



HAL
open science

Contribution au dimensionnement des lignes de transport par câbles prenant en compte leur comportement statique et dynamique

Hugo Bécu

► **To cite this version:**

Hugo Bécu. Contribution au dimensionnement des lignes de transport par câbles prenant en compte leur comportement statique et dynamique. Génie mécanique [physics.class-ph]. École Nationale des Travaux Publics de l'État [ENTPE], 2023. Français. NNT : 2023ENTP0005 . tel-04702694

HAL Id: tel-04702694

<https://theses.hal.science/tel-04702694v1>

Submitted on 19 Sep 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT DE L'ENTPE

Membre de l'Université de Lyon

École Doctorale N° 162

Mécanique, Énergétique, Génie Civil et Acoustique

Spécialité : MÉCANIQUE

Soutenue publiquement le 30/08/2023, par

HUGO BÉCU

**Contribution au dimensionnement des lignes de transport
par câbles prenant en compte leur comportement statique
et dynamique**

Devant le jury composé de :

DUFOUR, RÉGIS	Professeur, INSA Lyon	- Président
BALMÈS, ÉTIENNE	Professeur, ENSAM	- Rapporteur
SERRA, ROGER	Professeur, INSA Centre-Val de Loire	- Rapporteur
SCHMIDT, FRANZISKA	Chercheuse HDR, Université Gustave Eiffel	- Examinatrice
LAMARQUE, CLAUDE-HENRI	Professeur, ENTPE	- Directeur de thèse
TURE SAVADKOOHI, ALIREZA	Chargé de recherche HDR, ENTPE	- Co-directeur de thèse
BOTTOLLIER, CHRISTOPHE	Ingénieur-associé, DCSA Ingénieur Conseil	- Invité
GILLARD, MICHEL	Ingénieur calcul, DCSA Ingénieur Conseil	- Invité

Avant-propos et remerciements

Le mémoire de thèse qui suit est une synthèse des travaux de recherche effectués depuis trois ans au Laboratoire de Tribologie et de Dynamique des Systèmes comme doctorant en contrat CIFRE avec l'entreprise DCSA, spécialiste de la maîtrise d'oeuvre en transport par câbles.

Le projet de thèse s'inscrit dans la continuité d'un parcours recherche en spécialisation de dernière année d'école d'ingénieur. Tout a commencé par les cours de vibration et d'initiation à la mécanique non-linéaire donnés par OLIVIER THOMAS à Lille, qui ont titillé ma curiosité ; sans encore me douter que j'avais en face de moi un des spécialistes de la dynamique non-linéaire. Je remercie ÉTIENNE BALMÈS de m'avoir par la suite mis un pied à l'étrier dans le master MS²SC à Paris. Au cours de cette année riche en découvertes, j'ai eu la chance de m'initier à la mécanique des structures à travers des cours passionnants donnés par des enseignants-chercheurs tout aussi passionnés ; parmi eux, je pense à CYRIL TOUZÉ pour son introduction aux vibrations non-linéaires, à DAVID NÉRON pour le cours de réduction de modèles, à HABIBOU MAITOURNAM pour le cours de thermomécanique et pour sa grande gentillesse, à HACHMI BEN DHIA pour le cours d'éléments finis et de contact, à MARC BONNET et à GUILLAUME PUEL pour les problèmes inverses en mécanique, à BENJAMIN COTTÉ pour la vibroacoustique, à THIERRY SCHULLER pour la mécanique des fluides appliquée, et évidemment à ÉTIENNE BALMÈS pour le cours d'analyse modale qui s'est prolongé par l'encadrement de mon projet de recherche appliqué à la vibration d'une portée de câble de téléphérique.

Après un stage de recherche de fin d'études réalisé chez un constructeur de transport par câbles, POMA, sous la houlette de MATHIEU BABAZ, qui m'a fait découvrir plusieurs aspects des applications pratiques de la recherche académique et montré qu'on pouvait travailler sur un beau sujet de thèse dans l'industrie, le choix de poursuivre l'aventure de la recherche en dynamique des câbles était presque acté. Je te remercie MATHIEU pour tout cela. Il restait encore à trouver le plus important : un beau sujet, un encadrement et un financement.

Pour l'encadrement, je me suis tourné vers CLAUDE-HENRI LAMARQUE qui a accepté de diriger les travaux, en co-direction avec ALIREZA TURE SAVADKOOHI, à l'ENTPE. L'exercice de thèse sous votre direction commune a été une très belle aventure, épanouissante ! Je vous remercie sincèrement CLAUDE-HENRI pour votre accompagnement rigoureux et votre grande disponibilité, pour le partage de la passion que vous portez à votre recherche, de vos intuitions et de votre grande expertise, et de façon plus générale, pour votre érudition. Cette atmosphère de travail, qui a été à la fois très libre mais sous votre bon contrôle, a été particulièrement stimulante et est pour beaucoup dans l'achèvement de la thèse. Je vous remercie sincèrement ALIREZA pour votre gentillesse, votre aide à chaque étape et votre grande disponibilité. Toutes vos idées à tous les deux ont été un carburant précieux pour faire avancer les choses, enrichir la réflexion et me guider dans ce tortueux cheminement où on aurait vite fait de se perdre.

Pour le financement, c'est l'entreprise DCSA, dirigée par CHRISTOPHE BOTTOLLIER et CHRISTOPHE TAMBOURIN, qui, par le dispositif CIFRE, s'est lancée dans ces travaux de recherche et de développement, avec un encadrement de MICHEL GILLARD au bureau d'études. Les résultats obtenus n'auraient pas pu voir le jour sans une volonté forte de mener à bien ce projet dont les premiers contours ont été esquissés dès un stage de contrôleur de chantier réalisé en 2017. Pouvoir conduire librement une recherche située à la frontière entre le monde académique et l'application industrielle, avec leurs temporalités distinctes, dans le contexte d'une PME telle que DCSA, est une chance dont j'ai pu bénéficier. Je les remercie ici vivement d'avoir franchi le pas et de s'être engagés dans ce projet, où le besoin de défricher certains chemins encore peu empruntés s'est rapidement fait sentir sur un sujet d'importance dans la profession, ce qui a été un vrai défi pour moi. J'ai une attention particulière pour LOUIS KIEFFER qui a déployé beaucoup d'énergie lors de son stage de fin d'études, réalisé avec brio ces derniers mois, pour mettre en musique les résultats de la thèse avec la création de l'interface utilisateur du logiciel de conception développé au cours de la thèse, DYNACÂBLE. Un outil qui, je l'espère, trouvera toute sa place au BE pour accompagner utilement les projets à venir.

Mon expérience de la thèse CIFRE me permet également de saluer l'initiative de ce dispositif français, impulsé par l'Agence Nationale pour la Recherche et la Technologie (ANRT), qui favorise les partenariats entre les laboratoires publics de recherche et le monde industriel, cadre sans lequel cette thèse n'aurait pas vu le jour et n'aurait pas pu être préparée dans de bonnes conditions matérielles.

Je remercie sincèrement BERNARD TEILLER pour sa confiance qu'il m'avait déjà accordée lors d'un premier stage en 2017 et qu'il renouvelle avec la poursuite de " l'aventure du câble " par une prise de poste chez DOPPELMAYR GROUP à l'issue de la thèse.

Le texte qui suit a été rédigé dans la perspective de l'obtention du diplôme de doctorat en mécanique et s'adresse donc en premier lieu aux membres du jury. Je souhaite ainsi d'abord remercier les deux rapporteurs d'avoir accepté l'expertise de ces travaux et la lecture attentive du mémoire : ÉTIENNE BALMÈS, pour son rapport concis et précis, sa grande connaissance de l'analyse modale et de ses applications industrielles, ROGER SERRA, pour nos échanges et ses conseils, son rapport minutieux et l'analyse détaillée des différentes parties du texte, avec le recul de son expérience dans le domaine de l'analyse vibratoire. Ensuite, je remercie vivement les autres membres du jury pour leur intérêt porté au sujet : RÉGIS DUFOUR, qui a accepté de présider le jury, et FRANZISKA SCHMIDT.

Un grand merci au groupe de doctorants, d'étudiants et permanents côtoyés à l'ENTPE pour la très bonne ambiance au laboratoire. Alors, pêle-mêle, merci : CHARLÉLIE, JEAN, CAMILA, SARAH, MÉLISSANDRE, AURÉLIE, MATTHIEU, MAXIME, SOFIA, MARIE-SARAH, ANTOINE, JULIETTE, STANISLAS, YASMINA, THIBAUD, LASSANA, YOUNENG, XIN, EMANUELE, JOACHIM, DENIS, EMMANUEL, ANTOINE, ANTONIN, CÉDRIC, SALVO, CLAUDE,...

Pour conclure cette étape des remerciements, je te remercie, MARIANNE, pour tes conseils pendant ces trois années et ton aide précieuse avec la relecture de la thèse, à la recherche méticuleuse de coquilles et autres bizarreries syntaxiques !

Les travaux présentés dans ce mémoire sont appliqués à un objet " de l'ingénieur ", pensé, étudié et créé avec une application spécifique : les installations de transport par câbles. La question se pose alors de la raison de faire de la " recherche " sur des systèmes dont le concept de fonctionnement est établi depuis des siècles, les premiers câbles tendus remontant probablement au début de notre ère, et dont les principes physiques, régis par la mécanique classique newtonienne, ont été écrits et validés depuis. L'idée poursuivie par ce document vise à apporter quelques éléments de réponse, à travers :

- d'une part, la compréhension des phénomènes, par la modélisation et la simulation, rendue complexe par la combinaison de leur caractère *dynamique* se manifestant notamment par la résonance, de la *géométrie* de l'objet d'étude à l'origine de *non-linéarités* associées, des *couplages* par le contact entre les différents composants du système ;
- d'autre part, la mise en place de méthodes qui donnent des règles, simples et les plus efficaces possibles en terme de ressource de calcul, pour l'ingénieur de bureau d'études afin d'améliorer le fonctionnement des installations de transport par câbles et participer à leur évolution pour des usages nouveaux, ce qui passe par une meilleure maîtrise du dimensionnement et la prédiction de leur comportement en phase de conception.

Lyon - Paris - Briançon
février 2020 - septembre 2023

Résumé

Contribution au dimensionnement des lignes de transport par câbles prenant en compte leur comportement statique et dynamique

Le transport par câbles regroupe tous les systèmes qui utilisent des câbles mobiles et fixes, suspendus entre des appuis, pour guider et déplacer des véhicules accueillant des personnes ou des matériaux. Ce mode de transport, couramment utilisé dans les régions montagneuses, possède un fort potentiel de développement en ville où il apporte des réponses aux enjeux de mobilité. Le caractère flexible des câbles favorise cependant l'apparition de mouvements dynamiques néfastes pour le système, aussi bien concernant des questions de sécurité que de confort des usagers.

Le dimensionnement des lignes de câble est essentiel pour en assurer la bonne résistance et les performances. Les méthodes existantes restent cantonnées à un calcul dans le domaine statique. Les effets dynamiques, qui sont par exemple les conséquences de la translation du câble et des perturbations générées par l'évolution des propriétés dynamiques du système au cours du déplacement des charges, ne sont pas anticipés de façon robuste et systématique à la conception. Compte tenu de la spécificité du système étudié, qui est multi-corps, non-linéaire et variable dans le temps, les modèles et les outils de simulation employés jusqu'ici par les industriels ne permettent pas de caractériser la dynamique.

Dans ce contexte, l'objectif de ce travail est d'apporter des éléments de dimensionnement tenant compte à la fois du comportement statique et dynamique des lignes de transport par câbles. Il s'agit, d'une part, d'interpréter les différents mécanismes d'excitation dynamiques à l'oeuvre, puis d'autre part d'évaluer les conditions favorables à l'apparition de phénomènes d'amplification des oscillations. Pour répondre à cette problématique, les modèles de chaque sous-constituant du système sont mis en place pour ensuite être assemblés. L'état statique du système complet est calculé selon différentes procédures de recherche de solution au modèle non-linéaire, l'une basée sur une expression analytique et l'autre sur une discrétisation spatiale aux différences finies. Puis, l'ajout des contributions inertielles aboutit au modèle dynamique écrit autour de la ligne de câble, fixe ou en translation, dont la résolution donne des éléments pour comprendre l'influence des paramètres statiques et de la vitesse de translation sur les caractéristiques modales. L'information portée par les modes de vibration du système autorise ensuite à travailler sur un modèle réduit, pour manipuler des équations simples, support de l'analyse non-linéaire et de l'étude de stabilité par échelles multiples de l'excitateur paramétrique ainsi obtenu.

L'étude statique met en évidence le rôle prépondérant de la tension vis-à-vis des autres contraintes de flexion et de torsion dans les lignes de câble. Les évolutions du système et le défilement des véhicules s'accompagnent de modifications importantes des grandeurs de tension et de forme des câbles, avec des changements brutaux d'équilibre entre deux états successifs. L'étude dynamique montre la forte influence du déplacement périodique des véhicules et de leur interaction avec les appuis intermédiaires dans les sources de sollicitations externe et paramétrique du système. Les modes de vibration du système complet sont calculés et un effet déstabilisant de la translation du câble est observé pour certains modes. Les variations transitoires de la vitesse de translation modifient la forme statique de la ligne de câble, tandis que la vitesse de translation n'a pas d'influence au premier ordre.

Finalement, les différents résultats obtenus sont intégrés dans un ensemble d'outils logiciels développés pendant les travaux de thèse. Leur mise en oeuvre dans le bureau d'études accompagne le concepteur au cours de la procédure de dimensionnement.

Mots clés : câble, système multi-corps, assemblage, non-linéarité géométrique, chaînette, analyse modale, force inertielle, instabilité paramétrique, méthode des échelles multiples

Abstract

Contribution to the design of cable transport lines considering their static and dynamic behaviour

Cable transport includes all systems that use mobile and fixed cables, suspended between supports, to guide and move vehicles that carry people or materials. This mode of transport, commonly used in mountainous regions, has a strong potential for development in cities where it provides answers to mobility issues. The flexible nature of the cable is the cause of dynamic movements that are detrimental to the system, both for safety and user comfort.

The cable line design is an essential step to ensure the good resistance and performance of the structure. Existing methods are limited to a calculation in the static domain. The internal dynamic effects, which are for example the consequences of the translation of the cable and the disturbances due to the evolution of the dynamic properties during the displacement of the loads, are not anticipated in a robust and systematic way during the design process. Considering the specificity of the system which is multi-body, nonlinear and variable in time, the in-house models and the simulation tools developed until now do not allow to characterise the system in dynamic.

In that context, the objective of this work is to bring elements of design taking into account both the static and dynamic behaviour of cable transport lines. It is first of all a question of interpreting the various dynamic excitation mechanisms at work on the system, and then of evaluating the conditions favorable to the phenomenon of amplification of the dynamic response. To address this issue, the models of each sub-constituent of the system are set up and then assembled. The static state of the complete system is computed according to different procedures for finding a solution to the non-linear model, one based on an analytical expression and an other on a spatial discretisation with finite differences scheme. Then, adding the inertial contributions allows to build a dynamic model around the fixed or translating cable line, to understand the influence of the static parameters and the translation speed on the modal characteristics. The information carried by the mode of vibration of the system allows then to work on a reduced model, to manipulate simple equations, support of the nonlinear analysis and the stability study by multiple scales method of the parametric exciter thus obtained.

The static study highlights the predominant role of tension with respect to other stresses in the cable line like bending and torsion. The evolutions of the system are associated with important modifications of cable tension and shape as well as brutal changes of equilibrium between two successive states. The dynamic study shows the strong influence of the periodic vehicle running and their interaction with the intermediate supports in the sources of external and parametric excitation of the system. The mode of vibration of the complete system are calculated and a destabilising effect of the cable translation is observed for some modes. Transient variations in translational velocity change the static shape of the cable line, while translational velocity has no influence at first order.

Finally, the various results obtained are integrated into a set of software tools developed during the thesis work. Their implementation in the design office provide rules during the design process.

Keywords : cable, multi-body system, assembly, geometric nonlinearity, catenary, modal analysis, inertial force, parametric instability, multiple scale method

Table des matières

Introduction	19
1 Modélisations et calculs du comportement mécanique des structures à câbles : revue bibliographique.	27
1.1 Définition du cadre de travail	29
1.1.1 L'objet <i>câble</i>	30
1.1.2 Formulation du problème mécanique d'un milieu curviligne	32
1.1.3 Le chargement extérieur	37
1.1.4 L'effort normal	38
1.1.5 La torsion	39
1.1.6 La flexion	39
1.1.7 Les efforts tranchants	41
1.2 Méthodes d'étude des câbles en statique	42
1.2.1 Mise en équation statique du câble fixe	42
1.2.2 Traitement numérique des équations, discrétisation et implémentation	50
1.2.3 Le calcul de ligne	56
1.3 Méthodes d'étude des câbles en dynamique	59
1.3.1 Mise en équation dynamique du câble	59
1.3.2 L'analyse modale	62
1.3.3 Stabilité	66
1.3.4 Étude dynamique d'une ligne de transport par câbles	69
2 Construction du modèle statique d'une installation de transport par câbles	74
2.1 Modélisation statique du câble	74
2.1.1 Définition d'un élément de câble	74
2.1.2 Modèle de fil	77
2.1.3 Modèle de tige	83
2.1.4 Spécification des conditions aux bords	85
2.2 Méthodologie de résolution des modèles statiques de câble	86
2.2.1 Solution du modèle de fil	86
2.2.2 Solution de la chaînette	91
2.2.3 Solution du modèle de tige	91
2.3 Modélisation du contact entre le câble et ses appuis	92
2.3.1 Définition du cadre d'étude du contact	93
2.3.2 Modélisation du contact avec les appuis intermédiaires	94
2.3.3 Modélisation du contact avec les stations d'extrémité	101
2.4 Modélisation statique des véhicules	104
2.4.1 Modèle ponctuel d'un véhicule sur une ligne monocâble	104
2.4.2 Modèle ponctuel d'un véhicule en multicâbles (chariot)	106
2.5 Définition du modèle statique global du système	107

3	Étude du comportement statique du système.	111
3.1	Calcul statique d'une portée de câble	111
3.1.1	Modèle de la chaînette	111
3.1.2	Modèle numérique	120
3.2	Couplage des portées par des appuis intermédiaires	127
3.2.1	Couplage de chaînettes	127
3.2.2	Couplage des éléments du modèle numérique	128
3.3	Analyse statique : cas d'application	131
3.3.1	Ligne du télésiège de Coulouvrier	132
3.3.2	Ligne du téléphérique de l'Aiguille du Midi II	135
4	Construction du modèle dynamique d'une installation de transport par câbles.	137
4.1	Modélisation dynamique du câble	137
4.1.1	Formulation dynamique d'un élément de câble fixe	137
4.1.2	Formulation dynamique d'un élément de câble mobile	149
4.2	Modélisation dynamique des appuis	160
4.2.1	Couplage entre un appui ponctuel infiniment rigide et le câble	160
4.2.2	Modèle d'appui ponctuel avec raideur transversale	161
4.2.3	Modèle de station d'extrémité	161
4.3	Modélisation dynamique des véhicules	162
4.3.1	Véhicule ponctuel accroché à un câble fixe	162
4.3.2	Véhicule ponctuel accroché à un câble mobile	163
4.4	Définition du modèle dynamique global du système	166
4.4.1	Assemblage et fermeture	166
4.4.2	Réduction de modèle sur base modale	167
4.4.3	Correction statique	168
5	Étude du comportement dynamique du système.	169
5.1	Cadre de l'étude dynamique du problème non-linéaire, multi-corps et variable en temps	169
5.1.1	Modes de vibrations	169
5.1.2	Stabilité de la vibration	171
5.2	Analyse modale d'une ligne de transport par câble	172
5.2.1	Méthode de calcul des modes réels	172
5.2.2	Méthode de calcul des modes complexes (CEA)	175
5.2.3	Cas d'une ligne de câble immobile, modes réels	175
5.2.4	Cas d'une ligne de câble mobile, modes complexes	183
5.2.5	Analyse modale paramétrique équivalente	186
5.3	Le mécanisme de pompage	189
5.3.1	Manifestation du pompage	189
5.3.2	Sélection d'un mode de pompage et modèle réduit de la ligne	189
5.3.3	Équation de Mathieu-Hill et instabilité paramétrique	199
5.3.4	Équation de Mathieu-Hill généralisée avec non-linéarités géométriques, instabilités et cycle limite de vibration	208
5.3.5	Application à la détection du pompage	218
5.4	Évolution non-stationnaire de la ligne	224
5.4.1	Calcul transitoire équivalent	224
5.4.2	Intégration temporelle sur modèle réduit	227
5.5	Analyse dynamique heuristique : cas d'application	227
5.5.1	Ligne du télésiège des Verneys	227
5.5.2	Ligne de télécabine des Bruyères	232
	Conclusion et perspectives	235

A	Modèle de câble avec flexion	239
B	Résolution des équations de la chaînette inextensible	243
C	Projection de l'équilibre statique d'un fil	246
D	Allongement élastique selon la chaînette	247
E	Modèle de tige	250
F	Éléments de technologie d'une ligne de transport par câbles	255
G	Accélération d'un câble mobile	259
H	Modes de vibration d'un câble en translation	262
I	Modèle dynamique de pylône	267
J	Couplage dynamique des portées de câble	273
K	Stratégies de sous-structuration, réduction de modèle	277
L	Changement de variable de la description statique	280
M	Interactions modales paramétriques	282
N	Calcul formel de l'amplitude (équation de Mathieu généralisée)	285
O	Calcul transitoire de la ligne en mouvement	289

Liste des acronymes

BEA-TT Bureau d'enquêtes sur les accidents de transport terrestre
CEA Complex Eigenvalue Analysis
CMT Component Mode Tuning
CMS Component Mode Synthesis
DDL Degrés de liberté
DEIM Discrete Empirical Interpolation Method
EF Éléments finis
FFT Fast Fourier Transform
HPP Hypothèse des petites perturbations
LCPC Laboratoire central des ponts et chaussées
LGV Ligne à grande vitesse
LTI Linear Time Invariant
MEF méthode des éléments finis
POD Proper Orthogonal Decomposition
PID Proportionnel intégral dérivée
RDM Résistance des matériaux
ROM Reduced Order Model
SVD Singular Value Decomposition (décomposition en valeurs singulières)

Liste des symboles

- A section du milieu curviligne
- A_{V_0} accélération en translation du câble
- \underline{A} vecteur accélération sur la configuration de référence
- \underline{a} vecteur accélération sur la configuration courante
- $\{A\}$ système dynamique (chapitre 1)
- $[A_0]$ système dynamique tangent (chapitre 1)
- \bullet_{ap} grandeur relative à un appui
- $[B]$ matrice de sélection des DDL sous-contrainte (chapitre 1)
- \underline{C}_m vecteur couple appliqué à la poulie motrice
- $\{C\}, \{c\}$ contraintes (discret)
- c coefficient d'amortissement structurel
- c_f coefficient de frottement
- c_0 célérité des ondes
- \bullet_d, \bullet^d grandeur dynamique
- E module d'Young
- \underline{E} tenseur des déformations de Green-Lagrange
- f fréquence
- \underline{F} vecteur de force extérieure ponctuelle
- \mathcal{F}_0 charge de flambement d'Euler
- $\{F\}$ force extérieure (discret)
- \underline{F} tenseur du gradient de la transformation
- \underline{f} vecteur de force linéique
- \underline{G} vecteur de la base orthonormale associé à l'abscisse curviligne sur la configuration de référence
- g constante de gravité
- \underline{g} vecteur de la base orthonormale associé à l'abscisse curviligne sur la configuration courante
- h épaisseur caractéristique du milieu mince
- $[H]$ matrice du modèle dynamique assemblé (discret)
- $[H_e]$ matrice du modèle dynamique élémentaire (discret)
- \mathcal{H} espace de Hilbert
- $j^2 = -1$
- $[K]$ matrice de raideur
- $[\Delta K]$ matrice de raideur tangente
- \underline{L} longueur courante du milieu curviligne
- L_R longueur de référence du milieu curviligne
- l largeur caractéristique du milieu mince (introduction du chapitre 1)
- l_c paramètre géométrique de contrôle du déplacement de la ligne de câble
- l_d distance inter-véhicules
- I moment quadratique de la section du milieu curviligne
- \underline{J} matrice jacobienne
- $[J]$ matrice jacobienne (discret)

- $[M]$ matrice de masse
 \underline{M} vecteur du moment résultant dans le milieu curviligne
 $\underline{\mathcal{M}}$ vecteur de moment extérieur ponctuel
 M_f moment de flexion dans le milieu curviligne
 M_t moment de torsion dans le milieu curviligne
 N effort normal dans le milieu curviligne sur la configuration courante
 \hat{N} effort normal dans le milieu curviligne sur la configuration de référence
 $\hat{\mathcal{N}}$ espace des fonctions statiquement admissibles
 \mathcal{P} poids (chapitre 1)
 \underline{n} vecteur normal au milieu curviligne
 $\{q\}$ coordonnées physique ou généralisés (discret)
 R rayon
 \underline{R} vecteur de la résultante des efforts dans le milieu curviligne sur la configuration de référence
 \underline{r} vecteur de la résultante des efforts dans le milieu curviligne sur la configuration courante
 $\{r\}$ résidu (discret)
 \bullet_R grandeur associée à la configuration de référence
 S abscisse curviligne sur la configuration de référence
 s abscisse curviligne sur la configuration courante
 \bullet_s, \bullet^s grandeur statique
 $\{S\}$ système statique assemblé (discret)
 $\{S_e\}$ système statique élémentaire (discret)
 T tension
 $[T]$ base de réduction
 \underline{t} vecteur tangent au milieu curviligne
 u déplacement longitudinal du milieu curviligne
 \mathcal{U} espace des fonctions cinématiquement admissibles
 \underline{U} vecteur de déplacement
 $\{U\}$ déplacement (discret)
 \underline{V} vecteur vitesse sur la configuration de référence
 V_0 vitesse de translation instantanée du câble
 V effort de cisaillement dans le milieu curviligne
 \underline{v} vecteur vitesse sur la configuration courante
 v déplacement vertical du milieu curviligne
 \bullet_v grandeur associée à un véhicule
 w déplacement transversal/hors-plan du milieu curviligne
 $\underline{X}, \underline{x}$ vecteur de position
 $\{X\}$ position (discret)
 x position horizontale du milieu curviligne
 y position verticale du milieu curviligne
 $\{Y\}$ paramètres inconnus de chaînette
 z position transversal du milieu curviligne
- α angle de flexion, angle d'inclinaison du fil
 α exposant de Floquet (chapitre 1)
 β angle de torsion
 ϵ paramètre de mise à l'échelle
 ε déformation d'extension linéarisée
 $\hat{\varepsilon}$ déformation d'extension de Green-Lagrange
 κ courbure du milieu curviligne

- κ_β déformation de torsion du milieu curviligne
 $(\kappa_\phi, \kappa_\alpha)$ déformation de flexion du milieu curviligne
 λ valeur propre du système dynamique tangent
 $\Lambda = \omega + j\xi$ pulsation complexe
 $\{\lambda\}$ multiplicateurs de Lagrange (discret)
 μ masse linéique du milieu curviligne sur la configuration courante
 ν paramètre de flexion
 π second tenseur de Piola-Kirchoff
 ρ multiplicateur de Floquet (chapitre 1)
 ρ masse volumique (annexe G)
 σ tenseur des contraintes de Cauchy
 ϕ angle de flexion sur la configuration courante
 $[\phi]$ base des formes modales élémentaires
 Φ section caractéristique du milieu mince (introduction du chapitre 1)
 Φ transformation cinématique (chapitre 1, 2 et annexe G)
 Φ_f angle de frottement
 Φ_r angle de résistance au roulement
 $\underline{\Phi} = \Phi_u \underline{t} + \Phi_v \underline{n} + \Phi_w \underline{e}_z$ déformée modale : composante longitudinale, verticale et transversale
 $\{\Phi\}$ déformée modale (discret, après assemblage)
 Ψ loi de comportement
 $[\Psi]$ matrice de monodromie
 Ω pulsation de l'excitation associée au défilement des véhicules
 ω pulsation

Table des figures

1	De l'utopie des années soixante aux concepts futuristes du XXI ^e siècle de l'utilisation urbaine du transport par câbles (d'après documents publicitaires POMA et Doppelmayr Group)	19
2	Téléphérique Roosevelt Island à New-York, USA (POMA), Téléo à Toulouse, France (POMA) et réseau de télécabine Mi Téléferico à La Paz, Bolivie (Doppelmayr Group)	20
3	(a) Balancement transversal d'un véhicule de télésiège sous l'effet du vent (vidéo YouTube), (b) Amortisseur liquide d'un véhicule de télésiège (brochure commerciale Leitner)	20
4	(a) Effet d'une variation de vitesse du câble mobile et (b) d'un transfert d'un véhicule d'une portée à une autre par franchissement d'un pylône sur les flèches de câble	21
5	Balancement d'une cabine de téléphérique au franchissement d'un appui (d'après [1])	21
6	Balancier et interaction avec l'attache d'un véhicule (d'après [2])	22
7	Câble à profil circulaire avec inserts plastiques (d'après document Fatzer)	22
8	Phénomène de pompage	23
1.1	Plans de mobilier dessinés par Jean Prouvé	27
1.2	Optimisation topologique d'une pièce support de station de transport par câble (images tirées du site internet d'Altair Engineering)	28
1.3	Exemple de milieux minces (a) 1D, (b) 2D	28
1.4	Exemples de (a) milieu fin 1D (fil) et 2D (membrane), (b) milieu épais 1D (poutre) et 2D (plaque)	29
1.5	Pavillon Philips par Le Corbusier et I. Xenakis, constitué de voiles hyperboles soutenues par un réseau de câbles, exposition internationale de Bruxelles, 1958 (montage à partir d'images tirées de [3])	29
1.6	(a) Nappe de câbles d'un téléphérique à Rio de Janeiro, Brésil (image libre de droits, source Photo Stock Editor). (b) Vue en coupe de la composition interne d'un câble avec l'âme centrale et les torons enroulés autour (image tirée du catalogue Teufelberger)	30
1.7	Éléments d'un câble (d'après documents Fatzer et Teufelberger)	30
1.8	Modèle détaillé d'un câble toronné et champ de contrainte associé (d'après [4])	31
1.9	Les différents modes de sollicitation dans un milieu curviligne	32
1.10	Milieu curviligne paramétrisé	33
1.11	(a) Formation d'une boucle sur un câble de funiculaire localement détendu lors d'un freinage (d'après une image tirée de [5]). (b) Essai de flambement sur une poutre circulaire avec un équilibre hors plan et la formation d'une boucle qui tourne sur elle-même par couplage non-linéaire entre les modes de torsion et de flexion (d'après [6])	38
1.12	Introduction du déplacement entre les deux configurations de référence \mathcal{C}_R et déformée \mathcal{C}	48
1.13	Instabilité des configurations d'équilibre statique de deux portées de câbles reliées par un appui mobile (d'après [7] et [8])	49
1.14	Formation de boucles sur le câble dans les zones en compression (d'après [9])	54
1.15	(1) Configuration des câbles en déplacement imposé du support B (trait plein : avec raideur en flexion, trait pointillé : sans raideur en flexion), (2) (a) Tension N , (b) Effort tranchant V , (c) Moment de flexion M_f (d'après [10])	55
1.16	Équilibre statique d'une caténaire : les effets de flexion sont visibles aux appuis avec la continuité des angles du câble (d'après [11])	56

1.17	(a) Structure de l'algorithme de résolution de l'équilibre statique d'un transporteur aérien, (b) machine à calculer utilisant des cartes perforées (d'après [12])	57
1.18	(a) Modèle d'une portée de téléphérique, (b) Équilibre statique des câbles (d'après [13, 14])	58
1.19	Phénomène de coalescence de mode suivi d'un lock-in pour $v \in [v_{li}, v_{lo}]$ associé à une bifurcation de type Hopf conduisant à une instabilité	69
1.20	Modélisation d'une ligne de transport monocâble selon une approche multi-corps (d'après [15])	71
2.1	Configuration de référence \mathcal{C}_R de l'élément de câble et base locale	74
2.2	Loi de comportement Ψ d'un fil en traction	79
2.3	Problème d'équilibre d'un fil soumis à une répartition d'effort linéique verticale	81
2.4	Paramétrisation des angles de flexion α et ϕ	84
2.5	(a) Conditions au bord en position, (b) en effort	85
2.6	(a) Conditions au bord en orientation, (b) en moment	86
2.7	(a) Déformation en fonction du numéro d'élément, (b) profil de câble en fonction de l'abscisse	90
2.8	(a) Vue de synthèse d'un appui de type balancier (d'après une brochure Rowema), (b) Photo d'une pince en contact avec un balancier (d'après une brochure Doppelmayer Group)	93
2.9	Contact entre le câble et un appui de type balancier support-compression (photo tirée de la banque de données de la Colorado School of Mines)	95
2.10	Détail d'un appui de type sabot (d'après rapport d'enquête BEA-TT)	95
2.11	(a) Bandage d'un galet et (b) d'une poulie (images tirées d'une brochure IDM)	96
2.12	Appui ponctuel avec contact parfait d'un câble tendu sans flexion	96
2.13	Appui ponctuel avec contact frottant	97
2.14	Appui ponctuel avec contact frottant simplifié pour $\alpha_{n-1} \approx \alpha_n$	98
2.15	Appui ponctuel avec contact frottant (cas général)	98
2.16	Appui linéique	100
2.17	Appui linéique avec liaison pivot	101
2.18	Appui avec liaison pivot équivalent	102
2.19	(a) Vue de synthèse de l'attache d'un véhicule sur une ligne monocâble (d'après une brochure Doppelmayer Group), (b) Vue de synthèse de l'attache d'un véhicule sur une ligne multicâbles (d'après une brochure Doppelmayer Group)	105
2.20	Véhicule accroché à un câble tendu sans flexion, modélisé par un effort ponctuel	105
2.21	Véhicule suspendu à un câble tracteur et porteur tendu sans flexion, modélisé par un effort ponctuel de résultante \underline{F}_v	107
2.22	Schéma d'une ligne monocâble avec une station tension en position aval et une station motrice en position amont	108
2.23	Stratégie de calcul par portées découplées et itération i sur la position des appuis sur la référence jusqu'à convergence de l'équilibre des tensions aux appuis, $\ \underline{T}_n = f_c(\ \underline{T}_{n-1}), \forall n \in [2, N]$	110
3.1	(a) Déformée et (b) tension pour plusieurs valeurs du paramètre γ_T dans une portée horizontale	113
3.2	(a) Points ($\mathcal{F}_x^* = \frac{\mathcal{F}_x}{\mu g L_c}, \mathcal{F}_y^* = \frac{\mathcal{F}_y}{\mu g L_c}$) qui vérifient la condition de compatibilité statique de la portée (b) Longueur de câble L^* en fonction du paramètre γ_T	113
3.3	(a) Évolution de la tension minimale admissible $\gamma_{T,min}$ en fonction de l'angle d'inclinaison α de la portée (b) ΔN^* en fonction du paramètre γ_T pour une portée inclinée avec $\alpha = \frac{\pi}{4}$	114
3.4	(a) γ_T en fonction du paramètre de conception $\gamma_{T,reg}$ pour une portée horizontale (b) Zoom au point $\gamma_T = \gamma_{T,min}$	114
3.5	(a) Profil de tension de la portée pour $\gamma_{T,reg} \approx \gamma_{T,reg,min}$ pour une portée horizontale (b) Conditionnement de la matrice jacobienne en fonction de $\gamma_{T,reg}$	115
3.6	(a) γ_T en fonction du paramètre de conception $\gamma_{T,reg}$ pour une portée inclinée d'un angle $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (b) Zoom au point $\gamma_T = \gamma_{T,min}$	115
3.7	(a) Profil de tension de la portée pour $\gamma_{T,reg} \approx \gamma_{T,reg,min}$ pour une portée inclinée d'un angle $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (b) Conditionnement de la matrice jacobienne en fonction de $\gamma_{T,reg}$	116

3.8	(a) γ_T en fonction du paramètre de conception L^* pour une portée horizontale (b) Zoom au point $\gamma_T = \gamma_{T,min}$	117
3.9	(a) Tension N^* en fonction de L^* (b) Zoom en $L^* \approx 1$	118
3.10	(a) Longueur allongée L_{elas}^* en fonction de L^* (b) Zoom en $L^* \approx 1$	118
3.11	(a) Flèche f^* en fonction de L^* (b) Zoom en $L^* \approx 1$	119
3.12	(a) Longueur allongée L_{elas}^* (b) $1/L^*$ en fonction du paramètre de conception $\gamma_{T,reg} \in [10, 15]$ pour $\mu = 25$ kg/m	121
3.13	(a) Flèche f^* en fonction du paramètre de conception $\gamma_{T,reg} \in [10, 15]$ pour $\mu = 25$ kg/m (b) γ_T en fonction de $\gamma_{T,reg}$	121
3.14	Erreur d'approximation en fonction du pas de discrétisation	122
3.15	(a) Profil du câble (b) Profil de tension pour différents pas de discrétisation	123
3.16	(a) Déformée et (b) tension du câble selon le modèle de fil pour $L^* - 1 \in [5 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-3}]$	123
3.17	(a) Déformée et (b) tension du câble selon le modèle de tige pour $L^* - 1 \in [5 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-3}]$ (équilibre 1)	124
3.18	(a) Déformée et (b) tension du câble selon le modèle de tige pour $L^* - 1 \in [5 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-3}]$ (équilibre 2)	124
3.19	(a) Déformée et (b) tension du câble selon le modèle de fil pour $L^* - 1 \in [5 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-2}]$	125
3.20	(a) Déformée et (b) tension du câble selon le modèle de tige pour $L^* - 1 \in [1 \times 10^{-2}, 5 \times 10^{-2}]$	125
3.21	(a) Déformée et (b) tension du câble selon le modèle de tige pour $L^* - 1 \in [5 \times 10^{-2}, 3 \times 10^{-1}]$	125
3.22	(a) Déformée et (b) tension du câble selon le modèle de tige pour $L^* - 1 \in [4.5 \times 10^{-1}, 5.5 \times 10^{-1}]$	126
3.23	Évolution comparative de la (a) flèche et de la (b) tension au bord, en fonction du rayon de courbure moyen R^* (fil : bleu, tige : orange selon l'équilibre 1)	126
3.24	Évolution comparative de la (a) flèche et de la (b) tension au bord, en fonction du rayon de courbure moyen R^* (fil : orange, tige : bleu selon l'équilibre 2)	127
3.25	(a) Profil du câble (b) Profil de tension (bleu : sans frottement, orange : frottement de Coulomb, coefficient $c_f = 0.03$)	128
3.26	(a) Profil du câble (b) Profil de tension (frottement de Coulomb, coefficient $c_f = 0.03$)	128
3.27	(a) Profil du câble (b) Profil de tension	129
3.28	Exemple 1 : (a) Profil du câble (b) Profil de tension (bleu : $I \neq 0$, orange : $I = 0$)	129
3.29	Exemple 2 : Profil du câble ($I = 0$) pour $L_0 \in [5.001, 5.05]$ m	130
3.30	Exemple 2 : (a) Profil du câble (b) Profil de tension ($I \neq 0$) pour $L_0 \in [5.001, 5.05]$ m	130
3.31	Exemple 3 : (a) Profil du câble (b) Profil de tension (bleu : $I \neq 0$, orange : $I = 0$)	131
3.32	Exemple 3 : (a) Profil du câble (b) Profil de déformation (I variable)	131
3.33	Exemple 3 : (a) Profil du câble (b) Profil de déformation (I variable)	132
3.34	Équilibre statique de la ligne du télésiège de Coulouvrier pour une masse linéique de câble $\mu = 36.99$ kg/m	133
3.35	Équilibre statique de la ligne du télésiège de Coulouvrier pour une masse linéique de câble $\mu = 11.59$ kg/m	133
3.36	(a) Profil du câble dans une portée de la ligne (b) Zoom sur un véhicule (orange : câble homogène, bleu : véhicules ponctuels)	134
3.37	Profil de tension de la ligne selon (a) un modèle de câble homogène, (b) avec des véhicules ponctuels	134
3.38	(a) Profil de tension (b) Zoom à proximité du pylône franchit par le véhicule	135
3.39	Résultat de calcul du câble tracteur dans la zone de contact avec la paroi : sans gaine de givre (jaune : sans allongement permanent, rouge : avec allongement permanent du câble) et avec la gaine de givre (bleu : sans allongement permanent, violet : avec allongement permanent du câble). Relevé de la position du câble sans givre (losange vert), relevé topographique de l'éperon rocheux (losange mauve).	136
4.1	Base locale de Frenet attachée à la configuration statique de référence décrite en fonction de S_0	139
4.2	Déplacement dynamique par rapport à la référence statique	140

4.3	(a) Exemple de mouvement dynamique vertical symétrique induisant un incrément de tension T_d non-nul (b) Exemple de mouvement dynamique vertical anti-symétrique sans incrément de tension dynamique associé	143
4.4	Translation de la référence statique à la vitesse stationnaire V_0	149
4.5	Translation de la référence statique à la vitesse instantanée V_0 avec une accélération A_{V_0}	151
4.6	Hypothèse simplificatrice sur la géométrie d'une portion de câble	152
4.7	Position courante obtenue par un déplacement dynamique autour d'une référence à la vitesse instantanée V_0 avec une accélération A_{V_0}	152
5.1	Illustration des spécificités du problème dynamique d'une ligne de transport par câble (d'après une photo tirée du site Doppelmayr Group)	170
5.2	(a) Longueur de contrôle l_c du déroulement du câble à la poulie motrice. (b) Espacement l_d entre véhicules sur un télésiège	171
5.3	Extrait du profil en long de la ligne (document DCSA)	176
5.4	Configuration statique	176
5.5	Déformées modales (a) longitudinale Φ_u et (b) verticale Φ_v associées aux premiers modes en fonction de l'abscisse curviligne S , pour $l_c = 23$ m	177
5.6	Déformée modale transversale Φ_w associée aux premiers modes en fonction de l'abscisse curviligne S , pour $l_c = 23$ m	178
5.7	Déformées modales (a) longitudinale Φ_u et (b) verticale Φ_v associées au mode à 1.8 Hz en fonction de l'abscisse curviligne S , pour $l_c = 23$ m	178
5.8	Déformées modales (a) longitudinale Φ_u et (b) verticale Φ_v associées aux premiers modes en fonction de l'abscisse curviligne S , pour $l_c = 23$ m	179
5.9	Déformée modale transversale Φ_w associée aux premiers modes de la ligne des Brévières en fonction de l'abscisse curviligne S , pour $l_c = 23$ m	179
5.10	Exemple de calcul de déformée modale dans le plan (a) $\Phi_u(S)$, (b) $\Phi_v(S)$ par relaxation de la continuité de la tension dynamique	180
5.11	Déformées modales (a) longitudinale Φ_u et (b) verticale Φ_v associées aux premiers modes de ligne en fonction de l'abscisse curviligne S , pour $l_c = 23$ m	181
5.12	Déformée modale transversale Φ_w associée aux premiers modes de ligne en fonction de l'abscisse curviligne S , pour $l_c = 23$ m	181
5.13	Illustration du saut de tension dynamique modale T_d aux appuis d'extrémité de la portée de ligne située entre $S_1 \approx 925.9$ m et $S_2 \approx 1258$ m	182
5.14	Tracé de $p_{v,10}^k = f(T_{d,10})$ dans la portée 10 pour le mode de ligne k à 0.140 Hz	183
5.15	Superposition des déformées modales (a) verticale $\Phi_v(S)$ et (b) longitudinale $\Phi_u(S)$ associées au mode de ligne à 0.140 Hz pour différents niveaux de tension dynamique dans la portée 10	183
5.16	Tracé de $p_{v,11}^k = f(T_{d,11})$ dans la portée 11 pour le mode de ligne k à 0.140 Hz	184
5.17	Superposition des déformées modales verticales $\Phi_v(S)$ associées au mode de ligne à 0.140 Hz pour différents niveaux de tension dynamique dans la portée 11 (zoom sur la portée)	184
5.18	Superposition des déformées modales longitudinales $\Phi_u(S)$ associées au mode de ligne à 0.140 Hz pour différents niveaux de tension dynamique dans la portée 11 (zoom sur la portée)	184
5.19	Tracé de $p_{v,12}^k = f(T_{d,12})$ dans la portée 12 pour le mode de ligne k à 0.140 Hz	185
5.20	Superposition des déformées modales (a) longitudinale $\Phi_u(S)$ et (b) verticale $\Phi_v(S)$ associées au mode de ligne à 0.140 Hz pour différents niveau de tension dynamique dans la portée 12	185
5.21	Déformées modales, partie réelle (a) longitudinale Φ_u et (b) verticale Φ_v , associées aux premiers modes de ligne en fonction de l'abscisse curviligne S	186
5.22	Déformées modales, partie imaginaire (a) longitudinale Φ_u et (b) verticale Φ_v , associées aux premiers modes de ligne en fonction de l'abscisse curviligne S	186
5.23	Identification du mode complexe associé au pompage observé sur la ligne des Brévières	187
5.24	Analyse paramétrique des premières fréquences modales sur la ligne de la télécabine des Brévières	188
5.25	Pompage de la ligne de la télécabine des Brévières (document STGM)	190

5.26	Franchissement d'un appui par un véhicule	191
5.27	Évolution quasi-statique de tension du câble à l'appui au franchissement par un véhicule : avec contact véhicule-support (bleu), sans contact véhicule-support (orange)	191
5.28	Superposition (a) des profils de tension et (b) des déformées statiques dans la portée 5 de la ligne des Brévières pour différentes valeurs du paramètre l_c	197
5.29	Appui d'entrée de la portée 5 de la ligne des Brévières : (a) Évolution de la tension statique avec (orange) et sans (bleu) modélisation du contact véhicule-balancier en fonction de l_c , (b) FFT du signal de tension statique associé au défilement de la ligne	198
5.30	Incrément de tension dynamique $T_{d,qs}$ maximal dans les portées de la ligne des Brévières	198
5.31	Portée 5 de la ligne des Brévières : (a) Évolution de la tension dynamique en fonction de l_c , (b) FFT du signal de tension dynamique associé au défilement de la ligne	199
5.32	Les surfaces colorées délimitent les zones d'instabilité de la ligne (a) $ T_{s,2n} = 0.1$, (b) $ T_{s,2n} = 0.2$	206
5.33	Méthodologie pour déterminer l'influence de la vitesse V_0 sur la stabilité du système : la partie de courbe $(\epsilon, \delta) = f(V_0)$ en pointillés donne l'intervalle de vitesse $[V_{olim1}, V_{olim2}]$ pour lesquelles les points de fonctionnement sont instables	208
5.34	(a) Amplitude et (b) Phase de la réponse en fréquence selon le mode de pompage pour une excitation paramétrique $T_{s,2n} = 0.2$ et un terme de forçage nul $T_d = 0$ (bleu : stable, rouge : instable)	212
5.35	(a) Amplitude et (b) Phase de la réponse en fréquence selon le mode de pompage pour une excitation paramétrique $T_{s,2n} = 0.2$ et un terme de forçage extérieur $T_d = 0.05$ (bleu : stable, rouge : instable)	212
5.36	(a) Amplitude et (b) Phase de la réponse en fréquence selon le mode de pompage pour une excitation paramétrique $T_{s,2n} = 0$ et un terme de forçage extérieur $T_d = [0.05; 0.2]$ (bleu : stable, rouge : instable)	213
5.37	Synoptique de la détection pratique du pompage sur une ligne	219
5.38	Critère $\max_i \left(\frac{T_{d,qs}}{\langle T_s \rangle} \right)$ appliqué à la ligne des Brévières	219
5.39	Mode de pompage de la ligne des Brévières calculé en différenciant les chargements : ligne aller chargée et ligne retour vide	223
5.40	Illustration du croisement de câbles sur une installation multicâbles	224
5.41	Évolution quasi-statique du profil de la ligne des Brévières (a) sans correction inertielle à l'avancement, (b) avec correction inertielle à l'avancement	225
5.42	Évolution quasi-statique de la tension de la ligne des Brévières (a) sans correction inertielle à l'avancement, (b) avec correction inertielle à l'avancement	225
5.43	(a) Profil de vitesse imposé à la poulie motrice et (b) Évolution quasi-statique du couple moteur avec correction inertielle	226
5.44	Calcul de l'équilibre statique de la ligne de téléphérique de l'Aiguille du Midi II à l'arrêt.	226
5.45	Calcul de l'équilibre de la ligne du téléphérique de l'Aiguille du Midi II sous l'effet d'un freinage, détection du croisement entre le câble mobile et le câble fixe.	226
5.46	Balancement transversal des véhicules qui accompagne le pompage du câble sur la ligne des Verneys (document Doppelmayer)	228
5.47	Étude paramétrique des fréquences modales autour des fréquences d'excitation (a) $2f_{qs} = 0.20$ Hz à 4.25 m/s, (b) $2f_{qs} = 0.22$ Hz à 4.5 m/s	229
5.48	Étude paramétrique des fréquences modales autour de la fréquence d'excitation $2f_{qs} = 0.24$ Hz à 5 m/s	229
5.49	Identification du mode de pompage de la ligne des Verneys	230
5.50	Pendule sous l'effet d'une excitation paramétrique par mouvement de sa base (d'après [16]).	231
5.51	Étude paramétrique des fréquences modales autour des fréquences d'excitation $3f_{qs} \in [0.18, 0.21]$ Hz	232
5.52	Identification du mode de pompage de la ligne des Bruyères	233
5.53	Synoptique des outils d'analyse dynamique des lignes de transport par câbles	234

A.1	Évolution de la courbure κ en fonction de \hat{s} . Équilibre de la portée de câble pour plusieurs valeurs de ν (d'après [17])	242
F.1	(a) Photographies d'une station de téléphérique et (b) d'une poulie de déviation horizontale (d'après le site internet Doppelmayr Group)	255
F.2	Photographies de téléphérique à va-et-vients (d'après le site internet Doppelmayr Group)	256
F.3	Photographies d'installations à mouvements continus (d'après le site internet Doppelmayr Group)	256
F.4	(a) Schéma des efforts appliqués à un équipage de tension. (b) Photographie d'un équipement de tension hydraulique (d'après une brochure commerciale de Rowema)	256
F.5	(a) Schéma des efforts appliqués à une poulie motrice. (b) Vue de synthèse d'un équipement de station motrice (d'après une brochure commerciale Doppelmayr Group)	257
F.6	Schéma des efforts appliqué à une poulie motrice-tension	257
F.7	(a) Photo d'un sabot d'appui des câbles d'un téléphérique (d'après une brochure Doppelmayr Group). (b) Vue de synthèse d'un appui balancier (d'après une brochure Rowema)	257
G.1	Déplacement dynamique \underline{U}_d entre les configurations statique \mathcal{C}_s et dynamique \mathcal{C}_d	260
I.1	Les quatre premiers modes de flexion du modèle continu du pylône	269
I.2	Matrice de MAC des quatre premiers modes	270
I.3	Appui ponctuel avec contact frottant	271
J.1	Conditions aux limites du domaine de la boucle de câble avec une portée entre $S = L_{0p1}$ et $S = L_{0p2}$ avec deux véhicules en $S = L_{V1}$ et $S = L_{V2}$	273
J.2	Conditions aux limites du domaine de la boucle de câble avec une portée entre $S = L_{0p1}$ et $S = L_{0p2}$, mouvement longitudinal du câble bloqué à la poulie motrice	276
J.3	Conditions aux limites du domaine de la boucle de câble avec une portée entre $S = L_{0p1}$ et $S = L_{0p2}$, mouvement longitudinal du câble autorisé à la poulie motrice (inertie équivalente)	276
M.1	Effet d'amplification de la réponse d'un système à deux degrés de liberté par coïncidence des modes	284

Liste des tableaux

2.1	Valeurs réglementaires des coefficients de frottement pour le calcul de ligne [18]	100
2.2	Valeurs réglementaires des coefficients de frottement pour le calcul de ligne [18]	102
2.3	Valeurs réglementaires des coefficients de frottement pour le calcul de ligne [18]	103
3.1	Données d'entrée de la ligne du télésiège de Coulouvrier	132
3.2	Étude numérique de la convergence du modèle aux différences finies de la ligne du Coulouvrier .	133
3.3	Résultats du calcul statique du câble tracteur du téléphérique de l'Aiguille du Midi II	136
5.1	Données d'entrée du modèle fil rouge : télécabines de Brévières	176
5.2	Critères et seuils d'alerte pour la détection du pompage (niveau 1) : perturbations en tension . .	220
5.3	Critères et seuils d'alerte pour la détection du pompage (niveau 1) : résonance géométrique . . .	220
5.4	Critères et seuils d'alerte pour la détection du pompage (niveau 2) : coïncidence fréquentielle . .	221

Introduction

Contexte

La recherche de nouveaux modes de déplacement est au cœur des problématiques d'aménagement du territoire. Le transport par câbles est utilisé depuis des siècles pour différents usages, bien connu en milieu montagnard, et possède, entre autres, des avantages en terme de capacité de franchissement, d'emprise au sol, d'efficacité énergétique et de coût. Cela en fait une solution alternative afin de répondre à l'évolution des besoins pour une mobilité à la fois fiable, sûre et vertueuse, notamment dans les zones urbaines (Fig.1, Fig.2).

Les lignes de câbles sont l'élément central de ces systèmes, couramment désignés par remontées mécaniques ou transporteurs à câbles aériens. Les câbles assurent à la fois la fonction de traction et de guidage des véhicules. Leur nature flexible conduit à de grands déplacements selon les équilibres statiques occupés et est propice à des réponses dynamiques de fortes amplitudes. Les origines de ces sollicitations sont diverses, qu'elles soient extérieures, par exemple sous l'effet du vent, ou intrinsèques, lors des phases transitoires d'accélération ou de freinage des câbles mobiles. Le déplacement des boucles de câble tracteur, auxquelles sont accrochés les véhicules, introduit une dépendance en temps par une modification de la répartition de la masse et des propriétés de raideur à l'origine de mécanismes d'excitation interne. La présence d'interactions entre le câble, les véhicules, les supports et les systèmes électro-mécaniques, couple les phénomènes dynamiques entre eux. Ainsi, la manifestation du comportement dynamique des lignes de transport par câbles prend des formes diverses et la mise en évidence des mécanismes qui en sont à l'origine se révèle complexe.

D'un point de vue industriel, la dynamique des lignes de transport par câbles est problématique pour des raisons de fiabilité d'exploitation, de fatigue des structures, de nuisance sonore et de confort des usagers. Cela en fait un sujet d'intérêt en phase de conception, pourtant très peu abordé au sein des bureaux d'étude des acteurs techniques du domaine. Plusieurs raisons peuvent expliquer l'absence d'outils et de méthodes déployés chez les industriels pour caractériser la dynamique des lignes de câble. La première est l'ensemble des difficultés auxquelles est confronté le modélisateur face à ces systèmes regroupant quelques uns des ingrédients qui font la complexité d'un problème en mécanique : le caractère non-linéaire, multi-corps, multi-échelle et variable en temps. La deuxième raison est l'approche empirique largement répandue dans une profession où chaque installation est

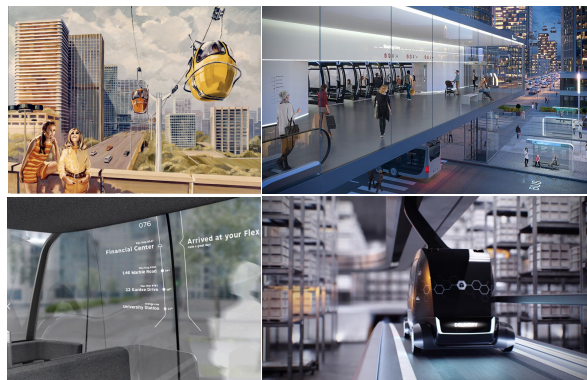


FIGURE 1: De l'utopie des années soixante aux concepts futuristes du XXI^e siècle de l'utilisation urbaine du transport par câbles (d'après documents publicitaires POMA et Doppelmayr Group)



FIGURE 2: Téléphérique Roosevelt Island à New-York, USA (POMA), Téléo à Toulouse, France (POMA) et réseau de télécabine Mi Teleférico à La Paz, Bolivie (Doppelmayr Group)

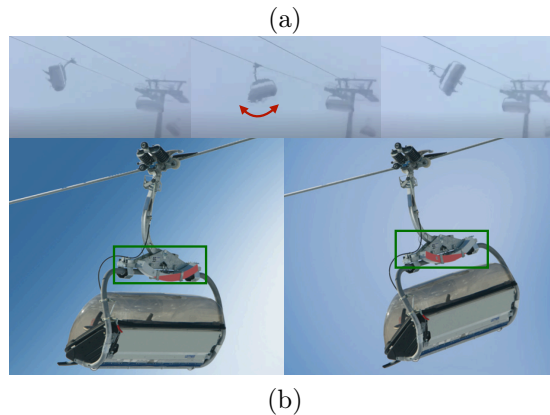


FIGURE 3: (a) Balancement transversal d'un véhicule de télésiège sous l'effet du vent (vidéo YouTube), (b) Amortisseur liquide d'un véhicule de télésiège (brochure commerciale Leitner)

un quasi prototype, sans fabrication en grande série, avec l'usage de coefficients de sécurité confortables d'un point de vue du dimensionnement et qui permettent de s'affranchir d'une optimisation systématique dans le processus de conception.

Quelques auteurs ont proposé un inventaire des manifestations dynamiques sur les lignes de transport par câbles dans des revues techniques spécialisées [19–27], sans qu'un classement ne soit couramment adopté et accepté dans la profession. Une typologie des phénomènes dynamiques est ici proposée en préambule afin d'introduire le contexte et préciser le vocabulaire employé dans ces travaux de thèse :

— **Dynamique sous l'effet d'une excitation extérieure au système**

Le balancement des véhicules soumis à des perturbations extérieures comme le vent est bien connu de l'homme du métier [28–30]. Les cabines ou sièges sont reliés aux câbles par l'intermédiaire d'une suspente en liaison pivot avec l'attache, libérant un degré de liberté en rotation autour d'un axe sensiblement perpendiculaire à la direction du câble et formant ainsi un pendule sensible à des sollicitations extérieures dans la direction longitudinale. Des oscillations transversales des véhicules impliquant la raideur de torsion du câble (Fig.3a) sont observées sous l'effet du vent. Des dispositifs techniques existent pour limiter les amplitudes de balancement des véhicules en présence d'une excitation aéro-dynamique [31–34] (voir Fig.3b). Un couplage aéro-dynamique est également possible avec les lignes de câbles [24,27,35]. Ainsi, un phénomène de galop peut être observé sur les câbles fixes de télécommunication qui sont suspendus entre les appuis intermédiaires et les stations des installations de transport par câbles, plus faiblement tendues que les lignes de câble reliées aux véhicules. Des dispositifs techniques tels que les amortisseurs de type Stockbridge permettent de limiter la réponse dynamique.

— **Dynamique sous l'effet d'un couplage avec le système de contrôle-commande**

Les mécanismes d'entraînement et de mise en tension du câble sont commandés par des automatismes qui contrôlent la vitesse de déplacement des véhicules et l'effort mécanique nécessaire pour tendre la ligne de câble. Des couplages dynamiques néfastes entre les dispositifs électromécaniques et le câble existent [36,37].

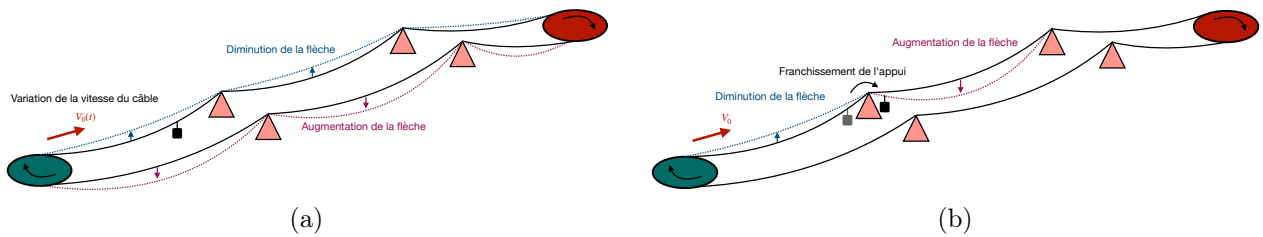


FIGURE 4: (a) Effet d'une variation de vitesse du câble mobile et (b) d'un transfert d'un véhicule d'une portée à une autre par franchissement d'un pylône sur les flèches de câble



FIGURE 5: Balancement d'une cabine de téléphérique au franchissement d'un appui (d'après [1])

Par exemple, l'entraînement par une poulie motrice voilée, dont l'irrégularité est à l'origine de discontinuité de contact avec les mâchoires de frein, se répercute par des perturbations dynamiques dans le câble.

Des réglages inappropriés de la boucle de régulation de contrôle en vitesse de la chaîne cinématique, généralement de type Proportionnel Intégral Dérivé (correcteur PID), sont susceptibles d'amplifier les effets de dynamique transitoire et en régime établi.

La dynamique des contrepoids est également problématique lors des phases transitoires, avec de grands déplacements et le risque d'atteindre les butées [38, 39].

— Dynamique transitoire sous l'effet d'une excitation interne au système

De façon intrinsèque au fonctionnement des lignes de transport par câbles, des perturbations internes sont causées par les variations de la vitesse du câble tracteur [23, 24, 38]. Le mouvement accéléré du câble induit des variations de sa tension qui se répercutent en des modifications de sa position verticale (ou de sa flèche, Fig.4a). Les variations de vitesse sont commandées par la loi de mouvement donnée au dispositif d'entraînement, composé d'au moins une poulie motrice animée par un ensemble de motorisation régulé de façon standard en vitesse.

L'homme du métier est familier avec les fortes variations de flèche de la boucle de câble tracteur générées sur les téléphériques à longues portées lors des phases d'accélération ou de freinage. Ces mouvements sont peu maîtrisés en amplitude, en particulier en cas de freinage d'urgence, ce qui est problématique sur les installations multicâbles avec des risques de croisement avec les câbles fixes, tel que souligné dans le rapport du BEA-TT [40] relatant un incident qui a affecté la ligne du Panoramic Mont-Blanc à Chamonix (France). Au cours de leur déplacement le long de la ligne du câble, les véhicules franchissent les appuis intermédiaires qui assurent le transfert d'une portée de câble à une autre. Le passage de ces singularités introduit des perturbations dynamiques, sous la forme d'un à-coup en effort généré lors du transfert de la charge, à l'origine de la création d'ondes dans les câbles [24, 25] (Fig.4b). Au cours du franchissement, cette perturbation peut s'accompagner d'un balancement longitudinal du véhicule causé par la variation brutale de la trajectoire (Fig.5). Des procédés de contrôle de la vitesse de franchissement existent sur les téléphériques pour limiter ces oscillations du véhicule [1, 41–43]. Lorsque le véhicule se rapproche du pylône ou de la station adjacente, l'onde produite est confinée sur une distance de longueur décroissante et s'accompagne d'une augmentation de la fréquence des oscillations (concentration de l'énergie vibratoire) tandis que l'onde tend vers des oscillations stationnaires (non propagative). Ce phénomène, aussi qualifié de fouet du câble, est amplifié sur les installations multicâbles à véhicule à

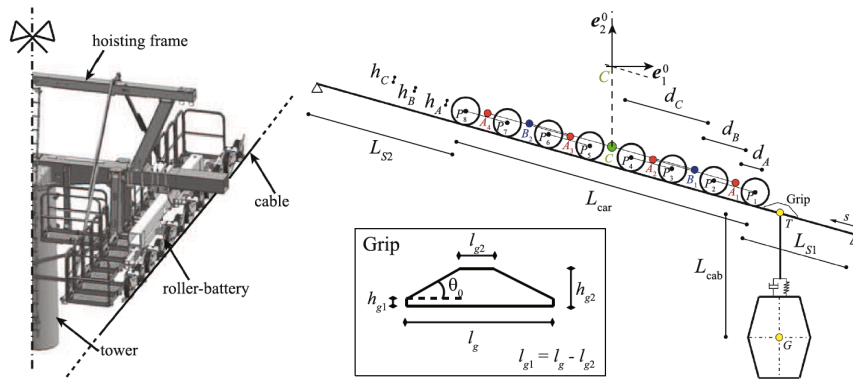


FIGURE 6: Balancier et interaction avec l'attache d'un véhicule (d'après [2])

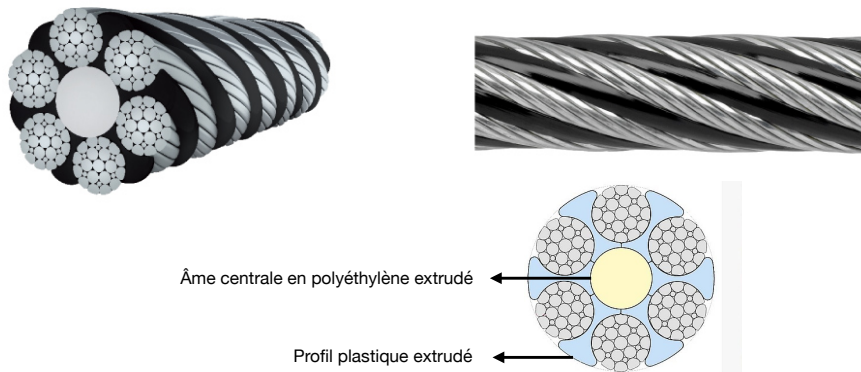


FIGURE 7: Câble à profil circulaire avec inserts plastiques (d'après document Fatzer)

va-et-vients [44]. Une problématique se pose avec le risque de contact entre le câble en oscillation et la structure fixe, déclenchant un arrêt d'urgence de l'installation.

Avec l'augmentation de la vitesse sur les installations monocâbles (jusqu'à 7 m/s actuellement) et des masses des véhicules, le passage des véhicules sur les pylônes provoque une dynamique jusqu'alors inexistante liée à l'accélération centripète et génératrice d'oscillations dans les portées adjacentes lorsque le véhicule quitte l'appui du balancier et " retombe " dans la portée suivante. Le contact entre l'attache et les galets de roulement des balanciers est également à l'origine de chocs à plus hautes fréquences à l'origine de phénomènes de fatigues dans les pylônes, de bruit et de vibration parasites dans les véhicules, source d'inconfort pour les utilisateurs [2, 45] (Fig. 6).

— Dynamique périodique sous l'effet d'une excitation interne au système

Le roulement du câble mobile sur les poulies et les galets des balanciers, qui en assurent le support et le guidage, est le siège de vibrations causées par l'irrégularité de la surface du câble qui est toronnée. Ces vibrations sont à l'origine de problématiques de bruit dans l'environnement des installations, avec un couplage vibro-acoustique des structures porteuses tels que les pylônes, ainsi que des phénomènes de fatigue et de fissure de soudures. L'usage de câbles possédant un profil plus régulier par l'ajout d'inserts synthétiques entre les torons en acier montre une réduction des désagréments dynamiques (Fig. 1.14).

Sur les installations à mouvement unidirectionnel continu, le déplacement des charges accrochées au câble en mouvement à vitesse constante, modifie les propriétés dynamiques du système de façon périodique [24]. Sur certaines lignes, l'homme du métier est confronté à de fortes oscillations verticale du câble qui se déclenchent brutalement pour des configurations de chargement, de vitesse, de tension, ou d'espacement entre véhicules bien précises. Ces oscillations peuvent être couplées avec un balancement longitudinal des véhicules et sont généralement localisées dans une portée de câble entre deux pylônes. Le phénomène est qualifié de pompage (Fig. 8). Les retours d'expérience soulèvent des configurations particulièrement propices au déclenchement du pompage, sensible dans les grandes portées à plat avec une faible tension. L'approche empirique du problème de pompage conduit à des solutions parfois lourdes, comme l'ajout de pylônes pour tenter d'endiguer le phénomène. En dépit de tentatives de travaux de recherche pour

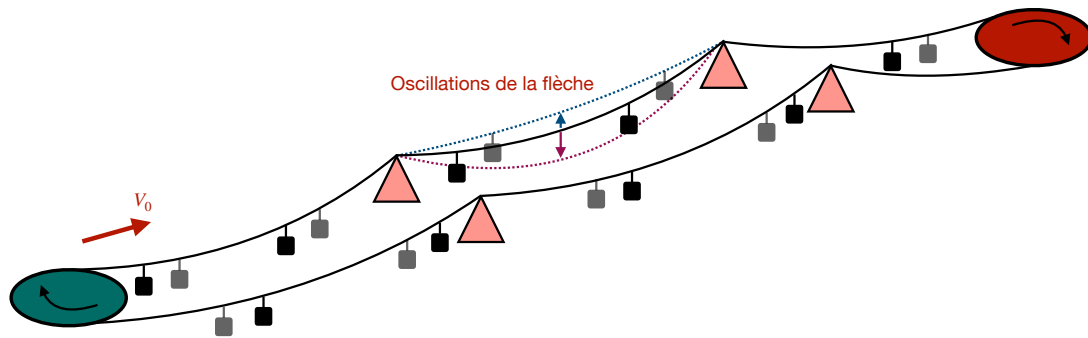


FIGURE 8: Phénomène de pompage

apporter une explication au phénomène de pompage [46–49], la compréhension du phénomène demeure partielle et les recherches n’ont pas débouché sur une méthodologie applicable dans un contexte industriel. Par exemple, les méthodes d’analyse proposées dans [46] souffrent d’un manque de détail, sur les modèles utilisés et les hypothèses retenues, et d’explications précises sur les mécanismes à l’œuvre pour expliquer le pompage.

Objectifs industriels et axes de recherche

L’état des pratiques de la profession montre des limites pour expliquer, anticiper et limiter les phénomènes dynamiques de type transitoire, affectant les câbles mobiles lors des variations de vitesse, et de pompage, survenant lorsque le câble circule à vitesse stabilisée. De façon plus générale, l’approche empirique et l’absence de modèle de calcul de référence des installations de transport par câbles ne permet pas l’étude complète et la compréhension approfondie des oscillations affectant les lignes de câbles. Ce constat est d’autant plus vrai dans un contexte d’utilisation intensive de ce moyen de transport dans un environnement urbanisé où l’évolution de la technologie conduit à des vitesses de déplacement et à des charges transportées toujours plus élevées. De plus, la tendance est à la recherche de structures conçues au plus juste vis-à-vis des enjeux environnementaux et sociétaux.

Face à cet état des lieux, l’entreprise DCSA, spécialisée dans le conseil en ingénierie et la maîtrise d’œuvre du transport par câbles, a engagé des travaux de recherche à travers le financement d’une thèse CIFRE. En abordant le problème de dynamique des lignes de transport par câbles, la volonté est d’acquérir une meilleure maîtrise des phénomènes oscillatoires durant les phases d’études des installations neuves et de développer une capacité de diagnostic des structures existantes. Plus particulièrement, le pompage affectant les installations monocâbles à mouvement continu et les régimes transitoires des installations avec de grandes portées typiques des installations multicâbles (téléphérique) sont ciblés.

La démarche des travaux de thèse cible deux objectifs industriels :

— **Objectif 1**

L’apport d’**éléments de compréhension** des causes des phénomènes dynamiques observés, par une démarche de **modélisation et de simulation** du comportement mécanique du système de transport par câbles considéré dans son intégralité, prenant en compte les interactions entre les sous-structures.

— **Objectif 2**

Le **développement d’outils de conception** à destination du bureau d’étude, pour anticiper le comportement dynamique des installations en phase d’étude et guider les choix de conception, utilisables dans un environnement industriel en terme de temps de calcul et de capacité de stockage.

Les principaux axes de recherche retenus pour répondre à ces objectifs, associés à des enjeux scientifiques multiples, sont :

— **Axe 1**

La définition d’un **modèle de câble** pertinent vis-à-vis de l’application visée, parmi les nombreux modèles disponibles dans la littérature consacrée aux milieux élancés, et la compréhension de la portée sur les phénomènes physiques pouvant être caractérisés.

L’Axe 1 répond au besoin, à la fois industriel et scientifique, de préciser et maîtriser les hypothèses du modèle mécanique du câble.

— **Axe 2**

La formulation et la résolution du **problème statique** de l’équilibre d’un assemblage d’éléments de câbles, en présence d’effets géométriques non-linéaires, de contact frottant sur des supports intermédiaires et de chargements ponctuels. En particulier, le choix d’une méthode analytique, numérique ou hybride analytico-numérique doit être formulé et éclairé par l’état de l’art.

L’Axe 2 répond au besoin industriel d’automatiser et de généraliser la démarche de calcul de ligne statique, afin de gagner en robustesse vis-à-vis des conditions aux limites et permettre une évolution du code avec une conception modulaire. Les méthodes de calcul de ligne développées en interne par les bureaux d’étude et des méthodes sont basées sur des méthodes de tirs, très spécifiques à l’application.

— **Axe 3**

La formulation et la résolution du **problème dynamique** par l’étude des vibrations linéaires de l’assemblage des éléments de câble, basée sur la définition des **modes de vibration** autour de l’équilibre statique calculé dans l’Axe 2.

En l’absence d’une caractérisation dynamique globale des lignes de transport par câbles, l’Axe 3 apporte des éléments d’analyse modale appliquée à une boucle de câble complète, à l’arrêt et en translation.

— **Axe 4**

La mise en place d’une **analyse modale combinée à un calcul quasi-statique**, par introduction d’un paramètre d’évolution qui traduit les modifications des propriétés dynamiques au cours du temps selon un modèle équivalent.

En l’absence de modèles, l’Axe 4 met en évidence et quantifie les sources d’excitations dynamiques internes aux lignes de transports par câbles.

— **Axe 5**

La **réduction du modèle dynamique** sur un nombre limité de modes afin de manipuler des équations à faible nombre de degrés de liberté. Une fois réduit, une **étude non-linéaire** du problème est menée avec l’ajout des effets géométriques activés en grands déplacements pour détecter les points de fonctionnement susceptibles de produire des oscillations indésirables sur le système.

En synthétisant les informations apportées par les Axes 3 et 4, l’Axe 5 répond au besoin industriel de modéliser les mécanismes à l’origine des oscillations observées et de guider le concepteur pour éviter les situations responsables de fortes amplitudes de vibration de la ligne.

Organisation du mémoire et contributions

Le mémoire s’articule en cinq chapitres qui rapportent les développements engagés durant les travaux de thèse.

Le chapitre 1 est une revue de la bibliographie consacrée aux modèles de câbles et aux méthodes de résolution associées pour l’étude de leurs comportements en régime statique et dynamique. Un panorama des applications au transport par câbles est proposé. Le but est de mettre en évidence les qualités et les limites des modèles au regard de la spécificité de l’application visée pour justifier le besoin de développement dans le chapitre de modélisation. La **première contribution** est la délimitation d’un cadre d’étude adapté aux travaux de thèse pour retenir un modèle pertinent afin de répondre au besoin de description et respecter les contraintes en terme de complexité de calcul.

Le chapitre 2 met en place les modèles statiques de câble et des sous-structures du système de transport par câbles. Premièrement, les équations non-linéaires d’équilibre statique d’un élément de câble modélisé comme un fil sont écrites. Deuxièmement, les éléments de câble sont couplés aux autres composants du système selon une stratégie modulaire. La **deuxième contribution** est l’élaboration d’un modèle de fil valide dans le cas des grands déplacements statiques autour d’une configuration de référence quelconque. La **troisième contribution** est la correction du modèle de fil par l’ajout de terme de raideur en flexion. La **quatrième contribution** est une stratégie d’assemblage des éléments de câbles avec les appuis et les véhicules pour obtenir le modèle statique

d'une boucle de câble complète.

Le chapitre 3 rapporte les résultats de la mise en œuvre des méthodes de calcul de l'équilibre statique d'un câble selon plusieurs configurations. La démarche est incrémentale, à partir de modèles simples d'une seule portée jusqu'à l'assemblage complet d'une ligne de transport par câbles, monocâble et multicâbles. L'objectif est de comprendre ce qu'impliquent les hypothèses formulées au chapitre 2 sur les résultats statiques. Le **développement d'un code pour automatiser le calcul statique** d'une ligne de transport par câbles constitue un outil pratique à destination du bureau d'études de l'entreprise.

Le chapitre 4 met en place les modèles dynamiques de câble et des sous-structures du système de transport par câbles, avec un traitement analytique. Premièrement, les équations non-linéaires qui régissent le mouvement d'un élément de câble sont écrites puis linéarisées pour accéder aux déformées analytique des modes de vibration. Deuxièmement, les éléments de câble sont couplés aux autres composants du système en spécifiant les conditions aux bords. La **cinquième contribution** est l'élaboration d'un modèle qui considère le couplage complet entre la dynamique verticale et longitudinale du câble. La **sixième contribution** est la mise en translation d'un élément de câble par l'ajout de termes convectifs additionnels dans les équations de la dynamique. La **septième contribution** est une stratégie d'assemblage basée sur une méthode analytico-numérique pour obtenir le modèle d'une boucle de câble complète.

Le chapitre 5 constitue l'étude dynamique d'une ligne de transport par câbles. La **huitième contribution** est la définition et la mise en place d'une méthode de calcul des modes de vibration de l'assemblage complet des éléments de câble en interaction avec les véhicules et les appuis, qui rend compte des effets non-linéaires par une correction statique et des évolutions dans le temps au cours du défilement de la ligne par une étude paramétrique équivalente. La **neuvième contribution** est l'interprétation du phénomène de pompage à partir d'un modèle réduit sur un mode, avec l'identification des mécanismes à l'origine d'une sollicitation dynamique interne et l'analyse du comportement instable, résultant d'une excitation paramétrique par le défilement de la ligne. Ces éléments ouvrent la perspective d'une détection du pompage. La **dixième contribution** est une méthode pratique de détection des mouvements de la ligne au cours d'un freinage ou d'une accélération, par un calcul prenant en compte les efforts statiques équivalents dus aux effets inertiels. Le **développement d'un code pour automatiser le calcul dynamique** d'une ligne de transport par câbles constitue un outil pratique à destination du bureau d'études de l'entreprise. Il consiste à réaliser le calcul des modes de vibration du système et le calcul de l'équilibre de la ligne sous l'effet de la translation stationnaire ou instationnaire du câble.

En compléments de ces chapitres, deux jeux d'annexes sont proposés. Un premier groupe d'annexes vise à apporter des éléments complémentaires de développements, tandis que les annexes de **production scientifique** rassemble les publications réalisées durant la thèse.

Guide de lecture

Le lecteur pourra, dans un premier temps, aborder le mémoire par les chapitres qui constituent le fil rouge des travaux de thèse :

- Le chapitre 1, qui passe en revue l'état de l'art scientifique et technique, consacré de façon large aux milieux élargis puis restreint au contexte des lignes de transport par câble qui sont l'objets de l'application de la thèse,
- Le chapitre 3, qui présente les résultats de l'analyse statique appliquée à des modèles de complexité croissante, d'abord sur le cas d'une portée puis généralisé à un assemblage d'une ligne de transport par câbles complète,
- Le chapitre 5, qui présente les différents résultats de l'analyse dynamique, illustrés par le cas d'application à un système réel (télécabine des Brévières).

Dans les chapitres 2 et 4, le lecteur trouvera, dans un second temps, le détail des équations statique et dynamique du câble, des véhicules et des appuis. Ces modèles servent à élaborer le modèle du système assemblé, obtenu par couplage des différents éléments entre-eux.

Les annexes ne sont pas essentielles à la compréhension du corps du texte. Elles visent à apporter des éléments de contexte et des précisions sur les développements autour de certains points abordés dans les chapitres.

Les productions scientifiques sont regroupées en fin de mémoire, avec un article en cours d'évaluation, un article/acte de conférence et un acte de conférence publiés. Ces productions constituent les contributions scientifiques de la thèse qui ont déjà fait l'objet d'une évaluation par les pairs et ne sont donc pas re-détaillées dans le corps du texte. Elles sont appelées dans les chapitres, accompagnées d'une brève synthèse pour les positionner vis-à-vis du propos général.

Chapitre 1

Modélisations et calculs du comportement mécanique des structures à câbles : revue bibliographique.

Introduction du chapitre

La **description géométrique** est la première étape du processus de modélisation de l'objet d'étude [50, 51]. Les liens entre la mécanique des milieux continus et la géométrie se dévoilent par exemple de façon insoupçonnée dans des applications de la vie quotidienne. Le ferronnier-designer français Jean Prouvé l'a démontré par ses réalisations dans lesquelles la forme des pièces de liaison, tels que les piètements de table ou de chaise, illustre la propagation des forces et les rapports statiques à la manière d'un ouvrage d'art (Fig.1.1) : *"Un objet se conçoit rationnellement en faisant appel à la matière là où l'effort la sollicite. Le piètement d'un meuble ou la structure d'un bâtiment témoigne visuellement des contraintes à l'œuvre, créant cette esthétique propre à l'œuvre du constructeur nancéien [Jean Prouvé]. "* [52].

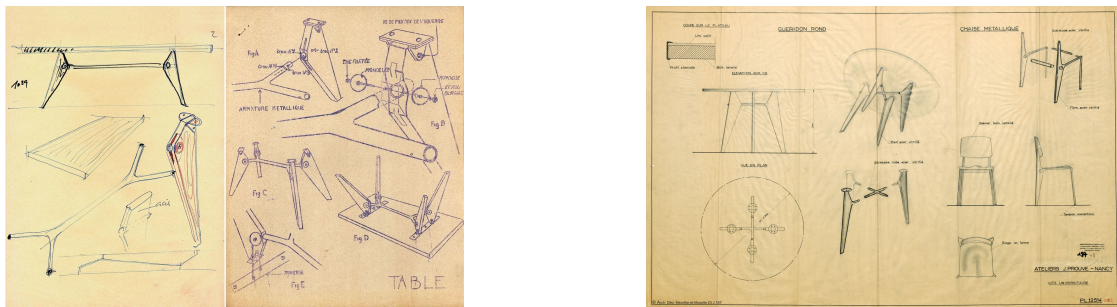


FIGURE 1.1: Plans de mobilier dessinés par Jean Prouvé

La relation entre les contraintes mécaniques et la géométrie est par exemple au centre des problématiques d'optimisation topologique de type *density-based topology optimization* [53]. L'objectif est de déterminer où mettre de la matière dans une pièce soumise à des efforts imposés connus, de telle sorte qu'elle soit en capacité de résister, tout en minimisant sa masse par résolution d'un problème d'optimisation d'une fonction coût sous contraintes (Fig.1.2).

Les **milieux minces** sont des structures dont au moins une dimension est petite devant une autre. Les **milieux 1D**, dits **élancés** (Fig.1.3.a), possèdent une section de grandeur caractéristique Φ petite devant la longueur L ,

$$\Phi \ll L.$$

Ils se distinguent d'un point de vue géométrique des **milieux 2D** (Fig.1.3.b) pour lesquels l'épaisseur h est

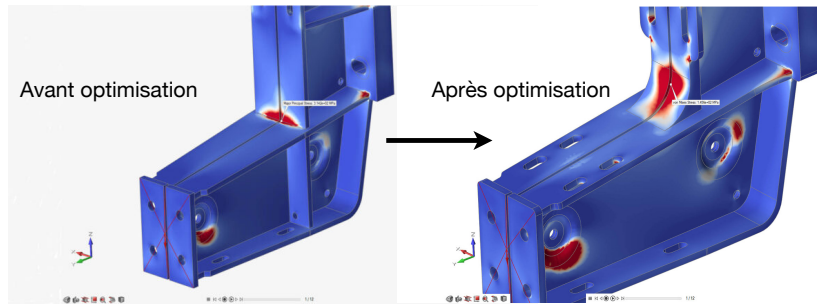


FIGURE 1.2: Optimisation topologique d'une pièce support de station de transport par câble (images tirées du site internet d'Altair Engineering)

petite devant les deux autres dimensions de largeur l et longueur L ,

$$h \ll l, \quad h \ll L.$$

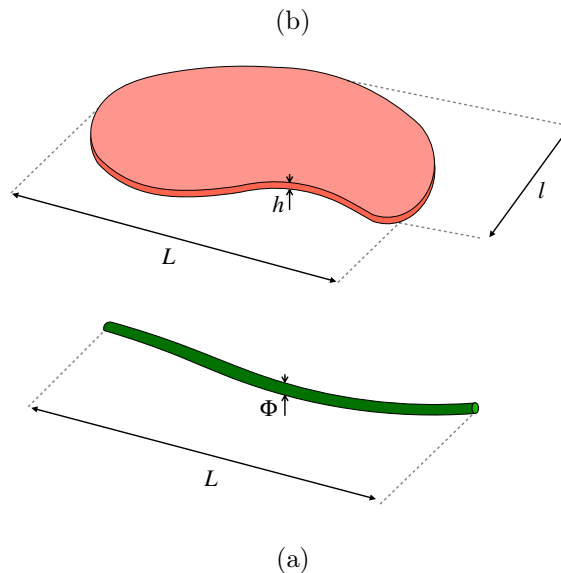


FIGURE 1.3: Exemple de milieux minces (a) 1D, (b) 2D

Une autre distinction est faite sur la base du comportement mécanique entre les **milieux fins ou tendus** (Fig.1.4.a), travaillant principalement en **tension** et pour lesquels Φ ou h est très petit (fil, corde, membrane), et les milieux **épais** (Fig.1.4.b), avec une raideur en **flexion** prépondérante (plaque, coque, poutre, arche). Ces différentes catégories de structures sont au cœur du cadre d'étude de la mécanique des milieux continus et font l'objet de nombreux modèles compte tenu de la richesse des applications possibles.

Les **structures à câbles** appartiennent à la famille des milieux minces à une dimension. Les câbles sont des éléments élancés dont la faible raideur en flexion laisse majoritairement place à un travail à la traction. Cette caractéristique notable leur confère un comportement mécanique qui trouve, au-delà des systèmes de transport par câbles aériens conventionnels, une utilisation dans le génie civil avec les ponts (tirants, haubans), les grues de construction, les blondins de chantier, dans l'architecture [54] (structure câble-membrane de toitures, Fig.1.5), en robotique (caméras Skycam [55]), en aérospatial (câbles de commande, supports d'antennes), pour le transport de l'énergie (lignes électriques, câbles sous-marins), pour l'ingénierie maritime (ancrages de plateforme offshore, filets, grues portuaires), pour les transports guidés (ascenseurs, caténaires ferroviaires [11]), pour l'automobile (câblage électrique [56]) ou encore dans l'exploitation forestière (blondins forestiers [57–59]).

Bien qu'objet de nombreuses recherches compte tenu de la diversité des applications possibles, il n'existe pas de cadre d'étude bien établi dans la communauté scientifique qui s'intéresse aux câbles, tout comme il n'y a pas de définition unique du milieu câble qui soit admise.

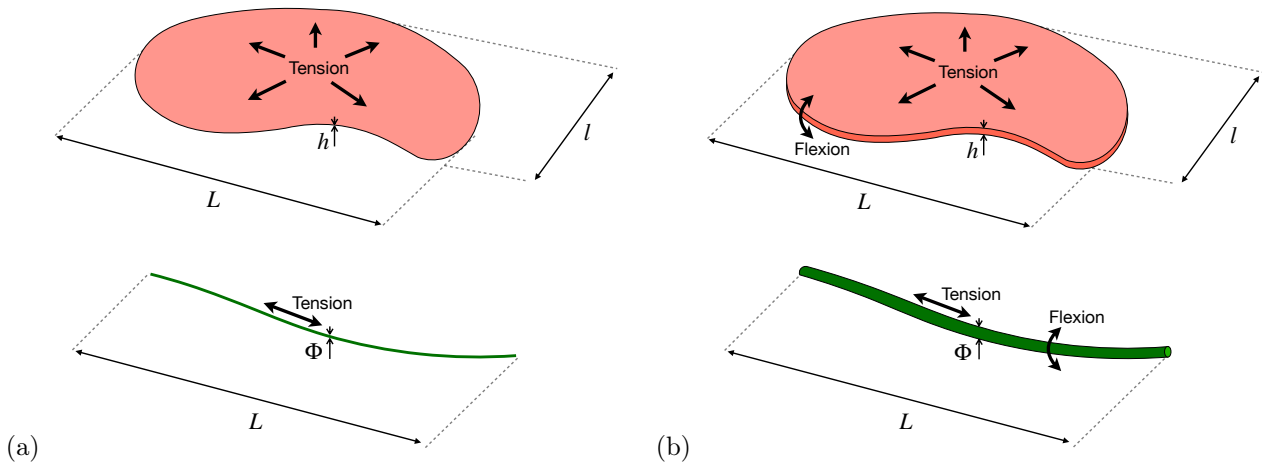


FIGURE 1.4: Exemples de (a) milieu fin 1D (fil) et 2D (membrane), (b) milieu épais 1D (poutre) et 2D (plaque)

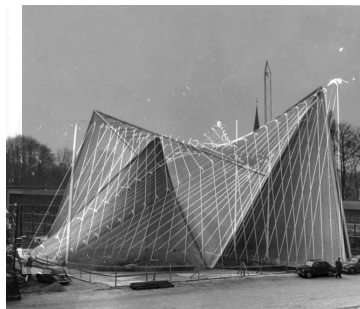


FIGURE 1.5: Pavillon Philips par Le Corbusier et I. Xenakis, constitué de voiles hyperboles soutenues par un réseau de câbles, exposition internationale de Bruxelles, 1958 (montage à partir d'images tirées de [3])

Ainsi, une des principales difficultés à laquelle le lecteur est confronté lors du passage en revue de l'état de l'art est l'identification des hypothèses sous-jacentes, parmi la multiplicité de modèles, et de l'influence de ces choix de modélisation sur les phénomènes physiques dont il peut être rendu compte. Fort de ce constat, la revue bibliographique est organisée de manière à mettre en exergue les différentes façons d'approcher un problème impliquant des câbles, à la fois en statique et dynamique, pour dégager une méthodologie dans la perspective d'établir un modèle et une stratégie de calcul appropriés aux transporteurs à câbles aériens. Afin de valoriser l'état de l'art existant et aboutir à un modèle répondant aux attentes de ces travaux, l'étude de la bibliographie des câbles est volontairement étendue aux problèmes impliquant un [60] ou plusieurs câbles [61], intégrés à un système [11] ou non, seuls ou assemblés [62], fixes [9] ou mobiles [63]. Un premier **cadre général** d'étude mécanique est défini pour le câble dans la section 1.1. Les **modèles et outils de calcul statique** des structures à câbles fixes, pour lesquelles au moins une extrémité est accrochée au bâti ou à tout autre support fixe, sont abordés dans la section 1.2. Les **modèles et outils de calcul dynamique** de structures à câbles fixes, ou mobiles lorsque les extrémités sont le siège de transfert de matière entrante et sortante, sont abordés en 1.3. Tout au long de la revue bibliographique, les méthodes de calculs analytiques, semi-analytiques ou numériques sont distinguées, tandis qu'une attention particulière est portée aux applications pour les lignes de transport par câbles.

1.1 Définition du cadre de travail

Le but du travail présenté dans ce mémoire est de proposer un outil d'ingénierie pour la compréhension et le dimensionnement des phénomènes mécaniques affectant les lignes de transport par câbles, en s'inscrivant dans une démarche prédictive et d'optimisation. En l'absence de modèle de référence dans la profession et étant donné l'état de l'art scientifique, il est tout d'abord nécessaire de préciser ce qui sera désigné par câble dans ces travaux, en délimitant le cadre de l'étude. L'objectif est de reproduire le comportement mécanique des lignes de transport

par câbles tout en adoptant un niveau de détail compatible avec les phénomènes physiques à caractériser et le niveau de complexité de calculs pour une utilisation en bureau d'études.

1.1.1 L'objet *câble*

Tout d'abord, la distinction est faite entre le câble comme composant technologique et le modèle de câble, qui est la représentation mathématique formulée sous certaines hypothèses du comportement mécanique d'un câble. Ainsi, le câble désigne le milieu matériel réel et le modèle de câble sa représentation théorique sur laquelle seront appliqués les outils de résolution.

Le câble est un milieu matériel clé au cœur de la problématique du comportement dynamique des systèmes de transport par câbles aériens (Fig. 1.6). Il assure le mouvement et établit le lien entre les différents éléments du système, en jouant un rôle de support et d'entraînement des charges qu'il transporte ou qui circulent dessus. Avec l'évolution de la technologie, la masse du câble devient prépondérante par rapport aux autres masses en jeux dans le mouvement telles que les poulies ou les véhicules. C'est son comportement mécanique, couplé à celui des véhicules et des poulies, qui régit au premier ordre les états statique et dynamique du système global.



(a)



(b)

FIGURE 1.6: (a) Nappe de câbles d'un téléphérique à Rio de Janeiro, Brésil (image libre de droits, source Photo Stock Editor). (b) Vue en coupe de la composition interne d'un câble avec l'âme centrale et les torons enroulés autour (image tirée du catalogue Teufelberger)

D'un point de vue technique, le câble est un milieu élané dont une dimension est beaucoup plus grande au regard des deux autres. Il est formé d'un assemblage de fils d'aciers réunis en **torons**, eux mêmes organisés entre eux autour d'une **âme** pour former l'ensemble appelé câble (Fig. 1.7).

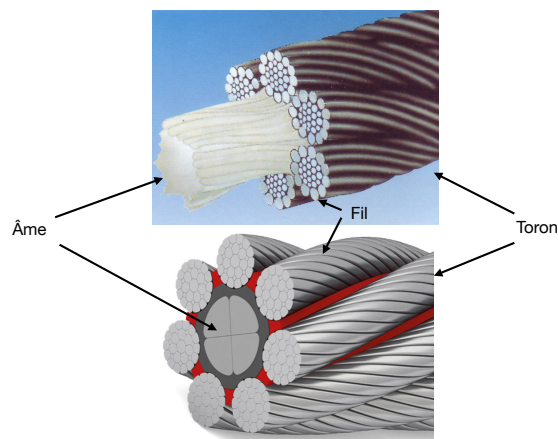


FIGURE 1.7: Éléments d'un câble (d'après documents Fatzer et Teufelberger)

L'objectif des travaux présents n'est pas l'étude approfondie du comportement interne du câble en terme de contrainte ou de déformation dans chacune de ses sections métalliques mais l'accès à son comportement global à l'échelle du système complet. Une fois confronté à la littérature disponible autour des structures élanées et

avant toute investigation supplémentaire, il est nécessaire de fixer les premières hypothèses pour jalonner un cadre d'étude général des modèles en cohérence avec les objectifs fixés. En effet, le câble est l'élément au cœur des systèmes ciblés par les travaux et autour duquel se concentre une grande partie des efforts de modélisation. Le choix du modèle diffère selon qu'il soit nécessaire de rentrer dans le détail de la composition des matériaux, d'étudier en détail la répartition des champs de contrainte internes, de s'intéresser à l'interaction introduite par le contact frottant entre les fils qui composent les torons du câble ou que le besoin exprimé se positionne à une échelle plus macroscopique pour l'étude des mouvements globaux d'une ligne de câble.

À ce stade préliminaire des travaux, et sans préjuger des résultats obtenus par la suite, et qui nécessiteront éventuellement d'adapter certaines hypothèses, le niveau de détail attendu ne justifie ni la mise en place d'une modélisation 3D fine de la structure interne, ni l'étude du contact frottant entre les fils et les torons du câble [64–66]. En revanche, les travaux menés pour des applications au dimensionnement des câbles d'ascenseur [67, 68], des renforts de pneumatiques automobiles (Michelin [69]) ou l'industrie offshore (Ifremer [4, 70]) nécessitent la mise en place de modèles détaillés permettant l'accès aux états de contrainte locaux (Fig. 1.8). Chaque toron composant le câble est représenté par une poutre [71], avec une prise en compte des phénomènes non-linéaires comme le comportement élastoplastique ou le contact frottant sur des obstacles tels que les poulies [4, 70, 72], sous des chargements variés en régime quasi-statique (tension axiale, flexion). Les simulations sont réalisées par éléments finis avec des logiciels développés spécifiquement pour cette catégorie de problèmes [67, 71] ou avec un logiciel commercial pour l'étude de l'interaction du câble avec une matrice en caoutchouc [69]. Des méthodes de réduction de modèle sont mises en œuvre pour diminuer les coûts de calcul qui sont élevés pour des longueurs importantes de câbles, en tirant profit du caractère périodique spatial du système, comme la *Discrete Empirical Interpolation Method* (DEIM) permettant de diminuer d'un facteur quatre le coût de calcul initial [67].

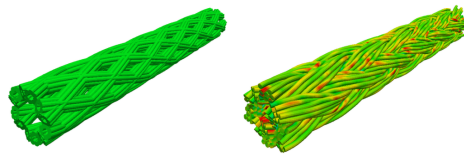


FIGURE 1.8: Modèle détaillé d'un câble toronné et champ de contrainte associé (d'après [4])

Ici, une approche incrémentale dans la complexité de la modélisation est privilégiée. Un modèle de câble simple sera enrichi pour aboutir à un modèle plus évolué, afin d'analyser l'influence des hypothèses retenues sur les résultats d'intérêts pour l'application visée et définir des modèles adaptés selon les configurations d'étude. La vision adoptée dans la suite considérera le câble comme une ligne déterminée par la donnée de ses points et de son orientation, en tirant parti du fait que deux de ses dimensions sont petites devant la troisième. Son étude se place ainsi dans le cadre des milieux continus curvilignes qui s'intéresse aux objets à une dimension plongés dans un espace à deux ou trois dimensions.

Cette vision linéique du câble restreint les modèles possibles en excluant par exemple l'étude approfondie des phénomènes de glissement des fils, de gauchissement et de rétrécissement des sections (effet de Poisson). La question est alors de savoir quels phénomènes physiques, de comportement mécanique à la **traction-compression, cisaillement, flexion et torsion**, sont à retenir dans le modèle curviligne sur lequel reposeront les modèles de câble utilisés dans ces travaux (Fig.1.9).

Ainsi, la revue bibliographique proposée ici n'aborde pas directement les **modèles de poutres en grandes rotations** qui sont les plus complets en terme de description cinématique pour les milieux élancés. Les modèles 3D non-linéaires de poutres homogénéisées peuvent se classer en deux grandes familles [73] :

- Les modèles basés sur l'écriture naturelle de la mécanique des milieux continus tridimensionnels selon les hypothèses de Timoshenko (**modèles de Reissner-Simo** [74]) ou d'Euler-Bernouilli (**modèles de Kirchhoff** [75]).
- Les **modèles de Cosserat** [76, 77] pour lesquelles les équations sont écrites en postulant directement la loi de comportement et dont la cinématique est décrite par le mouvement des sections droites.

Il est possible de démontrer que les deux familles aboutissent en fait aux mêmes modèles : seules les applications et les stratégies de résolutions diffèrent. C'est cette catégorie de modèles **géométriquement exacts** qui est

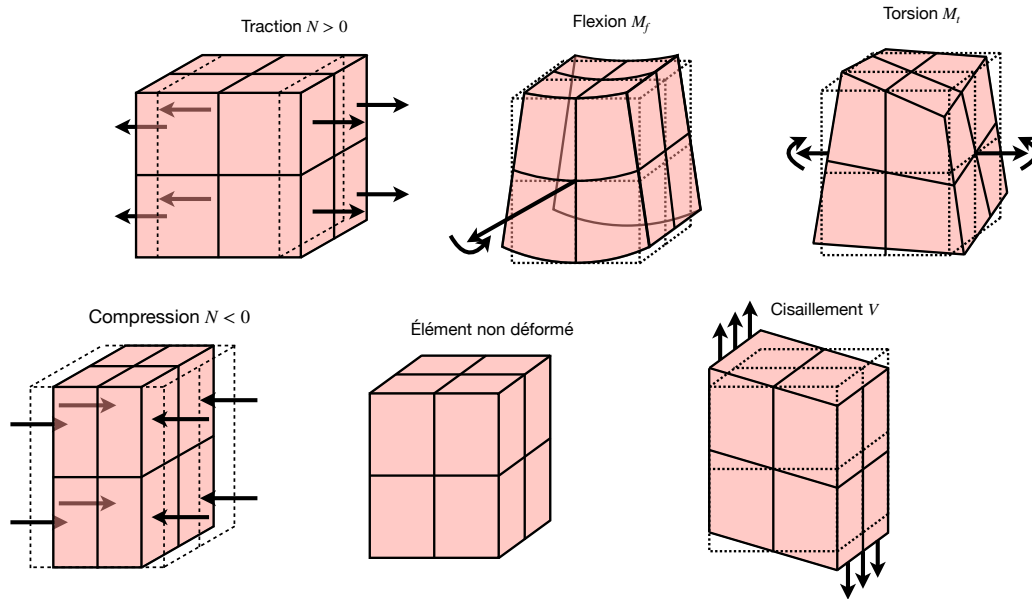


FIGURE 1.9: Les différents modes de sollicitation dans un milieu curviligne

utilisé pour des applications industrielles de modélisation des câblages électriques utilisés dans l'industrie automobile [56]. Un modèle de poutre 3D de Reissner-Simo qui tient compte du cisaillement est mis en place pour l'étude du comportement non-linéaire en quasi-statique, avec une paramétrisation par les quaternions et une discrétisation aux éléments finis. Destiné au même type d'application pour l'automobile, le logiciel *Industrial Path Solution* (IPS), développé depuis 2005 au centre de recherche allemand Fraunhofer-ITWM, utilise des modèles de poutre équivalents à ceux de Kirchoff sans cisaillement, avec une formulation de Cosserat discrétisée par différences finies [78–81]. Cette approche est particulièrement adaptée aux cas pour lesquels les principaux modes de déformations sont en flexion et torsion accompagnés d'une faible extensibilité.

Plusieurs approches peuvent être mises en œuvre pour justifier la pertinence d'un modèle curviligne plutôt qu'un autre pour les câbles d'aciers utilisés sur les transporteurs à câbles aériens. Une remise à l'échelle et un développement à différents ordres est une technique qui, à partir d'un modèle complet 3D, permet de juger de l'influence de chacun des degrés de liberté cinématiques et de leurs couplages sur le comportement mécanique d'une poutre. La mise en place d'une telle démarche aboutirait à un modèle adapté aux caractéristiques du milieu câble comme le suggère les travaux menés sur la création de modèles réduits équivalents condensés à 1D et qui prennent en compte les contributions non-linéaires de l'allongement, de la flexion et de la torsion en 3D [82,83]. C'est cependant un formalisme lourd qui justifierait à lui-seul des développements dédiés conséquents. Il est plutôt choisi ici, en cohérence avec les objectifs finaux qui sont d'obtenir des résultats à une échelle plus globale correspondant à une vision systémique, de replacer directement l'étude du câble à celle d'un **milieu curviligne** dans un cas général, puis de le dégrader vers le modèle retenu en justifiant les hypothèses formulées à chaque étape par la connaissance de l'état de l'art scientifique et l'expérience métier.

1.1.2 Formulation du problème mécanique d'un milieu curviligne

Issue de la recherche bibliographique [84,85], une première formulation du problème mécanique d'un milieu curviligne sert de point de départ pour l'élaboration des modèles abordés dans la suite des travaux, qui proposera un cadre plus détaillé de la mécanique des milieux continus appliquée aux milieux curvilignes et qui fournira le détail et les justifications des hypothèses retenues.

Cinématique

Un milieu curviligne est considéré, plongé dans un espace à 3 dimensions dans lequel tous les champs sont paramétrisés sur la configuration de référence par l'abscisse curviligne $S \in \mathbb{C}_R = [0, L_R]$, où L_R est la longueur

du câble prise sur la configuration de référence \mathcal{C}_R (Fig. 1.10). Le milieu est supposé continu et différentiable par morceaux pour pouvoir le décrire par son orientation. Dans toute la suite, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ où O est l'origine et $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ sont les trois vecteurs de base de l'espace \mathbf{R}^3 , de norme 1 et orthogonaux entre eux. Un point de l'espace de position $\underline{X} \in \mathbf{R}^3$ sur la configuration déformée $\mathcal{C} = [0, L]$ est repéré par ses trois coordonnées cartésiennes (x, y, z) ,

$$\underline{X}(S) = x(S) \underline{e}_x + y(S) \underline{e}_y + z(S) \underline{e}_z. \quad (1.1)$$

Le domaine est décrit dans sa configuration déformée (aussi appelée courante ou eulérienne), chaque grandeur mécanique est donc attachée à la configuration déformée \mathcal{C} .

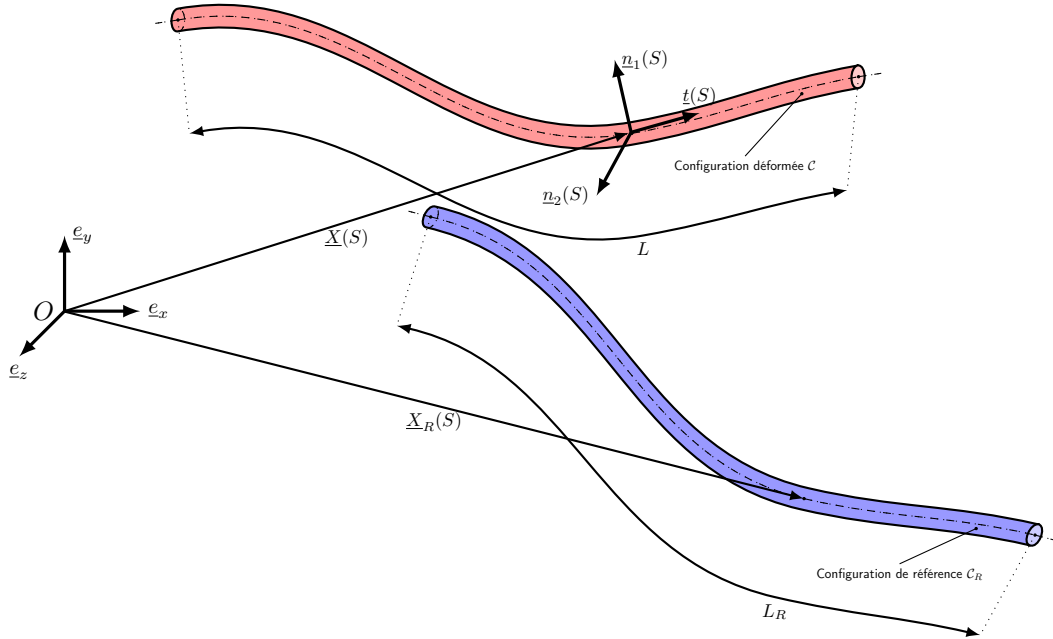


FIGURE 1.10: Milieu curviligne paramétrisé

En dynamique, la **description lagrangienne** consiste à suivre les points matériels identifiés avec leurs abscisses curvilignes S dans leur configuration de référence $S \mapsto \underline{X}_R(S)$ au cours de leur mouvement. La position à l'instant t du point matériel qui se trouve à l'abscisse S dans la configuration de référence est

$$(S, t) \mapsto \underline{X}(S, t) \quad (S, t) \in \mathcal{C}_R \times [0, \infty). \quad (1.2)$$

La **description eulérienne** consiste quant à elle à paramétriser la courbe de la configuration du milieu à chaque instant t par son abscisse curviligne s courante :

$$(s, t) \mapsto \underline{X}(s, t) \quad (s, t) \in \mathcal{C}(t) \times [0, \infty). \quad (1.3)$$

L'abscisse curviligne est définie sur l'ensemble $\mathcal{C}(t)$, inconnu a priori et qui reste à déterminer. Le point d'abscisse courante s est rattaché à deux points matériels *a priori* distincts : le lien entre les deux approches se fait par la notion de dérivée matérielle qui consiste à définir dans la description eulérienne la variation par rapport au temps de quantités rattachées à un **point matériel lagrangien** :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial s(S, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \quad (1.4)$$

Les descriptions lagrangiennes et eulériennes sont équivalentes même si les deux points de vue sont distincts [85]. Pour le traitement numérique des équations, et plus particulièrement la question du maillage en éléments finis, il s'agira de discuter des différentes options qui se présentent pour aborder le problème et les conséquences

pratiques que la formulation choisie implique : vision eulérienne [63], vision lagrangienne [9], vision lagrangienne actualisée [86].

Le principe fondamental de la statique

Pour toute sous-partie matérielle d'un milieu continu curviligne, la résultante des forces extérieures et le moment résultant des efforts extérieurs sont nuls. Le cas statique est un cas particulier du principe fondamental de la dynamique pour lequel la quantité de mouvement et le moment cinétique sont nuls. Les efforts extérieurs consistent en les efforts que l'extérieur du milieu fait subir aux points de la sous partie et aux efforts intérieurs au milieu aux points de coupure [84, 85].

— Les inconnues

La position occupée par la configuration déformée est définie par la courbe paramétrée

$$S \mapsto \underline{X}(S). \quad (1.5)$$

L'effort intérieur en chaque point du milieu dans sa configuration déformée

$$S \mapsto \underline{R}(S) = N(S) \underline{t}(S) + V_1(S) \underline{n}_1(S) + V_2(S) \underline{n}_2(S), \quad (1.6)$$

avec N l'effort normal selon le vecteur tangent \underline{t} , et V_1 et V_2 les efforts tranchants associés aux vecteurs normaux \underline{n}_1 et \underline{n}_2 .

Le moment en chaque point du milieu dans sa configuration déformée

$$S \mapsto \underline{M}(S) = M_t(S) \underline{t}(S) + M_{f1}(S) \underline{n}_1(S) + M_{f2}(S) \underline{n}_2(S), \quad (1.7)$$

avec M_t le moment de torsion autour du vecteur tangent \underline{t} , M_{f1} et M_{f2} les moments fléchissants autour des vecteurs normaux \underline{n}_1 et \underline{n}_2 .

— Les équations de relations géométriques

Le vecteur tangent à la courbe

$$\underline{t}(S) = \frac{\underline{X}'(S)}{\|\underline{X}'(S)\|} = \cos(\phi) \cos(\alpha) \underline{e}_x + \cos(\phi) \sin(\alpha) \underline{e}_y + \sin(\phi) \underline{e}_z, \quad (1.8)$$

et les vecteurs normaux

$$\underline{n}_1(S) = \underline{e}_z \wedge \underline{t} = -[\cos(\beta) \sin(\alpha) + \cos(\alpha) \sin(\beta) \sin(\phi)] \underline{e}_x + [\cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\phi)] \underline{e}_y + \cos(\phi) \sin(\beta) \underline{e}_z, \quad (1.9)$$

$$\underline{n}_2(S) = \underline{t} \wedge \underline{n}_1(S), \quad (1.10)$$

s'expriment en fonction des angles de flexion ϕ et α respectivement autour de \underline{n}_1 et \underline{n}_2 et de l'angle de torsion β autour de $\underline{t}(S)$.

— Mesures de déformation

Il existe différentes mesures de déformation appartenant à une famille qui vérifie les propriétés suivantes [85] :

- terme issu d'un tenseur symétrique,
- sans dimension physique,
- nul pour un mouvement de corps rigide.

Les mesures couramment utilisées, dites de **l'ingénieur**, sont désignées par déformation d'extension ε , de flexion κ_ϕ et κ_α , de torsion κ_β naturellement associées respectivement à l'effort normal, aux moments fléchissants et au moment de torsion qui apparaissent dans l'écriture des travaux de déformation quasi-statiques homogènes [84]. Elles demeurent valables dans le cadre linéaire pour des **petites déformations** et des **petites rotations**.

La déformation d'extension ε est définie par

$$\varepsilon(S) = \left\| \frac{dX}{dS}(S) \right\| - 1. \quad (1.11)$$

Une autre mesure $\hat{\varepsilon}$ adaptée pour décrire la cinématique en grands déplacements avec de **grandes rotations et déformations**, appelée déformation de **Green-Lagrange** puisqu'elle apparait dans le tenseur éponyme, est définie de la façon suivante :

$$\hat{\varepsilon}(S) = \frac{1}{2} \left(\left\| \frac{dX}{dS}(S) \right\|^2 - 1 \right) = \varepsilon(S) + \frac{1}{2}\varepsilon(S)^2. \quad (1.12)$$

Cette mesure s'annule en même temps que la déformation d'extension ε . L'introduction d'une mesure de déformation de Green-Lagrange introduit des non-linéarités d'origine géométrique avec une relation non-linéaire entre déformation et déplacement. Il est souligné dans [73] que l'utilisation d'une mesure de Green-Lagrange doit être couplée à une loi de comportement adaptée, par exemple élastique non-linéaire, pour correctement décrire le cas des grandes déformations.

Les déformations en flexion κ_ϕ , κ_α et en torsion κ_β sont définies par les angles de flexion et de torsion à partir d'une configuration de référence, tel que

$$\kappa_\beta(S) = \frac{d\beta}{dS}(S) - \frac{d\beta_R}{dS}(S) \quad (1.13)$$

avec β_R l'angle de torsion sur la configuration de référence,

$$\kappa_\phi(S) = \frac{d\phi}{dS}(S) - \frac{d\phi_R}{dS}(S) \quad (1.14)$$

avec ϕ_R l'angle de flexion sur la configuration de référence,

$$\kappa_\alpha(S) = \frac{d\alpha}{dS}(S) - \frac{d\alpha_R}{dS}(S) \quad (1.15)$$

avec α_R l'angle de flexion sur la configuration de référence.

De la même façon que la déformation d'extension est associée à l'allongement des fibres matérielles, d'autres mesures de déformation en rotation existent comme la variation de courbure.

— **Les équations d'équilibre en effort**

$$\frac{dR(S)}{dS} + \underline{f}_R = \underline{0} \quad \forall S \in \mathbb{C}_R \setminus \mathbb{P}_R \quad (1.16)$$

$$[R](S_i) + \underline{F}_i = \underline{0} \quad \forall S_i \in \mathbb{P}_R \quad (1.17)$$

avec $\mathbb{C}_R = [0, L_R]$ la configuration de référence et \mathbb{P}_R l'ensemble des points du milieu soumis à des efforts ponctuels \underline{F}_i , $[R](S_i) = \underline{R}(S_i^+) - \underline{R}(S_i^-)$ le saut d'effort intérieur au point S_i , \underline{f}_R les forces linéiques par unité de longueur de la configuration de référence.

— **Les équations d'équilibre en moment**

$$\frac{dM}{dS}(S) + \underline{m}_R(S) + \frac{dX(S)}{dS} \wedge \underline{R}(S) = \underline{0} \quad \forall S \in \mathbb{C}_R \setminus \mathbb{P}_R \quad (1.18)$$

$$[M](S_i) + \underline{\mathcal{M}}_i = \underline{0} \quad \forall S_i \in \mathbb{P}_R \quad (1.19)$$

avec $\mathbb{C}_R = [0, L_R]$ la configuration de référence, \mathbb{P}_R l'ensemble des points du milieu soumis à des moments $\underline{\mathcal{M}}_i$, $[M](S_i) = \underline{M}(S_i^+) - \underline{M}(S_i^-)$ le saut de moment intérieur au point S_i , \underline{m}_R les moments linéiques par unité de longueur de la configuration de référence.

— **Les conditions aux limites**

L'écriture des conditions aux limites est une phase importante de la formulation car elle permet d'obtenir un problème bien posé. Elle peut nécessiter la résolution d'un sous-problème qui vise à déterminer ce qui est donné *a priori* et ce qu'il reste à déterminer par le calcul. D'après la règle heuristique donnée

par Marigo [84] qui se base sur le concept de dualité effort-position, on ne peut pas imposer à la fois les forces à une extrémité et la position (ou le déplacement) de cette extrémité, et de même, on ne peut pas imposer à la fois le moment et l'orientation (ou la rotation) à une même extrémité. Quand on impose l'un, l'autre ne sera connu qu'une fois le problème de statique résolu.

$$\begin{pmatrix} \underline{R} \\ \underline{M} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \underline{X} \\ \beta & \phi & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{en } S = 0 \text{ et } S = L_R \quad (1.20)$$

— **Les relations constitutives**

Les lois de comportement contiennent des informations à la fois géométriques et matérielles en établissant une relation entre les grandeurs caractérisants les efforts intérieurs et les grandeurs cinématiques qui caractérisent les changements de configuration du milieu curviligne :

$$\begin{pmatrix} \underline{R} \\ \underline{M} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon(S) \\ \kappa_\beta(S) & \kappa_\phi(S) & \kappa_\alpha(S) \end{pmatrix} \quad \forall S \in \mathbb{C}_R \quad (1.21)$$

Il existe *a priori* une infinité de lois qui décrivent le comportement des matériaux, même si les lois les plus simples sont généralement celles qui sont les plus utilisées pour les applications courantes.

Principe fondamental de la dynamique

Pour toute sous-partie matérielle d'un milieu continu curviligne, la résultante des forces extérieures est égale à la variation de la quantité de mouvement, et le moment résultant des efforts extérieurs est égal à la variation du moment cinétique.

Le problème de statique d'un milieu continu curviligne est transformé, par modification des équations de l'équilibre local du mouvement en représentation lagrangienne et en ajoutant les conditions initiales, en un **problème aux limites avec valeurs initiales**. En statique, le système était composé d'équations différentielles ordinaires, tandis qu'en dynamique, la difficulté réside dans la résolution du système d'équations aux dérivées partielles [84]. La quantité de mouvement fait intervenir la vitesse en chaque point du milieu sous la forme d'une intégrale : en cas de discontinuité du champ de vitesse, des précautions sont à prendre. On parle alors d'**onde de choc**. Dans la suite, on supposera que le milieu est traversé par un nombre fini d'ondes de choc aux points $\mathcal{S}_R(t)$. L'hypothèse de l'absence d'énergie de rotation est formulée pour construire l'élément de câble en dynamique.

— **Les inconnues**

$$(S, t) \mapsto (\underline{X}(S, t), \underline{R}(S, t), M(S, t)). \quad (1.22)$$

— **Les équations de relations géométriques**

Elles sont identiques au cas statique. Des relations cinématiques de comptabilité sur les ondes sont ajoutées.

— **Les équations d'équilibre en effort**

En comparaison avec la statique, elles contiennent des termes d'inertie et des efforts extérieurs qui peuvent dépendre du temps.

$$\frac{d\underline{R}(S, t)}{dS} + \underline{f}_R(S, t) = \mu_R g \ddot{\underline{X}} \quad \forall S \in \mathbb{C}_R \setminus (\mathbb{P}_R \cup \mathcal{S}_R(t)), \quad (1.23)$$

$$[\underline{R}](S, t) + \underline{\mathcal{F}}_i(t) + \dot{\mathcal{S}}_o(t)[\mu_R \dot{\underline{X}}](S, t) = 0 \quad \forall S_i \in (\mathbb{P}_R \cup \mathcal{S}_R(t)), \quad (1.24)$$

avec $\mathbb{C}_R = (0, L_R)$ la configuration de référence, \mathbb{P}_R l'ensemble des points du milieu soumis à des efforts ponctuels $\underline{\mathcal{F}}_i$, $\mathcal{S}_R(t)$ l'ensemble des points traversés par des ondes de choc à l'instant t (discontinuité en vitesse) et $\dot{\mathcal{S}}_o(t)$ la célérité de l'onde de choc qui passe au point $S \in \mathcal{S}_R(t)$, $[\underline{R}](S, t) = \underline{R}(S^+, t) - \underline{R}(S^-, t)$ le saut d'effort intérieur au point S , \underline{f}_R les forces linéiques par unité de longueur de la configuration de référence.

— **Les équations d'équilibre en moment**

$$\frac{dM}{dS}(S, t) + \underline{m}_R(S, t) + \frac{d\underline{X}(S)}{dS} \wedge \underline{R}(S, t) = 0 \quad \forall S \in \mathbb{C}_R \setminus \mathbb{P}_R, \quad (1.25)$$

$$[\underline{M}](S, t) + \underline{M}_i(t) = 0 \quad \forall S_i \in (\mathbb{P}_R \cup \mathcal{S}_R(t)), \quad (1.26)$$

avec \mathbb{P}_R l'ensemble des points du milieu soumis à des moments ponctuels \underline{M}_i , $\mathcal{S}_R(t)$ l'ensemble des points traversés par des ondes de choc à l'instant t (discontinuité en vitesse), $[\underline{M}](S, t) = \underline{M}(S^+, t) - \underline{M}(S^-, t)$ le saut de moment intérieur au point S_i , \underline{m}_R les moments linéiques par unité de longueur de la configuration de référence.

— **Les conditions aux limites**

La différence avec la statique est la dépendance en temps.

$$\begin{pmatrix} \underline{R}(S, t) \\ \underline{M}(S, t) \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \underline{X}(S, t) \end{pmatrix} \quad \text{en } S = 0 \text{ et } S = L_R. \quad (1.27)$$

— **Les conditions initiales**

C'est un changement par rapport à la statique : les équations du mouvement font intervenir le champ d'accélération et donc la dérivée seconde temporelle en position. Il est donc nécessaire de donner la position et la vitesse initiale :

$$\text{La position initiale} \quad \underline{X}(S, 0) = \underline{X}^0(S), \forall S \in \mathcal{C}_R,$$

$$\text{La vitesse initiale} \quad \underline{\dot{X}}(S, 0) = \underline{V}^0(S), \forall S \in \mathcal{C}_R.$$

— **Les relations constitutives**

Elles restent identiques à la statique.

Il convient maintenant de spécifier les grandeurs et les relations qui seront appliquées dans le cadre de ces travaux. C'est l'objet des sous-sections 1.1.3, 1.1.4, 1.1.5, 1.1.6 et 1.1.7.

1.1.3 Le chargement extérieur

Pour les applications au calcul de ligne de transport par câbles réalisés en statique, il est couramment admis que :

- Le chargement extérieur $(\underline{f}_R(S), \underline{\mathcal{F}}_i(S))$ est contenu dans un plan vertical $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$ défini par les points d'accroches des extrémités de la ligne de câble et la verticale du lieu dirigée par \underline{e}_y .
- Aucun moment extérieur \underline{m}_R n'agit de façon directe.

Dans une configuration standard d'utilisation, les forces en présence sur la ligne de câble se divisent en :

- une contribution à **distance** avec la pesanteur dirigée selon la verticale du lieu,
- des contributions de **contact** issues de l'interaction du câble avec les autres composants du système (véhicules, pylônes).

Dans le cas où des forces ponctuelles $\underline{\mathcal{F}}_i$ agissent dans la direction hors-plan, il est possible de ramener le problème global à un problème plan par morceaux. En revanche, si les efforts répartis \underline{f}_R agissent dans des directions arbitraires, la modélisation plane n'est pas suffisante et le problème doit être traité en considérant un chargement 3D.

En dynamique, ces travaux ne s'intéressent pas à l'influence d'efforts extérieurs sur la ligne de câble du système, tels que du vent ou un séisme. Des efforts dynamiques ponctuels et répartis sont exercés sur le câble, avec l'effet du balancement des véhicules (pendule 3D) et éventuellement le mouvement dynamique d'un support en contact (poulie, pylône, contrepoids, vérin hydraulique). Les évolutions du système au cours de la translation des câbles et des véhicules génèrent des efforts internes dynamiques.

Positionnement de la thèse

Sans perte de généralité, les chargements extérieurs répartis \underline{f}_R et ponctuels $\underline{\mathcal{F}}_i$ sont considérés comme des champs en 3 dimensions. Ce choix laisse la possibilité de faire évoluer les modèles vers un enrichissement de la description des sollicitations, par exemple, pour ajouter l'effet du vent dans une étude ultérieure. En statique, le cas particulier d'un chargement statique plan, sous l'effet de la pesanteur, est considéré.

1.1.4 L'effort normal

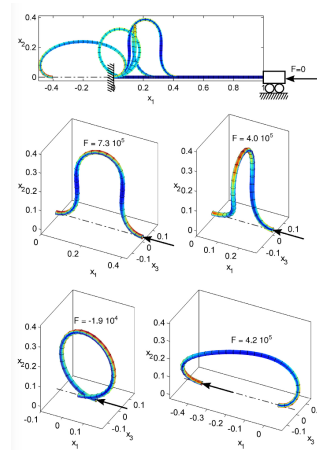
Sous l'effet de la charge transportée, de la gravité et du système de mise en tension, les câbles des transporteurs aériens fonctionnent dans un état fortement tendu tel que l'effort normal $N \gg 0$, ce qui assure que le câble ne rentre jamais en compression $N < 0$, aussi bien de façon globale que locale en tout point de la ligne. Les applications aux transporteurs aériens confèrent tout l'intérêt à l'utilisation du câble, qui s'exprime pleinement dans ce mode privilégié de fonctionnement en traction. Un comportement bien connu de l'homme du métier est le caractère plus erratique d'un câble nu, c'est-à-dire sans les charges qui sont positionnées dessus, lors des phases d'installation (tirage) ou lorsqu'il repose au sol, par exemple lors de l'opération d'épissure consistant à fermer une boucle de câble.

Moins tendu, voire localement comprimé, et dépourvu de charge, il aura alors une tendance au vrillage et aux changements plus brusques de géométrie (instabilité) que lorsqu'il est positionné sur ses appuis et tendu à la valeur nominale du système. L'homme du métier a alors recouru à des dispositifs dédiés pour limiter sa giration dans ces configurations spécifiques qui altèrent la géométrie du câble. Par exemple une barre anti-giratoire peut être utilisée et positionnée de part et d'autre d'une zone de reprise de tension pour la réalisation d'une épissure. Une attache lestée peut aussi être accrochée au câble lors de son tirage.

De façon plus générale, les câbles soumis à des efforts en compression, ou pour de faibles valeurs de tensions, présentent des instabilités statiques. Des effets de flambement, où les modes de déformation en flexion et torsion deviennent prépondérants, sont activés allant jusqu'à de fortes modifications de leur géométrie interne toronnée, telle que des déformations en cage d'oiseau [65]. Plusieurs configurations d'équilibre proches entre elles existent et le suivi des bifurcations selon des méthodes de continuation dédiées est requis pour une caractérisation fidèle de l'équilibre de la structure [56]. Ces aspects ne font pas l'objet de ces travaux.



(a)



(b)

FIGURE 1.11: (a) Formation d'une boucle sur un câble de funiculaire localement détendu lors d'un freinage (d'après une image tirée de [5]). (b) Essai de flambement sur une poutre circulaire avec un équilibre hors plan et la formation d'une boucle qui tourne sur elle-même par couplage non-linéaire entre les modes de torsion et de flexion (d'après [6])

En dynamique, un effort normal N_d en compression tel que $N_d < 0$ est autorisé autour d'un équilibre statique en tension $N_s > 0$, tel que l'effort normal total demeure en tension en chaque point S du câble et à chaque instant t ,

$$N = N_s + N_d > 0$$

Positionnement de la thèse

Il est supposé dans la suite que le milieu câble dédié aux applications pour les transporteurs aériens travaille uniquement à la traction $N(S) = \underline{R}(S).t(S) \gg 0$ lorsqu'il est dans un domaine d'utilisation usuel. Une dynamique en compression est autorisée autour d'un état travaillant à la traction.

1.1.5 La torsion

Étant donné son rôle qui vise à soutenir les charges et à les guider en translation le long des lignes de transporteurs aériens, aucun mouvement n'est volontairement transmis au câble par rotation β autour de son axe dirigé par le vecteur tangent $\underline{t}(S)$. La torsion n'est donc pas un mode activé au premier ordre.

En dehors de toute activation par un moment de torsion M_t extérieur, la torsion devient un mode prépondérant pour des applications où la flexion impose de fortes courbures au câble étant donné l'existence d'un **couplage torsion-flexion** [6]. Ce couplage est un effet de second ordre.

Sous l'effet de la traction, il existe un couplage avec la torsion du câble causé par sa conception toronnée [87–89], phénomène désigné par **torsion spontanée** ou **autotorsion** [90].

La torsion est donc un phénomène naturellement couplé aux autres degrés de liberté cinématiques du câble compte tenu de sa constitution toronnée et de son caractère élastique. Des développements plus approfondis de la mécanique à l'origine de ce couplage permettraient d'évaluer l'importance des mécanismes impliquant la torsion du câble, en adoptant une approche pertinente du point de vue du dimensionnement précis de sa géométrie (fils, torons, âme), de la compréhension des contraintes exercées au niveau des attaches (effet de relâchement du câble au desserrage des pinces dans les stations, glissement) et des constituants qui y sont en contact (poulies, sabots de guidage). Contrairement aux applications pour des structures flexibles peu tendues rencontrées par exemple dans l'automobile (câbles électriques), pour lesquelles les effets de flexion et de torsion sont prépondérants [56], la torsion n'est pas un mouvement utile du câble qui s'exprime au premier ordre dans les directions longitudinales, verticales et transversales pour transmettre le mouvement aux véhicules qui y sont reliés. En négligeant le couplage structurel lié à la géométrie et à la constitution propre au câble, la torsion sur les lignes de transport par câble n'est pas induite par des forces utiles au mouvement mais par des imperfections dans la mise en œuvre pratique du système aux points de contact avec les éléments extérieurs.

Pour mettre en place un modèle couplé fidèle qui rendrait compte de ces effets, la connaissance technique de la constitution et une formulation d'un modèle adapté traduisant la mécanique interne sont nécessaires, avec par exemple un modèle homogénéisé en ayant au préalable déterminé les paramètres de raideur par essais, ce qui n'est pas l'objectif de ces travaux.

En dynamique, l'effet de torsion du câble est susceptible d'être couplé avec le balancement des véhicules dans une direction transversale qui agit en imposant une rotation β de l'attache accrochée au câble.

Positionnement de la thèse

À partir de ce constat et à ce stade de l'étude, le degré de liberté de torsion (M_t, β) n'est pas retenu pour la modélisation car les mécanismes qui en sont à l'origine proviennent des effets de couplage intervenant au second ordre en l'absence de moments de torsion directement exercés par l'extérieur sur le câble.

1.1.6 La flexion

La notion de flexion $(M_{f1}, M_{f2}, \phi, \alpha)$ dans un câble, et de sa raideur associée, traduit le fait que le fléchissement du milieu oppose une résistance contrairement à un fil parfaitement souple [91]. Le comportement à la flexion des câbles d'acier toronnés a notamment fait l'objet de campagnes d'études expérimentales au Laboratoire central des ponts et chaussées (LCPC) de Paris [92, 93].

À l'échelle des lignes de transport par câble, la courbure des câbles dans les portées est faible [94] contrairement à d'autres applications pour lesquelles le mode principal de déformation est réalisé à la flexion [56, 95].

Seules les singularités comme les appuis et les poulies de déviations génèrent des déflexions avec des courbures imposées qui sont susceptibles d'activer le mode de flexion de façon non-négligeable par rapport aux effets de la tension [86, 96–98]. Le même constat est fait aux points d'applications de forces ponctuelles le long du câble, comme par exemple au niveau du contact entre les véhicules et le câble, et particulièrement sur les téléphériques avec un véhicule par voie, aux abords duquel de fortes variations angulaires du câble sont observées en fonction des cas de charge. Des règles de dimensionnement en vigueur dans la profession [18, 99–101] régissent le contact entre les parties fixes des appuis et les lignes de câble, ainsi qu'entre les chariots de téléphérique et le câble porteur. Leur application vise à limiter l'angle d'enroulement du câble autour des galets, des sabots d'appuis

intermédiaires et des poulies horizontales de renvoi situées aux extrémités. Le contact doit ainsi être le plus ponctuel possible de manière à ne pas déformer le câble et risquer de l'endommager par fatigue [102, 103]. Ainsi, les travaux théoriques sur la flexion des câbles appliquée aux transporteurs aériens [104, 105] menés par Lehanneur, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, et Rebuffel, ingénieur civil des Ponts et Chaussées, ont permis de justifier que les règles de dimensionnement des téléphériques en vigueur assurent des effets limités du cisaillement au sein des câbles toronnés. En effet, elles limitent les courbures et les efforts transversaux en établissant des relations entre le rayon minimum des poulies et le diamètre du câble. Ces règles avaient d'ailleurs déjà été appliquées de façon moins formelle par les câblistes forestiers qui avaient compris l'intérêt d'un appui articulé pour limiter la sollicitation du câble en flexion, ancêtre du balancier employé sur les installations de transport par câbles de passagers : *"Le câbliste sait réserver les meilleurs sabots pour les points délicats. Il utilise des sabots oscillant autour d'un axe et laisse aux attaches des porte-pipes un certain jeu. Une règle essentielle est d'éviter que le câble plie à l'extrémité d'un appui."* [58].

Si l'objectif de l'étude est la caractérisation précise du comportement du câble au passage des appuis dans la zone de contact [2, 45] ou le calcul de l'interaction entre les systèmes d'attache des véhicules et le câble, alors la rigidité en flexion doit être modélisée compte tenu des courbures en jeux. En revanche, si le but de l'étude est de caractériser le câble à l'échelle de la ligne (échelle de longueur de l'ordre du kilomètre), sans détailler localement ce qui se passe au niveau des appuis (échelle de longueur de l'ordre du mètre), il est raisonnable de discuter l'influence de la flexion sur les lignes de transporteurs à câbles qui ne sont pas soumises à des chargements ponctuels mais uniquement à des chargements répartis, comme leur propre poids. C'est ce qui est proposé dans la suite.

Un modèle élémentaire est mis en place en Annexe A pour l'étude statique d'un câble soumis à la gravité et à des efforts extérieurs en ses extrémités. Ce cas d'étude est représentatif d'une portée de câble suspendue entre deux appuis d'une ligne de transport par câble. Il vient spécifier le cadre général précédemment défini, en lui apportant des hypothèses supplémentaires pour ce cas d'application, et permet de discuter l'influence de la flexion dans le cas d'une portée isolée soumise à son propre poids en chargement réparti et à un effort ponctuel situé à une extrémité.

Une analyse qualitative du problème est proposée en examinant, selon les valeurs des paramètres du problème adimensionné, si des effets peuvent être négligés dans le modèle complet [84]. L'objectif est d'aboutir à des modèles simplifiés (réduits) plus aisés à résoudre, sans perte significative en terme de résultat. Selon l'ordre de grandeur de l'intensité du chargement extérieur $\mathcal{F} + \mathcal{P}$ où \mathcal{F} est la charge appliquée à l'extrémité et \mathcal{P} le poids de la tige, un modèle réduit est proposé :

- Pour les chargements faibles $\mathcal{F} + \mathcal{P} \ll \mathcal{F}_0 \ll EA_R$, les petits déplacements sont négligeables et le modèle de **milieu rigide avec corrections élastiques** est le plus adapté. Le milieu se comporte en première approximation comme un milieu rigide qui s'écarte peu de sa configuration horizontale, le problème linéarisé donne les petits déplacements d'équilibre.
- Pour les chargements modérés $\mathcal{F} + \mathcal{P} \sim \mathcal{F}_0 \ll EA_R$, les grands déplacements sont négligeables et le modèle de **tige inextensible** est le plus adapté. La déformation d'extension est négligée dans l'équation différentielle. Aucune autre approximation sur le chargement ne peut être réalisée car $\mathcal{F} + \mathcal{P} \sim \mathcal{F}_0$.
- Pour les chargements forts $\mathcal{F}_0 \ll \mathcal{F} + \mathcal{P} \ll EA_R$, les grands déplacements sont négligeables et le modèle de **fil inextensible** avec correction des phénomènes de couches aux limites est le plus adapté. Les corrections aux limites visent à obtenir une meilleure approximation de la configuration d'équilibre au voisinage des extrémités pour lesquelles le modèle de fil ne vérifie en général aucune des deux conditions aux limites. La déformation d'extension est négligée dans l'équation différentielle, tandis que le paramètre $\frac{\mathcal{F}_0}{\mathcal{F} + \mathcal{P}}$ supposé petit affecte la dérivée seconde dans l'équation différentielle qui régit l'angle tangent $\alpha(S)$. Négliger $\frac{\mathcal{F}_0}{\mathcal{F} + \mathcal{P}}$ revient à négliger la rigidité en flexion, l'équation d'équilibre d'un fil inextensible est retrouvée. Dans l'exemple numérique proposé dans [84], le modèle de fil est acceptable pour $\mathcal{F} + \mathcal{P} > 5\mathcal{F}_0$.
- Pour les chargements extrêmes $\mathcal{F}_0 \ll \mathcal{F} + \mathcal{P} \sim EA_R$, les grands déplacements ne sont plus négligeables et le modèle de **fil extensible** avec corrections aux limites est le plus adapté.

Dans les applications du transport par câbles, le chargement statique appliqué à la structure $\mathcal{F} + \mathcal{P}$ est donné

par la contribution de la force de tension T imposée à une extrémité et le poids propre du câble $\mu_R g L_R$:

$$\mathcal{F} + \mathcal{P} = T + \mu_R g L_R \in [10^5, 10^6] \text{ N.}$$

La raideur EA_R est défini par les caractéristiques géométriques et mécaniques du câble utilisée,

$$EA_R \in [2, 4] \times 10^8 \text{ N,}$$

avec la borne inférieure pour des petits câbles et la borne supérieure pour des gros câbles.

La charge de flambement dépend des caractéristiques géométriques et mécaniques du câble, et de la géométrie de la portée considérée,

$$\mathcal{F}_0 \in [10^{-2}, 10^4] \text{ N,}$$

avec la borne inférieure qui correspond au cas de grandes portées avec des petits câbles et la borne supérieure associée au cas de petites portées avec des gros câbles.

Dans le cas des installations classiquement rencontrées, les valeurs suivantes sont à retenir :

$$\mathcal{F} + \mathcal{P} \approx 5 \times 10^5 \text{ N} \quad EA_R \approx 10^8 \text{ N}$$

$$\mathcal{F}_0 \approx 10^3 \text{ N (portées courtes)} \quad \mathcal{F}_0 \approx 10^1 \text{ N (portées classiques)} \quad \mathcal{F}_0 \approx 10^0 \text{ N (portées longues)}$$

Le problème, dont ces travaux font l'objet, se situe à la frontière entre les configuration de **chargement modéré** et **chargement fort**. Sur les petites portées de câble situées à proximité des stations ou entre deux appuis successifs, le chargement est **modéré** : la rigidité en flexion ne peut pas être négligée et le modèle de tige est adapté. Sur les portées classiques ou longues, c'est-à-dire de plusieurs dizaines de mètres jusqu'au kilomètre, le chargement est **fort** et un modèle de fil est validé.

En dynamique, la question de la raideur en flexion est susceptible de se poser pour des mouvements dynamiques qui activeraient de fortes courbures du câble, supposés survenir à haute fréquence ou à proximité d'un bord (fixation). Les mouvements dynamiques de pompage et transitoires attendus sur les lignes ont lieu à basses fréquences et sont majoritairement réalisés sur les premiers modes de vibration qui affectent la courbure en milieu de portée.

Positionnement de la thèse

- Le modèle de fil est adapté pour représenter les câbles des téléphériques multicâbles, qui possèdent de longues portées entre les appuis et les véhicules.
- Il faut à la fois envisager un modèle de tige et un modèle de fil pour modéliser les boucles de câble des installations monocâbles, comme les télésièges et les télécabines, où plusieurs échelles de longueur de portée co-existent.

1.1.7 Les efforts tranchants

La prise en compte des efforts tranchants V dans le câble découle des hypothèses qui ont précédemment été discutées :

- En l'absence de flexion, aucun effort tranchant n'est présent et les efforts extérieurs appliqués dans une direction transverse sont intégralement repris par la tension $R(S) = N(S) \underline{t}$. Pour un effort ponctuel situé le long d'un câble tendu, cela se traduit par une discontinuité du vecteur tangent \underline{t} (ou de l'angle) au point d'application de l'effort en vertu de l'équation d'équilibre en effort

$$[N \underline{t}](S_i) + \underline{\mathcal{F}}_i = 0 \quad \forall S_i \in \mathbb{P}_R. \quad (1.28)$$

- En présence d'un moment de flexion, un effort tranchant V non nul est généré d'après l'équation d'équilibre en moment (1.18).

Positionnement de la thèse

Les efforts tranchants interviennent dans le modèle de tige.

1.2 Méthodes d'étude des câbles en statique

La forme des lignes de câbles au repos est une inconnue à déterminer par la résolution du problème de l'équilibre statique. Contrairement aux applications courantes de la Résistance des Matériaux (RDM) appliquée à des milieux de type poutre pour lesquels la dynamique est linéarisée autour d'une configuration statique réputée connue, dont la forme est souvent approchée par sa géométrie non-déformée, le calcul statique d'un câble est un préalable au calcul dynamique auquel il sert de référence. Dans cette section, un panorama des différentes méthodes et outils de calcul statique des câbles est proposé.

1.2.1 Mise en équation statique du câble fixe

Le problème du câble fixe consiste à trouver la forme \underline{X} et les sollicitations $(\underline{R}, \underline{M})$ en chaque point d'une portion de câble et dont les extrémités sont fixes, soumise à des efforts extérieurs constitués de forces linéiques \underline{f}_R le long du câble et de forces ponctuelles $\underline{\mathcal{F}}_i$ uniquement en action sur les bords.

Cette configuration est la plus fréquemment rencontrée dans la littérature et correspond à la majorité des cas d'application pratiques, puisque la méthodologie de résolution offre une généralisation possible à d'autres problèmes de câbles plus complexes. Par exemple, la résolution de problème d'assemblage de câbles ou du câble tendu en présence de forces ponctuelles est résolu par décomposition en plusieurs sous-problèmes élémentaires de câble fixe entre chacun des points d'application des forces par ajout de conditions de raccordement.

Il est ici désigné par **approche analytique, hybride semi-analytique ou analytico-numérique**, les méthodes de calcul qui reposent sur la résolution algébrique du problème de l'équilibre statique sous sa forme continue et l'utilisation de ses solutions fermées pour le traitement de problèmes connexes. Les équations de la **chaînette**, solution du problème de **fil inextensible pesant**, constituent une référence. Un enrichissement de la description est apporté avec le **modèle de fil extensible**. Le **modèle de tige** est abordé dans l'Annexe A.

Problème du fil pesant

Les fondements de l'étude statique des câbles remontent au XVII^e siècle lorsque Huygens, Leibnitz et les frères James et John Bernoulli découvrent en 1690 et 1691 la forme de la chaînette [106], solution du problème statique d'un câble pesant, uniforme, inextensible, suspendu entre deux points fixes, dépourvu de toute raideur de flexion et uniquement soumis à un effort de traction [107]. On parle aussi de problème du fil pesant, où le fil est un objet considéré comme parfaitement flexible qui ne supporte aucun moment fléchissant. Le comportement d'un tel câble idéalisé est décrit par James Bernoulli : "*The action of any part of the line upon its neighbour is purely tangential*". Le nom de chaînette fait référence à l'équilibre d'une chaîne homogène dont on suppose que chacun des maillons glisse l'un par rapport aux autres sans frottement. Des approches différentes ont été adoptées dans la résolution de ce problème. Huygens s'est appuyé sur des principes géométriques, tandis que les frères Bernoulli et Leibnitz ont utilisé des méthodes de calculs différentiels.

C'est au XIX^e siècle que les solutions du problème de la chaînette dite élastique, qui introduit la notion de déformation élastique du câble, sont obtenues par Schell [108] et Routh [109]. Le résultat de la chaînette élastique obtenu par Routh est exprimé sous forme d'une expression paramétrique. Schell propose une expression approchée de la chaînette élastique issue d'un développement en séries valide dans le cadre de petites déformations élastiques.

Hypothèses du modèle de fil

Le **modèle de fil** est obtenu dans le cadre de la statique des milieux curvilignes délimité en 1.1.2, ensuite dégradé en un problème de poutre de Galilée à 2 dimensions dans l'Annexe A. De nouvelles hypothèses sont apportées pour aboutir à une formulation du modèle de fil tri-dimensionnel :

- **le milieu est parfaitement flexible** : il ne supporte aucun moment de flexion \underline{M}_f ,

- il est plongé dans l'espace $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ sans hypothèse sur le caractère bi-dimensionnel du chargement extérieur \underline{f}_R ,
- il est fixé en son extrémité

$$\underline{X}_B = x_B \underline{e}_x + y_B \underline{e}_y + z_B \underline{e}_z, \quad (1.29)$$

d'abscisse curviligne $S = L_R$,

- il est soumis à une force

$$\underline{\mathcal{F}} = F_x \underline{e}_x + F_y \underline{e}_y + F_z \underline{e}_z, \quad (1.30)$$

en l'extrémité gauche de position

$$\underline{X}_A = x_A \underline{e}_x + y_A \underline{e}_y + z_A \underline{e}_z, \quad (1.31)$$

d'abscisse curviligne $S = 0$.

Pour que l'équilibre puisse être réalisé, un fil ne peut pas être soumis à des densités linéiques de couples \underline{m} , ni à des couples concentrés \underline{M}_i . En l'absence de densité linéique de couple \underline{m} et de couples concentrés \underline{M}_i , l'équation locale d'équilibre des moments (1.18) donne que les efforts tranchants V sont nécessairement nuls et que seul un effort normal,

$$\underline{R}(S) = N(S)\underline{t}(S), \quad (1.32)$$

est présent dans chaque section.

Le fil adapte par conséquent sa forme d'équilibre de façon à ce qu'il ne soit soumis qu'à un effort normal : il résiste par sa forme.

Il peut-être démontré que seule la traction est admissible pour assurer la stabilité, c'est-à-dire que la configuration du fil tendu est celle vérifiant l'équilibre avec la plus petite énergie potentielle,

$$N(S) \geq 0, \quad \forall S \in (0, L_R). \quad (1.33)$$

Un fil libre, c'est-à-dire soumis à aucune force extérieure \underline{f}_R , est soit sous tension nulle $N = 0$, auquel cas sa position d'équilibre est arbitraire, soit sous tension positive uniforme $N > 0$, sa position d'équilibre est alors rectiligne. Une conséquence de l'absence de moment est l'impossibilité de contrôler l'orientation du câble en lui imposant un angle à une de ses extrémités par un encastrement. Les conditions aux limites réalisables pour un fil sont :

- une **fixation**,
- un **appui simple**,
- un **chargement**.

Pour une extrémité $S = 0$ ou $S = L_R$ chargée par un effort $\underline{\mathcal{F}}$, l'orientation de l'extrémité est donnée par la direction de l'effort,

$$\underline{t}(0) = -\frac{\underline{\mathcal{F}}}{\|\underline{\mathcal{F}}\|} \quad (1.34)$$

ou

$$\underline{t}(L_R) = \frac{\underline{\mathcal{F}}}{\|\underline{\mathcal{F}}\|}. \quad (1.35)$$

Deux lois de comportement en extension

$$N : \varepsilon \mapsto \Psi(\varepsilon) \quad (1.36)$$

sont étudiées et conduisent à deux modèles distincts :

- Le milieu est **inextensible** : la longueur du câble reste constante et égale à sa longueur sur la configuration non-déformée L_R . Il n'y a pas de relation entre la tension N et la déformation d'extension ε supposée nulle,

$$\varepsilon(S) = 0 \quad \forall S \in (0, L_R). \quad (1.37)$$

- Le milieu est **élastiquement extensible** : une loi constitutive élastique linéaire par morceau associée à

la mesure de déformation d'extension linéaire ε garantit la non-compression du câble,

$$N(S) = EA_R \max(0, \varepsilon), \quad (1.38)$$

avec E le module d'Young et A_R la section du câble dans la configuration de référence C_R et

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}. \quad (1.39)$$

Pour la recherche d'une solution analytique au problème du fil, le formalisme de la mécanique des milieux continus curviligne précédemment introduit est mis en œuvre. L'équation différentielle vectorielle qui régit l'équilibre statique du milieu est donnée par

$$\frac{d\underline{R}(S)}{dS} + \underline{f}_R(S) = \underline{0}, \quad \forall S \in (0, L_R), \quad (1.40)$$

avec $\underline{R}(S)$ l'effort intérieur et $\underline{f}_R(S)$ la densité de force linéique par unité de longueur de la configuration de référence.

Compte tenu des propriétés des fils et de la présence du poids comme chargement linéique, (1.40) s'écrit

$$\frac{d}{dS} \left(N(S) \frac{d\underline{X}}{dS} / \left\| \frac{d\underline{X}}{dS} \right\| \right) = \mu_{Rg} \underline{e}_y, \quad \forall S \in (0, L_R). \quad (1.41)$$

Dans l'ouvrage d'Irvine [107], la solution aux équations du modèle de fil est recherchée dans le plan $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ par écriture de l'équilibre d'une portion infinitésimale de câble inextensible $\left\| \frac{d\underline{X}}{dS} \right\| = 1$ projetée dans la direction horizontale et verticale,

$$\frac{d}{dS} \left(N(S) \frac{dx}{dS} \right) = 0, \quad \forall S \in (0, L_R), \quad (1.42)$$

$$\frac{d}{dS} \left(N(S) \frac{dy}{dS} \right) = -\mu_{Rg}, \quad \forall S \in (0, L_R). \quad (1.43)$$

Chaînette inextensible ($\varepsilon = 0$)

La **chaînette inextensible** est la solution au problème de fil inextensible soumis à son propre poids, dans le cas où la déformation $\varepsilon = \left\| \frac{d\underline{X}}{dS} \right\| - 1 = 0$, soit

$$\left\| \frac{d\underline{X}}{dS} \right\| = \sqrt{\frac{dx(S)^2}{dS^2} + \frac{dy(S)^2}{dS^2} + \frac{dz(S)^2}{dS^2}} = 1. \quad (1.44)$$

Les équations paramétriques de la chaînette inextensible s'obtiennent par résolution analytique de (1.41) en tenant compte de la condition de stabilité, telle que seul le cas tendu $N > 0$ soit autorisé, de la condition d'inextensibilité $\varepsilon = \left\| \frac{d\underline{X}}{dS} \right\| - 1 = 0$ et des conditions aux limites en position et en effort. L'Annexe donne les détails de la résolution du problème de fil et l'obtention de la solution de la chaînette inextensible.

En trois dimensions, la tension N et les coordonnées (x, y, z) de la chaînette inextensible s'expriment en fonction de l'abscisse curviligne S de la configuration de référence :

$$N(S) = \sqrt{F_x^2 + (F_y + \mu_{Rg}S)^2 + F_z^2}, \quad \forall S \in (0, L_R), \quad (1.45)$$

$$x(S) = \frac{F_x}{\mu_{Rg}} \left[\operatorname{argsh} \left(\frac{F_y + \mu_{Rg}S}{\sqrt{F_x^2 + F_z^2}} \right) - \operatorname{argsh} \left(\frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_z^2}} \right) \right] + x_A, \quad \forall S \in (0, L_R), \quad (1.46)$$

$$y(S) = \frac{\sqrt{F_x^2 + F_z^2}}{\mu_{Rg}} \left[\sqrt{1 + \frac{(F_y + \mu_{Rg}S)^2}{F_x^2 + F_z^2}} - \sqrt{1 + \frac{F_y^2}{F_x^2 + F_z^2}} \right] + y_A, \quad \forall S \in (0, L_R), \quad (1.47)$$

$$z(S) = \frac{F_z}{\mu_{Rg}} \left[\operatorname{argsh} \left(\frac{F_y + \mu_{Rg}S}{\sqrt{F_x^2 + F_z^2}} \right) - \operatorname{argsh} \left(\frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_z^2}} \right) \right] + z_A, \quad \forall S \in (0, L_R). \quad (1.48)$$

Dans le plan $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$, les équations de la chaînette inextensible se réduisent sous forme cartésienne [86, 107]

$$N(x) = F_x \cosh \left(\frac{\mu_{RG}}{F_x} x + \operatorname{argsh} \left(\frac{F_y}{F_x} \right) - \frac{\mu_{RG} x_A}{F_x} \right), \quad \forall x \in (x_A, x_B), \quad (1.49)$$

$$y(x) = \frac{F_x}{\mu_{RG}} \cosh \left(\frac{\mu_{RG}}{F_x} x + \operatorname{argsh} \left(\frac{F_y}{F_x} \right) - \frac{\mu_{RG} x_A}{F_x} \right) - \frac{F_x}{\mu_{RG}} \sqrt{1 + \left(\frac{F_y}{F_x} \right)^2} + y_A, \quad \forall x \in (x_A, x_B). \quad (1.50)$$

La longueur non déformée L_R n'apparaît pas explicitement et s'exprime, après changement de variable $dS = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$,

$$L_R = \frac{F_x}{\mu_{RG}} \sinh \left(\frac{\mu_{RG}(x_B - x_A)}{F_x} + \operatorname{argsh} \left(\frac{F_y}{F_x} \right) \right) - \frac{F_y}{\mu_{RG}}. \quad (1.51)$$

Selon le jeu de données d'entrée dans la formulation du problème aux limites, en effort ou en position, la résolution du système non-linéaire obtenu à partir des expressions paramétriques (1.45) (1.46) (1.47) (1.48) ou des expressions cartésiennes (1.49) (1.50) (1.51) permet d'accéder à la configuration d'équilibre associée :

$$S \mapsto \underline{X} = x(S) \underline{e}_x + y(S) \underline{e}_y + z(S) \underline{e}_z, \quad \forall S \in (0, L_R), \quad (1.52)$$

et des efforts

$$S \mapsto \underline{R}(S) = N(S) \underline{t}(S), \quad \forall S \in (0, L_R), \quad (1.53)$$

ou dans le plan $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$ sous forme cartésienne

$$x \mapsto \underline{X} = x \underline{e}_x + y(x) \underline{e}_y, \quad \forall x \in (x_A, x_B), \quad (1.54)$$

$$x \mapsto \underline{R}(x) = N(x) \underline{t}(x), \quad \forall x \in (x_A, x_B). \quad (1.55)$$

Utilisation des formules de la chaînette

La **chaînette inextensible** constitue une solution de référence largement employée dans la bibliographie où elle est confrontée à d'autres méthodes de calcul. Dans [110], les formules paramétriques de la chaînette inextensible sont utilisées comme élément de référence analytique du calcul aux éléments finis d'un câble retenant un ballon.

Dans [111], la formulation cartésienne de la chaînette inextensible est utilisée pour comparer le résultat analytique aux résultats obtenus par une méthode éléments finis pour le calcul de l'équilibre statique d'un câble tendu horizontalement. La convergence vers la chaînette inextensible des solutions numériques est constatée lorsque la raideur axiale tend vers l'infini (cas inextensible) : pour des valeurs de raideurs adimensionnées $\frac{EA}{\mu g l}$ supérieures à 300, les résultats en terme de déformée et de tension sont très proches.

Dans [112], une méthode utilisant les équations de la chaînette inextensible pour le calcul d'assemblage tridimensionnel de câbles est présentée, par construction d'un système d'équations algébriques non-linéaires qui implique les positions $\underline{X}_i = (x_i, y_i, z_i)^T$ et les tensions $\|\underline{\mathcal{F}}_i\|$ exprimées aux nœuds i séparant des portions de chaînette de longueurs l_j reliées entre elles. L'allongement élastique est pris en compte sous forme de contrainte supplémentaire portant sur la longueur du câble. La résolution par une méthode de type Newton donne l'équilibre statique de la structure. La matrice jacobienne intervenant à chaque pas d'itération dans la recherche de solution peut être écrite de façon algébrique compte tenu que les équations de chaînettes et ses dérivées sont connues sous forme fermée, ce qui facilite le problème d'un point de vue numérique. L'avantage de cette méthode est que la taille du système à résoudre dépend uniquement de la géométrie de la structure (nombre j de câbles et i de nœuds) et non d'une discrétisation de l'espace comme avec les éléments finis par exemple. Les données d'entrée (en tension, longueur, positions des nœuds) peuvent être modifiées sans changer la formulation du problème, ce qui en fait une méthode particulièrement robuste dans le cadre d'une mise en œuvre pratique.

L'équation de la chaînette est souvent utilisée comme vecteur initial dans les processus itératifs de recherche de solution à l'équilibre statique de câbles traités par des méthodes numériques. C'est en effet une première approximation de solution des problèmes de câble pesant abordés avec une prise en compte plus raffinée de la loi de comportement.

Dans [113], la résolution itérative par une méthode de visée qui utilise les formules de la chaînette inextensible donne l'initialisation de la procédure de Newton-Raphson. Elle est associée à la méthode des éléments finis pour un calcul d'équilibre statique qui prend en compte les termes non-linéaires introduits par la mesure de la déformation de Green-Lagrange dans la loi de comportement élastique linéaire. À partir de l'expression de la dénivelée $\Delta y = y(x_B) - y(x_A)$, en y injectant l'expression de la chaînette inextensible et en utilisant la relation $\tan(\alpha(x)) = \frac{dy}{dx}$ avec $\alpha(x)$ l'angle formé par le câble par rapport à l'horizontale à l'abscisse x , la relation géométrique suivante est obtenue :

$$f(\alpha) = \cosh\left(\frac{\mu g(x_B - x_A)}{\|\mathcal{F}\| \cos(\alpha)} + \operatorname{argsh}(\tan(\alpha))\right) - \cosh\left(\operatorname{argsh}(\tan(\alpha))\right) - \frac{\mu g \Delta y}{\|\mathcal{F}\| \cos(\alpha)} = 0 \quad (1.56)$$

Le schéma itératif de Newton porte sur la pente $\alpha_{0,n}$ de la tangente à l'origine du câble en X_A à la n^e itération, connaissant la tension $\|\mathcal{F}\|$ imposée à l'extrémité, la masse linéique μ , la différence d'altitude Δy et la longueur horizontale Δx séparant les extrémités. Le résidu $f(\alpha_{0,n})$ représente l'erreur commise à la n^e itération sur l'altitude du point d'extrémité B atteinte par le câble. Le schéma itératif associé à cette formulation du problème, avec la pente du câble à l'origine comme inconnue, s'écrit :

$$\alpha_{0,n+1} = \alpha_{0,n} - \frac{d\alpha}{df}(\alpha_{0,n}) \times f(\alpha_{0,n}), \quad \alpha_{0,0} = \tan^{-1}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right). \quad (1.57)$$

C'est une méthode de visée avec un ajustement de l'angle du câble au départ pour vérifier la condition géométrique imposée par la position des appuis aux extrémités jusqu'à convergence lorsque $|f(\alpha_{0,n})| < \epsilon$, avec ϵ le paramètre de tolérance fixé sur le résidu.

Des méthodes dérivées des formulations éléments finis dédiées aux structures à câbles, et qui reposent sur les équations de la chaînette, sont aussi développées [114–117]. Elles consistent à écrire l'équation de la chaînette inextensible entre deux nœuds. La notion d'extensibilité est introduite en relâchant un degré de liberté par l'ajout d'un allongement élastique linéaire en écrivant des contraintes géométriques sur la longueur. Par analyse différentielle de l'influence d'un incrément infinitésimal de déplacement $\{dX_i\}$ au nœud i de position $\{X_i\}$, une matrice de raideur tangente (jacobienne) reliant les déplacements aux efforts $\{dF_i\}$ exercés aux nœuds de l'élément i est construite analytiquement,

$$\{dF_i\} = [\Delta K_i] \{dX_i\}. \quad (1.58)$$

La méthode est calquée sur le formalisme des éléments finis, avec une procédure d'assemblage de chaque élément de câble par l'écriture des matrices élémentaires. Une fois le système complet obtenu, la recherche de solution se fait de façon itérative avec une méthode de Newton compte tenu du caractère non-linéaire du problème. La limite de cette formulation est qu'elle ne peut pas être étendue directement au cadre des grandes déformations, l'approche linéarisée est uniquement valide pour un déplacement infinitésimal, ni à des matériaux aux lois de comportement non-linéaires [7].

La chaînette extensible ou chaînette élastique ($\varepsilon \neq 0$)

Les équations paramétriques de la chaînette extensible sont obtenues par résolution analytique de (1.41) en tenant compte des conditions aux limites et de la loi de comportement élastique linéaire (1.38) avec la mesure de déformation d'extension ε .

En 3 dimensions, la chaînette extensible paramétrique s'écrit en fonction de l'abscisse curviligne S sur la configuration de référence non déformée C_R [107],

$$N(S) = \sqrt{F_x^2 + (F_y + \mu_R g S)^2 + F_z^2}, \quad \forall S \in (0, L_R), \quad (1.59)$$

$$x(S) = \frac{F_x}{\mu_R g} \left[\operatorname{argsh}\left(\frac{F_y + \mu_R g S}{\sqrt{F_x^2 + F_z^2}}\right) - \operatorname{argsh}\left(\frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_z^2}}\right) \right] + \frac{F_x S}{EA_R} + x_A, \quad \forall S \in (0, L_R), \quad (1.60)$$

$$y(S) = \frac{\sqrt{F_x^2 + F_z^2}}{\mu_R g} \left[\sqrt{1 + \frac{(F_y + \mu_R g S)^2}{F_x^2 + F_z^2}} - \sqrt{1 + \frac{F_y^2}{F_x^2 + F_z^2}} \right] + \frac{F_y S}{EA_R} + \frac{\mu_R g S^2}{2EA_R} + y_A, \quad \forall S \in (0, L_R), \quad (1.61)$$

$$z(S) = \frac{F_z}{\mu_R g} \left[\operatorname{argsh} \left(\frac{F_y + \mu_R g S}{\sqrt{F_x^2 + F_z^2}} \right) - \operatorname{argsh} \left(\frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_z^2}} \right) \right] + \frac{F_z S}{EA_R} + z_A, \quad \forall S \in (0, L_R). \quad (1.62)$$

L'expression cartésienne algébrique dans le plan (O, e_x, e_y) s'obtient en formulant des hypothèses supplémentaires pour effectuer des développements asymptotiques qui permettent une simplification des expressions.

La prise en compte du caractère extensible de la chaînette suppose une discussion à propos de l'évolution de la masse linéique au cours de la déformation. Les masses linéiques $\mu_R(S)$ sur la configuration de référence et $\mu(s)$ sur la configuration déformée interviennent dans le bilan de conservation de la masse totale du système fermé au cours de la transformation :

$$\mu_R(S) = (1 + \varepsilon(S)) \mu(s(S)). \quad (1.63)$$

La chaînette extensible est moins couramment rencontrée dans la littérature [9, 117].

Développements asymptotiques

Des méthodes analytiques alternatives existent pour déterminer la configuration statique d'un câble modélisé comme un fil. Luongo et Zulli [118] reformulent le problème du câble pesant élastique à partir des équations de l'équilibre statique exactes selon un formalisme de la mécanique des milieux continus curvilignes, puis appliquent une méthode de perturbation à partir de la situation de référence du câble tendu horizontalement sous une force F_x entre les deux supports. Ils définissent un paramètre de perturbation δ traduisant la flèche du câble et avec lequel les grandeurs du modèles sont remises à l'échelle. Les grandeurs inconnues (déplacement et tension) sont exprimées en série de δ autour de la situation câble tendu horizontalement,

$$x(S) = S + \sum_{i=1}^{+\infty} \delta^i x_i(S) \quad y(S) = \sum_{i=1}^{+\infty} \delta^i y_i(S), \quad (1.64)$$

$$z(S) = \sum_{i=1}^{+\infty} \delta^i z_i(S) \quad N(S) = \mathcal{F}_x + \sum_{i=1}^{+\infty} \delta^i N_i(S). \quad (1.65)$$

Après avoir réinjecté ces expressions dans les équations d'équilibre pour un chargement harmonique en espace dans le plan et uniforme dans la direction bi-normale, écrit les conditions aux limites correspondantes et identifié chaque ordre, les développements jusqu'au troisième ordre de ce paramètre fournissent des interprétations des mécanismes d'élasticité qui s'expriment de façon différente : inextensibilité au premier ordre, déformation élastique constante au deuxième ordre, déformation élastique variable à l'ordre trois. La solution fermée asymptotique ainsi obtenue par les développements successifs est comparée à un calcul numérique et montre une bonne cohérence.

Approximation parabolique de la chaînette : hypothèse de câble tendu avec petite flèche

En combinant les équations (1.42) (1.43) exprimées dans le repère cartésien (O, e_x, e_y) et en remarquant que

$$N(S) \frac{dx}{dS} = F_x, \quad (1.66)$$

il vient,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\mu_R g}{F_x} \frac{dS}{dx}. \quad (1.67)$$

En injectant l'expression de l'incrément de longueur curviligne $dS^2 = dx^2 + dy^2$, l'équation différentielle du problème cartésien du câble pesant plan s'écrit,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\mu_R g}{F_x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}. \quad (1.68)$$

Comme suggéré par [106] pour les câbles suffisamment tendus (*shallow cables*), une bonne approximation est obtenue par troncature de l'expansion en série de Taylor des termes en $\frac{dy}{dx}$ avec $\frac{dy}{dx} \ll 1$. Cette approximation est valable dans le cadre de l'Hypothèse des Petites Perturbations (HPP) sur la position y occupée par rapport à la situation de référence, tel que $\frac{dy}{dx} \ll 1$. La position y occupée par le câble est assimilée à une petite déflexion ou un petit déplacement vertical par rapport à l'horizontale. L'équation (1.68) devient

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\mu_R g}{F_x} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] + o\left(\frac{dy}{dx} \right)^3. \quad (1.69)$$

Soit, au premier ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\mu_R g}{F_x}. \quad (1.70)$$

La solution correspondante, dite parabolique, est

$$y(x) = \frac{(x_B - x_A)^2 \mu_R g}{2F_x} \frac{x}{x_B - x_A} \left(1 - \frac{x}{x_B - x_A} \right) + y_B \frac{x}{x_B - x_A} + y_A \left(1 - \frac{x}{x_B - x_A} \right). \quad (1.71)$$

Contrairement à la solution parabolique, les équations de la chaînette extensible et inextensible sont obtenues à partir d'un problème formulé en position et sont valables sans restriction sur la nature du déplacement entre la position de référence et la position courante recherchée.

La notion de **déplacement**

$$\underline{U}(S) = u(S) \underline{e}_x + v(S) \underline{e}_y + w(S) \underline{e}_z \quad (1.72)$$

est introduite, telle que la position occupée par le milieu $\underline{X}(S)$ sur la **configuration déformée** $\mathcal{C} = (0, L)$ s'écrive en fonction de la position sur la **configuration de référence** $\mathcal{C}_R = (0, L_R)$ du milieu $\underline{X}_R(S)$ et le déplacement $\underline{U}(S)$ (Fig. 1.12),

$$\underline{X}(S) = \underline{X}_R(S) + \underline{U}(S) \quad S \in (0, L_R). \quad (1.73)$$

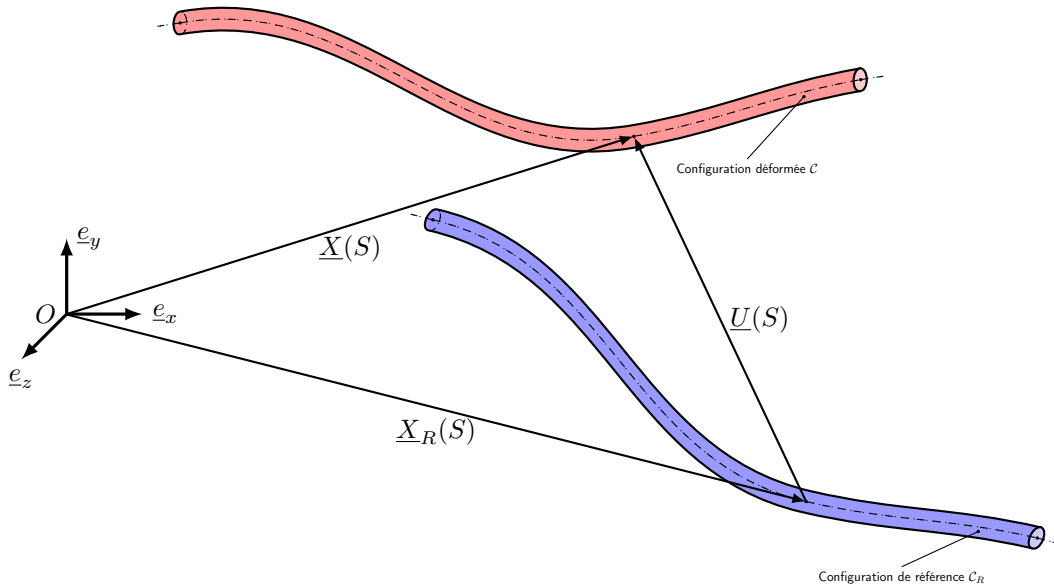


FIGURE 1.12: Introduction du déplacement entre les deux configurations de référence \mathcal{C}_R et déformée \mathcal{C}

Jusqu'ici, et en l'absence d'hypothèse sur le déplacement ou sur la position d'équilibre occupée par rapport à la configuration de référence, l'inconnue géométrique du problème était la position \underline{X} . Désormais, la nouvelle inconnue est le déplacement \underline{U} . En effet, le problème peut se linéariser sous l'hypothèse des petites perturbations par rapport à la configuration de référence \underline{X}_R , soit pour de petits déplacements u, v, w et de petites déformations en extension et en rotation. La formulation ainsi obtenue permet de négliger certains termes et de simplifier la résolution. C'est la base du cadre de la résistance des matériaux (RDM), dont les hypothèses dans le cas général

du problème statique d'un milieu curviligne sont :

- Les **changements de géométrie sont négligés**. La configuration d'équilibre est assimilée à la configuration de référence : les efforts intérieurs sont exprimés sur la base locale $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ de la configuration de référence, les efforts extérieurs répartis sont définis par leur densité \underline{f}_R par rapport à la configuration de référence sans prendre en compte les variations de longueur. Les efforts ponctuels sont appliqués aux points dans leur configuration de référence, s'ils dépendent de la position ou de l'orientation du milieu leur valeur est prise en identifiant la configuration d'équilibre à celle de référence.
- Les **conditions aux limites sont linéarisées**.
- Les **relations déformations-déplacements sont linéarisées**.

L'hypothèse des **petites perturbations** est formulée afin d'éliminer les non-linéarités géométriques qui compliquent la résolution des modèles. Cette hypothèse forte permet la linéarisation des équations qui régissent l'équilibre du milieu et une résolution analytique directe devient souvent possible. Le domaine linéaire reste le cas d'étude privilégié dans les bureaux d'étude pour des applications industrielles sur des systèmes qui ne requièrent pas de s'intéresser à leur comportement mécanique dans le domaine non-linéaire. Néanmoins, la non prise en compte des non-linéarités occulte des phénomènes complexes, tels que les instabilités statiques de claquage ou de flambement, ce qui peut parfois conduire à des résultats éloignés de la réalité. Par exemple, Crusells [7] et Bruno [8] mettent en évidence le caractère instable de l'équilibre statique de deux portées de câble séparées par un appui avec un degré de mobilité en translation (Fig. 1.13).

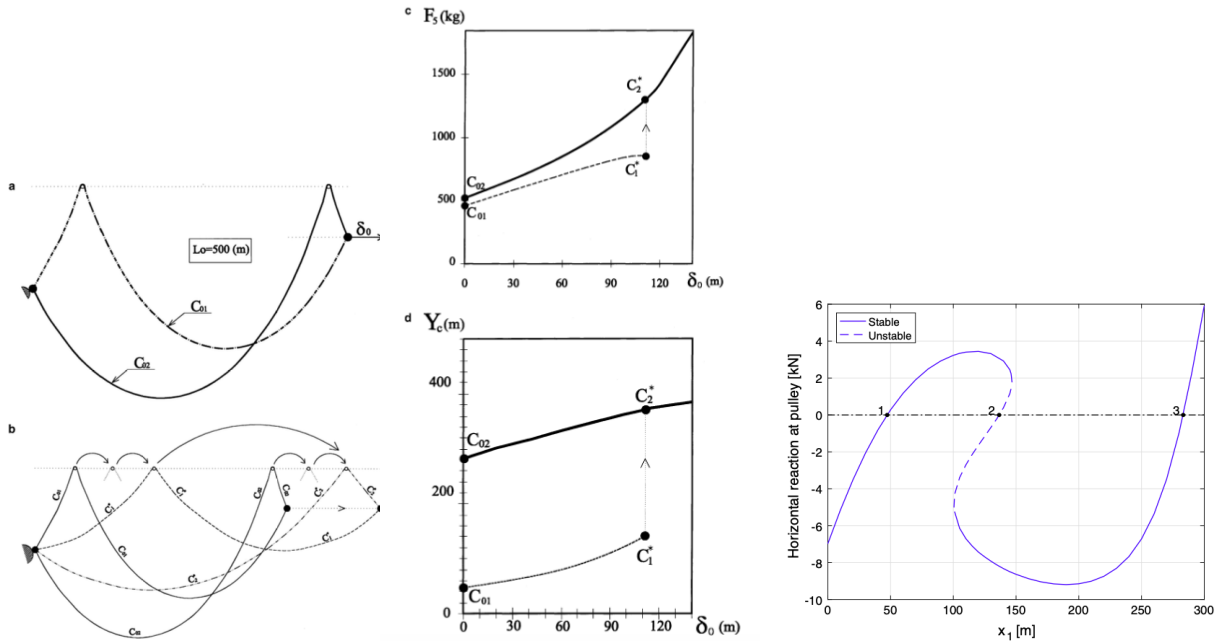


FIGURE 1.13: Instabilité des configurations d'équilibre statique de deux portées de câbles reliées par un appui mobile (d'après [7] et [8])

En statique, les résultats de déformée d'une structure non-linéaire chargée traitée par un modèle linéarisé peuvent être très différents en terme d'amplitude de déplacement et de déformée, avec un effet assouplissant ou raidissant. Typiquement, surestimer la raideur d'une structure par un calcul linéaire peut avoir des conséquences désastreuses sur la tenue de cette dernière face aux chargements pour lesquels elle est dimensionnée. Avant de rentrer en régime non-linéaire, les structures se comportent conformément aux prédictions données par un modèle linéaire. L'approche à privilégier est :

- 1. Réaliser dans un premier temps un dimensionnement selon un modèle linéaire.
- 2. Détecter à partir du modèle linéarisé les éventuelles manifestations de comportement non-linéaire, en y apportant une information supplémentaire issue de la connaissance du phénomène non-linéaire sous-jacent et intervenant comme un paramètre.

Tout problème non-linéaire peut se ramener en première approximation à une étude paramétrique du problème linéarisé sous-jacent : les phénomènes d'instabilité statiques comme le flambement, propres aux systèmes non-

linéaires, sont détectables à partir d'un modèle linéarisé par la résolution d'un problème aux valeurs propres en faisant apparaître le chargement de flambement comme un paramètre. L'information obtenue renseigne alors sur la propension du système à rentrer dans un domaine qui est régi par les non-linéarités, sans cependant être capable de donner de renseignement quantitatif sur ce qui se passe une fois le régime non-linéaire établi. Pour caractériser précisément le régime non-linéaire en terme d'amplitude et de déformée, l'étude doit alors tenir compte de façon plus précise des non-linéarités dans le modèle, comme par exemple l'étude des branches bifurquées par des méthodes de continuation [56].

1.2.2 Traitement numérique des équations, discrétisation et implémentation

Il est désigné par approche numérique les méthodes de calcul qui transforment le problème de l'équilibre statique présenté sous sa forme continue en un problème discret pouvant être traité par un ordinateur, sans s'appuyer sur des solutions sous forme fermée.

Une approche analytique a l'avantage de permettre une compréhension et une interprétation des phénomènes physiques à travers la résolution, avec un accès à des règles de dimensionnement simples selon des principes généraux, tels que le cadre de la RDM. Les résultats obtenus sont aisés à mettre en place dans un bureau d'étude, utilisables par tous, sans que des ressources informatiques ou des compétences spécifiques soient requises. Du point de vue industriel, les approches numériques permettent de façon générale d'envisager des applications d'ingénierie, avec des modèles réalistes non-linéaires, pour les structures étudiées, d'obtenir des résultats exploitables de façon pratique et de définir un cadre systématique pour des études paramétriques afin de mieux comprendre l'influence des paramètres et optimiser la conception.

Modèles de fils, équation de la mécanique des milieux continus

L'avantage d'un traitement numérique du problème de fil est de pouvoir gagner en généralité à la fois pour les formulations du problème, les hypothèses retenues et les applications potentielles. Des cas de chargements plus complexes que le cas du chargement uniforme vertical deviennent envisageables.

Crussels-Girona *et al.* [7] proposent une formulation générale d'une famille d'éléments finis non-linéaires de câble en partant du cadre de la mécanique des milieux continus en grandes déformations 3D. Le second tenseur de Piola-Kirchoff est introduit pour faire le lien entre les efforts \hat{N} sur la configuration de référence et ceux de la configuration courante exprimés par le tenseur d'Euler. Aucune loi de comportement n'est précisée *a priori*, ce qui laisse la liberté d'introduire des lois quelconques $\hat{N} : \hat{\varepsilon} \mapsto \Psi(\hat{\varepsilon})$ adaptées au cadre des grandes déformations avec la mesure de déformation $\hat{\varepsilon}$ de Green-Lagrange

$$\hat{N} = \Psi(\hat{\varepsilon}) \quad (1.74)$$

Ce cadre d'étude général autoriserait un modèle 3D complet de la structure de type poutre géométriquement exacte : il se réduit ici compte tenu de l'hypothèse de milieu curviligne qui est formulée pour aboutir à une modélisation fil similaire à celle abordée et ne dépendant plus que de l'abscisse curviligne S exprimée sur la configuration de référence.

Le problème complet s'écrit en fonction des inconnues de déplacement $\underline{U} \in \mathcal{U}$ et des inconnues d'effort axial $\hat{N} \in \hat{\mathcal{N}}$ du second tenseur Piola-Kirchoff, étant donnée la position de référence \underline{X}_R et la répartition d'efforts extérieurs \underline{f}_R exprimés par unité de longueur sur la configuration de référence.

Les données d'entrée du problème sont une combinaison de deux des grandeurs suivantes : le déplacement U_0 à l'extrémité $S = S_0$, la force \mathcal{F} imposée au bord $S = S_q$, la longueur sur la configuration de référence L_R :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \hat{\varepsilon} = \frac{d\underline{U}}{dS} \frac{d\underline{X}_R}{dS} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\underline{U}}{dS} \right)^2, & \forall S \in [0, L_R] \quad (\text{mesure de déformation de Green-Lagrange}), \\ \frac{d}{dS} \left(\hat{N} \frac{d}{dS} (\underline{X}_R + \underline{U}) \right) + \underline{f}_R = 0, & \forall S \in [0, L_R] \quad (\text{équilibre statique}), \\ \hat{N} = \Psi(\hat{\varepsilon}) & \forall S \in [0, L_R] \quad (\text{relation constitutive}), \\ \underline{U}(S_U) = \underline{U}_0 & (\text{condition au bord en déplacement}), \\ \hat{N} \frac{d}{dS} (\underline{X}_R + \underline{U})(S_q) = \underline{\mathcal{F}} & (\text{condition au bord en effort}). \end{array} \right. \quad (1.75)$$

Forme faible et discrétisation

La formulation en déplacement est répandue pour les problèmes de câble [9, 62, 110, 111, 113]. Une formulation mixte en effort-déplacement d'Hellinger-Reissner [7, 119] est une alternative qui consiste à séparer le champ de déplacement et d'effort dans l'écriture de la formulation faible. Un avantage de la formulation mixte est que la méthode des éléments finis permet généralement d'accéder à une bonne approximation du champ primaire alors que les champs secondaires associés sont moins exacts à cause d'opération de différenciation qui amplifient les erreurs. En revanche, une attention doit être portée sur la classe de continuité des deux champs inconnus qui est différente : une relaxation de la continuité en utilisant la règle de Green sur l'intégration est souvent utile pour les formes mixtes (très utilisées pour les plaques et les coques) [119]. De même, la formulation mixte est équivalente à un problème contraint par multiplicateur de Lagrange avec le champ de déplacement \underline{U} comme première variable et le champ d'effort \hat{N} comme variable contrainte. À l'instar des problèmes de cette catégorie, des difficultés numériques peuvent se poser par la présence d'un terme nul dans la diagonale de la matrice de rigidité du problème global.

Selon une formulation mixte, les champs dits **primaires** sont alors l'effort \hat{N} et le déplacement \underline{U} . Deux champs **secondaires** de mesure de déformation apparaissent

$$\hat{\varepsilon}^{\hat{N}} = \Psi^{-1}(\hat{N}) \quad (1.76)$$

$$\hat{\varepsilon}^{\underline{U}} = \frac{d\underline{U}}{dS} \frac{dX_R}{dS} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\underline{U}}{dS} \right)^2 \quad (1.77)$$

Un des champs secondaires de déformation est exprimé uniquement en fonction de \hat{N} tandis que l'autre est exprimé en fonction de \underline{U} . Pour la solution exacte du problème, les deux déformations $\hat{\varepsilon}^{\hat{N}}$ et $\hat{\varepsilon}^{\underline{U}}$ coïncident. Dans le cas des éléments finis mixtes, il est nécessaire d'ajouter une relation pour contraindre ces deux champs secondaires traités séparément à coïncider (principe des multiplicateurs de Lagrange). Cette contrainte ajoute une équation (1.78) dans la formulation faible par rapport au problème écrit sous sa forme primale, c'est-à-dire écrit en fonction du champ de déplacement seul comme champ primaire.

La forme faible mixte aux deux champs de déplacement et d'effort est obtenue en multipliant les deux premières équations de (1.75) par des fonctions tests $\delta\underline{U} \in \mathcal{U}_t$, espace des champs test en déplacement vérifiant les conditions aux bords cinématiques, et $\delta\hat{N} \in \hat{\mathcal{N}}_t$, espace des champs tests en effort vérifiant les conditions aux bords en effort, [7]

$$\int_0^{L_R} \delta\hat{N} \left(\hat{\varepsilon}^{\hat{N}} - \frac{d\underline{U}}{dS} \frac{dX_R}{dS} - \frac{1}{2} \left(\frac{d\underline{U}}{dS} \right)^2 \right) dS = 0, \quad \forall S \in [0, L_R], \quad \forall \delta\hat{N} \in \hat{\mathcal{N}}_t, \quad (1.78)$$

$$\int_0^{L_R} \delta\underline{U} \left(\frac{d}{dS} \left(\hat{N} \frac{d}{dS} (X_R + \underline{U}) \right) + \underline{f}_R \right) dS + \delta\underline{U} \left(\hat{N} \frac{d}{dS} (X_R + \underline{U})(S_q) - \mathcal{F} \right) = 0, \quad \forall S \in [0, L_R] \quad \forall \delta\underline{U} \in \mathcal{U}_t. \quad (1.79)$$

En observant les formes intégrales obtenues, une régularité C^0 est requise pour le champ de déplacement \underline{U} de façon que sa dérivée soit bornée et qu'elle soit de fait de carré intégrable : \underline{U} appartient donc à un espace de Hilbert $\mathcal{H}^1([0, L_R])$ qui assure le caractère fini de l'énergie. La continuité du champ \hat{N} est quant à elle requise : \hat{N} appartient à un espace de Hilbert $\mathcal{H}^0([0, L_R])$. Par conséquent les champs tests, qui doivent avoir la même régularité que les champs recherchés, vérifient $\delta\underline{U} \in \mathcal{H}^1([0, L_R])$ et $\delta\hat{N} \in \mathcal{H}^0([0, L_R])$.

La régularité des champs recherchés est une question importante car elle conditionne les phénomènes physiques qu'il est possible de traiter par éléments finis : par exemple, le frottement non régularisé introduit un saut au changement de signe sur la force \hat{N} , tout comme une force ponctuelle extérieure sur le câble introduit un saut de \hat{N} . Le champ d'effort ne respecte alors plus la régularité $\mathcal{H}^0([0, L_R])$ nécessaire. Pour traiter le cas d'une force axiale discontinue, il faut, non plus considérer le champ \hat{N} comme un champ global sur $(0, L_R)$, mais le condenser sur chaque élément en introduisant deux valeurs indépendantes \hat{N}_i^- et \hat{N}_i^+ à chaque nœud i . Étant donné que la formulation faible ne fait pas intervenir de dérivée de l'effort, la régularité est ainsi bien assurée sur chaque élément de telle sorte que le champs d'effort restreint à l'élément i vérifie $\hat{N}_i \in \mathcal{H}^0(0, l_i)$.

La formulation mixte du problème non-linéaire de la statique du câble discrétisé par éléments finis consiste à rechercher le vecteur des inconnues $\{q\} = \{q_U \quad q_{\hat{N}}\}^T$ aux nœuds rattachées aux champs de déplacement $\{U\}$

et d'effort $\{\hat{N}\}$ sous la forme équivalente à (1.78) (1.79),

$$\begin{bmatrix} K_{UU}(q_U, q_{\hat{N}}) & K_{U\hat{N}}(q_U, q_{\hat{N}}) \\ K_{\hat{N}U}(q_U, q_{\hat{N}}) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_U \\ q_{\hat{N}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_U \\ F_{\hat{N}} \end{Bmatrix}, \quad (1.80)$$

où $K_{UU}, K_{U\hat{N}}, K_{\hat{N}U}$ sont les blocs de la matrice de rigidité globale $[K(q)]$ du système non-linéaire qui décrit l'équilibre statique du milieu

$$[K(q)] \{q\} = \{F\}. \quad (1.81)$$

De façon générale, l'ajout d'équations supplémentaires au système (1.81) (contraintes) traduit les conditions aux bords du domaine qui regroupent des phénomènes physiques comme le contact unilatéral, possibilité de décollement, ou bilatéral, frottant ou parfait. Selon la nature des conditions aux limites, ces contraintes peuvent prendre la forme d'égalités, par exemple le déplacement imposé à un nœud, ou d'inégalités, non-interpénétration de deux corps, que doivent vérifier les champs inconnus simultanément au système (1.81) (problème de minimisation sous contraintes),

$$\{C_e(q_U, q_N)\} = \{0\}, \quad \{C_i(q_U, q_N)\} \geq \{0\}. \quad (1.82)$$

Recherche d'une solution physiquement acceptable, convergence

Pour améliorer l'algorithme de recherche de solution au problème de statique non-linéaire, lorsque le schéma de Newton échoue pour un vecteur initial de recherche de solution qui se situe en dehors du domaine d'attraction de la solution (avec une divergence du processus) ou lorsque la matrice de raideur tangente $[J_k]$ est singulière ou mal conditionnée [120] :

$$\{q_{k+1}\} = \{q_k\} - [J_k] \{r(q_k)\}, \quad (1.83)$$

avec

$$[J_k] = \nabla^T \{r(q_k)\} \quad (1.84)$$

et

$$\{r(q_k)\} = [K(q_k)] \{q_k\} - \{F_k\}, \quad (1.85)$$

la procédure classique (1.83) est enrichie par un contrôle du chargement $\{F_k\}$ qui est imposé par n étapes successives sous forme incrémentale afin d'assurer au vecteur initial donné à chaque pas de rester dans le domaine de convergence. Le vecteur initial $\{q_{n0}\}$ à l'étape n est estimé à partir des $n-1$ $\{q\}$ obtenus lors des précédents chargements. Pour améliorer le conditionnement de la matrice tangente du problème, un amortissement numérique est introduit sous la forme de termes diagonaux non-nuls ajoutés à $[J_k]$ selon une méthode de Marquart et Levenberg :

$$[J_k]^* = [J_k] + \eta [D_k] \quad (1.86)$$

, avec

$$[D_k] = \frac{\{r_k\}^T [K(q_k)] \{r_k\}}{\{r_k\}^T \{r_k\}} [I], \quad (1.87)$$

où les termes diagonaux sont égaux à une raideur équivalente globale associée au résidu, et η le coefficient d'amortissement. Plus l'amortissement est important, plus la descente est lente (forte " raideur " introduite par l'amortissement donc petits déplacements) et le processus d'itération " prudent " au sens de la convergence. Des valeurs d'amortissement $\eta \approx [10^{-3}, 10^{-1}]$ sont couramment utilisées pour les problèmes de câbles.

Les travaux de Bertrand *et al.* s'intéressent à la formulation d'un élément de câble reproduisant la physique attendue *a priori* pour un fil, qui n'accepte pas la compression [9]. Avec une formulation curviligne de la mécanique du câble en déplacement, écrite sur la configuration de référence selon un point de vue Lagrangien, un modèle numérique aux éléments finis avec des multiplicateurs de Lagrange impose la position des appuis. Une matrice $[B]_{[i \times j]}$ est introduite afin de sélectionner les degrés de liberté imposés par le vecteur $\{c\}_{[i \times 1]}$, avec i le

nombre de points d'appuis connus et j le nombre total de degrés de liberté du modèle :

$$[B] \{q\} = \{c\}. \quad (1.88)$$

Cette contrainte se traduit par l'ajout d'une force équivalente $[B]^T \{\lambda\}$ qui dépend d'un nouveau vecteur inconnu $\{\lambda\}$ dans l'équation d'équilibre statique. La méthode de Newton-Raphson est utilisée pour résoudre le système non-linéaire en déplacement de l'équilibre statique sous contrainte, avec pour résidu :

$$\{r(q, \lambda)\} = \begin{bmatrix} K(q) & B^T \\ A & 0 \end{bmatrix}_{[(i+j) \times 2j]} \begin{Bmatrix} q \\ \lambda \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F \\ c \end{Bmatrix}, \quad (1.89)$$

de telle façon que la recherche de solution à l'étape k s'écrive :

$$\begin{Bmatrix} q_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_k \\ \lambda_k \end{Bmatrix} - [J_k]^{-1} \{r(q_k, \lambda_k)\} \quad (1.90)$$

avec la matrice jacobienne $[J_k] = \nabla^T \{r(q_k, \lambda_k)\}$.

La convergence est vérifiée lorsque la mesure du résidu est inférieure à la tolérance fixée :

$$\|\{r(q_k, \lambda_k)\}\| < \epsilon. \quad (1.91)$$

Le conditionnement du problème, qui correspond au nombre de conditionnement de la matrice jacobienne, s'écrit :

$$\text{cond}([J_k]) = \frac{\lambda_1}{\lambda_r} \quad (1.92)$$

avec λ_1 la valeur singulière maximale et λ_r la valeur singulière minimale de la décomposition en valeurs singulières de $[J_k]$. $\text{cond}([J_k])$ dépend du paramètre $\frac{\mu_R g \delta l}{EA_R}$, avec δl la taille d'un élément [9]. Si ce paramètre est petit, cela pose, en pratique, des problèmes de convergence et de précision lors de la résolution, par effet d'amplification d'erreur typique des problèmes mal posés. Pour un câble de ligne de transport par câbles, avec un maillage d'éléments d'un mètre de longueur,

$$\frac{\mu_R g \delta l}{EA_R} \approx 10^{-8}. \quad (1.93)$$

Il est remarquable pour des application éléments finis qu'un raffinement élevé du maillage du câble (δl petit) dégrade le conditionnement et donc la précision sur le résultat obtenu.

En l'absence d'un modèle qui empêche la compression des éléments, c'est-à-dire qui impose $N(S) \geq 0$, des solutions physiquement peu raisonnables sont obtenues pour l'équilibre statique du câble (**spurious solutions**). Des boucles sont par exemple observées dans les zones soumises à la compression (Fig.1.14 (b)). Ces résultats, *a priori* peu fidèles à la réalité pour un modèle de câble, sont généralement associés à des configurations d'équilibre instables ou à des artefacts numériques et ont donc peu d'intérêt pour des applications d'ingénierie.

Pour pallier ce problème numérique avec une formulation qui rende compte de la physique attendue d'un câble, un algorithme est proposé pour désactiver la contribution en compression des éléments dont la longueur est inférieure à celle initiale ($\epsilon_e < 0$). L'expression de l'équilibre de l'élément dans le résidu est modifié, où seuls les termes d'efforts extérieurs et de la matrice jacobienne $[J_k]$ sont conservés pour la partie positive. L'avantage de cette méthode est qu'elle n'impose pas d'avoir un vecteur initial de recherche de solution nécessairement proche de la solution elle-même ou d'avoir recours à une méthode de Levenberg-Marquart qui passe par le choix d'un paramètre d'amortissement η pour contourner le problème lié au mauvais conditionnement de matrice en remplissant la diagonale de la matrice à inverser durant la procédure de Newton. Des exemples d'applications sont proposés pour une portée et un assemblage de câbles en réseau de toile d'araignée, qui justifient la cohérence des résultats obtenus avec la littérature.

Pour contrôler la longueur du câble déformée, une contrainte portant sur la longueur courante de l'élément

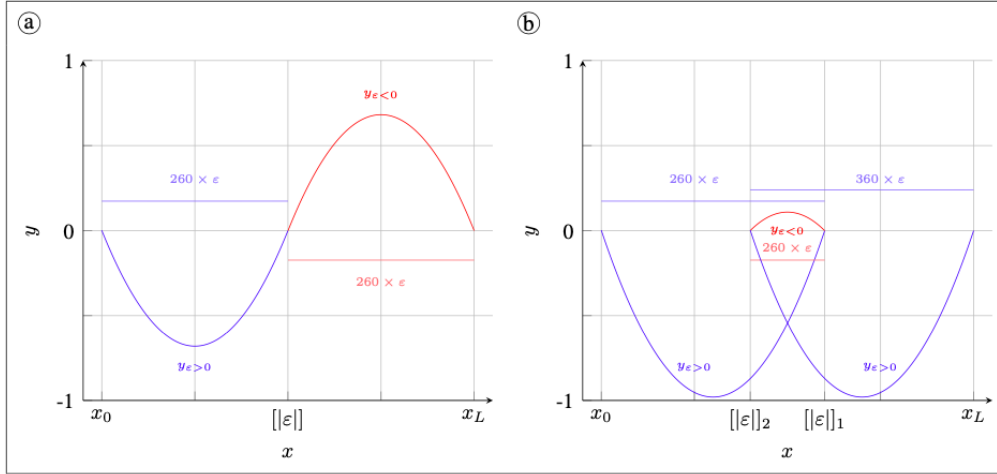


FIGURE 1.14: Formation de boucles sur le câble dans les zones en compression (d'après [9])

de câble l_e est ajoutée à l'équation d'équilibre avec un multiplicateur de Lagrange λ_e en écrivant la forme faible de l'équation de contrainte géométrique puis par dérivation du potentiel correspondant [111],

$$\int_0^{L_0} \lambda_e \left(\frac{ds}{dS} - 1 \right) dS - \lambda_e [l_e + L_0] = 0. \quad (1.94)$$

Le système non-linéaire pour les i éléments assemblés est résolu par méthode itérative (point fixe, bisection) et s'écrit :

$$\begin{bmatrix} K(q, \lambda) & B(q)^T \\ A(q) & 0 \end{bmatrix}_{[(2i+1) \times (2i+1)]} \begin{Bmatrix} q \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ l - L_0 \end{Bmatrix}, \quad (1.95)$$

où $[B(q)]$ est la matrice qui associe l'allongement $\{l_e - L_0\}$ à chaque noeud de coordonnées généralisées $\{q\}$.

Modèles de tige, ajout d'une raideur en flexion

En pratique, les modèles de tige, qui prennent en compte la rigidité en flexion du câble, demandent un traitement numérique en l'absence de solutions fermées.

Lacarbonara *et al.* étudie l'équilibre d'un câble représenté selon un **modèle de tige extensible** 3D non-linéaire avec un formalisme qui positionne le problème par rapport à une configuration de référence prétendue sous l'effet de la pesanteur [10]. Cette configuration est perturbée par des efforts extérieurs induisant un déplacement \underline{U} par rapport à la position initiale \underline{X}_R de la structure de référence. Les équations sont linéarisées par développement asymptotique pour une analyse modale, tandis que le modèle non-linéaire d'équilibre statique est directement traité par une méthode de différences finies avec le logiciel de calcul formel **Mathematica**.

L'écriture du problème avec les inconnues (u, v) en déplacement dans la base locale est surcontraint à cause de la condition sur le moment aux 2 bords. Une formulation mixte est proposée avec les déplacements (u, v) et le moment M à chaque point, soit $3n$ inconnues. Pour les $n - 2$ points intérieurs, les deux équations d'équilibre et la relation constitutive impliquant M forment un système de $3(n - 2)$ équations. Sur les bords, 6 équations sont écrites pour les déplacements et les moments. Soit un total de $3n$ équations. Le schéma aux différences finies est un schéma à 5 points, les équations au point i s'écrivent donc en fonction des déplacements et des moments :

$$[(u_{i-2}, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, u_{i+2}), (v_{i-2}, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}), (M_{i-2}, M_{i-1}, M_i, M_{i+1}, M_{i+2})]$$

en dehors des deux points adjacents aux frontières. Le problème est résolu pas à pas par application progressive des efforts supposés quasi-statiques (discrétisation du processus de chargement en 400 étapes) avec un algorithme de Newton-Raphson. Le prédicteur est initialisé à chaque pas par la position d'équilibre résultant de l'incrément de chargement au pas précédent. Cette méthode est comparée avec un code aux éléments finis implémenté dans Comsol. L'écriture du problème aux éléments finis est réalisée avec 7680 éléments quadratiques pour un câble

d'une longueur de 130 mètres afin d'assurer une bonne fidélité (éléments de 1.7 cm de longueur). La convergence des résultats obtenus par les deux méthodes est obtenue pour une discrétisation de 30 points ou plus dans la grille aux différences finies. Des instabilités numériques apparaissent aux bas niveaux de tension avec le modèle de fil sans raideur en flexion tandis que ces instabilités sont absentes avec le modèle de tige avec flexion (effet de régularisation de la flexion).

Une expérience numérique est donnée en Fig. 1.15 en suivant le déplacement imposé à une des deux extrémités d'un câble horizontal de caractéristiques : $E = 100$ GPa, $A = 8 \times 10^{-3}$ m², $L = 142.5$ m, $I = 5.1 \times 10^{-6}$ m⁴. Le chemin suivi par le déplacement du support droit B s'accompagne d'une diminution de la tension N et d'une augmentation de l'effort tranchant V ainsi que du moment de flexion M_f . La décroissance de la tension N est d'autant plus marquée que la courbure augmente, jusqu'à atteindre quasiment 0 en milieu de portée : dans cette configuration d'équilibre statique, la raideur en flexion a une influence majeure sur l'équilibre statique et ne peut pas être négligée. Par ailleurs, l'effort tranchant aux frontières $V(0)$ et $V(L)$ est significatif. Cette observation confirme bien les hypothèses formulées précédemment : les effets de la flexion deviennent prépondérants à faible tension N et au niveau des singularités (bords, chargement ponctuel,...).

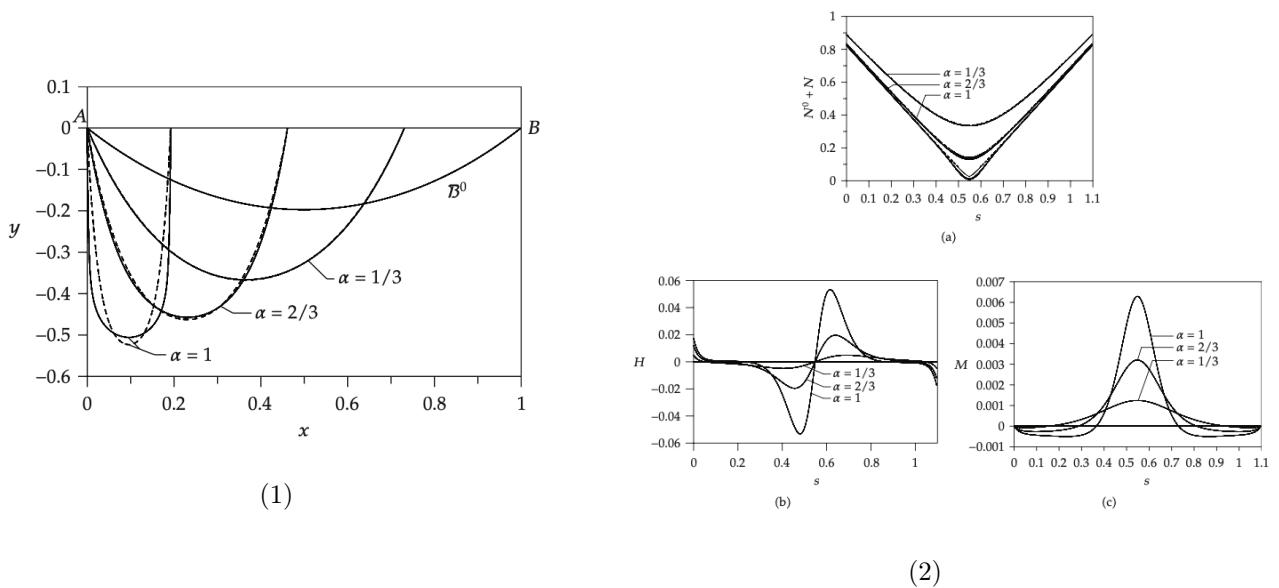


FIGURE 1.15: (1) Configuration des câbles en déplacement imposé du support B (trait plein : avec raideur en flexion, trait pointillé : sans raideur en flexion), (2) (a) Tension N , (b) Effort tranchant V , (c) Moment de flexion M_f (d'après [10])

De façon simplifiée, une méthode numérique de type différences finies permet de traiter les équations d'équilibre statique non-linéaires d'un câble modélisé comme une **tige inextensible** avec un modèle de Bernoulli et un moment de flexion M_f écrit en cartésiennes :

$$M_f = EI_R \frac{\frac{d^2 v}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad (1.96)$$

selon différentes combinaisons de données d'entrée en efforts, positions, et longueurs. Ce type de calcul est appliqué au cas de deux câbles fixés à chacune de leurs extrémités et reliés par une masse au milieu, puis comparé aux résultats obtenus par les formules analytiques de la chaînette [121].

Felipa utilise des éléments finis de type *beam-cable model*, dérivé d'un modèle de tige extensible, pour l'étude des couches limites afin d'accéder au comportement à la flexion aux abords des points d'attaches ou d'application de forces ponctuelles [120].

Pour le calcul de l'équilibre statique des caténaires de Ligne à Grande Vitesse (LGV), dans le cadre de l'étude de la propagation d'ondes, dans la ligne de câble fixe, générées par l'interaction avec le pantographe, Massat [11] utilise une base de Rayleigh-Ritz, de fonctions continues cinématiquement admissibles avec un **modèle de tige**

extensible précontrainte linéarisé afin d'y décomposer la position verticale du câble y en fonction de l'abscisse x :

$$y(x) = \sum_{k=1}^m A_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L_x}\right) \quad (1.97)$$

où L_x est la longueur horizontale de la portée de câble séparant les deux appuis. La base choisie correspond aux modes de vibrations d'une poutre appuyée-appuyée et il est attendu qu'une petite dimension de cette base puisse rendre compte de la physique attendue. En injectant cette forme dans les équations continues décrivant la statique de la caténaire, avec une rigidité en flexion, le problème discret ainsi obtenu consiste à trouver les inconnues A_k , coefficients de la position du câble projetée dans la base des $\sin\left(\frac{k\pi x}{L_x}\right)$. Les équations sont traitées en utilisant seulement les énergies potentielles liées à des forces linéaires aboutit à la résolution d'un système linéaire pour trouver l'équilibre statique de la structure. Cette méthode simplifiée est ensuite complétée par un calcul éléments finis prenant en compte les non linéarités géométriques du **modèle de poutre d'Euler-Bernoulli**. L'avantage de la base en $\sin\left(\frac{k\pi x}{L_x}\right)$ est son caractère infiniment dérivable, ce qui lui confère une grande régularité, et le fait qu'elle vérifie automatiquement l'admissibilité cinématique du champs de déplacement pour un appui réputé infiniment rigide aux extrémités (Fig. 1.16).

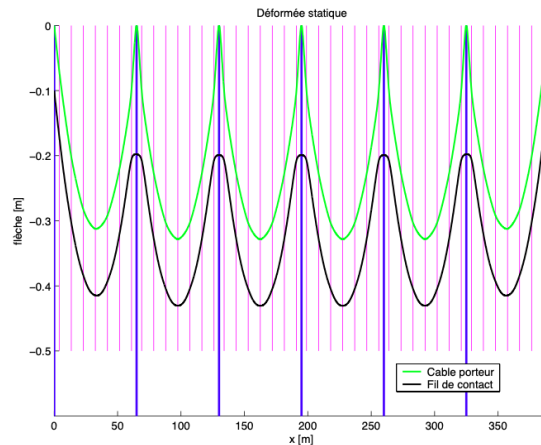


FIGURE 1.16: Équilibre statique d'une caténaire : les effets de flexion sont visibles aux appuis avec la continuité des angles du câble (d'après [11])

1.2.3 Le calcul de ligne

L'utilisation des formules analytiques de la **chaînette** se prête bien aux cas d'étude pour lesquels des répartitions d'effort de densité uniforme s'appliquent sur le câble, comme l'effet du poids. En pratique, cela en fait un outil largement répandu chez les industriels pour le dimensionnement statique des lignes de transport par câbles, ou **calcul de ligne**, dans le cas où elles sont soumises à l'effet de leur propre poids et de celui des véhicules qui y sont suspendus. L'action des efforts non uniformément répartis sur la structure tel que le vent est prise en compte par l'intermédiaire de coefficients empiriques donnés par la réglementation [18]).

La vision linéique du problème de l'assemblage de portions de câbles, disposées dans le plan vertical dirigé par la gravité, en contact ponctuel avec les appuis, est la composante de base des outils de calcul de ligne.

Des formules analytiques approximatives alternatives à la chaînette, comme l'**approximation parabolique** ou les méthodes dites **de la poutre** [12, 122–124] basées sur des développements en série [125, 126], ont largement été employées par le passé pour le dimensionnement des appareils en raison de la facilité d'utilisation des équations mais au dépend de la précision sur les phénomènes physiques caractérisés. Ces méthodes se sont néanmoins révélées limitantes pour le dimensionnement d'installations pour des portées longues de l'ordre de plusieurs kilomètres, ou très inclinées, ce qui a encouragé par la suite l'utilisation de la chaînette [127–131] .

La chaînette a longtemps posé des soucis pratiques compte tenu de la forme transcendante de ses équations. Son emploi s'est généralisé dès lors que l'usage des méthodes numériques de détermination de ses paramètres s'est répandu, avec des machines à calculer électroniques permettant la résolution de telles équations [12, 132]

(Fig. 1.17). De façon plus manuelle, des abaques ont également été proposés pour déterminer les paramètres de chaînette de façon graphique, par d'Armini par exemple [133, 134].

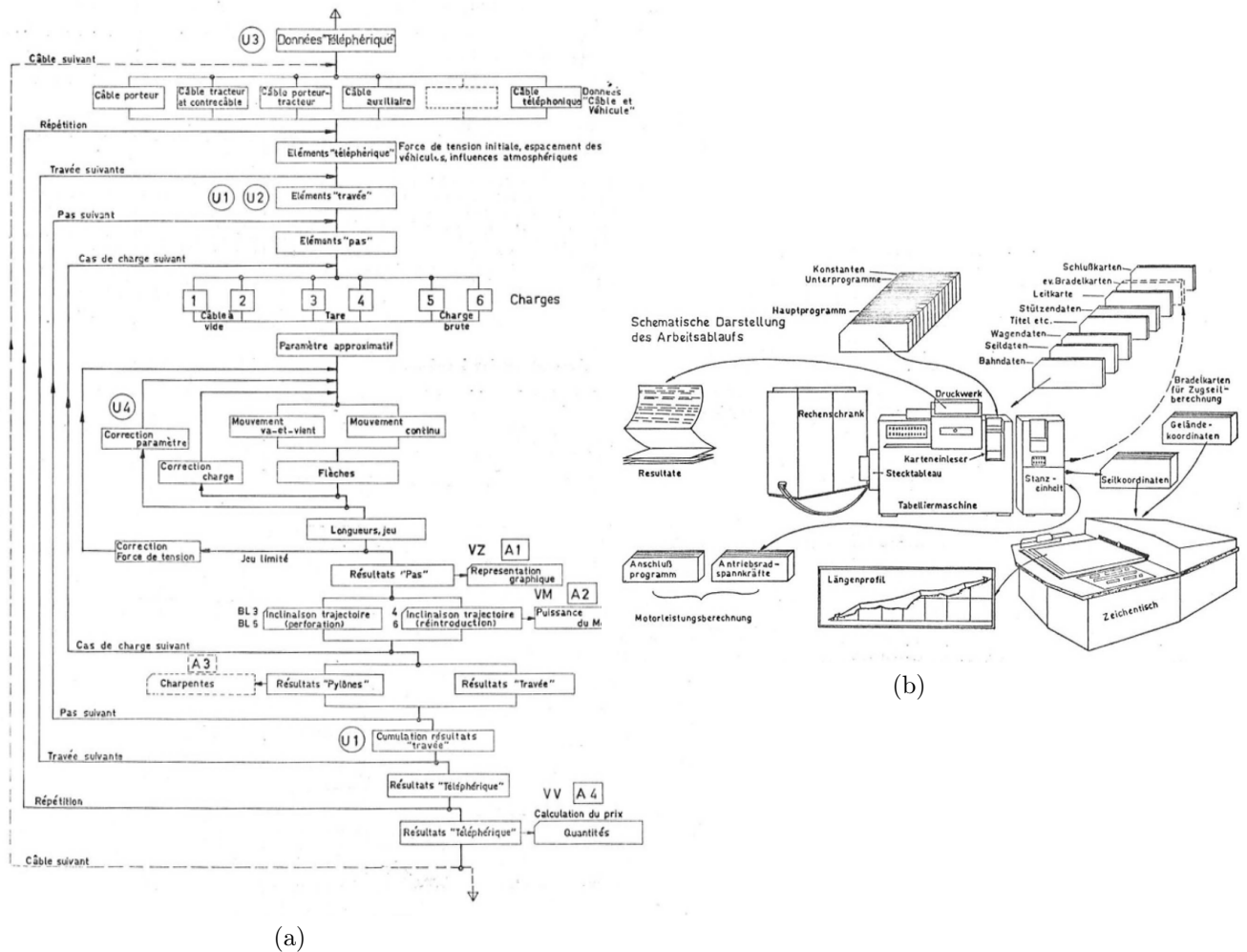


FIGURE 1.17: (a) Structure de l'algorithme de résolution de l'équilibre statique d'un transporteur aérien, (b) machine à calculer utilisant des cartes perforées (d'après [12])

Jusque dans les années 1980, des programmes sur calculatrices étaient utilisés par les techniciens de bureaux d'études avec des formules approchées et des méthodes de résolution itératives des équations de la chaînette. Aujourd'hui, l'usage de la parabole semble limité, ou sert comme une première approximation, la chaînette l'ayant remplacé dans les codes de calcul maison des constructeurs et des bureaux d'études de la profession.

Les formules analytiques de la tige pesante ne sont pas utilisées pour le calcul de ligne car découlant de l'hypothèse des petites perturbations, ce qui limite les applications pour les grandes portées avec des flèches importantes. Pour autant, il n'y a pas d'éléments précis disponibles qui justifient l'hypothèse de négliger les effets de flexion.

La revue de la bibliographie technique ne fait pas état de l'existence de méthodologie purement numérique, de type éléments finis, dédiée au calcul statique des lignes de câble pour une application industrielle. À la connaissance de l'auteur, les outils utilisés pour l'édition des notes de calculs et développés en interne dans les bureaux d'études spécialisés (*Carmen* de la société EFCâble) et chez les constructeurs (*IAO* au sein du groupe HTI qui regroupe les constructeurs POMA, Leitner et Bartholet, *Seiba* dans le groupe Doppelmayr Holding SE qui regroupe les constructeurs Doppelmayr et Garaventa) reposent exclusivement sur des méthodes semi-analytiques basées sur les équations de la chaînette auxquelles sont appliquées des stratégies numériques spécifiques, qui peuvent montrer certaines limites de robustesse vis-à-vis de la convergence.

Même si le savoir-faire du calcul statique est détenu au sein des services techniques des constructeurs et des bureaux d'études spécialisés, des projets de recherche ont été menés en partenariat avec des laboratoires et rendent compte de la réalisation de calcul statique sur des cas pratiques appliqués aux lignes de transport

par câble, en allant parfois plus loin dans les hypothèses de modélisation mais de façon restreinte à des cas de compréhension.

Un travail de modélisation et de simulation d'un téléphérique a été réalisé entre 2016 et 2018 dans le cadre du projet multidisciplinaire I2TC regroupant les industriels français Eiffage, RATP et POMA ainsi que des partenaires académiques [13, 14]. La modélisation du système est proposée en 2D de façon locale en considérant une portée unique, séparée par deux appuis rigides, découplée du reste de la ligne de câble. Les véhicules sont considérés comme des masses ponctuelles réparties régulièrement le long du câble tracteur. Le câble porteur est assimilé à un fil pesant extensible de façon élastique tandis que le câble tracteur est supposé sans masse (rectiligne) [13], puis comme un fil pesant de masse linéique constante μ [14]. La longueur du câble porteur est supposée fixe sans allongement élastique justifié par $\frac{N}{EA} \approx 5 \times 10^{-3}$. À chaque pas de calcul dynamique, la première étape consiste à réaliser un calcul de l'équilibre statique pour déterminer la position du câble et des n véhicules par assemblage de portions de chaînettes reliées entre elles au niveau des véhicules [112]. Dans le modèle le plus avancé du projet, l'écriture des $2(n+1)$ équations de chaînette inextensible (1.50) sur le câble tracteur et porteur pour chaque portion i située entre les n masse ponctuelle représentative des véhicules ou entre les véhicules d'extrémité et les appuis, fait apparaître 3 variables [14] :

$$\tau_i = \frac{\mathcal{F}_{x,i}}{\mu g} \quad K_{1,i} = \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_{y,i}}{\mathcal{F}_{x,i}} \right) - \frac{\mu g x_i}{\mathcal{F}_{x,i}} \quad K_{2,i} = -\frac{\mathcal{F}_{x,i}}{\mu g} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathcal{F}_{y,i}}{\mathcal{F}_{x,i}} \right)^2} + y_i, \quad i \in [1, 2(n+1)]$$

dépendant de 4 inconnues a priori : $\mathcal{F}_{x,i}$ $\mathcal{F}_{y,i}$ x_i y_i . Il est ainsi obtenu un total de $8(n+1) + 2$ inconnues pour la détermination de l'équilibre statique complet de la portée, en comptant l'abscisse des appuis supérieurs qui donnent le domaine de définition de la dernière portion de chaînette. La résolution du système non-linéaire de $8(n+1) + 2$ équations, construit à partir des données d'entrée ainsi que des relations géométriques et d'équilibre, détermine l'équilibre de la portée :

- **Données d'entrée** : les deux valeurs de tension pour le tracteur et le porteur qui sont imposées par le système de tension situé à un des deux appuis (2 équations),
- **Relations d'équilibre** : équilibre des véhicules retenus au câble tracteur obtenues par projection sur les deux axes ($2n$ équations) et équilibre de la portion de câble porteur au niveau des véhicules obtenues par projection sur les deux axes ($2n$ équations),
- **Relations géométriques** : continuité de la tension des câbles porteurs au niveau des véhicules (n équations), continuité en position du câble aux véhicules ($2n$ équations), positions des câbles aux appuis (6 équations), longueur totale du câble porteur (1 équation) et longueurs des tronçons de câble tracteur séparant deux véhicules successifs ainsi que le premier appui du premier véhicule ($n+1$ équations).

Les résultats statiques obtenus montrent en Fig. 1.18 une tension continue le long de la portée du câble porteur, les véhicules étant supposés rouler dessus sans frottement, tandis que des discontinuités de l'effort normal de tension sont mises en évidence à chaque véhicule pour le câble tracteur. Les tensions du tracteur sont constantes par morceau compte tenu de l'hypothèse d'un câble dépourvu de masse, ce qui montre que la variation de tension sur une portion continue de câble est introduite par son poids [13].

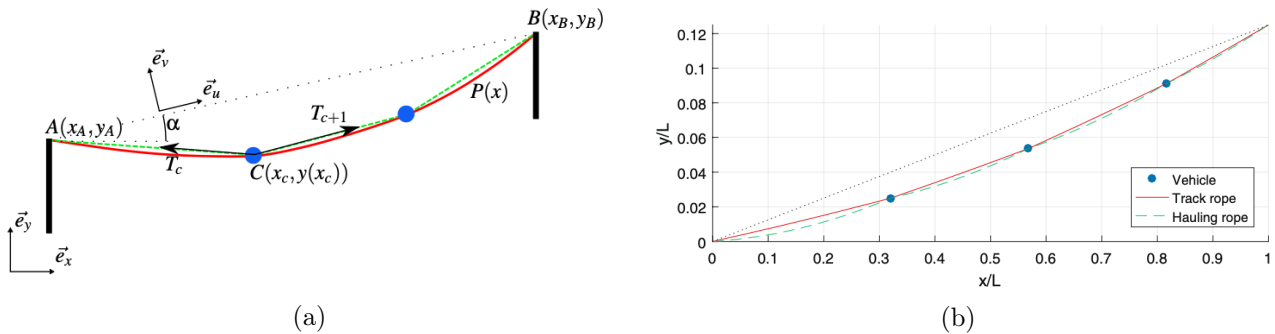


FIGURE 1.18: (a) Modèle d'une portée de téléphérique, (b) Équilibre statique des câbles (d'après [13, 14])

Dans un projet en partenariat avec la filiale italienne du constructeur Doppelmayr, une procédure d'optimisa-

tion de l'implantation des appuis en ligne pour une installation de transport par câble en configuration statique en 2D est proposée [135]. La démarche est celle d'un problème inverse, allant à l'encontre de la procédure habituelle de dimensionnement en ingénierie du transport par câble qui s'attache à résoudre le problème direct renvoyant la géométrie des câbles en fonction des paramètres de dimensionnement donnés en entrée. Le nombre N d'appuis, leurs positions dans le plan de l'étude $X_j = (x_j, y_j)^T$ et hauteurs h_j sont des inconnues du problème consistant à minimiser une fonction coût $J = \sum_{i=1}^N h_i$ sous contraintes géométriques introduites par les distances de survol minimales et maximales lors du déplacement des véhicules. La trajectoire des véhicules est évaluée en quasi-statique par répartition de la masse des véhicules sur le câble et en faisant l'approximation parabolique à partir de la formule de **chaînette élastique** [108]. Chaque portée, délimitée par deux appuis, est ainsi traitée comme une portion de chaînette uniforme de longueur l dont la masse linéique μ est modifiée pour tenir compte de la masse unitaire m_v des k véhicule,

$$\mu_{eq} = \mu + \frac{km_v}{l}. \quad (1.98)$$

Les portées de câble sont reliées par des pylônes sur lesquels le câble repose par l'intermédiaire de pièces destinées à réaliser le contact en favorisant le glissement du câble (sabots) ou son roulement avec le moins de résistance possible (balanciers). Le contact est par définition un phénomène non-linéaire et non-régulier. À l'instar des non-linéarités géométriques, la mécanique du contact est à l'origine de phénomènes propres aux systèmes non-linéaires, tels que la saturation et l'instabilité. La problématique du contact avec une poulie et de l'activation de la flexion se pose pour le transport par câbles [17]. Les valeurs de paramètre ν , introduits dans l'Annexe A, sont évaluées afin de juger l'importance de la flexion dans l'équilibre statique d'une portée de câble. Pour un câble standard d'une ligne de transport par câbles, $EI \approx 2 \times 10^4 \text{ Nm}^2$ et $\mu \approx 10 \text{ kg/m}$:

- $\nu \approx 1.4 \times 10^1$ pour une portée de l'ordre de grandeur du mètre,
- $\nu = 4.5 \times 10^{-1}$ pour une portée de l'ordre de grandeur de la dizaine de mètres,
- $\nu \approx 1 \times 10^{-2}$ pour une portée de l'ordre de grandeur de la centaine de mètres,
- $\nu \approx 4 \times 10^{-4}$ pour une portée de l'ordre de grandeur du kilomètre.

D'après la Fig.A.1 de l'Annexe A, environ 5 % de la longueur du câble est affectée par les effets de flexion aux bords en terme de courbure pour $\nu = 0.01$, soit environ 5 mètres pour une portée de 100 mètres sur la ligne. Ces résultats vont dans le même sens que les conclusions précédentes sur la pertinence de la prise en compte de la flexion qui dépend de l'ordre de grandeur de l'échelle d'étude qui est souhaitée sur la ligne de câble.

1.3 Méthodes d'étude des câbles en dynamique

Soumis à des forces extérieures, à des excitations paramétriques internes, sous l'effet de la translation du milieu ou d'une charge mobile, la forme des lignes de câbles évolue au cours du temps. Dans cette section 1.3, un panorama des différentes méthodes et outils de calcul du comportement dynamique des câbles est dressé.

1.3.1 Mise en équation dynamique du câble

Comme pour l'étude statique, le problème élémentaire du câble fixe entre deux points est le support de la majorité des études en dynamique rencontrées dans la littérature. La différence par rapport au cadre défini en section 1.1.2 est l'introduction d'une nouvelle variable, le temps t . Le mouvement est étudié à partir de $t = 0$.

Propriétés générales dynamiques d'un fil inextensible

Le problème dynamique d'un fil inextensible homogène est formulé par Marigo [84] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial s} \left(N(s, t) \frac{\partial X}{\partial s} \right) + \underline{f}_R = \mu_R \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \quad \forall (s, t) \text{ en dehors des ondes de chocs et des forces ponctuelles} \\ \left[\left[N(s, t) \frac{\partial X}{\partial s} \right] \right] + \underline{\mathcal{F}} + \mu_R \dot{s} \left[\left[\frac{\partial X}{\partial t} \right] \right] = 0 \text{ sur une onde de chocs ou une force ponctuelle} \\ N(s, t) \geq 0 \text{ en tout point (condition de stabilité)} \\ \left\| \frac{\partial X}{\partial s}(s, t) \right\| - 1 = 0 \text{ en tout point (condition d'inextensibilité),} \end{array} \right. \quad (1.99)$$

avec \underline{f}_R la densité linéique de force extérieure, $\underline{\mathcal{F}}$ la force ponctuelle et \dot{s} la célérité locale de l'onde de choc.

De la même façon qu'en statique, la rotation et le moment ne peuvent pas être imposés à un fil. Aux conditions aux limites, il faut ajouter des conditions initiales qui portent sur la position et la vitesse à $t = 0$. L'absence de flexion autorise la discontinuité du vecteur tangent en espace et en temps aux points d'application des forces ponctuelles et aux ondes de chocs. La condition d'inextensibilité permet une analyse simple du problème pour en faire ressortir les propriétés essentielles. En particulier, les configurations de référence et déformée sont confondues puisqu'il n'y a pas de déformation du milieu : $S = s$. C'est un cas limite pour lequel le milieu se déforme instantanément avec une propagation des ondes à une célérité infinie, ce qui impose une compatibilité entre les conditions aux limites et les conditions initiales.

Modèle linéarisé dynamique d'un fil inextensible : théorie des cordes vibrantes

Le modèle des cordes vibrantes consiste à étudier les petits mouvements d'un fil inextensible dans le cadre de l'HPP autour d'une configuration de référence. Les équations du modèle de corde vibrante sont données dans le plan $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$ par Marigo [84] :

- La configuration de référence occupe une position donnée par

$$\underline{X}_s = s \underline{e}_x, \quad (1.100)$$

sous l'effet d'un chargement linéique extérieur

$$\underline{f}_s = f_{s,x} \underline{e}_x. \quad (1.101)$$

Le mouvement dynamique autour de la référence s'écrit

$$\underline{U}_d = u \underline{e}_x + v \underline{e}_y. \quad (1.102)$$

avec un chargement dynamique

$$\underline{f}_d = f_{d,x} \underline{e}_x + f_{d,y} \underline{e}_y. \quad (1.103)$$

- Pour une configuration de référence rectiligne selon \underline{e}_x sur laquelle l'effort normal vérifie

$$N_s(s)' + f_{s,x}(s) = 0, \quad (1.104)$$

avec $f_{s,x}(s)$ les forces linéiques statiques selon \underline{e}_x , les équations linéarisées des petits mouvements dynamiques $\underline{U}_d = u \underline{e}_x + v \underline{e}_y$, obtenues en négligeant les termes d'ordre supérieur à 1, s'écrivent

$$\begin{cases} N_s(s)v''(s, t) - f_{s,x}v'(s, t) + f_{d,y}(s, t) = \mu_r \ddot{v} \text{ en dehors des ondes de chocs,} \\ N_s(s_0(t))\llbracket v' \rrbracket(s_0(t), t) + \mu_R s_0(t)\llbracket \dot{v} \rrbracket(s_0(t), t) = 0 \text{ sur les ondes de choc.} \end{cases} \quad (1.105)$$

- Le déplacement en extension u est supposé uniquement une fonction du temps t , $u = u_0(t)$. Ainsi, l'incrément dynamique d'effort normal N_d vérifie

$$\begin{cases} N_d(s, t)' + f_{d,x}(s, t) = \mu_R \ddot{u}_0 \text{ en dehors des ondes de chocs,} \\ \llbracket N_d \rrbracket(s_0(t), t) = 0 \text{ sur les ondes de choc} \end{cases} \quad (1.106)$$

Les ondes et les chocs se propagent à la même vitesse sur un fil

$$c_0 = \sqrt{\frac{N_0}{\mu_R}} \quad (1.107)$$

dans le cas d'une tension d'équilibre uniforme $N_s(s) = N_0$.

L'interaction dynamique entre une poulie et une chaîne modélisée comme un fil inextensible est un exemple de modèle simple pour lequel des développements analytiques sont possibles [136].

Problème dynamique du fil extensible

En reprenant le formalisme de la mécanique des milieux continus qui a servi à formuler le modèle de fil (1.75), le problème général de la dynamique d'un fil extensible s'écrit en fonction du déplacement dynamique $\underline{U}(S, t)$ autour d'une référence $\underline{X}_R(S)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\varepsilon} = \frac{dU}{dS} \frac{dX_R}{dS} + \frac{1}{2} \left(\frac{dU}{dS} \right)^2, \quad \forall S \in [0, L_R] \quad (\text{mesure de déformation de Green-Lagrange}), \\ \frac{\partial}{\partial S} \left(\hat{N} \frac{\partial}{\partial S} (\underline{X}_R + \underline{U}) \right) + \underline{f}_R = \mu_R \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \forall S \in [0, L_R] \quad (\text{équilibre dynamique}), \\ \hat{N} = \Psi(\hat{\varepsilon}) \quad \forall S \in [0, L_R] \quad (\text{relation constitutive}), \\ \underline{U}(S_U, t) = \underline{U}_0(t) \quad (\text{condition au bord en déplacement}), \\ \hat{N} \frac{d}{dS} (\underline{X}_R + \underline{U})(S_q, t) = \underline{\mathcal{F}}(t) \quad (\text{condition au bord en effort}), \\ \underline{U}(S, 0) = \underline{U}_0 \quad (\text{condition initiale en position}), \\ \dot{\underline{U}}(S, 0) = \dot{\underline{U}}_0 \quad (\text{condition initiale en vitesse}). \end{array} \right. \quad (1.108)$$

À cause des effets géométriques, les équations dynamiques (1.108) d'un fil extensible sont non-linéaires. Il n'existe pas de solution analytique exacte clairement établie. L'étude des modèles de fil, et de façon plus générale des assemblages de fils en interaction avec d'autres composants ou en contact avec des obstacles, nécessitent la mise en œuvre de méthodes d'approximation numériques pour discrétiser le problème spatial :

- Les **méthodes de Galerkin** consistent à rechercher les solutions au problème continu en espace dans un sous-espace de dimension finie. Parmi elles,
 - la méthode des **éléments finis** repose sur des fonctions de forme à support compact pour interpoler les valeurs des inconnues prises aux nœud du maillage de la géométrie [110, 137, 138],
 - les méthodes dites de **Ritz-Galerkin** utilisent des fonctions de forme continues en espace sur le domaine et vérifiant les conditions cinématiques aux bords [139–141].
- La méthode des **différences finies** consiste à discrétiser les opérateurs de dérivées partielles en espace [142, 143].

Ces différentes méthodes aboutissent à une formulation matricielle du problème dynamique du fil, s'écrivant sous la forme générale

$$\left[M \right]_{[N \times N]} \left\{ \ddot{q} \right\} + \left[K(q) \right]_{[N \times N]} \left\{ q \right\} = \left\{ F(t) \right\}. \quad (1.109)$$

avec $\left\{ q \right\}$ le vecteur des coordonnées généralisées inconnues et la matrice de raideur $\left[K(q) \right]$ qui contient les non-linéarités géométriques.

Une approche numérique permet par exemple l'étude des transitoires sous l'effet d'une sollicitation extérieure quelconque [144], de traiter des problèmes de contact avec frottement ou d'impact avec des obstacles [145].

Problème dynamique du câble mobile

La translation d'un câble à une vitesse constante V_0 modifie l'expression du terme d'accélération avec l'ajout de termes convectifs [146],

$$\frac{d^2 \underline{X}}{dt^2} = \frac{\partial^2 \underline{X}}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 \underline{X}}{\partial t \partial S} + V_0 \frac{\partial}{\partial S} \left(V_0 \frac{\partial \underline{X}}{\partial S} \right). \quad (1.110)$$

La bibliographie dédiée aux câbles mobiles fait partie du cadre plus large des milieux continus minces en mouvement axial. Les premières études sont basées sur les développements analytiques des équations dynamiques d'un fil tendu horizontalement, autorisés par des simplifications de modélisation [146–148]. Différents auteurs ont étendu les résultats à des hypothèses plus générales. Tout d'abord, un modèle de câble incliné avec une flèche statique modérée est traité selon une méthode analytique par Triantafyllou [149]. Puis Perkins étend le modèle aux grandes flèches statiques selon une méthode de Galerkin, par recherche de la réponse sur une base de fonctions harmoniques vérifiant les conditions aux limites [150]. La description d'un câble en translation, suivant le formalisme de la mécanique des milieux continus, est abordée par O'Reilly [151] selon différents lois de comportement. Une classe spéciale de câble mobile concerne les ascenseurs pour lesquels la gravité est exercée dans la direction suivant l'axe du câble [152]. Dans ce cas particulier, la forme du câble est majoritairement modifiée selon sa direction axiale par la tension.

Plusieurs classes de méthodes numériques sont dédiées à l'étude des milieux élastiques en translation axiale telles que les méthodes *Arbitrary Lagrangian-Eulerian* (ALE) [153, 154].

Problème de la tige

L'effet d'une raideur en flexion sur le comportement dynamique d'un câble est étudiée selon diverses méthodes numériques : éléments finis [155], différences finies [10] et méthode de Ritz-Galerkin [156]. Il est mis en évidence que la flexion joue un rôle prépondérant pour les câbles avec des diamètres importants, lorsque la tension est faible, à proximité des appuis et affecte en premier lieu les modes à hautes fréquences.

1.3.2 L'analyse modale

Le concept d'**analyse modale** d'un élément de câble offre un cadre d'étude qui s'inscrit dans les hypothèses des systèmes linéaires et non-variables en temps, dits *Linear Time Invariant* (LTI). C'est un outil pratique pour caractériser les systèmes dynamique en ingénierie, aussi bien pour le calcul que pour la validation expérimentale [157–161]. Les modes de vibration d'un système mécanique (Φ_k, ω_k) apportent à la fois une information sur l'**évolution temporelle** de la réponse de la structure, avec la **fréquence** $f_k = \frac{\omega_k}{2\pi}$ des oscillations, et **spatiale**, par les **formes modales** $\underline{\Phi}_k$ qui renseignent sur l'amplitude relative du mouvement d'un point de la structure par rapport aux autres.

D'après le théorème spectral, les modes constituent une base de réduction privilégiée pour réduire la taille des modèles dynamique. C'est la notion de **décomposition modale**, ou de synthèse modale. Par principe de superposition, une troncature des N premiers modes approche le contenu de la réponse dynamique,

$$\underline{U}(S_{obs}, t) = \sum_{k=1}^N q_k(t) \underline{\Phi}_k(S_{obs}), \quad (1.111)$$

d'un système soumis à n'importe quel type de sollicitation (transitoire, harmonique). L'apport d'énergie extérieur active de façon privilégiée un ou plusieurs modes en fonction du point d'application de l'effort sur la structure (commandabilité), de son contenu spectral (amplification modale) et du point d'observation S_{obs} (observabilité). L'information sur la **commandabilité** et l'**observabilité** modale est portée par les valeurs des coordonnées généralisées $q_k(t)$, solutions du problème dynamique réduit sur base modale. C'est la notion de **réduction de modèle** (ROM) sur base modale, ou de réduction modale :

— Modèle continu

Dans certains cas, la recherche de modes d'un modèle dynamique continu, décrit par des équations aux dérivées partielles, aboutit à des expressions analytiques des fréquences propres ω_k et/ou des formes propres $\underline{\Phi}_k$ [162]. Le modèle complet, dans un espace de dimension infinie, est le modèle continu. L'obtention d'un modèle réduit consiste à projeter les équations continues de la dynamique sur une sélection d'une ou plusieurs formes modales analytiques $\underline{\Phi}_i$, selon un produit scalaire. Cette stratégie est par exemple employée par Bertrand *et al.* pour le calcul de la réponse non-linéaire d'une portée de câble [144], par Berlioz *et al.* [163, 164] pour l'étude analytique des vibrations non-linéaires d'un câble incliné, par Weiss *et al.* [165] pour l'étude d'un absorbeur non-linéaire des vibrations sur un câble fixe

— Modèle discret

Pour un modèle aux éléments finis s'écrivant sous la forme générique

$$\left[M \right]_{[N \times N]} \left\{ \ddot{q} \right\} + \left[\Delta K(q_0) \right]_{[N \times N]} \left\{ q \right\} = \left\{ 0 \right\}, \quad (1.112)$$

avec $\Delta K(q_0)$ la matrice de raideur tangente à l'état q_0 , la recherche des solutions du modèle complet se fait dans l'espace des fonctions de forme élémentaire, cinématiquement admissibles, appliquées à chaque élément du maillage. Un modèle réduit, ou condensé, consiste à exprimer les équations dynamiques dans une nouvelle base construite avec une sélection de déformées modales, $\left[T \right] = \left[\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \dots \quad \Phi_n \right]$,

$n \ll N$, issues du problème aux valeurs propres discret sous-jacent :

$$\left(-\omega^2 [M] + [\Delta K(q_0)] \right) \{\Phi\} = \{0\}. \quad (1.113)$$

La taille n des matrices du modèle réduit ainsi obtenu est plus faible que N , la taille du modèle complet de départ :

$$[T]^T [M] [T] \{\ddot{q}_R\} + [T]^T [\Delta K(q_0)] [T] \{q_R\} = \{0\}, \quad (1.114)$$

avec les n coordonnées généralisées q_R .

Le modèle réduit est ensuite utilisé pour réaliser des calculs en un temps limité par rapport au modèle complet, avec par exemple des possibilités pratiques d'application industrielles pour la conception : évolutions transitoires, réponse en fréquence (fonction de transfert), études paramétriques, corrélation calcul-essai [166].

Modes d'un fil : théorie d'Irvine (approche analytique)

La théorie d'Irvine [106, 107, 167] s'intéresse aux petits mouvements propres d'un fil pesant extensible autour de sa configuration naturelle statique de chaînette, c'est à dire les mouvements qui satisfont les équations du mouvement en l'absence d'effort extérieur linéiques ou ponctuel, où tous les points se déplacent en phase et avec des conditions aux limites homogènes. Le modèle d'Irvine est très répandu dans la bibliographie puisqu'il repose sur des expression analytiques simples.

Simpson [146] étudie l'effet de la translation d'un câble à vitesse constante V_0 sur les propriétés modales. Il met en évidence les **modes complexes de vibration** qui correspondent à un mouvement oscillatoire sur lequel se superpose une onde progressive générée par l'existence de déformées modales complexes $\underline{\Phi}_k(S) = \Re(\underline{\Phi}_k) + j\Im(\underline{\Phi}_k)$ à l'origine d'une différence de phase entre chaque point du câble. Cette forme de solution en déplacement n'est pas compatible avec la définition d'un mode de vibration telle que présentée précédemment, selon laquelle chaque point de la structure vibre en phase avec les autres.

Analyse modale du modèle de câble tangent (approche numérique)

Pour un modèle numérique de câble prenant en compte les efforts géométriques non-linéaires, le système linéarisé tangent (1.112) sert de support au calcul des modes de vibrations. Il consiste à conserver uniquement les termes à l'ordre un dans les équations de la dynamique par un développement de Taylor autour de l'équilibre statique.

Ozdemir [168] calcule les modes d'une portée de câble selon une méthode aux éléments finis. Les résultats d'un calcul effectué selon une formulation des équations sur la configuration de référence sont comparés à une formulation sur la configuration courante. Hurel *et al.* [14] met en oeuvre une discrétisation aux différences finies pour le calcul des modes d'une portée de ligne de transport par câbles. Perkins [150] réalise le calcul des modes complexes d'un modèle de câble en translation selon une méthode de Ritz-Galerkin, par projection du modèle linéarisé sur une base de fonctions cinématiquement admissibles de la forme $\sin(k\pi S)$. Les modes d'un assemblage de câbles de support d'antenne sont calculés selon une méthode de Ritz-Galerkin par Desai [169] sur une base de modes analytiques d'Irvine [162].

La méthode est étendue par Bertrand *et al.* [9, 145] au calcul des modes de vibration d'un assemblage de câble en présence de contraintes unilatérale et bilatérale, introduites par le contact du câble avec un obstacle. Le modèle dynamique discret, tangent et sous contraintes, est projeté sur une base $[P]$, $[Q]$ du noyau des contraintes unilatérale et bilatérale linéarisées. Un problème aux valeurs propres classique est ainsi obtenu,

$$\left(-\omega^2 [\tilde{M}] + [\Delta \tilde{K}(q_0)] \right) \{\tilde{q}\} = \{0\} \quad (1.115)$$

avec $[\tilde{M}] = [Q]^T [P]^T [M] [Q] [P]$, $[\Delta \tilde{K}(q_0)] = [Q]^T [P]^T [\Delta K(q_0)] [Q] [P]$, $\{q\} = [Q]^T [P] \{\tilde{q}\}$.

De façon alternative, la méthode numérique de Stodola est utilisée pour calculer les modes d'un câble avec des masses ponctuelles [170].

Modèles asymptotiques non-linéaires

L'analyse modale est le point de départ pour des méthodes asymptotiques basées sur des modèles non-linéaires de câble, prenant en compte les effets géométriques responsables des contribution en effort quadratiques et cubiques. Les méthodes asymptotiques reposent en général sur une recherche des solutions exprimées comme une combinaison linéaire de modes, selon la méthode de Galerkin [171, 172]. D'autres méthodes, dites directe, consiste à appliquer les méthodes asymptotiques directement sur les équations non-linéaires [173]. De nombreuses publications étudient les phénomènes typiques du comportement dynamique d'une structure en présence de non-linéarités. Quelques exemples sont donnés à titre d'illustration :

- **Multiplicité des solutions**

Benedettini [174] étudie le comportement dynamique d'un câble en grandes amplitudes, mettant en évidence l'existence de plusieurs solutions, une dépendance aux conditions initiales et des effets de saut sous l'effet d'une excitation externe.

- **Effet raidissant ou adoucissant**

La courbe de réponse en fréquence d'un câble, soumis à de fortes amplitudes de sollicitation, active les non-linéarités géométriques. Rega [175] utilise un modèle réduit non-linéaire à 1DDL pour l'étude de la réponse d'une portée câble, selon une méthode de Galerkin, par projection du modèle non-linéaire quadratique et cubique sur les modes symétriques et asymétriques.

- **Couplage modal, résonances internes**

Rega [176] étudie les interactions résonantes non-linéaires entre les modes plans et hors-plans linéaires par des méthodes de perturbation. Srinil [177] met en œuvre la méthode des échelles multiples pour l'étude de résonances internes entre les modes longitudinaux et verticaux pour des câbles à haute extensibilité. Il met en évidence des oscillations périodiques, quasi-périodiques et chaotiques impliquant le mode longitudinal, et le rôle prépondérant de l'inertie longitudinale dans le comportement dynamique.

- **Résonance paramétrique**

Un câble est susceptible d'osciller avec de grandes amplitudes sous l'effet du mouvement d'un de ses supports, ou plus généralement d'une excitation interne agissant par l'intermédiaire de sa tension. Cette classe de problème est désignée par système à excitation paramétrique, en opposition aux systèmes à excitation directe [178]. De nombreuses publications s'intéressent à cette catégorie de problème non-linéaire qui débouche sur l'étude d'équations de type Mathieu [179]. Le modèle proposé par Benedettini [180] pour l'étude des résonances internes est étendu par Warminski *et al.* [181] au cas d'une excitation paramétrique.

Modes non-linéaires

L'analyse modale, qui repose sur des hypothèses restrictives à une certaine classe de systèmes mécaniques, constitue un bon point de départ pour approcher le comportement dynamique des structures, qu'elles soient en réalité :

- amortie,
- avec un comportement non-linéaire créé par du contact, la loi de comportement, la géométrie,...
- ou non-stationnaires, avec des variations au cours du temps.

Pour aller plus loin dans l'analyse, telle que pour des configurations instables où le point d'équilibre dynamique s'écarte considérablement de la zone de validité de la linéarisation du modèle ou en présence de modifications des propriétés dynamiques au cours du temps, la notion de mode telle que définie précédemment devient caduque.

De nombreux travaux ont pour objectif d'étendre la notion de modes de vibration et de réduction de modèle sur base modale aux systèmes non-linéaires. La recherche d'une méthode de réduction non-linéaire robuste, applicable à des structures industrielles, est une problématique qui demeure ouverte. Un panel non exhaustif des méthodes disponibles dans la littérature est proposé ci-dessous :

- **Les modes normaux non-linéaires au sens de Rosenberg**

En place des modes normaux classiquement rencontrés dans le cadre linéaire, caractérisés par une forme et une fréquence, les **modes non-linéaires**, ou *nonlinear normal modes* (NNM), ont été introduits par Rosenberg [182] dans les années 1960. L'idée est de suivre la trajectoire d'une évolution transitoire de la structure réalisant des oscillations périodiques synchrones où chaque point vibre en phase. Dans la

continuité de ces travaux précurseurs, les techniques numériques actuelles offrent de nouvelles opportunités de calcul de modes non-linéaires pour des structures de grande taille (modèles éléments finis). Ces modes non-linéaires sont alors définis comme un mouvement périodique non-nécessairement synchrone et sont recherchés par des **techniques de continuation** de solutions périodiques par des méthodes de tir et de pseudo longueur-d'arc à partir des modes linéaires par rapport à un paramètre d'énergie du système [183, 184].

— **Les modes normaux non-linéaires au sens de Shaw et Pierre**

Une autre définition a été apportée par Shaw et Pierre [185], en définissant un mode non-linéaire comme l'ensemble des mouvements appartenant à un **sous-espace invariant** de l'espace des phases, qui est tangent à l'origine aux sous-espaces propres du système linéaire associé (théorème de variété centrale).

Dans la continuité des méthodes basées sur les espaces invariants, les techniques de *spectral submanifolds* visent à étendre les techniques modales et de réduction de modèle aux systèmes avec des non-linéarités [186]. Ces méthodes ont récemment été rendues accessibles aux structures à grand nombre de degrés de liberté grâce aux techniques numériques et au calcul massif [187].

— **La forme normale**

La théorie de la forme normale est issue des travaux de Poincaré et Dulac, et a été appliquée au domaine des vibrations par Jézéquel et Lamarque [188]. Plus récemment, la forme normale a été utilisée pour la réduction de modèle, en réalisant un changement de variable qui conserve uniquement les termes participant à la dynamique dans un sous-espace invariant de l'espace des phases, similaire à l'idée de Shaw et Pierre. La Direct Normal Form (DNF) proposée par Vizzaccaro [189] permet d'étendre la méthode à des systèmes de grande taille [190], mais nécessite de supposer *a priori* les modes intervenant dans la réponse.

— **Les méthodes non-intrusives**

Des méthodes non-intrusives, ou indirectes, de réduction de modèles non-linéaires sont utilisées dans un contexte de simulation aux éléments finis. Le but est de respecter le formalisme existant propre au contexte des éléments finis et ainsi bénéficier des contributions antérieures dans ce domaine.

Tout d'abord, l'évaluation des coefficients des contributions quadratiques et cubiques en effort, introduites par les non-linéarités géométriques, est problématique dans les modèles éléments finis. La méthode de *stiffness evaluation procedure* (STEP) évalue les coefficients selon une procédure de calcul statique non-linéaire inverse classiquement exécutée dans un code aux éléments finis [191].

Balmès [192–195] suggère d'adopter une vision paramétrique pour traiter les problèmes non-linéaires. Un modèle linéaire équivalent repose sur l'utilisation de modes linéaires normaux dépendant d'un paramètre décrivant l'évolution du système sous l'effet de la non-linéarité.

En présence de non-linéarités locales, par exemple avec des effets de frottement appliqués localement sur la structure, des stratégies de réduction de modèles éléments finis existent dans la littérature. Les degrés de liberté associés à un comportement linéaire de la structure sont réduits sur une base de modes normaux et sont distingués des degrés affectés par les non-linéarités, qui sont conservés tels quels [196, 197].

Des méthodes d'enrichissement de bases de réduction modale sont par exemple proposées avec les *modal derivatives* (MD) qui consistent à ajouter aux modes linéaires les dérivées des formes modales par rapport aux coordonnées modales [198, 199]. L'idée est de décrire la dépendance des formes et des fréquences modales vis-à-vis de l'amplitude du déplacement, caractéristique des systèmes aux non-linéarités géométriques, et d'adjoindre l'information dans la base de projection classiquement employée dans les techniques de réduction modale.

À l'instar des MD, les **modes compagnons** [200] sont extraits, par décomposition en valeurs singulières (SVD), à partir d'un ensemble de déplacements calculés en appliquant une succession de chargements statiques au modèle complet, depuis le domaine linéaire jusqu'au non-linéaire.

Une stratégie d'enrichissement est proposée par Bobillot [201], dans un cadre plus général que les MD et les modes compagnons, avec la méthode d'itération sur résidus :

- 1. Le résidu en effort issu de la réduction du modèle dynamique complet sur une base de départ à l'étape i , $\left[T^i\right]$, est calculé.
- 2. Le déplacement résiduel \underline{U}_{res} correspondant est évalué.

- 3. L'erreur relative e commise est calculée sous forme énergétique.
- 4. La base de départ est complétée par \underline{U}_{res} , si l'erreur e est supérieure à un seuil ϵ défini par l'utilisateur.

L'opération est répétée jusqu'à ce que l'erreur à l'étape n de la procédure soit inférieure au seuil. Une orthogonalisation est nécessaire à chaque étape, pour éviter des soucis de conditionnement générés par des vecteurs colinéaires

$$\left[T^{i+1} \right] = \left[T^i \quad \underline{U}_{red}^\perp \right]. \quad (1.116)$$

Les techniques dites de *implicit condensation and expansion* [202] utilisent la notion de correction statique, avec la projection du déplacement obtenu après calcul statique non-linéaire sur une base de modes linéaires. Après collection d'un ensemble de points de calcul, la procédure permet d'établir une carte d'un espace invariant.

1.3.3 Stabilité

Lorsqu'un système atteint un point d'équilibre, la question se pose de savoir comment il réagit face à une perturbation : le système s'écarte-t-il considérablement de son équilibre, est-ce qu'il reste dans un voisinage, quelle est sa réponse transitoire et asymptotique, ... Ainsi, selon la façon de mesurer la stabilité, plusieurs définitions de la notion de stabilité existent [203].

Stabilité au sens de Lyapunov

Un système dynamique discrétisé peut être décrit sous la forme d'état suivante :

$$\left\{ \dot{q} \right\} = \left\{ A(q, t, v) \right\}, \quad (1.117)$$

avec $\left\{ \dot{q} \right\}_{[n \times 1]}$ le vecteur d'état de dimension n , $\left\{ A(q, v) \right\}_{[n \times 1]}$ le vecteur non-linéaire de dimension n et v un paramètre de contrôle du modèle. L'étude de la stabilité de la réponse $\left\{ q \right\}$ d'un tel système permet d'évaluer sa propension à s'éloigner ou non d'un point d'équilibre $\left\{ q_e \right\}$, définit tel qu'à chaque instant t :

$$\left\{ 0 \right\} = \left\{ A(q_e, t, v) \right\}. \quad (1.118)$$

Autrement dit, un système est considéré comme stable, si un petit déséquilibre initial autour d'un point d'équilibre n'entraîne que de petits écarts pour des temps postérieurs.

Une définition de la stabilité est donnée selon le formalisme de Lyapunov [204, 205] pour laquelle un point d'équilibre $\left\{ q_e \right\}$ d'un système dynamique est dit **stable** si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que pour toute condition initiale $\left\{ q_0 \right\}$ vérifiant $\left\| \left\{ q_0 \right\} - \left\{ q_e \right\} \right\| \leq \eta$, la solution du système dynamique $\left\{ \dot{q} \right\} = \left\{ A(q, t, v) \right\}$, issue de $\left\{ q_0 \right\}$ à $t = 0$, est définie pour tout temps positif et vérifie $\left\| \left\{ q \right\} - \left\{ q_e \right\} \right\| \leq \epsilon$ pour tout temps $t \geq 0$. S'il n'est pas stable, il est dit **instable**. L'équilibre $\left\{ q_e \right\}$ est dit **localement asymptotiquement stable** si et seulement s'il est stable, et si de plus il existe $\eta > 0$ tel que toutes les solutions $\left\{ q \right\}$ de $\left\{ \dot{q} \right\} = \left\{ A(q, t, v) \right\}$, partant en $t = 0$ de conditions initiales $\left\{ q_0 \right\}$ telles que $\left\| \left\{ q_0 \right\} - \left\{ q_e \right\} \right\| \leq \eta$, convergent vers $\left\{ q_e \right\}$ lorsque t tend vers $+\infty$.

La définition de la stabilité au sens de Lyapunov encourage à étudier l'état tangent, ou linéarisé, au système dynamique non-linéaire (1.117) par un développement de Taylor à l'ordre un,

$$\left\{ \dot{q} \right\}_{[n \times 1]} \approx \frac{\partial}{\partial \delta q} \left\{ A(q_e, t, v) \right\} \left\{ q \right\}_{[n \times 1]} = \left[A_0(q_e, t, v) \right]_{[n \times n]} \left\{ q \right\}_{[n \times 1]}. \quad (1.119)$$

Selon ce formalisme, l'analyse modale du système dynamique (1.117) consiste en l'étude des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice $\left[A_0 \right]$ du modèle linéarisé tangent au système dynamique non-linéaire (1.117)

dans un voisinage du point d'équilibre $\{q_e\}$. La réponse du système (1.117) au voisinage du point d'équilibre est donnée de façon approchée par

$$\{q\} = \sum_i \{a_i\} e^{\lambda_i(v)t} + \{\bar{a}_i\} e^{\bar{\lambda}_i(v)t}, \quad (1.120)$$

où $\lambda_i \in \mathbf{C}$ sont les valeurs propres de $[A_0]$.

Une conséquence de la définition de la stabilité donnée au sens de Lyapunov et de l'expression de la réponse du système (1.120) obtenue de façon approchée par linéarisation dans un voisinage d'un point d'équilibre, est que la stabilité est obtenue lorsque les parties réelles de toutes les valeurs propres λ_i sont strictement inférieures ou égales à zéro, soit $\Re(\lambda_i) \leq 0$ pour tout $i \in [1, n]$. Le système est instable si au moins une valeur propre a une partie réelle positive, soit s'il existe au moins un indice i tel que $\Re(\lambda_i) > 0$. Dans ce cas, les termes en $e^{\lambda_i(v)t}$ et $e^{\bar{\lambda}_i(v)t}$ divergent lorsque $t \rightarrow +\infty$ et conduisent à une augmentation de l'amplitude de la réponse, remettant alors en question la validité de l'hypothèse du modèle linéarisé tangent (1.119).

La transition d'un état stable à instable est associée à une **valeur critique** du paramètre d'évolution v_c . En adoptant une vision non-linéaire du problème aux valeurs propres sous-jacent autour de la valeur critique v_c , la solution peut changer de multiplicité : on parle alors de **bifurcation** introduite par Poincaré. Une bifurcation correspond à un changement local dans le système dynamique qui devient singulier, avec une dégénération de la solution, souvent associé à un changement de multiplicité des solutions ou à un échange de stabilité. L'étude des bifurcations caractérise l'évolution des valeurs propres par rapport à la variation du paramètre v .

Un système statique à 1 DDL dépendant d'un état x et d'un paramètre v permet d'illustrer la notion de bifurcation, qui n'est pas forcément associé à un changement de stabilité. Soit un système décrit par

$$A(x) = x(x^2 - v) = 0. \quad (1.121)$$

Pour $v < 0$, seule la solution réelle $x = 0$ existe. Pour $v > 0$, trois solutions coexistent : $x = 0$ (instable), $x = -\sqrt{v}$ (stable) et $x = \sqrt{v}$ (stable). Le point $x = 0$ est un point de bifurcation au sens où la dérivée $\partial_x A(x, v) = 3x^2 - v$ évaluée en $x = 0$, $v = 0$ est nulle (singulière, non inversible). Ici, le point de bifurcation est associé à un changement de multiplicité de la solution et à un changement de stabilité. En revanche, un changement de stabilité peut avoir lieu sans passer par un point de bifurcation, par exemple pour un système dynamique décrit par

$$A(x) = \ddot{x} + bx = 0. \quad (1.122)$$

Pour $b < 0$, la solution x est non-bornée donc le point d'équilibre $x_{eq} = 0$ est instable au sens de Lyapunov. Pour $b > 0$, la solution x de l'équation différentielle est bornée : le point d'équilibre $x_{eq} = 0$ est stable. Il n'y a cependant pas de changement de la multiplicité de la solution en $b = 0$.

Stabilité au sens de Floquet

La définition de la stabilité autour d'une solution périodique est donnée par la **théorie de Floquet** [206–208]. Dans ce cas particulier, le point d'équilibre $\{q_e\}$ de (1.117) est considéré comme δt -périodique,

$$\{q_e(t)\} = \{q_e(t + \delta t)\}. \quad (1.123)$$

Le système linéaire (1.119) de dimension n possède n solutions fondamentales notées $\{q_i(t)\}_{[n \times 1]}$ telles que n'importe quelle solution de (1.119) s'écrit comme combinaison linéaire :

$$\{q(t)\}_{[n \times 1]} = \sum_{i=1}^n c_i \{q_i(t)\}_{[n \times 1]}, \quad (1.124)$$

où les coefficients c_i dépendent des conditions initiales données en $t = 0$. En regroupant les n solutions fondamentales dans une base, une matrice de taille $n \times n$ est obtenue :

$$[Q(t)] = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n]_{[n \times n]}, \quad (1.125)$$

qui vérifie la relation :

$$\left[\dot{Q}(t) \right]_{[n \times n]} = \left[A_0(q_e, t, v) \right]_{[n \times n]} \left[Q(t) \right]_{[n \times n]}. \quad (1.126)$$

Puisque l'équilibre $\{q_e\}$ est δt -périodique, alors la matrice tangente $\left[A_0(q_e, t, v) \right]$ est également δt -périodique, soit :

$$\left\{ \dot{q}(t + \delta t) \right\} = \left[A_0(q_e, t + \delta t, v) \right] \left\{ q_i(t + \delta t) \right\} = \left[A_0(q_e, t, v) \right] \left\{ q_i(t + \delta t) \right\}. \quad (1.127)$$

Ainsi, les $\{q_i(t + \delta t)\}$ sont solutions de (1.119), ils peuvent donc s'écrire comme combinaison linéaire des $\{q_i(t)\}$, soit :

$$\left[\dot{Q}(t + \delta t) \right]_{[n \times n]} = \left[\Psi \right]_{[n \times n]} \left[\dot{Q}(t) \right]_{[n \times n]}. \quad (1.128)$$

$\left[\Psi \right]$ est appelée **matrice de monodromie** et réalise le lien entre l'ensemble des solutions fondamentales à l'instant t avec celui considéré à l'instant $t + \delta t$. La matrice de monodromie est utilisée pour établir la stabilité de la solution autour de l'équilibre périodique $\{q_e\}$.

En effet, chaque solution fondamentale $\{q_i(t)\}$ peut s'écrire pour tout $i \in [1, n]$ sous la forme

$$\left\{ q_i(t) \right\} = \left\{ p_i(t) \right\} e^{\alpha_i t}, \quad (1.129)$$

avec $\{p_i(t)\}$ un vecteur complexe δt -périodique, ce qui donne :

$$\left\{ q_i(t + \delta t) \right\} = \left\{ p_i(t + \delta t) \right\} e^{\alpha_i(t + \delta t)} = \left\{ q_i(t) \right\} e^{\alpha_i \delta t}. \quad (1.130)$$

En notant ρ_i les valeurs propres de la matrice de monodromie $\left[\Psi \right]$ et en utilisant l'équation (1.128), le lien entre les **multiplicateurs de Floquet** ρ_i et les **exposants de Floquet** α_i est établi :

$$\rho_i = e^{\alpha_i \delta t} \alpha_i = \frac{1}{\delta t} \ln(\rho_i) + \frac{2\pi k}{\delta t}, \quad (1.131)$$

avec $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

D'après l'équation (1.130), la stabilité est déterminée par :

- si pour tout $i \in [1, n]$, $\Re(\alpha_i) < 0$, ou de façon équivalente $\|\rho_i\| < 1$: toute solution fondamentale $\{q_i(t)\}$ converge vers zéro pour $t \rightarrow +\infty$ et par combinaison linéaire, la perturbation $\{q(t)\}$ également. Le système dynamique est alors **asymptotiquement stable** autour de la solution périodique $\{q_e(t)\}$.
- s'il existe au moins un indice i tel que $\Re(\alpha_i) \geq 0$, ou de façon équivalente $\|\rho_i\| \geq 1$: alors au moins une solution fondamentale $\{q_i(t)\}$ diverge pour $t \rightarrow +\infty$ et par combinaison linéaire, la perturbation $\{q(t)\}$ également. Le système dynamique est alors **instable** autour de la solution périodique $\{q_e(t)\}$.

Instabilités dynamiques dans les systèmes à câbles

La mise en vitesse des câbles est responsable de forces inertielles donnant naissance à des modes complexes [146], avec un effet asymptotiquement déstabilisant pour $V_0 \rightarrow +\infty$. D'après les modèles de Perkins *et al.* [209, 210], la stabilité dynamique d'un câble en translation est assurée par l'effet stabilisant de la tension. Perkins *et al.* ont étendu l'étude au cas d'un câble en translation selon une forme statique en arche, qui correspond à une solution statique instable en compression : à l'arrêt, le câble s'effondre sous l'effet de la compression tandis que la mise en vitesse augmente la tension et stabilise la déformée. L'étude paramétrique de l'évolution des modes du câble en fonction de la vitesse de translation montre des phénomènes de *veering* qui ne conduisent pas à des coalescences de modes, situation potentiellement associée à un comportement instable [150].

D'autres catégories de systèmes mécaniques sont connues dans la littérature pour être sujet à des instabilités dynamiques. Par exemple, le phénomène dit de *lock-in* se produit en une valeur critique du paramètre de contrôle $v = v_c$ lorsqu'au moins une des valeurs propres devient réelle strictement positive, avec un effet de **coalescence de modes** visible sur l'évolution des fréquences modales $f = \frac{\Im(\lambda)}{2\pi}$ pour un intervalle $[v_{li}, v_{lo}]$ du paramètre

qui guide l'instabilité (Fig. 1.19). Ce phénomène est typiquement rencontré dans les applications aux systèmes de freinage (automobile, ferroviaire, aéronautique), avec le **crissement de frein** généré par un mécanisme de frottement et guidé par le paramètre de coefficient de frottement [211]. Il se manifeste comme de fortes vibrations du disque de frein avec un couplage vibro-acoustique à l'origine de nuisances sonores importantes (jusqu'à 110 dB [212]). D'un point de vue modélisation et simulation, l'analyse modale, mentionnée ci-dessus et appliquée aux freins conduit à des valeurs et vecteurs propres complexes : on parle alors de *complex eigenvalue analysis* (CEA) à cause du frottement qui introduit une asymétrie dans la matrice de raideur. Les systèmes avec un couplage fluide-structure sont également sujets aux phénomènes d'instabilité de lock-in [213], autrement désignés par **flottement** pour ces applications. Le *lock-in* est associé à des bifurcations de type Hopf (Fig. 1.19) : lorsque le système rentre dans une zone de fonctionnement instable, il se dirige vers un état de mouvement périodique de grande amplitude qui est régi par les non-linéarités à l'origine d'un effet de saturation de la réponse qualifié de **cycle limite**.

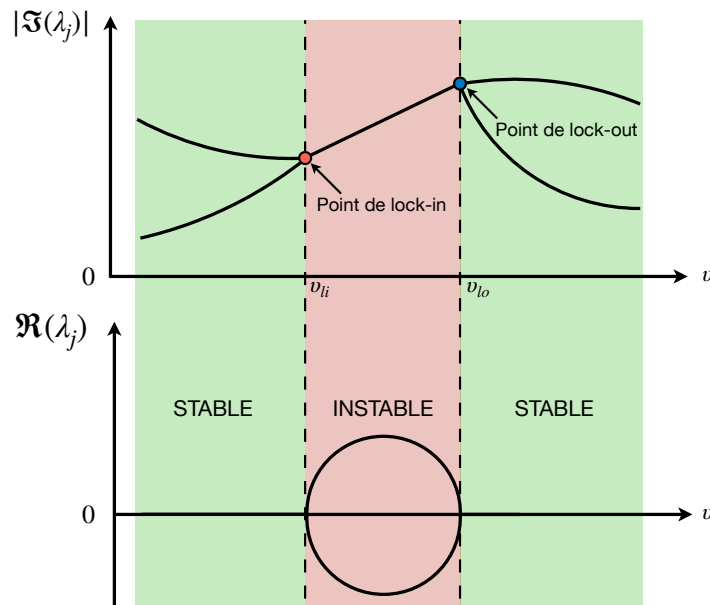


FIGURE 1.19: Phénomène de coalescence de mode suivi d'un lock-in pour $v \in [v_{li}, v_{lo}]$ associé à une bifurcation de type Hopf conduisant à une instabilité

Dans une configuration instable, il est nécessaire de tenir compte des non-linéarités pour évaluer l'amplitude de la réponse du cycle-limite [196]. Des méthodes dédiées existent comme par exemple l'*harmonic balance method* (HBM) [214], éventuellement combinées avec des approches de ROM non-linéaires, pour approcher la solution non-linéaire comme un développement de m harmoniques de la fréquence du mode ciblé (instable) de pulsation ω ,

$$\left\{q(t)\right\}_{[n \times 1]} = \left\{a_0\right\} + \sum_{k=1}^m \left\{a_k\right\} \cos(k\omega t) + \left\{b_k\right\} \sin(k\omega t). \quad (1.132)$$

En remplaçant (1.132) dans (1.117) et par orthogonalité des fonctions trigonométriques, un système linéaire en les coefficients de $\left\{a_0\right\}, \left\{a_k\right\}, \left\{b_k\right\}$ de taille $n(2m+1)$ est obtenu.

1.3.4 Étude dynamique d'une ligne de transport par câbles

Les constructeurs et bureaux d'études spécialisés dans l'étude des lignes de transport par câbles ont pour usage de représenter le mouvement des câbles en translation par une succession de calculs statiques, selon un déplacement incrémental des véhicules. À la connaissance de l'auteur, la seule trace d'un effet dynamique est apportée par l'ajout d'efforts de tension statiques en extrémité de ligne qui estiment la force d'inertie équivalente à une phase transitoire (freinage, accélération) [215]. Les études dynamiques appliquées aux lignes de transport par câbles sont issues de travaux académiques, parfois réalisés dans le cadre de projet impliquant des industriels.

À la connaissance de l'auteur, aucun travail de modélisation et de simulation n'a débouché sur un outil pratique, répandu dans la profession, utilisé en phase de conception. Un aperçu des travaux disponibles en dynamique et appliqués au transport par câble est proposée, avec un classement des contributions selon le type de modélisation adopté :

— **Modèle pseudo-dynamique**

Une approche à la frontière avec la statique, désignée ici par pseudo-dynamique, consiste à corriger les efforts statiques par des efforts dynamiques dans le modèle statique de la ligne de câble [216, 217]. L'approche pseudo-dynamique autorise ainsi une application simple à la boucle de câble complète d'une installation de transport par câbles.

Le modèle ne s'appuie pas sur les équations de la dynamique du câble, ce qui constitue une approximation forte car le câble est supposé conserver sa forme statique de chaînette. Seule la flèche varie sous l'effet de l'introduction des efforts dynamiques, ce qui est en pratique valable pour les premiers modes de vibration : *" Pour le calcul des oscillations verticales du câble tracteur, on part du fait que la forme de la courbe du câble pendant le phénomène d'oscillations peut être représentée par approximation par une parabole comme dans le cas statique "* [218].

Ce type de modélisation est utilisée pour la simulation de l'effet du vent sur une portée isolée du reste de la ligne [219].

— **Modèle dynamique discret**

Selon les modèles dynamique les plus simples, la ligne de câble est représentée par des ressorts couplés avec des masses ponctuelles [220, 221]. Cette approche du problème condense la masse du câble au niveau des véhicules ou au niveau de masses intermédiaires.

Le modèle discret utilisé par Mayr [222] sert de support à l'étude de la propagation des ondes dans les câbles de téléphériques.

La ligne de câble est même ramenée à un simple oscillateur à 1 DDL par Zweifel [223].

— **Modèle dynamique continu avec discrétisation numérique**

— **Méthode des éléments finis**

Portier [224] réalise des calculs transitoire pour simuler l'effet de la rupture d'un câble tracteur sur un téléphérique, en confrontant les résultats numériques à des essais [225]. Le câble est représenté par un modèle de fil, linéarisé autour de chaque état courant qui sert de référence à chaque pas de temps du calcul transitoire, discrétisé par MEF. Ainsi, les matrices du modèle sont actualisées à chaque pas de temps de la simulation pour rendre compte des grands déplacements. Des fonctions de formes linéaires sont utilisées dans la MEF : cela implique que la tension du câble est considérée constante sur chaque élément. Un modèle pendulaire discret du véhicule, avec un amortisseur en rotation, est couplé au câble. L'absence de flexion dans le câble est justifiée par les travaux expérimentaux de Coussy [226]. Renezeder [17] réalise des calculs transitoires sur une boucle d'une ligne de transport monocâble avec le logiciel Abaqus, utilisant une méthode d'intégration temporelle explicite. Le modèle de câble est basé sur des éléments de type *2-node truss element*. Le contact avec des poulies intermédiaires est pris en compte et la translation du câble est assurée par une poulie motrice, tandis que la flèche initiale (statique) est imposée par une poulie de mise en tension. Renezeder soulève la question de la pertinence d'une telle démarche, avec un temps de calcul de sept jours annoncé pour une simulation transitoire de 9.9 s d'une boucle de câble de télésiège comportant 21 portées, 70 véhicules, 20000 éléments de maillage du câble d'une longueur de 3790 m, pour des pas de temps d'intégration de 10^{-5} s.

Ntarladima [15] met en place un modèle multi-corps d'une ligne de transport monocâble, avec une représentation du câble par une méthode éléments finis, selon une formulation Absolute Nodal Coordinate Formulation (ANCF). L'interaction entre le câble et les appuis intermédiaires est représentée par un modèle de Coulomb régularisé, traité par une méthode numérique de pénalisation. Pour des questions de complexité du modèle, utilisé afin de réaliser des simulations transitoires par intégration temporelle implicite avec des temps de calcul de quelques minutes, les balanciers sont représentés par des poulies équivalentes dont le rayon est fixé par la géométrie réelle du balancier. L'étude dynamique est menée à partir d'une configuration statique, calculée par résolution du problème non-linéaire de l'équilibre du système complet sous l'effet de la gravité. Pour cela, une initialisation est choisie en

imposant virtuellement une flèche au câble par l'introduction de poulies virtuelles en milieu de chacune des portées de câble (Fig. 1.20).

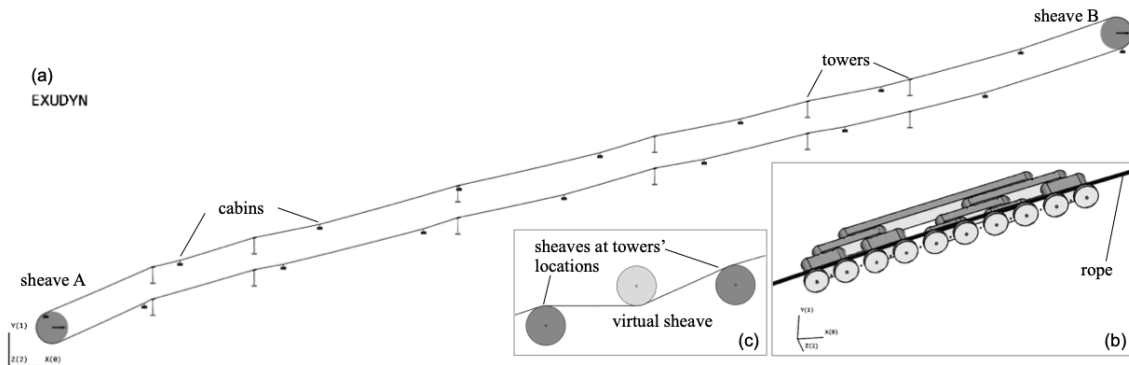


FIGURE 1.20: Modélisation d'une ligne de transport monocâble selon une approche multi-corps (d'après [15])

— Méthode de Ritz-Galerkin

Dans ses travaux appliqués à l'étude d'une ligne de téléphérique bi-câbles à mouvement continu, Knawa [227, 228] fait appel à une méthode de Ritz-Galerkin pour projeter les équations dynamiques 3D non-linéaires du câble, représenté selon un modèle de fil couplé à un modèle pendulaire des véhicules. Les déplacements verticaux et hors-plan sont recherchés de façon approchée sur une base de fonctions sinusoïdales vérifiant les conditions de contact bilatéral aux appuis intermédiaires de chaque portée de câble,

$$\begin{bmatrix} T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\pi x_i / l_i) \end{bmatrix}, \quad (1.133)$$

avec l_i la longueur de corde. Les déplacements longitudinaux sont recherchés dans une base formée de fonctions sinusoïdales, similaires à celles employées pour le déplacement vertical et hors plan, en y superposant des fonctions linéaires sur chaque portée.

L'interaction entre les oscillations pendulaires des véhicules et la dynamique verticale du câble est étudiée sur deux portées couplées entre elles par Lässer [229]. La recherche des solutions au problème dynamique du câble est réalisée selon une base de Ritz-Galerkin, calculée analytiquement à partir d'un modèle de corde tendue. Ces travaux ont fait l'objet d'un partenariat avec le constructeur Dopplemayr Seilbahnen GmbH, avec l'objectif affiché d'apporter des éléments de connaissance théorique au service d'une conception optimale du système vis-à-vis de son comportement vibratoire.

— Méthode des différences finies

Hurel *et al.* [13, 14] étudie la dynamique transitoire d'une portée de téléphérique bi-câbles. Les équations dynamiques 2D linéaires du câble représenté par un modèle de fil, discrétisées en espace aux différences finies, sont couplées au modèle ponctuel non-linéaire d'un véhicule pendulé. Un avancement quasi-statique des véhicules et du câble est supposé lors du calcul transitoire dynamique, réalisé à l'avancement autour de chacune des positions statiques successivement calculées. Une base modale, actualisée à chaque pas de temps du calcul transitoire, est générée autour des états statiques tangents et sert de base de réduction des équations de la dynamique pour la résolution transitoire.

Bilan du chapitre

L'état de l'art scientifique et technique permet de positionner les développements à venir au regard de la bibliographie disponible.

Aucun logiciel commercial, ou de développement de code maison réalisé par les acteurs techniques du domaine, n'est arrivé à un compromis raisonnable de modélisation et de calcul pour tenir compte des caractéristiques du système de transport par câbles, avec pour finalité d'apporter des éléments de conception exploitables dans un contexte de bureau d'étude. Les approches présentées dans l'état de l'art reposent sur des modèles soit trop simples, selon une approche locale qui ne traduit pas les phénomènes physiques attendus à l'échelle de la boucle

de câble complète, soit trop complexes, avec des temps de calcul hors de portée d'une utilisation pratique dans un contexte industriel. La difficulté vient aussi de la diversité des configurations des installations (télésiège, télécabine, téléphériques va-et-vient, funitel, 2S, 3S), nécessitant une approche modulaire avec des modèles capable de s'adapter à la présence d'un ou de plusieurs câbles, fixes et mobiles, de conditions aux limites diverses (ancrage fixe, tension régulée), d'un ou plusieurs véhicules,...

Modélisation

Différentes hypothèses de modélisation du câble sont identifiées, en cohérence avec les applications visées par ces travaux :

- L'**approche curviligne** est suffisante pour représenter le câble en l'absence de la nécessité d'atteindre des échelles plus fines.
- Le câble est supposé travailler uniquement à la **traction** en statique, selon un **modèle de fil**.
- L'influence de la **flexion** doit être étudiée aux abords des points de chargement ponctuels et des appuis, selon un **modèle de tige**.
- Les travaux ne s'intéressent pas spécifiquement aux phénomènes de propagation des ondes dans les câbles, dont la célérité est importante vis-à-vis des échelles de temps des phénomènes dynamiques qui sont visés : les équations dynamiques sont donc établies en dehors des ondes de chocs.

La bibliographie n'apporte pas d'éléments de justification précis pour une application au contexte spécifique des lignes de transport par câbles. Le choix d'un modèle et des hypothèses retenues sera justifié en statique dans les chapitres 2 et 3, puis en dynamique dans les chapitres 4 et 5.

La problématique de l'assemblage des portées de câbles entre elles demeure ouverte avec :

- La formulation d'un **modèle d'appui** décrivant les zones de contact du câble avec les autres composants du système en présence de frottement et de modifications de la géométrie de l'appui qui est déformable.
- La formulation d'un **modèle du véhicule**.

La modélisation de l'interaction du câble avec les appuis et les véhicules, ainsi que les techniques d'assemblage des différents sous-composants du système, est détaillée dans le chapitre 2 en statique et dans le chapitre 4 en dynamique.

Calcul statique et dynamique

De façon spécifique à l'application, la mise en place d'une **méthode de résolution** de l'assemblage d'une ligne :

- adaptée au contexte industriel du dimensionnement statique des transporteurs aériens par câbles,
- robuste du point de vue de la convergence de la technique de résolution,
- compatible avec des temps de calcul pour une utilisation en bureau d'études,

est une question ouverte qui est abordée dans les chapitre 2 et 3 pour le calcul statique et dans les chapitre 4 et 5 pour le calcul dynamique.

Plusieurs méthodes de calcul de l'équilibre en statique des câbles sont recensées :

- Un traitement analytique par les équations de la **chaînette** qui décrit l'équilibre statique du câble selon un **modèle de fil inextensible** valide pour des chargements plans.
- Le traitement numérique des équations est nécessaire pour le modèle de fil doté d'une loi de comportement et d'un chargement quelconques, tout comme pour le modèle de tige sans hypothèse de petits déplacements.

Dans les chapitres 2 et 3, la méthode de la chaînette est confrontée à un schéma aux différences finies, appliqué successivement à un modèle de fil et de tige.

Des méthodes appartenant à l'analyse des systèmes dynamiques sont identifiées :

- l'analyse modale d'un système linéaire et l'extension de la théorie des modes de vibrations au cas non-linéaires,
- l'analyse de stabilité, autour d'un équilibre statique selon la théorie de Lyapunov, ou autour d'une solution d'équilibre périodique selon la théorie de Floquet.

Dans le chapitre 4, les équations du modèle dynamique linéarisé du système autour d'un équilibre statique sont mises en place. La recherche de modes linéaires est privilégiée au concept de modes non-linéaires. En effet,

les techniques de modes non-linéaires ont principalement une visée d'étude analytique de la dynamique de systèmes possédant un faible nombre de degrés de liberté, dans un espace avec un nombre réduit de paramètres. L'application à des systèmes de plus grande taille demande des développements dédiés, en dehors du cadre des travaux. Dans le chapitre 5, la stabilité d'une solution périodique à l'équation de type Mathieu, obtenue après projection du modèle sur un mode de vibration linéaire, est étudiée selon la théorie de Floquet.

Chapitre 2

Construction du modèle statique d'une installation de transport par câbles

Introduction du chapitre

Dans le chapitre 2, la ligne de transport par câble est décomposée en ses sous-éléments : la boucle de câble dans la section 2.1, les appuis dans la section 2.3 et les véhicules dans la section 2.4. Les hypothèses de modélisation et de couplage sont discutées dans le domaine statique, selon une approche incrémentale et modulaire. Différentes méthodes de résolutions sont proposés dans la section 2.2. L'objectif est d'évaluer le comportement statique de la structure globale, une fois assemblée, ce qui est l'objet de la section 2.5.

Des éléments de contexte technologique sont donnés en Annexe F.

2.1 Modélisation statique du câble

À la lumière du positionnement des travaux, présenté dans le chapitre 1, deux représentations du câble sont abordées dans la section 2.1 :

- Le modèle de **fil infiniment souple** dans la sous-section 2.1.2,
- Le modèle de **tige** dans la sous-section 2.1.3.

2.1.1 Définition d'un élément de câble

Géométrie

L'élément de câble considéré est un objet à une dimension, occupant le domaine \mathcal{C}_R sur sa configuration de référence, plongé dans un espace physique \mathcal{E} assimilé à un espace affine euclidien d'espace vectoriel associé à trois dimensions \mathbf{R}^3 , muni d'un produit scalaire (forme linéaire) noté $(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x} \cdot \underline{y}, \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbf{R}^3$ (Fig. 2.1).

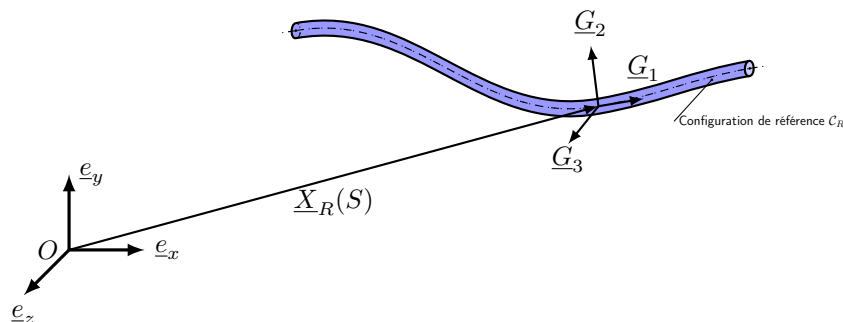


FIGURE 2.1: Configuration de référence \mathcal{C}_R de l'élément de câble et base locale

Un système de coordonnées cartésiennes $(\underline{e}_i)_{i=x,y,z}$ définit une base orthogonale servant de référentiel \mathcal{R} . À chaque point matériel $\underline{X}_R \in \mathcal{C}_R$, une base locale orthonormale $(\underline{G}_1, \underline{G}_2, \underline{G}_3)$ associée au paramètre d'abscisse curviligne S est définie telle que :

$$dS = \|d\underline{X}_R\| = \sqrt{d\underline{X}_R \cdot d\underline{X}_R}, \quad (2.1)$$

$$\underline{G}_1 = \frac{d\underline{X}_R}{dS} \quad \underline{G}_1 \cdot \underline{G}_2 = 0 \quad \|\underline{G}_2\| = 1 \quad \underline{G}_3 = \frac{\underline{G}_1 \wedge \underline{G}_2}{\|\underline{G}_1 \wedge \underline{G}_2\|}. \quad (2.2)$$

Le vecteur $d\underline{X}_R = dS \underline{G}_1$ donne la direction d'une ligne matérielle tracée sur la configuration de référence \mathcal{C}_R et passant par \underline{X}_R . Le tenseur métrique $\underline{G} = I_3$.

Cinématique

Le milieu subit une transformation statique (indépendante du temps) :

$$\begin{aligned} \Phi(\underline{X}_R) : \quad \mathcal{C}_R &\mapsto \mathcal{C} \\ \underline{X}_R &\rightarrow \underline{X}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

depuis la configuration de référence \mathcal{C}_R , occupée par le câble de position \underline{X}_R , pour atteindre une configuration courante notée \mathcal{C} , où $\underline{X} = \Phi(\underline{X}_R)$ représente la position courante. La base locale de référence $(\underline{G}_i)_{i=1,2,3}$ est transformée en la base locale courante $(\underline{g}_i)_{i=1,2,3}$, telle que $\forall i \in [1, 3]$:

$$\underline{g}_i = \underline{F} \cdot \underline{G}_i. \quad (2.4)$$

D'après les préliminaires, le gradient de la transformation :

$$\underline{F} = \underline{g}_i \otimes \underline{G}^i, \quad (2.5)$$

et le tenseur des déformations de Green-Lagrange :

$$\begin{aligned} \underline{E} &= \frac{1}{2}(\underline{F}^T \underline{F} - \underline{1}) = \frac{1}{2}((\underline{G}^i \otimes \underline{g}_i)(\underline{g}_j \otimes \underline{G}^j) - \underline{1}) = \frac{1}{2}((\underline{G}^i(\underline{g}_i \cdot \underline{g}_j) \otimes \underline{G}^j) - \underline{1}) \\ &= \frac{1}{2}(g_{ij} \underline{G}^i \otimes \underline{G}^j - \underline{1}) = \frac{1}{2}(g_{ij} - G_{ij}) \underline{G}^i \otimes \underline{G}^j. \end{aligned} \quad (2.6)$$

La transformation est décrite en fonction de S . Ainsi, la seule composante non-nulle du tenseur des déformations est :

$$E_{11} = \frac{1}{2}(g_{11} - G_{11}) \underline{G}^1 \otimes \underline{G}^1 \cdot \underline{G}_1 = \frac{1}{2}(g_{11} - 1) = \frac{1}{2} \left(\left\| \frac{d\underline{X}}{dS} \right\|^2 - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\left\| \frac{d\underline{X}}{\|d\underline{X}_R\|} \right\|^2 - 1 \right). \quad (2.7)$$

La déformation de Green-Lagrange s'interprète alors comme la moitié de l'allongement relatif de la ligne matérielle du câble.

En adoptant un point de vue lagrangien, une configuration de référence \mathcal{C}_R , de position notée \underline{X}_R , est donnée comme entrée du modèle tandis que l'inconnue du problème est le déplacement \underline{U} , pour atteindre la configuration courante \mathcal{C} , de position \underline{X} , tel que :

$$\underline{U} = \underline{X} - \underline{X}_R = u \underline{e}_x + v \underline{e}_y + w \underline{e}_z. \quad (2.8)$$

Équations de bilan

L'équation de bilan de quantité de mouvement à l'équilibre statique est écrite sur l'élément de câble de longueur L considéré selon la configuration courante \mathcal{C} . Le câble est soumis à une répartition de chargement linéique \underline{f} telle que sous forme intégrale,

$$0 = \int_L \underline{f}(s) \, ds + \underline{r}(0) - \underline{r}(L) = \int_L \underline{f}(s) \, ds + [A(0) \underline{\sigma}(0) \cdot \underline{n}(0)] - [A(L) \underline{\sigma}(L) \cdot \underline{n}(L)], \quad (2.9)$$

avec \underline{r} la résultante des efforts de contact et $\underline{\sigma}$ le tenseur des contraintes de Cauchy.

Par le théorème de la divergence, il vient :

$$0 = \int_L \left(\underline{f}(s) + \frac{d\underline{r}}{ds} \right) ds = \int_L \left(\underline{f}(s) + A(s) \frac{d\sigma(s) \cdot \underline{n}(s)}{ds} \right) ds. \quad (2.10)$$

Par le théorème de localisation, l'expression de l'équilibre statique d'une portion élémentaire de câble est obtenue,

$$\underline{f}(s) + \frac{d\underline{r}}{ds} = \underline{0}, \quad \forall s \in [0, L]. \quad (2.11)$$

L'équation de bilan de moment cinétique à l'équilibre statique est écrite sur l'élément de câble de longueur L sur la configuration courante soumise à une répartition de moment linéique \underline{m} et de chargement linéique \underline{f} ,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_L ((\underline{X} - \underline{X}_0) \wedge \underline{f}(s) + \underline{m}(s)) ds + \int_A (\underline{X} - \underline{X}_0) \wedge \underline{r}(s) dA \\ &= \int_L ((\underline{X} - \underline{X}_0) \wedge \underline{f}(s) + \underline{m}(s)) ds + \int_A (\underline{X} - \underline{X}_0) \wedge \sigma(s) \cdot \underline{n} dA. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Par le théorème de la divergence, il vient :

$$0 = \int_L ((\underline{X} - \underline{X}_0) \wedge \underline{f}(s) + \underline{m}(s)) ds + \int_L \frac{d((\underline{X} - \underline{X}_0) \wedge \underline{r})}{ds} ds, \quad (2.13)$$

$$0 = \int_L ((\underline{X} - \underline{X}_0) \wedge \underline{f}(s) + \underline{m}(s)) ds + \int_L \frac{d(\underline{X} - \underline{X}_0) \wedge \sigma(s) \cdot \underline{n}}{ds} ds, \quad (2.14)$$

$$0 = \int_L ((\underline{X} - \underline{X}_0) \wedge \underline{f}(s) + \underline{m}(s)) ds + \int_L \frac{d(\underline{X} - \underline{X}_0)}{ds} \wedge (\sigma(s) \cdot \underline{n}) + (\underline{X} - \underline{X}_0) \wedge \frac{d(\sigma(s) \cdot \underline{n})}{ds} ds. \quad (2.15)$$

En pratique, les données d'entrée du modèle mécanique du câble sont les caractéristiques mécaniques connues en sortie d'usine :

- Sa masse linéique μ_R ,
- Sa longueur de référence L_R avant sa mise sous tension.

Il faut ainsi faire le lien entre les grandeurs exprimées sur la configuration courante, pour laquelle sont écrites les équations de bilan, et les grandeurs associées sur la configuration de référence. Le point de vue lagrangien consiste alors à construire l'élément de câble en exprimant les équations en fonction de la variable lagrangienne d'abscisse curviligne S et des grandeurs mécaniques prises sur la configuration de référence. Le tenseur des contraintes de Cauchy σ s'exprime sur la configuration courante en fonction des vecteurs normalisés de la base locale $(\underline{g}_i / \|\underline{g}_i\|)_{i=1,2,3}$,

$$\sigma = \sigma_{ij} \frac{\underline{g}_i}{\|\underline{g}_i\|} \otimes \frac{\underline{g}_j}{\|\underline{g}_j\|} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{g^{ii} g^{jj}}} \underline{g}_i \otimes \underline{g}_j = \sigma_{ij} \sqrt{g^{ii} g^{jj}} \underline{g}_i \otimes \underline{g}_j. \quad (2.16)$$

Les efforts de contact \underline{r} , dans une section de surface A du câble orientée par le vecteur unitaire $\underline{n} = \frac{\underline{g}_1}{\|\underline{g}_1\|}$, s'expriment en fonction du tenseur de Cauchy,

$$\underline{r} = A \sigma \cdot \underline{n} = A \sigma_{ij} \sqrt{g^{ii} g^{jj}} \underline{g}_i \otimes \underline{g}_j \cdot \underline{n} = N \frac{\underline{g}_1}{\sqrt{g^{11}}} + V_1 \frac{\underline{g}_2}{\sqrt{g^{22}}} + V_2 \frac{\underline{g}_3}{\sqrt{g^{33}}}, \quad (2.17)$$

avec N l'effort normal et V_1, V_2 les efforts tranchants.

L'effort de contact \underline{R} , ramené sur la configuration de référence \mathcal{C}_R , s'exprime en fonction du second tenseur de Piola-Kirchoff $\underline{\pi}$ et de la normale à la section du câble $\hat{\underline{n}} = \underline{G}_1$ de surface A_R ,

$$\underline{R} = A_R J \underline{F}^{-1} \sigma \cdot \underline{F}^{-T} \cdot \hat{\underline{n}} = A_R \underline{\pi} \cdot \hat{\underline{n}} = A_R \pi_{ij} \underline{G}_i \otimes \underline{G}_j \cdot \hat{\underline{n}} = \hat{N} \underline{G}_1 + \hat{V}_1 \underline{G}_2 + \hat{V}_2 \underline{G}_3, \quad (2.18)$$

avec \hat{N} l'effort normal et \hat{V}_1, \hat{V}_2 les efforts tranchants ramenés sur la configuration de référence.

Une fois les équations de bilan spécifiées, des choix sont à faire quant à la physique contenue dans le modèle de câble. La famille des éléments appelés **poutres géométriquement exactes** consiste en une extension de

la théorie des poutres aux grands déplacements et grandes rotations. C'est le cadre le plus général pour la formulation d'un élément de câble, rendant compte du comportement en extension, en cisaillement, à la torsion et à la flexion.

2.1.2 Modèle de fil

Pour un **modèle de fil**, seul un effort axial est supposé régner dans le câble,

$$\underline{r} = N \frac{\underline{g}_1}{\|\underline{g}_1\|}. \quad (2.19)$$

Une fois les équations de bilan écrites sur la configuration déformée \mathcal{C} , il faut transporter les grandeurs sur la configuration de référence \mathcal{C}_R pour formuler le problème d'équilibre uniquement en fonction de quantités connues. Le chargement extérieur $\underline{f}(s)$ est ramené sur la configuration de référence,

$$\underline{f}(s) ds = \underline{f}_R(S) dS. \quad (2.20)$$

Les vecteurs d'effort de contact, sur les configurations de référence et déformée, sont réduits à :

$$\underline{R} = A_R J \sigma_{11} \underline{G}_1 = \hat{N} \underline{G}_1 \quad \text{avec } J = \det(\underline{F}) = \sqrt{g_{11}}, \quad (2.21)$$

$$\underline{r} = A \sigma_{11} \sqrt{g^{11}} \underline{g}_1 = N \frac{\underline{g}_1}{\sqrt{g^{11}}}. \quad (2.22)$$

En combinant (2.21) et (2.22), il vient :

$$\hat{N} = \frac{A_R}{A \sqrt{g^{11}}} N. \quad (2.23)$$

Si les changements de section au cours de la transformation sont négligés dans le câble (effets de Poisson), $A = A_R$ et $\hat{N} = \frac{N}{\sqrt{g^{11}}}$. L'équation (2.11) se réécrit alors en transportant les grandeurs d'effort sur la configuration de référence \mathcal{C}_R ,

$$\underline{f}_R(S) + \frac{d}{dS} (\hat{N} \underline{g}_1) = \underline{0}, \quad \forall S \in [0, L_R]. \quad (2.24)$$

Dans le cadre d'étude des milieux curvilignes proposé dans la revue bibliographique, l'effort normal sur la configuration de référence $\hat{N}(S)$ était assimilé à l'effort normal sur la configuration déformée $N(s)$, tel que $N(S) = N(s)$. Avec le formalisme développé ci-dessus, un facteur $\|\underline{X}'\|$ est introduit dans (2.23) en faisant la distinction entre les efforts \hat{N} exprimés sur la configuration de référence, et donc exprimés en fonction de la variable S , et les efforts sur la configuration déformée N exprimés en fonction de la variable courante s .

La formulation du problème de l'équilibre statique d'un câble proposée ici est générale :

- Le chargement extérieur est supposé être une densité linéique tridimensionnelle d'effort quelconque $\underline{f}_R(S) \in \mathbf{R}^3$. En pratique, ce chargement regroupe les forces agissant de façon variable le long de la boucle de câble telles que par exemple :
 - l'effet de la pesanteur sur un câble aux propriétés non-uniformes (masse linéique),
 - le couplage fluide-structure : vent, pluie, ...,
 - l'interaction avec un champ magnétique.
- Aucune hypothèse n'est précisée *a priori* sur la loi de comportement qui relie les efforts axiaux $N(S)$ générés par les déformations du câble $\hat{\varepsilon}$. La loi de constitution $\Psi : \hat{\varepsilon} \mapsto N(S)$ laisse la possibilité d'être spécifiée selon les applications souhaitées (élasticité, plasticité).

Le problème (\mathcal{P}) de l'équilibre d'un fil est spécifié en fonction du champ de déplacement inconnu \underline{U} avec un paramétrage par l'abscisse curviligne $S \in [0, L_R]$ sur la configuration de référence notée \mathcal{C}_R .

- **L'inconnue**
Le déplacement

$$S \mapsto \underline{U}(S) = \underline{X}(S) - \underline{X}_R(S) = u \underline{e}_x + v \underline{e}_y + w \underline{e}_z \quad (2.25)$$

- **L'équation de relation géométrique**

Le vecteur tangent au milieu s'écrit :

$$\underline{t} = \frac{\underline{g}_1}{\|\underline{g}_1\|}. \quad (2.26)$$

— **La mesure de déformation**

Avec la loi de comportement de Saint-Venant-Kirchoff, qui est l'extension de la loi élastique linéaire aux grandes déformations [230], la mesure de déformation de Green-Lagrange $\hat{\varepsilon}$ (quantité duale au tenseur de Piola-Kirchoff) caractérise l'extension du milieu curviligne en l'absence de rotation :

$$\hat{\varepsilon} = \frac{d\underline{U}}{dS} \cdot \frac{d\underline{X}_R}{dS} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\underline{U}}{dS} \right)^2 \quad (\text{mesure de déformation de Green-Lagrange}). \quad (2.27)$$

— **L'équation d'équilibre en effort**

La notation \hat{N} , précédemment utilisée pour distinguer les efforts exprimés sur la configuration de référence \mathcal{C}_R (tenseur de Piola-Kirchoff) des efforts exprimés sur la configuration courante \mathcal{C} (tenseur d'Euler), n'est pas reprise ici.

Par souci de simplification des notations, sont désignés par $N(S)$ les efforts axiaux exercés sur la configuration de référence \mathcal{C}_R pour les modèles issus d'une formulation de la mécanique des milieux continus écrits en déplacement \underline{U} par rapport à un état de référence. Pour les modèles écrits directement en la position inconnue \underline{X} (chaînette) ou dans le cadre des petites perturbations qui ne distinguent pas la configuration de référence avec celle déformée, $N(S)$ est la grandeur attachée à la configuration courante paramétrisée par l'abscisse curviligne S prise sur la référence.

D'après les équations de bilan de la formulation d'un élément de câble appliquées à un milieu uniquement soumis à des efforts axiaux, sans flexion, la relation qui relie les efforts axiaux $N(S)$ à la densité d'effort linéique \underline{f}_R appliquée au milieu sur la configuration de référence \mathcal{C}_R est :

$$\frac{d}{dS} \left(N(S) \frac{d}{dS} (\underline{X}_R + \underline{U}) \right) + \underline{f}_R = 0, \quad \forall S \in [0, L_R] \quad (\text{équilibre statique en effort}). \quad (2.28)$$

— **Les conditions aux limites**

Selon les données connues en entrée du problème, des conditions en effort ou en déplacement sont imposés sur les bords du milieu. Aux extrémités d'abscisses curvilignes $S = S_q$, où s'applique un effort ponctuel $\underline{\mathcal{F}}$, et $S = S_U$, où le déplacement est imposé à \underline{U}_0 , les conditions aux bords s'écrivent :

$$\underline{U}(S_U) = \underline{U}_0 \quad (\text{condition au bord en déplacement}), \quad (2.29)$$

$$N(S_q) \frac{d}{dS} (\underline{X}_R + \underline{U})(S_q) = \underline{\mathcal{F}} \quad (\text{condition au bord en effort}). \quad (2.30)$$

— **La relation constitutive**

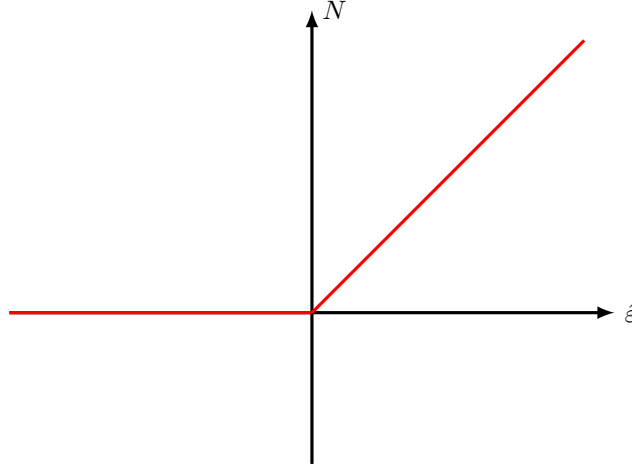
Une loi $\Psi : \hat{\varepsilon} \mapsto N$ élastique linéaire par morceaux en $\hat{\varepsilon}$ traduit le comportement du fil (Fig. 2.2),

$$N(S) = \begin{cases} EA_R \hat{\varepsilon} + N_0(S) & (\text{loi de Saint Venant - Kirchoff}) \quad \text{si } \hat{\varepsilon} \geq 0 \\ 0 & \text{si } \hat{\varepsilon} < 0 \end{cases}, \quad \forall S \in [0, L_R], \quad (2.31)$$

avec l'effort de précontrainte $N_0(S)$ sur la configuration de référence \underline{X}_R .

Conformément aux propriétés des fils en statique qui garantissent la stabilité statique [84], et afin de rendre compte de la physique attendue, la relation constitutive traduit que le milieu ne peut pas travailler en compression : $N(\hat{\varepsilon}) = 0$ pour $\hat{\varepsilon} \leq 0$. La loi de comportement est non-régulière en $\hat{\varepsilon} = 0$ car la dérivée n'est pas définie en ce point.

En injectant la loi de comportement (2.31) dans l'équation d'équilibre en effort (2.28) pour un travail du fil à la


 FIGURE 2.2: Loi de comportement Ψ d'un fil en traction

traction $\hat{\varepsilon} > 0$,

$$\left(\frac{d^2 X_R}{dS^2} + \frac{d^2 U}{dS^2} \right) \left[EA_R \left(\frac{dU}{dS} \frac{dX_R}{dS} + \frac{1}{2} \left(\frac{dU}{dS} \right)^2 \right) + N_0(S) \right] + \left(\frac{dX_R}{dS} + \frac{dU}{dS} \right) \left[EA_R \left(\frac{d^2 U}{dS^2} \left(\frac{dX_R}{dS} + \frac{dU}{dS} \right) + \frac{dU}{dS} \frac{d^2 X_R}{dS^2} \right) + \frac{dN_0}{dS} \right] + \underline{f}_R = \underline{0} \quad (2.32)$$

L'Annexe C donne le détail de la projection de (2.32) sur la base cartésienne $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$. Les équations (C.1) (C.2) (C.3) montrent des non-linéarités quadratiques et cubiques en les composantes u, v, w du déplacement \underline{U} et font apparaître les contributions horizontale $f_{R,x}$, verticale $f_{R,y}$ et transversale $f_{R,z}$ de la répartition d'effort linéique s'exerçant sur le câble.

Le problème d'équilibre statique d'un câble tendu entre deux points fixes est de type **non-linéaire régulier**. Les non-linéarités sont de natures géométriques : le changement de géométrie du câble, sous l'action des sollicitations auxquelles il est soumis, occasionne à son tour des modifications sur ces sollicitations en terme d'amplitude et de direction. C'est ce qui en fait un problème simple en apparence mais qui devient souvent complexe à traiter en pratique. Le modèle de fil présente des non-linéarités géométriques quadratiques qui interviennent dans l'expression de la mesure de déformation de Green-Lagrange. Ces termes non-linéaires ne peuvent pas être supprimés dans le cas général des grands déplacements et des grandes déformations. Ils gouvernent l'effort N régissant l'équilibre du milieu par l'intermédiaire de la loi de constitution linéaire $\Psi : \hat{\varepsilon} \mapsto N$. Ainsi, le changement de géométrie qui génère une déformation a une conséquence directe sur l'amplitude de l'effort axial. De plus, l'écriture de l'équilibre se fait selon la direction tangentielle au câble sur la configuration déformée \mathcal{C} qui dépend des déplacements recherchés, ce qui introduit des termes non-linéaires supplémentaires avec finalement des non-linéarités quadratiques et cubiques dans la formulation du problème d'équilibre.

À ce stade, le problème (\mathcal{P}) ne possède pas de solution exacte qui puisse s'exprimer analytiquement de manière simple, à l'instar des formules de chaînette. Les méthodes numériques basées sur des techniques de discrétisation, par un maillage du domaine continu occupé par le câble selon une nouvelle géométrie simple, consistent à rechercher une solution approchée au problème de départ. Selon le besoin, les méthodes de discrétisation peuvent présenter des avantages et inconvénients en terme de formulation, de condition sur la régularité des champs recherchés, de facilité de mise en œuvre, de performance en temps de calcul et de convergence des algorithmes de recherche des solutions non-linéaires.

Il y a plusieurs façons équivalentes d'énoncer le problème d'équilibre statique non-linéaire du câble (\mathcal{P}) qui est régi par des équations différentielles d'ordre deux en distinguant :

- Les **formulations fortes** basées sur l'écriture directe des équations de l'équilibre des efforts mécaniques dans le câble.
- Les **formulations faibles ou variationnelles** basées sur l'écriture d'un potentiel d'énergie, dont le problème d'équilibre mécanique du câble dérive (forme Hamiltonienne, [144, 230]). Le cas particulier

d'une loi de comportement non-régulière telle que celle décrite par (2.31) est traité par le cadre des matériaux standards généralisés et le concept de sous-différentiel [231]. Un des intérêts pratiques de la formulation faible est l'existence d'un cadre théorique d'application de la **méthode de Galerkin**, ou méthode d'approximation interne, en remplaçant l'espace de recherche des solutions par un sous-espace de dimension finie dépendant de la taille typique du maillage de l'espace. C'est le principe de la méthode numérique des **éléments finis**, très courante pour des applications en mécanique des structures.

Un changement de variable permet de se ramener à un problème homogène équivalent par relèvement de la solution aux bords. Le problème (\mathcal{P}) écrit sous forme forte consiste alors à rechercher $\underline{U} \in (C^2([0, L_R]))^3$ sur l'espace des fonctions définies sur l'intervalle $[0, L_R]$, dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre deux existent et sont continues sur $[0, L_R]$, tel que :

$$\begin{cases} \underline{R}'(\underline{U}'', \underline{U}', \underline{U}) = \underline{f}(S) & , \forall S \in [0, L_R] \\ \underline{U}(S_0) = 0, \\ \underline{R}(\underline{U}(S_q)) = \underline{\mathcal{F}}, \end{cases} \quad (2.33)$$

avec \underline{R} et \underline{f} des fonctions connues et continues sur $S \in [0, L_R]$.

La forme faible (\mathcal{Q}) du problème de départ (\mathcal{P}) consiste à réaliser le produit scalaire de (2.33) avec une fonction test \underline{V} telle que :

- $\underline{V} \in (\mathcal{H}^1(]0, L_R[))$ ³ appartient à un espace de Sobolev \mathcal{H}^1 tel que \underline{V} et sa dérivée première soient de carré intégrable.
- \underline{V} vérifie les conditions aux bords du domaine en déplacement (champ **cinématiquement admissible**).

Puis une intégration par partie fait apparaître les conditions aux limites du problème en S_0 et S_q . L'inconnue $\underline{U} \in (\mathcal{H}^1(]0, L_R[))$ ³ vérifie alors, pour tout champ test $\underline{V} \in (\mathcal{H}^1(]0, L_R[))$ ³,

$$\int_0^{L_R} \underline{R}(\underline{U}'', \underline{U}', \underline{U}) \cdot \underline{V}'(S) \, dS - \left[\underline{R}(\underline{U}'', \underline{U}', \underline{U}) \cdot \underline{V}(S) \right]_0^{L_R} = \int_0^{L_R} \underline{f}(S) \underline{V}(S) \, dS. \quad (2.34)$$

Une façon alternative de poser le problème (\mathcal{P}) est d'adopter une forme mixte en faisant à la fois intervenir le champ de déplacement \underline{U} et l'effort axial N comme inconnues du modèle. Le problème (\mathcal{P}) consiste alors à rechercher les champs $\underline{U} \in (C^2([0, L_R]))^3$ et $N \in C^1([0, L_R])$, vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dS} \left(N(S) \frac{d}{dS} (\underline{X}_R + \underline{U}) \right) + \underline{f}_R = 0, & \forall S \in [0, L_R], \\ N(S) - EA_R \left(\frac{d\underline{U}}{dS} \cdot \frac{d\underline{X}_R}{dS} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\underline{U}}{dS} \right)^2 \right) - N_0(S) = 0, & \forall S \in [0, L_R], \\ \underline{U}(S_U) = \underline{U}_0, \\ N(S_q) \frac{d}{dS} (\underline{X}_R + \underline{U})(S_q) = \underline{\mathcal{F}}. \end{cases} \quad (2.35)$$

La chaînette

Un des avantages des formules de chaînette est sa simplicité de mise en œuvre avec l'existence d'une formule fermée sur laquelle repose le modèle et qui en facilite la résolution, ce qui en fait un choix répandu pour l'étude des câbles en statique. La chaînette est un modèle de fil auquel des hypothèses supplémentaires sont apportées :

- La densité d'effort linéique f_R est supposée uniforme et verticale $\underline{f}_R = -f_R \underline{e}_y$.
- Le milieu est inextensible : $\hat{\varepsilon} = 0$.

Les expressions analytiques de la chaînette, exprimées en coordonnées cartésiennes en fonction de trois paramètres τ , K_1 et K_2 dépendant des conditions aux bords, donnent la position $y(x)$ et l'effort normal $N(x)$ du câble occupant le domaine $x \in [x_A, x_B]$ dans le plan d'étude $(O, \underline{x}, \underline{y})$ (Fig. 2.3) :

$$y(x) = \tau \cosh \left(\frac{x}{\tau} + K_1 \right) + K_2, \quad \forall x \in [x_A, x_B], \quad (2.36)$$

$$N(x) = f_R \tau \cosh \left(\frac{x}{\tau} + K_1 \right), \quad \forall x \in [x_A, x_B]. \quad (2.37)$$

Pour un milieu soumis à son propre poids $\underline{f}_R = -\mu g \underline{e}_y$, les paramètres du problème s'écrivent :

$$\tau = \frac{F_x}{\mu g} \quad K_1 = \operatorname{argsh} \left(\frac{F_y}{F_x} \right) - \frac{\mu g x_A}{F_x} \quad K_2 = -\frac{F_x}{\mu g} \sqrt{1 + \left(\frac{F_y}{F_x} \right)^2} + y_A, \quad (2.38)$$

avec F_x et F_y les composantes horizontale et verticale de l'effort exercé à l'extrémité en $x = x_A$ et (x_A, y_A) les coordonnées de l'extrémité du câble.

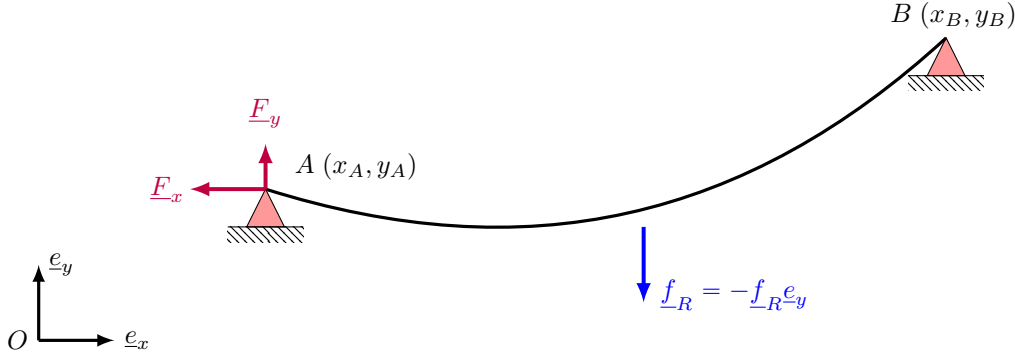


FIGURE 2.3: Problème d'équilibre d'un fil soumis à une répartition d'effort linéique verticale

L'angle $\alpha(x)$, que forme le câble par rapport à l'horizontale \underline{e}_x , s'exprime en fonction des paramètres de chaînette en projetant le vecteur tangent au câble \underline{t} sur les vecteurs de base \underline{e}_x et \underline{e}_y :

$$\underline{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{dy}{dx} \end{pmatrix}, \quad \underline{t} \cdot \underline{e}_x = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}} = \cos(\alpha(x)), \quad \underline{t} \cdot \underline{e}_y = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}} = \sin(\alpha(x)). \quad (2.39)$$

Par écriture du rapport entre $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$, en supposant que le câble n'occupe pas la position verticale,

$$\alpha(x) = \tan^{-1} \left(\frac{dy}{dx} \right). \quad (2.40)$$

Le modèle de chaînette demeure valide en présence d'une densité linéique d'effort plan uniforme d'orientation différente de celle verticale, comme par exemple l'influence d'un chargement transversal sur le câble de densité linéique $\underline{f}_T = f_T \underline{e}_z$ qui se superpose au poids du câble (typiquement, sous l'effet du vent). Un changement de repère permet de se ramener au cadre du modèle de chaînette en travaillant dans le plan auquel appartient la répartition d'effort linéique résultant,

$$f_R = \sqrt{f_T^2 + (\mu g)^2}, \quad (2.41)$$

incliné d'un angle $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{f_T}{\mu g} \right)$ par rotation autour de l'axe \underline{e}_x . Cette remarque se généralise dans le cas d'une force linéique de densité uniforme d'orientation quelconque $\underline{f}_R = f_L \underline{e}_x + f_V \underline{e}_y + f_T \underline{e}_z$.

Allongement élastique

La revue bibliographique a mis en évidence l'existence d'une formule de **chaînette élastique** qui lève l'hypothèse d'inextensibilité du fil et rend compte du comportement élastique du milieu qui s'allonge sous l'effet de la tension. La chaînette élastique ne possède pas d'expression cartésienne exprimée en fonction de l'abscisse x dans le cas général. L'équilibre d'un milieu curviligne de type fil occupant la position $S \rightarrow \underline{X}(S)$ dans sa configuration courante \mathcal{C} , paramétrisée par l'abscisse curviligne $S \in [0, L_R]$ prise sur la configuration de référence \mathcal{C}_R , est décrit par une équation de la forme :

$$\frac{d\underline{R}(S)}{dS} + \underline{f}_R = \underline{0}, \quad \forall S \in [0, L_R]. \quad (2.42)$$

La résultante des efforts intérieurs \underline{R} d'un fil est orientée selon la tangente au milieu $\underline{t} = \underline{X}'(S)/\|\underline{X}'(S)\|$. Les hypothèses suivantes permettent les développements analytiques de la chaînette élastique :

- Une loi de comportement élastique linéaire avec un module d'Young E et une section courante A est supposée. L'effort \underline{R} s'écrit :

$$\underline{R}(S) = EA\varepsilon \underline{t}, \quad (2.43)$$

- Une mesure de déformation de l'ingénieur linéarisée ε est utilisée,

$$\varepsilon = \left\| \frac{d\underline{X}(S)}{dS} \right\| - 1 = \|\underline{X}'(S)\| - 1, \quad (2.44)$$

- La densité d'effort linéique \underline{f}_R est supposée constante.

Sous ces hypothèses, (2.42) s'écrit :

$$\left[EA(\|\underline{X}'(S)\| - 1) \frac{\underline{X}'(S)}{\|\underline{X}'(S)\|} \right]' + \underline{f}_R = \underline{0}, \quad \forall S \in [0, L_R]. \quad (2.45)$$

Après intégration,

$$EA(\|\underline{X}'(S)\| - 1) \frac{\underline{X}'(S)}{\|\underline{X}'(S)\|} = -\underline{f}_R S + EA(\|\underline{X}'(0)\| - 1) \frac{\underline{X}'(0)}{\|\underline{X}'(0)\|}, \quad \forall S \in [0, L_R]. \quad (2.46)$$

Par définition de l'effort de tension T exercé à l'extrémité du fil,

$$\underline{\mathcal{F}} = F_x \underline{e}_x + F_y \underline{e}_y + F_z \underline{e}_z = EA(\|\underline{X}'(0)\| - 1) \frac{\underline{X}'(0)}{\|\underline{X}'(0)\|}, \quad (2.47)$$

avec $\|\underline{\mathcal{F}}\| = EA(\|\underline{X}'(0)\| - 1) = T(0)$. Dans le cas particulier d'une répartition d'effort vertical introduite par le poids, $\underline{f}_R = -\mu g \underline{e}_y$:

$$T(S) = \left\| EA(\|\underline{X}'(S)\| - 1) \frac{\underline{X}'(S)}{\|\underline{X}'(S)\|} \right\| = \left\| -\underline{f}_R S + \underline{\mathcal{F}} \right\| = \sqrt{F_x^2 + (F_y + \mu g S)^2 + F_z^2}, \quad (2.48)$$

$$\underline{t} = \frac{F_x \underline{e}_x + (F_y + \mu g S) \underline{e}_y + F_z \underline{e}_z}{\sqrt{F_x^2 + (F_y + \mu g S)^2 + F_z^2}}. \quad (2.49)$$

La base locale de Frénet attaché à chaque point S le long du fil est définie par $(\underline{t}, \underline{n}, \underline{e}_z)$. Le vecteur normal s'exprime à partir de la connaissance de \underline{t} ,

$$\underline{n} = \underline{e}_z \wedge \underline{t} = \frac{-(F_y + \mu g S) \underline{e}_x + F_x \underline{e}_y}{\sqrt{F_x^2 + (F_y + \mu g S)^2 + F_z^2}}. \quad (2.50)$$

D'après (2.48) et (2.49), le membre de gauche de l'équation (2.46) se réécrit :

$$\underline{X}'(S) = \left(\frac{1}{EA} - \frac{1}{\sqrt{F_x^2 + (F_y + \mu g S)^2 + F_z^2}} \right) F_x \underline{e}_x + (F_y + \mu g S) \underline{e}_y + F_z \underline{e}_z, \quad (2.51)$$

puis intégré, conduit aux équations paramétriques de la chaînette élastique données dans la revue bibliographique.

Il est proposé de traiter le problème d'élasticité à partir des formules de la chaînette inextensible par l'intermédiaire d'un problème d'évolution. Le processus incrémental associé se décompose en deux phases :

- Une **mise en tension** de la chaînette inextensible à la longueur au repos L_R ,
- Une phase de **relâchement élastique** ou **relaxation élastique**, au cours de laquelle la tension $N(x)$ qui règne dans le fil à l'issue de l'étape de mise en tension génère un allongement élastique qui agit comme un rééquilibrage entre la longueur du câble allongé l et une nouvelle valeur de tension.

Pour la phase de mise en tension, une vision **lagrangienne** ou **eulérienne** donne des résultats identiques étant donnée l'inextensibilité du câble décrit par la chaînette. Tandis que pour la phase de relaxation élastique, les deux

visions qui distinguent la configuration de référence (Lagrange) de la configuration courante (Euler) aboutissent à deux formulations différentes du problème d'élasticité. En effet, la vision lagrangienne traduit un processus d'extension dont les mécanismes sont supposés découplés et superposables : la mise en tension inextensible génère un effort dans le câble qui, à son tour, génère un allongement élastique. L'illustration est donnée ici avec la mesure de déformation linéarisée ε , dans le contexte des petites perturbations, telle que $\varepsilon = \|\underline{X}'(S)\| - 1$. La configuration statique non déformée est prise comme référence, de telle sorte que la longueur courante l s'exprime :

$$l = \int_{S=0}^{L_R} \|\underline{X}'(S)\| dS = \int_{S=0}^{L_R} (1 + \varepsilon(S)) dS = \int_{S=0}^{L_R} \left(1 + \frac{N(S)}{EA_R}\right) dS = L_R + \int_{S=0}^{L_R} \frac{N(S)}{EA_R} dS. \quad (2.52)$$

La vision eulérienne s'intéresse quant à elle directement à la configuration déformée courante,

$$l = \int_{S=0}^{L_R} \|\underline{X}'(S)\| dS = L_R + \int_{s=0}^l \frac{\varepsilon(s)}{1 + \varepsilon(s)} ds = L_R + \int_{s=0}^l \frac{N(s)}{EA_R + N(s)} ds. \quad (2.53)$$

Après un changement de variable et par la formule de la chaînette, le membre de gauche de la longueur courante déformée l se réécrit :

$$l = \int_{s=0}^l ds = \int_{x=x_A}^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{x=x_A}^{x_B} \cosh\left(\frac{x}{\tau} + K_1\right) dx. \quad (2.54)$$

Les deux écritures (2.52) et (2.53) de la longueur courante l du câble traduisent deux façons d'étendre le cas élastique aux équations cartésiennes de la chaînette inextensible.

L'Annexe D apporte le détail des expressions de la longueur courante sous l'effet d'un allongement selon différentes mesures de déformation et de point de vue, eulérien ou lagrangien.

2.1.3 Modèle de tige

Une évolution du modèle de fil curviligne consiste à ajouter une raideur en flexion au câble. Dans le problème (\mathcal{P}) précédent, aucun moment de flexion associé à des déformations de courbure n'a été pris en compte car le modèle de fil est réputé infiniment souple. De la même façon que pour le problème de fil, le problème de l'équilibre de la tige est écrit en fonction du champ de déplacement inconnu \underline{U} et paramétrisé par l'abscisse curviligne $S \in [0, L_R]$.

Les hypothèses du modèle

— Les inconnues

Le déplacement :

$$S \mapsto \underline{U}(S) = \underline{X}(S) - \underline{X}_R(S) = u \underline{e}_x + v \underline{e}_y + w \underline{e}_z, \quad (2.55)$$

L'effort intérieur :

$$S \mapsto \underline{R}(S) = N(S) \underline{t} + V_1(S) \underline{n}_1 + V_2(S) \underline{n}_2, \quad (2.56)$$

avec $N(S)$ l'effort normal, $V_1(S)$ et $V_2(S)$ les efforts tranchants. Les efforts tranchants étaient absents dans le modèle de fil car introduit par les moments de flexion.

Le moment :

$$S \mapsto \underline{M}(S) = M_{f1}(S) \underline{n}_1(S) + M_{f2}(S) \underline{n}_2(S), \quad (2.57)$$

avec $M_{f1}(S)$ et $M_{f2}(S)$ les moments fléchissants autour de \underline{n}_1 et \underline{n}_2 .

Le moment de torsion selon \underline{t} n'est pas modélisé.

— Les équations de relations géométriques

La géométrie fait intervenir deux angles de flexion $\phi(S)$ et $\alpha(S)$, respectivement autour de \underline{e}_y (pour $\alpha = 0$) et \underline{e}_z (pour $\phi = 0$) (Fig. 2.4). Ces angles interviennent dans l'écriture des vecteurs tangent \underline{t} et normaux

$(\underline{n}_1, \underline{n}_2)$ au milieu tels que,

$$\underline{t}(S) = \frac{\underline{X}'(S)}{\|\underline{X}'(S)\|} = \cos(\phi) \cos(\alpha) \underline{e}_x + \cos(\phi) \sin(\alpha) \underline{e}_y + \sin(\phi) \underline{e}_z, \quad (2.58)$$

$$\underline{n}_1(S) = -\sin(\alpha) \underline{e}_x + \cos(\alpha) \underline{e}_y, \quad (2.59)$$

$$\underline{n}_2(S) = \underline{t} \wedge \underline{n}_1(S) = -\sin(\phi) \cos(\alpha) \underline{e}_x - \sin(\phi) \sin(\alpha) \underline{e}_y + \cos(\phi) \underline{e}_z. \quad (2.60)$$

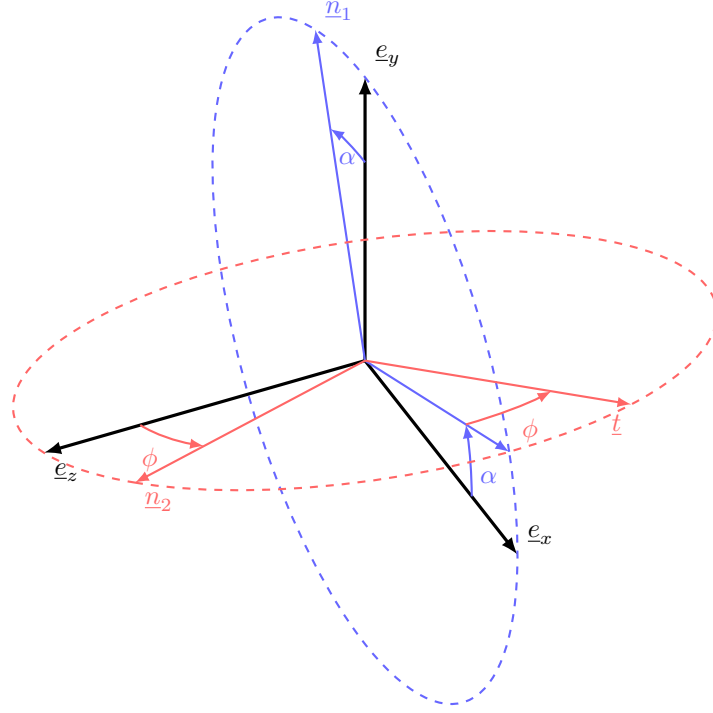


FIGURE 2.4: Paramétrisation des angles de flexion α et ϕ

La déformation d'extension de Green-Lagrange s'exprime en fonction du déplacement :

$$\hat{\varepsilon} = \frac{dU}{dS} \cdot \frac{dX_R}{dS} + \frac{1}{2} \left(\frac{dU}{dS} \right)^2. \quad (2.61)$$

Les déformations de courbure de flexion s'expriment en fonction des deux angles de flexion :

$$\kappa_\phi(S) = \frac{d\phi}{dS}(S) - \frac{d\phi_R}{dS}(S), \quad (2.62)$$

avec ϕ_R l'angle de flexion sur la configuration de référence,

$$\kappa_\alpha(S) = \frac{d\alpha}{dS}(S) - \frac{d\alpha_R}{dS}(S), \quad (2.63)$$

avec α_R l'angle de flexion sur la configuration de référence.

— **Les équations d'équilibre en effort**

$$\frac{dR(S)}{dS} + \underline{f}_R = \underline{0} \quad \forall S \in \mathbb{C}_R, \quad (2.64)$$

avec $\mathbb{C}_R = (0, L_R)$ la configuration de référence.

— Les équations d'équilibre en moment

$$\frac{d\mathbf{M}}{dS}(S) + \left(\frac{d\mathbf{X}(S)}{dS} \wedge \mathbf{R}(S) \right) = \mathbf{0} \quad \forall S \in \mathbb{C}_R, \quad (2.65)$$

avec $\mathbb{C}_R = (0, L_R)$ la configuration de référence.

— Les conditions aux limites

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \beta \\ \phi \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \text{en } S = 0 \text{ et } S = L_R. \quad (2.66)$$

— Les relations constitutives

$$\mathbf{N}(S) = \Psi_1(\hat{\varepsilon}), \quad (2.67)$$

$$\mathbf{M}(S) = \Psi_2(\kappa_\phi) \mathbf{n}_1 + \Psi_3(\kappa_\alpha) \mathbf{n}_2. \quad (2.68)$$

Le modèle final est écrit en fonction du déplacement \underline{U} . À partir de l'équilibre des moments, les inconnues d'efforts tranchants $V_1(S)$ et $V_2(S)$ internes au problème sont exprimées puis réinjectées dans l'équation d'équilibre en effort. Le détail de l'obtention des équations est donné en Annexe E.

Sous l'hypothèse générale des grandes rotations, des termes non-linéaires sont générés par la géométrie et sont à l'origine de couplages non-linéaires entre les effets d'extension et de flexion.

2.1.4 Spécification des conditions aux bords

Portion de câble modélisée comme un fil

D'après la règle heuristique sur la bonne écriture des conditions aux limites d'un problème mécanique, le moment étant nul dans un fil et donc imposé égal à zéro, il n'est pas possible de contrôler directement la quantité duale en orientation donnée par l'angle α . Selon cette même règle de dualité effort-position, il n'est pas autorisé d'écrire selon la même composante et à la même extrémité à la fois une équation portant sur l'effort $\underline{\mathcal{F}}$ et sur la position \underline{X} .

Par conséquent, un problème bien posé consiste en l'écriture d'une condition à chaque bord portant sur une position \underline{X} ou un effort $\underline{\mathcal{F}}$ (Fig. 2.5).

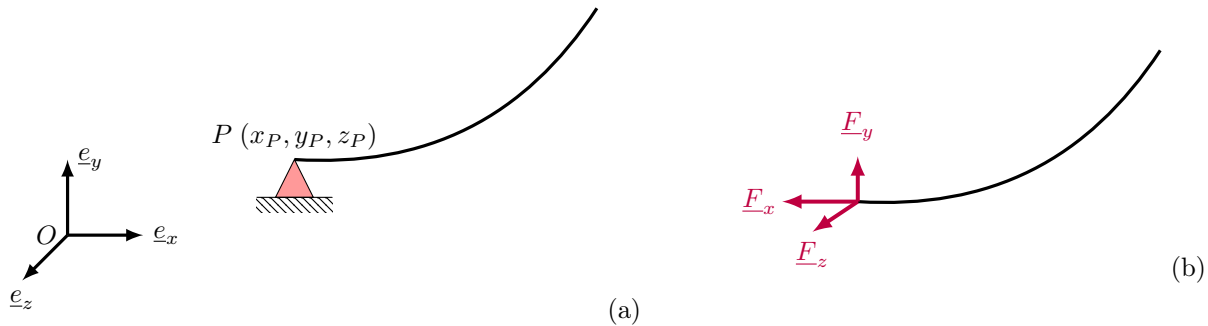


FIGURE 2.5: (a) Conditions au bord en position, (b) en effort

Le problème de statique des fils est d'ordre deux en déplacement \underline{U} d'après les équations d'équilibre. C'est la déformation de Green-Lagrange qui introduit les termes d'ordre deux à travers la loi de comportement Ψ . Par conséquent, l'écriture d'une condition à chacun des deux bords, portant soit sur la position \underline{X} soit sur l'effort $\underline{\mathcal{F}}$, permet d'obtenir un problème bien posé. En trois dimensions, ce sont donc six équations scalaires de conditions aux limites qui sont requises. Avec les équations de la chaînette en 2D, il n'y a plus que cinq inconnues scalaires indépendantes qui interviennent dans les expressions des paramètres τ, K_1, K_2 et donc cinq équations scalaires à écrire pour fermer le problème de l'équilibre statique d'une portion de câble.

Portion de câble modélisée comme une tige

Le problème de statique de la tige est d'ordre quatre en \underline{U} à cause de la dérivation des moments fléchissants qui interviennent dans l'expression des efforts tranchants de l'équation d'équilibre en effort. Comme pour le modèle de fil, le choix de l'écriture des conditions aux limites est guidé par la règle de dualité effort-position. En plus des contraintes précédemment données pour le modèle de fil et compte tenu de la présence d'un moment fléchissant dans la tige, il n'est pas possible d'imposer à une même extrémité à la fois le moment $\underline{M}(S)$ et la quantité duale en orientation du câble fonction des angles ϕ, α .

Par conséquent, un problème bien posé consiste en l'écriture d'une condition à chaque bord portant sur (Fig. 2.6) :

- la **position** \underline{X} ou l'**effort** $\underline{\mathcal{F}}$,
- l'**orientation** du câble définie par la donnée des quantités $\underline{t.e}_x, \underline{t.e}_y$ et $\underline{t.e}_z$ ou le **moment** \underline{M} .

Ce sont donc douze équations scalaires de conditions aux limites qui sont écrites pour fermer le problème formulé en 3D. Le contrôle du moment de flexion peut se faire à travers la **courbure** κ d'après la loi de comportement adoptée. Les équations aux limites supplémentaires enrichissent la description du système par rapport au modèle de fil en apportant une description plus fine sur les conditions aux limites traduisant l'existence d'une raideur en flexion.

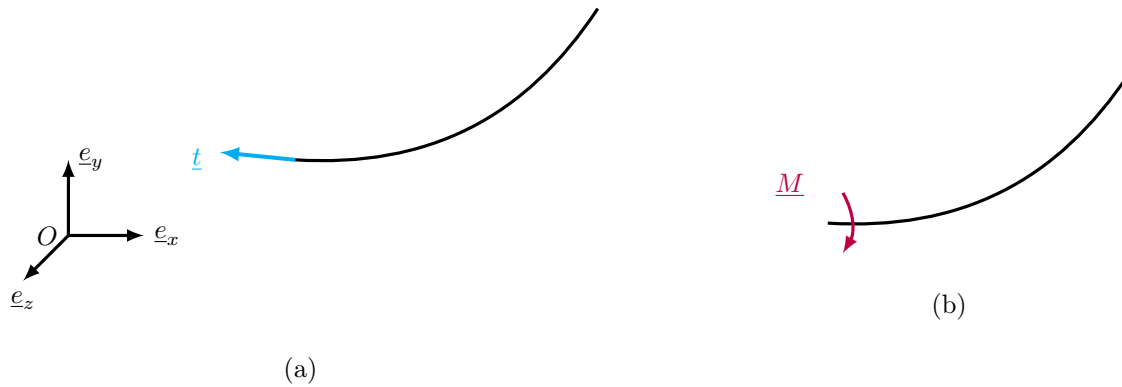


FIGURE 2.6: (a) Conditions au bord en orientation, (b) en moment

2.2 Méthodologie de résolution des modèles statiques de câble

Cette section est consacrée aux méthodes de résolution des formulations de câble précédemment établies pour calculer l'équilibre statique d'une portion de câble isolée :

- dans la sous-section 2.2.1, la méthode de résolution des équations d'un fil par différences finies,
- dans la sous-section 2.2.2, la méthode de résolution des équations de chaînette,
- dans la sous-section 2.2.3, la méthode de résolution des équations d'une tige par différences finies.

2.2.1 Solution du modèle de fil

Formulation primale

D'après la sous-section 2.1.2, le problème de l'équilibre statique d'un fil écrit sous forme primale, c'est-à-dire exprimé uniquement en fonction du champ de déplacement \underline{U} comme inconnue du problème, s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d^2 \underline{X}_R}{dS^2} + \frac{d^2 \underline{U}}{dS^2} \right) \left[EA_R \left(\frac{d\underline{U}}{dS} \frac{d\underline{X}_R}{dS} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\underline{U}}{dS} \right)^2 \right) + N_0(S) \right], \\ + \left(\frac{d\underline{X}_R}{dS} + \frac{d\underline{U}}{dS} \right) \left[EA_R \left(\frac{d^2 \underline{U}}{dS^2} \left(\frac{d\underline{X}_R}{dS} + \frac{d\underline{U}}{dS} \right) + \frac{d\underline{U}}{dS} \frac{d^2 \underline{X}_R}{dS^2} \right) + \frac{dN_0}{dS} \right] + \underline{f} = \underline{0} \quad \forall S \in [0, L_R], \\ \underline{U}(S_U) = \underline{U}_0, \\ N(\underline{U}(S_q)) \frac{d}{dS} (\underline{X}_R + \underline{U})(S_q) = \underline{\mathcal{F}}. \end{array} \right. \quad (2.69)$$

Une solution au problème (\mathcal{P}), donné par (2.69), est recherchée par résolution d'un problème approché (\mathcal{P}_0). Le choix d'une approximation en espace par la méthode des **différences finies** est privilégié dans la suite des travaux aux éléments finis et est motivé par les points suivants :

- Le câble, assimilé à une ligne, possède une géométrie simple qui se prête bien à un maillage de la configuration de référence \mathcal{C}_R par une grille cartésienne.
- La méthode est appliquée directement aux équations continues (2.69) sans passer par une écriture intégrale mais par des développements de Taylor locaux comme approximation des opérateurs de dérivée.

Les points de vigilance de la méthode des différences finies sont notamment :

- La nécessité d'une régularité élevée de la solution \underline{U} pour atteindre un ordre suffisant d'approximation dans les développements de Taylor des opérateurs de dérivée, ce qui pose des problèmes numériques au niveau des discontinuités dans le cas de sollicitations mécaniques peu régulières en espace (phénomène d'oscillations de Gibbs). Dans le cas de l'application de ces travaux, le câble est supposé soumis à des chargements linéiques supposés suffisamment réguliers en espace (poids).
- La précision des résultats obtenus dépend de l'ordre de l'approximation des dérivées et de la finesse du pas de discrétisation du maillage. Pour éviter d'augmenter le nombre d'inconnues, des stratégies de maillage avec un pas variable peuvent s'avérer utiles afin d'obtenir une bonne précision dans les zones soumises à de fortes variations de la solution.
- La notion de stabilité se pose afin de ne pas amplifier les erreurs commises sur la solution approchée lors d'un processus de résolution itératif.

Les données d'entrée

- le **déplacement imposé** \underline{U}_0 sur le bord $S = S_0$,
- l'**effort imposé** $\underline{\mathcal{F}}$ sur le bord $S = S_q$,
- le **chargement linéique** \underline{f} ,
- la **géométrie de référence** du câble : la longueur à vide L_R et la précontrainte N_0 sont contenus dans le choix configuration de référence \mathcal{C}_R de position \underline{X}_R , imposée par le concepteur, à partir de laquelle la recherche de solution est effectuée. La configuration de référence est *a priori* quelconque : précontrainte avec $N_0 \neq 0$, à vide avec $N_0 = 0$. Elle oriente la recherche de solution en déplacement et le résultat obtenu par la procédure de recherche du problème non-linéaire sous-jacent.

Le choix de la configuration de référence \mathcal{C}_R dirige la recherche vers la solution attendue, physiquement acceptable :

- Une première stratégie est de choisir une **référence à vide** $\mathcal{C}_{R,0}$, de longueur L_0 et de position $\underline{X}_R = \underline{X}_{R,0}$, telle que :

$$N(S) + N_0(S) = 0. \quad (2.70)$$

En l'absence d'autres efforts extérieurs appliqués au milieu, le poids est la seule force en présence susceptible de travailler. Le produit scalaire de l'équation (2.69) d'équilibre local avec un déplacement $\frac{\underline{X}_{R,0}}{\|\underline{X}'_{R,0}\|}$, vérifiant les conditions aux bords en S_0 (cinématiquement admissible), est réalisé par intégration entre $S = 0$ et $S = L_0$ le long de la position d'équilibre du fil.

$$\int_{S=0}^{L_0} (N(\hat{\varepsilon}) + N_0) \frac{\underline{X}_{R,0}}{\|\underline{X}'_{R,0}\|} \cdot \frac{\underline{X}'_{R,0}}{\|\underline{X}'_{R,0}\|} dS + \int_{S=0}^{L_0} (N(\hat{\varepsilon})' + N_0') \frac{\underline{X}'_{R,0}}{\|\underline{X}'_{R,0}\|} \cdot \frac{\underline{X}'_{R,0}}{\|\underline{X}'_{R,0}\|} dS + \int_{S=0}^{L_0} \underline{f} \cdot \frac{\underline{X}'_{R,0}}{\|\underline{X}'_{R,0}\|} dS = 0, \quad (2.71)$$

avec $\underline{f} = -\mu g \underline{e}_y$.

La formulation faible fait apparaître l'énergie potentielle élastique \mathcal{W}_{elas} du milieu :

$$\mathcal{W}_{elas} = \int_{S=0}^{L_0} \underline{f} \cdot \frac{\underline{X}'_{R,0}}{\|\underline{X}'_{R,0}\|} dS. \quad (2.72)$$

De façon locale, (2.71) s'écrit :

$$(N(\hat{\varepsilon}) + N_0) \underline{X}''_{R,0} \cdot \frac{\underline{X}'_{R,0}}{\|\underline{X}'_{R,0}\|} dS + (N(\hat{\varepsilon})' + N'_0) \underline{X}'_{R,0} \cdot \frac{\underline{X}'_{R,0}}{\|\underline{X}'_{R,0}\|} dS - \mu g \underline{e}_y \cdot \frac{\underline{X}'_{R,0}}{\|\underline{X}'_{R,0}\|} dS = 0 \quad (2.73)$$

Par définition de l'état à vide, $\forall S \in [0, L_0]$,

$$N(\hat{\varepsilon}) + N_0 = N(\hat{\varepsilon})' + N'_0 = 0. \quad (2.74)$$

Il vient donc $\forall S \in [0, L_0]$, $\underline{e}_y \cdot \underline{X}'_{R,0} = 0$ soit :

$$\underline{t} \cdot \underline{e}_y = 0. \quad (2.75)$$

Le fil occupant la configuration à vide, dirigé en chaque point $S \in [0, L_0]$ par son vecteur tangent, appartient à un plan horizontal. Le fil occupe une position quelconque dans un plan horizontal, rectiligne ou courbe, puisqu'aucune condition n'apparaît sur les composantes $\underline{t} \cdot \underline{e}_x$ et $\underline{t} \cdot \underline{e}_z$.

- Une seconde stratégie est de choisir une **référence précontrainte** \mathcal{C}_R , de longueur L_0 et de position \underline{X}_R , telle que le milieu soit en prétension $N(S) + N_0 > 0$. L'avantage d'utiliser une référence prétendue est que la recherche des solutions en déplacement \underline{U} est opérée en partant d'un état de sollicitation en tension, ce qui oriente naturellement la recherche d'une solution conforme à la loi constitutive, sans mise en compression locale du fil. La longueur du fil L de la référence n'est plus la longueur à vide L_0 mais une longueur allongée. Un choix possible est d'utiliser les résultats d'un calcul semi-analytique de la chaînette qui fournit une référence précontrainte analytique.

Les inconnues

Les équations du milieu continu (2.69) sont transformées en un modèle discret, écrit sur une grille de k points considérés sur le domaine de définition $S = [0, L_0]$. À chaque point est associé trois inconnues en déplacement u_i, v_i, w_i telles que l'inconnue de déplacement au point i s'écrit

$$\{U_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}. \quad (2.76)$$

Les équations de l'équilibre du fil (2.69) sont écrites à chaque point intérieur de la discrétisation spatiale en remplaçant les dérivées continues par l'opérateur de dérivée première et seconde discrétisé. L'ensemble des $n \in [1, 6]$ degrés de liberté aux bords $\{U^B\}$ sont ceux pour lesquels la position est connue (et donc le déplacement imposé). Ce sont des degrés de liberté qui portent les conditions aux limites du problème (données d'entrée). Les inconnues sont alors les $3k - n$ degrés de libertés intérieurs en déplacement $\{U^I\}$ restants. Pour les degrés de liberté aux points intérieurs au voisinage des deux extrémités et ceux situés aux bords auxquels sont exprimés des conditions aux limites en effort, des termes de couplage entre $\{U^I\}$ avec les degrés de liberté de donnée $\{U^B\}$ sont générés par le schéma aux différences finies centrées. Ce couplage introduit par le schéma numérique apparaît dans l'expression des dérivées premières et secondes en espace. Il est donc fait la distinction parmi les déplacements $\{U^I\}$ des degrés de liberté indépendants $\{U^{I,ind}\}_{[(3k-12) \times 1]}$ et des degrés de liberté $\{U^{I,lie}\}_{[(12-n) \times 1]}$ liés par couplage avec les données aux bords.

Écriture du système à résoudre

L'opérateur de dérivation continu par rapport à S , l'abscisse curviligne sur la configuration de référence, est approché de façon discrète selon un schéma aux différences finies. L'opérateur de dérivée première aux différences finies appliqué au point intérieur $i \in [2, k - 1]$ est centré et fait intervenir les points $i - 1, i$ et $i + 1$. En notant le

pas de discrétisation spatial $\Delta S_i = \frac{1}{2}(\|\underline{X}_{R,i} - \underline{X}_{R,i-1}\| + \|\underline{X}_{R,i+1} - \underline{X}_{R,i}\|)$,

$$\left\{ \begin{matrix} U'_i \\ v'_i \\ w'_i \end{matrix} \right\} = \left[D_i^1 \right]_{[3 \times 9]} \left\{ U_{i-1:i+1} \right\}_{[9 \times 1]}, \quad (2.77)$$

avec $(D_i^1)_{1,1} = (D_i^2)_{2,2} = (D_i^2)_{3,3} = -\frac{1}{2\Delta S_i}$, $(D_i^1)_{1,7} = (D_i^2)_{2,8} = (D_i^2)_{3,9} = \frac{1}{2\Delta S_i}$, $(D_i^1)_{m,n} = 0$ sinon. De la même façon, l'opérateur de dérivée seconde aux différences finies centrées appliqué au point $i \in [2, k-1]$ est défini par :

$$\left\{ U''_i \right\} = \left\{ \begin{matrix} u''_i \\ v''_i \\ w''_i \end{matrix} \right\} = \left[D_i^2 \right]_{[3 \times 9]} \left\{ U_{i-1:i+1} \right\}_{[9 \times 1]}, \quad (2.78)$$

avec $(D_i^2)_{1,1} = (D_i^2)_{2,2} = (D_i^2)_{3,3} = \frac{1}{\Delta S_i^2}$, $(D_i^2)_{1,4} = (D_i^2)_{2,5} = (D_i^2)_{3,6} = -\frac{2}{\Delta S_i^2}$, $(D_i^2)_{1,7} = (D_i^2)_{2,8} = (D_i^2)_{3,9} = \frac{1}{\Delta S_i^2}$, $(D_i^2)_{m,n} = 0$ sinon.

Aux bords en $i = 1$ et $i = k$, un schéma aux différences finies décentré en amont et en aval donne l'approximation de l'opérateur de dérivée aux points frontières. Les distances $\Delta S_1 = \|\underline{X}_{R,2} - \underline{X}_{R,1}\|$ et $\Delta S_k = \|\underline{X}_{R,k} - \underline{X}_{R,k-1}\|$ sont définies aux extrémités. Pour le bord $i = 1$, un schéma décentré amont récupère les informations sur les points de la grille en $i = 2$ et $i = 3$, tandis qu'en $i = k$ un schéma décentré aval récupère les informations sur les points $i = k-1$, $i = k-2$ tel que,

$$\left\{ U'_1 \right\} = \left\{ \begin{matrix} u'_1 \\ v'_1 \\ w'_1 \end{matrix} \right\} = \left[D_1^1 \right]_{[3 \times 6]} \left\{ U_{1:2} \right\}_{[6 \times 1]}, \quad (2.79)$$

avec $(D_1^1)_{1,1} = (D_1^1)_{2,2} = (D_1^1)_{3,3} = -\frac{1}{\Delta S_1}$, $(D_1^1)_{1,4} = (D_1^1)_{2,5} = (D_1^1)_{3,6} = \frac{1}{\Delta S_1}$, $(D_1^1)_{m,n} = 0$ sinon.

$$\left\{ U'_k \right\} = \left\{ \begin{matrix} u'_k \\ v'_k \\ w'_k \end{matrix} \right\} = \left[D_k^1 \right]_{[3 \times 6]} \left\{ U_{k-1:k} \right\}_{[6 \times 1]}, \quad (2.80)$$

avec $(D_k^1)_{1,1} = (D_k^1)_{2,2} = (D_k^1)_{3,3} = -\frac{1}{\Delta S_k}$, $(D_k^1)_{1,4} = (D_k^1)_{2,5} = (D_k^1)_{3,6} = \frac{1}{\Delta S_k}$, $(D_k^1)_{m,n} = 0$ sinon.

$$\left\{ U''_1 \right\} = \left\{ \begin{matrix} u''_1 \\ v''_1 \\ w''_1 \end{matrix} \right\} = \left[D_1^2 \right]_{[3 \times 9]} \left\{ U_{1:3} \right\}_{[9 \times 1]}, \quad (2.81)$$

avec $(D_1^2)_{1,1} = (D_1^2)_{2,2} = (D_1^2)_{3,3} = \frac{1}{\Delta S_1^2}$, $(D_1^2)_{1,4} = (D_1^2)_{2,5} = (D_1^2)_{3,6} = -\frac{2}{\Delta S_1^2}$, $(D_1^2)_{1,7} = (D_1^2)_{2,8} = (D_1^2)_{3,9} = \frac{1}{\Delta S_1^2}$, $(D_1^2)_{m,n} = 0$ sinon.

$$\left\{ U''_k \right\} = \left\{ \begin{matrix} u''_k \\ v''_k \\ w''_k \end{matrix} \right\} = \left[D_k^2 \right]_{[3 \times 9]} \left\{ U_{k-2:k} \right\}_{[9 \times 1]}, \quad (2.82)$$

avec $(D_k^2)_{1,1} = (D_k^2)_{2,2} = (D_k^2)_{3,3} = \frac{1}{\Delta S_{k-1}^2}$, $(D_k^2)_{1,4} = (D_k^2)_{1,5} = (D_k^2)_{3,6} = -\frac{2}{\Delta S_{k-1}^2}$, $(D_k^2)_{1,7} = (D_k^2)_{2,8} = (D_k^2)_{3,9} = \frac{1}{\Delta S_{k-1}^2}$, $(D_k^2)_{m,n} = 0$ sinon.

Calcul du déplacement \underline{U}

Le système est écrit sous la forme d'un vecteur contenant les $3k - n$ équations non-linéaires (2.69),

$$\left\{ S_\varepsilon(U) \right\}_{[(3k-n) \times 1]} = \left\{ 0 \right\}. \quad (2.83)$$

Un contact bilatéral entre le câble et les appuis est considéré ce qui n'introduit pas de contraintes d'inégalité dans la formulation.

L'enjeu principal du traitement numérique du modèle de fil est d'empêcher la mise en compression globale ou locale du milieu. En effet, sans précaution apportée dans la formulation du modèle et des stratégies de résolution, le processus peut renvoyer des solutions mathématiquement admissibles mais qui, en pratique, ne sont pas physiquement admissibles (Fig. 2.7). Cette problématique n'est pas rencontrée avec la formulation par les équations de chaînette qui présuppose que le câble est uniquement soumis à des efforts de traction en chacun de ses points. C'est à travers la loi de comportement $N(S) = \Psi(\varepsilon)$ qu'est retranscrite la physique attendue pour un câble. Pour un câble dépourvu de raideur en flexion, il a été vu dans la revue bibliographique que le mode privilégié de fonctionnement pour les applications au transport par câbles est la traction. Dans un état comprimé ou proche de la compression, les modes de flexion sont activés et le modèle de fil n'est plus capable de retranscrire le comportement physique attendu.

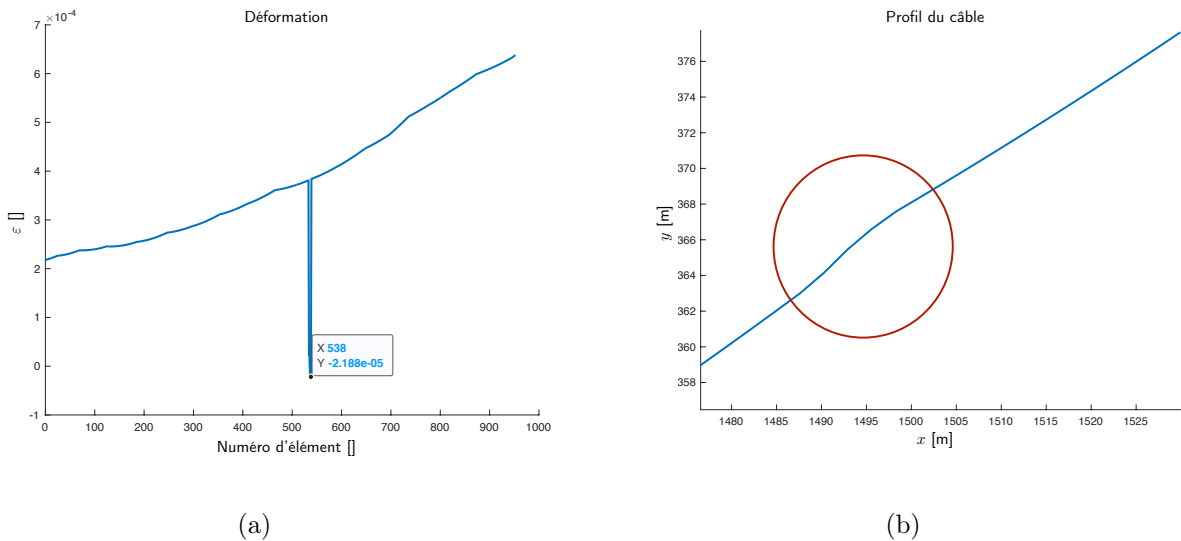


FIGURE 2.7: (a) Déformation en fonction du numéro d'élément, (b) profil de câble en fonction de l'abscisse

Le choix de la référence $\{X_R\}$ qui est renseignée en entrée de calcul joue également un rôle essentiel puisque la référence dirige la recherche, tout comme l'initialisation du vecteur de recherche de solution $\{U^{(0)}\}$ (prédicteur) dans le processus de résolution du système non-linéaire. Lorsqu'un problème non-linéaire possède plusieurs solutions possibles, la sélection d'une solution plutôt qu'une autre est un enjeu problématique. Dans le cas de l'application visée par ces travaux, la sélection d'une solution en traction peut se faire par :

- l'écriture d'une contrainte à chaque point de la discrétisation qui impose la déformation $\varepsilon > 0$, ajoutée au système (2.83) de taille $3k - n$,
- le choix d'une configuration de référence $\{X_R\}$ prétendue autour de laquelle des perturbations en traction et en compression équilibrent le milieu conformément aux équations de la statique, tout en demeurant dans le domaine de sollicitation en traction à l'issue du calcul de l'équilibre final,
- le choix d'une référence à vide $\{X_R\}$ et d'un prédicteur $\{U^{(0)}\}$ calculé à partir des solutions analytiques de la chaînette qui impose un état tendu dès la première itération,
- le choix d'empêcher les éléments de câble à entrer localement en compression, à chaque étape des itérations de recherche de la solution, par une modification de la matrice jacobienne et du résidu en détectant les éléments qui rentrent en compression avec le calcul de leur allongement [232].

Dans le cadre des travaux, une référence à vide, avec le câble occupant initialement une position horizontale rectiligne, a été retenue. Pour assurer la mise en tension, le vecteur initial de la recherche est dirigé par le résultat d'un calcul approximatif préalable par les formules de la chaînette. En pratique, la fonction `fsolve` de l'environnement `Matlab` permet la résolution de ce système (*gradient base method*).

2.2.2 Solution de la chaînette

Les inconnues

Le problème de l'équilibre d'une portion de chaînette vise à déterminer la position $y(x)$ et la tension $N(x)$ par l'accès aux cinq paramètres inconnus : $\{Y\} = \{\tau \quad K_1 \quad K_2 \quad x_A \quad x_B\}^T$.

Données d'entrée

Les données d'entrée possibles sont :

- les positions aux extrémités : les abscisses x_A , x_B et ordonnées $y(x_A)$, $y(x_B)$,
- les valeurs de tension aux extrémités $\|\underline{\mathcal{F}}(S_A)\| = N(x_A)$, $\|\underline{\mathcal{F}}(S_B)\| = N(x_B)$,
- les composantes horizontale F_x et verticale F_y de l'effort extérieur de tension $\underline{\mathcal{F}}$ imposé aux extrémités,
- la longueur de câble de référence L_R : la longueur de la configuration de référence L_R n'apparaît pas explicitement dans les équations cartésiennes de la chaînette. Elle doit être exprimée à partir, par exemple, des équations (2.52) et (2.53).

Écriture du système à résoudre

Le système obtenu, sous la forme :

$$\{S_e(Y)\} = \{0\}, \quad (2.84)$$

ne dérive donc pas directement d'un potentiel d'énergie \mathcal{W} comme c'est le cas avec une formulation variationnelle. Des conditions de contact bilatéral sont utilisées aux extrémités, ce qui n'introduit pas d'inégalité dans la formulation du problème mécanique.

Calcul de $\{Y\}$

En pratique, la fonction `fsolve` de l'environnement `Matlab` permet la résolution de ce système (*gradient base method*). Le système obtenu sous forme analytique est différentiable. Ainsi, la matrice jacobienne appelée à chaque itération peut être fournie sous forme analytique ce qui évite l'estimation parfois coûteuse en ressources numériques de la jacobienne par un schéma aux différences finies à chaque itération.

2.2.3 Solution du modèle de tige

Formulation primale

Le problème (\mathcal{P}_t) de l'équilibre statique d'une tige s'écrit :

$$\begin{cases} \left(\frac{d^2 X_R}{dS^2} + \frac{d^2 U}{dS^2} \right) \left[EA_R \left(\frac{dU}{dS} \frac{dX_R}{dS} + \frac{1}{2} \left(\frac{dU}{dS} \right)^2 \right) + N_0(S) \right], \\ + \left(\frac{dX_R}{dS} + \frac{dU}{dS} \right) \left[EA_R \left(\frac{d^2 U}{dS^2} \left(\frac{dX_R}{dS} + \frac{dU}{dS} \right) + \frac{dU}{dS} \frac{d^2 X_R}{dS^2} \right) + \frac{dN_0}{dS} \right] + \underline{F}_{flex} + \underline{f} = \underline{0} \quad \forall S \in [0, L_R], \\ \underline{U}(S_U) = \underline{U}_0, \\ \underline{t}(S_U) = \underline{t}_0, \\ N(\underline{U}(S_q)) \frac{d}{dS} (\underline{X}_R + \underline{U})(S_q) = \underline{\mathcal{F}}, \\ \underline{M}(S_q) = \underline{\mathcal{M}}, \end{cases} \quad (2.85)$$

avec \underline{F}_{flex} les termes additionnels apportés par la flexion par rapport au modèle de fil (\mathcal{P}). Le détail des expressions de la correction \underline{F}_{flex} est donné en Annexe E.

Les données d'entrée

- Le **déplacement imposé** \underline{U}_0 et l'**angle** sur le bord $S = S_0$,
- L'**effort imposé** $\underline{\mathcal{F}}$ et le **moment imposé** $\underline{\mathcal{M}}$ sur le bord $S = S_q$,
- Le **chargement linéique** \underline{f} .

Les inconnues

Une fois la discrétisation spatiale appliquée à la configuration de référence, le problème en déplacement \underline{U} est formulé en imposant les conditions aux limites aux bords :

- Les conditions en déplacement sont imposées sur les $j \in [0, 6]$ degrés de libertés $\left\{U^B\right\}_{[j \times 1]}$ parmi $u_1, v_1, w_1, u_k, v_k, w_k$.
- Les inconnues du problème sont alors les déplacements des degrés de liberté intérieurs et ceux non imposés sur les bords $\left\{U^I\right\}_{[(3k-j) \times 1]}$.

La prise en compte des douze équations de conditions aux limites implique que les équations d'équilibre statique (E.32), (E.33), (E.34) données en Annexe E ne peuvent être appliquées qu'aux $k - 4$ points intérieurs de la grille pour conserver le même nombre d'inconnues que d'équations. Le choix est fait de rajouter deux points miroirs situés de part et d'autre des deux extrémités, en dehors du domaine d'étude du fil. Ces points permettent de définir l'ensemble des conditions aux limites aux deux extrémités, tout en imposant les équations d'équilibre, sans restriction, sur l'ensemble des $k - 2$ points intérieurs de la grille.

Écriture du système à résoudre

Les opérateurs discrets de dérivées troisièmes et quatrièmes sont définis à partir des formules de Taylor écrites à l'ordre quatre, soit pour une quantité scalaire f de valeur f_i au point de discrétisation i :

$$f_i''' = \frac{f_{i+2} - 5f_{i+1} + 5f_{i-1} - f_{i-2}}{3\Delta S^3} + o(\Delta S^4), \quad (2.86)$$

$$f_i'''' = \frac{f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{\Delta S^4} + o(\Delta S^4). \quad (2.87)$$

Sur chacun des $k - 2$ points intérieurs de la grille de discrétisation spatiale, l'équation d'équilibre est écrite en appliquant l'opérateur de dérivée aux différences finies. Pour les degrés de liberté intérieurs situés à la frontière avec les degrés de liberté où le déplacement est imposé, des termes de couplages avec les bords $\left\{U^B\right\}$ sont générés par le schéma aux différences finies. En effet, la présence de dérivées quatrièmes dans les équations d'équilibre introduit un schéma à cinq points qui couple l'équilibre des points $i = [2, 3]$ et $i = [k - 1, k - 2]$ avec les données aux bords.

Compte tenu de la présence de dérivées troisièmes \bullet''' en espace dans l'écriture des conditions aux limites en effort et de dérivées quatrièmes \bullet'''' dans l'équilibre impliquant des efforts tranchants, le problème peut se formuler avec le vecteur des inconnues sous la forme suivante, pour $i \in [1, k]$:

$$\begin{pmatrix} U_i^I \\ U_i^{I''} \end{pmatrix}_{[6k-2j \times 1]}. \quad (2.88)$$

Cette méthode a pour avantage de n'impliquer qu'un schéma aux différences finies à trois points tandis que les dérivées troisièmes et quatrièmes introduisent un schéma à cinq points. Cependant, le nombre d'inconnues est doublé par rapport au problème formulé en déplacement.

Calcul du déplacement \underline{U}

La même méthodologie que celle mise en place pour le modèle de fil est adoptée.

2.3 Modélisation du contact entre le câble et ses appuis

La représentation du contact entre la boucle de câble et les structures de support (pylônes, stations) de l'installation de transport par câbles est abordée dans la section 2.3 :

- la sous-section 2.3.1 introduit la problématique du contact entre les éléments extérieurs et le câble,
- la sous-section 2.3.2 met en place différents modèles de contact entre le câble et les supports intermédiaires,
- la sous-section 2.3.3 met en place des modèles de contact entre le câble et les stations.

2.3.1 Définition du cadre d'étude du contact

Sur les systèmes standards, la boucle de câble est au contact avec les appuis intermédiaires (Fig. 2.8) et les stations sur des longueurs cumulées de l'ordre de grandeur de la dizaine de mètres alors que la longueur totale est de l'ordre du kilomètre. La surface de contact est réduite ce qui en fait, à l'instar du ferroviaire, un des avantages de ce mode de transport qui implique peu de résistance au roulement.

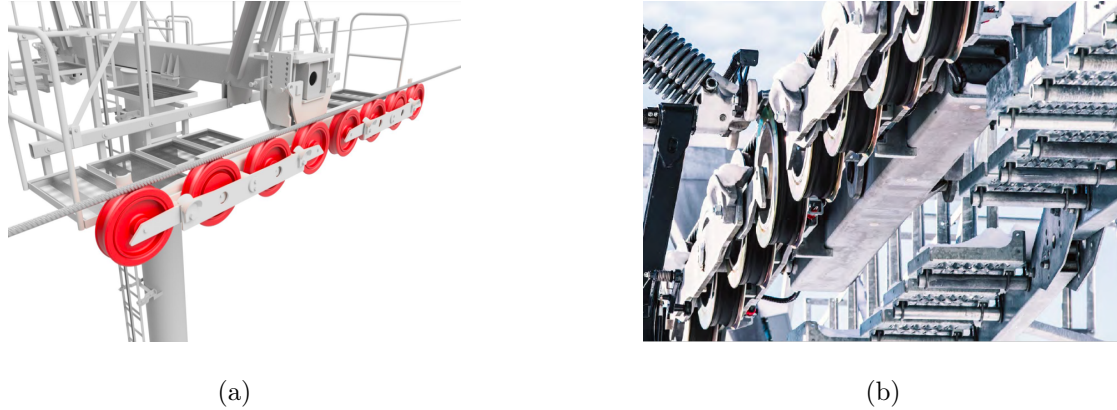


FIGURE 2.8: (a) Vue de synthèse d'un appui de type balancier (d'après une brochure Rowema), (b) Photo d'une pince en contact avec un balancier (d'après une brochure Doppelmayr Group)

Formellement, le câble est libre de rentrer, ou non, en contact avec les appuis qui constituent des **obstacles** avec lesquels il n'y a pas interpénétration. Une étape de détection est nécessaire pour rechercher, à chaque étape du calcul de l'équilibre statique, les points du câble qui sont susceptibles de venir au contact avec les appuis. Cette étape est cruciale dans le cas des grands déplacements et peut s'avérer très coûteuse en temps de calcul [233]. Une fois les points identifiés, les conditions de **contact unilatéral** y sont appliquées :

- La première équation (2.89) traduit la condition de **non-interpénétration** de la matière au point de contact et indique qu'il ne peut y avoir que décollement,

$$(\underline{U}_{ca} - \underline{U}_{ap})(S_c) \cdot \underline{n}_c \geq 0, \quad (2.89)$$

avec \underline{U}_{ca} et \underline{U}_{ap} les champs de déplacement du câble et de l'appui au point de contact d'abscisse curviligne S_c , \underline{n}_c la normale de contact entre le câble et l'appui (sortante de l'appui).

- Lorsque le câble et l'appui sont en contact, l'appui ne peut que repousser le câble et pas le retenir si on néglige les effets de forces de cohésion. L'effort \underline{F}_{ap-ca} exercé par l'appui sur le câble est alors dirigé suivant la normale extérieure au point de contact. D'après le principe d'**action-réaction**, l'équation (2.90) traduit la non-cohésion au point de contact

$$\underline{F}_{ca-ap}(S_c) \cdot \underline{n}_c \leq 0. \quad (2.90)$$

- L'équation (2.91), dite **de complémentarité**, indique qu'il y a soit contact soit décollement en $S = S_c$ et qu'au moins une des deux conditions de non-interpénétration ou de non-cohésion est vérifiée comme une égalité,

$$((\underline{U}_{ca} - \underline{U}_{ap}) \cdot \underline{n}_c) \quad (\underline{F}_{ca-ap} \cdot \underline{n}_c) = 0. \quad (2.91)$$

Les relations précédentes rendent compte du problème de contact et lient des grandeurs selon la direction normale \underline{n}_c . Le frottement relie quant à lui les grandeurs d'effort et de déplacement de glissement selon la direction tangentielle \underline{t}_c , ouvrant la possibilité à de nombreuses lois de frottement : Tresca, Coulomb, Norton-Hoff,... Les équations de contact-frottement introduisent des non-linéarités dans le modèle mécanique, avec des modifications brutales de comportement lors du passage d'un état à l'autre : **contact-décollement**, **adhérence-glisement**. Des lois régularisées permettent de limiter ces effets. Le traitement numérique des équations de contact-frottement devient particulièrement complexe lorsque le problème est couplé avec d'autres sources de non-linéarités (grands déplacements, plasticité, impact en dynamique) et pour des structures avec un grand nombre de degrés de liberté.

Une formulation variationnelle du problème global, qui tient compte des équations de contact unilatéral, puis un traitement par une méthode de type éléments finis est une approche couramment employée qui débouche sur un **problème de minimisation** linéaire ou non-linéaire [234] et **sous contraintes** imposées par les conditions de contact. Les méthodes de résolution sont nombreuses : méthode de pénalité, multiplicateurs de Lagrange, méthodes des statuts, méthodes de projection [233].

Les hypothèses retenues sont :

- Le contact du câble avec ses appuis est réduit à un **point**, fixe ou mobile, ou à une **ligne indéformable**. L'objectif du modèle de ligne de câble est d'accéder à une caractérisation d'ensemble de la structure. Le choix d'une représentation ponctuelle du contact du câble avec les éléments extérieurs permet d'approcher le système comme un milieu continu par morceaux, avec des portions de câble soumises à des efforts répartis et sur lesquelles sont appliquées les conditions de contact aux extrémités.

- Le contact est **bilatéral** : le câble est supposé rester en contact avec ses appuis.

Une loi de contact unilatéral, qui autorise le décollement du câble avec les obstacles, traduit une observation connue de l'homme du métier : sur des appuis peu chargés, le câble peut être amené à se dégager de l'appui dans la direction opposée. Les appuis de type balancier support-compression (Fig. 2.9) sont une solution technologique pour empêcher cette rupture d'appui, indépendamment du chargement du câble, en assurant un contact orienté selon une normale n_c capable de s'orienter selon un angle d'inclinaison,

$$\beta_{ap,i} \in [\beta_{max-}, \beta_{min-}] \cup [\beta_{max+}, \beta_{min+}], \quad (2.92)$$

avec $\beta_{min+} = (\underline{n}_{cmin+} \cdot \underline{e}_y) \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, $\beta_{max+} = (\underline{n}_{cmax+} \cdot \underline{e}_y) \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, $\beta_{min-} = (\underline{n}_{cmin-} \cdot \underline{e}_y) \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\beta_{max-} = (\underline{n}_{cmax-} \cdot \underline{e}_y) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ les angles d'orientation extrêmes du contact par rapport à la verticale dirigée par \underline{e}_y . Ces angles sont contrôlés par la conception géométrique des articulations du balancier. De façon pratique, $\beta_{min-} = \beta_{max+} = \frac{\pi}{2}$: le balancier support-compression assure un continuum entre un appui support et un appui compression

À l'équilibre statique, la résultante des efforts exercés par le câble sur le bandage du galet, à l'interface galet-câble d'un balancier composé d'un nombre de galets n_{galet} situés aux points d'abscisse curviligne $S = S_{c,i}$ avec $i \in [1, n_{galet}]$, vaut

$$\underline{R}_i = \underline{F}_{ca,i} = -\underline{F}_{ap,i}. \quad (2.93)$$

Elle satisfait la condition de contact (2.90). Un balancier support compression autorise à la fois :

$$\underline{R}_i \cdot \underline{e}_y \leq 0, \quad (2.94)$$

sur les galets supports ($i \in [1, n_{support}]$),

$$\underline{R}_i \cdot \underline{e}_y \leq 0, \quad (2.95)$$

sur les galets compressions ($i \in [1, n_{compression}]$). La résultante globale à l'appui n ,

$$\underline{R}_n \cdot \underline{e}_y = \sum_{i=1}^{n_{galet}} \underline{R}_i \cdot \underline{e}_y \in [-R_{max1}, R_{max2}], \quad (2.96)$$

avec R_{max1}, R_{max2} les chargements maximaux de l'appui en compression et en support.

- Le contact **frottant** est réalisé avec ou sans glissement du câble sur l'appui.

2.3.2 Modélisation du contact avec les appuis intermédiaires

Le câble est guidé et supporté le long de sa trajectoire par des appuis intermédiaires de types différents, selon la nature du système et le type de câble (mobile ou fixe). Ils sont généralement rattachés à une structure de type pylône qui maintient la ligne de câble à une distance suffisante du terrain, pour assurer les gabarits réglementaires et éviter le contact des éléments suspendus avec le sol.

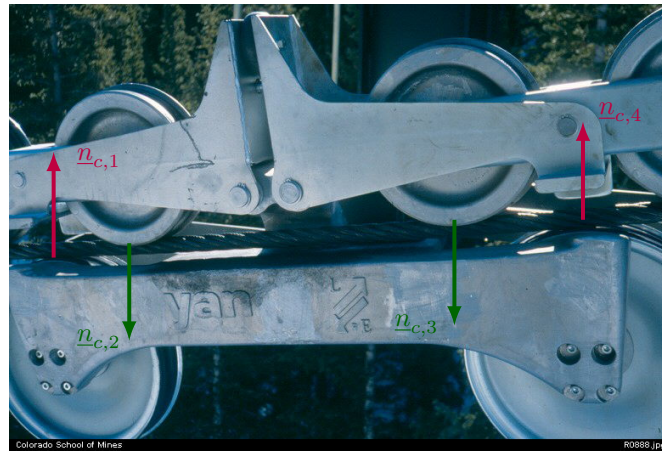


FIGURE 2.9: Contact entre le câble et un appui de type balancier support-compression (photo tirée de la banque de données de la Colorado School of Mines)

Sabot

Les **sabots**, également désignés par bananes de déviation, sont des structures fixes de type profilé en I munies d'une gorge qui accueille le gabarit du câble porteur sur les installations multi-câbles (Fig. 2.10). Le rôle de l'appui de sabot n'est pas d'assurer le roulement d'un câble mobile mais d'accueillir un câble fixe pour en assurer le support et le guidage. Un degré de mobilité est conservé dans la direction longitudinale pour permettre les mouvements de translation au gré des modifications de l'équilibre statique, sous l'effet du chargement ou des variations de température. Un revêtement en bronze à l'interface favorise le glissement et limite l'adhérence.

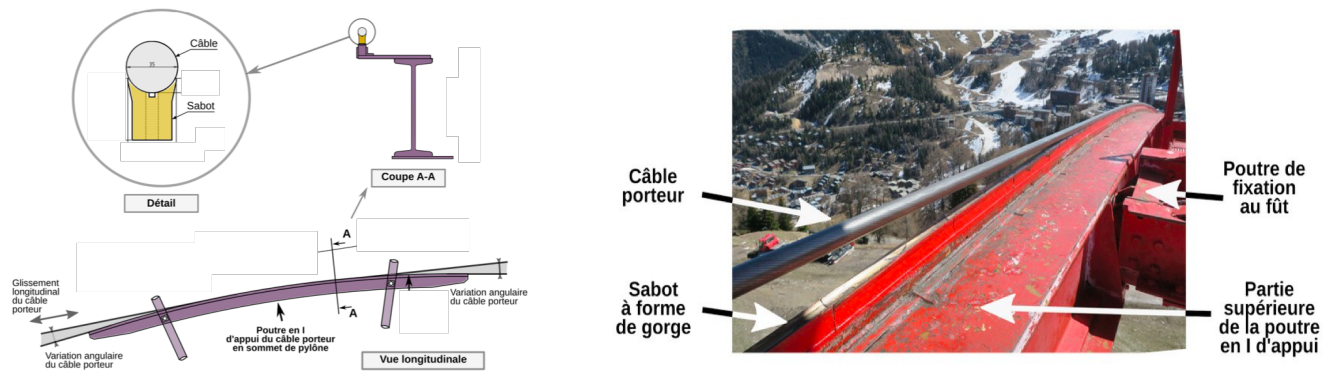


FIGURE 2.10: Détail d'un appui de type sabot (d'après rapport d'enquête BEA-TT)

Balancier

Les **balanciers** sont des structures articulées qui consistent en un assemblage de poutres, désignées par **bras**, liées entre elles par des liaisons pivots et sur lesquelles sont montés en roulement des **galets**, petites poulies d'un diamètre inférieur au mètre. Les bras de balancier sont dotés de butées pour limiter l'amplitude des débattements. Contrairement au sabot dont le rôle est de supporter et guider un câble fixe, le balancier permet d'accueillir un câble mobile qui est en contact avec une garniture synthétique (**bandage**, Fig. 2.11) recouvrant la gorge du galet.

Dans un cadre nominal d'utilisation, le câble est en roulement sans glissement avec le bandage et l'angle d'enroulement est limité à une valeur α_{dev} afin d'assurer un contact ponctuel du câble avec le galet et éviter une surcharge du galet, de forte accélération centripète $a = \frac{V^2}{R}$ au franchissement des véhicules, une activation de la flexion.

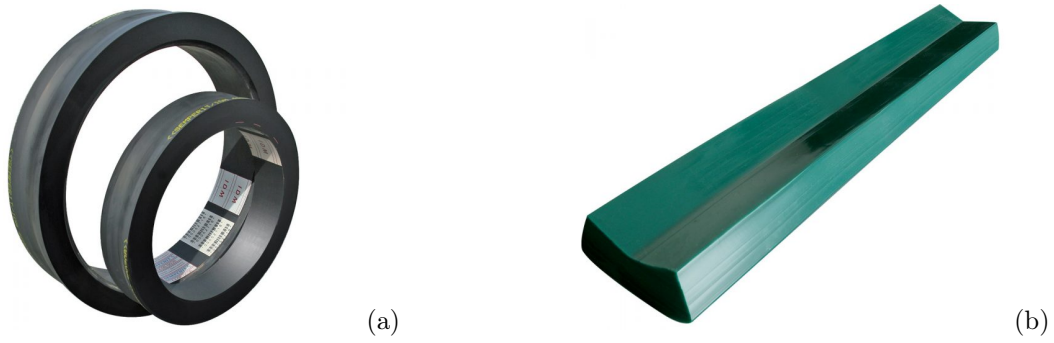


FIGURE 2.11: (a) Bandage d'un galet et (b) d'une poulie (images tirées d'une brochure IDM)

Modèle d'appui ponctuel parfait

Un premier modèle d'appui couple deux portées de câble successives $n - 1$ et n , d'extrémités A_n et B_{n-1} (Fig. 2.12). Les hypothèses additionnelles à celles précédemment énoncées sont :

- L'appui est supposé à deux dimensions avec une déviation du câble dans le plan $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$.
- L'appui est condensé en un point appelé **point d'épure** qui dépend de la géométrie réelle de l'appui et qui correspond au point d'intersection des deux tangentes au câble de part et d'autre de l'appui. En réalité, la position du point d'épure $\underline{X}_{A_n}(\alpha_{n-1}, \alpha_n) = \underline{X}_{B_{n-1}}(\alpha_{n-1}, \alpha_n)$ se déplace en fonction de la pente du câble de part et d'autre de l'appui. De même, l'orientation de la normale sortante \underline{n}_c dépend de la géométrie réelle de la zone de contact qui a été condensée au point de contact ponctuel.
- Le contact entre le câble et l'appui est réputé parfait, **sans frottement**.

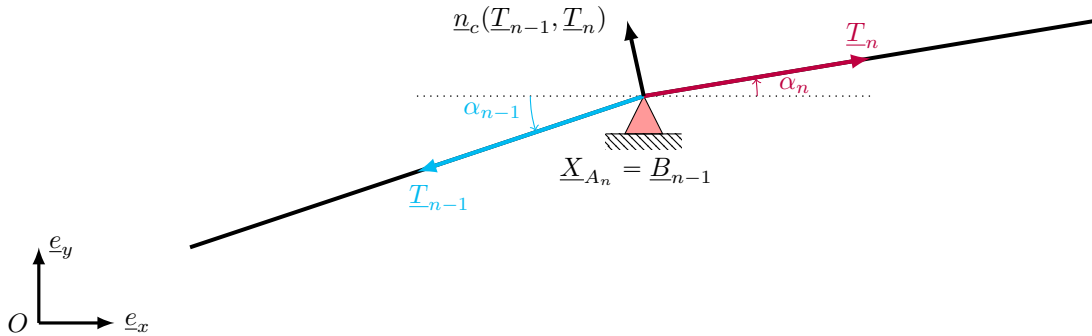


FIGURE 2.12: Appui ponctuel avec contact parfait d'un câble tendu sans flexion

Pour un modèle de fil où seul un effort axial règne dans le câble, la tension du câble est intégralement transmise sans être modifiée :

$$\|\underline{T}_n\| = \|\underline{T}_{n-1}\|. \quad (2.97)$$

En l'absence de frottement, la réaction du support,

$$\underline{F}_c = \underline{T}_{n-1} + \underline{T}_n = \|\underline{F}_c\| \underline{n}_c, \quad (2.98)$$

est orientée selon la normale sortante à l'appui $\underline{n}_c(\underline{T}_{n-1}, \underline{T}_n)$ qui dépend de l'inclinaison et donc des tensions du câble. Cette relation garantit la condition de contact $\underline{F}_c \cdot \underline{n}_c \geq 0$ qui assure la mise en compression du câble sur l'appui.

Pour un modèle de tige, un effort tranchant V , qui découle de la courbure du câble à l'appui et agissant dans une direction transversale au câble, est ajouté au bilan de forces :

$$\underline{T}_n + \underline{T}_{n-1} + \underline{V}_n + \underline{F}_c = \underline{0} \quad (2.99)$$

Selon un modèle simple pour décrire l'interface de contact entre le câble et l'appui, la longueur d'appui ΔS est

assimilée à un arc de cercle, d'où :

$$\kappa_{ap} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta S} = \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\Delta S}. \quad (2.100)$$

Le signe de κ_{ap} est donné par l'orientation de la normale sortante selon la convexité de la zone de câble en contact avec l'appui. En pratique, $\kappa_{ap} < 0$ aux appuis supports et $\kappa_{ap} > 0$ aux appuis compressions.

Le modèle numérique du modèle de tige a montré que, dans les applications courantes aux transporteurs à câbles aériens, les effets de flexion sont concentrés aux points singuliers où la courbure du câble est maximale, soit aux appuis du câble sur les pylônes et aux points d'application d'une force ponctuelle extérieure au droit des véhicules. À partir de ce constat issu des calculs numériques et en utilisant un modèle de poutre linéarisé, les équations analytiques de la chaînette, qui rendent uniquement compte d'un travail du câble en traction, peuvent être enrichies aux points $x = x_f$ par l'ajout d'un effort normal dirigé selon \underline{n}_f , la normale moyenne de contact du câble dans la zone soumise à de la flexion, et de valeur :

$$V(x_f) = -EI \frac{d^3 y}{ds^3}(x_f). \quad (2.101)$$

L'introduction de cet effort normal ponctuel est une condensation des effets du moment de flexion aux points singuliers $x = x_f$. En pratique, le terme $\frac{d^3 y}{ds^3}$ peut être approché par la quantité :

$$\frac{d^3 y}{ds^3}(x_f) \approx \frac{d^3 y}{dx^3}(x_f) \approx \frac{1}{\Delta S^2} \left[\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{\Delta\alpha}{\Delta S} + \frac{d^2 y}{dx^2} \right], \quad (2.102)$$

avec $\Delta\alpha = \alpha_n - \alpha_{n-1}$ la variation angulaire du câble de part et d'autre du point $x = x_f$, Δs la longueur curviligne réelle de l'appui (la longueur d'un balancier) ou de la zone d'application de l'effort (la longueur de serrage des attaches d'un véhicule).

L'effort tranchant \underline{V}_n ajouté au membre de gauche de (2.99) s'écrit alors :

$$\underline{V}_n = -EI \frac{1}{\Delta S^2} \left[\frac{y(x_2)''}{(1 + y(x_2)'^2)^{\frac{3}{2}}} - 2 \frac{\Delta\alpha}{\Delta S} + \frac{y(x_1)''}{(1 + y(x_1)'^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \underline{n}_v, \quad (2.103)$$

avec $y(x_1), y(x_2)$ l'ordonnée du câble de part et d'autre de l'appui.

Modèle d'appui ponctuel avec frottement

Une première évolution du modèle d'appui précédent est la prise en compte du frottement (Fig. 2.13) :

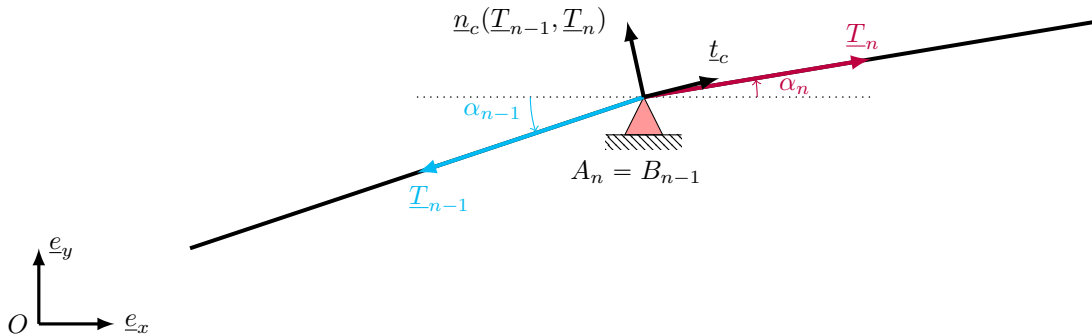


FIGURE 2.13: Appui ponctuel avec contact frottant

- Le câble est modélisé par un fil dépourvu de flexion.
- Les valeurs de tensions $\|\underline{T}_{n-1}\|$ et $\|\underline{T}_n\|$ de part et d'autre de l'appui sont supposées égales pour établir la formule de la résultante $\|\underline{F}_c\|$,

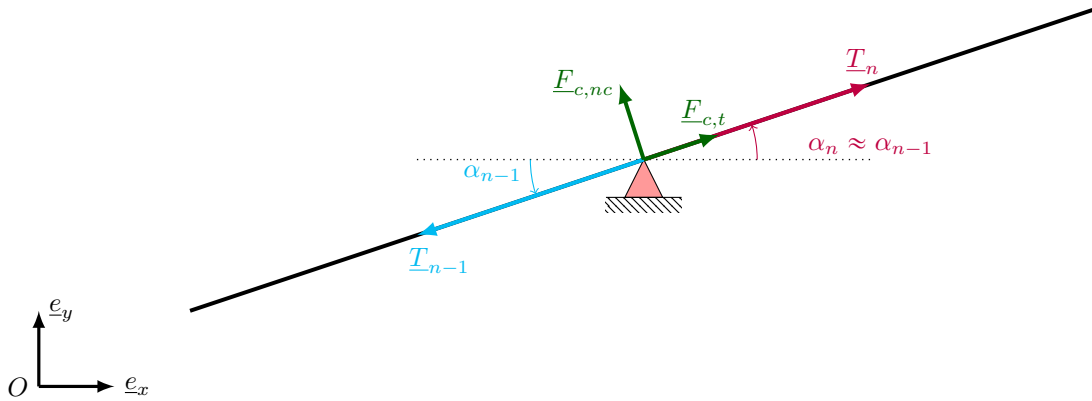
$$\|\underline{F}_c\| = (\|\underline{T}_{n-1}\| + \|\underline{T}_n\|) \sin \left(\frac{\alpha_{n-1} - \alpha_n}{2} \right). \quad (2.104)$$

- Une loi de frottement de **Coulomb** condensée au point de contact, de coefficient c_f , est utilisée pour le calcul de la tension modifiée par une contribution d'effort tangentiel selon la direction $\underline{t}_c = \underline{n}_c \wedge \underline{e}_z$. La réaction du support à la **limite du glissement** du câble sur l'appui,

$$\underline{F}_{c,mod} = \underline{F}_{c,nc} + \underline{F}_{c,t} = F_{c,nc} \underline{n}_c + F_{c,t} \underline{t}_c = \|F_c\| \underline{n}_c \pm c_f \|F_c\| \underline{t}_c. \quad (2.105)$$

- L'angle de déviation à l'appui $\alpha_{n-1} - \alpha_n$ est supposé suffisamment petit pour considérer que les tensions \underline{T}_n et \underline{T}_{n-1} sont portées selon le vecteur tangent à l'appui \underline{t}_c (Fig. 2.14). Il vient alors l'équilibre suivant selon la direction tangentielle portée par \underline{t}_c

$$\|\underline{T}_n\| = \|\underline{T}_{n-1}\| \pm c_f \|F_c\|. \quad (2.106)$$


 FIGURE 2.14: Appui ponctuel avec contact frottant simplifié pour $\alpha_{n-1} \approx \alpha_n$

Sous ces hypothèses, l'expression qui relie les valeurs de tensions $\|\underline{T}_{n-1}\|$ et $\|\underline{T}_n\|$ de part et d'autre de l'appui est :

$$\|\underline{T}_n\| = \|\underline{T}_{n-1}\| \pm c_f (\|\underline{T}_{n-1}\| + \|\underline{T}_n\|) \sin\left(\frac{\alpha_{n-1} - \alpha_n}{2}\right). \quad (2.107)$$

C'est ce modèle d'appui qui est mis en œuvre dans le logiciel MonoCAO utilisé par l'entreprise DCSA.

Une correction de la formule de la résultante $\|F_c\|$ précédemment écrite est proposée pour lever l'hypothèse du modèle précédent sur l'égalité des tensions de part et d'autre de l'appui (Fig. 2.15).

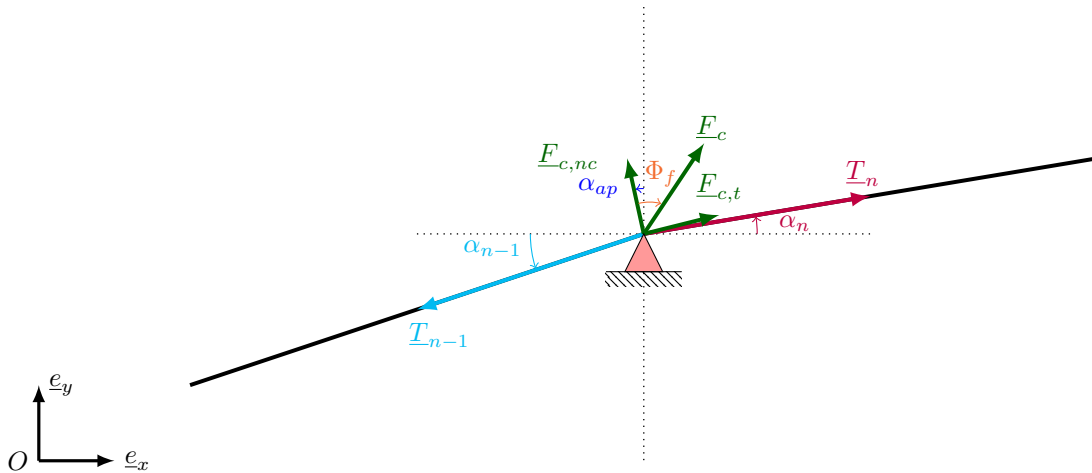


FIGURE 2.15: Appui ponctuel avec contact frottant (cas général)

L'écriture de l'équilibre statique au point d'appui donne selon les directions \underline{e}_x et \underline{e}_y ,

$$\underline{e}_x : F_{c,x} + \|\underline{T}_n\| \cos(\alpha_n) - \|\underline{T}_{n-1}\| \cos(\alpha_{n-1}) = 0, \quad (2.108)$$

$$\underline{e}_y : F_{c,y} + \|\underline{T}_n\| \sin(\alpha_n) - \|\underline{T}_{n-1}\| \sin(\alpha_{n-1}) = 0, \quad (2.109)$$

$$\|\underline{F}_c\| = \sqrt{F_{c,x}^2 + F_{c,y}^2} = \sqrt{\|\underline{T}_{n-1}\|^2 + \|\underline{T}_n\|^2 - 2\|\underline{T}_{n-1}\|\|\underline{T}_n\|\cos(\alpha_n - \alpha_{n-1})}. \quad (2.110)$$

Avec cette correction, toujours sous l'hypothèse d'un petit angle de déviation du câble $\alpha_{n-1} - \alpha_n$ et un frottement de Coulomb tel que $\|\underline{F}_{c,t}\| = c_f \|\underline{F}_{c,n,c}\|$, l'expression qui relie les tensions $\|\underline{T}_{n-1}\|$ et $\|\underline{T}_n\|$ de part et d'autre de l'appui est :

$$\|\underline{T}_n\| = \|\underline{T}_{n-1}\| \pm c_f \sqrt{\|\underline{T}_{n-1}\|^2 + \|\underline{T}_n\|^2 - 2\|\underline{T}_{n-1}\|\|\underline{T}_n\|\cos(\alpha_n - \alpha_{n-1})}. \quad (2.111)$$

Sous l'hypothèse d'un faible angle de déviation à l'appui $\alpha_{n-1} - \alpha_n$, en introduisant l'inclinaison moyenne $\alpha_{ap} = \frac{\alpha_{n-1} + \alpha_n}{2}$ de la ligne d'appui du câble sur le sabot et compte tenu de l'hypothèse du modèle de frottement de Coulomb, en se situant à la limite du glissement, l'équilibre précédent projeté selon l'horizontale et la verticale se réécrit pour un sabot support tel que $F_{c,y} > 0$:

$$\underline{e}_x : -\|\underline{F}_c\| \sin(\tan^{-1}(c_f) + \alpha_{ap}) + \|\underline{T}_n\| \cos(\alpha_n) - \|\underline{T}_{n-1}\| \cos(\alpha_{n-1}) = 0, \quad (2.112)$$

$$\underline{e}_y : \|\underline{F}_c\| \cos(\tan^{-1}(c_f) + \alpha_{ap}) + \|\underline{T}_n\| \sin(\alpha_n) - \|\underline{T}_{n-1}\| \sin(\alpha_{n-1}) = 0. \quad (2.113)$$

D'après (2.113),

$$\|\underline{F}_c\| = \frac{\|\underline{T}_{n-1}\| \sin(\alpha_{n-1}) - \|\underline{T}_n\| \sin(\alpha_n)}{\cos(\tan^{-1}(c_f) + \alpha_{ap})}. \quad (2.114)$$

L'expression (2.111), qui relie les tensions du câble de part et d'autre de l'appui, devient alors

$$\|\underline{T}_n\| = \|\underline{T}_{n-1}\| \frac{\cos(\alpha_{n-1})(1 - c_f \tan(\alpha_{ap})) + \sin(\alpha_{n-1})(c_f + \tan(\alpha_{ap}))}{\cos(\alpha_n)(1 - c_f \tan(\alpha_{ap})) + \sin(\alpha_n)(c_f + \tan(\alpha_{ap}))}. \quad (2.115)$$

Sans supposer un petit angle de déviation $\alpha_{n-1} - \alpha_n$, il faut reprendre les équations d'équilibres (2.112) et (2.113) tel que la réaction \underline{F}_c soit située sur le cône de frottement incliné d'un d'angle $\Phi_f = \tan^{-1}(c_f)$ par rapport à la normale sortante \underline{n}_c :

$$\underline{e}_x : -\|\underline{F}_c\| \sin(\alpha_{ap}) \cos(\tan^{-1}(c_f)) \pm c_f \|\underline{F}_c\| \cos(\alpha_{ap}) \sin(\tan^{-1}(c_f)) + \|\underline{T}_n\| \cos(\alpha_n) - \|\underline{T}_{n-1}\| \cos(\alpha_{n-1}) = 0, \quad (2.116)$$

$$\underline{e}_y : \|\underline{F}_c\| \cos(\alpha_{ap}) \cos(\tan^{-1}(c_f)) \pm c_f \|\underline{F}_c\| \sin(\alpha_{ap}) \sin(\tan^{-1}(c_f)) + \|\underline{T}_n\| \sin(\alpha_n) - \|\underline{T}_{n-1}\| \sin(\alpha_{n-1}) = 0. \quad (2.117)$$

En notant,

$$A(\alpha_{ap}, c_f) = -\sin(\alpha_{ap}) \cos(\tan^{-1}(c_f)) \pm c_f \cos(\alpha_{ap}) \sin(\tan^{-1}(c_f)), \quad (2.118)$$

$$B(\alpha_{ap}, c_f) = \cos(\alpha_{ap}) \cos(\tan^{-1}(c_f)) \pm c_f \sin(\alpha_{ap}) \sin(\tan^{-1}(c_f)). \quad (2.119)$$

D'après (2.117),

$$\|\underline{F}_c\| = \frac{\|\underline{T}_{n-1}\| \sin(\alpha_{n-1}) - \|\underline{T}_n\| \sin(\alpha_n)}{B(\alpha_{ap}, c_f)}. \quad (2.120)$$

L'expression (2.115) qui relie les tensions du câble de part et d'autre de l'appui devient alors

$$\|\underline{T}_n\| = \|\underline{T}_{n-1}\| \frac{A \sin(\alpha_{n-1}) - B \cos(\alpha_{n-1})}{A \sin(\alpha_n) - B \cos(\alpha_n)} \quad (2.121)$$

La valeur standard du coefficient de frottement condensé utilisée pour le calcul de ligne est imposée par les normes européennes [18] et dépend du type d'appui rencontré sur la ligne (Tab. 2.1).

TABLE 2.1: Valeurs réglementaires des coefficients de frottement pour le calcul de ligne [18]

Type d'appui	Coefficient de frottement c_f
Galet avec garniture caoutchouc	0.03
Galet avec garniture en matière synthétique	0.02
Sabot	0.1

Modèle ponctuel avec frottement linéique condensé

La géométrie du contact entre le câble et les appuis intermédiaires est généralement assimilable à un arc de cercle ou à une forme qui s'en rapproche telle que la clothoïde. D'après l'analyse bibliographique, des modèles de contact avec frottement entre un fil et une poulie sont disponibles. En condensant la loi de contact entre le câble et une poulie, équivalente à la géométrie réelle de l'appui, telle qu'à la limite du glissement dans le sens entrée vers sortie de l'appui,

$$\|\underline{T}_n\| = \|\underline{T}_{n-1}\| e^{\pm c_f \Delta\alpha}, \quad (2.122)$$

avec c_f le coefficient de frottement à l'appui, $\Delta\alpha = |\alpha_s - \alpha_e|$ l'angle de déviation du câble.

Modèle linéique

Un modèle de contact linéique avec le câble peut être défini à partir de la connaissance de la courbe paramétrée $\mathcal{C}_{ap} : \xi \mapsto \underline{X}_{ap} \in \mathbf{R}^3$ qui rend compte de la géométrie réelle de contact entre le câble et l'appui (Fig. 2.16). En l'absence d'une connaissance précise de cette courbe, une approximation par un modèle d'appui plan de **poulie équivalente**, définie par son centre (X_{ap}, Y_{ap}) et son rayon R_{ap} , approche la géométrie de contact par un arc de cercle :

- Pour un appui support tel que $\alpha_e \geq \alpha_s$ réalisé sur une longueur $\Delta S = R_{ap} \Delta\alpha = |\alpha_s - \alpha_e|$ avec un angle d'entrée α_e et de sortie α_s , le contact est supposé réalisé sur l'arc de cercle occupant la position :

$$\underline{X}_{ap}(\alpha) = \begin{pmatrix} x_{ap}(\alpha) \\ y_{ap}(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{ap} - R_{ap} \sin \alpha \\ Y_{ap} + R_{ap} \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \forall \alpha \in [\alpha_e, \alpha_s]. \quad (2.123)$$

- Pour un appui compression tel que $\alpha_e \leq \alpha_s$ réalisé sur une longueur $\Delta S = R_{ap} \Delta\alpha = |\alpha_s - \alpha_e|$ avec un angle d'entrée α_e et de sortie α_s , le contact est supposé réalisé sur l'arc de cercle occupant la position :

$$\underline{X}_{ap}(\alpha) = \begin{pmatrix} x_{ap}(\alpha) \\ y_{ap}(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{ap} + R_{ap} \sin \alpha \\ Y_{ap} - R_{ap} \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \forall \alpha \in [\alpha_e, \alpha_s]. \quad (2.124)$$

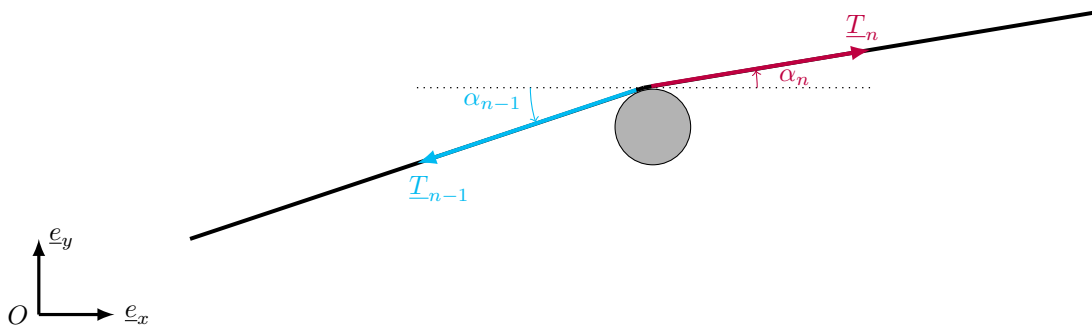


FIGURE 2.16: Appui linéique

Il est possible d'affiner la description du contact frottant du câble sur les appuis par rapport à un modèle ponctuel, pour déterminer la répartition continue de tension le long de la zone de contact, par résolution d'un problème d'évolution en adoptant une approche linéique et avec la prise en compte de l'élasticité du câble [84].

Modèle de la liaison pivot

D'après le Tab. 2.1, la valeur des coefficients de frottement entre le câble et les galets est faible au regard des coefficient de frottement entre matériaux car elle n'a pas de signification physique directe. En effet, le coefficient de frottement utilisé traduit la résistance au roulement du galet, en plus du frottement de contact entre le câble et la garniture du galet (Fig. 2.17).

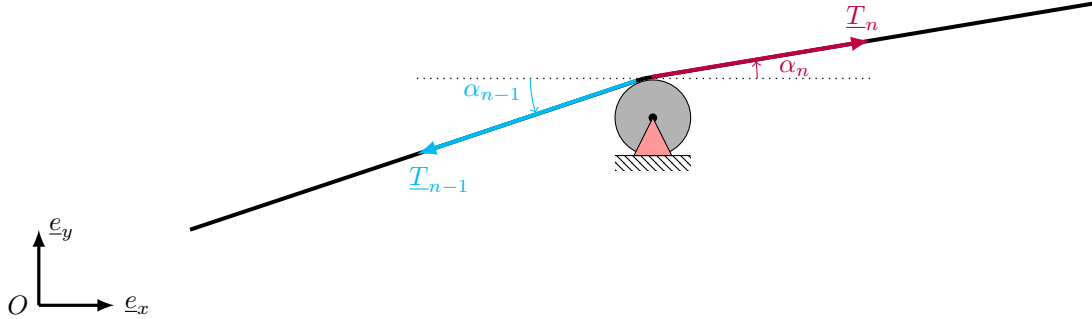


FIGURE 2.17: Appui linéique avec liaison pivot

En régime nominal, il y a roulement sans glissement du câble mobile sur les galets des balanciers. En l'état d'adhérence du câble sur le revêtement des galets, l'effort tangentiel résultant du frottement sur la ligne de contact reste indéterminé avec un modèle ponctuel. Il faut donc ajouter une information complémentaire. Un moment résultant \underline{M}_{frot} de l'ensemble des frottements statiques est généré dans la liaison pivot du galet et orienté selon \underline{e}_z . Sa valeur est déterminée par les mécanismes dissipatifs internes à la liaison. Le moment résistant est contré par le moment $\underline{M}_c = \underline{F}_{c,t} \wedge R_{poul}$ généré par les efforts tangentiels de frottement du câble sur le bandage. En adoptant une loi de contact similaire à la loi de Coulomb pour le galet :

- Pour $\|\underline{M}_c\| < \|\underline{M}_{frot}\|$, il y a blocage du galet en rotation, $\dot{\theta} = 0$.
- Pour $\|\underline{M}_c\| \geq \|\underline{M}_{frot}\|$, il y a rotation du galet, $\dot{\theta} \geq 0$.

Ainsi, un effort de frottement tangentiel limite $\|\underline{F}_{c,t}^1\| = \frac{\|\underline{M}_{frot}\|}{R_{poul}}$ est nécessaire pour mettre le galet en rotation.

Les hypothèses suivantes permettent d'évaluer un coefficient de résistance au roulement c_{fr} équivalent qui correspondent aux valeurs de coefficients c_f donnés par le Tab. 2.1 pour les galets (Fig. 2.18) :

- La valeur limite d'effort tangentiel exercé par le câble pour mettre le galet en rotation $\|\underline{F}_{c,t}^1\| = \frac{\|\underline{M}_{frot}\|}{R_{poul}}$ est inférieure à la valeur limite $\|\underline{F}_{c,t}^2\|$ pour laquelle il y a glissement du câble sur le bandage.
- En roulement du câble sur la poulie, il n'y a pas de glissement du câble sur le bandage de la poulie. D'après le modèle d'appui poulie précédemment abordé, cette condition impose :

$$\exp(-c_f \Delta \alpha) \leq \frac{\|\underline{T}_n\|}{\|\underline{T}_{n-1}\|} \leq \exp(c_f \Delta \alpha). \quad (2.125)$$

- L'équilibre des moments appliqués au galet est calculé à la **limite du roulement** :

$$\|\underline{F}_{c,t}\| = \frac{\|\underline{M}_{frot}\|}{R_{poul}}, \quad (2.126)$$

avec $\|\underline{M}_{frot}\|$ le moment résistant statique au roulement de la poulie et R_{poul} le rayon de la poulie.

- Le modèle de poulie avec un angle d'enroulement non-nul est condensé en un modèle d'appui frottant ponctuel équivalent, en faisant apparaître un angle de résistance au roulement $\Phi_r = \tan^{-1} \left(\frac{\|\underline{F}_{c,t}\|}{\|\underline{F}_{c,nc}\|} \right)$.

2.3.3 Modélisation du contact avec les stations d'extrémité

Les stations d'extrémité de la ligne assurent la déviation de la boucle de câble tracteur dans un plan horizontal et la fixation des câbles porteurs. C'est dans les stations d'extrémité qu'est assurée la mise en tension des câbles et la mise en mouvement de la boucle de câble tracteur. Plusieurs types de station sont à distinguer :

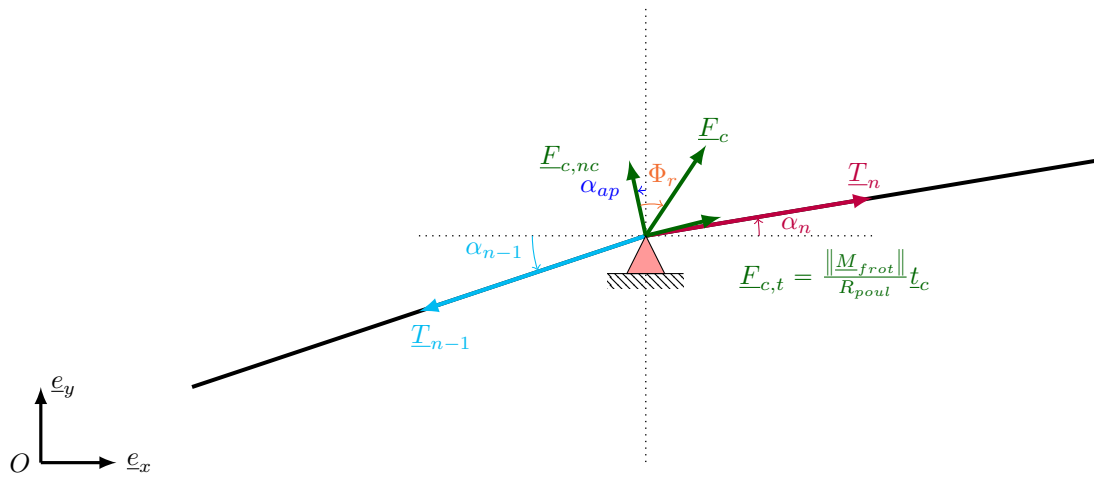


FIGURE 2.18: Appui avec liaison pivot équivalent

TABLE 2.2: Valeurs réglementaires des coefficients de frottement pour le calcul de ligne [18]

Type d'appui	Coefficient de frottement c_f
Poulie avec roulement à rouleaux	0.003
Poulie à paliers lisses	0.01

- les **stations motrice**,
- les **stations tension**,
- les **stations motrice-tension**,
- les **stations retour**.

Poulie

En entrée de station, des assemblages de galets assurent la déviation du câble tracteur qui est guidé jusqu'aux **poulies**, de tailles plus importantes, de plusieurs mètres de diamètre. Plusieurs types de poulies existent :

- les **poulies de déviation**, ou poulies folles, qui sont libres en rotation. Ces poulies sont présentes dans les stations tensions et retours.
- les **poulies motrices** qui sont reliées à la chaîne cinématique. Ces poulies sont présentes dans les stations motrices et motrice-tensions.

Contrairement aux galets, le câble s'enroule autour des poulies. En particulier, le critère d'enroulement doit assurer la bonne adhérence du câble sur le bandage si la poulie est motrice pour éviter tout risque de perte d'adhérence et de dévirage.

Les modèles de contact galets-câble abordés en 2.3.2 restent valides pour une poulie de déviation dans une situation nominale en adhérence. Seules les valeurs des coefficients de frottement sont distinctes en raison de la nature différente des roulements qui ne sont pas les mêmes que sur les galets des balanciers situés sur les appuis intermédiaires (Tab. 2.2).

Station de mise en tension

En plus du contact avec le câble, un système de mise en tension agit sur la poulie lorsque celle-ci assure la mise en tension de la ligne. Plusieurs configurations sont rencontrées en pratique :

- La tension du câble T est maintenue à une valeur nominale par une régulation agissant par l'intermédiaire d'un vérin hydraulique, alimenté par un circuit d'alimentation qui impose la pression. L'effort résultant est appliqué au centre de la liaison pivot entre la poulie et le lorry de tension par l'extrémité de la tige du vérin. La loi de contact f entre le câble et la poulie, retenue selon les modèles de la sous-section 2.3.2,

TABLE 2.3: Valeurs réglementaires des coefficients de frottement pour le calcul de ligne [18]

Type d'appui	Coefficient de frottement c_f
Galet avec garniture caoutchouc	0.03
Galet avec garniture en matière synthétique	0.02
Poulie avec roulement à rouleaux	0.003
Poulie à paliers lisses	0.01
Sabot	0.1
Chaîne à rouleaux avec paliers équipés de roulements à rouleaux	0.005
Chaîne à rouleaux équipés de paliers lisses	0.01

donne la relation entre la tension T^+ du brin de câble entrant et la tension T^- du brin de câble sortant de la poulie :

$$T^+ = f(T^-), \quad (2.127)$$

tandis que le bilan des efforts appliqués à la poulie et à la portion de câble enroulée autour donne la relation :

$$T^+ + T^- = T. \quad (2.128)$$

En pratique, la régulation hydraulique n'est pas parfaite et la tension T n'est pas constante mais évolue dans un intervalle de tolérance. Une modélisation plus approfondie du circuit hydraulique de commande offre l'opportunité de l'étude du couplage entre le contrôle de la tension et le comportement de la ligne de câble.

— Si la tension du câble T est assurée par un contrepoids de masse m_c , (2.128) est remplacée par :

$$T^+ + T^- = m_c g. \quad (2.129)$$

Dans la station tension, des galets, des sabots, des chaînes sont présents et peuvent être modélisés par les appuis abordés dans la sous-section 2.3.2. Seul le coefficient de frottement considéré diffère selon les cas (Tab. 2.3).

Station motrice

La poulie de la station motrice reçoit un couple de la part d'un moteur ou d'un dispositif de freinage qui assure l'équilibre statique de la ligne, en supposant l'adhérence du câble sur le bandage. La tension de part et d'autre de la poulie motrice découle du calcul de l'équilibre de l'ensemble de la boucle de câble.

Station motrice-tension

Lorsque la poulie joue à la fois le rôle de motrice et de tension, seule l'équation de bilan en effort (2.128) est appliquée, dans le cas d'une tension hydraulique, ou (2.129) dans le cas d'une tension par contrepoids.

Prédimensionnement du câble

Les conditions aux bords de la boucle de câble ou aux extrémités des lignes de câble de type porteur sont fixées par le type de stations d'extrémité. Le **problème de prédimensionnement** permet de déterminer la longueur de câble L à prévoir pour un profil de ligne dont le concepteur connaît la position des appuis et le système de mise en tension.

La position des appuis est contrainte par le profil de ligne, la présence d'obstacles, de routes, de pistes de ski,... La valeur de la tension est contrainte par plusieurs éléments :

- la technologie du constructeur de l'installation avec la spécification des efforts maximaux pouvant être repris par la station,
- la capacité des vérins hydraulique (course, pression),
- l'encombrement du contrepoids (course, profondeur du puit).

- La réglementation. La norme EN 12930 [18] dédiée au transport par câble stipule que le rapport entre la tension minimale appliquée à un brin de câble T_{min} et le poids P_v d'un véhicule chargé doit vérifier :

$$15 \leq \frac{T_{min}}{P_v}. \quad (2.130)$$

En pratique, sur les installations récentes de type télécabine, $\frac{T_{min}}{P_v} \approx 18$. Pour un véhicule de télécabine de 10 places, $P_v \approx 1700$ kg, soit $T_{min} \approx 26000$ daN. Dans le cas d'une station motrice-tension qui assure à la fois la mise en vitesse et la tension du câble, le rapport entre la tension du brin entrant et sortant de la poulie est contrôlé pour assurer la bonne adhérence selon la norme EN 12930 [18]. Pour une installation en zone urbaine avec une géométrie de ligne très plate et de longues distances de portées, il est en pratique nécessaire de tendre de façon plus importante le câble pour limiter les flèches et assurer les hauteurs de survol réglementaires par rapport au sol.

- Le risque de croisement de câble. Sur des installations multicâbles, un critère empirique encadre les rapports de tensions des câbles porteur et tracteur afin de limiter les risques de croisement de câble lors des freinages brutaux du câble tracteur, en augmentant la différence de flèche entre les câbles.

De façon standard, la tension appliquée à un brin de câble en station tension est comprise entre 100 kN et 500 kN.

Câble en tension régulée

Le **problème en tension régulée** sert au calcul d'une installation possédant un dispositif de mise en tension commandé et pour laquelle un premier calcul de prédimensionnement a été préalablement effectué afin de connaître la longueur de câble L_0 à prévoir. Un degré de liberté est ensuite relâché, selon un axe déterminé par la géométrie du système de mise en tension, pour obtenir un problème bien posé en autorisant la translation d'un des appuis où est appliquée la tension. Ce calcul permet de déterminer le déplacement de la station de tension selon les cas de chargement de la ligne et ainsi anticiper la course du vérin ou du contrepoids (hauteur de la fosse). La tension régulée est aujourd'hui la solution constructive la plus répandue sur les installations standards monocâbles.

Câble en ancrage fixe

Le **problème en ancrage fixe** sert au calcul d'une installation dont la position des stations d'extrémités est fixe et la longueur de câble à vide L_0 est connue. La tension n'est plus imposée par un dispositif extérieur mais dépend du chargement de la ligne. Les spécificités de cette solution constructive sont abordées dans [235–238]. L'ancrage des câbles porteurs est commun sur les installations multicâbles.

2.4 Modélisation statique des véhicules

La boucle de câble est au contact avec des véhicules qui transportent les passagers. Plusieurs catégories de véhicules existent selon le type d'installation :

- Des **sièges** qui sont des véhicules ouverts sur l'extérieur sur les lignes de télésièges.
- Des **cabines** qui sont des véhicules fermés sur les lignes de télécabines, téléphérique, 3S.

Les véhicules peuvent être accrochés et/ou rouler sur les câbles selon le type de liaison (Fig. 2.19).

2.4.1 Modèle ponctuel d'un véhicule sur une ligne monocâble

Sur les lignes monocâbles, le câble est relié au véhicule de masse m_v par une attache aussi désignée par pince.

Une première approche consiste à répartir la masse des véhicules le long du câble, par modification de la masse linéique μ du câble seul en y ajoutant une contribution équivalente μ_m à la masse répartie des k véhicules le long du câble de longueur L :

$$\mu_{rep} = \mu + \mu_m = \mu + \frac{km_v}{L}. \quad (2.131)$$

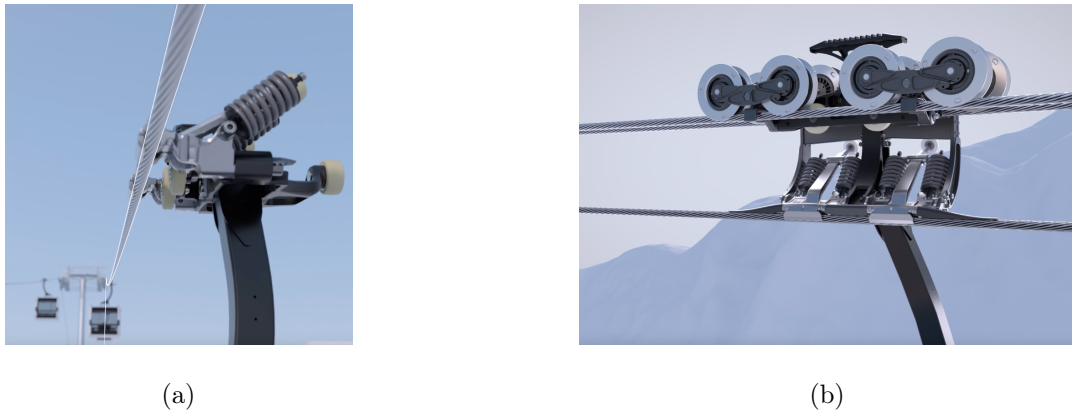


FIGURE 2.19: (a) Vue de synthèse de l'attache d'un véhicule sur une ligne monocâble (d'après une brochure Doppelmayr Group), (b) Vue de synthèse de l'attache d'un véhicule sur une ligne multicâbles (d'après une brochure Doppelmayr Group)

Ce modèle a pour avantage d'être simple et est obtenu par modification d'un paramètre μ intrinsèque à la formulation du câble. En revanche, il a pour effet de transformer un effort ponctuel, localisé au point d'accroche, en une densité linéique d'effort uniforme équivalent.

En réalité, la transmission de l'effort de serrage a lieu sur une longueur ΔS inférieure au mètre. Pour une étude de ligne avec une approche curviligne du câble, la surface de serrage peut être ramenée en un point auquel s'applique la réaction \underline{F}_v de l'attache sur le câble, par passage à la limite $\Delta S \rightarrow 0$ (Fig. 2.20).

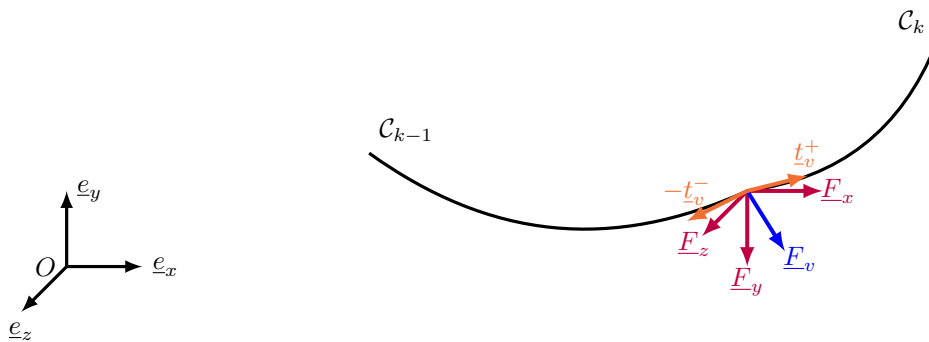


FIGURE 2.20: Véhicule accroché à un câble tendu sans flexion, modélisé par un effort ponctuel

En considérant le système composé :

- de la portion de câble située à l'intérieur des mors de l'attache,
- de l'attache,
- du véhicule,

un bilan des forces extérieures conduit à l'existence d'un jeu de trois forces ramenées en un seul point :

- La résultante des efforts extérieurs,

$$\underline{F}_v = \underline{F}_x + \underline{F}_y + \underline{F}_z, \quad (2.132)$$

s'exerçant sur le véhicule (autres que ceux du câble).

- La tension de la portion de câble occupée par le domaine C_{k-1} à gauche du véhicule \underline{T}_v^- . C'est l'effort axial régnant dans le câble selon la direction tangentielle $-\underline{t}_v^-$.
- La tension de la portion de câble occupée par le domaine C_k à droite du véhicule \underline{T}_v^+ . C'est l'effort axial régnant dans le câble selon la direction tangentielle \underline{t}_v^+ .

L'équilibre statique du véhicule ramené à un point d'abscisse curviligne $S = S_v$ correspond à la compensation des efforts extérieurs qui s'y appliquent :

$$\underline{F}_v + \underline{T}_v^- + \underline{T}_v^+ = \underline{0}, \quad (2.133)$$

$$\underline{F}_v - N(S_v^-) \underline{t}_v^- + N(S_v^+) \underline{t}_v^+ = \underline{0}. \quad (2.134)$$

Par exemple, dans le cas d'un problème plan traité par les équations de la chaînette et pour lequel le véhicule n'est soumis qu'à son poids $\underline{F}_v = -P_v \underline{e}_y$, l'angle d'inclinaison du câble α par rapport à l'horizontale est introduit tel qu'en tout point du câble $\underline{t} = \cos \alpha \underline{e}_x + \sin \alpha \underline{e}_y$, $\underline{n} = -\sin \alpha \underline{e}_x + \cos \alpha \underline{t}$. Les équations d'équilibre du véhicule se réécrivent en fonction de l'abscisse du véhicule x_v ,

$$\underline{e}_x : -N(x_v^-) \cos \alpha(x_v^-) + N(x_v^+) \cos \alpha(x_v^+) = 0, \quad (2.135)$$

$$\underline{e}_y : -P_v - N(x_v^-) \sin \alpha(x_v^-) + N(x_v^+) \sin \alpha(x_v^+) = 0. \quad (2.136)$$

Les angles $\alpha(x)$ et les tensions $N(x)$ s'expriment en fonction des paramètres τ, K_1 et le chargement linéique des câbles f_R ,

$$\alpha(x) = \tan^{-1} \left(\sinh \left(\frac{x}{\tau} + K_1 \right) \right), \quad (2.137)$$

$$N(x) = f_R \tau \cosh \left(\frac{x}{\tau} + K_1 \right). \quad (2.138)$$

Pour un modèle de tige, il faut ajouter l'effort tranchant dû à la raideur en flexion. Selon un modèle simple pour décrire l'interface de contact entre le véhicule et le câble, la longueur d'accroche du véhicule au câble ΔS est assimilée à un arc de cercle, d'où la courbure du câble à l'appui

$$\kappa_v = \frac{\Delta \alpha}{\Delta S} = \frac{\alpha_v^+ - \alpha_v^-}{\Delta S}, \quad (2.139)$$

avec α_v^- , α_v^+ les angles du câble à gauche et à droite du véhicule.

Le signe de κ_v est donné par l'orientation de la normale sortante selon la convexité de la zone de câble en contact avec le véhicule. En pratique, $\kappa_v > 0$ aux véhicules en dehors des appuis, $\kappa_v < 0$ aux appuis supports et $\kappa_v > 0$ aux appuis compressions.

L'effort tranchant \underline{V} qui rend compte des effets de flexion dans le câble s'écrit alors :

$$\underline{V} = -EI \frac{1}{\Delta S^2} \left[\frac{y(x_3)'''}{(1 + y(x_3)^2)^{\frac{3}{2}}} - 2 \frac{\Delta \alpha}{\Delta S} + \frac{y(x_1)'''}{(1 + y(x_1)^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \underline{n}_v, \quad (2.140)$$

avec $y(x_1), y(x_2)$ l'ordonnée du câble de part et d'autre du véhicule.

2.4.2 Modèle ponctuel d'un véhicule en multicâbles (chariot)

Sur les lignes multicâbles, le ou les câbles tracteurs (mobiles) sont reliés au véhicule par des attaches (mordâche, pince fixe) tandis que le ou les câbles porteurs (fixes) sont reliés au véhicule par l'intermédiaire d'un équipage mobile composé de galets de roulement (chariot). Dans cette sous-section, le cas d'une installation dotée d'un câble porteur et d'un câble tracteur est traité.

Le problème est supposé plan et le chariot est modélisé par un point où passent les câbles (Fig. 2.21). Le cas limite de cette approximation est lorsqu'un dimensionnement demande de prendre en compte la géométrie détaillée du chariot, avec l'espacement vertical et transversal des câbles. Un modèle avec plusieurs points est alors nécessaire.

Les galets de roulement assurent le guidage et le déplacement du chariot le long des câbles porteurs qui sont fixes. Un premier bilan des efforts s'exerçant sur la portion de câble porteur située en-dessous du train de galets de roulement permet d'identifier, par passage à la limite $\Delta S \rightarrow 0$:

- L'effort de tension de la portion de câble porteur occupée par le domaine $\mathcal{C}_{p,k-1}$ à gauche du véhicule $\underline{T}_{p,v}^-$. C'est l'effort axial régnant dans le câble selon la direction tangentielle $-\underline{t}_{p,v}^-$.
- L'effort de tension de la portion de câble porteur occupée par le domaine $\mathcal{C}_{p,k}$ à droite du véhicule $\underline{T}_{p,v}^+$. C'est l'effort axial régnant dans le câble selon la direction tangentielle $\underline{t}_{p,v}^+$.
- La résultante de l'effort normal $\underline{F}_{vp,n}$ exercé par les galets de roulement sur le câble porteur.
- La résultante des forces de frottement $\underline{F}_{vp,t} = f_c(\underline{F}_{vp,n})$ introduites par le roulement des galets sur le câble porteur, selon une loi de contact f_c .

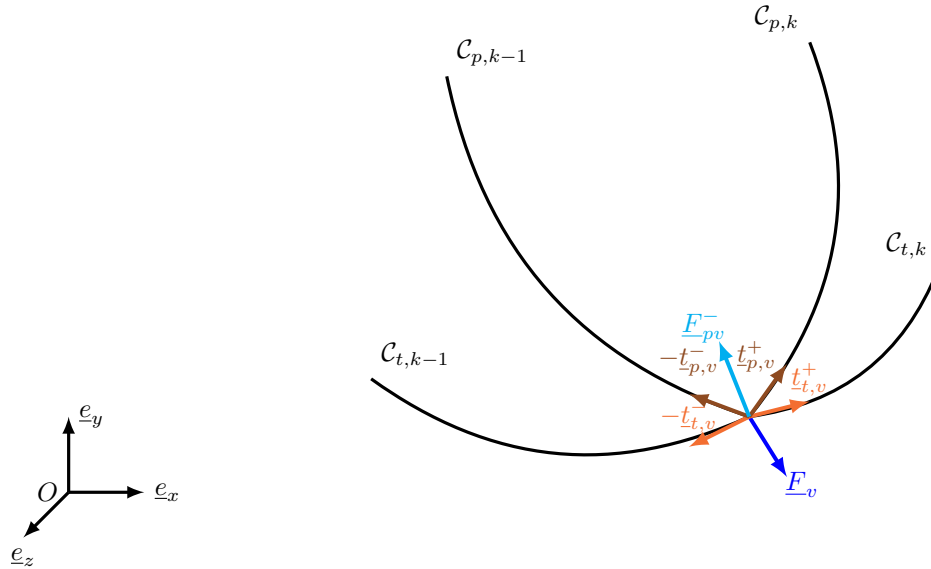


FIGURE 2.21: Véhicule suspendu à un câble tracteur et porteur tendu sans flexion, modélisé par un effort ponctuel de résultante \underline{F}_v

L'équilibre du câble porteur au chariot ramené à un point ponctuel est écrit, en l'abscisse curviligne du câble porteur $S = S_{p,v}$,

$$\underline{F}_{vp,n} + \underline{F}_{vp,t} + \underline{T}_{p,v}^- + \underline{T}_{p,v}^+ = \underline{0}, \quad (2.141)$$

$$\underline{F}_{vp,n} + \underline{F}_{vp,t} - N_p(S_{vp}^-) \underline{t}_{p,v}^- + N_p(S_{vp}^+) \underline{t}_{p,v}^+ = \underline{0}. \quad (2.142)$$

Un deuxième bilan des efforts s'appliquant à l'ensemble constitué du chariot et du véhicule fait intervenir :

— La résultante des efforts,

$$\underline{F}_{pv} = -\underline{F}_{vp,n} - \underline{F}_{vp,t}, \quad (2.143)$$

appliqués par le câble porteur sur le chariot.

- La tension de la portion de câble tracteur occupée par le domaine $\mathcal{C}_{t,k-1}$ à gauche du véhicule $\underline{T}_{t,v}^-$. C'est l'effort axial régnant dans le câble selon la direction tangentielle $-\underline{t}_{t,v}^-$.
- La tension de la portion de câble tracteur occupée par le domaine $\mathcal{C}_{t,k}$ à droite du véhicule $\underline{T}_{t,v}^+$. C'est l'effort axial régnant dans le câble selon la direction tangentielle $\underline{t}_{t,v}^+$.
- La résultante des efforts \underline{F}_v exercés par l'extérieur sur le véhicule (autres que ceux des câbles).

L'équilibre statique du véhicule ramené à un point d'abscisse curviligne du câble tracteur $S = S_{t,v}$ correspond à la compensation des efforts extérieurs qui s'y appliquent :

$$\underline{F}_v + \underline{F}_{pv} + \underline{T}_{t,v}^- + \underline{T}_{t,v}^+ = \underline{0}, \quad (2.144)$$

$$\underline{F}_v + \underline{F}_{pv} - N(S_{t,v}^-) \underline{t}_{t,v}^- + N(S_{t,v}^+) \underline{t}_{t,v}^+ = \underline{0}. \quad (2.145)$$

L'effort \underline{F}_v est une donnée d'entrée du calcul, tandis que \underline{F}_{pv} est une inconnue interne au problème à laquelle on accède par la résolution de (2.142) connaissant la loi de contact f_c . De la même façon que pour le cas monocâble, le système peut s'exprimer en fonction des coordonnées du déplacement inconnu \underline{U} pour un traitement numérique des équations, ou en remplaçant les expressions des tensions et des angles d'inclinaison du câble par rapport à l'horizontale dans le cas du problème plan de chaînette.

2.5 Définition du modèle statique global du système

Pour fermer le problème d'équilibre de la ligne de câble considérée dans sa globalité, il est nécessaire de spécifier les conditions aux limites de chacune des portions de câble par une technique d'assemblage. Ces

informations sont apportées à chaque interface entre deux éléments de câble sous la forme d'équations de couplage internes, pour aboutir au modèle statique non-linéaire complet :

$$\{S(Y)\} = \{0\} \quad (\text{chaînette}), \quad (2.146)$$

ou

$$\{S(U)\} = \{0\} \quad (\text{différences finies écrites en déplacement}). \quad (2.147)$$

Dans cette section, l'exemple de l'assemblage d'une ligne d'une installation monocâble est proposé. La méthode se généralise selon un principe similaire à des installations multicâbles : téléphériques, 3S,...

Assemblage d'une ligne d'installation monocâble

Sur les installations monocâbles modernes, la position des appuis intermédiaires est généralement symétrique par rapport à l'axe de la ligne sur les deux voies. Dans les travaux présentés dans ce mémoire, la boucle de câble est représentée par un modèle triangulaire (Fig. 2.22).

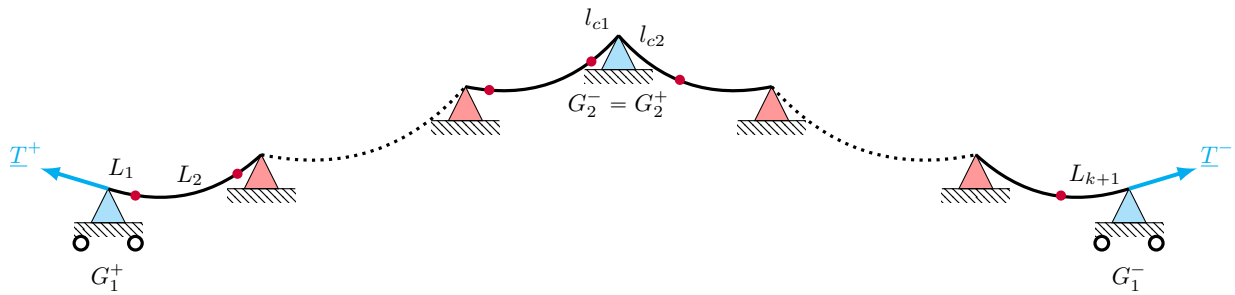


FIGURE 2.22: Schéma d'une ligne monocâble avec une station tension en position aval et une station motrice en position amont

Les données d'entrée du modèle assemblé de la ligne selon la configuration de la Fig. 2.22 :

- les positions des $2(N - 1)$ appuis intermédiaires séparant les $2N$ portées de câble

$$\underline{X}_{ap,n} \quad n \in [1, 2(N - 1)], \quad (2.148)$$

- la position de la station motrice (G2) :

$$\underline{X}_{G_2^-} = \underline{X}_{G_2^+}, \quad (2.149)$$

- la longueur de la boucle de câble à vide L_0 ,
- la distance entre deux véhicules successifs i et $i + 1$,

$$l_d^{i,i+1}, \quad i \in [1, k], \quad (2.150)$$

et entre le dernier et le premier véhicule

$$l_d^{k+1,1}, \quad (2.151)$$

- la tension T appliquée en station tension (G1),
- les longueurs de contrôle l_{c1} , l_{c2} entre la station motrice et les deux véhicules adjacents.

Les inconnues du modèle sont :

- la position occupée par le câble $\underline{X}_s(S)$ sur les $(k + 1) + 2(N - 1) + 1$ portions de longueur l_j séparant les appuis et les véhicules le long de la boucle,
- la position de la station tension,

$$\underline{X}_{G_1^-}, \underline{X}_{G_1^+}, \quad (2.152)$$

- la position occupée par les k véhicules,

$$\underline{X}_{v,i}, \quad i \in [1, k]. \quad (2.153)$$

En plus des équations de contact du câble aux appuis et avec les véhicules abordées précédemment, les équations de couplage des voies assurent la fermeture du système global :

- Fermeture géométrique de la boucle de câble de longueur L_0 qui se referme en G_1 telle que :

$$\underline{X}_{G_1^+} - \underline{X}_{G_2^-} = \underline{X}_{G_1^-} - \underline{X}_{G_2^+}, \quad (2.154)$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} L_i = \sum_{j=1}^{(k+1)+2(N-1)+1} l_j = L_0. \quad (2.155)$$

- La distance entre deux véhicules successifs i et $i + 1$, $i \in [1, k]$, est contrôlée :

$$L_i = l_d^{i,i+1}, \forall i \in [2, k], \quad (2.156)$$

$$L_1 + L_{k+1} = l_d^{k+1,1}. \quad (2.157)$$

Discrétisation de la boucle de câble

Une approche numérique basée sur la discrétisation du câble, par différences finies ou éléments finis, requiert de partir d'une configuration de référence de longueur fixée comme une donnée d'entrée. Si la longueur totale du câble L_0 sur la référence est initialement connue, les longueurs de câble situées entre chaque appui dépendent de l'équilibre statique global. En effet, le câble est libre de glisser sur les appuis en passant d'une portée à une autre, sans contrainte autre que les éventuels frottements. La mise en œuvre du couplage demande ainsi la mise en place d'une stratégie dédiée par actualisation du maillage du câble, sur sa configuration de référence, au cours des itérations. La méthode proposée ici comporte les étapes suivantes (Fig. 2.23) :

- 1. Initialiser les longueurs de câble entre chaque portée de façon arbitraire sur la configuration de référence,
- 2. Réaliser une succession de calculs des N portées découplées entre elles, selon une configuration d'ancrage fixe du câble à chaque appui intermédiaire, sans loi de contact spécifiée aux appuis,
- 3. Réaliser des itérations sur la longueur de câble L_n entre chaque appui, en fonction de la différence des tensions obtenues de part et d'autre $\|\underline{T}_{n-1}\|$, $\|\underline{T}_n\|$ de chacun des appuis, jusqu'à trouver l'équilibre des tensions vérifiant la loi de contact à l'appui,

$$\|\underline{T}_n\| = f_c(\|\underline{T}_{n-1}\|), \quad \forall n \in [2, N]. \quad (2.158)$$

La procédure consiste ainsi à échanger des longueurs de câble entre chaque portée par déplacement de la position des appuis intermédiaires sur la configuration de référence tout en conservant la longueur totale constante et égale à L_0 jusqu'à l'équilibre des tensions aux appuis. Une méthode de dichotomie peut-être appliquée. Une autre vision équivalente de la stratégie proposée consiste à utiliser les positions curvilignes S_n des appuis, sur la configuration de référence, comme inconnues. Chaque appui comporte ainsi une inconnue et une équation scalaire $\|\underline{T}_n\| = f_c(\|\underline{T}_{n-1}\|)$ traduisant la transmission de la tension à l'appui (couplage). Cette méthode est le pendant dual à celle de Crussels [7] pour la gestion d'un appui mobile libre en translation.

D'autres problématiques se posent également avec un modèle discrétisé du câble. La gestion de la position des véhicules est contrôlée sur la configuration déformée, ce qui nécessite la mise en œuvre d'une méthode similaire à celle proposée pour la gestion du passage du câble sur les appuis.

Bilan du chapitre

En l'absence de modèles disponibles dans l'état de l'art, le chapitre 2 apporte les éléments de modélisation statique d'une ligne complète de transport par câbles par décomposition du système en ses différents sous-composants. Cette approche permet une évolution des modèles pour tenir compte de la diversité des configurations rencontrées dans les applications industrielles. Dans la continuité du chapitre 2, le chapitre 4 s'intéressera à la modélisation dynamique.

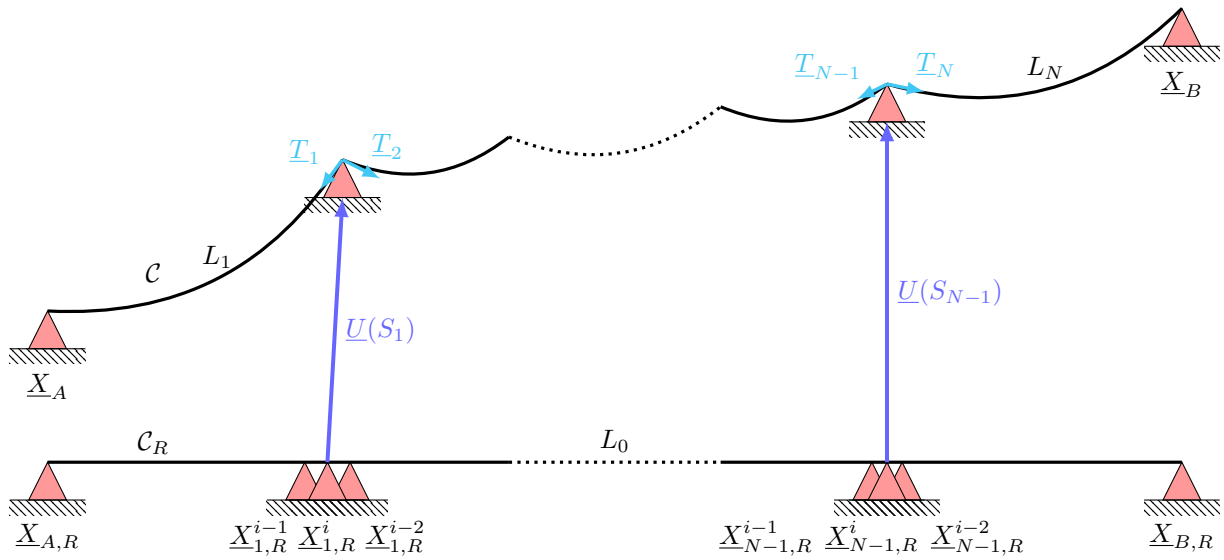


FIGURE 2.23: Stratégie de calcul par portées découplées et itération i sur la position des appuis sur la référence jusqu'à convergence de l'équilibre des tensions aux appuis, $\|T_n\| = f_c(\|T_{n-1}\|)$, $\forall n \in [2, N]$

Chapitre 3

Étude du comportement statique du système.

Introduction du chapitre

Le chapitre 3 présente des résultats de calculs appliqués aux modèles statiques élaborés au chapitre 2. La section 3.1 est restreinte à l'étude d'une portée simple, afin d'apporter des éléments de compréhension sur l'influence des hypothèses de modélisation retenues au chapitre 2. La section 3.2 généralise l'approche précédente à l'assemblage de plusieurs portées entre elles et de la boucle de câble d'une ligne de système de transport par câbles (monocâble et multicâbles).

3.1 Calcul statique d'une portée de câble

La section 3.1 s'intéresse au calcul de l'équilibre d'un câble sur un modèle élémentaire d'une portée isolée. Dans la sous-section 3.1.1, le modèle analytique de chaînette est abordé selon différentes conditions aux limites et plusieurs stratégies de prise en compte de l'allongement élastique. Dans la sous-section 3.1.2, les modèles de fil et de tige sont comparés sur une portée.

3.1.1 Modèle de la chaînette

Prédimensionnement

Les données d'entrée du modèle sont :

- la position des deux appuis (x_A, y_A) et (x_B, y_B) . La longueur de corde est utilisée comme échelle de longueur caractéristique du problème

$$L_c = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}, \quad (3.1)$$

- la tension appliquée à l'extrémité N_A .

Il est possible de ramener le système à une inconnue et une équation scalaire en faisant intervenir l'angle du câble :

$$\alpha(x_A) = \alpha_A = \tan^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}_y}{\mathcal{F}_x}\right), \quad (3.2)$$

$$y_B = \frac{N_A \cos \alpha_A}{\mu g} \left(\cosh \left[\frac{\mu g (x_B - x_A)}{N_A \cos(\alpha_A)} + \operatorname{argsh}(\tan(\alpha_A)) \right] - \sqrt{1 + \tan^2(\alpha_A)} \right) + y_A. \quad (3.3)$$

Le résultat du calcul est la longueur de câble L . Le paramètre adimensionné de mise sous tension est introduit :

$$\gamma_T = \frac{N_A}{\mu g L_c}, \quad (3.4)$$

ainsi que les grandeurs adimensionnées d'abscisse

$$x^* = \frac{x}{L_c}, \quad (3.5)$$

d'ordonnée

$$y^* = \frac{y}{L_c}, \quad (3.6)$$

de tension

$$N^* = \frac{N}{\mu g L_c}, \quad (3.7)$$

et de longueur de câble

$$L^* = \frac{L}{L_c}. \quad (3.8)$$

Le cas d'une portée horizontale $y_A = y_B$ est calculé pour plusieurs valeurs de γ_T (Fig. 3.1, Fig. 3.2). Il n'y a pas convergence du calcul de l'équilibre pour $\gamma_T < \gamma_{T,min}$, avec $\gamma_{T,min}$ la limite de tension en dessous de laquelle le poids de la portion de câble ne peut pas être équilibré. Il est possible de calculer la valeur $\gamma_{T,min}$ en écrivant la condition d'équilibre globale de la portée selon la verticale,

$$-N_A \sin(\alpha_A) + N_B \sin \alpha_B = \mu g L. \quad (3.9)$$

En remplaçant les tensions et les angles par les formules de chaînette, l'équation (3.9) s'écrit en fonction des composantes horizontale \mathcal{F}_x et verticale \mathcal{F}_y de la tension $N_A = \sqrt{\mathcal{F}_x^2 + \mathcal{F}_y^2}$ imposée à l'extrémité A ,

$$\begin{aligned} & -\sqrt{\mathcal{F}_x^2 + \mathcal{F}_y^2} \sin\left(\tan^{-1} \frac{\mathcal{F}_y}{\mathcal{F}_x}\right) \\ & + \left(\sqrt{\mathcal{F}_x^2 + \mathcal{F}_y^2} + \mu g(y_B - y_A)\right) \sin\left(\tan^{-1}\left(\sinh\left(\frac{\mu g(x_B - x_A)}{\mathcal{F}_x} + \sinh^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}_y}{\mathcal{F}_x}\right)\right)\right)\right) \\ & = \mu g \left(\frac{\mathcal{F}_x}{\mu g} \sinh\left(\frac{\mu g(x_B - x_A)}{\mathcal{F}_x} + \left(\frac{\mathcal{F}_y}{\mathcal{F}_x}\right)\right) - \frac{\mathcal{F}_y}{\mu g}\right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Trouver $\gamma_{T,min} = \frac{N_{A,min}}{\mu g L_c}$ est équivalent à la recherche de :

$$\min_{\mathcal{F}_x, \mathcal{F}_y \in \mathcal{D}} \sqrt{\mathcal{F}_x^2 + \mathcal{F}_y^2}, \quad (3.11)$$

avec \mathcal{D} l'ensemble des points $(\mathcal{F}_x, \mathcal{F}_y)$ qui vérifient (3.10) pour une géométrie de portée et une masse linéique de câble données.

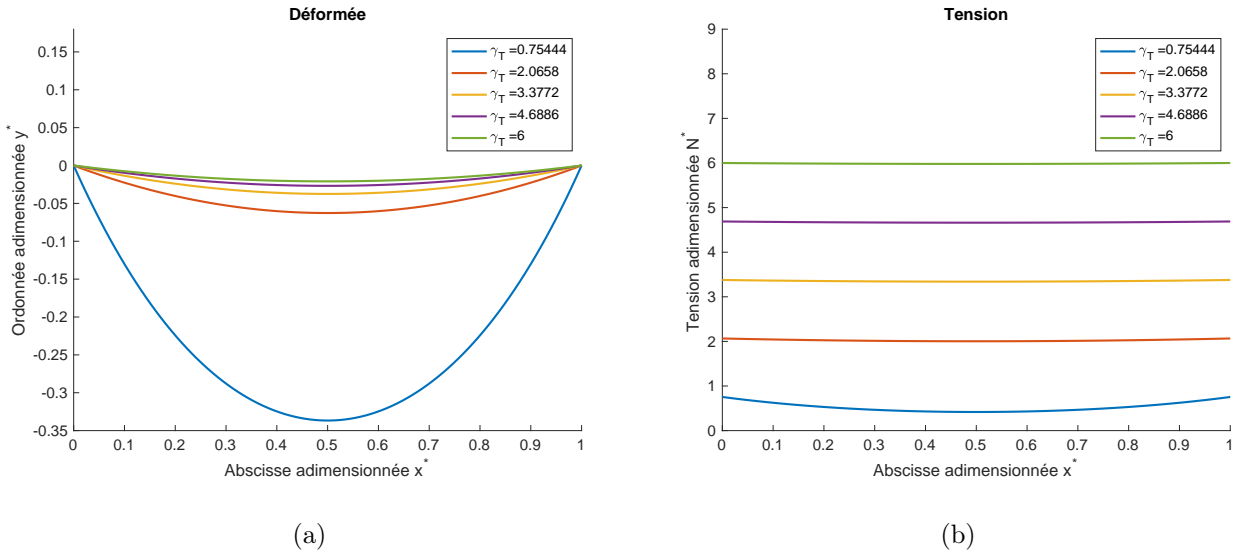
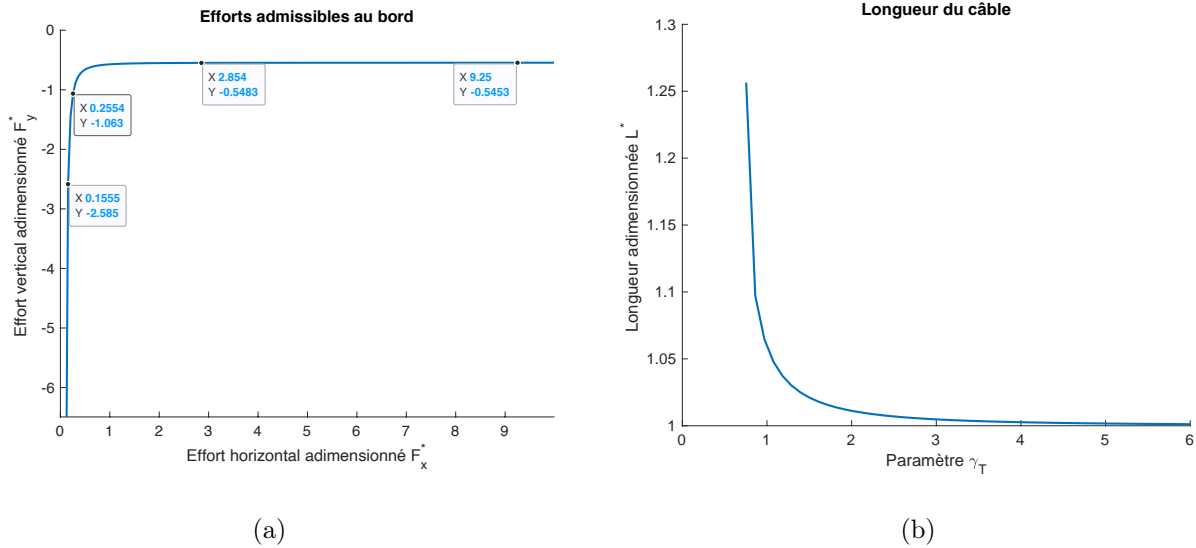
Dans la configuration horizontale, $\gamma_{T,min} \approx 0.75$ et $L^* \approx 1.25$, ce qui signifie qu'il faut exercer un effort de tension au moins égal à 60 % du poids total du câble dans la portée pour assurer l'équilibre statique. La problématique de valeur limite inférieure de tension imposée à une extrémité de ligne de câble est abordée dans la référence [141].

Par convention, le signe des composantes horizontale et verticale \mathcal{F}_x^* , \mathcal{F}_y^* est inversé par rapport au repère orienté $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$: un signe positif pour \mathcal{F}_x^* correspond à un effort horizontal de tension orienté selon $-\underline{e}_x$ et un signe négatif pour \mathcal{F}_y^* correspond à un effort vertical de tension orienté selon \underline{e}_y . Les effets non-linéaires sont visibles sur la Fig. 3.2 avec une forte variation de \mathcal{F}_y^* pour des faibles valeurs $\mathcal{F}_x^* \leq 0.5$ et une tangente verticale en $\mathcal{F}_x^* = 0$, tandis que la composante $\mathcal{F}_y^* \rightarrow 0.54$ pour $\mathcal{F}_x^* \rightarrow \infty$ avec une asymptote horizontale.

D'après la Fig. 3.3, en inclinant la portée d'un angle :

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)}\right), \quad (3.12)$$

la valeur de $\gamma_{T,min}$ diminue avec l'angle d'inclinaison : plus la portée est raide, moins l'effort de tension minimum à appliquer pour assurer l'équilibre statique est important, jusqu'à un angle limite $\alpha_1 \approx 1.35$ rad. Puis pour $\alpha \geq \alpha_1$, $\gamma_{T,min}$ croît rapidement avec une asymptote verticale en $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Conformément aux propriétés des


 FIGURE 3.1: (a) Déformée et (b) tension pour plusieurs valeurs du paramètre γ_T dans une portée horizontale

 FIGURE 3.2: (a) Points $(\mathcal{F}_x^* = \frac{F_x}{\mu g L_c}, \mathcal{F}_y^* = \frac{F_y}{\mu g L_c})$ qui vérifient la condition de compatibilité statique de la portée (b) Longueur de câble L^* en fonction du paramètre γ_T

équations de chaînette, la quantité,

$$\Delta N^* = \frac{N_B - N_A}{\mu g (y_B - y_A)}, \quad (3.13)$$

est constante et égale à un, à la précision du calcul numérique près.

Tension régulée

Les données en entrée du modèle sont :

- les positions des appuis y_A, x_B, y_B ,
- la tension N_A imposée en A ,
- la longueur du câble L .

Les inconnues sont :

- les composantes horizontale \mathcal{F}_x et verticale \mathcal{F}_y de la tension au point A .
- la position horizontale de l'appui A en supposant que l'appui possède uniquement un degré de liberté selon l'axe horizontal.

Le calcul renvoie la position de l'extrémité où est appliqué l'effort de tension. Le paramètre de dimensionnement

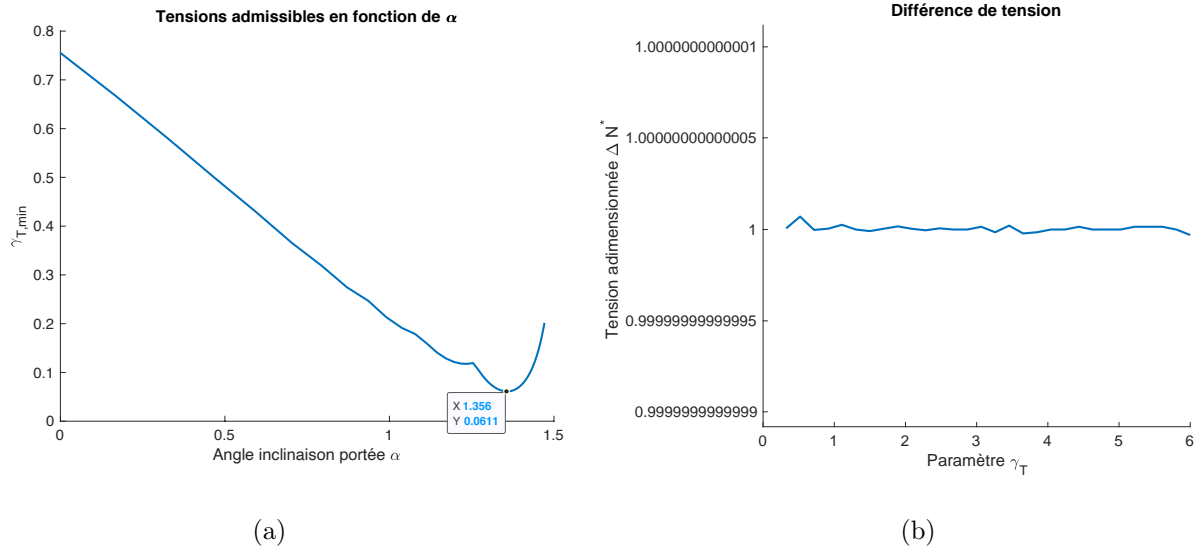


FIGURE 3.3: (a) Évolution de la tension minimale admissible $\gamma_{T,min}$ en fonction de l'angle d'inclinaison α de la portée (b) ΔN^* en fonction du paramètre γ_T pour une portée inclinée avec $\alpha = \frac{\pi}{4}$

en tension régulée est $\gamma_{T,reg} = \frac{N_A}{\mu g L}$, qui fait intervenir la longueur de câble L puisque la longueur de corde L_c est un résultat du calcul dépendant de la position x_A . Les paramètres adimensionnés précédemment introduits pour le prédimensionnement restent valides.

Une mise en tension est réalisée sur une portée horizontale $y_A = y_B$ par variation de la valeur de la tension $N_A \in [N_{A,min}, N_{A,max}]$. Sur la Fig. 3.4 est tracée l'évolution de γ_T en fonction du paramètre de conception $\gamma_{T,reg}$ défini pour une longueur de câble L donnée. Contrairement à la configuration de prédimensionnement, il n'y a pas bijection entre l'ensemble des tensions N_A dans les paramètres γ_T . Il est retrouvé la valeur $\gamma_{T,min} \approx 0.75$, pour une portée horizontale en configuration de prédimensionnement, tel que $\gamma_{T,min} = \inf_{\gamma_{T,reg}} (\gamma_T)$. Le tracé montre un comportement asymptotique $\gamma_{T,reg} = \gamma_T$ (identité) pour $\gamma_{T,reg} \rightarrow \infty$ et un comportement asymptotique (asymptote verticale) pour $\gamma_{T,reg,min} \approx 0.5$, qui est la valeur en dessous de laquelle il n'y a pas convergence du calcul en tension régulée. De la même manière qu'en configuration de prédimensionnement, un calcul sur la condition d'équilibre statique globale de la portée permettrait une étude paramétrique qui donnerait le paramètre de conception limite $\gamma_{T,reg,min}$.

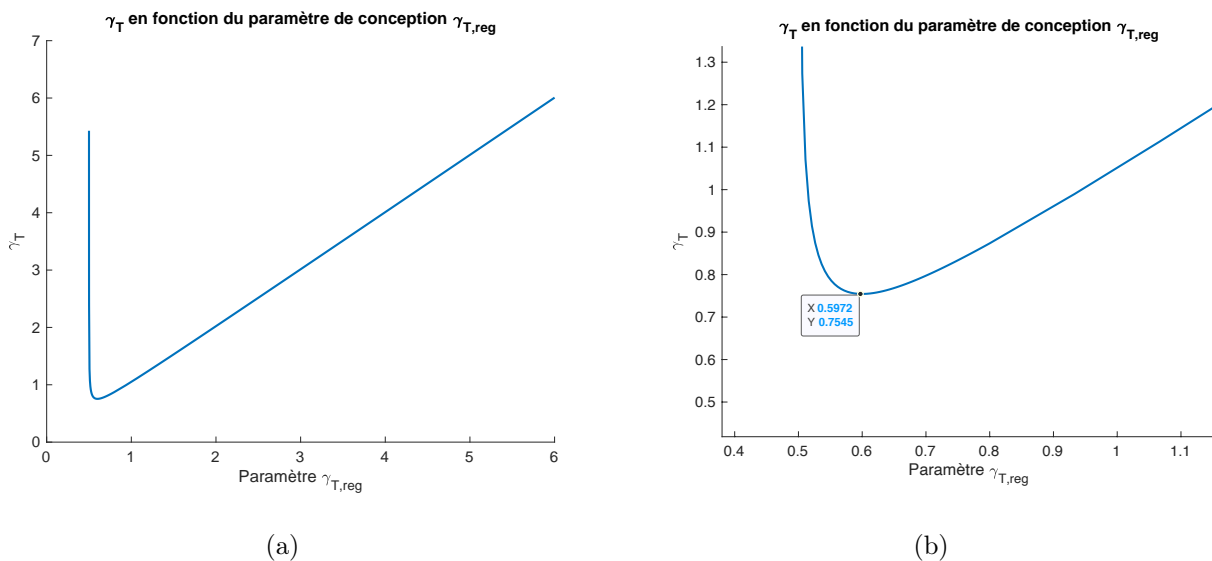


FIGURE 3.4: (a) γ_T en fonction du paramètre de conception $\gamma_{T,reg}$ pour une portée horizontale (b) Zoom au point $\gamma_T = \gamma_{T,min}$

D'après la Fig. 3.5, l'interprétation physique de la limite $\gamma_{T,reg,min}$ est claire : en observant le profil de

tension associé à la valeur $\gamma_{T,reg,min}$, distincte de la valeur $\gamma_{T,min}$, la tension du câble est à la limite de s'annuler autour du point d'abscisse $x^* = 0.5$. Le modèle de fil sous traction n'est alors plus valable car il y aurait une mise en compression locale qui traduirait un comportement instable. Cette tension proche de zéro s'accompagne d'un mauvais conditionnement de la matrice jacobienne $\{J\}$ qui sert pour le calcul de l'incrément lors des itérations du calcul non-linéaire par une méthode de Newton. En pratique, la convergence est très lente pour $\gamma_{T,reg} \approx \gamma_{T,reg,min}$, jusqu'à la non-convergence du calcul pour $\gamma_{T,reg} = \gamma_{T,reg,min}$.

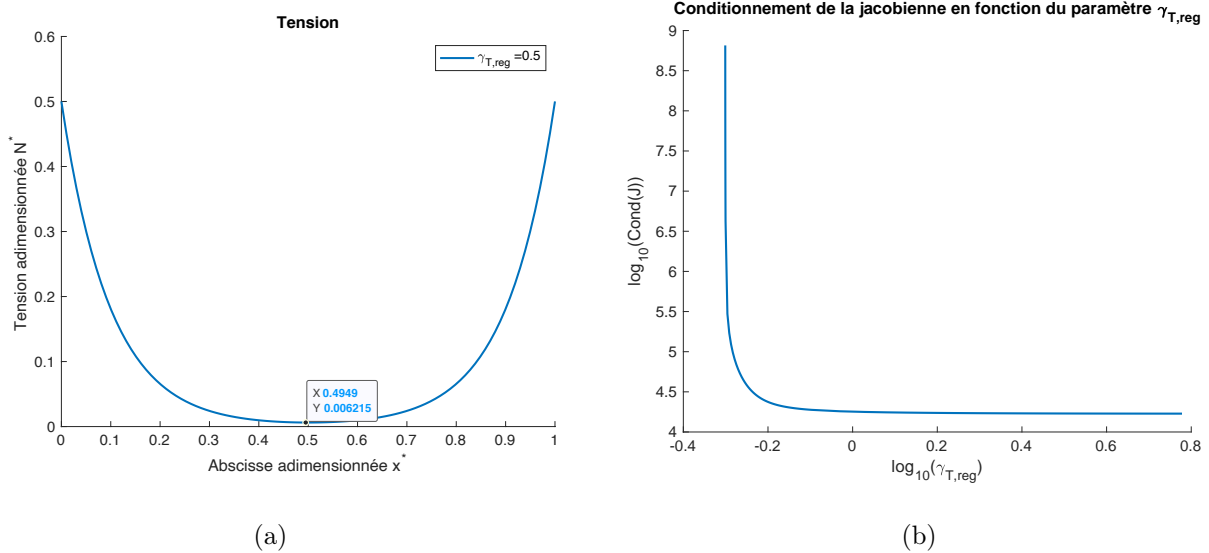


FIGURE 3.5: (a) Profil de tension de la portée pour $\gamma_{T,reg} \approx \gamma_{T,reg,min}$ pour une portée horizontale (b) Conditionnement de la matrice jacobienne en fonction de $\gamma_{T,reg}$

Sur le tracé de la Fig. 3.6, il n'est plus observé d'asymptote verticale en $\gamma_{T,reg} = \gamma_{T,reg,min}$ tandis que la valeur $\gamma_{T,reg,min}$ diminue avec l'angle α . D'après les Fig. 3.6 et Fig. 3.7, les remarques précédemment formulées pour le cas horizontal demeurent valides en inclinant la portée.

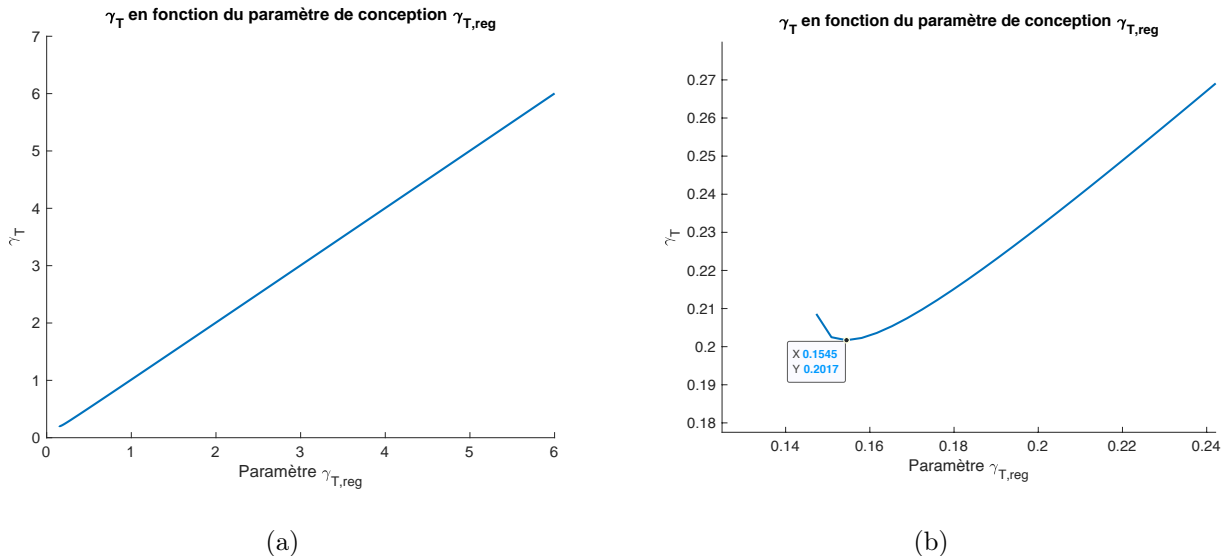


FIGURE 3.6: (a) γ_T en fonction du paramètre de conception $\gamma_{T,reg}$ pour une portée inclinée d'un angle $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (b) Zoom au point $\gamma_T = \gamma_{T,min}$

Ancrage fixe

Les données d'entrée du modèle sont :

- les positions des appuis x_A, y_A, x_B, y_B ,

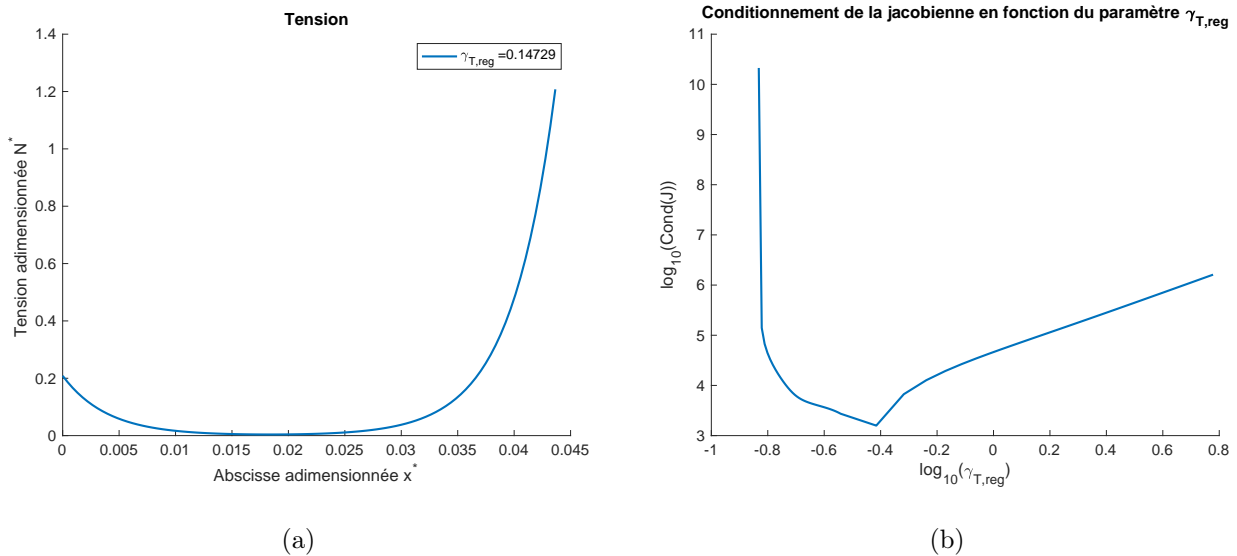


FIGURE 3.7: (a) Profil de tension de la portée pour $\gamma_{T,reg} \approx \gamma_{T,reg,min}$ pour une portée inclinée d'un angle $\alpha = \frac{\pi}{4}$
 (b) Conditionnement de la matrice jacobienne en fonction de $\gamma_{T,reg}$

— la longueur du câble L .

Les inconnues sont les composantes horizontale \mathcal{F}_x et verticale \mathcal{F}_y de la tension au point A . Le calcul en ancrage fixe renvoie la valeur de la tension appliquée par le câble aux bords du domaine. Le paramètre de dimensionnement en ancrage fixe est $L^* = \frac{L}{L_c}$, les deux grandeurs connues en entrée étant la longueur de câble L et la géométrie de la portée L_c .

Une mise en tension est réalisée sur une portée horizontale $y_A = y_B$ par variation de la longueur du câble $L \in [L_1, L_2]$. Sur la Fig. 3.8 est tracée l'évolution de γ_T en fonction du paramètre de conception L^* défini pour une géométrie de portée L_c donnée. Il est retrouvé la valeur $\gamma_{T,min} \approx 0.32$ pour une portée horizontale en configuration de prédimensionnement, tel que $\gamma_{T,min} = \inf_{L^*} (\gamma_T)$. Le tracé montre un comportement asymptotique $\gamma_T = \frac{L^*}{2}$ pour $L^* \rightarrow \infty$. D'un point de vue physique, lorsque la longueur de câble augmente, il n'y a pas de chute de la tension au milieu de la portée qui annulerait la tension comme en tension régulée mais un effet de bord avec une accumulation de l'effort de tension aux deux extrémités qui reprennent équitablement le poids du câble, de telle façon que $N_A \rightarrow \frac{\mu g L}{2}$. Il y a également un comportement asymptotique (asymptote verticale) pour $L^* = 1$ qui est la valeur en dessous de laquelle le modèle de câble tendu entre deux points n'est plus valide (compatibilité géométrique).

Prise en compte de l'allongement élastique du câble

Les formules cartésiennes de chaînette traduisent l'équilibre d'un fil supposé inextensible. Aucune hypothèse sur l'extensibilité ne peut être faite *a priori* dans le cas des lignes de transport par câbles. Ainsi, une correction élastique de la longueur de la chaînette est opérée pour prendre en compte l'allongement élastique dans les deux configurations d'ancrage fixe et de tension régulée.

Comparaison des stratégies de prise en compte de l'allongement

Les grandeurs adimensionnées de longueur déformée $L_{elas}^* = \frac{l}{L_c}$ et de flèche $f^* = \frac{f}{L_c}$ sont introduites. Un modèle de compréhension d'une portée horizontale est calculé, pour les quatre processus d'allongements élastiques présentés dans l'Annexe D, dans une configuration d'ancrage fixe ainsi qu'en inextensible avec les données suivantes :

- masse linéique $\mu = 100$ kg/m,
- module d'Young $E = 110$ GPa,
- section $A = 2 \times 10^{-3}$ m².

La masse linéique a été prise de façon arbitrairement élevée afin de rendre compte des phénomènes physiques.

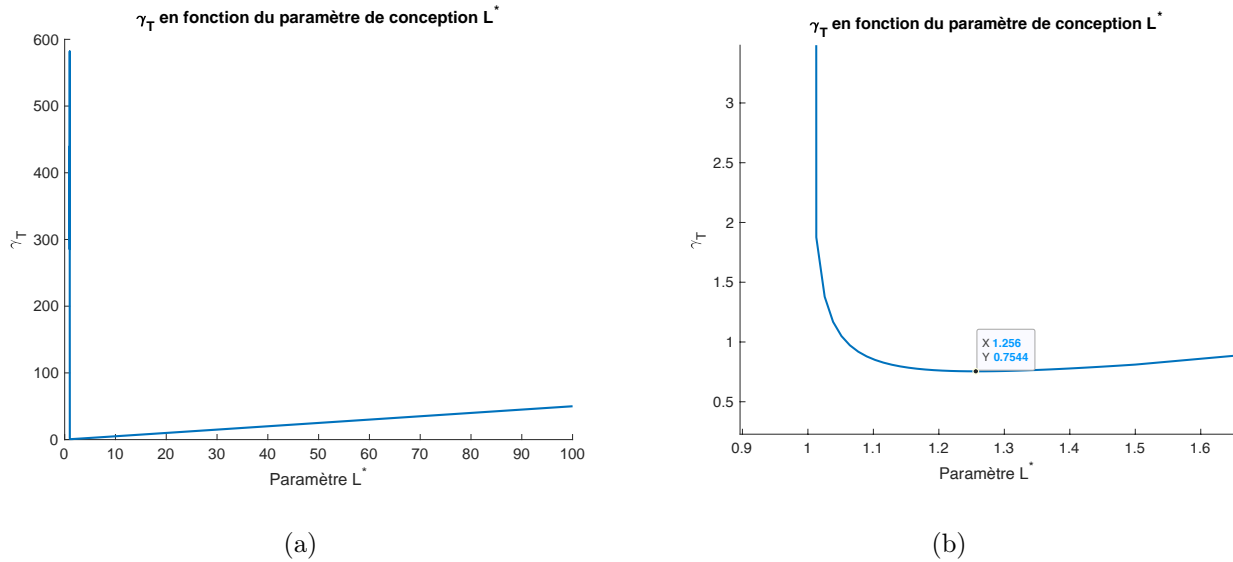


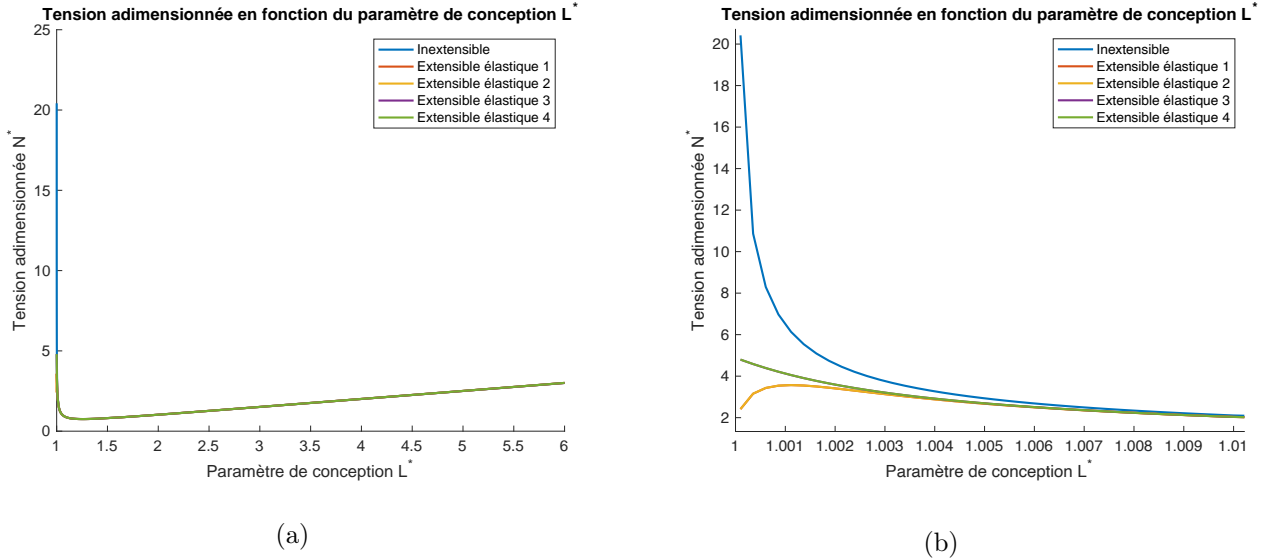
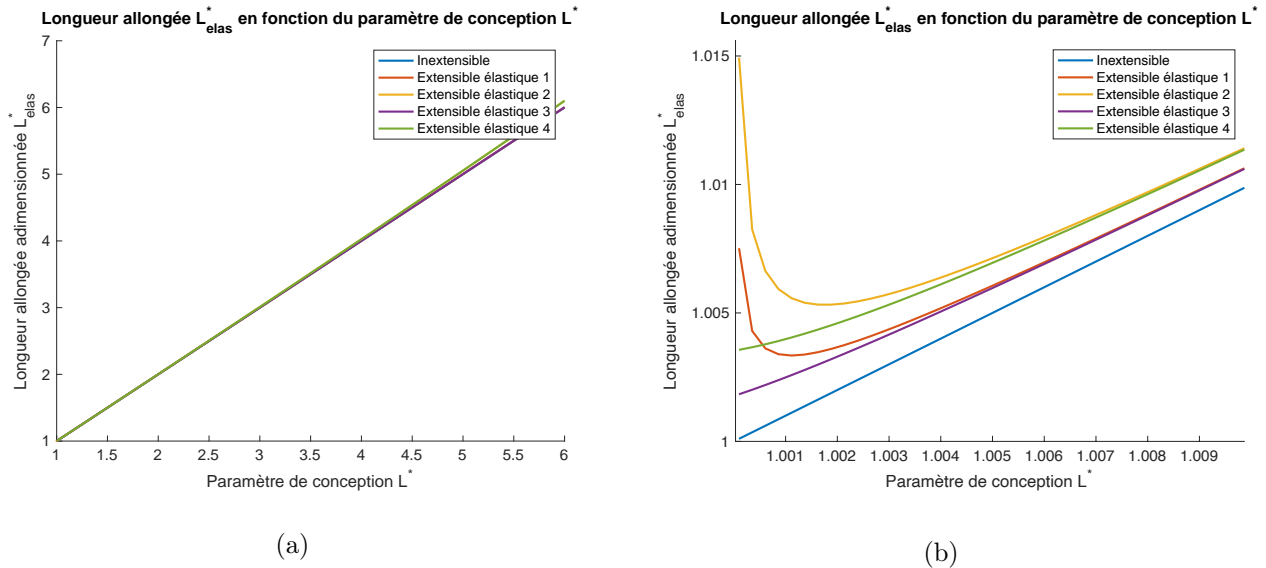
FIGURE 3.8: (a) γ_T en fonction du paramètre de conception L^* pour une portée horizontale (b) Zoom au point $\gamma_T = \gamma_{T,min}$

La tension N^* , la longueur de câble allongée L_{elas}^* et la flèche f^* sont tracées en fonction du paramètre de conception $L^* = \frac{L}{L_c}$.

Sur la Fig. 3.9, l'évolution de N^* en fonction de L^* montre une asymptote verticale en $L^* = 1$ pour le modèle inextensible tandis que les modèles extensibles convergent vers une limite finie. Pour $L^* \rightarrow \infty$, un comportement asymptotique $N^* = \frac{L^*}{2}$ est observé. Pour des valeurs du paramètre de conception $L^* \leq 1.01$, soit lorsque la longueur de câble non allongée déroulée dans la portée est inférieure à 1.01 fois la longueur horizontale qui sépare les deux appuis, il est observé des écarts notables sur la tension entre les différents modèles. Ces écarts s'accroissent avec L^* se rapprochant de 1 : un modèle inextensible donne un résultat en tension largement surestimé par rapport à un modèle extensible avec un écart relatif d'environ 700 % pour $L^* - 1 \approx 10^{-4}$. Selon la prise en compte de l'allongement, un modèle eulérien ou lagrangien diffère jusqu'à 50 % lorsque $L^* \approx 1$, soit lorsque le câble est horizontal et très tendu. Avec un allongement calculé par superposition (point de vue lagrangien), il est observé une chute de tension pour $L^* \approx 1$, ce qui ne traduit pas la réalité physique. Pour des tensions élevées, associées à un paramètre de conception $L^* \leq 1.005$, qui correspondent à un câble en grandes déformations, le mécanisme d'allongement calculé sur la configuration déformée (point de vue eulérien) doit être utilisé pour déterminer l'état déformé du câble. Tandis que pour $L^* \geq 1.005$, il n'y a pas d'écart significatif observé entre les deux modèles lagrangien et eulérien. Pour $L^* \rightarrow \infty$, les modèles extensibles et inextensibles donnent des résultats équivalents.

Sur la Fig. 3.10, le tracé de L_{elas}^* en fonction du paramètre de conception L^* montre de faibles écarts entre les différents modèles en $L^* \approx 1$. Ces écarts peuvent néanmoins avoir des conséquences pratiques, compte tenu des échelles de longueur des lignes de transport par câbles : un écart relatif de 0.1 % sur la longueur d'une boucle de câble de 3000 m se traduit par 3 mètres de différence en longueur. L'écart est de l'ordre de 0.2 % entre le modèle utilisant la déformation de l'ingénieur et celui avec une déformation de Green-Lagrange. L'écart est de 0.6 % entre le modèle extensible lagrangien et eulérien, et de 0.4 % entre le modèle eulérien et inextensible. Pour $L^* \rightarrow \infty$, il n'y a plus d'écart remarquable entre les modèles lagrangien et eulérien. Mais un écart d'environ 2 % est relevé pour $L^* = 6$ entre le modèle avec déformation de l'ingénieur et le modèle inextensible, avec celui utilisant la mesure de Green-Lagrange. En effet, pour $L^* \rightarrow \infty$ le milieu subit des grands déplacements. Lorsque le paramètre de conception devient grand ($L^* \geq 3$), la flèche augmente et la théorie des petites perturbations n'est plus valide pour exprimer la déformation du milieu : la mesure de déformation de Green-Lagrange devient la mesure adaptée à ce cadre d'étude.

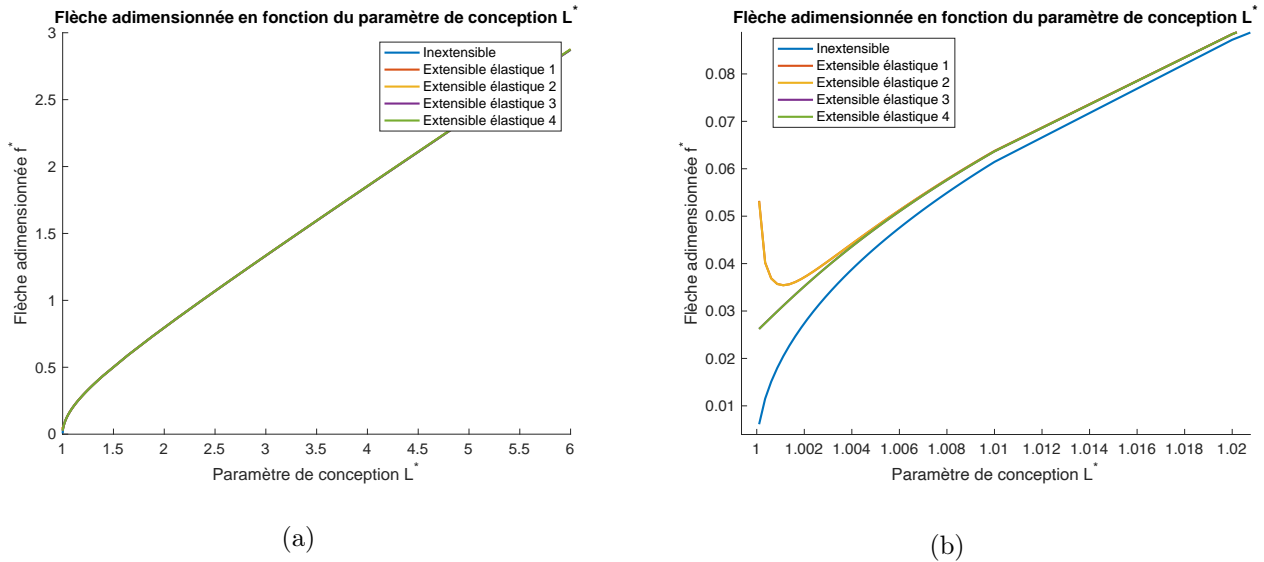
Sur la Fig. 3.11, des écarts importants, de l'ordre de 100 %, sont relevés pour $L^* \approx 1$ entre le modèle avec un calcul de l'allongement élastique à partir de la référence inextensible et celui qui se fait directement sur la configuration déformée. De la même façon que pour la tension, le cadre des grandes déformations autour


 FIGURE 3.9: (a) Tension N^* en fonction de L^* (b) Zoom en $L^* \approx 1$

 FIGURE 3.10: (a) Longueur allongée L_{elas}^* en fonction de L^* (b) Zoom en $L^* \approx 1$

de $L^* = 1$ requiert un calcul de l'allongement élastique sur la configuration déformée pour obtenir une bonne évaluation de l'équilibre statique. Pour $L \rightarrow \infty$, des écarts de 0.1 % sont à noter entre le cas inextensible et extensible et d'environ 0.1 % également entre l'extensibilité avec mesure de déformation de Green-Lagrange et de l'ingénieur.

En conclusion intermédiaire, pour une configuration en ancrage fixe :

- Le paramètre de contrôle est de nature géométrique : c'est la longueur de câble L déroulée entre les deux appuis distants d'une longueur fixée L_c .
- La prise en compte de l'allongement élastique dans le cadre des grandes déformations est nécessaire pour caractériser la tension du câble pour des valeurs de L^* proches de 1 tandis qu'un modèle inextensible pour $L \rightarrow \infty$ est valide.
- La prise en compte de l'allongement élastique est indispensable pour caractériser la longueur du câble et la flèche du câble sur un système dont les échelles sont suffisamment grandes pour qu'une faible déformation génère des allongements d'ordre de grandeur du mètre : pour L^* proche de 1, le cadre des grandes déformations guide le choix de la correction élastique tandis que pour $L^* \rightarrow \infty$, le cadre des grands déplacements oriente le choix de la mesure de déformation.

FIGURE 3.11: (a) Flèche f^* en fonction de L^* (b) Zoom en $L^* \approx 1$

À partir de ces éléments de conclusion provisoire, un calcul a été réalisé en tension régulée en confrontant un modèle inextensible au modèle extensible eulérien avec la mesure de déformation de Green-Lagrange valable à la fois en grandes déformations et en grands déplacements. Pour des valeurs du paramètre de contrôle $\gamma_{T,reg} \approx 0.5$, le câble est en grands déplacements et des écarts d'environ 5 % sont observés sur les grandeurs L_{elas}^* , L^* et f^* entre le modèle inextensible et extensible. En configuration plus tendue avec $\gamma_{T,reg} = 6$, les grandeurs L_{elas}^* et f^* présentent de faibles écarts entre les modèles avec et sans élasticité de l'ordre de 0.6 %, mais qui demeurent significatifs pour des valeurs de L importantes. Un écart plus conséquent de 1.5 % est calculé sur L^* compte tenu du déplacement horizontal de l'appui mobile qui affecte L_c . Finalement, des écarts plus réduits sont présents entre le modèle inextensible et extensible en configuration de tension régulée, mais ils deviennent significatifs lorsque l'échelle du système est grande.

En conclusion, pour une configuration en tension régulée :

- Le paramètre de contrôle est de nature statique : c'est la tension N appliquée à une des extrémités du câble.
- La prise en compte de l'allongement élastique est indispensable pour caractériser la longueur du câble, le déplacement de l'appui mobile et la flèche du câble sur un système dont les échelles sont suffisamment grandes pour qu'une faible déformation génère des allongements d'ordre de grandeur du mètre. Pour $\gamma_{T,reg}$ proche de 1, le cadre des grands déplacements guide le choix de la mesure de déformation.

Application aux lignes de transport par câbles en tension régulée

Sur les lignes monocâbles plates, typiquement rencontrées en milieu urbain avec peu de dénivellée entre les stations d'extrémités, il est courant d'avoir des portées de longueur $L_c \approx 300$ m. Compte tenu des limites de survol imposées par la réglementation sur les appareils monocâbles, la hauteur des appuis est limitée. Par conséquent, la flèche du câble doit être contenue afin de prévenir des problèmes de gabarit entre la ligne et le sol. Une flèche maximale $y^* \approx 0.03$ est couramment admise pour une ligne chargée. Les portées les plus longues imposent les contraintes sur la flèche admissible et donc sur la valeur limite du paramètre de tension $\gamma_{T,min}$ en dessous de laquelle il ne faut pas descendre pour la conception du système de mise en tension. γ_T est contrôlée de façon directe en tension régulée. Pour un appareil monocâble à haut débit, $\gamma_{T,min} \approx 3.8$ sur l'exemple de portée standard considéré. En multicâbles (téléphériques, 3S), les hauteurs de survol ne sont pas soumises aux mêmes règles et supposent moins de contraintes sur les gabarits des câbles tracteurs.

Sur une portée inclinée, la contrainte précédemment formulée pour une portée horizontale diminue légèrement la valeur du $\gamma_{T,min} \approx 3.6$ pour l'exemple précédent. Par ailleurs, la tension dans le câble augmente le long d'une

ligne inclinée avec l'altitude selon la formule qui a été précédemment donnée :

$$\Delta N = \mu g \Delta y. \quad (3.14)$$

Pour un système de tension positionné en station inférieure, l'altitude de la grande portée qui impose la valeur $\gamma_{T,in}$ au reste de la ligne (" portée dimensionnante ") a une influence sur la valeur effective du γ_T à considérer pour concevoir le système de mise en tension ou le dimensionnement des ancrages pour un ancrage fixe, ainsi que pour prévoir la tension maximale dans le câble. Une vision simplifiée du problème de dimensionnement du système de tension peut se résumer de la façon suivante :

- Si la grande portée est située en bas de ligne, c'est une configuration similaire à une ligne plate : $\gamma_{T,min} \approx 3.8$. Pour une ligne monocâble à haut débit, cela correspond à une tension $N \approx 420$ kN à appliquer en station inférieure.
- si la grande portée est située en milieu de ligne, avec un dénivelée intermédiaire moyen qui est pris à $\Delta y = 300$ m : la valeur γ_T effective à fournir par le système de tension est diminuée de l'accroissement de la tension avec l'altitude d'une valeur $\gamma_{T,alt} \approx 1$. Soit $\gamma_{T,min} \approx 2.8$, $N \approx 300$ kN à appliquer en station inférieure.
- Si la grande portée est située en haut de ligne, avec un dénivelée maximal moyen $\Delta y = 600$ m : la valeur γ_T effective à fournir par le système de tension est diminuée de $\gamma_{T,alt} \approx 2$. Soit $\gamma_{T,min} \approx 1.8$, $N \approx 190$ kN à appliquer en station inférieure.

Selon ces trois configurations, la valeur maximale de la grandeur γ_T le long d'une ligne de câble inclinée dépend aussi de la longueur des portées de la ligne : $\gamma_{T,max}$ varie entre 114 et 174 pour des petites portées de 10 m situées en haut de ligne. La valeur moyenne qui sera retenue pour caractériser la ligne tient compte de portées de longueurs moyennes de 120 mètres (ligne monocâble classique), soit $\gamma_{T,moy} \in [10, 15]$.

Les Fig. 3.12 et Fig. 3.13 montrent des résultats de calculs réalisés avec une valeur de chargement linéique $\mu = 25$ kg/m représentative des applications au transport par câbles. Des écarts relatifs de l'ordre de 0.2 % sont observés à la fois sur les longueurs de câble, sur la distance inter-appuis et sur les flèches. Avec ces valeurs et pour une ligne de trois kilomètres de longueur, l'erreur commise par un modèle inextensible, qui ne traduit pas le comportement du câble à l'allongement, est :

- De l'ordre de grandeur de plusieurs mètres sur la longueur L du câble et la position de la station tension mobile.
- De l'ordre de grandeur du millimètre sur la flèche de la portée entre la station tension et le premier appui d'une ligne de transport par câbles classique. En effet, l'appui mobile est situé à une des deux extrémités de la ligne : il est supposé pour cette estimation que l'erreur de 0.2 % commise sur la flèche se répercute sur une des deux portées d'extrémité de chaque voie, les appuis intermédiaires demeurant fixes.
- De l'ordre de grandeur du centimètre sur la flèche d'une grande portée supérieure au kilomètre de longueur sur une ligne de téléporté de type grand téléphérique.

La caractérisation géométrique de la ligne en tension régulée ne requiert donc pas la prise en compte de l'allongement élastique. En revanche, l'accès à la position absolue du système de tension le nécessite, sous réserve d'avoir une connaissance précise de la longueur du câble initialement tendu sur la ligne lors de la mise en service de l'appareil (état initial du système).

3.1.2 Modèle numérique

Convergence du schéma aux différences finis

La convergence du schéma aux différences finies est étudiée sur l'exemple d'un câble horizontal en ancrage fixe. Une norme \mathcal{L}^2 est utilisée pour l'estimation de l'erreur (Fig. 3.14). Un ordre deux est attendu pour un problème de Laplacien. D'après la Fig. 3.14, l'ordre de la convergence est d'environ 1.85 en raison des termes non-linéaires qui écartent la vitesse de convergence de celle théorique pour un Laplacien.

L'échec de la convergence est constaté en dessous d'un pas limite, avec un maillage de un centimètre sur l'exemple précédent. L'explication avancée est un mauvais conditionnement numérique, typique des problèmes de câbles dont la résolution numérique s'avère problématique, combinée avec l'erreur machine. Plusieurs stratégies

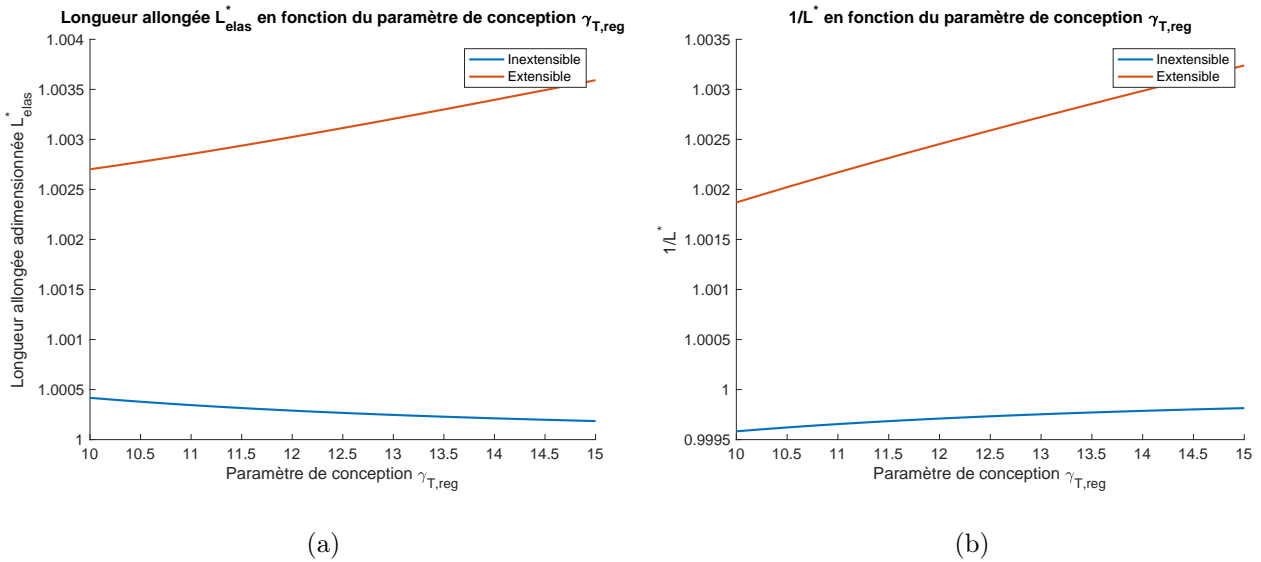


FIGURE 3.12: (a) Longueur allongée L_{elas}^* (b) $1/L^*$ en fonction du paramètre de conception $\gamma_{T,reg} \in [10, 15]$ pour $\mu = 25$ kg/m

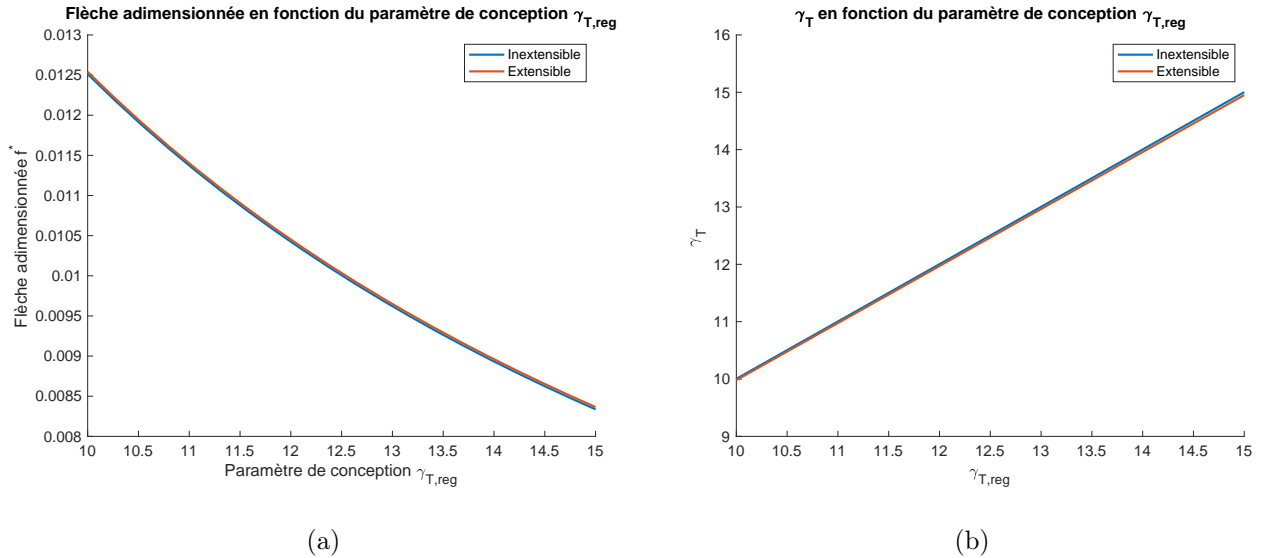


FIGURE 3.13: (a) Flèche f^* en fonction du paramètre de conception $\gamma_{T,reg} \in [10, 15]$ pour $\mu = 25$ kg/m (b) γ_T en fonction de $\gamma_{T,reg}$

sont possibles pour améliorer la convergence et l'efficacité des calculs :

- des méthodes de continuation, ou assimilées, par l'application du chargement par étapes successives,
- la réalisation d'un premier calcul avec peu de points de maillage, puis l'initialisation d'une nouvelle recherche avec une grille plus fine à partir du résultat obtenu,
- par un préconditionnement.

De plus, si le fil rentre en compression ou est peu tendu, il y a une perte de compatibilité des équations du modèle de fil et un échec de la convergence. Une solution consiste à modifier le modèle physique en ajoutant de la raideur en flexion qui possède un effet régularisant.

Artefact de flexion numérique

La dérivée seconde de la composante scalaire notée f_i , associée à un champ supposé suffisamment régulier, est approchée au point de discrétisation i par le schéma aux différences finies :

$$f_i'' \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta S^2}, \quad (3.15)$$

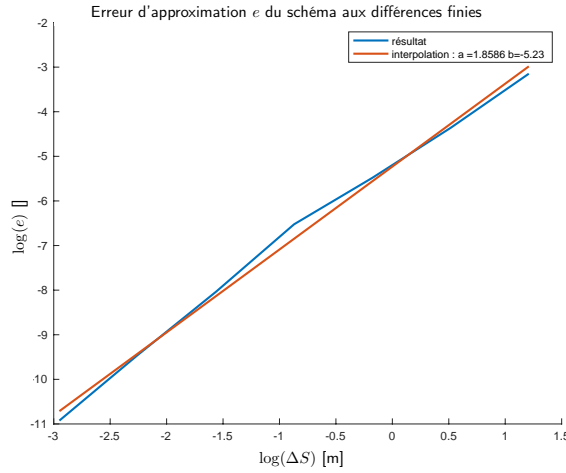


FIGURE 3.14: Erreur d'approximation en fonction du pas de discrétisation

avec ΔS le pas de discrétisation spatial. En allant jusqu'à l'ordre quatre, le développement de Taylor associé à f au point de discrétisation i à gauche et à droite en $i-2$, $i-1$ et $i+1$, $i+2$ s'écrit :

$$f_{i-2} = f_i - 2f'_i\Delta S + 2f''_i\Delta S^2 - \frac{4}{3}f'''_i\Delta S^3 + \frac{2}{3}f''''_i\Delta S^4 + o(\Delta S^4), \quad (3.16)$$

$$f_{i-1} = f_i - f'_i\Delta S + \frac{1}{2}f''_i\Delta S^2 - \frac{1}{6}f'''_i\Delta S^3 + \frac{1}{24}f''''_i\Delta S^4 + o(\Delta S^4), \quad (3.17)$$

$$f_{i+1} = f_i + f'_i\Delta S + \frac{1}{2}f''_i\Delta S^2 + \frac{1}{6}f'''_i\Delta S^3 + \frac{1}{24}f''''_i\Delta S^4 + o(\Delta S^4), \quad (3.18)$$

$$f_{i+2} = f_i + 2f'_i\Delta S + 2f''_i\Delta S^2 + \frac{4}{3}f'''_i\Delta S^3 + \frac{2}{3}f''''_i\Delta S^4 + o(\Delta S^4). \quad (3.19)$$

En additionnant les développements (3.17) (3.18) en $i-1$ et $i+1$,

$$f''_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta S^2} - \frac{f''''_i\Delta S^2}{12} + o(\Delta S^4). \quad (3.20)$$

En additionnant les développements (3.17) (3.18) (3.16) (3.19),

$$f''''_i = \frac{f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{\Delta S^4} + o(\Delta S^4). \quad (3.21)$$

Un terme d'erreur,

$$e_i = -\frac{f''''_i\Delta S^2}{12} = \frac{-f_{i+2} + 4f_{i+1} - 6f_i + 4f_{i-1} - f_{i-2}}{12\Delta S^2}, \quad (3.22)$$

est introduit dans l'approximation d'ordre deux de la dérivée seconde $f''_i \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta S^2}$. Dans l'approximation appliquée aux champs \underline{U} et \underline{X}_R du modèle de câble, l'erreur e_i fait intervenir la dérivée quatrième d'un déplacement et est assimilable à l'introduction d'un effort linéique associé à une raideur en flexion. En RDM et pour un problème plan, le moment de flexion s'écrit $M_{f_2} = EIV(S)''$ et l'équilibre $-M_{f_2}(S)'' + f = 0$. Ce terme d'effort linéique supplémentaire n'est pas physique. En effet, il ne provient pas de la modélisation du câble pour un modèle de fil, qui, par définition, ne possède pas de raideur en flexion. Ce terme s'apparente donc à une **flexion numérique**, artefact de la méthode numérique aux différences finies. L'effet de flexion numérique est visible sur le profil du câble et de tension de la Fig. 3.15, pour les maillages les plus grossiers. Il est associé à un saut de tension aux bords et à un effet de flexion visible en milieu de portée avec une inversion de la convexité du profil.

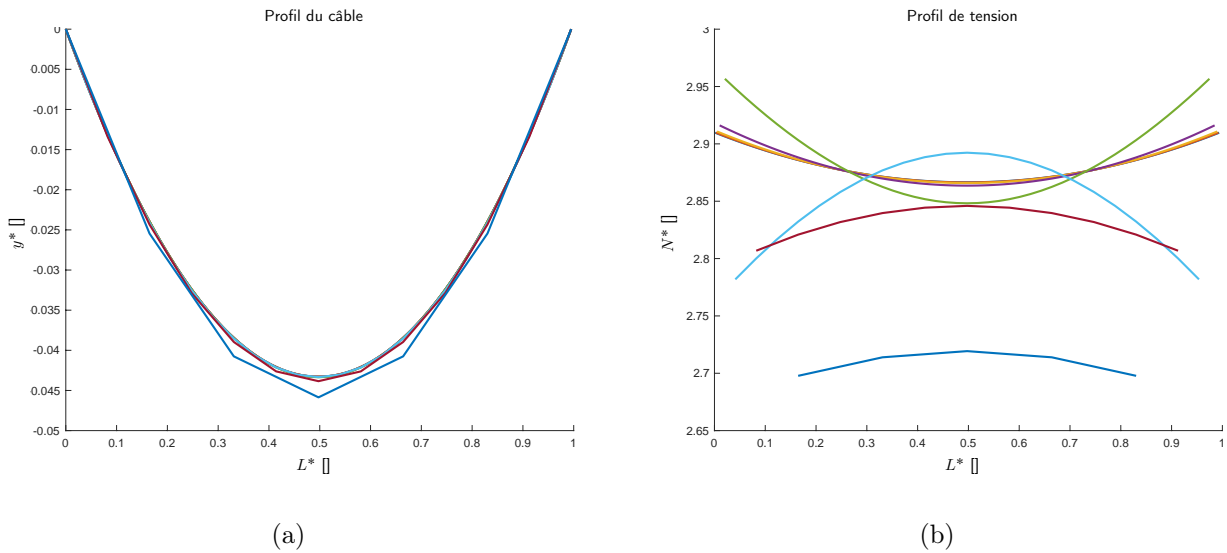


FIGURE 3.15: (a) Profil du câble (b) Profil de tension pour différents pas de discrétisation

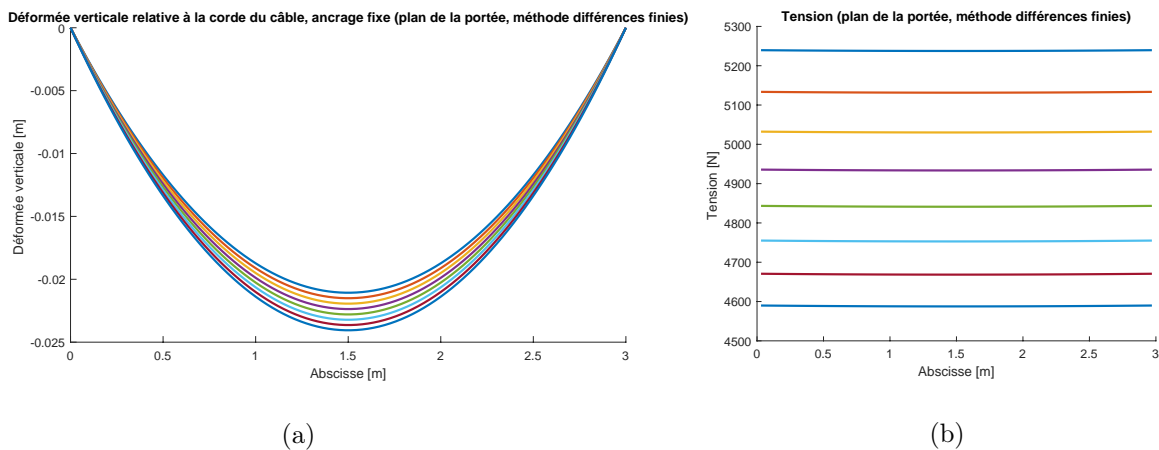
Calcul d'une portée tendue (small sag-to-span ratio)

Un exemple de compréhension est mis en place pour comprendre les phénomènes qui guident le comportement du câble en tension ou à la flexion avec une portée horizontale de câble :

- en ancrage fixe avec une distance horizontale entre les appuis $L_c = 3$ m,
- sans mise en tension initiale du câble,
- sans reprise des moments aux bords (appuis rotulés).

Les calculs sont réalisés avec le modèle numérique non-linéaire aux différences finies afin de pouvoir tenir compte de la raideur en flexion sans hypothèse spécifique sur l'amplitude des déplacements et des déformations. La configuration d'un câble tendu horizontalement est d'abord étudiée pour $L^* - 1 = \frac{L}{L_c} - 1 \in [5 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-3}]$.

Un premier calcul avec le modèle de fil met en évidence l'existence d'un équilibre statique unique (Fig. 3.16). Le profil prend la forme classique attendue d'une chaînette. Le modèle de tige possède en revanche plusieurs solutions au problème statique (Fig. 3.17 et Fig. 3.18). Une première solution possède un profil proche de celui obtenu avec le modèle de fil (chaînette). La tension au bord est plus importante que celle avec le fil (Fig. 3.17), avec un effet raidissant de la flexion. Une seconde solution active la flexion en milieu de portée et a un effet assouplissant sur la tension par rapport au fil (Fig. 3.18). Le premier équilibre est celui qui est attendu dans le cas d'un câble tendu par un dispositif de mise en tension et par l'effet de son chargement.

FIGURE 3.16: (a) Déformée et (b) tension du câble selon le modèle de fil pour $L^* - 1 \in [5 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-3}]$

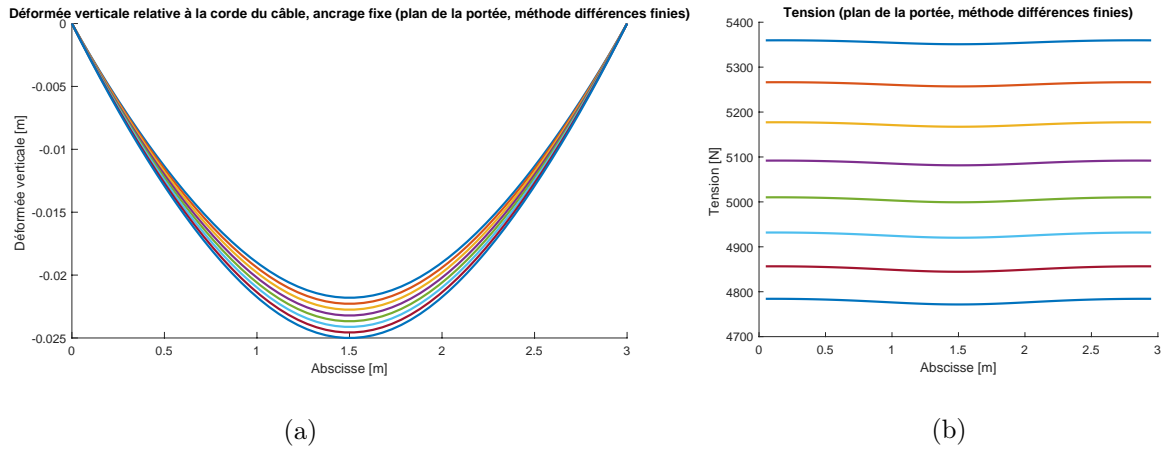


FIGURE 3.17: (a) Déformée et (b) tension du câble selon le modèle de tige pour $L^* - 1 \in [5 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-3}]$ (équilibre 1)

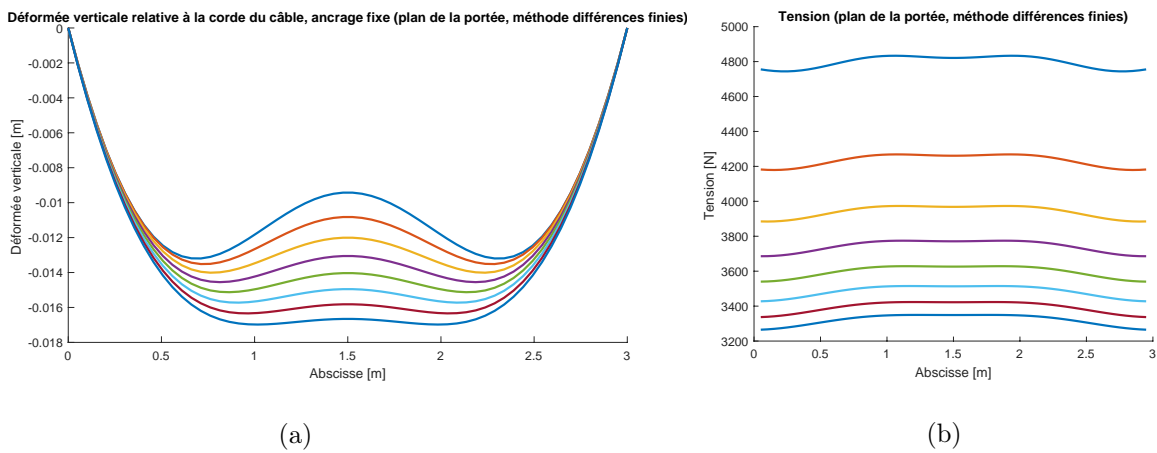


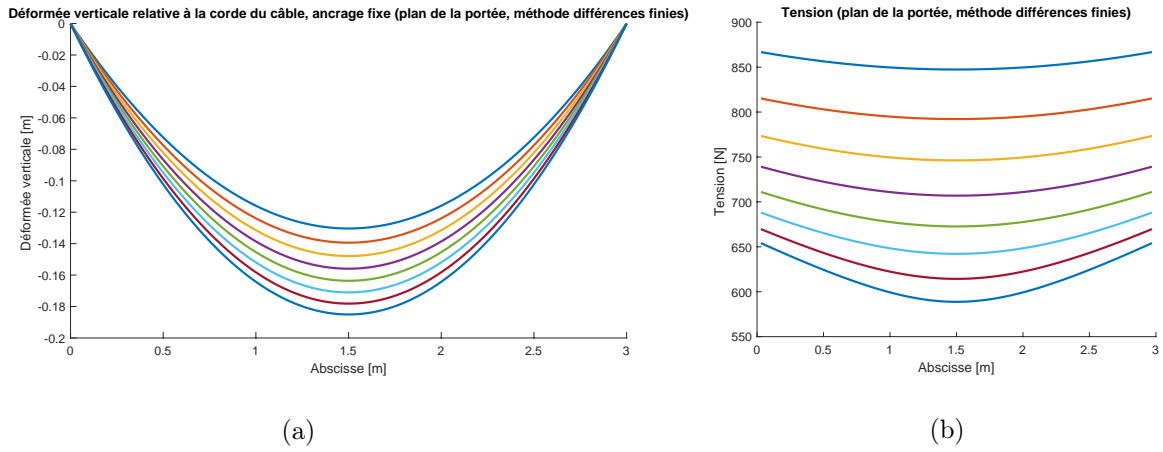
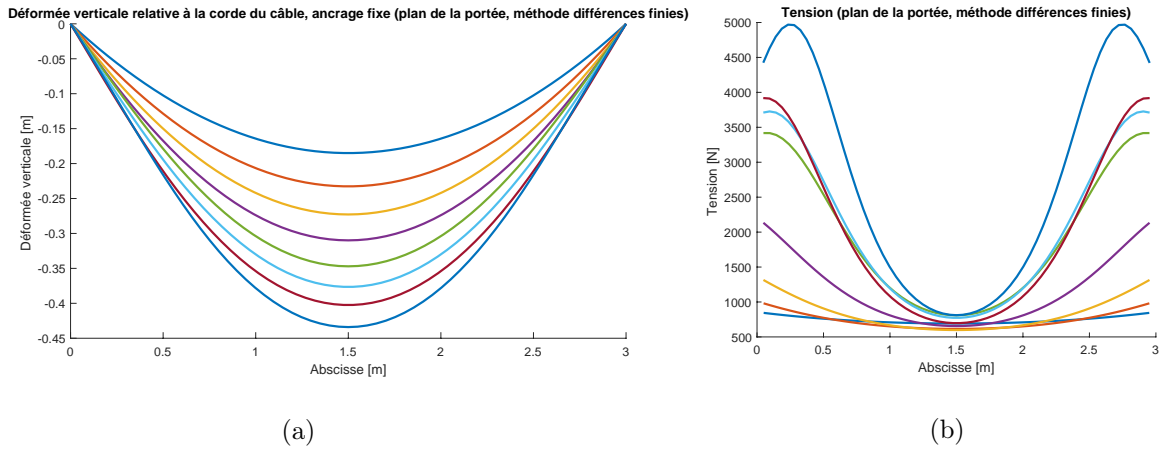
FIGURE 3.18: (a) Déformée et (b) tension du câble selon le modèle de tige pour $L^* - 1 \in [5 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-3}]$ (équilibre 2)

Calcul d'une portée détendue (large sag-to-span ratio)

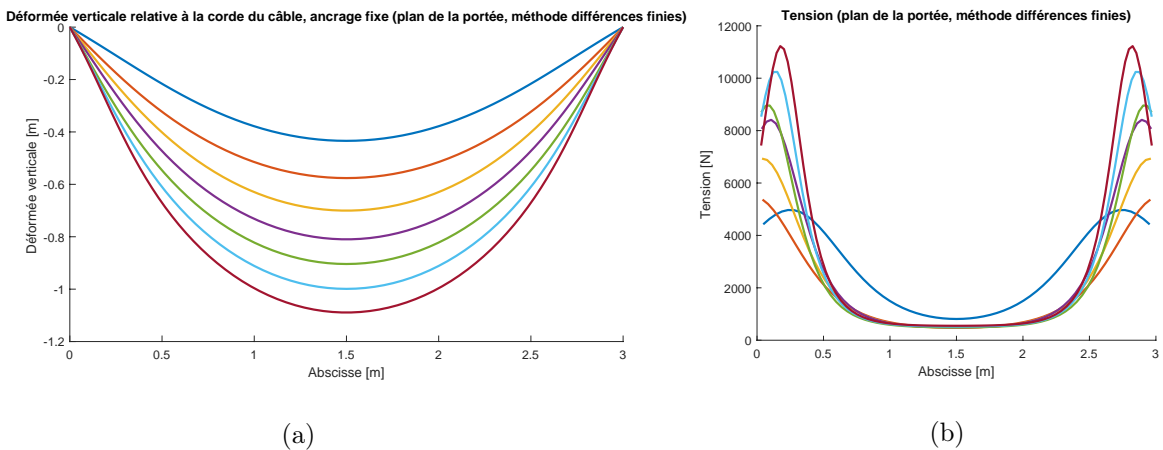
Sur le même exemple de compréhension que précédemment, la configuration d'un câble détendu est étudiée pour $L^* - 1 = \frac{L}{L_c} - 1 \in [5 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-2}]$.

Le calcul avec le modèle de fil met en évidence l'existence d'un équilibre statique unique (Fig. 3.19) dont le profil prend la forme d'une chaînette. Pour $L^* > 1.01$, il n'y a plus convergence du calcul aux différences finies même en raffinant la taille des pas de la discrétisation en espace. En prenant des pas plus grossiers, il y a un effet numérique d'accumulation de la tension sur les bords : le résultat obtenu donne des profils de tension qui diffèrent de l'équilibre attendu par la formule de chaînette. L'augmentation du pas de discrétisation introduit de la flexion numérique au modèle de fil qui n'en possède pas de façon physique. C'est un des signes de la limite du modèle physique de fil dépourvu de flexion. Le modèle de tige est alors une régularisation du modèle de fil, dont les résultats du calcul pour $L^* \in [1.01, 1.05]$ montrent que les effets de flexion dominent ceux de la tension avec l'apparition d'une couche limite aux bords et un raidissement du câble (Fig. 3.20).

Avec l'augmentation du paramètre de contrôle L^* , la couche limite en flexion se propage et guide l'équilibre statique global du câble au détriment de la tension (Fig. 3.21), jusqu'à atteindre une limite évaluée par le plan d'expérience numérique à $L^* \approx 1.55$, à partir de laquelle il n'y a plus convergence du modèle. Au-delà, il est attendu des effets de flambement avec formation d'une boucle accompagnée d'un déplacement hors-plan (Fig. 3.22), qui ne sont pas rendus compte par le modèle utilisé. Si le raffinement du pas de discrétisation spatiale est trop important, il n'y a plus convergence du calcul aux différences finies. Ceci peut s'expliquer par l'introduction de variations brutales de la tension aux bords, qui conduisent à des sauts trop importants pour la régularité


 FIGURE 3.19: (a) Déformée et (b) tension du câble selon le modèle de fil pour $L^* - 1 \in [5 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-2}]$

 FIGURE 3.20: (a) Déformée et (b) tension du câble selon le modèle de tige pour $L^* - 1 \in [1 \times 10^{-2}, 5 \times 10^{-2}]$

acceptée par le schéma aux différences finies.


 FIGURE 3.21: (a) Déformée et (b) tension du câble selon le modèle de tige pour $L^* - 1 \in [5 \times 10^{-2}, 3 \times 10^{-1}]$

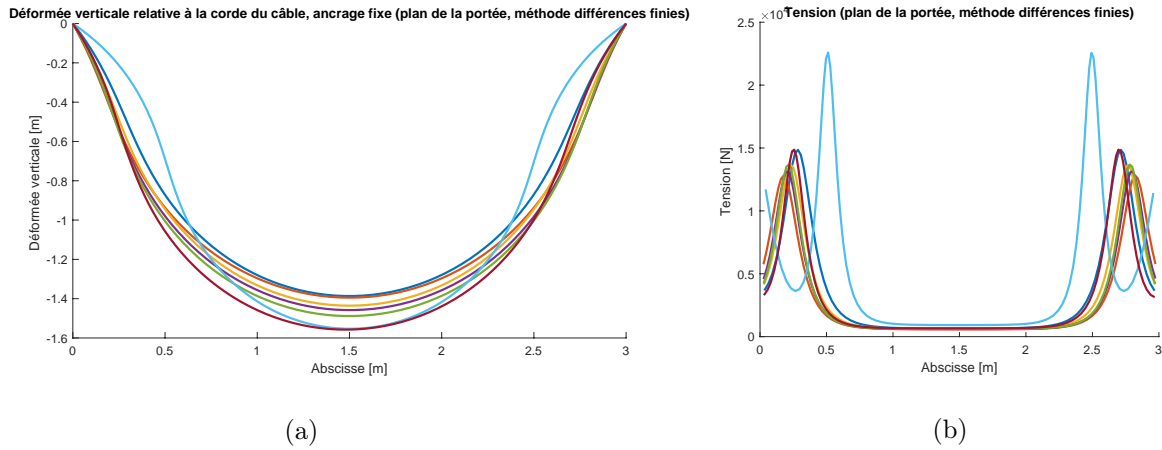


FIGURE 3.22: (a) Déformée et (b) tension du câble selon le modèle de tige pour $L^* - 1 \in [4.5 \times 10^{-1}, 5.5 \times 10^{-1}]$

Afin de généraliser les observations précédentes, l'évolution de la tension aux bords et de la flèche en milieu de portée est tracée sur les Fig. 3.23 et Fig. 3.24, en fonction du rayon de courbure moyen adimensionné du câble $R^* = \frac{R}{L}$. La Fig. 3.24 suit les équilibres successifs de la tige dans sa configuration chaînette; il n'y a pas d'écart significatif sur la flèche tandis que l'écart en tension au bord devient significatif pour $R^* < 3$, soit un rayon de courbure de 10 mètres. L'écart relatif entre le modèle de tige et de fil est d'environ 30 %, pour $R^* \approx 2$ avec un effet raidissant de la flexion, et de 5 %, pour $R^* \approx 18$ avec un effet assouplissant de la flexion.

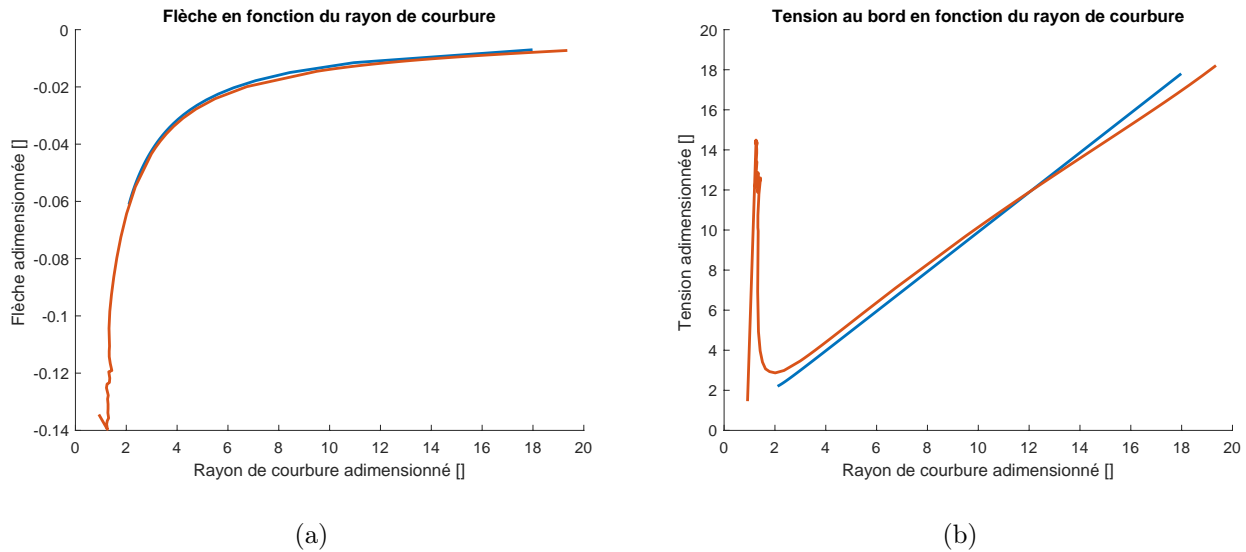


FIGURE 3.23: Évolution comparative de la (a) flèche et de la (b) tension au bord, en fonction du rayon de courbure moyen R^* (fil : bleu, tige : orange selon l'équilibre 1)

Sur la Fig. 3.24, les équilibres de la tige qui activent les modes de flexion de façon privilégiée sont tracés. Ils montrent une similarité entre les modèles de tige et de fil pour $R^* \in [3, 7]$. En dehors de cet intervalle, la flexion joue un rôle majoritaire.

Application aux lignes de transport par câbles

Le chapitre 1 a mis en évidence que les appuis intermédiaires des lignes de transport par câbles sont des zones dans lesquelles la flexion du câble est susceptible d'être activée. D'après la Fig. 3.23 qui compare les modèles de fil et de tige en fonction de la courbure du câble, la flexion intervient de façon prépondérante pour des rayons de courbure adimensionnés $R^* < 2$. Pour les applications au transport par câble, la géométrie des appuis est limitée par la réglementation qui impose une accélération centripète $\frac{V_0^2}{R}$ maximale à 2.5 m/s^2 . Pour les vitesses standards, le rayon de courbure minimal des appuis R imposé est d'environ 15 m. La longueur standard des

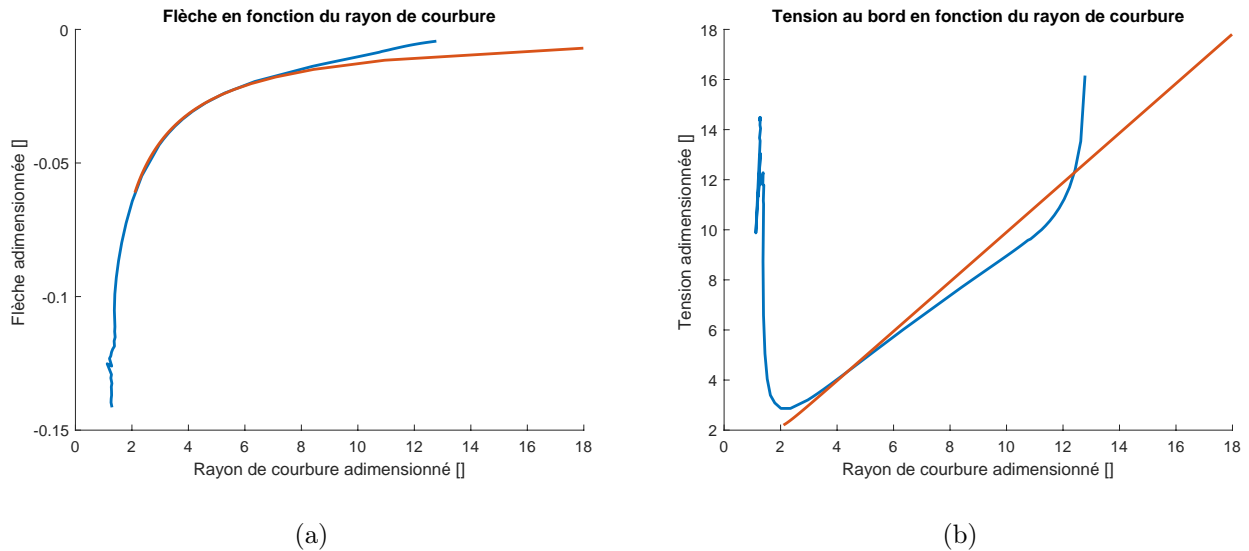


FIGURE 3.24: Évolution comparative de la (a) flèche et de la (b) tension au bord, en fonction du rayon de courbure moyen R^* (fil : orange, tige : bleu selon l'équilibre 2)

appuis est $L_{ap} \approx 5$ m, soit $R^* > 3$. Ceci permet de valider l'hypothèse d'un modèle de fil à proximité des appuis intermédiaires dans une configuration nominale d'usage.

3.2 Couplage des portées par des appuis intermédiaires

La section 3.2 s'intéresse au calcul de l'équilibre d'une ligne de câble en contact avec des appuis intermédiaires. Dans la sous-section 3.2.1, différents types d'appuis sont déclinés avec un modèle analytique de chaînette. Dans la sous-section 3.2.2, les modèles de fil et de tige sont comparés sur plusieurs exemples de compréhension.

3.2.1 Couplage de chaînettes

Dans cette sous-section, le couplage des éléments de câble modélisé par la chaînette est calculé avec des appuis intermédiaires.

Un modèle de compréhension est utilisé pour illustrer les différents modèles d'appui avec le modèle de chaînette :

- une ligne de câble de longueur à vide $L_0 = 220$ m,
- deux extrémités à ancrage fixe en $(x_A, y_A) = (0, 0)$ m et $(x_B, y_B) = (200, 0)$ m.

Appui ponctuel

Le premier modèle d'appui ponctuel est illustré en Fig. 3.25a et Fig. 3.25b. En l'absence de frottement, la continuité de la tension est assurée tandis que le profil du câble présente une discontinuité angulaire au point de contact. Avec le frottement de Coulomb de coefficient $c_f = 0.03$, une discontinuité de la tension apparaît en raison de la singularité que représente l'appui.

Appui poulie

Le deuxième modèle d'appui est illustré en Fig. 3.26a et Fig. 3.26b avec une poulie de rayon $R_{ap} = 5$ m. Le contact du câble est supposé linéique, réalisé sur un arc de cercle, selon un modèle de frottement de Coulomb linéique de coefficient $c_f = 0.03$.

Les modèles ponctuel et linéique sont superposés en Fig. 3.27a et Fig. 3.27b.

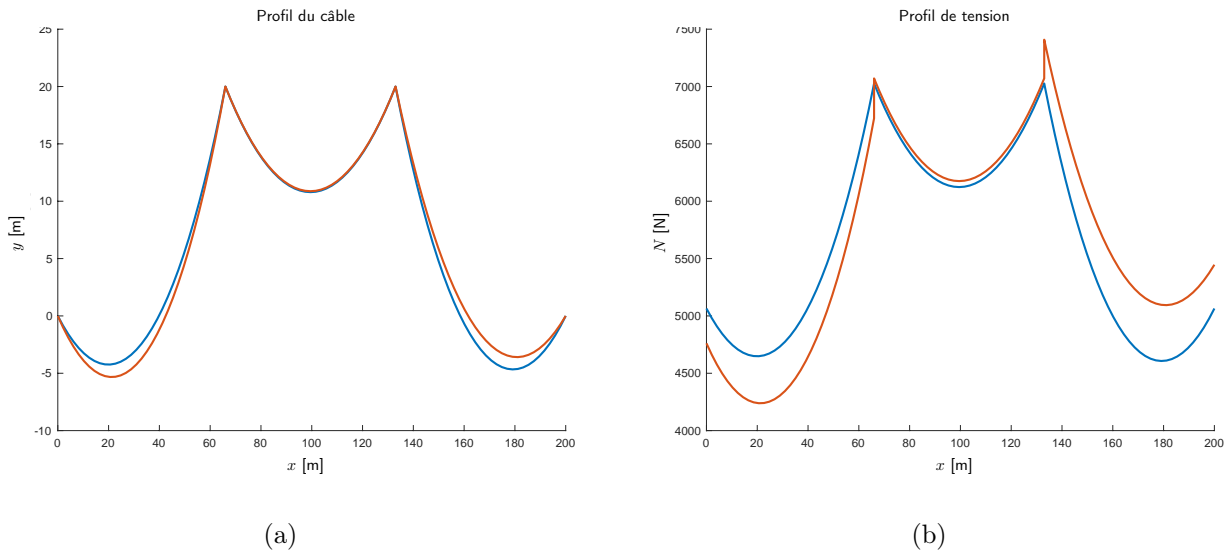


FIGURE 3.25: (a) Profil du câble (b) Profil de tension (bleu : sans frottement, orange : frottement de Coulomb, coefficient $c_f = 0.03$)

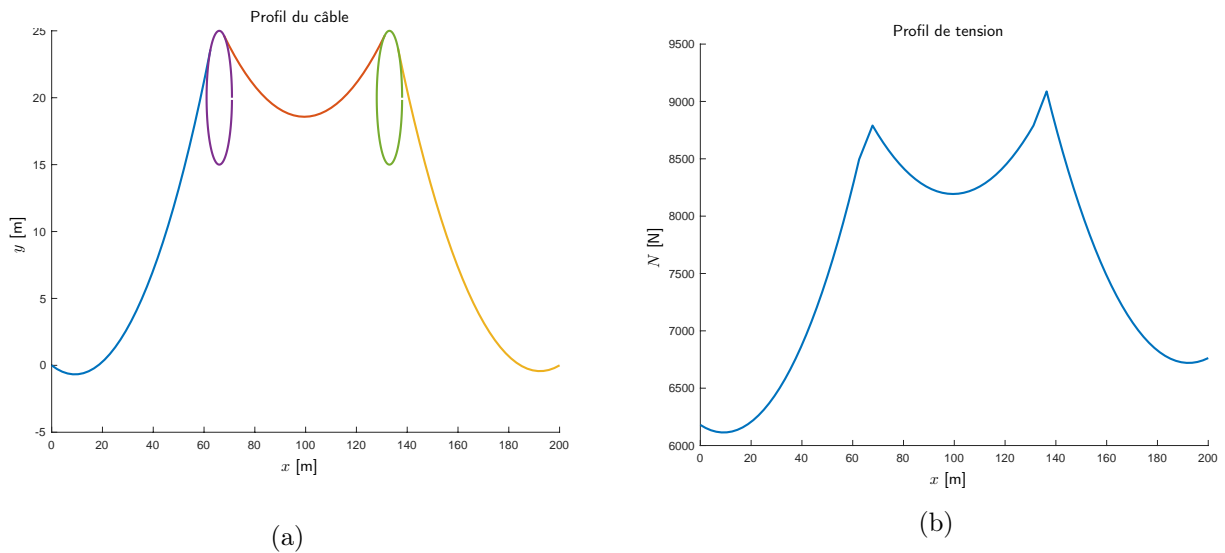


FIGURE 3.26: (a) Profil du câble (b) Profil de tension (frottement de Coulomb, coefficient $c_f = 0.03$)

Application aux lignes de transport par câbles

Le choix de la représentation de l'appui doit permettre de décrire la géométrie du contact de façon suffisamment précise pour dimensionner la ligne afin d'assurer un appui permanent du câble. Compte tenu des échelles en jeu, un modèle ponctuel est suffisant et est adopté dans la suite des travaux.

3.2.2 Couplage des éléments du modèle numérique

Dans cette sous-section, le couplage des éléments de câble modélisé par une tige est calculé avec des appuis intermédiaires ponctuels.

Équilibre guidé par la flexion

Deux exemples de compréhension sont utilisés pour illustrer l'équilibre d'une ligne de câble avec un appui intermédiaire :

- exemple 1 : une ligne inclinée avec deux extrémités à ancrage fixe, en $(x_A, y_A) = (0, 0)$ m et $(x_B, y_B) = (20.0, 0.8)$ m, couplée à un appui intermédiaire, en $(x_{ap}, y_{ap}) = (10, 0.4)$ m (Fig. 3.28).

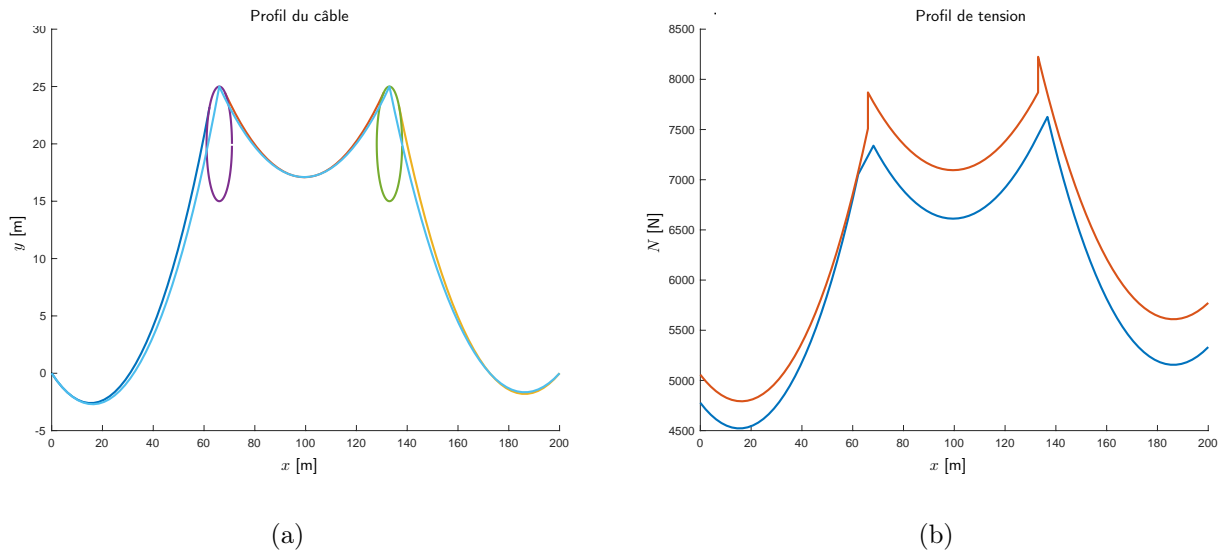
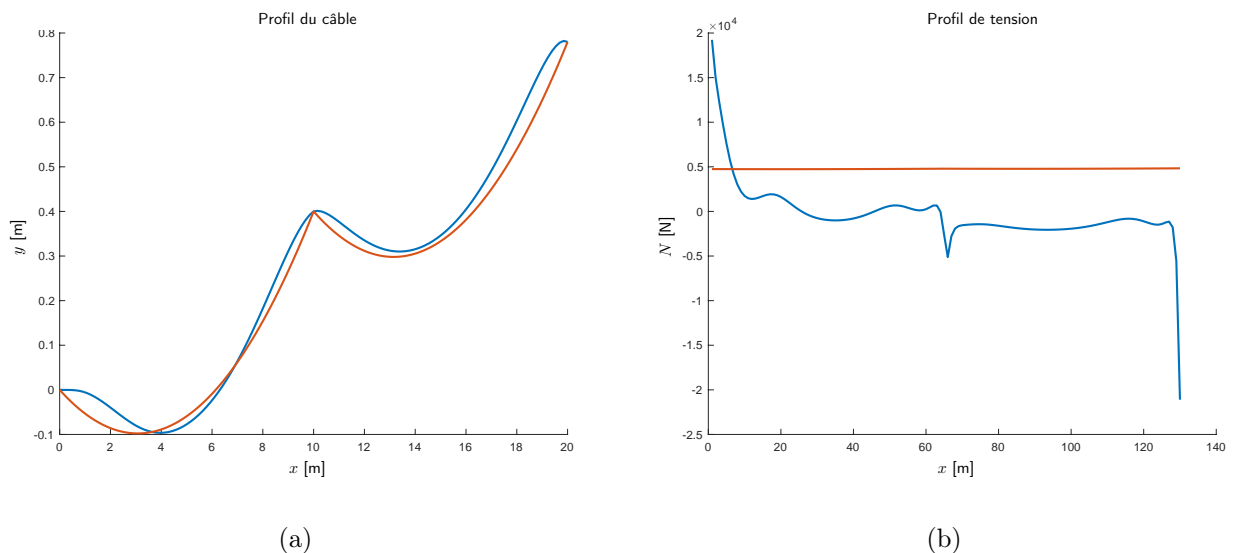


FIGURE 3.27: (a) Profil du câble (b) Profil de tension

— exemple 2 : une ligne plate avec deux extrémités à ancrage fixe, en $(x_A, y_A) = (0, 0)$ m et $(x_B, y_B) = (5, 0)$ m, couplée à un appui intermédiaire en $(x_{ap}, y_{ap}) = (2.5, 0)$ m (Fig. 3.29 et Fig. 3.30).

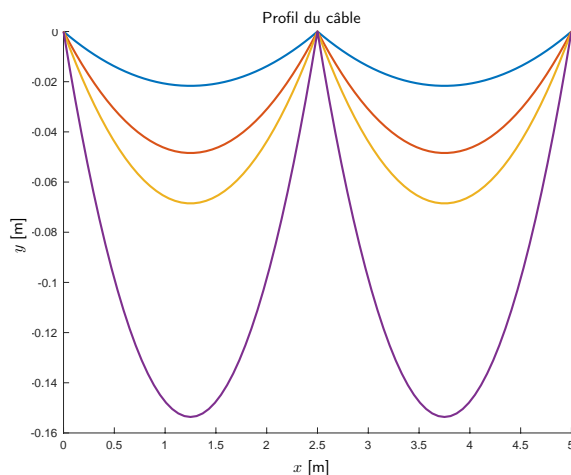
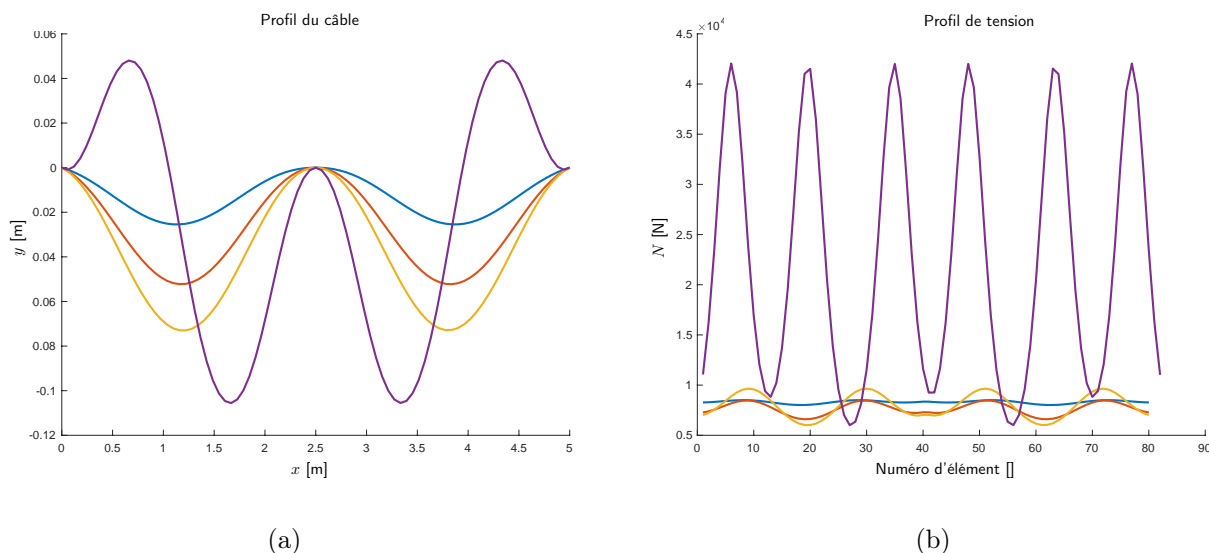

 FIGURE 3.28: Exemple 1 : (a) Profil du câble (b) Profil de tension (bleu : $I \neq 0$, orange : $I = 0$)

Les configurations calculées consistent à contraindre le câble en position à ses extrémités, sans imposer de chargement autre que son poids propre. Le pas de discrétisation utilisé permet de rentrer dans la couche limite contrôlée par le mécanisme de flexion. Pour l'exemple 1, la Fig. 3.28 montre l'équilibre obtenu avec une raideur en flexion nulle $I = 0$ m² et avec une raideur en flexion non-nulle $I = \pi \frac{d^4}{64}$, où d est le diamètre du câble. Les équilibres diffèrent selon le modèle. L'équilibre pour $I \neq 0$ active les effets de flexion, avec une extrémité du câble qui est en tension et l'autre en compression. Les contraintes mécaniques sont plus élevées avec le modèle de tige. Le même constat est fait sur l'exemple 2 (Fig. 3.29 et Fig. 3.30) en faisant varier la longueur à vide $L_0 \in [5.001, 5.05]$ m : la flexion devient prépondérante lorsque L_0 augmente.

Équilibre guidé par la tension

Un exemple de compréhension est utilisé pour illustrer l'équilibre d'une ligne de câble avec un appui intermédiaire :

— exemple 3 : une ligne inclinée avec deux extrémités à ancrage fixe en $(x_A, y_A) = (0, 0)$ m et $(x_B, y_B) =$

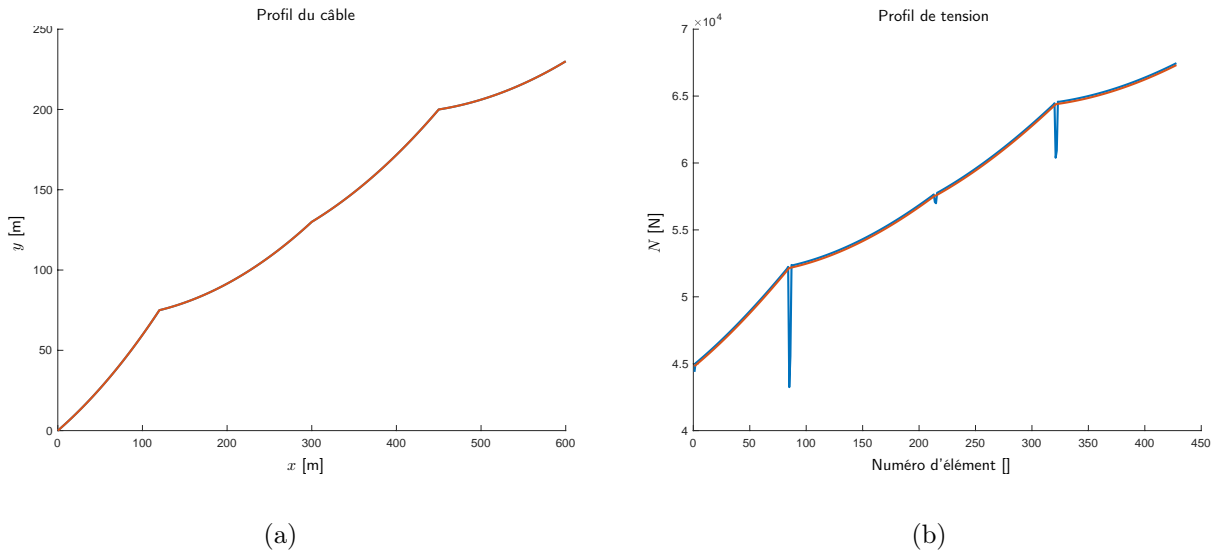
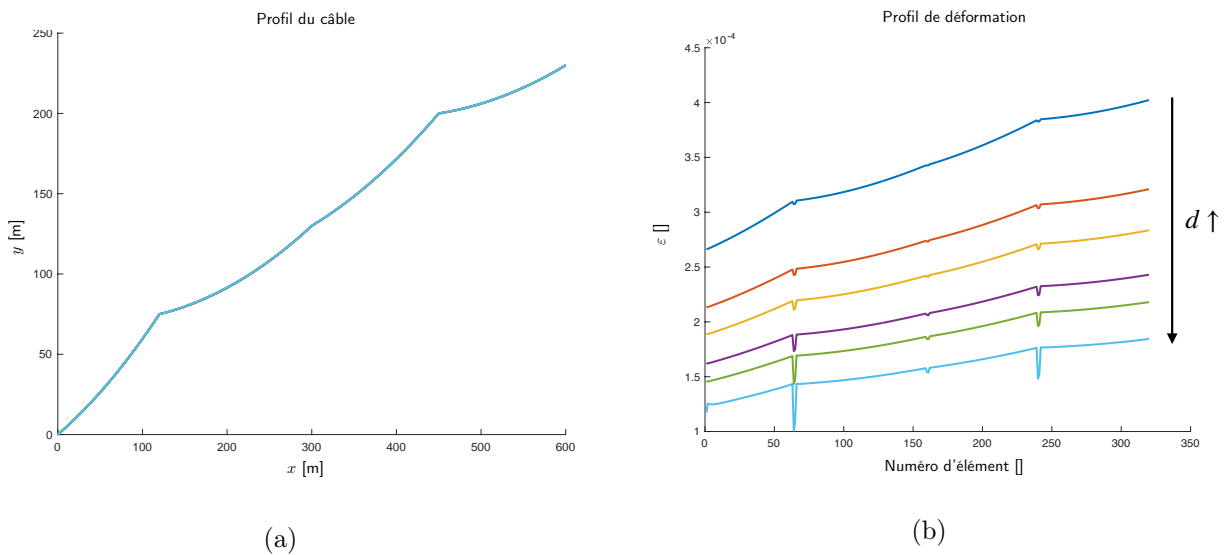

 FIGURE 3.29: Exemple 2 : Profil du câble ($I = 0$) pour $L_0 \in [5.001, 5.05]$ m

 FIGURE 3.30: Exemple 2 : (a) Profil du câble (b) Profil de tension ($I \neq 0$) pour $L_0 \in [5.001, 5.05]$ m

(600, 230) m couplé à trois appuis intermédiaires en $(x_{ap1}, y_{ap1}) = (120, 75)$ m, $(x_{ap2}, y_{ap2}) = (300, 130)$ m, $(x_{ap3}, y_{ap3}) = (450, 200)$ m (Fig. 3.31).

Contrairement à l'exemple précédent, la différence d'altitude entre les points d'extrémité impose une mise en tension naturelle de la ligne par gravité. Une première configuration est calculée avec une longueur de câble $L_0 = 650$ m (Fig. 3.31) selon laquelle l'équilibre de la ligne est guidé par l'effort normal $N > 0$. Avec le modèle de tige tel que $I \neq 0$, l'influence de la flexion est limitée aux abords des appuis et s'accompagne d'une diminution de la tension locale (Fig. 3.31b). Les résultats de l'équilibre de la ligne selon plusieurs diamètres de câble $d \in [40, 60]$ mm sont affichés dans la Fig. 3.32. L'effet de la flexion aux appuis augmente avec le diamètre du câble puisque le moment quadratique dépend de d^4 .

Une seconde configuration est calculée avec une longueur de câble plus importante $L_0 = 655$ m (Fig. 3.33), ayant pour effet de détendre la ligne, selon plusieurs diamètres de câble $d \in [40, 60]$ mm. La couche limite affectée par la flexion se propage à l'ensemble de la ligne de câble pour $d \in [52, 60]$ mm (Fig. 3.33b : courbes violette, verte et bleu clair).

Le modèle ne converge pas pour un maillage trop fin qui active artificiellement la flexion aux appuis : le pas de discrétisation a un effet de régularisation. En effet, le couplage aux appuis supposés ponctuels introduit une discontinuité de l'angle du câble, soit une courbure $\kappa \rightarrow \infty$, à l'origine d'une singularité dans le calcul de la dérivée quatrième du schéma aux différences finies. Afin de traduire une réalité physique acceptable, le choix

FIGURE 3.31: Exemple 3 : (a) Profil du câble (b) Profil de tension (bleu : $I \neq 0$, orange : $I = 0$)FIGURE 3.32: Exemple 3 : (a) Profil du câble (b) Profil de déformation (I variable)

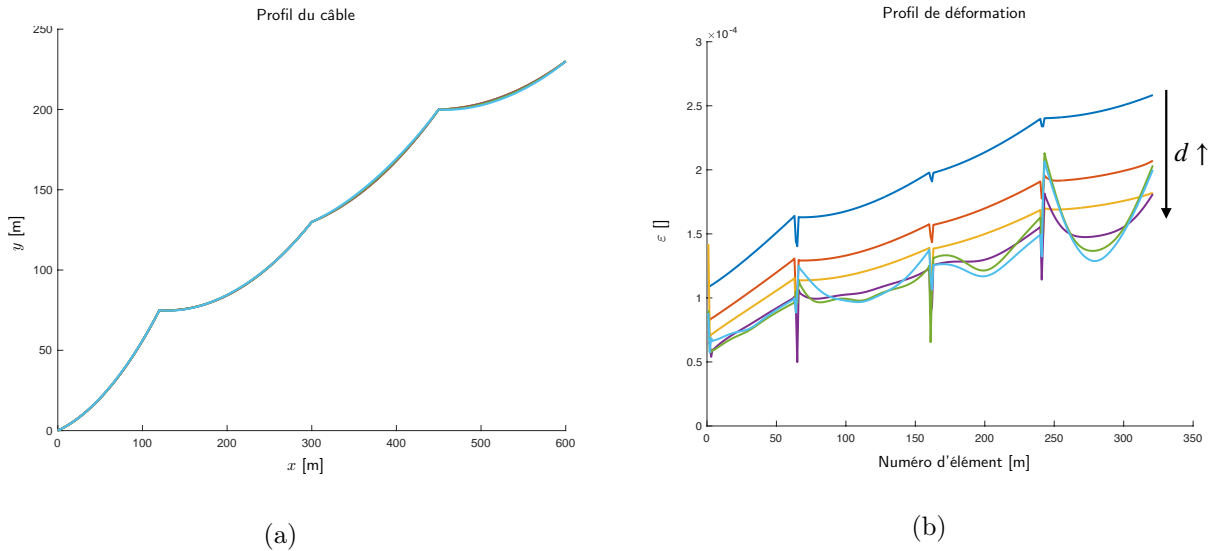
de la longueur des éléments de part et d'autre de l'appui est dicté par la longueur réelle du contact. Ici, des éléments de deux mètres de long sont utilisés, soit une longueur d'appui équivalente de quatre mètres, ce qui est en cohérence avec l'application au transport par câble. L'amélioration du modèle consiste à ajouter une équation portant sur la continuité de la courbure à gauche et à droite de l'appui, en utilisant deux points miroirs à l'appui dans le schéma aux différences finies, et à considérer les efforts tranchants dans la loi de contact.

Application aux lignes de transport par câbles

Les résultats de calcul avec le modèle de tige couplé à des appuis intermédiaires permettent de confirmer que les effets de flexion sont concentrés aux appuis dans le cas d'une ligne tendue. La configuration selon laquelle la flexion prend le dessus de façon généralisée aux portées est un cas limite, non rencontré en pratique.

3.3 Analyse statique : cas d'application

La section 3.3 est dédiée à l'application de la méthodologie d'assemblage d'une ligne de transport par câbles, sur deux exemples. Une ligne monocâble est abordée dans la sous-section 3.3.1 tandis qu'une ligne multicâble est traitée dans la sous-section 3.3.2.

FIGURE 3.33: Exemple 3 : (a) Profil du câble (b) Profil de déformation (I variable)

3.3.1 Ligne du télésiège de Coulouvrier

La ligne du télésiège de Coulouvrier située à Samoëns en Haute-Savoie sert d'exemple pour le calcul statique. La ligne est en configuration de tension régulée. Les données d'entrée du modèle sont récapitulées dans Tab. 3.1.

Grandeur	Valeur
Force de tension du système hydraulique T_A	360 kN
Diamètre du câble d	54 mm
Module d'Young du câble E	100 GPa
Masse linéique du câble μ	11.59 kg/m
Masse du véhicule vide $m_{v,v}$	495 kg
Masse du véhicule chargé $m_{v,c}$	975 kg
Longueur de la boucle de câble installée L_R	5756 m
Dénivelée entre stations d'extrémité Δy	945.0 m
Longueur horizontale Δx	2656.7 m

TABLE 3.1: Données d'entrée de la ligne du télésiège de Coulouvrier

Modèle de ligne uniforme

Un calcul est réalisé en comparant un modèle de chaînette extensible et inextensible. L'écart entre les résultats concerne la position de la station de tension qui diffère de quatre mètres, soit la moitié de la valeur de l'allongement élastique de la boucle de câble sous l'effet de la tension. Les résultats obtenus par ailleurs sur le profil du câble et de tension sont très proches. Si la ligne était en ancrage fixe, l'écart entre un modèle extensible et inextensible est de 2 % sur la tension en haut de ligne et de 10 % sur la flèche dans la portée la plus longue de la ligne.

Un modèle de la ligne est calculé avec des appuis linéiques en Fig. 3.34 et Fig. 3.35 pour une configuration en ancrage fixe. Le rayon de l'arc de cercle $R_{ap} = \frac{L_{ap}}{\alpha_{ap}}$ sur lequel est réalisé le contact entre le câble et l'appui est obtenu par l'angle de déviation du câble α_{ap} à chaque pylône, qui est donné par l'équilibre statique, et la longueur du balancier L_{ap} (donnée constructeur). Pour une ligne nue, $\mu = 11.59$ kg/m (Fig. 3.34). Pour une ligne chargée, $\mu = 36.99$ kg/m (Fig. 3.35) : les appuis 5 et 7 qui agissent en compression sur la Fig. 3.34 passent en support. Le rayon moyen de contact est plus faible que le cas de ligne nue car les déviations du câble sont plus importantes aux appuis.

L'étude de la convergence du modèle de fil est réalisée pour différents pas Δh de discrétisation du schéma aux différences finies. Le modèle est appliqué à la ligne de Coulouvrier en tension régulée (Tab. 3.2).

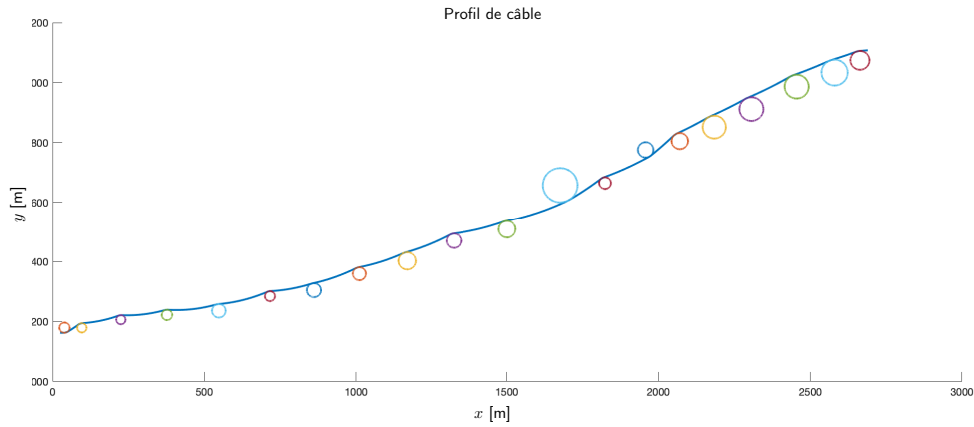


FIGURE 3.34: Équilibre statique de la ligne du télésiège de Coulouvrier pour une masse linéique de câble $\mu = 36.99$ kg/m

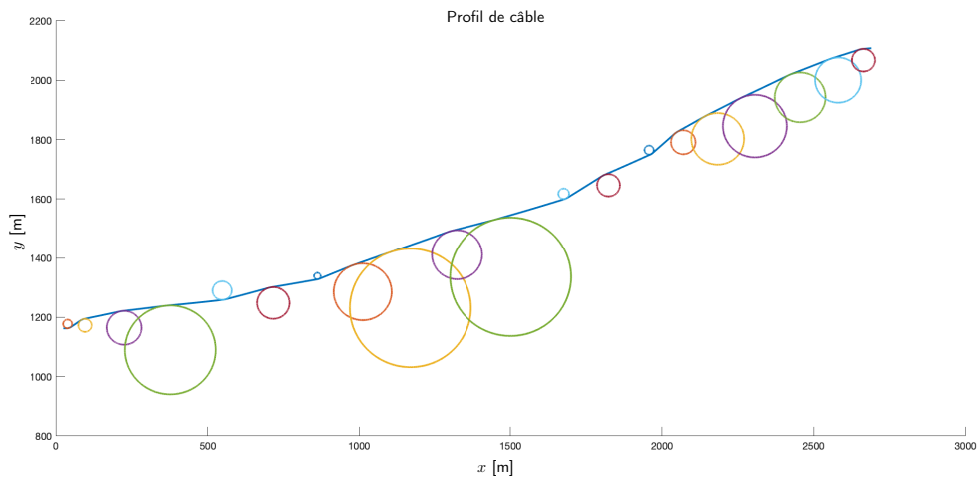


FIGURE 3.35: Équilibre statique de la ligne du télésiège de Coulouvrier pour une masse linéique de câble $\mu = 11.59$ kg/m

Δh [m]	Temps CPU [s]	Position station tension [m]	Tension station supérieure [N]
10,5	31	-28,09	5.2013×10^5
9,5	32	-27,949	$5,1812 \times 10^5$
8,5	41	-27,8526	$5,1734 \times 10^5$
7,5	58	-27,6909	$5,1552 \times 10^5$
6,5	79	-27,6053	$5,15 \times 10^5$
5,5	117	-27,57	$5,1579 \times 10^5$
4,5	174	-27,504	$5,1599 \times 10^5$
3,6	281	-27,4579	$5,1648 \times 10^5$
2,6	575	-27,434	$5,1760 \times 10^5$
2,1	908	-27,4293	$5,1836 \times 10^5$
1,9	1119	-27,4284	$5,1868 \times 10^5$
1,7	1444	-27,4283	$5,1903 \times 10^5$
1,5	1757	-27,4291	$5,1940 \times 10^5$
1,3	2634	-27,4294	$5,1976 \times 10^5$
1,1	4138	-27,4312	$5,2014 \times 10^5$
0,9	8928	-27,4332	$5,2054 \times 10^5$

TABLE 3.2: Étude numérique de la convergence du modèle aux différences finies de la ligne du Coulouvrier

Pour le pas de discrétisation de 0.9 mètres, l'écart en tension en station supérieure avec le modèle de chaînette extensible est de 0.9 %, l'écart en position de la station inférieure est de 2.9 mètres.

Modèle de ligne avec des masses ponctuelles

Dans la Fig. 3.36, les profils de câble obtenus par un calcul selon le modèle uniforme et avec un modèle de masse ponctuelle pour représenter le poids des véhicules sont comparés. La différence de flèche est de l'ordre de grandeur du mètre dans la portée ciblée. Le profil de tension obtenu selon les deux approches est donné en Fig. 3.37.

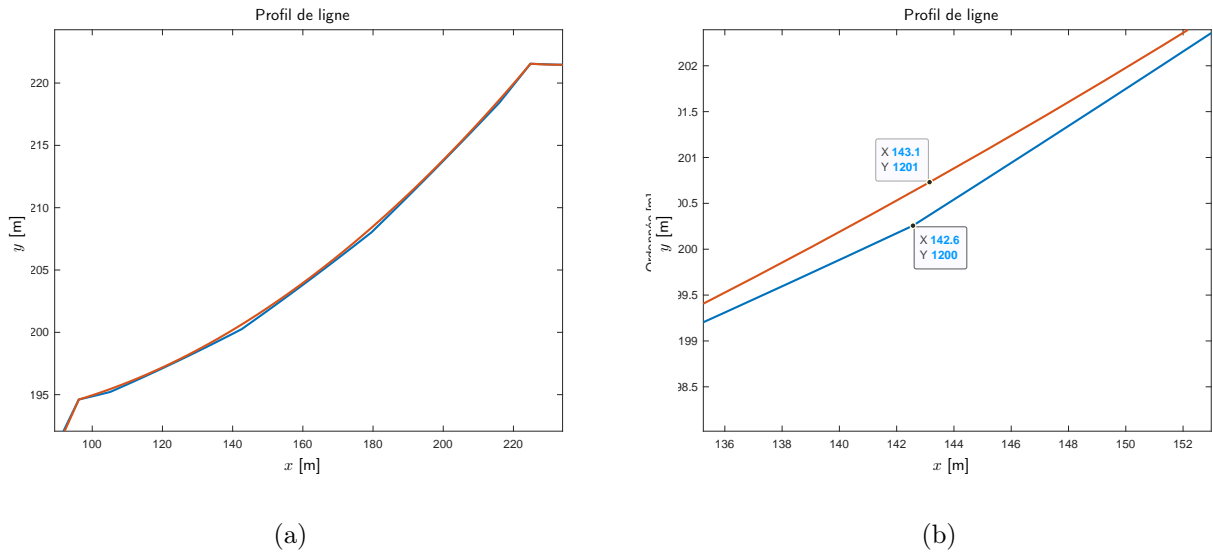


FIGURE 3.36: (a) Profil du câble dans une portée de la ligne (b) Zoom sur un véhicule (orange : câble homogène, bleu : véhicules ponctuels)

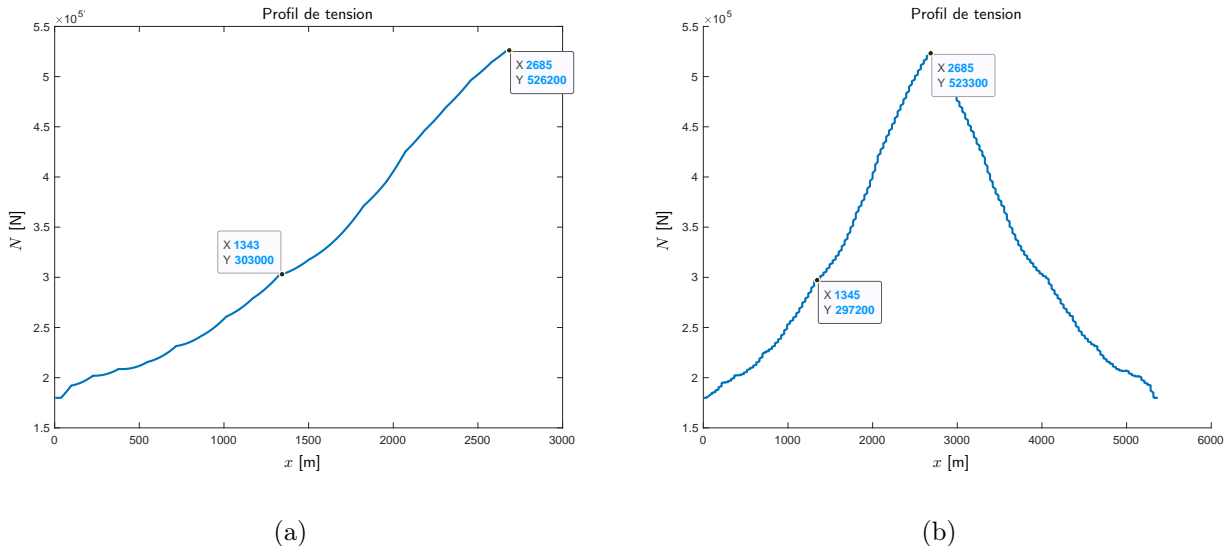


FIGURE 3.37: Profil de tension de la ligne selon (a) un modèle de câble homogène, (b) avec des véhicules ponctuels

Pour des valeurs particulières du paramètre de contrôle l_c , précédemment introduit dans le chapitre 2, il existe plusieurs solutions d'équilibre statique de la ligne de câble. Le cas illustré en Fig. 3.38 montre que deux solutions coexistent lorsqu'un véhicule est proche d'un appui :

- Une solution d'équilibre selon laquelle le véhicule est situé d'un côté de l'appui (courbe bleue de la Fig. 3.38b).

- Une seconde solution d'équilibre selon laquelle le véhicule a franchi l'appui et est situé de l'autre côté (courbe orange de la Fig. 3.38b).

Cette multiplicité de solutions a une conséquence non-négligeable sur le profil de tension statique (Fig. 3.38a). Le passage d'une solution à une autre peut être qualifié d'**instabilité statique**. Une conséquence pratique se manifeste par des variations brutales de longueur de câble dans les portées au cours de l'avancement des véhicules sur la ligne, contrôlé à travers le paramètre d'évolution l_c . Ce phénomène, mis en évidence par le modèle assemblé proposé dans ces travaux, est qualifié de **transvasement de câble** dans la suite de ce mémoire.

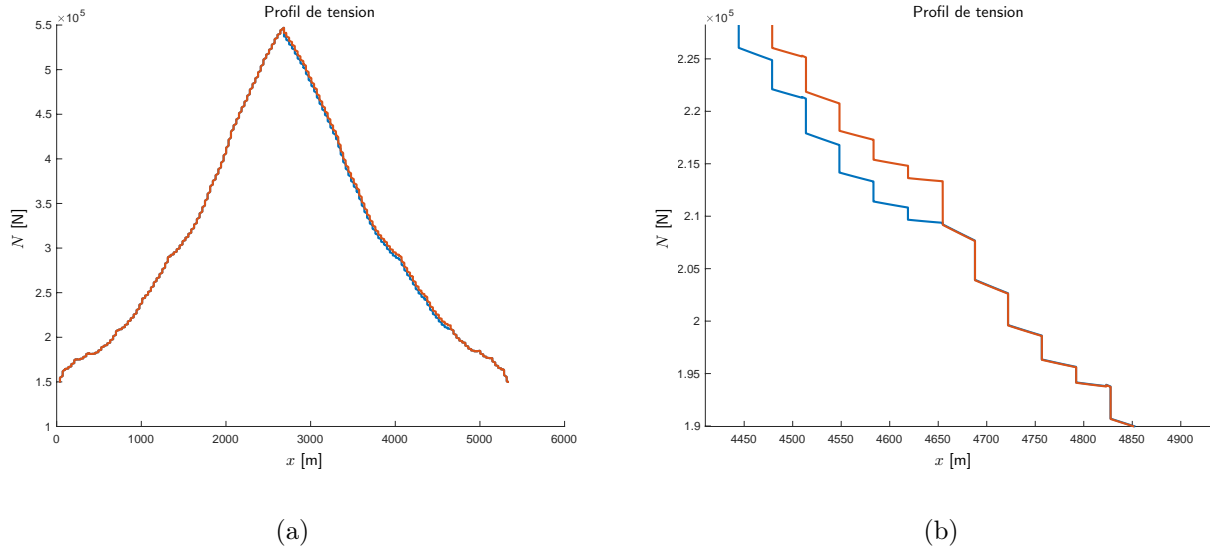


FIGURE 3.38: (a) Profil de tension (b) Zoom à proximité du pylône franchi par le véhicule

3.3.2 Ligne du téléphérique de l'Aiguille du Midi II

L'acte de conférence " Hugo BÉCU, Claude-Henri LAMARQUE, Alireza TURE SAVADKOOHI, Michel GILLARD, Christophe BOTTOLLIER (2023), **Structural Monitoring of an Aerial Tramway System During Operation : Modeling and Simulation Strategy with Experimental Data Validation**, Experimental Vibration Analysis for Civil Engineering Structures. Lecture Notes in Civil Engineering, vol 224, Springer, Cham, https://doi.org/10.1007/978-3-030-93236-7_21 " et l'article " Hugo BÉCU, Claude-Henri LAMARQUE, Alireza TURE SAVADKOOHI, Michel GILLARD, Christophe BOTTOLLIER (2022), **From quasi-static calculation of an aerial tramway system to traveling cycle time optimization**, Artificial Intelligence and Data Science, Volume 3, Issue 2, Pages 27-34, https://doi.org/10.11532/jsceiii.3.2_27 " abordent le recalage expérimental d'un modèle du téléphérique de l'Aiguille du Midi II (TAM2) construit à partir de la méthode de la chaînette. La longueur des câbles est une donnée incertaine car peu maîtrisée, aussi bien lors de l'installation qu'au cours des modifications successives apportées au système (opérations de maintenance, raccourcissement du câble). Des mesures réalisées en statique sur l'installation réelle permettent une actualisation du modèle numérique.

Une confrontation des différents modèles de câble, appliqués à l'équilibre statique de la boucle de câble tracteur du téléphérique, montre une bonne cohérence des résultats (Tab. 3.3). Ils sont en accord avec les calculs de dimensionnement réalisés par le maître d'oeuvre DCSA, avec le logiciel **MonoCAO**, et le constructeur Garaventa.

Les modèles de fil et de tige sont comparés pour la boucle de câble tracteur. Ils confirment que la flexion n'a aucune influence à l'échelle de la portée globale, ni sur la position du câble ni sur la tension. La flexion intervient dans l'équilibre de la portée de l'exemple du TAM2 pour des diamètres de câble supérieurs à 20 centimètres, alors que les câbles du téléphérique ont un diamètre de l'ordre de quatre centimètres.

Le cas d'un chargement non-uniforme le long du câble se présente en pratique avec le givre. Avec l'altitude élevée du téléphérique (4000 mètres), certaines conditions atmosphériques particulières sont à l'origine de la formation d'une gaine de givre autour du câble tracteur. La géométrie de la gaine dépend de l'altitude et le

	MonoCAO	Constructeur Garaventa	Chaînette (thèse)	Modèle de fil numérique (thèse)
Flèche [m]	387,78	385,72	387,48	385,16
Angle inférieur [deg]	0,46	0,7	0,56	0,69
Angle supérieur [deg]	52,39	52,27	52,33	52,27
Tension amont [daN]	23 922	24 015	23 950	23 831
Tension aval [daN]	14 600	14 534	14 632	14 594

TABLE 3.3: Résultats du calcul statique du câble tracteur du téléphérique de l'Aiguille du Midi II

chargement associé dépend donc de l'abscisse curviligne le long du câble. L'enjeu, répondant aux contraintes de l'exploitant du système, est de savoir à partir de quelle taille de la gaine de givre le câble tracteur, le moins tendu, est susceptible de venir au contact de la paroi rocheuse dans la partie raide de la ligne. Le modèle de fil aux différences finies est appliqué au câble tracteur, en définissant un chargement équivalent à la gaine de givre, et permet de retrouver le contact observé avec le terrain (Fig. 3.39).

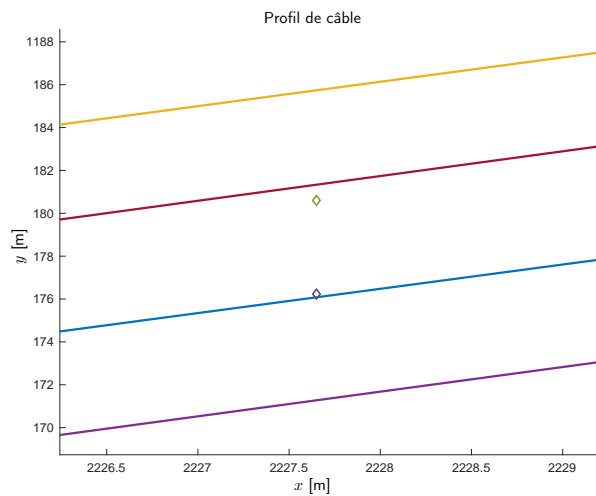


FIGURE 3.39: Résultat de calcul du câble tracteur dans la zone de contact avec la paroi : sans gaine de givre (jaune : sans allongement permanent, rouge : avec allongement permanent du câble) et avec la gaine de givre (bleu : sans allongement permanent, violet : avec allongement permanent du câble). Relevé de la position du câble sans givre (losange vert), relevé topographique de l'éperon rocheux (losange mauve).

Bilan du chapitre

Les résultats du chapitre 3 ont mis en évidence que la chaînette est un modèle sur lequel repose un calcul statique efficace et sans problématique de maillage de la géométrie de la ligne de câble. La comparaison avec les outils de calcul de ligne utilisés dans l'industrie permet de valider l'approche. De plus, en dehors de configurations spéciales non abordées dans ce mémoire, le comportement du câble est guidé par la tension. Ce constat encourage une modélisation par un modèle de fil dépourvu de flexion. La chaînette est donc retenue dans la suite comme référence statique pour le calcul dynamique. De la même façon, l'état de l'art a mis en évidence que c'est la dynamique à hautes fréquences qui active les effets de flexion. Pour les phénomènes à basses fréquences qui sont visés par les travaux, en présence d'une tension suffisante et pour des diamètres de câble typiques des applications visées, le modèle de fil est suffisant.

Chapitre 4

Construction du modèle dynamique d'une installation de transport par câbles.

Introduction du chapitre

Dans le chapitre 4, la même méthodologie est suivie que dans le chapitre 2 pour proposer des modèles dynamiques de chaque élément du système : la boucle de câble dans la section 4.1, les appuis dans la section 4.2 et les véhicules dans la section 4.3. L'assemblage du modèle global est traité dans la section 4.4.

En préliminaire, des éléments de concept pour le calcul du terme d'accélération d'un câble mobile sont apportés dans l'Annexe G.

4.1 Modélisation dynamique du câble

L'objectif de la section 4.1 est de décrire la dynamique d'un élément de câble, par ajout des termes inertiels à l'équation de bilan en effort précédemment écrite dans le cadre du problème statique. Une **approche analytico-numérique** est privilégiée pour le traitement de la dynamique de la ligne de câble. Ce choix est motivé par l'analyse de la bibliographie qui met en évidence les difficultés à manipuler des modèles numériques complets, prenant à la fois en compte la statique non-linéaire de la boucle de câble, le couplage entre les sous-composants (pylônes, véhicules, stations) et la dynamique sous l'effet d'une translation. La géométrie curviligne du câble, simple, encourage une description dynamique à partir de fonctions continues de l'espace qui sont des solutions du problème dynamique linéaire sous-jacent.

Dans la suite des travaux, les étapes de la modélisation dynamique d'un élément de câble sont les suivantes :

- 1. Les différentes hypothèses sous-jacentes au modèle mécanique sont discutées pour aboutir à un traitement analytique des équations d'une **portion élémentaire** de câble.
- 2. La dynamique est linéarisée dans le cadre des petites perturbations dynamiques, ou vibrations, pour obtenir les expressions analytiques des **formes modales** d'un élément de câble.
- 3. Les effets d'une translation du câble à une vitesse instantanée V_0 constante et une accélération A_{V_0} sont ajoutés dans les équations dynamique.
- 4. Les contributions en **effort non-linéaire** d'origines géométriques, activées par les grands déplacements dynamiques du câble, sont ajoutées au modèle linéaire précédent.

4.1.1 Formulation dynamique d'un élément de câble fixe

Les équations dynamiques d'un élément de **câble fixe**, c'est-à-dire les équations qui régissent le mouvement d'un câble étudié à partir d'une référence immobile, sont abordées dans la sous-section 4.1.1. Les grandeurs du modèle dynamique sont décrites selon un point de vue **lagrangien** par un paramètre spatial considéré sur la configuration de référence. Pour une référence immobile, il a été vu en préliminaire que le terme inertiel

ajouté dans l'équation d'équilibre dynamique est réduit à la dérivée partielle seconde de la position courante $\underline{X}(S, t) \in \mathcal{C}_d$ multipliée par la masse linéique du câble μ_R prise sur la configuration de référence.

La position de chaque point du câble est ainsi décrite en fonction de l'abscisse curviligne de référence $S \in [0, L_R]$ prise sur la configuration de référence \mathcal{C}_R et du temps $t > 0$ (Fig. 4.1, Fig. 4.2),

$$\frac{d}{dS} \left(N(S, t) \frac{d}{dS} \underline{X}(S, t) \right) + \underline{f}_R(S, t) = \mu_R \frac{\partial^2 \underline{X}(S, t)}{\partial t^2}, \quad \forall (S, t) \in [0, L_R] \times [0, +\infty[$$

(équilibre dynamique en effort). (4.1)

La position courante se décompose en une contribution statique, $\underline{X}_s(S)$, et une contribution dynamique, $\underline{U}_d(S, t)$,

$$\underline{X}(S, t) = \underline{X}_s(S) + \underline{U}_d(S, t), \quad \forall (S, t) \in [0, L_R] \times [0, +\infty[\quad (4.2)$$

où $\underline{U}_d(S, t)$ est le déplacement dynamique du câble autour de sa position d'équilibre statique \underline{X}_s .

Le chargement linéique $\underline{f}_R(S, t)$ peut alors s'écrire comme une contribution statique $\underline{f}_R^s(S)$ et une contribution dynamique $\underline{f}_R^d(S, t)$,

$$\underline{f}_R(S, t) = \underline{f}_R^s(S) + \underline{f}_R^d(S, t), \quad \forall (S, t) \in [0, L_R] \times [0, +\infty[. \quad (4.3)$$

Hypothèses du modèle analytique

Pour permettre des développements analytiques, dans le but d'obtenir des formules fermées des modes de vibration du câble, des hypothèses supplémentaires sont apportées au modèle dynamique décrit par l'équation (4.1) :

- Contrairement à la formulation de la mécanique des milieux continus, qui différencie le tenseur d'Euler du tenseur de Piola-Kirchoff, aucune distinction n'est faite dans la suite entre les efforts $N(S)$ sur la configuration de référence \mathcal{C}_R et les efforts $\hat{N}(s)$ sur la configuration courante \mathcal{C}_d . L'effort axial sera ainsi noté N .
- Le câble est supposé suivre une loi de comportement élastique Ψ linéaire qui établit le lien entre l'effort axial N et la déformation de l'ingénieur $\varepsilon = \|\underline{X}'(S)\| - 1$ associée, valable pour de petites déformations :

$$\Psi : \varepsilon \rightarrow N(S) = EA\varepsilon. \quad (4.4)$$

Sous ces deux hypothèses, l'équation qui traduit l'équilibre dynamique local (4.1) devient :

$$EA \frac{d}{dS} \left((\|\underline{X}'(S, t)\| - 1) \frac{\underline{X}'(S, t)}{\|\underline{X}'(S, t)\|} \right) + \underline{f}_R(S, t) = \mu_R \frac{\partial^2 \underline{X}(S, t)}{\partial t^2}, \quad \forall (S, t) \in [0, L_R] \times [0, +\infty[. \quad (4.5)$$

- La position courante du milieu $\underline{X} \in \mathcal{C}_d$ se décompose en une contribution $\underline{X}_s \in \mathcal{C}_R$, connue par le calcul statique, et en un déplacement dynamique \underline{U}_d qui constitue l'inconnue du problème dynamique,

$$\underline{X} = \underline{X}_s + \underline{U}_d. \quad (4.6)$$

L'hypothèse des petites perturbations est faite sur le déplacement dynamique \underline{U}_d , supposé petit autour de la configuration statique \underline{X}_s . La configuration statique \mathcal{C}_R paramétrisée par $S \in [0, L_R]$ sert alors de référence naturelle au calcul de l'évolution dynamique. Cette hypothèse de petites perturbations dynamiques permet de linéariser l'équation (4.5), par développements de Taylor au premier ordre des termes $\|\underline{X}'(S, t)\| - 1$ et $\frac{\underline{X}'(S, t)}{\|\underline{X}'(S, t)\|}$, et ainsi envisager des développements analytiques dans un cadre linéaire.

- La référence statique est calculée à partir des expressions de la chaînette élastique, qui ont été abordées dans les précédents chapitres. Le chargement statique est supposé appartenir au plan $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$ et est dû au poids propre du câble de masse linéique $\mu_{R0}(S_0)$, $S_0 \in [0, L_{R0}]$, considéré sur la référence \mathcal{C}_{R0} de longueur L_{R0} qui a servi au calcul statique. La nouvelle masse linéique sur la configuration statique

déformée $\mu_R(S)$, $S \in [0, L_R]$, qui sert de référence pour la dynamique est donnée par :

$$\mu_R(S) = \frac{\mu_{R0}(S_0)}{1 + \varepsilon(S_0)}, \quad (4.7)$$

avec $S = \int_0^{S_0} (1 + \varepsilon(x)) dx$. D'après les hypothèses du calcul statique, la masse linéique μ_{R0} est supposée uniforme. De la même façon pour le calcul dynamique, la masse linéique μ_R est supposée indépendante de S . Ainsi, la déformation ε est supposée constante le long du câble pour réaliser le calcul de la masse linéique modifiée μ_R ,

$$\mu_R = \frac{L_{R0}}{L_R} \mu_{R0}.$$

Dans la suite, la masse linéique μ_{R0} sera désignée par μ .

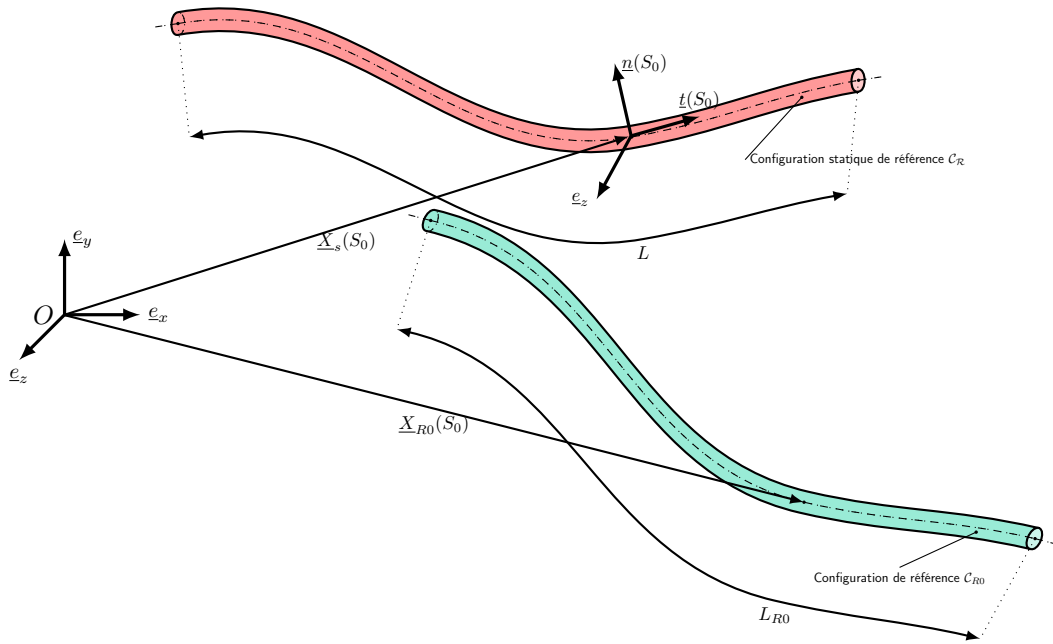


FIGURE 4.1: Base locale de Frenet attachée à la configuration statique de référence décrite en fonction de S_0

Linéarisation des équations dynamiques

Soit une fonction :

$$F : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3 \quad (4.9)$$

$$\underline{x} \rightarrow F(\underline{x}),$$

et $\underline{x}_{ref} \in \mathbf{R}^3$. Le développement de Taylor à l'ordre un de la fonction F au voisinage de \underline{x}_{ref} est exprimé de façon matricielle par :

$$F(\underline{x}) = F(\underline{x}_{ref}) + \mathcal{J}_x(\underline{x}_{ref}) (\underline{x} - \underline{x}_{ref}) + o(\underline{x} - \underline{x}_{ref}), \quad (4.10)$$

avec $J_{x_{ij}} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$, $(i, j) \in \llbracket 0, 3 \rrbracket^2$.

Le développement de Taylor de la quantité $\frac{X'(S, t)}{\|X'(S, t)\|}$ autour de la position statique du câble \underline{X}_s s'obtient en appliquant la formule précédente à la fonction $F(\underline{x}) = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}$ évaluée en \underline{X}' ,

$$F(\underline{X}'(S, t)) = F(\underline{X}'_s(S)) + \mathcal{J}_x(\underline{X}'_s(S)) (\underline{X}' - \underline{X}'_s) + o(\underline{X}' - \underline{X}'_s)$$

$$= F(\underline{X}'_s(S)) + \mathcal{J}_x(\underline{X}'_s(S)) \underline{U}'_d + o(\underline{U}'_d), \quad (4.11)$$

avec $J_{x_{ij}} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ $(i, j) \in \llbracket 0, 3 \rrbracket^2$.

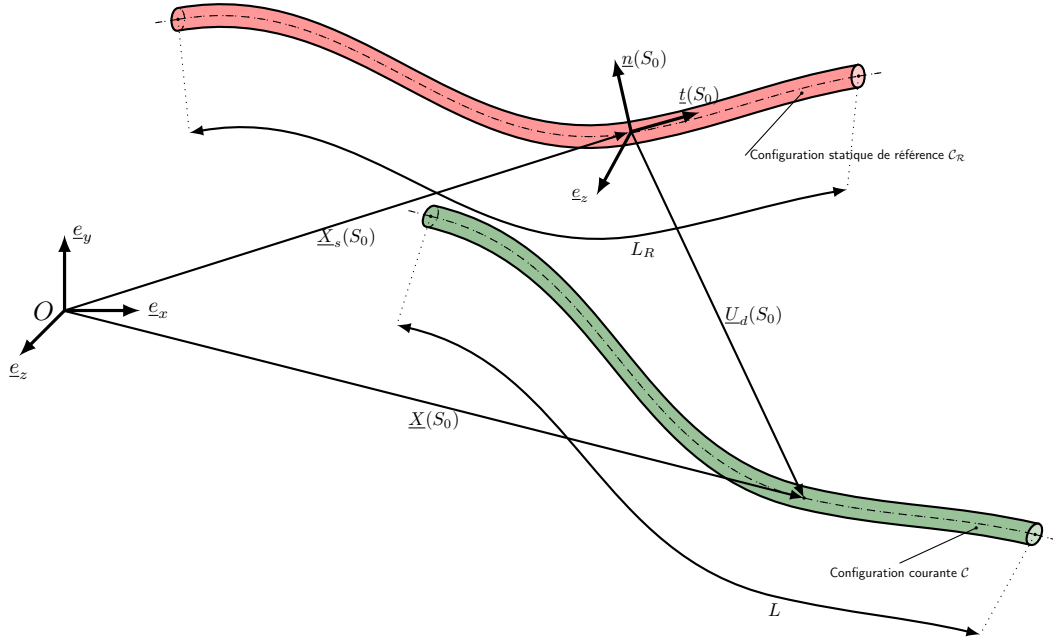


FIGURE 4.2: Déplacement dynamique par rapport à la référence statique

L'expression de la matrice jacobienne $J_x \in \mathcal{M}_{33}$ est donnée pour $(i, j) \in \llbracket 0, 3 \rrbracket^2$ par :

$$J_{x_{ij}} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial(\frac{x_i}{\|\underline{x}\|})}{\partial x_j} = \begin{cases} \text{si } i = j : & \frac{1}{\|\underline{x}\|^2} \left(\|\underline{x}\| - x_i \frac{\partial \|\underline{x}\|}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{\|\underline{x}\|} - \frac{x_i x_j}{\|\underline{x}\|^3} \\ \text{si } i \neq j : & -\frac{x_i x_j}{\|\underline{x}\|^3} \end{cases} \quad (4.12)$$

En évaluant la matrice jacobienne en \underline{X}'_s et en l'appliquant au déplacement \underline{U}'_d , il vient au premier ordre :

$$F(\underline{X}') = \frac{\underline{X}'(S, t)}{\|\underline{X}'(S, t)\|} \approx \frac{\underline{X}'_s(S)}{\|\underline{X}'_s(S)\|} + \frac{\underline{U}'_d(S, t)}{\|\underline{X}'_s(S)\|} - \frac{\underline{X}'_s(S) (\underline{U}'_d(S, t) \cdot \underline{X}'_s(S))}{\|\underline{X}'_s(S)\|^3} \quad (4.13)$$

En notant $\underline{t}(S) = \frac{\underline{X}'_s}{\|\underline{X}'_s\|}$ le vecteur tangent au câble sur sa configuration statique au point S , (4.13) s'écrit :

$$\frac{\underline{X}'}{\|\underline{X}'\|} \approx \underline{t} + \frac{\underline{U}'_d}{\|\underline{X}'_s\|} - \underline{t} \frac{(\underline{U}'_d \cdot \underline{t})}{\|\underline{X}'_s\|} \quad (4.14)$$

De la même façon, le développement de Taylor de la quantité $\|\underline{X}'(S, t)\| - 1$ autour de la position statique du câble \underline{X}'_s s'obtient en appliquant la formule précédente à la fonction $F(\underline{x}) = \|\underline{x}\| - 1$ évaluée en \underline{X}' . L'expression de la jacobienne $J_x \in \mathcal{M}_{13}$ est donnée pour $j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket^2$,

$$J_{x_{1j}} = \frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial \|\underline{x}\| - 1}{\partial x_j} = \frac{x_j}{\|\underline{x}\|} \quad (4.15)$$

Ainsi, il vient au premier ordre :

$$F(\underline{X}') = \|\underline{X}'(S, t)\| - 1 \approx \|\underline{X}'_s(S, t)\| - 1 + \underline{t}(S) \cdot \underline{U}'_d(S, t) \quad (4.16)$$

D'après le calcul de l'équilibre statique du câble, les vecteurs tangent \underline{t} et normal \underline{n} au câble sont connus en fonction de l'abscisse curviligne $S_0 \in [0, L_{R0}]$, prise sur la configuration de référence \mathcal{C}_{R0} :

$$\underline{t}(S_0) = \frac{1}{\sqrt{F_x^2 + (F_y + \mu g S_0)^2}} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y + \mu g S_0 \end{pmatrix}, \quad S_0 \in [0, L_{R0}], \quad (4.17)$$

$$\underline{n}(S_0) = \underline{e}_z \wedge \underline{t} = \frac{1}{\sqrt{F_x^2 + (F_y + \mu g S_0)^2}} \begin{pmatrix} -(F_y + \mu g S_0) \\ F_x \end{pmatrix}, \quad S_0 \in [0, L_{R0}]. \quad (4.18)$$

$(\underline{t}, \underline{n}, \underline{e}_z)$ forme une base locale de Frenet attachée à chaque point du câble sur \mathcal{C}_{R0} . La dérivée des vecteurs de base par rapport à l'abscisse curviligne S_0 font intervenir la courbure statique du câble désignée par κ_s ,

$$\underline{t}'(S_0) = \begin{pmatrix} -\frac{F_x(F_y + \mu g S_0)\mu g}{(F_x^2 + (F_y + \mu g S_0)^2)\sqrt{F_x^2 + (F_y + \mu g S_0)^2}} \\ \frac{\mu g F_x^2}{(F_x^2 + (F_y + \mu g S_0)^2)\sqrt{F_x^2 + (F_y + \mu g S_0)^2}} \end{pmatrix} = \frac{\mu g F_x}{F_x^2 + (F_y + \mu g S_0)^2} \underline{n}(S_0) = \kappa_s(S_0) \underline{n}, \quad (4.19)$$

$$\underline{n}'(S_0) = -\frac{\mu g F_x}{F_x^2 + (F_y + \mu g S_0)^2} \underline{t}(S_0) = -\kappa_s(S_0) \underline{t}. \quad (4.20)$$

Les expressions des grandeurs statiques sont données en fonction de l'abscisse curviligne S_0 , prise sur la configuration de référence du calcul statique \mathcal{C}_{R0} . Ainsi, le choix de paramétrage des équations dynamiques par l'abscisse curviligne S sur la configuration statique déformée \mathcal{C}_R n'est pas adapté, il faut donc ré-écrire (4.5) en transportant les grandeurs dynamiques sur la configuration de référence \mathcal{C}_{R0} ,

$$EA \frac{d}{dS_0} \left((\|\underline{X}'(S_0, t)\| - 1) \frac{\underline{X}'(S_0, t)}{\|\underline{X}'(S_0, t)\|} \right) + \underline{f}_R(S_0, t) = \mu \frac{\partial^2 \underline{X}(S_0, t)}{\partial t^2}, \quad \forall (S_0, t) \in [0, L_{R0}] \times [0, +\infty[. \quad (4.21)$$

Dans la suite, \bullet' désignera la dérivation par rapport à $S_0 \in [0, L_{R0}]$, \bullet^s la dérivation par rapport au temps $t > 0$.

L'hypothèse d'un système isolé sans terme de dissipation est le point de départ pour l'expression des modes de vibration, qui correspondent aux petites perturbations dynamiques libres sans dissipation. Les termes d'amortissement et de forçage dynamique $\underline{f}_R^d(S_0, t)$ sont donc supprimés. Dans ces conditions, l'équation (4.21) s'écrit en fonction du champ de déplacement dynamique \underline{U}_d linéarisé autour de la position statique \underline{X}_s , en remplaçant les termes exprimés en fonction de la position courante \underline{X} par les développements de Taylor (4.13) et (4.16),

$$EA \left[\left((\|\underline{X}'_s\| - 1) + \underline{t} \cdot \underline{U}'_d \right) \left(\underline{t} + \frac{\underline{U}'_d}{\|\underline{X}'_s\|} - \underline{t} \frac{(\underline{U}'_d \cdot \underline{t})}{\|\underline{X}'_s\|} \right) \right]' + \underline{f}_R^s = \mu \underline{\ddot{U}}_d, \quad \forall (S_0, t) \in [0, L_{R0}] \times [0, +\infty[. \quad (4.22)$$

L'équilibre statique,

$$EA [(\|\underline{X}'_s\| - 1) \underline{t}]' + \underline{f}_R^s = \underline{0}, \quad (4.23)$$

simplifie les termes faisant intervenir le chargement extérieur d'origine statique \underline{f}_R^s dans (4.22),

$$EA \left[\underline{U}'_d \frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} + \underline{t} \frac{\underline{U}'_d \cdot \underline{t}}{\|\underline{X}'_s\|} \right]' = \mu \underline{\ddot{U}}_d, \quad \forall (S_0, t) \in [0, L_{R0}] \times [0, +\infty[. \quad (4.24)$$

Des manipulations sont effectuées sur le membre de gauche, sans reprendre le terme en facteur EA :

$$\begin{aligned} & \left[\underline{U}'_d \frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} + \underline{t} \frac{\underline{U}'_d \cdot \underline{t}}{\|\underline{X}'_s\|} \right]' \\ &= \underline{t} \left(\frac{\underline{U}''_d \cdot \underline{t} + \underline{U}'_d \cdot \underline{t}'}{\|\underline{X}'_s\|} - \frac{\|\underline{X}'_s\|' (\underline{U}'_d \cdot \underline{t})}{\|\underline{X}'_s\|^2} \right) + \underline{t}' \frac{\underline{U}'_d \cdot \underline{t}}{\|\underline{X}'_s\|} + \underline{U}'_d \frac{\|\underline{X}'_s\|'}{\|\underline{X}'_s\|^2} + \underline{U}''_d \left(\frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Par définition, $\|\underline{X}'_s\| = \underline{X}'_s \cdot \underline{t}$, soit $\|\underline{X}'_s\|' = \underline{X}''_s \cdot \underline{t} + \underline{X}'_s \cdot \underline{t}'$, soit en remplaçant dans (4.25),

$$\begin{aligned} & \left[\underline{U}'_d \frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} + \underline{t} \frac{\underline{U}'_d \cdot \underline{t}}{\|\underline{X}'_s\|} \right]' \\ &= \underline{t} \left(\frac{\underline{U}''_d \cdot \underline{t} + \underline{U}'_d \cdot \underline{t}'}{\|\underline{X}'_s\|} - \frac{(\underline{X}''_s \cdot \underline{t} + \underline{X}'_s \cdot \underline{t}')(\underline{U}'_d \cdot \underline{t})}{\|\underline{X}'_s\|^2} \right) + \underline{t}' \frac{\underline{U}'_d \cdot \underline{t}}{\|\underline{X}'_s\|} + \underline{U}'_d \frac{\underline{X}''_s \cdot \underline{t} + \underline{X}'_s \cdot \underline{t}'}{\|\underline{X}'_s\|^2} + \underline{U}''_d \left(\frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} \right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

En injectant le développement dans l'équation d'équilibre (4.24),

$$\begin{aligned} EA \left[\underline{t} \left(\frac{\underline{U}''_d \cdot \underline{t} + \underline{U}'_d \cdot \underline{t}'}{\|\underline{X}'_s\|} - \frac{(\underline{X}''_s \cdot \underline{t} + \underline{X}'_s \cdot \underline{t}')(\underline{U}'_d \cdot \underline{t})}{\|\underline{X}'_s\|^2} \right) + \underline{t}' \frac{\underline{U}'_d \cdot \underline{t}}{\|\underline{X}'_s\|} + \underline{U}'_d \frac{\underline{X}''_s \cdot \underline{t} + \underline{X}'_s \cdot \underline{t}'}{\|\underline{X}'_s\|^2} + \underline{U}''_d \left(\frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} \right) \right] \\ = \mu \ddot{\underline{U}}_d, \quad \forall (S_0, t) \in [0, L_{R0}] \times [0, +\infty[. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Le déplacement dynamique \underline{U}_d , ainsi que ses dérivées en temps et en espace, sont projetés dans le repère local de Frenet $(\underline{t}, \underline{n}, \underline{e}_z)$ attaché au câble,

$$\underline{U}_d = u_d \underline{t} + v_d \underline{n} + w_d \underline{e}_z, \quad (4.28)$$

avec u_d le déplacement dynamique longitudinal, v_d le déplacement dynamique transversal et w_d le déplacement dynamique hors plan.

Les dérivées en espace et en temps s'écrivent :

$$\dot{\underline{U}}_d = \dot{u}_d \underline{t} + \dot{v}_d \underline{n} + \dot{w}_d \underline{e}_z, \quad (4.29)$$

$$\ddot{\underline{U}}_d = \ddot{u}_d \underline{t} + \ddot{v}_d \underline{n} + \ddot{w}_d \underline{e}_z, \quad (4.30)$$

$$\underline{U}'_d = (u'_d \underline{t} + u_d \underline{t}') + (v'_d \underline{n} + v_d \underline{n}') + (w'_d \underline{e}_z) = (u'_d - \kappa_s v_d) \underline{t} + (v'_d + \kappa_s u_d) \underline{n} + w'_d \underline{e}_z, \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \underline{U}''_d &= (u'_d - \kappa_s v_d)' \underline{t} + (u'_d - \kappa_s v_d) \underline{t}' + (v'_d + \kappa_s u_d)' \underline{n} + (v'_d + \kappa_s u_d) \underline{n}' + w''_d \underline{e}_z \\ &= [(u'_d - \kappa_s v_d)' - \kappa_s (v'_d + \kappa_s u_d)] \underline{t} + [(v'_d + \kappa_s u_d)' + \kappa_s (u'_d - \kappa_s v_d)] \underline{n} + w''_d \underline{e}_z. \end{aligned} \quad (4.32)$$

(4.27) est projetée sur chaque vecteur de la base locale $(\underline{t}, \underline{n}, \underline{e}_z)$,

$$\begin{aligned} \mu \ddot{u}_d &= EA \left[\frac{(u'_d - \kappa_s v_d)' - \kappa_s (v'_d + \kappa_s u_d) + \kappa_s (v'_d + \kappa_s u_d)}{\|\underline{X}'_s\|} + \frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} \left((u'_d - \kappa_s v_d)' - \kappa_s (v'_d + \kappa_s u_d) \right) \right] \\ &= EA \left[(u'_d - \kappa_s v_d)' - \frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} \kappa_s (v'_d + \kappa_s u_d) \right], \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \mu \ddot{v}_d &= EA \left[\frac{\underline{X}''_s \cdot \underline{t} + \underline{X}'_s \cdot \underline{t}'}{\|\underline{X}'_s\|^2} (v'_d + \kappa_s u_d) + \frac{\kappa_s (u'_d - \kappa_s v_d)}{\|\underline{X}'_s\|} + \frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} \left((v'_d + \kappa_s u_d)' + \kappa_s (u'_d - \kappa_s v_d) \right) \right] \\ &= EA \left[\left(\frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} (v'_d + \kappa_s u_d) \right)' + \kappa_s (u'_d - \kappa_s v_d) \right], \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\mu \ddot{w}_d = EA \left[\frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} w''_d + \frac{\underline{X}''_s \cdot \underline{t} + \underline{X}'_s \cdot \underline{t}'}{\|\underline{X}'_s\|^2} w'_d \right] = EA \left(\frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} w'_d \right)'. \quad (4.35)$$

Les équations différentielles aux dérivées partielles (4.33), (4.34) et (4.35) sont linéaires en le champ de déplacement dynamique $\underline{U}_d = u_d \underline{t} + v_d \underline{n} + w_d \underline{e}_z$, inconnue du problème, et possèdent des coefficients variables en la variable d'espace S_0 . D'après (4.33) et (4.34), il existe un couplage entre les degrés de libertés longitudinal u_d et transversal

v_d .

Modes de vibration

Jusqu'ici, aucune condition n'a été donnée sur l'appartenance du champ de déplacement dynamique \underline{U}_d à un certain ensemble. La sélection des modes de vibration consiste à ajouter une condition sur le champ $\underline{U}_d \in \mathcal{CA}$ qui doit vérifier les conditions aux limites du domaine étudié. On parle alors de champ cinématiquement admissible.

Dans le cadre d'une recherche analytique des modes de vibration du câble selon un modèle décrit par les équations (4.33), (4.34) et (4.35), il faut apporter des hypothèses supplémentaires pour se ramener à des équations différentielles à coefficients constants et simplifier les calculs. Ces hypothèses sont notamment discutées par Irvine [107].

- La quantité faisant intervenir la mesure de déformation $\frac{(\|X'_s\| - 1)}{\|X'_s\|} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$ est supposée constante le long du câble, ce qui revient à considérer que la tension statique est indépendante de l'abscisse curviligne le long du câble. La quantité constante Δ est alors introduite,

$$\Delta^2 = EA \frac{(\|X'_s\| - 1)}{\|X'_s\|}. \quad (4.36)$$

Dans le cadre des lignes de transport par câbles, cette hypothèse est à discuter selon les paramètres de conception du système et de l'inclinaison du câble. Pour une portion de câble située entre deux véhicules successifs espacés d'une dizaine de mètres, l'hypothèse semble raisonnable. En revanche, pour une longue portée de téléphérique avec un fort dénivelée entre les extrémités, l'hypothèse peut être remise en question.

- La vibration transversale v_d est supposée prépondérante sur la vibration longitudinale u_d qui intervient alors au second ordre. L'équation dynamique (4.34) devient de première importance et régit le comportement dynamique du câble au premier ordre.

Saxon montre que pour des valeurs élevées du paramètre $\lambda = \frac{\Delta L \omega^2}{2g \tan(\alpha_0)} \gg 1$, où ΔL est la longueur horizontale séparant les deux extrémités d'un câble seul ancré aux bords et α_0 l'angle du câble à l'extrémité, le mouvement dynamique longitudinal $u_d = O(v_d/\lambda)$ [239]. Autrement dit, pour des câbles dont l'inclinaison est modérée, le mouvement dynamique longitudinal est négligeable et la contribution transversale de la perturbation dynamique est du premier ordre. L'étude de la littérature montre que la dynamique longitudinale est négligée dans la plupart des modèles rencontrés, notamment ceux proposés par Irvine [167].

- La variation de la courbure statique du câble κ_s est supposée négligeable,

$$\kappa'_s = 0. \quad (4.37)$$

Cette condition et son domaine de validité pour le transport par câbles pourront être discutés à partir des résultats de la forme statique des lignes.

- Il est fait la distinction entre les **vibrations symétriques** du câble, qui génèrent un incrément de tension dynamique non-nul, et les **vibrations anti-symétriques**, pour lesquelles l'incrément de tension dynamique est nul (Fig. 4.3).

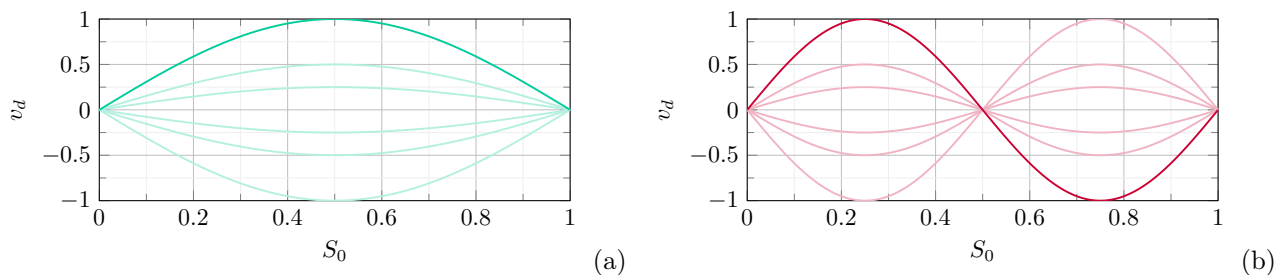


FIGURE 4.3: (a) Exemple de mouvement dynamique vertical symétrique induisant un incrément de tension T_d non-nul (b) Exemple de mouvement dynamique vertical anti-symétrique sans incrément de tension dynamique associé

Dans l'hypothèse des petites perturbations dynamiques, la tension du câble s'écrit :

$$T = EA\varepsilon \approx EA \left(\|\underline{X}'_s(S_0, t)\| - 1 + \underline{t}(S) \cdot \underline{U}'_d(S_0, t) \right). \quad (4.38)$$

Il est alors possible d'identifier la tension statique,

$$T_s(S_0) = EA \left(\|\underline{X}'_s(S_0, t)\| - 1 \right), \quad (4.39)$$

et l'incrément de tension dynamique correspondant,

$$T_d(S_0, t) = EA \left(\underline{t}(S_0) \cdot \underline{U}'_d(S_0, t) \right) = EA(u'_d - \kappa_s v_d). \quad (4.40)$$

De plus, l'incrément de tension dynamique est considéré comme constant sur la portion de câble (indépendant de l'abscisse curviligne S_0), tel que :

$$T_d(S_0, t) = T_d(t). \quad (4.41)$$

Pour rechercher les modes de vibration, les déplacements dynamiques sont exprimés par séparation des variables, en fonction des déformées spatiales (déformées modales) et de la pulsation ω , sous la forme d'une onde stationnaire où chaque point du câble oscille en phase,

$$\underline{\Phi}(S_0) = \Phi_u(S_0) \underline{t} + \Phi_v(S_0) \underline{n} + \Phi_w(S_0) \underline{e}_z, \quad (4.42)$$

$$u_d(S_0, t) = \Phi_u(S_0) e^{j\omega t}, \quad \forall (S_0, t) \in [0, L_{R0}] \times [0, +\infty[, \quad (4.43)$$

$$v_d(S_0, t) = \Phi_v(S_0) e^{j\omega t}, \quad \forall (S_0, t) \in [0, L_{R0}] \times [0, +\infty[, \quad (4.44)$$

$$w_d(S_0, t) = \Phi_w(S_0) e^{j\omega t}, \quad \forall (S_0, t) \in [0, L_{R0}] \times [0, +\infty[. \quad (4.45)$$

Modèle 1

D'après les équations dynamiques (4.33), (4.34) et (4.35), les mouvements hors-plan w_d sont découplés des mouvements longitudinal u_d et transversal v_d . D'après les hypothèses précédentes apportées au modèle, l'équation (4.35) ne fait pas intervenir l'incrément de tension dynamique $EA(u'_d - \kappa_s v_d)$. Ainsi, aucune distinction n'est à faire entre les vibrations symétriques et anti-symétriques pour le mouvement hors-plan. Dans ces conditions, l'équation (4.35) est ramenée à une équation différentielle d'ordre deux,

$$\mu\omega^2\Phi_w + \Delta^2\Phi_w'' = 0 \quad (4.46)$$

dont les solutions sont de la forme :

$$\Phi_w(S_0) = A_w \cos\left(\frac{\sqrt{\mu}\omega}{\Delta}S_0\right) + B_w \sin\left(\frac{\sqrt{\mu}\omega}{\Delta}S_0\right) \quad \forall S_0 \in [0, L_{R0}]. \quad (4.47)$$

Compte tenu de la forme de l'équation dynamique (4.46), qui est celle d'un problème de laplacien, et en adjoignant des conditions aux limites homogènes en déplacement $\Phi_w(0) = \Phi_w(L_{R0}) = 0$, les modes ainsi calculés pour le déplacement hors-plan du câble sont des **modes normaux**. Ils sont associés aux déformées modales $\Phi_{k,w}$ (vecteurs propres) normalisées par une norme \mathcal{L}^2 et aux pulsations propres ω_k (valeurs propres), avec $k \geq 1$:

$$\omega_k = \frac{k\Delta\pi}{\sqrt{\mu}L_{R0}}, \quad k \in \mathbf{N}_+^*, \quad (4.48)$$

$$\Phi_{k,w}(S_0) = \sqrt{\frac{2}{L_{R0}}} \sin\left(\frac{k\pi}{L_{R0}}S_0\right), \quad \forall S_0 \in [0, L_{R0}], \quad k \in \mathbf{N}_+^*. \quad (4.49)$$

Ces modes vérifient bien la condition d'orthogonalité selon le produit scalaire défini par la norme \mathcal{L}^2 ,

$$\int_0^{L_{R0}} \Phi_{i,w} \Phi_{j,w} dS_0 = 0, \quad \forall (i, j) \in \mathbf{N}_+^{*2}. \quad (4.50)$$

Dans le cas de vibrations anti-symétriques, qui n'impliquent pas d'incrément de tension dynamique, les équations (4.33) et (4.34) du mouvement plan se ré-écrivent,

$$\mu\omega^2 \Phi_u - \Delta^2 \kappa_s (\Phi'_v + \kappa_s \Phi_u) = 0, \quad (4.51)$$

$$\mu\omega^2 \Phi_v + \Delta^2 (\Phi'_v + \kappa_s \Phi_u)' = 0. \quad (4.52)$$

D'après l'hypothèse sur la prépondérance du mouvement transversal sur le mouvement longitudinal, le terme en Φ'_u dans (4.52) est supposé du second ordre et est supprimé, tout comme l'équation régissant le mouvement longitudinal (4.51). C'est la condition de compatibilité donnée par l'annulation de la tension dynamique $\Phi'_u - \kappa_s \Phi_v = 0$ qui assure le couplage du mouvement transversal avec le mouvement longitudinal,

$$\begin{cases} \mu\omega^2 \Phi_v + \Delta^2 \Phi_v'' = 0 \\ \Phi'_u - \kappa_s \Phi_v = 0. \end{cases} \quad (4.53)$$

Les solutions en Φ_v sont données par l'équation différentielle d'ordre deux,

$$\Phi_v(S_0) = A_v \cos\left(\frac{\sqrt{\mu}\omega}{\Delta} S_0\right) + B_v \sin\left(\frac{\sqrt{\mu}\omega}{\Delta} S_0\right), \quad \forall S_0 \in [0, L_{R0}]. \quad (4.54)$$

Les solutions en Φ_u ne sont pas issues de la résolution d'une équation similaire à un problème de type laplacien, mais par la condition d'annulation de l'incrément de tension dynamique $\Phi'_u - \kappa_s \Phi_v = 0$,

$$\Phi_u(S_0) = A_v \frac{\kappa_s \Delta}{\sqrt{\mu}\omega} \sin\left(\frac{\sqrt{\mu}\omega}{\Delta} S_0\right) - B_v \frac{\kappa_s \Delta}{\sqrt{\mu}\omega} \cos\left(\frac{\sqrt{\mu}\omega}{\Delta} S_0\right) + A_u, \quad \forall S_0 \in [0, L_{R0}]. \quad (4.55)$$

Les modes couplés $(\Phi_{k,u}, \Phi_{k,v})_{k \geq 1}$, obtenus en écrivant le problème aux limites sous jacent, ne sont donc pas des modes normaux tels que précédemment définis. En particulier, ils ne vérifient pas les conditions d'orthogonalité :

$$\int_0^{L_{R0}} \Phi_{i,u} \Phi_{j,u} + \Phi_{i,v} \Phi_{j,v} dS_0 = 0, \quad \forall (i, j) \in \mathbf{N}_+^{*2}, \quad (4.56)$$

et ne forment donc pas une base orthogonale de l'espace des déplacements dynamiques.

Dans le cas de vibrations symétriques avec un incrément de tension dynamique, les équations (4.33) et (4.34) se ré-écrivent,

$$\mu\omega^2 \Phi_u + EA(\Phi'_u - \kappa_s \Phi_v)' - \Delta^2 \kappa_s (\Phi'_v + \kappa_s \Phi_u) = 0, \quad (4.57)$$

$$\mu\omega^2 \Phi_v + \Delta^2 (\Phi'_v + \kappa_s \Phi_u)' + EA\kappa_s (\Phi'_u - \kappa_s \Phi_v) = 0. \quad (4.58)$$

D'après l'hypothèse sur la prépondérance du mouvement transversal sur le mouvement longitudinal, le terme en Φ'_u dans (4.58) est supposé du second ordre et est supprimé, tout comme l'équation régissant le mouvement longitudinal (4.57). C'est la condition de compatibilité sur la tension dynamique $T_d(t) = EA(\Phi'_u - \kappa_s \Phi_v)$ qui assure le couplage avec le mouvement longitudinal,

$$\begin{cases} \mu\omega^2 \Phi_v + \Delta^2 \Phi_v'' + \kappa_s T_d = 0, \\ T_d = EA(\Phi'_u - \kappa_s \Phi_v). \end{cases} \quad (4.59)$$

De la même façon que pour les vibrations anti-symétriques, les solutions en Φ_v sont données par l'équation différentielle du second ordre,

$$\Phi_v(S_0) = A_v \cos\left(\frac{\sqrt{\mu}\omega}{\Delta} S_0\right) + B_v \sin\left(\frac{\sqrt{\mu}\omega}{\Delta} S_0\right) - \frac{\kappa_s}{\mu\omega^2} T_d, \quad \forall S_0 \in [0, L_{R0}]. \quad (4.60)$$

Les solutions en Φ_u sont données par le couplage avec Φ_v introduit par l'incrément de tension dynamique,

$$\Phi_u(S_0) = A_v \frac{\kappa_s \Delta}{\sqrt{\mu\omega}} \sin\left(\frac{\sqrt{\mu\omega}}{\Delta} S_0\right) - B_v \frac{\kappa_s \Delta}{\sqrt{\mu\omega}} \cos\left(\frac{\sqrt{\mu\omega}}{\Delta} S_0\right) + \left(\frac{1}{EA} - \frac{\kappa_s^2}{\mu\omega^2}\right) T_d S_0 + A_u, \quad \forall S_0 \in [0, L_{R0}]. \quad (4.61)$$

Il est important de préciser qu'en présence de couplages, entre les degrés de libertés longitudinal et transversal par la tension dynamique, les propriétés d'orthogonalité des modes normaux sont perdues pour ce modèle de câble. Les modes obtenus peuvent servir de base de projection des équations dynamiques du câble même s'ils ne diagonalisent pas complètement le système projeté. Les résultats obtenus par Bertrand *et al.* [232] montrent une cohérence des résultats obtenus par différences finies et selon une approche analytique, par réduction de modèle sur les modes analytiques obtenus sur une portée de câble ancrée à ses extrémités.

Modèle 2 : prise en compte de la dynamique longitudinale

L'hypothèse selon laquelle le mouvement dynamique longitudinal est négligeable vis-à-vis de la dynamique verticale a précédemment été formulée afin d'exprimer les modes de vibration du câble fixe. Pour une application au transport par câbles, les échanges de câble entre les portées sont autorisés par la nature du contact avec les appuis intermédiaires, qui permet le roulement du câble sur les balanciers. Par ailleurs, les angles d'inclinaison du câble ne sont pas forcément faibles.

Dans ce contexte, la prise en compte de la dynamique longitudinale semble raisonnable pour le calcul des modes de lignes. Les équations (4.57) et (4.58) qui décrivent la dynamique du câble selon les directions longitudinale et verticale, se ré-écrivent alors en fonction de la tension dynamique T_d ,

$$\mu\omega^2 \Phi_u + T_d' - \Delta^2 \kappa_s (\Phi_v' + \kappa_s \Phi_u) = 0, \quad (4.62)$$

$$\mu\omega^2 \Phi_v + \Delta^2 (\Phi_v' + \kappa_s \Phi_u)' + \kappa_s T_d = 0. \quad (4.63)$$

Une première stratégie est de supposer que le terme de tension dynamique $T_d = EA(\Phi_u' - \kappa_s \Phi_v)$ est une constante. Sous cette hypothèse, (4.62) donne la relation suivante :

$$\Phi_v' = \left(\frac{\mu\omega^2 - \Delta^2 \kappa_s^2}{\Delta^2 \kappa_s} \right) \Phi_u. \quad (4.64)$$

En dérivant par rapport à l'abscisse curviligne, et d'après les hypothèses sur l'indépendance des paramètres Δ et κ_s vis-à-vis de S_0 ,

$$\Phi_v'' = \left(\frac{\mu\omega^2 - \Delta^2 \kappa_s^2}{\Delta^2 \kappa_s} \right) \Phi_u'. \quad (4.65)$$

L'expression de Φ_u' est remplacée dans (4.63),

$$\mu\omega^2 \Phi_v + \frac{\mu\omega^2 \Delta^2}{\mu\omega^2 - \Delta^2 \kappa_s^2} \Phi_v'' + \kappa_s T_d = 0, \quad (4.66)$$

puis l'équation différentielle du second ordre est résolue pour trouver l'expression du déplacement vertical,

$$\Phi_v(S_0) = A_v \cos\left(\frac{\sqrt{\mu\omega^2 - \Delta^2 \kappa_s^2}}{\Delta} S_0\right) + B_v \sin\left(\frac{\sqrt{\mu\omega^2 - \Delta^2 \kappa_s^2}}{\Delta} S_0\right) - \frac{\kappa_s T_d}{\mu\omega^2}, \quad \forall S_0 \in [0, L_{R0}]. \quad (4.67)$$

Finalement, l'équation de compatibilité sur l'incrément de tension dynamique T_d constant est utilisée pour

exprimer le déplacement modal longitudinal,

$$\begin{aligned} \Phi_u(S_0) = & A_v \kappa_s \frac{\Delta}{\sqrt{\mu\omega^2 - \Delta^2\kappa_s^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{\mu\omega^2 - \Delta^2\kappa_s^2}}{\Delta} S_0\right) \\ & - B_v \kappa_s \frac{\Delta}{\sqrt{\mu\omega^2 - \Delta^2\kappa_s^2}} \cos\left(\frac{\sqrt{\mu\omega^2 - \Delta^2\kappa_s^2}}{\Delta} S_0\right) + \left(\frac{T_d}{EA} - \frac{\kappa_s^2 T_d}{\mu\omega^2}\right) S_0, \quad \forall S_0 \in [0, L_{R0}]. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Modèle 3 : prise en compte de la dynamique longitudinale et incrément de tension variable

Un autre modèle plus général est envisagé afin de décrire le couplage entre la dynamique longitudinale et la dynamique verticale, sans formuler d'hypothèses sur l'incrément de tension dynamique T_d . La constante T_d est ainsi remplacée par son expression en fonction des déplacements dynamiques. La distinction entre les vibrations symétriques et anti-symétriques n'est plus faite.

Le nouveau système d'équations différentielles couplées à résoudre pour déterminer la dynamique du câble est :

$$\begin{cases} \mu\omega^2\Phi_u + EA(\Phi_u'' - \kappa_s\Phi_v') - \Delta^2\kappa_s(\Phi_v' + \kappa_s\Phi_u) = 0 \\ \mu\omega^2\Phi_v + \Delta^2(\Phi_v' + \kappa_s\Phi_u)' + \kappa_s EA(\Phi_u' - \kappa_s\Phi_v) = 0. \end{cases} \quad (4.69)$$

De la première équation différentielle décrivant la dynamique longitudinale, il vient :

$$\Phi_v' = \frac{(\mu\omega^2 - \Delta^2\kappa_s^2)\Phi_u + EA\Phi_u''}{(EA + \Delta^2)\kappa_s}. \quad (4.70)$$

En notant :

$$\mathcal{A} = \frac{\mu\omega^2 - \Delta^2\kappa_s^2}{(EA + \Delta^2)\kappa_s}, \quad (4.71)$$

et

$$\mathcal{B} = \frac{EA}{(EA + \Delta^2)\kappa_s}, \quad (4.72)$$

la première équation différentielle décrivant la dynamique longitudinale du câble dans le système (4.69) se ré-écrit :

$$\Phi_v'' = \mathcal{A}\Phi_u' + \mathcal{B}\Phi_u'''. \quad (4.73)$$

En introduisant :

$$\mathcal{C} = \mu\omega^2 - \kappa_s^2 EA, \quad (4.74)$$

$$\mathcal{D} = \Delta^2, \quad (4.75)$$

$$\mathcal{E} = (\Delta^2 + EA)\kappa_s, \quad (4.76)$$

la seconde équation différentielle décrivant la dynamique verticale du câble dans le système (4.69) se ré-écrit :

$$\mathcal{C}\Phi_v + \mathcal{D}\Phi_v'' + \mathcal{E}\Phi_u' = 0. \quad (4.77)$$

En remplaçant Φ_v'' par son expression déduite de (4.73), l'équation (4.77) s'écrit :

$$\mathcal{C}\Phi_v + \mathcal{D}[\mathcal{A}\Phi_u' + \mathcal{B}\Phi_u'''] + \mathcal{E}\Phi_u' = 0. \quad (4.78)$$

Après dérivation de (4.78) par rapport à l'abscisse curviligne S_0 et en remplaçant Φ_v' par son expression (4.73), une équation différentielle d'ordre quatre en Φ_u est obtenue,

$$\Phi_u'''' + \frac{\mathcal{D}\mathcal{A} + \mathcal{C}\mathcal{B} + \mathcal{E}}{\mathcal{D}\mathcal{B}}\Phi_u'' + \frac{\mathcal{C}\mathcal{A}}{\mathcal{D}\mathcal{B}}\Phi_u = 0. \quad (4.79)$$

Le discriminant $\left(\frac{\mathcal{D}\mathcal{A}+\mathcal{C}\mathcal{B}+\mathcal{E}}{\mathcal{D}\mathcal{B}}\right)^2 - 4\frac{\mathcal{C}\mathcal{A}}{\mathcal{D}\mathcal{B}} > 0$. Ainsi, avec :

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mathcal{D}\mathcal{A}+\mathcal{C}\mathcal{B}+\mathcal{E}}{\mathcal{D}\mathcal{B}}\right) + \sqrt{\left(\frac{\mathcal{D}\mathcal{A}+\mathcal{C}\mathcal{B}+\mathcal{E}}{\mathcal{D}\mathcal{B}}\right)^2 - 4\frac{\mathcal{C}\mathcal{A}}{\mathcal{D}\mathcal{B}}}\right]}, \quad (4.80)$$

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mathcal{D}\mathcal{A}+\mathcal{C}\mathcal{B}+\mathcal{E}}{\mathcal{D}\mathcal{B}}\right) - \sqrt{\left(\frac{\mathcal{D}\mathcal{A}+\mathcal{C}\mathcal{B}+\mathcal{E}}{\mathcal{D}\mathcal{B}}\right)^2 - 4\frac{\mathcal{C}\mathcal{A}}{\mathcal{D}\mathcal{B}}}\right]}, \quad (4.81)$$

les racines de l'équation caractéristique $\pm i\lambda$ et $\pm i\delta$ sont donc imaginaires et la solution à (4.79) s'exprime comme une combinaison linéaire de fonctions sinus et cosinus,

$$\Phi_u(S_0) = A_u \cos(\lambda S_0) + B_u \sin(\lambda S_0) + C_u \cos(\delta S_0) + D_u \sin(\delta S_0) \quad \forall S_0 \in [0, L_{R0}]. \quad (4.82)$$

Par la relation (4.70), le déplacement modal vertical s'exprime en fonction des quatre inconnues modales A_u, B_u, C_u, D_u en fixant la constante d'intégration à zéro afin de respecter le nombres de constantes qui permettent d'obtenir un problème mécanique bien posé,

$$\begin{aligned} \Phi_v(S_0) = & A_u \left(\frac{\mathcal{A}}{\lambda} - \mathcal{B}\lambda\right) \sin(\lambda S_0) + B_u \left(-\frac{\mathcal{A}}{\lambda} + \mathcal{B}\lambda\right) \cos(\lambda S_0) \\ & + C_u \left(\frac{\mathcal{A}}{\delta} - \mathcal{B}\delta\right) \sin(\delta S_0) + D_u \left(-\frac{\mathcal{A}}{\delta} + \mathcal{B}\delta\right) \cos(\delta S_0), \quad \forall S_0 \in [0, L_{R0}]. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Modèle 3 avec les non-linéarités géométriques

Les non-linéarités géométriques sont ajoutées aux équations du modèle précédent :

$$\begin{aligned} \mu \ddot{u}_d = & EA \left[(u'_d - \kappa_s v_d)' - \frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} \kappa_s (v'_d + \kappa_s u_d) \right] \\ & + \underbrace{EA \left[\left(\frac{(v'_d + \kappa_s u_d)^2 + w_d'^2}{2 \|\underline{X}'_s\|^2} \right)' - \frac{\kappa_s}{\|\underline{X}'_s\|^2} (u'_d - \kappa_s v_d)(v'_d + \kappa_s u_d) \right]}_{\text{non-linéarités géométriques d'ordre 2}} \\ & + \underbrace{EA \left[\left(\frac{(u'_d - \kappa_s v_d)^2 + w_d'^2}{2 \|\underline{X}'_s\|^3} \right)' \left[(v'_d + \kappa_s u_d)^2 + w_d'^2 \right] + \frac{\kappa_s (v'_d + \kappa_s u_d)}{2 \|\underline{X}'_s\|^3} \left[2(u'_d - \kappa_s v_d)^2 - (v'_d + \kappa_s u_d)^2 - w_d'^2 \right] \right]}_{\text{non-linéarités géométriques d'ordre 3}}, \end{aligned} \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} \mu \ddot{v}_d = & EA \left[\left(\frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} (v'_d + \kappa_s u_d) \right)' + \kappa_s (u'_d - \kappa_s v_d) \right] \\ & + \underbrace{EA \left[\left(\frac{1}{\|\underline{X}'_s\|^2} (u'_d - \kappa_s v_d)(v'_d + \kappa_s u_d) \right)' + \frac{\kappa_s}{\|\underline{X}'_s\|^2} \left(-3(u'_d - \kappa_s v_d)^2 + 2[(v'_d + \kappa_s u_d)^2 + w_d'^2] \right) \right]}_{\text{non-linéarités géométriques d'ordre 2}} \\ & + \underbrace{EA \left[\left(\frac{(v'_d + \kappa_s u_d)}{2 \|\underline{X}'_s\|^3} \left[(v'_d + \kappa_s u_d)^2 + w_d'^2 - 2(u'_d - \kappa_s v_d)^2 \right] \right)' - \frac{\kappa_s (u'_d - \kappa_s v_d)}{\|\underline{X}'_s\|^3} \left[(v'_d + \kappa_s u_d)^2 + w_d'^2 \right] \right]}_{\text{non-linéarités géométriques d'ordre 3}}, \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned} \mu \ddot{w}_d = EA \left(\frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} w'_d \right)' + \underbrace{EA \left(\frac{1}{\|\underline{X}'_s\|^2} (u'_d - \kappa_s v_d) w'_d \right)'}_{\text{non-linéarités géométriques d'ordre 2}} \\ + \underbrace{EA \left(\frac{w'_d}{2 \|\underline{X}'_s\|^3} \left[(v'_d + \kappa_s u_d)^2 + w_d'^2 - 2(u'_d - \kappa_s v_d)^2 \right] \right)'}_{\text{non-linéarités géométriques d'ordre 3}} \end{aligned} \quad (4.86)$$

4.1.2 Formulation dynamique d'un élément de câble mobile

Le modèle dynamique d'un élément de **câble mobile**, c'est-à-dire les équations qui régissent le mouvement d'un câble étudié à partir d'une référence mobile pour laquelle les propriétés du mouvement sont supposées connues (champ de vitesse, accélération instantanée), est abordé dans la sous-section 4.1.2 (Fig. 4.4, Fig. 4.5, Fig. 4.7). Les hypothèses de départ formulées en 4.1.1 pour un câble fixe demeurent valables.

Équilibre stationnaire d'un câble mobile en translation à vitesse constante

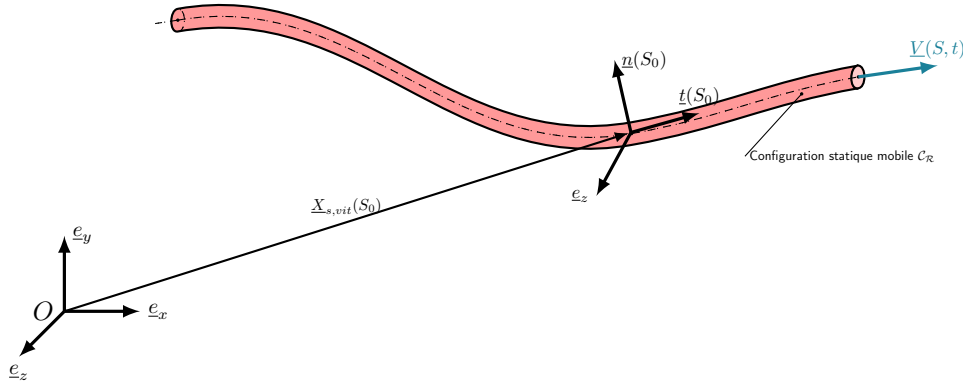


FIGURE 4.4: Translation de la référence statique à la vitesse stationnaire V_0

Le câble est supposé être en translation selon un champ de vitesse :

$$\underline{V}(S, t) = V_0(S, t) \underline{t}(S), \quad (4.87)$$

avec S l'abscisse curviligne et \underline{t} le vecteur tangent sur sa configuration courante mobile \mathcal{C}_R . Le terme inertiel introduit par la mise en vitesse dans l'équation décrivant l'équilibre statique est donné par (G.9), selon une description eulérienne,

$$\underline{a}(S) = \frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial t} \frac{\partial \underline{V}}{\partial S}. \quad (4.88)$$

Par définition de la vitesse, $\|\underline{V}(S, t)\| = \frac{\partial S}{\partial t}$. En notant, $\|\underline{V}(S, t)\| = V_0$, (4.88) s'écrit,

$$\underline{a}(S) = \frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + V_0 \frac{\partial \underline{V}}{\partial S} = \frac{\partial V_0}{\partial t} \underline{t} + V_0 \frac{\partial \underline{t}}{\partial t} + V_0 \left(\frac{\partial V_0}{\partial S} \underline{t} + V_0 \frac{\partial \underline{t}}{\partial S} \right). \quad (4.89)$$

Pour permettre des développements analytiques, les hypothèses suivantes sont formulées :

- La transformation $\underline{X}_{s,vit} = \Phi_1(\underline{X}_s, \underline{V}(S))$ est indépendante du temps.
- $\|\underline{V}\| = V_0$ est indépendante de S et de t .

L'équation (4.89) qui donne l'accélération du milieu s'écrit alors :

$$\underline{a}(S) = V_0^2 \frac{\partial \underline{t}}{\partial S}. \quad (4.90)$$

(4.90) est exprimée en fonction de la variable eulérienne S . En adoptant un point de vue lagrangien par un changement de variable avec S_0 l'abscisse curviligne prise sur la configuration de référence statique fixe C_{R0} , \bullet' désignant la dérivation par rapport S_0 ,

$$\underline{A}(S_0) = V_0^2 \frac{\kappa_{s,vit}(S_0)}{\|X_{s,vit}(S_0)'\|} \underline{n}(S_0). \quad (4.91)$$

Dans ces conditions, l'équation (4.5) s'exprime en présence d'un terme d'inertie introduit par la mise en vitesse de translation, connue en entrée du modèle et indépendante du temps,

$$EA \frac{d}{dS_0} \left((\|X_{s,vit}'(S_0)\| - 1) \frac{X_{s,vit}'(S_0)}{\|X_{s,vit}'(S_0)\|} \right) + \underline{f}_R^s(S_0) - \mu_R \frac{V_0^2 \kappa_{s,vit}(S_0)}{\|X_{s,vit}'(S_0)'\|} \underline{n}(S_0) = \underline{0}, \quad \forall S_0 \in [0, L_{R0}]. \quad (4.92)$$

Afin d'aller plus loin dans les développements analytiques, il est supposé que :

- La courbure $\kappa_{s,vit}$ est indépendante de l'abscisse curviligne S_0 .
- $\|X_{s,vit}'(S_0)\| = 1$ dans le calcul de la contribution inertielle : l'allongement du câble sous l'effet de la mise en vitesse n'est pas pris en compte.

(4.92) est exprimée dans le plan $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$, en fonction de l'inconnue en position,

$$\underline{X}_{s,vit} = x_{s,vit}(S_0) \underline{e}_x + y_{s,vit}(S_0) \underline{e}_y, \quad (4.93)$$

et par utilisation de la relation vectorielle,

$$\underline{t}(S_0)' = \kappa_{s,vit} \underline{n}(S_0) : \quad (4.94)$$

$$\left(\frac{EA \left(\sqrt{x_{s,vit}'^2 + y_{s,vit}'^2} - 1 \right) - \mu V_0^2}{\sqrt{x_{s,vit}'^2 + y_{s,vit}'^2}} \right) \begin{pmatrix} x_{s,vit}' \\ y_{s,vit}' \end{pmatrix} = \underline{f}_R^s S_0 + \begin{pmatrix} F_x^* \\ F_y^* \end{pmatrix}, \quad \forall S_0 \in [0, L_{R0}], \quad (4.95)$$

avec F_x^* , F_y^* les efforts extérieurs aux bords corrigés par les effets d'inertie et $\underline{f}_R^s \in (O, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$ le chargement linéique extérieur.

Sans tenir compte des effets élastiques, pour un chargement linéique uniforme sous la forme $\underline{f}_R^s = -\mu g \underline{e}_y$, les formules de chaînette inextensible corrigées par les effets inertiels donnent la déformée et la tension du câble,

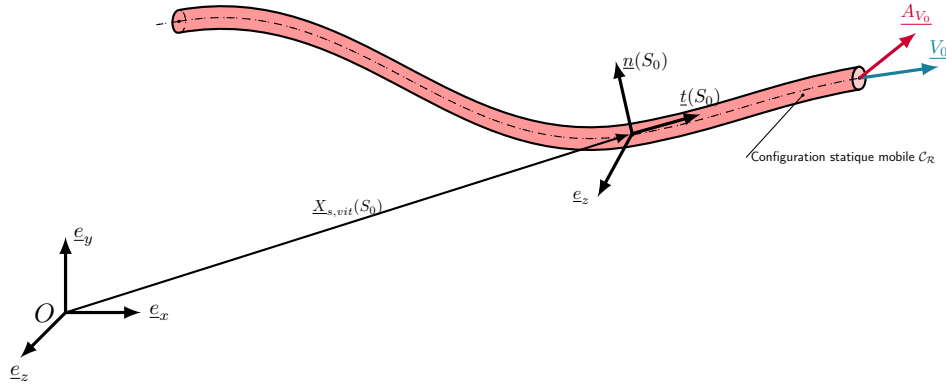
$$y_{s,vit}(x) = \tau^* \cosh \left(\frac{x}{\tau^*} + K_1^* \right) + K_2^*, \quad \forall x \in [x_A, x_B], \quad (4.96)$$

$$N^*(x) = \mu g \tau^* \cosh \left(\frac{x}{\tau^*} + K_1^* \right), \quad \forall x \in [x_A, x_B]. \quad (4.97)$$

La tension $N^*(x) = N(x) - \mu V_0^2$ se décompose en la valeur de la composante normale de l'effort élastique dans le câble et la contribution inertielle. L'effort normal de tension associée à la partie élastique régnant dans le câble est ainsi donné par :

$$N(x) = \mu g \tau^* \cosh \left(\frac{x}{\tau^*} + K_1^* \right) + \mu V_0^2 = \sqrt{F_x^{*2} + (F_y^* + \mu g S_0)^2} + \mu V_0^2. \quad (4.98)$$

La mise en vitesse du câble impose un nouvel équilibre statique au câble, guidé par une modification de la tension. Une première correction du modèle de câble fixe pour rendre compte du caractère mobile de ce dernier est d'actualiser la référence statique C_R afin de constater l'effet d'une mise en vitesse stationnaire sur les modes de vibration du câble fixe (correction statique).


 FIGURE 4.5: Translation de la référence statique à la vitesse instantanée V_0 avec une accélération A_{V_0}

Équilibre stationnaire d'un câble mobile en translation accélérée

Sous l'hypothèse d'un câble mobile qui se déplace à une vitesse instantanée V_0 soumise à une variation $\frac{\partial V_0}{\partial t} = A_{V_0}$, un terme est ajouté à l'expression (4.90) de l'accélération eulérienne,

$$\underline{a}(S) = \frac{\partial V_0}{\partial t} \underline{t} + V_0^2 \frac{\partial \underline{t}}{\partial S} = A_{V_0} \underline{t} + V_0^2 \frac{\partial \underline{t}}{\partial S}. \quad (4.99)$$

L'équation (4.95) s'écrit alors en utilisant la relation $\underline{n}(S_0)' = -\kappa_{s,vit} \underline{t}(S_0)$ pour intégrer le terme issu de l'accélération A_{V_0} ,

$$\left(\frac{EA \left(\sqrt{x_{s,vit}'^2 + y_{s,vit}'^2} - 1 \right) - \mu V_0^2}{\sqrt{x_{s,vit}'^2 + y_{s,vit}'^2}} \right) \begin{pmatrix} x_{s,vit}' \\ y_{s,vit}' \end{pmatrix} - \frac{\mu A_{V_0}}{\kappa_{s,vit} \sqrt{x_{s,vit}'^2 + y_{s,vit}'^2}} \begin{pmatrix} -y_{s,vit}' \\ x_{s,vit}' \end{pmatrix} = \underline{f}_R^s S_0 + \begin{pmatrix} \hat{F}_x^* \\ \hat{F}_y^* \end{pmatrix}, \quad \forall S_0 \in [0, L_{R0}]. \quad (4.100)$$

(4.100) ne possède pas de solution simple.

En détaillant les différentes contributions au bord issues de l'intégration, réunies dans $\begin{pmatrix} \hat{F}_x^* & \hat{F}_y^* \end{pmatrix}^T$, le terme :

$$-\frac{\mu A_{V_0}}{\kappa_{s,vit}} [\underline{n}(S_0) - \underline{n}(0)], \quad (4.101)$$

introduit dans le membre de gauche de l'équation (4.100), est simplifié en supposant qu'il ne dépend pas de l'abscisse curviligne S_0 et est porté par la direction tangente au câble \underline{t} .

En effet, la relation :

$$\underline{n}' = -\kappa_{s,vit} \underline{t}, \quad (4.102)$$

avec $\kappa_{s,vit}$ la courbure de la position occupée par le câble, permet d'exprimer de façon approchée le vecteur $\underline{n}(S_0) - \underline{n}(0)$ à l'échelle de la portion de câble, approchée par un arc de cercle (Fig. 4.6),

$$\underline{n}(S_0) - \underline{n}(0) \approx -\Delta\alpha \underline{t}(S_0), \quad (4.103)$$

où la courbure $\kappa_{s,vit}$ est donnée par $\frac{\Delta\alpha}{\Delta S}$, avec ΔS la longueur de câble sur la portion, $\Delta\alpha$ la variation de l'angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale α de part et d'autre de la portion considérée du câble, tel que

$$\underline{t} = \cos(\alpha) \underline{e}_x + \sin(\alpha) \underline{e}_y, \quad (4.104)$$

$$\underline{n} = -\sin(\alpha) \underline{e}_x + \cos(\alpha) \underline{e}_y. \quad (4.105)$$

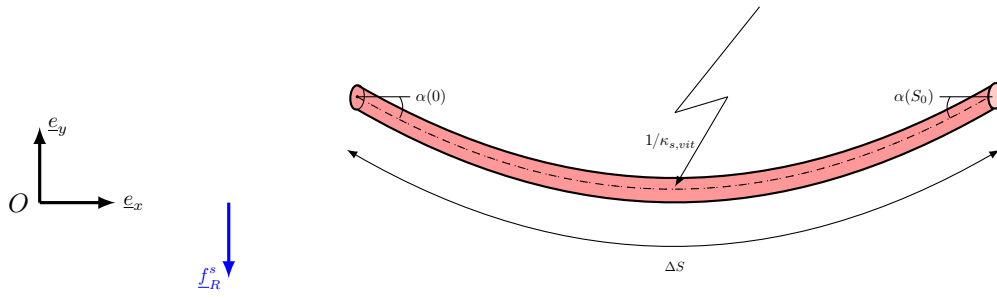


FIGURE 4.6: Hypothèse simplificatrice sur la géométrie d'une portion de câble

L'équation (4.100) s'écrit ainsi :

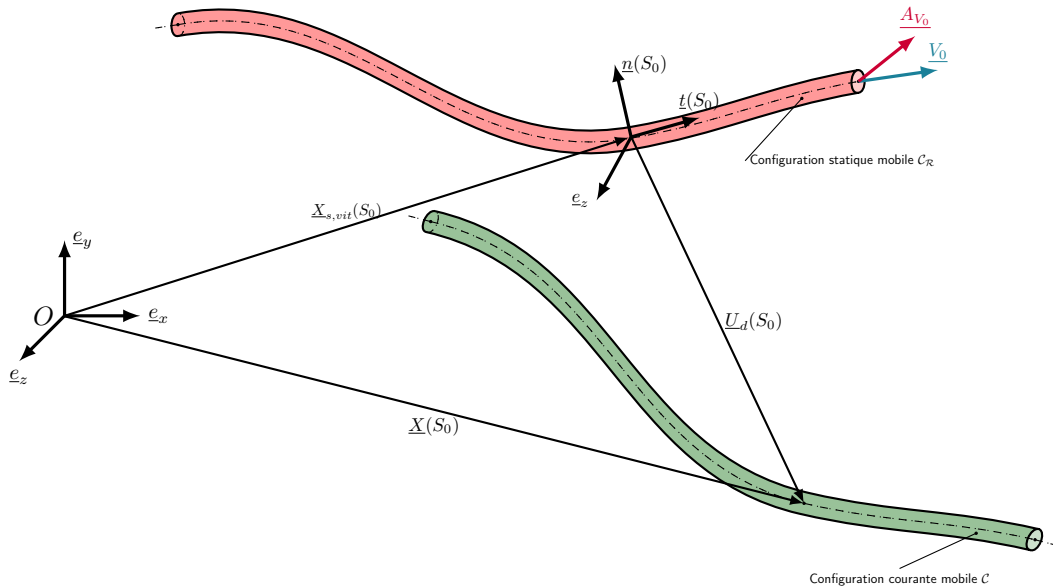
$$\left(\frac{EA \left(\sqrt{x'_{s,vit}{}^2 + y'_{s,vit}{}^2} - 1 \right) - \mu V_0^2 + \frac{\mu A V_0 \Delta \alpha}{\kappa_s}}{\sqrt{x'_{s,vit}{}^2 + y'_{s,vit}{}^2}} \right) \begin{pmatrix} x'_{s,vit} \\ y'_{s,vit} \end{pmatrix} = \underline{f}_R^s S_0 + \begin{pmatrix} F_x^* \\ F_y^* \end{pmatrix}, \quad \forall S_0 \in [0, L_{R0}], \quad (4.106)$$

avec un effet de correction par l'accélération instantanée A_{V_0} de l'effort de tension $N(x)$ porté selon la direction tangentielle au câble \underline{t} ,

$$N(x) = \mu g \tau^* \cosh \left(\frac{x}{\tau^*} + K_1^* \right) + \mu V_0^2 - \frac{\mu A V_0 \Delta \alpha}{\kappa_s}, \quad \forall x \in [x_A, x_B]. \quad (4.107)$$

Les équations de chaînettes s'appliquent comme précédemment avec la mise en vitesse V_0 .

Dynamique d'un câble mobile


 FIGURE 4.7: Position courante obtenue par un déplacement dynamique autour d'une référence à la vitesse instantanée V_0 avec une accélération A_{V_0}

L'état statique d'un câble, soumis à une vitesse $\underline{V} = \pm V_0 \underline{t}$ de position $\underline{X}_{s,vit}$ sur la configuration \mathcal{C}_R , est supposé connu par le calcul statique précédent. L'étude du mouvement dynamique de la configuration courante \mathcal{C}_d , occupant la position \underline{X} , est réalisée à partir de la référence statique mobile $\underline{X}_{s,vit}$. Le nouveau paramètre de référence est l'abscisse curviligne S prise sur la déformée statique mobile \mathcal{C}_R . D'après (G.14), le champ

d'accélération s'écrit :

$$\underline{A}(S, t) = \frac{\partial^2 \underline{X}}{\partial t^2}(S, t) + 2V_0 \frac{\partial^2 \underline{X}}{\partial S \partial t}(S, t) + V_0^2 \frac{\partial^2 \underline{X}}{\partial S^2}. \quad (4.108)$$

Dans le cas d'une vitesse $V_0(t)$ dépendante du temps, un terme $\frac{\partial V_0}{\partial t} \frac{\partial \underline{X}}{\partial S}$ est ajouté à (4.108). En injectant l'expression de l'accélération avec les termes convectifs et la dérivée mixte introduits par la mise en vitesse de la référence au calcul dynamique dans (4.5), il vient l'équation dynamique :

$$\begin{aligned} EA \frac{d}{dS} \left((\|\underline{X}'(S, t)\| - 1) \frac{\underline{X}'(S, t)}{\|\underline{X}'(S, t)\|} \right) + \underline{f}_R^s(S) \\ = \mu \frac{\partial^2 \underline{X}}{\partial t^2}(S, t) + 2\mu V_0 \frac{\partial^2 \underline{X}}{\partial S \partial t}(S, t) + \mu V_0^2 \frac{\partial^2 \underline{X}}{\partial S^2} + \mu \frac{\partial V_0}{\partial t} \frac{\partial \underline{X}}{\partial S}, \quad \forall (S, t) \in [0, L_R] \times [0, +\infty[. \end{aligned} \quad (4.109)$$

La position dynamique \underline{X} est écrite en fonction de la position statique mobile $\underline{X}_{s,vit}$ et du déplacement dynamique \underline{U}_d ,

$$\underline{X} = \underline{X}_{s,vit}(S) + \underline{U}_d(S, t), \quad (4.110)$$

soit :

$$\begin{aligned} EA \frac{d}{dS} \left((\|\underline{X}'_{s,vit}(S) + \underline{U}'_d(S, t)\| - 1) \frac{\underline{X}'_{s,vit}(S) + \underline{U}'_d(S, t)}{\|\underline{X}'_{s,vit}(S) + \underline{U}'_d(S, t)\|} \right) + \underline{f}_R^s(S) \\ = \mu \left(\frac{\partial^2 \underline{U}_d}{\partial t^2}(S) + V_0 \frac{\partial^2 \underline{U}_d}{\partial S \partial t} \right) + \mu V_0 \left[\frac{\partial^2 \underline{U}_d}{\partial S \partial t} + V_0 \left(\frac{\partial^2 \underline{X}_{s,vit}}{\partial S^2} + \frac{\partial^2 \underline{U}_d}{\partial S^2} \right) \right] \\ + \mu \frac{\partial V_0}{\partial t} \frac{\partial \underline{X}_{s,vit}}{\partial S} + \mu \frac{\partial V_0}{\partial t} \frac{\partial \underline{U}_d}{\partial S}, \quad \forall (S, t) \in [0, L_R] \times [0, +\infty[. \end{aligned} \quad (4.111)$$

Après linéarisation de la partie élastique, par développements de Taylor à l'ordre un du déplacement dynamique \underline{U}_d autour de la position statique mobile $\underline{X}_{s,vit}$, et simplification des termes statiques $\mu \frac{\partial V_0}{\partial t} \frac{\partial \underline{X}_{s,vit}}{\partial S}$ et $\mu V_0^2 \frac{\partial \underline{X}_{s,vit}}{\partial S^2}$,

$$\begin{aligned} \left[\underline{U}'_d \frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} + \underline{t} \frac{\underline{U}'_d \cdot \underline{t}}{\|\underline{X}'_s\|} \right]' = \mu \frac{\partial^2 \underline{U}_d}{\partial t^2}(S) + 2\mu V_0 \frac{\partial \underline{U}_d}{\partial S \partial t} + \mu V_0^2 \frac{\partial^2 \underline{U}_d}{\partial S^2} + \mu \frac{\partial V_0}{\partial t} \frac{\partial \underline{U}_d}{\partial S}, \\ \forall (S, t) \in [0, L_R] \times [0, +\infty[. \end{aligned} \quad (4.112)$$

Finalement, le système d'équations dynamiques est projeté sur la base locale de Frenet $(\underline{t}, \underline{n}, \underline{e}_z)$ pour une vitesse V_0 constante en temps et uniforme tel que $\forall (S, t) \in [0, L_R] \times [0, +\infty[$:

$$\mu \frac{\partial^2 u_d}{\partial t^2}(S) + 2\mu V_0 \frac{\partial u_d}{\partial S \partial t} + \mu V_0^2 \frac{\partial^2 u_d}{\partial S^2} = EA \left[(u'_d - \kappa_s v_d)' - \frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} \kappa_s (v'_d + \kappa_s u_d) \right], \quad (4.113)$$

$$\mu \frac{\partial^2 v_d}{\partial t^2}(S) + 2\mu V_0 \frac{\partial v_d}{\partial S \partial t} + \mu V_0^2 \frac{\partial^2 v_d}{\partial S^2} = EA \left[\left(\frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} (v'_d + \kappa_s u_d) \right)' + \kappa_s (u'_d - \kappa_s v_d) \right], \quad (4.114)$$

$$\mu \frac{\partial^2 w_d}{\partial t^2}(S) + 2\mu V_0 \frac{\partial w_d}{\partial S \partial t} + \mu V_0^2 \frac{\partial^2 w_d}{\partial S^2} = EA \left(\frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} w'_d \right)'. \quad (4.115)$$

Avec une vitesse $V_0(t)$ variable en temps, un terme d'accélération est ajouté selon chaque composante, tel que $\forall (S, t) \in [0, L_R] \times [0, +\infty[$,

$$\mu \frac{\partial^2 u_d}{\partial t^2}(S) + 2\mu V_0 \frac{\partial u_d}{\partial S \partial t} + \mu V_0^2 \frac{\partial^2 u_d}{\partial S^2} + \mu \frac{\partial V_0}{\partial t} \frac{\partial u_d}{\partial S} = EA \left[(u'_d - \kappa_s v_d)' - \frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} \kappa_s (v'_d + \kappa_s u_d) \right], \quad (4.116)$$

$$\mu \frac{\partial^2 v_d}{\partial t^2}(S) + 2\mu V_0 \frac{\partial v_d}{\partial S \partial t} + \mu V_0^2 \frac{\partial^2 v_d}{\partial S^2} + \mu \frac{\partial V_0}{\partial t} \frac{\partial v_d}{\partial S} = EA \left[\left(\frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} (v'_d + \kappa_s u_d) \right)' + \kappa_s (u'_d - \kappa_s v_d) \right], \quad (4.117)$$

$$\mu \frac{\partial^2 w_d}{\partial t^2}(S) + 2\mu V_0 \frac{\partial w_d}{\partial S \partial t} + \mu V_0^2 \frac{\partial^2 w_d}{\partial S^2} + \mu \frac{\partial V_0}{\partial t} \frac{\partial w_d}{\partial S} = EA \left(\frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} w'_d \right)'. \quad (4.118)$$

Comme évoqué précédemment, la notion de mode de vibration est associée à une solution aux équations dynamiques en régime stationnaire et en l'absence d'amortissement, c'est-à-dire sans les termes qui affichent une dépendance en vitesse $\frac{\partial U}{\partial t}$ dans l'équilibre dynamique. D'après le membre de gauche des équations (4.116), (4.117) et (4.118), le terme mixte $\frac{\partial U}{\partial S \partial t}$ introduit un terme de transport qui dépend de la vitesse de translation du câble, tandis que le terme instationnaire $\frac{\partial V_0}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial S}$ traduit les effets de variation de la vitesse de la translation.

Modes réels avec une trace des effets inertiels de translation

Une vitesse instantanée constante V_0 est considérée ici pour le calcul des modes de vibrations du câble en translation, ce qui lève l'hypothèse d'un modèle variable en temps. Afin de rechercher des modes réels qui portent une information proche de celle contenue dans un mode normal, une première approche consiste à supprimer les termes mixtes $\frac{\partial U}{\partial S \partial t}$. Seule la trace de la mise en vitesse apportée par le terme réel $\mu V_0^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2}$ est conservée. Dans ces conditions, les équations (4.116), (4.117) et (4.118) se récrivent, $\forall (S, t) \in [0, L_R] \times [0, +\infty[$,

$$\mu \ddot{u}_d + \mu V_0^2 u_d'' = EA \left[(u'_d - \kappa_s v_d)' - \frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} \kappa_s (v'_d + \kappa_s u_d) \right], \quad (4.119)$$

$$\mu \ddot{v}_d + \mu V_0^2 v_d'' = EA \left[\left(\frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} (v'_d + \kappa_s u_d) \right)' + \kappa_s (u'_d - \kappa_s v_d) \right], \quad (4.120)$$

$$\mu \ddot{w}_d + \mu V_0^2 w_d'' = EA \left(\frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} w'_d \right)'. \quad (4.121)$$

Par séparation des variables et application des hypothèses précédemment écrites pour la recherche des modes de vibration du câble fixe, les solutions des vibrations hors-plan sont découplées des autres mouvements. L'équation (4.121) qui régit les mouvements hors-plans du câble en translation à une vitesse V_0 s'écrit :

$$\mu \omega^2 \Phi_w + (\Delta^2 - \mu V_0^2) \Phi_w'' = 0, \quad (4.122)$$

dont les solutions sont de la forme :

$$\Phi_w(S_0) = A_w \cos \left(\frac{\sqrt{\mu} \omega}{\sqrt{\Delta^2 - \mu V_0^2}} S_0 \right) + B_w \sin \left(\frac{\sqrt{\mu} \omega}{\sqrt{\Delta^2 - \mu V_0^2}} S_0 \right), \quad S_0 \in [0, L_{R0}]. \quad (4.123)$$

Pour des vibrations anti-symétriques planes, sous les mêmes hypothèses précédemment énoncées pour le câble fixe, les équations (4.119) et (4.120), qui régissent les mouvements plans du câble en translation à une vitesse V_0 , se réduisent à :

$$\begin{cases} \mu \omega^2 \Phi_v + (\Delta^2 - \mu V_0^2) \Phi_v'' = 0 \\ \Phi'_u - \kappa_s \Phi_v = 0. \end{cases} \quad (4.124)$$

Les solutions en Φ_v sont données par l'équation différentielle du second ordre,

$$\Phi_v(S_0) = A_v \cos \left(\frac{\sqrt{\mu} \omega}{\sqrt{\Delta^2 - \mu V_0^2}} S_0 \right) + B_v \sin \left(\frac{\sqrt{\mu} \omega}{\sqrt{\Delta^2 - \mu V_0^2}} S_0 \right), \quad \forall S_0 \in [0, L_{R0}]. \quad (4.125)$$

Les solutions en Φ_u sont données par la condition d'annulation de l'incrément de tension dynamique $\Phi'_u - \kappa_s \Phi_v = 0$,

$$\Phi_u(S_0) = A_v \frac{\kappa_s \sqrt{\Delta^2 - \mu V_0^2}}{\sqrt{\mu\omega}} \sin\left(\frac{\sqrt{\mu\omega}}{\sqrt{\Delta^2 - \mu V_0^2}} S_0\right) - B_v \frac{\kappa_s \sqrt{\Delta^2 - \mu V_0^2}}{\sqrt{\mu\omega}} \cos\left(\frac{\sqrt{\mu\omega}}{\sqrt{\Delta^2 - \mu V_0^2}} S_0\right) + A_u, \quad \forall S_0 \in [0, L_{R0}]. \quad (4.126)$$

Dans le cas de vibrations symétriques et sous les mêmes hypothèses précédemment énoncées que le câble fixe, les équations (4.119) et (4.120), qui régissent les mouvements plans du câble en translation à une vitesse V_0 , se réduisent à :

$$\begin{cases} \mu\omega^2 \Phi_v + (\Delta^2 - \mu V_0^2) \Phi_v'' + \kappa_s T_d = 0 \\ T_d = EA(\Phi'_u - \kappa_s \Phi_v). \end{cases} \quad (4.127)$$

De la même façon que pour les vibrations anti-symétriques, les solutions en Φ_v sont données par l'équation différentielle du second ordre,

$$\Phi_v(S_0) = A_v \cos\left(\frac{\sqrt{\mu\omega}}{\sqrt{\Delta^2 - \mu V_0^2}} S_0\right) + B_v \sin\left(\frac{\sqrt{\mu\omega}}{\sqrt{\Delta^2 - \mu V_0^2}} S_0\right) - \frac{\kappa_s}{\mu\omega^2} T_d, \quad \forall S_0 \in [0, L_{R0}]. \quad (4.128)$$

Les solutions en Φ_u sont obtenues par le couplage avec Φ_v introduit par l'incrément de tension dynamique,

$$\begin{aligned} \Phi_u(S_0) = A_v \frac{\kappa_s \sqrt{\Delta^2 - \mu V_0^2}}{\sqrt{\mu\omega}} \sin\left(\frac{\sqrt{\mu\omega}}{\sqrt{\Delta^2 - \mu V_0^2}} S_0\right) - B_v \frac{\kappa_s \sqrt{\Delta^2 - \mu V_0^2}}{\sqrt{\mu\omega}} \cos\left(\frac{\sqrt{\mu\omega}}{\sqrt{\Delta^2 - \mu V_0^2}} S_0\right) \\ + \left(\frac{1}{EA} - \frac{\kappa_s^2}{\mu\omega^2}\right) T_d S_0 + A_u, \quad \forall S_0 \in [0, L_{R0}]. \end{aligned} \quad (4.129)$$

Pour des applications au transport par câble,

$$\Delta^2 = EA \frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} = EA \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \approx 10^8 \times \frac{10^{-3}}{1 + 10^{-3}} \approx 10^5 \text{ N}$$

et

$$\mu V_0^2 \approx 10 \times [4, 150] \approx [40, 1.5 \times 10^3] \text{ N}.$$

En supposant l'existence d'une accélération instantanée $\frac{\partial V_0}{\partial t} = A_{V_0}$ de la vitesse de translation du câble, un terme supplémentaire d'accélération stationnaire est ajouté aux équations (4.119), (4.120) et (4.121), tel que $\forall(S, t) \in [0, L_R] \times [0, +\infty[:$

$$\mu \ddot{u}_d + \mu V_0^2 u_d'' + \mu A_{V_0} u_d' = EA \left[(u_d' - \kappa_s v_d)' - \frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} \kappa_s (v_d' + \kappa_s u_d) \right], \quad (4.130)$$

$$\mu \ddot{v}_d + \mu V_0^2 v_d'' + \mu A_{V_0} v_d' = EA \left[\left(\frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} (v_d' + \kappa_s u_d) \right)' + \kappa_s (u_d' - \kappa_s v_d) \right], \quad (4.131)$$

$$\mu \ddot{w}_d + \mu V_0^2 w_d'' + \mu A_{V_0} w_d' = EA \left(\frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} w_d' \right)'. \quad (4.132)$$

L'Annexe H donne le détail de l'obtention des formes modales selon les trois premiers modèles de vibration symétrique, anti-symétrique et avec couplage de la dynamique verticale/longitudinale du câble en translation à la vitesse V_0 sous une accélération A_{V_0} .

L'obtention des modes avec vitesse de translation et accélération du câble, en levant l'hypothèse sur un incrément de tension dynamique T_d constant, est réalisée à partir du système différentiel (4.69) précédemment étudié auquel les termes inertiels ont été rajoutés :

$$\begin{cases} \mu\omega^2 \Phi_u - \mu V_0^2 \Phi_u'' - \mu A_{V_0} \Phi_u' + EA(\Phi_u'' - \kappa_s \Phi_v') - \Delta^2 \kappa_s (\Phi_v' + \kappa_s \Phi_u) = 0 \\ \mu\omega^2 \Phi_v - \mu V_0^2 \Phi_v'' - \mu A_{V_0} \Phi_v' + \Delta^2 (\Phi_v' + \kappa_s \Phi_u)' + \kappa_s EA(\Phi_u' - \kappa_s \Phi_v) = 0. \end{cases} \quad (4.133)$$

De la première équation différentielle décrivant la dynamique longitudinale, il vient :

$$\Phi'_v = \frac{(\mu\omega^2 - \Delta^2\kappa_s^2)\Phi_u - \mu A_{V_0}\Phi'_u + (EA - \mu V_0^2)\Phi''_u}{(EA + \Delta^2)\kappa_s}. \quad (4.134)$$

En introduisant :

$$\mathcal{A} = \frac{\mu\omega^2 - \Delta^2\kappa_s^2}{(EA + \Delta^2)\kappa_s}, \quad (4.135)$$

$$\mathcal{B} = \frac{-\mu A_{V_0}}{(EA + \Delta^2)\kappa_s}, \quad (4.136)$$

$$\mathcal{C} = \frac{EA - \mu V_0^2}{(EA + \Delta^2)\kappa_s}, \quad (4.137)$$

alors

$$\Phi'_v(S_0) = \mathcal{A}\Phi_u + \mathcal{B}\Phi'_u + \mathcal{C}\Phi''_u \quad (4.138)$$

$$\Phi''_v(S_0) = \mathcal{A}\Phi'_u + \mathcal{B}\Phi''_u + \mathcal{C}\Phi'''_u \quad (4.139)$$

$$\Phi'''_v(S_0) = \mathcal{A}\Phi''_u + \mathcal{B}\Phi'''_u + \mathcal{C}\Phi''''_u \quad (4.140)$$

En notant :

$$\mathcal{D} = \mu\omega^2 - \kappa_s^2 EA, \quad (4.141)$$

$$\mathcal{E} = \Delta^2 - \mu V_0^2, \quad (4.142)$$

$$\mathcal{F} = -\mu A_{V_0}, \quad (4.143)$$

$$\mathcal{G} = \kappa_s(\Delta^2 + EA), \quad (4.144)$$

l'équation différentielle décrivant la dynamique verticale s'écrit

$$\mathcal{D}\Phi_v + \mathcal{E}\Phi''_v + \mathcal{F}\Phi'_v + \mathcal{G}\Phi'_u = 0. \quad (4.145)$$

Par dérivation par rapport à l'abscisse curviligne S_0 ,

$$\mathcal{D}\Phi'_v + \mathcal{E}\Phi'''_v + \mathcal{F}\Phi''_v + \mathcal{G}\Phi''_u = 0. \quad (4.146)$$

En remplaçant les expressions de Φ'_v, Φ''_v et Φ'''_v dans (4.146) par celles obtenues en (4.138) (4.139) (4.140), une équation différentielle d'ordre quatre à coefficients constants est obtenue en Φ_u ,

$$\mathcal{E}\mathcal{C}\Phi''''_u + [\mathcal{E}\mathcal{B} + \mathcal{F}\mathcal{C}]\Phi'''_u + [\mathcal{D}\mathcal{C} + \mathcal{E}\mathcal{A} + \mathcal{F}\mathcal{B} + \mathcal{G}]\Phi''_u + [\mathcal{D}\mathcal{B} + \mathcal{F}\mathcal{A}]\Phi'_u + \mathcal{D}\mathcal{A}\Phi_u = 0. \quad (4.147)$$

À ce stade de la résolution, plusieurs méthodes sont possibles :

- Une méthode analytique de type Ferrari-Cardan [240, 241] qui suppose une étude approfondie du signe des coefficients intervenant dans (4.147), ce qui peut être très fastidieux.
- Une écriture du déplacement modal longitudinal sous sa forme générale :

$$\Phi_u(S_0) = A_u e^{X_1 S_0} + B_u e^{X_2 S_0} + C_u e^{X_3 S_0} + D_u e^{X_4 S_0}, \quad (4.148)$$

$$\Phi_v(S_0) = A_v e^{X_1 S_0} + B_v e^{X_2 S_0} + C_v e^{X_3 S_0} + D_v e^{X_4 S_0}, \quad (4.149)$$

où les $X_i, i \in [1, 4]$, sont les racines du polynôme de degré 4,

$$\mathcal{E}\mathcal{C}X'''' + [\mathcal{E}\mathcal{B} + \mathcal{F}\mathcal{C}]X''' + [\mathcal{D}\mathcal{C} + \mathcal{E}\mathcal{A} + \mathcal{F}\mathcal{B} + \mathcal{G}]X'' + [\mathcal{D}\mathcal{B} + \mathcal{F}\mathcal{A}]X' + \mathcal{D}\mathcal{A}X = 0, \quad (4.150)$$

puis une utilisation de cette forme de solution du déplacement dynamique dans l'écriture des conditions aux limites de la portion de câble. Si l'écriture analytique du déterminant fait intervenir $\sum_i X_i$ ou $\prod_{i,j} X_i X_j$, alors ces quantités sont connues en fonction des coefficients du polynôme (4.150) et font disparaître les X_i

pour déterminer les pulsations des modes.

- Par recherche des solutions sous la forme $\Phi_u(S_0) = \Phi_u e^{jkS_0}$, $\Phi_v(S_0) = \Phi_v e^{jkS_0}$, puis en injectant dans le système différentiel (4.133), un système,

$$\left[H_e(\omega, k) \right] \begin{Bmatrix} \Phi_u \\ \Phi_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4.151)$$

est obtenu et possède une solution non-nulle sous la condition :

$$\det\left(\left[H_e(\omega, k) \right] \right) = 0. \quad (4.152)$$

La résolution analytique de (4.152) permet d'obtenir la relation de dispersion $k = f(\omega)$ qui établit le lien entre le nombre d'onde k et la pulsation ω . En fixant ω , la relation de dispersion donne l'ensemble des valeurs autorisées pour le nombre d'onde k qui vérifient les équations dynamiques selon la direction longitudinale \underline{t} et verticale \underline{n} .

Dans le cadre de la démarche engagée par ces travaux, et afin de calculer la dynamique d'un assemblage complet, la troisième méthode est mise en œuvre dans la suite avec la perspective de l'appliquer selon une procédure numérique pour le couplage des portions de câbles entre elles. La matrice $\left[H_e(\omega, k) \right]$ est exprimée en fonction des coefficients qui interviennent dans le système différentiel (4.133),

$$\begin{bmatrix} \mu(\omega^2 + (V_0k)^2 - jA_{V_0}k) - EAk^2 - \Delta^2\kappa_s^2 & -jk\kappa_s(EA + \Delta^2) \\ jk\kappa_s(EA + \Delta^2) & \mu(\omega^2 + (V_0k)^2 - jA_{V_0}k) - EA\kappa_s^2 - \Delta^2k^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_u \\ \Phi_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.153)$$

L'annulation du déterminant mène à la résolution d'un polynôme de degré quatre en k ,

$$\begin{aligned} & \left[\mu V_0^2(\mu V_0^2 - \Delta^2 - EA) + EA\Delta^2 \right] k^4 + j \left[\mu A_{V_0}(-2\mu V_0^2 + \Delta^2 + EA) \right] k^3 \\ & + \left[\mu\omega^2(2\mu V_0^2 - \Delta^2 - EA) + \mu(-\kappa_s^2 EA V_0^2 - \mu A_{V_0}^2 - \Delta^2 \kappa_s^2 V_0^2) - 2\Delta^2 \kappa_s^2 EA \right] k^2 \\ & + j \left[-2\mu^2 \omega^2 A_{V_0} + \mu A_{V_0} \kappa_s^2 (EA + \Delta^2) \right] k + \left[\mu\omega^2(\mu\omega^2 - \Delta^2 \kappa_s^2 - EA\kappa_s^2) + \Delta^2 \kappa_s^4 EA \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.154)$$

En supposant que les solutions s'écrivent sous la forme :

$$k_{1,2} = \pm a + jb, \quad k_{3,4} = \pm c + jd, \quad (4.155)$$

alors une solution réelle Φ_u au problème posé s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_u(S_0) &= A_u e^{j\phi_1} e^{j(a+jb)S_0} + A_u e^{-j\phi_1} e^{j(-a+jb)S_0} + B_u e^{j\phi_2} e^{j(c+jd)S_0} + B_u e^{-j\phi_2} e^{j(-c+jd)S_0} \\ &= A_u e^{-bS_0} (e^{j(aS_0+\phi_1)} + e^{-j(aS_0+\phi_1)}) + B_u e^{-dS_0} (e^{j(cS_0+\phi_2)} + e^{-j(cS_0+\phi_2)}) \\ &= A_u e^{-bS_0} \cos(aS_0 + \phi_1) + B_u e^{-dS_0} \cos(cS_0 + \phi_2) \\ &= [A_u \cos(aS_0) + B_u \sin(aS_0)] e^{-bS_0} + [C_u \cos(cS_0) + D_u \sin(cS_0)] e^{-dS_0}. \end{aligned} \quad (4.156)$$

De la même façon, pour le déplacement vertical :

$$\Phi_v(S_0) = [A_v \cos(aS_0) + B_v \sin(aS_0)] e^{-bS_0} + [C_v \cos(cS_0) + D_v \sin(cS_0)] e^{-dS_0}. \quad (4.157)$$

L'équation (4.134) permet d'établir par identification la relation qui lie les coefficients A_u, B_u, C_u, D_u associés au déplacement longitudinal et A_v, B_v, C_v, D_v au déplacement vertical,

$$A_v = A_u \frac{-(A - Bb - Ca^2 + Cb^2)b + (Ba - 2Cab)a}{a^2 + b^2} + B_u \frac{-(A - Bb - Ca^2 + Cb^2)a - (Ba - 2Cab)b}{a^2 + b^2}, \quad (4.158)$$

$$B_v = A_u \frac{(A - Bb - Ca^2 + Cb^2)a + (Ba - 2Cab)b}{a^2 + b^2} + B_u \frac{-(A - Bb - Ca^2 + Cb^2)b + (Ba - 2Cab)a}{a^2 + b^2}, \quad (4.159)$$

$$C_v = C_u \frac{-(\mathcal{A} - \mathcal{B}d - \mathcal{C}c^2 + \mathcal{C}d^2)d + (\mathcal{B}c - 2\mathcal{C}cd)c}{c^2 + d^2} + D_u \frac{-(\mathcal{A} - \mathcal{B}d - \mathcal{C}c^2 + \mathcal{C}d^2)c - (\mathcal{B}c - 2\mathcal{C}cd)d}{c^2 + d^2}, \quad (4.160)$$

$$D_v = C_u \frac{(\mathcal{A} - \mathcal{B}d - \mathcal{C}c^2 + \mathcal{C}d^2)c + (\mathcal{B}c - 2\mathcal{C}cd)d}{c^2 + d^2} + D_u \frac{-(\mathcal{A} - \mathcal{B}d - \mathcal{C}c^2 + \mathcal{C}d^2)d + (\mathcal{B}c - 2\mathcal{C}cd)c}{c^2 + d^2}. \quad (4.161)$$

Prise en compte des variations de tension

Une des hypothèses de départ est de considérer la quantité $\frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$ constante le long de chaque portion de câble. $\varepsilon \approx 10^{-3}$ pour des applications pratiques aux lignes de transport par câbles, l'hypothèse revient ainsi à considérer que la tension statique est indépendante de l'abscisse curviligne le long du câble avec l'introduction de la quantité,

$$\Delta^2 = EA \frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} = EA \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \approx N(S). \quad (4.162)$$

D'après le modèle de chaînette, la variation de tension N entre deux points d'abscisses x_1 et x_2 d'une portion de câble dépend de la différence d'altitude selon l'expression

$$\begin{aligned} N(x_2) - N(x_1) &= \mu g \tau \cosh\left(\frac{x_2}{\tau} + K_1\right) - \mu g \tau \cosh\left(\frac{x_1}{\tau} + K_1\right) \\ &= \mu g \left[\tau \cosh\left(\frac{x_2}{\tau} + K_1\right) + K_2 - \tau \cosh\left(\frac{x_1}{\tau} + K_1\right) - K_2 \right] = \mu g [y(x_2) - y(x_1)]. \end{aligned} \quad (4.163)$$

Les plus grandes portées des lignes de transport par câbles peuvent franchir des dénivelées de l'ordre de 1000 mètres, pour des masses linéiques $\mu \approx 10$ kg/m, avec une tension de base de l'ordre de 10^5 N en pied de portée. La variation de tension générée par la différence d'altitude $\Delta N \approx 10^5$ N, soit une variation de 100 %. Pour des portées de câble sur des installations monocâbles à mouvement continu, la même variation relative est réduite à environ 2 % entre deux véhicules successifs.

Ainsi, pour les portées inclinées avec de fortes variations d'altitudes comme sur des installations de type téléphérique, l'hypothèse que Δ^2 est une constante n'est pas raisonnable tandis qu'elle l'est sur les portions de câbles qui relient deux à deux les véhicules des lignes de type monocâble à mouvement continu. À l'issue du calcul statique, une stratégie proposée est de détecter les variations de tension statique trop importantes et de scinder la portée en plusieurs sous éléments dynamiques de câbles sur lesquels l'hypothèse d'un Δ^2 constant est valide (sur une longueur de quelques mètres par exemple). Le raccordement entre les différents sous-éléments est réalisé au point S_r en appliquant les conditions de continuité du déplacement dynamique :

$$u_d(S_r)^- = u_d(S_r)^+, \quad (4.164)$$

$$v_d(S_r)^- = v_d(S_r)^+, \quad (4.165)$$

$$w_d(S_r)^- = w_d(S_r)^+, \quad (4.166)$$

et en écrivant l'équilibre dynamique d'un point ponctuel de masse nulle, ce qui conduit à :

$$u'_d(S_r)^- = u'_d(S_r)^+, \quad (4.167)$$

$$v'_d(S_r)^- = v'_d(S_r)^+, \quad (4.168)$$

$$w'_d(S_r)^- = w'_d(S_r)^+. \quad (4.169)$$

Aussi, la valeur de Δ^2 sur chaque élément sera prise comme la moyenne des valeurs considérées aux deux extrémités de l'élément de câble.

Dans ces conditions, la question se pose de savoir si le terme de variation,

$$\left(\frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} \right)' = \frac{\varepsilon'}{(1 + \varepsilon)^2}, \quad (4.170)$$

doit être pris en compte dans les équations dynamiques. En introduisant une nouvelle constante :

$$\chi = EA \left(\frac{(\|\underline{X}'_s\| - 1)}{\|\underline{X}'_s\|} \right)' = EA \frac{\varepsilon'}{(1 + \varepsilon)^2} \approx N', \quad (4.171)$$

l'équation (H.1) devient :

$$\mu\omega^2\Phi_w + (\chi - \mu A_{V_0})\Phi'_w + (\Delta^2 - \mu V_0^2)\Phi''_w = 0. \quad (4.172)$$

La solution s'écrit :

$$\begin{aligned} \Phi_w(S_0) = & \left[A_w \cos \left(\sqrt{\frac{-(\chi - \mu A_{V_0})^2 + 4\mu\omega^2(\Delta^2 - \mu V_0^2)}{4(\Delta^2 - \mu V_0^2)^2}} S_0 \right) \right. \\ & \left. + B_w \sin \left(\sqrt{\frac{-(\chi - \mu A_{V_0})^2 + 4\mu\omega^2(\Delta^2 - \mu V_0^2)}{4(\Delta^2 - \mu V_0^2)^2}} S_0 \right) \right] e^{\frac{-\chi + \mu A_{V_0}}{2(\Delta^2 - \mu V_0^2)} S_0}, \quad S_0 \in [0, L_{R0}]. \end{aligned} \quad (4.173)$$

Le système différentiel (4.133) qui couple le mouvement dynamique longitudinal et vertical est modifié en ajoutant les termes faisant intervenir χ ,

$$\begin{cases} \mu\omega^2\Phi_u - \mu V_0^2\Phi''_u - \mu A_{V_0}\Phi'_u + EA(\Phi''_u - \kappa_s\Phi'_v) - \Delta^2\kappa_s(\Phi'_v + \kappa_s\Phi_u) = 0 \\ \mu\omega^2\Phi_v - \mu V_0^2\Phi''_v - \mu A_{V_0}\Phi'_v + \Delta^2(\Phi'_v + \kappa_s\Phi_u)' + \kappa_s EA(\Phi'_u - \kappa_s\Phi_v) + \chi(\Phi'_v + \kappa_s\Phi_u) = 0. \end{cases} \quad (4.174)$$

La première équation de (4.174), décrivant la dynamique longitudinale, n'est pas affectée par l'ajout du terme χ . Selon la même méthode que celle employée pour obtenir (4.153), la système modifié par la contribution du coefficient χ est exprimé analytiquement,

$$\begin{bmatrix} \mu(\omega^2 + (V_0k)^2 - jA_{V_0}k) - E Ak^2 - \Delta^2\kappa_s^2 & -jk\kappa_s(EA + \Delta^2) \\ jk\kappa_s(EA + \Delta^2) + \chi\kappa_s & \mu(\omega^2 + (V_0k)^2 - jA_{V_0}k) - E Ak^2 - \Delta^2k^2 + jk\chi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_u \\ \Phi_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.175)$$

L'annulation du déterminant mène à la résolution d'un polynôme de degré 4 en k ,

$$\begin{aligned} & \left[\mu V_0^2(\mu V_0^2 - \Delta^2 - EA) + EA\Delta^2 \right] k^4 + j \left[\mu A_{V_0}(-2\mu V_0^2 + \Delta^2 + EA) + \chi(\mu V_0^2 - EA) \right] k^3 \\ & + \left[\mu\omega^2(2\mu V_0^2 - \Delta^2 - EA) + \mu(-\kappa_s^2 EA V_0^2 - \mu A_{V_0}^2 - \Delta^2\kappa_s^2 V_0^2) - 2\Delta^2\kappa_s^2 EA + \mu A_{V_0}\chi \right] k^2 \\ & + j \left[-2\mu^2\omega^2 A_{V_0} + \mu A_{V_0}\kappa_s^2(EA + \Delta^2) + \chi(\mu\omega^2 + \kappa_s^2 EA) \right] k + \left[\mu\omega^2(\mu\omega^2 - \Delta^2\kappa_s^2 - E Ak^2) + \Delta^2\kappa_s^4 EA \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.176)$$

Modes complexes

Les termes de transport introduits par la translation du câble ont été précédemment supprimés pour obtenir des modes de vibration réels. Cette hypothèse est levée dans la suite pour l'analyse des modes complexes de vibration du système. Les équations dynamiques s'écrivent sous leur forme générale par séparation de variable :

$$u_d(S_0, t) = \Phi_u(S_0) e^{j\Lambda t}, \quad (4.177)$$

$$v_d(S_0, t) = \Phi_v(S_0) e^{j\Lambda t}, \quad (4.178)$$

$$w_d(S_0, t) = \Phi_w(S_0) e^{j\Lambda t}, \quad (4.179)$$

avec l'introduction d'une pulsation complexe $\Lambda = \omega + j\xi$.

$$\begin{cases} \mu\Lambda^2\Phi_u - \mu V_0^2\Phi''_u - \mu A_{V_0}\Phi'_u + EA(\Phi''_u - \kappa_s\Phi'_v) - \Delta^2\kappa_s(\Phi'_v + \kappa_s\Phi_u) + 2\mu V_0 j\Lambda\Phi'_u = 0 \\ \mu\Lambda^2\Phi_v - \mu V_0^2\Phi''_v - \mu A_{V_0}\Phi'_v + \Delta^2(\Phi'_v + \kappa_s\Phi_u)' + \kappa_s EA(\Phi'_u - \kappa_s\Phi_v) + \chi(\Phi'_v + \kappa_s\Phi_u) + 2\mu V_0 j\Lambda\Phi'_v = 0 \end{cases} \quad (4.180)$$

$$\mu\Lambda^2\Phi_w + (\chi - \mu A_{V_0} + 2\mu V_0 j\Lambda)\Phi'_w + (\Delta^2 - \mu V_0^2)\Phi''_w = 0. \quad (4.181)$$

Le détail de l'obtention des formes modales complexes analytiques est donné en Annexe H.

À partir des équations précédentes, une étude paramétrique des parties réelles et imaginaires de la pulsation complexe $\Lambda = \omega + j\xi$ est réalisée en fonction de la vitesse V_0 et de l'accélération A_{V_0} pour comprendre l'effet de la translation du câble sur les caractéristiques modales. Les modèles et les résultats sont donnés dans l'article " Hugo BÉCU, Claude-Henri LAMARQUE, Alireza TURE SAVADKOOHI (2023), **On the modal characteristics and stability of translating cable : Application to an overall line of cable transport systems**, Engineering Structures, Volume 292,116434, <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.116434> ".

4.2 Modélisation dynamique des appuis

Cette section s'inscrit dans la continuité de la modélisation statique des interfaces entre le câble et les sous-structure. En particulier, l'hypothèse d'un **contact bilatéral** réalisé de façon ponctuelle entre le câble et les appuis est reprise pour la dynamique.

À chaque extrémité des portions de câble, il y a continuité du déplacement du câble puisque la ligne de câble est un milieu matériel continu. Au franchissement d'un appui en l'abscisse $S = S_{ap}$, il y a ainsi continuité du champ de déplacement dynamique \underline{U}_d de part et d'autre de l'appui, ce qui impose à chaque instant t

$$u_d(S_{ap}^-, t) = u_d(S_{ap}^+, t) = u_d(S_{ap}, t), \quad (4.182)$$

$$v_d(S_{ap}^-, t) = v_d(S_{ap}^+, t) = v_d(S_{ap}, t), \quad (4.183)$$

$$w_d(S_{ap}^-, t) = w_d(S_{ap}^+, t) = w_d(S_{ap}, t). \quad (4.184)$$

4.2.1 Couplage entre un appui ponctuel infiniment rigide et le câble

L'Annexe I propose un modèle d'un appui standard utilisé en transport par câbles, dont le rôle est de supporter les lignes de câble. L'étude modale d'un pylône, dont le modèle analytique a été validé par un calcul aux éléments finis réalisé sur un modèle de référence, montre que les fréquences des premiers modes de la structure sont situés autour du Hertz tandis que les fréquences des phénomènes dynamiques, que ces travaux visent à caractériser, surviennent plutôt dans l'intervalle $[0.1, 0.3]$ Hz. Cela justifie une représentation de l'appui comme un élément rigide, en négligeant les mouvements dynamiques de la sous-structure.

L'hypothèse d'un contact bilatéral entre le câble et l'appui rigide annule le déplacement transversal et hors plan du câble, puisqu'il n'y a pas de décollement du câble,

$$\underline{U}_d(S_{ap}, t) \cdot \underline{n}_c = 0. \quad (4.185)$$

La normale sortante au point de contact $S = S_{ap}$ coïncide avec le vecteur normal \underline{n} de la base de Frenet du câble considéré en $S = S_{ap}$, soit :

$$v_d(S_{ap}, t) = 0. \quad (4.186)$$

En pratique, l'appui est réputé ponctuel et sa géométrie n'est pas modélisée. Il est ainsi condensé en $S = S_{ap}$ qui est un point singulier et où il n'est pas définie de normale sortante \underline{n}_c . La condition de non-décollement, combinée à celle de continuité du déplacement dynamique, s'exprime alors en fonction des vecteurs normaux à la configuration statique de part et d'autre du point d'appui $\underline{n}(S_{ap}^-)$, $\underline{n}(S_{ap}^+)$:

$$\underline{U}_d(S_{ap}^-, t) \cdot \underline{n}(S_{ap}^-) = \underline{U}_d(S_{ap}^+, t) \cdot \underline{n}(S_{ap}^+) = 0. \quad (4.187)$$

Les appuis possèdent des systèmes de guidage qui limitent le déplacement du câble selon la direction \underline{e}_z . Ces dispositifs sont la garniture de sabots et les étaux pour le guidage d'un câble porteur, la gorge de la garniture et les joues des galets pour un câble en contact avec une gorge de roulement. Le câble est donc empêché en mouvement dans la direction hors-plan par des solutions constructives de l'appui, ce qui en première approximation conduit à :

$$w_d(S_{ap}, t) = 0. \quad (4.188)$$

La troisième équation décrivant le contact porte sur la relation f_c qui relie la tension du câble de part et d'autre de l'appui :

$$T_d(S_{ap}^+, t) = f_c \left(T_d(S_{ap}^-, t) \right). \quad (4.189)$$

Pour un contact parfait réalisé sans frottement, il y a continuité de la tension du câble :

$$T_d(S_{ap}^+, t) = T_d(S_{ap}^-, t). \quad (4.190)$$

Pour un contact avec un frottement de Coulomb de coefficient c_f considéré à la limite du glissement, avec une linéarisation des termes dynamiques dans le cadre des petites perturbations autour de la configuration statique,

$$T_d(S_{ap}^+, t) = T_d(S_{ap}^-, t) \pm c_f \left[\left(T_d(S_{ap}^-, t) + T_d(S_{ap}^+, t) \right) \sin \left(\frac{\alpha_{n-1}^s - \alpha_n^s}{2} \right) + \left(T_s(S_{ap}^-) + T_s(S_{ap}^+) \right) \cos \left(\frac{\alpha_{n-1}^s - \alpha_n^s}{2} \right) \left(\frac{\alpha_{n-1}^d - \alpha_n^d}{2} \right) \right]. \quad (4.191)$$

4.2.2 Modèle d'appui ponctuel avec raideur transversale

Le contact entre un câble mobile et son support est en général réalisé par des poulies ou des galets qui possèdent une interface dédiée, couramment désignée par bandage avec une composition en matière synthétique de type caoutchouc. Le bandage possède une gorge usinée destinée à accueillir le câble en assurant son guidage latéral selon \underline{e}_z au franchissement des appuis lorsque le guidage est réalisé dans le plan vertical, aux pylônes en ligne par exemple, ou vertical selon \underline{n} lorsque le guidage est réalisé dans le plan horizontal, en station par exemple. Dans tous les cas, la condition de non-interpénétration impose à chaque point de l'interface de normale sortante \underline{n}_{int} s'écrit :

$$\underline{U}_d \cdot \underline{n}_{int} = 0. \quad (4.192)$$

Dans le cas particulier des galets de ligne qui assurent un guidage transversal du câble, il est possible de tenir compte d'une raideur équivalente k_g qui traduit la rigidité du contact entre le câble et le bandage. La condition (4.188) valable pour un appui infiniment rigide, devient alors :

$$T_s(S_{ap}^+) \frac{1}{\|\underline{X}_s(S_{ap}^+)\|} \frac{\partial w_d}{\partial S}(S_{ap}^+) - T_s(S_{ap}^-) \frac{1}{\|\underline{X}_s(S_{ap}^-)\|} \frac{\partial w_d}{\partial S}(S_{ap}^-) - k_g w_d(S_{ap}) = 0. \quad (4.193)$$

4.2.3 Modèle de station d'extrémité

Station tension

- En l'absence de couplage avec le système de mise en tension, qu'il soit hydraulique ou gravitaire par contrepoids, le déplacement dynamique imposé en extrémité de la boucle de câble s'écrit :

$$\underline{U}_d(S_T, t) = \underline{0}. \quad (4.194)$$

- Un modèle de couplage, entre le contrepoids de masse M_c et le câble de mise en tension qui réalise la liaison avec la poulie de tension, peut être considéré en supposant que seul le déplacement dynamique longitudinal $u_{dct}(S_{T0})$ du câble de tension est impliqué à l'extrémité du câble de tension d'abscisse curviligne S_{T0} . Le déplacement dynamique en extrémité de câble de tension, exprimé dans la base locale de Frenet, est nul selon les directions transversale et hors-plan, avec la masse du contrepoids supposée intégralement reprise par la tension du câble portée par \underline{t}_{ct} . Le bilan des efforts au point d'accroche du contrepoids s'écrit par continuité du déplacement et selon $\underline{t}_{ct}(S_{T0})$,

$$M_c \ddot{u}_{dct}(S_{T0}, t) = T_{dct}(S_{T0}, t). \quad (4.195)$$

La dynamique du câble de tension est négligée : il y a ainsi continuité du déplacement et de la tension entre le contrepoids et le lorry de tension.

Un bilan des efforts dynamiques est appliqué au lorry de tension de masse totale M_{lorry} , selon le plan de la poulie supposé horizontal. Ce qui donne, en l'absence de frottement à l'axe de la poulie de tension, la relation entre la tension dans le câble de tension et la somme des tensions exercées par chaque brin de la boucle de câble en entrée et sortie de la poulie :

$$M_{lorry}\ddot{u}_d(S_{T0}, t) = -T_{dct}(S_{T0}, t) + T_d^+(S_T, t) + T_d^-(S_T, t). \quad (4.196)$$

Soit en remplaçant (4.195) dans (4.196) :

$$(M_c + M_{lorry}) \ddot{u}_{dct}(S_T, t) = T_d^+(S_T, t) + T_d^-(S_T, t). \quad (4.197)$$

Un bilan du moment cinétique de la poulie de rayon R_p autour de son axe de rotation, supposé vertical selon \underline{e}_y , et en supposant un roulement sans glissement entre la boucle de câble et le bandage donne :

$$J_{poulie} \frac{\ddot{X}(S_T, t)}{R^2} = T^+(S_T, t) - T^-(S_T, t). \quad (4.198)$$

\ddot{X} est le terme d'accélération de la portion de câble en contact avec le bandage de la poulie. Il peut se décomposer en une contribution stationnaire et une autre variable en temps, $\ddot{X}(S_T, t) = A_{V_0} + u_d(S_T, t)$. De la même façon, la tension peut se décomposer en une composante stationnaire et une autre dynamique $T(S_T, t) = T_s(S_T) + T_d(S_T, t)$. La partie stationnaire est identifiée,

$$\frac{J_{poulie} A_{V_0}}{R_p^2} = T_s^+(S_T) - T_s^-(S_T). \quad (4.199)$$

La partie dynamique conduit à :

$$\frac{J_{poulie} \ddot{u}_d(S_T, t)}{R_p^2} = T_d^+(S_T, t) - T_d^-(S_T, t). \quad (4.200)$$

Les déplacements verticaux et hors plans demeurent nuls avec ce modèle à un degré de liberté en translation de la station de mise en tension :

$$v_d(S_0, t) = w_d(S_0, t) = 0. \quad (4.201)$$

4.3 Modélisation dynamique des véhicules

Comme en statique, la prise en compte du couplage dynamique du câble avec les véhicules est présentée avec un modèle de câble dépourvu de raideur en flexion. Cette approche laisse la possibilité d'apporter une correction locale par des termes de flexion au niveau des appuis et des points de contact avec les véhicules, tel qu'abordé dans la partie d'étude statique.

4.3.1 Véhicule ponctuel accroché à un câble fixe

L'équation de l'équilibre dynamique d'un véhicule d'une ligne monocâble accroché à un câble fixe est donnée par :

$$\begin{aligned} - \left\| \underline{T}_v^{d-}(S_v^-, t) \right\| \underline{t}_v^{s-} - \left\| \underline{T}_v^{s-}(S_v^-) \right\| \left(\frac{1}{\left\| \underline{X}'_{s,vit} \right\|} \frac{\partial U_d}{\partial S}(S_v^-) - \frac{\underline{t}_v^{s-}}{\left\| \underline{X}'_{s,vit} \right\|} \frac{\partial U_d}{\partial S}(S_v^-) \cdot \underline{t}_v^{s-} \right) \\ + \left\| \underline{T}_v^{d+}(S_v^+, t) \right\| \underline{t}_v^{s+} + \left\| \underline{T}_v^{s+}(S_v^+) \right\| \left(\frac{1}{\left\| \underline{X}'_{s,vit} \right\|} \frac{\partial U_d}{\partial S}(S_v^+) - \frac{\underline{t}_v^{s+}}{\left\| \underline{X}'_{s,vit} \right\|} \frac{\partial U_d}{\partial S}(S_v^+) \cdot \underline{t}_v^{s+} \right) \\ = M_v \ddot{U}(S_v, t). \end{aligned} \quad (4.202)$$

L'équation (4.202) se projette sur la base locale $(\underline{t}_v, \underline{n}_v, \underline{e}_z)$ défini en $S = S_v$ telle que $\underline{t}_v^s = \frac{\underline{t}_v^{s-} + \underline{t}_v^{s+}}{\|\underline{t}_v^{s-} + \underline{t}_v^{s+}\|}$ et $\underline{n}_v^s = \frac{\underline{n}_v^{s-} + \underline{n}_v^{s+}}{\|\underline{n}_v^{s-} + \underline{n}_v^{s+}\|}$,

$$\begin{aligned}
 -\|\underline{T}_v^{d-}(S_v^-, t)\| \underline{t}_v^{s-} \cdot \underline{t}_v^s - \frac{\|\underline{T}_v^{s-}(S_v^-)\|}{\|\underline{X}'_{s,vit}\|} \left[(v_d^{-'} + \kappa_s u_d^-) \underline{n}_v^{s-} \cdot \underline{t}_v^s \right] \\
 + \|\underline{T}_v^{d+}(S_v^+, t)\| \underline{t}_v^{s+} \cdot \underline{t}_v^s + \frac{\|\underline{T}_v^{s+}(S_v^+)\|}{\|\underline{X}'_{s,vit}\|} \left[(v_d^{+'} + \kappa_s u_d^+) \underline{n}_v^{s+} \cdot \underline{t}_v^s \right] - M_v \ddot{u}_d = 0, \quad (4.203)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\|\underline{T}_v^{d-}(S_v^-, t)\| \underline{t}_v^{s-} \cdot \underline{n}_v^s - \frac{\|\underline{T}_v^{s-}(S_v^-)\|}{\|\underline{X}'_{s,vit}\|} \left[(v_d^{-'} + \kappa_s u_d^-) \underline{n}_v^{s-} \cdot \underline{n}_v^s \right] \\
 + \|\underline{T}_v^{d+}(S_v^+, t)\| \underline{t}_v^{s+} \cdot \underline{n}_v^s + \frac{\|\underline{T}_v^{s+}(S_v^+)\|}{\|\underline{X}'_{s,vit}\|} \left[(v_d^{+'} + \kappa_s u_d^+) \underline{n}_v^{s+} \cdot \underline{n}_v^s \right] - M_v \ddot{v}_d = 0, \quad (4.204)
 \end{aligned}$$

$$-\frac{\|\underline{T}_v^{s-}(S_v^-)\|}{\|\underline{X}'_{s,vit}\|} w_d^{-'} + \frac{\|\underline{T}_v^{s+}(S_v^+)\|}{\|\underline{X}'_{s,vit}\|} w_d^{+'} - M_v \ddot{w}_d = 0. \quad (4.205)$$

4.3.2 Véhicule ponctuel accroché à un câble mobile

La question de l'effet inertiel se pose lorsque celui-ci franchit des zones avec de fortes courbures. En effet, la variation importante du vecteur vitesse pour une masse ponctuelle génère un effort inertiel F_{cent} , qu'il est possible d'estimer par la quantité :

$$F_{cent} = M_v \frac{V_0^2}{R}, \quad (4.206)$$

avec M_v la masse du véhicule, V_0 la vitesse de translation du câble et R le rayon de courbure du câble de la trajectoire de l'attache du véhicule.

La réglementation impose une accélération centripète $\frac{V_0^2}{R} \leq 2.5 \text{ m/s}^2$ pour assurer un confort acceptable des passagers au franchissement des appuis par les véhicules. Pour un véhicule chargé de deux tonnes, l'effort dynamique centripète associé est $F_{cent} \approx 5000 \text{ N}$, ce qui représente environ un quart du poids total du véhicule.

Statique

D'après l'expression (4.90) de l'accélération eulérienne pour un milieu en translation à une vitesse constante $\underline{V}(S) = V_0 \underline{t}$, avec S l'abscisse sur la configuration courante recherchée, l'équilibre statique d'un véhicule mobile, de masse M_v attaché en $S = S_v$ à un câble en translation à la vitesse constante V_0 et soumis à un chargement extérieur $\underline{F}(S_v)$, est décrit par l'équation :

$$\underline{T}_v^-(S_v^-) + \underline{T}_v^+(S_v^+) + \underline{F}(S_v) = M_v V_0^2 \frac{\partial \underline{t}_v}{\partial S}(S_v), \quad (4.207)$$

avec $\underline{T}_v^- = -\|\underline{T}_v^-\| \underline{t}_v^-$ la tension du câble à gauche du véhicule, $\underline{T}_v^+ = \|\underline{T}_v^+\| \underline{t}_v^+$ la tension du câble à droite du véhicule, portées par les vecteurs tangents au câble de part et d'autre de l'appui, $\underline{t}_v = \frac{\underline{t}_v^- + \underline{t}_v^+}{\|\underline{t}_v^- + \underline{t}_v^+\|}$ le vecteur tangent moyen au véhicule.

Dans le cas particulier du véhicule soumis uniquement à son poids propre comme effet extérieur au système, $\underline{F} = -M_v g \underline{e}_y$.

La variation $\frac{\partial \underline{t}_v}{\partial S} = \kappa_t \underline{n}_v$, où $\underline{n}_v = \frac{\underline{n}_v^- + \underline{n}_v^+}{\|\underline{n}_v^- + \underline{n}_v^+\|}$ est défini en introduisant la courbure κ_t de la trajectoire suivie par le véhicule au cours du mouvement de translation du câble.

La courbure κ_t peut être estimée par le calcul de trois équilibres statiques successifs, avec $V_0 = 0$, respectivement associés aux positions x_{v1} , x_{v2} et x_{v3} du véhicule, qui renseignent sur la trajectoire locale du véhicule passant par la position instantanée x_{v2} pour laquelle l'équilibre est recherché. La courbure algébrique de la

trajectoire $(x_{vi}, y(x_{vi}))_{i \in [1,3]}$ suivie par le véhicule en est ainsi déduite,

$$\kappa_t = \frac{y_v''}{(1 + y_v'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (4.208)$$

où les dérivées sont approchées par un schéma aux différences finies

$$y_v'' = \frac{d^2 y_v}{dx^2} \approx \frac{y_v(x_{v3}) - 2y_v(x_{v2}) + y_v(x_{v1})}{\Delta x_v^2}, \quad (4.209)$$

$$y_v' = \frac{dy_v}{dx} \approx \frac{y_v(x_{v3}) - y_v(x_{v1})}{2\Delta x_v}. \quad (4.210)$$

Lorsqu'un véhicule franchit un appui, l'équation (4.207) est modifiée pour traduire les effets de la courbure imposée par la déviation du câble : le terme d'inertie $M_v V_0^2 \frac{\partial \underline{t}_v}{\partial S} = M_v V_0^2 \kappa_t \underline{n}_v$ implique alors la courbure de la zone d'appui :

$$\kappa_t = \frac{\alpha^+ - \alpha^-}{\Delta S_{ap}}, \quad (4.211)$$

donnée par les angles du câble α^+ , α^- de part et d'autre de l'appui ainsi que la longueur d'appui ΔS_{ap} .

La réaction du support d'appui sur le câble et le véhicule n'est pas considérée dans ce modèle, ce qui permettrait de caractériser les effets d'inertie, dus à l'accélération centripète, sur le câble en entrée et en sortie immédiate de l'appui lorsque le véhicule est transféré du câble vers l'appui ou de l'appui vers le câble. Ce modèle n'est pas détaillé ici pour ne pas alourdir la description des modèles.

L'équation (4.207) se projette sur la base locale $(\underline{t}_v, \underline{n}_v, \underline{e}_z)$ définie en $S = S_v$ telle que

$$\underline{t}_v = \frac{\underline{t}_v^- + \underline{t}_v^+}{\|\underline{t}_v^- + \underline{t}_v^+\|}, \quad (4.212)$$

$$\underline{n}_v = \frac{\underline{n}_v^- + \underline{n}_v^+}{\|\underline{n}_v^- + \underline{n}_v^+\|}. \quad (4.213)$$

Sous l'hypothèse d'un câble mobile qui se déplace à une vitesse instantanée V_0 soumise à une variation $\frac{\partial V_0}{\partial t} = A_{V_0}$, une autre configuration de calcul ajoute un terme à l'expression (4.90) de l'accélération eulérienne. L'équation (4.207) devient :

$$\underline{T}_v^-(S_v^-) + \underline{T}_v^+(S_v^+) + \underline{F}(S_v) = M_v \left(V_0^2 \frac{\partial \underline{t}_v}{\partial S}(S_v) + A_{V_0} \underline{t}_v \right). \quad (4.214)$$

Compte tenu de la discontinuité de l'inclinaison du câble dans la zone d'accroche au véhicule pour le modèle de fil, la variation du vecteur tangentiel est définie par :

$$\frac{\partial \underline{t}_v}{\partial S} = \kappa_t \underline{n}_v, \quad (4.215)$$

avec $\underline{n}_v = \frac{\underline{n}_v^- + \underline{n}_v^+}{\|\underline{n}_v^- + \underline{n}_v^+\|}$, κ_t la courbure locale du câble donnée par la variation des angles du câble de part et d'autre du véhicule.

Dynamique

L'expression (4.108) donne l'accélération lagrangienne pour un milieu en translation à une vitesse $\underline{V}(S) = V_0 \underline{t}$, avec S l'abscisse sur la configuration de référence statique du câble en translation, en négligeant les termes de transport dû à la translation du câble. Comme précédemment pour le calcul modal du câble, l'équilibre dynamique d'un véhicule mobile de masse M_v attaché en $S = S_v$ à un câble en translation à la vitesse constante V_0 et soumis à un chargement extérieur statique $\underline{F}(S_v)$ est décrit par l'équation :

$$\underline{T}_v^-(S_v^-, t) + \underline{T}_v^+(S_v^+, t) + \underline{F}(S_v) = M_v \left(\ddot{\underline{U}}(S_v, t) + V_0^2 \frac{\partial^2 \underline{X}}{\partial S^2}(S_v, t) \right), \quad (4.216)$$

avec $\underline{T}_v^- = -\|\underline{T}_v^-(S, t)\| \underline{t}_v^-(S, t)$ la tension du câble à gauche du véhicule, $\underline{T}_v^+ = \|\underline{T}_v^+(S, t)\| \underline{t}_v^+(S, t)$ la tension du câble à droite du véhicule, portées par les vecteurs tangents au câble de part et d'autre de l'appui.

En décomposant les grandeurs en une contribution statique et dynamique, puis par linéarisation des équations dynamiques autour de la position statique mobile précédemment calculée désignée par l'exposant \bullet^s , l'équation (4.216) se réécrit :

$$\begin{aligned} & - \left(\|\underline{T}_v^{s-}(S_v^-)\| + \|\underline{T}_v^{d-}(S_v^-, t)\| \right) \underline{t}_v^{s-} - \|\underline{T}_v^{s-}(S_v^-)\| \left(\frac{1}{\|\underline{X}'_{s,vit}\|} \frac{\partial \underline{U}_d}{\partial S}(S_v^-) - \frac{\underline{t}_v^{s-}}{\|\underline{X}'_{s,vit}\|} \frac{\partial \underline{U}_d}{\partial S}(S_v^-) \cdot \underline{t}_v^{s-} \right) \\ & + \left(\|\underline{T}_v^{s+}(S_v^+)\| + \|\underline{T}_v^{d+}(S_v^+, t)\| \right) \underline{t}_v^{s+} + \|\underline{T}_v^{s+}(S_v^+)\| \left(\frac{1}{\|\underline{X}'_{s,vit}\|} \frac{\partial \underline{U}_d}{\partial S}(S_v^+) - \frac{\underline{t}_v^{s+}}{\|\underline{X}'_{s,vit}\|} \frac{\partial \underline{U}_d}{\partial S}(S_v^+) \cdot \underline{t}_v^{s+} \right) + \underline{F}(S_v) \\ & = M_v \left[\ddot{\underline{U}}(S_v, t) + V_0^2 \left(\frac{\partial^2 \underline{X}_{s,vit}}{\partial S^2}(S_v) + \frac{\partial^2 \underline{U}_d}{\partial S^2}(S_v, t) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.217)$$

Les termes statiques se simplifient d'après (4.216),

$$\begin{aligned} & - \|\underline{T}_v^{d-}(S_v^-, t)\| \underline{t}_v^{s-} - \|\underline{T}_v^{s-}(S_v^-)\| \left(\frac{1}{\|\underline{X}'_{s,vit}\|} \frac{\partial \underline{U}_d}{\partial S}(S_v^-) - \frac{\underline{t}_v^{s-}}{\|\underline{X}'_{s,vit}\|} \frac{\partial \underline{U}_d}{\partial S}(S_v^-) \cdot \underline{t}_v^{s-} \right) \\ & + \|\underline{T}_v^{d+}(S_v^+, t)\| \underline{t}_v^{s+} + \|\underline{T}_v^{s+}(S_v^+)\| \left(\frac{1}{\|\underline{X}'_{s,vit}\|} \frac{\partial \underline{U}_d}{\partial S}(S_v^+) - \frac{\underline{t}_v^{s+}}{\|\underline{X}'_{s,vit}\|} \frac{\partial \underline{U}_d}{\partial S}(S_v^+) \cdot \underline{t}_v^{s+} \right) \\ & = M_v \left[\ddot{\underline{U}}(S_v, t) + V_0^2 \frac{\partial^2 \underline{U}_d}{\partial S^2}(S_v, t) \right]. \end{aligned} \quad (4.218)$$

La dérivée partielle $\frac{\partial^2 \underline{U}_d}{\partial S^2}(S_v, t)$, qui intervient dans le terme inertiel du membre de droite,

$$\frac{\partial^2 \underline{U}_d}{\partial S^2}(S_v) = (u_d'' - \kappa_t^2 u_d - 2\kappa_t v_d') \underline{t}_v^s + (2u_d' \kappa_t + v_d'' - v_d \kappa_t^2) \underline{n}_v^s + w_d'' \underline{e}_z, \quad (4.219)$$

est exprimée en fonction de la courbure κ_t de la trajectoire instantanée au niveau du véhicule et des vecteurs de la base locale $(\underline{t}_v^s, \underline{n}_v^s, \underline{e}_z)$ au point d'attache $S = S_v$.

De la même façon que précédemment, l'équation (4.218) se projette sur la base locale $(O, \underline{t}_v^s, \underline{n}_v^s)$ définie en $S = S_v$ telle que $\underline{t}_v^s = \frac{\underline{t}_v^{s-} + \underline{t}_v^{s+}}{\|\underline{t}_v^{s-} + \underline{t}_v^{s+}\|}$ et $\underline{n}_v^s = \frac{\underline{n}_v^{s-} + \underline{n}_v^{s+}}{\|\underline{n}_v^{s-} + \underline{n}_v^{s+}\|}$.

En supposant l'existence d'une accélération instantanée $\frac{\partial V_0}{\partial t} = A_{V_0}$ de la vitesse de translation du câble, un terme supplémentaire d'accélération stationnaire est ajouté à l'équation (4.216),

$$\underline{T}_v^-(S_v^-, t) + \underline{T}_v^+(S_v^+, t) + \underline{F}(S_v) = M_v \left(\ddot{\underline{U}}(S_v, t) + A_{V_0} \frac{\partial \underline{X}}{\partial S}(S_v, t) + V_0^2 \frac{\partial^2 \underline{X}}{\partial S^2}(S_v, t) \right). \quad (4.220)$$

Après simplification des termes statiques,

$$\begin{aligned} & - \|\underline{T}_v^{d-}(S_v^-, t)\| \underline{t}_v^{s-} - \|\underline{T}_v^{s-}(S_v^-)\| \left(\frac{1}{\|\underline{X}'_{s,vit}\|} \frac{\partial \underline{U}_d}{\partial S}(S_v^-) - \frac{\underline{t}_v^{s-}}{\|\underline{X}'_{s,vit}\|} \frac{\partial \underline{U}_d}{\partial S}(S_v^-) \cdot \underline{t}_v^{s-} \right) \\ & + \|\underline{T}_v^{d+}(S_v^+, t)\| \underline{t}_v^{s+} + \|\underline{T}_v^{s+}(S_v^+)\| \left(\frac{1}{\|\underline{X}'_{s,vit}\|} \frac{\partial \underline{U}_d}{\partial S}(S_v^+) - \frac{\underline{t}_v^{s+}}{\|\underline{X}'_{s,vit}\|} \frac{\partial \underline{U}_d}{\partial S}(S_v^+) \cdot \underline{t}_v^{s+} \right) \\ & = M_v \left[\ddot{\underline{U}}(S_v, t) + A_{V_0} \frac{\partial \underline{U}_d}{\partial S}(S_v, t) + V_0^2 \frac{\partial^2 \underline{U}_d}{\partial S^2}(S_v, t) \right], \end{aligned} \quad (4.221)$$

La dérivée partielle $\frac{\partial \underline{U}_d}{\partial S}(S_v, t)$ introduite dans le terme inertiel du membre de droite par l'accélération,

$$\frac{\partial \underline{U}_d}{\partial S}(S_v) = (u_d' - \kappa_t v_d) \underline{t}_v^s + (v_d' + \kappa_t u_d) \underline{n}_v^s + w_d' \underline{e}_z, \quad (4.222)$$

est exprimée en fonction de la courbure κ_t de la trajectoire instantanée au niveau du véhicule et les vecteurs de la base locale $(\underline{t}_v^s, \underline{n}_v^s, \underline{e}_z)$ au point d'attache $S = S_v$.

4.4 Définition du modèle dynamique global du système

Cette section donne des éléments sur la **stratégie d'assemblage** des éléments de câble, dont les modèles analytiques ont été abordés en section 4.1, pour aboutir au modèle dynamique de la ligne complète dans la sous-section 4.4.1. Une fois les modes de vibration calculés, différentes méthodes de construction de base pour la réduction de modèle de l'assemblage, aussi appelées **sous-structuration**, sont abordées dans la sous-section 4.4.2. Le calcul de la correction statique est abordé dans la sous-section 4.4.3.

4.4.1 Assemblage et fermeture

La connaissance de l'équilibre statique du système de transport par câbles donnée par les développements des chapitres 2 et 3 est un préalable au calcul dynamique. Les résultats statiques servent en effet à construire les modèles dynamiques de câble, fixe et mobile, ainsi que ceux des sous-structures qui possèdent une interface commune avec le câble : appuis et véhicules.

Un ensemble de fonctions ϕ_j en espace,

$$\left[\phi_j(S) \right] = \left[\phi_{u,j}(S) \quad \phi_{v,j}(S) \quad \phi_{w,j}(S) \right], \quad (4.223)$$

décrivent les petites vibrations du câble à la pulsation ω autour de la position statique sur chaque portion de câble de la ligne située en $S \in [S_j, S_{j+1}]$, $\forall j \in [1, n_{portion}]$, avec $n_{portion}$ le nombre d'éléments continus de câble situés entre deux singularités. Elles sont données par les solutions au problème modal des sous-sections 4.1.1 et 4.1.2 et dépendent explicitement de la pulsation ω . Les ϕ_j sont supposées former une base approchée des solutions au problème dynamique, car issues de la résolution analytique partielle d'un problème de laplacien assimilable à un problème aux valeurs propres. Les fonctions de base exprimées dans le domaine physique sont associées à des coordonnées $\{q_j\}$ telles que :

$$\{\Phi_j\} = \left[\phi_j \right] \{q_j\}. \quad (4.224)$$

Par exemple, pour des vibrations symétriques du premier modèle de câble fixe,

$$\{q_j\} = \left\{ A_{u,j} \quad A_{v,j} \quad B_{v,j} \quad A_{w,j} \quad B_{w,j} \quad T_{d,j} \right\}^T. \quad (4.225)$$

À ce stade, aucune information sur les conditions aux bords des portions de câble n'est apportée. Une phase d'assemblage est nécessaire pour représenter la ligne de câble dans sa globalité et ses interactions avec les autres éléments. Six équations décrivent le couplage dynamique à chaque jonction d'une portion de câble :

- Trois équations de continuité des déformées modales Φ_u, Φ_v, Φ_w de part et d'autre de la jonction.
- Trois équations sur les conditions d'appui bilatéral du câble en présence d'un support intermédiaire, d'après les modèles construits dans la section 4.2, ou trois équations d'équilibre dynamique en présence d'un véhicule, d'après les modèles construits dans la section 4.3.

Trois équations portant sur l'équilibre dynamique ou sur le déplacement dynamique imposé, sont à renseigner aux deux extrémités de la ligne, en $S = 0$ et $S = L$, pour fermer le problème de la boucle de câble. Une fois le problème global assemblé en adjoignant les conditions aux bords linéaires aux interfaces des $n_{portion}$ de câble, un système carré d'équations linéaires à $6 \times n_{portion}$ inconnues, rassemblées dans le vecteur inconnu $\{q\}$, est obtenu :

$$\left[H(\phi_j, \omega) \right] \{q\} = \{0\}, \quad (4.226)$$

où $[H]$ est la matrice d'assemblage des portions de câble. Pour des vibrations symétriques d'un câble fixe,

$$[H(\phi_j, \omega)] \{q\} = [H(\phi_j, \omega)]_{[6n_{portion} \times 6n_{portion}]} \begin{Bmatrix} A_{u,j} \\ T_{d,j} \\ A_{v,j} \\ B_{v,j} \\ A_{w,j} \\ B_{w,j} \end{Bmatrix} = \{0\}. \quad (4.227)$$

La résolution de (4.227) renvoie les modes de vibration du modèle assemblé.

L'Annexe J propose deux exemples d'assemblage de ligne de câble avec le modèle de câble en translation.

4.4.2 Réduction de modèle sur base modale

Compte tenu de leurs propriétés, les **modes de vibration linéaires** constituent une approximation pour caractériser la dynamique d'ensemble de la ligne de câble et forment une base privilégiée de projection des équations dynamiques du modèle complet pour l'obtention d'un modèle réduit. La fidélité du modèle réduit dépend, d'une part, de la richesse de la physique décrite dans le modèle initial sous-jacent, s'il rend par exemple compte des non-linéarités, et, d'autre part, des traces de cette physique apportées dans la base de réduction modale. Ici, les modes sont calculés à partir d'une dynamique linéarisée autour d'un état statique non-linéaire. Les modes contiennent ainsi une information sur les non-linéarités statiques à travers les termes de corrections statiques. En revanche, aucune information sur les contributions non-linéaires dynamiques n'est donnée par les modes, puisque les modes non-linéaires n'ont pas été traités dans ces travaux.

Une sélection de N modes permet de décrire le comportement de la structure, de façon réduite, dans un sous-espace de dimension finie. Un nombre N petit est en général suffisant selon la gamme de fréquence d'excitation ciblée. Par exemple, pour les modes anti-symétriques de la ligne de câble, la restriction du mode k à la portion $S \in [S_j, S_{j+1}]$ s'écrit :

$$\{\Phi_{k,j}(S)\} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\Delta_j}{\sqrt{\mu}\omega_k} \sin\left(\frac{\sqrt{\mu}\omega_k}{\Delta_j} S\right) & -\frac{\Delta_j}{\sqrt{\mu}\omega_k} \cos\left(\frac{\sqrt{\mu}\omega_k}{\Delta_j} S\right) & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\sqrt{\mu}\omega_k}{\Delta_j} S\right) & \sin\left(\frac{\sqrt{\mu}\omega_k}{\Delta_j} S\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\left(\frac{\sqrt{\mu}\omega_k}{\Delta_j} S\right) & \sin\left(\frac{\sqrt{\mu}\omega_k}{\Delta_j} S\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{u,j}^k \\ A_{v,j}^k \\ B_{v,j}^k \\ A_{w,j}^k \\ B_{w,j}^k \end{Bmatrix}. \quad (4.228)$$

La restriction du déplacement dynamique $U_{d,j}$ à la portion comprise entre les abscisses curvilignes S_j et S_{j+1} s'exprime par synthèse modale comme combinaison linéaire d'une sélection des N premiers modes,

$$\{U_{d,j}(S, t)\} = \sum_{k=1}^N q_{kR}(t) \{\Phi_{k,j}(S)\} = [\Phi_{k,j}(S)]_{[3 \times N]} \{q_{kR}(t)\}_{[N \times 1]} = [T_{R|j}] \{q_R\}. \quad (4.229)$$

À l'échelle du système assemblé complet, le modèle réduit de la structure possède ainsi N degrés de liberté $\{q_{kR}(t)\}$,

$$\{U_d(S, t)\} = \{U_d(S, t)\}_{[(3n_{portion}) \times 1]} = [\Phi_k(S)]_{[(3n_{portion} \times N)]} \{q_{kR}(t)\}_{[N \times 1]} = [T_R] \{q_R\}_{[N \times 1]}. \quad (4.230)$$

Pour décrire le comportement dynamique de l'assemblage des éléments de câble entre eux, la méthode de réduction précédente, qui utilise les modes du système assemblé complet, permet de reproduire de façon exacte les modes de la ligne. Il est parfois nécessaire d'accéder à une information locale du comportement dynamique, à l'échelle de chaque composant, et une caractérisation de l'influence des paramètres locaux de la structure sur les modes globaux pour des besoins de conception. L'Annexe K apporte des éléments complémentaires sur des alternatives de stratégies de réduction de modèle dynamique et de sous-structuration, généralement appliquées à des modèles de grande taille aux éléments finis, et présentées ici dans le contexte du modèle analytico-numérique mis en place dans ces travaux.

4.4.3 Correction statique

Dans les chapitres 2 et 3, l'équilibre statique du câble a été formulé puis calculé selon deux modèles. Un premier modèle repose sur la formule analytique de la chaînette tandis que le second, plus général, est basé sur les équations différentielles de la mécanique des milieux continus curvilignes. Les conclusions apportées à la lumière de l'étude statique ont conduit à privilégier l'utilisation de la méthode de la chaînette dans le cadre de l'application présentée dans ce mémoire. La formulation dynamique est donc donnée à partir d'une référence statique calculée par la chaînette.

Par commodité, les équations statiques de chaînette qui donnent la position d'équilibre statique \underline{X}_s ont été précédemment écrites en fonction de l'abscisse x dans le repère cartésien $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$. Le déplacement dynamique \underline{U}_d du modèle linéarisé analytique utilisé pour l'analyse modale est décrit par l'abscisse curviligne S_0 dans la base locale de Frenet sur la configuration statique déformée $(\underline{t}(S_0), \underline{n}(S_0), \underline{e}_z)$, tel que la position en chaque point du système s'écrit

$$\underline{X}(S_0, t) = \underline{X}_s + \underline{U}_d(S_0, t) = \underline{X}_s + u_d \underline{t} + v_d \underline{n} + w_d \underline{e}_z. \quad (4.231)$$

Les quantités statiques sont décrites en fonction de l'abscisse curviligne S sur la configuration statique déformée connue par les équations de chaînette données en fonction des coefficients $(\tau_j, K_{1,j}, K_{2,j})$ sur chaque portion de câble $x \in [x_j, x_{j+1}]$, par le changement de variable

$$S - S_j = \tau_j \left[\sinh \left(\frac{x}{\tau_j} + K_{1,j} \right) - \sinh \left(\frac{x_j}{\tau_j} + K_{1,j} \right) \right], \quad (4.232)$$

$$\Leftrightarrow x = \tau_j \left[\sinh^{-1} \left(\frac{(S - S_j)}{\tau_j} + \sinh \left(\frac{x_j}{\tau_j} + K_{1,j} \right) \right) - K_{1,j} \right]. \quad (4.233)$$

D'après les équations issues de la formulation d'un câble fixe ou mobile dans les sous-sections 4.1.1 et en 4.1.2, ainsi que les équations de couplage du câble avec les sous-structures du système abordés dans les sections 4.2 et 4.3, des termes provenant de l'équilibre statique du câble exprimés en fonction de l'abscisse curviligne interviennent dans les équations de la dynamique du câble :

- les vecteurs de la base locale de Frenet sur la configuration statique $(\underline{t}, \underline{n})$,
- la constante $\Delta = \sqrt{EA \frac{\|\underline{X}'_s\| - 1}{\|\underline{X}'_s\|}}$ faisant intervenir l'allongement relatif statique du câble $\|\underline{X}'_s\|$,
- la courbure du câble κ_s sur la configuration statique,
- l'angle d'inclinaison du câble α^s par rapport à l'horizontale dirigée selon \underline{e}_x .

Les détails du changement de variable opéré pour chacune de ces contributions est donné en Annexe L.

Bilan du chapitre

En l'absence de modèles disponibles dans l'état de l'art, et dans la suite du chapitre 2, le chapitre 4 apporte les éléments de modélisation dynamique d'une ligne complète de transport par câbles par décomposition du système en ses différents sous-composants. Les modèles servent ensuite à l'étude dynamique abordée dans le chapitre 5.

Chapitre 5

Étude du comportement dynamique du système.

Introduction du chapitre

Dans le chapitre 5, la section 5.1 définit le cadre de l'étude dynamique du système de transport par câbles. La section 5.2 est consacrée au calcul des modes de vibration selon une procédure d'assemblage du modèle dynamique d'une ligne de câble, à l'arrêt et en translation, selon plusieurs hypothèses mécaniques abordés dans le chapitre 4. À partir de l'information portée par les modes de vibration, une interprétation du mécanisme de pompage est donnée en section 5.3. Un modèle réduit à un degré de liberté, prenant la forme d'un système à excitation paramétrique, sert de support pour une analyse de stabilité et le développement d'une méthodologie de détection des configurations susceptibles d'amorcer de fortes oscillations du câble. La section 5.4 définit des stratégies pour le calcul des évolutions dynamiques d'une ligne au cours du déplacement des véhicules. Enfin, une section 5.5 est dédiée à une analyse heuristique des phénomènes dynamiques affectant des installations réelles, réalisée à la lumière des analyses dynamiques des sections précédentes.

5.1 Cadre de l'étude dynamique du problème non-linéaire, multi-corps et variable en temps

Le problème dynamique d'une ligne de transport par câbles est un objet d'étude d'intérêt sur le plan académique car il regroupe plusieurs caractéristiques qui nécessitent la mise en œuvre de méthodes dédiées (Fig. 5.1). Les choix de modélisation précédemment abordés dans les chapitre 2 et 4 ont déjà permis de traiter les problématiques suivantes :

- **Multi-corps** : l'élaboration des modèles statiques et dynamiques est basée sur des modèles élémentaires pour chaque constituant du système. Le modèle statique global est obtenu après une procédure d'assemblage détaillée dans le chapitre 2 et 4.
- **Multi-échelle** : le choix d'une représentation des appuis par un modèle ponctuel (chapitre 2) et combiné à l'utilisation d'un modèle de câble analytico-numérique (chapitre 2 et 4), qui ne nécessite pas de maillage actualisé et de raffinement selon les différentes échelles en jeu, autorise un traitement simplifié des différentes échelles du problème.

5.1.1 Modes de vibrations

Lorsqu'elles sont en mouvement, les lignes de transport par câbles ne rentrent pas dans le cadre des systèmes LTI. En effet :

- Le câble est le siège de **non-linéarités géométriques** activées par la flexibilité du milieu qui est à l'origine de grands déplacements par rapport à la configuration de référence, aussi bien en statique qu'en dynamique

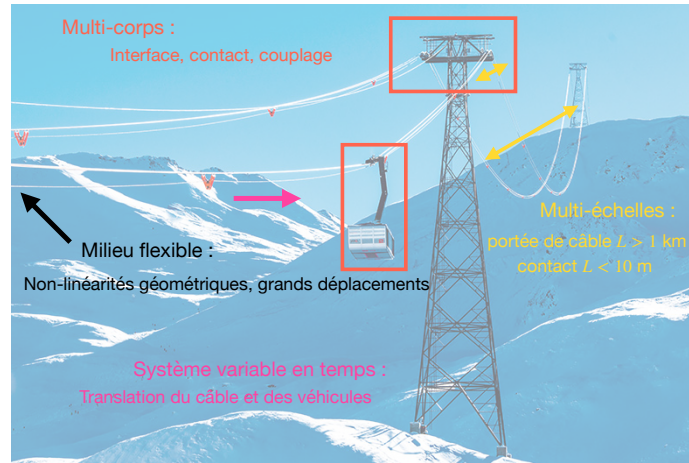


FIGURE 5.1: Illustration des spécificités du problème dynamique d'une ligne de transport par câble (d'après une photo tirée du site Doppelpmayr Group)

(chapitre 1 et 2).

La stratégie de calcul des modes du câble adoptée dans le chapitre 4 consiste à linéariser les équations dynamiques autour d'un état statique non-linéaire qui joue le rôle de **correction statique** pour le calcul modal. Les paramètres statiques de tension Δ^2 et la courbure κ_s interviennent dans les équations dynamiques linéarisées comme une trace des non-linéarités statiques.

- La **position des véhicules évolue** au cours de leur déplacement sur les lignes de câble. Ainsi, la position du chargement extérieur appliqué au câble est variable dans le temps.

À l'échelle d'une ligne de transport par câbles, l'équilibre statique dépend de la position des véhicules qui elle même dépend du temps lorsque le système est en mouvement (approche quasi-statique du chapitre 3). En effet, le poids des véhicules agit comme une succession de masses ponctuelles sur le câble. Ainsi, les coefficients $\Delta^2(t), \kappa_s(t)$ affichent une dépendance en temps contrôlée par les positions successives occupées par les véhicules. Le modèle dynamique possède donc des propriétés de raideur qui évoluent au cours du temps, visibles dans les équations dynamiques d'une portion de câble mobile introduite dans le chapitre 4 :

$$\begin{cases} \mu \ddot{u}_d + \Delta^2(t) \kappa_s(t) (v'_d + \kappa_s(t) u_d) - EA(u''_d - \kappa_s v'_d) - 2\mu V_0 \dot{u}'_d + \mu V_0^2 u''_d + \mu A_{V_0} v'_d = 0, \\ \mu \ddot{v}_d - \Delta^2(t) (v''_d + \kappa_s(t) u'_d) - \kappa_s(t) EA(u'_d - \kappa_s(t) v_d) - 2\mu V_0 \dot{v}'_d + \mu V_0^2 v''_d + \mu A_{V_0} v'_d = 0, \\ \mu \ddot{w}_d - \Delta^2(t) w''_d - 2\mu V_0 \dot{w}'_d + \mu V_0^2 w''_d + \mu A_{V_0} w'_d = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

La dépendance en temps est une difficulté pour aborder le problème de modes. Afin d'adopter un cadre compatible avec une vision modale classique, indépendante du temps, le problème est formulé de façon paramétrique par introduction d'un paramètre de contrôle géométrique, noté l_c :

- le paramètre décrit l'ensemble des positions successives occupées par les véhicules et se substitue au temps t .
- Pour chaque valeur du paramètre de contrôle, un **mode instantané de vibration** est défini comme les vibrations associées à un état dynamique linéarisé autour d'une position statique non-linéaire de la ligne (état tangent instantané) pour une position fixée des véhicules.
- Une famille de modes paramétriques $(\underline{\Phi}_k(\Delta_2, \kappa_s, l_c), \omega_k(\Delta_2, \kappa_s, l_c))$ est ainsi obtenue et décrit l'évolution des propriétés modales lorsque le système est en mouvement.

Dans le cas particulier des lignes de transport par câbles à mouvement continu, les véhicules uniformément chargés et régulièrement espacés sur la boucle de câble d'une distance l_d créent une répétition de motifs périodiques en espace de période l_d . Le paramètre géométrique de contrôle considéré est le déroulement l_c du câble à la poulie motrice (Fig. 5.2). La restriction à l'intervalle $l_c \in [0, l_d]$ suffit à décrire l'ensemble des configurations géométriques successivement occupées par le système (sous-section 5.2.5).

Une autre stratégie est de répartir la masse des véhicules le long du câble en adoptant une vision homogène

avec un modèle dynamique indépendant du temps (sous-section 5.2.4). Avec une vision uniforme de la ligne de câble, la correction statique ne décrit pas les effets de la présence des véhicules, assimilés à des masses ponctuelles. Elle introduit des discontinuités géométriques et en tension dans l'équilibre statique (chapitre 3), ce qui induit *a priori* une dépendance du sous-espace modal à la position des véhicules sur la ligne.

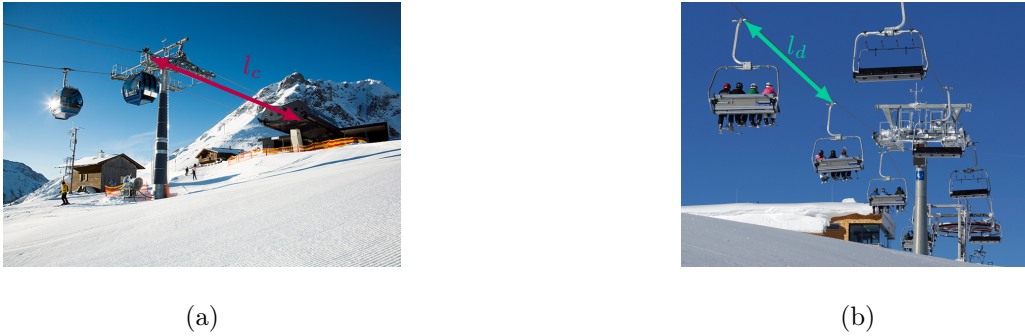


FIGURE 5.2: (a) Longueur de contrôle l_c du déroulement du câble à la poulie motrice. (b) Espacement l_d entre véhicules sur un télésiège

Avec les notations générales introduites dans le chapitre 1, le calculs des modes vibration est réalisé suivant les étapes suivantes :

- Le point d'équilibre $\{q_e\} = \{X_s\}$ correspond à l'état statique du système pour une position donnée des véhicules (chapitres 2 et 3).
- Le système dynamique non-linéaire $[A(q, l_c)]$ est obtenu par l'assemblage des équations mécaniques de câble et des éléments qui composent une ligne de transport par câbles en gardant les contributions géométriques non-linéaires cubiques et quadratiques (chapitre 4).
- Le système dynamique linéarisé $[A_0(q_e, l_c)] = [H(\phi, \omega)]$ est obtenu par l'assemblage des équations mécaniques de câble et des éléments qui composent une ligne de transport par câbles en conservant uniquement les contributions à l'ordre un dans le développement de Taylor (chapitre 4).
- Le vecteur d'état $\{q(t)\} = \{q\} e^{j\omega t}$ regroupe les coordonnées généralisées selon lesquelles est exprimée l'inconnue de déplacement dynamique (chapitre 4).

Dans les travaux présentés dans ce mémoire, la recherche des solutions au problème aux valeurs propres est distincte d'une procédure de Galerkin classique qui débouche sur un problème aux valeurs propres. La méthode détaillée dans les sous-sections 5.2.1 et 5.2.2 est basée sur une recherche des modes du modèle assemblé dans une base $[\phi_j]$ de fonctions analytiques solutions des équations de câble, dépendant explicitement des pulsations modales,

$$\{\Phi_k\} e^{j\omega t} = [\phi_k(\omega)] \{q_k\} e^{j\omega t}. \quad (5.2)$$

L'annulation du déterminant du système analytique de l'assemblage et une étape de normalisation renvoient les modes de vibration $(\{\Phi_k(X_s, l_c)\}, \omega_k(X_s, l_c))$ de l'installation complète.

5.1.2 Stabilité de la vibration

D'après les équations (5.1) d'un câble en translation transitoire à une vitesse instantanée V_0 sous l'effet d'une accélération A_{V_0} présentées dans le chapitre 4, des termes complexes sont apportés par les contributions issues des forces d'inertie. La question d'un effet dynamique déstabilisant généré par la translation des câbles mobiles se pose alors, et encourage à mener une analyse modale complexe (CEA) en conservant les termes inertiels, ce qui est l'objet de la sous-section 5.2.4. Dans la littérature consacrée aux structures mécaniques en rotation (rotors), des termes dits **gyroscopiques** ont des effets similaires sur les modes.

Dans le cas spécifique d'une ligne à mouvement continu avec des véhicules uniformément chargés et régulièrement espacés d'une distance l_d sur le câble, avec une vitesse de translation stabilisée à V_0 , le système devient périodique de période $\Delta t = \frac{l_d}{V_0}$. Par changement de variable $t = \frac{l_c}{V_0}$, où l_c est le paramètre de contrôle d'évolution de défilement du câble, les paramètres statiques $\kappa(t)$ et $\Delta^2(t)$, qui interviennent dans (5.1) affichent également une périodicité Δt . Ils jouent alors le rôle d'**excitateur paramétrique** [207]. La section 5.3 s'intéressera aux

évolutions périodiques du système en translation à vitesse constante après réduction du modèle dynamique sur un mode de vibration. La question de l'équilibre dynamique des solutions périodiques du modèle réduit sera alors formulée dans le cadre de la théorie de Floquet, avec une recherche des points de fonctionnement pouvant mener à des instabilités, ainsi que le calcul des bifurcations et des cycles limites afin d'anticiper l'amplitude du mouvement dynamiques dans ce régime.

L'acte de conférence " Hugo BÉCU, Claude-Henri LAMARQUE, Alireza TURE SAVADKOOHI (2023), **Modal Analysis of a Time-Variable Ropeway System : Model Reduction and Vibration Instability Detection**, Topics in Modal Analysis & Parameter Identification, Volume 9, Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series, https://doi.org/10.1007/978-3-031-34942-3_17 " propose une introduction à cette problématique.

5.2 Analyse modale d'une ligne de transport par câble

5.2.1 Méthode de calcul des modes réels

Pour rappel, la méthode de calcul des modes de vibration du système est basée sur l'existence de formules analytiques pour les formes modales d'une portion de câble dans le contexte des petites vibrations autour de sa position statique (chapitre 4). L'ajout des conditions aux limites de continuité et de la dynamique des éléments situés aux bords de chaque morceau continu de câble (chapitre 4) permet de sélectionner les modes de vibration. En l'absence de terme dépendant de la vitesse, il est attendu que les modes soient réels : la recherche des modes (Φ, ω) se fait donc dans l'espace des réels.

En pratique, une procédure numérique est adoptée pour déterminer les fréquences modales et les coefficients qui interviennent dans les expressions analytiques des formes modales :

- Les conditions aux bords de chacune des n_p portions de câble élémentaires sont écrites par application des équations de couplage avec les véhicules et les appuis. Un système carré est obtenu sous la forme,

$$\left[H(\omega) \right]_{[6n_p \times 6n_p]} \left\{ q \right\}_{[6n_p \times 1]} = \left\{ 0 \right\}, \quad (5.3)$$

avec $\left[H(\omega) \right]$ la matrice d'assemblage des portions de câble, $\left\{ q \right\}$ le vecteur regroupant les 6 coefficients des déformées modales selon chaque composante longitudinale, verticale et transversale de chacune des n_p portions de câble assemblées.

- La recherche des pulsations modales ω_k est menée en imposant la condition d'existence de solutions non-triviales au système (5.3),

$$\det\left(\left[H(\omega_k) \right]\right) = 0. \quad (5.4)$$

Une méthode purement analytique est mise en échec pour la résolution de (5.4), compte tenu de la forme de la matrice $\left[H(\omega_k) \right]$ qui ne possède pas de propriétés intéressantes pour mener un calcul par blocs (existence de couplages entre les équations). Le calcul formel du déterminant est envisageable sur des modèles à faible nombre de degrés de liberté. Pour des modèles de taille plus importante, l'utilisation d'une méthode numérique est nécessaire.

Pour cela, la fonction `det()` et une méthode de Newton implémentée dans la fonction `fsolve()` de l'environnement Matlab ont été mises en œuvre pour le calcul numérique des ω_k vérifiant (5.4). Matlab manipule des variables numériques codées sur 64 bits en double précision. Les nombres les plus grands manipulés sont 10^{306} , et au-delà de cette limite seront considérés comme infini. Pour éviter d'atteindre cette limite lors du processus de recherche de zéro et stabiliser les calculs, le déterminant est remis à l'échelle en multipliant la matrice $\left[H \right]$ par un scalaire c_s . À chaque évaluation, un coefficient c_s est recherché tel que :

$$\det(c_s \left[H \right]) = 1. \quad (5.5)$$

En appliquant les règles de calcul du déterminant,

$$\det(c_s [H]) = \det([c_s I_{6n_p} [H]]) = c_s^{6n_p} \det([H]). \quad (5.6)$$

Soit en remplaçant (5.6) dans (5.5), il vient

$$c_s = \exp\left(\frac{-\ln(\det([H]))}{6n_p}\right). \quad (5.7)$$

— Le vecteur des inconnues modales $\{q_k\}$ associé à la pulsation ω_k vérifie

$$[H(\omega_k)] \{q_k\} = \{0\}. \quad (5.8)$$

La condition :

$$\det([H(\omega_k)]) = 0, \quad (5.9)$$

est équivalente à ce que le système, formé par les $6n_p$ lignes du système défini par $[H(\omega_k)]$, soit lié, ou qu'au moins une ligne de ce système s'écrive comme combinaison linéaire des autres. En supprimant par exemple la dernière ligne et la dernière colonne en supposant que le mineur

$$\det([H(\omega_k)]_{[(6n_p-1) \times (6n_p-1)]}) \neq 0, \quad (5.10)$$

équivalent à ce que la matrice extraite $[H_{6n_p-1}]$ soit inversible et que le système formé par les $6n_{portion} - 1$ lignes et colonnes restantes soit libre, une méthode est de fixer le dernier coefficient de $\{q_k\}$ à 1 et de chercher les $6n_p - 1$ coefficients restants,

$$\{q_k\}_{[6n_p-1 \times 1]} = [H_{6n_p-1}]^{-1} \{C_{6n_{portion}-1}\}_{[(6n_p-1) \times 1]}, \quad (5.11)$$

où $\{C_{6n_p-1}\}$ est le vecteur formé par les $6n_p - 1$ premières lignes de la colonne $6n_p$ de $[H(\omega_k)]_{[6n_p \times 6n_p]}$. De façon alternative, une méthode de type Newton ou une optimisation appliquée au résidu permet d'obtenir les valeurs des $6n_{portion}$ coefficients de $\{q_k\}$ qui vérifient :

$$[H(\omega_k)] \{q_k\} = \{0\}. \quad (5.12)$$

— Les déformées modales sont exprimées dans la base des fonctions analytiques modales élémentaires,

$$\{\Phi_k\} = [\phi_k] \{q_k\}, \quad (5.13)$$

et sont caractérisées par une norme $\|\{\Phi_k(S)\}\|$ définie à partir d'un produit scalaire, ici le produit scalaire sur l'ensemble $\mathcal{L}^2(\mathbf{R}^n)$ pour tout élément $\{\Phi_k(S)\} \in \mathbf{R}^n$, avec $S \in [0, L]$ où L est la longueur de l'assemblage de câble :

$$\|\{\Phi_k(S)\}\|^2 = \int_0^L \{\Phi_k\}^T \{\Phi_k\} \, dS = \sum_{j=1}^{n_{portion}} \int_{L_j}^{L_{j+1}} \{\Phi_{k,j}\}^T \{\Phi_{k,j}\} \, dS. \quad (5.14)$$

Dans la suite, le choix est fait d'adopter la norme unitaire :

$$\|\{\Phi_k(S)\}\| = 1. \quad (5.15)$$

En dynamique des structures, la norme par rapport à la masse,

$$\left\| \left\{ \Phi_k(S) \right\} \right\| = \frac{1}{\sqrt{\mu}}, \quad (5.16)$$

est couramment utilisée compte tenu des propriétés d'orthogonalité des modes propres dans les problèmes mécaniques élastiques linéaires. Les équations de la dynamique projetées sur une telle base diagonalisent les matrices de masse et de raideur du problème élastique linéaire sous-jacent, avec une matrice de masse identitaire et les pulsations propres qui apparaissent sur la diagonale de la matrice de raideur. Ces propriétés sont cependant perdues dans le cas des modes de câble, non-orthogonaux dans le cas général.

Une approche alternative pour rechercher les modes d'une ligne, non adoptée ici, est de considérer les véhicules comme des masses additionnelles ponctuelles sur le câble. Le déplacement dynamique du câble peut alors être recherché sur l'ensemble de la boucle de câble par une méthode de Ritz-Galerkin :

$$\underline{U}_{dj} = \underline{\Psi}_j(S) q(t), \quad S \in [0, L]. \quad (5.17)$$

Le mouvement est décomposé sur une base de fonctions cinématiquement admissibles,

$$\underline{\Psi}_j(S) = \Psi_{j,u}(S) \underline{t}(S) + \Psi_{j,v}(S) \underline{n} + \Psi_{j,w}(S) \underline{e}_z, \quad S \in [0, L], \quad (5.18)$$

vérifiant les conditions aux bords S_{Aj}, S_{Bj} imposées par la condition de contact bilatéral du câble aux appuis délimitant chaque portion j , c'est-à-dire la continuité du déplacement longitudinal,

$$\Psi_{j,u}(S_{Aj}^-) = \Psi_{j,u}(S_{Aj}^+), \quad (5.19)$$

des déplacements vertical et hors-plan, nuls,

$$\Psi_{j,v}(S_{Aj}) = \Psi_{j,v}(S_{Bj}) = 0, \quad (5.20)$$

$$\Psi_{j,w}(S_{Aj}) = \Psi_{j,w}(S_{Bj}) = 0. \quad (5.21)$$

Les équations dynamiques de la ligne pour un modèle de câble immobile sont écrites sous forme forte en chaque point de la boucle de câble pour $S \in [0, L]$ avec les véhicules situés aux abscisses S_n modélisés par des masses ponctuelles M_{v_n} , soit selon les trois directions $(\underline{t}, \underline{n}, \underline{e}_z)$,

$$\begin{cases} \mu \ddot{u}_d + \frac{T_s}{\|\underline{X}'\|} \kappa_s (v'_d + \kappa_s u_d) - EA(u''_d - \kappa_s v'_d) + \sum_n M_{v_n} \ddot{u}_d \delta(S - S_n) = 0, \\ \mu \ddot{v}_d - \frac{T_s}{\|\underline{X}'\|} (v''_d + \kappa_s u'_d) - \kappa_s EA(u'_d - \kappa_s v_d) + \sum_n M_{v_n} \ddot{v}_d \delta(S - S_n) = 0, \\ \mu \ddot{w}_d - \frac{T_s}{\|\underline{X}'\|} w''_d + \sum_n M_{v_n} \ddot{w}_d \delta(S - S_n) = 0. \end{cases} \quad (5.22)$$

Cette formulation du problème dynamique est similaire à celle adoptée par Moscatelli [242], qui étudie l'analogie entre le comportement des métamatériaux et un câble modélisé par un modèle de corde vibrante avec des masses ponctuelles intermédiaires suspendues.

Les modes (ω, Φ) sont calculés selon la procédure suivante :

- Les équations (5.22) sont projetées, au sens du produit scalaire \mathcal{L}^2 , sur une base formée par une sélection de n fonctions $\underline{\Psi}_j(S)$.
- Les matrices de masse et de raideur sont ainsi mises en évidence.
- Le problème aux valeurs propres de taille $n \times n$ associé au système linéaire ainsi obtenu,

$$\left(-\omega^2 [M] + [K] \right) \left\{ \Phi \right\} = \left\{ 0 \right\}, \quad (5.23)$$

est résolu.

5.2.2 Méthode de calcul des modes complexes (CEA)

En présence de termes dépendant de la vitesse, amené par la translation du câble à la vitesse instantanée V_0 avec une accélération A_{V_0} , il est attendu que les modes $(\underline{\Phi}, \lambda)$ soient complexes et sont donc recherchés dans l'espace des complexes tel que :

$$\underline{\Phi} = \underline{\Phi}_r + j\underline{\Phi}_i, \quad (5.24)$$

$$\lambda = \omega + j\xi. \quad (5.25)$$

Le calcul des modes complexes double la taille du problème de calcul de mode à résoudre puisqu'il fait intervenir à la fois les équations sur la partie réelle et la partie imaginaire. La procédure est similaire à la démarche précédente pour l'obtention des modes réels :

- Les conditions aux bords de chacune des n_p portions de câble sont écrites par couplage avec les équations dynamiques des véhicules et du contact avec les appuis. Un système carré est obtenu sous la forme

$$\left[H(\omega) \right]_{[12n_p \times 12n_p]} \{q\} = \{0\}, \quad (5.26)$$

avec le vecteur inconnu $\{q\}$ qui regroupe les parties réelles et imaginaires des 6 coefficients modaux $A_u = A_{u,r} + jA_{u,i}$, $B_u = B_{u,r} + jB_{u,i}$, $C_u = C_{u,r} + jC_{u,i}$, $D_u = D_{u,r} + jD_{u,i}$, $A_w = A_{w,r} + jA_{w,i}$, $B_w = A_{w,r} + jA_{w,i}$ selon chaque composante longitudinale, verticale et transversale de chacune des n_p portions de câble assemblées.

- La recherche des pulsations modales complexes,

$$\lambda_k = \omega_k + j\xi_k, \quad (5.27)$$

est réalisée en imposant la condition d'existence de solutions non-triviales au système, par le calcul du déterminant complexe

$$\det\left([H(\lambda_k)]\right) = 0. \quad (5.28)$$

- Les déformées modales sont exprimées dans la base des fonctions analytiques modales élémentaires,

$$\{\Phi_k\} = [\phi_k] \{q_k\}, \quad (5.29)$$

et sont caractérisées par une norme $\|\{\Phi_k(S)\}\|$ définie à partir d'un produit scalaire, ici le produit scalaire sur l'ensemble $\mathcal{L}^2(\mathbf{C}^n)$ qui écrit, pour tout élément $\{\Phi_k(S)\} \in \mathbf{C}^n$ avec $S \in [0, L]$,

$$\|\{\Phi_k(S)\}\|^2 = \int_0^L \{\Phi_k\}^T \{\bar{\Phi}_k\} \, dS = \sum_{j=1}^{n_{portion}} \int_{L_j}^{L_{j+1}} \{\Phi_{k,j}\}^T \{\bar{\Phi}_{k,j}\} \, dS. \quad (5.30)$$

5.2.3 Cas d'une ligne de câble immobile, modes réels

Dans la sous-section 5.2.3, le paramètre de contrôle l_c est fixé. Le câble est ainsi supposé à l'arrêt, ce qui autorise de supprimer les termes inertiels introduits par sa translation dans les équations de la dynamique.

Le cas d'application de la télécabine des Brévières à Tignes sert de fil rouge pour l'illustration du calcul modal selon différentes hypothèses de modélisation. Cette télécabine, mise en service en 2018 par le constructeur POMA, fait l'objet d'observations de **pompage** avec :

- des oscillations majoritairement verticales du câble localisées dans la portée 5 selon une forme modale d'un premier mode symétrique,
- une fréquence des oscillations verticales du câble $f_p \approx 0.142$ Hz,
- dans des conditions de chargement : montée chargé - descente vide,
- une vitesse de translation du câble $V_0 = 6$ m/s, soit une fréquence de défilement des véhicules $f_{qs} = \frac{V_0}{l_d} \approx 0.07$ Hz.

Les données d'entrée du modèle sont récapitulées dans Tab. 5.1 et Fig. 5.3.

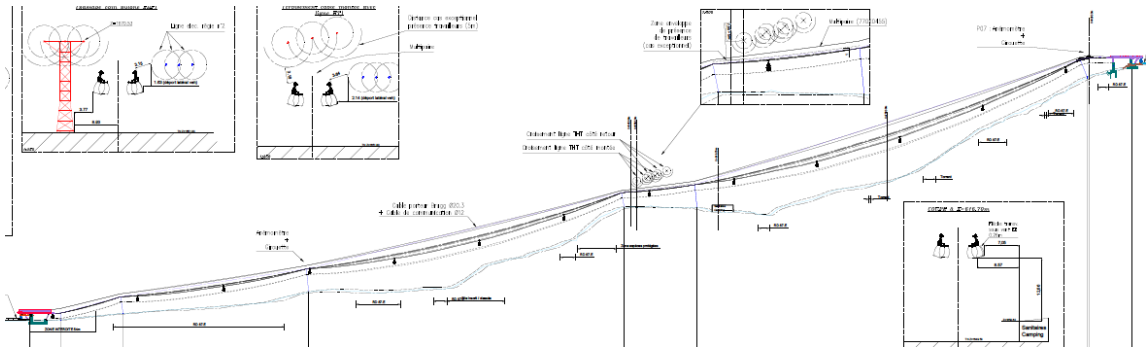


FIGURE 5.3: Extrait du profil en long de la ligne (document DCSA)

TABLE 5.1: Données d'entrée du modèle fil rouge : télécabines de Brévières

Force de tension du système hydraulique T_A	465 kN
Diamètre du câble d	46 mm
Module d'Young du câble E	100 GPa
Poids linéique du câble μg	7.5 daN/m
Poids du véhicule vide $m_{v,v.g}$	860 daN
Poids du véhicule chargé $m_{v,c.g}$	1488 daN
Longueur de la boucle de câble installée L_R	1789 m
Dénivelée entre stations d'extrémités Δy	209 m
Longueur horizontale Δx	902 m

La configuration statique est donnée par Fig. 5.4, qui affiche les résultats du profil statique du câble et de tension selon la procédure de calcul abordée dans le chapitre 3. Les résultats du calcul statique sont utilisés comme point d'entrée du calcul modal (correction statique), objet de la sous-section présente.

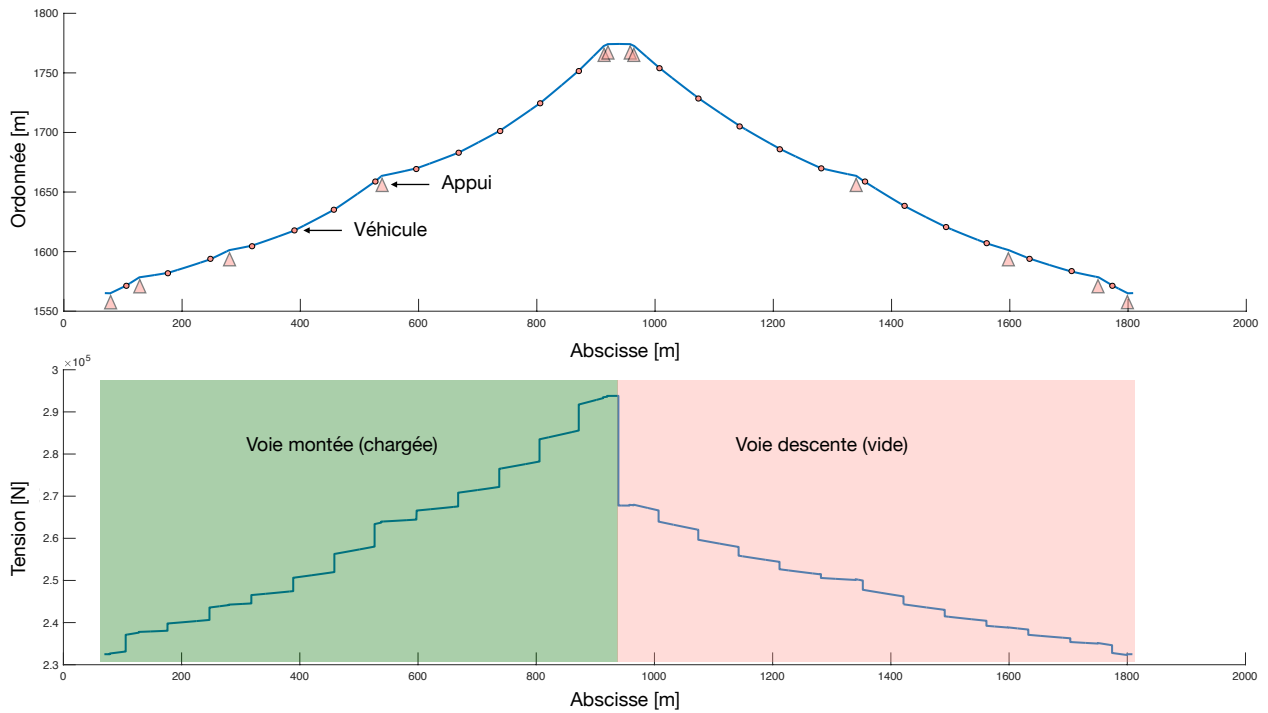


FIGURE 5.4: Configuration statique

Modèle 1 : mouvement vertical v_d prépondérant et incrément de tension T_d constant

Dans ce premier modèle introduit en 4.1.1 du chapitre 4, il est fait l'hypothèse d'une dynamique du câble majoritairement réalisée selon une direction verticale, conformément aux développements de Irvine [107]. L'incrément de tension dynamique T_d , associé aux mouvements dynamiques du câble, est réputé constant sur chaque portion de câble. L'assemblage des éléments de câble est réalisé suivant la procédure détaillée en 4.4.1 avec :

- Des appuis ponctuels,
- Des véhicules représentés par des masses ponctuelles.

Les premiers modes de la ligne de la télécabine des Brévières pour $l_c = 23$ m sont donnés en Fig. 5.5 et Fig. 5.6. Les discontinuités visibles dans les déformées modales sont dues aux véhicules et aux appuis répartis le long du câble.

Conformément aux résultats obtenus par Irvine [107] pour une seule portion de câble, les formes modales planes longitudinale Φ_u et verticale Φ_v sont couplées, tandis que les formes modales transversale Φ_w associées aux modes hors-plan sont découplées. L'amplitude relative de la contribution modale verticale est environ dix fois plus élevée que dans la direction longitudinale. Les premiers modes possèdent une localisation de l'énergie vibratoire le long du câble qui est concentrée dans certaines portées séparées par des appuis.

Pour un mode plan à une fréquence plus élevée $f = 1.8$ Hz donnée en Fig.5.7, la contribution longitudinale Φ_u n'est plus négligeable vis-à-vis de celle Φ_v selon la direction verticale, ce qui remet en question l'hypothèse de départ selon laquelle les équations de la dynamique du câble ont été traitées avec l'hypothèse *a priori* $v_d \gg u_d$. Le mode n'est plus local mais global à l'échelle de la ligne.

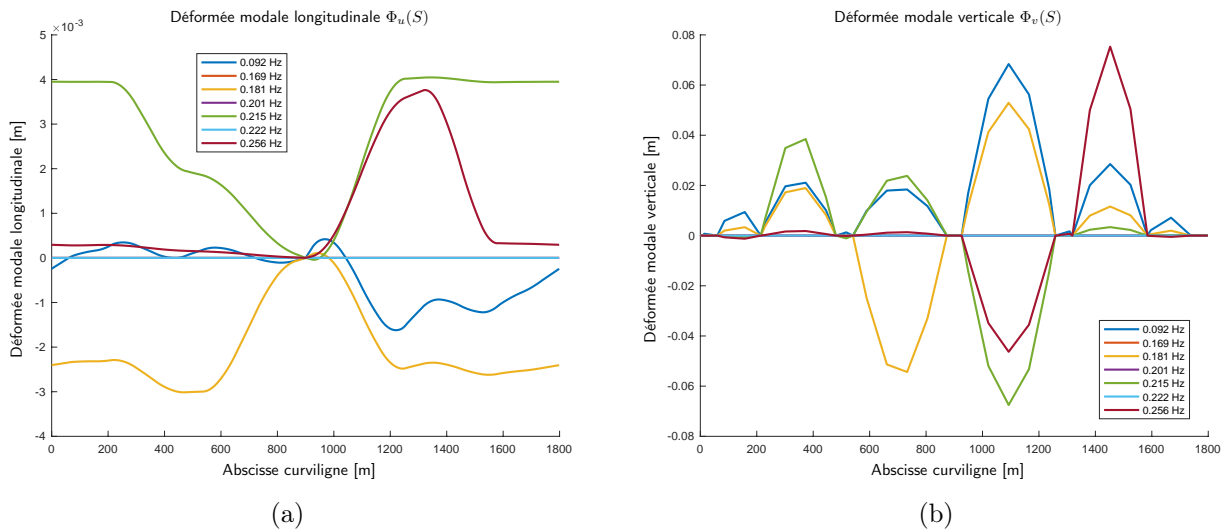


FIGURE 5.5: Déformées modales (a) longitudinale Φ_u et (b) verticale Φ_v associées aux premiers modes en fonction de l'abscisse curviligne S , pour $l_c = 23$ m

Ce modèle ne permet pas l'identification d'un mode de vibration proche de la fréquence de pompage $f_p = 0.142$ Hz observée sur la ligne des Brévières. Les choix de modélisation associés ne rendent pas compte du comportement dynamique de la ligne de façon fidèle, ce qui encourage à aller plus loin dans la modélisation du câble.

Modèle 2 : incrément T_d constant

Un deuxième modèle de câble introduit en 4.1.1 dans le chapitre 4 relaxe l'hypothèse selon laquelle $v_d \gg u_d$. L'assemblage des éléments de câble est réalisé suivant la procédure détaillée en 4.4.1 avec les choix de modélisation suivants :

- Les pylônes intermédiaires et les stations sont représentés par des appuis ponctuels.
- Les véhicules sont représentés par des masses ponctuelles.
- Le câble est libre en translation à la poulie retour située en station inférieure, il est contraint à un déplacement longitudinal nul à la poulie motrice située en station supérieure qui contrôle le mouvement.

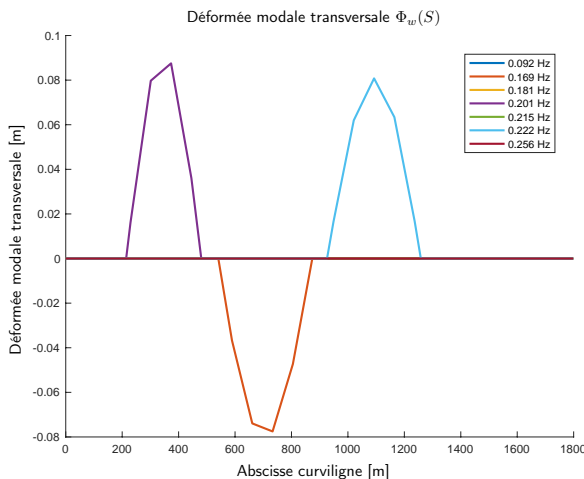


FIGURE 5.6: Déformée modale transversale Φ_w associée aux premiers modes en fonction de l'abscisse curviligne S , pour $l_c = 23$ m

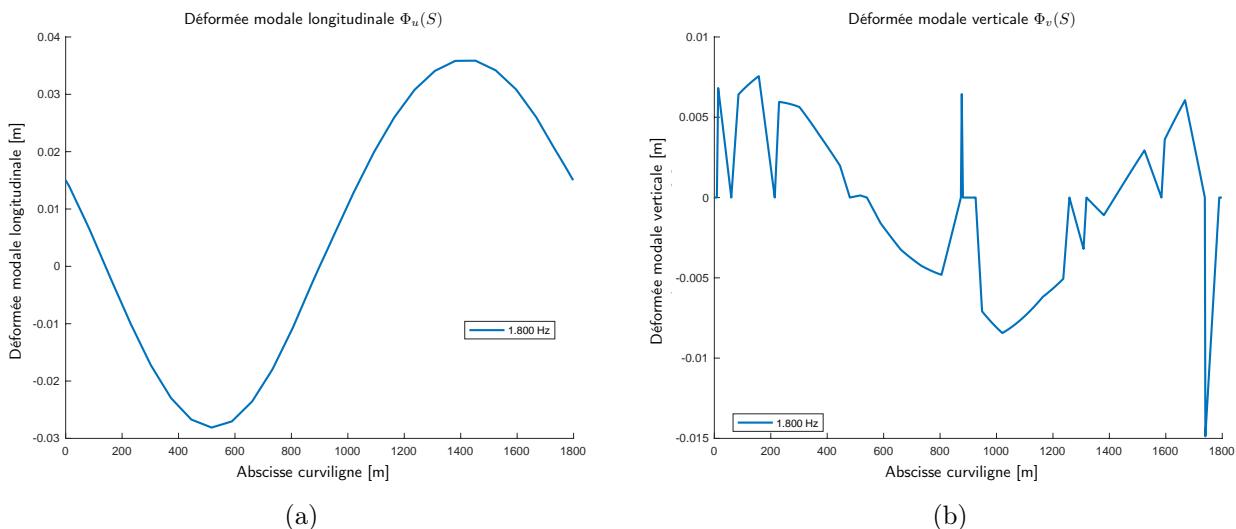


FIGURE 5.7: Déformées modales (a) longitudinale Φ_u et (b) verticale Φ_v associées au mode à 1.8 Hz en fonction de l'abscisse curviligne S , pour $l_c = 23$ m

Les premiers modes de la ligne de la télécabine des Brévières sont donnés en Fig. 5.8 et Fig. 5.9 pour $l_c = 23$ m. La densité modale est plus importante qu'avec le modèle précédent : de nouveaux modes plans sont ajoutés tandis que les modes hors-plan à 0.169 Hz et 0.201 Hz ne sont pas modifiés. Ces différences observées par rapport au premier modèle remettent en cause l'hypothèse selon laquelle la dynamique du câble est négligeable dans la direction longitudinale pour l'application aux lignes de transport par câbles. En effet, le contact aux appuis autorise la translation du câble et les échanges de longueur de câble entre les portées selon la direction longitudinale avec une influence à l'échelle globale de la boucle de câble, le mouvement vertical étant empêché par la condition de contact.

Ce modèle permet l'identification du deuxième mode de vibration dont la fréquence $f_2 = 0.141$ Hz est proche de la fréquence de pompage $f_p = 0.142$ Hz observée sur la ligne des Brévières. Cependant, la forme modale associée ne concentre pas la vibration dans la portée 5 de façon privilégiée vis-à-vis des autres portées de la ligne. Un troisième modèle de câble plus général est donc mis en place pour appréhender les effets de localisation de la vibration typique du phénomène de pompage.

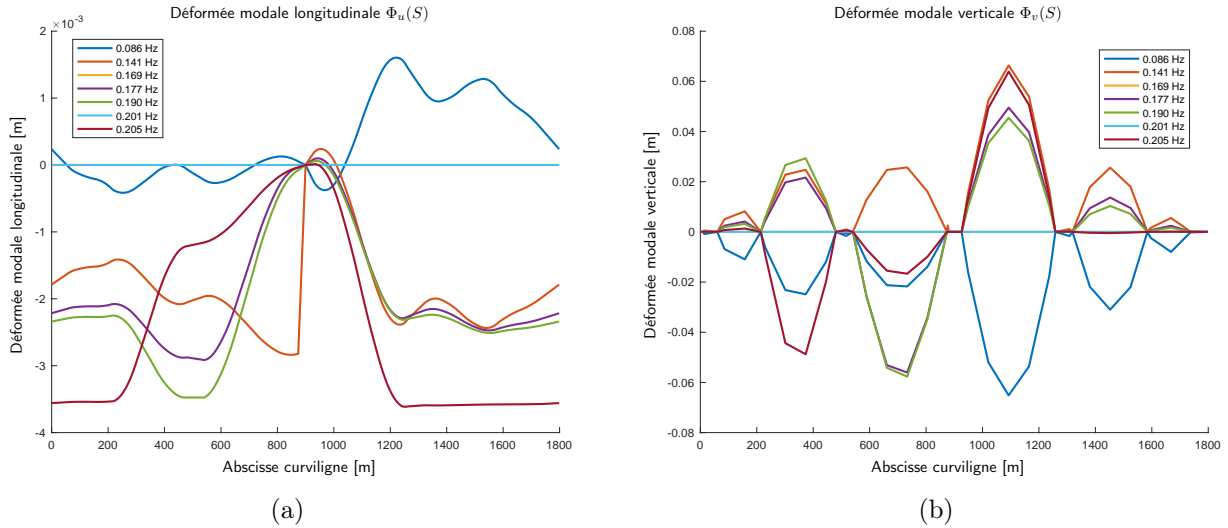


FIGURE 5.8: Déformées modales (a) longitudinale Φ_u et (b) verticale Φ_v associées aux premiers modes en fonction de l'abscisse curviligne S , pour $l_c = 23$ m

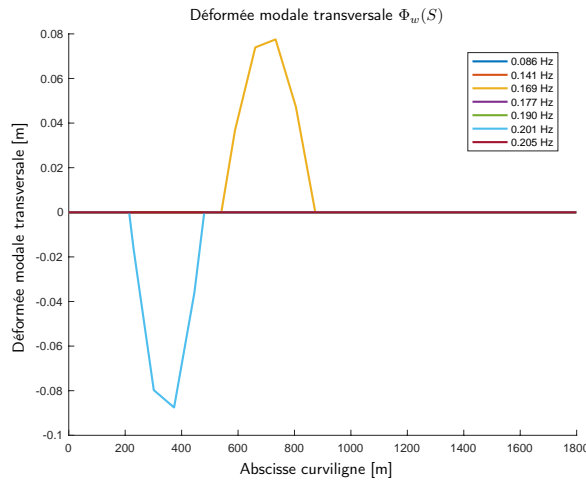


FIGURE 5.9: Déformée modale transversale Φ_w associée aux premiers modes de la ligne des Brévières en fonction de l'abscisse curviligne S , pour $l_c = 23$ m

Modèle 3 : cas général

Un troisième modèle de câble, introduit en 4.1.1 du chapitre 4, rend compte à la fois du couplage dynamique entre le mouvement vertical v_d et longitudinal u_d du câble, et exprime l'incrément de tension dynamique T_d correspondant en fonction des déplacements dynamiques

$$T_d(S) = EA(u'_d(S) - \kappa_s v_d(S)). \quad (5.31)$$

La tension dynamique n'est plus traitée comme une constante inconnue du problème sur chaque portion de câble, mais comme une combinaison linéaire du mouvement dynamique. Dans les modèles de câble 1 et 2, la tension dynamique était condensée sur chacune des portions de câble selon une constante $T_{d,j}$ intervenant directement dans l'écriture de la continuité entre les portions j et $j + 1$. Dans ce troisième modèle, la tension dynamique est fonction des inconnues dynamiques u_d et v_d . Ainsi, la condition de continuité en tension T_d donnée aux appuis impose la continuité de la dérivée de la contribution modale longitudinale Φ'_u , la condition de non-décollement du câble sur ses supports donnant $\Phi_v = 0$.

Avec ce modèle de câble, l'expérience numérique montre, pour les premiers modes précédemment identifiés avec les modèles 1 et 2, qu'il n'existe pas de solution au problème modal de l'assemblage complet vérifiant à la

fois la continuité en effort dans le câble en chacun des appuis de la ligne et les autres conditions de continuité géométrique. Les premiers modes qui vérifient simultanément ces conditions sont obtenus à plus hautes fréquences. L'impossibilité de trouver une solution manifeste un problème mal-posé, qui conduit à une incompatibilité de fermeture cinématique du problème formulé selon les inconnues de déplacement dynamique.

L'explication proposée est que la correction statique est continue par morceaux sur chaque portion de câble en raison de la vision ponctuelle adoptée pour modéliser les contacts, ce qui dans le modèle dynamique est à l'origine de discontinuités des valeurs de paramètres de tension statique et de courbure à chaque point singulier (appuis et véhicules, Fig. 5.4). La fermeture du problème dynamique sous-jacent, entièrement exprimé en fonction des grandeurs cinématiques, est alors impossible selon ces modes sans discontinuité de la tension dynamique aux appuis, fonction des champs de déplacement dynamique. D'un point de vue de l'interprétation physique, c'est un indice que la dynamique à basse fréquence d'une boucle de câble est activée par un phénomène discontinu, intuition présente dans les travaux de Portier [46] sur le pompage.

Une expérience numérique consiste à relaxer la condition de continuité en tension T_d sur une sélection d'appuis de la ligne de câble. Cela découple ainsi les portées concernées du reste de la ligne, pour calculer un ensemble de déformées modales associées à une même fréquence $f_k = \frac{\omega_k}{2\pi}$, et qui impliquent la vibration d'une ou plusieurs portées couplées entre elles par la continuité de tension dynamique aux appuis.

L'assemblage des éléments de câble est réalisé suivant la procédure détaillée en H.30 selon les mêmes choix de modélisation adoptés en 5.2.3.

Un exemple de déformée modale, obtenue par relaxation de la condition de continuité de la tension dynamique à deux appuis en $S_1 \approx 1585$ m et $S_2 \approx 1738$ m, est donné en Fig. 5.10. Trois ensembles de portées peuvent être distingués :

- L'ensemble occupant le domaine $\Omega_{S_1} : S \in [0, 895.2] \cup [1738, 1798]$ m est associé à la vibration de la voie aller et une petite portion de la voie retour.
- L'ensemble 2 occupant le domaine $\Omega_{S_2} : S \in [895.2, 1585]$ m correspond à la vibration de la voie retour comprise entre la poulie motrice qui isole les deux voies et le premier appui avec discontinuité de tension.
- L'ensemble 3 occupant $\Omega_{S_3} : S \in [1585, 1738]$ m implique à la vibration de la portée seule ciblée par l'introduction de la relaxation de la tension dynamique à ses appuis d'extrémité.

Les premiers modes de ligne sont affichés en Fig. 5.11 et Fig. 5.12 en introduisant la discontinuité de tension dynamique aux appuis en $S_1 \approx 1585$ m et $S_2 \approx 1738$ m. Les formes modales obtenues sont fortement couplées entre elles et la densité modale est encore augmentée par rapport au modèle 2.

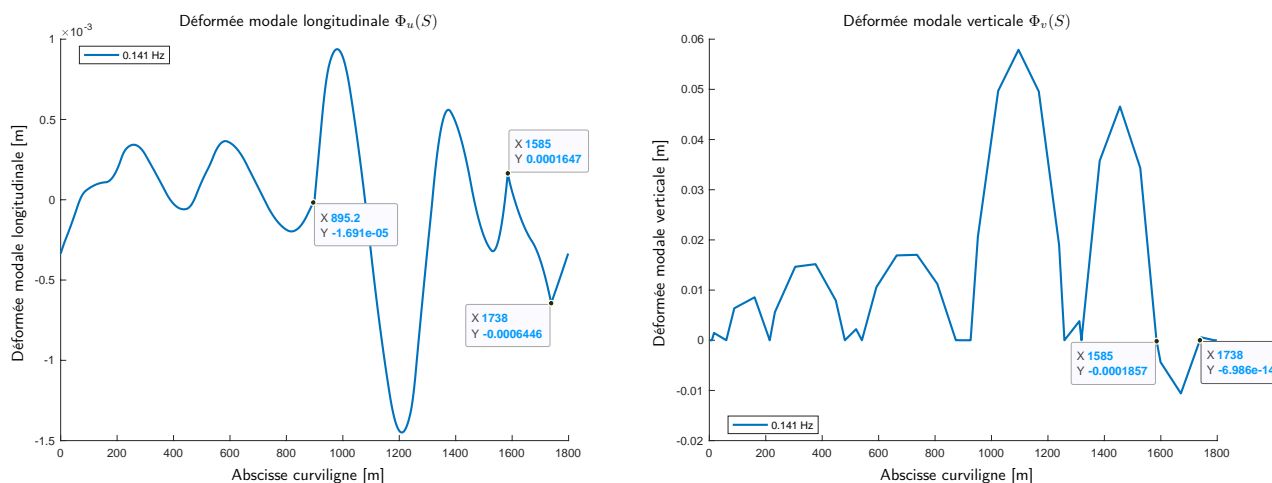


FIGURE 5.10: Exemple de calcul de déformée modale dans le plan (a) $\Phi_u(S)$, (b) $\Phi_v(S)$ par relaxation de la continuité de la tension dynamique

Le saut en tension dynamique (Fig. 5.13), introduit par la relaxation de continuité de T_d , est équivalent à l'effet d'une perturbation dynamique agissant le long du câble, telle que l'appel de tension associée aux modifications d'équilibres quasi-statiques lors du franchissement de l'appui par un véhicule, précédemment abordée dans le chapitre 3. La position où est relâchée la continuité de T_d devient alors un paramètre de contrôle pour l'étude

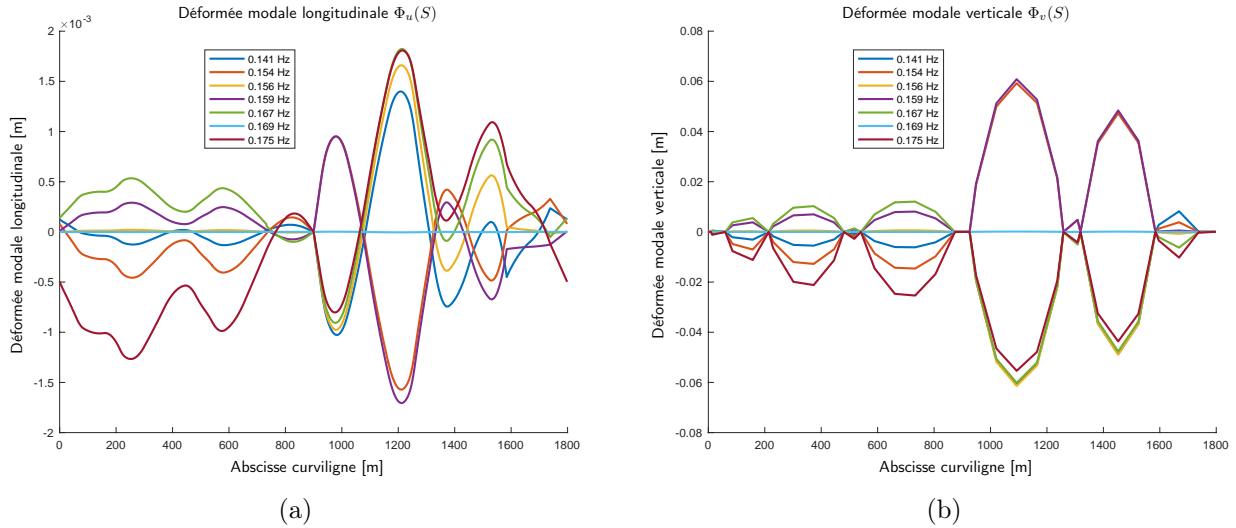


FIGURE 5.11: Déformées modales (a) longitudinale Φ_u et (b) verticale Φ_v associées aux premiers modes de ligne en fonction de l'abscisse curviligne S , pour $l_c = 23$ m

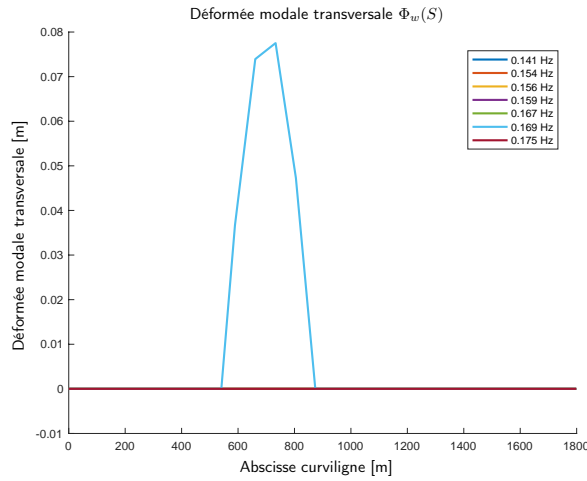


FIGURE 5.12: Déformée modale transversale Φ_w associée aux premiers modes de ligne en fonction de l'abscisse curviligne S , pour $l_c = 23$ m

des mécanismes à l'origine des vibrations de la ligne. D'après les remarques précédentes, un **mode de ligne** est ainsi associé à une famille de déformées modales en oscillation à la même fréquence $f_k = \frac{\omega_k}{2\pi}$ qui concentrent la vibration en différents lieux le long de la ligne de câble selon les différentes combinaison de localisation de la discontinuité de tension aux appuis. La notion de **localisation de la vibration** sur une portée est cohérente avec ce qui est observé en pratique sur les installations sujettes à du **pompage**.

La propulsion d'une portée $i \in [1, N]$, avec $S \in [S_i, S_{i+1}]$, à vibrer de façon majoritaire par rapport au reste de la ligne peut-être estimée en faisant varier l'incrément de tension dynamique absolue moyenné $\langle |T_{d,i}(S)| \rangle$, tel que :

$$\langle |T_{d,i}(S)| \rangle = \frac{1}{S_{i+1} - S_i} \int_{S_i}^{S_{i+1}} |T_d(S)| \, dS = \frac{1}{S_{i+1} - S_i} \int_{S_i}^{S_{i+1}} |EA(\Phi'_u(S) - \kappa_s \Phi_v(S))| \, dS, \quad (5.32)$$

dans la portée localisant la discontinuité de tension T_d aux appuis adjacents. Ainsi, un ensemble de déformées modales est calculé et renseigne sur la participation $p_{v,i}^k$ de la déformée modale verticale Φ_v^k dans la portée i , telle que :

$$p_{v,i}^k = \frac{\max |\Phi_{k,i,v}|}{\langle \max_{m \in [1, N]} |\Phi_{k,m,v}| \rangle}, \quad (5.33)$$

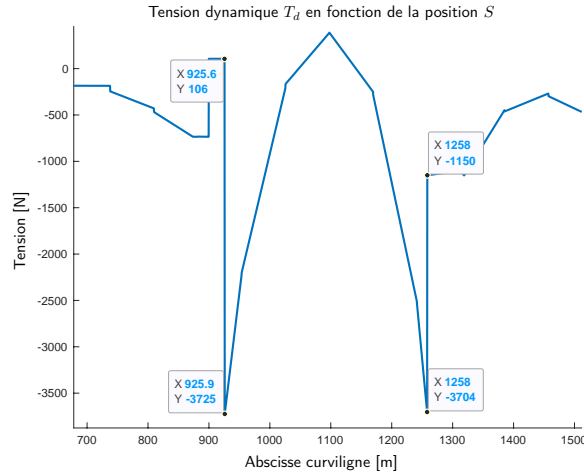


FIGURE 5.13: Illustration du saut de tension dynamique modale T_d aux appuis d'extrémité de la portée de ligne située entre $S_1 \approx 925.9$ m et $S_2 \approx 1258$ m

où $\langle \max_{m \in [1, N]} |\Phi_{k, m, v}| \rangle$ est la moyenne du maximum de l'amplitude de la déformée modale verticale réalisée sur les N portées.

Cette étude paramétrique évalue la propension d'un mode k à concentrer l'énergie vibratoire dans la portée. Autrement dit, plus la contribution modale $p_{v, i}^k$ est élevée, plus le mode est activé dans la portée i et se découple du reste de la ligne et est ainsi susceptible d'amorcer une vibration d'amplitude relative importante localisée dans la portée i par rapport au reste de la ligne.

Trois configurations sont illustrées sur l'exemple de la voie retour de ligne de la télécabine des Brévières à Tignes :

- Pour un contrôle de la tension dynamique $|T_{d, i}|$ dans la portée 10 en $S \in [925.9, 1258]$ m, qui est la plus longue avec $L_{10} \approx 332$ m, une force critique apparaît dans le tracé $p_{v, i}^k = f(|T_{d, i}|)$ en Fig. 5.14 et se manifeste par une asymptote verticale. Il existe une valeur limite $|T_{d, 10}|_{lim}$ pour laquelle le mode répond majoritairement sur la portée 10 avec $p_{v, 10}^k \rightarrow +\infty$, la vibration sur les autres portées tendant vers zéro (Fig. 5.15). Pour $|T_{d, 10}| < |T_{d, 10}|_{lim}$, le mode répond sur l'ensemble de la ligne avec une amplitude relative croissante. Le tracé (b) de Fig. 5.15 montre la discontinuité en tension dynamique aux appuis situés en $S_{10} = 925.9$ m et $S_{11} = 1258$ m avec la discontinuité de la dérivée première du déplacement longitudinal Φ_u par rapport à l'abscisse curviligne S .
- Pour un contrôle de la tension dynamique $|T_{d, i}|$ dans la portée 11 en $S \in [1258, 1319]$ m, qui est plus courte que la 10 avec $L_{11} \approx 61$ m, une participation modale limite se manifeste par une asymptote horizontale : il existe une valeur limite $p_{v, 11}^k$ au-delà de laquelle il n'existe pas de solution. Cette situation traduit la présence d'une portée dont la vibration sur le mode k n'est pas découplée du reste de la ligne et dont la contribution modale est limitée en amplitude. Il apparaît clairement en Fig. 5.17 un couplage avec la portée 10 puisque la discontinuité en tension visible par la discontinuité de Φ_u' sur la Fig. 5.18 est très faible à l'appui commun entre les portées 10 et 11.
- Pour un contrôle de la tension dynamique $|T_{d, i}|$ dans la portée 12, qui est plus courte que la 10 mais plus longue que la 11 avec $L_{12} \approx 266$ m, l'asymptote verticale n'est pas aussi nette que sur la portée 10 même si elle apparaît pour $|T_{d, 12}| > 3500$ N en Fig. 5.19. D'après la Fig. 5.20 le mode est mixte avec une participation partagée entre les portées 10 et 12 jusqu'à $|T_{d, 12}| \approx 3500$ N, puis au-delà, le mode répond majoritairement sur la portée 12.

En conclusion de cette analyse sur cet exemple des Brévières, la portée 10, qui est la plus longue de la ligne, est la plus susceptible d'être activée localement puisque, à un même niveau de sollicitation dynamique à travers la tension dynamique T_d , l'amplitude relative de la contribution modale est plus importante. Le seuil de déclenchement en tension T_d de la localisation de la vibration dans la portée 10 correspond au niveau le plus bas de l'ensemble des portées de la ligne pour le mode étudié à 0.140 Hz. La portée 10 de la voie retour possède

une configuration symétrique avec la portée 5 sur la voie montée. Le même constat est fait avec la portée 5. Le constat général établi à partir du plan d'expérience numérique appliqué au cas des Brévières rejoint l'observation sur le terrain des phénomènes de pompage qui affectent les portées les plus longues de la ligne.

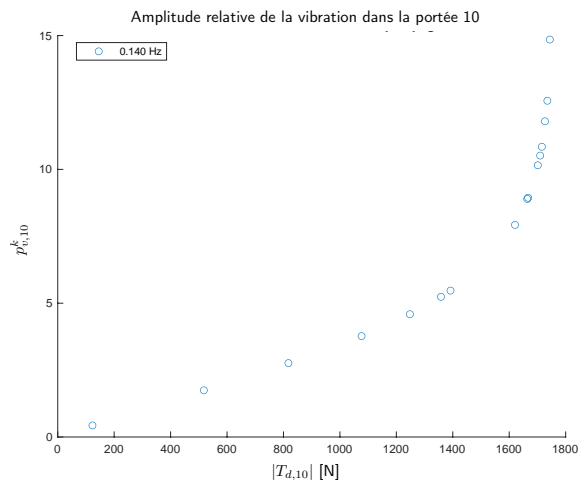


FIGURE 5.14: Tracé de $p_{v,10}^k = f(|T_{d,10}|)$ dans la portée 10 pour le mode de ligne k à 0.140 Hz

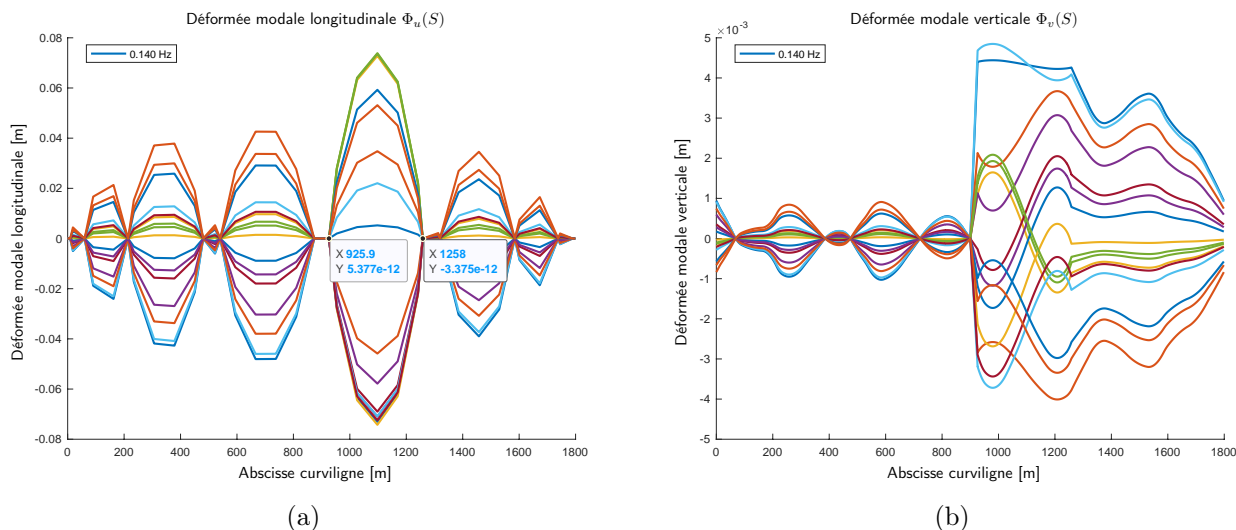


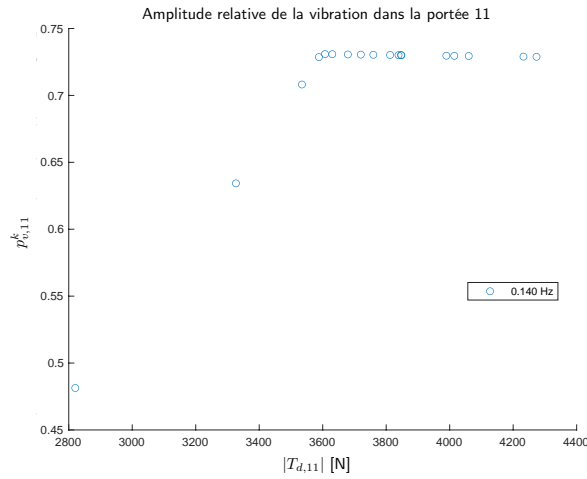
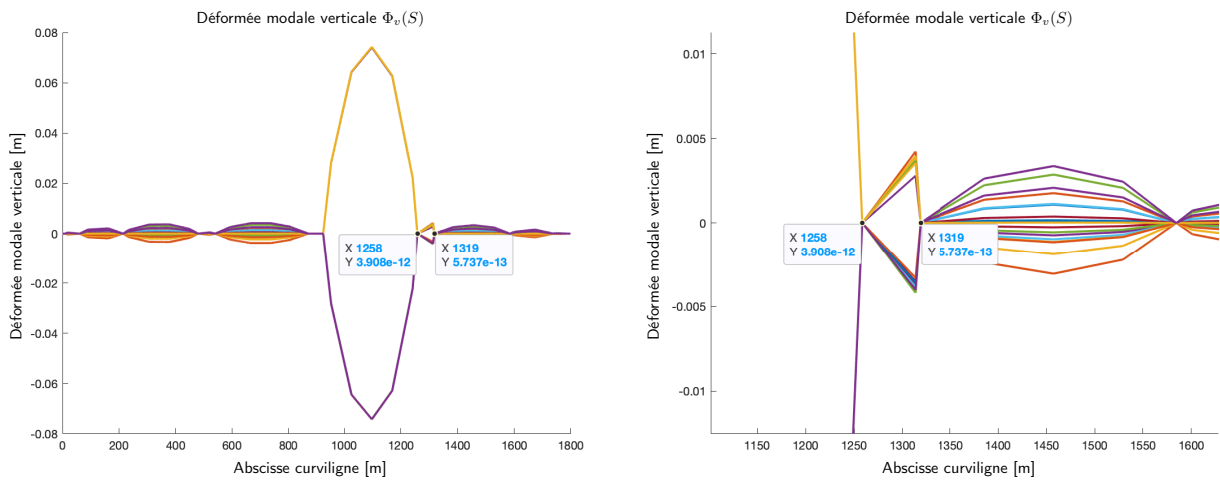
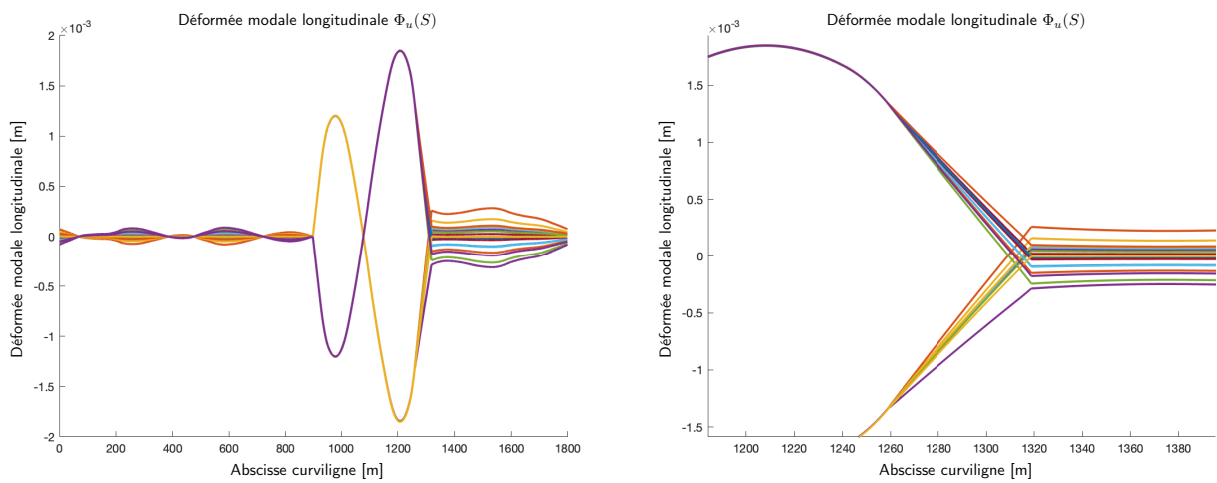
FIGURE 5.15: Superposition des déformées modales (a) verticale $\Phi_v(S)$ et (b) longitudinale $\Phi_u(S)$ associées au mode de ligne à 0.140 Hz pour différents niveaux de tension dynamique dans la portée 10

5.2.4 Cas d'une ligne de câble mobile, modes complexes

Modèle 4 : forces inertielles de translation

Un quatrième modèle de câble tient compte des forces inertielles, dues aux effets de la translation du câble à la vitesse V_0 avec une accélération A_{V_0} , qui sont ajoutées au modèle de câble fixe. Ces forces apportent des termes complexes qui conduisent à la recherche de modes complexes (*complex eigenvalue analysis* ou CEA).

L'article " Hugo BÉCU, Claude-Henri LAMARQUE, Alireza TURE SAVADKOOHI (2023), **On the modal characteristics and stability of translating cable : Application to an overall line of cable transport systems**, Engineering Structures, Volume 292,116434, <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.116434> " apporte des éléments sur l'analyse modale complexe d'une ligne de transport par câbles. Le but est de détecter des comportements instables, introduits par la vitesse de translation V_0 , pouvant conduire à des amplitudes de vibration importantes. Une interprétation des formes modales complexes est donnée par l'utilisation de la


 FIGURE 5.16: Tracé de $p_{v,11}^k = f(|T_{d,11}|)$ dans la portée 11 pour le mode de ligne k à 0.140 Hz

 FIGURE 5.17: Superposition des déformées modales verticales $\Phi_v(S)$ associées au mode de ligne à 0.140 Hz pour différents niveaux de tension dynamique dans la portée 11 (zoom sur la portée)

 FIGURE 5.18: Superposition des déformées modales longitudinales $\Phi_u(S)$ associées au mode de ligne à 0.140 Hz pour différents niveaux de tension dynamique dans la portée 11 (zoom sur la portée)

Singular Value Decomposition (SVD), afin d'extraire une information similaire à une déformée modale classique à partir de la réponse du système sur un mode complexe.

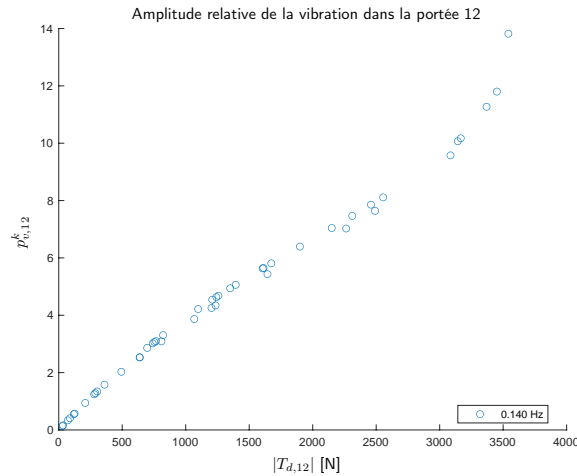


FIGURE 5.19: Tracé de $p_{v,12}^k = f(|T_{d,12}|)$ dans la portée 12 pour le mode de ligne k à 0.140 Hz

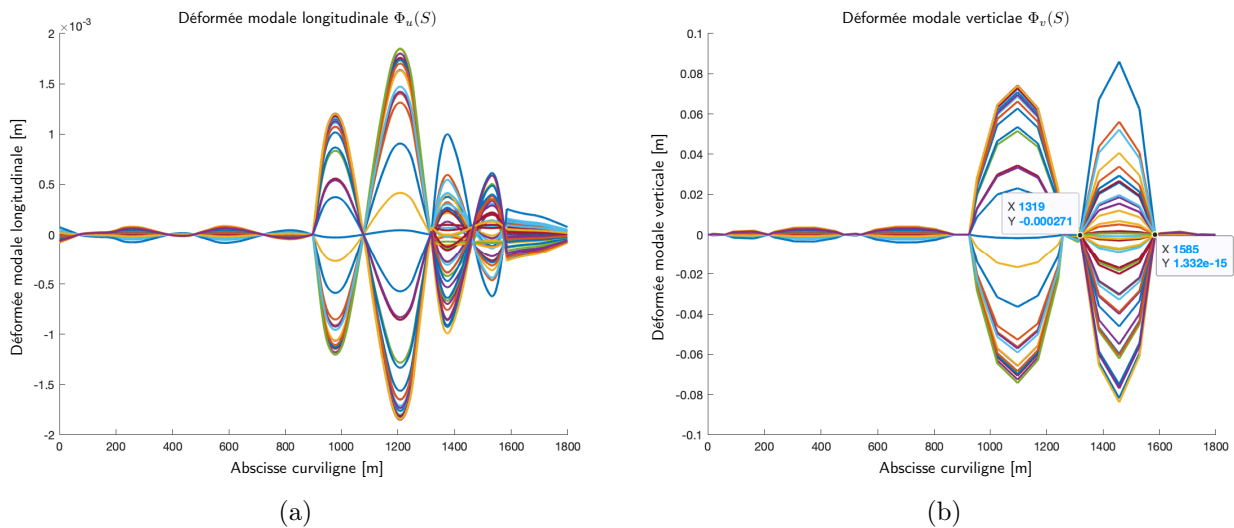


FIGURE 5.20: Superposition des déformées modales (a) longitudinale $\Phi_u(S)$ et (b) verticale $\Phi_v(S)$ associées au mode de ligne à 0.140 Hz pour différents niveau de tension dynamique dans la portée 12

L'assemblage des éléments de câble est réalisé suivant la procédure détaillée en 4.4 avec les choix de modélisation suivants :

- Les pylônes intermédiaires et les stations sont représentés par des appuis ponctuels.
- La masse des véhicules est répartie comme une masse linéique additionnelle uniforme le long de la boucle de câble.
- Le câble est libre en translation dans les poulies retour et motrice situées dans les stations supérieures et inférieures.

Ce modèle de ligne est une alternative aux modèles précédents puisqu'une vision uniforme de la boucle de câble est adoptée, en réalisant une moyenne des grandeurs statiques du problème. Ainsi, la dépendance géométrique au paramètre de contrôle l_c disparaît au profit d'une caractérisation globale de la boucle de câble, compatible avec une vision moyennée sur une période du défilement du câble.

Les premiers modes complexes calculés avec une vision moyennée du problème de la ligne de la télécabine des Brévières sont affichés en Fig. 5.21 et Fig. 5.22, en distinguant les parties réelle et imaginaires des formes modales. Les pulsations modales sont données sous la forme $\Lambda_k = \omega_k + j\xi_k$ où ω_k représente la pulsation des oscillations et ξ_k le coefficient d'atténuation du mode associé. Pour $\xi_k < 0$, le mode complexe est instable. Il est attendu que la prise en compte de l'amortissement structurel de la ligne de câble soit stabilisant. Une connaissance des propriétés d'amortissement permettrait alors de statuer de façon prédictive sur le caractère stable ou instable

des modes obtenus par CEA. Dans cet exemple des Brévières, en l'absence d'une caractérisation expérimentale, l'amortissement structural n'est pas pris en compte dans la procédure de CEA.

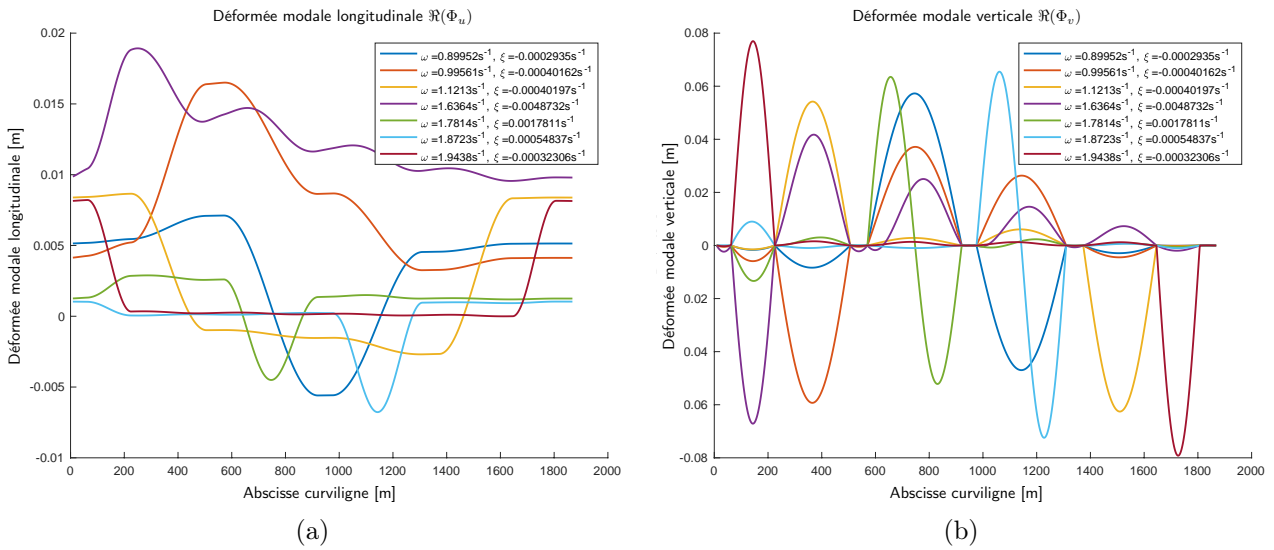


FIGURE 5.21: Déformées modales, partie réelle (a) longitudinale Φ_u et (b) verticale Φ_v , associées aux premiers modes de ligne en fonction de l'abscisse curviligne S

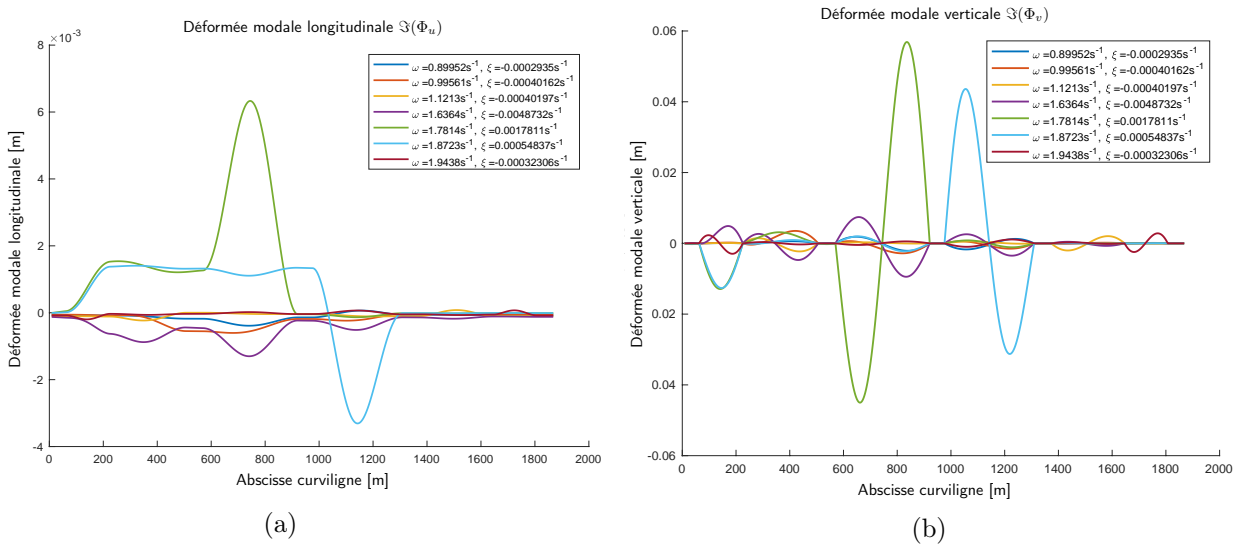


FIGURE 5.22: Déformées modales, partie imaginaire (a) longitudinale Φ_u et (b) verticale Φ_v , associées aux premiers modes de ligne en fonction de l'abscisse curviligne S

Le mode impliqué dans le pompage observé sur la ligne des Brévières est une nouvelle fois identifié à $\omega_1 = 0.89$ rad/s, soit $f_1 \approx 0.14$ Hz (Fig. 5.23). En adoptant une vision moyenne des grandeurs statiques le long de la boucle de câble, il est notable que la forme modale associée localise la vibration dans la portée 5 conformément à ce qui était attendu par l'analyse paramétrique menée avec le modèle 3 et ce qui est observé sur le terrain. Ainsi, ce modèle semble adapté pour rendre compte de la dynamique de la boucle de câble selon une approche uniforme simplifiée, complémentaire de l'approche ponctuelle traitée précédemment dans la sous-section 5.2.3.

5.2.5 Analyse modale paramétrique équivalente

Avec une représentation ponctuelle des véhicules accrochés le long de la boucle de câble (sous-section 5.2.3), l'état du système dynamique évolue avec le temps lorsque les véhicules sont en mouvement. L'analyse modale est alors ramenée à une étude paramétrique équivalente indépendante du temps, en décrivant le contenu modal du système par un paramètre de contrôle géométrique l_c . Un ensemble de calcul de modes pour des valeurs

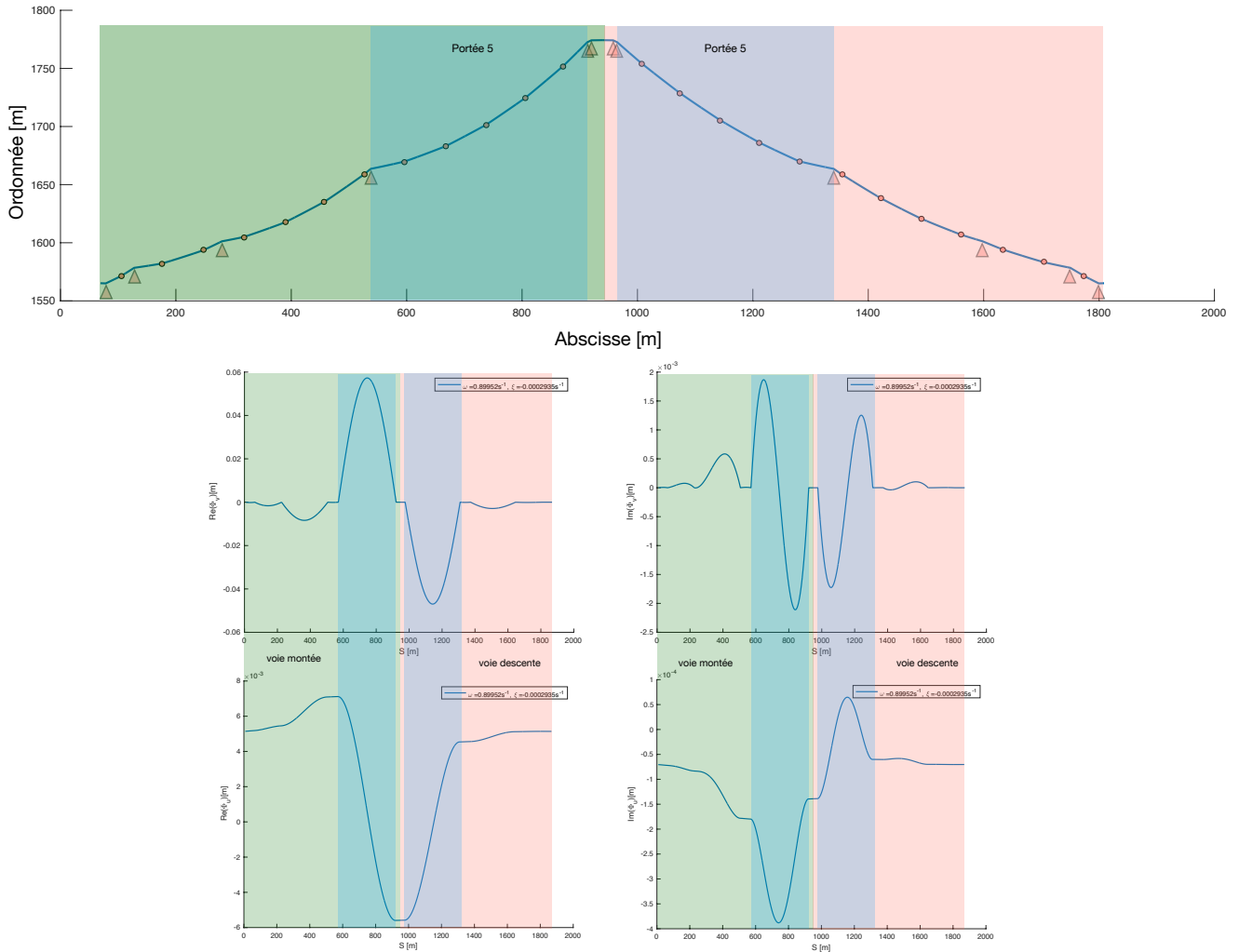


FIGURE 5.23: Identification du mode complexe associé au pompage observé sur la ligne des Brévières

successives de l_c permet l'évaluation de l'évolution des fréquences modales instantanées lorsque les véhicules se déplacent avec le câble.

Dans le cas de la ligne des Brévières, les véhicules sont régulièrement espacés d'une distance l_d , ce qui permet de ramener l'étude paramétrique à $l_c \in [0, l_d]$ pour décrire l'ensemble des configurations géométriques distinctes du système lorsque le chargement est supposé uniforme sur chacune des voies. Le tracé de l'évolution des premiers modes (Fig. 5.24), associé au modèle 2 (sous-section 5.2.3) sans prise en compte des termes inertiels dus à la translation, montre une forte densité modale avec des fréquences qui se rapprochent et se croisent en certaines valeurs du paramètre de contrôle l_c . L'évolution de la position des véhicules sur la ligne est à l'origine de discontinuités dans le suivi des modes. De façon théorique, ces discontinuités conduisent à des changements brutaux d'équilibres dynamiques. Cela se traduit par la disparition et l'apparition soudaine de pics de résonance dans la réponse en fréquence, sous forme de transition brutale ou de saut de l'équilibre dynamique en régime forcé lors du passage entre deux positions successives occupées par les véhicules.

Pour les systèmes qui présentent une forte densité modale, les caractéristiques vibratoires sont très sensibles à de faibles variations de paramètre [243] : les phénomènes de croisement de modes (*mode crossing*), d'évitement de modes (*mode veering*) et de coalescence (*lock-in*) sont identifiés dans la bibliographie avec des applications aux câbles [243–247] :

- D'après [243], le sous-espace modal réalise une rotation au point de croisement. En pratique, cela peut se traduire par une modification rapide des valeurs d'excitabilité des modes impliqués au point d'observation sur la structure à proximité du point de croisement. Si la rotation des formes propres maximise ces quantités de façon simultanée lors du croisement, le croisement des deux modes normaux est à l'origine

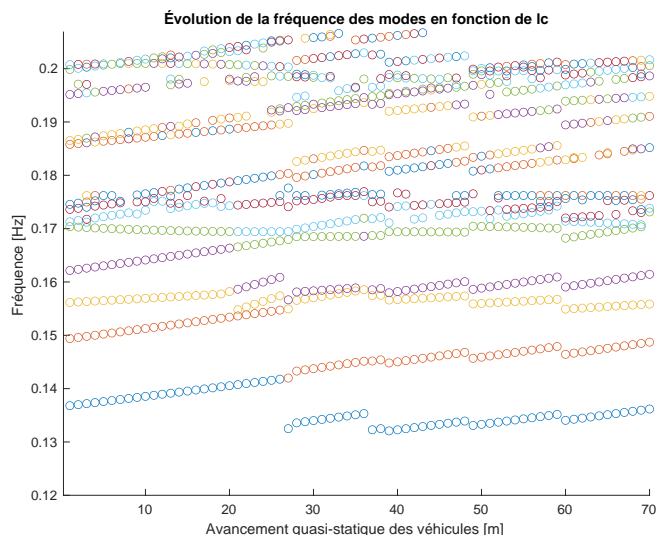


FIGURE 5.24: Analyse paramétrique des premières fréquences modales sur la ligne de la télécabine des Brévières

d'une flexibilité dynamique accrue. En effet, les termes d'amplifications modales associées étant maximaux lorsque les pulsations modales sont égales, l'effet de résonance amplifiée cumule la résonance des deux modes au point de coïncidence des fréquences propres.

- Dans les systèmes gyroscopiques avec un amortissement proportionnel équivalent, ou avec des mécanismes de frottements, introduisant une rupture de la symétrie du problème par la matrice de raideur, des coalescences de modes sont observées et associées à des instabilités de la réponse dynamique (partie réelle de la valeur propre positive). En présence d'amortissement non proportionnel, il n'y a plus de coïncidence des fréquences propres en des points singuliers mais un phénomène de *veering* avec des modes qui se rapprochent et s'évitent. Les travaux de Giannini [248, 249] mettent en évidence un phénomène d'amplification de la réponse libre à proximité des points de *lock-in*, de *lock-out* ou dans la zone de *veering* de tels systèmes. Ce phénomène d'amplification est désigné par *transient eigenvector instability*. Il est observé même lorsque les valeurs propres sont stables et est dû à la non-orthogonalité des vecteurs propres (quasiment colinéaires) conduisant à une amplification limitée dans le temps de toute excitation selon une direction orthogonale à un des deux vecteurs propres. En régime forcé, l'influence des phénomènes de croisement de mode et de *veering* sur la fonction de transfert sont étudiés [250, 251]. Dans le cas d'un couplage par rupture de la symétrie du problème à travers des termes d'amortissement gyroscopiques, un phénomène de battement et d'amplification de la réponse dans la zone de *veering* est observé.

Il est possible de se demander ce qu'impliquent la forte densité et les interactions modales visibles sur l'exemple de la Fig. 5.24 sur la réponse dynamique du système, et si l'analyse paramétrique en fonction du paramètre l_c peut donner des renseignements sur d'éventuelles situations pour lesquelles la réponse vibratoire de la ligne de câble est amplifiée. Le détail de l'étude est donné en Annexe M. En conclusion, et en l'absence de mécanisme de frottement ou gyroscopique dans le modèle utilisé pour le tracé de la Fig. 5.24 :

- Aucune instabilité d'origine algébrique avec des modes complexes instables n'est mise en évidence par l'étude paramétrique. Par ailleurs, une instabilité qui serait contrôlée par le paramètre géométrique l_c nécessiterait un temps suffisamment long pour s'établir, alors que le croisement ou rapprochement modal est associé à un état instantané de la ligne de câble pour une position des véhicules au cours de leur mouvement. Les interactions modales paramétriques ne sont donc pas *a priori* une source potentielle d'instabilité dynamique qui expliqueraient les fortes oscillations dynamiques de type pompage.
- Un effet d'amplification de la réponse dynamique est susceptible d'être activé lorsque deux fréquences modales se rapprochent sur un intervalle du paramètre l_c .

5.3 Le mécanisme de pompage

La section 5.2 a permis d'identifier la signature vibratoire d'une ligne de transport par câble, à travers la notion de mode de vibration, et de retrouver, à partir de l'exemple fil rouge, le contenu dynamique de la réponse activée lors du phénomène de pompage observé sur le terrain (sous-section 5.3.1). En l'absence d'effort extérieur au système sous la forme d'un chargement variable avec le temps, une investigation des mécanismes d'activation du pompage est réalisée et un modèle d'étude est établi à partir de l'information dynamique apportée par les modes de vibration dans la sous-section 5.3.2. Une étude de stabilité de la réponse du système est menée en 5.3.3 et une recherche de l'amplitude de la réponse non-linéaire est détaillée en 5.3.4. Enfin, une méthodologie pratique de détection du pompage est proposée en 5.3.5.

5.3.1 Manifestation du pompage

Sur les lignes des transporteurs par câbles à mouvement continu avec des véhicules régulièrement espacés sur le câble, lorsque l'installation est en translation en régime stationnaire, de fortes oscillations verticales du câble sont susceptibles d'être déclenchées de façon localisée dans certaines portées (Fig. 5.25). L'apparition de ces oscillations, dites de **pompage**, est sensible aux variations de l'état de fonctionnement du système :

- de vitesse de translation du câble V_0 ,
- du chargement des véhicules M_v ,
- de l'espacement l_d entre deux véhicules.

Avec une vitesse de translation stationnaire V_0 du câble, la répétition du motif spatial des véhicules est associé à la période temporelle

$$\Delta t_{qs} = \frac{l_d}{V_0}, \quad (5.34)$$

ou à la fréquence

$$f_{qs} = \frac{1}{\Delta t_{qs}}. \quad (5.35)$$

L'expérience montre que la fréquence des oscillations de pompage f_p observée est liée à la fréquence de défilement des véhicules f_{qs} avec une relation

$$f_p = n f_{qs}, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (5.36)$$

En pratique, n est supérieur ou égal à deux.

Le comportement vibratoire de pompage est nuisible pour le fonctionnement du système, le confort et le ressenti des passagers, mais aussi pour la sécurité des composants avec une fatigue accrue sous l'effet cyclique des sollicitations dynamiques. En l'absence d'outils de prédiction et de compréhension approfondie des mécanismes d'activation du pompage, l'anticipation du phénomène s'avère difficile au stade de la conception et les solutions curatives peu efficaces. L'approche empirique du problème consiste, *a posteriori*, à modifier de façon arbitraire certains paramètres d'influence pour supprimer le pompage, tels que :

- La distance l_d entre véhicules par ajout ou suppression de véhicules,
- La distance entre deux appuis successifs, par déplacement de pylône,
- Une augmentation de la tension nominale du câble T , par modification du système hydraulique de mise en tension.

Ces solutions sont, cependant, peu robustes vis-à-vis de nouveaux états de fonctionnement du système non anticipés et susceptibles d'activer du pompage.

5.3.2 Sélection d'un mode de pompage et modèle réduit de la ligne

À la lumière des résultats obtenus en régime quasi-statique et appuyés par une analyse de stabilité du modèle dynamique, une étude des mécanismes d'activation du pompage est proposée dans le but de dégager des pistes de dimensionnement afin d'éviter les régimes de fonctionnement propices à l'apparition du phénomène. Pour cela, une stratégie de réduction de modèle est mise en place avec la sélection d'un mode de vibration sur lequel la structure répond lors du phénomène de pompage.

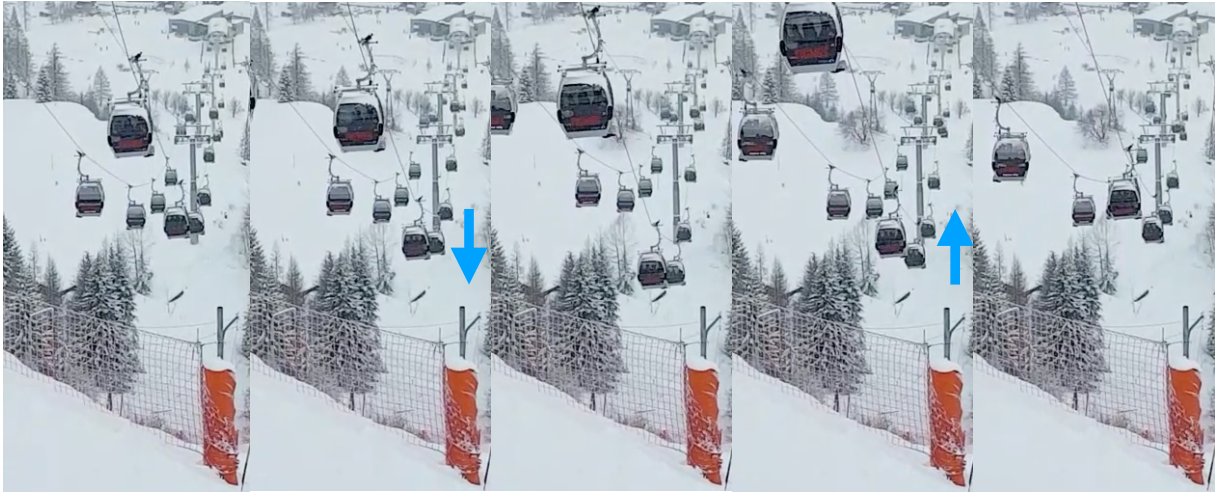


FIGURE 5.25: Pompage de la ligne de la télécabine des Brévières (document STGM)

Origine de la sollicitation dynamique

La première étape de la sélection d'un mode est de comprendre l'origine de la sollicitation dynamique conduisant au pompage :

— **Par variation périodique de tension statique et de la courbure statique :**

Le chapitre 3 a mis en évidence que les évolutions quasi-statiques d'une ligne à mouvement continu, dont les véhicules sont supposés uniformément chargés, sont à l'origine d'une variation périodique de la tension et de la courbure statiques à la fréquence fondamentale de défilement des véhicules

$$f_{qs} = \frac{1}{\Delta_{qs}} = \frac{V_0}{l_d} = \frac{\Omega}{2\pi}. \quad (5.37)$$

D'après (5.1) rappelée précédemment dans 5.1, la tension et la courbure statiques apparaissent comme des paramètres variables en temps $\Delta^2(t), \kappa_s(t)$ dans les équations de la dynamique. Ces paramètres, qui dépendent du temps, jouent le rôle d'excitateurs paramétriques susceptibles de déclencher une réponse de la ligne du câble même en l'absence d'effort extérieur au second membre. C'est un mécanisme **d'auto-excitation** d'une boucle de câble soumise à des charges ponctuelles qui défilent.

Les variations de tension statique sont amplifiées par le franchissement simultané de deux véhicules aux appuis d'extrémité d'une même portée, avec un effet de reprise d'appui illustré en Fig. 5.27 par un calcul quasi-statique rendant compte du contact entre le véhicule et l'appui. En effet, lors du passage sur un pylône intermédiaire, une partie de son poids est transférée du câble vers l'appui, ce qui diminue la tension dans la ligne (Fig. 5.26). L'effet sur la tension se cumule localement lorsque deux véhicules passent en même temps sur les deux pylônes qui délimitent une même portée de câble, à l'origine d'une perturbation locale accrue de tension qui peut-être qualifié d'effet de **résonance géométrique**.

Le même constat est fait à l'échelle globale d'une ligne. Le franchissement simultanés de véhicules sur plusieurs appuis de la ligne, qui ne sont pas forcément successifs, est à l'origine de perturbations en tension statique. Ces perturbations se répercutent non plus localement mais de façon globale avec un effet cumulatif le long du câble.

— **Par le transvasement de longueur de câble entre portées :**

Le franchissement des véhicules d'une portée à une autre provoque une variation soudaine de l'équilibre statique. Cela entraîne des changements brutaux de la longueur statique de câble à l'intérieur de chacune des portées entre deux positions successives des véhicules entrant et sortant de la portée. Ce phénomène a été mis en évidence dans le chapitre 3 lors de l'analyse quasi-statique.

D'un point de vue dynamique, ces variations de longueur de câble sont permises par un mouvement longitudinal du câble δu_d aux appuis d'extrémités et génèrent ainsi un incrément de tension dynamique $T_d = EA(\delta u'_d - \kappa_s \delta v_d)$. D'après la forme des équations (5.1), cet incrément de tension dynamique peut-être



FIGURE 5.26: Franchissement d'un appui par un véhicule

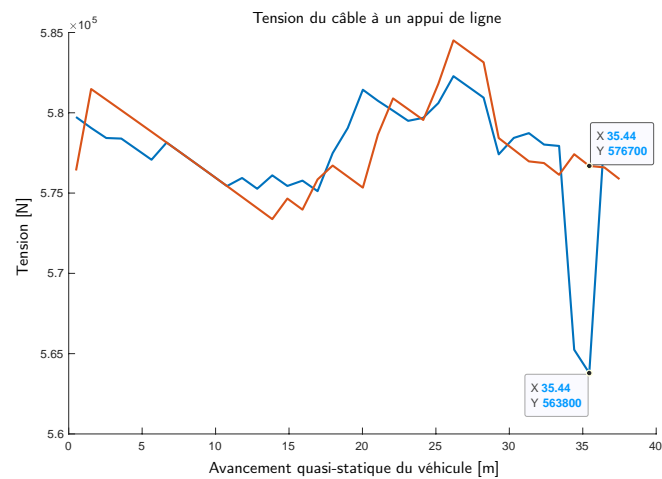


FIGURE 5.27: Évolution quasi-statique de tension du câble à l'appui au franchissement par un véhicule : avec contact véhicule-support (bleu), sans contact véhicule-support (orange)

assimilé à un effort extérieur $\kappa_s T_d$ appliqué selon la direction verticale \underline{n} , prenant la forme d'une série d'impulsions d'une durée δt de période $\Delta t_{qs} = \frac{l_d}{V_0}$ correspondant au temps mis par le véhicule pour passer sur la longueur d'appui. Bien que représenté comme ponctuel dans les modèles de ces travaux, en réalité, l'appui est linéique, ce qui régularise le phénomène.

L'ensemble des sources de sollicitations potentielles identifiées sont des phénomènes périodiques de fondamentale f_{qs} , la fréquence de défilement des véhicules. À ce stade de l'analyse, il est donc raisonnable de retenir les modes dont la fréquence f_k est proche d'un multiple de f_{qs} qui peut être activé par un mécanisme de type résonance linéaire :

$$f_k = n f_{qs} \quad n \in \mathbf{N}^*. \quad (5.38)$$

L'analyse modale paramétrique réalisée en fonction des positions successives occupées par les véhicules renseigne sur les fréquences modales instantanées rencontrées au cours du déplacement du câble.

Localisation de l'énergie modale

Une fois la fréquence f_k du mode en mesure d'être activé par les sollicitations internes identifiées, la deuxième étape est de sélectionner une forme modale qui possède une localisation de l'énergie vibratoire le long de la ligne. D'après les modèles de ligne traités en 5.2.3 et 5.2.4, deux approches distinctes permettent le calcul d'un mode de pompage.

Avec le modèle 3, une valeur du paramètre de contrôle $l_c \in [0, l_d]$ est fixée telle que la fréquence du mode k soit la plus proche d'un multiple de f_{qs} :

- Une valeur limite p_{lim} est définie pour caractériser une localisation de l'énergie vibratoire dans une portée.
- Chacune des portées $i \in [1, N]$ de la ligne est parcourue.
- Une étude paramétrique de la vibration relative de la portée i , $p_{v,i}^k = f(|T_{d,i}|)$, est réalisée en positionnant la discontinuité en tension dynamique aux appuis i et $i + 1$.
- Si la limite p_{lim} est atteinte, alors $|T_{d,i_{min}}| = f^{-1}(p_{lim})$ et la forme modale associée $\underline{\Phi}_{k,i}$ est ajoutée au tableau des modes de pompage $[T_p]^i = [T_p^{i-1} \underline{\Phi}_{k,i}]$. Sinon, la portée ne localise pas l'énergie du mode k et aucune forme modale n'est ajoutée au tableau.
- Une fois le processus répété pour chaque portée, les formes modales sont ordonnées par valeurs de $|T_{d,i_{min}}|$ croissantes.

Avec le modèle 4, la vision uniforme du problème simplifie la démarche puisque le paramètre de contrôle l_c n'intervient plus et une unique forme modale est renvoyée pour f_k :

- Une valeur limite p_{lim} est définie pour caractériser une localisation de l'énergie vibratoire dans une portée.
- La forme modale complexe du mode à la fréquence $f_k = \omega_k/2\pi$ est calculée. La réponse de la ligne selon un cycle non-amorti est obtenue par $\Re((\Re(\underline{\Phi}_k) + j\Im(\underline{\Phi}_k))e^{j\omega_k t})$.
- Chacune des portées $i \in [1, N]$ de la ligne est parcourue.
- Le maximum de $p_{v,i}^k$ est calculé sur un cycle de la vibration. S'il existe une portée i telle que $\max(p_{v,i}^k) \geq p_{lim}$, alors le mode est retenu comme mode de pompage.

Calcul des paramètres d'évolution quasi-statique

Afin de rendre compte des évolutions temporelles périodiques du système, le terme de tension statique T_s apparaissant dans les équations dynamiques et jusqu'ici considéré comme constant en espace et en temps, peut se ré-écrire sous la forme :

$$T_s(S, t) = T_s^0(S) + T_{s,qs}(S, t) = T_s^0(S) + \sum_i T_{si}^c \cos\left(i \frac{2\pi V_0}{l_d} t\right) + T_{si}^s \sin\left(i \frac{2\pi V_0}{l_d} t\right). \quad (5.39)$$

En pratique, $T_s(S, t)$ est obtenue à partir des résultats de l'analyse quasi-statique du chapitre 3 avec le suivi de la tension statique du câble en fonction de l'avancement des véhicules et le calcul des coefficients $|T_{si}| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_{s,qs}(S, t) e^{-jit} dt$ de la série de Fourier associée calculé par *Fast Fourier Transform* (FFT), tels

que

$$\begin{aligned} T_{s,qs}(S,t) &= \sum_i T_{si}^c \cos\left(i \frac{2\pi V_0}{l_d} t\right) + T_{si}^s \sin\left(i \frac{2\pi V_0}{l_d} t\right) = \sum_i |T_{si}| e^{j\psi_i} e^{ji \frac{2\pi V_0}{l_d} t} + |\bar{T}_{si}| e^{-j\psi_i} e^{-ji \frac{2\pi V_0}{l_d} t} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |T_{si}| e^{j\left(i \frac{2\pi V_0}{l_d} t + \psi_i\right)} = 2 \sum_i |T_{si}| \cos\left(i \frac{2\pi V_0}{l_d} t + \psi_i\right). \end{aligned} \quad (5.40)$$

avec $T_{si}^c = 2|T_{si}| \cos(\psi_i)$, $T_{si}^s = -2|T_{si}| \sin(\psi_i)$.

De la même façon, les évolutions quasi-statiques du câble sont à l'origine de perturbations dynamiques. La tension dynamique totale T_d s'exprime comme la somme d'une contribution dynamique $T_{d,m}$ de la vibration autour d'une position statique donnée :

$$T_{d,m} = EA(u'_d - \kappa_s v_d), \quad (5.41)$$

et d'une contribution $T_{d,qs}$ générée par les changements d'états successifs au cours du déplacement quasi-statique du câble rendant compte de l'aspect variable en temps du système,

$$T_d(S,t) = T_{d,m}(S,t) + T_{d,qs}(S,t) = EA(\Phi'_u - \kappa_s \Phi_v) + T_{d0} + \sum_i T_{di}^c \cos\left(i \frac{2\pi V_0}{l_d} t\right) + T_{di}^s \sin\left(i \frac{2\pi V_0}{l_d} t\right). \quad (5.42)$$

En pratique, la composante $T_{d,qs}(S,t)$ est obtenue à partir des résultats quasi-statiques du transvasement de longueur de câble entre les portées et le calcul des coefficients $|T_{di}| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_{d,qs}(S,t) e^{-jit} dt$ de la série de Fourier associée calculé par FFT, tels que

$$\begin{aligned} T_{d,qs}(S,t) &= T_{d0} + \sum_i T_{di}^c \cos\left(i \frac{2\pi V_0}{l_d} t\right) + T_{di}^s \sin\left(i \frac{2\pi V_0}{l_d} t\right) = T_{d0} + \sum_i |T_{di}| e^{j\phi_i} e^{ji \frac{2\pi V_0}{l_d} t} + |\bar{T}_{di}| e^{-j\phi_i} e^{-ji \frac{2\pi V_0}{l_d} t} \\ &= T_{d0} + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |T_{di}| e^{j\left(i \frac{2\pi V_0}{l_d} t + \phi_i\right)} = T_{d0} + 2 \sum_i |T_{di}| \cos\left(i \frac{2\pi V_0}{l_d} t + \phi_i\right). \end{aligned} \quad (5.43)$$

avec $T_{di}^c = 2|T_{di}| \cos(\phi_i)$, $T_{di}^s = -2|T_{di}| \sin(\phi_i)$.

Finalement, le terme de tension dynamique totale T_d intervient dans l'équation dynamique agissant selon \underline{n} en l'identifiant à l'incrément de tension dynamique

$$T_d = EA(u'_d - \kappa_s v_d), \quad (5.44)$$

remplacé par la tension corrigée par l'avancement quasi-statique $T_d(S,t) = T_{d,m}(S,t) + T_{d,qs}(S,t)$:

$$\mu \ddot{v}_d - \frac{T_s(S,t)}{\|\underline{X}'\|} (v''_d + \kappa_s u'_d) - \kappa_s EA(u'_d - \kappa_s v_d) = \kappa_s T_{d,qs}(S,t). \quad (5.45)$$

Les indicateurs mis en place dans le chapitre 3 permettent d'identifier les portées où les perturbations $T_{s,sq}(S,t)$ et $T_{d,qs}(S,t)$ sont prépondérantes.

Projection des équations dynamiques du câble fixe sur un mode de pompage

L'étape de réduction de modèle selon un mode consiste à décomposer le mouvement dynamique $\underline{U}_d = u_d \underline{t} + v_d \underline{n} + w_d \underline{e}_z$ selon le mode de pompage $(\omega_p, \underline{\Phi})$,

$$\underline{U}_d = q(t) \underline{\Phi}(S), \quad (5.46)$$

puis de réaliser une projection des équations dynamiques d'un câble fixe selon le modèle 3, valables pour tout $S \in [0, L]$,

$$\begin{cases} \mu \ddot{u}_d + \frac{T_s}{\|X'\|} \kappa_s (v'_d + \kappa_s u_d) - EA(u''_d - \kappa_s v'_d) = 0, \\ \mu \ddot{v}_d - \frac{T_s}{\|X'\|} (v''_d + \kappa_s u'_d) - \kappa_s EA(u'_d - \kappa_s v_d) = 0, \\ \mu \ddot{w}_d - \frac{T_s}{\|X'\|} w''_d = 0. \end{cases} \quad (5.47)$$

En remplaçant dans (5.47) selon une notation matricielle du système dynamique,

$$\begin{aligned} \mu \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_u \\ \Phi_v \\ \Phi_w \end{pmatrix} \ddot{q} + \begin{bmatrix} \frac{T_s \kappa_s^2}{\|X'\|} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_s^2 EA & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_u \\ \Phi_v \\ \Phi_w \end{pmatrix} q \\ + \begin{bmatrix} 0 & \kappa_s \left(\frac{T_s}{\|X'\|} + EA \right) & 0 \\ -\kappa_s \left(\frac{T_s}{\|X'\|} + EA \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Phi'_u \\ \Phi'_v \\ \Phi'_w \end{pmatrix} q + \begin{bmatrix} -EA & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{T_s}{\|X'\|} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{T_s}{\|X'\|} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Phi''_u \\ \Phi''_v \\ \Phi''_w \end{pmatrix} q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

La projection sur le mode $\underline{\Phi}(S)$, associée au produit scalaire \mathcal{L}^2 , est réalisée par écriture du problème dynamique initial sous une forme faible, ce qui avec la notation matricielle, consiste en un changement de base en multipliant à droite par un champ test, ou déplacement virtuel $\underline{\Phi}$, et à gauche par la transposée $\underline{\Phi}^T$, puis à réaliser une intégration sur tout le domaine $S \in [0, L]$,

$$\begin{aligned} \int_0^L \mu \begin{pmatrix} \Phi_u \\ \Phi_v \\ \Phi_w \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_u \\ \Phi_v \\ \Phi_w \end{pmatrix} dS \ddot{q} + \int_0^L \begin{pmatrix} \Phi_u \\ \Phi_v \\ \Phi_w \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{T_s \kappa_s^2}{\|X'\|} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_s^2 EA & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_u \\ \Phi_v \\ \Phi_w \end{pmatrix} dS q \\ + \int_0^L \begin{pmatrix} \Phi_u \\ \Phi_v \\ \Phi_w \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & \kappa_s \left(\frac{T_s}{\|X'\|} + EA \right) & 0 \\ -\kappa_s \left(\frac{T_s}{\|X'\|} + EA \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Phi'_u \\ \Phi'_v \\ \Phi'_w \end{pmatrix} dS q \\ + \int_0^L \begin{pmatrix} \Phi_u \\ \Phi_v \\ \Phi_w \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} -EA & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{T_s}{\|X'\|} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{T_s}{\|X'\|} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Phi''_u \\ \Phi''_v \\ \Phi''_w \end{pmatrix} dS q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Une équation scalaire est ainsi obtenue,

$$\begin{aligned} \int_0^L (\Phi_u^2 + \Phi_v^2 + \Phi_w^2) \mu dS \ddot{q} + \int_0^L \left[\Phi_u^2 \frac{T_s \kappa_s^2}{\|X'\|} + \Phi_v^2 \kappa_s^2 EA + \Phi_u \Phi'_v \left(\frac{T_s}{\|X'\|} + EA \right) \kappa_s \right. \\ \left. - \Phi_v \Phi'_u \left(\frac{T_s}{\|X'\|} + EA \right) \kappa_s - \Phi_u \Phi''_u EA - \Phi_v \Phi''_v \frac{T_s}{\|X'\|} - \Phi_w \Phi''_w \frac{T_s}{\|X'\|} \right] dS q = 0. \end{aligned} \quad (5.50)$$

D'après la définition d'un mode de vibration, l'équation différentielle en temps, vérifiée par $q(t)$ après projection des équations dynamiques sur le mode $\underline{\Phi}$, est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_p , la pulsation du mode. Par identification,

$$\omega_p^2 = \frac{\int_0^L \left[\Phi_u^2 \frac{T_s \kappa_s^2}{\|X'\|} + \Phi_v^2 \kappa_s^2 EA + \Phi_u \Phi'_v \left(\frac{T_s}{\|X'\|} + EA \right) \kappa_s - \Phi_v \Phi'_u \left(\frac{T_s}{\|X'\|} + EA \right) \kappa_s - \Phi_u \Phi''_u EA - \Phi_v \Phi''_v \frac{T_s}{\|X'\|} - \Phi_w \Phi''_w \frac{T_s}{\|X'\|} \right] dS}{\int_0^L (\Phi_u^2 + \Phi_v^2 + \Phi_w^2) \mu dS}. \quad (5.51)$$

La dynamique de la ligne est ainsi réduite à l'équation d'un oscillateur à un degré de liberté,

$$\ddot{q} + \omega_p^2 q = 0. \quad (5.52)$$

Par ajout des contributions quasi-statiques aux tensions statique $T_s(S, t)$ et dynamique $T_d(S, t)$ qui contiennent la dépendance périodique en temps t , une équation de Mathieu avec un terme de forçage est obtenue,

$$\ddot{q} + \left[\omega_p^2 + a(t) \right] q = f(t), \quad (5.53)$$

où

$$a(t) = \frac{\int_0^L \left[\Phi_u^2 \kappa_s^2 + \Phi_u \Phi'_v \kappa_s - \Phi_v \Phi'_u \kappa_s - \Phi_v \Phi''_v - \Phi_w \Phi''_w \right] \frac{T_{s,qs}(S,t)}{\|\underline{X}'\|} dS}{\int_0^L (\Phi_u^2 + \Phi_v^2 + \Phi_w^2) \mu dS}, \quad (5.54)$$

$$f(t) = \frac{\int_0^L \kappa_s T_{d,qs}(S,t) \Phi_v dS}{\int_0^L (\Phi_u^2 + \Phi_v^2 + \Phi_w^2) \mu dS}. \quad (5.55)$$

La particularité des équations de type Mathieu est de posséder un terme d'excitation périodique en temps $a(t)$ qui apparaît comme coefficient de l'équation différentielle qui gouverne le système : l'excitation est ainsi qualifiée de **paramétrique**. Contrairement aux systèmes possédant uniquement une source d'excitation externe, $f(t)$, dont une petite amplitude ne produit pas de forte réponse du système hormis à proximité d'une des fréquences modales du système (résonance primaire), une petite excitation paramétrique peut produire une grande réponse du système si la fréquence de la source d'excitation est proche du double d'une des fréquences modales du système [207]. Melde [252] a été le premier à avoir mis en évidence de façon expérimentale le phénomène d'excitation paramétrique par le montage d'une corde de longueur L tendue entre un support rigide et excitée de façon longitudinale par la vibration d'une branche d'un diapason. Pour une excitation dans la direction longitudinale, il a observé pour certaines combinaisons de masse linéique de la corde μ et de tension T la naissance d'une forte oscillation dans la direction verticale dont la fréquence

$$f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (5.56)$$

est égale à la moitié de la fréquence de l'excitation.

En supposant les perturbations $T_{s,qs}(S,t)$ et $T_{d,qs}(S,t)$ localisées dans la portée où le pompage est étudié, soit pour $S \in [S_1, S_2]$ avec une valeur nulle en dehors, leurs valeurs spatiales moyennes,

$$T_{s,qs}(t) \approx \frac{1}{S_2 - S_1} \int_{S_1}^{S_2} T_{s,qs}(S,t) dS, \quad (5.57)$$

$$T_{d,qs}(t) \approx \frac{1}{S_2 - S_1} \int_{S_1}^{S_2} T_{d,qs}(S,t) dS, \quad (5.58)$$

sont estimées à partir des résultats quasi-statiques. De la même façon, le mode de pompage est supposé concentrer l'énergie vibratoire dans la portée, ainsi

$$a(t) = \frac{\int_0^L \left[\Phi_u^2 \kappa_s^2 + \Phi_u \Phi'_v \kappa_s - \Phi_v \Phi'_u \kappa_s - \Phi_v \Phi''_v - \Phi_w \Phi''_w \right] \frac{T_{s,qs}(S,t)}{\|\underline{X}'\|} dS}{\int_0^L (\Phi_u^2 + \Phi_v^2 + \Phi_w^2) \mu dS} \approx \frac{\int_{S_1}^{S_2} \frac{1}{\|\underline{X}'\|} \left[\Phi_u^2 \kappa_s^2 + \Phi_u \Phi'_v \kappa_s - \Phi_v \Phi'_u \kappa_s - \Phi_v \Phi''_v - \Phi_w \Phi''_w \right] dS}{\int_0^L (\Phi_u^2 + \Phi_v^2 + \Phi_w^2) \mu dS} T_{s,qs}(t) = A T_{s,qs}(t), \quad (5.59)$$

$$f(t) = \frac{\int_0^L \kappa_s T_{d,qs}(S,t) \Phi_v dS}{\int_0^L (\Phi_u^2 + \Phi_v^2 + \Phi_w^2) \mu dS} \approx \frac{\int_{S_1}^{S_2} \kappa_s \Phi_v dS}{\int_0^L (\Phi_u^2 + \Phi_v^2 + \Phi_w^2) \mu dS} T_{d,qs}(t) = F T_{d,qs}(t), \quad (5.60)$$

avec $T_{s,qs}(t) = \sum_i T_{si}^c \cos(i\Omega t) + T_{si}^s \sin(i\Omega t)$ et $T_{d,qs}(t) = \sum_i T_{di}^c \cos(i\Omega t) + T_{di}^s \sin(i\Omega t)$.

D'après les hypothèses d'un mode de pompage qui concentre l'énergie vibratoire dans une portée unique, selon un mouvement majoritairement vertical avec une déformée symétrique, et le choix de normalisation,

$$\int_{S_1}^{S_2} \Phi_v dS \sim 1 \text{ m}^2, \quad \int_{S_1}^{S_2} \Phi_u dS \sim 10^{-1} \text{ m}^2.$$

Pour une application aux transporteurs à câbles aériens, les ordres de grandeur suivants sont retenus

$$\begin{aligned} L &\sim 10^3 \text{ m}, & \mu &\sim 10^1 \text{ kg/m}, \\ \kappa_s &\sim 10^{-4} \text{ m}^{-1}, & S_2 - S_1 &\sim 10^2 \text{ m}. \end{aligned}$$

Ainsi, $A \sim 10^{-9} \text{ N}^{-1}\text{s}^{-2}$ et $|F| \sim 10^{-5} \text{ N}^{-1}\text{s}^{-2}$.

Un changement d'échelle de temps est réalisé en posant $T = \Omega t$ où $\Omega = 2\pi f_{qs} = \frac{2\pi V_0}{l_d}$. L'équation (5.53) s'écrit en fonction de la nouvelle variable T ,

$$\frac{d^2 q(T)}{dT^2} + \left(\frac{\omega_p^2}{\Omega^2} + \frac{A}{\Omega^2} T_{s,qs}(T) \right) q(T) = \frac{F}{\Omega^2} T_{d,qs}(T). \quad (5.61)$$

Deux stratégies sont possibles pour introduire un petit paramètre sans dimension ϵ afin de mener des développements des grandeurs du problème à différentes échelles en ϵ selon la *multiple scale method* ou méthode des échelles multiples :

- introduire, de façon artificielle dans (5.61), un paramètre ϵ , dit *bookkeeping parameter*, sans le fixer de façon explicite et tout en se rappelant que ce paramètre se doit d'être suffisamment petit pour assurer la validité des différents développements,
- fixer un paramètre ϵ , en fonction des grandeurs physiques de (5.61), en s'assurant de son ordre de grandeur.

Sans perte de généralité, ϵ est ici fixé de telle sorte que :

$$\epsilon = \frac{A}{\Omega^2} |T_{s,qs}(T)|, \quad (5.62)$$

où $|T_{s,qs}(T)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (|T_{si}^c|^2 + |T_{si}^s|^2)}$.

Théoriquement, les développements aux échelles multiples sont valables pour de " petites valeurs " de ϵ . Avec les ordres de grandeurs des données physiques rencontrées en pratique sur les lignes de transporteurs à câbles aériens, $\epsilon = \frac{A}{\Omega^2} |T_{s,qs}(T)| \sim 10^{-7} \times 10^4 \sim 10^{-3}$, ce qui conforte ce choix dans la démarche de développements aux différents ordres en ϵ .

Il est également posé :

$$\delta = \frac{\omega_p^2}{\Omega^2}, \quad (5.63)$$

$$T_s^*(T) = \frac{T_{s,qs}(T)}{|T_{s,qs}(T)|}, \quad (5.64)$$

$$f^*(T) = \frac{F}{A|T_{s,qs}(T)|} T_{d,qs}(T). \quad (5.65)$$

Le paramètre ϵ permet une remise à l'échelle des grandeurs du problème. Trois cas sont à différencier :

- Le terme de forçage f^* est du même ordre de grandeur que T_s^* . Une remise à l'échelle avec ϵ est réalisée et l'équation (5.61) s'écrit en fonction du paramètre ϵ :

$$\frac{d^2 q(T)}{dT^2} + \left(\delta + \epsilon T_s^*(T) \right) q(T) = \epsilon f^*(T). \quad (5.66)$$

- Le terme de forçage f^* est à un ordre de grandeur plus élevé que T_s^* . L'équation (5.61) s'exprime comme

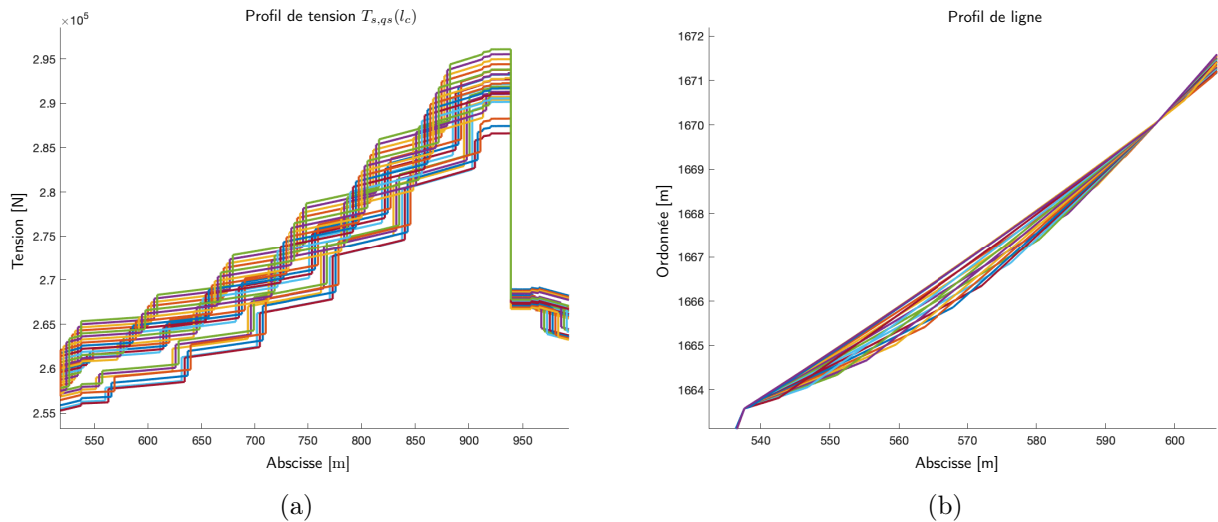


FIGURE 5.28: Superposition (a) des profils de tension et (b) des déformées statiques dans la portée 5 de la ligne des Brévières pour différentes valeurs du paramètre l_c

un oscillateur linéaire avec un terme de forçage, l'excitateur paramétrique disparaît :

$$\frac{d^2 q(T)}{dT^2} + \delta q(T) = f^*(T). \quad (5.67)$$

- Le terme de forçage f^* est à un ordre de grandeur plus petit que T_s^* . L'équation (5.61) s'exprime comme une équation de Mathieu sans terme de forçage :

$$\frac{d^2 q(T)}{dT^2} + \left(\delta + \epsilon T_s^*(T) \right) q(T) = 0. \quad (5.68)$$

Un éclairage est ainsi apporté sur la dynamique de pompage qui est déclenchée localement sur la ligne de câble par des perturbations périodiques d'origine quasi-statique causées par la succession des positions occupées par les véhicules et le passage des véhicules d'une portée vers une autre. Selon les configurations géométriques et de chargement, cette source de sollicitation interne est à l'origine du déclenchement de vibrations localisées sur une ou plusieurs portées voisines par un effet de forçage guidé par les évolutions quasi-statiques de la ligne. Ces vibrations locales sont susceptibles d'être amplifiées au cours du déplacement par un mécanisme d'excitation paramétrique dynamique agissant par l'intermédiaire de l'évolution de la tension statique du câble. Cela conduit à un effet local d'amplification instable d'une perturbation quasi-statique, par exemple par le franchissement simultané des véhicules sur les appuis d'une même portée, selon un mécanisme d'excitation paramétrique de la dynamique d'un mode excité de façon privilégiée sur la portée ciblée.

Dans le cas de la ligne des Brévières, l'étude quasi-statique (Fig. 5.28) permet d'identifier les mécanismes d'excitation localisés dans la portée 5 :

- **Variation de tension statique**

L'évolution de la tension statique à l'appui en entrée de la portée 5 est tracée en Fig. 5.29 (a). Le choix d'un pas de progression du paramètre l_c de 4 m pour le tracé de la Fig. 5.29 (a) régularise l'effet du franchissement des véhicules sur les appuis lorsque ces derniers sont modélisés de façon ponctuelle et permet de rendre compte de la continuité du contact sur la longueur d'appui. La FFT associée au signal obtenu avec la prise en compte du contact entre le véhicule et l'appui est donnée en Fig. 5.29 (b) et permet l'identification des coefficients de l'équation (5.39). Le terme d'excitation paramétrique $T_s^*(T) = \frac{T_{s,qs}(T)}{|T_{s,qs}(T)|}$ du modèle réduit est obtenu à partir de l'analyse des résultats du calcul quasi-statique.

- **Transvasement de longueur de câble**

D'après la Fig. 5.30, c'est dans la portée 5 qu'est atteinte la valeur maximale de l'incrément de tension dynamique.

L'évolution de l'incrément de tension dynamique T_d associé aux variations de longueur de câble dans

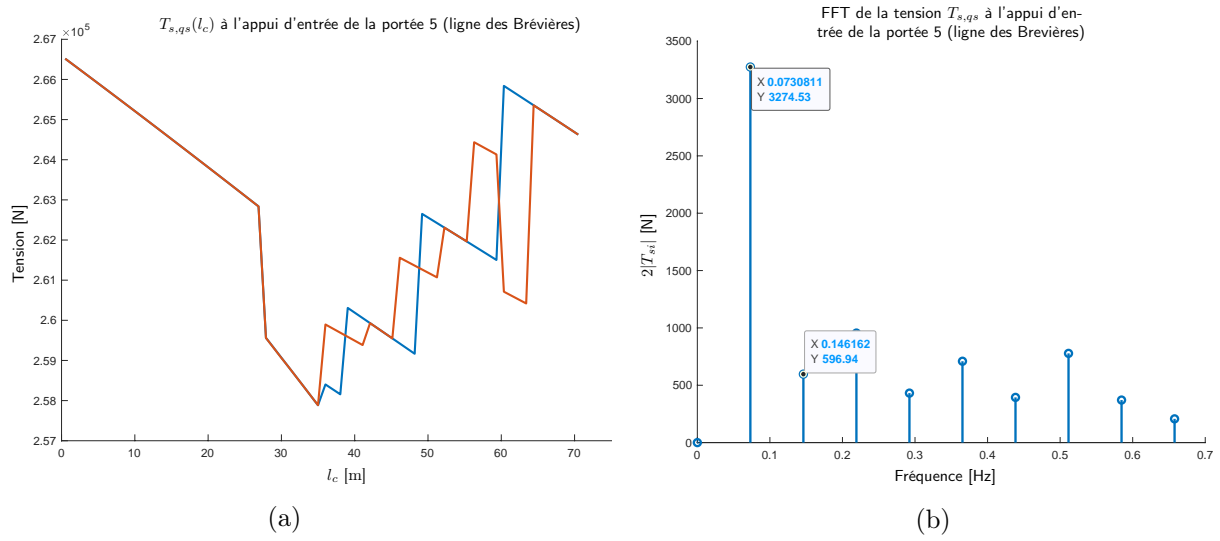


FIGURE 5.29: Appui d'entrée de la portée 5 de la ligne des Brévières : (a) Évolution de la tension statique avec (orange) et sans (bleu) modélisation du contact véhicule-balancier en fonction de l_c , (b) FFT du signal de tension statique associé au défilement de la ligne

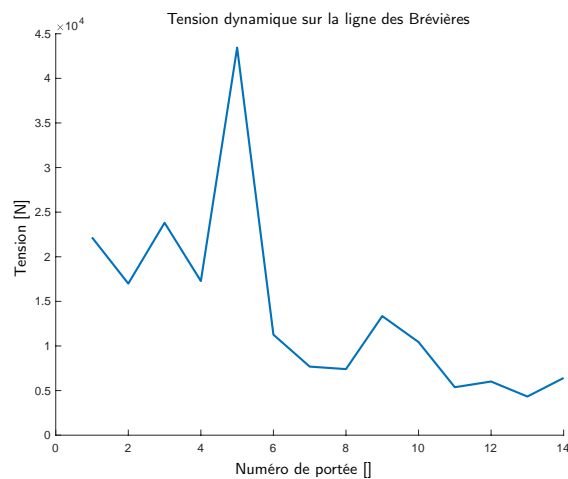


FIGURE 5.30: Incrément de tension dynamique $T_{d,qs}$ maximal dans les portées de la ligne des Brévières

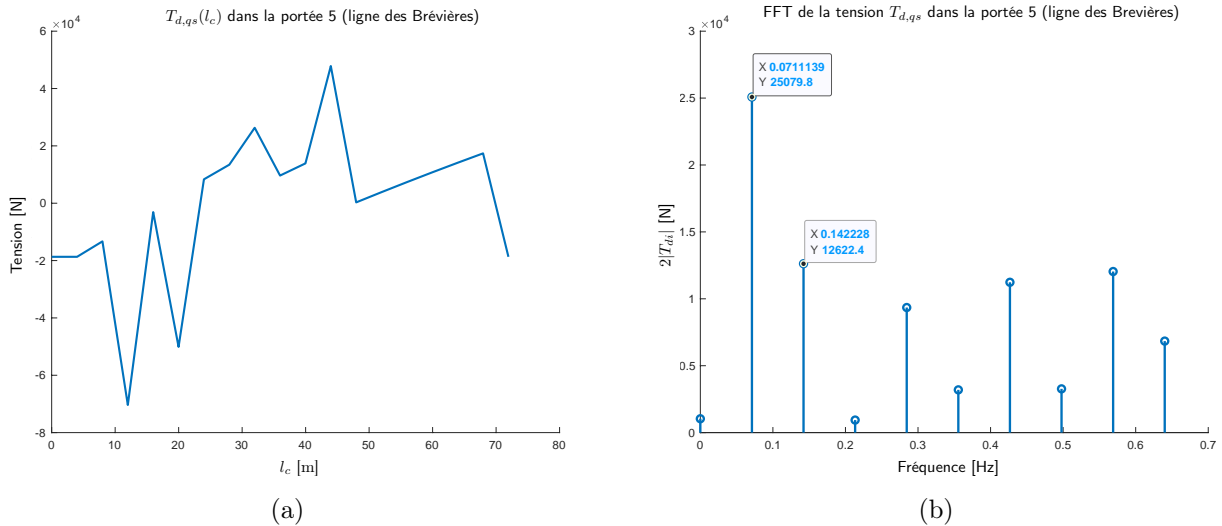


FIGURE 5.31: Portée 5 de la ligne des Brévières : (a) Évolution de la tension dynamique en fonction de l_c , (b) FFT du signal de tension dynamique associé au défilement de la ligne

la portée 5 de la ligne des Brévières est calculé en fonction du paramètre de défilement l_c en Fig. 5.31 (a). Le choix d'un pas de progression du paramètre l_c de 4 m pour le tracé de la Fig. 5.31 (a) a un effet régularisant sur le franchissement des véhicules sur les appuis. La FFT associée au signal obtenu est donnée en Fig. 5.31 (b) et permet l'identification des coefficients de l'équation (5.42). Le terme de forçage $f^*(T) = \frac{F}{A|T_{s,qs}(T)|} T_{d,qs}(T)$ du modèle réduit est obtenu à partir de l'analyse des résultats du calcul quasi-statique.

Ainsi, l'excitation paramétrique $T_{s,qs}$ dans la portée 5 de la ligne des Brévières a une amplitude moindre que le terme de forçage dynamique $T_{d,qs}$, avec un rapport d'un ordre de grandeur de 10 entre les deux. D'après les ordres de grandeur des paramètres A et F , $f^* \approx 10^3 T_s^*$: le terme de forçage f^* est prépondérant sur l'excitation paramétrique T_s^* . L'équation (5.61) s'exprime comme un oscillateur linéaire avec un terme de forçage, l'excitateur paramétrique disparaît :

$$\frac{d^2 q(T)}{dT^2} + \delta q(T) = f^*(T). \quad (5.69)$$

En conclusion, l'étude du pompage de la ligne des Brévières se ramène au cas classique d'une résonance linéaire par un forçage extérieur.

5.3.3 Équation de Mathieu-Hill et instabilité paramétrique

L'équation de Mathieu mise en évidence en (5.66) et (5.68) est, en présence d'une excitation paramétrique $T_s^*(T)$ multi-harmonique, appelée équation de Mathieu-Hill. L'équation (5.68) est par exemple étudiée par Nayfeh [207] et il est mis en évidence l'existence de zones d'instabilité pour lesquelles la réponse $q(t)$ n'est théoriquement pas bornée en l'absence d'effets non-linéaires. Dans le but de détecter les zones d'instabilité de la ligne de transport par câbles, il est proposé dans la suite une étude de stabilité de l'équation de Mathieu-Hill (5.66) avec un terme de forçage au second membre selon une méthode aux échelles multiples,

$$\frac{d^2 q(T)}{dT^2} + \left(\delta + \epsilon T_s^*(T) \right) q(T) = \epsilon f^*(T). \quad (5.70)$$

Dans un premier temps, aucun amortissement n'est pris en compte sur la ligne de câble. Il sera ensuite ajouté et les modifications sur les régions d'instabilité seront discutées.

Il est supposé que le terme de forçage $f^*(T)$ active le mode de pulsation ω_p de façon privilégiée, et qu'ainsi l'excitation due au forçage est résonante :

$$f^*(T) = T_d^{*c} \cos(nT) + T_d^{*s} \sin(nT), \quad n \in \mathbf{N}^*, \quad (5.71)$$

avec

$$\omega_p \approx n\Omega \Leftrightarrow \delta \approx n^2.$$

Le terme d'excitation paramétrique est quant à lui conservé sous forme multi-harmonique,

$$T_s^*(T) = \sum_{i>0} T_{s_i}^{*c} \cos(iT) + T_{s_i}^{*s} \sin(iT). \quad (5.72)$$

La méthode des échelles multiples [207] consiste à développer la réponse dynamique $q(T)$ en fonction du paramètre ϵ et du temps T :

$$T_i = \epsilon^i T, \quad i \in \mathbf{N}, \quad (5.73)$$

$$\frac{d}{dT} = D_0 + \epsilon D_1 + \epsilon^2 D_2 + \dots, \quad \text{avec } D_i = \frac{\partial}{\partial T_i}, \quad (5.74)$$

$$q(T) = q_0(T_0, T_1, T_2, \dots) + \epsilon q_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + \epsilon^2 q_2(T_0, T_1, T_2, \dots). \quad (5.75)$$

Les développements aux échelles multiples sont remplacés dans l'équation (5.70),

$$\begin{aligned} (D_0 + \epsilon D_1 + \epsilon^2 D_2 + \dots)^2 (q_0 + \epsilon q_1 + \epsilon^2 q_2 + \dots) + \left[\delta + \epsilon \left(\sum_{i>0} T_{s_i}^{*c} \cos(iT) + T_{s_i}^{*s} \sin(iT) \right) \right] (q_0 + \epsilon q_1 + \epsilon^2 q_2 + \dots) \\ = \epsilon [T_d^{*c} \cos(nT) + T_d^{*s} \sin(nT)]. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Les termes à chaque ordre de l'équation (5.76) sont identifiés.

À l'ordre ϵ^0 , il vient :

$$D_0^2 q_0 + \delta q_0 = 0. \quad (5.77)$$

Ainsi, une solution q_0 s'écrit :

$$q_0(T_0, T_1, T_2, \dots) = Q(T_1, T_2, \dots) e^{j\sqrt{\delta}T_0} + \bar{Q}(T_1, T_2, \dots) e^{-j\sqrt{\delta}T_0}, \quad (5.78)$$

où Q ne dépend pas de T_0 .

À l'ordre ϵ^1 , il vient :

$$D_0^2 q_1 + \delta q_1 = -2D_0 D_1 q_0 - \left(\sum_{i>0} T_{s_i}^{*c} \cos(iT) + T_{s_i}^{*s} \sin(iT) \right) q_0 + (T_d^{*c} \cos(nT) + T_d^{*s} \sin(nT)). \quad (5.79)$$

Le terme de forçage extérieur est placé autour de la résonance, $n \approx \sqrt{\delta} \rightarrow n = \sqrt{\delta} + \epsilon\sigma$, avec σ un paramètre de *detuning* ou detuning parameter.

En remplaçant q_0 par son expression donnée par le développement à l'ordre ϵ^0 , les termes du second membre de (5.79) s'expriment :

$$-2D_0 D_1 q_0 = -2D_1 \left[Q j \sqrt{\delta} e^{j\sqrt{\delta}T_0} - \bar{Q} j \sqrt{\delta} e^{-j\sqrt{\delta}T_0} \right] = -2D_1 Q j \sqrt{\delta} e^{j\sqrt{\delta}T_0} + 2D_1 \bar{Q} j \sqrt{\delta} e^{-j\sqrt{\delta}T_0}, \quad (5.80)$$

$$\begin{aligned} - \left(\sum_{i>0} T_{s_i}^{*c} \cos(iT) + T_{s_i}^{*s} \sin(iT) \right) q_0 &= - \left(\sum_{i>0} T_{s_i}^* e^{jiT_0} + \overline{T_{s_i}^*} e^{-jiT_0} \right) \left(Q e^{j\sqrt{\delta}T_0} + \bar{Q} e^{-j\sqrt{\delta}T_0} \right) \\ &= - \sum_i T_{s_i}^* Q e^{j(i+\sqrt{\delta})T_0} + T_{s_i}^* \bar{Q} e^{j(i-\sqrt{\delta})T_0} + \overline{T_{s_i}^*} Q e^{j(-i+\sqrt{\delta})T_0} + \overline{T_{s_i}^*} \bar{Q} e^{j(-i-\sqrt{\delta})T_0}, \end{aligned} \quad (5.81)$$

avec $T_{s_i}^* = \frac{T_{s_i}^{*c} - jT_{s_i}^{*s}}{2}$

$$(T_d^{*c} \cos(nT) + T_d^{*s} \sin(nT)) = T_d e^{jnT_0} + \overline{T_d} e^{-jnT_0} = T_d e^{j(\sqrt{\delta}+\epsilon\sigma)T_0} + \overline{T_d} e^{-j(\sqrt{\delta}+\epsilon\sigma)T_0}, \quad (5.82)$$

avec $T_d = \frac{T_d^{*c} - jT_d^{*s}}{2}$.

Dans l'équation dynamique à l'ordre ϵ , les termes de la forme $\mathcal{A}e^{j\sqrt{\delta}T_0}$ sont des termes résonants, c'est-à-dire

que s'ils ne sont pas nuls, $\mathcal{A}(T_1, T_2, \dots) = 0$, la solution q_1 n'est pas bornée. Or, il est recherché des solutions périodiques d'après la théorie de Floquet, c'est-à-dire bornées. \mathcal{A} doit donc être annulé : on dit qu'on élimine les termes **séculaires**.

Les termes résonants du second membre sont identifiés,

$$-2D_1 Q j \sqrt{\delta} e^{j\sqrt{\delta}T_0} - T_{s2n} \bar{Q} e^{j(2n-\sqrt{\delta})T_0} + T_d e^{j\epsilon\sigma T_0} e^{j\sqrt{\delta}T_0}. \quad (5.83)$$

Pour $i = 2n = 2\sqrt{\delta} + 2\epsilon\sigma$:

$$e^{j(2n-\sqrt{\delta})T_0} = e^{j(2\sqrt{\delta}+2\epsilon\sigma-\sqrt{\delta})T_0} = e^{j2\epsilon\sigma T_0} e^{j\sqrt{\delta}T_0}.$$

En identifiant $T_1 = \epsilon T_0$, l'annulation des termes résonants de (5.83) conduit à :

$$-2D_1 Q j \sqrt{\delta} - T_{s2n} \bar{Q} e^{j2\sigma T_1} + T_d e^{j\sigma T_1} = 0. \quad (5.84)$$

Les termes non résonants restants sont :

$$\sum_i T_{si} Q e^{j(i+\sqrt{\delta})T_0} + \sum_{i \neq 2n} T_{si} \bar{Q} e^{j(i-\sqrt{\delta})T_0} + cc, \quad (5.85)$$

avec cc le complexe conjugué.

La solution particulière en q_1 est calculée en conservant les termes non-résonants dans le second membre de (5.159),

$$D_0^2 q_1 + \delta q_1 = - \sum_i T_{si} Q e^{j(i+\sqrt{\delta})T_0} - \sum_{i \neq 2n} T_{si} \bar{Q} e^{j(i-\sqrt{\delta})T_0} + cc. \quad (5.86)$$

q_1 est recherchée sous la forme :

$$q_1(T_0, T_1, T_2, \dots) = \sum_i K_{1i}(T_1, T_2, \dots) e^{j(i+\sqrt{\delta})T_0} + \sum_{i \neq 2n} K_{2i}(T_1, T_2, \dots) e^{j(i-\sqrt{\delta})T_0}. \quad (5.87)$$

En remplaçant,

$$\begin{aligned} \sum_i K_{1i}(-(i+\sqrt{\delta})^2 + \delta) e^{j(i+\sqrt{\delta})T_0} + \sum_{i \neq 2n} K_{2i}(-(i-\sqrt{\delta})^2 + \delta) e^{j(i-\sqrt{\delta})T_0} + cc \\ = - \sum_i T_{si} Q e^{j(i+\sqrt{\delta})T_0} - \sum_{i \neq 2n} T_{si} \bar{Q} e^{j(i-\sqrt{\delta})T_0} + cc. \end{aligned} \quad (5.88)$$

Par identification, $K_{1i} = \frac{T_{si} Q}{i(i+2\sqrt{\delta})}$, $K_{2i} = \frac{T_{si} \bar{Q}}{i(i-2\sqrt{\delta})}$. Soit,

$$q_1(T_0, T_1, T_2, \dots) = \sum_i \frac{T_{si} Q}{i(i+2\sqrt{\delta})} e^{j(i+\sqrt{\delta})T_0} + \sum_{i \neq 2n} \frac{T_{si} \bar{Q}}{i(i-2\sqrt{\delta})} e^{j(i-\sqrt{\delta})T_0} + cc. \quad (5.89)$$

À l'ordre ϵ^2 , il vient :

$$D_0^2 q_2 + \delta q_2 = -2D_0 D_2 q_0 - D_1^2 q_0 - 2D_0 D_1 q_1 - \left(\sum_i T_{si} e^{j iT_0} + \overline{T_{si}} e^{-j iT_0} \right) q_1. \quad (5.90)$$

En remplaçant q_0 et q_1 par leurs expressions données par les développements aux ordres ϵ^0 et ϵ :

$$-2D_0 D_2 q_0 = -2j\sqrt{\delta} D_2 Q e^{j\sqrt{\delta}T_0} + 2j\sqrt{\delta} D_2 \bar{Q} e^{-j\sqrt{\delta}T_0}, \quad (5.91)$$

$$-D_1^2 q_0 = -D_1^2 Q e^{j\sqrt{\delta}T_0} + cc. \quad (5.92)$$

Le terme $-2D_0D_1q_1$ n'est pas résonant.

$$\begin{aligned}
 - \left(\sum_i T_{si} e^{jiT_0} + \overline{T_{si}} e^{-jiT_0} \right) q_1 = & - \sum_m \sum_l \frac{T_{sm} T_{sl} Q}{l(l+2\sqrt{\delta})} e^{j(m+l+\sqrt{\delta})T_0} - \sum_m \sum_{\substack{l \neq 2n \\ l \neq m=n}} \frac{T_{sm} T_{sl} \overline{Q}}{l(l-2\sqrt{\delta})} e^{j(m+l-\sqrt{\delta})T_0} \\
 - \frac{T_{sn}^2 \overline{Q}}{n(n-2\sqrt{\delta})} e^{j2\epsilon\sigma T_0} e^{j\sqrt{\delta}T_0} - & \sum_m \sum_{m-l \neq 2n} \frac{T_{sm} \overline{T_{sl}} \overline{Q}}{l(l+2\sqrt{\delta})} e^{j(m-l-\sqrt{\delta})T_0} - \sum_m \sum_{m-l=2n} \frac{T_{sm} \overline{T_{sl}} \overline{Q}}{l(l+2\sqrt{\delta})} e^{j2\epsilon\sigma T_0} e^{j\sqrt{\delta}T_0} \\
 - \sum_m \sum_{\substack{l \neq 2n \\ l \neq m}} \frac{T_{sm} \overline{T_{sl}} Q}{l(l-2\sqrt{\delta})} e^{j(m-l+\sqrt{\delta})T_0} - & \sum_{m \neq 2n} \frac{T_{sm} \overline{T_{sm}} Q}{m(m-2\sqrt{\delta})} e^{j\sqrt{\delta}T_0} - \sum_m \sum_{l \neq m} \frac{\overline{T_{sm}} T_{sl} Q}{l(l+2\sqrt{\delta})} e^{j(-m+l+\sqrt{\delta})T_0} \\
 - \sum_m \frac{\overline{T_{sm}} T_{sm} Q}{m(m+2\sqrt{\delta})} e^{j\sqrt{\delta}T_0} - & \sum_m \sum_{\substack{l \neq 2n \\ -m+l \neq 2n}} \frac{\overline{T_{sm}} T_{sl} \overline{Q}}{l(l-2\sqrt{\delta})} e^{j(-m+l-\sqrt{\delta})T_0} - \sum_m \sum_{\substack{l \neq 2n \\ -m+l=2n}} \frac{\overline{T_{sm}} T_{sl} \overline{Q}}{l(l-2\sqrt{\delta})} e^{j2\epsilon\sigma T_0} e^{j\sqrt{\delta}T_0} \\
 - \sum_m \sum_l \frac{\overline{T_{sm}} \overline{T_{sl}} \overline{Q}}{l(l+2\sqrt{\delta})} e^{j(-m-l-\sqrt{\delta})T_0} - & \sum_m \sum_{l \neq 2n} \frac{\overline{T_{sm}} \overline{T_{sl}} Q}{l(l-2\sqrt{\delta})} e^{j(-m-l+\sqrt{\delta})T_0}. \quad (5.93)
 \end{aligned}$$

Les termes séculaires de l'équation en ϵ^2 sont annulés, soit :

$$\begin{aligned}
 -2j\sqrt{\delta}D_2Q - D_1^2Q - \frac{T_{sn}^2 \overline{Q}}{n(n-2\sqrt{\delta})} e^{j2\epsilon\sigma T_0} - & \sum_m \sum_{m-l=2n} \frac{T_{sm} \overline{T_{sl}} \overline{Q}}{l(l+2\sqrt{\delta})} e^{j2\epsilon\sigma T_0} \\
 - \sum_{m \neq 2n} \frac{T_{sm} \overline{T_{sm}} Q}{m(m-2\sqrt{\delta})} - \sum_m \frac{T_{sm} \overline{T_{sm}} Q}{m(m+2\sqrt{\delta})} - & \sum_m \sum_{\substack{l \neq 2n \\ -m+l=2n}} \frac{\overline{T_{sm}} T_{sl} \overline{Q}}{l(l-2\sqrt{\delta})} e^{j2\epsilon\sigma T_0} = 0. \quad (5.94)
 \end{aligned}$$

Les expressions de D_1Q et D_1^2Q sont données à partir de la condition d'annulation des termes séculaires dans l'équation à l'ordre ϵ :

$$D_1Q = \frac{j}{2\sqrt{\delta}} \left(T_{s2n} \overline{Q} e^{j\sigma T_1} + T_d \right) e^{j\sigma T_1}, \quad (5.95)$$

$$D_1^2Q = \left(\frac{jT_{s2n}}{2\sqrt{\delta}} D_1\overline{Q} - \frac{T_{s2n} \overline{Q} \sigma}{\sqrt{\delta}} \right) e^{j2\sigma T_1} - \frac{T_d \sigma}{2\sqrt{\delta}} e^{j\sigma T_1}, \quad (5.96)$$

$$D_1\overline{Q} = \frac{-j}{2\sqrt{\delta}} \left(\overline{T_{s2n}} Q e^{-j\sigma T_1} + \overline{T_d} \right) e^{-j\sigma T_1}. \quad (5.97)$$

En remplaçant,

$$D_1^2Q = \frac{\overline{T_{s2n}} T_{s2n} Q}{4\delta} + \left(\frac{T_{s2n} \overline{T_d}}{4\delta} - \frac{\sigma T_d}{2\sqrt{\delta}} \right) e^{j\sigma T_1} - \frac{T_{s2n} \overline{Q} \sigma}{\sqrt{\delta}} e^{j2\sigma T_1}. \quad (5.98)$$

En injectant (5.98) dans la condition d'annulation des termes séculaires (5.94),

$$\begin{aligned}
 -2j\sqrt{\delta}D_2Q + \frac{T_{s2n} \sigma \overline{Q}}{\sqrt{\delta}} e^{j2\sigma T_1} - & \left(\sum_{m \neq 2n} \frac{T_{sm} \overline{T_{sm}}}{m(m-2\sqrt{\delta})} + \sum_m \frac{T_{sm} \overline{T_{sm}}}{m(m+2\sqrt{\delta})} + \frac{T_{s2n} \overline{T_{s2n}}}{4\delta} \right) Q \\
 - \left(\frac{T_{sn}^2}{n(n-2\sqrt{\delta})} + \sum_m \sum_{m-l=2n} \frac{T_{sm} \overline{T_{sl}}}{l(l+2\sqrt{\delta})} + \sum_m \sum_{\substack{l \neq 2n \\ -m+l=2n}} \frac{\overline{T_{sm}} T_{sl}}{l(l-2\sqrt{\delta})} \right) & \overline{Q} e^{j2\epsilon\sigma T_0} \\
 = \left(\frac{T_{s2n} \overline{T_d}}{4\delta} - \frac{\sigma T_d}{2\sqrt{\delta}} \right) e^{j\sigma T_1}. \quad (5.99)
 \end{aligned}$$

La quantité complexe T_{s2n} est exprimée en fonction de sa phase et de son module,

$$T_{s2n} = |T_{s2n}| e^{j\phi_1}. \quad (5.100)$$

Le terme réel issu de l'excitation paramétrique est noté

$$\Gamma_1 = \sum_{m \neq 2n} \frac{T_{sm} \overline{T_{sm}}}{m(m-2\sqrt{\delta})} + \sum_m \frac{T_{sm} \overline{T_{sm}}}{m(m+2\sqrt{\delta})} + \frac{T_{s2n} \overline{T_{s2n}}}{4\delta}, \quad \Gamma_1 \in \mathbf{R}. \quad (5.101)$$

Le terme complexe issu de l'excitation paramétrique est noté :

$$\Gamma_{2R} + j\Gamma_{2I} = |\Gamma_2| e^{j\phi_2} = \frac{T_{sn}^2}{n(n-2\sqrt{\delta})} + \sum_m \sum_{\substack{l \\ m-l=2n}} \frac{T_{sm} \overline{T_{sl}}}{l(l+2\sqrt{\delta})} + \sum_m \sum_{\substack{l \\ l \neq 2n \\ -m+l=2n}} \frac{\overline{T_{sm}} T_{sl}}{l(l-2\sqrt{\delta})}. \quad (5.102)$$

La stabilité de la réponse est donnée par la solution à l'équation homogène (5.99),

$$-2j\sqrt{\delta} D_2 Q + \frac{|T_{s2n}| \sigma \overline{Q}}{\sqrt{\delta}} e^{j(2\sigma T_1 + \phi_1)} - \Gamma_1 Q - |\Gamma_2| \overline{Q} e^{j(2\epsilon\sigma T_0 + \phi_2)} = 0. \quad (5.103)$$

Les deux conditions d'annulation des termes séculaires aux ordres ϵ et ϵ^2 données par les équations (5.84) et (5.103) résultent du développement aux différents ordres ϵ^n de

$$-2j\sqrt{\delta} \frac{dQ}{dT} + \epsilon \left(-1 + \frac{\epsilon\sigma}{\sqrt{\delta}} \right) \overline{Q} |T_{s2n}| e^{j(2\sigma\epsilon T + \phi_1)} - \epsilon^2 \left(\Gamma_1 Q + |\Gamma_2| \overline{Q} e^{j(2\epsilon\sigma T + \phi_2)} \right) = 0. \quad (5.104)$$

Afin de supprimer le temps T , la solution est recherchée sous la forme $Q = (Q_R + jQ_I) e^{j(\epsilon\sigma T + \frac{\phi_1}{2})}$, soit en injectant dans (5.104),

$$-2j\sqrt{\delta} \left(\left[\frac{dQ_R}{dT} + j \frac{dQ_I}{dT} \right] e^{j(\epsilon\sigma T + \frac{\phi_1}{2})} + (Q_R + jQ_I) j\epsilon\sigma e^{j(\epsilon\sigma T + \frac{\phi_1}{2})} \right) + \epsilon \left(-1 + \frac{\epsilon\sigma}{\sqrt{\delta}} \right) |T_{s2n}| (Q_R - jQ_I) e^{j(\epsilon\sigma T + \frac{\phi_1}{2})} - \epsilon^2 \left(\Gamma_1 (Q_R + jQ_I) e^{j(\epsilon\sigma T + \frac{\phi_1}{2})} + (\Gamma_{2R} + j\Gamma_{2I}) (Q_R - jQ_I) e^{j(\epsilon\sigma T + \frac{\phi_1}{2})} \right) = 0. \quad (5.105)$$

Les parties réelles et imaginaires sont séparées,

$$\begin{cases} 2\sqrt{\delta} \frac{dQ_I}{dT} + 2\sqrt{\delta} Q_R \epsilon\sigma + \epsilon \left(-1 + \frac{\epsilon\sigma}{\sqrt{\delta}} \right) |T_{s2n}| Q_R - \epsilon^2 (\Gamma_1 Q_R + \Gamma_{2R} Q_R + \Gamma_{2I} Q_I) = 0, \\ 2\sqrt{\delta} \frac{dQ_R}{dT} - 2\sqrt{\delta} Q_I \epsilon\sigma + \epsilon \left(-1 + \frac{\epsilon\sigma}{\sqrt{\delta}} \right) |T_{s2n}| Q_I + \epsilon^2 (\Gamma_1 Q_I + \Gamma_{2R} Q_I - \Gamma_{2I} Q_R) = 0. \end{cases} \quad (5.106)$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{\delta} \frac{dQ_I}{dT} + \left[\epsilon [2\sqrt{\delta}\sigma + (-1 + \frac{\epsilon\sigma}{\sqrt{\delta}}) |T_{s2n}|] - \epsilon^2 (\Gamma_1 + \Gamma_{2R}) \right] Q_R - \epsilon^2 \Gamma_{2I} Q_I = 0, \\ 2\sqrt{\delta} \frac{dQ_R}{dT} + \left[\epsilon [-2\sqrt{\delta}\sigma + (-1 + \frac{\epsilon\sigma}{\sqrt{\delta}}) |T_{s2n}|] + \epsilon^2 (\Gamma_1 + \Gamma_{2R}) \right] Q_I - \epsilon^2 \Gamma_{2I} Q_R = 0. \end{cases} \quad (5.107)$$

Le système (5.107) admet des solutions sous la forme $(Q_R, Q_I) = (q_R, q_I) e^{\gamma T}$, soit en remplaçant :

$$\begin{cases} (2\sqrt{\delta}\gamma - \epsilon^2 \Gamma_{2I}) q_I + \left[\epsilon (-|T_{s2n}| + 2\sqrt{\delta}\sigma) + \epsilon^2 \left(\frac{\sigma |T_{s2n}|}{\sqrt{\delta}} - \Gamma_1 - \Gamma_{2R} \right) \right] q_R = 0, \\ (2\sqrt{\delta}\gamma - \epsilon^2 \Gamma_{2I}) q_R + \left[\epsilon (-|T_{s2n}| - 2\sqrt{\delta}\sigma) + \epsilon^2 \left(\frac{\sigma |T_{s2n}|}{\sqrt{\delta}} + \Gamma_1 + \Gamma_{2R} \right) \right] q_I = 0. \end{cases} \quad (5.108)$$

(5.108) s'écrit sous la forme matricielle suivante,

$$\begin{bmatrix} \epsilon (-|T_{s2n}| + 2\sqrt{\delta}\sigma) + \epsilon^2 \left(\frac{\sigma |T_{s2n}|}{\sqrt{\delta}} - \Gamma_1 - \Gamma_{2R} \right) & 2\sqrt{\delta}\gamma - \epsilon^2 \Gamma_{2I} \\ 2\sqrt{\delta}\gamma - \epsilon^2 \Gamma_{2I} & \epsilon (-|T_{s2n}| - 2\sqrt{\delta}\sigma) + \epsilon^2 \left(\frac{\sigma |T_{s2n}|}{\sqrt{\delta}} + \Gamma_1 + \Gamma_{2R} \right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_R \\ q_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.109)$$

L'existence de solutions non-triviales est assurée par l'annulation du déterminant de la matrice du système,

$$(2\sqrt{\delta}\gamma - \epsilon^2 \Gamma_{2I})^2 = \epsilon^2 \left[-|T_{s2n}| + 2\sqrt{\delta}\sigma + \frac{\epsilon\sigma |T_{s2n}|}{\sqrt{\delta}} - \epsilon(\Gamma_1 + \Gamma_{2R}) \right] \left[-|T_{s2n}| - 2\sqrt{\delta}\sigma + \frac{\epsilon\sigma |T_{s2n}|}{\sqrt{\delta}} + \epsilon(\Gamma_1 + \Gamma_{2R}) \right]. \quad (5.110)$$

Un polynôme de degré deux est obtenu en γ tel que les solutions s'écrivent sous la forme,

$$\gamma_{1,2} = \frac{4\sqrt{\delta}\epsilon^2\Gamma_{2I} \pm \sqrt{16\delta C}}{8\delta}, \quad (5.111)$$

où $C = \epsilon^2 \left[-|T_{s2n}| + 2\sqrt{\delta}\sigma + \frac{\epsilon\sigma|T_{s2n}|}{\sqrt{\delta}} - \epsilon(\Gamma_1 + \Gamma_{2R}) \right] \left[-|T_{s2n}| - 2\sqrt{\delta}\sigma + \frac{\epsilon\sigma|T_{s2n}|}{\sqrt{\delta}} + \epsilon(\Gamma_1 + \Gamma_{2R}) \right]$.

Le mouvement est à la frontière de la zone d'instabilité lorsque $\gamma = 0$ (théorie de Floquet), soit :

$$\epsilon^2\Gamma_{2I} \pm \sqrt{C} = 0, \quad (5.112)$$

$$\epsilon^4\Gamma_{2I}^2 = C. \quad (5.113)$$

Après développements, l'équation à résoudre s'écrit :

$$\epsilon^2|T_{s2n}|^2 - 4\delta\sigma^2\epsilon^2 - 4\sqrt{\delta}\sigma\epsilon^3(\Gamma_1 + \Gamma_{2R}) + \frac{\epsilon^4\sigma^2}{\delta} - \epsilon^4(\Gamma_1 + \Gamma_{2R})^2 + \epsilon^4\Gamma_{2I}^2 = 0. \quad (5.114)$$

Seules les contributions à l'ordre ϵ^2 du paramètre de detuning σ sont considérées, l'équation (5.114) s'écrit alors :

$$\epsilon^2|T_{s2n}|^2 - 4\delta\sigma^2\epsilon^2 - \epsilon^4(\Gamma_1 + \Gamma_{2R})^2 + \epsilon^4\Gamma_{2I}^2 = 0. \quad (5.115)$$

Il vient :

$$\sigma^2 = \frac{|T_{s2n}|^2}{4\delta} + \frac{\epsilon^2}{4\delta} \left[(\Gamma_1 + \Gamma_{2R})^2 + \Gamma_{2I}^2 \right]. \quad (5.116)$$

Un développement de σ est recherché sous la forme $\sigma = k_1 + \epsilon k_2$. Soit :

$$\sigma^2 = k_1^2 + 2\epsilon k_1 k_2 + \epsilon^2 k_2^2. \quad (5.117)$$

Par identification avec (5.116) :

$$k_1 = \pm \frac{|T_{s2n}|}{2\sqrt{\delta}}, \quad (5.118)$$

$$k_2 = \pm \frac{\sqrt{(\Gamma_1 + \Gamma_{2R})^2 + \Gamma_{2I}^2}}{2\sqrt{\delta}}. \quad (5.119)$$

Ainsi, les zones d'instabilité de la réponse dynamique de la ligne sont données par :

$$\sigma > -\frac{|T_{s2n}|}{2\sqrt{\delta}} - \epsilon \frac{\sqrt{(\Gamma_1 + \Gamma_{2R})^2 + \Gamma_{2I}^2}}{2\sqrt{\delta}}, \quad (5.120)$$

$$\sigma < \frac{|T_{s2n}|}{2\sqrt{\delta}} - \epsilon \frac{\sqrt{(\Gamma_1 + \Gamma_{2R})^2 + \Gamma_{2I}^2}}{2\sqrt{\delta}}. \quad (5.121)$$

Il est rappelé que $n = \sqrt{\delta} + \epsilon\sigma$, soit $n^2 = \delta + 2\sqrt{\delta}\epsilon\sigma + \epsilon\sigma^2$. Les frontières séparant les zones de stabilité aux zones d'instabilité sont exprimées en fonction de n et δ ,

$$n^2 = \delta + \epsilon \left(2\sqrt{\delta} \left[-\frac{|T_{s2n}|}{2\sqrt{\delta}} - \epsilon \frac{\sqrt{(\Gamma_1 + \Gamma_{2R})^2 + \Gamma_{2I}^2}}{2\sqrt{\delta}} \right] \right), \quad (5.122)$$

$$n^2 = \delta + \epsilon \left(2\sqrt{\delta} \left[\frac{|T_{s2n}|}{2\sqrt{\delta}} - \epsilon \frac{\sqrt{(\Gamma_1 + \Gamma_{2R})^2 + \Gamma_{2I}^2}}{2\sqrt{\delta}} \right] \right). \quad (5.123)$$

Après simplification et en remplaçant δ par son expression en fonction des pulsations du mode ω_p et du fondamental de l'excitation paramétrique Ω ,

$$n^2 = \frac{\omega_p^2}{\Omega^2} - \epsilon|T_{s2n}| - \epsilon^2 \sqrt{(\Gamma_1 + \Gamma_{2R})^2 + \Gamma_{2I}^2}, \quad (5.124)$$

$$n^2 = \frac{\omega_p^2}{\Omega^2} + \epsilon |T_{s2n}| - \epsilon^2 \sqrt{(\Gamma_1 + \Gamma_{2R})^2 + \Gamma_{2I}^2}. \quad (5.125)$$

Jusqu'ici, l'amortissement n'a pas été pris en compte dans l'étude de stabilité. Un système physique possède toujours de l'amortissement, il est donc raisonnable d'étudier l'effet d'un amortissement cj sur les zones de stabilité de l'équation de Mathieu-Hill (5.70) dont les effets sont ramenés à l'ordre ϵ ,

$$\frac{d^2 q(T)}{dT^2} + \epsilon c \frac{dq(T)}{dT} + \left(\delta + \epsilon T_s^*(T) \right) q(T) = \epsilon f^*(T). \quad (5.126)$$

Les termes résonants à l'ordre ϵ s'écrivent désormais :

$$-2D_1 Q j \sqrt{\delta} - c Q j \sqrt{\delta} - T_{s2n} \bar{Q} e^{j2\sigma T_1} + T_d e^{j\sigma T_1} = 0. \quad (5.127)$$

De la même façon, les termes séculaires à l'ordre ϵ^2 s'écrivent :

$$\begin{aligned} & -2j\sqrt{\delta} D_2 Q - D_1^2 Q - c D_1 Q - \frac{T_{s2n} \bar{Q}}{n(n-2\sqrt{\delta})} e^{j2\epsilon\sigma T_0} - \sum_m \sum_{\substack{l \\ m-l=2n}} \frac{T_{sm} \bar{T}_{sl} \bar{Q}}{l(l+2\sqrt{\delta})} e^{j2\epsilon\sigma T_0} \\ & - \sum_{m \neq 2n} \frac{T_{sm} \bar{T}_{sm} Q}{m(m-2\sqrt{\delta})} - \sum_m \frac{T_{sm} \bar{T}_{sm} Q}{m(m+2\sqrt{\delta})} - \sum_m \sum_{\substack{l \neq 2n \\ -m+l=2n}} \frac{\bar{T}_{sm} T_{sl} \bar{Q}}{l(l-2\sqrt{\delta})} e^{j2\epsilon\sigma T_0} = 0. \end{aligned} \quad (5.128)$$

Les expressions de $D_1 Q$ et $D_1^2 Q$ sont données à partir de la condition d'annulation des termes séculaires dans l'équation à l'ordre ϵ :

$$D_1 Q = -\frac{cQ}{2} + \frac{j}{2\sqrt{\delta}} \left(T_{s2n} \bar{Q} e^{j\sigma T_1} + T_d \right) e^{j\sigma T_1}, \quad (5.129)$$

$$D_1 \bar{Q} = -\frac{c\bar{Q}}{2} - \frac{j}{2\sqrt{\delta}} \left(\bar{T}_{s2n} Q e^{-j\sigma T_1} + \bar{T}_d \right) e^{-j\sigma T_1}, \quad (5.130)$$

$$D_1^2 Q = \frac{c^2 Q}{4} - \left(\frac{cj}{2\sqrt{\delta}} + \frac{\sigma}{\sqrt{\delta}} \right) T_{s2n} \bar{Q} e^{j2\sigma T_1} - \left(\frac{cj}{4\sqrt{\delta}} + \frac{\sigma}{2\sqrt{\delta}} \right) T_d e^{j\sigma T_1} + \frac{T_{s2n} \bar{T}_d}{4\delta} e^{j\sigma T_1} + \frac{T_{s2n} \bar{T}_{s2n} Q}{4\delta}. \quad (5.131)$$

En injectant l'expression de $D_1^2 Q$ dans la condition d'annulation des termes séculaires (5.128), il vient :

$$\begin{aligned} & -2j\sqrt{\delta} D_2 Q - \frac{c^2 Q}{2} + \left(\frac{cj}{2\sqrt{\delta}} + \frac{\sigma}{\sqrt{\delta}} \right) |T_{s2n}| e^{j\phi_1} \bar{Q} e^{j2\sigma T_1} + \left(\frac{cj}{4\sqrt{\delta}} + \frac{\sigma}{2\sqrt{\delta}} \right) T_d e^{j\sigma T_1} \\ & - \frac{T_{s2n} \bar{T}_d}{4\delta} e^{j\sigma T_1} - \frac{T_{s2n} \bar{T}_{s2n} Q}{4\delta} + \frac{c^2 Q}{2} - \frac{cj}{2\sqrt{\delta}} \left(T_{s2n} \bar{Q} e^{j2\sigma T_1} + T_d e^{j\sigma T_1} \right) - |\Gamma_2| e^{j\phi_2} \bar{Q} e^{j2\sigma T_1} - \Gamma_1 Q = 0. \end{aligned} \quad (5.132)$$

Les 2 conditions d'annulation des termes séculaires aux ordres ϵ et ϵ^2 données par les équations (5.127) et (5.128) résultent du développement aux différents ordres ϵ^n de :

$$-2j\sqrt{\delta} \frac{dQ}{dT} + \epsilon \left(-1 + \frac{\epsilon\sigma}{\sqrt{\delta}} \right) \bar{Q} |T_{s2n}| e^{j(2\sigma\epsilon T + \phi_1)} - \epsilon c j \sqrt{\delta} Q - \epsilon^2 \left[\left(\Gamma_1 - \frac{c^2}{4} \right) Q + |\Gamma_2| \bar{Q} e^{j(2\epsilon\sigma T + \phi_2)} \right] = 0. \quad (5.133)$$

En suivant la même démarche que précédemment, la condition d'annulation de l'exposant γ conduit à l'équation :

$$\epsilon^2 |T_{s2n}|^2 - 4\delta\sigma^2\epsilon^2 - \epsilon^4 \left(\Gamma_1 - \frac{c^2}{4} + \Gamma_{2R} \right)^2 + \epsilon^4 \Gamma_{2I}^2 - \epsilon^2 c^2 \delta = 0. \quad (5.134)$$

Il vient :

$$\sigma^2 = \frac{|T_{s2n}|^2 - c^2 \delta}{4\delta} + \frac{\epsilon^2}{4\delta} \left[\left(\Gamma_1 - \frac{c^2}{4} + \Gamma_{2R} \right)^2 + \Gamma_{2I}^2 \right]. \quad (5.135)$$

Ainsi, les zones d'instabilité de la réponse dynamique de la ligne sont données par :

$$\sigma > -\frac{\sqrt{|T_{s2n}|^2 - c^2 \delta}}{2\sqrt{\delta}} - \epsilon \frac{\sqrt{\left(\Gamma_1 - \frac{c^2}{4} + \Gamma_{2R} \right)^2 + \Gamma_{2I}^2}}{2\sqrt{\delta}}, \quad (5.136)$$

$$\sigma < \frac{\sqrt{|T_{s2n}|^2 - c^2\delta}}{2\sqrt{\delta}} - \epsilon \frac{\sqrt{\left(\Gamma_1 - \frac{c^2}{4} + \Gamma_{2R}\right)^2 + \Gamma_{2I}^2}}{2\sqrt{\delta}}. \quad (5.137)$$

Les frontières séparant les zones de stabilité aux zones d'instabilité sont exprimées en fonction de n et $\delta = \frac{\omega_p}{\Omega}$,

$$n^2 = \frac{\omega_p^2}{\Omega^2} - \epsilon \sqrt{|T_{s2n}|^2 - c^2n^2} - \epsilon^2 \sqrt{\left(\Gamma_1 - \frac{c^2}{4} + \Gamma_{2R}\right)^2 + \Gamma_{2I}^2}, \quad (5.138)$$

$$n^2 = \frac{\omega_p^2}{\Omega^2} + \epsilon \sqrt{|T_{s2n}|^2 - c^2n^2} - \epsilon^2 \sqrt{\left(\Gamma_1 - \frac{c^2}{4} + \Gamma_{2R}\right)^2 + \Gamma_{2I}^2}. \quad (5.139)$$

En notant $c_0 = \epsilon c$,

$$n^2 = \frac{\omega_p^2}{\Omega^2} - \sqrt{\epsilon^2 |T_{s2n}|^2 - c_0^2 n^2} - \epsilon^2 \sqrt{\left(\Gamma_1 - \frac{c_0^2}{4\epsilon^2} + \Gamma_{2R}\right)^2 + \Gamma_{2I}^2}, \quad (5.140)$$

$$n^2 = \frac{\omega_p^2}{\Omega^2} + \sqrt{\epsilon^2 |T_{s2n}|^2 - c_0^2 n^2} - \epsilon^2 \sqrt{\left(\Gamma_1 - \frac{c_0^2}{4\epsilon^2} + \Gamma_{2R}\right)^2 + \Gamma_{2I}^2}. \quad (5.141)$$

Il est remarquable que les zones d'instabilité ne dépendent pas du terme de forçage du second membre f^* , seule l'excitation paramétrique par les variations de tension statique T_s^* sont susceptibles de déclencher des vibrations instables. Étant données les fréquences couramment en jeu sur les lignes de transport par câble et les retours d'expérience des situations de pompage qui se manifestent à une fréquence égale au double de la fréquence de franchissement des véhicules dans les portées, il est retenu $n = 2$ dans le cas général. Les zones d'instabilité sont donc tracées autour de $\delta = n^2 = 4$ en Fig. 5.32 pour deux niveaux d'excitation $|T_{s2n}|$ et trois valeurs d'amortissement c_0 .

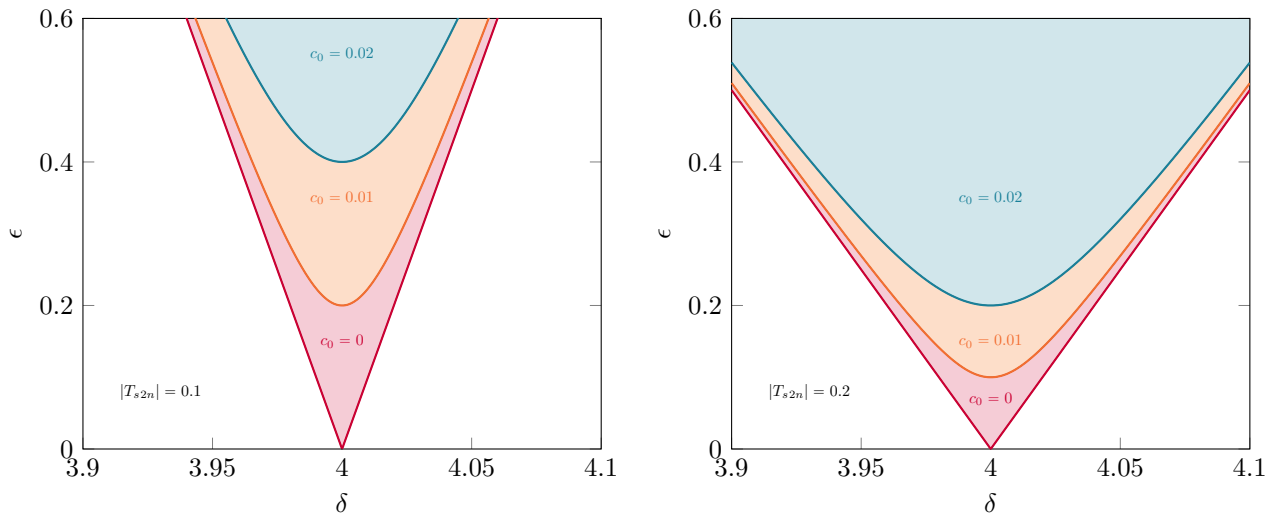


FIGURE 5.32: Les surfaces colorées délimitent les zones d'instabilité de la ligne (a) $|T_{s2n}| = 0.1$, (b) $|T_{s2n}| = 0.2$

D'après la Fig. 5.32, l'augmentation de l'amortissement a pour effet de décoller la zone d'instabilité de l'axe des δ et de rétrécir sa largeur. Le terme $|T_{s2n}|$ qui représente l'amplitude relative de l'harmonique $2n$ de l'excitation paramétrique par la tension statique T_s^* joue un rôle important dans la définition de la zone d'instabilité : une augmentation de $|T_{s2n}|$ élargit la zone d'instabilité d'après la Fig. 5.32.

Mise en vitesse de la ligne de câble

Le modèle réduit ne tient pas compte des termes inertiels introduits par la mise en vitesse de la ligne de câble. La question est ici de savoir quel est l'effet de la translation du câble sur le positionnement des points de fonctionnement du système dans le diagramme de stabilité de Mathieu (Fig. 5.32). L'objectif est distinct de celui poursuivi dans l'Annexe ?? avec l'étude modale complexe pour l'identification de mode complexe instable.

Le système d'équations (5.142) est modifié par les effets de la translation du câble à la vitesse instantanée V_0 avec une accélération A_{V_0}

$$\begin{cases} \mu\ddot{u}_d + \frac{T_s}{\|\underline{X}'\|} \kappa_s (v'_d + \kappa_s u_d) - EA(u''_d - \kappa_s v'_d) - 2\mu V_0 \dot{u}'_d + \mu V_0^2 u''_d + \mu A_{V_0} u'_d = 0 \\ \mu\ddot{v}_d - \frac{T_s}{\|\underline{X}'\|} (v'_d + \kappa_s u'_d) - \kappa_s EA(u'_d - \kappa_s v_d) - 2\mu V_0 \dot{v}'_d + \mu V_0^2 v''_d + \mu A_{V_0} v'_d = 0 \\ \mu\ddot{w}_d - \frac{T_s}{\|\underline{X}'\|} w''_d - 2\mu V_0 \dot{w}'_d + \mu V_0^2 w''_d + \mu A_{V_0} w'_d = 0 \end{cases} \quad (5.142)$$

Un terme provenant de la dérivée mixte en temps et en espace sous la forme $2\mu V_0 \frac{\partial^2 U_d}{\partial S \partial t}$ est introduit par le terme de mise en vitesse V_0 . La translation de la ligne du câble modifie également la valeur de la pulsation ω_p et d'amortissement c_0 , après projection des équations dynamiques sur un mode de pompage :

$$\delta \rightarrow \delta + \delta_{V_0}(V_0, A_{V_0}) = \frac{\omega_p^2}{\Omega^2} + \frac{1}{\Omega^2} \int_0^L \mu V_0^2 [\Phi''_u \Phi_u + \Phi''_v \Phi_v + \Phi''_w \Phi_w] + \mu A_{V_0} [\Phi'_u \Phi_u + \Phi'_v \Phi_v + \Phi'_w \Phi_w] dS, \quad (5.143)$$

$$c_0 \rightarrow c_0 - \frac{2\mu V_0}{\Omega^2} \int_0^L [\Phi'_u \Phi_u + \Phi'_v \Phi_v + \Phi'_w \Phi_w] dS. \quad (5.144)$$

Si le mode de pompage utilisé pour la projection est issu d'un modèle actualisé par les effets de V_0, A_{V_0} alors les paramètres A et F obtenus après projection affichent également une dépendance en V_0, A_{V_0} . Ainsi, la position du point de fonctionnement (δ, ϵ) de la ligne dans le diagramme de stabilité de la Fig. 5.32 de l'équation de Mathieu dépend de V_0 .

Une méthodologie permet de détecter l'éventuel effet déstabilisant du paramètre de vitesse V_0 sur la ligne de câble par résonance paramétrique (Fig. 5.33) :

- 1. Le point de fonctionnement $(\delta(V_0), \epsilon(V_0))$ est calculé par projection des équations (5.142) de la dynamique de la ligne sur un mode de pompage réel $\underline{\Phi}$.
- 2. La frontière de stabilité de l'équation de Mathieu est donnée par (5.140) et (5.141), en présence de coefficients périodiques dans (5.142) issus du défilement des véhicules susceptibles de conduire à un comportement dynamique instable de la ligne de câble.
- 3. La position du point $(\delta(V_0), \epsilon(V_0))$ par rapport à la frontière d'instabilité est déterminée dans le diagramme de la Fig. 5.32 et donne un critère sur la stabilité dynamique du système.
- 4. En faisant varier la vitesse $V_0 \in [V_{min}, V_{max}]$, une courbe $\epsilon = f(\delta, V_0)$ est obtenue dans le diagramme de la Fig. 5.32. L'intersection avec les frontières de stabilité permet de déterminer un ensemble de valeurs critiques $V_{0,lim}$ associées à l'entrée dans un intervalle de vitesse conduisant à un comportement instable de la ligne. Les valeurs de vitesses critiques sont données par l'équation transcendante suivante :

$$\begin{aligned} (\omega_p + f_1 \mu V_{0,lim}^2)^4 - \Omega^4 n^2 (n^2 \pm 2\sqrt{A^2 |T_{s2n}|^2 - (\Omega^2 c_0 - 2I_1 \mu V_{0,lim})^2 n^2}) \\ + (A^2 |T_{s2n}|^2 - (\Omega^2 c_0 - 2I_1 \mu V_{0,lim})^2 n^2) = 0 \end{aligned} \quad (5.145)$$

$$\text{avec } f_1 = \int_0^L \Phi''_u \Phi_u + \Phi''_v \Phi_v + \Phi''_w \Phi_w dS, \quad I_1 = \int_0^L \Phi'_u \Phi_u + \Phi'_v \Phi_v + \Phi'_w \Phi_w dS$$

Une deuxième grille de lecture de l'effet déstabilisant de la mise en vitesse de la boucle de câble est donnée par l'étude du signe du coefficient introduit par le terme $2\mu V_0 \frac{\partial^2 U_d}{\partial S \partial t}$ après projection du mouvement dynamique sur un mode $\underline{\Phi} = \Phi_u \underline{t} + \Phi_v \underline{n} + \Phi_w \underline{e}_z$,

$$\mu V_0 \int_0^L 2(\Phi_u \Phi'_u + \Phi_v \Phi'_v + \Phi_w \Phi'_w) dS \dot{q} = c_{V_0} \dot{q}. \quad (5.146)$$

Pour une intégration sur la boucle de câble entière, la condition de continuité en $S = 0$ et $S = L$ assure la fermeture géométrique du modèle :

$$c_{V_0} = \int_0^L 2(\Phi_u \Phi'_u + \Phi_v \Phi'_v + \Phi_w \Phi'_w) dS = [\Phi_u^2 + \Phi_v^2 + \Phi_w^2]_0^L = 0. \quad (5.147)$$

En revanche dans le cas général, pour une intégration locale sur une ou plusieurs portées de la ligne située entre

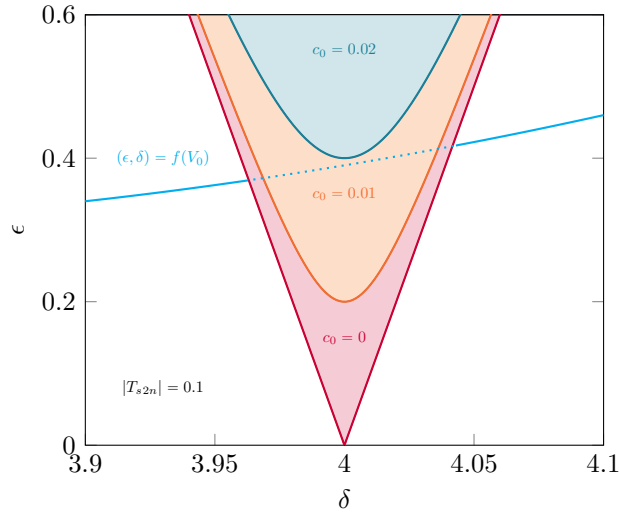


FIGURE 5.33: Méthodologie pour déterminer l'influence de la vitesse V_0 sur la stabilité du système : la partie de courbe $(\epsilon, \delta) = f(V_0)$ en pointillés donne l'intervalle de vitesse $[V_{olim1}, V_{olim2}]$ pour lesquelles les points de fonctionnement sont instables

$S = S_1$ et $S = S_2$,

$$c_{V_0} = [\Phi_u^2 + \Phi_v^2 + \Phi_w^2]_{S_1}^{S_2} = \Phi_u^2(S_2) - \Phi_u^2(S_1) \neq 0, \quad (5.148)$$

c_{V_0} dépend uniquement du mouvement longitudinal de la ligne de câble d'après les conditions de contact réalisées entre le câble et les appuis (mouvement vertical et hors-plan nuls). Si $c_{V_0} < 0$, le coefficient associé au terme en \dot{q} est négatif ce qui a l'effet d'un amortissement positif et conduit à une déstabilisation du système. La prise en compte de l'amortissement structurel c de la ligne est alors nécessaire pour conclure sur le caractère stable ou instable de la réponse du système qui dépend du signe de $c_0 = c_{V_0} + c$.

5.3.4 Équation de Mathieu-Hill généralisée avec non-linéarités géométriques, instabilités et cycle limite de vibration

En présence de non-linéarités, la réponse du système décrit par une équation de Mathieu-Hill dans ses zones d'instabilités est bornée. L'effet des non-linéarités, en négligeant les coefficients variables en temps associés aux termes non-linéaires dans les équations dynamiques, conduit à une équation similaire à (5.70), à laquelle on a ajouté les contributions quadratiques et cubiques, prenant la forme générale :

$$\frac{d^2 q(T)}{dT^2} + cq(T) + \left(\delta + \epsilon T_s^*(T) \right) q(T) + dq(T)^2 + eq(T)^3 = \epsilon f^*(T), \quad (5.149)$$

avec d et e les coefficients issus de la projection des non-linéarités sur le mode de pompage (trace des non-linéarités), c l'amortissement structurel et les effets inertiels dans le cas d'un câble mobile.

Pour un traitement par échelles multiples, le choix de la mise à l'échelle en ϵ des contributions non-linéaires a une influence sur les résultats obtenus.

Mise à l'échelle 1 : $d_0 = \epsilon d$, $e_0 = \epsilon e$

La première hypothèse formulée est une remise à l'échelle à l'ordre ϵ des efforts quadratiques et cubiques dans l'équation (5.149),

$$\frac{d^2 q(T)}{dT^2} + \left(\delta + \epsilon T_s^*(T) \right) q(T) = \epsilon \left(f^*(T) - dq(T)^2 - eq(T)^3 - cq(T) \right). \quad (5.150)$$

Les effets non-linéaires géométriques et l'amortissement sont regroupés dans le terme d'effort aditionnel

$$f_{NL}(T) = -dq(T)^2 - eq(T)^3 - c\dot{q}(T). \quad (5.151)$$

De la même manière que dans l'étude de stabilité précédente, il est supposé que le terme de forçage $f^*(T)$ active le mode de pulsation ω_p de façon privilégiée,

$$f^*(T) = T_d^{*c} \cos(nT) + T_d^{*s} \sin(nT), \quad n \in \mathbf{N}^*, \quad (5.152)$$

avec $\omega_p \approx n\Omega \Leftrightarrow \delta \approx n^2$. Le terme d'excitation paramétrique est conservé sous forme multi-harmonique,

$$T_s^*(T) = \sum_{i>0} T_{s_i}^{*c} \cos(iT) + T_{s_i}^{*s} \sin(iT). \quad (5.153)$$

Dans la suite, l'objectif est d'étudier l'effet combiné d'une excitation paramétrique et d'une non-linéarité par la méthode des échelles multiples qui consiste à développer la réponse dynamique $q(T)$ et le temps T en fonction du paramètre ϵ ,

$$T_i = \epsilon^i T, \quad i \in \mathbf{N}, \quad (5.154)$$

$$\frac{d}{dT} = D_0 + \epsilon D_1 + \epsilon^2 D_2 + \dots, \quad \text{avec } D_i = \frac{\partial}{\partial T_i}, \quad (5.155)$$

$$q(T) = q_0(T_0, T_1, T_2, \dots) + \epsilon q_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + \epsilon^2 q_2(T_0, T_1, T_2, \dots). \quad (5.156)$$

Les développements aux échelles multiples sont remplacés dans l'équation (5.149), les termes à chaque ordre sont alors identifiés.

À l'ordre ϵ^0 , il vient :

$$D_0^2 q_0 + \delta q_0 = 0. \quad (5.157)$$

Ainsi, une solution q_0 s'écrit :

$$q_0(T_0, T_1, T_2, \dots) = Q(T_1, T_2, \dots) e^{j\sqrt{\delta}T_0} + \bar{Q}(T_1, T_2, \dots) e^{-j\sqrt{\delta}T_0}, \quad (5.158)$$

où Q ne dépend pas de T_0 .

À l'ordre ϵ^1 , il vient :

$$D_0^2 q_1 + \delta q_1 = -2D_0 D_1 q_0 - \left(\sum_{i>0} T_{s_i}^{*c} \cos(iT) + T_{s_i}^{*s} \sin(iT) \right) q_0 + (T_d^{*c} \cos(nT) + T_d^{*s} \sin(nT)) + f_{NL}(q_0, \dot{q}_0). \quad (5.159)$$

Le terme de forçage extérieur est placé autour de la résonance, $n \approx \sqrt{\delta} \rightarrow n = \sqrt{\delta} + \epsilon\sigma$ avec σ un paramètre de *detuning* ou *detuning parameter*. Les termes résonants sont identifiés :

$$-2D_1 Q j\sqrt{\delta} - T_{s_{2n}}^* \bar{Q} e^{j2\sigma T_1} + T_d^* e^{j\sigma T_1} + f_{NL}(q_0, \dot{q}_0) e^{-j\sqrt{\delta}T_0} = 0. \quad (5.160)$$

Une dépendance avec le temps T_0 est associée au terme de force non-linéaire f_{NL} , tandis que les autres termes résonants sont associés au temps T_1 . La valeur moyenne temporelle $\langle f_{NL} \rangle$ est considérée sur une période pour éliminer la dépendance en T_0 ,

$$\langle f_{NL} \rangle = \frac{\sqrt{\delta}}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}} f_{NL}(q_0, \dot{q}_0) e^{-j\sqrt{\delta}T_0} dT_0. \quad (5.161)$$

L'amplitude Q est recherchée sous la forme $Q = \frac{1}{2}\alpha(T_1, \dots)e^{j\beta(T_1, \dots)}$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$. En notant \bullet' la dérivée par rapport au temps T_1 , la condition d'annulation du terme séculaire s'obtient sous la forme :

$$(\alpha\beta' - j\alpha')\sqrt{\delta} - \frac{1}{2}T_{s_{2n}}^* \alpha e^{j2(-\beta+\sigma T_1)} + T_d^* e^{j(-\beta+\sigma T_1)} + \frac{\sqrt{\delta}}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}} f_{NL}(q_0, \dot{q}_0) e^{-j(\sqrt{\delta}T_0+\beta)} dT_0 = 0. \quad (5.162)$$

Ainsi, $q_0 = Qe^{j\sqrt{\delta}T_0} + \bar{Q}e^{-j\sqrt{\delta}T_0} = \alpha \cos(\sqrt{\delta}T_0 + \beta)$. L'amplitude de la réponse du système s'écrit alors en première approximation

$$q = \alpha \cos(\sqrt{\delta}T_0 + \beta) + O(\epsilon), \quad (5.163)$$

avec α et β donnés par (5.162). En écrivant $T_{s2n}^* = |T_{s2n}|e^{j\phi_{2n}}$ et $T_d^* = |T_d|e^{j\psi}$. Les parties réelle et imaginaire de (5.162) sont identifiées et conduisent au système :

$$\begin{cases} \alpha\beta' &= \frac{|T_{s2n}|}{2\sqrt{\delta}}\alpha \cos(2(\sigma T_1 - \beta) + \phi_{2n}) - \frac{|T_d|}{\sqrt{\delta}}\cos((\sigma T_1 - \beta) + \psi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}} f_{NL}(q_0, \dot{q}_0) \cos(\sqrt{\delta}T_0 + \beta) dT_0, \\ \alpha' &= -\frac{|T_{s2n}|}{2\sqrt{\delta}}\alpha \sin(2(\sigma T_1 - \beta) + \phi_{2n}) + \frac{|T_d|}{\sqrt{\delta}}\sin((\sigma T_1 - \beta) + \psi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}} f_{NL}(q_0, \dot{q}_0) \sin(\sqrt{\delta}T_0 + \beta) dT_0. \end{cases} \quad (5.164)$$

Le changement de variable $\Phi = \sqrt{\delta}T_0 + \beta$ est opéré. Il vient $dT_0 = \frac{d\Phi}{\sqrt{\delta}}$. De plus, le système (5.164) est transformé en un système autonome en posant $\Psi = 2(\sigma T_1 - \beta)$. Il vient $\beta' = \sigma - \frac{\Psi'}{2}$. En exprimant q en fonction de Ψ et t en utilisant la relation $T = \Omega t$ et $n = \sqrt{\delta} + \epsilon\sigma$,

$$q = \alpha \cos\left(n\Omega t - \frac{\Psi}{2}\right) + O(\epsilon). \quad (5.165)$$

Finalement, le système (5.164) se ré-écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\alpha\Psi'}{2} &= \alpha\sigma - \frac{|T_{s2n}|}{2\sqrt{\delta}}\alpha \cos(\Psi + \phi_{2n}) + \frac{|T_d|}{\sqrt{\delta}}\cos\left(\frac{\Psi}{2} + \psi\right) + \frac{1}{2\pi\sqrt{\delta}} \int_0^{2\pi} f_{NL}(q_0, \dot{q}_0) \cos(\Phi) d\Phi, \\ \alpha' &= -\frac{|T_{s2n}|}{2\sqrt{\delta}}\alpha \sin(\Psi + \phi_{2n}) + \frac{|T_d|}{\sqrt{\delta}}\sin\left(\frac{\Psi}{2} + \psi\right) - \frac{1}{2\pi\sqrt{\delta}} \int_0^{2\pi} f_{NL}(q_0, \dot{q}_0) \sin(\Phi) d\Phi. \end{cases} \quad (5.166)$$

Pour un terme d'effort non-linéaire et d'amortissement qui s'écrit sous la forme particulière $f_{NL}(T) = -dq(T)^2 - \epsilon q(T)^3 - c\dot{q}(T)$, il vient

$$f_{NL}(q_0, \dot{q}_0) = -d\alpha^2 \cos^2(\Phi) - \epsilon\alpha^3 \cos^3(\Phi) + c\sqrt{\delta}\alpha \sin(\Phi). \quad (5.167)$$

En utilisant les expressions d'Euler pour linéariser les termes trigonométriques, il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f_{NL}(q_0, \dot{q}_0) \cos(\Phi) d\Phi &= \\ &-d\alpha^2 \int_0^{2\pi} \cos(\Phi)^3 d\Phi - \epsilon\alpha^3 \int_0^{2\pi} \cos(\Phi)^4 d\Phi + c\sqrt{\delta}\alpha \int_0^{2\pi} \sin(\Phi) \cos(\Phi) d\Phi = -\frac{3\epsilon\alpha^3\pi}{4}, \end{aligned} \quad (5.168)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f_{NL}(q_0, \dot{q}_0) \sin(\Phi) d\Phi &= \\ &-d\alpha^2 \int_0^{2\pi} \cos(\Phi)^2 \sin(\Phi) d\Phi - \epsilon\alpha^3 \int_0^{2\pi} \cos(\Phi)^3 \sin(\Phi) d\Phi + c\sqrt{\delta}\alpha \int_0^{2\pi} \sin(\Phi)^2 d\Phi = c\sqrt{\delta}\alpha\pi. \end{aligned} \quad (5.169)$$

Soit,

$$\begin{cases} \frac{\alpha\Psi'}{2} &= \alpha\sigma - \frac{|T_{s2n}|}{2\sqrt{\delta}}\alpha \cos(\Psi + \phi_{2n}) + \frac{|T_d|}{\sqrt{\delta}}\cos\left(\frac{\Psi}{2} + \psi\right) - \frac{3\epsilon\alpha^3}{8\sqrt{\delta}}, \\ \alpha' &= -\frac{|T_{s2n}|}{2\sqrt{\delta}}\alpha \sin(\Psi + \phi_{2n}) + \frac{|T_d|}{\sqrt{\delta}}\sin\left(\frac{\Psi}{2} + \psi\right) - \frac{c\alpha}{2}. \end{cases} \quad (5.170)$$

D'après la théorie de Floquet, les solutions périodiques sont recherchées telles que $\Phi' = \alpha' = 0$. On parle également de cycle limite qui vérifie

$$\begin{cases} 0 &= \alpha\sigma - \frac{|T_{s2n}|}{2\sqrt{\delta}}\alpha \cos(\Psi + \phi_{2n}) + \frac{|T_d|}{\sqrt{\delta}}\cos\left(\frac{\Psi}{2} + \psi\right) - \frac{3\epsilon\alpha^3}{8\sqrt{\delta}}, \\ 0 &= -\frac{|T_{s2n}|}{2\sqrt{\delta}}\alpha \sin(\Psi + \phi_{2n}) + \frac{|T_d|}{\sqrt{\delta}}\sin\left(\frac{\Psi}{2} + \psi\right) - \frac{c\alpha}{2}. \end{cases} \quad (5.171)$$

Il n'est pas directement possible d'éliminer la phase Ψ dans (5.171). Une résolution numérique est donc privilégiée à ce stade pour obtenir la relation $(\alpha, \beta) = f(\sigma)$ avec $n = \sqrt{\delta} + \epsilon\sigma$. Cette étude permet d'accéder à l'amplitude

de la réponse périodique de la ligne de câble autour de la résonance principale dans une situation de pompage et d'apporter une information supplémentaire à l'étude de stabilité précédente en tenant compte des non-linéarités géométriques activées à grandes amplitudes de la vibration du câble.

La question de la stabilité de la réponse est également posée en chaque point solution du système dynamique (5.170) qui peut s'écrire sous la forme générale dans \mathbf{R}^n ,

$$\left\{ \frac{\partial x}{\partial T_1} \right\} = \left\{ F(x, T_1, \sigma) \right\}. \quad (5.172)$$

Soit $\{x_0\} \in \mathbf{R}^n$ un point fixe solution du système (5.171) tel que :

$$\left\{ \frac{\partial x_0}{\partial T_1} \right\} = \{0\}, \quad (5.173)$$

$$\{y\} = \{x\} - \{x_0\}, \quad (5.174)$$

pour tout $\{x\} \in \mathbf{R}^n$. La linéarisation du système dynamique au premier ordre autour de $\{x_0\}$ s'écrit pour tout $\{x\} \in \mathbf{R}^n$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{x\} = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_{0,j}} \right] \{x - x_0\} + o(\{x - x_0\}) = [J(x_0)] \{y\} + o(\{y\}). \quad (5.175)$$

Les valeurs propres de la matrice jacobienne $[J]$ renseignent sur la stabilité du système dynamique au point fixe x_0 . D'après la définition de la stabilité au sens de Lyapunov, s'il existe au moins une valeur propre strictement supérieure à 0 alors le point d'équilibre dynamique est instable. Dans le cas d'étude présent, le point fixe $(\alpha_0, \beta_0) = f(\sigma)$ solution du système (5.171) s'écrit sous la forme $\{x_0\} = \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \Psi_0 \end{Bmatrix}$, $\{y\} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \Psi \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \Psi_0 \end{Bmatrix}$ et la matrice jacobienne sous la forme :

$$[J(x_0, \sigma)] = \begin{bmatrix} \sigma - \frac{|T_{s2n}|}{2(n-\epsilon\sigma)} \cos(\Psi_0 + \phi_{2n}) - \frac{9e\alpha_0^2}{8(n-\epsilon\sigma)} & \frac{|T_{s2n}|}{2(n-\epsilon\sigma)} \alpha_0 \sin(\Psi_0 + \phi_{2n}) - \frac{|T_d|}{2(n-\epsilon\sigma)} \sin\left(\frac{\Psi_0}{2} + \psi\right) \\ -\frac{|T_{s2n}|}{2(n-\epsilon\sigma)} \sin(\Psi_0 + \phi_{2n}) - \frac{c}{2} & -\frac{|T_{s2n}|}{2(n-\epsilon\sigma)} \alpha_0 \cos(\Psi_0 + \phi_{2n}) + \frac{|T_d|}{2(n-\epsilon\sigma)} \cos\left(\frac{\Psi_0}{2} + \psi\right) \end{bmatrix}. \quad (5.176)$$

L'étude des valeurs propres de J , évaluée en chaque solution (α_0, β_0) du système (5.170), renseigne sur la stabilité de la réponse q de la ligne de câble.

Un exemple d'application numérique, obtenu par une procédure de continuation, est donné en Fig. 5.34 avec le tracé de l'amplitude $\alpha = F_1(\sigma)$ et de la phase $\Psi = F_2(\sigma)$ en fonction du paramètre de detuning σ pour $n = 2$, $\epsilon = 0.2$, $T_{s2n}^* = |T_{s2n}| = 0.2$, $|T_d| = 0$, $e = 0.05$, $c = 0.04$, ce qui correspond au cas de la présence de l'excitation paramétrique seule. Les points d'équilibres stables sont affichés en bleu tandis que les points instables sont donnés en rouge. Un deuxième cas est calculé en Fig. 5.35 avec cette fois-ci un forçage extérieur non nul $T_d = |T_d| = 0.05$ agissant de façon simultanée à l'excitation paramétrique $T_{s2n}^* = |T_{s2n}| = 0.2$. Enfin, le cas d'un forçage extérieur seul $T_{s2n}^* = 0$, $|T_d| \neq 0$ est illustré en Fig. 5.36 pour deux niveaux de forçage : un premier niveau avec $|T_d| = 0.05$, qui n'active pas de façon visible les non-linéarités, et un deuxième niveau avec $|T_d| = 0.2$, pour lequel la réponse est similaire à un oscillateur de Duffing amorti avec un comportement raidissant.

Le choix de mise à l'échelle en ϵ supprime artificiellement les effets de la non-linéarité quadratique qui ne sont pas visibles puisque seul le coefficient e intervient dans (5.170), le coefficient d étant supprimé par l'intégration en temps.

Mise à l'échelle 2 : $d_0 = \epsilon d$, $e_0 = \epsilon^2 e$

Un deuxième traitement de l'équation de Mathieu-Hill généralisée (5.149) est proposée avec une autre remise à l'échelle des contributions quadratiques et cubiques. Le choix est fait ici de travailler directement sur l'équation (5.53) à laquelle sont ajoutés les termes issus de la projection $d_0 = \epsilon d$, $e_0 = \epsilon^2 e$, des efforts non-linéaires sur le

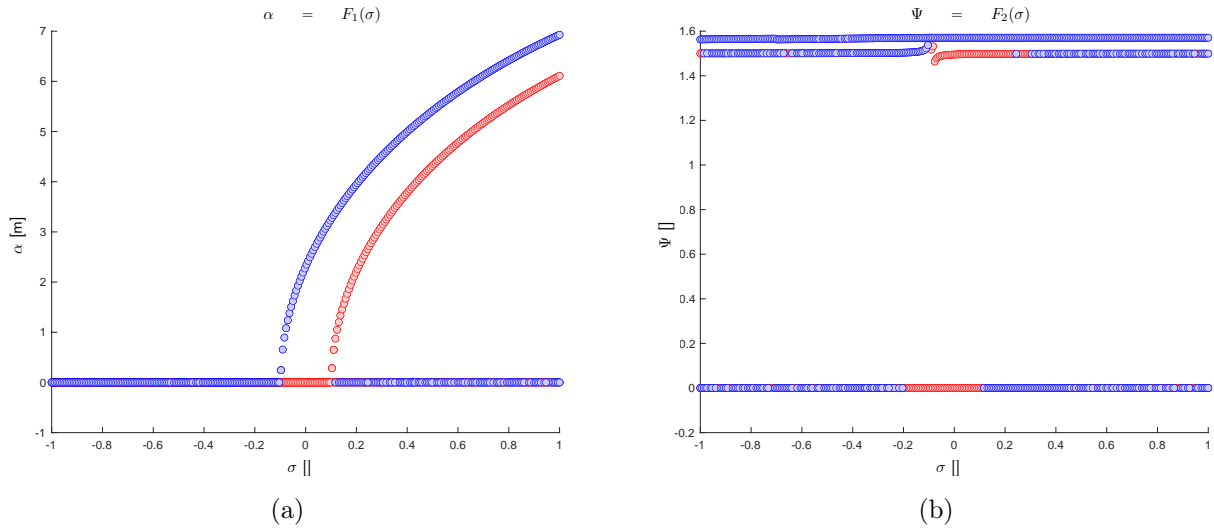


FIGURE 5.34: (a) Amplitude et (b) Phase de la réponse en fréquence selon le mode de pompage pour une excitation paramétrique $T_{s,2n} = 0.2$ et un terme de forçage nul $T_d = 0$ (bleu : stable, rouge : instable)

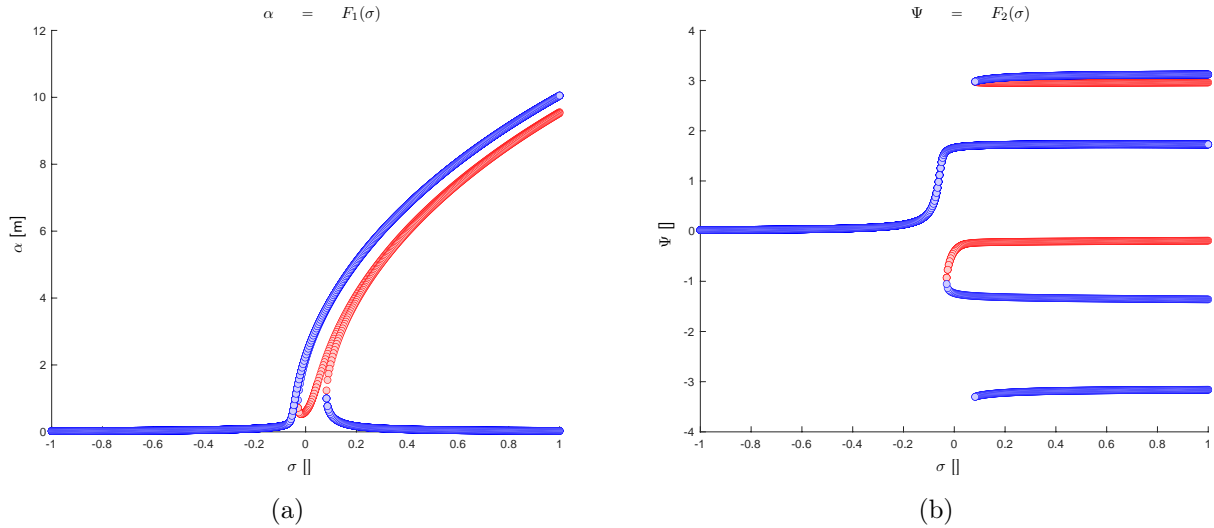


FIGURE 5.35: (a) Amplitude et (b) Phase de la réponse en fréquence selon le mode de pompage pour une excitation paramétrique $T_{s,2n} = 0.2$ et un terme de forçage extérieur $T_d = 0.05$ (bleu : stable, rouge : instable)

mode de pompage (Φ, ω_p) , sans adimensionnement des équations :

$$\ddot{q}(t) + \epsilon \dot{q}(t) + (\delta + \epsilon T_s^*(t))q(t) + \epsilon dq(t)^2 + \epsilon^2 eq(t)^3 = \epsilon f^*(t), \quad (5.177)$$

où le petit paramètre :

$$\epsilon = A|T_{s,qs}(t)|, \quad (5.178)$$

avec :

$$|T_{s,qs}(t)| = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{+\infty} (|T_{si}^c|^2 + |T_{si}^s|^2)} \quad (5.179)$$

$$T_s^*(t) = \frac{T_{s,qs}(t)}{|T_{s,qs}(t)|}, \quad (5.180)$$

$$f^*(t) = \frac{F}{A|T_{s,qs}(t)|} T_{d,qs}(t). \quad (5.181)$$

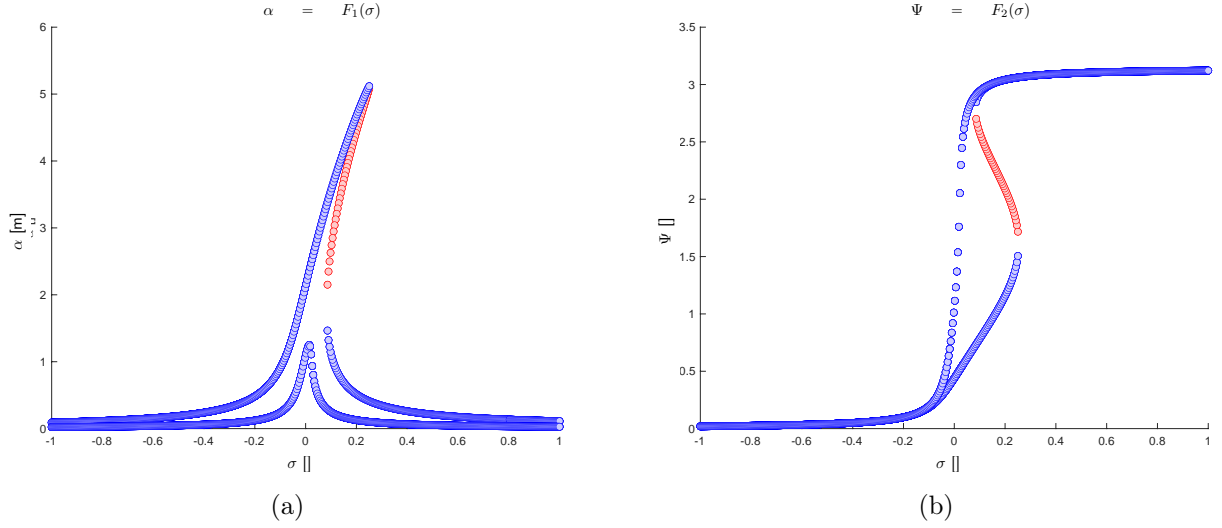


FIGURE 5.36: (a) Amplitude et (b) Phase de la réponse en fréquence selon le mode de pompage pour une excitation paramétrique $T_{s,2n} = 0$ et un terme de forçage extérieur $T_d = [0.05; 0.2]$ (bleu : stable, rouge : instable)

L'excitation extérieure f^* est placée à proximité de la résonance avec le mode de pompage telle que

$$f^*(t) = T_d^* \sin(\omega t + \phi), \quad (5.182)$$

en posant $\omega = \omega_p + \epsilon\sigma$, où σ est un paramètre de detuning.

Le terme d'excitation paramétrique est conservé sous forme multi-harmonique

$$T_s^*(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} T_{si}^{*c} \cos(i\omega t) + T_{si}^{*s} \sin(i\omega t). \quad (5.183)$$

La première étape est d'appliquer la méthode des échelles multiples pour approcher les solutions périodiques de (5.177) sous la forme $q(t) \approx q_0(t)$.

Ensuite, l'équation (5.177) est linéarisée autour de l'équilibre q_0 précédemment obtenu pour en déterminer la stabilité en appliquant la théorie de Floquet. Les zones de transition correspondant à des solutions périodiques sont déterminées, ce qui permet de positionner les points de fonctionnement du système par rapport à l'hypersurface de transition donnée dans l'espace des paramètres physiques du problème réduit.

Un rappel de la méthode des échelles multiples, qui a été appliquée dans 5.3.3, est donné. Le temps t est développé en fonction de ϵ ,

$$T_i = \epsilon^i t, \quad i \in \mathbf{N}, \quad (5.184)$$

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \epsilon D_1 + \epsilon^2 D_2 + \dots, \quad D_i = \frac{\partial}{\partial T_i}, \quad (5.185)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \epsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots, \quad (5.186)$$

$$q(t) = q_0 + \epsilon q_1 + \epsilon^2 q_2 + \dots, \quad (5.187)$$

$$\delta = \omega_p^2 + \epsilon \delta_1 + \epsilon^2 \delta_2 + \dots \quad (5.188)$$

Les développements en ϵ sont remplacés dans l'équation (5.177),

$$\begin{aligned}
 & \left(D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \epsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \right) (q_0 + \epsilon q_1 + \epsilon^2 q_2 + \dots) \\
 & \quad + \epsilon c \left(D_0 + \epsilon D_1 + \epsilon^2 D_2 + \dots \right) (q_0 + \epsilon q_1 + \epsilon^2 q_2 + \dots) \\
 & + \left(\omega_p^2 + \epsilon \delta_1 + \epsilon^2 \delta_2 + \dots \right) (q_0 + \epsilon q_1 + \epsilon^2 q_2 + \dots) + \epsilon \left(\sum_{i=1}^{+\infty} T_{si}^{*c} \cos(i\omega t) + T_{si}^{*s} \sin(i\omega t) \right) (q_0 + \epsilon q_1 + \epsilon^2 q_2 + \dots) \\
 & \quad + \epsilon d \left(q_0^2 + 2\epsilon q_0 q_1 + \dots \right) + \epsilon^2 e q_0^3 = \epsilon T_d^* \sin(\omega t + \phi). \quad (5.189)
 \end{aligned}$$

Les différentes échelles de ϵ sont ordonnées. À l'échelle ϵ^0 ,

$$D_0^2 q_0 + \delta_0 q_0 = 0. \quad (5.190)$$

À l'échelle ϵ ,

$$D_0^2 q_1 + \delta_0 q_1 = -\delta_1 q_0 - 2D_0 D_1 q_0 - c D_0 q_0 - \left(\sum_{i=1}^{+\infty} T_{si}^{*c} \cos(i\omega t) + T_{si}^{*s} \sin(i\omega t) \right) q_0 - d q_0^2 + T_d^* \sin(\omega t + \phi). \quad (5.191)$$

À l'échelle ϵ^2 ,

$$\begin{aligned}
 D_0^2 q_2 + \delta_0 q_2 = & -\delta_1 q_1 - \delta_2 q_0 - 2D_0 D_1 q_1 - (D_1^2 + 2D_0 D_2) q_0 - c D_1 q_0 - c D_0 q_1 \\
 & - \left(\sum_{i=1}^{+\infty} T_{si}^{*c} \cos(i\omega t) + T_{si}^{*s} \sin(i\omega t) \right) q_1 - 2d q_0 q_1 - e q_0^3. \quad (5.192)
 \end{aligned}$$

De l'équation à l'ordre ϵ^0 (5.190) il vient :

$$q_0 = Q(T_1, T_2, \dots) e^{j\omega_p T_0} + \bar{Q}(T_1, T_2, \dots) e^{-j\omega_p T_0}. \quad (5.193)$$

Les termes séculaires sont identifiés dans l'équation à l'ordre ϵ en détaillant chacune des contributions :

$$-\delta_1 \underbrace{q_0}_{\text{séculaire}}, \quad (5.194)$$

$$-2D_0 D_1 q_0 = \underbrace{-2j\omega_p D_1 Q e^{j\omega_p T_0}}_{\text{séculaire}} + cc, \quad (5.195)$$

où cc désigne le terme complexe conjugué associé.

$$-c D_0 q_0 = \underbrace{-c j \omega_p Q e^{j\omega_p T_0}}_{\text{séculaire}} + cc, \quad (5.196)$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(\sum_{i=1}^{+\infty} T_{si}^{*c} \cos(i\omega t) + T_{si}^{*s} \sin(i\omega t) \right) q_0 \\
 = & - \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{T_{si}^{*c}}{2} [e^{j i \omega T_0} + e^{-j i \omega T_0}] + \frac{T_{si}^{*s}}{2j} [e^{j i \omega T_0} - e^{-j i \omega T_0}] \right) \left(Q(T_1, T_2, \dots) e^{j\omega_p T_0} + \bar{Q}(T_1, T_2, \dots) e^{-j\omega_p T_0} \right) \\
 & = - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{T_{si}^{*c} - j T_{si}^{*s}}{2} Q e^{j(i+1)\omega T_0} e^{-j\sigma T_1} + \frac{T_{si}^{*c} + j T_{si}^{*s}}{2} \bar{Q} e^{j(i-1)\omega T_0} e^{j\sigma T_1} \\
 & \quad + \frac{T_{si}^{*c} + j T_{si}^{*s}}{2} Q e^{j(1-i)\omega T_0} e^{-j\sigma T_1} + \frac{T_{si}^{*c} - j T_{si}^{*s}}{2} \bar{Q} e^{-j(i+1)\omega T_0} e^{j\sigma T_1}. \quad (5.197)
 \end{aligned}$$

Le terme $\frac{1}{2}(T_{s2}^{*c} - jT_{s2}^{*s})\bar{Q}e^{j\omega_p T_0}e^{j2\sigma T_1} + cc$ est séculaire. La solution particulière q_{1p1} associée aux termes

non-séculaires,

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{T_{si}^{*c} - jT_{si}^{*s}}{2} Q e^{j(i+1)\omega T_0} e^{-j\sigma T_1} - \sum_{i=1, i \neq 2}^{+\infty} \frac{T_{si}^{*c} - jT_{si}^{*s}}{2} \bar{Q} e^{j(i-1)\omega T_0} e^{j\sigma T_1} \\
 & - \sum_{i=1, i \neq 2}^{+\infty} \frac{T_{si}^{*c} + jT_{si}^{*s}}{2} Q e^{j(1-i)\omega T_0} e^{-j\sigma T_1} - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{T_{si}^{*c} + jT_{si}^{*s}}{2} \bar{Q} e^{-j(i+1)\omega T_0} e^{j\sigma T_1},
 \end{aligned} \tag{5.198}$$

est recherchée sous la forme :

$$\begin{aligned}
 q_{1p1} = & \sum_{i=1}^{+\infty} \gamma_{1i} e^{j(i+1)\omega T_0} e^{-j\sigma T_1} + \sum_{i=1, i \neq 2}^{+\infty} \gamma_{2i} e^{j(i-1)\omega T_0} e^{j\sigma T_1} \\
 & + \sum_{i=1, i \neq 2}^{+\infty} \gamma_{3i} e^{j(1-i)\omega T_0} e^{-j\sigma T_1} + \sum_{i=1}^{+\infty} \gamma_{4i} e^{-j(i+1)\omega T_0} e^{j\sigma T_1}.
 \end{aligned} \tag{5.199}$$

En reportant,

$$\gamma_{1,i} = -\frac{(T_{si}^{*c} - jT_{si}^{*s})Q}{2(1 - (i+1)^2)\omega^2}, \quad i \in \mathbf{N}^* \tag{5.200}$$

$$\gamma_{2,i} = -\frac{(T_{si}^{*c} - jT_{si}^{*s})\bar{Q}}{2(1 - (i-1)^2)\omega^2}, \quad i \in \mathbf{N}^* \setminus \{2\} \tag{5.201}$$

$$\gamma_{3i} = \bar{\gamma}_{2i}, \tag{5.202}$$

$$\gamma_{4i} = \bar{\gamma}_{1i}. \tag{5.203}$$

D'où :

$$q_{1p1} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(T_{si}^{*c} - jT_{si}^{*s})Q}{2((i+1)^2 - 1)\omega^2} e^{j(i+1)\omega T_0} e^{-j\sigma T_1} + cc + \sum_{i=1, i \neq 2}^{+\infty} \frac{(T_{si}^{*c} - jT_{si}^{*s})\bar{Q}}{2((i-1)^2 - 1)\omega^2} e^{j(i-1)\omega T_0} e^{j\sigma T_1} + cc. \tag{5.204}$$

$$-dq_0^2 = -d(Qe^{j\omega_p T_0} + \bar{Q}e^{j\omega_p T_0})^2 = -d(Q^2 e^{j2\omega_p T_0} + 2|Q|^2 + \bar{Q}^2 e^{-2j\omega_p T_0}). \tag{5.205}$$

Il n'y a pas de terme séculaire. Une solution particulière associée est :

$$q_{1p2} = \hat{\gamma}_1 e^{j2\omega_p T_0} + \hat{\gamma}_2 + \hat{\gamma}_3 e^{-j2\omega_p T_0}, \tag{5.206}$$

avec

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{dQ^2}{3\omega_p^2}, \tag{5.207}$$

$$\hat{\gamma}_2 = -\frac{2d}{\omega_p^2} |Q|^2, \tag{5.208}$$

$$\hat{\gamma}_3 = \frac{d\bar{Q}^2}{3\omega_p^2} = \bar{\hat{\gamma}}_1. \tag{5.209}$$

$$T_d^* \sin(\omega t + \phi) = \underbrace{\frac{T_d^*}{2j} \left[e^{j(\omega T_0 + \phi)} + e^{-j(\omega T_0 + \phi)} \right]}_{\text{séculaire}}. \tag{5.210}$$

Finalement, le bilan des termes séculaires à l'échelle ϵ donne :

$$D_1 Q = -\frac{c}{2} Q + \frac{1}{4j\omega_p} (T_{s2}^{*c} - jT_{s2}^{*s}) \bar{Q} e^{j\omega_p T_0} e^{j2\sigma T_1} - \frac{T_d^*}{4\omega_p} e^{j\phi} e^{j\sigma T_1} - \frac{\delta_1 Q}{2j\omega_p}. \tag{5.211}$$

Les termes séculaires sont identifiés dans l'équation à l'ordre ϵ^2 en détaillant chacune des contributions :

$$\begin{aligned}
 -2D_0D_1(q_{1p1} + q_{1p2}) = & -\frac{2d}{3\omega_p^2}2QD_1Qe^{j2\omega_pT_0} + cc - 2\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(T_{si}^{*c} - jT_{si}^{*s})j(i+1)\omega D_1Q}{2((i+1)^2 - 1)\omega^2} e^{j(i+1)\omega T_0} e^{-j\sigma T_1} + cc \\
 & - 2\sum_{i=1, i \neq 2}^{+\infty} \frac{(T_{si}^{*c} - jT_{si}^{*s})j(i-1)\omega D_1\bar{Q}}{2((i-1)^2 - 1)\omega^2} e^{j(i-1)\omega T_0} e^{j\sigma T_1} + cc.
 \end{aligned} \tag{5.212}$$

Il n'y a pas de terme séculaire.

$$-(D_1^2 + 2D_0D_2)q_0 = \underbrace{-(D_1^2Q + 2j\omega_p D_2Q)e^{j\omega_p T_0}}_{\text{séculaire}} + cc. \tag{5.213}$$

$$-cD_1q_0 = \underbrace{-cD_1Qe^{j\omega_p T_0}}_{\text{séculaire}} + cc. \tag{5.214}$$

$$-cD_0q_1 = -cD_0q_{1p1} - cD_0q_{1p2}. \tag{5.215}$$

Il n'y a pas de terme de séculaire.

$$\begin{aligned}
 & -\left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(T_{si}^{*c} - jT_{si}^{*s})}{2} e^{ji\omega T_0} + \frac{(T_{si}^{*c} + jT_{si}^{*s})}{2} e^{-ji\omega T_0}\right)(q_{1p1} + q_{1p2}) \\
 = & -\left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(T_{si}^{*c} - jT_{si}^{*s})}{2} e^{ji\omega T_0} + \frac{(T_{si}^{*c} + jT_{si}^{*s})}{2} e^{-ji\omega T_0}\right)\left(\left[-\frac{2d}{\omega_p^2}|Q|^2 + \frac{d}{3\omega_p^2}(Q^2 e^{j2\omega_p T_0} + \bar{Q}^2 e^{-j2\omega_p T_0})\right]\right) \\
 & + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(T_{si}^{*c} - jT_{si}^{*s})Q}{2((i+1)^2 - 1)\omega^2} e^{j(i+1)\omega T_0} e^{-j\sigma T_1} + cc + \sum_{i=1, i \neq 2}^{+\infty} \frac{(T_{si}^{*c} - jT_{si}^{*s})\bar{Q}}{2((i-1)^2 - 1)\omega^2} e^{j(i-1)\omega T_0} e^{j\sigma T_1} + cc.
 \end{aligned} \tag{5.216}$$

Les termes séculaires sont :

$$\frac{2d|Q|^2}{\omega_p^2} \frac{(T_{s1}^{*c} - jT_{s1}^{*s})}{2} e^{j\omega_p T_0} e^{j\sigma T_0}, \tag{5.217}$$

$$\frac{dQ^2}{3\omega_p^2} \frac{(T_{s1}^{*c} + jT_{s1}^{*s})}{2} e^{j\omega_p T_0} e^{-j\sigma T_0}, \tag{5.218}$$

$$-\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(T_{si}^{*c2} + T_{si}^{*s2})}{4\omega^2((i+1)^2 - 1)} Q e^{j\omega_p T_0}, \tag{5.219}$$

$$-\sum_{i=1, i \neq 2}^{+\infty} \frac{(T_{si}^{*c2} + T_{si}^{*s2})}{4\omega^2((i-1)^2 - 1)} Q e^{j\omega_p T_0}. \tag{5.220}$$

$$-eq_0^3 = \underbrace{-3e|Q|^2 Q e^{j\omega_p T_0}}_{\text{séculaire}} + \dots \tag{5.221}$$

$$\delta_1 q_{1pi}, \tag{5.222}$$

Il n'y a pas de terme séculaire.

$$\delta_2 q_0 = \underbrace{\delta_2 Q e^{j\omega_p T_0}}_{\text{séculaire}} \tag{5.223}$$

Finalement, le bilan des termes séculaires identifiés à l'échelle ϵ^2 :

$$\begin{aligned}
 -D_1^2Q - 2j\omega_p D_2Q + \frac{2d}{\omega_p^2}|Q|^2 \frac{(T_{s1}^{*c} - jT_{s1}^{*s})}{2} e^{j\sigma T_1} + \frac{d}{3\omega_p^2} Q^2 \frac{(T_{s1}^{*c} + jT_{s1}^{*s})}{2} e^{-j\sigma T_1} - 3e|Q|^2 Q \\
 -cD_1Q - \delta_2 Q - \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(T_{si}^{*c2} + T_{si}^{*s2})}{4\omega^2((i+1)^2 - 1)} + \sum_{i=1, i \neq 2}^{+\infty} \frac{(T_{si}^{*c2} + T_{si}^{*s2})}{4\omega^2((i-1)^2 - 1)}\right) Q = 0.
 \end{aligned} \tag{5.224}$$

Les dérivées D_1Q et D_1^2Q sont exprimées à partir de (5.211) et sont remplacées dans (5.224) :

$$D_1Q = -\frac{c}{2}Q + \frac{1}{4j\omega_p}(T_{s2}^{*c} - jT_{s2}^{*s})\bar{Q}e^{j\omega_p T_0}e^{j2\sigma T_1} - \frac{T_d^*}{4\omega_p}e^{j\phi}e^{j\sigma T_1} - \frac{\delta_1 Q}{2j\omega_p}. \quad (5.225)$$

$$\begin{aligned} D_1^2Q = & \left(-\frac{c}{2} - \frac{\delta_1}{2j\omega_p}\right) \left[-\frac{cQ}{2} + \frac{1}{4j\omega_p}(T_{s2}^{*c} - jT_{s2}^{*s})\bar{Q}e^{j2\sigma T_1} - \frac{T_d^*}{4\omega_p}e^{j\phi}e^{j\sigma T_1} - \frac{\delta_1 Q}{2j\omega_p}\right] \\ & + \frac{\sigma}{2\omega_p}(T_{s2}^{*c} - jT_{s2}^{*s})\bar{Q}e^{j2\sigma T_1} \\ & + \frac{1}{4j\omega_p}(T_{s2}^{*c} - jT_{s2}^{*s})e^{j2\sigma T_1} \left[-\frac{c\bar{Q}}{2} - \frac{1}{4j\omega_p}(T_{s2}^{*c} + jT_{s2}^{*s})\bar{Q}e^{-j2\sigma T_1} - \frac{T_d^*}{4\omega_p}e^{-j\phi}e^{-j\sigma T_1} + \frac{\delta_1 \bar{Q}}{2j\omega_p}\right] \\ & - \frac{j\sigma T_d^*}{4\omega_p}e^{j\phi}e^{j\sigma T_1}. \end{aligned} \quad (5.226)$$

En notant $\mathcal{A} = -D_1^2Q$, $\mathcal{B} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(T_{s1}^{*c2} + T_{s1}^{*s2})}{4\omega_p^2((i+1)^2 - 1)} + \sum_{i=1, i \neq 2}^{+\infty} \frac{(T_{s1}^{*c2} + T_{s1}^{*s2})}{4\omega_p^2((i-1)^2 - 1)}$ et en reportant dans (5.224) :

$$-\mathcal{A} + \frac{2d}{\omega_p^2}|Q|^2 \frac{(T_{s1}^{*c} - jT_{s1}^{*s})}{2}e^{j\sigma T_1} + \frac{d}{3\omega_p^2}Q^2 \frac{(T_{s1}^{*c} + jT_{s1}^{*s})}{2}e^{-j\sigma T_1} - 3e|Q|^2Q - cD_1Q - \delta_2Q - \mathcal{B}Q = 0. \quad (5.227)$$

Q est recherchée sous la forme $Q = Qe^{j\sigma T_1}$, $Q \in \mathbf{C}$ afin d'éliminer la dépendance en $e^{j\sigma T_1}$. Une équation en Q indépendante de T_1 est obtenue :

$$\begin{aligned} \left[\frac{c^2}{4} + \frac{\delta_1^2}{4\omega_p^2} - \frac{(T_{s2}^{*c} - jT_{s2}^{*s})^2}{16\omega_p^2} - 3e|Q|^2 - \delta_2 - \mathcal{B}\right]Q + \left[\frac{ce^{j\phi}}{8\omega_p} + \frac{j\delta_1 e^{j\phi}}{8\omega_p} - \frac{j(T_{s2}^{*c} - jT_{s2}^{*s})e^{-j\phi}}{16\omega_p^2} + \frac{j\sigma e^{j\phi}}{4\omega_p}\right]T_d^* \\ - \frac{\sigma(T_{s2}^{*c} - jT_{s2}^{*s})}{2\omega_p}\bar{Q} + (T_{s1}^{*c} + jT_{s1}^{*s})\frac{d}{6\omega_p^2}Q^2 + \frac{(T_{s1}^{*c} - jT_{s1}^{*s})}{\omega_p^2}|Q|^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.228)$$

Parties réelles et imaginaires sont identifiées en remplaçant $Q = X + jY$ sous la forme de polynômes en X et Y

$$\begin{cases} 0 = P(X^2 + Y^2)X + Q_a X^2 + R_a Y^2 + S_a X + U_a Y + V_a XY + f_1, \\ 0 = P(X^2 + Y^2)Y + Q_b X^2 + R_b Y^2 + S_b X + U_b Y + V_b XY + f_2, \end{cases} \quad (5.229)$$

où

$$P = -3e, \quad (5.230)$$

$$Q_a = \frac{T_{s1}^{*c}}{\omega_p^2} \left(1 + \frac{d}{6}\right), \quad (5.231)$$

$$Q_b = \frac{T_{s1}^{*s}}{\omega_p^2} \left(-1 + \frac{d}{6}\right), \quad (5.232)$$

$$R_a = \frac{T_{s1}^{*c}}{\omega_p^2} \left(1 - \frac{d}{6}\right), \quad (5.233)$$

$$R_b = \frac{T_{s1}^{*s}}{\omega_p^2} \left(-1 - \frac{d}{6}\right), \quad (5.234)$$

$$S_a = \frac{c^2}{2} - \delta_2 - \mathcal{B} + \frac{1}{4\omega_p^2} \left(\delta_1^2 - \frac{(T_{s1}^{*c2} - T_{s1}^{*s2})}{4}\right) - \frac{\sigma T_{s2}^{*c}}{2\omega_p}, \quad (5.235)$$

$$S_b = \frac{T_{s2}^{*s}}{2\omega_p} \left(\frac{T_{s2}^{*c}}{4\omega_p} + \sigma\right), \quad (5.236)$$

$$U_a = \frac{T_{s2}^{*s}}{2\omega_p} \left(-\frac{T_{s2}^{*c}}{4\omega_p} + \sigma\right), \quad (5.237)$$

$$U_b = \frac{c^2}{2} - \delta_2 - \mathcal{B} + \frac{1}{4\omega_p^2} \left(\delta_1^2 - \frac{(T_{s1}^{*c2} - T_{s1}^{*s2})}{4}\right) + \frac{\sigma T_{s2}^{*c}}{2\omega_p}, \quad (5.238)$$

$$V_a = -\frac{T_{s1}^{*s}d}{3\omega_p^2}, \quad (5.239)$$

$$V_b = \frac{T_{s1}^{*c}d}{3\omega_p^2}, \quad (5.240)$$

$$f_1 = \frac{1}{8\omega_p} \left[c \cos(\phi) - (\delta_1 + 2\sigma) \sin(\phi) + \frac{-T_{s2}^{*c} \sin(\phi) - T_{s2}^{*s} \cos(\phi)}{2\omega_p} \right], \quad (5.241)$$

$$f_2 = \frac{1}{8\omega_p} \left[c \sin(\phi) - (\delta_1 + 2\sigma) \cos(\phi) + \frac{T_{s2}^{*s} \sin(\phi) - T_{s2}^{*c} \cos(\phi)}{2\omega_p} \right]. \quad (5.242)$$

L'utilisation d'un logiciel de calcul formel donne l'expression de X en fonction de Y et le polynôme de degré 9 vérifié par Y (Annexe N).

En passant à la limite pour $\epsilon \rightarrow 0$ dans le développement de $q(t)$,

$$q(t) \approx (X + jY)e^{j\sigma T_1} e^{j\omega_p T_0} + cc. \quad (5.243)$$

La stabilité de la solution (5.243) obtenue par développement aux échelles multiples est étudiée par linéarisation de (5.177) autour de q_0 ,

$$q = q_0 + y, \quad (5.244)$$

où y est une petite perturbation autour de la solution q_0 qui a été obtenue en (5.243) par la méthode des échelles multiples. En remplaçant,

$$\ddot{y} + \epsilon c \dot{y} + (\delta + \epsilon T_s^*)y + \epsilon 2d q_0 y + \epsilon^2 3e q_0^2 y = 0, \quad (5.245)$$

avec $q_0 = \mathcal{Q}e^{j(\omega_p + \epsilon\sigma)T_0} + cc = 2|\mathcal{Q}|e^{j\omega t + \psi}$, $\mathcal{Q} = |\mathcal{Q}|e^{j\psi}$. Soit,

$$\ddot{y}(t) + \epsilon c \dot{y}(t) + \left(\delta + \sum_{i=1}^{+\infty} \mathcal{T}_{s,i}^{*,c} \cos(i\omega t) + \mathcal{T}_{s,i}^{*,s} \sin(i\omega t) \right) y(t) = 0. \quad (5.246)$$

Les termes en :

$$q_0 = 2|\mathcal{Q}|\cos(\omega t + \psi) = 2|\mathcal{Q}|(\cos(\omega t)\cos(\psi) - \sin(\omega t)\sin(\psi)), \quad (5.247)$$

$$q_0^2 = 2|\mathcal{Q}|^2[1 + \cos(2\omega t + 2\psi)] = 2|\mathcal{Q}|^2(1 + \cos(2\omega t)\cos(2\psi) - \sin(2\omega t)\sin(2\psi)), \quad (5.248)$$

viennent modifier certaines harmoniques du terme d'excitation paramétrique $\sum_{i=1}^{+\infty} \mathcal{T}_{s,i}^{*,c} \cos(i\omega t) + \mathcal{T}_{s,i}^{*,s} \sin(i\omega t)$ de l'équation (5.70).

La stabilité de la solution q_0 à l'équation de Mathieu non-linéaire généralisée est donc donnée par l'étude de stabilité de l'équation de Mathieu (5.70) proposée dans la sous-section 5.3.3 en modifiant les coefficients associés aux harmoniques $i = 1$ et $i = 2$ de l'excitation paramétrique affectés par les effets géométriques non-linéaires.

5.3.5 Application à la détection du pompage

Plusieurs niveaux de détection du pompage peuvent être adoptés (Fig. 5.37).

Premier niveau : caractérisation des sources de perturbation dynamiques

- Afin de hiérarchiser les sources d'excitations en présence dans chaque portée de la ligne, une approche macroscopique du problème consiste à utiliser les signaux $T_{s,qs}(l_c)$, $T_{d,qs}(l_c)$ issus du calcul quasi-statique, et le calcul des coefficients de la série de Fourier par FFT, pour une répétition de période $\frac{l_d}{V_0}$ du motif de défilement des véhicules (synthèse algorithmique 1).

Le choix du pas de progression δl_c pour réaliser le calcul quasi-statique doit rendre compte de l'effet régularisant sur la tension de la dimension de l'appui qui n'est en pratique pas ponctuel mais linéique (balancier, sabot de longueur L_{ap}). Un pas δl_c égal à la demie-longueur moyenne des appuis de la ligne $\frac{\langle L_{ap} \rangle}{2}$ permet de lisser la discontinuë générée par la modélisation ponctuelle.

Des seuils de la perturbation maximale en tension relative à la tension moyenne statique dans chaque portée $\frac{T_{s,qs}}{\langle T_s \rangle}$, $\frac{T_{d,qs}}{\langle T_s \rangle}$ apportent au concepteur un renseignement sur la présence de sollicitations dynamiques

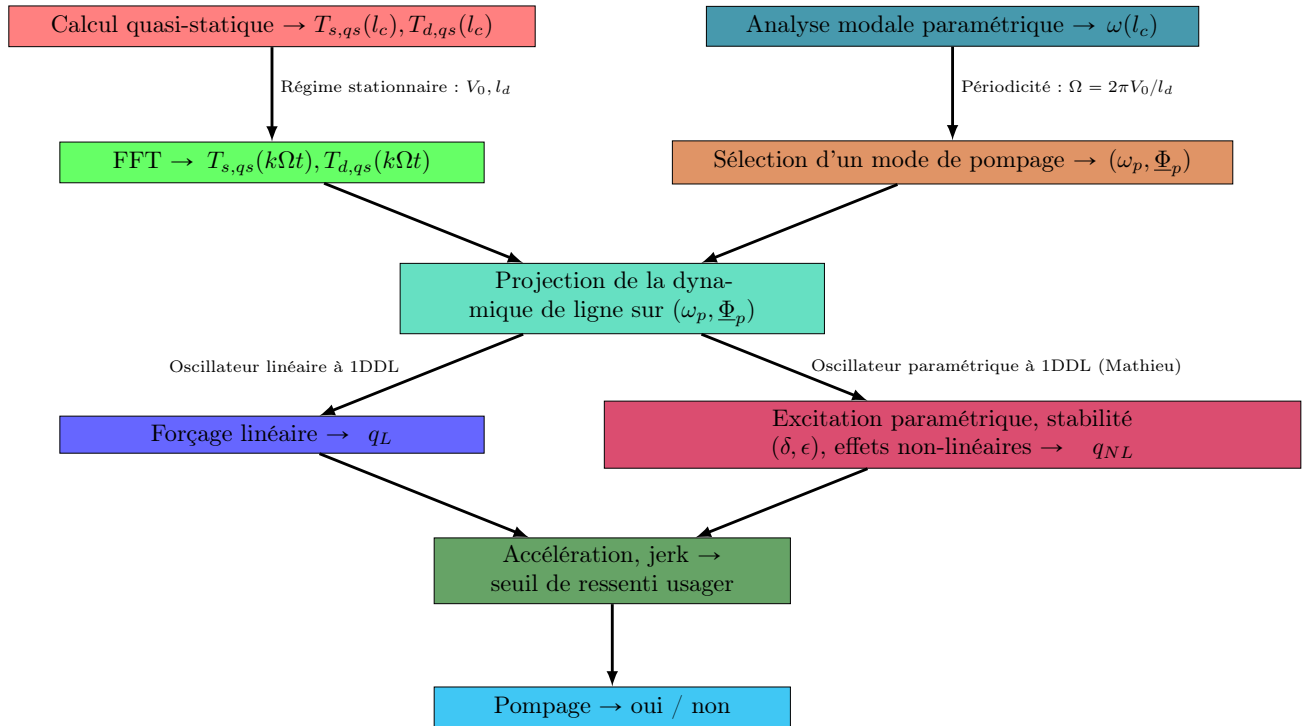
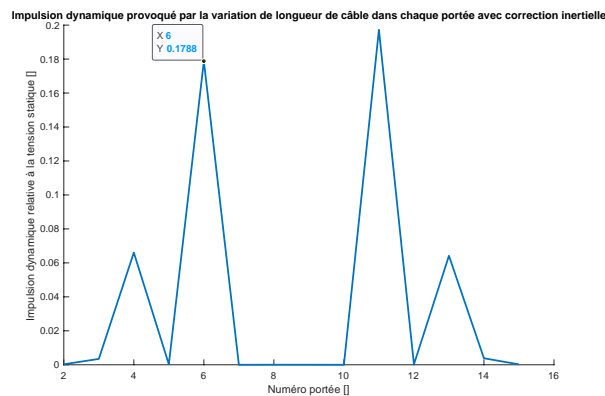


FIGURE 5.37: Synoptique de la détection pratique du pompage sur une ligne

présentant un risque de déclenchement de pompage (Tab. 5.2, Fig. 5.38). Ces seuils sont par exemple donnés à partir du retour d'expérience sur des cas d'installations présentant des désagréments de pompage.

FIGURE 5.38: Critère $\max_i \left(\frac{T_{d,qs}}{T_s} \right)$ appliqué à la ligne des Brévières

- Des informations sur le risque de coïncidence géométrique, en détectant des effets concomitants d'entrée et/ou de sortie des véhicules sur les appuis dans chaque portée, combinée à une estimation de la perturbation additionnelle provoquée par le franchissement des appuis, renseigne le concepteur sur un effet d'amplification des perturbations en tension (Tab. 5.3).

TABLE 5.2: Critères et seuils d'alerte pour la détection du pompage (niveau 1) : perturbations en tension

Critère	Seuil d'alerte
Variation relative de tension statique $\max_i \left(\frac{T_{s,qs}}{\langle T_s \rangle} \right)$	seuil1
Incrément relatif de tension dynamique $\max_i \left(\frac{T_{d,qs}}{\langle T_s \rangle} \right)$	seuil2

TABLE 5.3: Critères et seuils d'alerte pour la détection du pompage (niveau 1) : résonance géométrique

Critère	Seuil d'alerte
Détection d'une portée de longueur L_p multiple de l_d : $\frac{L_p}{l_d} - \left\lfloor \frac{L_p}{l_d} \right\rfloor$	seuil3 $\in [0, 0.1] \cup [0.9, 1]$
Incrément relatif de tension statique dû au franchissement d'appui	seuil4

Algorithme 1 Calcul des harmoniques de perturbation d'origine quasi-statique et de la coïncidence géométrique

ENTRÉES : géométrie de la ligne s_p , propriétés du câble c_p et des véhicules v_p , vitesse du câble V_0 , espacement entre véhicules l_d

SORTIES : Critères de détection du pompage (niveau 1)

pour chaque portée $i \in [1, N]$ **faire**

Critère géométrique : $\frac{L_p}{l_d} - \left\lfloor \frac{L_p}{l_d} \right\rfloor$

fin pour

pour $pas \in [0, l_d]$ **faire**

Calcul statique : $(\tau_m, K_{1m}, K_{2m}) \leftarrow \{S(q_e, pas)\} = \{0\}$

pour chaque portée $i \in [1, N]$ **faire**

Tension statique aux appuis de la portée : $T_{s,qs}(pas)$

Incrément de tension dynamique : $T_{d,qs}(pas) = EA(\delta u' - \kappa_s \delta v)$

fin pour

fin pour

Algorithme FFT évolution des tensions sur une période l_d/V_0 : $2|T_{s,i}|, 2|T_{d,i}|$

Critère en tension : $\max_i \left(\frac{T_{s,qs}}{\langle T_s \rangle} \right), \max_i \left(\frac{T_{d,qs}}{\langle T_s \rangle} \right)$

Deuxième niveau : interactions en fréquence entre les perturbations et les modes

Les modes, dont la fréquence f_k est proche des premiers multiples de la fréquence de franchissement des véhicules f_{qs} ,

$$f_k = i f_{qs} \quad i \in \mathbf{N}, \quad (5.249)$$

sont identifiés (synthèse algorithmique 2).

S'il existe de tels modes, leur déformée modale est calculée selon le modèle 4 pour détecter un éventuel effet de localisation de l'énergie vibratoire dans une portée de la ligne. Le traitement du problème modal, avec le modèle 4 de câble, a pour avantage de renvoyer des formes modales facilement exploitables, offrant la possibilité d'une réduction de modèle simple selon une approche homogénéisée de la ligne.

La combinaison entre l'information donnée par le premier niveau d'analyse, qui détecte les sources de sollicitation, et le deuxième niveau, qui caractérise la réponse dynamique de la ligne, permet d'identifier les mécanismes d'activation de mode de pompage dans certaines portées de la ligne.

TABLE 5.4: Critères et seuils d'alerte pour la détection du pompage (niveau 2) : coïncidence fréquentielle

Critère	Seuil d'alerte
Coïncidence des fréquences $\frac{f_k}{f_{qs}} - \lfloor \frac{f_k}{f_{qs}} \rfloor$	seuil5 $\in [0, 0.1]$

Algorithme 2 Calcul des modes de ligne selon le modèle 4 (5.2.4)

ENTRÉES: géométrie de la ligne s_p , propriétés du câble c_p et des véhicules v_p , vitesse du câble V_0 , espacement entre véhicules l_d

SORTIES: $\omega_k, \hat{\Phi}_k$

Calcul statique : $(\tau_m, K_{1m}, K_{2jm}) \leftarrow \{S(q_e)\} = \{0\}$

Fréquence modale : $\omega_k \leftarrow \det([H(\omega, q_e)]) = 0$

Déformée modale : $\{\hat{\Phi}_k\} \leftarrow [H(\omega_k, q_e)] \{q_k\} = \{0\}$

\mathcal{L}^2 -normalisation : $\{\Phi_k\} \leftarrow \int_S \alpha^2 \{\hat{\Phi}_k\}^T \{\hat{\Phi}_k\} dS = \beta$

Troisième niveau : réponse dynamique linéaire

Si au moins un mode k , identifié au deuxième niveau de l'étude, localise la vibration dans une portée i_p en particulier, une réduction de modèle est réalisée sur le mode k :

- 1. Si le mécanisme d'activation dynamique majoritaire dans la portée j_p est réalisé par le terme de forçage f^* associé à $T_{d,qs}$, alors un calcul de la réponse linéaire de l'oscillateur amorti à un degré de liberté renvoie la valeur de la contribution modale q_L de l'oscillation linéaire selon le mode k . Le calcul d'une valeur d'accélération et de jerk ressenti dans la portée donne un critère pour statuer sur un pompage effectif ou non de la portée concernée.
- 2. Si le mécanisme d'activation dynamique majoritaire est réalisée par le terme de forçage paramétrique T_s^* associé à $T_{s,qs}$, la réponse est donnée par les développements aux échelles multiples de l'équation de Mathieu linéaire de la sous-section 5.3.3. Les calculs donnent accès à l'amplitude de la vibration et à l'information sur la stabilité par positionnement du point de fonctionnement dans le diagramme de Mathieu (δ, ϵ) . Le calcul d'une valeur d'accélération et de jerk ressenti dans la portée donne un critère pour conclure sur un pompage effectif ou non de la portée concernée.

Pour illustrer l'application, la configuration rencontrée sur la ligne des Brévières correspond au premier cas, avec une activation de la dynamique par f^* . Le mode de pompage précédemment mis en évidence est recalculé selon le modèle 4 en différenciant le chargement de la voie aller et celui de la voie retour (Fig. 5.39). L'objectif est de représenter plus précisément la configuration de pompage observée, selon laquelle les véhicules sont chargés par les passagers côté montée et vides côté descente. L'équation qui représente les mécanismes de pompage est celle d'un oscillateur linéaire amorti avec un terme d'excitation extérieur,

$$\ddot{q} + c\dot{q} + \omega_p^2 q = f^*, \quad (5.250)$$

avec $f^* = \frac{\int_0^L \kappa_s T_{d,qs}(S, t) \Phi_v dS}{\int_0^L (\Phi_u^2 + \Phi_v^2 + \Phi_w^2) \mu dS}$. Seule l'harmonique de $T_{d,qs}$ résonante $\omega_i \approx \omega_p$ est conservée,

$$T_{d,qs}(S, t) = T_{di} e^{j\omega_i t + \phi_i}. \quad (5.251)$$

q est recherchée sous la forme :

$$q = Q e^{j\omega_i t + \phi_i}. \quad (5.252)$$

En remplaçant dans (5.250),

$$(-\omega_i^2 + \omega_p^2 + j\omega_i c)Q = \frac{\int_0^L \kappa_s \Phi_v \, dS}{\int_0^L (\Phi_u^2 + \Phi_v^2 + \Phi_w^2) \mu \, dS} T_{di}. \quad (5.253)$$

Q est écrit sous la forme $Q = |Q|e^{j\Psi}$, soit d'après (5.253),

$$|Q| = \frac{\int_0^L \kappa_s \Phi_v \, dS}{\int_0^L (\Phi_u^2 + \Phi_v^2 + \Phi_w^2) \mu \, dS} \frac{|T_{di}|}{\sqrt{(-\omega_i^2 + \omega_p^2)^2 + (\omega_i c)^2}}. \quad (5.254)$$

À proximité de la résonance, (5.254) s'écrit :

$$|Q| = \frac{\int_0^L \kappa_s \Phi_v \, dS}{\int_0^L (\Phi_u^2 + \Phi_v^2 + \Phi_w^2) \mu \, dS} \frac{|T_{di}|}{\omega_i c}. \quad (5.255)$$

Le modèle 4 de câble permet d'obtenir des modes exprimés dans le plan complexe. Par projection sur un mode complexe, la réponse dynamique dans le domaine réel s'écrit

$$\underline{U}_d = \Re(q \underline{\Phi}) = 2|Q|\sqrt{\underline{\Phi}_R^2 + \underline{\Phi}_I^2} \cos(\omega_i t + \phi_i + \Psi + \Sigma) \quad (5.256)$$

où $\underline{\Phi} = |\underline{\Phi}|e^{j\Sigma}$ et $\Phi = \underline{\Phi}_R + j\underline{\Phi}_I$ est la déformée modale complexe.

D'après la Fig. 5.39, $\underline{\Phi}_R \approx -\underline{\Phi}_I = \tilde{\Phi}$: la réponse périodique, en négligeant l'amortissement complexe, de la structure exprimée selon un mode complexe s'écrit

$$\Re((\underline{\Phi}_R + j\underline{\Phi}_I)(\cos(\omega t) + j \sin(\omega t))) = \underline{\Phi}_R \cos(\omega t) - \underline{\Phi}_I \sin(\omega t) \approx \sqrt{2}\tilde{\Phi} \cos(\omega t + \frac{\pi}{4}). \quad (5.257)$$

Dans ces conditions particulières, la réponse est harmonique avec une amplitude $\sqrt{2}\tilde{\Phi}$. Le mouvement dynamique selon la direction verticale, au point d'observation S_{obs} ,

$$v_d(S_{obs}) = 2|Q|\sqrt{2}\tilde{\Phi}_v(S_{obs}) \cos(\omega_i t + \phi_i + \Psi + \Sigma) = \tilde{v}_d \cos(\omega_i t + \phi_i + \Psi + \Sigma), \quad (5.258)$$

avec $\Phi_v = \Phi_{v,R} = -\Phi_{v,I}$.

D'après l'équation de la dynamique projetée sur un mode complexe qui donne $|Q|$,

$$\tilde{v}_d = 2 \frac{\int_0^L \kappa_s \sqrt{2}\tilde{\Phi}_v \, dS}{\int_0^L 2(\Phi_u^2 + \Phi_v^2 + \Phi_w^2) \mu \, dS} \frac{|T_{di}|}{\omega_i c} \sqrt{2}\tilde{\Phi}_v(S_{obs}), \quad (5.259)$$

avec $\Phi_v = \Phi_{v,R} = -\Phi_{v,I}$, $\Phi_u = \Phi_{u,R} = -\Phi_{u,I}$, $\Phi_w = \Phi_{w,R} = -\Phi_{w,I}$.

Selon la norme choisie pour le calcul modal, $\int_0^L 2(\Phi_u^2 + \Phi_v^2 + \Phi_w^2) \, dS = 1$, ce qui donne

$$\tilde{v}_d(S_{obs}) = 4 \int_0^L \kappa_s \Phi_v \, dS \frac{|T_{di}|}{\mu \omega_i c} \Phi_v(S_{obs}). \quad (5.260)$$

Les données numériques obtenues par l'analyse du cas de la ligne des Brévières sont :

- La courbure moyenne du câble : $\kappa_s = 4 \times 10^{-4} \, \text{m}^{-1}$.
- Le terme d'intégrale de la composante verticale le long de la ligne : $\int_0^L \Phi_v \, dS \approx \frac{2}{\pi} [-0.018 \times 265 + 0.03 \times 331]$

m².

- La masse linéique corrigée par la masse des véhicules : $\mu \approx 28$ kg/m.
- La pulsation du mode de pompage : $\omega_i = 0.141 \times 2\pi$ rad/s.
- L'amortissement : $c = 0.02$ s⁻¹, d'après les documents relatifs à l'estimation de l'amortissement dans les câbles [253–257].
- L'amplitude de l'harmonique de perturbation en tension dynamique : $|T_{di}| = \frac{12622}{2}$ N.
- L'amplitude de la déformée modale en milieu de portée : $\Phi_v(S_{obs}) = 0.03$ m.

Avec ces valeurs numériques :

- L'amplitude de pompage prédite en milieu de la portée 5 est $\tilde{v}_d \approx 2.3$ m, soit une valeur crête à crête du déplacement dynamique $\Delta v_d \approx 4.6$ m. C'est en cohérence avec les observations sur site et l'estimation de l'ordre de grandeur des oscillations (Fig. 5.25).
- Le niveau d'accélération ressenti par les passagers des véhicules situés dans la portée 5 est $\ddot{v}_d = \omega_i^2 \tilde{v}_d \approx 1.8$ m/s² = 0.18 g. À titre de comparaison, dans le domaine ferroviaire, les indices de confort classent les vibrations dont la fréquence est inférieure à 0.5 Hz dans la catégorie des très basses fréquences responsables de la cinétose (pathologie du mal des transport). Pour le dimensionnement des voies, le niveau d'accélération est limité à 0.05 g selon la direction verticale dans les très basses fréquences.
- Le niveau de jerk ressenti par les passagers des véhicules situés dans la portée 5 est $\dddot{v}_d = \omega_i^3 \tilde{v}_d \approx 1.6$ m/s³ = 0.16 g/s.

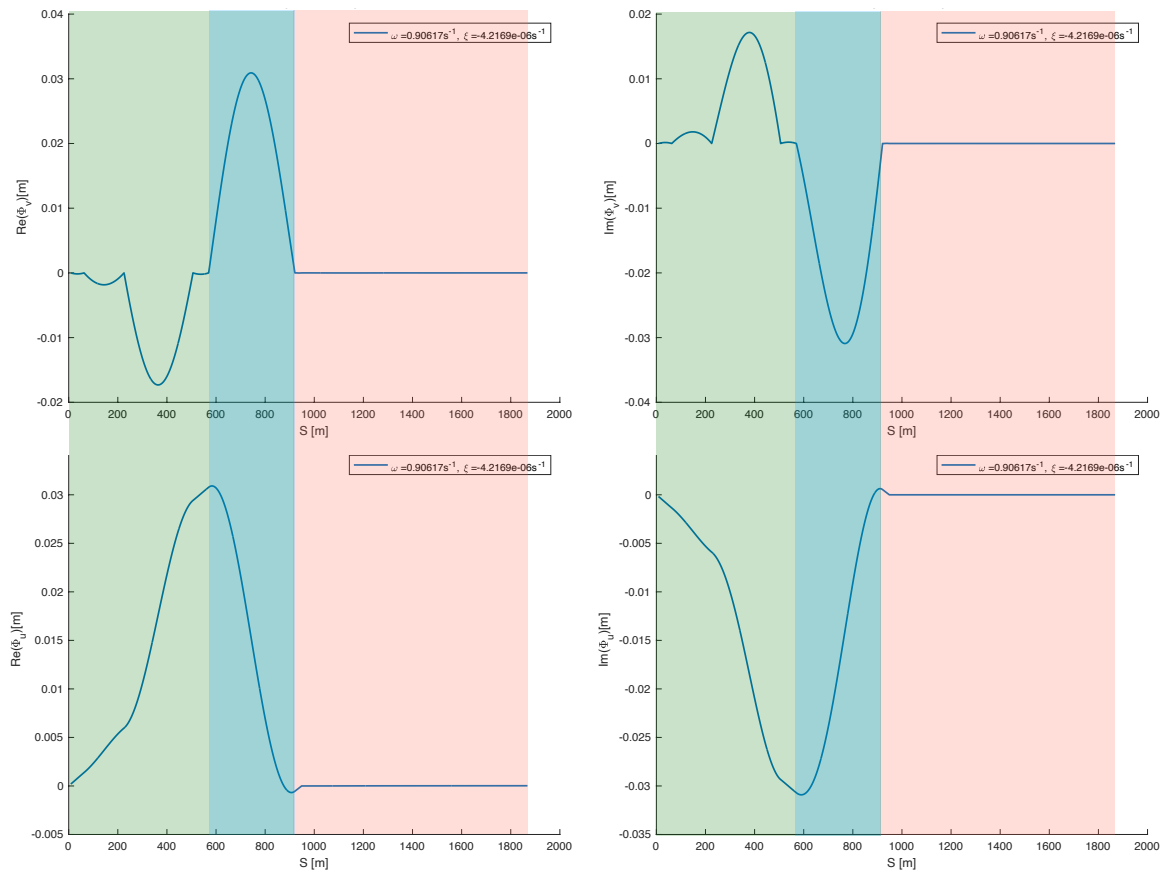


FIGURE 5.39: Mode de pompage de la ligne des Brévières calculé en différenciant les chargements : ligne aller chargée et ligne retour vide

Quatrième niveau : réponse dynamique non-linéaire

Un calcul de la réponse q_{NL} , dont la méthode est détaillée en section 5.3.4, tient compte des contributions non-linéaires activées à grandes amplitudes et rend compte des effets de saturation de la réponse prenant la forme de cycle limite. Le calcul d'une valeur d'accélération et de jerk de la portée donne un critère pour conclure

sur un pompage effectif ou non de la portée concernée.

5.4 Évolution non-stationnaire de la ligne

Le calcul transitoire sur le modèle réduit sur base modale ouvre deux perspectives dans le cadre de ces travaux :

- Une fois le modèle réduit de la ligne obtenu par projection modale, l'étude des cycles limites dans les zones instables identifiées dans la section 5.3 peut être réalisée par intégration temporelle des équations, avec les termes non-linéaires, issues de la géométrie. Les amplitudes de pompage peuvent être ainsi prédites de façon numérique, alternative à une méthodologie combinant développements analytiques et résolution numérique.
- Une intégration temporelle d'une évolution du modèle dynamique réduit sur base modale lorsque les véhicules se déplacent permet d'anticiper les amplitudes de mouvement des câbles lors d'un freinage ou d'une accélération (Fig. 5.40)

Le mouvement de la ligne est **non-stationnaire** lorsque la boucle de câble est phase d'accélération ou de freinage : contrairement au pompage qui se manifeste à vitesse stabilisée, la dynamique déclenchée a pour origine une modification de la translation du câble et conduit à des mouvements globaux de la ligne de câble qu'il est nécessaire d'anticiper sur des installations avec de grandes portées et des flèches importantes. Des désagréments comme le croisement de câble ou le contact des câbles avec le sol sont susceptibles d'intervenir sur la boucle de câble mobile (tracteur) des installations multicâbles, moins tendue et plus sensible aux variations de vitesse.

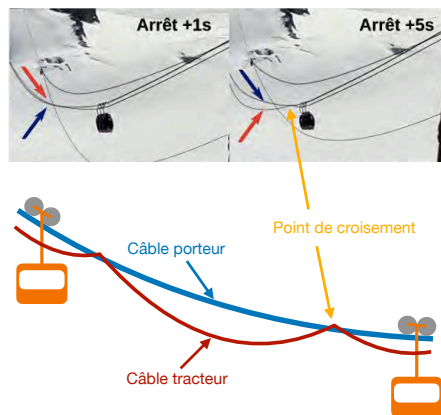


FIGURE 5.40: Illustration du croisement de câbles sur une installation multicâbles

5.4.1 Calcul transitoire équivalent

Approche quasi-statique sur ligne monocâble

Une première approche de la dynamique non-stationnaire est proposée avec l'ajout de termes d'efforts inertiels déduits à chaque étape des évolutions quasi-statiques, avec une estimation de l'accélération par différence finie.

Une application est donnée avec l'évolution des flèches (Fig. 5.41), des tensions (Fig. 5.42) et du couple moteur (Fig. 5.43b), calculés sur l'exemple de la ligne de télécabine des Brévières pour une loi de commande en vitesse imposée qui illustre une séquence de mise en vitesse (Fig. 5.43a). Il est remarquable que la portée 5 sur laquelle le pompage a été identifié précédemment concentre les oscillations une fois le régime de vitesse établi, visibles sur la Fig. 5.41b.

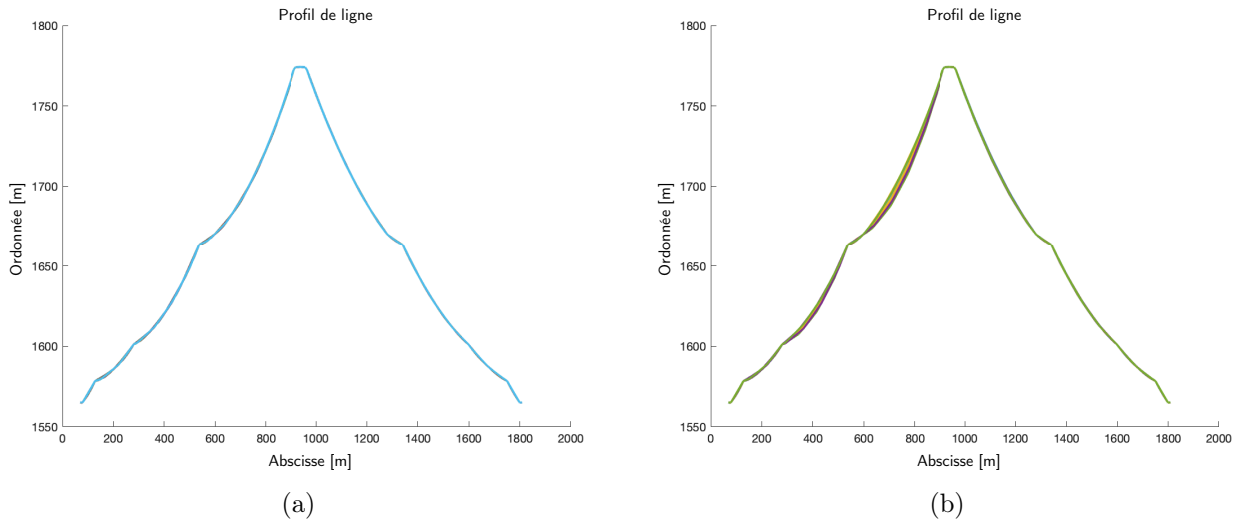


FIGURE 5.41: Évolution quasi-statique du profil de la ligne des Brévières (a) sans correction inertielle à l'avancement, (b) avec correction inertielle à l'avancement

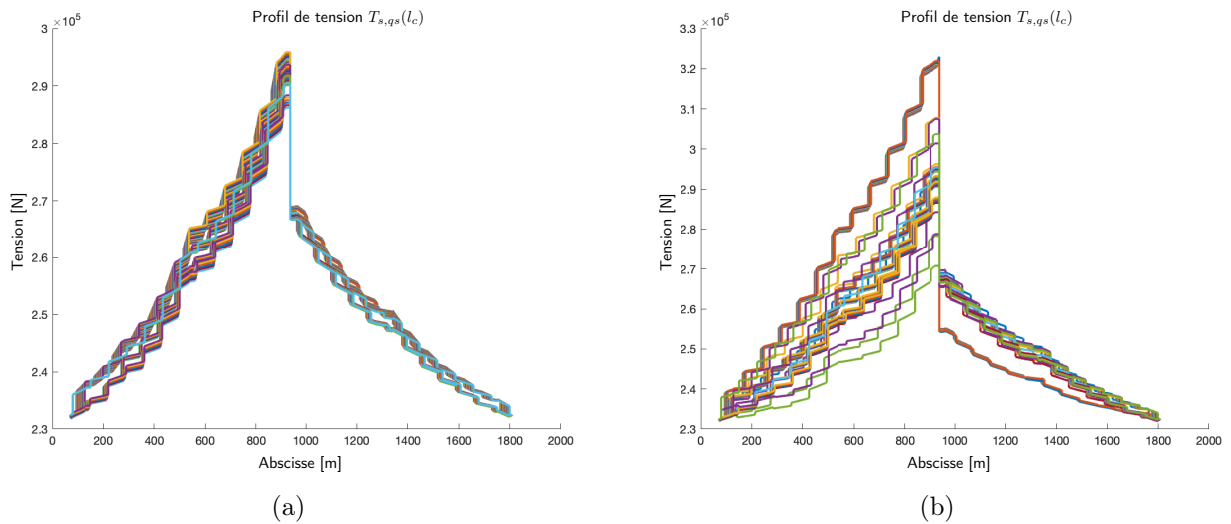


FIGURE 5.42: Évolution quasi-statique de la tension de la ligne des Brévières (a) sans correction inertielle à l'avancement, (b) avec correction inertielle à l'avancement

Approche statique modifiée sur ligne multicâbles

Une deuxième approche de la dynamique non-stationnaire consiste à modifier l'écriture des efforts statiques s'appliquant à un câble en translation, en ajoutant des effets d'inertie dépendant de façon explicite de la vitesse V_0 et de l'accélération A_{V_0} (section 4.1.2 du chapitre 4).

Une application est donnée sur l'exemple du téléphérique de l'Aiguille du Midi tronçon 2 à Chamonix. Une oscillation du câble tracteur suivie d'un dépassement du câble porteur, puis d'un croisement, est observé en-dessous du véhicule de la voie descente lorsque celui-ci est chargé, et pour un freinage réalisé dans le tiers haut de la ligne à une valeur $A_{V_0} = -1.6 \text{ m/s}^2$. Deux calculs de l'équilibre statique sont réalisés respectivement pour $A_{V_0} = 0 \text{ m/s}^2$ (Fig. 5.44) et $A_{V_0} = -1.6 \text{ m/s}^2$ (Fig. 5.45). La différence de flèche Δy entre les deux états statiques obtenus renseigne sur le mouvement du câble pour atteindre le nouvel équilibre sous l'effet du freinage. L'amplitude du mouvement dynamique correspondant est estimée de façon qualitative par $2\Delta y$, en supposant que la déformée du mode de vibration activé lors du freinage est proche de la déformée statique. Cette hypothèse, bien que simplificatrice, est raisonnable pour les premiers modes de ligne qui sont proches d'un mode symétrique du cas ancré-ancré.

L'application au cas pratique proposé permet de retrouver un risque de croisement du câble tracteur avec le

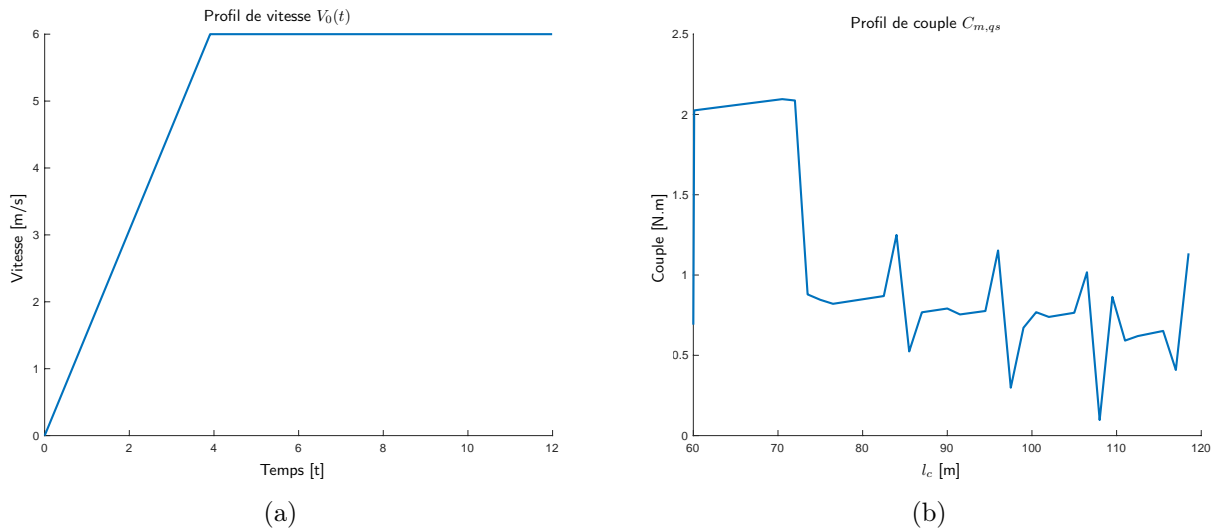


FIGURE 5.43: (a) Profil de vitesse imposé à la poulie motrice et (b) Évolution quasi-statique du couple moteur avec correction inertielle

câble porteur dans la zone incriminée (Fig. 5.45).

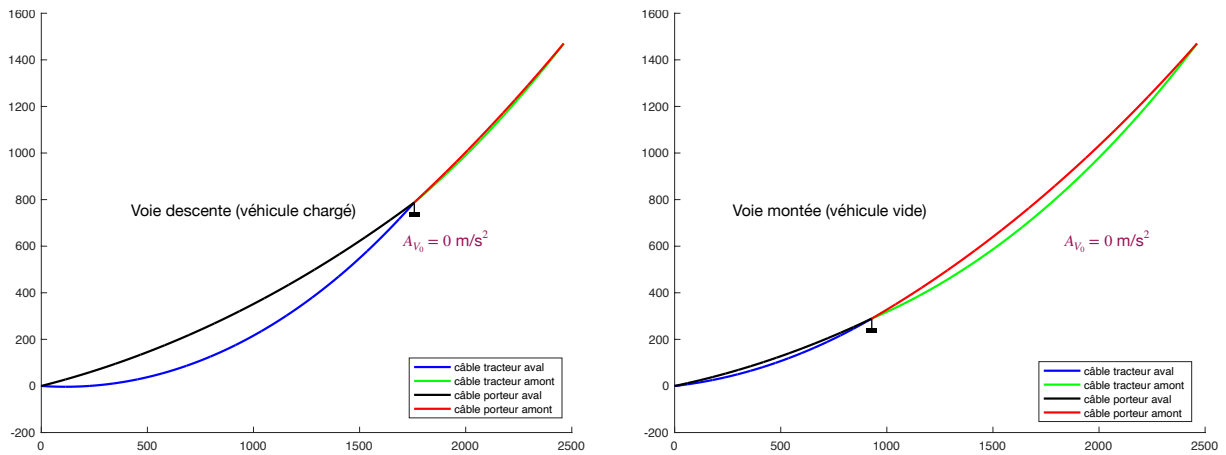


FIGURE 5.44: Calcul de l'équilibre statique de la ligne de téléphérique de l'Aiguille du Midi II à l'arrêt.

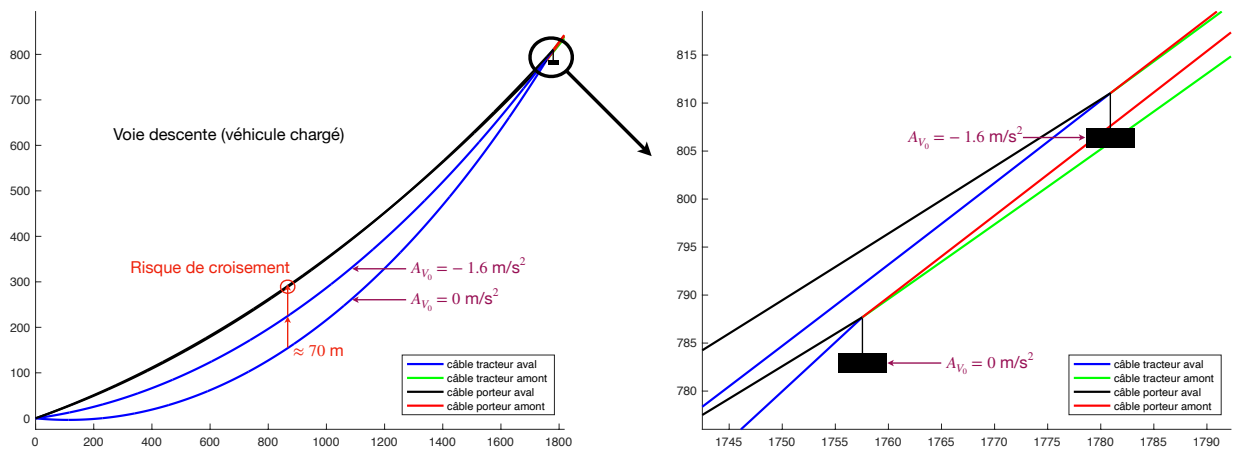


FIGURE 5.45: Calcul de l'équilibre de la ligne du téléphérique de l'Aiguille du Midi II sous l'effet d'un freinage, détection du croisement entre le câble mobile et le câble fixe.

5.4.2 Intégration temporelle sur modèle réduit

La difficulté du problème est de rendre compte de l'avancement de la ligne de câble et des véhicules. Plusieurs méthodes sont possibles :

- Des méthodes numériques appliquées aux structures flexibles en mouvement axial consistent à mailler la géométrie du câble selon la méthode des éléments finis [258]. Avec une description lagrangienne, le maillage suit la matière et est actualisé à chaque pas de temps, ce qui a l'inconvénient d'imposer une taille de maillage constante, conflictuelle avec les différences d'échelles entre le contact et les portées de câble libres, et la création d'oscillations induites numériquement posant des soucis de pratique de convergence dépendant de la taille des éléments [145, 259, 260]. Une description eulérienne repose quant à elle sur des méthodes de type *Arbitrary Lagrangian-Eulerian* (ALE) [153, 261–263] avec des maillages fixes. La procédure de calcul selon ces méthodes s'avérerait néanmoins très coûteuse numériquement pour une application à une ligne complète, compte tenu des longueurs de câble impliquées, des différentes échelles en jeux et de l'aspect multi-corps qui ajoute de nombreuses contraintes. Une attention particulière devrait être portée aux techniques de réduction de modèle.
- En gérant l'avancement de façon quasi-statique par une succession de calculs statiques, la dynamique transitoire est calculée autour de chacun des états statiques. Éventuellement, une réduction sur une base modale instantanée actualisée à chaque pas de temps [14] est réalisée, ou selon une autre stratégie de réduction consistant à construire une base indépendante de la position successive des véhicules (SVD, POD, ...). Une force d'inertie peut être introduite dans l'équation dynamique pour rendre compte de l'avancement selon plusieurs stratégies :
 - Si le calcul dynamique repose sur un modèle discret, les forces inertielles équivalentes sont calculées à chaque pas de temps en estimant les termes inertiels à partir des points du maillage. Les questions d'actualisation du maillage se posent également avec le déplacement du câble.
 - Si le calcul dynamique repose sur des formes continues issues d'une formulation analytique, les forces inertielles dues à l'avancement peuvent être estimées à partir des variations de flèche au cours du déplacement quasi-statique. Le calcul d'un effort dynamique de correction inertielle verticale déduit de l'accélération du câble (méthode cinématique qui repose sur le calcul d'une accélération) ou le calcul d'un effort de tension dynamique à partir des variations de longueur et de flèche dans chaque portée $T_d = EA(\delta u'_d - \kappa_s \delta v_d)$ (méthode en effort qui repose sur le calcul d'un incrément de tension dynamique) sont utilisés.

Dans ces travaux, une méthode dédiée de calcul transitoire d'une ligne de transport par câbles en mouvement est donnée en Annexe O. Elle repose sur une formulation à partir de fonctions de forme continues.

5.5 Analyse dynamique heuristique : cas d'application

Cette section est consacrée à l'étude heuristique de deux cas d'installations sur lesquelles ont été observés des évènements de pompage, à la lumière des modèles et des études présentées dans les sections précédentes 5.3.

5.5.1 Ligne du télésiège des Verneys

Un rapport fourni par l'exploitant du domaine skiable de Valloire renseigne sur les données d'entrée pour caractériser un phénomène de pompage observé sur la ligne du télésiège des Verneys suite à un changement de débit réalisé en 2021 par le constructeur de l'installation, Doppelmayr France.

Observation sur site

- Oscillations verticales du câble à $f_{osc} \approx 0.20$ Hz couplées à un balancement transversal des véhicules à une fréquence double $f_{bal} \approx 0.40$ Hz, localisés entre les pylônes P7 et P8 (Fig. 5.46). D'après les vidéos qui accompagnent le rapport, les côtés aller et retour de la portée 8 oscillent en opposition de phase.
- Déclenchement du phénomène pour une vitesse du câble $V_0 \approx 4.25$ m/s et 58 véhicules vides en ligne. La vidéo montre que lorsqu'un véhicule rentre dans la portée 8 en sortie du P7 côté montée (de façon



FIGURE 5.46: Balancement transversal des véhicules qui accompagne le pompage du câble sur la ligne des Verneys (document Doppelmayr)

concomitante avec la sortie d'un véhicule du P8 côté montée), un véhicule rentre dans la portée 8 en sortie du P8 côté descente environ 2.5 secondes après avec un retard $\tau = \frac{1}{2f_{osc}}$. Les oscillations du câble et des véhicules sont beaucoup moins marquées pour $V_0 = 4.5$ et $V_0 = 5$ m/s, toujours avec 58 véhicules en ligne. Une équipe du constructeur a été dépêchée sur place pour remédier à ce pompage et a enlevé un véhicule sur la ligne. Les oscillations du câble et des véhicules disparaissent à $V_0 = 4.25$ m/s avec 57 véhicules en ligne.

- Absence d'effort extérieur remarquable tel que le vent.

Analyse quasi-statique

- **Tension statique** : Simultanéité du franchissement des pylônes P7 et P8 lorsque 58 véhicules sont en ligne ($l_d \approx 42.25$ m), qui disparaît avec 57 véhicules ($l_d \approx 43$ m).
- **Tension dynamique** : Les effets de transvasement de câble demeurent négligeables dans la portée incriminée lorsque les véhicules sont vides.

L'analyse quasi-statique permet donc d'orienter l'origine de la sollicitation dynamique vers une prépondérance du terme paramétrique T_s^* par rapport à f^* dans l'équation du modèle réduit sur un mode utilisé en 5.3.2, où T_s^* est amplifié par la reprise simultanée du poids des deux véhicules par les appuis adjacents de la portée où sont observés les oscillations.

Analyse dynamique

- **Sélection d'un mode** :

La fréquence fondamentale de l'excitation quasi-statique générée par le défilement périodique du motif de répartition des sièges sur le câble est $f_{qs} = \frac{V_0}{l_d} \approx 0.10$ Hz pour $V_0 = 4.25$ m/s. Une étude paramétrique des fréquences modales de la ligne est réalisée pour les positions successives $l_c \in [0, l_d]$ m afin d'identifier la possibilité d'interaction résonante entre un ou plusieurs modes à la fréquence f avec un multiple de la source d'excitation $f_k = i f_{qs}$, $i \in \mathbf{N}^*$, aux différentes vitesses de fonctionnement $V_0 = [4.25; 4.5; 5]$ m/s qui ont été testées (Fig. 5.47, Fig. 5.48).

Pour $V_0 = 4.25$ m/s, un mode $f_k \approx 0.2$ Hz est susceptible d'interagir avec l'harmonique $n = 2$ de la perturbation dynamique de fréquence fondamentale f_{qs} . De la même façon, la forte densité modale autour des points de fonctionnement à 4.5 et 5 m/s valide la possibilité d'une interaction résonante avec la deuxième harmonique $n = 2$ de la source d'excitation.

- **Localisation de l'énergie vibratoire** :

Le mode de pompage qui est identifié par analyse modale (Fig. 5.49) selon le modèle 4 concentre la vibration dans la portée 8.

- **Réduction de modèle** :

Étant donnés les résultats quasi-statiques qui mettent en évidence une excitation de type paramétrique par

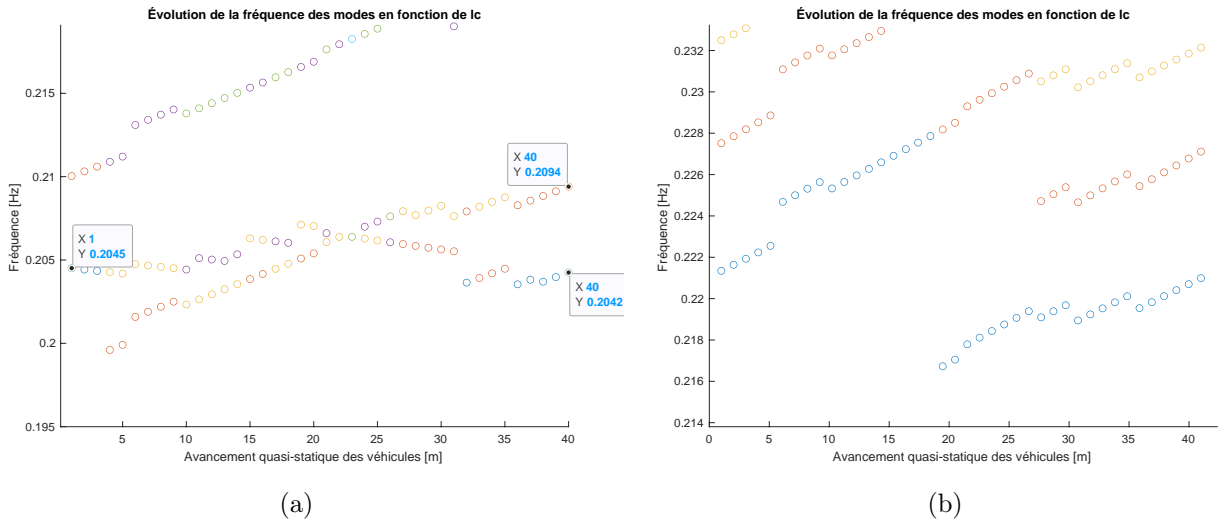


FIGURE 5.47: Étude paramétrique des fréquences modales autour des fréquences d'excitation (a) $2f_{qs} = 0.20$ Hz à 4.25 m/s, (b) $2f_{qs} = 0.22$ Hz à 4.5 m/s

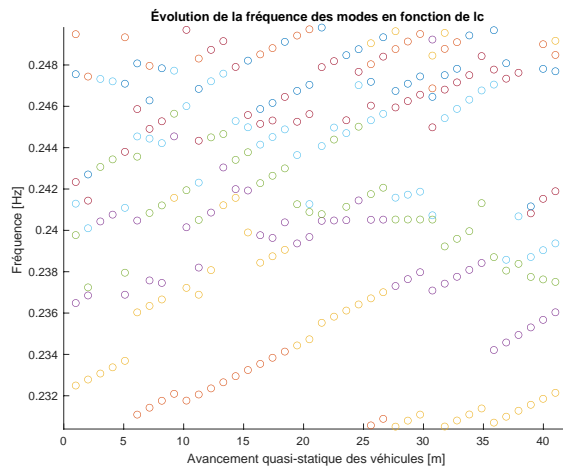


FIGURE 5.48: Étude paramétrique des fréquences modales autour de la fréquence d'excitation $2f_{qs} = 0.24$ Hz à 5 m/s

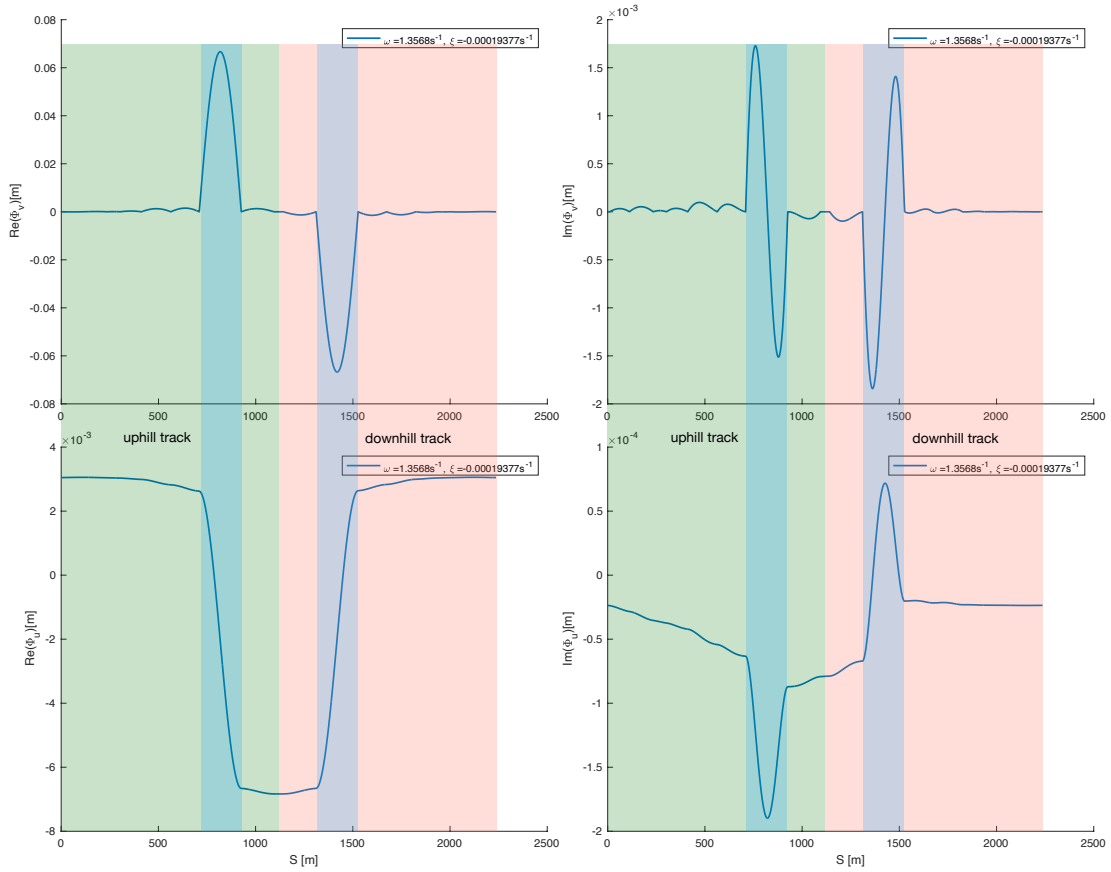


FIGURE 5.49: Identification du mode de pompage de la ligne des Verneys

le franchissement des véhicules sur les appuis, l'équation de Mathieu-Hill, obtenue par projection sur les modes identifiés ci-dessus et qui permet de modéliser la situation rencontrée sur Verneys, ne possède pas de terme de forçage au second membre mais uniquement une source d'excitation paramétrique par $T_s(t)^*$,

$$\frac{d^2q(T)}{dT^2} + \left(\delta + \epsilon T_s^*(T) \right) q(T) = 0 \quad (5.261)$$

avec $\delta \approx 4$, $\epsilon = \frac{A}{\Omega^2} |T_{s,qs}(T)|$ et T_s^* donné par l'analyse quasi-statique. D'après l'analyse en 5.3.4, un tel système est susceptible de présenter un comportement instable si le point de fonctionnement est situé dans la zone d'instabilité. Cependant, aucune information, ou donnée de modélisation, permet à ce stade de discriminer la vitesse $V_0 = 4.25$ m/s par rapport aux deux autres vitesses testées à $V_0 = 4.5$ m/s et $V_0 = 5$ m/s.

Le balancement des véhicules qui est observé à $V_0 = 4.25$ m/s n'est pas pris en compte dans le modèle. Il peut être rajouté par un modèle de pendule pesant en rotation autour de l'axe \underline{t} du câble dont on rechercherait la pulsation propre des oscillations. Le véhicule est relié au câble par une attache et n'est ainsi pas libre en rotation autour de \underline{t} . Il est nécessaire de modéliser la raideur en rotation apportée par le câble par un ressort de torsion. La raideur en torsion du câble utilisée est donnée par [65]. L'équation dynamique du moment du véhicule en rotation θ autour de \underline{t} écrite au point $S = S_v$ d'attache du véhicule de masse M_v , possédant une distance l_g entre son point de gravité et l'axe de rotation, est donnée par

$$M_v l_g^2 \ddot{\theta} + \left(\frac{ER^4 C_4}{l_{pince}} + M_v g l_g \right) \theta = 0, \quad (5.262)$$

avec le terme de rappel $-\frac{ER^4 C_4}{l_{pince}} \theta$ introduit par la raideur en torsion du câble couplé au véhicule par l'attache, où E est le module d'Young du câble, R le rayon du câble, C_4 le coefficient de raideur en torsion donné par Costello dans le modèle IWRC (dépend des caractéristiques du câble) et l_{pince} la longueur

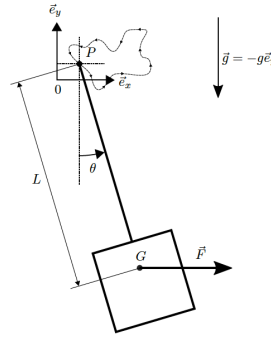


FIGURE 5.50: Pendule sous l'effet d'une excitation paramétrique par mouvement de sa base (d'après [16]).

d'accroche des mors de l'attache sur le câble. Dans la configuration des Verneys : $E \approx 100$ GPa, $R \approx 22.5$ mm, $C_4 \approx 0.04$, $l_{pince} \approx 20$ cm, $M_v \approx 500$ kg, $l_g \approx 2$ m. La fréquence propre du balancement du véhicule est alors estimée

$$f_{bal} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{ER^4 C_4}{M_v l_g^2 l_{pince}} + \frac{g}{l_g}} \approx 0.4 \text{ Hz.} \quad (5.263)$$

Ainsi, le mode de balancement transversal des véhicules est proche du double de la fréquence du mode de pompage $f_p \approx 0.20$ Hz observée à $V_0 = 4.25$ m/s. Un échange d'énergie entre les modes de vibration est rendu possible en pratique par le couplage non-linéaire entre les oscillations du câble et le balancement des véhicules, phénomène typique des systèmes avec des non-linéarités géométriques [264, 265], notamment avec le couplage entre la tension et la torsion du câble dû à sa géométrie toronnée. Les effets de couplage entre la dynamique non-linéaire d'un pendule soumis à une excitation paramétrique introduite par un mouvement de sa base ont été étudiés par Hurel et al. [16, 266, 267] (Fig. 5.50) avec une application à un amortisseur non-linéaire des oscillations pendulaires.

Par ce couplage, l'oscillation du câble à la fréquence de pompage f_p qui est déclenchée par excitation paramétrique due au franchissement des véhicules sur les pylônes, de fondamentale $f_{qs} = \frac{f}{2}$, est à son tour susceptible de déclencher le mode de balancement du véhicule à $f_{bal} \approx 2f$. Le balancement génère ainsi une perturbation au point d'accroche du véhicule qui se transmet au câble sous la forme d'une contribution additionnelle à la deuxième harmonique de la tension T_{s2n} précédemment définie. Par ce mécanisme de couplage, le balancement contribue à la source d'excitation paramétrique de tension T_{s2n} , qui est déstabilisante, et conduit à un comportement instable pour $V_0 = 4.25$ m/s. Pour les vitesses $V_0 = 4.5$ et 5 m/s qui n'induisent pas d'échange d'énergie résonant avec le balancement, les effets seuls du franchissement des véhicules ne suffisent pas à rentrer dans la zone instable.

Interprétation des observations

À la lumière des observations et des modèles proposés, un scénario possible du pompage relevé sur site est proposé :

- L'analyse de stabilité dynamique permet d'envisager un fonctionnement instable de la ligne causé par le franchissement simultané des véhicules des appuis P7 et P8 avec la configuration avec 58 véhicules (**résonance géométrique**) dont le contenu spectral est susceptible d'interagir avec des modes de vibration plan de la ligne.
- Cependant, l'énergie apportée par la perturbation quasi-statique n'est pas suffisante dans la configuration vide des véhicules pour rentrer dans une zone instable en dynamique : un couplage avec le mode de balancement transversal des véhicules autour de $V_0 = 4.25$ m/s est susceptible d'activer l'instabilité paramétrique.

La solution envisagée à ce stade serait de casser la résonance géométrique en modifiant l'espacement entre les véhicules pour supprimer la source d'excitation, tout en s'assurant qu'un autre phénomène ne puisse être activé sur la ligne par un mécanisme similaire.

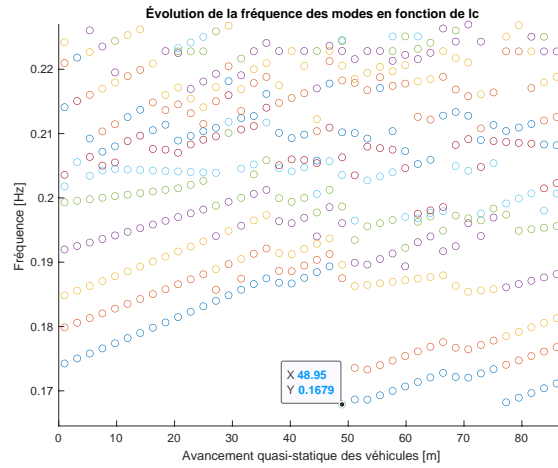


FIGURE 5.51: Étude paramétrique des fréquences modales autour des fréquences d'excitation $3f_{qs} \in [0.18, 0.21]$ Hz

5.5.2 Ligne de télécabine des Bruyères

Un rapport fourni par le constructeur POMA fait état d'un pompage sur la ligne de la télécabine des Bruyères aux Ménuires suite à une augmentation de vitesse de l'installation réalisée en 2019.

Observation sur site

- Un phénomène de pompage qui implique des oscillations verticales du câble est observé localement sur la ligne des Bruyères entre les pylônes P9 et P10.
- Ce phénomène est associé à une vitesse du câble $V_0 \in [5.3, 6]$ m/s pour des véhicules chargés en ligne avec un maximum observé pour $V_0 = 5.7$ m/s. Le phénomène n'est pas observé pour une ligne vide ou moyennement chargée. Les oscillations du câble sont faibles ou inexistantes pour $V_0 = 5$ m/s.
- Le rapport POMA précise que lorsqu'un véhicule est situé au P9, un véhicule est situé à ± 1 m du P10.
- Il n'y a pas d'effort extérieur tel que le vent qui est observé simultanément au pompage.

Analyse quasi-statique

- **Tension statique :** Une coïncidence de franchissement des véhicules dans les portées P8-P9, P9-P10 et P10-P11 est susceptible d'amplifier les perturbations de tension statique.
- **Tension dynamique :** Un effet de transvasement de câble est prépondérant dans la portée P9 - P10

Analyse dynamique

- **Sélection d'un mode de pompage :**

La fréquence fondamentale de l'excitation quasi-statique, générée par le défilement périodique du motif de répartition des sièges sur le câble $f_{qs} = \frac{V_0}{l_d}$, est calculée pour $V_0 \in [5.3, 6]$ m/s : $f_{qs} \in [0.06, 0.07]$ Hz. Une étude paramétrique des fréquences modales de la ligne est réalisée pour les positions successives $l_c \in [0, l_d]$ m afin d'identifier la possibilité d'interaction résonante entre un ou plusieurs modes à la fréquence f avec un multiple de la source d'excitation, $f = i f_{qs}$, $i \in \mathbf{N}^*$, aux différentes vitesses de fonctionnement $V_0 \in [5.3; 6]$ m/s pour lesquelles du pompage est observé (Fig. 5.51).

La forte densité modale pour $f \in [0.18, 0.21]$ Hz valide la possibilité d'une interaction résonante avec la troisième harmonique $n = 3$ de la source d'excitation pour des vitesses de fonctionnement $V_0 \in [5.3; 6]$ m/s. Pour $V_0 = 5$ m/s, $3f_{qs} \approx 0.17$ Hz : les premiers modes de la ligne apparaissent autour de 0.17 Hz de façon discontinue, ce qui indique l'impossibilité d'une interaction résonante à 5 m/s.

- **Localisation de l'énergie vibratoire**

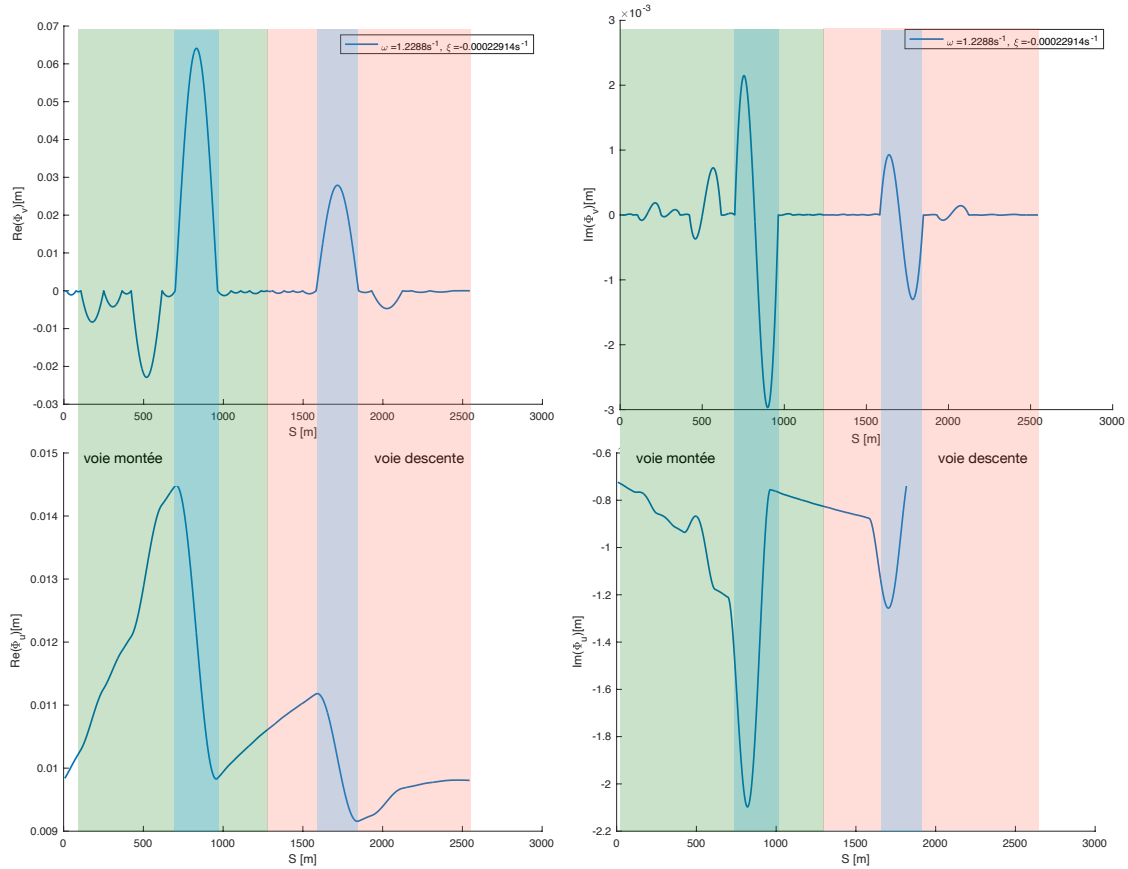


FIGURE 5.52: Identification du mode de pompage de la ligne des Bruyères

Le mode de pompage qui est identifié par analyse modale (Fig. 5.52) selon le modèle 4 concentre la vibration dans la portée 10.

— Réduction de modèle

D'après les observations sur site et les résultats quasi-statiques, une excitation par les effets d'échange de câble entre les portées est privilégiée pour modéliser le pompage sur la portée 10 de la ligne des Bruyères. Une équation d'un oscillateur avec un terme de forçage f^* est ainsi obtenue et autorise une situation d'interaction résonante linéaire classique avec la troisième harmonique de la perturbation dynamique :

$$f^*(T) = T_d^{*c} \cos(3T) + T_d^{*s} \sin(3T),$$

$$\frac{d^2 q(T)}{dT^2} + \delta q(T) = f^*(T). \quad (5.264)$$

Interprétation des observations

À la lumière des observations et des modèles proposés, un scénario possible du pompage relevé sur site est proposé :

- Le pompage observé résulte d'une résonance stable du système dans des conditions pour lesquelles l'amplitude de l'excitation de forçage f^* est suffisamment importante pour que l'amplitude de la vibration à la résonance soit perceptible en ligne.

La solution envisagée à ce stade est d'éviter la coïncidence en fréquence entre le mode de pompage et le défilement des véhicules en faisant varier un paramètre de conception de façon robuste pour éviter toute interaction résonante : cela pourrait par exemple se faire par modification de la tension nominale de la ligne.

Bilan du chapitre

La Fig. 5.53 résume les différents éléments d'analyse de la dynamique d'une ligne de transport par câbles mis en place dans le chapitre 5.

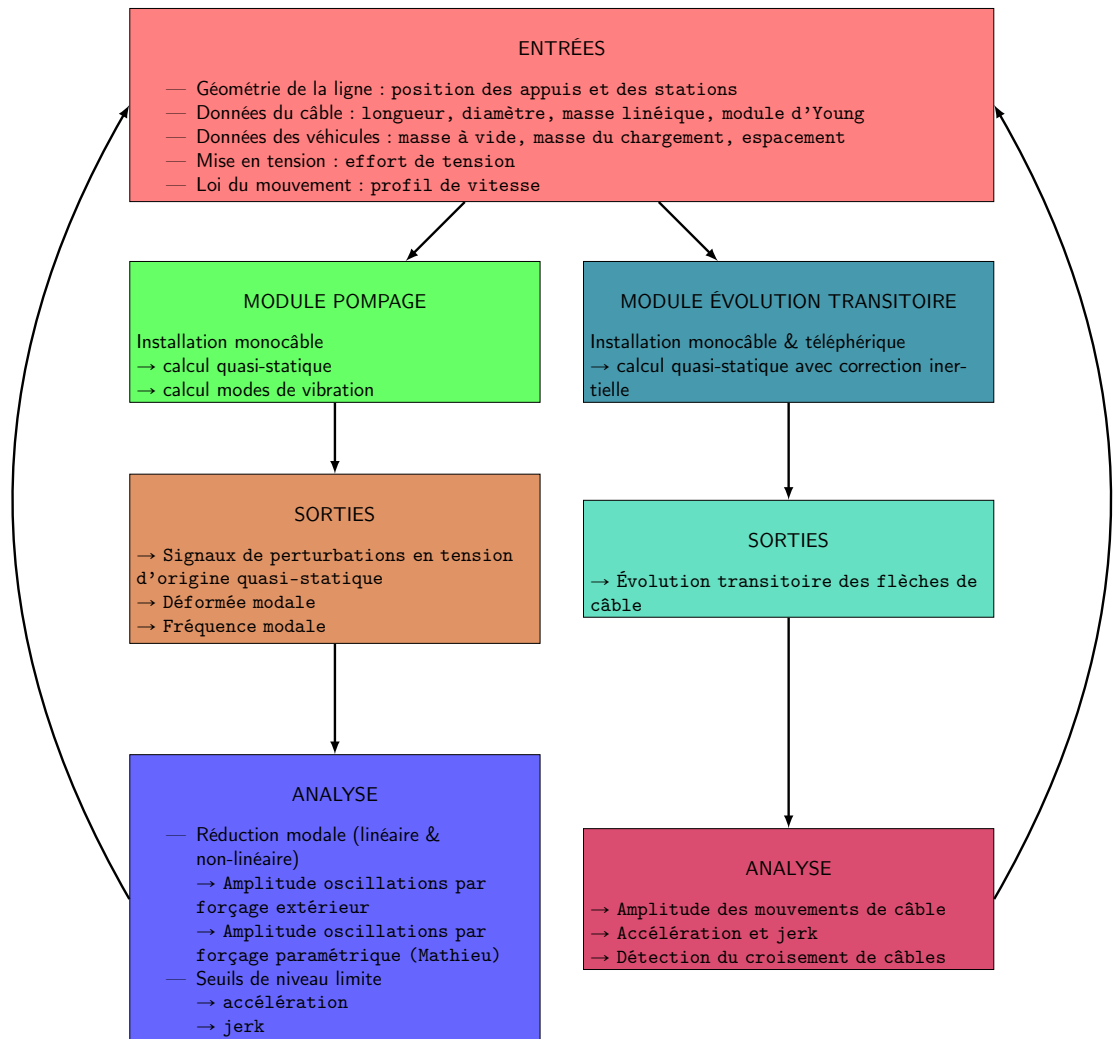


FIGURE 5.53: Synoptique des outils d'analyse dynamique des lignes de transport par câbles

Conclusion et perspectives

Apport scientifique

Plusieurs contributions à l'état de l'art existant constituent l'apport scientifique des travaux présentés dans ce mémoire :

- Tout au long des travaux, l'étude de la modélisation mécanique des milieux élancés permet d'identifier une représentation du câble adaptée au contexte de l'application. En particulier, une discussion sur les hypothèses retenues est menée dans le cadre de la mécanique des milieux continus curvilignes et est justifiée par des calculs réalisés sur des exemples de compréhension.
- Dans les chapitres 2 et 4, une stratégie d'assemblage des éléments de câble est mise en place. La formulation s'appuie sur des solutions analytiques de la statique et de la dynamique du problème de fil, de façon alternative aux méthodes numériques de type éléments finis couramment employées en mécanique des structures et problématiques pour les câbles.
- Dans les chapitres 4 et 5, les modes de vibration d'un assemblage d'éléments de câbles en translation sont définis puis calculés selon une méthode numérique combinée à une formulation analytique du modèle.
- Dans le chapitre 5, une réduction de modèle selon un mode constitue le support de l'étude non-linéaire de la stabilité au sens de Floquet, en présence d'un excitateur paramétrique et des contributions non-linéaires géométriques.

Ces contributions se sont accompagnées du développement d'un ensemble de codes de calculs visant à automatiser la procédure d'assemblage du modèle d'une ligne de transport par câbles, puis à résoudre le problème statique et modal.

Les travaux ont fait l'objet de plusieurs communications scientifiques.

Un article a été soumis dans un journal à comité de lecture, avec pour sujet l'analyse modale d'une ligne de câble en translation et la mise en évidence d'instabilités générées par la vitesse de translation :

- Hugo BÉCU, Claude-Henri LAMARQUE, Alireza TURE SAVADKOOHI (2023), **On the modal characteristics and stability of translating cable : Application to an overall line of cable transport systems**, Engineering Structures, Volume 292,116434, <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.116434>.

Trois participations à des conférences ont été l'occasion de présenter des résultats obtenus à différentes étapes de la thèse :

- **Structural Monitoring of an Aerial Tramway System during Operation : Modeling and Simulation Strategy with Experimental Data Validation**, Experimental Vibration Analysis for Civil Engineering Structures (EVACES), 14-17 septembre 2021, Tokyo, Japon.

La présentation a porté sur les résultats de recalage entre le modèle statique et des mesures d'angles de câbles réalisées sur le téléphérique de l'Aiguille du Midi II en mars 2021. Elle a fait l'objet d'un acte de conférence et d'un article dans une parution spéciale :

- Hugo BÉCU, Claude-Henri LAMARQUE, Alireza TURE SAVADKOOHI, Michel GILLARD, Christophe BOTTOLLIER (2023), **Structural Monitoring of an Aerial Tramway System During Operation : Modeling and Simulation Strategy with Experimental Data Validation**, Experimental Vibration Analysis for Civil Engineering Structures. Lecture Notes in Civil Engineering, vol 224, Springer, Cham, https://doi.org/10.1007/978-3-030-93236-7_21
- Hugo BÉCU, Claude-Henri LAMARQUE, Alireza TURE SAVADKOOHI, Michel GILLARD, Chris-

tophe BOTTOLLIER (2022), **From quasi-static calculation of an aerial tramway system to traveling cycle time optimization**, Artificial Intelligence and Data Science, Volume 3, Issue 2, Pages 27-34, https://doi.org/10.11532/jsceiii.3.2_27

- **Translation of a Cable with a Suspended Mass : Effects on the Vibration Modes**, 30th conference *Vibrations in Physical Systems (VIBSYS 2022)*, 26-28 septembre 2022, Poznan, Pologne.

La présentation a porté sur l'effet d'une mise en vitesse d'une boucle de câble sur les modes de vibrations, en introduisant une correction statique.

- **Modal Analysis of a Time-Variable Ropeway System : Model Reduction and Vibration Instability Detection**, International Modal Analysis Conference (IMAC XLI), 13-16 février 2023, Austin, USA.

La présentation a porté sur la définition des modes de vibration d'une ligne de transport par câbles et l'étude des instabilités d'origine paramétrique. Elle a fait l'objet d'un acte de conférence :

- Hugo BÉCU, Claude-Henri LAMARQUE, Alireza TURE SAVADKOOHI (2023), **Modal Analysis of a Time-Variable Ropeway System : Model Reduction and Vibration Instability Detection**, Topics in Modal Analysis & Parameter Identification, Volume 9, Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series, https://doi.org/10.1007/978-3-031-34942-3_17

Apport industriel

Au-delà de leur contribution scientifiques, les codes de calculs développés au cours de ces travaux sont destinés à une utilisation dans le bureau d'études de l'entreprise DCSA, avec une conception modulaire autorisant une évolution des modèles. Les résultats issus des codes de calcul s'accompagnent d'un ensemble de grilles d'analyse des phénomènes dynamiques affectant les lignes de transport par câbles, présentées dans le chapitre 5 :

- Les grilles d'analyse de pompage de niveaux 1 et 2 sont adaptées pour une utilisation systématique dans un contexte de bureau d'études, en donnant au concepteur des pistes de modifications de la conception. Ce dernier peut par exemple agir de façon ciblée sur les valeurs des excitations d'origine quasi-statique ou sur les modes par l'intermédiaire :
 - De la **tension** appliquée au câble par le dispositif de mise en tension,
 - De la **distance** entre les véhicules,
 - De la **position des pylônes**.
- Les grilles d'analyse de niveaux 3 et 4 apportent une information supplémentaire sur l'amplitude des oscillations de pompage. Elles offrent une opportunité d'automatisation pour optimiser les paramètres de conception. Dans le cas par exemple d'une excitation paramétrique, l'objectif est de positionner le point de fonctionnement (δ, ϵ) de façon à échapper aux zones instables susceptibles de déclencher de fortes oscillations de la ligne. L'optimisation des paramètres de conception demande une évaluation des gradients $\nabla\delta(V_0, l_d, T_{s,qs}, T_{d,qs}, \underline{s}_p, \underline{c}_p, \underline{v}_p)$, $\nabla\epsilon(V_0, l_d, T_{s,qs}, T_{d,qs}, \underline{s}_p, \underline{c}_p, \underline{v}_p)$.
- Une autre grille d'analyse du phénomène de pompage est donnée par l'article " Hugo BÉCU, Claude-Henri LAMARQUE, Alireza TURE SAVADKOOHI (2023), **On the modal characteristics and stability of translating cable : Application to an overall line of cable transport systems**, Engineering Structures, Volume 292,116434, <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.116434>" qui met en évidence des instabilités d'origine algébrique, causées par la translation du câble, qui affectent des modes spécifiques de la ligne de câble.
- La prédiction de l'enveloppe des mouvements dynamiques transitoires lors des freinages de la boucle de câble est donnée par un calcul statique équivalent qui tient compte des effets inertiels.

Perspectives

Plusieurs perspectives sont identifiées pour prolonger les travaux de modélisation et de calculs engagés pendant la thèse, et poursuivre le développement des outils pour l'application métier.

Modélisation pendulaire des véhicules

La modélisation du couplage entre la dynamique du câble et le caractère pendulaire des véhicules qui y sont accrochés constitue une perspective. L'objectif est de coupler le déplacement de l'attache des véhicules, reliée au câble, au mouvement pendulaire des véhicules, et étudier les éventuels effets d'amplification de la réponse dynamique qui en résultent.

Contact câble-appui en dynamique

La notion de discontinuité en tension dynamique aux appuis, représentés de façon ponctuelle, et de la localisation sur la ligne est une question centrale qui est soulevée au chapitre 5 avec l'analyse modale selon le modèle 3. Elle met en exergue la problématique de la représentation ponctuelle du contact combinée à une vision continue par morceaux de l'équilibre statique et dynamique du câble, selon une approche analytico-numérique, et de la compatibilité avec la fermeture du problème de l'assemblage du modèle complet. Des pistes sont proposées pour aller plus loin dans les développements :

- Affiner la description du contact dynamique frottant entre le câble, les véhicules et les appuis selon le modèle analytico-numérique qui a été présenté. Par exemple, une stratégie consiste à initialiser le déplacement longitudinal u nul à tous les appuis et à détecter lorsque les incréments de tension dynamique de part et d'autre de l'appui vérifient la condition de glissement du câble dans une direction ou une autre. En cas de glissement, la contrainte $u = 0$ est relaxée et la relation de Coulomb à la limite du glissement lie les incréments de tension dynamique à l'appui. Lors du franchissement d'un véhicule à l'appui, l'équilibre condensé au niveau de l'appui est modifié par le poids du véhicule et du frottement est introduit entre l'attache et la garniture des galets. En considérant $u = 0$ au point de contact avec le véhicule, le frottement supplémentaire dû au véhicule génère une discontinuité de la tension dynamique, qui est relaxée dès que le véhicule quitte l'appui.
- Construire un modèle dynamique de la ligne basée sur la méthode de Ritz-Galerkin, en recherchant des solutions aux équations de la dynamique sur une base de fonctions cinématiquement admissibles, respectant les conditions de régularité attendues le long de la ligne. La gestion du contact entre les appuis et le câble a une influence sur le choix des fonctions qui forment une base approchée pour la recherche des solutions du déplacement longitudinal, avec une approche continue par morceaux sur chaque portée pour un modèle avec frottement et continu sur l'intégralité de la ligne pour un modèle sans frottement. À partir du nouveau modèle obtenu, une comparaison entre une représentation du contact avec ou sans frottement permet de conclure sur les effets de verrouillage observés dans les travaux au cours du calcul des modes de vibration de la boucle de câble.
- Construire un modèle dynamique numérique de la ligne basé sur un maillage aux éléments finis du câble, couplé à la gestion du contact avec les appuis intermédiaires selon des méthodes de dynamique non-régulière. À partir du nouveau modèle obtenu, une comparaison entre une représentation du contact de façon ponctuelle ou linéique, avec ou sans frottement, permet de conclure sur les effets de verrouillage observés dans les travaux au cours du calcul des modes de vibration de la boucle de câble.

Réduction de modèle à N modes

Pour aller plus loin dans l'analyse de modèle réduit du système, deux pistes sont à poursuivre dans la continuité des travaux présentés dans ce mémoire :

- Réaliser la réduction de modèle de la ligne de câble sur une base modale contenant N modes linéaires afin de prendre en compte la présence de plusieurs modes dans la réponse du système et augmenter la fidélité du modèle vis-à-vis des prédictions des phénomènes dynamiques.
- Enrichir la base de réduction, constituée par les modes linéaires, pour capter les non-linéarités géométriques du modèle dynamique complet. Le but est d'obtenir une meilleure approximation de la réponse dynamique du système dans le contexte des oscillations de grandes amplitudes.

Simulation transitoire

La simulation transitoire est par exemple nécessaire pour aller vers des stratégies de contrôle vibratoire du système et pour l'étude spécifique du franchissement des véhicules sur les appuis intermédiaires. Pour cela, la mise en place d'un modèle numérique complet selon une méthode de type élément finis, formulé de façon adaptée au contexte de câble mobile et couplé à une stratégie d'intégration temporelle numérique, est une approche complémentaire des développements mis en place pendant la thèse.

Démarche expérimentale

À ce stade des travaux et de la connaissance disponible dans l'état de l'art, l'application pratique de l'analyse de pompage de niveaux 3 et 4, ainsi que la prédiction de modes instables sous l'effet de la vitesse, est limitée par l'état de la connaissance des paramètres du système réel. Notamment, l'absence d'une caractérisation précise de l'amortissement des lignes des installations empêche une prédiction robuste des zones d'instabilité du diagramme de stabilité de l'équation de type Mathieu-Hill et la définition d'une vitesse critique au-delà de laquelle des modes instables sont susceptibles d'apparaître. Pour une utilisation robuste des outils développés vis-à-vis de la détection du pompage, il est nécessaire d'envisager des études calcul-essai dans la continuité de ces travaux :

- Des campagnes de mesures du comportement dynamique d'une installation réelle pour confronter les prédictions des modèles avec un système réel,
- Un recalage expérimental des modèles.

Les échelles du système réel soulèvent la question d'une instrumentation adaptée de la ligne de câble pour une caractérisation de la dynamique du système et de l'analyse des données.

Couplage multi-physique

Les questions de contrôle actif du comportement dynamique de la ligne de câble n'ont pas été abordées dans ces travaux. Elles constituent une opportunité par la modélisation du couplage entre le comportement mécanique de la ligne et le système de contrôle-commande du système : chaîne cinématique de l'entraînement (moteur, réducteur, boucle d'asservissement), système de mise en tension (vérin, circuit hydraulique, boucle d'asservissement). Une étude des phénomènes couplés ouvre la voie pour un contrôle des vibrations par des lois de commande adaptées et le recours à de l'analyse massive de données, par une observation de l'état du système en temps réel.

De façon plus globale, la mise en place d'un " jumeau numérique " d'une installation de transport par câble offre des perspectives prometteuses d'optimisation de la conception, aussi bien pour des considérations techniques qu'économiques, d'amélioration de la consommation énergétique, de la stabilité du système, du confort voyageur.

Annexe A

Modèle de câble avec flexion

Problème de la poutre de Galilée

La formulation générale de la statique d'un milieu curviligne sont précisées pour l'étude de l'influence de la flexion :

- la configuration d'équilibre recherchée est écrite par rapport à une configuration de référence non-déformée horizontale de longueur L_R , telle que la position des points sur la configuration de référence soit donnée par

$$\underline{X}_R = S \underline{e}_x \quad S \in (O, L_R) \quad (\text{A.1})$$

- le chargement extérieur est situé dans le plan $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$: le milieu est plongé dans le champ de pesanteur uniforme

$$\underline{f}_R = -\mu_R g \underline{e}_y, \quad (\text{A.2})$$

encastré en son extrémité $S = 0$ et soumis à une force d'orientation θ en $S = L_R$:

$$\underline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}(\cos \theta \underline{e}_x + \sin \theta \underline{e}_y), \quad (\text{A.3})$$

sans forces ou moments ponctuels qui agissent sur le milieu autre part que sur ses bords,

- les modes de flexion et d'extension sont découplés,
- le milieu est constitué d'un matériau élastique linéaire de masse volumique de référence ρ_R et de module d'Young E , de section circulaire A_R et de moment d'inertie I_R autour de \underline{e}_z .

Ces nouvelles hypothèses apportées au problème général formulé en 1.1.2 conduisent à écrire le problème plan en 2D de la poutre de Galilée [84]. En reprenant le formalisme précédemment introduit, les inconnues, les relations géométriques, les équations en effort et en moment, et les lois de comportement sont identifiées.

- **Les inconnues** La position occupée par la configuration déformée,

$$S \mapsto \underline{X}(S). \quad (\text{A.4})$$

L'effort intérieur en chaque point du milieu

$$S \mapsto \underline{R}(S) = N(S) \underline{t}(S) + V(S) \underline{e}_z \wedge \underline{t}(S), \quad (\text{A.5})$$

avec N l'effort normal, V l'effort tranchant. Le moment

$$S \mapsto \underline{M}(S) = M(S) \underline{e}_z, \quad (\text{A.6})$$

avec M le moment fléchissant.

- **Les équations de relations géométriques** Le vecteur tangent

$$\underline{t}(S) = \cos \alpha(S) \underline{e}_x + \sin \alpha(S) \underline{e}_y, \quad (\text{A.7})$$

avec α l'angle de flexion. La déformation

$$\frac{d\underline{X}}{dS}(S) = \frac{ds}{dS}(S) \underline{t}(S), \quad \frac{ds}{dS}(S) > 0 \quad (\text{A.8})$$

— **Les équations d'équilibre en effort**

$$\frac{d\underline{R}(S)}{dS} = \rho_R A_R g \underline{e}_y = \mu_{Rg} \underline{e}_y \quad \forall S \in (0, L_R). \quad (\text{A.9})$$

— **Les équations d'équilibre en moment**

$$\frac{dM}{dS}(S) + \frac{ds}{dS}(S)V(S) = 0 \quad \forall S \in (0, L_R). \quad (\text{A.10})$$

— **Les conditions aux limites**

$$s(0) = 0 \quad \underline{X}(0) = \underline{0} \quad \alpha(0) = 0 \quad (\text{A.11})$$

(encastrement).

$$\underline{R}(L_R) = \mathcal{F}(\cos \theta \underline{e}_x + \sin \theta \underline{e}_y) \quad M(L_R) = 0 \quad (\text{A.12})$$

(effort imposé).

— **Les relations constitutives**

$$N(S) = EA_R \varepsilon = \left(\frac{ds}{dS}(S) - 1 \right) \quad (\text{A.13})$$

(mesure de déformation d'extension).

$$M(S) = EI_R \frac{d\alpha}{dS}(S) \quad (\text{A.14})$$

(mesure de déformation de flexion).

Le problème précédent peut s'écrire sous une forme réduite, avec une équation différentielle non linéaire du second degré exprimée en fonction de l'angle de flexion $\alpha(S)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} EI_R \frac{d^2 \alpha}{dS^2} + \left(1 + \frac{\mathcal{F}}{EA_R} \sin(\theta - \alpha) - \frac{\rho_R A_R L_R}{EA_R} \left(1 - S/L_R \right) \sin \alpha \right) \\ \quad \left(\mathcal{F} \sin(\theta - \alpha) - \rho_R A_R L_R \left(1 - S/L_R \right) \cos \alpha \right) = 0 \\ \\ \alpha(0) = 0 \\ \frac{d\alpha}{dS}(L_R) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.15})$$

Cette équation s'écrit sous forme adimensionnée (A.18) par substitution de l'abscisse curviligne S par le paramètre η et en faisant apparaître la charge de flambement d'Euler \mathcal{F}_0 :

$$\eta = \frac{S}{L_R} \in (0, 1), \quad (\text{A.16})$$

$$\mathcal{F}_0 = \frac{\pi^2 EI_R}{4L_R^2}, \quad (\text{A.17})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \alpha}{d\eta^2} + \frac{\pi^2}{4L_R^2} \left(1 + \frac{\mathcal{F}}{EA_R} \sin(\theta - \alpha) - \frac{\mathcal{P}}{EA_R} (1 - \eta) \sin \alpha \right) \left(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}_0} \sin(\theta - \alpha) - \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{F}_0} (1 - \eta) \cos \alpha \right) = 0 \\ \\ \alpha(0) = 0 \\ \frac{d\alpha}{d\eta}(1) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.18})$$

Développements asymptotiques

La poutre de Galilée est le problème de référence qui permet, à partir des ordres de grandeurs des paramètres géométriques et d'efforts dans le contexte des travaux de cette thèse, de dégager les deux modélisations de fil

et tige envisageables pour le câble. Contrairement au modèle de fil, le modèle de tige est un modèle plus riche qui tient compte de la rigidité en flexion du câble. La position $\underline{X}(S)$ est obtenue par intégration des équations paramétriques du problème de tige pesante exprimées en fonction de l'angle tangent $\alpha(S)$

$$\frac{dx}{dS}(S) = \left(1 + \frac{\mathcal{F}}{EA_R} \sin(\theta - \alpha) - \frac{\rho_R A_R L_R}{EA_R} \left(1 - S/L_R \right) \sin(\alpha) \right) \cos(\alpha), \quad \forall S \in (0, L_R), \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{dy}{dS}(S) = \left(1 + \frac{\mathcal{F}}{EA_R} \sin(\theta - \alpha) - \frac{\rho_R A_R L_R}{EA_R} \left(1 - S/L_R \right) \sin(\alpha) \right) \sin(\alpha), \quad \forall S \in (0, L_R). \quad (\text{A.20})$$

C'est un modèle non-linéaire en l'angle α qui ne possède pas de solution fermée dans le cas général, ce qui impose de passer par des méthodes numériques pour obtenir une solution.

Pour illustrer une méthode de résolution analytique d'un modèle de tige, les développements asymptotiques sont réalisés [17] pour le cas spécifique d'une tige supposée inextensible et de longueur L . Écrit sous forme adimensionnée et exprimé en fonction de l'abscisse curviligne courante $s \in [s_A, s_B]$, le problème d'équilibre plan, avec des appuis poulies aux bords, fait apparaître cinq équations du premier ordre en les quantités adimensionnées

$$\hat{x} = \frac{x}{L} \quad (\text{abscisse}), \quad \hat{y} = \frac{y}{L} \quad (\text{ordonnée}), \quad \alpha \quad (\text{angle}), \quad \hat{\kappa} = \kappa L \quad (\text{courbure}),$$

$$\hat{V} = V / \sqrt{\frac{\mu S g EI}{L}} \quad (\text{effort tranchant}), \quad (\text{A.21})$$

telles que $\forall s \in [s_A, s_B]$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\hat{x}}{d\hat{s}} = \cos(\alpha) \\ \frac{d\hat{y}}{d\hat{s}} = \sin(\alpha) \\ \frac{d\alpha}{d\hat{s}} = \hat{\kappa} \\ \frac{d\hat{\kappa}}{d\hat{s}} = -\hat{V} \\ \nu \frac{d\hat{V}}{d\hat{s}} = -\hat{\kappa}(T_0 + \beta \hat{V} \sin(\alpha)) / \cos(\alpha) + \cos(\alpha). \end{array} \right. \quad (\text{A.22})$$

Le paramètre adimensionné de raideur en flexion :

$$\nu = \sqrt{\frac{EI}{\mu g L^3}} \quad (\text{A.23})$$

est introduit. Trois paramètres inconnus interviennent également avec les abscisses curvilignes des extrémités du câble s_A, s_B et la composante horizontale de tension

$$T_0 = \mathcal{F}_x \quad (\text{A.24})$$

supposée constante. Les données d'entrée aux bords sont les rayons des poulies r , ce qui revient à imposer la courbure au bord

$$\kappa = -\frac{1}{r} \quad (\text{A.25})$$

ou le moment de flexion d'après la loi de comportement élastique $M = EI\kappa$. Trois autres équations géométrique sur l'angle et la position définissent le contact avec la poulie.

Une stratégie de résolution itérative peut être employée pour traiter les équations (A.22). Une alternative est un développement asymptotique en identifiant le système (A.22) à un problème aux bords réguliers avec une perturbation singulière dépendant du petit paramètre de flexion ν ajouté au modèle de fil, sous la forme $\forall \hat{s} = \frac{s-s_A}{L} \in [0, 1]$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta \frac{d\hat{a}}{d\hat{s}} = \underline{h}_1(\hat{a}, \hat{b}, \nu) \\ \frac{d\hat{b}}{d\hat{s}} = \underline{h}_2(\hat{a}, \hat{b}) \end{array} \right. \quad (\text{A.26})$$

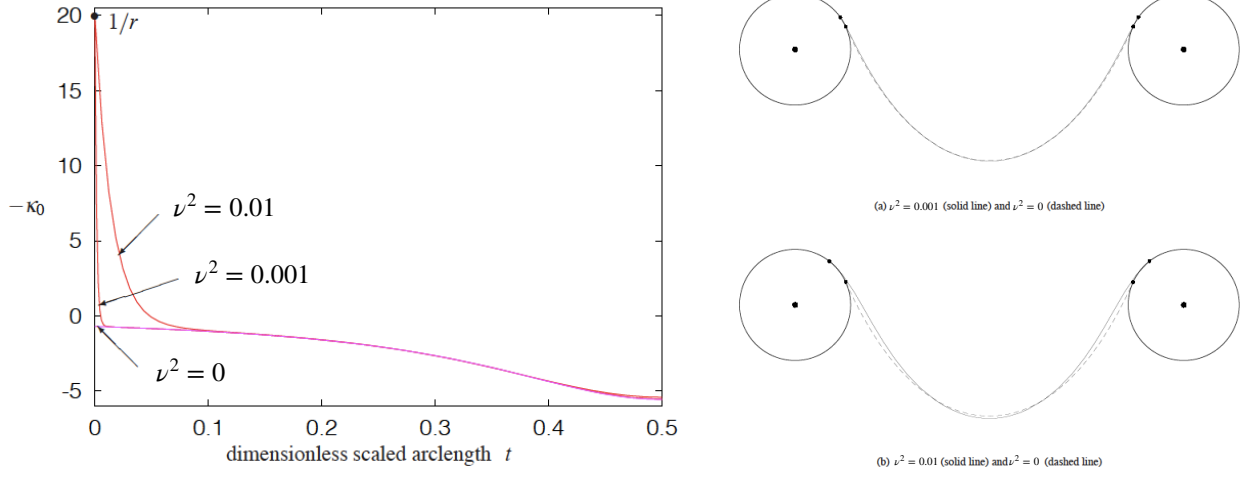


FIGURE A.1: Évolution de la courbure κ en fonction de \hat{s} . Équilibre de la portée de câble pour plusieurs valeurs de ν (d'après [17])

et l'équation aux bords de la forme :

$$\underline{h}_3(\underline{a}(0), \underline{b}(0), \underline{a}(1), \underline{b}(1)) = \underline{0}, \quad (\text{A.27})$$

avec $\underline{a} = (\hat{\kappa}, \hat{V})$ et $\underline{b} = (\hat{y}, \alpha)$.

L'évolution de la courbure κ en fonction de l'abscisse curviligne adimensionnée \hat{s} est donnée en Fig. A.1 (a) pour plusieurs valeurs de paramètre de flexion ν . Pour des valeurs de ν modérées, les effets de flexion affectent en premier lieu les bords (couches limites) autour desquels la solution s'éloigne du modèle de fil. La forme d'équilibre du câble tendu entre deux appuis poulies est tracée en Fig. A.1 (b). Les effets de flexion deviennent significatifs pour $\nu = 0.01$, avec l'augmentation de la couche limite affectée par la flexion qui atteint environ 5 % de la longueur du câble. Le point de contact entre la poulie et le câble est déplacé et la modification de la courbure du câble aux bords a un effet global sur la flèche en milieu de portée.

Annexe B

Résolution des équations de la chaînette inextensible

Le problème aux limites de l'équilibre statique d'un fil pesant présenté dans est rappelé ici. Le milieu est en fixé en son extrémité

$$\underline{X}_B = x_B \underline{e}_x + y_B \underline{e}_y + z_B \underline{e}_z \quad (\text{B.1})$$

d'abscisse curviligne $S = L_R$ et soumis à une force

$$\underline{F} = \mathcal{F}_x \underline{e}_x + \mathcal{F}_y \underline{e}_y + \mathcal{F}_z \underline{e}_z \quad (\text{B.2})$$

en l'extrémité gauche de position

$$\underline{X}_A = x_A \underline{e}_x + y_A \underline{e}_y + z_A \underline{e}_z \quad (\text{B.3})$$

d'abscisse curviligne $S = 0$.

La condition géométrique d'inextensibilité du fil s'écrit en tout point $S \in [0, L_R]$

$$\left\| \frac{d\underline{X}}{dS}(S) \right\| = 1 \quad (\text{B.4})$$

Les conditions aux limites s'écrivent aux points A et B : par définition, la condition en effort au point A se traduit par

$$N(0) \frac{d\underline{X}}{dS}(0) = \mathcal{F}_x \underline{e}_x + \mathcal{F}_y \underline{e}_y + \mathcal{F}_z \underline{e}_z, \quad (\text{B.5})$$

tandis que la position au point B impose

$$\underline{X}(L_R) = x_B \underline{e}_x + y_B \underline{e}_y + z_B \underline{e}_z. \quad (\text{B.6})$$

L'équation d'équilibre du milieu en présence du poids comme seule force extérieure appliquée s'écrit

$$\frac{d}{dS} \left(N(S) \frac{d\underline{X}}{dS} \right) = \mu_R g \underline{e}_y, \quad \forall S \in [0, L_R]. \quad (\text{B.7})$$

Une intégration de l'équilibre entre 0 et une position curviligne courante S en prenant en compte la condition aux limites en 0 donne

$$N(S) \underline{X}'(S) = \mathcal{F}_x \underline{e}_x + (\mathcal{F}_y + \mu_R g S) \underline{e}_y + \mathcal{F}_z \underline{e}_z, \quad \forall S \in [0, L_R]. \quad (\text{B.8})$$

(la notation \bullet' est utilisée pour désigner la dérivée par rapport à S)

En prenant la norme de (E.27) et compte tenu du caractère inextensible du milieu,

$$\|N(S)\| = \sqrt{\mathcal{F}_x^2 + (\mathcal{F}_y + \mu_R g S)^2 + \mathcal{F}_z^2}, \quad \forall S \in [0, L_R]. \quad (\text{B.9})$$

L'hypothèse que le milieu travaille uniquement à la traction est prise en compte : en supposant $N(S) > 0$, $N(S) = \|N(S)\|$ (voir les propriétés des fils). C'est une hypothèse importante qui caractérise le comportement attendu pour un câble.

À partir de (E.28) injectée dans (E.27),

$$\underline{X}'(S) = \frac{\mathcal{F}_x}{\sqrt{\mathcal{F}_x^2 + (\mathcal{F}_y + \mu g S)^2 + \mathcal{F}_z^2}} \underline{e}_x + \frac{\mathcal{F}_y + \mu g S}{\sqrt{\mathcal{F}_x^2 + (\mathcal{F}_y + \mu g S)^2 + \mathcal{F}_z^2}} \underline{e}_y + \frac{\mathcal{F}_z}{\sqrt{\mathcal{F}_x^2 + (\mathcal{F}_y + \mu g S)^2 + \mathcal{F}_z^2}} \underline{e}_z, \quad \forall S \in [0, L_R]. \quad (\text{B.10})$$

Par intégration de (E.29) entre le point A et une abscisse curviligne courante S , l'expression paramétrique de la chaînette en coordonnées curviligne est obtenue :

$$x(S) - x_A = \frac{\mathcal{F}_x}{\mu g} \left[\operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_y + \mu g S}{\sqrt{\mathcal{F}_x^2 + \mathcal{F}_z^2}} \right) - \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_y}{\sqrt{\mathcal{F}_x^2 + \mathcal{F}_z^2}} \right) \right], \quad \forall S \in [0, L_R]. \quad (\text{B.11})$$

$$y(S) - y_A = \frac{\sqrt{\mathcal{F}_x^2 + \mathcal{F}_z^2}}{\mu g} \left[\sqrt{1 + \frac{(\mathcal{F}_y + \mu g S)^2}{\mathcal{F}_x^2 + \mathcal{F}_z^2}} - \sqrt{1 + \frac{\mathcal{F}_y^2}{\mathcal{F}_x^2 + \mathcal{F}_z^2}} \right], \quad \forall S \in [0, L_R]. \quad (\text{B.12})$$

$$z(S) - z_A = \frac{\mathcal{F}_z}{\mu g} \left[\operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_y + \mu g S}{\sqrt{\mathcal{F}_x^2 + \mathcal{F}_z^2}} \right) - \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_y}{\sqrt{\mathcal{F}_x^2 + \mathcal{F}_z^2}} \right) \right], \quad \forall S \in [0, L_R]. \quad (\text{B.13})$$

De la même façon, par intégration de (E.29) entre une abscisse curviligne courante S et le point B , l'expression paramétrique de la chaînette en coordonnées curviligne est obtenue en faisant intervenir la longueur L_R :

$$x(S) - x_B = \frac{\mathcal{F}_x}{\mu g} \left[\operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_y + \mu g S}{\sqrt{\mathcal{F}_x^2 + \mathcal{F}_z^2}} \right) - \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_y + \mu g L_R}{\sqrt{\mathcal{F}_x^2 + \mathcal{F}_z^2}} \right) \right], \quad \forall S \in [0, L_R]. \quad (\text{B.14})$$

$$y(S) - y_B = \frac{\sqrt{\mathcal{F}_x^2 + \mathcal{F}_z^2}}{\mu g} \left[\sqrt{1 + \frac{(\mathcal{F}_y + \mu g S)^2}{\mathcal{F}_x^2 + \mathcal{F}_z^2}} - \sqrt{1 + \frac{(\mathcal{F}_y + \mu g L_R)^2}{\mathcal{F}_x^2 + \mathcal{F}_z^2}} \right], \quad \forall S \in [0, L_R]. \quad (\text{B.15})$$

$$z(S) - z_B = \frac{\mathcal{F}_z}{\mu g} \left[\operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_y + \mu g S}{\sqrt{\mathcal{F}_x^2 + \mathcal{F}_z^2}} \right) - \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_y + \mu g L_R}{\sqrt{\mathcal{F}_x^2 + \mathcal{F}_z^2}} \right) \right], \quad \forall S \in [0, L_R]. \quad (\text{B.16})$$

Pour obtenir l'équation cartésienne de la chaînette sous la forme $y = h(x)$, S et S^2 sont exprimés à partir de l'équation (B.11) avec $\mathcal{F}_z = 0$,

$$S = \frac{\mathcal{F}_x}{\mu g} \sinh \left[\frac{\mu g (x - x_A)}{\mathcal{F}_x} + \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_y}{\mathcal{F}_x} \right) \right] - \frac{\mathcal{F}_y}{\mu g} \quad (\text{B.17})$$

$$S^2 = \left(\frac{\mathcal{F}_x}{\mu g} \right)^2 \sinh^2 \left[\frac{\mu g (x - x_A)}{\mathcal{F}_x} + \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_y}{\mathcal{F}_x} \right) \right] + \left(\frac{\mathcal{F}_y}{\mathcal{F}_x} \right)^2 - \frac{2\mathcal{F}_x \mathcal{F}_y}{(\mu g)^2} \sinh \left[\frac{\mu g (x - x_A)}{\mathcal{F}_x} + \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_y}{\mathcal{F}_x} \right) \right] \quad (\text{B.18})$$

En réinjectant les expressions de S et S^2 dans l'expression (B.12) de $y(S) - y_A$,

$$y(S) - y_A = \frac{\mathcal{F}_x}{\mu g} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\mathcal{F}_y}{\mathcal{F}_x} \right)^2 + \frac{2\mathcal{F}_y \mu g S}{\mathcal{F}_x^2} + \left(\frac{\mu g S}{\mathcal{F}_x} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{\mathcal{F}_y}{\mathcal{F}_x} \right)^2} \right], \quad (\text{B.19})$$

et après changement de variable

$$y(x) = \frac{\mathcal{F}_x}{\mu g} \left(\cosh \left[\frac{\mu g (x - x_A)}{\mathcal{F}_x} + \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_y}{\mathcal{F}_x} \right) \right] - \sqrt{1 + \left(\frac{\mathcal{F}_y}{\mathcal{F}_x} \right)^2} \right) + y_A. \quad (\text{B.20})$$

En notant $\tau = \frac{\mathcal{F}_x}{\mu g}$, $K_1 = \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_y}{\mathcal{F}_x} \right) - \frac{\mu g x_A}{\mathcal{F}_x}$, $K_2 = -\frac{\mathcal{F}_x}{\mu g} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathcal{F}_y}{\mathcal{F}_x} \right)^2} + y_A$,

$$y(x) = \tau \cosh \left(\frac{x}{\tau} + K_1 \right) + K_2 \quad (\text{B.21})$$

De la même façon, en utilisant (B.14) et (B.15),

$$y(x) = \frac{\mathcal{F}_x}{\mu g} \left(\cosh \left[\frac{\mu g(x - x_B)}{\mathcal{F}_x} + \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_y + \mu g L_R}{\mathcal{F}_x} \right) \right] - \sqrt{1 + \left(\frac{\mathcal{F}_y + \mu g L_R}{\mathcal{F}_x} \right)^2} \right) + y_B. \quad (\text{B.22})$$

En notant $\tau = \frac{\mathcal{F}_x}{\mu g}$, $K_1 = \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_y + \mu g L_R}{\mathcal{F}_x} \right) - \frac{\mu g x_B}{\mathcal{F}_x}$, $K_2 = -\frac{\mathcal{F}_x}{\mu g} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathcal{F}_y + \mu g L_R}{\mathcal{F}_x} \right)^2} + y_B$,

$$y(x) = \tau \cosh \left(\frac{x}{\tau} + K_1 \right) + K_2 \quad (\text{B.23})$$

En injectant les expressions (B.17) et (B.18) dans (E.28) avec $\mathcal{F}_z = 0$, la tension dans le fil s'exprime en fonction de τ , K_1 , K_2

$$T(x) = N(S(x)) = \|N(S(x))\| = \mu g \tau \cosh \left(\frac{x}{\tau} + K_1 \right) \quad (\text{B.24})$$

Annexe C

Projection de l'équilibre statique d'un fil

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2u}{dS^2} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{du}{dS} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{dv}{dS} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dS} \right)^2 \right) + \left(\frac{dx_R}{dS} \right)^2 + 3 \frac{du}{dS} \frac{dx_R}{dS} + \frac{dv}{dS} \frac{dy_R}{dS} + \frac{dw}{dS} \frac{dz_R}{dS} \right] \\
& \quad + \frac{d^2v}{dS^2} \left(\frac{dv}{dS} + \frac{dy_R}{dS} \right) \left(\frac{du}{dS} + \frac{dx_R}{dS} \right) + \frac{d^2w}{dS^2} \left(\frac{dw}{dS} + \frac{dz_R}{dS} \right) \left(\frac{du}{dS} + \frac{dx_R}{dS} \right) \\
& + \frac{du}{dS} \left[\frac{d^2x_R}{dS^2} \left(\frac{3}{2} \frac{du}{dS} + 2 \frac{dx_R}{dS} \right) \right] + \frac{dv}{dS} \left[\frac{d^2y_R}{dS^2} \left(\frac{du}{dS} + \frac{dx_R}{dS} + \frac{1}{2} \frac{dv}{dS} + \frac{dy_R}{dS} \right) \right] + \frac{dw}{dS} \left[\frac{d^2z_R}{dS^2} \left(\frac{du}{dS} + \frac{dx_R}{dS} + \frac{1}{2} \frac{dw}{dS} + \frac{dz_R}{dS} \right) \right] \\
& \quad + \frac{d^2u}{dS^2} N_0(S) + \frac{du}{dS} \frac{dN_0}{dS} + \frac{d^2x_R}{dS^2} N_0(S) + \frac{dx_R}{dS} \frac{dN_0}{dS} + \frac{f_{R,x}}{EA_R} = 0 \quad (C.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2u}{dS^2} \left(\frac{du}{dS} + \frac{dx_R}{dS} \right) \left(\frac{dv}{dS} + \frac{dy_R}{dS} \right) \\
& \quad + \frac{d^2v}{dS^2} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{dv}{dS} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{du}{dS} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dS} \right)^2 \right) + \left(\frac{dy_R}{dS} \right)^2 + \frac{du}{dS} \frac{dx_R}{dS} + 3 \frac{dv}{dS} \frac{dy_R}{dS} + \frac{dw}{dS} \frac{dz_R}{dS} \right] \\
& \quad + \frac{d^2w}{dS^2} \left(\frac{dw}{dS} + \frac{dz_R}{dS} \right) \left(\frac{dv}{dS} + \frac{dy_R}{dS} \right) \\
& + \frac{du}{dS} \left[\frac{d^2x_R}{dS^2} \left(\frac{dv}{dS} + \frac{dy_R}{dS} + \frac{1}{2} \frac{du}{dS} + \frac{dx_R}{dS} \right) \right] + \frac{dv}{dS} \left[\frac{d^2y_R}{dS^2} \left(\frac{3}{2} \frac{dv}{dS} + 2 \frac{dy_R}{dS} \right) \right] + \frac{dw}{dS} \left[\frac{d^2z_R}{dS^2} \left(\frac{dv}{dS} + \frac{dy_R}{dS} + \frac{1}{2} \frac{dw}{dS} + \frac{dz_R}{dS} \right) \right] \\
& \quad + \frac{d^2v}{dS^2} N_0(S) + \frac{dv}{dS} \frac{dN_0}{dS} + \frac{d^2y_R}{dS^2} N_0(S) + \frac{dy_R}{dS} \frac{dN_0}{dS} + \frac{f_{R,y}}{EA_R} = 0 \quad (C.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2u}{dS^2} \left(\frac{du}{dS} + \frac{dx_R}{dS} \right) \left(\frac{dw}{dS} + \frac{dz_R}{dS} \right) + \frac{d^2v}{dS^2} \left(\frac{dv}{dS} + \frac{dy_R}{dS} \right) \left(\frac{dw}{dS} + \frac{dz_R}{dS} \right) \\
& \quad + \frac{d^2w}{dS^2} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{dw}{dS} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{du}{dS} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dS} \right)^2 \right) + \left(\frac{dz_R}{dS} \right)^2 + \frac{du}{dS} \frac{dx_R}{dS} + \frac{dv}{dS} \frac{dy_R}{dS} + 3 \frac{dw}{dS} \frac{dz_R}{dS} \right] \\
& + \frac{du}{dS} \left[\frac{d^2x_R}{dS^2} \left(\frac{dw}{dS} + \frac{dz_R}{dS} + \frac{1}{2} \frac{du}{dS} + \frac{dx_R}{dS} \right) \right] + \frac{dv}{dS} \left[\frac{d^2y_R}{dS^2} \left(\frac{dw}{dS} + \frac{dz_R}{dS} + \frac{1}{2} \frac{dv}{dS} + \frac{dy_R}{dS} \right) \right] + \frac{dw}{dS} \left[\frac{d^2z_R}{dS^2} \left(\frac{3}{2} \frac{dw}{dS} + 2 \frac{dz_R}{dS} \right) \right] \\
& \quad + \frac{d^2w}{dS^2} N_0(S) + \frac{dw}{dS} \frac{dN_0}{dS} + \frac{d^2z_R}{dS^2} N_0(S) + \frac{dz_R}{dS} \frac{dN_0}{dS} + \frac{f_{R,z}}{EA_R} = 0 \quad (C.3)
\end{aligned}$$

Annexe D

Allongement élastique selon la chaînette

Processus d'extension par rapport à la configuration inextensible (lagrangien), mesure de déformation $\hat{\varepsilon}$ de l'ingénieur (allongement élastique 1)

La longueur courante l est inconnue, la longueur du câble inextensible L_R est connue.

Expression de la longueur courante en fonction de la longueur non déformée et de l'allongement élastique :

$$l = \int_{S=0}^{L_R} \|\underline{X}'(S)\| dS = \int_{S=0}^{L_R} (1 + \varepsilon(S)) dS = \int_{S=0}^{L_R} \left(1 + \frac{N(S)}{EA_R}\right) dS = L_R + \int_{S=0}^{L_R} \frac{N(S)}{EA_R} dS \quad (D.1)$$

Calcul initial inextensible, résultat d'un calcul préliminaire : $x_{A0}, x_{B0}, \mathcal{F}_{y0}, \mathcal{F}_{x0}$ associé à la configuration $S = [0, L_R]$

Inconnues du calcul élastique : $x_{A1}, x_{B1}, \mathcal{F}_{y1}, \mathcal{F}_{x1}$ associé à la configuration $s = [0, l]$

Changement de variable :

$$dS = \cosh \left[\frac{\mu g(x - x_{A0})}{\mathcal{F}_{x0}} + \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_{y0}}{\mathcal{F}_{x0}} \right) \right] dx, \quad \forall x \in [x_{A0}, x_{B0}] \quad (D.2)$$

Tension :

$$N(x) = \mathcal{F}_{x0} \cosh \left[\frac{\mu g(x - x_{A0})}{\mathcal{F}_{x0}} + \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_{y0}}{\mathcal{F}_{x0}} \right) \right], \quad \forall x \in [x_{A0}, x_{B0}] \quad (D.3)$$

Longueur courante

$$l = \int_{s=0}^l ds = \int_{x=x_{A1}}^{x_{B1}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx = \int_{x=x_{A1}}^{x_{B1}} \cosh \left[\frac{\mu g(x - x_{A1})}{\mathcal{F}_{x1}} + \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_{y1}}{\mathcal{F}_{x1}} \right) \right] dx \quad (D.4)$$

Après avoir réinjecté les expressions de l , $N(S)$ et dS dans l'équation (D.1), il vient

$$\int_{x=x_{A1}}^{x_{B1}} \cosh \left[\frac{\mu g(x - x_{A1})}{\mathcal{F}_{x1}} + \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_{y1}}{\mathcal{F}_{x1}} \right) \right] dx - L_R - \int_{x=x_{A0}}^{x_{B0}} \frac{\mathcal{F}_{x0}}{EA_R} \cosh^2 \left[\frac{\mu g(x - x_{A0})}{\mathcal{F}_{x0}} + \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_{y0}}{\mathcal{F}_{x0}} \right) \right] dx = 0 \quad (D.5)$$

Processus d'extension par rapport à la configuration inextensible (lagrangien), mesure de déformation $\hat{\varepsilon}$ de Green-Lagrange (allongement élastique 2)

La longueur courante l est inconnue, la longueur du câble inextensible L_R est connue.

Expression de la longueur courante en fonction de la longueur non déformée et de l'allongement élastique :

$$l^2 = \int \int_{S=0}^{L_R} (1 + 2\varepsilon(S)) dS^2 = \int \int_{S=0}^{L_R} \left(1 + \frac{2N(S)}{EA_R}\right) dS^2 = L_R^2 + \int \int_{S=0}^{L_R} \frac{2N(S)}{EA_R} dS^2 \quad (D.6)$$

Calcul initial inextensible (cf partie 1.) résultat d'un calcul préliminaire : $x_{A0}, x_{B0}, \mathcal{F}_{y0}, \mathcal{F}_{x0}$ associé à la configuration $S = [0, L_R]$

Inconnues du calcul élastique : $x_{A1}; x_{B1}, \mathcal{F}_{y1}, \mathcal{F}_{x1}$ associé à la configuration $s = [0, l]$

Changement de variable :

$$dS^2 = \cosh^2 \left[\frac{\mu g(x - x_{A0})}{\mathcal{F}_{x0}} + \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_{y0}}{\mathcal{F}_{x0}} \right) \right] dx^2 \quad \forall x \in [x_{A0}, x_{B0}] \quad (\text{D.7})$$

Tension :

$$N(x) = \mathcal{F}_{x0} \cosh \left[\frac{\mu g(x - x_{A0})}{\mathcal{F}_{x0}} + \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_{y0}}{\mathcal{F}_{x0}} \right) \right] \quad \forall x \in [x_{A0}, x_{B0}] \quad (\text{D.8})$$

Longueur courante

$$\begin{aligned} l^2 &= \left[\int_{x=x_{A1}}^{x_{B1}} \cosh \left[\frac{\mu g(x - x_{A1})}{\mathcal{F}_{x1}} + \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_{y1}}{\mathcal{F}_{x1}} \right) \right] dx \right]^2 \\ &= \int_{s=0}^l ds^2 = \int_{x=x_{A1}}^{x_{B1}} 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx^2 = \int_{x=x_{A1}}^{x_{B1}} \cosh^2 \left[\frac{\mu g(x - x_{A1})}{\mathcal{F}_{x1}} + \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_{y1}}{\mathcal{F}_{x1}} \right) \right] dx^2 \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Après avoir réinjecté les expressions de l , $N(x)$ et dS^2 dans l'équation (D.6), il vient

$$\begin{aligned} &\left[\int_{x=x_{A1}}^{x_{B1}} \cosh \left[\frac{\mu g(x - x_{A1})}{\mathcal{F}_{x1}} + \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_{y1}}{\mathcal{F}_{x1}} \right) \right] dx \right]^2 - L_R^2 \\ &\quad - \int_{x=x_{A0}}^{x_{B0}} \frac{2\mathcal{F}_{x0}}{EA_R} \cosh^3 \left[\frac{\mu g(x - x_{A0})}{\mathcal{F}_{x0}} + \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_{y0}}{\mathcal{F}_{x0}} \right) \right] dx^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Processus d'extension calculé sur la configuration déformée (Euler), mesure de déformation $\hat{\varepsilon}$ de l'ingénieur (allongement élastique 3)

La longueur courante l est inconnue, la longueur du câble inextensible L_R est connue.

Expression de la longueur courante en fonction de la longueur non déformée et de l'allongement élastique :

$$l = \int_{S=0}^{L_R} \|\underline{X}'(S)\| dS = L_R + \int_{s=0}^l \frac{\varepsilon(s)}{1 + \varepsilon(s)} ds = L_R + \int_{s=0}^l \frac{N(s)}{EA_R + N(s)} ds \quad (\text{D.11})$$

Inconnues du calcul élastique : coefficients de chaînette $x_{A1}; x_{B1}, \mathcal{F}_{y1}, \mathcal{F}_{x1}$ associés à la configuration $s = [0, l]$

Changement de variable :

$$ds = \cosh \left[\frac{\mu g(x - x_{A1})}{\mathcal{F}_{x1}} + \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_{y1}}{\mathcal{F}_{x1}} \right) \right] dx, \quad \forall x \in [x_{A1}, x_{B1}] \quad (\text{D.12})$$

Tension :

$$N(x) = \mathcal{F}_{x1} \cosh \left[\frac{\mu g(x - x_{A1})}{\mathcal{F}_{x1}} + \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_{y1}}{\mathcal{F}_{x1}} \right) \right], \quad \forall x \in [x_{A1}, x_{B1}] \quad (\text{D.13})$$

Longueur courante

$$l = \int_{s=0}^l ds = \int_{x=x_{A1}}^{x_{B1}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx = \int_{x=x_{A1}}^{x_{B1}} \cosh \left[\frac{\mu g(x - x_{A1})}{\mathcal{F}_{x1}} + \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_{y1}}{\mathcal{F}_{x1}} \right) \right] dx \quad (\text{D.14})$$

Après avoir réinjecté les expressions de l , $N(x)$ et ds dans l'équation (D.11), il vient

$$\int_{x=x_{A_1}}^{x_{B_1}} \cosh \left[\frac{\mu g(x-x_{A_1})}{\mathcal{F}_{x_1}} + \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_{y_1}}{\mathcal{F}_{x_1}} \right) \right] dx - L_R - \int_{x=x_{A_1}}^{x_{B_1}} \frac{\mathcal{F}_{x_1} \cosh^2 \left[\frac{\mu g(x-x_{A_1})}{\mathcal{F}_{x_1}} + \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_{y_1}}{\mathcal{F}_{x_1}} \right) \right]}{EA_R + \mathcal{F}_{x_1} \cosh \left[\frac{\mu g(x-x_{A_1})}{\mathcal{F}_{x_1}} + \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_{y_1}}{\mathcal{F}_{x_1}} \right) \right]} dx = 0 \quad (\text{D.15})$$

Processus d'extension calculé sur la configuration déformée (Euler), mesure de déformation $\hat{\varepsilon}$ de Green-Lagrange (allongement élastique 4)

La longueur courante l est inconnue, la longueur du câble inextensible L_R est connue.

Expression de la longueur courante en fonction de la longueur non déformée et de l'allongement élastique :

$$l^2 = \int \int_{S=0}^{L_R} (1 + 2\varepsilon(S)) dS^2 = \int \int_{S=0}^{L_R} \left(1 + \frac{2N(S)}{EA_R} \right) dS^2 = L_R^2 + \int \int_{S=0}^l \frac{2N(s)}{EA_R(1 + N(s)/EA_R)^2} ds^2 \quad (\text{D.16})$$

Inconnues du calcul élastique : coefficients de chaînette $x_{A_1}; x_{B_1}, \mathcal{F}_{y_1}, \mathcal{F}_{x_1}$ associés à la configuration $s = [0, l]$

Changement de variable :

$$ds^2 = \cosh^2 \left[\frac{\mu g(x-x_{A_1})}{\mathcal{F}_{x_1}} + \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_{y_1}}{\mathcal{F}_{x_1}} \right) \right] dx^2, \quad \forall x \in [x_{A_1}, x_{B_1}] \quad (\text{D.17})$$

Tension :

$$N(x) = \mathcal{F}_{x_1} \cosh \left[\frac{\mu g(x-x_{A_1})}{\mathcal{F}_{x_1}} + \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_{y_1}}{\mathcal{F}_{x_1}} \right) \right], \quad \forall x \in [x_{A_1}, x_{B_1}] \quad (\text{D.18})$$

Longueur courante

$$l^2 = \left[\int_{x=x_{A_1}}^{x_{B_1}} \cosh \left[\frac{\mu g(x-x_{A_1})}{\mathcal{F}_{x_1}} + \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_{y_1}}{\mathcal{F}_{x_1}} \right) \right] dx \right]^2 = \int \int_{s=0}^l ds^2 = \int \int_{x=x_{A_1}}^{x_{B_1}} 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx^2 = \int \int_{x=x_{A_1}}^{x_{B_1}} \cosh^2 \left[\frac{\mu g(x-x_{A_1})}{\mathcal{F}_{x_1}} + \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_{y_1}}{\mathcal{F}_{x_1}} \right) \right] dx^2 \quad (\text{D.19})$$

Après avoir réinjecté les expressions de l , $N(x)$ et ds^2 dans l'équation (D.16), il vient

$$\left[\int_{x=x_{A_1}}^{x_{B_1}} \cosh \left[\frac{\mu g(x-x_{A_1})}{\mathcal{F}_{x_1}} + \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_{y_1}}{\mathcal{F}_{x_1}} \right) \right] dx \right]^2 - L_R^2 - \int \int_{x=x_{A_0}}^{x_{B_0}} \frac{2\mathcal{F}_{x_0} \cosh^3 \left[\frac{\mu g(x-x_{A_0})}{\mathcal{F}_{x_0}} + \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_{y_0}}{\mathcal{F}_{x_0}} \right) \right]}{EA_R \left(1 + \frac{\mathcal{F}_{x_0}}{EA_R} \cosh \left[\frac{\mu g(x-x_{A_0})}{\mathcal{F}_{x_0}} + \operatorname{argsh} \left(\frac{\mathcal{F}_{y_0}}{\mathcal{F}_{x_0}} \right) \right] \right)^2} dx^2 = 0 \quad (\text{D.20})$$

Annexe E

Modèle de tige

Par commodité, les dérivées par rapport à S sont désignées par \bullet' .

- Une loi de constitution Ψ élastique linéaire est spécifiée pour les efforts et les moments, en supposant le **découplage** entre les différentes grandeurs :

$$N(S) = EA_R \hat{\varepsilon} + N_0(S), \quad (\text{E.1})$$

$$\underline{M}(S) = EI_\phi \kappa_\phi \underline{n}_1 + EI_\alpha \kappa_\alpha \underline{n}_2, \quad (\text{E.2})$$

avec I_ϕ et I_α les **moments quadratiques** respectivement autour de \underline{n}_1 et \underline{n}_2 . Aucune contrainte sur le comportement à la traction n'est imposée car il est attendu que le modèle de tige puisse rendre compte de situations pour lesquelles l'activation du mode de flexion s'accompagne d'une mise en compression locale du câble, là où le modèle de fil échoue à rendre compte de la physique en jeu.

- Les moments quadratiques I_ϕ et I_α sont supposés **uniformes** le long du câble.

La relation constitutive (E.2) est utilisée dans l'équilibre des moments (2.65),

$$EI_\phi(\kappa'_\phi \underline{n}_1 + \kappa_\phi \underline{n}'_1) + EI_\alpha(\kappa'_\alpha \underline{n}_2 + \kappa_\alpha \underline{n}'_2) + \|\underline{X}'\| (-V_2(S)\underline{n}_1 + V_1(S)\underline{n}_2) = \underline{0}. \quad (\text{E.3})$$

Les dérivées des vecteurs de la base locale $\underline{n}'_1, \underline{n}'_2$ s'expriment en fonction des angles α, ϕ et de leurs dérivées par rapport à S ,

$$\underline{t}' = \alpha' \cos(\phi) \underline{n}_1 + \phi' \underline{n}_2 \quad (\text{E.4})$$

$$\underline{n}'_1 = -\alpha' \cos(\phi) \underline{t} + \alpha' \sin(\phi) \underline{n}_2 \quad (\text{E.5})$$

$$\underline{n}'_2 = \left(\frac{d\underline{t}}{dS} \wedge \underline{n}_1 \right) + \left(\underline{t} \wedge \frac{d\underline{n}_1}{dS} \right) = -\phi' \underline{t} - \alpha' \sin \phi \underline{n}_1 \quad (\text{E.6})$$

Avec $\phi_R(S)$ et $\alpha_R(S)$ les angles de flexions pris sur la configuration de référence, les déformations de courbures en flexion κ_ϕ et κ_α s'expriment à partir de l'expression du vecteur tangent dans la base locale et de sa dérivée projetée selon les vecteurs normaux \underline{n}_1 et \underline{n}_2 ,

$$\underline{X}' = \|\underline{X}'\| \underline{t} \quad (\text{E.7})$$

$$\underline{X}'' = \|\underline{X}'\|' \underline{t} + \|\underline{X}'\| \underline{t}' \quad (\text{E.8})$$

$$\underline{X}'' \cdot \underline{n}_2 = \|\underline{X}'\| \underline{t}' \cdot \underline{n}_2 = \|\underline{X}'\| \phi' \quad (\text{E.9})$$

$$\underline{X}'' \cdot \underline{n}_1 = \|\underline{X}'\| \underline{t}' \cdot \underline{n}_1 = \|\underline{X}'\| \cos(\phi) \alpha' \quad (\text{E.10})$$

Soit

$$\kappa_\phi = \phi' - \phi'_R = \frac{\underline{X}'' \cdot (\underline{X}' \wedge \underline{n}_1)}{\|\underline{X}'\|^2} - \phi'_R \quad (\text{E.11})$$

$$\kappa_\alpha = \alpha' - \alpha'_R = \frac{\underline{X}'' \cdot (\underline{n}_2 \wedge \underline{X}')}{\|\underline{X}'\|^2 \cos \phi} - \alpha'_R \quad (\text{E.12})$$

Les fonctions trigonométriques $\cos(\phi)$, $\sin(\phi)$, $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$ s'écrivent en fonction de la position $\underline{X} = \underline{X}_R + \underline{U}$ afin d'aboutir à une formulation en déplacement,

$$\cos(\phi) \cos(\alpha) = \underline{t} \cdot \underline{e}_x \quad \cos(\phi) \sin(\alpha) = \underline{t} \cdot \underline{e}_y \quad \sin(\phi) = \underline{t} \cdot \underline{e}_z \quad (\text{E.13})$$

Il vient

$$\cos(\phi) = \frac{\sqrt{\|\underline{X}'\|^2 - (\underline{X}' \cdot \underline{e}_z)^2}}{\|\underline{X}'\|} \quad (\text{E.14})$$

$$\sin(\phi) = \frac{(\underline{X}') \cdot \underline{e}_z}{\|\underline{X}'\|} \quad (\text{E.15})$$

$$\cos(\alpha) = \frac{(\underline{X}') \cdot \underline{e}_x}{\sqrt{\|\underline{X}'\|^2 - (\underline{X}' \cdot \underline{e}_z)^2}} \quad (\text{E.16})$$

$$\sin(\alpha) = \frac{(\underline{X}') \cdot \underline{e}_y}{\sqrt{\|\underline{X}'\|^2 - (\underline{X}' \cdot \underline{e}_z)^2}} \quad (\text{E.17})$$

Il est fait l'hypothèse pour la suite des développements que la configuration de référence \mathcal{C}_R n'est **pas précontrainte** et **rectiligne**, c'est-à-dire avec une courbure nulle :

$$\phi'_R = \alpha'_R = 0 \quad N_0 = 0. \quad (\text{E.18})$$

Les dérivées d'ordre supérieurs ou égal à 2 en \underline{X}_R sont ainsi annulées.

La dérivée seconde des angles de flexions est obtenue par dérivation des équations (E.11) (E.12),

$$\kappa'_\phi = \phi'' = \frac{\left[\underline{X}''' \|\underline{X}'\|^2 - \underline{X}'' \underline{X}' \cdot \underline{X}'' \right] \cdot \underline{n}_2 + \underline{X}'' \|\underline{X}'\|^2 \cdot \underline{n}'_2}{\|\underline{X}'\|^3}, \quad (\text{E.19})$$

$$\kappa'_\alpha = \alpha'' = \frac{\left[\underline{X}''' \|\underline{X}'\|^2 \cos(\phi) - \underline{X}'' [\|\underline{X}'\|^2 \phi' \sin(\phi) - \underline{X}' \cdot \underline{X}'' \cos(\phi)] \right] \cdot \underline{n}_1 + \underline{X}'' \|\underline{X}'\|^2 \cos(\phi) \cdot \underline{n}'_1}{\|\underline{X}'\|^3 \cos^2(\phi)}. \quad (\text{E.20})$$

L'équation (E.3) est écrite sur les vecteurs de la base locale courante par développement des dérivées \underline{n}'_1 , \underline{n}'_2 ,

$$\begin{aligned} - [EI_\alpha \kappa_\phi \alpha' \cos(\phi) + EI_\alpha \kappa_\alpha \phi'] \cdot \underline{t} + [EI_\phi \kappa'_\phi - EI_\alpha \kappa_\alpha \alpha' \sin(\phi) - \|\underline{X}'\| V_2(S)] \cdot \underline{n}_1 \\ + [EI_\phi \kappa_\phi \alpha' \sin(\phi) - EI_\alpha \kappa'_\alpha + \|\underline{X}'\| V_1(S)] \cdot \underline{n}_2 = \underline{0} \quad (\text{E.21}) \end{aligned}$$

Un moment de torsion $-[EI_\alpha \kappa_\phi \alpha' \cos \phi + EI_\alpha \kappa_\alpha \phi']$ non compensé apparait selon le vecteur \underline{t} . Celui-ci est dû au couplage non-linéaire des angles de flexion. Dans ce modèle de tige, la torsion n'est pas modélisée et ce terme n'est donc pas pris en compte dans les calculs.

Les efforts tranchants $V_1(S)$ et $V_2(S)$ s'écrivent alors,

$$V_1(S) = \frac{-E[I_\phi \kappa_\phi \alpha' \sin(\phi) - I_\alpha \kappa'_\alpha]}{\|\underline{X}'\|} \quad (\text{E.22})$$

$$V_2(S) = \frac{E[I_\phi \kappa'_\phi - I_\alpha \kappa_\alpha \alpha' \sin(\phi)]}{\|\underline{X}'\|} \quad (\text{E.23})$$

L'équation (2.64) est écrite dans le repère local pour mieux distinguer les contributions des efforts et des moments selon chaque direction de l'orientation du milieu. La projection des équations de l'équilibre des forces (2.64) sur

la base locale donne trois équations écrites en fonction du déplacement \underline{U} ,

$$\text{selon } \underline{t} : N'(\underline{U}) - V_1(\underline{U})\alpha(\underline{U})' \cos \phi(\underline{U}) - V_2(\underline{U})\phi(\underline{U})' + \underline{f}_R \cdot \underline{t} = 0 \quad (\text{E.24})$$

$$\text{selon } \underline{n}_1 : N(\underline{U})\alpha(\underline{U})' \cos \phi(\underline{U}) + V_1'(\underline{U}) - V_2(\underline{U})\alpha'(\underline{U}) \sin \phi(\underline{U}) + \underline{f}_R \cdot \underline{n}_1 = 0 \quad (\text{E.25})$$

$$\text{selon } \underline{n}_2 : N(\underline{U})\phi'(\underline{U}) + V_1(\underline{U})\alpha'(\underline{U}) \sin \phi(\underline{U}) + V_2'(\underline{U}) + \underline{f}_R \cdot \underline{n}_2 = 0 \quad (\text{E.26})$$

À ce stade des développements, il est fait le choix de ne pas prendre en compte les termes de couplage entre les modes de flexion α et ϕ présents dans l'expression des efforts tranchants (E.22) (E.23) et dans l'équilibre en effort (E.24) (E.25) (E.26) :

$$\begin{aligned} -EI_\phi \kappa_\phi(\underline{U})\alpha'(\underline{U}) \sin \phi(\underline{U}), & \quad -EI_\alpha \kappa_\alpha(\underline{U})\alpha'(\underline{U}) \sin \phi(\underline{U}), \\ V_1(\underline{U})\alpha(\underline{U})' \cos \phi(\underline{U}), & \quad V_2(\underline{U})\phi(\underline{U})', \\ V_1(\underline{U})\alpha'(\underline{U}) \sin \phi(\underline{U}), & \quad -V_2(\underline{U})\alpha'(\underline{U}) \sin \phi(\underline{U}), \end{aligned}$$

Ces couplages introduisent une dépendance non-linéaires aux variations α' et ϕ' de degré plus élevé ou égal à deux qui est au second ordre en supposant que les courbures restent modérées $\alpha' < 1$, $\phi' < 1$,

De la même façon, en conservant uniquement les termes de degrés le plus petit en ϕ' et α' dans les expressions des dérivées des efforts tranchants V_1' et V_2' , les équations (E.24) (E.25) (E.26) se réécrivent,

$$\underline{t} : EA_R (\underline{U}'' \cdot \underline{X}'_R + \underline{U}' \cdot \underline{U}'') + \underline{f}_R \cdot \underline{t} = 0 \quad (\text{E.27})$$

$$\begin{aligned} \underline{n}_1 : EA_R \left(\underline{U}' \cdot \underline{X}'_R + \frac{1}{2} \|\underline{U}'\|^2 \right) \frac{\underline{U}'' \cdot (\underline{n}_2 \wedge (\underline{X}'_R + \underline{U}'))}{\|\underline{X}'_R + \underline{U}'\|^2} \\ + EI_\alpha \left[\underline{U}''' \|\underline{X}'_R + \underline{U}'\| \cos(\phi) + \underline{U}''' \left(\frac{(\underline{X}'_R + \underline{U}') \cdot \underline{U}''}{\|\underline{X}'_R + \underline{U}'\|} \cos(\phi) + \frac{(\underline{X}'_R + \underline{U}') \cdot \underline{U}''}{\|\underline{X}'_R + \underline{U}'\| \cos(\phi)} \right) + \underline{U}'' \frac{[(\underline{X}'_R + \underline{U}') \cdot \underline{U}'']^2}{\|\underline{X}'_R + \underline{U}'\|^3 \cos(\phi)} \right] \cdot \underline{n}_1 \\ + \underline{f}_R \cdot \underline{n}_1 = 0 \quad (\text{E.28}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{n}_2 : EA_R \left(\underline{U}' \cdot \underline{X}'_R + \frac{1}{2} \|\underline{U}'\|^2 \right) \frac{\underline{U}'' \cdot ((\underline{X}'_R + \underline{U}') \wedge \underline{n}_1)}{\|\underline{X}'_R + \underline{U}'\|^2} \\ - EI_\phi \left[-\underline{U}''' \|\underline{X}'_R + \underline{U}'\| + \underline{U}''' \frac{2(\underline{X}'_R + \underline{U}') \cdot \underline{U}''}{\|\underline{X}'_R + \underline{U}'\|} - \underline{U}'' \frac{[(\underline{X}'_R + \underline{U}') \cdot \underline{U}'']^2}{\|\underline{X}'_R + \underline{U}'\|^3} \right] \cdot \underline{n}_2 + \underline{f}_R \cdot \underline{n}_2 = 0 \quad (\text{E.29}) \end{aligned}$$

Les contributions additionnelles apportées par la prise en compte de la flexion dans le modèle initial du problème (\mathcal{P}) sont identifiées dans (E.27) (E.28) (E.29) et développées :

$$\begin{aligned} \underline{n}_1 : EI_\alpha \left[-u''''(y'_R + v') + v''''(x'_R + u') \right. \\ \left. + \left(-u'''(y'_R + v') + v'''(x'_R + u') \right) \left(u''(x'_R + u') + v''(y'_R + v') + w''(z'_R + w') \right) \right. \\ \left. \left(\frac{1}{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2 + (z'_R + w')^2} + \frac{1}{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2} \right) \right. \\ \left. + \left(-u''(y'_R + v') + v''(x'_R + u') \right) \frac{(u''(x'_R + u') + v''(y'_R + v') + w''(z'_R + w'))^2}{((x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2 + (z'_R + w')^2)((x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2)} \right] \quad (\text{E.30}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{n}_2 : \quad & -EI_\phi \left[\frac{-u''''(x'_R + u')(z'_R + w') - v''''(y'_R + v')(z'_R + w')}{\sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2}} + w''''(x'_R + u') \right. \\
& + 2 \left(u''(x'_R + u') + v''(y'_R + v') + w''(z'_R + w') \right) \left(\frac{-u''''(x'_R + u')(z'_R + w') - v''''(y'_R + v')(z'_R + w')}{\sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2} \left((x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2 + (z'_R + w')^2 \right)} \right. \\
& \quad \left. \left. + w'''' \frac{\sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2}}{\sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2 + (z'_R + w')^2}} \right) \right. \\
& \left. + \left(u''(x'_R + u') + v''(y'_R + v') + w''(z'_R + w') \right)^2 \left(\frac{-u''''(x'_R + u')(z'_R + w') - v''''(y'_R + v')(z'_R + w')}{\sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2} \left((x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2 + (z'_R + w')^2 \right)^2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + w'''' \frac{\sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2}}{\left((x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2 + (z'_R + w')^2 \right)^2} \right) \right] \quad (\text{E.31})
\end{aligned}$$

En ne gardant que les termes de plus petit degré dans le développement des termes correctifs de flexion dans (E.30) (E.31) avec l'approximation $u'' \ll 1, v'' \ll 1, w'' \ll 1, w' \ll 1, z'_R \ll 1$, les contribution correctives de la flexion selon les trois composantes de la base cartésienne sont ajoutées au système d'équation du problème de fil (\mathcal{P}) pour aboutir au problème d'équilibre de tige (\mathcal{P}_2),

$$\begin{aligned}
\underline{e}_x : \quad & -EI_\alpha \left(-u''''(v' + y'_R) + v''''(u' + x'_R) \right) \frac{(y'_R + v')}{\sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2}} \\
& + EI_\phi w'''' \frac{(x'_R + u')(z'_R + w')}{\sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2 + (z'_R + w')^2}} \quad (\text{E.32})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{e}_y : \quad & EI_\alpha \left(-u''''(v' + y'_R) + v''''(u' + x'_R) \right) \frac{(x'_R + u')}{\sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2}} \\
& + EI_\phi w'''' \frac{(y'_R + v')(z'_R + w')}{\sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2 + (z'_R + w')^2}} \quad (\text{E.33})
\end{aligned}$$

$$\underline{e}_z : \quad EI_\phi w'''' \frac{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2}{\sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2 + (z'_R + w')^2}} \quad (\text{E.34})$$

L'expression du moment intérieur à la tige est donnée en fonction du déplacement $\underline{U}, \underline{M}$

$$\begin{aligned}
\underline{M} = & \left[-M_{f1} \frac{(y'_R + v')}{\sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2}} - M_{f2} \frac{(x'_R + u')(z'_R + w')}{\sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2} \sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2 + (z'_R + w')^2}} \right] \underline{e}_x \\
& + \left[M_{f1} \frac{(x'_R + u')}{\sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2}} - M_{f2} \frac{(y'_R + v')(z'_R + w')}{\sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2} \sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2 + (z'_R + w')^2}} \right] \underline{e}_y \\
& + M_{f2} \frac{\sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2}}{\sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2 + (z'_R + w')^2}} \underline{e}_z \quad (\text{E.35})
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
M_{f1} = & \frac{EI_\phi}{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2 + (z'_R + w')^2} \left[\frac{(x'_R + u')}{\sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2}} \left(-u''(z'_R + w') + w''(x'_R + u') \right) \right. \\
& \left. + \frac{(y'_R + v')}{\sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2}} \left(-v''(z'_R + w') + w''(y'_R + v') \right) \right] \quad (\text{E.36})
\end{aligned}$$

(moment de flexion 1)

$$M_{f2} = \frac{EI_\alpha}{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2 + (z'_R + w')^2} \left[\frac{z'_R + w'}{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2} \left(-u''(z'_R + w')(y'_R + v') + v''(z'_R + w')(x'_R + u') \right) + v''(x'_R + u') - u''(y'_R + v') \right] \quad (\text{E.37})$$

(moment de flexion 2)

L'orientation du câble est donnée par la projection du vecteur tangent selon les trois axes,

$$\underline{t} \cdot \underline{e}_x = \cos(\phi) \cos(\alpha) = \frac{x'_R + u'}{\sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2 + (z'_R + w')^2}} \quad (\text{E.38})$$

$$\underline{t} \cdot \underline{e}_y = \cos(\phi) \sin(\alpha) = \frac{y'_R + v'}{\sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2 + (z'_R + w')^2}} \quad (\text{E.39})$$

$$\underline{t} \cdot \underline{e}_z = \sin(\phi) = \frac{z'_R + w'}{\sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2 + (z'_R + w')^2}} \quad (\text{E.40})$$

La norme de la résultante des efforts intérieurs à la tige est donnée en fonction du déplacement \underline{U} ,

$$\|\underline{R}\| = \sqrt{N^2 + V_1^2 + V_2^2} \quad (\text{E.41})$$

avec

$$N(S) = EA_R \left(u'x'_R + v'y'_R + w'z'_R + \frac{1}{2}(u'^2 + v'^2 + w'^2) \right) \quad (\text{E.42})$$

$$V_1 = EI_\alpha \left[\frac{-u'''(y'_R + v') + v'''(x'_R + u')}{\left((x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2 \right) \sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2 + (z'_R + w')^2}} + \frac{\left(u''(y'_R + v') + v''(x'_R + u') \right) \left(u''(x'_R + u') + v''(y'_R + v') + w''(z'_R + w') \right)}{\left((x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2 \right) \sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2 + (z'_R + w')^2}^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (\text{E.43})$$

$$V_2 = -EI_\phi \left[\frac{(u'''(x'_R + u') + v'''(y'_R + v'))(z'_R + w')}{\sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2} \sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2 + (z'_R + w')^2}^{\frac{3}{2}}} - w''' \frac{\sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2}}{\sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2 + (z'_R + w')^2}} - \frac{\left(u''(x'_R + u') + v''(y'_R + v') \right) (z'_R + w') \left(u''(x'_R + u') + v''(y'_R + v') + w''(z'_R + w') \right)}{\sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2} \sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2 + (z'_R + w')^2}^{\frac{5}{2}}} + w'' \left(u''(x'_R + u') + v''(y'_R + v') + w''(z'_R + w') \right) \frac{\sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2}}{\sqrt{(x'_R + u')^2 + (y'_R + v')^2 + (z'_R + w')^2}^{\frac{5}{2}}} \right] \quad (\text{E.44})$$

Annexe F

Éléments de technologie d'une ligne de transport par câbles

Une installation de transport par câbles aériens est composée de façon standard par deux **stations d'extrémité** (Fig. F.1.a) reliées entre elles par un ou plusieurs câbles appelés **ligne**. Une ligne comporte en général deux **voies**, le long desquelles les véhicules circulent dans des sens opposés. Les deux voies sont écartées selon la direction transversale de l'ordre de six mètres sur télésièges et télécabines, jusqu'à des dizaines de mètres sur les téléphériques. Le ou les **câbles porteurs** sont fixes et assurent le guidage des véhicules. Le ou les **câbles tracteurs** forment une boucle de mise en mouvement des véhicules et assurent le lien entre les deux voies. Les câbles sont guidés par des appuis intermédiaires positionnés entre les deux stations d'extrémités où la boucle de câble tracteur est fermée par des **poulies** (Fig. F.1.b).

Les différentes familles de transport par câbles aériens

Sur les installations à **va-et-vient** (téléphérique, télépulsé, Fig.F.2), le câble tracteur de l'installation ne fonctionne pas de façon continue dans le même sens : il est animé d'un mouvement d'allers-retours au cours des trajets. Un véhicule est positionné sur chaque voie et ce dernier effectue des allers-retours entre les deux stations d'extrémités en restant du même côté de la boucle de câble.

Sur les installations à **mouvement continu** (télésiège, télécabine, funitel, 2S, 3S, Fig.F.3), le câble tracteur de l'installation fonctionne dans le même sens, animé d'un mouvement ininterrompu. Les véhicules sont régulièrement répartis le long du câble tracteur dont ils sont solidaires. Les systèmes à **attaches fixes** pour lesquels les véhicules demeurent fixés au câble se différencient des **systèmes débrayables** où les véhicules sont désolidarisés du câble lors de leur passage en station.

Une **portion de câble** désigne une longueur de câble seul sur laquelle ne s'applique aucune force ponctuelle mais seulement une répartition d'effort uniformément répartie le long de celui-ci. Du point de vue du système, une portion de câble est associée à la longueur de câble porteur ou tracteur située



(a)



(b)

FIGURE F.1: (a) Photographies d'une station de téléphérique et (b) d'une poulie de déviation horizontale (d'après le site internet Doppelmayr Group)



FIGURE F.2: Photographies de téléphérique à va-et-vients (d'après le site internet Doppelmayr Group)



FIGURE F.3: Photographies d'installations à mouvements continus (d'après le site internet Doppelmayr Group)

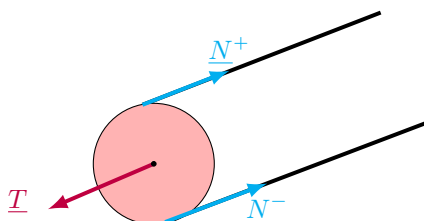
- entre une station et un véhicule,
- entre deux véhicules successifs,
- entre un appui et un véhicule,
- entre deux appuis successifs,
- ou entre un appui et une station.

Il est désigné par **portée** l'ensemble câble et véhicules situé entre deux appuis intermédiaires successifs.

Les stations

Plusieurs types de station existent :

- La station a un rôle de **tension** et assure la mise en tension mécanique de la ligne de câble, en donnant la valeur de l'effort mécanique $\|\underline{T}\|$ à la poulie en contact avec le câble grâce à un dispositif de vérin hydraulique ou de contrepoids. Ainsi la somme des efforts imposés à la poulie est connue (Fig.F.4). Un degré de mobilité en translation est conservé en autorisant le déplacement de la poulie montée sur un équipement mobile en translation.
- La station a un rôle de **motrice** et assure la mise en mouvement du câble par l'intermédiaire d'une poulie horizontale animée par un moteur qui délivre un couple \underline{C}_m autour de l'axe de rotation de la poulie (Fig.F.5). Seule la position \underline{X}_s de l'appui du câble supposé ponctuel est imposée (station fixe), aucune information n'est connue sur la tension des brins de câble. Le calcul de la différence de tension $N^- - N^+$



(a)



(b)

FIGURE F.4: (a) Schéma des efforts appliqués à un équipement de tension. (b) Photographie d'un équipement de tension hydraulique (d'après une brochure commerciale de Rowema)



FIGURE F.5: (a) Schéma des efforts appliqués à une poulie motrice. (b) Vue de synthèse d'un équipement de station motrice (d'après une brochure commerciale Doppelmayr Group)

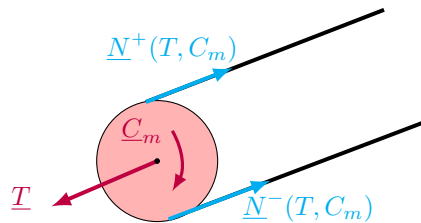


FIGURE F.6: Schéma des efforts appliqués à une poulie motrice-tension

de part et d'autre de la poulie motrice, donné par l'équilibre de la ligne, permet d'accéder au couple utile que la motorisation doit être en mesure de délivrer.

- La station a un rôle de **retour** ou d'**ancrage fixe**. Seule la position \underline{X}_s de l'appui du câble est connue.
- La station est **motrice-tension** : seule la tension $T = \sum N = N^+ + N^-$ imposée aux deux brins de câble en contact avec la poulie est connue (Fig.F.6).

Les appuis intermédiaires

Les appuis intermédiaires sont généralement composés d'une structure en hauteur, de type pylône, comportant une pièce assurant la liaison avec le câble. Cette pièce est différente selon la nature du câble :

- un **sabot** ou une **banane de déviation** si l'appui est réalisé avec un câble fixe,
- un **balancier** si l'appui est réalisé avec un câble mobile.

Compte tenu de la diversité de modélisation possibles, les données connues à l'appui diffèrent. La donnée qui demeure inchangée est la position \underline{X}_a du point fixe de l'appui par rapport au bâti (Fig.F.7).



FIGURE F.7: (a) Photo d'un sabot d'appui des câbles d'un téléphérique (d'après une brochure Doppelmayr Group). (b) Vue de synthèse d'un appui balancier (d'après une brochure Rowema)

Répartition des véhicules sur la ligne

Pour une installation à mouvement continu, la longueur de câble l_d qui sépare deux véhicules successifs est constante sur la ligne. l_d est donnée par le nombre de véhicule présent sur la ligne et la longueur totale de la boucle de câble tracteur. Elle est définie lors de l'installation des véhicules sur les appareils à attaches fixes, tandis qu'elle est régulée par un système de cadencement sur les appareils débrayables, pour compenser les imperfections du cheminement des véhicules et maintenir une valeur de l_d constante au cours du mouvement.

Annexe G

Accélération d'un câble mobile

Les équations bilans de la mécanique des milieux continus précédemment abordées dans le chapitre 2 font intervenir des termes d'accélération qui sont nuls dans le cadre de la modélisation statique. Dans un cadre général, $\forall(\underline{x}, t) \in \mathcal{D} \times [0, +\infty[$:

$$\rho(\underline{x}, t)\underline{a}(\underline{x}, t) = \rho(\underline{x}, t)\underline{b}(\underline{x}, t) + \operatorname{div}\underline{\sigma}(\underline{x}, t), \quad (\text{G.1})$$

$$\int_{\mathcal{D}} (\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \rho(\underline{x}, t)\underline{a}(\underline{x}, t) \, dv = \int_{\mathcal{D}} ((\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \rho(\underline{x}, t)\underline{b}(\underline{x}, t) + \rho(\underline{x}, t)\underline{m}) \, dv + \int_{\mathcal{D}} (\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \underline{\sigma}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} \, dv. \quad (\text{G.2})$$

Selon la description du mouvement qui est adoptée pour l'étude dynamique, qu'elle soit **lagrangienne** avec une référence dont l'état est connu ou **eulérienne** en suivant l'évolution de chaque point dans son mouvement, l'écriture du terme d'accélération diffère. Une distinction est faite entre l'accélération lagrangienne $\underline{A}(\underline{X}, t)$ exprimée en fonction d'une position de référence $\underline{X} \in \Omega_0$ dont l'état est connu, et l'accélération eulérienne $\underline{a}(\underline{x}, t)$ qui dépend de l'état courant recherché $\underline{x} \in \Omega_t$. Cette partie s'attache à faire le lien entre ces deux quantités.

Tout d'abord, la position courante statique \underline{X}_s qui était jusqu'alors l'inconnue du calcul statique devient une donnée d'entrée du modèle dynamique telle que,

$$\underline{X}_s = \underline{X}_R + \underline{U}, \quad (\text{G.3})$$

avec \underline{X}_R la position de référence du calcul statique et \underline{U} le déplacement statique autour de la référence.

Dans la suite, la nouvelle inconnue \underline{X} du problème dynamique est la position courante dynamique exprimée en fonction de la position statique \underline{X}_s et du **déplacement dynamique** \underline{U}_d par rapport à la référence statique,

$$\underline{X} = \underline{X}_s + \underline{U}_d. \quad (\text{G.4})$$

Il est tout d'abord considéré une dynamique étudiée à partir d'une configuration de référence statique fixe \underline{X}_s , telle que la position courante soit donnée par la transformation $\underline{X} = \Phi(\underline{X}_s, t)$ où à chaque instant t

$$\begin{aligned} \Phi : \Omega_0 &\rightarrow \Omega_t, \\ \underline{X}_s &\mapsto \underline{X}. \end{aligned} \quad (\text{G.5})$$

L'accélération du mouvement s'exprime uniquement en fonction de la position statique \underline{X}_s et est ainsi décrite avec le champ lagrangien associé

$$\underline{A}(\underline{X}_s, t) = \dot{\underline{V}}(\underline{X}_s, t) = \frac{\partial \underline{V}}{\partial t}(\underline{X}_s, t) = \frac{\partial^2 \underline{X}}{\partial t^2}(\underline{X}_s, t). \quad (\text{G.6})$$

Le terme d'accélération lagrangien est réduit à la dérivée partielle seconde de la position courante par rapport

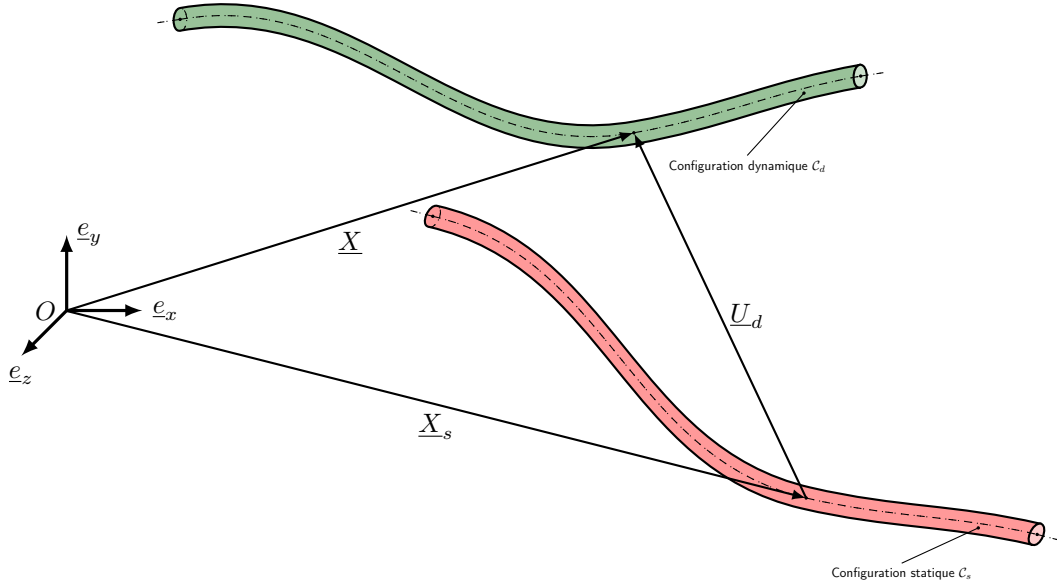


FIGURE G.1: Déplacement dynamique \underline{U}_d entre les configurations statique \mathcal{C}_s et dynamique \mathcal{C}_d

au temps t .

La référence statique \underline{X}_s subit maintenant une mise en mouvement à vitesse connue $\underline{V}(\underline{X}_s, t)$ qui dépend uniquement de la position statique telle que la nouvelle position courante dynamique soit donnée par $\underline{X}_1 = \Phi_1(\underline{X}_s, t)$ où à chaque instant t

$$\begin{aligned} \Phi_1 : \quad \Omega_0 &\rightarrow \Omega_{t1}, \\ \underline{X}_s &\mapsto \underline{X}_1. \end{aligned} \quad (\text{G.7})$$

Le champ d'accélération associé demeure lagrangien,

$$\underline{A}(\underline{X}_s, t) = \dot{\underline{V}}(\underline{X}_s, t) = \frac{d\underline{V}}{dt}(\Phi_1(\underline{X}_s, t), t) = \frac{\partial \underline{V}}{\partial t}(\underline{X}_s, t). \quad (\text{G.8})$$

Un terme d'inertie lagrangien dû à la mise en vitesse du milieu est introduit dans l'équation dynamique.

Si la mise en mouvement de la référence statique \underline{X}_s s'effectue par une vitesse $\underline{V}(\underline{X}_1, t)$ qui dépend cette fois-ci de l'état courant recherché $\underline{X}_1 = \Phi_1(\underline{X}_s, t)$, le champ d'accélération lagrangien fait apparaître des termes convectifs :

$$\begin{aligned} \underline{A}(\Phi_1(\underline{X}_s, t), t) &= \dot{\underline{V}}(\Phi_1(\underline{X}_s, t), t) = \frac{d\underline{V}}{dt}(\Phi_1(\underline{X}_s, t), t) \\ &= \frac{\partial \underline{V}}{\partial t}(\Phi_1(\underline{X}_s, t), t) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}(\underline{X}_s, t) \cdot \frac{\partial \underline{V}}{\partial \Phi_1}(\underline{X}_s, t). \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

La description eulérienne devient alors le point de vue naturel de la description du mouvement pour formuler le problème dynamique en fonction du champ inconnu \underline{X}_1 ,

$$\underline{A}(\Phi_1(\underline{X}_s, t), t) = \underline{a}(\underline{X}_1, t) = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}(\underline{X}_1, t) + \frac{\partial \underline{X}_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{X}_1}(\underline{X}_1, t). \quad (\text{G.10})$$

Un terme convectif $\frac{\partial \underline{X}_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{X}_1}$ dû à la mise en mouvement à la vitesse $\underline{v}(\underline{X}_1, t)$ est introduit dans le champ d'accélération.

Enfin, la configuration mobile à vitesse imposée occupant la position \underline{X}_1 , maintenant supposée connue, sert de référence à une nouvelle transformation Φ_2 qui donne l'état dynamique courant $\underline{X} = \Phi_2(\underline{X}_1, t)$ où à chaque instant t

$$\begin{aligned} \Phi_2 : \quad \Omega_{t1} &\rightarrow \Omega_{t2}, \\ \underline{X}_1 &\mapsto \underline{X}. \end{aligned} \quad (\text{G.11})$$

Le champ d'accélération lagrangien est d'abord exprimé en fonction du champ de vitesse lagrangien,

$$\begin{aligned} \underline{A}(\underline{X}_1, t) &= \underline{A}(\Phi_1(\underline{X}_s, t), t) = \dot{\underline{V}}(\Phi_1(\underline{X}_s, t), t) = \frac{d\underline{V}}{dt}(\Phi_1(\underline{X}_s, t), t) \\ &= \frac{\partial \underline{V}}{\partial t}(\underline{X}_1, t) + \frac{\partial \underline{X}_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial \underline{V}}{\partial \underline{X}_1}(\underline{X}_1, t) \end{aligned} \quad (\text{G.12})$$

Le champ de vitesse lagrangien s'exprime à son tour,

$$\begin{aligned} \underline{V}(\underline{X}_1, t) &= \underline{V}(\Phi_1(\underline{X}_s, t), t) = \frac{d\underline{X}}{dt}(\Phi_1(\underline{X}_s, t), t) = \frac{\partial \underline{X}}{\partial t}(\underline{X}_1, t) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}(\underline{X}_s, t) \cdot \frac{\partial \underline{X}}{\partial \Phi_1}(\underline{X}_1, t) \\ &= \frac{\partial \underline{X}}{\partial t}(\underline{X}_1, t) + \frac{\partial \underline{X}_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial \underline{X}}{\partial \underline{X}_1}(\underline{X}_1, t) \end{aligned} \quad (\text{G.13})$$

En remplaçant (G.13) dans (G.12), le champ d'accélération lagrangien fait apparaître des termes d'inertie convectifs à dérivée partielle mixte,

$$\underline{A}(\underline{X}_1, t) = \frac{\partial^2 \underline{X}}{\partial t^2}(\underline{X}_1, t) + \frac{\partial^2 \underline{X}_1}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial \underline{X}}{\partial \underline{X}_1}(\underline{X}_1, t) + 2 \frac{\partial \underline{X}_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \underline{X}}{\partial \underline{X}_1 \partial t}(\underline{X}_1, t) + \left(\frac{\partial^2 \underline{X}}{\partial \underline{X}_1^2}(\underline{X}_1, t) \cdot \frac{\partial \underline{X}_1}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial \underline{X}_1}{\partial t} \quad (\text{G.14})$$

avec $\underline{H}_3 = \frac{\partial^2 \underline{X}}{\partial \underline{X}_1^2}(\underline{X}_1, t)$ le tenseur Hessien d'ordre 3 tel que pour toute transformation

$$\begin{aligned} \Phi_2 : \quad \Omega_{t1} &\rightarrow \Omega_{t2}, \\ \underline{X}_1 &\mapsto \underline{X}, \end{aligned} \quad (\text{G.15})$$

$$\underline{H}_{3ijk}(\underline{X}, t) = \frac{\partial^2 X_i}{\partial X_{1,j} \partial X_{1,k}}. \quad (\text{G.16})$$

Annexe H

Modes de vibration d'un câble en translation

Modes réels

L'équation différentielle qui régit les vibrations hors-plan en présence d'une accélération A_{V_0} du mouvement de translation du câble à une vitesse instantanée V_0 s'écrit

$$\mu\omega^2\Phi_w - \mu A_{V_0}\Phi'_w + (\Delta^2 - \mu V_0^2)\Phi''_w = 0 \quad (\text{H.1})$$

C'est une équation d'ordre deux de discriminant

$$\delta = (\mu A_{V_0})^2 - 4\mu\omega^2(\Delta^2 - \mu V_0^2). \quad (\text{H.2})$$

Pour une application au transport par câbles,

$$A_{V_0} \leq 5 \text{ m/s}^2,$$

$$\mu \approx 10 \text{ kg/m},$$

$$\omega \geq 10^{-1} \text{ rad/s}$$

$$\Delta^2 - \mu V_0^2 \approx 10^5.$$

Le discriminant est donc négatif $\delta < 0$. Les solutions à l'équation différentielle (H.1) s'écrivent donc sous la forme

$$\Phi_w(S_0) = \left[A_w \cos \left(\sqrt{\frac{-(\mu A_{V_0})^2 + 4\mu\omega^2(\Delta^2 - \mu V_0^2)}{4(\Delta^2 - \mu V_0^2)^2}} S_0 \right) + B_w \sin \left(\sqrt{\frac{-(\mu A_{V_0})^2 + 4\mu\omega^2(\Delta^2 - \mu V_0^2)}{4(\Delta^2 - \mu V_0^2)^2}} S_0 \right) \right] e^{\frac{\mu A_{V_0}}{2(\Delta^2 - \mu V_0^2)} S_0} \quad S_0 \in [0, L_{R0}] \quad (\text{H.3})$$

Pour des vibrations anti-symétriques planes et sous les mêmes hypothèses précédemment énoncées pour le câble fixe, les équations qui régissent les mouvements plans du câble en présence d'une accélération A_{V_0} du mouvement de translation du câble à une vitesse instantanée V_0 s'écrivent

$$\begin{cases} \mu\omega^2\Phi_v - \mu A_{V_0}\Phi'_v + (\Delta^2 - \mu V_0^2)\Phi''_v = 0 \\ \Phi'_u - \kappa_s\Phi_v = 0 \end{cases} \quad (\text{H.4})$$

Les solutions en Φ_v sont données par l'équation différentielle du second ordre,

$$\Phi_v(S_0) = \left[A_v \cos \left(\sqrt{\frac{-(\mu A_{V_0})^2 + 4\mu\omega^2(\Delta^2 - \mu V_0^2)}{4(\Delta^2 - \mu V_0^2)^2}} S_0 \right) + B_v \sin \left(\sqrt{\frac{-(\mu A_{V_0})^2 + 4\mu\omega^2(\Delta^2 - \mu V_0^2)}{4(\Delta^2 - \mu V_0^2)^2}} S_0 \right) \right] e^{\frac{\mu A_{V_0}}{2(\Delta^2 - \mu V_0^2)} S_0} \quad S_0 \in [0, L_{R0}] \quad (\text{H.5})$$

Les solutions en Φ_u sont données par la condition d'annulation de l'incrément de tension dynamique $\Phi'_u - \kappa_s \Phi_v = 0$,

$$\Phi_u(S_0) = \left[A_u \cos \left(\sqrt{\frac{-(\mu A_{V_0})^2 + 4\mu\omega^2(\Delta^2 - \mu V_0^2)}{4(\Delta^2 - \mu V_0^2)^2}} S_0 \right) + B_u \sin \left(\sqrt{\frac{-(\mu A_{V_0})^2 + 4\mu\omega^2(\Delta^2 - \mu V_0^2)}{4(\Delta^2 - \mu V_0^2)^2}} S_0 \right) \right] e^{\frac{\mu A_{V_0}}{2(\Delta^2 - \mu V_0^2)} S_0} + C_u \quad S_0 \in [0, L_{R0}] \quad (\text{H.6})$$

avec

$$A_u = \frac{2\kappa_s(\Delta^2 - \mu V_0^2)}{\mu A_{V_0}} \left(1 - \frac{\delta}{(\mu A_{V_0})^2 + \delta} \right) A_v - \frac{2\kappa_s(\Delta^2 - \mu V_0^2)\sqrt{-\delta}}{(\mu A_{V_0})^2 + \delta} B_v \quad (\text{H.7})$$

$$B_u = \frac{2\kappa_s(\Delta^2 - \mu V_0^2)\sqrt{-\delta}}{(\mu A_{V_0})^2 + \delta} A_v + \frac{2\kappa_s(\Delta^2 - \mu V_0^2)\mu A_{V_0}}{(\mu A_{V_0})^2 + \delta} B_v \quad (\text{H.8})$$

Dans le cas de vibrations symétriques et sous les mêmes hypothèses précédemment énoncées que le câble fixe, les équations qui régissent les mouvements plans du câble en présence d'une accélération A_{V_0} du mouvement de translation du câble à une vitesse instantanée V_0 s'écrivent

$$\begin{cases} \mu\omega^2\Phi_v - \mu A_{V_0}\Phi'_v + (\Delta^2 - \mu V_0^2)\Phi''_v + \kappa_s T_d = 0 \\ T_d = EA(\Phi'_u - \kappa_s \Phi_v) \end{cases} \quad (\text{H.9})$$

Les solutions en Φ_v sont données par l'équation différentielle du second ordre,

$$\Phi_v(S_0) = \left[A_v \cos \left(\sqrt{\frac{-(\mu A_{V_0})^2 + 4\mu\omega^2(\Delta^2 - \mu V_0^2)}{4(\Delta^2 - \mu V_0^2)^2}} S_0 \right) + B_v \sin \left(\sqrt{\frac{-(\mu A_{V_0})^2 + 4\mu\omega^2(\Delta^2 - \mu V_0^2)}{4(\Delta^2 - \mu V_0^2)^2}} S_0 \right) \right] e^{\frac{\mu A_{V_0}}{2(\Delta^2 - \mu V_0^2)} S_0} - \frac{\kappa_s}{\mu\omega^2} T_d \quad S_0 \in [0, L_{R0}] \quad (\text{H.10})$$

Les solutions en Φ_u sont données par le couplage avec Φ_v introduit par l'incrément de tension dynamique,

$$\Phi_u(S_0) = \left[A_u \cos \left(\sqrt{\frac{-(\mu A_{V_0})^2 + 4\mu\omega^2(\Delta^2 - \mu V_0^2)}{4(\Delta^2 - \mu V_0^2)^2}} S_0 \right) + B_u \sin \left(\sqrt{\frac{-(\mu A_{V_0})^2 + 4\mu\omega^2(\Delta^2 - \mu V_0^2)}{4(\Delta^2 - \mu V_0^2)^2}} S_0 \right) \right] e^{\frac{\mu A_{V_0}}{2(\Delta^2 - \mu V_0^2)} S_0} + \left(\frac{1}{EA} - \frac{\kappa_s^2}{\mu\omega^2} \right) T_d S_0 + C_u \quad S_0 \in [0, L_{R0}] \quad (\text{H.11})$$

avec

$$A_u = \frac{2\kappa_s(\Delta^2 - \mu V_0^2)}{\mu A_{V_0}} \left(1 - \frac{\delta}{(\mu A_{V_0})^2 + \delta} \right) A_v - \frac{2\kappa_s(\Delta^2 - \mu V_0^2)\sqrt{-\delta}}{(\mu A_{V_0})^2 + \delta} B_v \quad (\text{H.12})$$

$$B_u = \frac{2\kappa_s(\Delta^2 - \mu V_0^2)\sqrt{-\delta}}{(\mu A_{V_0})^2 + \delta} A_v + \frac{2\kappa_s(\Delta^2 - \mu V_0^2)\mu A_{V_0}}{(\mu A_{V_0})^2 + \delta} B_v \quad (\text{H.13})$$

Les développements précédents sont valables sous l'hypothèse que le mouvement dynamique vertical est prépondérant sur la mouvement longitudinal, et en supposant que la tension dynamique est une constante sur chaque portion de câble.

Sous l'hypothèse d'un incrément de tension dynamique T_d constant, en considérant à la fois la dynamique verticale de déplacement v_d et horizontale u_d avec les termes inertiels dû à la translation du câble à la vitesse V_0

avec une accélération A_{V_0} ajoutés à l'équation dynamique du mouvement vertical, l'équation (4.66) se ré-écrit

$$\mu\omega^2\Phi_v + \frac{\mu\omega^2\Delta^2}{\mu\omega^2 - \Delta^2\kappa_s^2}\Phi_v'' + \kappa_s T_d - \mu A_{V_0}\Phi_v' - \mu V_0^2\Phi_v'' = 0. \quad (\text{H.14})$$

L'équation différentielle d'ordre 2 à résoudre en Φ_v est alors

$$\mu\omega^2\Phi_v + \left(\frac{\mu\omega^2\Delta^2}{\mu\omega^2 - \Delta^2\kappa_s^2} - \mu V_0^2 \right) \Phi_v'' - \mu A_{V_0}\Phi_v' + \kappa_s T_d = 0, \quad (\text{H.15})$$

de discriminant $\delta = (\mu A_{V_0})^2 - 4\mu\omega^2 \left(\frac{\mu\omega^2\Delta^2}{\mu\omega^2 - \Delta^2\kappa_s^2} - \mu V_0^2 \right) < 0$ négatif d'après les valeurs des paramètres de dimensionnement rencontrés pour les applications aux transporteurs à câbles aériens. Les racines de l'équation caractéristiques s'expriment en fonction des coefficients

$$\mathcal{A} = \frac{\mu A_{V_0}(\mu\omega^2 - \Delta^2\kappa_s^2)}{2(\mu\omega^2\Delta^2 - (\mu V_0\omega)^2 + \mu(V_0\Delta\kappa_s)^2)}, \quad (\text{H.16})$$

$$\mathcal{B} = \frac{\sqrt{-\delta}(\mu\omega^2 - \Delta^2\kappa_s^2)}{2(\mu\omega^2\Delta^2 - (\mu V_0\omega)^2 + \mu(V_0\Delta\kappa_s)^2)}, \quad (\text{H.17})$$

$$X_{1,2} = \mathcal{A} \pm j\mathcal{B}. \quad (\text{H.18})$$

Les déformées modales s'expriment en fonction des coefficients \mathcal{A} et \mathcal{B} , en faisant intervenir les constantes inconnues du problème modal A_v, B_v, T_d, C_u . La résolution de l'équation différentielle (H.15) donne

$$\Phi_v(S_0) = [A_v \cos(\mathcal{B}S_0) + B_v \sin(\mathcal{B}S_0)]e^{\mathcal{A}S_0} - \frac{\kappa_s T_d}{\mu\omega^2}. \quad (\text{H.19})$$

Le déplacement modal longitudinal est obtenu par intégration de l'équation de compatibilité de la tension dynamique $T_d = EA(\Phi_u' - \kappa_s\Phi_v)$ faisant apparaître la constante C_u et les coefficients A_u, B_u s'écrivant en fonction de A_v et B_v ,

$$\Phi_u(S_0) = [A_u \cos(\mathcal{B}S_0) + B_u \sin(\mathcal{B}S_0)]e^{\mathcal{A}S_0} + \left(\frac{1}{EA} - \frac{\kappa_s^2}{\mu\omega^2} \right) T_d S_0 + C_u \quad (\text{H.20})$$

avec

$$A_u = A_v \left(\frac{\kappa_s}{\mathcal{A}} - \frac{\kappa_s \mathcal{B}^2}{\mathcal{A}(\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2)} \right) - B_v \frac{\kappa_s \mathcal{B}}{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2}, \quad (\text{H.21})$$

$$B_u = A_v \frac{\kappa_s \mathcal{B}}{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2} + B_v \frac{\kappa_s \mathcal{A}}{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2}. \quad (\text{H.22})$$

Modes complexes

Les équations couplées de vibration dans le plan sont traitées. Sous forme matricielle,

$$\begin{bmatrix} \mu[(\omega^2 - \xi^2) + (V_0k)^2 - 2V_0\omega k] - \Delta^2\kappa_s^2 - EAk^2 & -j\kappa_s k(EA + \Delta^2) \\ +j[2\mu\xi(\omega - V_0k) - \mu A_{V_0}k] & \\ j\kappa_s k(EA + \Delta^2) & \mu[(\omega^2 - \xi^2) + (V_0k)^2 - 2V_0\omega k] - \Delta^2k^2 - EA\kappa_s^2 \\ & +j[2\mu\xi(\omega - V_0k) - \mu A_{V_0}k + \chi k] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_u \\ \Phi_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{H.23})$$

L'annulation du déterminant conduit à l'équation de dispersion

$$\begin{aligned} & \mu^2 [(\omega^2 - \xi^2) + (V_0k)^2 - 2V_0\omega k]^2 + \mu [(\omega^2 - \xi^2) + (V_0k)^2 - 2V_0\omega k] (-\Delta^2 - EA) (k^2 + \kappa_s^2) + (EAk^2 + \Delta^2\kappa_s^2) (\Delta^2k^2 + \kappa_s^2 EA) \\ & + j \left[\mu(2\omega\xi - A_{V_0}k - 2V_0\xi k) + \chi k \right] \left[\mu[(\omega^2 - \xi^2) + (V_0k)^2 - 2V_0\omega k] - EAk^2 - \Delta^2\kappa_s^2 \right] \\ & + j \left[2\mu\xi(\omega - V_0k) - \mu A_{V_0}k \right] \left[\mu[(\omega^2 - \xi^2) + (V_0k)^2 - 2V_0\omega k] - \Delta^2k^2 - EA\kappa_s^2 \right] \\ & - \left[\mu(2\omega\xi - A_{V_0}k - 2V_0\xi k) + \chi k \right] \left[2\mu\xi(\omega - V_0k) - \mu A_{V_0}k \right] - \kappa_s^2 k^2 (\Delta^2 + EA)^2 = 0, \quad (\text{H.24}) \end{aligned}$$

Dans la direction hors-plan, le discriminant complexe s'exprime sous la forme

$$\begin{aligned} \delta = \chi(\chi - 2\mu A_{V_0} - 4V_0\mu\xi) + (\mu A_{V_0})^2 + 4\mu^2 V_0[V_0(\xi^2 - \omega^2) + \xi A_{V_0}] + 4\mu[\omega^2(\mu V_0^2 - \Delta^2) + \xi^2(\Delta^2 - \mu V_0^2)] \\ + j[4V_0\mu\omega(\chi - \mu A_{V_0}) - 8\mu\omega\xi\Delta^2] \end{aligned} \quad = a + jb \quad (\text{H.25})$$

La recherche des racines complexes $z = x + jy$ de δ conduit à résoudre,

$$\begin{cases} z^2 = a + jb \\ |z|^2 = |a + jb| \end{cases} \quad (\text{H.26})$$

$$\begin{cases} x^2 + j2xy - y^2 = a + jb \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \quad (\text{H.27})$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire,

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \quad (\text{H.28})$$

$$\begin{cases} x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \geq 0 \\ y = \frac{b}{2x} & \text{si } b \neq 0 \\ y = 0 & \text{si } b = 0 \end{cases} \quad (\text{H.29})$$

$$\begin{cases} x = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \\ y = \frac{b}{2x} & \text{si } b \neq 0 \\ y = 0 & \text{si } b = 0 \end{cases} \quad (\text{H.30})$$

Dans le cas $b \neq 0$, les constantes suivantes sont introduites

$$\mathcal{A} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \quad (\text{H.31})$$

$$\mathcal{B} = \frac{b}{2\sqrt{2}\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}(\Delta^2 - \mu V_0^2)} \quad (\text{H.32})$$

et les solutions de l'équation caractéristique s'écrivent sous la forme

$$X_1 = \frac{-\chi + \mu A_{V_0} + 2V_0\mu\xi + \mathcal{A}}{2(\Delta^2 - \mu V_0^2)} + j\left(\mathcal{B} - \frac{V_0\mu\omega}{\Delta^2 - \mu V_0^2}\right) \quad (\text{H.33})$$

$$X_2 = \frac{-\chi + \mu A_{V_0} + 2V_0\mu\xi - \mathcal{A}}{2(\Delta^2 - \mu V_0^2)} + j\left(-\mathcal{B} - \frac{V_0\mu\omega}{\Delta^2 - \mu V_0^2}\right) \quad (\text{H.34})$$

Ainsi, les solutions Φ_w s'expriment

$$\begin{aligned} \Phi_w(S) = (A_{w,r} + jA_{w,i})e^{\frac{-\chi + \mu A_{V_0} + 2V_0\mu\xi + \mathcal{A}}{2(\Delta^2 - \mu V_0^2)}S_0} e^{j\left(\mathcal{B} - \frac{V_0\mu\omega}{\Delta^2 - \mu V_0^2}\right)S_0} \\ + (B_{w,r} + jB_{w,i})e^{\frac{-\chi + \mu A_{V_0} + 2V_0\mu\xi - \mathcal{A}}{2(\Delta^2 - \mu V_0^2)}S_0} e^{j\left(-\mathcal{B} - \frac{V_0\mu\omega}{\Delta^2 - \mu V_0^2}\right)S_0}. \end{aligned} \quad (\text{H.35})$$

Cette forme de solution peut s'interpréter comme la superposition de deux ondes qui se propagent à une vitesse différente, respectivement $\left(\mathcal{B} - \frac{V_0\mu\omega}{\Delta^2 - \mu V_0^2}\right)$ et $\left(-\mathcal{B} - \frac{V_0\mu\omega}{\Delta^2 - \mu V_0^2}\right)$. Les parties réelle et imaginaire du mode hors-plan

sont identifiées,

$$\begin{aligned} \Re(\Phi_w(S_0)) = & e^{\frac{-\chi + \mu A V_0 + 2V_0 \mu \xi + A}{2(\Delta^2 - \mu V_0^2)}} S_0 \left[A_{w,r} \cos\left(\left(\mathcal{B} - \frac{V_0 \mu \omega}{\Delta^2 - \mu V_0^2}\right) S_0\right) - A_{w,i} \sin\left(\left(\mathcal{B} - \frac{V_0 \mu \omega}{\Delta^2 - \mu V_0^2}\right) S_0\right) \right] \\ & + e^{\frac{-\chi + \mu A V_0 + 2V_0 \mu \xi - A}{2(\Delta^2 - \mu V_0^2)}} S_0 \left[B_{w,r} \cos\left(\left(-\mathcal{B} - \frac{V_0 \mu \omega}{\Delta^2 - \mu V_0^2}\right) S_0\right) - B_{w,i} \sin\left(\left(-\mathcal{B} - \frac{V_0 \mu \omega}{\Delta^2 - \mu V_0^2}\right) S_0\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{H.36})$$

$$\begin{aligned} \Im(\Phi_w(S_0)) = & e^{\frac{-\chi + \mu A V_0 + 2V_0 \mu \xi + A}{2(\Delta^2 - \mu V_0^2)}} S_0 \left[A_{w,r} \sin\left(\left(\mathcal{B} - \frac{V_0 \mu \omega}{\Delta^2 - \mu V_0^2}\right) S_0\right) + A_{w,i} \cos\left(\left(\mathcal{B} - \frac{V_0 \mu \omega}{\Delta^2 - \mu V_0^2}\right) S_0\right) \right] \\ & + e^{\frac{-\chi + \mu A V_0 + 2V_0 \mu \xi - A}{2(\Delta^2 - \mu V_0^2)}} S_0 \left[B_{w,r} \sin\left(\left(-\mathcal{B} - \frac{V_0 \mu \omega}{\Delta^2 - \mu V_0^2}\right) S_0\right) + B_{w,i} \cos\left(\left(-\mathcal{B} - \frac{V_0 \mu \omega}{\Delta^2 - \mu V_0^2}\right) S_0\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{H.37})$$

Annexe I

Modèle dynamique de pylône

En pratique, l'appui du câble est réalisé par une interface reliée à une structure déformable de type pylône. Plusieurs modèles dynamiques sont proposés pour un pylône standard, composé d'un fût surmonté d'une tête supportant notamment les éléments de contact avec le câble.

Modèle discret à deux de degrés de liberté

Un modèle discret est mis en place selon les hypothèses suivantes :

- Le modèle rend compte des vibrations transversale de la structure selon la direction de flexion.
- Les éléments qui composent la tête de pylône sont modélisés par une masse m_t positionnée au centre de gravité de l'ensemble {potence + potence de décâblage + balanciers + passerelles } situé à une hauteur L_{tete} par rapport à la base du fût
- Le fût de pylône est modélisé comme une masse m_f positionnée au centre de gravité du fût situé à une hauteur L_{fut} par rapport à la base, et deux raideurs équivalentes k_1, k_2 situées entre l'encastrement et les deux masses (raideurs équivalentes d'une poutre console encastree-libre $k_{eq} = \frac{3EI}{L^3}$) avec L la longueur totale du fût, E le module d'Young du matériau du fût (en général, acier), I le moment quadratique transversal du fût supposé comme un cylindre creux de diamètre extérieur D_f et de diamètre intérieur d_f

$$I = \frac{\pi}{64}(D_f^4 - d_f^4)$$

En notant v_f et v_t le déplacement transversal respectifs de la masse du fût m_f et de la masse de tête de pylône m_t , les équations du mouvement sont écrites pour chacune des masses,

$$m_f \ddot{v}_f + k_1 v_f + k_2 (v_f - v_t) = 0 \quad (\text{I.1})$$

$$m_t \ddot{v}_t + k_2 (v_t - v_f) = 0 \quad (\text{I.2})$$

Le système d'équation (I.1), (I.2) peut s'écrire sous forme matricielle

$$[M] \{\ddot{v}\} + [K] \{v\} = \{0\} \quad (\text{I.3})$$

avec $[M] = \begin{bmatrix} m_f & 0 \\ 0 & m_t \end{bmatrix}$ la matrice de masse, $[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$ la matrice de raideur. En recherchant les modes de vibrations comme une solution de type onde stationnaire sous la forme $\{v\} = \{\Phi_v\} e^{j\omega t}$, (I.3) devient

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\Phi_v\} = \{0\} \quad (\text{I.4})$$

Les pulsations propres sont les solutions de l'équation $\det([K] - \omega^2 [M]) = 0$ qui traduit l'existence de solutions non triviales à (I.4), soit

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{m_f k_2 + m_t(k_1 + k_2) + \sqrt{[m_f k_2 + m_t(k_1 + k_2)]^2 - 4m_t m_f k_1 k_2}}{2m_f m_t}} \quad (\text{I.5})$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{m_f k_2 + m_t(k_1 + k_2) - \sqrt{[m_f k_2 + m_t(k_1 + k_2)]^2 - 4m_t m_f k_1 k_2}}{2m_f m_t}} \quad (\text{I.6})$$

Les déformées modales associées sont données par

$$\Phi_{v,1} = \begin{Bmatrix} 1 - \frac{\omega_1^2 m_t}{k_2} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{I.7})$$

$$\Phi_{v,2} = \begin{Bmatrix} 1 - \frac{\omega_2^2 m_t}{k_2} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{I.8})$$

Exemple d'application : pour un pylône en acier de 18 m de hauteur avec un fût uniforme de section circulaire d'épaisseur 12.5 mm et une masse de tête de pylône totale de 5700 kg, la première fréquence propre de flexion

$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} \approx 0.91$ Hz est associée à la déformée $\Phi_{v,1} \approx \begin{Bmatrix} 0.64 \\ 1 \end{Bmatrix}$, la deuxième fréquence de flexion $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} \approx 2.53$

Hz est associée à la déformée $\Phi_{v,2} \approx \begin{Bmatrix} -1.79 \\ 1 \end{Bmatrix}$.

Modèle continu

Le modèle continu d'un pylône est obtenu dans le cadre de la résistance des matériaux avec un modèle de poutre linéaire pour représenter les vibrations transversales de la structure :

- Le fût est modélisé de façon continue par une poutre verticale homogène de longueur L_{tete} de masse volumique ρ et de section équivalente A_{eq} .
- La masse de la tête de pylône est modélisée comme une masse ponctuelle m_t située en extrémité de poutre.
- Le poids du fût et de la tête du pylône est représenté par l'effet d'un effort normal de compression $F = (m_f + m_t)g$ (précontrainte) s'appliquant dans la poutre.

L'équation qui traduit la dynamique transversale d'une telle poutre de module d'Young E , de moment quadratique I avec une précharge F et caractérisée par son déplacement transverse $v(x, t)$, est donnée par [268]

$$\rho A_{eq} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + F \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{I.9})$$

En cherchant les vibrations stationnaires sous la forme $v(x, t) = \Phi_v(x) e^{j\omega t}$, l'équation précédente est réduite à

$$\frac{\partial^4 \Phi_v}{\partial x^4} + \gamma^2 \frac{\partial^2 \Phi_v}{\partial x^2} - \beta^4 \Phi_v = 0 \quad (\text{I.10})$$

avec $\beta^4 = \frac{\rho A_{eq}}{EI} \omega^2$, $\gamma^2 = \frac{F}{EI}$.

Les solutions de l'équation différentielle d'ordre 4 homogène à coefficients constants (I.10) s'écrivent comme une combinaison linéaire de quatre fonctions, solutions non-colinéaires à l'équation homogène (I.10), formant une base de l'espace des solutions,

$$\Phi_v(x) = C_1 \cosh(\lambda x) + D_1 \sinh(\lambda x) + C_2 \cos(\delta x) + D_2 \sin(\delta x) \quad (\text{I.11})$$

avec $\lambda^2 = \frac{-\gamma^2 + \sqrt{\gamma^4 + 4\beta^4}}{2}$ et $\delta^2 = \frac{\gamma^2 + \sqrt{\gamma^4 + 4\beta^4}}{2}$

Il faut ajouter quatre équations pour fermer le problème aux limites, données par les conditions aux bords imposées aux extrémités $x = 0$ et $x = L$ de la poutre encastree à sa base et reliée à la masse ponctuelle en $x = L$:

- $\Phi_v(0) = 0$ (encastrement), $\Phi'_v(0) = 0$ (encastrement),
 - $\Phi''_v(L) = 0$ (moment extérieur nul en $x = L$),
 - $\Phi'''_v(L) = -\frac{m_t}{EI}\omega^2\Phi_v(L)$ (couplage avec la dynamique de la masse ponctuelle en $x = L$).
- En remplaçant Φ_v par sa forme générale (I.11) et ses dérivées, le système à résoudre s'écrit

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \mu \\ \lambda^2 \cosh(\lambda L) & \lambda^2 \sinh(\lambda L) & -\delta^2 \cos(\delta L) & -\delta^2 \sin(\delta L) \\ \lambda^3 \sinh(\lambda L) + \frac{\omega^2 m_t}{EI} \cosh(\lambda L) & \lambda^3 \cosh(\lambda L) + \frac{\omega^2 m_t}{EI} \sinh(\lambda L) & \delta^3 \sin(\delta L) + \frac{\omega^2 m_t}{EI} \cos(\delta L) & -\delta^3 \cos(\delta L) + \frac{\omega^2 m_t}{EI} \sin(\delta L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ D_1 \\ C_2 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{I.12})$$

Les pulsations ω_k associées aux modes Φ_v^k sont données en annulant le déterminant du système (I.12) pour trouver les valeurs β_k correspondantes et les pulsation associées $\omega_k = \beta_k^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A_{eq}}}$. Le problème résolu n'est pas un problème aux valeur propres : la notion de mode vient ici de la structure des solutions de l'équation différentielle (I.10) qui est un espace vectoriel de dimension quatre dont on peut construire une base à partir de quatre fonctions indépendantes et auxquelles on associe des conditions aux limites qui imposent les valeurs ω_k possibles pour obtenir une solution non-nulle. Une autre méthode plus robuste pour une résolution numérique consiste à exprimer analytiquement le déterminant du système et à rechercher les solutions de l'équation scalaire ainsi obtenue (équation transcendante). Les déformées modales Φ sont définies à une constante près et sont normées par une norme \mathcal{L}^2 telle que :

$$\int_x \Phi^2 dx = 1. \quad (\text{I.13})$$

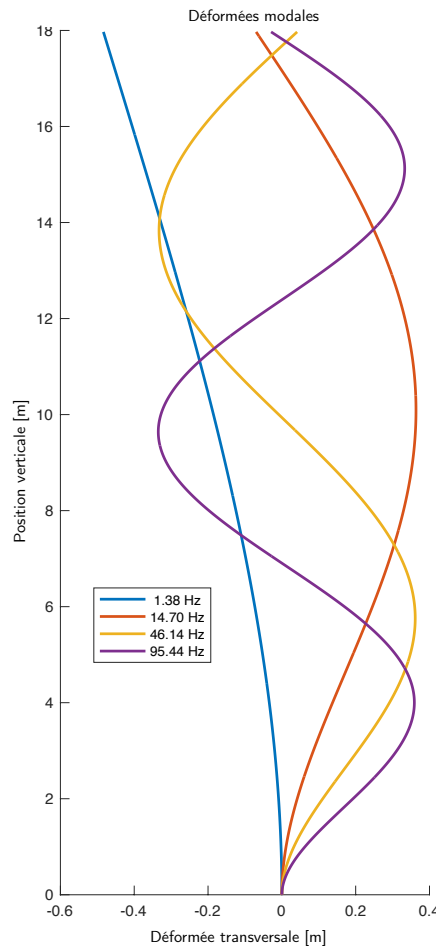


FIGURE I.1: Les quatre premiers modes de flexion du modèle continu du pylône

L'application numérique du modèle continu avec les données de l'exemple précédent est illustrée en Fig. I.1 : le premier mode de flexion à $f_{1,c} \approx 1.38$ Hz implique le déplacement maximal de la tête de pylône relativement aux autres modes. Dans le modèle à 2 ddl, la première fréquence associée au déplacement maximal de la masse

de tête de pylône est $f_{1,a} \approx 0.91$ Hz, ce qui donne un ordre de grandeur raisonnable de la valeur obtenue par le modèle continu. Le deuxième mode de flexion qui implique le déplacement majoritaire du fût, visible à $f_{2,c} \approx 14.70$ Hz en Fig. I.1, n'est pas correctement représenté par le modèle à 2 ddl : en effet, la masse du fût n'est pas localisée mais répartie le long de celui-ci dans le modèle continu. L'hypothèse selon laquelle la masse du fût peut être représentée par de façon ponctuelle n'est pas suffisante pour représenter ce deuxième mode.

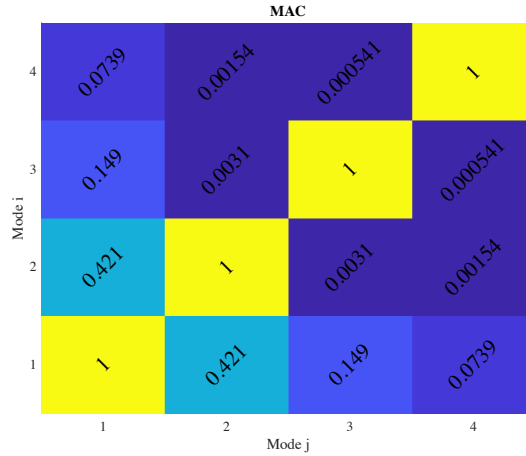


FIGURE I.2: Matrice de MAC des quatre premiers modes

Compte tenu du couplage dynamique avec la masse ponctuelle en tête de pylône, la condition en $x = L$ n'est pas une condition homogène en déplacement : les modes ainsi calculés ne sont donc pas des modes normaux qui forment une base orthogonale de l'espace des solutions au problème posé. Les modes sont couplés, voir la matrice de *Modal Assurance Criterion* (MAC) de la Fig. I.2 :

$$MAC_{ij} = \int \Phi^i(x) \Phi^j(x) dx. \quad (I.14)$$

Le couplage avec le premier mode est prédominant car c'est lui qui active majoritairement le mouvement de la masse en tête de pylône. Si on ne souhaite pas de rédundance de l'information portée par les modes pour par exemple réaliser une réduction sur base modale, il est possible de ré-orthogonaliser les modes trouvés selon une procédure de Gram-Schmidt à partir d'une sélection du premier mode. Une autre méthode pour construire une base de réduction est de partir d'une base de modes normaux calculés pour des conditions aux bords encastré-encastré (interfaces fixes) et d'y ajouter un mode contraint calculé en appliquant une force statique unitaire en tête de pylône $x = L$ afin de rendre compte du couplage dynamique avec la masse suspendue à l'interface.

Couplage entre le pylône et le câble, assemblage des deux sous-structures

La dynamique du pylône a été étudiée selon une direction transversale. Le couplage avec les mouvements dynamiques du câble se réalise selon la direction tangentielle \underline{t}_c et normal \underline{n}_c à l'appui au point de contact du câble, ainsi que selon la direction \underline{e}_z pour les deux directions de flexion du pylône. Il est noté dans la suite v_1 le déplacement transversal du pylône généré par la flexion dans le plan $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$ de l'étude et v_2 le déplacement transversal du pylône généré par la flexion hors-plan.

Couplage selon la direction tangentielle au câble \underline{t}_c

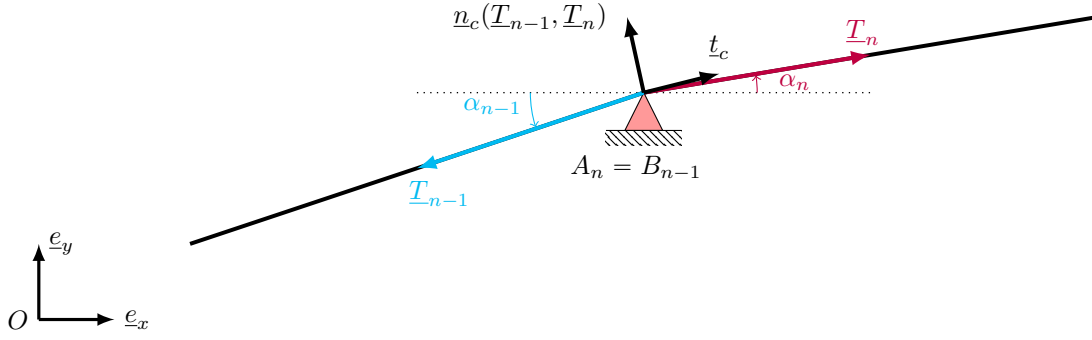


FIGURE I.3: Appui ponctuel avec contact frottant

D'après les équations statiques du modèle d'appui qui ont été obtenues dans la partie de modélisation, en supposant $\alpha_n \approx \alpha_{n-1}$ pour l'écriture de la loi de frottement de Coulomb, le lien entre l'effort normal \underline{F}_c exercé par le câble à l'appui et les tensions du câble \underline{T}_{n-1} et \underline{T}_n de part et d'autre de l'appui est donné par

$$\|\underline{F}_c\| = (\|\underline{T}_{n-1}\| + \|\underline{T}_n\|) \sin\left(\frac{\alpha_{n-1} - \alpha_n}{2}\right) \quad (\text{I.15})$$

Dans le cadre de la dynamique linéarisée pour des petites perturbations dynamiques, la tension peut se décomposer en une contribution statique et une contribution dynamique distinctes, soit

$$\begin{aligned} \|\underline{F}_c\| &= \left(\|\underline{T}_{n-1}^s + \underline{T}_{n-1}^d\| + \|\underline{T}_n^s + \underline{T}_n^d\| \right) \sin\left(\frac{\alpha_{n-1}^s + \alpha_{n-1}^d - \alpha_n^s - \alpha_n^d}{2}\right) \\ &= \left(\|\underline{T}_{n-1}^s + \underline{T}_{n-1}^d\| + \|\underline{T}_n^s + \underline{T}_n^d\| \right) \sin\left(\frac{\alpha_{n-1}^s - \alpha_n^s}{2} + \frac{\alpha_{n-1}^d - \alpha_n^d}{2}\right) \\ &= \left(\|\underline{T}_{n-1}^s + \underline{T}_{n-1}^d\| + \|\underline{T}_n^s + \underline{T}_n^d\| \right) \left[\sin\left(\frac{\alpha_{n-1}^s - \alpha_n^s}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha_{n-1}^d - \alpha_n^d}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha_{n-1}^s - \alpha_n^s}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha_{n-1}^d - \alpha_n^d}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

Un développement de Taylor au premier ordre des termes dynamiques de l'équation (I.16) donne

$$\|\underline{F}_c\| = \left(\|\underline{T}_{n-1}^s + \underline{T}_{n-1}^d\| + \|\underline{T}_n^s + \underline{T}_n^d\| \right) \left[\sin\left(\frac{\alpha_{n-1}^s - \alpha_n^s}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha_{n-1}^s - \alpha_n^s}{2}\right) \left(\frac{\alpha_{n-1}^d - \alpha_n^d}{2}\right) \right] \quad (\text{I.17})$$

L'équation de l'équilibre du câble à l'appui projeté selon la direction tangentielle \underline{t}_c écrite dans le cadre des petites perturbations dynamiques (linéarisation des termes dynamiques et incrément de tension dynamique \underline{T}^d porté par la direction tangentielle statique du câble $\underline{t} = \underline{t}_c$), avec une loi de contact de type Coulomb, est donnée par le modèle statique à la limite du glissement :

$$\|\underline{T}_n^s\| + \|\underline{T}_n^d\| = \|\underline{T}_{n-1}^s\| + \|\underline{T}_{n-1}^d\| \pm c_f \|\underline{F}_c\|. \quad (\text{I.18})$$

En remplaçant par l'expression de $\|\underline{F}_c\|$ et en simplifiant les termes statiques,

$$\|\underline{T}_n^d\| = \|\underline{T}_{n-1}^d\| \pm c_f \left[(\|\underline{T}_{n-1}^d\| + \|\underline{T}_n^d\|) \sin\left(\frac{\alpha_{n-1}^s - \alpha_n^s}{2}\right) + (\|\underline{T}_{n-1}^s\| + \|\underline{T}_n^s\|) \cos\left(\frac{\alpha_{n-1}^s - \alpha_n^s}{2}\right) \left(\frac{\alpha_{n-1}^d - \alpha_n^d}{2}\right) \right]. \quad (\text{I.19})$$

L'incrément de tension dynamique est identifié,

$$\underline{F}_{t,c}^d = \|\underline{F}_{t,c}^d\| \underline{t}_c = \pm c_f \left[(\|\underline{T}_{n-1}^d\| + \|\underline{T}_n^d\|) \sin\left(\frac{\alpha_{n-1}^s - \alpha_n^s}{2}\right) + (\|\underline{T}_{n-1}^s\| + \|\underline{T}_n^s\|) \cos\left(\frac{\alpha_{n-1}^s - \alpha_n^s}{2}\right) \left(\frac{\alpha_{n-1}^d - \alpha_n^d}{2}\right) \right] \underline{t}_c. \quad (\text{I.20})$$

Une fois les équations de contact entre le câble et son appui obtenues, le couplage de la dynamique du pylône avec la dynamique du câble en contact avec son support situé en tête de pylône est réalisé en écrivant l'équilibre dynamique de la tête de pylône. L'angle orienté formé entre le vecteur normal à l'appui \underline{n}_c et le vecteur unitaire

- dirigé selon l'axe du pylône \underline{n}_{pyl} est noté α_{pyl} . La tête de pylône est soumise selon la direction tangentielle \underline{t}_c :
- à l'effort tranchant $V(x, t) = EI \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3}(x, t) \cos(\alpha_{pyl})$ généré par le fût de pylône et considéré en son extrémité $x = L$,
 - à la force d'inertie de la masse ponctuelle en tête de pylône, et qui par continuité du déplacement avec le fût de pylône s'exprime $m_t \ddot{v}_1(L, t) \cos(\alpha_{pyl})$,
 - à l'effort tangentiel généré par la dynamique du câble sur son appui $\pm \left\| \underline{F}_{t,c}^d \right\|$.

Finalement, par continuité du déplacement entre le fût et la masse représentative de la tête de pylône, l'équation de couplage s'exprime en fonction du déplacement dynamique transversal du pylône $v_1(x = L, t)$, de l'incrément de tension dynamique du câble $\left\| \underline{T}_{n-1}^d \right\|, \left\| \underline{T}_n^d \right\|$ introduit par le frottement et des angles dynamiques $\alpha_{n-1}^d, \alpha_n^d$ de part et d'autre de l'appui,

$$m_t \ddot{v}_1(L, t) \cos(\alpha_{pyl}) = EI \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3}(L, t) \cos(\alpha_{pyl}) \pm c_f \left[\left(\left\| \underline{T}_{n-1}^d \right\| + \left\| \underline{T}_n^d \right\| \right) \sin\left(\frac{\alpha_{n-1}^s - \alpha_n^s}{2}\right) + \left(\left\| \underline{T}_{n-1}^s \right\| + \left\| \underline{T}_n^s \right\| \right) \cos\left(\frac{\alpha_{n-1}^s - \alpha_n^s}{2}\right) \left(\frac{\alpha_{n-1}^d - \alpha_n^d}{2}\right) \right] \quad (\text{I.21})$$

Couplage selon la direction \underline{n}_c

Il y a continuité du déplacement normal entre l'appui et le câble compte tenu de la condition de contact bilatéral qui empêche tout décollement du câble,

$$v_1(t) \sin(\alpha_{pyl}) = v_d(S_{ap}, t) \quad (\text{I.22})$$

Avec un modèle condensé de l'appui qui ne tient pas compte de la géométrie de la zone de contact, le point $S = S_{ap}$ est singulier : la condition (I.22) à laquelle on ajoute la continuité du déplacement dynamique est alors équivalente à

$$v_1(t) \sin(\alpha_{pyl}) = v_d(S_{ap}^-) = v_d(S_{ap}^+, t) \quad (\text{I.23})$$

Couplage selon la direction \underline{e}_z

Les appuis possèdent des systèmes de guidage qui limitent le déplacement du câble selon la direction \underline{e}_z . Ces dispositifs sont la garniture de sabots et les étaux pour le guidage d'un câble porteur, la gorge de la garniture du galet et les joues des galets en cas de sortie du câble de sa gorge de roulement. Le câble est donc empêché d'avoir un mouvement dans la direction hors-plan par des solutions constructives de l'appui.

Il est donc envisagé en première hypothèse de modélisation qu'il y ait continuité du mouvement de la zone d'appui du câble avec le mouvement hors-plan du câble, soit

$$v_2(L, t) = w_d(S_{ap}, t) \quad (\text{I.24})$$

Annexe J

Couplage dynamique des portées de câble

Modes complexes : effet de 2 masses dans une portée, modèle local simplifié

Le problème de l'étude des modes complexes d'une portion de câble de la section H.30 est adapté ici pour l'étude d'une portion de ligne de longueur $L_0 = L_{p2} - L_{p1}$ avec la présence de deux véhicules en L_{V1} , L_{V2} situés entre les deux appuis. La longueur totale de la boucle fermée à la poulie motrice est notée L_{0b} . Afin de traiter un modèle simplifié à faible nombre de degrés de liberté, l'état statique est supposé uniforme le long de la ligne avec une tension statique moyenne Δ^2 , une courbure moyenne κ_s . Pour décrire la dynamique des véhicules, la référence statique est ici supposée rectiligne en assimilant le repère local $(\underline{t}_v, \underline{n}_v, \underline{e}_z)$ attaché au véhicule au repère local $(\underline{t}, \underline{n}, \underline{e}_z)$ attaché à la configuration statique du câble.

Tout d'abord, la dynamique hors-plan est décrite en ajoutant la condition de continuité du mouvement hors-plan de part et d'autre du véhicule situé en $S_0 = L_V$, tel qu'à chaque instant t

$$w_d^+(L_V, t) = w_d^-(L_V, t), \quad (\text{J.1})$$

et l'équilibre dynamique du véhicule de masse M_v projetée selon la direction hors-plan \underline{e}_z

$$-\Delta^2 w_d'^-(L_V, t) + \Delta^2 w_d'^+(L_V, t) - M_v \ddot{w}_d(L_V, t) = 0. \quad (\text{J.2})$$

Pour chacune des trois portions de câble respectivement situées entre $S_0 = 0$ et $S_0 = L_{V1}$, $S_0 = L_{V1}$ et $S_0 = L_{V2}$, et $S_0 = L_{V2}$ et $S_0 = L_{0b}$, le mouvement longitudinal et vertical est décrit par

$$w_d(S_0, t) = \left[A_l e^{jk_1 S_0} + B_l e^{jk_2 S_0} \right] e^{j\lambda t}, \quad (\text{J.3})$$

avec $l \in [1, 3]$.

Les six conditions aux bords de chacune des trois portions de câble donne le système suivant écrit sous forme matricielle,

$$\left[H \right] \{ q \} = \{ 0 \}. \quad (\text{J.4})$$

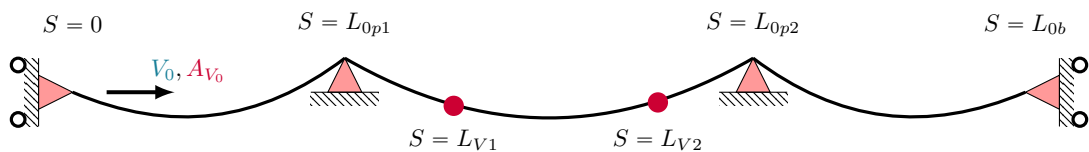


FIGURE J.1: Conditions aux limites du domaine de la boucle de câble avec une portée entre $S = L_{0p1}$ et $S = L_{0p2}$ avec deux véhicules en $S = L_{V1}$ et $S = L_{V2}$

avec $\{q\}^T = \{A_1 \ B_1 \ A_2 \ B_2 \ A_3 \ B_3\}$,

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Eq_{w,11}^{V1} & Eq_{w,12}^{V1} & Eq_{w,21}^{V1} & Eq_{w,22}^{V1} & 0 & 0 \\ Co_{w,11}^{V1} & Co_{w,12}^{V1} & Co_{w,21}^{V1} & Co_{w,22}^{V1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Eq_{w,11}^{V2} & Eq_{w,12}^{V2} & Eq_{w,21}^{V2} & Eq_{w,22}^{V2} \\ 0 & 0 & Co_{w,11}^{V2} & Co_{w,12}^{V2} & Co_{w,21}^{V2} & Co_{w,22}^{V2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (J.5)$$

où

$$Eq_{v,1i}^{Vn} = \left[-\Delta^2 jk_i + M_{Vn} \lambda^2 \right] e^{jk_i L_{Vn}}, \quad i \in [1, 2], n \in [1, 2] \quad (J.6)$$

$$Eq_{v,2i}^{Vn} = \Delta^2 jk_i e^{jk_i L_{Vn}}, \quad i \in [1, 2], n \in [1, 2] \quad (J.7)$$

$$Co_{w,1i}^{Vn} = e^{jk_i L_{Vn}}, \quad i \in [1, 2], n \in [1, 2] \quad (J.8)$$

$$Co_{w,2i}^{Vn} = -e^{jk_i L_{Vn}}, \quad i \in [1, 2], n \in [1, 2] \quad (J.9)$$

La dynamique plane est affectée par l'ajout de nouvelles conditions aux bords qui décrivent la continuité du mouvement dynamique longitudinal et vertical de part et d'autre du véhicule situé en $S_0 = L_V$, tel qu'à chaque instant t

$$u_d^+(L_V, t) = u_d^-(L_V, t), \quad (J.10)$$

$$v_d^+(L_V, t) = v_d^-(L_V, t), \quad (J.11)$$

et l'équilibre dynamique du véhicule de masse M_v projetée selon la direction longitudinal \underline{t} et verticale \underline{n} , tel qu'à chaque instant t

$$-T_d^-(L_V, t) + T_d^+(L_V, t) - M_v \ddot{u}_d(L_V, t) = 0, \quad (J.12)$$

$$-\Delta^2 (v_d^-(L_V, t) + \kappa_s u_d^-(L_V, t)) + \Delta^2 (v_d^+(L_V, t) + \kappa_s u_d^+(L_V, t)) - M_v \ddot{v}_d = 0. \quad (J.13)$$

Pour chacune des trois portions de câble respectivement situées entre $S_0 = 0$ et $S_0 = L_{V1}$, $S_0 = L_{V1}$ et $S_0 = L_{V2}$, et $S_0 = L_{V2}$ et $S_0 = L_{0b}$, le mouvement longitudinal et vertical est décrit par

$$u_d(S_0, t) = \left[A_l e^{jk_1 S_0} + B_l e^{jk_2 S_0} + C_l e^{jk_3 S_0} + D_l e^{jk_4 S_0} \right] e^{j\lambda t} \quad (J.14)$$

$$v_d(S_0, t) = \left[f_1 A_l e^{jk_1 S_0} + f_2 B_l e^{jk_2 S_0} + f_3 C_l e^{jk_3 S_0} + f_4 D_l e^{jk_4 S_0} \right] e^{j\lambda t} \quad (J.15)$$

avec $l \in [1, 3]$.

Les douze conditions aux bords de chacune des trois portions de câble donne le système suivant écrit sous forme matricielle,

$$[H] \{q\} = \{0\}. \quad (J.16)$$

avec $\{q\}^T = \{A_1 \ B_1 \ C_1 \ D_1 \ A_2 \ B_2 \ C_2 \ D_2 \ A_3 \ B_3 \ C_3 \ D_3\}$,

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_1 e^{jk_1 L_{0p1}} & f_2 e^{jk_2 L_{0p1}} & f_3 e^{jk_3 L_{0p1}} & f_4 e^{jk_4 L_{0p1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Eq_{u,11}^{V1} & Eq_{u,12}^{V1} & Eq_{u,13}^{V1} & Eq_{u,14}^{V1} & Eq_{u,21}^{V1} & Eq_{u,22}^{V1} & Eq_{u,23}^{V1} & Eq_{u,24}^{V1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Eq_{v,11}^{V1} & Eq_{v,12}^{V1} & Eq_{v,13}^{V1} & Eq_{v,14}^{V1} & Eq_{v,21}^{V1} & Eq_{v,22}^{V1} & Eq_{v,23}^{V1} & Eq_{v,24}^{V1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Co_{u,11}^{V1} & Co_{u,12}^{V1} & Co_{u,13}^{V1} & Co_{u,14}^{V1} & Co_{u,21}^{V1} & Co_{u,22}^{V1} & Co_{u,23}^{V1} & Co_{u,24}^{V1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Co_{v,11}^{V1} & Co_{v,12}^{V1} & Co_{v,13}^{V1} & Co_{v,14}^{V1} & Co_{v,21}^{V1} & Co_{v,22}^{V1} & Co_{v,23}^{V1} & Co_{v,24}^{V1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Eq_{u,11}^{V2} & Eq_{u,12}^{V2} & Eq_{u,13}^{V2} & Eq_{u,14}^{V2} & Eq_{u,21}^{V2} & Eq_{u,22}^{V2} & Eq_{u,23}^{V2} & Eq_{u,24}^{V2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Eq_{v,11}^{V2} & Eq_{v,12}^{V2} & Eq_{v,13}^{V2} & Eq_{v,14}^{V2} & Eq_{v,21}^{V2} & Eq_{v,22}^{V2} & Eq_{v,23}^{V2} & Eq_{v,24}^{V2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Co_{u,11}^{V2} & Co_{u,12}^{V2} & Co_{u,13}^{V2} & Co_{u,14}^{V2} & Co_{u,21}^{V2} & Co_{u,22}^{V2} & Co_{u,23}^{V2} & Co_{u,24}^{V2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Co_{v,11}^{V2} & Co_{v,12}^{V2} & Co_{v,13}^{V2} & Co_{v,14}^{V2} & Co_{v,21}^{V2} & Co_{v,22}^{V2} & Co_{v,23}^{V2} & Co_{v,24}^{V2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{jk_1 L_{0b}} & e^{jk_2 L_{0b}} & e^{jk_3 L_{0b}} & e^{jk_4 L_{0b}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_1 e^{jk_1 L_{0p2}} & f_2 e^{jk_2 L_{0p2}} & f_3 e^{jk_3 L_{0p2}} & f_4 e^{jk_4 L_{0p2}} \end{bmatrix} \quad (J.17)$$

où

$$Eq_{u,1i}^{Vn} = \left[-EA(jk_i - \kappa_s f_i) + M_{Vn} \lambda^2 \right] e^{jk_i L_{Vn}}, \quad i \in [1, 4], n \in [1, 2] \quad (J.18)$$

$$Eq_{u,2i}^{Vn} = EA(jk_i - \kappa_s f_i) e^{jk_i L_{Vn}}, \quad i \in [1, 4], n \in [1, 2] \quad (J.19)$$

$$Eq_{v,1i}^{Vn} = \left[-\Delta^2(jk_i f_i + \kappa_s) + f_i M_{Vn} \lambda^2 \right] e^{jk_i L_{Vn}}, \quad i \in [1, 4], n \in [1, 2] \quad (J.20)$$

$$Eq_{v,2i}^{Vn} = \Delta^2(jk_i f_i + \kappa_s) e^{jk_i L_{Vn}}, \quad i \in [1, 4], n \in [1, 2] \quad (J.21)$$

$$Co_{u,1i}^{Vn} = e^{jk_i L_{Vn}}, \quad i \in [1, 4], n \in [1, 2] \quad (J.22)$$

$$Co_{u,2i}^{Vn} = -e^{jk_i L_{Vn}}, \quad i \in [1, 4], n \in [1, 2] \quad (J.23)$$

$$Co_{v,1i}^{Vn} = f_i e^{jk_i L_{Vn}}, \quad i \in [1, 4], n \in [1, 2] \quad (J.24)$$

$$Co_{v,2i}^{Vn} = -f_i e^{jk_i L_{Vn}}, \quad i \in [1, 4], n \in [1, 2] \quad (J.25)$$

Modes complexes : couplage de N portées, modèle simplifié

Le problème de l'étude des modes complexes d'une portion de câble de la section H.30 est adapté ici pour l'étude d'une ligne de longueur totale L_{0b} avec $N - 1$ appuis intermédiaire qui séparent N portées de longueur $L_i, i \in [1, N]$ couplées entre elles par des pylônes en $S_0 = L_{pm}, m \in [1, N - 1]$. Afin de traiter un modèle simplifié à faible nombre de degrés de liberté, l'état statique est supposé uniforme le long de la ligne avec une tension statique moyenne Δ^2 , une courbure moyenne κ_s . La condition d'appui bilatéral amène quatre équations à chaque pylône, tel qu'à chaque instant t

$$u_d^+(L_{pm}, t) = u_d^-(L_{pm}, t), \quad m \in [1, N - 1], \quad (J.26)$$

$$v_d^+(L_{pm}, t) = v_d^-(L_{pm}, t), \quad m \in [1, N - 1], \quad (J.27)$$

$$T_d^+(L_{pm}, t) = T_d^-(L_{pm}, t), \quad m \in [1, N - 1], \quad (J.28)$$

$$v_d^+(L_{pm}, t) = 0, \quad m \in [1, N - 1]. \quad (J.29)$$

Pour chacune des N portions de câble situées entre les $N - 1$ appuis et les extrémités de la ligne de câble, le mouvement longitudinal et vertical est décrit par

$$u_d(S_0, t) = \left[A_l e^{jk_1 S_0} + B_l e^{jk_2 S_0} + C_l e^{jk_3 S_0} + D_l e^{jk_4 S_0} \right] e^{j\lambda t} \quad (J.30)$$

$$v_d(S_0, t) = \left[f_1 A_l e^{jk_1 S_0} + f_2 B_l e^{jk_2 S_0} + f_3 C_l e^{jk_3 S_0} + f_4 D_l e^{jk_4 S_0} \right] e^{j\lambda t} \quad (J.31)$$

avec $l \in [1, N]$.

Les quatre conditions aux bords de chacune portions de câble donne le système suivant écrit sous forme matricielle par blocs,

$$\begin{bmatrix} H_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & H_N \end{bmatrix}_{4N \times 4N} \{q\}_{4N \times 1} = \{0\}. \quad (J.32)$$

avec $\{q\}^T = \{A_l \ B_l \ C_l \ D_l\}$,

$$[H_l] = \begin{bmatrix} e^{jk_1 L_{pl}} & e^{jk_2 L_{pl}} & e^{jk_3 L_{pl}} & e^{jk_4 L_{pl}} & -e^{jk_1 L_{pl}} & -e^{jk_2 L_{pl}} & -e^{jk_3 L_{pl}} & -e^{jk_4 L_{pl}} \\ f_1 e^{jk_1 L_{pl}} & f_2 e^{jk_2 L_{pl}} & f_3 e^{jk_3 L_{pl}} & f_4 e^{jk_4 L_{pl}} & -f_1 e^{jk_1 L_{pl}} & -f_2 e^{jk_2 L_{pl}} & -f_3 e^{jk_3 L_{pl}} & -f_4 e^{jk_4 L_{pl}} \\ Ct_{11}^{pl} & Ct_{12}^{pl} & Ct_{13}^{pl} & Ct_{14}^{pl} & Ct_{21}^{pl} & Ct_{22}^{pl} & Ct_{23}^{pl} & Ct_{24}^{pl} \\ f_1 e^{jk_1 L_{pl}} & f_2 e^{jk_2 L_{pl}} & f_3 e^{jk_3 L_{pl}} & f_4 e^{jk_4 L_{pl}} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (J.33)$$

où

$$Ct_{1i}^{pl} = EA(jk_i - \kappa_s f_i), \quad i \in [1, 4], l \in [1, N] \quad (J.34)$$

$$Ct_{2i}^{pl} = -EA(jk_i - \kappa_s f_i), \quad i \in [1, 4], l \in [1, N] \quad (J.35)$$

L'annulation du déterminant $\det([H]) = 0$ renvoi les pulsations ω_k qui assurent l'existence d'une solution

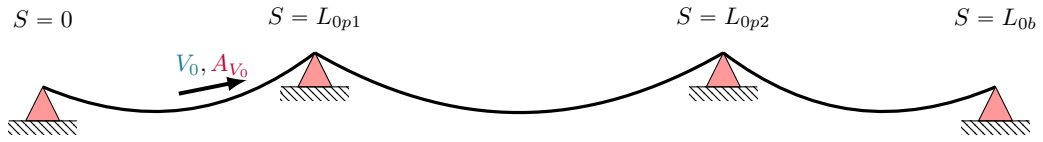


FIGURE J.2: Conditions aux limites du domaine de la boucle de câble avec une portée entre $S = L_{0p1}$ et $S = L_{0p2}$, mouvement longitudinal du câble bloqué à la poulie motrice

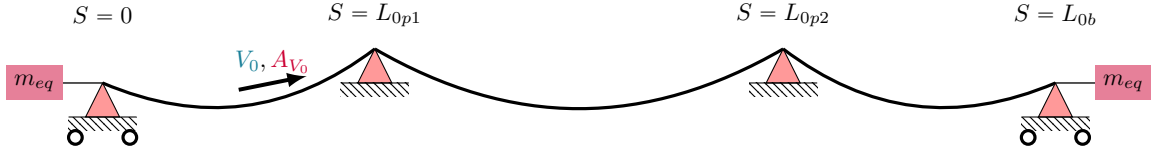


FIGURE J.3: Conditions aux limites du domaine de la boucle de câble avec une portée entre $S = L_{0p1}$ et $S = L_{0p2}$, mouvement longitudinal du câble autorisé à la poulie motrice (inertie équivalente)

non triviale (non-nulle) au système dynamique. La résolution du système

$$\left[H(\phi_j, \omega_k) \right] \{ q_k \} = \{ 0 \} \quad (\text{J.36})$$

renvoi les coordonnées modales $\{ q_k \}$ du mode k global à l'ensemble de la ligne de câble assemblée.

Les coordonnées modales sont définies à une constante près. Une phase de normalisation selon un produit scalaire associée à une norme, par exemple la norme \mathcal{L}^2 , est nécessaire pour une remise à l'échelle.

Annexe K

Stratégies de sous-structuration, réduction de modèle

La méthode proposée dans le travail de thèse consiste à calculer directement les modes du système assemblé selon une méthode directe puis à utiliser la base modale obtenue pour la réduction de modal. Le calcul modal est réalisé à l'échelle globale de la structure et suppose l'existence d'une interface physique entre chaque élément de câble régit par des équations de couplage linéaires.

Lorsqu'une structure est constituée par assemblage de plusieurs sous-structures, d'autres stratégies de réduction existent. Certaines ne nécessitent pas de passer par le calcul des modes du système complet mais seulement à l'échelle de chaque composant. La réduction obtenue combine à la fois une information modale localisée au niveau de chacun des sous-éléments, considérés comme isolés du reste de la structure, et une information apportée sur la réponse modale de chaque sous-élément en interaction avec ses voisins, pour rendre compte du comportement global à l'échelle de la structure toute entière.

Méthodes de Craig-Bampton et de Mac Neal

Les stratégies de réduction de **Craig-Bampton** de type *Component Mode Synthesis* (CMS) sont des méthodes basées sur la continuité des interfaces. La génération de la base de réduction ne nécessite pas de spécifier les équations dynamiques de couplage au niveau des interfaces de liaison entre chaque sous-structure, en réalisant la réduction à l'échelle des composants par :

- 1. Le calcul des modes normaux, ou à **interfaces fixes**, de chaque sous-structure prise séparément.
- 2. le calcul des **modes contraints** afin de rendre compte du couplage par les interfaces avec les autres sous-structures.

Un mode contraint est la réponse dynamique de chaque sous-structure à un déplacement unitaire imposé sur chacun des degrés de liberté de l'interface tandis que les autres demeurent bloqués. Pour deux sous-structures d'indices 1 et 2 modélisées par un modèle discret de type éléments finis, couplées par une interface dont le déplacement est désigné par les degrés de liberté $\{q_i\}_{[n_i \times 1]}$ et le déplacement des degrés de liberté complémentaires $\{q_{c1}\}_{[n_{1c} \times 1]}$, $\{q_{c2}\}_{[n_{2c} \times 1]}$ internes à chaque sous-structure, la base de réduction s'exprime en fonction des matrices de raideur écrites par blocs de chaque sous structure partitionnée sur les DDL d'interfaces et complémentaires ainsi que par les modes à interfaces fixes Φ_{k1} et Φ_{k2} de chaque sous-structure (ou modes normaux dans le cas d'un modèle élastique linéaire),

$$\begin{bmatrix} T_R \end{bmatrix}_{[(n_{1c}+n_i+n_{2c}) \times (N_{1c}+N_i+N_{2c})]} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{k1} \end{bmatrix}_{[n_{1c} \times N_{1c}]} & -K_{1cc}^{-1}K_{1ci} & 0 \\ 0 & I_{[n_i \times N_i]} & 0 \\ 0 & -K_{2cc}^{-1}K_{2ci} & \begin{bmatrix} \Phi_{k2} \end{bmatrix}_{[n_{2c} \times N_{2c}]} \end{bmatrix}. \quad (\text{K.1})$$

Pour le modèle semi analytique d'une ligne de câble, la réduction de Craig-Bampton consiste de façon similaire à calculer d'une part les N modes à interfaces fixes $\Phi_{k,0,j}$ de chaque portion de câble avec des conditions aux limites homogènes en déplacement aux extrémités. Puis les $6 \times N$ modes contraints $\Phi_{k,cont,j}$ d'enrichissement sont calculés en imposant un déplacement unitaire selon chaque direction de la base locale $(\underline{t}, \underline{n}, \underline{e}_z)$ attachée au câble en $S = S_j$ et $S = S_{j+1}$, attaché à un véhicule ou une extrémité en contact avec un appui, les autres degrés de liberté demeurant bloqués et ceci afin d'exprimer la réponse de la sous-structure de câble perturbée sur son interface. Les modes obtenus sont finalement concaténés pour former la base de réduction sur l'élément de câble $S \in [S_j, S_{j+1}]$,

$$\left[T_R \right]_{[3 \times (7N)]} = \left[\Phi_{k,0,j} \quad \Phi_{k,cont,j} \right]. \quad (\text{K.2})$$

À l'échelle du système assemblé complet, le modèle réduit de la structure possède ainsi $(7n_{portion}) \times N$ degrés de liberté $\{q_R(t)\}$,

$$\begin{aligned} \{U_d(S, t)\} &= \{U_{d,j}(S, t)\}_{[(3n_{portion}) \times 1]} = \left[\Phi_{k,0,j}(S) \quad \Phi_{k,cont,j}(S) \right]_{[(3n_{portion} \times (7n_{portion}) \times N)]} \{q_R(t)\}_{[(7n_{portion}) \times N \times 1]} \\ &= \left[T_R \right] \{q_R\}. \quad (\text{K.3}) \end{aligned}$$

De façon similaire, les méthodes dites de **Mac Neal** consistent à former des bases de réduction en concaténant :

- 1. Les modes à **interface libre** $\Phi_{k,free,j}$, avec des conditions aux bords qui traduisent l'absence d'effort extérieur $\underline{F} = \underline{0}$ à l'interface.
- 2. Les **modes d'attache** $\Phi_{k,att,j}$ calculés en imposant successivement un effort unitaire $\underline{F} = \underline{t}, \underline{n}, \underline{e}_z$ selon chaque degré de liberté de l'interface.

Méthode Component Mode Tuning (CMT)

Pour traduire à la fois le caractère couplé du problème tout en gardant une information locale à l'échelle de chaque composant, une méthode de couplage par interface physique dite *Component Mode Tuning* (CMT) [196] est une alternative qui a pour avantage de reproduire le comportement de la structure à un niveau global et non local, et de mener à des modèles numériques de taille plus réduite que les méthodes dites de Craig-Bampton ou de Mac Neal. En effet, la taille de la base de réduction dépend du nombre de composants et non de la taille des interfaces. Pour les applications aux éléments de câble modélisés de façon curviligne, l'intérêt semble limité car la taille des interfaces est réduite à un point.

Pour une ligne de câble, la nouvelle base de réduction est construite en utilisant la restriction des modes globaux du système assemblé sur chaque sous-élément de câble $S \in [S_j, S_{j+1}]$, $j \in [1, n_{portion}]$:

- avec les N modes à interface libres $\{\Phi_{k,free,j}\}$ de chaque composant du système (en l'absence d'effort à l'interface),
- avec la trace $\{\Phi_{k|j}\}$ des N modes globaux de la structure sur chacun des composants du système pour rendre compte de l'interaction avec les autres éléments de l'assemblage, après orthogonalisation des modes d'enrichissement par rapport aux modes libre-libre.

Pour le composant j , le sous-espace de réduction locale s'écrit

$$\left[T_{R,j} \right]_{[3 \times (2N)]} = \left[\Phi_{k,free,j} \quad \Phi_{k|j}^\perp \right]. \quad (\text{K.4})$$

La base contient alors $n_{portion} \times N$ éléments, avec N le nombre de modes retenus sur chaque élément. C'est une réduction exacte dans le sens où le sous-espace généré pour chaque portion de câble est cohérent avec le sous-espace de la ligne de câble complète, tandis que les mouvements des interfaces est bien décrit puisque l'ensemble des mouvements dynamiques possibles à l'interface dans le sous-espace est retenu dans la base de réduction.

Pour assurer la compatibilité cinématique du modèle projeté sur la base de réduction obtenue par CMT, une condition de couplage portant sur la continuité du déplacement aux bords de chaque sous-structure doit être imposée : une manière de procéder est d'écrire le problème réduit avec une contrainte de continuité en

déplacement aux interfaces, puis d'utiliser une méthode de type pénalisation ou multiplicateur de Lagrange pour la résolution [269].

À l'échelle du système assemblé complet, le modèle réduit de la structure possède ainsi $2n_{portion} \times N$ degrés de liberté $\{q_R(t)\}$ qui sont les participations modales de chaque sous composant à la réponse globale de la structure (component modes as DOF),

$$\begin{aligned} \{U_d(S, t)\} = \{U_{d,j}(S, t)\}_{[(3n_{portion}) \times 1]} &= \left[\Phi_{k,free,j}(S) \quad \Phi_{k|j}^\perp(S) \right]_{[(3n_{portion}) \times (2n_{portion}) \times N]} \{q_R(t)\}_{[(2n_{portion}) \times N \times 1]} \\ &= [T_R] \{q_R\}. \quad (\text{K.5}) \end{aligned}$$

Annexe L

Changement de variable de la description statique

Les vecteurs de la base locale de Frenet s'écrivent alors $\forall S \in [S_j, S_{j+1}]$ en fonction des paramètres statiques de chaînette $(\tau_j, K_{1,j}, K_{2,j})$

$$\underline{t}(S) = \frac{1}{\sqrt{\tau_j^2 + \left(\tau_j \sinh\left(\frac{x_j}{\tau_j} + K_{1,j}\right) + S\right)^2}} \begin{pmatrix} \tau_j \\ \tau_j \sinh\left(\frac{x_j}{\tau_j} + K_{1,j}\right) + S \end{pmatrix}, \quad (\text{L.1})$$

$$\underline{n}(S) = \frac{1}{\sqrt{\tau_j^2 + \left(\tau_j \sinh\left(\frac{x_j}{\tau_j} + K_{1,j}\right) + S\right)^2}} \begin{pmatrix} -\tau_j \sinh\left(\frac{x_j}{\tau_j} + K_{1,j}\right) - S \\ \tau_j \end{pmatrix}. \quad (\text{L.2})$$

La grandeur Δ fait intervenir la raideur axiale du câble EA et la tension statique T_s tel que $\forall S \in [S_j, S_{j+1}]$,

$$\Delta^2 = EA \left(1 - \frac{EA}{T_s(S) + EA}\right). \quad (\text{L.3})$$

La courbure κ_s s'exprime $\forall S \in [S_j, S_{j+1}]$,

$$\kappa_s = \frac{\mu g F_x}{F_x^2 + (F_y + \mu g S)^2} = \frac{\tau_j}{\tau_j^2 + \left(\tau_j \sinh\left(\frac{x_j}{\tau_j} + K_{1,j}\right) + S\right)^2}. \quad (\text{L.4})$$

L'angle statique α_s s'écrit par projection du vecteur tangent \underline{t} sur les directions \underline{e}_x et \underline{e}_y qui, par définition de l'angle d'inclinaison du câble, vérifient

$$\underline{t} \cdot \underline{e}_x = \cos(\alpha^s), \quad (\text{L.5})$$

$$\underline{t} \cdot \underline{e}_y = \sin(\alpha^s). \quad (\text{L.6})$$

En remplaçant \underline{t} et \underline{n} par leurs expressions en fonction de S , puis en calculant le rapport entre (L.6) et (L.5),

$$\alpha^s(S) = \tan^{-1} \left(\sinh\left(\frac{x_j}{\tau_j} + K_{1,j}\right) + \frac{S}{\tau_j} \right). \quad (\text{L.7})$$

La position courante dynamique du câble $\underline{X}(S, t)$ sur la portion j est finalement exprimée dans le repère global, formé par la base $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$, en fonction de l'abscisse curviligne de la configuration statique $S \in [S_j, S_{j+1}]$,

$t > 0$,

$$\begin{aligned}
\underline{X}(S, t) = \underline{X}_s(S) + \underline{U}_d(S, t) = & \begin{pmatrix} x_s(S) \\ y(x_s)(S) \\ 0 \end{pmatrix} \\
& + u_d(S, t) \frac{1}{\sqrt{\tau_j^2 + \left(\tau_j \sinh\left(\frac{x_j}{\tau_j} + K_{1,j}\right) + S\right)^2}} \begin{pmatrix} \tau_j \\ \tau_j \sinh\left(\frac{x_j}{\tau_j} + K_{1,j}\right) + S \\ 0 \end{pmatrix} \\
& + v_d(S, t) \frac{1}{\sqrt{\tau_j^2 + \left(\tau_j \sinh\left(\frac{x_j}{\tau_j} + K_{1,j}\right) + S\right)^2}} \begin{pmatrix} -\tau_j \sinh\left(\frac{x_j}{\tau_j} + K_{1,j}\right) - S \\ \tau_j \\ 0 \end{pmatrix} \\
& + w_d(S, t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{L.8})
\end{aligned}$$

L'angle d'inclinaison dynamique du câble α^d dans le plan $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$ intervient dans les formules de couplage entre le câble avec les appuis et les véhicules. Il doit être exprimé en fonction du déplacement dynamique \underline{U}_d . Pour cela, le vecteur tangent au câble sur la configuration dynamique \underline{t} est décomposé en une contribution statique et une contribution dynamique,

$$\underline{t}(S, t) = \underline{t}^s(S) + \underline{t}^d(S, t). \quad (\text{L.9})$$

De même, en décomposant la contribution statique et la contribution dynamique de l'angle d'inclinaison du câble dans le plan $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$, les projections suivantes sont vérifiées

$$\underline{t}(S, t) \cdot \underline{e}_x = \cos(\alpha^s(S) + \alpha^d(S, t)), \quad (\text{L.10})$$

$$\underline{t}(S, t) \cdot \underline{e}_y = \sin(\alpha^s(S) + \alpha^d(S, t)). \quad (\text{L.11})$$

Le modèle dynamique sur lequel repose l'analyse modale est linéaire en se plaçant dans l'hypothèse des petites perturbations dynamiques. D'après le développement de Taylor du vecteur tangent au câble sur la configuration dynamique autour de la position d'équilibre statique, (L.11) s'écrit

$$\underline{t}(S, t) \cdot \underline{e}_y \approx \left(\underline{t}^s(S) + \frac{U'_d(S, t)}{\|\underline{X}'_s\|} - \underline{t}^s \frac{(U'_d(S, t) \cdot \underline{t}^s)}{\|\underline{X}'_s\|} \right) \cdot \underline{e}_y = \sin(\alpha^s(S) + \alpha^d(S, t)) \quad (\text{L.12})$$

Par ailleurs, dans le contexte de l'hypothèse des petites perturbations dynamiques de l'angle statique α^s par l'angle dynamique α_d ,

$$\sin(\alpha^s(S) + \alpha^d(S, t)) \approx \sin(\alpha^s) + \cos(\alpha^s)\alpha^d. \quad (\text{L.13})$$

En simplifiant les termes statiques, il vient finalement

$$\alpha^d(S, t) = \frac{1}{\cos(\alpha^s)} \left(\frac{U'_d(S, t)}{\|\underline{X}'_s\|} - \underline{t}^s \frac{(U'_d(S, t) \cdot \underline{t}^s)}{\|\underline{X}'_s\|} \right) \cdot \underline{e}_y. \quad (\text{L.14})$$

Le développement de l'équation (L.14) en fonction des résultats du calcul statique de la chaînette conduit à l'expression suivante,

$$\alpha^d(S, t) = \frac{1}{\cos\left(\tan^{-1}\left[\sinh\left(\frac{x_j}{\tau_j} + K_{1,j}\right) + \frac{S}{\tau_j}\right]\right)} \left[\frac{EA}{T_s(S) + EA} \frac{-\kappa_s v_d(\tau_j \sinh\left(\frac{x_j}{\tau_j} + K_{1,j}\right) + S) + (v'_d + \kappa_s u_d)\tau_j}{\sqrt{\tau_j^2 + \left(\tau_j \sinh\left(\frac{x_j}{\tau_j} + K_{1,j}\right) + S\right)^2}} \right] \quad (\text{L.15})$$

Annexe M

Interactions modales paramétriques

L'étude de l'interaction entre deux modes repose sur un modèle réduit à deux degrés de liberté obtenu par projection du modèle complet linéaire de la ligne sur deux modes respectivement désignés par 1 et 2 impliqués dans un rapprochement de leurs pulsations ω_1 et ω_2 sur un intervalle du paramètre de contrôle l_c . Après avoir remplacé le déplacement dynamique $\underline{U}_d = q_1 \underline{\Phi}_1 + q_2 \underline{\Phi}_2 = [T] \{q\}$ et réalisé la projection selon la norme définie en 5.2.1, le modèle réduit s'écrit sous la forme,

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{F\}, \quad (\text{M.1})$$

avec la matrice de masse $[M]$, de raideur $[K]$, d'amortissement $[C]$, le vecteur des coordonnées généralisées $\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$ et le vecteur des forces modales $\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$. $F_1 = \int \Phi_1 f dS$, $F_2 = \int \Phi_2 f dS$ représentent la commandabilité modale selon chaque mode, ou l'effet respectif du forçage extérieur $f(S)$ sur $\Phi_1(S)$ et $\Phi_2(S)$.

Les modèles de câble abordés dans le chapitre 4 mettent en évidence le couplage entre la dynamique longitudinale et verticale qui couple les modes entre eux. Ainsi, les modes de lignes ne sont pas strictement orthogonaux deux à deux ce qui peut être mis en évidence en calculant la matrice de MAC. Les matrices du modèle réduit ne sont pas diagonales dans le cas général et seront considérées sous la forme générale,

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & m_{c1} \\ m_{c2} & 1 \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & k_{c1} \\ k_{c2} & \omega_2^2 \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{M.2})$$

L'objectif est ici de caractériser l'influence du rapport des pulsations modales $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ sur le transfert $[H(\lambda)]$ en régime forcé tel que

$$[H(\lambda)] \{q_0\} = \{F_0\} \quad (\text{M.3})$$

avec $\{F\} = \{F_0\} e^{\lambda t}$ et $\{q\} = \{q_0\} e^{\lambda t}$.

Les valeurs et vecteurs propres du modèle isolé sans amortissement associé, $[H_0(\lambda)] = \lambda^2 [M] + [K]$, sont recherchés. La condition d'annulation du déterminant conduit à une équation bi-carrée en λ ,

$$(1 - m_{c1}m_{c2})\lambda^4 + (\omega_1^2 + \omega_2^2 - m_{c1}k_{c2} - m_{c2}k_{c1})\lambda^2 + (\omega_1^2\omega_2^2 - k_{c1}k_{c2}) = 0 \quad (\text{M.4})$$

Les valeurs propres sont exprimées en fonction du discriminant

$$\Delta = (\omega_1^2 + \omega_2^2 - m_{c1}k_{c2} - m_{c2}k_{c1})^2 - 4(1 - m_{c1}m_{c2})(\omega_1^2\omega_2^2 - k_{c1}k_{c2}), \quad (\text{M.5})$$

$$\lambda = \pm j \sqrt{\frac{-(\omega_1^2 + \omega_2^2 - m_{c1}k_{c2} - m_{c2}k_{c1}) \pm \sqrt{\Delta}}{2(1 - m_{c1}m_{c2})}}. \quad (\text{M.6})$$

Selon le signe du discriminant :

- $\Delta > 0$, les valeurs propres λ sont imaginaires pures : d'après l'analyse modale en 5.2 c'est en pratique le cas des lignes de transport par câble en l'absence des contributions inertielles complexes additionnelles issues de la mise en translation du câble.
- $\Delta < 0$, les valeurs propres λ sont complexes sous la forme $\lambda = \omega + j\xi$: c'est le cadre de la complex eigenvalue analysis (CEA) qui a été abordée en 5.2.4 pour un modèle de câble en translation qui apportent des termes complexes équivalent à un effet d'amortissement.

En l'absence d'amortissement, un discriminant négatif est dû aux termes extra-diagonaux. En effet, sans termes de couplage, $\Delta = (\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4\omega_1^2\omega_2^2 = (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 > 0$ et les valeurs propres sont imaginaires pures.

Dans le cas de valeurs propres complexes, un comportement instable est attendu lorsque la partie réelle devient positive, la partie imaginaire donnant l'information sur la pulsation. C'est un mécanisme typique des systèmes en présence d'une force aéro-élastique ou en présence d'un contact frottant qui viennent rompre la symétrie du problème et dont les paramètres contrôlent l'évolution dynamique : lorsque deux parties imaginaires deviennent coïncidentes (phénomène de *lock-in* des fréquences modales), les parties réelles changent de signe ce qui amorce l'instabilité. En se plaçant au point de coïncidence $\omega_1 = \omega_2 = \omega_c$ et en supposant $[M]$ inversible, le système isolé sans amortissement s'écrit sous la forme

$$\{\ddot{q}\} + [M]^{-1} [K] \{q\} = [0]. \quad (\text{M.7})$$

Dans le cas d'un modèle projeté sur des modes normaux, $[M]^{-1} [K]$ est diagonale en les pulsations propres élevées au carré. Lorsque deux valeurs propres sont identiques (valeur propre double au point de croisement des modes), il faut étudier la dimension du sous espace propre associé aux deux vecteurs propres : si les deux vecteurs propres sont colinéaires, alors le sous espace propre est de dimension une et la matrice n'est pas diagonalisable car il n'existe pas de vecteurs indépendants formant une base permettant de diagonaliser la matrice. Si la matrice $[M]^{-1} [K]$ n'est pas diagonalisable, elle peut-être exprimée sous une forme de Jordan canonique avec les valeurs propres comme termes diagonaux et un terme égal à un extra-diagonal. Par un changement de base $\{q\} = [P] \{p\}$,

$$\begin{cases} \ddot{p}_1 + \omega_c^2 p_1 = 0 \\ \ddot{p}_2 + \omega_c^2 p_2 + p_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{M.8})$$

La solution $p_1(t) = P e^{j\omega_c t} + \bar{P} e^{-j\omega_c t}$ est obtenue par la première équation homogène. En injectant cette forme dans la seconde équation,

$$\ddot{p}_2 + \omega_c^2 p_2 = -P e^{j\omega_c t} - \bar{P} e^{-j\omega_c t}, \quad (\text{M.9})$$

il apparaît un terme de forçage résonant à la pulsation ω_c qui est à l'origine d'une solution divergente en p_2 : c'est une **instabilité algébrique**. Le phénomène de *lock-in* n'a pas été mis en évidence par la CEA menée en fonction du paramètre de vitesse V_0 dans la sous-section 5.2.4 pour un modèle de câble en translation.

Le cas $\Delta > 0$ qui correspond à la configuration de la sous-section 5.2.5 et est traité dans la suite. Les vecteurs propres $\{\hat{\Phi}_{1,2}\}$ associés aux valeurs propres positives $\lambda_{1,2} = j\sqrt{\frac{-(\omega_1^2 + \omega_2^2 - m_{c1}k_{c2} - m_{c2}k_{c1}) \pm \sqrt{\Delta}}{2(1 - m_{c1}m_{c2})}}$ sont calculés après normalisation,

$$\{\hat{\Phi}_1\} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_1}} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{M.10})$$

$$\{\hat{\Phi}_2\} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_2}} \begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{M.11})$$

avec

$$\alpha_1 = \frac{2(1 - m_{c1}m_{c2})k_{c1} + m_{c1}(\omega_1^2 + \omega_2^2 - m_{c1}k_{c2} - m_{c2}k_{c1}) + k_{c1} - \sqrt{\Delta}}{(\omega_1^2 + \omega_2^2 - m_{c1}k_{c2} - m_{c2}k_{c1}) + k_{c1} - \sqrt{\Delta}} + 2(1 - m_{c1}m_{c2})\omega_1^2,$$

$$\alpha_2 = \frac{2(1 - m_{c1}m_{c2})k_{c1} + m_{c1}(\omega_1^2 + \omega_2^2 - m_{c1}k_{c2} - m_{c2}k_{c1}) + k_{c1} + \sqrt{\Delta}}{(\omega_1^2 + \omega_2^2 - m_{c1}k_{c2} - m_{c2}k_{c1}) + k_{c1} + \sqrt{\Delta}} + 2(1 - m_{c1}m_{c2})\omega_1^2.$$

En notant $T_2 = \begin{bmatrix} \hat{\Phi}_1 & \hat{\Phi}_2 \end{bmatrix}$, le vecteur de sortie est recherché sous la forme $\{q_0\} = [T_2] \{q_{02}\}$ et le modèle (M.3) est projeté sur la base construite à partir des vecteurs propres

$$[T_2]^T [H(\lambda)] [T_2] \{q_{02}\} = [T_2]^T \{F_0\}. \quad (\text{M.12})$$

La fonction de transfert

$$[G(\omega)] = \left([T_2]^T [H(\lambda)] [T_2] \right)^{-1}. \quad (\text{M.13})$$

est calculée en faisant varier ω_2 en fixant les valeurs

$$m_{c1} = m_{c2} = 0.1 \quad \omega_1^2 = 2 \quad k_{c1} = k_{c2} = 0.1 \quad c_1 = c_2 = 0.05$$

Pour une excitation à la pulsation ω située autour de la résonance avec le mode 1, telle que $\omega \approx \omega_1$, la valeur maximale des coefficients du transfert $G_{11} = G_{12} = G_{21} = G_{22}$ sur l'intervalle $\omega \in [\omega_1 - \delta\omega, \omega_1 + \delta\omega]$ est donnée en Fig. M.1 en fonction du rapport des pulsation modales $\frac{\omega_1}{\omega_2}$. Un effet d'amplification est bien visible autour de $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 1$, ce qui correspond au cas où les deux modes ont des fréquences proches.

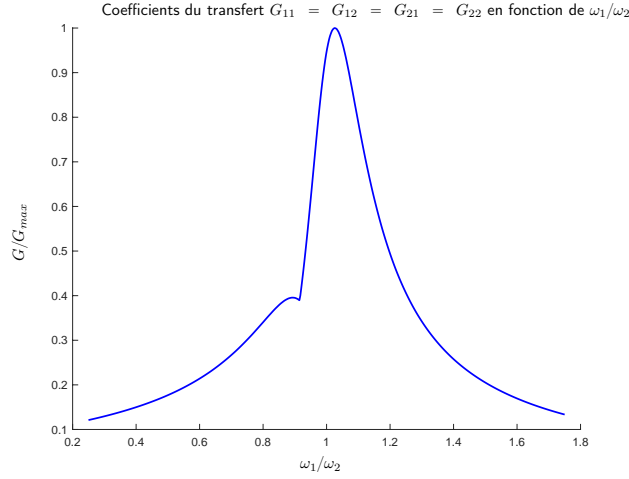


FIGURE M.1: Effet d'amplification de la réponse d'un système à deux degrés de liberté par coïncidence des modes

Annexe N

Calcul formel de l'amplitude (équation de Mathieu généralisée)

Les expressions en Maple sont données pour l'obtention des parties réelles et complexes X et Y de \mathcal{Q} .

— X en fonction de Y :

$$X = (P^2 * Qa * Y^4 - P^2 * Ra * Y^4 - P^2 * Vb * Y^4 - P^2 * Sb * Y^3 - P^2 * Ua * Y^3 + P * Qa * Qb * Y^3 + P * Qa * Rb * Y^3 - 2 * P * Qb * Ra * Y^3 - P * Rb * Vb * Y^3 - P^2 * Y^2 * f1 + P * Qa * Ub * Y^2 - 2 * P * Qb * Ua * Y^2 - P * Rb * Sb * Y^2 - P * Ub * Vb * Y^2 + Qa * Qb * Rb * Y^2 - Qb^2 * Ra * Y^2 + P * Qa * Y * f2 - 2 * P * Qb * Y * f1 - P * Sb * Ub * Y - P * Vb * Y * f2 + Qa * Qb * Ub * Y - Qb^2 * Ua * Y - P * Sb * f2 + Qa * Qb * f2 - Qb^2 * f1) / (P^2 * Qb * Y^3 - P^2 * Rb * Y^3 + P^2 * Va * Y^3 + P^2 * Sa * Y^2 - P^2 * Ub * Y^2 - P * Qa * Vb * Y^2 + P * Qb^2 * Y^2 - P * Qb * Rb * Y^2 + 2 * P * Qb * Va * Y^2 + P * Vb^2 * Y^2 - P^2 * Y * f2 - P * Qa * Sb * Y + 2 * P * Qb * Sa * Y - P * Qb * Ub * Y + 2 * P * Sb * Vb * Y - Qa * Qb * Vb * Y + Qb^2 * Va * Y - P * Qb * f2 + P * Sb^2 - Qa * Qb * Sb + Qb^2 * Sa);$$

— Polynôme de degré 9 vérifié par Y :

$$0 = (P^5 * Qa^2 - 2 * P^5 * Qa * Ra - 2 * P^5 * Qa * Vb + P^5 * Qb^2 - 2 * P^5 * Qb * Rb + 2 * P^5 * Qb * Va + P^5 * Ra^2 + 2 * P^5 * Ra * Vb + P^5 * Rb^2 - 2 * P^5 * Rb * Va + P^5 * Va^2 + P^5 * Vb^2) * Y^9 + (-2 * P^5 * Qa * Sb - 2 * P^5 * Qa * Ua + 2 * P^5 * Qb * Sa - 2 * P^5 * Qb * Ub + 2 * P^5 * Ra * Sb + 2 * P^5 * Ra * Ua - 2 * P^5 * Rb * Sa + 2 * P^5 * Rb * Ub + 2 * P^5 * Sa * Va + 2 * P^5 * Sb * Vb + 2 * P^5 * Ua * Vb - 2 * P^5 * Ub * Va + 3 * P^4 * Qa^2 * Qb + 2 * P^4 * Qa^2 * Rb - 8 * P^4 * Qa * Qb * Ra - 5 * P^4 * Qa * Qb * Vb - 2 * P^4 * Qa * Ra * Rb - 3 * P^4 * Qa * Rb * Vb - P^4 * Qa * Va * Vb + 2 * P^4 * Qb^3 - 3 * P^4 * Qb^2 * Rb + 6 * P^4 * Qb^2 * Va + 5 * P^4 * Qb * Ra^2 + 5 * P^4 * Qb * Ra * Vb - 4 * P^4 * Qb * Rb * Va + 4 * P^4 * Qb * Va^2 + 2 * P^4 * Qb * Vb^2 + 3 * P^4 * Ra * Rb * Vb - P^4 * Ra * Va * Vb + P^4 * Rb^3 - 2 * P^4 * Rb^2 * Va + P^4 * Rb * Va^2 + P^4 * Rb * Vb^2 + P^4 * Va * Vb^2) * Y^8 + (-2 * P^5 * Qa * f1 - 2 * P^5 * Qb * f2 + 2 * P^5 * Ra * f1 + 2 * P^5 * Rb * f2 + P^5 * Sa^2 - 2 * P^5 * Sa * Ub + P^5 * Sb^2 + 2 * P^5 * Sb * Ua + P^5 * Ua^2 + P^5 * Ub^2 - 2 * P^5 * Va * f2 + 2 * P^5 * Vb * f1 + 2 * P^4 * Qa^2 * Ub - 5 * P^4 * Qa * Qb * Sb - 8 * P^4 * Qa * Qb * Ua - 2 * P^4 * Qa * Ra * Ub - 3 * P^4 * Qa * Rb * Sb - 2 * P^4 * Qa * Rb * Ua - P^4 * Qa * Sa * Vb - P^4 * Qa * Sb * Va - 3 * P^4 * Qa * Ub * Vb + 6 * P^4 * Qb^2 * Sa - 3 * P^4 * Qb^2 * Ub + 5 * P^4 * Qb * Ra * Sb + 10 * P^4 * Qb * Ra * Ua - 4 * P^4 * Qb * Rb * Sa + 8 * P^4 * Qb * Sa * Va + 4 * P^4 * Qb * Sb * Vb + 5 * P^4 * Qb * Ua * Vb - 4 * P^4 * Qb * Ub * Va + 3 * P^4 * Ra * Rb * Sb - P^4 * Ra * Sa * Vb - P^4 * Ra * Sb * Va + 3 * P^4 * Ra * Ub * Vb - 2 * P^4 * Rb^2 * Sa + 3 * P^4 * Rb^2 * Ub + 2 * P^4 * Rb * Sa * Va + 2 * P^4 * Rb * Sb * Vb + 3 * P^4 * Rb * Ua * Vb - 4 * P^4 * Rb * Ub * Va + P^4 * Sa * Vb^2 + 2 * P^4 * Sb * Va * Vb - P^4 * Ua * Va * Vb + P^4 * Ub * Va^2 + P^4 * Ub * Vb^2 + 3 * P^3 * Qa^2 * Qb^2 + 6 * P^3 * Qa^2 * Qb * Rb + P^3 * Qa^2 * Rb^2 - 12 * P^3 * Qa * Qb^2 * Ra - 4 * P^3 * Qa * Qb^2 * Vb - 8 * P^3 * Qa * Qb * Ra * Rb - 7 * P^3 * Qa * Qb * Rb * Vb - 3 * P^3 * Qa * Qb * Va * Vb + P^3 * Qa * Ra * Vb^2 - P^3 * Qa * Rb^2 * Vb - P^3 * Qa * Rb * Va * Vb + P^3 * Qb^4 + 6 * P^3 * Qb^3 * Va + 10 * P^3 * Qb^2 * Ra^2 + 3 * P^3 * Qb^2 * Ra * Vb - 3 * P^3 * Qb^2 * Rb^2 + 6 * P^3 * Qb^2 * Va^2 + P^3 * Qb^2 * Vb^2 + 9 * P^3 * Qb * Ra * Rb * Vb - 4 * P^3 * Qb * Ra * Va * Vb + 2 * P^3 * Qb * Rb^3 - 6 * P^3 * Qb * Rb^2 * Va + 4 * P^3 * Qb * Rb * Va^2 + 2 * P^3 * Qb * Rb * Vb^2 + 2 * P^3 * Qb * Va * Vb^2 - P^3 * Ra * Vb^3 + P^3 * Rb * Va * Vb^2) * Y^7 + (-2 * P^5 * Sa * f2 + 2 * P^5 * Sb * f1 + 2 * P^5 * Ua * f1 + 2 * P^5 * Ub * f2 + 2 * P^4 * Qa^2 * f2 - 8 * P^4 * Qa * Qb * f1 - 2 * P^4 * Qa * Ra * f2 - 2 * P^4 * Qa * Rb * f1 - P^4 * Qa * Sa * Sb - 3 * P^4 * Qa * Sb * Ub - 2 * P^4 * Qa * Ua * Ub - 3 * P^4 * Qa * Vb * f2 - 3 * P^4 * Qb^2 * f2 + 10 * P^4 * Qb * Ra * f1 + 4 * P^4 * Qb * Sa^2 - 4 * P^4 * Qb * Sa * Ub + 2 * P^4 * Qb * Sb^2 + 5 * P^4 * Qb * Sb * Ua + 5 * P^4 * Qb * Ua^2 - 4 * P^4 * Qb * Va * f2 + 5 * P^4 * Qb * Vb * f1 - P^4 * Ra * Sa * Sb + 3 * P^4 * Ra * Sb * Ub + 3 * P^4 * Ra * Vb * f2 + 3 * P^4 * Rb^2 * f2 + P^4 * Rb * Sa^2 - 4 * P^4 * Rb * Sa * Ub + P^4 * Rb * Sb^2 + 3 * P^4 * Rb * Sb * Ua + 3 * P^4 * Rb * Ub^2 - 4 * P^4 * Rb * Va * f2 + 3 * P^4 * Rb * Vb * f1 + 2 * P^4 * Sa * Sb * Vb - P^4 * Sa * Ua * Vb + 2 * P^4 * Sa * Ub * Va + P^4 * Sb^2 * Va - P^4 * Sb * Ua * Va + 2 * P^4 * Sb * Ub * Vb + 3 * P^4 * Ua * Ub * Vb - 2 * P^4 * Ub^2 * Va + P^4 * Va^2 * f2 - P^4 * Va * Vb * f1 + P^4 * Vb^2 * f2 + 6 * P^3 * Qa^2 * Qb * Ub + 2 * P^3 * Qa^2 * Rb$$

$$\begin{aligned}
& Ub-4*P^3*Qa*Qb^2*Sb-12*P^3*Qa*Qb^2*Ua-8*P^3*Qa*Qb*Ra*Ub-7*P^3*Qa*Qb*Rb*Sb-8*P^3*Qa*Qb*Rb* \\
& Ua-3*P^3*Qa*Qb*Sa*Vb-3*P^3*Qa*Qb*Sb*Va-7*P^3*Qa*Qb*Ub*Vb+2*P^3*Qa*Ra*Sb*Vb-P^3*Qa*Rb^2* \\
& Sb-P^3*Qa*Rb*Sa*Vb-P^3*Qa*Rb*Sb*Va-2*P^3*Qa*Rb*Ub*Vb+P^3*Qa*Ua*Vb^2-P^3*Qa*Ub*Va*Vb+6* \\
& P^3*Qb^3*Sa+3*P^3*Qb^2*Ra*Sb+20*P^3*Qb^2*Ra*Ua-6*P^3*Qb^2*Rb*Ub+12*P^3*Qb^2*Sa*Va+2*P^3*Qb^2*Sb* \\
& Vb+3*P^3*Qb^2*Ua*Vb+9*P^3*Qb*Ra*Rb*Sb-4*P^3*Qb*Ra*Sa*Vb-4*P^3*Qb*Ra*Sb*Va+9*P^3*Qb*Ra* \\
& Ub*Vb-6*P^3*Qb*Rb^2*Sa+6*P^3*Qb*Rb^2*Ub+8*P^3*Qb*Rb*Sa*Va+4*P^3*Qb*Rb*Sb*Vb+9*P^3*Qb*Rb* \\
& Ua*Vb-12*P^3*Qb*Rb*Ub*Va+2*P^3*Qb*Sa*Vb^2+4*P^3*Qb*Sb*Va*Vb-4*P^3*Qb*Ua*Va*Vb+4*P^3*Qb* \\
& Ub*Va^2+2*P^3*Qb*Ub*Vb^2-3*P^3*Ra*Sb*Vb^2+P^3*Rb*Sa*Vb^2+2*P^3*Rb*Sb*Va*Vb-P^3*Ua*Vb^3+P^3* \\
& Ub*Va*Vb^2+P^2*Qa^2*Qb^3+6*P^2*Qa^2*Qb^2*Rb+3*P^2*Qa^2*Qb*Rb^2-8*P^2*Qa*Qb^3*Ra-P^2*Qa*Qb^3*Vb- \\
& 12*P^2*Qa*Qb^2*Ra*Rb-5*P^2*Qa*Qb^2*Rb*Vb-3*P^2*Qa*Qb^2*Va*Vb+3*P^2*Qa*Qb*Ra*Vb^2-2*P^2*Qa* \\
& Qb*Rb^2*Vb-3*P^2*Qa*Qb*Rb*Va*Vb+P^2*Qb^4*Rb+2*P^2*Qb^4*Va+10*P^2*Qb^3*Ra^2-P^2*Qb^3*Ra*Vb-2* \\
& P^2*Qb^3*Rb^2+4*P^2*Qb^3*Rb*Va+4*P^2*Qb^3*Va^2+9*P^2*Qb^2*Ra*Rb*Vb-6*P^2*Qb^2*Ra*Va*Vb+P^2*Qb^2* \\
& Rb^3-6*P^2*Qb^2*Rb^2*Va+6*P^2*Qb^2*Rb*Va^2+P^2*Qb^2*Rb*Vb^2+P^2*Qb^2*Va*Vb^2-2*P^2*Qb*Ra*Vb^3+2* \\
& P^2*Qb*Rb*Va*Vb^2)*Y^6+(P^5*f1^2+P^5*f2^2-3*P^4*Qa*Sb*f2-2*P^4*Qa*Ua*f2-2*P^4*Qa*Ub*f1-4*P^4* \\
& Qb*Sa*f2+5*P^4*Qb*Sb*f1+10*P^4*Qb*Ua*f1+3*P^4*Ra*Sb*f2-4*P^4*Rb*Sa*f2+3*P^4*Rb*Sb*f1+6*P^4* \\
& Rb*Ub*f2+P^4*Sa^2*Ub+P^4*Sa*Sb^2-P^4*Sa*Sb*Ua-2*P^4*Sa*Ub^2+2*P^4*Sa*Va*f2-P^4*Sa*Vb*f1+P^4* \\
& Sb^2*Ub+3*P^4*Sb*Ua*Ub-P^4*Sb*Va*f1+2*P^4*Sb*Vb*f2+3*P^4*Ua*Vb*f2+P^4*Ub^3-4*P^4*Ub*Va*f2+ \\
& 3*P^4*Ub*Vb*f1+6*P^3*Qa^2*Qb*f2+2*P^3*Qa^2*Rb*f2+P^3*Qa^2*Ub^2-12*P^3*Qa*Qb^2*f1-8*P^3*Qa*Qb* \\
& Ra*f2-8*P^3*Qa*Qb*Rb*f1-3*P^3*Qa*Qb*Sa*Sb-7*P^3*Qa*Qb*Sb*Ub-8*P^3*Qa*Qb*Ua*Ub-7*P^3*Qa* \\
& Qb*Vb*f2+P^3*Qa*Ra*Sb^2-P^3*Qa*Rb*Sa*Sb-2*P^3*Qa*Rb*Sb*Ub-2*P^3*Qa*Rb*Vb*f2-P^3*Qa*Sa* \\
& Ub*Vb+2*P^3*Qa*Sb*Ua*Vb-P^3*Qa*Sb*Ub*Va-P^3*Qa*Ub^2*Vb-P^3*Qa*Va*Vb*f2+P^3*Qa*Vb^2*f1+ \\
& 20*P^3*Qb^2*Ra*f1-6*P^3*Qb^2*Rb*f2+6*P^3*Qb^2*Sa^2+P^3*Qb^2*Sb^2+3*P^3*Qb^2*Sb*Ua+10*P^3*Qb^2*Ua^2- \\
& 3*P^3*Qb^2*Ub^2+3*P^3*Qb^2*Vb*f1-4*P^3*Qb*Ra*Sa*Sb+9*P^3*Qb*Ra*Sb*Ub+9*P^3*Qb*Ra*Vb*f2+6*P^3* \\
& Qb*Rb^2*f2+4*P^3*Qb*Rb*Sa^2-12*P^3*Qb*Rb*Sa*Ub+2*P^3*Qb*Rb*Sb^2+9*P^3*Qb*Rb*Sb*Ua+6*P^3*Qb* \\
& Rb*Ub^2-12*P^3*Qb*Rb*Va*f2+9*P^3*Qb*Rb*Vb*f1+4*P^3*Qb*Sa*Sb*Vb-4*P^3*Qb*Sa*Ua*Vb+8*P^3* \\
& Qb*Sa*Ub*Va+2*P^3*Qb*Sb^2*Va-4*P^3*Qb*Sb*Ua*Va+4*P^3*Qb*Sb*Ub*Vb+9*P^3*Qb*Ua*Ub*Vb-6*P^3* \\
& Qb*Ub^2*Va+4*P^3*Qb*Va^2*f2-4*P^3*Qb*Va*Vb*f1+2*P^3*Qb*Vb^2*f2-3*P^3*Ra*Sb^2*Vb+2*P^3*Rb*Sa* \\
& Sb*Vb+P^3*Rb*Sb^2*Va+P^3*Sa*Ub*Vb^2-3*P^3*Sb*Ua*Vb^2+2*P^3*Sb*Ub*Va*Vb+P^3*Va*Vb^2*f2-P^3* \\
& Vb^3*f1+6*P^2*Qa^2*Qb^2*Ub+6*P^2*Qa^2*Qb*Rb*Ub-P^2*Qa*Qb^3*Sb-8*P^2*Qa*Qb^3*Ua-12*P^2*Qa*Qb^2* \\
& Ra*Ub-5*P^2*Qa*Qb^2*Rb*Sb-12*P^2*Qa*Qb^2*Rb*Ua-3*P^2*Qa*Qb^2*Sa*Vb-3*P^2*Qa*Qb^2*Sb*Va-5* \\
& P^2*Qa*Qb^2*Ub*Vb+6*P^2*Qa*Qb*Ra*Sb*Vb-2*P^2*Qa*Qb*Rb^2*Sb-3*P^2*Qa*Qb*Rb*Sa*Vb-3*P^2*Qa* \\
& Qb*Rb*Sb*Va-4*P^2*Qa*Qb*Rb*Ub*Vb+3*P^2*Qa*Qb*Ua*Vb^2-3*P^2*Qa*Qb*Ub*Va*Vb+2*P^2*Qb^4*Sa+ \\
& P^2*Qb^4*Ub-P^2*Qb^3*Ra*Sb+20*P^2*Qb^3*Ra*Ua+4*P^2*Qb^3*Rb*Sa-4*P^2*Qb^3*Rb*Ub+8*P^2*Qb^3*Sa* \\
& Va-P^2*Qb^3*Ua*Vb+4*P^2*Qb^3*Ub*Va+9*P^2*Qb^2*Ra*Rb*Sb-6*P^2*Qb^2*Ra*Sa*Vb-6*P^2*Qb^2*Ra*Sb* \\
& Va+9*P^2*Qb^2*Ra*Ub*Vb-6*P^2*Qb^2*Rb^2*Sa+3*P^2*Qb^2*Rb^2*Ub+12*P^2*Qb^2*Rb*Sa*Va+2*P^2*Qb^2* \\
& Rb*Sb*Vb+9*P^2*Qb^2*Rb*Ua*Vb-12*P^2*Qb^2*Rb*Ub*Va+P^2*Qb^2*Sa*Vb^2+2*P^2*Qb^2*Sb*Va*Vb-6*P^2* \\
& Qb^2*Ua*Va*Vb+6*P^2*Qb^2*Ub*Va^2+P^2*Qb^2*Ub*Vb^2-6*P^2*Qb*Ra*Sb*Vb^2+2*P^2*Qb*Rb*Sa*Vb^2+4* \\
& P^2*Qb*Rb*Sb*Va*Vb-2*P^2*Qb*Ua*Vb^3+2*P^2*Qb*Ub*Va*Vb^2+2*P*Qa^2*Qb^3*Rb+3*P*Qa^2*Qb^2*Rb^2- \\
& 2*P*Qa*Qb^4*Ra-8*P*Qa*Qb^3*Ra*Rb-P*Qa*Qb^3*Rb*Vb-P*Qa*Qb^3*Va*Vb+3*P*Qa*Qb^2*Ra*Vb^2- \\
& P*Qa*Qb^2*Rb^2*Vb-3*P*Qa*Qb^2*Rb*Va*Vb+5*P*Qb^4*Ra^2-P*Qb^4*Ra*Vb+2*P*Qb^4*Rb*Va+P*Qb^4* \\
& Va^2+3*P*Qb^3*Ra*Rb*Vb-4*P*Qb^3*Ra*Va*Vb-2*P*Qb^3*Rb^2*Va+4*P*Qb^3*Rb*Va^2-P*Qb^2*Ra*Vb^3+ \\
& P*Qb^2*Rb*Va*Vb^2)*Y^5+(-2*P^4*Qa*f1*f2+5*P^4*Qb*f1^2+3*P^4*Rb*f2^2+P^4*Sa^2*f2-P^4*Sa*Sb*f1- \\
& 4*P^4*Sa*Ub*f2+P^4*Sb^2*f2+3*P^4*Sb*Ua*f2+3*P^4*Sb*Ub*f1+3*P^4*Ub^2*f2-2*P^4*Va*f2^2+3*P^4*Vb* \\
& f1*f2+2*P^3*Qa^2*Ub*f2-7*P^3*Qa*Qb*Sb*f2-8*P^3*Qa*Qb*Ua*f2-8*P^3*Qa*Qb*Ub*f1-2*P^3*Qa*Rb* \\
& Sb*f2-P^3*Qa*Sa*Sb*Ub-P^3*Qa*Sa*Vb*f2+P^3*Qa*Sb^2*Ua-P^3*Qa*Sb*Ub^2-P^3*Qa*Sb*Va*f2+2*P^3* \\
& Qa*Sb*Vb*f1-2*P^3*Qa*Ub*Vb*f2+3*P^3*Qb^2*Sb*f1+20*P^3*Qb^2*Ua*f1-6*P^3*Qb^2*Ub*f2+9*P^3*Qb* \\
& Ra*Sb*f2-12*P^3*Qb*Rb*Sa*f2+9*P^3*Qb*Rb*Sb*f1+12*P^3*Qb*Rb*Ub*f2+4*P^3*Qb*Sa^2*Ub+2*P^3* \\
& Qb*Sa*Sb^2-4*P^3*Qb*Sa*Sb*Ua-6*P^3*Qb*Sa*Ub^2+8*P^3*Qb*Sa*Va*f2-4*P^3*Qb*Sa*Vb*f1+2*P^3*Qb* \\
& Sb^2*Ub+9*P^3*Qb*Sb*Ua*Ub-4*P^3*Qb*Sb*Va*f1+4*P^3*Qb*Sb*Vb*f2+9*P^3*Qb*Ua*Vb*f2+2*P^3*Qb* \\
& Ub^3-12*P^3*Qb*Ub*Va*f2+9*P^3*Qb*Ub*Vb*f1-P^3*Ra*Sb^3+P^3*Rb*Sa*Sb^2+2*P^3*Sa*Sb*Ub*Vb+P^3* \\
& Sa*Vb^2*f2-3*P^3*Sb^2*Ua*Vb+P^3*Sb^2*Ub*Va+2*P^3*Sb*Va*Vb*f2-3*P^3*Sb*Vb^2*f1+6*P^2*Qa^2*Qb^2*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f2+6*P^2*Qa^2*Qb*Rb*f2+3*P^2*Qa^2*Qb*Ub^2-8*P^2*Qa*Qb^3*f1-12*P^2*Qa*Qb^2*Ra*f2-12*P^2*Qa*Qb^2* \\
& Rb*f1-3*P^2*Qa*Qb^2*Sa*Sb-5*P^2*Qa*Qb^2*Sb*Ub-12*P^2*Qa*Qb^2*Ua*Ub-5*P^2*Qa*Qb^2*Vb*f2+3*P^2* \\
& Qa*Qb*Ra*Sb^2-3*P^2*Qa*Qb*Rb*Sa*Sb-4*P^2*Qa*Qb*Rb*Sb*Ub-4*P^2*Qa*Qb*Rb*Vb*f2-3*P^2*Qa* \\
& Qb*Sa*Ub*Vb+6*P^2*Qa*Qb*Sb*Ua*Vb-3*P^2*Qa*Qb*Sb*Ub*Va-2*P^2*Qa*Qb*Ub^2*Vb-3*P^2*Qa*Qb* \\
& Va*Vb*f2+3*P^2*Qa*Qb*Vb^2*f1+P^2*Qb^4*f2+20*P^2*Qb^3*Ra*f1-4*P^2*Qb^3*Rb*f2+4*P^2*Qb^3*Sa^2+4* \\
& P^2*Qb^3*Sa*Ub-P^2*Qb^3*Sb*Ua+10*P^2*Qb^3*Ua^2-2*P^2*Qb^3*Ub^2+4*P^2*Qb^3*Va*f2-P^2*Qb^3*Vb*f1-6* \\
& P^2*Qb^2*Ra*Sa*Sb+9*P^2*Qb^2*Ra*Sb*Ub+9*P^2*Qb^2*Ra*Vb*f2+3*P^2*Qb^2*Rb^2*f2+6*P^2*Qb^2*Rb*Sa^2- \\
& 12*P^2*Qb^2*Rb*Sa*Ub+P^2*Qb^2*Rb*Sb^2+9*P^2*Qb^2*Rb*Sb*Ua+3*P^2*Qb^2*Rb*Ub^2-12*P^2*Qb^2*Rb*Va* \\
& f2+9*P^2*Qb^2*Rb*Vb*f1+2*P^2*Qb^2*Sa*Sb*Vb-6*P^2*Qb^2*Sa*Ua*Vb+12*P^2*Qb^2*Sa*Ub*Va+P^2*Qb^2* \\
& Sb^2*Va-6*P^2*Qb^2*Sb*Ua*Va+2*P^2*Qb^2*Sb*Ub*Vb+9*P^2*Qb^2*Ua*Ub*Vb-6*P^2*Qb^2*Ub^2*Va+6*P^2* \\
& Qb^2*Va^2*f2-6*P^2*Qb^2*Va*Vb*f1+P^2*Qb^2*Vb^2*f2-6*P^2*Qb*Ra*Sb^2*Vb+4*P^2*Qb*Rb*Sa*Sb*Vb+2* \\
& P^2*Qb*Rb*Sb^2*Va+2*P^2*Qb*Sa*Ub*Vb^2-6*P^2*Qb*Sb*Ua*Vb^2+4*P^2*Qb*Sb*Ub*Va*Vb+2*P^2*Qb*Va* \\
& Vb^2*f2-2*P^2*Qb*Vb^3*f1+2*P*Qa^2*Qb^3*Ub+6*P*Qa^2*Qb^2*Rb*Ub-2*P*Qa*Qb^4*Ua-8*P*Qa*Qb^3*Ra* \\
& Ub-P*Qa*Qb^3*Rb*Sb-8*P*Qa*Qb^3*Rb*Ua-P*Qa*Qb^3*Sa*Vb-P*Qa*Qb^3*Sb*Va-P*Qa*Qb^3*Ub*Vb+ \\
& 6*P*Qa*Qb^2*Ra*Sb*Vb-P*Qa*Qb^2*Rb^2*Sb-3*P*Qa*Qb^2*Rb*Sa*Vb-3*P*Qa*Qb^2*Rb*Sb*Va-2*P* \\
& Qa*Qb^2*Rb*Ub*Vb+3*P*Qa*Qb^2*Ua*Vb^2-3*P*Qa*Qb^2*Ub*Va*Vb-P*Qb^4*Ra*Sb+10*P*Qb^4*Ra*Ua+ \\
& 2*P*Qb^4*Rb*Sa+2*P*Qb^4*Sa*Va-P*Qb^4*Ua*Vb+2*P*Qb^4*Ub*Va+3*P*Qb^3*Ra*Rb*Sb-4*P*Qb^3*Ra* \\
& Sa*Vb-4*P*Qb^3*Ra*Sb*Va+3*P*Qb^3*Ra*Ub*Vb-2*P*Qb^3*Rb^2*Sa+8*P*Qb^3*Rb*Sa*Va+3*P*Qb^3*Rb* \\
& Ua*Vb-4*P*Qb^3*Rb*Ub*Va-4*P*Qb^3*Ua*Va*Vb+4*P*Qb^3*Ub*Va^2-3*P*Qb^2*Ra*Sb*Vb^2+P*Qb^2*Rb* \\
& Sa*Vb^2+2*P*Qb^2*Rb*Sb*Va*Vb-P*Qb^2*Ua*Vb^3+P*Qb^2*Ub*Va*Vb^2+Qa^2*Qb^3*Rb^2-2*Qa*Qb^4*Ra* \\
& Rb+Qa*Qb^3*Ra*Vb^2-Qa*Qb^3*Rb*Va*Vb+Qb^5*Ra^2-Qb^4*Ra*Va*Vb+Qb^4*Rb*Va^2)*Y^4+(-2*P^4*Sa* \\
& f2^2+3*P^4*Sb*f1*f2+3*P^4*Ub*f2^2+P^3*Qa^2*f2^2-8*P^3*Qa*Qb*f1*f2-P^3*Qa*Sa*Sb*f2+P^3*Qa*Sb^2* \\
& f1-2*P^3*Qa*Sb*Ub*f2-P^3*Qa*Vb*f2^2+10*P^3*Qb^2*f1^2-3*P^3*Qb^2*f2^2+6*P^3*Qb*Rb*f2^2+4*P^3*Qb* \\
& Sa^2*f2-4*P^3*Qb*Sa*Sb*f1-12*P^3*Qb*Sa*Ub*f2+2*P^3*Qb*Sb^2*f2+9*P^3*Qb*Sb*Ua*f2+9*P^3*Qb*Sb* \\
& Ub*f1+6*P^3*Qb*Ub^2*f2-6*P^3*Qb*Va*f2^2+9*P^3*Qb*Vb*f1*f2+P^3*Sa*Sb^2*Ub+2*P^3*Sa*Sb*Vb*f2- \\
& P^3*Sb^3*Ua+P^3*Sb^2*Va*f2-3*P^3*Sb^2*Vb*f1+6*P^2*Qa^2*Qb*Ub*f2-5*P^2*Qa*Qb^2*Sb*f2-12*P^2*Qa* \\
& Qb^2*Ua*f2-12*P^2*Qa*Qb^2*Ub*f1-4*P^2*Qa*Qb*Rb*Sb*f2-3*P^2*Qa*Qb*Sa*Sb*Ub-3*P^2*Qa*Qb*Sa* \\
& Vb*f2+3*P^2*Qa*Qb*Sb^2*Ua-2*P^2*Qa*Qb*Sb*Ub^2-3*P^2*Qa*Qb*Sb*Va*f2+6*P^2*Qa*Qb*Sb*Vb*f1- \\
& 4*P^2*Qa*Qb*Ub*Vb*f2+4*P^2*Qb^3*Sa*f2-P^2*Qb^3*Sb*f1+20*P^2*Qb^3*Ua*f1-4*P^2*Qb^3*Ub*f2+9*P^2* \\
& Qb^2*Ra*Sb*f2-12*P^2*Qb^2*Rb*Sa*f2+9*P^2*Qb^2*Rb*Sb*f1+6*P^2*Qb^2*Rb*Ub*f2+6*P^2*Qb^2*Sa^2*Ub+ \\
& P^2*Qb^2*Sa*Sb^2-6*P^2*Qb^2*Sa*Sb*Ua-6*P^2*Qb^2*Sa*Ub^2+12*P^2*Qb^2*Sa*Va*f2-6*P^2*Qb^2*Sa*Vb* \\
& f1+P^2*Qb^2*Sb^2*Ub+9*P^2*Qb^2*Sb*Ua*Ub-6*P^2*Qb^2*Sb*Va*f1+2*P^2*Qb^2*Sb*Vb*f2+9*P^2*Qb^2*Ua* \\
& Vb*f2+P^2*Qb^2*Ub^3-12*P^2*Qb^2*Ub*Va*f2+9*P^2*Qb^2*Ub*Vb*f1-2*P^2*Qb*Ra*Sb^3+2*P^2*Qb*Rb*Sa* \\
& Sb^2+4*P^2*Qb*Sa*Sb*Ub*Vb+2*P^2*Qb*Sa*Vb^2*f2-6*P^2*Qb*Sb^2*Ua*Vb+2*P^2*Qb*Sb^2*Ub*Va+4*P^2* \\
& Qb*Sb*Va*Vb*f2-6*P^2*Qb*Sb*Vb^2*f1+2*P*Qa^2*Qb^3*f2+6*P*Qa^2*Qb^2*Rb*f2+3*P*Qa^2*Qb^2*Ub^2- \\
& 2*P*Qa*Qb^4*f1-8*P*Qa*Qb^3*Ra*f2-8*P*Qa*Qb^3*Rb*f1-P*Qa*Qb^3*Sa*Sb-P*Qa*Qb^3*Sb*Ub-8* \\
& P*Qa*Qb^3*Ua*Ub-P*Qa*Qb^3*Vb*f2+3*P*Qa*Qb^2*Ra*Sb^2-3*P*Qa*Qb^2*Rb*Sa*Sb-2*P*Qa*Qb^2*Rb* \\
& Sb*Ub-2*P*Qa*Qb^2*Rb*Vb*f2-3*P*Qa*Qb^2*Sa*Ub*Vb+6*P*Qa*Qb^2*Sb*Ua*Vb-3*P*Qa*Qb^2*Sb* \\
& Ub*Va-P*Qa*Qb^2*Ub^2*Vb-3*P*Qa*Qb^2*Va*Vb*f2+3*P*Qa*Qb^2*Vb^2*f1+10*P*Qb^4*Ra*f1+P*Qb^4* \\
& Sa^2+2*P*Qb^4*Sa*Ub-P*Qb^4*Sb*Ua+5*P*Qb^4*Ua^2+2*P*Qb^4*Va*f2-P*Qb^4*Vb*f1-4*P*Qb^3*Ra*Sa* \\
& Sb+3*P*Qb^3*Ra*Sb*Ub+3*P*Qb^3*Ra*Vb*f2+4*P*Qb^3*Rb*Sa^2-4*P*Qb^3*Rb*Sa*Ub+3*P*Qb^3*Rb*Sb* \\
& Ua-4*P*Qb^3*Rb*Va*f2+3*P*Qb^3*Rb*Vb*f1-4*P*Qb^3*Sa*Ua*Vb+8*P*Qb^3*Sa*Ub*Va-4*P*Qb^3*Sb* \\
& Ua*Va+3*P*Qb^3*Ua*Ub*Vb-2*P*Qb^3*Ub^2*Va+4*P*Qb^3*Va^2*f2-4*P*Qb^3*Va*Vb*f1-3*P*Qb^2*Ra* \\
& Sb^2*Vb+2*P*Qb^2*Rb*Sa*Sb*Vb+P*Qb^2*Rb*Sb^2*Va+P*Qb^2*Sa*Ub*Vb^2-3*P*Qb^2*Sb*Ua*Vb^2+2*P* \\
& Qb^2*Sb*Ub*Va*Vb+P*Qb^2*Va*Vb^2*f2-P*Qb^2*Vb^3*f1+2*Qa^2*Qb^3*Rb*Ub-2*Qa*Qb^4*Ra*Ub-2*Qa* \\
& Qb^4*Rb*Ua+2*Qa*Qb^3*Ra*Sb*Vb-Qa*Qb^3*Rb*Sa*Vb-Qa*Qb^3*Rb*Sb*Va+Qa*Qb^3*Ua*Vb^2-Qa*Qb^3* \\
& Ub*Va*Vb+2*Qb^5*Ra*Ua-Qb^4*Ra*Sa*Vb-Qb^4*Ra*Sb*Va+2*Qb^4*Rb*Sa*Va-Qb^4*Ua*Va*Vb+Qb^4* \\
& Ub*Va^2)*Y^3+(P^4*f2^3-P^3*Qa*Sb*f2^2-6*P^3*Qb*Sa*f2^2+9*P^3*Qb*Sb*f1*f2+6*P^3*Qb*Ub*f2^2+P^3* \\
& Sa*Sb^2*f2-P^3*Sb^3*f1+3*P^2*Qa^2*Qb*f2^2-12*P^2*Qa*Qb^2*f1*f2-3*P^2*Qa*Qb*Sa*Sb*f2+3*P^2*Qa* \\
& Qb*Sb^2*f1-4*P^2*Qa*Qb*Sb*Ub*f2-2*P^2*Qa*Qb*Vb*f2^2+10*P^2*Qb^3*f1^2-2*P^2*Qb^3*f2^2+3*P^2*Qb^2* \\
& Rb*f2^2+6*P^2*Qb^2*Sa^2*f2-6*P^2*Qb^2*Sa*Sb*f1-12*P^2*Qb^2*Sa*Ub*f2+P^2*Qb^2*Sb^2*f2+9*P^2*Qb^2*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Sb*Ua*f2+9*P^2*Qb^2*Sb*Ub*f1+3*P^2*Qb^2*Ub^2*f2-6*P^2*Qb^2*Va*f2^2+9*P^2*Qb^2*Vb*f1*f2+2*P^2*Qb* \\
& Sa*Sb^2*Ub+4*P^2*Qb*Sa*Sb*Vb*f2-2*P^2*Qb*Sb^3*Ua+2*P^2*Qb*Sb^2*Va*f2-6*P^2*Qb*Sb^2*Vb*f1+6* \\
& P*Qa^2*Qb^2*Ub*f2-P*Qa*Qb^3*Sb*f2-8*P*Qa*Qb^3*Ua*f2-8*P*Qa*Qb^3*Ub*f1-2*P*Qa*Qb^2*Rb*Sb* \\
& f2-3*P*Qa*Qb^2*Sa*Sb*Ub-3*P*Qa*Qb^2*Sa*Vb*f2+3*P*Qa*Qb^2*Sb^2*Ua-P*Qa*Qb^2*Sb*Ub^2-3*P* \\
& Qa*Qb^2*Sb*Va*f2+6*P*Qa*Qb^2*Sb*Vb*f1-2*P*Qa*Qb^2*Ub*Vb*f2+2*P*Qb^4*Sa*f2-P*Qb^4*Sb*f1+ \\
& 10*P*Qb^4*Ua*f1+3*P*Qb^3*Ra*Sb*f2-4*P*Qb^3*Rb*Sa*f2+3*P*Qb^3*Rb*Sb*f1+4*P*Qb^3*Sa^2*Ub-4* \\
& P*Qb^3*Sa*Sb*Ua-2*P*Qb^3*Sa*Ub^2+8*P*Qb^3*Sa*Va*f2-4*P*Qb^3*Sa*Vb*f1+3*P*Qb^3*Sb*Ua*Ub- \\
& 4*P*Qb^3*Sb*Va*f1+3*P*Qb^3*Ua*Vb*f2-4*P*Qb^3*Ub*Va*f2+3*P*Qb^3*Ub*Vb*f1-P*Qb^2*Ra*Sb^3+ \\
& P*Qb^2*Rb*Sa*Sb^2+2*P*Qb^2*Sa*Sb*Ub*Vb+P*Qb^2*Sa*Vb^2*f2-3*P*Qb^2*Sb^2*Ua*Vb+P*Qb^2*Sb^2*Ub* \\
& Va+2*P*Qb^2*Sb*Va*Vb*f2-3*P*Qb^2*Sb*Vb^2*f1+2*Qa^2*Qb^3*Rb*f2+Qa^2*Qb^3*Ub^2-2*Qa*Qb^4*Ra* \\
& f2-2*Qa*Qb^4*Rb*f1-2*Qa*Qb^4*Ua*Ub+Qa*Qb^3*Ra*Sb^2-Qa*Qb^3*Rb*Sa*Sb-Qa*Qb^3*Sa*Ub*Vb+ \\
& 2*Qa*Qb^3*Sb*Ua*Vb-Qa*Qb^3*Sb*Ub*Va-Qa*Qb^3*Va*Vb*f2+Qa*Qb^3*Vb^2*f1+2*Qb^5*Ra*f1+Qb^5* \\
& Ua^2-Qb^4*Ra*Sa*Sb+Qb^4*Rb*Sa^2-Qb^4*Sa*Ua*Vb+2*Qb^4*Sa*Ub*Va-Qb^4*Sb*Ua*Va+Qb^4*Va^2*f2- \\
& Qb^4*Va*Vb*f1)*Y^2+(2*P^3*Qb*f2^3-2*P^2*Qa*Qb*Sb*f2^2-6*P^2*Qb^2*Sa*f2^2+9*P^2*Qb^2*Sb*f1*f2+3* \\
& P^2*Qb^2*Ub*f2^2+2*P^2*Qb*Sa*Sb^2*f2-2*P^2*Qb*Sb^3*f1+3*P*Qa^2*Qb^2*f2^2-8*P*Qa*Qb^3*f1*f2-3*P* \\
& Qa*Qb^2*Sa*Sb*f2+3*P*Qa*Qb^2*Sb^2*f1-2*P*Qa*Qb^2*Sb*Ub*f2-P*Qa*Qb^2*Vb*f2^2+5*P*Qb^4*f1^2+ \\
& 4*P*Qb^3*Sa^2*f2-4*P*Qb^3*Sa*Sb*f1-4*P*Qb^3*Sa*Ub*f2+3*P*Qb^3*Sb*Ua*f2+3*P*Qb^3*Sb*Ub*f1- \\
& 2*P*Qb^3*Va*f2^2+3*P*Qb^3*Vb*f1*f2+P*Qb^2*Sa*Sb^2*Ub+2*P*Qb^2*Sa*Sb*Vb*f2-P*Qb^2*Sb^3*Ua+ \\
& P*Qb^2*Sb^2*Va*f2-3*P*Qb^2*Sb^2*Vb*f1+2*Qa^2*Qb^3*Ub*f2-2*Qa*Qb^4*Ua*f2-2*Qa*Qb^4*Ub*f1-Qa* \\
& Qb^3*Sa*Sb*Ub-Qa*Qb^3*Sa*Vb*f2+Qa*Qb^3*Sb^2*Ua-Qa*Qb^3*Sb*Va*f2+2*Qa*Qb^3*Sb*Vb*f1+2*Qb^5* \\
& Ua*f1+Qb^4*Sa^2*Ub-Qb^4*Sa*Sb*Ua+2*Qb^4*Sa*Va*f2-Qb^4*Sa*Vb*f1-Qb^4*Sb*Va*f1)*Y+P^2*Qb^2* \\
& f2^3-Qb^2*P*Qa*Sb*f2^2-2*P*Qb^3*Sa*f2^2+3*Qb^3*P*Sb*f1*f2+P*Qb^2*Sa*Sb^2*f2-P*Qb^2*Sb^3*f1+Qb^3* \\
& Qa^2*f2^2-2*Qb^4*Qa*f1*f2-Qa*Qb^3*Sa*Sb*f2+Qa*Qb^3*Sb^2*f1+Qb^5*f1^2+Qb^4*Sa^2*f2-Qb^4*Sa*Sb*f1;
\end{aligned}$$

Annexe O

Calcul transitoire de la ligne en mouvement

— **Étape 1 :**

À l'initialisation du calcul à $t = t_0$, la vitesse V_0^0 et l'accélération $A_{V_0}^0$ instantanées du câble sont connues, ainsi que la position des véhicules contrôlée par le paramètre l_c^0 . Calcul de la position statique $\underline{X}_{s,vit}^0$ avec les effets de la vitesse et de l'accélération instantanée [appel 1 fonction calcul statique].

— **Étape 2 :**

Définition d'un pas de temps de calcul dynamique δt . La longueur de contrôle de la position des véhicules devient $l_c^1 = l_c^0 + V_0^0 \delta t$. La vitesse V_0^1 et l'accélération $A_{V_0}^1$ instantanées du câbles sont connues par la consigne de vitesse imposée à la poulie motrice (pour les modèles envisagés à ce stade, l'interaction de couplage avec la régulation électromécanique n'est pas prise en compte). Calcul de la position statique $\underline{X}_{s,vit}^1$ avec les effets de la vitesse et de l'accélération instantanée [appel 2 fonction calcul statique].

— **Étape 3 :**

Calcul de la correction statique imposée par les variations de vitesse du câble entre t_0 et t_1 qui est l'écart de la position occupée au temps t_0 à la nouvelle position d'équilibre statique au temps t_1 ,

$$\underline{U}_{vit}^1 = \underline{X}_{s,vit}^0 - \underline{X}_{s,vit}^1. \quad (O.1)$$

\underline{U}_{vit}^1 donne l'incrément de déplacement dynamique au temps t_0 et est calculé de façon analytique en formulant des hypothèses qui évitent d'avoir recours à une discrétisation de l'espace (maillage). Une stratégie possible est d'exprimer \underline{U}_{vit}^1 sur la base locale $(\underline{t}_1, \underline{n}_1, \underline{e}_z)$ attachée à la nouvelle position d'équilibre statique $\underline{X}_{s,vit}^1$ qui servira de référence pour exprimer la position dynamique.

Les longueurs L_i^1, L_i^0 de chaque portion de câble $i, S^1 \in [S_i^1, S_{i+1}^1]$, de position $\underline{X}_{s,vit}^0$ à $t = t^0$ et $\underline{X}_{s,vit}^1$ à $t = t^1$ est évaluée numériquement. L'écart de position d'un véhicule situé à l'extrémité i d'une portion de câble est notée $\underline{\Delta x}_{v,i}^1 = (x_{v,i}^1 - x_{v,i}^0) \underline{e}_x + (y_{v,i}^1 - y_{v,i}^0) \underline{e}_y + (z_{v,i}^1 - z_{v,i}^0) \underline{e}_z$. Les vecteurs tangents à gauche et à droite d'un véhicule situé à l'extrémité i d'une portion de câble au pas de temps $t = t_0$ sont respectivement notés $\underline{t}_v^{0-}, \underline{t}_v^{0+}$.

La première étape est de calculer composante longitudinale du déplacement $u_{vit,i}^1(S^1) = \underline{U}_{vit,i}^1(S^1) \cdot \underline{t}_1(S^1)$ entre les deux positions d'équilibre statique successives. Selon les conditions aux limites de la portion de câble, le déplacement longitudinal du câble dans la portion i s'exprime en fonction du déplacement dans la portée précédente $i - 1$, en partant de la station motrice. De plus, il est fait l'hypothèse que les déplacements générés par les allongements élastiques sont négligés et d'une évolution linéaire du déplacement longitudinal sur chacune des portions.

Pour une portion de câble située entre la motrice et le premier véhicule de déplacement $\underline{\Delta x}_{v,i}^1$,

$$u_{vit,i}^1(S^1) = V_0^1 \delta t + \frac{(-\underline{\Delta x}_{v,i}^1 \cdot \underline{t}_v^{0-} - V_0^1 \delta t)}{L_i^1} S^1 \quad (O.2)$$

Pour une portion de câble située entre deux véhicules successifs,

$$u_{vit,i}^1(S^1) = u_{vit,i-1}^1(S_i^1) + \frac{(-\Delta x_{v,i}^1 \cdot t_v^{0-} - u_{vit,i-1}^1(S_i^1))}{L_i^1} S^1 \quad (O.3)$$

Pour une portion de câble située entre un véhicule et un appui qui autorise le franchissement du câble de façon non-controlée,

$$u_{vit,i}^1(S^1) = u_{vit,i-1}^1(S_i^1) + \frac{L_i^0 - L_i^1 - u_{vit,i-1}^1(S_i^1)}{L_i^1} S^1 \quad (O.4)$$

Pour une portion de câble située entre deux appuis successifs qui autorisent le franchissement du câble de façon non-controlée,

$$u_{vit,i}^1(S^1) = u_{vit,i-1}^1(S_i^1) + \frac{L_i^0 - L_i^1}{L_i^1} S^1 \quad (O.5)$$

Le connaissance du déplacement longitudinal permet d'estimer le déplacement vertical en projetant sur le vecteur normal de la base locale \underline{n}_1 la différence entre les positions verticales successives occupées par le câble entre les instants t_0 et t_1 , exprimée dans le repère global $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$

$$v_{vit,i}^1(S^1) = \left[y(S^1, t^1) - y(S^1 - u_{vit,i}^1(S^1), t^0) \right] \underline{e}_y \cdot \underline{n}_1(S^1) \quad \forall S^1 \in [S_i^1, S_{i+1}^1] \quad (O.6)$$

Le déplacement hors-plan s'exprime quant à lui directement dans le repère global,

$$w_{vit,i}^1(S^1) = z(S^1, t^1) - z(S^1, t^0) \quad (O.7)$$

Une sélection de N modes de vibrations $\underline{\Phi}_k^1 = \Phi_{k,u}^1 \underline{t}_1 + \Phi_{k,v}^1 \underline{n}_1 + \Phi_{k,w}^1 \underline{e}_z$ sont calculés autour de la position statique $\underline{X}_{s,vit}^1$. Le déplacement statique $\underline{U}_{vit}^1 = u_{vit}^1 \underline{t}_1 + v_{vit}^1 \underline{n}_1 + w_{vit}^1 \underline{e}_z$ est projeté selon le produit scalaire défini sur $\mathcal{L}^2(\mathbf{R}^n)$ sur les modes selon l'approximation $\underline{U}_{vit}^1 \approx \sum_k q_k^* \underline{\Phi}_k^1$, avec les contributions modales

$$q_k^* = \int_0^L \underline{U}_{vit}^1 \cdot \underline{\Phi}_k^1 dS - \sum_{j \neq k} q_j^* \int_0^L \underline{\Phi}_j^1 \cdot \underline{\Phi}_k^1 dS \quad (O.8)$$

Le résidu $\underline{\mathcal{R}}^1 = \underline{U}_{vit}^1 - \sum_k q_k^* \underline{\Phi}_k^1$ est normalisé selon la procédure précédemment mise en œuvre pour le calcul des modes,

$$\int_0^L \underline{U}_{stat}^1 \cdot \underline{U}_{stat}^1 dS = \int_0^L \beta^2 \underline{\mathcal{R}}^1 \cdot \underline{\mathcal{R}}^1 dS = \Pi \quad (O.9)$$

afin d'enrichir la base modale avec \underline{U}_{stat}^1 . Les participations modales $q_k^1(t_0)$ ainsi que la participation de la correction statique $q_{stat}^1(t_0)$ sont obtenues par projection du déplacement \underline{U}_{vit}^1 sur la nouvelle base augmentée $\left[\underline{U}_{stat}^1 \quad \underline{\Phi}_k^1 \right]$,

$$\underline{U}_{vit}^1 = q_{stat}^1(t_0) \underline{U}_{stat}^1 + \sum_k q_k^1(t_0) \underline{\Phi}_k^1. \quad (O.10)$$

— Étape 4 :

Les équations dynamiques écrites autour de $\underline{X}_{s,vit}^1$ sont projetées sur $\left[\underline{U}_{stat}^1 \quad \underline{\Phi}_k^1 \right]$ en initialisant le vecteur des participations modales $\left\{ q^1(t_0) \right\} = \left\{ q_{stat}^1(t_0) \quad q_k^1(t_0) \right\}$ et la vitesse $\left\{ \dot{q}^1(t_0) \right\} = \left\{ 0 \right\}$. Les équations différentielles en temps de la dynamique sont résolues numériquement par un schéma implémenté sous Matlab sur un pas de temps δt pour obtenir $\left\{ q^1(t_1) \right\}$, $\left\{ \dot{q}^1(t_1) \right\}$ et $\left\{ \ddot{q}^1(t_1) \right\}$ au temps $t = t_1$.

— Étape 5 :

La position dynamique du système au temps $t = t_1$ est donnée par

$$\underline{X}(S, t_1) = \underline{X}_{s,vit}^1(S) + \left[\underline{U}_{stat}^1 \quad \underline{\Phi}_k^1 \right] \begin{Bmatrix} q_{stat}^1(t_1) \\ q_k^1(t_1) \end{Bmatrix} \quad (O.11)$$

Le tracé de la position dynamique doit tenir compte du franchissement des appuis fixes de coordonnées (x_{ap}, y_{ap}, z_{ap}) à l'abscisse curviligne S_{ap}^1 : pour une portion de câble i située à gauche d'un appui, si la

position $(\underline{X}_{s,vit}^1(S) + u_{stat}^1(S, t_1) \underline{t}_1) \cdot \underline{e}_x > x_{ap}$, le point de câble a franchi l'appui et il faut donc gérer le franchissement. Pour cela, il faut d'abord déterminer la longueur de câble $u_{ap}(S, t_1)$ telle que

$$(\underline{X}_{s,vit}^1(S) + u_{ap}^1(S, t_1) \underline{t}_1) \cdot \underline{e}_x = x_{ap} \quad (O.12)$$

Finalement, la nouvelle position occupée par le câble après le franchissement de l'appui réputé ponctuel est

$$\begin{aligned} \underline{X}(S, t_1) = \underline{X}_{s,vit}^1(S) + u_{ap}^1(S, t_1) \underline{t}_1 + [u_{stat}^1(S, t_1) - u_{ap}^1(S, t_1)] \underline{t}_{appui}^+ \\ + v_{stat}^1(S, t_1) \underline{n}_1 + w_{stat}^1(S, t_1) \underline{e}_z \end{aligned} \quad (O.13)$$

où \underline{t}_{appui}^+ est le vecteur tangent à droite de l'appui pris sur la configuration $\underline{X}_{s,vit}^1(S)$.

— **Étape 6 :**

Incrément du pas de temps à $t_2 = t_1 + \delta t$. Calcul de la position statique $\underline{X}_{s,vit}^2$ avec les effets de la vitesse et de l'accélération instantanée [appel 3 fonction calcul statique]. Retour à l'étape 3 en calculant la nouvelle correction statique

$$\underline{U}_{vit}^2 = \underline{X}(t_1, S) - \underline{X}_{s,vit}^2 \quad (O.14)$$

puis en projetant sur les modes enrichis par la correction statique calculés autour de $\underline{X}_{s,vit}^1$

$$\underline{U}_{vit}^2 = q_{stat}^2(t_1) \underline{U}_{stat}^2 + \sum_k q_k^2(t_1) \underline{\Phi}_k^2. \quad (O.15)$$

La nouvelle initialisation pour le schéma d'intégration temporelle est obtenue en imposant la continuité de la vitesse du déplacement dynamique au temps $t = t_1$,

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{stat}^1 & \underline{\Phi}_k^1 \end{bmatrix} \left\{ \dot{q}_1(t_1) \right\} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{stat}^2 & \underline{\Phi}_k^2 \end{bmatrix} \left\{ \dot{q}_2(t_1) \right\}. \quad (O.16)$$

Soit en projetant,

$$\int_0^L \begin{bmatrix} \underline{U}_{stat}^1 & \underline{\Phi}_k^1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{U}_{stat}^1 & \underline{\Phi}_k^1 \end{bmatrix} dS \left\{ \dot{q}_1(t_1) \right\} = \int_0^L \begin{bmatrix} \underline{U}_{stat}^1 & \underline{\Phi}_k^1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{U}_{stat}^2 & \underline{\Phi}_k^2 \end{bmatrix} dS \left\{ \dot{q}_2(t_1) \right\}. \quad (O.17)$$

Bibliographie

- [1] Markus Wenin, A. Windisch, · Ladurner, Maria Bertotti, and G. Modanese. Optimization of the head geometry for a cable car passing over a support. 03 2019.
- [2] A. Arena, B. Carboni, W. Lacarbonara, and M. Babaz. Ropeway roller batteries dynamics : Modeling, identification, and full-scale validation. *Engineering Structures*, 180 :793–808, 2019.
- [3] W. Boesiger. *Le Corbusier - Oeuvre complète Volume 6 1952-1957*. Birkhäuser Verlag, 2005.
- [4] T. Do Vu, D. Durville, and P. Davies. Bend-over-sheave of synthetic braided ropes : Approach to internal mechanisms through finite element simulation. In *11th World Congress on Computational Mechanics, Barcelona, Espagne.*, 2014.
- [5] G. Oplatka. Effet de vrillage sur les câbles tracteurs et les câbles porteurs-tracteurs. *Internationale Seilbahn-Rundschau*, pages 20–21, 2004.
- [6] E. Cottanceau, O. Thomas, P. Véron, M. Alochet, and R. Deligny. A finite element/quaternion/asymptotic numerical method for the 3d simulation of flexible cables. *Finite Elements in Analysis and Design*, 139 :14–34, 2017.
- [7] F.C. Crusells-Girona, F.C. Filippou, and R.L. Taylor. A mixed formulation for nonlinear analysis of cables structures. *Computers & Structures*, 186 :50–61, 2017.
- [8] D. Bruno and A. Leonardi. Nonlinear structural models in cableway transport systems. *Simulation Practical Theory*, 7(3) :207–218, 1999.
- [9] C. Bertrand, V. Acary, C.-H. Lamarque, and A. Ture Savadkoohi. A robust and efficient numerical finite element method for cables. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, pages 1–30, 2020.
- [10] W. Lacarbonara and A. Pacitti. Nonlinear modeling of cables with flexural stiffness. *Mathematical Problems in Engineering*, 2008.
- [11] J.-P. Massat. *Modélisation du comportement dynamique du couple pantographe-caténaire*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, Écully, 2007.
- [12] H. Krencker. Machines à programme enregistré pour le calcul des câbles de téléphériques. *Trasporti Pubblici*, 8-9 :1049–1065, 1963.
- [13] G. Hurel, J. Laborde, and L. Jézéquel. Calcul du comportement dynamique d’une portée de téléphérique bi-câble à l’aide de bases modales. In *CSMA 2017 13^{ème} Colloque National en Calcul de Structures, Presqu’île de Giens*, 2017.
- [14] G. Hurel, J. Laborde, and L. Jézéquel. Simulation of the dynamics behavior of a bi-cable ropeway with modal bases. In *Topics in Modal Analysis Testing*, volume 9, pages 43–54, 2018.
- [15] K. Ntarladima and J. Gerstmayr. A multibody approach for the simulation of ropeway systems. In *ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics*, Lisbon, Portugal, July 24 - 28, 2023.
- [16] Gabriel Hurel, Alireza Ture Savadkoohi, and Claude-Henri Lamarque. Nonlinear passive control of a pendulum submitted to base excitations. *Acta Mechanica*, February 2021.
- [17] H.C. Renezeder. *On the dynamics of an axially moving cable with application to ropeways*. PhD thesis, Technischen Universität Wien, 2006.
- [18] Norme française nf en 12930 : Prescriptions de sécurité pour les installations à câbles destinées au transport de personne — calculs. Technical report, AFNOR, 2015.

- [19] O. Zweifel. Cableway oscillation problems. *Internationale Seilbahn-Rundschau (ISR)*, pages 159–164, 1972.
- [20] G. Kopanakis and R. Canale. Problèmes d’oscillations sur les installations à câbles. *Revue Internationale des Téléphériques (ISR)*, pages 51–54, 2011.
- [21] G. Kopanakis. Les oscillations sur les installations de transport à câbles, partie 2. *Revue Internationale des Téléphériques (ISR)*, pages 51–53, 2012.
- [22] G. Kopanakis. Les oscillations sur les installations de transport à câbles, partie 3. *Revue Internationale des Téléphériques (ISR)*, pages 54–56, 2012.
- [23] G. Kopanakis. Les oscillations sur les installations de transport à câbles, partie 4. *Revue Internationale des Téléphériques (ISR)*, pages 56–60, 2012.
- [24] R. Canale. Les oscillations sur les installations de transport à câbles, partie 5. *Revue Internationale des Téléphériques (ISR)*, pages 72–74, 2012.
- [25] G. Kopanakis and R. Canale. Les oscillations sur les installations de transport à câbles, partie 6. *Revue Internationale des Téléphériques (ISR)*, pages 64–66, 2013.
- [26] G. Kopanakis. Les oscillations sur les installations de transport à câbles, partie 7. *Revue Internationale des Téléphériques (ISR)*, pages 72–74, 2013.
- [27] G. Kopanakis and G. Kovacs. Les oscillations sur les installations de transport à câbles, partie 8. *Revue Internationale des Téléphériques (ISR)*, pages 63–66, 2013.
- [28] G. Oplatka and T. Richter. Comportement des sièges de télésièges dans le vent. *Internationale Seilbahn-Rundschau (ISR)*, 1986.
- [29] G. Oplatka. Aerodynamic behaviour in ropeway gondola design with a circular plan. *Internationale Seilbahn-Rundschau (ISR)*, pages 24–25, 1998.
- [30] M. Volmer. *Stochastische Schwingungen an ausgedehnten Seilfeldern und ihre Anwendung zur Spurweitenberechnung an Seilbahnen*. PhD thesis, ETH Zürich, 1999.
- [31] A. Croses. Dispositif de stabilisation aérodynamique pour véhicules de transport aérien par câble, FR Patent 2736607 B1, July 1995. Études de Transports SARL.
- [32] M. Mutaguchi, K. Kawase, and Koji Tanida. Vibration damping arrangement for cable car, EP Patent 0722870 B1, May 1999. Ishikawajima-Harima Heavy Industries Co., Ltd, Nippon Cable Co., Ltd.
- [33] Alvaro Estandia and Marco Hutter. Robust damping of a ropeway gondola’s wind oscillations with an actuated mass. In *2017 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pages 4597–4604, 2017.
- [34] D. Fischnaller, M. Wolf, and J. Sutter. Cableway vehicle, WO Patent 2022/269054 A1, December 2022. Innova Patent GMBH.
- [35] J. Nejez. Wie rund sind litzenseile. *Internationale Seilbahn-Rundschau (ISR)*, page 22, 2008.
- [36] R. Canale. Suppression des balancements dans les télécabines à câble sans fin. In *Congr  de l’UTP   Montana*, 1990.
- [37] P. Schibli. *Energetischer Vergleich unterschiedlicher Seilbahnsysteme*. PhD thesis, ETH Zürich, 1993.
- [38] T. Richter. *Schwingungsverhalten von Einseil-Umlaufbahnen beim Anfahren und Bremsen*. PhD thesis, ETH Zürich, 1989.
- [39] J. Dubuisson and J.M. Terriez. Comportement dynamique des téléphériques monocâbles utilisant différents systèmes de tension de la ligne. *Internationale Seilbahn-Rundschau (ISR)*, pages 4–9, 1993.
- [40] Bureau d’Enquêtes sur les Accidents de Transport Terrestre. Rapport d’enquête technique sur l’immobilisation et l’évacuation tardive du téléphérique "panoramic mont-blanc" survenues le 8 septembre 2016   chamonix (74). Technical report, BEA-TT, 2018.
- [41] Markus Wenin, A. Windisch, S. Ladurner, Maria Bertotti, and G. Modanese. *Optimization of the Head Geometry for a Cable Car Passing over a Support*, pages 231–241. 01 2020.

- [42] Siegfried Ladurner, Markus Wenin, Daniel Reiterer, Maria Bertotti, and G. Modanese. *Experimental Investigation of the Dynamics of a Ropeway Passing Over a Support*, pages 61–69. 03 2020.
- [43] Markus Wenin, Siegfried Ladurner, Daniel Reiterer, Maria Bertotti, and G. Modanese. Validation of the velocity optimization for a ropeway passing over a support. *Sustainability*, 13 :2986, 03 2021.
- [44] Cesar Augusto da Fonseca, Guilherme de Paula, Marcelo Pereira, and Americo Cunha Jr. Analysis of vibrations on an aerial cable car system with moving mass. In *XVIII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics (DINAME 2019)*, 03 2019.
- [45] A. Arena, B. Carboni, F. Angeletti, M. Babaz, and W. Lacarbonara. Dynamic response and identification of tower-cable-roller battery interactions in ropeways. *Conference : ASME 2017 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, 2017.
- [46] B. Portier. Phénomènes vibratoires entretenus sur les téléphériques monocâbles. *Revue Internationale des Téléphériques (ISR)*, pages 129–133, 1985.
- [47] R. Löscher. *Pumpschwingungen bei Einseilumlaufbahnen*. PhD thesis, TU Wien, Fakultät für Bauingenieurwesen, 1997.
- [48] H Nicolussi. Pumpschwingungen bei einseilumlaufbahnen. In *Seminar Institut für Allgemeine Physik (IAP), TU Wien, Austria*, 03 2011.
- [49] M. Babaz. *Prédiction des instabilités dynamiques couplées aux non-linéarités dans les lignes de téléportés monocâbles*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2016.
- [50] P. Ballard and A. Millard. *Poutres et arcs élastiques*. Les Éditions de l'École Polytechnique, 2009.
- [51] M. Brocato. *Statique : de la géométrie à la conception des structures*. Presses des Ponts, 2016.
- [52] S. Cherruet. L'aluminium dans l'œuvre de Jean Prouvé, jalons et sources. *Cahiers d'histoire de l'aluminium*, 46-47 :50–67, 2011.
- [53] M.P. Bendsoe and O. Sigmund. *Topology Optimization*. Springer, 2004.
- [54] A. Muttoni. *L'art des structures. Une introduction au fonctionnement des structures en architecture*. 2012.
- [55] L. Cone. Skycam-an aerial robotic camera system. *Byte*, 10(10) :122–132, 1985.
- [56] E. Cottanceau. *Simulation numérique du processus d'assemblage de câbles flexibles en grands déplacements*. PhD thesis, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Lille, 2018.
- [57] J. Venet. La mécanisation des exploitations forestières. *Revue forestière française*, 1950.
- [58] G. Hias. L'art du câbliste forestier. *Revue forestière française*, 1952.
- [59] I. Samset. *Winch and cable systems*. Springer, 1985.
- [60] Treyssède F. Vibration analysis of horizontal self-weighted beams and cables with bending stiffness subjected to thermal loads. *Journal of Sound and Vibration*, 329 :1536–1552, 2010.
- [61] F. Treyssède. Finite element modeling of temperature load effects on the vibration of local modes in multi-cable structures. *Journal of Sound and Vibration*, 413 :191–204, 2018.
- [62] M. Tur, E. Garcia, L. Baeza, and F.J. Fuenmayor. A 3d absolute nodal coordinate finite element model to compute the initial configuration of a railway catenary. *Engineering Structures*, 71 :234–243, 2014.
- [63] C. Bertrand, C. Plut, A. Ture Savadkoohi, and C.-H. Lamarque. On the modal response of mobile cables. *Engineering Structures*, 210, 2020.
- [64] H. Ernst. *Beitrag zur Beurteilung der behördlichen Vorschriften für die Seile von Personenschwebbahnen*. PhD thesis, T.H., Dantzig, 1933.
- [65] G.A. Costello. *Theory of wire rope (second edition)*. Springer, 1997.
- [66] C. Jolicoeur. Comparative study of two semicontinuous models for wire strand analysis. *Journal of Elasticity*, 123(8) :792–799, 1997.
- [67] N. Otaño Aramendi. *Réduction du coût de calcul pour la simulation du comportement mécaniques de câbles*. PhD thesis, CentraleSupélec, 2016.

- [68] N. Otaño Aramendi, D. Durville, D. Néron, U. Hodei, and U. Mikel. A piecewise model order reduction method for the simulation of the nonlinear behaviour of wire ropes. In *13th US National Congress on Computational Mechanics*, 2015.
- [69] M. Bonneric. *Étude de l'endommagement en fatigue de câbles d'acier sous sollicitations complexes*. PhD thesis, CentraleSupélec, 2018.
- [70] T. Do Vu, D. Durville, and P. Davies. Simulation du passage de câbles tressés synthétiques sur une poulie. In *11^e colloque national en calcul des structures, CSMA, Giens, France.*, 2013.
- [71] H. Bajas and D. Durville. Simulation de la mise en forme et du comportement mécanique de câbles supraconducteurs. In *9^e Colloque national en calcul des structures, CSMA, Giens, France*, 2009.
- [72] A. Belkhabbaz, D. Durville, and P. Davies. Simulation par éléments finis de la flexion sur poulie de câbles tressés pour la compréhension des mécanismes d'endommagement. In *13^e colloque national en calcul des structures, CSMA, Giens, Var, France*, 2017.
- [73] O. Thomas. *Dynamique linéaire et non linéaire de structures élastiques et piézoélectriques*. Habilitation à diriger des recherches en sciences de l'ingénieur, École Normale Supérieure de Cachan, 2011.
- [74] E. Reissner. On one-dimensional finite-strain beam theory : the place problem. *Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 23(5) :795–804, 1972.
- [75] A.E.H. Love. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. 1944.
- [76] E. Cosserat and F. Cosserat. *Théorie des corps déformables*. Hermann, 1909.
- [77] M.B. Rubin. *Cosserat Theories : Shells, Rods and Points*. Springer, 2000.
- [78] J. Linn, T. Stephan, J.S. Carlson, and R. Bohlin. Fast simulation of quasistatic rod deformations for vr applications. *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2006*, pages 247–253, 2008.
- [79] P. Jung, S. Leyendecker, J. Linn, and M. Ortiz. A discrete mechanics approach to cosserat rod theory - part i : static equilibria. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 85(1) :31–60, 2010.
- [80] J. Linn, T. Hermanssoon, F. Anderssoon, and F. Schneider. Kinetic aspects of discrete cosserat rods based on the difference geometry of framed curves. *ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics*, 2017.
- [81] J. Linn. Discrete cosserat rod kinematics constructed on the basis of the difference geometry of framed curves - part i : Discrete cosserat curves on staggered grid. *Journal of Elasticity*, 139(2) :177–236, 2020.
- [82] M. Bergou, M. Wardetzky, S. Robinson, B. Audoly, and E. Grinspun. Discrete elastic rods. *JACM Transactions on Graphics*, 27(3), 2008.
- [83] B. Audoly and C. Lestringant. Asymptotic derivation of high-order rod models from non-linear 3d elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2020.
- [84] J.J. Marigo. *Mécanique des milieux continus i*. Lecture notes, École Polytechnique, Palaiseau, 2014.
- [85] S. Forest and M. Amestoy. *Mécanique des milieux continus*. Lecture notes, École des Mines de Paris, Paris, 2020.
- [86] W. Lacarbonara. *Nonlinear Structural Mechanics, The Elastic Cable : From Formulation to Computation*. Springer, 2013.
- [87] W. Kollros. The relationship between torque, tensile force and twist in ropes. *Internationale Seilbahn-Rundschau*, 2, 1974.
- [88] H.R. Gassmann. Moments de torsion dans les câbles tracteurs des transporteurs à câble sans fin. *Fortschritt-Berichte des VED-Zeitschriften*, pages 1–121, 1981.
- [89] C Richard Chaplin. Problems of torque and rotation in wire ropes. *Internationaler Stuttgarter Seiltag*, 2002.
- [90] L. Lehanneur. Conférences sur les téléphériques à voyageurs. Technical report, École Nationale des Ponts et Chaussées, 1962-1963.

- [91] Réunion des groupes de travail à cologne les 26 et 27 avril 1964 - rapport du groupe 3 (raideur). Technical report, OIPEEC, 1964.
- [92] M. Davin. Sur la flexibilité d'un câble clos au passage d'un train de galets. *Mécanique-Électricité*, 144, 1961.
- [93] L. Lehanneur. Mesures de raideur sur 3 câbles. Technical report, OIPEEC, 1968.
- [94] A. Kostnapfel. Die berechnung der seile der forstlichen und übrigen seilbahnen. *Internationale Seilbahn-Rundschau*, 2 :67–73, 1977.
- [95] M.J. Collins. Patent us 5549285 : Wire rope isolator with crimp bar and method for making same, 1996.
- [96] M. Hajek. Geometry of rope clips. *Internationale Seilbahn-Rundschau*, 4 :149–151, 1958.
- [97] L. Lehanneur. Sur le passage des attaches des véhicules des télésièges dans les gorges des poulies. *Internationale Seilbahn-Rundschau*, 3 :55–58, 1961.
- [98] A. Arena, A. Pacitti, and W. Lacarbonara. Nonlinear response of elastic cables with flexural-torsional stiffness. *International Journal of Solids and Structures*, 87 :267–277, 2016.
- [99] Norme française nf en 12929 : Prescriptions de sécurité pour les installations à câbles destinées au transport des personnes — dispositions générales — partie 1 : Prescriptions applicables à toutes les installations. Technical report, AFNOR, 2015.
- [100] Norme française nf en 12929 : Prescriptions de sécurité pour les installations à câbles destinées au transport des personnes — dispositions générales — partie 2 : Prescriptions complémentaires pour les téléphériques bicâbles à va et vient sans frein de chariot. Technical report, AFNOR, 2015.
- [101] Norme française nf en 12927 : Prescriptions de sécurité des installations à câbles transportant des personnes — câbles. Technical report, AFNOR, 2019.
- [102] G. Oplatka. Mesures en vue de prolonger la longévité des câbles porteurs d'installations bicâbles à mouvement continu. *OITAF-NACS (International Organization for Transportation by Rope / North American Continental Section) 1st Continental Enclosed Carrier Tramway Symposium, Snowbird, Utah, August 27-31, 1979.*, 1979.
- [103] M. Bottcher and Zbil H.-U. Étude sur la dynamique du câble au droit du chariot des téléphériques bicâbles à mouvement continu. *Internationale Seilbahn-Rundschau*, 3 :123–128, 1985.
- [104] L. Lehanneur. La flexion des câbles métalliques. *Annales des Ponts et Chaussées - Juillet-Août 1949*, pages 439–454, 1949.
- [105] A. Rebuffel. La flexion d'un câble eu égard aux frottements. *Annales des Ponts et Chaussées - Juillet-Août 1949*, pages 455–466, 1949.
- [106] S. Krenk. *Mechanics and Analysis of beams, columns and cables*. Springer, 2001.
- [107] H.M. Irvine and H. Max. *Cable structures*. MIT Press, 1981.
- [108] W. Schell. *Theorie der bewegung und der kräfte II*. B.G. Teubner, 1880.
- [109] E.J. Routh. *Analytical statics*. Cambridge, 1891.
- [110] Isaac Fried. Large deformation static and dynamic finite element analysis of extensible cables. *Computers and Structures*, 15(3) :315–319, 1982.
- [111] B.W. Kim, H.W. Sung, S.Y. Hong, and H.J. Jung. Finite element nonlinear analysis for catenary structure considering elastic deformation. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 63(1) :29–45, 2010.
- [112] M. Such, J.R. Jimenez-Octavio, A. Carnicero, and O. Lopez-Garcia. An approach based on the catenary equation to deal with static analysis of three dimensional cable structures. *Engineering Structures*, 31 :2162–2170, 2009.
- [113] Y.M. Desai, N. Popplewell, A.H. Shah, and Buragohain D.N. Geometric nonlinear static analysis of cable supported structures. *Computers & Structures*, 29(6) :1001–1009, 1988.
- [114] A.H. Peyrot and A.M. Goulois. Analysis of cable structures. *Computers & Structures*, 10 :805–813, 1979.

- [115] A. Andreu, L. Gil, and P. Roca. A new deformable catenary element for the analysis of cable net structures. *Computers & Structures*, 84 :1882–1890, 2006.
- [116] M. Salehi Ahmad Abad, A. Shoostari, V. Esmaeili, and Naghavi Riabi A. Nonlinear analysis of cable structures under general loadings. *Finite Elements in Analysis and Design*, 73 :11–19, 2013.
- [117] M. Rezaiee-Pajand, M. Mokhtari, and Masoodi A.R. A novel cable element for nonlinear thermo-elastic analysis. *Engineering Structures*, 167 :431–444, 2018.
- [118] A. Luongo and D. Zulli. Statics of shallow inclined elastic cables under general vertical loads : a perturbation approach. *Mathematics*, 6(2), 2018.
- [119] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The finite element method. Vol. 1 : The Basis*. Butterworth-Heinemann Oxford, 2000.
- [120] C.A. Felipa. Finite element analysis of three-dimensional cable structures. In *Proc. 1st Int. Conf. Computational Methodes in Nonlinear Mechanics*, pages 311–324, 1974.
- [121] H. Hussein, M. Gouttferde, and F. Pierrot. Static modeling of sagging cables with flexural rigidity and shear forces. In *Advances in Robot Kinematics, Bologne, Italie*, 2018.
- [122] F. Cretin. Les transporteurs aériens à câbles. *Génie civil*, LXXVIII, 1921.
- [123] E. Czitary. *Seilschwebbahnen*. Springer, 1962.
- [124] P. Goirand. Transporteurs aériens sur câbles. *Techniques de l'Ingénieur*, A972 :1–19.
- [125] Zweifel. Schweiz. bauzeitung. *Trasporti Pubblici*, 8-9 :1049–1065, 1960.
- [126] Engel. *Internationale Berg- und Seilbahnrundschau*, 3, 1960.
- [127] Löschner. *Die Wasserwirtschaft*, 27 :72, 1934.
- [128] Löschner. *Wasserwirtschaft und Technik*, 28 :50, 1934.
- [129] Skrobaneck. *Die Wasserwirtschaft*, 1931.
- [130] Quintes. *ZVDI*, 90 :343–346, 1948.
- [131] Nicolas. *Annales des Ponts et Chaussées*, 1-3, 1954.
- [132] F. Steinbrunn. Simulation der statischen seilzustände bei pendelbahnen. *Internationale Seilbahn-Rundschau*, pages 246–252, 1981.
- [133] D'Armini. La configurazione delle funi metalliche nel caso particolare delle funivie. *Trasporti Pubblici*, 3, 1955.
- [134] Bittner. *Internationale Seilbahn-Rundschau*, 2 :41, 1959.
- [135] H. Thaler, Wenin M., J. Brunner, D. Reiterer, M.L. Bertotti, G. Modanese, and E. Oberhuber. Numerical optimization in ropeway planning. *Properties and Characterization of Modern Materials*, pages 113–124, 2016.
- [136] P.-T. Brun, B. Audoly, A. Goriely, and D. Vella. The surprising dynamics of a chain on a pulley : Lift-off and snapping. *Proceedings of The Royal Society A Mathematical Physical and Engineering Sciences*, 2016.
- [137] Y. M. Desai, P. Yu, N. Popplewell, and A. H. Shah. Finite element modelling of transmission line galloping. *Computers and Structures*, 57(3) :407–420, 1995.
- [138] D. Bertrand, S. Grange, F. Bourrier, and T. Langlade. Nonlinear dynamic simulation of cable based structures interacting with sliding objects using the concept of macro element. *International Journal of Solids and Structures*, (257) :45–60, 2021.
- [139] M. Al-Qassab and S. Nair. Wavelet-Galerkin method for the free vibrations of an elastic cable carrying an attached mass. *Journal of Sound and Vibration*, (270) :191–206, 2004.
- [140] Lianhua Wang and Giuseppe Rega. Modelling and transient planar dynamics of suspended cables with moving mass. *International Journal of Solids and Structures*, (47) :2733–2744, 2010.
- [141] M. Knawa-Hawryszkow, D. Prokopowicz, and D. Bryja. Multipurpose nonlinear cable model for dynamic response of structures under moving load. *Computers and Structures*, (257), 2021.

- [142] H. Polachek and T.S. Walton. Calculation of nonlinear transient motion of cables. Technical report, Department of the Navy - Applied Mathematics Laboratory, juillet 1959.
- [143] Narakorn Srinil, Giuseppe Rega, and S. Chucheepsakul. Three-dimensional non-linear coupling and dynamic tension un the large-amplitude free vibrations of arbitrarily sagged cables. *Journal of Sound and Vibration*, (269) :823–852, 2004.
- [144] Charl elie Bertrand, Alireza Ture Savadkoochi, Vincent Acary, and Claude-Henri Lamarque. Reduced-order model for the non-linear dynamics of cables. *Journal of Engineering Mechanics - ASCE*, 148(9), July 2022.
- [145] C. Bertrand. *Modélisation du comportement dynamique d’un câble en translation soumis   des contraintes unilatérales, au frottement sur appuis et   des charges ponctuelles*. PhD thesis,  cole Nationale des Travaux Publics de l’ tat, 2022.
- [146] Simpson A. On the oscillatory motions of translating elastic cables. *Journal of Sound and Vibration*, pages 177–189, 1972.
- [147] R. Skutch. *Annalen der physik und chemie*. 61, 1897.
- [148] R.A. Sack. Transverse oscillations in travelling strings. *British Journal of Applied Physics*, 5 :224–226, 1954.
- [149] M.S. Triantafyllou. The dynamics of translating cables. *Journal of Sound and Vibration*, 103 :171–182, 1985.
- [150] N.C. Perkins and C.D. Mote. Three-dimensional vibration of travelling elastic cables. *Journal of Sound and Vibration*, pages 325–340, 1987.
- [151] O.M. O’Reilly and P. Varadi. Elastic equilibria of translating cables. *Acta Mechanica*, 108 :189–206, 1995.
- [152] N.V. Gaiko and W.T. van Horssen. On transversal oscillations of a vertically translating string with small time-harmonic length variations. *Journal of Sound and Vibration*, 2016.
- [153] R. Winkler and J. Gerstmayr. Cables with transported discrete mass-points. *MOSSS - Symposium on Mechanics of Slender Structures*, 2017.
- [154] K. Ntarladima, M. Pieber, and J. Gerstmayr. Investigation of the stability of axially moving beams with discrete masses. *Proceedings of the ASME 2021 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference IDETC-CIE2021*, 2021.
- [155] Y.Q. Ni, J.M. Ko, and G. Zheng. Dynamic analysis of large-diameter sagged cables taking into account flexural rigidity. *Journal of Sound and Vibration*, 2(257) :301–319, 2002.
- [156] A. Younespour and S. Cheng. In-plane modal responses of two-cable networks considering cable bending stiffness effect. *Engineering Structures*, 230, 2021.
- [157] D. Ewins. *Modal Testing : Theory and Practice*. John Wiley and Sons, Inc., New-York, 1984.
- [158] Gerardin M. and D. Rixen. *Theory and Application to Structural Dynamics*. John Wiley & Wiley and Sons, 1994.
- [159] D. Inman. *Engineering Vibration*. Prentice-Hall, Englewood Clis, N.J., 1994.
- [160] W. Heylen, S. Lammens, and P. Sas. *Modal analysis Theory and Testing*. KUL Press, Leuven, Belgium, 1997.
- [161] R.J. Craig and A. Kurdila. *Fundamentals of Structural Dynamics*. Wiley, 2006.
- [162] H.M. Irvine and H. Max. *Cable structures*. 1981.
- [163] Alain Berlioz and Claude-Henri Lamarque. A non-linear model for the dynamics of an inclined cable. *Journal of Sound and Vibration*, 279(3-5) :619–639, January 2005.
- [164] Alain Berlioz and Claude-Henri Lamarque. Nonlinear vibrations of an inclined cable. *Journal of Vibration and Acoustics*, 127(4) :315–323, August 2005.
- [165] Mathieu Weiss, Bastien Vaurigaud, Alireza Ture Savadkoochi, and Claude-Henri Lamarque. Control of vertical oscillations of a cable by a piecewise linear absorber. *Journal of Sound and Vibration*, 435 :281–300, November 2018.

- [166] E. Balmes. Modeles experimentaux complets et modeles analytiques reduits en dynamique des structures. HDR - Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 1997.
- [167] H. M. Irvine and Caughey T. K. The linear theory of free vibrations of a suspended cable. *Proc. R. Soc. Lond. AL*, pages 299–315, 1974.
- [168] H. Ozdemir. A finite element approach for cable problems. *International Journal of Solid Structures*, 15 :427–437, 1979.
- [169] Y.M. Desai. Simple model for dynamic analysis of cable supported structures. *Engineering Structures*, 23 :271–279, 2001.
- [170] F. Rosenthal. Vibrations of slack cables with discrete masses. *Journal of Sound and Vibration*, 78(4) :573–583, 1981.
- [171] Giuseppe Rega. Nonlinear vibrations of suspended cables - part i : Modeling and analysis. *Applied Mechanics Reviews*, 57(6).
- [172] Giuseppe Rega. Nonlinear vibrations of suspended cables - part ii : Deterministic phenomena. *Applied Mechanics Reviews*, 57(6).
- [173] H.N. Arafat and A.H. Nayfeh. Non-linear responses of suspended cables to primary resonance excitations. *Journal of Sound and Vibration*, (266) :325–354, 2003.
- [174] F. Benedettini and G. Rega. Non-linear dynamics of an elastic cable under planar excitation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 22(6) :497–509, 1987.
- [175] G. Rega, F. Vestroni, and F. Benedettini. Parametric analysis of large amplitude free vibrations of a suspended cable. *International Journal of Solids Structures*, 20(2) :95–105, 1984.
- [176] G. Rega, W. Lacarbonara, A.H. Nayfeh, and C.M. Chin. Multiple resonances in suspended cables : direct versus reduced-order models. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 34 :901–924, 1999.
- [177] Narakorn Srinil and Giuseppe Rega. Nonlinear longitudinal/transversal modal interactions in highly extensible suspended cables. *Journal of Sound and Vibration*, (310) :230–242, 2008.
- [178] J.H.G. Macdonald. Multi-modal vibration amplitudes of taut inclined cables due to direct and/or parametric excitation. *Journal of Sound and Vibration*, (363) :473–494, 2016.
- [179] J.L. Lilien. Vibration amplitudes caused by parametric excitation of cable stayed structures. *Journal of Sound and Vibration*, 1(174) :69–90, 1994.
- [180] F. Benedettini, G. Rega, and R. Alaggio. Non-linear oscillations of a four-degree-of-freedom model of a suspended cable under multiple internal resonance conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 5(182) :775–798, 1995.
- [181] J. Warminski, D. Zulli, G. Rega, and J. Latalski. Revisited modelling and multimodal nonlinear oscillations of a sagged cable under support motion. *Meccanica*, (51) :2541–2575, 2016.
- [182] R. Rosenberg. On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom. *Advances in Applied Mechanics*, 9 :155–242, 1966.
- [183] G. Kerschen, M. Peeters, J.C. Golinval, and A.F. Vakakis. Nonlinear normal modes, part i : A useful framework for the structural dynamicist. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(1) :170–194, 2009. Special Issue : Non-linear Structural Dynamics.
- [184] M. Peeters, R. Vigné, G. Sérandour, G. Kerschen, and J.-C. Golinval. Nonlinear normal modes, part ii : Toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(1) :195–216, 2009. Special Issue : Non-linear Structural Dynamics.
- [185] S.W. Shaw and C. Pierre. Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of Sounds and Vibration*, (1) :85–124, 1993.
- [186] Cyril Touzé, Alessandra Vizzaccaro, and Olivier Thomas. Model order reduction methods for geometrically nonlinear structures : a review of nonlinear techniques. *Nonlinear Dynamics*, 105, 2021.
- [187] J. Axas, M. Cenedese, and G. Haller. Fast data-driven model reduction for nonlinear dynamical systems. *Nonlinear Dynamics*, pages 1–17, 2022.

- [188] L. Jézéquel and Lamarque C.-H. Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory. *Journal of Sound and Vibration*, 3(149) :429–459, 1991.
- [189] L. Salles J. Blahoš et C. Touzé A. Vizzaccaro, Y. Shen. Direct computation of nonlinear mapping via normal form for reduced-order models of finite element nonlinear structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (384), 2021.
- [190] N. Di Palma. *Dynamique non-linéaire des aubages : comportement multi-harmonique avec couplage torsion-flexion*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2022.
- [191] A.A. Muravyov and S.A. Rizzi. Determination of nonlinear stiffness with application to random vibration of geometrically nonlinear structures. *Computers and Structures*, 81 :1513–1523, 2003.
- [192] E. Balmès. Parametric families of reduced finite element models. theory and applications. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 10 :381–394, 1996.
- [193] E. Balmès. Integrating damping and non-linearities in a vibration design process. *DINAME 2013 - Proceedings of the XV International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics*, 2013.
- [194] E. Balmès. Shapes dof : on the use of modal concepts in the context of parametric non-linear studies. In *ISMA*, 2018.
- [195] Guilherme Malacrida Alves, Etienne Balmès, Guillaume Martin, Thierry Chancelier, and Enzo Kassa. Parametric modal testing using slow but continuous variation of operating conditions. Illustration on a contact bench. In *Surveillance, Vibrations, Shock and Noise*, Toulouse, France, July 2023. Institut Supérieur de l’Aéronautique et de l’Espace [ISAE-SUPAERO].
- [196] G. Vermot Des Roches. *Frequency and time simulation of squeal instabilities. Application to the design of industrial automotive brakes*. PhD thesis, École Centrale Paris, 2011.
- [197] A. Martin. *Réduction en dynamique non-linéaire géométrique : Application au cas des structures à symétrie cyclique*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2019.
- [198] S.R. Idelsohn and A. Cardona. A load-dependant basis for reduced nonlinear structural dynamics. *Computers and Structures*, 20 :203–210, 1985.
- [199] L. Wu, P. Tiso, K. Chatzi, and F. van Keulen. A modal derivatives enhanced rubin substructuring method for geometrically nonlinear multibody systems. *Multibody Systems Dynamics*, 45 :57–85, 2019.
- [200] E. Capiez-Lernout M. Mignolet et C. Soize Y.-W. Chang, X. Wang. Reduced order modelling for the nonlinear geometric response of some curved structures. *International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics, IFASD 2011. AAAF-AIAA*, 2011.
- [201] A. Bobillot and E. Balmès. Iterative techniques for eigenvalue solutions of damped structures coupled with fluids.
- [202] J.J Holkamp, R.W. Gordon, and S.M. Spottswood. Reduced-order models for non-linear response prediction : Implicit condensation and expansion. *Journal of Sounds and Vibration*, 318 :1139–1153, 2008.
- [203] J.L. Willems. *Stability theory of dynamical systems*. Wiley Interscience Division, 1970.
- [204] A. M. Liapunov. *The general problem of the stability of motion*. PhD thesis, 1892.
- [205] N. Petit and P. Rouchon. *Automatique : Dynamique et contrôle des systèmes*. Technical report, Mines ParisTech, 2009.
- [206] G. Floquet. *Sur la théorie des équations différentielles linéaires*. 1879.
- [207] A.H. Nayfeh and D.T. Mook. *Nonlinear oscillations*. John Wiley & Sons, 1979.
- [208] P. Hartman. *Ordinary differential equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.
- [209] N.C. Perkins. Asymptotic analysis of a translating cable arch. *Journal of sound and Vibration*, 135 :375–383, 1989.
- [210] N.C. Perkins and C.D. Mote. Theoretical and experimental stability of two translating cable equilibria. *Journal of sound and Vibration*, 128 :397–410, 1989.

- [211] O. Giannini and A. Sestieri. Predictive model of squeal noise occurring on a laboratory brake. *Journal of Sounds and Vibration*, 296(3) :583–601, 2006.
- [212] G. Fritz, J.-J. Sinou, J.-M. Duffal, and L. Jézéquel. Investigation of the relationship between damping and mode-coupling patterns in case of brake squeal. *Journal of Sounds and Vibration*, 307 :591–609, 2007.
- [213] E. de Langre. Frequency lock-in is caused by coupled-mode flutter. *Journal of Fluids and Structures*, 22 :783–791, 2006.
- [214] A. Grolet. *Dynamique non-linéaire des structures mécaniques : application aux systèmes à symétrie cyclique*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2013.
- [215] <https://www.efcables.com/fr>.
- [216] S. Liedl. *Bewegungen und Kräfte des Seilsystems und der Fahrzeuge von Seilschwebbahnen im Fahrbetrieb*. PhD thesis, TUM, 1999.
- [217] S. Liedl. Motions and forces in the rope system of aerial ropeways during operation. In *OITAF - NSAA 8th International Congress, Grenoble, France.*, 1999.
- [218] R. Beha. *Bewegungsverhalten und Kraftwirkungen des Zugseiles und der Fahrzeuge von Zweiseilbahnen zur Berechnung der Dynamik des Gesamtsystems*. PhD thesis, Universitaet Stuttgart, Institut fuer Foerdertechnik, Getriebetechnik und Baumaschinen, 1994.
- [219] R.V. Petrova, K. Hoffmann, and R. Liehl. A mixed formulation for nonlinear analysis of cables structures. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 13 :63–81, 2007.
- [220] H. Vcelar. Forderseilshingungen von einseil-umlaufbahnen. Technical report, TU Wien.
- [221] A. Nagy. Beschleunigung einer an einem seil pendel aufgehängen masse. Technical report, Institut für Bau- und Fördermaschinen, TU-Budapest.
- [222] M. Mayr. Exposé sur la propagation des perturbations dans les câbles. *Internationale Seilbahn-Rundschau*, pages 68–71, 1982.
- [223] O. Zweifel. Fouling of track cable by haul rope. *Internationale Seilbahn-Rundschau*, pages 35–48, 1975.
- [224] B. Portier. Dynamic phenomena in ropeways after a haul rope rupture. *Earthquake Engineering Structural Dynamics*, 12 :433–449, 1984.
- [225] J.P. Larquetout, B. Portier, and P. Dutilloy. Comportement dynamique d’un téléphérique après rupture d’un tracteur. les enseignements de l’expérience du salève. *Internationale Seilbahn-Rundschau*, 6 :308–314, 1983.
- [226] O. Coussy and J.P. Desroches. Propagation des ondes et tension dans un câble. *Bulletin de liaison des laboratoires des ponts et chaussées*, 117 :122–123, 1982.
- [227] M. Knawa and D. Bryja. Computational model of an inclined aerial ropeway and numerical method for analyzing nonlinear cable-car interaction. *Computers Structures*, 89 :1895–1905, 2011.
- [228] M. Knawa-Hawryszkow. Influence of motion parameters on incidence of resonant track rope vibrations in a bi-cable ropeway system. In *Procedia Engineering 199 (EURODYN)*, 2017.
- [229] T. Lässer. *Das dynamische Verhalten von Seilbahnfahrzeugen in Wechselwirkung mit der Dynamik der Seile*. PhD thesis, TU Wien, 2016.
- [230] M. Crussels-Girona, F.C. Filippou, and R.L. Taylor. A mixed formulation for nonlinear analysis of cable structures. *Computers and Structures*, 186 :50–61, 2017.
- [231] H. Maitournam. *Matériaux et structures anélastiques*. Les éditions de l’école polytechnique, 2017.
- [232] C. Bertrand, V. Acary, C.-H. Lamarque, and A. Ture Savadkoochi. A robust and efficient numerical finite element method for cables. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, pages 1–30, 2020.
- [233] V. Yastrebov. *Computational contact mechanics : geometry, detection and numerical techniques*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2011.
- [234] G. Duvaut and J.L. Lions. *Inequalities in mechanics and physics*. Springer-Verlag, 1976.
- [235] G Oplatka. Sécurité des ancrages à tambour. *ISR*, 5, 1988.

- [236] W. Kauk. Câbles porteurs-tracteurs à ancrage fixe. *Internationale Seilbahn-Rundschau*, pages 5–8, 1990.
- [237] Von Roll Tramways. Why fixed anchored track ropes? In *7th OITAF - NACS Symposium*, Albuquerque, New Mexico, USA, 1996.
- [238] A. Marocchi. Lifts without a tensioning device. In *OITAF - NSAA 8th International Congress, Grenoble, France.*, 1999.
- [239] D. Saxon and A. Cahn. Modes of vibration of a suspended chain. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 6 :273–285, 1953.
- [240] T.R. Witmer G. Cardano. *Ars Magna or the Rules of Algebra*. Dover Publication Inc, New York.
- [241] M. Helfgott H. Helfgott. A Modern Vision of the Work of Cardano and Ferrari on Quartics - Solving Quartics Through Ferrari’s Technique. *Convergence*, February 2010.
- [242] M. Moscatelli. *Metamaterials for energy harvesting at small scale*. PhD thesis, Institut Polytechnique de Paris ; Politecnico di Milano, 2022.
- [243] E. Balmès. High modal density, curve veering, localization : a different perspective on the structural response. *Journal of Sound and Vibration*, pages 358–363, 1993.
- [244] N.C. Perkins and C.D. Mote. Comments on curve veering in eigenvalue problems. *Journal of Sound and Vibration*, pages 451–463, 1986.
- [245] Pierre C. Mode localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures. *Journal of Sound and Vibration*, pages 485–502, 1988.
- [246] M.S. Triantafyllou and G.S. Triantafyllou. Frequency coalescence and mode localization phenomena : a geometric theory. *Journal of Sound and Vibration*, pages 485–500, 1991.
- [247] E. Bonisoli, Delprete C., Esposito M., and Mottershead J.E. Structural dynamics with coincident eigenvalues : Modelling and testing. In *Modal Analysis Topics, Volume 3*, pages 15–23. Springer New York, 2011.
- [248] O. Giannini. Unstable transient response of gyroscopic systems with stable eigenvalues. *Mechanical Systems and Signal Processing*, pages 1–10, 2016.
- [249] O. Giannini. Forced response of 2-dof gyroscopic systems with stable eigenvalues. In Michael Mains and Brandon J. Dilworth, editors, *Topics in Modal Analysis and Testing, Volume 9*, pages 15–23. Springer International Publishing, 2019.
- [250] Vidoli S. and Vestroni F. Veering phenomena in systems with gyroscopic coupling. *Journal of Applied Mechanics*, pages 641–647, 2005.
- [251] O. Giannini and A. Sestieri. Experimental characterization of veering crossing and lock-in in simple mechanical systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, pages 846–864, 2016.
- [252] F. Melde. *Ueber einige krumme Flächen, welche von Ebenen parallel einer bestimmten Ebene durchschmittsfigur einen Kegelschnitt liefern*. PhD thesis, 1859.
- [253] Jacques Dubuisson. Téléphérique du Salève : essais de rupture en grandeur nature. *Aménagement et Montagne*, 35, 1982.
- [254] P. Dutilloy. Essais de mesure de l’amortissement interne dans les câbles tracteurs de téléphériques. *ISR*, (5), 1983.
- [255] S. Bretonniere, J.-P. Desroche, J.-L. Sorlin, and M. Rumiano. Compte rendu des essais d’amortissement sur câbles de téléphérique. Technical report, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées - Service Physique - Section d’instrumentation, juillet 1983.
- [256] J.-P. Desroche and M. Rumiano. Compte rendu des essais d’amortissement sur câbles de téléphérique (compléments du rapport de juillet 1983). Technical report, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées - Service Physique - Section d’instrumentation, mai 1984.
- [257] Jacques Dubuisson. Interprétation des rapports du lpcp de juillet 1983 et mai 1984 pour l’amortissement longitudinal des câbles de téléphérique. Technical report, février 2014.

- [258] Jakob Scheidl and Yury Vetyukov. Review and perspectives in applied mechanics of axially moving flexible structures. *Acta Mechanica*, 234(4) :1331–1364, 2023.
- [259] Kari Dufva, Kimmo Kerkkänen, Luis G. Maqueda, and Ahmed A. Shabana. Nonlinear dynamics of three-dimensional belt drives using the finite-element method. *Nonlinear Dynamics*, 48(4) :449–466, 2007.
- [260] Evgenii Oborin, Yury Vetyukov, and Ivo Steinbrecher. Eulerian description of non-stationary motion of an idealized belt-pulley system with dry friction. *International Journal of Solids and Structures*, 147 :40–51, 2018.
- [261] Difeng Hong and Gexue Ren. A modeling of sliding joint on one-dimensional flexible medium. *Multibody System Dynamics*, 26 :91–106, 06 2011.
- [262] Konstantina Ntarladima, Michael Pieber, and Johannes Gerstmayr. Investigation of the stability of axially moving beams with discrete masses. *Volume 9 : 17th International Conference on Multibody Systems, Nonlinear Dynamics, and Control (MSNDC)*, 2021.
- [263] Michael Pieber, Konstantina Ntarladima, Robert Winkler, and Johannes Gerstmayr. A Hybrid Arbitrary Lagrangian Eulerian Formulation for the Investigation of the Stability of Pipes Conveying Fluid and Axially Moving Beams. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 17(5), 03 2022.
- [264] Benoît Theckes, Emmanuel de Langre, and Xavier Boutillon. Modal energy transfer from geometrical nonlinearities in a tree-like structure. In *7th European Nonlinear Dynamics Conference*, page 2 p., Italy, July 2011.
- [265] B. Theckes. *Amortissement par le branchement des structures flexibles : une approche bio-inspirée des arbres*. PhD thesis, École Polytechnique, 2012.
- [266] Gabriel Hurel, Alireza Ture Savadkoohi, and Claude-Henri Lamarque. Passive control of a two degrees-of-freedom pendulum by a non-smooth absorber. *Nonlinear Dynamics*, 2019.
- [267] Gabriel Hurel, Alireza Ture Savadkoohi, and Claude-Henri Lamarque. Nonlinear vibratory energy exchanges between a two degrees-of-freedom pendulum and a nonlinear absorber. *Journal of Engineering Mechanics - ASCE*, 145(8), 2019.
- [268] J. Courbon. Vibrations des poutres. Technical report, Annales de l’Institut du Bâtiment et des Travaux Publics, 1969.
- [269] E. Balmès. Methods for vibration design and validation. Technical report, ENSAM-CentraleSupélec, 2021.