



HAL
open science

Résolution numérique de problèmes de diffusion magnétique dans des matériaux ferromagnétiques.

Dima Abou-El-Nasser-El-Yafi

► **To cite this version:**

Dima Abou-El-Nasser-El-Yafi. Résolution numérique de problèmes de diffusion magnétique dans des matériaux ferromagnétiques.. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2023. Français. NNT : 2023PAUU3070 . tel-04707292

HAL Id: tel-04707292

<https://theses.hal.science/tel-04707292v1>

Submitted on 24 Sep 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES

THÈSE / UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR

Présentée par

Dima ABOU EL NASSER EL YAFI

Résolution numérique de problèmes de diffusion magnétique dans des matériaux ferromagnétiques

Directeur de thèse

Victor PÉRON

Soutenue le 12 décembre 2023, 14h30 à l'UPPA devant la commission d'examen

MEMBRES DE JURY

Gilles CARBOU	Professeur des universités, Président (Université de Pau et des pays de l'Adour)
Clair POIGNARD	Directeur de recherche INRIA, Rapporteur (Université de Bordeaux)
Ruth VAZQUEZ SABARIEGO	Associate Professor, Rapporteur (Université de KU Leuven)
Laurent KRÄHENBÜHL	Directeur de recherche CNRS, Examineur (Université de Lyon)
Ronan PERRUSSEL	Chargé de recherche CNRS, Examineur (Université de Toulouse)
Victor PÉRON	Maître de conférences HDR, Directeur de thèse (Université de Pau et des pays)

Remerciements

Tout d’abord, je tiens à remercier profondément mon directeur de thèse M. Victor PÉRON pour ses remarques très utiles et ses disponibilités tout au long de mon parcours doctoral. Votre expertise dans le domaine de ma thèse a été une source d’apprentissage précieuse pour moi.

Pendant mes années de thèse, j’ai eu l’opportunité de collaborer avec M. Ronan PERRUSSEL et M. Laurent KRÄHENBÜHL pour lesquels j’exprime ma gratitude d’avoir accepté de m’aider à valoriser mes travaux de recherche dans des conférences et revues internationales malgré les difficultés de se rencontrer pendant la pandémie covid-19, ainsi que leur participation au membre de jury de ma soutenance de thèse. Plus précisément, je présente mes sincères remerciements à M. Ronan PERRUSSEL qui par ses discussions, conseils et encouragements m’a permis d’avancer davantage dans la partie numérique de ma thèse, ainsi je remercie également M. Laurent KRÄHENBÜHL pour ses commentaires et ses critiques qui m’ont aidé à comprendre les applications de ma thèse en physique et en ingénierie.

Je souhaite aussi remercier mes rapporteurs M. Clair POIGNARD et Mme Ruth SABARIEGO de leur intérêt à participer au membre de jury et d’assister à ma soutenance de thèse. J’exprime mes sincères remerciements à M. Gilles CARBOU pour sa bienveillance, d’avoir accepté de présider ce jury voire le jury de ma comité de suivi de thèse, et d’autre part de m’avoir permis d’assister à son cours de Master 2 en début de ma thèse qui m’a apporté divers clarifications à mon sujet.

Mes pensées de remerciement reviennent particulièrement à mon directeur de mémoire en Master 2 M. Mustapha JAZAR à qui j’exprime ma profonde gratitude pour ses motivations et recommandations de poursuivre mes études doctorales. Je remercie également M. Jacky CRESSON et M. Mustapha JAZAR de leur intérêt à participer à ma comité de suivie de thèse et leurs remarques apportées à ma thèse.

J’exprime ma reconnaissance à M. Sébastien TORDEUX, M. Jean-François FAL-LIERO, M. Vincent DOUCE, et l’équipe IPSA de Toulouse notamment M. Guillaume COUFFIGNAL avec qui les enseignements de trois années à l’UPPA et en fin de ma thèse à l’IPSA de Toulouse, ont été une agréable expérience et souvenir grâce à leur bienveillance et leur qualité humaine en m’offrant le temps pour mes travaux de recherches.

Mes meilleurs remerciements sont exprimés à mes amies Mouna et Rouba avec lesquelles on a passé de bons moments. C'était un plaisir de faire part des séminaires doctorants, je remercie à cet égard les organisateurs Ibtissem et Joyce ainsi que les doctorants pour leurs intéressantes présentations. Je présente aussi mes meilleurs voeux pour les thésards rencontrés au LMAP : Elssy, Aimene, Ibtissem, Rodrigo, Joyce, Mohamad, Christina, Sarah, Nicolas, Nassim...

Finalement, mon parcours doctoral est achevé grâce aussi aux supports et encouragements de ma famille surtout pendant ma première année de thèse encombrée par la pandémie covid-19. Je souhaite remercier chaleureusement mes parents de m'avoir toujours poussé à aimer mon chemin et de leur confiance en moi. J'adresse également ma profonde gratitude à ma soeur qui a toujours été ma source d'inspiration surtout en Mathématiques, ainsi que tous mes profonds remerciements à mon frère mon mentor et ma source de bonheur.

Résumé : Cette thèse vise à résoudre numériquement le problème des courants de Foucault en régime harmonique dans des matériaux linéairement ferromagnétiques entourés par un isolant, ayant une interface régulière en commun. On propose une approche numérique basée sur un développement asymptotique à multi-échelle permettant d'aborder finement le comportement de la solution avec un moindre coût de calculs. Ce travail est effectué en trois parties. La première partie consiste à l'analyse asymptotique à multi-échelle du problème dans le cas bidimensionnel. Afin d'évaluer les performances du développement asymptotique imposé, nous appliquons la méthode des éléments finis avec un maillage raffiné sur l'interface du conducteur. Il en résulte que les coûts de calculs de la solution asymptotique sont moins que celles de la solution de référence et d'impédance. Ce résultat prouve l'importance de notre approche. La deuxième partie est consacrée à l'étude du problème d'intérêt dans le cas d'une géométrie axisymétrique et une donnée axisymétrique et orthoradiale. On développe asymptotiquement la solution orthoradiale unidimensionnel du problème et on valide les résultats analytiquement. Finalement, on s'intéresse à étendre notre étude asymptotique pour le cas tridimensionnel. Les développements dans ce cas sont vérifiés en établissant un lien avec les modèles asymptotiques unidimensionnels.

Mots clés : Courant de Foucault ; Développement asymptotique à multi-échelle ; Matériaux ferromagnétiques ; Méthode des éléments finis ; Effet de peau ; Potentiel magnétique ; Méthode d'impédance.

Abstract : This PhD thesis concerns the numerical resolution of the time-harmonic eddy current problem in linear ferromagnetic materials embedded in a dielectric domain with a common smooth interface. We propose a numerical approach based on a multiscale expansion that allows us to tackle accurately the behaviour of the solution with less computational costs. This work is performed in threefold. Firstly, we construct an efficient multiscale expansion for the solution of interest in a bi-dimensional setting. In order to evaluate the performance of the proposed expansion, we apply the finite element method with a fine mesh on the interface of the conductor. We show that the asymptotic solution has less computational costs in comparison with the reference and impedance solutions. This result highlights the importance of our method. Secondly, our interest lies for the case of axisymmetric geometries and axisymmetric orthoradial data. We develop a multiscale expansion for the orthoradial one-dimensional solution. This approach is validated using an analytical procedure. Finally, we expand our asymptotic study for the three-dimensional case. The multiscale expansion in this case is verified via a link with the one-dimensional expansion.

Keywords : Eddy current ; Multiscale expansion ; Ferromagnetic materials ; Finite element method ; Skin effect ; Magnetic potential ; Impedance method.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Les courants de Foucault	3
1.1.1	Modélisation mathématique	4
1.1.2	Résolution numérique du problème	8
1.2	Méthode asymptotique à multi-échelle	9
1.3	Matériaux ferromagnétiques	10
1.4	Présentation du problème	11
1.5	Principaux résultats	12
1.5.1	Développement asymptotique à multi-échelle	13
1.5.2	Validation de la méthode asymptotique	14
2	Étude asymptotique bidimensionnelle	19
	<i>Article Résolution Numérique de l'Effet de Peau : Paramétrisation Efficace des Solutions d'Impédance pour des Matériaux Linéairement Ferromagnétiques</i>	
2.1	Introduction	20
2.2	Présentation du problème	21
2.2.1	Notations et paramètres	22
2.2.2	Problème aux limites	22
2.3	Développement asymptotique	23
2.3.1	Résultats de convergence	23
2.3.2	Premiers termes asymptotiques	23
2.3.3	Modèle d'impédance	25
2.4	Résultats numériques	25
2.4.1	Géométrie	26
2.4.2	Expériences numériques	26
2.4.3	Résultats de convergence	28
2.4.4	Coûts de calculs	31
2.5	Conclusion et perspectives	33
	Références	33

A	Éléments de dérivation du développement asymptotique à multi-échelle	35
A.1	Développement des opérateurs en puissances de δ	35
A.2	Équations des coefficients du potentiel magnétique	36
A.3	Premiers termes asymptotiques du potentiel magnétique	37
3	Étude asymptotique axisymétrique	40
	<i>Article Modèles Asymptotiques Efficaces pour le Problème des Courants de Foucault Axisymétrique dans des Matériaux Linéairement Ferromagnétiques</i>	
3.1	Introduction	41
3.2	Présentation du problème	43
3.2.1	Notations et paramètres	43
3.2.2	Problème aux limites	44
3.2.3	Formulation variationnelle	46
3.3	Domaines Axisymétriques	47
3.3.1	Formulation en coordonnées cylindriques	47
3.3.2	Problème axisymétrique orthoradiale	48
3.3.3	Développement asymptotique à multi-échelle	50
3.4	Solutions radiales en géométrie cylindrique	52
3.4.1	Géométrie	52
3.4.2	Solutions analytiques	53
3.5	Résultats numériques	54
3.6	Conclusion et perspectives	58
A	Éléments de dérivation du développement asymptotique à multi-échelle	58
A.1	Développement des opérateurs	59
A.2	Equations des coefficients du potentiel magnétique	60
A.3	Premiers termes asymptotiques	61
B	Éléments de démonstration des solutions analytiques	62
	Références	65

4 Étude asymptotique tridimensionnelle	67
4.1 Introduction	67
4.2 Présentation du problème	68
4.2.1 Hypothèse géométrique	68
4.2.2 Hypothèse physique	68
4.2.3 Notations et paramètres	69
4.3 Modélisation mathématique du problème	69
4.3.1 Formulation variationnelle	71
4.3.2 Formulation forte	72
4.4 Développement asymptotique à multi-échelle	73
4.4.1 Outils de calculs tensoriels	74
4.4.2 Procédure de calcul des termes asymptotiques	78
4.4.3 Identification des premiers termes asymptotiques	80
4.4.4 Identification des termes asymptotiques d'ordres supérieures	82
4.5 Lien entre les développements asymptotiques 1D et 3D	83
4.5.1 Outils de calculs	83
4.5.2 Le développement 1D via le développement 3D	85
4.6 Conclusion	87
5 Conclusion et perspectives	88
Bibliographie	89

Chapitre 1

Introduction

Les ondes électromagnétiques envahissent omniprésent divers branches de notre vie quotidienne. Ces ondes traduisent les interactions électriques et magnétiques propageant dans l'espace [17, 46, 63, 85]. Par exemple, l'étude ondulatoire de la lumière a attiré l'intérêt des scientifiques dans l'antiquité au XX^e siècle [37, 50, 83]. Suite à des multiples suppositions imposées sur la nature de la lumière [83, 6, 70], Jean Clerk Maxwell (1831-1879) [64] a perçu son secret : *la lumière est une onde électromagnétique*. Particulièrement, en astronomie, le *supernovae* dans l'espace (Fig. (1.1)) est un rayonnement cosmique qui résulte d'une explosion d'une étoile en fin de vie , émettant des rayonnements électromagnétiques visibles [11]. En plus, la chaleur



FIGURE 1.1 – Image d'un supernovae prise par des grands observatoires de la NASA (Source : NASA/JPL-Caltech/STScI/CXC/SAO)

que nous sentons autour d'un feu est une onde électromagnétique de nature dite "*infrarouge*" [65]. On peut d'autre part s'abstenir de la sensation des ondes électromagnétiques. C'est le cas par exemple du champ magnétique terrestre dont sa présence est mise en évidence par la boussole [43]. Ce champ est en effet généré par des courants électriques entretenus par le mouvement du noyau terrestre constitué du

métal liquide. Une interaction entre le champ magnétique terrestre et le vent solaire [71], qui est un gaz ionisé appelé plasma, peut produire au pôle nord de la terre, par exemple en Alaska, un phénomène spectaculaire connu par "*Aurore boréale*" (Fig. (1.2)). D'autre part, en télécommunication, de nombreuses applications sont fondées



FIGURE 1.2 – Les lumières de l'aurore boréale bordent le ciel d'Alaska.(Source : www.nationalgeographic.fr/photography/2017/11/la-magie-des-aurores-boreales-en-images)

par les ondes électromagnétiques essentielles pour concevoir divers systèmes surtout dans les domaines de l'aéronautique et du spatial. En effet, ces ondes servent au fonctionnement des postes de radio et des téléphones portables, à des fins d'observations tels la radioastronomie et la météorologie, à la navigation par G.P.S et aux balises aéronautiques, ainsi qu'à la surveillance par radar. Les ondes électromagnétiques régissent aussi une place cruciale dans les applications médicales notamment pour le dépistage de diverses maladies graves tels que la tuberculose et le cancer. En effet, l'imagerie diagnostique utilise différents types d'ondes électromagnétiques interagissant avec nos tissus sous forme de diffusion, absorption ou atténuation pour construire enfin une image. Cette image permet ainsi de regarder à l'intérieur du corps humain sans l'ouvrir.

Les pionniers de l'étude des phénomènes électromagnétiques sont *André-Marie Ampère (1775-1836)*, *Michael Faraday (1791-1867)*, et *Jean Clerk Maxwell (1831-1879)* [41, 89]. En premier abord, au *XIX^e* siècle, les lois d'Ampère et de Faraday déclarent une dépendance entre le champ électrique et le champ magnétique [30, 40]. Ensuite, Maxwell a contribué à une synthèse des lois d'Ampère et de Faraday en introduisant un terme spécifique appelé "*courant de déplacement*" afin d'assurer la conservation de la charge électrique [80, 63]. La présence de ce terme met en évidence la propagation d'onde électromagnétique. Lors de leur propagation les ondes conservent leur intensité et leur fréquence, ainsi qu'ils se déplacent à la vitesse de la lumière. C'est le comportement typique des ondes électromagnétiques dans un milieu uniforme ou le vide. D'autre part, dans certains dispositifs tels que les conducteurs,

les ondes électromagnétiques subissent des *déformations*, et par conséquent l'aspect dominant s'appelle *diffusion des ondes électromagnétiques* [80]. Quand on aborde la notion de diffusion en électromagnétisme, cela correspond à négliger le déplacement des courants introduit par Maxwell. Ce travail concerne *la résolution numérique des équations de diffusion magnétique dans des matériaux ferromagnétiques*. Ces équations sont aussi appelées *équations magnétoquasi-statique* ou *courants de Foucault* [84] régissant notre intérêt.

1.1 Les courants de Foucault

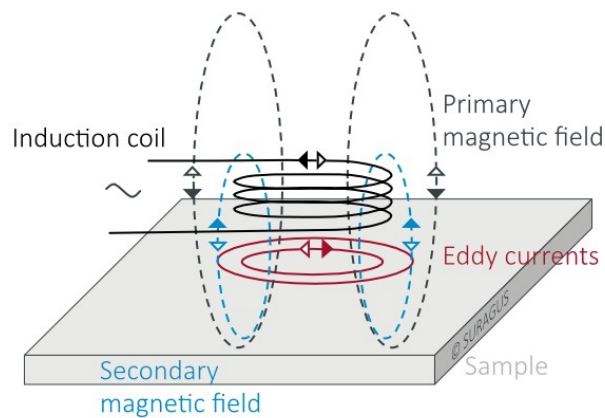


FIGURE 1.3 – Les courants de Foucault
(Source : <https://www.suragus.com/en/technology/eddy-current/>
)

La variation d'un champ magnétique traversant extérieurement une masse conductrice ou un déplacement de cette masse exposée à un champ magnétique constant engendre des courants électriques [17, 80, 12, 75, 16, 60, 48]. Ces courants induits s'appellent *courants de Foucault*, sous le nom du physicien *Léon Foucault (1818-1868)* [42, 88]. Les courants de Foucault tourbillonnent sous forme d'une boucle fermée et dans un sens opposé au flux extérieur engendrant ces courants. Par conséquent, ces courants produisent deux effets : un échauffement par effet joule du conducteur, et ils créent par la loi de Lenz un champ magnétique qui s'oppose à la cause de la variation du flux extérieur. Ces effets sont considérés à double face dans l'industrie. D'une part, les courants de Foucault sont *utiles* dans nombreuses applications industrielles par exemple :

- Le freinage des véhicules à poids lourds fonctionne grâce à une force gouvernée par les courants de Foucault et qui s'oppose à la rotation des roues des

véhicules.

- Le cuisson par induction fonctionne grâce à un courant électrique alternatif qui passe à travers une bobine de cuivre située sous la surface de cuisson. Ce courant engendre un champ magnétique qui génère de la chaleur dans le fond du récipient de cuisson en *métal*. Cette chaleur est transférée aux aliments à l'intérieur du récipient d'une manière rapide et précise.



FIGURE 1.4 – Image de cuisson par induction mettant en évidence la plaque en métal pour produire les courants de Foucault et par suite la chaleur (<https://www.electrafixbc.ca/articles/induction.html>)

D'autre part, les courants de Foucault produisent des effets "*indésirables*" dans certains appareils électriques. On prend à titre d'exemple la perte d'énergie qui provoque une réduction d'efficacité des dispositifs tels que le moteur ou le transformateur. Pour cela, l'étude de la distribution et les pertes liés aux courants de Foucault s'avère cruciale dans les applications industrielles notamment en génie électrique.

1.1.1 Modélisation mathématique

La modélisation mathématique consiste à traduire divers phénomènes réels provenant de la physique, de la biologie ou de l'économie en langage mathématique. Les éléments essentiels de cette langage sont des équations à partir desquels on s'intéresse à trouver sa solution sous certaines conditions [4, 33]. Dans cette partie, on aborde la modélisation mathématique du problème des courants de Foucault.

On commence en premier temps avec les bases fondamentales en électromagnétisme : *les équations de Maxwell*. Ces équations de bases sont gouvernées par le champ électrique et le champ magnétique par lesquels on déduit l'induction électrique et l'induction magnétique. Dans le cadre de cette thèse, nous supposons que les milieux sont linéaires, homogènes et isotropes[53]. Par suite, on a les identités suivantes :

$$\mathbf{d} = \underline{\epsilon}\mathbf{e}, \quad \mathbf{b} = \underline{\mu}\mathbf{h}, \quad \text{et} \quad \mathbf{j} = \underline{\sigma}\mathbf{e} + \mathbf{j}_s \quad (1.1)$$

où \mathbf{e} , \mathbf{h} , \mathbf{d} , \mathbf{b} désignent respectivement le champ électrique, le champ magnétique, l'induction électrique et l'induction magnétique, \mathbf{j} est la densité du courant électrique et \mathbf{j}_s est la densité du courant électrique source imposée. D'autre part, $\underline{\epsilon}$, $\underline{\mu}$, $\underline{\sigma}$ sont des fonctions constantes représentant respectivement la permittivité, la perméabilité magnétique et la conductivité électrique du milieu considéré.

Ainsi, le champ électromagnétique est la solution des équations de Maxwell suivantes [57, 33, 80, 17, 68, 87, 78] :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{curl } \mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{b} & \text{équation de Maxwell-Faraday} \quad (1.2) \\ \text{curl } \mathbf{h} = \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{d} & \text{équation de Maxwell-Ampère} \quad (1.3) \\ \text{div } \mathbf{d} = \rho & \text{équation de Maxwell-Gauss} \quad (1.4) \\ \text{div } \mathbf{b} = 0 & \text{équation du flux magnétique} \quad (1.5) \end{array} \right.$$

tel que ρ désigne la densité des charges électriques.

Durant ces deux derniers siècles, l'analyse harmonique [51, 27] a occupé une place judicieuse dans divers applications physiques liées à l'électromagnétisme notamment en traitement des signaux. A cet égard, on considère le régime harmonique dans cette thèse. Un champ quelconque décrivant le système, tel que le champ électrique, sera ainsi sinusoïdale à la fréquence f (la pulsation $\omega = 2\pi f$) et s'exprime de la manière suivante : $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \text{Re}[\mathbf{U}(\mathbf{x})e^{i\omega t}]$, où \mathbf{x} représente la variable d'espace, t désigne le temps, et i le nombre imaginaire unitaire. On suppose aussi dans ce qui suit que les charges électriques libres n'existent pas, les équations de Maxwell (1.2)–(1.5) seront en régime harmonique [67, 17, 33] :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{curl } \mathbf{E} + i\omega \underline{\mu} \mathbf{H} = 0 & (1.6) \\ \text{curl } \mathbf{H} = \underline{\sigma} \mathbf{E} + \mathbf{J}_s + i\omega \underline{\epsilon} \mathbf{E} & (1.7) \\ \text{div } (\underline{\mu} \mathbf{H}) = 0 & (1.8) \end{array} \right.$$

Le problème des courants de Foucault est déduit du système de Maxwell en négligeant le déplacement de courant $\partial_t \mathbf{d}$ dans (1.3) ou $i\omega \underline{\epsilon} \mathbf{E}$ dans (1.7). En effet, d'après la loi de Faraday, la variation du champ magnétique génère un champ électrique. Par suite, dans chaque conducteur, des courants électriques de la forme $\underline{\sigma} \mathbf{E}$ se produisent et s'appellent *les courants de Foucault*. Précisément, le déplacement des courants $\partial_t \mathbf{d}$ (resp. $i\omega \underline{\epsilon} \mathbf{E}$) est ainsi petit en comparaison avec "curl \mathbf{h} " et " $\underline{\sigma} \mathbf{e} + \mathbf{j}_s$ " dans (1.3) (resp. (1.7)) du système de Maxwell [16, 57, 80]. Finalement, le problème des courants de Foucault en régime harmonique est représenté par le modèle mathématique

ci-dessous [74, 28, 17] :

$$\begin{cases} \text{curl } \mathbf{E} + i\omega \underline{\mu} \mathbf{H} = 0 & (1.9) \\ \text{curl } \mathbf{H} = \underline{\sigma} \mathbf{E} + \mathbf{J}_s & (1.10) \\ \text{div } (\underline{\mu} \mathbf{H}) = 0 & (1.11) \end{cases}$$

Par ailleurs, la résolution du problème des courants de Foucault en terme du champ électromagnétique nécessite des calculs complexes. Pour pallier ce problème, on introduit la notion du potentiel dans le but de simplifier les calculs mathématiques dans la résolution des modèles physiques notamment en électromagnétisme. D'une part, le potentiel électrique est souvent utile en électrostatique pour calculer le travail électrique nécessaire au déplacement d'une charge électrique. Son étude a été étendue en électrodynamique afin de calculer les puissances électriques, les courants de déplacements et le champ magnétique résultant. D'autre part, le potentiel magnétique, connu également sous le nom du potentiel vectoriel, est souvent utilisé pour représenter l'énergie potentielle par unité de charge due à des courants électriques. Il est judicieux dans la compréhension des champs magnétiques notamment dans les applications d'induction électromagnétique telles que les moteurs. Précisément, le potentiel magnétique fournit une représentation simplifiée et appropriée pour appréhender le problème des courants de Foucault [47, 45]. Nous traitons ainsi notre problème en terme de ce vecteur.

On identifie à présent la modélisation mathématique de notre problème d'intérêt en terme du potentiel vecteur magnétique. On rappelle d'après [5, 79, 49] qu'un champ de vecteur à divergence nulle peut être identifié à un potentiel vectoriel. En particulier, d'après l'équation (1.11), on a l'induction magnétique est de divergence nulle :

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (1.12)$$

Alors, il existe un potentiel magnétique \mathcal{A} de sorte qu'on a :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathcal{A}. \quad (1.13)$$

Remplaçons cette identité dans l'Eq. (1.9) on obtient :

$$\text{curl } (\mathbf{E} + i\omega \mathcal{A}) = 0. \quad (1.14)$$

On rappelle de plus qu'un champ de vecteur de rotationnel nul peut être identifier au gradient d'un potentiel scalaire [5, 79, 49]. En plus, d'après Eq. (1.14), il existe

un potentiel scalaire électrique V tel que :

$$\mathbf{E} = -i\omega\mathcal{A} - \nabla V.$$

On simplifie souvent cette écriture en annulant le potentiel électrique i.e. $V = 0$. Ainsi, on a :

$$\mathbf{E} = -i\omega\mathcal{A}^*, \quad (1.15)$$

tel que \mathcal{A}^* sera nommé le potentiel vecteur magnétique *modifié* [33]. En remplaçant (1.13) et (1.15) dans la première équation du problème des courants de Foucault harmonique (1.10)–(1.11) on obtient l'équation suivante :

$$\text{curl} \frac{1}{\underline{\mu}} \text{curl} \mathcal{A}^* + i\omega \underline{\sigma} \mathcal{A}^* = \mathbf{J}_s. \quad (1.16)$$

Afin de garantir l'existence et l'unicité du potentiel vecteur magnétique on impose des conditions dites de jauges [3]. Dans le cadre de notre étude, il est plus adapté de choisir la condition de Coulomb [15, 13, 3] définie de la façon suivante :

$$\text{div} \mathcal{A}^* = 0. \quad (1.17)$$

En supposant que les milieux sont homogènes et linéaires, on peut écrire :

$$\text{curl} \text{curl} \mathcal{A}^* = \nabla(\text{div} \mathcal{A}^*) - \Delta \mathcal{A}^*. \quad (1.18)$$

Avec la condition de Coulomb (1.17) on obtient :

$$\text{curl} \text{curl} \mathcal{A}^* = -\Delta \mathcal{A}^*. \quad (1.19)$$

Finalement, afin de modéliser notre problème dans le cas bidimensionnel, on considère que la source de courant \mathbf{J}_s est orientée dans une seule direction donnée, par exemple $\mathbf{J}_s = (0, 0, J_s)$. Par conséquent, on obtient l'équation scalaire suivante :

$$-\Delta A^* + i\omega \underline{\sigma} A^* = J_s \quad (1.20)$$

où A^* représente le *potentiel scalaire magnétique*. Nous traitons dans cette thèse les cas bidimensionnel (1.20) et tridimensionnel (1.16).

1.1.2 Résolution numérique du problème

Tout d’abord, il est indéniable d’imposer des conditions aux limites complémentaires aux modèles (1.16) et (1.20) afin de garantir l’existence et l’unicité de la solution correspondante. D’après l’équation (1.15), on peut déduire les conditions sous-jacentes d’après celles du champ électrique [12]. Ensuite, notre problème pourrait être résolu par deux procédures : *analytique* et autre *numérique*. La procédure analytique consiste à trouver la solution exacte de problème posé. En général, cette procédure requiert des difficultés comme elle est limitée pour des configurations spécifiques de simples géométries [29, 44]. Pour cela, on a recourt à des méthodes numériques qui consistent à *approcher* la solution du problème en retranscrire son modèle mathématique continu en un modèle discret.

Quelques études dans la littérature ont résolu analytiquement le problème des courants de Foucault pour des simples géométries, voir par exemple [56, 8] pour des matériaux linéaires et [66] pour le cas non-linéaire. A contrario, ce problème a été largement étudié numériquement en appliquant la méthode des *éléments finis* classique [3, 17, 80, 8, 15, 69, 14, 18, 55, 23]. La *méthode des éléments finis* a été introduite tout d’abord au XX^e siècle pour l’analyse des structures [92], puis son analyse numérique quand à elle a été introduite en 1973 par Strang et Fix en 1973 [86, 25]. Malgré l’utilité remarquable de cette méthode pour la résolution de notre problème, on se confronte entre le choix d’une solution peu précise mais obtenue rapidement et entre une solution très précise mais qui suscite plus de temps computationnel et de mémoire. En effet, grâce à l’induction électromagnétique, le champ électromagnétique est restreint à l’interface du conducteur sous forme d’une couche fine et diminue exponentiellement avec la profondeur à l’intérieure du conducteur. Ce phénomène est connu dans la littérature par *l’effet de peau* [75, 35, 82, 81, 17, 48, 55, 60, 61, 9]. Par conséquence, afin de simuler numériquement ce phénomène avec la méthode des éléments finis, il est nécessaire de raffiner le maillage sur l’interface du conducteur ce qui requiert des coûts de calculs élevés en temps et en mémoire. Afin de contourner ce problème, les méthodes asymptotiques ont apporté une contribution remarquable en électromagnétisme généralement [19, 76, 36, 20, 32, 73, 77] et pour la résolution du problème des courants de Foucault [60, 61, 75, 74, 2, 31, 18] en particulier avec de précisions et moindre computation numérique. Cette méthode est utilisée souvent dans divers modèles physiques ayant de petit ou large paramètre ε (sans dimension) causant des *perturbations* tel que l’effet de peau en électromagnétisme. Le but de cette méthode est de fournir une approximation des solutions intervenant dans les

équations de la forme suivante [91] :

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, \varepsilon) = 0, \quad \mathcal{G}(\mathbf{x}, y, \varepsilon) = 0, \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{H}(\mathbf{x}, \varepsilon),$$

à la limite d'un petit paramètre de perturbation $\varepsilon \rightarrow 0$. Cela est effectuée en développant la solution de ces modèles ci-dessus en puissance du paramètre ε . A la lumière de ces développements, le problème original est décomposé en simples sous-problèmes indépendants de ε qui facilitent les calculs [73, 74, 2]. Cette thèse vise à traiter le problème des couches limites en ferromagnétisme qui fait appel à *la méthode asymptotique à multi-échelle* [73]. Cette méthode, que nous définissons dans la partie suivante, permet d'aborder finement l'effet de peau.

1.2 Méthode asymptotique à multi-échelle

La méthode asymptotique à multi-échelle est un outil mathématique efficace pour la résolution de divers problèmes physiques présentant des perturbations dites singulières [52, 72]. Ces problèmes illustrent un comportement divergent de la solution à la limite d'un petit paramètre ε tendant vers zéro. On illustre par exemple le modèle suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u''(\mathbf{x}) + u(\mathbf{x}) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) & \text{dans } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.21)$$

où g est une fonction régulière non nulle, Ω un domaine régulier et $\partial\Omega$ son bord. Ce problème est clairement singulier car à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ on résout un problème d'ordre *zéro* avec une solution $u(\mathbf{x}) = 0$ ne vérifiant pas la condition limite du problème. On dit que cette solution diverge à la limite. Par conséquent, il sera difficile d'approcher la solution du problème en appliquant un développement asymptotique régulier en puissance de ε ayant la forme suivante [91, p.140] :

$$u(\mathbf{x}) \sim u_0(\mathbf{x}) + \varepsilon u_1(\mathbf{x}) + \dots$$

où u est une solution du problème singulier ainsi considéré et $u_i(\mathbf{x})$ sont dits les termes asymptotiques. Afin de contourner ce problème, on utilise souvent la méthode asymptotique à multi-échelle (rescaling) qui consiste à assimiler une *correction* par un changement d'échelle [91, p. 141–142] :

$$Y = \delta_0(\varepsilon)\mathbf{x},$$

qui permet de rendre ainsi le problème *régulier*. On pourra ensuite approximer la solution du problème en appliquant un développement à multi-échelle (ou singulier) ci-dessous :

$$u(x) \sim \mathcal{U}_0(x, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{U}_1(x, \varepsilon) + \dots .$$

Pour corriger le problème singulier ci-dessus (1.21), on impose le changement d'échelle suivant :

$$X = \frac{x}{\varepsilon},$$

dans ce cas on a : $\delta_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$. En effectuant ce changement d'échelle dans le problème proposé (1.21), on se ramène au problème suivant :

$$\begin{cases} u_\varepsilon''(X) + u_\varepsilon(X) = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon(X) = g_\varepsilon(X) & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \end{cases} \quad (1.22)$$

qui est évidemment régulier car le problème est toujours le même à la limite. Des exemples plus détaillés clarifiant davantage les développements asymptotiques réguliers et à multi-échelles sont abordés dans [7] et [91, p.140–142].

1.3 Matériaux ferromagnétiques

Les matériaux ferromagnétiques sont actuellement l'objet constant d'étude dans diverses applications industrielles par exemple :

- Les aimants permanents sont fabriqués par des matériaux ferromagnétiques, tels que le fer ou le nickel, après avoir été magnétisés [26, 21]. Ces aimants sont utiles dans différents domaines notamment en électronique.
- Les coeurs des transformateurs sont constitués par des matériaux ferromagnétiques indispensables pour la réduction des pertes d'énergie par les courants de Foucault.

Les matériaux ferromagnétiques [24] sont des substances attirées par un aimant, et sont caractérisés à conserver leur aimantation même en absence d'un champ magnétique externe. Les exemples les plus courants des matériaux ferromagnétiques sont : le fer (Fe), le nickel (Ni) et le cobalt (Co). Ces matériaux possèdent une perméabilité magnétique élevée qui est représentée souvent par μ et exprimée en henry par mètre [H/m]. On s'intéresse dans diverses applications industrielles à la notion de perméabilité relative des matériaux ferromagnétiques linéaires, notée par μ_r , qui mesure leurs comportements par rapport au vide. Elle est définie comme le rapport de la perméabilité magnétique d'un matériau à la perméabilité magnétique du vide. Ces matériaux sont

ainsi reconnus par leur très haute perméabilité relative ($\mu_r \gg 1$) de rang entre 10^2 et 10^6 [24, p. 11], mais en général ils ne sont pas de bon conducteur d'électricité en comparaison avec les métaux non magnétiques tels que le cuivre ou l'aluminium. Nous allons introduire dans ce travail des matériaux ferromagnétiques traversés par des courants alternatifs induisant des courants de Foucault. Ainsi, la présence d'un large paramètre "*perméabilité magnétique relative μ_r* " nous motive à appliquer une méthode asymptotique dans l'étude de notre problème.

Matériaux	Perméabilité magnétique relative
Fer (Fe)	5000
Nickel (Ni)	600
Cobalt (co)	250
Fer au silicium	100 000
Fer pur	180 000
Acier	2000
Mu-métal	100 000

TABLE 1.1 – Perméabilité magnétique relative de différents matériaux ferromagnétiques

1.4 Présentation du problème

Ce travail est fondé par les ingrédients traités dans les sections précédentes : Résolution numérique du problème des courants de Foucault en terme du potentiel magnétique dans des matériaux linéairement ferromagnétiques en appliquant la méthode asymptotique à multi-échelle. Notre méthode apporte une contribution à approcher la solution du problème d'intérêt avec moindre coût de calcul pour toute une gamme de paramètre physique. Cette classe d'analyse asymptotique a été vastement investie en électromagnétisme pour le cas des *matériaux non magnétiques de haute conductivité* et de *haute fréquence* [73, 20, 28, 19, 60]. Ainsi, les différences principales entre ces travaux et notre étude reposent sur le rang de fréquence et la nature des matériaux imposés. Précisément, nous proposons une approche asymptotique efficace pour le cadre des matériaux *ferromagnétiques* et de *basse fréquence*.

En premier temps, concernant la géométrie du problème, on suit l'esprit de [73] où le domaine est constitué d'un conducteur *non magnétique* entouré par un isolant ayant une interface *régulière* en commun. Pour notre cas, on s'intéresse à un domaine que l'on note par Ω , et Γ son bord. Ce domaine est composé d'un matériau conducteur *ferromagnétique* noté par Ω_- entouré par un isolant supposé pour la simplicité le *vide* et noté par Ω_0 . L'interface conducteur-isolant est supposé régulière et noté par

Σ . D'un point de vue industriel notamment en génie électrique, ce domaine ainsi imposé reflète l'assemblage de tôles feuilletées de *fer doux* et d'isolant employés fréquemment en électrotechnique pour *réduire* les pertes par courants de Foucault dans la fabrication du circuit magnétique dans les transformateurs et moteurs.

Dans ce type de problème, on aura deux paramètres nous inspirant à appliquer une méthode asymptotique :

- La perméabilité relative μ_r qui est un très *large paramètre* dans le cas des matériaux ferromagnétiques,
- L'épaisseur de peau, noté souvent par δ , qui désigne l'épaisseur de concentration du courant sur l'interface d'un conducteur par *effet de peau*. Ce paramètre est défini par la formule suivante :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu_r \mu_0}}.$$

L'épaisseur de peau est exprimée en mètre [m] et dans notre problème on a δ tend vers zéro. Dans cet esprit, on impose dans le présent travail un nouveau paramètre qui tend vers zéro et représenté en terme de μ_r et δ par l'identité suivante :

$$\varepsilon = \frac{1}{\mu_r \delta}.$$

Ce paramètre est utile pour notre étude asymptotique.

Ensuite, notre étude numérique est organisée sous forme de trois parties en terme du potentiel magnétique modifié :

1. Partie I : Étude asymptotique *bidimensionnelle* (Chapitre 2)
2. Partie II : Étude asymptotique *axisymétrique* (Chapitre 3)
3. Partie III : Étude asymptotique *tridimensionnelle* (Chapitre 4)

1.5 Principaux résultats

Dans cette partie, nous abordons les fruits de notre étude asymptotique dans la résolution numérique du problème des courants de Foucault dans des matériaux linéairement ferromagnétiques. Tout d'abord, on procède par les étapes suivantes :

1. Construction d'un développement asymptotique à multi-échelle permettant d'approcher la solution du problème d'une manière efficace et mettant en évidence l'effet de peau.
2. Identification des premiers termes asymptotiques dans le conducteur et l'isolant.

3. Validation des développements proposés par des simulations numériques d'erreurs pour les différentes configurations considérées.

Le but de notre étude numérique est de répondre aux questions suivantes :

- Pourquoi les modèles asymptotiques s'avèrent être efficace dans les applications industrielles ?
- Jusqu'à quels rangs de fréquences notre approche est précise ?
- A quels ordres du développement asymptotique imposé notre approche s'avère intéressante ?
- Quelles sont les limitations et difficultés de l'approche ainsi proposée ?

1.5.1 Développement asymptotique à multi-échelle

On rappelle que l'effet de peau perçoit une importance dans notre problème. Afin d'étudier finement ce phénomène, on adopte dans le domaine conducteur une *paramétrisation normale* issue d'un voisinage tubulaire de l'interface Σ supposée dans ce travail *régulière* [73]. Par suite, on impose un système de coordonnées (y, h) dites *normales* tel que : y représente les coordonnées tangentielles à Σ (noté par ξ en 2D, et y_α en 3D avec $\alpha = 1, 2$), et h est la distance entre un voisinage tubulaire de Σ inclut dans le conducteur et cette interface. On réalise ensuite le changement d'échelle suivant :

$$Y = \frac{h}{\delta} \tag{1.23}$$

dans la direction de h . On remarque que quand $\delta \rightarrow 0$ les équations dans le conducteur Ω_- des modèles bidimensionnel (2D), axisymétrique et tridimensionnel (3D) sont singulières tandis que dans l'isolant Ω_0 sont régulières. Ainsi, on utilise pour ces trois configurations des développements asymptotiques *réguliers* dans l'isolant en puissance de $\frac{\varepsilon}{\alpha}$, avec $\hat{\alpha} = \frac{1-i}{2}$ et i désigne le nombre imaginaire unitaire. Alors que dans le conducteur on construit après le changement d'échelle (1.23) un développement asymptotique singulier en puissance de δ dit aussi à *multi-échelle*. Afin d'identifier les termes asymptotiques, on applique la même procédure abordée dans [73, 19, 75, 74] :

- Écriture des opérateurs dans le domaine conducteur en coordonnées normales puis en puissances de δ après le changement d'échelle (1.23).
- Injection des opérateurs en puissance de δ ainsi que les développements asymptotiques réguliers et singuliers dans les équations du problème d'intérêt (2D, axisymétrie ou 3D).
- Identification en puissance de $\frac{1}{\sqrt{\mu_r}}$, δ , et ε les termes asymptotiques.

Il en résulte ainsi, pour les trois configurations géométriques, que : tous les termes asymptotiques dans le conducteur résolvent des équations différentielles ordinaires (EDO) d'ordre 2, et sont exponentiellement décroissant. Ce comportement asymptotique permet de modéliser ainsi l'effet de peau. D'autre part, dans l'isolant, les modèles asymptotiques d'ordre un et deux révèlent un aspect pertinent en électrotechnique notamment en puissance électronique. En effet, ces modèles sont indépendants des paramètres physiques introduits dans notre problème, ce qui permet de réduire le temps de calcul de la solution de ces modèles à chaque fois on change ces paramètres. Précisément, divers dispositifs électriques tel que les convertisseurs et transformateurs peuvent générer des fréquences *multiples* à partir d'une seule source de signal [90]. L'étude de distribution des courants de Foucault dans ces dispositifs s'avèrent indispensable notamment pour des *fréquences, perméabilités magnétiques relatives et conductivités électriques variées* . D'où l'efficacité de ces modèles asymptotiques à approcher la solution du problème avec moindre coûts de calculs pour toute une gamme de paramètre physique. Les calculs de temps et d'allocation de mémoire en comparaison avec d'autres méthodes numériques seront abordés dans la partie suivante (Chapitre 2).

1.5.2 Validation de la méthode asymptotique

Dans cette partie, on évalue les performances des modèles asymptotiques de premiers ordres en appliquant la méthode des éléments finis et une procédure analytique. Nous illuminons sur l'utilité de l'approche asymptotique proposée dans la réduction des coûts de calculs.

Méthode des éléments finis

Pour le cas bidimensionnel (Chapitre 2), on considère tout d'abord dans Fig. 1.5 ci-dessous une géométrie complexe dont la solution analytique est difficile à trouver. Pour pallier cette difficulté, on applique la méthode des éléments finis (MEF) classique avec une discrétisation bien adaptée pour simuler numériquement l'effet de peau, voir Fig. 1.6-Fig. 1.7. Dans ce cas, la solution de la MEF est supposée comme une solution de référence. Nous rappelons qu'on a illustré le comportement de la solution potentiellement décroissante à l'intérieure du conducteur. On s'intéresse ensuite à analyser le comportement de la solution approchée dans le diélectrique à l'ordre 2. A cet égard, on applique la MEF pour résoudre les modèles asymptotiques correspondants. Par conséquence, il est suffisant de discrétiser le domaine isolant pour notre approche ce qui requiert moins coûts de calculs.

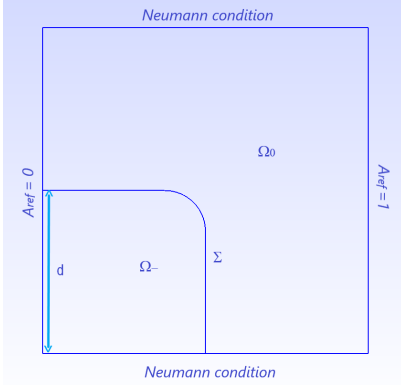


FIGURE 1.5 – Géométrie et conditions aux bords

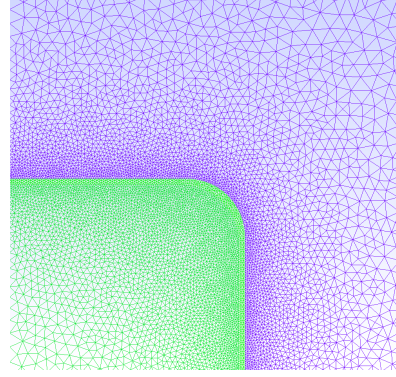


FIGURE 1.6 – Discrétisation raffinée à l'interface du conducteur

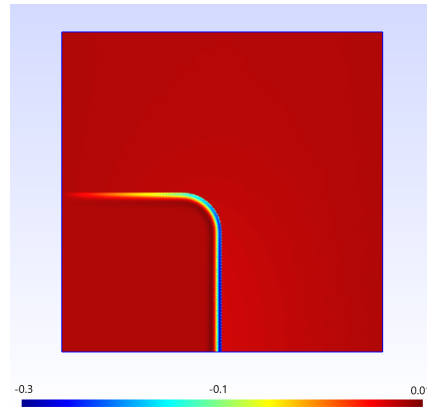


FIGURE 1.7 – Simulation de l'effet de peau

Afin d'évaluer les performances de ces modèles, on illustre des implémentations graphiques d'estimations d'erreurs en comparaison avec une méthode célèbre dans la littérature par sa pertinence à approcher la solution du présent problème avec des coûts de calculs minimales : *la méthode d'impédance* [75, 58, 35]. Par exemple, dans la figures Fig. 1.8, on montre que les erreurs d'ordres 1 et 2 pour différents paramètres physiques sont moins que 1%. On déduit aussi de Fig. 1.9 que notre approche pour les deux premiers ordres est adaptée dans le cas de basse fréquence afin de garantir que le paramètre ε tend vers zéro. Finalement, on expose dans Tableau 1.2 et Tableau 1.3 les coûts de calculs numériques des différentes solutions : solution asymptotique de premier ordre A_0^+ et second ordre $A_0^+ + \frac{\varepsilon}{\alpha} A_1^+$, solution MEF A et solution d'impédance A_1^ε , en variant la fréquence par exemple. On déduit ainsi de ces tableaux ci-dessous que notre méthode asymptotique permet d'approcher la solution d'intérêt avec moindre coût de calculs pour toute une gamme de paramètre physique.

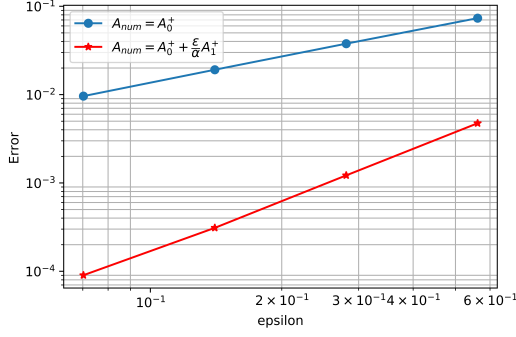


FIGURE 1.8 – Erreurs pour des perméabilités relatives variées

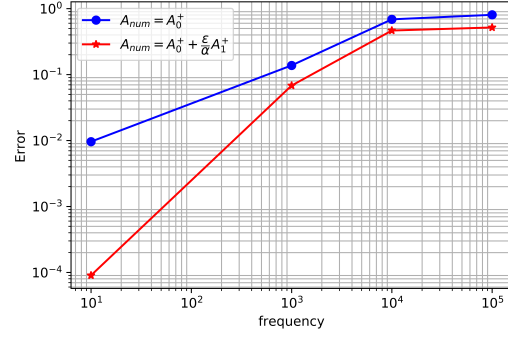


FIGURE 1.9 – Erreurs pour des fréquences variées

Numerical solution	Number of FE computations
Reference solution A	$N_1 \times N_2$
Impedance solution A_1^ε	$N_1 \times N_2$
Solution A_0^+	1
Solution $A_0^+ + \frac{\varepsilon}{\alpha}A_1^+$	2

TABLE 1.2 – Nombre de fois à appliquer la MEF pour calculer les solutions numériques pour N_1 perméabilités relatives et N_2 fréquences

Numerical solution	CPU time (s)	Memory allocation (in bytes)
Reference solution A	40.768	13,342,600
Impedance solution A_1^ε	26.422	11,983,000
Solution A_0^+	0.406	119,832
Solution $A_0^+ + \frac{\varepsilon}{\alpha}A_1^+$	0.959	6,229,720

TABLE 1.3 – Temps total de calculs et allocation de mémoire pour les différentes solutions avec $N_2 = 25$ fréquences and une fixe perméabilité relative $\mu_r = 16000$

Méthode analytique

La simulation numérique du problème tridimensionnel (chapitre 4) révèle des calculs numériques très coûteux. Divers problèmes physiques comportent des configurations axisymétriques i.e. invariantes par translation ou rotation [10, 73, 19, 22]. Dans cet esprit, la pertinence de notre méthode asymptotique dans le cas tridimensionnel sera évaluée en utilisant une géométrie axisymétrique (Chapitre 3) : cylindre infini en longueur dont la solution analytique est possible à calculer.

On suppose dans ce cas que la source de courant \mathbf{J}_s est nulle, et on impose à sa place une nouvelle condition non homogène au bord Γ du domaine : $\mathcal{A}^+ \times \mathbf{n} = \mathbf{G} \times \mathbf{n}$. On suppose aussi que \mathbf{G} soit une donnée orthoradiale et axisymétrique i.e. on a :

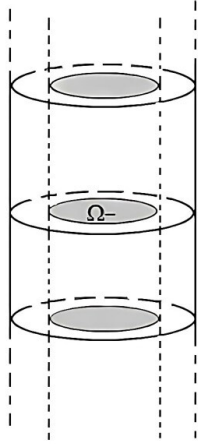


FIGURE 1.10 – Géométrie axisymétrique : Cylindre infini en longueur

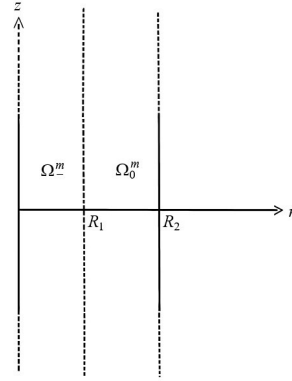


FIGURE 1.11 – Domaine méridien

$\mathbf{G} = (0, g_\theta, 0)$ avec g_θ désigne la composante orthoradiale de \mathbf{G} non nulle. Par conséquence, il en résulte que le potentiel vecteur magnétique modifié est axisymétrique et orthoradiale i.e. $\mathcal{A} = (0, A_\theta, 0)$ [73]. Nous appliquons à cette composante un développement asymptotique régulier dans Ω_0 et à multi-échelle dans Ω_- ayant une même paramétrisation que celles des cas 2D et 3D. En identifiant les termes asymptotiques,

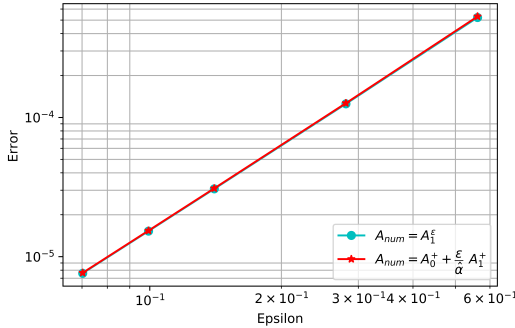


FIGURE 1.12 – Erreurs pour des perméabilités relatives variées

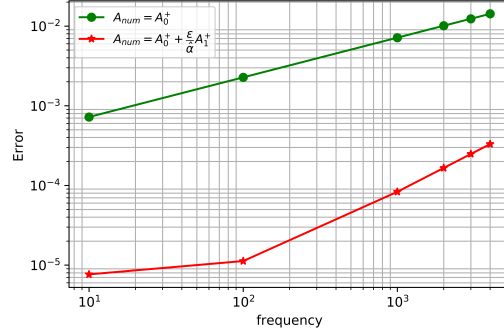


FIGURE 1.13 – Erreurs pour des fréquences variées

on obtient que dans le conducteur les solutions approchées sont exponentiellement décroissante et peuvent être exprimés en termes des termes asymptotiques tridimensionnels (Chapitre 3), alors que dans l'isolant les modèles asymptotiques sont indépendants des paramètres physiques ce qui diminue les computations numériques en temps et en mémoire. On résout *analytiquement* les modèles asymptotiques dans l'isolant. Ensuite, on réalise des implémentations des erreurs pour toute une gamme de paramètre physique et on compare les résultats avec celle de la solution *d'im-*

pédance. Par exemple, on montre dans Fig. 1.12 la bonne précision de la solution asymptotique dans sa version analytique à l'ordre ε car sa précision se confond avec la solution d'impédance en variant le paramètre ε . D'autre part, on prouve dans Fig. 1.13 que notre approche est valide pour les basses fréquences pour garantir que ε tend vers zéro. Finalement, on effectue un lien entre les développements axisymétriques (1D) et tridimensionnelles afin de vérifier les calculs de l'approche asymptotique 3D à multi-échelle (Chapitre 4).

Chapitre 2




Étude asymptotique bidimensionnelle

Introduction

Ce chapitre est consacré à étudier numériquement le problème des courants de Foucault dans le cas des matériaux ferromagnétiques en utilisant une géométrie complexe bidimensionnelle. La méthode asymptotique à multi-échelle appliquée propose d'approcher la solution du problème avec une réduction des coûts de calculs en temps et en mémoire. La validation de cette méthode sera abordée en utilisant la méthode des éléments finis et par une comparaison des performances avec la méthode d'impédance. Nous soulignons que l'étude théorique de cette approche a été effectuée finement dans [75]. Notre travail dans ce chapitre est rédigé sous forme d'un article publié récemment [2] dans la revue internationale "*The international journal of numerical and modelling : Electronic Networks, Devices and Fields*".

2.1 Article : "*Numerical study of the magnetic skin effect : Efficient parametrization of 2D surface-impedance solutions for linear ferromagnetic materials*"

Numerical study of the magnetic skin effect: Efficient parameterization of 2D surface-impedance solutions for linear ferromagnetic materials

Dima Abou El Nasser El Yafi¹ | Victor Péron¹  | Ronan Perrussel²  | Laurent Krähenbühl³ 

¹Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Pau, E2S UPPA, CNRS, Université de Pau et des Pays de l'Adour, Pau, France

²CNRS, INPT, UPS, LAPLACE, Université de Toulouse, Toulouse, France

³CNRS, ECL, UCBL, INSA Lyon, Ampère (UMR5005), Université de Lyon, Ecully, France

Correspondence

Dima Abou El Nasser El Yafi, Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Pau, E2S UPPA, CNRS, Université de Pau et des Pays de l'Adour, Pau 64000, France.
Email: dima.abou-el-nasser-el-yafi@univ-pau.fr

Abstract

This work presents an efficient method based on asymptotic models in order to solve numerically eddy current problems in a bi-dimensional setting with a high contrast of linear relative magnetic permeability $\mu_r \gg 1$ between a conductor and a dielectric subdomain. We describe a magnetic skin effect by deriving a multiscale expansion for the magnetic potential in power series of a small parameter δ which represents the skin depth. We make explicit the first asymptotics up to the order three. Some numerical results based on the finite element method will be presented to illustrate the magnetic skin effect and to validate the performance of the proposed asymptotic models in the dielectric medium. We confirm that the proposed asymptotics provide reduced computational costs for a wide range of physical parameters introduced in our problem.

KEYWORDS

Asymptotic expansions, Eddy current problems, Ferromagnetic materials, Finite element method, Impedance boundary conditions, Magnetic potential

1 | INTRODUCTION

For several decades, the eddy current problem has been the interest of an intensive research.^{1–14} Indeed, eddy currents are crucial for the design of industrial systems such as the induction heating or the breaking of heavy vehicles. In contrast, eddy currents may induce “undesirable” losses that affect negatively the performance of some devices for example motors and generators. As a result, studying eddy currents is significant in the engineering applications.

In this context, our interest lies in the numerical solution of the eddy current problem for linear ferromagnetic materials using an asymptotic approach, in a bi-dimensional setting. In fact, we consider laminated cores in the transformers that are made of linear magnetic thin sheets coated with an insulating layer and oriented parallel to the magnetic flux, in order to reduce energy losses resulting from the eddy currents. However, eddy currents tend to accumulate near the surface of these materials, this is the so-called skin effect.¹⁵ More precisely, this effect reflects the rapid decay of the electromagnetic field inside these ferromagnetic materials. In this article, we intend to perform a numerical simulation of the magnetic skin effect by applying a finite element method (FEM) to our problem, on a mesh that combines thin cells inside the skin depth and much larger cells outside this zone. Furthermore, we derive asymptotic models that provide reduced computational costs for a wide range of frequencies, conductivities as well as relative permeabilities.

The problem under consideration lies in two different materials with a common interface Σ : we are interested to study the magnetic potential in a linear magnetic conducting body with high relative permeability $\mu_r \gg 1$ embedded in

a dielectric medium that we consider for the sake of simplicity as the free space. We introduce the conductivity σ and the angular frequency ω as given parameters, and the current source J_s as a given harmonic function. We note that our approach can handle sources with multiple harmonics common in power electronics, that deal for example with pulse-width modulation techniques.¹⁶ Indeed, since our work is restricted to linear elements, we can consider the superposition method as well as the Fourier transform of the source in order to simplify the analysis. We note that the main limitation of our work, with real devices, is the linearity. More precisely, most electrotechnical devices may have non-linear elements which will prevent the use of the superposition method.

The aim of this work is to propose asymptotic models that are validated using a FEM with a fine mesh on the interface of the conductor. This numerical approach enables the simulation of the skin effect. Moreover, in order to evaluate the accuracy of the proposed asymptotic solutions, we establish a numerical comparison with the impedance boundary conditions (IBCs) solutions^{17–21} that are among the most crucial methods for solving time-harmonic eddy current problems with a small skin depth denoted by δ . To shed a light on our approach, we emphasize that the IBCs method are no more efficient since the computational costs of the proposed method are less than the IBCs solutions regardless the number of physical parameters to be considered.

In this article, we employ an asymptotic approach that was previously involved in the context of the eddy current problem for highly conductive and non-magnetic materials.^{1,12,17,22} More precisely, the solution of the eddy current problem is established previously¹ using a multiscale expansion in a bi-dimensional setting where the domain is considered unbounded and the solution grows logarithmically to infinity. Moreover, authors developed δ – parametrization in high frequency or high conductivity^{12,17,22} that involves real asymptotics and family of Dirichlet problems for the Laplace operator set in the dielectric medium. Furthermore, in Ref. 17,22, we observe that the parameterizations have reduced computational costs since the asymptotics do not depend on the physical parameters embedded in the eddy current problem. The present work is motivated by a recent article¹¹ with its primary focus directed toward theoretical studies of the eddy current problem for linear ferromagnetic materials deduced from asymptotic analysis. We provide numerical experiments in order to validate the performance of the proposed asymptotic models introduced in the ε – parametrization of the magnetic potential ($\varepsilon = \frac{1}{\mu_r \delta} \ll 1$), as well as to illustrate a boundary layer inside the magnetic conductor in a vicinity of its surface i.e. the magnetic skin effect. Our numerical simulations illustrate that the magnetic field lines penetrate orthogonally to the conductor, contrary to the high frequency or large conductivity case for which the direction of the magnetic field lines is tangential to the conductor.

IBCs as well as the asymptotic approach in the present article do not fit near corners of the conductor. Several works have investigated eddy current problems in a bi-dimensional setting where the conducting medium is non-magnetic and has a corner singularity.^{23–26} In particular, in²³ the proposed asymptotic expansion was affected by adding a correction in the neighborhood of the corner. In this work, we will study the case of a smooth interface. Future works will tackle geometrical singularities in the case of a linear ferromagnetic conductor.

The outline of the article proceeds as follows. Section 2 will present the framework as well as the boundary value problem. In Section 3, we exhibit the asymptotic expansion and convergence results. Section 3.2 is devoted to the identification of the asymptotic models up to the order ε^2 . In Section 4, we present numerical results in order to evaluate the performance of the proposed models. Concluding remarks and perspectives are given in Section 5. In Appendix A, we provide elements of proof of the multiscale expansion introduced in Section 3.1.

2 | PROBLEM SETTING

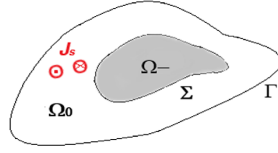
Let us consider the case of a two dimensional medium Ω with a boundary Γ . Our problem can be formulated as a conducting material $\Omega_- \subset \Omega$ and a dielectric medium Ω_0 considered for the sake of simplicity as the free space, with a common interface Σ , see Figure 1. We note that, unless specified, all the considered domains are smooth and bounded in \mathbb{R}^2 .

The time harmonic eddy current problem can be written as follows¹¹

$$-\nabla \cdot \left(\frac{1}{\underline{\mu}} \nabla A \right) + i\omega \underline{\sigma} 1_{\Omega_-} A = J_s \quad \text{in } \Omega, \quad (1)$$

where A is the magnetic vector potential reduced to a single scalar component in this two dimensional situation, ω is the angular frequency and J_s represents the current source.

The magnetic permeability and the conductivity are given by the following piecewise-constant functions $\underline{\mu}$ and $\underline{\sigma}$, respectively:


 FIGURE 1 The domain Ω and its subdomains Ω_- , Ω_0 .

$$\underline{\mu} = \begin{cases} \mu_0 & \text{in } \Omega_0 \\ \mu_r \mu_0 & \text{in } \Omega_- \end{cases} \quad \text{and} \quad \underline{\sigma} = \begin{cases} 0 & \text{in } \Omega_0 \\ \sigma & \text{in } \Omega_-, \end{cases} \quad (2)$$

where $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (H/m) (henry per meter) and the relative permeability μ_r is assumed to be a large parameter. For the sake of simplicity, we shall consider that the current source J_s is a smooth function and the support of J_s does not meet Ω_- .

2.1 | Notations and parameters

In order to apply the asymptotic approach, we define a “small” parameter as follows:

$$\varepsilon = \frac{1}{\mu_r \delta},$$

where δ is the skin depth and given by the following formula:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu_0 \mu_r}}.$$

Note that both parameters ε and δ tend to zero when the relative permeability μ_r tends to infinity. Hereafter, we consider the following notations.

Notation 1. : We denote by h^+ (resp. h^-) the restriction of any function h in Ω_0 (resp. Ω_-).

2.2 | Boundary value problem

The magnetic vector potential $A = (A^+, A^-)$ satisfies the following boundary problem:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta A^+ = \mu_0 J_s & \text{in } \Omega_0, \\ -\Delta A^- + i \omega \sigma \mu_0 \mu_r A^- = 0 & \text{in } \Omega_-, \\ A^+ = A^- & \text{on } \Sigma, \\ \partial_n A^+ = \mu_r^{-1} \partial_n A^- & \text{on } \Sigma, \\ A^+ = 0 & \text{on } \Gamma, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta A^+ = \mu_0 J_s & \text{in } \Omega_0, \\ -\Delta A^- + 2i \delta^{-2} A^- = 0 & \text{in } \Omega_-, \\ A^+ = A^- & \text{on } \Sigma, \\ \partial_n A^+ = \varepsilon \delta \partial_n A^- & \text{on } \Sigma, \\ A^+ = 0 & \text{on } \Gamma, \end{array} \right. \quad (3)$$

where the differential operator Δ is the Laplace operator in Cartesian coordinates $x = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. As a convention, the unit normal vector n on the interface Σ is inwardly oriented to Ω_- .

3 | MULTISCALE EXPANSION

In order to derive a multiscale expansion for the solution $A = (A^+, A^-)$ of the model problem (3), we assume that Σ is a smooth curve. Then we construct an asymptotic expansion for the solution A as follows:

$$A^+(x) = A_0^+(x) + \frac{\varepsilon}{\alpha} A_1^+(x) + \left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^2 A_2^+(x) + \dots \quad \text{in } \Omega_0, \quad (4)$$

$$A^-(x) = \mathcal{U}_0\left(\xi, \frac{h}{\delta}\right) + \delta \mathcal{U}_1\left(\xi, \frac{h}{\delta}\right) + \delta^2 \mathcal{U}_2\left(\xi, \frac{h}{\delta}\right) + \dots \quad \text{in } \Omega_-. \quad (5)$$

where $\mathcal{U}_j \rightarrow 0$ as $Y = \frac{h}{\delta} \rightarrow +\infty, \forall j \in \mathbb{N}$. We note here $x = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ are the Cartesian coordinates and $\alpha = \frac{1-j}{2}$. In (5) we applied a multiscale expansion based on a ‘‘curvilinear coordinate system’’ denoted by (ξ, h) . More precisely, ξ is a curvilinear abscissa on the interface Σ and h is the distance to this latter curve, see for instance Figure A1.

Remark 1. : The asymptotic approach is strongly affected when the interface Σ is non-smooth. We refer the reader to^{23–26} for several works devoting to rounded and sharp corners on the interface Σ .

3.1 | Convergence result

Now we validate the asymptotic Expansions (4)–(5) by proving estimates for the following reminder r_m defined at any order $m \in \mathbb{N}^*$ as:

$$\begin{aligned} r_{m,\varepsilon}^+ &= A^+ - \sum_{n=0}^m \left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^n A_n^+ \quad \text{in } \Omega_0, \\ r_{m,\delta}^- &= A^- - \sum_{n=0}^m \delta^n \mathcal{U}_n\left(\xi, \frac{h}{\delta}\right) \quad \text{in } \Omega_-. \end{aligned} \quad (6)$$

We introduce the small parameter $\nu = \frac{1}{\sqrt{\mu_r}}$ in the theorem below. The proof of the following convergence result is worked out previously¹¹ (cf. Theorems 2.3–2.5) in a slightly different configuration.

Theorem 1. : *There exists $\nu_0 > 0$ such that for all $m \in \mathbb{N}$ there exists a constant $C_m > 0$ independent of ν such that for all $\nu \in (0, \nu_0)$ the remainder r_m satisfies the optimal estimate*

$$\|r_{m,\varepsilon}^+\|_{1,\Omega_0} + \nu \|\nabla r_{m,\delta}^-\|_{1,\Omega_-} + \|r_{m,\delta}^-\|_{0,\Omega_-} \leq C_m \nu^{m+1} \quad (7)$$

We denote by $\|\cdot\|_{1,\Omega_+}$ the norm in the Sobolev space $H^1(\Omega_+)$ and $\|\cdot\|_{0,\Omega_-}$ the norm in $L^2(\Omega_-)$.

3.2 | First terms of the asymptotic expansion

In this section, we identify the first asymptotics for the multiscale expansion (4)–(5) where $j = 0, 1, 2$. Elements of formal derivations are given in the Appendix A.

We apply the following notations in the expressions of the asymptotics.

Notation 2. : We denote by L the length of the interface Σ . Then we define a smooth function X from $\mathbb{T}_L := \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ into \mathbb{R}^2 . We note that $X(\xi) \in \Sigma$ is an arc length parametrization of Σ . The scalar curvature $k(\xi)$ at the point $X(\xi)$ is well-defined by Ref. 11

$$\frac{dn}{d\xi} = -k(\xi) \frac{dX}{d\xi}.$$

We remind that $n(\xi)$ denotes the unit normal at $X(\xi) \in \Sigma$ which is inwardly oriented to Ω_- . Now we construct the first asymptotics (A_0^+, \mathcal{U}_0) , (A_1^+, \mathcal{U}_1) and (A_2^+, \mathcal{U}_2) recursively. First, A_0^+ solves the problem:

$$\begin{cases} -\Delta A_0^+ = \mu_0 J_s & \text{in } \Omega_0, \\ \partial_n A_0^+ = 0 & \text{on } \Sigma, \\ A_0^+ = 0 & \text{on } \Gamma. \end{cases} \quad (8)$$

We remark that A_0^+ satisfies the perfect magnetic conductor condition. Then the first profile \mathcal{U}_0 is defined as follows:

$$\mathcal{U}_0(\xi, Y) = A_0^+(X(\xi)) e^{-\frac{Y}{\alpha}}. \quad (9)$$

The next asymptotic A_1^+ solves the problem below:

$$\begin{cases} -\Delta A_1^+ = 0 & \text{in } \Omega_0, \\ \partial_n A_1^+ = -A_0^+ & \text{on } \Sigma, \\ A_1^+ = 0 & \text{on } \Gamma. \end{cases} \quad (10)$$

The second profile \mathcal{U}_1 satisfies the following equality:

$$\mathcal{U}_1(\xi, Y) = \left(\frac{1}{\alpha \delta_0^2} A_1^+(X(\xi)) + \frac{k(\xi)}{2} A_0^+(X(\xi)) Y \right) e^{-\frac{Y}{\alpha}} \quad (11)$$

where $\delta_0 = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu_0}}$.

The third asymptotic A_2^+ solves the following problem:

$$\begin{cases} -\Delta A_2^+ = 0 & \text{in } \Omega_0, \\ \partial_n A_2^+ = \frac{k(\xi)}{2} A_0^+ - \frac{1}{\alpha^2 \delta_0^2} A_1^+ & \text{on } \Sigma, \\ A_2^+ = 0 & \text{on } \Gamma. \end{cases} \quad (12)$$

Finally, the third profile \mathcal{U}_2 satisfies the following equality,

$$\mathcal{U}_2(\xi, Y) = \left(\left(\frac{1}{\alpha \delta_0^2} \right)^2 A_2^+ + \left(\frac{k(\xi)}{2} \frac{\delta_0}{\alpha} A_1^+ + \frac{\alpha}{2} \left\{ \partial_\xi^2 + \frac{k(\xi)^2}{4} \right\} A_0^+ \right) Y + \frac{3k(\xi)^2}{8} A_0^+ Y^2 \right) (X(\xi)) e^{-\frac{Y}{\alpha}}. \quad (13)$$

The first asymptotics reveal some interesting properties. We note that the first two asymptotics A_0^+ and A_1^+ are real and independent of the physical parameters. Consequently, we can calculate the second approximation $A_0^+ + \frac{\xi}{\alpha} A_1^+$ with

reduced computational costs, since in order to identify A_0^+ and A_1^+ , we apply the FEM only once regardless the number of physical parameters to be considered. In contrast, we remark that the asymptotic A_2^+ depends on the angular frequency ω and the conductivity σ . Therefore, we need to compute the FEM at each time we change the physical parameters in order to identify A_2^+ in the third order approximation $A_0^+ + \frac{\varepsilon}{\alpha}A_1^+ + (\frac{\varepsilon}{\alpha})^2A_2^+$. Moreover, including A_2^+ in our work presents another drawback since its corresponding model (12) depends on the curvature $k(\xi)$ of the interface Σ which is not known in general. For this reason, in Section 4, our interest lies in the validation of the accuracy of the asymptotic models A_0^+ and $A_0^+ + \frac{\varepsilon}{\alpha}A_1^+$ using the FEM.

3.3 | Impedance model

As a by product of the multiscale expansion, a simpler problem than (3) writes,

$$\begin{cases} -\Delta A_1^\varepsilon = \mu_0 J_s & \text{in } \Omega_0 \\ \partial_n A_1^\varepsilon + \frac{\varepsilon}{\alpha} A_1^\varepsilon = 0 & \text{on } \Sigma, \\ A_1^\varepsilon = 0 & \text{on } \Gamma. \end{cases} \quad (14)$$

where the second condition in (14) is the classical Leontovitch condition, see, for example, Refs. 11,21.

4 | NUMERICAL RESULTS

We now present some numerical results in order to demonstrate the accuracy of our asymptotic models up to the order two in the dielectric medium.

We will first introduce geometrical and physical assumptions. Then we will exhibit the post-processing of the skin effect and the direction of the magnetic field lines. Furthermore, we perform a comparison between the reference solution and the asymptotic solution of order one as well as the corresponding error and its correction. In order to evaluate the precision of the second order approach solution, we illustrate the isovalues of its corresponding error. A numerical convergence analysis of our asymptotics and the impedance solution A_1^ε defined in Section 3.3 will be achieved. Finally, we study in Section 4.4 the computational costs in terms of time and memory allocation for computing the numerical solutions. Some comments will be discussed, especially for the convergence results (Figure 2).

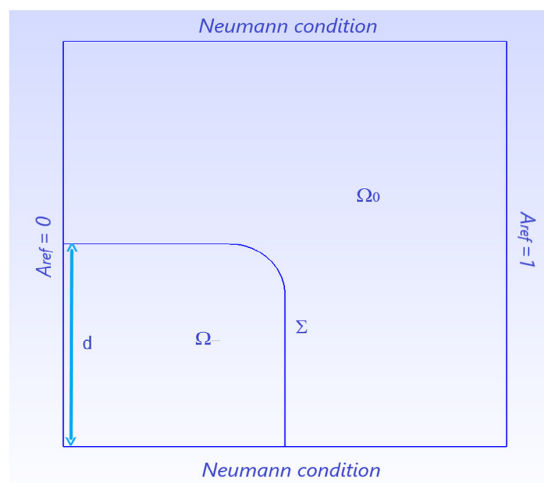


FIGURE 2 Considered geometry and boundary conditions.

4.1 | Framework

First, our numerical simulation is based on the finite element approach with a fine mesh on the interface Σ , see for instance Figure 3. We note that the mesh inside the conductor (green color) is used only for the reference solution A . The asymptotic models (8)–(10) are classical and require no special finite element spaces. Therefore, we choose the classical P^2 Lagrange finite elements. We note that the numerical computation is done on the Python interface thanks to the flexible library GetFEM.²⁷

The physical and numerical parameters used, the geometry and the boundary conditions are depicted in Table 1 and Figure 2, respectively. Here we note that the skin depth is about 17% of the height d of the domain Ω_- .

4.2 | Numerical experiments

It is well-known that whenever a conductor is placed in a time-varying magnetic field we get an induced current that concentrates near the surface of the conductor. In addition, at a distance called the skin depth δ the amplitude of the current density vector decreases to $\frac{1}{e}$ of its surface value. Actually, this phenomenon is called the skin effect and it is depicted in Figure 4 that illustrates the imaginary part of the reference solution A . Indeed, Figure 4 shows that the current is restricted to a thin layer near the conductor surface and decreases exponentially with depth. Moreover, Figure 5 reflects the perfect magnetic conductor condition since the magnetic field lines penetrate in an orthogonal way to the conductor Ω_- .

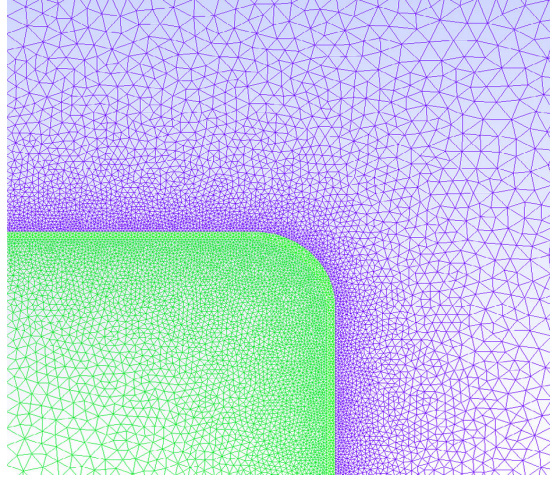
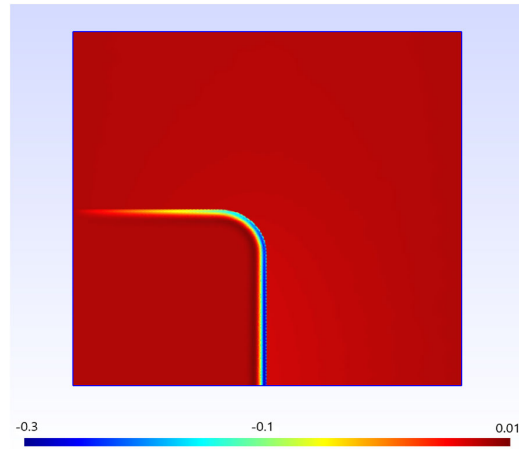
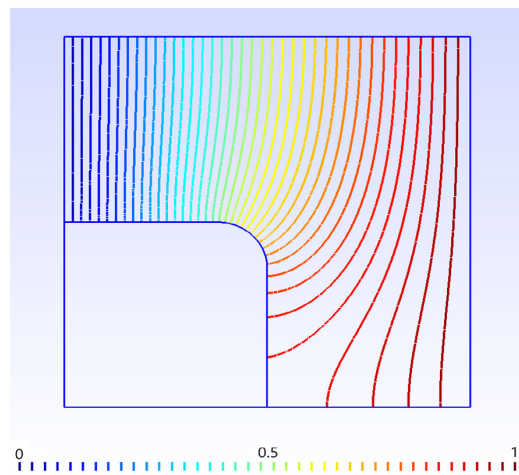


FIGURE 3 Problem with a fine mesh on Σ .

TABLE 1 Physical and numerical parameters

Parameters	Value
Relative permeability (μ_r)	4000
Conductivity (σ)	2E+06 S/m
Frequency (f)	10 Hz
Conductor height (d)	0.1 m
Skin depth (δ)	1.779E-03 m
Epsilon (ϵ)	1.41E-01

FIGURE 4 Imaginary part of the reference solution A .FIGURE 5 Real part of the reference solution A in the free space Ω_0 .

Now we perform post-treatments of our numerical computations in order to investigate the precision of the proposed asymptotic solutions up to the order two in the free space Ω_0 . First, we recall that the first asymptotic A_0^+ is a real valued function and presented by its isovalues in Figure 6. We remark that Figure 5 corresponding to the real part of the reference solution is coherent with the Figure 6. However, this result is not sufficient to prove the good accuracy of the first asymptotic A_0^+ , since we are considering only the real parts of the reference solution A and the asymptotic A_0^+ as well. For this reason, we exhibit another way in order to validate our estimation: we make a comparison between the error of the first order $A^+ - A_0^+$ in Ω_0 and its corresponding correction $\frac{\varepsilon}{\alpha}A_1^+$, which are illustrated in Figures 7 and 8 for the imaginary part. We remark that the two latter figures are approximately the same. Moreover, we note that we have the same results for the real part. As a consequence, we conclude that we have a good correction as well as a good precision of the first asymptotic A_0^+ .

Next, the accuracy of the second order approximation $A_0^+ + \frac{\varepsilon}{\alpha}A_1^+$ is evaluated by establishing the corresponding error $A^+ - A_0^+ - \frac{\varepsilon}{\alpha}A_1^+$. The second order error for the real and imaginary parts is less than $2E-04$, see Figures 9 and 10. We note that the second order error is small enough since it satisfies the optimal estimate (7) defined in Theorem 1. Thus, this result illustrates the good accuracy of the second order parameterization $A_0^+ + \frac{\varepsilon}{\alpha}A_1^+$.

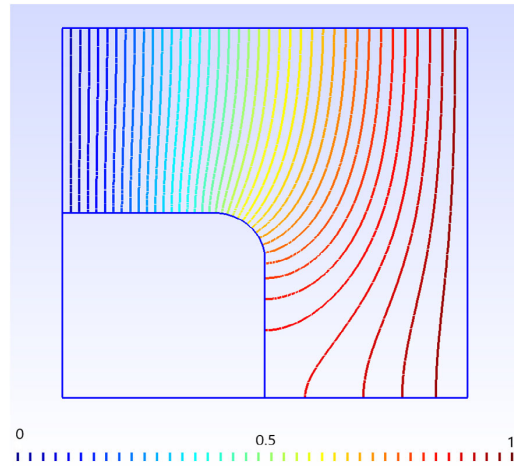


FIGURE 6 Isovalues of the first asymptotic A_0^+ .

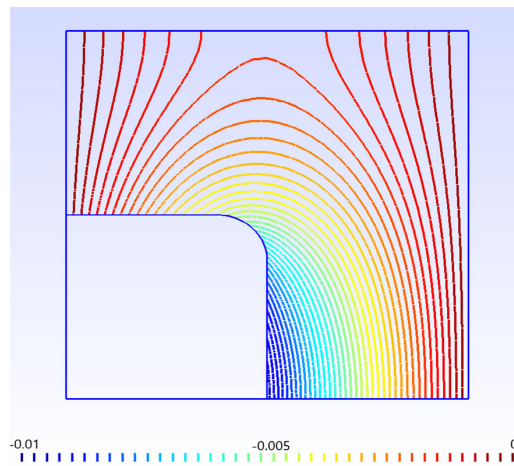


FIGURE 7 Imaginary part of the error $A^+ - A_0^+$.

4.3 | Convergence results

The impedance solution satisfying the problem (14) (see Section 3.3) has a high accuracy with respect to the reference solution A^{+11} . Therefore we intend to compare the performance of the asymptotics up to the order two with the latter impedance solution. In this context, we plot the convergence graphs with the log scale defining the following relative L^2 error:

$$\text{Error} = \frac{\sqrt{\int_{\Omega_0} \|\nabla A_{ref} - \nabla A_{num}\|^2 dx}}{\sqrt{\int_{\Omega_0} \|\nabla A_{ref}\|^2 dx}}$$

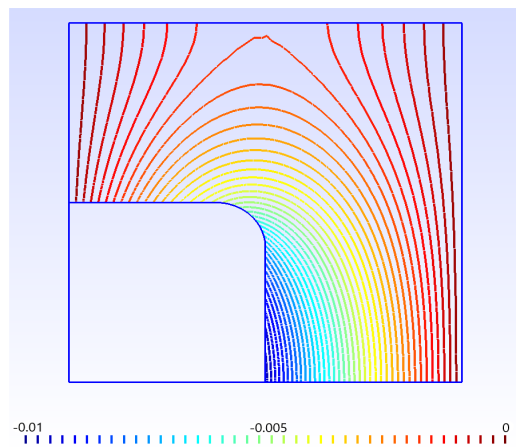


FIGURE 8 Imaginary part of the correction $\frac{\epsilon}{\alpha}A_1^+$.

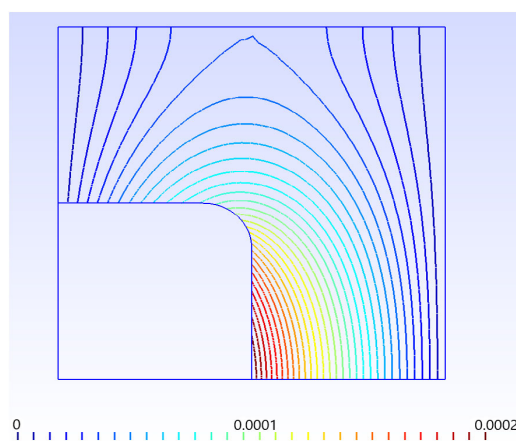


FIGURE 9 Real part of the error of order 2: $A^+ - A_0^+ - \frac{\epsilon}{\alpha}A_1^+$.

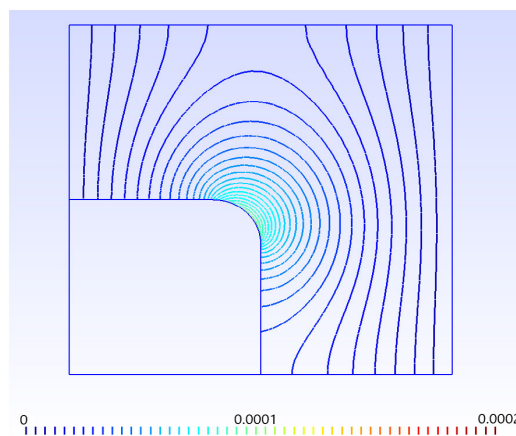


FIGURE 10 Imaginary part of the error of order 2: $A^+ - A_0^+ - \frac{\epsilon}{\alpha}A_1^+$.

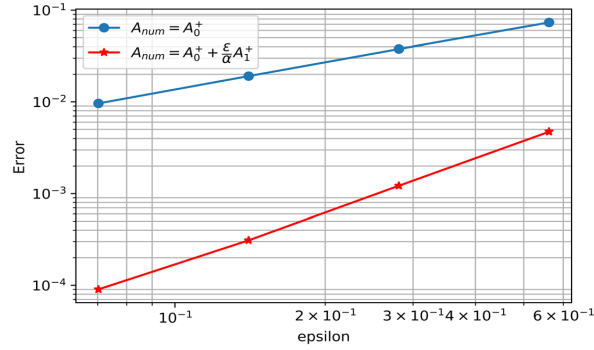


FIGURE 11 Relative L^2 error of the asymptotic solutions of order 1 and 2 for $f = 10$ Hz.

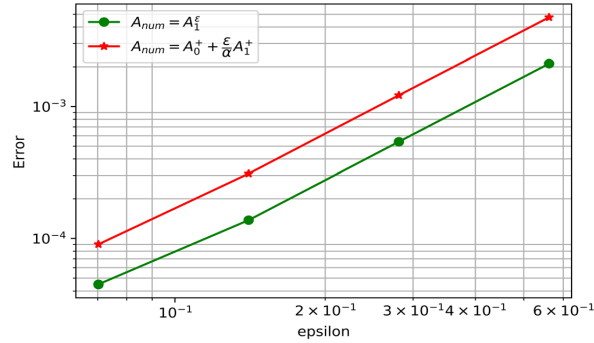


FIGURE 12 Relative L^2 error of the impedance solution A_1^ϵ and the asymptotic solution of order 2 for $f = 10$ Hz.

where A_{ref} denotes the reference solution in Ω_0 , and A_{num} is the first order asymptotic model A_0^+ , the second order asymptotic model $A_0^+ + \frac{\epsilon}{\alpha}A_1^+$, or the impedance solution A_1^ϵ . Moreover, we assume that the relative permeability is restricted between 250 and 16 000. Noting that in the present work the choice of the range of high relative permeabilities and the frequencies is arbitrary. Further, the considered physical parameters and geometry are depicted in Table 1 and Figure 2.

First, Figure 11 ensures that, when the parameter ϵ decreases, the numerical convergence rate for the relative L^2 error coincides with the theory introduced in Section 3.1 since it is of order one for the model A_0^+ and it is of order two for $A_0^+ + \frac{\epsilon}{\alpha}A_1^+$. The red and green curves, exhibited in Figure 12 and corresponding to the relative L^2 errors for the second order asymptotic and impedance solutions, behave in a similar manner with the variation of ϵ . As a consequence, we conclude that the asymptotic solution $A_0^+ + \frac{\epsilon}{\alpha}A_1^+$ provides an approximation to the solution of the reference problem which is of the same order as the impedance solution A_1^ϵ .

Second, it is useful to exhibit the behavior of the method with a fixed relative permeability and varying frequencies. Relative L^2 errors versus frequency for the different asymptotic models are depicted in Figures 13 and 14 for two different relative permeabilities. In both figures, we note that the relative L^2 error for the asymptotic model A_0^+ is always greater than 1% unlike the second order asymptotic model. Now, for $\mu_r = 250$, the relative L^2 error corresponding to the solution $A_0^+ + \frac{\epsilon}{\alpha}A_1^+$ is less than 1% for a small range of low frequencies between 10 and 20 Hz. However, the relative L^2 error becomes smaller than 1% for a wider range of frequencies between 10 and 250 Hz, when the relative permeability increases to 16 000. Noting that in both cases, ($\mu_r = 250, f$ in $[10,20]$) and ($\mu_r = 16\,000, f$ in $[10,250]$), ϵ is a small parameter which complies with our asymptotic assumption. As a future work, it could be interesting to study the solution in terms of the third asymptotic A_2^+ , for instance from 20 Hz on when $\mu_r \geq 250$ and from 250 Hz on when

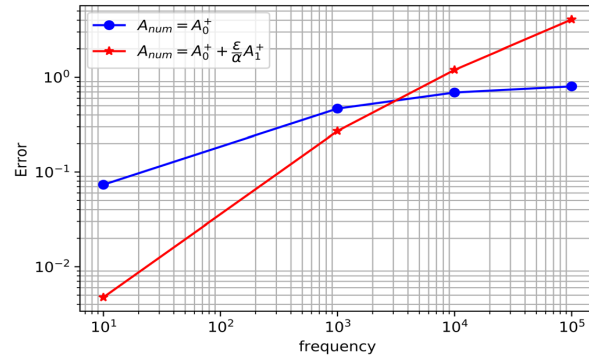


FIGURE 13 Relative L^2 error versus frequency for the asymptotic models for $\mu_r = 250$.

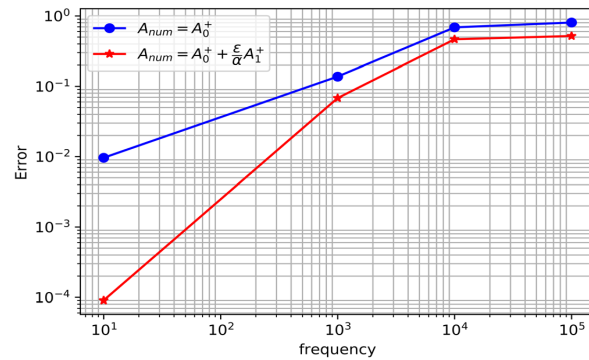


FIGURE 14 Relative L^2 error versus frequency for the asymptotic models for $\mu_r = 16\,000$.

$\mu_r \geq 16\,000$ in order to get a relative L^2 error less than 1% for a wider range of frequencies and where ϵ must be a small parameter as well.

Finally, we deduce that the considered asymptotic approach with two components suffices to ensure high accuracy for low frequencies and large relative permeabilities.

4.4 | Computational costs

The main goal of this article is to provide an inexpensive asymptotic model for a wide range of physical parameters. In this section, we introduce the computational costs of the considered asymptotic and impedance methods in terms of time, memory allocation and finite element (FE) computations.

First, our asymptotic approach has lightened computational costs since we avoid meshing the interior of the conductor. More precisely, Figure 3 illustrates the considered mesh:

1. The green mesh (inside the conductor) is used for the reference solution only, and has 16 874 elements.
2. The blue mesh (inside the dielectric domain) is used for the asymptotic and impedance solutions, and has 7 327 elements.

Now we define N_1 and N_2 as given numbers of relative permeabilities and frequencies respectively. The considered impedance method as well as the classical FEM for computing the reference solution are time and memory consuming since whenever we change the relative permeability and the frequency, we need to compute the impedance solution A_1^ϵ

TABLE 2 Number of FE computations in order to calculate the numerical solutions for N_1 given relative permeabilities and N_2 given frequencies.

Numerical solution	Number of FE computations
Reference solution A	$N_1 \times N_2$
Impedance solution A_1^e	$N_1 \times N_2$
Solution A_0^+	1
Solution $A_0^+ + \frac{\varepsilon}{\alpha} A_1^+$	2

TABLE 3 Total computational time and memory allocation for computing the numerical solutions for $N_2 = 25$ frequencies and a fixed relative permeability $\mu_r = 16000$.

Numerical solution	CPU time (s)	Memory allocation (in bytes)
Reference solution A	40.768	13 342 600
Impedance solution A_1^e	26.422	11 983 000
Solution A_0^+	0.406	119 832
Solution $A_0^+ + \frac{\varepsilon}{\alpha} A_1^+$	0.959	6 229 720

TABLE 4 Total computational time and memory allocation for computing the numerical solutions for $N_1 = 7$ relative permeabilities and a fixed frequency $f = 10$ Hz.

Numerical solution	CPU time (s)	Memory allocation (in bytes)
Reference solution A	11.356	3 735 928
Impedance solution A_1^e	6.013	3 355 240
Solution A_0^+	0.406	119 832
Solution $A_0^+ + \frac{\varepsilon}{\alpha} A_1^+$	0.936	1 744 321

and the reference solution A . The total number of FE computations for computing the impedance or the reference solution is indeed $N_1 \times N_2$. On the contrary, our asymptotics A_0^+ and A_1^+ are calculated by applying the FEM only once regardless the number of physical parameters to consider, since their models (8)–(10) do not depend on any physical parameters. For the sake of clarity, we given in Table 2 the total numbers of FE computations in order to calculate the considered numerical solutions for N_1 relative permeabilities and N_2 frequencies.

In this regard, we illustrate the computational time and the memory allocation of the latter four methods for an arbitrarily choice of numbers N_1 and N_2 as follows.

1. $N_1 = 7$, the number of relative permeabilities: 250, 500, 1000, 2000, 4000, 8000, and 16 000, where $f = 10$ Hz.
2. $N_2 = 25$, the number of frequencies from 10 Hz to 250 Hz incremented by 10, where $\mu_r = 16 000$.

Noting that the relative L^2 error corresponding to the model of order 2 for the latter given parameters is less than 1% (see Figures 11 and 14), and the two asymptotics A_0^+ and A_1^+ are real unlike the impedance and the reference solutions. The tables below Tables 3 and 4 present the total computational consumption in terms of time and memory for the considered four methods. The total computational time and the memory allocation for the solution $A_0^+ + \frac{\varepsilon}{\alpha} A_1^+$ correspond to the calculation of A_0^+ ,

A_1^+ and the assembly of the parametric solutions $A_0^+ + \frac{\varepsilon}{\alpha} A_1^+$ for the considered sets of frequencies and relative permeabilities given above. Now, according to Tables 3 and 4, we remark that the reference solution has higher computational costs in time and memory than the impedance and the asymptotic solutions for the given sets of frequencies and relative permeabilities. This latter result seems natural since we apply the FEM on the whole domain in order to calculate the reference solution unlike the impedance as well as the asymptotic solutions where we avoid meshing the interior of the conductor. Furthermore, we obtain that the total execution times of the asymptotic solutions $A_0^+ + \frac{\varepsilon}{\alpha} A_1^+$ are about 27 and 6 times less than the total execution times of the impedance solutions for the considered sets of frequencies and

relative permeabilities respectively. Moreover, the memory allocation of the impedance method is higher than that of the first asymptotic solutions for both cases. This clearly shows that we achieved our goal in terms of computational costs.

5 | CONCLUSION AND PERSPECTIVES

We evaluated the performance of the asymptotic models up to the order two using a finite element approach with a fine mesh on the interface of the conductor. We have been able to establish the modeling and the numerical simulation of the magnetic skin effect. We obtained also that the computational costs of the asymptotic solution of order ε is less than the impedance solution A_1^ε regardless the number of physical parameters to be considered. Moreover, our numerical experiments are in accordance with the theoretical studies concerning the convergence results. Finally, this work shows that the computation of two asymptotics is sufficient to ensure accurate solutions in the case of low frequencies.

Future works will investigate an asymptotic approach with reduced computational costs near edges and corners, higher order asymptotic models as well as 3D structures for the eddy current problem in linear ferromagnetic materials.

DATA AVAILABILITY STATEMENT

The data that support the findings of this study are available in GetFEM at <https://getfem.org>. These data were derived from the following resources available in the public domain: - HAL open science, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-025332422>

ORCID

Victor Péron  <https://orcid.org/0000-0003-0342-6384>

Ronan Perrussel  <https://orcid.org/0000-0002-0149-1118>

Laurent Krähenbühl  <https://orcid.org/0000-0001-8051-5175>

REFERENCES

1. MacCamy RC, Stephan E. A skin effect approximation for eddy current problems. *Arch Ratio Mechan Anal*. 1985;90(1):87-98.
2. MacCamy RC, Stephan E. Solution procedures for three-dimensional eddy current problems. *J Math Anal Appl*. 1984;101(2):348-379.
3. Mayergoyz ID, Bedrosian G. On calculation of 3-D eddy currents in conducting and magnetic shells. *IEEE Transac Magn*. 1995;31(3):1319-1324.
4. Krähenbühl L, Muller D. Thin layers in electrical engineering-example of shell models in analysing eddy-currents by boundary and finite element methods. *IEEE Transac Magn*. 1993;29(2):1450-1455.
5. Hiptmair R. Symmetric coupling for eddy current problems. *SIAM J Numer Anal*. 2002;40(1):41-65.
6. Costabel M, Dauge M, Nicaise S. Singularities of eddy current problems. ESAIM. *Math Model Numer Anal*. 2003;37(5):807-831.
7. Buffa A, Ammari H, Nédélec J-C. A justification of eddy currents model for the Maxwell equations. *SIAM J Appl Math*. 2000;60(5):1805-1823.
8. Bossavit A. Electromagnétisme, en vue de la modélisation. *Mathématiques et Applications*. Vol 14. Springer-Verlag; 1993.
9. Alonso Rodríguez A, Fernandes P, Valli A. Weak and strong formulations for the time-harmonic eddy-current problem in general multi-connected domains. *Eu J Appl Math*. 2003;14(4):387-406.
10. Schmidt K, Chernov A. A unified analysis of transmission conditions for thin conducting sheets in the time-harmonic eddy current model. *SIAM J Appl Math*. 2013;73(6):1980-2003.
11. Péron V, Poignard C. On a magnetic skin effect in eddy current problems: the magnetic potential in magnetically soft materials. *Zeitschrift Angew Math Phys*. 2021;72(4):1-19. doi:10.1007/s00033-021-01596-6
12. Péron V. Asymptotic expansion for the magnetic potential in the eddy current problem: the ferromagnetic case, 2015. <https://hal.inria.fr/hal-01253971>
13. Issa M, Poirier J-R, Perrussel R, Chadebec O, Péron V. Boundary element method for 3D conductive thin layer in eddy current problems. *COMPEL Int J Comput Math Electr Electron Eng*. 2019;38(2):502-521.
14. Péron V. Asymptotic models and impedance conditions for highly conductive sheets in the time-harmonic Eddy current model. *SIAM J Appl Math*. 2019;79(6):2242-2264.
15. Rytov SM. Calcul du skin effect par la méthode des perturbations. *J Phys*. 1940;2(3):233-242.
16. Monmasson E. *Power Electronic Converters: PWM Strategies and Current Control Techniques*. John Wiley & Sons; 2013.
17. Krähenbühl L, Dular P, Péron V, Perrussel R, Sabariego RV and Poignard C. Efficient delta-parametrization of 2D surface-impedance solutions. Paper Presented at: Proceedings of COMPUMAG 2015 2, 2015.
18. Antoine X, Barucq H, Vernhet L. High-frequency asymptotic analysis of a dissipative transmission problem resulting in generalized impedance boundary conditions. *Asymp Anal*. 2001;26(3-4):257-283.

19. Haddar H, Joly P, Nguyen H-M. Generalized impedance boundary conditions for scattering by strongly absorbing obstacles: the scalar case. *Math Models Meth Appl Sci.* 2005;15(8):1273-1300.
20. Ida N, Yuferev S. Impedance boundary conditions for transient scattering problems. *IEEE Transac Magn.* 1997;33(2):1444-1447.
21. Leontovich MA. Approximate boundary conditions for the electromagnetic field on the surface of a good conductor. *Invest Radiow Propag.* 1948;2:5-12.
22. Krähenbühl L, Péron V, Perrussel R and Poignard C. On the asymptotic expansion of the magnetic potential in eddy current problem: a practical use of asymptotics for numerical purposes. Research Report RR-8749, INRIA Bordeaux; INRIA, 2015. <https://hal.inria.fr/hal-01174009>
23. Buret F, Dauge M, Dular P, et al. Eddy currents and corner singularities. *IEEE Transac Magn.* 2012;48(2):679-682.
24. Dauge M, Dular P, Krähenbühl L, Péron V, Perrussel R, Poignard C. Corner asymptotics of the magnetic potential in the eddy-current model. *Math Methods Appl Sci.* 2014;37(13):1924-1955.
25. Dular P, Péron V, Perrussel R, Krähenbühl L, Geuzaine C. Perfect conductor and impedance boundary condition corrections via a finite element subproblem method. *IEEE Transac Magn.* 2014;50(2):29-32.
26. Krähenbühl L, Buret F, Perrussel R, et al. Numerical treatment of rounded and sharp corners in the modeling of 2D electrostatic fields. *Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications.* 2011;10(1):66-81.
27. Renard Y, Poullos K. GetFEM: automated FE modeling of multiphysics problems based on a generic weak form language. *ACM Transac Math Softw.* 2020;47(1):1-31. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02532422/document>

How to cite this article: Abou El Nasser El Yafi D, Péron V, Perrussel R, Krähenbühl L. Numerical study of the magnetic skin effect: Efficient parameterization of 2D surface-impedance solutions for linear ferromagnetic materials. *Int J Numer Model.* 2022;e3051. doi:[10.1002/jnm.3051](https://doi.org/10.1002/jnm.3051)

APPENDIX A: ELEMENTS OF DERIVATION FOR THE MULTISCALE EXPANSION

We assume that Σ is a smooth curve of length L . We remind that the magnetic vector potential decays rapidly with depth inside the conductor. Therefore, it is beneficial to derive a multiscale expansion for the solution inside the conductor. In order to perform this approach, we define a tubular neighborhood $\nu(\Sigma)$ of Σ of a small parameter $h_0 > 0$ in the inner domain Ω_- as follows:

$$\nu(\Sigma) = \{x(\xi, h) = X(\xi) + hn(\xi), (\xi, h) \in \Sigma \times (0, h_0)\}$$

See for instance Notation 2 and Figure A1. For $h_0 < \frac{1}{\|\kappa\|_\infty}$, we introduce the change of coordinates,

$$\Psi : x = (x, y) \mapsto (\xi, h)$$

From $\nu(\Sigma)$ into the cylinder $\mathbb{T}_L \times (0, h_0)$ (see Notation 2).

Remark 2. : We note that when the radius of the interface curvature is very small, for example less than h , we get a rounded corner on Σ see for instance,²⁶ and at the limit i.e. when the curvature is infinite we obtain in this case a sharp corner, see for instance.²³ Actually, the latter cases are beyond the scope of the present research.

The following sections are dedicated to identify the profiles \mathcal{U}_n as well as the asymptotic models in the free space at any order $n \in \mathbb{N}$. Let us first expand the Laplace operator Δ and the normal partial derivative ∂_n in power series of the skin depth δ by applying the change of variables Ψ and the scaling $Y = \frac{h}{\delta}$. Then we insert the resulting expression in the equations of the problem (3). Finally, by identifying with the same power in ε , δ and μ_r , we get the coefficients of the asymptotic expansion satisfying a family of boundary value problems at any order $n \in \mathbb{N}$. For the sake of simplicity, we will explicit the first asymptotics \mathcal{U}_n and A_n^+ for $n = 0, 1, 2$ by induction.

A.1. | Expansion of the operators in power series of δ

Performing the change of variables Ψ , the Laplace operator writes in coordinates (ξ, h) as

$$\Delta = Q^{-1} [\partial_h(Q\partial_h) + \partial_\xi(Q^{-1}\partial_\xi)] \quad (\text{A1})$$

where $Q = (1 - hk(\xi))$. We then apply the scaling,

$$Y = \frac{h}{\delta}$$

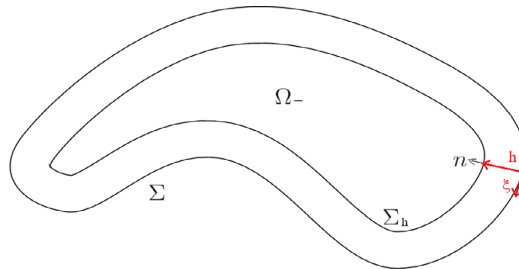


FIGURE A1 A tubular neighborhood of the surface Σ .

In order to make appear the small parameter δ in (A1). Therefore this operator expands in power series of δ as follows:

$$\delta^2 \Delta = \partial_Y^2 + \sum_{n \geq 1} \delta^n A_n$$

Observe that,

$$\begin{aligned} A_1 &= -k(\xi) \partial_Y, \\ A_2 &= \partial_\xi^2 - k(\xi)^2 Y \partial_Y. \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

Similarly, we write

$$\partial_n(\xi; \partial_Y) = \frac{1}{\delta} \partial_Y$$

On the interface Σ .

A.2. | Equations of the coefficients of the magnetic potential

In this section, we define $v_\delta(\xi, Y) = A^-(x)$ in $\nu(\Sigma)$. After the scaling $h \mapsto Y = \frac{h}{\delta}$ in $\nu(\Sigma)$, the problem (3) writes,

$$\begin{cases} -\Delta A^+ = \mu_0 J s & \text{in } \Omega_0, \\ \partial_n A^+ = \varepsilon \partial_Y v_\delta & \text{on } \Sigma, \\ A^+ = 0 & \text{on } \Gamma, \end{cases} \quad (\text{A3})$$

and,

$$\begin{cases} \left(-\partial_Y^2 + \left(\frac{1}{\alpha} \right)^2 \right) v_\delta - \sum_{n \geq 1} \delta^n A_n v_\delta = 0 & \text{in } \mathbb{T}_L \times (0, +\infty), \\ v_\delta = A^+ & \text{on } \mathbb{T}_L \times \{0\}, \end{cases} \quad (\text{A4})$$

Now we insert the ansatz,

$$A^+ \sim \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha} \right)^n A_n^+(x) \text{ in } \Omega_0, \quad \text{and} \quad v_\delta \sim \sum_{n \geq 0} \delta^n \mathcal{U}_n(\xi, Y) \text{ in } \nu(\Sigma) \quad (\text{A5})$$

with $\mathcal{U}_n(\cdot, Y) \mapsto 0$ as $Y \mapsto \infty$, in Equations (A3) and (A4). Then by identification of terms with the same powers of ε , δ and μ_r , the profiles \mathcal{U}_n and A_n^+ satisfy the following family of problems coupled by their conditions on the interface Σ :

$$\begin{cases} -\Delta A_n^+ = \mu_0 J s \delta_0^n & \text{in } \Omega_0, \\ \partial_n A_n^+ = \alpha^n (\delta_0^2)^{n-1} \partial_Y \mathcal{U}_{n-1} & \text{on } \Sigma, \\ A_n^+ = 0 & \text{on } \Gamma, \end{cases} \quad (\text{A6})$$

and,

$$\begin{cases} -\partial_Y^2 \mathcal{U}_n + \left(\frac{1}{\alpha} \right)^2 \mathcal{U}_n = \sum_{p=1}^n A_p \mathcal{U}_{n-p} & \text{in } \Sigma \times (0, +\infty), \\ \mathcal{U}_n = \left(\frac{1}{\alpha \delta_0^2} \right)^n A_n^+ & \text{on } \Sigma, \end{cases} \quad (\text{A7})$$

where $\delta_0 = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu_0}}$. In (A6) δ_n^0 denotes the Kronecker symbol and we use the convention $\mathcal{U}_{-1} = 0$. In the next section, we make explicit the first asymptotics \mathcal{U}_n and A_n^+ for $n = 0, 1$ by induction.

A.3. | First terms of the asymptotics for the magnetic potential

For $n = 0$, we obtain from (A6) that A_0^+ solves the problem below,

$$\begin{cases} -\Delta A_0^+ = \mu_0 J_s & \text{in } \Omega_0, \\ \partial_n A_0^+ = 0 & \text{on } \Sigma, \\ A_0^+ = 0 & \text{on } \Gamma. \end{cases} \quad (\text{A8})$$

Then according to (A6) \mathcal{U}_0 solves the ODE below,

$$\begin{cases} -\partial_Y^2 \mathcal{U}_0 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \mathcal{U}_0 = 0 & \text{in } \Sigma \times (0, +\infty), \\ \mathcal{U}_0 = A_0^+ & \text{on } \Sigma. \end{cases} \quad (\text{A9})$$

The unique solution of (A9) such that with $\mathcal{U}_0 \rightarrow 0$ as $Y \rightarrow \infty$, is:

$$\mathcal{U}_0(\xi, Y) = A_0^+(X(\xi))e^{-\frac{Y}{\alpha}}. \quad (\text{A10})$$

Next, for $n = 1$, we determine A_1^+ according to (A10) that solves,

$$\begin{cases} -\Delta A_1^+ = 0, & \text{in } \Omega_0, \\ \partial_n A_1^+ = -A_0^+ & \text{on } \Sigma, \\ A_1^+ = 0 & \text{on } \Gamma. \end{cases} \quad (\text{A11})$$

Then, according to (A11), \mathcal{U}_1 solves the following ODE

$$\begin{cases} -\partial_Y^2 \mathcal{U}_1 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \mathcal{U}_1 = \frac{1}{\alpha} k(\xi) A_0^+ & \text{in } \Sigma \times (0, +\infty), \\ \mathcal{U}_1 = \frac{1}{\alpha \delta_0^2} A_1^+(X(\xi)) & \text{on } \Sigma. \end{cases} \quad (\text{A12})$$

The unique solution of (A12) such that $\mathcal{U}_1 \rightarrow 0$ as $Y \rightarrow \infty$ is,

$$\mathcal{U}_1(\xi, Y) = \left(\frac{1}{\alpha \delta_0^2} A_1^+(X(\xi)) + \frac{k(\xi)}{2} A_0^+(X(\xi)) Y \right) e^{-\frac{Y}{\alpha}}. \quad (\text{A13})$$

Next, We determine the third term A_2^+ . According to (A6) for $n = 2$ and (A13), A_2^+ solves the following problem

$$\begin{cases} -\Delta A_2^+ = 0 & \text{in } \Omega_0, \\ \partial_n A_2^+ = \frac{k(\xi)}{2} A_0^+ - \frac{1}{\alpha^2 \delta_0^2} A_1^+ & \text{on } \Sigma, \\ A_2^+ = 0 & \text{on } \Gamma. \end{cases} \quad (\text{A14})$$

Finally, according to (A14), \mathcal{U}_2 solves the following ODE:

$$\begin{cases} -\partial_Y^2 \mathcal{U}_2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \mathcal{U}_2 = -k(\xi) \partial_Y \mathcal{U}_1 + A_2 \mathcal{U}_0 & \text{in } \Sigma \times (0, +\infty), \\ \mathcal{U}_2 = \left(\frac{1}{\alpha \delta_0^2}\right)^2 A_2^+(X(\xi)) & \text{on } \Sigma. \end{cases} \quad (\text{A15})$$

According to (A13), we can explicit the right-hand side of this ODE:

$$\partial_Y \mathcal{U}_1 = \left(\frac{k(\xi)}{2} A_0^+ - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\delta_0}{\alpha} A_1^+ + \frac{k(\xi)}{2} A_0^+ Y \right) \right) (X(\xi)) e^{-\frac{Y}{\alpha}}$$

and according to (A2)₂ and (A10) we infer successively,

$$A_2 \mathcal{U}_0(\xi, Y) = \left\{ \partial_\xi^2 - k(\xi)^2 Y \partial_Y \right\} \mathcal{U}_0(\xi, Y) = \left(\partial_\xi^2 A_0^+ + \frac{1}{\alpha} k(\xi)^2 Y A_0^+ \right) (X(\xi)) e^{-\frac{Y}{\alpha}}.$$

Then, the unique solution of the ODE (A15) such that $\mathcal{U}_2 \rightarrow 0$ as $Y \rightarrow \infty$ is:

$$\mathcal{U}_2(\xi, Y) = \left(\left(\frac{1}{\alpha \delta_0^2} \right)^2 A_2^+ + \left(\frac{k(\xi)}{2} \frac{\delta_0}{\alpha} A_1^+ + \frac{\alpha}{2} \left\{ \partial_\xi^2 + \frac{k(\xi)^2}{4} \mathbb{I} \right\} A_0^+ \right) Y + \frac{3k(\xi)^2}{8} A_0^+ Y^2 \right) (X(\xi)) e^{-\frac{Y}{\alpha}}. \quad (\text{A16})$$

Remark 3. : The asymptotic models presented above can be deduced directly from Ref. 11. Indeed, in Ref. 11, we developed ε -parametrization for the magnetic potential A where $\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r}}$. We recall the asymptotic expansions of the magnetic potential in Ref. 11. (cf. [2.10]-[2.11]-[2.12])

$$A^+(x) = \mathcal{A}_0^+(x) + \tilde{\varepsilon} \mathcal{A}_1^+(x) + \tilde{\varepsilon}^2 \mathcal{A}_2^+(x) + \dots \quad \text{in } \Omega_0, \quad (\text{A17})$$

$$A^-(x) = \mathbb{U}_0(\xi, \tilde{Y}) + \tilde{\varepsilon} \mathbb{U}_1(\xi, \tilde{Y}) + \tilde{\varepsilon}^2 \mathbb{U}_2^+(\xi, \tilde{Y}) + \dots \quad \text{in } \Omega_-, \quad (\text{A18})$$

where $\mathbb{U}_j(\cdot, \tilde{Y}) \rightarrow 0$ when $\tilde{Y} = \frac{h}{\varepsilon} \rightarrow \infty, \forall j \in \mathbb{N}$, and (ξ, h) is a curvilinear coordinate system (see for instance Figure A1). Now the asymptotic Expansions (4)–(5) of the present work can be written as follows:

$$A^+(x) = \mathcal{A}_0^+(x) + \tilde{\varepsilon} \frac{1}{\delta_0 \alpha} \mathcal{A}_1^+(x) + \tilde{\varepsilon}^2 \left(\frac{1}{\delta_0 \alpha} \right)^2 \mathcal{A}_2^+(x) + \dots \quad \text{in } \Omega_0, \quad (\text{A19})$$

$$A^-(x) = \mathcal{U}_0\left(\xi, \frac{h}{\delta}\right) + \tilde{\varepsilon} \delta_0 \mathcal{U}_1\left(\xi, \frac{h}{\delta}\right) + \tilde{\varepsilon}^2 \delta_0^2 \mathcal{U}_2\left(\xi, \frac{h}{\delta}\right) + \dots \quad \text{in } \Omega_-, \quad (\text{A20})$$

where $\delta_0 = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu_0}}$, and $\mathcal{U}_j(\cdot, Y) \rightarrow 0$ when $Y = \frac{h}{\delta} \rightarrow \infty, \forall j \in \mathbb{N}$. Observe that from the above asymptotic expansions, we deduce the following relations.

1. In Ω_0 , we get:

$$\begin{cases} \mathcal{A}_0^+(x) = A_0^+(x), \\ \mathcal{A}_1^+(x) = \frac{1}{\delta_0 \alpha} A_1^+(x), \\ \mathcal{A}_2^+(x) = \frac{1}{\delta_0^2 \alpha^2} A_2^+(x). \end{cases} \quad (\text{A21})$$

2. In Ω_- , we get:

$$\begin{cases} \mathbb{U}_0(\xi, \tilde{Y}) = \mathcal{U}_0(\xi, Y), \\ \mathbb{U}_1(\xi, \tilde{Y}) = \delta_0 \mathcal{U}_1(\xi, Y), \\ \mathbb{U}_2(\xi, \tilde{Y}) = \delta_0^2 \mathcal{U}_2(\xi, Y). \end{cases} \quad (\text{A22})$$

Finally, we conclude directly from the asymptotic expressions in Ref. 11 (Section 6.3), our asymptotic models (A8), (A10), (A11), (A13), (A14), (A16).

Chapitre 3

Étude asymptotique axisymétrique

Introduction

Ce chapitre est dédié à l'analyse asymptotique multi-échelle du problème d'intérêt dans le cas des géométries axisymétriques ainsi que des données axisymétriques et orthoradiales. L'étude en terme du potentiel magnétique modifié facilite nos calculs mathématiques à identifier les solutions analytiques du problème voire des modèles asymptotiques. Nous montrons que l'approche asymptotique s'avère efficace à l'ordre deux et en cas de basse fréquence. Cette étude fait appel à notre article [1] récemment publié dans une revue internationale "*Computers and Mathematics with Applications*" que nous nous intéressons à aborder directement dans ce chapitre.

3.1 Article : "*Efficient Asymptotic Models for Axisymmetric Eddy Current Problems in Linear Ferromagnetic Materials*"

Efficient Asymptotic Models for Axisymmetric Eddy Current Problems in Linear Ferromagnetic Materials

Dima ABOU EL NASSER EL YAFI^{a,*}, Victor PÉRON^a

^a*Laboratoire de mathématiques appliquées de Pau, E2S UPPA, CNRS, Université de Pau et des pays de l'Adour, 64000, Pau, France*

Abstract

The problem under consideration is that of time-harmonic eddy current problems in linear ferromagnetic materials surrounded by a dielectric medium with a smooth common interface. Assuming axisymmetric geometries and orthoradial axisymmetric data, we construct an efficient multiscale expansion for the orthoradial solution that provides reduced computational costs. We investigate numerically the accuracy of the approach using an analytical procedure and infinite cylinders as well. It results that the computation of two asymptotics is sufficient to ensure accurate solutions in the case of low frequencies.

Keywords: Multiscale expansion; Eddy current problems; Analytical method; Ferromagnetic materials; Axisymmetric geometry

1. Introduction

Eddy currents arise due to the time varying magnetic field crossing metals [6]. The distribution of the current density in this case is restricted at a boundary layer near the metallic surface, and diminishes exponentially inside the conducting medium. This phenomenon is called the *skin effect* [36, 38, 28, 8, 11]. Eddy currents generate energy losses that have two sided effect in the industrial field [35]. On the one hand, these currents can have a good use such as induction heating or for the design of electromagnetic breaking systems. On the other hand, eddy currents can also produce "undesirable" power losses in the form of heating for example which can affect the performance of some electrical devices. Summing up, studying eddy currents is crucial for engineering applications in electromagnetism.

The mathematical and numerical analysis of the eddy current problems have been the interest of many works during the past decades [27, 24, 6, 9, 21, 13, 8, 4, 35]. Because of the small skin depth inside the conductors, the classical numerical methods are challenging to apply. To overcome this difficulty, it is possible to develop an asymptotic method that derives approximate models with less computational costs. The asymptotic approach is often

*Corresponding author

Email addresses: `dima.abou-el-nasser-el-yafi@univ-pau.fr` (Dima ABOU EL NASSER EL YAFI), `victor.peron@univ-pau.fr` (Victor PÉRON)

employed for physical problems involving a small or large parameter. This method gives an accurate approximation of the problem by solving an ordered sequence of subproblems independent of the latter parameter.

We refer the reader to [36, 19, 27, 18, 15, 11, 34, 37, 32, 23] for previous works devoting to the asymptotic procedure in electromagnetic problems. For example, in [19, 27] authors investigated eddy current problems in the case of metals having infinite conductivity by applying first a boundary integral procedure and then an asymptotic procedure that reflects the skin effect in metals in both bi-dimensional and three-dimensional domains. Moreover, recent studies [18, 15, 11] analyzed theoretically and numerically the electromagnetic field solution for the Maxwell equations through an asymptotic expansion for large conductivities. It is worthwhile to note that these previous works tackle the equations of electromagnetism set on a domain made of a dielectric and a non-magnetic conducting subdomains with a smooth common interface. On the other hand, several works have investigated the asymptotic approach for eddy current problems in a bi-dimensional setting where the conducting medium is non-magnetic and has a corner singularity on the conductor-dielectric interface [10, 14, 17]. These works have shown that the asymptotic approach was strongly affected by adding corrections, especially near corners, in order to obtain accurate asymptotic models.

This paper continues a study begun in [33] and [2] of the time harmonic eddy current problems in linear ferromagnetic materials with a smooth interface. The work in [33] was restricted for the theoretical results whereas in [2] was concerned essentially with numerical validation of the asymptotic procedure employed in [33]. In both cases, the study was restricted to a very special class of two-dimensional problems using a multiscale expansion. Besides, [2] is not a straightforward application of [33]. More precisely, we identified in [2] efficient asymptotic models, slightly different than those established in [33], that provide reduced computational costs in time and memory allocation for a wide range of physical parameters. This present work treats a three-dimensional situation in axisymmetric geometry.

However, three dimensional computations can be very expensive. In a number of cases, it is possible to reduce the problem by assuming that the geometry is invariant by translation or rotation [5, 3, 11, 12]. In this context, we choose to consider a special class of axisymmetric geometry that reduces our problem to a one-dimensional scalar model. Our analysis is twofold. First, we present elements of derivation for the multiscale expansion of the one-dimensional solution near the conductor-insulator interface. We identify efficient asymptotic models that reduce the computational costs. Then, we evaluate the performance of the resulting models by presenting numerical results.

The problem of interest is presented in terms of the magnetic vector potential which is derived from the Maxwell system. It is often useful to introduce the magnetic vector potential in electromagnetism especially for eddy current problems in order to simplify the calculation and the analysis as well. A formulation of the problem in magnetic vector potential allows us in particular to keep a second-order formulation in each subdomain, as in [11], contrary to a formulation in magnetic field. For this reason we intend to establish a numerical study using the magnetic vector potential rather than the magnetic field. Moreover, we will revisit some assumptions introduced in [11] that are useful for our asymptotic analysis. On the other hand, the problem of interest could not be approached as a special case of the reference

[11]. Precisely, our asymptotic regime lies for the case of a significant relative permeability μ_r i.e. $\mu_r \gg 1$ unlike the reference [11] where non-magnetic materials of large conductivities and constant relative magnetic permeabilities ($\mu_r = 1$) are investigated. As a consequence, the resulting limits for both problems are different.

In this work, we assess the performance of our efficient asymptotic models analytically in the case of infinite cylinders. Indeed, our analytical procedure follows the spirit of [4] where authors tackled eddy current problems for large conductivities and for the case of infinite cylinders as well. There are many differences between our paper and [4]. For example, in [4] authors analyze the performance of the finite element method (FEM) applied to the considered eddy current problems. However, our numerical study is based on analytical methods in order to highlight the good accuracy of our asymptotic approach, for an example of unbounded domain. Actually, the FEM was previously applied for the eddy current problems in linear ferromagnetic materials [2] where their analytical solution was not obvious to calculate because of the complexity of the considered bounded geometry. Moreover, in [4], authors considered infinite cylinders, in width and length, consisting of a core material surrounded by a crucible and an extremely thin coil. The crucible itself is made of several concentric layers with different materials. In our case, for the sake of simplicity, we consider only two different layers: a ferromagnetic material surrounded by a dielectric material with a common smooth interface. Finally, we perform numerically a comparison of our asymptotic approach with the impedance method [25, 18].

The presentation of the paper proceeds as follows. Section 2 introduces the framework as well as the boundary value problem. In section 3, we restrict our work to axisymmetric domains and orthoradial axisymmetric data. Moreover, we apply in the latter section a multiscale expansion for the orthoradial component of the magnetic vector potential and we identify efficient asymptotic models up to the order two. In section 5, we present numerical results to assess the performance of the proposed models. Concluding remarks and perspectives are given in section 6. In Appendix A, we provide elements of proof of the multiscale expansion given in the subsection 3.3. Appendix B is dedicated to a deep calculation of the analytical solutions introduced in the section 4.

2. Problem setting

Throughout the paper we denote by $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ a smooth and connected domain with boundary Γ , and Ω_- a smooth connected subdomain of Ω with boundary Σ . We denote by Ω_0 the complementary of $\overline{\Omega_-}$, see for instance Figure 1.

2.1. Notations and physical parameters

We suppose that Ω_0 is a dielectric medium which we consider for the sake of simplicity the free space, and Ω_- is a ferromagnetic material. The magnetic permeability and the conductivity are given by the following piecewise-constant functions $\underline{\mu}$ and $\underline{\sigma}$ respectively:

$$\underline{\mu} = \begin{cases} \mu_0 & \text{in } \Omega_0 \\ \mu_r \mu_0 & \text{in } \Omega_- \end{cases} \quad \text{and} \quad \underline{\sigma} = \begin{cases} 0 & \text{in } \Omega_0 \\ \sigma > 0 & \text{in } \Omega_-, \end{cases} \quad (1)$$

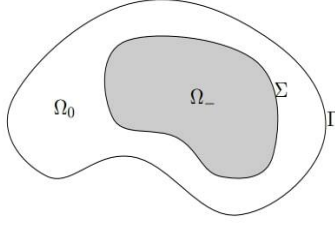


Figure 1: A cross section of the domain Ω and its subdomains Ω_- , Ω_0

where $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [H/m](henry per meter) and the relative permeability μ_r is assumed to be a large parameter. The angular frequency is denoted by $\omega > 0$. In our work, ω and σ are given parameters. We denote by \mathbf{J}_s the current source which is supposed for the sake of simplicity divergence free that is $\text{div } \mathbf{J}_s = 0$ in Ω , smooth enough and the support of \mathbf{J}_s does not meet Ω_- . We consider the following notations.

Notation 1. We denote by h^+ (resp. h^-) the restriction of any function h in Ω_0 (resp. Ω_-).

Notation 2. In order to introduce our asymptotic method, we define a small parameter ε as follows

$$\varepsilon = \frac{1}{\mu_r \delta},$$

where δ is the skin depth and given by

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu_r \mu_0}}.$$

2.2. Boundary value problem

The problem under consideration is the eddy current problem involving piecewise constant electromagnetic coefficients (electric conductivity $\underline{\sigma}$, magnetic permeability $\underline{\mu}$) in time-harmonic regime with fixed angular frequency ω . This model is derived from the Maxwell system by disregarding the current displacement [7, 6, 35]. More precisely, the physical interpretation of Maxwell equations is that a time varying magnetic field \mathbf{h} generates an electric field \mathbf{e} and vice-versa [29, 7]. This latter system is hence expressed in terms of the electromagnetic field for which we deduce the electric induction $\mathbf{d} := \underline{\varepsilon} \mathbf{e}$ ($\underline{\varepsilon}$ is the electric permittivity) and the magnetic induction $\mathbf{b} := \underline{\mu} \mathbf{h}$ [29, 7]. In particular, electric currents $\underline{\sigma} \mathbf{e}$ arise due a time dependent magnetic field crossing metals, this is the so-called *eddy currents* [6, 7]. Therefore, the eddy current model results when the displacement currents, i.e. the time derivative $\partial_t \mathbf{d}$, are negligible relative to $\underline{\sigma} \mathbf{e}$ in the Maxwell equations [7, 22, 35]. In this context, the mathematical model of the time-dependent eddy current problem is [16, page 22]:

$$\text{curl } \frac{1}{\underline{\mu}} \mathbf{b} = \mathbf{j}_s + \underline{\sigma} \mathbf{e} \quad (2)$$

$$\text{curl } \mathbf{e} + \partial_t \mathbf{b} = 0 \quad (3)$$

$$\text{div } \mathbf{b} = 0 \quad (4)$$

where Eq. (2)-(3) are Ampere and Faraday laws respectively derived from the Maxwell system.

From Eq. (4) we deduce that there exists a magnetic vector potential denoted by \mathbf{a} such that [39, Theorem 1.3.4-page 15]:

$$\mathbf{b} = \text{curl } \mathbf{a}. \quad (5)$$

Now by replacing Eq. (5) in Eq. (3) we get:

$$\text{curl } (\mathbf{e} + \partial_t \mathbf{a}) = 0. \quad (6)$$

Then, we deduce that there exists an electric scalar potential v such that [39, Theorem 1.3.4-page 15]:

$$\mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{a} - \text{grad } v. \quad (7)$$

In the following, we work in the particular case where the electric potential is canceled. This assumption makes it possible to simplify the calculations of asymptotic expansions. We obtain [16, section 4.4-page 25]:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \text{curl } \mathbf{a}^*, \\ \mathbf{e} &= -\partial_t \mathbf{a}^*, \end{aligned} \quad (8)$$

where \mathbf{a}^* is called the modified magnetic vector potential. In this way, the \mathbf{a}^* -formulation is deduced from that of the electric field \mathbf{e} : By replacing Eq. (8) in Eq. (2) we obtain:

$$\text{curl } \frac{1}{\underline{\mu}} \text{curl } \mathbf{a}^* + \underline{\sigma} \partial_t \mathbf{a}^* = \mathbf{j}_s. \quad (9)$$

Hereafter, we establish a time-harmonic regime with the time convention $\exp(+i\omega t)$. Hence Eq. (9) becomes:

$$\text{curl } \frac{1}{\underline{\mu}} \text{curl } \mathcal{A}^* + i\omega \underline{\sigma} \mathcal{A}^* = \mathbf{J}_s, \quad (10)$$

where in this regime \mathcal{A}^* and \mathbf{J}_s denote the phasors of the modified magnetic vector potential \mathbf{a}^* and the current source \mathbf{j}_s respectively, see for example [16, section 2.6] and [39, section 2.5-page 51]. In this regime, the fields involved in our problem are time-independent complex functions. We will drop in that follows the notation "*" from the modified magnetic potential \mathcal{A}^* . Now, similarly to the electric field, we get the following transmission conditions on the

interface Σ [32, 31, 16]:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^+ \times \mathbf{n} &= \mathcal{A}^- \times \mathbf{n}, \\ \sigma \mathcal{A}^- \cdot \mathbf{n} &= 0, \\ \text{curl } \mathcal{A}^+ \times \mathbf{n} &= \mu_r^{-1}(\text{curl } \mathcal{A}^- \times \mathbf{n}),\end{aligned}$$

here n is the unit normal vector on Σ inwardly oriented toward Ω_- , and \mathcal{A}^\dagger , $\dagger = 0, -$, the restriction of the modified vector potential on Ω_\dagger .

This problem has to be completed by the gauge conditions [9, 21, 13, 32]:

$$\text{div } \mathcal{A}^+ = 0 \text{ in } \Omega_0 \quad \text{and} \quad \int_\Sigma \mathcal{A}^+ \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad (11)$$

in order to guarantee the existence and uniqueness of the solution. Further, we consider below the perfect magnetic condition on Γ [31]:

$$\mathcal{A}^+ \times \mathbf{n} = 0.$$

Finally, the modified magnetic vector potential $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^+, \mathcal{A}^-)$ satisfies the following boundary value problem:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{curl curl } \mathcal{A}^+ = \mu_0 \mathbf{J}_s & \text{in } \Omega_0, \\ \text{curl curl } \mathcal{A}^- + i \omega \sigma \mu_0 \mu_r \mathcal{A}^- = 0 & \text{in } \Omega_-, \\ \text{div } \mathcal{A}^+ = 0 & \text{in } \Omega_0, \\ \text{div } \mathcal{A}^- = 0 & \text{in } \Omega_-, \\ \mathcal{A}^+ \times \mathbf{n} = \mathcal{A}^- \times \mathbf{n} & \text{on } \Sigma, \\ \text{curl } \mathcal{A}^+ \times \mathbf{n} = \mu_r^{-1}(\text{curl } \mathcal{A}^- \times \mathbf{n}) & \text{on } \Sigma, \\ \mathcal{A}^- \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \Sigma, \\ \int_\Sigma \mathcal{A}^+ \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 & \\ \mathcal{A}^+ \times \mathbf{n} = 0 & \text{on } \Gamma. \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} \text{curl curl } \mathcal{A}^+ = \mu_0 \mathbf{J}_s & \text{in } \Omega_0, \\ \text{curl curl } \mathcal{A}^- + 2i\delta^{-2} \mathcal{A}^- = 0 & \text{in } \Omega_-, \\ \text{div } \mathcal{A}^+ = 0 & \text{in } \Omega_0, \\ \text{div } \mathcal{A}^- = 0 & \text{in } \Omega_-, \\ \mathcal{A}^+ \times \mathbf{n} = \mathcal{A}^- \times \mathbf{n} & \text{on } \Sigma, \\ \text{curl } \mathcal{A}^+ \times \mathbf{n} = \delta \varepsilon (\text{curl } \mathcal{A}^- \times \mathbf{n}) & \text{on } \Sigma, \\ \mathcal{A}^- \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \Sigma, \\ \int_\Sigma \mathcal{A}^+ \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 & \\ \mathcal{A}^+ \times \mathbf{n} = 0 & \text{on } \Gamma. \end{array} \right. \quad (12)$$

2.3. Variational formulation

We define the following space

$$\mathbf{H}_0(\text{curl}, \Omega) = \{u \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \text{curl } u \in \mathbf{L}^2(\Omega), u \times n = 0 \text{ on } \Gamma\}. \quad (13)$$

The variational space is the Hilbert space \mathbf{Y} :

$$\mathbf{Y} = \{u \in \mathbf{H}_0(\text{curl}, \Omega) \mid \text{div } u^+ \in L^2(\Omega_0), \text{div } u^- \in L^2(\Omega_-), \int_{\Sigma} u^+ \cdot n \, dS = 0\}. \quad (14)$$

endowed with the norm

$$\|u\|_{\mathbf{Y}}^2 = \|u\|_{0,\Omega}^2 + \|\text{curl } u\|_{0,\Omega}^2 + \|\text{div } u^+\|_{0,\Omega_0}^2 + \|\text{div } u^-\|_{0,\Omega_-}^2.$$

We introduce the small parameter $\nu = \frac{1}{\sqrt{\mu_r}}$ in the problem below. For all $\nu > 0$, the variational problem writes

Find $\mathcal{A} \in \mathbf{Y}$ such that for all $v \in \mathbf{Y}$,

$$a_R(\mathcal{A}, v) = \mu_0 \int_{\Omega} \mathbf{J}_s \cdot \bar{v} \, dx. \quad (15)$$

Here the sesquilinear form in its regularized version a_R is defined as [13, 32]

$$\begin{aligned} a_R(u, v) = & \nu^2 \int_{\Omega_-} \text{curl } u^- \cdot \text{curl } \bar{v}^- \, dx + \int_{\Omega_0} \text{curl } u^+ \cdot \text{curl } \bar{v}^+ \, dx + \int_{\Omega_0} \text{div } u^+ \text{div } \bar{v}^+ \, dx + \int_{\Omega_-} \text{div } u^- \\ & + i\omega\sigma\mu_0 \int_{\Omega_-} u^- \cdot \bar{v}^- \, dx. \end{aligned}$$

In the following, we will study numerically the time-harmonic eddy current problems in axisymmetric geometry which can represent correctly the features of our three dimensional problem.

3. Axisymmetric domains

In this section, we choose to consider similar framework and notations introduced in [11, section 4] in the case of axisymmetric domains and axisymmetric orthoradial data. We suppose that Ω_0 and Ω_- are axisymmetric domains with the same axis of rotation denoted by E_0 which coincides with the z -axis. In this case, there exists bi-dimensional "meridian" domains Ω^m , Ω_0^m , and Ω_-^m satisfying, in cylindrical coordinates (r, θ, z) , the following assumptions

$$\begin{aligned} \Omega &= \{x \in \mathbb{R}^3 / (r, z) \in \Omega^m, \theta \in \mathbb{T}\}, \\ \Omega_0 &= \{x \in \mathbb{R}^3 / (r, z) \in \Omega_0^m, \theta \in \mathbb{T}\}, \\ \Omega_- &= \{x \in \mathbb{R}^3 / (r, z) \in \Omega_-^m, \theta \in \mathbb{T}\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Here $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ is the one dimensional torus. In Figure 2, Γ^m and Σ^m are the meridian curves corresponding to Γ and Σ , and Γ_0, Γ_0^+ are the following subsets of the rotation axis E_0

$$\Gamma_0 = E_0 \cap \overline{\Omega^m} \quad \text{and} \quad \Gamma_0^+ = E_0 \cap \overline{\Omega_0^m}.$$

3.1. Formulation in cylindrical coordinates

In this part, we recall the cylindrical coordinates of a vector field \mathcal{A} and the curl operator:

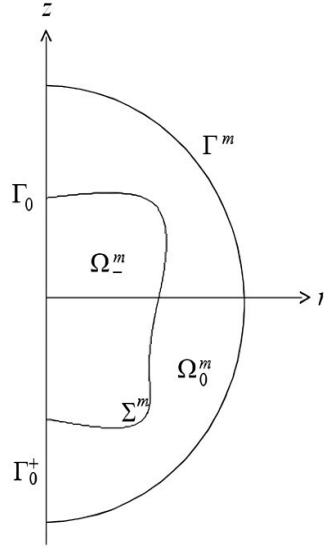


Figure 2: The meridian domain $\Omega = \Omega_-^m \cup \Omega_0^m \cup \Sigma^m$ with boundary $\partial\Omega^m = \Gamma^m \cup \Gamma_0$

- For a vector field $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3)$ we denote by (A_r, A_θ, A_z) its cylindrical components such that

$$\begin{cases} A_r(r, \theta, z) = \mathcal{A}_1(x) \cos \theta + \mathcal{A}_2(x) \sin \theta, \\ A_\theta(r, \theta, z) = -\mathcal{A}_1(x) \sin \theta + \mathcal{A}_2(x) \cos \theta, \\ A_z(r, \theta, z) = \mathcal{A}_3(x), \end{cases}$$

and we set $\hat{\mathcal{A}}(r, \theta, z) = (A_r(r, \theta, z), A_\theta(r, \theta, z), A_z(r, \theta, z))$.

- The cylindrical components of the curl operator applied to a vector field \mathcal{A} writes

$$\begin{cases} (\text{curl } \mathcal{A})_r = \frac{1}{r} \partial_\theta A_z - \partial_z A_\theta, \\ (\text{curl } \mathcal{A})_\theta = \partial_z A_r - \partial_r A_z, \\ (\text{curl } \mathcal{A})_z = \frac{1}{r} (\partial_r (r A_\theta) - \partial_\theta A_r), \end{cases} \quad (17)$$

and the divergence operator div writes

$$\text{div } \mathcal{A} = \partial_r A_r + \frac{1}{r} A_r + \frac{1}{r} \partial_\theta A_\theta + \partial_z A_z. \quad (18)$$

3.2. Axisymmetric orthoradial problem

3.2.1. Preliminaries

For a vector field $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3)$, we say that

- \mathcal{A} is **axisymmetric** if $\hat{\mathcal{A}}$ does not depend on the angular variable θ ,
- \mathcal{A} is **orthoradial** if its components A_r and A_z are equal to zero.

On our axisymmetric configuration, we consider a modification of problem (12) [11]: We take $\mathbf{J}_s = 0$ and impose instead a non-homogeneous boundary condition

$$\mathcal{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{G} \times \mathbf{n} \quad \text{on } \Gamma, \quad (19)$$

for a given smooth data \mathbf{G} .

Assumption 1. *We assume that \mathbf{G} is axisymmetric and orthoradial i.e.*

$$\hat{\mathbf{G}}(r, \theta, z) = (0, g_\theta(r, z), 0). \quad (20)$$

Under Assumption 1, it results that \mathcal{A} is also axisymmetric and orthoradial

$$\hat{\mathcal{A}}(r, \theta, z) = (0, A_\theta(r, z), 0), \quad (21)$$

see for instance [11, 31] for the proof of similar works.

In that follows, we will drop the notation θ in A_θ , and we will concentrate our asymptotic analysis on this orthoradial component. For the sake of clarity, we consider the following notations.

Notation 3. *We denote by (n_1, n_2, n_3) the cartesian coordinates of the unit normal vector n on Σ inwardly oriented to Ω_- . Since Ω_- is an axisymmetric domain, then it results that $n_\theta = 0$ and the unit normal vector in cylindrical coordinates writes $\hat{\mathbf{n}} = (n_r, 0, n_z)$ [31, page 166]. Considering an axisymmetric and orthoradial solution (21), we introduce then the orthoradial component of the " - curl curl" operator and the boundary operator "curl \times \mathbf{n} " respectively as follows:*

$$\begin{aligned} D(r, z; \partial_r, \partial_z) &= \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \partial_z^2 - \frac{1}{r^2}, \\ B(r, z; \partial_r, \partial_z) &= n_r (\partial_r + \frac{1}{r}) + n_z \partial_z. \end{aligned} \quad (22)$$

and the divergence operator is free in this case, see for instance (18).

3.2.2. Variational problem

By using the change of variables from cartesian to cylindrical coordinates, we associate the following weighted Sobolev space in order to define the orthoradial component $A(r, z)$ [5, 11]

$$V_{1, \Gamma^m}^1(\Omega^m) = \{u \in H_1^1(\Omega^m) \mid u \in L_{-1}^2(\Omega^m) \text{ and } u = 0 \text{ on } \Gamma^m\}.$$

Here,

$$H_1^1(\Omega^m) = \{u \in L_1^2(\Omega^m) \mid \partial_r^j \partial_z^{1-j} u \in L_1^2(\Omega^m), j = 0, 1\},$$

and for all $\alpha \in \mathbb{R}$, the space $L_\alpha^2(\Omega^m)$ is the set of measurable functions $u(r, z)$ such that

$$\|u\|_{L_\alpha^2(\Omega^m)}^2 = \int_{\Omega^m} |u|^2 r^\alpha dr dz < +\infty. \quad (23)$$

The following remark incorporates an essential boundary condition.

Remark 1. All functions on V_{1,Γ^m}^1 have null trace on Γ_0 , see [5, Remark II.1.1], and [11, Remark 4.1] for more details about the proof.

As a result, we solve the following two-dimensional scalar problem set in Ω^m . Find $A \in V_{1,\Gamma^m}^1(\Omega^m) + g$ such that for all $v \in V_{1,\Gamma^m}^1(\Omega^m)$,

$$a(A, v) = 0, \quad (24)$$

where

$$\begin{aligned} a(u, v) = & \nu^2 \int_{\Omega_-^m} \left(\partial_z u^- \partial_z \bar{v}^- + \frac{1}{r} \partial_r (ru^-) \frac{1}{r} \partial_r (r\bar{v}^-) \right) r dr dz + \int_{\Omega_0^m} \left(\partial_z u^+ \partial_z \bar{v}^+ + \frac{1}{r} \partial_r (ru^+) \frac{1}{r} \partial_r (r\bar{v}^+) \right) r dr \\ & + i\omega\sigma\mu_0 \int_{\Omega_-^m} u^- \bar{v}^- r dr dz, \end{aligned}$$

and recalling that $\nu = \frac{1}{\sqrt{\mu_r}}$.

3.2.3. Strong form of equations

According to (22) and Remark 1, the orthoradial component $A = (A^+, A^-)$ satisfies the following problem

$$\begin{cases} DA^+ = 0 & \text{in } \Omega_0^m, \\ DA^- - 2i\delta^{-2}A^- = 0 & \text{in } \Omega_-^m, \\ BA^+ = \varepsilon\delta BA^- & \text{on } \Sigma^m, \\ A^+ = A^- & \text{on } \Sigma^m, \\ A^+ = g_\theta & \text{on } \Gamma^m \cup \Gamma_0^+, \end{cases} \quad (25)$$

where g_θ is defined in Eq. (20), see for instance [31, Chapter 8] for similar work. Under the assumption of orthoradial and axisymmetric data, we deduce directly that the gauge conditions (11) in the cylindrical coordinates are satisfied from notation 3.

3.3. Multiscale expansion

In this part, we aim to expand the orthoradial component A of the magnetic vector potential using a multiscale expansion. First, we introduce the following geometrical notations.

Notation 4 (Geometrical setting). We set $\xi \mapsto \tau(\xi) = (r(\xi), z(\xi))$ a \mathcal{C}^∞ function, $\xi \in (0, L)$ be an arc-length coordinate on the interface Σ^m , and L is the length of the curve Σ^m . Let (ξ, h) be the associate normal coordinate system in a tubular neighborhood \mathcal{U}_-^m of Σ^m inside Ω_-^m (see for instance Figure A.12). Then the normal vector $n(\xi)$ at the point $\tau(\xi)$ can be written as (Frenet frame)

$$n(\xi) = (-z'(\xi), r'(\xi)), \quad (26)$$

where $z'(\xi) = \frac{dz}{d\xi}$, and $r'(\xi) = \frac{dr}{d\xi}$. Further, we denote by $k(\xi)$ the curvature of Σ^m at $\tau(\xi)$ which is defined as [11]

$$k(\xi) = (r'z'' - z'r'')(\xi).$$

Finally, we set χ a smooth cut-off function with support in $\overline{\mathcal{U}_-^m}$, and equals to 1 in a smaller neighborhood of Σ^m .

Now, we exhibit expansions series for A which we denote by A^+ in the dielectric part Ω_0^m , and by A^- in the conducting part Ω_-^m :

$$\begin{aligned} A^+(r, z) &= A_0^+(r, z) + \frac{\varepsilon}{\hat{\alpha}} A_1^+(r, z) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ A^-(r, z) &= A_0^-(r, z; \delta) + \delta A_1^-(r, z; \delta) + \mathcal{O}(\delta^2) \\ &\text{with } A_j^-(r, z; \delta) = \chi(h) \mathfrak{A}_j(\xi, \frac{h}{\delta}). \end{aligned} \quad (27)$$

Here $\hat{\alpha} = \frac{1-i}{2}$ where i is the unit complex number. Besides, the profiles \mathfrak{A}_j are defined on $\Sigma^m \times (0, +\infty)$, and $\mathfrak{A}_j \rightarrow 0$ as $Y_3 = \frac{h}{\delta} \rightarrow +\infty$. The symbol $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ (resp. $\mathcal{O}(\delta^2)$) means that the remainder is uniformly bounded by ε^2 (resp. δ^2). Hereafter, we focus on the first terms A_0^+ , \mathfrak{A}_0 , A_1^+ and \mathfrak{A}_1 .

3.3.1. First terms of the asymptotic expansion:

We construct the first asymptotics (A_0^+, \mathfrak{A}_0) and (A_1^+, \mathfrak{A}_1) recursively. Elements of formal derivations are given in Appendix A.

First, A_0^+ solves the following problem

$$\begin{cases} DA_0^+ = 0 & \text{in } \Omega_0^m, \\ BA_0^+ = 0 & \text{on } \Sigma^m, \\ A_0^+ = g_\theta & \text{on } \Gamma^m \cup \Gamma_0^+. \end{cases} \quad (28)$$

Then the first profile \mathfrak{A}_0 is defined as follows:

$$\mathfrak{A}_0(\xi, Y_3) = A_0^+(\tau(\xi)) e^{-\frac{Y_3}{\hat{\alpha}}}, \quad (29)$$

where $(\xi, Y_3) \in \mathbb{T}_L \times (0, +\infty)$, noting that $\mathbb{T}_L = \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$.

The next asymptotic solves the problem below:

$$\begin{cases} DA_1^+ = 0 & \text{in } \Omega_0^m, \\ BA_1^+ = -A_0^+ & \text{on } \Sigma^m, \\ A_1^+ = 0 & \text{on } \Gamma^m \cup \Gamma_0^+. \end{cases} \quad (30)$$

The second profile \mathfrak{A}_1 satisfies the following equality

$$\mathfrak{A}_1(\xi, Y_3) = \left[\frac{1}{\hat{\alpha}\delta_0^2} A_1^+(\tau(\xi)) + \frac{Y_3}{2} \left(k + \frac{z'}{r} \right) (\xi) A_0^+(\tau(\xi)) \right] e^{-\frac{Y_3}{\hat{\alpha}}}, \quad (31)$$

where $\delta_0 = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu_0}}$. Similarly to [11, Remark 4.2], we deduce the following remark.

Remark 2. Subsequently, we assume that g_θ , defined in Eq. (20), is a real valued function. Thus, the right hand side of the boundary value problem (28) is real. Hence, A_0^+ is a real valued function. Similarly, we deduce that A_1^+ is also a real valued function.

Remark 3. The models (28) and (30) are independent of any physical parameter introduced in this work, which allow us to approach the solution A of the problem (12) in the dielectric part with minimal time and memory allocation as well. We provided a deep numerical study about the computational costs in the special issue [2] for the bi-dimensional case. We will tackle these issues in a forthcoming work for three-dimensional and axisymmetric geometries.

3.3.2. Impedance model

As a by product of the asymptotic expansion, we get a simpler problem than (12) as follows

$$\begin{cases} DA_1^\varepsilon = 0 & \text{in } \Omega_0^m, \\ BA_1^\varepsilon + \frac{\varepsilon}{\alpha}A_1^\varepsilon = 0 & \text{on } \Sigma^m, \\ A_1^\varepsilon = g_\theta & \text{on } \Gamma^m \cup \Gamma_0^+, \end{cases} \quad (32)$$

where the second condition in (32) is the classical Leontovitch condition, see for instance [25], [33, section 6.4], and [2, section 3.1]. It is well known that the impedance solution has a high accuracy with respect to the solution of the eddy current problems. Accordingly, we will compare numerically our first asymptotic solutions with the latter impedance solution in the next section by using an analytical procedure.

4. Radial solutions in cylindrical geometry

In that follows, our goal is to provide an analytical study of the considered asymptotic models up to the order two in the dielectric part Ω_0^m . First, we will introduce geometrical and physical assumptions. Then we will give the expressions of the analytical solutions for the global, asymptotic and impedance problems (25), (28), (30) and (32) respectively that are calculated in Appendix B. We will assess the accuracy of the resulting asymptotic solutions numerically in the next section.

4.1. Framework

We consider a cylindrical geometry: We assume that Ω^m is an infinite cylinder in length consisting of a ferromagnetic material surrounded by a dielectric domain. Let R_1 be the radius of the interior ferromagnetic cylinder and R_2 the radius of the domain Ω^m . Recall that we denote by (r, θ, z) the cylindrical coordinate system where the z -axis coincides with the axis of the cylinders Ω_-^m and Ω^m , and by $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ the local unit vectors in the cylindrical coordinate system. We will assume that the electric current flows in the dielectric domain Ω_0 in the \vec{e}_θ direction and that is uniformly distributed in the \vec{e}_z direction. In order to solve our problem, we impose a Dirichlet condition at $r = R_2$:

$$A^+(r) = \frac{k}{r}, \quad (33)$$

where k is a given constant. The geometry is depicted in Figures 3-4 below.

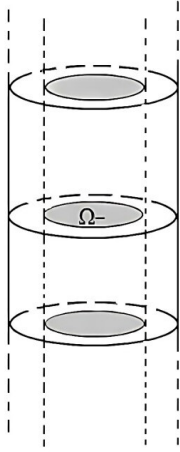


Figure 3: Considered geometry

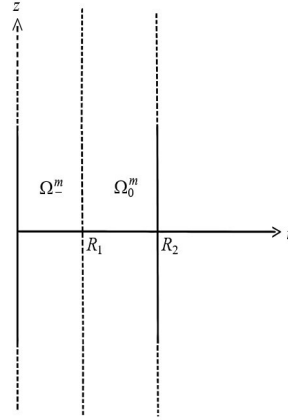


Figure 4: The meridian domain Ω^m

4.2. Analytical solutions

In the following part, we will exhibit the analytical expressions of $A = (A^+, A^-)$, A_0^+ , A_1^+ and A_1^ε solutions of problems (25), (28), (30) and (32) respectively.

4.2.1. Analytical global solutions

According to [4, Eq. (A.11)-(A.12)] and Appendix B, the general form of the solutions A^+ and A^- are as follows

$$\begin{aligned} A^+(r) &= \frac{r}{2}a + \frac{b}{r}, \\ A^-(r) &= \mathcal{I}_1(\gamma r)c, \end{aligned} \quad (34)$$

where $\gamma = \sqrt{\omega\sigma\mu_r\mu_0}e^{+i\frac{\pi}{4}}$, \mathcal{I}_1 is the modified Bessel function of the first kind [30, Chapter 10 - pages 248–250], and a , b and c are constants deduced from the boundary conditions of the above problem (25) and having the following expressions:

$$\begin{aligned} a &= \frac{k}{R_1} \frac{g_1}{g_2}, \\ b &= k - a \frac{R_2^2}{2}, \\ c &= \left[\mathcal{I}_1^{-1}(\gamma R_1) \frac{(R_1^2 - R_2^2)}{2R_1} \right] a + \frac{k}{R_1} \mathcal{I}_1^{-1}(\gamma R_1). \end{aligned}$$

Noting that g_1 and g_2 are constants defined as follows

$$\begin{aligned} g_1 &= \mathcal{I}_1(\gamma R_1) + \gamma R_1 \mathcal{I}_1'(\gamma R_1), \\ g_2 &= R_1 \mu_r \mathcal{I}_1(\gamma R_1) - g_1 \frac{(R_1^2 - R_2^2)}{2R_1}. \end{aligned}$$

4.2.2. Analytical asymptotic solutions

We find the analytical expressions of A_0^+ and A_1^+ by a simple integration of the first equations in Ω_0^m of (28) and (30). The latter asymptotics have the following general form:

$$\begin{aligned} A_0^+(r) &= \frac{r}{2}a_0 + \frac{b_0}{r}, \\ A_1^+(r) &= \frac{r}{2}a_1 + \frac{b_1}{r}, \end{aligned} \quad (35)$$

where (a_0, b_0) and (a_1, b_1) are constants that are deduced from the boundary conditions of (28) and (30) respectively. Their expressions are given below:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 & \text{and} & & b_0 &= k, \\ a_1 &= \frac{k}{R_1} & \text{and} & & b_1 &= -\frac{kR_2^2}{2R_1}. \end{aligned}$$

Finally, the first asymptotic solutions have the following analytical form:

$$\begin{aligned} - \text{ order 1: } & A_0^+(r) = \frac{k}{r}, \\ - \text{ order 2: } & A_0^+(r) + \frac{\varepsilon}{\hat{\alpha}}A_1^+(r) = \frac{k}{r} + \frac{\varepsilon}{\hat{\alpha}}\left(\frac{k}{R_1}\frac{r}{2} - \frac{kR_2^2}{2R_1}\frac{1}{r}\right). \end{aligned}$$

4.2.3. Analytical impedance solution

We find the analytical expressions of A_1^ε by a simple integration of the first equations in Ω_0^m of the impedance model (32). The latter solution has the following general form:

$$A_1^\varepsilon(r) = \frac{r}{2}a_2^\varepsilon + \frac{b_2^\varepsilon}{r}, \quad (36)$$

where a_2^ε and b_2^ε are constants that are deduced from the boundary conditions of (32). Their expressions are given below:

$$a_2^\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\hat{\alpha}}\frac{2k}{\zeta^\varepsilon} \quad \text{and} \quad b_2^\varepsilon = k - a_2^\varepsilon\frac{R_2^2}{2}$$

where $\zeta^\varepsilon = \left(\frac{\varepsilon}{\hat{\alpha}}(R_2^2 - R_1^2) + 2R_1\right)$.

5. Numerical results

This section is devoted to establish numerical experiments concerning the above analytical solutions which have been implemented using Python 3 [20, 26]. The considered physical parameters are illustrated in Table 1. We choose arbitrarily small radius R_1 and R_2 . Moreover, the choice of the constant k , introduced in the Dirichlet condition (33), is also arbitrary.

Parameters	Value
Relative permeability (μ_r)	4000
Conductivity (σ)	2E+06 S/m
Frequency (f)	10 Hz
Inner radius (R_1)	0.03 m
Outer radius (R_2)	0.04 m
Skin depth (δ)	1.779E-03 m
Epsilon (ε)	1.41E-01 m ⁻¹
k	1

Table 1: Physical and numerical parameters

Our numerical analysis follows the spirit of [2], where the finite element method was applied to demonstrate the accuracy of our asymptotic approach in a bi-dimensional setting for the eddy current problems in linear ferromagnetic materials. Indeed, the finite element solution was imposed as the reference solution in [2], since its corresponding analytical expression was not obvious to calculate.

First, we study the errors of orders one and two in the interval $[R_1, R_2]$ of the dielectric part Ω_0^m , in order to demonstrate the accuracy of our first asymptotic models.

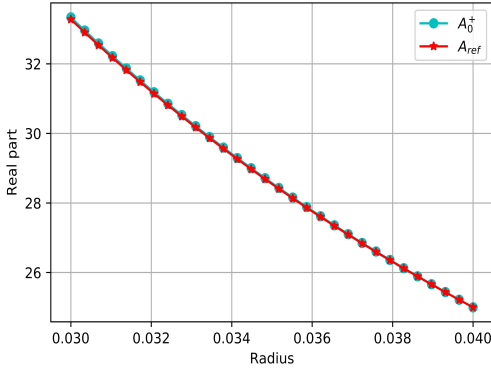


Figure 5: Real parts of A_0^+ and A_{ref}

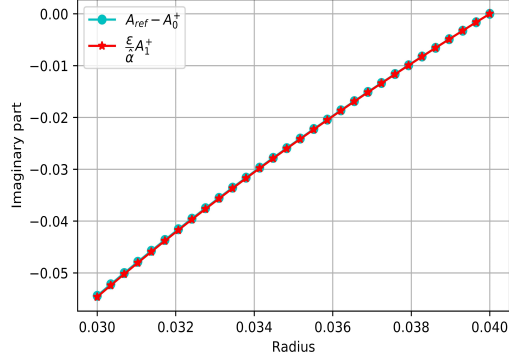


Figure 6: Imaginary parts of $A_{ref} - A_0^+$ and $\frac{\varepsilon}{\alpha} A_1^+$

In Figure 5, the real part of the first asymptotic A_0^+ is coherent with that of the reference solution in Ω_0^m denoted by A_{ref} . Moreover, we plot the error of the first order $A_{ref} - A_0^+$ and its correction $\frac{\varepsilon}{\alpha} A_1^+$ for the imaginary parts in Figure 6. We remark that the corresponding graphs are approximately the same. Noting that we have the same results for the real parts. Thus, we conclude that we have a good precision and correction of the first asymptotic solution. Since A_0^+ is real unlike A_{ref} , then it would be interesting to study the accuracy of the second order solution $A_0^+ + \frac{\varepsilon}{\alpha} A_1^+$. This accuracy is established by the implementation of the second order error $A_{ref} - A_0^+ - \frac{\varepsilon}{\alpha} A_1^+$. Indeed, Fig. 7 ensures that the real and imaginary

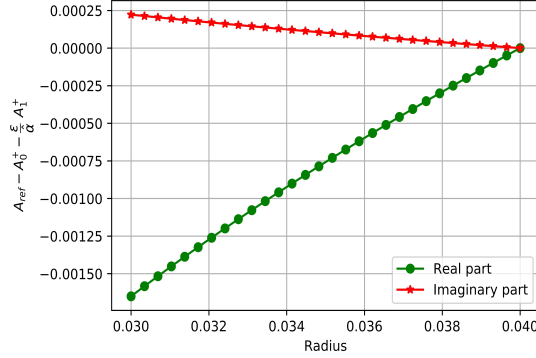


Figure 7: Real and Imaginary parts of the second order error $A_{ref} - A_0^+ - \frac{\epsilon}{\hat{\alpha}} A_1^+$

parts of the latter error are small enough since they are less than 1%. As a consequence, we deduce the good approximation of the asymptotic solution $A_0^+ + \frac{\epsilon}{\hat{\alpha}} A_1^+$.

Next, it is useful in power electronics to study the accuracy of our approach for different values of the physical parameters introduced in our work. In this context, we aim to compare the relative errors of the first asymptotic solutions with that of the impedance solution satisfying problem (32). We plot the convergence graphs with the log-log scale defining the following relative L_1^2 error:

$$Error = \frac{\|A_{ref} - A_{num}\|_{L_1^2([R_1, R_2])}}{\|A_{ref}\|_{L_1^2([R_1, R_2])}}$$

where the norm $\|\cdot\|_{L_1^2([R_1, R_2])}$ is defined as follows

$$\|u\|_{L_1^2([R_1, R_2])} = \left(\int_{[R_1, R_2]} |u|^2 r dr \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Besides, A_{ref} is the reference solution in Ω_0^m , and A_{num} is the first asymptotic model A_0^+ , the second asymptotic model $A_0^+ + \frac{\epsilon}{\hat{\alpha}} A_1^+$, or the impedance solution A_1^ϵ . We shall consider the case of varying relative magnetic permeabilities and frequencies as well. The geometry and the considered physical parameters are depicted in Figures 3-4, and Table 1. We recall that our work is restricted to eddy currents in linear ferromagnetic materials. In this regard, we suppose in Figures 8-9 that the relative magnetic permeabilities are high and between 250 and 16000, and the frequency is 10 Hz. Noting that this latter range was chosen arbitrarily. We ensure in Figure 8 that when the small parameter ϵ decreases, the convergence rate of the relative L_1^2 error is of order 1 for the model A_0^+ and of order 2 for $A_0^+ + \frac{\epsilon}{\hat{\alpha}} A_1^+$. Moreover, the asymptotic solution $A_0^+ + \frac{\epsilon}{\hat{\alpha}} A_1^+$ provides an approximation to the reference solution which is of the same rate as the impedance solution A_1^ϵ , since the corresponding errors exhibited in Figure 9 behave in a similar manner with the variation of ϵ . Now, the relative L_1^2 errors

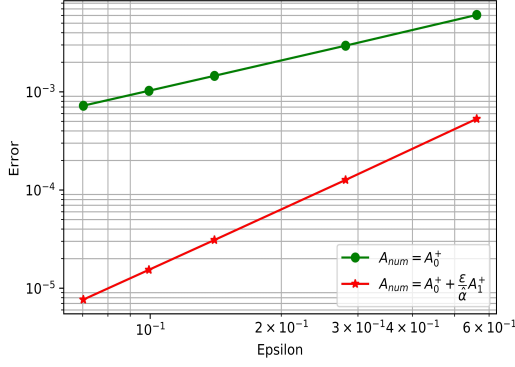


Figure 8: Relative L_1^2 error of the asymptotic solutions of order 1 and 2 for $f = 10$ Hz

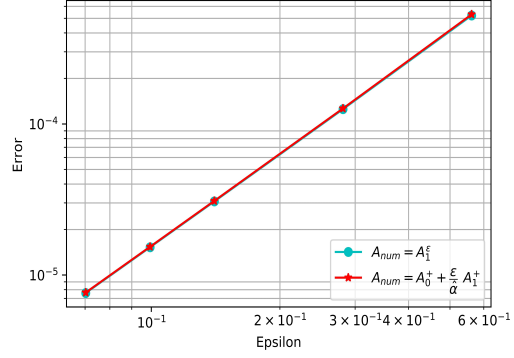


Figure 9: Relative L_1^2 error of the impedance solution and the second order model for $f = 10$ Hz

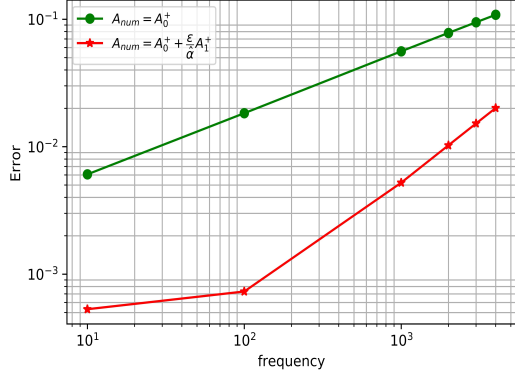


Figure 10: Relative L_1^2 error versus frequency for the asymptotic models for $\mu_r = 250$

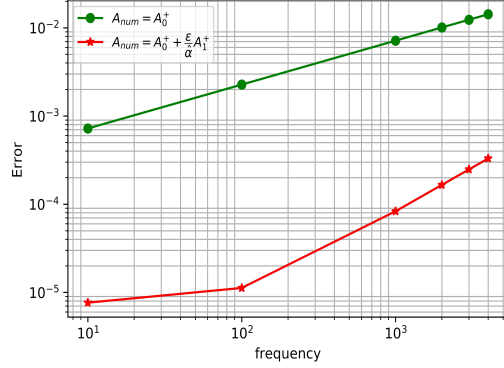


Figure 11: Relative L_1^2 error versus frequency for the asymptotic models for $\mu_r = 16000$

versus frequency for the asymptotic solutions are depicted in Figures 10-11 and for two different relative permeabilities. It is important to recall that our asymptotic approach is accomplished when the parameter $\varepsilon = \frac{1}{\mu_r \delta}$ is small i.e. less than one. In order to achieve this assumption, we must have the frequency between 10 Hz and 30 Hz, for $\mu_r = 250$, and between 10 Hz and 2 kHz for $\mu_r = 16000$. We will focus our analysis on these ranges of frequencies. On the one hand, when $\mu_r = 250$, the first order relative L_1^2 error is less than 1% for a range of frequencies between 10 Hz and 25 Hz. The range of frequencies becomes larger between 10 Hz and 1.6 kHz, when the relative permeability increases to 16000. On the other hand, we get slightly better results when the order of the asymptotic model is two. Indeed, the second order relative L_1^2 error is less than 1% for f in $[10, 30]$, when $\mu_r = 250$, and for a wider range of frequencies $[10, 2000]$ when $\mu_r = 16000$. It is worthwhile to note here that in both cases we remark a slope break for the graph corresponding to the second order error. Precisely, the slope is less important for low frequencies f in $[10, 100]$, so in the case of not enough "small" skin depth δ and when ε tends to zero, than that beyond this latter

range of frequencies. As a future work, it could be interesting to study the solution of higher order, for instance from 30 Hz on when $\mu_r \geq 250$, and from 2 kHz on when $\mu_r \geq 16000$ in order to get a relative L_1^2 error less than 1% for a deeper range of frequencies and when ε must be small as well.

6. Conclusion and perspectives

In conclusion, this paper provides efficient asymptotic models for axisymmetric eddy current problems in linear ferromagnetic materials. Our numerical experiments, established analytically for a special class of unbounded domains, confirm that the proposed asymptotic approach with two components suffices to ensure high accuracy for the case of low frequencies. As a future work, we could highlight further the interest of the present approach by including an additional example where either no analytical solution exists or the solution is significantly more computationally intensive than the proposed method. Moreover, it would be interesting to expand our method in the case of geometries with corner or edge singularities on the conductor interface. Finally, the multiscale approach for the three-dimensional eddy current problem in smooth bounded domains will be tackled in the PhD thesis [1] which is in preparation. It would be useful also to expand our analysis numerically in this case.

Appendix A. Elements of derivation for the multiscale expansion

In this section, we will derive the terms of the asymptotic expansions introduced in (27) at any order $n \in \mathbb{N}$ as well as their governing equations having in mind that the orthoradial component of the magnetic vector potential $A = (A^+, A^-)$ satisfies the following problem

$$\begin{cases} DA^+ = 0 & \text{in } \Omega_0^m, \\ DA^- - 2i\delta^{-2}A^- = 0 & \text{in } \Omega_-^m, \\ BA^+ = \varepsilon\delta BA^- & \text{on } \Sigma^m, \\ A^+ = A^- & \text{on } \Sigma^m, \\ A^+ = g_\theta & \text{on } \Gamma^m \cup \Gamma_0^+, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

and recalling that we deduce directly that the gauge conditions (11) in the cylindrical coordinates are satisfied from notation 3. We remind that the magnetic potential A is concentrated on the boundary Σ^m and decays rapidly inside the conductor. Hence, it is convenient to use a local "normal coordinate system" in a tubular neighborhood \mathcal{U}_-^m of Σ^m inside Ω_-^m .

The tubular neighborhood \mathcal{U}_-^m of Σ^m inside Ω_-^m is represented by the parameterization below

$$\mathcal{U}_-^m = \Psi(\mathbb{T}_L \times [0, h_0]),$$

where Ψ is the change of coordinates defined by

$$\Psi : (\xi, h) \mapsto (r, z),$$

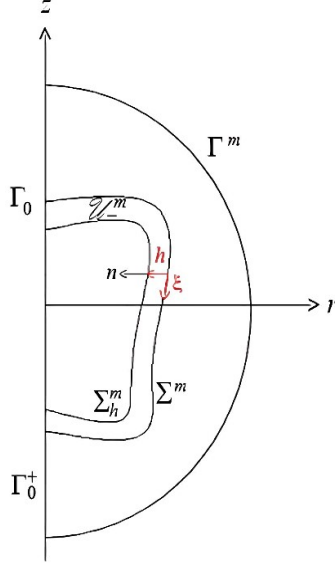


Figure A.12: A tubular neighborhood of Σ^m

noting that $r = r(\xi) - hz'(\xi)$ and $z = z(\xi) + hr'(\xi)$, see for instance Notation 4 for further details about the considered geometrical setting. Recalling that the curvature is defined by the following equality

$$k(\xi) = (r'z'' - z'r'')(\xi).$$

It is important to note that for $h_0 < \frac{1}{\|k\|_\infty}$, the change of coordinates Ψ is a \mathcal{C}^∞ -diffeomorphism from the cylinder $\mathbb{T}_L \times [0, h_0)$ into \mathcal{U}^m . In contrast, when the radius of the interface curvature is very small, for example less than h , we get a rounded corner on Σ^m , and at the limit i.e. when the curvature is infinite we get a sharp corner (see for instance Remark 2 in [2]). In this paper, our interest lies in the case where the interface Σ^m is smooth. The latter cases are beyond the scope of this research.

In the following section, we aim to identify the profiles \mathfrak{A}_n as well as the asymptotic models A_n^+ introduced in (27) at any order $n \in \mathbb{N}$. To do that, we first expand the interior operator D and the boundary operator B in power series of the skin depth δ by applying the change of variables Ψ and the scaling $Y_3 = \frac{h}{\delta}$. Then we plug the resulting expressions in the problem (A.1). Finally, by identifying with the same power in ε , δ , and μ_r , we get the coefficients of the asymptotic expansion satisfying the family of boundary value problems at any order $n \in \mathbb{N}$. For the sake of simplicity, we will explicit the first asymptotics \mathfrak{A}_n and A_n^+ for $n = 0, 1$.

Appendix A.1. Expansion of the operators

In this part, we expand the operators D and B in the same manner as in [11].

Performing the change of the scaling $Y_3 = \frac{h}{\delta}$ and the change of variables Ψ , the interior operator D writes in coordinates (ξ, h) as

$$D = \delta^{-2} \left[\partial_{Y_3}^2 + \delta D_1 + \delta^2 R_\delta \right] \quad (\text{A.2})$$

where $D_1(\xi, Y_3; \partial_\xi, \partial_{Y_3}) = -(k + \frac{z'}{r})(\xi) \partial_{Y_3}$ and R_δ is an operator, which has smooth coefficients in Y_3 and ξ , bounded in δ . Hence, we get

$$\delta^2 D = \sum_{n \geq 0} \delta^n C_n \quad (\text{A.3})$$

where

$$\begin{aligned} C_0 &= \partial_{Y_3}^2, \\ C_1 &= -(k + \frac{z'}{r})(\xi) \partial_{Y_3}. \end{aligned}$$

Similarly, there holds $B = \delta^{-1} \partial_{Y_3} - \frac{z'}{r}(\xi)$ on the interface Σ .

Appendix A.2. Equations of the coefficients of the magnetic potential

In this section, we define $v_\delta(\xi, Y_3) = A^-(x)$ in \mathcal{U}_-^m . After the scaling $h \mapsto Y_3 = \frac{h}{\delta}$ in \mathcal{U}_-^m , the problem (A.1) writes

$$\begin{cases} DA^+ = 0 & \text{in } \Omega_0^m, \\ BA^+ = \varepsilon(\partial_{Y_3} - \delta \frac{z'}{r})v_\delta & \text{on } \Sigma^m, \\ A^+ = g_\theta & \text{on } \Gamma^m \cup \Gamma_0^+, \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

and,

$$\begin{cases} (\partial_{Y_3}^2 - (\frac{1}{\hat{\alpha}})^2)v_\delta \sum_{n \geq 1} \delta^n C_n v_\delta = 0 & \text{in } \mathbb{T}_L \times (0, +\infty), \\ v_\delta = A^+ & \text{on } \mathbb{T}_L \times \{0\}. \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Now we plug the ansatz,

$$A^+ \sim \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\varepsilon}{\hat{\alpha}} \right)^n A_n^+(x) \quad \text{in } \Omega_0^m,$$

and

$$v_\delta \sim \sum_{n \geq 0} \delta^n \mathfrak{A}_n(\xi, Y_3) \quad \text{in } \mathcal{U}_-^m,$$

with $\mathfrak{A}_n \rightarrow 0$ as $Y_3 \rightarrow +\infty$ in (A.4) and (A.5). Then by identification of terms in power of ε , δ and $\frac{1}{\sqrt{\mu r}}$, the profiles \mathfrak{A}_n and A_n^+ satisfy the family of problems coupled by their conditions on the interface Σ^m

$$\begin{cases} DA_n^+ = 0 & \text{in } \Omega_0^m, \\ BA_n^+ = \hat{\alpha}^n (\delta_0^2)^{n-1} (\partial_{Y_3} \mathfrak{A}_{n-1} - \frac{z'}{r}(\xi) \mathfrak{A}_{n-2}) & \text{on } \Sigma^m, \\ A_n^+ = \delta_n^0 g_\theta & \text{on } \Gamma^m \cup \Gamma_0^+, \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

and

$$\begin{cases} \partial_{Y_3}^2 \mathfrak{A}_n - \left(\frac{1}{\hat{\alpha}}\right)^2 \mathfrak{A}_n = -\sum_{p=1}^n C_p \mathfrak{A}_{n-p} & \text{in } \Sigma^m \times (0, +\infty), \\ \mathfrak{A}_n = \left(\frac{1}{\hat{\alpha}\delta_0^2}\right)^n A_n^+ & \text{in } \Sigma^m \times \{0\}, \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

where $\delta_0 = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu_0}}$. In (A.6), δ_n^0 denotes the Kronecker symbol and we assume that $\mathfrak{A}_{-1} = \mathfrak{A}_{-2} = 0$. In the next section, we make explicit the first asymptotics (A_0^+, \mathfrak{A}_0) and (A_1^+, \mathfrak{A}_1) by induction.

Appendix A.3. First terms of the asymptotic expansion

For $n = 0$, we obtain that A_0^+ solves the problem below

$$\begin{cases} DA_0^+ = 0 & \text{in } \Omega_0^m, \\ BA_0^+ = 0 & \text{on } \Sigma^m, \\ A_0^+ = g_\theta & \text{on } \Gamma^m \cup \Gamma_0^+. \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Then according to (A.8), \mathfrak{A}_0 solves the following ordinary differential equation (ODE)

$$\begin{cases} \partial_{Y_3}^2 \mathfrak{A}_0 - \left(\frac{1}{\hat{\alpha}}\right)^2 \mathfrak{A}_0 = 0 & \text{in } \Sigma^m \times (0, +\infty), \\ \mathfrak{A}_0 = A_0^+ & \text{on } \Sigma^m \times \{0\}. \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Then the unique solution of (A.9) such that $\mathfrak{A}_0 \rightarrow 0$ as $Y_3 \rightarrow +\infty$ writes

$$\mathfrak{A}_0(\xi, Y_3) = A_0^+(\tau(\xi))e^{-\frac{Y_3}{\hat{\alpha}}}. \quad (\text{A.10})$$

Next, for $n = 1$, we obtain A_1^+ from (A.10) that solves

$$\begin{cases} DA_1^+ = 0 & \text{in } \Omega_0^m, \\ BA_1^+ = -A_0^+ & \text{on } \Sigma^m, \\ A_1^+ = 0 & \text{on } \Gamma^m \cup \Gamma_0^+. \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Then, according to (A.11), \mathfrak{A}_1 solves the following ODE

$$\begin{cases} \partial_{Y_3}^2 \mathfrak{A}_1 - \left(\frac{1}{\hat{\alpha}}\right)^2 \mathfrak{A}_1 = -\frac{1}{\hat{\alpha}}\left(k + \frac{z'}{r}\right)(\xi)A_0^+ & \text{in } \Sigma^m \times (0, +\infty), \\ \mathfrak{A}_1 = \frac{1}{\hat{\alpha}\delta_0^2}A_1^+ & \text{on } \Sigma^m \times \{0\}. \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Then the unique solution of (A.12) such that $\mathfrak{A}_1 \rightarrow 0$ as $Y_3 \rightarrow +\infty$ writes

$$\mathfrak{A}_1(\xi, Y_3) = \left[\frac{1}{\hat{\alpha}\delta_0^2}A_1^+(\tau(\xi)) + \frac{Y_3}{2}\left(k + \frac{z'}{r}\right)(\xi)A_0^+(\tau(\xi)) \right] e^{-\frac{Y_3}{\hat{\alpha}}}, \quad (\text{A.13})$$

Appendix B. Elements of proofs of the analytical solutions

In this section, we will perform the same procedure as in [4] in order to calculate our analytical solutions (34), (35), and (36). We recall that the electric current flows in the \vec{e}_θ direction and that is uniformly distributed in the \vec{e}_z direction. Noting that, in our cylindrical case, we have $z'(\xi) = 1$ and $r'(\xi) = 0$. Hence, we deduce from Eq. (22) the following expressions of the interior and boundary operators D and B respectively:

$$\begin{aligned} D(r, z; \partial_r, \partial_z)(\cdot) &= \partial_r \left(\frac{1}{r} (\partial_r (r \cdot)) \right), \\ B(\xi; \partial_r, \partial_z)(\cdot) &= - \left(\frac{1}{r} (\partial_r (r \cdot)) \right). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

In the following, we will calculate by order the analytical value of $A = (A^+; A^-)$, A_0^+ , A_1^+ and A_1^- . Taking into account that we only have one connected component and according to (B.1), the first and second equations of the problem (A.1) become

$$\partial_r \left(\frac{1}{r} (\partial_r (r A^+)) \right) (r) = 0 \quad \text{if } R_1 < r < R_2, \quad (\text{B.2})$$

$$- \partial_r \left(\frac{1}{r} (\partial_r (r A^-)) \right) (r) + i\omega\sigma\mu_r\mu_0 A^- = 0 \quad \text{if } 0 < r < R_1, \quad (\text{B.3})$$

with boundary conditions

$$A^-(r) \text{ is bounded as } r \rightarrow 0, \quad (\text{B.4})$$

$$A^+(r) = \frac{k}{r} \quad \text{if } r = R_2. \quad (\text{B.5})$$

Moreover, we have the following transmission conditions

$$A^-(R_1) = A^+(R_1), \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{1}{r} (\partial_r (r A^-)) (R_1) = \mu_r \frac{1}{r} (\partial_r (r A^+)) (R_1). \quad (\text{B.7})$$

Consequently, the model consists of equations (B.2), (B.3) with boundary conditions (B.4), (B.5) and interface conditions (B.6), (B.7). Simple integration of equation (B.2) yields to the following form

$$A^+(r) = \frac{r}{2} a + \frac{b}{r}, \quad (\text{B.8})$$

where a , b and c are constants. Now, in order to solve equation (B.3), we perform the change of variable $x = r\gamma$, in $(0, R_1)$, where $\gamma = \sqrt{\omega\sigma\mu_r\mu_0} e^{i\frac{\pi}{4}}$. Then, we get

$$x^2 \partial_x^2 \tilde{A}^- + x \partial_x \tilde{A}^- - (x^2 + 1) \tilde{A}^- = 0 \quad \text{in } (0, R_1), \quad (\text{B.9})$$

where $\tilde{A}^-(x) = A^-\left(\frac{x}{\gamma}\right)$. Equation (B.9) is a Bessel equation for which its general equation is given by

$$\tilde{A}^-(x) = c\mathcal{I}_1(x) + d\mathcal{K}_1(x), \quad (\text{B.10})$$

where \mathcal{I}_1 and \mathcal{K}_1 are the modified Bessel functions of the first and second kind respectively [30, Chapter 10 - pages 248–250]. By using the boundary condition (B.4), we deduce that $d = 0$. On the other hand, the transmission conditions (B.6) and (B.7), and the boundary condition (B.5) imply the system below

$$\begin{cases} c\mathcal{I}_1(\gamma R_1) = \frac{R_1}{2}a + \frac{b}{R_1}, \\ c[\gamma R_1\mathcal{I}'(\gamma R_1) + \mathcal{I}_1(\gamma R_1)] = \mu_r R_1 a, \\ \frac{R_2}{2}a + \frac{b}{R_2} = \frac{k}{R_2}. \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

Thus, we obtain a linear system of order three for constant unknowns a , b and c . Solving this linear system, we get

$$\begin{aligned} a &= \frac{k}{R_1} \frac{g_1}{g_2}, \\ b &= k - a \frac{R_2^2}{2}, \\ c &= [\mathcal{I}_1^{-1}(\gamma R_1) \frac{(R_1^2 - R_2^2)}{2R_1}] a + \frac{k}{R_1} \mathcal{I}_1^{-1}(\gamma R_1). \end{aligned}$$

Noting that g_1 and g_2 are constants defined as follows

$$\begin{aligned} g_1 &= \mathcal{I}_1(\gamma R_1) + \gamma R_1 \mathcal{I}'_1(\gamma R_1), \\ g_2 &= R_1 \mu_r \mathcal{I}_1(\gamma R_1) - g_1 \frac{(R_1^2 - R_2^2)}{2R_1}. \end{aligned}$$

In a similar manner, we calculate next the analytical values of A_0^+ , A_1^+ and A_1^- . We recall that A_0^+ satisfies the following problem

$$\begin{cases} \partial_r \left(\frac{1}{r} (\partial_r (r A_0^+)) \right) (r) = 0, & \text{if } R_1 < r < R_2, \\ -\frac{1}{r} (\partial_r (r A_0^+)) (r) = 0 & \text{if } r = R_1, \\ A_0^+ = \frac{k}{r} & \text{if } r = R_2. \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

By a simple integration of the first equation of (B.12), we get the following form

$$A_0^+(r) = \frac{r}{2} a_0 + \frac{b_0}{r}, \quad (\text{B.13})$$

where a_0 and b_0 are constants that are deduced from the boundary conditions and satisfies the linear system of order two below

$$\begin{cases} -a_0 = 0, \\ \frac{R_2}{2}a_0 + \frac{b_0}{R_2} = \frac{k}{R_2}. \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

Solving the system (B.14), we get

$$a_0 = 0 \quad \text{and} \quad b_0 = k.$$

Hence we deduce that

$$A_0^+(r) = \frac{k}{r}. \quad (\text{B.15})$$

Similarly, according to (30) and the expression of A_0^+ in (B.15), A_1^+ solves the following system

$$\begin{cases} \partial_r \left(\frac{1}{r} (\partial_r (r A_1^+)) \right) (r) = 0 & \text{if } R_1 < r < R_2, \\ -\frac{1}{r} (\partial_r (r A_1^+)) (r) = -\frac{k}{r} & \text{if } r = R_1, \\ A_1^+(r) = 0 & \text{if } r = R_2. \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

By a simple integration of the first equation of the above system (B.16), A_1^+ satisfies

$$A_1^+(r) = \frac{r}{2}a_1 + \frac{b_1}{r} \quad (\text{B.17})$$

where a_1 and b_1 solves the following linear system deduced from the boundary conditions in (B.16):

$$\begin{cases} -a_1 = -\frac{k}{R_1}, \\ \frac{R_2}{2}a_1 + \frac{b_1}{R_2} = 0. \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

Solving this linear system, we get the constants a_1 and b_1 as follows

$$a_1 = \frac{k}{R_1} \quad \text{and} \quad b_1 = -\frac{kR_2^2}{2R_1}.$$

As a consequence, the second order asymptotic solution in its analytical form writes

$$A_0^+(r) + \frac{\varepsilon}{\hat{\alpha}} A_1^+ = \frac{k}{r} + \frac{\varepsilon}{\hat{\alpha}} \left(\frac{k}{R_1} \frac{r}{2} - \frac{kR_2^2}{2R_1} \frac{1}{r} \right). \quad (\text{B.19})$$

Finally, the impedance solution A_1^ε satisfying (32) is calculated in a similar way as the first asymptotics A_0^+ and A_1^+ .

Acknowledgements

Authors express their gratitude to Ronan PERRUSSEL for his useful remarks and discussions concerning the numerical part.

References

- [1] D. Abou El Nasser El Yafi. *Résolution numérique des équations de diffusion dans des matériaux ferromagnétiques*. PhD thesis, Université de Pau et des pays de l'Adour, *In preparation*.
- [2] D. Abou El Nasser El Yafi, V. Péron, R. Perrussel, and L. Krähenbühl. Numerical study of the magnetic skin effect: Efficient parameterization of 2d surface-impedance solutions for linear ferromagnetic materials. *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, pages 30–51, 2022.
- [3] F. Assous, P. Ciarlet Jr, and S. Labrunie. Solution of axisymmetric maxwell equations. *Mathematical methods in the applied sciences*, 26(10):861–896, 2003.
- [4] A. Bermúdez, D. Gómez, M. C. Muñiz, and P. Salgado. Transient numerical simulation of a thermo-electrical problem in cylindrical induction heating furnaces. *Advances in computational mathematics*, 26(1):39–62, 2007.
- [5] C. Bernardi, M. Dauge, Y. Maday, and M. Azaïez. *Spectral methods for axisymmetric domains*, volume 3. Editions Scientifiques Et, 1999.
- [6] O. Bíró. Edge element formulations of eddy current problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 169(3-4):391–405, 1999.
- [7] M. Bonnet and E. Demaldent. The eddy current model as a low-frequency, high-conductivity asymptotic form of the maxwell transmission problem. *Computers & Mathematics with Applications*, 77(8):2145–2161, 2019.
- [8] A. Bossavit. *Electromagnetisme, en vue de la modelisation*, volume 14. Springer Science & Business Media, 2004.
- [9] A. Buffa, H. Ammari, and J.-C. Nédélec. A justification of eddy currents model for the maxwell equations. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 60(5):1805–1823, 2000.
- [10] F. Buret, M. Dauge, P. Dular, L. Krahenbuhl, V. Péron, R. Perrussel, C. Poignard, and D. Voyer. Eddy currents and corner singularities. *IEEE transactions on magnetics*, 48(2):679–682, 2012.
- [11] G. Caloz, M. Dauge, E. Faou, and V. Péron. On the influence of the geometry on skin effect in electromagnetism. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(9-12):1053–1068, 2011.
- [12] P. Ciarlet and S. Labrunie. Numerical solution of maxwell's equations in axisymmetric domains with the fourier singular complement method. *Journal of Difference Equations and Applications*, 3:113–155, 2011.
- [13] M. Costabel, M. Dauge, and S. Nicaise. Singularities of eddy current problems. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 37(5):807–831, 2003.
- [14] M. Dauge, P. Dular, L. Krähenbühl, V. Péron, R. Perrussel, and C. Poignard. Corner asymptotics of the magnetic potential in the eddy-current model. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 37(13):1924–1955, 2014.
- [15] M. Dauge, E. Faou, and V. Péron. Comportement asymptotique à haute conductivité de l'épaisseur de peau en électromagnétisme. *Comptes Rendus Mathématique*, 348(7-8):385–390, 2010.
- [16] P. Dular. *Modélisation du champ magnétique et des courants induits dans des systèmes tridimensionnels non linéaires*. PhD thesis, ULiège-Université de Liège, 1994.
- [17] P. Dular, V. Péron, R. Perrussel, L. Krähenbühl, and C. Geuzaine. Perfect conductor and impedance boundary condition corrections via a finite element subproblem method. *IEEE transactions on magnetics*, 50(2):29–32, 2014.

- [18] H. Haddar, P. Joly, and H.-M. Nguyen. Generalized impedance boundary conditions for scattering problems from strongly absorbing obstacles: The case of maxwell’s equations. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 18(10):1787–1827, 2008.
- [19] S. Hariharan and R. MacCamy. Integral equation procedures for eddy current problems. *Journal of Computational Physics*, 45(1):80–99, 1982.
- [20] D. Hellmann. *The Python standard library by example*. Addison-Wesley Upper Saddle River, USA, 2011.
- [21] R. Hiptmair. Symmetric coupling for eddy current problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 40(1):41–65, 2002.
- [22] R. Hiptmair. Boundary element methods for eddy current computation. *Boundary element analysis: mathematical aspects and applications*, pages 213–248, 2007.
- [23] M. Issa, J.-R. Poirier, R. Perrussel, O. Chadebec, and V. Péron. Boundary element method for 3d conductive thin layer in eddy current problems. *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 38(2):502–521, 2019.
- [24] L. Krahenbuhl and D. Muller. Thin layers in electrical engineering-example of shell models in analysing eddy-currents by boundary and finite element methods. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29(2):1450–1455, 1993.
- [25] M. Leontovich. Approximate boundary conditions for the electromagnetic field on the surface of a good conductor. *Investigations on radiowave propagation*, 2:5–12, 1948.
- [26] M. Lutz. *Learning python: Powerful object-oriented programming*. O’Reilly Media, Inc., 2013.
- [27] R. MacCamy and E. Stephan. Solution procedures for three-dimensional eddy current problems. *Journal of mathematical analysis and applications*, 101(2):348–379, 1984.
- [28] R. C. MacCamy and E. Stephan. A skin effect approximation for eddy current problems. In *Analysis and Thermomechanics*, pages 175–186. Springer, 1987.
- [29] J. C. Maxwell. *A treatise on electricity and magnetism*, volume 1. Clarendon press, 1873.
- [30] F. W. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, and C. W. Clark. *NIST handbook of mathematical functions*. Cambridge university press, 2010.
- [31] V. Péron. *Modélisation mathématique de phénomènes électromagnétiques dans des matériaux à fort contraste*. PhD thesis, Université Rennes 1, 2009.
- [32] V. Péron. Asymptotic models and impedance conditions for highly conductive sheets in the time-harmonic eddy current model. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 79(6):2242–2264, 2019.
- [33] V. Péron and C. Poignard. On a magnetic skin effect in eddy current problems: the magnetic potential in magnetically soft materials. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 72(4):1–19, 2021.
- [34] R. Perrussel and C. Poignard. Asymptotic expansion of steady-state potential in a high contrast medium with a thin resistive layer. *Applied Mathematics and Computation*, 221:48–65, 2013.
- [35] A. A. Rodríguez and A. Valli. *Eddy Current Approximation of Maxwell Equations: Theory, Algorithms and Applications*, volume 4. Springer Science & Business Media, 2010.
- [36] S. Rytov. Calcul du skin-effect par la méthode des perturbations. *J. Phys. USSR*, 2(3):233–242, 1940.
- [37] K. Schmidt and A. Chernov. A unified analysis of transmission conditions for thin conducting sheets in the time-harmonic eddy current model. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 73(6):1980–2003, 2013.
- [38] E. Stephan. Solution procedures for interface problems in acoustics and electromagnetics. In *Theoretical acoustics and numerical techniques*, pages 291–348. Springer, 1983.
- [39] R. Touzani and J. Rappaz. Mathematical models for eddy currents and magnetostatics. *Mathematical Models for Eddy Currents and Magnetostatics: With Selected Applications, Scientific Computation*, 2014.

Chapitre 4

Étude asymptotique tridimensionnelle

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on applique la méthode asymptotique à *multi-échelle* au potentiel vecteur magnétique en utilisant la même paramétrisation des configurations bidimensionnelle et axisymétrique : ε – *paramétrisation* dans le diélectrique et δ – *paramétrisation* dans le conducteur. Des outils de calculs tensoriels seront introduits afin de nous servir dans les calculs asymptotiques. On illuminera aussi sur l’avantage de l’approche ainsi proposée pour optimiser le temps de calculs pour une plage de paramètre physique. Les calculs asymptotiques abordés au Chapitre 3 révèle une nécessité dans la validation des résultats obtenus. Précisément, afin de vérifier les calculs des développements asymptotiques, on réalise un lien entre les développements tridimensionnels du présent chapitre et unidimensionnel abordé dans le Chapitre 3. Ce lien sera établi en faisant appel à des outils de calculs déployés dans la référence [19] pour le cas des matériaux *non-magnétiques à haute conductivité/fréquence en électromagnétisme*.

Le plan du chapitre est le suivant. On rappelle en section 4.2 des hypothèses adaptées à notre problème étudié. Nous clarifions dans la section 4.3 que la modélisation mathématique du problème, dans sa version forte et variationnelle, en terme du potentielle vecteur magnétique est déduite du champ électrique. Dans la section 4.4, on aborde le développement asymptotique à multi-échelle de la solution d’intérêt, puis nous nous intéressons à identifier les termes asymptotiques en section 4.4.3 des deux premiers ordres et on aborde une synthèse des ordres supérieurs en section 4.4.4. Cette identification soulève une nécessité à faire appel à des objets de

calculs tensoriels présentés en partie 4.4.1. Le développement asymptotique tronqué au premier ordre permet de construire un nouveau modèle dit d'impédance connu dans la littérature par sa précision à approcher la solution avec des coûts de calculs minimales. Des commentaires complémentaires seront ajoutées à cet égard pour valoriser l'utilité des modèles asymptotiques obtenus en comparaison avec le modèle d'impédance construit. Finalement, nous effectuons un lien entre les développements unidimensionnel (Chapitre 3) et tridimensionnel pour vérifier davantage nos développements asymptotiques.

4.2 Présentation du problème

4.2.1 Hypothèse Géométrique

On rappelle le modèle d'intérêt tridimensionnel suivant :

- Ω domaine de \mathbb{R}^3 de frontière Γ ,
- Ω_- inclut dans Ω de frontière régulière notée par Σ ,
- Ω_0 le complémentaire de Ω_- dans Ω i.e. $\Omega_0 = \overline{\Omega_-}$ de frontière Γ et Σ ,
- On peut synthétiser les hypothèses ci-dessus par :

$$\Sigma = \partial\Omega_- \cup \partial\Omega_0, \quad \Omega = \Omega_- \cup \Sigma \cup \Omega_0 \quad \Omega_- \cap \Omega_0 =$$

- On suppose dans ce chapitre que les domaines Ω , Ω_0 , Ω_- sont bornés réguliers et connexes.

4.2.2 Hypothèse physique

On rappelle dans cette partie des données physiques introduites dans les chapitres précédents :

- Ω_0 désigne un matériau isolant parcouru par une source de courant \mathbf{J}_s . Le support de \mathbf{J}_s est ainsi dans Ω_0 ,
- La source de courant \mathbf{J}_s est de divergence nulle i.e. $\text{div } \mathbf{J}_s = 0$,
- Ω_- est un matériau *ferromagnétique*,
- On note par $\underline{\mu}$ et $\underline{\sigma}$ la perméabilité magnétique et la conductivité électrique des matériaux d'intérêts, représentés par les fonctions par morceaux ci-dessous :

$$\underline{\mu} = \begin{cases} \mu_0 & \text{dans } \Omega_0 \\ \mu_r \mu_0 & \text{dans } \Omega_- \end{cases} \quad \text{et} \quad \underline{\sigma} = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ \sigma > 0 & \text{dans } \Omega_-, \end{cases} \quad (4.1)$$

où μ_r est la perméabilité relative qui est dans le cas des matériaux ferroma-

gnétiques un très large paramètre ($\mu_r \gg 1$),

- On travaille dans le régime harmonique en temps avec la convention $e^{i\omega t}$ où $\omega > 0$ est la pulsation exprimée en Hertz [Hz] et i est le nombre imaginaire unitaire,
- On suppose que la pulsation ω et la conductivité électrique σ du conducteur sont des données fixées.

On rappelle qu'on va utiliser dans ce chapitre des développements asymptotiques ayant les mêmes paramétrisations des configurations bidimensionnelles et axisymétriques introduites aux chapitres précédents. Dans cet esprit, on fait appel à des notations indispensables à notre étude asymptotique tridimensionnelle.

4.2.3 Notations et paramètres

On s'intéresse dans notre travail aux paramètres suivants :

- L'épaisseur de peau notée par δ et donnée par la formule suivante :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu_r\mu_0}}. \quad (4.2)$$

Dans le présent problème ce paramètre tend vers zéro,

- On impose le paramètre ci-dessous :

$$\varepsilon = \frac{1}{\mu_r\delta},$$

tendant aussi vers zéro,

- On note aussi par \mathbf{h}^\dagger la restriction d'un champ de vecteur \mathbf{h} sur Ω_\dagger , avec $\dagger = 0, -$.

4.3 Modélisation mathématique du problème

Les équations mathématiques modélisant le problème des courants de Foucault sont généralement gouvernées par le champ électrique et le champ magnétique. En particulier, en régime harmonique on a [33, 74] :

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \mathbf{H} = \underline{\sigma} \mathbf{E} + \mathbf{J}_s & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{curl} \mathbf{E} + i\omega \underline{\mu} \mathbf{H} = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (4.3)$$

Le potentiel magnétique est souvent employé dans les problèmes de courants de Foucault à basse fréquence pour des raisons *mathématiques* plutôt que *physiques* : simplification des calculs mathématiques. On rappelle que le potentiel magnétique

modifié vérifie les identités ci-dessous :

$$\underline{\mu}\mathbf{H} = \text{rot } \mathcal{A}^* \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = -i\omega\mathcal{A}^*. \quad (4.4)$$

On peut ainsi se référer au potentiel vecteur magnétique modifié en appliquant ces deux formules ci-dessus. On élimine "*" en notant le potentiel vecteur magnétique modifié par \mathcal{A} dans le but de simplifier les notations. Dans tout ce qui suit, notre étude asymptotique tridimensionnelle (3D) sera orientée par le potentiel vecteur magnétique modifié. Par ailleurs, les formulations associées à ce champ de vecteur sont déduites de celles du champ électrique. Plus précisément, en remplaçant tout d'abord les équations (4.4) dans la première équation du système (4.3) (loi d'Ampère), on obtient :

$$\begin{aligned} \text{curl curl}\mathcal{A}^+ &= \mu_0\mathbf{J}_s && \text{dans } \Omega_0 \\ \text{curl curl}\mathcal{A}^- + i\omega\mu_0\mu_r\sigma\mathcal{A}^- &= 0 && \text{dans } \Omega_- \end{aligned} \quad (4.5)$$

On déduit de l'équation ci-dessus dans Ω_- :

$$\text{div } \mathcal{A}^- = 0 \quad \text{dans } \Omega_-. \quad (4.6)$$

Pour que le problème (4.5)-(4.6) soit bien posé, on impose des conditions aux bords supplémentaires adaptées à notre étude. On rappelle tout d'abord des conditions associées au champ électrique. Le champ électrique vérifie :

— Les conditions de *jauges* suivantes [74, 28] :

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{E}^+ &= 0 && \text{dans } \Omega_0 \\ \int_{\Sigma} \mathbf{E}^+ \cdot \mathbf{n} dS &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

— Les conditions de *transmissions* suivantes sur Σ [67, 73, 17] :

$$\mathbf{E}^+ \times \mathbf{n} = \mathbf{E}^- \times \mathbf{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}^- \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.8)$$

où \mathbf{n} représente le vecteur normale sur Σ entrant dans Ω_- .

— La condition suivante sur Γ dite *condition de conducteur parfait* :

$$\mathbf{E}^+ \times \mathbf{n} = 0. \quad (4.9)$$

On trouve par conséquent les conditions pour \mathcal{A} en appliquant la formule $\mathbf{E} = -i\omega\mathcal{A}$

dans chacune des conditions (4.7), (4.8) et (4.9) :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathcal{A}^+ &= 0 && \text{dans } \Omega_0 \\
\int_{\Sigma} \mathcal{A}^+ \cdot \mathbf{n} dS &= 0 && \\
\mathcal{A}^+ \times \mathbf{n} &= \mathcal{A}^- \times \mathbf{n} && \text{sur } \Sigma \\
\mathcal{A}^- \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{sur } \Sigma \\
\mathcal{A}^+ \times \mathbf{n} &= 0 && \text{sur } \Gamma.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

4.3.1 Formulation variationnelle

Dans cette partie on s'intéresse à présenter la formulation variationnelle en potentiel vecteur magnétique modifié, ensuite nous allons déduire sa formulation forte. On définit tout d'abord les espaces de Sobolev ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\operatorname{curl}, \Omega) &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \operatorname{curl} \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\} \\
\mathbf{H}_0(\operatorname{curl}, \Omega) &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\operatorname{curl}, \Omega) \mid \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma\} \\
\mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega) &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \operatorname{div} \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\},
\end{aligned} \tag{4.11}$$

avec les normes naturelles ci-dessous :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\operatorname{curl}, \Omega)}^2 = \|\operatorname{curl} \mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2$$

et

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega)}^2 = \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2.$$

En plus, on introduit l'espace de Sobolev suivant :

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{curl}, \Omega) \mid \operatorname{div} \mathbf{u}^+ \in \mathbf{L}^2(\Omega_0), \operatorname{div} \mathbf{u}^+ \in \mathbf{L}^2(\Omega_0), \operatorname{div} \mathbf{u}^- \in \mathbf{L}^2(\Omega_-), \int_{\Sigma} \mathbf{u}^+ \cdot \mathbf{n} dS = 0\},$$

muni de la norme suivante :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}^2 = \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 + \|\operatorname{curl} \mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}^+\|_{0,\Omega_0}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}^-\|_{0,\Omega_-}^2$$

Cet espace est nécessaire à la définition de la solution en potentiel vecteur magnétique modifié ou en champ électrique.

On introduit la notation suivante :

Notation 4.1. Pour $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, on note :

$$\begin{aligned}
a_R(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \nu^2 \int_{\Omega_-} \operatorname{curl} \mathbf{u}^- \cdot \operatorname{curl} \overline{\mathbf{v}^-} \, dx + \int_{\Omega_0} \operatorname{curl} \mathbf{u}^+ \cdot \operatorname{curl} \overline{\mathbf{v}^+} \, dx + \int_{\Omega_0} \operatorname{div} \mathbf{u}^+ \operatorname{div} \overline{\mathbf{v}^+} \, dx \\
&\quad + \int_{\Omega_-} \operatorname{div} \mathbf{u}^- \operatorname{div} \overline{\mathbf{v}^-} \, dx + i\omega\sigma\mu_0 \int_{\Omega_-} \mathbf{u}^- \cdot \overline{\mathbf{v}^-} \, dx.
\end{aligned}$$

La formulation variationnelle du potentiel vecteur magnétique modifié est déduite de celle du champ électrique défini dans la proposition suivante :

Proposition 4.1. *Soit $\mathbf{J}_s \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. Soient \mathbf{E} et \mathbf{H} solutions de (4.3) tel que \mathbf{E} vérifie (4.7), (4.8) et (4.9). Alors $\mathbf{E} \in \mathbf{V}$ vérifiant : Pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, on a :*

$$a_R(\mathbf{E}, \mathbf{v}) = -i\omega\mu_0 \int_{\Omega_0} \mathbf{J}_s \cdot \overline{\mathbf{v}^+} dx. \quad (4.12)$$

La preuve de cette proposition est similaire à [73, Proposition 2.13]. Par suite, on peut déduire la formulation variationnelle associée au potentiel vecteur magnétique en appliquant la formule $\mathbf{E} = -i\omega\mathcal{A}$ dans (4.12) : Trouver $\mathcal{A} \in \mathbf{V}$ tel que pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, on a :

$$a_R(\mathcal{A}, \mathbf{v}) = \mu_0 \int_{\Omega_0} \mathbf{J}_s \cdot \overline{\mathbf{v}^+} dx. \quad (4.13)$$

4.3.2 Formulation forte

En effectuant des intégrations par parties, on peut obtenir une formulation forte pour \mathbf{E} et \mathcal{A} . A cet égard, on introduit la proposition suivante :

Proposition 4.2. *Soit $\mathcal{A} \in \mathbf{V}$, une solution du problème variationnel (4.13), alors \mathcal{A} est une solution au sens de distribution du problème ci-dessous :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{curl curl } \mathcal{A}^+ = \mu_0 \mathbf{J}_s & \text{dans } \Omega_0, \\ \text{curl curl } \mathcal{A}^- + i\omega\sigma\mu_0\mu_r \mathcal{A}^- = 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ \text{div } \mathcal{A}^+ = 0 & \text{dans } \Omega_0, \\ \text{div } \mathcal{A}^- = 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ \mathcal{A}^+ \times \mathbf{n} = \mathcal{A}^- \times \mathbf{n} & \text{sur } \Sigma, \\ \text{curl } \mathcal{A}^+ \times \mathbf{n} = \mu_r^{-1}(\text{curl } \mathcal{A}^- \times \mathbf{n}) & \text{sur } \Sigma, \\ \mathcal{A}^- \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \int_{\Sigma} \mathcal{A}^+ \cdot \mathbf{n} dS = 0 & \\ \mathcal{A}^+ \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} \text{curl curl } \mathcal{A}^+ = \mu_0 \mathbf{J}_s & \text{dans } \Omega_0, \\ \text{curl curl } \mathcal{A}^- + 2i\delta^{-2} \mathcal{A}^- = 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ \text{div } \mathcal{A}^+ = 0 & \text{dans } \Omega_0, \\ \text{div } \mathcal{A}^- = 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ \mathcal{A}^+ \times \mathbf{n} = \mathcal{A}^- \times \mathbf{n} & \text{sur } \Sigma, \\ \text{curl } \mathcal{A}^+ \times \mathbf{n} = \delta\varepsilon(\text{curl } \mathcal{A}^- \times \mathbf{n}) & \text{sur } \Sigma, \\ \mathcal{A}^- \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \int_{\Sigma} \mathcal{A}^+ \cdot \mathbf{n} dS = 0 & \\ \mathcal{A}^+ \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Notons que la preuve de la proposition ci-dessus se fait d'une manière similaire à [73, p.34]. On rappelle les paramètres ε et δ , définis dans la sous-section (4.2.3), sont dédiés pour notre analyse asymptotique. Dans cette optique, on écrit notre problème en termes de ces paramètres afin de simplifier cette analyse.

Dans la section suivante, on s'intéresse à approcher la solution du problème ci-dessus en appliquant une approche asymptotique plus complexe que les chapitres précédents. On souligne que l'équation du potentiel vecteur magnétique dans Ω_0 du problème (4.14) est régulière alors que celle dans Ω_- est singulière. Dans cet esprit, on applique un développement asymptotique régulier d'une part dans Ω_0 et singulier d'autre part dans Ω_- nécessitant un changement d'échelle. On ajoute aussi que la construction de ces développements à multi-échelle suit l'esprit des études asymptotiques en électromagnétisme pour des matériaux *non-magnétiques* à haute conductivité et fréquence [73, 19].

4.4 Développement asymptotique à multi-échelle

On utilise dans ce chapitre la même procédure employée au cas bidimensionnelle (Chapitre 2) voire axisymétrique (Chapitre 3) afin de construire un développement asymptotique pour le potentiel vecteur magnétique. On rappelle que le choix de ce système de coordonnées dépend de la géométrie de l'interface conducteur-diélectrique. Par exemple, si cette interface est plane, on pourra ainsi utiliser les coordonnées *cartésiennes* [73, p. 32]. Par ailleurs, dans le cas d'une interface régulière arbitraire, il est indispensable de se servir d'un système de coordonnées normale adapté au comportement asymptotique du potentiel vecteur magnétique dans le domaine conducteur. Ce système de coordonnées est issue d'un voisinage tubulaire de l'interface Σ défini dans le domaine ferromagnétique. Dans ce sens, on considère les notations suivantes [73, p.56-57] :

- On note par \mathcal{U}_- un *voisinage tubulaire* de Σ dans Ω_- .
- (y_α, h) désigne un système de coordonnées normales où y_α ($\alpha = 1, 2$) représente un système de coordonnées tangent à Σ , et h définit la distance d'une surface Σ_h de \mathbb{R}^3 inclut dans \mathcal{U}_- à l'interface Σ .

On peut ainsi développer le potentiel vecteur magnétique dans Ω_0 et Ω_- après le changement d'échelle :

$$Y_3 = \frac{h}{\delta} \tag{4.15}$$

Ces développements sont représentés par :

$$\mathcal{A}^+(\mathbf{x}) = \mathcal{A}_0^+(\mathbf{x}) + \frac{\varepsilon}{\hat{\alpha}} \mathcal{A}_1^+(\mathbf{x}) + \dots \quad \text{dans } \Omega_0 \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^-(\mathbf{x}) &= \mathcal{A}_0^-(\mathbf{x}; \delta) + \delta \mathcal{A}_1^+(\mathbf{x}; \delta) + \dots \quad \text{dans } \Omega_- \\
&\text{avec } \mathcal{A}_j^-(\mathbf{x}; \delta) = \chi(h) \underline{\mathcal{A}}_j(y_\alpha, Y_3) \\
&\text{et } \underline{\mathcal{A}}_j(y_\alpha, Y_3) \longrightarrow 0 \text{ quand } Y_3 \longrightarrow +\infty.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

On rappelle :

- $\chi(h)$ est une fonction de troncature qui vaut *un* dans un voisinage tubulaire de Σ inclut dans \mathcal{U}_- et *zéro* ailleurs. Son support est ainsi inclut dans \mathcal{U}_- .
 - \mathbf{x} représente les coordonnées cartésiennes.
 - $\hat{\alpha}$ est un nombre complexe qui vaut $\frac{1-i}{2}$.
 - La condition imposée dans (4.17) est cruciale pour modéliser l'effet de peau.
- Notre but ensuite est d'identifier les termes asymptotiques dans le diélectrique et le conducteur qui sont les coefficients des développements asymptotiques (4.16) et (4.17). Cette identification nécessite des objets *tensoriels* déjà définis rigoureusement dans [73, Chapitre 3], et d'une manière plus générale pour des variétés riemanniennes dans [38].

4.4.1 Outils de calculs tensoriels

Convention de sommation (Convention d'*Einstein*)

Très souvent en calculs tensoriels, on utilise la sommation suivante [62] :

$$\sum_{i=1}^n a_i b^i \tag{4.18}$$

tel que :

- a_i est dit terme "*covariant*",
- b^i est dit terme "*contravariant*".

Les notations de covariance et contravariance seront traitées dans les parties suivantes. La convention de sommation propose de s'abstenir du symbole Σ dans (4.18). Autrement dit, on note tout simplement :

$$a_i b^i.$$

Par suite, si une même lettre apparaît deux fois, une fois comme indice de haut et une fois comme indice de bas, cela indique une *sommation*.

Remarque 4.1. *Un indice ne peut pas être apparu plus de deux fois.*

Exemple 4.1. *On prend un simple exemple : le cas de multiplication des matrices :*

$$P = A \times B.$$

Les coefficients de la matrice P seront notés par P_j^i , celles de A par a_j^i et de B par b_j^k de sorte qu'on a :

$$P_j^i = a_k^i b_j^k,$$

où k désigne l'indice muet, et i, j sont les indices libres. On a ainsi une sommation en k .

Composantes covariantes et contravariantes

Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base arbitraire (e_i) et de dimension n . On rappelle que la structure euclidienne sur E induit un isomorphisme γ entre E et son duale E^* . Alors, à chaque élément $u \in E$, on fait correspondre un élément $u^* = \gamma(u)$ de l'espace dual E^* . On a ainsi les écritures suivantes :

$$u = u^i e_i \quad (4.19)$$

$$u^* = u_i e^i \quad (4.20)$$

avec $\{e^i\}$ représente une base duale de $\{e_i\}$ dans E^* . Ainsi, les composantes u^i de u dans la base $\{e_i\}$ sont dites "*contravariantes*", et les composantes u_i de u dans la base $\{e^i\}$ sont dites "*covariantes*".

Remarque 4.2. *Dans une base orthonormée les composantes covariantes et contravariantes se confondent.*

Dans ce travail, on note par :

$$X_i = \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

une base associée aux *systèmes de coordonnées normales* (y_α, h) avec X_α tangents à Σ_h et $X_3 = n(y_\alpha)$. On note aussi $\{dy_i\}$ sa base duale [73, 62].

Remarque 4.3. *Tout champ de vecteur tridimensionnel $\underline{\mathcal{A}}$ dans \mathcal{U}_- est définie par sa composante normale qui est une fonction sur Σ_h noté par \mathbf{a} dépendant de h , et par ses composantes tangentielles qui sont exprimées par une forme linéaire surfacique dite "*composante contravariante*" et notée par \mathcal{A}^α ou par un champ de vecteur surfacique nommé "*composante covariante*" et noté par \mathcal{A}_α , voir [73, Proposition 3.6] et [19, Eq. (A.8)-p.26].*

Notons que dans tout ce qui suit les indices grecs représentent les indices 1,2 alors que les indices latins représentent les indices 1,2,3.

Tenseurs

On rappelle que les tenseurs [59, 62] sont considérés comme une *généralisation* des matrices carrées utilisées dans le but de représenter les applications multilinéaires. Les tenseurs de type (n, m) sont définis par leur composantes $T_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n}$ dans une base donnée arbitraire. Les composantes d'indices supérieurs sont appelés *contravariantes* et d'indices inférieurs sont appelés *covariantes*. Par exemple, un tenseur de type $(0,0)$ est un scalaire, de type $(1,0)$ est un vecteur, de type $(0,1)$ est une forme linéaire.

Les tenseurs sont souvent utilisés en géométrie différentielle [62] afin de définir sur une variété différentielle les notions d'angles, distances, et de volumes. Cela fait l'objet grâce au tenseur *métrique* qui est représenté en géométrie différentielle comme le produit scalaire définie sur l'espace tangent de chaque point. Dans les sous sections suivantes, on s'intéresse aux notions de tenseur métrique, tenseur de courbure et dérivée covariante, voir [73, Chapitre 3] pour plus de détails.

- **Tenseur métrique et tenseur de courbure :** Pour toute variété différentielle M , un espace tangent $T_p M$ associé à M au point p est un espace vectoriel. Pour cela, il est possible de définir un produit scalaire sur cet espace noté souvent par g . L'espace tangent sera dans ce cas un espace euclidien. En plus, g est un tenseur de type $(0,2)$ dit tenseur *métrique* où ses composantes g_{ij} vérifient :

$$g\left(\frac{\partial}{\partial X_i}, \frac{\partial}{\partial X_j}\right)$$

avec $\{\frac{\partial}{\partial X_i}\}$ est une base arbitraire de $T_p M$. En particulier, dans notre système de coordonnées normales (y_α, h) , le tenseur métrique est noté aussi par g et défini par ses composantes [73, p.57] :

$$g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle_{\mathbb{R}^3}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire sur \mathbb{R}^3 et $i, j \in \{1, 2, 3\}$. D'après [73, Remarque 3.3], le tenseur métrique de composantes g_{ij} dépend de h .

Notation 4.2. *La métrique sur Σ_h est la restriction de la métrique g à Σ_h dont les composantes sont notées $a_{\alpha,\beta}(h)$ avec $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$.*

D'après Notation 4.2 et comme le vecteur normal \vec{n} est unitaire orthogonal à la base de vecteur (X_α) du plan tangent à Σ , il en résulte [73, p.58] :

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{\alpha\beta}(h) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dans } \mathcal{U}_-. \quad (4.21)$$

On peut déduire de (4.21) que le déterminant est *non nul*. Par conséquence,

l'inverse du tenseur métrique existe et on le représente par ses composantes g^{kl} .

Remarque 4.4. *Grâce au tenseur métrique et son inverse sur Σ_h , il est possible de monter et descendre les indices des champs de tenseurs. Par exemple, en utilisant la remarque 4.3, on a :*

$$\mathcal{A}^\alpha = a^{\alpha\beta}(h)\mathcal{A}_\beta \quad (4.22)$$

$$\mathcal{A}_\alpha = a_{\alpha\beta}(h)\mathcal{A}^\beta. \quad (4.23)$$

D'autre part, on note par $b_{\alpha\beta}(h)$ les composantes du *tenseur de courbure* qui sont définies grâce au tenseur métrique [73, p.58] :

$$b_{\alpha\beta}(h) = -\frac{1}{2}\partial_3 g_{\alpha\beta}(h)$$

tel que ∂_3 désigne la dérivée partielle par rapport à $h = y_3$.

D'après Remarque 4.4 on peut monter et descendre les indices du tenseur de courbure grâce au tenseur métrique et son inverse. Par exemple, on a : $b_\beta^\alpha(h) = a^{\alpha\sigma}(h)b_{\sigma\beta}(h)$. En plus, la courbure moyenne de Σ est notée par H et satisfait : $H = \frac{1}{2}b_\alpha^\alpha(0)$. Pour la simplicité, on note dans la suite les tenseurs sur Σ : $a_{\alpha\beta}(0)$, $b_{\alpha\beta}(0)$ et $b_\alpha^\beta(0)$ par $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ et b_α^β .

Remarque 4.5. *Le tenseur métrique se développe en puissance de h [19, p.26] :*

$$a_{\alpha\beta}(h) = a_{\alpha\beta} - 2b_{\alpha\beta}h + b_\alpha^\gamma h^2, \quad (4.24)$$

ainsi que son inverse :

$$a^{\alpha\beta}(h) = a^{\alpha\beta} + 2b^{\alpha\beta}h + \mathcal{O}(h^2). \quad (4.25)$$

— **Dérivées covariantes :** Tout d'abord, la dérivée covariante d'un tenseur de type (s, r) d'une variété différentielle M est définie par exemple dans [62] avec ses propriétés. Dans notre travail, on s'intéresse à la dérivée covariante sur Σ_h introduit ci-dessous.

Définition 4.1. *Soit A une 1-forme tridimensionnelle définie dans \mathcal{U}_- par ses composantes \mathcal{A}_i dans la base dy^i en coordonnées normales. La dérivée covariante de \mathcal{A} sur Σ est noté par $D^h\mathcal{A}$ dont ses composantes s'écrivent :*

$$D_\alpha^h\mathcal{A}_\beta = \partial_\alpha\mathcal{A}_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(h)\mathcal{A}_\gamma,$$

où $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ désigne le symbole de Christoffel (voir [73, p.58-(3.10)] et [39]).

Dans ce qui suit, on identifie les premiers termes asymptotiques $(\mathcal{A}_j^+, \underline{\mathcal{A}}_j^-)$ pour $j = 0, 1$ et on aborde une synthèse des termes d'ordres supérieures. Tout d'abord, on fait appel aux éléments de dérivation des modèles asymptotique à tout ordre.

4.4.2 Procédure de calculs des termes asymptotiques

Notre but dans cette section est de clarifier la procédure de calculs des termes asymptotiques $(\mathcal{A}_j^+, \underline{\mathcal{A}}_j^-)$ à tout ordre j . On suit l'esprit de la technique des éléments de dérivation des termes asymptotiques abordée en électromagnétisme pour le cas des matériaux non magnétiques, voir par exemple [19, Appendix B.1-B.2]. Tout d'abord, on développe les opérateurs dans le conducteur en puissance de δ après un changement d'échelle. Ensuite, on injecte ces équations dans le problème des courants de Foucault (4.14) ainsi que les développements asymptotiques (4.16) et (4.17). Finalement, en identifiant en puissance de μ_r , ε et δ , on déduit par récurrence les termes asymptotiques [19, 74, 75].

Développement des opérateurs

D'après [19, p.26-27] et [73, Chapitre 3-4] on exprime les opérateurs "curl curl" et "curl $\times \mathbf{n}$ " en coordonnées normales. Ensuite par le changement d'échelle dans la direction de h :

$$Y_3 = \frac{h}{\delta},$$

on développe ces opérateurs en puissance de δ . Dans ce sens, en notant \mathcal{L} et \mathcal{B} les opérateurs "curl curl" et "curl $\times \mathbf{n}$ " en paramétrisation normale respectivement, on obtient leurs développement en puissance de δ :

$$\mathcal{L}[\delta] = \delta^{-2} \sum_{n=0}^{+\infty} \delta^n \mathcal{L}^n. \quad (4.26)$$

Dans ce travail, on s'intéresse aux termes de premiers ordres pour \mathcal{L}^n définis ci-dessous par ses composantes surfaciques :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\alpha^0(\underline{\mathcal{A}}) = -\partial_3^2 \mathcal{A}_\alpha + 2i\delta^{-2} \mathcal{A}_\alpha \\ \mathcal{L}_\alpha^1(\underline{\mathcal{A}}) = -2b_\alpha^\beta \partial_3 \mathcal{A}_\beta + \partial_3 D_\alpha \mathbf{a} + b_\beta^\beta \partial_3 \mathcal{A}_\alpha, \end{cases} \quad (4.27)$$

et ses composantes transverses :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_3^0(\underline{\mathcal{A}}) = 2i\mathbf{a} \\ \mathcal{L}_3^1(\underline{\mathcal{A}}) = \gamma_\alpha^\alpha (\partial_3 \mathbf{a}) + b_\beta^\beta \partial_3 \mathbf{a}. \end{cases} \quad (4.28)$$

Notons qu'on désigne par $\gamma_{\alpha\beta}(\underline{\mathcal{A}}) = \frac{1}{2}(D_\alpha \mathcal{A}_\beta + D_\beta \mathcal{A}_\alpha) - b_{\alpha\beta} \mathbf{a}$ les composantes du changement métrique sur Σ de sorte qu'on a grâce au tenseur métrique : $\gamma_\alpha^\alpha = a^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}$ [73, 19, 74]. De plus, on note dans la suite par $a_{\alpha\beta}$, $a^{\alpha\beta}$ et $b_{\alpha\beta}$ sont les composantes des tenseurs métrique et son inverse, ainsi que le tenseur de courbure sur l'interface Σ . On rappelle qu'on note par ∂_3 la dérivée partielle par rapport à Y_3 et D_α la dérivée covariante sur l'interface Σ .

D'autre part, d'après [19, p. 30], on développe l'opérateur \mathcal{B} en puissance de δ après le changement d'échelle dans le voisinage tubulaire \mathcal{U}_- , de sorte qu'on a :

$$\mathcal{B}[\delta] = \delta^{-1} \mathcal{B}^0 + \mathcal{B}^1 \quad (4.29)$$

Finalement, en notant \mathcal{B}_α^n les composantes surfaciques de \mathcal{B}^n , il en résulte :

$$\mathcal{B}_\alpha^0(\underline{\mathcal{A}}) = \partial_3 \mathcal{A}_\alpha \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_\alpha^1(\underline{\mathcal{A}}) = -D_\alpha \mathbf{a}.$$

Équations des coefficients

En substituant (4.26) et (4.29) ainsi que les développements asymptotiques (4.17)-(4.16) dans notre problème (4.14), puis en identifiant en puissance de $\frac{1}{\sqrt{\mu_r}}$, δ et ε , on déduit le système des coefficients :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{curl curl } \mathcal{A}_n^+ = \delta_n^0 \mu_0 \mathbf{J}_s & \text{dans } \Omega_0, \\ \text{div } \mathcal{A}_n^+ = 0 & \text{dans } \Omega_0, \\ \left(\frac{1}{\hat{\alpha}}\right)^2 \mathbf{a}_n = - \sum_{j=0}^n \mathcal{L}_3^{n-j}(\underline{\mathcal{A}}_j) & \text{sur } \Sigma \times I \\ \mathcal{L}_\alpha^0(\underline{\mathcal{A}}_n) = -\partial_3^2 \mathcal{U}_{n,\alpha} + \left(\frac{1}{\hat{\alpha}}\right)^2 \mathcal{U}_{n,\alpha} = - \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{L}_\alpha^{n-j}(\underline{\mathcal{A}}_j) & \text{sur } \Sigma \times I, \\ (\text{curl } \mathcal{A}_{n+1}^+ \times \mathbf{n})_\alpha = \hat{\alpha}^{n+1} (\delta_0^2)^n (\partial_3 \mathcal{A}_{n,\alpha} - D_\alpha \mathbf{a}_{n-1}) & \text{sur } \Sigma, \\ \mathcal{A}_n = \left(\frac{1}{\hat{\alpha} \delta_0^2}\right)^n (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_n \times \mathbf{n}) & \text{sur } \Sigma, \\ \mathcal{A}_n^+ \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \int_\Sigma \mathcal{A}_n^+ \cdot \mathbf{n} dS = 0, & \end{array} \right. \quad (4.30)$$

où \mathbf{a}_n est la trace de \mathcal{A}_n^+ sur Σ et $I = (0, +\infty)$. On suppose à présent que $\underline{\mathcal{A}}_{-1} = 0$ et $\mathbf{a}_{-2} = \mathbf{a}_{-1} = 0$. On rappelle que $\delta_0 = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu_0}}$ et $\hat{\alpha}$ est un nombre complexe vérifiant $\frac{1-i}{2}$. L'identification des termes asymptotiques à tout d'ordre se fait par récurrence dans la partie suivante.

4.4.3 Identification des premiers termes asymptotiques

Dans cette partie, on identifie les premiers termes asymptotiques $(\mathcal{A}_0^+, \underline{\mathcal{A}}_0)$ et $(\mathcal{A}_1^+, \underline{\mathcal{A}}_1)$ par récurrence. Pour $n = 0$, le premier terme \mathcal{A}_0^+ dans Ω_0 résout le problème suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathcal{A}_0^+ = \mu_0 \mathbf{J}_s & \text{dans } \Omega_0 \\ \operatorname{div} \mathcal{A}_0^+ = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ \operatorname{curl} \mathcal{A}_0^+ \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \mathcal{A}_0^+ \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \int_{\Sigma} \mathcal{A}_0^+ \cdot \mathbf{n} dS = 0. \end{cases} \quad (4.31)$$

Par suite, on trouve \mathcal{A}_0 en résolvant l'EDO suivante

$$\begin{cases} \partial_3^2 \mathcal{A}_0(y_\beta, Y_3) - \left(\frac{1}{\hat{\alpha}}\right)^2 \mathcal{A}_0(y_\beta, Y_3) = 0, & (y_\beta, Y_3) \in \Sigma \times I, \\ \mathcal{A}_0(y_\beta, 0) = (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_0 \times \mathbf{n})(y_\beta, 0) & y_\beta \in \Sigma, \end{cases} \quad (4.32)$$

l'unique solution $\mathcal{A}_0(y_\alpha, \frac{h}{\delta}) \rightarrow 0$ quand $Y_3 = \frac{h}{\delta} \rightarrow +\infty$ est

$$\mathcal{A}_0(y_\beta, Y_3) = \mathbf{a}_0(y_\beta) e^{-\frac{Y_3}{\hat{\alpha}}} \quad (4.33)$$

tel que \mathbf{a}_j est la composante tangentielle de \mathbf{a}_j i.e. $\mathbf{a}_j = \mathbf{n} \times (\mathbf{a}_j \times \mathbf{n}), \forall j \in \mathbb{N}$. En plus, on a d'après la troisième équation de (4.30) : $\mathbf{a}_0 = 0$.

On déduit alors l'expression de la première profile $\underline{\mathcal{A}}_0$:

$$\underline{\mathcal{A}}_0(y_\beta, Y_3) = \mathbf{a}_0(y_\beta) e^{-\frac{Y_3}{\hat{\alpha}}}. \quad (4.34)$$

Ensuite, pour $n = 1$, on déduit d'après l'expression de $\underline{\mathcal{A}}_0$ et le système (4.14) que \mathcal{A}_1^+ résout le problème suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathcal{A}_1^+ = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ \operatorname{div} \mathcal{A}_1^+ = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ \operatorname{curl} \mathcal{A}_1^+ \times \mathbf{n} = -\mathcal{A}_0^+ & \text{sur } \Sigma, \\ \mathcal{A}_1^+ \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \int_{\Sigma} \mathcal{A}_1^+ \cdot \mathbf{n} dS = 0. \end{cases} \quad (4.35)$$

Enfin, la composante tangentielle $\mathcal{A}_{1,\alpha}$ du deuxième profile résout l'EDO ci-dessous :

$$\begin{cases} \partial_3^2 \mathcal{A}_{1,\alpha}(\cdot, Y_3) - \left(\frac{1}{\hat{\alpha}}\right)^2 \mathcal{A}_{1,\alpha}(\cdot, Y_3) = -2b_\alpha^\sigma \partial_3 \mathcal{A}_{0,\sigma}(\cdot, Y_3) + H \partial_3 \mathcal{A}_{0,\alpha}(\cdot, Y_3), & Y_3 \in I, \\ \mathcal{A}_{1,\alpha}(\cdot, 0) = \left(\frac{1}{\hat{\alpha}\delta_0^2}\right) \mathbf{a}_{1,\alpha}(\cdot, 0). \end{cases} \quad (4.36)$$

L'unique solution $\mathcal{A}_{1,\alpha}(y_\beta, Y_3) \rightarrow 0$ quand $Y_3 = \frac{h}{\delta} \rightarrow +\infty$ est

$$\mathcal{A}_{1,\alpha}(y_\beta, Y_3) = \left[\frac{1}{\hat{\alpha}\delta_0^2} \mathbf{a}_{1,\alpha} + Y_3(H\mathbf{a}_{0,\alpha} - b_\alpha^\sigma \mathbf{a}_{0,\sigma}) \right] (y_\beta) e^{-\frac{Y_3}{\hat{\alpha}}}, \quad (4.37)$$

où on note par $\mathbf{a}_{j,\alpha}$ composante covariante de \mathbf{a}_j , $\forall j \geq 0$, et la composante normale \mathbf{a}_1 satisfait l'égalité ci-dessous :

$$\mathbf{a}_1(y_\beta, Y_3) = \hat{\alpha} D_\alpha \mathbf{a}_0^\alpha(y_\beta) e^{-\frac{Y_3}{\hat{\alpha}}}. \quad (4.38)$$

où \mathbf{a}_0^α représente la composante contravariante de \mathbf{a}_0 .

D'après Remarque 4.4 et Remarque 4.5, on déduit après le changement d'échelle $h = \delta Y_3$, les composantes contravariantes suivantes :

$$\mathcal{A}_1^\alpha = a^{\alpha\beta} \mathcal{A}_{1,\beta} + 2Y_3 b^{\alpha\beta} \mathcal{A}_{0,\beta}. \quad (4.39)$$

Ainsi, d'après (4.34), (4.37), et (4.39), les composantes \mathcal{A}_1^α s'écrivent :

$$\mathcal{A}_1^\alpha(y_\beta, Y_3) = \left[\frac{1}{\hat{\alpha}\delta_0^2} \mathbf{a}_1^\alpha + Y_3(H\mathbf{a}_0^\alpha + b_\sigma^\alpha \mathbf{a}_0^\sigma) \right] (y_\beta) e^{-\frac{Y_3}{\hat{\alpha}}} \quad (4.40)$$

avec $\alpha = 1, 2$, voir [19, p. 29] pour un résultat similaire.

Application : Modèle d'impédance

En utilisant le développement asymptotique (4.16) tronqué à l'ordre un, on pose $\mathcal{A}_{1,\varepsilon}^+ := \mathcal{A}_0^+ + \frac{\varepsilon}{\hat{\alpha}} \mathcal{A}_1^+$ [75]. Il en résulte ensuite que $\mathcal{A}_{1,\varepsilon}^+$ résout :

$$\text{curl curl } \mathcal{A}_{1,\varepsilon}^+ = \mu_0 \mathbf{J}_s \quad (4.41)$$

avec la condition suivante sur Σ :

$$\text{curl} \mathcal{A}_{1,\varepsilon}^+ \times \mathbf{n} + \frac{\varepsilon}{\hat{\alpha}} \mathcal{A}_{1,\varepsilon}^+ = \frac{\varepsilon^2}{\hat{\alpha}} \mathcal{A}_{1,\varepsilon}^+. \quad (4.42)$$

En négligeant le terme d'ordre 2 du membre droite de (4.42), il en résulte *la condition de Leontovich* ci-dessous :

$$\text{curl } \mathcal{A}_1^\varepsilon \times \mathbf{n} + \frac{\varepsilon}{\hat{\alpha}} \mathcal{A}_1^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Sigma. \quad (4.43)$$

Ce résultat ci-dessus est inspirée des conditions d'impédances bidimensionnelles *théorique* pour le problème des courants de Foucault en ferromagnétisme [75, p. 18] à *l'ordre deux*. On déduit ainsi un modèle plus simple à résoudre que (4.14) : *le modèle*

d'impédance. Ce modèle résulte des modèles asymptotiques (4.31) et (4.35) et s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{curl curl } \mathcal{A}_1^\varepsilon = \mu_0 \mathbf{J}_s & \text{dans } \Omega_0, \\ \text{div } \mathcal{A}_1^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_0, \\ \text{curl } \mathcal{A}_1^\varepsilon \times \mathbf{n} + \frac{\varepsilon}{\hat{\alpha}} \mathcal{A}_1^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \mathcal{A}_1^\varepsilon \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \int_\Sigma \mathcal{A}_1^\varepsilon \cdot \mathbf{n} dS = 0. \end{array} \right. \quad (4.44)$$

On souligne que la condition d'impédance sur Σ dépend des paramètres μ_r et ω ce qui requiert un temps de calculs voire de mémoire additifs en comparaison avec notre approche asymptotique. D'où on conclut l'avantage de notre développement asymptotique à l'ordre ε .

4.4.4 Identification des termes asymptotiques d'ordres supérieures

Dans Ω_0 , d'après (4.30)₅, on a

$$(\text{curl } \mathcal{A}_j^+ \times \mathbf{n})_\alpha = \partial_3 \mathcal{A}_{j-1, \alpha} - D_\alpha \mathbf{a}_{j-2} \quad \text{sur } \Sigma, \quad (4.45)$$

et la solution \mathcal{A}_j^+ du problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{curl curl } \mathcal{A}_j^+ = \mu_0 \mathbf{J}_s & \text{dans } \Omega_0, \\ \text{div } \mathcal{A}_j^+ = 0 & \text{dans } \Omega_0, \\ (\text{curl } \mathcal{A}_j^+ \times \mathbf{n})_\alpha = \mathcal{G}_{j, \alpha} & \text{sur } \Sigma, \\ \mathcal{A}_j^+ \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \int_\Sigma \mathcal{A}_j^+ \cdot \mathbf{n} = 0 \end{array} \right. \quad (4.46)$$

où $\mathcal{G}_{j, \alpha} = \hat{\alpha}^{n+1} (\delta_0^2)^n (\partial_3 \mathcal{A}_{j-1, \alpha} - D_\alpha \mathbf{a}_{j-2})$ sur Σ , $\forall j \geq 2$.

D'autre part, on a d'après (4.30)₃ : $\mathbf{a}_j = -\hat{\alpha}^{-2} \sum_{k=1}^{j-1} L_3^{j-k}(\underline{\mathcal{A}}_k)$ sur $\Sigma \times I$. Ainsi d'après les équations (4.30)₄-(4.30)₆, le terme $\mathcal{A}_{\alpha, j}$ est solution de l'EDO en Y_3 suivante

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_3^2 \mathcal{A}_{j, \alpha}(y_\beta, Y_3) - \left(\frac{1}{\hat{\alpha}}\right)^2 \mathcal{A}_{j, \alpha}(y_\beta, Y_3) = \sum_{k=0}^{j-1} \mathcal{L}_\alpha^{j-k}(\underline{\mathcal{A}}_k) & \text{sur } \Sigma \times I, \\ \mathcal{A}_{j, \alpha}(y_\beta, 0) = \mathbf{a}_{j, \alpha}(y_\beta, 0) & \text{sur } \Sigma. \end{array} \right. \quad (4.47)$$

En effet, (4.47) admet une unique solution de la forme suivante

$$\mathcal{A}_{\alpha, j}(y_\beta, Y_3) = [a_{\alpha, j}^0(y_\beta) + Y_3 a_{\alpha, j}^1(y_\beta) + \cdots + Y_3^j a_{\alpha, j}^j(y_\beta)] e^{-\frac{Y_3}{\hat{\alpha}}}$$

tel que $\forall k = 1, \dots, j$ les fonctions $a_{\alpha,j}^k$ sont des combinaisons linéaires des composantes tangentielles des termes $\mathcal{A}_{1|\Sigma}^+$, pour $0 \leq l \leq j$, en particulier la fonction $a_{\alpha,j}^0 = a_{j,\alpha}$. De plus, les coefficients de ces combinaisons linéaires dépendent uniquement de la géométrie de l'interface Σ .

Ainsi que $\forall j \geq 2$ et $\forall k \leq j - 1$, il existe des fonctions c_j^k tel que $\forall (y_\beta, Y_3) \in \Sigma \times I$, on a

$$\mathbf{a}_j(y_\beta, Y_3) = [c_j^0(y_\beta) + Y_3 c_j^1(y_\beta) + \dots + Y_3^{j-1} c_j^{j-1}(y_\beta)] e^{-\frac{Y_3}{\alpha}},$$

les fonctions $c_j^k(y_\beta)$ sont des combinaisons linéaires de dérivées tangentielles d'ordre au plus 2 des termes $a_{l,\alpha}(y_\beta, 0)$ pour $l \leq j$ ayant des coefficients dépendant uniquement de Σ .

4.5 Lien entre les développements asymptotiques 3D et 1D

La résolution analytique voire numérique de notre problème 3D et ses modèles asymptotiques associés (4.31) et (4.35) requiert des aspects computationnels complexes autant en calculs mathématiques qu'en implémentation numérique. A cet égard, dans le but de vérifier notre développement asymptotique à multi-échelle, on se focalise dans cette partie à faire un lien entre les termes asymptotiques tri-dimensionnel et axisymétrique. Plus précisément, notre intérêt dans cette partie se repose à relier les profils asymptotiques \mathfrak{A}_0 et \mathfrak{A}_1 (voir Chapitre 2) aux profils générales \mathcal{A}_0^α et \mathcal{A}_1^α définis dans (4.34) et (4.40). Ainsi, il serait naturel de déduire directement les modèles asymptotiques 1D dans l'isolant à partir des modèles 3D. Par ailleurs, on remarque que les expressions des profils asymptotiques du potentiel vecteur magnétique 3D voire 1D sont similaires à celles du champ magnétique [19, (A.22), (A.23)-(A.26)] établis pour le cas des matériaux non-magnétiques à haute conductivité et fréquence en électromagnétisme. Pour cela, on revisite des techniques de calculs abordés en Annexe B.2 de ce dernier problème [19].

4.5.1 Outils de calculs

Dans cette partie, on impose des éléments nécessaires à aboutir au lien entre les développements 3D et 1D.

Rappel de notations

Rappelons tout d'abord des notations suivantes :

- Dans la base (\vec{e}_r, \vec{e}_z) , on note $\tau(\xi) = (x(\xi), z(\xi))$ où $\xi \in (0, L)$ avec L la longueur de Σ^m (Σ^m est l'interface du domaine méridien Ω^m).
- Le vecteur normal $n(\xi)$ au point $\tau(\xi)$ s'écrit :

$$n(\xi) = (-z'(\xi), r'(\xi)).$$

- (ξ, h) est un système de coordonnées normales issue du voisinage tubulaire \mathcal{U}_-^m de Σ^m dans le domaine méridien Ω_-^m du conducteur.

Systèmes de coordonnées

Ensuite, on s'intéresse à construire un système de coordonnées normales (y_α, h) issue de \mathcal{U}_- à partir du système (ξ, h) . On impose ainsi $(y_\alpha) := (\xi, \theta)$ un système de coordonnées sur Σ induit par (ξ, h) . On adopte à présent les champs de vecteurs tangents à Σ_h :

$$\mathbf{x}_1(h) = (r'(\xi) - hz''(\xi))\vec{e}_r + (z'(\xi) + hr''(\xi))\vec{e}_z, \quad (4.48)$$

$$\mathbf{x}_2(h) = (r(\xi) - hz'(\xi))\vec{e}_\theta, \quad (4.49)$$

et le champ de vecteur normal : $\mathbf{x}_3(h) = \mathbf{n}(\xi)$. Par suite, un champ de vecteur $\underline{\mathcal{A}} : (y_\alpha, h) \mapsto \underline{\mathcal{A}}(y_\alpha, h)$ dans \mathcal{U}_- s'écrit :

$$\underline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^\alpha \mathbf{x}_\alpha(h) + \mathbf{a}\vec{n}, \quad (4.50)$$

et s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\hat{\mathcal{A}}(r, \theta, z) = \mathcal{A}_r(r, \theta, z)\vec{e}_r + \mathcal{A}_\theta(r, \theta, z)\vec{e}_\theta + \mathcal{A}_z(r, \theta, z)\vec{e}_z. \quad (4.51)$$

Calculs des tenseurs

A présent, on calcule les tenseurs métrique et son inverse ainsi que le tenseur de courbure dans le système de coordonnées construit dans la sous section précédente. Tout d'abord, d'après la définition du tenseur métrique :

$$g_{ij}(h) = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle_{\mathbb{R}^3},$$

et d'après (4.48) et (4.49), on déduit [19, p. 35]

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} (r'(\xi) - hz''(\xi))^2 & 0 & 0 \\ 0 & (r(\xi) - hz'(\xi))^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dans } \mathcal{U}_-. \quad (4.52)$$

On peut ensuite déduire l'expression de chacune des composantes du tenseur de courbure par la formule suivante : $b_{\alpha\beta}(h) = -\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}$. D'après Remarque 4.5, il en résulte sur Σ aussi :

— Le tenseur de courbure sur Σ est *diagonal* : [19]

$$(b_{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} k(\xi) & 0 \\ 0 & r(\xi)z'(\xi) \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

avec $k(\xi)$ représente la courbure de Σ , voir [19, (B.2)].

— Le tenseur métrique et son inverse sont *diagonaux* :

$$(a_{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2(\xi) \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

et

$$(a^{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2}(\xi) \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

Ainsi, on déduit directement d'après la Remarque 4.4 :

$$(b_{\beta}^{\alpha}) = \begin{bmatrix} k(\xi) & 0 \\ 0 & \frac{z'}{r}(\xi) \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

et par suite il en résulte l'expression de la courbure moyenne H de Σ :

$$H = \frac{1}{2}(k + \frac{z'}{r})(\xi). \quad (4.57)$$

4.5.2 Le développement 1D via le développement 3D

On rappelle qu'on a obtenu au Chapitre 2 que le potentiel vecteur magnétique est axisymétrique et orthoradiale i.e. $\hat{\mathcal{A}} = (0, A_{\theta}, 0)$. Par suite, il est naturel d'après (4.49) ainsi que les expressions du potentiel vecteur magnétique en coordonnées normales dans \mathcal{U}_- (4.50) et en coordonnées cylindriques (4.51) d'obtenir l'identité suivante :

$$(r(\xi) - hz'(\xi))\mathcal{A}^2 = A_{\theta}.$$

Ensuite, par le changement d'échelle $Y_3 = \delta^{-1}h$, il en résulte :

$$(r(\xi) - \delta Y_3 z'(\xi)) \mathcal{A}^2 = A_\theta. \quad (4.58)$$

On introduit les développements asymptotiques :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^2 &= \mathcal{A}_0^2(y_\alpha, Y_3) + \delta \mathcal{A}_1^2(y_\alpha, Y_3) + \mathcal{O}(\delta^2) \\ A_\theta &= \mathfrak{A}_0(\xi, Y_3) + \delta \mathfrak{A}_1(\xi, Y_3) + \mathcal{O}(\delta^2) \end{aligned} \quad (4.59)$$

dans l'équation (4.58). Ensuite, par identification en puissance de δ , on obtient :

$$r(\xi) \mathcal{A}_0^2 = \mathfrak{A}_0. \quad (4.60)$$

Rappelons dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0^2(y_\beta, Y_3) &= a_0^2(y_\beta) e^{-\frac{Y_3}{\alpha}}, \\ \mathfrak{A}_0(\xi, Y_3) &= A_0^+(\tau(\xi)) e^{-\frac{Y_3}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Par suite, en remplaçant ces identités ci-dessus dans (4.60), on déduit :

$$r(\xi) a_0^2(y_\beta) = A_0^+(\tau(\xi)). \quad (4.61)$$

D'autre part, on obtient par identification à l'ordre δ :

$$r(\xi) \mathcal{A}_1^2 - Y_3 z'(\xi) \mathcal{A}_0^2 = \mathfrak{A}_1. \quad (4.62)$$

Rappelons dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1^2(y_\beta, Y_3) &= \left[\frac{1}{\hat{\alpha} \delta_0^2} a_1^2 + Y_3 (H a_0^2 + b_\sigma^2 a_0^\sigma) \right] (y_\beta) e^{-\frac{Y_3}{\alpha}}, \\ \mathfrak{A}_1(\xi, Y_3) &= \left[\frac{1}{\hat{\alpha} \delta_0^2} A_1^+(\tau(\xi)) + \frac{Y_3}{2} \left(k + \frac{z'}{r} \right) (\xi) A_0^+(\tau(\xi)) \right] e^{-\frac{Y_3}{\alpha}}. \end{aligned}$$

En remplaçant ces deux équations dans (4.62), on obtient :

$$r(\xi) \left[\left(\frac{1}{\hat{\alpha} \delta_0^2} a_1^2 + Y_3 (H a_0^2 + b_\sigma^2 a_0^\sigma) - \frac{z'}{r} (\xi) a_0^2 \right) \right] = \left[\frac{1}{\hat{\alpha} \delta_0^2} A_1^+(\tau(\xi)) + \frac{Y_3}{2} \left(k + \frac{z'}{r} \right) (\xi) A_0^+(\tau(\xi)) \right]. \quad (4.63)$$

Finalement, en introduisant l'expression de H (4.57) et d'après (4.56), on déduit :

$$r(\xi) \left[\frac{1}{\hat{\alpha} \delta_0^2} a_1^2 + \frac{Y_3}{2} \left(k + \frac{z'}{r} \right) (\xi) a_0^2 \right] = \left[\frac{1}{\hat{\alpha} \delta_0^2} A_1^+(\tau(\xi)) + \frac{Y_3}{2} \left(k + \frac{z'}{r} \right) (\xi) A_0^+(\tau(\xi)) \right]. \quad (4.64)$$

En appliquant le lien (4.61) dans l'égalité (4.64), on obtient :

$$r(\xi)a_1^2(y_\alpha) = A_1^+(\tau(\xi)).$$

On conclut ainsi le lien suivant pour $j = 0, 1$:

$$r(\xi)a_j^2(y_\alpha) = A_j^+(\tau(\xi)).$$

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, la méthode asymptotique à multi-échelle a été employée pour approcher la solution du problème des courants de Foucault avec moindre coût de calculs pour toute une gamme de paramètre physique dans le cas tri-dimensionnel. Une vérification directe des premiers termes asymptotiques notamment dans le conducteur est réalisé via le développement asymptotique à multi-échelle associé à la solution radiale de l'étude axisymétrique, en se référant à [19, Annexe B.2]. En plus on peut effectuer des calculs d'estimation d'erreur d'une manière similaire à [73, Chapitre 7] pour étudier la convergence des développements. Afin de renforcer la validation de notre approche, il serait aussi utile d'analyser numériquement les modèles obtenus notamment dans le diélectrique avec des géométrie complexes.

Chapitre 5

Conclusion et perspective

Cette thèse apporte une contribution à approcher la solution du problème des courants de Foucault dans des matériaux linéairement ferromagnétique avec moindre coût de calculs pour une plage de paramètre physique tel que la fréquence. Cette approche pourra servir dans les applications industrielles notamment en électrotechnique pour étudier la distribution des courants de Foucault dans les dispositifs électriques. L'étude en potentiel vecteur magnétique modifié a facilité les calculs mathématiques notamment dans le calcul de la solution analytique. Finalement, on souligne que notre méthode asymptotique semble pertinente pour les deux premières ordres et pour le cas de basse fréquence. Ainsi, on peut illuminer que les limitations principales de cette approche se trouve pour les termes asymptotiques d'ordre supérieure à deux qui n'apporte pas d'originalité par rapport aux travaux précédents en électromagnétisme pour le cas des matériaux non magnétiques à haute conductivité et fréquence. En plus, une autre difficulté se révèle dans le contexte de la géométrie de l'interface conducteur-diélectrique. En effet, divers études récentes [34, 18, 54, 31] ont montré l'importance de réaliser des corrections à la méthode asymptotique d'intérêt afin de s'adapter à des géométries avancées ayant des singularités en interface du conducteur. Pour cela, il sera délicat d'identifier des modèles asymptotiques d'ordres supérieurs efficaces en coût de calcul dans le but d'*élargir* le rang de fréquence ce qui est utile en électrotechnique. Divers applications industrielles présentent des géométries complexes en *2D voire 3D*, à cet égard, il sera indispensable d'apporter des corrections à notre approche asymptotique pour le cas d'une interface conducteur-isolant singulière, et de valider numériquement les résultats obtenus pour le cas tridimensionnelle.

Bibliographie

- [1] D. Abou El Nasser El Yafi and V. Péron. Efficient asymptotic models for axisymmetric eddy current problems in linear ferromagnetic materials. *Computers & Mathematics with Applications*, 151 :335–345, 2023.
- [2] D. Abou El Nasser El Yafi, V. Péron, R. Perrussel, and L. Krähenbühl. Numerical study of the magnetic skin effect : Efficient parameterization of 2d surface-impedance solutions for linear ferromagnetic materials. *International Journal of Numerical Modelling : Electronic Networks, Devices and Fields*, 36(3) :e3051, 2023.
- [3] R. Albanese and G. Rubinacci. Finite element methods for the solution of 3d eddy current problems. In *Advances in imaging and electron physics*, volume 102, pages 1–86. Elsevier, 1997.
- [4] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Editions Ecole Polytechnique, 2005.
- [5] C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge, and V. Girault. Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 21(9) :823–864, 1998.
- [6] R. Baierlein. *Newton to Einstein : the trail of light : an excursion to the wave-particle duality and the special theory of relativity*. Cambridge University Press, 1992.
- [7] A. Bendali. Développement asymptotiques singuliers. 2007.
- [8] A. Bermúdez, D. Gómez, M. C. Muñoz, and P. Salgado. Transient numerical simulation of a thermoelectrical problem in cylindrical induction heating furnaces. *Advances in computational mathematics*, 26 :39–62, 2007.
- [9] A. Bermúdez, D. Gómez, and P. Salgado. Eddy-current losses in laminated cores and the computation of an equivalent conductivity. *IEEE Transactions on magnetics*, 44(12) :4730–4738, 2008.

- [10] C. Bernardi, M. Dauge, and Y. Maday. Spectral methods for axisymmetric domains. (*No Title*), 1999.
- [11] H. A. Bethe. Supernova mechanisms. *Reviews of Modern Physics*, 62(4) :801, 1990.
- [12] O. Bíró. Edge element formulations of eddy current problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 169(3-4) :391–405, 1999.
- [13] O. Biro and K. Preis. On the use of the magnetic vector potential in the finite-element analysis of three-dimensional eddy currents. *IEEE Transactions on magnetics*, 25(4) :3145–3159, 1989.
- [14] O. Biro, K. Preis, and K. R. Richter. Various fem formulations for the calculation of transient 3d eddy currents in nonlinear media. *IEEE Transactions on Magnetics*, 31(3) :1307–1312, 1995.
- [15] O. Biro, K. Preis, and K. R. Richter. On the use of the magnetic vector potential in the nodal and edge finite element analysis of 3d magnetostatic problems. *IEEE Transactions on magnetics*, 32(3) :651–654, 1996.
- [16] M. Bonnet and E. Demaldent. The eddy current model as a low-frequency, high-conductivity asymptotic form of the maxwell transmission problem. *Computers & Mathematics with Applications*, 77(8) :2145–2161, 2019.
- [17] A. Bossavit. *Électromagnétisme, en vue de la modélisation*, volume 14. Springer Science & Business Media, 2004.
- [18] F. Buret, M. Dauge, P. Dular, L. Krahenbuhl, V. Péron, R. Perrussel, C. Poingard, and D. Voyer. Eddy currents and corner singularities. *IEEE transactions on magnetics*, 48(2) :679–682, 2012.
- [19] G. Caloz, M. Dauge, E. Faou, and V. Péron. On the influence of the geometry on skin effect in electromagnetism. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(9-12) :1053–1068, 2011.
- [20] G. Caloz, M. Dauge, and V. Péron. Uniform estimates for transmission problems with high contrast in heat conduction and electromagnetism. *Journal of Mathematical Analysis and applications*, 370(2) :555–572, 2010.
- [21] P. Campbell. Permanent magnet materials and their application. 1996.
- [22] C. Chaboudez, S. Clain, R. Glardon, D. Mari, J. Rappaz, and M. Swierkosz. Numerical modeling in induction heating for axisymmetric geometries. *IEEE transactions on magnetics*, 33(1) :739–745, 1997.
- [23] M. Chari. Finite-element solution of the eddy-current problem in magnetic structures. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, (1) :62–72, 1974.

- [24] S. Chikazumi. *Physics of ferromagnetism*. Number 94. Oxford university press, 1997.
- [25] P. G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. SIAM, 2002.
- [26] J. Coey. Permanent magnet applications. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 248(3) :441–456, 2002.
- [27] D. L. Colton, R. Kress, and R. Kress. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, volume 93. Springer, 1998.
- [28] M. Costabel, M. Dauge, and S. Nicaise. Singularities of eddy current problems. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 37(5) :807–831, 2003.
- [29] R. Courant, F. John, A. A. Blank, and A. Solomon. *Introduction to calculus and analysis*, volume 1. Springer, 1965.
- [30] O. Darrigol. *Electrodynamics from ampere to Einstein*. Oxford University Press, 2003.
- [31] M. Dauge, P. Dular, L. Krähenbühl, V. Péron, R. Perrussel, and C. Poignard. Corner asymptotics of the magnetic potential in the eddy-current model. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 37(13) :1924–1955, 2014.
- [32] M. Dauge, E. Faou, and V. Péron. Comportement asymptotique à haute conductivité de l'épaisseur de peau en électromagnétisme. *Comptes Rendus. Mathématique*, 348(7-8) :385–390, 2010.
- [33] P. Dular. Modélisation du champ magnétique et des courants induits dans des systèmes tridimensionnels non linéaires. 1994.
- [34] P. Dular, V. Péron, R. Perrussel, L. Krähenbühl, and C. Geuzaine. Perfect conductor and impedance boundary condition corrections via a finite element subproblem method. *IEEE transactions on magnetics*, 50(2) :29–32, 2014.
- [35] M. Duruflé, H. Haddar, and P. Joly. Higher order generalized impedance boundary conditions in electromagnetic scattering problems. *Comptes Rendus Physique*, 7(5) :533–542, 2006.
- [36] M. Duruflé, V. Péron, and C. Poignard. Thin layer models for electromagnetism. *Communications in Computational Physics*, 16(1) :213–238, 2014.
- [37] A. Einstein and L. Infeld. *Evolution of physics*. Simon and Schuster, 1966.
- [38] E. Faou. *Développements asymptotiques dans les coques minces linéairement élastiques*. PhD thesis, Rennes 1, 2000.
- [39] E. Faou. Elasticity on a thin shell : Formal series solution. *Asymptotic analysis*, 31(3-4) :317–361, 2002.

- [40] M. Faraday. V. experimental researches in electricity. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, (122) :125–162, 1832.
- [41] N. Forbes and B. Mahon. *Faraday, Maxwell, and the electromagnetic field : How two men revolutionized physics*. 2014.
- [42] L. Foucault. *Recueil des travaux scientifiques de Léon Foucault*, volume 1. Gauthier-villars, 1878.
- [43] W. Gilbert. *De magnete*. Courier Corporation, 1958.
- [44] T. Gowers. *Mathematics : A very short introduction*, volume 66. Oxford Paperbacks, 2002.
- [45] I. S. Grant and W. R. Phillips. *Electromagnetism*. John Wiley & Sons, 2013.
- [46] D. J. Griffiths. *Introduction to electrodynamics*, 2005.
- [47] O. Heaviside. *Electromagnetic theory*, volume 237. American Mathematical Soc., 2003.
- [48] R. Hiptmair. Symmetric coupling for eddy current problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 40(1) :41–65, 2002.
- [49] W. V. D. Hodge. *The theory and applications of harmonic integrals*. CUP Archive, 1989.
- [50] C. Huygens. *Traité de la lumière*. Gressner & Schramm, 1885.
- [51] Y. Katznelson. *An introduction to harmonic analysis*. Cambridge University Press, 2004.
- [52] J. K. Kevorkian and J. D. Cole. *Multiple scale and singular perturbation methods*, volume 114. Springer Science & Business Media, 2012.
- [53] C. Kittel and P. McEuen. *Introduction to solid state physics*. John Wiley & Sons, 2018.
- [54] L. Krähenbühl, F. Buret, R. Perrussel, D. Voyer, P. Dular, V. Péron, and C. Poirnard. Numerical treatment of rounded and sharp corners in the modeling of 2d electrostatic fields. *Journal of microwaves, optoelectronics and electromagnetic applications*, 10 :66–81, 2011.
- [55] L. Krahenbuhl and D. Muller. Thin layers in electrical engineering-example of shell models in analysing eddy-currents by boundary and finite element methods. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29(2) :1450–1455, 1993.
- [56] E. Kriezis and J. Tegopoulos. Eddy currents in linear conducting media. In *Studies In Electrical And Electronic Engineering*, volume 16. Elsevier, 1985.

- [57] L. D. Landau, J. S. Bell, M. Kearsley, L. Pitaevskii, E. Lifshitz, and J. Sykes. *Electrodynamics of continuous media*, volume 8. elsevier, 2013.
- [58] M. Leontovich. Approximate boundary conditions for the electromagnetic field on the surface of a good conductor. *Investigations on radiowave propagation*, 2 :5–12, 1948.
- [59] A. Lichnerowicz. *Elements of tensor calculus*. Courier Dover Publications, 2016.
- [60] R. MacCamy and E. Stephan. Solution procedures for three-dimensional eddy current problems. *Journal of mathematical analysis and applications*, 101(2) :348–379, 1984.
- [61] R. MacCamy and E. Stephan. A skin effect approximation for eddy current problems. *Analysis and Thermomechanics*, pages 175–186, 2000.
- [62] T. Masson. Géométrie différentielle, groupes et algèbres de lie, fibrés et connexions. *laboratoire de Physique Théorique, Université Paris XI, Bâtiment*, 210(91) :105, 2001.
- [63] J. C. Maxwell. *A treatise on electricity and magnetism*, volume 1. Clarendon press, 1873.
- [64] J. C. Maxwell. *The Scientific Letters and Papers of James Clerk Maxwell : Volume 1, 1846-1862*, volume 1. CUP Archive, 1990.
- [65] J. C. Maxwell and P. Pesic. *Theory of heat*. Courier Corporation, 2001.
- [66] I. D. Mayergoyz. *Nonlinear diffusion of electromagnetic fields : with applications to eddy currents and superconductivity*. Elsevier, 1998.
- [67] P. Monk. A finite element method for approximating the time-harmonic maxwell equations. *Numerische mathematik*, 63(1) :243–261, 1992.
- [68] P. Monk. *Finite element methods for Maxwell’s equations*. Oxford University Press, 2003.
- [69] J. Nedelec. Computation of eddy currents on a surface in r^3 by finite element methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 15(3) :580–594, 1978.
- [70] I. Newton. *Opticks, or, a treatise of the reflections, refractions, inflections & colours of light*. Courier Corporation, 1952.
- [71] E. Parker. Dynamical theory of the solar wind. *Space Science Reviews*, 4(5-6) :666–708, 1965.
- [72] W. Paulsen. *Asymptotic analysis and perturbation theory*. CRC Press, 2013.
- [73] V. Péron. *Modélisation mathématique de phénomènes électromagnétiques dans des matériaux à fort contraste*. PhD thesis, Université Rennes 1, 2009.

- [74] V. Péron. Asymptotic models and impedance conditions for highly conductive sheets in the time-harmonic eddy current model. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 79(6) :2242–2264, 2019.
- [75] V. Péron and C. Poignard. On a magnetic skin effect in eddy current problems : the magnetic potential in magnetically soft materials. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 72(4) :164, 2021.
- [76] V. Péron, K. Schmidt, and M. Duruflé. Equivalent transmission conditions for the time-harmonic maxwell equations in 3d for a medium with a highly conductive thin sheet. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 76(3) :1031–1052, 2016.
- [77] R. Perrussel and C. Poignard. Asymptotic expansion of steady-state potential in a high contrast medium with a thin resistive layer. *Applied Mathematics and Computation*, 221 :48–65, 2013.
- [78] F. A. Reuse. *Electrodynamique*. PPUR Presses polytechniques, 2012.
- [79] G. d. Rham. Variétés différentiables : formes, courants, formes harmoniques. (*No Title*), 1955.
- [80] A. A. Rodríguez and A. Valli. *Eddy Current Approximation of Maxwell Equations : Theory, Algorithms and Applications*, volume 4. Springer Science & Business Media, 2010.
- [81] R. V. Sabariego, P. Dular, and J. Gyselinck. Time-domain homogenization of windings in 3-d finite element models. *IEEE transactions on magnetics*, 44(6) :1302–1305, 2008.
- [82] R. V. Sabariego and J. Gyselinck. Eddy-current-effect homogenization of windings in harmonic-balance finite-element models. *IEEE transactions on magnetics*, 53(6) :1–4, 2017.
- [83] A. I. Sabra. *Theories of light : from Descartes to Newton*. Cambridge University Press, 1981.
- [84] K. Schmidt, O. Sterz, and R. Hiptmair. Estimating the eddy-current modeling error. *IEEE Transactions on Magnetics*, 44(6) :686–689, 2008.
- [85] M. Schwartz. *Principles of electrodynamics*. Courier Corporation, 2012.
- [86] G. Strang, G. J. Fix, and D. Griffin. An analysis of the finite-element method. 1974.
- [87] J. Sykulski. *Computational magnetics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [88] W. Tobin. *The life and science of Léon Foucault*. 2003.

- [89] W.-C. Wang. Electromagnetic wave theory. *Google Scholar*, 1986.
- [90] T. Wildi. *Électrotechnique (4e édition)*. Presses de l'université Laval, 2005.
- [91] T. Witelski and M. Bowen. *Methods of mathematical modelling*. Springer, 2015.
- [92] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and P. Nithiarasu. *The finite element method for fluid dynamics*. Butterworth-Heinemann, 2013.