



HAL
open science

Modélisation, analyse numérique et simulation de la propagation des ondes longitudinales dans le piano. Application à l'étude du toucher instrumental

Guillaume Castera

► **To cite this version:**

Guillaume Castera. Modélisation, analyse numérique et simulation de la propagation des ondes longitudinales dans le piano. Application à l'étude du toucher instrumental. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2023. Français. NNT : 2023PAUU3078 . tel-04714116

HAL Id: tel-04714116

<https://theses.hal.science/tel-04714116v1>

Submitted on 30 Sep 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Présentée et soutenue le 12 décembre 2023 par

Guillaume CASTERA

pour obtenir le grade de docteur
de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour
Spécialité : Mathématiques Appliquées

Modélisation, analyse numérique et simulation de la
propagation des ondes longitudinales dans le piano.
Application à l'étude du toucher instrumental

MEMBRES DU JURY

Présidente

▷ Caroline TRAUBE Professeure, Faculté de Musique de Montréal

Rapporteurs

▷ Bertrand MAURY Professeur, Université Paris-Saclay
▷ Jerónimo RODRÍGUEZ Maître de conférences, Universidade de Santiago de Compostela

Examineurs

▷ Toufic ABOUD Directeur scientifique IMACS
▷ Werner GOEBL Professeur, University of Music and Performing Arts Vienna
▷ Sébastien IMPERIALE Chargé de Recherche HDR, Inria Paris-Saclay

Directeurs de thèse

▷ Juliette CHABASSIER Chargée de Recherche, Inria Bordeaux – Sud-Ouest
▷ Paul FISSETTE Professeur, Université catholique de Louvain

Membres invités

▷ Philippe GUILLAUME Modartt
▷ Sébastien TIMMERMANS Quandyga Engineering

Résumé

La question de l'influence du toucher pianistique sur le son est souvent débattue au sein des communautés des pianistes et des scientifiques. L'hypothèse selon laquelle le toucher peut influencer le son par l'intermédiaire des ondes longitudinales présentes dans les cordes est répandue, mais n'a jamais été vérifiée, ni par l'expérience, ni par la modélisation physique. La simulation numérique du piano dans le domaine temporel, avec une attention toute particulière pour les ondes longitudinales, permet d'aborder cette question.

Cette thèse propose (I) l'application et l'analyse mathématique de méthodes de quadratisation d'énergie pour les cordes dans un formalisme variationnel, (II) la modélisation des mouvements de rotation du chevalet pour le couplage de la corde à la table d'harmonie, (III) la prise en compte d'un terme de frottement entre le marteau et la corde, et l'étude de la flexibilité du manche du marteau, et (IV) l'assemblage de ces contributions et d'un modèle multicorps de mécanique de frappe pour l'étude du toucher pianistique.

Tout d'abord, nous appliquons diverses techniques de quadratisation d'énergie pour la simulation numérique de modèles de propagation d'ondes non-linéaires de corde de piano avec une discrétisation spatiale par éléments finis spectraux d'ordre élevé. Nous développons alors leur analyse mathématique de stabilité, consistance et convergence sur une équation d'ondes générique formulée à l'ordre 2. Des résultats numériques appliqués à la corde de piano sont mis en relation avec ce travail théorique. L'utilisation de ces techniques récentes permet notamment une nette réduction du temps de calcul par rapport aux méthodes habituellement utilisées pour résoudre ce type de problème, puisqu'elles permettent l'écriture de schémas linéairement implicites à partir d'équations non-linéaires. Cela se fait au prix de problèmes de convergence espace-temps assez marqués.

Ensuite, la prise en compte des mouvements de rotation du chevalet permet la transmission fidèle des ondes longitudinales depuis la corde vers la table d'harmonie. Cette modélisation originale permet d'observer des précurseurs longitudinaux et d'étudier l'influence de l'orientation spatiale de la corde sur la transmission des ondes via le chevalet.

Par ailleurs, l'utilisation d'un terme de frottement entre le marteau et la corde modifie la génération des ondes longitudinales dans la corde et change son contenu spectral. Nous proposons également une technique de quadratisation novatrice pour des énergies cinétiques non-linéaires et un schéma permettant son intégration numérique. L'application au manche de marteau flexible en rotation autour d'un axe fixe permet d'obtenir un schéma linéairement implicite qui vérifie inconditionnellement un bilan de puissance discret et qui converge à l'ordre 2 en espace-temps.

Enfin, tous ces développements contribuent à une meilleure compréhension des mécanismes de propagation des ondes dans l'instrument. L'utilisation d'un modèle multicorps de mécanique de frappe et de données d'enfoncement de touche mesurés en situation de jeu permet alors l'étude de l'influence du toucher pianistique sur la génération des ondes longitudinales et sur le son.

Les résultats proposés contribuent à la fois aux domaines des mathématiques numériques et de l'acoustique musicale. Ils permettent d'expliquer plus finement la génération, la propagation et la transmission des ondes longitudinales dans le piano et peuvent avoir des répercussions pour la facture instrumentale. L'analyse du toucher par cette approche de modélisation apporte également une meilleure compréhension, quantitative et nuancée, des possibilités d'expression des musiciens.

Abstract

The question of the influence of the pianistic touch on sound is often debated within the pianist and scientific communities. The hypothesis that touch can influence sound via longitudinal waves in the strings is widespread, but has never been verified either experimentally or by physical modeling. Time-domain numerical simulation of the piano, with a particular focus on longitudinal waves, enables to address this question.

This thesis proposes (I) the application and mathematical analysis of energy quadratization methods for strings in a variational formalism, (II) the modeling of rotational movements of the bridge for the coupling of the string to the soundboard, (III) the consideration of a friction term between the hammer and the string, and the study of the flexibility of the hammer shank, and (IV) the combination of these contributions with a multibody model of striking mechanics for the study of pianistic touch.

First, we apply various energy quadratization techniques for the numerical simulation of nonlinear wave propagation models of piano string with high-order spectral finite elements. We then develop their mathematical analysis of stability, consistency and convergence on a generic wave equation formulated at order 2. Numerical results applied to the piano string are related to this theoretical work. In particular, the use of these recent techniques enables a clear reduction in computation time compared with the methods usually used to solve this type of problem, since they allow the writing of linearly implicit schemes from nonlinear equations. However, this comes at the price of significant space-time convergence problems.

Then, by taking into account the bridge's rotational movements, longitudinal waves are faithfully transmitted from the string to the soundboard. This original modeling allows us to observe longitudinal precursors and to study the influence of the string's spatial orientation on waves transmission via the bridge.

Furthermore, the use of a friction term between the hammer and the string modifies the generation of longitudinal waves in the string and changes its spectral content. We also propose a novel quadratization technique for nonlinear kinetic energies and a scheme for its numerical integration. Application to a rotating flexible hammer shank around a fixed axis yields a linearly implicit scheme that unconditionally satisfies a discrete power balance and shows quadratic space-time convergence.

Finally, all these developments contribute to a better understanding of wave propagation mechanisms in the instrument. The use of a multibody model of piano action and key depression data measured in playing situations enables us to study the influence of pianistic touch on longitudinal wave generation and on the sound.

The proposed results contribute to both the fields of numerical mathematics and musical acoustics. They provide a more detailed explanation of the generation, propagation and transmission of longitudinal waves in the piano, and may have implications for instrument making. The analysis of touch through this modeling approach also provides a better quantitative and nuanced understanding of musicians' expressive possibilities.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement ma chère directrice de thèse Juliette Chabassier pour ces trois années (et un peu plus). Merci pour ta grande disponibilité, tes conseils et ton accompagnement en toutes circonstances. Et bien sûr merci pour toutes les discussions musicales de hautboïste de cette dernière année! T'inquiète, dans un future proche on réussira à faire des anches de pro ;-)

Un immense merci également à mon cher directeur de thèse Paul Fisette, pour ta bonne humeur constante et ton expertise avisée de pianiste et mécanicien passionné. Le côté mathématique n'était peut-être pas ton domaine d'expertise, ces équations "gargantuesques" comme tu les as appelées, mais tu as su être parfaitement complémentaire avec Juliette pour me guider.

Mes sincères remerciements vont à Bertrand Maury et Jerónimo Rodríguez qui ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Merci également à Toufic Abboud, Werner Goebel, Sébastien Imperiale et Caroline Traube qui constituent mon jury. Merci à Philippe Guillaume et Sébastien Timmermans qui ont également accepté d'apporter leur expertise en tant qu'invités.

Malgré des débuts difficiles en plein covid, ces trois années à l'Inria ont été un grand plaisir grâce à toutes les personnes qui ont fait partie de notre petite équipe d'acoustique musicale. Tobias van Baarsel, Olivier Geber, et tous les stagiaires, Brad Wagijo, Lara Dib, Coralie Vernay, Anaëlle Fresneau, Andréas Autin et Marie Compain. Mention spéciale pour Augustin Ernoult qui a toujours pris le temps de répondre à mes interrogations physiques existentielles, et à mon frère de thèse Alexis Thibault qui va m'accompagner encore un moment dans de nouvelles aventures.

Merci à toute cette fine équipe pour les moments musicaux du midi à l'Inria. Un jour Juliette a dit "c'est si beau *d'habitude*" ... ça en dit long.

Je remercie aussi tous les membres de l'open space madpowers, dont la team Pleiade, Coralie, Chabname, Pablo, Leonard, et Maxime qui m'a tenu compagnie dans le rush de fin de thèse. Bisous ;-)

Merci plus généralement à toute l'équipe Makutu, à Marc Durufflé pour son secours pour la compilation de Montjoie, à Sylvie Embolla pour sa grande disponibilité et ses encouragements, à Fabienne Cuyollaà, et bien sûr à Hélène Barucq.

Je remercie également toute l'équipe du Meed en Belgique pour leur accueil chaleureux.

Je souhaite également remercier Emmanuel Jeannot, qui un jour a eu la gentillesse de me recommander à Juliette alors que je cherchais un stage. Merci beaucoup Emmanuel.

Si ces trois années ont été aussi épanouissantes musicalement, c'est en grande partie grâce à Jean-Marie Juan que je remercie beaucoup pour tous les projets musicaux auxquels il m'a convié.

Merci à Isabelle Laurent pour ses encouragements et pour le magnifique concert que nous avons pu monter tous les deux. Vivement le prochain!

Merci Véronique, Sylvain et Jacques (et Aria qui vocalise?) pour la confiance que vous me portez à vous accompagner, et pour les super moments passés ensemble.

Et bien sûr, la meilleure de tous les profs de musique du monde, merci à ma très chère Céline Joly-Forest. J'ai réalisé récemment, en plein concert, la chance que j'ai eu de t'avoir comme prof, car c'est grâce à toi que je peux aujourd'hui jouer avec autant de plaisir. Merci Céline pour ton enseignement.

A mes parents, et mes grands parents, merci pour votre amour et votre soutien inconditionnel.

Enfin, à Nono, Lolo, Benito, Tech et Franswag les meilleurs colocs, et à tous mes chers amis des mines et d'ailleurs, merci pour tous ces weekends et soirées de folie ; et ce n'est pas près de s'arrêter !

Table des matières

Résumé en français	iii
Résumé en anglais	v
Remerciements	vii
Table des matières	ix
Communications	xiii
Introduction	1
1 Simulation d'une corde non-linéaire par des techniques de quadratisation d'énergie	7
1.1 Modélisation des cordes de piano	10
1.1.1 Modèle de corde vibrante	11
1.1.2 Modèles avec prise en compte de la raideur	12
1.1.3 Modèle non-linéaire géométriquement exact	14
1.1.4 Prise en compte de l'amortissement	15
1.1.5 Formulation générique des modèles de corde	16
1.1.6 Formulation variationnelle et énergie	17
1.1.7 Propriétés et estimations à priori	18
1.2 Méthodes de quadratisation d'énergie pour la corde	20
1.2.1 Quadratisation à énergie invariante formulée à l'ordre 2 (2-IEQ)	21
1.2.2 Variable auxiliaire scalaire formulée à l'ordre 2 (2-SAV)	27
1.2.3 Variable auxiliaire scalaire formulée dans l'espace des phases (P-SAV)	30
1.3 Analyse numérique des schémas 2-IEQ et 2-SAV sur une équation d'ondes générique formulée à l'ordre 2	34
1.3.1 Équation générale	35
1.3.2 Quadratisation à énergie invariante (IEQ)	37
1.3.3 Quadratisation par variable auxiliaire scalaire (SAV)	41
1.3.4 Analyse de stabilité	45
1.3.5 Hypothèses de régularité discrète	48
1.3.6 Étude de consistance	54
1.3.7 Étude de convergence pour des non-linéarités de type 1	55
1.3.8 Étude de convergence pour des non-linéarités de type 2	59
1.4 Applications et résultats numériques pour la corde de piano	59
1.4.1 Propriétés des fonctionnelles non-linéaires et des fonctions auxiliaires	61
1.4.2 Solutions des schémas	65
1.4.3 Préservation du bilan de puissance discret	65
1.4.4 Convergence en temps	66
1.4.5 Pollution numérique	67
1.4.6 Convergence espace-temps	67
1.4.7 Influence des paramètres de discrétisation	71

1.4.8	Simulations avec amortissement	76
1.4.9	Recommandations d'utilisation des schémas quadratisés	77
1.5	Conclusion du chapitre 1 et perspectives	78
2	Mouvements du chevalet et précurseurs longitudinaux	81
2.1	La table d'harmonie comme une plaque de Reissner-Mindlin	84
2.1.1	Modèle de Reissner-Mindlin	85
2.1.2	Décomposition modale	86
2.1.3	Formulation variationnelle et énergie	87
2.2	Modèle de chevalet mobile dans l'espace	87
2.2.1	Expression des forces de couplage	89
2.2.2	Formulation variationnelle et énergie	90
2.2.3	Choix de fonction de répartition χ_Ω	93
2.3	Discrétisation du modèle couplé corde - table d'harmonie	93
2.3.1	Schéma numérique pour la table d'harmonie	94
2.3.2	Schéma numérique pour le modèle couplé	96
2.3.3	Algorithme de résolution	98
2.3.4	Résultats numériques	100
2.4	Précurseurs et transmissions longitudinales	105
2.4.1	Note Ré $^\sharp_1$	106
2.4.2	Note Fa $_3$	108
2.4.3	Note Do $^\sharp_5$	109
2.4.4	Synthèse	111
2.5	Influence de l'orientation des cordes par rapport à la table	111
2.5.1	Admittance du chevalet - Mobilité fréquentielle	112
2.5.2	Puissance transmise à la table d'harmonie	112
2.5.3	Réponse impulsionnelle transversale	113
2.5.4	Réponse impulsionnelle longitudinale	114
2.6	Conclusion du chapitre 2 et pistes d'améliorations	115
3	Frottement du marteau sur la corde et flexibilité du manche	117
3.1	Modèles d'interaction marteau-corde	120
3.1.1	Loi phénoménologique d'écrasement du feutre	121
3.1.2	Interaction transversale avec la corde	122
3.1.3	Modèle d'interaction transversal quadratisé	124
3.1.4	Frottement et interaction longitudinale avec la corde	126
3.2	Discrétisation et études numériques	128
3.2.1	Écriture d'un schéma de discrétisation avec frottement	129
3.2.2	Stratégie de résolution	131
3.2.3	Résultats numériques	132
3.3	Quadratisation d'énergie pour le manche flexible	138
3.3.1	Technique de quadratisation des équations d'Euler-Lagrange	139
3.3.2	Application au manche de marteau flexible en rotation	146
3.3.3	Résultats numériques	159
3.3.4	Conclusion	162
3.4	Conclusion du chapitre 3 et pistes d'améliorations	162
4	Influence du toucher sur le son des pianos	165
4.1	De la touche jusqu'au son : vers un modèle de piano complet	167
4.1.1	Modèles multicorps de mécaniques de piano	168
4.1.2	Modèle multicorps-vibro-acoustique du piano	169
4.1.3	Simulations numériques	173

4.1.4	Correspondance des paramètres de modélisation	174
4.2	Flexibilité, frottements, et influence du toucher pianistique	177
4.2.1	Comportement non-linéaire de la mécanique	178
4.2.2	L'art d'appuyer sur les touches	179
4.2.3	Influence du frottement entre le marteau et la corde	180
4.2.4	Influence de la flexibilité du manche	186
4.2.5	Influence du toucher pianistique	194
4.3	Conclusion du chapitre 4 et perspectives	199
Conclusions et Perspectives		201
Annexes		203
A	Paramètres physiques utilisés pour les simulations	203
B	Terme source \mathcal{C}^∞ en espace et en temps	205
C	Lemmes de Gronwall discrets	206
D	Résolution exacte du schéma de table d'harmonie	208
E	Génération de signaux d'écoute de la table d'harmonie	209
Références bibliographiques		211

Communications relatives à ce travail

Revues à comité de lecture

Guillaume Castera, Juliette Chabassier.

Linearly implicit time integration scheme of Lagrangian systems via quadratisation of a nonlinear kinetic energy. Application to a rotating flexible piano hammer shank.

Soumis au journal M2AN, Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, en août 2023.

Rapports de Recherche

Guillaume Castera, Juliette Chabassier.

Numerical analysis of quadratized schemes. Application to the simulation of the nonlinear piano string. RR-9516, Inria. 2023. [⟨hal-04182465⟩](#)

Guillaume Castera, Juliette Chabassier, Paul Fisette, Brad Wagijo.

Piano bridge mobility and longitudinal precursors. RR-9530, Inria. 2023. [⟨hal-04317501⟩](#)

Conférences internationales

Guillaume Castera, Juliette Chabassier.

Energy-preserving IEQ and SAV schemes applied to piano string. ICOSAHOM, July 2021, Vienna, Austria. [⟨hal-03514716⟩](#)

Guillaume Castera, Juliette Chabassier.

Linearly implicit energy consistent time discretisation for nonlinear wave equations. WAVES, Juillet 2022, Palaiseau, France. [⟨hal-03757200⟩](#)

Conférences françaises

Guillaume Castera, Sébastien Timmermans, Juliette Chabassier, Paul Fisette.

Influence du toucher sur le son des pianos. CFA, Congrès Français d'Acoustique, Avril 2022, Marseille, France. [⟨hal-03842214⟩](#)

Guillaume Castera, Juliette Chabassier.

Analyse numérique de schémas quadratisés pour des équations d'ondes non-linéaires. JOSO, Journées Ondes de Sud-Ouest, Mars 2023, Toulouse, France.

Séminaires

Guillaume Castera, Juliette Chabassier, Paul Fisette.

Sound synthesis of virtually restored pianos from a player's performance. CIRMMT Workshop : "Analysis and modelling of piano action and piano performance, from gesture to sound", Mai 2021, en visioconférence.

Guillaume Castera, Juliette Chabassier, Paul Fisette.

Synthèse sonore, issue d'une interprétation, de pianos restaurés virtuellement. Journée de séminaire du SCRIME, Juin 2021, en visioconférence.

Guillaume Castera, Sébastien Timmermans, Juliette Chabassier, Paul Fisette.
Influence du toucher sur le son des pianos. Journée thématique : "Interaction Musicien/Instrument :
Regards croisés entre sciences du mouvement humain et acoustique", Mai 2022, Paris, France.

Introduction générale

C'est au 14^{ème} siècle, avec l'apparition des forges à métaux, que sont fabriquées les premières cordes pour des instruments de musique. S'en suit l'invention des premiers instruments de musique à corde munis de claviers : les clavicordes et les clavecins. Depuis, les fabricants d'instruments, appelés des *facteurs*, n'ont eu de cesse de chercher à améliorer conjointement le son et les possibilités d'expression des instrumentistes. En raison du principe d'actionnement de la corde, pincée par un plectre, le clavecin offre peu de contrôle au musicien sur l'intensité du son produit. Les avancées majeures sur le *toucher* débutent au 18^{ème} siècle lorsque Bartolomeo Cristofori invente le mécanisme d'échappement, qui permet à un marteau de frapper une corde sans en étouffer la vibration. C'est l'invention du tout premier instrument à clavier et à cordes frappées avec échappement : le pianoforte. Contrairement à ce que son nom semble indiquer, le son produit par le pianoforte est faible, et bien que la mécanique de frappe soit révolutionnaire, le *toucher* reste délicat et difficile à contrôler.

Motivées par l'intérêt croissant des compositeurs pour ce nouvel instrument, de nombreuses avancées technologiques sont appliquées au pianoforte dans les siècles suivants. Citons par exemple l'ajout d'étouffoirs sur les cordes dans la mécanique de Stein en 1777, puis l'invention de la mécanique à double échappement par Erard en 1823 qui permet une répétition très rapide d'une même touche. En 1834, pendant la révolution industrielle, l'idée apparaît d'utiliser les nouvelles techniques d'alliages de métaux (fonte d'acier) pour confectionner des cordes de musique et construire des cadres et structures de plus en plus résistants. C'est à cette même période que les peaux et cuirs qui recouvrent les marteaux sont remplacés par du feutre, qui adoucit considérablement le son pour le rendre moins percussif.

Ces avancées combinées font exploser les innovations : les cordes sont allongées, tendues fortement pour augmenter la puissance sonore rayonnée, et les marteaux feutrés combinés aux mécaniques à double échappement permettent une grande expressivité et virtuosité des musiciens.

Cela mène à l'instrument que nous connaissons aujourd'hui : un mastodonte de près d'une demi tonne de fonte, d'acier et de bois, pourtant capable de nuances et de timbres sonores très doux, et qui font de lui, et de loin, l'instrument au plus grand répertoire et le plus joué dans le monde.

Quatre-vingt huit touches (voire plus sur certains modèles de prestige) permettent, par l'intermédiaire d'une mécanique complexe, de mettre en mouvement des marteaux qui frappent chacun une, deux ou trois cordes. Les cordes ainsi mises en vibration n'ont pas une surface de contact avec l'air suffisante pour rayonner d'elles-mêmes le son dans l'air ambiant. Par conséquent, comme sur tous les instruments à cordes, elles transmettent leurs vibrations à une fine plaque en bois appelée *table d'harmonie* par l'intermédiaire d'une autre pièce en bois appelée *chevalet*. La grande surface de la table d'harmonie permet alors de transmettre les vibrations à l'air ambiant avec une puissance sonore suffisante pour les plus grandes salles de concert.

Aujourd'hui encore, les facteurs de pianos sont en quête d'innovation, et un travail conséquent est mené pour gagner en homogénéité sonore entre toutes les touches du clavier, et pour la recherche de timbres originaux. Au fur et à mesure de leurs créations, les facteurs modifient successivement les formes, les matériaux, les réglages, afin d'atteindre l'excellence. Pour le piano, la complexité, la taille, et bien sûr le prix d'une telle démarche de recherche rendent cette tâche ardue et les constructeurs ne peuvent malheureusement explorer qu'un nombre limité de possibilités. Ce

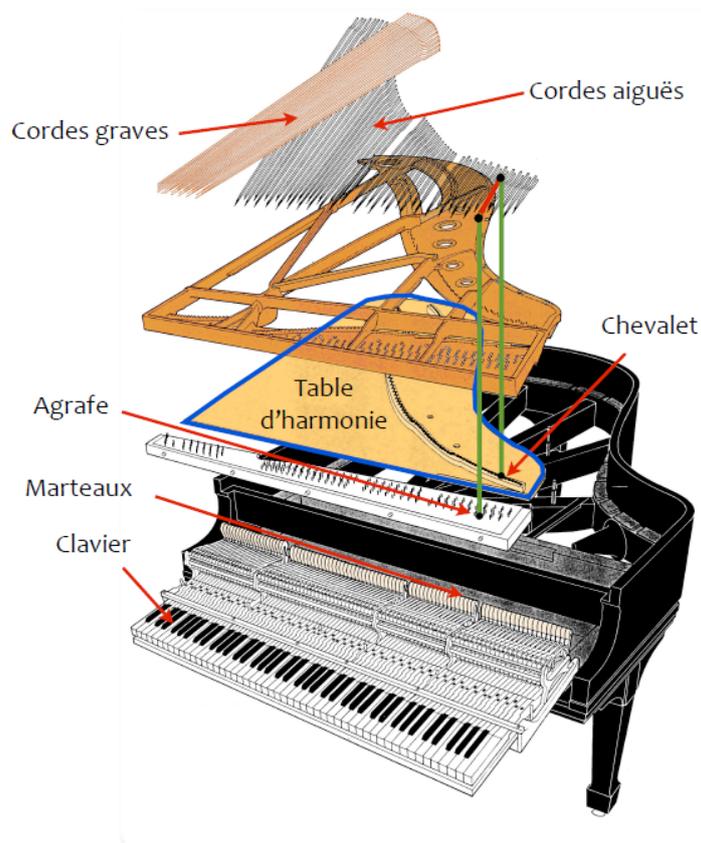


FIGURE 0.1 – Vue éclatée d'un piano à queue moderne [Chabassier, 2012].

processus pourrait grandement évoluer grâce à la simulation numérique et les connaissances en acoustique accumulées depuis plusieurs décennies. Cette thèse s'inscrit dans cette démarche de compréhension des phénomènes de propagation des ondes dans l'instrument par une approche de modélisation physique, d'analyse mathématique, et de simulations numériques, alimentées par des données réelles.

La question de l'influence du toucher pianistique

Un grand débat a lieu entre les pianistes et les scientifiques depuis plusieurs décennies autour de la question suivante :

Quelle est l'influence du toucher pianistique sur le son produit par le piano ?

Autrement dit, deux notes jouées avec la même intensité (qui produisent la même nuance) mais avec une attaque différente du doigt sur la touche peuvent-elles sonner différemment ? Les pianistes sont assez unanimes et affirment qu'il peuvent réaliser différents timbres et sonorités en modifiant la façon avec laquelle ils actionnent une touche. C'est même partie intégrante de certaines méthodes d'enseignement de haut niveau que de parvenir à une maîtrise du son par un contrôle précis de l'échappement, c'est-à-dire de l'instant à partir duquel le pianiste perd irrémédiablement le contrôle sur le mouvement du marteau et donc sur le son produit *in fine* [Traube, 2017].

Dès le début du 20^{ème} siècle, des articles paraissent pour contester une telle influence. [White, 1930] et [Hart *et al.*, 1934] affirment que le son est absolument corrélé à la vitesse du marteau. Pour eux, toute différence de son, de couleur ou de timbre est due à une différence de nuance et de vitesse de marteau. [Turner, 1939] qualifie alors le toucher comme une *illusion des pianistes*. [Askenfelt *et al.*, 1998] émettent une hypothèse psycho-acoustique pour expliquer ce profond désaccord entre les deux

communautés. L'auditeur et le pianiste entendent tous les deux le même son, mais l'instrumentiste a accès à une information sensorielle tactile supplémentaire lors du processus de création de ce son. Il est alors possible que le ressenti tactile du toucher modifie la perception auditive de l'instrumentiste sans changer celle de l'auditeur. Plus tard, [Goebel *et al.*, 2004] et [Goebel *et al.*, 2014] montrent expérimentalement que le toucher pianistique n'est perceptible que par les sons mécaniques produits, par exemple le bruit du doigt sur la touche. Les auteurs montrent que si ces bruits parasites sont retirés, les sons ne sont plus discernables par des auditeurs, musiciens ou non. [Traube, 2017] semble tout de même montrer une corrélation entre le toucher et le timbre de façon indépendante de la nuance, sans toutefois préciser si ces différences sont perceptibles par des auditeurs extérieurs.

Des approches de modélisations et de simulations numériques peuvent également être utilisées pour aborder la question du toucher pianistique. Contrairement aux approches expérimentales qui ne permettent que de confirmer ou infirmer l'influence du toucher sur le son, l'approche de modélisation permet une réponse quantifiable, objective, et permet de justifier physiquement les phénomènes et différences observées. Il est également possible d'explorer des configurations difficilement ou non réalisables en pratique, et d'assurer une reproductibilité des expériences.

Génération et transmission des ondes longitudinales dans les cordes

[Izabdakhsh *et al.*, 2008], [Vyasarayani *et al.*, 2009] et [Chabassier et Duruffé, 2014] montrent, par des approches de modélisation, que la flexibilité du manche du marteau peut affecter significativement la manière avec laquelle les cordes sont frappées. Tout d'abord, les oscillations de la tête du marteau causées par la flexibilité du manche créent un mouvement de frottement sur la corde pendant l'impact. Ensuite, en changeant la force exercée par la mécanique sur le rouleau, ils remarquent qu'il est possible de modifier ces oscillations. Les auteurs font le lien entre ces mouvements tangentiels et la présence d'une onde d'élongation de la corde, communément appelée *onde longitudinale*, orientée dans la même direction que les mouvements de frottement du marteau. Ces ondes sont majoritairement générées par un couplage non-linéaire avec les ondes transversales d'élevation de la corde. En effet, lorsque la corde est déformée transversalement, elle est de facto étendue dans sa direction longitudinale. Il est possible toutefois que le mouvement de frottement du marteau sur la corde soit un autre mécanisme d'excitation propre aux ondes longitudinales.

Bien que ce soient les ondes transversales qui participent majoritairement au son produit par le piano, les ondes longitudinales sont également audibles sous la forme d'un son de cloche de fréquence élevée [Knoblauch, 1944]. En raison de leur propagation rapide, elles atteignent le chevalet bien avant les ondes transversales qui sont environ 15 fois plus lentes. Cette différence fait apparaître un son, appelé *précurseur longitudinal*, qui précède temporellement l'apparition des vibrations transversales, et qui a été décrit pour la première fois dans [Podlesak et Lee, 1988]. L'importance des ondes longitudinales est telle que des brevets ont été déposés concernant des stratégies de conception et d'accord des pianos qui tiennent compte de leur présence [Conklin, 1970].

"La composante du mouvement du marteau tangentielle à la corde est probablement une cause d'excitation [des ondes longitudinales] et le mouvement complexe du chevalet de basse permet probablement le transfert de l'énergie à la table d'harmonie." [Knoblauch, 1944]

En accord avec les prédictions de [Knoblauch, 1944], [Vyasarayani *et al.*, 2009] et [Chabassier et Duruffé, 2014] s'entendent à dire que le toucher pianistique pourrait influencer sur la déformation du manche du marteau, donc également sur le frottement appliqué à la corde, et donc sur les ondes longitudinales présentes dans la corde. Nous ajoutons que la modification de l'excitation

longitudinale par le marteau pourrait avoir une influence toute particulière sur les précurseurs longitudinaux et donc sur la perception auditive de l'attaque du son.

Objectifs de la thèse et enjeux techniques

Afin d'étudier l'influence du toucher pianistique sur le son, nous souhaitons affiner notre compréhension des mécanismes de transmission des ondes dans l'instrument, et tout particulièrement celui des ondes longitudinales. Pour cela, nous nous baserons sur les modèles développés dans [Chabassier, 2012] et [Chabassier et Duruflé, 2014], qui forment un modèle complet du piano, depuis les vibrations du manche du marteau jusqu'à la radiation du son dans l'air. Certains de ces modèles dont les limitations ont été mises en lumière par l'autrice elle-même, seront améliorés pour permettre la fine représentation des ondes longitudinales tout le long de l'instrument. Nous modéliserons notamment le frottement entre le marteau et la corde, et nous nous assurerons que les ondes longitudinales soient bien transmises à la table d'harmonie via le chevalet.

Dans la perspective d'étudier le toucher, c'est-à-dire l'action de l'instrumentiste, il est bien évidemment essentiel de disposer d'un modèle de la mécanique de frappe du piano de la touche jusqu'à la mise en mouvement du marteau. Nous utiliserons pour cela les travaux récents de [Bokiau, 2016] et [Timmermans, 2021], qui ont respectivement réalisé des modèles multicorps de la mécanique de Stein des pianoforte viennois du 18^{ème} siècle, et d'une mécanique moderne à double échappement de marque Renner¹.

Une fois combinés aux modèles vibro-acoustiques de [Chabassier, 2012], nous disposerons d'un modèle de piano complet, de la touche jusqu'au son, qui nous permettra d'étudier l'influence du toucher sur le son.

Un important travail de modélisation et de discrétisation numérique sera également mis en œuvre tout au long de ce manuscrit. En raison du caractère ondulatoire des phénomènes vibro-acoustiques étudiés, nous serons très attentifs à la précision et à la stabilité des méthodes numériques utilisées. Pour cela, nous serons toujours guidés par la volonté d'écrire des modèles qui préservent des *bilans de puissance*, et dont la *passivité*, c'est-à-dire la non création d'énergie sans apport extérieur, est garantie. De telles propriétés permettent, dans la plupart des cas, d'écrire des schémas numériques dont la stabilité et la convergence peuvent être démontrées mathématiquement.

Les discrétisations spatiales des modèles seront faites par des éléments finis d'ordre élevé [Cohen, 2002]. Contrairement aux différences finies fréquemment utilisées en acoustique musicale, ces méthodes variationnelles assurent une convergence rapide à tout ordre vers la solution exacte [Joly, 2003], du moins pour des problèmes linéaires. Elles permettent de plus la prise en compte de conditions aux limites complexes comme par exemple celle de la corde fixée au chevalet.

Les discrétisations temporelles seront construites afin de garantir la préservation d'un équivalent discret du bilan de puissance du modèle continu.

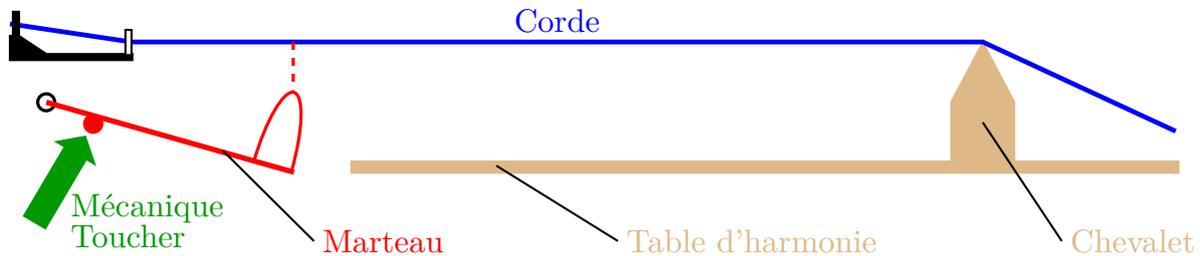
Afin d'éviter des coûts de calcul trop élevés, nous attacherons également de l'importance à la réduction maximale de la complexité des méthodes numériques.

Enfin, nous précisons que ce travail ne vise *pas* à étudier les phénomènes de dissipation des ondes. Nous réutiliserons tels quels les modèles d'amortissement de [Chabassier, 2012]. La prise en compte de l'amortissement est pourtant un critère important pour le réalisme sonore des sons simulés. Nous n'apporterons donc *pas* non plus un grand intérêt au réalisme des sons produits par notre modèle. La synthèse sonore par modèles physiques est une discipline à part entière qui vise plus le réalisme des sons produits que le réalisme physique des modèles sous-jacents. Notre étude vise plutôt la compréhension de la physique et des méthodes numériques mises en œuvre.

1. <https://rennerusa.com>

Plan du manuscrit

■ Chapitre 1 ■ Chapitre 2 ■ Chapitre 3 ■ Chapitre 4



Vue schématique de l'organisation du manuscrit sur une vue en coupe d'un piano.

Le manuscrit est structuré suivant les différentes étapes de **génération**, **propagation** et **transmission** des ondes longitudinales dans l'instrument.

Dans le premier chapitre, nous étudions des méthodes numériques qui permettent de réduire la complexité calculatoire de résolution des modèles de **propagation** non-linéaires qui couplent les vibrations transversales et longitudinales des cordes. Ces méthodes numériques de *quadratisation d'énergie* permettent l'écriture de schémas numériques linéairement implicites à partir de modèles non-linéaires. En particulier, les méthodes de résolution itératives usuelles pour ce genre de problèmes sont supprimées. Dans un premier temps, nous présentons succinctement les principaux modèles utilisés en acoustique musicale pour décrire les vibrations des cordes, puis nous leur appliquons des techniques de quadratisation grâce auxquelles nous écrivons plusieurs schémas numériques linéairement implicites. La suite, plus théorique, détaille l'analyse mathématique de la stabilité, la consistance et la convergence des schémas appliqués à une équation d'onde générique formulée à l'ordre 2 et qui présente différents types de termes non-linéaires. À notre connaissance, l'utilisation et l'analyse de ces schémas dans un formalisme d'éléments finis pour des équations d'ondes est originale. Nous présentons pour finir des applications numériques pour la corde de piano et tentons de les mettre en relation avec les travaux théoriques des sections précédentes.

Le second chapitre est consacré à la modélisation des mouvements complexes du chevalet pour la **transmission** des ondes entre les cordes et la table d'harmonie. Elle consiste en un raffinement du modèle de [Chabassier, 2012] qui permet une transmission plus fidèle des ondes longitudinales par la prise en compte des mouvements de rotation du chevalet et leur transmission aux directions de cisaillement de la table d'harmonie, modélisée comme une plaque de Reissner-Mindlin. L'ajout de ces mobilités, qui à notre connaissance n'avaient jamais été modélisées auparavant dans le contexte du couplage entre une corde non-linéaire et une table d'harmonie, permet d'observer des précurseurs longitudinaux. Nous proposons également une étude de l'influence de l'orientation angulaire de la corde par rapport à la table d'harmonie sur la puissance transmise via le chevalet. Cette étude, rendue possible par notre outil de simulation numérique, pourrait avoir des applications pour la facture instrumentale.

Le troisième chapitre présente un modèle d'interaction entre le marteau et la corde qui tient compte du frottement entre eux. Cette interaction tangentielle est prise en compte par un modèle de Coulomb régularisé et modifie la **génération** des ondes longitudinales. Ce chapitre présente également une méthode de quadratisation d'énergie généralisée à des termes cinétiques. Nous proposons une technique novatrice basée sur les équations d'Euler-Lagrange, qui permet l'écriture de schémas numériques linéairement implicites non plus seulement pour des termes non-linéaires

potentiels, mais également pour des termes non-linéaires cinétiques. Elle est appliquée au marteau à manche flexible en rotation pour lequel un bilan de puissance discret est inconditionnellement vérifié et une convergence à l'ordre 2 en espace-temps est observée.

Le quatrième et dernier chapitre combine toutes les contributions des chapitres précédents pour étudier l'influence du **toucher pianistique** sur le son. Des correspondances entre le modèle multicorps de [Timmermans, 2021] et notre modèle vibro-acoustique sont établies et permettent de réaliser des simulations de sons directement à partir de l'enfoncement de la touche. Nous étudions alors l'influence de la flexibilité du manche et des frottements entre le marteau et la corde sur le son produit. Enfin, en nous basant sur des enfoncements de touche issus de prestations réelles dans différents styles de jeu (legato, staccato, appuyé, frappé), nous montrons quantitativement quelles sont les influences possibles du toucher sur le son.

Chacun des trois premiers chapitres, indépendants mais s'éclairant mutuellement, contient individuellement :

- une introduction qui présente un état de l'art et une description plus précise des phénomènes étudiés,
- une étape de modélisation des phénomènes physiques,
- une étape de discrétisation nécessaire pour réaliser des simulations numériques, avec éventuellement une analyse mathématique (chapitre 1),
- une conclusion spécifique qui présente notamment des discussions et des perspectives du travail réalisé.

Le chapitre 4 fait exception. Il utilise les résultats des chapitres précédents pour dégager des conclusions physiques, mais ne présente pas d'étape de discrétisation ni d'analyse mathématique. Le lecteur intéressé uniquement par les résultats sur le toucher pianistique peut lire ce chapitre indépendamment des autres.

CHAPITRE 1

Simulation d'une corde non-linéaire par des techniques de quadratisation d'énergie

La corde est la source de toutes les vibrations émises par le piano. Ses vibrations, de spectre quasi-harmonique, créées par l'impact du marteau se propagent et sont transmises à la table d'harmonie, puis rayonnées dans l'air. En raison de ce rôle particulier, une attention toute particulière doit être portée à la modélisation et la simulation numérique des cordes.

Comme beaucoup de systèmes physiques, la corde ne peut pas être modélisée linéairement lorsqu'elle est soumise à des déformations importantes. Elle couple une déformation transversale, perpendiculaire à sa longueur, à une déformation longitudinale similaire à celle d'un ressort dans le sens de son élongation. Ces deux déformations ondulatoires ont des propriétés très différentes en termes de vitesse de propagation et de contenu spectraux. La discrétisation des modèles non-linéaires qui décrivent les vibrations de la corde sont par conséquent des problèmes complexes.

Les phénomènes non-linéaires sont très couramment en modélisation de problèmes physiques, et ce dans pratiquement tous les domaines. Pour notre analyse, nous discriminerons deux groupes de non-linéarités distincts. Nous appellerons dans ce travail une non-linéarité *de type 1* un terme non-linéaire dépendant uniquement du champ solution. C'est par exemple le cas de l'équation de Sine-Gordon [Rubinstein, 1970], ou bien encore des équations de Allen–Cahn [Allen et Cahn, 1979] et Cahn-Hilliard [Cahn et Hilliard, 1958] très largement utilisées en dynamique des phases pour l'étude des mélanges chimiques. Les modèles réduits de marteau de piano au contact d'une corde qui seront présentés au chapitre 3, ou encore les modèles d'anches d'instruments à vent [Bilbao *et al.*, 2015] présentent aussi des termes non-linéaires de type 1.

Une non-linéarité *de type 2* sera quant à elle un terme non-linéaire dépendant du gradient du champ solution. C'est le cas des cordes, plaques, et tout solide soumis à des grandes déformations [Banks *et al.*, 1995].

Une stratégie répandue pour résoudre des systèmes non-linéaires en garantissant un bilan de puissance discret est d'utiliser les schémas de type Gradient Discret. Dans [Rincon et Quintino, 2016] et [He et Sun, 2020], ces schémas sont utilisés pour la résolutions de problèmes 2D ou 3D pour des non-linéarités de type 1. [Shen et Yang, 2010] réalisent quant à eux des discrétisations des équations de Allen-Cahn et Cahn-Hilliard et donnent des preuves de convergence. Des problèmes d'élasticité non-linéaires sont résolus dans [Gonzalez, 2000]. [Bilbao *et al.*, 2015] et [Chatziioannou

et Van Walstijn, 2015] utilisent des gradients discrets pour des contacts en acoustique, qui peuvent être de type 1 ou de type 2. Dans [Chabassier et Joly, 2010], ces schémas sont appliqués à la corde de piano non-linéaire, qui est de type 2 : ce sont ces schémas qui ont été implémentés suite à la thèse de [Chabassier, 2012] et qui serviront de référence pour les travaux de ce chapitre.

Les gradient discrets conduisent malheureusement toujours à des schémas non-linéairement implicites qui doivent par conséquent être résolus par des algorithmes itératifs. Cela nécessite le choix d'un seuil de convergence, souvent arbitraire, et implique un nombre conséquent et non prédictible d'itérations. Le coût de calcul est bien souvent élevé, tout comme la difficulté de programmation.

Des stratégies de discrétisation proposées récemment permettent d'écrire des schémas linéairement implicites qui garantissent un bilan de puissance discret, et améliorent ainsi l'efficacité des méthodes de résolution pour les problèmes non-linéaires. Ces méthodes portent le nom de *méthodes de quadratisation d'énergie*. La méthode *Invariant Energy Quadratization* (IEQ) a été introduite par [Yang, 2016] et [Zhao et al., 2017] dans le contexte des modèles de champs de phase. La méthode *Scalar Auxiliary Variable* (SAV) est développée quant à elle dans [Shen et al., 2019] comme une version améliorée de la technique IEQ, et de nombreuses variantes sont proposées par [Liu et Li, 2020], [Liu et Li, 2022] pour des modèles sous la forme de *Gradient Flows*.

Un système de *Gradient Flow* est défini par un opérateur \mathcal{G} et par une fonction d'énergie \mathcal{E} tels que

$$\begin{cases} \partial_t \phi = \mathcal{G}\mu & (1.0.1a) \\ \mu = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \phi}[\phi] & (1.0.1b) \end{cases}$$

Lorsque l'opérateur \mathcal{G} est négatif, ou lorsqu'il est antisymétrique comme pour le cas des ondes, le système est passif et vérifie

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = (\mu, \mathcal{G}\mu) \leq 0 \quad (1.0.2)$$

Bien souvent, l'énergie du système présente une partie quadratique symbolisée par un opérateur \mathcal{L} , et éventuellement une partie non-linéaire représentée par une fonctionnelle F qui dépend du champ solution et éventuellement de ses dérivées spatiales :

$$\mathcal{E}[\phi] = \frac{1}{2}(\phi, \mathcal{L}\phi) + F[\phi, \nabla\phi, \dots, \nabla^m\phi] \quad (1.0.3)$$

qui n'est pas une forme quadratique en ϕ . Cette modélisation englobe une très grande variété de modèles physiques, notamment les modèles de diffusion (équation de la chaleur, champs de phases, etc) et les modèles d'ondes. L'ordre de dérivation m est habituellement inférieur à celui de l'opérateur \mathcal{L} .

[Yang et Zhang, 2020] et [Shen et Xu, 2018] étudient les propriétés de convergence des schémas quadratisés sur cette formulation *Gradient Flow* dans le cas particulier $m = 0$ où la fonction non-linéaire F ne dépend pas de $\nabla\phi$, c'est-à-dire des non-linéarités de type 1, et pour $\mathcal{G} = \Delta$ et $\mathcal{G} = -I$, qui peuvent respectivement modéliser les équations de Allen–Cahn et Cahn–Hilliard. Ces analyses mathématiques s'appliquent donc plus particulièrement à des équations de diffusion, et non à des équations d'onde.

Suite à ces travaux, [Jiang et al., 2019] présentent une adaptation de la méthode de quadratisation IEQ à une équation d'onde sous une forme alternative aux *Gradient Flows*. L'équation de Sine-Gordon qui s'écrit

$$\partial_t^2 u - \Delta u + \sin(u) = 0 \quad (1.0.4)$$

est reformulée dans l'espace des phases sous la forme

$$\begin{cases} v = \partial_t u & (1.0.5a) \\ \partial_t v - \Delta u + \sin(u) = 0 & (1.0.5b) \end{cases}$$

Cette réécriture conduit à des schémas numériques que nous noterons dans ce manuscrit P-IEQ et P-SAV pour désigner la formulation dans l'espace des Phases.

La publication donne également une preuve de convergence espace-temps en $O(h^2 + \Delta t^2)$ du schéma P-IEQ introduit, qui présente une non-linéarité de type 1, et ce pour une discrétisation spatiale par différences finies.

Enfin, [Ducceschi et Bilbao, 2019b], [Ducceschi et Bilbao, 2022] et [Ducceschi *et al.*, 2022] adaptent les méthodes de quadratisation à une équation d'onde qui modélise la corde de piano, et ce directement sur la formulation à l'ordre 2 :

$$M\partial_t^2 q - \partial_x (A\partial_x q + \nabla F(\partial_x q)) = f \quad (1.0.6)$$

Ce modèle de corde de piano présente une non-linéarité de type 2 et, à notre connaissance, il n'existe aucun résultat de mathématiques numériques concernant les schémas quadratisés qui en dérivent et que nous notons 2-IEQ et 2-SAV. Pourtant, [Ducceschi et Bilbao, 2019b] mettent en évidence de sérieux problèmes de pollution numérique liés à l'utilisation de ces schémas.

De l'ensemble de ces travaux, il ressort que les schémas quadratisés sont assez peu étudiés théoriquement. En particulier, il n'existe pas à notre connaissance d'étude de la formulation à l'ordre 2 du type (1.0.6). Plus généralement, sur l'ensemble des formulations décrites ci-dessus, les études disponibles concernent toujours des non-linéarités de type 1, mais jamais de type 2.

Dans ce chapitre, nous rappelons dans un premier temps les principaux modèles utilisés pour modéliser des cordes. Dans le but de discrétiser les modèles avec la meilleure précision et la meilleure efficacité, nous présentons et comparons dans la section 1.2 différents schémas basés sur des techniques de quadratisation d'énergie. Nous étudions ensuite mathématiquement les schémas 2-IEQ et 2-SAV sur une équation d'onde générique formulés à l'ordre 2 dans la section 1.3, et ce pour des non-linéarités de type 1 et de type 2. Nous démontrons leur convergence dans le cas du type 1, et mettons en avant des éléments bloquants qui empêchent la preuve d'aboutir pour le type 2. Enfin, la section 1.4 présente les résultats numériques d'application des schémas de la section 1.2 pour la corde de piano. Les résultats obtenus par les méthodes 2-IEQ et 2-SAV sont mis en perspective des résultats théoriques de la section 1.3. Nous remarquons en particulier la non convergence espace-temps des schémas quadratisés pour la corde de piano de type 2. Nous étudions pour finir l'influence des différents paramètres de discrétisation mis en jeu, puis nous concluons avec des recommandations de stratégies de discrétisation à adopter pour la corde de piano.

Sommaire

1.1	Modélisation des cordes de piano	10
1.1.1	Modèle de corde vibrante	11
1.1.2	Modèles avec prise en compte de la raideur	12
1.1.2.a	Modèle d'Euler-Bernoulli	13
1.1.2.b	Modèle de Timoshenko pré-contraint	13
1.1.3	Modèle non-linéaire géométriquement exact	14
1.1.4	Prise en compte de l'amortissement	15
1.1.5	Formulation générique des modèles de corde	16
1.1.6	Formulation variationnelle et énergie	17
1.1.7	Propriétés et estimations a priori	18
1.2	Méthodes de quadratisation d'énergie pour la corde	20
1.2.1	Quadratisation à énergie invariante formulée à l'ordre 2 (2-IEQ)	21
1.2.1.a	Formulation variationnelle et énergie	22

1.2.1.b	Discrétisation en espace	23
1.2.1.c	Discrétisation en temps	24
1.2.1.d	Résolution pratique	25
1.2.2	Variable auxiliaire scalaire formulée à l'ordre 2 (2-SAV)	27
1.2.2.a	Formulation variationnelle et énergie	27
1.2.2.b	Discrétisation en espace	28
1.2.2.c	Discrétisation en temps	28
1.2.2.d	Résolution pratique	29
1.2.3	Variable auxiliaire scalaire formulée dans l'espace des phases (P-SAV)	30
1.2.3.a	Formulation variationnelle et énergie	31
1.2.3.b	Discrétisation en espace	32
1.2.3.c	Discrétisation en temps	33
1.2.3.d	Résolution pratique	34
1.3	Analyse numérique des schémas 2-IEQ et 2-SAV sur une équation d'ondes générale formulée à l'ordre 2	34
1.3.1	Équation générale	35
1.3.2	Quadratisation à énergie invariante (IEQ)	37
1.3.2.a	Procédé de quadratisation continu	37
1.3.2.b	Formulation variationnelle et énergie	38
1.3.2.c	Discrétisation en espace	39
1.3.2.d	Discrétisation en temps	40
1.3.3	Quadratisation par variable auxiliaire scalaire (SAV)	41
1.3.3.a	Procédé de quadratisation continu	42
1.3.3.b	Formulation variationnelle et énergie	43
1.3.3.c	Discrétisation en espace	43
1.3.3.d	Discrétisation en temps	44
1.3.4	Analyse de stabilité	45
1.3.5	Hypothèses de régularité discrète	48
1.3.6	Étude de consistance	54
1.3.7	Étude de convergence pour des non-linéarités de type 1	55
1.3.8	Étude de convergence pour des non-linéarités de type 2	59
1.4	Applications et résultats numériques pour la corde de piano	59
1.4.1	Propriétés des fonctionnelles non-linéaires et des fonctions auxiliaires	61
1.4.2	Solutions des schémas	65
1.4.3	Préservation du bilan de puissance discret	65
1.4.4	Convergence en temps	66
1.4.5	Pollution numérique	67
1.4.6	Convergence espace-temps	67
1.4.6.a	Schémas inconditionnellement stables	68
1.4.6.b	Schémas stables sous condition CFL	69
1.4.7	Influence des paramètres de discrétisation	71
1.4.7.a	Influence du paramètre de stabilisation α	71
1.4.7.b	Influence du θ -schéma	73
1.4.7.c	Estimation des constantes de Lipschitz	74
1.4.7.d	Influence de la constante auxiliaire	75
1.4.8	Simulations avec amortissement	76
1.4.9	Recommandations d'utilisation des schémas quadratisés	77
1.5	Conclusion du chapitre 1 et perspectives	78

1.1 Modélisation des cordes de piano

Dans cette section, nous présentons plusieurs modèles qui permettent de décrire les vibrations d'une corde, c'est-à-dire une structure pour laquelle une des dimension d'espace est beaucoup plus grande que les deux autres, ce qui constitue les hypothèses de modélisation des poutres. Nous nous contentons de les décrire succinctement, car nous n'y apportons aucune contribution. Des descriptions plus complètes peuvent être trouvées dans [Chabassier, 2012].

Nous commençons par le modèle basique de corde vibrante, puis nous introduisons progressivement de la complexité et de la précision avec l'ajout de la raideur et de la non-linéarité géométrique. Nous reprenons pour finir le formalisme d'écriture de [Chabassier, 2012] qui combine les modèles présentés sous une forme générique, qui vérifie un bilan de puissance, et que nous utilisons ensuite dans le reste du manuscrit pour désigner la corde.

Pour tous les modèles décrits, ρ désigne la masse volumique, S la section, T_0 la tension au repos, E le module de Young et G le module de cisaillement, I le moment quadratique de section, et κ un coefficient de Timoshenko.

F représente un terme source, destiné à provenir de la frappe du marteau et du couplage avec la table d'harmonie.

1.1.1 Modèle de corde vibrante

Le modèle le plus simple envisageable est celui de la corde de vibrante, dans lequel celle-ci est supposée infiniment fine et souple. Elle est modélisée par l'équation de d'Alembert.

On appelle u_c le déplacement transversal de la corde, c'est-à-dire son élévation en chaque point $x \in [0, L]$ et à tout temps $t \in [0, T]$. Il est schématisé sur la figure 1.1.

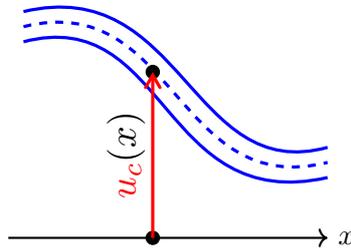


FIGURE 1.1 – Schéma de l'inconnue transversale.

Modèle 1.1.1 (Équation de corde vibrante)

Le déplacement transversal u_c est solution de

$$\begin{cases} \rho S \partial_t^2 u_c - T_0 \partial_x^2 u_c = F & (1.1.1a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall t \in [0, T], \quad u_c(0, t) = u_c(L, t) = 0 & (1.1.1b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall x \in [0, L], \quad u_c(x, 0) = \partial_t u_c(x, 0) = 0 & (1.1.1c) \end{cases}$$

Le spectre est harmonique, au sens où les fréquences propres de la corde sont des multiples d'une fréquence fondamentale f_0 :

$$f_n = n f_0 \quad \text{où} \quad f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho S}} \quad (1.1.2)$$

1.1.2 Modèles avec prise en compte de la raideur

En réalité, la corde n'est pas souple à souhait. Dans une situation non contrainte, hors de l'instrument, elle possède une position de repos privilégiée dans laquelle est tend à vouloir retourner lorsqu'elle est déformée. Cette raideur a pour conséquence de légèrement décaler les fréquences vers l'aigu, rendant ainsi le spectre, non plus harmonique, mais *inharmonique*. Les fréquences du spectre ne sont alors plus appelées des harmoniques, mais plutôt des partiels. D'un point de vu temporel, ceci est équivalent à dire que les hautes fréquences ont une vitesse de propagation plus élevée que les basses fréquences : on dit alors que le milieu de propagation est *dispersif*.

La forte inharmonicité des cordes en acier rend l'accord du piano très complexe. On entend souvent, à tort, que le piano est accordé au tempérament égal, ce qui signifierait que l'octave soit divisée uniformément en 12 demi-tons. En réalité, l'inharmonicité rend cet accord impossible en raison du décalage des partiels. Prenons un exemple d'accord d'une octave entre une note A de fréquence fondamentale f_0^A et une note B de fréquence fondamentale f_0^B . Sans inharmonicité, on accorderait la note aiguë B au double de la fréquence de la note inférieure ($|f_0^B - f_0^A| = 2$). En faisant cela, les harmoniques de la note aiguë B coïnciderait parfaitement avec les harmoniques impaires de la note grave A (voir figure 1.2, fréquences pointillées). Mais à cause du décalage inharmonicité des fréquences, tous les partiels sont décalés vers l'aigu d'un facteur qui dépend de leur rang. Les partiels des deux notes A et B ne sont plus du tout en cohérence fréquentielle et l'accord sonne faux (figure 1.2a).

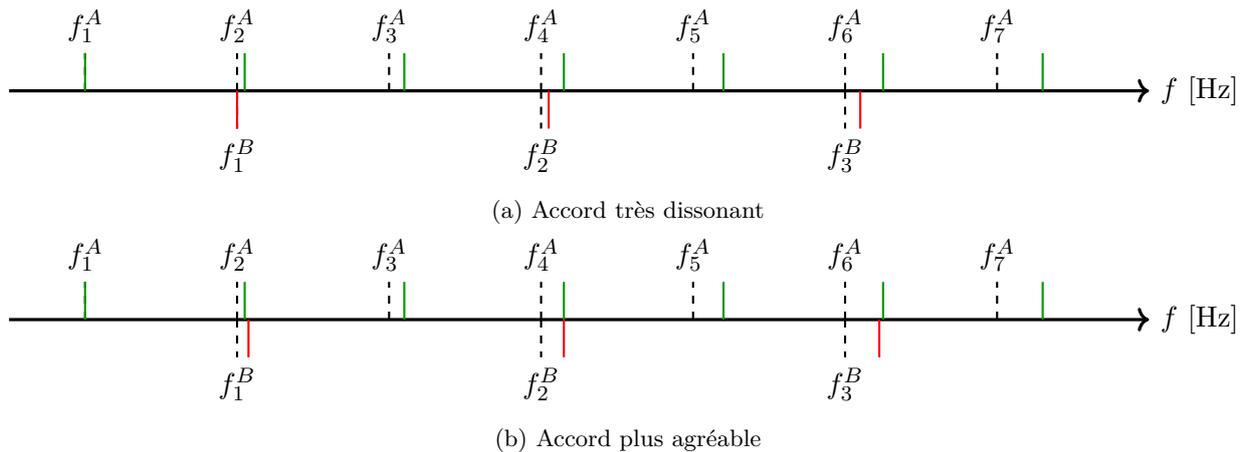


FIGURE 1.2 – Stratégie d'accord de l'octave. Fréquences harmoniques (---) et inharmôniques en couleur.

Pour rendre malgré tout l'accord consonant, les accordeurs étirent les octaves ($|f_0^B - f_0^A| \geq 2$) et modifient les intervalles afin de limiter au maximum les dissonances entre les partiels. Une stratégie possible, représentée sur la figure 1.2b, est d'accorder le second partiel de la note aiguë f_2^B avec le quatrième partiel de la note grave f_4^A . On obtient ainsi un accord d'octave $4/2$, mais d'autres stratégies ($2/1$, $6/3$) sont possible et doivent être adaptées en fonction des pianos [Reblitz, 2005, p. 229]. Bien qu'il soit impossible d'obtenir un accord parfaitement juste, il est possible d'obtenir un compromis acceptable qui limite les dissonances pour l'oreille. On voit par exemple sur la figure 1.2b que les écarts entre les partiels rouges et verts sont moindres que sur la figure 1.2a.

Il existe quatre principaux modèles, décrits dans [Han et al., 1999], pour prendre en compte la raideur des poutres. Le modèle d'Euler-Bernoulli, le modèle de Rayleigh, un modèle avec cisaillement, et enfin le modèle de Timoshenko. Le modèle le plus simple, et le moins précis, est celui d'Euler-Bernoulli qui ne prend pas en compte le mouvement de cisaillement, ni l'inertie de rotation des sections. Il est toutefois très souvent utilisé pour quantifier l'inharmonicité des cordes de piano, ou pour réaliser des simulations en différences finies [Ducceschi et Bilbao, 2019a], [Bilbao

et [Ducceschi, 2023](#)], mais se prête assez mal à une discrétisation par éléments finis. Nous préférons donc l'utilisation du modèle de Timoshenko, qui est le plus complet et le plus précis des modèles cités ci-dessus.

1.1.2.a Modèle d'Euler-Bernoulli

Ce modèle modifie l'équation de corde vibrante par une dérivée d'ordre 4 en espace qui permet de prendre en compte la raideur du matériau par son module de Young E et la forme de sa section par son moment quadratique I .

Modèle 1.1.2 (Équation d'Euler-Bernoulli)

Le déplacement transversal u_c est solution de

$$\begin{cases} \rho S \partial_t^2 u_c - T_0 \partial_x^2 u_c + EI \partial_x^4 u_c = F & (1.1.3a) \\ \forall t \in [0, T], \quad u_c(0, t) = u_c(L, t) = 0 & (1.1.3b) \\ \forall t \in [0, T], \quad \partial_x^2 u_c(0, t) = \partial_x^2 u_c(L, t) = 0 & (1.1.3c) \\ \forall x \in [0, L], \quad u_c(x, 0) = \partial_t u_c(x, 0) = 0 & (1.1.3d) \end{cases}$$

Le spectre est inharmonique, au sens où les fréquences propres de la corde ne respectent pas une progression géométrique comme (1.1.2) :

$$f_n = n f_0 \sqrt{1 + B n^2} \quad \text{où} \quad f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho S}} \quad \text{et} \quad B = \frac{\pi^2 EI}{T_0 L^2} \quad (1.1.4)$$

Cette formule qu'on trouve notamment dans [\[Fletcher, 1964\]](#) permet de quantifier le coefficient d'inharmonicité B , et donc la déviations de fréquences par rapport à une progression harmonique. Notamment, B est inversement proportionnel au carré de la longueur de la corde et à sa tension ce qui nous permet de justifier en partie l'accroissement des tailles de pianos et les tensions toujours plus grandes appliquées aux cadres au fil des siècles [\[Giordano, 2011\]](#).

Cette formule montre également que l'inharmonicité est beaucoup plus grande pour les notes aiguës (corde courtes) que pour les cordes graves (cordes longues). C'est toutefois dans le grave, où un très grand nombre de partiels sont audibles qu'elle se distingue le plus, contrairement à l'aigu où peu de partiels sont audibles.

Comme expliqué dans [\[Chabassier, 2012, p. 23\]](#), le modèle d'Euler-Bernoulli ne permet pas de décrire de façon satisfaisante le comportement des cordes à hautes fréquences car

$$f_n \sim n^2 f_0 \sqrt{B} \quad (1.1.5)$$

Ceci implique que les partiels de rangs élevés s'écartent indéfiniment de la progression harmoniques. Autrement dit, la vitesse de propagation des ondes augmente indéfiniment. Ceci n'a pas de réalité physique et ne correspond pas aux observations qui sont faites dans la réalité. Le modèle de Timoshenko présenté ci-après permet de pallier ce problème.

1.1.2.b Modèle de Timoshenko pré-contraint

Le modèle de poutre de [\[Timoshenko, 1921\]](#), sous une forme pré-contrainte par la tension T_0 , permet de prendre en compte le cisaillement interne à la corde ainsi que l'inertie de rotation des sections de la corde.

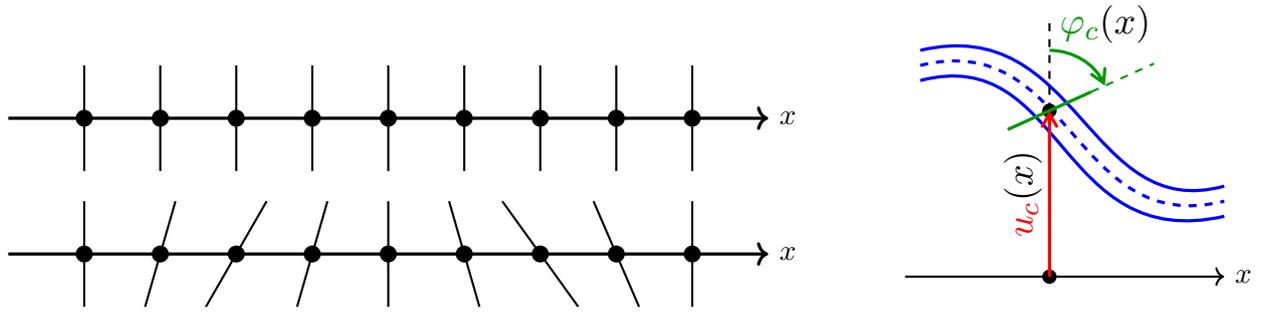


FIGURE 1.3 – Schéma des inconnues du modèle de Timoshenko.

La figure 1.3 montre la mobilité possible des sections de la corde qui tournent d'un angle de cisaillement φ_c .

Modèle 1.1.3 (Équations de Timoshenko pré-contraintes)

Le déplacement transversal u_c et le cisaillement φ_c sont solutions de

$$\begin{cases} \rho S \partial_t^2 u_c - (SG\kappa + T_0) \partial_x^2 u_c + SG\kappa \partial_x \varphi_c = F & (1.1.6a) \\ \rho I \partial_t^2 \varphi_c - EI \partial_x^2 \varphi_c - SG\kappa \partial_x u_c + SG\kappa \varphi_c = 0 & (1.1.6b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall t \in [0, T], \quad u_c(0, t) = u_c(L, t) = 0 & (1.1.6c) \\ \forall t \in [0, T], \quad \partial_x \varphi_c(0, t) = \partial_x \varphi_c(L, t) = 0 & (1.1.6d) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall x \in [0, L], \quad u_c(x, 0) = \varphi_c(x, 0) = 0 & (1.1.6e) \\ \forall x \in [0, L], \quad \partial_t u_c(x, 0) = \partial_t \varphi_c(x, 0) = 0 & (1.1.6f) \end{cases}$$

On peut montrer (voir [Chabassier, 2012, p. 25]) que le comportement de ce modèle pour les hautes fréquences associées au déplacement transversal est tel que

$$f_n \sim \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T_0 + SG\kappa}{SG\kappa}} \quad (1.1.7)$$

qui tend donc vers une progression harmonique et rétablit une vitesse de propagation finie.

1.1.3 Modèle non-linéaire géométriquement exact

Dans ce paragraphe, nous détaillons un modèle décrit dans [Morse et Ingard, 1986] qui permet de prendre en compte la dynamique non-linéaire d'une corde, en lien avec la théorie des poutres géométriquement exactes en grandes déformations. Ceci permet la prise en compte de la vibration longitudinale de la corde, qui est une onde de compression et d'élongation comme schématisé par la figure 1.4 et que nous avons déjà largement détaillée en introduction générale de ce manuscrit.

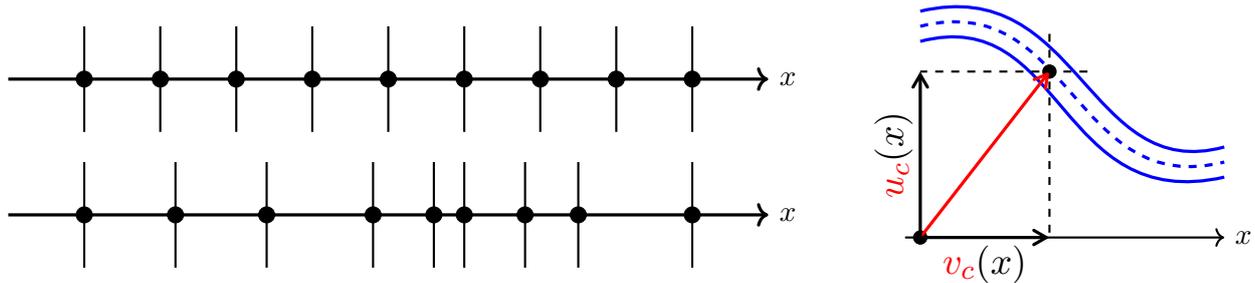


FIGURE 1.4 – Schéma des inconnues transversales et longitudinales.

Modèle 1.1.4 (Équations du modèle géométriquement exact)

Le déplacement transversal u_c et le déplacement longitudinal v_c sont solutions de

$$\begin{cases} \rho S \partial_t^2 u_c - \partial_x \left[ES \partial_x u_c - (ES - T_0) \frac{\partial_x u_c}{\sqrt{(\partial_x u_c)^2 + (1 + \partial_x v_c)^2}} \right] = F_u & (1.1.8a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho S \partial_t^2 v_c - \partial_x \left[ES \partial_x v_c - (ES - T_0) \frac{1 + \partial_x v_c}{\sqrt{(\partial_x u_c)^2 + (1 + \partial_x v_c)^2}} \right] = F_v & (1.1.8b) \end{cases}$$

$$\forall t \in [0, T], \quad u_c(0, t) = u_c(L, t) = v_c(0, t) = v_c(L, t) = 0 \quad (1.1.8c)$$

$$\forall x \in [0, L], \quad u_c(x, 0) = v_c(x, 0) = \partial_t u_c(x, 0) = \partial_t v_c(x, 0) = 0 \quad (1.1.8d)$$

Ce modèle est exploité dans divers travaux en lien avec le piano, notamment dans [Narasimha, 1968], [Legge et Fletcher, 1984], [Bilbao, 2005] et [Bank et Sujbert, 2005], où des modèles approchés sont également introduits par des simplifications ou des approches asymptotiques. Pour notre présente étude, nous conserverons le modèle 1.1.4 dans sa forme non simplifiée.

1.1.4 Prise en compte de l'amortissement

Les phénomènes dissipatifs dans les cordes sont majoritairement des pertes visco-thermo-élastiques qui sont dues à la viscosité de l'air au couplage entre la diffusion de la température et les vibrations. Pour une modélisation fidèle, il faudrait prendre en compte la dépendance de l'amortissement en la fréquence de vibration des cordes, et donc associer à chaque mode un coefficient de pertes. C'est cette approche que nous utilisons dans le second chapitre pour la table d'harmonie. Malheureusement, en domaine temporel et avec un modèle non-linéaire pour les cordes, cette approche est très complexe à mettre en place et nécessiterait beaucoup de calculs pour peu de phénomènes physiques intéressants. Nous utiliserons dans la suite, sans modification, le modèle d'amortissement non modal utilisé par [Derveaux, 2002] et [Bensa *et al.*, 2003] et qui est repris dans [Chabassier, 2012]. Il consiste à ajouter aux équations les termes

$$\begin{cases} 2\rho S R_u \partial_t u_c - 2T_0 \eta_u \partial_t \partial_x^2 u_c & (1.1.9a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\rho S R_v \partial_t v_c - 2ES \eta_v \partial_t \partial_x^2 v_c & (1.1.9b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\rho I R_\varphi \partial_t \varphi_c - 2EI \eta_\varphi \partial_t \partial_x^2 \varphi_c & (1.1.9c) \end{cases}$$

Cette modélisation est peu réaliste physiquement parlant, ce qui rend le choix des coefficients R et η difficile. Toutefois cette thèse vise principalement l'étude des phénomènes de propagation des ondes dans l'instrument, et non les mécanismes de dissipation. Nous ne souhaitons pas non plus faire de la synthèse sonore réaliste. Par conséquent, le choix des coefficients d'amortissement n'est pas une priorité.

1.1.5 Formulation générique des modèles de corde

Tous les modèles de corde que nous venons de passer en revue, à l'exception d'Euler-Bernoulli qui présente une dérivée spatiale d'ordre 4, peuvent s'écrire sous une même forme matricielle unifiée.

Modèle 1.1.5 (Formulation générique des modèles de corde)

On cherche $q : [0, L] \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ tel que

$$\begin{cases} \partial_t^2 Mq + \partial_t (Rq - \partial_x (H\partial_x q)) \\ \quad - \partial_x (A\partial_x q + Bq + \nabla \mathcal{U}(\partial_x q)) + Cq + {}^t B\partial_x q = F(x, t) \end{cases} \quad (1.1.10a)$$

$$\begin{cases} \forall k \in \mathcal{I}_D, \forall t \in [0, T], \quad q_k(0, t) = q_k(L, t) = 0 \end{cases} \quad (1.1.10b)$$

$$\begin{cases} \forall k \in \mathcal{I}_N, \forall t \in [0, T], \quad \partial_x q_k(0, t) = \partial_x q_k(L, t) = 0 \end{cases} \quad (1.1.10c)$$

$$\begin{cases} \forall x \in [0, L], \quad q(x, 0) = \partial_t q(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (1.1.10d)$$

où M, A, B, C, R et H sont des matrices de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et A et C sont symétriques, R et H symétriques positives, et M est symétrique définie positive. $\mathcal{U} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonctionnelle qui rend compte de la non-linéarité.

Les ensembles \mathcal{I}_D et \mathcal{I}_N forment une partition de l'ensemble $[1, N]$ et déterminent les conditions limites (Dirichlet ou Neumann) utilisées sur les différentes inconnues.

Pour la liste des modèles ci-dessous, on rappelle la signification des coefficients physiques dont les valeurs sont définies pour certaines cordes de référence dans l'annexe A. ρ est la masse volumique, S la section, T_0 la tension au repos, E le module de Young et G le module de cisaillement, I le moment quadratique de section, et κ le coefficient de Timoshenko.

R_u, R_v, R_φ désignent les amortissements fluides, et $\eta_u, \eta_v, \eta_\varphi$ les amortissements visqueux.

Équation de corde vibrante (linéaire non-raide)

$N = 1, q = u_c, \mathcal{I}_D = \{1\}, \mathcal{I}_N = \emptyset$

$$M = \rho S, \quad A = T_0, \quad R = 2\rho S R_u, \quad H = 2T_0 \eta_u, \quad B = C = 0, \quad \mathcal{U} = 0$$

Modèle de Timoshenko (linéaire raide)

$N = 2, q = {}^t(u_c, \varphi_c), \mathcal{I}_D = \{1\}, \mathcal{I}_N = \{2\}$

$$M = \begin{pmatrix} \rho S & 0 \\ 0 & \rho I \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} T_0 + SG\kappa & 0 \\ 0 & EI \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -SG\kappa \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & SG\kappa \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 2\rho S R_u & 0 \\ 0 & 2\rho I R_\varphi \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 2T_0 \eta_u & 0 \\ 0 & 2EI \eta_\varphi \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U} = 0$$

Modèle géométriquement exact (non-linéaire non-raide)

$N = 2, q = {}^t(u_c, v_c), \mathcal{I}_D = \{1, 2\}, \mathcal{I}_N = \emptyset$

$$M = \begin{pmatrix} \rho S & 0 \\ 0 & \rho S \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} T_0 & 0 \\ 0 & ES \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2\rho S R_u & 0 \\ 0 & 2\rho S R_v \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 2T_0 \eta_u & 0 \\ 0 & 2ES \eta_v \end{pmatrix}$$

$$B = C = 0, \quad \mathcal{U}(u, v) = (ES - T_0) \left[\frac{1}{2}u^2 + (1 + v) - \sqrt{u^2 + (1 + v)^2} \right]$$

Modèle géométriquement exact avec raideur (non-linéaire raide)

$$N = 3, q = {}^t(u_c, v_c, \varphi_c), \mathcal{I}_D = \{1, 2\}, \mathcal{I}_N = \{3\}$$

$$M = \begin{pmatrix} \rho S & 0 & 0 \\ 0 & \rho S & 0 \\ 0 & 0 & \rho I \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} T_0 + SG\kappa & 0 & 0 \\ 0 & ES & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -SG\kappa \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & SG\kappa \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 2\rho SR_u & 0 & 0 \\ 0 & 2\rho SR_v & 0 \\ 0 & 0 & 2\rho IR_\varphi \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 2T_0\eta_u & 0 & 0 \\ 0 & 2ES\eta_v & 0 \\ 0 & 0 & 2EI\eta_\varphi \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{U}(u, v) = (ES - T_0) \left[\frac{1}{2}u^2 + (1 + v) - \sqrt{u^2 + (1 + v)^2} \right]$$

1.1.6 Formulation variationnelle et énergie

Par anticipation avec le chapitre 2 dans lequel nous couplerons l'extrémité $x = L$ de la corde avec la table d'harmonie, on introduit l'espace variationnel \mathcal{Q}_D des solutions nulles en $x = 0$ de sorte que

$$\mathcal{Q}_D = \left\{ q \in \left(H^1([0, L]) \right)^N \mid \forall k \in \mathcal{I}_D, q_k(0) = 0 \right\} \quad (1.1.11)$$

L'extrémité $x = L$ de la corde n'est pas soumise à une condition de Dirichlet, et on note T_L la tension qui y est exercée par le couplage extérieur. On cherche alors $q \in \mathcal{Q}_D$ tel que pour tout $q^* \in \mathcal{Q}_D$ on ait

$$\begin{aligned} \int_0^L M\ddot{q} \cdot q^* + \int_0^L R\dot{q} \cdot q^* + \int_0^L H\partial_x\dot{q} \cdot \partial_x q^* \\ + \int_0^L \begin{pmatrix} C & {}^tB \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \partial_x q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q^* \\ \partial_x q^* \end{pmatrix} + \int_0^L \nabla\mathcal{U}(\partial_x q) \cdot \partial_x q^* \\ = T_L \cdot q^*(L) + \int_0^L F \cdot q^* \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

Théorème 1.1.1 (Bilan de puissance du modèle de corde)

Toute solution suffisamment régulière $q \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathcal{Q}_D) \cap \mathcal{C}^2([0, T], L^2([0, L])^N)$ du modèle 1.1.5 vérifie

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} &= T_L \cdot \dot{q}(L, t) + \int_0^L F \cdot \dot{q} - \int_0^L R\dot{q} \cdot \dot{q} - \int_0^L H\partial_x\dot{q} \cdot \partial_x\dot{q} \end{aligned} \right. \quad (1.1.13a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{E}_c(t) &= \frac{1}{2} \int_0^L M\dot{q} \cdot \dot{q} + \frac{1}{2} \int_0^L \begin{pmatrix} C & {}^tB \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \partial_x q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ \partial_x q \end{pmatrix} + \int_0^L \mathcal{U}(\partial_x q) \end{aligned} \right. \quad (1.1.13b)$$

où \mathcal{E}_c désigne l'énergie de la corde.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la formulation variationnelle (1.1.12) avec $q^* = \dot{q} \in \mathcal{Q}_D$. \square

Remarque 1.1.1

Toute solution suffisamment régulière $q \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathcal{Q}_D) \cap \mathcal{C}^2([0, T], L^2([0, L])^N)$ du modèle 1.1.5 vérifie que

$$\left[A\partial_x q + Bq + \nabla\mathcal{U}(\partial_x q) + H\partial_x\dot{q} \right](x = L, t) = T_L \quad (1.1.14)$$

Pour le reste de ce chapitre consacré à l'étude de la corde, nous supposons qu'elle est attachée et soumise à des conditions de Dirichlet à ses deux extrémités. L'espace variationnel choisi pour tout le reste de ce chapitre est donc

$$\mathcal{Q}_D = \left\{ q \in \left(H^1([0, L]) \right)^N \mid \forall k \in \mathcal{I}_D, q_k(0) = 0 \text{ et } q_k(L) = 0 \right\} \quad (1.1.15)$$

1.1.7 Propriétés et estimations à priori

Introduisons la matrice α telle que l'équation (1.1.10) s'écrive

$$\begin{aligned} \partial_t^2 Mq + \partial_t (Rq - \partial_x (H \partial_x q)) \\ - \partial_x (\alpha A \partial_x q + Bq + \nabla \mathcal{U}_\alpha (\partial_x q)) + Cq + {}^t B \partial_x q = F(x, t) \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

et où

$$\forall p \in \mathbb{R}^N, \quad \mathcal{U}_\alpha(p) = \frac{1}{2} (I_N - \alpha) A p \cdot p + \mathcal{U}(p) \quad (1.1.17)$$

Proposition 1.1.1 (Valeur particulière de α)

$\alpha^* = I_N$ est une valeur particulière de α qui élimine tous les termes quadratiques de \mathcal{U}_α au voisinage de 0.

Démonstration. Pour u et v voisins de 0, on peut écrire que

$$\sqrt{u^2 + (1+v)^2} = \left(1 + u^2 + 2v + v^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.1.18)$$

$$\sim 1 + \frac{1}{2} (u^2 + 2v + v^2) - \frac{1}{8} (u^2 + 2v + v^2)^2 \quad (1.1.19)$$

On a alors

$$\mathcal{U}_{\alpha^*}(u, v) = (ES - T_0) \left[\frac{1}{2} u^2 + (1+v) - \sqrt{u^2 + (1+v)^2} \right] \quad (1.1.20)$$

$$\sim (ES - T_0) \left[\frac{1}{2} u^2 + v - \frac{1}{2} (2v + v^2 + u^2) + \frac{1}{8} (2v + v^2 + u^2)^2 \right] \quad (1.1.21)$$

$$\sim \frac{1}{8} (ES - T_0) [v^4 + u^4 + 4v^3 + 4vu^2 + 2v^2u^2] \quad (1.1.22)$$

□

Proposition 1.1.2

Pour toute valeur de α , il existe une constante M_α dépendante de α et des coefficients physiques, telle que \mathcal{U}_α vérifie

$$\forall p \in \mathbb{R}^N, \quad \|\nabla \mathcal{U}_\alpha(p)\|_2 \leq M_\alpha (1 + \|p\|_2) \quad (1.1.23)$$

Ceci assure en particulier que

$$\forall q \in \mathcal{Q}_D, \quad \nabla \mathcal{U}_\alpha(\partial_x q) \in L^2([0, L])^N \quad (1.1.24)$$

Démonstration.

$$\nabla \mathcal{U}_\alpha(u, v) = (I_N - \alpha)A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + (ES - T_0) \left[\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{u^2 + (1+v)^2}} \begin{pmatrix} u \\ 1+v \end{pmatrix} \right] \quad (1.1.25)$$

D'où

$$\|\nabla \mathcal{U}_\alpha(p)\|_2 \leq C_\alpha \|p\|_2 + |ES - T_0| (\|p\|_2 + 2) \quad (1.1.26)$$

$$\leq M_\alpha (1 + \|p\|_2) \quad (1.1.27)$$

□

Proposition 1.1.3

Pour tout les modèles de corde, il existe une valeur de α notée $\tilde{\alpha}$ et une constante $K \in \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\forall p \in \mathbb{R}^N, \quad \mathcal{U}_{\tilde{\alpha}}(p) \geq K \|p\|_2^2 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} C & {}^t B \\ B & \tilde{\alpha} A \end{pmatrix} \quad \text{est positive} \quad (1.1.28)$$

Pour le modèle de Timoshenko, on choisit $\tilde{\alpha} = \text{diag} \left(\frac{SG\kappa}{T_0 + SG\kappa}, 0 \right)$ et $K = \min(T_0, EI)/2$.
Pour le modèle géométriquement exact, on choisit $\tilde{\alpha} = 0$ et $K = T_0/2$.

La décomposition effectuée dans la proposition 1.1.3 permet d'assurer la positivité de chacun des termes de l'énergie (1.1.13b). Cela permet alors de démontrer des estimations des solutions dans différentes normes usuelles.

Théorème 1.1.2 (Estimations a priori sur les solutions)

Si $F \in L^1([0, T], L^2([0, L]))$, alors toute solution suffisamment régulière $q \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathcal{Q}_D) \cap \mathcal{C}^2([0, T], L^2([0, L])^N)$ de l'équation de corde (1.1.10) vérifie pour tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{cases} \|q(\cdot, t)\|_{L^2} \leq \frac{1}{M^*} \int_0^t (t-s) \|F(\cdot, s)\|_{L^2} ds & (1.1.29a) \\ |q(\cdot, t)|_{H^1} \leq \frac{1}{\sqrt{2KM^*}} \int_0^t \|F(\cdot, s)\|_{L^2} ds & (1.1.29b) \end{cases}$$

où K est la constante de coercivité définie par la proposition 1.1.3, et M^* est la plus petite valeur propre strictement positive de la matrice M .

Démonstration. Cette preuve est donnée dans [Chabassier, 2012, p. 64]. A partir du bilan de puissance (1.1.13a) on écrit que

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \int_0^L F \cdot \dot{q} - \int_0^L R\dot{q} \cdot \dot{q} - \int_0^L H \partial_x \dot{q} \cdot \partial_x \dot{q} \leq \int_0^L F \cdot \dot{q} \leq \|F\|_{L^2} \|\dot{q}\|_{L^2} \quad (1.1.30)$$

Par ailleurs, pour la décomposition $\tilde{\alpha}$, tous les termes de l'énergie (1.1.13b) sont positifs, donc

$$\mathcal{E}_c(t) \geq \frac{1}{2} \int_0^L M\dot{q} \cdot \dot{q} \quad (1.1.31)$$

et la matrice M est définie positive ce qui implique classiquement que

$$M^* \int_0^L \dot{q} \cdot \dot{q} \leq \int_0^L M\dot{q} \cdot \dot{q} \quad (1.1.32)$$

On obtient alors que

$$\|\dot{q}\|_{L^2} \leq \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_c(t)}{M^*}} \quad (1.1.33)$$

puis

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = 2\sqrt{\mathcal{E}_c(t)} \frac{d\sqrt{\mathcal{E}_c(t)}}{dt} \leq \|F\|_{L^2} \|\dot{q}\|_{L^2} \leq \|F\|_{L^2} \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_c(t)}{M^*}} \quad (1.1.34)$$

et donc

$$\frac{d\sqrt{\mathcal{E}_c(t)}}{dt} \leq \frac{1}{\sqrt{2M^*}} \|F\|_{L^2} \quad (1.1.35)$$

Il reste à intégrer sur $[0, T]$ et remarquer que $\mathcal{E}_c(0) = 0$ pour obtenir que

$$\sqrt{\mathcal{E}_c(t)} \leq \frac{1}{\sqrt{2M^*}} \int_0^t \|F(\cdot, s)\|_{L^2} ds \quad (1.1.36)$$

Pour démontrer la seconde inégalité du théorème on utilise la proposition 1.1.3 pour écrire que

$$K \|\partial_x q\|_{L^2}^2 = K |q|_{H^1}^2 \leq \int_0^L \mathcal{U}_\alpha(\partial_x q) \leq \mathcal{E}_c(t) \quad (1.1.37)$$

Pour la première estimation en norme L^2 , on écrit que

$$\forall x \in [0, L], \quad q(x, t) = \int_0^t \dot{q}(x, s) ds \quad (1.1.38)$$

car $q(x, 0) = 0$ pour tout $x \in [0, L]$. Ceci implique que

$$\|q(\cdot, t)\|_{L^2} \leq \int_0^t \|\dot{q}(\cdot, s)\|_{L^2} ds \quad (1.1.39)$$

$$\leq \sqrt{\frac{2}{M^*}} \int_0^t \sqrt{\mathcal{E}_c(s)} ds \quad (1.1.40)$$

$$\leq \frac{1}{M^*} \int_0^t \int_0^s \|F(\cdot, y)\|_{L^2} dy \quad (1.1.41)$$

$$\leq \frac{1}{M^*} \left(\left[s \int_0^s \|F(\cdot, y)\|_{L^2} dy \right]_0^t - \int_0^t s \|F(\cdot, s)\|_{L^2} ds \right) \quad (1.1.42)$$

$$\leq \frac{1}{M^*} \int_0^t (t-s) \|F(\cdot, s)\|_{L^2} ds \quad (1.1.43)$$

□

Les estimations du théorème 1.1.2 permettent d'assurer que l'ensemble des valeurs atteintes par le gradient du champ solution $(\partial_x q)$ est borné dans \mathbb{R}^N , mais dépend de l'intensité de la source F appliquée. En particulier, \mathcal{U}_α est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, -1)\}$, donc pour un terme source d'amplitude raisonnable pour lequel la solution $\partial_x q$ reste éloignée du point problématique $(0, -1)$, on peut assurer que les valeurs prises par $\mathcal{U}_\alpha(\partial_x q)$ constituent également un ensemble borné dans \mathbb{R}^2 . Nous verrons dans la suite que le caractère minoré de $\mathcal{U}_\alpha(\partial_x q)$ est essentiel pour la bonne définition des méthodes de quadratisation d'énergie.

1.2 Méthodes de quadratisation d'énergie pour la corde

Dans cette section, nous décrivons les méthodes de quadratisation d'énergie introduites par [Zhao *et al.*, 2017], [Yang, 2016] et [Shen *et al.*, 2019], et nous les appliquons au modèle de corde de piano. Nous écrivons ensuite différents schémas numériques et mettons en avant leurs forces et faiblesses.

Commençons par décrire le principe général des méthodes de quadratisation d'énergie. A cause de la présence du terme non-linéaire, l'énergie (1.1.13b) du théorème 1.1.1 n'est pas une forme quadratique. Si toutefois, comme nous l'avons justifié par le théorème 1.1.2, $\mathcal{U}(\partial_x q)$ reste minoré, on peut introduire une constante $c \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $2\mathcal{U}(\partial_x q) + c$ soit strictement positif et définir sa racine carrée. On note

$$\forall (x, t) \in [0, L] \times [0, T], \quad z(x, t) \equiv \sqrt{2\mathcal{U}(\partial_x q(x, t)) + c} \quad (1.2.1)$$

L'énergie (1.1.13b) devient :

$$\tilde{\mathcal{E}}_c(t) = \mathcal{E}_c(t) + \frac{c}{2} = \frac{1}{2} \int_0^L M \dot{q} \cdot \dot{q} + \frac{1}{2} \int_0^L \begin{pmatrix} C & {}^t B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \partial_x q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ \partial_x q \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \int_0^L z^2(x, t) dx \quad (1.2.2)$$

qui est maintenant une forme quadratique par rapport aux variables q et z . Cette méthode issue de [Zhao *et al.*, 2017] et [Yang, 2016] porte le nom de *Invariant Energy Quadratization* (IEQ), c'est-à-dire Quadratisation à Énergie Invariante. Il faut comprendre en cela que l'énergie n'est modifiée qu'à une constante additive près, et donc que le bilan de puissance reste inchangé.

On peut procéder différemment et introduire une constante $c \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $2 \int_0^L \mathcal{U}(\partial_x q) dx + c$ soit strictement positif, et définir encore une fois une racine carrée comme

$$\forall t \in [0, T], \quad z(t) = \sqrt{2 \int_0^L \mathcal{U}(\partial_x q(x, t)) dx + c} \quad (1.2.3)$$

L'énergie (1.1.13b) s'écrit alors :

$$\tilde{\mathcal{E}}_c(t) = \mathcal{E}_c(t) + \frac{c}{2} = \frac{1}{2} \int_0^L M \dot{q} \cdot \dot{q} + \frac{1}{2} \int_0^L \begin{pmatrix} C & {}^t B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \partial_x q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ \partial_x q \end{pmatrix} + \frac{1}{2} z^2(t) \quad (1.2.4)$$

qui est encore une fois une forme quadratique par rapport aux variables q et z . Cette méthode introduite par [Shen *et al.*, 2019] porte le nom de *Scalar Auxiliary Variable* (SAV), c'est-à-dire Variable Auxiliaire Scalaire au sens où la variable z introduite ne dépend pas de la variable d'espace x . Ici encore, le bilan de puissance est inchangé.

Ces deux techniques sont les plus courantes des techniques de quadratisation. Il existe cependant un certain nombre de techniques dérivées de ces méthodes présentées par exemple dans [Liu et Li, 2020], [Liu et Li, 2022], où la variable auxiliaire introduite est différente, mais qui ne conduisent pas nécessairement à des schémas qui préservent un bilan de puissance.

Dans la suite de ce manuscrit, nous nous limitons à des quadratisations de type IEQ et SAV usuelles comme présentées ci-dessus. Nous présentons un schéma de type IEQ, puis deux schémas différents de type SAV : le schéma 2-SAV écrit à partir des équations d'onde formulées à l'ordre 2, et le schéma P-SAV issu de la formulation des équations dans l'espace des phases.

1.2.1 Quadratisation à énergie invariante formulée à l'ordre 2 (2-IEQ)

Commençons par introduire une constante $c \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $2\mathcal{U}(\partial_x q) + c$ soit strictement positif, et définissons la variable auxiliaire z :

$$\forall (x, t) \in [0, L] \times [0, T], \quad z(x, t) \equiv \sqrt{2\mathcal{U}(\partial_x q(x, t)) + c} \quad (1.2.5)$$

Associée à cette variable auxiliaire, on définit une fonction auxiliaire g , et l'opérateur auxiliaire G tels que

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ p & \longmapsto & \frac{\nabla \mathcal{U}(p)}{\sqrt{2\mathcal{U}(p)+c}} \end{cases} \quad G : \begin{cases} \mathcal{C}^0([0, T], \mathcal{Q}_D) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0([0, T], (L^2([0, L]))^N) \\ q & \longmapsto & G(q) : \begin{cases} [0, L] \times [0, T] & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ (x, t) & \longmapsto & g(q(x, t)) \end{cases} \end{cases}$$

On peut alors reformuler l'équation de corde sous une forme dite quadratisée :

Modèle 1.2.1 (Équation de corde quadratisée par la méthode IEQ)

On cherche $q : [0, L] \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ et $z : [0, L] \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} \partial_t^2 M q + \partial_t (R q - \partial_x (H \partial_x q)) \\ \quad - \partial_x (A \partial_x q + B q + z G(\partial_x q)) + C q + {}^t B \partial_x q = F(x, t) & (1.2.6a) \\ \dot{z} = G(\partial_x q) \cdot \partial_x \dot{q} & (1.2.6b) \\ \forall k \in \mathcal{I}_D, \forall t \in [0, T], \quad q_k(0, t) = q_k(L, t) = 0 & (1.2.6c) \\ \forall k \in \mathcal{I}_N, \forall t \in [0, T], \quad \partial_x q_k(0, t) = \partial_x q_k(L, t) = 0 & (1.2.6d) \\ \forall x \in [0, L], \quad q(x, 0) = \partial_t q(x, 0) = 0 & (1.2.6e) \\ \forall x \in [0, L], \quad z(x, 0) = \sqrt{2\mathcal{U}(\partial_x q(x, 0)) + c} = \sqrt{c} & (1.2.6f) \end{cases}$$

A ce stade du processus, l'apport de telles manipulations n'est pas clairement visible. Il semble même que l'on ait complexifié le système à résoudre, puisqu'en plus de l'inconnue q , on a introduit une nouvelle inconnue z . Nous allons voir dans la suite que l'intérêt de cette méthode réside dans l'écriture des schémas de discrétisation en temps, que nous allons rendre linéairement implicites.

1.2.1.a Formulation variationnelle et énergie

Étant donné que la variable auxiliaire z est une fonction de la dérivée spatiale $\partial_x q$, nous la cherchons dans l'espace variationnel $L^2([0, L])$.

On cherche $q \in \mathcal{Q}_D$ et $z \in L^2([0, L])$ tels que pour tout $(q^*, z^*) \in \mathcal{Q}_D \times L^2([0, L])$ on ait

$$\begin{cases} \int_0^L M \ddot{q} \cdot q^* + \int_0^L R \dot{q} \cdot q^* + \int_0^L H \partial_x \dot{q} \cdot \partial_x q^* \\ \quad + \int_0^L \begin{pmatrix} C & {}^t B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \partial_x q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q^* \\ \partial_x q^* \end{pmatrix} + \int_0^L z G(\partial_x q) \cdot \partial_x q^* = \int_0^L F \cdot q^* & (1.2.7a) \\ \int_0^L \dot{z} z^* = \int_0^L z^* G(\partial_x q) \cdot \partial_x \dot{q} & (1.2.7b) \end{cases}$$

Théorème 1.2.1 (Bilan de puissance de la formulation IEQ)

Toute solution suffisamment régulière $q \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathcal{Q}_D) \cap \mathcal{C}^2([0, T], L^2([0, L])^N)$ et $z \in \mathcal{C}^1([0, T], L^2([0, L]))$ du modèle 1.2.1 vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \int_0^L F \cdot \dot{q} - \int_0^L R\dot{q} \cdot \dot{q} - \int_0^L H\partial_x \dot{q} \cdot \partial_x \dot{q} \end{array} \right. \quad (1.2.8a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2} \int_0^L M\dot{q} \cdot \dot{q} + \frac{1}{2} \int_0^L \begin{pmatrix} C & {}^t B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \partial_x q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ \partial_x q \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \int_0^L z^2(x, t) dx \end{array} \right. \quad (1.2.8b)$$

Démonstration. On utilise la formulation variationnelle avec $q^* = \dot{q} \in \mathcal{Q}_D$ et $z^* = z \in L^2([0, L])$. Il suffit alors de remarquer la simplification des termes $\int_0^L zG(\partial_x q) \cdot \partial_x \dot{q}$ pour obtenir le résultat. \square

Par construction, cette énergie (1.2.8b) est bien une forme quadratique.

1.2.1.b Discrétisation en espace

La discrétisation en espace est basée sur des éléments finis spectraux d'ordre élevé ($r \in \mathbb{N}^*$) sur un maillage régulier de pas Δx tel que

$$[0, L] = \bigcup_k [x_k, x_{k+1}] \quad \text{et} \quad x_{k+1} = x_k + \Delta x \quad (1.2.9)$$

Les espaces d'éléments finis discrets \mathcal{Q}_h et \mathcal{Z}_h sont de dimensions respectives n_h^q et n_h^z et définis par

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_h &= \left\{ q \in \mathcal{Q}_D \mid \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \forall k, q_i|_{[x_k, x_{k+1}]} \in \mathbb{P}_r \right\} \\ \mathcal{Z}_h &= \left\{ z \in L^2([0, L]) \mid \forall k, z|_{[x_k, x_{k+1}]} \in \mathbb{P}_r \right\} \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

et où \mathbb{P}_r est l'ensemble des polynômes de degré au plus r . Les degrés de liberté et les points de quadrature sont choisis comme les points de Gauss-Lobatto afin de réaliser une condensation de masse. Les fonctions de base de \mathcal{Q}_h sont notées $(\varphi_i)_{i \in \llbracket 1, n_h^q \rrbracket}$, et celles de \mathcal{Z}_h sont notées $(\phi_i)_{i \in \llbracket 1, n_h^z \rrbracket}$. Pour finir, on note Q_h la représentation vectorielle de $q_h \in \mathcal{Q}_h$ et Z_h celle de $z_h \in \mathcal{Z}_h$ dans ces bases respectives, et on introduit les matrices et vecteurs suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (i, j) \in \llbracket 1, n_h^q \rrbracket^2, \quad (M_h)_{i,j} = \int_0^L M \varphi_j \cdot \varphi_i \end{array} \right. \quad (1.2.11a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (i, j) \in \llbracket 1, n_h^q \rrbracket^2, \quad (R_h)_{i,j} = \int_0^L R \varphi_j \cdot \varphi_i + \int_0^L H \partial_x \varphi_j \cdot \partial_x \varphi_i \end{array} \right. \quad (1.2.11b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (i, j) \in \llbracket 1, n_h^q \rrbracket^2, \quad (K_h)_{i,j} = \int_0^L \begin{pmatrix} C & {}^t B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_j \\ \partial_x \varphi_j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_i \\ \partial_x \varphi_i \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (1.2.11c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (i, j) \in \llbracket 1, n_h^z \rrbracket^2, \quad (L_h)_{i,j} = \int_0^L \phi_j \cdot \phi_i \end{array} \right. \quad (1.2.11d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (i, j) \in \llbracket 1, n_h^z \rrbracket \times \llbracket 1, n_h^q \rrbracket, \quad (\mathbb{G}(Q_h))_{i,j} = \int_0^L \phi_i G(\partial_x q_h) \cdot \partial_x \varphi_j \end{array} \right. \quad (1.2.11e)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \llbracket 1, n_h^q \rrbracket, \quad (F_h)_i = \int_0^L F \cdot \varphi_i \end{array} \right. \quad (1.2.11f)$$

où \oint désigne une intégration numérique par la quadrature de Gauss-Lobatto. La formulation semi-discrétisée en espace s'écrit alors sous forme matricielle :

$$\begin{cases} M_h \ddot{Q}_h + R_h \dot{Q}_h + K_h Q_h + {}^t\mathbb{G}(Q_h) Z_h = F_h \\ L_h \dot{Z}_h = \mathbb{G}(Q_h) \dot{Q}_h \end{cases} \quad (1.2.12a)$$

$$(1.2.12b)$$

1.2.1.c Discrétisation en temps

C'est à ce niveau que la quadratisation prend tout son sens. La présence de la variable auxiliaire Z_h en facteur de la matrice \mathbb{G} permet de discrétiser explicitement le terme non-linéaire. La variable Q_h est échantillonnée sur une grille $\{t^n = n\Delta t\}$, et la variable Z_h sur une grille interlacée $\{t^{n+1/2} = (n + \frac{1}{2})\Delta t\}$ inspirée des travaux de [Ducceschi et Bilbao, 2019b]. On rappelle les définitions des opérateurs de discrétisation :

$$\mu q^{n+1/2} = \frac{q^{n+1} + q^n}{2}, \quad \delta q^{n+1/2} = \frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta t}, \quad \delta \mu q^n = \frac{q^{n+1} - q^{n-1}}{2\Delta t}$$

$$\delta^2 q^n = \frac{q^{n+1} - 2q^n + q^{n-1}}{\Delta t^2}, \quad \{q\}_\theta^n = \theta q^{n+1} + (1 - 2\theta)q^n + \theta q^{n-1}$$

$$\mu z^n = \frac{z^{n+1/2} + z^{n-1/2}}{2}, \quad \delta z^n = \frac{z^{n+1/2} - z^{n-1/2}}{\Delta t}$$

Schéma numérique 1.2.1 (Schéma 2-IEQ)

A chaque itération, on cherche $Q_h^{n+1} \in \mathbb{R}^{n_q}$ et $Z_h^{n+1/2} \in \mathbb{R}^{n_z}$ tels que

$$\begin{cases} M_h \delta^2 Q_h^n + R_h \delta \mu Q_h^n + K_h \{Q_h\}_\theta^n + {}^t\mathbb{G}(Q_h^n) \mu Z_h^n = F_h^n \\ L_h \delta Z_h^n = \mathbb{G}(Q_h^n) \delta \mu Q_h^n \end{cases} \quad (1.2.13a)$$

$$(1.2.13b)$$

et $Q_h^0 = Q_h^1 = 0$ et $Z_h^{1/2} = {}^t(\sqrt{c}, \dots, \sqrt{c})$.

Ce schéma est linéairement implicite : sa résolution nécessite uniquement une inversion de matrice.

Remarque 1.2.1

Afin d'assurer la bonne initialisation du schéma, on suppose que le terme source n'exerce une action sur la corde que à partir d'un temps $t_1 > 2\Delta t$. Ceci est généralement bien vérifié lors de la frappe par un marteau qui met un certain temps à arriver jusqu'à la corde.

Par ailleurs, la solution du schéma vérifie un bilan de puissance discret.

Théorème 1.2.2 (Bilan de puissance discret du schéma 2-IEQ 1.2.1)

La solution du schéma 1.2.1 vérifie

$$\delta \mathcal{E}_c^n = F_h^n \cdot \delta \mu Q_h^n - \|\delta \mu Q_h^n\|_{R_h}^2 \quad (1.2.14a)$$

$$\mathcal{E}_c^{n+1/2} = \frac{1}{2} \|\delta Q_h^{n+1/2}\|_{\tilde{M}_h}^2 + \frac{1}{2} \|\mu Q_h^{n+1/2}\|_{K_h}^2 + \frac{1}{2} \|Z_h^{n+1/2}\|_{L_h}^2 \quad (1.2.14b)$$

où $\tilde{M}_h = M_h + \Delta t^2 \left(\theta - \frac{1}{4}\right) K_h$ est la matrice de masse modifiée.

Démonstration. On prend le produit scalaire de l'équation (1.2.13a) par $\delta\mu Q_h$, et on remarque que

$$\{Q_h\}_\theta^n = \left(\theta - \frac{1}{4}\right) \Delta t^2 \delta^2 Q_h^n + \mu^2 Q_h^n \quad (1.2.15)$$

On obtient

$$\widetilde{M}_h \delta^2 Q_h^n \cdot \delta\mu Q_h^n + K_h \mu^2 Q_h^n \cdot \delta\mu Q_h^n + {}^t\mathbb{G}(Q_h^n) \mu Z_h^n \cdot \delta\mu Q_h^n = F_h^n \cdot \delta\mu Q_h^n - \|\delta\mu Q_h^n\|_{R_h} \quad (1.2.16)$$

On utilise alors l'équation (1.2.13b) pour écrire

$${}^t\mathbb{G}(Q_h^n) \mu Z_h^n \cdot \delta\mu Q_h^n = \mathbb{G}(Q_h^n) \delta\mu Q_h^n \cdot \mu Z_h^n \quad (1.2.17)$$

$$= L_h \delta Z_h^n \cdot \mu Z_h^n \quad (1.2.18)$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{1}{2} L_h Z_h^{n+1/2} \cdot Z_h^{n+1/2} - \frac{1}{2} L_h Z_h^{n-1/2} \cdot Z_h^{n-1/2} \right] \quad (1.2.19)$$

Et on remarque que

$$\widetilde{M}_h \delta^2 Q_h^n \cdot \delta\mu Q_h^n = \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{1}{2} \widetilde{M}_h \frac{Q_h^{n+1} - Q_h^n}{\Delta t} \cdot \frac{Q_h^{n+1} - Q_h^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} \widetilde{M}_h \frac{Q_h^n - Q_h^{n-1}}{\Delta t} \cdot \frac{Q_h^n - Q_h^{n-1}}{\Delta t} \right] \quad (1.2.20)$$

$$K_h \mu^2 Q_h^n \cdot \delta\mu Q_h^n = \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{1}{2} K_h \frac{Q_h^{n+1} + Q_h^n}{2} \cdot \frac{Q_h^{n+1} + Q_h^n}{2} - \frac{1}{2} K_h \frac{Q_h^n + Q_h^{n-1}}{2} \cdot \frac{Q_h^n + Q_h^{n-1}}{2} \right] \quad (1.2.21)$$

La combinaison de ces résultats permet d'obtenir le résultat du théorème. \square

Théorème 1.2.3 (Positivité de l'énergie discrète du schéma 2-IEQ 1.2.1)

L'énergie (1.2.14b) du schéma 2-IEQ est positive si et seulement si la matrice \widetilde{M}_h est positive. Si $\theta \geq 1/4$, ceci est toujours vérifié. Sinon, si $\theta < 1/4$, cela revient à vérifier la condition suivante

$$\Delta t^2 \rho \left(M_h^{-1} K_h \right) \leq \frac{4}{1 - 4\theta} \quad (1.2.22)$$

où $\rho \left(M_h^{-1} K_h \right)$ est la plus grande valeur propre de $M_h^{-1} K_h$.

Démonstration. Les matrices M_h , K_h et L_h sont positives. Pour assurer la positivité de l'énergie (1.2.14b), il faut et il suffit donc que la matrice de masse modifiée \widetilde{M}_h soit une matrice positive. \square

Remarque 1.2.2

Nous montrerons au paragraphe 1.3.4 que cette condition de positivité de l'énergie suffit pour assurer la stabilité du schéma. Elle constitue donc une condition CFL.

1.2.1.d Résolution pratique

Deux approches sont possibles pour résoudre le schéma 1.2.1. La première, la plus naïve, consiste à inverser à chaque itération le système qui apparaît naturellement :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{M_h}{\Delta t^2} + \frac{R_h}{2\Delta t} + \theta K_h & \frac{1}{2} {}^t\mathbb{G}(Q_h^n) \\ -\frac{1}{2} \mathbb{G}(Q_h^n) & L_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_h^{n+1} \\ Z_h^{n+1/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_h^n + M_h \frac{2Q_h^n - Q_h^{n-1}}{\Delta t^2} + R_h \frac{Q_h^{n-1}}{2\Delta t} + K_h \left((2\theta - 1)Q_h^n - \theta Q_h^{n-1} \right) - \frac{1}{2} {}^t\mathbb{G}(Q_h^n) Z_h^{n-1/2} \\ L_h Z_h^{n-1/2} - \frac{1}{2} \mathbb{G}(Q_h^n) Q_h^{n-1} \end{pmatrix} \quad (1.2.23) \end{aligned}$$

Il faut remarquer que, puisque le schéma est linéairement implicite, l'inversion du système se fait linéairement. Cependant, l'ajout de la variable auxiliaire Z_h a ajouté n_h^z degrés de liberté au système, ce qui accroît considérablement sa taille, et la matrice qui doit être inversée change à chaque pas de temps puisqu'elle dépend non-linéairement de l'inconnue Q_h^n . Certes, une méthode itérative n'est pas nécessaire pour résoudre le schéma IEQ, mais la taille de système à inverser est tout de même très grande. Pour la réduire, il est possible de procéder à une élimination de la variable auxiliaire $Z_h^{n+1/2}$ dans l'équation (1.2.13a) en utilisant la relation

$$\mu Z_h^n = \frac{\Delta t}{2} \delta Z_h^n + Z_h^{n-1/2} = \frac{\Delta t}{2} L_h^{-1} \mathbb{G}(Q_h^n) \delta \mu Q_h^n + Z_h^{n-1/2} \quad (1.2.24)$$

On obtient alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{M_h}{\Delta t^2} + \frac{R_h}{2\Delta t} + \theta K_h + \frac{1}{4} {}^t \mathbb{G}(Q_h^n) L_h^{-1} \mathbb{G}(Q_h^n) \right] Q_h^{n+1} \\ = F_h^n + M_h \frac{2Q_h^n - Q_h^{n-1}}{\Delta t^2} + R_h \frac{Q_h^{n-1}}{2\Delta t} + K_h \left((2\theta - 1)Q_h^n - \theta Q_h^{n-1} \right) \\ \quad - {}^t \mathbb{G}(Q_h^n) Z_h^{n-1/2} + \frac{1}{4} {}^t \mathbb{G}(Q_h^n) L_h^{-1} \mathbb{G}(Q_h^n) Q_h^{n-1} \\ Z_h^{n+1/2} = Z_h^{n-1/2} + L_h^{-1} \mathbb{G}(Q_h^n) \frac{Q_h^{n+1} - Q_h^{n-1}}{2} \end{array} \right. \quad (1.2.25a)$$

$$(1.2.25b)$$

et la première équation (1.2.25a) peut être résolue à l'aide de la formule de Woodbury :

Lemme 1.2.1 (Formule d'inversion de Woodbury [Woodbury, 1950].)

Soient A_h et a_h deux matrices carrées inversibles de tailles respectives $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

Soient U_h et V_h de matrices de tailles $n \times p$ et $p \times n$.

$A_h + U_h a_h V_h$ est inversible si et seulement si $\det(a_h^{-1} + V_h A_h^{-1} U_h) \neq 0$ et alors on a :

$$(A_h + U_h a_h V_h)^{-1} = A_h^{-1} - A_h^{-1} U_h (a_h^{-1} + V_h A_h^{-1} U_h)^{-1} V_h A_h^{-1}$$

Il suffit de choisir $A_h = \frac{M_h}{\Delta t^2} + \frac{R_h}{2\Delta t} + \theta K_h$ et $a_h = L_h^{-1}$ qui sont des matrices constantes pré-calculées et inversées une fois pour toutes au début de la simulation, et ${}^t U_h = V_h = \frac{1}{2} \mathbb{G}(Q_h^n)$ sont mis à jour à chaque itération. Au lieu d'inverser une matrice de taille $n_h^q + n_h^z$ à chaque pas de temps dans (1.2.23), la seule inversion ici concerne la matrice $a_h^{-1} + {}^t U_h A_h^{-1} U_h$ qui est seulement de taille n_h^z .

La formule de Woodbury permet en fait d'actualiser l'inverse de la matrice constante A_h par une perturbation changeante de rang p . Elle est d'autant plus efficace que p est petit. Dans le cas limite où $p = 1$, aucune inversion de matrice n'est requise pendant les itérations en temps.

Nous verrons dans la suite par des illustrations numériques que le schéma IEQ est un très mauvais choix de schéma, car certes il rend le système linéairement implicite et permet de s'affranchir de la méthode itérative, mais l'ajout d'un grand nombre de degrés de liberté qui doivent être actualisés à chaque pas de temps fait exploser la complexité algorithmique, même en utilisant la formule de Woodbury.

Pour pallier ce défaut tout en conservant les propriétés intéressantes du schéma, l'utilisation de la méthode SAV est possible. Nous allons voir qu'elle présente les mêmes aspects positifs que le schéma IEQ, mais avec une complexité considérablement réduite.

1.2.2 Variable auxiliaire scalaire formulée à l'ordre 2 (2-SAV)

Définissons une constante $c \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $2 \int_0^L \mathcal{U}(\partial_x q) dx + c$ soit strictement positif. Comme pour la méthode IEQ précédemment, on introduit une variable auxiliaire, mais cette fois-ci indépendante de la variable d'espace :

$$\forall t \in [0, T], \quad z(t) \equiv \sqrt{2 \int_0^L \mathcal{U}(\partial_x q(x, t)) dx + c} \quad (1.2.26)$$

Associé à cette variable auxiliaire, on définit un opérateur auxiliaire G tel que

$$G : \begin{cases} \mathcal{Q}_D & \longrightarrow L^2([0, L])^N \\ q & \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2 \int_0^L \mathcal{U}(\partial_x q(x, t)) dx + c}} \nabla \mathcal{U}(\partial_x q) \end{cases} \quad (1.2.27)$$

Contrairement à la méthode IEQ, en raison de l'intégrale qui définit la variable auxiliaire, la reformulation de l'équation de corde sous forme SAV ne peut se faire que directement sur la formulation variationnelle.

1.2.2.a Formulation variationnelle et énergie

On cherche $q \in \mathcal{Q}_D$ et $z \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $q^* \in \mathcal{Q}_D$ on ait

$$\begin{cases} \int_0^L M \ddot{q} \cdot q^* + \int_0^L R \dot{q} \cdot q^* + \int_0^L H \partial_x \dot{q} \cdot \partial_x q^* \\ \quad + \int_0^L \begin{pmatrix} C & {}^t B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \partial_x q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q^* \\ \partial_x q^* \end{pmatrix} + z \int_0^L G(\partial_x q) \cdot \partial_x q^* = \int_0^L F \cdot q^* \\ \dot{z} = \int_0^L G(\partial_x q) \cdot \partial_x \dot{q} \end{cases} \quad (1.2.28a)$$

$$\dot{z} = \int_0^L G(\partial_x q) \cdot \partial_x \dot{q} \quad (1.2.28b)$$

Étant donné que la variable auxiliaire z n'est pas distribuée, l'équation (1.2.28b) reste une équation scalaire non-variationnelle.

Théorème 1.2.4 (Bilan de puissance de la formulation SAV)

Toute solution suffisamment régulière $q \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathcal{Q}_D) \cap \mathcal{C}^2([0, T], L^2([0, L])^N)$ et $z \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R})$ de (1.2.28) vérifie

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \int_0^L F \cdot \dot{q} - \int_0^L R \dot{q} \cdot \dot{q} - \int_0^L H \partial_x \dot{q} \cdot \partial_x \dot{q} \end{cases} \quad (1.2.29a)$$

$$\begin{cases} \mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2} \int_0^L M \dot{q} \cdot \dot{q} + \frac{1}{2} \int_0^L \begin{pmatrix} C & {}^t B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \partial_x q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ \partial_x q \end{pmatrix} + \frac{1}{2} z^2(t) \end{cases} \quad (1.2.29b)$$

Démonstration. On utilise la formulation variationnelle avec $q^* = \dot{q} \in \mathcal{Q}_D$. Il suffit alors d'utiliser l'équation (1.2.28b) pour obtenir

$$z(t) \int_0^L G(\partial_x q) \cdot \partial_x \dot{q} = z(t) \dot{z}(t) \quad (1.2.30)$$

□

1.2.2.b Discrétisation en espace

Les espaces d'approximation pour les éléments finis sont les mêmes que pour la formulation IEQ (voir le paragraphe 1.2.1.b). Seule diffère la définition du terme non-linéaire \mathbb{G} , qui est une matrice pour la formulation IEQ et un vecteur pour la formulation SAV :

$$\forall i \in \llbracket 1, n_h^q \rrbracket, \quad (\mathbb{G}(Q_h))_i = \oint_0^L G(\partial_x q_h) \cdot \partial_x \varphi_i \quad (1.2.31)$$

La variable auxiliaire ne nécessite aucune discrétisation en espace puisqu'elle ne dépend que du temps. Nous lui apposons tout de même l'indice h pour signifier qu'elle dépend de l'approximation en espace par son couplage avec l'inconnue q_h .

La formulation semi-discrétisée en espace s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{cases} M_h \ddot{Q}_h + R_h \dot{Q}_h + K_h Q_h + z_h \mathbb{G}(Q_h) = F_h & (1.2.32a) \\ \dot{z}_h = \mathbb{G}(Q_h) \cdot \dot{Q}_h & (1.2.32b) \end{cases}$$

1.2.2.c Discrétisation en temps

Comme pour le schéma IEQ, la variable Q_h est échantillonnée sur une grille $\{t^n = n\Delta t\}$, et la variable z_h sur une grille interlacée $\{t^{n+1/2} = (n + \frac{1}{2})\Delta t\}$ inspirée des travaux de [Ducceschi *et al.*, 2022], [Ducceschi et Bilbao, 2022]. On rappelle les définitions des opérateurs de discrétisation :

$$\begin{aligned} \mu q^{n+1/2} &= \frac{q^{n+1} + q^n}{2}, & \delta q^{n+1/2} &= \frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta t}, & \delta \mu q^n &= \frac{q^{n+1} - q^{n-1}}{2\Delta t} \\ \delta^2 q^n &= \frac{q^{n+1} - 2q^n + q^{n-1}}{\Delta t^2}, & \{q\}_\theta^n &= \theta q^{n+1} + (1 - 2\theta)q^n + \theta q^{n-1} \\ \mu z^n &= \frac{z^{n+1/2} + z^{n-1/2}}{2}, & \delta z^n &= \frac{z^{n+1/2} - z^{n-1/2}}{\Delta t} \end{aligned}$$

Schéma numérique 1.2.2 (Schéma 2-SAV)

A chaque itération, on cherche $Q_h^{n+1} \in \mathbb{R}^{n_h^q}$ et $z_h^{n+1/2} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} M_h \delta^2 Q_h^n + R_h \delta \mu Q_h^n + K_h \{Q_h\}_\theta^n + \mu z_h^n \mathbb{G}(Q_h^n) = F_h^n & (1.2.33a) \\ \delta z_h^n = \mathbb{G}(Q_h^n) \cdot \delta \mu Q_h^n & (1.2.33b) \end{cases}$$

et $Q_h^0 = Q_h^1 = 0$ et $z_h^{1/2} = \sqrt{c}$.

Ce schéma est, encore une fois, linéairement implicite, et vérifie le bilan de puissance discret suivant.

Théorème 1.2.5 (Bilan de puissance discret du schéma 2-SAV 1.2.2)

La solution du schéma 1.2.2 vérifie

$$\begin{cases} \delta \mathcal{E}_c^n = F_h^n \cdot \delta \mu Q_h^n - \|\delta \mu Q_h^n\|_{R_h}^2 & (1.2.34a) \\ \mathcal{E}_c^{n+1/2} = \frac{1}{2} \|\delta Q_h^{n+1/2}\|_{\tilde{M}_h}^2 + \frac{1}{2} \|\mu Q_h^{n+1/2}\|_{K_h}^2 + \frac{1}{2} (z_h^{n+1/2})^2 & (1.2.34b) \end{cases}$$

où $\tilde{M}_h = M_h + \Delta t^2 \left(\theta - \frac{1}{4}\right) K_h$ est la matrice de masse modifiée.

Démonstration. La preuve est en tous points similaire à celle du théorème 1.2.1. \square

Théorème 1.2.6 (Positivité de l'énergie discrète du schéma 2-SAV 1.2.2)

L'énergie (1.2.34b) du schéma 2-SAV est positive si et seulement si la matrice \widetilde{M}_h est positive. Si $\theta \geq 1/4$, ceci est toujours vérifié. Sinon, si $\theta < 1/4$, cela revient à vérifier la condition suivante

$$\Delta t^2 \rho \left(M_h^{-1} K_h \right) \leq \frac{4}{1 - 4\theta} \quad (1.2.35)$$

où $\rho \left(M_h^{-1} K_h \right)$ est la plus grande valeur propre de $M_h^{-1} K_h$.

Démonstration. La matrice K_h est positive. Pour assurer la positivité de l'énergie (1.2.34b), il faut et il suffit donc que la matrice de masse modifiée \widetilde{M}_h soit une matrice positive. \square

1.2.2.d Résolution pratique

Le système à inverser à chaque pas de temps pour résoudre le schéma 2-SAV est

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{M_h}{\Delta t^2} + \frac{R_h}{2\Delta t} + \theta K_h & \frac{1}{2} {}^t \mathbb{G}(Q_h^n) \\ -\frac{1}{2} \mathbb{G}(Q_h^n) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_h^{n+1} \\ z_h^{n+1/2} \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} F_h^n + M_h \frac{2Q_h^n - Q_h^{n-1}}{\Delta t^2} + R_h \frac{Q_h^{n-1}}{2\Delta t} + K_h \left((2\theta - 1)Q_h^n - \theta Q_h^{n-1} \right) - \frac{1}{2} \mathbb{G}(Q_h^n) z_h^{n-1/2} \\ z_h^{n-1/2} - \frac{1}{2} \mathbb{G}(Q_h^n) \cdot Q_h^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.2.36)$$

Contrairement au système IEQ (1.2.23) qui nécessitait n_h^z degrés de liberté pour le traitement de la variable auxiliaire distribuée, ce nouveau système SAV (1.2.36) ne requiert l'ajout que d'un seul degré de liberté supplémentaire, puisque la variable auxiliaire z est scalaire.

On peut inverser le schéma SAV directement à partir de (1.2.36) mais en raison de sa taille réduite, et c'est là tout son intérêt, l'élimination de la variable auxiliaire conduit à l'utilisation de la formule de Woodbury 1.2.1 dans le cas particulier où $p = 1$.

$$\mu z_h^n = \frac{\Delta t}{2} \delta z_h^n + z_h^{n-1/2} = \frac{\Delta t}{2} \mathbb{G}(Q_h^n) \cdot \delta \mu Q_h^n + z_h^{n-1/2} \quad (1.2.37)$$

et alors

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{M_h}{\Delta t^2} + \frac{R_h}{2\Delta t} + \theta K_h + \frac{1}{4} \mathbb{G}(Q_h^n) {}^t \mathbb{G}(Q_h^n) \right] Q_h^{n+1} \\ & = F_h^n + M_h \frac{2Q_h^n - Q_h^{n-1}}{\Delta t^2} + R_h \frac{Q_h^{n-1}}{2\Delta t} + K_h \left((2\theta - 1)Q_h^n - \theta Q_h^{n-1} \right) \\ & \quad - \mathbb{G}(Q_h^n) z_h^{n-1/2} + \frac{1}{4} \mathbb{G}(Q_h^n) \left[\mathbb{G}(Q_h^n) \cdot Q_h^{n-1} \right] \end{aligned} \right. \quad (1.2.38a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & z_h^{n+1/2} = z_h^{n-1/2} + \mathbb{G}(Q_h^n) \cdot \frac{Q_h^{n+1} - Q_h^{n-1}}{2} \end{aligned} \right. \quad (1.2.38b)$$

Lemme 1.2.2 (Formule d'inversion de Sherman-Morrison [[Sherman et Morrison, 1950](#)].)

Soit A_h une matrice carré inversible de taille $n \in \mathbb{N}^*$ et u_h, v_h deux vecteurs de taille n . $A_h + u_h {}^t v_h$ est inversible si et seulement si $1 + {}^t v_h A_h^{-1} u_h \neq 0$ et on a :

$$\left(A_h + u_h {}^t v_h \right)^{-1} = A_h^{-1} - \frac{A_h^{-1} u_h {}^t v_h A_h^{-1}}{1 + {}^t v_h A_h^{-1} u_h}$$

C'est un cas particulier de la formule de Woodbury 1.2.1 avec une contribution de rang 1.

On l'applique avec $A_h = \frac{M_h}{\Delta t^2} + \frac{R_h}{2\Delta t} + \theta K_h$ et $u_h = v_h = \frac{1}{2} \mathbb{G}(Q_h^n)$. Hormis le calcul de A_h^{-1} qui est effectué hors des itérations en temps, aucune inversion de matrice n'est nécessaire, seuls des produits matrice-vecteur et des produits scalaires sont utilisés. L'algorithme de résolution du schéma SAV avec la formule de Sherman-Morrison que nous utilisons pour inverser le système (1.2.38a) de la forme $(A_h + u_h {}^t v_h) Q_h^{n+1} = b_h$ est le suivant :

- Initialiser toutes les variables et LU-factoriser la matrice A_h une fois pour toutes.
- Pour chaque itération :
 - Calculer $A_h^{-1} u_h$ et $A_h^{-1} b_h$ et remarquer que ${}^t u_h A_h^{-1} = {}^t (A_h^{-1} u_h)$ puisque A_h est symétrique.
 - Calculer le réel $s = \frac{{}^t u_h A_h^{-1} b_h}{1 + {}^t u_h A_h^{-1} u_h} = \frac{(A_h^{-1} u_h) \cdot b_h}{1 + u_h \cdot (A_h^{-1} u_h)}$
 - Calculer la solution $Q_h^{n+1} = (A_h^{-1} b_h) + s \times (A_h^{-1} u_h)$
 - Actualiser la variable auxiliaire :

$$z_h^{n+1/2} = z_h^{n-1/2} + \mathbb{G}(Q_h^n) \cdot \frac{Q_h^{n+1} - Q_h^{n-1}}{2}$$

En pratique, l'utilisation de la formule de Sherman-Morrison permet, pour le cas d'application de la corde de piano, de diviser le temps de calcul par 7 par rapport à une inversion naïve.

1.2.3 Variable auxiliaire scalaire formulée dans l'espace des phases (P-SAV)

Les méthodes que nous avons présentées jusqu'à maintenant sont basées sur la formulation à l'ordre 2 de l'équation de corde (1.1.10). Comme le fait [[Jiang et al., 2019](#)] pour l'équation d'onde de Sine-Gordon, il est possible d'effectuer une reformulation à l'ordre 1 dans l'espace des phases en introduisant une variable supplémentaire $p = \dot{q}$:

Modèle 1.2.2 (Formulation de l'équation de corde dans l'espace des phases)

On cherche $q : [0, L] \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ et $p : [0, L] \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ tels que

$$\begin{cases} p = \dot{q} & (1.2.40a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M\dot{p} + (Rp - \partial_x (H\partial_x p)) \\ \quad - \partial_x (A\partial_x q + Bq + \nabla U(\partial_x q)) + Cq + {}^t B\partial_x q = F(x, t) & (1.2.40b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall k \in \mathcal{I}_D, \forall t \in [0, T], \quad q_k(0, t) = q_k(L, t) = p_k(0, t) = p_k(L, t) = 0 & (1.2.40c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall k \in \mathcal{I}_N, \forall t \in [0, T], \quad \partial_x q_k(0, t) = \partial_x q_k(L, t) = \partial_x p_k(0, t) = \partial_x p_k(L, t) = 0 & (1.2.40d) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall x \in [0, L], \quad q(x, 0) = p(x, 0) = 0 & (1.2.40e) \end{cases}$$

1.2.3.a Formulation variationnelle et énergie

L'écriture de la formulation variationnelle nécessite de déterminer un espace dans lequel sera écrite l'égalité $p = \dot{q}$. Notre choix est guidé par la volonté d'aboutir à un bilan de puissance. Rappelons que

$$\mathcal{Q}_D = \left\{ q \in \left(H^1([0, L]) \right)^N \mid \forall k \in \mathcal{I}_D, q_k(0) = 0 \text{ et } q_k(L) = 0 \right\} \quad (1.2.41)$$

Comme on le fait habituellement pour obtenir une formulation variationnelle, on prend le produit scalaire L^2 de l'équation (1.2.40b) avec une fonction p^* de \mathcal{Q}_D . Par contre, le produit scalaire défini par (1.2.42) est utilisé pour l'équation (1.2.40a), toujours contre une fonction q^* de \mathcal{Q}_D .

$$\forall (u, v) \in \mathcal{Q}_D^2, \quad (u, v) = \int_0^L \begin{pmatrix} C & {}^t B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \partial_x u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ \partial_x v \end{pmatrix} \quad (1.2.42)$$

On cherche donc $(q, p) \in \mathcal{Q}_D^2$ tels que pour tout $(q^*, p^*) \in \mathcal{Q}_D^2$ on ait

$$\int_0^L \begin{pmatrix} p \\ \partial_x p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C & {}^t B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^* \\ \partial_x q^* \end{pmatrix} = \int_0^L \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \partial_x \dot{q} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C & {}^t B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^* \\ \partial_x q^* \end{pmatrix} \quad (1.2.43a)$$

$$\int_0^L M \dot{p} \cdot p^* + \int_0^L R p \cdot p^* + \int_0^L H \partial_x p \cdot \partial_x p^* + \int_0^L \begin{pmatrix} C & {}^t B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \partial_x q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p^* \\ \partial_x p^* \end{pmatrix} + \int_0^L \mathcal{U}(\partial_x q) \cdot \partial_x p^* = \int_0^L F \cdot p^* \quad (1.2.43b)$$

La processus de quadratisation SAV est le même que pour la formulation à l'ordre 2 (voir le paragraphe 1.2.2). Il permet d'aboutir à la formulation variationnelle suivante. On cherche $(q, p) \in \mathcal{Q}_D^2$ et $z \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $(q^*, p^*) \in \mathcal{Q}_D^2$ on ait

$$\int_0^L \begin{pmatrix} p \\ \partial_x p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C & {}^t B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^* \\ \partial_x q^* \end{pmatrix} = \int_0^L \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \partial_x \dot{q} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C & {}^t B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^* \\ \partial_x q^* \end{pmatrix} \quad (1.2.44a)$$

$$\int_0^L M \dot{p} \cdot p^* + \int_0^L R p \cdot p^* + \int_0^L H \partial_x p \cdot \partial_x p^* + \int_0^L \begin{pmatrix} C & {}^t B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \partial_x q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p^* \\ \partial_x p^* \end{pmatrix} + z \int_0^L G(\partial_x q) \cdot \partial_x p^* = \int_0^L F \cdot p^* \quad (1.2.44b)$$

$$z = \int_0^L G(\partial_x q) \cdot \partial_x p \quad (1.2.44c)$$

Théorème 1.2.7 (Bilan de puissance de la formulation P-SAV)

Toute solution suffisamment régulière $p \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathcal{Q}_D) \cap \mathcal{C}^1([0, T], L^2([0, L])^N)$, $q \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathcal{Q}_D)$ et $z \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R})$ du modèle 1.2.2 vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \int_0^L F \cdot p - \int_0^L Rp \cdot p - \int_0^L H \partial_x p \cdot \partial_x p \end{array} \right. \quad (1.2.45a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2} \int_0^L Mp \cdot p + \frac{1}{2} \int_0^L \begin{pmatrix} C & {}^t B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \partial_x q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ \partial_x q \end{pmatrix} + \frac{1}{2} z^2(t) \end{array} \right. \quad (1.2.45b)$$

Démonstration. On utilise la formulation variationnelle avec $q^* = q \in \mathcal{Q}_D$ et $p^* = p \in \mathcal{Q}_D$. Le terme non-linéaire se traite à l'aide de l'équation (1.2.44c) qui assure que

$$z(t) \int_0^L G(\partial_x q) \cdot \partial_x p = z(t) \dot{z}(t) \quad (1.2.46)$$

et par ailleurs l'équation (1.2.44a) permet d'écrire que

$$\int_0^L \begin{pmatrix} C & {}^t B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \partial_x q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ \partial_x p \end{pmatrix} = \int_0^L \begin{pmatrix} C & {}^t B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \partial_x q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \partial_x \dot{q} \end{pmatrix} \quad (1.2.47)$$

Ces résultats combinés démontrent le théorème. □

1.2.3.b Discrétisation en espace

Ici, une fois encore, les vecteurs et matrices éléments finis sont les mêmes que pour la méthode 2-SAV, le système matriciel semi-discrétisé en espace s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^t K_h P_h = {}^t K_h \dot{Q}_h \quad (\iff P_h = \dot{Q}_h \text{ car } K_h \text{ est inversible}) \end{array} \right. \quad (1.2.48a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_h \dot{P}_h + R_h P_h + K_h Q_h + z_h \mathbb{G}(Q_h) = F_h \end{array} \right. \quad (1.2.48b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_h = \mathbb{G}(Q_h) \cdot P_h \end{array} \right. \quad (1.2.48c)$$

Remarque 1.2.3

Pour des vibrations de cordes soumises à des conditions de Dirichlet, typiquement les vibrations transversales et longitudinales, l'inversibilité de la matrice K_h est hérité du caractère bien posé du problème elliptique associé. Dans le cas d'une corde avec raideur, pour laquelle l'angle de cisaillement est soumis à des conditions de Neumann, cela est moins évident, mais la matrice K_h est également inversible en raison du couplage de l'onde de cisaillement avec l'onde transversale.

Plus généralement, l'équation (1.2.48a) est bien posée sur $\ker(K_h)^\perp$. Si le noyau n'est pas réduit à $\{0\}$, il est nécessaire d'imposer des contraintes pour rendre l'équation bien posée. Classiquement, pour des conditions de Neumann, on peut imposer à la solution d'être de moyenne nulle.

1.2.3.c Discrétisation en temps

Pour l'écriture du schéma P-SAV, qui est une version modifiée du schéma 2-SAV formulée dans l'espace des phases et inspirée de [Jiang *et al.*, 2019], toutes les variables sont échantillonnées sur une même grille $\{t^n = n\Delta t\}$. Les opérateurs de discrétisation utilisés sont :

$$\mu q^{n+1/2} = \frac{q^{n+1} + q^n}{2}, \quad \delta q^{n+1/2} = \frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta t}, \quad \pi q^{n+1/2} = \frac{1}{2} (3q^n - q^{n-1})$$

L'approximation $\pi \cdot$ est explicite et consistante à l'ordre 2 avec $q(t^{n+1/2})$.

Schéma numérique 1.2.3 (Schéma P-SAV)

A chaque itération, on cherche $Q_h^{n+1} \in \mathbb{R}^{n_h^q}$, $P_h^{n+1} \in \mathbb{R}^{n_h^q}$ et $z_h^{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} \delta Q_h^{n+1/2} = \mu P_h^{n+1/2} & (1.2.49a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_h \delta P_h^{n+1/2} + R_h \mu P_h^{n+1/2} + K_h \mu Q_h^{n+1/2} + \mu z_h^{n+1/2} \mathbb{G}(\pi Q_h^{n+1/2}) = F_h^{n+1/2} & (1.2.49b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta z_h^{n+1/2} = \mathbb{G}(\pi Q_h^{n+1/2}) \cdot \mu P_h^{n+1/2} & (1.2.49c) \end{cases}$$

et $Q_h^0 = \pi Q_h^{1/2} = 0$ et $z_h^0 = \sqrt{c}$.

L'approximation $\pi \cdot$ étant explicite, ce schéma est encore une fois linéairement implicite, et vérifie le bilan de puissance discret suivant.

Théorème 1.2.8 (Bilan de puissance discret du schéma P-SAV 1.2.3)

La solution du schéma 1.2.3 vérifie

$$\begin{cases} \delta \mathcal{E}_c^{n+1/2} = F_h^{n+1/2} \cdot \mu P_h^{n+1/2} - \left\| \mu P_h^{n+1/2} \right\|_{R_h}^2 & (1.2.50a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{E}_c^n = \frac{1}{2} \|P_h^n\|_{M_h}^2 + \frac{1}{2} \|Q_h^n\|_{K_h}^2 + \frac{1}{2} (z_h^n)^2 & (1.2.50b) \end{cases}$$

Démonstration. On prend le produit scalaire de l'équation (1.2.49b) par $\mu P_h^{n+1/2} = \delta Q_h^{n+1/2}$:

$$\begin{aligned} M_h \delta P_h^{n+1/2} \cdot \mu P_h^{n+1/2} + K_h \mu Q_h^{n+1/2} \cdot \delta Q_h^{n+1/2} + \mu z_h^{n+1/2} \mathbb{G}(\pi Q_h^{n+1/2}) \cdot \mu P_h^{n+1/2} \\ = F_h^{n+1/2} \cdot \mu P_h^{n+1/2} - R_h \mu P_h^{n+1/2} \cdot \mu P_h^{n+1/2} \end{aligned} \quad (1.2.51)$$

Il suffit alors d'utiliser l'équation (1.2.49c) pour aboutir au résultat. \square

Remarque 1.2.4

Contrairement aux schémas 2-IEQ et 2-SAV formulés à l'ordre 2, l'énergie discrète de ce schéma P-SAV est inconditionnellement positive, car elle est basée sur un schéma de Crank-Nicholson équivalent à une θ -approximation avec $\theta = 1/4$. Il est par conséquent inconditionnellement stable et n'a pas de condition CFL.

1.2.3.d Résolution pratique

Il est possible d'inverser naïvement le système linéaire mais, comme pour le schéma 2-SAV, l'utilisation de la formule de Sherman-Morrison est une stratégie possible.

On commence par éliminer la variable auxiliaire :

$$\mu z_h^{n+1/2} = \frac{\Delta t}{2} \delta z_h^{n+1/2} + z_h^n = \frac{\Delta t}{2} \mathbb{G} \left(\pi Q_h^{n+1/2} \right) \cdot \mu P_h^{n+1/2} + z_h^n \quad (1.2.52)$$

puis on se rapporte à une équation portant uniquement sur $\mu P_h^{n+1/2}$ en utilisant :

$$\begin{cases} M_h \delta P_h^{n+1/2} = \frac{2}{\Delta t} M_h \mu P_h^{n+1/2} - \frac{2}{\Delta t} M_h P_h^n & (1.2.53a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_h \mu Q_h^{n+1/2} = \frac{\Delta t}{2} K_h \mu P_h^{n+1/2} + Q_h^n & (1.2.53b) \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[M_h + \frac{\Delta t}{2} R_h + \frac{\Delta t^2}{4} K_h + \frac{\Delta t^2}{4} \mathbb{G} \left(\pi Q_h^{n+1/2} \right) {}^t \mathbb{G} \left(\pi Q_h^{n+1/2} \right) \right] \mu P_h^{n+1/2} \\ & \quad = \frac{\Delta t}{2} F_h^{n+1/2} + M_h P_h^n - \frac{\Delta t}{2} Q_h^n - \frac{\Delta t}{2} \mathbb{G} \left(\pi Q_h^{n+1/2} \right) z_h^n & (1.2.54a) \\ & P_h^{n+1} = 2\mu P_h^{n+1/2} - P_h^n & (1.2.54b) \\ & Q_h^{n+1} = Q_h^n + \Delta t \mu P_h^{n+1/2} & (1.2.54c) \\ & z_h^{n+1} = z_h^n + \Delta t \mathbb{G} \left(\pi Q_h^{n+1/2} \right) \cdot \mu P_h^{n+1/2} & (1.2.54d) \end{aligned} \right.$$

L'équation (1.2.54a) s'inverse par la formule de Sherman-Morrison 1.2.2 en posant $A_h = M_h + \frac{\Delta t}{2} R_h + \frac{\Delta t^2}{4} K_h$ et $u_h = v_h = \frac{\Delta t}{2} \mathbb{G} \left(\pi Q_h^{n+1/2} \right)$, puis la connaissance de $\mu P_h^{n+1/2}$ permet d'actualiser toutes les autres inconnues.

1.3 Analyse numérique des schémas 2-IEQ et 2-SAV sur une équation d'ondes générique formulée à l'ordre 2

Dans cette partie nous étudions les propriétés mathématiques des schémas 2-IEQ et 2-SAV sur une équation d'ondes générique définie ci-après par le modèle 1.3.1. Nous commençons par détailler les processus de quadratisation IEQ et SAV, puis nous écrivons les schémas qui en découlent. Nous démontrons ensuite leur stabilité uniforme pour tous les choix de discrétisations espace-temps qui vérifient au sens large une condition de Courant-Friedrich-Levy (CFL). En particulier la preuve reste applicable à la limite de validité de la condition CFL. Nous analysons alors la consistance des schémas puis leur convergence pour laquelle nous sommes contraints de distinguer les non-linéarités de type 1 et de type 2 mentionnées en introduction de ce chapitre. On rappelle qu'une non-linéarité de type 1 prend en argument le champ solution non dérivé en espace, tandis qu'un terme de type 2 agit sur le gradient du champ solution. La preuve de convergence est aboutie pour les termes de type 1, mais n'est pas valable dans le cas du type 2 pour lequel nous mettrons en évidence dans la partie 1.4 des cas de non convergence espace-temps.

Introduisons pour finir quelques notations utiles pour cette section. Pour A et B deux matrices de $(\mathbb{R}^n)^m$, on note : le produit scalaire matriciel

$$A : B = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{ij} B_{ij} \quad (1.3.1)$$

et associé à la norme de Frobenius

$$\|A\|_F = \sqrt{A : A} = \sqrt{\text{Tr}({}^t A A)} \quad (1.3.2)$$

1.3.1 Équation générale

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné en dimension $d \in \mathbb{N}$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Soient $F_1 : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ et $F_2 : (\mathbb{R}^d)^p \rightarrow \mathbb{R}$ deux formes non-linéaires, $M : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $A : (\mathbb{R}^p)^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ deux opérateurs linéaires symétriques, et $f : [0, T] \rightarrow L^2(\Omega)$ un terme source.

Par abus de notation, nous désignerons de la même manière par ∇ le gradient de la fonction inconnue u par rapport aux variables d'espace, et le gradient de la fonction non-linéaire F_2 par rapport à ses composantes.

Modèle 1.3.1 (Équation d'onde générique)

On cherche $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction de l'espace et du temps telle que

$$\partial_t^2 M u - \text{Div}(A \nabla u + \nabla F_2(\nabla u)) + \nabla F_1(u) = f \quad (1.3.3)$$

avec des conditions au bord de Dirichlet sur $\partial\Omega$ et des conditions initiales décrites par des fonctions $u_0, u_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$:

$$\begin{cases} \forall (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], & u(x, t) = 0 \end{cases} \quad (1.3.4a)$$

$$\begin{cases} \forall x \in \Omega, & u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (1.3.4b)$$

$$\begin{cases} \forall x \in \Omega, & \dot{u}(x, 0) = u_1(x) \end{cases} \quad (1.3.4c)$$

On note H un espace de Hilbert, typiquement $(L^2(\Omega))^p$, muni des normes

$$\forall v \in H, \quad \|v\|_M = \sqrt{\int_{\Omega} M v \cdot v}, \quad \|v\|_H = \sqrt{\int_{\Omega} v \cdot v} \quad (1.3.5)$$

$V \subset H$ est un autre espace de Hilbert induit par la norme

$$\forall v \in V, \quad \|v\|_V = \sqrt{\int_{\Omega} A \nabla v : \nabla v} \quad (1.3.6)$$

et qui prend en compte les conditions au bord essentielles.

Hypothèse 1.3.1 (Équivalence des normes)

Il existe deux constantes $c_m \in \mathbb{R}_+^*$ et $C_m \in \mathbb{R}_+^*$ telles que

$$\forall v \in H, \quad \frac{1}{c_m} \|v\|_H \leq \|v\|_M \leq C_m \|v\|_H \quad (1.3.7)$$

Il existe une constante $c_a \in \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\forall v \in V, \quad \frac{1}{c_a} \sqrt{\int_{\Omega} \nabla v : \nabla v} \leq \|v\|_V \quad (1.3.8)$$

Hypothèse 1.3.2 (Existence et régularité d'une solution de (1.3.3))

Le modèle 1.3.1 possède une unique solution

$$u \in \mathcal{C}^4([0, T], H) \cap \mathcal{C}^3([0, T], V) \quad (1.3.9)$$

Pour des termes non-linéaires F_1 et F_2 nuls, un tel résultat peut être obtenu par l'application du théorème de Hille-Yosida, si le terme source f est suffisamment régulier.

Hypothèse 1.3.3

$$\forall v \in H, \quad F_1(v) \in H \quad \forall v \in V, \quad F_2(\nabla v) \in H \quad (1.3.10)$$

La formulation variationnelle du modèle 1.3.1 consiste à chercher $u \in V$ tel que pour tout $u^* \in V$ on ait

$$\int_{\Omega} \partial_t^2 M u \cdot u^* + \int_{\Omega} A \nabla u : \nabla u^* + \int_{\Omega} \nabla F_2(\nabla u) : \nabla u^* + \int_{\Omega} \nabla F_1(u) \cdot u^* = \int_{\Omega} f \cdot u^* \quad (1.3.11)$$

Théorème 1.3.1 (Bilan de puissance de l'équation (1.3.3))

Toute solution suffisamment régulière $u \in \mathcal{C}^1([0, T], V) \cap \mathcal{C}^2([0, T], H)$ du modèle 1.3.1 vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathcal{E}_0}{dt} = \int_{\Omega} f \cdot \partial_t u \\ \mathcal{E}_0(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} M \partial_t u \cdot \partial_t u + \frac{1}{2} \int_{\Omega} A \nabla u : \nabla u + \int_{\Omega} F_2(\nabla u) + \int_{\Omega} F_1(u) \end{array} \right. \quad (1.3.12a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_0(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} M \partial_t u \cdot \partial_t u + \frac{1}{2} \int_{\Omega} A \nabla u : \nabla u + \int_{\Omega} F_2(\nabla u) + \int_{\Omega} F_1(u) \end{array} \right. \quad (1.3.12b)$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la formulation variationnelle (1.3.11) avec $u^* = \partial_t u \in V$. \square

Cette énergie n'est pas une forme quadratique en les inconnues, et la positivité de F_1 et F_2 est requise pour assurer sa positivité.

Remarque 1.3.1

Comme nous l'avons déjà mentionné au paragraphe 1.1.7, le choix de F_2 n'est pas unique. On peut introduire une matrice α telle que $A = \alpha A + (I_p - \alpha)A$ et transformer l'équation (1.3.3) en

$$\partial_t^2 M u - \text{Div}(\alpha A \nabla u + \nabla F_{2,\alpha}(\nabla u)) + \nabla F_1(u) = f \quad (1.3.13)$$

où $F_{2,\alpha}(\nabla u) = \frac{1}{2}(I_p - \alpha)A \nabla u : \nabla u + F_2(\nabla u)$.

Cette α -décomposition est appelée stabilisation dans [Shen et al., 2019] et [Bilbao et al., 2023], et permet fictivement de traiter une partie du terme linéaire A comme un terme non-linéaire dans F_2 . Avec $\alpha = I_p$, l'équation (1.3.3) est inchangée, tandis qu'avec $\alpha = 0$ l'intégralité du terme linéaire A est traitée non-linéairement dans la fonction $F_{2,\alpha}$.

Nous reviendrons sur ce point dans la partie numérique 1.4.7.a où nous cherchons la valeur optimale à donner à α pour une précision maximale des schémas.

1.3.2 Quadratisation à énergie invariante (IEQ)

1.3.2.a Procédé de quadratisation continu

Hypothèse 1.3.4 (Borne inférieure des fonctions non-linéaires)

Soit u la solution du modèle 1.3.1.

On suppose qu'il existe $(\beta_1, \beta_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ dépendants de la source f et tels que

$$\forall (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad -\frac{\beta_1}{2} < F_1(u(x, t)) \quad \text{et} \quad -\frac{\beta_2}{2} < F_2(\nabla u(x, t)) \quad (1.3.14)$$

Ceci permet d'assurer qu'il existe deux constantes $(c_1, c_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ telles que

$$\forall (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad \begin{cases} 2F_1(u(x, t)) + c_1 > c_1 - \beta_1 > 0 & (1.3.15a) \\ 2F_2(\nabla u(x, t)) + c_2 > c_2 - \beta_2 > 0 & (1.3.15b) \end{cases}$$

Introduisons deux variables auxiliaires

$$\forall (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad \begin{cases} z_1(x, t) \equiv \sqrt{2F_1(u(x, t)) + c_1} & (1.3.16a) \\ z_2(x, t) \equiv \sqrt{2F_2(\nabla u(x, t)) + c_2} & (1.3.16b) \end{cases}$$

et deux fonctions auxiliaires

$$\begin{cases} \forall q \in \mathbb{R}^p, \quad g_1(q) = \frac{1}{\sqrt{2F_1(q) + c_1}} \nabla F_1(q) & (1.3.17a) \\ \forall q \in (\mathbb{R}^d)^p, \quad g_2(q) = \frac{1}{\sqrt{2F_2(q) + c_2}} \nabla F_2(q) & (1.3.17b) \end{cases}$$

Les deux opérateurs associés sont définis par

$$\begin{cases} \forall u \in V, & G_1(u) = \frac{1}{\sqrt{2F_1(u) + c_1}} \nabla F_1(u) & (1.3.18a) \\ \forall u \in V, & G_2(\nabla u) = \frac{1}{\sqrt{2F_2(\nabla u) + c_2}} \nabla F_2(\nabla u) & (1.3.18b) \end{cases}$$

et sont tels que pour tout $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$, $G_1(u)(x, t) = g_1(u(x, t))$ et $G_2(\nabla u)(x, t) = g_2(\nabla u(x, t))$.

L'équation (1.3.3) se reformule alors sous une forme quadratisée.

Modèle 1.3.2 (Quadratisation par la méthode IEQ)

On cherche $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $z_1, z_2 : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} \partial_t^2 M u - \text{Div}(A \nabla u + z_2 G_2(\nabla u)) + z_1 G_1(u) = f & (1.3.19a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t z_1 = G_1(u) \cdot \partial_t u & (1.3.19b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t z_2 = G_2(\nabla u) : \partial_t \nabla u & (1.3.19c) \end{cases}$$

avec les conditions

$$\begin{cases} \forall (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], & u(x, t) = 0 & (1.3.20a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall x \in \Omega, & u(x, 0) = u_0(x) & (1.3.20b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall x \in \Omega, & \dot{u}(x, 0) = u_1(x) & (1.3.20c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall x \in \Omega, & z_1(x, 0) = \sqrt{2F_1(u_0(x)) + c_1} & (1.3.20d) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall x \in \Omega, & z_2(x, 0) = \sqrt{2F_2(\nabla u_0(x)) + c_2} & (1.3.20e) \end{cases}$$

Proposition 1.3.1

Les modèles 1.3.1 et 1.3.2 sont équivalents au sens des distributions.

Démonstration. Le sens direct découle du processus de quadratisation que nous venons de décrire. Pour le sens réciproque, si (u, z_1, z_2) est solution du modèle 1.3.2, alors les équations (1.3.19b) et (1.3.19c) assurent que $\partial_t (z_1 - \sqrt{2F_1(u) + c_1}) = 0$ et $\partial_t (z_2 - \sqrt{2F_2(\nabla u) + c_2}) = 0$, et grâce aux conditions initiales (1.3.20), l'intégration en temps donne bien que $z_1 = \sqrt{2F_1(u) + c_1}$ et $z_2 = \sqrt{2F_2(\nabla u) + c_2}$ au sens des distributions. Combiné aux définitions des opérateurs G_i , l'équation (1.3.19a) permet alors bien de retrouver le modèle non quadratisé 1.3.1. \square

1.3.2.b Formulation variationnelle et énergie

Dans la suite, nous cherchons les variables auxiliaires z_i dans l'espace variationnel $Z = L^2([0, L])$ muni de la norme

$$\forall z \in Z, \quad \|z\|_Z = \sqrt{\int_{\Omega} z^2} \quad (1.3.21)$$

On introduit également les différentes formes linéaires et non-linéaires associées au problème et définies pour tout $(v_1, v_2, s_1, s_2) \in V^2 \times Z^2$ par :

$$m(v_1, v_2) = \int_{\Omega} M v_1 \cdot v_2 \quad a(v_1, v_2) = \int_{\Omega} A \nabla v_1 : \nabla v_2 \quad (1.3.22)$$

$$\ell(s_1, s_2) = \int_{\Omega} s_1 s_2 \quad f(v_1) = \int_{\Omega} f \cdot v_1 \quad (1.3.23)$$

$$\bar{G}_1(v_1, v_2, s_1) = \int_{\Omega} s_1 G_1(v_1) \cdot v_2 \quad \bar{G}_2(v_1, v_2, s_1) = \int_{\Omega} s_1 G_2(v_1) : \nabla v_2 \quad (1.3.24)$$

Les formes \bar{G} sont non-linéaires par rapport à leur premier argument (v_1), et linéaires par rapport au second (v_2) et au troisième (s_1). m et a sont bi-linéaires et symétriques. Elle permettent d'écrire la formulation variationnelle IEQ associée au modèle 1.3.2.

On cherche $(u, z_1, z_2) \in V \times Z^2$ tel que pour tout $(q^*, z_1^*, z_2^*) \in V \times Z^2$ on ait

$$\begin{cases} m(\partial_t^2 u, u^*) + a(u, u^*) + \bar{G}_1(u, u^*, z_1) + \bar{G}_2(u, u^*, z_2) = f(u^*) & (1.3.25a) \\ \ell(\partial_t z_1, z_1^*) = \bar{G}_1(u, \partial_t u, z_1^*) & (1.3.25b) \\ \ell(\partial_t z_2, z_2^*) = \bar{G}_2(u, \partial_t u, z_2^*) & (1.3.25c) \end{cases}$$

Théorème 1.3.2 (Bilan de puissance de la formulation IEQ 1.3.2)

Toute solution suffisamment régulière $u \in \mathcal{C}^1([0, T], V) \cap \mathcal{C}^2([0, T], H)$ et $(z_1, z_2) \in \mathcal{C}^1([0, T], Z)^2$ du modèle 1.3.2 vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = f(\partial_t u) = \int_{\Omega} f \cdot \partial_t u \end{array} \right. \quad (1.3.26a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} m(\partial_t u, \partial_t u) + \frac{1}{2} a(u, u) + \frac{1}{2} \ell(z_1, z_1) + \frac{1}{2} \ell(z_2, z_2) \end{array} \right. \quad (1.3.26b)$$

Démonstration. On applique la formulation variationnelle (1.3.25) avec $u^* = \partial_t u \in V$ et $z_i^* = z_i \in Z$:

$$\begin{cases} m(\partial_t^2 u, \partial_t u) + a(u, \partial_t u) + \bar{G}_1(u, \partial_t u, z_1) + \bar{G}_2(u, \partial_t u, z_2) = f(\partial_t u) & (1.3.27a) \\ \ell(\partial_t z_1, z_1) = \bar{G}_1(u, \partial_t u, z_1) & (1.3.27b) \\ \ell(\partial_t z_2, z_2) = \bar{G}_2(u, \partial_t u, z_2) & (1.3.27c) \end{cases}$$

donc

$$m(\partial_t^2 u, \partial_t u) + a(u, \partial_t u) + \ell(\partial_t z_1, z_1) + \ell(\partial_t z_2, z_2) = f(\partial_t u) \quad (1.3.28)$$

□

1.3.2.c Discrétisation en espace

Pour $h \in \mathbb{R}_+^*$, notons $V_h \subset V$ et $Z_h \subset Z$ des sous-espace de dimensions finies n_h^v et n_h^z qui permettent une approximation de Galerkin conforme des espaces V et Z . La discrétisation est basée sur des éléments finis spectraux d'ordre élevé ($r \in \mathbb{N}^*$) sur un maillage de Ω . Les fonctions de base de V_h sont notées $(\varphi_i)_{i \in [1, n_h^v]}$ et celles de Z_h sont $(\phi_i)_{i \in [1, n_h^z]}$. Elles sont telles que

$$u_h = \sum_{i=1}^{n_h^v} U_{h,i} \varphi_i \quad z_{h,1} = \sum_{i=1}^{n_h^z} Z_{h,1,i} \phi_i \quad z_{h,2} = \sum_{i=1}^{n_h^z} Z_{h,2,i} \phi_i \quad (1.3.29)$$

où $U_h, Z_{h,1}$ et $Z_{h,2}$ sont les représentations vectorielles de $u_h, z_{h,1}$ et $z_{h,2}$ dans les bases des éléments finis.

Suite à ces approximations, on cherche $(u_h, z_{h,1}, z_{h,2}) \in V_h \times Z_h^2$ tel que pour tout $(u_h^*, z_{h,1}^*, z_{h,2}^*) \in V_h \times Z_h^2$ on ait

$$\begin{cases} m \left(\partial_t^2 u_h, u_h^* \right) + a(u_h, u_h^*) + \bar{G}_1(u_h, u_h^*, z_{h,1}) + \bar{G}_2(u_h, u_h^*, z_{h,2}) = f(u_h^*) & (1.3.30a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ell(\partial_t z_{h,1}, z_{h,1}^*) = \bar{G}_1(u_h, \partial_t u_h, z_{h,1}^*) & (1.3.30b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ell(\partial_t z_{h,2}, z_{h,2}^*) = \bar{G}_2(u_h, \partial_t u_h, z_{h,2}^*) & (1.3.30c) \end{cases}$$

Hypothèse 1.3.5 (Convergence de la méthode des éléments finis)

On suppose pour la suite que la méthode de Galerkin construite est conforme et que la solution semi-discrète $(u_h, z_{h,1}, z_{h,2})$ du problème (1.3.30) converge vers la solution continue (u, z_1, z_2) du problème (1.3.25).

Il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ et $\delta_{h,u}, \delta_{h,z_1}$ et δ_{h,z_2} tels que

$$\begin{cases} \|u - u_h\|_V \leq C \delta_{h,u} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 & (1.3.31a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \|z_1 - z_{h,1}\|_Z \leq C \delta_{h,z_1} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 & (1.3.31b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \|z_2 - z_{h,2}\|_Z \leq C \delta_{h,z_2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 & (1.3.31c) \end{cases}$$

1.3.2.d Discrétisation en temps

La variable u_h est échantillonnée sur une grille $\{t^n = n\Delta t\}$, et les variables auxiliaires $z_{h,1}$ et $z_{h,2}$ sur une grille interlacée $\{t^{n+1/2} = (n + \frac{1}{2}) \Delta t\}$ inspirée des travaux de [Ducceschi et Bilbao, 2019b]. On rappelle les définitions des opérateurs de discrétisation :

$$\mu u^{n+1/2} = \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, \quad \delta u^{n+1/2} = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, \quad \delta \mu u^n = \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t}$$

$$\delta^2 u^n = \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2}, \quad \{u\}_\theta^n = \theta u^{n+1} + (1 - 2\theta)u^n + \theta u^{n-1}$$

$$\mu z^n = \frac{z^{n+1/2} + z^{n-1/2}}{2}, \quad \delta z^n = \frac{z^{n+1/2} - z^{n-1/2}}{\Delta t}$$

et on note de plus

$$\forall u_h^* \in V_h, \quad f_h^n(u_h^*) = \oint_{\Omega} f(t^n) \cdot u_h^* \quad (1.3.32)$$

Schéma numérique 1.3.1 (Schéma 2-IEQ)

A chaque itération, on cherche $(u_h^{n+1}, z_{h,1}^{n+1/2}, z_{h,2}^{n+1/2}) \in V_h \times Z_h^2$ tels que pour tout $(u_h^*, z_{h,1}^*, z_{h,2}^*) \in V_h \times Z_h^2$ on ait

$$\begin{cases} m \left(\delta^2 u_h^n, u_h^* \right) + a(\{u_h\}_\theta^n, u_h^*) + \bar{G}_2(u_h^n, u_h^*, \mu z_{h,2}^n) + \bar{G}_1(u_h^n, u_h^*, \mu z_{h,1}^n) = f_h^n(u_h^*) & (1.3.33a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ell(\delta z_{h,1}^n, z_{h,1}^*) = \bar{G}_1(u_h^n, \delta \mu u_h^n, z_{h,1}^*) & (1.3.33b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ell(\delta z_{h,2}^n, z_{h,2}^*) = \bar{G}_2(u_h^n, \delta \mu u_h^n, z_{h,2}^*) & (1.3.33c) \end{cases}$$

1.3.3.a Procédé de quadratisation continu

Hypothèse 1.3.6 (Borne inférieure des fonctions non-linéaires)

Soit u la solution du problème variationnel (1.3.11).

On suppose qu'il existe $(\beta_1, \beta_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ dépendants de la source f et tels que

$$\forall t \in [0, T], \quad -\frac{\beta_1}{2} < \int_{\Omega} F_1(u(x, t)) dx \quad \text{et} \quad -\frac{\beta_2}{2} < \int_{\Omega} F_2(\nabla u(x, t)) dx \quad (1.3.39)$$

Ceci permet d'assurer qu'il existe deux constantes $(c_1, c_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ telles que

$$\forall t \in [0, T], \quad \begin{cases} 2 \int_{\Omega} F_1(u(x, t)) dx + c_1 > c_1 - \beta_1 > 0 & (1.3.40a) \\ 2 \int_{\Omega} F_2(\nabla u(x, t)) dx + c_2 > c_2 - \beta_2 > 0 & (1.3.40b) \end{cases}$$

Contrairement au cas IEQ (hypothèse 1.3.4) les constantes définies ici ne nécessitent qu'une borne inférieure sur des fonctions intégrées en espace, et non plus point par point. Cette hypothèse est donc plus faible.

Introduisons deux variables auxiliaires scalaires, indépendantes de la variable d'espace x

$$\forall t \in [0, T], \quad \begin{cases} z_1(t) \equiv \sqrt{2 \int_{\Omega} F_1(u(x, t)) dx + c_1} & (1.3.41a) \\ z_2(t) \equiv \sqrt{2 \int_{\Omega} F_2(\nabla u(x, t)) dx + c_2} & (1.3.41b) \end{cases}$$

et deux fonctions auxiliaires

$$\begin{cases} \forall u \in V, \forall (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad g_1(u(x, t)) = \frac{1}{\sqrt{2 \int_{\Omega} F_1(u(s, t)) ds + c_1}} \nabla F_1(u(x, t)) & (1.3.42a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall u \in V, \forall (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad g_2(u(x, t)) = \frac{1}{\sqrt{2 \int_{\Omega} F_2(\nabla u(s, t)) ds + c_2}} \nabla F_2(\nabla u(x, t)) & (1.3.42b) \end{cases}$$

Les deux opérateurs associés sont définis par

$$\begin{cases} \forall u \in V, \quad G_1(u) = \frac{1}{\sqrt{2 \int_{\Omega} F_1(u) + c_1}} \nabla F_1(u) & (1.3.43a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall u \in V, \quad G_2(u) = \frac{1}{\sqrt{2 \int_{\Omega} F_2(\nabla u) + c_2}} \nabla F_2(\nabla u) & (1.3.43b) \end{cases}$$

et sont tels que pour tout $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$, $G_i(u)(x, t) = g_i(u(x, t))$.

Contrairement à la technique IEQ, en raison des intégrales qui définissent les variables auxiliaires, la reformulation du modèle 1.3.1 sous la forme SAV ne peut se faire que directement sous forme variationnelle.

1.3.3.b Formulation variationnelle et énergie

Les formes linéaires utilisées sont les mêmes que pour la méthode IEQ. Par contre, les formes non-linéaires \bar{G} sont modifiées, elles sont ici définies pour tout $(v_1, v_2) \in V^2$ par :

$$\bar{G}_1(v_1, v_2) = \int_{\Omega} G_1(v_1) \cdot v_2 \quad \bar{G}_2(v_1, v_2) = \int_{\Omega} G_2(v_1) : \nabla v_2 \quad (1.3.44)$$

Elles sont non-linéaires par rapport à leur premier argument (v_1), et linéaires par rapport au second (v_2). On cherche alors $u \in V$ et $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $u^* \in V$ on ait

$$\begin{cases} m(\partial_t^2 u, u^*) + a(u, u^*) + z_2(t)\bar{G}_2(u, u^*) + z_1(t)\bar{G}_1(u, u^*) = f(u^*) \end{cases} \quad (1.3.45a)$$

$$\begin{cases} \partial_t z_1(t) = \bar{G}_1(u, \partial_t u) \end{cases} \quad (1.3.45b)$$

$$\begin{cases} \partial_t z_2(t) = \bar{G}_2(u, \partial_t u) \end{cases} \quad (1.3.45c)$$

Noter que les deux équations auxiliaires (1.3.45b) et (1.3.45c) ne sont pas formulées de façon variationnelle puisque les variables auxiliaires ne sont pas distribuées.

Théorème 1.3.4 (Bilan de puissance de la formulation SAV)

Toute solution suffisamment régulière $u \in \mathcal{C}^1([0, T], V) \cap \mathcal{C}^2([0, T], H)$ et $(z_1, z_2) \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R})^2$ de (1.3.45) vérifie

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = f(\partial_t u) = \int_{\Omega} f \cdot \partial_t u \end{cases} \quad (1.3.46a)$$

$$\begin{cases} \mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}m(\partial_t u, \partial_t u) + \frac{1}{2}a(u, u) + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2}z_1^2 \end{cases} \quad (1.3.46b)$$

Démonstration. On utilise la formulation variationnelle (1.3.45) avec $u^* = \partial_t u \in V$:

$$m(\partial_t^2 u, \partial_t u) + a(u, \partial_t u) + z_2 \bar{G}_2(u, \partial_t u) + z_1 \bar{G}_1(u, \partial_t u) = f(\partial_t u) \quad (1.3.47)$$

puis on utilise les équations (1.3.45b) et (1.3.45c) pour obtenir

$$m(\partial_t^2 u, \partial_t u) + a(u, \partial_t u) + z_2 \partial_t z_2 + z_1 \partial_t z_1 = f(\partial_t u) \quad (1.3.48)$$

□

1.3.3.c Discrétisation en espace

L'espace V_h qui permet la discrétisation par éléments finis est le même pour IEQ (voir le paragraphe 1.3.2.c). Les variables auxiliaires sont scalaires et ne nécessitent pas de discrétisation spatiale. Elles sont tout de même notées avec l'indice h puisqu'elles en dépendent par couplage avec l'inconnue u . On cherche $u_h \in V_h$ et $(z_{h,1}, z_{h,2}) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $u_h^* \in V_h$ on ait

$$\begin{cases} m(\partial_t^2 u_h, u_h^*) + a(u_h, u_h^*) + z_{h,2} \bar{G}_2(u_h, u_h^*) + z_{h,1} \bar{G}_1(u_h, u_h^*) = f_h(u_h^*) \end{cases} \quad (1.3.49a)$$

$$\begin{cases} \partial_t z_{h,1} = \bar{G}_1(u_h, \partial_t u_h) \end{cases} \quad (1.3.49b)$$

$$\begin{cases} \partial_t z_{h,2} = \bar{G}_2(u_h, \partial_t u_h) \end{cases} \quad (1.3.49c)$$

Hypothèse 1.3.7 (Convergence de la méthode des éléments finis)

On suppose pour la suite que la méthode de Galerkin construite est conforme et que la solution semi-discrète $(u_h, z_{h,1}, z_{h,2})$ du problème (1.3.49) converge vers la solution continue (u, z_1, z_2) du problème (1.3.45).

Il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ et $\delta_{h,u}$, δ_{h,z_1} et δ_{h,z_2} tels que

$$\begin{cases} \|u - u_h\|_V \leq C\delta_{h,u} & \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{cases} \quad (1.3.50a)$$

$$\begin{cases} |z_1 - z_{h,1}| \leq C\delta_{h,z_1} & \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{cases} \quad (1.3.50b)$$

$$\begin{cases} |z_2 - z_{h,2}| \leq C\delta_{h,z_2} & \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{cases} \quad (1.3.50c)$$

1.3.3.d Discrétisation en temps

La variable u_h est échantillonnée sur une grille $\{t^n = n\Delta t\}$, et les variables auxiliaires $z_{h,1}$ et $z_{h,2}$ sur une grille interlacée $\{t^{n+1/2} = (n + \frac{1}{2})\Delta t\}$ inspirée des travaux de [Ducceschi *et al.*, 2022], [Ducceschi et Bilbao, 2022].

Schéma numérique 1.3.2 (Schéma 2-SAV)

A chaque itération, on cherche $u_h^{n+1} \in V_h$ et $(z_{h,1}^{n+1/2}, z_{h,2}^{n+1/2}) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $u_h^* \in V_h$ on ait

$$\left\{ \begin{aligned} m(\delta^2 u_h^n, u_h^*) + a(\{u_h\}_\theta^n, u_h^*) + \mu z_{h,2}^n \bar{G}_2(u_h^n, u_h^*) + \mu z_{h,1}^n \bar{G}_1(u_h^n, u_h^*) &= f_h^n(u_h^*) \end{aligned} \right. \quad (1.3.51a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \delta z_{h,1}^n &= \bar{G}_1(u_h^n, \delta \mu u_h^n) \end{aligned} \right. \quad (1.3.51b)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \delta z_{h,2}^n &= \bar{G}_2(u_h^n, \delta \mu u_h^n) \end{aligned} \right. \quad (1.3.51c)$$

Théorème 1.3.5 (Bilan de puissance discret du schéma 2-SAV 1.3.2)

La solution du schéma 1.3.2 vérifie

$$\left\{ \begin{aligned} \delta \mathcal{E}_h^n &= f_h^n(\delta \mu u_h^n) = \oint_{\Omega} f(t^n) \cdot \delta \mu u_h^n \end{aligned} \right. \quad (1.3.52a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{E}_h^{n+1/2} &= \frac{1}{2} \tilde{m}(\delta u_h^{n+1/2}, \delta u_h^{n+1/2}) + \frac{1}{2} a(\mu u_h^{n+1/2}, \mu u_h^{n+1/2}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (z_{h,1}^{n+1/2})^2 + \frac{1}{2} (z_{h,2}^{n+1/2})^2 \end{aligned} \right. \quad (1.3.52b)$$

où $\tilde{m}(u, v) = m(u, v) + \Delta t^2 \left(\theta - \frac{1}{4}\right) a(u, v)$

Démonstration. On commence par remarquer que

$$\{u_h\}_\theta^n = \left(\theta - \frac{1}{4}\right) \Delta t^2 \delta^2 u_h^n + \mu^2 u_h^n \quad (1.3.53)$$

puis on utilise l'équation (1.3.51a) avec $u_h^* = \delta\mu u_h^n \in V_h$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \tilde{m} \left(\delta^2 u_h^n, \delta\mu u_h^n \right) + a \left(\mu^2 u_h^n, \delta\mu u_h^n \right) \\ + \mu z_{h,2}^n \bar{G}_2 \left(u_h^n, \delta\mu u_h^n \right) + \mu z_{h,1}^n \bar{G}_1 \left(u_h^n, \delta\mu u_h^n \right) = f_h^n(\delta\mu u_h^n) \end{aligned} \quad (1.3.54)$$

Les équations (1.3.51b) et (1.3.51c) permettent alors de se ramener à

$$\tilde{m} \left(\delta^2 u_h^n, \delta\mu u_h^n \right) + a \left(\mu^2 u_h^n, \delta\mu u_h^n \right) + \mu z_{h,2}^n \delta z_{h,2}^n + \mu z_{h,1}^n \delta z_{h,1}^n = f_h^n(\delta\mu u_h^n) \quad (1.3.55)$$

On termine la preuve en utilisant la bi-linéarité de \tilde{m} et a pour écrire que

$$\left\{ \begin{aligned} \mu z_h^n \delta z_h^n &= \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{1}{2} \left(z_h^{n+1/2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(z_h^{n-1/2} \right)^2 \right] \end{aligned} \right. \quad (1.3.56a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{m} \left(\delta^2 u_h^n, \delta\mu u_h^n \right) &= \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{1}{2} \tilde{m} \left(\delta u_h^{n+1/2}, \delta u_h^{n+1/2} \right) - \frac{1}{2} \tilde{m} \left(\delta u_h^{n-1/2}, \delta u_h^{n-1/2} \right) \right] \end{aligned} \right. \quad (1.3.56b)$$

$$\left\{ \begin{aligned} a \left(\mu^2 u_h^n, \delta\mu u_h^n \right) &= \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{1}{2} a \left(\mu u_h^{n+1/2}, \mu u_h^{n+1/2} \right) - \frac{1}{2} a \left(\mu u_h^{n-1/2}, \mu u_h^{n-1/2} \right) \right] \end{aligned} \right. \quad (1.3.56c)$$

□

1.3.4 Analyse de stabilité

Dans ce paragraphe, nous utilisons la technique de [Chabassier et Imperiale, 2017] pour prouver la stabilité des schémas 2-IEQ et 2-SAV uniformément par rapport à la condition de stabilité. Autrement dit, les estimations obtenues restent valables lorsque le pas de temps atteint sa plus grande valeur autorisée correspondant au cas limite de validité de la condition CFL.

Les résultats sur les deux schémas diffèrent uniquement par la norme utilisée pour les variables auxiliaires, $\|\cdot\|_Z$ pour IEQ, et des valeurs absolues $|\cdot|$ pour SAV.

Commençons par définir, grâce au théorème de représentation de Riesz, l'opérateur $A_h : V_h \rightarrow V_h$ qui vérifie

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = m(A_h u_h, v_h) = (A_h u_h, v_h)_M \quad (1.3.57)$$

Hypothèse 1.3.8

On suppose que l'opérateur A_h est positif au sens où

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(v_h, v_h) \geq 0 \quad (1.3.58)$$

Par symétrie des formes bi-linéaires m et a , l'opérateur A_h est auto-adjoint, ce qui permet de lui appliquer le théorème spectral. On note $Sp(A_h)$ son spectre contenant un nombre fini de valeurs propres positives. Il existe une famille $(w_h^\lambda)_{\lambda \in Sp(A_h)}$ d'éléments de V_h et qui forme une base orthonormée de V_h telle que

$$\forall v_h \in V_h, \quad (A_h w_h^\lambda, v_h)_M = \lambda (w_h^\lambda, v_h)_M \quad \text{et} \quad \|w_h^\lambda\|_M = 1 \quad (1.3.59)$$

Théorème 1.3.7 (Stabilité des schémas 2-IEQ et 2-SAV)

Si la condition CFL du théorème 1.3.6 est satisfaite, les schémas 2-IEQ 1.3.1 et 2-SAV 1.3.2 sont stables au sens où

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\mathcal{E}_h^{n+1/2}} \leq \sqrt{\mathcal{E}_h^{1/2}} + \gamma\sqrt{2}\Delta t \sum_{j=1}^n \|f_h^j\|_M \end{array} \right. \quad (1.3.64a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\delta\mu u_h^n\|_M \leq 2\gamma\sqrt{2\mathcal{E}_h^{1/2}} + 4\gamma^2\Delta t \sum_{j=1}^n \|f_h^j\|_M \end{array} \right. \quad (1.3.64b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|u_h^{n+1}\|_M \leq \sqrt{2} \|u_h^0\|_H + 2\gamma t^n \sqrt{2\mathcal{E}_h^{1/2}} + 4\gamma^2\Delta t^2 \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^i \|f_h^j\|_M \end{array} \right. \quad (1.3.64c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|z_{h,i}^{n+1/2}\|_Z \leq \sqrt{2\mathcal{E}_h^{1/2}} + 2\gamma\Delta t \sum_{j=1}^n \|f_h^j\|_M \quad \text{pour le schéma 2-IEQ} \end{array} \right. \quad (1.3.64d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |z_{h,i}^{n+1/2}| \leq \sqrt{2\mathcal{E}_h^{1/2}} + 2\gamma\Delta t \sum_{j=1}^n \|f_h^j\|_M \quad \text{pour le schéma 2-SAV} \end{array} \right. \quad (1.3.64e)$$

où $\gamma = C_P^{-1/2} + \frac{1}{2}C_K^{-1/2}$.

Démonstration. La preuve qui suit est donnée dans [Chabassier et Imperiale, 2017] pour différents schémas linéaires. Nous la généralisons ici aux schémas non-linéaire 2-IEQ et 2-SAV.

Commençons par noter que l'équation (1.3.61) implique que la solution u_h vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\Pi_K \delta u_h^{n+1/2}\|_M^2 \leq C_K^{-1} (\mathcal{P}_K (\Delta t^2 A_h) \delta u_h^{n+1/2}, \delta u_h^{n+1/2})_M \leq 2C_K^{-1} \mathcal{E}_h^{n+1/2} \end{array} \right. \quad (1.3.65a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\Pi_P \mu u_h^{n+1/2}\|_M^2 \leq C_P^{-1} (\Delta t^2 A_h \mathcal{P}_P (\Delta t^2 A_h) \mu u_h^{n+1/2}, \mu u_h^{n+1/2})_M \leq 2C_P^{-1} \Delta t^2 \mathcal{E}_h^{n+1/2} \end{array} \right. \quad (1.3.65b)$$

On cherche ensuite à estimer la norme $\|\delta\mu u_h^n\|_H$:

$$\|\delta\mu u_h^n\|_M \leq \|\Pi_K \delta\mu u_h^n\|_M + \|\Pi_P \delta\mu u_h^n\|_M \quad (1.3.66)$$

$$\leq \mu \|\Pi_K \delta u_h^{n+1/2}\|_M + \frac{2}{\Delta t} \mu \|\Pi_P \mu u_h^{n+1/2}\|_M \quad (1.3.67)$$

$$\leq \mu \left[C_K^{-1/2} \sqrt{2\mathcal{E}_h^{n+1/2}} \right] + \frac{2}{\Delta t} \mu \left[\Delta t C_P^{-1/2} \sqrt{2\mathcal{E}_h^{n+1/2}} \right] \quad (1.3.68)$$

$$\leq \gamma\sqrt{2} \left[\sqrt{\mathcal{E}_h^{n+1/2}} + \sqrt{\mathcal{E}_h^{n-1/2}} \right] \quad (1.3.69)$$

et on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à l'équation (1.3.34a) pour IEQ et (1.3.52a) pour SAV :

$$\frac{1}{\Delta t} (\mathcal{E}_h^{n+1/2} - \mathcal{E}_h^{n-1/2}) \leq \|f_h^n\|_M \|\delta\mu u_h^n\|_M \quad (1.3.70)$$

$$\leq \gamma\sqrt{2} \|f_h^n\|_M \left[\sqrt{\mathcal{E}_h^{n+1/2}} + \sqrt{\mathcal{E}_h^{n-1/2}} \right] \quad (1.3.71)$$

On peut alors simplifier par $\sqrt{\mathcal{E}_h^{n+1/2}} + \sqrt{\mathcal{E}_h^{n-1/2}}$ puis sommer de 1 à n sur les indices de temps. Cela permet d'aboutir au résultat (1.3.64a) après télescopage de la somme. Le résultat (1.3.64b) s'obtient alors à partir de (1.3.69).

Pour le second résultat portant sur la norme $\|u_h^{n+1}\|_M$, on écrit :

$$\|\Pi_K u_h^{n+1}\|_M \leq \|\Pi_K u_h^n\|_M + \Delta t \|\Pi_K \delta u_h^{n+1/2}\|_M \quad (1.3.72)$$

$$\leq \|\Pi_K u_h^n\|_M + \Delta t C_K^{-1/2} \sqrt{2\mathcal{E}_h^{n+1/2}} \quad (1.3.73)$$

et

$$\|\Pi_P u_h^{n+1}\|_M \leq \|\Pi_P u_h^n\|_M + 2 \|\Pi_P \mu u_h^{n+1/2}\|_M \quad (1.3.74)$$

$$\leq \|\Pi_P u_h^n\|_M + 2\Delta t C_K^{-1/2} \sqrt{2\mathcal{E}_h^{n+1/2}} \quad (1.3.75)$$

ce qui implique après sommation télescopique que

$$\|u_h^{n+1}\|_M \leq \|\Pi_K u_h^{n+1}\|_M + \|\Pi_P u_h^{n+1}\|_M \quad (1.3.76)$$

$$\leq \sqrt{2} \|u_h^0\|_M + 2\gamma \sqrt{2\Delta t} \sum_{i=0}^n \sqrt{\mathcal{E}_h^{i+1/2}} \quad (1.3.77)$$

et il suffit alors d'utiliser (1.3.64a) pour obtenir le résultat (1.3.64c).

L'estimation sur les variables auxiliaires s'obtient directement à partir des énergies (1.3.34b) et (1.3.52b) :

$$\begin{cases} \|z_{h,i}^{n+1/2}\|_Z^2 \leq 2\mathcal{E}_h^{n+1/2} & \text{pour la méthode IEQ} \\ |z_{h,i}^{n+1/2}|^2 \leq 2\mathcal{E}_h^{n+1/2} & \text{pour la méthode SAV} \end{cases} \quad (1.3.78a)$$

$$\quad (1.3.78b)$$

et le résultat final s'obtient en appliquant (1.3.64a). \square

1.3.5 Hypothèses de régularité discrète

Soit $(u_h, z_{h,1}, z_{h,2})$ la solution du problème semi-discret IEQ ou SAV indifféremment, et soit $(\{u_h^n\}, \{z_{h,1}^{n+1/2}\}, \{z_{h,2}^{n+1/2}\})$ la solution discrète du schéma associé.

Hypothèse 1.3.9 (Régularité de la solution semi-discrète)

On suppose qu'il existe des constantes $C_{p,q} \in \mathbb{R}_+^*$ telles que pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$ on ait

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_{t \in [0, T]} \|A_h^{p/2} \partial_t^q u_h\|_H \leq C_{p,q} \end{array} \right. \quad (1.3.79a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_{t \in [0, T]} \|\partial_t^\ell z_{h,i}\|_Z \leq C_{zi,\ell} \end{array} \right. \quad \text{pour la méthode IEQ et } i \in \{1, 2\} \quad (1.3.79b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_{t \in [0, T]} |\partial_t^\ell z_{h,i}| \leq C_{zi,\ell} \end{array} \right. \quad \text{pour la méthode SAV et } i \in \{1, 2\} \quad (1.3.79c)$$

En particulier, on suppose (1.3.79a) vraie pour $(p, q) \in \{(0, 0), (0, 3), (0, 4), (1, 0), (1, 3), (2, 2)\}$ et (1.3.79b) et (1.3.79c) vraies pour $\ell \in \{2, 3\}$.

Hypothèse 1.3.10 (Caractère Lipschitzien local des fonctions non-linéaires)

On suppose qu'il existe deux ensembles $\mathcal{I}_1 \subset \mathbb{R}^p$ et $\mathcal{I}_2 \subset (\mathbb{R}^d)^p$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (a, b) \in \mathcal{I}_1^2, \quad |F_1(a) - F_1(b)| \leq C_{f1} \|a - b\|_2 \\ \forall (a, b) \in \mathcal{I}_1^2, \quad \|\nabla F_1(a) - \nabla F_1(b)\|_2 \leq C_{df1} \|a - b\|_2 \end{array} \right. \quad (1.3.80a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (a, b) \in \mathcal{I}_2^2, \quad |F_2(a) - F_2(b)| \leq C_{f2} \|a - b\|_F \\ \forall (a, b) \in \mathcal{I}_2^2, \quad \|\nabla F_2(a) - \nabla F_2(b)\|_F \leq C_{df2} \|a - b\|_F \end{array} \right. \quad (1.3.80b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (a, b) \in \mathcal{I}_2^2, \quad |F_2(a) - F_2(b)| \leq C_{f2} \|a - b\|_F \\ \forall (a, b) \in \mathcal{I}_2^2, \quad \|\nabla F_2(a) - \nabla F_2(b)\|_F \leq C_{df2} \|a - b\|_F \end{array} \right. \quad (1.3.80c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (a, b) \in \mathcal{I}_2^2, \quad |F_2(a) - F_2(b)| \leq C_{f2} \|a - b\|_F \\ \forall (a, b) \in \mathcal{I}_2^2, \quad \|\nabla F_2(a) - \nabla F_2(b)\|_F \leq C_{df2} \|a - b\|_F \end{array} \right. \quad (1.3.80d)$$

Dans la suite, on suppose que la condition CFL 1.3.6 est vérifiée, de façon à ce que les schémas 1.3.1 et 1.3.2 soient stables au sens du théorème 1.3.7. On définit alors

$$\mathcal{J}_{h,1} = \bigcup_n \text{Im}(u_h(\cdot, t^n)) \quad \text{et} \quad \mathcal{J}_{h,2} = \bigcup_n \text{Im}(\nabla u_h(\cdot, t^n)) \quad (1.3.81)$$

et

$$\mathcal{I}_{h,1} = \mathcal{J}_{h,1} \cup \bigcup_n \text{Im}(u_h^n) \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_{h,2} = \mathcal{J}_{h,2} \cup \bigcup_n \text{Im}(\nabla u_h^n) \quad (1.3.82)$$

où $\text{Im}(u)$ désigne l'ensemble des valeurs atteintes par le champ u .

Hypothèse 1.3.11

On suppose que $\mathcal{I}_{h,1} \subset \mathcal{I}_1$ et que $\mathcal{I}_{h,2} \subset \mathcal{I}_2$. Ceci est raisonnable si les schémas sont stables et si le terme source et les conditions initiales sont d'amplitudes limitées.

On introduit également deux constantes $\beta_{h,1} \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta_{h,2} \in \mathbb{R}_+^*$ telles que pour toute itération n du schéma 2-IEQ on ait pour tout $x \in \Omega$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{h,1} > -2F_1(u_h^n(x)) \quad \text{et} \quad \beta_{h,1} > -2F_1(u_h(x, t^n)) \\ \beta_{h,2} > -2F_2(\nabla u_h(x, t^n)) \quad \text{et} \quad \beta_{h,2} > -2F_2(\nabla u_h^n(x)) \end{array} \right. \quad (1.3.83a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{h,1} > -2F_1(u_h^n(x)) \quad \text{et} \quad \beta_{h,1} > -2F_1(u_h(x, t^n)) \\ \beta_{h,2} > -2F_2(\nabla u_h(x, t^n)) \quad \text{et} \quad \beta_{h,2} > -2F_2(\nabla u_h^n(x)) \end{array} \right. \quad (1.3.83b)$$

Théorème 1.3.8 (Caractère Lipschitzien local des formes \bar{G} pour la méthode IEQ)

Pour tout $u_h^* \in V_h$ et tout $z_h^* \in Z_h$ on a

$$\left| \bar{G}_1(u_h(t^n), u_h^*, z_h^*) - \bar{G}_1(u_h^n, u_h^*, z_h^*) \right| \leq C_{g1} \|u_h(t^n) - u_h^n\|_M \|u_h^*\|_M \|z_h^*\|_Z \quad (1.3.84a)$$

$$\left| \bar{G}_2(u_h(t^n), u_h^*, z_h^*) - \bar{G}_2(u_h^n, u_h^*, z_h^*) \right| \leq C_{g2} \|u_h(t^n) - u_h^n\|_V \|u_h^*\|_V \|z_h^*\|_Z \quad (1.3.84b)$$

où les constantes C_{g1} et C_{g2} sont définies par

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{g1} = \frac{c_m^2}{c_1 - \beta_{h,1}} \left[C_{df1} \sup_{p \in \mathcal{I}_{h,1}} \sqrt{2F_1(p) + c_1} + \frac{C_{f1}}{\sqrt{c_1 - \beta_{h,1}}} \sup_{p \in \mathcal{I}_{h,1}} \|\nabla F_1(p)\|_2 \right] \\ C_{g2} = \frac{c_a^2}{c_2 - \beta_{h,2}} \left[C_{df2} \sup_{p \in \mathcal{I}_{h,2}} \sqrt{2F_2(p) + c_2} + \frac{C_{f2}}{\sqrt{c_2 - \beta_{h,2}}} \sup_{p \in \mathcal{I}_{h,2}} \|\nabla F_2(p)\|_F \right] \end{array} \right. \quad (1.3.85a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{g1} = \frac{c_m^2}{c_1 - \beta_{h,1}} \left[C_{df1} \sup_{p \in \mathcal{I}_{h,1}} \sqrt{2F_1(p) + c_1} + \frac{C_{f1}}{\sqrt{c_1 - \beta_{h,1}}} \sup_{p \in \mathcal{I}_{h,1}} \|\nabla F_1(p)\|_2 \right] \\ C_{g2} = \frac{c_a^2}{c_2 - \beta_{h,2}} \left[C_{df2} \sup_{p \in \mathcal{I}_{h,2}} \sqrt{2F_2(p) + c_2} + \frac{C_{f2}}{\sqrt{c_2 - \beta_{h,2}}} \sup_{p \in \mathcal{I}_{h,2}} \|\nabla F_2(p)\|_F \right] \end{array} \right. \quad (1.3.85b)$$

Démonstration. Les formes \bar{G}_i héritent des propriétés Lipschitziennes de fonctions F_i définies par l'hypothèse 1.3.10.

$$\left| \bar{G}_1(u_h(t^n), u_h^*, z_h^*) - \bar{G}_1(u_h^n, u_h^*, z_h^*) \right| = \left| \int_{\Omega} z_h^* (G_1(u_h(t^n)) - G_1(u_h^n)) \cdot u_h^* \right| \quad (1.3.86)$$

$$\text{hypothèse 1.3.1} \quad \hookrightarrow \leq \|G_1(u_h(t^n)) - G_1(u_h^n)\|_H \|u_h^*\|_H \|z_h^*\|_Z \quad (1.3.87)$$

$$\leq c_m \|G_1(u_h(t^n)) - G_1(u_h^n)\|_H \|u_h^*\|_M \|z_h^*\|_Z \quad (1.3.88)$$

Grâce à la bonne régularité de la fonction racine carrée loin de 0 et les définitions (1.3.83), on peut prouver (voir [Yang et Zhang, 2020]) que pour tout $(a, b) \in \mathcal{I}_{h,1}^2 \subset \mathcal{I}_1^2$:

$$\left| \sqrt{2F_1(a) + c_1} - \sqrt{2F_1(b) + c_1} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{c_1 - \beta_{h,1}}} |F_1(a) - F_1(b)| \quad (1.3.89)$$

$$\leq \frac{C_{f1}}{\sqrt{c_1 - \beta_{h,1}}} \|a - b\|_2 \quad (1.3.90)$$

Pour tout $(a, b) \in \mathcal{I}_{h,1}^2 \subset \mathcal{I}_1^2$ on peut également écrire que

$$\|g_1(a) - g_1(b)\|_2 = \left\| \frac{\nabla F_1(a)}{\sqrt{2F_1(a) + c_1}} - \frac{\nabla F_1(b)}{\sqrt{2F_1(b) + c_1}} \right\|_2 \quad (1.3.91)$$

$$= \left\| \frac{\sqrt{2F_1(b) + c_1} \nabla F_1(a) - \sqrt{2F_1(a) + c_1} \nabla F_1(b)}{\sqrt{2F_1(a) + c_1} \sqrt{2F_1(b) + c_1}} \right\|_2 \quad (1.3.92)$$

$$\leq \frac{1}{c_1 - \beta_{h,1}} \left\| \sqrt{2F_1(b) + c_1} \nabla F_1(a) - \sqrt{2F_1(a) + c_1} \nabla F_1(b) \right\|_2 \quad (1.3.93)$$

$$\leq \frac{1}{c_1 - \beta_{h,1}} \left\| \sqrt{2F_1(b) + c_1} (\nabla F_1(a) - \nabla F_1(b)) \right\|_2 \quad (1.3.94)$$

$$+ \left(\sqrt{2F_1(b) + c_1} - \sqrt{2F_1(a) + c_1} \right) \left\| \nabla F_1(b) \right\|_2$$

$$\leq \frac{1}{c_1 - \beta_{h,1}} \left[C_{df1} \sqrt{2F_1(b) + c_1} \|a - b\|_2 + \frac{C_{f1}}{\sqrt{c_1 - \beta_1}} \|a - b\|_2 \|\nabla F_1(b)\|_2 \right] \quad (1.3.95)$$

$$\leq \frac{1}{c_1 - \beta_{h,1}} \left[C_{df1} \sqrt{2F_1(b) + c_1} + \frac{C_{f1}}{\sqrt{c_1 - \beta_{h,1}}} \|\nabla F_1(b)\|_2 \right] \|a - b\|_2 \quad (1.3.96)$$

$$\leq \frac{1}{c_1 - \beta_{h,1}} \underbrace{\left[C_{df1} \sup_{p \in \mathcal{I}_{h,1}} \sqrt{2F_1(p) + c_1} + \frac{C_{f1}}{\sqrt{c_1 - \beta_{h,1}}} \sup_{p \in \mathcal{I}_{h,1}} \|\nabla F_1(p)\|_2 \right]}_{C_{g1}/c_m^2} \|a - b\|_2 \quad (1.3.97)$$

Donc finalement

$$\|G_1(u_h(t^n)) - G_1(u_h^n)\|_H^2 = \int_{\Omega} \|g_1(u_h(x, t^n)) - g_1(u_h^n(x))\|_2^2 dx \quad (1.3.98)$$

$$\leq \frac{1}{c_m^4} C_{g1}^2 \int_{\Omega} \|u_h(x, t^n) - u_h^n(x)\|_2^2 dx \quad (1.3.99)$$

$$\leq \frac{1}{c_m^4} C_{g1}^2 \|u_h(t^n) - u_h^n\|_H^2 \quad (1.3.100)$$

$$\text{hypothèse 1.3.1} \quad \hookrightarrow \leq \frac{1}{c_m^2} C_{g1}^2 \|u_h(t^n) - u_h^n\|_M^2 \quad (1.3.101)$$

ce qui donne le résultat attendu pour la forme \bar{G}_1 . Pour la forme \bar{G}_2 , on écrit

$$\left| \bar{G}_2(u_h(t^n), u_h^*, z_h^*) - \bar{G}_2(u_h^n, u_h^*, z_h^*) \right| = \left| \int_{\Omega} z_h^* (G_2(u_h(t^n)) - G_2(u_h^n)) : \nabla u_h^* \right| \quad (1.3.102)$$

$$\begin{aligned} \text{hypothèse 1.3.1} \quad \hookrightarrow & \leq \|G_2(u_h(t^n)) - G_2(u_h^n)\|_H \|\nabla u_h^*\|_H \|z_h^*\|_{\mathcal{Z}} \quad (1.3.103) \\ & \leq c_a \|G_2(u_h(t^n)) - G_2(u_h^n)\|_H \|u_h^*\|_V \|z_h^*\|_{\mathcal{Z}} \quad (1.3.104) \end{aligned}$$

et

$$\|G_2(u_h(t^n)) - G_2(u_h^n)\|_H^2 = \int_{\Omega} \|g_2(u_h(x, t^n)) - g_2(u_h^n(x))\|_F^2 dx \quad (1.3.105)$$

$$\leq \frac{1}{c_a^4} C_{g2}^2 \int_{\Omega} \|\nabla u_h(x, t^n) - \nabla u_h^n(x)\|_F^2 dx \quad (1.3.106)$$

$$\leq \frac{1}{c_a^4} C_{g2}^2 \|\nabla u_h(t^n) - \nabla u_h^n\|_H^2 \quad (1.3.107)$$

$$\begin{aligned} \text{hypothèse 1.3.1} \quad \hookrightarrow & \leq \frac{1}{c_a^2} C_{g2}^2 \|u_h(t^n) - u_h^n\|_V^2 \quad (1.3.108) \end{aligned}$$

□

Pour le schéma 2-SAV, la définition des constantes $\beta_{h,1}$ et $\beta_{h,2}$ est modifiée. Pour toute itération n on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{h,1} > -2 \int_{\Omega} F_1(u_h^n(x)) dx \quad \text{et} \quad \beta_{h,1} > -2 \int_{\Omega} F_1(u_h(x, t^n)) dx \end{array} \right. \quad (1.3.109a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{h,2} > -2 \int_{\Omega} F_2(\nabla u_h(x, t^n)) dx \quad \text{et} \quad \beta_{h,2} > -2 \int_{\Omega} F_2(\nabla u_h^n(x)) dx \end{array} \right. \quad (1.3.109b)$$

Théorème 1.3.9 (Caractère Lipschitzien local des formes \bar{G} pour la méthode SAV)

Pour tout $u_h^* \in V_h$ on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \bar{G}_1(u_h(t^n), u_h^*) - \bar{G}_1(u_h^n, u_h^*) \right| \leq C_{g1} \|u_h(t^n) - u_h^n\|_M \|u_h^*\|_M \end{array} \right. \quad (1.3.110a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \bar{G}_2(u_h(t^n), u_h^*) - \bar{G}_2(u_h^n, u_h^*) \right| \leq C_{g2} \|u_h(t^n) - u_h^n\|_V \|u_h^*\|_V \end{array} \right. \quad (1.3.110b)$$

où les constantes C_{g1} et C_{g2} sont définies par

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{g1} = \frac{c_m^2 \sqrt{|\Omega|}}{c_1 - \beta_{h,1}} \left[C_{df1} \sup_n \sqrt{2 \int_{\Omega} F_1(u_h(x, t^n)) dx} + c_1 + \frac{C_{f1}}{\sqrt{c_1 - \beta_{h,1}}} \sup_n \|\nabla F_1(u_h(t^n))\|_H \right] \\ C_{g2} = \frac{c_a^2 \sqrt{|\Omega|}}{c_2 - \beta_{h,2}} \left[C_{df2} \sup_n \sqrt{2 \int_{\Omega} F_2(\nabla u_h(x, t^n)) dx} + c_2 + \frac{C_{f2}}{\sqrt{c_2 - \beta_{h,2}}} \sup_n \|\nabla F_2(\nabla u_h(t^n))\|_H \right] \end{array} \right.$$

Démonstration. Les formes \bar{G}_i héritent des propriétés Lipschitziennes de fonctions F_i définies par l'hypothèse 1.3.10.

$$\left| \bar{G}_1(u_h(t^n), u_h^*) - \bar{G}_1(u_h^n, u_h^*) \right| = \left| \int_{\Omega} (G_1(u_h(t^n)) - G_1(u_h^n)) \cdot u_h^* \right| \quad (1.3.112)$$

$$\text{hypothèse 1.3.1} \quad \hookrightarrow \leq \|G_1(u_h(t^n)) - G_1(u_h^n)\|_H \|u_h^*\|_H \quad (1.3.113)$$

$$\leq c_m \|G_1(u_h(t^n)) - G_1(u_h^n)\|_H \|u_h^*\|_M \quad (1.3.114)$$

Grâce à la bonne régularité de la fonction racine carrée et les définitions (1.3.109), on peut prouver que la quantité $\mathcal{I}F_1(u) = \sqrt{2} \int_{\Omega} F_1(u(x, t)) dx + c_1$ vérifie

$$|\mathcal{I}F_1(u_h(t^n)) - \mathcal{I}F_1(u_h^n)| \leq \frac{1}{\sqrt{c_1 - \beta_{h,1}}} \left| \int_{\Omega} F_1(u_h(x, t^n)) dx - \int_{\Omega} F_1(u_h^n(x)) dx \right| \quad (1.3.115)$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{\sqrt{c_1 - \beta_{h,1}}} \int_{\Omega} |F_1(u_h(x, t^n)) - F_1(u_h^n(x))| dx \quad (1.3.116) \\ \text{hypothèse (1.3.80a)} \quad \hookrightarrow & \end{aligned}$$

$$\leq \frac{C_{f1}}{\sqrt{c_1 - \beta_{h,1}}} \int_{\Omega} \|u_h(x, t^n) - u_h^n(x)\|_2 dx \quad (1.3.117)$$

$$\begin{aligned} \text{inégalité de Hölder} \quad \hookrightarrow & \\ &\leq C_{f1} \sqrt{\frac{|\Omega|}{c_1 - \beta_{h,1}}} \|u_h(t^n) - u_h^n\|_H \quad (1.3.118) \end{aligned}$$

où $|\Omega|$ désigne la mesure de l'espace Ω . On peut ensuite écrire que

$$\|g_1(u_h(x, t^n)) - g_1(u_h^n(x))\|_2 = \left\| \frac{\nabla F_1(u_h(x, t^n))}{\mathcal{I}F_1(u_h(t^n))} - \frac{\nabla F_1(u_h^n(x))}{\mathcal{I}F_1(u_h^n)} \right\|_2 \quad (1.3.119)$$

$$= \left\| \frac{\mathcal{I}F_1(u_h^n) \nabla F_1(u_h(x, t^n)) - \mathcal{I}F_1(u_h(t^n)) \nabla F_1(u_h^n(x))}{\mathcal{I}F_1(u_h^n) \mathcal{I}F_1(u_h(t^n))} \right\|_2 \quad (1.3.120)$$

$$\begin{aligned} (1.3.109) \quad \hookrightarrow & \\ &\leq \frac{1}{c_1 - \beta_{h,1}} \left\| \mathcal{I}F_1(u_h^n) \nabla F_1(u_h(x, t^n)) \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{I}F_1(u_h(t^n)) \nabla F_1(u_h^n(x)) \right\|_2 \quad (1.3.121) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{c_1 - \beta_{h,1}} \left\| \mathcal{I}F_1(u_h(t^n)) (\nabla F_1(u_h(x, t^n)) - \nabla F_1(u_h^n(x))) \right. \quad (1.3.122)$$

$$\left. + (\mathcal{I}F_1(u_h(t^n)) - \mathcal{I}F_1(u_h^n)) \nabla F_1(u_h(x, t^n)) \right\|_2$$

$$\begin{aligned} (1.3.80b) \quad \hookrightarrow & \\ (1.3.118) \quad \hookrightarrow & \\ &\leq \frac{1}{c_1 - \beta_{h,1}} \left[|\mathcal{I}F_1(u_h(t^n))| C_{df1} \|u_h(x, t^n) - u_h^n(x)\|_2 \right. \quad (1.3.123) \\ &\quad \left. + C_{f1} \sqrt{\frac{|\Omega|}{c_1 - \beta_{h,1}}} \|u_h(t^n) - u_h^n\|_H \|\nabla F_1(u_h(x, t^n))\|_2 \right] \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\|u_h(t^n) - u_h^n\|_H}{c_1 - \beta_{h,1}} \left[C_{df1} |\mathcal{I}F_1(u_h(t^n))| + C_{f1} \sqrt{\frac{|\Omega|}{c_1 - \beta_{h,1}}} \|\nabla F_1(u_h(x, t^n))\|_2 \right] \quad (1.3.124)$$

Donc pour finir,

$$\|G_1(u_h(t^n)) - G_1(u_h^n)\|_H^2 = \int_{\Omega} \|g_1(u_h(x, t^n)) - g_1(u_h^n(x))\|_2^2 dx \quad (1.3.125)$$

$$\leq \frac{\|u_h(t^n) - u_h^n\|_H^2}{(c_1 - \beta_{h,1})^2} \left[C_{df1}^2 |\mathcal{I}F_1(u_h(t^n))|^2 |\Omega| \right] \quad (1.3.126)$$

$$+ C_{f1}^2 \frac{|\Omega|}{c_1 - \beta_{h,1}} \|\nabla F_1(u_h(t^n))\|_H^2 \quad (1.3.127)$$

$$+ C_{df1} |\mathcal{I}F_1(u_h(t^n))| C_{f1} \sqrt{\frac{|\Omega|}{c_1 - \beta_{h,1}}} \int_{\Omega} \|\nabla F_1(u_h(x, t^n))\|_2 \quad (1.3.128)$$

inégalité de Hölder \hookrightarrow

$$\leq \frac{\|u_h(t^n) - u_h^n\|_H^2}{(c_1 - \beta_{h,1})^2} \left[C_{df1}^2 |\mathcal{I}F_1(u_h(t^n))|^2 |\Omega| \right] \quad (1.3.129)$$

$$+ C_{f1}^2 \frac{|\Omega|}{c_1 - \beta_{h,1}} \|\nabla F_1(u_h(t^n))\|_H^2 \quad (1.3.130)$$

$$+ C_{df1} |\mathcal{I}F_1(u_h(t^n))| C_{f1} \frac{|\Omega|}{\sqrt{c_1 - \beta_{h,1}}} \|\nabla F_1(u_h(t^n))\|_H \quad (1.3.131)$$

$$\leq \frac{\|u_h(t^n) - u_h^n\|_H^2 |\Omega|}{(c_1 - \beta_{h,1})^2} \left[C_{df1} |\mathcal{I}F_1(u_h(t^n))| + \frac{C_{f1}}{\sqrt{c_1 - \beta_{h,1}}} \|\nabla F_1(u_h(t^n))\|_H \right]^2 \quad (1.3.132)$$

$$\leq \frac{1}{c_m^2} C_{g1}^2 \|u_h(t^n) - u_h^n\|_M^2 \quad (1.3.133)$$

où

$$C_{g1} = \frac{c_m^2 \sqrt{|\Omega|}}{c_1 - \beta_{h,1}} \left[C_{df1} \sup_n |\mathcal{I}F_1(u_h(t^n))| + \frac{C_{f1}}{\sqrt{c_1 - \beta_{h,1}}} \sup_n \|\nabla F_1(u_h(t^n))\|_H \right] \quad (1.3.134)$$

Pour la forme \bar{G}_2 , on écrit

$$\left| \bar{G}_2(u_h(t^n), u_h^*) - \bar{G}_2(u_h^n, u_h^*) \right| = \left| \int_{\Omega} (G_2(u_h(t^n)) - G_2(u_h^n)) : \nabla u_h^* \right| \quad (1.3.135)$$

$$\leq \|G_2(u_h(t^n)) - G_2(u_h^n)\|_H \|\nabla u_h^*\|_H \quad (1.3.136)$$

$$\leq c_a \|G_2(u_h(t^n)) - G_2(u_h^n)\|_H \|u_h^*\|_V \quad (1.3.137)$$

et

$$\|G_2(u_h(t^n)) - G_2(u_h^n)\|_H^2 = \int_{\Omega} \|g_2(u_h(x, t^n)) - g_2(u_h^n(x))\|_F^2 dx \quad (1.3.138)$$

$$\leq \frac{1}{c_a^4} C_{g2}^2 \int_{\Omega} \|\nabla u_h(x, t^n) - \nabla u_h^n(x)\|_F^2 dx \quad (1.3.139)$$

$$\leq \frac{1}{c_a^4} C_{g2}^2 \|\nabla u_h(t^n) - \nabla u_h^n\|_H^2 \quad (1.3.140)$$

hypothèse 1.3.1 \hookrightarrow

$$\leq \frac{1}{c_a^2} C_{g2}^2 \|u_h(t^n) - u_h^n\|_V^2 \quad (1.3.141)$$

Les étapes intermédiaires s'adaptent facilement. \square

1.3.6 Étude de consistance

Soient $\epsilon_{h,u}^n : V \rightarrow \mathbb{R}$, $\epsilon_{h,z1}^n : Z \rightarrow \mathbb{R}$ et $\epsilon_{h,z2}^n : Z \rightarrow \mathbb{R}$ les erreurs de troncature du schéma 2-IEQ. Pour le schéma 2-SAV, $\epsilon_{h,z1}^n$ et $\epsilon_{h,z2}^n$ sont des réels.

Pour tout $(u_h^*, z_{h,1}^*, z_{h,2}^*) \in V_h \times Z_h^2$, ces erreurs de troncature vérifient

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{h,u}^n(u_h^*) = m \left(\delta^2 u_h(t^n), u_h^* \right) + a(\{u_h\}_\theta(t^n), u_h^*) \\ \quad + \bar{G}_1(u_h(t^n), u_h^*, \mu z_{h,1}(t^n)) + \bar{G}_2(u_h(t^n), u_h^*, \mu z_{h,2}(t^n)) - f_h^n(u_h^*) \end{array} \right. \quad (1.3.142a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{h,z1}^n(z_{h,1}^*) = \ell \left(\delta z_{h,1}(t^n), z_{h,1}^* \right) - \bar{G}_1(u_h(t^n), \delta \mu u_h(t^n), z_{h,1}^*) \end{array} \right. \quad (1.3.142b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{h,z2}^n(z_{h,2}^*) = \ell \left(\delta z_{h,2}(t^n), z_{h,2}^* \right) - \bar{G}_2(u_h(t^n), \delta \mu u_h(t^n), z_{h,2}^*) \end{array} \right. \quad (1.3.142c)$$

Théorème 1.3.10 (Consistance des schémas 2-IEQ et 2-SAV)

Le schéma 2-IEQ vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall u_h^* \in V_h, \quad |\epsilon_{h,u}^n(u_h^*)| \leq \begin{cases} C_{\epsilon,u} \Delta t^2 \|u_h^*\|_M & \text{si } F_2 = 0 \\ C_{\epsilon,u} \Delta t^2 \|u_h^*\|_V & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right. \quad (1.3.143a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall z_{h,1}^* \in Z_h, \quad |\epsilon_{h,z1}^n(z_{h,1}^*)| \leq C_{\epsilon,z1} \Delta t^2 \|z_{h,1}^*\|_Z \end{array} \right. \quad (1.3.143b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall z_{h,2}^* \in Z_h, \quad |\epsilon_{h,z2}^n(z_{h,2}^*)| \leq C_{\epsilon,z2} \Delta t^2 \|z_{h,2}^*\|_Z \end{array} \right. \quad (1.3.143c)$$

Le schéma 2-SAV vérifie :

$$\forall u_h^* \in V_h, \quad \left\{ \begin{array}{l} |\epsilon_{h,u}^n(u_h^*)| \leq \begin{cases} C_{\epsilon,u} \Delta t^2 \|u_h^*\|_M & \text{si } F_2 = 0 \\ C_{\epsilon,u} \Delta t^2 \|u_h^*\|_V & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right. \quad (1.3.144a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\epsilon_{h,z1}^n| \leq C_{\epsilon,z1} \Delta t^2 \end{array} \right. \quad (1.3.144b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\epsilon_{h,z2}^n| \leq C_{\epsilon,z2} \Delta t^2 \end{array} \right. \quad (1.3.144c)$$

Démonstration. La formule de Taylor-Lagrange assure qu'il existe $(\tau_i)_{1 \leq i \leq 8} \in]t^{n-1}, t^{n+1}[^8$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_3 = t^n \end{array} \right. \quad (1.3.145a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta^2 u_h(t^n) = u_h^{(2)}(t^n) + \frac{\Delta t^2}{12} u_h^{(4)}(\tau_1) \end{array} \right. \quad (1.3.145b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{u_h\}_\theta(t^n) = u_h(t^n) + \theta \Delta t^2 u_h^{(2)}(\tau_2) \end{array} \right. \quad (1.3.145c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \mu u_h(t^n) = u_h^{(1)}(t^n) + \frac{\Delta t^2}{6} u_h^{(3)}(\tau_8) \end{array} \right. \quad (1.3.145d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu z_{h,1}(t^n) = z_{h,1}(t^n) + \frac{\Delta t^2}{8} z_{h,1}^{(2)}(\tau_4) \end{array} \right. \quad (1.3.145e)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu z_{h,2}(t^n) = z_{h,2}(t^n) + \frac{\Delta t^2}{8} z_{h,2}^{(2)}(\tau_5) \end{array} \right. \quad (1.3.145f)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta z_{h,1}(t^n) = z_{h,1}^{(1)}(t^n) + \frac{\Delta t^2}{24} z_{h,1}^{(3)}(\tau_6) \end{array} \right. \quad (1.3.145g)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta z_{h,2}(t^n) = z_{h,2}^{(1)}(t^n) + \frac{\Delta t^2}{24} z_{h,2}^{(3)}(\tau_7) \end{array} \right. \quad (1.3.145h)$$

et alors les erreurs de troncature s'écrivent

$$\left\{ \begin{aligned} \epsilon_{h,u}^n(u_h^*) &= \frac{\Delta t^2}{12} m(u_h^{(4)}(\tau_1), u_h^*) + \theta \Delta t^2 a(u_h^{(2)}(\tau_2), u_h^*) \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{8} \bar{G}_1(u_h(\tau_3), u_h^*, z_{h,1}^{(2)}(\tau_4)) + \frac{\Delta t^2}{8} \bar{G}_2(u_h(\tau_3), u_h^*, z_{h,2}^{(2)}(\tau_5)) \end{aligned} \right. \quad (1.3.146a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \epsilon_{h,z_1}^n(z_{h,1}^*) &= \frac{\Delta t^2}{24} \ell(z_{h,1}^{(3)}(\tau_6), z_{h,1}^*) - \frac{\Delta t^2}{6} \bar{G}_1(u_h(\tau_3), u_h^{(3)}(\tau_8), z_{h,1}^*) \end{aligned} \right. \quad (1.3.146b)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \epsilon_{h,z_2}^n(z_{h,2}^*) &= \frac{\Delta t^2}{24} \ell(z_{h,2}^{(3)}(\tau_7), z_{h,2}^*) - \frac{\Delta t^2}{6} \bar{G}_2(u_h(\tau_3), u_h^{(3)}(\tau_8), z_{h,2}^*) \end{aligned} \right. \quad (1.3.146c)$$

On utilise ensuite la continuité des formes bilinéaires et des formes \bar{G}_i assurée par le théorème 1.3.8 (ou le théorème 1.3.9 pour SAV) :

$$\left\{ \begin{aligned} |\epsilon_{h,u}^n(u_h^*)| &\leq \Delta t^2 \left[\frac{1}{12} \|u_h^{(4)}(\tau_1)\|_M \|u_h^*\|_M + \theta \|A_h u_h^{(2)}(\tau_2)\|_M \|u_h^*\|_M \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_{g1}}{8} \|u_h(\tau_3)\|_M \|u_h^*\|_M \|z_{h,1}^{(2)}(\tau_4)\|_Z \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_{g2}}{8} \|u_h(\tau_3)\|_V \|u_h^*\|_V \|z_{h,2}^{(2)}(\tau_5)\|_Z \right] \end{aligned} \right. \quad (1.3.147a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} |\epsilon_{h,z_1}^n(z_{h,1}^*)| &\leq \Delta t^2 \left[\frac{1}{24} \|z_{h,1}^{(3)}(\tau_6)\|_Z + \frac{C_{g1}}{3} \|u_h(\tau_3)\|_M \|u_h^{(3)}(\tau_8)\|_M \right] \|z_{h,1}^*\|_Z \end{aligned} \right. \quad (1.3.147b)$$

$$\left\{ \begin{aligned} |\epsilon_{h,z_2}^n(z_{h,2}^*)| &\leq \Delta t^2 \left[\frac{1}{24} \|z_{h,2}^{(3)}(\tau_7)\|_Z + \frac{C_{g2}}{3} \|u_h(\tau_3)\|_V \|u_h^{(3)}(\tau_8)\|_V \right] \|z_{h,2}^*\|_Z \end{aligned} \right. \quad (1.3.147c)$$

L'hypothèse 1.3.9 permet de conclure la démonstration avec les constantes

$$\left\{ \begin{aligned} C_{\epsilon,u} &= \frac{1}{12} C_{0,4} + \theta C_{2,2} + \frac{1}{8} C_{g1} C_{0,0} C_{z1,2} + \frac{1}{8} C_{g2} C_{1,0} C_{z2,2} \end{aligned} \right. \quad (1.3.148a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} C_{\epsilon,z_1} &= \frac{1}{24} C_{z1,3} + \frac{1}{6} C_{g1} C_{0,0} C_{0,3} \end{aligned} \right. \quad (1.3.148b)$$

$$\left\{ \begin{aligned} C_{\epsilon,z_2} &= \frac{1}{24} C_{z2,3} + \frac{1}{6} C_{g2} C_{1,0} C_{1,3} \end{aligned} \right. \quad (1.3.148c)$$

□

Remarque 1.3.2

C'est la présence du terme non-linéaire de type 2 qui impose la norme $\|u_h^\|_V$ encadrée en rouge dans l'espace V pour l'équation (1.3.143a). Dans le cas où la seule non-linéarité présente est celle de type 1 ($F_2 = 0$), cette norme n'apparaît pas.*

1.3.7 Étude de convergence pour des non-linéarités de type 1

Dans cette section, nous étudions la convergence des schémas en présence uniquement d'une non-linéarité de type 1. Nous supposons donc que $F_2 = 0$.

A chaque itération, on cherche $(u_h^{n+1}, z_{h,1}^{n+1/2}) \in V_h \times Z_h$ tel que pour tout $(u_h^*, z_{h,1}^*) \in V_h \times Z_h$ on ait

$$\left\{ \begin{aligned} m(\delta^2 u_h^n, u_h^*) + a(\{u_h\}_\theta^n, u_h^*) + \bar{G}_1(u_h^n, u_h^*, \mu z_{h,1}^n) &= f_h^n(u_h^*) \end{aligned} \right. \quad (1.3.149a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \ell(\delta z_{h,1}^n, z_{h,1}^*) &= \bar{G}_1(u_h^n, \delta \mu u_h^n, z_{h,1}^*) \end{aligned} \right. \quad (1.3.149b)$$

Soient $e_u^n = u_h(t^n) - u_h^n$ et $e_{z_1}^{n+1/2} = z_{h,1}(t^{n+1/2}) - z_{h,1}^{n+1/2}$ les erreurs de discrétisation en temps.

Théorème 1.3.11 (Convergence des schémas 2-IEQ et 2-SAV de type 1)

Si la condition CFL 1.3.6 est satisfaite, et pour un choix convenable de conditions initiales, les schémas 2-IEQ et 2-SAV convergent à l'ordre 2

$$\left\{ \begin{aligned} \|e_u^n\|_M &\leq \left(\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\gamma CT^2 e^{\gamma CT^2} \right) \|e_u^0\|_M + 2\gamma T e^{\gamma CT^2} \sqrt{2\mathcal{E}_e^{1/2}} \\ &\quad + 2\gamma (2\gamma C_{\epsilon,u} + C_{\epsilon,z_1}) T^2 \Delta t^2 e^{\gamma CT^2} \end{aligned} \right. \quad (1.3.150a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \|e_{z_1}^{n+1/2}\|_Z &\leq \sqrt{2} CT e^{\gamma CT^2} \|e_u^0\|_M + e^{\gamma CT^2} \sqrt{2\mathcal{E}_e^{1/2}} \\ &\quad + (2\gamma C_{\epsilon,u} + C_{\epsilon,z_1}) T \Delta t^2 e^{CT^2} \end{aligned} \right. \quad \text{pour le schéma 2-IEQ} \quad (1.3.150b)$$

$$\left\{ \begin{aligned} |e_{z_1}^{n+1/2}| &\leq \sqrt{2} CT e^{\gamma CT^2} \|e_u^0\|_M + e^{\gamma CT^2} \sqrt{2\mathcal{E}_e^{1/2}} \\ &\quad + (2\gamma C_{\epsilon,u} + C_{\epsilon,z_1}) T \Delta t^2 e^{CT^2} \end{aligned} \right. \quad \text{pour le schéma 2-SAV} \quad (1.3.150c)$$

où la constante C est définie pour le cas IEQ par

$$C = C_{g1} \left(2\gamma \max_n \|z_{h,1}^{n+1/2}\|_Z + \max_n \|\delta\mu u_h\|_M \right) \quad (1.3.151)$$

et dans le cas SAV par

$$C = C_{g1} \left(2\gamma \max_n |z_{h,1}^{n+1/2}| + \max_n \|\delta\mu u_h\|_M \right) \quad (1.3.152)$$

et $\gamma = C_P^{-1/2} + \frac{1}{2} C_K^{-1/2}$.

La stabilité du schéma, garantie par le théorème 1.3.7, assure que $C < +\infty$.

Démonstration. On commence par soustraire le schéma (1.3.149) aux erreurs de troncature (1.3.142) pour obtenir un schéma vérifié par les erreurs de discrétisation en temps :

$$\left\{ \begin{aligned} m \left(\delta^2 e_u^n, u_h^* \right) + a \left(\{e_u\}_\theta^n, u_h^* \right) \\ \quad + \bar{G}_1 \left(u_h(t^n), u_h^*, \mu z_{h,1}(t^n) \right) - \bar{G}_1 \left(u_h^n, u_h^*, \mu z_{h,1}^n \right) = \epsilon_{h,u}^n(u_h^*) \end{aligned} \right. \quad (1.3.153a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \ell \left(\delta e_{z_1}^n, z_{h,1}^* \right) = \bar{G}_1 \left(u_h(t^n), \delta\mu u_h(t^n), z_{h,1}^* \right) - \bar{G}_1 \left(u_h^n, \delta\mu u_h^n, z_{h,1}^* \right) + \epsilon_{h,z_1}^n(z_{h,1}^*) \end{aligned} \right. \quad (1.3.153b)$$

puis on utilise $u_h^* = \delta\mu e_u^n$ et $z_{h,1}^* = \mu e_{z_1}^n$ pour obtenir un bilan de puissance :

$$\left\{ \begin{aligned} \delta\mathcal{E}_e^n = \epsilon_{h,u}^n(\delta\mu e_u^n) + \epsilon_{h,z_1}^n(\mu z_{h,1}^n) + R_1^n + R_2^n \end{aligned} \right. \quad (1.3.154a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{E}_e^{n+1/2} = \frac{1}{2} \tilde{m} \left(\delta e_u^{n+1/2}, \delta e_u^{n+1/2} \right) + \frac{1}{2} a \left(\mu e_u^{n+1/2}, \mu e_u^{n+1/2} \right) + \frac{1}{2} \ell \left(e_{z_1}^{n+1/2}, e_{z_1}^{n+1/2} \right) \end{aligned} \right. \quad (1.3.154b)$$

$$\left\{ \begin{aligned} R_1^n = \bar{G}_1 \left(u_h(t^n), \delta\mu e_u^n, \mu z_{h,1}^n \right) - \bar{G}_1 \left(u_h^n, \delta\mu e_u^n, \mu z_{h,1}^n \right) \end{aligned} \right. \quad (1.3.154c)$$

$$\left\{ \begin{aligned} R_2^n = -\bar{G}_1 \left(u_h(t^n), \delta\mu u_h^n, \mu e_{z_1}^n \right) + \bar{G}_1 \left(u_h^n, \delta\mu u_h^n, \mu e_{z_1}^n \right) \end{aligned} \right. \quad (1.3.154d)$$

On utilise alors le théorème 1.3.8 pour borner les termes R_1^n et R_2^n :

$$\left\{ \begin{aligned} |R_1^n| &\leq C_{g1} \|e_u^n\|_M \|\delta\mu e_u^n\|_M \|\mu z_{h,1}^n\|_Z \end{aligned} \right. \quad (1.3.155a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} |R_2^n| &\leq C_{g1} \|e_u^n\|_M \|\delta\mu u_h^n\|_M \|\mu e_{z_1}^n\|_Z \end{aligned} \right. \quad (1.3.155b)$$

Il suffit maintenant de majorer les normes $\|e_u^n\|_M$ et $\|\delta\mu e_u^n\|_M$ par l'énergie \mathcal{E}_e . Pour cela, comme pour la preuve de stabilité (voir section 1.3.4 pour les notations), on écrit que l'erreur vérifie

$$\left\{ \begin{aligned} \left\| \Pi_K \delta e_u^{n+1/2} \right\|_M^2 &\leq C_K^{-1} \left(\mathcal{P}_K \left(\Delta t^2 A_h \right) \delta e_u^{n+1/2}, \delta e_u^{n+1/2} \right)_M \leq 2C_K^{-1} \mathcal{E}_e^{n+1/2} \end{aligned} \right. \quad (1.3.156a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left\| \Pi_P \mu e_u^{n+1/2} \right\|_M^2 &\leq C_P^{-1} \left(\Delta t^2 A_h \mathcal{P}_P \left(\Delta t^2 A_h \right) \mu e_u^{n+1/2}, \mu e_u^{n+1/2} \right)_M \leq 2C_P^{-1} \Delta t^2 \mathcal{E}_e^{n+1/2} \end{aligned} \right. \quad (1.3.156b)$$

Et alors

$$\|\delta\mu e_u^n\|_M \leq \|\Pi_K \delta\mu e_u^n\|_M + \|\Pi_P \delta\mu e_u^n\|_M \quad (1.3.157)$$

$$\leq \mu \left\| \Pi_K \delta e_u^{n+1/2} \right\|_M + \frac{2}{\Delta t} \mu \left\| \Pi_P \mu e_u^{n+1/2} \right\|_M \quad (1.3.158)$$

$$\leq \mu \left[C_K^{-1/2} \sqrt{2\mathcal{E}_e^{n+1/2}} \right] + \frac{2}{\Delta t} \mu \left[\Delta t C_P^{-1/2} \sqrt{2\mathcal{E}_e^{n+1/2}} \right] \quad (1.3.159)$$

$$\leq \gamma\sqrt{2} \left[\sqrt{\mathcal{E}_e^{n+1/2}} + \sqrt{\mathcal{E}_e^{n-1/2}} \right] \quad (1.3.160)$$

D'autre part,

$$\left\| \Pi_K e_u^{n+1} \right\|_M \leq \left\| \Pi_K e_u^n \right\|_M + \Delta t \left\| \Pi_K \delta e_u^{n+1/2} \right\|_M \quad (1.3.161)$$

$$\leq \left\| \Pi_K e_u^n \right\|_M + \Delta t C_K^{-1/2} \sqrt{2\mathcal{E}_e^{n+1/2}} \quad (1.3.162)$$

et

$$\left\| \Pi_P e_u^{n+1} \right\|_M \leq \left\| \Pi_P e_u^n \right\|_M + 2 \left\| \Pi_P \mu e_u^{n+1/2} \right\|_M \quad (1.3.163)$$

$$\leq \left\| \Pi_P e_u^n \right\|_M + 2\Delta t C_P^{-1/2} \sqrt{2\mathcal{E}_e^{n+1/2}} \quad (1.3.164)$$

ce qui implique par sommation télescopique que

$$\|e_u^n\|_M \leq \|\Pi_K e_u^n\|_M + \|\Pi_P e_u^n\|_M \quad (1.3.165)$$

$$\leq \sqrt{2} \|e_u^0\|_M + 2\gamma\sqrt{2}\Delta t \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\mathcal{E}_e^{i+1/2}} \quad (1.3.166)$$

Résumons les majorations dont nous disposons :

$$\left\{ \begin{aligned} \left\| \mu z_{h,1}^n \right\|_Z &\leq \max_n \left\| z_{h,1}^{n+1/2} \right\|_Z := Z_{1,max} && \text{grâce à (1.3.64d)} \end{aligned} \right. \quad (1.3.167a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left\| \mu e_{z,1}^n \right\|_Z &\leq \frac{1}{2} \sqrt{2} \left(\sqrt{\mathcal{E}_e^{n+1/2}} + \sqrt{\mathcal{E}_e^{n-1/2}} \right) \end{aligned} \right. \quad (1.3.167b)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left\| \delta\mu u_h^n \right\|_M &\leq \max_n \left\| \delta\mu u_h^n \right\|_M := \dot{U}_{max} && \text{grâce à (1.3.64c)} \end{aligned} \right. \quad (1.3.167c)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left\| \delta\mu e_u^n \right\|_M &\leq \gamma\sqrt{2} \left(\sqrt{\mathcal{E}_e^{n+1/2}} + \sqrt{\mathcal{E}_e^{n-1/2}} \right) \end{aligned} \right. \quad (1.3.167d)$$

Combinées à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on les applique au bilan (1.3.154a) pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left(\mathcal{E}_e^{n+1/2} - \mathcal{E}_e^{n-1/2} \right) &\leq \gamma\sqrt{2} C_{\epsilon,u} \Delta t^2 \left(\sqrt{\mathcal{E}_e^{n+1/2}} + \sqrt{\mathcal{E}_e^{n-1/2}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sqrt{2} C_{\epsilon,z,1} \Delta t^2 \left(\sqrt{\mathcal{E}_e^{n+1/2}} + \sqrt{\mathcal{E}_e^{n-1/2}} \right) \\ &\quad + \left[2\gamma C_{g,1} Z_{1,max} + C_{g,1} \dot{U}_{max} \right] \left\| e_u^0 \right\|_M \left(\sqrt{\mathcal{E}_e^{n+1/2}} + \sqrt{\mathcal{E}_e^{n-1/2}} \right) \\ &\quad + \Delta t \underbrace{\left[4\gamma^2 C_{g,1} Z_{1,max} + 2\gamma C_{g,1} \dot{U}_{max} \right]}_{2\gamma C} \left(\sqrt{\mathcal{E}_e^{n+1/2}} + \sqrt{\mathcal{E}_e^{n-1/2}} \right) \sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{\mathcal{E}_e^{j+1/2}} \end{aligned} \quad (1.3.168)$$

On peut alors simplifier par $\sqrt{\mathcal{E}_e^{n+1/2}} + \sqrt{\mathcal{E}_e^{n-1/2}}$ et sommer de 1 à n :

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathcal{E}_e^{n+1/2}} &\leq \overbrace{\sqrt{\mathcal{E}_e^{1/2}} + CT \|e_u^0\|_M + \gamma\sqrt{2}\Delta t^2 C_{\epsilon,u} T + \frac{\Delta t^2}{\sqrt{2}} C_{\epsilon,z1} T}^{=:A} \\ &\quad + 2\gamma C \Delta t^2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^i \sqrt{\mathcal{E}_e^{j+1/2}} \end{aligned} \quad (1.3.169)$$

Il reste à appliquer le lemme de Gronwall discret C.2 :

$$\sqrt{\mathcal{E}_e^{n+1/2}} \leq A e^{\gamma C \Delta t^2 n(n+1)} \leq A e^{\gamma C T^2} \quad (1.3.170)$$

et utiliser ce résultat dans (1.3.166) pour obtenir

$$\|e_u^n\|_M \leq \sqrt{2} \|e_u^0\|_M + \gamma\sqrt{2} T A e^{\gamma C T^2} \quad (1.3.171)$$

Et finalement il vient

$$\begin{aligned} \|e_u^n\|_M &\leq \left(\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\gamma C T^2 e^{\gamma C T^2} \right) \|e_u^0\|_M + 2\gamma T e^{\gamma C T^2} \sqrt{2\mathcal{E}_e^{1/2}} \\ &\quad + 2\gamma (2\gamma C_{\epsilon,u} + C_{\epsilon,z1}) T^2 \Delta t^2 e^{\gamma C T^2} \end{aligned} \quad (1.3.172)$$

Pour l'estimation de convergence de la variable auxiliaire, il suffit d'utiliser (1.3.170) dans l'équation

$$\|e_{z1}^{n+1/2}\|_Z^2 \leq 2\mathcal{E}_e^{n+1/2} \quad (1.3.173)$$

Pour le cas du schéma 2-SAV, il suffit d'adapter cette preuve en remplaçant la norme de l'espace Z par des valeurs absolues. \square

Remarque 1.3.3

Les constantes de convergence présentes dans le théorème 1.3.11 ne dépendent pas des paramètres de la discrétisation en espace. Combiné aux hypothèses de convergence des méthodes d'éléments finis en espace 1.3.5 et 1.3.7, le théorème 1.3.11 assure alors la convergence espace-temps des schémas 2-IEQ et 2-SAV :

$$\|u_h^n - u(t^n)\|_M \leq \underbrace{\|u_h^n - u_h(t^n)\|_M}_{\substack{\text{converge en } O(\Delta t^2) \\ \text{d'après le théorème}}} + \underbrace{\|u_h(t^n) - u(t^n)\|_M}_{\text{converge d'après les hypothèses}} \quad (1.3.174)$$

On trouve dans [Jiang et al., 2019] une preuve de convergence en $O(h^2 + \Delta t^2)$ pour le schéma P-SAV appliqué à l'équation de Sine-Gordon (de type 1) pour une discrétisation en espace par différences finies. Cependant, la preuve de la convergence de la méthode d'éléments finis pour le problème non-linéaire que nous étudions sort des cas d'application des théorèmes classiques [Joly, 2003]. C'est à notre connaissance un problème ouvert.

1.3.8 Étude de convergence pour des non-linéarités de type 2

Essayons d'adapter le résultat de convergence de la section précédente à un terme non-linéaire de type 2.

On cherche $(u_h^{n+1}, z_{h,2}^{n+1/2}) \in V_h \times Z_h$ tel que pour tout $(u_h^*, z_{h,2}^*) \in V_h \times Z_h$ on ait

$$\begin{cases} m(\delta^2 u_h^n, u_h^*) + a(\{u_h\}_\theta^n, u_h^*) + \bar{G}_2(u_h^n, u_h^*, \mu z_{h,2}^n) = f_h^n(u_h^*) \end{cases} \quad (1.3.175a)$$

$$\begin{cases} \ell(\delta z_{h,2}^n, z_{h,2}^*) = \bar{G}_2(u_h^n, \delta \mu u_h^n, z_{h,2}^*) \end{cases} \quad (1.3.175b)$$

Pour prouver la convergence, on tente de procéder comme précédemment et on écrit un bilan de puissance vérifié par les erreurs :

$$\begin{cases} \delta \mathcal{E}_e^n = \epsilon_{h,u}^n(\delta \mu e_u^n) + \epsilon_{h,z_2}^n(\mu z_{h,2}^n) + R_1^n + R_2^n \end{cases} \quad (1.3.176a)$$

$$\begin{cases} \mathcal{E}_e^{n+1/2} = \frac{1}{2} \tilde{m}(\delta e_u, \delta e_u) + \frac{1}{2} a(\mu e_u, \mu e_u) + \frac{1}{2} (e_{z_2}^{n+1/2})^2 \end{cases} \quad (1.3.176b)$$

$$\begin{cases} R_1^n = \bar{G}_2(u_h(t^n), \delta \mu e_u^n, \mu z_{h,2}^n) - \bar{G}_2(u_h^n, \delta \mu e_u^n, \mu z_{h,2}^n) \end{cases} \quad (1.3.176c)$$

$$\begin{cases} R_2^n = -\bar{G}_2(u_h(t^n), \delta \mu u_h^n, \mu e_{z_2}^n) + \bar{G}_2(u_h^n, \delta \mu u_h^n, \mu e_{z_2}^n) \end{cases} \quad (1.3.176d)$$

On utilise alors le théorème 1.3.8 pour borner les termes R_1^n et R_2^n :

$$\begin{cases} |R_1^n| \leq C_{g1} \|e_u^n\|_V \|\delta \mu e_u^n\|_V \|\mu z_{h,2}^n\|_Z \end{cases} \quad (1.3.177a)$$

$$\begin{cases} |R_2^n| \leq C_{g1} \|e_u^n\|_V \|\delta \mu u_h^n\|_V \|\mu e_{z_2}^n\|_Z \end{cases} \quad (1.3.177b)$$

mais cette fois ci nous faisons apparaître des normes dans l'espace V en raison du caractère dérivant de la fonction non-linéaire de type 2. Dans ce cas, à notre connaissance, il n'est pas possible de réaliser la décomposition par les projecteurs Π_K et Π_P , et les termes qui apparaissent en norme V ne sont pas présents dans l'énergie, donc non contrôlables.

Par conséquent, la preuve de convergence pour des non-linéarités de type 2 ne peut pas aboutir en suivant cette voie.

Il est toutefois possible de se placer en dimension finie pour une discrétisation spatiale $h > 0$ fixée, et d'écrire une inégalité inverse d'équivalence des normes dans V et dans H :

$$\|\cdot\|_V \leq c_h \|\cdot\|_M \quad (1.3.178)$$

Ceci suffit pour conclure une preuve de convergence en temps, en suivant précisément les mêmes étapes de démonstration que pour le théorème 1.3.11. Par contre, la constante c_h diverge pour $h \rightarrow 0$, donc ce résultat ne donne aucune information sur la convergence espace-temps des schémas.

Remarque 1.3.4

Dans la partie 1.4.6 nous verrons que le schéma 2-SAV appliqué à la corde de piano géométriquement exacte, qui présente une non-linéarité de type 2, montre des cas de non convergence espace-temps.

Il est donc cohérent de ne pas réussir à prouver la convergence, du moins sans hypothèses supplémentaires.

1.4 Applications et résultats numériques pour la corde de piano

Pour la présentation des résultats numériques, nous utilisons le modèle de corde géométriquement exact 1.1.4 qui couple les vibrations transversales et longitudinales de façon non-linéaire. Ce modèle rentre dans le cadre d'étude présenté à la section 1.3, avec une non-linéarité de type 2. La corde est supposée dans un premier temps sans raideur, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'onde de cisaillement qui la parcourt, et sans amortissement.

On rappelle les équations du modèle géométriquement exact :

$$M\ddot{q} - \partial_x (A\partial_x q + \nabla\mathcal{U}(\partial_x q)) = F(x, t) \quad (1.4.1)$$

où

$$q = \begin{pmatrix} u_c \\ v_c \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \rho S & 0 \\ 0 & \rho S \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} T_0 & 0 \\ 0 & ES \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{U}(u_c, v_c) = (ES - T_0) \left[\frac{1}{2}u_c^2 + (1 + v_c) - \sqrt{u_c^2 + (1 + v_c)^2} \right]$$

et ρ la masse volumique, S la section, E le module de Young et T_0 la tension au repos. u_c et v_c sont les déplacements transversaux et longitudinaux de la corde.

Pour tous les résultats numériques qui suivent, nous choisissons les paramètres physiques qui sont résumés dans le tableau 1.1 :

L [m]	S [m ²]	ρ [kg/m ³]	E [Pa]	T_0 [N]	T_0/ES
1.0	9.7993×10^{-7}	7850	2.02×10^{11}	880	4.45×10^{-3}

TABLE 1.1 – Paramètres de corde utilisés pour les simulations

Le terme source F est une fonction \mathcal{C}^∞ en espace et en temps décrite en annexe B, qui produit une nuance forte, et dont les paramètres sont décrits par le tableau 1.2 :

Terme source				
A [-]	x_0 [m]	σ_x [m]	t_0 [ms]	σ_t [ms]
1000	$L/4$	$L/10$	0.3	0.2

TABLE 1.2 – Paramètres utilisés pour la source

Sauf mention contraire, nous utilisons des éléments finis d'ordre 4 et un θ -schéma inconditionnellement stable avec $\theta = 1/4$.

Nous présentons des résultats sur les schémas 2-IEQ et 2-SAV, mais également des comparaisons avec le schéma P-SAV et le schéma de gradient discret développé dans [Chabassier, 2012] que nous désignons par GRAD.

La solution de référence utilisée dans cette partie est calculée avec le schéma GRAD, 2048 éléments d'ordre 4, un pas de temps $\Delta t = 2 \times 10^{-9}$ s et une précision 'long double' en utilisant la librairie de calcul multiple précision MPFR¹.

Les schémas sont implémentés en C++ dans le logiciel Montjoie².

1. <https://www.mpfr.org>

2. <https://www.math.u-bordeaux.fr/~durufle/montjoie/index.php>

1.4.1 Propriétés des fonctionnelles non-linéaires et des fonctions auxiliaires

Suivant la remarque 1.3.1, introduisons la matrice $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$ telle que l'équation (1.4.1) s'écrive

$$M\ddot{q} - \partial_x (\alpha A \partial_x q + \nabla \mathcal{U}_\alpha(\partial_x q)) = F(x, t) \quad (1.4.2)$$

où

$$\forall p \in \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{U}_\alpha(p) = \frac{1}{2}(I_2 - \alpha)Ap \cdot p + \mathcal{U}(p) \quad (1.4.3)$$

Pour $\alpha = \alpha^0 = 0$, le terme linéaire $A\partial_x q$ est totalement absorbé par la fonctionnelle non-linéaire. Pour $\alpha = \alpha^* = I_2$, l'équation reste inchangée. [Ducceschi et Bilbao, 2022], [Ducceschi *et al.*, 2022] font le choix d'utiliser $\alpha = \alpha^B = \text{diag}\left(1, \frac{T_0}{ES}\right)$ qui donne un cas particulier où la fonction non-linéaire se factorise :

$$\mathcal{U}_{\alpha^B}(u_c, v_c) = \frac{ES - T_0}{2} \left[\sqrt{u^2 + (1 + v)^2} - 1 \right]^2 \quad (1.4.4)$$

Proposition 1.4.1 (Caractère Lipschitzien du terme non-linéaire de l'équation de corde)

La fonction non-linéaire \mathcal{U}_α ainsi que son gradient $\nabla \mathcal{U}_\alpha$ sont Lipschitziennes au sens de l'hypothèse 1.3.10 sur le domaine $\mathcal{I}_{h,2} \subset \mathcal{I}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (a, b) \in \mathcal{I}_{h,2}^2, \quad |\mathcal{U}_\alpha(a) - \mathcal{U}_\alpha(b)| \leq C_{\mathcal{U}_\alpha} \|a - b\|_2 \\ \forall (a, b) \in \mathcal{I}_{h,2}^2, \quad \|\nabla \mathcal{U}_\alpha(a) - \nabla \mathcal{U}_\alpha(b)\|_2 \leq C_{\nabla \mathcal{U}_\alpha} \|a - b\|_2 \end{array} \right. \quad (1.4.5a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (a, b) \in \mathcal{I}_{h,2}^2, \quad \|\nabla \mathcal{U}_\alpha(a) - \nabla \mathcal{U}_\alpha(b)\|_2 \leq C_{\nabla \mathcal{U}_\alpha} \|a - b\|_2 \end{array} \right. \quad (1.4.5b)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{\mathcal{U}_\alpha} = \sup_{p \in \mathcal{I}_{h,2}} \|\nabla \mathcal{U}_\alpha(p)\|_2 \\ C_{\nabla \mathcal{U}_\alpha} = \sup_{p \in \mathcal{I}_{h,2}} \left\| \left\| \nabla^2 \mathcal{U}_\alpha(p) \right\| \right\|_2 = \sup_{p \in \mathcal{I}_{h,2}} \rho(\nabla^2 \mathcal{U}_\alpha(p)) \end{array} \right. \quad (1.4.6a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{\mathcal{U}_\alpha} = \sup_{p \in \mathcal{I}_{h,2}} \|\nabla \mathcal{U}_\alpha(p)\|_2 \\ C_{\nabla \mathcal{U}_\alpha} = \sup_{p \in \mathcal{I}_{h,2}} \left\| \left\| \nabla^2 \mathcal{U}_\alpha(p) \right\| \right\|_2 = \sup_{p \in \mathcal{I}_{h,2}} \rho(\nabla^2 \mathcal{U}_\alpha(p)) \end{array} \right. \quad (1.4.6b)$$

où $\rho(\cdot)$ désigne le rayon spectral.

Démonstration. \mathcal{U}_α et $\nabla \mathcal{U}_\alpha$ sont \mathcal{C}^∞ sur tout le plan \mathbb{R}^2 à l'exception du point $(0, -1)$ qui est situé strictement hors du domaine \mathcal{I}_2 . \square

Pour une quadratisation de type IEQ, nous avons vu au paragraphe 1.2.1 que la fonction auxiliaire s'écrivait

$$g_\alpha : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ p & \longmapsto & \frac{\nabla \mathcal{U}_\alpha(p)}{\sqrt{2\mathcal{U}_\alpha(p) + c}} \end{cases} \quad (1.4.7)$$

Comme nous l'avons démontré avec le théorème 1.3.8, cette fonction g_α hérite du caractère Lipschitzien des fonctions \mathcal{U}_α et $\nabla \mathcal{U}_\alpha$. Elle est donc également Lipschitzienne de constante de Lipschitz égale à

$$C_{g_\alpha} = \frac{1}{c - \beta_h} \left[C_{\nabla \mathcal{U}_\alpha} \sup_{p \in \mathcal{I}_{h,2}} \sqrt{2\mathcal{U}_\alpha(p) + c} + \frac{C_{\mathcal{U}_\alpha}^2}{\sqrt{c - \beta_h}} \right] \quad (1.4.8)$$

et où $\beta_h = -2 \inf_{p \in \mathcal{I}_{h,2}} \mathcal{U}_\alpha(p)$ est la valeur minimale de la fonction non-linéaire et $c - \beta_h > 0$.

Proposition 1.4.2 (Valeur particulière de α)

$\alpha^* = I_2$ est la seule valeur de α pour laquelle $\nabla g_{\alpha^*}(0, 0) = 0_{\mathbb{R}^2}$

Démonstration.

$$\nabla g_{\alpha} = \frac{\nabla^2 \mathcal{U}_{\alpha}}{\sqrt{2\mathcal{U}_{\alpha} + c}} - \frac{\nabla \mathcal{U}_{\alpha} {}^t \nabla \mathcal{U}_{\alpha}}{\sqrt{2\mathcal{U}_{\alpha} + c}^3} \quad (1.4.9)$$

Des manipulations algébriques donnent alors

$$\nabla g_{\alpha}(0, 0) = \frac{\nabla^2 \mathcal{U}_{\alpha}(0, 0)}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{c}}(I_2 - \alpha)A \quad (1.4.10)$$

□

Avant toute simulation, on peut d'ores et déjà visualiser la fonction auxiliaire du schéma IEQ pour différentes valeurs de α situées de part et d'autre de α^* et estimer la constante de Lipschitz $C_{g_{\alpha}}$ en se plaçant sur un domaine rectangulaire $\tilde{\mathcal{I}}_{h,2} = [-10^{-6}, 10^{-6}] \times [-10^{-8}, 10^{-8}]$.

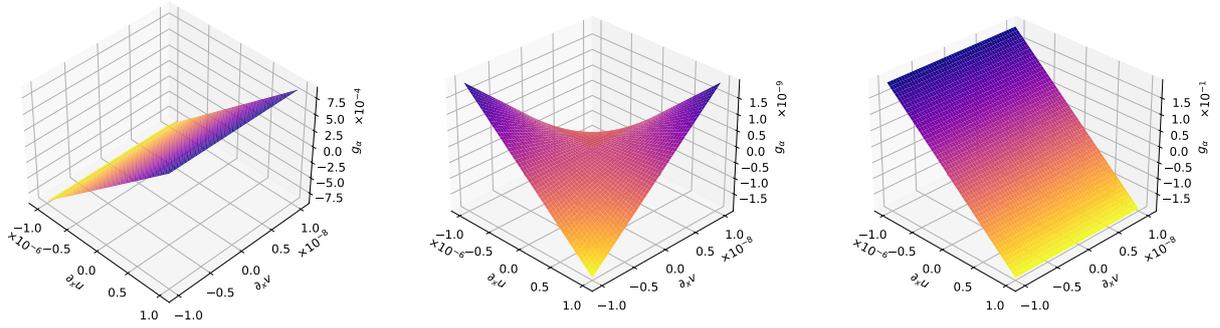


FIGURE 1.5 – Première composante de g_{α} pour α_1^0 (gauche), α_1^* (centre) et $\alpha_1 = ES/T_0$ (droite).

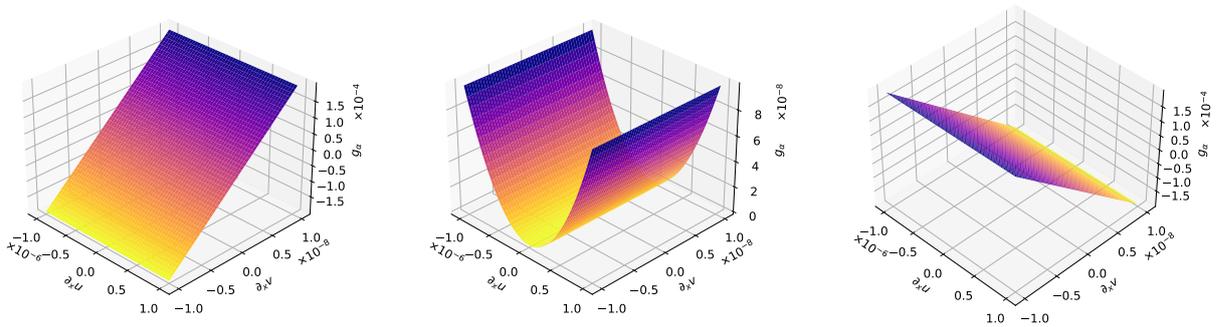


FIGURE 1.6 – Deuxième composante de g_{α} pour $\alpha_2 = 0.9$ (gauche), $\alpha_2^* = 1$ (centre) et $\alpha_2 = 1.1$ (droite).

Comme on peut le voir sur les figures 1.5 et 1.6 qui représentent les deux composantes de la fonction g_{α} , la valeur α^* permet effectivement de rendre le gradient nul au point $(0, 0)$, et permet également de réduire significativement les valeurs prises par la fonction., et ce quelque soit la valeur de la constante auxiliaire c .

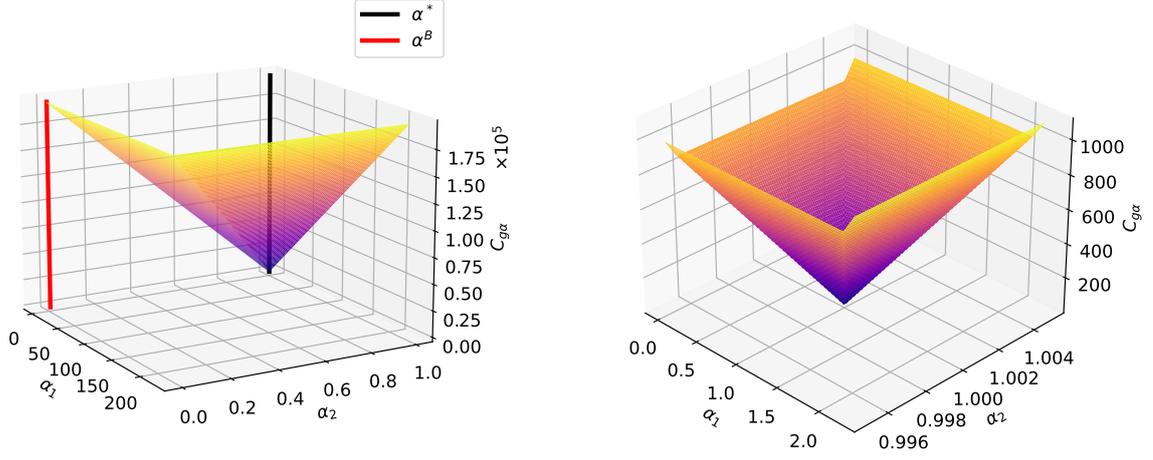


FIGURE 1.7 – Valeur de la constante de Lipschitz $C_{g\alpha}$ en fonction de α .

La figure 1.7 trace une estimation de la constante de Lipschitz $C_{g\alpha}$ définie par (1.4.8) en fonction de $\alpha = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2)$, à gauche pour une grande plage de valeurs, et à droite sur une zone plus réduite centrée autour de α^* . On remarque très nettement une valeur minimale pour $\alpha = \alpha^*$, ce qui est cohérent avec les propriétés de la fonction g_α que nous avons évoquées précédemment.

Dans le cas d'un quadratisation SAV, la fonction auxiliaire fait apparaître une intégrale, le long de la corde, des valeurs prises par le gradient du champ solution :

$$g_\alpha^{SAV}(q(x, t)) = \frac{1}{\sqrt{2 \int_0^L \mathcal{U}_\alpha(\partial_x q(s, t)) ds + c}} \nabla \mathcal{U}_\alpha(\partial_x q(x, t)) \quad (1.4.11)$$

Pour cette raison, cette fonction ne peut pas être visualisée exactement sans simulations. Toutefois, contrairement à la fonction IEQ pour laquelle le dénominateur divise point par point les valeurs du gradient $\nabla \mathcal{U}_\alpha$, le dénominateur de la fonction SAV est un scalaire qui ne fait que modifier ce gradient par une constante multiplicative. On peut donc introduire une fonction auxiliaire approchée définie par

$$\forall p \in \tilde{\mathcal{I}}_2, \quad \tilde{g}_\alpha^{SAV} \frac{1}{\sqrt{2 \int_{\tilde{\mathcal{I}}_2} \mathcal{U}_\alpha(s) ds + c}} \nabla \mathcal{U}_\alpha(p) \quad (1.4.12)$$

qui permet de visualiser la forme globale de la fonction auxiliaire, au pire faussée à une constante multiplicative près. Les tracés et observations faites sur cette fonction sont en tous points similaires à celles faites sur la fonction auxiliaire IEQ sur les figures 1.5 et 1.6. La valeur α^* rend les dérivées nulles au point $(0, 0)$, et la constante de Lipschitz approchée définie par

$$C_{g\alpha} = \frac{1}{c - \beta_h} \left[C_{\nabla \mathcal{U}_\alpha} \sqrt{2 \int_{\tilde{\mathcal{I}}_2} \mathcal{U}_\alpha(p) + c} + \frac{C_{\mathcal{U}_\alpha}^2}{\sqrt{c - \beta_h}} \right] \quad (1.4.13)$$

se comporte comme sur la figure 1.7 avec $\beta_h = -2 \int_{\tilde{\mathcal{I}}_2} \mathcal{U}_\alpha(p)$.

Il apparaît néanmoins une différence assez notable entre les deux fonctions auxiliaires IEQ et SAV au niveau de l'influence de la constante auxiliaire c .

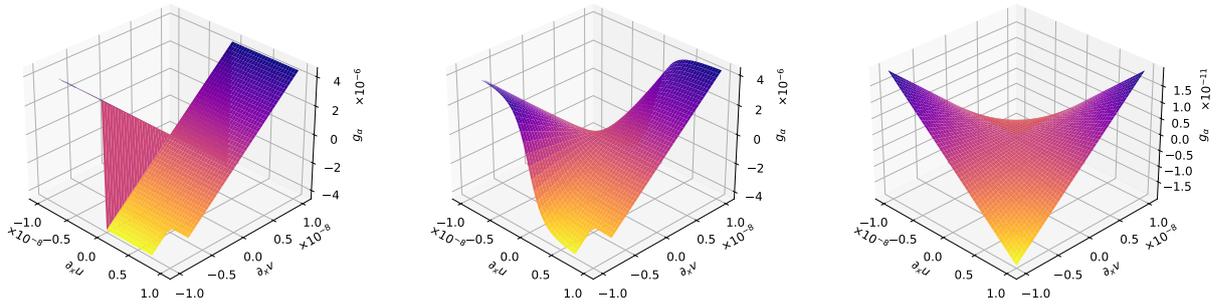


FIGURE 1.8 – Première composante de $g_\alpha^{(IEQ)}$ pour $c = 0$ (gauche), $c = 10^{-12}$ (centre) et $c = 1$ (droite).

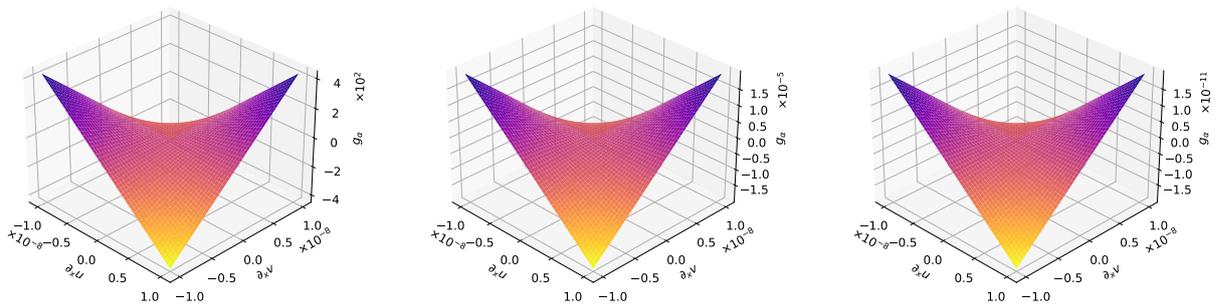


FIGURE 1.9 – Première composante de $g_\alpha^{(SAV)}$ pour $c = 0$ (gauche), $c = 10^{-12}$ (centre) et $c = 1$ (droite).

Les figures 1.8 et 1.9 montrent l'influence de la constante auxiliaire sur la première composante des fonctions auxiliaires. La fonction auxiliaire IEQ représentée sur la figure 1.8 est discontinue en $(0, 0)$ lorsque $c \rightarrow 0$, et d'autant plus lisse que c est grand. Par contre, la fonction SAV de la figure 1.9 reste toujours continue quelle que soit la valeur de c car elle n'agit que comme une constante multiplicative uniformément sur le gradient $\nabla \mathcal{U}_\alpha$. Lorsque c est petit on remarque tout de même que les valeurs prises par la fonction deviennent très grandes.

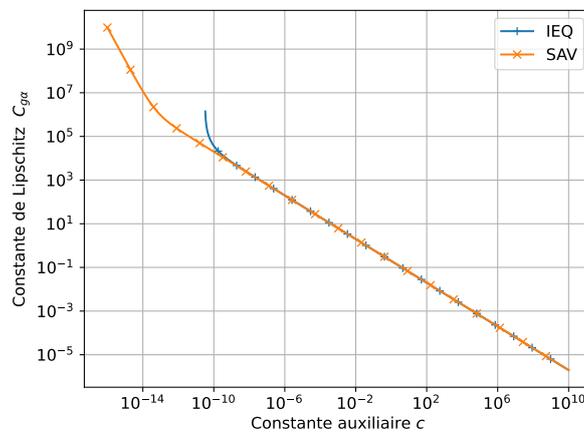


FIGURE 1.10 – Valeur de la constante de Lipschitz $C_{g\alpha^*}$ en fonction de la constante auxiliaire c .

Le tracé de la figure 1.10 de la constante de Lipschitz $C_{g\alpha^*}$ pour différentes valeurs de constante auxiliaire c confirme ces observations. Une grande constante auxiliaire permet de diminuer fortement la valeur de la constante de Lipschitz, tandis qu'une valeur proche de zéro la fait exploser. Aussi, la méthode IEQ requiert une constante auxiliaire qui positive toutes les valeurs prises par la fonction \mathcal{U}_α , tandis qu'une constante qui positive l'intégrale de ces valeurs est suffisante pour la méthode SAV. Ceci implique qu'une constante auxiliaire plus élevée est requise pour la méthode IEQ comme en témoigne l'arrêt prématuré de la courbe bleue par rapport à la courbe orange sur la figure 1.10.

1.4.2 Solutions des schémas

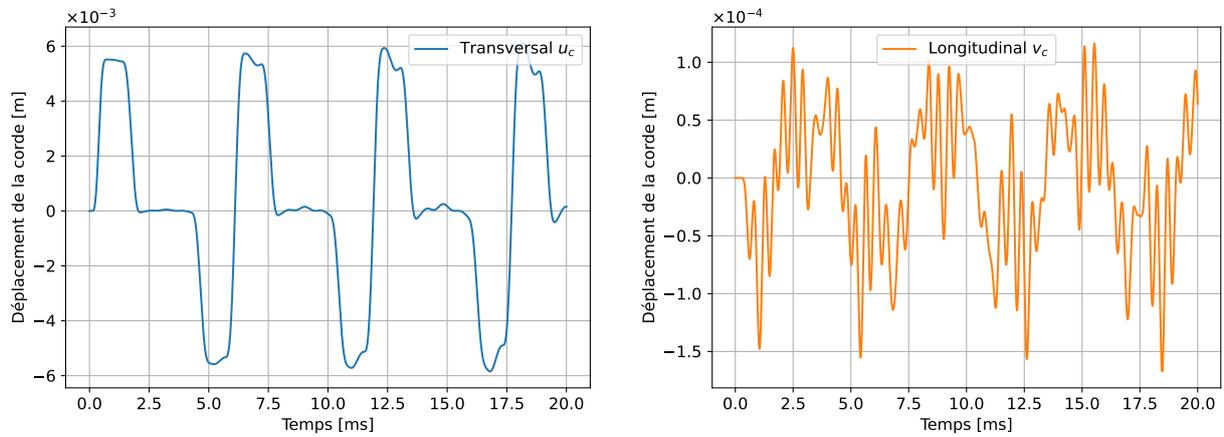


FIGURE 1.11 – Déplacement transversal (gauche) et longitudinal (droite) de la corde en $x = L/4$.

La figure 1.11 montre le résultat d'une simulation par le schéma 2-SAV sur un intervalle de temps de 20ms et visualisée à la position $x = L/4$. C'est cette solution que nous souhaitons pouvoir approximer au mieux avec les schémas dont nous disposons.

1.4.3 Préservation du bilan de puissance discret

Suivant les théorèmes 1.2.2 et 1.2.5, on définit le résidu d'énergie ε des schémas 2-IEQ et 2-SAV par

$$\varepsilon = \frac{\mathcal{E}_h^{n+1/2} - \mathcal{E}_h^{n-1/2}}{\mathcal{E}_{max}} - F_h^n \cdot \frac{U_h^{n+1} - U_h^{n-1}}{2\mathcal{E}_{max}} \quad (1.4.14)$$

Le résidu d'énergie du schéma P-SAV est quant à lui défini à partir du théorème 1.2.8 par

$$\varepsilon = \frac{\mathcal{E}_h^{n+1} - \mathcal{E}_h^n}{\mathcal{E}_{max}} - F_h^{n+1/2} \cdot \frac{U_h^{n+1} - U_h^n}{\mathcal{E}_{max}} \quad (1.4.15)$$

La figure 1.12 montre que les résidus d'énergie sont bien de l'ordre de l'erreur machine, donc les bilan de puissance discrets sont bien vérifiés.

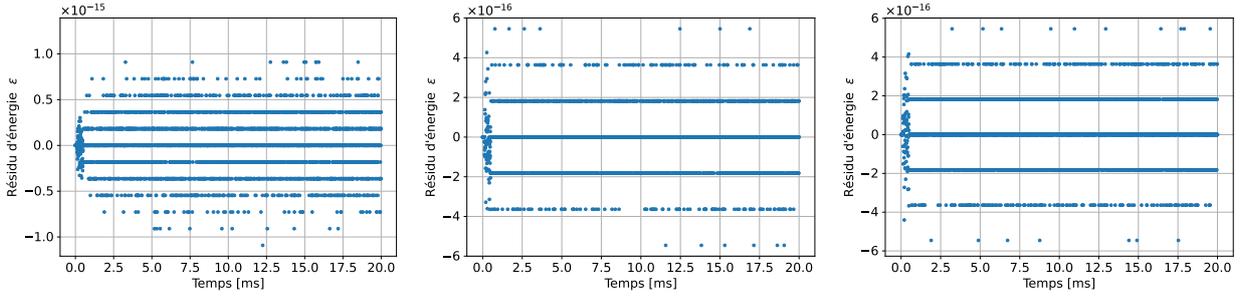


FIGURE 1.12 – Résidus d'énergie pour les schémas 2-IEQ (gauche), 2-SAV (centre) et P-SAV (droite).

1.4.4 Convergence en temps

Dans cette partie, nous effectuons des simulations de 1 ms avec 10 éléments d'ordre 4, avec $\theta = 1/4$, et une stabilisation $\alpha = \alpha^*$. Les erreurs de convergence sont estimées consécutivement entre une solution calculée avec un pas de temps Δt et une autre mieux échantillonnée avec un pas $\Delta t/2$. Elles sont comparées sur une grille d'interpolation temporelle de pas $\Delta t_{interp} = 10^{-5}$ s. L'erreur utilisée est

$$\forall (X_h^1, \dots, X_h^n, Y_h^1, \dots, Y_h^n) \in \mathcal{Q}_h^{2n}, \quad E_{L^\infty([0,T],H)}(X, Y) = \frac{\max_{i \in [1,n]} \|X_h^i - Y_h^i\|_H}{\max_{i \in [1,n]} \|Y_h^i\|_H} \quad (1.4.16)$$

pour $H = L^2$ ou $H = H^1$, et pour tout $X \in \mathcal{Q}_h$,

$$\|X\|_{H^1}^2 = \|X\|_{L^2}^2 + \|\nabla X\|_{L^2}^2 \quad (1.4.17)$$

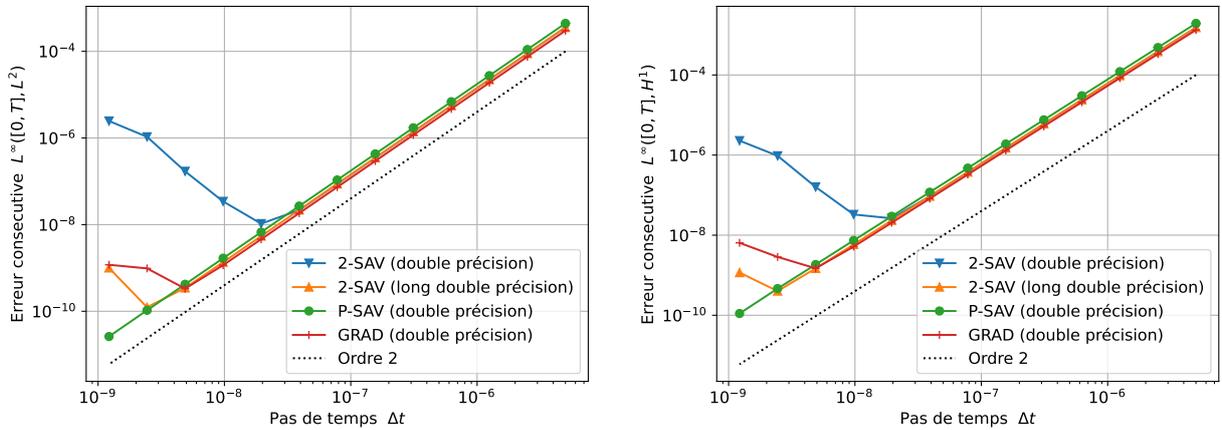


FIGURE 1.13 – Convergence en temps des différents schémas en norme L^2 (gauche) et en norme H^1 (droite).

La figure 1.13 trace des courbes de convergence en temps des schémas 2-SAV, P-SAV et GRAD. La convergence est nettement d'ordre 2 pour des pas de temps supérieurs à 2×10^{-8} , mais on remarque très nettement une remontée des erreurs pour des pas de temps plus petits, très accentuée pour le schéma 2-SAV en 'double' précision. La courbe de convergence de ce même schéma en 'long double' précision permet de montrer que le phénomène de remontée de l'erreur est dû à une accumulation d'erreurs numériques [Butcher, 2016] et non à un problème de convergence. Il conviendrait d'analyser ces erreurs en détails afin de chercher une méthode algorithmique permettant de les éliminer. Le schéma GRAD montre également une accumulation d'erreurs, mais de moindre mesure. Le schéma P-SAV a quant à lui un excellent comportement en termes de convergence en

temps et ne montre aucune remontée des erreurs, même en 'double' précision. L'ordre de convergence observés pour le schéma 2-SAV est donc bien cohérent avec la preuve de convergence en temps présentée aux paragraphes 1.3.7 et 1.3.8.

Remarque 1.4.1

Le théorème 1.3.11 démontre la convergence en norme L^2 et non en norme H^1 . Nous avons tracé sur la figure 1.13 droite des courbes de convergence en temps en norme H^1 , et nous remarquons que la convergence est également d'ordre 2.

1.4.5 Pollution numérique

Le théorème 1.3.7 montre que les schémas 2-IEQ et 2-SAV sont inconditionnellement stables pour $\theta = 1/4$. Cependant, comme mentionné dans [Ducceschi et Bilbao, 2019b], il existe des situations qui rendent ces schémas, certes stables, mais totalement pollués par des erreurs numériques.

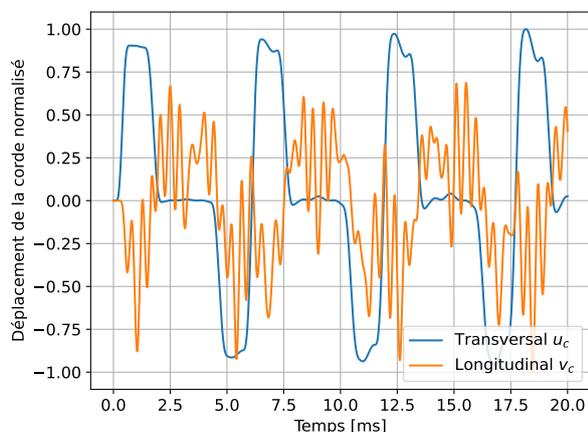


FIGURE 1.14 – Simulation stable précise.

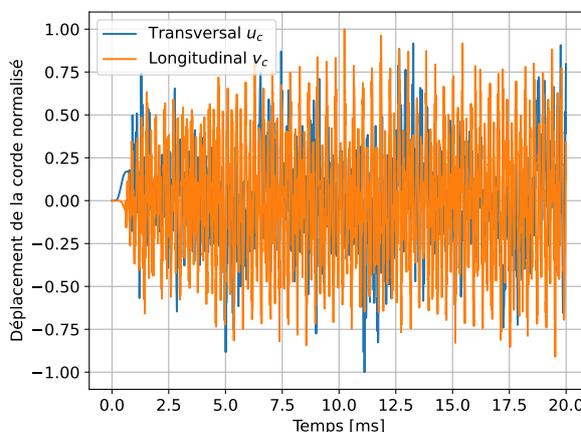


FIGURE 1.15 – Simulation stable imprécise.

Les figures 1.14 et 1.15 sont deux exemples de simulations stables, mais celle de gauche est précise, tandis que celle de droite est polluée. Ceci se produit lorsque le pas de temps est trop grossier par rapport au pas d'espace, et peut être accentué ou réduit par le paramètre de stabilisation α dont nous verrons l'influence au paragraphe 1.4.7.a. Nous reviendrons également sur cette pollution numérique dans le paragraphe suivant 1.4.6 consacré à la convergence espace-temps des schémas.

1.4.6 Convergence espace-temps

Les erreurs de convergence espace-temps sont estimées par rapport à la solution de référence (X_{ref}^i) calculée avec le schéma GRAD. Elles sont comparées sur une grille d'interpolation de 100 points régulièrement espacés. L'erreur utilisée est

$$\forall (X_h^1, \dots, X_h^n) \in \mathcal{Q}_h^n, \quad E_{L^\infty([0,T], H^1)}(X, X_{ref}) = \frac{\max_{i \in [1, n]} \|X_h^i - X_{ref}^i\|_{H^1}}{\max_{i \in [1, n]} \|X_{ref}^i\|_{H^1}} \quad (1.4.18)$$

et où pour tout $X \in \mathcal{Q}_h$,

$$\|X\|_{H^1}^2 = \|X\|_{L^2}^2 + \|\nabla X\|_{L^2}^2 \quad (1.4.19)$$

Sauf mention contraire, la stabilisation utilisée est $\alpha = \alpha^*$.

1.4.6.a Schémas inconditionnellement stables

On utilise les schémas avec $\theta = 1/4$. Ils sont inconditionnellement stables, et le nombre

$$\eta_{0,\alpha} = \frac{1}{4} \Delta t^2 \rho \left(M_h^{-1} K_{h,\alpha} \right) \quad (1.4.20)$$

est utilisé pour choisir le pas de temps en relation avec le pas d'espace.

Toutes les courbes de convergence qui suivent sont calculées en 'double' précision avec des simulations de durée $T = 1$ ms.

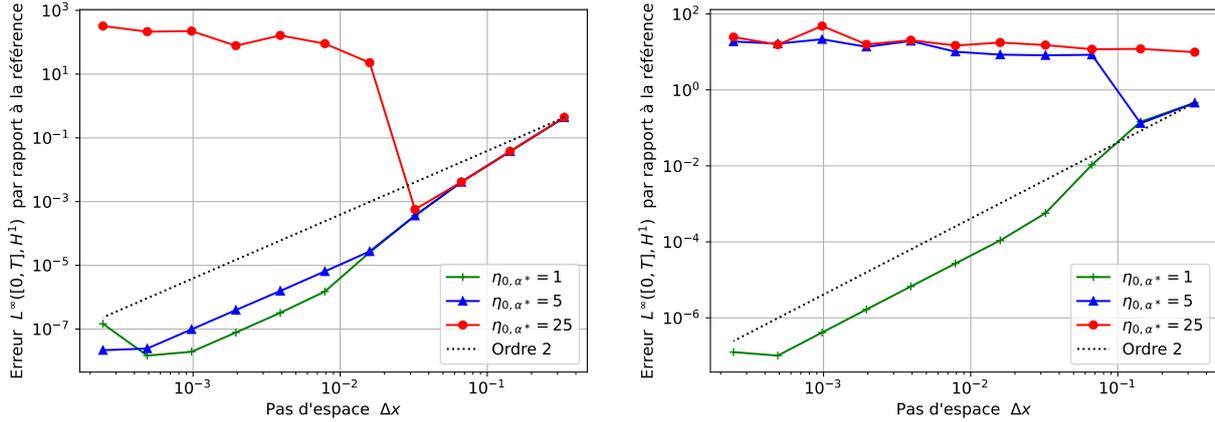


FIGURE 1.16 – Convergence espace-temps de 2-SAV. La figure de gauche est tracée avec une source d'amplitude moins élevée ($A = 1000$) que la figure de droite ($A = 10000$).

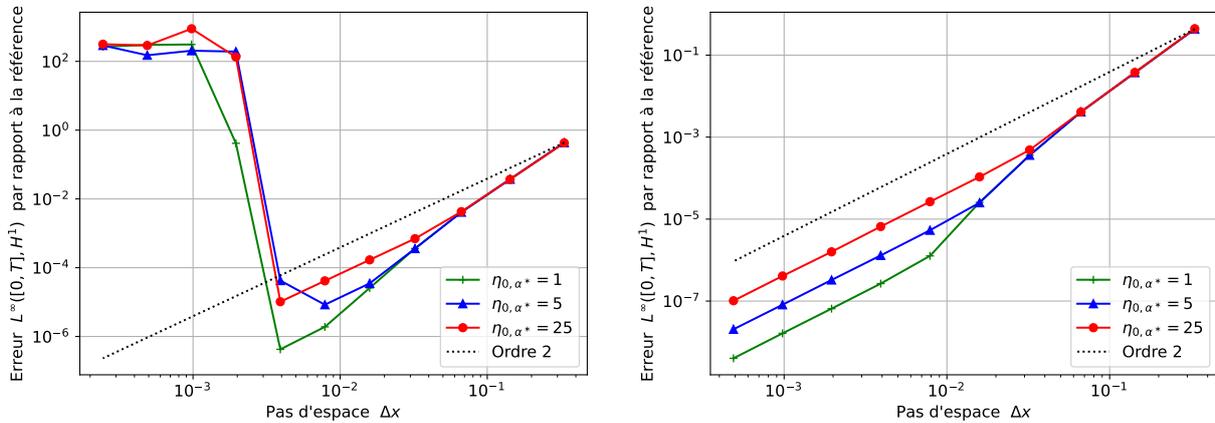


FIGURE 1.17 – Convergence espace-temps de P-SAV (gauche) et GRAD (droite).

La figure 1.16 montre des courbes de convergence espace-temps du schéma 2-SAV pour deux amplitudes de source différentes, $A = 1000$ à gauche, et $A = 10000$ à droite. On remarque que le schéma 2-SAV n'est pas toujours convergent en espace-temps comme en témoignent les courbes rouges pour $\eta_{0,\alpha^*} = 25$ sur la figure de gauche. Le schéma demeure stable, mais à partir d'une certaine finesse de discrétisation, le phénomène de pollution décrit ci-dessus (paragraphe 1.4.5) apparaît et fait exploser les erreurs. Pour une source d'amplitude plus grande, la figure de droite montre que la pollution numérique apparaît pour des ratios η_{0,α^*} plus petits.

On remarque toutefois que le schéma se comporte très bien et converge à l'ordre 2 pour des valeurs de η_{0,α^*} plus faibles, du moins pour les discrétisations explorées sur cette courbe. Typiquement,

pour $\eta_{0,\alpha^*} = 1$ qui correspond à la CFL du θ -schéma explicite avec $\theta = 0$, nous n'avons jamais réussi à observer la moindre pollution pour ce choix de stabilisation $\alpha = \alpha^*$.

Le schéma P-SAV est lui aussi inconditionnellement stable et sujet aux mêmes phénomènes de pollution numérique que 2-SAV, comme le montrent les courbes de convergence espace-temps de la figure 1.17 gauche. On remarque même que ce schéma P-SAV est significativement plus sujet à la pollution numérique que le schéma 2-SAV, puisque toutes les courbes espaces temps représentées, y compris pour $\eta_{0,\alpha^*} = 1$, sont affectées. Le schéma de gradient discret GRAD n'est quant à lui pas sujet à ce phénomène de pollution.

1.4.6.b Schémas stables sous condition CFL

Nous étudions ici les schémas stables sous condition CFL avec $\theta < 1/4$. On note alors

$$\eta_{\theta,\alpha} = (1 - 4\theta)\eta_{0,\alpha} = \left(\frac{1}{4} - \theta\right) \Delta t^2 \rho \left(M_h^{-1} K_{h,\alpha}\right) \quad (1.4.21)$$

le ratio CFL qui permet de choisir le pas de temps en fonction du pas d'espace.

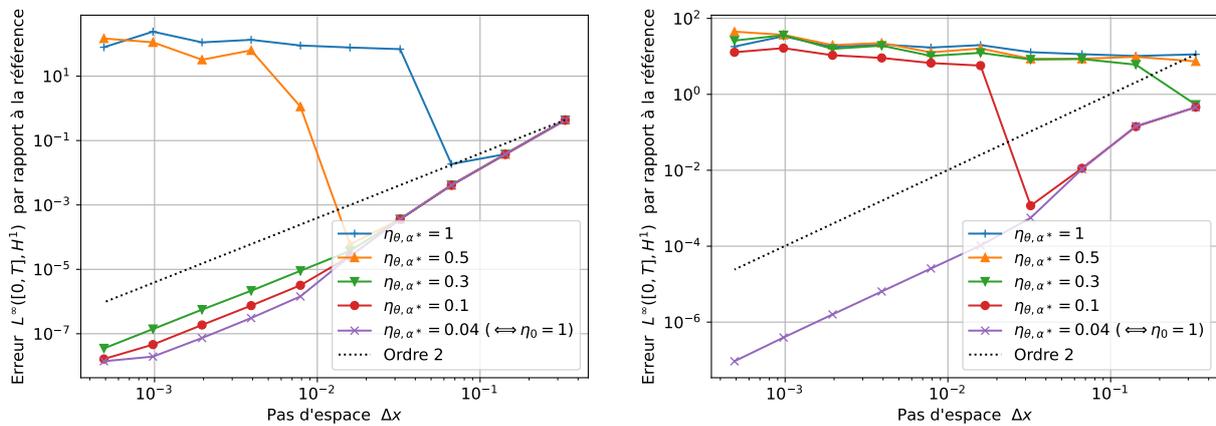


FIGURE 1.18 – Convergence espace-temps du schéma 2-SAV avec $\theta = 0.24$. La figure de gauche est tracée avec une source d'amplitude moins élevée ($A = 1000$) que la figure de droite ($A = 10000$).

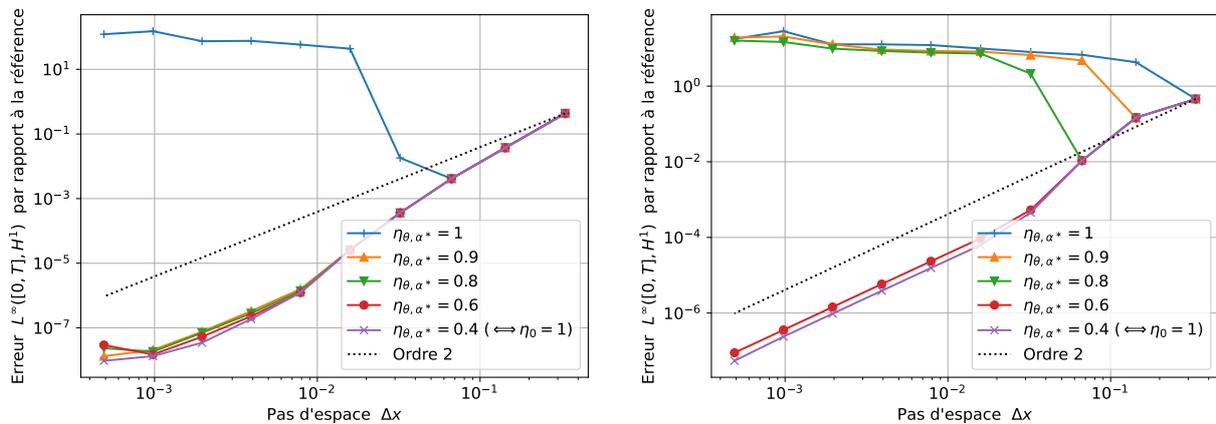


FIGURE 1.19 – Convergence espace-temps du schéma 2-SAV avec $\theta = 0.15$. La figure de gauche est tracée avec une source d'amplitude moins élevée ($A = 1000$) que la figure de droite ($A = 10000$).

La figure 1.18 montre des courbes de convergence du schéma 2-SAV pour $\theta = 0.24$. À gauche, pour une source d'amplitude $A = 1000$, on observe de la pollution numérique forte pour des ratio $\eta_{\theta,\alpha}$

proches de 1. Des valeurs de $\eta_{\theta,\alpha}$ plus faibles limitent la pollution, qui toutefois réapparaît sur la figure de droite pour une source de plus grande amplitude. Seul le ratio qui vérifie que $\eta_{0,\alpha^*} = 1$ ne semble pas affecté, du moins pour les discrétisation explorées. Pour $\theta = 0.15$ sur la figure 1.19, on peut faire les mêmes observations.

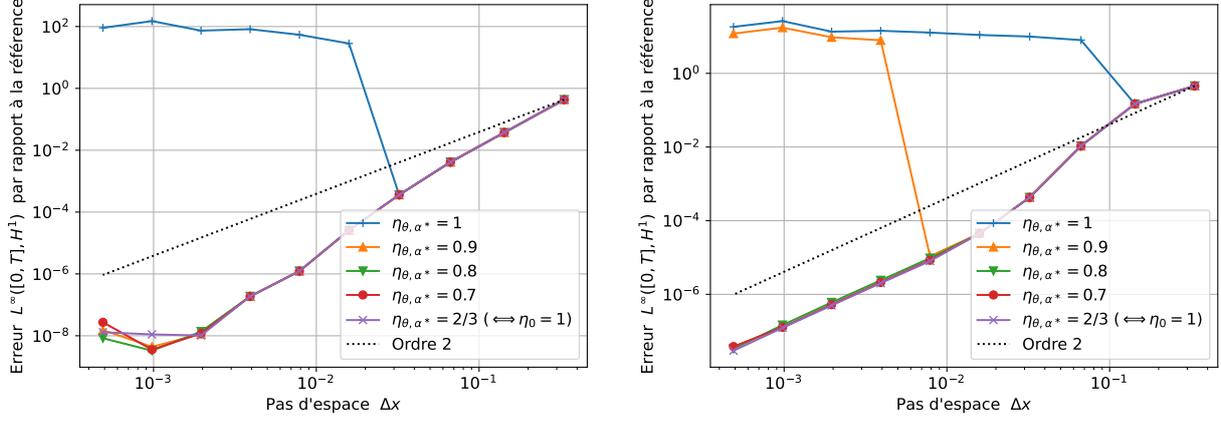


FIGURE 1.20 – Convergence espace-temps du schéma 2-SAV avec $\theta = 1/12$. La figure de gauche est tracée avec une source d’amplitude moins élevée ($A = 1000$) que la figure de droite ($A = 10000$).

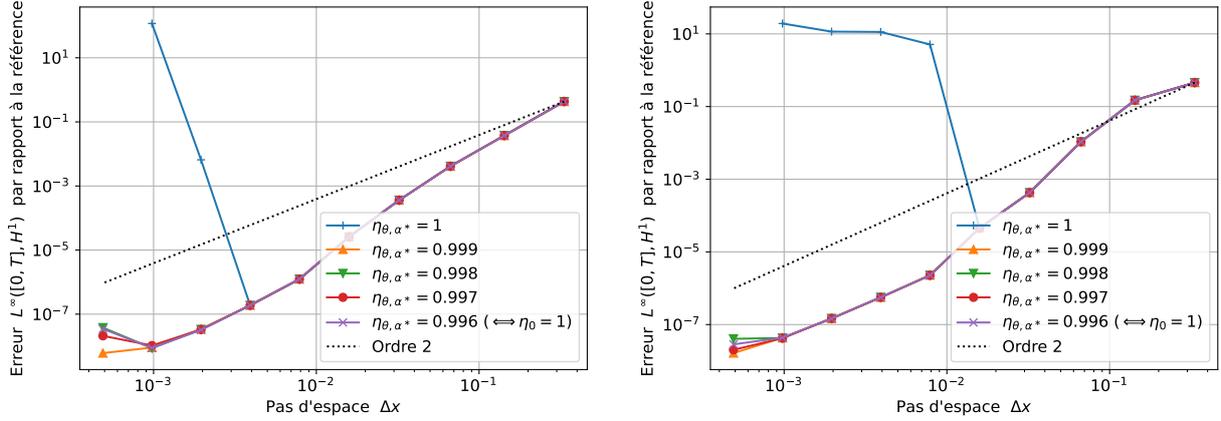


FIGURE 1.21 – Convergence espace-temps du schéma 2-SAV avec $\theta = 1/100$. La figure de gauche est tracée avec une source d’amplitude moins élevée ($A = 1000$) que la figure de droite ($A = 10000$).

Pour $\theta = 1/12$ ou $\theta = 1/100$, sur les figures 1.20 et 1.21, on remarque que la courbe correspondant à $\eta_{\theta,\alpha} = 1$ est polluée. Pour des ratios plus faibles, la pollution est fortement réduite pour les deux amplitudes de source explorées.

Pour $\theta = 0$ sur la figure 1.22, on voit que la convergence est très bonne pour $\eta_{0,\alpha^*} = 1$, mais qu’un changement de stabilisation, par exemple $\alpha = \alpha^B$, suffit pour faire réapparaître une forte pollution numérique pour $\eta_{0,\alpha^B} = 1$. Si par contre on utilise le ratio CFL $\eta_{0,\alpha^*} = 1$, avec tout de même le schéma numérique correspondant à $\alpha = \alpha^B$, alors la pollution numérique est éliminée.

On constate, comme le montre le théorème 1.3.7, que tous les schémas sont stables jusqu’au cas limite de validité de la CFL ($\eta_{\theta,\alpha} = 1$). Toute simulation effectuée avec $\eta_{\theta,\alpha} > 1$ diverge. Cela dit, bien qu’ils soient stables à la CFL, ils y sont difficilement utilisables en pratique, car beaucoup trop pollués. Pour un ratio $\eta_{0,\alpha^*} = 1$ qui impose un pas de temps plus faible, et l’utilisation du schéma

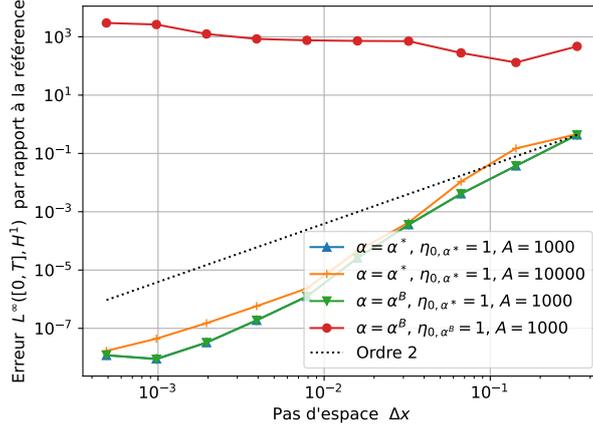


FIGURE 1.22 – Convergence espace-temps du schéma 2-SAV avec $\theta = 0$.

$\alpha = \alpha^*$, les problèmes de pollution ne sont pas visibles pour les discrétisations explorées.

Rappelons ici que nous n'avons pas été capables d'aboutir à un résultat de convergence pour des non-linéarités de type 2 (comme la corde de piano) au paragraphe 1.3.8 sans supposer une inégalité inverse divergente quand le pas de discrétisation en espace $h \rightarrow 0$.

Nous n'avons pas à l'heure actuelle d'explication claire à donner pour expliquer les phénomènes de pollution, tout comme nous ne savons pas si les schémas sont convergents avec une condition supplémentaire que nous n'avons pas encore mise en lumière, ou s'ils ne sont tout simplement pas convergents du tout en espace-temps.

Ceci étant dit, des régimes de très bonne convergence à l'ordre 2 sont visibles, ce qui rend ces schémas tout à fait utilisables en pratique, à condition de choisir convenablement les paramètres de discrétisation.

1.4.7 Influence des paramètres de discrétisation

1.4.7.a Influence du paramètre de stabilisation α

La valeur du paramètre α a une influence sur la valeur de la constante de Lipschitz de la fonction auxiliaire qui apparaît dans l'estimation de convergence des schémas du théorème 1.3.11. Nous analysons donc dans cette partie l'influence de la stabilisation α sur la précision de la discrétisation temporelle des schémas. Ce paramètre n'a aucune influence sur la complexité algorithmique des schémas, et nous allons voir qu'un choix approprié est fondamental pour éviter la pollution numérique. Il est par conséquent très important de le choisir avec soin.

Pour mesurer l'influence de α sur l'erreur de discrétisation temporelle, nous calculons des courbes de convergence en temps en erreurs consécutives en divisant successivement le pas de temps par 2. La discrétisation spatiale est fixe avec 10 éléments d'ordre 4. Nous remarquons alors que

$$\|q_{h,1}^n - q_{h,2}^n\|_{L^2} \leq \|q_{h,1}^n - q_h(t^n)\|_{L^2} + \|q_{h,2}^n - q_h(t^n)\|_{L^2} \quad (1.4.22)$$

$$\leq C_\alpha \Delta t^2 + C_\alpha \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \quad (1.4.23)$$

$$\leq \frac{5}{4} C_\alpha \Delta t^2 \quad (1.4.24)$$

où C_α est la constante qui apparaît dans le théorème 1.3.11 :

$$\|e_q^n\|_{L^2} = \|q_h^n - q_h(t^n)\|_{L^2} \leq C_\alpha \Delta t^2 \quad (1.4.25)$$

Pour chaque courbe de convergence, on réalise quatre simulations avec quatre pas de temps différents et on estime la constante de convergence C_α par une régression linéaire de

$$\log(\text{erreur}) = \log\left(\frac{5}{4}C_\alpha\right) + r \log(\Delta t) \quad \text{et} \quad r \simeq 2 \quad (1.4.26)$$

On utilise ou bien des grands pas de temps $\{10^{-5}, 5 \times 10^{-6}, 2.5 \times 10^{-6}, 1.25 \times 10^{-6}\}$ ou des petits pas de temps $\{10^{-6}, 5 \times 10^{-7}, 2.5 \times 10^{-7}, 1.25 \times 10^{-7}\}$ Avec cette méthodologie, on peut déduire la meilleure valeur de α à choisir pour minimiser l'erreur de discrétisation en temps.

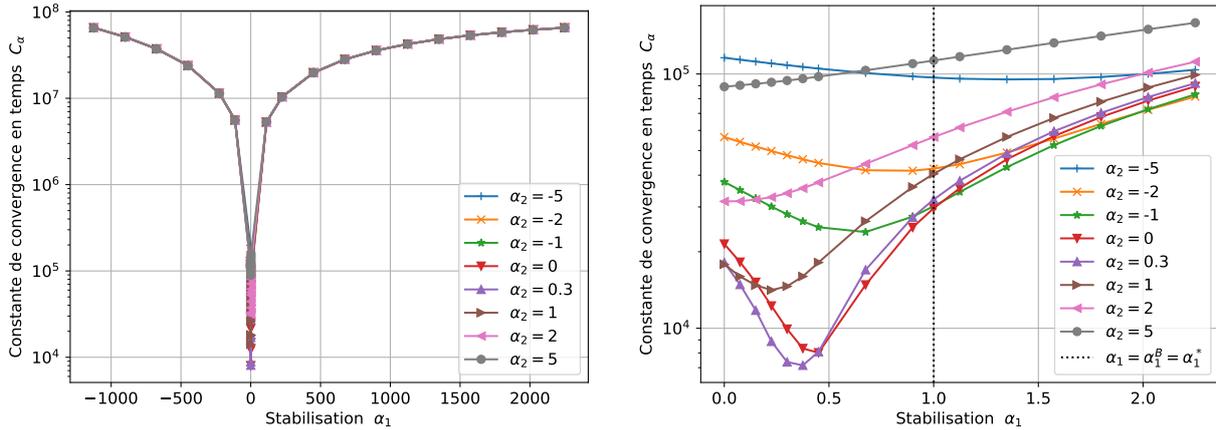


FIGURE 1.23 – Influence de α pour 2-SAV sur une large plage de valeurs pour des petits pas de temps. A droite, zoom sur la zone optimale dans la direction α_1 .

La figure 1.23 affiche les valeurs de la constante de convergence C_α sur une large plage de valeurs de α . Un très net optimum est visible sur la figure de gauche, et la figure de droite présente un agrandissement de cette zone spécifique. On remarque que la valeur de la stabilisation a une influence énorme sur la précision du schéma comme en témoignent les très fortes variations de la constante C_α . La valeur optimale se situe entre 0 et 2 pour α_1 et entre 0 et 1 pour α_2 . Nous nous focalisons sur cette zone pour la suite.

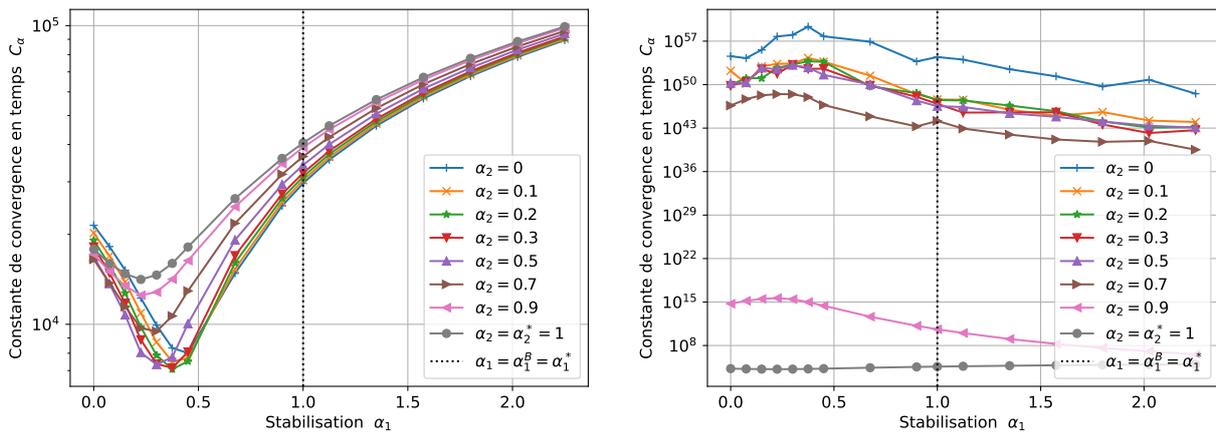


FIGURE 1.24 – Influence de α pour 2-SAV pour des petits (gauche) et grands pas de temps (droite).

Sur la figure 1.24, on trace les valeurs de la constante de convergence en fonction de α et pour différentes précisions des pas de temps. La figure de gauche se base sur des courbes de convergences calculées avec des pas de temps inférieurs à 10^{-6} , tandis que celle de droite utilise des pas de temps plus grands que 10^{-6} et montre une très grande pollution numérique et des erreurs énormes. Seules

les valeurs de α_2 proches de $\alpha_2^* = 1$ montrent une bonne convergence. Sur la figure de gauche, la pollution numérique n'est pas présente, et un optimum semble se dessiner pour $\alpha \simeq (0.4, 0.4)$ pour notre cas d'étude particulier. On remarque également que la valeur $\alpha_2 = \alpha_2^* = 1$ n'est pas le meilleur choix en terme de précision sur cette figure, alors qu'elle permet de limiter la pollution numérique pour des pas de temps plus grossiers.

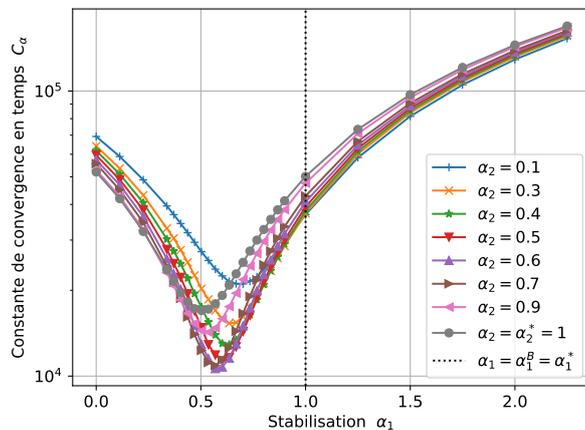


FIGURE 1.25 – Influence de α pour P-SAV.

Le schéma P-SAV possède également une valeur de stabilisation optimale, mais différentes de celle du schéma 2-SAV. Elle est atteinte dans notre cas d'étude pour $\alpha \simeq (0.6, 0.6)$, comme on peut le voir sur la figure 1.25.

Remarque 1.4.2

Il faut noter que les valeurs négatives de α utilisées sur la figure 1.23 sont des situations pour lesquelles l'opérateur A_h défini lors de notre analyse de stabilité 1.3.4 n'est pas positif. La preuve de stabilité ne s'applique donc pas. On observe toutefois, de façon surprenante, que le schéma est stable pour ces valeurs, et il semble donc que la preuve de stabilité présentée puisse être améliorée pour prendre en compte ces situations.

1.4.7.b Influence du θ -schéma

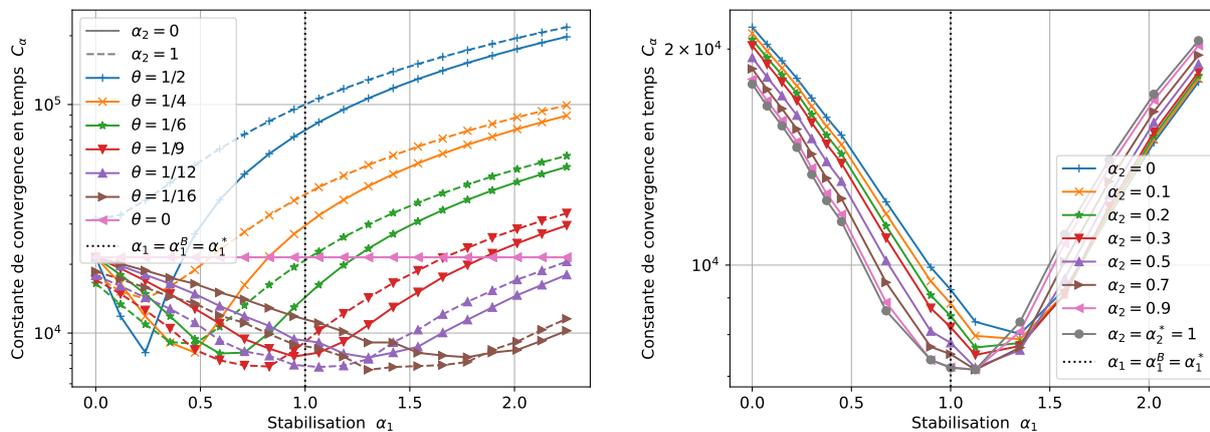


FIGURE 1.26 – Influence de α pour différents θ -schémas (gauche) et pour $\theta = 1/12$ spécifiquement (droite).

La figure 1.26 montre les constantes de convergence en temps C_α pour différentes valeurs de θ et pour différentes valeurs de α . On remarque que la valeur optimale de α évolue avec le choix de θ . Par exemple pour $\theta = 1/12$, on voit que $\alpha_2 = \alpha_2^* = 1$ est un très bon choix alors qu'il était mauvais pour $\theta = 1/4$. La figure 1.26 montre également que le schéma $\theta = 1/12$ donne la meilleure précision pour une valeur $\alpha \simeq \alpha^*$. Aussi, pour $\theta = 0$, la stabilisation n'a aucune influence significative sur la précision temporelle du schéma.

Globalement, α a une influence très forte sur la précision des θ -schémas avec θ grand, et cette influence diminue avec θ .

1.4.7.c Estimation des constantes de Lipschitz

Afin de faire le lien entre les constantes de convergence estimées par les simulations et la preuve de convergence du théorème 1.3.11, nous calculons ici les constantes de Lipschitz de la fonction auxiliaire SAV à partir de simulations et pour différentes valeurs de α . On rappelle l'expression de la constante de Lipschitz

$$C_{g\alpha} = \frac{1}{c - \beta_h} \left[C_{\nabla \mathcal{U}_\alpha} \sup_n \sqrt{2 \int_0^L \mathcal{U}_\alpha(\partial_x q_h^n(x)) dx} + c + \frac{C_{\mathcal{U}_\alpha}}{\sqrt{c - \beta_h}} \sup_n \|\nabla \mathcal{U}_\alpha(\partial_x q_h^n)\|_H \right] \quad (1.4.27)$$

et on peut visualiser l'ensemble des valeurs $\mathcal{I}_{h,2}$ atteintes par les champs discrets $(\partial_x u_c^n, \partial_x v_c^n)$ lors de la simulation sur la figure 1.27.

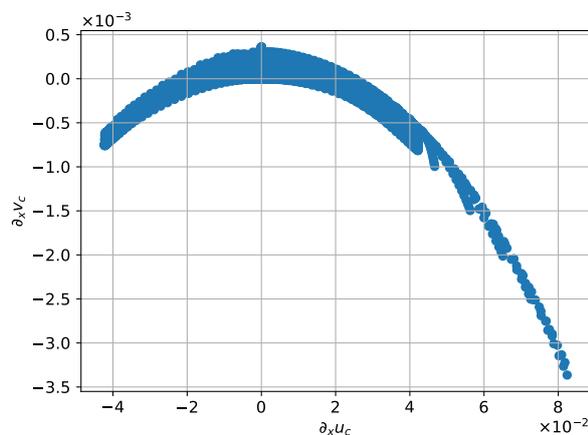


FIGURE 1.27 – Valeurs atteintes par le champ discret $(\partial_x q_h^n)$.

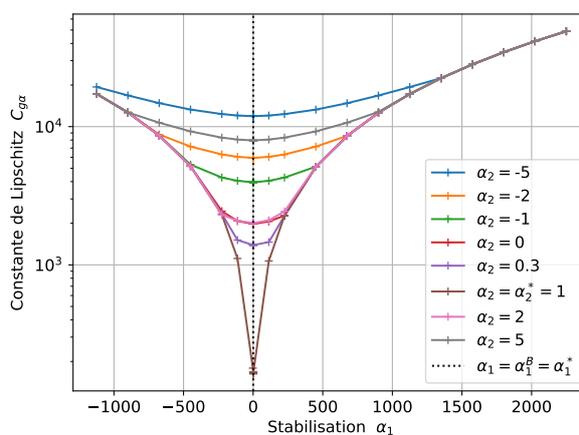


FIGURE 1.28 – Influence de α sur les constantes de Lipschitz pour $\theta = 1/4$.

Les figures 1.28 et 1.29 montrent les constantes de Lipschitz estimées sur des ensembles issus de simulations avec $\theta = 1/4$ en fonction de α . La figure 1.29 gauche montre que la constante de Lipschitz augmente quand α_2 se rapproche de 0. Sur la figure de droite nous normalisons les courbes verticalement pour observer l'influence de α_1 . La valeur optimale qui minimise les constantes de Lipschitz est clairement $\alpha = \alpha^*$.

Or nous avons vu dans les paragraphes précédents que la valeur optimale qui minimise l'erreur de convergence en temps du schéma avec $\theta = 1/4$ n'est pas α^* . De plus, la constante de Lipschitz apparaît dans une exponentielle dans la constante de convergence ce qui, avec les valeurs de la figure 1.29, donnerait des valeurs de constantes de convergence énormes ($\exp(10^3)$). Ce n'est pas ce que nous observons en pratique, ce qui laisse sous-entendre que la preuve de convergence du théorème 1.3.11 n'est pas optimale.

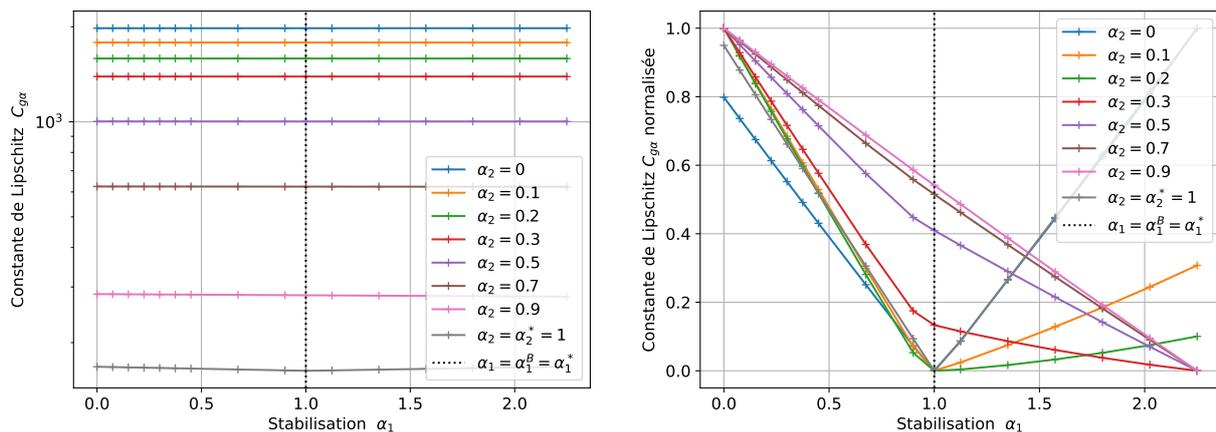


FIGURE 1.29 – Influence de α sur les constantes de Lipschitz pour $\theta = 1/4$. Non normalisée (gauche), normalisée (droite).

1.4.7.d Influence de la constante auxiliaire

Le choix d'une constante auxiliaire c suffisamment grande est nécessaire pour la bonne définition de la variable auxiliaire z , et donc pour le bon fonctionnement du schéma. Ce choix dépend de l'amplitude des oscillations de la solution et de l'intensité du terme source.

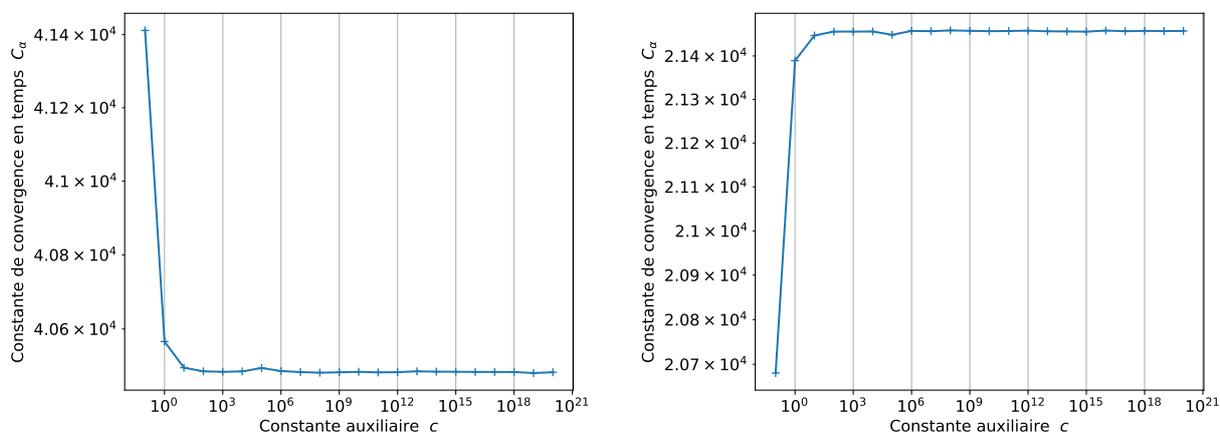


FIGURE 1.30 – Influence de la constante auxiliaire c sur la constante de convergence en temps. $\theta = 1/4$ (gauche), $\theta = 0$ (droite).

En suivant le procédé décrit au paragraphe 1.4.7.a, on trace sur la figure 1.30 la relation entre la constante auxiliaire c et la constante de convergence en temps C_α . Nous ne remarquons pas d'influence significative, et toutes les valeurs suffisamment grandes donnent la même précision. On note pour finir que contrairement au choix de la stabilisation α , le choix de la constante auxiliaire n'est pas crucial et ne cause pas de pollution numérique.

Comme dans le paragraphe précédent avec la stabilisation α , on peut calculer les constantes de Lipschitz associées à chaque valeur de la constante auxiliaire c et représentées sur la figure 1.31. Ici encore, les variations de la constante de Lipschitz n'impactent pas la constante de convergence, ce qui laisse entendre encore une fois que la preuve du théorème de convergence 1.3.10 n'est pas optimale.

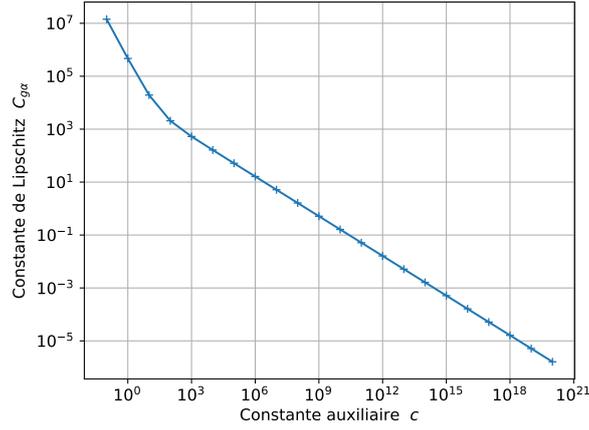


FIGURE 1.31 – Influence de la constante auxiliaire c sur la constante de Lipschitz $C_{g\alpha}$.

1.4.8 Simulations avec amortissement

Pour ce paragraphe nous ajoutons de l'amortissement à la corde et nous traçons des courbes de convergence espace-temps comme au paragraphe 1.4.6. Les valeurs des coefficients sont donnés dans le tableau 1.3.

Amortissement					
R_u [s^{-1}]	R_v [s^{-1}]	R_φ [s^{-1}]	η_u [s]	η_v [s]	η_φ [s]
0.05	0.25	0.05	7×10^{-9}	7×10^{-9}	7×10^{-9}

TABLE 1.3 – Coefficients d'amortissement utilisés pour les simulations.

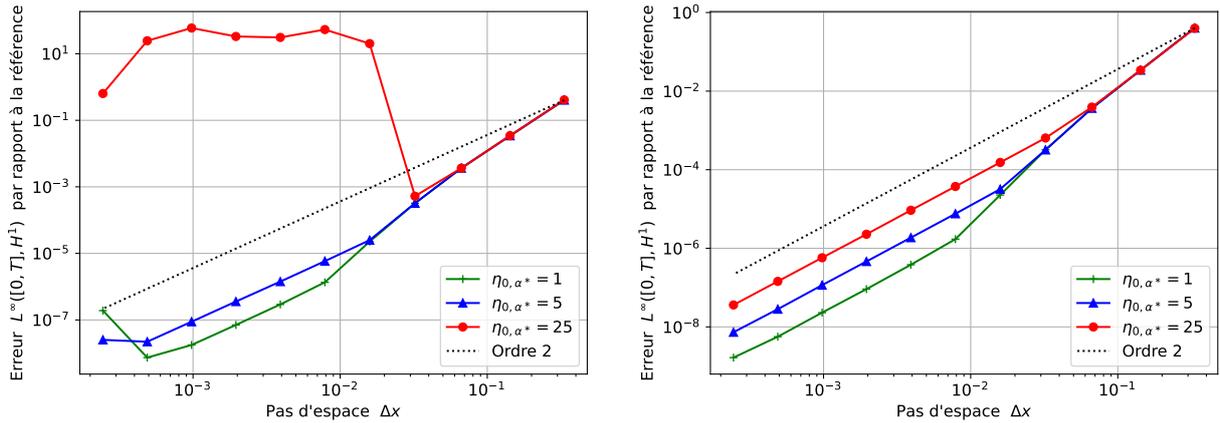


FIGURE 1.32 – Convergence espace-temps avec amortissement de 2-SAV pour $\theta = 1/4$ (gauche) et P-SAV (droite).

La figure 1.32 montre des courbes de convergence espace-temps des schémas 2-SAV (avec $\theta = 1/4$) et P-SAV. Contrairement aux courbes données au paragraphe 1.4.6, la pollution numérique est ici fortement réduite pour le schéma P-SAV pour les valeurs de η explorées. Elle n'apparaît par contre pas significativement réduite pour le schéma 2-SAV.

1.4.9 Recommandations d'utilisation des schémas quadratisés

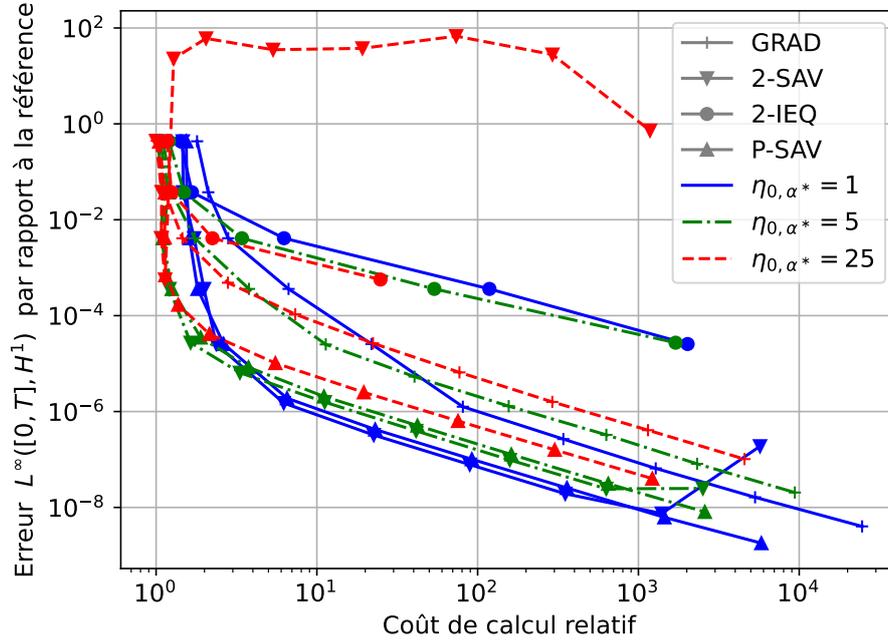


FIGURE 1.33 – Précision des schémas en fonction du coût de calcul pour $\theta = 1/4$ avec amortissement.

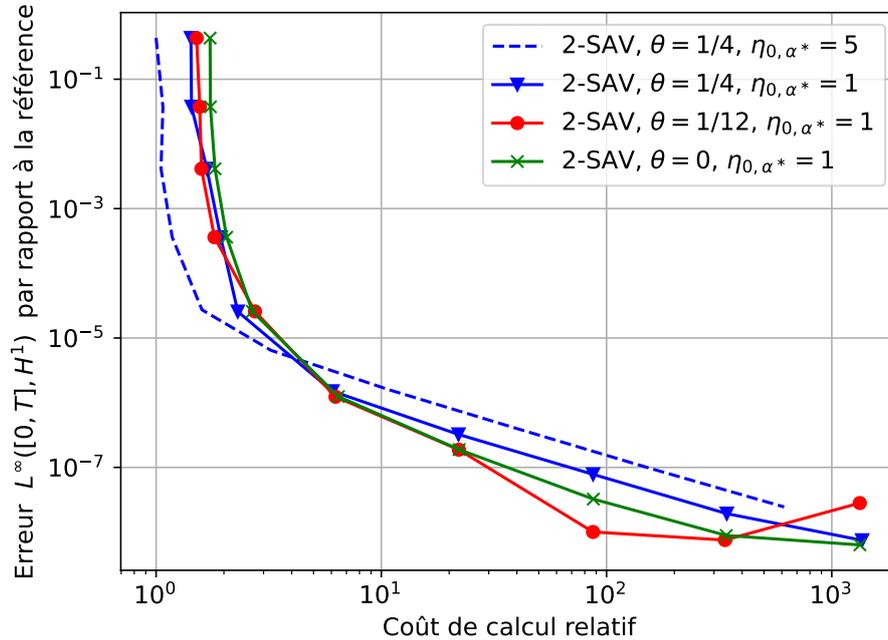


FIGURE 1.34 – Précision des schémas en fonction du coût de calcul pour différents θ -schémas, et avec amortissement.

Les figures 1.33 et 1.34 tracent les erreurs commises, avec amortissement et une stabilisation $\alpha = \alpha^*$, par différents schémas en fonction du temps de calcul nécessaire, relativement à la simulation la moins coûteuse. Les discrétisations en espace utilisées sont celles des courbes de convergence

de la figure 1.32. Tous les schémas représentés sont inconditionnellement stables et le ratio de discrétisation espace-temps η est défini par

$$\eta_{0,\alpha^*} = \frac{1}{4} \Delta t^2 \rho \left(M_h^{-1} K_{h,\alpha^*} \right) \quad (1.4.28)$$

La méthode IEQ est à exclure car elle demande des coûts de calcul très grands pour arriver à des précisions équivalentes à celles des méthodes SAV.

Les schémas 2-SAV et P-SAV résolus par la formule de Sherman-Morrison ont une précision similaire et sont, à précisions égales, en moyenne 10 fois plus rapides que le schéma de gradient discret GRAD résolu par une méthode de quasi-Newton. Ils montrent cependant des problèmes de convergence lorsque les paramètres de discrétisation sont mal ajustés (voir paragraphe 1.4.7) ou lorsque le pas de temps n'est pas assez fin par rapport au pas d'espace ($\eta_{\theta,\alpha}$ trop grand).

Le choix d'un schéma par rapport à un autre dépend alors de l'utilisation que l'on souhaite en faire.

Si la priorité est donnée à l'efficacité, pour des objectifs de synthèse sonore en temps réel par exemple, mieux vaut choisir le schéma 2-SAV avec $\theta = 1/4$ ou P-SAV avec un coefficient $\eta_{\theta,\alpha}$ plutôt grand, sans toutefois risquer d'atteindre le seuil de pollution numérique, car alors la figure 1.33 montre que le temps de calcul est faible et augmente peu pour une erreur qui diminue très rapidement. Avec ce ratio $\eta_{\theta,\alpha}$ élevé, les pas de temps sont plutôt grands et il est préférable d'utiliser une stabilisation qui limite au maximum le risque de pollution (voir paragraphe 1.4.7.a). L'utilisation d'un modèle amorti limite également fortement le risque de pollution pour le schéma P-SAV pour les valeurs de $\eta_{\theta,\alpha}$ élevées. Il est alors préférable d'utiliser ce schéma.

Si la priorité est donnée à la précision, nous suggérons plutôt l'utilisation du schéma 2-SAV avec $\theta = 1/12$ et $\alpha = \alpha^*$ qui donne la meilleure précision. Nous avons vu au paragraphe 1.4.6.b que l'utilisation d'un tel schéma à la limite de validité de la CFL ($\eta_{\theta,\alpha^*} = 1$) était un choix risqué suivant l'amplitude de la source appliquée, et qu'il était préférable d'utiliser une valeur de η plus faible pour assurer la non pollution des solutions, typiquement $\eta_{0,\alpha^*} = 1$ pour lequel aucune pollution n'est jamais visible. Nous avons toutefois remarqué au paragraphe 1.4.4 une forte accumulation d'erreurs d'arrondis numériques pour le schéma 2-SAV qui ne sont pas présentes pour P-SAV. Elles sont encore une fois nettement visibles sur les figures 1.33 et 1.34. Pour cette raison, il nous semble que pour des simulations dissipatives qui réduisent fortement l'occurrence des phénomènes de pollution numérique, et pour atteindre des bonnes précisions, le schéma P-SAV soit préférable. Il serait intéressant, dans cette perspective, de développer une extension du schéma P-SAV avec des θ -schémas pour disposer d'un compromis entre stabilité et précision.

Dans le cas de couplages avec d'autres systèmes, typiquement une table d'harmonie (chapitre 2), un marteau flexible ou encore un modèle de frottement marteau-corde non-linéaire (chapitre 3), l'utilisation d'une formule du type Sherman-Morrison-Woodbury est complexe à mettre en place car elle nécessite l'élimination d'un très grand nombre de variables par des compléments de Schur, ou tout bonnement impossible si le schéma couplé est non-linéairement implicite. Dans ce cas, le système doit être inversé directement et l'utilisation du ($\theta = 0$)-schéma permet de creuser au maximum la matrice à inverser. Cela peut donc constituer un compromis intéressant en termes d'efficacité et de précision, à étudier au cas par cas des couplages considérés.

Pour une utilisation sans risque de pollution numérique, nous recommandons l'utilisation du schéma 2-SAV avec θ quelconque, mais en imposant toujours le ratio CFL du ($\theta = 0$)-schéma, et avec $\alpha = \alpha^*$. Aucune pollution numérique, que ce soit avec ou sans amortissement, n'a été observée pour ces choix de paramètres de discrétisation. Pour contrer l'accumulation des erreurs d'arrondis, l'utilisation d'une précision machine supplémentaire, 'long double' par exemple, doit être envisagée.

1.5 Conclusion du chapitre 1 et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons présenté et étudié des techniques de quadratisation pour les modèles de corde non-linéaires. Les techniques les plus couramment utilisées, IEQ et SAV, ont permis d'écrire plusieurs schémas linéairement implicites très différents les uns des autres, mais qui tous préservent un équivalent discret du bilan de puissance vérifié par les équations continues.

Les schémas 2-IEQ et 2-SAV sont obtenus en utilisant directement la formulation à l'ordre 2 des équations d'ondes. La partie linéaire est traitée par un θ -schéma stable sous condition CFL, mais la technique de quadratisation appliquée à la partie non-linéaire n'introduit pas de condition de stabilité supplémentaire. Le schéma 2-IEQ ajoute un très grand nombre de degrés de liberté au système. Pour cette raison, il est beaucoup plus lent que les méthodes de gradient discret qui sont résolues par des algorithmes itératifs, et n'a donc que peu d'intérêt. La technique de Variable Auxiliaire Scalaire (SAV) et les schémas 2-SAV et P-SAV qui en découlent sont par contre très avantageux en termes de complexité algorithmique, notamment grâce aux méthodes de résolution qui utilisent la formule de Sherman-Morrison.

Bien que très attractives, les méthodes de quadratisation sont assez peu étudiées mathématiquement. Les schémas 2-IEQ et 2-SAV présentés dans ce chapitre n'avaient, à notre connaissance, jamais été analysés auparavant. Après une première partie dans laquelle nous avons écrit les différents schémas pour le modèle de corde de piano, nous avons donc consacré une partie à leur étude théorique sur une équation d'ondes générique. Cette équation présente un terme non-linéaire de type 1, F_1 , qui prend en argument le champ solution non dérivé en espace, et un autre de type 2, F_2 , qui prend en argument le gradient du champ solution. Nous avons prouvé la stabilité des deux schémas 2-IEQ et 2-SAV lorsque la condition CFL du θ -schéma est vérifiée, étudié la consistance des schémas, puis nous avons démontré leur convergence à l'ordre 2 pour des termes non-linéaires de type 1. Pour des termes de type 2, la preuve proposée ne se généralise pas. Une inégalité inverse d'équivalence des normes L^2 et H^1 dans l'espace d'approximation discret de dimension finie, divergente quand le pas d'espace $h \rightarrow 0$, permet cependant d'aboutir à une preuve de convergence en temps.

Nous avons ensuite présenté des résultats numériques pour la corde de piano géométriquement exacte qui présente un terme non-linéaire de type 2. Nous avons étudié la régularité de la fonctionnelle non-linéaire, notamment son caractère localement Lipschitzien qui est requis dans les preuves de convergence. Conformément à la preuve développée, la convergence en temps des schémas est bien d'ordre 2. Le schéma 2-SAV montre cependant une grande accumulation d'erreurs numériques pour des discrétisations temporelles fines que nous n'observons pas pour le schéma P-SAV, ce qui constitue un avantage de ce dernier.

L'étude de convergence espace-temps qui a suivi a fait apparaître de très fortes pollutions numériques lorsque le pas de temps est choisi trop grand par rapport au pas d'espace, et ce y compris pour des schémas inconditionnellement stables. Nous ne sommes pas encore en mesure d'expliquer l'origine de cette pollution, tout comme nous ne savons pas si les schémas sont simplement non convergents en espace-temps, ou si une condition supplémentaire est requise pour assurer leur convergence. Le travail de [Makridakis, 1993] présente des idées intéressantes dans cette perspective. Une étude des constantes de convergence a ensuite permis de déterminer des choix de paramètres de discrétisation optimaux qui maximisent la précision des schémas et/ou minimisent la pollution numérique. Des valeurs optimales se dégagent mais ne semblent pas être en relation avec la constante de convergence théorique obtenue, ce qui sous-entend peut-être que notre preuve de convergence n'est pas optimale et nécessiterait une finesse supplémentaire pour expliquer l'influence des différents paramètres de discrétisation. L'exploration de nouvelles techniques de preuve est laissée pour des études futures. Nous avons également supposé dans ce travail la convergence de la méthode d'éléments finis, c'est-à-dire la convergence de la solution semi-discrète vers la solution exacte du problème non-linéaire. Il serait souhaitable de démontrer cette convergence avec des

hypothèses minimales afin d'aboutir à une preuve de convergence espace-temps complète pour les termes non-linéaires de type 1.

Enfin, nous avons montré que l'ajout d'amortissement dans le modèle de corde permet de limiter fortement la pollution numérique pour le schéma P-SAV, qui devient alors le schéma quadratisé le plus polyvalent en termes de stabilité, précision, et rapidité d'exécution. Il permet en effet d'accélérer significativement les simulations, d'un facteur 10 en moyenne, par rapport à un schéma de gradient discret résolu par un algorithme itératif. Il limite également les erreurs d'arrondis numériques, ce qui n'est pas le cas du schéma 2-SAV.

CHAPITRE 2

Mouvements du chevalet Précurseurs longitudinaux

Bien que les cordes soient les éléments qui produisent le son par leurs vibrations, un piano, tout comme l'ensemble des instruments à cordes, serait inaudible sans une table d'harmonie, car la surface de contact des cordes avec l'air ambiant est trop faible.

Une table d'harmonie est une plaque en bois fine qui permet de relayer les vibrations des cordes et de les transmettre à l'air ambiant avec une surface beaucoup plus importante et donc une puissance bien supérieure. Le choix des bois qui composent les tables d'harmonie, leur croissance, découpe, séchage, etc, fait partie du savoir faire des facteurs d'instruments et contribue grandement au son produit [Wegst, 2006], [Bucur, 2006].

Pour transmettre les vibrations des cordes à la table d'harmonie, il faut un élément qui réalise un pont acoustique entre elles. C'est l'objectif du chevalet, appelé *bridge* (pont) en anglais.

Il s'agit d'une poutre en bois, habituellement d'une hauteur variable entre 20 et 60 millimètres de hauteur, collée sur la table d'harmonie et sur laquelle les cordes sont entrelacées. Les facteurs de pianos apportent une attention toute particulière aux réglages et à la fabrication du chevalet, car il a une influence considérable sur le son. Par ses années d'évolutions, c'est l'un des mécanismes les plus complexes du piano, comme en témoignent par exemple les fixations en zig-zag des cordes à sa surface.

Si les chevalets étaient à l'origine constitués d'une unique pièce, ils sont aujourd'hui majoritairement laminés et constitués d'assemblages de bois.

Cela permet plus de flexibilité dans le choix des essences, et réduit également les risques de fissures. Certains chevalets sont même percés afin de réduire leur masse et augmenter leur mobilité.

La grande majorité des pianos modernes possèdent deux chevalet distincts pour les cordes graves et les cordes aiguës. Ceci résulte d'un compromis visant à maximiser la longueur des cordes tout en conservant leurs points d'attache aussi éloigné que possible des bords fixes de la table d'harmonie pour un rendu sonore optimal. En effet, de la même façon que sur un tambour, une frappe proche



FIGURE 2.1 – Un chevalet de piano.

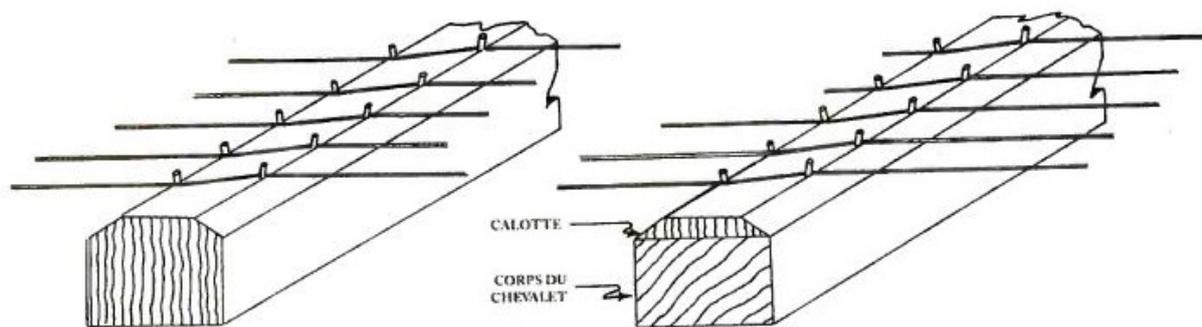
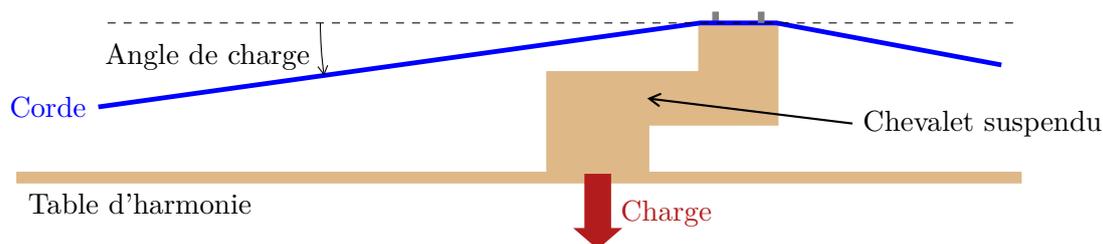


FIGURE 2.2 – Différents types de chevalets. D'un seul bloc avec fibres verticales (gauche), calotté à fibres diagonales (droite). [Reblitz, 2005].

du bord fixe émet beaucoup moins de son qu'une frappe centrée.

Pour optimiser encore ce point d'accroche en relation avec la longueur des cordes, de nombreux pianos actuels ont un chevalet grave "suspendu" (*cantilever bridge*) qui permet de se rapprocher du centre de la table.

Enfin, le *downbearing*, c'est-à-dire la charge exercée par les cordes sur la table d'harmonie à travers le chevalet, est certainement l'un des réglages des facteurs le plus important et le plus sensible. Pour obtenir une transmission optimale du son, il ne faut ni une trop grande pression qui étoufferait les vibrations, ni une pression trop faible qui ne transmettrait que trop peu d'ondes.



En pratique, cette charge s'ajuste en réglant l'angle des cordes avec l'horizontale appelé angle de charge. Pour un angle nul, la corde n'exerce aucune pression sur la table, elle ne transmet que très peu de vibrations. Plus l'angle augmente, plus la force exercée sur le chevalet augmente et plus le risque d'étouffer le son est grand [Reblitz, 2005].

L'objectif de notre étude n'est pas de reproduire exactement toutes les complexités présentes à cet endroit de l'instrument, mais bien de modéliser un comportement mécanique qui permette de rendre compte de la transmission des ondes, et tout particulièrement des ondes longitudinales.

Des études expérimentales ont été menées dans [Conklin, 1996] et [Giordano, 1998] et identifient deux pistes pour expliquer la transmission des ondes longitudinales via le chevalet : l'angle de charge et/ou un mouvement de rotation et torsion du chevalet.

Des modèles de chevalet existent d'ores et déjà dans la littérature et peuvent permettre de tester certaines de ces hypothèses. [Cuenca et Caussé, 2007] modélisent la transmission de l'onde transversale d'une corde linéaire de type Euler-Bernoulli à une table d'harmonie. [Tan, 2017] modélise l'interaction d'une corde non-linéaire doublement polarisée avec un chevalet mobile dans toutes les directions de l'espace, mais ne permet pas de couplage à une table d'harmonie. [Chabassier, 2012] couple les vibrations transversales et longitudinales d'une corde non-linéaire à un chevalet mobile perpendiculairement à la table d'harmonie, avec un angle de charge. L'auteure remarque que les ondes longitudinales sont présentes, mais largement sous-estimées si l'angle correspond à

celui d'un instrument réel. Pour observer une transmission correcte, l'angle doit être surévalué et ne correspond plus à une configuration possible sur un piano, ce qui sous-entend qu'un autre mécanisme doit permettre de transmettre des ondes longitudinales.

Toutefois, aucun modèle à l'heure actuelle ne permet de prendre en compte les mouvements en rotation ou torsion d'un chevalet couplé à une table d'harmonie, ni l'effet de ces mobilités sur la transmission des ondes longitudinales.

Dans [Podlesak et Lee, 1988], les auteurs réalisent l'expérience suivante. Un accéléromètre est placé sur le chevalet pour mesurer sa mobilité perpendiculairement à la table d'harmonie, et un microphone est placé dans la pièce pour enregistrer le son. Ils observent que le microphone (signal du bas sur la figure 2.3) détecte un signal sonore avant même que l'accéléromètre ne détecte la présence d'une onde au niveau du chevalet (signal de haut sur la figure 2.3). Il confirment ainsi qu'une onde longitudinale, de vitesse de propagation plus rapide que l'onde transversale, se propage dans la corde et forme un *précurseur longitudinal*. Nous souhaitons que notre modèle permette de représenter fidèlement la présence de ce précurseur.

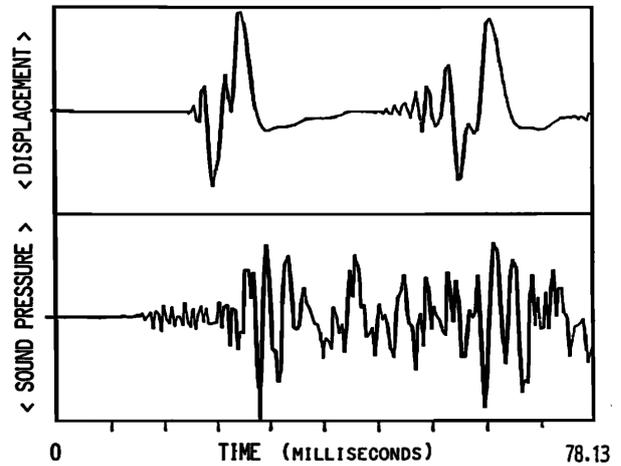


FIGURE 2.3 – Mesures de [Podlesak et Lee, 1988].

Dans cette partie, nous présentons donc un modèle de transmission des ondes entre les cordes et une table d'harmonie modélisée comme une plaque vibrante de Reissner-Mindlin [Reissner, 1945] avec une prise en compte des mouvements spatiaux principaux du chevalet. En particulier, nous ajoutons au modèle présenté dans [Chabassier, 2012] les mouvements de rotation du chevalet et leur couplage avec les composantes de cisaillement de la table. Le modèle ainsi que son équivalent discret préservent encore une fois ici des bilans d'énergie pour assurer la stabilité numérique du couplage. Nous montrons enfin que ces raffinements permettent de transmettre les ondes longitudinales et d'observer des précurseurs longitudinaux avec des angles de charge réalistes.

Une partie des résultats de ce chapitre est issue des travaux effectués pendant la période d'encadrement du stage de master de Brad WAGJO.

Sommaire

2.1	La table d'harmonie comme une plaque de Reissner-Mindlin	84
2.1.1	Modèle de Reissner-Mindlin	85
2.1.2	Décomposition modale	86
2.1.3	Formulation variationnelle et énergie	87
2.2	Modèle de chevalet mobile dans l'espace	87
2.2.1	Expression des forces de couplage	89
2.2.2	Formulation variationnelle et énergie	90
2.2.3	Choix de fonction de répartition χ_Ω	93
2.3	Discrétisation du modèle couplé corde - table d'harmonie	93
2.3.1	Schéma numérique pour la table d'harmonie	94
2.3.1.a	Discrétisation en espace - Méthode modale	94
2.3.1.b	Schéma de résolution analytique en temps	95
2.3.2	Schéma numérique pour le modèle couplé	96
2.3.3	Algorithme de résolution	98
2.3.4	Résultats numériques	100
2.3.4.a	Calcul des modes	101
2.3.4.b	Préservation numérique du bilan d'énergie	104
2.3.4.c	Convergence en temps	104
2.4	Précurseurs et transmissions longitudinales	105
2.4.1	Note Ré ₁ [#]	106
2.4.2	Note Fa ₃	108
2.4.3	Note Do ₅ [#]	109
2.4.4	Synthèse	111
2.5	Influence de l'orientation des cordes par rapport à la table	111
2.5.1	Admittance du chevalet - Mobilité fréquentielle	112
2.5.2	Puissance transmise à la table d'harmonie	112
2.5.3	Réponse impulsionnelle transversale	113
2.5.4	Réponse impulsionnelle longitudinale	114
2.6	Conclusion du chapitre 2 et pistes d'améliorations	115

2.1 La table d'harmonie comme une plaque de Reissner-Mindlin

La table d'harmonie des pianos est assez fine, habituellement 6 à 10 millimètres d'épaisseur. Par conséquent l'une des trois dimensions (l'épaisseur) est très petite devant les deux autres (longueur et largeur) qui peuvent mesurer plusieurs mètres sur les grands pianos de concert.

C'est ce constat qui mène [Chabassier, 2012] à considérer un modèle réduit des équations de l'élastodynamique linéaire 3D et à modéliser la table d'harmonie non pas comme un solide à trois dimensions mais comme une plaque à seulement deux dimensions. Parmi les modèles de plaques existants figurent les modèles de Kirchoff Love, adapté pour des plaques minces et qui peut s'apparenter au modèle de d'Alembert pour une corde à une dimension, et celui de Reissner-Mindlin pour des plaques plus épaisses et plus raides, dont l'équivalent à une dimension serait le modèle de Timoshenko.

2.1.1 Modèle de Reissner-Mindlin

Par continuité avec le travail de [Chabassier, 2012] nous utilisons et décrivons dans la suite le modèle de Reissner-Mindlin détaillé dans [Grob, 2006] pour lequel trois équations décrivent un mouvement membranaire d'élévation de la plaque u_p et deux mouvements de cisaillement décrits par deux angles $\underline{\theta}_p = {}^t(\theta_p^1, \theta_p^2)$ sur un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

δ est l'épaisseur de la plaque, ρ la densité, E_x et E_y les modules de Young, G_{xy} , G_{xz} et G_{yz} les modules de cisaillement, $\underline{\kappa}$ le coefficient de correction de cisaillement, ν le coefficient de Poisson et ε le tenseur des déformations linéarisé. z désigne ici la direction perpendiculaire à la plaque.

Nous commençons ici par écrire des conditions limites d'encastrement de la plaque, c'est-à-dire des conditions de Dirichlet.

Modèle 2.1.1 (Reissner-Mindlin)

On cherche $(u_p, \underline{\theta}_p) : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{cases} \rho \delta \partial_t^2 u_p - \delta \operatorname{div}(\underline{\kappa}^2 \cdot \underline{G} \cdot (\nabla u_p + \underline{\theta}_p)) = f & (2.1.1a) \\ \rho \frac{\delta^3}{12} \partial_t^2 \underline{\theta}_p - \frac{\delta^3}{12} \operatorname{Div}(\mathbb{C} \varepsilon(\underline{\theta}_p)) + \delta \underline{\kappa}^2 \cdot \underline{G} \cdot (\nabla u_p + \underline{\theta}_p) = \underline{\mu} & (2.1.1b) \\ u_p = \underline{\theta}_p = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (\text{Encastrement}) & (2.1.1c) \end{cases}$$

où pour tout tenseur de déformation symétrique ε

$$\mathbb{C} \varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & -\frac{E_y\nu_{xy}}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ \frac{E_x\nu_{yx}}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ 0 & 0 & 2G_{xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}, \quad \underline{G} = \begin{pmatrix} G_{xz} \\ G_{yz} \end{pmatrix}, \quad \underline{\kappa}^2 = \begin{pmatrix} \kappa_x^2 \\ \kappa_y^2 \end{pmatrix}$$

f et $\underline{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ sont respectivement les termes source en flexion et en cisaillement.

Pour condenser les écritures, nous réécrivons ce système sous la forme matricielle suivante

$$\begin{cases} \mathcal{M}\ddot{\Lambda}_p + \mathcal{R}\Lambda_p = F_p & \text{dans } \Omega & (2.1.2a) \\ \Lambda_p = 0 & \text{sur } \partial\Omega & (2.1.2b) \end{cases}$$

où

$$\Lambda_p = \begin{pmatrix} u_p \\ \underline{\theta}_p \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} \rho\delta & 0 \\ 0 & \rho\frac{\delta^3}{12} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R} = \begin{pmatrix} \mathcal{B} & \mathcal{C}^* \\ \mathcal{C} & \mathcal{A} \end{pmatrix}, \quad F_p = \begin{pmatrix} f \\ \underline{\mu} \end{pmatrix} \quad (2.1.3)$$

et les opérateurs \mathcal{A} , \mathcal{B} et \mathcal{C} sont définis par

$$\begin{cases} \mathcal{A}\underline{\theta} = -\frac{\delta^3}{12}\text{Div}(\mathbb{C}\varepsilon(\underline{\theta})) + \delta\underline{\kappa}^2 \cdot \underline{G} \cdot \underline{\theta} & (2.1.4a) \\ \mathcal{B}u = -\delta \text{div}(\underline{\kappa}^2 \cdot \underline{G} \cdot \nabla u) & (2.1.4b) \\ \mathcal{C}u = \delta \underline{\kappa}^2 \cdot \underline{G} \cdot \nabla u & (2.1.4c) \\ \mathcal{C}^*\underline{\theta} = -\delta \underline{\kappa}^2 \cdot \underline{G} \cdot \text{div } \underline{\theta} & (2.1.4d) \end{cases}$$

2.1.2 Décomposition modale

L'opérateur \mathcal{R} qui fait intervenir les dérivées de second ordre en espace est auto-adjoint et peut par conséquent être diagonalisé.

Notons $D_{\mathcal{R}} = \{ \Lambda_p \in (H^1(\Omega))^3 \mid \mathcal{R}\Lambda_p \in L^2(\Omega)^3 \}$ le domaine de cet opérateur \mathcal{R} .

Comme détaillé dans [Chabassier, 2012, p. 80], le théorème spectral assure qu'il existe une suite orthonormée $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $D_{\mathcal{R}}$ qui forme une base Hilbertienne de $(L^2(\Omega))^3$ et une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels positifs qui tend vers $+\infty$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{R}w_n = \lambda_n \mathcal{M}w_n \quad (2.1.5)$$

La solution Λ_p et le terme source F peuvent alors se décomposer dans la base $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

$$\forall (x, y, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad \begin{cases} \Lambda_p(x, y, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \Lambda_{p,n}(t)w_n(x, y) & (2.1.6a) \\ F_p(x, y, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} F_{p,n}(t)w_n(x, y) & (2.1.6b) \end{cases}$$

ce qui permet de réécrire les équations de Reissner-Mindlin sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires (EDO) découplées vérifiées par les amplitudes modales

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ddot{\Lambda}_{p,n} + \lambda_n \Lambda_{p,n} = F_{p,n} \quad (2.1.7)$$

Cette écriture permet d'ores et déjà d'entrevoir l'intérêt numérique de la décomposition modale. Nous allons utiliser un système tronqué de N_m modes, et la méthode de résolution consistera à déterminer les N_m amplitudes modales de la solution à chaque pas de temps de la simulation.

Nous renvoyons à [Chabassier, 2012, p. 82] pour des explications détaillées sur les phénomènes d'amortissement qui ont lieu dans la table d'harmonie. Précisons simplement que nous utilisons un modèle d'amortissement modal intrinsèque à chaque mode, pour lequel chaque fréquence est atténuée différemment selon un modèle expérimental basé sur des mesures de [Ege, 2009] et [Bucur, 2006]. Il prend la forme $f_{ve}(\lambda) = a\lambda + b\sqrt{\lambda} + c$ et permet de réécrire les équations (2.1.7) avec un facteur d'amortissement viscoélastique

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ddot{\Lambda}_{p,n} + f_{ve}(\lambda_n)\dot{\Lambda}_{p,n} + \lambda_n \Lambda_{p,n} = F_{p,n} \quad (2.1.8)$$

De façon plus globale, nous pouvons définir un opérateur linéaire $f_{ve}(\mathcal{R})$ tel que pour tout mode propre w_n on ait $f_{ve}(\mathcal{R})w_n = f_{ve}(\lambda_n)\mathcal{M}w_n$.

Ceci permet de donner une formulation matricielle amortie du système de Reissner-Mindlin :

Modèle 2.1.2 (Formulation abstraite amortie de Reissner-Mindlin)

On cherche $\Lambda_p : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{cases} \mathcal{M}\ddot{\Lambda}_p + f_{ve}(\mathcal{R})\dot{\Lambda}_p + \mathcal{R}\Lambda_p = F_p & \text{dans } \Omega \\ \Lambda_p = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.1.9a) \\ (2.1.9b) \end{matrix}$$

2.1.3 Formulation variationnelle et énergie

Introduisons l'espace variationnel

$$\mathcal{L}_D = \left\{ \Lambda_p \in \left(H^1(\Omega) \right)^3 \mid \forall k \in \mathcal{J}_D, (\Lambda_p)_k = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

L'ensemble \mathcal{J}_D permet de spécifier quelles composantes sont soumises à des conditions de Dirichlet. Pour des conditions au bord encastées, $\mathcal{J}_D = \{1, 2, 3\}$ et l'espace est simplement $\mathcal{L}_D = (H_0^1(\Omega))^3$. Pour les conditions simplement supportées que nous utiliserons pour les simulations, $\mathcal{J}_D = \{1\}$ ce qui permet de n'imposer la condition de Dirichlet que sur le mouvement d'élevation u_p , les autres composantes de cisaillement étant soumises à des conditions de Neumann.

On cherche donc $\Lambda_p \in \mathcal{L}_D$ tel que pour tout $\Lambda_p^* \in \mathcal{L}_D$

$$\int_{\Omega} \mathcal{M}\ddot{\Lambda}_p \cdot \Lambda_p^* + \int_{\Omega} f_{ve}(\mathcal{R})\dot{\Lambda}_p \cdot \Lambda_p^* + \int_{\Omega} \mathcal{R}\Lambda_p \cdot \Lambda_p^* = \int_{\Omega} F_p \cdot \Lambda_p^* \quad (2.1.10)$$

Conformément au paragraphe précédent, tous les modes $(\lambda_n, w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifient au niveau variationnel

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall \Lambda_p^* \in \mathcal{L}_D, \quad \int_{\Omega} \mathcal{R}w_n \cdot \Lambda_p^* = \lambda_n \int_{\Omega} \mathcal{M}w_n \cdot \Lambda_p^* \quad (2.1.11)$$

Théorème 2.1.1 (Bilan de puissance du système de Reissner-Mindlin amorti)

Toute solution suffisamment régulière $\Lambda_p \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathcal{L}_D) \cap \mathcal{C}^2([0, T], L^2([0, L])^3)$ du système de Reissner-Mindlin amorti 2.1.2 vérifie

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{E}_p}{dt} = \int_{\Omega} F_p \cdot \dot{\Lambda}_p - \left\| \dot{\Lambda}_p \right\|_{f_{ve}(\mathcal{R})}^2 & (2.1.12a) \\ \mathcal{E}_p(t) = \frac{1}{2} \left\| \dot{\Lambda}_p \right\|_{\mathcal{M}}^2 + \frac{1}{2} \left\| \Lambda_p \right\|_{\mathcal{R}}^2 & (2.1.12b) \end{cases}$$

Démonstration. On utilise $\Lambda_p^* = \dot{\Lambda}_p \in \mathcal{L}_D$ dans la formulation variationnelle (2.1.10), le résultat en découle directement.

L'existence d'une solution $\Lambda_p \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathcal{L}_D) \cap \mathcal{C}^2([0, T], L^2(\Omega)^3)$ découle de l'application du théorème de Hille-Yosida au système de Reissner-Mindlin. La démonstration complète est donnée dans [Grob, 2006]. \square

2.2 Modèle de chevalet mobile dans l'espace

Dans [Chabassier, 2012], le choix a été fait de ne modéliser que le mouvement vertical du chevalet (direction \vec{v}) avec un angle de charge α .

Les résultats des simulations montrent cependant une grande sous-représentation des modes longitudinaux dans le son produit avec une telle modélisation.

Nous proposons donc dans la suite un modèle qui rend le chevalet mobile autour de son point de contact C avec la table. En ce point, les moments des forces exercées par les cordes sont transmis aux directions de cisaillement θ_p^1 et θ_p^2 du modèle de Reissner-Mindlin. En effet, le chevalet en rouge sur la figure 2.4 qui a une hauteur ℓ typiquement comprise entre 38 et 64 millimètres, agit comme un bras de levier pour ces forces. Pour notre modélisation, on suppose que le chevalet n'a pas de déformation, donc pas d'énergie, et n'en dissipe pas non plus. Il s'agit simplement d'un corps rigide qui agit comme une condition de couplage entre la corde et la table d'harmonie.

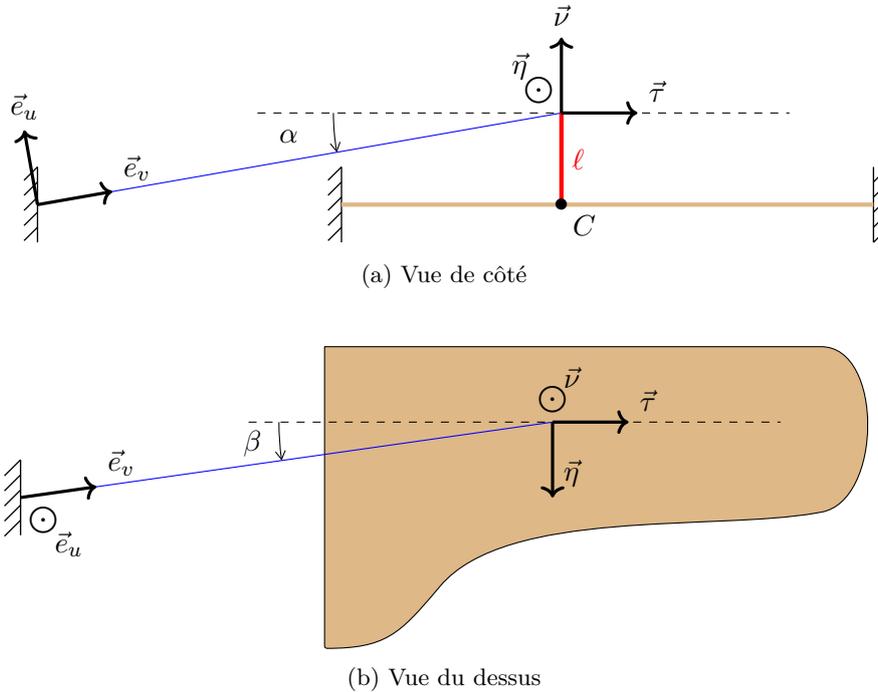


FIGURE 2.4 – Schéma du couplage corde - chevalet - table d'harmonie

Le repère $(\vec{\eta}, \vec{\tau}, \vec{v})$ est un repère cartésien associé à la table d'harmonie. Par conséquent, un déplacement imposé au chevalet dans la direction $\vec{\tau}$ se transmet purement à l'angle de cisaillement θ_1 , tandis qu'un déplacement sur $\vec{\eta}$ se transmet purement à θ_2 .

Nous ajoutons donc un angle latéral β qui permet de prendre en compte le décalage éventuel entre la direction des cordes et les directions privilégiées du bois définies par le tenseur des contraintes \mathbb{C} du modèle 2.1.1 et la présence de raidisseurs.

Ces deux angles α et β qui orientent la corde par rapport au plan de la table d'harmonie sont tels que

$$\begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{\tau} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) \cos(\beta) & \cos(\alpha) \cos(\beta) \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) & -\cos(\alpha) \sin(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_u \\ \vec{e}_v \end{pmatrix} \quad (2.2.1)$$

2.2.1 Expression des forces de couplage

Notons maintenant F^P , G^P et H^P les projections de la force exercée par les cordes sur le chevalet dans les trois directions de l'espace $(\vec{\nu}, \vec{\tau}, \vec{\eta})$.

Elles sont prises en compte dans le second membre des équations de Reissner-Mindlin (2.1.2) et réparties sur la table par une fonction de répartition χ_Ω :

$$\mathcal{M}\ddot{\Lambda}_p + f_{ve}(\mathcal{R})\dot{\Lambda}_p + \mathcal{R}\Lambda_p = F_p = \begin{pmatrix} -F^P(t)\chi_\Omega(x, y) \\ -\ell G^P(t)\chi_\Omega(x, y) \\ -\ell H^P(t)\chi_\Omega(x, y) \end{pmatrix} \quad (2.2.2)$$

Afin de garantir la stabilité des couplages, nous imposons une conservation exacte de l'énergie : le travail transmis par les cordes doit être égale à celui injectée dans la table. Ceci s'écrit d'après les théorèmes 1.1.1 et 2.1.1

$$T_L \cdot \dot{q}(x = L, t) + \int_\Omega F_p \cdot \dot{\Lambda}_p = 0 \quad (2.2.3)$$

où le terme de tension est $T_L = [A\partial_x q + Bq + \nabla\mathcal{U}(\partial_x q) + H\partial_x \dot{q}](x = L, t)$

Ceci est respecté si on impose la continuité des vitesses au niveau du chevalet, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \dot{q}(L, t) \cdot \nu_c = \int_\Omega \dot{u}_p \chi_\Omega & (2.2.4a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{q}(L, t) \cdot \tau_c = \ell \int_\Omega \dot{\theta}_p^1 \chi_\Omega & (2.2.4b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{q}(L, t) \cdot \eta_c = \ell \int_\Omega \dot{\theta}_p^2 \chi_\Omega & (2.2.4c) \end{cases}$$

où l'on a noté ν_c , τ_c et η_c les vecteurs qui permettent de sélectionner dans l'inconnue de corde les composantes qui ont une signification de position physique. Par exemple, pour le système de Timoshenko, nous avons

$$\dot{q}(L, t) \cdot \nu_c = \begin{pmatrix} \dot{u}_c(L, t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{\nu} \quad (2.2.5)$$

La composante de cisaillement φ_c , sans dimension physique, qui n'intervient pas dans le calcul de la vitesse du point extrémité, n'a pas de projection dans cette base. Pour le modèle géométriquement exact nous avons

$$\dot{q}(L, t) \cdot \nu_c = \begin{pmatrix} \dot{u}_c(L, t) \\ \dot{v}_c(L, t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{\nu} \quad (2.2.6)$$

L'équation de conservation de l'énergie (2.2.3) se réécrit alors

$$T_L \cdot \dot{q}(L, t) = - \int_\Omega F_p \cdot \dot{\Lambda}_p \quad (2.2.7)$$

$$= F^P(t) \int_\Omega \dot{u}_p \chi_\Omega + \ell G^P(t) \int_\Omega \dot{\theta}_p^1 \chi_\Omega + \ell H^P(t) \int_\Omega \dot{\theta}_p^2 \chi_\Omega \quad (2.2.8)$$

$$= [\dot{q}(L, t) \cdot \nu_c] F^P(t) + [\dot{q}(L, t) \cdot \tau_c] G^P(t) + [\dot{q}(L, t) \cdot \eta_c] H^P(t) \quad (2.2.9)$$

Par identification nous obtenons alors l'expression des forces de couplage

$$\begin{cases} F^P(t) = T_L \cdot \nu_c & (2.2.10a) \\ G^P(t) = T_L \cdot \tau_c & (2.2.10b) \\ H^P(t) = T_L \cdot \eta_c & (2.2.10c) \end{cases}$$

Modèle 2.2.1 (Couplage corde - table d'harmonie)

On cherche $q : [0, L] \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ et $\Lambda_p : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Équation de la corde :} \\ \partial_t^2 Mq + \partial_t(Rq - \partial_x(H\partial_x q)) \\ \quad - \partial_x(A\partial_x q + Bq + \nabla\mathcal{U}(\partial_x q)) + Cq + {}^t B\partial_x q = F(x, t) \end{array} \right. \quad (2.2.11a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Conditions limites à l'agrafe et au chevalet :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \forall k \in \mathcal{I}_D, \quad q_k(0, t) = 0 \\ \forall k \in \mathcal{I}_N, \quad \partial_x q_k(0, t) = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{q}(L, t) \cdot \tau_c = \int_{\Omega} \dot{u}_p \chi_{\Omega} \\ \dot{q}(L, t) \cdot \nu_c = \ell \int_{\Omega} \dot{\theta}_p^1 \chi_{\Omega} \\ \dot{q}(L, t) \cdot \eta_c = \ell \int_{\Omega} \dot{\theta}_p^2 \chi_{\Omega} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.2.11b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Forces de couplage exercées sur la table d'harmonie :} \\ \left\{ \begin{array}{l} F^P(t) = T_L \cdot \nu_c \\ G^P(t) = T_L \cdot \tau_c \\ H^P(t) = T_L \cdot \eta_c \end{array} \right. \quad \text{où} \quad T_L = [A\partial_x q + Bq + \nabla\mathcal{U}(\partial_x q) + H\partial_x \dot{q}](L, t) \end{array} \right. \quad (2.2.11c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Équation de la table d'harmonie :} \\ \mathcal{M}\ddot{\Lambda}_p + f_{ve}(\mathcal{R})\dot{\Lambda}_p + \mathcal{R}\Lambda_p = F_p = \begin{pmatrix} -F^P(t)\chi_{\Omega}(x, y) \\ -\ell G^P(t)\chi_{\Omega}(x, y) \\ -\ell H^P(t)\chi_{\Omega}(x, y) \end{pmatrix} \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (2.2.11d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Conditions limites pour la table d'harmonie :} \\ \forall k \in \mathcal{J}_D, (\Lambda_p)_k = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (2.2.11e)$$

Ce modèle autorise maintenant une mobilité du chevalet dans les directions ν_c et η_c ce qui n'était pas le cas dans le travail de [Chabassier, 2012]. Il autorise également un couplage à une table d'harmonie, ce qui n'était pas le cas dans [Tan, 2017]. Le couplage est réalisé en imposant une continuité de vitesses entre l'extrémité de la corde fixée au chevalet et la table d'harmonie, ce qui par la même occasion, comme nous allons le voir au paragraphe suivant, assure une conservation de l'énergie.

2.2.2 Formulation variationnelle et énergie

Commençons par rappeler les espaces variationnels en jeu

$$\mathcal{Q}_D = \left\{ q \in \left(H^1([0, L]) \right)^N \mid \forall k \in \mathcal{I}_D, q_k(0) = 0 \right\} \quad \text{pour la corde}$$

$$\mathcal{L}_D = \left\{ \Lambda_p \in \left(H^1(\Omega) \right)^3 \mid \forall k \in \mathcal{J}_D, (\Lambda_p)_k = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \right\} \quad \text{pour la table}$$

On cherche donc $q : [0, T] \rightarrow \mathcal{Q}_D$, $\Lambda_p : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}_D$ et $F^P, G^P, H^P : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que pour tout $(q^*, \Lambda_p^*) \in \mathcal{Q}_D \times \mathcal{L}_D$ on ait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Équation de la corde :} \\ \int_0^L M \ddot{q} \cdot q^* + \int_0^L R \dot{q} \cdot q^* + \int_0^L H \partial_x \dot{q} \cdot \partial_x q^* + \int_0^L \begin{pmatrix} C & {}^t B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \partial_x q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q^* \\ \partial_x q^* \end{pmatrix} \\ + \int_0^L \nabla \mathcal{U}(\partial_x q) \cdot \partial_x q^* = \int_0^L F \cdot q^* \\ + F^P(t) [q^*(L, t) \cdot \nu_c] + G^P(t) [q^*(L, t) \cdot \tau_c] + H^P(t) [q^*(L, t) \cdot \eta_c] \end{array} \right. \quad (2.2.12a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Équations de couplage :} \\ \dot{q}(L, t) \cdot \nu_c = \int_{\Omega} \dot{u}_p \chi_{\Omega} \\ \dot{q}(L, t) \cdot \tau_c = \ell \int_{\Omega} \dot{\theta}_p^1 \chi_{\Omega} \\ \dot{q}(L, t) \cdot \eta_c = \ell \int_{\Omega} \dot{\theta}_p^2 \chi_{\Omega} \end{array} \right. \quad (2.2.12b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Équation de la table d'harmonie :} \\ \int_{\Omega} \mathcal{M} \ddot{\Lambda}_p \cdot \Lambda_p^* + \int_{\Omega} f_{ve}(\mathcal{R}) \dot{\Lambda}_p \cdot \Lambda_p^* + \int_{\Omega} \mathcal{R} \Lambda_p \cdot \Lambda_p^* = \\ - F^P(t) \int_{\Omega} u_p^* \chi_{\Omega} - G^P(t) \ell \int_{\Omega} \theta_p^{1*} \chi_{\Omega} - H^P(t) \ell \int_{\Omega} \theta_p^{2*} \chi_{\Omega} \end{array} \right. \quad (2.2.12c)$$

Les forces F^P , G^P et H^P sont ici des multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes de couplage dans les trois directions de l'espace.

Remarque 2.2.1

Considérons une corde simplement polarisée dans la direction verticale \vec{e}_u . Si $\beta \equiv 0[\pi]$, il n'y a aucune projection de mouvements dans la direction $\vec{\eta}$ et la troisième équation de couplage dans la direction η_c se résume à $0 = 0$, ce qui conduit à un système mal posé.

Pour pallier ce problème, le multiplicateur H^P ainsi que l'équation de couplage associée sur η_c sont éliminés pour les simulations dans lesquelles $\beta \equiv 0[\pi]$.

Théorème 2.2.1 (Bilan de puissance du système corde - table d'harmonie)

Toute solution suffisamment régulière $q \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathcal{Q}_D) \cap \mathcal{C}^2([0, T], L^2([0, L])^N)$ et $\Lambda_p \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathcal{L}_D) \cap \mathcal{C}^2([0, T], L^2(\Omega)^3)$ du modèle 2.2.1 vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathcal{E}_{c,p}}{dt} = \int_0^L F \cdot \dot{q} - \int_0^L R \dot{q} \cdot \dot{q} - \int_0^L H \partial_x \dot{q} \cdot \partial_x \dot{q} - \|\dot{\Lambda}_p\|_{f_{ve}(\mathcal{R})}^2 \end{array} \right. \quad (2.2.13a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_{c,p}(t) = \mathcal{E}_c(t) + \mathcal{E}_p(t) \end{array} \right. \quad (2.2.13b)$$

où \mathcal{E}_c est l'énergie de la corde définie par le théorème 1.1.1 et \mathcal{E}_p l'énergie de la table définie par le théorème 2.1.1.

Démonstration. Le bilan de puissance de la corde 1.1.1 assure que

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = T_L \cdot \dot{q}(L, t) + \int_0^L F \cdot \dot{q} - \int_0^L R\dot{q} \cdot \dot{q} - \int_0^L H \partial_x \dot{q} \cdot \partial_x \dot{q} \quad (2.2.14)$$

et celui de la table d'harmonie 2.1.1 que

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dt} = \int_{\Omega} F_p \cdot \dot{\Lambda}_p - \left\| \dot{\Lambda}_p \right\|_{f_{ve}(\mathcal{R})}^2 \quad (2.2.15)$$

$$= -F^P(t) \int_{\Omega} \dot{u}_p \chi_{\Omega} - G^P(t) \ell \int_{\Omega} \dot{\theta}_p^1 \chi_{\Omega} - H^P(t) \ell \int_{\Omega} \dot{\theta}_p^2 \chi_{\Omega} - \left\| \dot{\Lambda}_p \right\|_{f_{ve}(\mathcal{R})}^2 \quad (2.2.16)$$

D'après les définitions des forces de couplage (2.2.11d) on a

$$T_L \cdot \dot{q}(L, t) = F^P(t) [\dot{q}(L, t) \cdot \nu_c] + G^P(t) [\dot{q}(L, t) \cdot \tau_c] + H^P(t) [\dot{q}(L, t) \cdot \eta_c] \quad (2.2.17)$$

puis les conditions de couplage (2.2.12b) permettent d'écrire que

$$T_L \cdot \dot{q}(L, t) = F^P(t) \int_{\Omega} \dot{u}_p \chi_{\Omega} + G^P(t) \ell \int_{\Omega} \dot{\theta}_p^1 \chi_{\Omega} + H^P(t) \ell \int_{\Omega} \dot{\theta}_p^2 \chi_{\Omega} \quad (2.2.18)$$

La somme des deux bilans de puissance permet de conclure la démonstrations. Par construction, tous les termes de couplage se simplifient pour garantir un couplage qui transfère exactement l'énergie entre les deux sous-systèmes. \square

2.2.3 Choix de fonction de répartition χ_Ω

La fonction de répartition χ_Ω permet de répartir l'effort exercé par la corde sur la table d'harmonie, et donc de réaliser une conversion d'un effort ponctuel vers un effort surfacique.

Plusieurs choix sont possibles, mais tous doivent vérifier que l'intégrale de χ_Ω vaut 1 sur \mathbb{R}^2 , afin de réaliser une moyenne pondérée.

Dans [Chabassier, 2012], χ_Ω est une fonction Gaussienne définie par

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \chi_\Omega(x, y) = \frac{\gamma}{\pi r_0^2} e^{-\gamma \left(\frac{r}{r_0}\right)^2} \quad \text{où} \quad r = \left\| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\|_2 \quad (2.2.19)$$

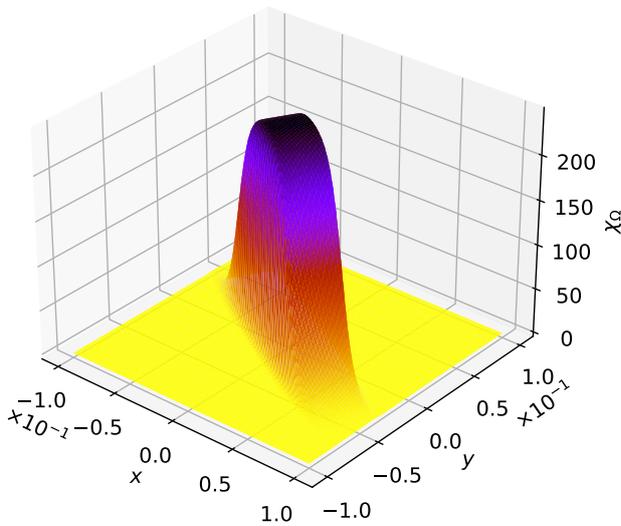
où γ est un taux de décroissance, (x_0, y_0) le centre de la répartition, et r_0 le rayon à partir duquel l'influence devient négligeable.

Ce choix n'est cependant pas le plus adapté physiquement pour modéliser un chevalet, qui est assez peu déformable, car la décroissance de la Gaussienne est assez lente et ne permet pas de focaliser précisément la zone de répartition.

Pour pallier ce défaut, nous utilisons une autre fonction de répartition normalisée, mais dont la pente de décroissance est ajustable beaucoup plus précisément

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta_\chi & -\sin \beta_\chi \\ \sin \beta_\chi & \cos \beta_\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & (2.2.20a) \\ \delta_{r,s}(x) = \frac{1}{2r} \left(\frac{1}{1 + e^{-s(x+r)}} - \frac{1}{1 + e^{-s(x-r)}} \right) & (2.2.20b) \\ \chi_\Omega(x, y) = \delta_{r_x, s_x}(\tilde{x}) \delta_{r_y, s_y}(\tilde{y}) & (2.2.20c) \end{cases}$$

Les paramètres s_x et s_y permettent d'ajuster les taux de décroissance dans deux directions pour modéliser la non-symétrie du chevalet, et de l'orienter sur la table d'harmonie avec l'angle β_χ . Dans la largeur du chevalet, la décroissance est très rapide et elle est beaucoup plus lente dans sa longueur.



r_x [m]	r_y [m]	s_x [-]	s_y [-]
0.02	0.05	1000	100
x_0 [m]	y_0 [m]	β_χ [°]	
0	0	60	

FIGURE 2.5 – Fonction de répartition χ_Ω .

2.3 Discrétisation du modèle couplé corde - table d'harmonie

Les techniques de discrétisation utilisées dans cette partie sont tirées de [Derveaux, 2002] et [Chabassier, 2012]. Elles sont adaptées pour prendre en compte les mobilités de rotation du chevalet.

2.3.1 Schéma numérique pour la table d'harmonie

2.3.1.a Discrétisation en espace - Méthode modale

On considère Ω_h un maillage quadrangulaire conforme de Ω et on note

$$\mathcal{L}_h = \left\{ \Lambda_h \in \mathcal{L}_D \mid \forall K \in \Omega_h, \Lambda_{h|K} \in \mathbb{Q}_r[X, Y]^3 \right\}$$

où $\mathbb{Q}_r[X, Y]$ est l'espace des polynômes engendré par $\{X^i Y^j \mid 1 \leq i, j \leq r\}$.

Afin de rendre la matrice de masse diagonale, les points de Gauss-Lobatto sont utilisés pour positionner les n_h^Λ degrés de liberté de la méthode des éléments finis. Les fonctions de base $(\phi_i)_{i \in [1, n_h^\Lambda]}$ sont telles que pour tout sommet S_j , $\phi_i(S_j) = \delta_{ij}$.

Le problème modal (2.1.11) s'écrit alors sous forme discrète :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, trouver $w_{h,n} \in \mathcal{L}_h$ et $\lambda_{h,n} \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $\Lambda_h^* \in \mathcal{L}_h$ on ait

$$\int_{\Omega} \mathcal{R}w_{h,n} \cdot \Lambda_h^* = \lambda_{h,n} \int_{\Omega} \mathcal{M}w_{h,n} \cdot \Lambda_h^* \quad (2.3.1)$$

L'évaluation de cette formulation variationnelle pour toutes les fonctions de base permet de réécrire ce problème sous forme matricielle

$$\mathbb{R}_h W_{h,n} = \lambda_{h,n} \mathbb{M}_h W_{h,n} \quad (2.3.2)$$

où $W_{h,n}$ est le vecteur des composantes de $w_{h,n}$ dans la base éléments finis.

Les matrices \mathbb{R}_h et \mathbb{M}_h étant respectivement symétrique et diagonale définie positive, la matrice \mathbb{R}_h est diagonalisable dans une base \mathbb{M}_h -orthogonale d'après le théorème spectral. Si on note \mathbb{P}_h la matrice de passage de la base éléments finis à cette nouvelle base modale $(W_{h,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ on a

$$\begin{cases} {}^t \mathbb{P}_h \mathbb{R}_h \mathbb{P}_h = \mathbb{D}_h = \text{diag}(\lambda_{h,n}) \\ {}^t \mathbb{P}_h f_{ve}(\mathbb{R}_h) \mathbb{P}_h = \mathbb{A}_h = \text{diag}(f_{ve}(\lambda_{h,n})) \\ {}^t \mathbb{P}_h \mathbb{M}_h \mathbb{P}_h = \mathbb{I} \end{cases}$$

et tout élément $\Lambda_h \in \mathcal{L}_h$ peut s'exprimer dans la base éléments finis Λ_h^{EF} ou dans la base modale Λ_h^{mod} par les transformations

$$\begin{cases} \Lambda_h^{EF} = \mathbb{P}_h \Lambda_h^{mod} \\ \Lambda_h^{mod} = {}^t \mathbb{P}_h \mathbb{M}_h \Lambda_h^{EF} \end{cases}$$

La formulation variationnelle du modèle de Reissner-Mindlin amorti (2.1.10) peut alors s'écrire sous forme matricielle

$$\mathbb{M}_h \ddot{\Lambda}_h^{EF} + f_{ve}(\mathbb{R}_h) \dot{\Lambda}_h^{EF} + \mathbb{R}_h \Lambda_h^{EF} = F_h \quad (2.3.5)$$

puis dans la base modale

$$\ddot{\Lambda}_h^{mod} + \mathbb{A}_h \dot{\Lambda}_h^{mod} + \mathbb{D}_h \Lambda_h^{mod} = {}^t \mathbb{P}_h F_h \quad (2.3.6)$$

La méthode de résolution modale consiste alors à tronquer la suite des modes pour ne conserver que les N_m premiers, et ainsi réduire considérablement le temps de calcul par rapport aux nombre de degrés de liberté de la base éléments finis. Par la même occasion, les modes de très haute fréquence qui sont de toute façon pollués par les erreurs de discrétisation sont supprimés [Durufle, 2006].

2.3.1.b Schéma de résolution analytique en temps

Le schéma en temps que nous utilisons consiste à considérer le second membre constant d'un pas de temps à l'autre, ce qui constitue une approximation légitime puisqu'il est issu lui même d'une discrétisation des cordes et ne dépend par conséquent plus continûment du temps.

Considérons donc que $F_h(t) = F_h(t^n) = F_h^n$ pour tout $t \in [t^{n-1/2}, t^{n+1/2}]$.

Schéma numérique 2.3.1 (Schéma de la table d'harmonie)

A chaque itération, on cherche $\Lambda_h^{mod,n+1/2} = \Lambda_h^{mod}(t^{n+1/2}) \in \mathbb{R}^{n_h^\Lambda}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [t^{n-1/2}, t^{n+1/2}], \quad \ddot{\Lambda}_h^{mod}(t) + \mathbb{A}_h \dot{\Lambda}_h^{mod}(t) + \mathbb{D}_h \Lambda_h^{mod}(t) = {}^t \mathbb{P}_h F_h^n \quad (2.3.7a) \\ \Lambda_h^{mod}(t^{n-1/2}) = \Lambda_h^{mod,n-1/2}, \quad \dot{\Lambda}_h^{mod}(t^{n-1/2}) = \dot{\Lambda}_h^{mod,n-1/2} \quad (2.3.7b) \end{array} \right.$$

Il s'agit en fait d'un système d'équations différentielles ordinaires découplées dont la solution au temps $t^{n+1/2}$ est donnée analytiquement (voir annexe D) par

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_h^{mod,n+1/2} = \Lambda_h^{mod}(t^{n+1/2}) = \mathcal{S}_{\Delta t}^0 \Lambda_h^{mod}(t^{n-1/2}) + \mathcal{S}_{\Delta t}^1 \dot{\Lambda}_h^{mod}(t^{n-1/2}) + \mathcal{R}_{\Delta t} {}^t \mathbb{P}_h F_h^n \quad (2.3.8a) \\ \dot{\Lambda}_h^{mod,n+1/2} = \dot{\Lambda}_h^{mod}(t^{n+1/2}) = \dot{\mathcal{S}}_{\Delta t}^0 \Lambda_h^{mod}(t^{n-1/2}) + \dot{\mathcal{S}}_{\Delta t}^1 \dot{\Lambda}_h^{mod}(t^{n-1/2}) + \dot{\mathcal{R}}_{\Delta t} {}^t \mathbb{P}_h F_h^n \quad (2.3.8b) \end{array} \right.$$

Théorème 2.3.1 (Bilan de puissance discret du système modal de la table d'harmonie)

La solution du schéma 2.3.1 vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathcal{E}_p^{n+1/2} - \mathcal{E}_p^{n-1/2}}{\Delta t} = {}^t \mathbb{P}_h F_h^n \cdot \frac{\Lambda_h^{mod,n+1/2} - \Lambda_h^{mod,n-1/2}}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta t} \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \|\dot{\Lambda}_h^{mod}\|_{\mathbb{A}_h}^2 \quad (2.3.9a) \\ \mathcal{E}_p^{n+1/2} = \frac{1}{2} \|\dot{\Lambda}_h^{mod,n+1/2}\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\Lambda_h^{mod,n+1/2}\|_{\mathbb{D}_h}^2 \quad (2.3.9b) \end{array} \right.$$

Démonstration. On prend le produit scalaire de l'équation (2.3.7a) avec $\dot{\Lambda}_h^{mod}(t)$ et on intègre pour $t \in [t^{n-1/2}, t^{n+1/2}]$:

$$\int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \ddot{\Lambda}_h^{mod} \cdot \dot{\Lambda}_h^{mod} + \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \mathbb{D}_h \Lambda_h^{mod} \cdot \dot{\Lambda}_h^{mod} = \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} {}^t \mathbb{P}_h F_h^n \cdot \dot{\Lambda}_h^{mod} - \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \mathbb{A}_h \dot{\Lambda}_h^{mod} \cdot \dot{\Lambda}_h^{mod} \quad (2.3.10)$$

Et après intégration, et puisque F_h est constant sur l'intervalle considéré, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\|\dot{\Lambda}_h^{mod,n+1/2}\|_2^2 - \|\dot{\Lambda}_h^{mod,n-1/2}\|_2^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\|\Lambda_h^{mod,n+1/2}\|_{\mathbb{D}_h}^2 - \|\Lambda_h^{mod,n-1/2}\|_{\mathbb{D}_h}^2 \right) = \\ {}^t \mathbb{P}_h F_h^n \cdot \left(\Lambda_h^{mod,n+1/2} - \Lambda_h^{mod,n-1/2} \right) - \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \|\dot{\Lambda}_h^{mod}\|_{\mathbb{A}_h}^2 \quad (2.3.11) \end{aligned}$$

Le résultat du théorème s'obtient par simple division par Δt . □

2.3.2 Schéma numérique pour le modèle couplé

On peut maintenant traiter le cas du couplage entre la corde et la table d'harmonie.

Afin de rester générique, le schéma numérique utilisé pour la corde est noté \mathfrak{C} . Il est supposé centré en l'instant t^n , par exemple 2-IEQ, 2-SAV ou encore les schémas de gradient discrets développés dans [Chabassier, 2012]. L'utilisation du schéma P-SAV nécessite d'adapter légèrement les schémas pour assurer une bonne consistance en $t^{n+1/2}$ en discrétisant toutes les variables, y compris celles de la table d'harmonie, sur une unique grille $\{t^n\}$.

Commençons par définir les analogues discrets des vecteurs de positionnement ν_c , τ_c et η_c que nous appelons $\nu_{c,h}$, $\tau_{c,h}$ et $\eta_{c,h}$ tels que

$$\forall q_h^* \in \mathcal{Q}_h, \quad \begin{cases} q_h^*(L, t) \cdot \nu_c = Q_h^* \cdot \nu_{c,h} \\ q_h^*(L, t) \cdot \tau_c = Q_h^* \cdot \tau_{c,h} \\ q_h^*(L, t) \cdot \eta_c = Q_h^* \cdot \eta_{c,h} \end{cases} \quad (2.3.12)$$

et où Q_h^* est le vecteur des composantes de q_h^* dans la base des éléments finis de la corde.

J_h est le vecteur qui permet la répartition du couplage sur la table d'harmonie de façon discrète

$$\forall i \in \llbracket 1, n_h^A \rrbracket, \quad (J_h)_i = \oint_{\Omega_h} \chi_\Omega(x, y) \phi_i(x, y) dx dy \quad (2.3.13)$$

tel que

$$\Lambda_h^{EF} \cdot \begin{pmatrix} J_h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \oint_{\Omega_h} u_{p,h} \chi_\Omega \quad \Lambda_h^{EF} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ J_h \\ 0 \end{pmatrix} = \oint_{\Omega_h} \theta_{p,h}^1 \chi_\Omega \quad \Lambda_h^{EF} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J_h \end{pmatrix} = \oint_{\Omega_h} \theta_{p,h}^2 \chi_\Omega \quad (2.3.14)$$

Avec ces définitions, les conditions de continuité des vitesses (2.2.4) s'écrivent au niveau discret

$$\begin{cases} \dot{Q}_h \cdot \nu_{c,h} = \dot{\Lambda}_h^{EF} \cdot \begin{pmatrix} J_h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\Lambda}_h^{mod} \cdot {}^t\mathbb{P}_h \begin{pmatrix} J_h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\Lambda}_h^{mod} \cdot {}^t\mathbb{P}_h^U J_h & (2.3.15a) \\ \dot{Q}_h \cdot \tau_{c,h} = \ell \dot{\Lambda}_h^{EF} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ J_h \\ 0 \end{pmatrix} = \ell \dot{\Lambda}_h^{mod} \cdot {}^t\mathbb{P}_h \begin{pmatrix} 0 \\ J_h \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\Lambda}_h^{mod} \cdot \ell {}^t\mathbb{P}_h^{\Theta 1} J_h & (2.3.15b) \\ \dot{Q}_h \cdot \eta_{c,h} = \ell \dot{\Lambda}_h^{EF} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J_h \end{pmatrix} = \ell \dot{\Lambda}_h^{mod} \cdot {}^t\mathbb{P}_h \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J_h \end{pmatrix} = \dot{\Lambda}_h^{mod} \cdot \ell {}^t\mathbb{P}_h^{\Theta 2} J_h & (2.3.15c) \end{cases}$$

où \mathbb{P}_h^U , $\mathbb{P}_h^{\Theta 1}$ et $\mathbb{P}_h^{\Theta 2}$ sont les sous-matrices de passage associées aux différentes composantes $U_{p,h}$, $\Theta_{p,h}^1$ et $\Theta_{p,h}^2$ du vecteur solution Λ_h

$$\mathbb{P}_h = \begin{pmatrix} \mathbb{P}_h^U \\ \mathbb{P}_h^{\Theta 1} \\ \mathbb{P}_h^{\Theta 2} \end{pmatrix} \quad {}^t\mathbb{P}_h = \left({}^t\mathbb{P}_h^U \mid {}^t\mathbb{P}_h^{\Theta 1} \mid {}^t\mathbb{P}_h^{\Theta 2} \right)$$

2.3.3 Algorithme de résolution

Le schéma 2.3.2 discrétise les équations de couplage de façon implicite.

Cela dit, il est possible de rendre la méthode de résolution explicite en utilisant l'équation (2.3.8a) :

$$\begin{cases} \frac{Q_h^{n+1} - Q_h^{n-1}}{2} \cdot \nu_{c,h} = \left(\mathcal{S}_{\Delta t}^0 \Lambda_h^{mod,n-1/2} + \mathcal{S}_{\Delta t}^1 \dot{\Lambda}_h^{mod,n-1/2} + \mathcal{R}_{\Delta t} {}^t\mathbb{P}_h F_h^n - \Lambda_h^{mod,n-1/2} \right) \cdot {}^t\mathbb{P}_h^U J_h \\ \frac{Q_h^{n+1} - Q_h^{n-1}}{2} \cdot \tau_{c,h} = \left(\mathcal{S}_{\Delta t}^0 \Lambda_h^{mod,n-1/2} + \mathcal{S}_{\Delta t}^1 \dot{\Lambda}_h^{mod,n-1/2} + \mathcal{R}_{\Delta t} {}^t\mathbb{P}_h F_h^n - \Lambda_h^{mod,n-1/2} \right) \cdot \ell {}^t\mathbb{P}_h^{\Theta 1} J_h \\ \frac{Q_h^{n+1} - Q_h^{n-1}}{2} \cdot \eta_{c,h} = \left(\mathcal{S}_{\Delta t}^0 \Lambda_h^{mod,n-1/2} + \mathcal{S}_{\Delta t}^1 \dot{\Lambda}_h^{mod,n-1/2} + \mathcal{R}_{\Delta t} {}^t\mathbb{P}_h F_h^n - \Lambda_h^{mod,n-1/2} \right) \cdot \ell {}^t\mathbb{P}_h^{\Theta 2} J_h \end{cases}$$

On peut alors définir

$$F_{\Lambda}^{n-1/2} = \mathcal{S}_{\Delta t}^0 \Lambda_h^{mod,n-1/2} + \mathcal{S}_{\Delta t}^1 \dot{\Lambda}_h^{mod,n-1/2} \quad (2.3.18)$$

qui permet de réécrire les conditions de couplage sous une forme explicite :

$$\begin{cases} \frac{Q_h^{n+1} - Q_h^{n-1}}{2} \cdot \nu_{c,h} = \mathcal{A}_1^{n-1/2} - F^P \mathcal{B}_{1,1} - G^P \mathcal{B}_{1,2} - H^P \mathcal{B}_{1,3} & (2.3.19a) \\ \frac{Q_h^{n+1} - Q_h^{n-1}}{2} \cdot \tau_{c,h} = \mathcal{A}_2^{n-1/2} - F^P \mathcal{B}_{2,1} - G^P \mathcal{B}_{2,2} - H^P \mathcal{B}_{2,3} & (2.3.19b) \\ \frac{Q_h^{n+1} - Q_h^{n-1}}{2} \cdot \eta_{c,h} = \mathcal{A}_3^{n-1/2} - F^P \mathcal{B}_{3,1} - G^P \mathcal{B}_{3,2} - H^P \mathcal{B}_{3,3} & (2.3.19c) \end{cases}$$

où $\mathcal{A}^{n-1/2}$ est le vecteur défini par

$$\mathcal{A}^{n-1/2} = \begin{pmatrix} \left(F_{\Lambda}^{n-1/2} - \Lambda_h^{mod,n-1/2} \right) \cdot {}^t\mathbb{P}_h^U J_h \\ \left(F_{\Lambda}^{n-1/2} - \Lambda_h^{mod,n-1/2} \right) \cdot \ell {}^t\mathbb{P}_h^{\Theta 1} J_h \\ \left(F_{\Lambda}^{n-1/2} - \Lambda_h^{mod,n-1/2} \right) \cdot \ell {}^t\mathbb{P}_h^{\Theta 2} J_h \end{pmatrix} \quad (2.3.20)$$

et \mathcal{B} la matrice constante

$$\mathcal{B} = \mathcal{R}_{\Delta t} \begin{pmatrix} {}^t\mathbb{P}_h^U J_h \cdot {}^t\mathbb{P}_h^U J_h & \ell {}^t\mathbb{P}_h^{\Theta 1} J_h \cdot {}^t\mathbb{P}_h^U J_h & \ell {}^t\mathbb{P}_h^{\Theta 2} J_h \cdot {}^t\mathbb{P}_h^U J_h \\ {}^t\mathbb{P}_h^U J_h \cdot \ell {}^t\mathbb{P}_h^{\Theta 1} J_h & \ell {}^t\mathbb{P}_h^{\Theta 1} J_h \cdot \ell {}^t\mathbb{P}_h^{\Theta 1} J_h & \ell {}^t\mathbb{P}_h^{\Theta 2} J_h \cdot \ell {}^t\mathbb{P}_h^{\Theta 1} J_h \\ {}^t\mathbb{P}_h^U J_h \cdot \ell {}^t\mathbb{P}_h^{\Theta 2} J_h & \ell {}^t\mathbb{P}_h^{\Theta 1} J_h \cdot \ell {}^t\mathbb{P}_h^{\Theta 2} J_h & \ell {}^t\mathbb{P}_h^{\Theta 2} J_h \cdot \ell {}^t\mathbb{P}_h^{\Theta 2} J_h \end{pmatrix} \quad (2.3.21)$$

La méthode de résolution du schéma 2.3.2, qui traite de façon découplée la corde et la table d'harmonie est alors résumée par l'algorithme suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Initialiser toutes les variables et pré-calculer } \mathcal{S}_{\Delta t}^0, \mathcal{S}_{\Delta t}^1, \mathcal{R}_{\Delta t} \text{ et } \mathcal{B} \\
 \text{Pour chaque itération :} \\
 \quad - \text{ Actualiser } F_{\Lambda}^{n-1/2} \text{ et } \mathcal{A}^{n-1/2} \\
 \quad - \text{ Résoudre le schéma de corde avec conditions de couplage :} \\
 \quad \quad \left\{ \begin{array}{l}
 \mathfrak{C}(Q_h^{n+1}, Q_h^n, Q_h^{n-1}) = S_h^n + F^P \nu_{c,h} + G^P \tau_{c,h} + H^P \eta_{c,h} \\
 \frac{Q_h^{n+1} - Q_h^{n-1}}{2} \cdot \nu_{c,h} = \mathcal{A}_1^{n-1/2} - F^P \mathcal{B}_{1,1} - G^P \mathcal{B}_{1,2} - H^P \mathcal{B}_{1,3} \\
 \frac{Q_h^{n+1} - Q_h^{n-1}}{2} \cdot \tau_{c,h} = \mathcal{A}_2^{n-1/2} - F^P \mathcal{B}_{2,1} - G^P \mathcal{B}_{2,2} - H^P \mathcal{B}_{2,3} \\
 \frac{Q_h^{n+1} - Q_h^{n-1}}{2} \cdot \eta_{c,h} = \mathcal{A}_3^{n-1/2} - F^P \mathcal{B}_{3,1} - G^P \mathcal{B}_{3,2} - H^P \mathcal{B}_{3,3}
 \end{array} \right. \quad (2.3.22a) \\
 \quad - \text{ Actualiser la table d'harmonie :} \\
 \quad \quad \Lambda_h^{mod, n+1/2} = F_{\Lambda}^{n-1/2} - F^P \mathcal{R}_{\Delta t} {}^t \mathbb{P}_h^U J_h - G^P \mathcal{R}_{\Delta t} \ell {}^t \mathbb{P}_h^{\Theta 1} J_h - H^P \mathcal{R}_{\Delta t} \ell {}^t \mathbb{P}_h^{\Theta 2} J_h \quad (2.3.22b)
 \end{array} \right.$$

2.3.4 Résultats numériques

Dans cette partie, nous présentons des comparaisons entre le modèle raffiné avec trois degrés de liberté dans les directions $\vec{\nu}$, $\vec{\tau}$ et $\vec{\eta}$, désigné ci-après par "3ddl" et celui de [Chabassier, 2012] où le chevalet n'a qu'une seule mobilité dans la direction $\vec{\nu}$, appelé ci-après "1ddl".

Notons que l'angle β n'a aucune influence sur le modèle 1ddl pour lequel il est donc toujours ramené à 0 et le multiplicateur H^P est éliminé.

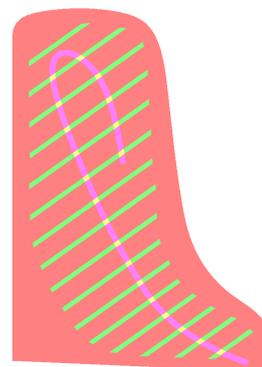
Après un paragraphe concernant le calcul des modes de la table d'harmonie, nous vérifions les propriétés de conservation d'énergie et de convergence du nouveau schéma.

Les paramètres utilisés pour les simulations suivantes sont résumés ci-dessous. En lieu et place du marteau, la corde Fa₃ géométriquement exacte et sans raideur est excitée par une source \mathcal{C}^∞ en espace et en temps comme définie par l'annexe B.

Schéma de corde						
Schéma	N_x	θ	Ordre	Constante auxiliaire	Stabilisation	Amortissement
2-SAV	11	1/4	4	10^4	α^*	Non
Terme source						
A [-]	x_0 [m]	σ_x [m]	t_0 [ms]	σ_t [ms]		
10000	0.115	0.01	2.5	1.5		

TABLE 2.1 – Paramètres de discrétisation de la corde.

La table d'harmonie est une plaque en épicéa épaisse de 9 millimètres dont les fibres de bois sont orientées avec un angle $\beta = 54,4^\circ$. 16 raidisseurs également en épicéa orientés à $\beta = -40^\circ$ et épais de 25 millimètres y sont collés, représentés en vert ci-contre. Le chevalet rose, haut de 40 millimètres est constitué de bois d'hêtre. Ces variations d'épaisseur sont prises en compte en chargeant localement l'épaisseur de la plaque de Reissner-Mindlin.



Bois	ρ [kg.m ⁻³]	E_{xx} [GPa]	E_{yy} [GPa]	ν_{xy} [-]	ν_{yx} [-]	G_{xy} [GPa]	G_{xz} [GPa]	G_{yz} [GPa]
Épicéa	380	11.0	0.65	0.26	0.015	0.66	1.2	0.042
Hêtre	750	13.7	2.24	0.3	0	1.61	1.06	0.46

TABLE 2.2 – Paramètres mécaniques de la table d'harmonie.

Les paramètres utilisés pour modéliser l'amortissement de la table, dans les simulations où il est pris en compte, sont tels que (voir le paragraphe 2.1.2)

$$f_{ve}(f) = 2 \times 10^{-5} f^2 + 7 \times 10^{-2} f \quad (2.3.23)$$

2.3.4.a Calcul des modes

Les modes de la table d'harmonie, sont calculés par le logiciel Arpack¹ à partir d'un maillage 2D et avec des éléments finis d'ordre 4.

Même si le maillage de la figure 2.6 est composé de triangles et de quadrangles, le code éléments finis Montjoie² découpe automatiquement les triangles en quadrangles afin d'obtenir un maillage purement quadrangulaire et permettre la condensation de masse. L'efficacité du solveur en est accrue car la matrice de masse M_h n'a pas à être factorisée. Sur la figure 2.6, les raidisseurs sont visibles en vert, et le chevalet en rose.

Quelques déformées modales issues de simulations sont présentées sur la figure 2.8. Elles sont cohérentes avec les figures de Chladni obtenues expérimentalement dans [Conklin, 1996] visibles sur la figure 2.7.

L'influence des raidisseurs et du chevalet est mise en évidence sur la figure 2.8 sous la forme de motifs hachurés visibles assez nettement sur certains modes angulaires (modes 2, 3 et 7).

Notons pour finir que le calcul d'environ 2500 modes est nécessaire pour atteindre la fréquence de 10 kHz.

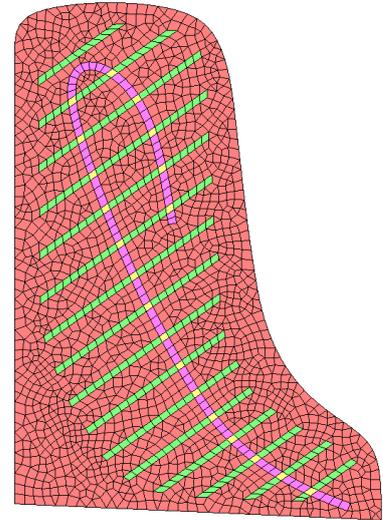


FIGURE 2.6 – Maillage 2D de la table.

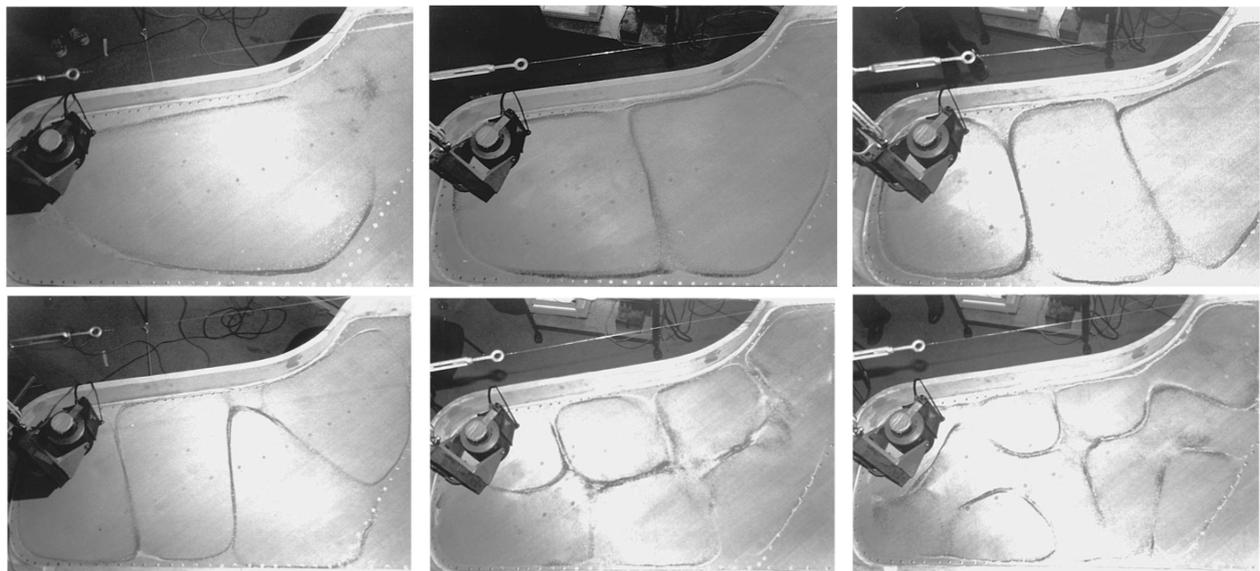
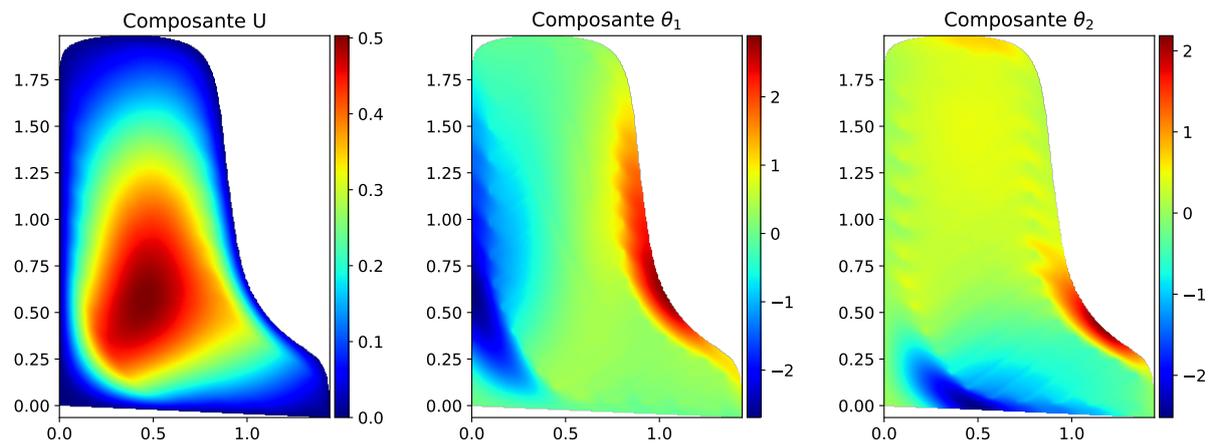


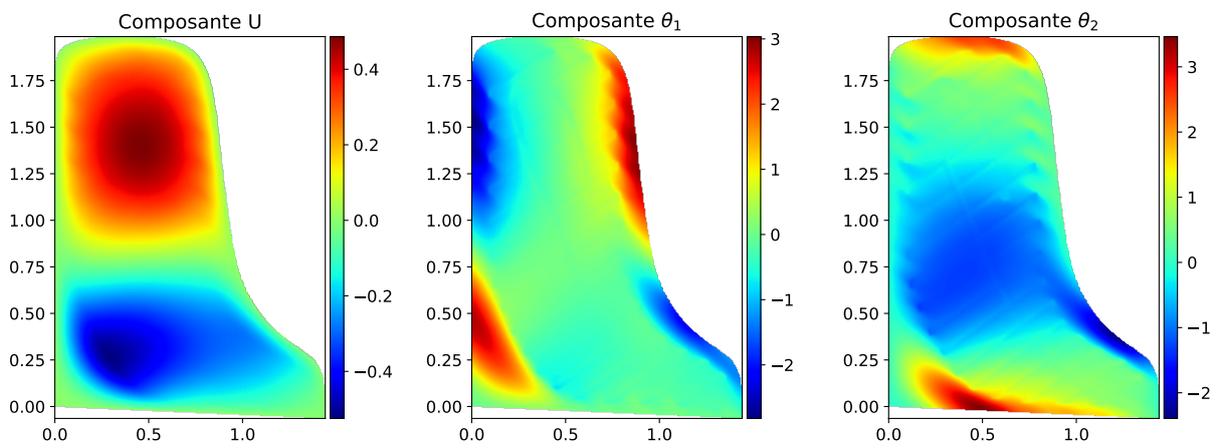
FIGURE 2.7 – Figures de Chladni extraites de [Conklin, 1996].

1. <https://en.wikipedia.org/wiki/ARPACK>

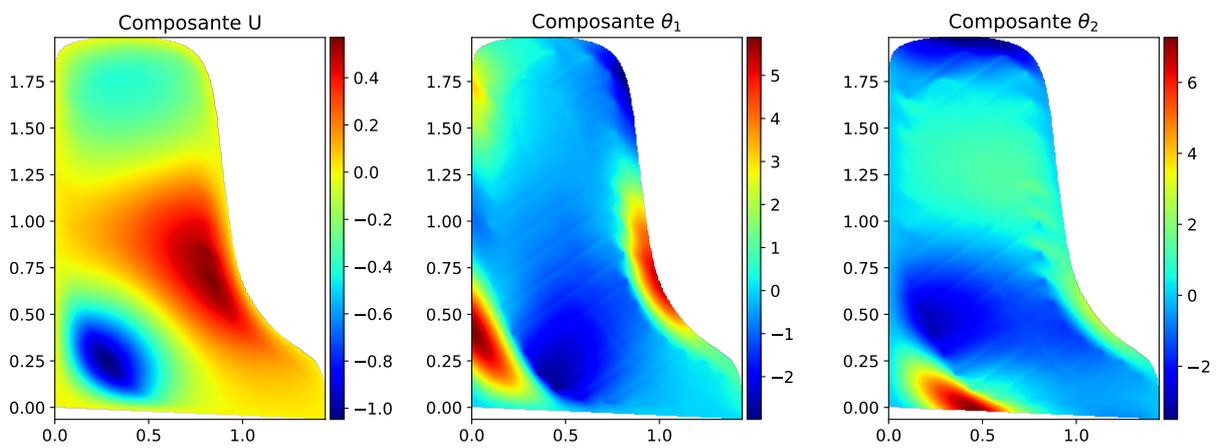
2. <https://www.math.u-bordeaux.fr/~durufle/montjoie/>



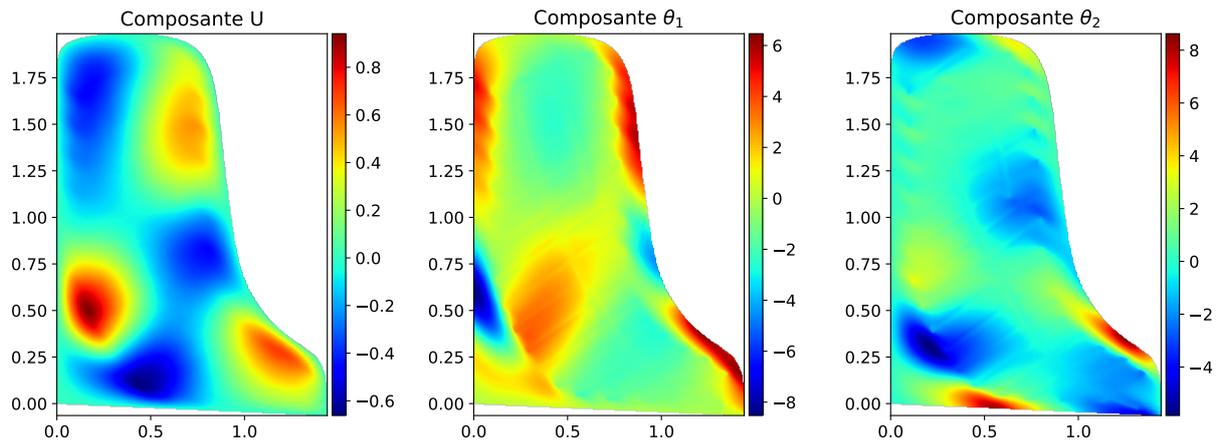
(a) Mode n°1 (27 Hz)



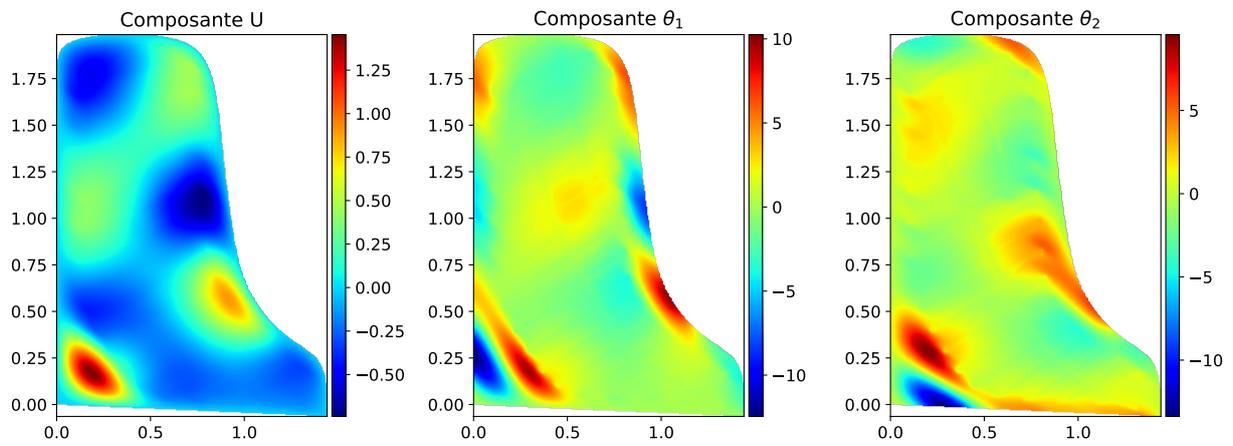
(b) Mode n°2 (42 Hz)



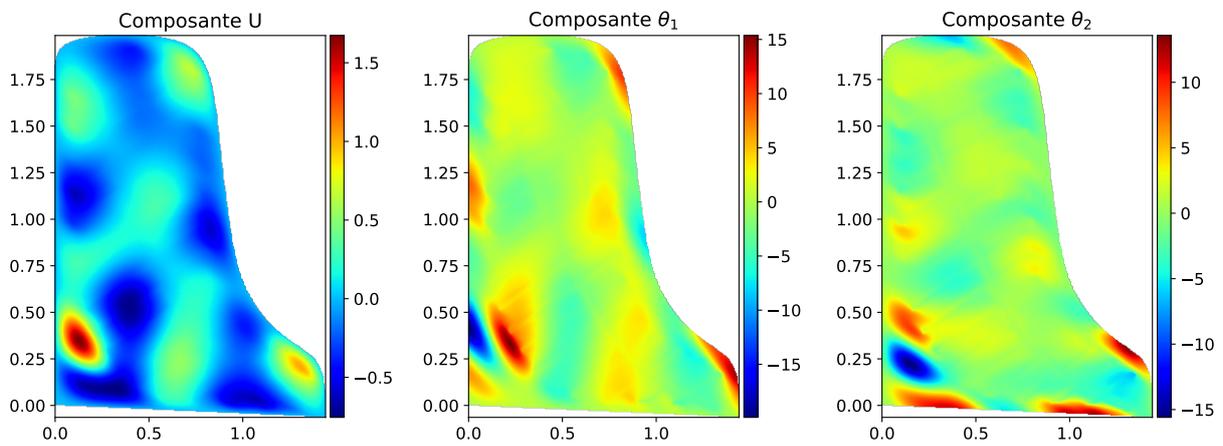
(c) Mode n°3 (63 Hz)



(d) Mode n°7 (121 Hz)



(e) Mode n°10 (164 Hz)



(f) Mode n°20 (289 Hz)

FIGURE 2.8 – Déformées modales de la table d'harmonie. Composante membranaire (gauche) et angles de cisaillement (centre, droite).

2.3.4.b Préservation numérique du bilan d'énergie

En l'absence d'amortissement et pour $\alpha = 45^\circ$ et $\beta = 45^\circ$, on définit le résidu d'énergie ε en rapport avec le théorème 2.3.2 comme

$$\varepsilon = \frac{\mathcal{E}_{c,p}^{n+1/2} - \mathcal{E}_{c,p}^{n-1/2}}{\mathcal{E}_{max}} - F_h^n \cdot \frac{Q_h^{n+1} - Q_h^{n-1}}{2\mathcal{E}_{max}} \quad (2.3.24)$$

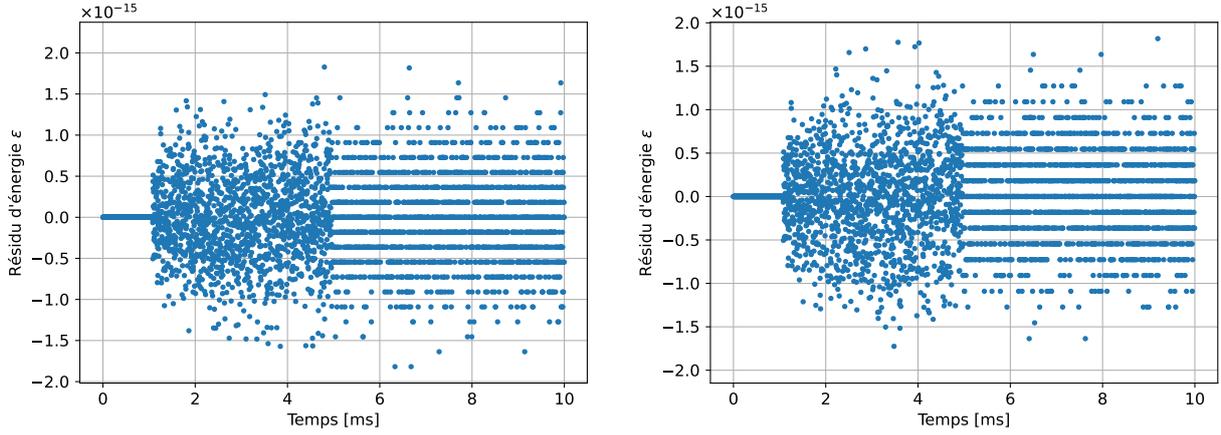


FIGURE 2.9 – Résidus d'énergie pour la transmission 1ddl (gauche) et 3ddl (droite).

On observe bien sur la figure 2.9 que les résidus d'énergie ε sont des multiples de l'erreur machine. Le bilan de puissance discret est donc bien vérifié.

2.3.4.c Convergence en temps

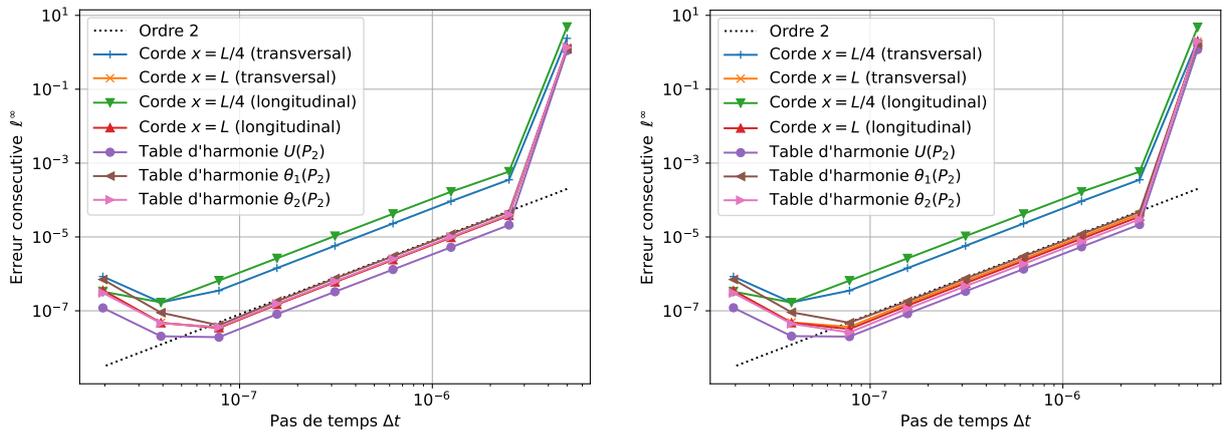


FIGURE 2.10 – Convergence en temps pour la transmission 1ddl (gauche) et 3ddl (droite).

La figure 2.10 montre des courbes de convergence en temps du schéma 2.3.2 pour le modèle de transmission à 1ddl et le raffinement à 3ddl.

Les erreurs sont calculées en norme ℓ^∞ en divisant consécutivement le pas de temps par 2 et en des positions spécifiques sur la corde ($x = L/4$ et $x = L$) et sur la table (position P_2).

$$\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad E_{\ell^\infty}(X, Y) = \frac{\|X - Y\|_\infty}{\|Y\|_\infty} = \frac{\max_{i \in [1, n]} |x^i - y^i|}{\max_{i \in [1, n]} |y^i|} \quad (2.3.25)$$

Hormis le premier point avec un pas de temps grand qui est fortement pollué à cause du schéma de corde 2-SAV comme nous l'avons vu dans la partie 1.4.5, la convergence est d'ordre 2. La remontée des erreurs, décrite au paragraphe 1.4.4 et typique de la méthode 2-SAV, est visible pour les petits pas de temps.

2.4 Précurseurs et transmissions longitudinales

Rappelons nous que les ondes transversales et longitudinales ont des vitesses de propagations très différentes dans les cordes. Les ondes longitudinales se propagent habituellement environ 15 fois plus rapidement que les ondes transversales, ce qui donne lieu au phénomène de précurseur longitudinal observé dans [Podlesak et Lee, 1988]. Ce précurseur est d'autant plus visible que la différence des temps d'arrivée des deux ondes au chevalet est grande. Autrement dit, plus les cordes sont longues, plus le précurseur est visible.

Dans cette section, nous considérons toujours une corde non-linéaire mais sans raideur excitée par une source régulière qui produit une nuance *fortissimo*. La raideur n'est pas prise en compte afin d'observer uniquement les phénomènes longitudinaux sans les polluer par des phénomènes dispersifs. Nous montrons des résultats sur une corde grave Ré₁[♯], une corde médium Fa₃ environ deux fois moins longue, et une corde aigüe Do₅[♯] encore beaucoup plus courte. Nous ajoutons de l'amortissement dans les cordes et dans la table d'harmonie, et le maillage de corde utilise $N_x = 70$ nœuds. L'objectif ici n'est pas de présenter des résultats physiques subtils sur la transmission des ondes longitudinales, car c'est l'objet du chapitre 4 qui couple ce modèle de transmission avec un modèle de marteau, mais bien de vérifier le bon comportement global du modèle avec la physique attendue.

2.4.1 Note Ré₁[♯]

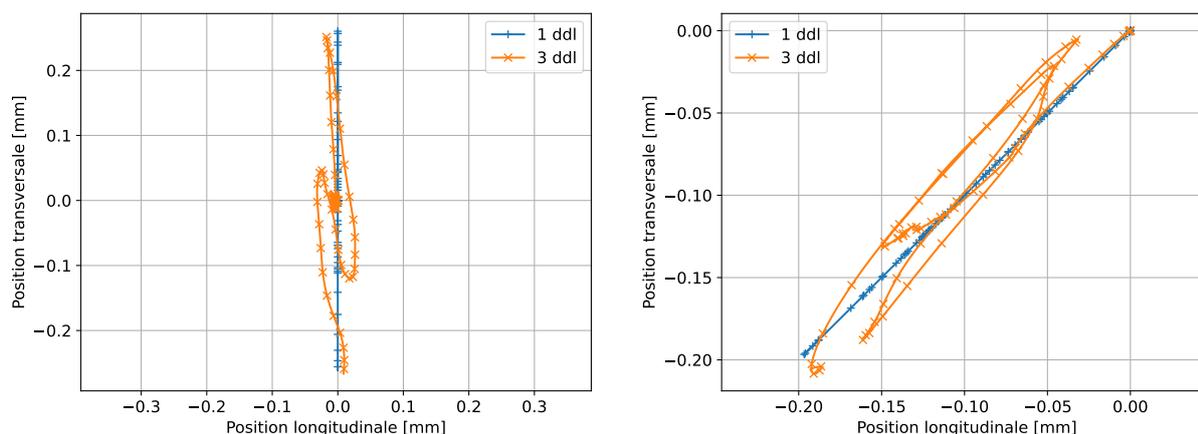


FIGURE 2.11 – Mouvement de l'extrémité de la corde avec $\alpha = 0$ (gauche) et $\alpha = 45^\circ$ (droite).

Sur la figure 2.11, on voit les différentes positions prises par l'extrémité $x = L$ de la corde. A gauche, pour une transmission à 1ddl, la corde est contrainte verticalement dans l'axe \vec{v} . Avec 3ddl le mouvement n'est plus strictement vertical, une composante longitudinale apparaît. Sur la figure de droite avec un angles $\alpha = 45^\circ$, on peut faire les mêmes observations, mais dans un repère tourné de 45° cohérent avec l'orientation de la corde.

La figure 2.12 montre l'accélération de l'extrémité $x = L$ de la corde attachée au chevalet dans sa directions transversale à gauche et sa direction longitudinale à droite pour un angle $\alpha = 0$. Avec une transmission à 1ddl, tout se passe comme si la corde était soumise à une condition de Dirichlet dans la direction longitudinale. Comme on peut le voir sur la figure de droite, l'extrémité de la corde $x = L$ n'a aucune mobilité dans la direction longitudinale et seule la composante transversale visible sur la figure de gauche à partir de 12 ms peut être transmise.

Avec une transmission à 3ddl, la corde est libre de bouger dans sa direction longitudinale comme on peut le voir sur la figure 2.12 droite. Étant donné que les ondes longitudinales se propagent beaucoup plus rapidement que les ondes transversales, les premières vibrations longitudinales apparaissent à

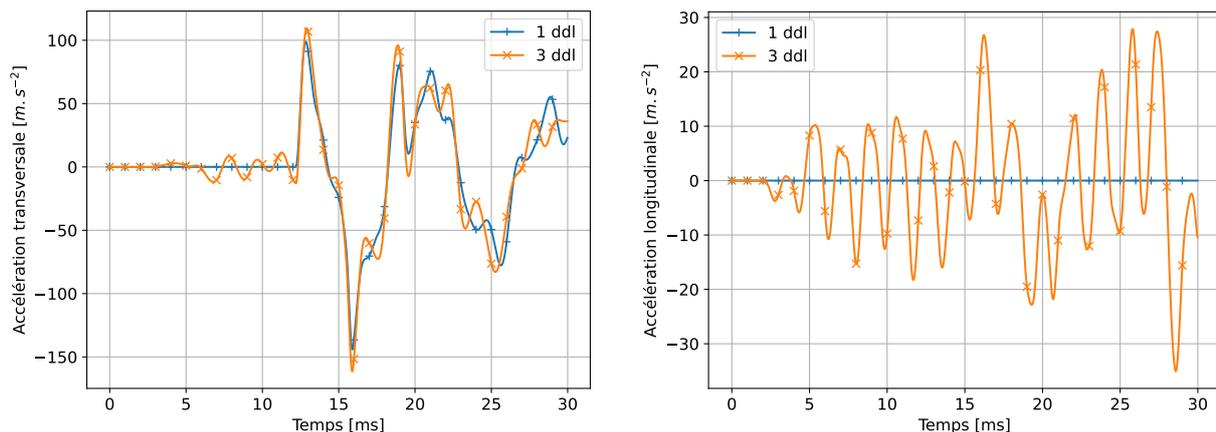


FIGURE 2.12 – Accélération de l’extrémité de la corde pour $\alpha = 0$. Transversale (gauche), longitudinale (droite).

partir de 2 ms, c’est-à-dire largement plus rapidement que les premières vibrations transversales qui étaient visible avec 1ddl. Par conséquent, les vibrations situées dans l’intervalle [2 ms, 12 ms] sont entièrement dues aux phénomènes longitudinaux, que ce soit par les ondes longitudinales elles-mêmes sur la figure de droite, ou bien par leur couplage non-linéaire avec les ondes transversales sur la figure de gauche. Le signal vibratoire situé entre 2 ms et 12 ms constitue un précurseur longitudinal.

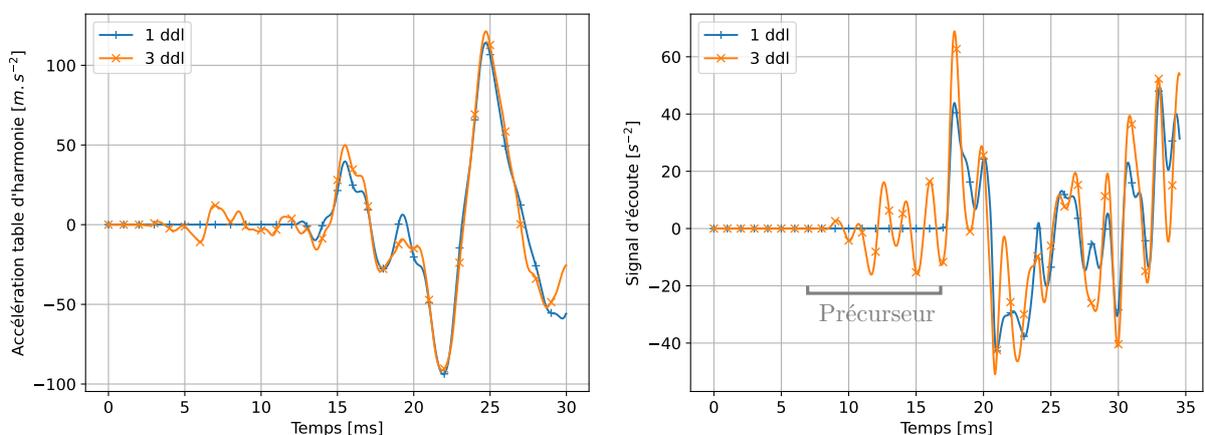


FIGURE 2.13 – Accélération P_1 de la table d’harmonie (gauche). Signal d’écoute (droite).

Les mêmes phénomènes sont visibles sur la table d’harmonie et illustrés sur la figure 2.13. La figure de gauche montre l’accélération du point P_1 de la table, et celle de droite un signal d’écoute reconstitué par combinaison de plusieurs points de la table et enregistré à un point distant du piano (voir l’annexe E). Avec une transmission à 1ddl, les premières ondes sont visible à partir de 12 ms au point P_1 et retardé à 17 ms au point d’écoute en raison de son éloignement. Avec une transmission à 3ddl, des ondes sont visibles dès 2 ms au point P_1 , dès 7 ms au point d’écoute. Les vibrations additionnelles constituent le précurseur longitudinal qui est potentiellement audible à l’attaque du son étant donnée sa forte amplitude.

Le spectre du signal d’écoute est représenté sur la figure 2.14. On observe des différences d’amplitude assez significatives tout le long de l’étendue des fréquences, mais spécifiquement marquées sur les partiels longitudinaux qui sont influencés par la présence du précurseur.

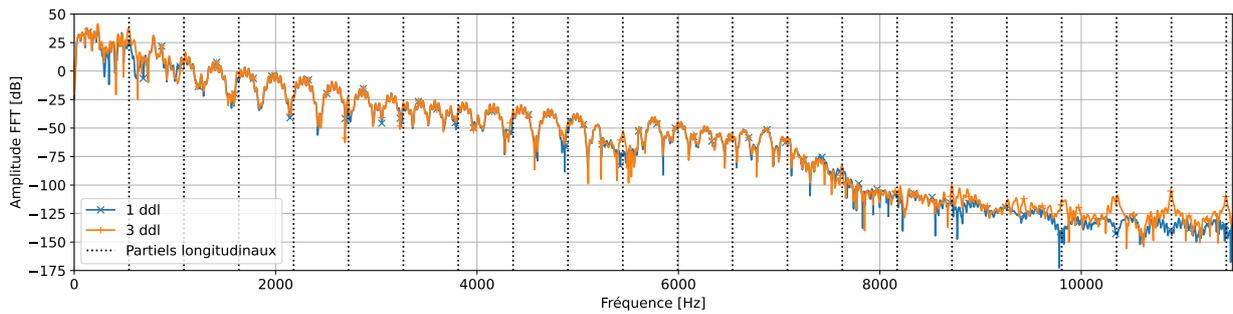


FIGURE 2.14 – Spectre du signal d'écoute.

2.4.2 Note Fa₃

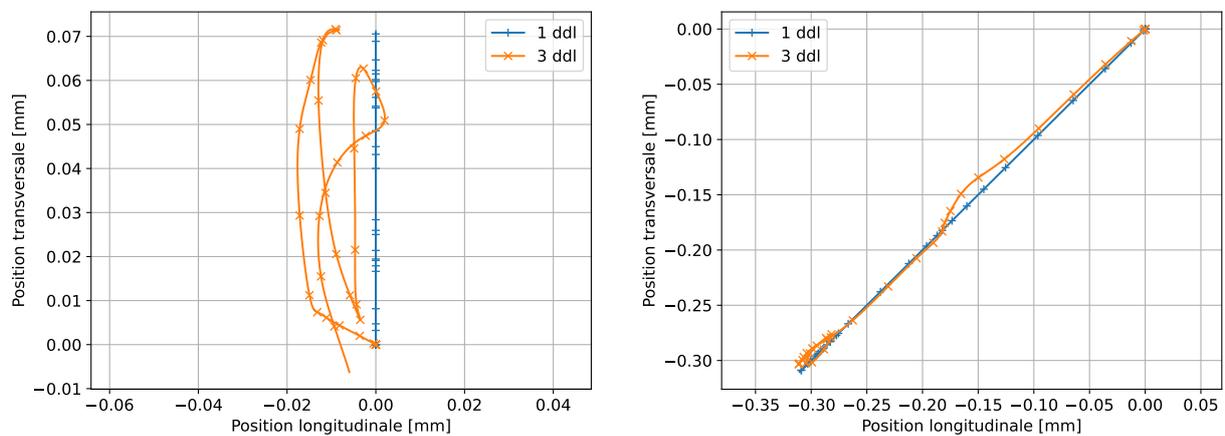


FIGURE 2.15 – Mouvement de l'extrémité de la corde avec $\alpha = 0$ (gauche) et $\alpha = 45^\circ$ (droite).

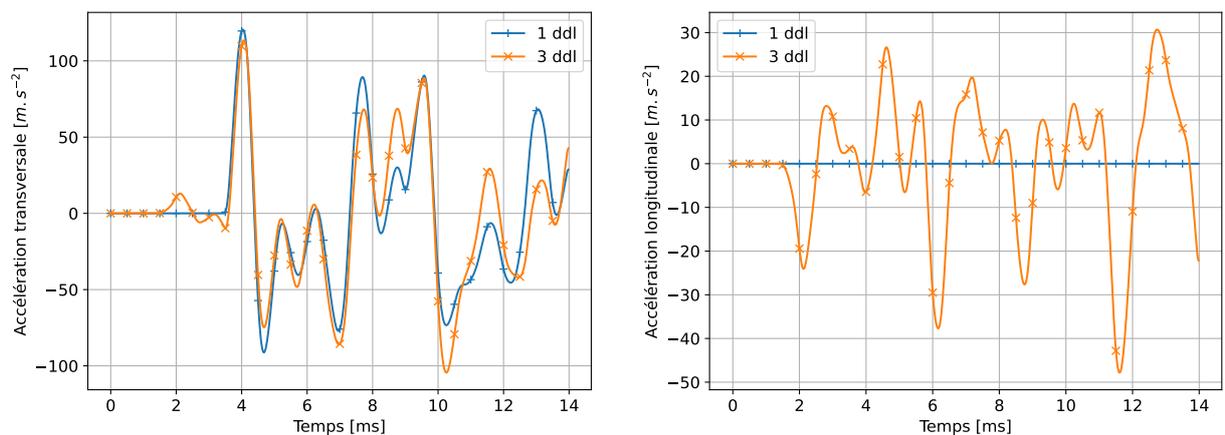


FIGURE 2.16 – Accélération de l'extrémité de la corde pour $\alpha = 0$. Transversale (gauche), longitudinale (droite).

Les observations faites sur la note Ré₁[#] restent valides, mais le précurseur est beaucoup moins visible et beaucoup plus court (moins de 2 ms) en raison de la longueur de corde réduite.

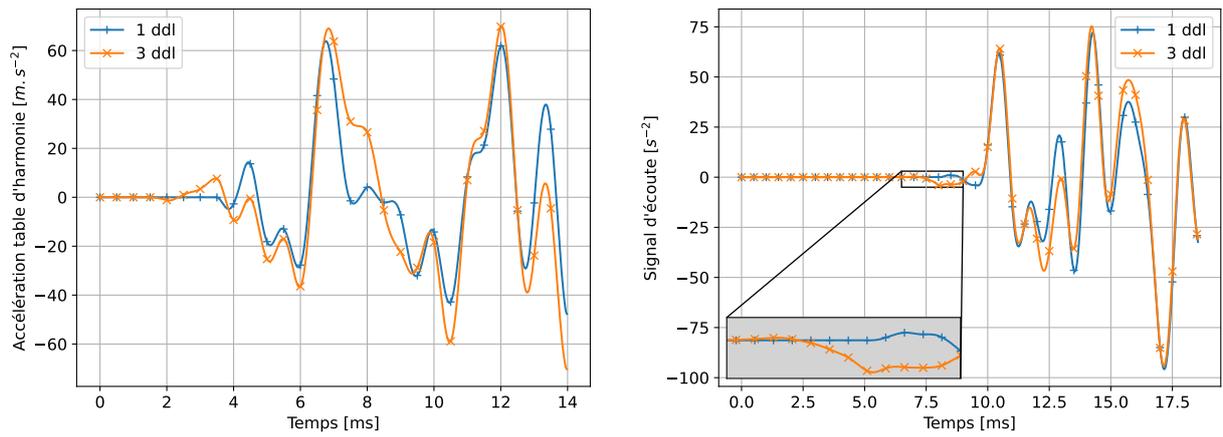


FIGURE 2.17 – Accélération P_1 de la table d'harmonie (gauche). Signal d'écoute (droite).

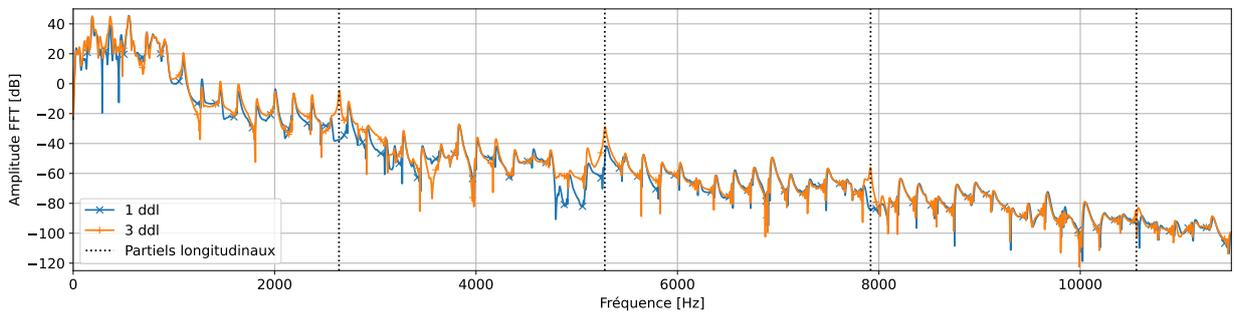


FIGURE 2.18 – Spectre du signal d'écoute.

Le spectre du signal d'écoute de la figure 2.18 montre encore une fois des différences assez significatives et plus marquées au niveau des partiels longitudinaux.

2.4.3 Note Do_5^{\sharp}

Pour cette note, en raison de sa faible longueur ($L = 32.6$ cm), on utilise un maillage de corde moins raffiné avec $N_x = 20$ nœuds.

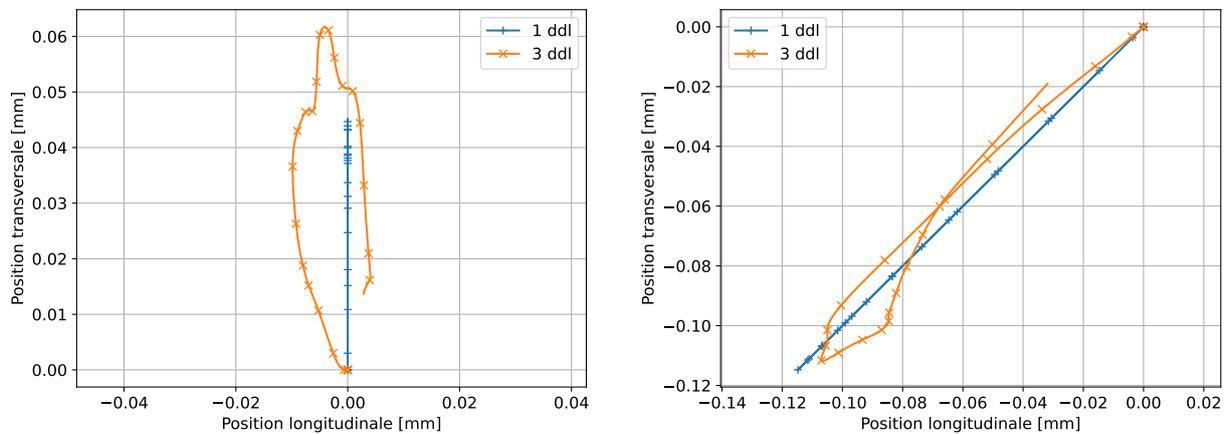


FIGURE 2.19 – Mouvement de l'extrémité de la corde avec $\alpha = 0$ (gauche) et $\alpha = 45^\circ$ (droite).

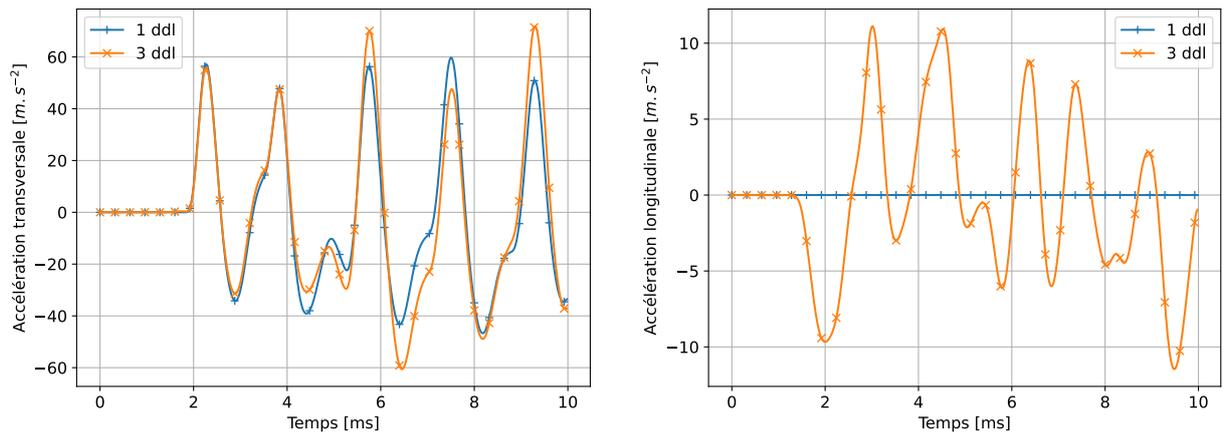


FIGURE 2.20 – Accélération de l’extrémité de la corde pour $\alpha = 0$. Transversale (gauche), longitudinale (droite).

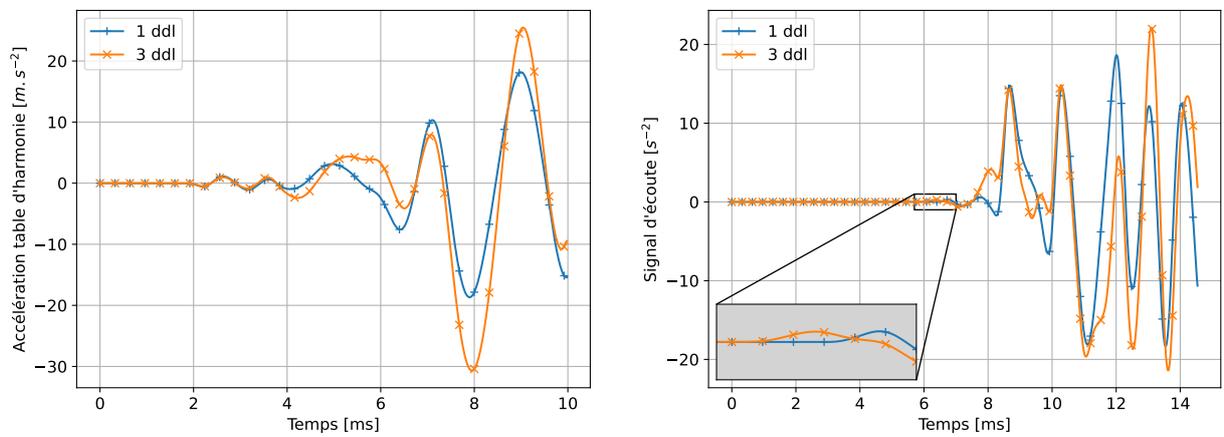


FIGURE 2.21 – Accélération P_1 de la table d’harmonie (gauche). Signal d’écoute (droite).

Là encore, le précurseur existe mais ne présente pas d’oscillations propres et dure moins d’une milliseconde, ce qui est cohérent avec la faible longueur de la corde. Le spectre du signal d’écoute est encore une fois assez fortement modifié.

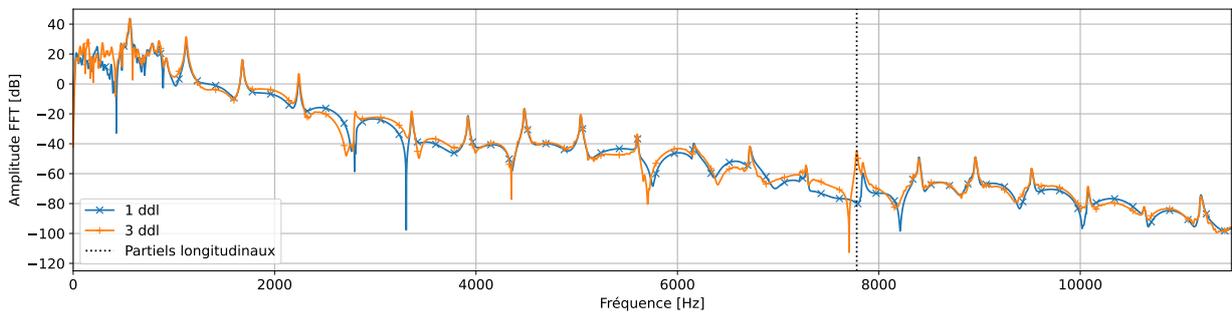


FIGURE 2.22 – Spectre du signal d’écoute.

2.4.4 Synthèse

Le modèle développé permet de rendre compte de mouvements complexes du chevalet dans la direction d'élévation de la table et dans les directions de cisaillement, et montre également la présence de précurseurs longitudinaux sur toute la tessiture du piano. Leur amplitude et durée sont cohérentes avec la longueur des cordes : plus les cordes sont longues et plus les précurseurs sont longs et d'amplitude élevée. Leur importance décroît rapidement avec la longueur des cordes.

Au delà de la présence de précurseurs, on remarque également des différences très significatives sur les signaux avec et sans transmission. Les contenus spectraux sont significativement différents, principalement au niveau des résonances longitudinales. Nous reviendrons sur ce point au chapitre 4, et nous comparerons les spectres de sons générés avec des cordes raides et avec des marteaux réalistes.

2.5 Influence de l'orientation des cordes par rapport à la table

En raison de la présence de raidisseurs orientés, du chevalet, et des propriétés anisotropes du bois, il est possible que l'orientation des cordes par rapport à la table d'harmonie ait une incidence sur la transmission des ondes au niveau du chevalet. C'est ce que nous étudions dans cette partie.

Pour cela, nous étudions l'admittance du chevalet, c'est-à-dire la mobilité possible dans les trois directions libres $(\vec{\nu}, \vec{\eta}, \vec{\tau})$ en fonction des fréquences et en fonction de l'angle latéral β défini par la figure 2.4.

2.5.1 Admittance du chevalet - Mobilité fréquentielle

Revenons à l'équation qui décrit les vibrations de la table d'harmonie

$$\mathbb{M}\ddot{\Lambda}_p + f_{ve}(\mathbb{R})\dot{\Lambda}_p + \mathbb{R}\Lambda_p = F(x, y, t) \quad (2.5.1)$$

et appliquons lui une transformation de Fourier pour l'étudier dans le domaine fréquentiel

$$\left(-\omega^2\mathbb{M} + i\omega f_{ve}(\mathbb{R}) + \mathbb{R}\right)\hat{\Lambda}_p = \hat{F}(x, y, \omega) \quad (2.5.2)$$

La matrice d'admittance du chevalet [Chaigne et Kergomard, 2008], [Cuenca et Caussé, 2007] définie par

$$\hat{\mathbb{Y}}(\omega)\hat{F}(x, y, \omega) = i\omega\hat{\Lambda}_p(x, y, \omega) \quad (2.5.3)$$

s'écrit donc

$$\hat{\mathbb{Y}}(\omega) = i\omega \left(\mathbb{R} + i\omega f_{ve}(\mathbb{R}) - \omega^2\mathbb{M}\right)^{-1} \quad (2.5.4)$$

Le même raisonnement sur le problème modal discret donne une matrice d'admittance

$$\hat{\mathbb{Y}}_h(\omega) = i\omega \left(\mathbb{D}_h + i\omega\mathbb{A}_h - \omega^2\mathbb{I}_h\right)^{-1} \quad (2.5.5)$$

Pour chaque pulsation ω , cette matrice permet de caractériser la mobilité de la table d'harmonie en fonction de la force qui lui est appliquée en entrée. Bien sûr, cette force d'entrée dépend de l'orientation relative de la corde et de la table.

2.5.2 Puissance transmise à la table d'harmonie

La puissance instantanée transmise via le chevalet est donnée par

$$\mathcal{P}(t) = \int_{\Omega} F(x, y, t) \cdot \dot{\Lambda}_p(x, y, t) dx dy \quad (2.5.6)$$

et la formule de Parseval assure une équivalence de normes entre le domaine temporel et le domaine de Fourier :

$$\int_{\mathbb{R}^+} \mathcal{P}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{P}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} \hat{F}^*(x, y, \omega) \cdot i\omega\hat{\Lambda}_p(x, y, \omega) dx dy d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\mathcal{I}}(\omega) d\omega \quad (2.5.7)$$

où $*$ désigne le complexe conjugué. Noter que $\hat{\mathcal{I}}(\omega) = \hat{\mathcal{I}}^*(-\omega)$ puisque $\mathcal{P}(t)$ est réel.

A partir de cette relation, on peut définir une puissance transmise fréquence par fréquence comme

$$\hat{\mathcal{P}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left(\hat{\mathcal{I}}(\omega) + \hat{\mathcal{I}}^*(-\omega)\right) = \frac{1}{\pi} \text{Re} \left(\hat{\mathcal{I}}(\omega)\right) = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \text{Re} \left(\hat{F}^*(x, y, \omega) \cdot i\omega\hat{\Lambda}_p(x, y, \omega)\right) dx dy \quad (2.5.8)$$

où Re désigne la partie réelle. On retrouve bien, à une constante multiplicative près, la formule utilisée dans [Suzuki, 1986].

Le vecteur second membre de l'équation (2.5.2), qui est la force appliquée au chevalet, est donné par

$$\hat{F}(x, y, \omega) = -\chi_\Omega(x, y) \begin{pmatrix} \hat{F}^P \\ \ell \hat{G}^P \\ \ell \hat{H}^P \end{pmatrix} = -\chi_\Omega(x, y) \begin{pmatrix} {}^t\nu_c \\ \ell {}^t\tau_c \\ \ell {}^t\eta_c \end{pmatrix} \hat{T}_L(\omega) = -\mathcal{R}_{\alpha\beta}(x, y) \hat{T}_L(\omega) \quad (2.5.9)$$

où

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta} = -\chi_\Omega(x, y) \begin{pmatrix} {}^t\nu_c \\ \ell {}^t\tau_c \\ \ell {}^t\eta_c \end{pmatrix} \quad (2.5.10)$$

est la matrice qui permet notamment de caractériser l'orientation de la corde par rapport à la table d'harmonie.

La puissance transmise s'exprime alors en fonction de l'admittance

$$\hat{\mathcal{P}}_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \text{Re} \left(\hat{\mathbb{Y}} \mathcal{R}_{\alpha\beta} \hat{T}_L \cdot \mathcal{R}_{\alpha\beta} \hat{T}_L \right) dx dy \quad (2.5.11)$$

Au niveau discret, ceci s'écrit

$$\hat{\mathcal{P}}_{\alpha\beta,h}(\omega) = \frac{1}{\pi} \text{Re} \left(\hat{\mathbb{Y}}_h \mathcal{R}_{\alpha\beta,h} \hat{T}_{Lh} \cdot \mathcal{R}_{\alpha\beta,h} \hat{T}_{Lh} \right) \quad (2.5.12)$$

avec

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta,h} = {}^t\mathbb{P}_h^U J_h {}^t\nu_{c,h} + \ell {}^t\mathbb{P}_h^{\Theta 1} J_h {}^t\tau_{c,h} + \ell {}^t\mathbb{P}_h^{\Theta 2} J_h {}^t\eta_{c,h} \quad (2.5.13)$$

et où les vecteurs $\nu_{c,h}$, $\tau_{c,h}$ et $\eta_{c,h}$ dépendent des orientations (α, β) par la relation (2.2.1). Cette relation (2.5.12) permet donc d'observer, fréquence par fréquence, l'influence de l'orientation latérale β de la corde sur la puissance transmise à la table d'harmonie.

2.5.3 Réponse impulsionnelle transversale

Choisissons $\hat{T}_L = {}^t(1, 0)$ qui correspond à une impulsion dans le sens transversal de la corde. On choisit un angle de charge $\alpha = 4^\circ$ et on se place sur la table d'harmonie au point d'attache de la corde Fa₃. En faisant varier l'angle latéral des cordes β (voir figure 2.4) on peut tracer une carte de transmission de puissance $\hat{\mathcal{P}}_{\alpha\beta,h}(\omega)$ représentée sur la figure 2.23.

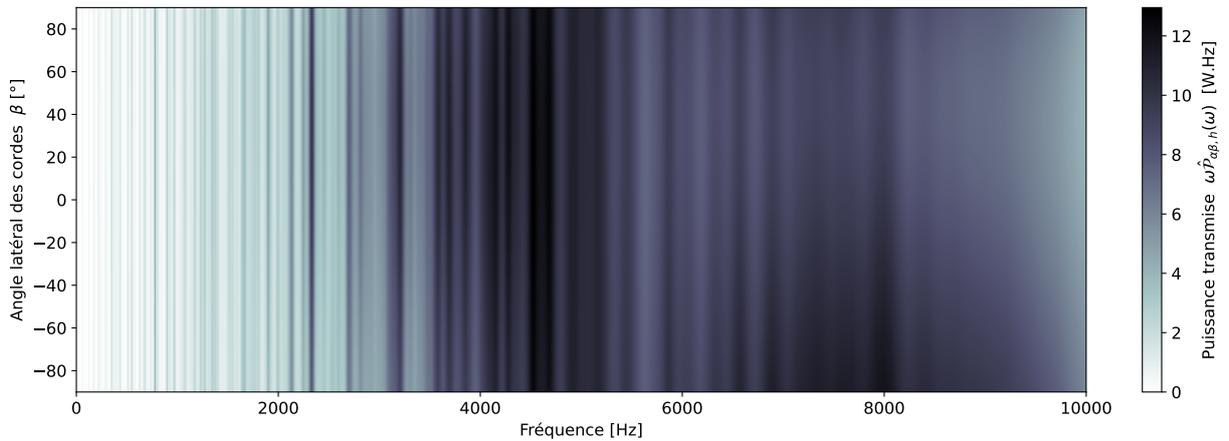


FIGURE 2.23 – Puissance transmise $\omega \hat{\mathcal{P}}_{\alpha\beta,h}(\omega)$ en fonction de β et de la fréquence.

La quantité tracée sur la figure 2.23 est la puissance multipliée par la pulsation $\omega \hat{\mathcal{P}}_{\alpha\beta,h}(\omega)$ pour permettre une meilleure visualisation. On remarque que l'angle latéral β a très peu d'influence sur la transmission de la puissance comme en témoigne l'invariance de la couleur sur l'axe vertical.

2.5.4 Réponse impulsionnelle longitudinale

Choisissons maintenant $\hat{T}_L = {}^t(0, 1)$ qui correspond à une impulsion dans le sens longitudinal de la corde. On choisit un angle de charge $\alpha = 4^\circ$ et on se place sur la table d'harmonie au point d'attache de la corde Fa₃.

En faisant varier l'angle latéral des cordes β (voir figure 2.4) on peut tracer des cartes de transmission de la puissance $\hat{\mathcal{P}}_{\alpha\beta,h}(\omega)$ représentées sur les figures 2.24 et 2.25.

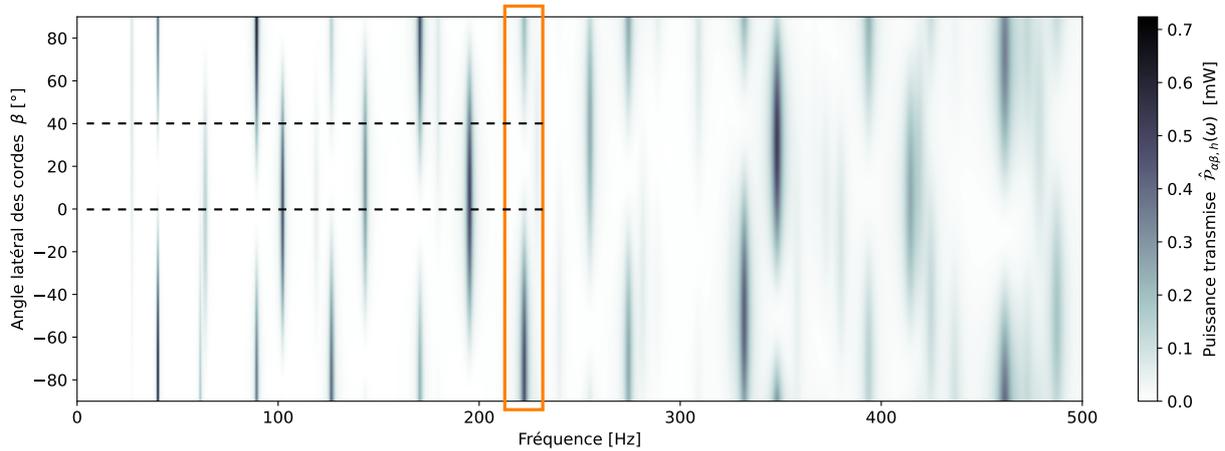


FIGURE 2.24 – Puissance transmise $\hat{\mathcal{P}}_{\alpha\beta,h}(\omega)$ en fonction de β et de la fréquence [0 - 500 Hz].

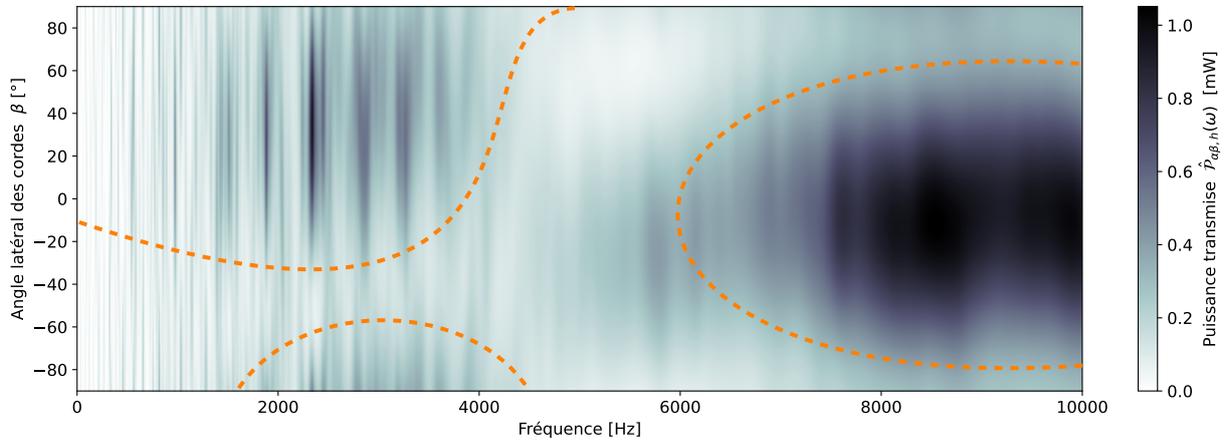


FIGURE 2.25 – Puissance transmise $\hat{\mathcal{P}}_{\alpha\beta,h}(\omega)$ en fonction de β et de la fréquence [0 - 10 kHz].

Sur ces cartes, les zones de couleur foncée correspondent à des fortes transmissions de puissance, tandis que les zones claires correspondent à des faibles transmissions de puissance.

Prenons un exemple possible de lecture de la figure 2.24. Imaginons que la fréquence $f \simeq 222$ Hz (mode n°14) encadrée en orange sur la figure soit gênante à l'oreille, trop présente dans le son, et qu'un facteur de piano souhaite l'atténuer. Alors, un choix pertinent d'orientation de la corde serait $\beta \in [0, 40^\circ]$, car comme en témoigne la couleur très claire du trait pour ce choix d'angle, très peu de puissance est transmise.

Cependant, cette possibilité est limitée par les contraintes d'agencement des différents éléments du piano, dont l'encombrement est déjà très important. Il n'est donc pas possible en pratique d'ajuster

indépendamment l'angle latéral β de chaque corde.

Si on considère une plage de fréquences plus étendue sur la figure 2.25, on remarque très nettement que les zones de couleur foncée de forte transmission de puissance et les zones plus claires de moindre puissance transmise forment des amas (repérés en pointillés oranges sur la figure 2.25). Dans la zone de moyennes fréquences par exemple, de 1 à 4 kHz, la zone $\beta > 0$ est beaucoup plus foncée et transmet beaucoup plus de puissance que la zone beaucoup plus claire $\beta < 0$. Dans la zone de haute fréquence, de 7 à 10 kHz, une imposante tâche sombre de haute transmission de puissance est visible pour des angles $\beta \in [-60^\circ, 40^\circ]$.

La carte de transmission de la figure 2.25 ne permet pas de dégager d'orientations optimales qui pourraient limiter ou maximiser uniformément la puissance transmise sur toute la gamme des fréquences audibles [20 Hz - 20 kHz]. On remarque toutefois une nette différence de comportement entre les basses fréquences et les hautes fréquences. Ces différences pourraient être expliquées par les orientations des fibres de bois de la table ($\beta = 54,4^\circ$), des raidisseurs ($\beta = -40^\circ$) et du chevalet ($\beta = 23^\circ$), qui influencent la résistance au cisaillement et qui pourraient avoir une influence sur la transmission de la puissance. En effet, on sait que la résistance du bois est plus importante pour des efforts de torsion appliqués orthogonalement aux fibres et inversement, plus faible pour des efforts appliqués parallèlement aux fibres. Pour expliquer les zones de forte et faible transmission de puissance de la figure 2.25, il faudrait pouvoir donner une importance à la résistance imposée par chaque élément, et ce en fonction de la fréquence.

Il est possible par exemple que les fibres du bois qui compose la table aient des dimensions suffisamment petites pour passer inaperçues en basse fréquence, mais avoir une importance significative pour les hautes fréquences. Et vice versa les raidisseurs et le chevalet, somme toute assez massifs, peuvent avoir une influence plus forte sur les basses fréquences que sur les hautes fréquences, ou bien encore imposer un confinement des vibrations comme montré dans [Ege, 2009].

Nous n'approfondissons pas davantage cette partie qui nécessiterait à elle seule une étude très poussée, mais nous pensons qu'elle pourrait conduire à des études intéressantes en termes de facture instrumentale.

2.6 Conclusion du chapitre 2 et pistes d'améliorations

Dans ce chapitre, nous avons développé un modèle de chevalet sous la forme d'une condition de couplage qui permet de transmettre les vibrations longitudinales de la corde à la table d'harmonie. La méthode numérique se base sur une décomposition modale de la table d'harmonie et une résolution temporelle analytique découplée sur une suite de modes tronquée. Le schéma de couplage préserve un bilan d'énergie discret qui assure sa stabilité et converge à l'ordre 2 en temps.

Pour des configurations angulaires réalistes des cordes (α petit) les ondes longitudinales sont bien transmises à la table d'harmonie et des précurseurs sont observés.

Enfin, la dernière partie a permis d'étudier les réponses impulsionnelles de la table d'harmonie. Pour une impulsion dans la direction transversale de la corde, nous n'avons pas remarqué d'influence significative de l'angle latéral β sur la puissance transmise via le chevalet. Par contre, il apparaît clairement des orientations de cordes qui permettent de maximiser ou minimiser la transmission des ondes longitudinales sur certaines plages de fréquences. Des études plus poussées permettraient peut-être d'optimiser la facture instrumentale à ce niveau de l'instrument.

Bien qu'il permette de rendre compte des phénomènes physiques attendus, notamment de précurseurs qui *semblent réalistes*, ce modèle manque encore de validation expérimentale. Des expérimentations permettraient de valider l'utilisation de ces conditions de couplage comme modèle réduit du chevalet, ou bien au contraire d'envisager une modélisation plus complexe, par exemple en considérant le chevalet dans son entièreté comme une poutre et de coupler tous ses degrés de liberté avec ceux de la table d'harmonie. Ce problème, typiquement le couplage d'une poutre de Timoshenko à une plaque de Reissner-Mindlin, dans le domaine temporel et avec des bonnes propriétés d'énergie, reste à notre connaissance aujourd'hui un problème ouvert.

Comme évoqué précédemment dans [Chabassier, 2012], notre modèle ne prend toujours pas en compte la charge (le *downbearing*) exercée sur la table en position de repos. Or les facteurs de piano savent bien, comme nous l'avons déjà mentionné en introduction de ce chapitre, que l'ajustement de la pression des cordes sur la table au repos est l'un des critères les plus fondamentaux pour la qualité du son. Un modèle de coque précontrainte, comme dans [Mamou-Mani *et al.*, 2008], permettrait peut-être de mieux modéliser la transmission des ondes (longitudinales) au niveau du chevalet. Encore une fois, nous manquons d'expérimentations récentes et précises à ce niveau de l'instrument pour valider ou invalider nos modélisations.

Enfin, sur la quasi totalité des pianos, les chevalets sont recouverts d'une couche de graphite qui permet à la corde de glisser longitudinalement, notamment au moment de l'accord pour éviter de briser les chevalets. Il est possible par conséquent que les ondes longitudinales à l'extrémité des cordes ne soient pas totalement transmises au chevalet, mais qu'une partie soit également transmise aux longueurs de cordes mortes situées après celui-ci.

CHAPITRE 3

Frottement du marteau sur la corde et flexibilité du manche

Pour étudier l'influence du toucher pianistique sur le son, il est essentiel de s'intéresser à l'interaction entre le marteau et les cordes. C'est en effet par ce couplage crucial que l'action mécanique de l'instrumentiste est convertie en vibrations acoustiques.

Les premiers marteaux apparaissent au 18^{ème} siècle, en même temps que les mécanismes d'échappement, et sont utilisés sur les premiers pianoforte. Ils étaient à l'origine recouverts de peau, et l'homogénéité le long de la tessiture de l'instrument était très mauvaise.



FIGURE 3.1 – Marteaux de pianoforte. Année 1790 (gauche), 1800 (centre), 1845 (droite). [Adrian, 2005]

Comme on peut le voir sur les illustrations de la figure 3.1, les marteaux étaient initialement couverts d'une unique couche de peau qui donnait au son une texture très métallique. Par la suite, le grand succès de l'instrument auprès de compositeurs renommés comme Mozart (1756-1791) a provoqué des innovations rapides. Dès les années 1800, plusieurs couches de cuir sont superposées pour obtenir un son beaucoup plus doux et propice au jeu des concertos solistes. Ce sont ces types de marteaux (images de gauche et du centre) qui équipaient les pianofortes durant l'époque

prolifère de Beethoven (1770-1827) et Schubert (1797-1828). Ce n'est que quelques années plus tard que le feutre fait son apparition, d'abord comme couche intermédiaire, puis ensuite en remplaçant complètement les peaux à partir des années 1860. Ceci correspond au cœur de la période romantique, avec des compositeurs comme Chopin (1810-1849), ou encore Liszt (1811-1886) et Schumann (1810-1856), qui exigeaient de leurs pianos toujours plus de puissance sonore et d'expressivité.

Aujourd'hui, les marteaux sont recouverts de plusieurs couches de feutre, et leurs caractéristiques physiques (dimensions, masse, épaisseur du feutre, densité, etc) sont ajustées pour chaque note afin de garantir la meilleure homogénéité sonore sur l'étendue du clavier. La figure 3.2 montre des exemples de marteaux modernes pour des tessitures aiguës en haut et graves en bas de l'image. Les accordeurs ont également un rôle très important dans l'entretien des marteaux. Ils liment ou piquent le feutre de la zone de contact pour le rendre plus ou moins dense, et ajustent ainsi considérablement le timbre de l'instrument, plus brillant et métallique pour des marteaux durs, et plus doux et feutré pour des marteaux mous [Reblitz, 2005].



FIGURE 3.2 – Marteaux modernes.

Ceci constitue des évolutions importantes de la tête de marteau, mais l'ensemble de la mécanique qui la met en mouvement a également connu de profondes évolutions durant la même période. Nous les détaillerons dans le chapitre 4 consacré à l'étude du toucher pianistique. Mentionnons tout de même ici que tous les marteaux mentionnés ci-dessus sont mis en mouvement autour d'un axe pivot au travers d'un manche en bois flexible.



FIGURE 3.3 – Marteau ancien (1845) avec son manche. [Adrian, 2005]

Un certain nombre d'auteurs dont [Izabdakhsh *et al.*, 2008], [Bokiau, 2016] se sont intéressés à l'étude et la modélisation de cette flexibilité. [Vyasarayani *et al.*, 2009] ajoutent en plus la frappe sur une corde et étudient les modifications spectrales dues à la flexibilité du manche. [Chabassier *et Duruflé*, 2014] vont encore plus loin en permettant un couplage à des cordes, une table d'harmonie et son rayonnement acoustique. Il est de l'avis général que la flexibilité du manche modifie le glissement et donc la friction du marteau dans l'axe de la corde au moment du contact. Le frottement ainsi induit, dépendant de la dynamique imposée par l'instrumentiste, pourrait agir comme une source supplémentaire d'ondes longitudinales de la corde, et ainsi créer, à nuances égales, une relation

entre le toucher et le son du piano.

Dans cette partie, nous présentons dans un premier temps, au paragraphe 3.1, des modèles d'interaction entre les marteaux et les cordes. Des modèles phénoménologiques réduits sont utilisés, qui modélisent le matériau feutré par une loi d'écrasement non-linéaire avec des paramètres de raideur et d'amortissement. La structure interne des fibres du feutre et leur déformation serait bien trop complexe à modéliser et trop coûteuse à simuler numériquement. Les modèles utilisés permettent tout de même de prendre en compte les interactions transversales et longitudinales entre le marteau et la corde, et le frottement est modélisé via une loi de Coulomb régularisée.

Nous présentons ensuite au paragraphe 3.2 un modèle numérique pour résoudre ce couplage. La non-linéarité de la loi d'interaction est traitée par une technique de quadratisation d'énergie. La non-linéarité dissipative due au frottement longitudinal n'est par contre pas quadratisable, et donc traitée implicitement et non-linéairement avec un algorithme de Newton.

Enfin, nous proposons au paragraphe 3.3 une technique de quadratisation d'énergie novatrice généralisée à des énergies cinétiques pour tout système physique formulé avec les équations d'Euler-Lagrange. Un schéma linéairement implicite est proposé, basé sur la reformulation des équations comme une contrainte dans l'espace des phases. Ces techniques sont ensuite appliquées à la résolution des équations d'un manche flexible non-linéaire en rotation. Une stratégie de résolution efficace conduit à un algorithme quasi explicite dont on observe la convergence à l'ordre deux en espace-temps.

Sommaire

3.1	Modèles d'interaction marteau-corde	120
3.1.1	Loi phénoménologique d'écrasement du feutre	121
3.1.2	Interaction transversale avec la corde	122
3.1.3	Modèle d'interaction transversal quadratisé	124
3.1.4	Frottement et interaction longitudinale avec la corde	126
3.2	Discrétisation et études numériques	128
3.2.1	Écriture d'un schéma de discrétisation avec frottement	129
3.2.2	Stratégie de résolution	131
3.2.3	Résultats numériques	132
3.2.3.a	Préservation numérique du bilan d'énergie	132
3.2.3.b	Convergence en temps et en espace-temps	133
3.2.3.c	Choix de la constante auxiliaire de quadratisation du marteau	134
3.2.3.d	Interprétation des résultats des simulations	135
3.2.3.e	Conclusion	138
3.3	Quadratisation d'énergie pour le manche flexible	138
3.3.1	Technique de quadratisation des équations d'Euler-Lagrange	139
3.3.1.a	Quadratisation des équations d'Euler-Lagrange	142
3.3.1.b	Formulation des équations dans l'espace des phases	143
3.3.1.c	Stratégies de discrétisation	144
3.3.2	Application au manche de marteau flexible en rotation	146
3.3.2.a	Description du modèle physique	146
3.3.2.b	Application de la méthode de quadratisation scalaire du Lagrangien	149
3.3.2.c	Discrétisation en espace	153
3.3.2.d	Discrétisation en temps	155
3.3.2.e	Stratégie de résolution	157
3.3.3	Résultats numériques	159
3.3.3.a	Terme source et paramètres physiques	159

3.3.3.b	Solution du schéma	159
3.3.3.c	Conservation du bilan de puissance discret	160
3.3.3.d	Coût de calcul et convergence espace-temps	160
3.3.4	Conclusion	162
3.4	Conclusion du chapitre 3 et pistes d'améliorations	162

3.1 Modèles d'interaction marteau-corde

La question de la modélisation du contact entre les cordes et le marteau est certainement la plus discutée dans la littérature scientifique liée au piano. La majorité des approches se basent sur une même paramétrisation du problème décrite par la figure 3.4.

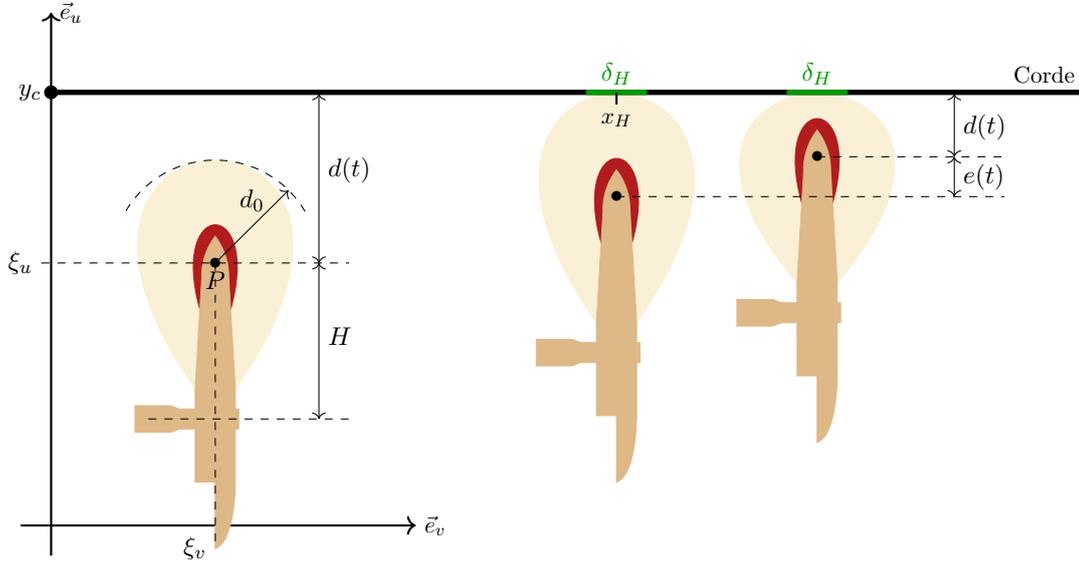


FIGURE 3.4 – Dimensions caractéristiques et paramétrisation d'un marteau.

On suppose que le haut du marteau est localement circulaire de centre P et de rayon d_0 , si bien qu'une frappe légèrement inclinée ne change pas la distance d qui est définie entre la position moyenne de la corde sur la surface d'interaction, et la position du centre de masse de la tête de marteau ξ_u . Comme dans [Chaigne et Askenfelt, 1994], l'écrasement du feutre e et la distance d sont reliées par les relations

$$\begin{cases} e(t) = [d_0 - d(t)]^+ & (3.1.1a) \\ d(t) = y_c + \langle u \rangle(t) - \xi_u(t) & (3.1.1b) \end{cases}$$

où l'on a noté $\langle u \rangle(t) = \int_0^L u(x, t) \delta_H(x - x_H) dx$ la position moyenne transversale de la corde sur une zone de répartition δ_H , et $[\cdot]^+$ la fonction partie positive.

3.1.1 Loi phénoménologique d'écrasement du feutre

La modélisation ou détermination de lois qui permettent de calculer la force exercée par un marteau sur des cordes a fait l'objet d'une littérature abondante. En plus de son caractère non-linéaire, le feutre utilisé sur les marteaux a des propriétés d'interaction non symétriques en phase d'écrasement et en phase de relâchement. A écrasement égal, la force est plus grande en phase de compression qu'en phase de détente, ce qui constitue une hystérésis visible sur la figure 3.5. Ces phénomènes sont décrits par exemple dans [Boutillon, 1988], [Hall et Askenfelt, 1988], [Giordano et Winans, 2000], [Stulov, 2003] et [Bokiau, 2016] pour ne citer qu'eux.

Les modèles de ces auteurs peuvent s'écrire sous une forme unifiée :

$$F_N^H = \phi_1(e) + \dot{e} \phi_2(e) \quad (3.1.2)$$

où F_N^H est la force normale exercée par le feutre sur le corps extérieur et e l'écrasement.

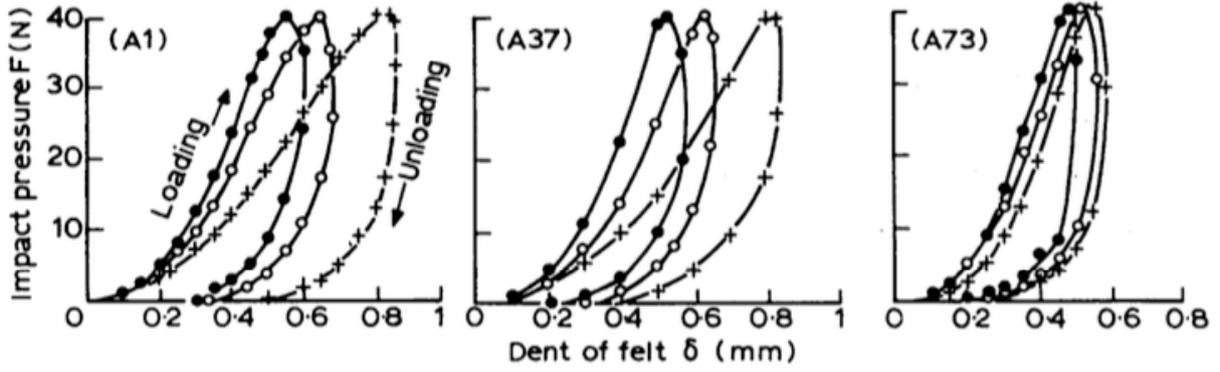


FIGURE 3.5 – Force en fonction de l'écrasement pour différents marteaux et différentes notes (A1, A37, A73). • dur, ○ moyen, + mou. [Yanagisawa et Nakamura, 1982]

A titre d'exemple, le modèle de [Stulov, 2003], également choisi dans [Chabassier, 2012], s'écrit :

$$\begin{cases} F_N^H = K^H e^p + R^H \partial_t(e^p) & (3.1.3a) \\ \phi_1(x) = K^H x^p & (3.1.3b) \\ \phi_2(x) = pR^H x^{p-1} & (3.1.3c) \end{cases}$$

où K^H est un paramètre de dureté du feutre, R^H un paramètre d'amortissement et p un exposant qui quantifie la non-linéarité du modèle.

On trouve également des modèles alternatifs sous les formes suivantes :

$$\begin{cases} F_N^H = \phi_1(e) (1 + D\dot{e}) & (3.1.4a) \\ \phi_1(x) = axe^{bx} + cx & [\text{Masoudi et al., 2014}] & (3.1.4b) \\ \phi_1(x) = ax^3 + bx^2 + cx & [\text{Vyasarayani et al., 2009}] & (3.1.4c) \\ \phi_1(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx & [\text{Levander et Fisette, 2020}] & (3.1.4d) \\ \phi_2(x) = D\phi_1(x) & (3.1.4e) \end{cases}$$

Ce formalisme est utilisé dans le modèle multicorps de [Timmermans, 2021] pour modéliser les interactions feutrées de la mécanique de piano à queue. C'est la forme polynomiale de degré 4 de [Levander et Fisette, 2020] qui y est retenue pour l'interaction marteau-corde.

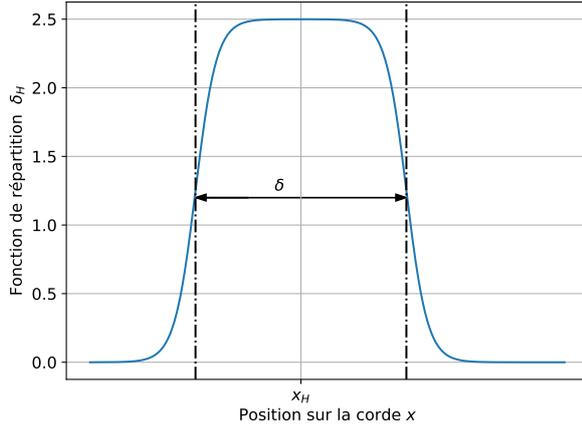
Notons que les paramètres physiques présents dans ces modèles phénoménologiques sont déterminés expérimentalement et peuvent varier pour chaque marteau associé à chaque note du clavier.

Enfin, nous remarquons qu'une décompression brusque du feutre (\dot{e} très négatif) peut rendre la force d'interaction F_N^H négative, ce qui n'a pas de sens physique. Ceci traduit un défaut majeur de ces modèles réduits, sur lequel nous reviendrons par la suite.

3.1.2 Interaction transversale avec la corde

De nombreux auteurs ont d'ores et déjà travaillé sur cette interaction clé du fonctionnement du piano. Citons par exemple les travaux précurseurs de [Suzuki, 1987], [Boutillon, 1988] et [Hall et Askenfelt, 1988], puis plus récemment, mais toujours par les mêmes procédés, [Stulov, 2004] et [Vyasarayani et al., 2009]. Depuis les premiers travaux dans les années 1980, les modèles utilisés n'ont pas évolué, et très peu d'études sont parues récemment sur le sujet.

Comme dans toutes les références ci-dessus, la force F_N^H (3.1.2) est utilisée comme terme source pour l'équation de la corde, dans la direction transversale à celle-ci que nous notons \vec{e}_u .



$$\delta_H(x) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{1 + e^{-s(x+\delta/2)}} - \frac{1}{1 + e^{-s(x-\delta/2)}} \right) \quad (3.1.5)$$

FIGURE 3.6 – Fonction de répartition δ_H du marteau.

La zone de contact avec la corde n'étant bien entendu pas ponctuelle, l'application de cette force est répartie sur une longueur de contact par une fonction δ_H d'intégrale unitaire sur \mathbb{R} et telle que : Le paramètre s (*slope*) permet d'ajuster la pente de la fonction aux bords de l'intervalle de contact. L'équation de la corde à laquelle on applique le terme source provenant de la force du marteau s'écrit :

$$\begin{aligned} \partial_t^2 Mq + \partial_t(Rq - \partial_x(H\partial_x q)) - \partial_x(A\partial_x q + Bq + \nabla\mathcal{U}(\partial_x q)) \\ + Cq + {}^t B\partial_x q = F(x, t) + F_N^H(t)\delta_H(x - x_H)\vec{e}_u \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Modèle 3.1.1 (Interaction marteau-corde)

On cherche $q : [0, L] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ et $\xi_u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} m_H \ddot{\xi}_u = -F_N^H & (3.1.7a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_N^H = \Phi_1(d) - \dot{d}\Phi_2(d) & (3.1.7b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t^2 Mq + \partial_t(Rq - \partial_x(H\partial_x q)) - \partial_x(A\partial_x q + Bq + \nabla\mathcal{U}(\partial_x q)) \\ + Cq + {}^t B\partial_x q = F(x, t) + F_N^H(t)\delta_H(x - x_H)\vec{e}_u & (3.1.7c) \end{cases}$$

Les conditions initiales et les conditions aux bords sont données par

$$\begin{cases} \xi_u(0) = \xi_{u0} \\ \dot{\xi}_u(0) = v_N^0 \\ \forall k \in \mathcal{I}_D, \forall t \in [0, T], \quad q_k(0, t) = q_k(L, t) = 0 \\ \forall k \in \mathcal{I}_N, \forall t \in [0, T], \quad \partial_x q_k(0, t) = \partial_x q_k(L, t) = 0 \\ \forall x \in [0, L], \quad q(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (3.1.8)$$

et $d = y_c + \langle u \rangle - \xi_u$ et $\Phi_i(d) = \phi_i(e) = \phi_i([d_0 - d]^+)$.

L'équation (3.1.7a) découle de l'application de la seconde loi de Newton en projection sur l'axe vertical. L'équation (3.1.7b) est une reformulation de l'équation (3.1.2) avec la variable de distance d plutôt que l'écrasement e . Enfin, l'équation (3.1.7c) est l'équation de la corde avec un terme

source approprié pour le couplage avec le marteau.

Dans la suite, on note Ψ_1 la primitive de $-\Phi_1$ qui s'annule pour une distance infinie (où il n'y a pas d'interaction avec la corde), c'est-à-dire

$$\Psi_1(d) = \int_d^{+\infty} \Phi_1(s) ds \quad (3.1.9)$$

Théorème 3.1.1 (Bilan de puissance du système marteau-corde)

Toute solution suffisamment régulière $q \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathcal{Q}_D) \cap \mathcal{C}^2([0, T], L^2([0, L])^N)$ et $\xi_u \in \mathcal{C}^2([0, T], \mathbb{R})$ du modèle 3.1.1 vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathcal{E}_{m,c}}{dt} = \int_0^L F \cdot \dot{q} - \dot{d}^2 \Phi_2(d) - \int_0^L R\dot{q} \cdot \dot{q} - \int_0^L H \partial_x \dot{q} \cdot \partial_x \dot{q} \end{array} \right. \quad (3.1.10a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_{m,c}(t) = \mathcal{E}_c(t) + \frac{1}{2} m_H \dot{\xi}_u^2 + \Psi_1(d(t)) \end{array} \right. \quad (3.1.10b)$$

où \mathcal{E}_c est l'énergie de la corde définie par le théorème 1.1.1.

Démonstration. L'application du bilan de puissance de la corde, défini par le théorème 1.1.1, avec comme terme source $F(x, t) + F_N^H \delta^H(x - x_H) \vec{e}_u$ permet d'obtenir

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \int_0^L F \cdot \dot{q} + F_N^H \underbrace{\int_0^L \dot{q}(x, t) \cdot \vec{e}_u \delta_H(x - x_H) dx}_{\partial_t \langle u \rangle} - \int_0^L R\dot{q} \cdot \dot{q} - \int_0^L H \partial_x \dot{q} \cdot \partial_x \dot{q} \quad (3.1.11)$$

On prend en compte la contribution énergétique du marteau en multipliant l'équation (3.1.7a) par $\dot{\xi}_u$ et en l'ajoutant à l'équation (3.1.11) :

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_H \dot{\xi}_u^2 \right) = \int_0^L F \cdot \dot{q} + F_N^H \underbrace{\left(\partial_t \langle u \rangle - \dot{\xi}_u \right)}_{\partial_t d} - \int_0^L R\dot{q} \cdot \dot{q} - \int_0^L H \partial_x \dot{q} \cdot \partial_x \dot{q} \quad (3.1.12)$$

Il suffit alors de remplacer F_N^H par son expression (3.1.7b) pour obtenir le résultat escompté. \square

Notons que pour tous les modèles envisagés, les fonctions Φ_1 , Ψ_1 et Φ_2 sont positives, ce qui assure la positivité de l'énergie et le caractère dissipatif du terme $\dot{d}^2 \Phi_2(d)$.

3.1.3 Modèle d'interaction transversal quadratisé

De façon similaire à la corde dans la partie 1, la non-linéarité de la fonction Φ_1 , d'origine énergétique potentielle, nous impose d'écrire une quadratisation si on souhaite pouvoir écrire un schéma en temps linéairement implicite qui ne nécessite pas de méthode de résolution itérative. Cette partie est inspirée d'une technique de quadratisation marteau-corde couplée de [Ducceschi *et al.*, 2022], et reprise et augmentée dans [van Walstijn *et al.*, 2024].

Pour une constante auxiliaire $c_H \in \mathbb{R}_+^*$, introduisons la variable auxiliaire de marteau

$$\forall t \in [0, T], \quad z_H(t) \equiv \sqrt{2\Psi_1(d(t)) + c_H} \quad (3.1.13)$$

et la fonction auxiliaire associée

$$\forall d \in \mathbb{R}, \quad G_H(d) = \frac{-\Phi_1(d)}{\sqrt{2\Psi_1(d) + c_H}} \quad (3.1.14)$$

Modèle 3.1.2 (Interaction quadratisée marteau-corde)

On cherche $q : [0, L] \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $\xi_u : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $z_H : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} m_H \ddot{\xi}_u = -F_N^H & (3.1.15a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_N^H = -z_H G_H(d) - \dot{d} \Phi_2(d) & (3.1.15b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_H = G_H(d) \dot{d} & (3.1.15c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t^2 M q + \partial_t (R q - \partial_x (H \partial_x q)) - \partial_x (A \partial_x q + B q + \nabla \mathcal{U}(\partial_x q)) \\ + C q + {}^t B \partial_x q = F(x, t) + F_N^H(t) \delta_H(x - x_H) \vec{e}_u & (3.1.15d) \end{cases}$$

Les conditions initiales et les conditions aux bords sont données par

$$\begin{cases} \xi_u(0) = \xi_{u0} \\ \dot{\xi}_u(0) = v_N^0 \\ z_H(0) = \sqrt{c_H} \\ \forall k \in \mathcal{I}_D, \forall t \in [0, T], \quad q_k(0, t) = q_k(L, t) = 0 \\ \forall k \in \mathcal{I}_N, \forall t \in [0, T], \quad \partial_x q_k(0, t) = \partial_x q_k(L, t) = 0 \\ \forall x \in [0, L], \quad q(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (3.1.16)$$

et $d = y_c + \langle u \rangle - \xi_u$.

Théorème 3.1.2 (Bilan de puissance du système quadratisé marteau-corde)

Toute solution suffisamment régulière $q \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathcal{Q}_D) \cap \mathcal{C}^2([0, T], L^2([0, L])^N)$, $\xi_u \in \mathcal{C}^2([0, T], \mathbb{R})$ et $z_H \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R})$ du modèle 3.1.2 vérifie

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{E}_{m,c}}{dt} = \int_0^L F \cdot \dot{q} - \dot{d}^2 \Phi_2(d) - \int_0^L R \dot{q} \cdot \dot{q} - \int_0^L H \partial_x \dot{q} \cdot \partial_x \dot{q} & (3.1.17a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{m,c}(t) = \mathcal{E}_c(t) + \frac{1}{2} m_H \dot{\xi}_u^2 + \frac{1}{2} z_H^2 & (3.1.17b) \end{cases}$$

où \mathcal{E}_c est l'énergie de la corde définie par le théorème 1.1.1.

Démonstration. Le procédé est le même que pour le théorème 3.1.1. On obtient l'équation

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_H \dot{\xi}_u^2 \right) = \int_0^L F \cdot \dot{q} + F_N^H \dot{d} - \int_0^L R \dot{q} \cdot \dot{q} - \int_0^L H \partial_x \dot{q} \cdot \partial_x \dot{q} \quad (3.1.18)$$

et on remplace F_N^H par son expression

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_H \dot{\xi}_u^2 \right) + z_H G_H(d) \dot{d} = \int_0^L F \cdot \dot{q} - \dot{d}^2 \Phi_2(d) - \int_0^L R \dot{q} \cdot \dot{q} - \int_0^L H \partial_x \dot{q} \cdot \partial_x \dot{q} \quad (3.1.19)$$

puis on utilise (3.1.15c) pour aboutir au résultat. \square

3.1.4 Frottement et interaction longitudinale avec la corde

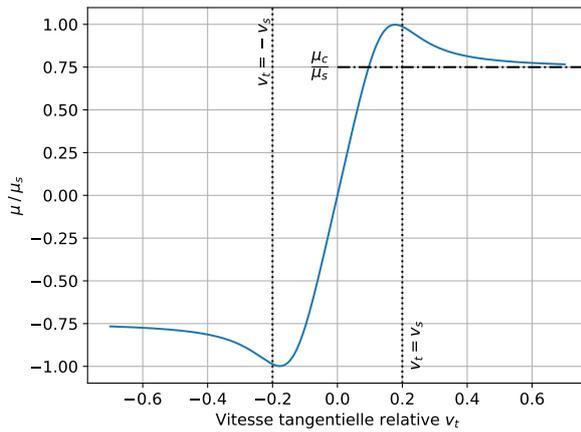
Pour prendre en compte l'interaction du marteau avec la corde dans la direction longitudinale, nous utilisons un modèle de Coulomb régularisé semblable à celui de [Cull et Tucker, 1999] mais modifié par [Hirschhorn, 2004]. On le trouve utilisé notamment dans [Vyasarayani *et al.*, 2009], [Bokiau, 2016], [Timmermans, 2021] pour la modélisation du frottement.

Un modèle de Coulomb non régularisé s'écrirait :

- Si $|F_T| \leq \mu_s |F_N|$, alors la vitesse tangentielle relative des corps en contact v_t est nulle
- Si ce seuil est dépassé, il y a glissement et $|F_T| = \mu_c |F_N|$ avec $\mu_c \leq \mu_s$

où μ_s et μ_c sont les coefficients de frottement statique et cinétique.

Un tel modèle discontinu n'est pas envisageable pour deux principales raisons. Premièrement il n'a pas de réalité physique, et tout particulièrement pour des matériaux aussi déformables que le feutre. Deuxièmement, un modèle discontinu est très peu adapté à une discrétisation numérique. Le modèle régularisé de [Hirschhorn, 2004] exprime la force tangentielle comme proportionnelle à la force normale, $F_T = \mu(v_t)F_N$, avec un coefficient μ dépendant de la vitesse tangentielle relative v_t des corps en contact :



$$\mu(v_t) = \mu_c \left(\tanh(v_t/v_s) + \frac{B_1 v_t/v_s}{1 + B_2 (v_t/v_s)^4} \right) \quad (3.1.20)$$

FIGURE 3.7 – Coefficient de frottement régularisé.

L'inverse du coefficient v_s caractérise la pente de la courbe à l'origine. Un matériaux très dur a tendance à avoir un seuil v_s petit, donc une forte pente à l'origine qui signifie que la transition entre adhérence et glissement est brutale. Un matériaux plutôt mou comme le feutre a par contre tendance à avoir un v_s élevé et une faible pente à l'origine, c'est-à-dire que la transition adhérence-glissement se fait plus progressivement par déformation interne des fibres du matériau. Les coefficients B_1 et B_2 caractérisent quant à eux un comportement de type *stick and slip*. Ils sont ajustés pour que le maximum de μ (3.1.20) corresponde à la valeur de μ_s .

Si $\mu(v_t) \leq \mu_s$ alors $F_T = \mu(v_t)F_N \leq \mu_s |F_N|$, on est dans une phase plutôt adhérente. Lorsque ce seuil est dépassé, $F_T = \mu(v_t)F_N$ et le coefficient $\mu(v_t)$ tend rapidement vers μ_c , c'est une phase de glissement.

Nous avons mentionné plus haut que les modèles que nous utilisons autorisent à la force normale F_N d'être négative en phase de décompression du feutre. Il en va donc de même pour la force tangentielle F_T . Ce défaut, inhérent au modèle réduit d'interaction que nous utilisons, pose problème pour assurer la passivité du couplage marteau-corde en termes d'énergie. Pour pallier ce problème nous proposons de simplifier la loi de frottement en négligeant l'apport tangentiel dû au terme

d'amortissement Φ_2 . La force tangentielle s'écrit alors :

$$F_T = \mu(v_t)\Phi_1(d) \quad (3.1.21)$$

Modèle 3.1.3 (Interaction marteau-corde avec frottement)

On cherche $q : [0, L] \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $\vec{\xi} : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $z_H : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} m_H \partial_t^2 \vec{\xi} = -F_N^H \vec{e}_u - F_T^H \vec{e}_v \end{array} \right. \quad (3.1.22a)$$

$$F_N^H = -z_H G_H(d) - d\dot{\Phi}_2(d) \quad (3.1.22b)$$

$$F_T^H = \mu(\dot{\nu})\Phi_1(d) \quad (3.1.22c)$$

$$\dot{z}_H = G_H(d)\dot{d} \quad (3.1.22d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t^2 Mq + \partial_t(Rq - \partial_x(H\partial_x q)) - \partial_x(A\partial_x q + Bq + \nabla\mathcal{U}(\partial_x q)) \\ \quad + Cq + {}^t B\partial_x q = F(x, t) + (F_N^H \vec{e}_u + F_T^H \vec{e}_v) \delta_H(x - x_H) \end{array} \right. \quad (3.1.22e)$$

Les conditions initiales et les conditions aux bords sont données par

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_u(0) = \xi_{u0}, \quad \xi_v(0) = \xi_{v0} \\ \dot{\xi}_u(0) = v_N^0, \quad \dot{\xi}_v(0) = v_T^0 \\ z_H(0) = \sqrt{c_H} \\ \forall k \in \mathcal{I}_D, \forall t \in [0, T], \quad q_k(0, t) = q_k(L, t) = 0 \\ \forall k \in \mathcal{I}_N, \forall t \in [0, T], \quad \partial_x q_k(0, t) = \partial_x q_k(L, t) = 0 \\ \forall x \in [0, L], \quad q(x, 0) = 0 \end{array} \right. \quad (3.1.23)$$

et $d = y_c + \langle u \rangle - \xi_u$ et $\nu = \xi_v - \langle v \rangle$.

Théorème 3.1.3 (Bilan de puissance du système marteau-corde avec frottement)

Toute solution suffisamment régulière $q \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathcal{Q}_D) \cap \mathcal{C}^2([0, T], L^2([0, L])^N)$, $\vec{\xi} \in \mathcal{C}^2([0, T], \mathbb{R}^2)$ et $z_H \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R})$ du modèle 3.1.3 vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathcal{E}_{m,c}}{dt} = \int_0^L F \cdot \dot{q} - \dot{d}^2 \Phi_2(d) - \dot{\nu} \mu(\dot{\nu}) \Phi_1(d) - \int_0^L R \dot{q} \cdot \dot{q} - \int_0^L H \partial_x \dot{q} \cdot \partial_x \dot{q} \end{array} \right. \quad (3.1.24a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_{m,c}(t) = \mathcal{E}_c(t) + \frac{1}{2} m_H |\partial_t \vec{\xi}|^2 + \frac{1}{2} z_H^2 \end{array} \right. \quad (3.1.24b)$$

où \mathcal{E}_c est l'énergie de la corde définie par le théorème 1.1.1.

Démonstration. La preuve est la même que pour le théorème 3.1.2 mais avec un terme dissipatif en plus dû au frottement. \square

On vérifie aisément que $x\mu(x)$ est positif pour tout réel x . La fonction Φ_1 étant également positive, le terme $\dot{\nu}\mu(\dot{\nu})\Phi_1(d)$ est bien positif et purement dissipatif. Si on ne réalise pas la simplification (3.1.21), le terme qui apparaîtrait dans le bilan de puissance serait $\dot{\nu}\mu(\dot{\nu})F_N$. Nous ne disposons

d'aucune garantie de positivité pour ce terme, donc le modèle n'est pas passif et les preuves classiques d'estimations à priori sur les solutions ne peuvent pas aboutir.

L'approximation de la force de frottement sous la forme (3.1.21) permet donc d'aboutir à un modèle bien posé en termes d'énergie, au prix d'une simplification assez forte du modèle de Coulomb.

Remarque 3.1.1

Dans le cas d'utilisation d'un modèle d'interaction de la forme (3.1.4a) pour lequel $\Phi_2 = D\Phi_1$, il est toutefois possible d'explicitier une condition pour que le modèle non simplifié assure la décroissance de l'énergie. Considérons l'ensemble des termes dissipatifs dus au marteau :

$$\dot{d}^2\Phi_2(d) + \dot{\nu}\mu(\dot{\nu})F_N = \left(\dot{\nu}\mu(\dot{\nu}) - \dot{\nu}\mu(\dot{\nu})\dot{d}D + \dot{d}^2D\right)\Phi_2(d) \quad (3.1.25)$$

La fonction Φ_2 est positive, et l'expression qui est en facteur est un polynôme de second degré en la variable \dot{d} . Il est donc possible de déterminer une condition qui assure sa positivité. Notons $\gamma = \dot{\nu}\mu(\dot{\nu})$. La fonction $x \mapsto Dx^2 - \gamma Dx + \gamma$ est positive sur tout \mathbb{R} si et seulement si son discriminant $\gamma^2 D^2 - 4\gamma D$ est négatif, c'est-à-dire $\gamma D \leq 4$. Autrement dit, si $\dot{\nu}\mu(\dot{\nu}) \leq \frac{4}{D}$, alors la passivité du modèle, c'est-à-dire la décroissance de son énergie, est assurée.

Le modèle de Stulov (3.1.3) ne semble pas permettre une telle analyse.

Pour résumer, le modèle 3.1.3 formulé comme tel avec la l'expression simplifiée de la force tangentielle (3.1.21), est passif d'après le bilan de puissance du théorème 3.1.3.

Avec une hypothèse supplémentaire sur la solution, $\dot{\nu}\mu(\dot{\nu}) \leq \frac{4}{D}$, et l'utilisation de la formulation (3.1.4a), le modèle le Coulomb non simplifié $F_T = \mu(v_t)F_N$ peut être utilisé, mais nous ne pouvons pas le garantir à priori.

Dans la pratique, nous avons constaté que quelque soit le modèle d'interaction choisi, les simulations que nous avons réalisées avec le modèle de Coulomb original non simplifié ne montrent pas de problèmes de divergence ou de croissance de l'énergie. Ceci suggère peut-être que d'autres techniques de preuve pourraient être appliquées pour réaliser l'analyse mathématique, et nous avons donc décidé d'utiliser le modèle sans la simplification dans toutes nos simulations, tout en conservant l'écriture simplifiée, mathématiquement avantageuse, dans l'écriture des modèles et des théorèmes.

Remarque 3.1.2: (Existence de solutions)

Dans [Joly et Rhaouti, 1997], on trouve une analyse mathématique du modèle 3.1.1 dans le cas d'un impact sur un obstacle rigide puis sur une corde vibrante linéaire supposée infinie. Nous ne pouvons pas appliquer ces résultats à une corde finie non-linéaire, et encore moins avec un terme de frottement. L'analyse théorique du modèle de frottement n'est donc pas réalisée dans ce manuscrit.

3.2 Discrétisation et études numériques

3.2.1 Écriture d'un schéma de discrétisation avec frottement

Comme pour la corde, plusieurs stratégies de discrétisation sont possibles pour l'équation du mouvement du marteau. Nous utilisons ici l'approche SAV formulée à l'ordre 2.

Les fonctions de base des éléments finis de la corde $(\varphi_i)_{i \in [1, n_h^q]}$ permettent de définir les vecteurs :

$$\forall i \in [1, n_h], \quad \begin{cases} \langle \Delta_h^u \rangle_i = \int_0^L \delta(x - x_H) \varphi_i(x) \cdot \vec{e}_u \, dx \\ \langle \Delta_h^v \rangle_i = \int_0^L \delta(x - x_H) \varphi_i(x) \cdot \vec{e}_v \, dx \end{cases} \quad (3.2.1)$$

qui permettent de répartir discrètement le contact du marteau sur les degrés de liberté de la corde. Le schéma 3.2.1 suivant discrétise le modèle 3.1.3 sur des grilles temporelles interlacées inspirées de [Ducceschi *et al.*, 2022]. \mathfrak{C} désigne un schéma de corde centré en t^n .

Schéma numérique 3.2.1 (Interaction marteau-corde avec frottement)

A chaque itération, on cherche $\vec{\xi}^{n+1} \in \mathbb{R}^2$, $z_H^{n+1/2} \in \mathbb{R}$, $(F_N^H, F_T^H) \in \mathbb{R}^2$ et $Q_h^{n+1} \in \mathbb{R}^{n_h^q}$ tels que

$$m_H \frac{\vec{\xi}^{n+1} - 2\vec{\xi}^n + \vec{\xi}^{n-1}}{\Delta t^2} + F_N^H \vec{e}_u + F_T^H \vec{e}_v = 0 \quad (3.2.2a)$$

$$F_N^H = -\frac{z_H^{n+1/2} + z_H^{n-1/2}}{2} G_H(d_h^n) - \frac{d_h^{n+1} - d_h^{n-1}}{2\Delta t} \Phi_2(d_h^n) \quad (3.2.2b)$$

$$F_T^H = \mu \left(\frac{\nu_h^{n+1} - \nu_h^{n-1}}{2\Delta t} \right) \Phi_1(d_h^n) \quad (3.2.2c)$$

$$\frac{z_H^{n+1/2} - z_H^{n-1/2}}{\Delta t} = G_H(d_h^n) \frac{d_h^{n+1} - d_h^{n-1}}{2\Delta t} \quad (3.2.2d)$$

$$\mathfrak{C}(Q_h^{n+1}, Q_h^n, Q_h^{n-1}) = F_h^n + F_N^H \langle \Delta_h^u \rangle + F_T^H \langle \Delta_h^v \rangle \quad (3.2.2e)$$

Les conditions initiales sont données par

$$\begin{cases} \xi_u^0 = \xi_{u0}, & \xi_v^0 = \xi_{v0} \\ \xi_u^1 = \xi_{u0} + v_N^0 \Delta t, & \xi_v^1 = \xi_{v0} + v_T^0 \Delta t \\ z_H^{1/2} = \sqrt{c_H} \\ Q_h^0 = Q_h^1 = 0 \end{cases} \quad (3.2.3)$$

et $d_h^n = y_c + \langle \Delta_h^u \rangle \cdot Q_h^n - \xi_u^n$ et $\nu_h^n = \xi_v^n - \langle \Delta_h^v \rangle \cdot Q_h^n$.

Théorème 3.2.1 (Bilan de puissance discret du schéma 3.2.1)

La solution du schéma 3.2.1 vérifie

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_{m,c}^{n+1/2} - \mathcal{E}_{m,c}^{n-1/2}}{\Delta t} &= F_h^n \cdot \frac{Q_h^{n+1} - Q_h^{n-1}}{2\Delta t} - \left\| \frac{Q_h^{n+1} - Q_h^{n-1}}{2\Delta t} \right\|_{\mathbb{R}}^2 \\ &\quad - \left(\frac{d_h^{n+1} - d_h^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2 \Phi_2(d_h^n) - \frac{\nu_h^{n+1} - \nu_h^{n-1}}{2\Delta t} \mu \left(\frac{\nu_h^{n+1} - \nu_h^{n-1}}{2\Delta t} \right) \Phi_1(d_h^n) \end{aligned} \right. \quad (3.2.4a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{E}_{m,c}^{n+1/2} &= \mathcal{E}_c^{n+1/2} + \frac{1}{2} m_H \left| \frac{\bar{\xi}^{n+1} - \bar{\xi}^n}{\Delta t} \right|^2 + \frac{1}{2} (z_H^{n+1/2})^2 \end{aligned} \right. \quad (3.2.4b)$$

où $\mathcal{E}_c^{n+1/2}$ est l'énergie discrète de la corde associée au schéma \mathfrak{C} .

Démonstration. On applique le bilan de puissance de la corde correspondant au schéma \mathfrak{C} avec le terme source $F_h^n + F_N^H \langle \Delta_h^u \rangle + F_T^H \langle \Delta_h^v \rangle$. On peut par exemple utiliser le théorème 1.2.2 pour un schéma quadratisé par la méthode IEQ, le théorème 1.2.5 pour la méthode SAV, ou encore [Chabassier, 2012, p. 164] pour des schémas de gradient discret. Cela s'écrit dans tous les cas :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_c^{n+1/2} - \mathcal{E}_c^{n-1/2}}{\Delta t} &= F_h^n \cdot \frac{Q_h^{n+1} - Q_h^{n-1}}{2\Delta t} - \left\| \frac{Q_h^{n+1} - Q_h^{n-1}}{2\Delta t} \right\|_{\mathbb{R}}^2 \\ &\quad + F_N^H \langle \Delta_h^u \rangle \cdot \frac{Q_h^{n+1} - Q_h^{n-1}}{2\Delta t} + F_T^H \langle \Delta_h^v \rangle \cdot \frac{Q_h^{n+1} - Q_h^{n-1}}{2\Delta t} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

On ajoute alors la contribution énergétique du marteau en prenant le produit scalaire de l'équation dynamique (3.2.2a) par $\frac{\bar{\xi}^{n+1} - \bar{\xi}^{n-1}}{2\Delta t}$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_c^{n+1/2} - \mathcal{E}_c^{n-1/2}}{\Delta t} &+ m_H \frac{\bar{\xi}^{n+1} - 2\bar{\xi}^n + \bar{\xi}^{n-1}}{\Delta t^2} \cdot \frac{\bar{\xi}^{n+1} - \bar{\xi}^{n-1}}{2\Delta t} \\ &= F_h^n \cdot \frac{Q_h^{n+1} - Q_h^{n-1}}{2\Delta t} - \left\| \frac{Q_h^{n+1} - Q_h^{n-1}}{2\Delta t} \right\|_{\mathbb{R}}^2 \\ &\quad + F_N^H \left(\langle \Delta_h^u \rangle \cdot \frac{Q_h^{n+1} - Q_h^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{\bar{\xi}^{n+1} - \bar{\xi}^{n-1}}{2\Delta t} \cdot \vec{e}_u \right) \\ &\quad + F_T^H \left(\langle \Delta_h^v \rangle \cdot \frac{Q_h^{n+1} - Q_h^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{\bar{\xi}^{n+1} - \bar{\xi}^{n-1}}{2\Delta t} \cdot \vec{e}_v \right) \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

On remarque que

$$\left\{ m_H \frac{\bar{\xi}^{n+1} - 2\bar{\xi}^n + \bar{\xi}^{n-1}}{\Delta t^2} \cdot \frac{\bar{\xi}^{n+1} - \bar{\xi}^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{2} m_H \left| \frac{\bar{\xi}^{n+1} - \bar{\xi}^n}{\Delta t} \right|^2 - \frac{1}{2} m_H \left| \frac{\bar{\xi}^n - \bar{\xi}^{n-1}}{\Delta t} \right|^2 \right) \right. \quad (3.2.7a)$$

$$\left\{ \langle \Delta_h^u \rangle \cdot \frac{Q_h^{n+1} - Q_h^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{\bar{\xi}^{n+1} - \bar{\xi}^{n-1}}{2\Delta t} \cdot \vec{e}_u = \frac{d_h^{n+1} - d_h^{n-1}}{2\Delta t} \right. \quad (3.2.7b)$$

$$\left\{ \langle \Delta_h^v \rangle \cdot \frac{Q_h^{n+1} - Q_h^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{\bar{\xi}^{n+1} - \bar{\xi}^{n-1}}{2\Delta t} \cdot \vec{e}_v = -\frac{\nu_h^{n+1} - \nu_h^{n-1}}{2\Delta t} \right. \quad (3.2.7c)$$

Pour le terme normal, on utilise successivement les équations (3.2.2b) et (3.2.2d)

$$F_N^H \frac{d_h^{n+1} - d_h^{n-1}}{2\Delta t} = -\frac{z_H^{n+1/2} + z_H^{n-1/2}}{2} G_H(d_h^n) \frac{d_h^{n+1} - d_h^{n-1}}{2\Delta t} - \left(\frac{d_h^{n+1} - d_h^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2 \Phi_2(d_h^n) \quad (3.2.8)$$

$$= \frac{z_H^{n+1/2} + z_H^{n-1/2}}{2} \frac{z_H^{n+1/2} - z_H^{n-1/2}}{\Delta t} - \left(\frac{d_h^{n+1} - d_h^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2 \Phi_2(d_h^n) \quad (3.2.9)$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{1}{2} \left(z_H^{n+1/2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(z_H^{n-1/2} \right)^2 \right] - \left(\frac{d_h^{n+1} - d_h^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2 \Phi_2(d_h^n) \quad (3.2.10)$$

Pour le terme tangentiel, on utilise simplement l'équation (3.2.2c) qui donne

$$-F_T^H \frac{\nu_h^{n+1} - \nu_h^{n-1}}{2\Delta t} = -\frac{\nu_h^{n+1} - \nu_h^{n-1}}{2\Delta t} \mu \left(\frac{\nu_h^{n+1} - \nu_h^{n-1}}{2\Delta t} \right) \Phi_1(d_h^n) \quad (3.2.11)$$

La combinaison de ces résultats démontre le théorème. \square

3.2.2 Stratégie de résolution

La non-linéarité du coefficient de frottement μ conduit à terme dissipatif en énergie. Pour cette raison, il n'existe pas à notre connaissance de technique qui permette d'écrire un schéma linéairement implicite. Le modèle de frottement nous contraint donc à l'utilisation d'un algorithme itératif pour résoudre le schéma 3.2.1.

Nous utilisons pour cela une méthode de Newton qui cherche, à chaque pas de temps, à annuler une fonctionnelle $F(X, X^n, X^{n-1})$ par le procédé itératif sur l'itéré k

$$\nabla F(X_k, X^n, X^{n-1})(X_{k+1} - X_k) = -F(X_k, X^n, X^{n-1}) \quad (3.2.12)$$

où ∇ désigne un dérivation par rapport à la première variable X_k .

X_0 est choisi égal au résultat X^n du pas de temps précédent, et X^{n+1} est choisi égal à X_{k_f} lorsque l'un des tests d'arrêt suivant est vérifié

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\| F(X_{k_f+1}, X^n, X^{n-1}) \right\| \geq \left\| F(X_{k_f}, X^n, X^{n-1}) \right\| \quad (\text{remontée de l'erreur}) \\ \text{ou} \\ \left\| F(X_{k_f}, X^n, X^{n-1}) \right\| \leq \varepsilon \left\| F(X^n, X^n, X^{n-1}) \right\| \quad (\text{convergence suffisante}) \end{array} \right. \quad (3.2.13a)$$

$$\left\| F(X_{k_f}, X^n, X^{n-1}) \right\| \leq \varepsilon \left\| F(X^n, X^n, X^{n-1}) \right\| \quad (\text{convergence suffisante}) \quad (3.2.13b)$$

pour un seuil de convergence ε fixé. La matrice Jacobienne ∇F est calculée analytiquement et encodée manuellement pour gagner en efficacité.

Bien que coûteuse, cette méthode itérative n'est effectivement utilisée que durant l'action du marteau. Une fois la frappe effectuée, il est éliminé des équations et le solveur bascule automatiquement sur une option linéaire pour la suite de la simulation.

3.2.3 Résultats numériques

Pour les simulations suivantes nous utilisons la corde Fa₃ raide, non-linéaire et amortie (voir annexe A). La table d'harmonie n'est pas prise en compte, donc la corde est attachée et soumise à des conditions de Dirichlet à ses deux extrémités. Les paramètres utilisés sont résumés dans les tableaux ci-dessous.

Schéma de corde					
Schéma	N_x	θ -schéma	Ordre	Constante auxiliaire	Stabilisation
2-SAV	70	1/4	4	10^4	α^*

TABLE 3.1 – Paramètres de discrétisation de la corde.

Marteau				Frottement			
m_H [g]	x_H [m]	v_N^0 [m/s]	v_T^0 [m/s]	μ_c [-]	B_1 [-]	B_2 [-]	v_s [m/s]
12.09	0.115	3.5	0.5	0.2	0	0	0.05

TABLE 3.2 – Paramètres du marteau et du frottement.

Paramètres du modèle d'interaction (3.1.4d)				
a	b	c	d	D
-5.0617×10^{12}	1.879×10^{10}	9.1872×10^6	4459.6	0.8

TABLE 3.3 – Paramètres d'interaction marteau-corde issus de [Levander et Fissette, 2020].

La corde est initialement au repos, et le marteau, sans manche, se dirige vers elle avec une vitesse rectiligne uniforme $v_N^0 \vec{e}_u + v_T^0 \vec{e}_v$. Le modèle (3.1.4d) est utilisé pour calculer la force d'interaction et la constante auxiliaire de quadratisation du marteau c_H définie par (3.1.13) est ici choisie égale à 1, son influence est étudiée au paragraphe 3.2.3.c.

La fonction de répartition (3.1.5) a une largeur $\delta = 2$ centimètres et une pente $s = 2000$.

3.2.3.a Préservation numérique du bilan d'énergie

On définit le résidu d'énergie ε associé au théorème 3.2.1 comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \frac{\mathcal{E}_{m,c}^{n+1/2} - \mathcal{E}_{m,c}^{n-1/2}}{\mathcal{E}_{max}} + \Delta t \frac{\mathcal{D}^n}{\mathcal{E}_{max}} \\ \mathcal{D}^n = \left\| \frac{Q_h^{n+1} - Q_h^{n-1}}{2\Delta t} \right\|_{\mathbb{R}}^2 + \left(\frac{d_h^{n+1} - d_h^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2 \Phi_2(d_h^n) + \frac{\nu_h^{n+1} - \nu_h^{n-1}}{2\Delta t} \mu \left(\frac{\nu_h^{n+1} - \nu_h^{n-1}}{2\Delta t} \right) F_N^H \end{array} \right. \quad (3.2.14a)$$

Nous écrivons ici la version alternative du théorème qui prend en compte la loi de Coulomb non modifiée (voir paragraphe 3.1.4), ce qui est justifié par l'utilisation du modèle d'interaction (3.1.4d). Comme on peut le voir sur la figure 3.8, le bilan de puissance est bien vérifié, à l'erreur machine près, au sens du théorème 3.2.1. Nous observons également que l'énergie est bien décroissante et que la puissance dissipée (3.2.14b) est bien toujours positive pour ce cas particulier.

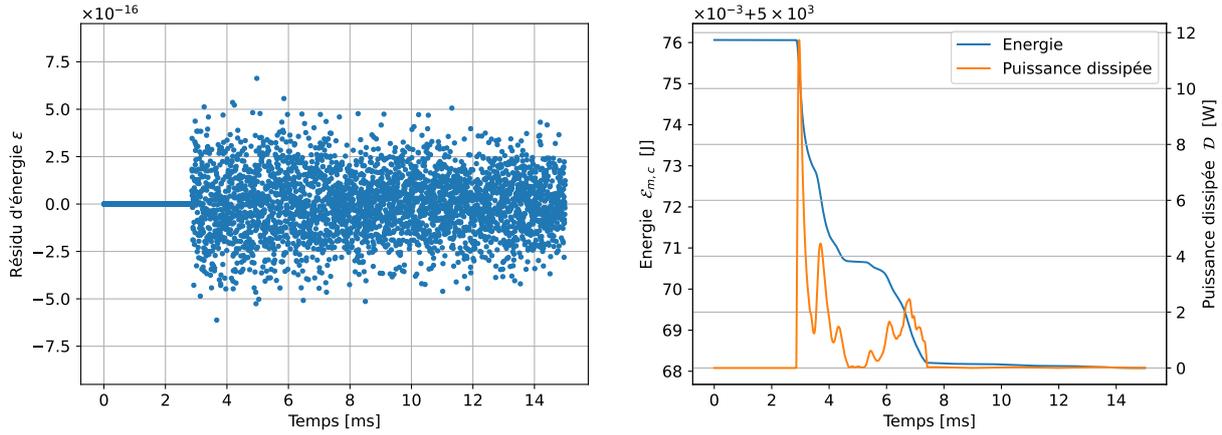


FIGURE 3.8 – Résidu d'énergie (gauche) et évolution de l'énergie et de la dissipation (droite).

3.2.3.b Convergence en temps et en espace-temps

Nous vérifions dans cette partie les propriétés de convergence du schéma étudié. Nous traçons des courbes de convergence en temps et en espace-temps car la frappe du marteau sur la corde dépend de la zone de répartition qui dépend elle-même de la discrétisation spatiale de la corde. Toutes les courbes sont calculées avec un θ -schéma de corde inconditionnellement stable $\theta = 1/4$. Les courbes de convergence en temps sont calculées avec $N_x = 11$ nœuds. Les courbes de convergence en espace-temps utilisent un ratio de discrétisation espace-temps défini par

$$\eta_0 = \frac{1}{4} \Delta t^2 \rho (M_h^{-1} K_h) \quad (3.2.15)$$

et choisi égal à 10 et où M_h et K_h sont les matrices de masse et de rigidité de la corde. Les erreurs sont calculées en norme $L^\infty([0, T], L^2)$ en divisant consécutivement le pas de temps ou le pas d'espace par 2. Pour les variables de corde distribuées, cette norme est calculée comme

$$\forall (X_h^1, \dots, X_h^n, Y_h^1, \dots, Y_h^n) \in \mathcal{Q}_h^{2n}, \quad E_{L^\infty([0, T], L^2)}(X, Y) = \frac{\max_{i \in [1, n]} \|X_h^i - Y_h^i\|_{L^2}}{\max_{i \in [1, n]} \|Y_h^i\|_{L^2}} \quad (3.2.16)$$

où \mathcal{Q}_h est l'espace variationnel discret associé à la corde. Pour les variables non distribuées dépendantes uniquement du temps, cette norme devient en fait la norme ℓ^∞ définie par

$$\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad E_{\ell^\infty}(X, Y) = \frac{\|X - Y\|_\infty}{\|Y\|_\infty} = \frac{\max_{i \in [1, n]} |x^i - y^i|}{\max_{i \in [1, n]} |y^i|} \quad (3.2.17)$$

Ces courbes de convergence de la figure 3.9 permettent de vérifier que l'application du marteau avec frottement ne dégrade pas l'ordre de convergence du schéma de corde : la convergence est bien d'ordre 2 en temps et en espace-temps. Pour des pas de temps très petits sur la figure de gauche, on observe une remontée de l'erreur qui est typique de la méthode 2-SAV que nous utilisons comme schéma de corde (voir paragraphe 1.4.4).

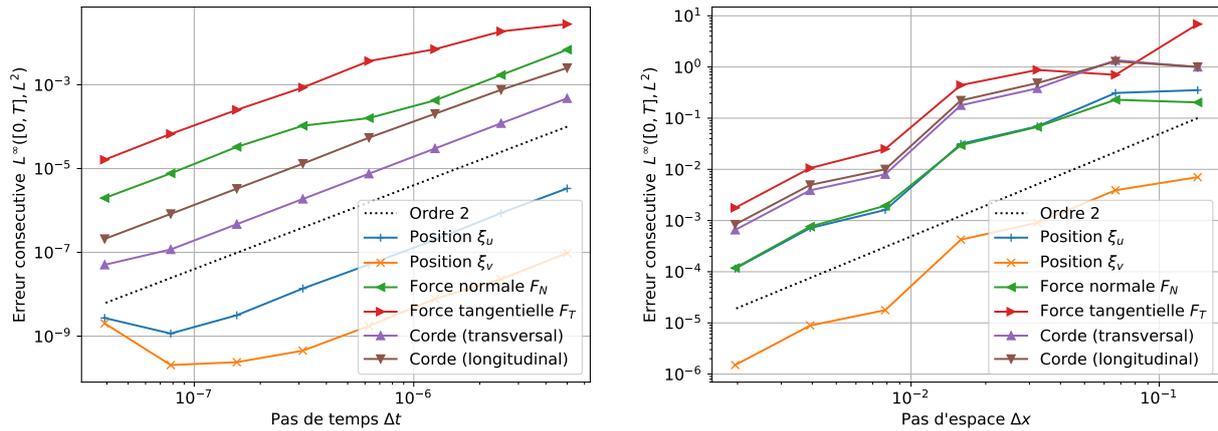


FIGURE 3.9 – Convergence en temps (gauche) et espace-temps (droite).

3.2.3.c Choix de la constante auxiliaire de quadratisation du marteau

L'écriture d'un schéma quadratisé nécessite dans la majorité des cas l'introduction d'une constante auxiliaire afin d'assurer la bonne définition de la variable auxiliaire. La quadratisation du modèle de marteau n'y fait pas exception. Dans ce paragraphe, nous étudions l'influence de la constante auxiliaire c_H définie au paragraphe 3.1.3 sur les erreurs de discrétisation en temps commises par le schéma. Pour chaque valeur de c_H , une courbe de convergence en temps est tracée. La meilleure constante auxiliaire c_H est celle qui minimise l'erreur.

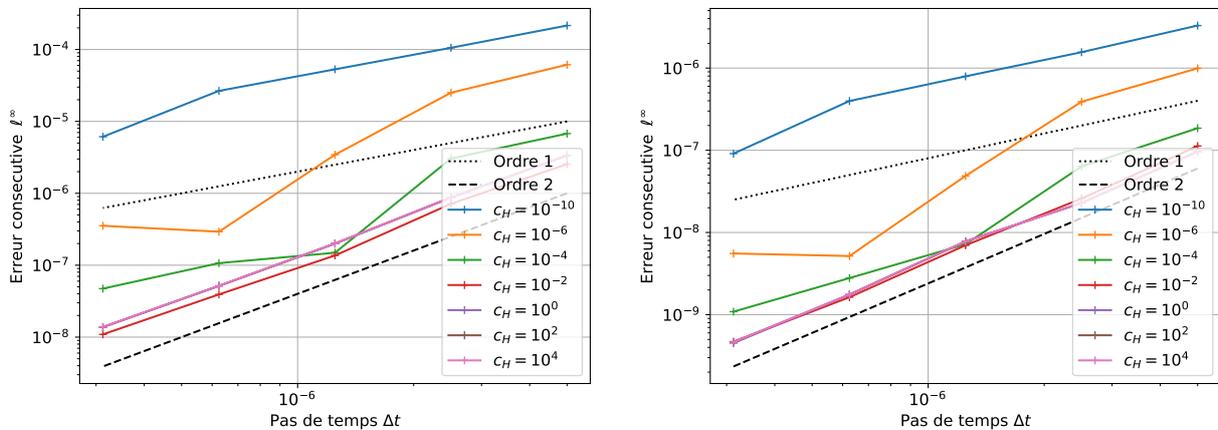


FIGURE 3.10 – Courbes de convergence en temps pour différentes valeurs de constante auxiliaire. Erreurs consécutives sur ξ_u (gauche) et sur ξ_v (droite).

La figure 3.10 montre les erreurs de convergence en temps pour la position du marteau dans le sens transversal ξ_u à gauche, et dans le sens longitudinal ξ_v à droite, et ce pour différentes valeurs de constante auxiliaire c_H .

Contrairement à la variable auxiliaire de la quadratisation de la corde introduite au chapitre 1, on remarque une influence très significative de cette constante auxiliaire de marteau sur les erreurs de discrétisation en temps commises. Les faibles valeurs de c_H sont à exclure, car non seulement elles impliquent des erreurs très grandes, mais elles dégradent par la même occasion le taux de convergence. Toute valeur assez élevée est un bon choix, et un optimal semble être atteint pour $c_H \simeq 10^{-2}$.

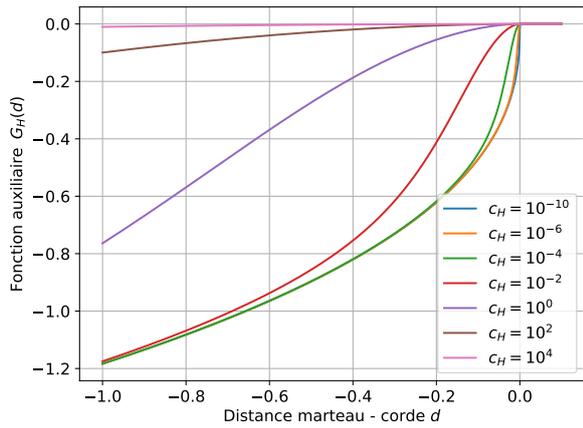


FIGURE 3.11 – Fonction auxiliaire G_H .

Cette dégradation de convergence est due à la non régularité de la fonction auxiliaire G_H induite par la fonction partie positive. La quadratisation a donc ici un double intérêt : elle permet d'écrire un schéma linéairement implicite, et elle agit comme une régularisation, ce qui permet d'obtenir une convergence à l'ordre 2. Cet effet régularisant est visible sur la figure 3.11 ci-contre qui trace la fonction auxiliaire G_H (3.1.14) pour différentes valeurs de c_H .

3.2.3.d Interprétation des résultats des simulations

Dans cette partie nous analysons et comparons les comportements du marteau et de la corde en présence ou non de frottement.

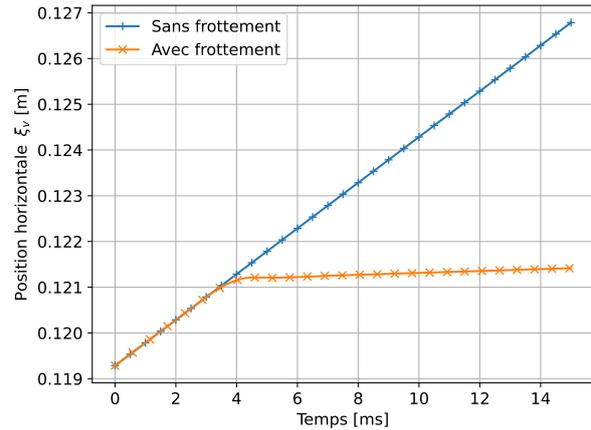
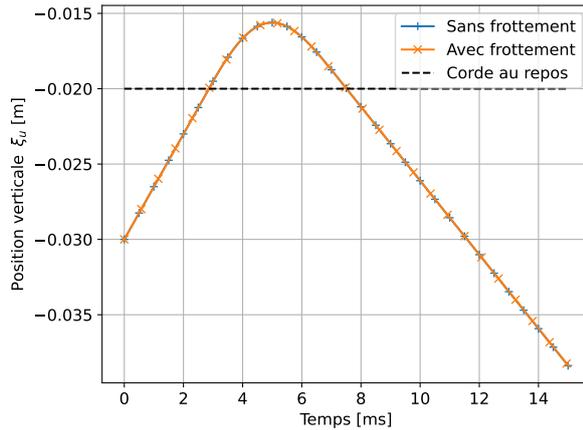


FIGURE 3.12 – Déplacement transversal (gauche) et longitudinal (droite) du marteau.

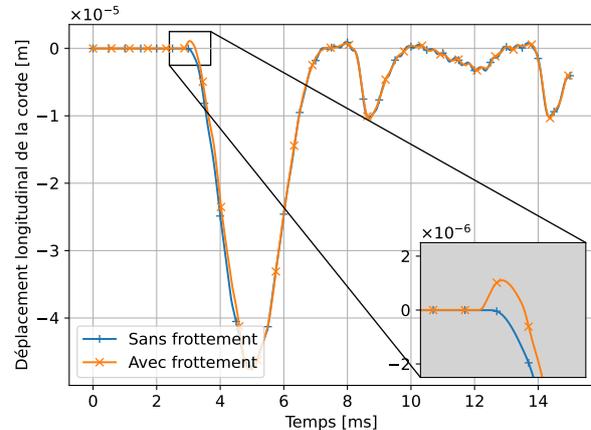
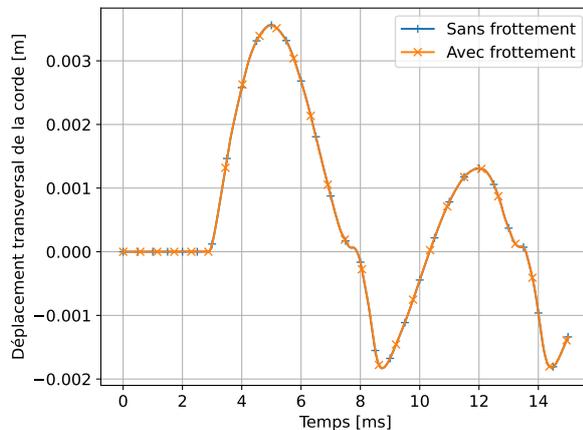


FIGURE 3.13 – Déplacement transversal (gauche) et longitudinal (droite) de la corde au point de frappe.

Sur la figure 3.12 on peut voir l'évolution des positions du marteau perpendiculairement et parallèlement à la corde. La figure 3.13 permet quant à elle de visualiser le déplacement de la corde dans les directions transversales et longitudinales au point de frappe du marteau en fonction du temps. Le marteau entre en contact avec la corde à partir de 2,5 ms, il poursuit sa course, s'écrase, et déplace la corde comme on le voit sur la figure 3.13, puis il repart dans le sens inverse et quitte la corde à environ 7,5 ms.

Dans la direction longitudinale, le marteau arrive sur la corde avec une vitesse de 0,5 m/s et la quitte avec une vitesse bien inférieure comme en témoigne le changement de pente sur la figure 3.12 droite. Au moment de l'impact sur la corde, sur la figure 3.13 droite, on observe un léger déplacement longitudinal positif de la corde, non présent sans frottement, qui signifie que la corde est entraînée par le marteau. Très rapidement le couplage non-linéaire transversal/longitudinal prend le dessus et la corde repart dans le sens négatif.

On se rend compte que l'ajout de frottement a une influence minimale sur la vibration de la corde dans le sens transversal. Par contre, il semble modifier assez sensiblement son comportement longitudinal. Pour mieux l'observer, comparons leurs contenus spectraux.

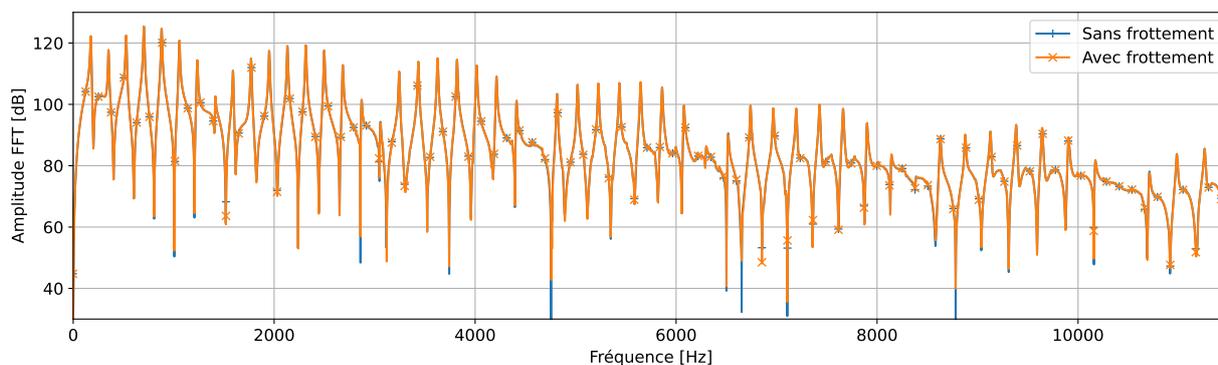


FIGURE 3.14 – Spectre de l'accélération transversale de la corde au point de frappe.

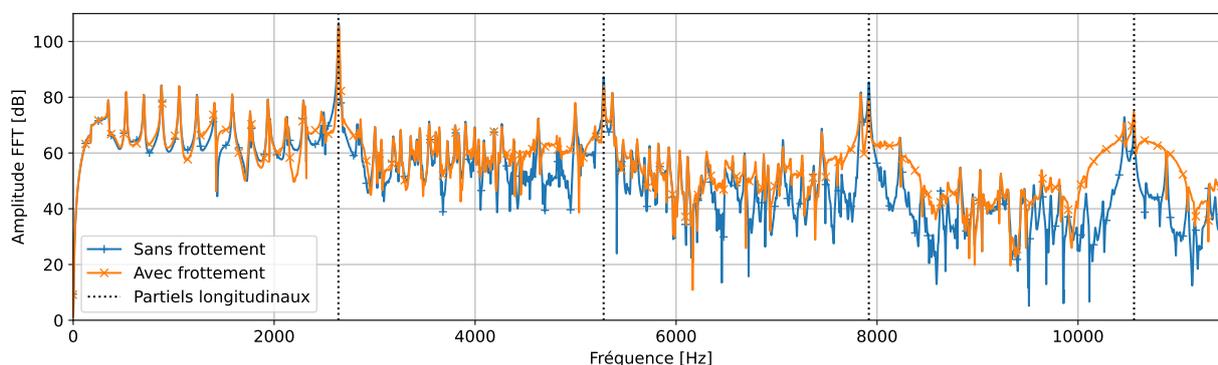


FIGURE 3.15 – Spectre de l'accélération longitudinale de la corde au point de frappe.

Les figures 3.14 et 3.15 tracent les spectres des accélérations transversales et longitudinales de la corde au point de frappe. Comme on pouvait s'y attendre, l'onde transversale est peu affectée, tandis que l'onde longitudinale est très largement modifiée par le frottement, tout particulièrement au niveau de ses résonances indiquées en pointillés.

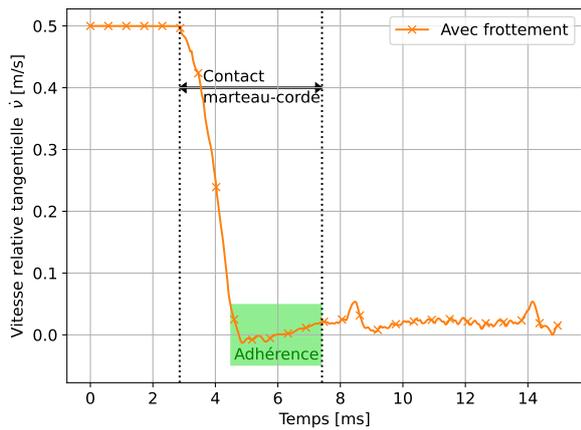


FIGURE 3.16 – Vitesse relative tangentielle marteau-corde.

Terminons en commentant les propriétés d'interaction entre le marteau et la corde. Initialement, la vitesse longitudinale du marteau (0,5 m/s) est très grande par rapport à celle de la corde, leur vitesse relative est grande donc le frottement est dans une phase de glissement. Sur la figure 3.16 ci-contre qui représente la vitesse relative \dot{v} entre le marteau et la corde, on voit que le marteau dissipe progressivement sa vitesse au fur et à mesure de son frottement avec la corde. La vitesse relative diminue sous la vitesse de seuil $v_s = 0,05$ m/s et une phase d'adhérence à lieu avant que le marteau ne quitte la corde.

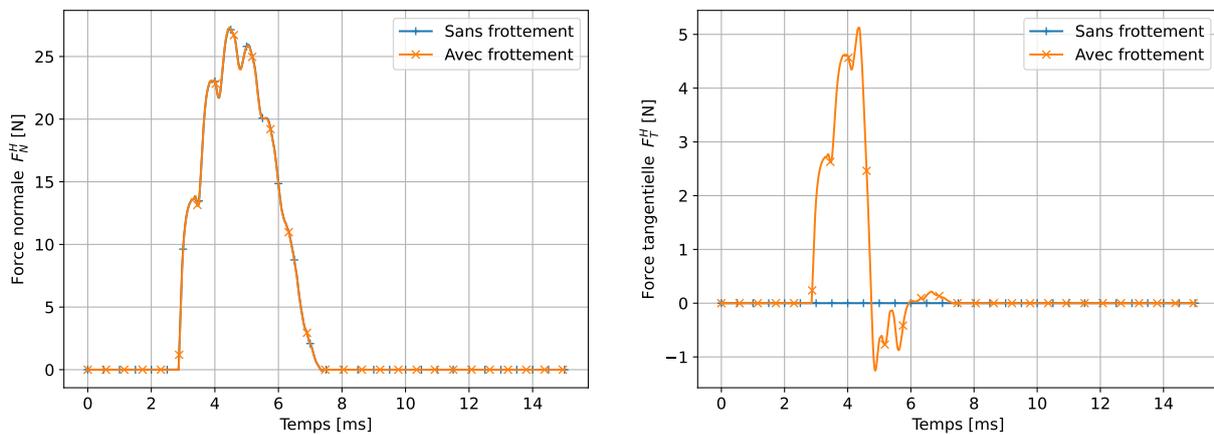


FIGURE 3.17 – Force du marteau sur la corde, normale (gauche) et tangentielle (droite).

La figure 3.17 permet de visualiser les forces exercées par le marteau sur la corde dans la direction normale sur la figure de gauche, et dans la direction tangentielle sur la figure de droite. La composante normale commence par augmenter rapidement : le marteau exerce une force importante pour mettre en mouvement la corde. Puis la corde rattrape la vitesse du marteau et la dépasse même légèrement : la force diminue très légèrement faisant apparaître le premier d'une série de rebonds. Ce phénomène se répète quelques fois avant que le marteau n'ait perdu toute son énergie cinétique, puis il repart dans le sens inverse (voir [Stulov, 1995]).

Par définition, la force tangentielle est proportionnelle à la force normale, $F_T^H = \mu(\dot{v})F_N^H$. Lorsque la vitesse relative tangentielle \dot{v} est grande, le marteau glisse sur la corde et le coefficient de frottement $\mu(\dot{v})$ est constant et égal à μ_c : la force tangentielle est une image de la force normale. Au fur et à mesure que la vitesse relative diminue, puis change de signe, $\mu(\dot{v})$ diminue et change de signe également : la force tangentielle diminue fortement et devient négative.

Enfin, la figure 3.16 permet d'observer la force normale exercée par le marteau en fonction de l'écrasement du feutre. Un comportement à hystérésis apparaît, sur lequel sont visibles encore une fois les rebonds mentionnés ci-dessus, et faisant même apparaître des sous-hystérésis sous la forme de boucles dues à des très courtes phases d'écrasement et de relâchement du feutre.

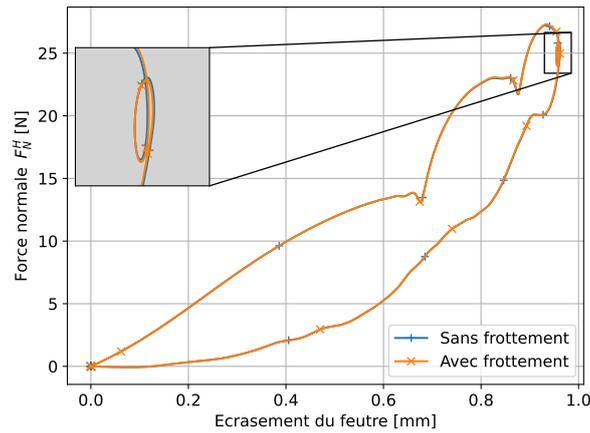


FIGURE 3.18 – Compression du feutre.

3.2.3.e Conclusion

Le schéma numérique que nous venons de présenter permet de rendre compte des phénomènes de frottement au niveau de l'interaction entre le marteau et la corde. La méthode de quadratisation utilisée pour le terme non-linéaire permet de régulariser le contact et d'assurer une convergence d'ordre 2 en temps et en espace-temps.

En raison de son caractère dissipatif pour lequel il n'existe pas à notre connaissance de technique semblable à la quadratisation, le terme de frottement est quand à lui discrétisé de façon non-linéairement implicite. Le schéma est alors résolu par un algorithme itératif de Newton. Le processus de quadratisation de la non-linéarité potentielle est tout de même bienvenu pour régulariser l'effet de la fonction partie positive, et permet, à défaut d'obtenir un schéma linéairement implicite, de limiter le nombre d'itérations de l'algorithme de Newton.

Enfin, nous avons vu que le frottement implique une modification subtile des contenus spectraux de la corde, les modifications majeures ayant trait à la vibration longitudinale. Nous reviendrons sur l'influence de ce terme de frottement dans la suite de ce manuscrit, notamment en ajoutant un couplage à une table d'harmonie et en frappant la corde avec un marteau à manche flexible dont le mouvement est en rotation autour d'un axe fixe.

3.3 Quadratisation d'énergie pour le manche flexible

Le contenu de cette partie constitue une publication soumise au journal M2AN¹ le 17 août 2023.

Parmi l'ensemble des non-linéarités d'énergie que l'on peut trouver en physique, on peut distinguer celles issues d'énergies potentielles, et celle issues d'énergies cinétiques. La marteau flexible en rotation présente par exemple des non-linéarités de ces deux types. La non-linéarité potentielle provient de l'application distribuée du poids le long du manche, tandis que la non-linéarité cinétique provient d'un terme d'accélération centripète.

Il n'existe pas à notre connaissance de techniques qui permettent de quadratiser des énergies cinétiques et d'aboutir à des schémas linéairement implicites pour des systèmes physiques non-linéairement cinétiques.

Nous présentons donc dans cette partie une technique de quadratisation générique basée sur les équations d'Euler-Lagrange, puis nous donnons une stratégie de discrétisation linéairement implicite qui préserve un bilan de puissance discret. Nous appliquons ensuite ces résultats au manche du marteau pour lequel une stratégie de résolution efficace conduit à un algorithme quasi-explicite.

3.3.1 Technique de quadratisation des équations d'Euler-Lagrange

Plaçons nous dans un cadre abstrait général. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné. On note H un espace de Hilbert équipé de la norme $\|\cdot\|_H$ sur Ω (typiquement l'espace $L^2(\Omega)$). On note $V \subset H$ un autre espace de Hilbert équipé d'une norme $\|\cdot\|_V = (A_{11}\cdot, \cdot)$ induite par un opérateur symétrique et bijectif $A_{11} : V \rightarrow H$. Cet espace peut également contenir des conditions au bord, typiquement $V = H_0^1(\Omega)$ qui est induit par l'opérateur Laplacien $A_{11} = -\Delta$.

On considère un système physique décrit par des coordonnées généralisées $q \equiv q(x, t)$ pour $x \in \Omega$ et $t \in [0, T]$, et qui sont supposées appartenir à l'espace $\mathcal{C}^1([0, T], V) \cap \mathcal{C}^2([0, T], H)$.

On note $\mathcal{L} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ le Lagrangien du système, et $\mathcal{H} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall (q_1, q_2) \in V^2, \quad \mathcal{H}(q_1, q_2) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2}(q_1, q_2)(q_2) - \mathcal{L}(q_1, q_2) = \mathcal{I}(q_1, q_2) - \mathcal{L}(q_1, q_2) \quad (3.3.1)$$

où

$$\forall (q_1, q_2) \in V^2, \quad \mathcal{I}(q_1, q_2) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2}(q_1, q_2)(q_2) \quad (3.3.2)$$

et où les dérivées directionnelles du Lagrangien sont telles que pour tout $(q_1, q_2) \in V^2$,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1}(q_1, q_2) : \left| \begin{array}{l} V \rightarrow \mathbb{R} \\ q^* \mapsto \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(q_1 + hq^*, q_2) - \mathcal{L}(q_1, q_2)}{h} \end{array} \right. \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2}(q_1, q_2) : \left| \begin{array}{l} V \rightarrow \mathbb{R} \\ q^* \mapsto \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(q_1, q_2 + hq^*) - \mathcal{L}(q_1, q_2)}{h} \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_1 \partial q_2}(q_1, q_2) : \left| \begin{array}{l} V \rightarrow (V \rightarrow \mathbb{R}) \\ q^* \mapsto \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2}(q_1 + hq^*, q_2) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2}(q_1, q_2)}{h} \end{array} \right.$$

Par définition, ces dérivées sont linéaires par rapport à l'argument q^* .

1. Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, www.esaim-m2an.org

Le système physique que nous étudions est décrit par la forme faible des équations d'Euler-Lagrange suivante. On cherche $q \in V$ tel que

$$\forall q^* \in V, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2}(q, \dot{q}) \right) (q^*) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1}(q, \dot{q})(q^*) = Q(q, \dot{q}, q^*) \quad (3.3.3)$$

où Q représente d'éventuelles contraintes, termes source, et termes dissipatifs du système qui ne sont pas contenus dans le Lagrangien. Pour le travail générique de cette section, les conditions initiales ne sont pas précisées.

Remarque 3.3.1

En développant la dérivation temporelle, on peut écrire les équations d'Euler-Lagrange (3.3.3) sous une forme alternative qui consiste à chercher $q \in V$ tel que

$$\forall q^* \in V, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_2^2}(q, \dot{q})(\ddot{q})(q^*) + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_1 \partial q_2}(q, \dot{q})(\dot{q})(q^*) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1}(q, \dot{q})(q^*) = Q(q, \dot{q}, q^*) \quad (3.3.4)$$

Théorème 3.3.1 (Équation de conservation de l'Hamiltonien)

Toute solution suffisamment régulière $q \in \mathcal{C}^1([0, T], V) \cap \mathcal{C}^2([0, T], H)$ de (3.3.3) vérifie

$$\frac{d}{dt} [\mathcal{H}(q, \dot{q})] = Q(q, \dot{q}, \dot{q}) \quad (3.3.5)$$

où $\mathcal{H}(q, \dot{q}) = \mathcal{I}(q, \dot{q}) - \mathcal{L}(q, \dot{q})$ est le Hamiltonien du système.

Démonstration.

$$\frac{d}{dt} [\mathcal{H}(q, \dot{q})] = \frac{d}{dt} [\mathcal{I}(q, \dot{q})] - \frac{d}{dt} [\mathcal{L}(q, \dot{q})] \quad (3.3.6)$$

$$= \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2}(q, \dot{q}) \right) (\dot{q}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2}(q, \dot{q})(\ddot{q}) \right] - \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2}(q, \dot{q})(\ddot{q}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1}(q, \dot{q})(\dot{q}) \right] \quad (3.3.7)$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2}(q, \dot{q}) \right) (\dot{q}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1}(q, \dot{q})(\dot{q}) \quad (3.3.8)$$

$$= Q(q, \dot{q}, \dot{q}) \quad (3.3.9)$$

puisque $\dot{q} \in V$. □

Remarque 3.3.2

Comme le montre le théorème 3.3.1, le Hamiltonien représente l'énergie totale (cinétique + potentielle) du système physique. Le Lagrangien est quant à lui bien souvent vu comme la différence de ces énergies (cinétique - potentielle). Par exemple, pour l'équation des ondes $A_{22}\ddot{q} + A_{11}q = 0$, l'énergie est $\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}(A_{22}\dot{q}, \dot{q}) + \frac{1}{2}(A_{11}q, q)$, et donc le Hamiltonien et le Lagrangien s'écrivent

$$\forall (q_1, q_2) \in V^2, \quad \begin{cases} \mathcal{H}(q_1, q_2) = \frac{1}{2}(A_{22}q_2, q_2) + \frac{1}{2}(A_{11}q_1, q_1) & (3.3.10a) \\ \mathcal{L}(q_1, q_2) = \frac{1}{2}(A_{22}q_2, q_2) - \frac{1}{2}(A_{11}q_1, q_1) & (3.3.10b) \end{cases}$$

Afin de réaliser une quadratisation des termes non-linéaires, on découpe le Lagrangien comme la somme d'une contribution quadratique (\mathcal{L}_{LIN}) et d'une contribution non-quadratique (\mathcal{L}_{NL}),

3.3.1.a Quadratisation des équations d'Euler-Lagrange

Introduisons une constante auxiliaire $c \in \mathbb{R}_+^*$ et une variable auxiliaire scalaire z telles que

$$z^2(t) = 2\mathcal{H}_{NL}(q, \dot{q}) + c \quad (3.3.19)$$

Cette variable z est réelle positive pour un choix approprié de constante c et dépend uniquement du temps car \mathcal{H}_{NL} a un effet intégrateur en espace. La dérivation de (3.3.19) par rapport au temps donne

$$\dot{z}z = \frac{d}{dt} [\mathcal{H}_{NL}(q, \dot{q})] \quad (3.3.20)$$

$$= \frac{d}{dt} [\mathcal{I}_{NL}(q, \dot{q})] - \frac{d}{dt} [\mathcal{L}_{NL}(q, \dot{q})] \quad (3.3.21)$$

$$= \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{NL}}{\partial q_2}(q, \dot{q}) \right) (\dot{q}) + \frac{\partial \mathcal{L}_{NL}}{\partial q_2}(q, \dot{q})(\ddot{q}) \right] - \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{NL}}{\partial q_2}(q, \dot{q})(\ddot{q}) + \frac{\partial \mathcal{L}_{NL}}{\partial q_1}(q, \dot{q})(\dot{q}) \right] \quad (3.3.22)$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{NL}}{\partial q_2}(q, \dot{q}) \right) (\dot{q}) - \frac{\partial \mathcal{L}_{NL}}{\partial q_1}(q, \dot{q})(\dot{q}) \quad (3.3.23)$$

$$= \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{NL}}{\partial q_2^2}(q, \dot{q})(\ddot{q})(\dot{q}) + \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{NL}}{\partial q_1 \partial q_2}(q, \dot{q})(\dot{q})(\dot{q}) - \frac{\partial \mathcal{L}_{NL}}{\partial q_1}(q, \dot{q})(\dot{q}) \quad (3.3.24)$$

La fonction auxiliaire nécessaire pour la quadratisation est notée G et est définie par

$$\forall (q_1, q_2, q_3, q^*) \in V \times V \times H \times V, \quad G(q_1, q_2, q_3, q^*) = \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{H}_{NL}(q_1, q_2) + c}} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}_{NL}}{\partial q_2^2}(q_1, q_2)(q_3) + \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{NL}}{\partial q_1 \partial q_2}(q_1, q_2)(q_2) - \frac{\partial \mathcal{L}_{NL}}{\partial q_1}(q_1, q_2) \right] (q^*) \quad (3.3.25)$$

C'est une forme non-linéaire par rapport à ses trois premiers arguments, et linéaire par rapport au dernier (q^*). Les équations d'Euler-Lagrange (3.3.11) se réécrivent alors sous une forme quadratisée. On cherche $q \in V$ et $z \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $q^* \in V$ on ait

$$\begin{cases} \mathcal{L}(q, \ddot{q}, q^*) + zG(q, \dot{q}, \ddot{q}, q^*) = Q(q, \dot{q}, q^*) \end{cases} \quad (3.3.26a)$$

$$\begin{cases} \dot{z} = G(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dot{q}) \end{cases} \quad (3.3.26b)$$

Théorème 3.3.2 (Bilan de puissance de la formulation quadratisée (3.3.26))

Toute solution suffisamment régulière $q \in \mathcal{C}^1([0, T], V) \cap \mathcal{C}^2([0, T], H)$ et $z \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R})$ de (3.3.26) vérifie

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = Q(q, \dot{q}, \dot{q}) \end{cases} \quad (3.3.27a)$$

$$\begin{cases} \mathcal{E}(t) = \mathcal{H}_{LIN}(q, \dot{q}) + \frac{1}{2}z^2 \end{cases} \quad (3.3.27b)$$

Démonstration. On utilise $q^* = \dot{q} \in V$ dans l'équation (3.3.26)

$$\mathcal{L}(q, \ddot{q}, \dot{q}) + zG(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dot{q}) = Q(q, \dot{q}, \dot{q}) \quad (3.3.28)$$

Puis $\mathcal{L}(q, \ddot{q}, \dot{q}) = \frac{d}{dt} [\mathcal{H}_{LIN}(q, \dot{q})]$ grâce à l'équation (3.3.17), et on conclut en utilisant que $G(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dot{q}) = \dot{z}$ d'après (3.3.26b). \square

Notons que la seconde équation de (3.3.26) qui décrit l'évolution de la variable auxiliaire z est une équation scalaire.

Contrairement au cas de la quadratisation d'énergies potentielles, il est important de noter la présence des dérivées temporelles \dot{q} et \dot{q} en argument de la fonction auxiliaire G . Même si le procédé de quadratisation décrit ci-dessus est possible, l'écriture d'un schéma linéairement implicite, avec uniquement des approximations explicites en arguments de la fonction G , n'est pas immédiate.

3.3.1.b Formulation des équations dans l'espace des phases

Afin d'aboutir à une intégration numérique efficace, réécrivons les équations quadratisées (3.3.26) dans l'espace des phases. Pour cela on introduit deux variables supplémentaires $p_1 \in V$ et $p_2 \in H$ telles que $p_1 = \dot{q}$ and $p_2 = \dot{p}_1$ au sens des distributions. On cherche alors $(q, z) \in V \times \mathbb{R}$ et p_1, p_2 deux distributions telles que

$$\forall q^* \in V, \quad \begin{cases} \dot{q} = p_1 & (3.3.29a) \\ \dot{p}_1 = p_2 & (3.3.29b) \\ \mathcal{L}(q, p_2, q^*) + z G(q, p_1, p_2, q^*) = Q(q, p_1, q^*) & (3.3.29c) \\ \dot{z} = G(q, p_1, p_2, p_1) & (3.3.29d) \end{cases}$$

Ensuite, on obtient une formulation variationnelle complète en cherchant $(q, p_1, p_2, z) \in V \times V \times H \times \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \forall p_1^* \in V, & (\dot{q}, p_1^*)_V = (p_1, p_1^*)_V & (3.3.30a) \\ \forall p_2^* \in H, & (\dot{p}_1, p_2^*)_H = (p_2, p_2^*)_H & (3.3.30b) \\ \forall q^* \in V, & \mathcal{L}(q, p_2, q^*) + z G(q, p_1, p_2, q^*) = Q(q, p_1, q^*) & (3.3.30c) \\ \dot{z} = G(q, p_1, p_2, p_1) & & (3.3.30d) \end{cases}$$

Théorème 3.3.3 (Bilan de puissance de la formulation espace des phases (3.3.30))

Toute solution suffisamment régulière $q \in \mathcal{C}^1([0, T], V)$, $p_1 \in \mathcal{C}^0([0, T], V) \cap \mathcal{C}^1([0, T], H)$, $p_2 \in \mathcal{C}^0([0, T], H)$ et $z \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R})$ de (3.3.30) vérifie

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = Q(q, p_1, p_1) & (3.3.31a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{E}(t) = \mathcal{H}_{LIN}(q, p_1) + \frac{1}{2}z^2 & (3.3.31b) \end{cases}$$

Démonstration. On applique la formulation (3.3.30) avec $q^* = p_1 \in V$:

$$\mathcal{L}(q, p_2, p_1) + z G(q, p_1, p_2, p_1) = Q(q, p_1, p_1) \quad (3.3.32)$$

Grâce à l'équation (3.3.30d), ceci devient

$$\mathcal{L}(q, p_2, p_1) + z\dot{z} = Q(q, p_1, p_1) \quad (3.3.33)$$

Considérons maintenant le terme linéaire $\mathcal{L}(q, p_2, p_1)$. Grâce à l'équation (3.3.16), et par symétrie de A_{22} , il s'écrit

$$\mathcal{L}(q, p_2, p_1) = (A_{22}p_2, p_1)_H + (A_{11}q, p_1)_H + (V_1, p_1)_H \quad (3.3.34)$$

$$= (A_{22}p_1, p_2)_H + (A_{11}q, p_1)_H + (V_1, p_1)_H \quad (3.3.35)$$

D'une part, puisque $p_1 \in V \subset H$, $A_{22}p_1 \in H$, et d'après l'équation (3.3.30b) avec $p_2^* = A_{22}p_1$ on a

$$(A_{22}p_1, p_2)_H = (A_{22}p_1, \dot{p}_1)_H \quad (3.3.36)$$

D'autre part, en utilisant $p_1^* = q \in V$ dans l'équation (3.3.30a), on a

$$(q, p_1)_V = (q, \dot{q})_V \quad (3.3.37)$$

Donc par définition du produit scalaire dans V :

$$(A_{11}q, p_1)_H = (A_{11}q, \dot{q})_H \quad (3.3.38)$$

Puisque A_{11} est bijectif, V_1 admet un unique antécédent $X_1 \in V$ tel que $A_{11}X_1 = V_1$. En utilisant l'équation (3.3.30a) avec $p_2^* = X_1 \in V$ on obtient

$$(X_1, p_1)_V = (X_1, \dot{q})_V \quad (3.3.39)$$

donc

$$(V_1, p_1)_H = (V_1, \dot{q})_H \quad (3.3.40)$$

Ces résultats combinés montrent que :

$$\mathcal{L}(q, p_2, p_1) = (A_{22}p_1, \dot{p}_1)_H + (A_{11}q, \dot{q})_H + (V_1, \dot{q})_H \quad (3.3.41)$$

$$= \frac{d}{dt} [\mathcal{H}_{LIN}(q, p_1)] \quad (3.3.42)$$

□

Remarque 3.3.4

Notons que l'équation (3.3.29c) n'est plus une équation d'évolution. La partie évolutive est contenue dans les équations (3.3.29a) et (3.3.29b). Pour cette raison, la formulation des équations sur laquelle nous travaillons est une contrainte dans un espace de phases modifié. Cette reformulation (3.3.29) permet de tirer parti des techniques de discrétisation classiques aux méthodes de quadratisation utilisées pour les énergies potentielles. Ceci est détaillé dans le paragraphe suivant.

3.3.1.c Stratégies de discrétisation

Nous présentons dans ce paragraphe une discrétisation en temps des équations (3.3.30). La discrétisation en espace n'est pas présentée et laissée libre. Une méthode d'éléments finis, par exemple, est bien adaptée.

Afin d'écrire un schéma en temps qui discrétise les équations quadratisées, l'intervalle de temps $[0, T]$ est découpé régulièrement avec un pas Δt tel que $N_T \Delta t = T$. On introduit les approximations

$$\mu q = \frac{q^{n+1} + q^n}{2}, \quad \delta q = \frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta t}, \quad \pi q = \frac{1}{2}(3q^n - q^{n-1}) \quad (3.3.43)$$

L'approximation π est explicite, centrée en $(n + \frac{1}{2})\Delta t$ mais dépendante uniquement des itérations passées, tandis que μ et δ sont centrées en $(n + \frac{1}{2})\Delta t$ de façon implicite.

Nous proposons le schéma d'intégration linéairement implicite suivant.

Schéma numérique 3.3.1 (Quadratisation scalaire du Lagrangien)

A chaque itération, on cherche $q^{n+1} \in V$, $p_1^{n+1} \in V$, $p_2^{n+1} \in H$ et $z^{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} \forall p_1^* \in V, & (\delta q, p_1^*)_V = (\mu p_1, p_1^*)_V & (3.3.44a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall p_2^* \in H, & (\delta p_1, p_2^*)_H = (\mu p_2, p_2^*)_H & (3.3.44b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall q^* \in V, & \mathcal{L}(\mu q, \mu p_2, q^*) + \mu z G(\pi q, \pi p_1, \pi p_2, q^*) = Q(\mu q, \mu p_1, q^*) & (3.3.44c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta z = G(\pi q, \pi p_1, \pi p_2, \mu p_1) & (3.3.44d) \end{cases}$$

Théorème 3.3.4 (Bilan de puissance discret du schéma (3.3.1))

La solution du schéma (3.3.1) vérifie

$$\begin{cases} \delta \mathcal{E} = Q(\mu q, \mu p_1, \mu p_1) & (3.3.45a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{E}^n = \mathcal{H}_{LIN}(q^n, p_1^n) + \frac{1}{2} (z^n)^2 & (3.3.45b) \end{cases}$$

Démonstration. On utilise $q^* = \mu p_1 \in V$ dans l'équation (3.3.44c). Grâce à l'équation (3.3.44d) on écrit que

$$\mu z G(\pi q, \pi p_1, \pi p_2, \mu p_1) = \mu z \delta z \quad (3.3.46)$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{2} (z^{n+1})^2 - \frac{1}{2} (z^n)^2 \right) \quad (3.3.47)$$

Cela donne le résultat attendu pour la variable auxiliaire z .

On considère maintenant le terme linéaire $\mathcal{L}(\mu q, \mu p_2, \mu p_1)$. Grâce à l'équation (3.3.16), et par symétrie de A_{22} , il s'écrit

$$\mathcal{L}(\mu q, \mu p_2, \mu p_1) = (A_{22} \mu p_2, \mu p_1)_H + (A_{11} \mu q, \mu p_1)_H + (V_1, \mu p_1)_H \quad (3.3.48)$$

$$= (A_{22} \mu p_1, \mu p_2)_H + (A_{11} \mu q, \mu p_1)_H + (V_1, \mu p_1)_H \quad (3.3.49)$$

D'une part, puisque $\mu p_1 \in V \subset H$, $A_{22} \mu p_1 \in H$, et d'après l'équation (3.3.44b) avec $p_2^* = A_{22} \mu p_1 \in H$ on a

$$(A_{22} \mu p_1, \mu p_2)_H = (A_{22} \mu p_1, \delta p_1)_H \quad (3.3.50)$$

D'autre part, en utilisant $p_1^* = \mu q \in V$ dans l'équation (3.3.44a), on a

$$(\mu q, \mu p_1)_V = (\mu q, \delta q)_V \quad (3.3.51)$$

Donc par définition du produit scalaire dans V :

$$(A_{11} \mu q, \mu p_1)_H = (A_{11} \mu q, \delta q)_H \quad (3.3.52)$$

Puisque A_{11} est bijectif, V_1 admet un unique antécédent $X_1 \in V$ tel que $A_{11} X_1 = V_1$. En utilisant l'équation (3.3.44a) avec $p_2^* = X_1 \in V$ on obtient

$$(X_1, \mu p_1)_V = (X_1, \delta q)_V \quad (3.3.53)$$

donc

$$(V_1, \mu p_1)_H = (V_1, \delta q)_H \quad (3.3.54)$$

Ces résultats combinés à la définition (3.3.12b) du Hamiltonien montrent que :

$$\mathcal{L}(\mu q, \mu p_2, \mu p_1) = (A_{22} \mu p_1, \delta p_1)_H + (A_{11} \mu q, \delta q)_H + (V_1, \delta q)_H \quad (3.3.55)$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \left[\mathcal{H}_{LIN}(q^{n+1}, p_1^{n+1}) - \mathcal{H}_{LIN}(q^n, p_1^n) \right] \quad (3.3.56)$$

□

Remarque 3.3.5

Il est tentant de quadratiser l'intégralité de l'équation (3.3.3) sans laisser de partie linéaire \mathcal{L} en dehors de la fonction auxiliaire G . On obtiendrait

$$\forall q^* \in V, \quad \begin{cases} zG(q, \dot{q}, \ddot{q}, q^*) = Q(q, \dot{q}, q^*) & (3.3.57a) \\ \dot{z} = G(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dot{q}) & (3.3.57b) \end{cases}$$

et le schéma serait

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall p_1^* \in V, \quad (\delta q, p_1^*)_V = (\mu p_1, p_1^*)_V & (3.3.58a) \\ \forall p_2^* \in H, \quad (\delta p_1, p_2^*)_H = (\mu p_2, p_2^*)_H & (3.3.58b) \\ \forall q^* \in V, \quad \mu z G(\pi q, \pi p_1, \pi p_2, q^*) = Q(\mu q, \mu p_1, q^*) & (3.3.58c) \\ \delta z = G(\pi q, \pi p_1, \pi p_2, \mu p_1) & (3.3.58d) \end{array} \right.$$

En l'absence de dissipation et de contraintes, c'est-à-dire si $Q(\mu q, \mu p_1, \cdot)$ est indépendant des inconnues, ce schéma n'est pas inversible et donc inutilisable en pratique. Pour éviter ce problème, il est nécessaire de toujours conserver une partie linéaire suffisante en dehors du terme quadratisé.

3.3.2 Application au manche de marteau flexible en rotation

Dans l'introduction générale de ce manuscrit et dans l'introduction de ce chapitre, en nous basant sur la littérature existante, nous avons émis l'hypothèse que si le toucher pianistique a une influence sur le son à nuances égales, alors la flexibilité du manche du marteau joue un rôle prépondérant. Pour cette raison, il est essentiel de calculer précisément, et le plus efficacement possible, les vibrations du manche. Nous utilisons le modèle de marteau flexible de [Chabassier et Duruflé, 2014] auquel nous appliquons la technique de quadratisation du Lagrangien présentée précédemment. Nous montrons pour finir que le schéma obtenu est précis et de complexité réduite par rapport au schéma de gradient discret proposé dans [Chabassier et Duruflé, 2014]. Il permet en effet de supprimer la méthode de résolution itérative, et l'utilisation de la formule de Woodbury permet une résolution quasi-explicite.

3.3.2.a Description du modèle physique

Le manche du marteau est modélisé comme une poutre de Timoshenko flexible de longueur L et de section S soumise à la gravité $-g\vec{u}_y$ et à laquelle on applique deux forces :

- \vec{F}_{meca} la force provenant de l'action du pianiste et transmise par la mécanique
- \vec{F}_{coupl} la force exercée par la tête de marteau sur le manche

La tête de marteau est considérée comme un second corps séparé qui exerce une action sur le manche par l'intermédiaire de la force \vec{F}_{coupl} et sur lequel les cordes exercent une force \vec{F}_{cordes} . Les autres paramètres physiques sont la masse volumique ρ , le module de Young E , le module de cisaillement G , le moment quadratique de section I , et κ un coefficient de Timoshenko. On se place dans un régime de petites déformations, de sorte à ce que les hypothèses de Timoshenko soient valides.

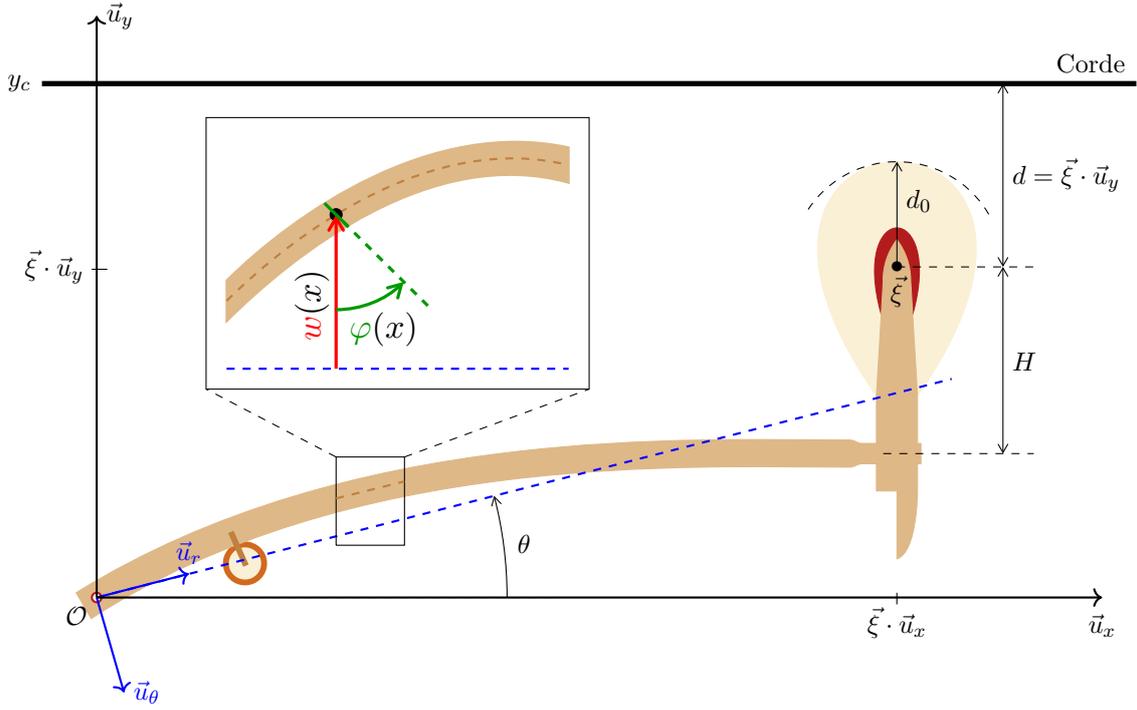


FIGURE 3.19 – Paramétrisation du marteau et de son manche flexible

En raison du caractère flexible du manche, la définition de l'angle θ qui paramètre l'orientation du repère tournant $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ par rapport au repère fixe (\vec{u}_x, \vec{u}_y) n'est pas unique. Le choix est fait de définir cet angle par rapport à la position de moyenne nulle des composantes en flexion, c'est-à-dire de façon à ce que

$$\int_0^L w(x) dx = 0 \quad (3.3.59)$$

Cette contrainte est imposée dans les équations à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange λ . Dans le repère cartésien (\vec{u}_x, \vec{u}_y) , les vecteurs tournants \vec{u}_r et \vec{u}_θ s'expriment comme

$$\vec{u}_r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \vec{u}_\theta = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.3.60)$$

Le mouvement du centre de masse de la tête de marteau, situé à une distance H au dessus de l'extrémité du manche, est décrit par le vecteur position $\vec{\xi}$. Sa masse vaut m_H . Le contact avec l'obstacle se produit lorsque $d = \vec{\xi} \cdot \vec{u}_y \leq d_0$.

On note $H = L^2([0, L])$ et V_0 l'ensemble des fonctions de $V = H^1([0, L])$ qui s'annulent en 0 :

$$V_0 = \left\{ w \in H^1([0, L]) \mid w(0) = 0 \right\} \quad (3.3.61)$$

Le modèle suivant, qui est dérivé dans [Chabassier et Duruflé, 2014], est obtenu par l'application du principe des travaux virtuels au manche.

Modèle 3.3.1 (Marteau avec manche flexible [Chabassier et Duruffé, 2014])

On cherche $(w, \varphi, \theta, \lambda, \vec{F}_{coupl}, \vec{\xi}) \in V_0 \times V \times \mathbb{R}^6$ tel que pour tout $(w^*, \varphi^*) \in V_0 \times V$ on ait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Équations du manche :} \\ \int_0^L \rho S \ddot{w} w^* + \int_0^L SG \kappa (\partial_x w - \varphi) \partial_x w^* + \lambda \int_0^L w^* \\ \quad - \int_0^L \rho S (w \dot{\theta}^2 + \ddot{\theta} x + g \cos \theta) w^* = (\vec{F}_{coupl} \cdot \vec{u}_\theta) w^*(L) + f_w(w^*) \end{array} \right. \quad (3.3.62a)$$

$$\int_0^L \rho I \ddot{\varphi} \varphi^* + \int_0^L SG \kappa (\partial_x w - \varphi) \varphi^* + \int_0^L EI \partial_x \varphi \partial_x \varphi^* - \rho I \ddot{\theta} \int_0^L \varphi^* = f_\varphi(\varphi^*) \quad (3.3.62b)$$

Moyenne nulle en flexion / Équation sur λ :

$$\int_0^L w = 0 \quad (3.3.62c)$$

Équation sur θ :

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} \int_0^L \rho S (w^2 + x^2) + 2\dot{\theta} \int_0^L \rho S w \dot{w} + \int_0^L \rho I (\ddot{\theta} - \ddot{\varphi}) - \int_0^L \rho S x \ddot{w} \\ + \int_0^L \rho S g (x \cos \theta + w \sin \theta) = (w(L) - H) (\vec{F}_{coupl} \cdot \vec{u}_r) - L (\vec{F}_{coupl} \cdot \vec{u}_\theta) + f_\theta \end{aligned} \quad (3.3.62d)$$

Équation de la tête (loi de Newton) :

$$m_H \partial_t^2 \vec{\xi} = -m_H g \vec{u}_y - \vec{F}_{coupl} - \vec{F}_{cordes} \quad (3.3.62e)$$

Continuité manche-tête :

$$\vec{\xi} = L \vec{u}_r + (w(L) - H) \vec{u}_\theta \quad (3.3.62f)$$

Les conditions initiales à $t = 0$ sont données par

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in [0, L], \quad w(x, 0) = 0 \\ \forall x \in [0, L], \quad \varphi(x, 0) = 0 \\ \theta(0) = \theta_0 \\ \vec{\xi}(0) = L \begin{pmatrix} \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \end{pmatrix} - H \begin{pmatrix} \sin \theta_0 \\ -\cos \theta_0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (3.3.63)$$

La force \vec{F}_{mecc} provenant de la mécanique est ici représentée par les termes sources f_w , f_φ et f_θ . Nous détaillerons leur calcul au chapitre 4.

Remarque 3.3.6

Pour une poutre de Timoshenko linéaire et une source de régularité suffisante, le théorème de Hille-Yosida assure l'existence et l'unicité d'une solution dans l'espace $\mathcal{C}^1([0, T], V_0 \times V) \cap \mathcal{C}^2([0, T], H^2)$ (voir [Chabassier, 2012, p. 269]). Il n'existe pas de telle preuve pour le modèle 3.3.1, mais la non-linéarité est supposée suffisamment "faible" pour que nous cherchions tout de même les solutions dans cet espace dans la suite de ce chapitre.

Suite à (3.3.19), introduisons une constante $c \in \mathbb{R}_+^*$ et définissons la variable auxiliaire

$$\forall t \in [0, T], \quad z(t) \equiv \sqrt{2\mathcal{H}(w, \varphi, \dot{w}, \dot{\varphi}, \theta, \dot{\theta})} + c \quad (3.3.67)$$

La partie non-linéaire des équations d'Euler-Lagrange est définie pour tout $(w_1, w_2, w^*, \varphi_1, \varphi_2, \varphi^*, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta^*) \in V_0^3 \times V^3 \times \mathbb{R}^4$ par

$$\begin{aligned} & EL(w_1, \varphi_1, w_2, \varphi_2, \theta_1, \theta_2, \theta_3, w^*, \varphi^*, \theta^*) \\ &= \int_0^L \left[\rho S \begin{pmatrix} -w_1 \theta_2^2 \\ 0 \\ 2w_1 w_2 \theta_2 + w_1^2 \theta_3 \end{pmatrix} + \rho S g \begin{pmatrix} -\cos \theta_1 \\ 0 \\ x \cos \theta_1 + w_1 \sin \theta_1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} w^* \\ \varphi^* \\ \theta^* \end{pmatrix} dx \end{aligned} \quad (3.3.68)$$

et suivant (3.3.25), la fonction auxiliaire de quadratisation s'écrit

$$G(w_1, \varphi_1, w_2, \varphi_2, \theta_1, \theta_2, \theta_3, w^*, \varphi^*, \theta^*) = \frac{EL(w_1, \varphi_1, w_2, \varphi_2, \theta_1, \theta_2, \theta_3, w^*, \varphi^*, \theta^*)}{\sqrt{2\mathcal{H}(w_1, \varphi_1, w_2, \varphi_2, \theta_1, \theta_2) + c}} \quad (3.3.69)$$

Afin de condenser l'écriture du système, on définit les matrices et vecteur

$$M = \begin{pmatrix} \rho S & 0 \\ 0 & \rho I \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} SG\kappa & 0 \\ 0 & EI \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -SG\kappa \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & SG\kappa \end{pmatrix} \quad f_q = \begin{pmatrix} f_w \\ f_\varphi \end{pmatrix}$$

et une inconnue vectorielle $q = {}^t(w, \varphi)$. On cherche $(q, \theta, \lambda, \vec{F}_{coupl}, \vec{\xi}) \in V_0 \times V \times \mathbb{R}^6$ tel que pour tout $q^* \in V_0 \times V$ on ait

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_0^L M \ddot{q} \cdot q^* + \int_0^L \begin{pmatrix} C & {}^t B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \partial_x q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q^* \\ \partial_x q^* \end{pmatrix} - \ddot{\theta} \int_0^L M \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot q^* \\ & + \lambda \int_0^L q^* \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + EL(q, \dot{q}, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, q^*, 0) = (\vec{F}_{coupl} \cdot \vec{u}_\theta) q^*(L) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + f_q(q^*) \end{aligned} \right. \quad (3.3.70a)$$

$$\int_0^L q \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.3.70b)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \ddot{\theta} \int_0^L M \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} - \int_0^L M \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \ddot{q} + EL(q, \dot{q}, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, 0, 1) \\ & = \left(q(L) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - H \right) (\vec{F}_{coupl} \cdot \vec{u}_r) - L (\vec{F}_{coupl} \cdot \vec{u}_\theta) + f_\theta \end{aligned} \right. \quad (3.3.70c)$$

$$m_H \partial_t^2 \vec{\xi} = -m_H g \vec{u}_y - \vec{F}_{coupl} - \vec{F}_{cordes} \quad (3.3.70d)$$

$$\vec{\xi} = L \vec{u}_r + \left(q(L) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - H \right) \vec{u}_\theta \quad (3.3.70e)$$

Grâce à la fonction auxiliaire G (3.3.69) et à la variable auxiliaire z (3.3.67), on écrit une formulation quadratisée pour laquelle on cherche $(q, \theta, \lambda, z, \vec{F}_{coupl}, \vec{\xi}) \in V_0 \times V \times \mathbb{R}^6$ tel que pour tout $q^* \in V_0 \times V$ on ait

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_0^L M \ddot{q} \cdot q^* + \int_0^L \begin{pmatrix} C & {}^t B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \partial_x q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q^* \\ \partial_x q^* \end{pmatrix} - \ddot{\theta} \int_0^L M \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot q^* \\ & + \lambda \int_0^L q^* \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + zG(q, \dot{q}, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, q^*, 0) = (\vec{F}_{coupl} \cdot \vec{u}_\theta) q^*(L) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + f_q(q^*) \end{aligned} \right. \quad (3.3.71a)$$

$$\int_0^L q \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.3.71b)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \ddot{\theta} \int_0^L M \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} - \int_0^L M \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \ddot{q} + zG(q, \dot{q}, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, 0, 1) \\ & = \left(q(L) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - H \right) (\vec{F}_{coupl} \cdot \mathbf{u}_r) - L (\vec{F}_{coupl} \cdot \vec{u}_\theta) + f_\theta \end{aligned} \right. \quad (3.3.71c)$$

$$\dot{z} = G(q, \dot{q}, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \dot{q}, \dot{\theta}) \quad (3.3.71d)$$

$$m_H \partial_t^2 \vec{\xi} = -m_H g \vec{u}_y - \vec{F}_{coupl} - \vec{F}_{cordes} \quad (3.3.71e)$$

$$\vec{\xi} = L \vec{u}_r + \left(q(L) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - H \right) \vec{u}_\theta \quad (3.3.71f)$$

Pour la suite, afin de vérifier spécifiquement les propriétés numériques associées à la quadratisation du manche flexible par la méthode du Lagrangien, nous ne prenons pas en compte les cordes et nous considérons que le marteau frappe un obstacle rigide situé à une hauteur y_c . Nous adaptons donc la méthode de quadratisation de la non-linéarité de l'écrasement du feutre présentée à la section 3.1.3. La force s'écrit

$$F_{cordes} = \vec{F}_{cordes} \cdot \vec{u}_y = \Phi_1(\vec{\xi} \cdot \vec{u}_y) \quad \Phi_1(\xi_y) = K^H [(d_0 + \xi_y - y_c)^+]^p \quad (3.3.72)$$

où nous rappelons que p est un réel positif qui quantifie les effets non-linéaires, K^H est un paramètre de dureté du feutre, et $(\cdot)^+$ désigne la fonction partie positive.

Remarque 3.3.10

Pour les mêmes raisons que précédemment (voir la remarque 3.3.2.a), le terme dissipatif du contact n'est pas pris en compte ici. De plus, le marteau est supposé n'avoir aucune interaction de frottement avec l'obstacle dans la direction horizontale. Ces phénomènes seront ajoutés dans le chapitre 4.

La primitive Ψ de la fonction Φ_1 qui s'annule à distance infinie de l'obstacle est

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \Psi(y) = \int_{-\infty}^y \Phi_1(s) ds \quad (3.3.73)$$

La variable auxiliaire et la fonction auxiliaire sont définies telles que

$$z_H = \sqrt{2\Phi_1(\vec{\xi} \cdot \vec{u}_y) + c_H} \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad G_H(y) = \frac{\Phi_1(y)}{\sqrt{2\Psi(y) + c_H}} \quad (3.3.74)$$

de telle sorte que

$$\vec{F}_{cordes} \cdot \vec{u}_y = z_H G_H(\vec{\xi} \cdot \vec{u}_y) \quad \text{et} \quad \dot{z}_H = G_H(\vec{\xi} \cdot \vec{u}_y) \partial_t \vec{\xi} \cdot \vec{u}_y \quad (3.3.75)$$

En utilisant le travail théorique de la section 3.3.1, on écrit une formulation du système quadratisé dans l'espace des phases formulé comme une contrainte.

On cherche $(q, p, \theta, T_1, T_2, \lambda, z, \vec{F}_{coupl}, \vec{\xi}, \vec{X}, z_H) \in (V_0 \times V)^2 \times \mathbb{R}^5 \times (\mathbb{R}^2)^3 \times \mathbb{R}$ tel que pour tout $q^* \in V_0 \times V$ et $p^* \in V_0 \times V$ on ait

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} = T_1 \quad (3.3.76a) \\ \dot{T}_1 = T_2 \quad (3.3.76b) \\ \int_0^L \begin{pmatrix} C & {}^t B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \partial_x \dot{q} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p^* \\ \partial_x p^* \end{pmatrix} = \int_0^L \begin{pmatrix} C & {}^t B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ \partial_x p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p^* \\ \partial_x p^* \end{pmatrix} \quad (3.3.76c) \\ \int_0^L M \dot{p} \cdot q^* + \int_0^L \begin{pmatrix} C & {}^t B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \partial_x q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q^* \\ \partial_x q^* \end{pmatrix} - T_2 \int_0^L M \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot q^* \\ + \lambda \int_0^L q^* \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + zG(q, p, \theta, T_1, T_2, q^*, 0) = (\vec{F}_{coupl} \cdot \vec{u}_\theta) q^*(L) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + f_q(q^*) \quad (3.3.76d) \\ \int_0^L q \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.3.76e) \\ T_2 \int_0^L M \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} - \int_0^L M \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \dot{p} + zG(q, p, \theta, T_1, T_2, 0, 1) \\ = \left(q(L) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - H \right) (\vec{F}_{coupl} \cdot \vec{u}_r) - L (\vec{F}_{coupl} \cdot \vec{u}_\theta) + f_\theta \quad (3.3.76f) \\ \dot{z} = G(q, p, \theta, T_1, T_2, p, T_1) \quad (3.3.76g) \\ \partial_t \vec{\xi} = \vec{X} \quad (3.3.76h) \\ m_H \partial_t \vec{X} = -m_H g \vec{u}_y - \vec{F}_{coupl} - F_{cordes} \vec{u}_y \quad (3.3.76i) \\ \vec{X} = T_1 \left(q(L) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - H \right) \vec{u}_r + \left(p(L) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - L T_1 \right) \vec{u}_\theta \quad (3.3.76j) \\ F_{cordes} = z_H G_H(\vec{\xi} \cdot \vec{u}_y) \quad (3.3.76k) \\ \dot{z}_H = G_H(\vec{\xi} \cdot \vec{u}_y) \vec{X} \cdot \vec{u}_y \quad (3.3.76l) \end{array} \right.$$

Notons que l'équation $\dot{q} = p$ est écrite sous la forme faible (3.3.76c) avec le produit scalaire induit par la forme bi-linéaire

$$\forall (u, v) \in (V \times V_0)^2, \quad a(u, v) = \int_0^L \begin{pmatrix} C & {}^t B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \partial_x u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ \partial_x v \end{pmatrix} \quad (3.3.77)$$

qui est représentée, grâce au théorème de Riesz, par un opérateur A_{11} similaire à celui défini dans la partie 3.3.1.

Remarque 3.3.11

Notons que le modèle du marteau avec manche flexible ne nécessite pas d'équation similaire à (3.3.30b) car le terme non-linéaire ne dépend pas de la dérivée seconde en temps des inconnues distribuées. Seule une version scalaire pour la variable θ est nécessaire et conduit à l'équation (3.3.76b).

3.3.2.c Discrétisation en espace

La discrétisation en espace est basée sur des éléments finis spectraux d'ordre élevé ($r \in \mathbb{N}^*$) sur un maillage régulier de pas Δx tel que

$$[0, L] = \bigcup_k [x_k, x_{k+1}] \quad \text{et} \quad x_{k+1} = x_k + \Delta x \quad (3.3.78)$$

Les espaces d'éléments finis discrets V_h et $V_{h,0}$ sont de dimension n_h et définis par

$$V_h = \left\{ u \in V \mid \forall k, u|_{[x_k, x_{k+1}]} \in \mathbb{P}_r \right\} \quad V_{h,0} = \left\{ u \in V_0 \mid \forall k, u|_{[x_k, x_{k+1}]} \in \mathbb{P}_r \right\} \quad (3.3.79)$$

et où \mathbb{P}_r est l'ensemble des polynômes de degré au plus r . Les degrés de liberté $(\zeta_i)_{i \in [1, n_h]}$ et les points de quadrature sont choisis comme les points de Gauss-Lobatto afin de réaliser une condensation de masse. Les fonctions de base de $\mathcal{Q}_h = V_{h,0} \times V_h$ sont notées $(\phi_i)_{i \in [1, 2n_h]}$. Pour finir, on note Q_h la représentation vectorielle de $q_h \in \mathcal{Q}_h$, et on introduit les matrices et vecteurs suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (i, j) \in [1, 2n_h]^2, \quad (M_h)_{i,j} = \oint_0^L M \phi_j \cdot \phi_i \quad (3.3.80a) \\ \forall (i, j) \in [1, 2n_h]^2, \quad (K_h)_{i,j} = \oint_0^L \begin{pmatrix} C & {}^t B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_j \\ \partial_x \phi_j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi_i \\ \partial_x \phi_i \end{pmatrix} \quad (3.3.80b) \\ \forall i \in [1, 2n_h], \quad (L_h)_i = \begin{cases} \zeta_p & \text{if } i = 2p \\ 1 & \text{if } i \text{ est impair} \end{cases} \quad (3.3.80c) \\ \forall i \in [1, 2n_h], \quad (I_h^w)_i = \oint_0^L \phi_i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.80d) \\ \forall i \in [1, 2n_h], \quad (I_h^{w(L)})_i = \phi_i(L) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.80e) \\ \forall i \in [1, 2n_h], \quad (F_{h,Q})_i = f_q(\phi_i) \quad (3.3.80f) \\ \forall i \in [1, 2n_h], \quad \forall (Q_h, P_h, \theta_h, T_{h,1}, T_{h,2}) \in \mathbb{R}^{2n_h} \times \mathbb{R}^{2n_h} \times \mathbb{R}^3, \\ \quad (\mathbb{G}_q(Q_h, P_h, \theta_h, T_{h,1}, T_{h,2}))_i = G(q_h, p_h, \theta_h, T_{h,1}, T_{h,2}, \phi_i, 0) \quad (3.3.80g) \\ \forall (Q_h, P_h, \theta_h, T_{h,1}, T_{h,2}) \in \mathbb{R}^{2n_h} \times \mathbb{R}^{2n_h} \times \mathbb{R}^3, \\ \quad \mathbb{G}_\theta(Q_h, P_h, \theta_h, T_{h,1}, T_{h,2}) = G(q_h, p_h, \theta_h, T_{h,1}, T_{h,2}, 0, 1) \quad (3.3.80h) \end{array} \right.$$

où \oint désigne une intégration numérique par la quadrature de Gauss-Lobatto. \mathbb{G}_q et \mathbb{G}_θ sont non-linéaires par rapport à tous leurs arguments, et \mathbb{G}_q est un vecteur de taille $2n_h$. I_h^w réalise l'intégration de la composante de flexion w le long du manche, et $I_h^{w(L)}$ permet de calculer la flexion à l'extrémité $x = L$.

On écrit alors la formulation semi-discrète dans l'espace des phases en cherchant $(Q_h, P_h, \theta_h, T_{h,1}, T_{h,2}, \lambda_h, z_h, \vec{F}_{coupl}, \vec{\xi}_h, \vec{X}_h, z_H) \in \mathbb{R}^{2n_h} \times \mathbb{R}^{2n_h} \times \mathbb{R}^5 \times (\mathbb{R}^2)^3 \times \mathbb{R}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_h = T_{h,1} \quad (3.3.81a) \\ \dot{T}_{h,1} = T_{h,2} \quad (3.3.81b) \\ {}^t K_h \dot{Q}_h = {}^t K_h P_h \quad (\iff \dot{Q}_h = P_h \text{ car } K_h \text{ est inversible}) \quad (3.3.81c) \\ M_h \dot{P}_h + K_h Q_h - T_{h,2} M_h L_h + \lambda_h I_h^w + z_h \mathbb{G}_q(Q_h, P_h, \theta_h, T_{1,h}, T_{2,h}) \\ \quad \quad \quad = (\vec{F}_{coupl} \cdot \vec{u}_\theta) I_h^{w(L)} + F_{h,Q} \quad (3.3.81d) \\ I_h^w \cdot Q_h = 0 \quad (3.3.81e) \\ T_{h,2} M_h L_h \cdot L_h - M_h L_h \cdot \dot{P}_h + z_h \mathbb{G}_\theta(Q_h, P_h, \theta_h, T_{h,1}, T_{h,2}) \\ \quad \quad \quad = (Q_h \cdot I_h^{w(L)} - H) (\vec{F}_{coupl} \cdot \vec{u}_r) - L (\vec{F}_{coupl} \cdot \vec{u}_\theta) + F_{h,\theta} \quad (3.3.81f) \\ \dot{z}_h = \mathbb{G}_q(Q_h, P_h, \theta_h, T_{h,1}, T_{h,2}) \cdot P_h + \mathbb{G}_\theta(Q_h, P_h, \theta_h, T_{h,1}, T_{h,2}) T_{h,1} \quad (3.3.81g) \\ \partial_t \vec{\xi}_h = \vec{X}_h \quad (3.3.81h) \\ m_H \partial_t \vec{X}_h = -m_H g \vec{u}_y - \vec{F}_{coupl} - F_{cordes} \vec{u}_y \quad (3.3.81i) \\ \vec{X}_h = T_{h,1} (Q_h \cdot I_h^{w(L)} - H) \vec{u}_r + (P_h \cdot I_h^{w(L)} - L T_{h,1}) \vec{u}_\theta \quad (3.3.81j) \\ F_{cordes} = z_H G_H (\vec{\xi} \cdot \vec{u}_y) \quad (3.3.81k) \\ \dot{z}_H = G_H (\vec{\xi} \cdot \vec{u}_y) \vec{X} \cdot \vec{u}_y \quad (3.3.81l) \end{array} \right.$$

3.3.2.d Discrétisation en temps

Nous proposons la stratégie de discrétisation en temps suivante.

Schéma numérique 3.3.2 (Manche de marteau flexible quadratisé)

A chaque itération, on cherche $(Q_h^{n+1}, P_h^{n+1}, \theta_h^{n+1}, T_{h,1}^{n+1}, T_{h,2}^{n+1}, \lambda_h, z_h^{n+1}, \vec{F}_{coupl}, \vec{\xi}_h^{n+1}, \vec{X}_h^{n+1}, z_H^{n+1}) \in \mathbb{R}^{2n_h} \times \mathbb{R}^{2n_h} \times \mathbb{R}^5 \times (\mathbb{R}^2)^3 \times \mathbb{R}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\theta_h = \mu T_{h,1} \end{array} \right. \quad (3.3.82a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta T_{h,1} = \mu T_{h,2} \end{array} \right. \quad (3.3.82b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta Q_h = \mu P_h \end{array} \right. \quad (3.3.82c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_h \delta P_h + K_h \mu Q_h - \mu T_{h,2} M_h L_h + \lambda_h I_h^w + \mu z_h \mathbb{G}_q(\pi Q_h, \pi P_h, \pi \theta_h, \pi T_{1,h}, \pi T_{h,2}) \\ \qquad \qquad \qquad = \left(\vec{F}_{coupl} \cdot \pi \vec{u}_\theta \right) I_h^{w(L)} + F_{h,Q}^{n+1/2} \end{array} \right. \quad (3.3.82d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_h^w \cdot \mu Q_h = 0 \end{array} \right. \quad (3.3.82e)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu T_{h,2} M_h L_h \cdot L_h - M_h L_h \cdot \delta P_h + \mu z_h \mathbb{G}_\theta(\pi Q_h, \pi P_h, \pi \theta_h, \pi T_{h,1}, \pi T_{h,2}) \\ \qquad \qquad \qquad = \left(\pi Q_h \cdot I_h^{w(L)} - H \right) \left(\vec{F}_{coupl} \cdot \pi \vec{u}_r \right) - L \left(\vec{F}_{coupl} \cdot \pi \vec{u}_\theta \right) + F_{h,\theta}^{n+1/2} \end{array} \right. \quad (3.3.82f)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta z_h = \mathbb{G}_q(\pi Q_h, \pi P_h, \pi \theta_h, \pi T_{h,1}, \pi T_{h,2}) \cdot \mu P_h \\ \qquad \qquad \qquad + \mathbb{G}_\theta(\pi Q_h, \pi P_h, \pi \theta_h, \pi T_{h,1}, \pi T_{h,2}) \mu T_{h,1} \end{array} \right. \quad (3.3.82g)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \vec{\xi}_h = \mu \vec{X}_h \end{array} \right. \quad (3.3.82h)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_H \delta \vec{X}_h = -m_H g \vec{u}_y - \vec{F}_{coupl} - F_{cordes} \vec{u}_y \end{array} \right. \quad (3.3.82i)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \vec{X}_h = \mu T_{h,1} \left(\pi Q_h \cdot I_h^{w(L)} - H \right) \pi \vec{u}_r + \left(\mu P_h \cdot I_h^{w(L)} - L \mu T_{h,1} \right) \pi \vec{u}_\theta \end{array} \right. \quad (3.3.82j)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{cordes} = \mu z_H G_H \left(\pi \vec{\xi}_h \cdot \vec{u}_y \right) \end{array} \right. \quad (3.3.82k)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta z_H = G_H \left(\pi \vec{\xi}_h \cdot \vec{u}_y \right) \mu \vec{X}_h \cdot \vec{u}_y \end{array} \right. \quad (3.3.82l)$$

et les conditions initiales sont données par

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_h^0 = \pi Q_h^{1/2} = P_h^0 = \pi P_h^{1/2} = 0 \\ \theta_h^0 = \pi \theta_h^{1/2} = \theta_0 \\ T_{h,1}^0 = \pi T_{h,1}^{1/2} = T_{h,2}^0 = \pi T_{h,2}^{1/2} = 0 \\ z_h^0 = \sqrt{c} \\ \vec{\xi}_h^0 = \pi \vec{\xi}_h^{1/2} = L \begin{pmatrix} \cos(\theta_0) \\ \sin(\theta_0) \end{pmatrix} - H \begin{pmatrix} \sin(\theta_0) \\ -\cos(\theta_0) \end{pmatrix} \\ \vec{X}_h^0 = 0 \\ z_H^0 = \sqrt{c_H} \end{array} \right. \quad (3.3.83)$$

et où $\pi \vec{u}_r = \begin{pmatrix} \cos(\pi\theta) \\ \sin(\pi\theta) \end{pmatrix}$ et $\pi \vec{u}_\theta = \begin{pmatrix} \sin(\pi\theta) \\ -\cos(\pi\theta) \end{pmatrix}$

Tous les arguments non-linéaires des fonctions \mathbb{G}_q , \mathbb{G}_θ et G_H sont traités explicitement par l'approximation π . Le schéma est donc linéairement implicite et ne nécessite aucune procédure itérative pour sa résolution.

Le vecteur $M_h L_h \in \mathbb{R}^{2n_h}$ et le réel $M_h L_h \cdot L_h \in \mathbb{R}$ sont constants par rapport au temps, ils peuvent être pré-calculés en amont des itérations en temps.

Théorème 3.3.6 (Bilan de puissance discret du schéma 3.3.2)

La solution du schéma (3.3.82) vérifie

$$\begin{cases} \delta \mathcal{E}_h = F_{h,Q}^{n+1/2} \cdot \mu P_h + F_{h,\theta}^{n+1/2} \mu T_{1,h} & (3.3.84a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{E}_h^n = \frac{1}{2} M_h \left(P_h^n - L_h T_{1,h}^n \right) \cdot \left(P_h^n - L_h T_{1,h}^n \right) + \frac{1}{2} K_h Q_h^n \cdot Q_h^n + \frac{1}{2} (z_h^n)^2 + \frac{1}{2} (z_H^n)^2 \\ \quad + \frac{1}{2} m_H \left| \vec{X}_h^n \right|^2 + m_H g \vec{\xi}_h^n \cdot \vec{u}_y & (3.3.84b) \end{cases}$$

Démonstration. On prend le produit scalaire de (3.3.82d) par μP_h , on multiplie (3.3.82f) par $\mu T_{h,1}$ et (3.3.82i) par $\mu \vec{X}_h$. On somme ces contributions pour obtenir

$$\begin{aligned} & M_h \delta P_h \cdot \mu P_h + K_h \mu Q_h \cdot \mu P_h - \delta T_{h,1} M_h L_h \cdot \mu P_h + \mu z_h \mathbb{G}_q(\pi Q_h, \pi P_h, \pi \theta_h, \pi T_{h,1}, \pi T_{h,2}) \cdot \mu P_h \\ & \quad + \mu T_{h,2} \mu T_{h,1} M_h L_h \cdot L_h - \mu T_{h,1} M_h L_h \cdot \delta P_h + \mu z_h \mathbb{G}_\theta(\pi Q_h, \pi P_h, \pi \theta_h, \pi T_{h,1}, \pi T_{h,2}) \mu T_{h,1} \\ & \quad + m_H \delta \vec{X}_h \cdot \mu \vec{X}_h + m_H g \vec{u}_y \cdot \mu \vec{X}_h + F_{cordes} \vec{u}_y \cdot \mu \vec{X}_h \\ & = \left(\vec{F}_{coupl} \cdot \pi \vec{u}_\theta \right) \mu P_h \cdot I_h^{w(L)} + F_{h,Q}^{n+1/2} \cdot \mu P_h \\ & \quad + \left(\pi Q_h \cdot I_h^{w(L)} - H \right) \left(\vec{F}_{coupl} \cdot \pi \vec{u}_r \right) \mu T_{h,1} - L \left(\vec{F}_{coupl} \cdot \pi \vec{u}_\theta \right) \mu T_{h,1} + F_{h,\theta}^{n+1/2} \mu T_{h,1} - \vec{F}_{coupl} \cdot \mu \vec{X}_h \end{aligned}$$

La force de couplage interne \vec{F}_{coupl} se simplifie grâce à l'équation (3.3.82j), et les termes non-linéaires grâce à (3.3.82g) :

$$\begin{aligned} & \mu z_h \mathbb{G}_q(\pi Q_h, \pi P_h, \pi \theta_h, \pi T_{h,1}, \pi T_{h,2}) \cdot \mu P_h \\ & \quad + \mu z_h \mathbb{G}_\theta(\pi Q_h, \pi P_h, \pi \theta_h, \pi T_{h,1}, \pi T_{h,2}) \mu T_{h,1} = \mu z_h \delta z_h \end{aligned} \quad (3.3.85)$$

De façon similaire, pour les termes qui concernent la tête de marteau, (3.3.82k) et (3.3.82l) donnent

$$F_{cordes} \vec{u}_y \cdot \mu \vec{X}_h = \mu z_H G_H(\pi \vec{\xi}_h \cdot \vec{u}_y) \mu \vec{X}_h \cdot \vec{u}_y = \mu z_H \delta z_H \quad (3.3.86)$$

Après avoir utilisé les équations pour substituer les δ et les μ quand c'est nécessaire, il reste

$$\begin{aligned} & M_h \delta P_h \cdot \mu P_h - \delta T_{h,1} M_h L_h \cdot \mu P_h + \delta T_{h,1} \mu T_{h,1} M_h L_h \cdot L_h - \mu T_{h,1} M_h L_h \cdot \delta P_h \\ & \quad + K_h \mu Q_h \cdot \mu P_h + \mu z_h \delta z_h + \mu z_H \delta z_H + m_H \delta \vec{X}_h \cdot \mu \vec{X}_h + m_H g \vec{u}_y \cdot \delta \vec{\xi}_h \\ & = F_{h,Q}^{n+1/2} \cdot \mu P_h + F_{h,\theta}^{n+1/2} \mu T_{1,h} \end{aligned} \quad (3.3.87)$$

La preuve est conclue après avoir remarqué que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta t} \left[M_h \left(P_h^{n+1} - L_h T_{h,1}^{n+1} \right) \cdot \left(P_h^{n+1} - L_h T_{h,1}^{n+1} \right) - M_h \left(P_h^n - L_h T_{h,1}^n \right) \cdot \left(P_h^n - L_h T_{h,1}^n \right) \right] \\ & = M_h \delta P_h \cdot \mu P_h - \delta T_{h,1} M_h L_h \cdot \mu P_h + \delta T_{h,1} \mu T_{h,1} M_h L_h \cdot L_h - \mu T_{h,1} M_h L_h \cdot \delta P_h \end{aligned} \quad (3.3.88)$$

□

Remarque 3.3.12: Positivité de l'énergie

Le seul terme de l'énergie (3.3.84b) qui n'est pas nécessairement positif est $m_H g \vec{\xi}_h^n \cdot \vec{u}_y$, et ce en raison du choix du référentiel dans lequel est calculée l'énergie potentielle de pesanteur. Une constante positive peut être ajoutée à ce terme pour le rendre positif sans modifier le bilan de puissance.

Remarque 3.3.13: Stabilité et convergence du schéma

Bien que le bilan de puissance soit vérifié inconditionnellement, il n'existe pas à notre connaissance de technique de preuve de stabilité d'un tel schéma qui fait apparaître un terme d'énergie $\frac{1}{2} M_h (P_h^n - L_h T_{1,h}^n) \cdot (P_h^n - L_h T_{1,h}^n)$ qui n'est pas quadratique indépendamment pour chacune des inconnues. Cette preuve de stabilité, tout comme la preuve de convergence, est laissée comme perspective de ce travail.

3.3.2.e Stratégie de résolution

Comme nous l'avons déjà mentionné dans le chapitre 1 sur les cordes, la matrice à inverser pour résoudre les schémas quadratisés change et doit être re-inversée à chaque pas de temps. La résolution du schéma 3.3.2 ne fait pas exception. Comme pour la corde, pour réduire le coût de calcul des inversions, nous allons nous ramener à l'utilisation de la formule de Woodbury en effectuant des compléments de Schur.

On note

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = M_h L_h \cdot L_h \quad (3.3.89a) \\ \vec{\alpha}_2 = \frac{2m_H}{\Delta t} \vec{X}_h^n - z_H^n G_H \vec{u}_y - m_H g \vec{u}_y \quad (3.3.89b) \\ \alpha_3 = \frac{2m_H}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} G_H^2 \quad (3.3.89c) \\ \vec{\alpha}_4 = (\pi Q_h \cdot I_h^{w(L)} - H) \pi \vec{u}_r - L \pi \vec{u}_\theta \quad (3.3.89d) \\ \alpha_5 = \frac{2\alpha_1}{\Delta t} + \alpha_3 \|\vec{\alpha}_4\|_2^2 + \frac{\Delta t}{2} \mathbb{G}_\theta^2 \quad (3.3.89e) \\ \alpha_6 = \frac{2\alpha_1}{\Delta t} T_{h,1}^n + \vec{\alpha}_2 \cdot \vec{\alpha}_4 - \frac{2}{\Delta t} M_h L_h \cdot P_h^n - \mathbb{G}_\theta z_h^n + F_\theta \quad (3.3.89f) \\ A_1 = \frac{2}{\Delta t} M_h L_h + \alpha_3 L I_h^{w(L)} - \frac{\Delta t}{2} \mathbb{G}_\theta \mathbb{G}_q \quad (3.3.89g) \\ A_2 = \frac{2}{\Delta t} M_h P_h^n - K_h Q_h^n - \frac{2}{\Delta t} M_h L_h T_{h,1}^n - \mathbb{G}_g z_h^n + \vec{\alpha}_2 \cdot \pi \vec{u}_\theta I_h^{w(L)} + F_Q \quad (3.3.89h) \end{array} \right.$$

L'élimination successive des variables par les compléments de Schur permet de se ramener à une unique équation vérifiée par μP_h et λ_h :

$$\mathcal{M}_h \mu P_h = \mathcal{F}_h - \lambda_h I_h^w \quad (3.3.90)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_h = \frac{2}{\Delta t} M_h + \frac{\Delta t}{2} K_h + \frac{\Delta t}{2} \mathbb{G}_q {}^t \mathbb{G}_q + \alpha_3 I_h^{w(L)} {}^t I_h^{w(L)} - \frac{1}{\alpha_5} A_1 {}^t A_1 \quad (3.3.91a) \\ \mathcal{F}_h = A_2 + \frac{\alpha_6}{\alpha_5} A_1 \quad (3.3.91b) \end{array} \right.$$

On sait de plus que $I_h^w \cdot \mu P_h = 0$ donc $I_h^w \cdot (\mathcal{M}_h^{-1} \mathcal{F}_h - \lambda_h \mathcal{M}_h^{-1} I_h^w) = 0$. Ceci permet de découpler la résolution de λ_h et de μP_h :

$$\begin{cases} \lambda_h = \frac{\mathcal{M}_h^{-1} \mathcal{F}_h \cdot I_h^w}{\mathcal{M}_h^{-1} I_h^w \cdot I_h^w} & (3.3.92a) \\ \mu P_h = \mathcal{M}_h^{-1} \mathcal{F}_h - \lambda_h \mathcal{M}_h^{-1} I_h^w & (3.3.92b) \end{cases}$$

Pour inverser la matrice \mathcal{M}_h définie par (3.3.91a), on peut appliquer la formule de Woodbury.

Lemme 3.3.1 (Formule d'inversion de Woodbury [Woodbury, 1950].)

Soient A_h et a_h deux matrices carrées inversibles de tailles respectives $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

Soient U_h et V_h de matrices de tailles $n \times p$ et $p \times n$.

$A_h + U_h a_h V_h$ est inversible si et seulement si $\det(a_h^{-1} + V_h A_h^{-1} U_h) \neq 0$ et alors on a :

$$(A_h + U_h a_h V_h)^{-1} = A_h^{-1} - A_h^{-1} U_h (a_h^{-1} + V_h A_h^{-1} U_h)^{-1} V_h A_h^{-1}$$

Cette formule s'applique à \mathcal{M}_h en utilisant

$$A_h = \frac{2}{\Delta t} M_h + \frac{\Delta t}{2} K_h \quad {}^t V_h = U_h = (\mathbb{G}_q, I_h^{w(L)}, A_1) \quad a_h = \begin{pmatrix} \frac{\Delta t}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha_5} \end{pmatrix} \quad (3.3.93)$$

L'algorithme de résolution que nous utilisons est le suivant :

- Initialiser toutes les variables et LU-factoriser la matrice A_h une fois pour toutes.
- Pour chaque itération :
 - Actualiser les valeurs de \mathcal{M}_h et \mathcal{F}_h
 - En utilisant la formule de Woodbury, résoudre les systèmes $\mathcal{M}_h X = I_h^w$ et $\mathcal{M}_h Y = \mathcal{F}_h$
 - Actualiser $\lambda_h = \frac{Y \cdot I_h^w}{X \cdot I_h^w}$
 - Actualiser $\mu P_h = Y - \lambda_h X$
 - A partir de la connaissance de μP_h , actualiser toutes les autres variables en utilisant les équations du schéma. En particulier,
$$\mu T_{h,1} = \frac{1}{\alpha_5} A_1 \cdot \mu P_h + \frac{\alpha_6}{\alpha_5}$$

En pratique, nous avons remarqué que cette technique d'inversion permet de diviser le temps de calcul par 3.

3.3.3 Résultats numériques

Nous rappelons que cette partie présente des résultats numériques pour un marteau qui impacte un obstacle rigide situé à une hauteur y_c .

3.3.3.a Terme source et paramètres physiques

Nous utilisons les paramètres listés dans le tableau 3.4 qui sont basés sur les modèles de marteau de [Timmermans, 2021] et [Chabassier, 2012].

Paramètres pour le manche						
L [m]	S [m ²]	ρ [kg/m ³]	E [Pa]	G [Pa]	I [m ⁴]	κ [-]
0.13	6.31868×10^{-5}	560	10.18×10^9	0.64×10^9	6.38999×10^{-9}	0.85

Paramètres pour la tête						Terme source				
m_H [g]	H [m]	d_0 [m]	y_c [m]	p [-]	K^H	A [-]	x_0 [m]	σ_x [m]	t_0 [ms]	σ_t [ms]
12.09	0.025	0.027659	0.0565	1.8	4×10^8	100	0.0165	0.005	3	2

TABLE 3.4 – Paramètres utilisés pour les simulations

Tous les phénomènes d'amortissement sont négligés. Pour le terme source f_w , une fonction \mathcal{C}^∞ en espace et en temps décrite en annexe B est appliquée sur la manche à l'emplacement habituel du rouleau. Les autres termes source f_φ et f_θ sont pour l'instant considérés nuls. Nous leur donnerons des valeurs dans le chapitre 4 grâce à des simulations multicorps de la mécanique.

3.3.3.b Solution du schéma

Les solutions suivantes sont calculées avec 50 éléments d'ordre 4 et un pas de temps $\Delta t = 10^{-6}$ s. Les constantes auxiliaires c et c_H sont choisies égales à 1, et l'angle initial du manche vaut $\theta_0 = -2^\circ$.

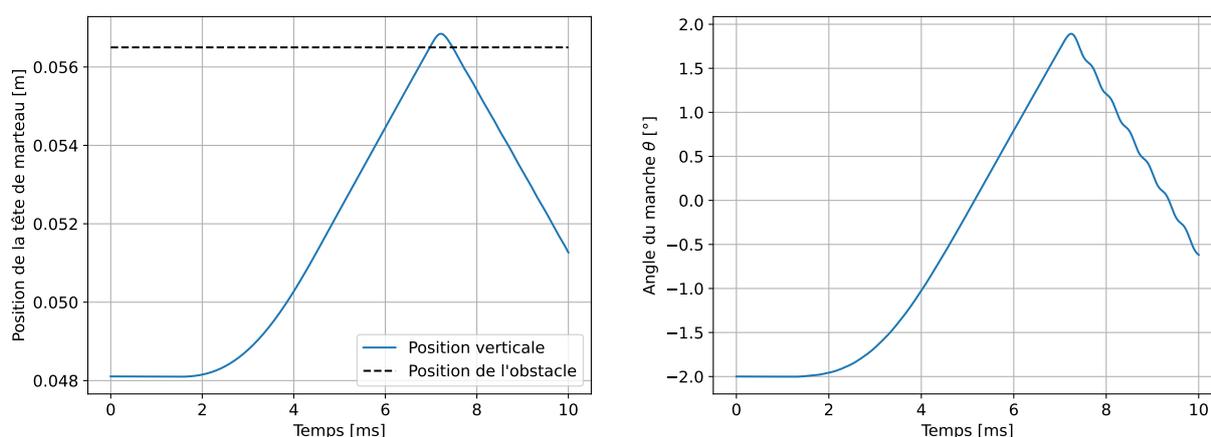


FIGURE 3.20 – Évolution de la position $\vec{\xi} \cdot \vec{u}_y$ de la tête (gauche) et de l'angle θ (droite).

La figure 3.20 montre le mouvement de la tête perpendiculairement à l'obstacle. Le marteau accélère vers le haut entre 0 et 7 ms, puis entre en contact avec l'obstacle entre 7 et 7.5 ms. Il rebrousse alors chemin vers le bas. L'écrasement du feutre est clairement visible durant la phase de contact.

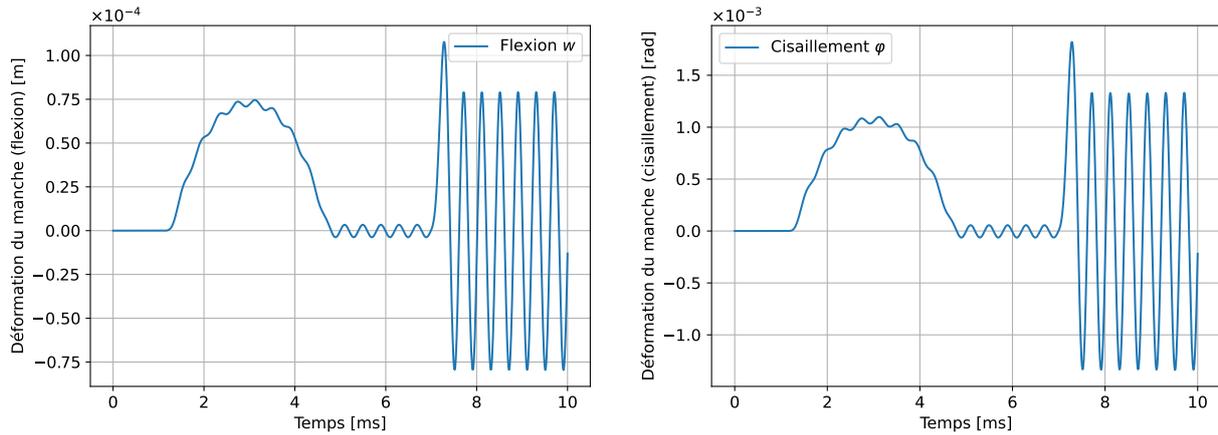


FIGURE 3.21 – Vibrations de l’extrémité ($x = L$) du manche, flexion (gauche) et cisaillement (droite).

La figure de droite qui représente l’évolution de l’angle θ montre des oscillations marquées après que le contact se soit produit.

Les déformations du manche sont visibles sur la figure 3.21. L’application de la source a lieu entre 1 et 5 ms, puis il vibre librement, soumis à aucune autre force que la gravité, entre 5 et 7 ms. Le contact avec l’obstacle se produit entre 7 et 7.5 ms après quoi l’amplitude des vibrations augmente largement.

3.3.3.c Conservation du bilan de puissance discret

Suivant le théorème 3.3.6, on définit le résidu d’énergie ε par

$$\varepsilon = \frac{\mathcal{E}_h^{n+1} - \mathcal{E}_h^n}{\mathcal{E}_{max}} - F_{h,Q}^{n+1/2} \cdot \frac{Q_h^{n+1} - Q_h^n}{\mathcal{E}_{max}} \quad (3.3.95)$$

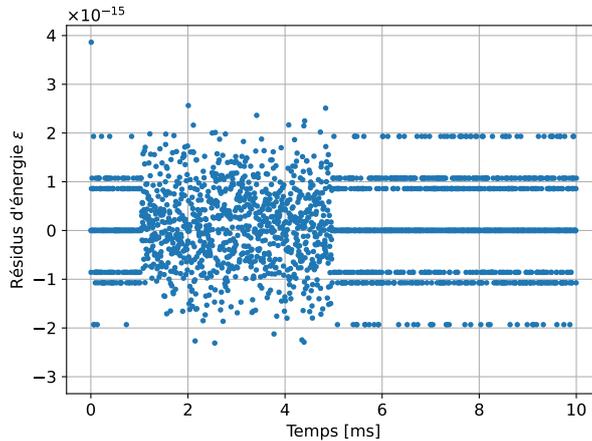


FIGURE 3.22 – Évolution du résidu d’énergie.

L’énergie est bien conservée au sens du théorème 3.3.6. Comme on le voit sur la figure 3.22, les résidus sont des multiples de l’erreur machine. La partie bruitée entre 1 et 5 ms correspond à l’application de la source.

3.3.3.d Coût de calcul et convergence espace-temps

Comme le schéma 3.3.2 vérifie le bilan de puissance 3.3.6, on s’attend à ce qu’il soit inconditionnellement stable. Afin d’étudier sa convergence espace-temps, on introduit un paramètre η qui peut

être interprété comme une ratio de discrétisation espace-temps :

$$\eta = \Delta t^2 \rho \left(M_h^{-1} K_h \right) \quad (3.3.96)$$

Les erreurs de convergence sont estimées consécutivement entre une solution calculée avec N_x éléments et une autre raffinée avec $2N_x$ éléments. Elles sont comparées sur une grille d'interpolation de 100 points régulièrement espacés.

L'erreur utilisée pour les variables scalaires est

$$\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad E_{\ell^\infty}(X, Y) = \frac{\|X - Y\|_\infty}{\|Y\|_\infty} = \frac{\max_{i \in [1, n]} |x^i - y^i|}{\max_{i \in [1, n]} |y^i|} \quad (3.3.97)$$

et celle pour les variables distribuées est

$$\forall (X_h^1, \dots, X_h^n, Y_h^1, \dots, Y_h^n) \in \mathcal{V}_h^{2n}, \quad E_{L^\infty([0, T], H^1)}(X, Y) = \frac{\max_{i \in [1, n]} \|X_h^i - Y_h^i\|_{H^1}}{\max_{i \in [1, n]} \|Y_h^i\|_{H^1}} \quad (3.3.98)$$

et où pour tout $X \in \mathcal{V}_h$,

$$\|X\|_{H^1}^2 = \|X\|_{L^2}^2 + \|\nabla X\|_{L^2}^2 \quad (3.3.99)$$

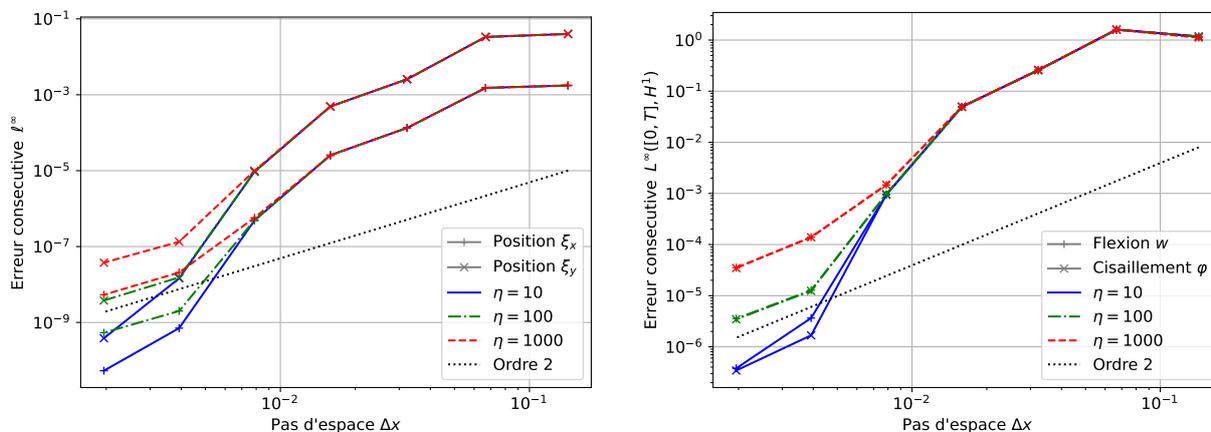


FIGURE 3.23 – Convergence espace-temps pour la tête (gauche) et pour le manche (droite).

La figure 3.23 montre des courbes de convergence espace-temps pour différentes valeurs du paramètre η . La convergence semble bien être d'ordre 2 après le régime pré-asymptotique. Malheureusement nous n'avons pas pu aller plus loin dans la précision en raison de très grands coûts de calcul.

La figure 3.24 trace l'évolution des erreurs en fonction du coût de calcul pour différentes valeurs de η . Les coûts sont indicatifs et sont relatifs à celui de la simulation la plus rapide. Durant toute la phase de convergence pré-asymptotique, on remarque que la discrétisation temporelle n'a que très peu d'influence sur la précision du schéma. Cela traduit que l'erreur de discrétisation en espace est dominante. Si on ne souhaite pas obtenir une précision trop grande sur la solution, il est donc judicieux d'utiliser des valeurs de η grandes pour réduire le temps de calcul. Pour arriver à une précision fine, il est par contre intéressant de réduire le facteur η pour accélérer la convergence en temps.

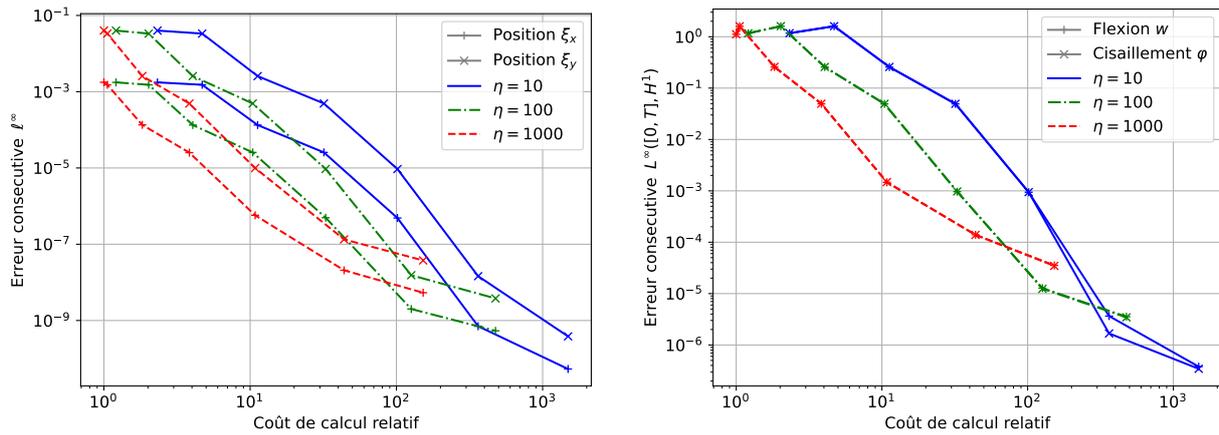


FIGURE 3.24 – Précision en fonction du coût de calcul pour la tête (gauche) et le manche (droite).

3.3.4 Conclusion

Dans cette section, nous avons présenté une méthode de quadratisation applicable à toutes les non-linéarités d'énergie, qu'elles soient d'origine potentiel ou cinétique. Un schéma de discrétisation temporelle linéairement implicite a été proposé. Il est formulé dans un espace des phases contraint et préserve un bilan de puissance discret.

Ces techniques générales ont ensuite été appliquées à un marteau de piano flexible en rotation, qui présente des termes d'énergie non-linéaires cinétiques et potentiels. Pour cette application, le schéma permet d'obtenir un bilan de puissance discret sans conditions sur les paramètres de discrétisation, et converge à l'ordre 2 en espace-temps.

Dans le cas du marteau de piano, seule l'inconnue θ présente sa dérivée seconde $\ddot{\theta}$ dans la fonction non-linéaire, et l'inconnue distribuée \ddot{q} n'y apparaît pas. Le schéma proposé 3.3.1 mériterait d'être testé sur un système qui présente une non-linéarité avec un terme \ddot{q} cherché dans l'espace L^2 , typiquement avec des éléments finis discontinus, afin de vérifier sa convergence correcte.

L'analyse mathématique complète de la stabilité et de la convergence est un problème ouvert qui constitue une perspective de ce travail, soutenue par des illustrations numériques convaincantes.

3.4 Conclusion du chapitre 3 et pistes d'améliorations

Dans ce chapitre consacré au marteau, nous avons présenté dans un premier temps les modèles d'interaction avec les cordes existants dans la littérature. Tous ces modèles phénoménologiques qui permettent de calculer la force exercée par le feutre lors de son écrasement sont non-linéaires. Nous avons donc appliqué une technique de quadratisation afin d'obtenir un schéma de meilleure efficacité, tant au niveau de la précision que du coût de calcul.

Dans le but d'étudier l'influence du toucher pianistique, nous avons ensuite ajouté un terme de frottement tangentiel dans la direction longitudinale de la corde en utilisant un modèle de Coulomb régularisé. Cette modélisation conduit à l'ajout d'un terme non-linéaire dissipatif pour lequel il n'est pas possible à notre connaissance d'écrire de schéma linéairement implicite. Le schéma que nous proposons doit donc être résolu par une méthode itérative de Newton.

Les modèles réduits que nous avons utilisés permettent de rendre compte des phénomènes d'interaction entre le marteau et la corde sans devoir modéliser la déformation interne des fibres du feutre en 3D, ce qui serait bien trop coûteux numériquement. Ils ont toutefois un défaut puisqu'ils autorisent la négativité des forces d'interaction en phase de décompression du feutre. Cela a rendu la prise en compte du terme de frottement de Coulomb délicate pour conserver la passivité du modèle. Pour pallier ce défaut, nous avons proposé un modèle de frottement approché, et pour un certain cas d'application, nous avons déterminé une condition à respecter pour que le modèle de Coulomb non simplifié demeure passif.

Nous nous sommes ensuite intéressés au manche flexible du marteau dont le modèle fait apparaître un terme d'énergie cinétique non-linéaire. Nous avons proposé une méthode générale qui permet la quadratisation de telles énergies à partir d'une formulation faible des équations d'Euler-Lagrange dans un espace de phases formulé comme une contrainte. À partir de cette écriture, nous avons proposé un schéma en temps linéairement implicite. L'application au manche du marteau montre une convergence à l'ordre 2 et une préservation inconditionnelle du bilan d'énergie, et l'utilisation de la formule de Woodbury permet une résolution efficace du schéma.

En raison de la forme particulière de l'énergie, il n'existe pas de technique de preuve de stabilité et de convergence qui puisse s'appliquer au schéma obtenu. Le développement de ces preuves est laissé pour un travail futur.

Nous pensons enfin qu'il serait très intéressant de proposer une méthode, similaire à la quadratisation d'énergie, qui permette d'écrire des schémas linéairement implicites qui préservent des bilans de puissance discrets pour des non-linéarités dissipatives. Nous disposerions alors notamment d'un algorithme linéairement implicite pour l'intégralité du piano, puisque nous pourrions supprimer la résolution itérative due au terme de frottement entre le marteau et la corde.

CHAPITRE 4

Influence du toucher sur le son des pianos

Pour obtenir un contrôle fin sur le son produit, les pianistes utilisent activement l'information tactile qu'ils perçoivent au contact de la touche. La mécanique de frappe des pianos est un système très évolué, composé de multiples composants, qui permet de convertir l'action des doigts sur le clavier en un mouvement des marteaux qui frappent les cordes et produisent le son. Les interactions de tous ces éléments créent une sensation tactile très spécifique à laquelle les pianistes sont très attachés, puisqu'elle et elle seule permet de contrôler le son de l'instrument lorsque la touche est enfoncée. Les mécaniques de frappe ont grandement évolué depuis les premiers pianoforte du 18^{ème} siècle. Toutes ont cependant toujours eu en commun le même objectif qui est de propulser le marteau vers la corde avec une quantité de mouvement suffisante pour produire un son, et d'assurer en même temps que le marteau ne reste pas en contact avec la corde, ce qui, comme dans un clavicorde, en étoufferait les vibrations.

C'est précisément l'invention d'un tel mécanisme d'échappement par Cristofori, représenté sur la figure 4.1, qui permet l'invention du pianoforte, instrument qui tire le meilleur parti du clavicorde et du clavecin. Il permet, contrairement au clavecin, de nuancer le son en fonction de l'action sur les touches, et permet de produire des nuances (*piano*, *forte*, etc) et des intensités sonores bien plus grandes que celles possible sur un clavicorde par un astucieux système de leviers.

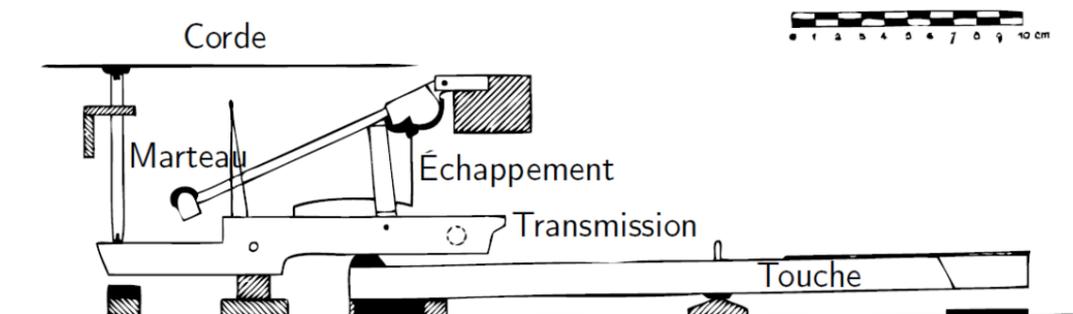


FIGURE 4.1 – Mécanique de Cristofori. Extrait de [Closson, 1944].

Le pianoforte subit par la suite de très nombreuses évolutions. Les matériaux deviennent plus résistants, les tensions et longueurs des cordes sont accrues pour augmenter l'intensité sonore. Par ailleurs, les musiciens demandent toujours plus de virtuosité. Tout ceci contraint la mécanique à

évoluer par l'ajout de diverses butées, ressorts et autres pièces mobiles. On peut citer notamment les mécaniques de Zumpe (1766), Taskin (1787) et Stein (1786). La mécanique dite à double échappement d'Érard, visible sur la figure 4.2, est très semblable aux mécaniques modernes et voit le jour en 1822.

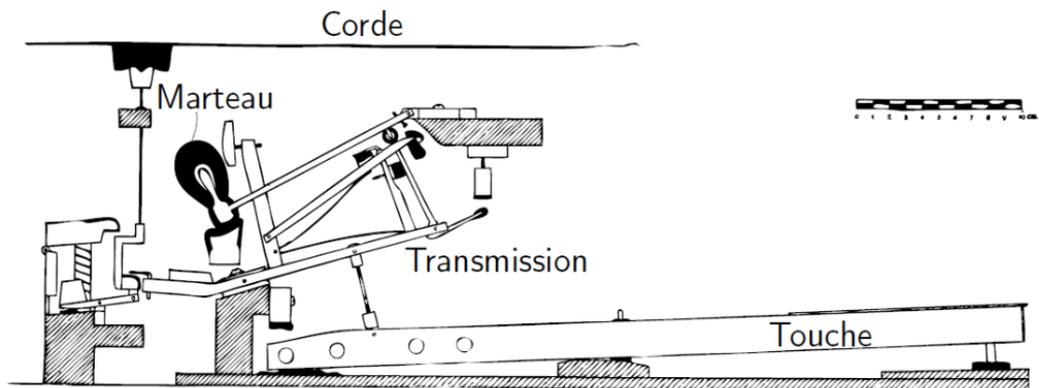


FIGURE 4.2 – Mécanique d'Érard. Extrait de [Closson, 1944].

Tout ce processus d'évolution de la mécanique s'est opéré en étroite collaboration avec les instrumentistes pour tenir compte de leurs demandes en termes de son et de toucher. Encore aujourd'hui, les pianistes sont très exigeants concernant le toucher, qui constitue la base de leur jeu, et sont plutôt réfractaires à l'utilisation des pianos numériques.

De nombreuses recherches sont menées pour reproduire artificiellement la sensation du toucher, par exemple [Oboe, 2006], [Lozada, 2007] et [Timmermans, 2021]. En effet, les pianos numériques actuels ne reproduisent que de façon très approximative l'inertie de la touche, sans jamais prendre en compte celle des autres composants de la mécanique, et ils manquent par conséquent de subtilité et de réalisme dans le contrôle de l'échappement.

Le travail de [Timmermans, 2021] constitue en ce sens le développement le plus récent d'un modèle de mécanique de frappe qui permet, à partir du contrôle de la touche, de simuler le comportement des différents composants ainsi que leurs interactions respectives.

La question de l'influence du toucher sur le son, de façon indépendante de la nuance, demeure aussi très débattue, non seulement par les musiciens, mais également par la communauté scientifique. Le piano est l'un des rares instruments de musique pour lequel le musicien n'est pas en contact direct avec la partie vibrante de son instrument. La source acoustique, la corde, est mise en vibration via la mécanique sur laquelle l'instrumentiste n'a qu'un seul degré de liberté d'action : faire tourner la touche autour de son axe pivot. La vitesse d'enfoncement et le séquençage des actions sont donc clefs pour la production du son. Mais alors on peut légitimement se demander si l'action des pianistes réside uniquement dans le contrôle de la nuance comme l'affirment [White, 1930] et [Hart et al., 1934], c'est-à-dire la vitesse perpendiculaire du marteau au moment de son action sur la corde, ou si un contrôle supplémentaire lié au toucher, indépendant de la nuance, est possible.

[Goebel et al., 2004] et [Goebel et al., 2014] montrent expérimentalement que les bruits mécaniques mis en évidence par [Askenfelt, 1993], le doigt au contact de la touche ou encore la butée de la touche, permettent de discerner les différents touchers appuyés et frappés. Cependant, ils montrent que si ces bruits sont artificiellement supprimés, les sons ne sont plus significativement distingués par les auditeurs, qu'ils soient musiciens ou non. Ceci ne démontre pas que le toucher n'a pas d'influence sur le son harmonique, mais simplement que si une influence existe, elle n'est pas perceptible sur les pianos modernes. [Traube, 2017] montre d'ailleurs une influence du toucher sur le son par des techniques fines d'analyse du signal, mais ne tranche pas sur son caractère perceptible ou non. Dans ce travail, nous nous demandons si le toucher peut avoir une influence purement harmonique sur le son du piano. En d'autres termes, est-il possible de modifier le son produit par un piano sans changer

la nuance, pour une note isolée d’une durée fixée, sans utiliser les pédales et indépendamment des bruits mécaniques ?

La mise en relation du travail de modélisation mécanique de [Bokiau *et al.*, 2017] et [Timmermans, 2021] avec les travaux de [Chabassier, 2012], augmentés par les trois premiers chapitres de ce manuscrit, constitue un modèle de piano complet, de la touche jusqu’au son. Alimenté par des mouvements de touche enregistrés en situation de jeu, ce modèle global permet d’étudier l’influence du toucher sur le son. Par cette approche de modélisation, nous pouvons quantifier et pas seulement affirmer ou infirmer les répercussions sonores du toucher. Nous pouvons également explorer différentes configurations et constitutions du piano non mises en œuvre dans la réalité, caricaturales, et analyser leurs répercussions.

Dans un premier temps, nous présenterons donc une méthode qui permet de faire communiquer le modèle multicorps de mécanique de frappe de [Bokiau *et al.*, 2017] et [Timmermans, 2021] avec notre modèle vibro-acoustique qui prend en compte finement la transmission des ondes longitudinales dans le piano.

Ce modèle de piano complet nous permettra ensuite d’analyser l’influence de la flexibilité du manche du marteau et son frottement sur la corde au niveau du son produit, ce avec des touchers réels en entrée du modèle multicorps.

Pour finir, différents touchers pianistiques sont étudiés pour différents paramètres de modélisation.

Sommaire

4.1	De la touche jusqu’au son : vers un modèle de piano complet	167
4.1.1	Modèles multicorps de mécaniques de piano	168
4.1.1.a	Formalisme de modélisation multicorps	168
4.1.1.b	Mécanique de piano à queue moderne Renner	168
4.1.2	Modèle multicorps-vibro-acoustique du piano	169
4.1.3	Simulations numériques	173
4.1.4	Correspondance des paramètres de modélisation	174
4.2	Flexibilité, frottements, et influence du toucher pianistique	177
4.2.1	Comportement non-linéaire de la mécanique	178
4.2.2	L’art d’appuyer sur les touches	179
4.2.3	Influence du frottement entre le marteau et la corde	180
4.2.4	Influence de la flexibilité du manche	186
4.2.5	Influence du toucher pianistique	194
4.3	Conclusion du chapitre 4 et perspectives	199

4.1 De la touche jusqu’au son : vers un modèle de piano complet

4.1.1 Modèles multicorps de mécaniques de piano

4.1.1.a Formalisme de modélisation multicorps

La dynamique multicorps (*MultiBody System* MBS), est une discipline qui vise à prédire le mouvement des systèmes mécaniques composés de plusieurs corps reliés entre eux par des articulations, et soumis à des efforts extérieurs [Samin et Fisette, 2003]. Dans cette approche, chaque corps est défini par sa masse, par la position de son centre de masse dans son repère propre, et par sa matrice centrale d’inertie. Les équations du mouvement sont obtenues par une méthode de Newton/Euler récursive décrite dans [Fisette *et al.*, 1996], et sont générées symboliquement et automatiquement par le logiciel Robotran [Docquier *et al.*, 2013]. En l’absence de boucles cinématiques contraignant le mouvement de certains corps, ce qui est le cas pour la mécanique de piano, elles se mettent sous la forme

$$M(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q}, F_{ext}, T_{ext}) = Q(q, \dot{q}) \quad (4.1.1)$$

où q sont les coordonnées généralisées du système, M est la matrice de masse, c un terme non-linéaire qui contient les effets gyroscopiques, centripètes, de Coriolis et de gravité, ainsi que les forces F_{ext} et couples T_{ext} extérieurs. Le vecteur Q représente quant à lui les efforts internes agissant suivant les mouvements permis au sein des liaisons entre les corps.

Ces équations différentielles ordinaires non-linéaires peuvent alors être résolues par des techniques d’intégration numérique classiques (Euler, Runge-Kutta, etc).

4.1.1.b Mécanique de piano à queue moderne Renner

Le travail de [Bokiau *et al.*, 2017] et [Timmermans, 2021] à consisté en la modélisation multicorps d’une mécanique de piano à queue moderne de marque Renner. Tous les éléments de la mécanique et leurs interactions respectives (frottement, écrasement, échappement etc) sont modélisés depuis la touche jusqu’à la frappe du marteau. Ces différents corps sont représentés en couleur sur la figure 4.3.

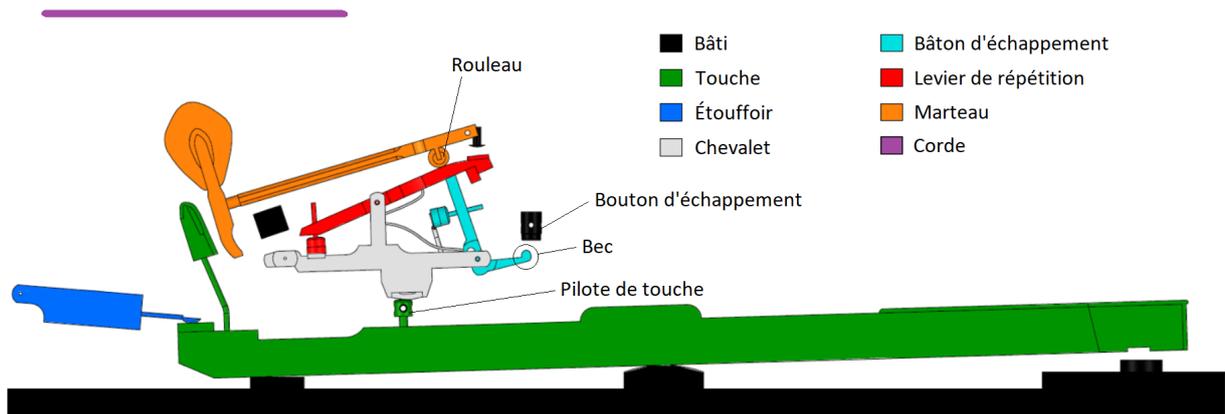


FIGURE 4.3 – Mécanique de frappe à double échappement de piano à queue. Adapté de [Timmermans, 2021].

Lorsqu’on enfonce la touche, celle-ci soulève le chevalet qui lui même soulève à la fois le bâton d’échappement et le levier de répétition. Principalement, le bâton agit sur le rouleau du marteau et propulse ce dernier contre la corde. Peu avant le contact avec la corde, le bec du bâton d’échappement bute contre le bouton d’échappement et, par rotation, provoque son dégagement du rouleau. Outre la force de sa liaison pivot, le marteau, en vol, n’est alors soumis à aucune force excepté son poids durant la phase de contact avec la corde, ce qui permet une frappe sans étouffement.

Des descriptions plus détaillées de composants de la mécanique et du principe de fonctionnement de la mécanique à double échappement peuvent être trouvées dans [Bokiau *et al.*, 2017] et [Timmermans, 2021].

La génération symbolique des équations puis leur intégration par le logiciel Robotran permet la compréhension fine de cette mécanique complexe. Elle permet également d'alimenter un dispositif haptique qui vise à reproduire en temps réel la sensation du toucher d'un piano acoustique sur la touche d'un piano numérique [Timmermans, 2021]. Sur cette maquette, un jeu de capteurs mesure l'enfoncement de la touche, ce qui permet à Robotran de simuler le comportement de la mécanique et de calculer en temps réel les efforts appliqués en retour par la mécanique sur le pilote de la touche (contact gris/vert sur la figure 4.3). Ils sont alors réinjectés sur le dispositif haptique par un actionneur pour rendre compte de la sensation de toucher.

4.1.2 Modèle multicorps-vibro-acoustique du piano

Dans cette partie, nous présentons une méthode qui permet de réaliser des simulations complètes de piano, depuis la touche jusqu'au son. Le modèle multicorps de mécanique de frappe est utilisé pour calculer la contribution mécanique, puis les résultats sont injectés manuellement dans le modèle vibro-acoustique pour calculer le son produit. A défaut de réaliser un couplage où les deux modèles interagissent de façon simultanée, ce qui représente un problème très complexe, les deux modèles sont amenés à communiquer séquentiellement.

Dans le cadre de notre étude du toucher, la modélisation multicorps permet de rendre compte de façon précise de la relation entre les efforts appliqués sur la touche et ceux retransmis au marteau par l'intermédiaire du rouleau. Ces forces et couples peuvent alors être utilisés pour alimenter le modèle de manche flexible présenté au paragraphe 3.3. Le rouleau du manche du marteau reçoit deux forces de la part de la mécanique :

- la force du bâton d'échappement \vec{F}_{be} ,
- la force du levier de répétition \vec{F}_{lr} .

La combinaison de ces deux forces donne une résultante $\vec{F}_{meca} = \vec{F}_{be} + \vec{F}_{lr}$ dont la direction et le point d'application sur la surface du rouleau sont variables au cours du temps. Elle peut malgré tout être décomposée en une composante normale F_N et une composante tangentielle F_T au manche comme représenté sur la figure 4.4.

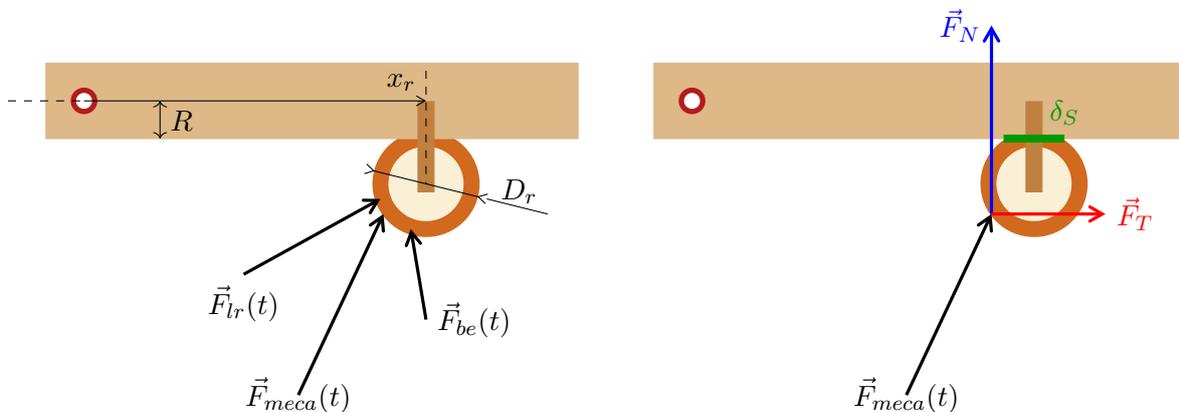


FIGURE 4.4 – Application des forces de la mécanique sur le rouleau du marteau.

Pour injecter ces forces comme données d'entrée du modèle de manche flexible 3.3.1, on détermine leur travail virtuel sur la surface de répartition δ_S entre le rouleau et le manche. Comme la fonction utilisée pour répartir le contact du marteau sur la corde (voir le paragraphe 3.1.2), cette fonction est de la forme :

$$\delta_S(x) = \frac{1}{\delta_r} \left(\frac{1}{1 + e^{-s_r(x+\delta_r/2)}} - \frac{1}{1 + e^{-s_r(x-\delta_r/2)}} \right) \quad (4.1.2)$$

où δ_r désigne la largeur de la zone de contact et s_r la pente de décroissance des efforts aux bords.

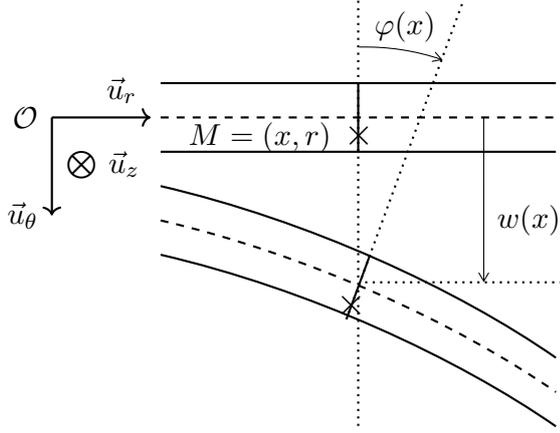


FIGURE 4.5 – Déformation locale du manche de marteau.

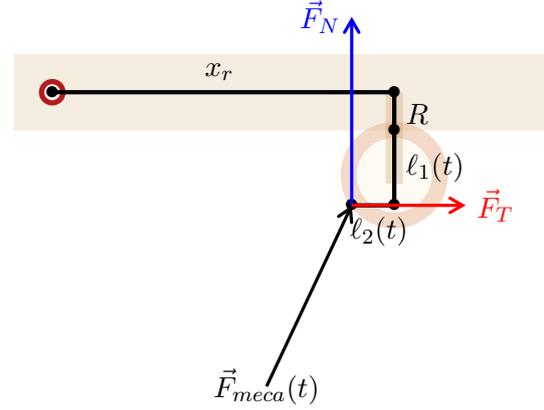


FIGURE 4.6 – Représentation simplifiée de la configuration du rouleau.

Le déplacement d'un point $M = (x, r)$ du manche est donné par

$$\overrightarrow{OM} = (x - r \sin \varphi) \vec{u}_r + (w + r \cos \varphi) \vec{u}_\theta \quad (4.1.3)$$

Les hypothèses de modélisation de Timoshenko assurent que l'angle de cisaillement φ reste très faible, et donc par continuité avec le travail de [Chabassier et Duruflé, 2014] nous supposons que $\cos \varphi \approx 1$ et $\sin \varphi \approx 0$. Le déplacement virtuel est obtenu par différentiation :

$$\delta \overrightarrow{OM} = \left[-r \delta \varphi \cos \varphi + (w + r \cos \varphi) \delta \theta \right] \vec{u}_r \quad (4.1.4)$$

$$+ \left[-(x - r \sin \varphi) \delta \theta + (\delta w - r \delta \varphi \sin \varphi) \right] \vec{u}_\theta \quad (4.1.5)$$

$$\approx \left[(w + r) \delta \theta - r \delta \varphi \right] \vec{u}_r + \left[\delta w - x \delta \theta \right] \vec{u}_\theta \quad (4.1.6)$$

La force volumique \vec{F}_{mecca} qui s'applique sur le manche s'écrit

$$\vec{F}_{mecca}(t, x, r) = -F_N(t) \delta_S(x - x_r) 1_{(r=R+l_1)} \vec{u}_\theta + F_T(t) \delta_S(x - x_r) 1_{(r=R+l_1)} \vec{u}_r \quad (4.1.7)$$

Son travail virtuel est donc

$$\mathcal{W}_{meca} = \int_x \int_r \vec{F}_{meca}(t, x, r) \cdot \delta \vec{OM} \quad (4.1.8)$$

$$= -F_N \int_0^L \delta_S(x - x_r) [\delta w - (x - \ell_2) \delta \theta] \quad (4.1.9)$$

$$+ F_T \int_0^L \delta_S(x - x_r) [(w + R + \ell_1) \delta \theta - (R + \ell_1) \delta \varphi] \quad (4.1.10)$$

$$= -F_N \int_0^L \delta_S(x - x_r) \delta w \quad (4.1.11)$$

$$- (R + \ell_1) F_T \int_0^L \delta_S(x - x_r) \delta \varphi \quad (4.1.12)$$

$$+ F_N \int_0^L x \delta_S(x - x_r) \delta \theta + F_T \int_0^L (w + R) \delta_S(x - x_r) \delta \theta \quad (4.1.13)$$

$$+ [\ell_1 F_T - \ell_2 F_N] \delta \theta \quad (4.1.13)$$

On voit apparaître différents termes qui agissent comme des sources sur les inconnues. La ligne (4.1.10) est une source en flexion, (4.1.11) une source en cisaillement, et (4.1.12) et (4.1.13) sont des sources en rotation d'angle θ .

La dépendance de ces sources en ℓ_1 et ℓ_2 est gênante, car ces longueurs qui décrivent le point d'application sur le rouleau sont variables au cours du temps et difficilement mesurables. Grâce au modèle multicorps, nous proposons donc de calculer les efforts directement au niveau de l'interface entre le rouleau et le manche, qui est un point de position invariante. Cela nous permet d'y calculer la force normale F_N , la force tangentielle F_T et un couple pur C indépendant du point d'application sur le rouleau de la force \vec{F}_{meca} . Ce couple pur qui résulte du déplacement du point d'application de la force \vec{F}_{meca} vaut $\ell_1 F_T - \ell_2 F_N$ suivant la direction \vec{u}_z .

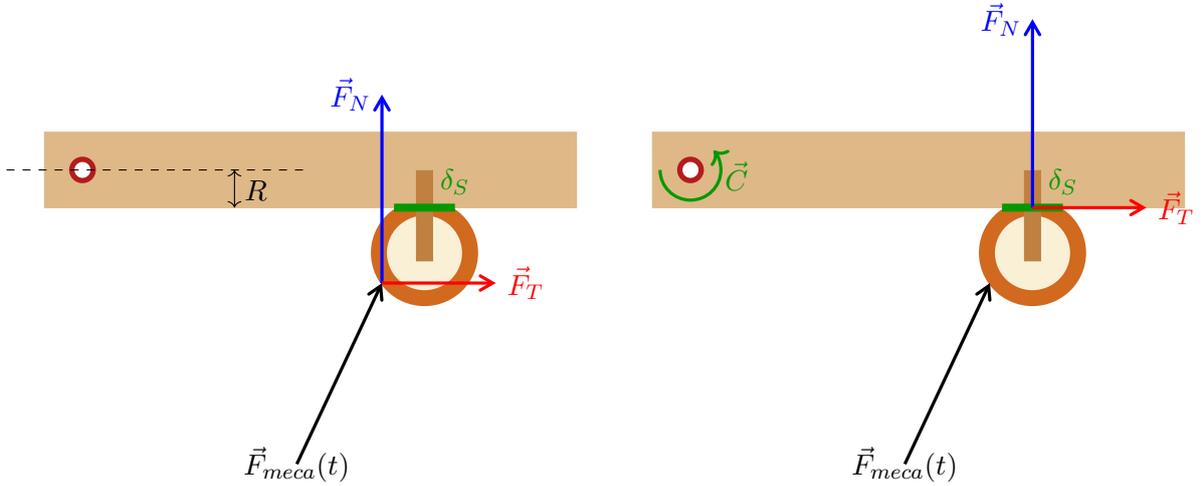


FIGURE 4.7 – Application des forces de la mécanique sur le rouleau.

Dans cette configuration, le couple $(R + \ell_1) F_T$ qui provient lui aussi du déplacement du point d'application de la force, pose toujours problème, car il dépend toujours de ℓ_1 et ne peut pas être éliminé via le modèle multicorps dans lequel le manche de marteau est supposé rigide. Toutefois, le point d'application de la résultante \vec{F}_{meca} varie peu durant le mouvement du marteau avant l'échappement. Pendant et après l'échappement, il varie plus significativement mais les forces décroissent très rapidement. Pour ces raisons, nous supposons dans la suite que, pour ce terme source de cisaillement en particulier, la valeur de ℓ_1 est constante et égale au diamètre du rouleau D_r .

Le modèle de manche flexible de [Chabassier et Duruflé, 2014] déjà présenté par le modèle 3.3.1 se réécrit alors avec ces termes source.

Modèle 4.1.1 (Marteau avec manche flexible et termes source multicorps)

On cherche $(w, \varphi, \theta, \lambda, \vec{F}_{coupl}, \vec{\xi}) \in V_0 \times V \times \mathbb{R}^6$ tel que pour tout $(w^*, \varphi^*) \in V_0 \times V$ on ait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Équations du manche :} \\ \int_0^L \rho S \ddot{w} w^* + \int_0^L SG \kappa (\partial_x w - \varphi) \partial_x w^* + \lambda \int_0^L w^* \\ \quad - \int_0^L \rho S (w \dot{\theta}^2 + \ddot{\theta} x + g \cos \theta) w^* \\ \quad = (\vec{F}_{coupl} \cdot \vec{u}_\theta) w^*(L) - F_N \int_0^L \delta_S(x - x_r) w^*(x) dx \end{array} \right. \quad (4.1.14a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^L \rho I \ddot{\varphi} \varphi^* + \int_0^L SG \kappa (\partial_x w - \varphi) \varphi^* + \int_0^L EI \partial_x \varphi \partial_x \varphi^* - \rho I \ddot{\theta} \int_0^L \varphi^* \\ \quad = (R + D_r) F_T \int_0^L \delta_S(x - x_r) \varphi^*(x) dx \end{array} \right. \quad (4.1.14b)$$

Moyenne nulle en flexion / Équation sur λ :

$$\left\{ \int_0^L w = 0 \right. \quad (4.1.14c)$$

Équation sur θ :

$$\begin{aligned} & \ddot{\theta} \int_0^L \rho S (w^2 + x^2) + 2\dot{\theta} \int_0^L \rho S w \dot{w} + \int_0^L \rho I (\ddot{\theta} - \ddot{\varphi}) - \int_0^L \rho S x \ddot{w} \\ & + \int_0^L \rho S g (x \cos \theta + w \sin \theta) = (w(L) - H) (\vec{F}_{coupl} \cdot \vec{u}_r) - L (\vec{F}_{coupl} \cdot \vec{u}_\theta) \\ & \quad + F_N \int_0^L x \delta_S(x - x_r) dx + F_T \int_0^L (w(x) + R) \delta_S(x - x_r) dx + C \end{aligned} \quad (4.1.14d)$$

Équation de la tête (loi de Newton) :

$$m_H \partial_t^2 \vec{\xi} = -m_H g \vec{u}_y - \vec{F}_{coupl} - \vec{F}_{cordes} \quad (4.1.14e)$$

Continuité manche-tête :

$$\left\{ \vec{\xi} = L \vec{u}_r + (w(L) - H) \vec{u}_\theta \right. \quad (4.1.14f)$$

Les conditions initiales à $t = 0$ sont données par

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in [0, L], \quad w(x, 0) = 0 \\ \forall x \in [0, L], \quad \varphi(x, 0) = 0 \\ \theta(0) = \theta_0 \\ \vec{\xi}(0) = L \begin{pmatrix} \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \end{pmatrix} - H \begin{pmatrix} \sin \theta_0 \\ -\cos \theta_0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (4.1.15)$$

4.1.3 Simulations numériques

Ce paragraphe décrit les méthodes d'intégration numérique et les paramètres utilisés pour toutes les simulations de ce chapitre.

Le schéma qui permet l'intégration numérique du modèle de manche flexible 4.1.1 est le schéma de gradient discret développé dans [Chabassier et Duruffé, 2014]. La méthode du Lagrangien que nous avons présentée au chapitre 3 est plus efficace, mais nous avons malheureusement manqué de temps pour la greffer au code de piano complet en assurant la bonne prise en compte de tous les couplages.

La discrétisation des termes F_N , F_T et C provenant de la mécanique est faite de la même façon que la répartition discrète du contact du marteau sur la corde présentée au paragraphe 3.2. Seul le terme en $(w(x) + R)F_T$ nécessite une discrétisation de l'inconnue w . Elle est réalisée de façon explicite.

Le manche est discrétisé en espace par 40 éléments finis d'ordre 4.

La force F_{cordes} provient quant à elle du couplage avec les cordes et est prise en compte par les méthodes présentées au chapitre 3.

Les cordes sont discrétisées par la méthode 2-SAV présentée au chapitre 1, avec $\theta = 1/4$, une stabilisation α^* , une constante auxiliaire $c = 10^4$ et avec des éléments finis d'ordre 4. Le nombre d'éléments est choisi afin d'assurer la présence de 10 degrés de liberté par longueur d'onde jusqu'à 10 kHz, ce qui permet d'assurer une bonne convergence en espace. Pour la corde grave et longue Ré₁[#], ce nombre est $N_x = 250$. $N_x = 70$ pour la corde medium Fa₃ et $N_x = 25$ pour la corde aiguë Do₅[#].

La méthode modale décrite au chapitre 2 qui permet la résolution de la table d'harmonie est utilisée avec $N_m = 2500$ modes, ce qui permet de traiter les fréquences allant jusqu'à 10 kHz.

Le pas de temps des simulations est toujours $\Delta t = 10^{-6}$ s.

4.1.4 Correspondance des paramètres de modélisation

Le marteau est une pièce commune prise en compte dans les deux modèles, multicorps et vibro-acoustique. Le formalisme de modélisation y est cependant assez différent. Le modèle multicorps considère le marteau comme un corps non déformable dont les paramètres sont la masse, la position du centre de masse et la matrice d'inertie. Le modèle vibro-acoustique considère quant à lui le manche de marteau comme une poutre (déformable) de Timoshenko.

Afin de dégager des correspondances entre les deux modèles, supposons dans un premier temps que le manche est rigide dans le modèle vibro-acoustique.

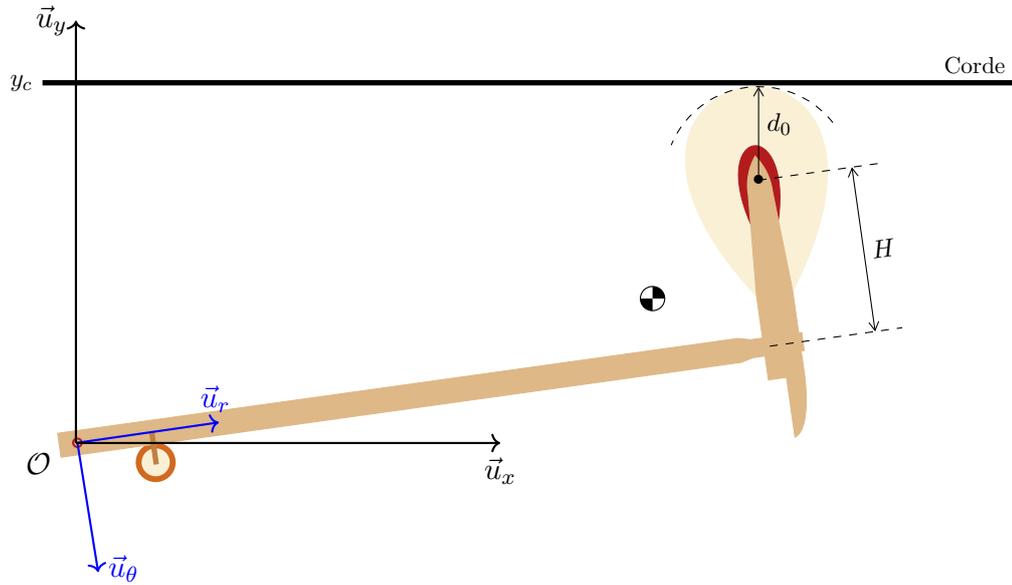


FIGURE 4.8 – Distance de contact marteau-corde.

On note $h_1\vec{u}_r - h_2\vec{u}_\theta$ le vecteur qui caractérise la position du centre de masse \odot de l'ensemble constitué du manche et de la tête. Le moment d'inertie J est défini par rapport à ce centre de masse.

m_{tot} [g]	L [mm]	$H + d_0$ [mm]	h_1 [mm]	h_2 [mm]	J [kg.mm ²]
16,69	130	52,6	109,8	19,6	31,86

TABLE 4.1 – Paramètres utilisés dans le modèle multicorps de [Timmermans, 2021].

ρ [kg/m ³]	L [mm]	S [m ²]	I [m ⁴]	H [mm]	d_0 [mm]	m_H [g]
580	130	$3,22 \times 10^{-5}$	$8,24 \times 10^{-11}$	42,2	10,4	12,09

TABLE 4.2 – Paramètres utilisés dans le modèle vibro-acoustique.

y_c [mm]	θ_0 [°]	R [mm]	x_r [mm]	D_r [mm]	s_r [-]	δ_r [mm]
56,5	-19,7	3,2	16,5	9,4	2000	5

TABLE 4.3 – Autres paramètres.

Une pesée du manche du marteau avec son rouleau a donné une masse $m_S + m_r = 4,60g$ et la masse du manche seul est $m_S = \rho SL = 2,43g$. La masse du rouleau est donc $m_r = 2,17g$, et celle de la tête vaut $m_H = m_{tot} - m_S - m_r = 12,09g$.

L'énergie cinétique du marteau, constitué de sa tête et de son manche (supposé indéformable), pour le modèle vibro-acoustique est, d'après le théorème 3.3.5 :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}\rho S \frac{L^3}{3} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\rho IL \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_H \left\| \partial_t \vec{\xi} \right\|_2^2 \quad (4.1.16)$$

$$= \frac{1}{2}\rho S \frac{L^3}{3} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\rho IL \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_H (L^2 + H^2) \dot{\theta}^2 \quad (4.1.17)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\rho IL + \rho S \frac{L^3}{3} + m_H (L^2 + H^2) \right] \dot{\theta}^2 \quad (4.1.18)$$

Son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation est donc par définition :

$$\mathcal{J}_{vibro} = \rho IL + \rho S \frac{L^3}{3} + m_H (L^2 + H^2) \quad (4.1.19)$$

où les deux premiers termes correspondent à l'inertie du manche, et le troisième terme est l'inertie de la tête.

Remarque 4.1.1

Si on suppose que le manche est purement cylindrique, alors $I = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{SR^2}{4}$ et on retrouve exactement la formule bien connue de l'inertie d'un cylindre de masse $m = \rho SL$ exprimée à l'une de ses extrémités par rapport à un axe orthogonal à son axe de révolution [Juvinal et Marshak, 2003] :

$$\mathcal{J} = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{12} \right) + m \left(\frac{L}{2} \right)^2 \quad (4.1.20)$$

Pour une poutre ($L \gg R$) le terme d'inertie $\rho IL = m \frac{R^2}{4}$ est négligeable.

Le rouleau est un cylindre plein, de masse m_r , dont l'axe de révolution est situé à une position $(x_r, R + D_r/2)$ dans le repère $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ défini par rapport à l'axe de rotation du manche. Son inertie peut donc être estimée par la formule

$$\mathcal{J}_r = \frac{1}{2}m_r \left(\frac{D_r}{2} \right)^2 + m_r \left(x_r^2 + \left(R + \frac{D_r}{2} \right)^2 \right) \quad (4.1.21)$$

Les applications numériques pour les différentes inerties donnent :

\mathcal{J}_r	ρIL	$\rho S \frac{L^3}{3}$	$m_H (L^2 + H^2)$
$1,96 \times 10^{-7}$	$6,21 \times 10^{-9}$	$1,37 \times 10^{-5}$	$\approx 10^{-4}$

Ces valeurs numériques justifient de négliger les termes \mathcal{J}_r et ρIL dans l'inertie du manche, qui est alors approximée par

$$\mathcal{J}_{vibro} = \rho S \frac{L^3}{3} + m_H (L^2 + H^2) \quad (4.1.22)$$

L'inertie du marteau dans le modèle multicorps, rapportée à l'axe de rotation à l'aide du théorème de Huygens, est

$$\mathcal{J}_{mbs} = J + m_{tot} (h_1^2 + h_2^2) \quad (4.1.23)$$

On peut donc écrire une équation $\mathcal{J}_{mbs} = \mathcal{J}_{vibro}$ qui traduit la correspondance des inerties dans les deux formalismes de modélisation :

$$J + m_{tot}(h_1^2 + h_2^2) = \rho S \frac{L^3}{3} + m_H(L^2 + H^2) \quad (4.1.24)$$

ou encore de façon équivalente

$$J + m_{tot}(h_1^2 + h_2^2) = m_S \frac{L^2}{3} + m_H(L^2 + H^2) \quad (4.1.25)$$

Dans cette dernière équation, tous les coefficients sont connus, à l'exception de la distance H qui peut alors être déterminée par le calcul.

La valeur $H = 42,2$ mm permet donc de faire correspondre exactement les inerties des deux modélisations, et on peut alors vérifier la correspondance des simulations au niveau du mouvement du marteau. Toutes les valeurs numériques sont résumées dans les tables 4.1, 4.2 et 4.3.

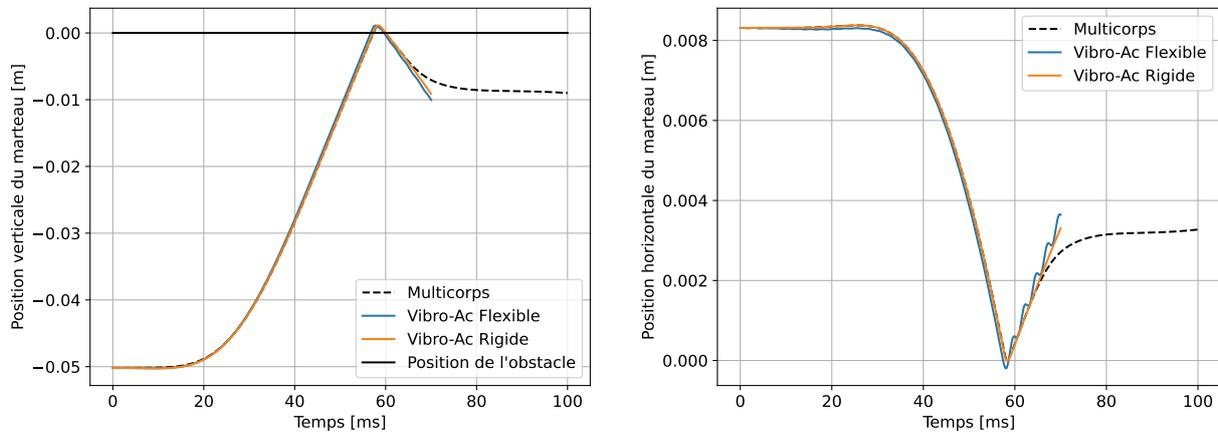


FIGURE 4.9 – Correspondance entre le modèle multicorps et le modèle vibro-acoustique pour la position du marteau. Mouvement vertical (gauche) et horizontal (droite).

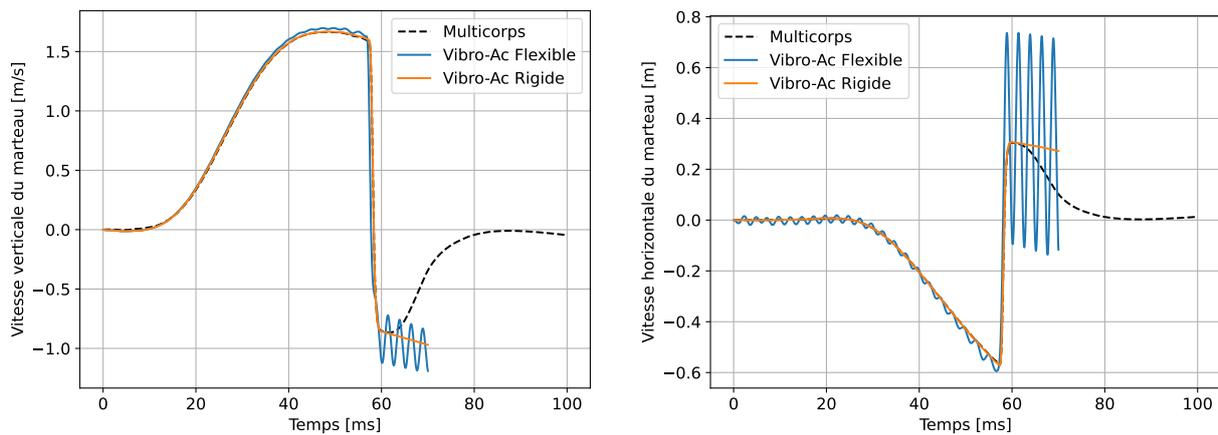


FIGURE 4.10 – Correspondance entre le modèle multicorps et le modèle vibro-acoustique pour la vitesse du marteau. Vitesse verticale (gauche) et horizontale (droite).

Les figures 4.9 et 4.10 montrent les positions et vitesses du centre de masse du marteau par une simulation multicorps et les simulations vibro-acoustiques correspondantes. La touche est mise en mouvement par une masse de 1 kg lâchée sans vitesse initiale à sa surface et à la position d'appui

du doigt. Les forces et couples F_N , F_T et C au niveau du rouleau sont extraites du calcul multicorps puis injectées comme données d'entrée du modèle vibro-acoustique.

On observe une bonne correspondance des mouvements de marteau issus des deux simulations, non exacte mais satisfaisante étant donnée la grande différence de nature des modèles. L'ajout de flexibilité dans le modèle vibro-acoustique ne dégrade que très peu la correspondance. On note une différence significative de comportement après la phase d'impact (après 60 ms) qui est due à la présence de l'attrape dans le modèle multicorps et non dans le modèle vibro-acoustique. Ces différences n'ont pas d'importance pour notre étude sur le son, puisque la frappe du marteau est déjà effectuée et qu'il n'est plus en contact avec la corde.

Nous allons donc maintenant utiliser séquentiellement ces modèles pour réaliser des simulations de piano, depuis la touche jusqu'au son. Le procédé sera toujours le même : les forces et couples F_N , F_T et C au niveau du rouleau sont calculées par le modèle multicorps puis injectées comme termes sources du modèle 4.1.1. Cela permet ensuite de simuler le mouvement de la table d'harmonie et donc le son produit par le piano.

4.2 Flexibilité, frottements, et influence du toucher pianistique

Cette partie combine et analyse les différentes contributions des chapitres précédents dans un modèle de piano complet, de la touche jusqu'au son produit par la table d'harmonie. Le rayonnement acoustique dans l'air n'est pas pris en compte car il représente un sur coût de calcul très important et n'influence pas la transmission des ondes longitudinales.

Nous allons tout d'abord nous intéresser au comportement non-linéaire de la mécanique en fonction du toucher, puis nous présenterons des touchers typiques utilisés par les pianistes en situation de jeu. Ensuite nous analyserons l'influence de la flexibilité du manche et du frottement du marteau sur la corde et sur le son, et pour finir, nous comparerons les sons produits par différents touchers pianistiques.

4.2.1 Comportement non-linéaire de la mécanique

Avant même de réaliser des simulations vibro-acoustiques, il est intéressant de remarquer le caractère fortement non-linéaire de la mécanique de frappe. Pour ce paragraphe, construisons deux touchers totalement fictifs par la définition de la force appliquée par le doigt sur la touche, et simulons le mouvement de la touche grâce au modèle multicorps. Ces deux touchers sont construits de telle sorte que les travaux \mathcal{W} fournis en phase d'appui sur la touche soient identiques :

$$\mathcal{W} = \int_0^T F(t)\dot{z}(t)dt \quad (4.2.1)$$

Autrement dit, il suffit de fournir la même quantité d'énergie pour apporter la touche jusqu'à son enfoncement maximal au temps T avec les deux profils de force affichés sur la figure 4.11, que nous appelons L pour l'appui lent, et R pour l'appui rapide.

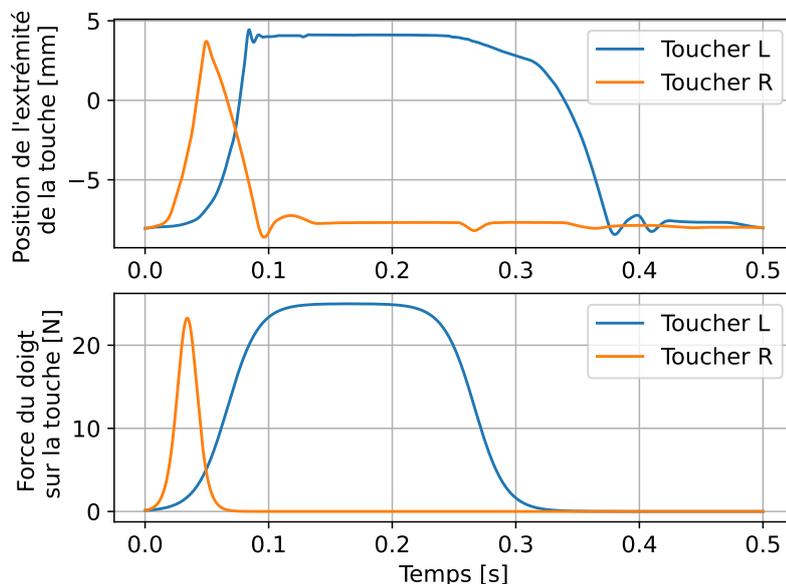


FIGURE 4.11 – Mouvement de touche (haut) et force appliquée (bas) pour deux touchers caricaturaux dont les travaux sont égaux.

La figure 4.12 droite montre une très nette différence entre les vitesses de marteau dans le direction perpendiculaire à la corde, alors que l'énergie dépensée pour créer le mouvement est la même. Cette différence de vitesse, de l'ordre de 0,5 m/s, implique une différence de nuance sonore très

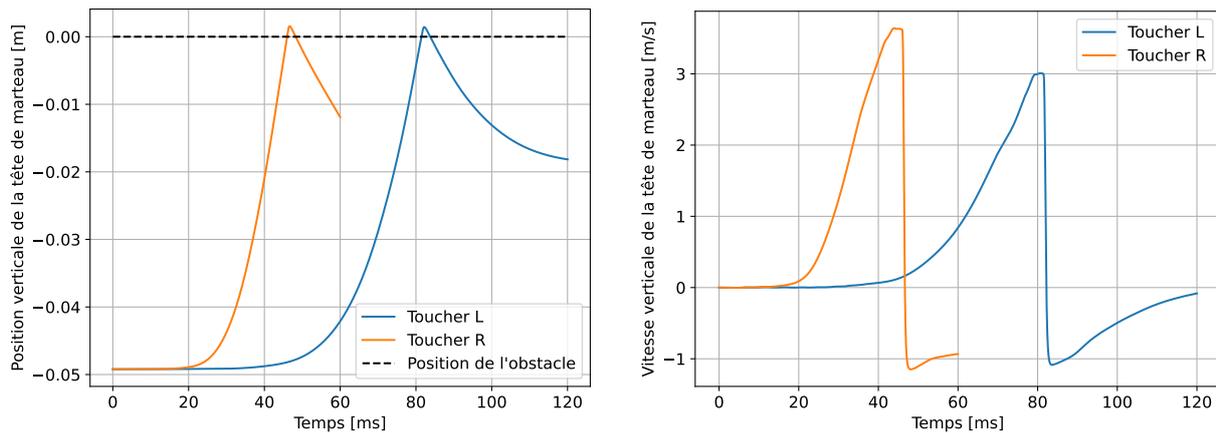


FIGURE 4.12 – Mouvement du marteau issu de simulations multicorps pour les touchers L et R.

conséquente, beaucoup plus forte dans notre cas pour le toucher rapide R.

Ceci montre que la manière d’actionner les touches sur un piano a une importance fondamentale pour la production du son. La façon d’optimiser le geste permet même d’arriver à des nuances beaucoup plus fortes sans avoir à dépenser plus d’énergie, ce qui va dans le sens des études réalisées à l’université de Montréal qui visent à optimiser le geste instrumental pour minimiser la fatigue musculaire tout en atteignant la nuance et le rendu sonore désiré [Verdugo *et al.*, 2019], [Verdugo *et al.*, 2020], [Goubault *et al.*, 2021], [Goubault *et al.*, 2023].

4.2.2 L’art d’appuyer sur les touches

Les musiciens, et les pianistes tout particulièrement, utilisent un vocabulaire spécifique pour qualifier la façon avec laquelle ils actionnent les touches. Parmi ces dénominations, on trouve des qualifications de phrasé. Un toucher *legato*, lié, signifie que les notes sont enchaînées sans silence entre elles. Un toucher *staccato*, piqué, signifie au contraire que les notes sont relâchées rapidement pour créer des sons brefs et détachés. Ces deux qualificatifs permettent d’exprimer la durée des notes et leur enchaînement plutôt que la façon dont les touches sont attaquées par les doigts. Vient alors la notion de poids : les touchers sont qualifiés de lourd, léger, perlé, ou encore frappé ou appuyé. Ce sont ces manières d’actionner les touches qui permettent indéniablement d’arriver à un contrôle très subtil de la nuance. De plus, et c’est ce que nous souhaitons analyser, ces touchers permettraient aux pianistes de varier le son, sa couleur, son timbre, sans toutefois changer sa nuance, c’est-à-dire son intensité sonore.

Nous allons dans la suite considérer simplement les deux catégories, *frappé* et *appuyé*, qui sont celles souvent utilisées pour les études concernant le toucher [Goebel *et al.*, 2004], [Goebel *et al.*, 2014], [Traube, 2017]. *Appuyé* signifie que le doigt repose initialement à la surface de la touche, tandis que *frappé* implique une distance initiale non nulle entre les deux. Les mesures que nous utilisons, avec l’accord des personnes concernées, sont celle décrites dans [Timmermans, 2021, p. 107] basées sur le dispositif de mesure de [Bernays et Traube, 2012]. Ce dispositif expérimental de l’université de Montréal est un piano Bösendorfer Impérial équipé de capteurs qui permettent la mesure de la position des touches et des marteaux en situation de jeu, tandis que des caméras permettent la captation des mouvements des musiciens. Ce dispositif est principalement utilisé pour établir des liens entre les mouvements du pianiste et le son produit [Bernays et Traube, 2013], [Bernays et Traube, 2014], mais également pour quantifier et optimiser l’influence de la gestuelle sur la fatigue musculaire [Verdugo *et al.*, 2020].

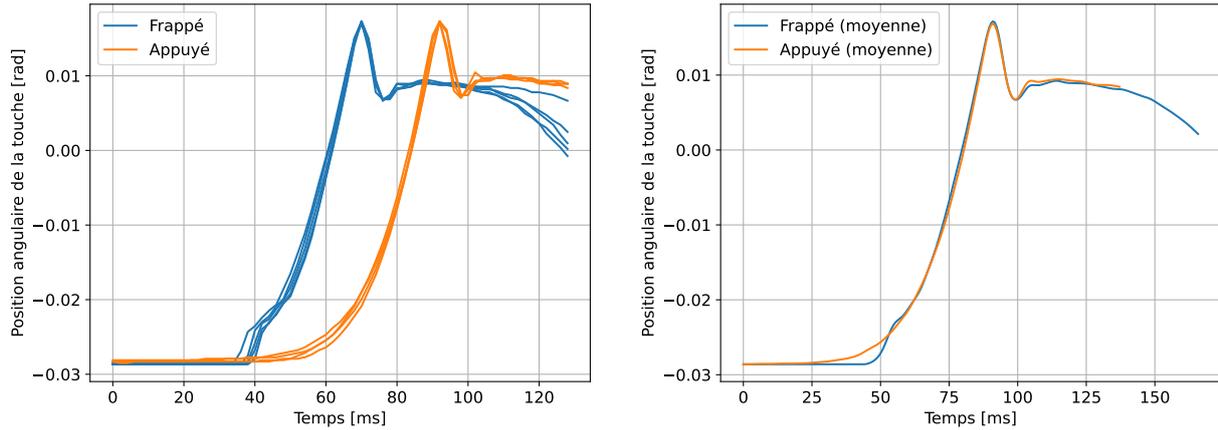


FIGURE 4.13 – Évolution de la position de la touche pour différents touchers. Données expérimentales décrite dans [Timmermans, 2021, p. 107].

La figure 4.13 permet de visualiser plusieurs répétitions des deux touchers considérés, frappé et appuyé. Des moyennes de ces répétitions sont tracées sur la figure de droite, en faisant correspondre l’instant auquel la touche atteint sa dépression maximale. Les profils sont assez similaires, mais montrent tout de même une différence significative au début de l’appui du doigt. Là où le toucher appuyé montre une croissance lente et uniforme, le toucher frappé montre une accélération soudaine à 50 ms, puis un très net ralentissement, puis de nouveau une accélération de la touche. L’explication donnée par [Askenfelt et Jansson, 1991] est que lorsque on appui sur la touche, elle se déplace si rapidement qu’elle dépasse brièvement la vitesse du doigt, puis rattrape ensuite son retard. Cela peut également être amplifié par des déformations internes de la mécanique ou à l’écrasement des feutres qui la composent.

4.2.3 Influence du frottement entre le marteau et la corde

Le frottement entre le marteau et la corde peut intervenir à deux niveaux de précision. Si le manche est rigide et si la distance y_c entre l’axe pivot du marteau et la corde est exactement égale à $H + d_0$, le marteau frappe la corde sans vitesse tangentielle. Si $y_c < H + d_0$, le marteau a, à l’impact, une vitesse tangentielle dans le sens \vec{u}_x , et inversement, si $y_c > H + d_0$, ce qui est le cas pour la majorité des mécaniques, le marteau a une vitesse tangentielle dans le sens de $-\vec{u}_x$ (voir figure 4.8). Au premier ordre, lors de la frappe, le marteau possède donc une vitesse tangentielle par rapport à la corde, ce qui génère une force de frottement, et ce qu’il soit flexible ou non.

Au second ordre, en considérant la flexibilité du manche, indépendamment de la distance y_c , il peut y avoir un mouvement de frottement oscillant du marteau contre la corde pendant la phase de contact [Izabdakhsh *et al.*, 2008], [Chabassier et Duruflé, 2014]. Le pianiste pourrait influencer ce phénomène de second ordre par sa façon d’enfoncer la touche, c’est ce que nous examinons dans les paragraphes suivants.

Matériau 1	Matériau 2	Coefficient de frottement sec cinétique μ_c
Téflon	Acier	0.04
Bois	Bois	0.2
Acier	Acier	0.57
Pneus	Béton	0.8

TABLE 4.4 – Quelques valeurs de coefficients de frottement typiques.

Les coefficients de frottement en jeu dans les contacts marteau-cordes sont difficiles à estimer et aucune étude expérimentale ne permet à l'heure actuelle d'avoir une idée précise de leur valeur. Par ailleurs, chaque marteau est différent. L'état des feutres joue énormément dans le timbre du piano et il n'est pas absurde de penser que les coefficients de frottement peuvent présenter une grande variabilité d'un piano à l'autre, voire même d'une note à l'autre.

De façon similaire à [Izabdakhsh *et al.*, 2008], nous présentons dans ce qui suit des résultats pour différentes valeurs de coefficients de frottement variant entre 0 (absence de frottement) et 0,4 (cas jugé extrême pour du feutre sur la corde).

La vitesse de seuil v_s requise pour le modèle de frottement de Coulomb régularisé (3.1.20) peut également jouer un rôle dans la façon dont le marteau interagit avec la corde. Ce paramètre caractérise la rapidité de transition entre l'adhérence et le glissement. Pour un matériau assez tendre comme le feutre, il peut être plutôt grand, ce qui décrit une transition très progressive entre les deux phases. Nous le décrirons dans la suite par un pourcentage de la vitesse tangentielle relative maximale atteinte par le marteau et la corde. $v_s = 5\%$ signifie donc que cette vitesse de seuil vaut 5% de la vitesse tangentielle maximale. Là encore, aucune étude expérimentale sur le feutre ne permet d'estimer ce paramètre. Nous présentons donc des simulations sur une plage de valeurs allant de 1 à 25%.

Dans ce paragraphe, le manche du marteau est supposé rigide. Les phénomènes observés sont donc ceux que nous avons appelés d'ordre 1, c'est-à-dire qui sont dus à la vitesse tangentielle du marteau au moment de son impact avec la corde, et non au toucher pianistique qui sera étudié ultérieurement (paragraphe 4.2.5).

Dans les paragraphes qui suivent nous analysons des différences entre des sons par l'intermédiaire de leurs spectres et spectrogrammes. Il existe des travaux poussés en psychoacoustique qui visent à l'étude de telles différences et qui permettent l'analyse fine des spectrogrammes. Notre objectif ici n'est pas de quantifier la perceptibilité des sons, mais de mettre en lumière leurs différences les plus notables.

Nous avons construit pour cela un observable qui nous semble pertinent, qui donne un poids aux différences observées en fonction de l'intensité locale (en fréquence) du son. Étant donnés deux signaux S_1 et S_2 , la mesure qui quantifie les différences entre les signaux est

$$D_{1,2} = \frac{STFT(S_2) - STFT(S_1)}{\max STFT(S_1)} \quad (4.2.2)$$

où STFT désigne la *Short Time Fourier Transform* calculée par la bibliothèque python `scipy.signal`¹

```
scipy.signal.spectrogram(S, 1/dt, window='blackman', mode='magnitude',
                          nperseg=212, noverlap=0.95*nperseg, nfft=24*nperseg)
```

L'observable $D_{1,2}$ réalise une différence non logarithmique entre les signaux transformés. Ainsi, une différence sur une partie du signal de forte amplitude qui a des grandes chances d'être audible (10^2 par exemple qui donnerait un signal d'intensité 40 dB) donne une forte différence, tandis qu'une différence à des faibles niveaux sonores, peu audibles (10^{-2} par exemple qui donnerait un signal d'intensité -40 dB), donne une différence très faible et peu représentée par notre estimateur. La différence est normalisée par l'amplitude maximale du signal de référence pour obtenir une variation en pourcentage par rapport à cette valeur.

Par ailleurs, le caractère signé de la différence donne une information sur l'augmentation ou la diminution relative des partiels les uns par rapport aux autres.

1. <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.signal.spectrogram.html>

Nous terminons ce paragraphe par quelques explications supplémentaires pour l'analyse des spectres et spectrogrammes de sons de piano. Nous avons déjà mentionné de nombreuses fois dans ce travail la présence de plusieurs ondes dans les cordes de piano. L'onde transversale, majoritaire, génère la plupart des partiels audibles et persistants du son. L'onde longitudinale produit quant à elle une sous série quasi-harmonique dont la fréquence fondamentale est généralement 15 fois plus grande que celle des ondes transversales. Par les nombreux couplages non-linéaires qui ont lieu dans le piano, notamment au niveau du chevalet, toutes ces fréquences sont mélangées et donnent naissance à de nombreux autres partiels appelés partiels fantômes [Conklin, 1997]. Ces partiels sont très nombreux, mais ont pour la plupart d'entre eux une décroissance très rapide. Ils participent ainsi majoritairement au timbre si spécifique de l'attaque des notes de piano.

Nous présentons des résultats sur différentes notes réparties sur la tessiture du piano : une note très grave Ré_1^\sharp , une note médium Fa_3 , et une note aiguë Do_5^\sharp .

4.2.3.a Note Ré_1^\sharp

La note Ré_1^\sharp est une note très grave de fréquence fondamentale égale à environ 32 Hz. Son spectre est très dense et il présente de nombreux partiels longitudinaux dans la gamme des fréquences audibles. Les observations et commentaires qui sont données pour cette note s'appliquent également pour les notes plus aiguës que nous présenterons ensuite.

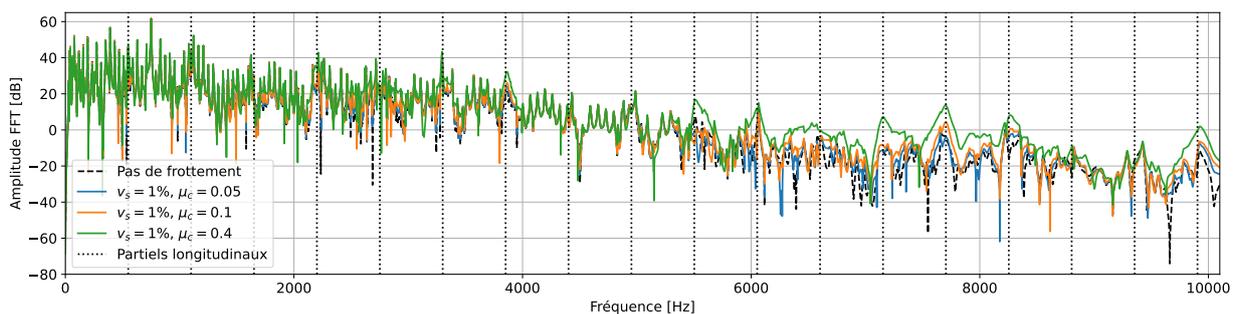


FIGURE 4.14 – Spectre du signal d'écoute de la note Ré_1^\sharp pour différents coefficients de frottement μ_c .

La figure 4.14 permet de visualiser le spectre du signal d'écoute de la table d'harmonie (voir annexe E) pour différentes valeurs du coefficient de frottement marteau-corde. Des différences très marquées sont visibles en hautes fréquences, mais pour des intensités sonores très faibles. Pour analyser plus précisément ces différences, nous traçons des spectrogrammes des signaux qui permettent de visualiser l'évolution temporelle des fréquences présentes dans le son.

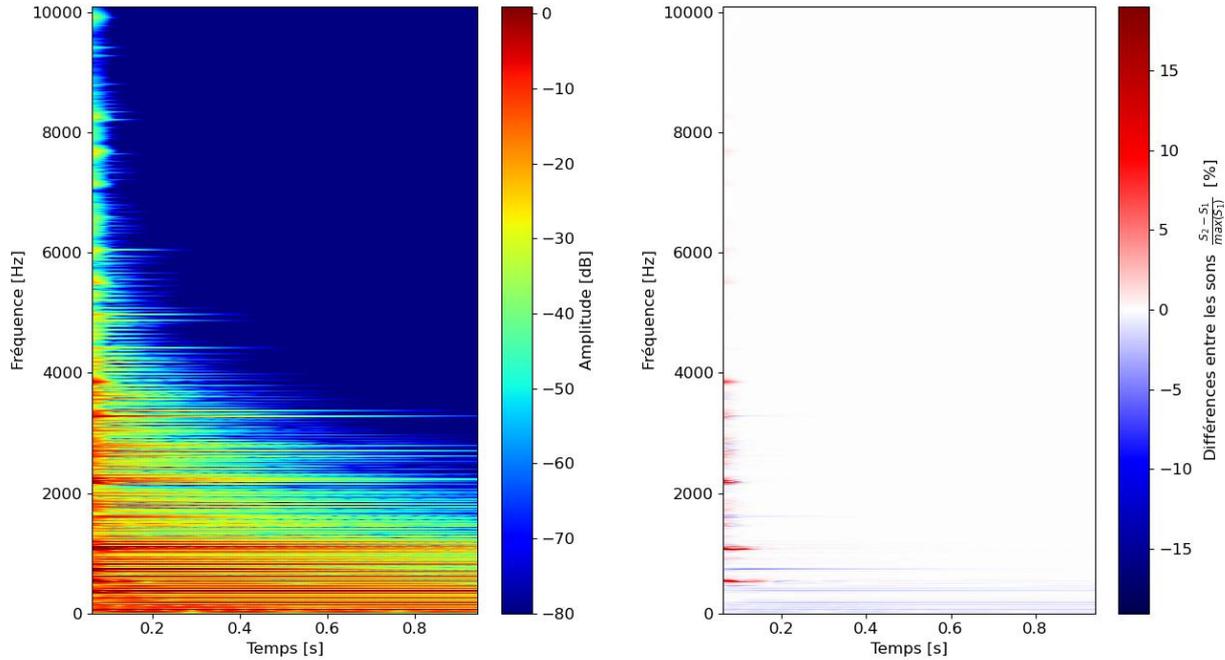


FIGURE 4.15 – Spectrogramme du signal d’écoute de la note Ré₁[#] sans frottement (gauche). Différences entre les spectrogrammes sans ($\mu_c = 0$) et avec ($\mu_c = 0,4$) frottement (droite).

La figure 4.15 montre, à gauche, le spectrogramme du signal sans frottement, et à droite les différences calculées entre le cas sans frottement $\mu_c = 0$ et le cas extrême $\mu_c = 0,4$. Les différences significatives sont principalement localisées dans l’attaque du son, entre 0 et 0,1 secondes, et également plus marquées au niveau des partiels longitudinaux.

Il est également intéressant de remarquer que les partiels longitudinaux montrent une différence positive : en toute logique, le signal avec frottement produit plus d’ondes longitudinales que le signal sans frottement, mais inversement, le signal avec frottement montre des amplitudes significativement plus faibles sur les premiers partiels transversaux. L’énergie supplémentaire transmise aux ondes longitudinales est prise au détriment des premiers partiels transversaux.

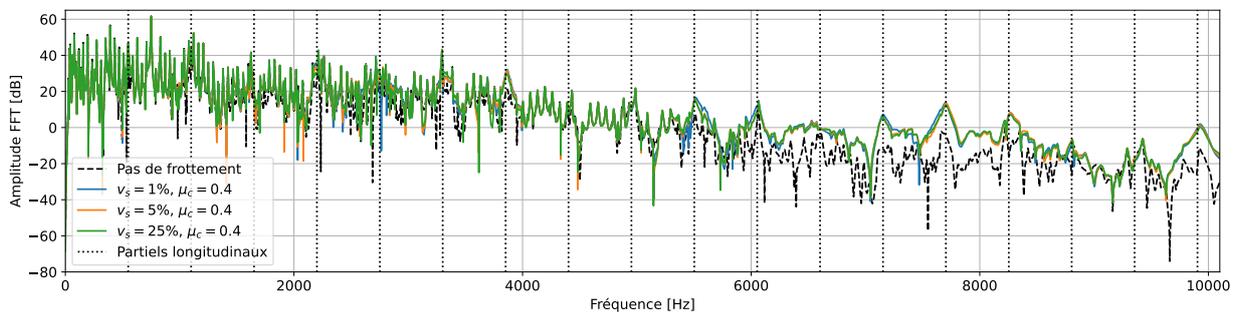


FIGURE 4.16 – Spectre du signal d’écoute de la note Ré₁[#] pour différentes vitesses de seuil v_s .

La figure 4.16 permet de visualiser l’influence du paramètre de seuil de glissement v_s sur le contenu spectral du son. Les différences observées sont moins marquées que celles visibles précédemment pour différents coefficients μ_c .

4.2.3.b Note Fa₃

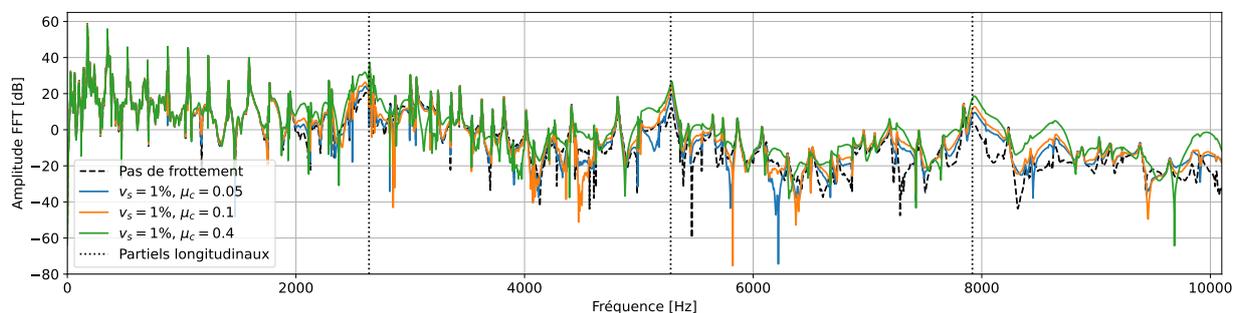


FIGURE 4.17 – Spectre du signal d'écoute de la note Fa₃ pour différents coefficients de frottement μ_c .

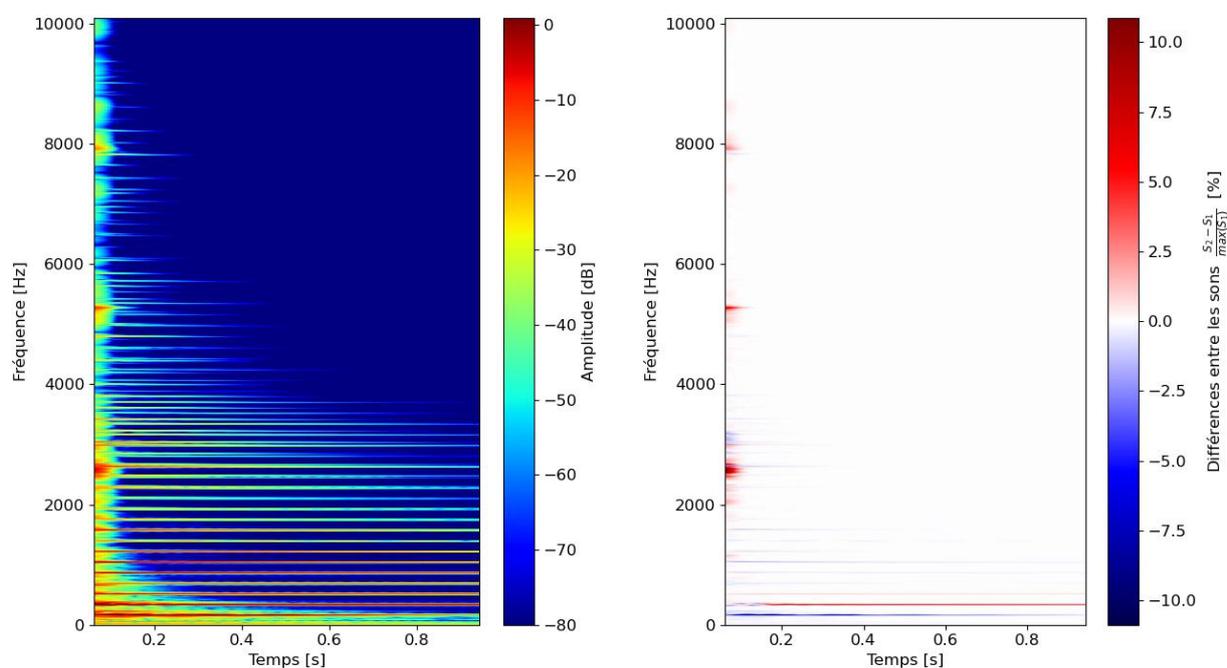


FIGURE 4.18 – Spectrogramme du signal d'écoute de la note Fa₃ sans frottement (gauche). Différences entre les spectrogrammes sans ($\mu_c = 0$) et avec ($\mu_c = 0,4$) frottement (droite).

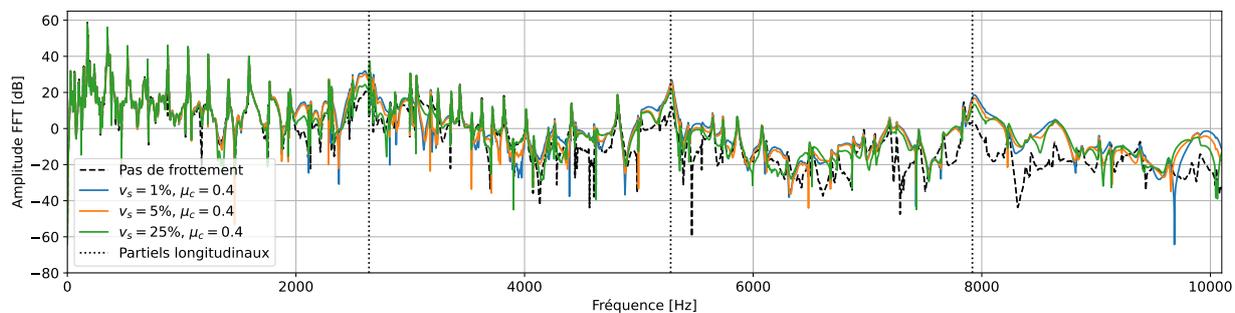


FIGURE 4.19 – Spectre du signal d'écoute de la note Fa₃ pour différentes vitesses de seuil v_s .

4.2.3.c Note Do₅[#]

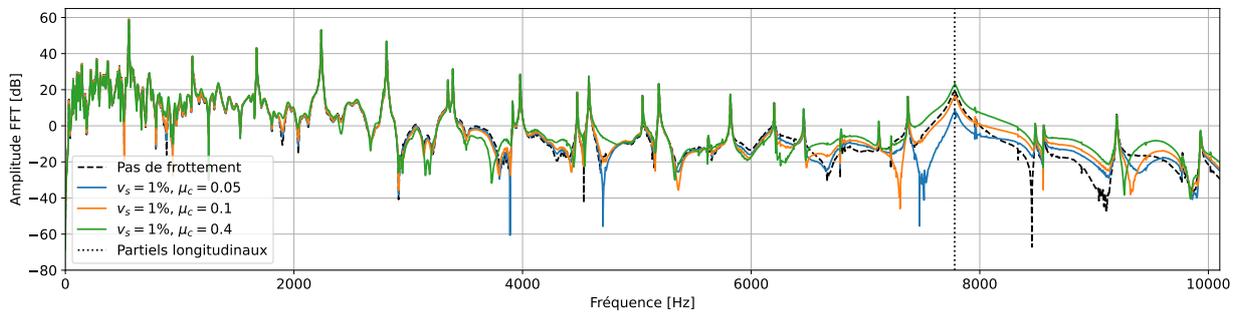


FIGURE 4.20 – Spectre du signal d’écoute de la note Do₅[#] pour différents coefficients de frottement μ_c .

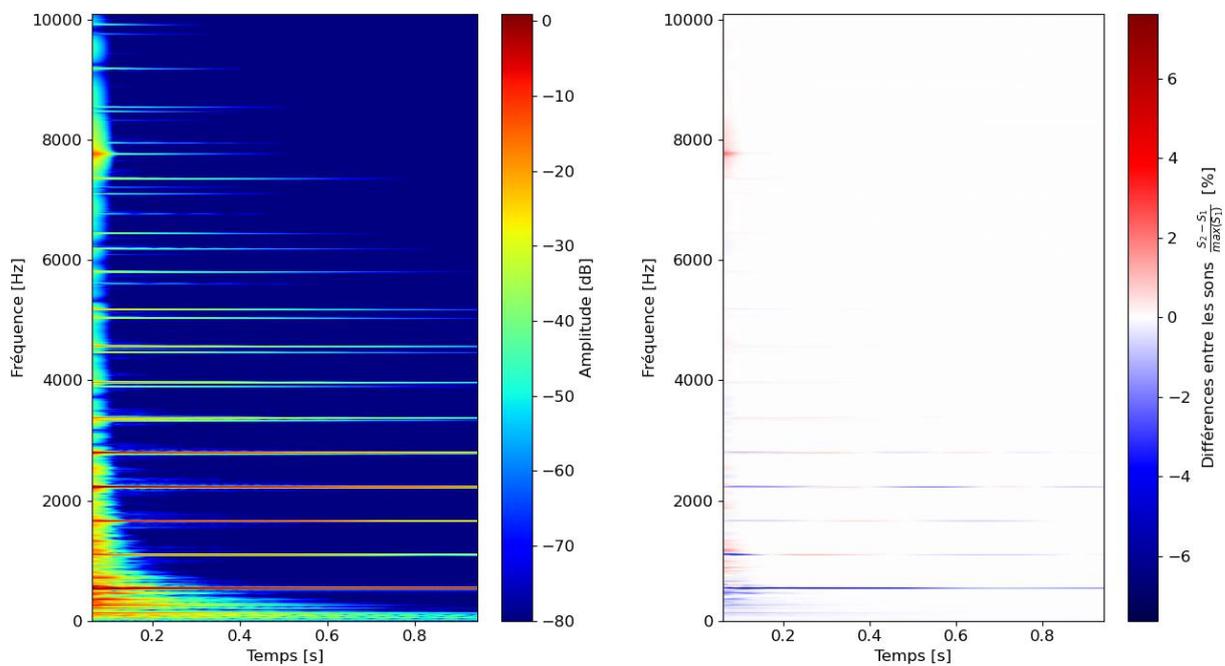


FIGURE 4.21 – Spectrogramme du signal d’écoute de la note Do₅[#] sans frottement (gauche). Différences entre les spectrogrammes sans ($\mu_c = 0$) et avec ($\mu_c = 0, 4$) frottement (droite).

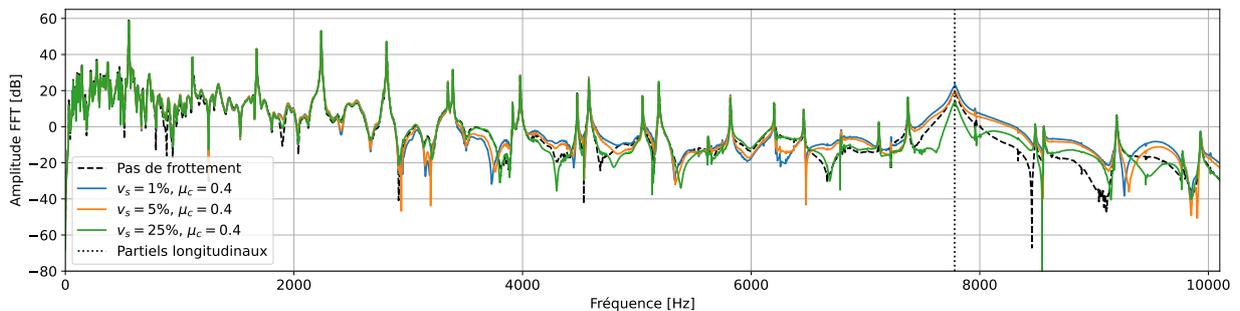


FIGURE 4.22 – Spectre du signal d’écoute de la note Do₅[#] pour différentes vitesses de seuil v_s .

4.2.4 Influence de la flexibilité du manche

Nous comparons dans cette partie trois manches de marteau de différentes flexibilités : un manche rigide dont les modules de Young et de cisaillement sont très élevés ($E = G = 1 \times 10^{13}$), un manche flexible qui correspond le mieux à la réalité physique ($E = 10,18 \times 10^9$, $G = 6,4 \times 10^8$), et un manche exagérément flexible ($E = 2,0 \times 10^9$, $G = 1,0 \times 10^8$).

Des résultats sont présentés sans et avec frottement pour $v_s = 1\%$ et $\mu_c = 0,4$ ce qui permet de visualiser des cas extrêmes.

Quelle que soit la corde utilisée, la vitesse du marteau dans la direction perpendiculaire à la corde est similaire que ce soit avant, pendant, ou après l'impact. Elle est représentée sur la figure 4.23 pour la note Ré₁[#].

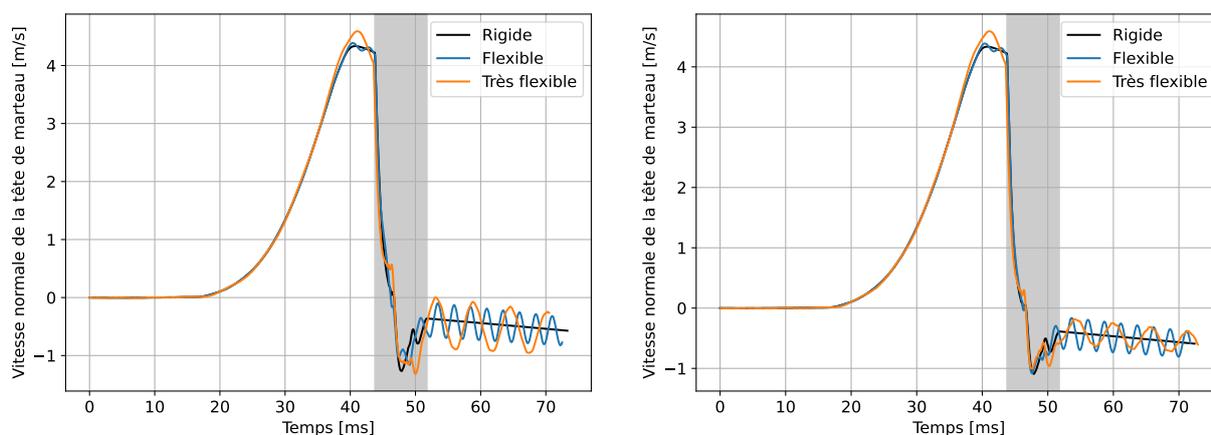


FIGURE 4.23 – Vitesse du marteau dans la direction normale à la corde. Sans frottement (gauche) et avec frottement (droite).

On remarque sur la figure 4.23 que les oscillations résultantes post-impact sont légèrement moindres avec frottement à droite que sans frottement à gauche, ce qui traduit naturellement qu'une partie de l'énergie du manche a été dissipée par le frottement durant le contact.

On remarque également que la vitesse au moment du début du contact marteau-corde, symbolisé par la zone grise, est légèrement modifiée par la flexibilité du manche, ce qui peut induire des nuances sonores subtilement différentes.

4.2.4.a Note Ré₁[#]

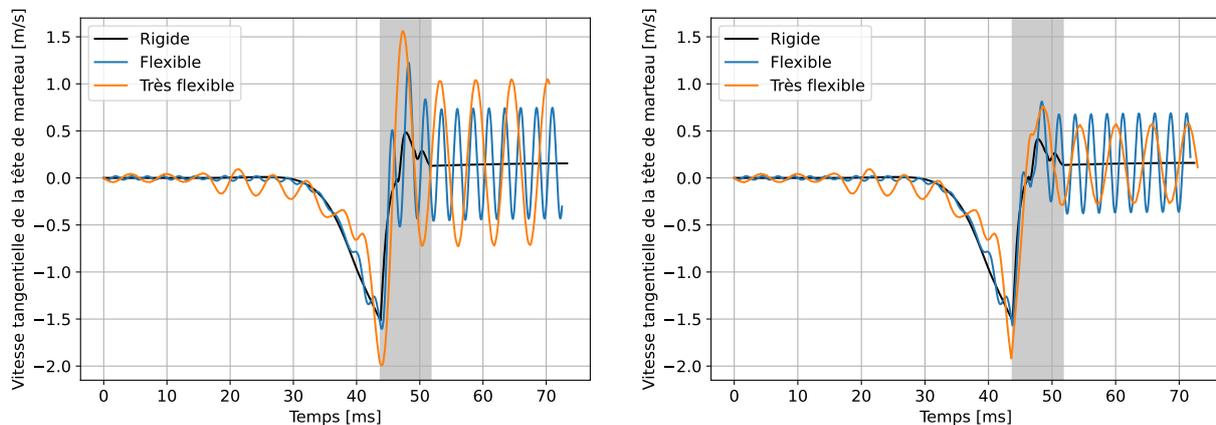


FIGURE 4.24 – Vitesse du marteau dans la direction tangentielle à la corde. Sans frottement (gauche) et avec frottement (droite).

La vitesse tangentielle du marteau est représentée sur la figure 4.24. Les oscillations du manche sont très clairement visibles, elles sont présentes avant le contact avec la corde et sont fortement amplifiées au moment de la frappe. Comme pour la vitesse normale que nous avons commentée précédemment, l'introduction de frottement réduit significativement l'amplitude des oscillations pendant et après la phase de contact, car une partie de l'énergie est dissipée.

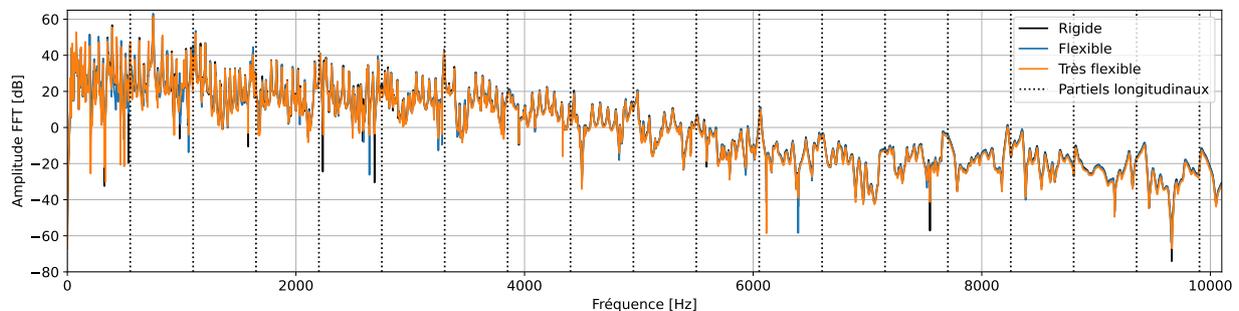


FIGURE 4.25 – Spectre du signal d'écoute pour différentes flexibilités de manche. Sans frottement.

La figure 4.25 permet de visualiser les différences induites par la flexibilité du manche sur le spectre du signal d'écoute, et ce sans frottement entre le marteau et la corde. Les spectres obtenus ne sont pas identiques, mais sont tout de même très similaires.

Dans la zone de basses fréquences où des différences peuvent être plus facilement audibles car d'amplitudes plus fortes, les spectres sont également très coïncidents. Par ailleurs, les vitesses d'impact dans la direction normale à la corde ne sont pas exactement égales, ce qui contribue à ajouter des différences sur les spectres.

Des différences légèrement plus importantes sont visibles avec frottement en hautes fréquences sur la figure 4.27. Elles sont concentrées particulièrement au niveau des partiels longitudinaux, ce qui est cohérent avec les observations faites sur le frottement dans le paragraphe précédent. Dans une gamme de fréquences plus restreinte sur la figure 4.28, les différences ne sont pas très marquées, si

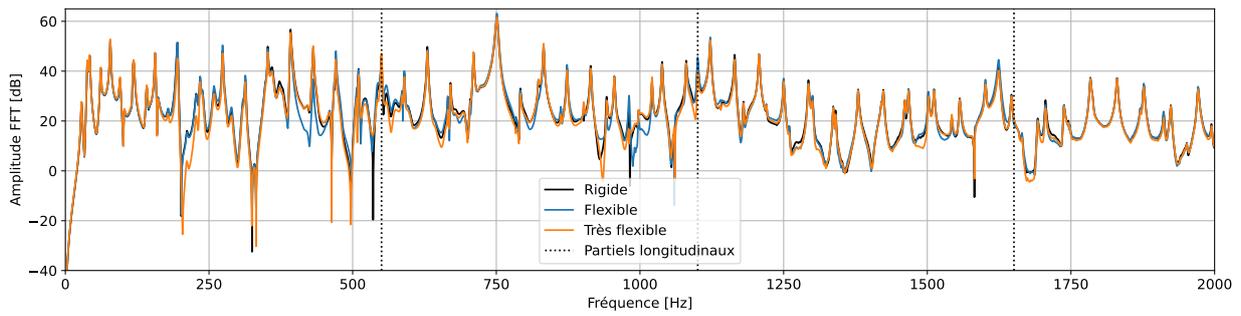


FIGURE 4.26 – Spectre du signal d’écoute pour différentes flexibilités de manche. Sans frottement. Zoom sur les basses fréquences.

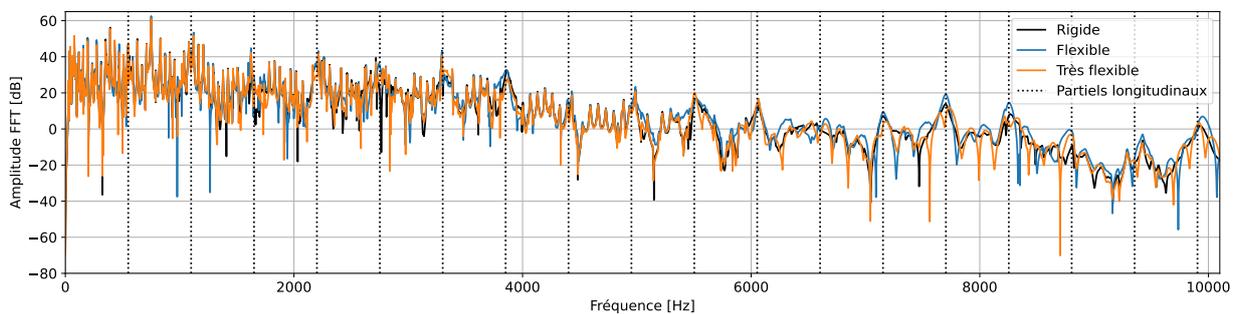


FIGURE 4.27 – Spectre du signal d’écoute pour différentes flexibilités de manche. Avec frottement.

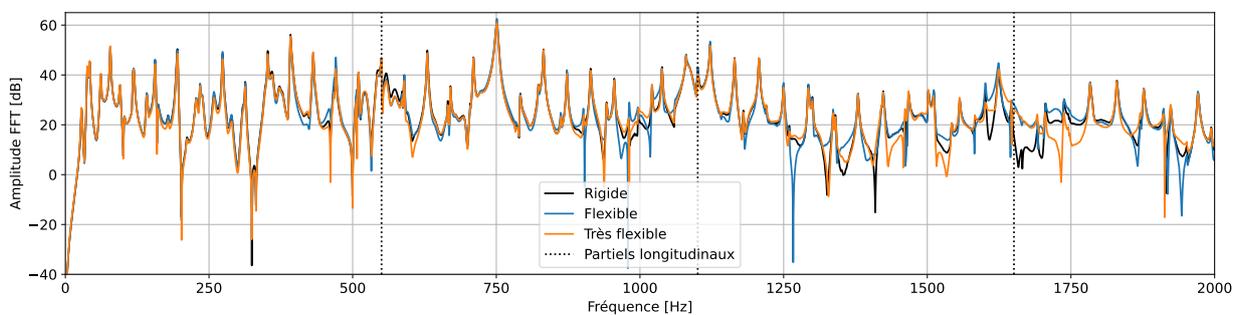


FIGURE 4.28 – Spectre du signal d’écoute pour différentes flexibilités de manche. Avec frottement. Zoom sur les basses fréquences.

ce n’est encore une fois autour des partiels longitudinaux.

Des tracés de spectrogrammes et leurs comparaisons permettent de mettre en avant plus précisément les différences observées. La figure 4.29 permet de visualiser l’erreur entre le signal produit par le manche rigide et le manche flexible, avec et sans frottement. Les différences les plus significatives se situent en basses fréquences au niveau des partiels transversaux : la flexibilité du manche a modifié la vitesse de frappe normale du marteau et donc l’intensité sonore produite. Comme nous l’avons déjà vu, l’ajout de frottement ajoute en plus des différences marquées sur les partiels longitudinaux.

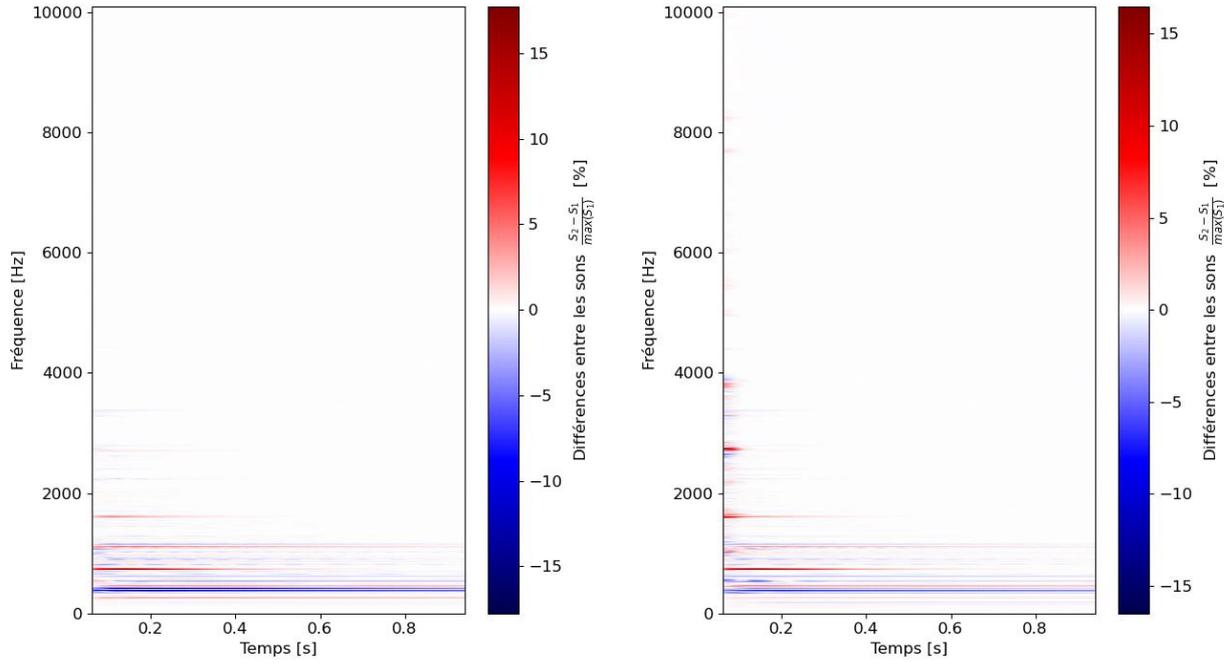


FIGURE 4.29 – Comparaison des spectrogrammes des signaux d’écoute pour le manche flexible par rapport au manche rigide. Sans frottement (gauche) et avec frottement (droite).

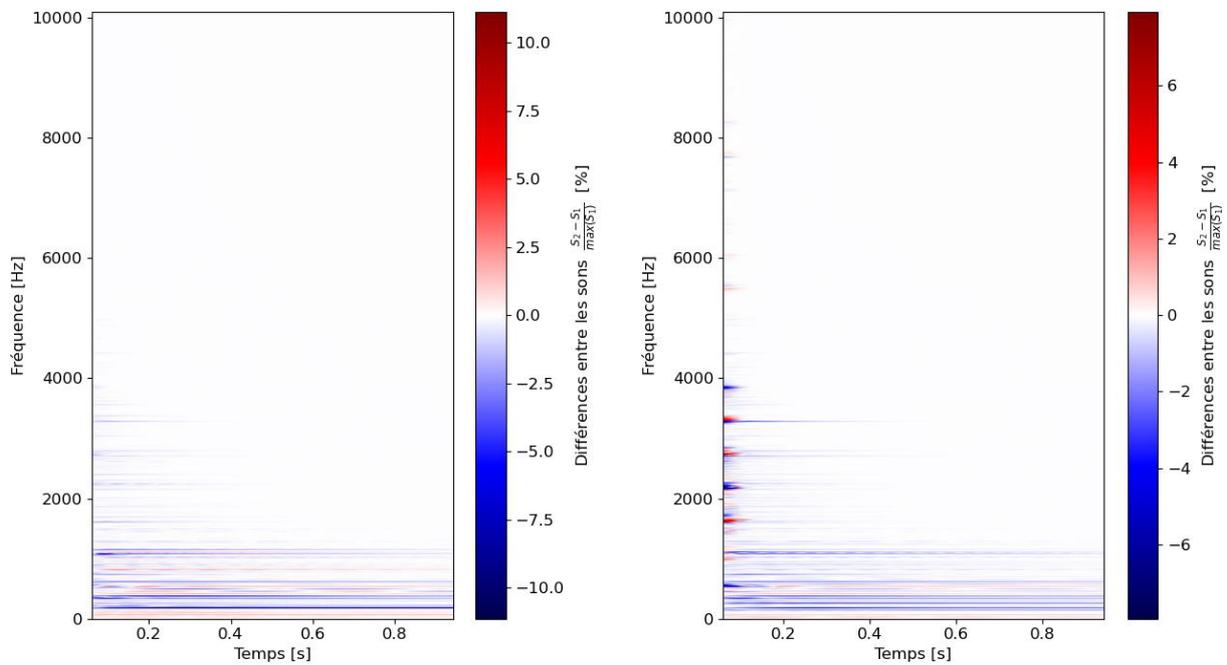


FIGURE 4.30 – Comparaison des spectrogrammes des signaux d’écoute pour le manche très flexible par rapport au manche rigide. Sans frottement (gauche) et avec frottement (droite).

4.2.4.b Note Fa₃

Les mêmes observations sont valables pour la note médium Fa₃. La flexibilité du manche modifie principalement la vitesse de frappe normale du marteau et donc les partiels transversaux, tandis que l'ajout de frottement influence les partiels longitudinaux.

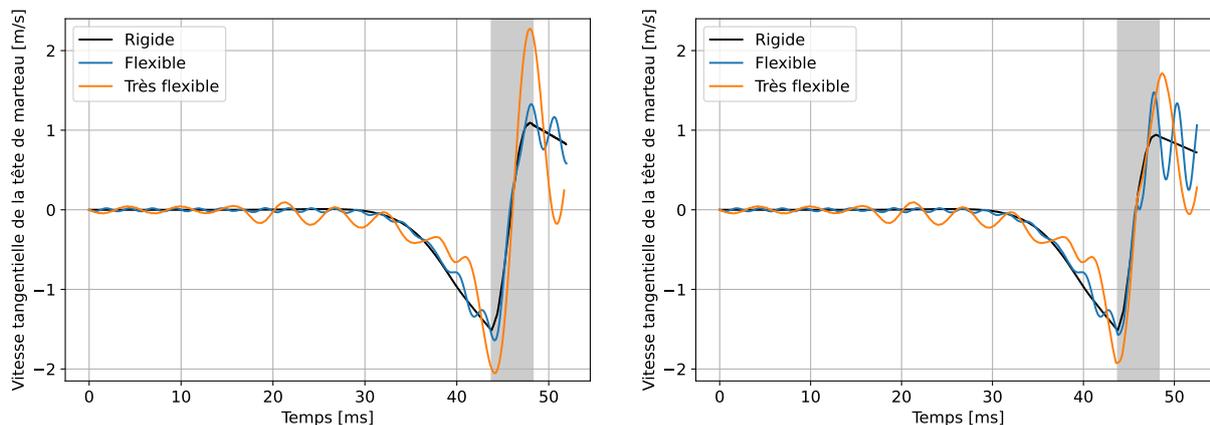


FIGURE 4.31 – Vitesse du marteau dans la direction tangentielle à la corde. Sans frottement (gauche) et avec frottement (droite).

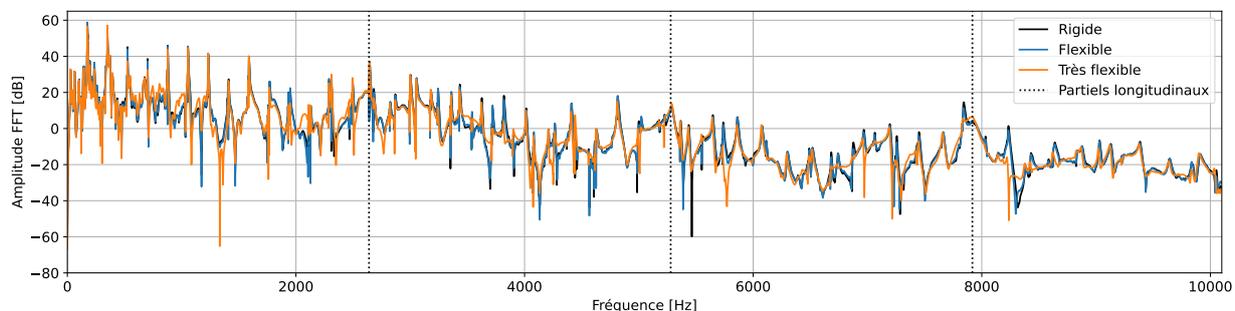


FIGURE 4.32 – Spectre du signal d'écoute pour différentes flexibilités de manche. Sans frottement.

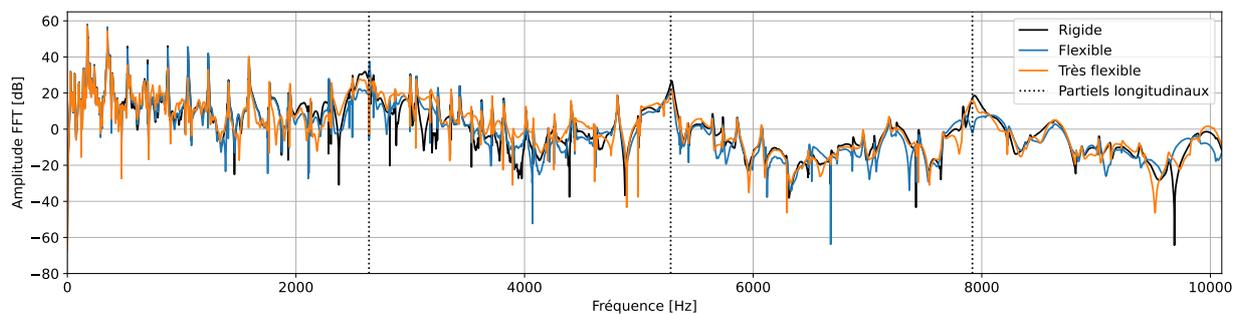


FIGURE 4.33 – Spectre du signal d'écoute pour différentes flexibilités de manche. Avec frottement.

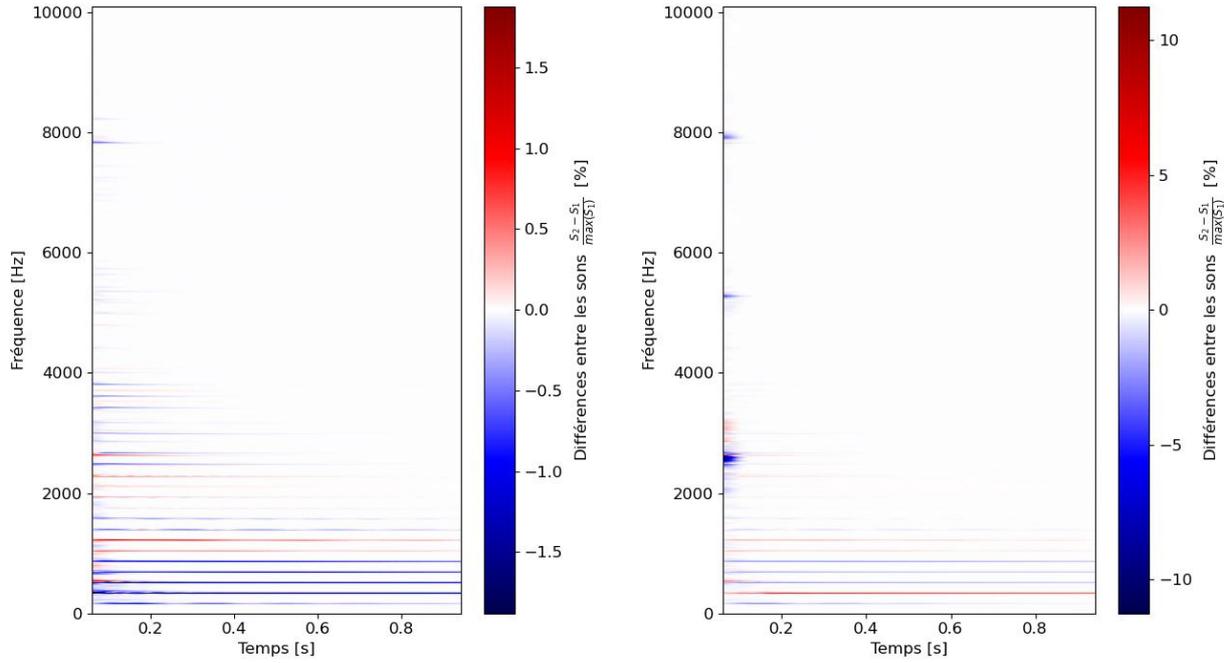


FIGURE 4.34 – Comparaison des spectrogrammes des signaux d’écoute pour le manche flexible par rapport au manche rigide. Sans frottement (gauche) et avec frottement (droite).

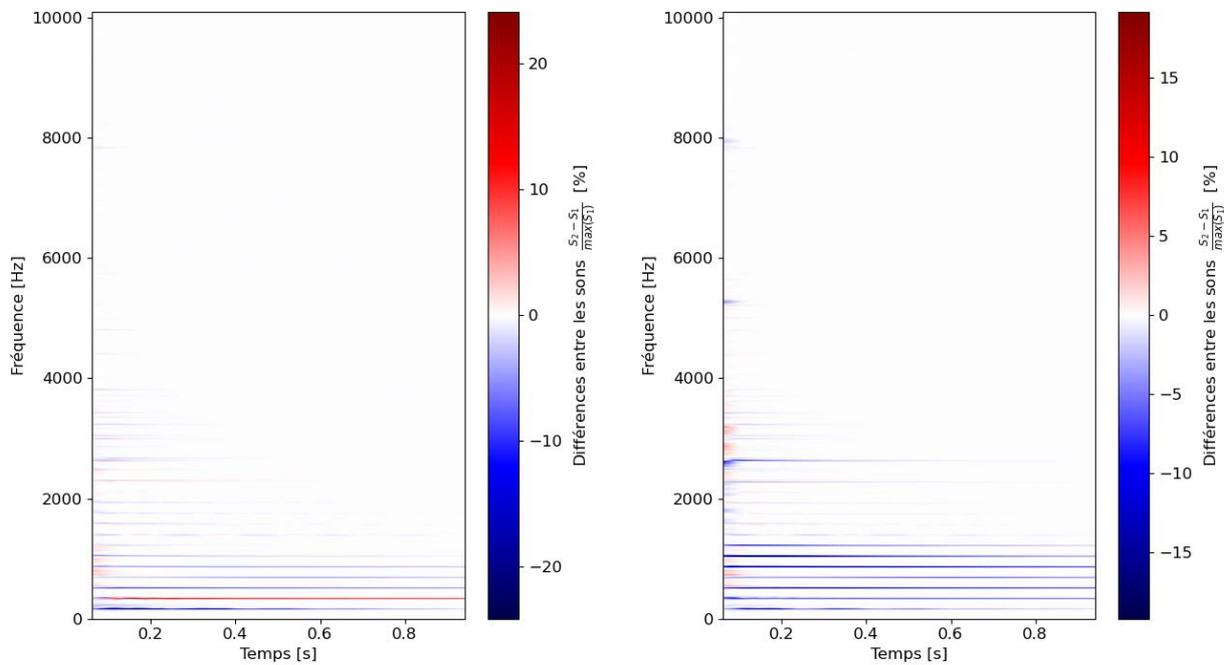


FIGURE 4.35 – Comparaison des spectrogrammes des signaux d’écoute pour le manche très flexible par rapport au manche rigide. Sans frottement (gauche) et avec frottement (droite).

4.2.4.c Note Do_5^{\sharp}

La note Do_5^{\sharp} est une note plus aiguë dont la densité spectrale est beaucoup moindre. Cela dit, les mêmes observations que pour les notes précédentes sont valables.

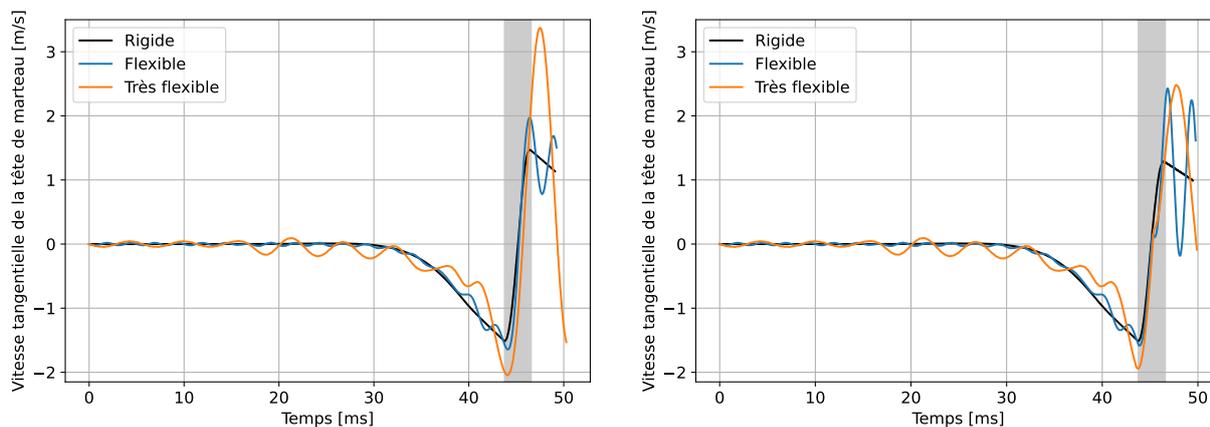


FIGURE 4.36 – Vitesse du marteau dans la direction tangentielle à la corde. Sans frottement (gauche) et avec frottement (droite).

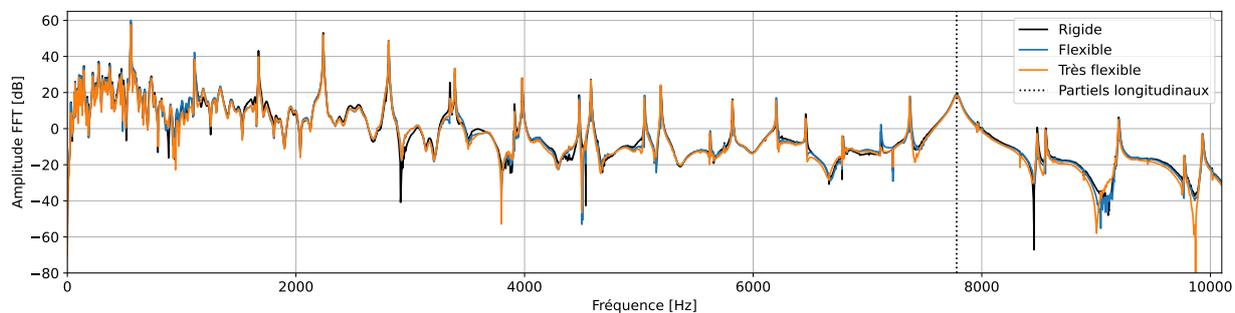


FIGURE 4.37 – Spectre du signal d'écoute pour différentes flexibilités de manche. Sans frottement.

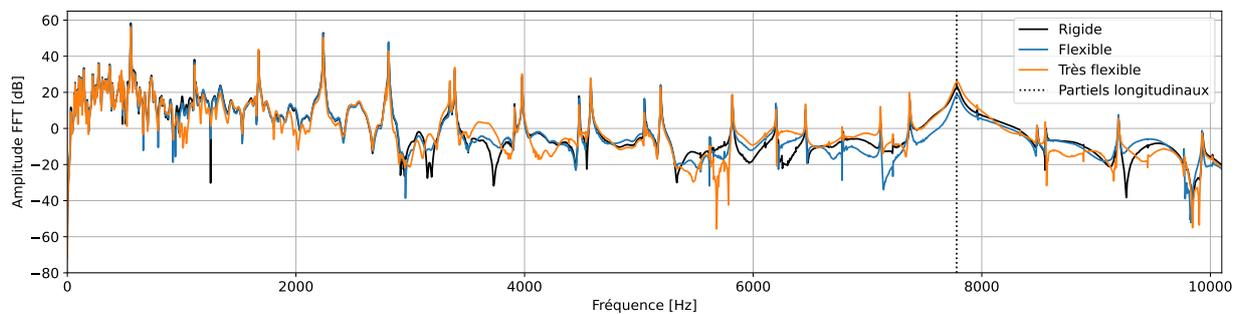


FIGURE 4.38 – Spectre du signal d'écoute pour différentes flexibilités de manche. Avec frottement.

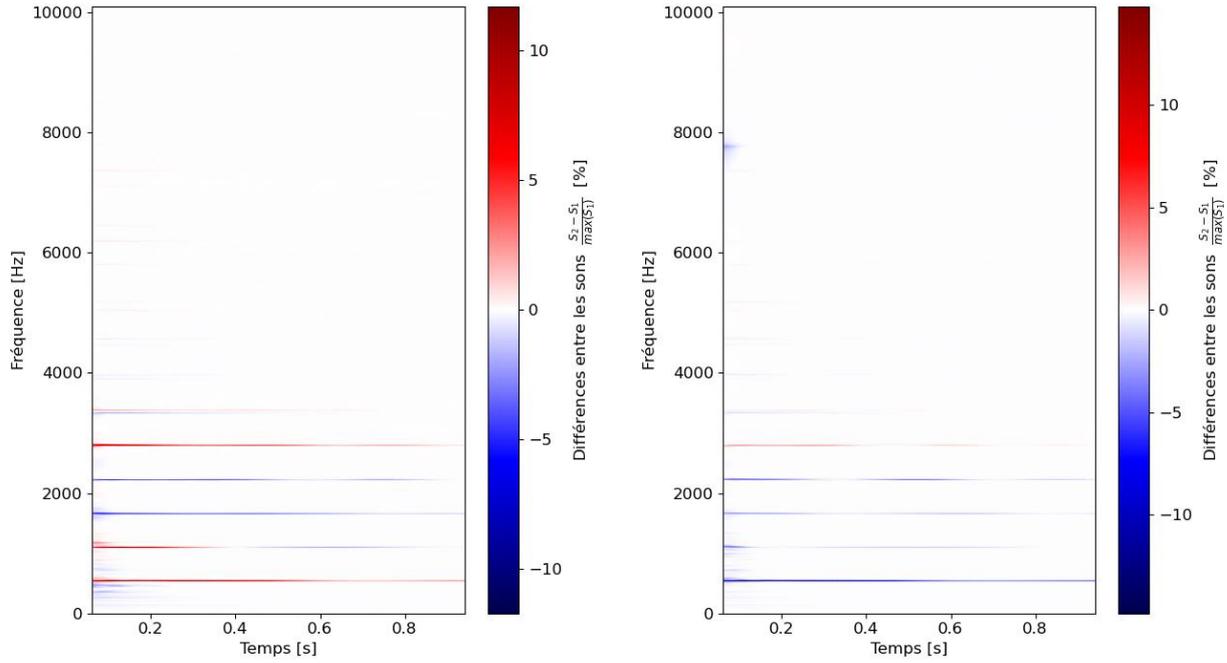


FIGURE 4.39 – Comparaison des spectrogrammes des signaux d’écoute pour le manche flexible par rapport au manche rigide. Sans frottement (gauche) et avec frottement (droite).

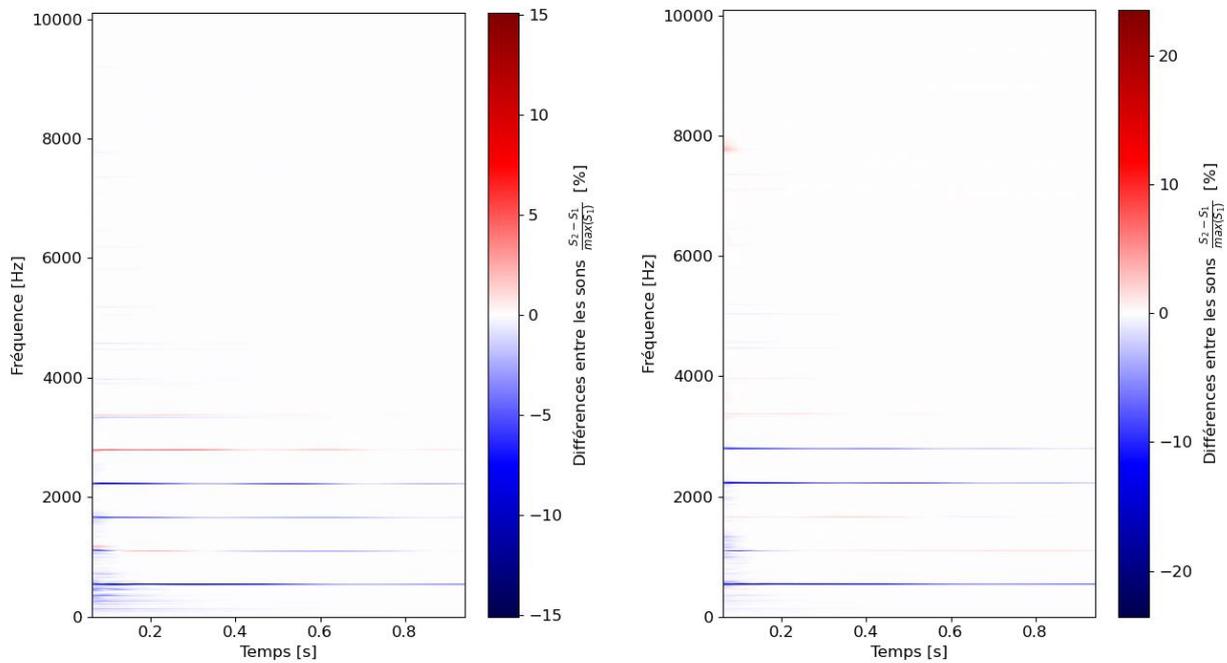


FIGURE 4.40 – Comparaison des spectrogrammes des signaux d’écoute pour le manche très flexible par rapport au manche rigide. Sans frottement (gauche) et avec frottement (droite).

4.2.5 Influence du toucher pianistique

Dans cette partie, le manche est flexible et le marteau frotte sur la corde avec un seuil de glissement $v_s = 1\%$ et un coefficient de frottement $\mu_c = 0,4$.

Nous utilisons les touchers *frappé* et *appuyé* définis au paragraphe 4.2.2 qui sont issus de mesures expérimentales.

La difficulté principale que nous rencontrons pour étudier l'influence du toucher est d'isoler le phénomène par rapport aux autres contributions qui peuvent influencer sur le son. Notamment, notre objectif est de comparer les touchers à nuance égale, c'est-à-dire à vitesse d'impact dans le sens perpendiculaire à la corde identiques. Il est très difficile avec notre outil d'arriver à une correspondance exacte entre ces vitesses d'impact pour différents touchers, ce qui ne nous permet pas d'attribuer les différences observées au toucher de façon certaine.

À défaut d'une étude statistique rigoureuse qui nous permettrait certainement de trancher sur la causalité entre le toucher et les phénomènes observés, nous avons, pour cette étude préliminaire adopté une démarche plus simple à mettre en place. Le toucher *frappé* sert de référence, et le toucher *appuyé* est simulé avec deux vitesses d'impact différentes, mais tout de même très proches de la vitesse cible du toucher *frappé*. Concrètement, la vitesse d'impact pour le toucher *frappé* est $v_{frappé} = 4,1578$ m/s. Ce toucher est noté T_f . Les vitesses utilisées pour le toucher *appuyé* sont $v_{appuyé}^1 = 4,1610$ m/s (toucher T_a^1) et $v_{appuyé}^2 = 4,1713$ m/s (toucher T_a^2) qui représentent respectivement des variations relatives de 0,08% et 0,32% par rapport à la vitesse du toucher *frappé*.

En notant que la différence de vitesse $|v_{appuyé}^1 - v_{appuyé}^2|$ est plus importante que la différence $|v_{appuyé}^1 - v_{frappé}|$, on peut discriminer les changements dus à une variation de vitesse de ceux réellement causés par le toucher : les différences observées entre T_a^1 et T_a^2 seront une majoration des différences dues aux variations de vitesse de frappe lors de la comparaison des touchers T_a^1 et T_f .

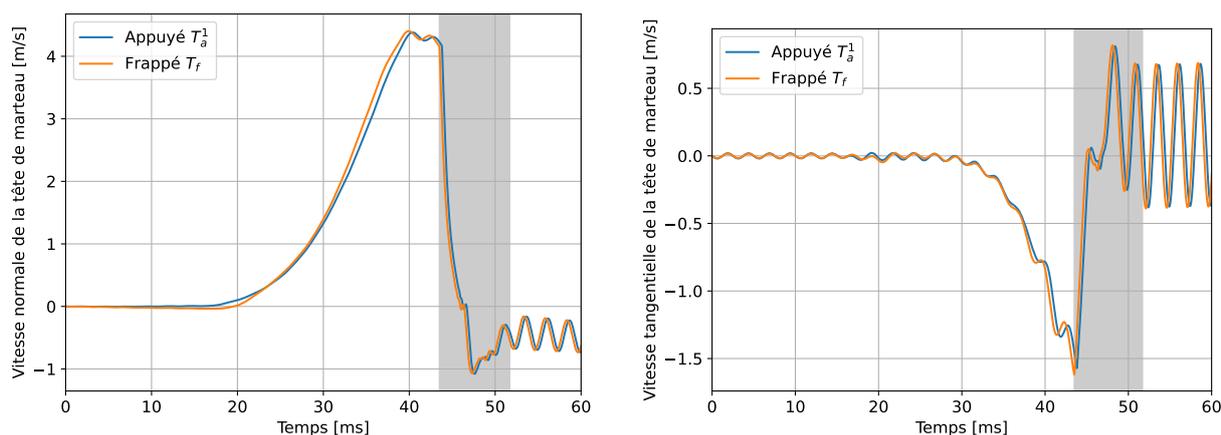


FIGURE 4.41 – Vitesse du marteau dans la direction normale (gauche) et tangentielle (droite) à la corde.

Pour toutes les notes, le mouvement du marteau est similaire et varie très peu en fonction du toucher utilisé. Il est représenté sur la figure 4.41. Un léger décalage temporel est visible mais n'induit pas à lui seul de différences sur le son. Les oscillations du manche présentent quelques différences, mais très faibles.

4.2.5.a Note Ré₁[#]

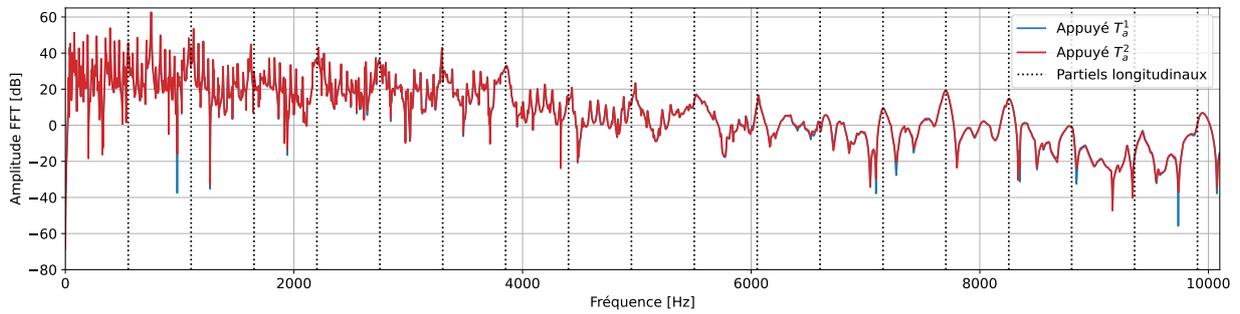


FIGURE 4.42 – Spectre du signal d'écoute pour les deux touches appuyées T_a^1 et T_a^2 .

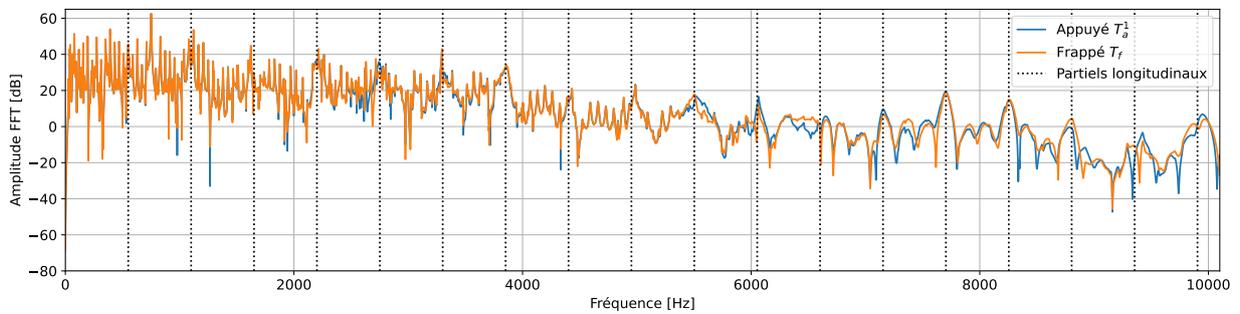


FIGURE 4.43 – Spectre du signal d'écoute pour différents touches. Frappé T_f et appuyé T_a^1 .

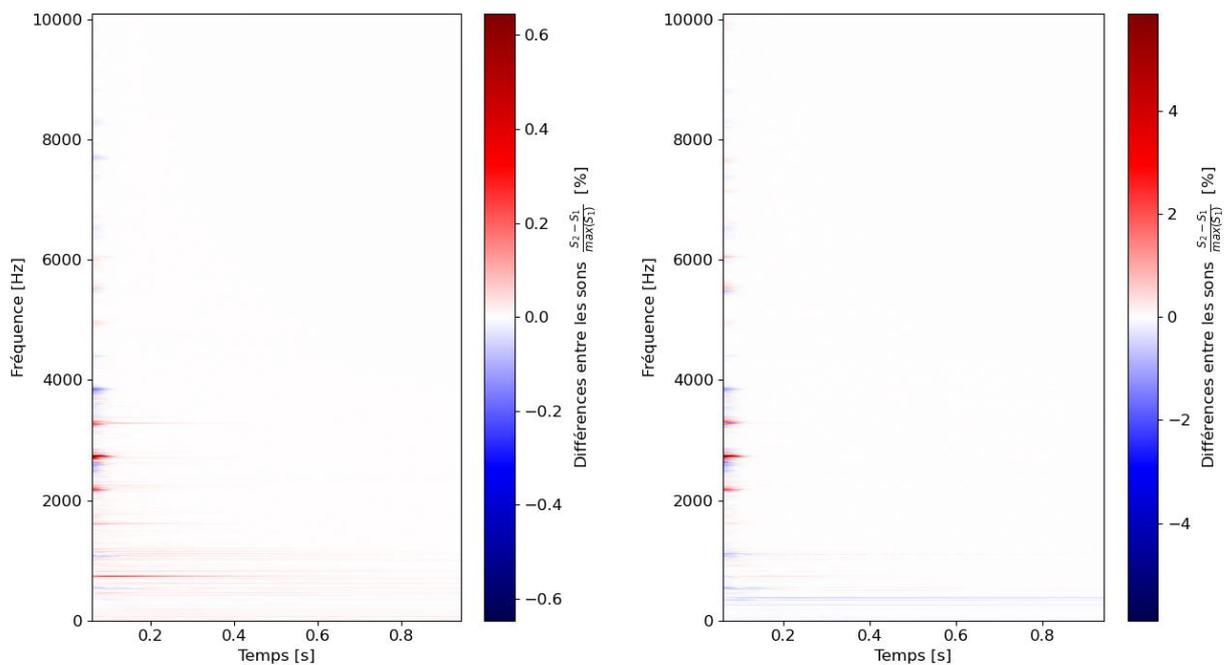


FIGURE 4.44 – Comparaison des spectrogrammes des signaux d'écoute pour différents touches. $T_a^2 - T_a^1$ (gauche) et $T_a^1 - T_f$ (droite).

Le spectre du signal d'écoute est représenté pour les deux touchers appuyés différents uniquement par leur vitesse de frappe sur la figure 4.42. Quasiment aucune différence n'est visible, si ce n'est sur quelques anti-résonances (pic vers le bas), ce qui permet de confirmer que les différences observées entre les touchers *frappé* T_f et *appuyé* T_a^1 sur la figure 4.43 sont bien des différences de toucher et non de vitesse de frappe. Les différences entre les touchers sont principalement localisées en hautes fréquences et à des amplitudes sonores très faibles. Il est très peu probable qu'elles soient audibles.

Une analyse plus fine sur les spectrogrammes permet de localiser les différences observées entre les touchers dans le temps. La figure 4.44 permet de comparer les spectrogrammes des trois touchers. La figure de gauche compare les deux touchers appuyés différents par leur vitesse de frappe. Les différences sont de l'ordre de 0,6% au maximum. La figure de droite compare les touchers *frappé* T_f et *appuyé* T_a^1 et exhibe des différences de l'ordre de 5% qui sont donc bien majoritairement dues au toucher et non à la vitesse de frappe légèrement différente.

Les différences sont tout de même faibles, et localisées très majoritairement dans l'attaque du son et au niveau des partiels longitudinaux.

Les notes plus aiguës présentées dans les pages suivantes montrent un comportement identique avec des modifications très subtiles de très courte durée dans la zone spectralement très riche qu'est l'attaque.

Pour ces raisons il est très peu probable que les différences affichées soient audibles, ce qui concorde avec les résultats de [Goebel *et al.*, 2004] et [Goebel *et al.*, 2014]. Mais des différences semblent tout de même visibles sur les spectres dans le transitoire d'attaque, ce qui va dans le sens des observations de [Traube, 2017].

4.2.5.b Note Fa₃

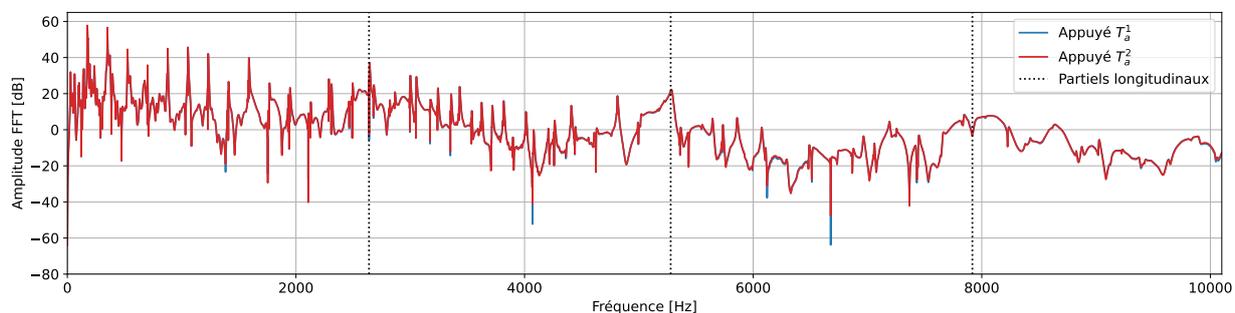


FIGURE 4.45 – Spectre du signal d'écoute pour les deux touches appuyées T_a^1 et T_a^2 .

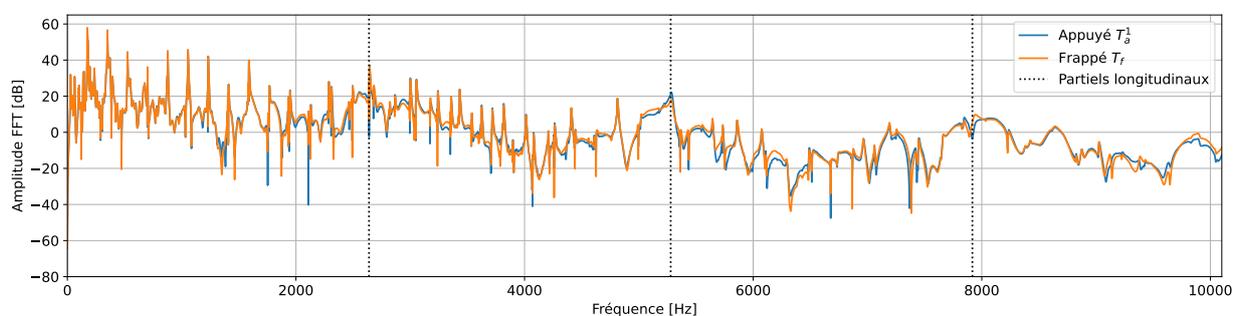


FIGURE 4.46 – Spectre du signal d'écoute pour différents touches. Frappé T_f et appuyé T_a^1 .

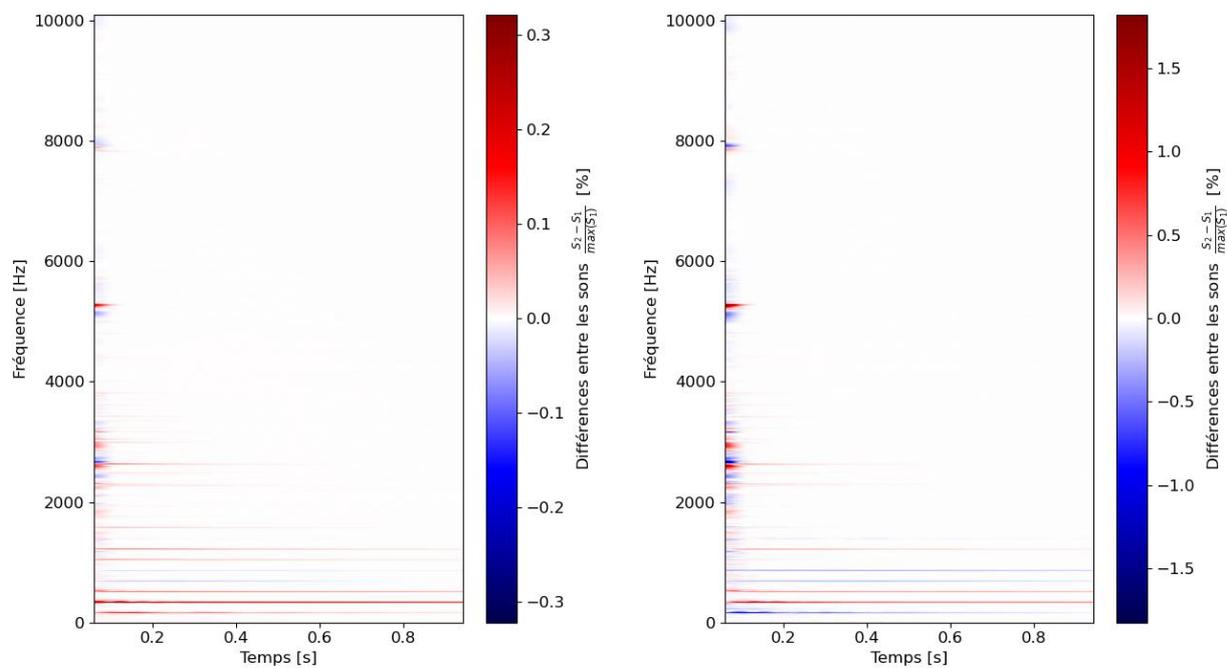


FIGURE 4.47 – Comparaison des spectrogrammes des signaux d'écoute pour différents touches. $T_a^2 - T_a^1$ (gauche) et $T_a^1 - T_s$ (droite).

4.2.5.c Note Do₅[#]

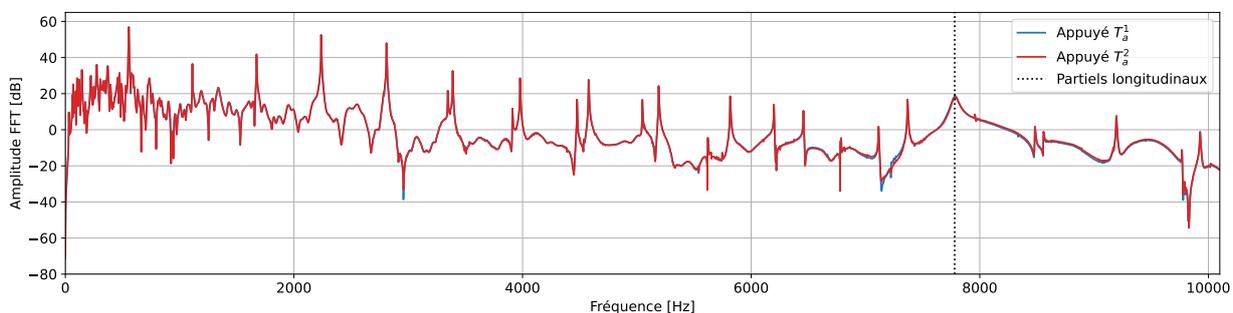


FIGURE 4.48 – Spectre du signal d'écoute pour les deux touches appuyées T_a^1 et T_a^2 .

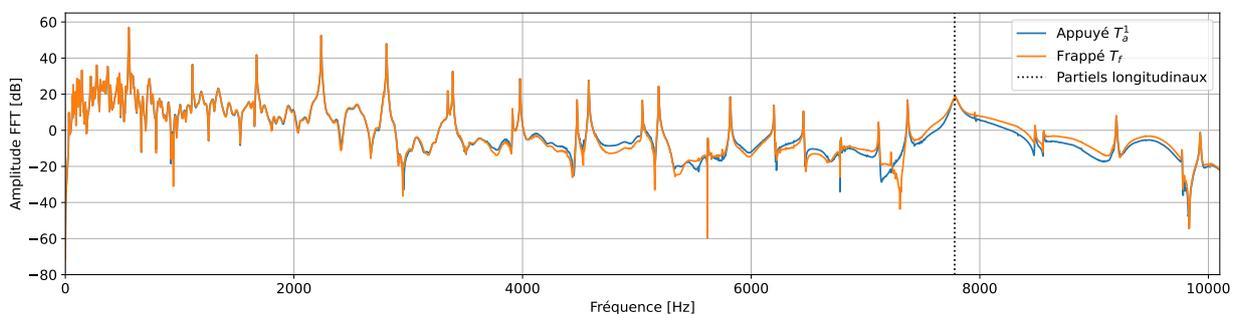


FIGURE 4.49 – Spectre du signal d'écoute pour différents touches. Frappé T_f et appuyé T_a^1 .

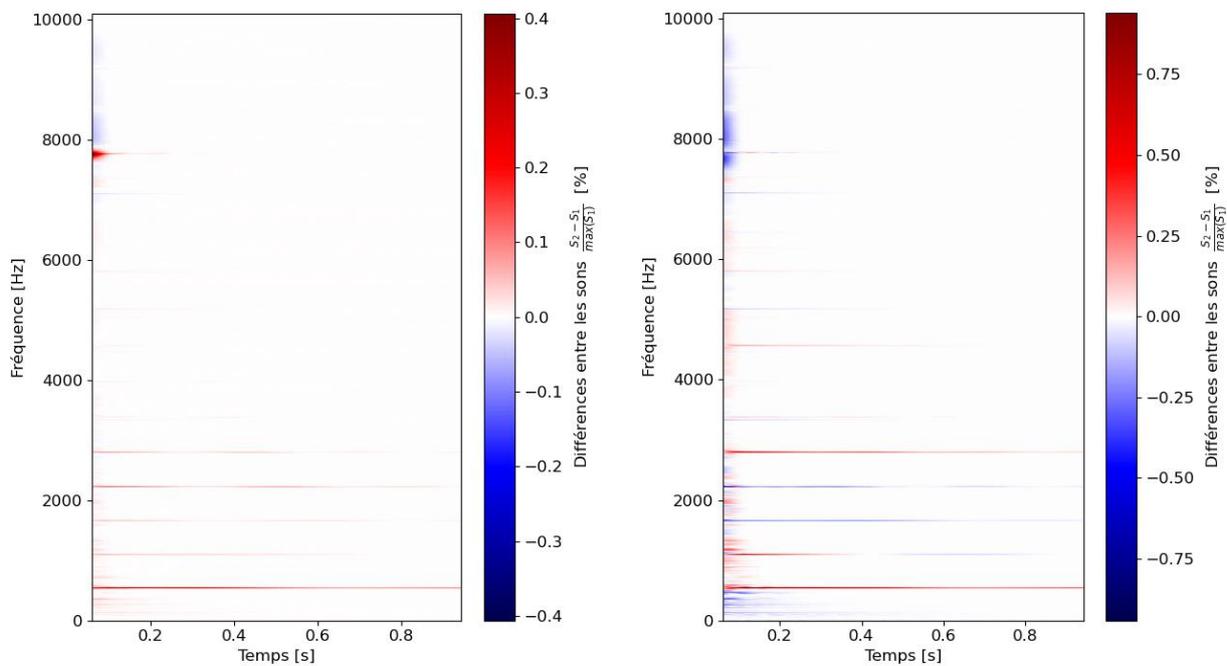


FIGURE 4.50 – Comparaison des spectrogrammes des signaux d'écoute pour différents touches. $T_a^2 - T_a^1$ (gauche) et $T_a^1 - T_s$ (droite).

4.3 Conclusion du chapitre 4 et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons dans un premier temps construit un modèle de piano complet, depuis la touche jusqu'à la production du son par la table d'harmonie. Un modèle multicorps permet de calculer les forces exercées par la mécanique sur le marteau qui sont ensuite injectées dans le modèle vibro-acoustique qui permet de calculer les vibrations de la table d'harmonie.

Des correspondances entre les modèles ont été établies pour permettre la bonne communication entre eux. Pour l'affiner, il pourrait être intéressant de modéliser la flexibilité du manche dans le modèle multicorps, sous la forme d'une poutre de Timoshenko [Fisette *et al.*, 1997], ou bien plus simplement en décomposant le manche en multiples segments reliés par des liaisons pivot amorties [Bokiau, 2016].

Ce modèle global nous a alors permis dans un second temps d'étudier l'influence de divers phénomènes sur le son, pour des touchers pianistiques réalistes.

Tout d'abord, le frottement entre le marteau et la corde a montré une influence subtile mais bien présente sur les partiels longitudinaux des cordes, et ce principalement au moment de l'attaque du son. Le rôle particulier que peuvent jouer les précurseurs longitudinaux dans ces différences mériterait une analyse plus approfondie. Des différences significatives d'amplitude sur les partiels transversaux en basses fréquences sont également notables en présence de frottement, ce qui est certainement dû à une modification des transferts d'énergie entre le marteau et la corde au moment de la frappe.

Ensuite, l'influence de la flexibilité du manche du marteau sur le son a été étudiée. L'effet principal de la flexibilité est une modification de la vitesse avec laquelle le marteau impacte la corde dans sa direction transversale, ce qui implique nécessairement une modification de la nuance produite. Combinées avec du frottement, des modifications spectrales sont visibles à la fois sur les partiels transversaux et sur les partiels longitudinaux. Pour étoffer ce travail, il serait intéressant à nos yeux de s'intéresser non plus à des frappes isolées du marteau mais de considérer des répétitions pour lesquelles les vibrations du manche générées lors de la frappe n pourraient influencer plus grandement le son à la frappe $n + 1$, d'autant que la corde elle aussi serait encore en vibration au moment de la frappe, ce qui pourrait modifier considérablement son interaction avec le marteau. L'influence du toucher pianistique a alors pu être étudiée. Les différences de vitesses tangentielles du marteau au moment de l'impact impliquent de très légères modifications des contenus spectraux des sons. Là encore, les différences sont situées dans l'attaque du son où elles ont très peu de chance d'être audibles en raison de la forte densité spectrale du son à cet instant et des très faibles modifications d'amplitude mises en jeu.

Les différences que nous avons mises en avant sont finalement assez faibles, même pour des coefficients de frottement ou des flexibilités de manche exagérés. Le caractère perceptible de ces phénomènes devrait être analysé plus en détail par des auditeurs extérieurs à ce travail.

Aussi, les différences que nous avons pu observer sur le toucher sont issues de mesures qui pourraient largement être étoffées, dans plusieurs nuances, avec plusieurs pianistes, etc, pour obtenir des résultats plus solides.

Les résultats présentés vont dans le sens des travaux de [Goebel *et al.*, 2004] et [Goebel *et al.*, 2014] qui ont montré expérimentalement qu'en dehors des bruits de touche, le contenu harmonique du son n'est pas suffisant pour discriminer à l'oreille différents touchers. Nous apportons tout de même une quantification à cet effet : comme annoncé par [Traube, 2017], le toucher a bel et bien une influence sur le contenu spectral du son, et ce travail montre qu'elle est localisée dans l'attaque du son et sur les partiels longitudinaux.

Ce chapitre ouvre également un très grand nombre de perspectives pour des travaux futurs.

En premier lieu, la communication séquentielle que nous avons mis en place entre le modèle multicorps et le modèle vibro-acoustique, bien que fonctionnelle, n'est pas pratique à utiliser,

notamment par des fabricants d'instruments. Un couplage réel des deux modèles en un seul logiciel serait un vrai plus en ce sens. Aussi, quasiment tous les marteaux d'un même piano sont différents par leur masse, leur forme etc. L'adaptation du modèle multicorps à différentes notes permettrait une plus grande finesse dans le prise en compte du toucher.

Le travail que nous avons effectué s'adapte à tous les pianos à queue modernes, mais qu'en est-il des pianos droits ? Et des pianos anciens avec des mécaniques plus rudimentaires mais ayant plus de variabilité dans leur conception, notamment la mécanique de Stein modélisée dans [Bokiau, 2016] ? Nous avons vu que l'influence principale du frottement était due à la vitesse tangentielle du marteau par rapport à la corde. La distance d'éloignement de la corde par rapport à la liaison pivot du marteau influence grandement cette vitesse. Quelle est alors l'influence de cette distance sur le son ? Est-il possible de l'optimiser finement, en relation avec la distance d'échappement, pour ajuster l'amplitude des partiels longitudinaux ?

Notre maquette de couplage a ouvert une voie pour l'étude de ces phénomènes par la modélisation physique. Les avancées futures permettront peut-être d'y apporter des réponses et d'aider à la facture instrumentale.

Conclusions et Perspectives

Tout au long de ce manuscrit, nous avons cherché à améliorer la modélisation, l'analyse et la simulation des phénomènes vibratoires ayant lieu dans le piano. Nous nous sommes focalisés sur les ondes longitudinales présentes dans les cordes. Les méthodes que nous avons développées permettent la bonne prise en compte de leur génération, propagation et transmission dans l'instrument. Ces modèles physiques et leurs équivalents numériques ont permis d'étudier l'influence du toucher pianistique sur le son.

Bilan des contributions

Dans un premier volet, nous avons exploré l'application de techniques de quadratisation d'énergie associées à une discrétisation spatiale par éléments finis spectraux d'ordre élevé pour la simulation de modèles de propagation d'ondes non-linéaires. En parallèle, nous avons développé une analyse mathématique rigoureuse pour évaluer la stabilité, la consistance et la convergence de ces modèles, en les appliquant à une équation d'ondes générique formulée à l'ordre 2. L'utilisation de ces schémas apporte une réduction significative du temps de calcul par rapport aux méthodes traditionnelles, même si cela s'accompagne de problèmes de convergence espace-temps.

De plus, nous avons abordé la prise en compte des mouvements de rotation du chevalet, ce qui a permis une transmission précise des ondes longitudinales de la corde vers la table d'harmonie et leur transmission à ses directions de cisaillement. Cette modélisation novatrice a permis d'observer des précurseurs longitudinaux et d'explorer l'impact de l'orientation spatiale de la corde sur la transmission des ondes via le chevalet.

En parallèle, nous avons introduit un terme de frottement entre le marteau et la corde, modifiant ainsi la génération des ondes longitudinales et leur contenu spectral. Nous avons également proposé une technique de quadratisation pour les énergies cinétiques non-linéaires, et un schéma d'intégration numérique associé. L'application de cette méthode au manche de marteau flexible en rotation a abouti à un schéma linéairement implicite qui satisfait inconditionnellement un bilan de puissance discret et montre une convergence à l'ordre 2 en espace-temps.

En fin de compte, ces avancées ont contribué à une meilleure compréhension des mécanismes de propagation des ondes dans l'instrument. En combinant un modèle multicorps de mécanique de frappe avec des données d'enfoncement de touche mesurées en situation de jeu, nous avons pu étudier l'influence du toucher pianistique sur la génération des ondes longitudinales et sur le timbre sonore, ouvrant ainsi de nouvelles perspectives pour l'amélioration de la conception des pianos et la compréhension de leur performance.

De tels projets ont déjà vu le jour par le passé, notamment pour l'aide à la conception des tables d'harmonie par le projet Maestro [Elie *et al.*, 2019].

Ce travail pluridisciplinaire touche à la fois aux domaines des mathématiques appliquées et de l'acoustique musicale. L'outil de simulation que nous proposons met en œuvre des techniques de pointe du calcul numérique pour rendre compte avec la meilleure précision possible des phénomènes de propagation des ondes dans le piano. Il assure des simulations stables a priori par la préservation de bilans de puissance discrets et par la passivité des modèles développés. L'utilisation conjointe avec un modèle multicorps permet des études conjointes entre le geste musical et le son, et peut être dans le futur l'optimisation de la conception des pianos.

Perspectives futures

Nous avons d'ores et déjà fait mention de perspectives d'amélioration tout au long du manuscrit, mais nous rappelons les pistes principales ici.

Concernant l'utilisation des méthodes de quadratisation d'énergie, il serait très intéressant de tester leur comportement avec des schémas dissipatifs de type SAV-BDF présentés dans [Shen *et al.*, 2019]. Le caractère dissipatif en énergie assurerait peut-être une limitation des phénomènes de pollution numérique observés au chapitre 1. L'effort pour une meilleure compréhension de ces schémas non-linéaires, difficilement analysables, devrait également continuer. Pourquoi une telle pollution numérique apparaît-elle ? Ces schémas convergent-ils en espace-temps ? Sous quelles hypothèses ? Notre travail a mis en avant des pistes de réflexions et des avancées théoriques pour certaines classes de non-linéarités, mais des nombreux comportements demeurent inexpliqués.

Le travail de couplage de la corde avec la table d'harmonie mériterait quand à lui une validation expérimentale pour infirmer ou confirmer le réalisme des précurseurs longitudinaux observés. Ces expérimentations pourraient pousser à des modélisations plus poussées à ce niveau de l'instrument. Notamment, quel est l'effet de la couche de graphite déposée par les facteurs sur le chevalet ? A-t-elle une répercutions sur la transmission et la réflexion des ondes longitudinales ? Les fabricants mentionnent très souvent l'importance fondamentale de la charge (le *downbearing*) sur le son. Faut-il alors modéliser la pré-contrainte imposée par les cordes sur la table d'harmonie au repos ?

Pour la modélisation du frottement du marteau sur la corde, il serait à notre avis intéressant de mettre en place un schéma numérique qui permettent une adaptivité du pas de temps. En effet, le contact entre le marteau et la corde est la clef de tout le son produit par le piano, et est pourtant très bref. Un pas de temps plus fin à ce moment fatidique permettrait sans doute de le capter plus finement, sans toutefois rallonger le temps de calcul global déjà très lourd.

De façon générale, les questions de confrontation à la réalité expérimentale ont été peu abordées dans ce travail mathématique. Nous espérons que de telles confrontations seront mises en place dans le futur par des physiciens expérimentateurs pour permettre l'évolution des modèles proposés. La thèse en cours de préparation par [Somma *et al.*, 2023] pourrait répondre à certaines de ces questions.

En ce qui concerne l'utilisation du modèle multicorps, notre travail a permis de montrer la faisabilité et les utilisations possibles d'un couplage multicorps-vibro-acoustique, notamment pour l'étude du toucher et les répercussions de la conception de la mécanique sur le son. Notre approche de communication séquentielle des deux modèles a cependant des limites. La principale, et non des moindres, est qu'elle est difficile à mettre en place, difficilement automatisable et donc peu pratique pour des utilisations externes notamment par des facteurs d'instruments. Pour réaliser un véritable couplage entre les modèles, des techniques d'intégration numérique des équations multicorps qui vérifient des bilans de puissance discrets devraient être développées. La dépendance non-linéaire du terme de masse en les inconnues (voir l'équation (4.1.1)) rend ce problème complexe. Des propositions existent dans [Lens *et al.*, 2004], [Betsch et Uhlar, 2007], mais n'ont pas été adaptées au formalisme de modélisation utilisé à l'Université catholique de Louvain dans le logiciel Robotran. Un tel couplage produirait un outil de simulation très complet du piano, facile à utiliser, qui bénéficierait certainement à la facture instrumentale.

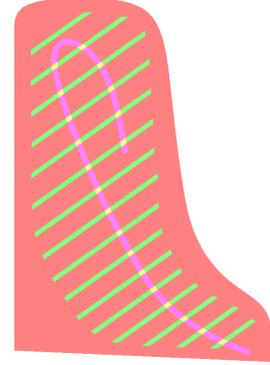
Annexes

A Paramètres physiques utilisés pour les simulations

Les paramètres physiques suivants sont tirés et adaptés de [Chabassier et Duruflé, 2012].

A.1 Table d'harmonie

La table d'harmonie est une plaque en épicéa épaisse de 9 mm, dont les fibres sont orientées à 54.4° . A sa surface sont collées différents poutres qui permettent de la rigidifier pour supporter la tension très importante des cordes, et de rétablir une certaine isotropie du matériau. Ces raidisseurs (en vert), hauts de 25 mm et qui forment un angle de -40° , sont pris en compte par des variations locales de l'épaisseur et du matériaux de la plaque. L'épaisseur du chevalet (en rose) est prise en compte de la même façon avec une épaisseur de 40 mm. Il est fabriqué dans un bois de hêtre, plus dur que l'épicéa.



Bois	ρ [kg.m ⁻³]	E_{xx} [GPa]	E_{yy} [GPa]	ν_{xy} [-]	ν_{yx} [-]	G_{xy} [GPa]	G_{xz} [GPa]	G_{yz} [GPa]
Épicéa	380	11.0	0.65	0.26	0.015	0.66	1.2	0.042
Hêtre	750	13.7	2.24	0.3	0	1.61	1.06	0.46

L'amortissement de la table est tels que (voir le paragraphe 2.1.2)

$$f_{ve}(f) = 2 \times 10^{-5} f^2 + 7 \times 10^{-2} f \quad (\text{A.1})$$

A.2 Note Ré₁[‡]

Cette corde est frappée par le marteau à l'abscisse $x_H = 0.236$ m et est accrochée à la table d'harmonie en position (0.46, 1.63) avec des angles $(\alpha, \beta) = (4^\circ, -10^\circ)$. Le chevalet forme localement un angle $\beta_\chi = 40^\circ$.

Paramètres physiques de la corde							
L [m]	S [m ²]	ρ [kg.m ⁻³]	T_0 [N]	E [Pa]	I [m ⁴]	G [Pa]	κ [-]
1.965	1.748×10^{-6}	43195	1773	2.02×10^{11}	2.432×10^{-13}	8.0×10^{10}	0.85
Amortissement de la corde							
R_u [s ⁻¹]	R_v [s ⁻¹]	R_φ [s ⁻¹]	η_u [s]	η_v [s]	η_φ [s]		
5×10^{-2}	2.5×10^{-1}	5×10^{-2}	35×10^{-9}	40×10^{-9}	35×10^{-9}		
Interaction marteau-corde							
p [-]	K^H [N.m ^{-p}]	R^H [N.m ^{-p} .s ⁻¹]					
2.295	1.033×10^8	2.598×10^5					

A.3 Note Fa₃

Cette corde est frappée par le marteau à l'abscisse $x_H = 0.115$ m et est accrochée à la table d'harmonie en position (0.51, 0.80) avec des angles $(\alpha, \beta) = (2^\circ, 3.5^\circ)$. Le chevalet forme localement un angle $\beta_\chi = 23^\circ$.

Paramètres physiques							
L [m]	S [m ²]	ρ [kg.m ⁻³]	T_0 [N]	E [Pa]	I [m ⁴]	G [Pa]	κ [-]
0.961	8.6425×10^{-7}	7850	766	2.02×10^{11}	5.9439×10^{-14}	8.0×10^{10}	0.85
Amortissement							
R_u [s ⁻¹]	R_v [s ⁻¹]	R_φ [s ⁻¹]	η_u [s]	η_v [s]	η_φ [s]		
0.25	0.5	0.25	20×10^{-9}	25×10^{-9}	20×10^{-9}		
Interaction marteau-corde							
p [-]	K^H [N.m ^{-p}]	R^H [N.m ^{-p} .s ⁻¹]					
2.347	2.481×10^9	4.570×10^5					

A.4 Note Do₅[‡]

Cette corde est frappée par le marteau à l'abscisse $x_H = 0.039$ m et est accrochée à la table d'harmonie en position (0.88, 0.23) avec des angles $(\alpha, \beta) = (4^\circ, -2^\circ)$. Le chevalet forme localement un angle $\beta_\chi = 45^\circ$.

Paramètres physiques							
L [m]	S [m ²]	ρ [kg.m ⁻³]	T_0 [N]	E [Pa]	I [m ⁴]	G [Pa]	κ [-]
0.326	6.7637×10^{-7}	7850	695	2.02×10^{11}	3.6405×10^{-14}	8.0×10^{10}	0.85
Amortissement							
R_u [s ⁻¹]	R_v [s ⁻¹]	R_φ [s ⁻¹]	η_u [s]	η_v [s]	η_φ [s]		
1.0	0.3	1.0	4×10^{-9}	2×10^{-9}	4×10^{-9}		
Interaction marteau-corde							
p [-]	K^H [N.m ^{-p}]	R^H [N.m ^{-p} .s ⁻¹]					
2.611	2.862×10^{10}	7.058×10^5					

B Terme source \mathcal{C}^∞ en espace et en temps

Pour réaliser les études numériques (voir 1.4, 2.3.4, 3.3.3.a), une source régulière est utilisée comme terme source.

La fonction S définie ci-après est \mathcal{C}^∞ en espace et en temps

$$S(x, t) = \begin{cases} A e^{-\frac{1}{1-\left(\frac{x-x_0}{\sigma_x}\right)^2}} e^{-\frac{1}{1-\left(\frac{t-t_0}{\sigma_t}\right)^2}} & \text{si } (x, t) \in [x_0 - \sigma_x, x_0 + \sigma_x] \times [t_0 - \sigma_t, t_0 + \sigma_t] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La source s'applique sur l'intervalle d'espace $[x_0 - \sigma_x, x_0 + \sigma_x]$ centré en x_0 durant un temps $2\sigma_t$ sur l'intervalle $[t_0 - \sigma_t, t_0 + \sigma_t]$.

A est l'amplitude choisie.

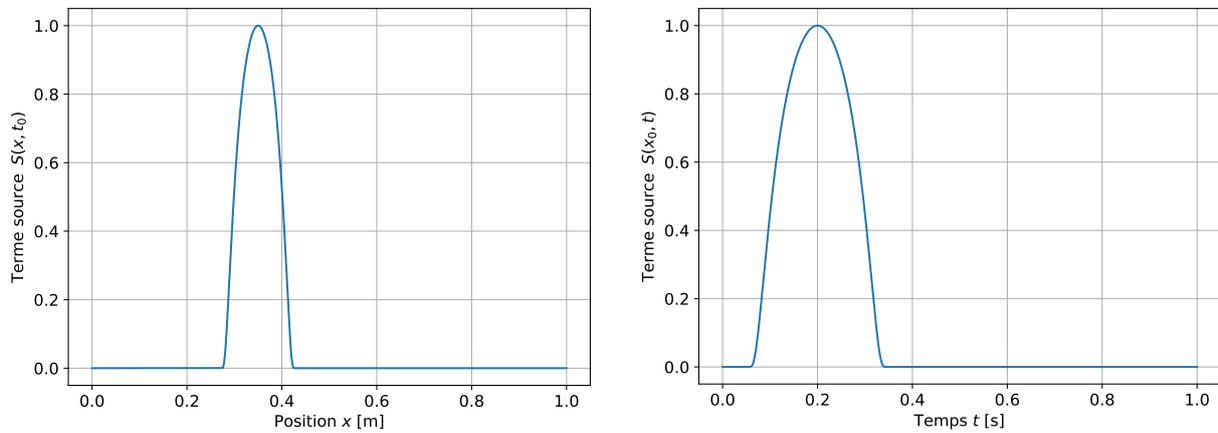


FIGURE B51 – Graphe de la source S à temps fixé (gauche) et à position fixée (droite).

Les paramètres utilisés pour tracer la figure B51 sont présentés dans la table B5.

A [-]	x_0 [m]	σ_x [m]	t_0 [s]	σ_t [s]
1	0.35	0.08	0.2	0.15

TABLE B5 – Paramètres de source.

C Lemmes de Gronwall discrets

Il existe de nombreuses variantes portant le nom de lemme de Gronwall, tant au niveau continu que au niveau discret. Nous donnons ici deux version discrètes dont la deuxième est une version augmentée originale avec une double sommation.

Lemme C.1 (Inégalité de Gronwall discrète simple)

Soit $(w_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs et $a \in \mathbb{R}_+$ et $c \in \mathbb{R}_+$ deux constantes réelles positives. Si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n \leq a + c \sum_{j=0}^{n-1} w_j \quad (\text{C.1})$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n \leq a(1+c)^n \leq ae^{nc} \quad (\text{C.2})$$

Lemme C.2 (Inégalité de Gronwall discrète double)

Soit $(w_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs et $a \in \mathbb{R}_+$ et $c \in \mathbb{R}_+$ deux constantes réelles positives. Si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n \leq a + c \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^i w_j \quad (\text{C.3})$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n \leq a(1+c)^{\frac{n(n+1)}{2}} \leq ae^{\frac{n(n+1)}{2}c} \quad (\text{C.4})$$

Démonstration. Commençons par montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^i c(1+c)^{\frac{j(j+1)}{2}} \leq (1+c)^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad (\text{C.5})$$

Ce résultat est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$, donc supposons le vrai pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$.

$$1 + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i c(1+c)^{\frac{j(j+1)}{2}} = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^i c(1+c)^{\frac{j(j+1)}{2}} + \sum_{j=0}^n c(1+c)^{\frac{j(j+1)}{2}} \quad (\text{C.6})$$

$$\leq (1+c)^{\frac{n(n+1)}{2}} + c \sum_{j=0}^n (1+c)^{\frac{j(j+1)}{2}} \quad (\text{récurrence}) \quad (\text{C.7})$$

$$\leq (1+c)^{\frac{n(n+1)}{2}} + c(1+c)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n+1) \quad (\text{car } c \geq 0) \quad (\text{C.8})$$

$$\leq (1+c)^{\frac{n(n+1)}{2}}(1+(n+1)c) \quad (\text{C.9})$$

$$\leq (1+c)^{\frac{n(n+1)}{2}}(1+c)^{n+1} \quad (\text{C.10})$$

$$= (1+c)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \quad (\text{C.11})$$

ce qui termine la récurrence. Prouvons maintenant le résultat du théorème par récurrence forte. On vérifie facilement que (C.4) est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, donc supposons-la vraie jusqu'à un

certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, et prouvons-la au rang $n + 1$:

$$w_{n+1} \leq a + c \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i w_j \quad (\text{C.12})$$

$$\leq a + c \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i a(1+c)^{\frac{j(j+1)}{2}} \quad (\text{récurrence}) \quad (\text{C.13})$$

$$\leq a \left(1 + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i c(1+c)^{\frac{j(j+1)}{2}} \right) \quad (\text{C.14})$$

$$\leq a(1+c)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \quad (\text{grâce à (C.5)}) \quad (\text{C.15})$$

ce qui termine la récurrence forte.

La deuxième inégalité de (C.4) est vrai car $1 + c \leq e^c$ pour tout réel c . □

D Résolution exacte du schéma de table d'harmonie

La résolution du schéma numérique de table d'harmonie revient à résoudre le système diagonal d'équations différentielles ordinaires suivant avec second membre F constant pour chaque pas de temps :

$$\begin{cases} \ddot{U}(t) + \mathbb{A}\dot{U}(t) + \mathbb{D}U(t) = F & \text{(D.1a)} \\ U(t_0) = U_0 & \text{(D.1b)} \\ \dot{U}(t_0) = U_1 & \text{(D.1c)} \end{cases}$$

où $\mathbb{A} = \text{diag}(2\alpha_i)$ et $\mathbb{D} = \text{diag}(\lambda_i^2)$
La solution et sa dérivée s'écrivent

$$\begin{cases} U(t) = \mathcal{S}_{t-t_0}^0 U_0 + \mathcal{S}_{t-t_0}^1 U_1 + \mathcal{R}_{t-t_0} F & \text{(D.2a)} \\ \dot{U}(t) = \dot{\mathcal{S}}_{t-t_0}^0 U_0 + \dot{\mathcal{S}}_{t-t_0}^1 U_1 + \dot{\mathcal{R}}_{t-t_0} F & \text{(D.2b)} \end{cases}$$

où les matrices diagonales \mathcal{S}^0 , \mathcal{S}^1 et \mathcal{R} sont définies par

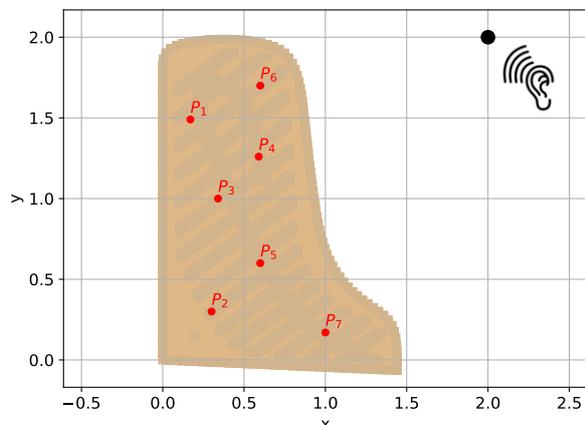
	Si $ \alpha_i < \lambda_i$	$ \alpha_i > \lambda_i$
$(\mathcal{S}_t^0)_{i,i}$	$e^{-\alpha_i t} \left[\cos(\tilde{\lambda}_i t) + \frac{\alpha_i}{\tilde{\lambda}_i} \sin(\tilde{\lambda}_i t) \right]$	$e^{-\alpha_i t} \left[\cosh(\tilde{\lambda}_i t) + \frac{\alpha_i}{\tilde{\lambda}_i} \sinh(\tilde{\lambda}_i t) \right]$
$(\mathcal{S}_t^1)_{i,i}$	$\frac{1}{\tilde{\lambda}_i} e^{-\alpha_i t} \sin(\tilde{\lambda}_i t)$	$\frac{1}{\tilde{\lambda}_i} e^{-\alpha_i t} \sinh(\tilde{\lambda}_i t)$
$(\mathcal{R}_t)_{i,i}$	$\frac{1}{\lambda_i^2} \left(1 - (\mathcal{S}_t^0)_{i,i} \right)$	

et $\tilde{\lambda}_i = \sqrt{|\alpha_i^2 - \lambda_i^2|}$

La preuve peut être trouvée détaillée dans [Derveaux, 2002] et [Chabassier, 2012].

E Génération de signaux d'écoute de la table d'harmonie

Lors des simulations, des sismogrammes de la table d'harmonie sont calculés en une liste de points (P_i) tels que



$$\begin{aligned} P_1 &= (0.17, 1.49) & P_2 &= (0.30, 0.30) \\ P_3 &= (0.34, 1.00) & P_4 &= (0.59, 1.26) \\ P_5 &= (0.60, 0.60) & P_6 &= (0.60, 1.70) \\ P_7 &= (1.00, 0.17) \end{aligned}$$

Le point d'écoute est situé à un emplacement réaliste pour un auditeur, en position (2.00, 2.00, 0.60), c'est à dire dans le creux du piano à queue, et 60 centimètres au dessus de la table d'harmonie.

Pour générer le signal d'écoute, on réalise simplement une somme des signaux d'accélération de la table d'harmonie aux points P_i , pondérée par la distance d_i qui les séparent du point d'écoute, et avec un décalage temporel correspondant.

$$S(t) = \sum_{i=1}^7 \frac{1}{d_i} \ddot{u}_p \left(P_i, t - \frac{d_i}{c} \right) \quad [s^{-2}] \quad (\text{E.1})$$

$c = 340$ m/s est la vitesse du son dans l'air qui entoure le piano.

Références bibliographiques

- [Adrian, 2005] ADRIAN, G. (2005). The influence of leather in the fortepiano evolution in the XVIII and XIX centuries. *In Proceedings in IULTCS 2005*.
- [Allen et Cahn, 1979] ALLEN, S. M. et CAHN, J. W. (1979). A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening. *Acta metallurgica*, 27(6): 1085–1095.
- [Askenfelt, 1993] ASKENFELT, A. (1993). Observations on the transient components of the piano tone. *STL-QPSR*, 34(4):15–22.
- [Askenfelt *et al.*, 1998] ASKENFELT, A., GALEMBO, A. et CUDDY, L. L. (1998). On the acoustics and psychology of piano touch and tone. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 103(5):2873–2873.
- [Askenfelt et Jansson, 1991] ASKENFELT, A. et JANSSON, E. V. (1991). From touch to string vibrations. II : The motion of the key and hammer. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 90(5):2383–2393.
- [Bank et Sujbert, 2005] BANK, B. et SUJBERT, L. (2005). Generation of longitudinal vibrations in piano strings : From physics to sound synthesis. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 117(4):2268–2278.
- [Banks *et al.*, 1995] BANKS, H. T., GAITENS, M., MUÑOZ, B. et YANYO, L. (1995). Nonlinear elastomers : modeling and estimation. Rapport technique, North Carolina State University. Center for Research in Scientific Computation.
- [Bensa *et al.*, 2003] BENSA, J., BILBAO, S., KRONLAND-MARTINET, R. et SMITH III, J. O. (2003). The simulation of piano string vibration : From physical models to finite difference schemes and digital waveguides. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 114(2):1095–1107.
- [Bernays et Traube, 2012] BERNAYS, M. et TRAUBE, C. (2012). Piano touch analysis : A MATLAB toolbox for extracting performance descriptors from high-resolution keyboard and pedalling data. *In Journées d’Informatique Musicale*.
- [Bernays et Traube, 2013] BERNAYS, M. et TRAUBE, C. (2013). Expressive production of piano timbre : touch and playing techniques for timbre control in piano performance. *In Proceedings of the 10th Sound and Music Computing Conference (SMC2013)*, pages 341–346. KTH Royal Institute of Technology Stockholm, Sweden.
- [Bernays et Traube, 2014] BERNAYS, M. et TRAUBE, C. (2014). Investigating pianists’ individuality in the performance of five timbral nuances through patterns of articulation, touch, dynamics, and pedaling. *Frontiers in Psychology*, 5:157.
- [Betsch et Uhlar, 2007] BETSCH, P. et UHLAR, S. (2007). Energy-momentum conserving integration of multibody dynamics. *Multibody System Dynamics*, 17:243–289.
- [Bilbao, 2005] BILBAO, S. (2005). Conservative numerical methods for nonlinear strings. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 118(5):3316–3327.
- [Bilbao et Ducceschi, 2023] BILBAO, S. et DUCCESCHI, M. (2023). Models of musical string vibration. *Acoustical Science and Technology*, 44(3):194–209.

- [Bilbao *et al.*, 2023] BILBAO, S., DUCCESCHI, M. et ZAMA, F. (2023). Explicit exactly energy-conserving methods for Hamiltonian systems. *Journal of Computational Physics*, 472:111697.
- [Bilbao *et al.*, 2015] BILBAO, S., TORIN, A. et CHATZIOANNOU, V. (2015). Numerical modeling of collisions in musical instruments. *Acta Acustica united with Acustica*, 101(1):155–173.
- [Bokiau, 2016] BOKIAU, B. (2016). *Analysing the design evolution of late 18th century Prellzungenmechaniken : an experiment-based multibody approach applied to early piano actions*. Thèse de doctorat, Université catholique de Louvain.
- [Bokiau *et al.*, 2017] BOKIAU, B., CEULEMANS, A.-E. et FISETTE, P. (2017). Historical and dynamical study of piano actions : A multibody modelling approach. *Journal of Cultural Heritage*, 27:S120–S130.
- [Boutillon, 1988] BOUTILLON, X. (1988). Model for piano hammers : Experimental determination and digital simulation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 83(2):746–754.
- [Bucur, 2006] BUCUR, V. (2006). *Acoustics of wood*. Springer Science & Business Media.
- [Butcher, 2016] BUTCHER, J. C. (2016). *Numerical methods for ordinary differential equations*. John Wiley & Sons.
- [Cahn et Hilliard, 1958] CAHN, J. W. et HILLIARD, J. E. (1958). Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy. *The Journal of chemical physics*, 28(2):258–267.
- [Chabassier, 2012] CHABASSIER, J. (2012). *Modélisation et simulation numérique d’un piano par modèles physiques*. Thèse de doctorat, École polytechnique.
- [Chabassier et Duruflé, 2012] CHABASSIER, J. et DURUFLÉ, M. (2012). Physical parameters for piano modeling. Rapport technique.
- [Chabassier et Duruflé, 2014] CHABASSIER, J. et DURUFLÉ, M. (2014). Energy based simulation of a Timoshenko beam in non-forced rotation. Influence of the piano hammer shank flexibility on the sound. *Journal of Sound and Vibration*, 333(26):7198–7215.
- [Chabassier et Imperiale, 2017] CHABASSIER, J. et IMPERIALE, S. (2017). Space/time convergence analysis of a class of conservative schemes for linear wave equations. *Comptes Rendus Mathématiques*, 355(3):282–289.
- [Chabassier et Joly, 2010] CHABASSIER, J. et JOLY, P. (2010). Energy preserving schemes for nonlinear Hamiltonian systems of wave equations : Application to the vibrating piano string. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(45-48):2779–2795.
- [Chaigne et Askenfelt, 1994] CHAIGNE, A. et ASKENFELT, A. (1994). Numerical simulations of piano strings. I. A physical model for a struck string using finite difference methods. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 95(2):1112–1118.
- [Chaigne et Kergomard, 2008] CHAIGNE, A. et KERGMARD, J. (2008). *Acoustique des instruments de musique*. Belin.
- [Chatziioannou et Van Walstijn, 2015] CHATZIOANNOU, V. et VAN WALSTIJN, M. (2015). Energy conserving schemes for the simulation of musical instrument contact dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, 339:262–279.
- [Closson, 1944] CLOSSON, E. (1944). *Histoire du piano*. Bruxelles : Éditions universitaires.
- [Cohen, 2002] COHEN, G. (2002). *Higher-order numerical methods for transient wave equations*, volume 5. Springer.
- [Conklin, 1970] CONKLIN, H. A. (1970). Longitudinal mode tuning of stringed instruments. US Patent 3,523,480.

- [Conklin, 1996] CONKLIN, H. A. (1996). Design and tone in the mechanoacoustic piano. Part II. Piano structure. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 100(2):695–708.
- [Conklin, 1997] CONKLIN, H. A. (1997). Piano strings and “phantom” partials. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 102(1):659–659.
- [Cuenca et Caussé, 2007] CUENCA, J. et CAUSSÉ, R. (2007). Three-dimensional interaction between strings, bridge and soundboard in modern piano’s treble range. In *19th international congress on acoustics*, pages MUS–01.
- [Cull et Tucker, 1999] CULL, S. et TUCKER, R. (1999). On the modelling of Coulomb friction. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 32(11):2103.
- [Derveaux, 2002] DERVEAUX, G. (2002). *Modélisation numérique de la guitare acoustique*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique X.
- [Docquier et al., 2013] DOCQUIER, N., PONCELET, A. et FISETTE, P. (2013). ROBOTRAN : a powerful symbolic generator of multibody models. *Mechanical Sciences*, 4(1):199–219.
- [Ducceschi et Bilbao, 2019a] DUCCESCHI, M. et BILBAO, S. (2019a). Conservative finite difference time domain schemes for the prestressed Timoshenko, shear and Euler–Bernoulli beam equations. *Wave Motion*, 89:142–165.
- [Ducceschi et Bilbao, 2019b] DUCCESCHI, M. et BILBAO, S. (2019b). Non-iterative, conservative schemes for geometrically exact nonlinear string vibration. In *Proceedings of the 23rd International Congress on Acoustics*.
- [Ducceschi et Bilbao, 2022] DUCCESCHI, M. et BILBAO, S. (2022). Simulation of the geometrically exact nonlinear string via energy quadratisation. *Journal of Sound and Vibration*, 534:117021.
- [Ducceschi et al., 2022] DUCCESCHI, M., BILBAO, S. et WEBB, C. J. (2022). Real-time simulation of the struck piano string with geometrically exact nonlinearity via a scalar quadratic energy method. In *Proceedings of the 10th European Nonlinear Dynamics Conference*.
- [Durufle, 2006] DURUFLE, M. (2006). *Intégration numérique et éléments finis d’ordre élevé appliqués aux équations de Maxwell en régime harmonique*. Thèse de doctorat, ENSTA ParisTech.
- [Ege, 2009] EGE, K. (2009). *La table d’harmonie du piano—Études modales en basses et moyennes fréquences*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique X.
- [Elie et al., 2019] ELIE, B., BOUTILLON, X., CHABASSIER, J., EGE, K., LAULAGNET, B., TRÉVISAN, B., COTTÉ, B. et CHAUVAT, N. (2019). MAESSTRO : A sound synthesis framework for Computer-Aided Design of piano soundboards. In *ISMA 2019*.
- [Fisette et al., 1997] FISETTE, P., JOHNSON, D. et SAMIN, J.-C. (1997). A fully symbolic generation of the equations of motion of multibody systems containing flexible beams. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 142(1-2):123–152.
- [Fisette et al., 1996] FISETTE, P., RAUCENT, B. et SAMIN, J.-C. (1996). Minimal dynamic characterization of tree-like multibody systems. *Nonlinear Dynamics*, 9:165–184.
- [Fletcher, 1964] FLETCHER, H. (1964). Normal vibration frequencies of a stiff piano string. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 36(1):203–209.
- [Giordano, 1998] GIORDANO, N. (1998). Sound production by a vibrating piano soundboard : Experiment. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 104(3):1648–1653.
- [Giordano, 2011] GIORDANO, N. (2011). Evolution of music wire and its impact on the development of the piano. In *Proceedings of Meetings on Acoustics*, volume 12. AIP Publishing.

- [Giordano et Winans, 2000] GIORDANO, N. et WINANS, J. (2000). Piano hammers and their force compression characteristics : Does a power law make sense ? *The Journal of the Acoustical Society of America*, 107(4):2248–2255.
- [Goebel et al., 2014] GOEBL, W., BRESIN, R. et FUJINAGA, I. (2014). Perception of touch quality in piano tones. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 136(5):2839–2850.
- [Goebel et al., 2004] GOEBL, W., BRESIN, R. et GALEMBO, A. (2004). Once again : The perception of piano touch and tone. Can touch audibly change piano sound independently of intensity. *In Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics*, pages 332–335.
- [Gonzalez, 2000] GONZALEZ, O. (2000). Exact energy and momentum conserving algorithms for general models in nonlinear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(13-14):1763–1783.
- [Goubault et al., 2023] GOUBAULT, E., TURNER, C., MAILLY, R., BEGON, M., DAL MASO, F. et VERDUGO, F. (2023). Endurance capacities of expert pianists : an electromyographic and kinematic variability study.
- [Goubault et al., 2021] GOUBAULT, E., VERDUGO, F., PELLETIER, J., TRAUBE, C., BEGON, M. et DAL MASO, F. (2021). Exhausting repetitive piano tasks lead to local forearm manifestation of muscle fatigue and negatively affect musical parameters. *Scientific Reports*, 11(1):8117.
- [Grob, 2006] GROB, P. (2006). *Méthodes numériques de couplage pour la vibroacoustique instationnaire : éléments finis spectraux d'ordre élevé et potentiels retardés*. Thèse de doctorat, ENSTA ParisTech.
- [Hall et Askenfelt, 1988] HALL, D. E. et ASKENFELT, A. (1988). Piano string excitation V : Spectra for real hammers and strings. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 83(4):1627–1638.
- [Han et al., 1999] HAN, S. M., BENAROYA, H. et WEI, T. (1999). Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and vibration*, 225(5):935–988.
- [Hart et al., 1934] HART, H. C., FULLER, M. W. et LUSBY, W. S. (1934). A precision study of piano touch and tone. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 6(2):80–94.
- [He et Sun, 2020] HE, M. et SUN, P. (2020). Energy-preserving finite element methods for a class of nonlinear wave equations. *Applied Numerical Mathematics*, 157:446–469.
- [Hirschhorn, 2004] HIRSCHKORN, M. C. (2004). Dynamic model of a piano action mechanism. Mémoire de D.E.A., University of Waterloo.
- [Izabdakhsh et al., 2008] IZABDAKHS, A., MCPHEE, J. et BIRKETT, S. (2008). Dynamic modeling and experimental testing of a piano action mechanism with a flexible hammer shank. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 3.
- [Jiang et al., 2019] JIANG, C., CAI, W. et WANG, Y. (2019). A Linearly Implicit and Local Energy-Preserving Scheme for the Sine-Gordon Equation Based on the Invariant Energy Quadratization Approach. *Journal of Scientific Computing*, 80(3):1629–1655.
- [Joly, 2003] JOLY, P. (2003). Variational methods for time-dependent wave propagation problems. *Topics in computational wave propagation : direct and inverse problems*, pages 201–264.
- [Joly et Rhaouti, 1997] JOLY, P. et RHAOUTI, L. (1997). A qualitative analysis of a simplified model for the non linear membrane-mallet interaction. Rapport technique.
- [Juvinal et Marshek, 2003] JUVINAL, R. C. et MARSHEK, K. M. (2003). *FUNDAMENTALS OF MACHINE COMPONENT DESIGN 3RD Edition*.
- [Knoblauch, 1944] KNOBLAUGH, A. F. (1944). The clang tone of the pianoforte. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 16(1):102–102.

- [Legge et Fletcher, 1984] LEGGE, K. et FLETCHER, N. H. (1984). Nonlinear generation of missing modes on a vibrating string. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 76(1):5–12.
- [Lens *et al.*, 2004] LENS, E. V., CARDONA, A. et GÉRADIN, M. (2004). Energy preserving time integration for constrained multibody systems. *Multibody System Dynamics*, 11:41–61.
- [Levander et Fisette, 2020] LEVANDER, D. et FISETTE, P. (2020). Caractérisation expérimentale et validation d’une mécanique de piano à queue. Mémoire de D.E.A., Ecole polytechnique de Louvain, Université catholique de Louvain.
- [Liu et Li, 2020] LIU, Z. et LI, X. (2020). The exponential scalar auxiliary variable (E-SAV) approach for phase field models and its explicit computing. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 42(3):B630–B655.
- [Liu et Li, 2022] LIU, Z. et LI, X. (2022). Step-by-step solving schemes based on scalar auxiliary variable and invariant energy quadratization approaches for gradient flows. *Numerical Algorithms*, pages 1–22.
- [Lozada, 2007] LOZADA, J. (2007). *Modélisation, contrôle haptique et nouvelles réalisations de claviers musicaux*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique X.
- [Makridakis, 1993] MAKRIDAKIS, C. G. (1993). Finite element approximations of nonlinear elastic waves. *Mathematics of computation*, 61(204):569–594.
- [Mamou-Mani *et al.*, 2008] MAMOU-MANI, A., FRELAT, J. et BESNAINOU, C. (2008). Numerical simulation of a piano soundboard under downbearing. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 123(4):2401–2406.
- [Masoudi *et al.*, 2014] MASOUDI, R., BIRKETT, S. et MCPHEE, J. (2014). A mechanistic multibody model for simulating the dynamics of a vertical piano action. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 9(3):031014.
- [Morse et Ingard, 1986] MORSE, P. M. et INGARD, K. U. (1986). *Theoretical acoustics*. Princeton university press.
- [Narasimha, 1968] NARASIMHA, R. (1968). Non-linear vibration of an elastic string. *Journal of Sound and Vibration*, 8(1):134–146.
- [Oboe, 2006] OBOE, R. (2006). A multi-instrument, force-feedback keyboard. *Computer Music Journal*, pages 38–52.
- [Podlesak et Lee, 1988] PODLESAK, M. et LEE, A. R. (1988). Dispersion of waves in piano strings. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 83(1):305–317.
- [Reblitz, 2005] REBLITZ, A. A. (2005). *Le piano : entretien, accord & restauration*. L’Entretiens éd.
- [Reissner, 1945] REISSNER, E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates.
- [Rincon et Quintino, 2016] RINCON, M. A. et QUINTINO, N. (2016). Numerical analysis and simulation for a nonlinear wave equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 296:247–264.
- [Rubinstein, 1970] RUBINSTEIN, J. (1970). Sine-gordon equation. *Journal of Mathematical Physics*, 11(1):258–266.
- [Samin et Fisette, 2003] SAMIN, J.-C. et FISETTE, P. (2003). *Symbolic modeling of multibody systems*, volume 112. Springer Science & Business Media.

- [Shen et Xu, 2018] SHEN, J. et XU, J. (2018). Convergence and error analysis for the scalar auxiliary variable (SAV) schemes to gradient flows. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 56(5):2895–2912.
- [Shen et al., 2019] SHEN, J., XU, J. et YANG, J. (2019). A New Class of Efficient and Robust Energy Stable Schemes for Gradient Flows. *SIAM Review*, 61(3):474–506.
- [Shen et Yang, 2010] SHEN, J. et YANG, X. (2010). Numerical approximations of allen-cahn and cahn-hilliard equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst*, 28(4):1669–1691.
- [Sherman et Morrison, 1950] SHERMAN, J. et MORRISON, W. J. (1950). Adjustment of an inverse matrix corresponding to a change in one element of a given matrix. *The Annals of Mathematical Statistics*, 21(1):124–127.
- [Somma et al., 2023] SOMMA, A., ROUDET, J. et FABRE, B. (2023). A Multidisciplinary Study of Pianoforte Touch and Tone Qualities. In *Forum Acusticum 2023*.
- [Stulov, 1995] STULOV, A. (1995). Hysteretic model of the grand piano hammer felt. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 97(4):2577–2585.
- [Stulov, 2003] STULOV, A. (2003). Experimental and theoretical studies of piano hammer. In *Proceedings of the Stockholm Music Acoustics Conference*, volume 485.
- [Stulov, 2004] STULOV, A. (2004). Piano hammer-string interaction. In *Proceedings of ICA 2004*, pages 2127–2130. Citeseer.
- [Suzuki, 1986] SUZUKI, H. (1986). Vibration and sound radiation of a piano soundboard. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 80(6):1573–1582.
- [Suzuki, 1987] SUZUKI, H. (1987). Model analysis of a hammer-string interaction. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 82(4):1145–1151.
- [Tan, 2017] TAN, J. J. (2017). *Piano acoustics : string’s double polarisation and piano source identification*. Thèse de doctorat, ENSTA ParisTech.
- [Timmermans, 2021] TIMMERMANS, S. (2021). *Haptic key based on a real-time multibody model of a piano action*. Thèse de doctorat, Université catholique de Louvain.
- [Timoshenko, 1921] TIMOSHENKO, S. (1921). On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *Philosophical Magazine*, 744.
- [Traube, 2017] TRAUBE, C. (2017). Piano tone control through variation of “weight” applied on the keys. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 141(5):3874–3874.
- [Turner, 1939] TURNER, E. (1939). Touch and tone-quality : The pianist’s illusion. *The Musical Times*, 80(1153):173–176.
- [van Walstijn et al., 2024] VAN WALSTIJN, M., CHATZIOANNOU, V. et BHANUPRAKASH, A. (2024). Implicit and explicit schemes for energy-stable simulation of string vibrations with collisions : Refinement, analysis, and comparison. *Journal of Sound and Vibration*, 569:117968.
- [Verdugo et al., 2020] VERDUGO, F., PELLETIER, J., MICHAUD, B., TRAUBE, C. et BEGON, M. (2020). Effects of trunk motion, touch, and articulation on upper-limb velocities and on joint contribution to endpoint velocities during the production of loud piano tones. *Frontiers in Psychology*, 11:1159.
- [Verdugo et al., 2019] VERDUGO, F., PELLETIER, J., TRAUBE, C. et BEGON, M. (2019). Utilization of proximal body segments in different types of piano keystrokes producing loud tones. In *Proceedings of the 26th International Congress on Sound and Vibration, Montreal*.

- [Vyasarayani *et al.*, 2009] VYASARAYANI, C. P., BIRKETT, S. et MCPHEE, J. (2009). Modeling the dynamics of a compliant piano action mechanism impacting an elastic stiff string. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 125(6):4034–4042.
- [Wegst, 2006] WEGST, U. G. (2006). Wood for sound. *American Journal of Botany*, 93(10):1439–1448.
- [White, 1930] WHITE, W. B. (1930). The human element in piano tone production. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1(3A):357–365.
- [Woodbury, 1950] WOODBURY, M. A. (1950). *Inverting modified matrices*. Statistical Research Group.
- [Yanagisawa et Nakamura, 1982] YANAGISAWA, T. et NAKAMURA, K. (1982). Dynamic compression characteristics of piano hammer. In *Transactions of Musical Acoustics Technical Group Meeting of the Acoustic Society of Japan*, volume 1.
- [Yang, 2016] YANG, X. (2016). Linear, first and second-order, unconditionally energy stable numerical schemes for the phase field model of homopolymer blends. *Journal of Computational Physics*, 327:294–316.
- [Yang et Zhang, 2020] YANG, X. et ZHANG, G.-D. (2020). Convergence analysis for the invariant energy quadratization (IEQ) schemes for solving the Cahn–Hilliard and Allen–Cahn equations with general nonlinear potential. *Journal of scientific computing*, 82:1–28.
- [Zhao *et al.*, 2017] ZHAO, J., WANG, Q. et YANG, X. (2017). Numerical approximations for a phase field dendritic crystal growth model based on the invariant energy quadratization approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 110(3):279–300.