



**HAL**  
open science

# Dimension métrique et coloration dans les graphes peu denses

Quentin Deschamps

► **To cite this version:**

Quentin Deschamps. Dimension métrique et coloration dans les graphes peu denses. Informatique [cs]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2023. Français. NNT : 2023LYO10187 . tel-04708661

**HAL Id: tel-04708661**

**<https://theses.hal.science/tel-04708661v1>**

Submitted on 25 Sep 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THESE de DOCTORAT DE  
L'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD LYON 1**

**Ecole Doctorale N°512  
Ecole Doctorale Infomaths**

**Discipline** : Informatique

Soutenue publiquement le 16/10/2023, par :

**Quentin Deschamps**

---

**Dimension métrique et coloration dans  
les graphes peu denses**

---

Devant le jury composé de :

Begin, Thomas Professeur des Universités Université Lyon 1

Président

Charbit, Pierre Maitre de Conférences Université Paris Cité

Rapporteur

Wagler, Annegret Professeure des Universités Université Clermont Auvergne

Rapporteuse

Lagoutte, Aurélie Maitre de Conférences INP Grenoble

Examinatrice

Pinlou, Alexandre Professeur des Universités Université de Montpellier

Examineur

Kheddouci, Hamamache Professeur des Universités Université Lyon 1

Directeur de thèse

Bousquet, Nicolas Chargé de recherches CNRS Lyon

Co-directeur de thèse

Parreau, Aline Chargée de recherche CNRS Lyon

Co-directrice de thèse

## Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude de la dimension métrique et de la coloration dans des classes de graphes peu denses.

La dimension métrique d'un graphe est le nombre minimal de sommets à choisir de sorte que tous les sommets du graphe soient uniquement déterminés par leurs distances à ces sommets. Une méthode pour choisir de tels sommets de façon optimale étant connue dans le cas des arbres, nous présentons des généralisations de ces méthodes. La première est un algorithme donnant une solution approchée dans les graphes ayant un petit nombre d'arêtes. On déduit de cet algorithme une inégalité entre la dimension métrique, le nombre zéro-forçant et le nombre cyclomatique. La seconde généralisation est un algorithme exact pour la classe des graphes chordaux, de complexité paramétrée par la largeur arborescente du graphe.

Le problème classique de coloration consiste à donner à chaque sommet d'un graphe une couleur de sorte que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur, tout en minimisant le nombre total de couleurs. Nous présentons plusieurs bornes sur le nombre maximal de couleurs nécessaires pour colorer le carré d'un graphe planaire en fonction du degré maximal du graphe. Ces bornes ont été obtenues par des méthodes de déchargement dont nous détaillons une automatisation de la preuve pour l'une des bornes. Enfin, nous considérons le problème de reconfiguration de colorations par changements de Kempe. Il est connu qu'il est toujours possible de reconfigurer un graphe planaire si 5 couleurs sont autorisées. Nous améliorons ce résultat en montrant qu'une telle reconfiguration peut toujours se faire en temps polynomial en le nombre de sommets.

**Mots-clefs :** Dimension métrique, Coloration de graphes, Complexité paramétrée, Graphes peu denses.

Thèse préparée au sein de l'équipe *GOAL* du laboratoire *LIRIS UMR 5205* à l'université Lyon 1.

## Abstract

Combinatorial and algorithmic aspects of Metric Dimension

This thesis is devoted to the study of metric dimension and coloring in sparse classes of graphs.

The metric dimension of a graph is the minimum number of vertices to choose so that all vertices in the graph are uniquely determined by their distances from those vertices. A method for choosing such vertices in an optimal way being known in the case of trees, we present generalizations of these methods. The first is an algorithm giving an approximate solution in graphs with a small number of edges. We deduce from this algorithm an inequality between the metric dimension, the zero-forcing number and the cyclomatic number. The second generalization is an exact algorithm for the class of chordal graphs, of complexity parameterized by the tree-width of the graph.

The classical coloring problem consists in giving each vertex of a graph a color so that two adjacent vertices do not have the same color, while minimizing the total number of colors. We present several bounds on the maximum number of colors needed to color the square of a planar graph as a function of the maximum degree of the graph. These bounds were obtained by discharging methods, we detail an automatization of the proof for one of the bounds. Finally, we consider the problem of coloring reconfiguration by Kempe changes. It is known that it is always possible to reconfigure a planar graph if 5 colors are allowed. We improve this result by showing that such a reconfiguration can always be done in polynomial time in the number of vertices.

**Key words :** Metric dimension, Graph coloring, Parameterized complexity, Sparse graphs.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
1.1	Présentation du manuscrit . . . . .	7
1.1.1	Les problèmes sur les graphes . . . . .	7
1.1.2	La dimension métrique . . . . .	8
1.1.3	Problèmes de coloration . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Définitions élémentaires de la théorie des graphes</b>	<b>14</b>
2.1	Généralités . . . . .	14
2.1.1	Graphes non-orientés . . . . .	14
2.1.2	Distance dans un graphe et connexité . . . . .	14
2.1.3	Voisinage et degré . . . . .	15
2.1.4	Sous-graphe, graphes induit et mineur . . . . .	15
2.2	Classes de graphe . . . . .	16
2.2.1	Graphes élémentaires . . . . .	16
2.2.2	Arbres et forêts . . . . .	16
2.2.3	Graphes planaires . . . . .	17
2.2.4	Autres classes de graphes . . . . .	18
2.3	Algorithmique et complexité . . . . .	18
2.3.1	Paramètres de graphes . . . . .	18
2.3.2	Complexité . . . . .	18
2.3.3	Complexité paramétrée . . . . .	19
2.3.4	Programmation linéaire . . . . .	19
<b>I</b>	<b>La dimension métrique</b>	<b>21</b>
<b>3</b>	<b>Le problème de la dimension métrique</b>	<b>23</b>
3.1	Origines de la dimension métrique . . . . .	23
3.1.1	Introduction de la notion . . . . .	23
3.1.2	Définitions formelles . . . . .	24
3.1.3	Premiers exemples . . . . .	25
3.1.4	Dimension métrique dans les arbres . . . . .	28
3.2	Recherche de bornes . . . . .	31

3.3	Aspects algorithmiques . . . . .	33
3.3.1	Algorithmes exacts . . . . .	33
3.3.2	Algorithmes paramétrés . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Dimension métrique et nombre zéro-forçant</b>	<b>38</b>
4.1	Introduction . . . . .	38
4.2	Préliminaires . . . . .	40
4.3	Démonstration du théorème . . . . .	43
4.3.1	Construction de l'ensemble résolvant . . . . .	43
4.3.2	L'ensemble $S$ est un ensemble résolvant . . . . .	47
4.3.3	Borne sur la taille de $S$ . . . . .	51
4.4	Dimension métrique et nombre zéro-forçant . . . . .	53
4.4.1	Définitions . . . . .	54
4.4.2	Ajout d'arêtes et conséquences pour la conjecture 4.23 . . . . .	55
4.4.3	Graphes unicycliques avec un cycle de longueur impaire . . . . .	58
4.5	Amélioration possible . . . . .	62
4.6	Perspectives . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Complexité de la dimension métrique dans les graphes chordaux</b>	<b>64</b>
5.1	Introduction . . . . .	64
5.2	Préliminaires . . . . .	65
5.2.1	Décompositions arborescentes . . . . .	65
5.2.2	Clique séparatrices et ensemble résolvants . . . . .	67
5.3	Description de l'algorithme . . . . .	69
5.3.1	Généralisation du problème . . . . .	70
5.3.2	Programmation dynamique . . . . .	72
5.3.3	Algorithme . . . . .	81
5.4	Analyse de la complexité . . . . .	82
5.5	Perspectives futures . . . . .	83
<b>II</b>	<b>Problèmes de coloration</b>	<b>85</b>
<b>6</b>	<b>Autour de la coloration de graphes planaires</b>	<b>87</b>
6.1	Définitions . . . . .	87
6.2	Graphes planaires . . . . .	89
6.2.1	Théorème des six couleurs . . . . .	89
6.2.2	Théorème des cinq couleurs . . . . .	90
6.2.3	Théorème des quatre couleurs . . . . .	92
6.3	Coloration de carrés de graphes planaires . . . . .	93
6.4	Problème de recoloration . . . . .	96
6.4.1	La reconfiguration . . . . .	96
6.4.2	Spécifications du problème . . . . .	98

<b>7</b>	<b>Coloration de carrés de graphes planaires</b>	<b>101</b>
7.1	Préliminaires et notations . . . . .	101
7.2	Ordre sur les graphes et configurations interdites . . . . .	102
7.3	Règles de déchargement . . . . .	106
7.4	Poids finaux . . . . .	106
7.4.1	Faces et sommets de degré au moins six . . . . .	107
7.4.2	$\Delta \geq 11$ . . . . .	108
7.4.3	$\Delta \in \{9, 10\}$ . . . . .	112
7.5	Graphes de degré maximal 6 . . . . .	114
7.6	Graphes de degré maximal 4 . . . . .	115
7.6.1	Modélisation du problème sous la forme d'un programmé linéaire	115
7.6.2	Réduction des configurations . . . . .	122
7.7	Perspectives . . . . .	129
<b>8</b>	<b>Recoloration de graphes planaires</b>	<b>130</b>
8.1	Introduction . . . . .	130
8.2	Cas des graphes planaires 3-colorables . . . . .	131
8.3	Preuve du cas général . . . . .	134
	<b>Bibliographie</b>	<b>139</b>

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Présentation du manuscrit

#### 1.1.1 Les problèmes sur les graphes

La définition la plus simple d'un graphe est de dire qu'il s'agit de points (sommets) reliés par des traits (arêtes). Cette définition bien que simple permet de modéliser de nombreuses choses dont de nombreux problèmes courants. De nombreux problèmes de théorie des graphes sont ainsi des versions généralisées de problèmes connus, par exemple se repérer sur un plan de métro.

Tous les problèmes ne peuvent pas s'exprimer facilement sous forme de graphe, néanmoins, on va ici se concentrer sur certains dont l'explication est simple. La raison est purement personnelle, ce sont les problèmes qui m'attirent le plus et donc ceux vers lesquels je me suis naturellement tourné. Ce sont des problèmes qui peuvent (de mon point de vue) être facilement expliqués et visualisés à l'oral, sans nécessiter de connaissances préalables pour les comprendre, mais qui peuvent en revanche être complexes à résoudre. Cette idée de problème visuel se retrouve dans les classes de graphes que l'on présentera, c'est-à-dire des classes de graphes avec peu d'arêtes (graphes peu denses) par rapport au nombre maximum possible.

Les graphes peu denses ont plusieurs intérêts. Ce sont des graphes que l'on retrouve dans la modélisation de nombreuses situations courantes. Un réseau routier, un réseau électrique ou un réseau de canalisations par exemple, seront représentés par un graphe que l'on peut dessiner avec très peu de croisements d'arêtes et donc peu d'arêtes. Un graphe de connaissances d'un réseau social, obtenu en représentant un individu par un sommet et une arête entre deux individus se connaissant sera lui aussi peu dense, deux personnes choisies aléatoirement ne se connaissant probablement pas. Une partie des problèmes considérés en théorie des graphes sont difficiles à résoudre dans les graphes généraux, une direction de recherche est alors de restreindre le problème à certaines classes de graphes. Les classes de graphes peu denses (arbres, graphes planaires...) sont intéressantes à étudier de ce point de vue car elles possèdent une structure permettant de développer des techniques de résolution qui ne fonctionnent pas dans un cas plus

général, tout en restant des classes assez large pour couvrir des situations réelles.

Les problèmes sur lesquels nous nous concentrons par la suite sont centrés autour du calcul de la dimension métrique et de la coloration de graphes qui sont expliqués plus en détail dans la suite de ce chapitre.

### 1.1.2 La dimension métrique

Le problème de la dimension métrique peut s'illustrer avec une situation réelle. Pour repérer sa position, un appareil GPS envoie un signal à différents satellites dont les positions sont connues. Le temps de réponse d'un satellite permet de calculer la distance entre l'appareil et le satellite. Connaissant les distances à ces différents satellites il est alors possible de savoir où se trouve l'appareil. La figure 1.1 montre une version simplifiée de la situation, en plaçant des satellites au sol et sans tenir compte de la courbure de la Terre. Sous ces hypothèses, il est toujours possible de placer trois satellites de sorte que l'appareil soit localisé quelque soit sa position (il suffit que les trois satellites ne soient pas alignés).

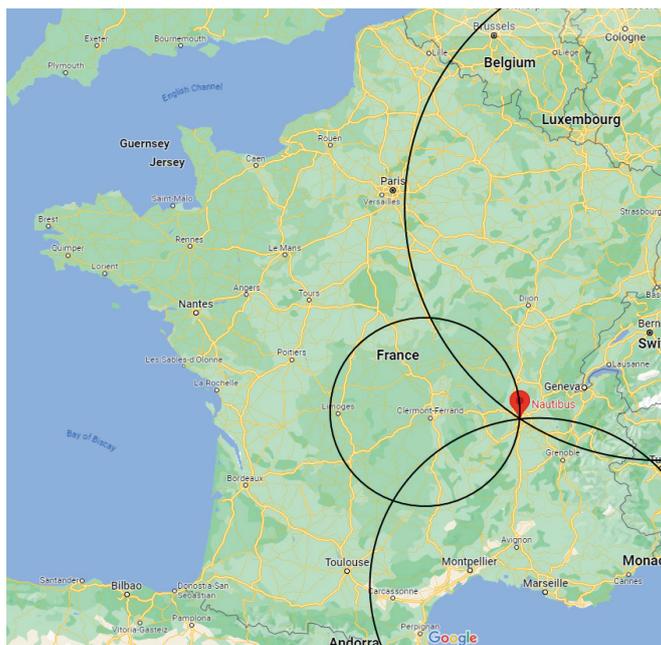


FIGURE 1.1 – Triangulation de la position du bâtiment Nautibus à Villeurbanne en positionnant des satellites à Strasbourg, Clermont-Ferrand et Marseille.

Considérons une situation légèrement différente où, au lieu de se situer sur une carte, le but est de se repérer dans le métro (voir figure 1.2). On place alors les balises sur des stations prédéfinies, qui donnent le nombre de stations d'écart entre la position de l'utilisateur et la balise. La différence avec la version classique est que trois balises ne suffisent pas toujours à se repérer. Par exemple, un réseau avec une station centrale à

laquelle toutes les stations sont reliées (réseau en forme d'étoile illustré par la figure 1.3). Dans ce cas, si l'appareil est situé sur une station non-centrale, les seules informations qu'il peut obtenir sont : être à la même position qu'une balise si une balise se trouve à la station, être à distance 1 d'une balise s'il y a une balise sur la station centrale et être à distance 2 d'une balise pour toutes les autres satellites. Il est donc impossible de différencier deux appareils qui seraient situés sur deux noeuds non-centraux distincts sans balises. Pour pouvoir différencier toutes les positions, il est donc nécessaire de placer des balises sur au moins toutes les stations non-centrales sauf une.

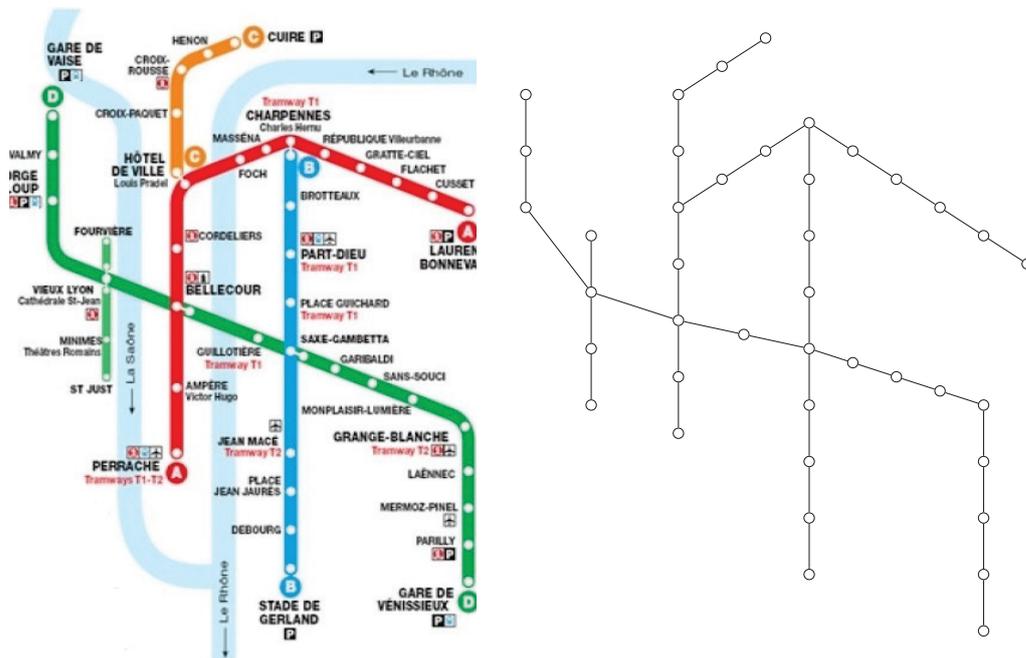


FIGURE 1.2 – Plan du métro de Lyon et une représentation du métro de Lyon sous forme de graphe.

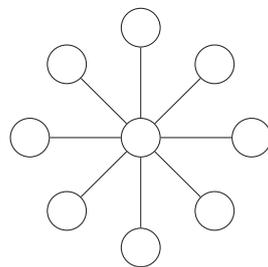


FIGURE 1.3 – Un réseau en forme d'étoile.

La question est donc de savoir, en fonction de la structure du réseau, combien de balises sont nécessaires et comment les placer. Le nombre minimal de balises à placer

dans un réseau pour qu'un utilisateur puisse toujours déterminer sa position est appelé la dimension métrique du réseau. Il n'existe à priori pas de méthode à la fois générale et rapide pour déterminer le nombre et la position optimales des balises. Les approches pour résoudre ces problèmes vont donc varier selon la structure du réseau et l'objectif recherché (solution optimale ou approchée, temps de calcul limité). Il existe un cas où une méthode optimale est celui des réseaux sans cycles, c'est-à-dire où il existe un seul chemin entre deux stations (les arbres). Dans ce cas, une formule donnant le nombre minimal de balise en fonction de la structure du réseau est connue ainsi qu'une façon de positionner les balises. Cette méthode optimale de placement sera détaillée dans le chapitre 3.1 après une définition plus formelle du problème. Nous ferons aussi dans ce chapitre une présentation de la complexité du problème de la dimension métrique dans d'autres classes de graphes.

Une méthode de placement étant connue dans le cas des arbres, une direction de recherche est de généraliser cette méthode dans le cas de réseaux ayant une structure proche de celle des arbres. Une méthode pour obtenir de telles structures et de partir d'un arbre et de rajouter des arêtes ; on ajoute des connexions au réseau sans ajouter de station. Nous montrerons dans le chapitre 4 que la dimension métrique ne peut pas augmenter fortement lorsque l'on ajoute un petit nombre d'arêtes à un arbre. Pour montrer ce résultat, nous donnons une façon de placer les balises, qui fonctionne pour tous les graphes, efficace lorsque ce graphe peut être obtenu en ajoutant un petit nombre d'arêtes à un arbre.

Nous exploitons ensuite cette méthode pour montrer une inégalité entre la dimension métrique et le nombre zéro-forçant. Le nombre zéro-forçant d'un graphe peut se définir formellement avec la règle suivante. *Un sommet est coloré en noir si c'est l'unique voisin blanc d'un sommet noir.* Le nombre zéro-forçant d'un graphe est la taille minimale d'un ensemble initial de sommets noirs tel que l'application itérée de cette règle colore l'intégralité du graphe en noir (un tel ensemble est appelé ensemble zéro-forçant). Une interprétation de ce paramètre est la suivante : supposons que le graphe représente un des éléments électriques (les sommets) reliés entre eux (par les arêtes) en un circuit. Lors du fonctionnement, les grandeurs électriques (tension, intensité...) de ces appareils sont reliées entre elles et en connaissant celles de certains éléments, il est possible d'en déduire d'autres. Ainsi si on place des appareils de mesures sur les éléments qui correspondent aux sommets de l'ensemble zéro-forçant, il sera possible de calculer les grandeurs électriques sur tout le circuit.

Les deux paramètres dimension métrique et nombre zéro-forçant ne semblent pas reliés à première vue mais il a été remarqué [EKY17] des similarités entre eux, en particulier dans le cas des arbres. Une conséquence de ces similarités est la suivante. La dimension métrique d'un arbre est toujours plus petite que son nombre zéro-forçant et dans le cas d'égalité, il existe un ensemble de sommets qui soit optimal pour les deux paramètres [EKY17]. Dans le chapitre 4, nous montrons qu'il est possible d'étendre l'inégalité aux graphes qui ne sont pas des arbres en considérant le nombre d'arêtes qu'il faut supprimer du graphe pour obtenir un arbre.

Dans le chapitre 5, nous considérons une autre généralisation des arbres, les graphes

chordaux. Si l'on reprend la vision d'un graphe comme celle d'une station de métro sans cycle, un graphe chordal est (de façon résumée et légèrement inexacte) un graphe où au lieu de représenter les stations, les sommets représentent les bouches de métro. Ainsi, pour une station donnée, toutes les bouches sont connectées puisqu'il est possible de passer de l'une à l'autre de façon souterraine. Des bouches de métro proches mais correspondant à des stations différentes peuvent être reliées ou non (selon le plan de la ville) et des bouches de métro éloignées ne sont pas reliées entre elles. Ainsi la structure arborescente du plan de métro est toujours visible dans le graphe. Calculer la dimension métrique dans les graphes chordaux n'est pas possible en un temps efficace sous des hypothèses classiques, même dans le cas où la plan de métro ne comporte qu'une seule ligne et donc pas d'embranchement (graphe d'intervalle). Nous montrons que cette difficulté ne peut arriver que dans le cas où les stations comportent un grand nombre de sorties. Nous présentons un algorithme pour les graphes chordaux efficace dans le cas où le nombre de bouches par station est faible. Une des propriétés des arbres est qu'il existe un unique chemin entre deux sommets. Cette propriété n'est pas vraie dans les graphes chordaux, néanmoins il est possible d'identifier des zones par lesquelles les chemins passent. Cette propriété permet de créer un algorithme de programmation dynamique qui va calculer une solution optimale dans des petites portions du graphe, puis combiner les solutions pour faire grandir ces portions jusqu'à obtenir la solution optimale dans le graphe général.

### 1.1.3 Problèmes de coloration

Dans la seconde partie de la thèse, nous étudierons un second problème que nous allons illustrer sur un exemple.

Considérons un nouveau problème. Un paysagiste souhaite semer différentes fleurs dans un parc. Le parc est découpé en différentes sections, chaque section devant être semée avec une seule espèce de fleurs. Pour des raisons esthétiques, le paysagiste ne souhaite pas que deux sections adjacentes contiennent la même espèce. Il souhaite aussi minimiser le nombre d'espèces de fleurs différentes dans le parc pour limiter la difficulté de l'entretien. Cette situation peut être modélisée par un graphe : chaque sommet représente une section du parc, avec une arête entre deux sommets si les sections sont adjacentes. En représentant chaque espèce par une couleur, une répartition des espèces est valide si deux sommets reliés n'ont jamais la même couleur. Le paysagiste peut alors planter dans chaque section l'espèce de fleur de la couleur du sommet correspondant. Le but pour le paysagiste est alors de minimiser le nombre de couleurs pour colorer<sup>1</sup> le graphe. Un exemple d'un tel problème est présenté, avec une solution avec 2 espèces représentées par le graphe de la figure 1.4.

---

1. Dans le contexte de la théorie des graphes, on parle de colorer et de coloration plutôt que de colorier et de coloriage. La seule différence à ma connaissance est d'éviter d'être confondu avec des élèves de maternelle.

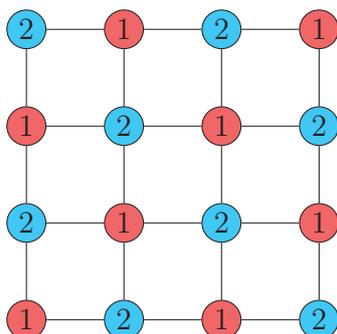


FIGURE 1.4 – Illustration du problème du paysagiste dans un parc sous forme de grille.

Dans la seconde partie de la thèse, nous nous intéressons à des problèmes de coloration. Lorsque l'on considère la dimension métrique, le cas de base est celui des arbres. Pour la coloration, la structure de départ est celle des graphes planaires qui sont les graphes que l'on peut dessiner sur une feuille sans croisements d'arêtes. Le résultat principal pour ces graphes est le *théorème des quatre couleurs* [AH76] montrant que tout graphe planaire peut être coloré avec au plus 4 couleurs. Le chapitre 6 est une introduction à la coloration de graphes. Après avoir rappelé les éléments principaux utilisés pour prouver le théorème des quatre couleurs, notamment la méthode de déchargement, nous présentons les problèmes considérés : la coloration à distance deux dans les graphes planaires et la recoloration de graphes planaires.

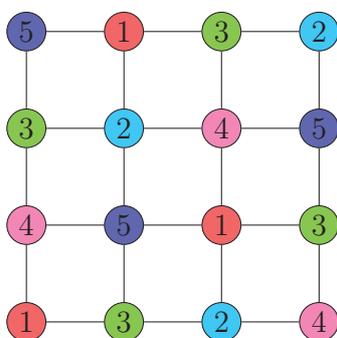


FIGURE 1.5 – Illustration du problème du paysagiste dans un parc sous forme de grille avec la contrainte de vision.

Dans le chapitre 7, nous nous concentrons sur la coloration à distance 2. En reprenant l'exemple du paysagiste, il souhaite aussi que d'une section du parc, un promeneur ne voit que des espèces de fleurs différentes. Ainsi, toutes les sections voisines d'une section donnée doivent avoir des espèces différentes. On cherche donc à colorer les sommets d'un graphe de sorte que deux sommets à distance au plus 2 aient toujours une couleur différente comme sur la figure 1.5. Le but est toujours de minimiser le nombre de couleurs utilisées. En 1977, Wegner a proposé une conjecture reliant le nombre de

couleurs maximal nécessaire pour colorer un graphe de cette façon  $\chi_2$  et le degré (nombre de sommets adjacents à un sommet) maximal  $\Delta$  de ces sommets [Weg77].

**Conjecture** (Wegner [Weg77]). *Tout graphe planaire  $G$  de degré maximum  $\Delta$  vérifie :*

$$\chi_2(G) \leq \begin{cases} 7 & \text{si } \Delta = 3, \\ \Delta + 5 & \text{si } 4 \leq \Delta \leq 7, \\ \lfloor \frac{3\Delta}{2} \rfloor + 1 & \text{si } \Delta \geq 8. \end{cases}$$

Cette conjecture n'est à ce jour pas prouvée, seul le cas  $\Delta = 3$  est connu [Tho01] ainsi qu'une preuve asymptotique [Hav+17] qui n'est significative que pour des très grandes valeurs de  $\Delta$ . On s'intéressera aux valeurs de  $\Delta$  assez faibles, entre 4 et 30. Le chapitre 7 est construit autour de deux résultats reliant  $\chi_2$  et  $\Delta$ . Le premier résultat est qu'il suffit de  $2\Delta + 7$  couleurs pour colorer un graphe de degré  $\Delta \geq 9$ . Il se prouve par une méthode de déchargement classique, avec l'utilisation d'une "astuce" pour limiter le nombre de configurations à étudier. Le second résultat du chapitre 7 est que si  $\Delta = 4$ , 12 couleurs suffisent toujours à colorer le graphe à distance 2. Ce résultat a été prouvé à l'aide de programmes informatiques pour automatiser la méthode de déchargement. Nous présentons surtout sur l'explication du fonctionnement de ces programmes et sur la modélisation du problème qui permet de le résoudre de manière automatique.

Enfin, nous étudions la recoloration de graphes par changement de Kempe. Le problème de recoloration est un cas spécifique des problèmes de reconfiguration. Le but est de transformer une solution du problème en une autre, en faisant une suite des "petits" changements de sorte que chaque étape intermédiaire soit aussi une solution. Un exemple concret est la fourniture d'électricité d'une ville. On suppose que des générateurs alimentent une ville, chaque générateur alimentant une partie de la ville. Si l'on souhaite changer l'emplacement de ces générateurs, déplacer tous les générateurs simultanément va occasionner des coupures d'électricité. En revanche, en déplaçant les générateurs successivement, on peut espérer que tous les bâtiments soient alimentés à tout moment. Dans notre cas, on veut passer d'une coloration d'un graphe à une autre par des changements de Kempe. Un changement de Kempe est un changement de couleur sur un ensemble de sommets. On considère un sommet, disons bleu, que l'on veut recolorer en rouge. S'il n'a pas de voisin rouge, il est possible de le recolorer, sinon on recolore ces voisins rouges en bleu. Pour pouvoir recolorer ces derniers, il faut qu'ils n'aient pas de voisin bleu, sinon il faut recolorer ses voisins bleus. Ainsi la recoloration se fait en inversant les couleurs bleu et rouge sur les sommets nécessaires pour maintenir une coloration. Il a été prouvé par Meyniel [Mey78] que si l'on s'autorise à utiliser au moins cinq couleurs, il est toujours possible de passer de n'importe quelle coloration à n'importe quelle autre. Dans le chapitre 8, nous améliorons ce résultat en montrant qu'une telle recoloration peut toujours se faire rapidement, c'est-à-dire en temps polynomial en le nombre de sommets du graphe. On montre ce résultat par induction, en montrant que l'on peut recolorer une fraction du graphe en temps polynomial.

# Chapitre 2

## Définitions élémentaires de la théorie des graphes

Ce chapitre est consacré aux définitions qui seront utilisées par la suite. D'autres définitions, plus spécifiques, seront données au moment où elles sont utilisées.

### 2.1 Généralités

#### 2.1.1 Graphes non-orientés

Un *graphe simple*  $G$  est une paire d'ensemble  $(V(G), E(G))$  dont les éléments de  $V(G)$  sont appelés *sommets* et où  $E(G)$  est une relation binaire symétrique sur les éléments de  $V(G)$ . Ainsi  $E(G)$  peut être considéré comme un ensemble de paires de sommets de  $G$  dont les éléments sont les *arêtes* de  $G$ . On notera les arêtes des graphes en omettant les parenthèses, ainsi si  $(u, v)$  appartient à  $E(G)$ , on notera l'arête  $uv$ . Le nombre d'éléments de  $V(G)$  est appelé *ordre* du graphe et sera en général noté par  $n$ . Si une arête  $uv$  appartient à  $E(G)$ , on dit que les sommets  $u$  et  $v$  sont *adjacents* ou *voisins* et que les sommets  $u$  et  $v$  sont *incidentes* à l'arête  $uv$ . Sauf mention contraire, les graphes que l'on considère seront *non-orientés*, c'est à dire que si une paire de sommets  $(u, v)$  appartient à  $E(G)$  alors la paire de sommets  $(v, u)$  appartient à  $E(G)$ .

#### 2.1.2 Distance dans un graphe et connexité

Un *chemin* entre deux sommets distincts  $u$  et  $v$  est une suite de sommets tous distincts  $u_0, u_1, \dots, u_k$  tels que, pour  $0 \leq i \leq k - 1$ , l'arête  $u_i u_{i+1}$  appartient à  $V$ . La *longueur d'un chemin* est le nombre d'arêtes  $k$  qui composent le chemin. La *distance* entre deux sommets distincts est la longueur minimale d'un chemin entre ces deux sommets. Si aucun chemin n'existe entre deux sommets, la distance entre ces deux sommets est  $+\infty$ . La distance d'un sommet à lui-même est de 0. Un graphe est *connexe* si la distance entre toute paire de sommets du graphe est finie, et *non-connexe* ou *déconnecté* sinon. Pour deux sommets  $u$  et  $v$  d'un graphe  $G$ , on note la distance entre

les deux sommets dans  $G$  comme  $d_G(u, v)$ , ou  $d(u, v)$  si le graphe dans lequel on considère la distance est claire d'après le contexte. Le *diamètre* d'un graphe, noté  $\text{diam}(G)$ , est la plus grande distance entre deux sommets du graphe. Un ensemble  $W$  de sommet de  $G$  est un *ensemble séparateur* si le sous-graphe induit par  $V \setminus W$  n'est pas connexe. Dans le cas où  $W$  ne contient qu'un seul sommet, on dit que ce sommet est un *sommet séparateur*. Pour un entier  $k \geq 2$ , un graphe est *k-connexe* s'il ne contient pas d'ensemble séparateur de taille  $k - 1$ .

### 2.1.3 Voisinage et degré

Le voisinage d'un sommet est l'ensemble de ses voisins. Pour un sommet  $v$ , on distingue le *voisinage ouvert*  $N(v)$  qui est l'ensemble des voisins de  $v$ , autrement dit les sommets à distance exactement 1 de  $v$ , et le *voisinage fermé*  $N[v] = N(v) \cup \{v\}$  qui est l'ensemble des sommets à distance au plus 1 de  $v$ . Un sommet est appelé *sommet universel* s'il est voisin avec tous les autres sommets du graphe. Le *degré* d'un sommet est égal à son nombre de voisins. Autrement dit, le degré d'un sommet  $v$  est le cardinal de l'ensemble  $N(v)$ . Le *degré minimal* d'un graphe  $G$ , noté  $\delta(G)$ , est le degré minimal parmi les degrés des sommets de  $G$ . De façon analogue, le *degré maximal*  $\Delta(G)$  est le degré maximal parmi les degrés des sommets de  $G$  et le *degré moyen* de  $G$  le degré moyen de ces sommets. Le *degré maximum moyen* est la valeur maximale du degré moyen parmi les sous-graphes de  $G$ . Un graphe  $G$  est *d-dégénéré* si tout sous-graphe de  $G$  contient un sommet de degré au plus  $d$ . Notons qu'un graphe de degré maximum moyen  $d$  est *d-dégénéré*.

### 2.1.4 Sous-graphe, graphes induit et mineur

Un graphe  $G' = (V', E')$  est un *sous-graphe* d'un graphe  $G = (V, E)$  si  $V' \subseteq V$  et  $E' \subseteq E$ . Un graphe  $G' = (V', E')$  est un *sous-graphe induit* d'un graphe  $G = (V, E)$  si  $V' \subseteq V$  et  $E' = \{uv \in E, u \in V' \text{ et } v \in V'\}$ . Un sous-graphe induit est donc construit à partir d'un graphe en choisissant un sous-ensemble de sommets de ce graphe et toutes les arêtes entre des sommets de ce sous-ensemble. Étant donné un ensemble de sommets  $W$  de  $G$ , on note le sous-graphe induit par l'ensemble  $W$ ,  $G[W]$  ou  $G \setminus W'$  où  $W'$  est le complémentaire de  $W$  par rapport à  $V$ . Un graphe  $H$  est un *mineur* d'un graphe  $G$  si l'on peut obtenir le graphe  $H$  à partir du graphe  $G$  en supprimant des sommets, supprimant des arêtes ou contractant des arêtes (fusionner les deux sommets incident à l'arête en un nouveau sommet qui est adjacent aux sommets qui étaient adjacent à au moins un des deux sommets d'origine).

## 2.2 Classes de graphe

### 2.2.1 Graphes élémentaires

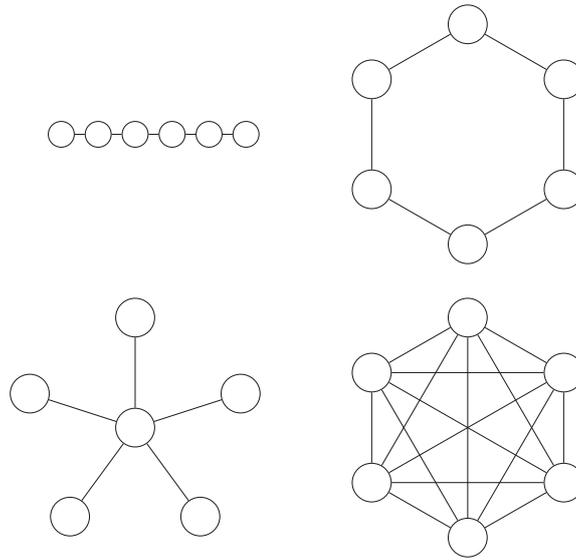
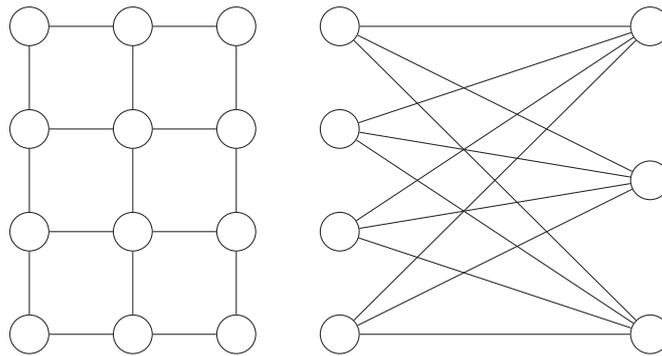
On dit qu'un graphe  $G = (V, E)$  est un *chemin* si l'on peut numéroter les sommets  $v_1, \dots, v_n$  de sorte à ce que  $E$  contienne exactement les arêtes  $v_i v_{i+1}$  pour  $1 \leq i \leq n-1$ . Un graphe est un *cycle* si l'on peut faire la même numérotation des sommets et où  $E$  contient en plus l'arête  $v_n v_1$ . Un graphe est une *clique* si  $E$  contient toutes les arêtes possibles par rapport à l'ensemble  $V$ . Ainsi,  $E = \{uv, u \in V, v \in V, u \neq v\}$ . Un graphe est une *étoile* s'il contient un sommet central  $v$  tel que tous les autres sommets soient uniquement reliés à ce sommet central. Ainsi,  $E = \{uv, u \in V, u \neq v\}$ . Une *roue* est un graphe formé d'un cycle auquel on ajoute un sommet universel. Un graphe est *biparti complet* si l'ensemble des sommets peut être partitionné en deux ensembles  $V_1$  et  $V_2$  tels que les arêtes soient toutes les arêtes possibles entre les éléments de  $V_1$  et de  $V_2$ .

La *grille* de taille  $n \times m$  est le graphe à  $nm$  sommets que l'on peut représenter comme  $\{(x, y) \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq m\}$  et dont les arêtes relient des sommets à distance euclidienne exactement 1.

Deux graphes  $G = (V(G), E(G))$  et  $H = (V(H), E(H))$  sont *isomorphes* s'il existe une fonction bijective  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  qui préserve la relation d'adjacence, c'est-à-dire  $uv \in E(G)$  si et seulement si  $f(u)f(v) \in E(H)$ . Ainsi la fonction  $f$  peut s'apparenter à une fonction de renommage des sommets, qui laisse la structure du graphe inchangée. Étant donné un entier  $n \geq 2$ , il existe, à isomorphisme près, un seul chemin à  $n$  sommets, un seul cycle à  $n$  sommets, une seule clique à  $n$  sommets, une seule roue à  $n$  sommets, une seule étoile à  $n$  sommets et une seule grille de taille  $n \times m$ . On note ces graphes particuliers,  $P_n$ ,  $C_n$ ,  $K_n$ ,  $W_n$ ,  $K_{1,n-1}$  et  $G_{n,m}$ . Étant donnés deux entiers  $n$  et  $m$ , il existe, à isomorphisme près, un seul graphe biparti à  $n + m$  sommets dont l'un des ensemble de la bipartition contienne  $n$  sommets. On note ce graphe  $K_{n,m}$ . Ces graphes sont illustrés dans les figures 2.1 et 2.2.

### 2.2.2 Arbres et forêts

Un graphe est une *forêt* s'il ne contient pas de cycle, c'est un *arbre* s'il est de plus connexe. Une définition équivalente est qu'un arbre à  $n$  sommets est un graphe connexe contenant exactement  $n - 1$  arêtes. Une propriété des arbres est qu'entre deux sommets de l'arbre, il existe un unique chemin. Un arbre est *enraciné* si l'on fixe un sommet  $r$  que l'on appelle *racine* de l'arbre. Dans le cas d'un arbre enraciné, la *profondeur* d'un sommet est la distance de ce sommet à la racine. Un sommet  $v$  est un *ancêtre* d'un sommet  $u$  si  $v$  est sur le chemin de  $u$  à  $r$ . Dans ce cas,  $u$  est un *descendant* de  $v$ . Si de plus  $u$  et  $v$  sont adjacents, on dit que  $v$  est un *parent* de  $u$  et que  $u$  est un *enfant* de  $v$ . Un sommet est une *feuille* s'il n'a pas de descendant. Si un arbre n'est pas enraciné, on appelle *feuille* tout sommet de degré exactement 1. Une *branche* d'un sommet  $v$  est une composante connexe de  $G \setminus \{v\}$ .

FIGURE 2.1 – Chemin  $P_6$ , cycle  $C_6$ , étoile  $K_{1,5}$  et clique  $K_6$ .FIGURE 2.2 – La grille  $G_{4,3}$  et le graphe biparti complet  $K_{4,3}$ .

### 2.2.3 Graphes planaires

Un graphe est *planaire* s'il est possible de le dessiner dans le plan sans croisement d'arêtes. Une telle représentation est appelée *plongement* du graphe. Une *face* d'un graphe planaire est une région maximale du plan délimité par un ensemble d'arêtes ne contenant pas d'arêtes. Le *degré d'une face*  $f$ , noté  $\deg(f)$  est le nombre d'arêtes autour de la face  $F$ . De telles arêtes sont dites *incidentes* à  $f$ . De même, si un sommet est incident à une arête qui est elle-même incidente à une face, on dira que ce sommet est *incident* à la face. Une face  $f$  est *arête-adjacente* à une face  $f'$  s'il existe une arête  $uv$ , appelée *arête commune*, telle que  $uv$  est incident à  $f$  et  $f'$ . Une face  $f$  est *sommet-adjacente* à une face  $f'$  s'il existe un unique sommet  $v$ , appelé *sommet commun*, tel que  $v$  est incident à  $f$  et  $f'$ . Une face  $f$  est *adjacente* à une face  $f'$  si  $f$  est sommet-adjacente ou arête-adjacente à  $f'$ . Une face  $f$  est *adjacente* à un sommet  $v$  si  $v$  est incident à  $f$ . Étant donné un plongement dans le plan d'un graphe planaire, un *ordre cyclique* autour

d'un sommet  $v$  est un ordre sur les voisins de  $v$  tel que deux sommets se suivent dans l'ordre cyclique s'ils sont adjacents dans  $G$  ou si on peut ajouter une arête entre les deux sommets en maintenant la planarité et sans changer le plongement du graphe.

## 2.2.4 Autres classes de graphes

Un graphe est *chordal* s'il ne possède pas de sous-graphe induit qui soit un cycle de taille au moins 4. Un graphe est un *graphe cactus* si chaque arête du graphe appartient à au plus un cycle dans le graphe. Un  *$k$ -arbre* est un arbre de largeur arborescente  $k$  tel que l'ajout de n'importe quelle arête augmente sa largeur arborescente. Un *graphe d'intervalle* est un graphe dont on peut représenter les sommets comme un intervalle de temps avec une arête entre deux sommets si et seulement si les intervalles de temps qu'ils représentent s'intersectent. Soit  $G = (V, E)$  un graphe, le carré de  $G$  est le graphe  $G^2 = (V, E')$  défini sur le même ensemble de sommets tel que  $uv \in E'$  si et seulement si  $d_G(u, v) \leq 2$ .

## 2.3 Algorithmique et complexité

### 2.3.1 Paramètres de graphes

**Définition 2.1.** Une décomposition arborescente d'un graphe  $G$  est une paire  $(X, T)$  où  $T$  est un arbre et  $X = \{X_i | i \in V(T)\}$  est une collection de sous-ensemble (appelés sacs) de  $V(G)$  tels que :

- $\bigcup_{i \in V(T)} X_i = V(G)$ .
- Pour chaque arête  $xy \in E(G)$ ,  $\exists i \in V(T)$ ,  $x \in X_i$  et  $y \in X_i$ .
- Pour chaque  $x \in V(G)$ , l'ensemble  $\{i | x \in X_i\}$  induit une sous-arbre connexe de  $T$ .

Soit  $G$  un graphe et  $(X, T)$  une décomposition arborescente de  $G$  (la figure 2.3 est un exemple d'une telle décomposition). La *largeur* d'une décomposition arborescente  $(X, T)$  est le cardinal maximal d'un sac moins un. La *largeur arborescente* de  $G$  est la plus petite largeur d'une décomposition arborescente  $(X, T)$  parmi toutes les décompositions arborescentes  $(X, T)$  de  $G$ . La *largeur de chemin* de  $G$  est la plus petite largeur d'une décomposition arborescente  $(X, T)$  parmi toutes les décompositions arborescentes  $(X, T)$  de  $G$  en imposant de plus que  $T$  soit un chemin. La *profondeur arborescente* de  $G$  est la profondeur minimale d'un arbre  $T$  vérifiant  $V(T) = V(G)$  et pour toute arête  $uv \in E(G)$ ,  $u$  est un ancêtre de  $v$  dans  $T$  ou  $v$  est un ancêtre de  $u$  dans  $T$ .

### 2.3.2 Complexité

La *complexité* d'un programme informatique est le nombre maximal d'opérations effectuées par l'algorithme en fonction de la taille de l'entrée, exprimée en nombre de bits. En pratique, cette fonction est extrêmement difficile à calculer, on se contente donc

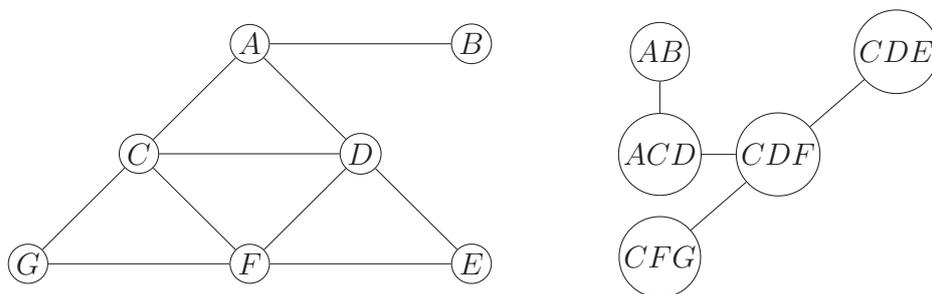


FIGURE 2.3 – Un graphe et une décomposition arborescente de ce graphe.

d'approximations. En notant  $n$  la taille de l'entrée, un problème a une *complexité linéaire* s'il existe un algorithme de complexité  $O(n)$  qui résout ce problème, et une *complexité polynomiale* s'il existe un algorithme de complexité  $O(n^p)$ , avec  $p$  une constante, qui résout ce problème. Une problème est dit dans *NP* si on peut vérifier une solution du problème en temps polynomial, et *NP-complet* s'il est au moins aussi difficile à résoudre que n'importe quel problème dans NP. La *complexité paramétrée* d'un problème par un paramètre  $k$  est son nombre maximal d'opérations effectuées par l'algorithme en fonction de la taille de l'entrée  $n$ , exprimée en nombre de bits et du paramètre  $k$ , dépendant de l'entrée. Un problème est *résolvable en temps polynomial paramétré par  $k$* , ou FPT par  $k$ , s'il existe un algorithme de complexité  $O(n^p \cdot f(k))$ , avec  $p$  une constante et  $f$  une fonction calculable, qui résout ce problème.

### 2.3.3 Complexité paramétrée

On note  $n$  le nombre de sommets du graphe et  $k$  un paramètre dépendant du graphe mais indépendant de  $n$ . Un problème est dit *résolvable en temps paramétré*, (ou en temps FPT) par  $k$  s'il existe un algorithme qui le résout en temps  $n^{O(1)} \cdot f(k)$  pour une certaine fonction  $f$  calculable. Comme un problème NP-complet peut se résoudre en temps exponentiel en  $n$ , l'enjeu est de faire passer la partie exponentielle de la complexité uniquement dépendante de  $k$  et ainsi obtenir un algorithme plus efficace pour les graphes dans lesquels le paramètre  $k$  est petit comparé à  $n$ . Cela permet de voir d'où vient la partie exponentielle de la complexité et de voir quel paramètre a une influence dessus.

### 2.3.4 Programmation linéaire

Un *problème d'optimisation linéaire*, ou *problème linéaire* est un problème où l'on cherche à maximiser une quantité en vérifiant un ensemble de contraintes. Considérant des variables  $x_1, \dots, x_n$ , Les contraintes doivent être de la forme  $\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b$  où  $a_i$  et  $b$  sont des nombres réels. La quantité à maximiser doit elle aussi être de la forme  $Q = \sum_{i=1}^n c_i x_i$ . Le *polyèdre* des solutions est l'ensemble des valeurs de  $x_1, \dots, x_n$  vérifiant l'ensemble des contraintes. Ce type de problème peut être résolu en temps polynomial.



Première partie  
La dimension métrique

Dans cette partie, nous étudions le paramètre de graphe *dimension métrique*. La dimension métrique d'un graphe  $G$  est la taille minimale d'un ensemble  $S$  de sommets de  $G$  tel que chaque sommet de  $G$  est déterminé par ses distances aux sommets de  $S$ . Le premier chapitre est consacré à une présentation du paramètre ainsi qu'aux définitions et résultats élémentaires. Les deux chapitres suivants sont consacrés à des contributions personnelles.

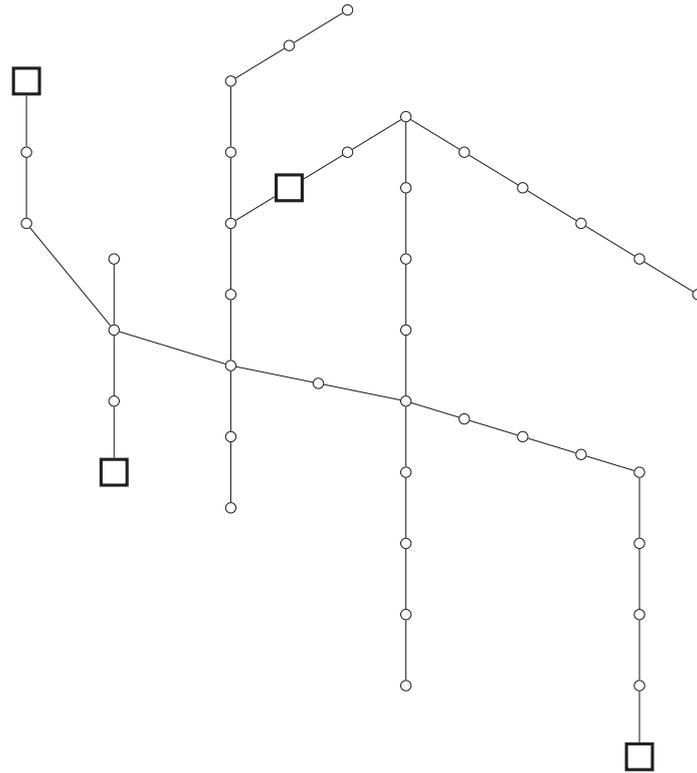


FIGURE 2.4 – Exemple de placement des satellites sur le métro de Lyon.

# Chapitre 3

## Le problème de la dimension métrique

Dans ce chapitre nous présentons la notion de *dimension métrique*. Nous définissons formellement la notion et les éléments associés dans un premier temps, avec des exemples et des résultats élémentaires en s'intéressant en particulier aux arbres. Une seconde partie est consacrée à un état de l'art, en particulier relatif à la complexité de ce problème.

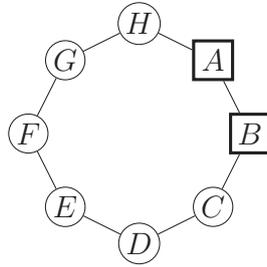
### 3.1 Origines de la dimension métrique

#### 3.1.1 Introduction de la notion

Se repérer par rapport à des points de repères est un problème courant. La méthode utilisée dépend principalement du contexte : un marin se repérera par rapport aux étoiles, un promeneur en forêt utilisera une boussole tandis qu'une chauve-souris utilisera son radar interne et l'écholocation pour repérer des obstacles. En 1975, Harary et Melter [HM75] ont souhaité modéliser le déplacement et le repérage d'un sonar. Le fonctionnement de ce sonar est similaire à celui de la chauve-souris, le sonar envoie une onde qui lui permet de repérer des capteurs placés au préalable, et grâce au temps que l'onde met à parvenir au capteur de connaître sa distance à ce capteur. Le bon fonctionnement de cette méthode dépend du nombre et du positionnement des capteurs. Ils doivent être disposés de sorte que le sonar puisse repérer sa position en connaissant sa distance à chacun de ces capteurs. Cette situation est simple si le terrain est sans obstacle et que le plus court chemin entre le sonar et un capteur est toujours la ligne droite. Dans ce cas, par triangulation, trois capteurs, non alignés, permettent de localiser le sonar à coup sûr. Cela n'est plus vrai si le terrain comporte des obstacles et que la ligne droite n'est pas le plus court chemin entre un capteur et le sonar.

Harary et Melter ont modélisé ce problème en utilisant la théorie des graphes. Chaque position possible du sonar est représentée par un sommet et deux sommets sont reliés si une onde parcourt la distance entre ces deux sommets en une unité de temps. La question est de savoir sur quels sommets placer les capteurs pour localiser le sonar en essayant de minimiser le nombre de capteurs. Dans l'exemple de la figure 3.1,

les deux capteurs placés sur les sommets  $A$  et  $B$  permettent la localisation du sonar. Si le sonar se situe par exemple sur le sommet  $D$ , il est à distance 3 du sommet  $A$  et à distance 2 du sommet  $B$ . Connaissant ces éléments, le sonar est localisé de façon certaine comme le sommet  $D$  est le seul sommet à vérifier ces conditions sur les distances à  $A$  et  $B$ . La localisation ne fonctionnerait pas s'il y avait un capteur uniquement sur le sommet  $B$ , le sommet  $D$  et le sommet  $H$  ne seraient pas distingués. Ainsi, une méthode pour vérifier si un positionnement de capteurs est valable est de considérer toutes les positions possibles pour le sonar et de vérifier qu'elles ont toutes des distances différentes par rapport à l'ensemble des capteurs. C'est ce qui est fait dans le tableau de la figure 3.1 où l'on constate que toutes les lignes sont différentes.



Sommet	Distance à A	Distance à B
$A$	0	1
$B$	1	0
$C$	2	1
$D$	3	2
$E$	4	3
$F$	3	4
$G$	2	3
$H$	1	2

FIGURE 3.1 – Exemple de placement des capteurs (sommets carrés) dans un cycle.

### 3.1.2 Définitions formelles

La même année, Slater a considéré le même problème dans le cas particulier où le graphe est un arbre [Sla75]. L'introduction du paramètre est ainsi partagée entre les trois auteurs, la dimension métrique d'un graphe étant définie comme le plus petit nombre de capteurs nécessaires à la localisation du sonar. Cela conduit aux définitions suivantes :

**Définition 3.1.** Soient  $G = (V, E)$  un graphe et  $s$  un sommet de  $G$ . Soient  $x$  et  $y$  deux sommets de  $G$ ,  $s$  résout la paire  $(x, y)$  si  $d(s, x) \neq d(s, y)$ .

**Définition 3.2** (Ensemble résolvant). Soient  $G = (V, E)$  un graphe et  $S$  un ensemble de sommets de  $G$ . L'ensemble  $S$  est appelé ensemble résolvant si, pour toute paire de sommets  $(x, y)$  de  $G$ , il existe un sommet  $s$  dans  $S$  qui résout la paire  $(x, y)$ .

On peut remarquer que l'ensemble des sommets d'un graphe constitue toujours un ensemble résolvant ce qui assure que la définition suivante est fondée.

**Définition 3.3** (Dimension métrique). La dimension métrique d'un graphe  $G$ , notée  $\dim(G)$ , est la plus petite taille d'un ensemble résolvant de  $G$ . Un ensemble résolvant contenant exactement  $\dim(G)$  éléments est appelé base métrique de  $G$ .

Cette définition d'ensemble résolvant correspond bien à la notion de localisation introduite précédemment par la distance aux capteurs. On définit le problème de décision associé comme :

**Définition 3.4.** DIMENSION MÉTRIQUE : ENTRÉE : *Un graphe  $G$  et un entier  $k$ .*

SORTIE *Vrai si et seulement s'il existe un ensemble résolvant de  $G$  taille au plus  $k$ .*

**Définition 3.5** (Vecteur de distance). *Soient  $G = (V, E)$  un graphe et  $S = \{s_1, \dots, s_k\}$  un ensemble de sommets de  $G$ . Pour un sommet  $x$  de  $G$ , on définit le vecteur de distance de  $x$  à  $S$ , noté  $\mathbf{d}_S(\mathbf{x})$ , comme étant le vecteur  $(d(x, s_1), \dots, d(x, s_k))$ .*

**Proposition 3.6.** *Soient  $G = (V, E)$  un graphe et  $S = \{s_1, \dots, s_k\}$  un ensemble de sommets de  $G$ . L'ensemble  $S$  est un ensemble résolvant si et seulement si les vecteurs de distances  $\mathbf{d}_S(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{d}_S(\mathbf{y})$  sont différents quelques soient les sommets  $x$  et  $y$  de  $G$ .*

*Démonstration.* Les deux implications se prouvent en repartant des définitions. Supposons que  $S$  soit un ensemble résolvant et considérons deux sommets  $x$  et  $y$ . Comme  $S$  est un ensemble résolvant, il existe un sommet  $s_i$  dans  $S$ , avec  $1 \leq i \leq k$  tel que  $s_i$  résout la paire  $(x, y)$ , c'est-à-dire que  $d(s_i, x) \neq d(s_i, y)$ . Les vecteurs  $\mathbf{d}_S(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{d}_S(\mathbf{y})$  sont donc différents comme ils diffèrent à la coordonnée  $i$ . Réciproquement, si on suppose que, pour toute paire de sommets  $(x, y)$ ,  $\mathbf{d}_S(\mathbf{x}) \neq \mathbf{d}_S(\mathbf{y})$ , on montre que  $S$  est un ensemble résolvant. Soient  $x$  et  $y$  deux sommets de  $G$ . Comme  $\mathbf{d}_S(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{d}_S(\mathbf{y})$  sont différents, ils diffèrent au moins sur un coordonnée  $i$  avec  $1 \leq i \leq k$ . Par définition du vecteur de distance on a alors  $d(s_i, x) \neq d(s_i, y)$  et donc la paire  $(x, y)$  est résolue par un sommet de  $S$ .  $\square$

### 3.1.3 Premiers exemples

Ces deux caractérisations d'un ensemble résolvant sont toutes les deux utiles selon le graphe étudié. Pour vérifier qu'un ensemble  $S$  d'un graphe  $G$  est un ensemble résolvant, on peut de plus remarquer que toute paire de sommets de  $G$  contenant au moins un sommet de  $S$  est résolue par  $S$  car un sommet de  $S$  ne pourra jamais avoir le même vecteur de distance qu'un autre sommet. Cela vient du fait que le seul sommet à distance 0 d'un sommet est lui-même. Autrement dit, il n'est pas nécessaire de vérifier les propriétés de résolution ou d'unicité de vecteurs de distances pour les sommets de l'ensemble résolvant. Nous illustrons l'intérêt d'avoir ces deux définitions en calculant la dimension métrique des chemins et des cliques.

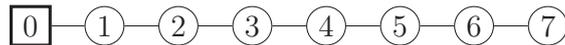


FIGURE 3.2 – Une base métrique (sommet carré) dans un chemin.

**Lemme 3.7.** *Soit  $n \geq 2$ , alors  $\dim(P_n) = 1$  et  $\dim(K_n) = n - 1$ .*

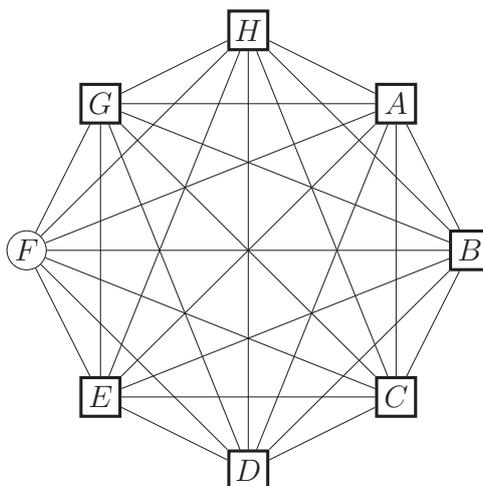


FIGURE 3.3 – Une base métrique (sommets carrés) dans une clique.

*Démonstration.* Prouvons d'abord le résultat dans le cas du chemin. On considère un ensemble  $S$  contenant un seul sommet qui est une extrémité du chemin comme sur la figure 3.2. Sur cette figure, l'étiquette des sommets correspond à leur distance à l'extrémité dans  $S$  et représente donc leur vecteur de distance à  $S$ , qui sont bien tous différents. Ainsi  $S$  est un ensemble résolvant, et il est de taille minimale car un ensemble de taille 0 ne peut être résolvant que si le graphe comporte au plus 1 sommet.

Montrons maintenant le résultat pour la clique. On considère un ensemble  $S$  contenant tous les sommets sauf un comme sur la figure 3.3. Cet ensemble est résolvant car toute paire de sommets de  $K_n$  contient un sommet de  $S$  qui résout la paire. Supposons par l'absurde que cet ensemble ne soit pas minimal, alors il existe un ensemble  $S'$  résolvant de taille au plus  $n - 2$ . En particulier, il existe deux sommets  $x$  et  $y$  qui ne sont pas dans  $S'$ . Par définition d'une clique, pour tout sommet  $s$  de  $S'$ ,  $d(x, s) = d(y, s) = 1$  donc la paire  $(x, y)$  n'est résolue par aucun sommet de  $S'$ . Ainsi,  $S'$  n'est pas un ensemble résolvant ce qui prouve  $\dim(K_n) = n - 1$ .  $\square$

Même si les deux caractérisations d'un ensemble résolvant sont utiles en fonction du contexte, on pourra constater par la suite que celle basée sur les vecteurs de distance est souvent lourde à manipuler dès lors que les graphes sont grands et l'on préférera l'autre caractérisation basée sur les sommets résolvants. Néanmoins, l'utilisation des vecteurs de distance reste utile, dans des cas spécifiques ou pour vérifier rapidement qu'un ensemble est résolvant sur un petit graphe. Ainsi dans la figure 3.4, on peut rapidement voir que l'ensemble  $\{A, B, C\}$  forme un ensemble résolvant et donc que la dimension métrique du graphe est au plus 3.

**Sommets jumeaux** On appelle *sommets jumeaux* des sommets ayant le même voisinage et qui seront donc indiscernables par les autres sommets du graphe.

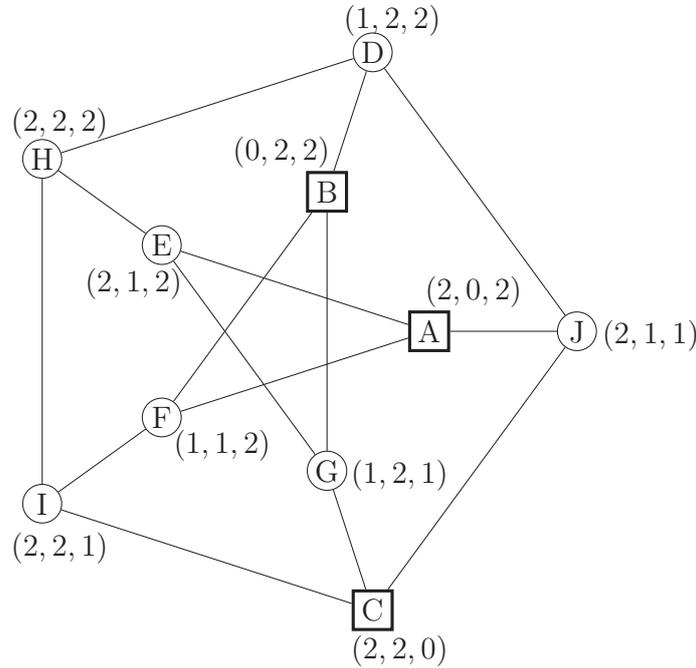


FIGURE 3.4 – Une base métrique (sommets carrés) dans le graphe de Petersen.

**Définition 3.8** (Sommets jumeaux). Soient  $G$  un graphe et deux sommets  $u$  et  $v$ . On dit que  $u$  et  $v$  sont des sommets jumeaux si, pour tout sommet  $w$  de  $G$  différent de  $u$  et de  $v$ ,  $w$  est adjacent à  $u$  si et seulement si  $w$  est adjacent à  $v$ .

Dans le contexte de la dimension métrique, il n'est en général pas nécessaire de faire la distinction entre les vrais jumeaux ( $u$  et  $v$  sont adjacents) et les faux jumeaux ( $u$  et  $v$  non-adjacents), le résultat suivant étant vrai dans les deux cas.

**Proposition 3.9.** Soient  $G$  un graphe et deux sommets jumeaux  $u$  et  $v$ . Soit  $S$  un ensemble résolvant de  $G$ , alors  $S \cap \{u, v\} \neq \emptyset$ .

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que  $S$  soit un ensemble résolvant ne contenant ni  $u$  ni  $v$ . D'après la définition 3.2, il existe un sommet  $s$  dans  $S$  tel que  $d(u, s) \neq d(v, s)$ . Par symétrie, on peut supposer  $d(u, s) < d(v, s)$ , considérons alors un plus court chemin de  $u$  à  $s$  et posons  $w$  le sommet adjacent à  $u$  sur ce plus court chemin. On a donc  $d(u, s) = d(w, s) + 1$ . Par inégalité triangulaire,  $d(v, s) \leq d(v, w) + d(w, s)$ . Et comme  $u$  et  $v$  sont jumeaux, le sommet  $v$  est aussi adjacent à  $w$  donc  $d(v, w) = 1$ . Ce qui donne  $d(v, s) \leq d(v, w) + 1$  soit  $d(v, s) \leq d(u, s)$ , une contradiction. Donc  $S$  contient au moins un des sommets  $u$  et  $v$ .  $\square$

La notion de jumeaux ne se limite pas forcément à deux sommets, il est possible d'avoir des ensembles de sommets qui soient tous deux à deux jumeaux. C'est le cas par exemple dans une clique (voir figure 3.3) où toutes les paires de sommets sont jumeaux.

La proposition 3.9 donne alors directement que  $\dim(K_n) \geq n - 1$  pour toute clique de taille  $n \geq 2$ . Cette définition permet aussi de traiter facilement le cas des graphes non connexes et de se ramener uniquement à l'étude des graphes connexes.

**Proposition 3.10.** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe,  $G_1 = (V_1, E_1), \dots, G_k = (V_k, E_k)$  les composantes connexes de  $G$ , ordonnées telle que les  $\ell$  premières composantes contiennent un unique sommet. Alors,*

$$\dim(G) = \sum_{i=1}^k \dim(G_i) \text{ si } \ell = 0, \text{ sinon } \dim(G) = \ell - 1 + \sum_{i=\ell+1}^k \dim(G_i)$$

*Démonstration.* Remarquons d'abord que les sommets seuls dans leur composante sont jumeaux donc tout ensemble résolvant en contient au moins  $\ell - 1$ . On note aussi que si un graphe a au moins deux sommets, sa dimension métrique est strictement positive. On montre l'égalité par double inégalité.

Tout d'abord, considérons un ensemble  $S$  dans  $G$  constitué de  $\ell - 1$  sommets seuls dans leur composante et pour tout  $i \geq \ell + 1$ , d'une base métrique de  $G_i$ . On montre alors que  $S$  est un ensemble résolvant de  $G$ . Soit  $(u, v)$  une paire de sommets de  $G$ . Si  $u$  et  $v$  sont dans des composantes connexes différentes, alors au moins un des deux sommets est dans une composante connexe avec un sommet de  $S$ . Ce sommet résout la paire  $(u, v)$  car il est à une distance finie d'un des sommets et à une distance infinie de l'autre. Si  $u$  et  $v$  sont dans la même composante connexe  $G_i$ , alors en particulier c'est une composante qui contient plusieurs sommets. Donc  $S$  contient une base métrique de  $G_i$  et le sommet de  $S \cap V_i$  qui résout la paire  $(u, v)$  dans  $G_i$  résout aussi la paire dans  $G$ . Ainsi  $S$  est un ensemble résolvant de  $G$  et donc  $\dim(G) \leq |S|$ .

Pour montrer l'autre inégalité, on montre que pour tout ensemble résolvant  $S$  de  $G$  et toute composante  $G_i$  avec  $i > \ell$ ,  $S \cap V_i$  est un ensemble résolvant de  $G_i$ . En effet, dans le cas contraire, il existe une paire  $(u, v)$  de sommets de  $G_i$  qui n'est pas résolue par  $S \cap V_i$  dans  $G_i$ . Alors cette paire de sommets n'est pas résolue par  $S$  : par hypothèse elle n'est pas résolue par un sommet de  $S \cap V_i$  et tous les autres sommets de  $S$  sont à une distance infinie des deux sommets. Ainsi  $|S| \geq \sum_{i=\ell+1}^k \dim(G_i)$ . Si  $\ell > 0$ ,  $S$  contient  $\ell - 1$  sommets supplémentaires dans les composantes avec un unique sommet ce qui donne la seconde inégalité.  $\square$

Ce résultat permet de se restreindre au cas des graphes connexes, le cas des graphes non-connexes s'y ramenant simplement. Ainsi, sauf exception mentionnée, nous ne considérons que des graphes connexes.

### 3.1.4 Dimension métrique dans les arbres

Dès l'introduction de la notion, Slater [Sla75], Harary et Melter [HM75] ont montré comment calculer la dimension métrique dans les arbres en donnant une formule explicite. C'est une classe de graphe très importante pour l'étude de la dimension métrique en général, la méthode utilisée pour les arbres servant de point de départ à l'étude de

nombreuses autres classes. La preuve et les dénominations que nous suivrons par la suite sont inspirées de l'article [Cha+00].

Dans un arbre, tout sommet de degré au moins égal à 2 est un sommet séparateur. La proposition suivante donne une propriété que doit respecter tout ensemble résolvant vis-à-vis des sommets séparateurs.

**Proposition 3.11.** *Soient  $G = (V, E)$  un graphe connexe et  $u$  un sommet séparateur de  $G$ . On note  $G_1, G_2, \dots, G_k$  les différentes composantes connexes de  $G \setminus \{u\}$ . Soit  $S$  un ensemble résolvant de  $G$ , alors  $S \cap V(G_i) = \emptyset$  pour au plus une composante connexe  $G_i$ .*

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que deux composantes connexes  $G_i$  et  $G_j$  vérifient  $S \cap V(G_i) = \emptyset$  et  $S \cap V(G_j) = \emptyset$ . Comme  $u$  est un sommet séparateur, il existe un sommet  $v_i \in G_i$  adjacent à  $u$  et un sommet  $v_j \in G_j$  adjacent à  $u$ . On montre alors que la paire  $(v_i, v_j)$  n'est pas résolue par  $S$ . En effet, pour tout sommet  $s \in S$ ,  $u$  est sur tout chemin entre  $s$  et  $v_i$  comme  $u$  est un sommet séparateur et que  $s \notin V(G_i)$ , donc  $d(s, v_i) = d(s, u) + d(u, v_i) = d(s, u) + 1$ . De même  $d(s, v_j) = d(s, u) + d(u, v_j) = d(s, u) + 1$  donc  $d(s, v_i) = d(s, v_j)$  et  $s$  ne résout pas la paire  $(v_i, v_j)$ . Donc  $S$  ne résout pas  $(v_i, v_j)$  d'où la contradiction.  $\square$

Chartrand et al. [Cha+00] ont introduit une classification des sommets pour étudier les ensembles résolvants dans les arbres. Nous étendons ces définitions au cas des graphes (voir la figure 3.5 pour une illustration).

- Un sommet de degré 1 est appelé une *feuille*.
- Un sommet de degré au moins 3 est appelé *sommet majeur*. Une feuille  $u$  est appelée *feuille d'un sommet majeur  $v$*  si  $d(u, v) < d(u, w)$  pour tout autre sommet majeur  $w$ . Autrement dit,  $u$  et  $v$  sont reliés par un chemin composé uniquement de sommets de degré 2. Le *degré terminal* d'un sommet majeur  $v$  est le nombre de feuilles de  $v$ , noté  $ter(v)$ . Un sommet majeur est *extérieur* si son degré terminal est strictement positif et *intérieur* sinon.
- Un sommet de degré 2 est un *sommet de degré 2 extérieur* s'il appartient à un chemin entre une feuille et son sommet majeur. Autrement il est appelé *sommet de degré 2 intérieur*.

On note  $\sigma(G)$  la somme des degrés terminaux de tous les sommets majeurs de  $G$  et  $ex(G)$  le nombre de sommets majeurs extérieurs dans  $G$ . On définit  $L(G) = \sigma(G) - ex(G)$ . Si  $G$  est un chemin  $P_n$  pour  $n \geq 1$ , on pose  $L(G) = 1$ . Il est alors possible de borner  $\dim(G)$  par ce paramètre. Le résultat suivant découle directement de la proposition 3.11 :

**Lemme 3.12.** [EKY17] *Pour tout graphe connexe  $G$ ,  $\dim(G) \geq L(G)$ .*

Pour prouver l'autre borne, nous montrons qu'un ensemble résolvant de la taille voulue existe.

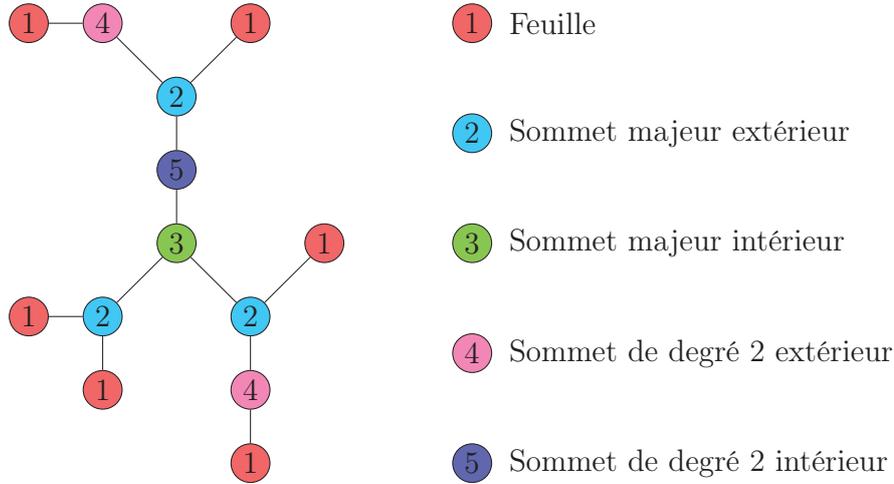


FIGURE 3.5 – Illustration de la classification des sommets.

**Lemme 3.13.** [Cha+00] Pour tout arbre  $T$ ,  $\dim(T) = L(T)$ . De plus, si  $T$  n'est pas un chemin, tout ensemble contenant tous les sommets terminaux sauf un pour chaque sommet majeur est un ensemble résolvant de  $T$ .

*Démonstration.* Soit  $T$  un arbre. On pose  $S$  un sous-ensemble de sommets contenant tous les sommets terminaux sauf un pour chaque sommet majeur de  $T$ . Montrons que  $S$  est un ensemble résolvant de  $T$ . Soit  $u$  un sommet de  $T$ , on considère deux possibilités.

**Cas 1 :** Supposons qu'il existe un sommet majeur extérieur  $w$  et une feuille  $x$  de  $w$  tel que  $u$  soit sur le chemin entre  $x$  et  $w$ . Soit  $v$  un sommet de  $T$  distinct de  $u$ . Supposons d'abord que  $x \in S$ . Si  $v$  est sur le chemin entre  $u$  et  $x$ , alors  $d(v, x) < d(u, x)$ . Dans le cas contraire,  $d(u, x) < d(v, x)$ . Dans les deux cas, la paire  $(u, v)$  est résolue par  $w$  donc résolue par  $S$ . Supposons maintenant que  $x \notin S$ . S'il existe un sommet  $y \in S$  tel que  $v$  soit sur le chemin entre  $u$  et  $y$  ou  $u$  soit sur le chemin entre  $v$  et  $y$ , alors,  $d(v, y) < d(u, y)$  ou  $d(u, y) < d(v, y)$ . Dans les deux cas, la paire  $(u, v)$  est résolue par  $y$ . Supposons maintenant que  $u$  ne soit sur aucun chemin entre  $v$  et un sommet de  $S$  et que  $v$  ne soit sur aucun chemin entre  $u$  et un sommet de  $S$ . Alors il existe un sommet majeur extérieur  $w'$  et une feuille  $x'$  de  $w'$  tel que  $v$  soit sur le chemin entre  $w'$  et  $x'$  avec  $v \neq w'$ . De plus, on a que  $x' \notin S$ ,  $u \neq w$  et  $w \neq w'$  sinon l'un des sommets  $x$  ou  $x'$  est dans  $S$ . Comme  $\deg(w) \geq 3$  et  $\deg(w') \geq 3$ , il existe une branche  $B$  de  $w$  qui ne contient ni  $w'$  ni  $x$  et une branche  $B'$  de  $w'$  qui ne contient ni  $w$  ni  $x'$ .

Par la proposition 3.11,  $B$  et  $B'$  contiennent toutes deux un sommet de  $S$ . Soient  $z$  et  $z'$  des sommets de  $S$  appartenant respectivement à  $B$  et  $B'$ . Si  $d(u, z') \neq d(v, z')$ , alors  $z'$  résout la paire  $(u, v)$ . Si  $d(u, z') = d(v, z')$ , alors  $d(u, z) < d(v, z)$  et la paire  $(u, v)$  est résolue par  $z$ .

**Cas 2 :** Supposons que  $u$  ne soit sur aucun chemin entre un sommet majeur extérieur  $w$  et une feuille  $x$  de  $w$ . Alors il existe  $B$  et  $B'$  deux branches de  $u$  contenant

chacune un sommet majeur extérieur de degré au moins deux. En conséquence,  $B$  et  $B'$  contiennent toutes deux un sommet de  $S$ . Soient  $z$  et  $z'$  des sommets de  $S$  appartenant respectivement à  $B$  et  $B'$ . Si  $v$  est un sommet de  $B$ , alors le chemin entre  $v$  et  $z'$  contient  $u$  donc  $d(u, z') < d(v, z')$  donc la paire  $(u, v)$  est résolue par  $z'$ . Si  $v$  n'est pas un sommet de  $B$ , alors le chemin entre  $v$  et  $z$  contient  $u$  donc  $d(u, z) < d(v, z)$  donc la paire  $(u, v)$  est résolue par  $z'$ .

Ainsi  $S$  est un ensemble résolvant de  $T$  de taille  $L(T)$  donc  $\dim(T) \leq L(T)$ . Le lemme 3.12 donne  $\dim(T) \geq L(T)$  donc  $\dim(T) = L(T)$ .  $\square$

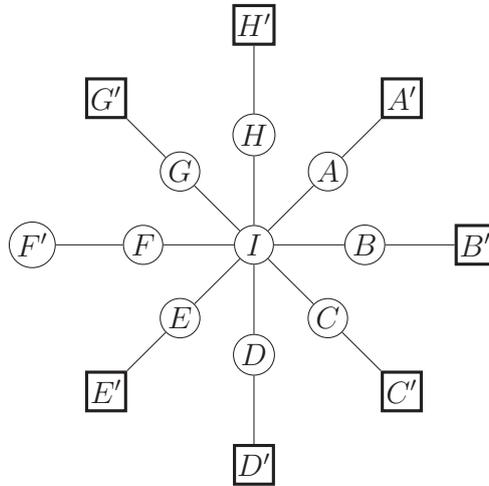


FIGURE 3.6 – Une base métrique (sommets carrés) dans une étoile subdivisée.

## 3.2 Recherche de bornes

Une manière d'obtenir des bornes est de partir d'une classe de graphes pour laquelle une formule pour la dimension métrique est connue pour essayer d'étendre à des classes proches. Une des approches les plus étudiées est de partir des arbres pour lesquels une formule est connue et d'ajouter des arêtes à un arbre. L'ajout d'une arête à un arbre a été entièrement résolu dans [ZPL21] dans lequel les auteurs donnent une formule pour calculer la dimension métrique pour ces graphes. L'ajout de plusieurs arêtes dans les arbres sera étudié plus en détails dans le chapitre 4 avec une borne en fonction de  $c(G)$  le nombre d'arêtes à supprimer de  $G$  pour obtenir un arbre.

**Théorème 3.14.** *Pour tout graphe  $G$ ,  $L(G) \leq \dim(G) \leq L(G) + 6c(G)$ .*

Partir des arbres n'est pas la seule possibilité, par exemple les auteurs de [MÓT22] montrent que l'ajout d'une arête dans une grille fait au plus doubler la dimension métrique.

Il est aussi possible de trouver des bornes plus directes. Dans ce cas, il est important de trouver quels sont les paramètres que l'on va utiliser comme borne. Un paramètre naturel est le nombre de sommets  $n$ , mais on a vu que pour un graphe de taille  $n$ , la dimension métrique peut varier de 1 dans le cas du chemin à  $n - 1$  pour une clique. Donc le nombre de sommets seul ne permet pas d'obtenir des bornes satisfaisantes. La grande dimension métrique de la clique vient de son grand nombre de jumeaux. On peut se demander si c'est la seule façon d'avoir une très grande dimension métrique. C'est en effet le cas comme montré dans [Fou+16], la dimension métrique d'un graphe à  $n$  sommets sans jumeaux est au plus de  $\frac{2n}{3}$ . Certains graphes à  $n$  sommets ont une dimension métrique de l'ordre de  $\frac{n}{2}$ , par exemple l'étoile subdivisée de la Figure 3.6 a une dimension métrique de  $\frac{n-3}{2}$ , la question de savoir si tous les graphes sans jumeaux à  $n$  sommets vérifient  $\dim(G) \leq \frac{n}{2}$  est toujours ouverte.

Un paramètre naturel à considérer est le diamètre du graphe. En effet, plus le diamètre du graphe est grand, plus les vecteurs de distances peuvent avoir des coordonnées différentes. Cette idée est capturée par la proposition suivante de [KRR96] qui relie nombre de sommets, diamètre et dimension métrique.

**Proposition 3.15.** [KRR96] *Soit  $G$  un graphe à  $n$  sommets de dimension métrique  $k$  et de diamètre  $D$ . Alors  $n \leq D^k + k$ .*

*Démonstration.* On considère les vecteurs de distances des sommets par rapport à une base métrique de  $G$ . Comme  $G$  a diamètre  $D$ , chaque coordonnée est un entier compris entre 0 et  $D$ . De plus, la coordonnée 0 ne peut apparaître que sur des vecteurs de sommets de la base métrique. Les autres sommets ont des vecteurs de distance avec des coordonnées entre 1 et  $D$  soit  $D^k$  vecteurs possibles et donc  $G$  a au plus  $D^k + k$  sommets.  $\square$

Il est possible d'obtenir assez simplement une inégalité dans le sens contraire :

**Proposition 3.16.** [Yus87] *Soit  $G$  un graphe à  $n$  sommets de dimension métrique  $k$  et de diamètre  $D$ . Alors  $n \geq D + k$ .*

*Démonstration.* Soit  $G = (V, E)$  un graphe de diamètre  $D$ . On considère un chemin  $v_0, v_1, \dots, v_D$  de longueur  $D$  dans  $G$ . Alors  $S = V \setminus \{v_1, \dots, v_D\}$  est un ensemble résolvant. En effet, toute paire de sommets  $(v_i, v_j)$  avec  $2 \leq i < j \leq D$  est résolue par  $v_0$  et toute autre paire de sommets contient un sommet de  $S$ . Ainsi  $\dim(G) \leq n - D$  d'où le résultat.  $\square$

D'autres travaux ont été effectués pour relier les trois paramètres, nombre de sommets, diamètre et dimension métrique. Par exemple, dans [Her+10], les auteurs caractérisent intégralement le cas d'égalité de la borne  $n \geq D + K$  de la proposition 3.16. La borne de la proposition 3.15 n'a pas de cas d'égalité dès que  $n \geq 4$  mais différentes bornes analogues peuvent être recherchées. Par exemple, dans l'article [Bea+18], les auteurs montrent que  $n = O(kD^2)$  dans le cas des arbres et des graphes planaires extérieurs ainsi que des bornes en fonction de largeur arborescente et la longueur arborescente de  $G$ .

## 3.3 Aspects algorithmiques

### 3.3.1 Algorithmes exacts

Le problème de décision DIMENSION MÉTRIQUE étant NP-complet, il a été étudié dans quelles classes il est possible de le résoudre en temps polynomial.

Une des raisons de la difficulté du problème DIMENSION MÉTRIQUE est le fait que le problème n'est pas local. Une paire de sommets peut être résolue par un sommet très éloigné dans le graphe. Ainsi, des algorithmes visant à réduire le graphe ou à utiliser une approche diviser-pour-régner ne pourront marcher que lorsque le graphe a une structure spécifique. C'est le cas dans le cas des arbres que l'on a vu précédemment, la plupart des algorithmes connus se basent sur la même idée et s'appliquent dans des classes de graphe proche des arbres. Le tableau 3.1 donne la complexité du problème de décision dans certaines classes de graphes. Le tableau 3.2 présente la dimension métrique pour les classes de graphes dans laquelle une formule dépendant uniquement du nombre de sommets est connue.

Classe de graphes	Complexité	Référence
Graphes planaires de degré borné	NP-complet	[Día+12]
Graphes d'intervalles, graphes chordaux	NP-complet	[Fou+17]
Graphes de permutations	NP-complet	[Fou+17]
Graphes sous-cubiques	NP-complet	[HN13]
Split graphes	NP-complet	[ELW15]
Graphes bipartis et co-bipartis	NP-complet	[ELW15]
Line graphes de graphes bipartis	NP-complet	[ELW15]
Graphes de largeur arborescente 24	NP-complet	[LP22]
Arbres	Linéaire	[Sla75 ; HM75]
Cactus bloc graphes	Linéaire	[HEW16]
Graphes chaînés	Polynomiale	[RW22]
Graphes planaires extérieurs	Polynomiale	[Día+12]
Co-graphes	Polynomiale	[ELW15]
2-arbres	Polynomiale	[BDP23]
Graphes d'intervalles unitaires	Ouvert	
Graphes de treewidth 2	Ouvert	

TABLE 3.1 – Complexité du problème de décision de la dimension métrique pour différentes classes de graphes.

Classe de graphes	Dimension métrique	Référence
Chemin $P_n$	1	
Cycle $C_n$	2	
Clique $K_n$	$n - 1$	
Étoile $K_{1,n}$	$n - 1$	
Grille $G_{m,n}$	2	[KRR96]
Roue $W_n$ avec $n > 6$	$\lfloor \frac{2n+2}{5} \rfloor$	[SKS19]

TABLE 3.2 – Dimension métrique pour certaines classes de graphes pour laquelle la valeur est connue.

### 3.3.2 Algorithmes paramétrés

#### Complexité paramétrée par la taille de la solution

Un paramètre naturel lors de l'étude de la complexité paramétrée est la taille de la solution. On souhaite savoir s'il est possible de trouver rapidement la solution dans le cas où celle-ci est de petite taille. Pour un problème où l'on recherche une solution de taille minimale, une méthode de recherche possible est de tester tous les ensembles possibles par ordre de taille croissant. Ainsi s'il existe une solution de petite taille, celle-ci devrait être trouvée assez rapidement. En supposant que vérifier qu'un ensemble soit bien une solution du problème se fasse en temps polynomial, une telle méthode donne une complexité en  $O(n^k) \cdot \text{Poly}(n)$  où  $k$  est la taille de la solution minimale. Une telle méthode peut être efficace lorsque la solution est de petite taille mais ne fournit pas un algorithme FPT, l'exposant de  $n$  dans la complexité n'étant pas constant. Hartung et Nichterlein ont montré qu'un algorithme de complexité  $n^{O(1)} \cdot f(k)$  est improbable pour la dimension métrique et que le problème est W[2]-difficile paramétré par la taille de la solution [HN13].

#### Utilisation du théorème de Courcelle et largeur arborescente

En complexité paramétrée, de nombreux méta-théorèmes ont été prouvés ces 30 dernières années. Un méta-théorème un un théorème qui ne se concentre pas sur un problème en particulier, les hypothèses peuvent donc être vérifiées par plusieurs problèmes. L'un des méta-théorèmes les plus connus pour la complexité paramétrée est le théorème de Courcelle.

**Théorème 3.17** (Théorème de Courcelle). [CE12] *Toute propriété de la logique monadique du second ordre<sup>1</sup> est décidable en temps  $f(|\phi|) \cdot n$  où  $f$  est une fonction qui dépend uniquement de la longueur de la formule  $\phi$  et  $n$  est le nombre de sommets du graphe.*

1. Définir de façon formelle la logique monadique nécessiterait d'autres définitions préliminaires peu intéressantes dans notre contexte, la définition n'est donc pas donnée ici.

Pour prouver qu'un problème est FPT en la largeur arborescente, il est donc possible d'essayer de l'exprimer sous forme d'une formule logique de la logique monadique du second ordre.

Néanmoins la complexité de l'algorithme dépend de la taille de la formule. Or une égalité entre deux distances est difficile à exprimer de façon compacte en logique monadique du second ordre ce qui rend cette approche difficilement applicable pour la dimension métrique. Pire, le problème a été prouvé  $W[1]$ -difficile paramétré par la largeur arborescente par Bonnet et Purohit dans [BP21].

**Théorème 3.18.** [BP21] *Le problème DIMENSION MÉTRIQUE est  $W[1]$ -difficile paramétré par la largeur arborescente.*

Ce résultat a été amélioré par Li et Pilipczuk qui ont montré que le problème est NP-complet pour les graphes de largeur de chemin, et donc de largeur arborescente, au plus 24 dans [LP22]. Les graphes de largeur arborescente 1 sont exactement les arbres pour lesquels le calcul de la dimension métrique est simple, à ce jour il n'existe pas de résultat plus précis sur la valeur limite de la largeur arborescente à partir de laquelle le problème devient NP-complet, le cas de la largeur arborescente 2 étant ouvert.

Le théorème de Courcelle permet en revanche de conclure positivement en paramétrant par la profondeur arborescente, ce qui est montré dans [Gim+22]. La profondeur arborescente étant un paramètre plus restrictif que la largeur arborescente (tout graphe de profondeur arborescente  $k$  a une largeur arborescente de au plus  $k$ ), le théorème de Courcelle s'applique. La différence avec la largeur arborescente vient du fait que le diamètre d'un graphe peut se borner par une fonction de la profondeur arborescente mais pas par une fonction de la largeur arborescente.

**Proposition 3.19.** [Gim+22] *La propriété être un ensemble résolvant dans un graphe  $G$  peut être exprimée par une formule de la logique monadique du second ordre de taille bornée par une fonction de la profondeur arborescente.*

*Démonstration.* Tout d'abord, pour tout graphe  $G$ , le diamètre de  $G$  est borné par  $\text{diam}(G) \leq 2^{td(G)}$  où  $td(G)$  est la profondeur arborescente de  $G$ . On crée la formule en traduisant la définition 3.2 de façon quasiment littérale. Ainsi un ensemble  $S$  est résolvant si

$$\forall u \in V, \forall v \in V, (u \neq v) \implies \exists s \in S, d(u, s) \neq d(v, s)$$

La formule précédente n'est pas une formule de la logique monadique du second ordre, il faut exprimer la notion de distance sous la forme d'une telle formule. On commence par définir une formule  $d_k(u, v)$  pour exprimer que deux sommets  $u$  et  $v$  sont à distance exactement  $k$ . On définit cette formule de façon récursive :  $d_0(u, v)$  est la formule  $u = v$ ,  $d_1(u, v)$  est la formule  $uv \in E \wedge \neg d_0(u, v)$ . Pour  $k \geq 2$ , la formule  $d_k(u, v)$  est la formule

$$\exists u_1 \in V, \dots, \exists u_{k-1} \in V, \left( \bigwedge_{i=1}^{k-1} u_i \neq u \wedge u_i \neq v \right) \wedge \left( \bigwedge_{i=1}^{k-1} \bigwedge_{j=i+1}^{k-1} u_i \neq u_j \right) \wedge$$

$$uu_1 \in E \wedge u_{k-1}v \in E \wedge \left( \bigwedge_{i=1}^{k-2} u_i u_{i+1} \in E \right) \wedge \left( \bigwedge_{i=1}^{k-1} \neg d_i(u, v) \right)$$

La formule signifie, dans l'ordre, qu'il existe  $k - 1$  sommets dans  $V$ , distincts de  $u$  et  $v$  et distincts entre eux tel qu'il y ait un chemin  $uu_1 \dots u_{k-1}v$  dans  $G$  et que  $u$  et  $v$  ne sont pas à une distance strictement inférieure à  $k$ . On peut alors écrire la formule  $d(u, s) \neq d(v, s)$  comme  $(\bigwedge_{i=0}^{2^{td(G)}} \neg(d_i(u, s) \wedge d_i(v, s)))$ . La formule obtenue ainsi est bien une formule de la logique monadique du second ordre de taille bornée par la profondeur arborescente de  $G$  car chaque morceau est de taille bornée par la profondeur arborescente et le nombre de morceaux est aussi bornée par la profondeur arborescente.  $\square$

On obtient en conséquence le résultat suivant en utilisant le théorème de Courcelle.

**Corollaire 3.20.** [Gim+22] *Décider si un graphe a dimension métrique au plus  $k$  peut être décidé en un temps FPT en la profondeur arborescente de  $G$ .*

### Complexité paramétrée par d'autres paramètres

Il existe de nombreux paramètres par rapport auxquels il est possible de paramétrer un problème. La figure 3.7 présente certains de ces paramètres ainsi que le résultat associé lorsqu'il est connu. La taille de la solution et la largeur arborescente sont deux paramètres usuels pour lesquels DIMENSION MÉTRIQUE n'admet pas d'algorithme FPT. Pour obtenir des résultats positifs avec ces paramètres, il est nécessaire d'utiliser des hypothèses supplémentaires. Ainsi, la dimension métrique est FPT paramétrée par la taille de la solution pour les graphes d'intervalles [Fou+17] et FPT paramétrée par la taille de la solution plus la longueur arborescente de façon générale. [Bel+16]. On montrera dans le chapitre 5 que DIMENSION MÉTRIQUE est FPT paramétré par la largeur arborescente dans les graphes chordaux.

**Théorème 3.21.** [BDP23] *Le problème DIMENSION MÉTRIQUE est FPT en la largeur arborescente dans la classe des graphes chordaux.*

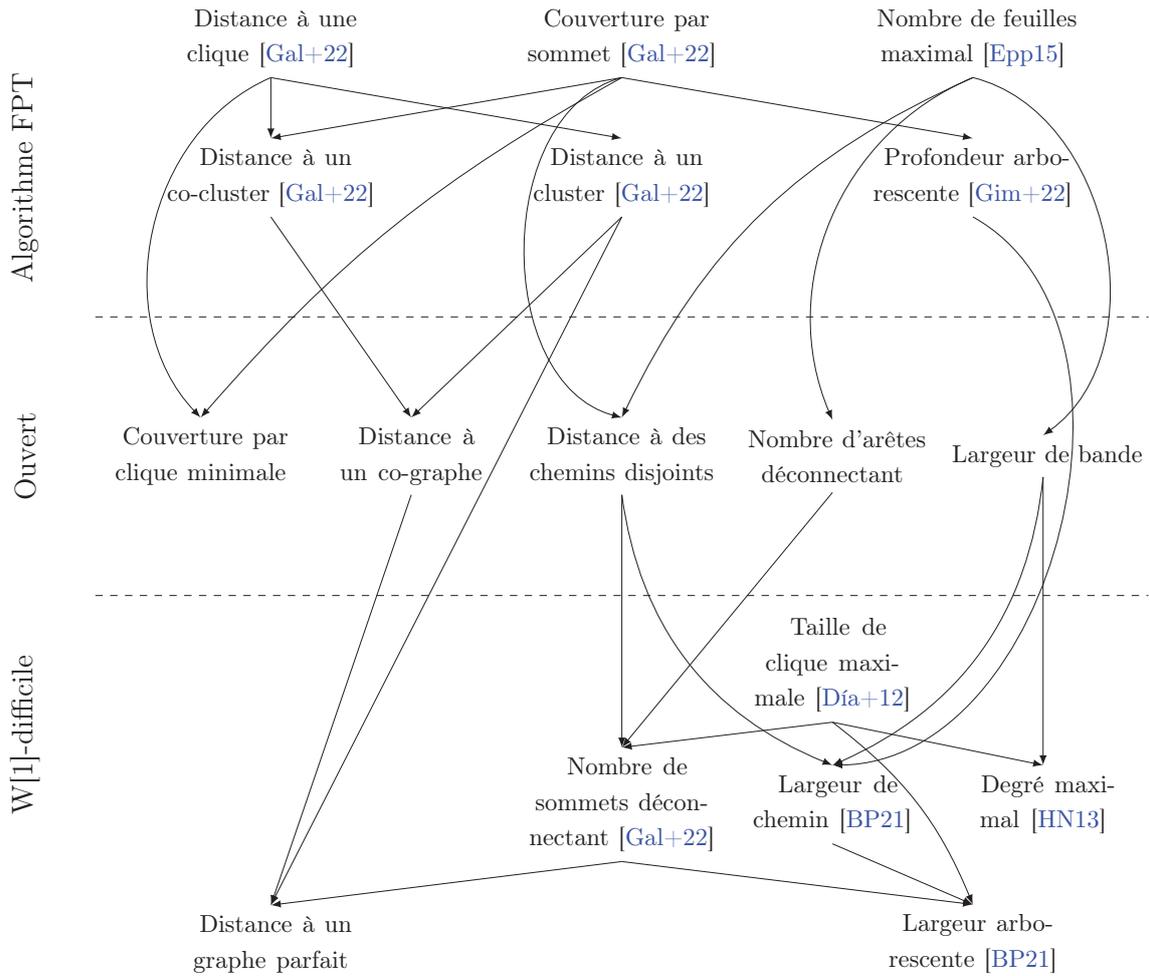


FIGURE 3.7 – Complexité de la dimension métrique pour certain paramètres. Une flèche entre deux paramètres indique que le paramètre à l'arrivée est toujours plus grand que celui de départ.

# Chapitre 4

## Dimension métrique et nombre zéro-forçant

Le contenu de ce chapitre est basé sur le travail effectué avec Nicolas Bousquet, Aline Parreau et Ignacio M. Pelayo sur la comparaison entre la dimension métrique et le nombre zéro-forçant dans des graphes peu denses. Nous présentons notamment une borne sur la dimension métrique en utilisant une mesure de distance à un arbre (le nombre cyclomatique). Cette borne est utilisée ensuite pour déduire une inégalité reliant dimension métrique, nombre zéro-forçant et nombre cyclomatique.

Ce travail a été présenté lors de la conférence EuroComb 2021 [Bou+21]. Il n'a pas donné lieu à une publication dans un journal car un des résultats principaux de l'article a été amélioré. La démonstration de ce résultat est donnée en fin de chapitre dans la section 4.5.

### 4.1 Introduction

Une des principales difficultés pour le calcul de la dimension métrique vient du fait qu'elle est très sensible aux modifications du graphe. Lorsqu'un sommet est ajouté, la dimension métrique peut grandement changer. Par exemple, un cycle possède un ensemble résolvant de taille 2 alors qu'un cycle plus un sommet universel (une roue) n'admet que des ensembles résolvants de taille linéaire en le nombre de sommets. Cependant dans cet exemple, même si un seul sommet est ajouté, un nombre linéaire d'arêtes est ajouté dans le même temps.

Malheureusement, la situation n'est pas meilleure lors de l'ajout d'arêtes et la dimension métrique peut être grandement modifiée par l'ajout d'une seule arête comme on peut le voir dans la figure 4.1 (initialement proposée dans [Ero+15]). Dans cette partie, on montre qu'il est tout de même possible d'obtenir des relations dans le cas d'un arbre et d'un graphe obtenu en ajoutant des arêtes à cet arbre.

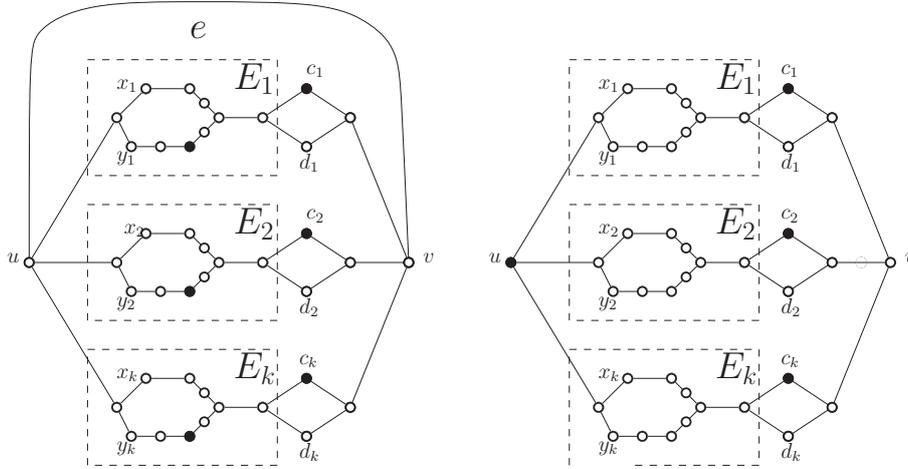


FIGURE 4.1 – Sur le graphe de gauche, toutes les paires de sommets  $(c_i, d_i)$  sont des sommets jumeaux donc n'importe quel ensemble résolvant doit contenir  $c_i$  ou  $d_i$ , et ce pour tout  $i \leq k$ . De plus, pour tout  $i \leq k$ , la paire  $(x_i, y_i)$  peut uniquement être résolue par un sommet de  $E_i$  donc tout ensemble résolvant doit contenir un sommet de  $E_i$ , et ce pour tout  $i \leq k$ . Ainsi tout ensemble résolvant contient au moins  $2k$  sommets. L'ensemble de sommets noirs est un ensemble résolvant donc la dimension métrique du graphe est  $2k$ . Dans le graphe de droite, toutes les paires de sommets  $(c_i, d_i)$  sont des sommets jumeaux donc n'importe quel ensemble résolvant doit contenir  $c_i$  ou  $d_i$ , et ce pour tout  $i \leq k$ . On peut vérifier qu'un ensemble ne contenant que des sommets de  $\{c_i, d_i, 1 \leq i \leq k\}$  n'est pas résolvant donc la dimension métrique est strictement supérieure à  $k$ . L'ensemble de sommets noirs est un ensemble résolvant donc la dimension métrique du graphe est  $k + 1$ .

**Dimension métrique et nombre cyclomatique** Dans leur article [EKY17], Eroh, Kang et Yi ont prouvé que si  $G$  ne contient qu'un seul cycle, alors la dimension métrique de  $G$  est au plus la dimension métrique de n'importe quel arbre couvrant de  $G$  plus un. Dans ce chapitre, on généralise ce résultat dans le cas de l'ajout de plusieurs arêtes. Le *nombre cyclomatique* d'un graphe connexe, noté  $c(G)$ , est le nombre d'arêtes qu'il faut supprimer de  $G$  pour obtenir un arbre. Dans cette partie, nous prouvons le théorème suivant :

**Théorème 3.14.** *Pour tout graphe  $G$ ,  $L(G) \leq \dim(G) \leq L(G) + 6c(G)$ .*

Comme la valeur  $L(G)$  ne peut pas diminuer en supprimant des arêtes de  $G$  qui ne déconnectent pas le graphe, cela implique le résultat suivant :

**Corollaire 4.1.** *Soient  $G$  un graphe et  $T$  un arbre couvrant de  $G$ . Alors,*

$$\dim(G) \leq \dim(T) + 6c(G)$$

*Démonstration.* Pour tout graphe  $G = (V, E)$  qui n'est pas un arbre et toute arête  $e \in E$  tel que  $G - e$  est connexe,  $L(G) \leq L(G - e)$ . En effet, si un sommet majeur  $v$  a un

degré terminal  $d \geq 2$  dans  $G$ , alors  $v$  est toujours un sommet majeur dans  $G - e$  de degré terminal au moins  $d$ . Donc  $L(G) \leq L(G - e)$  et donc, pour  $T$  un arbre couvrant de  $G$ ,  $L(G) \leq L(T)$ . Comme  $\dim(G) \leq L(G) + 6c(G)$  et  $\dim(T) = L(T)$  on obtient  $\dim(G) \leq \dim(T) + 6c(G)$ .  $\square$

Informellement, le corollaire 4.1 assure que, même si la dimension métrique peut être grandement modifiée par l'ajout d'une seule arête, le "coût amorti" pour l'ajout d'une arête est au plus de 6 en partant de n'importe quel arbre couvrant de  $G$ .

La section 4.2 sera consacrée à la démonstration de résultats techniques pour la démonstration du théorème 3.14 qui sera montré dans la section 4.3. Dans la section 4.4, on présente une conjecture reliant la dimension métrique et le nombre zéro-forçant et on applique le théorème 3.14 pour prouver une version affaiblie de cette conjecture. Enfin, dans la section 4.5, on présente une preuve plus courte du théorème 3.14.

## 4.2 Préliminaires

Dans cette section, nous prouvons quelques résultats concernant la dimension métrique, utilisés dans la suite.

**Lemme 4.2.** *Soient  $G$  un graphe et  $u, v$  deux sommets de  $G$ . Soient  $s$  et  $t$  deux sommets distincts sur un plus court chemin entre  $u$  et  $v$ . Alors,  $d(u, s) \neq d(v, s)$  ou  $d(u, t) \neq d(v, t)$ .*

*Démonstration.* Soit  $P$  un plus court chemin entre  $u$  et  $v$  contenant  $s$  et  $t$ . Quitte à renommer, on peut supposer que  $u, s, t, v$  apparaissent dans cette ordre dans  $P$ . Comme  $P$  est un plus court chemin entre  $u$  et  $v$ ,  $d(s, v) = d(s, t) + d(t, v) > d(t, v)$  et  $d(t, u) = d(s, u) + d(s, t) > d(s, u)$ . Supposons que  $d(u, s) = d(v, s)$ . Alors,  $d(u, t) = d(u, s) + d(t, s)$  et  $d(v, s) = d(v, t) + d(t, s)$ . Donc,  $d(u, t) = d(v, t) + 2d(t, s) \neq d(v, t)$  comme  $t \neq s$ .  $\square$

**Lemme 4.3.** *Soit  $G$  un graphe à un seul cycle avec un cycle  $C$  de longueur impaire. Alors toute paire de sommets de  $C$  résout  $C$ .*

*Démonstration.* Soient  $u$  et  $v$  deux sommets de  $C$ . Il y a deux chemins entre  $u$  et  $v$  dans  $C$ , un de longueur paire et l'autre de longueur impaire. Il existe donc un unique sommet  $w$  de  $C$  à la même distance de  $u$  et  $v$  dans  $C$  qui est le milieu du chemin de longueur paire. Le sommet  $w$  est le seul sommet de  $C$  qui ne résout pas la paire  $(u, v)$ . Donc toute paire de sommets de  $C$  résout  $C$ .  $\square$

**Lemme 4.4.** *Soient  $G = (V, E)$  un graphe et  $C$  un cycle de  $G$  dont les sommets sont  $V(C) = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ . Si pour tout  $i \leq j$ ,  $d(v_i, v_j) = \min(j - i, k - j + i + 1)$ <sup>1</sup>, alors, pour tout ensemble de sommets  $S \subseteq C$  de taille au moins 3,  $S$  résout  $C$ .*

1. Cette condition assure qu'il n'y a pas de raccourcis entre les sommets de  $C$ .

*Démonstration.* Soient  $S = \{v_a, v_b, v_c\}$  un ensemble quelconque de trois sommets de  $C$  et  $v_x \neq v_y$  deux sommets de  $C$ . Supposons par contradiction que  $S$  ne résout pas la paire  $(v_x, v_y)$ .

Remarquons tout d'abord que ni  $v_x$  ni  $v_y$  n'appartiennent à  $\{v_a, v_b, v_c\}$  sinon la paire  $(v_x, v_y)$  serait résolue. Sans pertes de généralités, on peut supposer  $v_x = v_0$  et  $a < b < c$ .

Supposons d'abord que  $y < a$ . Le plus court chemin dans  $G$  entre  $v_0$  et  $v_a$  ne peut pas contenir  $v_y$  sinon  $d(v_x, v_a) > d(v_y, v_a)$ . Donc,  $d(v_0, v_a) = k - a + 1$  et de même  $d(v_0, v_b) = k - b + 1$  donc en particulier  $d(v_0, b) < d(v_0, a)$ . Considérons le chemin entre  $v_y$  et  $v_b$ . Si ce chemin passe par le sommet  $v_a$ , alors  $d(v_y, a) < d(v_y, b)$  et s'il passe par le sommet  $v_0$  alors  $d(v_y, b) > d(v_0, b)$ . Les deux possibilités conduisent à une contradiction avec l'hypothèse que  $S$  ne résout pas la paire  $(v_0, v_y)$ .

Supposons maintenant  $a < y < b$ . Si le plus court chemin entre  $v_0$  et  $v_b$  passe par le sommet  $v_y$  alors  $d(v_0, v_b) > d(v_y, v_b)$  ce qui donne une contradiction. En effet,  $d(v_0, v_b) = k - b + 1$  donc  $d(v_0, v_c) = k - c + 1$ . De même, si le chemin entre  $v_y$  et  $v_b$  passe par le sommet  $v_0$  alors  $d(v_y, v_b) > d(v_0, v_b)$ . Donc  $d(v_y, v_b) = b - y$  et  $d(v_y, v_c) = c - y$ . On obtient  $b - y = k - b + 1$  et  $c - y = k - c + 1$  ce qui est impossible car  $b \neq c$ .

Les deux autres cas,  $b < y < c$  et  $y > c$ , sont respectivement symétriques aux cas  $a < y < b$  et  $y < a$ .  $\square$

Le résultat suivant a été présenté dans [EKY17] mais la preuve contenait une erreur. On présente une preuve corrigée reprenant les mêmes idées que l'originelle. Ce résultat permet de borner les variations de la dimension métrique lors de la suppression d'une arête sous certaines conditions.

**Lemme 4.5.** Soient  $G = (V, E)$  un graphe et  $C$  un cycle de  $G$ . On pose  $V(C) = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$  comme l'ensemble des sommets  $C$ . Notons  $G_i = (V_i, E_i)$  la composante connexe du sommet  $u_i$  dans  $G \setminus E(C)$ . Si, pour tout  $i \neq j$ ,  $V_i \cap V_j = \emptyset$ , alors, pour toute arête  $e \in E(C)$ ,  $\dim(G) \leq \dim(G - e) + 1$ .

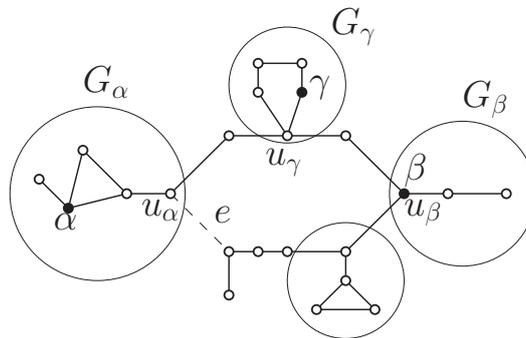


FIGURE 4.2 – L'ensemble  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  résout toute paire de sommets appartenant à deux cercles différents.

*Démonstration.* Soit  $S$  une base métrique de  $G - e$  et  $S_i = S \cap V_i$  pour  $1 \leq i \leq k$ . Sans perdre de généralités, on peut supposer que  $S_1 \neq \emptyset$ . En effet, si  $S_i = \emptyset$  pour tout  $i \neq 1$ , alors  $(G - e) \setminus G_1$  est un chemin et  $S_1 \cup \{u_2\}$  est un ensemble résolvent de  $G$ . S'il existe deux ensemble non vides  $S_i$  et  $S_j$  tels que  $d_G(u_i, u_j) = \frac{k}{2}$ , alors on pose  $\alpha_0 \in V(C) \setminus \{u_i, u_j\}$  et  $S_0 = \{\alpha_0, \alpha_i, \alpha_j\}$  avec  $\alpha_i \in S_i$  et  $\alpha_j \in S_j$ . Sinon, soit  $i \neq 1$  tel que  $S_i \neq \emptyset$ , on pose  $\alpha_0 = u_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$  et  $S_0 = \{\alpha_0, \alpha_i, \alpha_1\}$  où  $\alpha_1 \in S_1$  et  $\alpha_i \in S_i$ . On montre alors que  $S \cup \{\alpha_0\}$  est un ensemble résolvent de  $G$ .

Soient  $v \in G_i$  et  $w \in G_j$  avec  $i \neq j$  deux sommets de  $G$ . On montre qu'un sommet de  $S_0$  résout la paire  $(u, v)$ . Pour simplifier les notations, on renomme les sommets de  $S_0$  comme  $S_0 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$  avec  $\alpha \in G_\alpha$ ,  $\beta \in G_\beta$  et  $\gamma \in G_\gamma$  avec  $d(u_\alpha, u_\beta) = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  comme sur la Figure 4.2.

On commence par le cas où  $u_v \notin \{u_\alpha, u_\beta, u_\gamma\}$  et  $u_w \notin \{u_\alpha, u_\beta, u_\gamma\}$ . On a alors les égalités suivantes :

$$d(v, \alpha) = d(w, \alpha) \text{ donne } d(v, u_v) + d(u_v, u_\alpha) + d(u_\alpha, \alpha) = d(w, u_w) + d(u_w, u_\alpha) + d(u_\alpha, \alpha);$$

$$d(v, \beta) = d(w, \beta) \text{ donne } d(v, u_v) + d(u_v, u_\beta) + d(u_\beta, \beta) = d(w, u_w) + d(u_w, u_\beta) + d(u_\beta, \beta);$$

$$d(v, \gamma) = d(w, \gamma) \text{ donne } d(v, u_v) + d(u_v, u_\gamma) + d(u_\gamma, \gamma) = d(w, u_w) + d(u_w, u_\gamma) + d(u_\gamma, \gamma).$$

En supprimant les termes de la forme  $d(u_\alpha, \alpha)$  et en égalisant, on obtient

$$d(v, u_v) - d(w, u_w) = d(u_w, u_\alpha) - d(u_v, u_\alpha) = d(u_w, u_\beta) - d(u_v, u_\beta) = d(u_w, u_\gamma) - d(u_v, u_\gamma).$$

Si  $d(v, u_v) - d(w, u_w) = 0$ , alors, d'après le Lemme 4.4,  $u_v = u_w$  comme  $u_v$  et  $u_w$  sont à la même distance de trois sommets du cycle. Sinon, on a

$$d(u_\alpha, u_w) + d(u_w, u_\beta) - d(u_\alpha, u_v) + d(u_v, u_\beta) = 2(d(v, u_v) - d(w, u_w)),$$

ce qui est un contradiction avec  $d(u_\alpha, u_\beta) = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ , car la différence est une des valeurs  $\{-1, 0, 1\}$ . Donc on obtient  $u_v = u_w$ .

On considère maintenant le cas où l'un des sommets  $u_v$  ou  $u_w$  est l'un des sommets  $u_\alpha$  ou  $u_\beta$ . On suppose sans perdre de généralités que  $u_v = u_\alpha$  et  $u_w \neq u_\alpha$ . Alors,  $d(v, \alpha) \leq d(v, u_v) + d(u_\alpha, \alpha)$  et comme  $d(w, \alpha) = d(w, u_w) + d(u_w, u_\alpha) + d(u_\alpha, \alpha)$ , on obtient

$$d(w, u_w) + d(u_w, u_\alpha) \leq d(v, u_v).$$

On considère maintenant les distances à  $\beta$  :  $d(v, \beta) = d(v, u_v) + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + d(u_\beta, \beta)$  et  $d(w, \beta) \leq d(w, u_w) + d(u_w, u_\beta) + d(u_\beta, \beta)$ . Comme  $d(v, \beta) = d(w, \beta)$  :

$$d(v, u_v) + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor \leq d(w, u_w) + d(u_w, u_\beta).$$

Ainsi,  $d(v, u_v) \leq d(w, u_w) + d(u_w, u_\beta) - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ , et donc

$$d(u_w, u_\alpha) \leq d(u_w, u_\beta) - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor.$$

On a supposé que  $u_w \neq u_\alpha$  donc  $d(u_w, u_\alpha) \geq 1$  et  $d(u_w, u_\beta) \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  par définition de  $k$ . On obtient une contradiction car  $d(u_w, u_\beta) \geq 0$ .

Le dernier cas est celui où  $u_v = u_\gamma$  et  $u_w \notin \{u_\alpha, u_\beta, u_\gamma\}$ . On a alors  $d(v, u_v) + d(u_v, u_\alpha) = d(w, u_w) + d(u_w, u_\alpha)$  et  $d(v, u_v) + d(u_v, u_\beta) = d(w, u_w) + d(u_w, u_\beta)$ . La somme des deux égalités donne

$$2d(v, u_v) + d(u_v, u_\alpha) + d(u_v, u_\beta) = 2d(w, u_w) + d(u_w, u_\alpha) + d(u_w, u_\beta),$$

ce qui donne  $d(v, u_v) = d(w, u_w)$ . Alors, par inégalité triangulaire,  $d(v, \gamma) \leq d(v, u_v) + d(u_v, \gamma)$ . Comme  $d(v, \gamma) = d(w, \gamma)$ , on obtient  $d(w, u_w) + d(u_w, u_\gamma) \leq d(v, u_v)$  et donc  $d(u_w, u_\gamma) \leq 0$  ce qui donne une contradiction.

On a prouvé que, si  $v$  et  $w$  ne sont pas dans le même sous-graphe, alors un sommet de  $S_0$  résout la paire  $(v, w)$ . Si  $v$  et  $w$  sont dans le même sous-graphe  $G_i$ , par définition de  $S$ , il existe  $\mu \in S$  qui résout  $(v, w)$  dans  $G - e$ . Alors,  $\mu$  résout  $(v, w)$  dans  $G$ . Si  $\mu \in G_i$ , les distances  $d(\mu, v)$  et  $d(\mu, w)$  sont les mêmes dans  $G$  et dans  $G - e$ . Si  $\mu \notin G_i$ , alors par hypothèse,  $d_{G-e}(v, \mu) \neq d_{G-e}(w, \mu)$ . En décomposant les chemins, on obtient  $d_{G-e}(v, u_v) + d_{G-e}(u_v, \mu) \neq d_{G-e}(w, u_w) + d_{G-e}(u_w, \mu)$  donc  $d_{G-e}(v, u_v) \neq d_{G-e}(w, u_w)$ . Comme  $d_{G-e}(v, u_v) = d_G(v, u_v)$  et  $d_{G-e}(w, u_w) = d_G(w, u_w)$ , on obtient  $d_G(v, u_v) + d_G(u_v, \mu) \neq d_G(w, u_w) + d_G(u_w, \mu)$ . Donc  $\mu$  résout la paire  $(v, w)$ . Ainsi,  $S \cup \{\alpha_0\}$  est un ensemble résolvant de  $G$  donc  $\dim(G) \leq \dim(G - e) + 1$ .  $\square$

## 4.3 Démonstration du théorème

Nous présentons les principaux éléments de la preuve du théorème 3.14. La première étape est de trouver un petit ensemble déconnectant  $X$  du graphe tel que chaque composante connexe est attachée par au plus deux sommets à  $X$ . Nous prouvons ensuite qu'en considérant un ensemble résolvant dans chaque composante connexe de  $G \setminus X$  et en ajoutant un petit nombre de sommets (en fonction de  $c(G)$ ), il est possible de détecter les "raccourcis" à travers le graphe et ainsi obtenir un ensemble résolvant pour le graphe  $G$ .

### 4.3.1 Construction de l'ensemble résolvant

Si  $c(G) = 0$  alors  $G$  est un arbre et  $\dim(G) = L(G)$  par le lemme 3.13. Si  $c(G) = 1$  nous prouvons un résultat plus fort.

**Lemme 4.6.** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe a un cycle. Alors  $\dim(G) \leq L(G) + 3$ .*

*Démonstration.* Soit  $uv$  une arête du cycle. Soit  $T = G - e$ , alors  $\dim(T) = L(T)$  par le lemme 3.13 et  $\dim(G) \leq \dim(T) + 1$  par le lemme 4.5. Comme  $L(T) \leq L(G) + 2$ , on obtient l'inégalité annoncée.  $\square$

Nous nous concentrons désormais sur le cas  $c(G) \geq 2$ . La première partie de la preuve consiste en la définition d'un sous-ensemble  $S$  de sommets. On prouve ensuite que cet

ensemble est bien un ensemble résolvant. Pour construire cet ensemble  $S$ , on trouve d'abord un petit ensemble de sommets  $M$  tel que  $G \setminus M$  est une forêt et que chaque composante connexe de  $G \setminus M$  possède au plus deux arêtes incidente à  $M$ . On construit ensuite l'ensemble  $S$ .

**Lemme 4.7.** *Soit  $G$  un graphe sans sommet de degré 1 qui ne soit pas un cycle. On note  $\tau(G)$  la taille minimale d'un ensemble de sommets déconnectant de  $G$ , c'est-à-dire un ensemble de sommets  $T$  tel que  $G \setminus T$  soit une forêt. Alors il existe un ensemble déconnectant  $X$  de taille  $\tau(G)$  contenant seulement des sommets de degré au moins 3.*

*Démonstration.* Soit  $X$  un ensemble déconnectant de taille  $\tau(G)$  avec un nombre minimal de sommet de degré strictement inférieur à 3. Remarquons que  $X$  ne contient pas de sommets de degré 1. Supposons par l'absurde que  $X$  contient un sommet  $x$  de degré 2. Soit  $P$  le chemin de sommets de degré 2 maximal contenant  $x$ . Comme  $G$  n'est pas un cycle (et contient au moins un cycle sinon  $X$  serait vide),  $P$  ne contient pas l'intégralité du graphe. Soit  $y$  une extrémité de  $P$  adjacente à un sommet  $z$  de  $V \setminus P$ . Soit  $X' = X \setminus \{x\} \cup \{z\}$ . L'ensemble  $X'$  est toujours un ensemble déconnectant, une contradiction avec la minimalité de  $X$ .  $\square$

Soit  $X$  un ensemble déconnectant de  $G$  contenant seulement des sommets de degré 3 dans le graphe où les sommets de degré 1 ont été itérativement supprimés<sup>2</sup>. Soient  $G_1, G_2, \dots, G_k$  les composantes connexes de  $G \setminus X$ . Remarquons que chaque composante  $G_i$  est un arbre. Pour chaque  $G_i$ , on pose  $X_i \subseteq X$  l'ensemble de sommets de  $X$  connecté à au moins un sommet de  $G_i$ . On pose  $N_i \subseteq V(G_i)$  l'ensemble des sommets de  $G_i$  adjacent à au moins un sommet de  $X_i$ .

Soit  $T_i$  le plus petit sous-arbre de  $G_i$  contenant les sommets de  $N_i$ . Autrement dit,  $T_i$  est le sous-arbre de  $G_i$  défini comme l'union des chemins entre  $a$  et  $b$  pour toutes les paires  $a, b \in N_i$ . Soit  $T'_i$  l'arbre construit à partir de  $T_i$  en ajoutant à chaque sommet  $u \in N_i$ ,  $|N(u) \cap X|$  sommets pendants de degré 1. Soit  $M_i$  l'ensemble des sommets de  $T'_i$  de degré au moins 3 et  $M := X \cup (\bigcup_{i=1}^k M_i)$ . La figure 4.3 donne un exemple de ces notations.

**Lemme 4.8.** *Pour chaque composante connexe  $H$  de  $G \setminus M$  il y a au plus deux arêtes dans  $G$  entre  $H$  et  $G \setminus H$ .*

*Démonstration.* Soit  $U_H$  le sous-arbre minimal de  $H$  contenant tous les sommets incidents à une arête entre  $H$  et  $G \setminus H$ . Alors, pour chaque arête entre un sommet  $v \in H$  et un sommet de  $G \setminus H$ , on ajoute un nouveau sommet à  $U_H$  adjacent à  $v$ . On note toujours  $U_H$  le graphe obtenu après cette opération. Remarquons que  $U_H$  a autant de sommets de degré 1 que d'arêtes quittant  $H$ . Donc, il y a au plus deux arêtes avec exactement une extrémité dans  $H$  si et seulement si  $U_H$  n'a pas de sommets de degré 3. Le graphe  $U_H$  est isomorphe à un sous-graphe de  $T'_i$ , donc, par définition de  $T'_i$ ,  $U_H$  ne contient pas de sommets de degré 3.  $\square$

2. On peut supposer que le graphe que l'on obtient n'est pas un cycle, autrement  $G$  est un graphe à un cycle et le résultat vient du lemme 4.6.

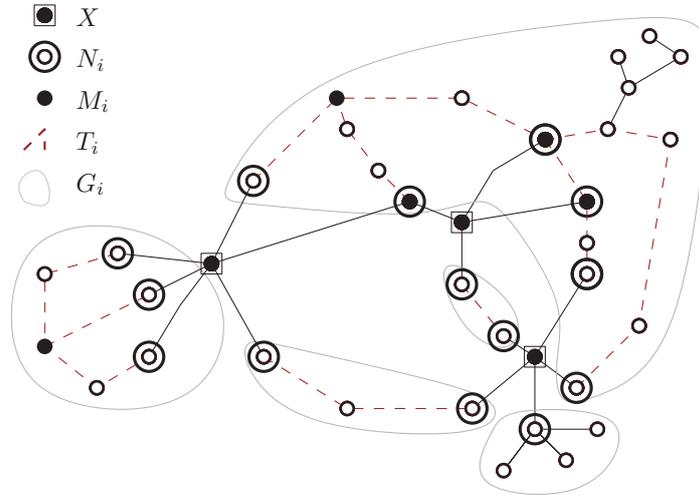


FIGURE 4.3 – Illustration des notations  $X$ ,  $N_i$ ,  $M_i$ ,  $T_i$  et  $G_i$ .

Le lemme 4.8 implique le suivant.

**Corollaire 4.9.** *Toute composante connexe de  $G \setminus M$  est connectée à au plus deux sommets de  $M$ .*

Une composante connexe de  $G \setminus M$  peut être attachée à  $M$  de trois manières différentes, appelées *types*, illustrées dans la figure 4.4. Une composante connexe de  $G \setminus M$  a *type A* (respectivement *type B*) s'il y a exactement deux arêtes entre  $H$  et  $M$  avec différentes extrémités dans  $H$  et telles que leurs extrémités dans  $M$  soient différentes (resp. identiques). Une composante  $H$  a *type C* si toutes les arêtes de  $G$  entre  $H$  et  $M$  ont la même extrémité dans  $H$  (mais potentiellement des extrémités différentes dans  $M$ ).

Soit  $H$  une composante connexe de  $G \setminus M$  de type A ou B et soient  $x$  et  $y$  les deux extrémités dans  $M$  des arêtes entre  $H$  et  $M$ . Soit  $\rho_H$  un sommet sur le chemin dans  $H$  entre  $x$  et  $y$  tel que  $|d_H(x, \rho_H) - d_H(y, \rho_H)| \leq 1$ . Autrement dit,  $\rho_H$  est l'un des sommets au milieu du chemin entre  $x$  et  $y$  dans  $H$ . On pose  $P$  l'ensemble des sommets  $\rho_H$  pour toutes les composantes connexes  $H$  de type A et B.

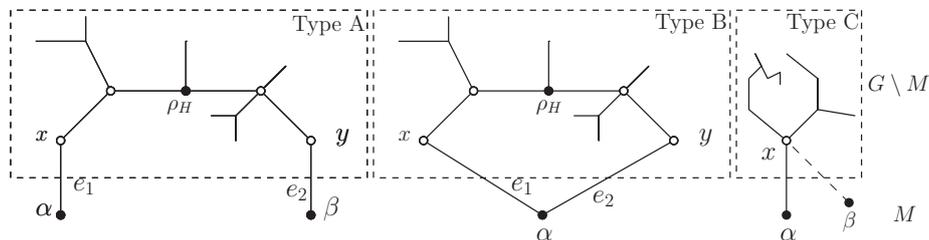


FIGURE 4.4 – Les trois types de composantes connexes de  $G \setminus M$ .

**Lemme 4.10.** *Soit  $H$  une composante connexe de  $G \setminus M$  de type A ou B. Soit  $\rho$  le sommet de  $P \cap H$ . Alors, pour tout sommet  $v \in H$ , il n'y a pas de plus court chemin*

entre  $v$  et  $\rho$  utilisant des sommets de  $G \setminus H$ . De plus, pour tout  $z \in \partial H$ , il y a un plus court chemin entre  $z$  et  $\rho$  utilisant seulement des sommets de  $H \cup \{z\}$ .

*Démonstration.* Soient  $x$  et  $y$  deux sommets de  $H$  adjacent à un sommet de  $M$ ,  $\alpha$  le sommet de  $M$  adjacent à  $x$  et  $\beta$  le sommet de  $M$  adjacent à  $y$ . Par définition des types  $A$  ou  $B$ ,  $x \neq y$  (mais  $\alpha$  et  $\beta$  peuvent être identique si le type est  $B$ ).

Par définition de  $\rho$ , on a  $|d_H(x, \rho) - d_H(y, \rho)| \leq 1$ . Soit  $v \in V(H)$ . Supposons par l'absurde qu'un plus court chemin entre  $v$  et  $\rho$  dans  $G$  passe par des sommets de  $G \setminus H$ . Alors ce plus court chemin passe par  $x$  et  $y$ . Par symétrie, on peut supposer que  $d_G(v, \rho) = d_H(v, x) + d(x, \alpha) + d(\alpha, \beta) + d(\beta, y) + d_H(y, \rho)$ . Autrement dit, le chemin entre  $v$  et  $\rho$  passe d'abord par  $x$  puis par  $y$ .

Supposons par l'absurde que  $d_H(v, x) + d(x, \alpha) + d(\alpha, \beta) + d(\beta, y) + d_H(y, \rho) \leq d_G(v, \rho)$ . Comme  $x\alpha$  et  $y\beta$  sont des arêtes, on a  $d_H(v, x) + d(\alpha, \beta) + d_H(y, \rho) + 2 \leq d_G(v, \rho)$ . Par inégalité triangulaire,  $d_G(v, \rho) \leq d_H(v, \rho) \leq d_H(v, x) + d_H(x, \rho)$ . Donc  $d_H(x, \rho) \geq d_H(y, \rho) + d(\alpha, \beta) + 2$  ce qui contredit  $|d_H(x, \rho) - d_H(y, \rho)| \leq 1$ .

Si  $z$  est dans  $\partial H$  et  $\alpha = \beta$  alors  $z = \alpha = \beta$  et le résultat est immédiat. Autrement, supposons que  $z = \alpha$ . On veut contredire  $d(\alpha, \beta) + d(\beta, \rho) < d(\alpha, \rho)$ . Comme  $\alpha$  est adjacent à  $x$  et que  $\beta$  est adjacent à  $y$ , l'inégalité est équivalente à  $d(\alpha, \beta) + d(y, \rho) < d(x, \rho)$ . Comme  $\alpha \neq \beta$ ,  $d(\alpha, \beta) \geq 1$ . Donc  $d(y, \rho) + 2 \leq d(x, \rho)$  ce qui contredit  $|d_H(x, \rho) - d_H(y, \rho)| \leq 1$ .  $\square$

Une définition supplémentaire est nécessaire avant de définir l'ensemble résolvant.

**Définition 4.11.** Soit  $H$  une composante connexe de  $G \setminus M$  de type  $A$  ou  $B$  et soient  $x$  et  $y$  deux sommets de  $H$  adjacent à  $M$ . Soit  $u$  un sommet quelconque de  $H$ . La projection  $z_u$  de  $u$  (sur le chemin entre  $x$  et  $y$ ) est l'unique sommet du chemin entre  $x$  et  $y$  dans  $H$  le plus proche de  $u$ .

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour définir l'ensemble  $S$  qui sera un ensemble résolvant en se basant sur les ensembles résolvants dans chaque composante connexe  $H$  de  $G \setminus M$ . L'union des ensembles résolvants dans les différentes composantes n'est pas un ensemble résolvant, il sera nécessaire d'ajouter de nouveaux sommets. De plus, la taille de l'union des ensembles résolvants des composantes connexes de  $G \setminus M$ , n'est pas bornée par  $L(G) + c$ , certains sommets devront être supprimés de l'ensemble résolvant.

Soit  $H$  une composante connexe de  $G \setminus M$ . On pose  $S'_H$  une base métrique de  $H$  tel que, pour chaque sommet majeur de degré terminal au moins 2 dans  $H$ , toutes les feuilles sauf une soient dans  $S'_H$ .

Pour atteindre la borne annoncée, on divise les composantes de type  $B$  en deux parties. Soit  $H$  une composante de type  $B$ ,  $x$  et  $y$  deux sommets de  $H$  adjacent à un sommet de  $M$ . Une composante est de type  $B_1$  si  $x$  et  $y$  sont des feuilles au des sommets extérieurs de degré deux. Si  $x$  (resp.  $y$ ) est un sommet de degré deux extérieur,  $x$  (resp.  $y$ ) appartient à exactement un chemin entre une feuille et un sommet majeur. On définit alors cette feuille comme la feuille de  $x$  (resp.  $y$ ). Si  $x$  (resp.  $y$ ) est une feuille, alors  $x$

(resp.  $y$ ) est sa propre feuille. Une composante est de *type*  $B_2$  si c'est une composante de type  $B$  qui n'est pas de type  $B_1$ .

On définit l'ensemble  $S_H$  comme l'ensemble  $S'_H$  avec quelques modifications.

- Si  $H$  est de type  $A$ . Pour tout  $x \in H$  adjacent à  $M$ , si  $x$  est une feuille et que son sommet majeur  $v$  dans  $H$  a degré terminal au moins 2, alors, si  $x \in S'_H$ , on supprime  $x$  de  $S'_H$ , sinon on supprime de  $S'_H$  une autre feuille de  $x$ .
- Si  $H$  est de type  $B_1$ , on peut supposer que  $S'_H$  contient les deux feuilles  $x$  et  $y$ . En effet, d'après le lemme 3.13, il existe une base métrique de  $H$  qui contient ces deux sommets.
- Si  $H$  est de type  $C$ , soit  $x$  l'unique sommet de  $H$  adjacent à  $M$ . Si  $x$  est une feuille et que son sommet majeur  $v$  dans  $H$  a degré terminal au moins 2, alors, si  $x \in S'_H$ , on supprime  $x$  de  $S'_H$ , sinon, on supprime de  $S'_H$  une autre feuille de  $x$ .
- Si  $H$  est de type  $C$  et  $H$  est un chemin avec une extrémité adjacente à  $M$ . Soit  $w$  un sommet de  $M$  adjacent à  $H$ . S'il y a une seule composante de type  $C$  attachée à  $w$  qui est un chemin connecté à  $w$  par une extrémité du chemin, on pose  $S_H = \emptyset$ . S'il y a plusieurs composantes de ce type, on pose  $S_H = \emptyset$  pour une de ces composantes et  $S_K$  l'extrémité du chemin non adjacente à  $w$  pour toutes les autres composantes  $K$  (ou l'unique sommet de  $H$  si  $H$  est réduit à un seul sommet).

L'ensemble  $S$  est défini comme  $S = M \cup P \cup (\bigcup_i S_i)$ . La suite va consister à prouver que  $S$  est un ensemble résolvant de  $S$ .

### 4.3.2 L'ensemble $S$ est un ensemble résolvant

Nous allons prouver plusieurs lemmes pour restreindre les composantes où des paires de sommets non résolues peuvent apparaître. On prouve tout d'abord que de telles paires doivent appartenir à la même composante de  $G \setminus M$ .

**Lemme 4.12.** *Soient  $u$  et  $v$  deux sommets de  $G$ . Si la paire  $(u, v)$  n'est pas résolue par  $S$ , alors il existe une composante connexe de  $H \in G \setminus M$  tel que les deux sommets  $u, v$  soient dans la composante  $H$ .*

*Démonstration.* Premièrement, comme  $M \subseteq S$ ,  $u \notin M$  et  $v \notin M$ . Donc il existe  $H_u$  et  $H_v$ , deux composantes connexes de  $G \setminus M$ , tel que  $u \in H_u$  et  $v \in H_v$ . Supposons par contradiction que  $H_u \neq H_v$ .

- Supposons que  $H_u$  est de type  $A$  ou  $B$  et posons  $x\alpha$  et  $y\beta$  les deux arêtes reliant  $H_u$  et  $M$  (avec  $x, y \in H_u$ ). Soit  $\rho$  le sommet de  $P \cap H_u$ . Comme  $v \notin H_u$ , le plus court chemin entre  $v$  et  $\rho$  passe par un des sommets  $\alpha$  ou  $\beta$ . Par symétrie, on peut supposer que  $\alpha$  est sur le plus court chemin entre  $v$  et  $\rho$  donc  $d(v, \rho) = d(v, \alpha) + d(\alpha, \rho)$ . Comme  $\alpha$  et  $\rho$  sont dans  $S$ , on a aussi  $d(u, \rho) = d(u, \alpha) + d(\alpha, \rho)$ , ce qui contredit le lemme 4.10.

- Supposons maintenant que  $H_u$  et  $H_v$  sont toutes deux de type C. Soient  $\alpha$  et  $\beta$  les sommets de  $M$  connectés respectivement à  $H_u$  et  $H_v$ . Si  $\alpha \neq \beta$ , alors le plus court chemin entre  $u$  et  $v$  contient deux sommets distincts de  $S$ . Par le lemme 4.2,  $u$  et  $v$  sont résolus. Supposons maintenant  $\alpha = \beta$ .

Comme toutes les composantes sauf une  $H$  de type C attachées à  $\alpha$  contiennent un sommet de  $S_H$ , par construction,  $H_u$  ou  $H_v$  contient un sommet de  $S$ . Sans perdre de généralité, il existe  $\gamma \in S \cap H_u$ . Si  $u$  est sur le chemin entre  $\gamma$  et  $v$  alors  $d(\gamma, u) < d(\gamma, v)$ . Autrement, posons  $m_u$  dans  $H_u$  l'intersection des chemins entre  $u$  et  $\gamma$  et entre  $\alpha$  et  $\gamma$ . Alors les sommets  $m_u$  et  $\alpha$  sont sur le plus court chemin entre  $u$  et  $v$ . D'après le lemme 4.2, un de ces sommets résout la paire  $(u, v)$ . Par hypothèse ce n'est pas  $\alpha$ . Et s'il s'agit de  $m_u$ , alors on a  $d_G(u, \gamma) \neq d_G(v, \gamma)$ . Les plus courts chemins entre  $u$ ,  $v$  et  $\gamma$  passent par  $m_u$ , on obtient une contradiction.  $\square$

Nous prouvons maintenant que, si deux sommets sont dans la même composante de  $G \setminus M$ , ils sont résolus par  $S$ . Commençons par les composantes connexes de type A.

**Lemme 4.13.** *Soit  $H$  une composante connexe de  $G \setminus M$  de type A. Soient  $u$  et  $v$  deux sommets de  $H$  tels que, pour tout  $s \in S$ ,  $d(u, s) = d(v, s)$ . Alors,  $z_u = z_v$ .*

*Démonstration.* Soient  $u\alpha$  et  $v\beta$  les deux arêtes entre  $H$  et  $M$  avec  $u \in H$  et  $v \in H$ . Le graphe  $H$  est un arbre avec un chemin entre les deux sommets  $u$  et  $v$ . Supposons que  $z_u \neq z_v$  et, sans perdre de généralité, on peut supposer que  $z_u \neq \rho$  avec  $\rho$  le sommet de  $P \cap H$ . On a  $d(u, \alpha) = d(u, z_u) + d(z_u, \alpha)$ ,  $d(v, \alpha) = d(v, z_v) + d(z_v, \alpha)$ ,  $d(u, \beta) = d(u, z_u) + d(z_u, \beta)$  et  $d(v, \beta) = d(v, z_v) + d(z_v, \beta)$ . Comme  $d(u, \alpha) = d(v, \alpha)$  et  $d(u, \beta) = d(v, \beta)$  on obtient

$$d(z_u, \alpha) + d(z_v, \beta) = d(z_u, \beta) + d(z_v, \alpha).$$

Les sommets  $z_u$  et  $\rho$  sont distincts et tous deux entre  $\alpha$  et  $\beta$ . Donc  $z_u$  est entre  $\alpha$  et  $\rho$  ou  $\beta$  et  $\rho$ . Supposons que  $z_u$  est entre  $\alpha$  et  $\rho$ . Alors  $d(z_u, \alpha) \leq d(z_u, \beta)$ , donc  $d(z_v, \alpha) \leq d(z_v, \beta)$  ce qui donne que  $z_v$  est aussi entre  $\alpha$  et  $\rho$ . Le plus court chemin entre  $\alpha$  et  $\rho$  passe par les sommets  $z_u$  et  $z_v$  d'après le lemme 4.10. Supposons que  $z_u$  est plus proche que  $z_v$  de  $\rho$ . Alors  $d(\alpha, \rho) = d(\alpha, z_v) + d(z_v, z_u) + d(z_u, \rho)$ , ce qui donne

$$d(\alpha, z_u) + d(z_v, \rho) = d(\alpha, z_v) + d(z_u, \rho) + 2d(z_u, z_v).$$

On utilise les chemins vers  $\rho$  :  $d(u, \rho) = d(u, z_u) + d(z_u, \rho)$  comme  $z_u \neq \rho$  et  $d(v, \rho) \leq d(v, z_v) + d(z_v, \rho)$ . Alors,  $d(u, \alpha) = d(u, z_u) + d(z_u, \alpha)$ ,  $d(v, \alpha) = d(v, z_v) + d(z_v, \alpha)$  donne

$$d(z_v, \alpha) + d(z_u, \rho) \leq d(z_u, \alpha) + d(z_v, \rho).$$

La combinaison des égalités précédentes donne  $d(z_u, z_v) \leq 0$  donc  $z_u = z_v$ .  $\square$

**Lemme 4.14.** *Soit  $H$  une composante connexe de  $G \setminus M$  de type A. Soient  $u$  et  $v$  deux sommets de  $H$  tel que, pour tout  $s \in S$ ,  $d(u, s) = d(v, s)$ . Alors  $u = v$ .*

*Démonstration.* Supposons par contradiction que  $u \neq v$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  les deux sommets de  $M$  adjacents à  $H$ . Par construction de  $S_H$ ,  $S_H \cup \{\alpha, \beta\}$  est un ensemble résolvent de  $H \cup \{\alpha, \beta\}$ . Soit  $\gamma$  qui résout la paire  $(u, v)$  dans  $H \cup \{\alpha, \beta\}$ . D'après le lemme 4.13,  $z_u = z_v$  donc  $\gamma$  résout la paire  $(u, v)$  aussi dans  $G$ . En effet, si  $z_\gamma = z_u$ , alors la distance sont les mêmes dans  $G$  et dans  $H \cup \{\alpha, \beta\}$ . Si  $z_\gamma \neq z_u$  alors  $d_G(u, \gamma) = d_H(u, z_u) + d_G(z_u, \gamma)$  et  $d_G(v, \gamma) = d_H(v, z_v) + d_G(z_v, \gamma)$ . Comme  $d_H(u, \gamma) \neq d_H(v, \gamma)$  avec  $d_H(u, \gamma) = d_H(u, z_u) + d_H(z_u, \gamma)$  et  $d_H(v, \gamma) = d_H(v, z_u) + d_H(z_u, \gamma)$  on obtient  $d_H(u, z_u) \neq d_H(v, z_u)$  donc  $d_G(u, \gamma) \neq d_G(v, \gamma)$ . Ainsi,  $\gamma$  résout  $(u, v)$  dans  $G$ , une contradiction.  $\square$

**Lemme 4.15.** *Soit  $H$  une composante connexe de  $G \setminus M$  de type  $B$ . Si la paire  $(u, v) \in H$  n'est pas résolue par  $S$ , alors  $z_u = z_v$ .*

*Démonstration.* On fait une preuve par contradiction. Soit  $\alpha$  le sommet de  $M$  connecté à  $H$ . Soient  $x, y$  les deux sommets de  $H$  connectés à  $\alpha$ .

**Cas 1 :  $H$  est de type  $B_1$**

Par construction,  $\{\alpha, \rho, y\} \subseteq S$  avec  $y$  tel que  $z_y$  est connecté à  $\alpha$ . Supposons par contradiction  $z_u \neq z_v$ . On montre d'abord que la paire  $(z_u, z_v)$  est résolue par  $\{\alpha, \rho, y\}$ . En effet,  $d(y, z_u) = d(y, z_y) + d(z_y, z_u)$  et  $d(y, z_v) = d(y, z_y) + d(z_y, z_v)$ . Le lemme 4.4 assure que  $(z_u, z_v)$  est résolue par un sommet de  $\{\alpha, \rho, z_y\}$  et si  $z_y$  résout  $(z_u, z_v)$ , alors  $y$  résout  $(z_u, z_v)$ . Donc  $(z_u, z_v)$  est résolue par un sommet de  $\{\alpha, \rho, y\}$ , on pose  $\gamma$  ce sommet.

Si  $z_v = \rho$ , alors  $d(\gamma, u) = d(\gamma, z_u) + d(z_u, u)$  et  $d(\gamma, v) = d(\gamma, \rho) + d(\rho, v)$ , donc  $d(z_u, u) \neq d(\rho, v)$ . Comme  $\rho \in S$ ,  $d(u, \rho) = d(v, \rho)$  donc  $d(z_u, u) < d(\rho, v)$ . On exploite les égalités  $d(\alpha, u) = d(\alpha, v)$  et  $d(\alpha, u) = d(\alpha, z_u) + d(z_u, u)$ . Par définition de  $\rho$ ,  $d(\alpha, z_u) \leq d(\alpha, \rho)$  et  $d(z_u, u) < d(\rho, v)$ . Donc  $d(\alpha, v) = d(\alpha, \rho) + d(\rho, v) > d(\alpha, u)$ , une contradiction.

Si  $z_v \neq \rho$ , alors  $d(\gamma, u) = d(\gamma, z_u) + d(u, z_u)$  et  $d(\gamma, v) = d(\gamma, z_v) + d(v, z_v)$ . Par hypothèse  $d(\gamma, u) = d(\gamma, v)$ , donc  $d(u, z_u) \neq d(v, z_v)$ . On peut supposer par symétrie que  $d(z_u, u) < d(z_v, v)$ . Soit  $\beta \in \{\alpha, \rho\}$ , tel que  $d(z_u, \beta) \leq d(z_v, \beta)$ . Un tel sommet existe comme les distances  $d(\alpha, z_u) + d(z_u, \rho)$  et  $d(\alpha, z_v) + d(z_v, \rho)$  sont identiques si  $z_u, z_v$  sont tous deux du même côté du chemin  $xy$  par rapport à  $\rho$ , et différent de un sinon.

Alors,  $d(\beta, u) = d(\beta, v)$  et  $d(\beta, u) = d(\beta, z_u) + d(z_u, u)$ . Mais  $d(\beta, z_u) \leq d(\beta, z_v)$  et  $d(z_u, u) < d(z_v, v)$ . Donc  $d(\beta, v) = d(\beta, z_v) + d(z_v, v) > d(\beta, u)$ , une contradiction.

**Cas 2 :  $H$  est de type  $B_2$**

Comme  $S$  contient  $S_H$  qui est un ensemble résolvent de  $H$ , il existe  $\gamma \in H$  tel que  $d_H(u, \gamma) \neq d_H(v, \gamma)$ . Par hypothèse,  $d_G(u, \gamma) = d_G(v, \gamma)$ .

Supposons d'abord que  $z_\gamma = \rho$ . On prouve que  $d_G(u, \gamma) = d_H(u, \gamma)$  et  $d_G(v, \gamma) = d_H(v, \gamma)$ , ce qui donne une contradiction. Par symétrie, il suffit de prouver que  $d_G(u, \gamma) = d_H(u, \gamma)$ . Si  $z_u = z_\gamma = \rho$  alors  $d_G(u, \gamma) = d_G(u, \rho) + d_G(\rho, \gamma) = d_H(u, \rho) + d_H(\rho, \gamma) = d_H(u, \gamma)$  donne le résultat. Si  $z_u \neq z_\gamma$ , alors

$$d_G(u, \gamma) = d_G(u, z_u) + d_G(z_u, \rho) + d_G(\rho, \gamma).$$

D'après le lemme 4.10,  $d_G(z_u, \rho) = d_H(z_u, \rho)$ . On a  $d_G(u, z_u) = d_H(u, z_u)$  et  $d_G(\rho, \gamma) = d_H(\rho, \gamma)$  comme les chemins entre ces sommets sont uniques. Donc  $d_G(u, \gamma) = d_H(u, \gamma)$ .

A partir de maintenant, on peut supposer que  $z_\gamma \neq \rho$ . Comme  $\{\rho, \alpha\}$  ne résout pas  $(u, v)$ , on a  $d(u, z_u) + d(z_u, \rho) = d(v, z_v) + d(z_v, \rho)$ , et  $d(u, z_u) + d(z_u, \alpha) = d(v, z_v) + d(z_v, \alpha)$ . Ainsi,

$$d(z_u, \rho) + d(z_v, \alpha) = d(z_v, \rho) + d(z_u, \alpha).$$

Comme  $\rho$  et  $\alpha$  sont presque opposés sur le plus petit cycle qui les contient, on a aussi

$$d(z_u, \rho) + d(z_u, \alpha) = d(z_v, \rho) + d(z_v, \alpha) + \epsilon$$

avec  $\epsilon \in \{-1, 0, 1\}$ . En sommant les deux égalités, on obtient  $2d(z_u, \rho) = 2d(z_v, \rho) + \epsilon$ . Donc par parité,  $\epsilon = 0$ . Ainsi,  $d(z_u, \rho) = d(z_v, \rho)$  et finalement  $d(z_u, \alpha) = d(z_v, \alpha)$ . Comme  $d(u, \alpha) = d(v, \alpha)$ , on obtient  $d(u, z_u) = d(v, z_v)$ .

Si  $z_\gamma \notin \{z_u, z_v\}$ , alors  $z_u$  et  $z_v$  sont à la même distance de  $\alpha, \rho$  et  $z_\gamma$ , donc d'après le lemme 4.4,  $z_u = z_v$ . Si  $z_\gamma \in \{z_u, z_v\}$ , on peut supposer par symétrie que  $z_\gamma = z_u$ . Alors,  $d(u, \gamma) \leq d(u, z_u) + d(z_u, \gamma)$  et  $d(v, \gamma) = d(v, z_v) + d(z_v, z_u) + d(z_u, \gamma)$ . Comme  $d(u, \gamma) = d(v, \gamma)$  et  $d(u, z_u) = d(v, z_v)$  on obtient  $d(z_v, z_u) \leq 0$  donc  $z_u = z_v$ .  $\square$

**Lemme 4.16.** *Soit  $H$  une composante connexe de  $G \setminus M$  de type B. L'ensemble  $S$  résout toutes les paires de sommets de  $H$ .*

*Démonstration.* Soient  $u, v$  deux sommets de  $H$  qui ne sont pas résolus par  $S$ . D'après le lemme 4.15,  $z_u = z_v$ . On pose  $z = z_u = z_v$ , si  $\deg(z) = 2$  alors  $u = v = z$  ce qui donne le résultat. A partir de maintenant on peut supposer que  $\deg(z) \geq 3$ .

**Cas 1 : Il existe  $\gamma \in S_H$  qui résout la paire  $(u, v)$  dans  $H$ .**

Si  $z_\gamma = z_u = z_v$  alors les distances entre  $u$  (resp.  $v$ ) et  $\gamma$  sont les mêmes dans  $H$  et  $G$ , une contradiction.

On peut donc supposer que  $z_\gamma \neq z_u$ . On a  $d_H(\gamma, u) = d_H(u, z) + d_H(z, \gamma)$  et  $d_H(\gamma, v) = d_H(v, z) + d_H(z, \gamma)$ . Comme  $d_H(\gamma, u) \neq d_H(\gamma, v)$ , on a  $d_H(u, z) \neq d_H(v, z)$ . D'après le lemme 4.10, pour  $w \in \{u, v\}$ ,  $d_H(w, \rho) = d_G(w, \rho)$  et  $d(w, \rho) = d(w, z) + d(z, \rho)$ ,  $\rho$  résout  $(u, v)$ , une contradiction.

**Cas 2 : La paire  $(u, v)$  n'est pas résolue par  $S_H$  dans  $H$ .** Ce cas peut uniquement se passer si  $H$  est de type  $B_1$  (autrement aucun sommet de  $S'_H$  est supprimé). Alors il existe un sommet  $x$  tel que  $z_x$  est adjacent à  $\alpha$  qui résout la paire  $(u, v)$  dans  $H$ . Si  $z = z_x$ , alors,  $d(z, u) = d(z, x) - d(u, x)$  et  $d(z, v) = d(z, x) - d(v, x)$  donc  $d(z, u) \neq d(z, v)$ . Si  $z \neq x$  alors  $d(x, u) = d(x, z) + d(z, u)$  et  $d(x, v) = d(x, z) + d(z, v)$ . Donc  $d(z, u) \neq d(z, v)$  dans les deux cas. Ainsi,  $\alpha$  résout la paire  $(u, v)$  dans  $G$ . Comme  $z \neq \alpha$ ,  $d(\alpha, u) = d(\alpha, z) + d(z, u) \neq d(\alpha, z) + d(z, v) = d(\alpha, v)$ .  $\square$

**Lemme 4.17.** *Soit  $H$  une composante connexe de  $G \setminus M$  de type C. Alors  $S$  résout toutes les paires de sommets de  $H$ .*

*Démonstration.* Supposons par contradiction que deux sommets  $u, v \in H$  avec  $u \neq v$  ne soit pas résolues par  $S$ . Soient  $x$  l'unique sommet de  $H$  adjacent à  $M$  et  $m$  un sommet de  $M$  adjacent à  $x$ . Soit  $H'$  le sous-graphe de  $G$  contenant les sommets de  $V(H) \cup \{m\}$ .

Si  $S$  contient un ensemble résolvant de  $H$ , alors, comme  $x$  est un sommet séparateur,  $S$  résout la paire  $(u, v)$ . Donc on peut supposer qu'au moins un sommet de  $S'_H$  a été supprimé pendant la construction de  $S$ .

Remarquons que comme  $m$  ne résout pas la paire  $(u, v)$ ,  $d(u, x) = d(v, x)$  dans  $H$ . En particulier,  $H$  n'est pas un chemin d'extrémité  $x$ . Par construction de  $S$ , on peut supposer que  $x$  est une feuille dans  $H$  et que son sommet majeur a degré terminal au moins 2 dans  $H$ .

Par construction de  $S_H$ ,  $S \cup \{x\}$  est un ensemble résolvant de  $H$ . Alors  $S \cup \{m\}$  est un ensemble résolvant pour  $H'$ . Soit  $\gamma \in S_H \cup \{m\}$  qui résout la paire  $(u, v)$  dans  $H'$ . Les distances entre  $u, v$  et  $\gamma$  dans  $G$  et  $H'$  sont identiques donc  $\gamma$  résout la paire  $(u, v)$ , une contradiction.  $\square$

**Lemme 4.18.** *L'ensemble  $S$  est un ensemble résolvant de  $G$ .*

*Démonstration.* Soit  $(u, v)$  une paire de sommets qui n'est pas résolue par  $S$ . Supposons par contradiction que  $u \neq v$ . D'après le lemme 4.12, il existe une composante connexe  $H$  de  $G \setminus M$  telle que  $u \in H$  et  $v \in H$ . Alors, si  $H$  est de type A, d'après le lemme 4.14,  $u = v$ . Si  $H$  est de type B, d'après le lemme 4.16,  $u = v$ . Si  $H$  est de type C, d'après le lemme 4.17,  $u = v$ .  $\square$

### 4.3.3 Borne sur la taille de $S$

Le lemme 4.18 assure que  $\dim(G) \leq |S|$ . Pour prouver le théorème 3.14, il reste à montrer que  $|S| \leq L(G) + 6c$ . L'ensemble  $S$  est construit comme une union de trois ensembles dont nous bornons les tailles séparément. Pour prouver ces bornes, on va passer par des graphes qui seront des mineurs de  $G$ . On peut vérifier facilement pour  $H$  un mineur de  $G$ ,  $c(H) \leq c(G)$ , ce qui sera utile par la suite.

**Lemme 4.19.**  $|M| \leq 2c(G) - 2$ .

*Démonstration.* Si  $|M| \leq 2$  l'inégalité est vraie comme on suppose que  $c(G) \geq 2$ . On peut donc supposer que  $|M| \geq 3$ . On définit  $K$  comme le multi-graphe (avec éventuellement des boucles) donc l'ensemble de sommets est  $M$ , et pour chaque composante connexe  $H$  de  $G \setminus M$  de type A ou B dont les extrémités  $x$  et  $y$  sont dans  $M$  ( $x$  et  $y$  peuvent être identique), on ajoute une arête entre  $x$  et  $y$  dans  $K$ . Remarquons que  $K$  est un mineur de  $G$  comme il peut être obtenu à partir de  $G$  en contractant les arêtes des composantes  $H$  de  $G \setminus M$  jusqu'à obtenir une seule arête.

Chaque sommet de  $K$  a degré au moins 3. Les sommets de  $M \setminus X$  ont degré au moins 3 par définition de  $M_i$  pour tout  $i$ . Par construction de  $X$ ,  $x \in X$  a degré au moins 3 dans le graphe obtenu en partant de  $G$  et en supprimant itérativement les sommets de degré 1. Trois arêtes adjacentes appartiennent donc à des cycles et contribuent au degré de  $x$  dans  $K$  donc  $\deg_K(x) \geq 3$ .

Ainsi,  $3|V(K)| \leq \sum_{v \in V(K)} \deg(v) = 2|E(K)|$ . Donc  $3|M| \leq 2|E|$ . Comme le nombre cyclomatique de  $K$  est au plus  $c(G)$ , on obtient  $|E| \leq c(G) + |M| - 1$ . La combinaison des inégalités donne  $|M| \leq 2c(G) - 2$ .  $\square$

**Lemme 4.20.**  $|P| \leq c(G) + |M| - 1$ .

*Démonstration.* Soit  $K'$  le multi-graphe (avec des boucles) dont l'ensemble de sommets est  $M$  et avec un sommet entre deux sommets  $x$  et  $y$  si et seulement s'il existe une composante connexe  $H$  de  $G \setminus M$  adjacente à  $x$  et  $y$ . Le multi-graphe  $K'$  est un mineur de  $G$  comme  $K'$  peut être obtenu à partir de  $G$  en contractant des arêtes avec exactement une extrémité dans  $M$  jusqu'à ce qu'il n'existe plus de telle arête. On peut remarquer que dans  $K'$ , il y a une arête  $xy$  avec multiplicité  $k$  si et seulement si dans  $G \setminus M$  il y a  $k$  composantes connexes attachées à  $x$  et  $y$ . Comme  $K'$  est un mineur de  $G$ ,  $c(K') \leq c(G)$ . Et  $K'$  contient  $|M|$  sommets, donc  $K'$  contient au plus  $c(G) + |M| - 1$  arêtes. Donc,  $G \setminus M$  possède au plus  $c(G) + |M| - 1$  composantes de type A ou B. Comme  $P$  contient un sommet dans chaque composante de type A ou B, on a  $|P| \leq c(G) + |M| - 1$ .  $\square$

**Lemme 4.21.**

$$\left| \bigcup_{H \text{ con. comp. de } G \setminus M} S_H \right| \leq L(G) + c(G).$$

*Démonstration.* Pour chaque composante connexe  $H$  de  $G \setminus M$ , on définit la valeur  $\ell_H = \sum_{x \in H} (\text{ter}(x) - 1)$  parmi tous les sommets majeurs  $x$  de  $H$ . On considère les trois types de composantes.

Soit  $H$  une composante connexe de type A. Alors  $|S_H| = \ell_H$ . En effet, soit  $\epsilon \in \{0, 1, 2\}$  le nombre de sommets de  $H$  adjacent à  $M$  qui sont aussi des feuilles connectées à un sommet majeur de degré au moins 2. Par construction  $L(H) - \epsilon = |S_H| = \dim(H) - \epsilon$ .

Soit  $H$  une composante connexe de type  $B_1$ . Alors  $L(H) = |S_H| + 1$  et  $\ell_H = L(H) - 2$  par construction donc  $|S_H| \leq \ell_H + 1$ .

Soit  $H$  une composante connexe de type  $B_2$ . Alors,  $L(H) = |S_H|$  et  $\ell_H \geq L(H) - 1$  car  $H$  n'est pas de type  $B_1$  donc  $|S_H| \leq \ell_H + 1$ .

Soit  $H$  une composante connexe de type C qui ne soit pas un chemin. Par construction de  $S_H$ ,  $|S_H| = \ell_H$ . En effet, soit  $\epsilon \in \{0, 1\}$  le nombre de sommets de  $H$  adjacent à  $M$  qui sont des feuilles dont le sommet majeur a degré au moins 2. Par construction  $|S_H| = \dim(H) - \epsilon = L(H) - \epsilon$  et  $\ell_H = L(H) - \epsilon$ .

Soit  $H$  une composante connexe de type C avec  $H$  qui est un chemin. Si  $H$  est connecté à  $M$  par un sommet  $m$  qui n'est pas une extrémité de  $H$  alors  $m$  est un sommet majeur de degré terminal 2 dans  $G$ . Donc  $|S_H| = \ell_H = 1$ . Si  $H$  est un chemin connecté à un sommet  $m \in M$  par une extrémité, on pose  $k \in \mathbb{N}$  le nombre de telles composantes connectées à  $m$ . Notons les  $H_1, H_2, \dots, H_k$ . Si  $k \geq 2$  alors  $m$  est une feuille dans  $G$  de degré terminal  $k$  et  $|\cup_{i \leq k} S_{H_i}| = k - 1 = |L(G) \cap \{m\} \cup (\cup_{i \leq k} H_i)|$ . Si  $k = 1$  alors  $S_H = \emptyset$  donc  $\ell_H = 0$ .

Il y a au plus  $c(G)$  composantes de type B : pour chaque composante  $H$  de type B, on peut trouver un cycle dans  $G$  en ajoutant le sommet de  $M$  adjacent à  $H$ . Par définition de  $c(G)$ , on a au plus  $c(G)$  composantes de type B. Sommer les inégalités précédentes donne :

$$|\cup S_H| = \sum_{\text{type A}} |S_H| + \sum_{\text{type B}} |S_H| + \sum_{\text{type C}} |S_H|$$

$$\leq \sum_{\text{type A}} \ell_H + \sum_{\text{type B}} (\ell_H + 1) + \sum_{\text{type C}} \ell_H \leq L(G) + c(G)$$

□

Nous prouvons finalement le théorème 3.14 :

*Démonstration.* L'ensemble  $S$  est un ensemble résolvant donc  $\dim(G) \leq |S|$ . Par définition  $S = M \cup P \cup (\bigcup_H S_H)$ . D'après le lemme 4.19,  $|M| \leq 2c(G)$ , d'après le lemme 4.20,  $|P| \leq 3c$  et d'après le lemme 4.21,  $|\bigcup S_H| \leq L(G) + c(G)$ . Sommer les différentes inégalités donne  $\dim(G) \leq L(G) + 6c(G)$ . □

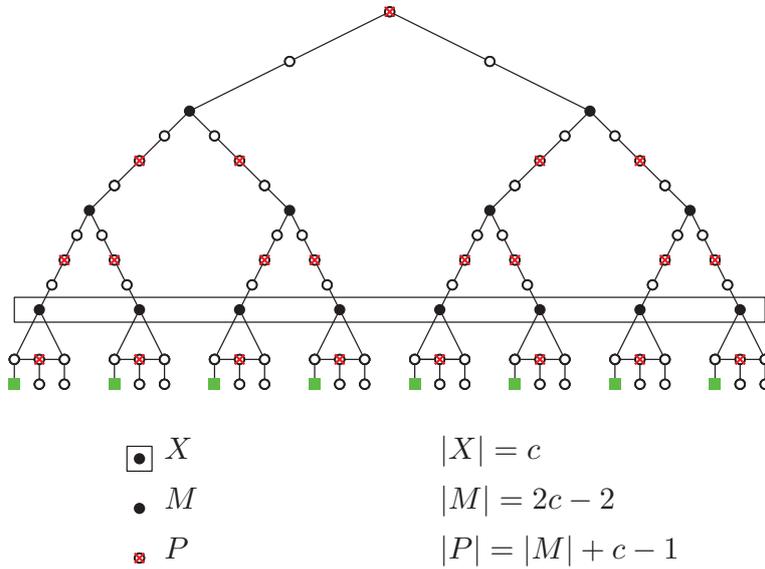


FIGURE 4.5 – Précision des lemmes 4.19, 4.20 et 4.21. Les carrés verts représentent une base métrique du graphe.

On peut se poser la question de la précision de cette borne. La figure 4.5 donne un exemple de graphe où les lemmes 4.19, 4.20 et 4.21 sont optimaux. Cela assure que l'analyse de la construction est optimale mais pas forcément la construction elle-même. En effet, la dimension métrique du graphe de la figure 4.5 est 8 avec les sommets carrés formant une base métrique.

## 4.4 Dimension métrique et nombre zéro-forçant

Dans cette section, nous étudions les interactions entre la dimension métrique et le nombre zéro-forçant. Nous commençons tout d'abord par définir le nombre zéro-forçant et une conjecture reliant la dimension métrique et le nombre zéro-forçant. Nous prouvons ensuite différents résultats autour de cette conjecture : une version affaiblie

de cette conjecture en utilisant le théorème 3.14, une preuve courte pour les graphes contenant un unique cycle, une preuve dans les cactus<sup>3</sup> et une version plus forte quand le graphe ne contient qu'un seul cycle de longueur impaire.

#### 4.4.1 Définitions

**Ensemble zéro-forçant.** Un *ensemble zéro-forçant* est un sous-ensemble de sommets colorés en noirs qui colorent l'intégralité des sommets en noir lorsque l'on applique la règle suivante de manière itérée : *Un sommet est coloré en noir si c'est l'unique voisin blanc d'un sommet noir.* Un exemple est présenté avec la figure 4.6 ou l'ensemble initial contient trois sommets noirs. Le *nombre zéro-forçant* d'un graphe est la taille minimale d'un ensemble zéro-forçant, notée  $Z(G)$ . Lorsqu'un sommet blanc  $u$  est le seul voisin blanc d'un sommet noir  $v$ , donc que la règle permet de colorer  $u$  en noir, on dit que  $v$  force  $u$  à la couleur noire. Le nombre zéro-forçant a été introduit en 2008 pour borner le rang dans certaines familles de matrices d'adjacence [AIM08]. Décider si le nombre zéro-forçant d'un graphe est au plus  $k$  est un problème NP-complet [TD15].

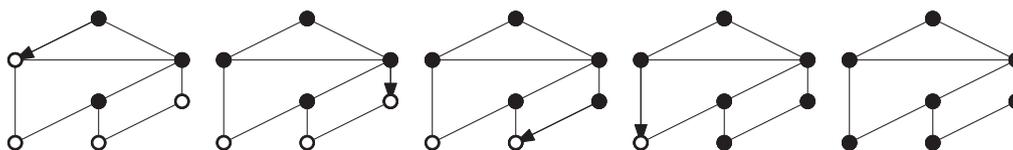


FIGURE 4.6 – Itérations de la règle de changement de couleur. Dans le graphe de gauche, les trois sommets noirs sont un ensemble zéro-forçant.

En général, l'écart entre la dimension métrique et le nombre zéro-forçant peut être arbitrairement grand. Mais pour certaines classes de graphes peu denses comme les chemins ou les cycles, non seulement les valeurs des paramètres sont égales mais les ensembles atteignant ces valeurs optimales sont les mêmes. C'est le cas par exemple dans les chemins, les cycles et les cliques (les ensembles minimaux sont visibles dans les figures 3.2, 3.1 et 3.3). Partant de ce constat, Eroh, Kang et Yi ont commencé une comparaison systématique des deux paramètres [EKY17]. Ils ont prouvé le lemme suivant dans le cas des arbres.

**Lemme 4.22.** [EKY17] *Pour tout arbre  $T$ ,  $\dim(T) \leq Z(T)$ . Le cas d'égalité correspond exactement au cas où  $T$  n'a pas de sommet intérieur de degré 2 et chaque sommet majeur a un degré terminal au moins égal à 2.*

Ils ont aussi montré que  $\dim(G) \leq Z(G) + 1$  lorsque  $G$  contient un unique cycle (autrement dit,  $G$  est un arbre plus une arête). Cependant,  $\dim(G)$  peut être arbitrairement plus grand que le nombre zéro-forçant quand le nombre de cycles augmente comme le montre par exemple la figure 4.7. Ils ont ainsi proposé la conjecture suivante :

**Conjecture 4.23** ([EKY17]). *Pour tout graphe connexe  $G$ ,  $\dim(G) \leq Z(G) + c(G)$ .*

3. Ce résultat a été prouvé indépendamment dans [SŠ22] par une méthode différente.

La borne de la conjecture 4.23 est optimale pour une famille infinie de graphes : Les graphes  $G_k$  contenant un chemin de taille 3 et  $k$  cycles de taille 4 ayant en commun l'arête centrale du chemin. La figure 4.7 montre l'exemple du graphe  $G_3$  avec  $c(G_3) = 3$ . Il n'est pas possible d'espérer une inégalité uniquement entre les deux paramètres : on peut construire des arbres ayant un nombre zéro-forçant arbitrairement plus grand que leur dimension métrique (des arbres ayant de nombreux sommets de degré 2 intérieurs). Dans le sens contraire, une roue (figure 4.8) aura un nombre zéro forçant 3 quelque soit son nombre de sommets par une dimension métrique linéaire en le nombre de sommets, conséquence de la proposition 3.15

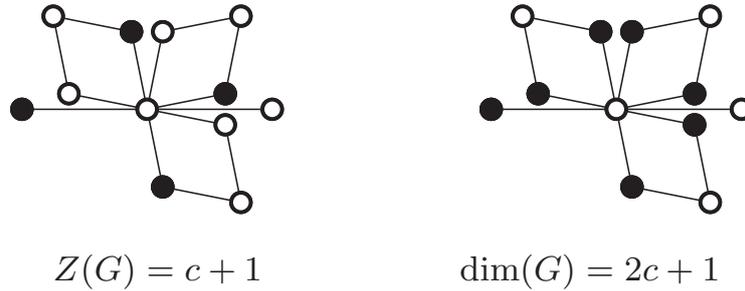


FIGURE 4.7 – Optimalité de la conjecture 4.23.

Le résultat principal de cette partie consiste à prouver une version affaiblie de la conjecture 4.23 valable pour tout graphe dont la preuve est principalement basée sur l'application du théorème 3.14.

**Théorème 4.24.** *Pour tout graphe  $G$ , on a l'inégalité*

$$\dim(G) \leq Z(G) + 6c(G).$$

Eroh et al. ont prouvé dans [EKY17] que  $\dim(G) \leq Z(G) + 2c(G)$  si  $G$  ne contient pas de cycles induits de taille paire. On améliorera ce résultat en prouvant le résultat suivant :

**Théorème 4.25.** *Soit  $G$  un graphe cactus, alors  $\dim(G) \leq Z(G) + c(G)$ .*

#### 4.4.2 Ajout d'arêtes et conséquences pour la conjecture 4.23

Le lemme suivant assure que les variations sur le nombre zéro-forçant sont faibles lorsque qu'une arête est ajoutée ou supprimée.

**Lemme 4.26.** [Edh+12] *Soit  $G = (V, E)$  un graphe et  $e \in E(G)$ , alors  $Z(G) - 1 \leq Z(G - e) \leq Z(G) + 1$ .*

Nous montrons un résultat plus précis sur le cas  $Z(G + e) < Z(G)$  qui sera utile par la suite.

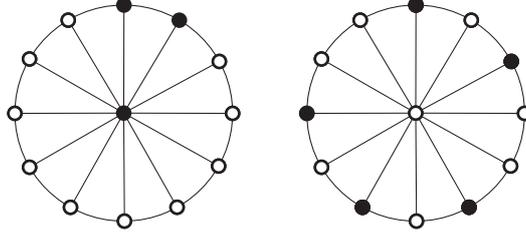


FIGURE 4.8 – Le nombre zéro-forçant d’une roue est 3 (dès que  $n \geq 4$ ) mais la dimension métrique est linéaire en  $n$ .

**Lemme 4.27.** Soient  $G = (V, E)$  un graphe,  $u$  et  $v$  deux sommets de  $G$  tels que  $e = uv \notin E$ . Si  $Z(G + e) < Z(G)$ , alors pour tout ensemble zéro-forçant de taille minimale de  $G + e$ , à une étape  $u$  force  $v$  ou  $v$  force  $u$ .

*Démonstration.* Par contradiction, si un ensemble zéro-forçant de taille minimale pour  $G + e$  n’utilise pas l’arête  $e$ , alors c’est un ensemble zéro-forçant pour  $G$  donc  $Z(G) \leq Z(G + e)$ .  $\square$

Un résultat similaire n’est pas vrai pour la dimension métrique. Cependant, le lemme 4.5 donne des conditions pour qu’un résultat similaire soit vrai. En utilisant ces résultats, on peut obtenir des inégalités entre la dimension métrique et le nombre zéro-forçant dans certaines classes de graphes.

**Corollaire 4.28.** Soit  $G$  un graphe à un cycle et  $e$  une arête telle que  $T = G - e$  soit un arbre. Alors,  $\dim(G) \leq Z(G) + 2$ .

*Démonstration.* D’après le lemme 4.22,  $\dim(T) \leq Z(T)$ . Les lemmes 4.5 et 4.26 assurent que  $\dim(G) \leq Z(G) + 2$ .  $\square$

Eroh et al. [EKY17] ont prouvé la conjecture 4.23 pour les graphes à un cycle par une longue analyse de cas. Ils partent d’un arbre  $T$  tel que  $\dim(T) = Z(T)$  et font une analyse exhaustive de tous les endroits où une arête peut-être ajoutée. Nous simplifions cette preuve en partant d’un graphe à un cycle  $G$  et en supprimant une arête bien choisie.

**Lemme 4.29.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe qui ne soit pas un arbre et  $C \subseteq V$  un cycle de  $G$ . Alors, il existe une arête  $e \in E(C)$  telle que  $Z(G - e) \leq Z(G)$ .

*Démonstration.* Soit  $Z \subseteq V$  un ensemble zéro-forçant de taille minimale pour  $G$ . On pose  $F \subseteq E$  l’ensemble des arêtes forçantes dans une séquence de coloration depuis  $Z$ , i.e.,  $uv \in F$  si et seulement si, à une certaine étape  $u$  force  $v$  ou  $v$  force  $u$ .

Alors, au moins une arête de  $C$  n’est pas dans  $F$ . En effet, si  $u$  force  $v$  alors  $u$  est coloré en noir avant que  $v$  ne le soit. Donc le premier sommet du cycle à être coloré en noir, appelons le  $w$ , ne peut pas être coloré à cause d’une arête de  $C$ . Soient  $w_1, w_2$  les deux voisins de  $w$  dans  $C$ . Le sommet  $w$  ne peut forcer qu’au plus un de ces deux

voisins. Sans perte de généralités, on peut supposer que  $w_2$  n'est pas forcé par  $w$  et est par hypothèse coloré noir après  $w$ . Donc, si l'on supprime l'arête  $e = ww_2$ ,  $Z$  est toujours un ensemble zéro-forçant de  $G - e$  en utilisant la même séquence de changements de couleurs que pour  $G$ . En conséquence,  $Z(G - e) \leq Z(G)$ .  $\square$

Nous obtenons en corollaire le résultat principal de [EKY17].

**Corollaire 4.30.** *Soit  $G$  un graphe à un cycle. Alors,  $\dim(G) \leq Z(G) + 1$ .*

*Démonstration.* Soient  $C$  le cycle de  $G$  et  $e$  une arête de  $C$  telle que  $Z(G - e) \leq Z(G)$ . Une telle arête existe d'après le lemme 4.29 et d'après le lemme 4.5,  $\dim(G) \leq \dim(G - e) + 1$ . De plus, par le lemme 4.22,  $\dim(G - e) \leq Z(G - e)$  car  $G - e$  est un arbre. La combinaison des trois inégalités donne  $\dim(G) \leq Z(G) + 1$ .  $\square$

Ces résultats couplés avec le théorème 3.14 nous permettent de prouver une version affaiblie de la conjecture 4.23.

**Théorème 4.24.** *Pour tout graphe  $G$ , on a l'inégalité*

$$\dim(G) \leq Z(G) + 6c(G).$$

*Démonstration.* D'après le lemme 4.29, on peut supprimer certaines arêtes à un arbre sans augmenter sa dimension métrique. Ainsi on montre qu'il existe un arbre couvrant  $T$  tel que  $Z(T) \leq Z(G)$ . D'après le lemme 4.22,  $\dim(T) \leq Z(T)$  et donc,  $\dim(G) \leq Z(G) + 6c(G)$  par le théorème 3.14.  $\square$

Nous généralisons la preuve pour les graphes à un cycle de la conjecture 4.23 aux graphes cactus en utilisant des techniques similaires.

**Théorème 4.25.** *Soit  $G$  un graphe cactus, alors  $\dim(G) \leq Z(G) + c(G)$ .*

*Démonstration.* On prouve cette inégalité par induction sur  $c(G)$ . Si  $c(G) = 0$ , alors  $G$  est un arbre et  $\dim(G) \leq Z(G)$ . Si  $c(G) > 0$ , on pose  $C$  un cycle de  $G$ . D'après le lemme 4.29, il existe une arête  $e \in C$  telle que  $Z(G - e) \leq Z(G)$ . Par induction,  $\dim(G - e) \leq Z(G - e) + c(G - e) \leq Z(G) + c(G - e) = Z(G) + c(G) - 1$  car  $c(G - e) = c(G) - 1$  pour toute arête  $e \in C$ .

Pour conclure, montrons que l'on peut appliquer le lemme 4.5. On note  $v_1, v_2, \dots, v_k$  les sommets  $C$  et  $G_i$  la composante connexe de  $v_i$  dans  $G \setminus C$ . Supposons par contradiction que deux sous-graphes  $G_i$  et  $G_j$  avec  $1 \leq i < j \leq k$  ne soient pas disjoints. Alors il existe un chemin  $P$  entre  $v_i$  et  $v_j$  dans  $G \setminus C$ . Dans ce cas,  $G$  contient deux cycles avec des arêtes communes :  $C$  et un cycle contenant  $P$  et un chemin dans  $C$  entre  $v_i$  et  $v_j$ , une contradiction. Donc, par le lemme 4.5,  $\dim(G) \leq \dim(G - e) + 1$  d'où  $\dim(G) \leq c(G) + Z(G)$ .  $\square$

Comme conséquence, on obtient que les graphes cactus vérifient la conjecture 4.23. Cela améliore le résultat de [EKY17] qui donne  $Z(G) \leq \dim(G) + 2c(G)$  lorsque  $G$  n'a pas de cycles de longueur impaire. En effet, si  $G$  n'a pas de cycle de longueur paire, les cycles de  $G$  ne partagent pas d'arêtes. En effet, si deux cycles de longueur impaire partagent au moins une arête, alors  $G$  contient un cycle de longueur paire.

### 4.4.3 Graphes unicycliques avec un cycle de longueur impaire

Dans cette section, nous considérons le cas où  $G$  est un graphe contenant un unique cycle et ce cycle est de longueur impaire. Nous montrons que l'on peut alors améliorer l'inégalité du corollaire 4.30 pour avoir  $\dim(G) \leq Z(G)$ . Ce n'est pas vrai si le cycle est de longueur paire comme le montre par exemple la figure 4.9. La différence vient du fait que, comme prouvé dans le lemme 4.3, n'importe quelle paire de sommets du cycle résout un cycle de longueur impaire, ce qui est faux dans le cas des cycles de longueur paire.

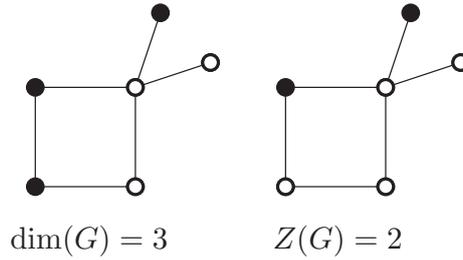


FIGURE 4.9 – Les sommets noirs forment respectivement un ensemble résolvant de taille minimale et un ensemble zéro-forçant de taille minimale.

Avant de prouver le résultat principal de la section, il nous faut prouver des lemmes intermédiaires. Soit  $k \geq 1$ , on note  $G = (V, E)$  un graphe contenant un unique cycle  $C$  de longueur  $2k + 1$ . Pour  $u \in C$ , on note  $T_u$  la composante connexe de  $u$  dans  $G' = (V, E \setminus E(C))$  enracinée en  $u$ . Remarquons que  $T_u$  est un arbre. on nomme  $u$  la racine de  $T_u$ . On dit que  $T_u$  est *trivial* si  $T_u = \{u\}$ , qu'il est un *chemin enraciné* si  $T_u$  est un chemin avec  $u$  l'une des extrémités, et qu'il est un *arbre enraciné* dans les autres cas. Sauf précision contraire, un chemin enraciné peut-être trivial. Pour  $u \in C$ , si  $T_u$  est trivial, on pose  $ter(u) = 0$ .

**Lemme 4.31.** *Soit  $G$  un graphe à un cycle impair. S'il existe un sommet  $u \in C$  tel que  $ter(u) \geq 1$ , alors il existe une arête  $e \in E(C)$  incidente à  $u$  telle que  $Z(G - e) \leq Z(G)$ .*

*Démonstration.* D'après le lemme 4.27, il suffit de trouver un ensemble zéro-forçant de taille minimale pour  $G$  qui n'utilise pas l'une des deux arêtes de  $E(C)$  incidente à  $u$ . Soit  $Z$  un ensemble zéro-forçant de taille minimale pour  $G$ . Si  $u \in Z$  alors  $u$  ne peut forcer qu'un seul sommet ce qui donne le résultat car au plus une arête incidente à  $u$  est utilisée. On suppose maintenant  $u \notin Z$ . Soit  $P$  un chemin interne de sommets de degré 2 entre  $u$  et une feuille  $l$  de  $G$  (qui existe comme  $ter(u) \geq 1$ ). S'il y a un sommet  $x$  dans  $P \cap Z$ , alors  $(Z \setminus \{x\}) \cup \{l\}$  est toujours un ensemble zéro-forçant minimal de  $G$ . Alors,  $l$  force les sommets de  $P$  jusqu'à  $u$  ce qui ramène au cas précédent où  $u$  est coloré en noir. Finalement, si  $P$  et  $u$  sont initialement colorés en blanc, alors  $u$  est le premier sommet de  $P \cup \{u\}$  à être coloré en noir (possiblement par une arête de  $E(C)$ ) et colore ensuite en noir les sommets de  $P$ . L'autre arête de  $E(C)$  n'est donc pas utilisée car un sommet force au plus un autre sommet.  $\square$

**Lemme 4.32.** *Soit  $G$  un graphe à un cycle de longueur impaire. On pose  $S \subseteq V(G)$  tel que, pour tout sommet  $u$  sur le cycle,  $S \not\subseteq T_u$ . Alors,  $S$  résout  $C$ .*

*Démonstration.* Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux sommets de  $S$  tels que  $\alpha \in T_u$  et  $\beta \in T_v$ , avec  $u \neq v$ . Supposons par contradiction que deux sommets  $x$  et  $y$  dans  $C$  vérifient  $d(x, \alpha) = d(y, \alpha)$  et  $d(x, \beta) = d(y, \beta)$ . Alors, comme  $d(x, \alpha) = d(x, u) + d(u, \alpha)$  et  $d(y, \alpha) = d(y, u) + d(u, \alpha)$ , on a  $d(x, u) = d(y, u)$ . De même,  $d(x, v) = d(y, v)$ , ce qui contredit le lemme 4.3.  $\square$

**Lemme 4.33.** *Soit  $G$  un graphe à un cycle de longueur impaire. Si pour tout  $u \in V(C)$ ,  $T_u$  est un arbre enraciné, alors pour toute arête  $e \in E(C)$ ,  $\dim(G) \leq \dim(G - e)$ .*

*Démonstration.* Soit  $e \in E(C)$  et  $S$  une base métrique de  $G - e$ . Pour prouver que  $S$  est un ensemble résolvant de  $G$ , on montre d'abord que pour tout sommet  $u \in C$ , comme  $T_u$  est un arbre enraciné,  $S \cap T_u \neq \emptyset$ .

Par définition d'un arbre enraciné,  $T_u$  contient un sommet de degré 3 dans  $G$ . On considère un tel sommet  $r$ . D'après le lemme 3.11, au plus une composante connexe de  $G - e \setminus \{r\}$  ne contient pas d'élément de  $S$ . L'arbre  $T_u$  contient au moins deux composantes connexes de  $G - e \setminus \{r\}$ , donc  $S \cap T_u \neq \emptyset$ .

Soit  $(x, y)$  une paire de sommets, on prouve que  $S$  résout  $(x, y)$  dans  $G$ .

1. Supposons d'abord que  $x$  et  $y$  sont dans le même arbre  $T_u$  pour un certain  $u \in C$ . Soit  $\alpha \in S$  résolvant la paire  $(x, y)$  dans  $G - e$ . Si  $\alpha \in T_u$ , alors  $d_G(\alpha, x) = d_{G-e}(\alpha, x) \neq d_{G-e}(\alpha, y) = d_G(\alpha, y)$ .

On peut donc supposer que  $\alpha \notin T_u$ . Comme  $e \notin T_u$  et que  $u$  est un sommet séparateur dans  $G$  et dans  $G - e$ , on a  $d_{G-e}(u, w) = d_G(u, w)$  pour tout sommet  $w \in T_u$ . Pour tout sommet  $w \in T_u$ ,

$$d_G(\alpha, w) = d_G(\alpha, u) + d_G(u, w) = d_G(\alpha, u) + d_{G-e}(u, w).$$

Comme  $d_{G-e}(\alpha, w) = d_{G-e}(\alpha, u) + d_{G-e}(u, w)$  et  $d_{G-e}(\alpha, x) \neq d_{G-e}(\alpha, y)$ , on obtient  $d_{G-e}(u, x) \neq d_{G-e}(u, y)$ . Ainsi,  $d_G(\alpha, x) \neq d_G(\alpha, y)$  et donc  $\alpha$  résout  $(x, y)$  dans  $G$ .

2. Supposons maintenant que  $x$  et  $y$  soient dans des composantes différentes, respectivement  $T_u$  et  $T_v$ . Alors il existe deux sommets  $\alpha \in S \cap T_u$  et  $\beta \in S \cap T_v$ . Supposons que  $d_G(\alpha, x) = d_G(\alpha, y)$  et que  $d_G(\beta, x) = d_G(\beta, y)$ . Alors,  $d_G(\alpha, x) \leq d_G(\alpha, u) + d_G(u, x)$  et  $d_G(\alpha, y) = d(\alpha, u) + d_G(u, v) + d_G(v, y)$  donc  $d_G(u, v) + d_G(v, y) \leq d_G(u, x)$ . On obtient de même la relation analogue  $d_G(v, u) + d_G(u, x) \leq d_G(v, y)$ . La somme des deux inégalités donne  $2d_G(u, v) \leq 0$ , une contradiction car  $u \neq v$ .  $\square$

On prouve le résultat final par une étude de cas.

**Théorème 4.34.** *Tout graphe à un cycle impair  $G$  vérifie  $\dim(G) \leq Z(G)$ .*

*Démonstration.* On effectue l'analyse de cas sur la structure de  $G$  en considérant  $C$  l'unique cycle de  $G$ .

**Cas 1 : Pour tout sommet  $u \in V(C)$ ,  $T_u$  est un arbre enraciné**

D'après le lemme 4.29, il existe une arête  $e$  telle que  $Z(G - e) \leq Z(G)$ . Comme  $G - e$  est un arbre, on a  $\dim(G - e) \leq Z(G - e)$  d'après le corollaire 4.22. Enfin, d'après le lemme 4.33,  $\dim(G) \leq \dim(G - e)$ . La combinaison de ces inégalités donne le résultat  $\dim(G) \leq Z(G)$ .

**Cas 2 : Pour tout  $u \in V(C)$ ,  $T_u$  est un chemin enraciné**

Montrons que toute paire de sommets  $\alpha$  et  $\beta$  de  $C$  à distance  $k$  est un ensemble résolvent de  $G$ .

Soit  $\alpha, \beta$  une telle paire de sommets. Prouvons d'abord que pour tout sommet  $x \in G$ ,  $d(x, \alpha) + d(x, \beta) \in \{k, k + 1\}$  si et seulement si  $x \in C$ . En effet, comme  $d(\alpha, \beta) = k$ , pour tout sommet  $x$   $d(x, \alpha) + d(x, \beta) \geq k$ . Si  $x \in C$ , soit  $x$  est sur le plus court chemin entre  $\alpha$  et  $\beta$ , et donc  $d(x, \alpha) + d(x, \beta) = k$ . Autrement  $x$  est sur l'autre partie du cycle et  $d(x, \alpha) + d(x, \beta) = k + 1$ . Si  $x \notin C$ , on note  $y$  le sommet de  $C$  tel que  $x \in T_y$ . Alors,  $d(x, \alpha) + d(x, \beta) = d(y, \alpha) + d(y, \beta) + 2d(x, y) \geq 2 + d(y, \alpha) + d(y, \beta) \geq k + 2$ . Cela donne qu'un sommet de  $C$  ne peut pas avoir le même vecteur de distance qu'un sommet de  $V \setminus C$ .

D'après le lemme 4.32, l'ensemble  $\{\alpha, \beta\}$  résout  $C$ . Pour conclure, il reste à montrer que  $\{\alpha, \beta\}$  résout  $V \setminus C$ . Supposons par contradiction que deux sommets  $x$  et  $y$  ne sont pas résolus par  $\{\alpha, \beta\}$ , avec  $x \in T_u$  et  $y \in T_v$  pour  $u$  et  $v$  dans  $C$ . Si  $u = v$ , comme  $T_u$  est un chemin enraciné,  $\alpha$  résout la paire  $(x, y)$ . On suppose maintenant que  $u \neq v$ . Par symétrie, on peut supposer que  $d(x, u) \leq d(y, v)$ . On pose  $z \in T_v$  le sommet de  $T_v$  tel que  $d(v, z) = d(x, u)$ . Alors  $\{\alpha, \beta\}$  ne résout pas la paire  $(z, u)$ . Mais  $u \in C$  et les cas précédents montrent que toute paire de sommets avec au moins un sommet dans  $C$  est résolue par  $\{\alpha, \beta\}$ , une contradiction. Donc  $\dim(G) = 2$  et comme  $G$  n'est pas un chemin,  $Z(G) \geq 2$ .

**Cas 3 : Il existe exactement un sommet  $u \in V(C)$  tel que  $T_u$  est un arbre enraciné.**

On prouve que  $\dim(G) \leq \dim(T_u) + 1$  et que  $Z(G) \geq Z(T_u) + 1$ . Soit  $S$  une base métrique de  $T_u$  et  $v \in C$  un sommet à distance  $k$  de  $u$ .

Montrons que  $S \cup \{v\}$  est un ensemble résolvent de  $G$ . Soit  $\alpha \in S \cap T_u$ , alors  $\{\alpha, v\}$  résout  $G \setminus T_u$ . En effet, dans le cas contraire, deux sommets ont les mêmes distances à  $u$  et  $v$  ce qui est impossible car, dans  $G \setminus T_u$ , pour tout  $v \in C$ ,  $T_v$  est un chemin enraciné ce qui revient au Cas 2. Donc  $\{u, v\}$  est un ensemble résolvent pour  $G \setminus (T_u \setminus \{u\})$ . Deux sommets de  $T_u$  sont résolus comme  $S$  est une base métrique pour  $T_u$  et que  $u$  est un sommet séparateur. Soit  $x \in T_w$  pour  $w \in C$ , et  $y \in T_u$ . D'après l'inégalité triangulaire,  $d(\alpha, y) \leq d(y, u) + d(u, \alpha)$ . Si  $d(\alpha, y) = d(\alpha, x)$ , alors  $d(x, u) \leq d(y, u)$  comme  $d(\alpha, x) = d(\alpha, u) + d(u, x)$ . Si  $d(x, v) = d(y, v)$ , alors  $d(y, v) = d(y, u) + d(u, v) \geq d(x, u) + d(u, v)$ . On obtient donc  $d(x, v) \geq d(x, u) + d(u, v)$ . En supprimant  $d(x, w)$  des deux côtés, on obtient  $d(w, v) \geq d(w, u) + d(u, v)$  ce qui est impossible car  $d(u, v) = k$  et  $d(w, v) \leq k$ . Donc  $x$  et  $y$  ont des vecteurs de distance différents d'où  $\dim(G) \leq \dim(T_u) + 1$ .

Soit  $Z$  un ensemble zéro-forçant minimal de  $G$ . Si  $Z$  contient  $u$ , alors  $Z$  contient au

moins un autre sommet de  $G \setminus T_u$ . Comme la restriction de  $Z$  à  $T_u$  est un ensemble zéro-forçant pour  $T_u$ , on obtient  $Z(G) \geq Z(T_u) + 1$ . On suppose maintenant que  $u \notin Z$ . Considérons une séquence de changement de couleurs qui colore  $u$  en noir. Supposons que  $u$  soit forcé par un sommet de  $G \setminus T_u$ . Comme  $(G \setminus T_u) \cup \{u\}$  contient un cycle, il y a au moins deux sommets dans  $Z \cap (G \setminus T_u)$  et  $Z \cap T_u \cup \{u\}$  est un ensemble zéro-forçant de  $T_u$ . Donc  $Z(G) \geq Z(T_u) + 1$ . Supposons maintenant que  $u$  soit forcé par un sommet de  $T_u$ . Alors, il y a au moins un sommet dans  $Z \cap (G \setminus T_u)$  et  $Z \cap T_u$  est un ensemble zéro-forçant de  $T_u$  donc  $Z(G) \geq Z(T_u) + 1$ . Ainsi,  $\dim(G) \leq \dim(T_u) + 1 \leq Z(T_u) + 1 \leq Z(G)$ .

Dans la suite, on utilise le procédé suivant : trouver une arête  $e$  telle que  $Z(G - e) \leq Z(G)$  (en utilisant le lemme 4.29 ou le lemme 4.31). Ensuite, on trouve un sommet  $z$  dans  $G - e$  qui soit un sommet intérieur de degré 2 ou un sommet majeur de degré terminal 0 ou 1. D'après le lemme 3.13,  $\dim(G - e) < Z(G - e)$  et d'après le lemme 4.5,  $\dim(G) \leq \dim(G - e) + 1$ , et donc  $\dim(G) \leq Z(G)$ . Dans la suite, on donne seulement la construction de  $e$  et  $z$ .

**Cas 4 : Il existe  $u, v, w, x \in C$  dans cette ordre mais non nécessairement adjacents tels que  $T_u$  soient  $T_w$  des arbres enracinés et que  $T_v$  et  $T_x$  soient des chemins enracinés.**

Soit  $e \in E(C)$  une arête telle que  $Z(G - e) \leq Z(G)$ . Une telle arête existe d'après le lemme 4.29. Dans  $G - e$ , l'un de  $v$  et  $x$  est sur le chemin entre  $u$  et  $w$ . On note  $z$  ce sommet, alors,  $z$  est un sommet intérieur de degré 2 ou un sommet majeur de degré terminal 0 ou 1 dans  $G - e$ .

**Cas 5 : Il existe  $u$  et  $v$  adjacents tels que  $T_u$  et  $T_v$  soient des arbres enracinés et  $w$  tel que  $T_w$  soit un chemin enraciné**

- $l_u = 0$ . Soit  $e \in E(C)$  tel que  $Z(G - e) \leq Z(G)$ . Une telle arête existe d'après le lemme 4.29. Dans  $G - e$ ,  $u$  est un sommet intérieur de degré 2 ou un sommet majeur de degré terminal 0 ou 1 donc  $z = u$ .
- $l_u = 1$ . Soit  $e \in E(C)$  adjacent à  $u$  telle que  $Z(G - e) \leq Z(G)$ . Une telle arête existe d'après le lemme 4.31. Si  $e = uv$  alors  $w$  est un sommet intérieur de degré 2 ou un sommet majeur de degré terminal 0 ou 1 dans  $G - e$  donc  $z = w$ . Si  $e$  est l'autre arête de  $E(C)$  adjacente à  $u$  alors  $u$  est un sommet intérieur de degré 2 ou un sommet majeur de degré terminal 0 ou 1 dans  $G - e$  donc  $z = u$ .
- $l_u \geq 2$  et  $l_v \geq 2$ . Soit  $e = uv$ , alors  $Z(G - e) \leq Z(G)$ . En effet, un ensemble zéro-forçant de  $G$  est aussi un ensemble zéro-forçant de  $G - e$ . Soit  $Z$  un ensemble zéro-forçant minimal de  $G$ . L'ensemble  $Z$  contient au moins une feuille de  $u$  et une feuille de  $v$ . Partant de ces sommets, il est possible de colorer  $u$  et  $v$  en noir donc il existe une séquence de colorations pour  $G$  qui n'utilise pas l'arête  $e$ . Ainsi,  $Z(G - e) \leq Z(G)$  par le lemme 4.27. Enfin,  $w$  est un sommet intérieur de degré 2 ou un sommet majeur de degré terminal 0 ou 1 dans  $G - e$  donc  $z = w$ .  $\square$

## 4.5 Amélioration possible

Lors de la révision pour la soumission de l'article en version journal, un relecteur a pointé un résultat de l'article [LYZ19] qui permet d'améliorer le théorème 3.14. La preuve est basée sur l'utilisation d'ensembles doublement résolvents, dont la définition est proche des ensembles résolvents.

**Définition 4.35** (Ensemble doublement résolvant). *Soit  $G$  un graphe et  $(u, v)$  une paire de sommets de  $G$ . Deux sommets  $(x, y)$  résolvent doublement la paire  $(u, v)$  si  $d(x, u) - d(x, v) \neq d(y, u) - d(y, v)$ . Un ensemble  $S$  de sommets de  $G$  est doublement résolvant si toute paire de sommets de  $G$  est doublement résolue par une paire de sommets de  $S$ .*

Dans l'article [LYZ19], les auteurs prouvent un résultat analogue au théorème 3.14 pour les ensembles doublement résolvents.

**Théorème 4.36** ([LYZ19]). *Soit  $G$  un graphe connexe avec  $\delta(G) \geq 2$ . Alors il existe un ensemble doublement résolvant  $S$  tel que  $|S| \leq 2c(G) + 1$ .*

Le Théorème 4.36 permet de prouver le résultat suivant.

**Théorème 4.37.** *Soit  $G$  un graphe connexe, alors  $\dim(G) \leq L(G) + 2c(G) + 1$ .*

*Démonstration.* Si  $c(G) = 0$ , alors  $G$  est un arbre et le résultat est connu. On peut donc supposer  $c(G) \geq 1$ . On note  $G_b$  le graphe obtenu à partir de  $G$  en supprimant itérativement les feuilles. Alors  $G_b$  est non vide, vérifie  $\delta(G) \geq 2$  et  $c(G_b) = c(G)$ . Soit  $S_1$  un ensemble doublement résolvant de  $G_b$ . D'après le théorème 4.36,  $|S_1| \leq 2c(G) + 1$ . Un sommet de  $V(G_b)$  est appelé racine s'il est adjacent à des sommets de  $V(G) \setminus V(G_b)$ . Soient  $R$  l'ensemble des racines de  $G_b$  et  $G'$  la forêt  $G[V(G) \setminus V(G_b) \cup R]$ . Soient  $T_1, \dots, T_k$  les composantes connexes de  $G'$  qui ne sont pas des chemins dont une extrémité est dans  $R$  et  $S_2$  un ensemble résolvant minimal pour  $T_1 \cup \dots \cup T_k$ . Alors  $|S_2| = \sum_{i=1}^k \dim(T_i) = \sum_{i=1}^k L(T_i) = L(G)$ . On pose  $S = S_1 \cup S_2$ . Pour prouver le résultat, il suffit de montrer que  $S$  est un ensemble résolvant de  $G$ . Soit  $u$  un sommet de  $G$ . Si  $u$  appartient à  $G'$ , on note  $C(u)$  la composante connexe de  $G'$  qui contient  $u$ . On définit  $f(u)$  comme le sommet le plus proche de  $u$  dans  $G_b$ . On a alors  $f(u) = u$  si  $u \in G_b$  et  $f(u)$  est la racine de  $C(u)$  si  $u \in G'$ . Ainsi pour tout sommet  $v \in V(G_b)$ , on a  $d(u, v) = d(u, f(u)) + d(f(u), v)$ . Soit  $v$  un sommet de  $G$  différent de  $u$ . Si  $f(u) \neq f(v)$ ,  $S_1$  contient une paire de sommets  $(x, y)$  qui résout doublement  $(f(u), f(v))$ . Alors  $d(x, u) - d(y, u) = d(x, f(u)) - d(y, f(u)) \neq d(x, f(v)) - d(y, f(v)) = d(x, v) - d(y, v)$ . Ainsi on a soit  $d(x, u) \neq d(x, v)$ , soit  $d(y, u) \neq d(y, v)$ , donc la paire  $(u, v)$  est résolue par un sommet de  $S$ . Si  $f(u) = f(v)$  alors  $u$  et  $v$  sont des sommets de  $G'$  et donc  $C(u) = C(v)$ . Si  $C(u)$  est un chemin dont l'extrémité est dans  $R$ , alors pour tout sommet  $s \in S_1$ , on a  $d(u, s) - d(v, s) = d(u, f(u)) - d(v, f(u)) \neq 0$ . Sinon, par définition de  $S_2$ , il existe un sommet dans  $S_2$  qui résout la paire  $(u, v)$ .  $\square$

Ce résultat permet aussi d'améliorer la borne du théorème 4.24 en utilisant le même schéma de preuve que pour le théorème 4.24.

**Corollaire 4.38.** *Tout graphe  $G$  vérifie  $\dim(G) \leq Z(G) + 2c(G) + 1$ .*

## 4.6 Perspectives

Considérons le graphe  $G_k$  construit comme une collection de  $k$   $C_4$  fusionnés sur le sommet central d'un chemin de longueur 3 comme sur la figure 4.7. La dimension métrique de  $G_k$  est  $2k + 1$  (il faut sélectionner deux sommets distincts du centre par  $C_4$  et une extrémité du chemin),  $L(G_k) = 1$ , et  $c(G) = k$ . Comme  $L(G_k) = 1$  quelque soit la valeur  $k$ , il existe des graphes  $G$  tels que  $\dim(G) = L(G) + 2c(G)$ . Le théorème 4.37 assure que tout graphe  $G$  vérifie  $\dim(G) \leq Z(G) + 2c(G) + 1$ . Il reste donc très peu à améliorer pour rejoindre les deux bornes.

Considérons maintenant le corollaire 4.1. Si dans le graphe  $G_k$ , on supprime une arête incidente au sommet central par  $C_4$ , l'arbre couvrant obtenu a une dimension métrique égale à  $k + 1$  (dès que  $k \geq 2$ ). Donc il existe des graphes  $G$  possédant un arbre couvrant  $T$  tel que  $\dim(G) = \dim(T) + c$ . Cela nous conduit à poser la question suivante :

**Question 4.39.** *Est-il vrai que pour tout graphe  $G$  et tout arbre couvrant  $T$  de  $G$ ,  $\dim(G) \leq \dim(T) + c(G)$  ?*

On peut se demander ce qui se passe en partant du meilleur arbre couvrant, c'est-à-dire l'arbre couvrant ayant la plus grande dimension métrique. Dans le graphe  $G_k$ , si pour chaque  $C_4$  on supprime une arête qui n'est pas incidente au centre, en notant  $T_k$  l'arbre ainsi obtenu alors  $\dim(G_k) = \dim(T_k) + 1$ .

**Question 4.40.** *Existe-t-il un graphe  $G$  dont la dimension métrique soit une fonction de  $c(G)$  plus grande que n'importe quel arbre couvrant de  $G$  ?*

# Chapitre 5

## Complexité de la dimension métrique dans les graphes chordaux

Le contenu de ce chapitre est basé sur un travail effectué avec Nicolas Bousquet et Aline Parreau sur la complexité de la dimension métrique dans les graphes chordaux. Nous présentons un algorithme qui calcule la dimension métrique d'un graphe chordal à  $n$  sommets en temps  $O(n^3 + n^2 \cdot f(\omega))$  où  $\omega$  est la largeur arborescente de  $G$ . L'existence d'un tel algorithme implique que le calcul de la dimension métrique est FPT en la largeur arborescente pour les graphes chordaux et polynomial pour les 2-arbres.

Le contenu de cet article a été présenté à la conférence WG 2023.

### 5.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation d'un algorithme permettant de prouver le théorème suivant :

**Théorème 5.1.** *DIMENSION MÉTRIQUE est FPT paramétré par la largeur arborescente dans les graphes chordaux. Plus précisément, la DIMENSION MÉTRIQUE peut être décidée en temps  $O(n^3 + n^2 \cdot f(\omega))$  dans les graphes chordaux de taille de clique maximale  $\omega$ .*

Rappelons que, dans les graphes chordaux, la largeur arborescente est égale à la taille maximale d'une clique moins un. Ainsi les paramètres largeur arborescente et taille de clique maximale sont équivalents dans le contexte des graphes chordaux. Or il est connu que DIMENSION MÉTRIQUE n'est pas FPT paramétré par la largeur arborescente en général [BP21].

Une des difficultés lors du calcul de la dimension métrique vient du fait qu'une paire de sommets peut être résolue par un sommet très éloigné dans le graphe. A cause de cet aspect non-local, il est difficile d'utiliser certaines stratégies algorithmiques classiques comme *diviser-pour-régner*, une induction ou de la programmation dynamique comme la modification d'un sommet ou d'une arête peut drastiquement changer la solution.<sup>1</sup>

---

1. L'ajout d'une seule arête peut modifier la dimension métrique de  $\Omega(n)$ , voir par exemple la figure 4.1.

Pour assurer la correction de notre algorithme, la première partie consiste à prouver que, dans un graphe chordal, si l'on utilise une décomposition arborescente d'une forme spécifique, on peut assurer que, si toutes les paires de sommets proches d'un ensemble séparateur sont résolues, alors toutes les paires de sommets sont résolues. En utilisant ce résultat, on construit un algorithme de programmation dynamique qui calcule la taille minimale d'un ensemble résolvant contenant un sommet donné en temps FPT paramétré par la largeur arborescente.

La décomposition arborescente spécifique que nous utilisons, inspirée de celle de Kloks dans l'article [Klo94], est présentée dans la section 5.2.1. Nous prouvons ensuite des propriétés sur les ensembles résolvents dans les graphes chordaux dans la section 5.2.2. Ces propriétés serviront à prouver la correction et la complexité de l'algorithme. Nous montrerons en particulier comment utiliser les cliques séparatrices pour restreindre l'aspect global de la dimension métrique en montrant que des propriétés locales peuvent suffire à garantir qu'un ensemble est résolvant. Nous présentons ensuite un problème de dimension métrique étendue dans la section 5.3.1 et les règles de la programmation dynamique permettant de le résoudre dans la section 5.3.2, où nous montrons aussi la correction de l'algorithme. Nous terminons par une analyse de la complexité dans la section 5.4.

## 5.2 Préliminaires

### 5.2.1 Décompositions arborescentes

Les graphes chordaux sont les graphes sans cycles induits de longueur 4 ou plus. Une caractérisation donnée par Dirac dans [Dir61] assure que les graphes chordaux sont les graphes dont les séparateurs minimaux sont des cliques. De plus, les graphes chordaux possèdent des décompositions arborescentes dont tous les sacs induisent des cliques.

Notre algorithme de programmation utilise une décomposition arborescente avec plus de propriétés que celle de la définition classique. Ces propriétés permettent de simplifier l'analyse de l'algorithme. Pour les obtenir, nous adaptons la décomposition de [Klo94, lemme 13.1.2].

**Lemme 5.2.** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe chordal. Il existe une décomposition arborescente  $(X, T)$  de  $G$  telle que, (i)  $T$  est un arbre enraciné contenant au plus  $4n$  sommets, (ii) pour tout sac  $i \in V(T)$ , l'ensemble de sommets  $X_i$  induit une clique dans  $G$  et (iii)  $T$  contient quatre types de nœuds qui sont :*

- Les nœuds feuilles, vérifiant  $|X_i| = 1$ ,
- Les nœuds d'introduction  $i$  ayant exactement un enfant  $j$ , et cet enfant vérifie  $X_i = X_j \cup \{v\}$  pour un certain sommet  $v \in V(G) \setminus X_j$ ,
- Les nœuds d'oubli  $i$  ayant exactement un enfant  $j$ , et cet enfant vérifie  $X_i = X_j \setminus \{v\}$  pour un certain sommet  $v \in X_j$ ,

- Les nœuds de jonction  $i$  ayant exactement deux enfants  $i_1$  et  $i_2$  vérifiant  $X_i = X_{i_1} = X_{i_2}$ .

De plus, une telle décomposition arborescente peut être trouvée en temps linéaire en le nombre de sommets de  $G$ .

La preuve originelle utilise des  $k$ -arbres à la place des graphes chordaux mais la seule propriété nécessaire est que le graphe contienne un sommet simplicial, ce qui est vrai dans les graphes chordaux. Nous définissons maintenant une décomposition arborescente dans laquelle on va imposer la racine de l'arbre. La figure 5.1 illustre une telle décomposition.

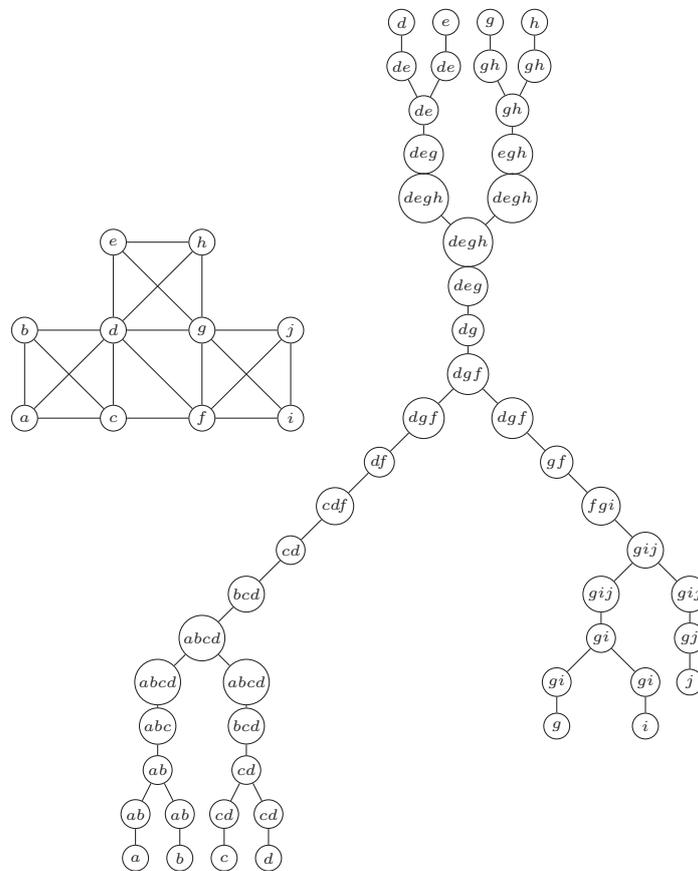


FIGURE 5.1 – Un graphe chordal et sa décomposition arborescente obtenue par le lemme 5.3.

**Lemme 5.3.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe chordal et  $r$  un sommet de  $G$ , alors il existe une décomposition arborescente  $(X, T)$  telle que, (i)  $T$  contient au plus  $7n$  nœuds, (ii)  $T$  est enraciné en un nœud qui contient uniquement le sommet  $r$ , (iii) pour tout sac  $i \in V(T)$ , l'ensemble de sommets  $X_i$  induit une clique dans  $G$  et (iv)  $T$  contient quatre types de nœuds qui sont :

- Les nœuds feuilles, vérifiant  $|X_i| = 1$ ,
- Les nœuds d'introduction  $i$  ayant exactement un enfant  $j$ , et cet enfant vérifie  $X_i = X_j \cup \{v\}$  pour un certain sommet  $v \in V(G) \setminus X_j$ ,
- Les nœuds d'oubli  $i$  ayant exactement un enfant  $j$ , et cet enfant vérifie  $X_i = X_j \setminus \{v\}$  pour un certain sommet  $v \in X_j$ ,
- Les nœuds de jonction  $i$  ayant exactement deux enfants  $i_1$  et  $i_2$  vérifiant  $X_i = X_{i_1} = X_{i_2}$ .

De plus, une telle décomposition arborescente peut être trouvée en temps linéaire en le nombre de sommets de  $G$ .

*Démonstration.* D'après le lemme 5.2, il existe une décomposition arborescente  $(T, X)$  vérifiant toutes les propriétés, mis à part le fait que la racine de  $T$  n'est pas contrainte.

Modifions d'abord  $(T, X)$  pour assurer que la décomposition arborescente est enracinée en un nœud qui contient uniquement le sommet  $r$ . Si  $r$  apparaît dans le sac d'un nœud feuille, on enracine l'arbre en ce nœud. Sinon, il existe un nœud d'oubli  $i$  avec un enfant  $i'$  tel que  $X_i = X_{i'} \setminus \{r\}$ . Notons  $X_i = \{v_1, \dots, v_k\}$  avec  $r = v_1$ . On effectue les modifications suivantes sur  $T$  : supprimer l'arête  $ii'$ , ajouter deux nœuds  $i''$  et  $i_k$  avec  $X_{i''} = X_k = X_v$ ,  $i''$  étant un nœud de jonction ayant pour enfants  $i'$  et  $k$  et  $i$  est un nœud d'oubli ayant pour enfant  $i''$ . Enfin, on ajoute des nœuds  $i_{k-1} \dots, i_1$  tels que, pour  $1 \leq t \leq k-1$ ,  $X_{i_t} = \{v_1, \dots, v_t\}$  et  $i_t$  est l'enfant du nœud  $i_{t+1}$  (qui est un nœud d'oubli). Ainsi,  $r$  apparaît dans le sac d'un nœud feuille, cette opération ayant nécessité d'ajouter au plus  $n$  nœuds à  $T$ .

On enracine  $T$  en un nœud dont le sac est  $\{r\}$ . La dernière étape est de vérifier que la structure sur les nœuds est préservée. On peut remarquer que, pour chaque arête, les deux sacs aux extrémités diffèrent d'au plus un sommet. Si un nœud a un unique enfant ayant le même sac, alors on fusionne les deux nœuds. Si un nœud  $i$  a deux enfants avec des sacs différentes, en notant  $X$  le sac de  $i$ , on ajoute un nouveau nœud dont le sac est  $X$  entre  $i$  et chacun de ces enfants. Après ces modifications, la décomposition arborescente vérifie toutes les propriétés de l'énoncé.

Toutes ces modifications peuvent être faite en temps linéaire donc trouver la décomposition arborescente peut être fait en temps linéaire.  $\square$

Dans la suite, une décomposition arborescente vérifiant les propriétés du lemme 5.3 sera appelé une *décomposition arborescente adéquate*, et on considérera uniquement des décompositions arborescentes adéquates pour des graphes chordaux.

Étant donnée une décomposition arborescente  $(T, X)$  de  $G$ , pour tout nœud  $i$  de  $T$ , on définit le *sous-graphe de  $G$  enraciné en  $X_i$* , noté  $T(X_i)$ , comme le graphe induit par le sous-ensemble de sommets de  $G$  contenu dans un des sacs du sous-arbre enraciné en  $i$ .

### 5.2.2 Clique séparatrices et ensemble résolvents

Dans cette section, on donne des lemmes techniques qui vont permettre de contrôler la quantité d'informations à mémoriser lors de la programmation dynamique.

**Lemme 5.4.** Soient  $K$  une clique séparatrice de  $G$  et  $G_1$  une composante connexe de  $G \setminus K$ . On note  $G_{ext}$  le sous-graphe de  $G$  induit par les sommets de  $G_1 \cup K$  et  $G_{int} = G \setminus G_{ext}$ . Soient  $x_1, x_2 \in V(G_{int})$  des sommets tels que  $|d(x_1, K) - d(x_2, K)| \geq 2$ . Alors tout sommet  $s \in V(G_{ext})$  résout la paire  $(x_1, x_2)$ .

*Démonstration.* Sans perte de généralités, on peut supposer que  $d(x_1, K) + 2 \leq d(x_2, K)$ . Par inégalité triangulaire, et comme  $K$  est une clique,  $d(x_1, s) \leq d(x_1, K) + 1 + d(K, s)$  et  $d(x_2, s) \geq d(x_2, K) + d(K, s)$ . La somme de ces inégalités donne  $d(x_2, K) + d(x_1, s) \leq d(x_1, K) + 1 + d(x_2, s) < d(x_2, K) + d(x_2, s)$ . Ainsi,  $d(x_1, s) < d(x_2, s)$ , ce qui veut dire que  $s$  résout la paire  $(x_1, x_2)$ .  $\square$

Avant de prouver le lemme 5.6, nous prouvons d'abord un lemme technique.

**Lemme 5.5.** Soient  $G$  un graphe chordal et  $T$  une décomposition arborescente adéquate de  $G$ . Soient  $X, Y$  deux sacs de  $T$  et  $x$  et  $y$  deux sommets appartenant respectivement à  $X$  et  $Y$ . On suppose que  $X \cap Y = \emptyset$  et que  $d(x, y) \geq 2$ . Soit  $z$  le voisin de  $x$  qui apparaît dans le sac le plus proche possible de  $Y$  parmi les sacs sur le chemin entre  $X$  et  $Y$ . Alors  $z$  est sur un plus court chemin entre  $x$  et  $y$ .

*Démonstration.* Soit  $Z$  le sac contenant  $z$  et aucun autre sommet voisin de  $x$  avec  $Z$  sur le chemin entre  $X$  et  $Y$ . Si  $Z = Y$ , alors  $z$  est voisin de  $x$  et de  $y$  ce qui donne le résultat comme  $d(x, y) \geq 2$ . Sinon, considérons un plus court chemin  $x = x_1, x_2, \dots, x_m = y$  entre  $x$  et  $y$  et notons  $x_i$  le premier sommet de ce chemin appartenant à  $Z$ . Un tel sommet existe comme  $Z$  sépare  $x$  et  $y$ . Si  $x_i = z$ , le résultat est prouvé. Sinon, par définition de  $z$ ,  $x_i$  n'est pas adjacent à  $x$  et est adjacent à  $z$  (comme ils appartiennent au même sac qui représente une clique dans  $G$ ). Donc, si on remplace la partie du chemin  $x_1, \dots, x_i$  par  $x, z, x_i$ , cela donne un chemin de  $x$  à  $y$  dont la longueur est au plus celle du chemin initial, ce qui donne le résultat.  $\square$

**Lemme 5.6.** Soit  $S$  un ensemble de sommets de  $G$ . Soient  $X, Y$  et  $Z$  trois sacs d'une décomposition arborescente adéquate  $T$  de  $G$  tels que  $Z$  est sur le chemin  $P$  entre  $X$  et  $Y$  dans  $T$ . On note  $P = X_1, \dots, Z, \dots, X_p$  les sacs de  $P$  avec  $X = X_1$  et  $Y = X_p$ . Soient  $x$  un sommet de  $X$  et  $y$  un sommet de  $Y$  avec  $d(x, Z) \geq 2$  et  $d(y, Z) \geq 2$ . On suppose que toute paire de sommets  $(u, v)$  avec  $u \in X_2 \cup \dots \cup Z$ ,  $v \in Z \cup \dots \cup X_p$ ,  $d(u, Z) < d(x, Z)$  et  $d(v, Z) < d(y, Z)$  est résolue par  $S$ . Alors la paire  $(u, v)$  est résolue par  $S$ .

*Démonstration.* Soient  $i_1$  tel que  $X_{i_1} \cap N[x] \neq \emptyset$  et pour tout  $j > i_1$ ,  $X_j \cap N[x] = \emptyset$  et  $i_2$  tel que  $X_{i_2} \cap N[y] \neq \emptyset$  et pour tout  $j < i_2$ ,  $X_j \cap N[y] = \emptyset$ . Soit  $x'$  le seul voisin de  $x$  dans  $X_{i_1}$  et  $y'$  le seul voisin de  $y$  dans  $X_{i_2}$ , ils sont uniques par définition d'une décomposition arborescente adaptée. Remarquons que  $d(x, y) \geq 4$  comme  $d(x, Z) \geq 2$  et  $d(y, Z) \geq 2$ . Donc  $N[x]$  n'est pas adjacent à  $N[y]$  et donc  $i_1 < i_2$ . D'après le lemme 5.5,  $x'$  est sur un plus court chemin entre  $x$  et  $Z$  et  $y'$  est sur un plus court chemin entre  $y$  et  $Z$ . Donc  $d(x', Z) < d(x, Z)$  et  $d(y', Z) < d(y, Z)$ . Par hypothèse, il existe un sommet  $s \in S$  qui résout la paire  $(x', y')$ . On prouve dans la suite que  $s$  résout la paire  $(x, y)$ .

Si  $s$  est voisin de  $x$  ou de  $y$ , alors  $s$  résout la paire  $(x, y)$  comme  $d(x, y) \geq 4$ . A partir de maintenant, on suppose que  $d(s, x) \geq 2$  et que  $d(s, y) \geq 2$ . Soient  $X_s$  un sac de  $T$  contenant  $s$  et  $X'_s$  le sac le plus proche de  $X_s$  appartenant au chemin  $P$  entre  $X$  et  $Y$ .

Cas 1 :  $s \in X_{i_1}$  et  $s \in X_{i_2}$ . Alors,  $d(s, x') \leq 1$  et  $d(s, y') \leq 1$ . Le sommet  $s$  résout la paire  $(x', y')$  donc  $d(s, x') \neq d(s, y')$  et donc  $s = x'$  ou  $s = y'$ . Supposons par symétrie que  $s = x'$ , alors  $d(s, x) = 1$  et  $d(s, y) \geq 3$  car  $d(x, y) \geq 4$ . Donc  $s$  résout la paire  $(x, y)$ .

Cas 2 :  $s$  appartient à exactement un des deux ensembles  $X_{i_1}$  et  $X_{i_2}$ . Par symétrie, on peut supposer  $s \in X_{i_1}$ . D'après le lemme 5.5,  $y'$  est sur un plus court chemin entre  $y$  et  $s$ . Donc  $d(s, y) = d(s, y') + 1$ . Comme  $s$  appartient à  $X_{i_1}$ , on a  $d(x', s) = 1$  et  $d(x, s) \leq 2$ . On sait que  $d(y', s) \neq d(x', s)$ , donc  $d(y', s) \geq 2$ , et donc  $d(s, y) \geq 3$ . Ainsi  $s$  résout la paire  $(x, y)$ .

Cas 3 :  $s \notin X_{i_1}$  et  $s \notin X_{i_2}$ . On considère d'abord le cas où  $X'_s$  est entre  $X_{i_1}$  et  $X_{i_2}$ . Alors,  $d(s, x) = d(s, x') + 1$  et  $d(s, y) = d(s, y') + 1$  d'après le lemme 5.5 comme  $X_{i_1}$  sépare  $x$  et  $s$  et  $X_{i_2}$  sépare  $y$  et  $s$ . Donc,  $s$  résout la paire  $(x, y)$ .

On suppose maintenant que  $X'_s$  est entre  $X$  et  $X_{i_1}$ , le second cas est identique. Comme  $i_1 < i_2$ ,  $X_{i_2}$  sépare  $s$  et  $y$ . Donc  $d(s, y) = d(s, y') + 1$  par le lemme 5.5. Pour conclure on prouve que  $d(s, x') < d(s, y')$ . Soit  $Q$  un plus court chemin entre  $s$  et  $y'$ . Le sac  $X_{i_1}$  sépare  $s$  et  $y'$  donc  $Q \cap X_{i_1} \neq \emptyset$ . On pose  $y_1 \in Q \cap X_{i_1}$ . Par définition de  $Q$ ,  $d(s, y') = d(s, y_1) + d(y_1, y')$ . On sait que  $y_1 \neq y'$  car  $y_1$  est un voisin de  $x$ . Donc  $d(y_1, y') \neq 0$ . On a aussi  $d(s, x') \leq d(s, y_1) + 1$  car  $y_1 \in X_{i_1}$ . Donc  $y_1$  est un voisin de  $x'$ . Comme  $d(s, x') \neq d(s, y')$ , cela assure  $d(s, x') < d(s, y')$ . Donc  $s$  résout la paire  $(x, y)$  comme  $d(s, x) \leq d(s, x') + 1 < d(s, y') + 1 = d(s, y)$ .  $\square$

Le résultat suivant est principalement une reformulation du lemme 5.6 pour obtenir une version portant sur des ensembles de sommets, plus pratique à utiliser par la suite.

**Corollaire 5.7.** *Soient  $G$  un graphe chordal et  $S$  un ensemble de sommets de  $G$ . Soient  $X$  un sac de  $T$ ,  $T_1 = (X_1, E_1)$  et  $T_2 = (X_2, E_2)$  deux composantes connexes de  $T \setminus X$ . Supposons que toute paire de sommets  $(u, v)$  de  $(X_1 \cup X) \times (X_2 \cup X)$  avec  $d(u, X) \leq 2$  et  $d(v, X) \leq 2$  soit résolue par  $S$ . Alors toute paire de sommets  $(u, v)$  de  $(X_1, X_2)$  avec  $|d(u, X) - d(v, X)| \leq 1$  est résolue par  $S$ .*

*Démonstration.* Supposons par l'absurde qu'il existe des paires de sommets de  $(T_1, T_2)$  avec  $|d(u, X) - d(v, X)| \leq 1$  qui ne soient pas résolues par  $S$ . Parmi ces paires, on considère une paire  $(u, v)$  minimisant la quantité  $q := d(u, X) + d(v, X)$ . Si  $q \leq 4$  alors  $d(u, X) \leq 2$  et  $d(v, X) \leq 2$ , donc la paire  $(u, v)$  est résolue d'après les hypothèses. Si  $q \geq 5$ , alors  $d(u, X) \geq 2$  et  $d(v, X) \geq 2$ . Par minimalité, on sait que toutes les paires de sommets  $(u', v')$  de  $(T_1, T_2)$  avec  $d(u', X) < d(u, X)$  et  $d(v', X) < d(v, X)$  sont résolues par  $S$ . Donc, d'après le lemme 5.6, la paire  $(u, v)$  est résolue par  $S$ .  $\square$

## 5.3 Description de l'algorithme

Dans cette section, nous fixe un sommet  $v$  d'un graphe chordal  $G$  et nous considérons une décomposition arborescente adéquate  $(T, X)$  enracinée en  $v$ , qui existe d'après le

lemme 5.3. Nous présentons un algorithme qui calcule la taille minimale d'un ensemble résolvant de  $G$  contenant  $v$ .

### 5.3.1 Généralisation du problème

L'algorithme que nous présentons est un algorithme de programmation dynamique qui commence depuis les feuilles d'une décomposition arborescente adéquate. Il calcule la solution d'un problème plus général que la dimension métrique mais plus simple à manipuler pour combiner des solutions entre elles. Dans ce nouveau problème, les sommets seront parfois représentés par des vecteurs de distance, nous commençons par définir des notations pour manipuler ces vecteurs.

**Définition 5.8.** *Étant donné un vecteur  $\mathbf{r}$ , la  $i$ -ème coordonnée de  $\mathbf{r}$  est notée  $\mathbf{r}_i$ .*

- Soit  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_k) \in \mathbb{N}^k$  un vecteur de taille  $k$  et  $m \in \mathbb{N}$ . Le vecteur  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} \mid \mathbf{m}$  est le vecteur de taille  $k + 1$  avec  $r'_i = r_i$  pour  $1 \leq i \leq k$  et  $r'_{k+1} = m$ .
- Soit  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_k) \in \mathbb{N}^k$  un vecteur de taille  $k$ . Le vecteur  $\mathbf{r}^-$  est le vecteur de taille  $k - 1$  avec  $r_i^- = r_i$  pour  $1 \leq i \leq k - 1$ .

**Définition 5.9.** *Soit  $i$  un nœud de  $T$ , notons  $X_i = \{v_1, \dots, v_k\}$  le contenu du sac de  $i$ . Pour un sommet  $x$  de  $G$ , le vecteur de distance  $\mathbf{d}_{\mathbf{X}_i}(\mathbf{x})$  de  $x$  à  $X_i$  est le vecteur de taille  $k$  tel que, pour  $1 \leq j \leq k$ ,  $\mathbf{d}_{\mathbf{X}_i}(\mathbf{x})_j = d(x, v_j)$ . On définit l'ensemble  $d_{<2}(X_i)$  comme l'ensemble des vecteurs de distance des sommets de  $T(X_i)$  à distance au plus 2 de  $X_i$  dans  $G$  (une coordonnée au moins du vecteur est inférieure ou égale à 2).*

**Définition 5.10.** *Soit  $G$  un graphe et  $K = \{v_1, \dots, v_k\}$  une clique de  $G$ . Soit  $x$  un sommet de  $G$ . L'empreinte de  $x$  sur  $K$ , notée  $\mathbf{Tr}_K(x)$ , est le vecteur  $\mathbf{r}$  de  $\{0, 1\}^k \setminus \{1, \dots, 1\}$  tel que, pour tout  $1 \leq i \leq k$ ,  $d(x, v_i) = a + \mathbf{r}_i$  avec  $a = d(x, K)$ .*

*Soit  $S$  un ensemble de sommets de  $G$ . L'empreinte  $\mathbf{Tr}_K(S)$  de  $S$  sur  $K$  est l'ensemble des vecteurs  $\{\mathbf{Tr}_K(x), x \in S\}$ .*

La notion d'empreinte est bien définie car pour un sommet  $x$  et une clique  $K$ , la distance entre  $x$  et un sommet de  $K$  est  $d(x, K)$  ou  $d(x, K) + 1$ .

**Définition 5.11.** *Soient  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  et  $\mathbf{r}_3$  trois vecteurs de la même taille  $k$ . On dit que  $\mathbf{r}_3$  résout la paire  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  si*

$$\min_{1 \leq i \leq k} (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3)_i \neq \min_{1 \leq i \leq k} (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3)_i.$$

**Lemme 5.12.** *Soit  $K$  une clique séparatrice de  $G$  et  $G_1$  une composante connexe de  $G \setminus K$ . On considère  $(x, y)$  une paire de sommets de  $G \setminus G_1$  et  $\mathbf{r}$  un vecteur de taille  $|K|$ . Si  $\mathbf{r}$  résout la paire  $(\mathbf{d}_K(\mathbf{x}), \mathbf{d}_K(\mathbf{y}))$ , alors tout sommet  $s \in V(G_1)$  vérifiant  $\mathbf{Tr}_K(s) = \mathbf{r}$  résout la paire  $(x, y)$ .*

*Démonstration.* Soit  $s$  un sommet de  $G_1$  avec  $\mathbf{Tr}_K(s) = \mathbf{r}$ . La clique  $K$  sépare les sommets  $s$  et  $x$  (resp.  $y$ ) donc  $d(x, s) = \min_{1 \leq i \leq |K|} (\mathbf{d}_K(\mathbf{x}) + \mathbf{Tr}_K(s))_i + d(K, s)$  (resp.  $d(y, s) = \min_{1 \leq i \leq |K|} (\mathbf{d}_K(\mathbf{y}) + \mathbf{Tr}_K(s))_i + d(K, s)$ ). Le vecteur  $\mathbf{r}$  résout la paire  $(\mathbf{d}_K(\mathbf{x}), \mathbf{d}_K(\mathbf{y}))$ . Donc  $d(x, s) \neq d(y, s)$  et  $s$  résout la paire  $(x, y)$ .  $\square$

**Définition 5.13.** Soient  $K$  une clique séparatrice de  $G$  et  $G_1, G_2$  deux composantes connexes (non nécessairement distinctes) de  $G \setminus K$ . Soient  $M$  un ensemble de vecteurs et deux sommets  $x \in V(G_1) \cup K$  et  $y \in V(G_2) \cup K$ . Si un vecteur  $\mathbf{r}$  résout la paire  $(\mathbf{d}_K(\mathbf{x}), \mathbf{d}_K(\mathbf{y}))$ , on dit que  $\mathbf{r}$  résout la paire  $(x, y)$ . On dit que la paire de sommets  $(x, y)$  est résolue par  $M$  si elle est résolue par au moins un vecteur de  $M$ .

Nous pouvons maintenant définir le problème généralisé sur lequel l'algorithme de programmation dynamique va travailler. Nous l'appelons DIMENSION MÉTRIQUE ÉTENDUE (éventuellement raccourci en DME). Commençons par définir ce qu'est une instance du problème.

**Définition 5.14.** Soit  $i$  un nœud de  $T$ . Une instance pour un nœud  $i$  du problème DME est un quintuplet  $I = (X_i, S_I, D_{int}(I), D_{ext}(I), D_{pair}(I))$  composé d'un sac  $X_i$  de  $i$ , de  $S_I$ , un sous-ensemble de sommets de  $X_i$  et de trois ensembles de vecteurs vérifiant

- $D_{int}(I) \subseteq \{0, 1\}^{|X_i|}$  et  $D_{ext}(I) \subseteq \{0, 1\}^{|X_i|}$ ,
- $D_{pair}(I) \subseteq \{0, 1, 2, 3\}^{|X_i|} \times \{0, 1, 2, 3\}^{|X_i|}$ ,
- $D_{ext}(I) \neq \emptyset$  ou  $S_I \neq \emptyset$ ,
- Pour toute paire de vecteurs  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \in D_{pair}(I)$ , il existe deux sommets  $x \in T(X_i)$  avec  $\mathbf{d}_{X_i}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}_1$  et  $d(x, X_i) \leq 2$  et  $y \notin T(X_i)$  avec  $\mathbf{d}_{X_i}(\mathbf{y}) = \mathbf{r}_2$  et  $d(y, X_i) \leq 2$ .

**Définition 5.15.** Un ensemble  $S \subseteq T(X_i)$  est une solution pour une instance  $I$  du problème DME si

- **(S1)** Toute paire de sommets de  $T(X_i)$  est résolue par un sommet de  $S$  ou résolue par un vecteur de  $D_{ext}(I)$ .
- **(S2)** Pour tout vecteur  $\mathbf{r} \in D_{int}(I)$ , il existe un sommet  $s \in S$  tel que  $\mathbf{Tr}_{X_i}(s) = \mathbf{r}$ .
- **(S3)** Pour toute paire de vecteurs  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \in D_{pair}(I)$ , pour tout sommet  $x \in T(X_i)$  vérifiant  $\mathbf{d}_{X_i}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}_1$  et tout sommet  $y \notin T(X_i)$  vérifiant  $\mathbf{d}_{X_i}(\mathbf{y}) = \mathbf{r}_2$ , si  $d(x, X_i) \leq 2$  et  $d(y, X_i) \leq 2$  alors la paire  $(x, y)$  est résolue par  $S$ .
- **(S4)**  $S \cap X_i = S_I$ .

Dans la suite, on nommera une instance du problème DME comme une instance.

**Définition 5.16.** Soit  $I$  une instance. On note  $\dim(I)$  la taille minimale d'un ensemble  $S \subseteq T(X_i)$  solution de  $I$ . Si aucun ensemble solution n'existe, on pose  $\dim(I) = +\infty$ . On appelle cette valeur la dimension métrique étendue de  $I$ .

Explicitons ici les éléments qui composent une instance  $I$ . Premièrement, une solution  $S$  doit résoudre toute paire de sommets de  $T(X_i)$ , possiblement avec un vecteur de  $D_{ext}(I)$ , qui représente un sommet de  $V \setminus T(X_i)$  qui serait dans l'ensemble résolvant final. Ensuite, pour tout vecteur  $\mathbf{r}$  de  $D_{int}(I)$ , on doit sélectionner un sommet dans  $T(X_i)$  dont l'empreinte est  $\mathbf{r}$ . Cela permettra de combiner des solutions comme ce sommet sera représenté par un vecteur de  $D_{ext}$  dans d'autres instances. Les éléments de  $D_{pair}(I)$  seront aussi utilisés pour les combinaisons de solutions. Ils représentent les

paires de sommets résolues en plus de celles de  $T(X_i)$ . Enfin, l'ensemble  $S_I$  est une contrainte qui force un sous-ensemble précis de  $X_i$  à être dans  $S$ , afin de permettre de combiner les solutions.

Le résultat suivant est une conséquence de la définition 5.15. Il relie la dimension métrique étendue et la dimension métrique.

**Lemme 5.17.** *Soient  $G$  un graphe,  $T$  une décomposition arborescente adéquate de  $G$  et  $r$  la racine de  $T$ . On note  $I_0$  l'instance  $(\{r\}, \{r\}, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$ . Alors,  $\dim(I_0)$  est la plus petite taille d'un ensemble résolvant de  $G$  contenant  $r$ .*

Pour assurer la correction de l'algorithme, certaines étapes nécessitent l'utilisation du lemme 5.4 dans des sous-graphes de  $G$ . Les hypothèses du lemme demandent que la solution ne soient pas incluse dans le sous-graphe en question, ce qui correspond à la contrainte  $D_{ext}(I) \neq \emptyset$  ou  $S_I \neq \emptyset$ . C'est pourquoi l'algorithme calcule la taille d'un ensemble résolvant contenant la racine de  $T$ .

### 5.3.2 Programmation dynamique

Nous expliquons comment calculer la dimension métrique étendue d'une instance  $I$  étant donnée la dimension métrique étendue des instances des enfants de  $X_i$  dans  $T$ . La preuve est séparée en traitant chaque type de nœud séparément.

#### Nœud feuille

La dimension d'une instance dans un nœud feuille se calcule facilement comme le montre le lemme suivant.

**Lemme 5.18.** *Soit  $I$  une instance pour un nœud feuille  $i$  et  $v$  l'unique sommet de  $X_i$ . Alors,*

$$\dim(I) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_I = \emptyset, D_{int}(I) = \emptyset \text{ et } D_{pair}(I) = \emptyset \\ 1 & \text{si } S_I = \{v\} \text{ et } D_{int}(I) \subseteq \{\mathbf{0}\} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

*Démonstration.* Soit  $I$  une instance de  $i$ . Si  $S_I = \emptyset$ , seul l'ensemble  $S = \emptyset$  peut être une solution de  $I$ . C'est bien une solution seulement si  $D_{int}(I) = \emptyset$  et  $D_{pair}(I) = \emptyset$ . Si  $S_I = \{v\}$ , seul l'ensemble  $S = \{v\}$  peut être une solution de  $I$ . C'est bien une solution seulement si  $D_{int}(I)$  est vide ou ne contient que le vecteur  $\mathbf{Tr}_{x_i}(v)$ .  $\square$

Pour les nœuds suivant, on utilise le schéma de preuve suivant : définir des conditions de compatibilité entre une instance  $I$  et les instances pour les enfants du nœud considéré. Ensuite, prouver une égalité entre la dimension métrique étendue sur les instances compatibles et la dimension métrique étendue de  $I$ .

### Nœud de jonction

Soit  $I$  une instance pour un nœud de jonction  $i$ , on note  $i_1$  et  $i_2$  les deux enfants de  $i$ .

**Définition 5.19.** Une paire d'instances  $(I_1, I_2)$  pour  $(i_1, i_2)$  est compatible avec  $I$  si

- **(J1)**  $S_{I_1} = S_{I_2} = S_I$ ,
- **(J2)**  $D_{ext}(I_1) \subseteq D_{ext}(I) \cup D_{int}(I_2)$  et  $D_{ext}(I_2) \subseteq D_{ext}(I) \cup D_{int}(I_1)$ ,
- **(J3)**  $D_{int}(I) \subseteq D_{int}(I_1) \cup D_{int}(I_2)$ ,
- **(J4)** Soit  $C_1 = \{(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \in D_{pair}(I_1) \text{ tel que } \mathbf{r} \notin d_{\leq 2}(X_{i_1})\}$  et  $C_2 = \{(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \in D_{pair}(I_2) \text{ tel que } \mathbf{r} \notin d_{\leq 2}(X_{i_2})\}$ . Soit  $D_1 = \{(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \in d_{\leq 2}(X_{i_1}) \times d_{\leq 2}(G \setminus X_{i_1}) \text{ tel qu'il existe } \mathbf{u} \in D_{int}(I_2) \text{ résolvant la paire } (\mathbf{r}, \mathbf{t})\}$  et  $D_2 = \{(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \in d_{\leq 2}(X_{i_2}) \times d_{\leq 2}(G \setminus X_{i_2}) \text{ tel qu'il existe } \mathbf{u} \in D_{int}(I_1) \text{ résolvant la paire } (\mathbf{r}, \mathbf{t})\}$   
Alors  $D_{pair}(I) \subseteq (C_1 \cup D_1 \cup D_{pair}(I_1)) \cap (C_2 \cup D_2 \cup D_{pair}(I_2))$ ,
- **(J5)** Pour tout  $\mathbf{r}_1 \in d_{\leq 2}(X_{i_1})$ , pour tout  $\mathbf{r}_2 \in d_{\leq 2}(X_{i_2})$ ,  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \in D_{pair}(I_1)$  ou  $(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \in D_{pair}(I_2)$  ou il existe  $\mathbf{t} \in D_{ext}(I)$  tel que  $\mathbf{t}$  résout la paire  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ .

La condition **(J4)** représente les différentes manières dont une paire de sommets de  $V(T(X_{i_1})) \times V(T(X_{i_2}))$  peut être résolue. Une paire  $(\mathbf{r}, \mathbf{t})$  est dans  $(C_1 \cup D_1 \cup D_{pair}(I_1))$  si toutes les paires de sommets  $(x, y)$  avec  $x \in V(T(X_{i_1}))$  et  $y \in V(T(X_{i_2}))$  sont résolues. Si  $(\mathbf{r}, \mathbf{t})$  est dans  $C_1$ , aucune paire de la sorte n'existe, si  $(\mathbf{r}, \mathbf{t})$  est dans  $D_1$ , les paires de sommets sont résolues par un sommet extérieur à  $V(T(X_{i_1}))$  et si  $(\mathbf{r}, \mathbf{t})$  est dans  $D_{pair}(I_1)$  les paires de sommets sont résolues par un sommet de  $V(T(X_{i_1}))$ . Ainsi, une paire  $(\mathbf{r}, \mathbf{t})$  est résolue si la paire est dans  $(C_1 \cup D_1 \cup D_{pair}(I_1))$  et dans  $(C_2 \cup D_2 \cup D_{pair}(I_2))$ .

On note  $\mathcal{F}_J(I)$  l'ensemble des paires d'instances compatibles avec  $I$ . On veut prouver le résultat suivant :

**Lemme 5.20.** Soit  $I$  une instance pour un nœud de jonction  $i$ . Alors,

$$\dim(I) = \min_{(I_1, I_2) \in \mathcal{F}_J(I)} (\dim(I_1) + \dim(I_2) - |S_I|).$$

Pour prouver l'égalité, nous prouvons successivement les deux inégalités.

**Lemme 5.21.** Soit  $(I_1, I_2)$  une paire d'instances pour  $(i_1, i_2)$  compatible avec  $I$  et telles que  $\dim(I_1)$  et  $\dim(I_2)$  aient des valeurs finies. Soient  $S_1 \subseteq V(T(X_{i_1}))$  une solution pour  $I_1$  et  $S_2 \subseteq V(T(X_{i_2}))$  une solution pour  $I_2$ . Alors  $S = S_1 \cup S_2$  est une solution pour  $I$ . En particulier,

$$\dim(I) \leq \min_{(I_1, I_2) \in \mathcal{F}_J(I)} (\dim(I_1) + \dim(I_2) - |S_I|).$$

*Démonstration.* Prouvons que les conditions de la définition 5.15 sont vérifiées.

**(S1)** Soit  $(x, y)$  une paire de sommets de  $T(X_i)$ . On suppose d'abord que  $x \in V(T(X_{i_1}))$  et que  $y \in V(T(X_{i_1}))$ . Soit  $(x, y)$  est résolue par un sommet de  $S_1$  et donc par un

sommet de  $S$ , soit  $(x, y)$  est résolue par un vecteur  $\mathbf{r} \in D_{ext}(I_1)$ . D'après la condition **(J2)**,  $\mathbf{r} \in D_{ext}(I)$  ou  $\mathbf{r} \in D_{int}(I_2)$ . Si  $\mathbf{r} \in D_{ext}(I)$  alors  $(x, y)$  est résolue par un vecteur de  $D_{ext}(I_1)$ . Sinon, il existe un sommet  $t \in S_2$  tel que  $\mathbf{Tr}_{\mathbf{x}_{i_2}}(t) = \mathbf{r}$ . Donc  $t \in S$  et  $t$  résout la paire  $(x, y)$ . Le cas où  $x \in V(T(X_{i_2}))$  et  $y \in V(T(X_{i_2}))$  est symétrique. On peut donc supposer que  $x \in V(T(X_{i_1}))$  et  $y \in V(T(X_{i_2}))$ . Si  $d(x, X_i) \leq 2$  et  $d(y, X_i) \leq 2$ , la condition **(J5)** donne que la paire  $(x, y)$  est résolue par  $S$  ou par un vecteur de  $D_{ext}(I)$ . Sinon, soit  $|d(x, X_i) - d(y, X_i)| \leq 1$  et  $(x, y)$  est résolue d'après le lemme 5.7, soit  $|d(x, X_i) - d(y, X_i)| \geq 2$  et  $(x, y)$  est résolue d'après le lemme 5.4 car  $D_{ext}(I) \neq \emptyset$  ou  $S_I \neq \emptyset$ .

**(S2)** Soit  $\mathbf{r} \in D_{int}(I)$ . Par compatibilité, la condition **(J3)** assure que  $\mathbf{r} \in D_{int}(I_1)$  ou  $\mathbf{r} \in D_{int}(I_2)$ . Comme  $S = S_1 \cup S_2$ ,  $S$  contient un sommet  $s$  tel que  $\mathbf{Tr}_{\mathbf{x}_i}(s) = \mathbf{r}$ .

**(S3)** Soient  $(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \in D_{pair}(I)$  et  $(x, y)$  avec  $x \in V(T(X_i))$  tel que  $\mathbf{d}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}$  et  $y \notin T(X_i)$  tel que  $\mathbf{d}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{y}) = \mathbf{t}$ . Sans perdre de généralités, on peut supposer que  $x \in V(T(X_{i_1}))$ .

Par compatibilité,  $(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \in (C_1 \cup D_1 \cup D_{pair}(I_1)) \cap (C_2 \cup D_2 \cup D_{pair}(I_2))$ , donc en particulier dans  $C_1 \cup D_1 \cup D_{pair}(I_1)$ . Si  $(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \in D_{pair}(I_1)$ , alors il existe  $s \in S_1$  qui résout la paire  $(x, y)$  donc la paire est résolue par  $S$ . Si  $(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \in D_1$ , alors il existe  $\mathbf{u} \in D_{int}(I_2)$  tel que  $\mathbf{u}$  résout la paire  $(\mathbf{r}, \mathbf{t})$ . Par compatibilité, il existe  $s \in S_2$  tel que  $\mathbf{Tr}_{\mathbf{x}_i}(s) = \mathbf{u}$ . Dans  $s$  résout la paire  $(x, y)$ . De plus  $(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \notin C_1$  car  $x$  est dans  $T(X_{i_1})$  avec un vecteur de distance  $\mathbf{r}$ .

**(S4)** est direct car  $X_{i_1} = X_{i_2} = X_i$ .

Ainsi,  $\dim(I) \leq \dim(I_1) + \dim(I_2) - |S_I|$  est vrai pour toute paire  $(I_1, I_2)$  d'instances compatibles, donc  $\dim(I) \leq \min_{(I_1, I_2) \in \mathcal{F}_J(I)} (\dim(I_1) + \dim(I_2) - |S_I|)$ .  $\square$

**Lemme 5.22.** *Soit  $I$  une instance pour un nœud de jonction  $i$ , notons  $i_1$  et  $i_2$  les enfants de  $i$ . Alors,*

$$\dim(I) \geq \min_{(I_1, I_2) \in \mathcal{F}_J(I)} (\dim(I_1) + \dim(I_2) - |S_I|).$$

*Démonstration.* Si  $\dim(I) = +\infty$  alors le résultat est vrai. Dans la suite on suppose que  $\dim(I)$  a une valeur finie. Soit  $S$  une solution de  $I$  de taille minimale. On pose  $S_1 = S \cap T(X_{i_1})$  et  $S_2 = S \cap T(X_{i_2})$ . On définit deux instances  $I_1$  et  $I_2$  pour  $i_1$  et  $i_2$  comme suit. On pose  $S_{I_1} = S_{I_2} = S_I$ ,  $D_{int}(I_1) = Tr_{X_{i_1}}(S_1)$ ,  $D_{int}(I_2) = Tr_{X_{i_2}}(S_2)$ ,  $D_{ext}(I_1) = D_{ext}(I) \cup D_{int}(I_2)$  et  $D_{ext}(I_2) = D_{ext}(I) \cup D_{int}(I_1)$ . Pour construire les ensembles  $D_{pair}(I_1)$  et  $D_{pair}(I_2)$ , on effectue les étapes suivantes, que l'on explique pour  $D_{pair}(I_1)$ . Pour toute paire de vecteurs  $(\mathbf{r}, \mathbf{t})$  de  $(d_{\leq 2}(X_{i_1}), d_{\leq 2}(G \setminus X_{i_1}))$ , on considère toutes les paires de sommets  $(x, y)$  avec  $x \in V(T(X_{i_1}))$ ,  $y \in V(G \setminus T(X_{i_1}))$ ,  $\mathbf{r} \in d_{\leq 2}(X_i)$ ,  $\mathbf{t} \in d_{\leq 2}(G \setminus X_{i_1})$ ,  $\mathbf{d}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}$  et  $\mathbf{d}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{y}) = \mathbf{t}$ . Si toutes ces paires sont résolues par des sommets de  $S_1$  (c'est à dire, pour chaque paire, il existe un sommet de  $S_1$  qui résout la paire), alors on ajoute  $(\mathbf{r}, \mathbf{t})$  à  $D_{pair}(I_1)$ .

**Claim.**  $(I_1, I_2)$  est compatible avec  $I$ .

*Démonstration.* **(J1)**, **(J2)** et **(J3)** sont directs.

**(J4)** Soit  $(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \in D_{pair}(I)$ , on veut montrer que  $(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \in (C_1 \cup D_1 \cup D_{pair}(I_1)) \cap (C_2 \cup D_2 \cup D_{pair}(I_2))$ . On prouve que  $(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \in (C_1 \cup D_1 \cup D_{pair}(I_1))$ , l'autre partie de la preuve est symétrique.

Si  $\mathbf{r} \notin d_{\leq 2}(X_{i_1})$ , alors  $(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \in C_1$ . Sinon, il existe un sommet  $x$  dans  $T(X_{i_1})$  tel que  $\mathbf{d}_{\mathbf{x}_{i_1}}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}$  et un sommet  $y$  dans  $G \setminus T(X_i)$  tel que  $\mathbf{d}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{y}) = \mathbf{t}$  (comme la paire  $(\mathbf{r}, \mathbf{t})$  appartient à  $D_{pair}(I)$ ). Donc la paire  $(x, y)$  est résolue par  $S$ . S'il existe un sommet  $s \in S \cap T(X_{i_2})$  qui résout la paire  $(x, y)$ , alors  $s$  résout toutes les paires avec les mêmes vecteurs de distances et donc  $(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \in D_1$ . Autrement, pour toute paire  $(x, y)$  de  $T(X_{i_1}) \times G \setminus T(X_i)$  avec  $\mathbf{d}_{\mathbf{x}_{i_1}}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}$  et  $\mathbf{d}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{y}) = \mathbf{t}$ , il existe un sommet de  $S \cap T(X_{i_1})$  qui résout la paire  $(x, y)$ , donc  $(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \in D_{pair}(I_1)$ .

**(J5)** Soient  $\mathbf{r}_1 \in d_{\leq 2}(X_{i_1})$ ,  $\mathbf{r}_2 \in d_{\leq 2}(X_{i_2})$  et deux sommets  $x \in X_{i_1}$  et  $y \in X_{i_2}$  tels que  $\mathbf{d}_{\mathbf{x}_{i_1}}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{d}_{\mathbf{x}_{i_2}}(\mathbf{y}) = \mathbf{r}_2$ . Comme  $S$  est une solution de  $I$ , soit la paire  $(x, y)$  est résolue par un vecteur  $\mathbf{r}_3 \in D_{ext}(I)$ , soit il existe un sommet  $s \in S$  qui résout  $(x, y)$ . Si  $(x, y)$  est résolue par  $s$ , supposons par l'absurde que  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \notin D_{pair}(I_1)$  et  $(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \notin D_{pair}(I_1)$ . Alors il existe des sommets  $x_1, x'_1 \in V(T(X_{i_1}))$  avec  $\mathbf{d}_{\mathbf{x}_{i_1}}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{d}_{\mathbf{x}_{i_2}}(\mathbf{x}'_1) = \mathbf{r}_1$  et  $x_2, x'_2 \in V(T(X_{i_2}))$  avec  $\mathbf{d}_{\mathbf{x}_{i_2}}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{r}_2$  et  $\mathbf{d}_{\mathbf{x}_{i_2}}(\mathbf{x}'_2) = \mathbf{r}_2$  tels que la paire  $(x_1, x_2)$  n'est résolue par aucun sommet de  $S_1$  et la paire  $(x'_1, x'_2)$  n'est résolue par aucun sommet de  $S_2$ . Considérons  $s \in S$  qui résout la paire  $(x_1, x'_2)$ . Si  $s \in S_1$ , alors  $s$  résout la paire  $(x_1, x_2)$  et si  $s \in S_2$ , alors  $s$  résout la paire  $(x'_1, x'_2)$ , ce qui aboutit à une contradiction.  $\square$

**Claim.**  $S_1$  est une solution de  $I_1$  et  $S_2$  est une solution de  $I_2$ .

*Démonstration.* Nous montrons seulement que  $S_1$  est une solution de  $I_1$ , la preuve que  $S_2$  est une solution de  $I_2$  est identique.

**(S1)** Soit  $(x, y)$  une paire de sommets de  $T(X_{i_1})$ . Comme  $S$  est une solution de  $I$ , la paire  $(x, y)$  est soit résolue par un sommet de  $S$ , soit par un vecteur de  $D_{ext}(I)$ . Si  $(x, y)$  est résolue par un vecteur de  $D_{ext}(I)$ , la paire  $(x, y)$  est aussi résolue par un vecteur de  $D_{ext}(I_1)$  comme  $D_{ext}(I) \subseteq D_{ext}(I_1)$ . Sinon, considérons  $s \in S$  qui résout la paire  $(x, y)$ . Si  $s \in T(X_{i_1})$  alors  $(x, y)$  est résolue par un sommet  $S_1$ . Sinon,  $s \in T(X_{i_2})$  et par construction de  $I_1$ ,  $D_{ext}(I_1)$  contient le vecteur  $\mathbf{Tr}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{s})$  donc  $(x, y)$  est résolue par un vecteur de  $D_{ext}(I_1)$ .

**(S2)** Par définition,  $D_{int}(I_1) = Tr_{X_i}(S_1)$ . Ainsi, pour tout vecteur  $\mathbf{r} \in D_{int}(I_1)$ , il existe un sommet  $s \in S_1$  vérifiant  $\mathbf{Tr}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{s}) = \mathbf{r}$ .

**(S3)** Soient  $(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \in D_{pair}(I_1)$ ,  $x \in T(X_{i_1})$  et  $y \notin T(X_{i_1})$  tels que  $\mathbf{d}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}$  et  $\mathbf{d}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{y}) = \mathbf{t}$ . Par construction de  $D_{pair}(I_1)$ , il existe un sommet  $s \in S_1$  qui résout la paire  $(x, y)$ .

**(S4)**  $S_{I_1} = S_I$  et comme  $S$  est une solution de  $I$ ,  $S_I = S \cap X_i$ .  $\square$

Nous obtenons finalement l'inégalité souhaitée. Comme  $S$  est une solution de taille minimale pour  $I$ , on a  $\dim(I) = |S|$ . Les ensembles  $S_1$  et  $S_2$  sont des solutions pour  $S_1$  et  $S_2$  donc  $\dim(I_1) \leq |S_1|$  et  $\dim(I_2) \leq |S_2|$ . Comme  $|S| = |S_1| + |S_2| - |S_I|$ , on obtient  $\dim(I) \geq \dim(I_1) + \dim(I_2) - |S_I|$ . Cette inégalité est vraie pour une paire d'instance spécifique donc est vraie en particulier pour la paire d'instance minimisant la quantité  $\dim(I_1) + \dim(I_2) - |S_I|$ , ce qui donne le résultat.  $\square$

Le lemme 5.20 est une conséquence directe du lemme 5.21 et du lemme 5.22.

### Nœud d'introduction

Considérons maintenant une instance  $I$  pour un nœud d'introduction  $i$ . On note  $j$  l'unique enfant de  $i$  et  $v \in V$  le sommet tel que  $X_i = X_j \cup \{v\}$ . On note  $X_i = \{v_1, \dots, v_k\}$  avec  $v = v_k$ . L'ensemble  $T(X_i)$  contient un sommet de plus que  $T(X_j)$ . La définition de compatibilité est ainsi différente si on considère que le même ensemble sera solution pour l'instance  $I$  et l'instance du nœud fils (type 1) ou si le sommet est ajouté dans la solution (type 2).

**Définition 5.23.** Une instance  $I_1$  est compatible avec  $I$  de type 1 (resp. 2) si

- (I1)  $S_I = S_{I_1}$  (resp.  $= S_{I_1} \cup \{v\}$ ).
- (I2) Pour tout  $\mathbf{r} \in D_{ext}(I)$ ,  $\mathbf{r}^- \in D_{ext}(I_1)$  (resp. ou  $\mathbf{r} = (0, \dots, 0)$ ).
- (I3) Pour tout  $\mathbf{r} \in D_{int}(I)$ ,  $\mathbf{r}_k = 1$  et  $\mathbf{r}^- \in D_{int}(I_1)$  (resp. ou  $\mathbf{r} = (1, \dots, 1, 0)$ ).
- (I4) Pour tout  $(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \in D_{pair}(I)$ ,  $(\mathbf{r}^-, \mathbf{t}^-) \in D_{pair}(I_1)$ .
- (I5) Si  $I_1$  est de type 1, pour tout  $(\mathbf{r}, \mathbf{t})$  avec  $\mathbf{t} = (0, \dots, 0)$ ,  $(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \in D_{pair}(I_1)$ .

Le but est de prouver le résultat suivant :

**Lemme 5.24.** Soit  $I$  une instance pour un nœud d'introduction  $i$ . On définit  $\mathcal{F}_1(I)$  comme l'ensemble des instances  $I_1$  pour  $i_1$  compatibles avec  $I$  de type 1 et  $\mathcal{F}_2(I)$  comme l'ensemble des instances  $I_2$  pour  $i_1$  compatibles avec  $I$  de type 2. Alors,

$$\dim(I) = \min \left\{ \min_{I_1 \in \mathcal{F}_1(I)} \{ \dim(I_1) \}; \min_{I_2 \in \mathcal{F}_2(I)} \{ \dim(I_2) + 1 \} \right\}.$$

Nous prouvons d'abord un lemme technique pour un cas qui revient à plusieurs reprises.

**Lemme 5.25.** Soient  $i$  un nœud d'introduction,  $j$  le enfant de  $i$  et  $v \in V$  tel que  $X_i = X_j \cup \{v\}$ . Soient  $(x, y)$  une paire de sommets de  $T(X_j)$  et  $\mathbf{r}$  un vecteur binaire de taille  $|X_i|$ , alors  $\mathbf{r}$  résout  $(x, y)$  si et seulement si  $\mathbf{r}^-$  résout  $(x, y)$ .

*Démonstration.* Considérons les deux vecteurs  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{Tr}_{X_i}(x)$  et  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{Tr}_{X_i}(y)$ . Remarquons que l'ensemble  $X_i \setminus \{v\}$  sépare  $v$  de  $x$  et  $y$  donc  $(\mathbf{r}_1)_k = (\mathbf{r}_2)_k = 1$ .

Supposons d'abord que  $\mathbf{r}$  résout  $(x, y)$  et par l'absurde que  $\mathbf{r}^-$  ne résout pas  $(x, y)$ . Comme  $\mathbf{r}$  résout  $(x, y)$ ,  $\min_{1 \leq \ell \leq k} (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r})_\ell \neq \min_{1 \leq \ell \leq k} (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r})_\ell$  et  $\min_{1 \leq \ell \leq k-1} (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r})_\ell = \min_{1 \leq \ell \leq k-1} (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r})_\ell$  d'après la définition 5.11. Donc le minimum change donc au moins un cas, on peut supposer par symétrie que  $\min_{1 \leq \ell \leq k} (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r})_\ell \neq \min_{1 \leq \ell \leq k-1} (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r})_\ell$ . Donc, pour  $\ell < k$ , on obtient  $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r})_\ell > (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r})_k$ . Comme  $(\mathbf{r}_1)_k = 1$ , cela implique que  $d(x, v) < d(x, v_j)$  pour tout  $\ell \leq k-1$ . Une contradiction comme  $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$  sépare  $x$  de  $v$ .

Supposons maintenant que  $\mathbf{r}^-$  résout  $(x, y)$  et, par l'absurde, que  $\mathbf{r}$  ne résout pas la paire  $(x, y)$ . Par symétrie, on peut supposer  $\min_{1 \leq j \leq k} (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r})_j \neq \min_{1 \leq j \leq k-1} (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r})_j$ ,

ce qui donne  $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r})_k < \min_{1 \leq j \leq k-1} (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r})_j$ . Alors on a  $(\mathbf{r}_1)_k = 1$ ,  $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r})_k \geq 1$  et  $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r})_j = 2$  pour  $1 \leq j \leq k-1$ . Ainsi  $\mathbf{r}_1 = (1, \dots, 1)$  ce qui contredit le fait que  $X_i \setminus \{v\}$  sépare  $v$  de  $x$ .  $\square$

**Lemme 5.26.** *Soit  $I_1$  une instance compatible de type 1 et  $S$  une solution de  $I_1$ , alors  $S$  est une solution de  $I$ .*

*Démonstration.* On prouve que les conditions de la définition 5.15 sont vérifiées.

**(S1)** Soit  $(x, y)$  une paire de sommets de  $T(X_i)$ . Supposons que  $x \neq v$  et  $y \neq v$ . Si la paire  $(x, y)$  n'est pas résolue par un sommet de  $S$ , comme  $S$  est une solution pour  $I_1$ ,  $(x, y)$  est résolue par un vecteur de  $D_{ext}(I)$ . Soit  $\mathbf{r} \in D_{ext}(I)$  qui résout la paire  $(x, y)$ . Comme  $I_1$  est compatible de type 1,  $\mathbf{r}^- \in D_{ext}(I_1)$ . Donc  $\mathbf{r}^-$  résout  $(x, y)$  d'après le lemme 5.25. Supposons maintenant  $x = v$ . La paire  $(x, y)$  est résolue par  $S$  comme  $(\mathbf{d}_{X_j}(\mathbf{x}_1), (0, \dots, 0)) \in D_{pair}(I_1)$ . Comme  $S$  est une solution de  $I_1$ , il existe un sommet  $s \in S$  qui résout la paire  $(x, y)$ .

**(S2)** Soit  $\mathbf{r} \in D_{int}(I)$ . Comme  $I_1$  est compatible avec  $I$ , il existe  $\mathbf{r}_1 \in D_{int}(I_1)$  tel que  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 | \mathbf{1}$ . Soit  $s \in S$  tel que  $\mathbf{Tr}_{X_j}(s) = \mathbf{r}_1$ , alors  $\mathbf{Tr}_{X_i}(s) = \mathbf{r}$ . En effet, le sommet  $v$  n'est pas le plus proche sommet de  $X_i$  de  $s$ . Si  $s \in X_j$ , c'est immédiat. Sinon  $X_j$  est un séparateur entre  $s$  et  $v$ , donc le plus court chemin entre  $s$  et  $v$  passe par un sommet de  $X_j$ . Ainsi,  $\mathbf{Tr}_{X_i}(s) = \mathbf{r}_1 | \mathbf{1}$ .

**(S3)** Soit  $(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \in D_{pair}(I)$ . On considère  $x \in V(T(X_i))$  tel que  $\mathbf{d}_{X_i}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}$  et  $y \notin T(X_i)$  tel que  $\mathbf{d}_{X_i}(\mathbf{y}) = \mathbf{t}$ . Alors  $\mathbf{d}_{X_j}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{r}^-$  et  $\mathbf{d}_{X_j}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{t}^-$  donc la paire  $(x, v)$  est résolue par  $S$  comme  $(\mathbf{r}_1^-, \mathbf{r}_2^-)$  appartient à  $D_{pair}(I_1)$ .

**(S4)** Comme  $S_I = S_{I_1}$ , on a  $S \cap X_i = S_I$ .  $\square$

**Lemme 5.27.** *Soit  $I_2$  une instance compatible de type 2 et  $S$  une solution de  $I_2$ , alors  $S' = S \cup \{v\}$  est une solution de  $I$ .*

*Démonstration.* Montrons que les conditions de la définition 5.15 sont vérifiées.

**(S1)** Soit  $(x, y)$  une paire de sommets de  $T(X_i)$  avec  $x \neq v$  et  $y \neq v$ . Si la paire  $(x, y)$  n'est pas résolue par un sommet de  $S$ , comme  $S$  est une solution de  $I_2$ ,  $(x, y)$  est résolue par un vecteur  $\mathbf{r} \in D_{ext}(I_2)$ . Par compatibilité, il existe un vecteur  $\mathbf{r}' \in D_{ext}(I)$  tel que  $\mathbf{r}'^- = \mathbf{r}$ . D'après le lemme 5.25,  $\mathbf{r}'$  résout la paire  $(x, y)$ . Dans le cas où  $v = x$  ou  $v = y$ , la paire  $(x, y)$  est résolue par  $S'$  car  $v \in S'$ .

**(S2)** Soit  $\mathbf{r} \in D_{int}(I)$ . Si  $\mathbf{r} = (1, \dots, 1, 0)$ , comme  $\mathbf{Tr}_{X_i}(v) = \mathbf{r}$ , il existe un sommet dans  $S'$  ayant pour empreinte  $\mathbf{r}$ . Sinon, comme  $I_1$  est compatible avec  $I$ , il existe  $\mathbf{r}_1 \in D_{int}(I_2)$  tel que  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 | \mathbf{1}$ . Soit  $s \in S$  tel que  $\mathbf{Tr}_{X_j}(s) = \mathbf{r}_1$ , alors  $\mathbf{Tr}_{X_i}(s) = \mathbf{r}$ . En effet, le sommet  $v$  n'est pas le sommet de  $X_i$  le plus proche de  $s$ . Si  $s \in X_j$ , c'est évident. Sinon  $X_j$  est un séparateur entre  $s$  et  $v$ , donc le plus court chemin entre  $s$  et  $v$  passe par un sommet de  $X_j$ . Ainsi,  $\mathbf{Tr}_{X_i}(s) = \mathbf{r}_1 | \mathbf{1}$ .

**(S3)** Soit  $(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \in D_{pair}(I)$ . Considérons  $x \in V(T(X_i))$  tel que  $\mathbf{d}_{X_i}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}$  et  $y \notin T(X_i)$  tel que  $\mathbf{d}_{X_i}(\mathbf{y}) = \mathbf{t}$ . Alors  $\mathbf{d}_{X_j}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}^-$  et  $\mathbf{d}_{X_j}(\mathbf{y}) = \mathbf{t}^-$  donc la paire  $(x, y)$  est résolue par  $S$  car  $(\mathbf{r}^-, \mathbf{t}^-)$  appartient à  $D_{pair}(I_1)$ .

**(S4)** Comme  $S_I = S_{I_1} \cup \{v\}$ , on a  $S \cap X_i = S_{I_1} \cup \{v\} = S_I$ .  $\square$

**Lemme 5.28.** *Soit  $I$  une instance pour un nœud d'introduction  $i$ . On définit  $\mathcal{F}_1(I)$  comme l'ensemble des instances  $I_1$  pour  $i_1$  compatible avec  $I$  de type 1 et  $\mathcal{F}_2(I)$  comme l'ensemble des instances  $I_2$  pour  $i_1$  compatible avec  $I$  de type 2. Alors,*

$$\dim(I) \leq \min \left\{ \min_{I_1 \in \mathcal{F}_1(I)} \{ \dim(I_1) \}, \min_{I_2 \in \mathcal{F}_2(I)} \{ \dim(I_2) + 1 \} \right\}.$$

*Démonstration.* Le résultat vient du fait que, pour toute instance  $I_1$  pour  $j$  compatible avec  $I$ , on peut obtenir une solution pour  $I$  de taille  $\dim(I_1)$  si  $I_1 \in \mathcal{F}_1(I)$  par le lemme 5.26 ou de taille  $\dim(I_1) + 1$  si  $I_1 \in \mathcal{F}_2(I)$  par le lemme 5.27.  $\square$

**Lemme 5.29.** *Soit  $S$  une solution de  $I$  avec  $v \notin S$ . Alors il existe une instance  $I_1 \in \mathcal{F}_1$  telle que  $S$  est une solution de  $I_1$ .*

*Démonstration.* On définit l'instance  $I_1$  en posant  $S_{I_1} = S_I$ ,  $D_{int}(I_1) = (\cup_{\mathbf{r} \in D_{int}(I)} \mathbf{r}^-)$ ,  $D_{ext}(I_1) = (\cup_{\mathbf{r} \in D_{ext}(I)} \mathbf{r}^-)$  et  $D_{pair}(I_1) = \cup_{(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \in D_{pair}(I)} (\mathbf{r}^-, \mathbf{t}^-)$ . On peut vérifier que  $I_1$  est compatible avec  $I$  de type 1.

Montrons que  $S$  est une solution de  $I_1$ .

**(S1)** Soit  $(x, y)$  une paire de sommets de  $T(X_j)$ . Comme  $S$  est une solution de  $I$ , soit il existe un sommet  $s \in S$  qui résout la paire  $(x, y)$ , soit il existe un vecteur  $\mathbf{r} \in D_{ext}(I)$  qui résout  $(x, y)$ . Dans le deuxième cas, par construction de  $I_1$ , le vecteur  $\mathbf{r}^-$  appartient à  $D_{ext}(I_1)$  et résout la paire  $(x, y)$  d'après le lemme 5.25. Donc la paire  $(x, y)$  est résolue dans les deux cas.

**(S2)** Soit  $\mathbf{r} \in D_{int}(I_1)$ . Par construction, il existe un vecteur  $\mathbf{r}' \in D_{int}(I)$  tel que  $\mathbf{r}'^- = \mathbf{r}$ . Soit  $s \in S$  tel que  $\mathbf{Tr}_{\mathbf{x}_i}(s) = \mathbf{r}'$ , alors  $\mathbf{Tr}_{\mathbf{x}_i}(s) = \mathbf{r}$ .

**(S3)** Soient  $(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \in D_{pair}(I_1)$ ,  $x \in T(X_i)$  avec  $\mathbf{d}_{\mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}$  et  $y \notin T(X_j)$  avec  $\mathbf{d}_{\mathbf{x}_j}(\mathbf{y}) = \mathbf{t}$  vérifiant  $d(x, X_j) \leq 2$  et  $d(y, X_j) \leq 2$ . Soit  $(\mathbf{r}', \mathbf{t}') \in D_{pair}(I)$  tel que  $(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = (\mathbf{r}'^-, \mathbf{t}'^-)$ . Notons que  $d(x, v) = d(x, X_j) + 1$  car  $X_j$  sépare  $x$  et  $v$ . C'est vrai pour n'importe quel sommet de  $X_j$  donc la dernière coordonnée de  $\mathbf{r}'$  est  $d(x, X_j) + 1$ . Ainsi,  $\mathbf{d}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}'$ . Si  $\mathbf{d}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{y}) = \mathbf{t}'$ , alors  $(x, y)$  est résolue par un sommet de  $s$ . Sinon, comme  $(\mathbf{r}', \mathbf{t}') \in D_{pair}(I)$ , il existe un sommet  $z \notin T(X_j)$  tel que  $\mathbf{d}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{z}) = \mathbf{t}'$  et  $s \in S$  qui résout la paire  $(x, z)$ . Alors  $s$  résout la paire  $(x, y)$  car  $d(s, y) = d(s, z)$ .

**(S4)** On sait que  $S_I = S_{I_1}$  et  $v \notin S_I$  donc  $S \cap X_j = S_{I_1}$ .

Ainsi,  $S$  est une solution de  $I_1$  donc  $\dim(I_1) \leq |S| \leq \dim(I)$ . En particulier on obtient,  $\dim(I) \geq \min_{I_1 \in \mathcal{F}_1} \{ \dim(I_1) \}$ .  $\square$

**Lemme 5.30.** *Soit  $S$  une solution de  $I$  de taille minimale avec  $v \in S$ . Alors il existe une instance  $I_2 \in \mathcal{F}_2$  telle que  $S \setminus \{v\}$  est une solution de  $I_2$ .*

*Démonstration.* On définit l'instance  $I_2$  par  $S_{I_2} = S_I \setminus \{v\}$ ,  $D_{int}(I_2) = (\cup_{\mathbf{r} \in D_{int}(I)} \mathbf{r}^-)$ ,  $D_{ext}(I_2) = \{ \cup_{\mathbf{r} \in D_{ext}(I)} \mathbf{r}^- \} \cup \{(0, \dots, 0)\}$  et  $D_{pair}(I_2) = \cup_{(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \in D_{pair}(I)} (\mathbf{r}^-, \mathbf{t}^-)$ . On peut vérifier que  $I_2$  est compatible avec  $I$  de type 2.

Montrons que  $S$  est une solution de  $I_2$ .

**(S1)** Soit  $(x, y)$  une paire de sommets de  $T(X_j)$ . Comme  $S$  est une solution de  $I$ , soit il existe un sommet  $s \in S$  qui résout la paire  $(x, y)$  soit il existe un vecteur  $\mathbf{r} \in D_{ext}(I)$

qui résout la paire  $(x, y)$ . Si  $(x, y)$  est résolue par un sommet de  $S \setminus \{v\}$ , alors la paire  $(x, y)$  est résolue pour l'instance  $I_2$ . Si  $(x, y)$  est résolue par  $v$ , alors le vecteur  $(0, \dots, 0)$  appartient à  $D_{ext}(I_2)$  et résout la paire  $(x, y)$ . Si  $(x, y)$  est résolue par un vecteur  $\mathbf{r}$  de  $D_{ext}(I)$ , alors d'après le lemme 5.25,  $\mathbf{r}^-$  résout la paire  $(x, y)$  et  $\mathbf{r}^- \in D_{ext}(I_2)$  par construction.

**(S2)** Soit  $\mathbf{r} \in D_{int}(I_2)$ . Par construction, il existe un vecteur  $\mathbf{r}' \in D_{int}(I)$  tel que  $\mathbf{r}'^- = \mathbf{r}$ . Soit  $s \in S$  tel que  $\mathbf{Tr}_{\mathbf{X}_i}(s) = \mathbf{r}'$ , alors  $\mathbf{Tr}_{\mathbf{X}_j}(s) = \mathbf{r}$ .

**(S3)** Soient  $(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \in D_{pair}(I_2)$ ,  $x \in T(X_i)$  avec  $\mathbf{d}_{\mathbf{X}_j}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}$  et  $y \notin T(X_j)$  avec  $\mathbf{d}_{\mathbf{X}_j}(\mathbf{y}) = \mathbf{t}$  vérifiant  $d(x, X_j) \leq 2$  et  $d(y, X_j) \leq 2$ . Soit  $(\mathbf{r}', \mathbf{t}') \in D_{pair}(I)$  tel que  $(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = (\mathbf{r}'^-, \mathbf{t}'^-)$ . Remarquons que  $d(x, v) = d(x, X_j) + 1$  car  $X_j$  sépare  $x$  et  $v$ . C'est vrai pour tout sommet de  $X_j$  donc la dernière coordonnée de  $\mathbf{r}'$  est  $d(x, X_j) + 1$ . Donc  $\mathbf{d}_{\mathbf{X}_i}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}'$ . Si  $\mathbf{d}_{\mathbf{X}_i}(\mathbf{y}) = \mathbf{t}'$ , alors  $(x, y)$  est résolue par un sommet de  $s$ . Sinon, comme  $(\mathbf{r}', \mathbf{t}') \in D_{pair}(I)$ , il existe un sommet  $z \notin T(X_j)$  tel que  $\mathbf{d}_{\mathbf{X}_i}(\mathbf{y}) = \mathbf{t}'$  et  $s \in S$  qui résout la paire  $(x, z)$ . Alors  $s$  résout la paire  $(x, y)$  car  $d(s, y) = d(s, z)$ .

**(S4)** On sait que  $S_{I_2} = S_I \setminus \{v\}$  et  $v \in S_I$  donc  $S \cap X_j = S_{I_2}$ .

Ainsi,  $S \setminus \{v\}$  est une solution de  $I_2$ , donc  $\dim(I_2) \leq |S - 1| \leq \dim(I)$ . En particulier  $\dim(I) \geq \min_{I_2 \in \mathcal{F}_2} \{\dim(I_2) + 1\}$ .  $\square$

Le lemme 5.24 est une conséquence directe des lemmes 5.28, 5.29 et 5.30.

### Nœud d'oubli

Considérons maintenant une instance  $I$  pour un nœud d'oubli  $i$ . On note  $j$  l'unique enfant de  $i$  et  $v \in V$  le sommet tel que  $X_j = X_i \cup \{v\}$ . On note  $X_j = \{v_1, \dots, v_k\}$  avec  $v = v_k$ . Les ensembles  $T(X_i)$  et  $T(X_j)$  contiennent les mêmes sommets, la définition de compatibilité donne des conditions pour que l'on ai la même solution pour  $I$  et une instance du nœud enfant.

On introduit trois fonctions agissant sur les vecteurs pour représenter comment l'empreinte peut être modifiée lorsque l'on considère deux séparateurs dans  $G$  qui ne diffèrent que d'un seul sommet.

**Définition 5.31.** Soit  $\mathbf{r}$  un vecteur binaire. On définit les fonctions  $f$ ,  $f^-$  et  $f^+$  qui renvoient un vecteur avec une coordonnée supplémentaire. La fonction  $f^-$  est définie par  $\mathbf{f}^-(\mathbf{r}) = \mathbf{r} | \min(\mathbf{r}_i)$  si  $\mathbf{r}$  n'est pas un vecteur constant et  $\mathbf{f}^-(\mathbf{r}) = \mathbf{r} | (\mathbf{r}_1 - 1)$  si  $\mathbf{r}$  est constant. La fonction  $f^+$  est définie par  $\mathbf{f}^+(\mathbf{r}) = \mathbf{r} | \max(\mathbf{r}_i)$  si  $\mathbf{r}$  n'est pas constant et  $\mathbf{f}^+(\mathbf{r}) = \mathbf{r} | (\mathbf{r}_1 + 1)$  si  $\mathbf{r}$  est constant. La fonction  $f$  est définie par  $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} | \min(\mathbf{r}_i)$  si  $\mathbf{r}$  n'est pas constant et  $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} | \mathbf{r}_1$  si  $\mathbf{r}$  est constant.

La fonction  $f$  n'est utile que dans le cas d'un vecteur constant. L'utilité de ces fonction est de traiter le cas suivant. Soient  $X_i$  et  $X_j$  deux sacs tels que  $X_i = X_j \setminus \{v\}$  pour un certain sommet  $v$ . Soit  $x$  un sommet quelconque, alors  $\mathbf{d}_{\mathbf{X}_j}(\mathbf{x})$  est égal à  $\mathbf{f}(\mathbf{d}_{\mathbf{X}_i}(\mathbf{x}))$ ,  $\mathbf{f}^+(\mathbf{d}_{\mathbf{X}_i}(\mathbf{x}))$  ou  $\mathbf{f}^-(\mathbf{d}_{\mathbf{X}_i}(\mathbf{x}))$ . De plus, si  $X_i$  sépare  $x$  et  $v$ , alors  $\mathbf{d}_{\mathbf{X}_j}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^+(\mathbf{d}_{\mathbf{X}_i}(\mathbf{x}))$ .

**Définition 5.32.** Soient  $I$  une instance pour un nœud d'oubli  $i$ ,  $j$  l'unique enfant de  $i$  et  $v \in V$  tel que  $X_i = X_j \setminus \{v\}$ . On note  $X_j = \{v_1, \dots, v_k\}$  avec  $v = v_k$ . Une instance  $I_1$  pour  $j$  est compatible avec  $I$  si

- **(F1)**  $S_I = S_{I_1} \setminus \{v\}$ .
- **(F2)** Pour tout  $\mathbf{r} \in D_{ext}(I)$ ,  $\mathbf{r}|1 \in D_{ext}(I_1)$ .
- **(F3)** Pour tout  $\mathbf{r} \in D_{int}(I)$ ,  $\mathbf{r}|0 \in D_{int}(I_1)$  ou  $\mathbf{r}|1 \in D_{int}(I_1)$ .
- **(F4)**  $\forall (\mathbf{r}, \mathbf{t}) \in D_{pair}(I)$ , s'il existe deux sommets  $x \in T(X_i)$  avec  $\mathbf{d}_{\mathbf{X}_j}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^-(\mathbf{r})$  (resp.  $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{f}^+(\mathbf{r})$ ) et  $y \notin T(X_i)$  avec  $\mathbf{d}_{\mathbf{X}_j}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}^+(\mathbf{t})$  vérifiant  $d(x, X_j) \leq 2$  et  $d(y, X_j) \leq 2$  alors  $(\mathbf{f}^-(\mathbf{r}), \mathbf{f}^+(\mathbf{t}))$  (resp.  $(\mathbf{f}(\mathbf{r}), \mathbf{f}^+(\mathbf{t}))$ ,  $(\mathbf{f}^+(\mathbf{r}), \mathbf{f}^+(\mathbf{t}))$ ) appartient à  $D_{pair}(I_1)$ .

**Lemme 5.33.** Soit  $I$  une instance pour un nœud d'oubli  $i$ . On note  $\mathcal{F}_F(I)$  l'ensemble des instances  $I_1$  pour  $j$  compatible avec  $I$ . Alors,

$$\dim(I) = \min_{I_1 \in \mathcal{F}_F(I)} \{\dim(I_1)\}.$$

Nous prouvons le lemme 5.33 en montrant les deux inégalités de la même manière que précédemment. Commençons par prouver un résultat technique analogue au lemme 5.25 avec une preuve similaire.

**Lemme 5.34.** Soient  $i$  un nœud d'oubli,  $j$  l'unique enfant de  $i$  et  $v \in V$  tel que  $X_i = X_j \setminus \{v\}$ . Soient  $(x, y)$  une paire de sommets de  $T(X_j)$  et  $\mathbf{r}$  un vecteur binaire de taille  $k$  avec  $\mathbf{r}_k = 1$ . Alors  $\mathbf{r}$  résout  $(x, y)$  si et seulement si  $\mathbf{r}^-$  résout  $(x, y)$ .

*Démonstration.* Soient  $\mathbf{t}_1 = \mathbf{Tr}_{\mathbf{X}_i}(x)$  et  $\mathbf{t}_2 = \mathbf{Tr}_{\mathbf{X}_i}(y)$ . Supposons que  $\mathbf{r}$  résolve  $(x, y)$  et par l'absurde que  $\mathbf{r}^-$  ne résolve pas  $(x, y)$ . Comme  $\mathbf{r}$  résout  $(x, y)$ , la définition 5.11 donne  $\min_{1 \leq l \leq k} (\mathbf{t}_1 + \mathbf{r})_l \neq \min_{1 \leq l \leq k} (\mathbf{t}_2 + \mathbf{r})_l$  et  $\min_{1 \leq l \leq k-1} (\mathbf{t}_1 + \mathbf{r})_l \neq \min_{1 \leq l \leq k-1} (\mathbf{t}_2 + \mathbf{r})_l$ .

Donc le minimum change au moins une fois, on peut supposer par symétrie que  $\min_{1 \leq l \leq k} (\mathbf{t}_1 + \mathbf{r})_l \neq \min_{1 \leq i \leq k-1} (\mathbf{t}_1 + \mathbf{r})_i$ . Ainsi, pour  $l < k$ , on a  $(\mathbf{t}_1 + \mathbf{r})_l > (\mathbf{t}_1 + \mathbf{r})_k$ . On sait que  $\mathbf{r}_k = 1$ , donc, pour  $l < k$ , on obtient que  $(\mathbf{t}_1 + \mathbf{r})_l > 1$ . Donc  $\mathbf{r} = (1, \dots, 1)$  ce qui contredit le fait que  $X_j$  sépare  $v$  et  $x_1$ , un sommet de  $X_j$  est strictement plus proche de  $x$  que  $v$ . Supposons maintenant que  $\mathbf{r}^-$  résolve  $(x, y)$  et par l'absurde que  $\mathbf{r}$  ne résolve pas  $(x, y)$ . Par symétrie on peut supposer que  $\min_{1 \leq l \leq k} (\mathbf{t}_1 + \mathbf{r})_l \neq \min_{1 \leq l \leq k-1} (\mathbf{t}_1 + \mathbf{r})_l$ , ce qui donne  $(\mathbf{t}_1 + \mathbf{r})_k < \min_{1 \leq l \leq k-1} (\mathbf{t}_1 + \mathbf{r})_l$ . Comme  $\mathbf{r}_k = 1$ , on a  $(\mathbf{t}_1 + \mathbf{r})_k \geq 1$  et  $(\mathbf{t}_1 + \mathbf{r})_l = 2$  pour  $1 \leq l \leq k-1$ . Donc  $\mathbf{r} = (1, \dots, 1)$  ce qui contredit le fait que  $X_j$  sépare  $v$  et  $s$ .  $\square$

**Lemme 5.35.** Soient  $I_1 \in \mathcal{F}_F(I)$  et  $S$  une solution de  $I_1$ , alors  $S$  est une solution de  $I$ .

*Démonstration.* Montrons que les conditions de la définition 5.15 sont vérifiées.

**(S1)** Soit  $(x, y)$  une paire de sommets de  $T(X_i)$ . Comme  $T(X_i) = T(X_j)$ , la paire  $(x, y)$  est résolue par un sommet de  $S$  ou par un vecteur  $\mathbf{r}$  de  $D_{ext}(I_1)$ . Si  $(x, y)$  est résolue par  $\mathbf{r} \in D_{ext}(I_1)$ , alors d'après le lemme 5.34,  $\mathbf{r}^-$  résout la paire  $(x, y)$  et  $\mathbf{r}^- \in D_{ext}(I)$  par compatibilité.

**(S2)** Soit  $\mathbf{r} \in D_{int}(I)$ . Par compatibilité,  $\mathbf{r}|0 \in D_{int}(I_1)$  ou  $\mathbf{r}|1 \in D_{int}(I_1)$ . Soit  $s \in S$  tel que  $\mathbf{Tr}_{\mathbf{X}_i}(s) \in \{\mathbf{r}|0, \mathbf{r}|1\}$ , alors  $\mathbf{Tr}_{\mathbf{X}_j}(s) = \mathbf{r}$ .

**(S3)** Soient  $(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \in D_{pair}(I)$ ,  $x \in V(T(X_i))$  et  $y \notin T(X_i)$  tel que  $\mathbf{d}_{\mathbf{X}_i}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}$  et  $\mathbf{d}_{\mathbf{X}_i}(\mathbf{y}) = \mathbf{t}$ . Supposons que  $d(x, X_i) \leq 2$  et  $d(y, X_i) \leq 2$ . L'ensemble  $X_j$  sépare  $v$  et  $y$  donc  $\mathbf{d}_{\mathbf{X}_j}(\mathbf{y}) = f^+(\mathbf{t})$ . Comme  $\mathbf{d}_{\mathbf{X}_j}(\mathbf{x})$  est égal à l'un des vecteurs  $\mathbf{f}^-(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{r})$  ou  $\mathbf{f}^+(\mathbf{r})$ , la paire  $(x, y)$  est résolue par un sommet de  $S$ .

**(S4)** est direct. □

**Lemme 5.36.** *Soit  $S$  une solution de  $I$  de taille minimale. Alors il existe une instance  $I_1$  compatible avec  $I$  telle que  $S$  est une solution de  $I_1$ .*

*Démonstration.* Soit  $S$  une solution pour  $I$  de taille minimale. On définit l'instance  $I_1$  comme suit :  $S_{I_1} = S \cap X_j$ ,  $D_{int}(I_1) = \{\mathbf{Tr}_{\mathbf{X}_j}(s), s \in S\}$ ,  $D_{ext}(I_1) = \{\mathbf{r}|1, \mathbf{r} \in D_{ext}(I)\}$ . L'ensemble  $D_{pair}(I_1)$  est défini comme l'union des ensembles  $\{(\mathbf{f}^-(\mathbf{r}), \mathbf{f}^+(\mathbf{t})), (\mathbf{r}, \mathbf{t}) \in D_{pair}(I)\}$ ,  $\{(\mathbf{f}(\mathbf{r}), \mathbf{f}^+(\mathbf{t})), (\mathbf{r}, \mathbf{t}) \in D_{pair}(I)\}$ ,  $\{(\mathbf{f}^+(\mathbf{r}), \mathbf{f}^+(\mathbf{t})), (\mathbf{r}, \mathbf{t}) \in D_{pair}(I)\}$ . On vérifie la compatibilité.

**(F1)**, **(F2)** et **(F4)** sont directs.

**(F3)** Soient  $\mathbf{r} \in D_{int}(I)$  et  $s \in S$  tels que  $\mathbf{Tr}_{\mathbf{X}_i}(s) = \mathbf{r}$ . Par construction,  $\mathbf{r}' = \mathbf{Tr}_{\mathbf{X}_j}(s)$  appartient à  $D_{int}(I_1)$  et  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}^-$  donc  $\mathbf{r}|0 \in D_{int}(I_1)$  ou  $\mathbf{r}|1 \in D_{int}(I_1)$ .

Montrons maintenant que  $S$  est une solution de  $I_1$ .

**(S1)** Soit  $(x, y)$  une paire de sommets de  $T(X_j)$ . Comme  $T(X_i) = T(X_j)$ , la paire  $(x, y)$  est résolue par un sommet de  $S$  ou par un vecteur  $\mathbf{r}$  de  $D_{ext}(I)$ . Si  $(x, y)$  est résolue par  $\mathbf{r} \in D_{ext}(I)$ , alors d'après le lemme 5.34,  $\mathbf{r}|1$  résout la paire  $(x, y)$  et  $\mathbf{r}|1 \in D_{ext}(I_1)$  par construction.

**(S2)** Soit  $\mathbf{r} \in D_{int}(I_1)$ . Par construction, il existe un sommet  $s \in S$  tel que  $\mathbf{Tr}_{\mathbf{X}_j}(s) = \mathbf{r}$ .

**(S3)** Soient  $(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \in D_{pair}(I_1)$ ,  $x \in V(T(X_j))$  et  $y \notin T(X_j)$  tels que  $\mathbf{d}_{\mathbf{X}_j}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}$  et  $\mathbf{d}_{\mathbf{X}_j}(\mathbf{y}) = \mathbf{t}$ . Supposons que  $d(x, X_i) \leq 2$  et  $d(y, X_i) \leq 2$ . Alors  $\mathbf{Tr}_{\mathbf{X}_j}(y) = f^+(\mathbf{t})$  et  $\mathbf{Tr}_{\mathbf{X}_j}(x) \in \{\mathbf{f}^-(\mathbf{r}), \mathbf{f}(\mathbf{r}), \mathbf{f}^+(\mathbf{r})\}$ . Comme  $S$  est une solution de  $I$ , la paire  $(x, y)$  est résolue par un sommet de  $S$ .

**(S4)** est direct. □

Le lemme 5.33 est une conséquence des lemmes 5.35 et 5.36.

### 5.3.3 Algorithme

En prenant en entrée une décomposition arborescente adéquate  $T$ , l'algorithme calcule la dimension métrique étendue de toutes les instances possibles de la décomposition arborescente. Les valeurs des instances pour les nœuds feuilles sont calculés grâce au lemme 5.18, pour les nœuds de jonction grâce au lemme 5.20, pour les nœuds d'introduction grâce au lemme 5.24 et pour les nœuds d'oubli grâce au lemme 5.33. Le fait que cette méthode permet bien de calculer la dimension métrique étendue de toutes les instances vient des preuves des Lemmes 5.18, 5.20, 5.24 et 5.33. Pour obtenir la plus petite taille d'un ensemble résolvant contenant la racine  $r$  de  $T$ , il suffit de renvoyer la dimension métrique étendue de l'instance  $(\{r\}, \{r\}, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$ .

On nomme cet algorithme *IMD* dans la suite, qui est un algorithme qui prend en entrée une décomposition arborescente adéquate et renvoie la taille minimale d'un ensemble résolvent contenant la racine de la décomposition.

A l'aide de l'algorithme *IMD*, nous pouvons facilement calculer la dimension métrique de  $G$ .

**Lemme 5.37.** *La dimension métrique de  $G$  est  $\min_{v \in G} \{IMD(T(v))\}$  où  $T(v)$  est une décomposition arborescente adéquate de  $G$  enracinée en  $v$ .*

*Démonstration.* Pour toute entrée, l'algorithme  $IMD(T(v))$  renvoie la taille d'un ensemble résolvent de  $G$ . Donc,  $\min_{v \in G} \{IMD(T(v))\} \geq \dim(G)$ . Soient  $S$  une base métrique de  $G$  et  $v \in S$ . D'après le lemme 5.17,  $IMD(T(v))$  renvoie la taille minimale d'un ensemble résolvent contenant  $v$  donc  $\min_{v \in G} \{IMD(T(v))\} \leq \dim(G)$ .  $\square$

## 5.4 Analyse de la complexité

Le lemme 5.37 donne, qu'avec  $n$  exécutions de l'algorithme *IMD* sur des entrées différentes, il est possible d'obtenir la dimension métrique de  $G$ . Le lemme 5.3 donne une méthode pour trouver, pour tout sommet  $v$  de  $G$ , une décomposition arborescente adéquate dont la racine est  $v$  en temps linéaire. La dernière partie consiste à calculer la complexité de l'algorithme *IMD*.

Pour obtenir la complexité annoncée, on ajoute une étape de pré-calcul à l'algorithme *IMD*. Pour chaque sac  $X$ , on calcule les ensembles  $d_{\leq 2}(X) \cap T(X)$  et  $d_{\leq 2}(X) \cap (G \setminus T(X))$ . Ce calcul peut être fait en temps  $O(n^2)$  car  $T$  a un nombre de sacs linéaires en  $n$  d'après le lemme 5.3. Notons de plus que la taille de  $d_{\leq 2}(X) \cap T(X)$  et  $d_{\leq 2}(X) \cap (G \setminus T(X))$  est bornée par une fonction ne dépendant que de  $|X_i|$ .

Pour calculer la complexité, on calcule le nombre d'instances et le temps nécessaire pour calculer la dimension métrique étendue d'une instance. Pour alléger les notations, on pose  $\alpha(k) := 2^k \cdot 2^{2^k} \cdot 2^{2^k} \cdot 2^{4^{2^k}}$ .

**Lemme 5.38.** *Soit  $I$  une instance pour un nœud  $i$ , on suppose que  $\dim(I')$  est connue pour toute instance  $I'$  compatible avec  $I$ . Alors  $\dim(I)$  peut être calculée en temps  $O(f(|X_i|))$  pour une certaine fonction  $f$  calculable.*

*Démonstration.* Si  $i$  est un nœud feuille, alors  $\dim(I)$  peut être calculé en temps constant en utilisant le lemme 5.18. Sinon, montrons que l'on peut déterminer quelles sont les instances compatibles avec  $I$ . Étant donné en entrée un quintuplet d'ensembles  $(X_i, S_I, D_{int}(I), D_{ext}(I), D_{pair}(I))$ , vérifier si c'est une instance comme définit par la définition 5.15 peut être fait en temps  $O(|I| \cdot g(|X_i|))$  où  $g$  donne la somme des tailles de  $d_{\leq 2}(X_i) \cap T(X_i)$  et de  $d_{\leq 2}(X_i) \cap (G \setminus T(X_i))$ . Comme le nombre de quintuplets  $(X_i, S_I, D_{int}(I), D_{ext}(I), D_{pair}(I))$  est borné par  $\alpha(|X_i|)$ , identifier les instances parmi tous les quintuplets peut se faire en un temps qui ne dépend que de  $|X_i|$ .

Vérifier la compatibilité entre deux instances peut être fait en un temps qui ne dépend que de  $|X_i|$ . La condition **(J5)** peut être vérifiée en temps  $O(|X_i|^2 \cdot |I|)$  en

vérifiant pour chaque paire de vecteurs si un vecteur de  $D_{ext}(I)$  la résout. La condition **(I5)** peut être vérifiée en temps  $O(|X_i|)$  et la condition **(F4)** en temps  $O(|X_i|^2)$ . Les autres conditions de compatibilité peuvent être vérifiées en temps  $O(|I|)$ , et d'après la définition 5.15,  $|I|$  est bornée par une fonction de  $|X_i|$ . Le calcul du minimum dans les formules des lemmes 5.20, 5.24 et 5.33 peut se faire en temps  $O(\alpha(X_i))$ . Toutes les étapes peuvent se faire en un temps ne dépendant que de  $|X_i|$  donc le calcul de  $\dim(I)$  se fait en temps borné par une fonction de  $|X_i|$ .  $\square$

**Corollaire 5.39.** *L'algorithme IMD s'exécute en temps  $O(n(T)^2 + n(T) \cdot f(\omega))$  où  $n(T)$  est le nombre de sommet de la décomposition arborescente adéquate  $T$  et  $f = O(\omega^2 \cdot 2^{O(4^{2^\omega})})$  est une fonction que ne dépend que  $\omega$ , la taille maximale d'une clique de  $G$ .*

*Démonstration.* Par définition de la largeur arborescente, pour tout sac  $X$  de  $T$ ,  $|X| \leq \omega$ . L'étape de pré-calcul pour obtenir les ensembles  $d_{\leq 2}(X_i) \cap T(X_i)$  et  $d_{\leq 2}(X_i) \cap (G \setminus T(X_i))$  s'effectue en temps  $O(n^2)$ . Pour l'étape principale, le nombre d'instances à calculer pour chaque sommet de  $T$  est borné par  $\alpha(\omega)$  et la solution de chaque instance  $I$  peut être calculée en temps bornée par  $O(\omega^2 \cdot |I|)$  d'après le lemme 5.38.  $\square$

En combinant les différents résultats obtenus, nous prouvons le théorème 5.1 :

*Démonstration.* Pour tout sommet  $v$  de  $G$ , on peut calculer une décomposition arborescente adéquate enracinée en  $v$  ayant au plus  $7n$  nœuds d'après le lemme 5.3. A partir de cette décomposition, l'algorithme IMD renvoie la plus petite taille d'un ensemble résolvant contenant  $v$  d'après le lemme 5.17 en temps  $O(n(T)^2 + n(T) \cdot f(\omega))$  pour une certaine fonction calculable  $f$  en utilisant le corollaire 5.39. En répétant ce procédé pour tous les sommets de  $G$ , on peut calculer la dimension métrique de  $G$ , d'après le lemme 5.37, en temps  $O(n^3 + n^2 \cdot f(\omega))$ .  $\square$

## 5.5 Perspectives futures

L'objectif lors de la création de cet algorithme a été de garder un algorithme aussi simple que possible. Nous n'avons donc pas cherché à optimiser la fonction de complexité qui n'est probablement pas optimale en la largeur arborescente. On peut se demander s'il est possible de l'améliorer pour obtenir un algorithme de complexité  $2^\omega \cdot poly(n)$  pour les graphes chordaux.

Il est connu que le théorème 5.1 ne peut pas s'étendre aux graphes de largeur arborescente bornée comme DIMENSION MÉTRIQUE est NP-complet dans les graphes de largeur arborescente 24 [LP22]. On peut néanmoins se demander si les techniques de preuve utilisées peuvent être adaptées pour créer un algorithme efficace pour les graphes de largeur arborescente 2 pour lesquels la complexité de la DIMENSION MÉTRIQUE est toujours ouverte.

Cependant, notre preuve utilise de façon importante le fait qu'un séparateur minimal  $X$  dans un graphe chordal est une clique et ainsi les interactions entre des sommets dans

différentes composantes connexes de  $G \setminus X$  sont simples. Une autre question est de savoir si, lorsque  $G$  possède une décomposition arborescente dans laquelle tous les sacs ont diamètre au plus  $C$  dans  $G$ , est-ce que DIMENSION MÉTRIQUE est FPT paramétrée par la taille des sacs plus  $C$ . Remarquons que DIMENSION MÉTRIQUE est NP-complet dans les graphes chordaux donc il n'est pas possible de paramétrer uniquement par le diamètre des sacs.

Deuxième partie  
Problèmes de coloration

Historiquement, les problèmes de coloration de graphes sont reliés à la coloration des cartes<sup>2</sup>. Dès 1852, Francis Guthrie, après avoir coloré une carte représentant les comtés de l'Angleterre se demande s'il est possible de colorer n'importe quelle carte avec au plus quatre couleurs de façon à ce que deux régions voisines soient toujours de couleurs différentes. Plusieurs résultats partiels ont été démontrés, notamment *le théorème des cinq couleurs* par Percy John Heawood en 1890 en s'inspirant des travaux d'Alfred Kempe de 1879. Il a fallu plus d'un siècle pour que Appel et Haken répondent positivement à cette question [AH76] et prouvent ce que l'on appelle le *théorème des quatre couleurs* avec une des premières preuves assistées par ordinateur. Le résultat informel est que toute carte peut se colorer avec quatre couleurs sans que deux régions frontalières aient la même couleur. Bien que cette preuve ait été simplifiée par la suite, par exemple dans [Rob+97] et [Tal20], il n'existe à ce jour pas de preuve sans utilisation d'ordinateur de ce résultat.

Dans cette partie, nous nous intéressons au problème de coloration de graphes planaires et à des résultats proches du théorème des quatre couleurs. Le premier chapitre est consacré à une formalisation des différents problèmes ainsi qu'une présentation des méthodes. Le deuxième chapitre est consacré au problème de coloration de carré de graphe planaire où nous montrons des bornes sur le nombre de couleurs nécessaire en utilisant une méthode de preuve similaire à celle de Appel et Haken [AH76] pour la preuve du théorème des quatre couleurs. Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons au problème de reconfiguration des colorations d'un graphe planaire par changement de Kempe.

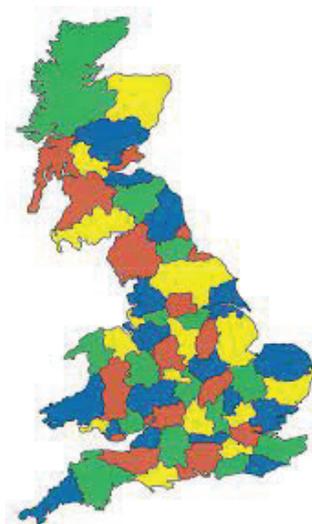


FIGURE 5.2 – Une solution au problème de Guthrie.

---

2. De nos jours, les questions de colorations peuvent par exemple provenir de problèmes d'attribution de fréquence, la coloration de cartes n'est en revanche plus un sujet considéré comme particulièrement intéressant.

# Chapitre 6

## Autour de la coloration de graphes planaires

Le problème de coloration de cartes de Francis Guthrie se traduit facilement en un problème de graphes. En représentant chaque région par un sommet et en plaçant une arête entre deux régions frontalières, le problème est de donner une couleur à chaque sommet sans que deux sommets adjacents aient la même couleur. Il est donc possible de considérer ce problème uniquement du point de vue de la théorie des graphes. Dans ce chapitre, nous présentons des méthodes utilisées pour résoudre ce problème dans le cas des graphes planaires, ainsi que des problèmes proches pour lesquels des méthodes similaires peuvent s'appliquer.

### 6.1 Définitions

Le problème de coloration de graphe est visuel, ce qui le rend assez facile à appréhender. Ainsi, peu de définitions formelles sont nécessaires pour présenter des résultats. Nous définissons dans cette section les notions nécessaires pour formaliser le théorème des quatre couleurs et la définition des changements de Kempe, qui seront utilisés dans des preuves.

**Définition 6.1** (Coloration). *Soit  $G = (V, E)$  un graphe, une coloration de  $G$  est une fonction  $\alpha : V \rightarrow \mathbb{N}$ . Une coloration est dite propre si elle vérifie que pour toute arête  $uv$  du graphe,  $\alpha(u) \neq \alpha(v)$ . Si elle ne respecte pas cette propriété, on dit que la coloration est impropre. Si le terme n'est pas spécifié, on suppose par défaut qu'une coloration est propre. Le nombre de couleurs d'une coloration  $\alpha$  est la taille de son image  $\text{Im}(\alpha)$ . Une coloration à  $k$  couleurs est appelée une  $k$ -coloration.*

**Définition 6.2** (Nombre chromatique). *Soit  $G$  un graphe et  $k$  un entier. On dit que  $G$  est  $k$ -colorable s'il existe une coloration propre de  $G$  à au plus  $k$  couleurs. Le nombre chromatique de  $G$ , noté  $\chi(G)$ , est le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  soit  $k$ -colorable.*

En pratique, on prendra comme image de la coloration les premiers entiers de façon consécutive, ainsi le nombre de couleurs est le plus grand entier présent dans la coloration. Par exemple, la coloration de gauche sur la figure 6.1 est une coloration à 4 couleurs. En revanche le nombre chromatique de ce graphe est 2, la coloration de gauche ne minimise pas le nombre de couleurs, contrairement à celle de droite.

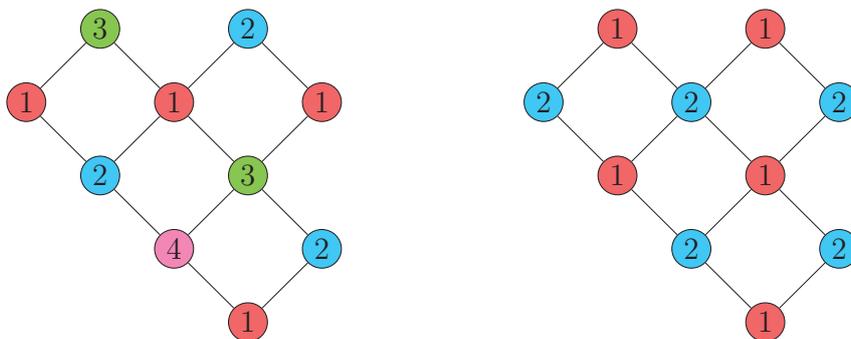


FIGURE 6.1 – Deux colorations d’un même graphe, l’une à 4 couleurs, la seconde à 2 couleurs.

Ainsi, trouver le nombre de couleurs nécessaire pour colorer une carte revient à trouver le nombre chromatique du graphe représentant cette carte. Si les régions géographiques sont connexes, le graphe de ces régions est planaire ce qui explique l’intérêt porté aux graphes planaires. Le résultat principal étant le théorème des quatre couleurs, prouvé plus d’un siècle après avoir été conjecturé.

**Théorème 6.3** (Théorème des quatre couleurs). [AH76] *Tout graphe planaire a un nombre chromatique au plus 4.*

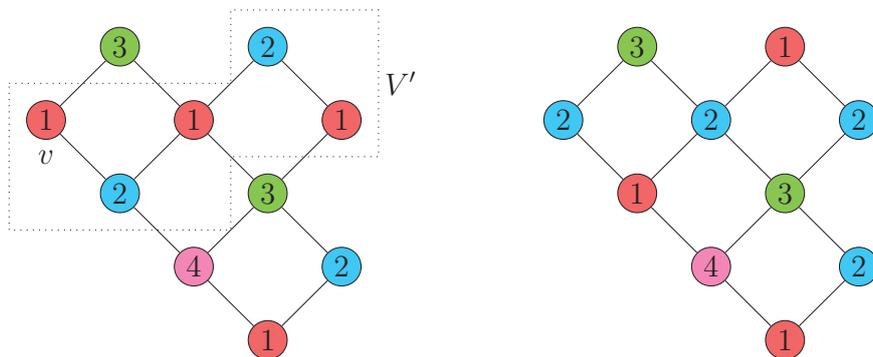
En 1879, Kempe propose une preuve, malheureusement fautive, du théorème. Son idée permettra néanmoins de prouver le résultat avec cinq couleurs. La preuve est basée sur des modifications des graphes, appelées changements de Kempe, définies comme suit :

**Définition 6.4** (Changement de Kempe). *Soit  $G$  un graphe,  $\alpha$  une coloration de  $G$  et  $v$  un sommet de  $G$ . On note  $a$  la couleur de  $v$  ( $a = \alpha(v)$ ), et  $b$  une autre couleur. Soit  $G'$  le graphe induit par les sommets colorés  $a$  ou  $b$  et  $V'$  les sommets de la composante connexe bicolore de  $v$  dans  $G'$ . La coloration obtenue par le changement de Kempe de  $v$  vers la couleur  $b$  est la coloration  $\beta$  inversant les couleurs  $a$  et  $b$  pour les sommets de  $V'$  sans changer les couleurs des autres sommets.*

Un des intérêts des changements de Kempe est le résultat suivant qui découle directement de la définition.

**Proposition 6.5.** *Soit  $G$  un graphe et  $\alpha$  une coloration propre de  $G$ . La coloration obtenue après n’importe quel changement de Kempe est toujours une coloration propre.*

Effectuer des changements de Kempe sur une coloration propre permet donc de changer la couleur de certains sommets tout en maintenant une coloration propre.

FIGURE 6.2 – Exemple d'un changement de Kempe du sommet  $v$  vers la couleur 2.

## 6.2 Graphes planaires

La preuve du théorème des quatre couleurs est complexe. En revanche, prouver que tout graphe planaire peut être coloré avec au plus cinq couleurs est bien plus simple à prouver. Dans cette section, nous présentons successivement les preuves du théorème des six couleurs puis du théorème des cinq couleurs, afin d'illustrer des techniques de preuve utilisées dans cette partie, ainsi qu'une présentation des idées utilisées dans la preuve du théorème des quatre couleurs.

### 6.2.1 Théorème des six couleurs

Nous prouvons le théorème en partant de la formule d'Euler. Cette formule a de nombreuses applications<sup>1</sup> et sera de nouveau utilisée par la suite.

**Théorème 6.6** (Formule d'Euler). *Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe et planaire dessiné sans croisement. On note  $f$  le nombre de faces de  $G$ , face extérieure comprise  $a = |E|$  le nombre d'arêtes de  $G$  et  $s = |V|$  le nombre de sommets de  $G$ . Alors on a l'égalité  $f - a + s = 2$ .*

*Démonstration.* Il existe de nombreuses preuves de la formule. Pour celle-ci, on fixe le nombre de sommets  $s$  et on effectue une induction sur le nombre d'arêtes  $a$ . Soit  $G$  un graphe planaire connexe à  $s$  sommets  $a$  arêtes et  $f$  faces. Par propriété de connexité, on a  $a \geq s - 1$ . Si  $a = s - 1$ , alors  $G$  est un arbre. L'égalité est vraie pour n'importe quel arbre, en effet un arbre possède une unique face et un sommet de plus que son nombre d'arêtes. Si  $a \geq s$ , alors il existe une arête  $e$  dont la suppression ne déconnecte pas  $G$ . Par hypothèse d'induction,  $G - e$  vérifie la formule d'Euler. Or ajouter  $e$  à  $G - e$  ajoute une arête et une face, donc si  $G - e$  vérifie la formule d'Euler, alors  $G$  vérifie aussi la formule.  $\square$

1. On peut par exemple s'en servir pour prouver que  $K_5$  n'est pas planaire ou pour expliquer pourquoi il y a des pentagones sur les ballons de football.

**Corollaire 6.7.** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe et planaire dessiné sans croisement. On note  $f$  le nombre de faces de  $G$ , face extérieure comprise  $a = |E|$  le nombre d'arêtes de  $G$  et  $s = |V|$  le nombre de sommets de  $G$ . Alors on a l'inégalité  $a \leq 3s - 6$ .*

*Démonstration.* Reprenons les notations de la preuve de la formule d'Euler en notant  $f$ ,  $s$  et  $a$  le nombre de faces, sommets et arêtes de  $G$ . Chaque face contient au moins trois arêtes et chaque arête est incidente à exactement deux faces donc  $2a \geq 3f$ . En combinant cette inégalité avec la formule d'Euler, on obtient que  $a \leq 3s - 6$ .  $\square$

On déduit de la formule d'Euler que tout graphe planaire est 5-dégénéré, c'est-à-dire possède un sommet de degré au plus 5.

**Lemme 6.8.** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe planaire, alors  $\delta(G) \leq 5$ .*

*Démonstration.* En reprenant les notations de la preuve précédente, on a que chaque arête est incidente à exactement deux sommets donc  $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2a$ . Si on suppose par l'absurde que  $\delta(G) \geq 6$  alors  $\sum_{v \in V} \deg(v) \geq 6s$  donc  $6s \geq 2a$  soit  $a \geq 3s$ , une contradiction avec  $a \leq 3s - 6$ .  $\square$

On prouve maintenant le théorème des six couleurs.

**Théorème 6.9.** *Tout graphe planaire a nombre chromatique au plus 6.*

*Démonstration.* Supposons par l'absurde qu'il existe des graphes planaires ayant nombre chromatique au moins 7. Considérons un graphe  $G$  ayant le nombre de sommets minimum parmi ces graphes. D'après le corollaire 6.8, ce graphe a un sommet de degré au plus 5 que l'on note  $v$ . Considérons le graphe  $G' = G \setminus \{v\}$ . Comme  $G'$  a strictement moins de sommets que  $G$ ,  $\chi(G') \leq 6$ . Il existe donc une coloration de  $G'$  utilisant au plus six couleurs. Alors on peut colorer  $G$  avec six couleurs en donnant aux sommets de  $V \setminus \{v\}$  la même couleur que dans  $G'$  et à  $v$  une couleur différente de ses voisins, ce qui est possible car  $v$  a degré au plus 5. Donc  $\chi(G) \leq 6$ , une contradiction.  $\square$

De façon plus générale, cette preuve permet de montrer que tout graphe  $k$ -dégénéré peut être coloré avec  $k + 1$  couleurs.

## 6.2.2 Théorème des cinq couleurs

Pour prouver le théorème des cinq couleurs, nous utilisons la même méthode en prouvant qu'il n'existe pas de contre exemple minimal. Il n'est pas possible d'appliquer directement la même stratégie que pour le théorème des six couleurs puisqu'il existe des graphes planaires de degré minimal 5 (par exemple le dodécaèdre de la figure 6.3). La façon d'aboutir à une contradiction sera donc différente en utilisant des changements de Kempe.

**Théorème 6.10.** *Tout graphe planaire a nombre chromatique au plus 5.*

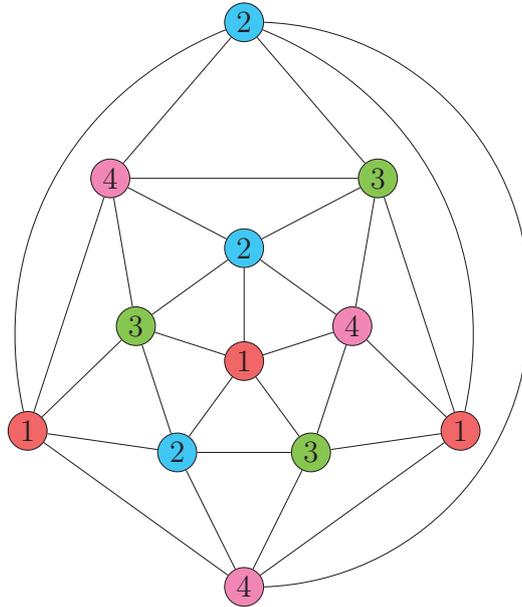


FIGURE 6.3 – Le dodécaèdre, un graphe planaire de degré minimal 5.

*Démonstration.* Supposons par l'absurde qu'il existe des graphes planaires ayant nombre chromatique 6. Considérons un graphe  $G$  ayant le nombre minimum de sommets parmi ces graphes. D'après le corollaire 6.8, ce graphe a un sommet de degré au plus 5 que l'on note  $v$ . Si  $v$  a au plus quatre voisins, la même méthode que pour le théorème des six couleurs peut s'appliquer pour colorer  $G$  avec cinq couleurs. Supposons maintenant que  $\deg(v) = 5$  et appelons dans l'ordre cyclique ses voisins  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ . Soit  $G' = G \setminus \{v\}$  et  $\alpha$  une coloration de  $G'$  en cinq couleurs. Si deux sommets au moins de  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  ont la même couleur, alors une des cinq couleurs peut être utilisée pour colorer  $v$  et obtenir une 5-coloration de  $G$ . Dans le cas contraire, on va modifier  $\alpha$  pour obtenir une nouvelle coloration dans laquelle deux voisins de  $v$  auront la même couleur.

Sans perte de généralité et pour alléger les notations, supposons que  $v_i$  est de couleur  $i$  pour  $1 \leq i \leq 5$ . On effectue un changement de Kempe pour mettre  $v_3$  de la couleur de 1. Ce changement n'affecte pas les couleurs 2, 4, 5 de  $v_2, v_4$  et  $v_5$ . S'il n'affecte pas  $v_1$ , alors la nouvelle coloration donne deux voisins de  $v$  de la même couleur 1 ce qui permet de conclure. Sinon cela signifie qu'il existe un chemin entre  $v_1$  et  $v_3$  composé de sommets uniquement de couleur 1 ou 3. On effectue alors un changement de Kempe pour mettre la couleur 4 à  $v_2$ . Ce changement ne peut pas affecter  $v_4$  car sinon il existerait un chemin entre  $v_2$  et  $v_4$  composé de sommets uniquement de couleur 2 ou 4. Or, par planarité,  $v_2$  est entouré par  $v$  et des sommets de couleur 1 ou 3 donc il ne peut pas y avoir un chemin entre  $v_2$  et  $v_4$  composé de sommets uniquement de couleur 2 ou 4, d'où une contradiction. On obtient donc une coloration dans laquelle  $v$  a deux voisins de la même couleur ce qui conclut la preuve.  $\square$

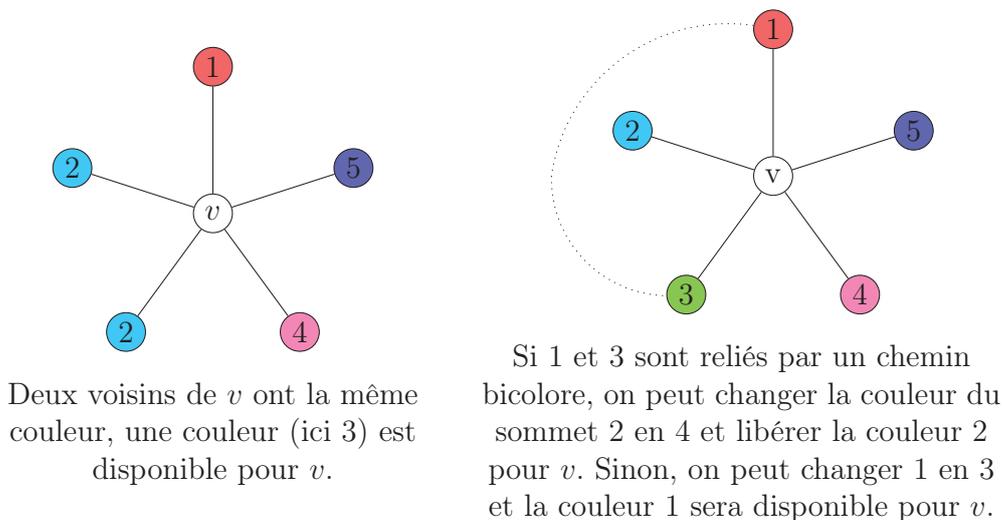


FIGURE 6.4 – Différents cas de la preuve du théorème des 5 couleurs.

### 6.2.3 Théorème des quatre couleurs

La preuve du théorème des quatre couleurs se fait aussi en montrant qu'il n'existe pas de contre-exemple minimal au théorème. Pour prouver la non-existence d'un tel graphe, Appel et Haken [AH76] ont utilisé une méthode par déchargement. Cette méthode se fait en plusieurs étapes dont le but est d'aboutir à une contradiction.

- Supposer qu'il existe un graphe  $G$ , contre-exemple minimal au théorème.
- Associer un poids (positif ou négatif) à chaque sommet du graphe de sorte que la somme des poids sur tous les sommets du graphe soit positive. Dans la preuve d'Appel et Haken, chaque sommet  $v$  reçoit un poids  $60(6 - \deg(v))$ , la garantie que le poids total est positif venant de la formule d'Euler (théorème 6.6), le facteur 60 permet de garder des nombres entiers tout au long de la preuve.
- Définir des *configurations interdites*. Une configuration est un graphe avec des contraintes sur les degrés qui ne peut pas apparaître comme sous-graphe de  $G$ . Par exemple,  $G$  ne contient pas de sommets de degré 3, car si  $v$  est un sommet de degré 3 dans  $G$ , alors par hypothèse de minimalité,  $G \setminus \{v\}$  peut être coloré avec quatre couleurs. Alors  $G$  peut aussi être coloré avec quatre couleurs en utilisant une coloration à quatre couleurs de  $G \setminus \{v\}$  et en donnant à  $v$  une couleur qui n'est utilisée par aucun de ses voisins (possible car  $\deg(v) = 3$ ). La preuve d'Appel et Haken contenait 1834 configurations (ce nombre a pu être réduit par la suite mais reste supérieur au millier de configurations)
- Définir des *règles de déchargement* qui sont des règles selon lesquelles les poids sur les sommets vont être déplacés. Un exemple de règle, totalement fictif, pouvant être 'Si  $v$  est un sommet de degré 6 adjacent à un sommet  $w$  de degré 5, alors  $v$  donne un poids 10 à  $w$ '. La propriété fondamentale de ces règles est qu'il s'agit

de règles de déplacement de poids, aucun poids n'est créé ou supprimé, le poids total sur le graphe est donc maintenu.

- Montrer que si  $G$  ne contient aucune configuration interdite, alors après l'application des règles de déchargement, chaque sommet possède un poids négatif, ce qui est une contradiction avec le fait que le poids total est positif. Donc  $G$  ne peut pas exister.

Nous utilisons la méthode de déchargement dans le chapitre 7, pour prouver des résultats concernant la coloration de carrés de graphes planaires.

### 6.3 Coloration de carrés de graphes planaires

Il est possible de considérer une variante du problème de coloration. Nous ajoutons comme condition que tous les voisins d'un sommets soient de couleur différente. Cette condition s'ajoute si on considère par exemple un problème d'assignation de fréquence radio. En supposant que les couleurs correspondent à des fréquences radio, pour pouvoir recevoir les signaux de vos voisins, il ne faut pas qu'ils émettent sur la même fréquence. On peut reformuler l'ajout de cette condition de différentes façons. C'est équivalent à demander que pour chaque sommet  $v$ , tous les sommets à distance au plus deux de  $v$  aient une couleur différente de celle de  $v$  ou encore de colorer de façon classique le carré du graphe considéré. Si le graphe initial est planaire, on cherche alors à colorer de façon classique le carré d'un graphe planaire.

Étant donné un graphe  $G$ , on appelle *nombre 2-chromatique*, noté  $\chi_2(G)$ , le nombre minimum de couleurs nécessaire pour colorer le carré de  $G$ . De façon équivalente,  $\chi_2(G)$  est égal au nombre minimum de couleurs nécessaire pour colorer  $G$  de sorte que deux sommets à distance au plus 2 soient toujours de couleurs différentes. Un exemple d'une telle coloration est donnée pour le dodécaèdre dans la figure 6.5.

Étant donné un graphe  $G$ , on peut voir que  $\chi_2(G) \geq \Delta(G) + 1$ . En effet, tous les voisins d'un sommet  $v$  sont à distance au plus 2 de  $v$  dans  $G$  et donc doivent être colorés avec des couleurs deux à deux différentes. En particulier, il est impossible de borner le nombre de couleurs par une constante universelle, même en se limitant aux graphes planaires. On obtient une borne dans l'autre sens,  $\chi_2(G) \leq \Delta(G)^2 + 1$  en remarquant que chaque sommet est adjacent à au plus  $\Delta(G)^2$  sommets dans  $G^2$  et  $G^2$  peut être coloré de façon gloutonne avec  $\Delta(G)^2 + 1$  couleurs. Cette borne ne peut pas être améliorée dans le cas général. Il existe une famille finie de graphes, les graphes de Moore, atteignant cette borne [HS03], et une famille infinie de graphes d'incidence de plans projectifs (qui sont des graphes bipartis dans lesquels chaque côté de la bipartition contient  $\Delta^2 - \Delta + 1$  sommets et chaque paire de sommets du même côté de la bipartition a un voisin commun, donc les deux sommets doivent être coloré de couleur différente) pour lesquels cette borne est optimale à une constante additive près.

Dans la suite, nous nous intéressons uniquement aux carrés de graphes planaires. Il est connu que les graphes planaires ont degré minimal au plus 5 (théorème 6.10) et donc vérifient  $\chi_2(G) \leq 5\Delta + 1$  par une preuve similaire à celle du théorème des six

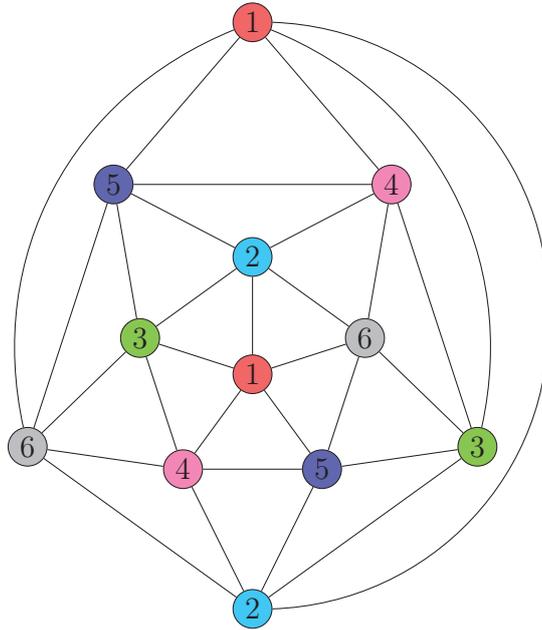


FIGURE 6.5 – Coloration à distance 2 dans le dodécaèdre.

couleurs. Cependant, cette borne semble loin de l’optimale. Les graphes de la forme de la figure 6.6 vérifient  $\chi_2(G) = \lfloor \frac{3\Delta(G)}{2} \rfloor + 1$ , ce qui est la plus haute valeur connue pour  $\chi_2$  pour  $\Delta$  fixé.

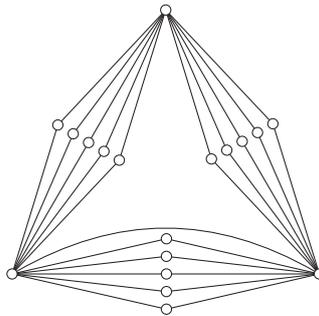


FIGURE 6.6 – Construction de Wegner montrant un cas limite de sa conjecture.

Wegner a émis la conjecture en 1977 [Weg77] que cette valeur est maximale dès lors que  $\Delta$  est suffisamment grand. L’énoncé précis de la conjecture est le suivant :

**Conjecture 6.11** (Wegner [Weg77]). *Tout graphe planaire  $G$  de degré maximum  $\Delta$  vérifie :*

$$\chi_2(G) \leq \begin{cases} 7 & \text{si } \Delta = 3, \\ \Delta + 5 & \text{si } 4 \leq \Delta \leq 7, \\ \lfloor \frac{3\Delta}{2} \rfloor + 1 & \text{si } \Delta \geq 8. \end{cases}$$

Cette conjecture est toujours ouverte, le seul cas résolu est celui des graphes de degré maximum 3, résolu par Thomassen [Tho01]. Il a été montré indépendamment dans [Hav+17] et [AEV13] que cette conjecture est vraie de façon asymptotique :  $\chi_2(G) = 3\Delta/2 + o(\Delta)$  quand  $\Delta \rightarrow \infty$ . De nombreuses bornes de la forme  $c\Delta + O(1)$  (avec  $c$  une constante) existent, le plus proche du facteur  $\frac{3}{2}$  est obtenu avec  $c = 5/3$ , par Molloy et Salavatipour [MS05].

Cependant dans ces cas, les termes constants dans les bornes sont élevés ou les preuves ne sont vraies que pour des valeurs de  $\Delta$  suffisamment grandes. Ainsi, pour les petites valeurs de  $\Delta$ , il reste un grand écart entre la borne inférieure connue de la figure 6.6 et la borne supérieure. Le tableau 6.1 regroupe des bornes connues pour les petites valeurs de  $\Delta$ , la majorité de ces résultats ayant été obtenus par des méthodes de déchargement.

Auteur	Condition	Inégalité
Thomassen [Tho01]	$\Delta \leq 3$	$\chi_2(G) \leq 7$
Jonas [Jon93]	$\Delta \geq 7$	$\chi_2(G) \leq 8\Delta - 22$
Wong [Won96]	$\Delta \geq 7$	$\chi_2(G) \leq 3\Delta + 5$
Madaras and Marcinova [MM02]	$\Delta \geq 12$	$\chi_2(G) \leq 2\Delta + 18$
Borodin et al. [Bor+02]	$\Delta \leq 20$	$\chi_2(G) \leq 59$
	$21 \leq \Delta \leq 46$	$\chi_2(G) \leq \Delta + 39$
	$\Delta \geq 47$	$\chi_2(G) \leq \lceil \frac{9\Delta}{5} \rceil + 1$
Van den Heuvel and McGuinness [HM03]	$\Delta \geq 5$	$\chi_2(G) \leq 9\Delta - 19$
		$\chi_2(G) \leq 2\Delta + 25$
Agnarsson and Halldorsson [AH03]	$\Delta \geq 749$	$\chi_2(G) \leq \lfloor \frac{9\Delta}{5} \rfloor + 2$
Molloy and Salavatipour [MS05]	$\Delta \geq 249$	$\chi_2(G) \leq \lceil \frac{5\Delta}{3} \rceil + 25$
		$\chi_2(G) \leq \lceil \frac{5\Delta}{3} \rceil + 78$
Zhu and Bu [ZB18]	$\Delta \leq 5$	$\chi_2(G) \leq 20$
	$\Delta \geq 6$	$\chi_2(G) \leq 5\Delta - 7$
Krzyzinski et al. [KRT21]	$\Delta \geq 6$	$\chi_2(G) \leq 3\Delta + 4$
Théorème 6.12	$\Delta \geq 9$	$\chi_2(G) \leq 2\Delta + 7$
Théorème 6.13	$\Delta = 6$	$\chi_2(G) \leq 21$
Théorème 6.14	$\Delta = 4$	$\chi_2(G) \leq 12$

TABLE 6.1 – Bornes sur  $\chi_2(G)$  connues en fonction de contraintes de degré maximal.

On peut aussi visualiser les résultats sous la forme d'un graphique comme montré sur la Figure 6.7. Nous avons amélioré des bornes concernant des petites valeurs de  $\Delta$ . Dans le chapitre 7 nous montrons les deux bornes suivantes, en utilisant une méthode de déchargement.

**Théorème 6.12.** [Bou+23] Soit  $G$  un graphe planaire de degré maximal au plus  $\Delta \geq 9$ . Alors,  $\chi_2(G) \leq 2\Delta + 7$ .

**Théorème 6.13.** [Bou+23] Soit  $G$  un graphe planaire avec  $\Delta \leq 6$ . Alors,  $\chi_2(G) \leq 21$ .

Nous discutons aussi de la manière de prouver une borne dans le cas spécifique où  $\Delta = 4$ , avec un déchargement assisté par ordinateur.

**Théorème 6.14.** [Bou+22] Soit  $G$  un graphe planaire avec  $\Delta = 4$ . Alors,  $\chi_2(G) \leq 12$ .

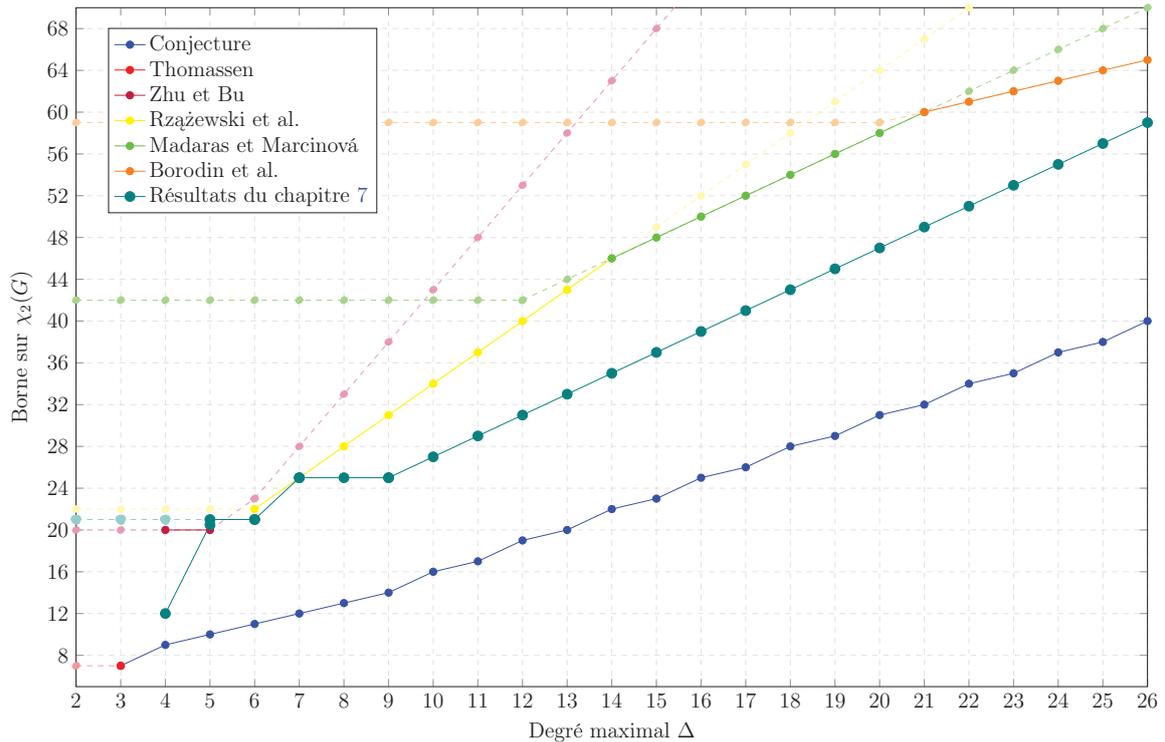


FIGURE 6.7 – Borne sur  $\chi_2(G)$  en fonction de  $\Delta$  pour  $3 \leq \Delta \leq 26$ .

## 6.4 Problème de recoloration

### 6.4.1 La reconfiguration

L'utilisation des changements de Kempe permet de passer d'une coloration propre à une autre. Dans la preuve du théorème des cinq couleurs, on cherche à faire un changement très localisé ce qui nécessite un petit nombre de changements de Kempe. Si on veut changer toute la coloration, le nombre de changements sera a priori plus important. Ces questions entrent dans le domaine plus général de la reconfiguration.

Le problème de coloration est un problème d'optimisation : le but est de colorer un graphe en utilisant le moins de couleurs possible. En revanche, dans un problème

de reconfiguration, nous supposons que l'on connaît déjà une solution au problème et souhaitons transformer cette solution en une autre solution. Pour faire cette transformation, on s'autorise certaines opérations sur une solution mais il faut qu'après chaque opération, on conserve une solution au problème initial. Par exemple, dans la figure 6.8, pour passer du graphe de gauche à celui de droite en recolorant les sommets un par un, il n'est pas possible de recolorer directement le sommet central à la couleur 3 car la coloration obtenue serait impropre.

Contrairement aux problèmes d'optimisation, un problème de reconfiguration n'a pas toujours de solution. Avec uniquement quatre couleurs, il est impossible d'effectuer la moindre recoloration depuis une coloration de  $K_4$ , nous appelons une telle coloration une *coloration gelée*, (voir figure 6.9) donc il est impossible de recolorer  $K_4$  en une autre coloration.

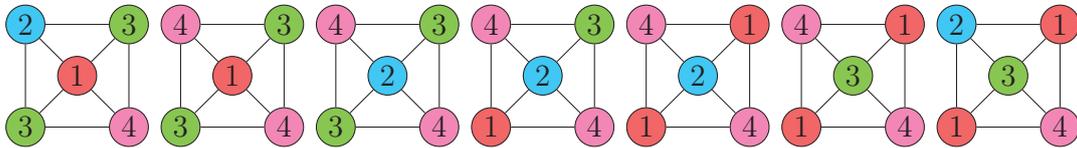


FIGURE 6.8 – Exemple de recoloration d'un graphe en recolorant les sommets individuellement.

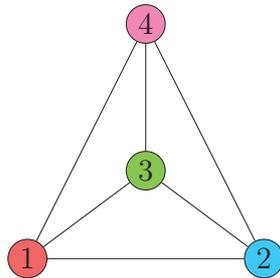


FIGURE 6.9 – Il est impossible de recolorer le moindre sommet si on ne dispose que de quatre couleurs.

Il est possible de représenter un problème de reconfiguration sous la forme d'un graphe, appelé *graphe de reconfiguration*. Les sommets de ce graphe sont les solutions au problème et une arête relie deux sommets s'il est possible de passer de l'un à l'autre en effectuant une seule opération. Savoir s'il est possible de passer d'une solution à une autre revient à savoir si les deux sommets sont connectés, et trouver la plus courte séquence de reconfiguration revient à déterminer le plus court chemin dans le graphe de reconfiguration entre les deux sommets associés aux solutions. Malheureusement, le graphe de reconfiguration est en général très grand (son nombre de sommets est souvent exponentiel en le nombre de sommets du graphe d'origine) ce qui rend son utilisation souvent impossible. C'est pour cela que l'on cherchera à résoudre ces problèmes sans construire explicitement le graphe de reconfiguration.

### 6.4.2 Spécifications du problème

Pour les problèmes de recoloration, il existe deux opérations classiques de changement de couleur. La première, *recoloration classique*, ou recoloration par sommet, consiste à changer la couleur d'un unique sommet à chaque fois, tout en maintenant une coloration propre. La seconde, *reconfiguration de Kempe*, consiste à faire un changement de Kempe sur une composante bicolore (ce qui assure le maintien d'une coloration propre). On peut remarquer qu'une séquence de reconfiguration classique donne une séquence de reconfiguration de Kempe :

**Proposition 6.15.** *Soient  $G$  un graphe et  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  une suite de colorations propres de  $G$  telles que  $\alpha_{i+1}$  peut être obtenue à partir de  $\alpha_i$  par une recoloration classique. Alors il existe une séquence de reconfiguration de  $\alpha_1$  à  $\alpha_k$  en utilisant  $k$  changements de Kempe.*

*Démonstration.* Chaque changement classique d'une coloration à une autre peut être vu comme un changement de Kempe. En effet soient  $\alpha_i$  et  $\alpha_{i+1}$  deux colorations et  $v$  le sommet changeant de couleur entre ces deux colorations. Alors par définition, aucun voisin de  $v$  n'est de couleur  $\alpha_i(v)$  dans la coloration  $\alpha_{i+1}$  et aucun voisin de  $v$  n'est de couleur  $\alpha_{i+1}(v)$  dans la coloration  $\alpha_i$ . Donc la coloration  $\alpha_{i+1}$  peut s'obtenir à partir de la coloration  $\alpha_i$  en effectuant un changement de Kempe sur la composante connexe bicolore de  $v$  de couleur  $\alpha_i(v)$   $\alpha_{i+1}(v)$  (qui est une composante ne contenant que le sommet  $v$ ).  $\square$

La réciproque est fautive, on peut par exemple faire des changements de Kempe dans la coloration gelée de la figure 6.9 alors qu'on ne peut faire aucun changement classique. C'est une des raisons pour lesquelles on utilise des changements de Kempe : avoir une méthode de changement qui soit possible plus souvent que pour les changements classiques.

L'autre paramètre pouvant varier est le nombre de couleurs autorisées. Bien que les graphes planaires puissent toujours être colorés avec quatre couleurs, autoriser plus de couleur permet de donner plus de libertés. Par exemple, avec cinq couleurs, la coloration de  $K_4$  de la figure 6.9 n'est pas gelée et il est possible de recolorer le graphe vers n'importe quelle autre coloration. Ainsi on peut se demander, étant donné un nombre de couleurs et une méthode de recoloration (classique ou par changement de Kempe), s'il est toujours possible de passer d'une coloration à une autre, et si oui, quelle est la longueur maximale d'une séquence de reconfiguration. Les résultats connus à ce jour sont présentés dans le tableau 6.2. Une coloration gelée d'un graphe planaire à six couleurs est celle du dodécaèdre de la figure 6.5. Deux colorations de l'octaèdre qui ne sont pas équivalentes par changement de Kempe (c'est-à-dire que l'on ne peut pas passer de l'une à l'autre par des changements de Kempe) sont montrées dans la figure 6.10. En effet, dans chaque coloration, pour chaque paire de couleurs, il n'y a qu'une seule composante connexe bichromatique. Donc un changement de Kempe ne fera qu'inverser les deux couleurs donc deux sommets qui ont la même couleur avant le changement auront toujours la même couleur après le changement.

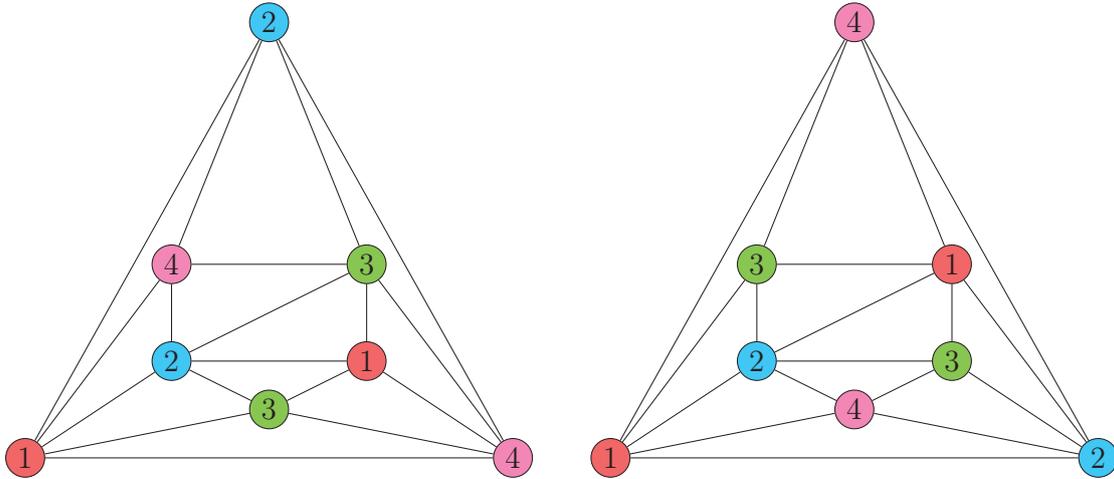


FIGURE 6.10 – Deux colorations d’un même graphe qui ne sont pas équivalentes par changements de Kempe.

Nombre de couleurs	Changement par sommet	Changement de Kempe
4	Impossible	Impossible [Moh85]
5	Impossible	Polynomiale [Mey78 ; Des+23]
6	Impossible [BB18]	Polynomiale
7	Ouvert	Polynomiale
8	Polynomiale [Feg21]	Polynomiale

TABLE 6.2 – Existence et longueur maximale d’une séquence de recoloration en fonction du nombre de couleurs dans les graphes planaires.

Pour la coloration de Kempe, la valeur limite de cinq couleurs est connue depuis 1985 [Moh85] (plus précisément, la possibilité de recolorer avec cinq couleurs depuis 1978 [Mey78] et l’existence de graphes non-recolorables avec quatre couleurs depuis 1985 [Moh85]). La preuve de Meyniel [Mey78] montrant qu’il est toujours possible de recolorer avec cinq couleurs donne une borne sur la longueur des séquences de recoloration en  $O(2^n)$ , avec  $n$  le nombre de sommets du graphe. Dans le chapitre 8, on montre qu’il est toujours possible d’effectuer ces recolorations en un temps polynomial.

La recoloration par changements de Kempe ne se limite pas à la classe des graphes planaires. Par exemple, en 2007, Mohar [Moh07] pose la conjecture suivante : Soit  $k \geq 3$  un entier, et  $G$  un graphe  $k$ -régulier qui ne soit pas une clique, alors toutes les colorations de  $G$  sont équivalentes par changement de Kempe. Le cas  $k = 3$  a été prouvé, à un contre-exemple près, en 2017 [FJP17] et le cas général en 2019 [Bon+19]. Néanmoins, la question de la taille maximale d’une séquence de reconfiguration est toujours ouverte. Cette question est ouverte en considérant de façon plus générale le degré maximum moyen et la dégénérescence du graphe. Cereceda [Cer07] a proposé la conjecture suivante :

**Conjecture 6.16.** [Cer07] Soient  $k$  et  $l$  deux entiers tels que  $l \geq k + 2$  et  $G$  un graphe  $k$ -dégénéré à  $n$  sommets. Alors il est possible de passer d'une coloration de  $G$  à une autre en  $O(n^2)$  changements de Kempe.

Cereceda a proposé cette conjecture après avoir prouvé que, sous les mêmes hypothèses, il est toujours possible de passer d'une coloration de  $G$  à une autre [Cer07] mais la preuve ne donne qu'une borne exponentielle sur le nombre de changements nécessaires. Une borne polynomiale a été prouvé [BH19] mais la question d'une borne quadratique est toujours ouverte.

# Chapitre 7

## Coloration de carrés de graphes planaires

Le contenu de ce chapitre est basé sur des travaux effectués avec Nicolas Bousquet, Lucas De Meyer et Théo Pierron. Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur le problème de coloration dans la classe des carrés de graphes planaires. Nous prouvons dans un premier temps les théorèmes 6.12 et 6.13 puis dans un second temps nous présentons les méthodes élaborées pour prouver le théorème 6.14. Ces travaux ont été publiés dans *Discrete Mathematics* [Bou+23].

### 7.1 Préliminaires et notations

Rappelons tout d'abord les résultats sur lesquels ce chapitre se concentre :

**Théorème 6.12.** [Bou+23] *Soit  $G$  un graphe planaire de degré maximal au plus  $\Delta \geq 9$ . Alors,  $\chi_2(G) \leq 2\Delta + 7$ .*

**Théorème 6.13.** [Bou+23] *Soit  $G$  un graphe planaire avec  $\Delta \leq 6$ . Alors,  $\chi_2(G) \leq 21$ .*

**Théorème 6.14.** [Bou+22] *Soit  $G$  un graphe planaire avec  $\Delta = 4$ . Alors,  $\chi_2(G) \leq 12$ .*

Nous commençons ce chapitre par la preuve du théorème 6.12 par une méthode de déchargement (présenté en section 6.2.3) avec un ordre sur les graphes différent de l'ordre usuel. La preuve du théorème 6.13 en section 7.5 est très similaire à celle du théorème 6.12 et s'obtient assez rapidement une fois celui-ci démontré. Dans la section 7.6, on s'intéressera au cas spécifique  $\Delta = 4$  en modélisant le problème de coloration sous la forme d'un programme linéaire pour obtenir une preuve automatisée.

Dans ce chapitre, on suppose que  $G$  est un graphe planaire, on peut donc le dessiner dans le plan sans croisement d'arête. Un tel dessin (appelé plongement) fixé, on note  $F(G)$  l'ensemble des faces de  $G$ . On appelle *degré d'une face  $f$* , noté  $\deg_G(f)$ , le nombre d'arêtes incidentes à la face  $f$ , où chaque arête séparatrice est comptée avec multiplicité 2.

Pour un entier  $d$ , on dit qu'un sommet est un  $d$ -sommet (respectivement, un  $d^-$ -sommet, un  $d^+$ -sommet) si son degré est égal à  $d$  (resp., au plus  $d$ , au moins  $d$ ). De façon analogue, une face est dite une  $d$ -face (resp., une  $d^-$ -face, une  $d^+$ -face) si son degré est égal à  $d$  (resp., au plus  $d$ , au moins  $d$ ). Une 3-face est appelée *triangle* et une 4-face est appelée *carré*.

Soient  $u, v$  deux sommets de  $V$ . On note  $G + uv$ , le graphe obtenu en ajoutant l'arête  $uv$  à  $G$  si elle n'existe pas déjà, c'est à dire le graphe  $G'$  tel que  $V(G') = V(G)$  et  $E(G') = E(G) \cup \{uv\}$ .

Une *coloration partielle* d'un ensemble de sommets  $X$  de  $G$  est une coloration du sous-graphe induit par  $X$  tel que deux sommets à distance au plus 2 soient colorés de façon différente.

## 7.2 Ordre sur les graphes et configurations interdites

Pour prouver le théorème 6.13, nous supposons qu'il existe un contre-exemple minimal au théorème et nous trouvons une contradiction, en montrant qu'il existe un contre-exemple plus petit ou que le contre-exemple possède un sous-graphe qu'un contre-exemple minimal ne peut pas posséder. Pour définir la notion de contre-exemple minimal, nous utilisons un ordre spécifique sur les graphes qui est le suivant.

**Définition 7.1.** Soient  $G_1 = (V_1, E_1)$  et  $G_2 = (V_2, E_2)$  deux graphes. On dit que  $G_1 < G_2$  si  $|V_1| < |V_2|$  ou  $|V_1| = |V_2|$  et  $|E_1| > |E_2|$ . Autrement dit,  $<$  est l'ordre lexicographique sur  $(|V|, -|E|)$ .

L'utilisation de cet ordre permet d'avoir plus d'informations sur le contre-exemple minimal, ce qui est détaillé dans les résultats suivants. Dans la suite, on considère un contre-exemple  $G$  au théorème 6.13 minimal pour l'ordre  $<$  et on fixe un plongement dans le plan pour  $G$ .

**Lemme 7.2.** Le graphe  $G$  ne contient pas d'arête séparatrice, c'est-à-dire d'arête  $uv$  telle que  $G - \{u, v\}$  n'est pas connexe.

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que  $G$  contienne une arête séparatrice  $uv$ . Soit  $C$  une composante connexe de  $G - \{u, v\}$ . On note  $G_1 = G[C \cup \{u, v\}]$  et  $G_2 = G \setminus C$ . Les graphes  $G_1$  et  $G_2$  ont strictement moins de sommets que  $G$ . Donc, par minimalité de  $G$ ,  $G_1$  et  $G_2$  admettent tous les deux une coloration à distance 2 avec au plus  $(2\Delta + 7)$  couleurs, respectivement notées  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Quitte à permuter les couleurs, on peut supposer que  $u$  et  $v$  sont colorés avec les couleurs 1 et 2 dans les colorations  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Pour  $1 \leq i \leq 2$ , on pose  $N_i = (N_{G_i}(u) \cup N_{G_i}(v)) \setminus \{u, v\}$ . Comme  $G$  a degré maximal  $\Delta$ ,  $|N_1| + |N_2| \leq 2\Delta$ . On peut donc permuter les couleurs dans  $G_1$  et  $G_2$ , à l'exception des couleurs 1 et 2, de façon à ce que les sommets de  $N_1$  soient colorés avec des couleurs différentes de ceux de  $N_2$ . Alors la coloration de  $G$  obtenue en fusionnant les colorations  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  est une coloration à distance 2 avec au plus  $2\Delta + 7$  couleurs pour  $G$ .  $\square$

Ce résultat donne aussi que le graphe  $G$  est 2-connexe comme chaque arête incidente avec un sommet séparateur est une arête séparatrice (sauf si  $G$  a moins de 3 sommets, ce qui n'est pas un contre-exemple au théorème 6.13). En particulier, comme  $G$  est 2-connexe, un sommet ne se répète pas sur le contour d'une face.

Le résultat suivant est une conséquence du choix de l'ordre sur les graphes et permet de restreindre les graphes candidats au statut de contre-exemple minimal.

**Théorème 7.3.** *Toute  $4^+$ -face de  $G$  contient au plus deux sommets de degré strictement inférieur à  $\Delta$ . De plus, si une face  $f$  en contient exactement deux, ils sont consécutifs sur la face  $f$ .*

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que  $G$  contient une  $4^+$ -face  $f$  avec deux sommets non-adjacents  $u, w$  de degré strictement inférieur à  $\Delta$ . On note  $v$  et  $x$  les deux voisins de  $u$  sur  $f$ . Alors  $u$  et  $w$  ne peuvent pas être reliés par une arête en dehors de  $f$  car sinon cette arête serait une arête séparatrice (par planarité,  $v$  et  $x$  seraient dans des composantes connexes différentes dans  $G - \{u, w\}$ ), ce qui contredit le lemme 7.2. Alors, ajouter l'arête  $uw$  à  $G$  donne un graphe planaire  $G'$  avec  $G' < G$  et  $\Delta(G') = \Delta(G)$ . Comme  $G$  est un sous-graphe de  $G'$ ,  $\chi_2(G) \leq \chi_2(G') \leq 2\Delta + 7$  par minimalité, d'où une contradiction.

Si  $f$  contient trois sommets de degré strictement inférieur à  $\Delta$ , deux d'entre eux ne sont pas adjacents comme  $f$  est une  $4^+$ -face, d'où une contradiction.  $\square$

Nous utilisons des méthodes similaires pour prouver que  $G$  ne contient pas certaines configurations. Le schéma de preuve est identique : supposer par contradiction que la configuration est dans  $G$ , ensuite supprimer un sommet  $v$  et éventuellement des arêtes pour obtenir un graphe  $G'$  tel que  $\Delta(G') \leq \Delta(G)$ , et toute paire de sommets à distance au plus 2 dans  $G$  est toujours à distance au plus 2 dans  $G'$ .

Comme  $G'$  est plus petit que  $G$ ,  $G'$  admet une coloration  $\alpha$  à distance 2 avec au plus  $2\Delta + 7$  couleurs, et  $\alpha$  est une coloration partielle de  $G$  comme les paires de sommets à distance 2 sont préservées.

Pour étendre  $\alpha$  à  $G$ , il suffit alors de colorer  $v$ . S'il y a moins de  $2\Delta + 7$  couleurs interdites pour  $v$ , alors on peut colorer  $v$  avec une couleur libre, ce qui donne une coloration pour  $G$  et donc une contradiction. L'utilisation directe de ce schéma de preuve donne le résultat suivant.

**Lemme 7.4.** *Le graphe  $G$  ne contient pas de sommet  $v$  tel que, dans  $G - v$ , toutes les paires de voisins de  $v$  soient à distance au plus 2 et tel que  $v$  a strictement moins de  $2\Delta + 7$  voisins à distance au plus 2.*

*Démonstration.* Soit  $\alpha$  une coloration à distance 2 de  $G' = G - v$  avec  $2\Delta + 7$  couleurs. On étend la coloration  $\alpha$  à  $G$  en posant pour  $\alpha(v)$  une couleur qui n'est pas utilisée par un voisin à distance 2 de  $v$ . Alors  $\alpha$  est une coloration à distance 2 de  $G$ , d'où une contradiction.  $\square$

On obtient comme conséquence que  $\delta(G) \geq 2$ .

**Corollaire 7.5.** *Le graphe  $G$  ne contient pas de sommet de degré 1.*

Dans la suite, nous montrons des résultats analogues. Dans les démonstrations, on ne donne que le graphe  $G'$ , on ne vérifie pas explicitement que  $G' < G$ ,  $\Delta(G') \leq \Delta(G)$ , et que les distances 2 sont préservées. On calcule seulement le nombre de couleurs interdites pour  $v$  afin de vérifier qu'il est inférieur à  $2\Delta + 7$ .

**Lemme 7.6.** *Le graphe  $G$  ne contient pas de sommet de degré 2.*

*Démonstration.* Par contradiction, soit  $v$  un 2-sommet de  $G$ . Soient  $u$  et  $w$  les deux voisins de  $v$  dans  $G$  et  $G' = G - v + uw$ . Par minimalité de  $G$ ,  $G'$  admet une coloration à distance 2  $\alpha$  avec au plus  $2\Delta + 7$  couleurs. La coloration  $\alpha$  est une coloration partielle de  $G$  et interdit au plus  $2\Delta$  couleurs pour  $v$ . Alors on peut étendre  $\alpha$  à  $v$ , d'où une contradiction.  $\square$

**Lemme 7.7.** *Le graphe  $G$  ne contient pas de 3-sommet adjacent à un  $5^-$ -sommet.*

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que  $G$  contient un 3-sommet  $v$  adjacent à un  $5^-$ -sommet  $u$  tel que  $N(v) = \{u, v_1, v_2\}$ . Soit  $G'$  le graphe obtenu en identifiant  $u$  et  $v$ , c'est à dire  $G' = G - v + uv_1 + uv_2$ . Remarquons que  $\deg_{G'}(u) = \deg_G(u) + 1 \leq 6 \leq \Delta$ . Par minimalité de  $G$ ,  $G'$  admet une coloration  $\alpha$  à distance 2 avec au plus  $2\Delta + 7$  couleurs. La coloration  $\alpha$  est une coloration partielle de  $G$  et interdit au plus  $2\Delta + 5$  couleurs pour  $v$ . On peut étendre  $\alpha$  à  $v$ , d'où une contradiction.  $\square$

**Lemme 7.8.** *Le graphe  $G$  ne contient pas de 3-sommet incident à deux triangles et adjacent à un sommet de degré au plus  $\min\{10, \Delta\}$  (voir la Figure 7.1 pour une illustration).*

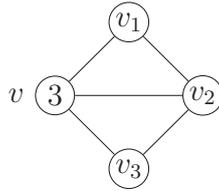


FIGURE 7.1 – Configuration interdite par le lemme 7.8 avec  $\deg(v_i) \leq \min(10, \Delta)$  pour un certains  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que  $G$  contienne un 3-sommet  $v$  tel que  $N(v) = \{v_1, v_2, v_3\}$  et  $v_2$  soit adjacent à  $v_1$  et  $v_3$ . On pose  $G' = G - v$  et  $d = \min\{10, \Delta\}$ . Par minimalité de  $G$ ,  $G'$  admet une coloration  $\alpha$  à distance 2 avec au plus  $2\Delta + 7$  couleurs. La coloration  $\alpha$  est une coloration partielle de  $G$  et interdit au plus  $2\Delta + d - 4 = 2\Delta + 6$  couleurs pour  $v$ . Comme  $d < 11$ , on a  $2\Delta + d - 4 < 2\Delta + 7$ . On peut donc étendre  $\alpha$  à  $v$ , d'où une contradiction.  $\square$

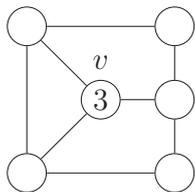


FIGURE 7.2 – Configuration interdite par le lemme 7.9.

**Lemme 7.9.** *Le graphe  $G$  ne contient pas de 3-sommet incident à un triangle et à deux carrés si  $\Delta \leq 10$  (voir la Figure 7.2).*

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que  $G$  contienne un tel 3-sommet  $v$ . On pose  $G' = G - v$ . Par minimalité de  $G$ ,  $G'$  admet une coloration  $\alpha$  à distance 2 avec au plus  $2\Delta + 7$  couleurs. La coloration  $\alpha$  est une coloration partielle de  $G$  et interdit au plus  $3(\Delta - 2) + 2 < 2\Delta + 7$  couleurs pour  $v$  (car  $\Delta \leq 10$ ). On peut donc étendre  $\alpha$  à  $v$ , d'où une contradiction.  $\square$

On dit qu'un sommet est *triangulé* s'il est incident uniquement à des triangles.

**Lemme 7.10.** *Le graphe  $G$  ne contient pas de 4-sommet triangulé adjacent à un 5-sommet triangulé et à un sommet de degré strictement inférieur à 12 (voir la figure 7.3).*

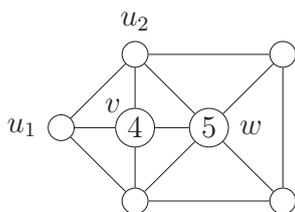


FIGURE 7.3 – Configuration interdite par le lemme 7.10. Par symétrie, le voisin  $u$  de degré au plus 12 est soit  $u_1$  soit  $u_2$ .

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que  $G$  contient un 4-sommet triangulé  $v$  tel que  $v$  est adjacent à un 5-sommet triangulé  $w$  et un sommet de degré au plus  $d < 12$ . On pose  $G' = G - v$ . Par minimalité de  $G$ ,  $G'$  admet une coloration  $\alpha$  à distance 2 avec au plus  $2\Delta + 7$  couleurs. La coloration  $\alpha$  est une coloration partielle de  $G$  et interdit au plus  $(2\Delta + d) - 2 \cdot 3 - 2 + 3 = 2\Delta + d - 5 < 2\Delta + 7$  couleurs si  $d < 12$ . On peut donc étendre  $\alpha$  à  $v$ , d'où une contradiction.  $\square$

### 7.3 Règles de déchargement

Donnons un poids initial  $\omega_0(v) = \deg(v) - 6$  à chaque sommet  $v$  et un poids  $\omega_0(f) = 2 \deg(f) - 6$  à chaque face  $f$  de  $G$ . L'égalité suivante est une conséquence de la formule d'Euler.

$$\sum_{v \in V(G)} (\deg(v) - 6) + \sum_{f \in F(G)} (2 \deg(f) - 6) = -12 < 0$$

Ainsi le poids total de  $G$  est strictement négatif. Nous transférons les poids entre les faces et les sommets en utilisant quatre règles de déchargement de sorte que le poids final de chaque face et de chaque sommet soit positif, ce qui donnera une contradiction avec l'égalité et prouvera le théorème 6.13.

La procédure de déchargement se fait en deux temps, la première règle s'applique sur les faces :

( $R_1$ ) Une  $d$ -face donne  $d - 3$  à chaque  $5^-$ -sommet incident.

Avant d'expliquer la seconde phase de déchargement, on donne quelques définitions. Un sommet *faible* est un sommet  $v$  de poids strictement négatif après l'application de la règle  $R_1$ . Un sommet *fort* est un sommet qui n'est pas faible. On peut noter que les sommets faibles sont des sommets de degré au plus 5 tandis que tous les  $6^+$ -sommets sont forts.

Un sommet  $u$  est à côté d'un sommet  $w$  et autour d'un sommet  $v$  si  $u$  et  $w$  sont consécutifs dans l'ordre d'énumération cyclique des voisins de  $v$  par rapport au plongement dans le plan. On peut noter qu'un sommet  $u$  est à côté d'au plus deux sommets autour d'un sommet fixé  $v$ .

Pour simplifier l'analyse, certaines règles font transiter du poids à travers des sommets intermédiaires. Cela affecte uniquement les poids du sommet initial et du sommet final, le poids du sommet de transition n'est pas affecté par cette règle.

On peut maintenant définir les autres règles de déchargement (voir la Figure 7.4) :

( $R_2$ ) Un  $11$ -sommet donne  $\frac{5}{11}$  à chaque voisin faible dans le cas où tous ses voisins sont faibles. Sinon, la règle  $R_3$  s'applique.

( $R_3$ ) Un  $11^+$ -sommet  $v$  donne  $\frac{1}{2}$  à chaque voisin faible  $w$ . De plus, s'il y a deux voisins forts de  $v$  à côté de  $w$ , un poids additionnel  $\frac{1}{4}$  traverse par ces sommets avant d'atteindre  $w$ . Ainsi le poids total transféré à  $w$  est  $\frac{1}{2}$  ou 1.

( $R_4$ ) Un sommet  $v$  de degré  $7 \leq d \leq 10$  donne  $\frac{\omega_0(v)}{d}$  à chaque voisin faible  $w$ , plus  $\frac{\omega_0(v)}{2d}$  qui transite à travers chaque voisin fort à côté de  $w$ . Ainsi  $w$  peut recevoir  $\frac{\omega_0(v)}{d}$ ,  $\frac{3\omega_0(v)}{2d}$  ou  $\frac{2\omega_0(v)}{d}$  depuis  $v$ .

### 7.4 Poids finaux

Nous montrons dans cette section que les poids finaux sont positifs. La preuve est séparée en plusieurs lemmes, un pour les faces et les autres pour les sommets, en fonction de leur degré.

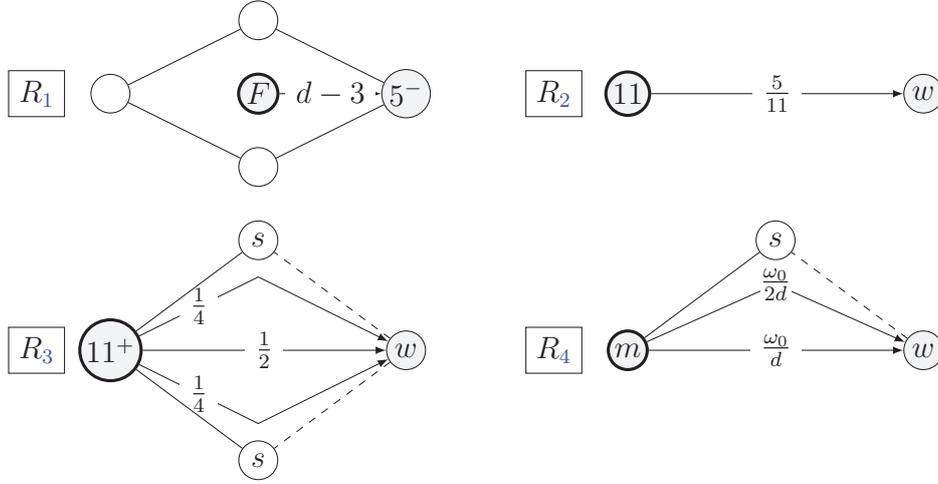


FIGURE 7.4 – Règles de déchargement. Les sommets en gras représentent les sommets donnant du poids. Les étiquettes  $s$  et  $w$  correspondent aux sommets forts et faibles.

L'étiquette  $m$  correspond aux sommets de degré compris entre 7 et 10. Les arêtes pointillées représentent le poids transitant à travers des voisins forts.

### 7.4.1 Faces et sommets de degré au moins six

**Lemme 7.11.** *Les faces de  $G$  ont un poids positif après l'application des règles de déchargement.*

*Démonstration.* Soit  $d \geq 3$  et soit  $f$  une  $d$ -face. Le poids initial de  $f$  est de  $2d - 6 \geq 0$ . Si  $d = 3$ ,  $f$  ne donne pas et ne reçoit pas de poids donc son poids final est 0.

Sinon,  $f$  est une  $4^+$ -face et donne du poids uniquement par la règle  $R_1$ . D'après le théorème 7.3,  $f$  contient au plus deux  $5^-$ -sommets sur sa frontière et donne à chacun au plus  $2 \cdot (d - 3) = 2d - 6$  donc le poids final de  $f$  est positif.  $\square$

**Lemme 7.12.** *Tout sommet de degré compris entre 7 et 10 a un poids positif après l'application des règles de déchargement.*

*Démonstration.* Soit  $v$  un sommet de degré  $d$ , avec  $7 \leq d \leq 10$ . Le poids initial de  $v$  est  $\omega_0(v) = d - 6$ . Remarquons que seule la règle  $R_4$  peut s'appliquer.

Le sommet  $v$  donne au plus  $\frac{\omega_0(v)}{d}$  à chaque sommet adjacent faible. Comme chaque voisin fort de  $v$  à côté d'au plus deux sommets autour de  $v$ , un poids d'u plus  $2 \cdot \frac{\omega_0(v)}{2d} = \frac{\omega_0(v)}{d}$  transite par chaque voisin fort d'après la règle  $R_4$ . Les autres voisins de  $v$  ne reçoivent pas de poids de  $v$ .

Ainsi, un poids d'au plus  $\frac{\omega_0(v)}{d}$  quitte  $v$  vers chacun de ses  $d$  voisins, donc le poids final de  $v$  est au moins  $\omega_0(v) - d \cdot \frac{\omega_0(v)}{d} \geq 0$ .  $\square$

**Lemme 7.13.** *Les sommets de degré au moins 12 ont un poids positif après l'application des règles de déchargement.*

*Démonstration.* Soit  $v$  un sommet de degré  $d \geq 12$ . Le poids initial de  $v$  est  $d - 6$ . La règle  $R_3$  est la seule qui peut s'appliquer. La même analyse que pour le lemme 7.12 donne qu'un poids d'au plus  $\frac{1}{2}$  quitte  $v$  vers chacun de ses  $d$  voisins, donc le poids final de  $v$  est au moins  $d - 6 - d \cdot \frac{1}{2} \geq 0$ .  $\square$

**Lemme 7.14.** *Les sommets de degré 11 ont un poids positif après l'application des règles de déchargement.*

*Démonstration.* Soit  $v$  un sommet de degré 11, son poids initial est donc 5. Seules les règles  $R_2$  et  $R_3$  peuvent s'appliquer. Si tous les voisins de  $v$  sont faibles, alors la règle  $R_2$  s'applique et le poids final de  $v$  est de  $5 - 11 \cdot \frac{5}{11} = 0$ . Supposons maintenant que  $v$  ait au moins un voisin fort et que la règle  $R_3$  s'applique.

Pour chaque voisin de  $v$ , on calcule le poids quittant  $v$  à travers ce voisin. Remarquons déjà que ce poids ne peut pas excéder  $\frac{1}{2}$ .

Soit  $X$  (resp.  $Y$ ) l'ensemble des voisins faibles recevant un poids 1 (resp.  $\frac{1}{2}$ ) de  $v$ . Les sommets de  $X$  sont ceux à côté de deux sommets forts autour de  $v$ . Si un voisin fort  $w$  de  $v$  est à côté d'un sommet de  $Y$ , il y a deux possibilités.

- Si tous les voisins de  $v$  sauf  $w$  appartiennent à  $Y$ , aucun poids ne transite par  $w$ , donc le poids final de  $v$  est au moins de  $5 - 10 \cdot \frac{1}{2} = 0$ .
- Sinon, il y a un autre voisin fort  $w'$  de  $v$  tel que tous les voisins de  $v$  entre  $w$  et  $w'$  appartiennent à  $Y$ . Dans ce cas, un poids d'au plus  $\frac{1}{4}$  transite à travers  $w$  et  $w'$ , donc le poids final de  $v$  est au moins de  $5 - 2 \cdot \frac{1}{4} - 9 \cdot \frac{1}{2} = 0$ .

Dans l'autre cas, les voisins forts de  $v$  sont uniquement à côté de sommets forts ou de sommets de  $X$  autour de  $v$ . Comme  $v$  a degré impair et au moins un voisin fort, il existe deux voisins forts  $v_1, v_2$  adjacent autour de  $v$  (les sommets de  $X$  ne peuvent pas être adjacents par définition de  $X$ ). Alors le poids quittant  $v$  par  $v_1, v_2$  est au plus de  $\frac{1}{4}$  pour chacun des deux sommets, donc le poids final de  $v$  est au moins de  $5 - 2 \cdot \frac{1}{4} - 9 \cdot \frac{1}{2} = 0$ .  $\square$

Les sommets de degré 6 ont un poids initial de 0 et ne donnent ni reçoivent de poids, leur poids final est donc positif. Il reste seulement à montrer que les  $5^-$ -sommets ont un poids final positif, ce qui est fait en effectuant une disjonction de cas en fonction de la valeur de  $\Delta$ .

### 7.4.2 $\Delta \geq 11$

**Lemme 7.15.** *Les sommets de degré 3 ont un poids positif après l'application des règles de déchargement.*

*Démonstration.* Soit  $v$  un sommet de degré 3, son poids initial est de  $-3$ . On effectue une disjonction de cas selon le nombre de  $4^+$ -faces contenant  $v$ . Dans chacun des cas, on montre que  $v$  reçoit un poids au moins de 3 et donc que son poids final est positif.

Tout d'abord, d'après le théorème 7.3 et le lemme 7.7, tous les sommets situés sur une même face que  $v$  sont des sommets forts. En effet, les sommets faibles ont degré au plus 5 et  $v$  n'est ni adjacent à un sommet faible ni sur la même face et non-adjacent à

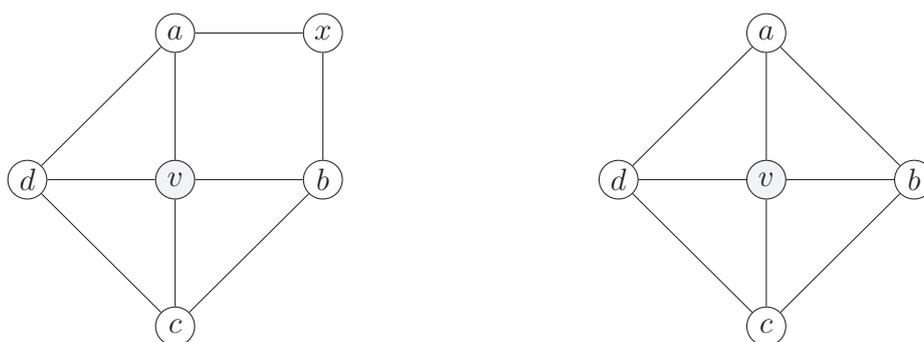
un sommet de degré strictement inférieur à  $\Delta$ . En particulier, pour tout voisin  $u$  de  $v$ ,  $v$  est à côté de deux voisins forts autour de  $u$ .

Si  $v$  est adjacent à trois  $4^+$ -faces, alors  $v$  reçoit un poids total d'au moins 3 de ces faces par la règle  $R_1$ .

Si  $v$  est adjacent à deux  $4^+$ -faces, alors  $v$  reçoit un poids au moins 2 de ces faces par la règle  $R_1$ . Soit  $f$  une de ces faces. Par le théorème 7.3, un des voisins de  $v$  sur la face  $f$  a degré  $\Delta$ , appelons ce sommet  $u$ . Somme  $v$  est à côté de deux sommets forts autour de  $u$ ,  $v$  reçoit un poids 1 de  $u$  par la règle  $R_3$ , donc un poids reçu au moins égal à 3.

Si  $v$  est adjacent à au plus une  $4^+$ -face, alors  $v$  est adjacent à au moins deux triangles. D'après le lemme 7.8, tous les voisins de  $v$  ont degré au moins 11. Alors  $v$  reçoit un poids de 3 de ces voisins par la règle  $R_3$  comme, pour chaque voisin  $u$  de  $v$ ,  $v$  est à côté de deux sommets forts autour de  $u$ .  $\square$

**Lemme 7.16.** *Les sommets de degré 4 ont un poids positif après l'application des règles de déchargement.*



Cas 1

Cas 2

FIGURE 7.5 – Configurations pour le déchargement d'un sommet  $v$  de degré 4.

*Démonstration.* Soit  $v$  un sommet de degré 4. Le poids initial de  $v$  est de  $-2$ . Si  $v$  est incident à une  $5^+$ -face ou à deux carrés alors  $v$  reçoit un poids au moins 2 de ces faces par la règle  $R_1$ . Les deux cas restants sont ceux où  $v$  est incident à quatre triangles ou à trois triangles et un carré.

**Cas 1.** Supposons que  $v$  est incident à trois triangles et un carré. On note  $a, b, c, d$  les voisins de  $v$  et  $x$  le dernier sommet du carré comme sur la figure 7.5. Tout d'abord,  $\deg(a) = \Delta$  ou  $\deg(b) = \Delta$  d'après le théorème 7.3 et de même  $\deg(x) = \Delta$ . Sans perdre de généralité, supposons que  $\deg(a) = \Delta$ . Alors,  $v$  reçoit un poids de 1 depuis le carré par la règle  $R_1$  et au moins  $\frac{1}{2}$  depuis  $a$  par la règle  $R_3$ .

D'après le lemme 7.4,  $\deg(b) + \deg(c) + \deg(d) \geq \Delta + 14 \geq 25$ . En conséquence, il existe un sommet  $y \in \{b, c, d\}$  de degré au moins 9, et un autre voisin de degré au moins

7. Donc  $y$  est à côté d'au moins un sommet fort autour de  $v$ . Une des règles  $R_3$  ou  $R_4$  s'applique et  $y$  donne un poids de  $\frac{1}{2}$  ou  $\frac{3\omega_0(y)}{2\deg(y)} \geq \frac{1}{2}$ . Finalement  $v$  reçoit un poids au moins  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$ .

**Cas 2.** Supposons que  $v$  est incident à quatre triangles. On note  $a, b, c, d$  les voisins de  $v$  comme sut la figure 7.5. Le lemme 7.4 donne l'inégalité

$$\deg(a) + \deg(b) + \deg(c) + \deg(d) \geq 2\Delta + 15. \quad (\star)$$

- Si au moins trois des quatre voisins de  $v$  ont degré au moins 12 (disons  $b, c, d$ ), alors  $c$  donne un poids 1 à  $v$  tandis que  $b$  et  $d$  donnent chacun un poids au moins  $\frac{1}{2}$  à  $v$  d'après la règle  $R_3$ .
- Si  $v$  a exactement deux voisins de degré au moins 12, la somme de degré des deux autres voisins est au moins 15. Alors, un des cas suivant se produit :
  - Un des voisins de  $v$  a degré exactement 11,  $v$  a alors trois voisins de degré au moins 11 et reçoit un poids au moins  $1 + 2 \cdot \frac{1}{2}$  par la règle  $R_3$ .
  - Les deux autres voisins de  $v$  ont degré au moins 5. Si l'un de ces sommet est faible, alors c'est un sommet triangulé de degré 5, ce qui contredit le lemme 7.10. Ainsi, aucun voisin de  $v$  n'est faible donc  $v$  reçoit un poids  $2 \cdot 1$  des deux voisins de degré au moins 12 par la règle  $R_3$ .
- Si  $v$  a exactement un voisin de degré au moins 12 (disons  $a$ ), alors, d'après l'inégalité  $(\star)$  on a  $\deg(b) + \deg(c) + \deg(d) \geq \Delta + 15 \geq 27$  (remarquons que  $\Delta \geq 12$  comme  $\deg(a) \geq 12$ ). Ainsi, comme  $b, c, d$  on degré au plus 11, on obtient qu'ils ont aussi degré au moins 5. Alors un des cas suivant se produit :
  - Un sommet de  $\{b, c, d\}$  a degré exactement 5, alors les deux autres sommets ont degré 11 et  $v$  reçoit un poids  $1 + 2 \cdot \frac{1}{2}$  par la règle  $R_3$ .
  - Aucun des sommets  $b, c, d$  n'est faible et au moins deux d'entre eux ont degré au moins 8. Dans ce cas,  $v$  reçoit un poids au moins  $2 \cdot \frac{1}{2}$  de ces deux sommets par la règle  $R_4$  et un poids 1 de  $a$  d'après la règle  $R_3$ .
- Si tous les voisins de  $v$  ont degré au plus 11, alors  $\deg(a) + \deg(b) + \deg(c) + \deg(d) \geq 2\Delta + 15 \geq 37$ .
  - Si  $v$  a un  $5^-$ -voisin (disons  $a$ ), alors ses trois autres voisins sont forts. D'après l'inégalité  $(\star)$ , si  $\deg(a) = 4$  alors  $b, c, d$  ont tous degré 11 et donnent un poids total au moins 2 à  $v$  d'après la règle  $R_3$ . Sinon,  $\deg(a) = 5$  et d'après le lemme 7.10,  $a$  n'est pas triangulé. Donc  $a$  est un sommet fort. De plus deux des sommet  $b, c, d$  ont degré 11 donc ils donnent chacun un poids 1 à  $v$  d'après la règle  $R_3$ .
  - Si les quatre voisins de  $v$  ont degré au moins 6, alors ce sont tous des sommets forts. D'après l'inégalité  $(\star)$ , soit  $v$  a deux 11-voisins donnant chacun un poids de 1 par la règle  $R_3$ , soit il a trois  $9^+$ -voisins donnant chacun un poids au moins  $\frac{2}{3}$ , soit il a quatre  $8^+$ -voisins donnant chacun un poids au moins  $\frac{1}{2}$  d'après la règle  $R_4$ . □

**Lemme 7.17.** *Les sommets de degré 5 ont un poids positif après l'application des règles de déchargement.*

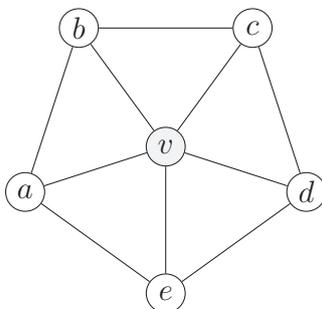


FIGURE 7.6 – Configuration pour le déchargement d'un sommet de degré 5.

*Démonstration.* Soit  $v$  un sommet de degré 5, son poids initial est de  $-1$ . Si  $v$  est incident à une  $4^+$ -face alors  $v$  reçoit un poids au moins 1 de cette face par la règle  $R_1$ . Le cas restant est celui où  $v$  est incident à cinq triangles. On note  $a, b, c, d, e$  les voisins de  $v$  comme sur la figure 7.6. D'après le lemme 7.4,

$$\deg(a) + \deg(b) + \deg(c) + \deg(d) + \deg(e) \geq 2\Delta + 17. \quad (\star\star)$$

Si deux voisins de  $v$  ont degré au moins 12, alors  $v$  reçoit un poids au moins  $\frac{1}{2}$  de chacun d'eux par la règle  $R_3$ .

**Cas 1.** Si  $v$  a un  $12^+$ -voisin, disons  $a$ .

Alors l'inégalité  $(\star\star)$  donne  $\deg(b) + \deg(c) + \deg(d) + \deg(e) \geq \Delta + 17 \geq 29$  donc il y a au plus deux  $5^-$ -sommets dans  $\{b, c, d, e\}$ .

- Si  $v$  a deux  $5^-$ -voisins, soit les deux derniers voisins ont degré 8 et 11, soit ils ont tous les deux degré au moins 9. Dans les deux cas,  $v$  reçoit un poids au moins  $\min\{\frac{1}{4} + \frac{5}{11}, 2 \cdot \frac{1}{3}\} \geq \frac{1}{2}$  de ces deux sommets par les règles  $R_2$  et  $R_4$ , plus au moins  $\frac{1}{2}$  depuis  $a$ .
- Si  $v$  a exactement un  $5^-$ -voisin  $w$  alors, si  $w$  n'est pas adjacent à  $a$ ,  $a$  donne un poids 1 à  $v$  d'après la règle  $R_3$ . Supposons que  $w$  soit adjacent à  $a$ , disons  $w = b$ . Alors  $v$  reçoit un poids  $\frac{1}{2}$  depuis  $a$  d'après la règle  $R_3$ . L'inégalité  $(\star\star)$  donne  $\deg(c) + \deg(d) + \deg(e) \geq 24$ . Comme tous ces sommets sont forts et consécutifs sur la face  $f$ , ils donnent un poids au moins  $\frac{3}{2} \cdot \frac{\omega_0}{11}$  à  $v$ . Comme  $\omega_0(c) + \omega_0(d) + \omega_0(e) = \deg(c) + \deg(d) + \deg(e) - 18 \geq 6$ ,  $v$  reçoit un poids au moins  $\frac{3}{2} \cdot \frac{6}{11} > \frac{1}{2}$  depuis  $\{c, d, e\}$ . Au total,  $v$  reçoit donc un poids au moins égal à 1.
- Si  $v$  n'a pas de  $5^-$ -voisin, alors chaque voisin de  $v$  est fort et donc  $v$  reçoit un poids 1 de  $a$  par la règle  $R_3$ .

**Case 2.** Si  $v$  n'a pas de  $12^+$ -voisin.

Rappelons que d'après l'inégalité  $(\star\star)$ ,  $\deg(a) + \deg(b) + \deg(c) + \deg(d) + \deg(e) \geq 39$  donc  $v$  a au plus deux  $5^-$ -voisins.

- Si  $v$  a deux  $5^-$ -voisins, alors d'après  $(\star\star)$ , les trois autres voisins de  $v$  ont degré au moins 7. Un des cas suivant se produit :
  - Trois voisins de  $v$  ont degré au moins 8, deux d'entre eux sont alors adjacents donc  $v$  reçoit au moins  $2 \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{4}$  de ces sommets par la règle  $R_4$ .
  - Deux voisins de  $v$  ont degré 11 et le dernier a degré 7. Alors,  $v$  reçoit un poids au moins  $2 \cdot \frac{5}{11} + \frac{1}{7} > 1$  d'après les règles  $R_2$ ,  $R_3$  et  $R_4$ .
- Si  $v$  a au plus un  $5^-$ -voisin  $u$ , alors tous les voisins de  $v$  ont au moins un voisin fort adjacent à  $v$ . Alors  $v$  reçoit un poids total au moins  $\frac{3}{2} \sum_{w \in N(v) \setminus \{u\}} \frac{\omega_0(w)}{\deg(w)} \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{34-24}{11} > 1$ .

Dans tous les cas,  $v$  reçoit un poids au moins 1, ce qui conclut la preuve.  $\square$

### 7.4.3 $\Delta \in \{9, 10\}$

**Lemme 7.18.** *Les sommets de degré 3 ont un poids positif après l'application des règles de déchargement.*

*Démonstration.* Soit  $v$  un sommet de degré 3 de poids initial  $-3$ . Tout d'abord,  $v$  ne donne pas de poids. D'après le lemme 7.8,  $v$  n'est pas incident à plus d'un triangle.

Si  $v$  est incident à un triangle, les autres faces incidente à  $v$  ne peuvent pas être toute deux des carrés d'après le lemme 7.9. Donc  $v$  est incident à une  $4^+$ -face et une  $5^+$ -face. D'après la règle  $R_1$ ,  $v$  reçoit un poids au moins 3 de ces faces.

Si  $v$  n'est pas incident à un triangle,  $v$  est incident à trois  $4^+$ -faces et  $v$  reçoit un poids au moins 3 de ces faces d'après la règle  $R_1$ . Dans les deux cas, le poids final de  $v$  est positif.  $\square$

**Lemme 7.19.** *Les sommets de degré 4 ont un poids positif après l'application des règles de déchargement.*

*Démonstration.* Soit  $v$  un sommet de degré 4 de poids initial  $-2$ . Si  $v$  est incident à une  $5^+$ -face ou à deux carrés, alors  $v$  reçoit un poids au moins 2 de ces faces par la règle  $R_1$ . Les deux cas restants sont celui où  $v$  est incident à quatre triangles et celui où  $v$  est incident à un carré et trois triangles.

**Cas 1.** Supposons que  $v$  est incident à un carré. Notons  $a, b, c, d$  les voisins de  $v$  et  $x$  mes dernier sommet du carré comme sur la figure 7.5. Tout d'abord,  $\deg(a) = \Delta$  ou  $\deg(b) = \Delta$  d'après le théorème 7.3 et par le même résultat,  $\deg(x) = \Delta$ . Sans perdre de généralités, supposons que  $\deg(a) = \Delta$ . Le sommet  $v$  reçoit un poids 1 depuis le carré d'après la règle  $R_1$ . Montrons que  $v$  reçoit un poids au moins 1 de  $\{a, b, c, d\}$ .

D'après le lemme 7.4,  $\deg(b) + \deg(c) + \deg(d) \geq \Delta + 14 \geq 23$ . Ainsi, soit  $v$  a deux  $8^+$ -voisins parmi  $\{b, c, d\}$  et reçoit un poids au moins  $\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$ , soit  $b, c, d$  ont degré 9, 7, 7 et  $v$  reçoit un poids  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} \geq 1$  par les règles  $R_3$  et  $R_4$ .

**Cas 2.** Supposons que  $v$  soit incident à quatre triangles. Notons  $a, b, c, d$  les voisins de  $v$  comme sur la figure 7.5. Le lemme 7.4 donne  $\deg(a) + \deg(b) + \deg(c) + \deg(d) \geq 2\Delta + 15 \geq 33$  ( $\star$ ) donc  $v$  a au plus un  $7^-$ -voisin.

Si  $v$  n'a pas de  $10^-$ -voisin, alors tous les voisins de  $v$  ont degré au moins 6 donc sont tous forts. Donc chaque voisin  $w$  de  $v$  donne un poids au moins  $\frac{2\omega_0(w)}{\deg(w)}$  à  $v$ . Au total,  $v$  reçoit un poids de  $2 \cdot \frac{33-24}{9} = 2$ .

Si  $v$  a un  $10^-$ -voisin, disons  $a$  (donc  $\Delta = 10$ ). alors  $\deg(b) + \deg(c) + \deg(d) \geq 25$ . Une des cas suivant se produit :

- Une des sommets parmi  $\{b, c, d\}$ , disons  $c$ , a degré 5 et les deux autres ont degré 10. Alors,  $v$  reçoit un poids  $\frac{4}{5}$  depuis  $a$  d'après la règle  $R_4$  et au moins  $2 \cdot \frac{3}{5}$  depuis  $b$  et  $d$  d'après la règle  $R_4$ .
- Si  $b, c, d$  sont des  $6^+$ -sommets, alors  $v$  n'a que des voisins forts. Donc d'après la règle  $R_4$ ,  $v$  reçoit un poids au moins  $2 \cdot \frac{35-24}{10} > 2$  depuis  $\{a, b, c, d\}$ .

Dans tous les cas,  $v$  reçoit un poids au moins 2 donc son poids final est positif.  $\square$

**Lemme 7.20.** *Les sommets de degré 5 ont un poids positif après l'application des règles de déchargement.*

*Démonstration.* Soit  $v$  un sommet de degré 5, son poids initial est de  $-1$ . Si  $v$  est incident à une  $4^+$ -face, alors  $v$  reçoit un poids au moins 1 de cette face d'après la règle  $R_1$ . Le cas restant est celui où  $v$  est incident à cinq triangles. On note  $a, b, c, d, e$  les voisins de  $v$  comme sur la figure 7.6. Le lemme 7.4 donne  $\deg(a) + \deg(b) + \deg(c) + \deg(d) + \deg(e) \geq 2\Delta + 17$  ( $\star$ ) donc  $v$  a au plus deux  $5^-$ -voisins.

- Si  $v$  a exactement deux  $5^-$ -voisins, alors la somme des degré de ces trois autres voisins est au moins  $2\Delta + 7$ . De plus deux de ces sommets sont adjacents. Si  $v$  a un  $7^-$ -voisin, alors les deux sommets restant ont degré  $\Delta$ . Alors  $v$  reçoit un poids au moins  $\frac{3}{14} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} > 1$  par la règle  $R_4$ . Sinon,  $v$  a trois  $8^+$ -voisins et reçoit au moins  $2 \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = 1$ .
- Si  $v$  a exactement un  $5^-$ -voisin (disons  $a$ ), alors  $b, c, d, e$  sont forts. Par l'inégalité ( $\star$ ), soit ils ont tous degré au moins 7 et  $v$  reçoit un poids au moins  $2 \cdot \frac{2}{7} + 2 \cdot \frac{3}{14} = 1$ , soit trois d'entre eux ont degré au moins 8 et  $v$  reçoit un poids au moins  $\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{8} = 1$ , soit deux d'entre eux ont degré au moins 9 et  $v$  reçoit un poids au moins  $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$  d'après la règle  $R_4$ .
- Si  $v$  n'a pas de  $5^-$ -voisin, alors tous ses voisins sont forts. Donc chaque voisin  $u$  de  $v$  donne un poids  $\frac{2\omega_0(u)}{\deg(u)}$  à  $v$ . Ainsi  $v$  reçoit un poids au moins  $2 \cdot \frac{35-30}{10} = 1$ .

Dans tous les cas,  $v$  reçoit un poids au moins 1 donc son poids final est positif.  $\square$

Nous avons donc prouvé que le poids de chaque face et de chaque sommet est positif. Or les poids ont été définis de façon à ce que la somme totale soit strictement négative. Nous obtenons donc une contradiction, le contre-exemple minimal  $G$  n'existe pas.

## 7.5 Graphes de degré maximal 6

Pour prouver le théorème 6.13, on utilise la même méthode que précédemment. Les poids initiaux et les règles de déchargement sont les mêmes, seules les configurations sont plus générales. Considérons un contre-exemple minimal au théorème 6.13, c'est-à-dire un graphe planaire  $G$  vérifiant  $\Delta(G) \leq 6$  et  $\chi_2(G) > 21$ , minimal pour l'ordre  $\leq$ . Nous présentons tout d'abord une version modifiée du lemme 7.4 dont la preuve est la même que pour le lemme originel.

**Lemme 7.21.** *Le graphe  $G$  ne contient pas de sommet  $v$  tel que, toutes les paires de voisins de  $v$  soient à distance au plus 2 dans  $G - v$ , et  $v$  a au plus 21 voisins à distance 2 dans  $G$ .*

La conséquence est que  $G$  n'a pas de sommet faible.

**Corollaire 7.22.** *Le graphe  $G$  ne contient pas de 5-sommet triangulé, ni de 4-sommet incident à trois triangles et une  $4^-$ -face.*

Pour prouver le théorème, nous avons besoin de la configuration suivante :

**Lemme 7.23.** *Le graphe  $G$  ne contient pas de 3-sommet incident à un triangle.*

*Démonstration.* Si  $G$  contient un 3-sommet  $v$  incident à un triangle, posons  $x$  et  $y$  les deux autres sommets du triangle et  $z$  le dernier sommet adjacent à  $v$ . Soit  $G'$  le graphe obtenu à partir de  $G - v$  en ajoutant une des arêtes  $xz$  ou  $yz$  si elles ne sont pas présentes dans  $G$ .

Par minimalité,  $G'$  admet une coloration à distance 2  $\alpha$  avec au plus  $(2\Delta + 7)$  couleurs. La coloration  $\alpha$  est une coloration partielle de  $G$  et interdit au plus 16 couleurs à  $v$ , ce qui contredit le lemme 7.21.  $\square$

Il est maintenant possible d'atteindre une contradiction, ce qui prouve le théorème 6.13.

**Lemme 7.24.** *Toutes les faces et tous les sommets ont un poids positif après l'application des règles de déchargement.*

*Démonstration.* Tout d'abord, comme  $\Delta \leq 6$ , seule la règle  $R_1$  peut s'appliquer.

- La même preuve que pour le lemme 7.11 donne que le poids final de n'importe quelle face est positif.
- Le graphe  $G$  ne contient pas de sommet de degré 1 ou 2 par les lemmes 7.5 et 7.6.
- D'après le corollaire 7.22 et le lemme 7.23, chaque sommet  $v$  de degré  $d \in \{3, 4, 5\}$  est incident à au moins  $(6 - d) 4^+$ -faces. Donc  $v$  reçoit un poids au moins 1 de chacune de ces faces, donc son poids final est positif.
- Les sommets de degré 6 ne sont pas affectés par la règle donc gardent leur poids initial de 0.  $\square$

## 7.6 Graphes de degré maximal 4

Lorsque nous nous sommes intéressés à ce problème, nous avons commencé par le cas avec  $\Delta$  suffisamment grand, la toute première version de la preuve ne fonctionnant que pour  $\Delta \geq 12$ . L'utilisation de l'ordre spécifique sur les sommets de la définition 7.1 a permis d'obtenir une preuve simple, avec peu de configurations et de règles de déchargement. En revanche, lorsque nous nous sommes concentrés sur le cas  $\Delta = 4$ , pour prouver la borne de 12 couleurs, la première preuve obtenue nécessitait de prouver que plus de 60 configurations étaient interdites. Faire une preuve classique par déchargement avec autant de configurations aurait été fastidieux et probablement sujet à des erreurs, nous avons donc cherché à automatiser au maximum le processus. Le problème d'avoir une preuve longue et répétitive est courant lorsqu'une méthode de déchargement est utilisée, nous avons donc cherché à faire une automatisation la plus générique possible et non limitée à ce problème spécifiquement.

Cette automatisation s'est faite en deux parties, se manifestant par deux programmes. Le premier est un programme qui va chercher des règles de déchargement en fonction de configurations interdites données en entrée. Cette recherche se fait en modélisant le problème sous la forme d'un problème linéaire. Cette modélisation est détaillée dans la section 7.6.1. L'idée du second programme est simple. Le but est de réduire les configurations de manière automatique. Ce programme, décrit dans la section 7.6.2 a permis de réduire automatiquement une partie des configurations. Les autres configurations ont dû être réduites à la main.

Dans tout ce qui suit, on considère l'ordre classique sur les graphes : un graphe  $G_1$  est plus petit que  $G_2$  s'il contient strictement moins de sommets ou le même nombre de sommets et strictement moins d'arêtes. De plus le contre-exemple minimal  $G$  ne contient pas de sommets de degré 1 et 2 d'après les lemmes 7.5 et 7.6 (les mêmes preuves sont valables avec  $\Delta = 4$  et 12 couleurs).

### 7.6.1 Modélisation du problème sous la forme d'un programme linéaire

#### Représentation du graphe

Lors d'une preuve par déchargement, le but est de montrer qu'un contre-exemple minimal à la propriété (ici, être colorable à distance 2 avec 12 couleurs) n'existe pas. Lors de l'utilisation du programme linéaire, on ne représente jamais de graphe, seulement de petites portions. Le but est de prouver que tous les sommets et toutes les faces ont un poids positif après l'application des règles de déchargement. Nous représentons donc uniquement des structures permettant de prouver ces propriétés, des faces/sommets, et les faces/sommets qui leur sont adjacents. La première étape va être de générer toutes ces possibilités de structures (l'ensemble  $D$  dans la suite) qui seront représentées par des chaînes de caractères contenant le type (face ou sommet) de l'élément central et les degrés, dans l'ordre cyclique, des sommets et faces adjacents.

### Encodage des règles

Pour trouver les règles de déchargement et les configurations, nous avons implémenté un algorithme basé sur de la programmation linéaire. Cet algorithme, en prenant en entrée un ensemble de configurations  $\mathcal{C}$ , renvoie, s'il existe, un ensemble de règles de déchargement tel que chaque sommet n'appartenant pas à une configuration ait un poids positif après l'application de ces règles. S'il n'existe pas de tel ensemble de règles, l'ensemble de configurations  $\mathcal{C}$  doit être enrichi et l'algorithme renvoie des nouvelles configurations candidates.

Nous encodons les règles de déchargement en utilisant les variables d'un programme linéaire pour représenter la quantité de poids déplacée. Le fait que les poids finaux doivent être positifs sont des contraintes du programme. Il existe une infinité de façon de transférer les poids, pour limiter l'explosion combinatoire, notre programme est restreint à des règles locales. Les poids ne peuvent être transférés qu'entre des faces et des sommets adjacents/incidents. Il serait possible de considérer des règles plus générales mais cela aurait un coût en termes de temps de calcul. Néanmoins, cette limitation semble raisonnable : la plupart des preuves par déchargement connues n'utilisent que ce type de règles. En revanche, cette limitation ne permet pas de se réduire à un problème fini comme il existe une infinité de types de voisinages possibles pour un sommet. On verra dans la suite comment représenter ces types de voisinages pour ne garder qu'un nombre fini de représentations.

**Poids initiaux** Initialement, les sommets et les faces  $x$  reçoivent chacun un poids  $\deg(x) - \alpha$ , avec  $\alpha$  une variable du programme linéaire que l'on souhaite maximiser. Les contraintes du programme linéaire vont dépendre de l'ensemble de configurations  $\mathcal{C}$  donné en entrée. Chaque configuration apparaissant dans  $\mathcal{C}$  va permettre de supprimer des contraintes du programme linéaire. L'objectif est d'avoir un programme vérifiant le théorème suivant.

**Théorème 7.25.** *Soit  $P$  le programme linéaire créé depuis un ensemble  $\mathcal{C}$  de configurations, et  $\alpha^*$  la valeur optimale de  $\alpha$  pour  $P$ . Alors il existe un ensemble de règles de déchargement tel que, appliqué à  $G$  un graphe planaire de degré maximal 4 ne contenant pas de configurations de  $\mathcal{C}$ , tous les sommets et faces  $x$  de  $G$  ont un poids positif si leurs poids initiaux sont  $\deg_G(x) - \alpha^*$ .*

On peut voir  $\alpha$  comme une mesure de la distance à une preuve. Pour les graphes planaires, si l'on trouve un ensemble de configurations  $\mathcal{C}$  tel que  $\alpha \geq 4$ , on a que la charge totale est négative par l'inégalité suivante, conséquence de la formule d'Euler.

$$\sum_{x \in V(G) \cup F(G)} (\deg(x) - 4) = -8 \quad (7.1)$$

En supposant que le théorème 7.25 soit vrai, on obtient une contradiction et la non-existence d'un contre-exemple minimal.

Dans la suite de la section, on définit le programme linéaire  $P$  du théorème 7.25.

**Variables du programme linéaire** Le programme ne sélectionne pas la forme des règles de déchargement, celles-ci sont choisies en amont. Les règles que nous avons choisies vérifient deux propriétés : elles sont locales (un sommet ou une face ne donne du poids qu'à un sommet ou une face adjacente/incidente) et de sorte que ce sont uniquement les  $5^+$ - faces qui donnent du poids. Comme le degré maximal du graphe est 4, tous les sommets ont un poids initial négatif ou nul si  $\alpha \geq 4$ , ainsi les  $5^+$ - faces sont les seules à avoir un poids initial strictement positif. Ces restrictions sont faites dans un but d'efficacité du programme, on pourrait imaginer d'autres formes de règles. On peut néanmoins remarquer que les règles utilisées pour la preuve du théorème 6.12 vérifient toutes les propriétés que nous imposons ici.

On autorise trois types de règles de déchargement, avec  $d \geq 5$ , et  $(\ell, r, \ell', r') \in \mathbb{N}_{\geq 3}^4$ , la notation  $3v$  signifiant un sommet de degré exactement 3 :

- Une  $d$ -face  $x$  donne un poids  $\omega_{d,\ell,3v,r}$  à chaque 3-sommet incident  $y$  si  $y$  est aussi incident à une  $\ell$ -face et une  $r$ -face (voir la figure 7.7(a)).
- Une  $d$ -face  $x$  donne un poids  $\omega_{d,\ell,3,r}$  à chaque 3-face sommet-adjacente  $y$  s'il y a une  $\ell$ -face arête-adjacente à  $x$  et  $y$ , et une  $r$ -face arête-adjacente à  $x$  et  $y$  (voir la figure 7.7(b)).
- Une  $d$ -face  $x$  donne un poids  $\omega_{d,\ell,\ell',3,r',r}$  à chaque 3-face arête-adjacente  $y$  si  $x$  et  $y$  ont les 4-sommets communs  $u$  et  $v$  tels que,  $u$  est incident à une  $\ell$ -face arête adjacente à  $x$  et une  $\ell'$ -face sommet-adjacente à  $x$ , et  $v$  est incident à une  $r$ -face arête adjacente à  $x$  et une  $r'$ -face sommet-adjacente à  $x$  (voir la figure 7.7(c)).

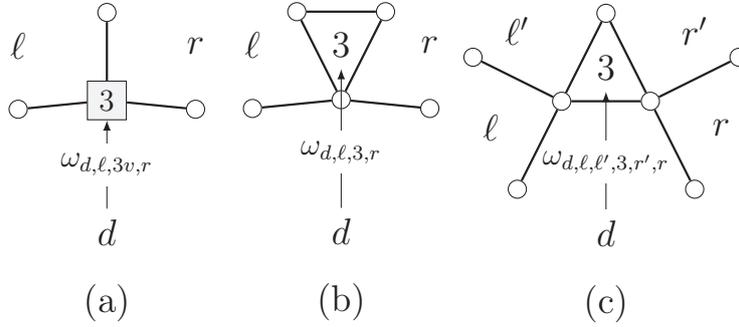


FIGURE 7.7 – Les trois types de règles de déchargement.

Nous définissons les variables inverses définissant quel poids une 3-face ou un 3-sommet reçoit d'après les règles précédentes. Nous définissons les poids  $\omega_{3v,r,d,\ell} = -\omega_{d,\ell,3v,r}$  qu'un 3-sommet reçoit d'une  $d$ -face incidente,  $\omega_{3,r,d,\ell} = -\omega_{d,\ell,3,r}$  qu'une 3-face reçoit d'une sommet-adjacente  $d$ -face et  $\omega_{3,r',r,d,\ell,\ell'} = -\omega_{d,\ell,\ell',3,r',r}$  qu'une 3-face reçoit d'une arête-adjacente  $d$ -face. Les règles définies sont symétrique dans le sens où  $\omega_{d,\ell,d',r} = \omega_{d,r,d',\ell}$  et  $\omega_{d,\ell,\ell',d',r',r} = \omega_{d,r,r',d',\ell',\ell}$ .

Soit  $I = \mathbb{N}_{\geq 5} \times \mathbb{N}_{\geq 3} \times \{3, 3v\} \times \mathbb{N}_{\geq 3} \cup \mathbb{N}_{\geq 5} \times \mathbb{N}_{\geq 3}^2 \times \{3\} \times \mathbb{N}_{\geq 3}^2$  l'ensemble des indices possibles pour  $\omega$ . Nous définissons une règle de déchargement pour chaque  $i \in I$ . On

associe le poids  $\omega_i$  déplacé par cette règle à une variable du programme linéaire, une solution du programme linéaire va assigner à chaque règle la valeur du poids transféré.

**Contraintes du programme linéaire** Les contraintes du programme linéaire vont capturer le fait que les sommets et les faces doivent avoir un poids positif après l'application des règles de déchargement.

Pour savoir comment les poids sont modifiés autour d'un sommet, il faut prendre en compte son voisinage. Une *configuration autour* d'une  $d$ -face  $f = [v_1, \dots, v_d]$  (voir la figure 7.8) est un  $2d$ -uplet  $[d_i]_{1 \leq i \leq 2d} \in (\{3v\} \cup \mathbb{N}_{\geq 3})^{2d}$  tel que, pour tout  $1 \leq i \leq d$  :

- si  $v_i$  est un 3-sommet,  $d_{2i-1} = 3v$ .
- si  $v_i$  est un 4-sommet, la face sommet-adjacente à  $f$  avec le sommet commun  $v_i$  est une  $d_{2i-1}$ -face.
- la face arête-adjacente à  $f$  avec l'arête commune  $v_i v_{i+1}$  est une  $d_{2i-2}$ -face.

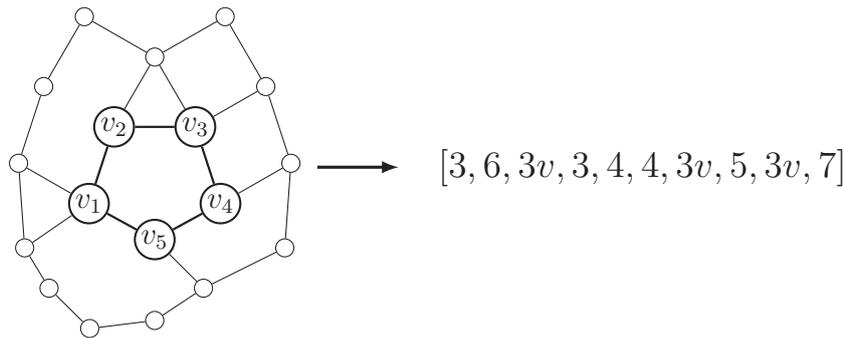


FIGURE 7.8 – Exemple d'une configuration autour d'une 5-face.

Une *configuration autour* d'un 3-sommet  $v$  est un triplet d'entiers correspondant aux degrés des faces incidentes à  $v$ .

On explique maintenant ce que sont les contraintes du programme linéaire, de façon à ce que les poids finaux soient positifs. Ainsi, les charges transférées  $(\omega_i)_{i \in I}$  doivent satisfaire les contraintes suivantes.

Soit  $f$  une face de degré  $d$ . Pour chaque configuration  $[d_i]_{i \leq 2d}$  autour de  $f$ , on peut construire l'ensemble des indices des règles  $I([d_i]_{i \leq 2d}) \subseteq I$  qui seront appliquées à  $f$ . Pour avoir un poids final positif pour  $f$  ayant un poids initial  $d - \alpha$ , les poids transférés  $(\omega_i)_{i \in I}$  doivent vérifier, pour chaque configuration possible,

$$(d - \alpha) - \sum_{i \in I([d_i]_{i \leq 2d})} \omega_i \geq 0 \quad (\star)$$

De même, les contraintes d'une configuration autour d'un 3-sommet sont de la forme :

$$(3 - \alpha) - \sum_{i \in I(\{d_i\}_{i \leq 3})} \omega_i \geq 0 \quad (**)$$

Il n'y a pas de contraintes associées aux sommets de degré 1, 2 ou 4. Les sommets de degré 1 et 2 ne peuvent pas apparaître dans  $G$  d'après les lemmes 7.5 et 7.6 (les mêmes preuves sont valables avec  $\Delta = 4$  et 12 couleurs). Les sommets de degré 4 ne sont pas affectés par les règles : aucun poids n'est pris ou reçu par ces sommets, donc si  $\alpha = 4$ , leur poids initial et final est de 0.

### Réduction du programme linéaire

L'encodage actuel contient un nombre infini de variables et de configurations, ce qui rend sa mise en oeuvre impossible. Nous allons réduire le nombre de variables du programme, ce qui a comme conséquence de diminuer sa puissance et ne permet que de prouver qu'une version affaiblie du théorème 7.25 (en ajoutant des hypothèses sur l'ensemble  $\mathcal{C}$ ). Les solutions de ce programme réduit sont des solutions du programme initial mais la réciproque n'est pas vraie en raison de la réduction du nombre de variables. Il faut donc trouver un équilibre entre garder un programme dont la solution soit intéressante et un temps de calcul raisonnable.

La réduction est double. Premièrement, nous réduisons le nombre de variables. On le fait en ne considérant pas la taille exacte des faces si leur degré est plus grand qu'un certain seuil. Dans notre cas, on fixe ce seuil à six, c'est-à-dire que l'on ne fait pas la différence entre hexagone, heptagone, octogone... Plus précisément, lorsque l'on considère les variables  $\omega_{d,\ell,3v,r}, \omega_{d,\ell,3,r}, \omega_{d,\ell,\ell',3,r',r}$ , on suppose que  $d \in \{5, 6^+\}$  et  $(\ell, r, \ell', r') \in \{3, 4, 5, 6^+\}^4$ , ce qui donne un nombre fini de variables au programme linéaire.

Nous réduisons ensuite le nombre de contraintes. Comme les règles que l'on considère sont locales, il y a au plus  $4^3$  configurations à considérer pour un 3-sommet et, pour tout  $d \geq 3$ , au plus  $5^{2d}$  configurations pour une  $d$ -face. Comme la valeur de  $d$  peut être arbitrairement grande, cela peut donner un nombre infini de contraintes.

Pour se ramener à un nombre fini de contraintes, on exhibe six règles de déchargement qui impliquent que le poids final des  $6^+$ -faces est positif. Cela nous permet de remplacer toutes les contraintes des faces de degré au moins 6 en fixant les valeurs de certaines contraintes du programme linéaire et en montrant qu'un ensemble de configurations  $\mathcal{C}_{6^+}$  est réductible. Une configuration est dite *réductible* si elle n'apparaît pas dans  $G$ .

Nous définissons un ensemble de six règles de déchargement  $\mathbf{T}$  pour les  $6^+$ -faces comme suit.

- T1** Une  $6^+$ -face donne un poids  $\frac{2}{3}$  à chaque 3-sommet incident.
- T2** Une  $6^+$ -face  $f$  donne un poids  $\frac{2}{3}$  à chaque 3-face  $x$  arête-adjacente s'il y a une 3-face vertex-adjacente à  $f$  et arête-adjacente à  $x$ .

- T3** Une  $6^+$ -face  $f$  donne un poids  $\frac{2}{3}$  à chaque 3-face  $x$  arête-adjacente si  $f$  et  $x$  ont un sommet commun incident à deux 4-faces.
- T4** Une  $6^+$ -face  $f$  donne un poids  $\frac{1}{3}$  à chaque 3-face  $x$  arête adjacente si les cas **T2** et **T3** ne s'appliquent pas.
- T5** Une  $6^+$ -face  $f$  donne un poids  $\frac{1}{3}$  à chaque 3-face  $x$  sommet-adjacente s'il y a une 4-face arête-adjacente à  $f$  et  $x$ .
- T6** Une  $6^+$ -face  $f$  donne un poids 0 à chaque vertex-adjacent 3-face  $x$  sommet-adjacent si **T5** ne s'applique pas.

Du point de vue du programme linéaire, cela revient à fixer certaines variables. Plus précisément si  $(\ell, r, \ell', r') \in \{3, 4, 5, 6^+\}^4$ , on pose

$$\mathbf{T1} \quad \omega_{6^+, \ell, 3v, r} = \frac{2}{3}.$$

$$\mathbf{T2} \quad \omega_{6^+, \ell', \ell, 3, 3, r'} = \omega_{6^+, \ell', 3, 3, 3, r'} = \omega_{6^+, \ell', 3, 3, r, r'} = \frac{2}{3}.$$

$$\mathbf{T3} \quad \omega_{6^+, \ell', \ell, 3, 4, 4} = \omega_{6^+, 4, 4, 3, r, r'} = \frac{2}{3}.$$

$$\mathbf{T4} \quad \text{Si } \ell \neq 3, r \neq 3, (\ell', \ell) \neq (4, 4) \text{ et } (r, r') \neq (4, 4), \text{ alors } \omega_{6^+, \ell', \ell, 3, r, r'} = \frac{1}{3}.$$

$$\mathbf{T5} \quad \omega_{6^+, \ell, 3, 4} = \omega_{6^+, 4, 3, r} = \frac{1}{3}.$$

$$\mathbf{T6} \quad \text{Si } \ell \neq 4 \text{ et } r \neq 4, \text{ alors } \omega_{6^+, \ell, 3, r} = 0.$$

La règle **T6** (sans transfert de poids) est nécessaire pour assurer que le poids final des  $6^+$ -faces est positif. Sans cette règle, le résultat suivant ne serait pas vrai.

**Lemme 7.26.** *Supposons que les poids transférés  $(\omega_i)_{i \in I}$  vérifient les règles **T**. Il y a un ensemble fini de configurations  $\mathcal{C}_{6^+}$  tel que, pour chaque graphe planaire de degré maximal 4 ne contenant pas de configuration de  $\mathcal{C}_{6^+}$ , le poids final de chaque  $6^+$ -face est positif.*

En supposant le lemme 7.26, on obtient le théorème 7.25 en considérant un ensemble de configurations contenant  $\mathcal{C}_{6^+}$ . En effet, le programme linéaire réduit vérifie **T**, ce qui garantit que les règles que l'on obtient donnent un poids positif pour les  $6^+$ -faces. Les contraintes sur les  $5^-$ -faces et les 3-sommets restent inchangées donc ces faces et sommets finissent avec un poids positif. Il reste donc à prouver le lemme 7.26.

*Démonstration.* Soit  $f$  une face de degré  $d \geq 6$ , avec un poids initial de  $d - 4$ . On analyse combien de poids est perdu par  $f$  par l'application des règles **T1-T6**. Pour cela, on considère que les poids transitent avant d'arriver à leur destination finale. Plus précisément, on reformule les règles pour que les poids transitent à travers des arêtes de la frontière de  $f$ . Ainsi,  $f$  donne du poids aux arêtes et ensuite les arêtes donnent ce poids aux 3-faces et aux 3-sommets. Cette reformulation permet de simplifier l'analyse des poids quittant  $f$ .

On considère les différents cas dans lesquels les règles s'appliquent (voir la figure 7.9) :

- Si  $f$  donne un poids  $\frac{2}{3}$  à un 3-sommet incident  $v$  par **T1**, on considère que  $f$  donne  $\frac{1}{3}$  à chacune des arêtes incidente à  $v$  qui sont sur la frontière de  $f$ .

- Si  $f$  donne un poids à une 3-face  $x$  arête-adjacente par **T2-T4**, on donne tout d'abord un poids  $\frac{1}{3}$  à l'arête commune  $e$ . Si de plus **T2** ou **T3** s'applique, on sépare le poids restant de  $\frac{1}{3}$  entre les arêtes de  $f$  incidente à  $e$  si leur sommet commun vérifie les conditions de la règle.
- Si  $f$  donne un poids à une 3-face sommet-adjacente  $x$  par **T5**, on note  $v$  leur voisin commun et  $y$  la 4-face arête-adjacente à  $x$  et  $f$ . Si  $f$  est sommet-adjacent à une autre 3-face partageant une arête avec  $y$ , alors  $f$  donne un poids  $\frac{1}{6}$  à chaque arête incidente à  $f$  et  $v$ . Sinon,  $f$  donne un poids  $\frac{1}{3}$  à son arête commune avec  $y$ .

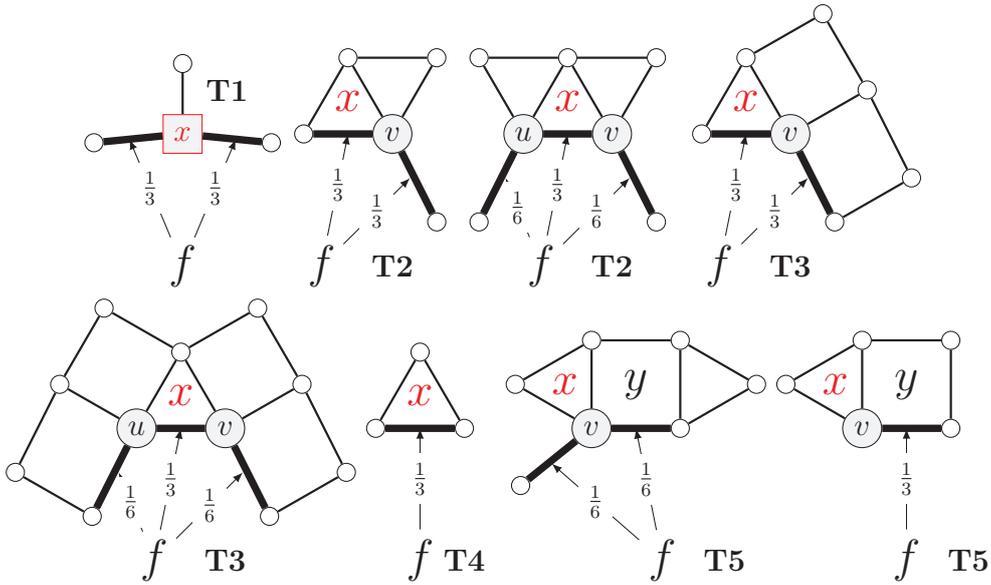


FIGURE 7.9 – Poids transférés depuis une 6<sup>+</sup>-face  $f$  à  $x$  (3-sommet ou 3-face) en passant par les arêtes.

Soit  $\mathcal{C}_{6+}$  l'ensemble des configurations telles qu'un poids de plus de  $\frac{1}{3}$  transite à travers une arête. Remarquons que la quantité de poids transitant par une arête  $uv$  dépend seulement des configurations des 4<sup>-</sup>-faces incidentes à  $u$  et  $v$ . Ainsi,  $\mathcal{C}_{6+}$  contient un nombre fini de configurations.

Si aucune de ces configurations n'apparaît dans  $G$ , alors un poids d'au plus  $\frac{1}{3}$  transite à travers chacune des  $d$  arêtes. Alors, le poids final de  $f$  est  $d - 4 - \frac{d}{3}$ , positif dès que  $d \geq 6$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

Il reste donc à réduire les configurations de  $\mathcal{C}_{6+}$ . Cette réduction est fait dans la section 7.6.2.

### Algorithme final

Nous présentons maintenant le programme. Soit  $D$  l'ensemble des configurations autour des faces et des 3-sommets représentés par les cycles  $[d_i]$  et soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble

des configurations interdites. Pour chaque configuration  $[d_i]$  de  $D \setminus \mathcal{C}$ , on pose une contrainte de la forme  $(\star)$  ou  $(\star\star)$ . On résout alors le programme linéaire suivant

$$\begin{aligned} & \max_{\alpha, \omega} \alpha \quad \text{tel que} \\ & (d - \alpha) - \sum_{i \in I([d_i]_{i \leq 2d})} \omega_i \geq 0 \quad \text{pour } d \geq 3 \text{ et } [d_i]_{i \leq 2d} \in D \setminus \mathcal{C} \\ & (3 - \alpha) - \sum_{i \in I([d_i]_{i \leq 3})} \omega_i \geq 0 \quad \text{pour } [d_i]_{i \leq 3} \in D \setminus \mathcal{C} \end{aligned}$$

Le programme linéaire renvoie la valeur maximale  $\alpha$  et un ensemble de poids  $(\omega_i)_{i \in I}$  tels que chaque face et sommet qui ne soit pas dans une configuration de  $\mathcal{C}$  ait un poids final positif après l'application des règles avec les poids  $(\omega_i)_{i \in I}$ .

Si la valeur  $\alpha$  renvoyée est au moins égale à 4, alors les contraintes sont vérifiées en particulier pour  $\alpha = 4$ . Dans ce cas, chaque face et sommet qui n'est pas dans une configuration de  $\mathcal{C}$  a un poids final positif si les poids initiaux sont  $\deg(x) - 4$ . Le poids total est négatif d'après la formule d'Euler (6.6). Si on prouve que chaque configuration de  $\mathcal{C}$  est réductible, cela permet de conclure.

Dans le cas contraire, notre algorithme renvoie un ensemble de contraintes, chacune correspondant à une configuration de  $D$ . Le but est de prouver que certaines de ces configurations sont réductibles, afin de pouvoir supprimer les contraintes correspondantes du programme linéaire (ces configurations sont ajoutées à l'ensemble  $\mathcal{C}$ ). Avec moins de contraintes, on peut espérer augmenter la valeur de  $\alpha$ .

Le procédé est répété jusqu'à obtenir  $\alpha \geq 4$  (ce qui prouve le théorème), ou à ne pas réussir à réduire de configuration (si le programme a été trop réduit pour aboutir à une preuve). La figure 7.10 résume le fonctionnement du programme.

## 7.6.2 Réduction des configurations

Notre modélisation nécessite de réduire des configurations à chaque étape du programme linéaire, ainsi que les configurations de  $\mathcal{C}_{6+}$ . Pour automatiser cela, nous avons développé un programme basé sur une heuristique, permettant de réduire 28 des 40 configurations de  $\mathcal{C}$  générées au fur et à mesure des exécutions. Les 12 configurations restantes ont dû être réduites à la main. Pour réduire les configurations de  $\mathcal{C}_{6+}$ , on montre que si  $G$  contient une configuration de  $\mathcal{C}_{6+}$ ,  $G$  contient une configuration de  $\mathcal{C}$ .

### Algorithme heuristique

**Réduction des configurations** Nous commençons par décrire une méthode générique pour réduire une configuration  $C$ . Le but est, supposant que le contre-exemple minimal  $G$  contient la configuration  $C$ , d'exhiber un graphe  $G_C$  avec moins de sommets (ou d'arêtes) que  $G$  et une coloration  $\alpha$  à distance 2 de  $G_C$  avec 12 couleurs (qui existe par minimalité) qui s'étende à une coloration de  $G$ .

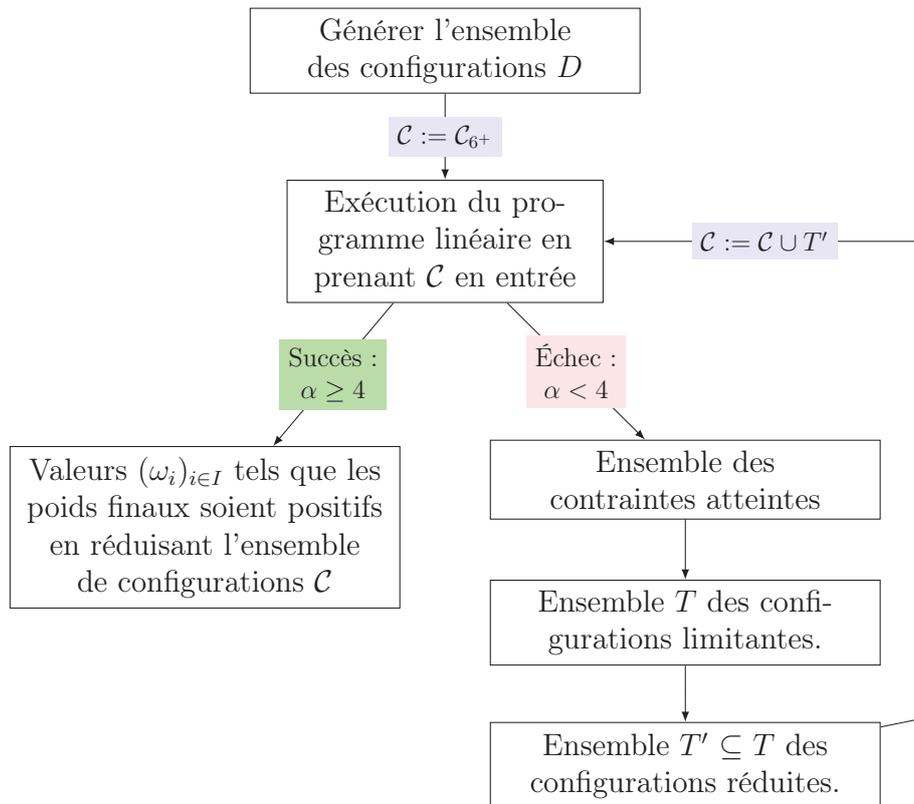


FIGURE 7.10 – Vision schématique de l'utilisation du programme linéaire.

En général,  $G_C$  sera défini en supprimant certains sommets de la configuration  $C$ .

Pour chaque sommet  $v \in C$ , la coloration  $\alpha$  interdit des couleurs à  $v$  de sorte que l'on puisse définir  $L(v)$  comme l'ensemble des *couleurs libres* de  $v$ , qui est l'ensemble des couleurs  $c$  telles qu'aucun sommet à distance au plus 2 de  $v$  dans  $G_C$  ne soit coloré de la couleur  $c$ . Chaque ensemble  $L(v)$  a une taille minimale  $\ell(v)$  qui est le nombre total de couleurs moins le nombre de sommets de  $G_C$  à distance au plus 2 de  $v$ .

Soit  $H$  le graphe dont les sommets sont les sommets non-colorés de  $G$ , avec une arête entre deux sommets s'ils sont à distance 2 dans  $G$ . Soit  $\ell$  la fonction qui à chaque sommet  $v \in H$  associe la valeur  $\ell(v)$ . Le but est de montrer que  $H$  est  $\ell$ -liste-colorable. Cela assure que toute coloration de  $G_C$  peut être étendue à  $G$ , prouvant que  $C$  est réductible.

**Définition 7.27** (Coloration de liste). *Soient  $G$  un graphe et une fonction  $\ell$ , qui à chaque sommet associe une liste de couleurs. Le graphe  $G$  est  $\ell$ -liste-colorable s'il existe une coloration propre  $\alpha$  de  $G$  telle que, pour tout sommet  $v$  de  $G$ ,  $\alpha(v) \in \ell(v)$ .*

Le problème de coloration de liste est connu pour être NP-complet [GJ79]. Au lieu de le résoudre exactement, nous implémentons un algorithme  $\mathcal{A}$  basé sur une heuristique. Étant donné un graphe  $H$  et  $\ell : V(H) \mapsto \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{A}(H, \ell)$  renvoie **Vrai**, alors  $H$  est  $\ell$ -liste-colorable. On applique  $\mathcal{A}$  pour chacune des 40 configurations données par le programme linéaire. Si l'algorithme  $\mathcal{A}$  renvoie **Vrai**, on sait que la configuration est réductible, en revanche une réponse négative n'implique pas que la configuration ne peut pas être réduite.

Dans la suite, on présente des techniques utilisées par l'algorithme  $\mathcal{A}$ . Pour simplifier, on présente ces techniques pour une coloration classique (coloration à distance 1). Ce n'est pas une restriction car une coloration à distance 2 de  $H$  est une coloration à distance 1 de  $H^2$ . L'idée, présentée de façon simplifiée, est de savoir s'il est possible de colorer le graphe en ne considérant que la longueur des listes et non pas les couleurs qui composent les listes.

**Sommets joyeux** Certains sommets sont faciles à colorer, on veut rapidement les colorer pour se concentrer sur les sommets les plus difficiles. Soit  $H$  un graphe et  $\ell : V(H) \mapsto \mathbb{N}$ . Un sommet  $v$  est *joyeux* dans  $H$  pour  $\ell$  si  $|\ell(v)| > \deg(v)$ . Soit  $v$  un sommet joyeux de  $H$  pour  $\ell$ . Toute coloration de  $H - v$  peut être étendue en colorant  $v$  pour toute liste de longueur  $|\ell(v)|$  comme au plus  $\deg(v) < |\ell(v)|$  couleurs sont interdites à  $v$ . Donc, si  $H - v$  est  $\ell$ -liste-colorable,  $H$  est  $\ell$ -liste-colorable. Ainsi, au lieu de considérer  $H$ , on peut supprimer les sommets joyeux et colorer le reste du graphe, ce qui donne le résultat suivant :

**Lemme 7.28.** *Soit  $v$  un sommet joyeux d'un graphe  $H$  pour une fonction  $\ell : V(H) \mapsto \mathbb{N}$ . Si  $H - v$  est  $\ell$ -liste-colorable, alors  $H$  est  $\ell$ -liste-colorable.*

**Colorer un sommet** Soit  $H$  un graphe,  $l$  une liste d'affectations et  $v \in V(H)$ . Supposons que l'on veuille colorer  $v$  d'une couleur  $c \in l(v)$ . Pour chaque voisin  $u$  de  $v$  tel que  $c \in l(u)$ , le nombre de couleurs libres pour  $u$  décroît de 1.

On pose  $\ell_{v,c} : V(H) \mapsto \mathbb{N}$  le nombre de couleurs restantes, c'est-à-dire  $\ell_{v,c}(u) = |\ell(u) \setminus c|$  si  $u$  est un voisin de  $v$ , et  $\ell_{v,c}(u) = |\ell(u)|$  sinon. Comme réduire la taille des listes ne peut rendre le problème que plus difficile, on peut supposer que tous les voisins  $u$  de  $v$  perdent une couleur, donc que  $\ell_{v,c}(u) = \ell(u) - 1$ . De plus, si  $H - v$  est colorable par des listes de taille  $\ell$ , alors on peut colorer  $H$  en colorant  $v$  de la couleur  $c$ , supprimer  $c$  des listes des voisins de  $v$  et colorer  $H - v$ .

**Lemme 7.29.** *Soient  $v$  un sommet de  $H$  et  $f : V(H) \mapsto \mathbb{N}$ . Soit  $\ell_v : V(H - v) \mapsto \mathbb{N}$  définie pour  $u \neq v$  par  $\ell_v(u) = \ell(u) - 1$  si  $u \in N(v)$  et  $\ell_v(u) = \ell(u)$  sinon. Si  $H - v$  est  $\ell_v$ -liste-colorable, alors  $H$  est  $\ell$ -liste-colorable.*

**Matrice d'inclusion** On définit une *matrice d'inclusion* de  $(H, \ell)$  comme une matrice carrée de taille  $|V(H)|$  à coefficients dans  $\{0, 1\}$  telle que, pour  $u, v \in V(H)$  :

$$M(u, v) = 1 \implies (L(v) \not\subseteq L(u) \implies H \text{ est } \ell\text{-liste-colorable})$$

On peut remarquer que la matrice identité est une matrice d'inclusion. De plus, si  $\ell(u) < \ell(v)$ , alors  $L(v) \not\subseteq L(u)$ . On obtient donc le résultat suivant :

**Lemme 7.30.** *Soit  $M$  une matrice d'inclusion de  $(H, \ell)$ . Supposons qu'il existe deux sommets  $u$  et  $v$  tels que  $M(u, v) = 1$  et  $\ell(u) < \ell(v)$ . Alors  $H$  est  $\ell$ -liste-colorable.*

**Arêtes additionnelles** Les 28 configurations qui sont réduites de façon automatique sont présentées dans la figure 7.11 comme des graphes, mais il faut prendre en compte que certains sommets peuvent être identifiés ou à distance au plus 2 par des sommets qui n'apparaissent pas sur la représentation.

Si deux sommets sont identifiés sur un graphe de la figure 7.11, cela donne soit une configuration plus petite, soit un cycle séparateur.

**Cycles séparateurs** Nous énonçons le résultat concernant les cycles séparateurs, la preuve se fait par une analyse de cas assez longue qui n'est pas présentée ici. Elle est détaillée dans [Bou+22]. Chaque cycle de  $G$  sépare  $G$  en deux sous-graphes. Soit  $C$  un cycle séparateur de  $G$ , un sommet de  $C$  est *déséquilibré* si tous ses voisins de  $V(G) \setminus C$  sont dans le même sous-graphe, il est *équilibré* sinon. On dit qu'un cycle séparateur est *k-équilibré* si au moins  $k$  sommets de  $C$  sont équilibrés.

**Théorème 7.31.** *Le graphe  $G$  ne contient pas cycle séparateur 4-équilibré de taille au plus 5.*

Nous nous concentrons maintenant sur le cas où des arêtes additionnelles ne sont pas présentes.

Soient  $H$  un graphe, une fonction  $\ell : V(H) \rightarrow \mathbb{N}$ , et  $u, v$  deux sommets non-adjacent dans  $H$ . On définit  $\ell' : V(H) \rightarrow \mathbb{N}$  où  $\ell'(w) = \ell(w)$  si  $w \notin \{u, v\}$  et  $\ell'(w) = \ell(w) + 1$  sinon. On peut remarquer que si  $u$  est joyeux dans  $H$  pour  $\ell$  alors  $u$  est aussi joyeux

dans  $H \cup \{uv\}$  pour  $\ell'$ . De même, si on colore  $u$  dans  $H$ , la fonction  $\ell_u$  définie dans le lemme 7.29 coïncides avec la fonction  $\ell'_u$  obtenue en colorant  $u$  dans  $H \cup \{uv\}$ . Ainsi, les résultats des lemmes 7.28 et 7.29 ne sont pas modifiés par l'ajout d'arêtes à  $H$  si la fonction  $\ell$  est modifiée en fonction.

Ce n'est pas forcément vrai pour le lemme 7.30. En effet, soient  $M$  une matrice d'inclusion de  $(H, \ell)$  et  $u, v$  deux sommets tels que  $M(u, v) = 1$  et  $\ell(u) < \ell(v)$ , alors d'après le lemme 7.30,  $H$  est  $\ell$ -liste-colorable. Si on ajoute des arêtes à  $H$ , cela peut augmenter la valeur de  $\ell(u)$  sans augmenter celle de  $\ell(v)$ , rendant ainsi le lemme 7.30 inapplicable sur ce nouveau graphe. Pour éviter ce problème, on utilise une version plus faible qui est compatible avec l'ajout d'arêtes dans  $H$  si la fonction  $\ell$  est modifiée en fonction.

**Lemme 7.32.** *Soient  $M$  une matrice d'inclusion de  $(H, \ell)$  et  $u, v$  deux sommets de  $H$  tels que  $M(u, v) = 1$  et  $\deg(u) < \ell(v)$ . Si  $H - u$  est  $\ell$ -liste-colorable, alors  $H$  est  $\ell$ -liste-colorable.*

**Algorithme** Soient  $H$  un graphe et  $\ell : V(H) \mapsto \mathbb{N}$  une fonction représentant le nombre de couleurs libres pour chaque sommet. D'après les résultats précédents, si l'algorithme 1, (l'algorithme  $\mathcal{A}$ ), renvoie **Vrai**, alors  $H$  est  $\ell$ -liste-colorable.

---

**Algorithme 1 :  $\mathcal{A}(H, \ell)$**

---

**Require:** Un graphe  $H$  et une fonction  $\ell : V(H) \mapsto \mathbb{N}$ .

**Ensure:** Si la sortie est **Vrai**, alors  $H$  est  $\ell$ -liste-colorable.

- 1: **if**  $H$  est vide **then**
  - 2:   **return** **Vrai**
  - 3: **else if**  $H$  a un sommet  $v$  tel que  $\ell(v) \leq 0$  **then**
  - 4:   **return** **Faux** (comme  $v$  n'a aucune couleur disponible)
  - 5: **else if**  $H$  contient un sommet joyeux  $v$  **then**
  - 6:   **return**  $\mathcal{A}(H - v, \ell)$
  - 7: Calculer une matrice d'inclusion  $M$  de  $(H, \ell)$  (voir paragraphe suivant).
  - 8: **if** Il y a deux sommets  $u, v$  tels que  $M(u, v) = 1$ ,  $\deg(u) < \ell(v)$  et  $\mathcal{A}(H - u, \ell)$  **then**
  - 9:   **return** **Vrai**
  - 10: **return** **Faux**
- 

**Calcul d'une matrice d'inclusion** L'algorithme  $\mathcal{A}$  calcule une matrice d'inclusion  $M$  pour  $(H, \ell)$  de la façon suivante. On initialise  $M$  par la matrice identité de taille  $|V(H)|$ . L'algorithme va ensuite considérer toutes les paires de sommets  $u, v$  vérifiant  $M(u, v) = 0$  et déterminer s'il faut mettre à jour la valeur à  $M(u, v) = 1$ , c'est-à-dire si  $(L(v) \not\subseteq L(u) \implies H \text{ est } \ell\text{-liste-colorable})$ .

Montrons comment l'algorithme procède pour décider la propriété  $(L(v) \not\subseteq L(u) \implies H \text{ est } \ell\text{-liste-colorable})$  pour une paire de sommets  $u, v$ .

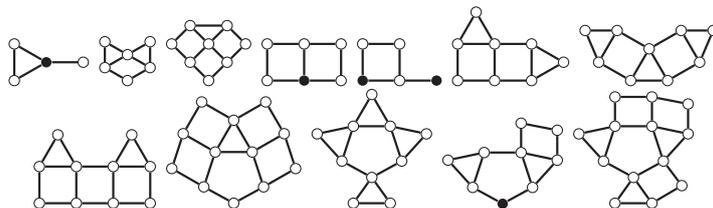


FIGURE 7.12 – Les douze configurations qui ne sont pas réduites automatiquement. Les sommets noirs ont degré 3, les autres sommets peuvent avoir degré 3 ou 4.

Supposons que  $L(v)$  ne soit pas inclus dans  $L(u)$ . On peut alors colorer  $v$  avec une couleur  $c \notin L(u)$  et alors  $|L(u)|$  n'est pas modifié. De plus, pour chaque voisin  $w$  de  $v$  tel que  $M(u, w) = 1$ , il y a deux possibilités. Soit  $c \in L(w)$  donc  $L(w) \not\subseteq L(u)$  et  $H$  est  $\ell$ -liste-colorable comme  $M(u, w) = 1$ . Sinon,  $c \notin L(w)$  et  $|L(w)|$  n'est pas modifié quand  $v$  est coloré de la couleur  $c$ .

Soit  $\ell' : V(H - v) \mapsto \mathbb{N}$  la longueur des listes mise à jour, c'est-à-dire  $\ell'(w) = \ell(w) - 1$  si  $w$  est un voisin de  $v$  tel que  $M(u, w) = 0$ , et  $\ell'(w) = \ell(w)$  sinon. Alors, si on peut colorer  $H - v$  avec des listes de taille  $\ell'$ , alors on peut colorer  $H$ . Donc si  $\mathcal{A}(H - v, \ell')$  renvoie **Vrai**, on peut poser  $M(u, v) = 1$ .

**Utilisation du programme** Nous avons appliqué cette heuristique à 40 configurations. On note cet ensemble de configuration  $\mathcal{C}$ . Parmi celles-ci, 28 ont été prouvées réductibles par l'algorithme  $\mathcal{A}$ . Elles sont décrites dans la figure 7.11. Les 12 configurations restantes ont dû être réduites à la main, néanmoins, l'algorithme était utile car il fournit une matrice d'inclusion qui peut être utilisée. Les configurations sont visibles sur la figure 7.12, les preuves ne sont pas données, elles sont mécaniques et n'utilisent pas d'idées particulières.

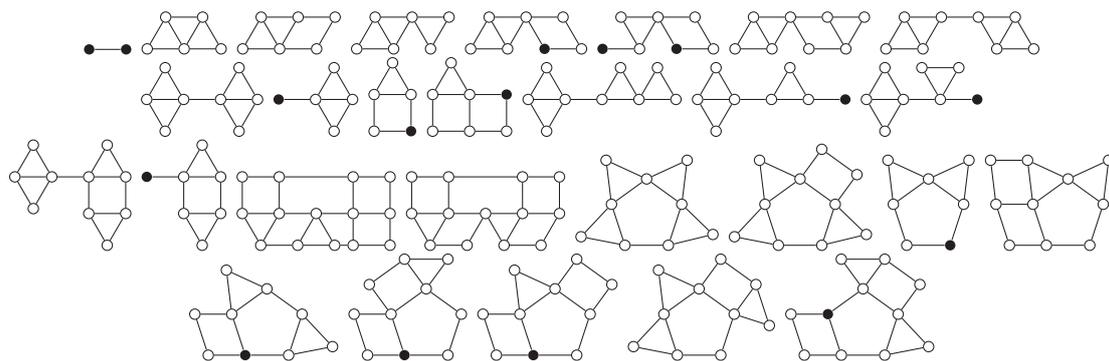


FIGURE 7.11 – Les configurations réduites par l'algorithme  $\mathcal{A}$ . Les sommets noirs ont degré 3, les autres sommets peuvent avoir degré 3 ou 4.

### Configurations de $\mathcal{C}_{6+}$

Rappelons que les configurations de  $\mathcal{C}_{6+}$  sont définies comme les arêtes  $uv$  d'une  $6^+$ -face  $f$  telles qu'un poids strictement supérieur à  $\frac{1}{3}$  transite par  $uv$  lors de l'application des règles de **T** (voir la figure 7.9). La réduction de ces configuration est nécessaire pour le théorème 7.25.

Pour cela, on montre que chaque configuration de  $\mathcal{C}_{6+}$  se ramène à une configuration de  $\mathcal{C}$ .

Supposons que  $G$  contienne une configuration de  $\mathcal{C}_{6+}$ , avec  $uv$  l'arête par laquelle transite un poids supérieur à  $\frac{1}{3}$  entre une face  $f$  et une face  $f'$  lors de l'application des règles de **T**.

On effectue une disjonction de cas selon les règles de **T** qui s'appliquent.

- Supposons que **T1** s'applique, sans perdre de généralités, on peut supposer que  $\deg(u) = 3$ . Si  $f'$  est un triangle, on obtient une configuration de  $\mathcal{C}$ . Si  $f'$  n'est pas un triangle, **T4** ne peut pas s'appliquer. Comme un poids strictement supérieur à  $\frac{1}{3}$  transite par  $uv$ , une autre règle de **T** s'applique. Cela crée une des configurations de  $\mathcal{C}$  suivante (l'arête en gras correspond à  $uv$ ) :  $\bullet\text{---}\bullet$  (**T1**),  (**T2**),  (**T3**),  (**T5**).
- Supposons que **T2** s'applique. Si  $f'$  est un triangle or que **T3** ou **T4** s'applique, on obtient un triangle arête-adjacent à un triangle et une  $4^-$ -face, ce qui fait partie des configurations réduites de  $\mathcal{C}$ . Sinon,  $f'$  n'est pas un triangle et seules **T2** ou **T5** peuvent s'appliquer. Cela crée une des configurations suivantes :  (**T2**) or  (**T5**).
- Supposons que **T3** s'applique, alors par définition, **T4** ne s'applique pas. On obtient la configuration  $C_1$  ou  Supposons que **T5** s'applique. Si de plus, **T3** s'applique une seconde fois de sorte qu'un poids de plus de  $\frac{1}{3}$  transite à travers  $uv$ , alors on obtient la configuration  $C_3$ .
- Supposons que **T4** s'applique. Comme **T4** ne peut être appliquée deux fois, **T5** s'applique, ce qui crée .
- Enfin, si **T5** est appliquée deux fois,  $u$  et  $v$  sont tous deux incident à un triangle (comme ils sont sommet-adjacent à  $f$ ). Alors un poids de  $2 \times \frac{1}{6}$  transite à travers  $uv$ , ce qui contredit l'hypothèse initiale.

Ainsi, chaque configuration de  $\mathcal{C}_{6+}$  se ramène à une configuration de  $\mathcal{C}$ . Comme celles-ci sont réductibles, on obtient que toutes les configurations de  $\mathcal{C}_{6+} \cup \mathcal{C}$  sont réductibles, ce qui permet de prouver les théorèmes 7.25. et 6.14.

## 7.7 Perspectives

L'écart entre la conjecture de Wegner et les bornes connues sur le nombre de couleurs reste important (voir figure 6.7) pour les petites valeurs de  $\Delta$ . L'utilisation d'un ordre spécifique sur les graphes a permis d'améliorer les résultats connus tout en gardant une preuve assez simple. Une direction pour améliorer cette borne est de sacrifier la simplicité de la preuve (en ajoutant des règles et/ou des configurations).

Une des motivations à développer le programme pour le cas  $\Delta = 4$  était d'avoir un programme assez générique pouvant servir pour différents problèmes. L'utiliser pour d'autres valeurs de  $\Delta$  fait parti de ces utilisations espérées, néanmoins augmenter le degré maximal fait aussi augmenter rapidement la complexité. Une partie du programme consiste à considérer un sommet et toutes les combinaisons de degrés des faces incidentes à ce sommet. L'augmentation de  $\Delta$  augmenterait de façon exponentielle le nombre de combinaisons, ce qui conduirait rapidement à des temps de calculs déraisonnables. Le temps de calcul pour la preuve présentée ici est de l'ordre de 30 minutes : 20 minutes pour générer l'ensemble de configurations  $D$  puis une à deux minutes par itération du programme linéaire. Augmenter  $\Delta$  ferait en particulier augmenter de façon exponentielle le nombre de configurations à générer. Pour envisager de plus grandes valeurs, il faut donc pouvoir limiter cette augmentation, en montrant que l'on peut se passer de certaines configurations comme nous l'avons fait ici pour les faces de degré au moins 6.

Néanmoins, il semble possible d'utiliser ce programme, avec des ajustements, pour d'autres problèmes, le schéma utilisé étant générique. La principale difficulté est de réussir à adapter le programme de façon à garder un équilibre entre puissance de la preuve (par exemple la taille maximale des configurations) et temps de calcul.

# Chapitre 8

## Recoloration de graphes planaires

Le contenu de ce chapitre est basé sur le travail effectué avec Carl Feghali, František Kardoš, Clément Legrand-Duchesne et Théo Pierron à la suite des journées de l'ANR GrR en 2021. Il porte sur la recoloration de graphes planaires par changements de Kempe. Nous prouvons dans ce chapitre que tout graphe planaire a un graphe de reconfiguration par changement de Kempe de diamètre polynomial dès lors que le nombre de couleurs est au moins 5.

Le contenu de cet article a été publié par *SIAM Journal on Discrete Mathematics*

### 8.1 Introduction

Pour un entier  $k \geq 1$  et un graphe  $G$ , on note  $\mathcal{K}_k(G)$  le graphe de reconfiguration de  $G$  dont les sommets sont toutes les  $k$ -colorations propres de  $G$ , avec une arête entre deux sommets  $\alpha$  et  $\beta$  si la coloration  $\beta$  peut être obtenue à partir de la coloration  $\alpha$  par un seul changement de Kempe. Las Vergnas et Meyniel [LM81] ont prouvé le résultat suivant :

**Théorème 8.1.** [LM81] *Soient  $G$  un graphe  $d$ -dégénéré et un entier  $k > d$ , alors  $\mathcal{K}_k(G)$  est connexe.*

Meyniel [Mey78] a prouvé ce résultat dans le cas spécifique des graphes planaires qui sont 5-dégénérés, son théorème correspond donc au cas  $d = k$ .

**Théorème 8.2.** [Mey78] *Si  $G$  est un graphe planaire, alors  $\mathcal{K}_5(G)$  est connexe.*

La preuve du théorème 8.1 implique que  $\mathcal{K}_k(G)$  a diamètre  $O(d^{|V(G)|})$ . De même, la preuve du théorème 8.2 implique que  $\mathcal{K}_5(G)$  a diamètre  $O(5^{|V(G)|})$ . Le but de ce chapitre est d'améliorer la borne supérieure sur le diamètre. Nous montrons que ce dernier est polynomial en le nombre de sommets.

**Théorème 8.3.** *Soit  $G$  un graphe planaire, alors  $\mathcal{K}_5(G)$  a diamètre au plus polynomial en le nombre de sommets de  $G$ .*

La première partie de la preuve du théorème 8.3 consiste à reprendre certains résultats de [Moh07] et de [Fis77] en ajoutant une analyse de complexité. Dans la seconde, nous construisons une méthode de recoloration par induction en montrant qu'il est possible de recolorer une fraction constante des sommets du graphe. Nous pourrons ensuite estimer la complexité grâce aux résultats prouvés dans la section 8.2.

## 8.2 Cas des graphes planaires 3-colorables

Mohar prouve le résultat suivant :

**Théorème 8.4.** [Moh07] *Soit  $G$  un graphe planaire 3-colorable, alors  $\mathcal{K}_4(G)$  est connexe.*

Dans cette section, nous adaptons la preuve du théorème 8.4 pour établir un résultat plus fort, qui sera utile pour la suite.

**Lemme 8.5.** *Soit  $G$  un graphe planaire 3-colorable à  $n$  sommets. Alors pour toutes 4-colorations  $\alpha$  et  $\beta$  de  $G$ , il existe une séquence de changements de Kempe de  $\alpha$  vers  $\beta$  tel que chaque sommet change de couleur au plus  $O(n^2)$  fois.*

Le lemme 8.5 implique que le diamètre de  $\mathcal{K}_4(G)$  est au plus  $O(n^3)$  lorsque  $G$  est un graphe planaire 3-colorable. Le reste de la section est consacrée à la preuve du lemme 8.5. Cette preuve se fait essentiellement en suivant les mêmes étapes que la preuve du théorème 8.4, en ajoutant des estimations de complexité à

- un résultat de Fisk [Fis77] pour le cas des graphes planaires 3-colorables triangulés
- une réduction au cas précédent comme fait par Mohar [Moh07].

Dans [Fis77], Fisk montre le résultat suivant :

**Théorème 8.6.** [Fis77] *Soit  $G$  un graphe planaire 3-colorable triangulé. Alors,  $\mathcal{K}_4(G)$  est connexe.*

La preuve de Fisk donne aussi une borne sur le nombre de changements effectués, ce que l'on explicite dans le résultat suivant. La preuve n'est pas explicitée ici, elle peut être trouvée dans [Des+23].

**Lemme 8.7.** *Soit  $G$  un graphe planaire 3-colorable à  $n$  sommets. Alors pour toutes 4-colorations  $\alpha$  et  $\beta$  de  $G$ , il existe une séquence de changements de Kempe de  $\alpha$  vers  $\beta$  tel que chaque sommet change de couleur au plus  $O(n^2)$  fois.*

### Réduction au cas des graphes triangulés

On reformule la proposition 4.3 de Mohar [Moh07] pour ajouter le nombre de sommets de la triangulation et de nombre de changements de Kempe nécessaires. La preuve reprend les éléments de la preuve de Mohar [Moh07].

**Lemme 8.8.** *Soient  $G$  un graphe planaire,  $C$  une face de  $G$  et  $\alpha_1, \alpha_2$  deux 4-colorations de  $G$ . Alors il existe un graphe  $H$  construit à partir de  $G$  en ajoutant une triangulation de taille  $O(|C|)$  à l'intérieur de  $C$  et deux 4-colorations  $c'_1, c'_2$  de  $H$  telles que  $c'_1|_{V(G)}$  et  $c'_2|_{V(G)}$  sont obtenues de  $\alpha_1, \alpha_2$  en utilisant  $O(1)$  changements de Kempe. De plus, si la restriction de  $\alpha_1$  à  $C$  est une 3-coloration, alors  $c'_1$  est une 3-coloration de  $H$  coïncidant avec  $\alpha_1$  sur  $V(G)$ .*

*Démonstration.* On note  $C = v_1v_2 \dots v_kv_1$  et on effectue une preuve par induction sur  $k$ . Le cas de base correspond à  $k = 3$ , alors  $H = G$ ,  $\alpha'_1 = \alpha_1$  et  $\alpha'_2 = \alpha_2$ . Considérons maintenant le cas  $k \geq 4$ . S'il existe deux sommets non consécutifs  $v_i$  et  $v_j$  tels que  $\alpha_1(v_i) \neq \alpha_1(v_j)$  et  $\alpha_2(v_i) \neq \alpha_2(v_j)$ , on ajoute l'arête  $v_iv_j$  à l'intérieur de  $C$  et on applique l'hypothèse d'induction sur les deux cycles nouvellement créés.

Plus précisément, soient  $G_1 = G + v_iv_j$ ,  $C_1 = v_iv_{i+1} \dots v_jv_i$  et  $C_2 = v_jv_{j+1} \dots v_iv_j$ . Par hypothèse d'induction, il existe un séquence de changements de Kempe dans  $G_1$  (et donc dans  $G$ ) transformant la coloration  $\alpha_1$  en  $\alpha_{11}$  et  $\alpha_2$  en  $\alpha_{12}$ , en utilisant  $O(1)$  changements de Kempe, et une triangulation  $T_1$  de  $C_1$  telle que  $\alpha_{11}$  et  $\alpha_{12}$  peuvent être étendues en des colorations  $\bar{\alpha}_{11}$  et  $\bar{\alpha}_{12}$  de  $G_1 \cup T_1$ . On applique ensuite l'hypothèse d'induction à  $G_1 \cup T_1$  en considérant le cycle  $C_2$  et les colorations  $\bar{\alpha}_{11}$  et  $\bar{\alpha}_{12}$ . Soit  $T_2$  la triangulation de  $C_2$  obtenue et  $c'_{11}, c'_{12}$  les colorations de  $G_1 \cup T_1$  pouvant être étendues à  $G_1 \cup T_1 \cup T_2$ . Alors les changements de Kempe effectués pour obtenir  $c'_{11}$  et  $c'_{12}$  depuis  $\bar{\alpha}_{11}$  et  $\bar{\alpha}_{12}$  peuvent être fait dans  $G$ . Donc  $c'_1$  (respectivement  $c'_2$ ) qui est la restriction de  $c'_{11}$  (respectivement  $c'_{12}$ ) peut être obtenue par un nombre constant de changements de Kempe depuis  $\alpha_1$  (respectivement  $\alpha_2$ ) dans  $G$ . Donc  $c'_1$  et  $c'_2$  peuvent être étendues à  $G \cup T$  avec  $T = T_1 \cup T_2$  et  $T$  peut être pris comme triangulation de  $C$ .

On considère maintenant le cas où l'on ne peut pas ajouter de telle arête  $v_iv_j$ . On montre qu'on peut toujours rajouter ces arêtes sauf (à symétrie près) dans les cas présentés dans la figure 8.1 (où les couleurs de  $\alpha_1$  sont nommées de 1 à 4 et celles de  $\alpha_2$  de a à d). Si  $k = 4$  et qu'aucune arête  $v_iv_j$  n'existe, on peut supposer  $\alpha_1(v_1) = \alpha_1(v_3)$ . Alors  $v_2$  et  $v_4$  ont la même couleur dans  $\alpha_1$  ou dans  $\alpha_2$ . Si  $k \geq 5$ , on peut supposer  $\alpha_1(v_1) = \alpha_1(v_3) = 1$ . Alors  $\alpha_1(v_1) \neq \alpha_1(v_4)$  donc on peut supposer  $\alpha_2(v_1) = \alpha_2(v_4) = a$ . Si  $\alpha_1(v_2) = 2$  et  $\alpha_2(v_2) = b$ , alors  $\alpha_2(v_2) \neq \alpha_2(v_4)$  donc  $\alpha_1(v_4) = \alpha_1(v_2) = 2$ . Alors  $\alpha_1(v_2) \neq \alpha_1(v_5)$  donc  $\alpha_2(v_5) = b$ . On obtient que  $\alpha_2(v_3) \neq \alpha_2(v_5)$  donc  $\alpha_1(v_3) = \alpha_1(v_5) = 1$ . Donc les sommets  $v_1$  et  $v_5$  ne sont pas adjacents et  $k \geq 6$ . On obtient de façon similaire  $\alpha_1(v_6) = 2$  et  $\alpha_2(v_3) = \alpha_2(v_6) = c$ . Si  $k = 6$ , on obtient un cas de la figure 8.1. Si  $k \geq 7$ , alors  $v_2v_7$  ou  $v_4v_7$  est une arête valable.

Il reste à traiter les trois cas de la figure 8.1.

On considère le cas de l'hexagone. Soit  $v_1$  le sommet vérifiant  $\alpha_1(v_1) = 1$  et  $\alpha_2(v_1) = a$ . On essaie d'effectuer un changement de Kempe entre les couleurs 1 et 3 sur  $v_1$ . Si on obtient toujours la même situation (à renommage des couleurs près), il existe un chemin  $P$  entre  $v_1$  et  $v_3$  composé uniquement de sommets coloré 1 ou 3. Alors un changement de Kempe entre les couleurs 2 et 4 sur  $v_2$  n'affecte aucun autre sommet du cycle. Aucun de ces changements n'affecte  $\alpha_2$ , le seul cas restant est le cas où l'on ne veut pas changer la coloration  $\alpha_1$  pour garder l'hypothèse d'induction. Dans ce cas, on utilise la quatrième

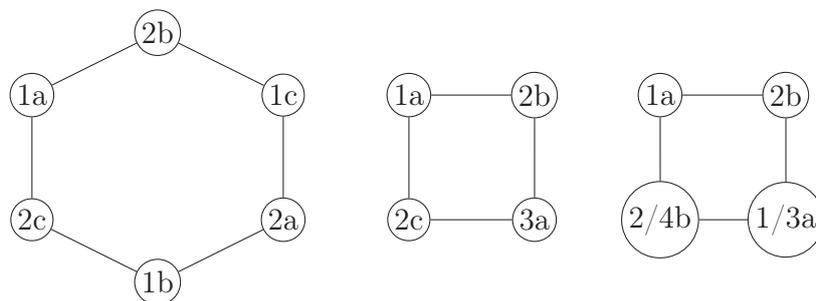


FIGURE 8.1 – Les trois cas particuliers où l’hypothèse d’induction ne s’applique pas.

couleur en ajoutant un sommet au centre de  $C$  relié à tous les sommets de  $C$ .

Considérons le second cas de la figure 8.1. Par symétrie, on peut supposer que l’on ne peut pas changer la coloration  $\alpha_1$ . Soit  $v_1$  le sommet vérifiant  $\alpha_1(v_1) = 1$  et  $\alpha_2(v_1) = a$ . Par un changement de Kempe sur  $v_1$  de  $a$  vers  $d$  ou de  $b$  vers  $c$  sur  $v_2$ , on obtient que  $\alpha_2$  utilise 2 ou 4 couleurs. Dans les deux cas, on obtient une triangulation de  $C$  en ajoutant deux sommets adjacents  $p$  et  $q$  tels que  $p$  est adjacent à  $v_1, v_2, v_4$  et  $q$  est adjacent à  $v_2, v_3, v_4$ .

Considérons enfin le dernier cas de la figure 8.1. Si l’on veut  $\alpha_2 = c'_2$ , alors on peut prendre pour  $T$  la triangulation obtenue en ajoutant un sommet de degré 4 à l’intérieur de  $C$ . Alors  $\alpha_2$  s’étend en une 3-coloration de  $T$  et  $\alpha_1$  en une 4-coloration sauf dans les cas où tous les sommets sont initialement de couleurs différentes. Dans ce cas, on peut soit faire un changement de Kempe entre 1 et 3 sur  $v_1$ , ou entre 2 et 4 sur  $v_2$  sans changer les couleurs de  $v_3$  et  $v_4$  et cette nouvelle coloration s’étend à  $T$ . Enfin, si l’on veut  $\alpha_1 = c'_1$ , alors  $\alpha_1$  est une 3-coloration de  $C$ , donc  $\alpha_1(v_3) = 1$  et  $\alpha_1(v_4) = 2$  ou  $\alpha_1(v_3) = 3$  et  $\alpha_1(v_4) = 2$ . Dans le premier cas, on obtient  $T$  en ajoutant un sommet de degré 4 à l’intérieur de  $C$ . Dans le second cas, on obtient une triangulation de  $C$  en ajoutant deux sommets adjacents  $p$  et  $q$  tels que  $p$  est adjacent à  $v_1, v_2, v_4$  et  $q$  est adjacent à  $v_2, v_3, v_4$ .  $\square$

On peut maintenant prouver le lemme 8.5.

*Preuve du lemme 8.5.* Soit  $\alpha_1$  une 3-coloration de  $G$ , on montre que toute 4-coloration de  $G$  est équivalente à  $\alpha_1$ . Soit  $\alpha_2$  une 4-coloration de  $G$ . On note  $C_1, \dots, C_m$  les faces de  $G$ . Soit  $G_0 = G$ ,  $\alpha_1^0 = \alpha_1$ ,  $\alpha_2^0 = \alpha_2$ . Pour  $1 \leq i \leq m$ , on applique le lemme 8.8 au graphe  $G_{i-1}$ , au cycle  $C_i$  et aux colorations  $\alpha_1^{i-1}$  et  $\alpha_2^{i-1}$ . on obtient ainsi, en un nombre constant de changements de Kempe, une triangulation  $T_i$  de  $C_i$  telle que  $G_{i-1} \cap T_i = C_i$ . Soit  $G_i = G_{i-1} \cup T_i$ . D’après le lemme 8.8,  $\alpha_1^{i-1}$  peut être étendue en une 3-coloration  $\alpha_1^i$  de  $G_i$  et  $\alpha_2^{i-1}$  est équivalente dans  $G_{i-1}$  à une 4-coloration de  $G_{i-1}$  qui s’étend en une coloration  $\alpha_2^i$  de  $G_i$ . Ainsi, en  $O(m) = O(n)$  changements de Kempe, on obtient une triangulation  $G_m$  de  $G$  ayant  $O(n)$  sommets avec une coloration  $\alpha_1^m$ . D’après le lemme 8.7, on peut recolorer  $\alpha_1^m$  en  $\alpha_1$  de sorte que chaque sommet soit recoloré  $O(n^2)$  fois. Comme  $G$  est un sous-graphe de  $G_m$ , on peut effectuer ces recolorations dans  $G$ ,

chaque sommet étant recoloré le même nombre de fois. Ainsi, on peut passer de  $\alpha_1$  à  $\alpha_2$  en recolorant  $O(n^2)$  fois chaque sommet, donc on peut passer de deux 4-colorations de  $G$  en recolorant  $O(n^2)$  fois chaque sommet.  $\square$

### 8.3 Preuve du cas général

Dans cette section, nous démontrons le théorème 8.3. Grâce au théorème des quatre couleurs, on sait que tout graphe planaire admet une 4-coloration. Donc si on sait passer d'une 5-coloration à n'importe quelle 4-coloration, on peut passer d'une 5-coloration en une autre en utilisant une 4-coloration comme étape intermédiaire. Il suffit donc de montrer le résultat suivant.

**Théorème 8.9.** *Soit  $G$  un graphe planaire à  $n$  sommets. Pour toute 5-coloration  $\alpha$  de  $G$  et toute 4-coloration  $\beta$  de  $G$ , il existe une séquence de changements de Kempe de  $\alpha$  vers  $\beta$  dans laquelle le nombre de recoloration de chaque sommet est polynomial.*

Le reste de la section est consacrée à la preuve du théorème 8.9. Expliquons tout d'abord l'approche utilisée. Nous procédons par induction sur le nombre de sommets. L'objectif est de décrire une séquence de changements de Kempe de  $\alpha$  vers  $\beta$  tel que chaque sommet est recoloré au plus  $f(n)$  fois, avec  $f$  satisfaisant une relation de récurrence que l'on donne à la fin de la section. Pour établir la séquence, nous suivons les étapes suivantes :

1. Trouver un "grand" ensemble indépendant  $I$  monochromatique à la fois dans  $\alpha$  et  $\beta$  contenant uniquement des sommets de degré au plus 6.
2. Nous introduisons une opération sur les sommets que l'on appelle *effondrement*, qui, appliquée à chaque sommet de  $I$  donne un nouveau graphe  $H$  où le degré de chaque sommet de  $I$  est au plus 4 dans  $H$  et tel que  $F = H - I$  soit planaire. On utilise ceci pour montrer que toute séquence de changement de Kempe dans  $F$  peut se traduire par une séquence dans  $H$  et finalement dans  $G$ .
3. Nous appliquons l'hypothèse d'induction pour trouver une séquence de changements de Kempe dans  $F$  depuis une 5-coloration de  $F$  vers une 4-coloration de  $F$  qui n'utilise pas la couleur  $\alpha(I)$ . En appliquant l'étape 2, cette séquence se transforme en une séquence dans  $G$  donnant une 5-coloration dans laquelle la couleur 5 ne peut apparaître que sur les sommets de  $I$ .
4. Par définition,  $I \subset B$  pour une classe de couleur  $B$  de  $\beta$ , on peut donc recolorer chaque sommet de  $B$  avec la couleur 5. Comme  $G - B$  est 3-colorable, on peut appliquer le lemme 8.5 pour recolorer les autres sommets de  $G - B$  à leur couleur dans  $\beta$ .

Dans la suite, nous détaillons la construction ainsi que l'analyse du nombre de changements.

**Étape 1 : Construction de I**

Nous prouvons qu'un ensemble indépendant  $I$  ayant les propriétés requises existe.

**Lemme 8.10.** *Il existe un ensemble indépendant  $I$  dans  $G$  tel que :*

- tous les sommets de  $I$  ont degré au plus 6
- $I$  est monochrome pour les colorations  $\alpha$  et  $\beta$
- $|I| \geq \frac{n}{140}$

*Démonstration.* Soit  $S$  l'ensemble des sommets de degré au plus 6 dans  $G$ . Alors  $|S| > n/7$  car sinon

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) \geq \sum_{v \in V(G) - S} d(v) \geq 7(n - \frac{n}{7}) = 6n,$$

ce qui contredit la formule d'Euler (précisément le corollaire 6.7).

Pour  $i \in \{1, \dots, 5\}$  et  $j \in \{1, \dots, 4\}$ , on définit l'ensemble des sommets de  $S$  ayant couleur  $i$  pour la coloration  $\alpha$  et  $j$  pour la coloration  $\beta$ .

$$S_{i,j} = S \cap \alpha^{-1}(i) \cap \beta^{-1}(j).$$

Chaque ensemble  $S_{i,j}$  vérifie tous les critères sauf éventuellement le dernier. Cependant, par le principe des tiroirs, il existe  $i$  et  $j$  tels que  $S_{i,j}$  contient au moins  $|S|/(5 \times 4) \geq n/140$  sommets, ce qui conclut la preuve.  $\square$

A partir de maintenant, on fixe un ensemble  $I$  vérifiant les hypothèses du lemme 8.10.

**Étape 2 : Construction de H et extension des séquences de recoloration**

Rappelons que pour un ensemble  $X$  de sommets dans un graphe, on note  $N(X)$  l'ensemble des voisins de  $X$  dans ce graphe.

Pour construire l'ensemble  $H$ , on veut identifier les sommets de  $N(I)$  colorés de la même couleur de sorte que les sommets de  $I$  atteignent un degré maximal 4 et que le graphe  $G - I$  soit planaire. On montre qu'il est possible de modifier la coloration  $\alpha$  pour que ces identifications soient possibles.

Soit  $P$  un graphe planaire. Pour une 5-coloration  $\varphi$  de  $P$  et un sommet  $v$  de  $V(P)$  vérifiant  $d(v) = 6$ , on dit que  $v$  est  $\varphi$ -bon si, dans  $\varphi$ , le sommet  $v$  a trois voisins colorés de la même couleur ou deux paires  $(a, b)$  et  $(c, d)$  de voisins de même couleurs qui sont *sans chevauchement*, c'est-à-dire que  $P - v + ab + cd$  est planaire. On dit qu'un ensemble de sommets  $X$  est  $\varphi$ -bon si tous les sommets de  $X$  sont  $\varphi$ -bon. Une séquence de changements de Kempe *interdit* une couleur  $a$  si aucun sommet concerné par les changements de couleur ne prend la couleur  $a$ .

**Lemme 8.11.** *Soient  $P$  un graphe planaire,  $\alpha$  une 5-coloration de  $P$ , et  $v \in I$  vérifiant  $d(v) = 6$ . Alors il existe une séquence d'au plus trois changements de Kempe interdisant la couleur  $\alpha(v)$  qui transforme  $\alpha$  en une 5-coloration  $\beta$  de  $P$  dans laquelle  $v$  est  $\beta$ -bon.*



couleur de  $v$  dans les changements de Kempe d'après le lemme 8.11, les sommets de  $I$  ne sont jamais recolorés.

Formalisons maintenant ce processus. Soient  $P$  un graphe planaire et  $\varphi$  une 5-coloration de  $P$ . Pour un sommet  $v$  de  $P$  de degré au plus 6 tel que  $v$  est  $\varphi$ -bon si  $d(v) = 6$ , on dit que  $(P', \varphi')$  est le résultat de l'effondrement de  $(P, v, \varphi)$  si

- Si  $1 \leq d(v) \leq 4$ ,  $P' = P$  et  $\varphi' = \varphi$
- Si  $d(v) = 5$ ,  $P'$  est le graphe obtenu depuis  $P$  en identifiant deux voisins  $u$  et  $w$  de  $v$  vérifiant  $\varphi(u) = \varphi(w)$  en un nouveau sommet  $z$  et  $\varphi'$  est la coloration obtenue à partir de  $\varphi$  en posant  $\varphi'(z) = \varphi(u) = \varphi(w)$
- Si  $d(v) = 6$ ,  $P'$  est le graphe obtenu à partir de  $P$ 
  - soit en identifiant trois voisins  $u, w, z$  de  $v$  vérifiant  $\varphi(u) = \varphi(w) = \varphi(z)$  en un nouveau sommet  $x$ . Dans ce cas,  $\varphi'$  est obtenu depuis  $\varphi$  en posant  $\varphi'(x) = \varphi(u)$ , ou
  - pour deux paires non-chevauchantes  $(u, w)$  et  $(x, z)$  de voisins de  $v$  vérifiant  $\varphi(u) = \varphi(w)$  et  $\varphi(x) = \varphi(z)$ , on identifie  $u, w$  en un nouveau sommet  $s$  et  $x, z$  en un nouveau sommet  $t$ . On définit  $\varphi'$  depuis  $\varphi$  en posant  $\varphi'(s) = \varphi(u)$  et  $\varphi'(t) = \varphi(x)$ .

Comme  $v$  est  $\varphi$ -bon, on a la propriété que  $P'$  et  $\varphi'$  sont bien définis et que  $P' - \{v\}$  est planaire. On se concentre maintenant sur la façon de transformer une séquence de changements de Kempe dans le graphe écrasé en une séquence de changements de Kempe dans le graphe originel.

**Lemme 8.12.** *Soient  $P$  un graphe planaire et  $\varphi$  une 5-coloration de  $P$ . Soit  $v$  un sommet de  $P$  de degré au plus 6 qui soit  $\varphi$ -bon si  $d(v) = 6$ . Soit  $(P', \varphi')$  le résultat de l'effondrement de  $(P, v, \varphi)$ . Alors toute séquence de changements de Kempe dans  $P' - \{v\}$  à partir de  $\varphi'|_{(V(P') \setminus \{v\})}$  s'étend en une séquence de changements de Kempe dans  $P$  depuis  $\varphi$ . De plus, chaque sommet de  $P - v$  est recoloré le même nombre de fois que dans  $P' - v$ , et  $v$  est recoloré au plus une fois à chaque fois que l'un des ses voisins dans  $P'$  est recoloré de la couleur de  $v$ .*

*Démonstration.* Chaque fois qu'un voisin  $w$  de  $v$  est recoloré dans  $P' - v$ , on effectue le même changement de Kempe dans  $P'$  sauf si le changement concerne la couleur de  $v$  et qu'il y a un autre voisin  $u$  de  $v$  de la même couleur que  $w$ . Dans ce cas, comme au plus trois couleurs apparaissent dans  $N_{P'}(v)$  (comme  $v$  a degré au plus 4 dans  $P'$ ) on commence par recolorer  $v$  de la couleur qui n'apparaît pas dans son voisinage. Ainsi toute séquence de changement de Kempe dans  $P' - \{v\}$  s'étend en une séquence de changements de Kempe dans  $P'$ . Pour étendre cette séquence à  $P$ , remarquons que l'on peut simuler dans  $P$  un changement de Kempe dans  $P'$  sur un sommet  $w$  en effectuant ce changement sur tous les sommets qui ont été identifiés pour créer  $w$ . On obtient bien le nombre de changements annoncé, chaque sommet de  $P - v$  change sa couleur autant de fois que dans  $P' - v$ , et  $v$  est recoloré au plus une fois à chaque fois que l'un des ses voisins dans  $P'$  est recoloré de la couleur de  $v$ .  $\square$

Nous appliquons maintenant le lemme 8.12 à chaque sommet de  $I$  dans  $G$ , ainsi chaque sommet de  $I$  devient  $\alpha$ -bon.

**Lemme 8.13.** *Soient  $P$  un graphe planaire et  $\varphi$  une 5-coloration de  $P$ . Si  $I$  est un ensemble indépendant  $\varphi$ -monochromatique de sommets de degré au plus 6 dans  $P$ , alors il existe une 5-coloration  $\psi$  de  $P$  dans laquelle  $I$  est  $\psi$ -bon et une séquence de changements de Kempe depuis  $\varphi$  vers  $\psi$  qui recolore chaque sommet au plus  $3|I|$  fois.*

*Démonstration.* On prouve par induction sur  $|V(P)|$  un résultat plus fort qui est que la séquence de recoloration interdit la couleur  $\varphi(I)$ .

D'après le lemme 8.11, on peut supposer, en faisant au plus trois changements de Kempe, que  $I$  contient un sommet  $v$  de degré au plus 5 ou un sommet de degré 6 qui soit  $\varphi$ -bon. On définit  $(P', \varphi')$  comme le résultat de l'effondrement de  $(P, v, \varphi)$ . Comme  $P'' = P' - \{v\}$  est planaire, on peut appliquer l'hypothèse d'induction sur  $P''$  (avec  $I - \{v\}$  à la place de  $I$  et  $\varphi'|P''$  à la place de  $\varphi$ ), ce qui donne une séquence de changement de Kempe dans  $P''$  interdisant la couleur de  $v$  et qui transforme  $\varphi'|P''$  en une 5-coloration  $\varphi''$  de  $P''$  vérifiant :

- $I - \{v\}$  est  $\varphi''$ -bon
- chaque sommet est recoloré au plus  $3(|I| - 1)$  fois.

D'après le lemme 8.12, cette séquence s'étend en une séquence dans  $G$ . De plus,  $v$  n'est pas recoloré et les autres sommets sont recolorés au plus  $3(|I| - 1) + 3 = 3|I|$  fois, ce qui donne le résultat.  $\square$

### Étape 3 : Induction

D'après le lemme 8.13, on peut supposer que  $I$  est  $\alpha$ -bon. Notons  $n = |V(G)|$  et  $f(n)$  le nombre maximal de fois qu'un sommet de  $G$  est recoloré. On note  $I = \{v_1, \dots, v_m\}$ ,  $G_1 = G$ ,  $\psi_1 = \alpha$  et, pour  $i = 2, \dots, m+1$ , posons  $H_{i-1} = G_i - \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$  où  $(G_i, \psi_i)$  est le résultat de l'effondrement de  $(G_{i-1}, v_{i-1}, \psi_{i-1})$ . Alors le graphe  $H_m$  est planaire. Par hypothèse d'induction, et en utilisant le lemme 8.10 (avec  $H_m$  au lieu de  $G$ ), il existe une séquence de changements de Kempe depuis  $\psi_{m+1}|V(H_m)$  vers une 4-coloration  $\gamma'$  de  $H_m$  de couleur  $\{1, \dots, 5\} \setminus \alpha(I)$  où chaque sommet est recoloré au plus  $f(n - |I|)$  fois. En appliquant le lemme 8.12 successivement à  $H_m, H_{m-1}, \dots, H_1$ , cette séquence donne une séquence de changement de Kempe dans  $G$  depuis  $\alpha$  vers une 5-coloration  $\psi$  de  $G$  avec  $\psi|(G - I)$  n'utilisant que les couleurs  $\{1, \dots, 4\}$ . Par construction de  $I$ ,  $I \subset B$  pour une certaine couleur  $B$  dans  $\beta$ . On peut donc recolorer tous les sommets de  $B$  à la couleur 5. Enfin, comme  $G - B$  est un graphe planaire 3-colorable, en appliquant le lemme 8.5, on peut recolorer les sommets restant de  $G - B$  à leur couleur dans  $\beta$ .

### Analyse de la complexité

D'après le lemme 8.13, chaque sommet est recoloré au plus  $3|I|$  fois pour atteindre la 5-coloration  $\psi$  dans laquelle  $I$  est  $\psi$ -bon. Pendant la phase d'induction, d'après le

lemme 8.12, chaque sommet de  $I$  est recoloré au plus  $4f(n - |I|)$  fois tandis que les autres sommets sont recolorés au plus  $f(n - |I|)$  fois. D'après le lemme 8.5, la dernière étape demande  $O(n^2)$  recoloration par sommet. Ainsi la fonction  $f(n)$  vérifie la relation de récurrence :

$$f(n) \leq 3|I| + 4f(n - |I|) + O(n^2) \leq 4f\left(n - \frac{n}{140}\right) + O(n^2).$$

Le Master Theorem donne alors que chaque sommet est recoloré au plus  $O(n^{\log_{\frac{140}{139}}(4)}) = O(n^{194})$  fois, donc la séquence de changements de Kempe a longueur au plus  $O(n^{195})$ .

**Remarque 8.14.** *Au vu de sa complexité, cet algorithme n'est pas exploitable en pratique et peut très probablement être amélioré. On peut se demander quelle est la borne optimale, autrement dit quel est le diamètre maximal du graphe de reconfiguration ?*

# Bibliographie

- [AEV13] Omid AMINI, Louis ESPERET et Jan VAN DEN HEUVEL. « A unified approach to distance-two colouring of graphs on surfaces ». In : *Combinatorica* 33.3 (2013), p. 253-296.
- [AH03] Geir AGNARSSON et Magnús M HALLDÓRSSON. « Coloring powers of planar graphs ». In : *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 16.4 (2003), p. 651-662.
- [AH76] Kenneth APPEL et Wolfgang HAKEN. « Every planar map is four colorable ». In : *Bulletin of the American mathematical Society* 82.5 (1976), p. 711-712.
- [AIM08] Special Graphs Work Group AIM. « Zero forcing sets and the minimum rank of graphs ». In : *Linear Algebra and its Applications* 428.7 (2008), p. 1628-1648. ISSN : 0024-3795.
- [BB18] Marthe BONAMY et Nicolas BOUSQUET. « Recoloring graphs via tree decompositions ». In : *European Journal of Combinatorics* 69 (2018), p. 200-213.
- [BDP23] Nicolas BOUSQUET, Quentin DESCHAMPS et Aline PARREAU. « Metric dimension parameterized by treewidth in chordal graphs ». In : *arXiv* (2023).
- [Bea+18] Laurent BEAUDOU, Peter DANKELMANN, Florent FOUCAUD, Michael A HENNING, Arnaud MARY et Aline PARREAU. « Bounding the order of a graph using its diameter and metric dimension: A study through tree decompositions and VC dimension ». In : *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 32.2 (2018), p. 902-918.
- [Bel+16] Rémy BELMONTE, Fedor V. FOMIN, Petr A. GOLOVACH et M. S. RAMANUJAN. « Metric Dimension of Bounded Tree-length Graphs ». In : *CoRR* (2016).
- [BH19] Nicolas BOUSQUET et Marc HEINRICH. « A polynomial version of Cereceda's conjecture ». In : *arXiv* (2019).
- [Bon+19] Marthe BONAMY, Nicolas BOUSQUET, Carl FEGHALI et Matthew JOHNSON. « On a conjecture of Mohar concerning Kempe equivalence of regular graphs ». In : *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 135 (2019), p. 179-199.

- [Bor+02] Ovel V BORODIN, Haitze J BROERSMA, AN GLEBOV et Jan VAN DEN HEUVEL. « Stars and bunches in planar graphs. Part II: General planar graphs and colourings ». In : *CDAM Research Report 5* (2002), p. 2002.
- [Bou+21] Nicolas BOUSQUET, Quentin DESCHAMPS, Aline PARREAU et Ignacio M PELAYO. « On the cycle rank conjecture about metric dimension and zero forcing number in graphs ». In : *Extended Abstracts EuroComb 2021: European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications*. Springer. 2021, p. 515-520.
- [Bou+22] Nicolas BOUSQUET, Lucas de MEYER, Quentin DESCHAMPS et Théo PIERRON. « Square coloring planar graphs with automatic discharging ». In : *arXiv* (2022).
- [Bou+23] Nicolas BOUSQUET, Quentin DESCHAMPS, Lucas de MEYER et Théo PIERRON. « Improved square coloring of planar graphs ». In : *Discrete Mathematics* 346.4 (2023), p. 113288.
- [BP21] Édouard BONNET et Nidhi PUROHIT. « Metric dimension parameterized by treewidth ». In : *Algorithmica* 83.8 (2021), p. 2606-2633.
- [CE12] Bruno COURCELLE et Joost ENGELFRIET. *Graph structure and monadic second-order logic: a language-theoretic approach*. T. 138. Cambridge University Press, 2012.
- [Cer07] Luis CERECEDA. « Mixing graph colourings ». Thèse de doct. London School of Economics et Political Science, 2007.
- [Cha+00] Gary CHARTRAND, Linda EROH, Mark A. JOHNSON et Ortrud R. OELLERMANN. « Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph ». In : *Discrete Applied Mathematics* 105.1 (2000), p. 99-113.
- [Des+23] Quentin DESCHAMPS, Carl FEGHALI, František KARDOŠ, Clément LEGRAND-DUCHESNE et Théo PIERRON. « Strengthening a theorem of Meyniel ». In : *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 37.2 (2023), p. 604-611.
- [Día+12] Josep DÍAZ, Olli POTTONEN, Maria SERNA et Erik Jan van LEEUWEN. « On the Complexity of Metric Dimension ». In : *Algorithms – ESA 2012*. Sous la dir. de Leah EPSTEIN et Paolo FERRAGINA. 2012.
- [Dir61] Gabriel Andrew DIRAC. « On rigid circuit graphs ». In : *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*. T. 25. 1. Springer. 1961, p. 71-76.
- [Edh+12] Christina J. EDHOLM, Leslie HOGBEN, My HUYNH, Joshua LAGRANGE et Darren D. ROW. « Vertex and edge spread of zero forcing number, maximum nullity, and minimum rank of a graph ». In : *Linear Algebra and its Applications* 436.12 (2012), p. 4352-4372.

- [EKY17] Linda EROH, Cong X KANG et Eunjeong YI. « A comparison between the metric dimension and zero forcing number of trees and unicyclic graphs ». In : *Acta Mathematica Sinica, English Series* 33.6 (2017), p. 731-747.
- [ELW15] Leah EPSTEIN, Asaf LEVIN et Gerhard J WOEGINGER. « The (weighted) metric dimension of graphs: hard and easy cases ». In : *Algorithmica* 72.4 (2015), p. 1130-1171.
- [Epp15] David EPPSTEIN. « Metric dimension parameterized by max leaf number ». In : *arXiv* (2015).
- [Ero+15] Linda EROH, Paul FEIT, Cong X KANG et Eunjeong YI. « The effect of vertex or edge deletion on the metric dimension of graphs ». In : *J. Comb* 6.4 (2015), p. 433-444.
- [Feg21] Carl FEGHALI. « Reconfiguring colorings of graphs with bounded maximum average degree ». In : *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 147 (2021), p. 133-138.
- [Fis77] Steve FISK. « Geometric coloring theory ». In : *Advances in Mathematics* 24.3 (1977), p. 298-340. ISSN : 0001-8708.
- [FJP17] Carl FEGHALI, Matthew JOHNSON et Daniël PAULUSMA. « Kempe equivalence of colourings of cubic graphs ». In : *European Journal of Combinatorics* 59 (2017), p. 1-10.
- [Fou+16] Florent FOUCAUD, Michael A HENNING, Christian LÖWENSTEIN et Thomas SASSE. « Locating–dominating sets in twin-free graphs ». In : *Discrete Applied Mathematics* 200 (2016), p. 52-58.
- [Fou+17] Florent FOUCAUD, George B MERTZIOS, Reza NASERASR, Aline PARREAU et Petru VALICOV. « Identification, location-domination and metric dimension on interval and permutation graphs. II. Algorithms and complexity ». In : *Algorithmica* 78.3 (2017), p. 914-944.
- [Gal+22] Esther GALBY, Liana KHAZALIYA, Fionn Mc INERNEY, Roohani SHARMA et Prafullkumar TALE. « Metric Dimension Parameterized by Feedback Vertex Set and Other Structural Parameters ». In : *arXiv* (2022).
- [Gim+22] Tatsuya GIMA, Tesshu HANAKA, Masashi KIYOMI, Yasuaki KOBAYASHI et Yota OTACHI. « Exploring the gap between treedepth and vertex cover through vertex integrity ». In : *Theoretical Computer Science* 918 (2022), p. 60-76.
- [GJ79] GAREY et JOHNSON. *A Guide to the Theory of NP-completeness*. Journal of algorithms, 1979.
- [Hav+17] Frédéric HAVET, Jan van den HEUVEL, Colin MCDIARMID et Bruce REED. *List Colouring Squares of Planar Graphs*. 2017.

- [Her+10] Carmen HERNANDO, Merce MORA, Ignacio M PELAYO, Carlos SEARA et David R WOOD. « Extremal graph theory for metric dimension and diameter. » In : *The Electronic Journal of Combinatorics [electronic only]* 17.1 (2010), Research-Paper.
- [HEW16] Stefan HOFFMANN, Alina ELTERMAN et Egon WANKE. « A linear time algorithm for metric dimension of cactus block graphs ». In : *Theoretical Computer Science* 630 (2016), p. 43-62.
- [HM03] Jan van den HEUVEL et Sean MCGUINNESS. « Coloring the square of a planar graph ». In : *Journal of Graph Theory* 42.2 (2003), p. 110-124.
- [HM75] F. HARARY et R. A. MELTER. « On the metric dimension of a graph. » In : *Ars Combinatoria* 2:191-195 (1975).
- [HN13] Sepp HARTUNG et André NICHTERLEIN. « On the parameterized and approximation hardness of metric dimension ». In : *2013 IEEE Conference on Computational Complexity*. IEEE. 2013, p. 266-276.
- [HS03] AJ HOFFMAN et RR SINGLETON. « On Moore graphs with diameters 2 and 3 ». In : *Selected Papers Of Alan J Hoffman: With Commentary*. World Scientific, 2003, p. 377-384.
- [Jon93] Theodore Kimball JONAS. « Graph coloring analogues with a condition at distance two:  $L(2, 1)$ -labellings and list  $\lambda$ -labellings ». Thèse de doct. University of South Carolina, 1993.
- [Klo94] Ton KLOKS. *Treewidth: computations and approximations*. Springer, 1994.
- [KRR96] Samir KHULLER, Balaji RAGHAVACHARI et Azriel ROSENFELD. « Landmarks in graphs ». In : *Discrete applied mathematics* 70.3 (1996), p. 217-229.
- [KRT21] Mateusz KRZYZIŃSKI, Paweł RZAŻEWSKI et Szymon TUR. *Coloring squares of planar graphs with small maximum degree*. 2021.
- [LM81] Michel LAS VERGNAS et Henri MEYNIEL. « Kempe classes and the Hadwiger Conjecture ». In : *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 31.1 (1981), p. 95-104. ISSN : 0095-8956.
- [LP22] Shaohua LI et Marcin PILIPCZUK. « Hardness of metric dimension in graphs of constant treewidth ». In : *Algorithmica* 84.11 (2022), p. 3110-3155.
- [LYZ19] Changhong LU, Qingjie YE et Chengru ZHU. « Algorithmic aspect on the minimum (weighted) doubly resolving set problem of graphs ». In : *Algorithmic Aspects in Information and Management: 13th International Conference, AAIM 2019, Beijing, China, August 6–8, 2019, Proceedings 13*. Springer. 2019, p. 212-222.
- [Mey78] Henry MEYNIEL. « Les 5-colorations d'un graphe planaire forment une classe de commutation unique ». In : *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 24.3 (1978), p. 251-257.

- [MM02] Tomás MADARAS et Andrea MARCINOVA. « On the structural result on normal plane maps ». In : *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 22.2 (2002), p. 293-303.
- [Moh07] Bojan MOHAR. « Kempe Equivalence of Colorings ». In : *Graph Theory in Paris: Proceedings of a Conference in Memory of Claude Berge*. Basel : Birkhäuser Basel, 2007, p. 287-297.
- [Moh85] Bojan MOHAR. « Akempic triangulations with 4 odd vertices ». In : *Discrete mathematics* 54.1 (1985), p. 23-29.
- [MÓT22] Satvik MASHKARIA, Gergely ÓDOR et Patrick THIRAN. « On the robustness of the metric dimension of grid graphs to adding a single edge ». In : *Discrete Applied Mathematics* 316 (2022), p. 1-27.
- [MS05] Michael MOLLOY et Mohammad R SALAVATIPOUR. « A bound on the chromatic number of the square of a planar graph ». In : *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 94.2 (2005), p. 189-213.
- [Rob+97] Neil ROBERTSON, Daniel SANDERS, Paul SEYMOUR et Robin THOMAS. « The Four-Colour Theorem ». In : *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 70.1 (1997), p. 2-44. ISSN : 0095-8956.
- [RW22] Rameez RAJA et Samir Ahmad WAGAY. « Some invariants related to threshold and chain graphs ». In : *arXiv* (2022).
- [SKS19] Badekara SOORYANARAYANA, Shreedhar KUNIKULLAYA et Narahari Narasimha SWAMY. « Metric dimension of generalized wheels ». In : *Arab Journal of Mathematical Sciences* 25.2 (2019), p. 131-144.
- [Sla75] Peter J. SLATER. « Leaves of trees ». In : *Congressus Numerantium* 14 (1975).
- [ŠŠ22] Jelena SEDLAR et Riste ŠKREKOVSKI. « Vertex and edge metric dimensions of cacti ». In : *Discrete Applied Mathematics* 320 (2022), p. 126-139.
- [Tal20] Alexandre TALON. « Intensive use of computing resources for dominations in grids and other combinatorial problems ». In : *arXiv* (2020).
- [TD15] Maguy TREFOIS et Jean-Charles DELVENNE. « Zero forcing number, constrained matchings and strong structural controllability ». In : *Linear Algebra and its Applications* 484 (2015), p. 199-218.
- [Tho01] Carsten THOMASSEN. *Applications of Tutte cycles*. Rapp. tech. 2001.
- [Weg77] Gerd WEGNER. *Graphs with given diameter and a coloring problem*. Rapp. tech. 1977.
- [Won96] Stephen A WONG. « Colouring graphs with respect to distance ». Thèse de doct. University of Waterloo, 1996.
- [Yus87] SV YUSHMANOV. « Estimates for the metric dimension of a graph in terms of the diameters and the number of vertices ». In : *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika* 1 (1987), p. 68-70.

- [ZB18] Junlei ZHU et Yuehua BU. « Minimum 2-distance coloring of planar graphs and channel assignment ». In : *Journal of Combinatorial Optimization* 36.1 (2018), p. 55-64.
- [ZPL21] Enqiang ZHU, Shaoxiang PENG et Chanjuan LIU. « Metric dimension and edge metric dimension of unicyclic graphs ». In : *arXiv* (2021).