délimité par les hyperboles d'équations

$$y^2 - x^2 = -\widehat{K}_X \varepsilon^{\frac{1}{8}} + 2(X_2^2 - X_1^2)$$

et

$$y^2 - x^2 = \widehat{K}_X \varepsilon^{\frac{1}{8}} + 2(X_2^2 - X_1^2).$$

On note  $X_+ := (x_+, y_+)$  (resp.  $X_- := (x_-, y_-)$ ) le point d'intersection de l'hyperbole

$$y^2 - x^2 = \widehat{K}_X \varepsilon^{\frac{1}{8}} + 2(X_2^2 - X_1^2) \quad (\text{resp. } -\widehat{K}_X \varepsilon^{\frac{1}{8}} + 2(X_2^2 - X_1^2)),$$

avec la ligne de niveau  $\{d = \varepsilon^{\frac{4}{3}}\}$ .

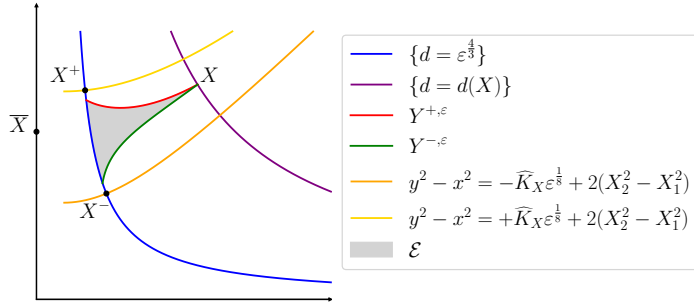


FIGURE 5.5 – Ensemble d'évolution des trajectoires pénalisées

Obtenir les estimations de la proposition sur

$$|\overline{X} - X^+|$$

et

$$|\overline{X} - X^-|,$$

nous donnera donc les estimations voulues sur  $\left| \bar{X} - Y_{\frac{4}{3}}^{+, \varepsilon} \right|$ . Les coordonnées de  $X_+$  vérifient le système

$$\begin{cases} (x_+)^2(y_+)^2 = \varepsilon^{\frac{4}{3}}, \\ (y_+)^2 - (x_+)^2 = \widehat{K}_X \varepsilon^{\frac{1}{8}} + 2(X_2^2 - X_1^2), \\ 0 < x_+, \\ 0 < y_+. \end{cases}$$

Le lemme 2.3.6, avec

$$\delta = \widehat{K}_X \varepsilon^{\frac{1}{8}} + 2(X_2^2 - X_1^2) \text{ et } \lambda = \varepsilon^{\frac{4}{3}},$$

donne

$$y_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{((X_2^2 - X_1^2) + \widehat{K}_X \varepsilon^{\frac{1}{8}}) + \sqrt{((X_2^2 - X_1^2) + \widehat{K}_X \varepsilon^{\frac{1}{8}})^2 + 4\varepsilon^{\frac{4}{3}}}}$$

et

$$x_+ = \frac{\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{((X_2^2 - X_1^2) + \widehat{K}_X \varepsilon^{\frac{1}{8}}) + \sqrt{((X_2^2 - X_1^2) + \widehat{K}_X \varepsilon^{\frac{1}{8}})^2 + 4\varepsilon^{\frac{4}{3}}}}}.$$

Un développement limité en  $\varepsilon$  donne

$$\left| \bar{X}_2 - y_+ \right| \leq \widetilde{K}_X \varepsilon^{\frac{1}{8}},$$

où  $\widetilde{K}_X$  est une constante strictement positive bornée par la norme de  $X$ . De la même manière,  $y_+$  étant minoré par une certaine constante dépendant uniquement de  $X$ ,

$$\begin{aligned} \left| \bar{X}_1 - x_+ \right| &= |x_+| \\ &= \frac{\varepsilon^{\frac{4}{3}}}{(y_+)^2} \\ &\leq \widetilde{K}_X \varepsilon^{\frac{1}{8}}. \end{aligned}$$

Finalement, en prenant le max entre  $\widetilde{K}_X$  et  $\widetilde{K}_X$ ,

$$\left| X_{\frac{4}{3}}^{+, \varepsilon} - \bar{X} \right| \leq |X_+ - \bar{X}| \leq K_X \varepsilon^{\frac{1}{8}}.$$

□

*Remarque 5.1.18.* La constante  $\frac{1}{8}$  peut bien sûr être optimisée ici. Son choix est arbitraire pour éviter de faire apparaître la constante  $\theta$  de la proposition 5.1.15 dans les calculs. La vitesse d'atteinte des zones d'invariance ne nous intéresse que peu ici. Du moment que

l'on a des temps et des estimations de distance “en  $\varepsilon^\delta$ ”, on dispose des outils nécessaires pour établir par la suite le théorème 5.0.1.

En refaisant les mêmes calculs que pour établir la proposition 5.1.17, on obtient un résultat analogue pour la zone  $\{d = \varepsilon^\gamma\}$ , pour  $0 < \gamma < 1$ . Plus précisément, si on note

$$t^{+, \varepsilon}(\varepsilon^\gamma) := \inf \{t > 0 : d(Y^{+, \varepsilon})(t) \leq \varepsilon^\gamma\}$$

et

$$t^{-, \varepsilon}(\varepsilon^\gamma) := \inf \{t > 0 : d(Y^{-, \varepsilon})(t) \leq \varepsilon^\gamma\},$$

puis

$$Y_\gamma^{+, \varepsilon} := Y^{+, \varepsilon}(t^{+, \varepsilon}(\varepsilon^\gamma))$$

et

$$Y_\gamma^{-, \varepsilon} := Y^{-, \varepsilon}(t^{-, \varepsilon}(\varepsilon^\gamma)),$$

on peut écrire

**Proposition 5.1.19.** *Il existe une constante  $K_X > 0$ , tel que*

$$|Y_\gamma^{+, \varepsilon} - \bar{X}| \leq K_X \varepsilon^{1-\gamma}$$

et

$$|Y_\gamma^{-, \varepsilon} - \bar{X}| \leq K_X \varepsilon^{1-\gamma},$$

où  $K_X$  est bornée par la norme de  $X$ .

Les propositions 5.1.17 et 5.1.19 permettent alors d'écrire

**Proposition 5.1.20.** *Pour tout  $\beta \in \mathcal{A}$  et tout  $X \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ , il existe une constante  $K_X > 0$ , tel que pour tout  $0 < \gamma < \frac{7}{8}$ ,  $\varepsilon > 0$  et tout  $t \in [t^{X, \beta, \varepsilon}(\varepsilon^\gamma), t^{X, \beta, \varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})]$*

$$|Y^{X, \beta, \varepsilon}(t) - \bar{X}| \leq K_X \varepsilon^{\frac{1}{8}}, \quad (5.1.17)$$

où  $K_X$  est bornée par la norme de  $X$ .

*Démonstration.* On définit

$$\mathcal{E}_\gamma := \left\{d \geq \varepsilon^{\frac{4}{3}}\right\} \cap \{d \leq \varepsilon^\gamma\} \cap \{X_1 \leq X_2\} \cap \mathcal{E}^-(Y^{+, \varepsilon}) \cap \mathcal{E}^+(Y^{-, \varepsilon}). \quad (5.1.18)$$

Alors pour tout  $t \in [t^{X,\beta,\varepsilon}(\varepsilon^\gamma), t^{X,\beta,\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})]$ , la proposition 5.1.14 ainsi que la définition de  $t^{X,\beta,\varepsilon}(\varepsilon^\gamma)$  et  $t^{X,\beta,\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})$  donnent

$$Y^{X,\beta,\varepsilon}(t) \in \mathcal{E}_\gamma.$$

Donc

$$|Y^{X,\beta,\varepsilon}(t) - \bar{X}| \leq \sup_{Y \in \mathcal{E}_\gamma} \{|\bar{X} - Y|\}.$$

Cette quantité étant atteinte en  $Y = Y_\gamma^{-,\varepsilon}$  ou  $Y_\gamma^{+,\varepsilon}$ , on a le résultat.  $\square$

*Remarque 5.1.21.* La condition  $0 < \gamma < \frac{7}{8}$  qui apparaît dans la proposition 5.1.20, et qui apparaît de la même manière dans la proposition 5.1.11 n'est pas nécessaire ici, on aurait pu écrire le même type de proposition pour  $0 < \gamma < 1$ . On rajoute cette condition pour que l'estimation de distance entre  $\bar{X}$  et  $Y^{X,\beta,\varepsilon}(t)$  sur  $[t^{X,\beta,\varepsilon}(\varepsilon^\gamma), t^{X,\beta,\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})]$ , reste sous la forme

$$K_X \varepsilon^{\frac{1}{8}}.$$

Cela permet d'avoir une uniformité avec la proposition 5.1.13.

On peut donc maintenant donner la preuve de la proposition 5.1.11.

*Démonstration de la proposition 5.1.11.* Pour  $t \in [t^{X,\beta,\varepsilon}(\varepsilon^\gamma), t^{X,\beta,\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})]$ ,

$$|\bar{X} - Y^{X,\beta,\varepsilon}(t)| \leq K_X \varepsilon^{\frac{1}{8}}.$$

On choisit alors  $\alpha_{\beta,\varepsilon}(t)$  tel que  $Y^{\bar{X},\alpha_{\beta,\varepsilon}}(t) = \bar{X}$  sur  $[0, t^{X,\beta,\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})]$ . Pour construire  $\alpha_{\beta,\varepsilon}$  sur  $[t^{X,\beta,\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}}), +\infty[$ , il suffit ensuite d'effectuer la même étude que dans la preuve de la proposition 5.1.13 (voir annexe A ) on obtient le résultat souhaité. Le fait que dans l'estimation (5.1.12) la constante dépende de  $X$ , contrairement à celle de l'estimation (5.1.11), provient du fait que les trajectoires ne démarrent pas de la même condition initiale  $\bar{X}$ .  $\square$

On donne un dernier résultat dans cette section, qui assure pour tout  $X \in \mathbb{R}^2$  l'existence d'un contrôle  $\alpha_{X,\varepsilon}$  permettant à  $Y^{X,\alpha_{X,\varepsilon},\varepsilon}$  d'atteindre la zone  $Z(\varepsilon^{\frac{4}{3}})$  en un temps de la forme  $\varepsilon^\delta$ . Cela va permettre de construire le contrôle  $\alpha_{\beta,\varepsilon}$  dans la proposition 5.1.12.

**Proposition 5.1.22.** *Pour tout  $X \in \mathbb{R}^2$ , pour tout  $0 < \theta < 1$ , il existe  $\alpha_{X,\varepsilon} \in \mathcal{A}$  et  $K_{X,\theta} > 0$ , tel que*

$$t^{X,\alpha_{X,\varepsilon},\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}}) \leq K_{X,\theta} \varepsilon^{\frac{4}{3}(1-\theta)}.$$



*Démonstration.* Si  $X \in \Gamma$ , la trajectoire est déjà dans la zone d'invariance  $Z(\varepsilon^{\frac{4}{3}})$ , et alors le résultat est établi car

$$t^{X, \alpha_{X, \varepsilon, \varepsilon}}(\varepsilon^{\frac{4}{3}}) = 0.$$

On rappelle pour  $X \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  le système (2.2.1)

$$\begin{cases} Y'(t) = -\nabla d(Y(t)) \\ Y(0) = X. \end{cases} \quad (5.1.19)$$

Le théorème 2.2.2 nous donne que la solution  $Y$  est globale. L'hypothèse (1.2.20) nous donne alors un couple  $(Y^{X, \alpha_{X, \varepsilon, \varepsilon}}, \alpha_{X, \varepsilon})$ , où  $Y^{X, \alpha_{X, \varepsilon, \varepsilon}}$  est une trajectoire absolument continue sur  $[0, +\infty[$  et  $\alpha_{X, \varepsilon}$  un élément de  $\mathcal{A}$ , tel que pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\begin{cases} Y^{X, \alpha_{X, \varepsilon, \varepsilon}}(t) = X + \int_0^t f(Y^{X, \alpha_{X, \varepsilon, \varepsilon}}(s), \alpha_{X, \varepsilon}(s)) ds - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \nabla d(Y^{X, \alpha_{X, \varepsilon, \varepsilon}}(s)) ds, & t > 0 \\ \int_0^t f(Y^{X, \alpha_{X, \varepsilon, \varepsilon}}(s), \alpha_{X, \varepsilon}(s)) ds = -\delta \frac{\nabla d(Y(t))}{|\nabla d(Y(t))|}. \end{cases} \quad (5.1.20)$$

Ainsi,  $Y^{X, \alpha_{X, \varepsilon, \varepsilon}}$  est solution du système

$$\begin{cases} (Y^{X, \alpha_{X, \varepsilon, \varepsilon}})'(t) = -\delta \frac{\nabla d(Y(t))}{|\nabla d(Y(t))|} - \frac{1}{\varepsilon} \nabla d(Y^{X, \alpha_{X, \varepsilon, \varepsilon}}(t)), & t > 0 \\ Y^{X, \alpha_{X, \varepsilon, \varepsilon}}(0) = X. \end{cases} \quad (5.1.21)$$

Alors, en dérivant  $d^\theta(Y^{X, \alpha_{X, \varepsilon, \varepsilon}})$  pour  $0 < \theta < 1$ , et en refaisant les mêmes calculs que dans le lemme 3.1.3, on trouve

$$t^{X, \alpha_{X, \varepsilon, \varepsilon}}(\varepsilon^{\frac{4}{3}}) \leq \frac{d^\theta(X)}{\theta \left(1 + \frac{\delta}{|\nabla d(X)|}\right)} \varepsilon^{\frac{4}{3}(1-\theta)}.$$

□

On peut maintenant établir la preuve de la proposition 5.1.12.

*Démonstration de la proposition 5.1.12.* On choisit, dans la proposition 5.1.22,  $\theta = \frac{29}{32}$ ; alors

$$t^{X, \alpha_{X, \varepsilon, \varepsilon}}(\varepsilon^{\frac{4}{3}}) \leq K_{X, \frac{29}{32}} \varepsilon^{1/8}.$$

Comme pour presque tout  $t \geq 0$ , d'après la proposition 5.1.8,

$$|(Y^{\bar{X},\beta})'(t)| \leq M,$$

il vient

$$|Y^{\bar{X},\beta}(t^{X,\alpha_{X,\varepsilon,\varepsilon}}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})) - \bar{X}| \leq MK_{X,\frac{29}{32}}\varepsilon^{1/8}.$$

On applique alors la proposition 5.1.20 à  $\alpha_{X,\varepsilon}$ , et donc

$$|Y^{X,\alpha_{X,\varepsilon,\varepsilon}}(t^{X,\alpha_{X,\varepsilon,\varepsilon}}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})) - \bar{X}| \leq K_X\varepsilon^{1/8}.$$

En gardant la notation  $K_X$ ,

$$|Y^{X,\alpha_{X,\varepsilon,\varepsilon}}(t^{X,\alpha_{X,\varepsilon,\varepsilon}}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})) - Y^{\bar{X},\beta}(t^{X,\alpha_{X,\varepsilon,\varepsilon}}(\varepsilon^{\frac{4}{3}}))| \leq K_X\varepsilon^{1/8}.$$

On choisit donc  $\alpha_{\beta,\varepsilon} \equiv \alpha_{X,\varepsilon}$  sur  $[0, t^{X,\alpha_{X,\varepsilon,\varepsilon}}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})]$ , et pour construire  $\alpha_{\beta,\varepsilon}$  pour  $t \geq t^{X,\alpha_{X,\varepsilon,\varepsilon}}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})$  la même étude que dans la preuve de la proposition 5.1.13 on obtient le résultat souhaité.  $\square$

## 5.2 Propriétés et convergence de $(V^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$

On établit dans cette section le théorème 5.0.1. On s'intéresse pour cela aux propriétés de  $(V^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ , on remarque d'abord que celle-ci est uniformément bornée par rapport à  $\varepsilon$ .

**Proposition 5.2.1.** *Sous les hypothèses (1.1.2), (1.1.3),  $(V^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  est bornée dans  $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ .*

*Démonstration.* Soit  $X \in \mathbb{R}^2$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $\alpha \in \mathcal{A}$ . Alors,

$$\begin{aligned} |V^\varepsilon(X)| &\leq |J^\varepsilon(X, \alpha)| \\ &\leq \int_0^\infty |\ell(Y^{X,\alpha,\varepsilon}(t), \alpha(t))| e^{-\lambda t} dt \\ &\leq \frac{M}{\lambda}. \end{aligned}$$

$\square$

On note également qu'à  $\varepsilon$  fixé, on a le résultat suivant (voir par exemple [10])

**Proposition 5.2.2.** *On suppose que les hypothèses (1.1.2) et (1.1.3) sont vérifiées. Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $V^\varepsilon$  est l'unique solution de viscosité au sens classique de l'équation*

$$\lambda u^\varepsilon(X) + \sup_{a \in A} \{-\langle \nabla u^\varepsilon(X), F^\varepsilon(X, a) \rangle - \ell(X, a)\} = 0, \quad X \in \mathbb{R}^2.$$

### 5.2.1 Restriction à $\Gamma$

On dispose d'un résultat d'uniforme lipschitzienité de  $(V^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  sur le réseau.

**Proposition 5.2.3.** *Il existe  $K > 0$  tel que pour tout  $(X, \tilde{X}) \in \Gamma$  et tout  $\varepsilon > 0$  on a*

$$|V^\varepsilon(X) - V^\varepsilon(\tilde{X})| \leq K |X - \tilde{X}|. \quad (5.2.1)$$

*Démonstration.* On considère pour  $\alpha \in \mathcal{A}$  le système (1.1.1) que l'on rappelle ici,

$$\begin{cases} Y'(t) = f(Y(t), \alpha(t)), & t \geq 0 \\ Y(0) = X. \end{cases} \quad (5.2.2)$$

L'hypothèse de contrôlabilité totale (1.2.20) assure l'existence de  $0 \leq \tau_{X, \tilde{X}} \leq \frac{2\sqrt{2}}{M} |X - \tilde{X}|$  et  $\alpha_{X, \tilde{X}} \in \mathcal{A}$ , tel que

- $Y(0) = X$ ,
- $\forall t \in [0, \tau_{X, \tilde{X}}], Y(t) \in \Gamma$ ,
- $Y(\tau_{X, \tilde{X}}) = \tilde{X}$ .

Comme  $Y \in \Gamma$  sur  $[0, \tau_{X, \tilde{X}}]$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $t \in [0, \tau_{X, \tilde{X}}]$ ,

$$\frac{1}{\varepsilon} \nabla d(Y(t)) = 0.$$

Ainsi pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $Y$  satisfait le problème de Cauchy (5.0.1) sur  $[0, \tau_{X, \tilde{X}}]$  et donc coïncide avec  $Y^{X, \alpha_{X, \tilde{X}}, \varepsilon}$  sur cet intervalle. On définit alors pour tout  $\beta \in \mathcal{A}$  et tout  $X, \tilde{X} \in \Gamma$

$$\alpha_{X, \tilde{X}}^\beta : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{cases} \alpha_{X, \tilde{X}}(t), & \text{si } t \in [0, \tau_{X, \tilde{X}}] \\ \beta(t - \tau_{X, \tilde{X}}), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit  $\beta \in \mathcal{A}$ ,  $X, \tilde{X} \in \Gamma$  et  $\varepsilon > 0$ .

$$\begin{aligned}
 V^\varepsilon(X) &\leq J^\varepsilon(X, \alpha_{X, \tilde{X}}^\beta) \\
 &= \int_0^{\tau_{X, \tilde{X}}} \ell(Y^{X, \alpha_{X, \tilde{X}}^\beta, \varepsilon}(s), \alpha_{X, \tilde{X}}^\beta(s)) e^{-\lambda s} ds + \int_{\tau_{X, \tilde{X}}}^{+\infty} \ell(Y^{X, \alpha_{X, \tilde{X}}^\beta, \varepsilon}(s), \alpha_{X, \tilde{X}}^\beta(s)) e^{-\lambda s} ds \\
 &\leq M\tau_{X, \tilde{X}} + e^{-\lambda\tau_{X, \tilde{X}}} \int_0^{+\infty} \ell(Y^{X, \alpha_{X, \tilde{X}}^\beta, \varepsilon}(s + \tau_{X, \tilde{X}}), \alpha_{X, \tilde{X}}^\beta(\tau_{X, \tilde{X}} + s)) e^{-\lambda s} ds \\
 &\leq M\tau_{X, \tilde{X}} + e^{-\lambda\tau_{X, \tilde{X}}} J^\varepsilon(\tilde{X}, \beta).
 \end{aligned}$$

$M$  et  $\tau_{X, \tilde{X}}$  étant indépendants de  $\beta$ , on en déduit que pour tout  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
 V^\varepsilon(X) &\leq M\tau_{X, \tilde{X}} + e^{-\lambda\tau_{X, \tilde{X}}} V^\varepsilon(\tilde{X}) \\
 &\leq M\tau_{X, \tilde{X}} + (1 - e^{-\lambda\tau_{X, \tilde{X}}}) V^\varepsilon(\tilde{X}) + V^\varepsilon(\tilde{X}) \\
 &\leq M\tau_{X, \tilde{X}} + \tilde{M}M\tau_{X, \tilde{X}} + V^\varepsilon(\tilde{X}) \\
 &\leq \widehat{M} |X - \tilde{X}| + V^\varepsilon(\tilde{X}),
 \end{aligned}$$

avec  $\widehat{M}$  indépendante de  $X, \tilde{X}, \varepsilon$ .  $X$  et  $\tilde{X}$  jouant ici des rôles symétriques on obtient

$$|V^\varepsilon(X) - V^\varepsilon(\tilde{X})| \leq \widehat{M} |X - \tilde{X}|.$$

□

On obtient donc grâce au théorème d'Ascoli le théorème suivant :

**Corollaire 5.2.4.**  $(V^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  est relativement compact dans  $\mathcal{C}_{loc}^0(\Gamma)$ .

La proposition suivante nous donne le deuxième point du théorème 5.0.1, dans le cas où  $X \in \Gamma$ .

**Proposition 5.2.5.** Pour tout  $X \in \Gamma$ ,

$$V(X) = V_\Gamma(X). \tag{5.2.3}$$

*Démonstration.* Pour tout  $X \in \Gamma$ ,  $\mathcal{A}_X \subset \mathcal{A}$ . De plus, pour tout  $X \in \Gamma$  et pour tout  $\alpha \in \mathcal{A}_X$ , le corollaire 5.1.10 permet d'écrire

$$\omega(X, \alpha) = \{Y^{X, \alpha}\}.$$

Donc, pour tout  $\alpha \in \mathcal{A}_X$ ,

$$\begin{aligned} V(X) &\leq J(Y^{X,\alpha}) \\ &= J_\Gamma(X, \alpha). \end{aligned}$$

et la propriété caractéristique de la borne inférieure donne donc que

$$V(X) \leq V_\Gamma(X).$$

Soit  $X \in \Gamma$ . La proposition 5.1.8 donne que pour tout  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $(Y^{X,\alpha})' \in \overline{B}(0, M)$ . Il existe alors par l'hypothèse 1.2.20 un contrôle  $\beta_\alpha \in \mathcal{A}_X$ , tel que pour tout  $t \geq 0$ , on ait

$$Y^{X,\beta_\alpha}(t) = Y^{X,\alpha}(t).$$

Alors,

$$\begin{aligned} V_\Gamma(X) &\leq J_\Gamma(X, \beta_\alpha) \\ &= J(Y^{X,\alpha}). \end{aligned}$$

Comme pour le point précédent, cette égalité étant vraie pour tout  $\alpha \in \mathcal{A}$  et tout  $Y^{X,\alpha} \in \omega(X, \alpha)$ , la propriété caractéristique de la borne inférieure donne

$$V_\Gamma(X) \leq V(X).$$

□

### 5.2.2 Convergence de $(V^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$

On cherche à établir le premier point du théorème 5.0.1. On montre en réalité deux résultats. Le premier consiste à montrer que, localement uniformément par rapport à  $X \in \mathbb{R}^2$ ,

$$|V^\varepsilon(X) - V(\overline{X})| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Le deuxième consiste effectivement à montrer que, localement uniformément par rapport à  $X \in \mathbb{R}^2$ ,

$$|V^\varepsilon(X) - V(X)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

le deuxième point du théorème. Cela permettra d'établir l'égalité

$$V(X) = V(\bar{X})$$

sur  $\mathbb{R}^2$ , et d'établir le deuxième point du théorème 5.0.1 grâce à la proposition 5.2.5.

**Proposition 5.2.6.** *Sous les hypothèses (1.1.2), (1.1.3), (1.2.19) et (1.2.20), la suite  $(V^\varepsilon(X))_{\varepsilon>0}$  converge localement uniformément par rapport à  $X \in \mathbb{R}^2$  vers  $V(\bar{X})$ .*

*Démonstration.* On rappelle que la proposition 5.2.5 assure

$$V(\bar{X}) = V_\Gamma(\bar{X}).$$

On montre donc la convergence de  $V^\varepsilon(X)$  vers  $V_\Gamma(\bar{X})$  et on aura le résultat souhaité.

On montre d'abord que l'on dispose d'un résultat de la forme

$$V^\varepsilon(X) \leq V_\Gamma(\bar{X}) + K_X \varepsilon^\delta,$$

où  $K_X$  est une constante positive bornée par la norme de  $X$ . Soit  $\beta \in \mathcal{A}_{\bar{X}}$ . On choisit alors  $\alpha_{X,\varepsilon} \in \mathcal{A}$ , comme dans la proposition 5.1.22, en choisissant  $\theta = 29/32$ . Alors, par la proposition 5.1.8, à

$$t = t^{X,\alpha_{X,\varepsilon},\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}}),$$

$$\left| Y^{\bar{X},\beta}(t^{X,\alpha_{X,\varepsilon},\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})) - \bar{X} \right| \leq M \cdot t^{X,\alpha_{X,\varepsilon},\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}}) \leq K_X \varepsilon^{\frac{1}{8}}.$$

La proposition 5.1.20 assure de même que

$$\left| Y^{X,\alpha_{X,\varepsilon},\varepsilon}(t^{X,\alpha_{X,\varepsilon},\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})) - \bar{X} \right| \leq K_X \varepsilon^{\frac{1}{8}}.$$

Donc, en gardant la notation  $K_X$ ,

$$\left| Y^{\bar{X},\beta}(t^{X,\alpha_{X,\varepsilon},\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})) - Y^{X,\alpha_{X,\varepsilon},\varepsilon}(t^{X,\alpha_{X,\varepsilon},\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})) \right| \leq K_X \varepsilon^{\frac{1}{8}}.$$

Une adaptation immédiate de la proposition 5.1.11 donne donc un contrôle  $\tilde{\alpha}_{\beta,\varepsilon} \in \mathcal{A}$ , tel que pour tout  $t \geq t^{X,\alpha_{X,\varepsilon},\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})$ ,

$$\left| Y^{\bar{X},\beta}(t) - Y^{X,\tilde{\alpha}_{\beta,\varepsilon},\varepsilon}(t) \right| \leq C_X (t \varepsilon^{\frac{5}{24}} + \varepsilon^{\frac{1}{8}}).$$

On pose alors

$$\alpha_\beta : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{cases} \alpha_{X,\varepsilon}(t), & \text{si } t \in [0, t^{X,\alpha_{X,\varepsilon},\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})], \\ \tilde{\alpha}_{\beta,\varepsilon}(t), & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut alors écrire, par définition de  $J^\varepsilon$  et  $J_\Gamma$ , (voir (1.2.3) et (1.1.8)), et par les hypothèses sur  $\ell$ , (1.1.3) et (1.2.19)

$$\begin{aligned} V^\varepsilon(X) &\leq J^\varepsilon(X, \alpha_\beta) \\ &\leq J^\varepsilon(X, \alpha_\beta) - J_\Gamma(\bar{X}, \beta) + J_\Gamma(\bar{X}, \beta) \\ &\leq \int_0^{+\infty} \ell(Y^{X,\alpha_\beta,\varepsilon}(s)) e^{-\lambda s} ds - \int_0^{+\infty} \ell(Y^{\bar{X},\beta}(s)) e^{-\lambda s} ds + J(\bar{X}, \beta) \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

$$\leq \int_0^{+\infty} L |Y^{X,\alpha_\beta,\varepsilon}(s) - Y^{\bar{X},\beta}(s)| e^{-\lambda s} ds + J_\Gamma(\bar{X}, \beta) \quad (5.2.5)$$

$$\begin{aligned} &\leq L \int_0^{t^{X,\alpha_\beta,\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})} |Y^{X,\alpha_\beta,\varepsilon}(s) - Y^{\bar{X},\beta}(s)| e^{-\lambda s} ds \\ &\quad + L \int_{t^{X,\alpha_\beta,\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})}^{+\infty} |Y^{X,\alpha_\beta,\varepsilon}(s) - Y^{\bar{X},\beta}(s)| e^{-\lambda s} ds \\ &\quad + J_\Gamma(\bar{X}, \beta) \\ &\leq L |X| t^{X,\alpha_\beta,\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}}) \\ &\quad + C_X L \varepsilon^{5/24} \int_{t^{X,\alpha_\beta,\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})}^{+\infty} s e^{-\lambda s} ds + C_X L \varepsilon^{\frac{1}{8}} \int_{t^{X,\alpha_\beta,\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})}^{+\infty} e^{-\lambda s} ds \\ &\quad + J_\Gamma(\bar{X}, \beta) \\ &\leq K_X \varepsilon^{\frac{1}{8}} + J_\Gamma(\bar{X}, \beta), \end{aligned}$$

où  $K_X > 0$  est bornée par la norme  $X$ . Il existe donc  $K_X > 0$  tel pour tout  $\beta \in \mathcal{A}_{\bar{X}}$ ,

$$V^\varepsilon(X) \leq K_X \varepsilon^{\frac{1}{8}} + J_\Gamma(\bar{X}, \beta).$$

La propriété de la borne inférieure et la proposition 5.2.5 (puisque  $\bar{X} \in \Gamma$ ) assurent donc

$$V^\varepsilon(X) \leq K_X \varepsilon^{\frac{1}{8}} + V_\Gamma(\bar{X}).$$

Il faut maintenant disposer d'un résultat de la forme

$$V_\Gamma(\bar{X}) \leq V^\varepsilon(X) + K_X \varepsilon^\delta,$$

où  $K_X > 0$  et ne dépend que de  $X$ . Pour cela, On applique ici le même raisonnement que le point précédent, en utilisant la proposition 5.1.11 et on obtient

$$V(\bar{X}) \leq V^\varepsilon(X) + K_X \varepsilon^{\frac{1}{8}}.$$

Finalement, de ces deux inégalités et du fait que pour  $X \in \Gamma$ ,  $V(X) = V_\Gamma(X)$ , on obtient pour tout  $X \in \mathbb{R}^2$  qu'il existe une constante  $K_X > 0$ , bornée par la norme de  $X$ , tel que

$$|V(\bar{X}) - V^\varepsilon(X)| \leq K_X \varepsilon^{\frac{1}{8}}.$$

□

On établit maintenant le premier point du théorème 5.0.1

**Proposition 5.2.7.** *Sous les hypothèses (1.1.2), (1.1.3), (1.2.19) et (1.2.20), la suite  $(V^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge localement uniformément sur  $\mathbb{R}^2$  vers  $V$ .*

*Démonstration.* On sait que pour tout  $X \in \mathbb{R}^2$ , tout  $\beta \in \mathcal{A}$  et tout  $Y^{X,\beta} \in \omega(X, \beta)$ , il existe  $\alpha_\beta \in \mathcal{A}_{\bar{X}}$ , tel que pour tout  $t > 0$ ,

$$Y^{\bar{X}, \alpha_\beta}(t) = Y^{X, \beta}(t).$$

À partir de là la preuve devient exactement la même que celle de la proposition 5.2.6, le saut ayant lieu à  $t = 0$  n'intervenant pas dans l'intégrale. □

On peut donc établir par unicité de la limite :

**Proposition 5.2.8.** *Pour tout  $X \in \mathbb{R}^2$ ,*

$$V(X) = V(\bar{X}).$$

*Démonstration.* Pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$|V(X) - V(\bar{X})| \leq |V(X) - V^\varepsilon(X)| + |V^\varepsilon(X) - V(\bar{X})|.$$

Or ces deux quantités convergent vers 0 lorsque l'on fait tendre  $\varepsilon$  vers 0, par les propositions 5.2.6 et 5.2.7. Donc

$$V(X) = V(\bar{X}).$$

□



Le deuxième point du théorème 5.0.1 vient donc en corollaire :

**Corollaire 5.2.9.** *Pour tout  $X \in \mathbb{R}^2$ ,*

$$V(X) = V_{\Gamma}(\bar{X}).$$

*Démonstration.* La proposition 5.2.5 donne

$$V(\bar{X}) = V_{\Gamma}(\bar{X}),$$

et la proposition 5.2.8

$$V(\bar{X}) = V(X).$$

□

*Exemple 5.2.10.* Comme mentionné dans la remarque 1.2.8, et aux vues de son utilisation majeur dans l'établissement des résultats du chapitre 5, l'hypothèse de non-dépendance de  $\ell$  (1.2.19) par rapport à  $a \in A$  est indispensable dans ce travail. En effet, l'établissement de l'inégalité (5.2.5) à partir de l'inégalité (5.2.4) ne pourrait pas se faire sans cette hypothèse. On utilise en effet le caractère Lipschitz de  $\ell$  par rapport à la variable d'état, uniformément par rapport au contrôle. Si  $\ell$  dépendait  $a$ , comme dans l'inégalité (5.2.4) les contrôles  $\alpha_{\beta}$  et  $\beta$  sont distincts, on ne pourrait pas établir l'inégalité suivante. On donne ici un contre-exemple, dans lequel  $\ell$  dépend de  $a \in A$ , de manière à invalider le théorème 5.0.1. On choisit ici

$$A := \overline{B(0, 1)},$$

$$f(X, a) := a$$

et

$$\ell(X, a) := (1 + a_1) + (1 + a_2) + |X_2|.$$

*Remarque 5.2.11.*  $\ell$  n'est pas ici globalement bornée par rapport à  $X \in \mathbb{R}^2$ , ça n'est pas gênant ici car nous allons considérer des trajectoires proches de l'axe des abscisses. Pour être parfaitement rigoureux il faudrait, par exemple, considérer une fonction de la forme

$$\ell(X, a) := (1 + a_1) + (1 + a_2) + \min\{|X_2|, 100\}.$$

Le but est de montrer que pour  $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

$$V(X) < V_\Gamma(X),$$

et donc qu'il n'y a pas égalité entre les deux fonctions. Pour cela, on exhibe le contrôle optimal  $\alpha_\Gamma \in \mathcal{A}_X$  tel que

$$V_\Gamma(X) = J(X, \alpha_\Gamma).$$

On trouve ensuite  $\alpha \in \mathcal{A}$  tel que  $(Y^{X, \alpha, \varepsilon})_{\varepsilon > 0}$  converge, c'est à dire tel que  $\omega(X, \alpha)$  est réduit à un singleton

$$\omega(X, \alpha) = \{Y^{X, \alpha}\},$$

tel que

$$J(Y^{X, \alpha}) < J(X, \alpha_\Gamma).$$

On aura bien, ainsi,

$$V(X) \leq J(Y^{X, \alpha}) < J(X, \alpha_\Gamma) = V_\Gamma(X).$$

On pose

$$\alpha_\Gamma : t \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, & 0 \leq t \leq 1, \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, & t \geq 1, \end{cases}$$

et

$$\alpha : t \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$Y^{X, \alpha_\Gamma}(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix}, & 0 \leq t \leq 1, \\ \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \end{pmatrix}, & t \geq 1, \end{cases}$$

De même, l'exemple de la proposition 4.3.1 traité dans le chapitre 4, permet de d'affirmer

que  $(Y^{X,\alpha,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$  converge vers

$$Y^{X,\alpha} : t \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \frac{t}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, & 0 \leq t \leq \sqrt{2}, \\ \begin{pmatrix} \sqrt{2} - \frac{t}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, & t \geq \sqrt{2}. \end{cases}$$

Alors les coûts instantanés s'écrivent

$$\ell(Y^{X,\alpha_\Gamma}(t), \alpha_\Gamma(t)) = \begin{cases} 1 + (1 - t), & 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

et

$$\ell(Y^{X,\alpha}(t), \alpha(t)) = \begin{cases} (2 - \sqrt{2}) + (1 - \frac{t}{\sqrt{2}}), & 0 \leq t \leq \sqrt{2}, \\ (2 - \sqrt{2}), & t \geq \sqrt{2}. \end{cases}$$

On calcul alors les coûts

$$\begin{aligned} J(X, \alpha_\Gamma) &= \int_0^{+\infty} \ell(Y^{X,\alpha_\Gamma}(t), \alpha_\Gamma(t)) e^{-\lambda t} dt \\ &= \int_0^1 (2 - t) e^{-\lambda t} dt + \int_1^{+\infty} e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{2\lambda - e^{-\lambda}}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} J(Y^{X,\alpha}) &= \int_0^{+\infty} \ell(Y^{X,\alpha}(t), \alpha(t)) e^{-\lambda t} dt \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} (3 - \sqrt{2} - \frac{t}{2}) e^{-\lambda t} dt + (2 - \sqrt{2}) \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{(3\sqrt{2} - 2)\lambda - (3 + 2\lambda)e^{-\sqrt{2}\lambda}}{\sqrt{2}\lambda^2}. \end{aligned}$$

La différence entre ces deux quantités vaut

$$J(X, \alpha_\Gamma) - J(Y^{X,\alpha}) = \frac{(2 - \sqrt{2})\lambda - \sqrt{2}e^{-\lambda} + (3 + 2\lambda)e^{-\sqrt{2}\lambda}}{\sqrt{2}\lambda^2},$$

qui est positive pour des valeurs de  $\lambda$  positives (c.f figure ci-dessous).

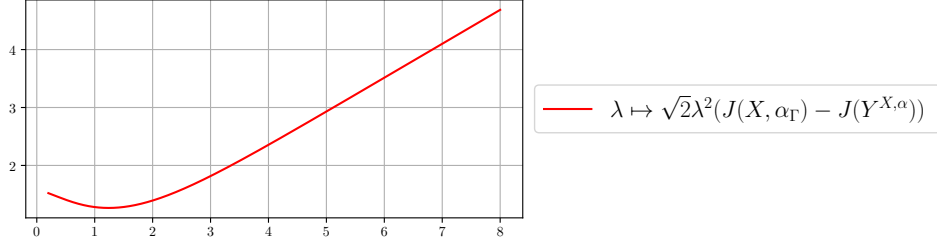


FIGURE 5.6 – Différence des coûts en fonction du taux d'actualisation

Il reste maintenant à justifier que  $\alpha_\Gamma$  est bien le contrôle optimal. dans la configuration de cet exemple. Soit  $\beta \in \mathcal{A}_X$ . Il faut tout d'abord remarquer que, presque partout,

$$\beta_1\beta_2 = 0.$$

En effet, comme pour tout  $t \geq 0$ ,

$$Y^{X,\beta}(t) = X + \int_0^t \beta(s) ds \in \Gamma,$$

les deux composantes de  $\beta$  ne peuvent être simultanément non-nulles (à un ensemble de mesure nulle près). De plus, comme  $\beta(t) \in \overline{B}(0,1)$  pour presque tout  $t$ , pour tout  $i \in \{1,2\}$ ,

$$-1 \leq \beta_i$$

presque partout. Donc en particulier, pour presque tout  $t \geq 0$ ,

$$(1 + \beta_1(t)) + (1 + \beta_2(t)) \geq 1.$$

On en déduit de même que le premier temps d'arrivée à la jonction,

$$\inf \{t \geq 0, Y^{X,\beta}(t) = 0\},$$

est minoré par 1. Donc en particulier, pour presque tout  $0 \leq t \leq 1$ ,

$$\beta_1(t) = 0,$$

et pour tout  $0 \leq t \leq 1$ ,

$$\left| Y_2^{X,\beta}(t) \right| = \left| 1 + \int_0^t \beta_2(s) \, ds \right| \geq 1 - t.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} J(X, \beta) &= \int_0^{+\infty} \ell(Y^{X,\beta}(t), \beta(t)) e^{-\lambda t} \, dt \\ &= \int_0^1 \left( (1 + \beta_1(t)) + (1 + \beta_2(t)) + \left| Y_2^{X,\beta}(t) \right| \right) e^{-\lambda t} \, dt \\ &\quad + \int_1^{+\infty} \left( (1 + \beta_1(t)) + (1 + \beta_2(t)) + \left| Y_2^{X,\beta}(t) \right| \right) e^{-\lambda t} \, dt \\ &\geq \int_0^1 ((1 + 0) + (1 - 1) + 1 - t) e^{-\lambda t} \, dt \\ &\quad + \int_1^{+\infty} (1 + \left| Y_2^{X,\beta}(t) \right|) e^{-\lambda t} \, dt \\ &\geq \int_0^1 (2 - t) e^{-\lambda t} \, dt + \int_1^{+\infty} e^{-\lambda t} \, dt \\ &= J(X, \alpha_\Gamma). \end{aligned}$$

Donc, par propriété caractéristique de la borne inférieure,

$$J(X, \alpha_\Gamma) = V_\Gamma(X),$$

ce qui achève le contre-exemple.

# DISCUSSION ET PERSPECTIVES

---

## 6.1 À propos d'un réseau général

Le réseau sur lequel s'est basé tout le travail exposé dans ce manuscrit est le réseau particulier

$$\Gamma := \{0\} \cup J_N \cup J_O \cup J_S \cup J_E,$$

où

- $J_N := \mathbb{R}_+^* e_N$ , où  $e_N := (0, 1)$ ,
- $J_O := \mathbb{R}_+^* e_O$ , où  $e_O := (-1, 0)$ ,
- $J_S := \mathbb{R}_+^* e_S$ , où  $e_S := (0, -1)$ ,
- $J_E := \mathbb{R}_+^* e_E$ , où  $e_E := (1, 0)$ .

Une des premières questions est : les résultats obtenus dans les chapitres 3 et 5 restent-ils valables dans le cas d'un réseau général ? En plus d'avoir une forme agréable, le fait d'avoir une formule simple et explicite pour  $d$  permettrait de faire des calculs qui l'étaient aussi. En particulier, dans la section 3.1, le fait d'avoir l'équation exacte de plusieurs courbes spécifiques à  $d$ , à savoir les lignes de niveaux, ainsi que les trajectoires de descente de gradient, a permis d'obtenir les estimations  $H_{\text{loc}}^1$  trajectoires.

Plus important encore, les arêtes de  $\Gamma$  nous fournissent un système de coordonnées pour  $\mathbb{R}^2$ . Travailler avec le gradient de  $d$ , exprimé dans la base canonique qui détermine le réseau, est donc facile. Avec un réseau général constitué de "beaucoup" d'arêtes, cela va être beaucoup plus lourd. Il faudra travailler localement, au voisinage de l'arête où vit la trajectoire, et choisir le bon système de coordonnées.

Dans le cas d'un réseau général, il y aura des demi-droites, on ne pourra donc pas utiliser une fonction  $d$  polynomiale ou analytique (cela provient du principe des zéros isolés). Prenons l'exemple très simple de la demi-droite des abscisses positives, i.e.

$$D^+ = \{0\} \cup \mathbb{R}_+^*(1, 0).$$

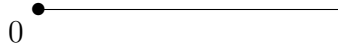


FIGURE 6.1 – Demi-droite réelle positive

Alors la fonction

$$d : (X_1, X_2) \mapsto X_2^2$$

ne convient pas, car on obtient comme ensemble de zéros : la droite  $\{X_2 = 0\}$ . Il faut donc rajouter un terme pour “enlever” la demi droite  $\{X_1 < 0, X_2 = 0\}$  de l’ensemble des zéros. Pour ce faire, il y a une infinité de possibilités. Il suffit de considérer une demi droite dans le demi plan  $\{X_1 < 0\}$  et de “l’ajouter” dans la fonction. Par exemple (voir la section Notations pour  $x^+$  et  $x^-$ )

$$\tilde{d} : (X_1, X_2) \mapsto X_2^2 + (X_1^-)^2$$

convient, tout comme

$$\hat{d} : (X_1, X_2) \mapsto X_2^2 + ((X_2 - X_1)^-)^2.$$

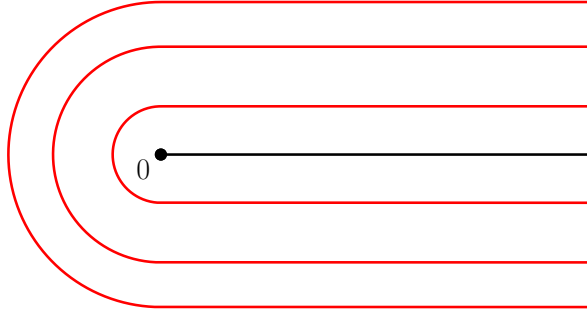
À noter que ces fonctions, bien que moins régulières que la fonction  $d$  utilisée dans tout le travail dans le cadre de  $\Gamma$ , restent sous-analytiques. On peut ainsi leur appliquer successivement les théorèmes 2.2.7 et 2.2.2, et s’assurer de la convergence de leurs trajectoires de gradients. Il est plus naturel de considérer la première, car

$$(X_1, X_2) \mapsto (X_1^-)^2$$

est exactement la fonction qui dirige la demi-droite et permet d’obtenir

$$D = \{0\} \cup \mathbb{R}_+^*(1, 0).$$

Lorsqu’on regarde les lignes de niveaux obtenues, on observe beaucoup de similitudes avec le cadre de  $\Gamma$ .


 FIGURE 6.2 – Lignes de niveaux de  $(X_1, X_2) \mapsto X_2^2 + (X_1^-)^2$ 

Pour une demi-droite quelconque dirigée par un vecteur unitaire  $e$ , on peut utiliser la fonction

$$d_e : X \in \mathbb{R}^2 \mapsto \langle X, e^\perp \rangle^2 + (\langle X, e \rangle^-)^2.$$

Alors,

$$\{d_e = 0\} = \{\nabla d_e = 0\} = \mathbb{R}_+ e.$$

Pour un réseau de  $\mathbb{R}^2$  de la forme

$$\Gamma := \{0\} \cup \bigcup_{i=1}^n \mathbb{R}_+^* e_i,$$

on considère alors comme fonction

$$d_\Gamma : X \in \mathbb{R}^2 \mapsto \prod_{i=1}^n \left( \langle X, e_i^\perp \rangle^2 + (\langle X, e_i \rangle^-)^2 \right). \quad (6.1.1)$$

$d_\Gamma$  est semi-analytique, et respecte donc l'inégalité de Lojasiewicz (voir de nouveau le théorème 2.2.7). La forme de la fonction laisse penser que les calculs effectués lors de ce travail restent valables. Différentier cette fonction donne

$$\nabla d_\Gamma(X) = 2 \sum_{j=1}^n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \left( \langle X, e_i^\perp \rangle^2 + (\langle X, e_i \rangle^-)^2 \right) \left( \langle X, e_j^\perp \rangle e_j^\perp + \langle X, e_j \rangle^- e_j \right). \quad (6.1.2)$$

Une perspective intéressante serait de remonter les résultats du chapitre 3 pour un réseau général, avec  $d_\Gamma$  comme fonction “distance”. On s’attend à ce que les résultats restent inchangés : en particulier le théorème 3.2.1 et la proposition 3.4.3. De même, on s’attend à ce que les résultats du chapitre 5 soient conservés, en particulier les résultats



de suivi de trajectoire.

## 6.2 Convergence des inégalités de Hamilton-Jacobi

On a vu dans le chapitre 5, la convergence de la suite de fonctions valeurs  $(V^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  vers la fonction  $V$  définie par (5.0.4). On a montré de plus l'égalité sur  $\Gamma$

$$V = V_\Gamma,$$

où  $V_\Gamma$  est défini par (1.1.11). Achdou & al ont montré dans [1] que  $V_\Gamma$  était l'unique solution sur  $\Gamma$  de l'équation (1.1.12), au sens de la définition (1.1.9). L'égalité nous donne donc que  $V$  est aussi solution de (1.1.12) au sens de (1.1.9). Une perspective qui a été étudiée mais qui n'a pas abouti est celle de retrouver ce résultat en faisant converger les inégalités de viscosité (au sens classique) satisfaites par  $V^\varepsilon$ . On présente ici la démarche effectuée ainsi que les résultats qui en ont découlé.

On rappelle que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $V^\varepsilon$  est l'unique solution de viscosité sur  $\mathbb{R}^2$  de

$$\lambda u^\varepsilon(X) + \sup_{a \in A} \{-\langle \nabla u^\varepsilon(X), F^\varepsilon(X, a) \rangle - \ell(X, a)\} = 0, \quad X \in \mathbb{R}^2, \quad (6.2.1)$$

où

$$F^\varepsilon(X, a) = f(X, a) - \frac{1}{\varepsilon} \nabla d(X).$$

La première étape est d'étendre l'ensemble de fonctions test défini dans [1] à un ensemble de fonctions tests définies sur  $\mathbb{R}^2$ , puisque le problème de contrôle associé à (5.0.1) est défini sur  $\mathbb{R}^2$ . On rappelle cet ensemble des fonctions tests :

$$\mathcal{R}(\Gamma) := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}(\Gamma) \cap \mathcal{C}^1(\Gamma \setminus \{0\}), \varphi|_{\overline{J_i}} \in \mathcal{C}^1(\overline{J_i}) \right\}. \quad (6.2.2)$$

Pour étendre  $\mathcal{R}(\Gamma)$  à  $\mathbb{R}^2$ , on définit pour  $i \in \{N, O, S, E\}$ ,

$$E_i := \left\{ X \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \langle X, e_i \rangle \leq |X| \alpha_2 \right\},$$

où  $0 < \alpha_2 < \frac{\pi}{4}$ . Pour  $i \in \{N, O, S, E\}$  et  $X \in E_i$ , on note

$$p_i(X),$$

la projection orthogonale de  $X$  sur  $J_i$ , avec la convention  $p_i(0) = 0$ . On se fixe enfin un

angle  $0 < \alpha_1 < \alpha_2$ , qui sera utilisé par la suite. On illustre cette disposition par la figure ci-dessous.

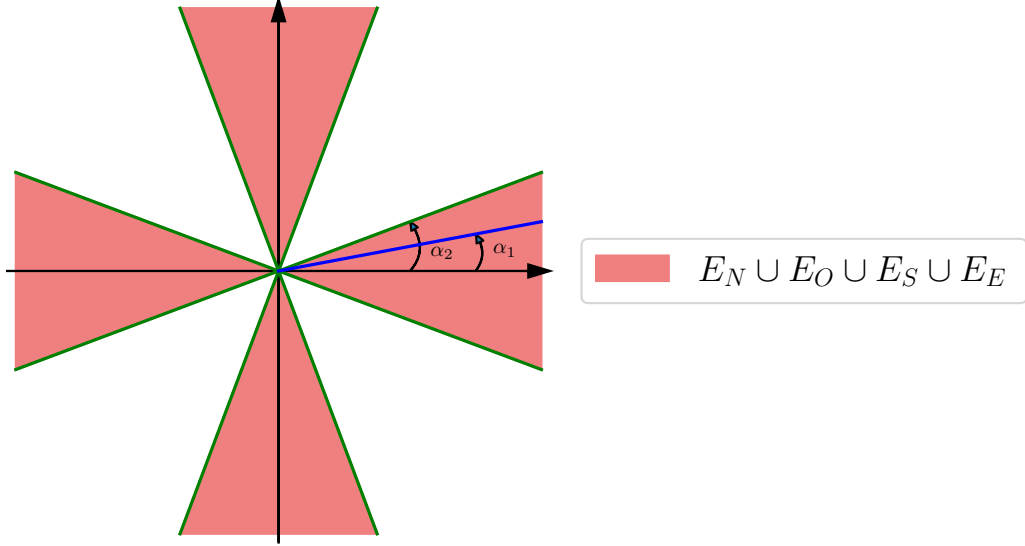


FIGURE 6.3 –  $E_N \cup E_O \cup E_S \cup E_E$

Soit  $\varphi \in \mathcal{R}(\Gamma)$ . On définit pour tout  $X \in \mathbb{R}^2$  :

$$\tilde{\varphi}(X) = \begin{cases} \varphi(p_i(X)), & \text{si } X \in E_i, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour  $X \in \mathbb{R}^2$ , on identifie  $X$  à ses coordonnées polaires  $(r_X, \theta_X) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$  et on définit l'application  $\chi_E$  de la manière suivante, pour  $X \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,

$$\chi_E(X) := \begin{cases} 1, & \text{si } \theta \in [-\alpha_1, \alpha_1] \\ e^{-\frac{\alpha_1 - \theta_X}{|\alpha_2 - \theta_X|^2}}, & \text{si } \theta_X \in [\alpha_1, \alpha_2[ \\ e^{-\frac{\alpha_1 + \theta_X}{|\alpha_2 + \theta_X|^2}}, & \text{si } \theta_X \in [-\alpha_1, -\alpha_2[ \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi,  $\chi_E$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . On définit  $\chi_N, \chi_O$  et  $\chi_S$  de la même manière. On définit enfin

$$\hat{\varphi} := \tilde{\varphi}(\chi_E + \chi_N + \chi_O + \chi_S),$$

et ainsi,  $\widehat{\varphi} \in \mathcal{C}(E_N \cup E_O \cup E_S \cup E_E) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ .

On regarde maintenant la convergence des inégalités de sous et sur-solutions vérifiées par  $V^\varepsilon$ , vers celles vérifiées par  $V$ . On commence par regarder le cas le plus simple, dans lequel pour une fonction test  $\varphi \in \mathcal{R}(\Gamma)$  donnée, un maximum (resp. minimum) local de  $V - \varphi$  est atteint hors de la jonction.

**Proposition 6.2.1.** *Soit  $\varphi \in \mathcal{R}(\Gamma)$  et  $X^+$  un maximum local strict, non-nul, de  $V - \varphi$ . Soit  $r > 0$  tel que*

$$B(X^+, r) \subset (E_N \cup E_O \cup E_S \cup E_E) \setminus \{0\}.$$

*Soit  $(X^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  une suite de maximums locaux de  $(V_\varepsilon - \widehat{\varphi} - \frac{d}{\varepsilon})$  sur  $B(X^+, r)$ . Alors, à extraction près,  $(X^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge vers  $X^+$ .*

*Démonstration.* On note dans la preuve  $B := B(X^+, r)$ . On a l'inégalité

$$\max_B \left( V^\varepsilon - \widehat{\varphi} - \frac{d}{\varepsilon} \right) \geq \max_{B \cap \Gamma} (V^\varepsilon - \widehat{\varphi}), \quad (6.2.3)$$

puisque  $d$  est identiquement nulle sur  $\Gamma$ . Comme  $X^+$  est un maximum strict et que  $V^\varepsilon$  converge uniformément vers  $V$  sur  $B$ , on obtient que  $\max_{B \cap \Gamma} (V^\varepsilon - \widehat{\varphi})$  est uniformément borné par rapport à  $\varepsilon$ . Il existe donc  $K \in \mathbb{R}$ , tel que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\max_B \left( V^\varepsilon - \widehat{\varphi} - \frac{d}{\varepsilon} \right) \geq K.$$

Donc, comme  $(V^\varepsilon - \widehat{\varphi})_{\varepsilon>0}$  est bornée sur  $B$  et que  $d$  est positive, il existe  $\widetilde{K} > 0$ , tel que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\left| \frac{d(X^\varepsilon)}{\varepsilon} \right| \leq \widetilde{K}.$$

Donc, quitte à extraire, il existe  $\widetilde{X} \in B$  et  $a > 0$ , tel que

$$V^\varepsilon(X^\varepsilon) - \widehat{\varphi}(X^\varepsilon) - \frac{d(X^\varepsilon)}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} V(\widetilde{X}) - \widehat{\varphi}(\widetilde{X}) - a.$$

Ainsi, l'inégalité (6.2.3) donne

$$V(\widetilde{X}) - \widehat{\varphi}(\widetilde{X}) - a \geq V(X^+) - \varphi(X^+).$$

Donc, comme  $X^+$  est un maximum strict de  $V - \varphi$  sur  $B$ ,  $a = 0$  et  $\widetilde{X} = X^+$ .  $\square$

*Remarque 6.2.2.* Il n'est pas nécessaire que le maximum  $X^+$  soit strict ; on peut considérer la fonction

$$X \mapsto V^\varepsilon(X) - \widehat{\varphi}(X) - \frac{d(X)}{\varepsilon} - |X^\varepsilon - X|^4.$$

Alors  $X^\varepsilon$  est un maximum strict de cette fonction et on conserve la convergence de  $(X^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  vers  $X^+$ .

**Proposition 6.2.3.** *Soit  $\varphi \in \mathcal{R}(\Gamma)$  et  $X^+ \in \Gamma$  un maximum local non nul de  $V - \widehat{\varphi}$ . Alors*

$$\lambda V(X^+) + \sup_{a \in A} \left\{ - \left\langle f(X^+, a), \nabla \varphi(X^+) \right\rangle - \ell(X^+, a) \right\} \leq 0, \quad (6.2.4)$$

*Démonstration.* Soit  $(X^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  une suite de maximums locaux de  $V^\varepsilon - \varphi - \frac{d}{\varepsilon}$ . Comme  $V^\varepsilon$  est une solution de viscosité de (6.2.1), on a

$$\lambda V^\varepsilon(X^\varepsilon) + \sup_{a \in A} \left\{ - \left\langle f(X^\varepsilon, a) - \frac{\nabla(d(X^\varepsilon))}{\varepsilon}, \nabla \varphi(X^\varepsilon) + \frac{\nabla(d(X^\varepsilon))}{\varepsilon} \right\rangle - \ell(X^\varepsilon, a) \right\} \leq 0,$$

c'est à dire,

$$\begin{aligned} \lambda V^\varepsilon(X^\varepsilon) + \sup_{a \in A} \left\{ - \left\langle f(X^\varepsilon, a), \nabla \widehat{\varphi}(X^\varepsilon) \right\rangle - \ell(X^\varepsilon, a) + \left| \frac{\nabla d(X^\varepsilon)}{\varepsilon} \right|^2 \right. \\ \left. + \left\langle \frac{\nabla d(X^\varepsilon)}{\varepsilon}, -f(X^\varepsilon, a) + \nabla \widehat{\varphi}(X^\varepsilon) \right\rangle \right\} \leq 0. \end{aligned}$$

On sait déjà, par continuité de  $f$  et de  $\widehat{\varphi}$ , et grâce à la proposition 6.2.1, que pour tout  $a \in A$ ,

$$f(X^\varepsilon, a) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f(X^+, a)$$

et

$$\nabla \widehat{\varphi}(X^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \nabla \varphi(X^+).$$

Soit  $i \in \{N, O, S, E\}$  tel que  $X^+ \in J_i$ . la construction de  $\widehat{\varphi}$  donne  $\langle \nabla \widehat{\varphi}, e_i^\perp \rangle \equiv 0$ . On suppose sans perdre de généralité que  $X^+ \in j_E$ . Alors,

$$\nabla \widehat{\varphi} = \begin{pmatrix} \partial_1 \widehat{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En outre, comme  $\frac{d(X^\varepsilon)}{\varepsilon}$  converge vers zéro et  $X^\varepsilon$  converge vers  $X^+$ , qui est non nul, on a

nécessairement

$$\frac{(X_2^\varepsilon)^2}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Donc

$$\left\langle \frac{\nabla d(X^\varepsilon)}{\varepsilon}, \nabla \widehat{\varphi}(X^\varepsilon) \right\rangle = 2X_1^\varepsilon \partial_1 \widehat{\varphi}(X^\varepsilon) \frac{(X_2^\varepsilon)^2}{\varepsilon} = o_{\varepsilon \rightarrow 0}(1).$$

Ainsi, si l'on note

$$\nu^\varepsilon := \frac{\nabla d(X^\varepsilon)}{|\nabla d(X^\varepsilon)|}.$$

On obtient que

$$\nu^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix},$$

on note  $n_\Gamma(X^+)$  sa limite. En notant  $z_\varepsilon := \left\| \frac{\nabla d(X^\varepsilon)}{\varepsilon} \right\|$ , on obtient

$$\begin{aligned} \lambda V^\varepsilon(X^\varepsilon) + \sup_{a \in A} \{ & -\langle f(X^\varepsilon, a), \nabla \widehat{\varphi}(X^\varepsilon) \rangle - \ell(X^\varepsilon, a) \\ & + z_\varepsilon^2 + z_\varepsilon \left( -\langle n_\Gamma(X^+), f(X^+, a) \rangle + o_{\varepsilon \rightarrow 0}(1) \right) \} \leq 0. \end{aligned}$$

Donc pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $a \in A$ ,

$$z_\varepsilon^2 + z_\varepsilon \left( -\langle n_\Gamma(X^+), f(X^+, a) \rangle + o_{\varepsilon \rightarrow 0}(1) \right) \geq -\frac{1}{4} \left( -\langle n_\Gamma(X^+), f(X^+, a) \rangle + o_{\varepsilon \rightarrow 0}(1) \right)^2.$$

En prenant le sup pour  $a \in A$  et en passant à la limite lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\lambda V(X^+) + \sup_{a \in A} \left\{ -\langle f(X^+, a), \nabla \varphi(X^+) \rangle - \ell(X^+, a) - \frac{1}{4} \left( \langle n_\Gamma(X^+), f(X^+, a) \rangle \right)^2 \right\} \leq 0.$$

L'hypothèse de contrôlabilité totale garantit qu'il existe  $a \in A$ , tel que

$$\langle n_\Gamma(X^+), f(X^+, a) \rangle = 0.$$

Donc comme pour tout  $a \in A$ ,

$$-\frac{1}{4} \left( \langle n_\Gamma(X^+), f(X^+, a) \rangle \right)^2 \leq 0,$$

les quantités

$$\sup_{a \in A} \left\{ - \langle f(X^+, a), \nabla \varphi(X^+) \rangle - \ell(X^+, a) - \frac{1}{4} \left( \langle n_\Gamma(X^+), f(X^+, a) \rangle \right)^2 \right\}$$

et

$$\sup_{a \in A} \left\{ - \langle f(X^+, a), \nabla \varphi(X^+) \rangle - \ell(X^+, a) \right\}$$

sont identiques. □

On s'intéresse maintenant à la convergences des inégalités de sur-solutions. Comme dans le cas des sous-solution, on regarde d'abord la convergence de la suite des minimums locaux.

**Proposition 6.2.4.** *Soit  $\varphi \in \mathcal{R}(\Gamma)$  et  $X^-$  un minimum local strict, non nul, de  $V - \varphi$ . Soit  $r > 0$  tel que*

$$B(X^-, r) \subset (E_N \cup E_O \cup E_S \cup E_E) \setminus \{0\}.$$

*Soit  $(X^\varepsilon)_\varepsilon$  une suite de minimums locaux de  $(V_\varepsilon - \hat{\varphi} + \frac{d(\cdot)}{\varepsilon})$  sur  $B(X^-, r)$ . Alors, quitte à extraire,  $(X^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  converge vers  $X^-$ .*

*Démonstration.* On note dans la preuve  $B := B(X^+, r)$ . On a l'inégalité

$$\min_B \left( V^\varepsilon - \hat{\varphi} + \frac{d}{\varepsilon} \right) \leq \min_{B \cap \Gamma} (V^\varepsilon - \hat{\varphi}), \quad (6.2.5)$$

puisque  $d$  est identiquement nulle sur  $\Gamma$ . Comme  $X^-$  est un minimum strict et que  $V^\varepsilon$  converge uniformément vers  $V$  sur  $B$ , on obtient que  $\max_{B \cap \Gamma} (V^\varepsilon - \hat{\varphi})$  est uniformément borné par rapport à  $\varepsilon$ . Il existe donc  $K \in \mathbb{R}$ , tel que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\min_B \left( V^\varepsilon - \hat{\varphi} + \frac{d}{\varepsilon} \right) \leq K.$$

Donc, comme  $(V^\varepsilon - \hat{\varphi})_{\varepsilon > 0}$  est bornée sur  $B$  et que  $d$  est positive, il existe  $\tilde{K} > 0$ , tel que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\left| \frac{d(X^\varepsilon)}{\varepsilon} \right| \leq \tilde{K}.$$

Donc, quitte à extraire, il existe  $\tilde{X} \in B$  et  $a > 0$ , tel que

$$V^\varepsilon(X^\varepsilon) - \hat{\varphi}(X^\varepsilon) + \frac{d(X^\varepsilon)}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} V(\tilde{X}) - \hat{\varphi}(\tilde{X}) + a.$$

L'inégalité (6.2.5) donne donc

$$V(\widetilde{X}) - \widehat{\varphi}(\widetilde{X}) + a \leq V(X^-) - \varphi(X^-).$$

Donc, comme  $X^-$  est un minimum strict de  $V - \varphi$  sur  $B$ ,  $a = 0$  et  $\widetilde{X} = X^-$ .  $\square$

*Remarque 6.2.5.* Il n'est pas nécessaire que le minimum  $X^-$  soit strict, on peut considérer la fonction

$$X \mapsto V^\varepsilon(X) - \widehat{\varphi}(X) + \frac{d(X)}{\varepsilon} + |X^\varepsilon - X|^4.$$

Alors  $X^\varepsilon$  est un minimum strict de cette fonction et on conserve la convergence de  $(X^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  vers  $X^-$ .

**Proposition 6.2.6.** *Soit  $\varphi \in \mathcal{R}(\Gamma)$  et  $X^- \in C$  minimum local non nul de  $V - \varphi$ . Alors,*

$$\lambda V(X^-) + \sup_{a \in A} \left\{ -\langle f(X^-, a), \nabla \varphi(X^-) \rangle + \frac{1}{4} \left( \langle n(X^-), f(X^-, a) \rangle \right)^2 - \ell(X^-, a) \right\} \geq 0, \quad (6.2.6)$$

où  $n_\Gamma(X^-)$  est un vecteur unitaire normal à  $\Gamma$  en  $X^-$ .

*Démonstration.* Soit  $(X^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  une suite de minimums locaux de  $V^\varepsilon - \varphi + \frac{d}{\varepsilon}$ . Comme  $V^\varepsilon$  est une solution de viscosité de (6.2.1), on a

$$\lambda V^\varepsilon(X^\varepsilon) + \sup_{a \in A} \left\{ -\left\langle f(X^\varepsilon, a) - \frac{\nabla(d(X^\varepsilon))}{\varepsilon}, \nabla \varphi(X^\varepsilon) - \frac{\nabla(d(X^\varepsilon))}{\varepsilon} \right\rangle - \ell(X^\varepsilon, a) \right\} \geq 0,$$

c'est à dire,

$$\lambda V^\varepsilon(X^\varepsilon) + \sup_{a \in A} \left\{ -\langle f(X^\varepsilon, a), \nabla \widehat{\varphi}(X^\varepsilon) \rangle - \ell(X^\varepsilon, a) - \left| \frac{\nabla d(X^\varepsilon)}{\varepsilon} \right|^2 + \left\langle \frac{\nabla d(X^\varepsilon)}{\varepsilon}, -f(X^\varepsilon, a) + \nabla \widehat{\varphi}(X^\varepsilon) \right\rangle \right\} \geq 0.$$

En refaisant le même travail que dans la proposition 6.2.3, on obtient en notant

$$z_\varepsilon := \left| \frac{\nabla d(X^\varepsilon)}{\varepsilon} \right|,$$

$$\lambda V^\varepsilon(X^\varepsilon) + \sup_{a \in A} \left\{ -\langle f(X^\varepsilon, a), \nabla \widehat{\varphi}(X^\varepsilon) \rangle - \ell(X^\varepsilon, a) - t_\varepsilon^2 + t_\varepsilon \left( \langle n(X^+), f(X^+, a) \rangle + o_{\varepsilon \rightarrow 0}(1) \right) \right\} \geq 0.$$

Donc pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $a \in A$ ,

$$-t_\varepsilon^2 + t_\varepsilon \left( -\langle n(X^+), f(X^+, a) \rangle + o_{\varepsilon \rightarrow 0}(1) \right) \leq +\frac{1}{4} \left( -\langle n(X^+), f(X^+, a) \rangle + o_{\varepsilon \rightarrow 0}(1) \right)^2.$$

Donc en prenant le sup sur  $a \in A$  et en passant à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\lambda V(X^+) + \sup_{a \in A} \left\{ -\langle f(X^+, a), \nabla \varphi(X^+) \rangle - \ell(X^+, a) + \frac{1}{4} \left( \langle n(X^+), f(X^+, a) \rangle \right)^2 \right\} \geq 0.$$

□

*Remarque 6.2.7.* On remarque ici que contrairement au cas des sous-solutions, le terme

$$+\frac{1}{4} \left( \langle n(X^+), f(X^+, a) \rangle \right)^2$$

est positif et ne pourrait être enlevé. Avec le raisonnement fait ici, les hamiltoniens limites pour les sous solutions sont différents de ceux obtenus pour les sur-solutions, ce qui n'était pas envisagé. Une perspective de travail serait d'étudier plus en profondeur la convergence des inégalités de sous et sur solutions vérifiées par  $V^\varepsilon$ .





# PREUVE DE LA PROPOSITION 5.1.13

---

On montre un résultat préliminaire sur le temps minimal de traversée de  $C^\varepsilon$  par une trajectoire pénalisée. L'objectif est ici de minimiser le temps nécessaire à une trajectoire  $Y^{X,\beta,\varepsilon}$  qui pénètre dans  $C^\varepsilon$  par une interface pour en atteindre une autre. Sans perdre de généralité on montre le résultat pour une trajectoire qui atteindrait  $A_N^\varepsilon$  et ressortirait de  $C^\varepsilon$  par l'interface  $A_E^\varepsilon$ .

**Lemme A.0.1.** *Soit  $X \in \mathbb{R}^2, \beta \in \mathcal{A}, 0 < \varepsilon < 1$  et  $t_0 > 0$  tel que  $Y^{X,\beta,\varepsilon}(t_0) \in A_N^\varepsilon$ . Alors en notant*

$$\tau^\varepsilon := \inf \left\{ t \geq t_0 : Y^{X,\beta,\varepsilon}(t) \in A_E^\varepsilon \right\},$$

on a

$$\tau^\varepsilon - t_0 \geq K_M \varepsilon^{1/8}, \quad (\text{A.0.1})$$

où  $K_M$  est une constante ne dépendant que de  $M$  (on rappelle que  $M$  désigne la norme  $L^\infty$  de  $f$ ).

*Démonstration.* Afin d'alléger les notations on notera dans le reste de la preuve  $Y^{X,\beta,\varepsilon} =: Y = (Y_1, Y_2)$ . On se place dans le cas critique, à savoir dans celui où  $Y$  parcourt la distance minimale à vitesse maximale. On suppose donc que  $Y(t_0) = (\varepsilon^{13/24}, \varepsilon^{1/8})$ . On a pour presque tout  $t \in [t_0, \tau^\varepsilon]$  (i.e tant que  $Y \in C^\varepsilon$ ), en écrivant le système (5.0.1) par coordonnées,

$$-M - \frac{2}{\varepsilon^{5/24}} \leq Y_1'(t) \leq M$$

et

$$-M - \frac{2}{\varepsilon^{1/12}} \leq Y_2'(t) \leq M. \quad (\text{A.0.2})$$

On observe alors que  $\tau^\varepsilon$  est minoré par le temps nécessaire à  $Y_1$  pour passer de la valeur  $\varepsilon^{13/24}$  à  $\varepsilon^{1/8}$ . On a donc :

$$\tau^\varepsilon - t_0 \geq \frac{\varepsilon^{1/8} - \varepsilon^{13/24}}{M}.$$

□

De la même manière on a le résultat suivant

**Lemme A.0.2.** *Soit  $X \in \mathbb{R}^2, \beta \in \mathcal{A}, 0 < \varepsilon < 1$  et  $t_0 > 0$  tel que  $Y^{X,\beta,\varepsilon}(t_0) \in A_E^\varepsilon$ . Alors en notant*

$$\tau^\varepsilon := \inf \left\{ t \geq t_0 : Y^{X,\alpha,\varepsilon}(t) \in A_N^\varepsilon \right\},$$

on a

$$\tau^\varepsilon - t_0 \geq K_M \varepsilon^{1/8}, \quad (\text{A.0.3})$$

où  $K_M$  est une constante ne dépendant que de  $M$ .

*Démonstration de la proposition 5.1.11.* Soit  $\varepsilon > 0$  et  $\beta \in \mathcal{A}$ . Par souci de simplifier les notations on notera dans la suite de la preuve, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$Y^{X,\beta,\varepsilon}(t) \equiv Y^\varepsilon(t) =: (Y_1^\varepsilon(t), Y_2^\varepsilon(t)),$$

et pour tout  $\alpha \in \mathcal{A}_X$

$$Y^{X,\alpha}(t) =: (Y_1^\alpha(t), Y_2^\alpha(t)).$$

On fait plusieurs hypothèses afin de simplifier la preuve mais qui n'enlèvent pas de généralité à celle-ci.

- On suppose que  $X \in J_N$ , i.e de la forme  $X = (0, X_2)$  avec  $X_2 \geq \varepsilon^{1/8}$ , i.e.  $X \notin C^\varepsilon$
- On suppose que pour tout  $t \geq 0$   $Y^\varepsilon(t) \in Q_{NE}$

Ces deux hypothèses correspondent au cas illustré par la figure 5.1. On rappelle que la preuve se fait en trois étapes. La première consistera à partitionner  $\mathbb{R}_+$  comme union dénombrable croissante d'intervalles adéquatement choisis. La deuxième sera l'établissement d'estimations sur  $(Y^\varepsilon)'$  au sein des domaines décrits plus haut. Enfin, la construction de  $\alpha_\beta^\varepsilon$  se fera par récurrence sur les intervalles construits à l'étape 1.

• Étape 1 : Partitionnement de  $\mathbb{R}_+$

On a  $I^\varepsilon \subset \mathbb{N}$  tel que pour tout  $i \in I^\varepsilon$  on puisse définir  $I_i^\varepsilon := (a_i^\varepsilon, b_i^\varepsilon) \subset \mathbb{R}_+$  tel que

- pour tout  $i, j \in I^\varepsilon$ , si  $i < j$ , alors  $a_i^\varepsilon < b_i^\varepsilon \leq a_j^\varepsilon < b_j^\varepsilon$ .
- pour tout  $i \in I^\varepsilon, t \in I_i^\varepsilon$   $Y^\varepsilon(t) \in C^\varepsilon$ ,
- pour tout  $i \in I^\varepsilon, Y^\varepsilon(a_i^\varepsilon) \in A_N^\varepsilon \Rightarrow Y^\varepsilon(b_i^\varepsilon) \in A_E^\varepsilon$ ,
- pour tout  $i \in I^\varepsilon$   $Y^\varepsilon(a_i^\varepsilon) \in A_E^\varepsilon \Rightarrow Y^\varepsilon(b_i^\varepsilon) \in A_N^\varepsilon$ .

On remarque que pour  $i \neq j$ , on a  $I_i^\varepsilon \cap I_j^\varepsilon = \emptyset$ . De plus, s'il existe  $i_0 \in I^\varepsilon$  tel que  $b_{i_0} = +\infty$ , alors pour tout  $t \geq a_{i_0}$  il vient que  $Y^\varepsilon(t) \in C^\varepsilon$ . De la même manière si  $a_{i_0} = +\infty$  on a que pour  $t \geq b_{i_0-1}$   $Y^\varepsilon(t) \in Z_N^\varepsilon \cup Z_E^\varepsilon$ . Ces intervalles de temps sont ceux pendant lesquels

$Y^\varepsilon$  “traverse”  $C^\varepsilon$  pour passer à proximité d’une autre arête du réseau. On a alors de la même manière  $J^\varepsilon \subset \mathbb{N}$  tel que pour tout  $j \in J^\varepsilon$  on puisse définir  $J_j^\varepsilon := (c_j^\varepsilon, d_j^\varepsilon) \subset \mathbb{R}_+$  tel que

- pour tout  $i, j \in J^\varepsilon$ , si  $i < j$ , alors  $c_i^\varepsilon < d_i^\varepsilon \leq c_j^\varepsilon < d_j^\varepsilon$ .
- pour tout  $j \in J^\varepsilon, t \in J_j^\varepsilon$   $Y^\varepsilon(t) \in Z_N^\varepsilon \cup Z_E^\varepsilon$ ,
- pour tout  $j \in J^\varepsilon$   $Y^\varepsilon(c_j^\varepsilon) \in A_N^\varepsilon \Rightarrow Y^\varepsilon(d_j^\varepsilon) \in A_N^\varepsilon$ ,
- pour tout  $j \in J^\varepsilon$   $Y^\varepsilon(c_j^\varepsilon) \in A_E^\varepsilon \Rightarrow Y^\varepsilon(d_j^\varepsilon) \in A_E^\varepsilon$ .

Ces intervalles de temps sont ceux pendant lesquels  $Y^\varepsilon$  “sort” de  $C^\varepsilon$  pour longer une arête avant de revenir dans  $C^\varepsilon$ . Notons que l’on peut avoir pour  $(i, j) \in I^\varepsilon \times J^\varepsilon$  le cas  $b_i^\varepsilon = c_j^\varepsilon$ .

Le temps minimal de passage dans  $C^\varepsilon$  de  $Y^\varepsilon$  pour joindre deux interfaces est donné par le lemme A.0.1 :

$$\tau^\varepsilon := K_M \varepsilon^{1/8}.$$

On note alors pour  $j \in J^\varepsilon$

$$(c_j^\varepsilon, d_j^\varepsilon) =: J_j^\varepsilon \text{ si } d_j^\varepsilon - c_j^\varepsilon > \tau^\varepsilon,$$

et

$$(c_j^\varepsilon, d_j^\varepsilon) =: \bar{J}_j^\varepsilon \text{ si } d_j^\varepsilon - c_j^\varepsilon \leq \tau^\varepsilon.$$

De la même manière on note pour  $i \in I^\varepsilon$

$$(a_i^\varepsilon, b_i^\varepsilon) =: I_i^\varepsilon \text{ si } b_i^\varepsilon - a_i^\varepsilon > \tau^\varepsilon,$$

et

$$(a_i^\varepsilon, b_i^\varepsilon) =: \bar{I}_i^\varepsilon \text{ si } b_i^\varepsilon - a_i^\varepsilon \leq \tau^\varepsilon.$$

• Étape 2 : Contrôle de  $(Y^\varepsilon)'$  dans  $Q_{NE}$

Il s’agit maintenant de contrôler la vitesse de  $Y^\varepsilon$  dans les différentes zones qu’elle sera amenée à occuper. Nous avons pour tout  $Y := (Y_1, Y_2) \in Z_N^\varepsilon \cap \{Y_1 \geq 0\}$  l’estimation de la composante tangentielle à  $J_N$  de la pénalisation en  $Y$  :

$$\left| \left\langle \frac{1}{\varepsilon} \nabla d(Y), e_N \right\rangle \right| = \frac{2Y_1^2 Y_2}{\varepsilon} \leq \frac{2Y_1}{\varepsilon} Y_1 Y_2 \leq \frac{2\varepsilon^{13/24}}{\varepsilon} \varepsilon^{2/3} \leq 2\varepsilon^{5/24}. \quad (\text{A.0.4})$$

Remarquons que la vitesse suivant la normale à  $J_N$  peut passer par de “grandes” valeurs (au sens qui entraîne une explosion lorsque l’on fait tendre  $\varepsilon$  vers 0). Cependant, cela n’affecte pas nos estimations, car le lemme 3.1.5 nous assure que  $Y^\varepsilon$  demeure dans la zone

$\{d \leq \varepsilon^{4/3}\}$ . L'évolution de  $(Y^\varepsilon)'$  intéressante à regarder est donc celle suivant  $e_N$ . On a donc pour presque tout  $t \geq 0$ , si  $Y^\varepsilon(t) \in Z_N^\varepsilon$  alors

$$-M - 2\varepsilon^{5/24} \leq (Y_2^\varepsilon)'(t) \leq M. \quad (\text{A.0.5})$$

De manière analogue, on obtient les mêmes estimations pour  $Z_E^\varepsilon$ , c'est-à-dire que pour tout  $t \geq 0$ , si  $Y^\varepsilon(t) \in Z_E^\varepsilon$ , alors

$$-M - 2\varepsilon^{5/24} \leq (Y_1^\varepsilon)'(t) \leq M. \quad (\text{A.0.6})$$

Les deux inégalités précédentes nous donnent que hors de  $C^\varepsilon$ , la différence entre la vitesse  $Y^\varepsilon$  et celle d'une trajectoire  $Y^\alpha$ , pour  $\alpha \in \mathcal{A}_X$ , n'excède pas  $2\varepsilon^{5/24}$ . C'est à dire que si l'on se place dans le cas où  $Y^\varepsilon$  et  $X^\alpha$  sont -par exemple- dans  $Z_N^\varepsilon$  on peut choisir  $\alpha_{\beta,\varepsilon} \in \mathcal{A}_X$  tel que

$$|(Y_2^\varepsilon)' - (Y^{\alpha_{\beta,\varepsilon}})'| \leq 2\varepsilon^{5/24}$$

presque tout le temps. Ainsi, tant que les deux trajectoires évoluent dans  $Z_N^\varepsilon$ ,

$$|(Y^\varepsilon - Y^{\alpha_{\beta,\varepsilon}})(t)| \leq \sqrt{2} \max \left\{ 2\varepsilon^{13/24}, 2t\varepsilon^{5/24} \right\},$$

$2\varepsilon^{13/24}$  étant l'écart maximal entre  $Y_1^\varepsilon(t)$  et  $Y_1^{\alpha_{\beta,\varepsilon}}(t)$ , et  $2t\varepsilon^{5/24}$  étant l'écart maximal entre  $Y_2^\varepsilon(t)$  et  $Y_2^{\alpha_{\beta,\varepsilon}}(t)$ .

On définit pour presque tout  $t \geq 0$

$$\gamma_1^\varepsilon(t) := \begin{cases} \min((Y_1^\varepsilon)'(t), M), & \text{si } (Y_1^\varepsilon)'(t) \geq 0 \\ \max((Y_1^\varepsilon)'(t), -M), & \text{si } (Y_1^\varepsilon)'(t) \leq 0 \end{cases}$$

et

$$\gamma_2^\varepsilon(t) := \begin{cases} \min((Y_2^\varepsilon)'(t), M), & \text{si } (Y_2^\varepsilon)'(t) \geq 0 \\ \max((Y_2^\varepsilon)'(t), -M), & \text{si } (Y_2^\varepsilon)'(t) \leq 0. \end{cases}$$

On définit alors

$$\gamma^\varepsilon(t) := \begin{cases} \begin{pmatrix} \gamma_1^\varepsilon(t) \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{si } Y_1^\varepsilon(t) \geq Y_2^\varepsilon(t), \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2^\varepsilon(t) \end{pmatrix}, & \text{si } Y_2^\varepsilon(t) \geq Y_1^\varepsilon(t). \end{cases}$$

L'hypothèse de contrôlabilité totale (1.2.20) assure l'existence de  $\alpha_{\gamma^\varepsilon} \in \mathcal{A}_X$  tel que pour

presque tout  $t \geq 0$

$$f(Y^{\alpha_{\gamma^\varepsilon}}(t), \alpha_{\gamma^\varepsilon}(t)) = \gamma^\varepsilon(t).$$

Dans la suite de la preuve on fera donc l'identification entre ces deux quantités.

Imposer  $\alpha_{\gamma^\varepsilon}$  comme contrôle sur les intervalles de temps sur lesquels  $Y^\varepsilon$  évolue hors de  $C^\varepsilon$  va permettre à  $Y^\alpha$  de suivre  $Y^\varepsilon$  et "d'anticiper" au mieux son potentiel retour vers la jonction.

Étape 3 : Existence de  $\alpha_{\beta,\varepsilon}$

Montrons désormais le lemme par récurrence sur  $n \in I^\varepsilon$ . On traite tout d'abord le cas  $|I^\varepsilon| = 0$ . Cela correspond au cas où pour tout  $t > 0$ ,

$$Y^\varepsilon(t) \in Z_N^\varepsilon \cup C^\varepsilon.$$

On procède alors par récurrence sur  $n \in J^\varepsilon$ .

• Cas 1 :  $|J^\varepsilon| = 0$ .

Cela signifie que  $Y^\varepsilon$  effectue au plus un passage dans  $C^\varepsilon$  (potentiellement infini). On note alors

$$t_e := \inf \left\{ t \geq 0, \quad Y_2^\varepsilon(t) < \varepsilon^{1/8} \right\},$$

et

$$t_s := \inf \left\{ t \geq t_e, \quad Y_2^\varepsilon(t) > \varepsilon^{1/8} \right\}.$$

• Cas 1.1 :  $t_e := +\infty$ .

Cela signifie que pour tout  $t > 0$  on a  $Y^\varepsilon(t) \in Z_N^\varepsilon$ , on choisit alors  $\alpha_{\beta,\varepsilon} := \gamma^\varepsilon$  et par (A.0.4) on a pour tout  $t \geq 0$

$$|Y^\varepsilon(t) - Y^{\alpha_{\beta,\varepsilon}}(t)| \leq 2\sqrt{2}t\varepsilon^{5/24}. \quad (\text{A.0.7})$$

• Cas 1.2 :  $t_e < +\infty$ .

• Cas 1.2.1 :  $t_s = +\infty$ .

On est dans le cas où pour tout  $t \geq t_e$   $Y^\varepsilon(t) \in C^\varepsilon$ . L'idée est de suivre  $Y^\varepsilon$  tant qu'elle n'a pas atteint  $C^\varepsilon$ . Une fois  $C^\varepsilon$  atteint par  $Y^\varepsilon$ , on impose à la trajectoire  $Y^{\alpha_{\beta,\varepsilon}}$  d'atteindre la jonction, où elle restera. On a alors pour tout  $t \in [0, t_e]$  en prenant sur  $[0, t_e]$   $\alpha_{\beta,\varepsilon} \equiv \gamma^\varepsilon$

$$|Y^\varepsilon(t) - Y^{\alpha_{\beta,\varepsilon}}(t)| \leq 2\sqrt{2}t\varepsilon^{5/24}.$$

Notons alors  $y_e := Y_2^{\alpha_{\beta,\varepsilon}}(t_e)$ . On pose alors pour tout  $t \in [t_e, t_e + y_e]$

$$\alpha_{\beta,\varepsilon}(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

et pour tout  $t \geq t_e + y_e$

$$\alpha_{\beta,\varepsilon}(t) \equiv 0.$$

Alors pour tout  $t \in [t_e, t_e + y_e]$

$$|Y^\varepsilon(t) - Y^{\alpha_{\beta,\varepsilon}}(t)| \leq 2\sqrt{2}t_e\varepsilon^{5/24} + \sqrt{2}\varepsilon^{1/8} \leq 2\sqrt{2}t_e\varepsilon^{5/24} + \sqrt{2}\varepsilon^{1/8},$$

et pour tout  $t \geq t_e + y_e$

$$|Y^\varepsilon(t) - Y^{\alpha_{\beta,\varepsilon}}(t)| \leq \varepsilon^{1/8} \leq 2\sqrt{2}t_e\varepsilon^{5/24} + \sqrt{2}\varepsilon^{1/8}.$$

• Cas 1.2.2 :  $t_s < +\infty$ .

Cela correspond au cas où  $Y^\varepsilon$  rentre dans  $C^\varepsilon$  puis en ressort pour n'évoluer ensuite que dans  $Z_N^\varepsilon$ . On distingue deux cas suivant la durée pendant laquelle  $Y^\varepsilon$  reste dans  $C^\varepsilon$ .

• Cas 1.2.2.1 :  $t_s - t_e \geq y_e/M$ .

On pose alors pour presque tout  $t \in [t_e, t_e + y_e/M]$

$$\alpha_{\beta,\varepsilon}(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

pour presque tout  $t \in [t_e + y_e/M, t_s]$ ,

$$\alpha_{\beta,\varepsilon}(t) := 0,$$

et pour presque tout  $t \geq t_s$ ,

$$\alpha_{\beta,\varepsilon}(t) := \gamma^\varepsilon(t).$$

Alors on obtient pour presque tout  $t \in \mathbb{R}_+$

$$|Y^\varepsilon(t) - Y^{\alpha_{\beta,\varepsilon}}(t)| \leq 2\sqrt{2}t_e\varepsilon^{5/24} + \sqrt{2}\varepsilon^{1/8}.$$

• Cas 1.2.2.2 :  $t_s - t_e < y_e/M$ .

On a alors  $t_r > t_s$ , tel que en posant sur  $[0, t_e]$ ,

$$\alpha_{\beta,\varepsilon} := \gamma^\varepsilon,$$

et sur  $[t_e, t_r]$ ,

$$\alpha_{\beta,\varepsilon}(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

on ait  $Y_2^\varepsilon(t_r) = Y_2^{\alpha_{\beta,\varepsilon}}(t_r)$ .

On pose alors pour presque tout  $t \geq t_r$ ,

$$\alpha_{\beta,\varepsilon}(t) \equiv \gamma^\varepsilon(t),$$

et pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$  on retrouve

$$|Y^\varepsilon(t) - Y^{\alpha_{\beta,\varepsilon}}(t)| \leq 2\sqrt{2}t\varepsilon^{5/24} + \sqrt{2}\varepsilon^{1/8}.$$

• Cas 2 :  $|J^\varepsilon| \neq 0$ .

On montre d'abord le résultat sur  $[0, c_1]$  avant de le montrer sur  $[c_1, +\infty[$ . Il s'agit exactement du cas 1.2.2 traité plus haut, et on obtient

$$|Y^\varepsilon(c_1) - Y^{\alpha_{\beta,\varepsilon}}(c_1)| \leq 2\sqrt{2}c_1\varepsilon^{5/24}.$$

On raisonne alors par récurrence sur  $n \in J^\varepsilon$ . On note pour tout  $n \in J^\varepsilon$  tel que  $c_n \neq +\infty$  l'hypothèse de récurrence  $H_n$

“ Il existe  $\alpha_{\beta,\varepsilon} \in \mathcal{A}_X$ , tel que pour tout  $t \in [c_n, c_{n+1}[$ ,

$$|Y^\varepsilon(t) - Y^{\alpha_{\beta,\varepsilon}}(t)| \leq 2\sqrt{2}t\varepsilon^{5/24} + \sqrt{2}\varepsilon^{1/8},$$

ainsi que  $t_n \geq d_n$  tel que pour tout  $t \in [t_n, c_{n+1}[$ ,

$$|Y^\varepsilon(t) - Y^{\alpha_{\beta,\varepsilon}}(t)| \leq 2\sqrt{2}t\varepsilon^{5/24}.”$$

### Initialisation

On distingue ici 2 cas, le cas  $d_1 = c_2$  et le cas  $d_1 < c_2$ . Par définition de  $J^\varepsilon$ , si  $c_1 < +\infty$ , alors nécessairement  $d_1 < +\infty$ .

On a vu que la construction de  $\alpha_{\beta,\varepsilon}$  sur  $[0, c_1]$  donnait deux possibilités pour  $Y^{\alpha_{\beta,\varepsilon}}(c_1)$ .



Soit  $Y^{\alpha_{\beta,\varepsilon}}$  a réussi à “rattraper”  $Y^\varepsilon$  une fois que cette dernière a atteint  $C^\varepsilon$ , et alors  $Y^{\alpha_{\beta,\varepsilon}}(c_1) \in A_N^\varepsilon$ , soit on a  $Y^{\alpha_{\beta,\varepsilon}}(c_1) \in J_N \cap Z_N^\varepsilon$ . Dans tous les cas,

$$|Y^\varepsilon(c_1) - Y^{\alpha_{\beta,\varepsilon}}(c_1)| \leq 2\sqrt{2}c_1\varepsilon^{5/24}.$$

On suppose, sans perdre de généralité, que  $Y^{\alpha_{\beta,\varepsilon}}(c_1) \in A_N^\varepsilon$ .

Cas I.1 :  $d_1 = c_2$

Alors comme  $Y^\varepsilon(0) \in J_N$ , cela signifie que pour tout  $t \in [c_1, c_2]$ ,  $Y^\varepsilon(t) \in Z_N^\varepsilon$ . En posant  $\alpha_{\beta,\varepsilon}(t) := \gamma^\varepsilon(t)$  pour  $t \in [c_1, c_2)$ , on a donc pour tout  $t \in [c_1, c_2]$ ,

$$|Y^\varepsilon(t) - Y^{\alpha_{\beta,\varepsilon}}(t)| \leq 2\sqrt{2}t\varepsilon^{5/24}.$$

Cas I.2 :  $d_1 < c_2$

Alors on a  $t_s \in [d_1, +\infty]$  tel que pour tout  $t \in (d_1, t_s)$ ,  $Y^\varepsilon(t) \in C^\varepsilon$ . On choisit alors

$$\alpha_{\beta,\varepsilon} \equiv \gamma^\varepsilon$$

sur  $[c_1, d_1]$ . La construction de  $\alpha_{\beta,\varepsilon}$  sur  $[d_1, c_2]$  correspond alors au cas 1.2 traité plus haut, ce qui nous donne le résultat voulu.

Hérédité

Soit  $n \in J^\varepsilon$  tel que l'on ait  $H_n$ . Alors on remarque que les calculs pour obtenir  $H_{n+1}$  sont exactement les mêmes que pour l'initialisation.

On a donc à ce stade montré que si  $|I^\varepsilon| = 0$ , alors on a  $\alpha \in \mathcal{A}_X$  tel que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$

$$|Y^\varepsilon(t) - Y^{\alpha_{\beta,\varepsilon}}(t)| \leq 2\sqrt{2}t\varepsilon^{5/24} + \sqrt{2}\varepsilon^{1/8}.$$

Traitons maintenant le cas  $|I^\varepsilon| \neq 0$ , par récurrence sur  $n \in I^\varepsilon$ . On note pour tout  $n \in I^\varepsilon$  tel que  $a_n \neq +\infty$  l'hypothèse de récurrence  $H_n$

“Il existe  $\alpha_\beta^\varepsilon \in \mathcal{A}_X$  tel que pour tout  $t \in [a_n, a_{n+1}]$ ,

$$|Y^\varepsilon(t) - Y^{\alpha_{\beta,\varepsilon}}(t)| \leq 2\sqrt{2}t\varepsilon^{5/24} + \sqrt{2}\varepsilon^{1/8}.”$$

On doit d'abord montrer que la propriété est vérifiée sur  $[0, a_1]$ . Le cas  $|I^\varepsilon| = 0$  nous

donne le résultat, et même nous donne

$$|Y^\varepsilon(a_1) - Y^{\alpha\beta,\varepsilon}(a_1)| \leq 2\sqrt{2}a_1\varepsilon^{5/24}. \quad (\text{A.0.8})$$

En effet, soit il existe  $j \in J^\varepsilon$  (non nécessairement unique) tel que  $J_j^\varepsilon \subset [0, a_1]$ , et alors on a  $j_0 \in J^\varepsilon$  tel que  $d_{j_0} = a_1$ , soit pour tout  $t \in [0, a_1]$   $Y^\varepsilon(t) \in Z_N^\varepsilon$ . Alors dans les deux cas les résultats précédents nous donnent A.0.8.

### Initialisation

#### Cas I.1 : $a_2 < +\infty$

On doit distinguer ici plusieurs cas. On note  $y_1 := Y_2^{\alpha\beta,\varepsilon}(a_1)$ .

#### Cas I.1.1 : $b_1 = a_2$

Cela correspond au cas où  $Y^\varepsilon$  re-traverse  $C^\varepsilon$  juste après avoir atteint l'interface  $A_E^\varepsilon$ .

#### Cas I.1.2.1 : $b_1 - a_1 \geq (y_1 - \varepsilon^{1/8})/M$

Alors on choisit sur  $[a_1, b_1]$  comme contrôle

$$\alpha_{\beta,\varepsilon}(t) := \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ -M \end{pmatrix}, & \text{pour } t \in [a_1, a_1 + (y_1 - \varepsilon^{1/8})/M], \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{pour } t \in [a_1 + (y_1 - \varepsilon^{1/8})/M, b_1]. \end{cases}$$

Ainsi, pour tout  $t \in [a_1, b_1]$ ,

$$\begin{aligned} |Y^\varepsilon(t) - Y^{\alpha\beta,\varepsilon}(t)| &\leq |Y^\varepsilon(a_1) - Y^{\alpha\beta,\varepsilon}(a_1)| + \sqrt{2}\varepsilon^{1/8} \\ &\leq 2\sqrt{2}a_1\varepsilon^{5/24} + \sqrt{2}\varepsilon^{1/8} \\ &\leq 2\sqrt{2}t\varepsilon^{5/24} + \sqrt{2}\varepsilon^{1/8}. \end{aligned}$$

On a même

$$|Y_2^\varepsilon(a_2) - Y_2^{\alpha\beta,\varepsilon}(a_2)| = |Y_2^\varepsilon(b_1) - Y_2^{\alpha\beta,\varepsilon}(b_1)| = 0.$$

#### Cas I.1.1.2 : $b_1 - a_1 < (y_1 + \varepsilon^{1/8})/M$

Alors on choisit sur  $[a_1, b_1]$  comme contrôle

$$\alpha_{\beta,\varepsilon}(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ -M \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout  $t \in [a_1, b_1]$  on a

$$\begin{aligned} |Y^\varepsilon(t) - X^{\alpha\beta,\varepsilon}(t)| &\leq |Y^\varepsilon(a_1) - Y^{\alpha\beta,\varepsilon}(a_1)| + \sqrt{2}\varepsilon^{1/8} \\ &\leq 2\sqrt{2}a_1\varepsilon^{5/24} + \sqrt{2}\varepsilon^{1/8} \\ &\leq 2\sqrt{2}t\varepsilon^{5/24} + \sqrt{2}\varepsilon^{1/8}. \end{aligned}$$

On a même

$$\left| Y_2^\varepsilon(a_2) - Y_2^{\alpha\beta,\varepsilon}(a_2) \right| = \left| Y_2^\varepsilon(b_1) - Y_2^{\alpha\beta,\varepsilon}(b_1) \right| \leq 2\sqrt{2}(y_1 - \varepsilon^{1/8})\varepsilon^{5/24}.$$

Cas I.1.2 :  $b_1 < a_2$

Alors on a deux cas possibles, soit pour tout  $t \in [b_1, a_2]$  on a  $Y^\varepsilon(t) \in C^\varepsilon$ , soit on a  $t_s \in [b_1, a_2)$  et  $j \in J^\varepsilon$  tel que  $t_s = c_j$ .

Cas I.1.2.1 : pour tout  $t \in [b_1, a_2]$ ,  $Y^\varepsilon(t) \in C^\varepsilon$ .

Ce cas ne présente pas de difficulté, il correspond essentiellement au cas 1.2.2 du cas  $|J^\varepsilon| = 0$ .

Cas I.1.2.2 : il existe  $j \in J^\varepsilon$  tel que  $c_j \in [b_1, a_2[$ .

On pose alors

$$c_s := \inf_{j \in J^\varepsilon} \{c_j, c_j \geq b_1\}$$

et

$$d_s := \sup_{j \in J^\varepsilon} \{d_j, d_j \leq a_2\}.$$

On remarque que par définition de  $I^\varepsilon$  et  $J^\varepsilon$  on a nécessairement  $Y^\varepsilon(c_s), Y^\varepsilon(d_s) \in A_{E^\varepsilon}$ .

Cas I.1.2.2.1 :  $c_s - a_1 \geq (y_1 + \varepsilon^{1/8})/M$

Alors on choisit comme contrôle sur  $[a_1, c_s]$

$$\alpha_{\beta,\varepsilon}(t) := \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ -M \end{pmatrix}, & \text{pour } t \in [a_1, a_1 + y_1], \\ \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{pour } t \in [a_1 + y_1, a_1 + (y_1 + \varepsilon^{1/8})/M], \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{pour } t \in [a_1 + (y_1 + \varepsilon^{1/8})/M, c_s]. \end{cases}$$

Il reste donc à montrer que nous pouvons trouver un contrôle de  $\mathcal{A}_X$  tel que sur  $[c_s, a_2]$  on ait le résultat demandé. On pose :

$$d_s := \sup_{j \in J^\varepsilon} \{d_j, d_j \leq a_2\}.$$

Le cas  $|I^\varepsilon| = 0, |J^\varepsilon| = 0$  traité précédemment nous donne l'existence d'un tel contrôle sur  $[c_s, d_s]$ , avec en plus

$$|Y^\varepsilon(d_s) - Y^{\alpha_{\beta,\varepsilon}}(d_s)| \leq 2\sqrt{2}d_s\varepsilon^{5/24}.$$

Alors soit  $d_s = a_2$  et le résultat est montré, soit  $d_s < a_2$  et alors on a  $Y^\varepsilon(t) \in C^\varepsilon$  pour tout  $t \in [d_s, a_2]$ . Dans ce cas en prenant  $\alpha_{\beta,\varepsilon}(t) := (-M, 0)$  pendant la durée adéquate on obtient bien pour tout  $t \in [d_s, a_2]$ ,

$$|Y^\varepsilon(d_s) - Y^{\alpha_{\beta,\varepsilon}}(d_s)| \leq 2\sqrt{2}t\varepsilon^{5/24} + \sqrt{2}\varepsilon^{1/8}.$$

Cas I.1.2.2.2 :  $c_s - a_1 < (y_1 + \varepsilon^{1/8})/M$

Cas I.1.2.2.1 :  $d_s - a_1 \geq (y_1 + \varepsilon^{1/8})/M$

Alors on choisit comme contrôle sur  $[a_1, a_1 + (y_1 + \varepsilon^{1/8})/M]$

$$\alpha_{\beta,\varepsilon}(t) := \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ -M \end{pmatrix}, & \text{pour } t \in [a_1, a_1 + y_1], \\ \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{pour } t \in [a_1 + y_1, a_1 + (y_1 + \varepsilon^{1/8})/M], \end{cases}$$

On choisit alors implicitement le contrôle  $\alpha_{\beta,\varepsilon}$  sur  $[a_1 + (y_1 + \varepsilon^{1/8})/M, d_s]$ . En effet, si l'on considère l'application  $h(t) := (t, 0)$  définie sur  $[a_1 + (y_1 + \varepsilon^{1/8})/M, d_s]$ , on a nécessairement

$t_r \in [a_1 + (y_1 + \varepsilon^{1/8})/M, d_s]$  tel que  $h_1(t) = Y_1^\varepsilon(t)$ . On pose alors sur  $[(y_1 + \varepsilon^{1/8})/M, a_2]$

$$\alpha_{\beta,\varepsilon}(t) := \begin{cases} \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{pour } t \in [a_1 + (y_1 + \varepsilon^{1/8})/M, t_r], \\ \gamma^\varepsilon(t), & \text{pour } t \in [t_r, d_s], \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{pour } t \in [d_s, a_2]. \end{cases}$$

On a alors le résultat voulu.

Cas I.1.2.2.2.2 :  $d_s - a_1 < (y_1 + \varepsilon^{1/8})/M$

On pose

$$w(t) := \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ -M \end{pmatrix}, & \text{pour } t \in [a_1, a_1 + y_1], \\ \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{pour } t \in [a_1 + y_1, a_1 + (y_1 + \varepsilon^{1/8})/M]. \end{cases}$$

On choisit alors  $\alpha_{\beta,\varepsilon}(t) = w(t)$  sur  $[a_1, d_s]$  et  $\alpha_\beta^\varepsilon \equiv 0$  sur  $[d_s, a_2]$ , et on a le résultat.

Cas I.2 :  $a_2 = +\infty$

Par définition de  $I^\varepsilon$  et  $J^\varepsilon$ , cela signifie que pour tout  $t \geq a_1$  on a  $Y^\varepsilon(t) \in Z_E^\varepsilon \cup C^\varepsilon$ .

Cas I.2.1 : Pour tout  $t \geq b_1$ ,  $Y^\varepsilon(t) \in C^\varepsilon$

Ce cas est similaire au cas I.1.2.1.

Cas I.2.2 : On a  $j \in J^\varepsilon$  tel que  $c_j \in [b_1, +\infty[$

On reprend les mêmes notations que précédemment :

$$c_s := \inf_{j \in J^\varepsilon} \{c_j, c_j \geq b_1\},$$

et

$$d_s := \sup_{j \in J^\varepsilon} \{d_j, d_j < +\infty\}.$$

Cas I.2.2.1 :  $d_s < +\infty$

Alors cela signifie que pour tout  $t \geq d_s$  on a  $Y^\varepsilon(t) \in C^\varepsilon$ . On se retrouve alors dans un cas similaire au cas I.1.2.2. La différence est qu'ici il va falloir après  $t = d_s$  imposer comme contrôle  $\alpha_{\beta,\varepsilon} \equiv (0, -M)$ , le temps nécessaire pour "ramener"  $Y^{\alpha_{\beta,\varepsilon}}$  en 0 et la contraindre

à y rester.

Cas I.2.2.2 :  $d_s = +\infty$

Alors à partir de  $t = c_s$  on se retrouve dans le cas  $|I^\varepsilon| = 0$ ,  $|J^\varepsilon| \neq 0$  déjà traité. Vérifier le lemme sur  $[a_1, c_s]$  est déjà fait dans le cas  $a_2 < +\infty$ .

Il nous faut maintenant traiter l'hérédité. Essentiellement il s'agit de montrer que si le lemme est vérifié jusqu'à  $a_n \in I^\varepsilon$ , alors il l'est jusqu'à  $a_{n+1}$ . Les calculs et les différentes disjonctions de cas sont exactement les mêmes que dans l'initialisation, nous ne les ferons donc pas ici. □



# BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] ACHDOU, Y., CAMILLI, F., CUTRÌ, A., AND TCHOU, N. Hamilton-Jacobi equations constrained on networks. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 20, 3 (2013), 413–445.
- [2] ACHDOU, Y., OUDET, S., AND TCHOU, N. Hamilton-Jacobi equations for optimal control on junctions and networks. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 21, 3 (2015), 876–899.
- [3] ACHDOU, Y., OUDET, S., AND TCHOU, N. Effective transmission conditions for Hamilton-Jacobi equations defined on two domains separated by an oscillatory interface. *J. Math. Pures Appl. (9)* 106, 6 (2016), 1091–1121.
- [4] ACHDOU, Y., AND TCHOU, N. Hamilton-Jacobi equations on networks as limits of singularly perturbed problems in optimal control : dimension reduction. *Comm. Partial Differential Equations* 40, 4 (2015), 652–693.
- [5] ALVAREZ, L., GUICHARD, F., LIONS, P.-L., AND MOREL, J.-M. Axioms and fundamental equations of image processing. *Arch. Rational Mech. Anal.* 123, 3 (1993), 199–257.
- [6] ATTOUCH, H., AND WETS, R. J.-B. Isometries for the Legendre-Fenchel transform. *Trans. Amer. Math. Soc.* 296, 1 (1986), 33–60.
- [7] AUBIN, J.-P., AND CELLINA, A. *Differential inclusions*, vol. 264 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1984. Set-valued maps and viability theory.
- [8] AUBIN, J.-P., AND FRANKOWSKA, H. *Set-valued analysis*, vol. 2 of *Systems & Control : Foundations & Applications*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1990.
- [9] BARDI, M., AND CAPUZZO-DOLCETTA, I. *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*. Systems & Control : Foundations & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1997. With appendices by Maurizio Falcone and Pierpaolo Soravia.



- 
- [10] BARLES, G. *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, vol. 17 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Paris, 1994.
- [11] BARLES, G. A new stability result for viscosity solutions of nonlinear parabolic equations with weak convergence in time. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 343, 3 (2006), 173–178.
- [12] BARLES, G. An introduction to the theory of viscosity solutions for first-order Hamilton-Jacobi equations and applications. In *Hamilton-Jacobi equations : approximations, numerical analysis and applications*, vol. 2074 of *Lecture Notes in Math.* Springer, Heidelberg, 2013, pp. 49–109.
- [13] BARNARD, R. C., AND WOLENSKI, P. R. Flow invariance on stratified domains. *Set-Valued Var. Anal.* 21, 2 (2013), 377–403.
- [14] BELLMAN, R. *Dynamic programming*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.
- [15] BIERSTONE, E., AND MILMAN, P. D. Semianalytic and subanalytic sets. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 67 (1988), 5–42.
- [16] BOLTE, J., DANILIDIS, A., AND LEWIS, A. The Łojasiewicz inequality for nonsmooth subanalytic functions with applications to subgradient dynamical systems. *SIAM J. Optim.* 17, 4 (2006), 1205–1223.
- [17] BREZIS, H. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master’s Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].
- [18] CARDALIAGUET, P., AND FORCADEL, N. From heterogeneous microscopic traffic flow models to macroscopic models. *SIAM J. Math. Anal.* 53, 1 (2021), 309–322.
- [19] CARTAN, H. *Calcul différentiel*. Hermann, Paris, 1967.
- [20] CLARKE, F. H. *Optimization and nonsmooth analysis*, second ed., vol. 5 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1990.
- [21] CRANDALL, M. G., AND LIONS, P.-L. Condition d’unicité pour les solutions généralisées des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 292, 3 (1981), 183–186.
- [22] CRANDALL, M. G., AND LIONS, P.-L. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* 277, 1 (1983), 1–42.

- 
- [23] DANIILIDIS, A., HADDOU, M., AND LEY, O. A convex function satisfying the Łojasiewicz inequality but failing the gradient conjecture both at zero and infinity. *Bull. Lond. Math. Soc.* 54, 2 (2022), 590–608.
- [24] EL KAROUI, NICOLE ; CHALEYAT-MAUREL, M. Un problème de réflexion et ses applications au temps local et aux équations différentielles stochastiques sur  $\mathbb{R}$ , cas continu. *Temps locaux 52-53*, 10 (1978), 117–144.
- [25] EL KAROUI, N. Processus de réflexion dans  $R^n$ . In *Séminaire de Probabilités, IX*, Lecture Notes in Math., Vol. 465. Springer, Berlin, 1975, pp. 534–554. Seconde Partie, Univ. Strasbourg, Strasbourg, années universitaires 1973/1974 et 1974/1975,.
- [26] FORCADEL, N., AND ZAYDAN, M. A comparison principle for Hamilton-Jacobi equation with moving in time boundary. *Evol. Equ. Control Theory* 8, 3 (2019), 543–565.
- [27] GRABER, P. J., HERMOSILLA, C., AND ZIDANI, H. Discontinuous solutions of Hamilton-Jacobi equations on networks. *J. Differential Equations* 263, 12 (2017), 8418–8466.
- [28] IMBERT, C., MONNEAU, R., AND ZIDANI, H. A Hamilton-Jacobi approach to junction problems and application to traffic flows. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 19, 1 (2013), 129–166.
- [29] ISHII, H. Hamilton-Jacobi equations with discontinuous Hamiltonians on arbitrary open sets. *Bull. Fac. Sci. Engrg. Chuo Univ.* 28 (1985), 33–77.
- [30] ISHII, H. Perron’s method for Hamilton-Jacobi equations. *Duke Math. J.* 55, 2 (1987), 369–384.
- [31] ISHII, H. A boundary value problem of the Dirichlet type for Hamilton-Jacobi equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* 16, 1 (1989), 105–135.
- [32] JERHAOUI, O., AND ZIDANI, H. A general comparison principle for Hamilton Jacobi Bellman equations on stratified domains. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 29 (2023), Paper No. 9, 38.
- [33] LIONS, P.-L. *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*, vol. 69 of *Research Notes in Mathematics*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass.-London, 1982.
- [34] LIONS, P.-L., AND SZNITMAN, A.-S. Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions. *Comm. Pure Appl. Math.* 37, 4 (1984), 511–537.

- 
- [35] ŁOJASIEWICZ, S. Une propriété topologique des sous-ensembles analytiques réels. In *Les Équations aux Dérivées Partielles (Paris, 1962)*. Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), Paris, 1963, pp. 87–89.
- [36] ŁOJASIEWICZ, S. Ensembles semi-analytiques. *IHES notes* (1965).
- [37] ŁOJASIEWICZ, S. Sur les trajectoires du gradient d’une fonction analytique. In *Geometry seminars, 1982–1983 (Bologna, 1982/1983)*. Univ. Stud. Bologna, Bologna, 1984, pp. 115–117.
- [38] ŁOJASIEWICZ, S. Sur la géométrie semi- et sous-analytique. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 43, 5 (1993), 1575–1595.
- [39] MCKEAN, JR., H. P. A. Skorohod’s stochastic integral equation for a reflecting barrier diffusion. *J. Math. Kyoto Univ.* 3 (1963), 85–88.
- [40] MCKEAN, JR., H. P. *Stochastic integrals*. Probability and Mathematical Statistics, No. 5. Academic Press, New York-London, 1969.
- [41] SCHIEBORN, D., AND CAMILLI, F. Viscosity solutions of Eikonal equations on topological networks. *Calc. Var. Partial Differential Equations* 46, 3-4 (2013), 671–686.
- [42] SKOROKHOD, A. V. Stochastic equations for diffusion processes with a boundary. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.* 6 (1961), 287–298.
- [43] SKOROKHOD, A. V. Stochastic equations for diffusion processes with boundaries. II. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.* 7 (1962), 5–25.
- [44] TANAKA, H. Stochastic differential equations with reflecting boundary condition in convex regions. *Hiroshima Math. J.* 9, 1 (1979), 163–177.
- [45] WAGSCHAL, C. *Fonctions holomorphes Équations différentielles : exercices corrigés*. Editions Hermann, 2003.
- [46] WETS, R. J.-B. Convergence of convex functions, variational inequalities and convex optimization problems. In *Variational inequalities and complementarity problems (Proc. Internat. School, Erice, 1978)* (1980), Wiley, Chichester, pp. 375–403.



---

**Titre :** Approximation d'un problème de contrôle optimal sur un réseau

**Mot clés :** EDOs Pénalisées, Contrôle Optimal, Équations de Hamilton-Jacobi sur les réseaux

**Résumé :** On s'intéresse dans cette thèse à approcher un problème de contrôle optimal posé sur une structure de réseau. On considère un problème de contrôle optimal non contraint sur  $\mathbb{R}^2$ , associé à une dynamique initiale  $f$ . En utilisant des techniques de pénalisation indépendantes de l'ensemble de contrôles considéré, dépendant uniquement de la géométrie du réseau, on astreint à la limite les trajectoires à évoluer sur cette structure. On montre la convergence de la suite des fonctions valeurs vers la fonction valeur du problème de contrôle optimal posé sur le réseau, associé à la dynamique initiale  $f$ .

---

**Title:** Approximation of an optimal control problem posed on a network

**Keywords:** Penalized ODEs, Optimal Control, Hamilton-Jacobi Equations on networks

**Abstract:** This PHD thesis focuses on the approximation of an optimal control problem posed on a network structure. We consider a non-constraint optimal control problem posed on  $\mathbb{R}^2$ , associated with an initial dynamic  $f$ . We oblige trajectories to evolve at the limit on this structure, using penalization technics. These technics are independant of control set, they depend only on the network geometry. We show the convergence of the value functions sequence toward the value function of the optimal control problem posed on the network, associated to the initial dynamic  $f$ .